

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E
ESTATÍSTICA

KALINE ANDREZA DE FRANÇA CORREIA ANDRADE

PERCOLAÇÃO EM UMA REDE MULTIFRACTAL

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Modelagem Matemática

LINHA DE PESQUISA: Física Matemática

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira

NATAL/RN

2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

KALINE ANDREZA DE FRANÇA CORREIA ANDRADE

PERCOLAÇÃO EM UMA REDE MULTIFRACTAL

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística - CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Estatística.

NATAL, AGOSTO de 2009

EXAMINADORES INTERNOS:

Prof. Dr. MARCELO GOMES PEREIRA (UFRN)

Prof. Dr. ROBERTO HUGO BIELSCHOWSKY (UFRN)

Prof. Dr. ROOSEWELT FONSECA SOARES (UFRN)

EXAMINADOR EXTERNO:

Prof. Dr. EDEMERSON SOLANO BATISTA DE MORAIS (IFRN)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me concedido a benção de ingressar no PPGMAE e de obter o título de mestre. Agradeço também, a todos os professores, pela paciência que tiveram comigo, e ao meu orientador, pela infinita compreensão e apoio. A minha mãe, Dona Maria de Lourdes e ao meu esposo, pelo amor, incentivo moral e psicológico. Agradeço aos meus colegas do curso, dos quais vários viraram amigos, por proporcionarem sempre momentos de preciosa descontração e troca de conhecimentos. E, finalmente, agradeço a Lucas, um presente que Deus me deu, pelas brincadeiras entre uma digitação e outra, promovendo intervalos “forçados” mas, nem por isso, menos prazerosos.

Dedicatória

Ao Senhor e Salvador da minha vida, Jesus Cristo, e aos homens da minha vida: meu pai (Sr. Valdemir), meu esposo (Joás) e meu filho (Lucas).

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma coletânea dos principais fractais, observamos suas propriedades, método de construção, e a classificação entre fractais auto-similares, auto-afins e fractais aleatórios, comparando-os a elementos da Geometria Euclidiana. Evidenciamos a importância da Geometria Fractal na análise de vários elementos da nossa realidade.

Enfatizamos a importância de uma definição adequada de dimensão para estes objetos pois, a tradicional definição de dimensão que conhecemos, não reflete satisfatoriamente as propriedades dos fractais. Como instrumentos para a obtenção dessas dimensões, são apresentados os Métodos de Contagem de Caixas, de Hausdorff-Besicovitch e de Escala.

Estudamos o Processo de Percolação na rede quadrada, comparando-o à percolação no objeto Multifractal Q_{mf} . Desta comparação, verifica-se algumas diferenças entre esses dois processos: na rede quadrada o número de coordenação c é fixo, em Q_{mf} é variável; cada célula no multifractal Q_{mf} pode afetar de maneira diferente o aglomerado percolante e, o limiar de percolação p_c em Q_{mf} , é menor do que na rede quadrada.

Analisamos o gráfico do histograma das redes percolantes versus a probabilidade de ocupação p e, dependendo do parâmetro ρ e do tamanho da rede L , o histograma pode apresentar estatística bimodal.

Motramos que se pode estimar a dimensão fractal do aglomerado percolante. Percebemos que o processo de percolação num suporte multifractal está muito próximo à percolação na rede quadrada, além disso, a área dos blocos de Q_{mf} varia e p_c é uma função de ρ , o qual está intimamente ligado a anisotropia do multifractal em estudo.

Palavras-chaves: Fractais, Multifractais, Percolação, Anisotropia.

Abstract

In this work we present the principal fractals, their characteristics, properties and their classification, comparing them to Euclidean Geometry Elements. We show the importance of the Fractal Geometry in the analysis of several elements of our society.

We emphasize the importance of an appropriate definition of dimension to these objects, because the definition we presently know doesn't see a satisfactory one. As an instrument to obtain these dimensions we present the Method to count boxes, of Hausdorff-Besicovich and the Scale Method.

We also study the Percolation Process in the square lattice, comparing it to percolation in the multifractal subject Q_{mf} , where we observe some differences between these two processes.

We analyze the histogram graphic of the percolating lattices *versus* the site occupation probability p , and other numerical simulations.

And finally, we show that we can estimate the fractal dimension of the percolation cluster and that the percolation in a multifractal support is in the same universality class as standard percolation. We observe that the area of the blocks of Q_{mf} is variable, p_c is a function of ρ which is related to the anisotropy of Q_{mf} .

Key-words: Fractals, Multifractals, Percolation, Anisotropy.

Lista de Figuras

1.1	<i>Conjunto de Mandelbrot</i> criado por Wolfgang Beyer com o programa Ultra Fractal 3.	11
1.2	Detalhe do <i>Conjunto de Mandelbrot</i> da figura 1.1.	12
1.3	Construção do conjunto de Cantor C desde C_0 chamado iniciador e C_1 chamado gerador. Observe que C_E e C_D são as partes da esquerda e da direita, respectivamente, são réplicas de C escaladas pelo fator $1/3$	15
1.4	Construção da curva de Koch F , desde F^0 , chamado iniciador e F^1 chamado gerador. Em cada estágio, o terço aberto do meio de cada intervalo é substituído pelos outros dois lados de um triângulo equilátero [4].	18
1.5	Curva de Koch conhecida como <i>Fractal Floco de Neve</i> . Em F_0 temos um triângulo equilátero, F_1 , com uma iteração, F_2 , com duas iterações, é o estágio dois, e assim sucessivamente até o estágio quatro F é a curva <i>Floco de Neve</i> [4].	19
1.6	Construção do Triângulo de Sierpinski E , desde E_0 , chamado de iniciador, e E_1 , chamado de gerador. Este conjunto apresenta duas características comuns aos fractais: <i>simetria</i> e <i>auto-similaridade</i>	22
1.7	Tapete de Sierpinkki	24
1.8	Construção de uma “poeira de Cantor” P	27
1.9	Construção de uma “poeira de Cantor” P	28
1.10	Construção de um fractal auto-similar B com duas diferentes razões de similaridade.	29
1.11	Fractal esponja de Menger.	31
1.12	A esponja de Menger é obtida a partir do iniciador, $M_0 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ e do gerador M_1 . No limite, obtemos M [4].	31
1.13	Construção de um fractal auto-afim.	35
1.14	Construção de um fractal auto-afim.	35
1.15	Construção do <i>Conjunto de Cantor aleatório</i>	36
1.16	Curva de Koch aleatória [6].	39

2.1	Gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$ versus s para um conjunto F . A dimensão de Hausdorff é o valor de s no qual ocorre o “salto” de ∞ para 0.	43
2.2	Gráfico da medida s -dimensional de Hausdorff do conjunto de Cantor C , $\mathcal{H}^s(C)$ versus s . A dimensão de Hausdorff de C , $\dim_{\mathcal{H}}C$, é o valor de $s = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309\dots$ no qual $\mathcal{H}^s(C)$, ‘salta’ de <i>infinito</i> para zero.	46
2.3	Gráfico da medida s -dimensional de Hausdorff da curva de Koch F , $\mathcal{H}^s(F)$ versus s . A dimensão de Hausdorff de F , $\dim_{\mathcal{H}}F$, é o valor de $s = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618\dots$ no qual $\mathcal{H}^s(F)$, ‘salta’ de <i>infinito</i> para zero.	48
2.4	Três formas diferentes de encontrar a dimensão de contagem de caixas de um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ [4].	50
2.5	Mapa da Noruega.	51
2.6	Contorno do litoral sul da Noruega. A malha quadrada que é mostrada tem um espaçamento $\delta \sim 50km$ [9].	52
3.1	Construção da medida auto-similar do <i>Conjunto de Cantor</i>	60
4.1	Rede quadrada 10×10 . Em (a), $p = 0$, os sítos estão desocupados. Em (b) e (c), os sítos vermelhos estão ocupados com probabilidade $p = 0,2$ e $p = 0,4$, respectivamente, mostram-se isolados ou formando pequenos aglomerados. Em (d), $p = 0,6$, os sítos azuis formam um <i>aglomerado percolante</i>	67
4.2	Os sítos pretos formam um aglomerado percolante em uma rede quadrada 400×400 . Os sítos coloridos formam aglomerados finitos. Mesmo considerando os efeitos de tamanho finito o aglomerado percolante apresenta uma <i>auto-similaridade estatística</i> [4].	68
4.3	Ampliação de uma parte da figura anterior. Observe a auto-similaridade estatística [4].	69
5.1	Esta figura mostra os quatro primeiros estágios da construção de $Q_{m,f}$. (a) Um segmento de reta vertical secciona o quadrado em duas partes, $r = 2$ e $s = 3$, cuja razão entre suas áreas é $\rho = r/s = 2/3$. (b) Dois segmentos de reta horizontais dividem os retângulos na mesma razão ρ , mas sem coincidirem. (c) Terceiro passo. (d) Indica o quarto passo. Em cada passo são mostradas as áreas correspondentes de cada bloco [24].	73
5.2	Mostra $Q_{m,f}$ com um quadrado assinalado no centro. Tomamos $n = 12$ e $(r, s) = (2, 3)$ [24].	76
5.3	Ampliação do quadrado assinalado na figura anterior [24].	77
5.4	Espectro das dimensões fractais D_k de $Q_{m,f}$ para $n = 400$ e $(r, s) = (2, 3)$	78

5.5	Espectro das dimensões fractais D_k de Q_{mf} para $n = 400$ e $(r, s) = (1, 6)$	79
6.1	Histograma das redes percolantes <i>versus</i> a probabilidade de ocupação p para os casos $(r, s) = (1, 1)$, $(r, s) = (1, 2)$, $(r, s) = (1, 4)$ e $(r, s) = (1, 6)$. As áreas sobre as curvas estão normalizadas com a unidade [24].	81
6.2	Mostra para os mesmos valores de (r, s) da figura 6.1, um gráfico da fração das redes percolantes R_L <i>versus</i> p . Foram usadas 40.000 redes para se tomar a média [24].	83
6.3	Histograma das redes percolantes <i>versus</i> a probabilidade de ocupação p para diferentes tamanhos da rede. o gráfico mostra os picos com corcova que se aproximam quando n cresce. Nesta figura, $(r, s) = (1, 6)$ e $8 < n < 18$, Foram usadas 40.000 redes para se tomar a média [24].	84
6.4	O objeto Q_{mf} para $\rho = 1/3$ e $n = 4$ [34].	85
6.5	p_L^e <i>versus</i> $1/L$ para $\rho = 2/3$ (linha sólida) e $\rho = 1/4$ (linha tracejada). Os valores do ramo acima correspondem a p_c^b e os valores do ramo abaixo correspondem a p_c^e . Usamos $4 \leq n \leq 10$ [34].	87
6.6	p_{cmed} <i>versus</i> $1/L$ para $\rho = 2/3$ (linha sólida) e $\rho = 1/4$ (linha tracejada). Os valores do ramo acima correspondem a p_c^b e os valores do ramo abaixo a p_c^e . Usamos $4 \leq n \leq 10$. Gráfico de p_{cmed} <i>versus</i> $1/L$ para os mesmos dados [34].	88

Conteúdo

1	Fractais	10
1.1	Introdução	10
1.2	Fractais auto-similares	13
1.3	Fractais auto-afins	34
1.4	Fractais Aleatórios	36
2	Dimensão de Conjuntos	40
2.1	Introdução	40
2.2	Dimensões Fractais	41
2.3	Método de Hausdorff-Besicovitch	41
2.3.1	Medida de Hausdorff	42
2.3.2	Dimensão de Hausdorff	43
2.4	Dimensão de contagem de caixas	49
2.5	Dimensão de Escala	54
3	Medidas Multifractais	56
3.1	σ -álgebra	56
3.2	Medida	57
3.3	Medida multifractal auto-similar em um conjunto de Cantor	60
4	Percolação	63
4.1	Introdução	63
4.2	Percolação por Sítios em uma Rede Quadrada	66
4.3	Dimensão fractal do Aglomerado Infinito	68
5	O multifractal Q_{mf}	71
5.1	Introdução	71

5.2	O objeto multifractal Q_{mf}	71
5.2.1	Algoritmo de Construção	71
5.3	Algoritmo de Percolação do Q_{mf}	74
5.4	Espectro Multifractal	74
5.5	Exemplo de Q_{mf} para $\rho = \frac{2}{3}$	76
5.6	Características	79
6	Simulações Numéricas	80
6.1	Introdução	80
6.2	Histograma de redes variadas	80
6.3	Estimativa da dimensão Fractal	82
6.4	Análise das áreas do blocos de Q_{mf}	82
6.5	Anisotropia e limiar de Percolação no Suporte Multifractal Q_{mf}	85
	Referências Bibliográficas	91

Capítulo 1

Fractais

1.1 Introdução

O principal objetivo deste trabalho é analisar o processo de percolação numa rede não trivial, chamada de $Q_{m,f}$, que desempenha papel satisfatório na modelagem de sistemas do mundo real como: camadas sedimentárias e recuperação de petróleo. Para isto, inicialmente, apresentamos uma coletânea dos principais fractais, definimos o que é um multifractal e o processo de Percolação.

No capítulo 1, faremos um estudo sobre os principais fractais, no capítulo 2, trataremos sobre Dimensionalidade de Conjuntos; no capítulo 3, veremos conceitos de Medida e aplicação; no capítulo 4, conheceremos o que é Percolação e; nos capítulos 5 e 6, estudaremos o Multifractal $Q_{m,f}$ que é o tema central desta dissertação.

Iniciemos com um breve histórico.

Durante séculos, os objetos e os conceitos da *filosofia* e da *geometria euclidiana* foram considerados como os que melhor explicavam o mundo. A descoberta de *geometrias não-euclidianas* introduziu novos objetos que representam certos fenômenos do Universo, tal como é o caso dos fractais.

A idéia dos fractais teve a sua origem no trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913. Esse trabalho deu a conhecer alguns objetos, catalogados como “patologias”, consideradas sem valor científico.

Em 1872, Karl Weierstrass encontrou o exemplo de uma função com a propriedade de ser contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável.

Em 1904, Helge von Koch, não satisfeito com a definição muito abstrata e

analítica de Weierstrass, deu uma definição mais geométrica de uma função similar, hoje conhecida como *Koch snowflake* (ou floco de neve de Koch), que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro cresce, e fatalmente tende ao infinito. Dessa maneira, o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito.

Surgiram muitos outros trabalhos relacionados a estas figuras, mas esta ciência só conseguiu se desenvolver plenamente a partir da década de 60, com o advento dos computadores. Um dos pioneiros foi o matemático polonês radicado na França, Benoît Mandelbrot. Mandelbrot foi responsável por criar o termo *fractal*, e pela descoberta de um dos fractais mais conhecidos, o conjunto de Mandelbrot.

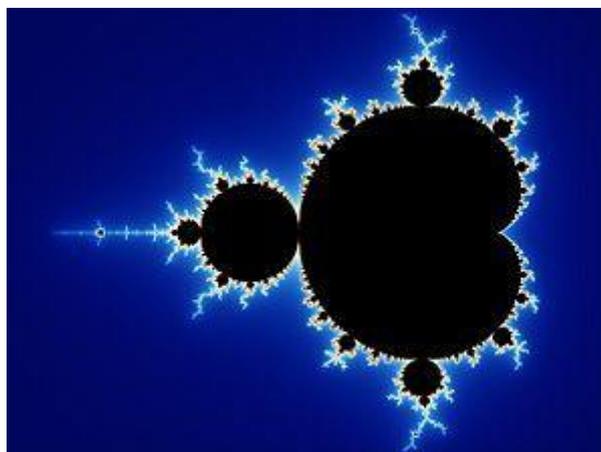


Figura 1.1: *Conjunto de Mandelbrot* criado por **Wolfgang Beyer** com o programa Ultra Fractal 3.

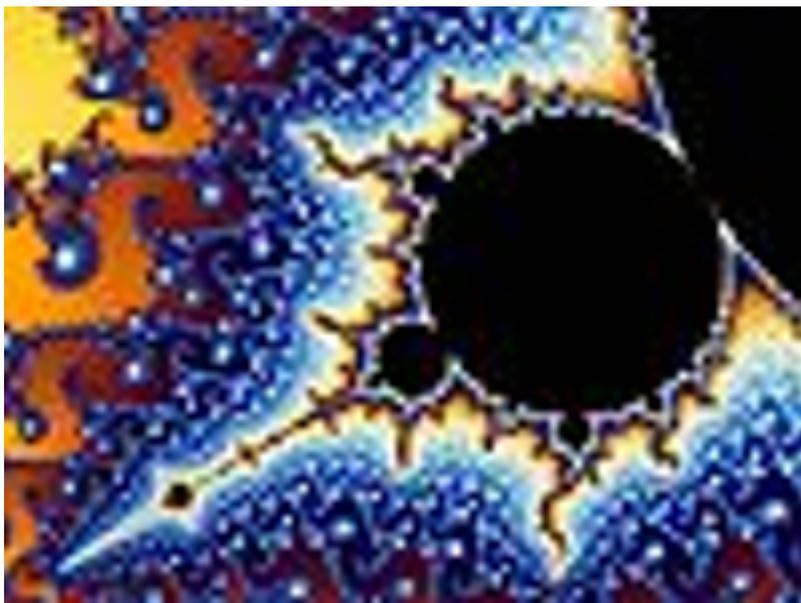


Figura 1.2: Detalhe do *Conjunto de Mandelbrot* da figura 1.1.

A principal característica de um objeto fractal é que uma parte sua é semelhante ao todo, como pudemos observar nas duas figuras anteriores. Sendo a *Geometria Fractal* a melhor ferramenta para o adequado estudo dessas estruturas [1].

Os fractais enquadram-se em duas categorias, *aleatórios* e *determinísticos*.

Na categoria *determinísticos*, enquadram-se os *Sistemas de funções iterativas*, também conhecidos pela sigla IFS (do inglês Iterated Function Systems) e fractais definidos por uma *relação de recorrência em cada ponto do espaço complexo*, por exemplo, o *conjunto de Mandelbrot*. Os primeiros consistem numa técnica de se construir figuras fractais através da repetição em escala de uma mesma figura. Pode ser aplicada em qualquer número de dimensões, no entanto, por questões práticas, é mais comum em figuras bidimensionais.

A técnica consiste em selecionar uma figura inicial qualquer e aplicar iterativamente a ela uma série de *transformações afins* (de onde o nome *sistemas de funções iterativas*), em geral com redução de escala, que geram *cópias* menores da mesma imagem. Este procedimento é repetido infinitamente até se obter uma imagem composta de infinitas cópias cada vez menores da imagem inicial. Exemplos: Conjunto de Cantor (figura 1.3), floco de neve de Koch (figura 1.4), triângulo de Sierpinski (figura 1.6), tapete de Sierpinski (figura 1.7), e esponja de Menger (figura 1.11), etc.

E, finalmente, os *fractais aleatórios*, gerados por *processos estocásticos*. *Padrões estocásticos* são aqueles que surgem por meio de eventos aleatórios. Esta definição tornar-

se-á mais clara nos exemplos que se seguirão mais à frente.

Iniciaremos este trabalho com alguns exemplos determinísticos.

1.2 Fractais auto-similares

Os fractais podem ser classificados de três diferentes maneiras, de acordo com sua *auto-similaridade*:

- **Auto-similaridade exata:** é a forma em que a auto-similaridade é mais marcante, evidente. O fractal é idêntico em diferentes escalas. Fractais gerados por *sistemas de funções iterativas* geralmente apresentam uma auto-similaridade exata.
- **Quase-auto-similaridade:** é uma forma mais simples de auto-similaridade. O fractal aparenta ser aproximadamente (mas não exatamente) idêntico em escalas diferentes. Fractais quase-auto-similares contém pequenas cópias do fractal inteiro de maneira distorcida ou degenerada. Fractais definidos por *relações de recorrência* são geralmente quase-auto-similares, mas não exatamente auto-similares.
- **Auto-similaridade estatística:** é a forma menos evidente de auto-similaridade. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. As definições de fractais geralmente implicam em alguma forma de auto-similaridade estatística (mesmo a dimensão fractal é uma medida numérica preservada em diferentes escalas). Fractais aleatórios são exemplos de fractais que possuem auto-similaridade estatística, mas não são exatamente nem quase auto-similares.

Nesta seção, estudaremos alguns exemplos desses fractais.

Exemplo 1: *Conjunto de Cantor*

Denominaremos o conjunto de Cantor (Georg Cantor, 1845-1918) por C [2]. Ele é um dos mais conhecidos e mais fáceis de serem construídos. Foi obtido pela primeira vez em 1883 [3].

Para construir o conjunto C , começamos com um intervalo unitário fechado,

$$C_0 = [0, 1], \quad (1.1)$$

ver figura 1.1.

Em seguida, retiramos de C_0 o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, que é o terço aberto do meio, e denotamos o conjunto fechado restante por C_1 . Consideramos os intervalos fechados,

$$C_{00} = \left[0, \frac{1}{3}\right], C_{01} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], C_{02} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Temos que,

$$C_1 = C_{00} \cup C_{02} \quad (1.2)$$

Depois, retiramos de C_1 os intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, que são os terços abertos do meio de cada intervalo fechado de C_1 , e denotamos o conjunto fechado resultante por C_2 . Consideremos agora, os intervalos fechados,

$$\begin{aligned} C_{000} &= \left[0, \frac{1}{9}\right], C_{001} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], C_{002} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \\ C_{020} &= \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], C_{021} = \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right], C_{022} = \left[\frac{8}{9}, 1\right] \end{aligned}$$

Então,

$$C_2 = C_{000} \cup C_{002} \cup C_{020} \cup C_{022} \quad (1.3)$$

Continuando este processo de retirada dos terços abertos do meio de cada intervalo fechado do estágio anterior, obtemos uma *seqüência* de conjuntos fechados C_k , onde *cada um contém os seus sucessores*, e C_{k+1} é obtido retirando-se os terços abertos do meio de cada intervalo fechado C_k , ou seja,

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \dots$$

Então, C_k é formado por 2^k *intervalos de comprimento* 3^{-k} . Logo, o comprimento de C_k é dado por:

$$L(C_k) = 2^k \cdot 3^{-k} = 2^k \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad (1.4)$$

onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Assim, o *Conjunto de Cantor* é definido por:

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \quad (1.5)$$

Deste modo, C é *limite* de uma seqüência decrescente de conjuntos C_k , quando k tende a infinito, isto é,

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k \quad (1.6)$$

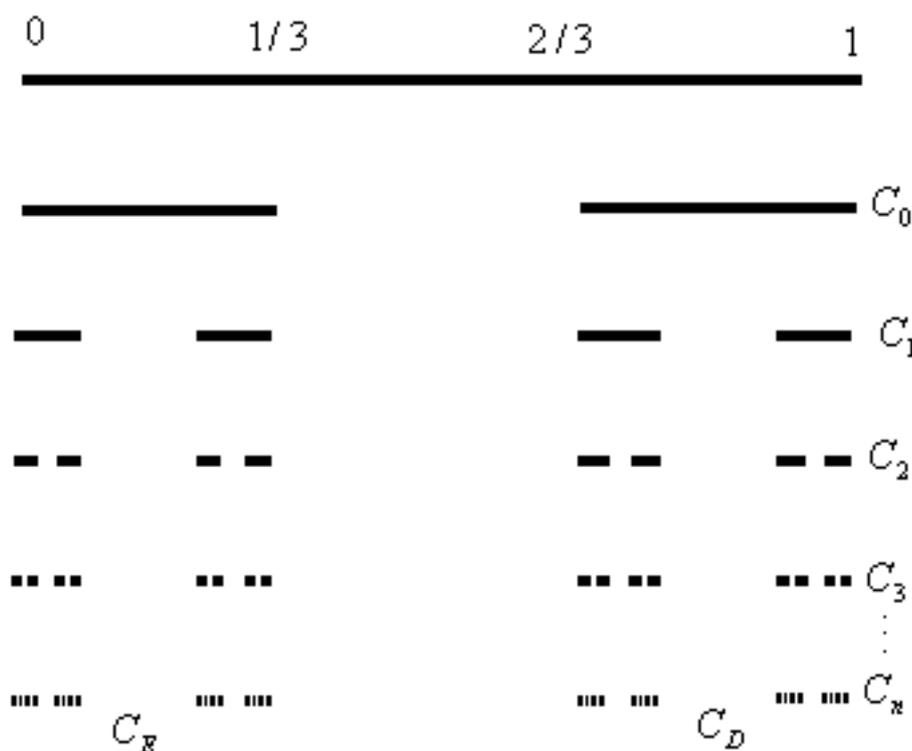


Figura 1.3: Construção do conjunto de Cantor C desde C_0 chamado iniciador e C_1 chamado gerador. Observe que C_E e C_D são as partes da esquerda e da direita, respectivamente, são réplicas de C escaladas pelo fator $1/3$.

O conjunto C consiste de todos os números do intervalo $[0, 1]$, cuja expansão na base 3, não contém o dígito 1, ou seja, são todos os números da forma:

$$a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots$$

com $a_i = 0$ ou $a_i = 2$, para cada i .

Pode-se pensar que quase tudo do intervalo inicial C_0 foi removido durante a construção de C , e que praticamente nada restou. Temos que C é o conjunto de todos os pontos não excluídos do intervalo inicial C_0 . No entanto, podemos encontrar a proporção do intervalo C_0 não removida, através do comprimento total removido, pela série geométrica cujo primeiro termo é, $a_1 = \frac{1}{3}$, e cuja razão é, $r = \frac{2}{3}$. Temos então que o comprimento removido é,

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 1 \quad (1.7)$$

Portanto, ficamos com $1 - 1 = 0$.

O Conjunto de Cantor é infinito e não enumerável, uma vez que contém infinitos números em cada vizinhança de cada um de seus pontos. Consideremos os conjuntos cujos

elementos são os extremos dos estágios $C_0, C_1, C_2, \dots, C_k$:

$$\begin{aligned} E(C_0) &= \{0, 1\} \\ E(C_1) &= \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} \\ E(C_2) &= \left\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\right\} \\ &\vdots \\ E(C_k) &= \left\{0, \frac{1^k}{3}, \dots, \frac{3^k - 1}{3^k}, 1\right\} \end{aligned}$$

Observe que o número de elementos dos conjuntos $E(C_k)$, é dado por:

$$n[E(C_k)] = 2^{k+1}$$

onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Temos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n[E(C_k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k+1} = \infty \quad (1.8)$$

Portanto, se considerarmos apenas os pontos dos intervalos que compõem o conjunto C , já temos um conjunto com infinitos pontos. Além dos extremos dos intervalos, que têm sempre potências de três no denominador, existem infinitos números que não são extremos de nenhum intervalo, mas que pertencem a C .

Apesar do conjunto de Cantor ser formado por infinitos pontos, o seu comprimento $L(C)$ é nulo. Observe:

Das equações (1.4) e (1.6), obtemos:

$$L(C) = L(\lim_{k \rightarrow \infty} C_k) = L\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = 0 \quad (1.9)$$

Exemplo 2: *Curva de Koch*

Foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito. Recebeu este nome do matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, 25 de janeiro de 1870 - Estocolmo, 11 de março de 1924). Possui as mesmas características do conjunto de Cantor e o denominaremos de F.

Para iniciarmos a sua construção, considere um intervalo unitário fechado,

$$F_0 = [0, 1]$$

observe a figura 1.4. O conjunto F_1 consiste de quatro segmentos de comprimento $1/3$, obtidos quando removemos o terço aberto do meio de F_0 e o substituímos por dois lados de um triângulo equilátero de mesmo comprimento do segmento retirado, de modo que, F_1 tem comprimento total $4/3$. Procedemos desta forma indefinidamente com todos os segmentos que vão surgindo até o k -ésimo passo. Ou seja, F_k é obtido quando substituímos os terços abertos do meio de cada segmento de F_{k+1} por dois lados de um triângulo equilátero de mesmo comprimento do segmento retirado. Quando k tende a infinito, a seqüência de curvas polinomiais F_k tende a uma curva limite F, que chamamos de *Curva de Koch*.

É uma curva extremamente irregular, sendo contínua e não derivável em todos os seus pontos. Observando seus comprimentos obtemos:

$$\begin{aligned} L(F_1) &= \left(\frac{4}{3}\right) \\ L(F_2) &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ L(F_3) &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 \\ &\vdots \\ L(F_k) &= \left(\frac{4}{3}\right)^k \end{aligned} \quad (1.10)$$

Considerando que a *curva de Koch* F é o resultado do limite:

$$F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k \quad (1.11)$$

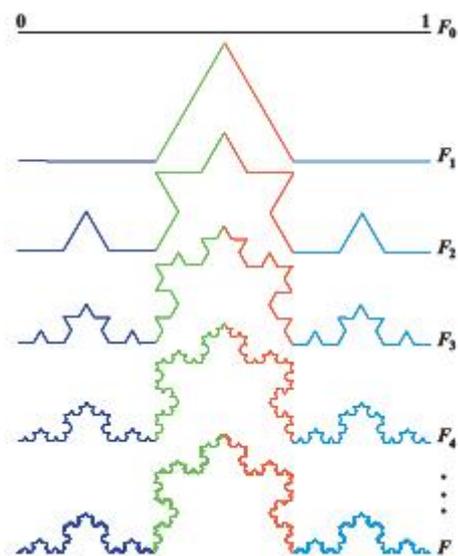


Figura 1.4: Construção da curva de Koch F , desde F^0 , chamado iniciador e F^1 chamado gerador. Em cada estágio, o terço aberto do meio de cada intervalo é substituído pelos outros dois lados de um triângulo equilátero [4].

então o comprimento $L(F)$ é dado por:

$$L(F) = L(\lim_{k \rightarrow \infty} F_k) = L\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k\right) = \infty \quad (1.12)$$

Ou seja, a curva de Koch tem comprimento *infinito* e ocupa *área zero* no plano.

Exemplo 3: *Floco de Neve*

A curva conhecida como fractal *Floco de Neve* é obtida quando juntamos três curvas de Koch de forma apresentada na figura abaixo:

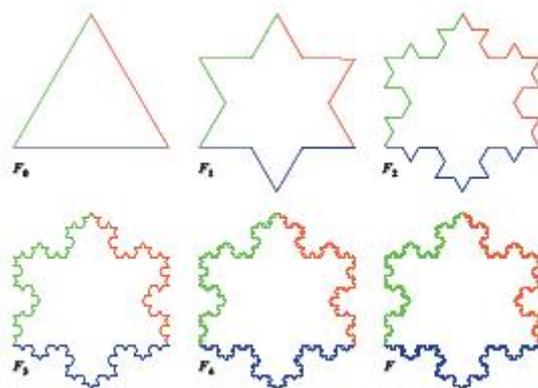


Figura 1.5: Curva de Koch conhecida como *Fractal Floco de Neve*. Em F_0 temos um triângulo equilátero, F_1 , com uma iteração, F_2 , com duas iterações, é o estágio dois, e assim sucessivamente até o estágio quatro F é a curva *Floco de Neve* [4].

A curva F é o resultado do seguinte limite,

$$F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k \quad (1.13)$$

o comprimento $L(F)$ é dado por:

$$L(F) = L(\lim_{k \rightarrow \infty} F_k) = L\left(\lim_{k \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k\right) = \infty \quad (1.14)$$

A curva F é interessantíssima, por circunscrever uma área finita, apesar de ter comprimento infinito e ocupar área zero. Concluimos então que nem comprimento nem área dão uma descrição adequada e útil de sua dimensão.

Para calcular a área limitada pela figura F , que chamaremos de A , consideremos as seguintes áreas:

$$A_0 = A(F_0), A_1 = A(F_1), A_2 = A(F_2), \dots, A_k = A(F_k)$$

que são as respectivas áreas de cada passo n .

Usando simplesmente a fórmula da área do triângulo temos que:

$$A_0 = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}/2)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

No próximo passo, temos que A_1 é igual a A_0 somado com as áreas dos novos pequenos triângulos que surgiram, daí:

$$a_1 = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

finalmente,

$$A_1 = A_0 + 3 \cdot a_1 \Rightarrow A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}$$

De forma análoga, encontramos a_2 e a_3 :

$$a_2 = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{18}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{162} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{324}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{54}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1458} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2916}$$

com isso,

$$A_2 = A_1 + 12 \cdot a_2 \Rightarrow A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{324} \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{108} \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(1 + \frac{4}{9}\right)$$

e,

$$A_3 = A_2 + 48 \cdot a_3 \Rightarrow A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(1 + \frac{4}{9}\right) + 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2916}$$

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(1 + \frac{4}{9}\right) + 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{972} \Rightarrow$$

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right]$$

portanto, em termos gerais,

$$A_K = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{K-1}\right] \Rightarrow$$

$$A_K = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{n=1}^k \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

e, fazendo $A = A(F)$, obtemos

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$$

Portanto,

$$A(F) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3} \quad (1.15)$$

Observamos que a quantidade de lados de triângulos equiláteros que vão surgindo ao longo do processo de construção do Fractal Floco de Neve, cresce na seguinte *progressão geométrica*: (3, 12, 48, 192, 768, ...).

Exemplo 4: *Triângulo de Sierpinski*, (Waclaw Sierpinski, 1882 – 1969)

Consiste em mais um fractal construído por meio de procedimentos recursivos e simples. O denotaremos por E . Seu processo de construção segue os passos abaixo:

1. tomamos o triângulo equilátero de lado unitário E_0 ;
2. removemos de E_0 o triângulo equilátero invertido cujos lados são obtidos ligando os pontos médios dos lados da figura inicial;
3. repetimos o procedimento ligando os pontos médios dos lados dos três triângulos restantes e removemos os triângulos equiláteros invertidos, obtendo desta forma E_2 ;

Repetindo este processo até o k -ésimo passo para obter E_k e fazendo k tender a infinito, obtemos finalmente, o fractal E chamado *Triângulo de Sierpinski*.

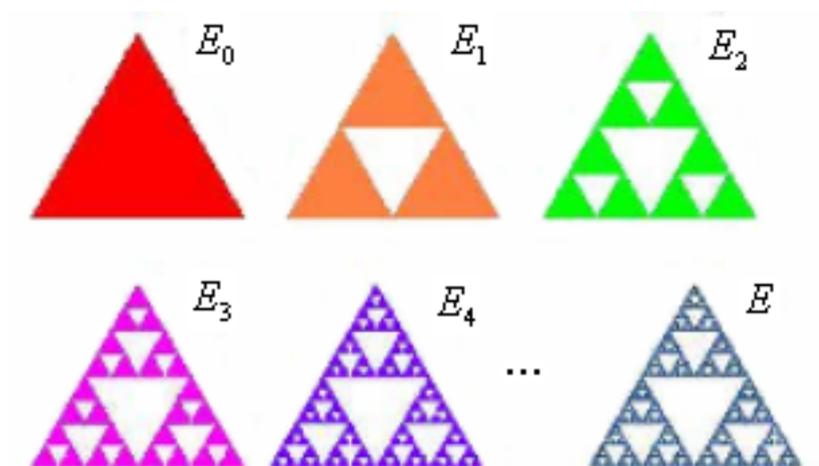


Figura 1.6: Construção do Triângulo de Sierpinski E , desde E_0 , chamado de iniciador, e E_1 , chamado de gerador. Este conjunto apresenta duas características comuns aos fractais: *simetria* e *auto-similaridade*.

Tomemos os perímetros dos contornos das figuras de cada passo, $E_0, E_1, E_2, \dots, E_k$, como:

$$p_0 = p(E_0), p_1 = p(E_1), p_2 = p(E_2), \dots, p_k = p(E_k)$$

donde,

$$p_k = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

e, fazendo,

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k \quad (1.16)$$

temos o perímetro $p = p(E)$:

$$p = 3 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty \quad (1.17)$$

Considerando as áreas temos,

$$A_0 = A(E_0), A_1 = A(E_1), A_2 = A(E_2), \dots, A_k = A(E_k)$$

com $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, donde,

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 = 3 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$A_2 = 9 \cdot \left(\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{32} \cdot \frac{1}{2}\right) = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{64}$$

e, generalizando:

$$A_k = A_0 - \frac{\sqrt{3}}{16} \left[1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \right]$$

Dessa forma, obtemos a área total da figura E:

$$A(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A_0 - \frac{\sqrt{3}}{16} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad (1.18)$$

$$A(E) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 0 \quad (1.19)$$

Concluimos que o *Triângulo de Sierpinski* tem *perímetro infinito e área zero*.

Exemplo 5: *Tapete de Sierpinski*

O *tapete de Sierpinski*, que denotaremos por T , é considerado uma extensão do conjunto de Cantor, passando do intervalo unitário para o *quadrado unitário*,

$$T_0 = [0, 1] \times [0, 1]$$

Observe a seguinte figura 1.7:

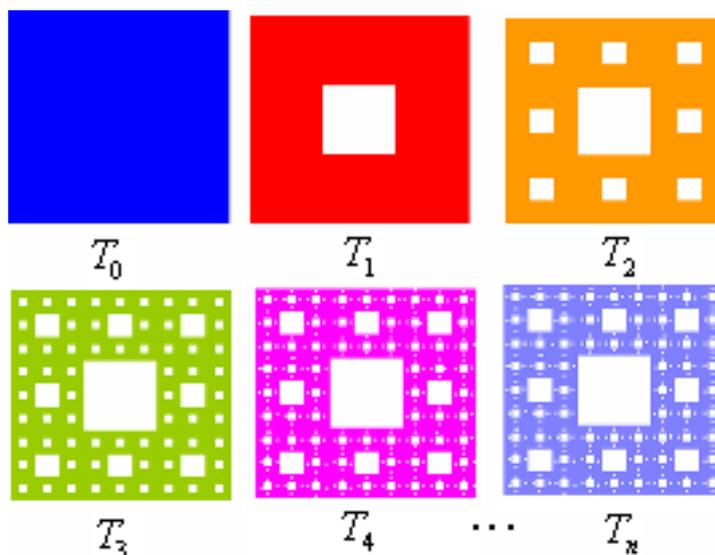


Figura 1.7: Tapete de Sierpinski

Construímos o tapete de Sierpinski de acordo com os seguintes passos:

1. Tomamos o quadrado sólido T_0 e o subdividimos em nove quadrados iguais;
2. o quadrado aberto central é retirado e obtemos T_1 ;
3. aplicamos o mesmo processo a cada um dos oito quadrados de T_1 para obter T_2 ;
4. continuando este processo, indefinidamente, no limite, obtemos o fractal auto-similar T , o tapete de Sierpinski.

Considere os *perímetros dos contornos das figuras de cada passo*:

$$p_0 = p(T_0), p_1 = p(T_1), p_2 = p(T_2), \dots, p_k = p(T_k)$$

Logo,

$$p_0 = 4$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= 4 + \frac{4}{3} = 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \\
p_2 &= 4 + \frac{4}{3} + \frac{32}{9} = 4 + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} + \frac{64}{9} \right) = 4 + \frac{1}{2} \left[\frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3} \right)^2 \right] \\
p_3 &= 4 + \frac{4}{3} + \frac{32}{9} + \frac{256}{27} = 4 + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} + \frac{64}{9} + \frac{512}{27} \right) = 4 + \frac{1}{2} \left[\frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3} \right)^2 + \left(\frac{8}{3} \right)^3 \right] \\
&\vdots \\
p_k &= p_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{8}{3} \right)^n \tag{1.20}
\end{aligned}$$

Tomando,

$$T = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k \tag{1.21}$$

e, obtendo o perímetro $p = p(T)$, fazendo

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k \tag{1.22}$$

Obtemos de (1.20) e (1.22),

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{3} \right)^n = \infty \tag{1.23}$$

No entanto, consideremos as áreas para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$A_0 = A(T_0), A_1 = A(T_1), A_2 = A(T_2), \dots, A_k = A(T_k)$$

Obtemos,

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1 \\
A_1 &= 1 - \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9} \\
A_2 &= 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{81} = 1 - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9} + \frac{64}{81} \right) \\
A_3 &= 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{81} - \frac{64}{729} = 1 - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9} + \frac{64}{81} + \frac{512}{729} \right) \\
A_4 &= 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{81} - \frac{64}{729} - \frac{512}{6561} = 1 - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9} + \frac{64}{81} + \frac{512}{729} + \frac{4096}{6561} \right) \\
&\vdots \\
A_k &= A_0 - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^k \left(\frac{8}{9} \right)^n
\end{aligned}$$

Desta feita, obtemos a área $A = A(T)$, como sendo

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\frac{8}{9}}{1 - \frac{8}{9}} \right) = 1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{1} = 1 - 1 = 0 \quad (1.24)$$

Concluimos que o *Tapete de Sierpinski* tem *perímetro infinito e área zero*.

Exemplo 6: Poeira de Cantor 1

“Poeiras de Cantor” são fractais análogos ao conjunto de Cantor, os quais neste e no próximo exemplo, denotaremos por P . Veja os passos da construção deste primeiro exemplo:

1. Tomamos um quadrado unitário, P_0 , o qual chamamos de iniciador, e o dividimos em nove quadrados iguais;
2. descartamos os quadrados do meio de cada linha e de cada coluna, ficando apenas os quatro quadrados dos cantos e assim, obtemos P_1 , que chamamos de iniciador;
3. repetimos o mesmo processo em cada um dos quadrados de P_1 e obtemos P_2 , e assim, sucessivamente.

A repetição desse procedimento infinitas vezes, faz surgir um conjunto fractal denominado *Poeira de Cantor*.

Considere $p_k = p(P_k)$ como o perímetro de P_k . Temos então que,

$$p_k = 4 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^k$$

onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Tomando

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k$$

obtemos,

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} 4 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^k = \infty.$$

Calculando a área $A_k = A(P_k)$, temos:

$$A_k = \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

Tomando $A = A(P)$, obtemos:

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$$

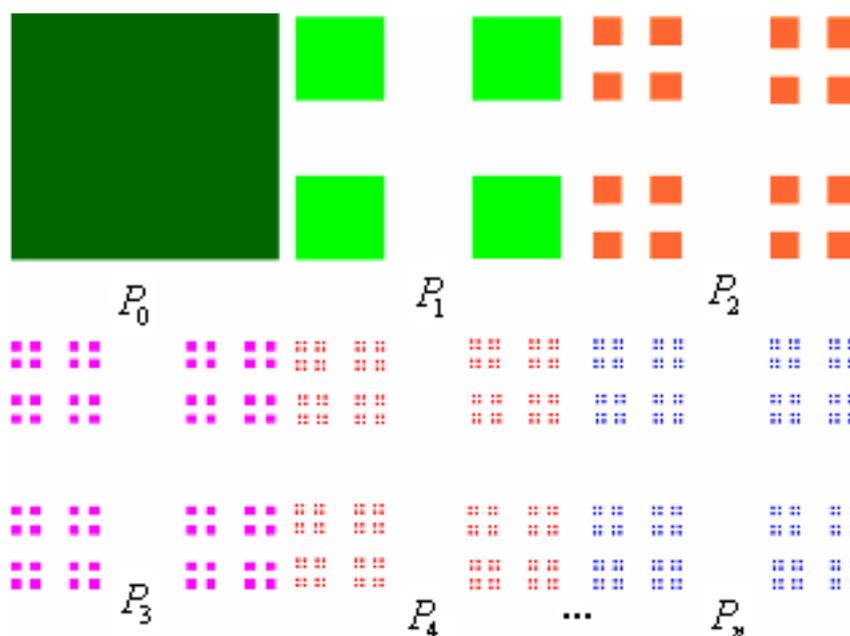


Figura 1.8: Construção de uma “poeira de Cantor” P

de onde obtemos:

$$A(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9} \right)^k = 0 \quad (1.25)$$

Exemplo 7: Poeira de Cantor 2

A construção desse exemplo consiste nos seguintes passos:

1. dividir o quadrado unitário P_0 em dezesseis quadrados iguais, dos quais doze são descartados e quatro permanecem no conjunto, como mostra a figura 1.9. Dessa forma, obtemos P_1 ;
2. nos próximos passos, cada quadrado que permanece no conjunto é dividido em dezesseis quadrados menores, em que quatro são mantidos e doze são descartados
3. o conjunto resultante de passos semelhantes a estes, repetidos infinitas vezes, é a “poeira de Cantor” esperada.

Analisando o perímetro, $p = p(P_k)$, temos que:

$$p_k = 4$$

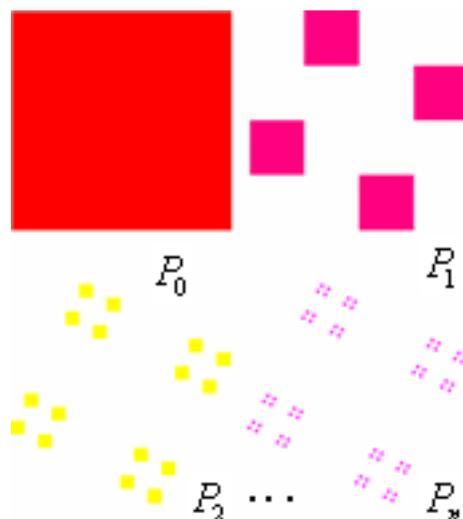


Figura 1.9: Construção de uma “poeira de Cantor” P

onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Tomando,

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k$$

temos:

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} 4 = 4 \quad (1.26)$$

Já para a área, $A_k = A(P_k)$, temos:

$$A_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ e, tomando $A = A(P)$,

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$$

daí, obtemos:

$$A(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 0 \quad (1.27)$$

Concluimos que no primeiro exemplo de “poeira de Cantor”, o perímetro é infinito e a área é zero e, no segundo, o perímetro é constante e igual a 4, e a área também é zero. Outras formas de dividir os quadrados e o modo de eliminá-los geram novos exemplos de “poeira de Cantor”.

Exemplo 8: *Construção de um conjunto fractal auto-similar com dois fatores de similaridade*

Tomemos um quadrado unitário B_0 e o dividamos em dezesseis quadrados iguais, em seguida, descartamos os oito quadrados que têm lados comuns com os quatro quadrados dos cantos de B_0 , dessa forma, obtemos B_1 . Observe a figura 1.10:

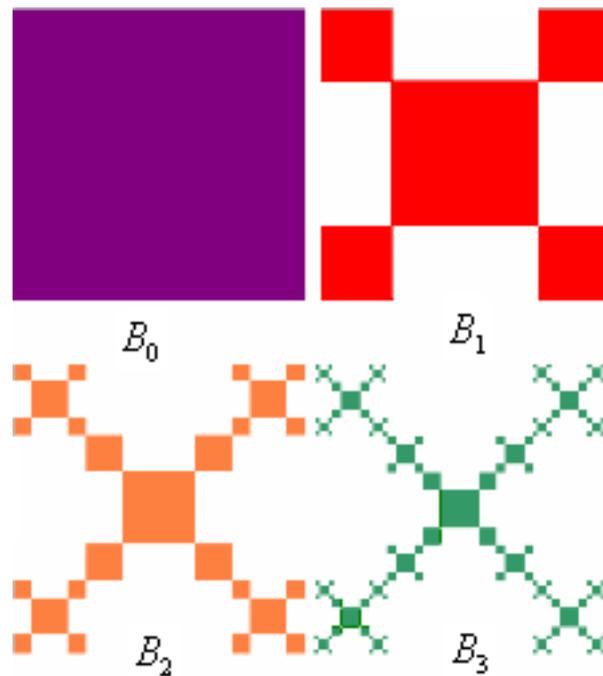


Figura 1.10: Construção de um fractal auto-similar B com duas diferentes razões de similaridade.

Repetindo esse processo com o quadrado central e os quatro quadrados dos cantos de B_1 , obtemos B_2 e, finalmente, repetindo este procedimento indefinidamente, obtemos o fractal auto-similar B com *dois fatores de similaridade diferentes*, pois este é constituído de dois tipos de “quadrados” de tamanhos diferentes, enquanto nas figura anteriores, a partição da figura resultava em pequenas figuras iguais.

Portanto, a *auto-similaridade* de um sistema fractal, implica que sua estrutura não varia sob uma reescala *isotrópica* de comprimentos, ou seja, todos os comprimentos em todas as direções são reescalados pelo mesmo fator de escala. No exemplo em questão, temos dois fatores de escala diferentes, mas, a diferença não se deve à mudança de direção.

Exemplo 9: *Espanja de Menger*

Consiste numa extensão tridimensional do conjunto de Cantor C , e do tapete de Sierpinski T . Foi descrita pela primeira vez por Karl Menger (1902 – 1985).

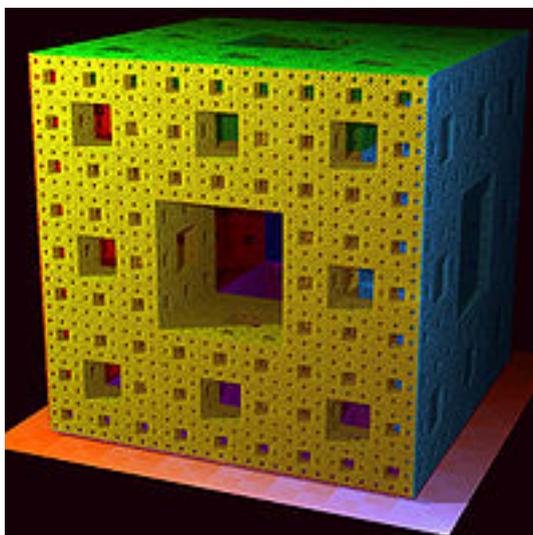


Figura 1.11: Fractal esponja de Menger.

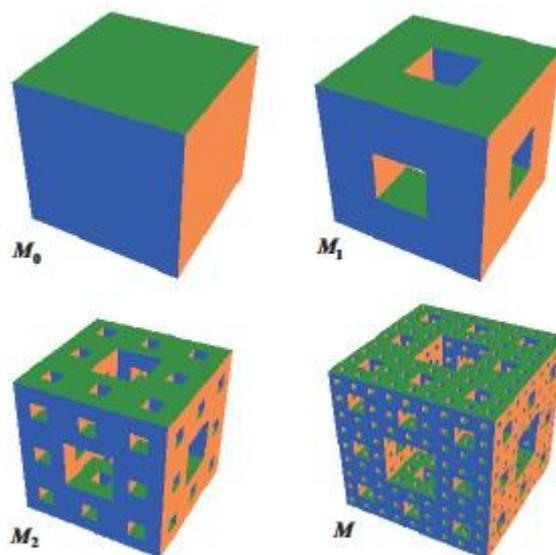


Figura 1.12: A esponja de Menger é obtida a partir do iniciador, $M_0 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ e do gerador M_1 . No limite, obtemos M [4].

Seu processo de construção recursiva, consiste nos seguintes passos:

1. tome um cubo unitário $M_0 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Divida cada uma de suas seis faces em nove quadrados e remova o cubo aberto do meio de cada uma das faces e também o cubo aberto central de M_0 . Desta forma, obtemos M_1 com vinte cubos;
2. repetimos este processo em cada cubo de M_1 e obtemos M_2 ; com quatrocentos cubos menores;
3. continuando este processo de maneira indefinida, no limite, obtemos o fractal esponja de Menger M.

Este processo de retirada dos cubos abertos do meio de cada face e do cubo aberto central do estágio anterior, resulta numa sequência de **conjuntos fechados** M_k , em que cada um deles contém os seus antecessores:

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_k \supset \dots$$

Portanto, M_k é constituído de 20^k **cubos**, cada um deles com **aresta de comprimento** 3^{-k} . Logo, a *Esponja de Menger* é definida da seguinte maneira:

$$M = \bigcap_{k=0}^{\infty} M_k \quad (1.28)$$

Assim, M é o limite de uma sequência de conjuntos M_k , com $M_k \supset M_{k+1}$, descrito da seguinte forma:

$$M = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k \quad (1.29)$$

Considere $S_k = S(M_k)$, como sendo a **área da superfície** de M_k e, $S = S(M)$ como a área da superfície de M . Temos que S é uma área **infinita**, pois M tem **infinitas faces**. Em contrapartida, tomando $V_k = V(M_k)$ como o volume de M_k e V o volume de $V = V(M)$ como o volume de M , obtemos:

$$V = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k \quad (1.30)$$

onde observamos que,

$$V_0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 20 = \frac{1}{27} \cdot 20 = \frac{20}{27} \\
 V_2 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot 20^2 = \frac{1}{(3^2)^3} \cdot 20^2 = \frac{1}{(3^3)^2} \cdot 20^2 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 \\
 V_3 &= \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{27} \cdot 20^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^3 \\
 &\vdots \\
 V_k &= \left(\frac{20}{27}\right)^k
 \end{aligned}$$

resultando em,

$$V = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^k = 0 \quad (1.31)$$

onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Portanto, a *Esponja de Menger* tem **área da superfície infinita**, $S(M) = \infty$ e tem **volume zero**, $V(M) = 0$.

1.3 Fractais auto-afins

Existem fractais que mantêm sua invariância de escala somente se os comprimentos nas diferentes direções forem reescalados por fatores que dependem das *direções*. Ou seja, se nas direções x, y e z , os fatores de escala forem b_x, b_y e b_z , respectivamente, em que na maioria dos casos, estes valores são diferentes.

A invariância de escala sob uma reescala que depende das direções significa que o fractal é *anisotrópico*, o qual denominamos de *auto-afim*. Sendo assim, os fractais auto-similares podem ser considerados casos particulares dos fractais auto-afins [5].

Exemplo 1: *Conjunto fractal auto-afim 1 (ver figura 1.13)*

Vejamos os passos da construção deste exemplo:

1. Tomemos um quadrado unitário A_0 e o dividamos em doze retângulos idênticos $3 \times 4 = 12$, em seguida, excluamos os dois retângulos centrais, dessa forma obtemos A_1 ;
2. dividamos cada um dos retângulos que ficaram em 12 retângulos menores e excluamos os dois retângulos centrais;
3. continuando esse processo indefinidamente, temos um fractal auto-afim.

Exemplo 2: *Construção de um conjunto fractal auto-afim 2 (ver figura 1.14)*

Observemos os passos da construção do referido exemplo:

1. Tomemos um quadrado unitário A_0 e o dividamos em doze retângulos idênticos $3 \times 4 = 12$, em seguida, excluamos a metade dos retângulos de tal forma que, a outra metade que permanece não tem retângulos com lados comuns;
2. fazendo o mesmo procedimento em A_1 obtemos A_2 ;
3. continuando esse processo indefinidamente, temos um fractal auto-afim.

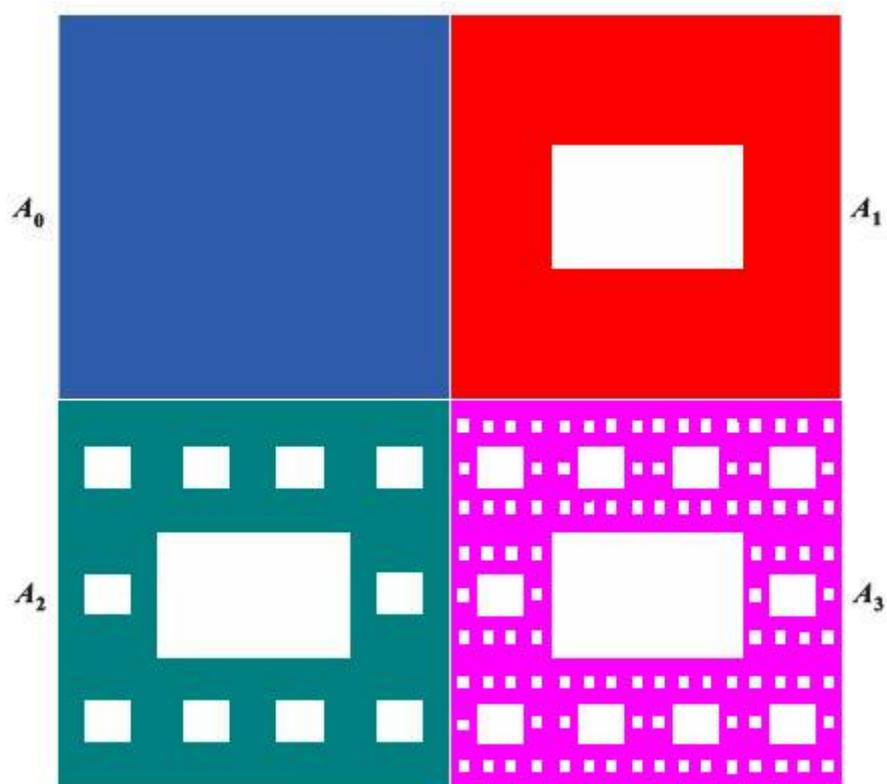


Figura 1.13: Construção de um fractal auto-afim.

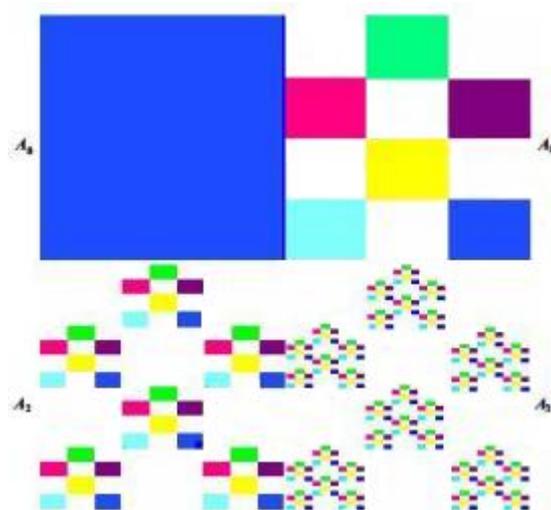


Figura 1.14: Construção de um fractal auto-afim.

1.4 Fractais Aleatórios

Todos os fractais anteriormente vistos são determinísticos, todos eles possuem seus análogos *aleatórios*, dos quais, analisaremos especificamente dois: floco de neve e conjunto de Cantor aleatórios.

(a) Conjunto de Cantor Aleatório

Podemos aleatorizar o conjunto de Cantor de diversas formas. Uma delas, consiste em ao invés de retiramos sempre o seguimento central de cada intervalo, aleatorizarmos esta retirada. Outra, seria substituir os intervalos de mesmo comprimento do conjunto C , por intervalos de comprimentos aleatórios.

Observemos o caso em que cada intervalo, no passo seguinte, é substituído por dois subintervalos de comprimentos aleatório:

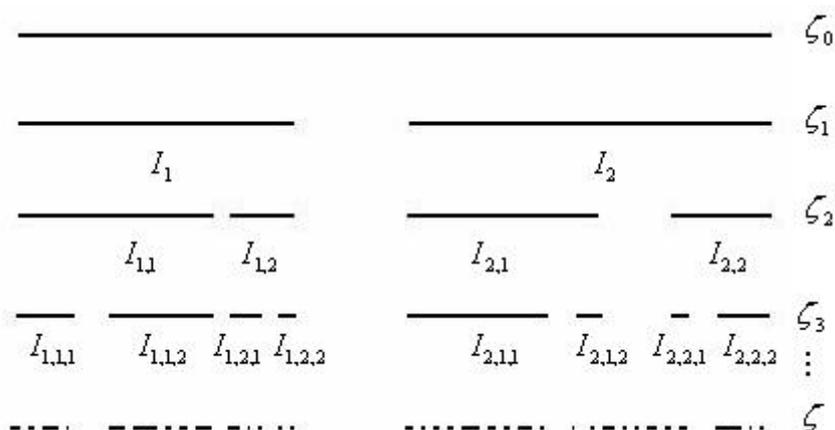


Figura 1.15: Construção do *Conjunto de Cantor aleatório*.

Este fractal lembra o conjunto de Cantor C . É uma construção *estatisticamente auto-similar* pois, ampliações de pequenas partes têm a mesma **distribuição estatística** do conjunto de forma geral. Diferentemente do caso determinístico, onde estas ampliações são **idênticas** ao todo. Consideremos a seguinte construção [4]:

$$\zeta = \bigcap_{k=0}^{\infty} \zeta_k \quad (1.32)$$

onde,

$$[0, 1] = \zeta_0 \supset \zeta_1 \supset \zeta_2 \supset \dots \zeta_k \supset \dots$$

é uma **sequência decrescente de conjuntos fechados**, com ζ_k sendo a união de 2^k intervalos fechados do k -ésimo nível.

Observe que cada intervalo **I** no **k-ésimo nível** contém dois intervalos, I_E e I_D , do **k+1-nível**, tocando os extremos da **esquerda** e da **direita**, respectivamente.

Os comprimentos dos intervalos são aleatórios, e podemos determinar uma *auto-similaridade estatística* através da exigência que as razões $|I_E|/|I|$ e $|I_D|/|I|$ tenham distribuições de probabilidades independentes e idênticas para todos os intervalos básicos da construção.

Este **conjunto de Cantor aleatório** ζ , é *estatisticamente auto-similar*, na medida em que a distribuição do conjunto $\zeta \cap I$ é a mesma do conjunto ζ , porém escalada por um fator $|I|$, para cada I .

Descrevamos esta construção aleatória em termos *probabilísticos*. Sejam a e b constantes tais que,

$$0 < a \leq b < \frac{1}{2}$$

Seja Ω a classe de todas as sequências de conjuntos tais que,

$$[0, 1] = \zeta_0 \supset \zeta_1 \supset \zeta_2 \supset \dots \supset \zeta_k \supset \dots$$

satisfazem às seguintes condições:

1. os conjuntos ζ_k compreendem 2^k intervalos fechados disjuntos I_{i_1, \dots, i_k} indexados por i_1, i_2, \dots, i_k , onde $i_j = 1$ ou $i_j = 2$, $i \leq j \leq k$;
2. o intervalo I_{i_1, \dots, i_k} de ζ_k contém os dois intervalos $I_{i_1, \dots, i_k, 1}$ e $I_{i_1, \dots, i_k, 2}$ de ζ_{k+1} , com os extremos *esquerdos* de I_{i_1, \dots, i_k} e $I_{i_1, \dots, i_k, 1}$ e os extremos *direitos* de I_{i_1, \dots, i_k} e $I_{i_1, \dots, i_k, 2}$ coincidindo (observe figura anterior).

Seja $\lambda_{i_1, \dots, i_k} = \frac{|I_{i_1, \dots, i_k}|}{|I_{i_1, \dots, i_{k-1}}|}$ e, suponhamos $a \leq \lambda_{i_1, \dots, i_k} \leq b$ para todos os i_1, \dots, i_k .

De modo, definimos o *conjunto de Cantor aleatório*,

$$\zeta = \bigcap_{k=0}^{\infty} \zeta_k \quad (1.32)$$

Seja Ω o *espaço amostral* e, consideremos que uma *medida de probabilidade* \mathcal{P} é definida em uma família \mathcal{F} (σ -álgebra), convenientemente grande, de subconjuntos de Ω , tais que, as razões $\lambda_{i_1, \dots, i_k}$ sejam *variáveis aleatórias*.

Determinamos a *auto-similaridade estatística* na construção, através da exigência de que $\lambda_{i_1, \dots, i_k, 1}$ tenha a mesma distribuição que $\lambda_1 = |I_1|$ e $\lambda_{i_1, \dots, i_k, 2}$ tenha a mesma distribuição que $\lambda_2 = |I_2|$, para toda sequência i_1, \dots, i_k . Consideramos que $\lambda_{i_1, \dots, i_k}$ são variáveis aleatórias *independentes*, exceto que, para cada sequência i_1, \dots, i_k , não exigimos que $\lambda_{i_1, \dots, i_k, 1}$ e $\lambda_{i_1, \dots, i_k, 2}$ sejam independentes.

A dimensão de Hausdorff (definida no capítulo 2) de ζ , $\dim_{\mathcal{H}} \zeta$, é uma *variável aleatória* que pode ser expressa em termos de $\lambda_{i_1, \dots, i_k}$. Precisamente,

$$\dim_{\mathcal{H}} \zeta = s$$

onde s é a solução da equação:

$$E(\lambda_1^s + \lambda_2^s) = 1 \quad (1.33)$$

(b) Curva de Koch (flocos de neve) aleatória

Podemos aleatorizar a construção da curva de Koch F pelo menos de duas maneiras distintas. A primeira consiste em toda vez que substituirmos o terço aberto do meio de cada intervalo pelos outros dois lados de um triângulo equilátero, decidirmos aleatoriamente, com probabilidade $1/2$, se posicionamos a nova parte para cima ou abaixo do segmento removido. A outra, seria escolher aleatoriamente qual dos três segmentos seria substituído pela cavidade formada pelos dois novos segmentos.

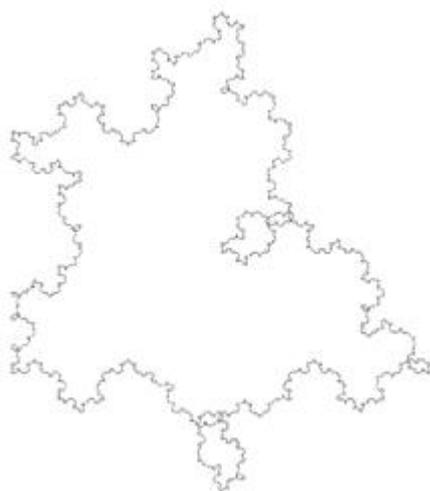


Figura 1.16: Curva de Koch aleatória [6].

Apesar de sua irregularidade, a curva de Koch aleatória guarda algumas características da Curva de Koch F . Apesar de não ter a auto-similaridade estrita dos seus análogos determinísticos, sua aparência, geralmente, melhor se aproxima dos fenômenos naturais. Veja que a figura 1.16 lembra o contorno do litoral de um país.

Os fractais aleatórios apresentam *auto-similaridade estatística* no sentido em que, ampliações de pequenas partes têm a mesma distribuição estatística do conjunto como um todo. Nos conjuntos determinísticos, estritamente auto-similares, estas ampliações são idênticas ao todo.

Capítulo 2

Dimensão de Conjuntos

2.1 Introdução

Desde os primeiros ensinamentos escolares, aprendemos conceitos sobre dimensão e, quase exclusivamente, a dimensão relacionada a elementos da geometria euclidiana. Aprendemos que um *ponto* é **adimensional**, ou seja, não é mensurável, convencionando-se sua dimensão, $D = 0$; que uma *linha* (reta ou curva) é unidimensional, $D = 1$ que uma *figura plana* (quadrado, círculo, triângulo, etc) é bidimensional, $D = 2$; uma esfera, cubo, pirâmide são objetos tridimensionais, $D = 3$.

Todas estas classes de figuras, a partir de $D = 1$, possuem unidades de medida específicas como: metro, metro quadrado, metro cúbico, litros, etc, que são expressas tomando-se o comprimento L elevado a potência D . Logo, a medida μ , que mede um objeto de dimensão D , terá unidades de medida na forma L^D .

No entanto, no caso dos fractais, este D não será necessariamente um número inteiro. Vimos no capítulo 1, que a curva de Koch tem comprimento infinito; apesar de parecer que podemos medi-la, pois seus extremos se tocam, e parece ocupar mais espaço do que uma linha comum mas, também não é bidimensional. Portanto, poderíamos dizer que a curva de Koch é mais que uma linha e menos que uma superfície.

Analisemos o conjunto de Cantor. Na sua construção, tomamos um segmento de reta de comprimento um e o dividimos em três segmentos de mesmo comprimento. Em seguida, retiramos o do meio, ou seja, a cada iteração retiramos um terço do segmento, restando dois terços. Portanto, a cada passo, o comprimento total é multiplicado por $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$, logo, independente do comprimento inicial, essa multiplicação repetida infinitas

vezes levará o comprimento para zero. Temos infinitos pontos que não chegam a constituir segmento algum que possa ser medido de maneira usual. Logo, o conjunto de Cantor é formado por elementos que são mais do que pontos e menos do que uma reta.

Portanto, para conjuntos mais complexos, necessita-se de diferentes definições de dimensão que, não necessariamente, terão o mesmo valor e, poderão nem mesmo ser números inteiros. Este fenômeno constitui-se em um dos pontos de partida para a teoria de fractais de Mandelbrot.

2.2 Dimensões Fractais

Na literatura, encontramos várias definições de uma grandeza teórica chamada *dimensão fractal* de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. As dimensões fractais procuram mensurar quão densamente um fractal ocupa o espaço métrico no qual está imerso e fornecem resultados que podem ser usados para comparações entre fractais. São definidas em consonância com dados do mundo real, podendo ser medidas por aproximações através de experiências.

Por exemplo, pode-se medir a dimensão fractal do litoral de um país, de nuvens, árvores, neurônios, entre muitos outros fenômenos. Os valores que representam as dimensões fractais permitem comparar conjuntos do mundo real com modelos fractais produzidos recursivamente [7].

2.3 Método de Hausdorff-Besicovitch

A dimensão de Hausdorff (Felix Housdorff, 1868-1942), também conhecida como dimensão de Hausdorff-Besicovitch (Abram Samoilovitch Besicovitch, 1891-1970), apresentada em 1919, é baseada em uma construção que usa *medidas de coberturas de conjuntos* introduzidas em 1914 por Carathéodory, (Constantin Carathéodory, 1873-1950). Esta definição é a mais antiga, certamente a mais importante e tem a vantagem de ser aplicável a qualquer conjunto. Uma de suas principais desvantagens, é a sua difícil estimação em termos computacionais. Seus valores numéricos coincidem geralmente com valores de outras definições, mas nem sempre isto ocorre [8].

2.3.1 Medida de Hausdorff

Definição 2.3.1: Se U é um subconjunto não vazio do espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n , e $x, y \in U$, denotamos a distância entre x e y como $d(x, y) = |x - y|$ e definimos o diâmetro de U como sendo,

$$\text{diam}(U) = |U| = \sup \{|x - y|; x, y \in U\} \quad (2.1)$$

Definição 2.3.2: Se $\{U_i\}$ é uma coleção finita ou enumerável de conjuntos de diâmetros no máximo iguais a δ que cobre F , isto é,

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad (2.2)$$

com $0 < |U_i| < \delta$ para cada i , dizemos que $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F .

Suponhamos que F seja um subconjunto do \mathbb{R}^n e s um número não-negativo. Para todo $\delta > 0$ definimos,

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s; U_i \text{ uma } \delta\text{-cobertura de } F \right\} \quad (2.3)$$

Desta forma, olhamos todas as coberturas de F por conjuntos de diâmetros no máximo iguais a δ e buscamos minimizar a soma da s -ésima potência dos diâmetros.

Enquanto δ diminui, a classe das coberturas permissíveis de F em (2.3) é reduzida. Desta forma, o ínfimo $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ aumenta, e então, se aproxima de um limite quando $\delta \rightarrow 0$. Escrevemos,

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad (2.4)$$

Este limite existe para qualquer subconjunto F do \mathbb{R}^n , embora o valor limite possa ser **zero** ou **infinito** e, geralmente, o é. Chamamos $\mathcal{H}^s(F)$ **a medida s -dimensional de Hausdorff de F** .

2.3.2 Dimensão de Hausdorff

Retornando à equação (2.3) temos que, para qualquer conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta < 1$, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ é não crescente com s , de modo que, por (2.4) $\mathcal{H}^s(F)$ é também não crescente. Temos também que, se $t > s$ e U_i é uma δ -cobertura de T , temos

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \quad (2.5)$$

de modo que, tomando o ínfimo, $\mathcal{H}^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s(F)$.

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, vemos que se $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ então $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para $t > s$. Deste modo, um gráfico $\mathcal{H}^s(F)$ versus s , mostra que existe um valor **crítico** de s no qual $\mathcal{H}^s(F)$ 'salta' de ∞ para 0.

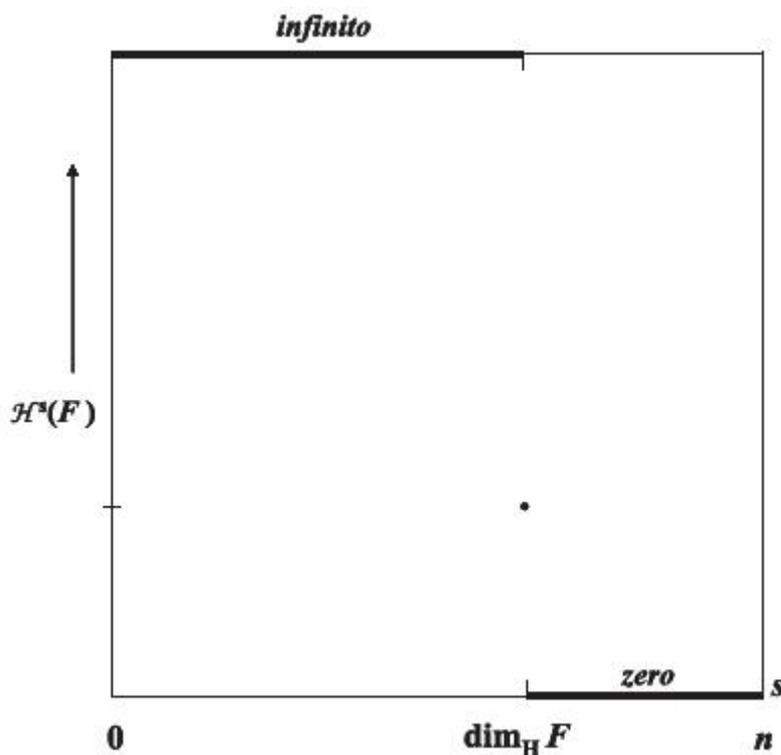


Figura 2.1: Gráfico de $\mathcal{H}^s(F)$ versus s para um conjunto F . A dimensão de Hausdorff é o valor de s no qual ocorre o “salto” de ∞ para 0.

Este valor **crítico** é chamado de **dimensão de Hausdorff de F** , escrita $dim_{\mathcal{H}}F$, e é definida para qualquer conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$. Esta dimensão também é conhecida como **dimensão de Hausdorff-Besicovitch**.

Formalmente,

$$dim_{\mathcal{H}}F = \inf \{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s; \mathcal{H}^s(F) = \infty\} \quad (2.6)$$

tomando o supremo do conjunto vazio como 0, de modo que,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq s < dim_{\mathcal{H}}F \\ 0 & \text{se } s > dim_{\mathcal{H}}F \end{cases} \quad (2.7)$$

Se $s = dim_{\mathcal{H}}F$, então $\mathcal{H}^s(F)$ pode ser zero ou infinito, ou satisfazer à desigualdade,

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$$

Exemplo 1: Vamos calcular a dimensão de Hausdorff do conjunto C da figura 1.3.

Aplicando a equação (2.4) ao conjunto C , obtemos

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(C) \quad (2.8)$$

Vimos na construção do conjunto de Cantor, que chamamos os intervalos que compõem C_k , de intervalos k -nível. Desta forma, C_k é composto de 2^k intervalos k -nível, cada um com comprimento 3^{-k} .

Tomemos os intervalos de C_k como uma δ -cobertura de C (observe a definição 2.3.2). Deste modo, $\delta = 3^{-k}$, temos então uma 3^{-k} -cobertura de C . Donde,

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) = 2^k \times 3^{-ks} \quad (2.9)$$

Observamos que na equação (2.4), podemos substituir o $\delta \rightarrow 0$, por $k \rightarrow \infty$ e, substituindo (2.9) em (2.4), obtemos

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} (2^k \times 3^{-ks}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (2 \times 3^{-s})^k \quad (2.10)$$

Logo, pela equação (2.7), obtemos

$$\mathcal{H}^s(C) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq s < \dim_{\mathcal{H}} C \\ 1 & \text{se } 0 \leq s = \dim_{\mathcal{H}} C \\ 0 & \text{se } s > \dim_{\mathcal{H}} C \end{cases}$$

e,

$$2 = 3^s \Rightarrow \ln 2 = \ln 3^s \Rightarrow \ln 2 = s \cdot \ln 3 \Rightarrow s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Donde,

$$\mathcal{H}^s(C) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq s < \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ 1 & \text{se } 0 \leq s = \frac{\ln 2}{\ln 3} \\ 0 & \text{se } s > \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases} \quad (2.11)$$

Portanto, a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor C é

$$\dim_{\mathcal{H}} C = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309... \quad (2.12)$$

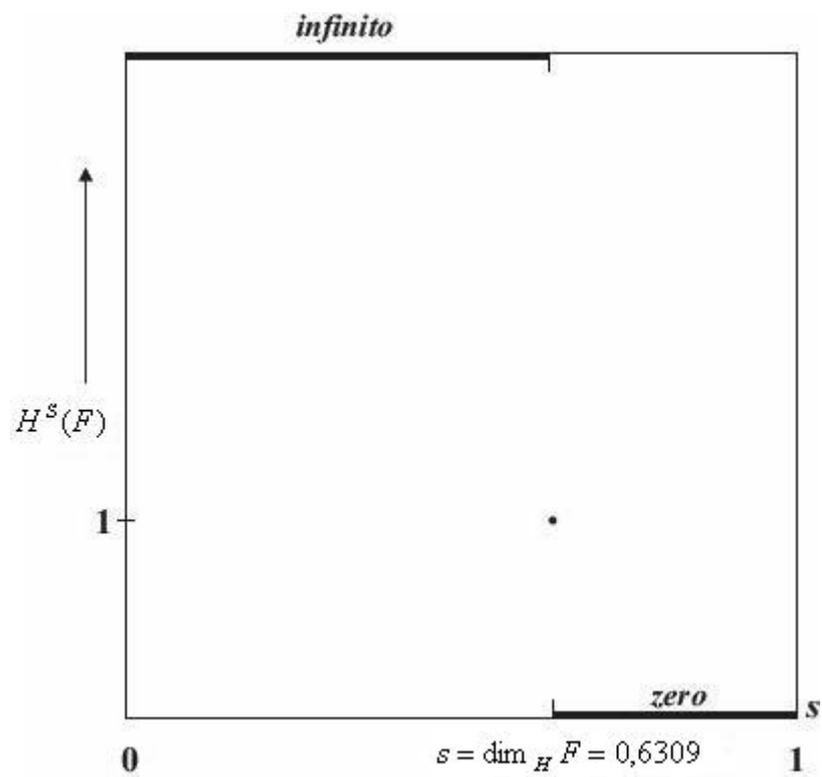


Figura 2.2: Gráfico da medida s -dimensional de Hausdorff do conjunto de Cantor C , $\mathcal{H}^s(C)$ versus s . A dimensão de Hausdorff de C , $\dim_{\mathcal{H}} C$, é o valor de $s = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309\dots$ no qual $\mathcal{H}^s(C)$, 'salta' de *infinito* para zero.

Exemplo 2: Vamos calcular a dimensão de Hausdorff da curva de Koch da figura 1.4.

Vimos na construção da curva de Koch F , que cada estágio F_k tem 4^k intervalos k -nível, cada um de comprimento 3^{-k} . Tomemos os intervalos de F_k como uma δ -cobertura de F , donde:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \quad (2.13)$$

daí,

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) = 4^k \times 3^{-ks} \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13) e fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} (4^k \times 3^{-ks}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (4 \times 3^{-s})^k \quad (2.15)$$

e,

$$4 = 3^s \Rightarrow \ln 4 = \ln 3^s \Rightarrow \ln 4 = s \cdot \ln 3 \Rightarrow s = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

Pela equação (2.7), temos

$$\mathcal{H}^s(C) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq s < \frac{\ln 4}{\ln 3} \\ 1 & \text{se } 0 \leq s = \frac{\ln 4}{\ln 3} \\ 0 & \text{se } s > \frac{\ln 4}{\ln 3} \end{cases} \quad (2.16)$$

Portanto, a dimensão de Hausdorff da curva de Koch F é

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618... \quad (2.17)$$

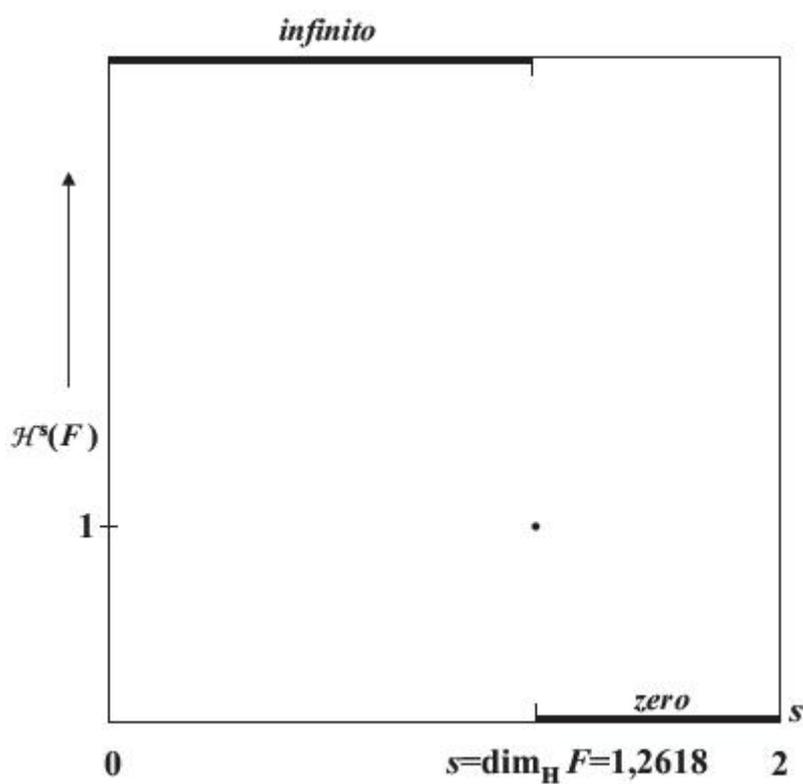


Figura 2.3: Gráfico da medida s -dimensional de Hausdorff da curva de Koch F , $\mathcal{H}^s(F)$ versus s . A dimensão de Hausdorff de F , $\dim_{\mathbb{H}} F$, é o valor de $s = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618\dots$ no qual $\mathcal{H}^s(F)$, 'salta' de *infinito* para zero.

2.4 Dimensão de contagem de caixas

Esta definição surgiu na década de 1930 e já recebeu várias denominações como: *Entropia de Kolmogorov*, *Dimensão de Entropias*, *Dimensão de Capacidade*, *Dimensão Métrica*, *Densidade Logarítmica*, *Dimensão de Informação*, etc. Devido a sua relativa facilidade nos cálculos matemáticos e da implementação algorítmica, a dimensão de contagem de caixas é uma das mais utilizadas. Possui várias definições equivalentes que são usadas de acordo com o problema a ser abordado.

Seja Ω um subconjunto não vazio qualquer e limitado do \mathbb{R}^n e tome $N_\delta(\Omega)$ o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo igual a δ capaz de cobrir Ω .

As dimensões de contagem de caixas *inferior* e *superior* de um subconjunto Ω do \mathbb{R}^n são dadas por [4]:

$$\underline{dim}_B \Omega = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(\Omega))}{\ln(1/\delta)} = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(\Omega))}{-\ln(\delta)} \quad (2.18)$$

$$\overline{dim}_B \Omega = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(\Omega)}{\ln(1/\delta)} = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(\Omega)}{-\ln(\delta)} \quad (2.19)$$

Quando $\underline{dim}_B \Omega = \overline{dim}_B \Omega$, então dizemos que a dimensão de contagem de caixas de Ω , se o limite existir, é dada por:

$$dim_B \Omega = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(\Omega)}{\ln(1/\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(\Omega)}{-\ln(\delta)} \quad (2.20)$$

Podemos estimar $N_\delta(\Omega)$ usando as seguintes configurações de malhas:

- (a) o menor número de bolas fechadas de raio δ que cobre Ω ;
- (b) o menor número de cubos de lado δ que cobre Ω ;
- (c) o número de cubos da δ -malha que intercepta Ω ;
- (d) o menor número de conjuntos de diâmetros no máximo δ que cobre Ω ;
- (e) o maior número de bolas disjuntas de raio δ com centros em Ω ;

Fazemos a observação que $\delta > 0$ é suficientemente pequeno para garantir que $-\ln \delta$ e grandezas similares são estritamente positivas. Para evitar problemas com ' $\ln 0$ ' ou ' $\ln \infty$ ', geralmente consideramos dimensões de contagem de caixas somente para conjuntos não-vazios limitados.

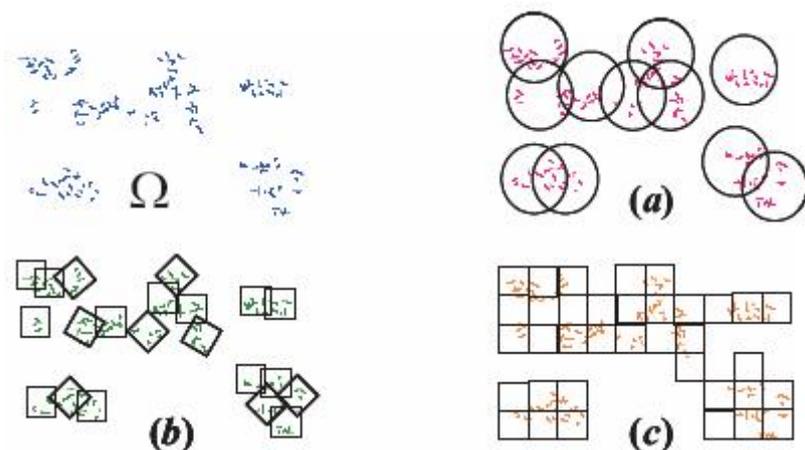


Figura 2.4: Três formas diferentes de encontrar a dimensão de contagem de caixas de um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ [4].

Apresentamos um exemplo clássico de aplicação do *Método de contagem de caixas*, que é o cálculo da dimensão fractal do litoral de um país [1]. Consideremos o litoral sul da Noruega. Na figura 2.11, temos o mapa do país e assinalamos a região a ser considerada. Destacamos uma malha quadrada utilizada no processo de medida na figura 2.12. A idéia é obter uma δ -malha o mais refinada possível, tomando δ cada vez menor, de forma a cobrir todos os pontos que constituem o contorno do litoral e, a partir disso, contar o número de caixas $N(\delta)$, de diâmetro no máximo $\delta\sqrt{2}$, que cobrem a região considerada. No caso, a dimensão fractal encontrada é $D \approx 1,52$ [9].



Figura 2.5: Mapa da Noruega.

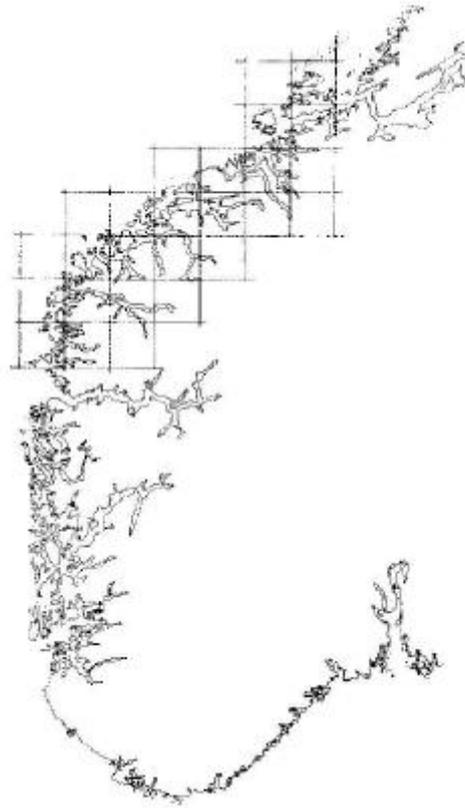


Figura 2.6: Contorno do litoral sul da Noruega. A malha quadrada que é mostrada tem um espaçamento $\delta \sim 50km$ [9].

Considere a coleção de cubos na malha δ -coordenada do \mathbb{R}^n , isto é, cubos da forma [4]:

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

onde m_1, \dots, m_n são inteiros.

Seja $N'_\delta(\Omega)$ o número de cubos da δ -malha que interceptam Ω . Estes cubos formam uma coleção de $N'_\delta(\Omega)$ conjuntos de diâmetro $\delta\sqrt{n}$ que cobre Ω de modo que:

$$N_{\delta\sqrt{n}}(\Omega) \leq N'_\delta(\Omega)$$

Se $\delta\sqrt{n} < 1$, então,

$$\frac{\ln N_{\delta\sqrt{n}}(\Omega)}{-\ln \delta\sqrt{n}} \leq \frac{\ln N'_\delta(\Omega)}{-\ln \sqrt{n} - \ln \delta}$$

de modo que, tomando os limites quando $\delta \rightarrow 0$,

$$\underline{dim}_B \Omega \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N'_\delta(\Omega)}{-\ln(\delta)} \quad (2.21)$$

e,

$$\overline{dim}_B \Omega \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N'_\delta(\Omega)}{-\ln(\delta)} \quad (2.22)$$

A proposição que segue, é um exemplo da ocorrência da igualdade dos elementos descritos acima.

Proposição: *Seja C o conjunto de Cantor da figura 1.3. Então,*

$$\underline{dim}_{BC} = \overline{dim}_{BC} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Demonstração: A cobertura feita pelos 2^k intervalos do k -nível de C_k , de comprimentos 3^{-k} , resultam em $N_\delta(C) \leq 2^k$ se $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k-1}$.

Temos de (2.19),

$$\overline{dim}_{BC} = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(C)}{-\ln(\delta)} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^{k-1}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad (2.23)$$

Por outro lado, qualquer intervalo de comprimento δ , com $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$, intercepta no máximo um dos intervalos k -nível de comprimento 3^{-k} usados na construção de C . Existem 2^k tais intervalos, de modo que, pelo menos 2^k intervalos de comprimento δ são exigidos para cobrir C . Então, $N_\delta(C) \geq 2^k$ levando a $\underline{dim}_B C \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Assim, temos

$$\overline{dim}_B C \leq \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

e

$$\underline{dim}_B C \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Portanto,

$$\underline{dim}_B C = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309\dots$$

Que é o mesmo valor encontrado para a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor C , visto anteriormente. No entanto, isto nem sempre acontece (seção 2.5, exemplo 5).

2.5 Dimensão de Escala

Definição: Seja Ω um conjunto *geometricamente auto-similar* capaz de ser dividido em N réplicas, tais que, quando ampliadas por um *fator de escala* $b > 1$, tornar-se-á congruente a Ω . Deste modo,

$$N = b^D \quad (2.24)$$

onde $D \geq 0$ é a “dimensão” da lei de escala.

Portanto, definimos *Dimensão de Escala* de um conjunto auto-similar Ω do seguinte forma:

$$\dim_S \Omega = \frac{\ln N}{\ln b} \quad (2.25)$$

Apliquemos este conceito em alguns exemplos do capítulo 1.

Exemplo 1: No processo de construção do conjunto de Cantor C , vimos que o segmento inicial é dividido em duas réplicas C_{00} e C_{02} , ou seja, $N = 2$ e, para voltarmos ao comprimento do segmento inicial, basta multiplicarmos uma das réplicas pelo fator de escala $b = 3$, temos que:

$$\dim_S C = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309\dots$$

Exemplo 2: No caso do Tapete de Sierpinski T apresentado na figura 1.7, na primeira iteração, é dividido em 8 réplicas, com fator de escala de ampliação $b = 3$, logo a dimensão fractal de escala é

$$\dim_S T = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,8927\dots$$

Exemplo 3: Na primeira iteração da construção da Esponja de Menger (figura 1.11), ela é subdividida em 20 réplicas com fator de escala $b = 3$, logo

$$\dim_S M = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2,7268\dots$$

Exemplo 4: Na figura 1.9, temos $N = 4$ e $b = 4$, portanto

$$\dim_S P = \frac{\ln 4}{\ln 4} = 1$$

Esta poeira de Cantor P , consiste de um fractal que possui dimensão inteira.

No entanto, como já vimos, existem os fractais *auto-afins* que possuem mais de um fator de escala. Neste caso, a dimensão de um fractal auto-afim Ω , subdividido em N réplicas com os seguintes fatores de escala $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, é dada por

$$\dim_S \Omega = \frac{\ln N}{\ln(b_1 b_2 b_3 \dots b_n)^{1/n}}$$

Exemplo 5: Observe a figura 1.14. No seu processo de construção, temos $N = 6$ e fatores de ampliação de escala $b_x = 3$ e $b_y = 4$. Portanto, a dimensão fractal de escala desse objeto será

$$\dim_S A = \frac{\ln 6}{\ln(3 \times 4)^{1/2}} = \frac{\ln 6}{\frac{1}{2} \ln 12} = 2 \frac{\ln 6}{\ln 12} = 1,4421\dots$$

Neste caso, a dimensão de Escala difere das dimensões de Hausdorff e de Contagem de Caixas ($\dim_H A = \dim_B A = 1,5$). Portanto, nem sempre estas dimensões coincidem.

Capítulo 3

Medidas Multifractais

Nesta seção, faremos uma breve introdução à *Teoria da Medida* [10, 11], afim de compreendermos formalmente o que é uma Medida. Posteriormente, faremos uma aplicação no contexto fractal.

3.1 σ -álgebra

- **Definição 1:** Dado um conjunto fundamental X , a classe \mathcal{A} de subconjuntos de X é uma álgebra se, e somente se, cumpre as seguintes condições:

C1. $X \in \mathcal{A}$

C2. $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{A}$ (onde $B^c = X - B$)

C3. Se $B \in \mathcal{A}$ e $C \in \mathcal{A} \Rightarrow (B \cup C) \in \mathcal{A}$

- **Definição 2:** Uma classe \mathcal{A} , definida como acima, é uma σ -álgebra se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

P1. \mathcal{A} é uma álgebra

P2. Dados $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots \in \mathcal{A}$ tem-se $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

Exemplo: Seja $X = \{1, 2, 3\}$ e as seguintes coleções de subconjuntos, $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ e $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Verifiquemos se são σ -álgebras.

Observemos se satisfazem (C1), (C2), (C3) e (P2).

- Em ambas as coleções, X está presente, logo, cumprem (C1).

- Todos os complementares dos elementos de \mathcal{A}_1 estão em \mathcal{A}_1 , observe:

$$\emptyset^c = X, X^c = \emptyset, 1^c = \{2, 3\}, \{2, 3\}^c = \{1\}$$

Portanto, \mathcal{A}_1 satisfaz (C2).

Analogamente, ocorre para \mathcal{A}_2 :

$$\emptyset^c = X, X^c = \emptyset, 1^c = \{2, 3\}, \{2\}^c = \{1, 3\}, \{1, 3\}^c = 2, \{2, 3\}^c = \{1\}$$

- Como o número de elementos em cada coleção é finito, para verificar (P2) é suficiente verificar (C3), basta observar se todas as uniões possíveis dos seus elementos também pertencem à coleção. A união com o vazio é indiferente e, com X, é ele próprio. Preocupemo-nos com as demais:

Para \mathcal{A}_1 temos,

$$\{1\} \cup \{2, 3\} = X \in \mathcal{A}_1$$

Portanto, \mathcal{A}_1 é uma σ -álgebra.

Para \mathcal{A}_2 temos,

$$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{A}_2$$

Portanto, \mathcal{A}_2 não é uma σ -álgebra.

3.2 Medida

Seja Ω um conjunto e $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, ou seja, \mathcal{F} é uma classe (conjunto cujos elementos são conjuntos).

- **Definição 1:** Uma função $\mu: \mathcal{F} \rightarrow (-\infty, \infty]$ é chamada uma *função de conjunto*.
- **Definição 2:** μ é *finitamente aditiva* se, e somente se, dados $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$ dois-a-dois disjuntos, $A \in \mathcal{F}$, tem-se

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

- **Definição 3:** μ é *σ -aditiva* (enumeravelmente aditiva) se, e somente se, dados $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $A_n \in \mathcal{F}$ dois-a-dois disjuntos, $A \in \mathcal{F}$, tem-se

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

- **Definição 4:** Dizemos que uma função de conjuntos μ a valores reais estendidos não-negativos definida numa σ -álgebra \mathcal{F} é uma *medida enumeravelmente aditiva*, ou simplesmente, uma *medida* se:

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

para qualquer sequência enumerável $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos **disjuntos** contidos em \mathcal{F} .

Nesta definição, exige-se que o domínio seja uma σ -álgebra para garantir que a união de qualquer sequência enumerável de conjuntos do domínio pertença a ele, caso contrário, a propriedade acima não faria sentido.

Propriedades

- (i) Se A e B são conjuntos pertencentes à \mathcal{F} com $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. (monotonicidade da medida)
- (ii) Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em \mathcal{F} , então

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

- (iii) Se existe um conjunto A em \mathcal{F} tal que $\mu(A) < \infty$, então $\mu(\emptyset) = 0$.

- **Definição 5:** Uma terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, em que Ω é um conjunto, \mathcal{F} é uma σ -álgebra contida em $\mathcal{P}(\Omega)$ e μ é uma *medida* sobre \mathcal{F} , é chamada um *espaço de medida*. O par (Ω, \mathcal{F}) é chamado um *espaço mensurável*.
- **Definição 6:** Se $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um *espaço de medida* e $\forall A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ com $\mu(A_i) < \infty$, $\forall i$, então μ é chamada σ -finita. Se $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{F}$, então μ é chamada *finita*.
- **Definição 7:** Um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, tal que, $\mu(\Omega) = 1$, é chamado de *espaço de probabilidade*.

Exemplos

- 1) Ω um conjunto qualquer e \mathcal{F} uma σ -álgebra sobre Ω . Defina $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, tal que,

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty & \text{se } A \text{ é infinito} \\ n & \text{se } A \text{ tem } n \text{ elementos} \end{cases}$$

é uma medida sobre \mathcal{F} denominada *medida contadora*.

- 2) Seja $\Omega = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto enumerável e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $p_1, p_2, \dots \in \mathbb{R}^+$. Defina

$$\mu(A) = \sum_{i: x_i \in A} p_i$$

μ é uma medida sobre \mathcal{F} , em particular $\mu(\{x_i\}) = p_i$, para $i = 1, 2, \dots$

Uma distribuição de massa pode ser espalhada sobre uma região de tal maneira, que a concentração de massa seja altamente irregular. Estamos interessados em quantificar esta distribuição.

Este conjunto de pontos onde a concentração local de massa obedece a uma lei de potência com índice α , onde

$$\mu(B(x, r)) \sim r^\alpha$$

para r pequeno, pode determinar um fractal diferente para diferentes valores de α .

Observamos medidas multifractais em muitas situações físicas como: distribuição de precipitações pluviométricas, redes neurais, reservatórios de petróleo entre muitos outros fenômenos.

Existem pelo menos duas abordagens básicas para a Análise Multifractal: (a) a *Teoria Fina*, onde são examinadas a estrutura e as dimensões fractais que surgem com um determinado α . Encontra um paralelo com a dimensão de Hausdorff, sendo mais conveniente para uma abordagem matemática. (b) a *Teoria Grossa*, onde são consideradas as irregularidades da distribuição das medidas das bolas de pequenos raios positivos r e, então, toma-se um limite quando $r \rightarrow 0$. Apresenta um paralelo com a dimensão de contagem de caixas, sendo mais prática quando tratamos de exemplos físicos ou experiências em computadores.

3.3 Medida multifractal auto-similar em um conjunto de Cantor

Vimos que o conjunto de Cantor ilustra muitas características matemáticas dos fractais. Esta medida auto-similar, que tem como suporte o referido conjunto, é típica para uma classe muito grande de medidas multifractais. Ver figura 3.1.

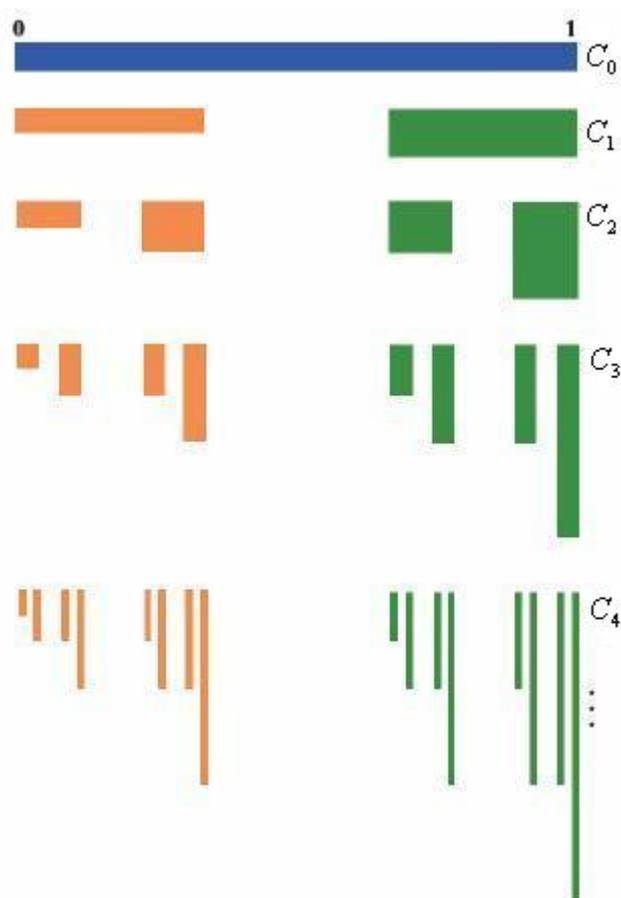


Figura 3.1: Construção da medida auto-similar do *Conjunto de Cantor*.

Obtenhamos este multifractal [4]. Sejam $p_1, p_2 > 0$ e $p_1 + p_2 = 1$. Construimos uma medida μ no conjunto de Cantor,

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$$

pela subdivis3o repetida das massas.

Como vimos anteriormente, C_k compreende 2^k intervalos do nvel k de comprimentos 3^{-k} . Atribuimos ao intervalo da esquerda de C_1 , a massa p_1 , e ao intervalo da direita a massa p_2 .

Dividimos a massa em cada intervalo de C_1 entre seus dois subintervalos de C_2 na proporcao $p_1 : p_2$. Continuamos com este procedimento de maneira que a massa em cada intervalo de C_k seja dividida naquela raz3o entre seus dois subintervalos de C_{k+1} . Este procedimento define uma distribuico de massa em C .

Sejam $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, onde a σ -algebra \mathcal{F} 3 a classe de todos os 2^k intervalos de comprimento 3^{-k} do nvel k da construico do conjunto de Cantor C . Defina:

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

tal que, se I for um intervalo do k -nvel de C_k , ent3o:

$$\mu(I) = p_1^r p_2^{k-r}$$

onde, pela construico de I , um intervalo da esquerda 3 tomado r vezes e um intervalo da direita 3 tomado $k-r$ vezes. Se $p_1 \neq p_2$ e k 3 muito grande, as massas dos intervalos do k -3simo nvel ir3o variar consideravelmente, e isto 3 uma manifestaico de *multifractalidade*.

Faamos alguns exemplos para $p_1 = 0,4$ e $p_2 = 0,6$. Tomemos os intervalos $I_{1,1}$, $I_{1,2}$, $I_{2,1}$ e $I_{2,2}$ de C_2 e, $I_{1,1,1}$, $I_{1,1,2}$, $I_{1,2,1}$, $I_{1,2,2}$, $I_{2,1,1}$, $I_{2,1,2}$, $I_{2,2,1}$ e $I_{2,2,2}$ de C_3 :

$$\mu(I_{1,1}) = p_1^2 p_2^{2-2} = p_1^2 = 0,4^2 = 0,16$$

$$\mu(I_{1,2}) = p_1^1 p_2^{2-1} = 0,4 \times 0,6 = 0,24$$

$$\mu(I_{2,1}) = p_1^1 p_2^{2-1} = p_2^2 = 0,24$$

$$\mu(I_{2,2}) = p_1^0 p_2^{2-0} = 0,36$$

$$\mu(I_{1,1,1}) = p_1^3 p_2^{3-3} = 0,4^3 = 0,064$$

$$\mu(I_{1,1,2}) = p_1^2 p_2^{3-2} = p_1^2 p_2^1 = 0,4^2 \times 0,6 = 0,096$$

$$\mu(I_{1,2,1}) = p_1^2 p_2^{3-2} = 0,096$$

$$\mu(I_{1,2,2}) = p_1^3 p_2^{3-1} = 0,144$$

$$\mu(I_{2,1,1}) = p_1^2 p_2^{3-2} = 0,096$$

$$\mu(I_{2,1,2}) = p_1^1 p_2^{3-1} = 0,144$$

$$\mu(I_{2,2,1}) = p_1^1 p_2^{3-1} = 0,144$$

$$\mu(I_{2,2,2}) = p_1^0 p_2^{3-0} = 0,216$$

Estes valores nos dizem **quanto de massa cada intervalo representa em seu devido k -nível**.

A função μ , a valores reais estendidos não-negativos sobre \mathcal{F} é uma medida pois,

$$\mu(C_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_{i_1, i_2, \dots, i_k})$$

onde $i_j = 1$ ou $i_j = 2$ com $1 \leq j \leq k$, tais que, $\{I_{i_1, i_2, \dots, i_k}\}$ são disjuntos contidos em \mathcal{F} e $C_k = \cup_{k \in \mathbb{N}} I_{i_1, i_2, \dots, i_k}$.

Capítulo 4

Percolação

4.1 Introdução

A *Teoria da Percolação* consiste num ramo da teoria das probabilidades que trata das propriedades dos meios aleatórios. Apesar de não terem utilizado essa denominação, os primeiros processos percolativos foram desenvolvidos por Paul J. Flory (1941) e Walter H. Stockmayer (1943), tinham como meta principal, descrever como as ramificações de pequenas moléculas reagiam para formar moléculas maiores.

Simon R. Broadbent e John M. Hammersley agregaram a este novo modelo os conceitos *geométricos* e *probabilísticos*[12]. Também num artigo publicado em 1957, eles introduziram na literatura matemática os processos de percolação com esta terminologia [13]. Suponha imergir uma grande rocha porosa num recipiente suficientemente grande cheio de água. Qual a probabilidade de o centro desta rocha estar úmido? Foi na formulação de um simples modelo estocástico para situações como esta que Broadbent e Hammersley obtiveram o primeiro modelo de percolação.

Compreendamos este modelo em duas dimensões [14]. Seja \mathbb{Z}^2 como uma malha quadriculada e $p \in \mathbb{R}$, tal que, $0 \leq p \leq 1$. Dizemos que cada segmento da malha é uma ligação aberta, com probabilidade p , ou fechada, independente de todas as outras ligações. As ligações em \mathbb{Z}^2 representam *caminhos interiores* da rocha e o parâmetro p é a proporção de ligações que permitem a passagem de água no interior da rocha. Suponha que a rocha esteja sendo modelada por um grande e finito subconjunto de \mathbb{Z}^2 (ver a seguinte figura), talvez vértices e ligações abertas de \mathbb{Z}^2 estejam conectados e contidos num subconjunto específico da malha. Um vértice x pertencente ao interior da rocha estará úmido se, e somente se, existe

um caminho de ligações abertas na malha ligando x a algum vértice na fronteira da rocha. A teoria da percolação consiste, basicamente, em estimar a existência ou não desses *caminhos abertos*. Cada caminho aberto define um subconjunto aleatório de \mathbb{Z}^2 . A percolação estuda a estrutura destes subconjuntos, considerando a probabilidade p agregada.

Dada uma amostra de rocha, a probabilidade de um vértice próximo ao centro desta amostra estar úmido, será semelhante ao caso real, pois sua heterogeneidade é preservada em largas ou mínimas escalas.

Suponhamos uma malha infinita. Qual a probabilidade de aparecer um caminho aberto infinito? Na figura 4.1, para $p = 0.20$ os aglomerados de caminhos abertos são pequenos e isolados. À medida que o valor de p aumenta, o tamanho dos aglomerados cresce e existe um valor crítico de p , chamado p_c , que forma um aglomerado que espalha-se por toda a malha o qual chamamos de *aglomerado percolante infinito*. Portanto, existe um valor crítico para p , tal que, para $p < p_c$ os aglomerados são finitos e, para $p > p_c$, surge um aglomerado percolante infinito.

Em contrapartida, Benoît Mandelbrot introduziu conceitos fractais que transformaram a teoria da percolação em uma poderosa ferramenta na atualidade.

A percolação trata da aleatoriedade do *meio*, ou seja, o meio determina os caminhos para o fluxo das partículas, diferentemente da *difusão*, no qual a aleatoriedade é atribuída ao fluido, ou seja, o fluido decide por onde as partículas vão se deslocar no meio poroso. Possui definição simples, geometricamente, no entanto, não possui solução analítica no caso geral.

Este modelo matemático tornou-se extremamente útil na representação de sistemas complexos, como por exemplo: processo de transição de fases, difusão em meios desordenados, recuperação de petróleo através da injeção de água ou de um gás miscível e fluxo de fluidos em meios porosos. Consideramos *sistemas complexos* sistemas químicos, físicos ou biológicos, entre outros, tais que, apresentam grande número de elementos que os compõem e interagem entre si. Têm comportamento não-linear e, quando são modelados matematicamente, não apresentam soluções analíticas. Daí, recorre-se a simulações numéricas.

O processo de percolação apresenta características físicas como: *não-linearidade*, *fractalidade* e *fenômeno crítico (limiar)*. Existindo alguns tipos diferentes: percolação por sítios, por ligações e percolação por sítios e ligações, que são modelos discretos; e, perco-

lação contínua, em meios contínuos. Mostram-se semelhantes em quase todos os aspectos relevantes.

Especificamente, *reservatórios de petróleo*, são candidatos a serem modelados pela *Teoria da Percolação*, por serem sistemas complexos, nos quais percebe-se grande heterogeneidade geológica em escala de centímetros até quilômetros [15].

A grande heterogeneidade desse sistema deve-se, principalmente, aos processos sedimentares responsáveis pela deposição de rochas e da ação do clima e fenômenos naturais ao longo do tempo, tudo isto influencia o processo de recuperação do petróleo. Ou seja, para uma grande incerteza quando tratamos da distribuição espacial das heterogeneidades que influenciam o fluxo de petróleo.

Para se ter idéia, as medidas obtidas das propriedades do fluxo através de amostras retiradas de poços de exploração/extração, representam muito pouco do volume de um reservatório padrão, em torno de 10^{-13} [16, 17].

Em contrapartida, amostras de poços de teste representa 10^{-7} do volume total de um reservatório típico. No entanto, quando o fluxo é tratado em escala de poros representa 10^{-21} do volume do reservatório [18].

Portanto, para tratar dessas incertezas, precisamos construir modelos detalhados de reservatórios que agreguem a cada incerteza uma probabilidade mais próxima possível do real, para com isto, obter os melhores resultados. No entanto, esta abordagem torna-se excessivamente cara e computacionalmente inviável, por isso, existe uma grande expectativa quando ao desenvolvimento e surgimento de modelos alternativos que mostrem-se muito mais simples.

4.2 Percolação por Sítios em uma Rede Quadrada

Seja uma rede quadrada de tamanho $L \times L$, como mostrado na figura 4.1(a), consideremos que cada *sítio* ou *célula*, que é como chamamos os quadrados que compõem a rede, seja *ocupado* aleatoriamente com probabilidade p , ou permaneçam *desocupados* com probabilidade $1 - p$ [19]. Observe a figura 4.1 (b) e (c).

A ocupação ou desocupação de um sítio pode modelar várias propriedades físicas, por exemplo: sítios ocupados são *placas condutoras* de eletricidade, (considerando que a corrente só flui entre sítios primeiros vizinhos) e sítios desocupados são *isolantes*, transição de fases de líquido para sólido, etc.

Vejamos algumas definições:

- (a) *Sítios primeiros vizinhos*: quando dois sítios têm um lado em comum.
- (b) *Sítios segundos vizinhos*: quando dois sítios se tocam apenas em um vértice.
- (c) *aglomerado*: quando dois ou mais sítios primeiro vizinhos estão ocupados
- (d) Para um determinado valor da probabilidade de ocupação p , denotado por p_c , chamado de probabilidade *crítica* ou *limiar de percolação*, surge um aglomerado que, possivelmente, torna-se dominante sobre os outros e, subitamente, passa a conectar duas margens opostas da rede, sendo chamado de *aglomerado percolante*. Desse modo, ele passa a ter o mesmo tamanho linear da rede (figura 4.1 (d)).

Considerando as redes de tamanho *infinito*, o limiar de percolação é bem definido e conhecido na literatura. Para o caso da rede quadrada, a probabilidade crítica é:

$$p_c = 0,592746\dots$$

e dizemos que o aglomerado percolante é de *tamanho infinito*.

Quando $p < p_c$, ainda não existe nenhum aglomerado percolante. No máximo, existem aglomerados finitos isolados. Para $p > p_c$, os aglomerados considerados finitos, vão sendo absorvidos pelo aglomerado percolante infinito (no caso de uma rede finita, o aglomerado percolante absorve os aglomerados de menor tamanho), a medida que p se aproxima de 1. E, para $p = 1$, não existe aglomerado finito, todos os sítios pertencem ao aglomerado

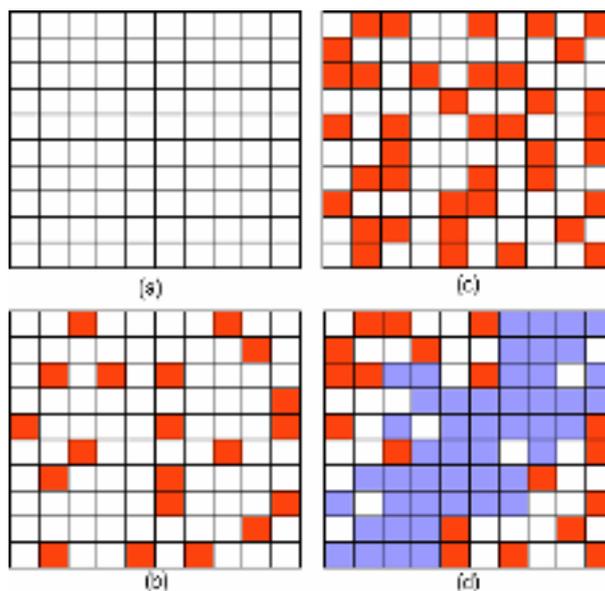


Figura 4.1: Rede quadrada 10x10. Em (a), $p = 0$, os sítos estão desocupados. Em (b) e (c), os sítos vermelhos estão ocupados com probabilidade $p = 0,2$ e $p = 0,4$, respectivamente, mostram-se isolados ou formando pequenos aglomerados. Em (d), $p = 0,6$, os sítos azuis formam um *aglomerado percolante*.

infinito. Logo, existem vários caminhos que conectam duas margens opostas da rede. Deste modo, podemos definir a *probabilidade de ocorrer percolação* $\theta(p)$ [14]:

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c \end{cases}$$

onde,

$$p_c(L) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$$

portanto, o *limiar de percolação* é a principal característica da *Teoria da Percolação* pois caracteriza *qualitativamente* o sistema, isto é, *abaixo* de p_c o sistema tem uma característica e, acima, outra; ou seja, em p_c há uma *transição de fases*. Dizemos então, que a transição de percolação é uma *transição geométrica*, pois mostra características geométricas de grandes aglomerados nas proximidades de p_c .

4.3 Dimensão fractal do Aglomerado Infinito

Podemos descrever a estrutura dos **aglomerados percolantes** através de conceitos fractais, devido sua *auto-similaridade estatística* em diferentes escalas. Observemos a seguinte figura, onde consideramos o aglomerado percolante na *probabilidade crítica* p_c :



Figura 4.2: Os sítos pretos formam um aglomerado percolante em uma rede quadrada 400×400 . Os sítos coloridos formam aglomerados finitos. Mesmo considerando os efeitos de tamanho finito o aglomerado percolante apresenta uma *auto-similaridade estatística* [4].

Assim como os fractais **Triângulo de Sierpinski** e **Tapete de Sierpinski** do capítulo 1, o **aglomerado percolante** possui “buracos” de todos os tamanhos em diversas escalas, por isso o consideramos um fractal [20].

Nos **fractais aleatórios**, definamos $M(r)$ como uma *média sobre várias configurações diferentes de aglomerados*, ou, de maneira similar, sobre vários discos de centros diferentes no mesmo aglomerado percolante infinito.

Seja d_f a *dimensão fractal* e $M(r)$ a *massa do aglomerado no interior de um disco de raio r* . Temos que:

$$M(r) \sim r^{d_f}$$

Ou seja, d_f descreve como, em média, se distribui a massa M do aglomerado no interior de um disco de raio r .



Figura 4.3: Ampliação de uma parte da figura anterior. Observe a auto-similaridade estatística [4].

O tamanho médio dos aglomerados finitos no sistema é definido pelo **comprimento de correlação** ξ , tanto para valores abaixo quanto acima de p_c . Exatamente em p_c , $\xi \rightarrow \infty$, ou seja, ocorrem “buracos” de todas as escalas de tamanho. A medida que $p \rightarrow 1$, os aglomerados finitos vão sendo agregados ao **aglomerado percolante**, daí o tamanho médio dos aglomerados finitos vai diminuindo e então, ξ passa a ser finito. Logo, o aglomerado percolante infinito será **auto-similar** apenas em escalas de comprimento menores do que ξ , configurando assim, um fractal; caso contrário, a estrutura não será auto-similar, podendo ser considerada como homogênea. ou seja, chegaria a um ponto de não haver aglomerado infinito, devido aos ‘buracos’ serem tão ‘grandes’, logo a estrutura não chegaria nem a configurar um fractal.

Portanto, interpretamos $\xi(p)$ como um comprimento típico no sistema, tal que, para valores abaixo de ξ o aglomerado é auto-similar, sendo o sistema considerado um fractal. E, para escalas de comprimentos maiores do que ξ , a estrutura não é auto-similar e, o sistema é considerado homogêneo.

Logo,

$$M(r) \sim \begin{cases} r^{d_f} & \text{se } r \ll \xi \\ r^d & \text{se } r \gg \xi \end{cases}$$

A probabilidade de que um sítio arbitrário no interior de um disco de raio $r < \xi$

pertença ao aglomerado infinito, é a razão entre o número de sítios no aglomerado infinito e o número total de sítios, expressos em termos de massa:

$$P_\infty \sim \frac{M(r)}{M} \sim \frac{r^{d_f}}{r^d}, r < \xi$$

Em outros termos [14],

$$P_\infty \begin{cases} = 0 & \text{se } 0 \leq p < p_c \\ > 0 & \text{se } p_c < p \leq 1 \end{cases}$$

ou seja, para $p < p_c$ não existe aglomerado percolante infinito e $P_\infty = 0$. Para $p > p_c$ surge o aglomerado percolante infinito e $P_\infty > 0$.

E, a probabilidade de existir um aglomerado percolante infinito é dada por:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta(p) = 0 \\ 1 & \text{se } \theta(p) > 0 \end{cases}$$

Capítulo 5

O multifractal Q_{mf}

5.1 Introdução

O objeto em estudo passou a ser chamado de Q_{mf} por ter uma rede quadrada subjacente [21, 22, 23, 24] e por ser um multifractal (vários fractais “entrelaçados”). Foi desenvolvido com o objetivo de servir como modelo de simulação para sistemas complexos tipo reservatório de petróleo [25, 26, 27] e, para se estudar fenômenos de percolação em redes não regulares que sejam multifractais no sentido geométrico, tais que suas células variam em tamanho e em número de vizinhos [28, 29].

5.2 O objeto multifractal Q_{mf}

5.2.1 Algoritmo de Construção

Definimos Q_{mf} através do algoritmo que se segue.

Começamos com um quadrado $L \times L$, e escolhemos um parâmetro $0 < \rho < 1$, onde $\rho = r/s$; $r, s \in \mathbb{R}$.

Passo 1: Para $n = 1$, o quadrado é seccionado por um *segmento de reta vertical* em duas parcelas de área, de acordo com o parâmetro ρ escolhido e unidades de L^2 (ver figura 5.1(a)):

$$\frac{s}{r+s} = \frac{1}{1+\rho} \quad (\text{maior área})$$
$$\frac{r}{r+s} = \frac{\rho}{1+\rho} \quad (\text{menor área})$$

Passo 2: Para $n = 2$, seccionamos os dois retângulos da figura 5.1(a) pelo mesmo ρ , mas

usando duas *retas horizontais* como mostrado na figura 5.1(b). Isto gera quatro blocos retangulares da seguinte forma:

O menor de área,

$$\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^2$$

Dois de área,

$$\frac{\rho}{(1+\rho)^2}$$

e o maior de área,

$$\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2$$

Passo 3: Mostrado na figura 5.1(c). Observamos que a distribuição das áreas entre os blocos segue a lei binomial:

$$1 = \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) + 3\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^2 \\ + 3\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^3$$

Passo 4: Observando a figura 3.1(d), no nível $n = 4$ existem 2^4 blocos e cinco k -conjuntos.

$$1 = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^3\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) + 6\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^2 \\ + 4\left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^3 + \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^4 \quad (5.1)$$

Passo n: O quadrado tem 2^{n-1} conjuntos de segmentos de reta de mesmo comprimento, $(n+1)$ k -conjuntos e 2^n blocos.

Portanto, a partição da área do quadrado segue a seguinte regra binomial:

$$A = \sum_{k=0}^n C_k^n \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{n-k} \quad (5.2)$$

$$A = C_0^n \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^0 \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^n + C_1^n \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{n-1} \\ + C_2^n \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{n-2} + \dots + C_n^n \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^n \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{n-n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= C_0^n \frac{\rho^n}{(1+\rho)^n} + C_1^n \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho)^n} + C_2^n \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho)^n} + \dots + C_n^n \frac{1}{(1+\rho)^n} \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{(1+\rho)^n} (C_0^n \rho^n + C_1^n \rho^{n-1} + C_2^n \rho^{n-2} + \dots + C_n^n) \\ &= \frac{1}{(1+\rho)^n} (\rho + 1)^n = \left(\frac{1+\rho}{1+\rho} \right)^n = 1 \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, cada k -conjunto determina um *monofractal* cuja dimensão calcularemos na próxima seção. A junção de todos os k -conjuntos determina o *objeto multifractal* Q_{mf} .

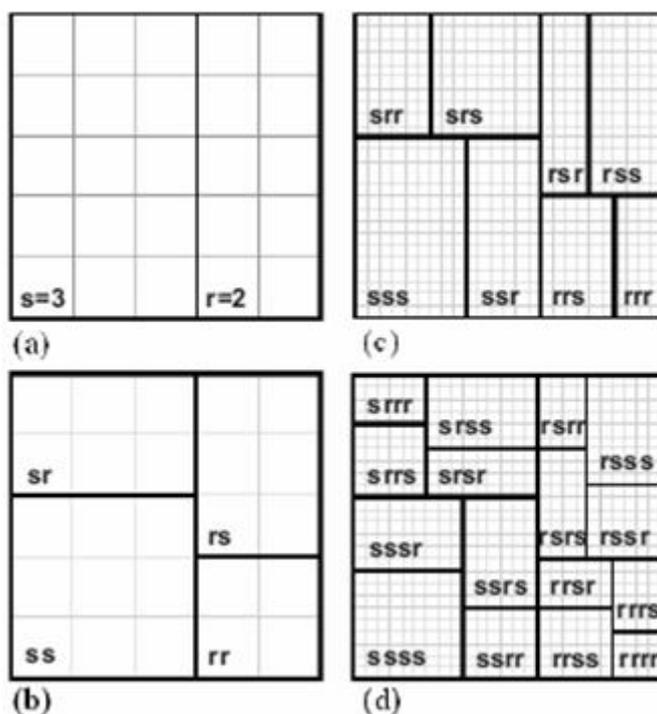


Figura 5.1: Esta figura mostra os quatro primeiros estágios da construção de Q_{mf} . (a) Um segmento de reta vertical secciona o quadrado em duas partes, $r = 2$ e $s = 3$, cuja razão entre suas áreas é $\rho = r/s = 2/3$. (b) Dois segmentos de reta horizontais dividem os retângulos na mesma razão ρ , mas sem coincidirem. (c) Terceiro passo. (d) Indica o quarto passo. Em cada passo são mostradas as áreas correspondentes de cada bloco [24].

5.3 Algoritmo de Percolação do Q_{mf}

Suponhamos que a construção de Q_{mf} encontra-se no n -ésimo passo e que, a rede quadrada subjacente seja suficientemente grande, de tal forma, que cada um dos segmentos de reta de Q_{mf} coincida com um segmento de reta daquela rede. Por isso, a rede subjacente é mais refinada que a de Q_{mf} , daí todos os blocos do multifractal Q_{mf} são compostos por um número finito de células da rede quadrada.

O primeiro passo para a percolação é escolher aleatoriamente um dentre os 2^n blocos de Q_{mf} . Daí, todas as células da rede quadrada que o compõem são consideradas ocupadas. Em seguida, verifica-se se estas células da rede subjacente estão conectadas com outras células da rede subjacente (neste caso, estas células não pertencem ao bloco que escolhemos). Fazemos este processo até obter um ou mais aglomerados percolantes. O algoritmo de checagem de percolação é similar ao usado nas referências [30, 31, 32, 33].

5.4 Espectro Multifractal

Usaremos o Método de Contagem de Caixas para obter a estimativa do espectro de dimensões fractais D_k .

Seja X um conjunto contido em \mathbb{R}^2 e apliquemos a métrica euclidiana d . Tome uma $\epsilon\sqrt{2}$ -cobertura do plano, ou seja, caixas quadradas com lado de comprimento ϵ , que não se sobrepõem e que se tocam apenas nos seus lados.

Defina $N(X)$ como o número de células quadradas com lados de comprimento ϵ que interceptam X . Se,

$$D_X = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(X)}{-\ln \epsilon} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln N(X)}{\ln L} \quad (5.3)$$

é finito, então D_X é a dimensão fractal de X .

Neste caso, chamaremos o objeto X de k -conjunto.

Para um k -conjunto temos N_k dado por:

$$N_k = C_k^n s^k r^{(n-k)}$$

onde C_k^n é o coeficiente binomial que expressa o número de elementos do tipo k , e $s^k r^{(n-k)}$ é a área de cada elemento deste conjunto.

Se o quadrado for particionado n vezes, $n/2$ cortes horizontais e $n/2$ cortes verticais, seu tamanho será $L = (r + s)^{n/2}$. Combinando todas estas informações e fazendo as devidas substituições na equação (5.3), temos para a dimensão fractal de cada k -conjunto:

$$D_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C_k^n s^k r^{n-k}}{\ln (s + r)^{n/2}}$$

Temos $N(X)$ igual a N_k , bastando para isso considerarmos a área de cada célula da rede quadrada subjacente igual a 1.

No caso $r = s = 1$, todos os subconjuntos de Q_{mf} são compostos de elementos de mesma área, são todas células quadradas que formam um único subconjunto com dimensão:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C_k^n s^k r^{n-k}}{\ln (s + r)^{n/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C_k^n 1^k 1^{n-k}}{\ln (1 + 1)^{n/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln (1 + 1)^{n/2}}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \ln 2}{\frac{n}{2} \cdot \ln 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{2}{n} = 2$$

como já esperávamos. Temos que $C_k^n = 2^n$ que é a quantidade de blocos no passo n .

5.5 Exemplo de Q_{mf} para $\rho = \frac{2}{3}$

Observe a figura 5.2, ela é uma simulação de Q_{mf} para $\rho = \frac{2}{3}$ e $n = 12$. A figura 5.3 mostra, em escala ampliada, o quadrado assinalado na figura 5.2.

O reticulado peculiar mostrado na figura 5.2 é uma das características de Q_{mf} com diferentes valores de ρ . Os blocos de mesma cor formam um k -conjunto.

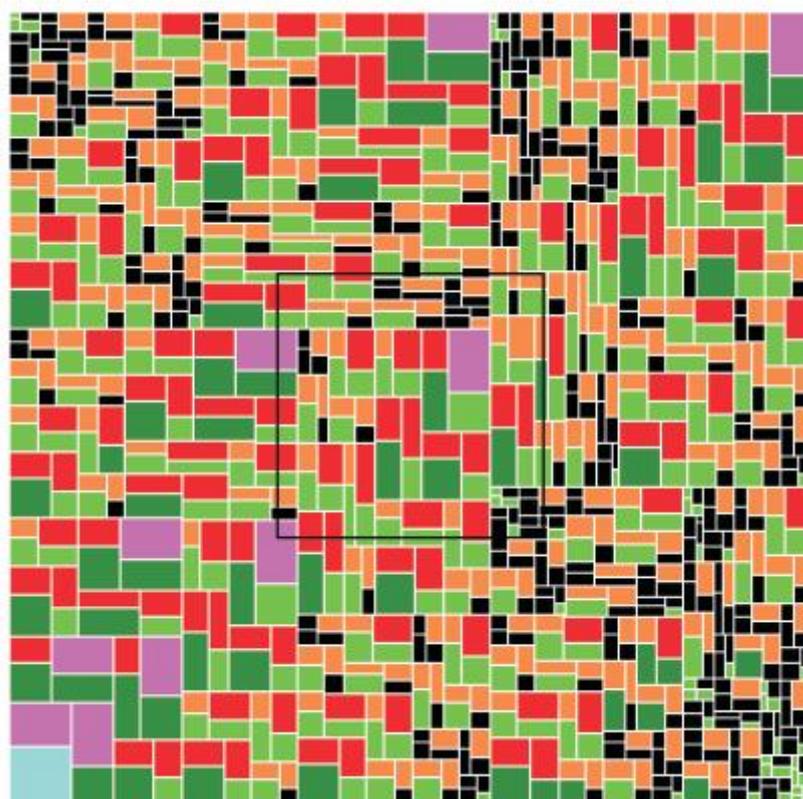


Figura 5.2: Mostra Q_{mf} com um quadrado assinalado no centro. Tomamos $n = 12$ e $(r, s) = (2, 3)$ [24].



Figura 5.3: Ampliação do quadrado assinalado na figura anterior [24].

A figura 5.4 mostra o espectro D_k para $n = 400$ calculado aplicando a equação (5.3). Para n crescente a curva não muda de forma, apenas ocorre o aumento do número de k e a curva ficará mais densa.

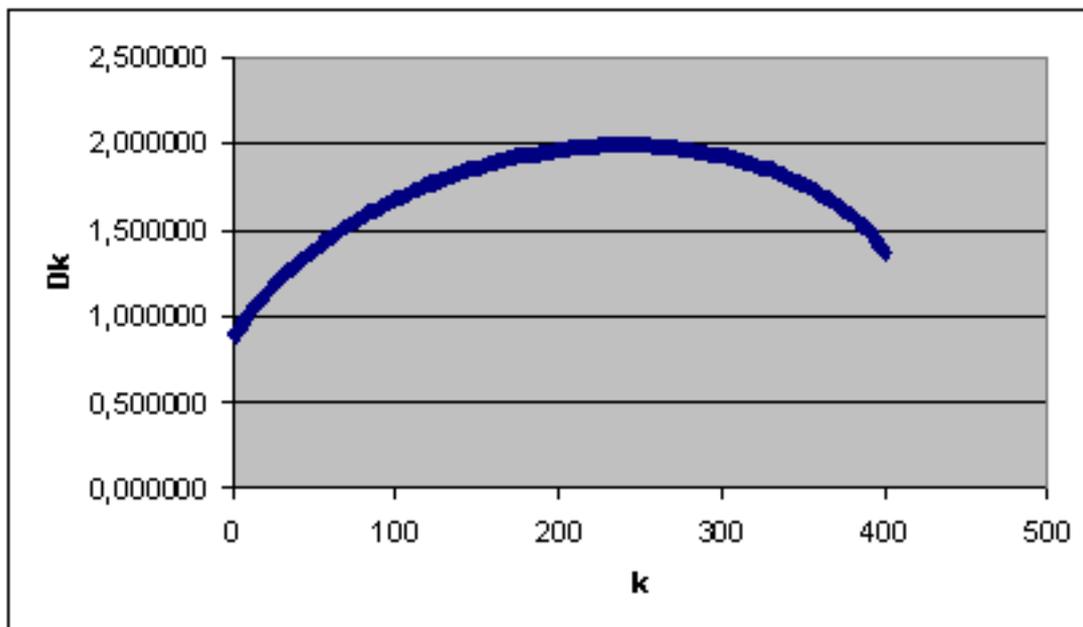


Figura 5.4: Espectro das dimensões fractais D_k de Q_{mf} para $n = 400$ e $(r, s) = (2, 3)$.

O valor máximo do espectro está em $k = 241$ com $D_k = 1,995048$, indicando a assimetria da distribuição, o que é típico no espectro D_k , significando que a maior parte da massa (áreas) do multifractal está concentrada nos k -conjuntos próximos deste valor.

Observe o gráfico da figura 5.5. Trata-se do espectro das dimensões fractais para $\rho = 1/6$ e $n = 400$, com máximo em $k = 249$ e $D_k = 1,821918$. Para valores superiores a ele, as dimensões fractais tornam-se insignificantes, ou seja, a massa desses k -conjuntos não tem peso algum no multifractal. Isto se explica pela enorme diferença entre as áreas dos blocos, trataremos disto mais profundamente no capítulo 6.

O único caso simétrico é para $(r,s)=(1,1)$ e a assimetria de D_k cresce quando (bloco de maior área) $\frac{s}{r+s} \rightarrow 1$, o que está intimamente ligado com a distribuição das áreas entre os blocos.

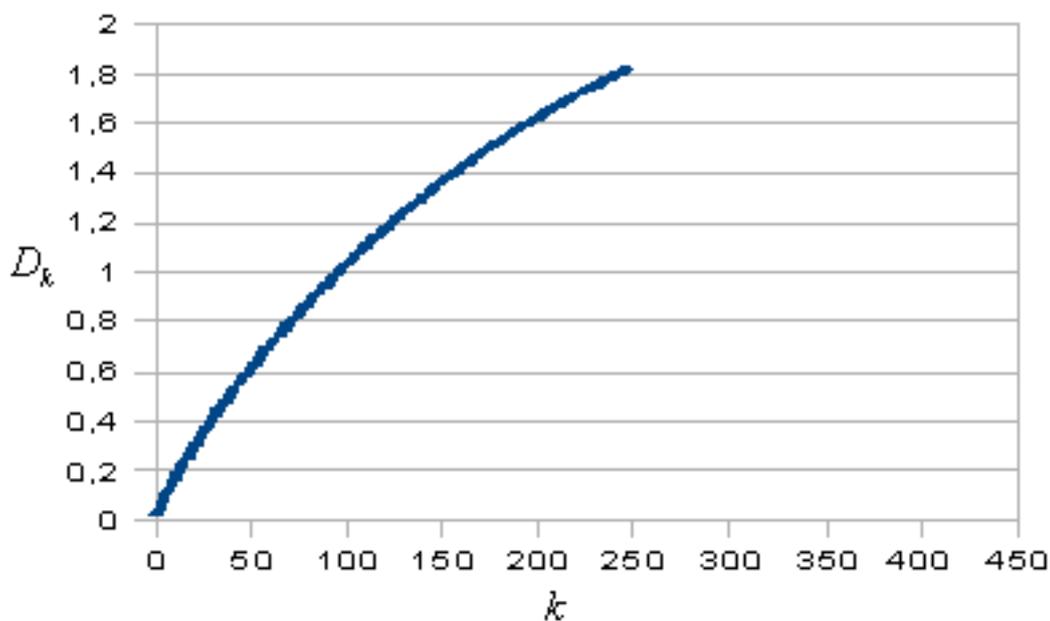


Figura 5.5: Espectro das dimensões fractais D_k de Q_{mf} para $n = 400$ e $(r, s) = (1, 6)$.

5.6 Características

Portanto, estas são as características de Q_{mf} :

- (1) Q_{mf} é um multifractal, ou seja, tem um número infinito de k -subconjuntos, cada um com uma dimensão fractal distinta que denotamos por D_k . Um k -subconjunto é um conjunto cujos elementos têm áreas iguais;
- (2) Podemos determinar o espectro de todas as dimensões fractais D_k analiticamente;
- (3) A soma de todas as famílias de k -subconjuntos preenche o quadrado $L \times L$. Este fato possibilita estudar suas propriedades de percolação usando procedimentos similares àqueles aplicados à percolação por sítios na rede quadrada.
- (4) O algoritmo de construção de Q_{mf} é recursivo
- (5) Para a escolha de $\rho = 1$, o objeto Q_{mf} degenera na rede quadrada. Daí, comparamos os resultados com os da percolação por sítios na rede quadrada.
- (6) O objeto Q_{mf} apresenta *auto-similaridade* ou *auto-afinidade* dependendo da região considerada no objeto;

Capítulo 6

Simulações Numéricas

6.1 Introdução

Nesta seção, analisaremos os resultados obtidos do algoritmo de percolação no Q_{mf} exposto anteriormente. Lembrando que, uma rede percola quando ocorre percolação do topo a base ou da esquerda para a direita e vice-versa. Faremos comparações entre histogramas e valores de dimensões fractais.

6.2 Histograma de redes variadas

Observe a figura 6.1. Ela mostra o histograma das redes percolantes *versus* a probabilidade de ocupação p . Foi usado $n = 10$ e obtivemos a média dos resultados sobre 40.000 amostras. São resultados de simulações com diferentes valores de ρ . Para $(r, s) = (1, 1)$ sabemos que Q_{mf} degenera na rede quadrada e os demais valores são multifractais. Algumas de suas características:

- (a) o histograma é similar em ambas as direções, mas ligeiramente deslocado para a direita, o que é comum em percolação em rede quadrada (no sentido dos blocos terem quatro lados perpendiculares dois-a-dois).
- (b) os histogramas para as redes quadradas $(1, 2)$, $(1, 4)$ e $(1, 6)$ estão deslocados para a esquerda em relação ao histograma de $(1, 1)$.
- (c) o pico do histograma de $(1, 1)$ corresponde ao valor do limiar de percolação da rede quadrada, $p_c = 0,593$, justamente o que esperávamos, pois esta rede coincide com a rede quadrada.

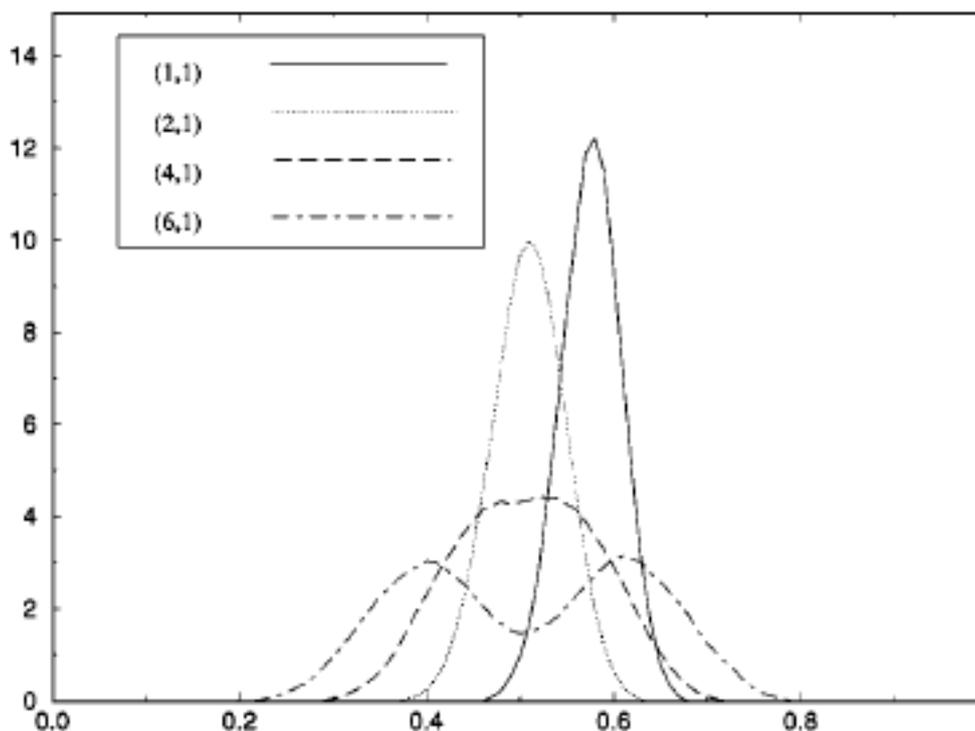


Figura 6.1: Histograma das redes percolantes *versus* a probabilidade de ocupação p para os casos $(r, s) = (1, 1)$, $(r, s) = (1, 2)$, $(r, s) = (1, 4)$ e $(r, s) = (1, 6)$. As áreas sobre as curvas estão normalizadas com a unidade [24].

Na tabela 6.1, mostramos p_c e a dimensão fractal do aglomerado percolante d_f , para diferentes valores de ρ . Foi feita uma média sobre 100.000 amostras e $n = 16$.

(r,s)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
p_c	0,593	0,527	0,526	0,526	0,525	0,525	0,530
d_f	1,895	1,900	1,911	1,890	1,902	1,929	1,842

Tabela 6.1: Valores de p_c e d_f para vários multifractais [24].

De acordo com a topologia do multifractal, Q_{mf} pode apresentar de maneira “grosseira” o mesmo p_c para diferentes valores de ρ . A topologia de um conjunto de blocos está ligada ao *número de coordenação* c , que indica o número de vizinhos de cada bloco. O valor de c muda de acordo com ρ e também valores diferentes de c surgem a medida que se aumenta a quantidade de passos na construção de Q_{mf} . Por outro lado, quando calculamos o valor de c_{med} , que é definido como a média do número de vizinhos de cada bloco, observamos que este valor não depende significativamente do ρ escolhido e da quantidade de passos n da construção do Q_{mf} , o valor encontrado tende ao mesmo $c_{med} = 5.436$, que é próximo do valor de c para o problema de *percolação triangular* que é $c = 6$ com limiar de percolação

analítico $p_c = 0,5$. Para $(r, s) = (1, 1)$, a rede quadrada, temos que $c = 4$. O que configura a única exceção em relação às demais redes.

6.3 Estimativa da dimensão Fractal

A estimativa da dimensão fractal d_f , do aglomerado percolante em Q_{mf} , é feita pela relação:

$$M \sim L^{d_f}$$

onde M é a “massa” do aglomerado percolante, que significa a *área do aglomerado medida em unidades da rede subjacente*, e L é o tamanho da rede subjacente. Portanto, dimensão fractal caracteriza quanto da rede subjacente o aglomerado percolante ocupa, a partir da potenciação da medida L da própria rede.

Analisando os valores de d_f da tabela 6.1, observe que percolação em um suporte multifractal como o Q_{mf} , imerso no \mathbb{R}^2 , pertence a mesma classe de universalidade da percolação usual em duas dimensões. Ou seja, os valores de d_f são próximos a 2.

É também interessante de se notar que para o caso $(r, s) = (1, 6)$, o valor de $d_f = 1.842$ é o menor em relação aos demais, devido ao *efeito de tamanho finito*, ou seja, a grande diferença entre as áreas do bloco de maior área para o de menor área. Isto faz com que a área (massa) de ocupação da rede subjacente seja menor (ver figura 5.5 e comentário a seu respeito).

6.4 Análise das áreas dos blocos de Q_{mf}

Sabemos que de acordo com o ρ escolhido, a dispersão do histograma muda significativamente (ver figura 6.2). Por isso, analisaremos as áreas dos blocos de Q_{mf} , para ilustrar a mudança na largura dos histogramas.

No passo n da construção de Q_{mf} , usando unidades de L^2 , o maior elemento tem área $s^n/(r+s)^n$, e o menor $r^n/(r+s)^n$. Sendo assim, a razão entre o elemento de maior área e o de menor área é:

$$\frac{s^n}{(r+s)^n} \div \frac{r^n}{(r+s)^n} = \frac{s^n}{(r+s)^n} \cdot \frac{(r+s)^n}{r^n} = \left(\frac{s}{r}\right)^n$$

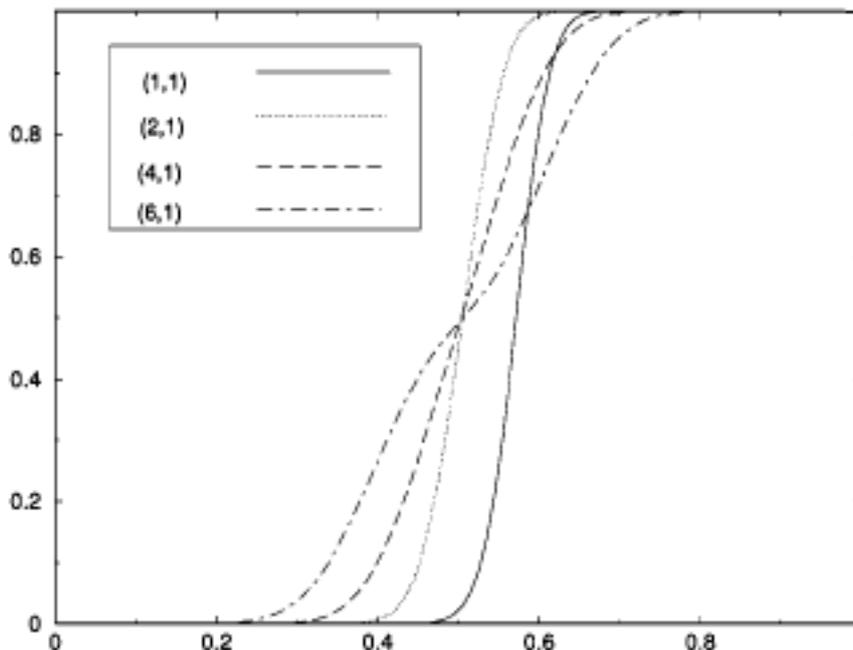


Figura 6.2: Mostra para os mesmos valores de (r,s) da figura 6.1, um gráfico da fração das redes percolantes R_L versus p . Foram usadas 40.000 redes para se tomar a média [24].

Deste modo, a maior razão entre as áreas dos blocos aumenta com $(s/r)^n$. Temos também que a probabilidade de ocupação de um sítio que entra no algoritmo de percolação é, em geral, proporcional à área dos blocos. Como a área dos blocos depende de $\rho = r/s$ escolhido, temos que a largura do histograma na figura 6.1, aumenta com $(s/r)^n$.

O caso do duplo pico, $(r,s) = (1,6)$ da figura 6.1, apresenta um ponto de inflexão, o que é evidenciado na figura 6.3 e mais explorado na figura seguinte:

A marca mais visível de percolação no multifractal Q_{mf} , é justamente o duplo pico observado no caso $(r,s) = (1,6)$ da figura 6.3, é um fenômeno relevante quando ρ é finito, na condição de rede de tamanho finito usada na simulação. Quando n cresce a distância entre os picos decresce.

Comparando a curva $(1,6)$ da figura 6.3 e a curva $(1,1)$ da figura 6.1, do ponto de vista analítico, aquela tem três extremos, enquanto esta tem um único ponto de máximo. Acreditamos que, no limite quando n tende ao infinito, estes três pontos se juntam em um único e, todas as curvas terão um comportamento parecido.

Como já tínhamos frizado anteriormente, os dois picos do histograma são uma consequência da enorme diferença entre as áreas dos blocos de Q_{mf} . Se tivermos $(s/r)^n$ grande, a diferença entre as áreas é tão acentuada que utilizamos estatística bimodal para

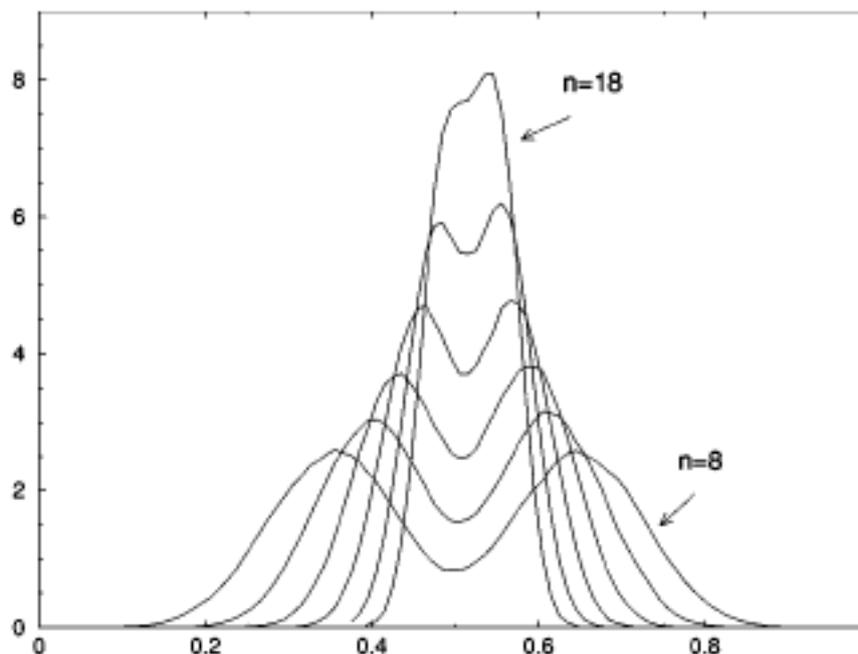


Figura 6.3: Histograma das redes percolantes *versus* a probabilidade de ocupação p para diferentes tamanhos da rede. o gráfico mostra os picos com corcova que se aproximam quando n cresce. Nesta figura, $(r, s) = (1, 6)$ e $8 < n < 18$, Foram usadas 40.000 redes para se tomar a média [24].

modelar o *histograma das redes percolantes*.

Para analisarmos o efeito do bloco de maior área nas estatísticas, utilizemos a tabela 6.2:

n	8	10	12	14	16	18
Δp_{max}	0,290	0,220	0,150	0,110	0,070	0,040
$[s/(r+s)]^n$	0,291	0,211	0,157	0,115	0,084	0,062

Tabela 6.2: Estimativa de Δp_{max} e $[s/(r+s)]^n$ para vários passos n [24].

Para $8 \leq n \leq 18$ na construção do multifractal Q_{mf} , comparamos na tabela 6.2 os valores de Δp_{max} , que é a diferença entre o primeiro pico p_1 e o segundo p_2 , com $[s/(r+s)]^n$, que é a fração da área do maior bloco pela área total do quadrado. É importante notar que a medida que n cresce a diferença entre as áreas decresce, analogamente, ocorre com a distância entre os picos. Observe que de início existe uma boa concordância entre os números, mas à proporção que n cresce esta concordância decresce, pois a tendência é que não mais existam três pontos extremos, mas que eles venham a se unificar e, no limite, $\Delta p_{max} = 0$.

6.5 Anisotropia e limiar de Percolação no Suporte Multi-fractal Q_{mf}

A isotropia é a propriedade que caracteriza as substâncias que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada. Contrária a esta definição existe a *anisotropia* (ani: não, iso: igual, tropia: volta), que é a condição de variabilidade de propriedades físicas de um corpo rochoso ou mineral segundo direções diferentes, como, por exemplo, a variação da velocidade de propagação da luz em minerais anisótropos; a variação de propagação de ondas sísmicas em massas rochosas estratificadas segundo diferentes direções, etc. Essa propriedade é utilizada notadamente na indústria do petróleo e do gás natural.

Analisemos algumas propriedade geométricas e topológicas do aglomerado percolante gerado em Q_{mf} no limiar de percolação [34]. Observe a figura 6.4:

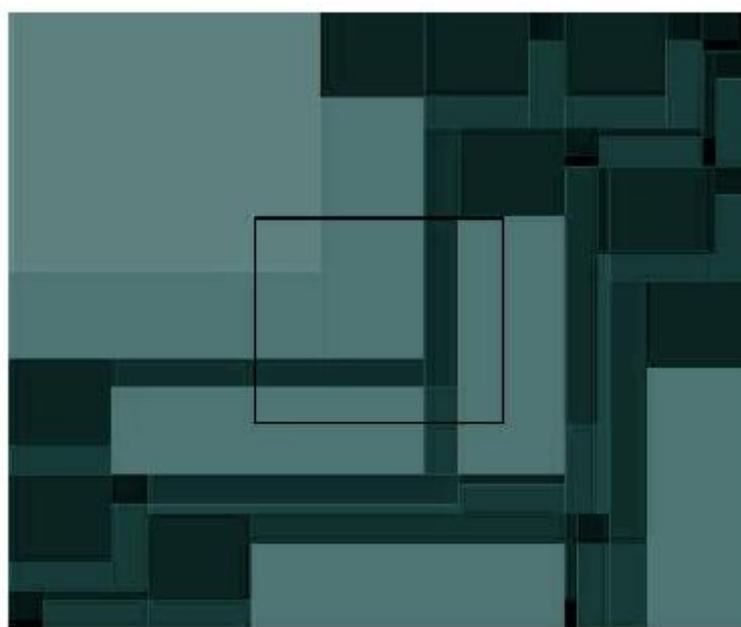


Figura 6.4: O objeto Q_{mf} para $\rho = 1/3$ e $n = 4$ [34].

Observamos neste exemplo de Q_{mf} para $\rho = 1/3$ e $n = 4$, uma rede *heterogênea, anisotrópica*, e com *topologia não-trivial*. Heterogênea no sentido de seus blocos estarem distribuídos de maneira aleatória; anisotrópica pelo alongamento de alguns de seus blocos e outros não, dependendo da direção tomada podemos encontrar formatos diferentes; e, topologia não-trivial, pelo número de vizinhos de cada bloco escolhido ser variável, sendo o segundo ponto um fator de influência sobre o limiar de percolação em Q_{mf} .

Deste ponto em diante, analisaremos resultados numéricos referentes ao limiar de percolação.

Definamos R_L da seguinte forma:

Definição 1: R_L é a *aproximação* da probabilidade que, para um sítio com probabilidade de ocupação p , exista um aglomerado percolante contíguo.

Definição 2: R_L^e é a *aproximação* da probabilidade que exista um aglomerado percolante *em uma das direções, ou horizontal ou vertical*.

Definição 3: R_L^b é a *aproximação* da probabilidade que exista um aglomerado percolante *em ambas as direções*.

Quando o tamanho L tende a infinito, no caso da rede quadrada, R_L^e e R_L^b convergem para um mesmo valor, pois a medida que n cresce irá surgir pelo menos um aglomerado que vai se sobressair aos demais e poderá ser de qualquer direção ou ambas, formando assim um aglomerado percolante infinito.

Definição 4: p_c^e valor estimado de p_c considerando R_L^e . É a média de p_c tomada sobre redes que percolam em uma direção, ou horizontal ou vertical.

Definição 5: p_c^b valor estimado de p_c considerando R_L^b . É a média de p_c tomada sobre redes que percolam em ambas as direções.

Considere os comportamentos de p_c^e e p_c^b nos casos exibidos abaixo:

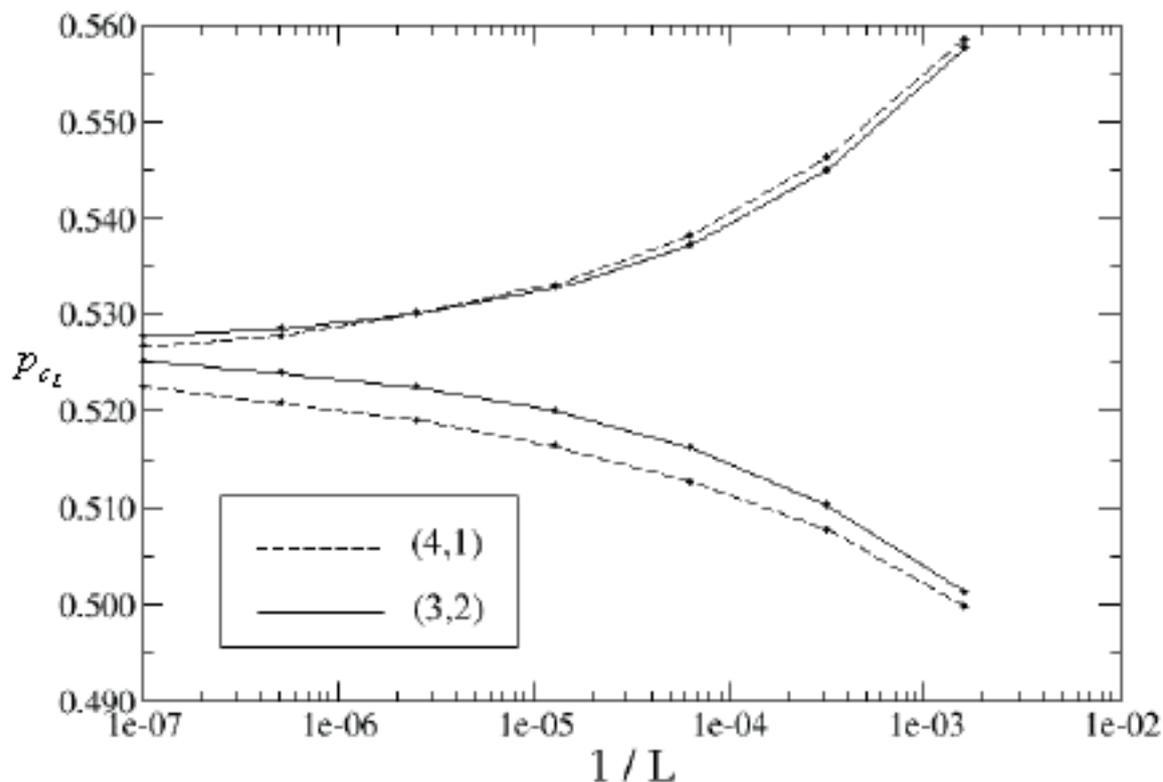


Figura 6.5: p_{cL}^e versus $1/L$ para $\rho = 2/3$ (linha sólida) e $\rho = 1/4$ (linha tracejada). Os valores do ramo acima correspondem a p_c^b e os valores do ramo abaixo correspondem a p_c^e . Usamos $4 \leq n \leq 10$ [34].

Para ambos os casos $r + s = 5$ e o tamanho linear da rede, $L = (r + s)^n$ é dado por $4 \leq n \leq 10$. Por exemplo, para $n = 4$ teremos $L = 625$ e $1/L = 1/625 = 0.0016$, que é maior que $1 \times 10^{-3} = 0.001$. Analisemos os gráficos da direita para a esquerda, para perceber melhor a convergência dos valores de p_{cL} e p_{cmed} . Observando a figura 5.9, os dados do ramo superior colapsam em uma única curva, diferentemente do ramo inferior, ou seja, as curvas de Q_{mf} para $\rho = 2/3$ e $\rho = 1/4$ dividem grosseiramente o mesmo p_c^b , mas não o mesmo p_c^e . Isso se explica pela forte anisotropia de $\rho = 1/4$ comparada com $\rho = 2/3$. Apesar de $\rho = 1/4$ ser bastante anisotrópico, quando consideramos a percolação em ambas as direções, esse efeito adverso é anulado devido a média entre os valores, mesmo que em uma direção não ocorra percolação, na outra ocorre. Diferentemente, se considerarmos a rede percolando em uma única direção, pode ser que ocorra normalmente a percolação em uma das direções, ou não e, neste caso, não tomamos a média pois estamos considerando a rede em uma única direção.

De fato, a percolação em ambas as direções resulta de uma média sobre as direções e, nesta situação, qualquer efeito desfavorável causado pela anisotropia do aglomer-

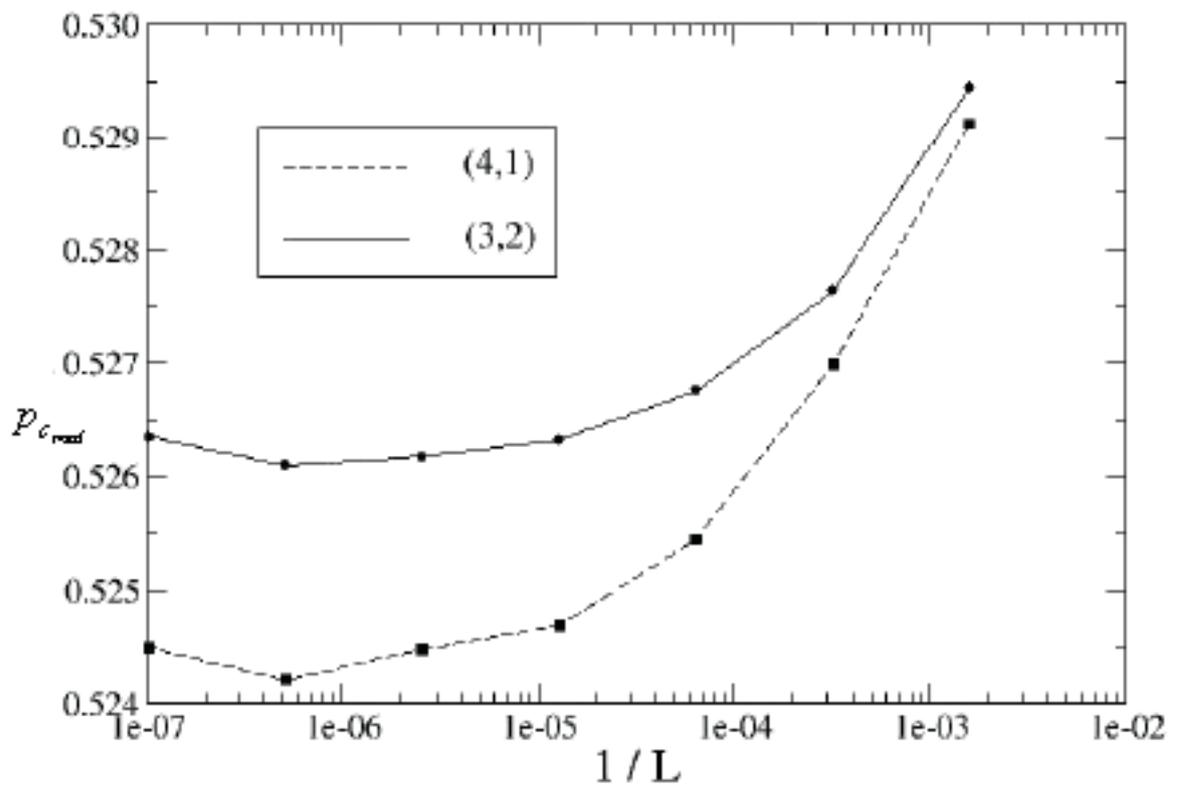


Figura 6.6: p_{cmed} versus $1/L$ para $\rho = 2/3$ (linha sólida) e $\rho = 1/4$ (linha tracejada). Os valores do ramo acima correspondem a p_c^b e os valores do ramo abaixo a p_c^e . Usamos $4 \leq n \leq 10$. Gráfico de p_{cmed} versus $1/L$ para os mesmos dados [34].

ado percolante se anula devido à média. Ou seja,

$$p_{cmed} = \frac{p_c^b + p_c^e}{2}$$

Na figura 6.9, percebemos que ambas as curvas convergem para valores de saturação diferentes. A diferença entre esses casos está intimamente ligada com a curva de p_c^b (ver figura 6.8), devido a escolha do ρ , a anisotropia, alongamento dos blocos, culmina em anisotropia do aglomerado percolante, determinando que este não tenha *comprimento de correlação*, maior distância entre dois sítos de um aglomerado não ocupado, independente da direção. Simplesmente, dependendo da direção escolhida vamos encontrar “buracos” de tamanhos variados.

Portanto, não necessariamente terei simetria entre p_c^b e p_c^e . Esperamos então que, quanto *menor* for o ρ , maior será a anisotropia no multifractal e, conseqüentemente, teremos uma maior diferença em p_{cmed} .

Conclusão

Neste trabalho, estudamos diversos exemplos de fractais e suas propriedades. Vimos a necessidade de se obter uma definição adequada de dimensão, que possibilite mensurar adequadamente conjuntos do espaço fractal.

Analisamos o processo de construção e percolação do **Multifractal** $Q_{m,f}$ e percebemos que a união de todos os seus subconjuntos fractais preenchem uma malha quadrada subjacente, sendo possível determinar a dimensão fractal de cada um deles, bem como a diferença entre a percolação na *rede quadrada* e em $Q_{m,f}$.

A diferença de “peso”(área) entre os blocos influenciam a dispersão do **histograma das redes percolantes**, isto porque, o “peso”(área) de cada bloco de $Q_{m,f}$ afeta de modo diferente a “massa” do **aglomerado percolante**. Outro fator que surge devido a diferença entre as áreas são os dois picos no histograma, no entanto, quando o limite tende a infinito, todos os histogramas dos fractais parecem convergir para uma única curva.

O número de coordenação c é muito mais complexo para $Q_{m,f}$ do que na rede quadrada, pois ele varia ao longo de sua construção, no entanto, sua média gira em torno de 5,436. Já pra $(r, s) = (1, 1)$ temos $c = 4$.

Tratamos sobre a anisotropia, que se torna mais evidente quando comparamos p_c^b e p_c^e . As curvas observadas de p_c^b apresentam um comportamento similar, diferentemente das de p_c^e . isto porque, a média sobre ambas as direções anulam os efeitos anisotrópicos do aglomerado percolante. Temos que a anisotropia decresce a medida que ρ tende a zero, pois quanto maior o ρ , menor será o alongamento dos blocos, menos vizinhos eles terão e, conseqüentemente, o fractal terá mais dificuldade em percolar, ou seja, teremos um limiar de percolação maior.

Para trabalhos futuros, poder-se-á analisar mais profundamente o impacto de outras características topológicas no aglomerado percolante e outros tipos de redes.

Bibliografia

- [1] Benoit B. Mandelbrot, *The fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, Nineteenth printing, New York, (2000).
- [2] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. (1993).
- [3] A. C. Clarke, *The Colours of Infinity*, Clear Book, Singapore, (2006).
- [4] R.F. Soares, *Fractais e Percolação na recuperação de Petróleo*. Natal, RN, 2007. Tese(doutorado). Orientador: Liacir dos Santos Lucena.
- [5] M. Sahimi, *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*. VCH, Weinheim, (1995).
- [6] Disponível em: http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/kinouchi_fractais.htm
- [7] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*. San Diego: Academic Press, Inc (1988).
- [8] M. F. Barnsley, *Superfractals*, Cambridge University Press, United Kingdom, (2006).
- [9] J. Feder. *Fractals*, Plenum Press, (1988).
- [10] Pedro J. Fernandez, *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA,(2002).
- [11] Marcos N. Magalhães, *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*, 2ªedição, EDUSP, São Paulo, (2006).
- [12] B. D. Hughes, *Random Walks and Random Evironments*, volume 2, Oxford Science Publications, Published in the United States by Oxford University Press Inc., New York, (1995).
- [13] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley, *Percolation processess I*. Crystals and mazes. Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society, 53 629-641 (1957).
- [14] G. Grimett, *Percolation*, Springer-Verlag, 2nd Edition, Berlin Heidelberg, (1999).

- [15] J. S. Andrade Jr., S. V. Buldyrev, N. V. Dokholyan, S. Havlin, P. R. King, Y. Lee, G. Paul, H. E. Stanley, *Physical Review E*, 62, 8270 (2000).
- [16] P. R. King, J. S. Andrade Jr., S. V. Buldyrev, N. V. Dokholyan, Y. Lee, S. Havlin, H. E. Stanley, *Physica A*, 266 107 (1999).
- [17] P.R. King, S.V. Buldyrev, N.V. Dokholyan, S. Havlin, Y. Lee, G. Paul, H.E. Stanley, *Physica A*, 274 60 (1999).
- [18] P.R. King, S.V. Buldyrev, N.V. Dokholyan, S. Havlin, Y. Lee, G. Paul, H.E. Stanley, and N. vandesteeg, *Petroleum Geoscience*, 7 (2001).
- [19] D. Stauffer and Aharony, *Introduction to Percolation Theory*. Taylor and Francis, London, (1994).
- [20] H. H. Hardy, and R. A. Beier *Fractals in Reservoir Engineering*. World Scientific, Singapore, (1994).
- [21] E.T. Gawlinsk and H.E. Stanley, *J. Phys. A* 14, L291 (1981).
- [22] M.J. Powell, *Phys. Rev. B* 21, 3725 (1980).
- [23] M. Sahimi and S. Mukhopadhyay, *Prhy. Rev. E* 54, 3870 (1996).
- [24] G. Corso, J.E. Freitas, L.S. Lucena and R.F. Soares, *Phys. Rev. E*, 69, 066135 (2004).
- [25] J. Muller, *Ann. Geophys.* 11, 525 (1993).
- [26] P.N. Khue, O. Fluseby, A. saucier and J. Muller, *J. Phys.: Condens. Matter* 14, 2347 (2002).
- [27] P. Hubert, *Hydrol. Sci. J.* 46, 897 (2001).
- [28] F. Herrmann, *A Scaling Medium Representation, a Discussion on Well-logs, Fractals and Waves*. PhD Thesis, Delf University of Technology, (1997).
- [29] L.S. Lucena, J.E. Freitas, G. Corso, and R.F. Soares, *Brazilian Journal of Physics* 33, 637-640 (2003).
- [30] J.E. Freitas and L.S. Lucena, *IJMPC*, 11, 1581 (2000).
- [31] J.E. Freitas, L.S. Lucena, and S. Roux, *Phys. Rev. E*, 64, 051405 (2001).
- [32] R.M. Ziff, *J. Phys. A*, 32, L457 (1999).
- [33] J.E. Freitas, L.S. Lucena, and S. Roux, *Physica A* 266, 81 (1999).

- [34] L.S. Lucena, J.E. Freitas, G. Corso, and R.F. Soares, *Brazilian Journal of Physics* 33, 637 (2003).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)