Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Hipersuperfícies com Curvatura média Constante e índice finito

Hivanna Nascimento Santos

Salvador-Bahia
Agosto 2008

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Índice Finito

Hivanna Nascimento Santos

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr José Nelson Bastos Barbosa (Orientador).

Prof. Dr.Isaac Costa Lázaro.

Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa.

HIVANNA NASCIMENTO SANTOS
"HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE E ÍNDICE FINITO"/ Salvador-BA, 2008.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa (UFBA).
Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática da UFBA, 50 páginas.

Palavras-Chave: Estabilidade e índice, hipersuperfícies com curvatura média constante e operador estabilidade.

À minha mãe e às minhas irmãs.

Resumo

Nosso objetivo principal nesta dissertação é mostrar a não existência de hipersuperfícies não compactas completas com curvatura média constante e índice finito imersas em uma varieade de dimensão 4 ou 5.

Como conseqüência, obteremos que uma hipersuperfície completa não compacta com curvatura média constante e índice finito imersa em $\mathbb{R}^n$, n=4 ou n=5, é mínima.

Sumário

Introdução

Sejam N uma variedade orientada e $\psi : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão de uma variedade diferenciável, compacta, conexa e orientável em N. Escolhemos a orientação de M compatível com a orientação de N. Uma *variação* de ψ é uma aplicação diferenciável $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to N$ com campo variacional $f\eta$, onde $f \in C^\infty(M)$ e η é um campo normal em M, tal que $\Psi_t : M \to N$ definida por $\Psi_t(p) = \Psi(t,p),\ p \in M$, é uma imersão. Definimos a função área $\mathcal{A} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{A}(t) = \int_M dM_t,$$

onde dM_t representa o elemento de área de M na métrica induzida por Ψ_t. A primeira fórmula da variação para a área estabelece que

$$\mathcal{A}'(0) = -\int_M nHf dM$$

Como uma conseqüência, hipersuperfícies mínimas são caracterizadas como pontos críticos do funcional área e as hipersuperfícies com curvatura média H constante também podem ser pontos críticos do funcional área, mas restritas a variações que preservam volume, isto é, funções suaves f tais que $\int_M f dM = 0$.

O operador estabilidade deste problema variacional é dado pela segunda fórmula da variação para a área

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''(0) &= -\int_M (f\triangle f + (|A|^2 + n)f^2)dM \\ &= -\int_M fLf dM \end{aligned}$$

onde $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por $L = \triangle + |A|^2 + \overline{Ric(N)}$ é chamado de *operador estabilidade* de M (ou operador de Jacobi) e $\triangle$, $|A|^2 = tr(A^2)$ e $Ric(N)$ denotam, respectivamente, o operador laplaciano de M, o quadrado da norma do operador forma da imersão e a curvatura de Ricci da variedade ambiente N na direção η.

O operador L induz a forma quadrática $Q : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(f) = -\int_M fLfdM,$$

que atua no espaço das funções suaves em M. O *índice* de uma hipersuperfície M, denotado por $Ind(M)$, é definido como a dimensão máxima do subespaço V de $C^{\infty}(M)$ em que Q é negativa definida. Isto é,

$$Ind(M) = max\{dimV; V \leq C^{\infty}(M), Q(f) < 0 \, para \, todo \, f \in V\}.$$

Equivalentemente, $Ind(M)$ é o número de autovalores negativos de L contados com multiplicidade. Dizemos que uma hipersuperfície mínima é *estável* se $Q(f) \geq 0$ para todo $f \in C^{\infty}(M)$. Equivalentemente, em termos do índice, estabilidade significa que $Ind(M) = 0$.

Em 1985, Fischer-Colbrie estudou em [8] a estrutura conforme de uma superfície mínima M completa, orientada e com índice finito imersa em uma variedade N de dimensão 3 com curvatura escalar não negativa. Ela mostrou que se a curvatura escalar de N é limitada inferiormente por uma constante positiva, então M é compacta.

Posteriormente, em 1989, Lopez e Ros estudaram em [11] a estrutura conforme de uma uma superfície completa M com curvatura média constante H e índice finito imersa em uma variedade N de dimensão 3. Eles mostraram que se H e a curvatura escalar S de N satisfazem $S \geq -3H^2 + \delta$, para alguma constante $\delta > 0$, então M é compacta. Como caso particular, eles obtiveram que toda superfície completa, não compacta com curvatura média constante H e índice finito no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é mínima, pois como $S = 0$ em $\mathbb{R}^n$, então, pelo resultado acima, devemos ter $0 < -3H^2 + \delta, \forall \delta > 0$. Conseqüentemente $H = 0$.

Esta dissertação é baseada no artigo de Xu Cheng [6] e tem como objetivo principal provar o Teorema seguinte, que é uma versão generalizada do resultado de Lopez e Ros em uma variedade de dimensão 4 ou 5.

Teorema 3.1. *Sejam N^{n+1}, $n \in \{3, 4\}$, uma variedade de dimensão $(n+1)$ e M uma hipersuperfície completa com curvatura média constante H e índice finito imersa em N. Suponha que*

$$\begin{aligned} \sigma &:= inf\{\overline{Ric}(w) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(w, \nu) | w \in T_pM, \ |w| = 1, \ p \in M\} \\ &> -\frac{n^2(5-n)H^2}{4}, \end{aligned}$$

onde $\overline{Ric}$, $\overline{K}$ *e* ν *denotam, respectivamente, a curvatura de Ricci, a curvatura seccional de* N *e o campo normal unitário em* M. *Então* M *é compacta.*

Como conseqüência do Teorema 3.1, teremos o resultado seguinte.

Teorema 3.3. *Sejam* N^{n+1}, $n \in \{3, 4\}$, *uma variedade completa de dimensão* $(n+1)$ *com curvatura seccional* $\overline{K} \geq -\tau$, $\tau \geq 0$, *e* M *uma hipersuperfície completa com curvatura média constante* H *diferente de zero e índice finito imersa em* N. *Se* H *satisfaz* $H^2 > \frac{10}{9}\tau$, *quando* $n = 3$ *ou* $H^2 > \frac{7}{4}\tau$, *quando* $n = 4$, *então* M *é compacta.*

Como casos particulares do Teorema 3.3, teremos os corolários abaixo.

Corolário 3.4. *Seja* N *uma variedade completa de dimensão* 4 *ou* 5 *com curvatura seccional não negativa. Então toda hipersuperfície completa com curvatura média constante diferente de zero e índice finito em* N *é compacta.*

Corolário 3.5. *Toda hipersuperfície completa com índice finito e curvatura média constante* H *satisfazendo* $H^2 > \frac{10}{9}$ $(H^2 > \frac{7}{4}$, *respectivamente*) *no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^4(-1)$ $(\mathbb{H}^5(-1)$, *respectivamente*) *é compacta.*

Em [7], Chern mostrou que um gráfico inteiro com curvatura média constante em $\mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície mínima. Alencar e do Carmo provaram em [1] que uma hipersuperfície completa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante, índice finito e crescimento de volume polinomial é uma hipersuperfície mínima. Como gráficos inteiros com curvatura média constante no $\mathbb{R}^n$ são fortemente estáveis (isto é, indM=0) e têm crescimento de volume polinomial, então eles generalizaram o Teorema de Chern. Posteriormente, do Carmo e Zhou generalizaram em [4] este resultado para o caso de hipersuperfícies com crescimento de volume sub-exponencial. Sem a condição do crescimento do volume, o problema para hipersuperfícies não compactas, completas, com curvatura média constante e índice finito em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, serem mínimas ainda está sem solução. O Teorema seguinte, que é uma conseqüência do Corolário 3.4, responde a esta questão em $\mathbb{R}^4$ e em $\mathbb{R}^5$.

Teorema 3.6. *Toda hipersuperfície completa, não compacta com curvatura média constante* H *e índice finito no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^4$ *ou* $\mathbb{R}^5$ *é mínima.*

Para a estrutura de hipersuperfícies mínimas com índice finito em $\mathbb{R}^{n+1}$, Fischer-Colbrie mostrou em [8] que uma superfície mínima, completa, orientada e com índice finito em $\mathbb{R}^3$ é difeomorficamente conforme a uma superfície Riemanniana completa com número finito de pontos removidos. Recentemente, Li e Wang mostraram em [10] que uma hipersuperfície mínima, não compacta, completa e com índice finito em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, tem número finito de fins. Por este resultado e pelo Teorema 3.6, obtemos que toda hipersuperfície não compacta, completa, com curvatura média constante e índice finito em $\mathbb{R}^4$ ou em $\mathbb{R}^5$ tem número finito de fins.

Apresentaremos também outra versão do Teorema 3.3, provado em [9] por M.F.Elbert, B.Nelli e H.Rosenberg, que se refere a uma estimativa para o diâmetro de uma variedade.

Teorema 3.7. *Sejam N uma variedade Riemanniana de dimensão $n+1$, $n \in \{3,4\}$, com curvatura seccional uniformemente limitada inferiormente e M uma variedade completa, estável e com curvatura média constante H imersa em N. Existe uma constante $c = c(n, H, sec(N))$ onde para todo $p \in M$, $dist(p, \partial M) \leq c$ qualquer que seja H satisfazendo $|H| > 2\sqrt{|min\{0, sec(N)\}|}$, onde $sec(N)$ denota o ínfimo das curvaturas seccionais de N.*

O corolário seguinte é uma conseqüência deste Teorema.

Corolário 3.8. *Seja $M^n \subset N^{n+1}$ uma subvariedade completa estável com curvatura média constante H. Se , $n \in \{3,4\}$, e $|H| > 2\sqrt{|min\{0, sec(N)\}|}$, então $\partial M \neq \emptyset$.*

No capítulo 1, trataremos de alguns conceitos e resultados relacionados à Geometria Riemanniana. No capítulo 2, apresentaremos as fórmulas das primeira e segunda variações do comprimento de arco. Finalmente, no capítulo 3, provaremos os teoremas citados aqui na Introdução.

Capítulo 1

Preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar definições, resultados e estabelecer as notações necessárias à compreensão dos capítulos subseqüentes.

1.1 Variedades Conformes

Seja $\varphi : M \to N$ um difeomorfismo, onde N é uma variedade Riemanniana. Denotemos por $\overline{\langle,\rangle}, \overline{\nabla}$ *e* $\overline{\triangle}$ a métrica em N, a conexão Riemanniana e o laplaciano relativos a esta métrica, respectivamente. Suponha que existe uma função $\mu \in C^{\infty}(M)$ que satisfaça, para todo $p \in M$ e todo par de vetores $v, w \in T_pM$, $\mu(p) \neq 0$ e

$$\overline{\langle d\varphi_p \cdot v, d\varphi_p \cdot w\rangle} = \mu^2(p)\langle v, w\rangle.$$

Neste caso, dizemos que φ é um *difeomorfismo conforme*, que M e N são *variedades conformes* e que a função μ^2 é o *coeficiente de conformalidade* de φ. Observemos que dados $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in C^{\infty}(M)$, pondo $g = f \circ \varphi^{-1}$, temos para $q = \varphi(p)$,

$$\begin{aligned}
((d\varphi \cdot X)g)(q) &= dg_q \cdot (d\varphi_p \cdot X(p)) \\
&= (df_p \circ d\varphi_q^{-1} \circ d\varphi_p) \cdot (X(p)) \\
&= df_p \cdot (X(p)) \\
&= (Xf)(p) \\
&= (Xf \circ \varphi^{-1})(q),
\end{aligned}$$

isto é,

$$(d\varphi \cdot X)g = Xf \circ \varphi^{-1}. \tag{1.1}$$

O lema seguinte nos mostra como se relacionam as conexões de M e N.

Lema 1.1.1. *Se X, $Y \in \mathcal{X}(M)$, então*

$$\overline{\nabla}_{d\varphi\cdot X}(d\varphi\cdot Y) = d\varphi\cdot\left(\nabla_X Y + \frac{1}{2\mu^2}\left(X(\mu^2)Y + Y(\mu^2)X - \langle X,Y\rangle grad(\mu^2)\right)\right). \tag{1.2}$$

Prova: Seja $S(X,Y)$ o campo que satisfaz

$$\overline{\nabla}_{d\varphi\cdot X}(d\varphi\cdot Y) = d\varphi\cdot(\nabla_X Y + S(X,Y)), \tag{1.3}$$

para quaisquer X, Y, $Z \in \mathcal{X}(M)$. Utilizando (1.1) obtemos

$$\begin{aligned}(d\varphi\cdot X)\overline{\langle d\varphi\cdot Y, d\varphi\cdot Z\rangle} &= (d\varphi\cdot X)(\mu^2\langle Y,Z\rangle\circ\varphi^{-1})\\ &= X(\mu^2\langle Y,Z\rangle)\circ\varphi^{-1},\end{aligned}$$

ou seja,

$$(d\varphi\cdot X)\overline{\langle d\varphi\cdot Y, d\varphi\cdot Z\rangle} = \{X(\mu^2)\langle Y,Z\rangle + \mu^2 X\langle Y,Z\rangle\}\circ\varphi^{-1}. \tag{1.4}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}\overline{\langle\overline{\nabla}_{d\varphi\cdot X}(d\varphi\cdot Y), d\varphi\cdot Z\rangle} &= \overline{\langle d\varphi\cdot(\nabla_X Y + S(X,Y)), d\varphi\cdot Z\rangle}\\ &= \mu^2\langle\nabla_X Y + S(X,Y), Z\rangle\circ\varphi^{-1},\\ &= \{\mu^2\langle\nabla_X Y, Z\rangle + \mu^2\langle S(X,Y),Z\rangle\}\circ\varphi^{-1}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Permutando-se Y e Z em (1.5) obtemos

$$\overline{\langle d\varphi\cdot Y, \overline{\nabla}_{d\varphi\cdot X}(d\varphi\cdot Z)\rangle} = \{\mu^2\langle Y,\nabla_X Z\rangle + \mu^2\langle Y, S(X,Z)\rangle\}\circ\varphi^{-1}. \tag{1.6}$$

Como

$$(d\varphi\cdot X)\overline{\langle d\varphi\cdot Y, d\varphi\cdot Z\rangle} = \overline{\langle\overline{\nabla}_{d\varphi\cdot X}(d\varphi\cdot Y), d\varphi\cdot Z\rangle} + \overline{\langle d\varphi\cdot Y, \overline{\nabla}_{d\varphi\cdot X}(d\varphi\cdot Z)\rangle}, \tag{1.7}$$

decorre de (1.4), (1.5) e (1.6) que (1.3) equivale a

$$X(\mu^2)\langle Y,Z\rangle = \mu^2\{\langle S(X,Y),Z\rangle + \langle Y, S(X,Z)\rangle\}. \tag{1.8}$$

Por outro lado, $S(X,Y)$ dado por

$$S(X,Y) = \frac{1}{2\mu^2}\left\{X(\mu^2)Y + Y(\mu^2)X - \langle X,Y\rangle grad(\mu^2)\right\} \tag{1.9}$$

obviamente verifica

$$\langle S(X,Y),Z\rangle = \frac{1}{2\mu^2}\left\{X(\mu^2)\langle Y,Z\rangle + Y(\mu^2)\langle X,Z\rangle - Z(\mu^2)\langle X,Y\rangle\right\} \tag{1.10}$$

e, conseqüentemente, satisfaz a equação (1.8), o que conclui a demonstração do lema. □

1.2 Imersões Isométricas

Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+m$. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica em M dada por $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p v_1, df_p v_2 \rangle, v_1, v_2 \in T_pM$. Neste caso, diz-se que f é uma *imersão isométrica* de M em M. Para cada $p \in M$, a métrica de $\overline{M}$ decompõe $T_{f(p)}\overline{M}$ na soma direta

$$T_{f(p)}\overline{M} = df_p(T_pM) \oplus (df_pT_pM)^{\perp}.$$

Indica-se por $TM^{\perp}$ o fibrado normal de f e por $(\mathcal{X}(M))^{\perp}$ o conjunto das seções de $(TM)^{\perp}$. Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, então a conexão Riemanniana de M é dada por $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T$, onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais de dfX e dfY a $\overline{M}$.

Dado qualquer $\xi \in (\mathcal{X}(U))^{\perp}$ a *segunda forma fundamental* de f em p, segundo o vetor ξ, associada à aplicação bilinear e simétrica $B : TU \times TU \to (TU)^{\perp}$,dada por $B(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ é definida por

$$H_\xi(X,Y) = \langle B(X,Y), \xi \rangle.$$

Denota-se por $A_\xi : T_pM \to T_pM$ a aplicação linear auto-adjunta associada à segunda forma fundamental de f na direção de ξ, isto é,

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = H_\xi(X,Y) = \langle B(X,Y), \xi \rangle, \forall X, Y \in T_pM.$$

A equação

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z, T \rangle &= \langle \overline{R}(X,Y)Z, T \rangle + \langle B(X,Z), B(Y,T) \rangle \\ &\quad - \langle B(X,T), B(Y,Z) \rangle, \\ &\quad \forall X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M), \end{aligned}$$

denominada *Equação de Gauss*, relaciona as curvaturas R e $\overline{R}$ de M e $\overline{M}$, respectivamente.

1.3 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano

Dada $f \in \mathcal{D}(M)$, o *gradiente* de f é o campo de vetores

$$\nabla f : M \to TM, p \mapsto (p, \nabla(p))$$

definido por

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, o *divergente* de X é a função $divX : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$divX(p) = tr(Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)),$$

onde tr representa o traço da aplicação linear $Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)$.

O operador linear $\triangle : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ definido por

$$\triangle = div(\nabla f)$$

é chamado o operador *Laplaciano* de M.

Sejam $f \in \mathcal{X}(M)$ e $p \in M$. Definimos o *hessiano* de f no ponto p como a aplicação bilinear $Hessf : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$Hessf(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

Capítulo 2

Fórmulas da primeira e da segunda variações do comprimento de arco

2.1 Primeira variação do comprimento de arco

Seja $s : I \times J \to M$, $I, \ J \subset \mathbb{R}$, uma superfície parametrizada. Dizemos que *um campo de vetores V ao longo de s* é uma correspondência que associa cada $(t, \epsilon) \in I \times J$ a um vetor tangente $V(t, \epsilon) \in T_{s(t,\epsilon)}M$, que é diferenciável no seguinte sentido: se $f \in \mathcal{D}(M)$, então a aplicação $(t, \epsilon) \mapsto V(t, \epsilon) \cdot f$ é diferenciável.

Seja $s_\epsilon : I \to M$ a curva parametrizada definida por $s_\epsilon(t) = s(t, \epsilon)$. Dizemos que $\dfrac{\partial s}{\partial t}(t, \epsilon) = s'_\epsilon(t)$ é um campo de vetores ao longo de s. De modo análogo, define-se o campo $\dfrac{\partial s}{\partial \epsilon}$.

Se V_ϵ é o campo ao longo de s_ϵ definido por $V_\epsilon(t) = V(\epsilon, t)$, então definimos a derivada covariante por $\dfrac{DV}{\partial t}(t, \epsilon) = \dfrac{DV_\epsilon}{\partial t}(t)$. De modo análogo, define-se $\dfrac{DV}{\partial s}$.

Lema 2.1. *(de simetria) Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e $s : I \times J \to M$ é uma superfície parametrizada, então*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}.$$

Prova: Sejam $x : U \to M$ um sistema de coordenadas e $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ uma base associada. Então $x^{-1} \circ s(t, \epsilon) = (x_1(t, \epsilon), ..., x_n(t, \epsilon))$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial\epsilon}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) &= \frac{D}{\partial\epsilon}(s'_\epsilon(t)) \\
&= \frac{D}{\partial\epsilon}\left(\sum\frac{\partial x_i}{\partial t}\cdot\partial_i\right) \\
&= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial\epsilon\partial t}\cdot\partial_i + \frac{\partial x_i}{\partial t}\nabla_{s'_t(\epsilon)}\partial_i \\
&= \sum_i\left\{\frac{\partial^2 x_i}{\partial\epsilon\partial t}\cdot\partial_i + \frac{\partial x_i}{\partial t}\nabla_{\sum\limits_{i,j}\frac{\partial x_j}{\partial\epsilon}\cdot\partial_i}\partial_i\right\} \\
&= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial\epsilon\partial t}\cdot\partial_i + \sum_{i,j}\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial\epsilon}\nabla_{\partial_i}\partial_j.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial\epsilon}\right) &= \frac{D}{\partial t}(s'_t(\epsilon)) \\
&= \frac{D}{\partial t}\left(\sum_j\frac{\partial x_j}{\partial t}\cdot\partial_j\right) \\
&= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t\partial\epsilon}\cdot\partial_j + \frac{\partial x_j}{\partial\epsilon}\nabla_{s'_\epsilon(t)}\partial_j \\
&= \sum_j\left\{\frac{\partial^2 x_j}{\partial t\partial\epsilon}\cdot\partial_j + \frac{\partial x_j}{\partial\epsilon}\nabla_{\sum\limits_{i,j}\frac{\partial x_i}{\partial\epsilon}\cdot\partial_j}\partial_i\right\} \\
&= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial\epsilon\partial\epsilon}\cdot\partial_j + \sum_{i,j}\frac{\partial x_j}{\partial\epsilon}\frac{\partial x_i}{\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i.
\end{aligned}$$

Pela simetria da conexão, $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$. Logo, $\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}$, o que prova o lema. □

Seja $w : [\alpha,\beta] \to M$ uma curva diferenciável em uma variedade Riemanniana M de dimensão n. Uma *variação* de w é uma aplicação contínua $v : [\alpha,\beta]\times(-\epsilon_0,\epsilon_0) \to M$, para todo $\epsilon_0 > 0$, tal que: $v(t,0) = w(t), t \in [\alpha,\beta]$. Se v fixa pontos finais, isto é, se v satisfaz $w(\alpha) = v(\alpha,\epsilon)$ *e* $w(\beta) = v(\beta,\epsilon)$ *para todo* $\epsilon \in (-\epsilon_0,\epsilon_0)$, então v é uma *variação própria* (ou uma homotopia de w). Dizemos que v é uma *variação suave* de w se v é diferenciável em

$[\alpha,\beta]\times(-\epsilon_0,\epsilon_0)$. Se para todo $\epsilon\in(-\epsilon_0,\epsilon_0)$ a aplicação $w_\epsilon:[\alpha,\beta]\to M$ dada por $w_\epsilon(t)=v(t,\epsilon)$ é uma geodésica, então v é uma *variação geodésica* de w. Então,

$$\frac{D}{\partial\epsilon}\frac{D}{\partial t}-\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial\epsilon} = R\left(\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial\epsilon}\right).$$

e

$$\frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon} = 0 \ (\textit{lema de simetria}).$$

Teorema 2.2. *(Fórmula da primeira variação do comprimento de arco) Sejam $w:[\alpha,\beta]\to M$ uma curva diferenciável e v uma variação diferenciável de w. Para cada $\epsilon\in(-\epsilon_0,\epsilon_0)$, seja $L(\epsilon)=\displaystyle\int_\alpha^\beta\left|\frac{\partial v}{\partial t}(t,\epsilon)\right|dt$ o comprimento de w_ϵ. Então L é diferenciável e*

$$\frac{\partial L}{\partial\epsilon} = \left\langle\frac{\partial v}{\partial\epsilon},\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right\rangle\Bigg|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\left\langle\frac{\partial v}{\partial\epsilon},\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right)\right\rangle.$$

Em particular, se w é parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $|w'|=1$, e $Y(t)=(\frac{\partial v}{\partial t})(t,0)$, então

$$\left(\frac{dL}{d\epsilon}\right)(0) = \langle Y,w'\rangle\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\left\langle Y,\frac{Dw'}{\partial t}\right\rangle dt.$$

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\epsilon} &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\int_\alpha^\beta\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|dt\\
&= \int_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\left\langle\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)dt\\
&= \int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^{-1}2\left\langle\frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle dt\\
&= \int_\alpha^\beta\left\langle\frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon},\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right\rangle dt\\
&= \int_\alpha^\beta\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{\partial v}{\partial\epsilon},\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial v}{\partial\epsilon},\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right)\right\rangle\right\}dt\\
&= \left\langle\frac{\partial v}{\partial\epsilon},\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right\rangle\Bigg|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\left\langle\frac{\partial v}{\partial\epsilon},\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right)\right\rangle.
\end{aligned}$$

□

2.2 Segunda variação do comprimento de arco

Teorema 2.3. *(Fórmula da segunda variação do comprimento de arco). Sejam w e L como no Teorema 2.2, com $|w'| = 1$. Então para a segunda derivada de L, temos*

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2L}{d\epsilon^2}(0) &= \left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, w' \right\rangle \Bigg|_{\alpha}^{\beta} \\
&\quad - \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left|\frac{DY}{\partial t}\right|^2 - \langle R(w',Y)w', Y\rangle - \left\langle w', \frac{DY}{\partial t}\right\rangle^2 - \left\langle \frac{Dw'}{\partial t}, \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{d\epsilon}\right\rangle \right\} dt.
\end{aligned}
$$

Prova: Para a segunda derivada de L, começamos pela integração por partes na prova do Teorema 2.2.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2L}{d\epsilon^2} &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\int_{\alpha}^{\beta} \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right\rangle dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right\rangle dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{D}{\partial\epsilon}\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right)\right\rangle \right\} dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{|\frac{\partial v}{\partial t}|}\right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}\right\rangle \frac{1}{|\frac{\partial v}{\partial t}|} \right\} dt \\
&\quad + \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|^{-2} \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right|\right) \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\partial v}{\partial\epsilon}\right\rangle \right\} dt.
\end{aligned}
$$

Se $\epsilon = 0$, obtemos

$$
\frac{d^2L}{d\epsilon^2}(0) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle \bigg|_{\epsilon=0} + \left|\frac{DY}{\partial t}\right|^2 - \left\langle \frac{DY}{dt}, w'\right\rangle^2 \right\} dt.
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle + \left\langle R\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial\epsilon}\right)\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \frac{\partial v}{\partial t}\right\rangle - \left\langle R\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial\epsilon}\right)\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial\epsilon}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2L}{d\epsilon^2}(0) &= \int_\alpha^\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, w' \right\rangle - \left\langle \frac{Dw'}{\partial t}, \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{d\epsilon}\right\rangle \right\} dt \\
&+ \int_\alpha^\beta \left\{ -\langle R(w',Y)w',Y\rangle + \left|\frac{DY}{\partial t}\right|^2 - \left\langle\ w', \frac{DY}{\partial t}\right\rangle^2 \right\} dt \\
&= \left\langle \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, w' \right\rangle\bigg|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left\{ \left|\frac{DY}{\partial t}\right|^2 \right\} dt \\
&+ \int_\alpha^\beta \left\{ -\langle R(w',Y)w',Y\rangle - \left\langle\ w', \frac{DY}{\partial t}\right\rangle^2 - \left\langle \frac{Dw'}{\partial t}, \frac{D}{\partial\epsilon}\frac{\partial v}{d\epsilon}\right\rangle \right\} dt.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4. *Seja $\gamma : [\alpha, \beta] \to M, |\gamma'| = 1$ uma geodésica. Para toda variação v de γ, seja $Y_\perp = Y - \langle Y\gamma'\rangle\gamma'$. Então*

$$L'(0) = \langle Y\gamma'\rangle\bigg|_\alpha^\beta$$

e

$$L''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial Y}\frac{\partial v}{\partial\epsilon}, \gamma' \right\rangle\bigg|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \left\{ \left|\frac{DY_\perp}{\partial t}\right|^2 - \langle R(\gamma', Y_\perp)\gamma', Y_\perp\rangle \right\} dt.$$

Em particular, se v é uma homotopia de γ, então

$$L'(0) = 0$$

e

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta \left\{ \left|\frac{DY_\perp}{\partial t}\right|^2 - \langle R(\gamma', Y_\perp)\gamma', Y_\perp\rangle \right\} dt.$$

Prova: Temos que $Y = Y_\perp + \langle Y, \gamma'\rangle\gamma'$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{DY}{\partial t} &= \frac{D}{\partial t}(Y_\perp + \langle Y, \gamma'\rangle\gamma') \\
&= \frac{DY_\perp}{\partial t} + \frac{D}{\partial t}(\langle Y, \gamma'\rangle\gamma') \\
&= \frac{DY_\perp}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\langle Y, \gamma'\rangle\gamma' + \langle Y, \gamma'\rangle\frac{D\gamma'}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Como $\langle Y, \gamma'\rangle = 0$, então

$$\frac{DY}{\partial t} = \frac{DY_\perp}{\partial t} + \left\langle \frac{DY}{\partial t}, \gamma' \right\rangle \gamma'.$$

Assim,

$$\left|\frac{DY}{\partial t}\right|^2 = \left|\frac{DY_\perp}{\partial t}\right|^2 + 2\left\langle \frac{DY_\perp}{\partial t}, \left\langle \frac{DY}{\partial t}, \gamma' \right\rangle \gamma' \right\rangle + \left\langle \frac{DY}{\partial t}, \gamma' \right\rangle^2.$$

Mas $\left\langle \frac{DY}{\partial t}\gamma' \right\rangle = 0$. Logo,

$$\left|\frac{DY}{\partial t}\right|^2 = \left|\frac{DY_\perp}{\partial t}\right|^2 + \left\langle \frac{DY}{\partial t}, \gamma' \right\rangle^2.$$

Portanto,

$$L'(0) = \langle Y, \gamma' \rangle \,|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left\langle Y, \frac{D\gamma'}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Como $\gamma' = 0$, então $L'(0) = \langle Y, \gamma' \rangle \,|_\alpha^\beta$.

Calculemos $L''(0)$.

$$\begin{aligned}
L''(0) &= \left\langle \frac{D}{\partial \epsilon}\frac{\partial v}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, \gamma' \right\rangle \bigg|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \left\{ \left|\frac{DY}{\partial t}\right|^2 - \langle R(\gamma', Y)\gamma', Y \rangle \right\} dt \\
&+ \int_\alpha^\beta \left\{ - \left\langle \gamma', \frac{DY}{\partial t} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{D\gamma'}{\partial t}, \frac{D}{\partial \epsilon}\frac{\partial v}{\partial \epsilon} \right\rangle \right\} \partial t \\
&= \left\langle \frac{D}{\partial Y}\frac{\partial v}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, \gamma' \right\rangle \bigg|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \left\{ \left|\frac{DY_\perp}{\partial t}\right|^2 + \left\langle \gamma', \frac{DY}{\partial t} \right\rangle^2 \right\} dt \\
&+ \int_\alpha^\beta \left\{ - \langle R(\gamma', Y)\gamma', Y \rangle - \left\langle \gamma', \frac{DY}{\partial t} \right\rangle^2 \right\} dt \\
&= \left\langle \frac{D}{\partial Y}\frac{\partial v}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, \gamma' \right\rangle \bigg|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \left\{ \left|\frac{DY_\perp}{\partial t}\right|^2 - \langle R(\gamma', Y)\gamma', Y \rangle \right\} dt.
\end{aligned}$$

Em particular, se v é uma homotopia de γ, então

$$L'(0) = 0$$

e

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta \left\{ \left|\frac{DY_\perp}{\partial t}\right|^2 - \langle R(\gamma', Y_\perp)\gamma', Y_\perp \rangle \right\} dt.$$

$\square$

Capítulo 3

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Índice Finito

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar a prova do teorema principal e a prova dos seus casos particulares.

Teorema 3.1. *Sejam $N^{n+1}(n = 3, 4)$ uma variedade de dimensão $(n + 1)$ e M uma hipersuperfície completa com curvatura média constante H e índice finito imersa em N. Suponha que*

$$\begin{aligned} \sigma \; &:= \; inf\{\overline{Ric}(w) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(w, \nu) | w \in T_pM, \; |w| = 1, \; p \in M\} \\ &> \; -\frac{n^2(5-n)H^2}{4}, \end{aligned}$$

onde ν denota o campo unitário normal em M. Então M é compacta.

Para a demonstração do Teorema 3.1, precisamos do Lema seguinte.

Lema 3.2. *Sejam N uma variedade de dimensão $(n+1)$ e M uma hipersuperfície imersa em N com curvatura média constante H. Então, para todo referencial ortonormal local $e_i, \; i = 1, ..., n$ de M,*

$$|A|^2 + nHh_{11} - \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^2 \geq \frac{n^2(5-n)H^2}{4}, \tag{3.1}$$

tal que $A = (h_{ij}), h_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle, i, j = 1, ..., n.$

Prova: Defina a aplicação linear sem traço $\phi = (b_{ij} : T_pM \to T_pM)$ por $\langle \phi X, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle +$

$H\langle X, Y\rangle,\ X,\ Y \in T_pM,\ p \in M$. Como $\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$, temos que $b_{11}^2 = \left(\sum_{i=2}^{n} b_{ii}^2\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 \geq b_{11}^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{ii}^2 + 2\sum_{i=2}^{n} b_{1i}^2 \\ &\geq b_{11}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n} b_{ii}\right)^2 + 2\sum_{i=2}^{n} b_{1i}^2 \\ &\geq \frac{n}{n-1}\left(b_{11}^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{1i}^2\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$-\left(b_{11}^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{1i}^2\right) \geq -\frac{(n-1)}{n}|\phi|^2 \ \ e \ \ b_{11} \geq -\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|.$$

Como

$$|A|^2 = |\phi|^2 + nH^2, b_{ii} = -h_{ii} + H, b_{ij} = h_{ij}, i \neq j, i, j = 1, ..., n,$$

então

$$\begin{aligned}
|A|^2 + nHh_{11} - \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^2 &= (|\phi|^2 + nH^2) + nH^2 - nHb_{11} \\
&\quad - \left(h_{11}^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{1i}^2 \right) \\
&= (|\phi|^2 + nH^2) + nH^2 - nHb_{11} \\
&\quad - \left((H - b_{11})^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{1i}^2 \right) \\
&= (|\phi|^2 + nH^2) + nH^2 - nHb_{11} \\
&\quad - H^2 + 2Hb_{11} - b_{11}^2 - \sum_{i=2}^{n} b_{1i}^2 \\
&= (|\phi|^2 + nH^2) + (n-1)H^2 \\
&\quad -(n-2)Hb_{11} - \left(b_{11}^2 + \sum_{i=2}^{n} b_{1i}^2 \right) \\
&\geq (|\phi|^2 + nH^2) + (n-1)H^2 \\
&\quad -(n-2)H|\phi|\sqrt{\frac{n-1}{n}} - \frac{n-1}{n}|\phi|^2 \\
&= |\phi|^2 - \frac{n-1}{n}|\phi|^2 + nH^2 + nH^2 \\
&\quad -H^2 - (n-2)\sqrt{n-1}\frac{|\phi|}{\sqrt{n}}H \\
&= \frac{n|\phi|^2 - (n-1)|\phi|^2}{n} + (2n-1)H^2 \\
&\quad -(n-2)\sqrt{n-1}\frac{|\phi|}{\sqrt{n}}H \\
&= \frac{|\phi|^2}{n} - \frac{|\phi|}{\sqrt{n}}(n-2)\sqrt{n-1}H + (2n-1)H^2 \\
&= \frac{|\phi|^2}{n} - \frac{|\phi|}{\sqrt{n}}(n-2)\sqrt{n-1}H \\
&\quad + \frac{(n-2)^2(n-1)H^2}{4} + \frac{n^2(5-n)H^2}{4} \\
&= \left(\frac{|\phi|}{\sqrt{n}} - \frac{(n-2)\sqrt{n-1}H}{2} \right)^2 + \frac{n^2(5-n)H^2}{4} \\
&\geq \frac{n^2(5-n)H^2}{4}.
\end{aligned}$$

$\square$

Prova do Teorema 3.1: Suponha, por contradição, que M não é compacta. Como M tem índice finito, pela Proposição 1 em [8], existem uma função positiva u em M e algum subconjunto compacto Ω de M tal que, em $M \setminus \Omega$, $Lu = 0$, ou seja,

$$\Delta u + (|A|^2 + \overline{Ric}(\nu))u = 0. \tag{3.2}$$

Seja ds^2 a métrica original em M. Para essa métrica, temos a métrica conforme $d\widetilde{s}^2 = u^2 ds^2$ em M. No que segue, denotaremos por $\widetilde{\nabla}, \widetilde{K}, \widetilde{Ric}$ a conexão, a curvatura e a curvatura de Ricci na métrica $d\widetilde{s}^2$, respectivamente.

Afirmamos que existe uma geodésica minimizante $\widetilde{\gamma}(s) : [0, +\infty) \to M \setminus \Omega$ na métrica $d\widetilde{s}^2$, onde o parâmetro s é o comprimento de arco na métrica ds^2. De fato, escolhamos uma exaustão de $M = \cup B_{R_i}(p)$ $(R_i \to \infty, i \to \infty)$, tal que cada $B_R(p)$ denota a bola geodésica de M na métrica ds^2, de raio R centrada em $p \in M$. Então, para cada i existe um segmento de geodésica $\widetilde{\gamma}_i(s)$ que realiza a distância de p à fronteira $\partial B_R(p)$ na métrica $d\widetilde{s}^2$, tal que s é o comprimento de arco de $\widetilde{\gamma}_i$ na métrica ds^2. Pela teoria das equações diferenciais ordinárias, existe uma geodésica limitante $\widetilde{\gamma}(s),\ \ s \in [0, +\infty)$, parametrizada pelo comprimento de arco na métrica ds^2, tal que $\widetilde{\gamma}_i$ converge para $\widetilde{\gamma}$ em todo conjunto compacto de $[0, +\infty)$. Portanto, $\widetilde{\gamma}$ é uma geodésica minimizante na métrica $d\widetilde{s}^2$. Observe que $\widetilde{\gamma}$ é propriamente mergulhada. Logo, $\widetilde{\gamma}|[s_0, +\infty)$, para algum $s_0 > 0$, estará fora de Ω. Mudando o ponto inicial, se necessário, podemos escolher $\widetilde{\gamma}|[s_0, +\infty)$ como afirmamos.
Agora, temos uma geodésica minimizante $\widetilde{\gamma}(s) : [0, +\infty) \to M\backslash\Omega$ na métrica $d\widetilde{s}^2$ que possui comprimento infinito na métrica ds^2. A seguir, provaremos que toda geodésica minimizante em $M\backslash\Omega$ na métrica $d\widetilde{s}^2$ tem comprimento uniformemente limitado na métrica ds^2. Assim, violaremos o fato que o comprimento de $\widetilde{\gamma}$ é infinito na métrica $d\widetilde{s}^2$ e completaremos a prova por contradição.

No que segue, assumiremos que $\widetilde{c}(s)$ $(o \leq s \leq l)$ é qualquer geodésica minimizante em $M \setminus \Omega$ na métrica $d\widetilde{s}^2$, tal que s é o comprimento de arco na métrica ds^2. Escolhemos um referencial ortonormal $e_i,\ i = 1, ..., n$ de M ao longo de $\widetilde{c}$ tal que $e_1 = \dfrac{d}{ds}$. Logo, $\widetilde{e_i} = u^{-1}e_i$ são ortonormais na métrica $d\widetilde{s}^2$ e $\widetilde{e_1} = \dfrac{d}{d\widetilde{s}}$.

Afirmamos agora que para $n < 5$ e qualquer função suave f ao longo de $\widetilde{c}$ com $f(0) = f(l) = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{4}{5-n}\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \ \ &\geq \ \ \int_0^l f^2(\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1, \nu))ds \\ &\quad + \int_0^l f^2\left(\frac{n^2(5-n)H^2}{4}\right) ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Antes de apresentarmos a prova de (3.3), daremos uma prévia da demonstração. Consideraremos a propriedade minimizante de $\widetilde{c}$ na métrica $d\widetilde{s}^2$. Sob a métrica $d\widetilde{s}^2$, a segunda variação do comprimento de arco (3.5) implicará a desigualdade (3.6) envolvendo a curvatura de Ricci na métrica $d\widetilde{s}^2$. Daí, transformaremos a desigualdade (3.6) (na métrica $d\widetilde{s}^2$) na desigualdade (3.13) (na métrica ds^2) usando as leis de transformação para a mudança conforme da métrica. Depois, pela equação de Jacobi e pela equação de Gauss, obteremos a desigualdade (3.16) envolvendo as curvaturas do espaço ambiente e a segunda forma fundamental. Finalmente, obteremos (3.3) trocando a função teste φ por $fu^{\frac{1}{2}}$ e usando o lema 3.2.

Agora provaremos (3.3). Como $\widetilde{c}$ é uma geodésica minimizante na métrica $d\widetilde{s}^2$, ela satisfaz

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{d\widetilde{s}}}\frac{d}{d\widetilde{s}} = 0, \tag{3.4}$$

$$\int_0^{\widetilde{l}}\left(\frac{d\varphi}{d\widetilde{s}}\right)^2 d\widetilde{s} \geq \int_0^{\widetilde{l}} \varphi^2 \widetilde{K}(\widetilde{e_1},\widetilde{e_i})d\widetilde{s},\ i = 2, ..., n, \tag{3.5}$$

para qualquer função suave φ ao longo de $\widetilde{c}$ com $\varphi(0) = \varphi(\widetilde{l}) = 0$, tal que $\widetilde{l}$ é o comprimento de $\widetilde{c}$ na métrica $d\widetilde{s}^2$.

De (3.5), segue-se que

$$(n-1)\int_0^{\widetilde{l}}\left(\frac{d\varphi}{d\widetilde{s}}\right)^2 d\widetilde{s} \geq \int_0^{\widetilde{l}} \varphi^2 \widetilde{Ric}(\widetilde{e_1})d\widetilde{s}. \tag{3.6}$$

Calculemos $\widetilde{Ric}(\widetilde{e_1})$.

Como $\dfrac{d}{d\widetilde{s}} = \dfrac{1}{u}\dfrac{d}{ds}$, então

$$\begin{aligned}
0 = \widetilde{\nabla}_{\frac{d}{d\widetilde{s}}}\frac{d}{d\widetilde{s}} &= \widetilde{\nabla}_{\frac{1}{u}\frac{d}{ds}}\frac{1}{u}\frac{d}{ds} \\
&= \frac{1}{u}\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{ds}}\frac{1}{u}\frac{d}{ds} \\
&= \frac{1}{u}\frac{d}{ds}\left(u^{-1}\right)\frac{d}{ds} + \frac{1}{u}\frac{1}{u}\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} \\
&= \frac{1}{u}\left(-u^{-2}\frac{du}{ds}\right)\frac{d}{ds} + \frac{1}{u^2}\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} \\
&= \left(-\frac{1}{u}\frac{1}{u^2}\frac{du}{ds}\right)\frac{d}{ds} + \frac{1}{u^2}\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{u^2}\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} = \frac{1}{u^2}\frac{1}{u}\frac{du}{ds}\frac{d}{ds}.$$

Logo,

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} = \frac{d\log u}{ds}\frac{d}{ds}. \tag{3.7}$$

Da relação entre as conexões na métrica ds^2 e na métrica conforme $d\widetilde{s}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} &= \nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} + \frac{1}{2u^2}\left\{2\frac{d}{ds}(u^2)\frac{d}{ds} - ds^2\left(\frac{d}{ds},\frac{d}{ds}\right)gradu^2\right\} \\
&= \nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} + \frac{1}{2u^2}\left(2.2u\frac{du}{ds}\right)\frac{d}{ds} - \frac{1}{2u^2}2u^2\nabla\log u \\
&= \nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} + \frac{1}{u^2}\left(2\frac{u^2}{u}\frac{du}{ds}\right)\frac{d}{ds} - \nabla\log u \\
&= \nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} + 2\frac{d\log u}{ds}\frac{d}{ds} - \nabla\log u. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Igualando a equação (3.7) e a equação (3.8), obtemos

$$\nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} = \nabla\log u - \frac{d\log u}{ds}\frac{d}{ds}$$

Daí,

$$\left(\nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds}\right)\log u = (\nabla\log u)\, logu - \frac{d\log u}{ds}\frac{d\log u}{ds}.$$

Logo,

$$\left(\nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds}\right)\log u = |\nabla\log u|^2 - \left|\frac{d\log u}{ds}\right|^2. \qquad (3.9)$$

Pela fórmula da transformação da curvatura para a mudança conforme da métrica [12], temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ric}(\widetilde{e}_1) &= Ric(\widetilde{e}_1) - (n-2)Hess(\log u)(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_1) + (n-2)\left|\frac{d(\log u)}{d\widetilde{s}}\right|^2 \\
&\quad -[\Delta(\log u) + (n-2)|\nabla\log u|^2]\left|\frac{d}{d\widetilde{s}}\right|^2, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

tal que Hess e $|.|$ denotam o hessiano e o comprimento do vetor tangente na métrica ds^2 em M, respectivamente.

Mas,

$$\begin{aligned}
Hess(\log u)(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_1) &= \left\langle \nabla_{\frac{d}{d\widetilde{s}}} grad\log u, \frac{d}{d\widetilde{s}}\right\rangle \\
&= u^{-2}\left(\frac{d}{ds}\left\langle grad\log u, \frac{d}{ds}\right\rangle - \left\langle grad\log u, \nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds}\right\rangle\right) \\
&= u^{-2}\left(\frac{d^2\log u}{ds^2} - \left(\nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds}\right)\log u\right).
\end{aligned}$$

Logo, por (3.9),

$$Hess(\log u)(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_1) = u^{-2}\left(\frac{d^2\log u}{ds^2} - |\nabla\log u|^2 + \left|\frac{d\log u}{ds}\right|^2\right). \qquad (3.11)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\widetilde{Ric}(\widetilde{e}_1) &= u^{-2}\left[Ric(e_1)-(n-2)\left\{\frac{d^2\log u}{ds^2}-|\nabla\log u|^2+\left|\frac{d\log u}{ds}\right|^2\right\}\right]\\ &\quad+u^{-2}\left[(n-2)\left|\frac{d(\log u)}{ds}\right|^2-\Delta(\log u)-(n-2)|\nabla\log u|^2\right].\end{aligned}$$

Logo, (3.10) torna-se

$$\widetilde{Ric}(\widetilde{e}_1)=u^{-2}\left[Ric(e_1)-(n-2)\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)-\triangle(\log u)\right]. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) em (3.6), temos

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^l u^{-1}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds &\geq \int_0^l u^{-1}\left[Ric(e_1)-(n-2)\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)\right]\varphi^2 ds\\ &\quad-\int_0^l u^{-1}[\triangle(\log u)]\varphi^2 ds.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Mas

$$\begin{aligned}\triangle(\log u) &= trHess(\log u)\\ &= \sum\langle\nabla_{e_i}grad\log u, e_i\rangle\\ &= \sum e_i\langle grad\log u, e_i\rangle\\ &= \sum e_i\left(\frac{e_i(u)}{e_i}\right)\\ &= \sum\frac{(e_ie_i(u))u-(e_i(u))^2}{u^2}\\ &= \frac{u\triangle u-|\nabla u|^2}{u^2}\\ &= \frac{\triangle u}{u}-\frac{|\nabla u|^2}{u^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\triangle u}{u}=\triangle(\log u)+|\nabla\log u|^2.$$

Da equação (3.2), obtemos

$$-\frac{\triangle u}{u}=|A|^2+\overline{Ric}(\nu),$$

ou seja,

$$-\triangle(\log u) - |\nabla \log u|^2 = |A|^2 + \overline{Ric}(\nu).$$

Daí,

$$-\triangle(\log u) = |A|^2 + \overline{Ric}(\nu) + |\nabla \log u|^2. \tag{3.14}$$

Pela equação (3.14) e pela equação de Gauss

$$Ric(e_1) = \overline{Ric}(e_1) - \overline{K}(e_1, \nu) + nHh_{11} - \sum_{j=1}^{n} h_{1j}^2,$$

temos

$$\begin{aligned} Ric(e_1) - (n-2)\left(\frac{d^2 \log u}{ds^2}\right) - \triangle(\log u) &= u^{-2}\left[\overline{Ric}(e_1) - \overline{K}(e_1, \nu) + nHh_{11} - \sum_{j=1}^{n} h_{1j}^2\right] \\ &\quad + u^{-2}\left[-(n-2)\left(\frac{d^2 \log u}{ds^2}\right)\right] \\ &\quad + \left[|A|^2 + \overline{Ric}(\nu) + |\nabla \log u|^2\right]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Substituindo (3.15) em (3.13), temos

$$\begin{aligned} (n-1)\int_0^l u^{-1}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds &\geq \int_0^l u^{-1}\left[\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1, \nu) + |A|^2\right]\varphi^2 ds \\ &\quad + \int_0^l u^{-1}\left[nHh_{11} - \sum_{j=1}^{n} h_{1j}^2\right]\varphi^2 ds \\ &\quad + \int_0^l u^{-1}\left[-(n-2)\left(\frac{d^2 \log u}{ds^2}\right)\right]\varphi^2 ds \\ &\quad + \int_0^l u^{-1}\left[|\nabla \log u|^2\right]\varphi^2 ds. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Trocando φ por $fu^{\frac{1}{2}}$ pra tirar u do denominador, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{d(fu^{\frac{1}{2}})}{ds} \\ &= \frac{df}{ds}u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}fu^{\frac{-1}{2}}\frac{du}{ds} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 &= \left(\frac{df}{ds}\right)^2 u + 2\frac{df}{ds}u^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}fu^{\frac{-1}{2}}\frac{du}{ds} + \frac{1}{4}f^2u^{-1}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \\ &= \left(\frac{df}{ds}\right)^2 u + f\frac{df}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{1}{4}f^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 u^{-1}. \end{aligned}$$

Sejam

$$a = (n-1)\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 uu^{-1}ds,$$

$$b = \frac{(n-1)}{4}\int_0^l f^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 u^{-1}u^{-1}ds$$

e

$$c = (n-1)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{du}{ds}u^{-1}ds.$$

Então, (3.16) torna-se

$$\begin{aligned} a+b+c \geq & \int_0^l u^{-1}\left[\overline{Ric}(e_1)+\overline{Ric}(\nu)-\overline{K}(e_1,\nu)+|A|^2\right]f^2uds \\ & +\int_0^l u^{-1}\left[nHh_{11}-\sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]f^2uds \\ & +\int_0^l u^{-1}\left[-(n-2)\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)+|\nabla\log u|^2\right]f^2uds. \end{aligned}$$

Sejam

$$d = (n-1)\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds,$$

$$e = \frac{(n-1)}{4}\int_0^l f^2\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)ds$$

e

$$g = (n-1)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned} d+e+g \geq & \int_0^l f^2\left[\overline{Ric}(e_1)+\overline{Ric}(\nu)-\overline{K}(e_1,\nu)+|A|^2\right]ds \\ & +\int_0^l f^2\left[nHh_{11}-\sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]ds \\ & +\int_0^l f^2\left[-(n-2)\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)\right]ds \\ & +\int_0^l f^2\left[|\nabla\log u|^2\right]ds. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Integremos $\int_0^l f^2\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)ds$ por partes.

Sejam $U = f^2$ e $dv = \left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)$. Então $dU = 2f\frac{df}{ds}ds$ e $v = \left(\frac{d\log u}{ds}\right)$.
Daí,

$$\int_0^l f^2\left(\frac{d^2 logu}{ds^2}\right)ds = f^2\left(\frac{d\log u}{ds}\right)\Bigg|_0^l - 2\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds.$$

Como $f(0) = f(l) = 0$, então

$$\int_0^l f^2\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)ds = -2\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds.$$

Mas

$$\int_0^l f^2|\nabla\log u|^2 ds = \int_0^l f^2\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)ds.$$

Logo (3.17) equivale a

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_0^l\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \quad &\geq \quad -\frac{(n-1)}{4}\int_0^l f^2\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)ds + \int_0^l f^2\left(\frac{d^2\log u}{ds^2}\right)ds \\
&\quad -(n-1)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds + 2(n-2)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds \\
&\quad +\int_0^l f^2\left[\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1,\nu)\right]ds \\
&\quad +\int_0^l f^2\left[|A|^2 + nHh_{11} - \sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]ds \\
&\geq \quad \left(\frac{5-n}{4}\right)\int_0^l f^2\left(\frac{d\log u}{ds}\right)^2 \\
&\quad +(n-3)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds \\
&\quad +\int_0^l f^2\left[\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1,\nu)\right]ds \\
&\quad +\int_0^l f^2\left[|A|^2 + nHh_{11} - \sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]ds. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)(5-n)}{(5-n)}\int_0^l\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \quad &\geq \quad \left(\frac{5-n}{4}\right)\int_0^l f^2\left(\frac{d\log u}{ds}\right)^2 ds \\
&\quad +(n-3)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds \\
&\quad +\int_0^l f^2\left[\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1,\nu)\right]ds \\
&\quad +\int_0^l f^2\left[|A|^2 + nHh_{11} - \sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]ds,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{-n^2+6n-5}{5-n}\int_0^l\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds &\geq \left(\frac{5-n}{4}\right)\int_0^l f^2\left(\frac{d\log u}{ds}\right)^2 ds\\ &+(n-3)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds\\ &+\int_0^l f^2\left[\overline{Ric}(e_1)+\overline{Ric}(\nu)-\overline{K}(e_1,\nu)\right]ds\\ &+\int_0^l f^2\left[|A|^2+nHh_{11}-\sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]ds,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{4-n^2+6n-9}{5-n}\int_0^l\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds &\geq \left(\frac{5-n}{4}\right)\int_0^l f^2\left(\frac{d\log u}{ds}\right)^2 ds\\ &+(n-3)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds\\ &+\int_0^l f^2\left[\overline{Ric}(e_1)+\overline{Ric}(\nu)-\overline{K}(e_1,\nu)\right]ds\\ &+\int_0^l f^2\left[|A|^2+nHh_{11}-\sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]ds,\end{aligned}$$

por conseguinte,

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{4}{5-n}\right)-\frac{(n-3)^2}{4(5-n)4^{-1}}\right]\int_0^l\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds &\geq \left(\frac{5-n}{4}\right)\int_0^l f^2\left(\frac{d\log u}{ds}\right)^2 ds\\ &+(n-3)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds\\ &+\int_0^l f^2\left[\overline{Ric}(e_1)+\overline{Ric}(\nu)-\overline{K}(e_1,\nu)\right]ds\\ &+\int_0^l f^2\left[|A|^2+nHh_{11}-\sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]ds.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{4}{(5-n)}\int_0^l\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds &\geq \frac{(n-3)^2}{4(5-n)4^{-1}}\int_0^l\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds\\ &+(n-3)\int_0^l f\frac{df}{ds}\frac{d\log u}{ds}ds+\left(\frac{5-n}{4}\right)\int_0^l f^2\left(\frac{d\log u}{ds}\right)^2\\ &+\int_0^l f^2\left[\overline{Ric}(e_1)+\overline{Ric}(\nu)-\overline{K}(e_1,\nu)\right]ds\\ &+\int_0^l f^2\left[|A|^2+nHh_{11}-\sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right]ds.\end{aligned}$$

Seja $\vartheta = \left(\frac{5-n}{4}\right) > 0,\ n = 3, 4$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(5-n)}\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \ \geq\ & \frac{(n-3)^2}{4\vartheta}\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \\
&+ \int_0^l 2\frac{(n-3)}{2\sqrt{\vartheta}}\frac{df}{ds}\sqrt{\vartheta} f \frac{d\log u}{ds} ds \\
&+ \int_0^l \vartheta f^2 \left(\frac{d\log u}{ds}\right)^2 ds \\
&+ \int_0^l f^2 \left[\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1,\nu)\right] ds \\
&+ \int_0^l f^2 \left[|A|^2 + nHh_{11} - \sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right] ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(5-n)}\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \ \geq\ & \int_0^l \left(\frac{(n-3)}{2\sqrt{\vartheta}}\frac{df}{ds} + \sqrt{\vartheta} f \frac{d\log u}{ds}\right)^2 ds \\
&+ \int_0^l f^2 \left[\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1,\nu)\right] ds \\
&+ \int_0^l f^2 \left[|A|^2 + nHh_{11} - \sum_{j=1}^n h_{1j}^2\right] ds. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema 3.2,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(5-n)}\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \ \geq\ & \int_0^l f^2 \left[\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1,\nu)\right] ds \\
&+ \int_0^l f^2 \left(\frac{n^2(5-n)H^2}{4}\right) ds,
\end{aligned}$$

como afirmamos.

Afirmamos que o comprimento l de $\widetilde{c}$ na métrica ds^2 é uniformemente limitado superiormente. De fato, por hipótese

$$\overline{Ric}(e_1) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(e_1,\nu) \geq \sigma.$$

Logo,

$$\frac{4}{(5-n)}\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \geq \int_0^l \left(\sigma + \frac{n^2(5-n)H^2}{4}\right) f^2 ds.$$

Sejam $D = \dfrac{4}{(5-n)}$ e $B = \left(\sigma + \dfrac{n^2(5-n)H^2}{4}\right)$.

Daí,

$$\int_0^l Bf^2 ds - \int_0^l D\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \leq 0.$$

Integremos $\displaystyle\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds$ por partes.

Sejam $U = \dfrac{df}{ds}$ e $dv = \dfrac{df}{ds}ds$. Então $dU = \dfrac{d^2f}{ds^2}ds$ e $v = f$.

Assim,

$$\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds = \frac{df}{ds}f\Bigg|_0^l - \int_0^l f\frac{d^2f}{ds^2}ds.$$

Como $f(0) = f(l) = 0$, então

$$\int_0^l \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds = -\int_0^l f\frac{d^2f}{ds^2}ds.$$

Logo,

$$\int_0^l Bf^2 ds + \int_0^l D\left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \leq 0,$$

isto é,

$$\int_0^l \left(\frac{d^2f}{ds^2}D + Bf\right) f ds \leq 0.$$

Agora, escolhemos $f = sen\left(\dfrac{\pi s}{l}\right)$, $0 \leq s \leq l$. Daí,

$$\frac{df}{ds} = cos\left(\frac{\pi s}{l}\right)\frac{\pi}{l}$$

e

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = -sen\left(\frac{\pi s}{l}\right)\left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Logo,

$$\int_0^l \left[-sen\left(\frac{\pi s}{l}\right)\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D + Bsen\left(\frac{\pi s}{l}\right)\right] sen\left(\frac{\pi s}{l}\right) \leq 0.$$

Assim,

$$\int_0^l \left[-sen^2\left(\frac{\pi s}{l}\right)\left(\frac{\pi^2}{l^2}\right) D + Bsen^2\left(\frac{\pi s}{l}\right)\right] ds \leq 0,$$

ou seja,

$$\int_0^l \left[B - \frac{D\pi^2}{l^2}\right] sen^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) ds \leq 0.$$

Portanto,

$$\left[B - \frac{D\pi^2}{l^2}\right] \leq 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} l &\leq \frac{\sqrt{D}\pi}{\sqrt{B}} \\ &= \frac{\sqrt{4(5-n)^{-1}}\pi}{\sqrt{\sigma + \frac{n^2(5-n)H^2}{4}}} \end{aligned}$$

Logo,

$$l \leq \frac{2\pi}{\sqrt{5-n}\sqrt{\sigma + \frac{n^2(5-n)H^2}{4}}}$$

como afirmamos.

Assim, toda geodésica minimizante em $M|_\Omega$ na métrica $d\tilde{s}^2$ tem comprimento uniformemente limitado na métrica ds^2. Contradição. Portanto, M é compacta.

$\square$

Teorema 3.3. *Sejam $N^{n+1}(n = 3,4)$ uma variedade completa de dimensão $(n+1)$ com curvatura seccional $\overline{K} \geq -\tau$, $\tau \geq 0$, e M uma hipersuperfície completa com curvatura média constante H diferente de zero e índice finito imersa em N. Se H satisfaz $H^2 > \frac{10}{9}\tau$, quando $n = 3$ ou $H^2 > \frac{7}{4}\tau$, quando n=4, então M é compacta.*

Prova: Sejam $w \in T_pM$, $|w| = 1$ e $\{w, e_1, ..., e_n\}$, $\{\nu, f_1, ..., f_n\}$ bases ortonormais de T_pM, onde $\nu \in (T_pM)^\perp$. Então

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(w) + \overline{Ric}(v) - \overline{K}(w,\nu) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{K}(w, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{K}(\nu, f_i) - \overline{K}(w,\nu) \\ &\geq -n\tau - n\tau - (-\tau) \\ &= -(2n-1)\tau.\end{aligned}$$

Assim, por hipótese, temos que se $n = 3$,

$$\begin{aligned} inf\{\overline{Ric}(w) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(w,\nu)\} &\geq -5\tau \\ &> -\frac{5 \cdot 9}{10}H^2 \\ &= -\frac{9}{2}H^2 \\ &= -\frac{3^2(5-3)}{4}H^2 \end{aligned}$$

e se $n = 4$,

$$\begin{aligned} inf\{\overline{Ric}(w) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(w,\nu)\} &\geq -7\tau \\ &> -4H^2 \\ &= -\frac{4^2(5-4)}{4}H^2. \end{aligned}$$

Portanto, se $n = 3$ ou $n = 4$, obtemos

$$inf\{\overline{Ric}(w) + \overline{Ric}(\nu) - \overline{K}(w,\nu)\} \geq -\frac{n^2(5-n)}{4}H^2.$$

Logo, pelo Teorema 3.1, M é compacta.

$\square$

Como casos particulares do Teorema 3.3, temos:

Corolário 3.4. *Seja N uma variedade completa de dimensão 4 ou 5 com curvatura seccional não negativa. Então toda hipersuperfície completa M com curvatura média constante diferente de zero e índice finito em N é compacta.*

Prova: Com efeito, como $\overline{K} \leq 0$, escolhendo $\tau = 0$, temos que H satisfaz $H^2 > 0$ e portanto satisfaz às hipóteses do Teorema 3.3. Logo, M é compacta. □

Corolário 3.5. *Toda hipersuperfície M completa com índice finito e curvatura média constante H satisfazendo $H^2 > \frac{10}{9}$ ($H^2 > \frac{7}{4}$ respectivamente) no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^4(-1)$ ($\mathbb{H}^5(-1)$ respectivamente é compacta.*

Prova: De fato, como neste caso $\overline{K} = -1$, escolhendo $\tau = 1$, temos que H satisfaz $H^2 > \frac{10}{9}$, quando $n = 3$ ou $H^2 > \frac{7}{4}$, quando $n = 4$ e portanto satisfaz às hipóteses do Teorema 3.3. Logo, M é compacta. □

O Teorema seguinte é uma conseqüência do Corolário 3.4.

Teorema 3.6. *Toda hipersuperfície completa M, não compacta com curvatura média constante H e índice finito no espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{R}^5$ é mínima.*

Prova: De fato, como M é completa, com curvatura média constante, índice finito e curvatura seccional não negativa (pois $\overline{K} = 0$ em $\mathbb{R}^n$) segue do Corolário 3.4 que $H = 0$. □

Apresentamos agora a prova de M.F.Elbert, B.Nelli e H.Rosenberg [9] para o Teorema 3.3, que é muito similar à demonstração do Teorema 3.1.

Teorema 3.7. *Sejam N uma variedade Riemanniana de dimensão $n+1$ ($n = 3, 4$) com curvatura seccional uniformemente limitada inferiormente e M uma variedade completa, estável e com curvatura média constante H imersa em N. Existe uma constante $c = c(n, H, sec(N))$ tal que para todo $p \in M$, $dist(p, \partial M) \leq c$ qualquer que seja H satisfazendo $|H| > 2\sqrt{|min\{0, sec(\mathcal{N})\}|}$, tal que $sec(N)$ denota o ínfimo das curvaturas seccionais de N.*

Prova: Denotemos por ds^2 a métrica em M induzida pela imersão em N e seja $d\tilde{s}^2 = u^{2k}ds^2$ a métrica conforme em M, com $\frac{5(n-1)}{4n} \leq k \leq \frac{4}{n-1}$, $n = 3, 4$. Consideremos $p \in M$ e seja

$r > 0$ tal que a bola intrínseca B_r de M na métrica ds^2, de raio r centrada em $p \in M$. esteja contida no interior de M. Sejam $\gamma \in B_r$ uma geodésica minimizante na métrica $d\widetilde{s}^2$ ligando p a ∂B_r e a o comprimento de γ na métrica ds^2. Então $a \geq r$ e é suficiente provar que existe uma constante $c(n, H, sec(N))$ tal que $a \leq c$. Sejam R e $\widetilde{R}$ os tensores curvatura de M nas métricas ds^2 e $d\widetilde{s}^2$, respectivamente. Escolhamos uma base ortonormal $\{\widetilde{e_1} = \frac{\partial\gamma}{\partial\widetilde{s}}, \widetilde{e_2}, ..., \widetilde{e_n}\}$ para a métrica $d\widetilde{s}^2$, tal que $\widetilde{e_2}, ..., \widetilde{e_n}$ são paralelos ao longo de γ e seja $\widetilde{e}_{n+1} = \eta$. A base $\{e_1 = \frac{\partial\gamma}{\partial s} = u^k\widetilde{e}_1, e_2 = u^k\widetilde{e}_2, ..., e_n = u^k\widetilde{e}_n\}$ é ortonormal para a métrica ds^2. Denotemos por R_{11} e $\widetilde{R}_{11}$ as curvaturas de Ricci na direção de e_1 para as métricas ds^2 e $d\widetilde{s}^2$, respectivamente. Seja $\widehat{R}$ o tensor curvatura da variedade ambiente N e escrevamos $Ric(\eta) = \widehat{R}_{n+1}$.
Como $\dfrac{d}{d\widetilde{s}} = \dfrac{1}{u^k}\dfrac{d}{ds}$, por cálculos análogos aos da prova do Teorema 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{11} &= u^{-2k}\left\{R_{11} - k(n-2)\frac{d^2 logu}{ds^2} + k(|\phi|^2 + nH^2)\right\} \\ &\quad + u^{-2k}\left\{k\widehat{R}_{n+1,n+1} + k\frac{|\nabla u|^2}{u^2}\right\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Da equação de Gauss, temos que

$$R_{ijij} = \widehat{R}_{ijij} + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2, \tag{3.21}$$

onde $h_{ij} =< B(e_i, e_j), N >$.

Como $\phi = A - HI$ e $Ae_i = h_{ii}e_i$, então

$$\begin{aligned} \phi(e_i) &= Ae_i - HIe_i \\ &= h_{ii}e_i - He_i \\ &= (h_{ii} - H)e_i. \end{aligned}$$

Mas $\phi_{ij} = h_{ij} - H\delta_{ij}$. Logo, $\phi_{ii} = hii - H$, ou seja, $h_{ii} = \phi_{ii} + H$. Assim,

$$R_{ijij} = \widehat{R}_{ijij} + (\phi_{ii} + H)(\phi_{jj} + H) - (\phi_{ii} + H\delta_{ij})^2.$$

Tomando $i = 1$ e $j = 2, ..., n$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n} R_{1j1j} &= \sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} + (\phi_{11} + H) \sum_{j=2}^{n} (\phi_{jj} + H) - \sum_{j=2}^{n} (\phi_{1j} H \delta_{1j})^2 \\
&= \sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} + (\phi_{11} + H) \left(\sum_{j=1}^{n} \phi_{jj} - \phi_{11} + (n-1)H \right) - \sum_{j=2}^{n} (\phi_{1j})^2.
\end{aligned}
$$

Mas $\sum_{j=1}^{n}(\phi_{jj}) = 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} + (\phi_{11} + H)(-\phi_{11} + (n-1)H) \\
&\quad - \sum_{j=2}^{n} (\phi_{1j})^2 \\
&= \sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} - (\phi_{11})^2 + (n-1)H\phi_{11} + (n-1)H^2 \\
&\quad - H\phi_{11} - \sum_{j=2}^{n} (\phi_{1j})^2 \\
&= \sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} - (\phi_{11})^2 + (n-2)H\phi_{11} + (n-1)H^2 \\
&\quad - \sum_{j=2}^{n} (\phi_{1j})^2. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (3.22) na equação (3.20), temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}_{11} &= u^{-2k} \left[\sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} - (\phi_{11})^2 + (n-2)H\phi_{11} + (n-1)H^2 - \sum_{j=2}^{n} (\phi_{1j})^2 \right] \\
&\quad + u^{-2k} \left[-k(n-2)(\log u)_{ss} + k|\phi|^2 + knH^2 \right] \\
&\quad + u^{-2k} \left[k\widehat{R}_{n+1,n+1} + k\frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right] \\
&= u^{-2k} \left[\sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} + k\widehat{R}_{n+1,n+1} + (kn + n - 1)H^2 + (n-2)H\phi_{11} \right] \\
&\quad + u^{-2k} \left[k|\phi|^2 - (\phi_{11})^2 - \sum_{j=2}^{n} (\phi_{1j})^2 \right] \\
&\quad + u^{-2k} \left[-k(n-2)(\log u)_{ss} + k\frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right]. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Como

$$
(n-1) \int_0^{\widetilde{r}} \left(\frac{d\varphi}{d\widetilde{s}} \right)^2 \geq \int_0^{\widetilde{r}} \widetilde{R}_{11} \varphi^2 ds, \qquad (3.24)
$$

então substituindo a equação (3.23) na desigualdade (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 u^{-k} ds \;\geq\; & \int_0^a \varphi^2 u^{-k}\left[\sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} + k\widehat{R}_{n+1,n+1}\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 u^{-k}\left[(kn+n-1)H^2 + (n-2)H\phi_{11}\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 u^{-k}\left[k|\phi|^2 - (\phi_{11})^2 - \sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2\right] ds \\
& - \int_0^a \varphi^2 u^{-k} k(n-2)(\log u)_{ss} ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 u^{-k} k\frac{|\nabla u|^2}{u^2} ds. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Por cálculos análogos aos da prova do Teorema 3.1, trocamos φ por $\varphi u^{\frac{k}{2}}$ para tirar u^k do denominador e denotamos por

$$m = (n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds,$$

$$n = k(n-1)\int_0^a \varphi\varphi_s u_s u^{-1} ds$$

e

$$q = \frac{k^2(n-1)}{4}\int_0^a \varphi^2 (u_s)^2 u^{-2} ds.$$

Assim, a desigualdade (3.25) é equivalente a

$$\begin{aligned}
m+n+q \;\geq\; & \int_0^a \varphi^2\left[\sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} + k\widehat{R}_{n+1,n+1}\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2\left[(kn+n-1)H^2 + (n-2)H\phi_{11}\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2\left[k|\phi|^2 - (\phi_{11})^2 - \sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2\right] ds \\
& - \int_0^a \varphi^2\left[k(n-2)(\log u)_{ss} - k\frac{|\nabla u|^2}{u^2}\right]. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\int_0^a \varphi^2(\log u)_{ss} ds = -2\int_0^a \varphi\varphi_s \frac{u_s}{u} ds.$$

Como

$$\begin{aligned}\int_0^a \varphi^2 (u_s)^2 u^{-2} ds &= \int_0^a \varphi^2 (\log u)_s^2 ds \\ &= \int_0^a \varphi^2 \frac{1}{k^2} (k \log u)_s^2 ds \\ &= \frac{1}{k^2} \int_0^a \varphi^2 (\log u^k)_s^2 ds,\end{aligned}$$

substituindo na desigualdade (3.26), obtemos

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds &\geq k(n-3)\int_0^a \varphi\varphi_s u_s u^{-1} ds - \frac{(n-1)}{4}\varphi^2 (\log u^k)_s^2 ds \\ &+k\int_0^a \varphi^2 \frac{|\nabla u|^2}{u^2} ds + \int_0^a \varphi^2 \left[k\widehat{R}_{n+1,n+1} + \sum_{j=2}^n \widehat{R}_{1j1j}\right] ds \\ &+ \int_0^a \varphi^2 \left[(kn+n-1)H^2 + (n-2)H\phi_{11}\right] ds \\ &+ \int_0^a \varphi^2 \left[k|\phi|^2 - (\phi_{11})^2 - \sum_{j=2}^n (\phi_{1j})^2\right] ds. \qquad (3.27)\end{aligned}$$

Mas, $|\nabla u|^2 = u_s^2$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^a \varphi^2 \frac{|\nabla u|^2}{u^2} ds &= \int_0^a \varphi^2 \frac{u_s^2}{u^2} ds \\ &= \frac{1}{k^2}\int_0^a \varphi^2 k^2 \left(\frac{u_s}{u}\right) ds \\ &= \frac{1}{k^2}\int_0^a \varphi^2 (k\log u)_s^2 ds = \frac{1}{k^2}\int_0^a \varphi^2 (\log u^k)_s^2 ds.\end{aligned}$$

Logo,

$$k\int_0^a \varphi^2 \frac{|\nabla u|^2}{u^2} ds = \frac{1}{k}\int_0^a \varphi^2 (\log u^k)_s^2 ds.$$

Então, a desigualdade (3.27) torna-se

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \;\geq\; & k(n-3)\int_0^a \varphi\varphi_s u_s u^{-1} ds \\
& + \left[\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right] \varphi^2 (\log u^k)_s^2 ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 \left[k\widehat{R}_{n+1,n+1} + \sum_{j=2}^n \widehat{R}_{1j1j}\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 \left[(kn+n-1)H^2 + (n-2)H\phi_{11}\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 \left[k|\phi|^2 - (\phi_{11})^2 - \sum_{j=2}^n \phi_{1j}^2\right] ds. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Agora usamos que $a^2 + b^2 \geq -2ab$, com $a = (n-2)H$ e $b = \dfrac{\phi_{11}}{2}$. Daí,

$$(n-2)^2 H^2 + \frac{\phi_{11}^2}{4} \geq -(n-2)H\phi_{11},$$

ou seja,

$$(n-2)H\phi_{11} \geq (-n^2 + 4n - 4)H^2 - \frac{\phi_{11}^2}{4}.$$

Substituindo na desigualdade (3.28), obtemos

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \;\geq\; & k(n-3)\int_0^a \varphi\varphi_s u_s u^{-1} ds \\
& + \left[\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right] \varphi^2 (\log u^k)_s^2 ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 \left[k\widehat{R}_{n+1,n+1} + \sum_{j=2}^n \widehat{R}_{1j1j}\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 \left[(kn+n-1)H^2 + (-n^2+4n-4)H^2\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 \left[-\frac{\phi_{11}^2}{4} - \phi_{11}^2 + k|\phi|^2 - \sum_{j=2}^n \phi_{1j}^2\right] ds \\
\geq\; & k(n-3)\int_0^a \varphi\varphi_s u_s u^{-1} ds \\
& + \left[\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right] \varphi^2 (\log u^k)_s^2 ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 \left[k\widehat{R}_{n+1,n+1} + \sum_{j=2}^n \widehat{R}_{1j1j} + (kn - n^2 + 5n - 5)H^2\right] ds \\
& + \int_0^a \varphi^2 \left[k|\phi|^2 - \frac{5}{4}\phi_{11}^2 - \sum_{j=2}^n \phi_{1j}^2\right] ds. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Vamos provar que o último termo da desigualdade (3.29) é maior ou igual a zero.

Por cálculos análogos aos da prova do lema 3.2, temos

$$|\phi|^2 \geq \frac{n}{(n-1)}\phi_{11}^2 + 2\sum_{j=2}^{n}\phi_{1j}^2. \tag{3.30}$$

Como $k \geq \dfrac{5(n-1)}{4n}$ e usando a desigualdade (3.30), obtemos

$$k|\phi|^2 \geq k\frac{n}{(n-1)}\phi_{11}^2 + 2k\sum_{j=2}^{n}\phi_{1j}^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
k|\phi|^2 - \frac{5}{4}(\phi_{11})^2 - \sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2 &\geq \frac{5(n-1)}{4n}\frac{n}{(n-1)}(\phi_{11})^2 + 2\frac{5(n-1)}{4n}\sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2 \\
&\quad -\frac{5}{4}(\phi_{11})^2 - \sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2 \\
&\geq \frac{5}{4}(\phi_{11})^2 + \frac{5(n-1)}{2n}\sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2 \\
&\quad -\frac{5}{4}(\phi_{11})^2 - \sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2 \\
&\geq \frac{5(n-1)}{2n}\sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2 - \sum_{j=2}^{n}(\phi_{1j})^2 \\
&= \frac{3n-5}{2n}\sum_{j=2}^{n}\phi_{1j}^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, a desigualdade (3.29) é equivalente a

$$\begin{aligned}
(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds &\geq (n-3)\int_0^a \varphi\varphi_s(\log u^k)_s ds \\
&\quad + \left[\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right]\int_0^a \varphi^2(\log u^k)_s^2 ds \\
&\quad + \int_0^a \varphi^2\left[k\widehat{R}_{n+1,n+1} + \sum_{j=2}^{n}\widehat{R}_{1j1j}\right] ds \\
&\quad + \int_0^a \varphi^2\left[(kn - n^2 + 5n - 5)H^2\right] ds.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Usamos agora que $a^2 + b^2 \geq -2ab$, com

$$a = \left(\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi(\log u^k)_s$$

e

$$b = \frac{(n-3)}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right)^{\frac{-1}{2}} \varphi_s$$

para obtermos

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right)\varphi^2(\log u^k)_s^2 + \frac{(n-3)^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right)^{-1}\varphi_s^2$$
$$\geq -(n-3)\varphi\varphi_s(\log u^k)_s,$$

ou seja,

$$(n-3)\int_0^a \varphi\varphi_s(\log u^k)_s ds + \left(\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right)\varphi_s^2\int_0^a \varphi\varphi_s(\log u^k)_s ds$$
$$\geq -\frac{(n-3)^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right)^{-1}\int_0^a \varphi_s^2 ds$$

Da última desigualdade junto com a desigualdade (3.31), temos

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^a (\varphi_s)^2 ds \;\; \geq \;\; & -\frac{(n-3)^2}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{(n-1)}{4}\right)^{-1}\int_0^a \varphi_s^2 ds \\ & + \int_0^a \varphi^2\left[(kn - n^2 + 5n - 5)H^2\right] ds \\ & + \int_0^a \varphi^2\left[k\widehat{R}_{n+1,n+1} + \sum_{j=2}^{n}\widehat{R}_{1j1j}\right] ds. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Seja

$$\begin{aligned} A &= \frac{(n-3)^2}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{(n-1)}{4}\right)^{-1}+(n-1) \\ &= \frac{(n-3)^2}{4}\left(\frac{4-k(n-1)}{4k}\right)^{-1}+(n-1) \\ &= \frac{(n-3)^2k}{4-k(n-1)}+(n-1) \\ &= \frac{(n-3)k+(4-k(n-1))(n-1)}{4-k(n-1)} \\ &= \frac{(n-3)^2k+4(n-1)-k(n-1)^2}{4-k(n-1)} \\ &= \frac{-4nk+8k+4(n-1)}{4-k(n-1)} \\ &= \frac{4[k(2-n)+(n-1)]}{4-k(n-1)}. \end{aligned}$$

Observamos que A é positiva, pois como $k < \dfrac{4}{(n-1)} \leq \dfrac{n-1}{n-2}$, então

$$k(n-2) \leq (n-1), \text{ ou seja, } k(2-n)+(n-1) \geq 0.$$

e

$$k(n-1) < 4, \text{ ou seja, } 4-k(n-1) > 0$$

Fazendo uma escolha conveniente da constante positiva B, podemos reescrever a desigualdade (3.32) como

$$A\int_0^a \varphi_s^2 ds \geq B\int_0^a \varphi^2 ds. \tag{3.33}$$

Queremos escolher B tal que

$$0 \leq B \leq (kn-n^2+5n-5)H^2+\left(k\widehat{R}_{n+1,n+1}+\sum_{j=2}^{n}\widehat{R}_{1j1j}\right).$$

Quando a curvatura da variedade ambiente é não-negativa, escolhemos $B=(kn-n^2+5n-5)H^2$, que é positiva se $H \neq 0$. Neste caso, $|H|>0$ e podemos escolher $\rho=0$. Caso contrário, como

$$K(e_i,e_j)=\frac{R(e_i,e_j,e_i,e_j)}{|e_i\wedge e_j|^2},\ |e_i\wedge e_j|^2=1,$$

então

$$\sum_{j=2}^{n} K(e_i,e_j) \geq (n-1)\inf\{\text{curvaturas seccionais de } N\}$$

e como

$$\widehat{R}_{n+1,n+1} \geq n.\inf\{\text{curvaturas seccionais de } N\},$$

então

$$\begin{aligned} k\widehat{R}_{n+1,n+1} + \sum_{j=2}^{n} \widehat{R}_{1j1j} &\geq (kn+n-1)\inf\{\text{curvaturas seccionais de } N\} \\ &= (kn+n-1)sec(N), \end{aligned}$$

e escolhemos

$$B = (kn - n^2 + 5n - 5)H^2 + (kn + n - 1)sec(N).$$

Se

$$H^2 > \frac{-(kn+n-1)}{(kn-n^2+5n-5)} sec(N),$$

então B é positiva. Usando as restriçoes em k, $\frac{5(n-1)}{4n} \leq k \leq \frac{4}{n-1}$, $n = 3, 4$, obtemos $\dfrac{(kn+n-1)}{(kn-n^2+5n-5)} < 4$. De fato, para $n = 3$ temos que $\frac{5}{6} \leq k < 2$. Logo,

$$\frac{3k+2}{3k+1} < 4 \Leftrightarrow 3k+2 < 12k+4 \Leftrightarrow k > \frac{-2}{9},$$

pois $\frac{-2}{9} < \frac{5}{6} \leq k < 2$. E para $n = 4$, temos que $\frac{15}{16} \leq k < \frac{4}{3}$. Logo,

$$\frac{4k+3}{4k-1} < 4 \Leftrightarrow 4k+3 < 16k-4 \Leftrightarrow k > \frac{7}{12},$$

pois $\frac{7}{12} < \frac{15}{16} \leq k < \frac{4}{3}$.

Neste caso, $|H| > 2\sqrt{|sec(\mathcal{N})|}$ e podemos escolher $\rho = 2\sqrt{|sec(\mathcal{N})|}$.

Por cálculos análogos aos da prova do Teorema 3.1,

$$\int_0^a (\varphi_{ss}A + B\varphi)\varphi ds \leq 0.$$

Escolhendo $\varphi = sen(\pi s a^{-1}),\ s \in [0, a]$, temos

$$\left[B - \frac{(A\pi)^2}{a^2}\right] \leq 0,$$

ou seja,

$$a \leq \frac{\sqrt{A}\pi}{\sqrt{B}}.$$

Como queremos provar que $a \leq c$, seja $c = \dfrac{\sqrt{A}\pi}{\sqrt{B}}$.
Assim,

$$c = \frac{2\pi\sqrt{k(2-n)+(n-1)}}{\sqrt{(4-k(n-1))[(kn-n^2+5n-5)H^2+(kn+n-1)min\{0, sec((N))\}]}}.$$

$\square$

O corolário seguinte é um caso particular do Teorema 3.7.

Corolário 3.8. *Seja $M^n \subset N^{n+1}$ uma subvariedade completa estável com curvatura média constante H. Se $n = 3,\ 4$ e $|H| > 2\sqrt{|min\{0, sec(N)\}|}$, então $\partial M \neq \emptyset$.*

Prova: Assuma que tal M existe. Na prova do Teorema 3.7, mostramos que o raio de um disco intrínseco de M que não toca em ∂M é menor ou igual a c. Portanto, quando $\partial M = \emptyset$, o diâmetro de M é menor ou igual a c e então M é compacta. Como M é estável, existe uma função positiva f em M tal que $L(f) = 0$. Assim, $L(f) = (\triangle + |\phi|^2 + nH^2 + \widehat{R}_{n+1,n+1})(f) = 0$. Seja p um mínimo da função f. Daí, em p temos:

$$0 \leq \triangle f(p) = -(|\phi|^2(p) + nH^2 + \widehat{R}_{n+1,n+1}(p))(f(p)). \tag{3.34}$$

Como $|H| > 2\sqrt{|min\{0, sec(N)\}|}$, então $(|\phi|^2 + nH^2 + \widehat{R}_{n+1,n+1})$ é estritamente positivo em M. Portanto, a desigualdade (3.34) nos dá uma contradição. Logo, $\partial M \neq \emptyset$. □

Referências Bibliográficas

[1] H. Alencar e M. do Carmo, *Hypersurfaces of constant mean curvature with finite index and volume of polynomial growth*, Arch. Math. **65** (1995), 271-272.

[2] L. J. Alías, *On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurfaces in spheres*, Revista de la Unión Matemática Argentina **47** (2006), 39-61.

[3] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, IMPA, Brasil (1988).

[4] M. Do Carmo e D. Zhou, Eigenvalue estimate on complete noncompact Riemannian manifolds and applications, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 1391-1401.

[5] I. Chavel, *Riemannian Geometry: a modern introduction*, Cambridge University Press, New York, (1993).

[6] X. Cheng, *On constant mean curvature hypersurfaces with finite index*, Arch. Math. **86** (2006), 365-374.

[7] S. S. Chern, *On the curvatures of a piece of hypersurface in Euclidean space*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **29** (1965), 77-91.

[8] D. Fischer-Colbrie, *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 121-132.

[9] M. F. Elbert, B. Nelli e H. Rosenberg, *Stable constant mean curvature hypersurfaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **135** (2007), 3359-3366.

[10] P. Li e J. P. Wang, *Minimal hypersurfaces with finite index*, Math. Res. Lett. **9** (2002), 95-103.

[11] F. Lopez e A. Ros, *Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces*, Comm. Math. Helvetici **64** (1989), 34-43.

[12] R. Schoen e S. T. Yau, *Lectures on differential geometry. In: Conference Proeedings and Lecture Notes in Geometry and Topology*, I. Cambridge, MA 1994.