

**A Anomalia Quiral no Modelo Espectral de
Quarks**

Luellerson Carlos Ferreira

Fevereiro de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

A Anomalia Quiral no Modelo Espectral de Quarks

Luellerson Carlos Ferreira

Orientador: André Luiz Motta

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São João Del Rei - UFSJ, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Fevereiro de 2008

*Você realmente não entende algo
se não consegue explicá-lo para sua avó.*

*A mente que se abre a uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original.*

Albert Einstein

*A física está para a matemática,
assim como o sexo está para a masturbação.*

Richard Feynman

*Nada de novo existe nesse planeta,
que não se fale aqui na mesa de bar...*
Saudade dos Aviões da Panair (Conversando num bar)-

Milton Nascimento

Agradecimentos

Depois de todo o trabalho, de todas as disciplinas, seminários, contas, páginas escritas e reescritas é hora de baixar a cabeça e lembrar de todos aqueles que participaram direta e indiretamente na elaboração desta dissertação. Para mim esta é a parte mais difícil, no sentido de que não posso esquecer de ninguém, mas também é a mais gostosa, uma vez que a gente se lembra de tudo o que se passou durante todo esse tempo. Caso eu esqueça de alguém, espero que compreendam que a correria às vezes cega a nossa consciência, e contudo agradeço a todos que conheço.

Agradeço ao Prof. André Luiz Mota, pela a orientação tão sólida e prestativa, pelo companheirismo e citando um amigo meu, por mostrar que conhecimento e humildade podem e devem sempre andar juntos.

À minha família, por sempre me apoiar e incentivar em tudo o que faço. À minha mãe, por me ensinar que todos os problemas e desafios que a vida pode me oferecer, sempre podem ser resolvidos e ultrapassados com coragem e justiça. A meu pai, por mostrar que as coisas mudam e que sempre há uma forma interessante e pertinente de resolvermos nossos problemas.

À minha namorada Fidélcia, que sempre me incentiva e apoia, e também sempre aguenta as barras e dificuldades que acarretam a uma relação afetiva e amorosa, por me amar e por existir.

Aos meus velhos amigos de sempre Christiano e Plínio, por sempre serem meu eterno porto seguro nas horas alegres e difíceis.

Aos amigos que conquistei em São João del Rei. Em especial aqueles da sala 3.09, nominalmente Fred, Davidson, Lucas. À minha amiga Poliana (Buneca), pelas horas difíceis e alegres pelas quais passamos nessa labuta. Aos amigos João e Balta, pelo companheirismo. Aos demais companheiros de graduação e mestrado, pela ajuda nas disciplinas e no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores do DCNAT, pela base científica sólida sobre a qual o edifício do conhecimento deve ser construído. Em especial, ao Prof. José

Luiz Aarestrup (Zeca), por compartilhar de seu conhecimento tanto dentro quanto fora dos portões da Universidade e por “cuidar da gente”; Ao Prof. Samuel, pela contribuição na correção desta e por sempre estar disposto a ajudar. Ao Prof. Fernando (Fubá), por nos explicar o significado do que é ser um cientista. Ao Prof. Cláudio de Oliveira (Claudão), pelo companheirismo e pela oportunidade de trabalharmos juntos. Enfim, um obrigado a todos.

Aos funcionários do DCNAT, por tornarem a vida da gente mais fácil. Em especial, a secretária de pós-graduação Luzia Kellen, a secretária do departamento Valéria, ao técnico Alexandre, as meninas da limpeza em especial a Beth, aos vigias da portaria.

E por fim, à essa essência que banha e envolve todo o Cosmo como um éter aristotélico, pela metafísica que incentiva e move nossa vontade de saborear(saber) as coisas do mundo. Algumas pessoas o chamam de Deus.

Resumo

Um dos fenômenos mais intrigantes da QCD corresponde a uma inesperada violação de simetria, conhecida como anomalia quirial. Esta anomalia corresponde a uma amplitude de probabilidade que não satisfaz simultaneamente às simetrias de gauge e quirial, mas cujo resultado é dependente do contexto e, nesse sentido, ambíguo: na QCD, a anomalia deve violar a identidade de Ward-Takahashi quirial e preservar a de gauge, de forma a reproduzir o decaimento anômalo do pión; por outro lado, no cálculo do decaimento do próton de 't Hooft, a anomalia viola a identidade de Ward-Takahashi de gauge. Descrições recentes destes fenômenos baseiam-se nos termos de superfície relacionados às divergências dos modelos quirais de quarks da QCD. Neste trabalho estudamos este fenômeno no contexto de um modelo quirial finito, a saber, o modelo espectral de quarks. Encontramos que a dependência do acoplamento com a massa espectral desempenha um papel importante na obtenção do valor particular para a anomalia na QCD, necessário para a obtenção da violação correta neste caso. Por outro lado, no decaimento do próton esta dependência não está presente, o que leva à violação da identidade de Ward-Takahashi de gauge.

Abstract

One of the most intriguing phenomena of QCD is an unexpected breach of symmetry, known as chiral anomaly. This anomaly is an amplitude of probability which doesn't satisfy the gauge and chiral symmetries simultaneously, but whose outcome is dependent of context, and in this sense ambiguous: in QCD the anomaly must violate the axial-vector Ward-Takahashi identity and preserve vector Ward-Takahashi identity, in order to reproduce the pion anomalous decay; on the other hand, in the 't Hooft's calculation of proton decay, the anomaly must violate the vector Ward-Takahashi identity. Recent descriptions of these phenomena are based on surface terms related to divergences on the chiral quark models of QCD. In this work we studied this phenomenon in the context of a finite chiral quark model, namely the Spectral Quark Model. We find that the dependence of coupling with the spectral mass plays an important role on obtaining a particular value for the QCD chiral anomaly, which is necessary to take the correct violation in this case. On the other hand in the proton decay this dependence is not present, which leads to the violation of the vector Ward-Takahashi identity.

CONTEÚDO

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	3
1 Introdução	6
2 Cromodinâmica Quântica	10
2.1 O Modelo Padrão	10
2.2 O Modelo de Quarks	14
2.3 Liberdade Assintótica	16
2.4 Confinamento de Quarks	18
2.5 Simetrias da QCD	20
2.6 Modelos Quirais de Quarks	22
3 Simetrias	24
3.1 O Teorema de Noether	24

3.1.1	Exemplo: Férmions sem massa	27
3.2	Identidades de Ward-Takahashi	29
3.3	Quebrando Simetrias	30
3.3.1	Quebra espontânea de simetria	31
3.4	Teorema de Goldstone	35
3.5	Hipótese PCAC	37
3.6	Quebra espontânea da simetria quiral	37
3.7	Relação de Goldberger-Treiman	41
4	Modelo Espectral de Quarks	45
4.1	Aspectos Gerais	45
4.2	Momentos da função espectral	47
4.2.1	Observáveis	51
4.3	Técnica de Gauge	55
4.3.1	Vértices com uma corrente	56
4.4	Relação PCAC no Modelo Espectral de Quarks	58
5	A Anomalia Quiral no Modelo Espectral de Quarks	61
5.1	Anomalia Quiral	61
5.2	Cálculo da Amplitude	63
5.3	Identidades de Ward-Takahashi	77
5.3.1	A faca de dois gumes	78
6	Conclusões	81
	Bibliografia	83

CONTEÚDO	3
A Notação e Convenções	86
B Cálculo do Decaimento do Píon Neutro	89

LISTA DE FIGURAS

2.1	As interações fundamentais	11
2.2	A estrutura atômica com os quarks e léptons	14
2.3	Cilindro do campo de gauge entre duas fontes de cor	19
3.1	Potencial da teoria escalar interagente com o sinal do termo de massa negativo.	32
3.2	Potencial da teoria escalar interagente com o sinal do termo de massa positivo, para $N = 1$	33
3.3	Potencial da teoria escalar interagente com o sinal do termo de massa positivo, para $N = 2$	34
3.4	Elemento de matriz da corrente de isospin axial no nucleon.	42
4.1	Diagrama representando a parte dominante do vértice axial no limite de baixos momentos.	57
4.2	Diagrama representando as contribuições para o processo axial-vetor-vetor.	59
5.1	Diagrama de Feynman representando o processo axial-vetor-vetor.	64
5.2	Diagrama de Feynman representando o processo axial-vetor-vetor, com as pernas de fótons cruzadas.	74

B.1	Diagrama de Feynman representando a amplitude do decaimento $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$	89
B.2	Diagrama de Feynman de pernas cruzadas representando a amplitude do decaimento $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$	96

Introdução

A teoria que descreve a interação forte entre partículas elementares, num nível subatômico, é conhecida como Cromodinâmica Quântica (QCD, da denominação da língua inglesa *Quantum Chromodynamics*). A QCD descreve a interação entre quarks - os constituintes subatômicos da matéria, portadores da carga forte, chamada de cor (daí o nome “cromodinâmica”)- através de mediadores da interação forte chamados glúons, os quanta do campo cromodinâmico.

Embora reconhecida atualmente como a teoria que descreve a interação forte, a QCD apresenta um problema de convergência formal em seu tratamento perturbativo: no limite de altas energias, a intensidade da interação forte é pequena, tendendo a zero no limite em que a separação espacial entre as partículas tende, igualmente a zero, fenômeno este conhecido como liberdade assintótica. Neste regime pode-se tratar a QCD a partir de técnicas perturbativas, utilizando a intensidade da interação como parâmetro perturbativo. Já no limite de baixas energias, a intensidade da interação é alta, prejudicando o tratamento perturbativo da teoria. Entretanto, é justamente neste regime que se encontram os estados ligados de quarks, como por exemplo, prótons, nêutrons e píons. Neste regime, modelos efetivos para a teoria devem ser empregados. Uma das características destes modelos efetivos é que, devido à presença de interações efetivas de intensidade baixa mesmo no limite de baixas energias, os mesmos podem ser tratados perturbativamente.

O termo Modelo Quiral de Quarks tornou-se um nome genérico para qualquer teoria relativística de campos que se refira à descrição das características não perturbativas da QCD. Diversas abordagens [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8],

compartilham um certo número de características comuns: (a) os quarks são incorporados nestes modelos como os únicos graus de liberdade e (b) diversas simetrias da QCD são reproduzidas nos modelos, principalmente as invariâncias de calibre e quirais. Estas simetrias são expressas pelas chamadas Identidades de Ward-Takahashi, e modelos quirais de quarks oferecem soluções particulares para as mesmas.

Um modelo muito recente para a descrição da QCD no regime de baixas energias é o Modelo Espectral de Quarks [9, 10]. Este modelo utiliza a representação de Lehmann para o propagador de quarks, representado em função de uma dada distribuição espectral, e a técnica chamada Técnica de Gauge [11, 12], para fornecer soluções para as identidades de Ward-Takahashi. Diversos observáveis físicos são empregados para construirmos a função espectral do modelo, e o poder de predição do mesmo é grande, quando comparado aos resultados experimentais conhecidos. O Modelo Espectral de Quarks pode ser visto como um modelo finito, no sentido de que não existe nenhum parâmetro artificialmente introduzido que leve ao surgimento de divergências e de termos de superfície, geralmente ambíguos, que estão presentes em outros modelos (para uma discussão desses fatos ver [13, 14]). Na forma atual, o modelo espectral de quarks descreve a interação de quarks sem massa, ou seja, é eficaz para a descrição de fenomenologia dos mésons leves.

Um dos fenômenos mais intrigantes da QCD corresponde a uma inesperada violação de simetria, conhecida como anomalia quirais [15]. Esta anomalia corresponde a uma amplitude de probabilidade que não satisfaz simultaneamente às simetrias de gauge e quirais, mas cujo resultado é dependente do contexto. Descrições recentes deste fenômeno baseiam-se em termos de superfície relacionados às divergências dos modelos quirais da QCD [13, 14]. No presente trabalho pretendemos estudar a anomalia quirais no contexto do modelo espectral de quarks e veremos que neste modelo a própria simetria quirais pode funcionar como um seletor do resultado correto esperado para a anomalia.

O estudo da anomalia quirais no contexto do Modelo Espectral de Quarks será realizado através do cálculo, via diagramas de Feynman, da amplitude de transição Axial-Vetorial-Vetorial, da obtenção das identidades de Ward-Takahashi axial e vetoriais dentro do Modelo Espectral, e finalmente na determinação do acoplamento entre os quarks e o méson axial através da Relação

de Goldberger-Treiman [16], a qual também será obtida no contexto deste modelo.

Assim, a dissertação está organizada na seguinte forma: No capítulo 2 faremos uma introdução sobre o modelo padrão, as teorias que o mesmo engloba e considerações sobre as mesmas. O objetivo deste capítulo é apresentar uma introdução sobre a interação forte e a teoria que a descreve: a Cromodinâmica Quântica (QCD). Ao longo desse capítulo discutiremos aspectos da QCD como liberdade assintótica, confinamento, bem como as simetrias que a teoria possui. No final do mesmo, discutiremos aspectos da QCD em baixas energias e a modelagem não perturbativa da mesma a partir de modelos quirais de quarks.

No capítulo 3 apresentaremos uma abordagem sobre simetrias e suas propriedades. Discutiremos o teorema de Noether e as Identidades de Ward-Takahashi como guias na análise de simetrias. Em seguida, verificaremos questões relacionadas à quebra de simetrias e as formas de como a quebra se dá. Por último, analisaremos as consequências da quebra espontânea de simetria, bem como suas implicações em QCD.

No capítulo 4 introduziremos o modelo quiral de quarks utilizado neste trabalho, a saber o Modelo Espectral de Quarks. Discutiremos a forma como o modelo é construído e as condições necessárias para que o mesmo seja finito. Apresentaremos o cálculo de alguns observáveis e discutiremos como os últimos devem ser relacionados aos momentos da função espectral. Por último, obteremos as versões espectrais da relação de Goldberger-Treiman e da hipótese PCAC, ou seja, como estas relações são descritas no contexto do modelo espectral de quarks.

Sequencialmente, no capítulo 5 faremos uma introdução da anomalia quiral e suas propriedades. Calcularemos a amplitude para o diagrama triângulo de Adler-Bell-Jackiw utilizando a abordagem do modelo espectral de quarks. Após o cálculo, faremos uma análise sobre as simetrias subjacentes ao processo e discutiremos os resultados obtidos.

Por fim, no último capítulo apresentaremos as conclusões obtidas neste trabalho e subsequentemente as referências utilizadas no mesmo. Dois apêndices suplementam a dissertação: no primeiro, apresentaremos a notação e convenções utilizadas e no segundo explicitaremos o cálculo do decaimento

anômalo do pión neutro.

Cromodinâmica Quântica

Neste capítulo pretendemos dar uma visão geral sobre a interação forte e o modelo teórico que a descreve, a saber, a Cromodinâmica Quântica.

2.1 O Modelo Padrão

No entendimento atual da natureza considera-se que todos os fenômenos, todas as transformações, são regidos por quatro interações fundamentais: a interação gravitacional, a eletromagnética, a fraca e a forte. Para cada uma dessas forças há uma Teoria Física (fig. 2.1)[17]:

Gravitação - é a interação mais antiga conhecida e também a mais misteriosa tendo seu primeiro modelo a Teoria da Gravitação Universal de Newton e já no início do século XX, a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, também conhecida como Geometrodinâmica;

Eletromagnetismo - surgiu da unificação da Eletricidade com o Magnetismo feita por Maxwell em fins do século XIX e sua quantização realizada por Tomonaga, Feynman e Schwinger nos anos 40 do século passado;

Força Fraca - é a responsável pelo decaimento Beta dos núcleos atômicos e foi primeiro modelada por Fermi nos anos 30. Hoje temos a sua versão moderna, a *Flavordynamics* ou Dinâmica dos Sabores, construída nos anos 60 por Glashow, Weinberg e Salam e sua conseguinte unificação com a interação eletromagnética, a Teoria Eletrofraca;

Força Forte - primeiramente modelada por Yukawa nos anos 30 pelo estudo

das interações inter-nucleares e seu posterior desenvolvimento nos anos 70, a Cromodinâmica Quântica (QCD).

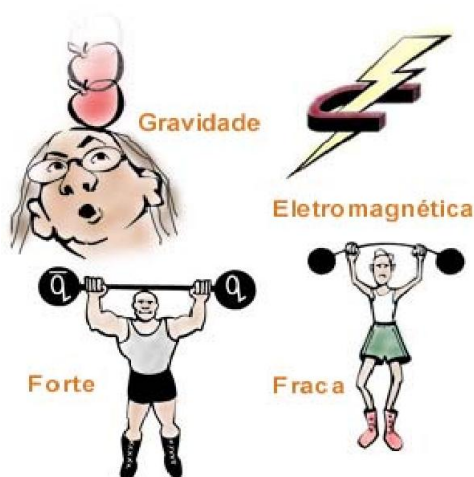


Figura 2.1: As interações fundamentais (retirada de [18]).

As Teorias que explicam as três últimas interações fazem parte de uma estrutura maior a qual damos o nome de Modelo Padrão. O Modelo Padrão é um constructo teórico que tem por objetivo descrever a natureza em sua forma essencial, ou seja, ele pretende investigar o caráter fundamental das entidades das quais o mundo é formado. No Modelo Padrão o conceito de força é trocado pelo de interação (apesar de em certas vezes usarmos ambas palavras num mesmo contexto), e as entidades fundamentais para a descrição dos fenômenos naturais são os quarks, léptons e as partículas intermediadoras ou mediadores, que são aquelas que carregam ou transmitem a interação. Dessa forma a noção de ‘ação à distância’ é substituída por uma visão baseada numa interação direta entre as partículas fundamentais, os mediadores transmitindo a força entre os quarks e léptons, entre quarks e quarks, etc.

Quarks e léptons são descritos como partículas pontuais que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli e, por sua vez à estatística de Fermi-Dirac, ou seja, as mesmas são férmions. Existem seis tipos de quarks, a saber:

1. up (u)
2. down (d)

3. strange (s)
que são conhecidos como quarks leves; e
4. charm (c)
5. bottom (b)
6. top (t)
conhecidos como quarks pesados.

O Modelo é construído de tal forma que para cada tipo de quark é associado um número quântico chamado de sabor. Por sua vez, existem seis sabores de léptons:

1. elétron (e)
2. múon (μ)
3. tau (τ)
e os respectivos neutrinos:
4. neutrino do elétron (ν_e)
5. neutrino do múon (ν_μ)
6. neutrino do tau (ν_τ)

Por se tratarem de férmions, tanto os quarks quanto os léptons possuem anti-partículas, que são partículas de mesma massa mas com determinados números quânticos opostos, como por exemplo a carga elétrica, número leptônico, etc., totalizando em 12 sabores de quarks e 12 sabores de léptons.

Os mediadores são partículas bosônicas, ou seja, obedecem à estatística quântica de Bose-Einstein (têm spin semi-inteiro e podem ocupar um mesmo estado quântico), conhecidas como Bósons de Calibre, ou ainda, do inglês Bósons de *Gauge*. Para cada interação há um ou mais mediadores (tabela 2.1):

Tabela 2.1: As interações fundamentais, sua força, teorias que descrevem as mesmas e os mediadores (retirada de [17]).

Interação	'Força' da Interação	Teoria	Mediador
Forte	10	Cromodinâmica	Glúon
Eletromagnética	10^{-2}	Eletrodinâmica	Fóton (γ)
Fraca	10^{-13}	Flavordynamics	W^+ , W^- , Z^0
Gravitacional	10^{-43}	Geometrodinâmica	Gráviton

Das partículas citadas acima, a única ainda não observada experimentalmente é o gráviton. De certa forma esse é um fato até que justificável sob o *ponto de vista* do modelo padrão, uma vez que o mesmo não consegue conciliar a gravidade com as outras interações. Existem várias propostas de incorporação da gravidade às outras teorias em modelos chamados de Extensões do Modelo Padrão. Ainda assim, uma justificativa razoável para que o modelo seja válido é analisar a *força* da interação na escala de distância em que os fenômenos subatômicos se dão ($\sim 10^{-15} m$), de forma que nessa escala (tabela 2.1), a interação gravitacional pode ser considerada desprezível em comparação às outras interações.

A força da interação ou “força da força” é uma noção intrinsecamente ambígua. Além de tudo, ela depende da fonte e de quão longe estamos da fonte. Assim os números na tabela não podem ser literalmente considerados, mas apenas a sua ordem de grandeza é significativa.

Assim, com esta visão apresentada pelo modelo padrão considera-se que o mundo é formado pela combinação dos blocos de construção fundamentais, ou seja, todas as estruturas são formadas a partir da combinação de quarks, léptons e mediadores (fig. 2.2).

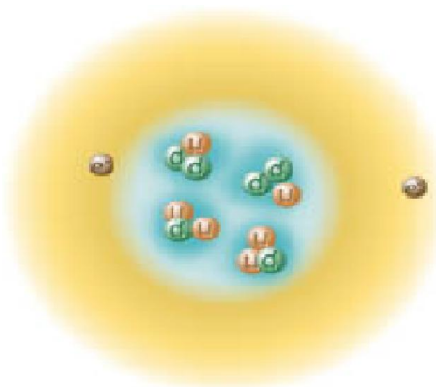


Figura 2.2: A estrutura atômica com os quarks e léptons (retirada de [18])

2.2 O Modelo de Quarks

A visão teórica atual sobre as interações fortes começa com a identificação dos férmions fundamentais e de suas interações. Em 1963 Gell-Mann e Zweig propuseram um modelo que explicava o espectro das partículas que interagem pela força forte (os hádrons), a partir de constituintes elementares (os quarks). Hádrons são divididos em duas classes: mésons e bárions. Mésons são estados ligados de pares quark-antiquark, de spin 0 ou 1 e paridade ímpar, como se espera de um estado ligado férmion-antiférmion de momento angular orbital nulo. Bárions, sendo partículas mais pesadas que os mésons, seriam estados ligados de três quarks. Para explicar a carga elétrica e outros números quânticos dos hádrons já conhecidos, precisou-se postular três tipos de quarks, *up* (u), *down* (d) e *strange* (s); e com a descoberta experimental de novos hádrons, mais três quarks tiveram de ser considerados: *charm* (c), *bottom* (b) e *top* (t). Dessa forma, quarks deveriam ter carga elétrica fracionária, sendo $+\frac{2}{3}$ para os u , c e t e $-\frac{1}{3}$ para os d , s e b (sendo essas cargas elétricas frações da carga do próton). Assim, o próton sendo formado pelo conjunto (uud) teria carga elétrica $+1$ e o nêutron sendo (udd) teria carga elétrica nula (fig. 2.2).

O modelo de quarks obteve grande sucesso na previsão de novos hádrons e das interações eletromagnética e fraca entre os mesmos. Apesar disso haviam algumas evidências experimentais nas quais o modelo falhava:

1. Partículas livres com cargas elétricas fracionárias nunca haviam sido detectadas.
2. Esperava-se que a função de onda dos quarks no interior do bárions fosse anti-simétrica na troca dos números quânticos de sabor e spin de qualquer par de quarks, uma vez que os mesmos eram férmions de spin $\frac{1}{2}$ e teriam de obedecer ao Princípio de Exclusão de Pauli. Mas havia a detecção de um estado excitado leve Δ^{++} com spin $\frac{3}{2}$ e carga elétrica $+2$ interpretada como o estado ligado (uuu) com momento angular orbital nulo e o spin dos três quarks paralelos, o que resultaria em uma função de onda total simétrica.
3. Ao mesmo tempo sabia-se que em um mundo ideal validava-se a relação de Goldberger-Treiman, na qual o méson π ou pión era sem massa. Assim, a taxa de decaimento para o processo $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ era calculada, sendo que seu valor era menor do que o observado experimentalmente por um fator de $9 = 3^2$.

Para reconciliar o modelo de quarks com o teorema da spin-estatística, Gell-Mann postulou que quarks carregavam um grau de liberdade ou número quântico até esta data desconhecido, chamado por ele de *cor*. Desta forma fez-se a suposição *ad hoc* que a função de onda dos bárions era totalmente antissimétrica no número quântico de cor. A função de onda era simétrica no sabor e spin de forma que a função de onda total seria antissimétrica, o que concordava com a estatística da Fermi-Dirac. Assim, para cada sabor de quark foi atribuído três cores, por exemplo vermelho, verde e azul, ou ainda utiliza-se a representação q_i , com $i = 1, 2, 3$ sendo o índice de cor.

Desta forma, o problema da anti-simetrização da função de onda estava resolvido e ainda multiplicando-se a amplitude do decaimento do π^0 por 3 (ou seja, três possíveis cores), a taxa de decaimento seria 9 vezes maior, resolvendo a discrepância entre teoria e experimento. Pode-se ressaltar ainda, o fato de que nem léptons e nem hádrons teriam cor, ou seja, o modelo é construído de forma que as cores dos hádrons e léptons sejam nulas, reproduzindo evidências experimentais de que os mesmos não interagem por troca direta dos mediadores da força forte.

Os quarks com cor seriam então uma representação fundamental de uma nova simetria global interna $SU(3)$. Os quarks q_i transformariam sob a re-

representação fundamental ou 3 , da simetria $SU(3)$ de cor. Os anti-quarks \bar{q}^i transformariam sob a representação $\bar{3}$. O produto interno de 3 por $\bar{3}$ é um invariante de $SU(3)$, assim como também pode-se construir uma combinação totalmente anti-simétrica dos três 3 's, ϵ_{ijk} , a qual se transforma como:

$$\epsilon_{ijk} \rightarrow U_{ii'} U_{jj'} U_{kk'} \epsilon_{i'j'k'} = (\det U) \epsilon_{ijk}, \quad (2.1)$$

a qual é invariante sob $SU(3)$, uma vez que $(\det U) = 1$. Postulando-se que todas as funções de onda dos hádrons tem de ser invariantes sob as transformações de simetria $SU(3)$, as únicas combinações permitidas para os mesmos são:

$$\bar{q}^i q_i, \quad \epsilon^{ijk} q_i q_j q_k, \quad \epsilon_{ijk} \bar{q}^i \bar{q}^j \bar{q}^k.$$

Assim a suposição que os hádrons físicos sejam singletos de cor implica que a única possibilidade é que os mesmos sejam mésons, bárions ou anti-bárions.

2.3 Liberdade Assintótica

Ainda havia o problema da falta de evidência experimental de partículas livres com carga elétrica fracionária, o que na verdade, está intimamente relacionado com a exigência de que a função de onda de hádrons seja um singlete de cor.

Ao estudar o espalhamento inelástico profundo de elétrons em nucleons (os hádrons que compoem o núcleo atômico), os físicos experimentais descobriram que quando ocorria a colisão de altas energias, os quarks dentro dos nucleons agiam como se não houvesse interação mútua, ou seja, os quarks se comportavam como se estivessem livres. Isto era algo paradoxal pois, quarks nunca haviam sido vistos isoladamente e quando observados “de perto” os mesmos apareciam como ligados fracamente um ao outro dentro do nucleon.

Este comportamento aparentemente contraditório que os quarks possuem pode ser entendido se o acoplamento da interação forte tender a zero no limite de grandes momentos ou energias (também chamado de limite ultravioleta), e tender a infinito ou a um grande valor no limite de baixos momentos (limite infravermelho)¹.

¹Considerando-se que utilizamos o sistema de unidades naturais (onde $c = 1$ e $\hbar = 1$),

Muitos pesquisadores buscaram por teorias cujos acoplamentos tendiam a zero no limite ultravioleta, agora conhecidas como teorias assintoticamente livres e nesse sentido Gross, Wilczek e Politzer descobriram que teorias de gauge não-abelianas, e em especial a teoria de Yang-Mills, tinham essa propriedade.

Assim restava determinar quais eram as representações corretas do grupo de gauge e dos férmions. Desde que a simetria de cor não tinha nenhum outro papel físico óbvio, era natural considerar essa simetria com o grupo de gauge e as cores como sendo os números quânticos de gauge dos quarks. Este resultado combina perfeitamente com o fato de que quarks têm cor e dessa forma a transformação de gauge não-abeliana levaria um quark de uma cor a um quark de outra cor. Então, criou-se a teoria das interações fortes como um sistema de quarks de vários sabores, cada um associado a uma representação fundamental do grupo de gauge local $SU(3)$, com os quanta desse grupo (ou os bósons de gauge não-abelianos), sendo partículas conhecidas como *glúons*. Essa teoria é conhecida como Cromodinâmica Quântica (QCD), e ela é descrita por [19]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{j=1}^{n_s} \bar{q}_j (i\mathcal{D} - m_j) q_j, \quad (2.2)$$

com q_j sendo os campos de quarks (de n_s sabores), com massas m_j ; γ^μ as matrizes de Dirac (Apêndice ??); $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$ e $D_\mu = \partial_\mu - ie_s A_\mu$ sendo a derivada covariante; e_s é o acoplamento de gauge, que em analogia com a Eletrodinâmica Quântica (QED)

$$\alpha_s = \frac{e_s^2}{4\pi},$$

α_s sendo a constante de acoplamento da força forte; $A_\mu = A_\mu^a T^a$, onde A_μ^a são os campos dos glúons, T^a são os geradores do grupo $SU(3)$ (matrizes hermitianas sem traço 3×3 atuando em q); explicitamente $(A_\mu q)^\alpha = A_\mu^a (T^a)^\alpha_\beta q^\beta$, para $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; Os geradores obedecem às relações de comutação $[T^a, T^b] = iC_{abc} T^c$, sendo C_{abc} uma constante de estrutura totalmente

momento e energia têm a mesma dimensão e neste caso, valores altos de momento são aqueles maiores que $1GeV$.

antissimétrica de $SU(3)$; e finalmente

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e_s C_{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

2.4 Confinamento de Quarks

Além da propriedade de liberdade assintótica, que representa essa falta de interação entre quarks em curtas distâncias (ou seja, grandes momentos, uma vez que distância r de separação e momento transferido p são variáveis conjugadas pela transformação de Fourier), a força forte ainda tem a característica de mantê-los fortemente unidos em grandes distâncias (baixos momentos). Essa propriedade é chamada de *confinamento de cor* e é uma consequência direta do caráter não-abeliano dos glúons.

Para estudar a QCD no regime no qual a interação forte é “forte”, Wilson [20] utilizou um sistema de mecânica estatística discreto em uma rede no espaço euclidiano quadri-dimensional em substituição à teoria de gauge contínua. Esse tipo de formalismo é chamado de cálculos na rede. O potencial da interação forte entre um quark e um antiquark calculado por esse método é dado por uma parte Coulombiana para curtas distâncias e um termo que aumenta linearmente com a distância de separação do par (2.3):

$$V_{q\bar{q}} \approx C_F \left[\frac{\alpha_s(r)}{r} + \dots + \sigma r \right], \quad (2.3)$$

onde

$$C_F = \sum_a T^a T^a = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}, \quad (2.4)$$

sendo $N_C = 3$ o número de cores, a ‘constante’ $\alpha_s(r)$ tendo uma dependência na escala de distância e σ uma constante de proporcionalidade.

Neste sistema, quando a interação é suficientemente forte, o potencial em (2.3) é dominado pelo termo linear em r e a QCD exibe o confinamento de cor: os únicos estados assintóticos de energia finita são os singletos de cor. Desta forma, a suposição *ad hoc* que explicava o espectro dos hádrons seria uma consequência da teoria de Gauge não-abeliana acoplado-se à cor. Quando tenta-se separar um singlete em suas componentes coloridas (por exemplo, dissociar um méson em um quark e um antiquark), há a formação

de um cilindro (ou tubo), do campo de gauge entre as duas fontes (fig. 2.3).

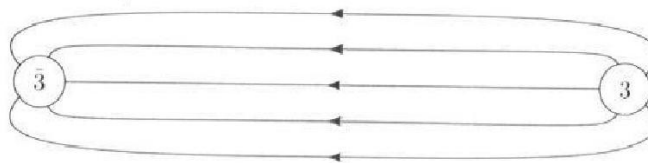


Figura 2.3: Cilindro do campo de gauge entre duas fontes de cor (retirada de [21])

Em uma teoria de gauge não-abelina com o acoplamento grande o suficiente, este cilindro tem raio e densidade de energia constantes, de forma que o custo de energia para separar as duas fontes de cor aumenta proporcionalmente com a distância de separação. Aumentando a distância de separação haverá algum instante em que será mais energeticamente favorável a criação de um novo par quark-antiquark, os quais se reorganizariam em um estado final de cor nula. Uma lei de força desse tipo pode consistentemente ser fraca em curtas distâncias e forte em grandes distâncias, explicando o fato de que quarks nunca são observados isoladamente.

Pode-se verificar que o alcance de determinada interação é inversamente proporcional à massa do mediador desta interação, de forma que a força eletromagnética tem alcance relativamente infinito uma vez que a massa do fóton é nula. Confinamento é então essencial para explicar o motivo das forças nucleares serem de alcance tão curto ($\sim 10^{-15} m$), enquanto que a troca de um glúon sem massa tornaria o alcance da interação infinito. A razão é que, como dito anteriormente, hádrons e em particular nucleons são singletos de cor e assim não podem trocar glúons coloridos, mas apenas estados de cor nula. O hádron mais leve é o pión. Desta forma o alcance das forças nucleares é fixado pela massa do pión $r \simeq (m_\pi)^{-1} \simeq 10^{-13} cm$: $V \approx e^{(-m_\pi r)}/r$, sendo a última expressão o potencial proposto por Yukawa nos anos 30.

2.5 Simetrias da QCD

Tendo uma teoria para a interação forte podemos analisar as simetrias² da mesma, a saber, a simetria do *spin isotópico* ou *isospin* de Heisenberg e a simetria quirial, a qual quando espontaneamente quebrada leva ao surgimento do pión como um bóson de Nambu-Goldstone [20].

Vamos considerar apenas dois sabores de quark, os quarks u e d . Com a notação $u = q_1$, $d = q_2$ e $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, escrevemos a densidade de Lagrangeana da QCD como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q, \quad (2.5)$$

com

$$m = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix},$$

sendo m_u e m_d as massas dos quarks u e d , respectivamente. Se $m_u = m_d$, a Lagrangeana (2.5) é invariante sob a transformação

$$q \rightarrow Uq = e^{i\vec{\Theta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}} q, \quad (2.6)$$

com $U = e^{i\vec{\Theta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}}$, $\vec{\tau}$ sendo as matrizes de (iso)spin de Pauli, os geradores da transformação, e $\vec{\Theta}$ um ângulo de rotação no espaço de isospins. Esta simetria corresponde à simetria de isospin de Heisenberg. A transformação também pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix},$$

essa simetria $SU(2)$ já estando presente no modelo de quarks inicial. Com a adição do quark s , que é apenas um pouco mais pesado que os u e d , Gell-Mann e Ne'eman consideraram a simetria por transformações unitárias do tripleto (uds) e mostraram que as partículas elementares naturalmente satisfazem as representações irredutíveis dessa simetria $SU(3)$.

²No capítulo 3 apresentaremos um apanhado geral sobre simetrias, suas propriedades e teoremas correlatos, com a intenção de explicitar vários termos e definições utilizados ao longo do texto.

Nota-se ainda que a Lagrangeana (2.5) é invariante sob as transformações

$$q_f \rightarrow e^{i\theta} q_f, \quad (2.7)$$

$$q_f \rightarrow e^{i\theta_f} q_f, \quad (2.8)$$

sendo f os sabores dos quarks. A relação (2.7) representa uma redefinição de fase global para todos sabores de quarks, essa transformação sendo associada com a conservação do número bariônico. Por sua vez, a relação (2.8) é uma redefinição de fase para diferentes sabores de quarks, a qual implica na conservação do sabor.

No limite em que m_u e m_d são nulas, a Lagrangeana (2.5) é invariante sob a transformação

$$q \rightarrow e^{i\vec{\Theta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5} q, \quad (2.9)$$

conhecida como transformação axial, ou em alguns casos como transformação quiral $SU(2)$. O nome quiral é devido ao fato de que quarks destrógeros q_R e quarks levógeros q_L se transformam de forma diferente [seção 3.6]. Notando-se que m_u e m_d ($5 - 10 MeV$), são muito menores do que a escala de energia da interação forte ($\sim 200 MeV$), mas não nulas, a transformação axial (2.9) é associada a uma simetria que pode ser pensada como aproximada.

Rigorosamente falando, a simetria quiral é a invariância da Lagrangeana (2.5) sob as transformações (2.6, 2.7 e 2.9). Como uma consequência dessa simetria há a existência das correntes de Noether bariônica, vetorial e axial [seção 3.1]:

$$J_B^\mu(x) = \bar{q}(x) \gamma^\mu q(x) \quad \text{Corrente Bariônica}, \quad (2.10)$$

$$J^{\mu a}(x) = \bar{q}(x) \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} q(x) \quad \text{Corrente Vetorial}, \quad (2.11)$$

$$J_5^{\mu a}(x) = \bar{q}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} q(x) \quad \text{Corrente Axial}, \quad (2.12)$$

A conservação da corrente bariônica, da corrente vetorial e a conservação parcial da corrente axial (PCAC) implicam em

$$\partial_\mu J_B^\mu(x) = 0, \quad (2.13)$$

$$\partial_\mu J^{\mu a}(x) = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_\mu J_5^{\mu a}(x) = m\bar{q}(x)i\gamma_5\tau^a q(x), \quad (2.15)$$

as quais são a representação da simetria quiral na QCD.

2.6 Modelos Quirais de Quarks

O estudo da estrutura e dinâmica de hádrons é um problema considerado difícil devido ao fato da QCD, descrita em termos de graus de liberdade de quarks e glúons, ser bastante complicada. Mas algumas simplificações podem ser feitas em determinadas situações a fim de se obter resultados úteis.

Em altas energias, a liberdade assintótica está presente e pode-se usar métodos perturbativos, como a expansão em produto de operadores (OPE) [21], que relaciona elementos de matriz hadrônica de quarks e glúons em diferentes escalas. Existem evidências experimentais a cerca dessa dependência na escala, mas a QCD perturbativa não diz nada sobre o valor desses elementos de matrix em uma determinada escala.

Em baixas energias, a quebra espontânea da simetria quiral (ver cap. 3), domina a Lagrangeana da QCD e no limite das massas de quarks nulas, píons surgem como os bósons de Goldstone da teoria, uma vez que os mesmos são os estados mais leves do espectro hadrônico. Ainda, os mésons π têm a peculiaridade de que muitas de suas propriedades de baixa energia seguem padrões ditados pela simetria quiral. Dessa forma, métodos não perturbativos têm de ser empregados na descrição da QCD em baixas energias, uma vez que o acoplamento forte se torna grande o bastante para que tratamentos perturbativos não sejam mais eficazes.

Um Modelo Quiral de Quark é qualquer teoria de campo relativística que tem por objetivo descrever características não perturbativas da QCD, e neste caso, em baixas energias. Dessa forma, vários modelos quirais de quarks foram desenvolvidos e todos compartilham determinadas características:

1. os únicos graus de liberdade explícitos são quarks dinâmicos (o que equivaleria dizer, do ponto de vista clássico, que a interação entre quarks seria mediada por outros quarks, e não pelo campo cromodinâmico);

2. todos compartilham determinadas simetrias da QCD, principalmente a simetria quiral;
3. os modelos fornecem soluções particulares para as identidades de Ward-Takahashi eletromagnética e quiral [seção 3.2].

Estes modelos têm sua utilidade justificada no fato dos mesmos proporcionarem resultados quantitativos, que em sua maioria concordam bem com os experimentos. Sendo a QCD uma teoria com quarks e glúons, pode-se questionar em qual escala o modelo quiral de quarks seria definido, levando em conta que os únicos graus de liberdade explícitos são quarks. Neste contexto, nota-se uma falta de sistemática na construção de qualquer modelo dinâmico particular, sendo uma fonte de ambiguidade o fato de se supor que modelos quirais de quarks são uma aproximação da dinâmica não perturbativa da QCD em baixas energias. Dessa forma, suprime-se os graus de liberdade de altas energias, a fim de se separar o regime de baixas energias, onde o modelo está definido, e o regime de altas energias, onde estabelece-se a dinâmica da QCD genuína em termos de quarks e glúons explícitos. Essa separação define uma certa escala, ou *cutoff*, a qual adquire um significado físico e que deve ser mantida através dos cálculos. O modo preciso de se introduzir esse *cutoff* não é bastante claro, mas por outro lado alguns vínculos são impostos com base em invariâncias relativísticas e quirais.

Em geral, essa separação entre regimes de altas e baixas energias não é uma operação invariante pelo grupo de renormalização, ou seja, ela torna o modelo não renormalizável. Dessa forma, para que esse processo de cálculo de QCD a partir de um modelo quiral de quark seja significativo, um método adequado de regularização deve ser utilizado.

Em resumo, um modelo quiral de quark é qualquer modelo de teoria de campos que contém apenas quarks como graus de liberdade explícitos e que seja quiralmente invariante, ou seja, que obedeça às leis de conservação (2.13, 2.14 e 2.15).

Simetrias

No capítulo anterior, vimos que várias simetrias estão associadas ao estudo da QCD. Neste Capítulo, vamos revisar alguns aspectos relacionados à presença destas simetrias bem como à quebra das mesmas, aspectos estes importantes para a correta reprodução da fenomenologia dos hádrons pela QCD.

3.1 O Teorema de Noether

O Teorema de Noether estabelece uma relação entre simetrias e leis de conservação em Teorias Clássicas de Campos¹. Esse teorema refere-se a transformações contínuas nos campos $\phi(x)$, que de forma infinitesimal podem ser escritas como

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x), \quad (3.1)$$

sendo $\delta\phi(x)$ uma deformação no campo. Chamamos essa transformação de simetria se ela deixa a equação de movimento invariante. Isto é assegurado se a ação $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x))$ é invariante sob a transformação (3.1), invariância esta que pode ser descrita por:

$$\mathcal{L}(\phi + \delta\phi) = \mathcal{L}(\phi) \quad (3.2)$$

¹Veremos mais adiante (capítulo 5), que certas simetrias não são conservadas em um contexto quântico, ou seja, certas simetrias de uma Teoria Clássica de Campos são violadas quando faz-se o cálculo de correções quânticas da teoria. Quando o mesmo ocorre damos a isso o nome de anomalia.

$$0 = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi) - \mathcal{L}(\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \quad (3.3)$$

sendo (3.3) obtida da expansão do termo da esquerda de (3.2), em primeira ordem em $\delta\phi$. Utilizando a equação de *Euler-Lagrange*

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0,$$

e a relação

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\phi + \delta\phi) - \partial_\mu\phi = \partial_\mu(\delta\phi),$$

em (3.3) temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} (\partial_\mu\delta\phi) = \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

de forma que

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \quad (3.5)$$

é conhecida como corrente, e neste caso uma corrente conservada, uma vez que $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Como um exemplo vamos considerar o caso de uma transformação unitária nos campos, tal como uma rotação de isospin:

$$\phi_i \rightarrow \phi_i - i\Theta_a T_{ij}^a \phi_j, \quad (3.6)$$

onde Θ corresponde ao ângulo de rotação e T_{ij}^a é uma matriz geradora da transformação (matrix de isospin no caso de rotações de isospin). Os índices dos campos i e j se referem a diferentes campos (os diferentes píons, por exemplo); o índice a indica que devem existir vários geradores associados com uma mesma transformação de simetria (no caso de rotações de isospin tem-se três matrizes de isospin). A equação (3.6) corresponde à expansão

para pequenos ângulos da transformação contínua² geral

$$\vec{\phi} \rightarrow e^{-i\Theta_a \hat{T}^a} \vec{\phi}, \quad (3.7)$$

sendo que o vetor $\vec{\phi}$ contém as várias componentes do campo ϕ . Das equações (3.5) e (3.6) encontramos a seguinte expressão para a corrente conservada:

$$J^{\mu a} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)} T_{jk}^a \phi_k, \quad (3.8)$$

a qual foi dividida pelo ângulo Θ^a . Esta corrente tem o nome de corrente de Noether, depois que Emmy Noether mostrou a sua existência.

Uma vez que $\partial_\mu J^\mu = 0$, pode-se expressar a lei de conservação afirmando-se que a carga

$$Q = \int d^3x J^0$$

é constante no tempo. Sendo $\partial_\mu J^\mu = 0$, ou seja, $\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0$, integramos a última relação em todo o espaço resultando em:

$$\int_V d^3x \partial_0 J^0 + \int_V d^3x \partial_i J^i = 0, \quad (3.9)$$

onde a segunda integral pode ser transformada em uma integral de superfície pelo teorema de Gauss:

$$\int_V d^3x \partial_i J^i = \int_S dS_i J^i = 0,$$

sendo S a fronteira de V . Assim

$$\int d^3x \partial_0 J^0 = 0$$

$$\int d^3x \frac{\partial J^0}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int d^3x J^0 = \frac{d}{dt} Q = 0$$

²A transformação é dita contínua uma vez que o ângulo de rotação Θ pode assumir valores contínuos dentro de seu limite de variação.

$$Q = cte. \quad (3.10)$$

Dessa forma, vemos que a carga Q é conservada.

3.1.1 Exemplo: Férmions sem massa

A Lagrangeana para dois sabores de férmions sem massa, é dada por [20]:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \partial_\mu \gamma^\mu \psi_j = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j, \quad (3.11)$$

sendo j o índice dos sabores e $\not{\partial} = \partial_\mu \gamma^\mu$. A mesma também pode ser pensada como QCD sem massa e sem a presença de glúons (eq. 2.2). Consideremos a transformação infinitesimal no campo:

$$\Lambda_V : \psi \rightarrow e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}}\psi \simeq \left(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right)\psi, \quad (3.12)$$

com $\vec{\tau}$ sendo as matrizes de (iso)spin de Pauli e $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$. O campo conjugado transforma-se sob Λ_V como

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{+i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}} \simeq \bar{\psi} \left(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right). \quad (3.13)$$

Portanto a Lagrangeana (3.11) se transforma sob Λ_V , na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi \rightarrow \\ &\rightarrow i\bar{\psi} \left(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right) \partial_\mu \gamma^\mu \left(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right) \psi = \\ &= i\bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \partial_\mu \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta} \psi - \bar{\psi} \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta} \partial_\mu \gamma^\mu \psi + i\bar{\psi} \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta} \partial_\mu \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta} \psi = \end{aligned}$$

$$= i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi = \mathcal{L}, \quad (3.14)$$

uma vez que termos de ordem dois ou superior em Θ são desconsiderados. Reescrevendo a relação (3.8) como

$$J^{\mu a} = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}T^a\psi,$$

sendo

$$T^a = \frac{\tau^a}{2}$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \frac{\partial(i\bar{\psi}\partial_\alpha\gamma^\alpha\psi)}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\alpha\delta_{\alpha\mu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu,$$

com $\delta_{\alpha\mu}$ sendo o delta de Kronecker, temos que a corrente conservada resultante da transformação Λ_V é:

$$J^{\mu a} = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\psi, \quad (3.15)$$

a qual é conhecida como corrente vetorial.

Agora consideremos a transformação

$$\Lambda_A : \psi \rightarrow e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}}\psi \simeq \left(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right)\psi, \quad (3.16)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}} \simeq \bar{\psi}\left(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right). \quad (3.17)$$

A Lagrangeana (3.11) se transforma sob Λ_A como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi &\rightarrow i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - i\vec{\Theta}\left(\bar{\psi}i\partial_\mu\gamma^\mu\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\psi + \bar{\psi}\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}i\partial_\mu\gamma^\mu\psi\right) = \\ &= i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi = \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo nulo termo entre parênteses de (3.18) devido às relações de anti-

comutação $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$. Desta forma, a Lagrangeana é invariante sob Λ_A , com a corrente axial conservada

$$J_5^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi. \quad (3.19)$$

Vemos assim, que a Lagrangeana para férmions sem massa (3.11) é invariante sob as transformações Λ_V e Λ_A .

3.2 Identidades de Ward-Takahashi

Um sistema é simétrico sob uma determinada transformação nos campos se a equação de movimento que descreve este sistema fica inalterada após esta transformação. Fundamentalmente isto exige que a ação $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x))$ seja invariante sob esta transformação, por exemplo,

$$S[A_\mu + \partial_\mu \phi] = S[A_\mu]. \quad (3.20)$$

A ação ser invariante sob a transformação acima (chamada transformação de Calibre ou transformação de Gauge), não necessariamente implica que a Lagrangeana do sistema também o seja, apesar de o contrário ser verdade como visto na seção anterior. Desta forma, pode ocorrer que

$$\mathcal{L}(A_\mu + \partial_\mu \phi) \neq \mathcal{L}(A_\mu), \quad (3.21)$$

apesar de (3.20) ser satisfeita e o sistema possuir a simetria da transformação. Para que a Lagrangeana seja invariante sob a transformação podemos reescrevê-la sob a seguinte forma:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + A_\mu J^\mu, \quad (3.22)$$

que nada mais é que a Lagrangeana antiga somada a um termo chamado termo de corrente. Assim a nova lagrangeana se transforma como

$$\mathcal{L}'(A_\mu + \partial_\mu \phi) = \mathcal{L} + A_\mu J_\mu + J^\mu \partial_\mu \phi. \quad (3.23)$$

Para que o funcional gerador das funções de Green não amputadas seja invariante pela transformação de Calibre e assim a ação do sistema também o seja, após alguma algebra [22], devemos exigir que

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.24)$$

que no espaço dos momentos pode ser escrita como

$$p_\mu \langle 0 | \bar{q} \gamma^\mu \tau^a q | 0 \rangle = 0. \quad (3.25)$$

As condições (3.24) e (3.25) são conhecidas como identidades de Ward-Takahashi, e elas são relações que as correntes devem satisfazer, a fim de que a ação seja invariante a uma determinada transformação de simetria, em um nível quântico.

3.3 Quebrando Simetrias

Vimos como a Lagrangeana da teoria de férmions sem massa se comporta ao realizarmos determinadas transformações no campo, e constatamos que a mesma fica invariante sob essas transformações, ou seja, a teoria tem certas simetrias.

Há vários modos de violarmos ou quebrarmos as simetrias da teoria que estejamos estudando. Um deles é adicionar um termo de quebra de simetria à Lagrangeana em questão:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (3.26)$$

sendo \mathcal{L}_0 simétrica com respeito à uma dada transformação de simetria e \mathcal{L}_1 um termo que quebra essa simetria. Essa forma *ad hoc* de quebrar simetrias é chamada de quebra explícita de simetria³. Consequentemente a variação da Lagrangeana não é nula como antes, ou ainda, é dada por

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_1.$$

³Neste caso, a quebra ocorre por causa do termo que é incluído explicita e intensionalmente para que a lagrangeana não seja mais invariante.

Dessa forma, a divergência da corrente resulta em:

$$\partial_\mu J^\mu = \delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}_1, \quad (3.27)$$

e desde que $\delta\mathcal{L}_1 \neq 0$, a corrente não é conservada.

Acrescentando-se um termo de massa à Lagrangeana (3.11), por exemplo, tem-se:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{sm} + \mathcal{L}_m = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (3.28)$$

sendo \mathcal{L}_{sm} a Lagrangeana antiga e \mathcal{L}_m o termo adicionado. Nesta nova Lagrangeana (3.28) o termo \mathcal{L}_{sm} é invariante sob as transformações Λ_V e Λ_A como antes. Por sua vez, o segundo termo \mathcal{L}_m é invariante sob Λ_V :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -m\bar{\psi}\psi \rightarrow -m\bar{\psi}\left(1 + i\frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}\right)\left(1 - i\frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}\right)\psi = \\ &= -m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}_m. \end{aligned} \quad (3.29)$$

O mesmo não sendo verdade para a transformação Λ_A :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -m\bar{\psi}\psi \rightarrow -m\bar{\psi}\left(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}\right)\left(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}\right)\psi = \\ &= -m\bar{\psi}\psi - 2im\vec{\Theta}\left(\bar{\psi}\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5\psi\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Deste modo, Λ_A não é uma “boa” simetria se férmions (e no caso quarks), tiverem uma massa finita. Mas no caso das massas dos quarks serem pequenas quando comparadas com a escala de energia relevante da teoria, Λ_A pode ser pensada como uma simetria aproximada, no sentido de que previsões baseadas nesta simetria estejam razoavelmente próximas dos resultados reais.

3.3.1 Quebra espontânea de simetria

Uma tipo mais sutil e interessante de quebra de simetria é fazer o sistema quebrar a simetria “por si mesmo”, conhecido como quebra espontânea de

simetria. Isto significa que enquanto a Lagrangeana do sistema possui uma determinada simetria, o seu estado fundamental não a possui.

Consideremos a teoria de um campo escalar interagente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial\vec{\phi})^2 - \mu^2\vec{\phi}^2] - \frac{\lambda}{4}(\vec{\phi}^2)^2, \quad (3.31)$$

sendo $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ o campo escalar de N componentes; $-\frac{1}{2}\mu^2 = -\frac{1}{2}m^2$ com m sendo a massa do campo; e λ o acoplamento. A Lagrangeana (3.31) possui uma simetria $O(N)$ sob a qual $\vec{\phi}$ se transforma como um vetor de N componentes. O termo de interação resultante dessa Lagrangeana é dado por $V(\vec{\phi}) = \frac{1}{2}\mu^2\vec{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}(\vec{\phi}^2)^2$, que para $N = 1$ resulta na figura 3.1.

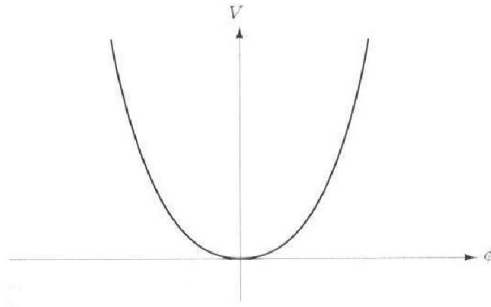


Figura 3.1: Potencial da teoria escalar interagente com o sinal do termo de massa negativo (adaptação de [21]).

A Lagrangeana (3.31) é invariante sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$, que é conhecida como simetria de reflexão ou paridade. O potencial $V(\phi)$ também é simétrico em relação à reflexão no campo: temos um único mínimo em $V(\phi = 0)$ sendo o potencial simétrico em relação a esse mínimo.

Agora, se trocássemos o sinal do termo de massa de (3.31), ou seja, se escrevermos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial\vec{\phi})^2 + \mu^2\vec{\phi}^2] - \frac{\lambda}{4}(\vec{\phi}^2)^2, \quad (3.32)$$

veríamos algo diferente. O potencial agora seria

$$V(\vec{\phi}) = -\frac{1}{2}\mu^2\vec{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}(\vec{\phi}^2)^2, \quad (3.33)$$

que para $N = 1$ e $N = 2$ é descrito pelas figuras 3.2 e 3.3, respectivamente. Para o caso de $N = 1$ temos dois mínimos em $\phi = \pm v = \pm(\mu^2/\lambda)^{\frac{1}{2}}$. Dessa forma, para estudarmos o sistema nas proximidades de seu estado fundamental, temos de escolher uma das duas possibilidades para este estado, não importante a nossa escolha, uma vez que ambos são fisicamente equivalentes. Mas quando fazemos a escolha, nós quebramos a simetria de reflexão do estado fundamental, enquanto que a Lagrangeana (3.32) ainda preserva a mesma. A simetria de reflexão foi espontaneamente quebrada. Nenhum termo de quebra de simetria foi adicionado à Lagrangeana, mas ainda sim a simetria foi quebrada.

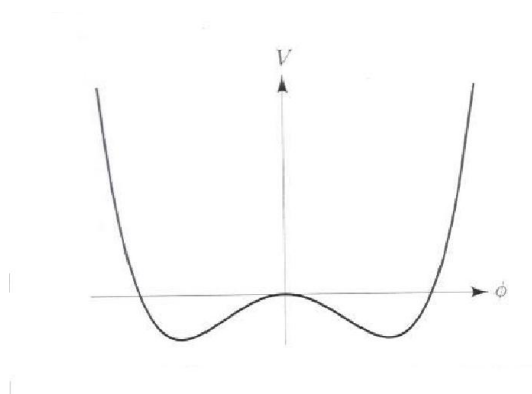


Figura 3.2: Potencial da teoria escalar interagente com o sinal do termo de massa positivo, para $N = 1$ (retirado de [21]).

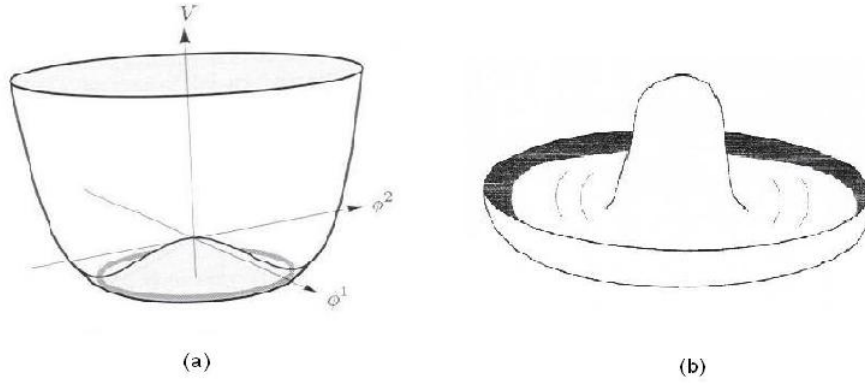


Figura 3.3: (a) Potencial da teoria escalar interagente com o sinal do termo de massa positivo, para $N = 2$ (retirado de [21]); (b) Sua representação pictórica de um chapéu mexicano (retirado de [20]).

Em Teoria Quântica de Campos, o estado fundamental é também conhecido como vácuo, uma vez que ele é literalmente o estado no qual o campo está em repouso, sem a presença de partículas, ou ainda, no vácuo nenhuma partícula pode ser destruída. No caso citado acima tínhamos dois vácuos fisicamente equivalentes e quando fizemos a escolha de um desses vácuos, dizemos que o campo ϕ adquiriu um valor esperado de vácuo.

No caso de $N = 2$, o potencial (3.33) descrito na figura 3.3 (a), tem a forma comparada a um chapéu mexicano (fig. 3.3 (b)), e muitas vezes é referido utilizando-se esta comparação. O potencial é mínimo em $\vec{\phi}^2 = \mu^2/\lambda$. Neste caso tem-se um número infinito de vácuos caracterizados pela direção de $\vec{\phi}$, sendo todos fisicamente equivalentes. Escolhemos então que $\vec{\phi}$ aponte na direção 1, ou seja, $\phi_1 = v \equiv +\sqrt{\mu^2/\lambda}$ e $\phi_2 = 0$. Agora, considerando flutuações em torno dessa configuração de campo, a Lagrangeana (3.32) pode ser reescrita na forma [20]

$$\mathcal{L} = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \frac{1}{2}[(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2] - \mu^2\phi_1^2 + O(\phi^3). \quad (3.34)$$

Nesta Lagrangeana podemos notar que o campo ϕ_1 tem massa $\sqrt{2}\mu$, enquanto que o campo ϕ_2 é sem massa. A causa de ϕ_2 ser não massivo é um fenômeno geral e exato e não um acidente como aparenta ser. Analisando a

figura 3.3 (a), vemos que excitações no campo ϕ_1 correspondem a flutuações na direção radial, ou ainda, correspondem a “escalar o muro” (em linguagem coloquial), enquanto que excitações no campo ϕ_2 correspondem a flutuações na direção angular, ou em outras palavras, “rolar ao longo da canaleta”. Não há nenhum custo de energia para uma partícula que rola ao longo da região de mínimo da energia potencial, indo de um mínimo à outro. Um outro modo de visualizar isso é uma excitação de grande comprimento de onda da forma $\phi_2 = a \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$ com a pequeno. Em uma região de escala de comprimento pequena comparada a $|\vec{k}|^{-1}$, o campo ϕ_2 é essencialmente constante e dessa forma o campo $\vec{\phi}$ é deslocado apenas na direção 1, o qual pela simetria $O(2)$ é equivalente ao vácuo. Então, apenas quando deslocamos para regiões de escala de comprimento grandes comparadas à $|\vec{k}|^{-1}$ é que verificamos que as excitações terão um custo de energia. Desta forma, quando $|\vec{k}|^{-1} \rightarrow 0$, espera-se que a energia de excitação tenda a zero.

Agora podemos notar a diferença entre os casos $N = 1$ e $N = 2$: no primeiro tem-se a simetria de reflexão, a qual é uma simetria discreta, enquanto que no segundo tem-se uma simetria $O(2)$ que é contínua.

3.4 Teorema de Goldstone

O teorema de Goldstone estabelece que de toda simetria contínua que é espontaneamente quebrada (na ausência de forças de longo alcance), resulta a criação de um campo sem massa, conhecido como bóson de Nambu-Goldstone.

Vimos que sempre associamos uma simetria contínua a uma carga conservada (equação 3.10). Na Representação de Heisenberg [23], esta associação pode ser escrita na forma:

$$[H, Q] = 0, \quad (3.35)$$

sendo H o operador Hamiltoniano do sistema e Q o observável conservado no tempo, e neste caso a carga conservada.

Seja o vácuo denotado por $|0\rangle$. Adicionando-se uma constante apropriada ao Hamiltoniano $H \rightarrow H + c$, sempre pode-se escrever $H|0\rangle = 0$, ou seja, sempre pode-se adequadamente (re)definir o referencial de energia do sistema,

escolhendo a energia do vácuo como sendo zero - processo este chamado de renormalização.

Normalmente o vácuo é invariante sob a transformação $|0\rangle \rightarrow e^{i\theta Q}|0\rangle = |0\rangle$, ou ainda $Q|0\rangle = 0$. Supondo-se que esta simetria seja espontaneamente quebrada, o vácuo não será mais invariante sob a transformação de simetria, ou seja, $Q|0\rangle \neq 0$. Então, sendo $Q|0\rangle$ um estado físico tangível, sua energia será:

$$HQ|0\rangle = HQ|0\rangle - QH|0\rangle = [H, Q]|0\rangle = 0, \quad (3.36)$$

a primeira igualdade vindo de $H|0\rangle = 0$ e a terceira de (3.35). Assim vemos que o estado $Q|0\rangle$ tem a mesma energia que $|0\rangle$. Em Teoria Quântica de Campos tem-se correntes locais e dessa forma

$$Q = \int d^D x J^0(\vec{x}, t),$$

onde D é a dimensão do espaço e a conservação de Q estabelece que a integral pode ser calculada pra qualquer tempo. Considerando-se o estado

$$|s\rangle = \int d^D x e^{i\vec{k}\vec{x}} J^0(\vec{x}, t)|0\rangle, \quad (3.37)$$

o qual tem momento \vec{k} , vemos que quando \vec{k} tende a zero o estado $|s\rangle$ tende a $Q|0\rangle$. Dessa forma, quando o momento do estado $|s\rangle$ tende a zero, sua energia também tenderá. Em teoria relativística isto significa precisamente que $|s\rangle$ descreve uma partícula sem massa, e neste caso o bóson de Goldstone.

O teorema de Goldstone é totalmente geral: utilizou-se apenas argumentos baseados em Mecânica Quântica e Teoria da Relatividade, mostrando-se que o mesmo se aplica a toda simetria contínua que é espontaneamente quebrada. O número de bósons de Nambu-Goldstone criados é igual ao número de cargas conservadas que não deixam o vácuo invariante, ou ainda, para cada Q^α pode-se construir um estado $Q^\alpha|0\rangle$ de energia nula.

3.5 Hipótese PCAC

Como visto anteriormente, a simetria Λ_A é aproximada quando considera-se que os quarks têm massa finita. Esta ligeira violação de simetria devido às massas dos quarks é conhecida como a hipótese da Conservação Parcial da Corrente Axial (PCAC, vinda do inglês *Partial Conservation of the Axial Current*). Além do mais, sendo pequena a quebra de simetria, espera-se que seus efeitos possam ser descritos por métodos perturbativos.

Consideremos o caso do decaimento fraco do pión [24]. Devido à paridade esse processo é dominado pelo elemento de matrix da corrente axial entre o vácuo e o pión $\langle 0 | J_5^\mu | \pi \rangle$. Este elemento de matrix tem de ser proporcional ao momento do pión, uma vez que este é o único vetor relacionado ao processo:

$$\langle 0 | J_5^{\mu a}(x) | \pi^b(q) \rangle = i f_\pi q^\mu \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}, \quad (3.38)$$

sendo a constante de proporcionalidade $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, determinada experimentalmente. Tomando a divergência de (3.38), temos:

$$\langle 0 | \partial_\mu J_5^{\mu a}(x) | \pi^b(q) \rangle = -f_\pi q^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x} = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}. \quad (3.39)$$

Da relação acima, vemos que o entendimento de que a massa do pión ($m_\pi \simeq 140 \text{ MeV}$) é pequena comparada às escalas hadrônicas ($\sim 1 \text{ GeV}$), sugere que a corrente axial seja aproximadamente conservada. Em outras palavras, o fato da massa do pión ser pequena está diretamente relacionado com a conservação parcial da corrente axial. Assim, considera-se a simetria axial uma simetria aproximada da QCD e na literatura a relação (3.39) é conhecida como hipótese PCAC.

3.6 Quebra espontânea da simetria quiral

A parte fermiônica da Lagrangeana QCD (2.5) é

$$\mathcal{L}_f = \bar{u}i\not{D}u + \bar{d}i\not{D}d - m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d. \quad (3.40)$$

Uma vez que os quarks u e d são muito leves, podemos fazer a aproximação de desprezar os dois últimos termos de (3.40). Essa nova Lagrangeana QCD sem massa ainda é invariante sob a transformação de isospin (2.6). Contudo, pelo fato da Lagrangeana clássica para férmions sem massa (3.11) não conter acoplamento entre quarks levógeros e quarks destrógeros, esta Lagrangeana (3.40 sem massa) é simétrica sob as transformações unitárias separadas:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \rightarrow U_L \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_D \rightarrow U_D \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_D. \quad (3.41)$$

Uma vez que representamos o dubleto de quarks por q , suas componentes quirais (levógera e destrógera), serão:

$$q_L = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad q_D = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Então podemos escrever as correntes associadas com essas simetrias como:

$$\begin{aligned} J_L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu q_L, & J_D^\mu &= \bar{q}_D \gamma^\mu q_D, \\ J_L^{\mu a} &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} q_L, & J_D^{\mu a} &= \bar{q}_D \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} q_D. \end{aligned} \quad (3.43)$$

A soma das correntes destrógera e levógera (3.43) resulta nas correntes bariônica e vetorial

$$\begin{aligned} J_B^\mu &= J_L^\mu + J_D^\mu, & J^{\mu a} &= J_L^{\mu a} + J_D^{\mu a}, \\ J_B^\mu &= \bar{q} \gamma^\mu q, & J^{\mu a} &= \bar{q} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} q, \end{aligned} \quad (3.44)$$

sendo as correspondentes simetrias relacionadas às transformações (3.41) com $U_D = U_L$, ou ainda, às transformações (2.7) e (2.6), respectivamente. Já a diferença das correntes (3.43) resulta nas correspondentes correntes axiais

$$J_5^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 q, \quad J_5^{\mu a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} q. \quad (3.45)$$

Como visto anteriormente, as transformações vetoriais associadas às correntes (3.44), são simetrias usuais da interação forte com as respectivas e

familiares leis de conservação. Já as transformações axiais associadas às correntes (3.45), não correspondem a nenhuma simetria óbvia da interação forte. Nos anos 60, Nambu e Jona-Lasinio fizeram a hipótese de que essas são simetrias exatas da interação forte as quais são espontaneamente quebradas [25]. Essa hipótese levou a uma correta e surpreendentemente detalhada descrição das propriedades da interação forte em baixas energias.

Na teoria da supercondutividade uma pequena atração elétron-elétron resulta no surgimento de um condensado de pares de elétrons no estado fundamental do metal. Em QCD, quarks e anti-quarks têm interação forte atrativa e se esses quarks são sem massa, o custo de energia para a criação de um novo par $\bar{q}q$ é pequeno. Esses pares de férmions devem ter momento linear e momento angular nulos. Assim, o estado de vácuo com um condensado de quarks é caracterizado pelo valor esperado não nulo para o operador escalar,

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}_L q_D + \bar{q}_D q_L | 0 \rangle \neq 0, \quad (3.46)$$

o qual se transforma sob (3.41) com $U_L \neq U_D$. O valor esperado não nulo sinaliza que o vácuo mistura as duas helicidades⁴ de quark. Isto permite que os quarks u e d adquiram uma massa efetiva quando eles se movem através do vácuo, sendo que dentro do estado ligado (quark anti-quark), os mesmos pareceriam se mover como se tivessem uma massa efetiva de tamanho considerável, apesar dos mesmos terem massa nula na Lagrangeana QCD.

O valor esperado do vácuo aponta para uma quebra espontânea do grupo de simetria total (3.41) para um subgrupo de simetrias vetoriais com $U_L = U_D$. Na seção 3.4, vimos que a toda simetria contínua que é espontaneamente quebrada é associada uma partícula sem massa. Isto implica que em QCD com os quarks u e d não massivos, deveríamos encontrar partículas de spin nulo (com os números quânticos corretos), que seriam criadas pelas correntes axiais. A interação forte real não contém nenhuma partícula de massa nula, mas sim um tripleto de isospin de mésons relativamente leves, os píons. Essas partículas tem paridade ímpar, como espera-se para um estado ligado de quarks e anti-quarks e desta forma elas podem ser criadas pela

⁴A helicidade de uma partícula é definida como a projeção da componente do spin na direção do momento, sobre o momento da partícula. Caso ambos apontem no mesmo sentido (paralelos), a helicidade é par ou destrógera, caso apontem em sentidos opostos (anti-paralelos), a helicidade é ímpar ou levógera. Se a massa da partícula for nula o conceito de helicidade é equivalente ao de quiralidade.

corrente axial. Como visto na seção 3.5, podemos parametrizar o elemento de matriz de $J_5^{\mu a}$ entre o vácuo e um pión *on shell* (na camada de massa), escrevendo:

$$\langle 0 | J_5^{\mu a}(x) | \pi^b(p) \rangle = i f_\pi p^\mu \delta^{ab} e^{-ip \cdot x}. \quad (3.47)$$

Se tomarmos a divergência de (3.47) e usarmos a conservação da corrente axial, veremos que o pión *on shell* deve satisfazer a relação $p^2 = 0$, ou seja, ele deve ter massa nula, como exigido pelo teorema de Goldstone.

Agora, se restaurarmos os termos de massa em (3.40), as correntes axiais não serão mais exatamente conservadas. A equação de movimento para o campo de quark será

$$i \not{D} q = m q, \quad -i D_\mu \bar{q} \gamma^\mu = \bar{q} m, \quad (3.48)$$

com

$$m = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix},$$

sendo a matriz de massa dos quarks. Dessa forma, podemos escrever

$$\partial_\mu J_5^{\mu a} = i \bar{q} \{m, \tau^a / 2\} \gamma_5 q, \quad (3.49)$$

$$\partial_\mu J_5^{\mu a} = i \bar{q} m \tau^a \gamma_5 q. \quad (3.50)$$

Usando a equação (3.49) na divergência da relação (3.47), encontramos:

$$\langle 0 | \partial_\mu J_5^{\mu a}(x) | \pi^b(p) \rangle = -p^2 f_\pi \delta^{ab} = \langle 0 | i \bar{q} \{m, \tau^a / 2\} \gamma_5 q | \pi^b(p) \rangle. \quad (3.51)$$

A última expressão resulta em uma quantidade invariante multiplicada por

$$\text{Tr} [\{m, \tau^a / 2\} \tau^b / 2] = \frac{1}{2} \delta^{ab} (m_u + m_d). \quad (3.52)$$

Assim, podemos relacionar as massas dos quarks à massa do pión, na seguinte forma:

$$m_\pi^2 f_\pi = (m_u + m_d) M^2, \quad (3.53)$$

sendo M^2 a quantidade invariante citada acima e que tem o valor estimado em $M = 400 \text{ MeV}$. Dessa forma, dado que a massa observada do pión

é 140 MeV , temos que $(m_u + m_d) \sim 10 \text{ MeV}$, isto sendo uma pequena perturbação na escala de energia da interação forte.

Um mundo ideal é aquele onde existem pontos, linhas retas, planos e esferas, bem como, é nele em todas as simetrias possíveis de uma teoria são satisfeitas. Nesse mundo então, a QCD é simétrica sob a transformação axial, quarks u e d não têm massa e a corrente axial é conservada. Já no mundo real, a realidade objetiva da natureza sob um ponto de vista determinista, quarks têm uma massa mensurável, apesar de pequena. Desta forma, a simetria quiral é quebrada quando restituímos os termos de massa na Lagrangeana QCD. A esta simetria contínua que é dinamicamente ou espontaneamente quebrada, associa-se uma partícula sem massa, o bóson de Goldstone, interpretada como o pión. Ora, o pión é uma partícula com uma massa bem definida, então como que esta associação pode ser pertinente? O que ocorre é que interpreta-se a quebra simetria quiral como uma “pequena” quebra de simetria, associada com a conservação parcial da corrente axial PCAC. Quando restitui-se a massa dos quarks na Lagrangeana QCD, a simetria quiral é quebrada e os píons adquirem uma massa física. Previsões relacionadas ao pión como o bóson de Goldstone da QCD não são exatas, mas precisas o bastante para que várias características da QCD a baixas energias sejam calculadas com um considerável acordo numérico com os experimentos. Desta forma, esta associação entre mundos real e ideal (os meios), é justificada pelos resultados que podemos modelar e alcançar (os fins).

3.7 Relação de Goldberger-Treiman

Como dito, a identificação do pión como o bóson de Goldstone da quebra espontânea da simetria quiral é uma associação pertinente, uma vez que ela auxilia na obtenção de propriedades da QCD a baixas energias. Disto resultam várias implicações para o cálculo de elementos de matriz hadrônicos.

Por exemplo, o elemento de matriz da corrente de isospin axial no nucleon (uma quantidade que entra na teoria do decaimento nuclear β [22]), pode ser

escrito em termos dos fatores de forma⁵ $F^5(q^2)$ como:

$$\langle N | J_5^{\mu a}(q) | N \rangle = \bar{u} \left[\gamma^\mu \gamma_5 F_1^5(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2^5(q^2) + q^\mu \gamma_5 F_3^5(q^2) \right] u, \quad (3.54)$$

sendo $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Esta amplitude é descrita pelo diagrama na figura abaixo.

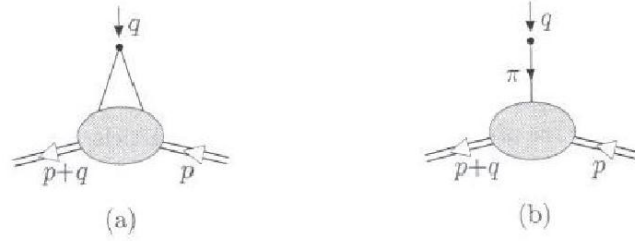


Figura 3.4: Elemento de matriz da corrente de isospin axial no nucleon: (a) cinemática da amplitude; (b) contribuição que leva ao pólo em q^2 (retiradas de [21]).

Os fatores de forma de (3.54) podem ser medidos experimentalmente, mas analiticamente eles são somente determinados por um número infinito de diagramas de Feynman, que não esperam-se calcular. Por outro lado, ao invés de explicitar os fatores de forma, podemos antes obter uma relação entre eles.

O valor de $F_1^5(q^2)$ em $q^2 = 0$ não é restrito pelo valor de qualquer carga manifestadamente conservada. Convencionalmente, escreve-se

$$F_1^5(0) = g_A, \quad (3.55)$$

sendo g_A a constante de acoplamento axial. Se considerarmos a conservação da corrente axial (3.54), e conseqüentemente ignorarmos as massas

⁵O fator de forma é uma quantidade relacionada ao fato de que partículas subatômicas não são pontuais, como é o caso do pión. De fato, o mesmo possui uma estrutura interna, que pode ser descrita por uma distribuição de carga em uma dada região do espaço. O fator de forma do pión está relacionado à transformada de Fourier desta distribuição.

dos quarks, então os fatores de forma satisfazem:

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u}(p') \left[\not{q} \gamma_5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma_5 F_3^5(q^2) \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[(\not{p}' - \not{p}) \gamma_5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma_5 F_3^5(q^2) \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[2m_N \gamma_5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma_5 F_3^5(q^2) \right] u(p), \tag{3.56}
\end{aligned}$$

com a última passagem sendo obtida através do uso da equação de Dirac para nucleons. Desta forma, para que (3.56) seja satisfeita em baixos momentos, utilizamos (3.55) e devemos ter:

$$g_A = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{q^2}{2m_N} F_3^5(q^2). \tag{3.57}$$

Esta equação implica em $g_A = 0$, a menos que F_3^5 tenha um pólo em q^2 . Tal pólo implicaria em uma partícula física sem massa, que podemos associar ao pión.

A interação pión-nucleon em baixas energias é convencionalmente parametrizada pela Lagrangeana

$$\Delta \mathcal{L} = ig_{\pi NN} \pi^a \bar{N} \gamma_5 \tau^a N. \tag{3.58}$$

A amplitude para a corrente $J_5^{\mu a}$ criar o pión é dada pela expressão (3.47). Então, a contribuição da figura 3.4(b) para o vértice da corrente é:

$$-g_{\pi NN} \bar{u}(2\tau^a \gamma_5) u \cdot \frac{i}{q^2} \cdot (iq^\mu f_\pi),$$

de forma que,

$$F_3^5(q^2) = \frac{1}{q^2} \cdot 2f_\pi g_{\pi NN}. \tag{3.59}$$

Desta forma vemos que g_A é dada pela combinação de f_π , a massa do nucleon e a constante de acoplamento pión-nucleon-nucleon:

$$g_A = \frac{f_\pi}{m_N} g_{\pi NN}. \tag{3.60}$$

Esta identidade que relaciona as quatro quantidades medidas experimentalmente é conhecida como Relação de Goldberger-Treiman. Como deveria ser esperado, ela é válida dentro de uma faixa de 15 % de erro, consistente com o fato de que vivemos num mundo onde o méson π é massivo (sua massa sendo ~ 15 % da massa do próton).

O significado físico da Relação de Goldberger-Treiman (3.60) é fundamental neste trabalho. A mesma é obtida através da hipótese PCAC e considerando-se o pión como o bóson de Goldstone associado à quebra espontânea da simetria quiral. Desta forma, vemos que a validade da relação (3.60) é fundamentada na hipótese de que a simetria quiral esteja presente na QCD e, sendo assim, todo e qualquer modelo que almeja reproduzir propriedades desta teoria, tem de compartilhar da simetria quiral. Este ponto será enfatizado novamente nos capítulos seguintes, onde verificaremos que a relação de Goldberger-Treiman assume um papel essencial na descrição da anomalia quiral no Modelo Espectral de Quarks da QCD.

Modelo Espectral de Quarks

Neste capítulo vamos descrever o modelo espectral de quarks, que corresponde ao cenário no qual realizaremos o cálculo da amplitude da Anomalia Quiral, no próximo capítulo.

4.1 Aspectos Gerais

O modelo espectral de quarks é uma abordagem na qual um modelo quiral de quarks (cap. 2) é construído utilizando-se a regularização espectral [9]. Esta última é baseada na introdução formal da representação de Lehmann [26], para o propagador do quark

$$S(p) = \int_C d\omega \frac{\rho(\omega)}{\not{p} - \omega}, \quad (4.1)$$

sendo ω a massa espectral, $\rho(\omega)$ a função espectral, ou ainda, distribuição espectral, e C denota um contorno no plano complexo escolhido adequadamente. A massa espectral é a massa do quark constituinte. O conceito de quark constituinte está relacionado à hipótese de que os quarks dentro do hádron não são partículas pontuais livres. Enquanto a massa de hádrons é algumas centenas de MeV's (e até alguns GeV's), a massa de repouso dos quarks mais leves são da ordem de 4 MeV . Dessa forma, considera-se que os quarks dentro do hádron adquirem uma massa efetiva por causa do meio no qual estão inseridos (glúons, quarks virtuais, etc.). Assim o propagador (4.1) pode ser pensado como um propagador de uma partícula não pontual, a qual está relacionada uma função $\rho(\omega)$ que descreve como é distribuída a massa do quark, dentro do hádron.

A regularização espectral permite resolver explicitamente as identidades de Ward-Takahashi eletromagnética e quiral, através da técnica de gauge [11, 12]. Sabe-se que qualquer solução das identidades de Ward-Takahashi não é completa devido à existência de termos transversos, os quais necessariamente aparecem na teoria subjacente e que podem unicamente ser determinados em QCD. E de fato, qualquer modelo quiral de quark, se propriamente regularizado, representa uma solução particular das identidades de Ward-Takahashi.

Exigências físicas naturais, como uma normalização adequada e a finitude dos observáveis hadrônicos, são alcançadas pelo cumprimento das condições espectrais para os momentos da distribuição espectral $\rho(\omega)$:

$$\rho_0 \equiv \int d\omega \rho(\omega) = 1, \quad (4.2)$$

$$\rho_n \equiv \int d\omega \omega^n \rho(\omega) = 0, \\ \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.3)$$

sendo os observáveis físicos proporcionais aos momentos inversos (ou momentos negativos),

$$\rho_{-k} \equiv \int d\omega \omega^{-k} \rho(\omega) \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.4)$$

tanto quanto aos momentos logarítmicos,

$$\rho'_n \equiv \int d\omega \log(\omega^2/\mu^2) \omega^n \rho(\omega) \\ = \int d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega) - \int d\omega \log(\mu^2) \omega^n \rho(\omega) \\ = \int d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega) \\ \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

A forma de se obter estas condições será apresentada na seção 4.2. Nota-se que a condição (4.3) remove a dependência na escala μ em (4.5), desta forma garantindo a ausência de qualquer transmutação dimensional. Deve ser

ênfatisado que não é necessário determinar a forma da distribuição espectral $\rho(\omega)$, mas sim as consequências gerais e relações implícitas que seguem das condições espectrais (4.2 - 4.5).

Assim, o modelo com a regularização espectral (4.1), (4.2), (4.3), suprido com acoplamentos obtidos via técnica de gauge, possui simultaneamente as seguintes características:

1. Fornece valores finitos para os observáveis hadrônicos, os quais serão usados para fixar os momentos inversos (4.4) e os momentos log (4.5).
2. Satisfaz, por construção, as identidades de Ward-Takahashi eletromagnética e quiral, desta forma reproduzindo todas as exigências de simetria necessárias.
3. Satisfaz as condições de anomalia.

O fato de que todas características acima serem satisfeitas simultaneamente por um modelo quiral de quarks é algo não trivial [10]. Não obstante, a regularização introduzida pela técnica de gauge é muito especial porque ela não apenas torna a teoria finita, mas ela também corresponde a tomar o limite de *cutoff* infinito, naqueles observáveis que não dependem da massa do quark constituinte. Isto inclui o cumprimento adequado das anomalias, ou seja, um valor próximo do experimental para a largura de decaimento do pión neutro em dois fótons (decaimento anômalo do pión), apenas pode ser obtido em um modelo quiral de quarks na ausência de um regularizador (ou no limite em que o *cutoff* vai para infinito) [27]. Uma vez que o modelo espectral de quarks é livre de regularizadores, esta condição é satisfeita.

Diferentemente de outras regularizações, tal como regularização dimensional ou regularização da função ζ , a regularização espectral é física no sentido de que ela provê uma supressão de altas energias em amplitudes à um loop de quark, a qual não é removida no final do cálculo.

4.2 Momentos da função espectral

O propagador do quark (4.1) pode ser parametrizado na forma,

$$S(p) = A(p)\not{p} + B(p) = Z(p)\frac{\not{p} + M(p)}{p^2 - M^2(p)}, \quad (4.6)$$

com

$$A(p) = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}, \quad (4.7)$$

$$B(p) = \int d\omega \frac{\omega\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}, \quad (4.8)$$

onde a função de massa $M(p)$ e a renormalização da função de onda $Z(p)$ do quark são dadas por

$$M(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (4.9)$$

$$Z(p) = [p^2 - M^2(p)]A(p). \quad (4.10)$$

Nota-se que se tivermos $\rho(\omega) = \rho(-\omega)$, a massa do quark seria zero, $M(p) = 0$, e a quebra espontânea da simetria quiral não ocorreria. Dessa forma, espera-se que $\rho(\omega)$ não seja uma função par.

A forma (4.6) de escrever o propagador do quark, pode ser usada para relacionarmos os momentos negativos (4.4) e os momentos logarítmicos (4.5) à integrais que envolvam a função de massa do quark $M(p)$ e a função de renormalização da função de onda do quark $Z(p)$. Isso sendo algo pertinente, uma vez que observáveis físicos são proporcionais a esses momentos. Consideremos as seguintes condições espectrais:

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) = \delta_{n0}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (4.11)$$

e a seguinte identidade,

$$\int d\omega \frac{\omega^n \rho(\omega)}{\not{p} - \omega} = \not{p}^n S(\not{p}) - \not{p}^{n-1}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.12)$$

a qual é provada utilizando-se o propagador (4.1):

$$\int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\not{p} - \omega} \omega^n - \not{p}^n \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\not{p} - \omega} = -\not{p}^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
& - \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p-\omega} (p^n - \omega^n) = -p^{n-1} \\
& - \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{p-\omega} (p-\omega) \sum_{i=n-1}^0 \sum_{j=0}^{n-1} p^i \omega^j \delta_{i+j}^{n-1} = -p^{n-1} \\
& - \int d\omega \rho(\omega) (p^{n-1} + p^{n-2}\omega + \dots + p\omega^{n-2} + \omega^{n-1}) = -p^{n-1} \\
& -p^{n-1} \int d\omega \rho(\omega) - \dots - \int d\omega \rho(\omega) \omega^{n-1} = -p^{n-1} \\
& -p^{n-1} = -p^{n-1}, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

sendo que no último passo utilizamos a condição (4.11); a relação,

$$p^n - \omega^n = (p-\omega) \sum_{i=n-1}^0 \sum_{j=0}^{n-1} p^i \omega^j \delta_{i+j}^{n-1}$$

podendo ser provada por indução.

Em (4.12) podemos racionalizar o denominador e utilizar (4.6) para obter,

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{p+\omega}{p^2-\omega^2} = p^n Z(p) \frac{p+M(p)}{p^2-M^2(p)} - p^{n-1}. \tag{4.14}$$

Tem-se então duas possibilidades para n , par ou ímpar. Para $n = 2k$, encontramos

$$\int d\omega \omega^{2k} \rho(\omega) \frac{p+\omega}{p^2-\omega^2} = p^{2k} Z(p) \frac{p+M(p)}{p^2-M^2(p)} - p^{2k-2}. \tag{4.15}$$

Desta forma, definindo

$$L_n(p^2) = \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2-\omega^2} \tag{4.16}$$

e comparando essa relação com (4.15), tem-se as identidades:

$$L_{2k}(p^2) = p^{2k} Z(p) \frac{1}{p^2 - M^2(p)} - p^{2k-2}, \quad (4.17)$$

$$L_{2k+1}(p^2) = p^{2k} Z(p) \frac{M(p)}{p^2 - M^2(p)}, \quad (4.18)$$

as quais também são obtidas no caso de n ímpar.

Da condição (4.11) seguem as relações de recorrência

$$\int d\omega \omega^n \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2} = p^2 \int d\omega \omega^{n-2} \rho(\omega) \frac{1}{p^2 - \omega^2}, \quad (4.19)$$

$$L_n(p^2) = p^2 L_{n-2}(p^2), \quad (4.20)$$

para $n > 2$, as quais são verificadas diretamente escrevendo-se do lado direito de (4.19) $p^2 = (p^2 - \omega^2) + \omega^2$. Finalmente, passando-se para o espaço Euclidiano, $p^2 = p^2 \rightarrow -p_E^2$, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \rho'_n &= \int d\omega \omega^n \log(\omega^2) \rho(\omega) \\ &= \int d\omega \omega^n \rho(\omega) \int_0^\infty dp^2 \frac{1}{p^2 - \omega^2} \\ &= \int_0^\infty dp_E^2 L_n(-p_E^2) \\ &= - \int_0^\infty dp_E^2 p_E^2 L_{n-2}(-p_E^2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

a qual descreve o momento logarítmico de $\rho(\omega)$ em termos de $Z(p)$ e $M(p)$. É preciso ressaltar o fato de que quando realizamos a segunda passagem de (4.21), onde identificamos o termo $\log(\omega^2)$ com a integral em p^2 , isso apenas foi possível graças à condição espectral (4.11), a qual anulou o termo divergente da integral.

Os momentos negativos são obtidos pela derivada do propagador do quark (4.1) na origem:

$$\rho_{-k} = \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{\omega^k} = - \left(\frac{d}{dp} \right)^{k-1} S(p) \Big|_{p=0}. \quad (4.22)$$

Dessa forma, dado o propagador do quark $S(\not{p})$, pode-se apenas usar as relações (4.21) e (4.22) para obter os momentos logarítmicos e os momentos negativos, sem ter de especificar a forma explícita da função espectral.

4.2.1 Observáveis

Agora nós calcularemos alguns observáveis físicos e determinaremos algumas condições a serem satisfeitas pelos momentos da função espectral $\rho(\omega)$.

Utilizando a representação (4.1), o condensado de quark para um único sabor, é dado por:

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle &= -iN_c \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{1}{\not{p} - \omega} \\ &= -iN_c \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{\not{p} + \omega}{p^2 - \omega^2} \\ &= -4iN_c \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

com o traço sendo tomado no espaço de Dirac e $N_c = 3$ é o número de cores. A integral em p é quadraticamente divergente e ela exige o uso de um método de regularização auxiliar, *removido* no final do cálculo. Utilizaremos então um *cutoff* tridimensional Λ . Para Λ grande tem-se:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega \rho(\omega) \omega \left[2\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{4\Lambda^2} \right) + \omega^2 \right]. \quad (4.24)$$

A finitude do resultado para $\Lambda \rightarrow \infty$ requer as condições

$$\rho_1 = \int d\omega \omega \rho(\omega) = 0, \quad (4.25)$$

$$\rho_3 = \int d\omega \omega^3 \rho(\omega) = 0, \quad (4.26)$$

e desta forma

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int d\omega \log(\omega^2) \omega^3 \rho(\omega) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \rho'_3. \quad (4.27)$$

Vemos então o cumprimento da condição espectral (4.3) nas relações

(4.25) e (4.26), como uma exigência física de $\langle \bar{q}q \rangle$ ser finita. Nota-se também que (4.27) é proporcional ao momento logarítmico ρ'_3 como havíamos discutido na seção 4.1 e que a condição espectral $\rho_3 = 0$ permite-nos escrever $\log(\omega^2/\Lambda^2)$ como $\log(\omega^2)$, e portanto nenhuma dependência na escala está presente na expressão final.

Finalmente, observa-se que na fase perturbativa sem quebra espontânea de simetria, onde $\rho(\omega) = \rho(-\omega) = \delta(\omega)$, teríamos $\langle \bar{q}q \rangle = 0$, uma vez que o integrando de ρ'_3 seria ímpar e (4.27) se anularia.

Com o valor aceito de

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \simeq -(243 \text{ MeV})^3, \quad (4.28)$$

(em escalas hadrônicas típicas de $0,5 - 1 \text{ GeV}$), pode-se inferir o valor do terceiro momento logarítmico ρ'_3 . O sinal do condensado de quark mostra que

$$\rho'_3 > 0. \quad (4.29)$$

Continuando a busca pelas condições da função espectral vamos agora estudar a densidade de energia no vácuo. O tensor energia-momento para um modelo puramente de quarks é definido por:

$$\theta^{\mu\nu}(x) = \bar{q}(x) \frac{i}{2} \{ \gamma^\mu \partial^\nu + \gamma^\nu \partial^\mu \} q(x) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}(x). \quad (4.30)$$

No nível a um loop de quarks, temos:

$$\begin{aligned} \langle \theta^{\mu\nu} \rangle &= -i N_c N_s \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\not{p} - \omega} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{2} \{ \gamma^\mu \not{p}^\nu + \gamma^\nu \not{p}^\mu \} - g^{\mu\nu} (\not{p} - \omega) \right] \right\} \\ &= -4i N_c N_s \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (p^2 - \omega^2)}{p^2 - \omega^2} \\ &= B g^{\mu\nu} + \langle \theta^{\mu\nu} \rangle_0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde N_s é o número de sabores e $\langle \theta^{\mu\nu} \rangle_0$ é o tensor energia momento para a teoria livre, ou seja, avaliado em $\rho(\omega) = \delta(\omega)$. A quantidade B é a densidade de energia no vácuo, dada por:

$$B = -iN_c N_s \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2}. \quad (4.32)$$

A integral em p é quadraticamente divergente e, não obstante é a mesma que no caso do condensado de quarks, com a diferença de agora termos uma potência a mais em ω . Dessa forma,

$$B = -iN_c N_s \int d\omega \rho(\omega) \omega^2 \left[2\Lambda^2 + \omega^2 \log \left(\frac{\omega^2}{4\Lambda^2} \right) + \omega^2 \right] \quad (4.33)$$

Para que B seja finita, temos que obedecer às condições:

$$\rho_2 = \int d\omega \omega^2 \rho(\omega) = 0, \quad (4.34)$$

$$\rho_4 = \int d\omega \omega^4 \rho(\omega) = 0, \quad (4.35)$$

resultando dessa forma em

$$B = -\frac{N_c N_s}{16\pi^2} \int d\omega \log(\omega^2) \omega^4 \rho(\omega) = -\frac{N_c N_s}{16\pi^2} \rho'_4. \quad (4.36)$$

Interessantemente, vemos que as condições pares (aqui quadrática e quártica), implicam que $\rho(\omega)$ não pode ser positiva definida, de outra forma os momentos pares não se anulariam. No caso de quebra espontânea da simetria quiral, espera-se que $\langle \theta_{00} \rangle < \langle \theta_{00} \rangle_0$, ou ainda, $B < 0$. De acordo com análises das regras de soma da QCD para o charmômio [28, 29], tem-se para três sabores,

$$B = -\frac{9}{32} \left\langle \frac{\alpha}{\pi} G^2 \right\rangle = -(224_{-70}^{+35} \text{MeV})^4. \quad (4.37)$$

Nota-se uma grande incerteza neste resultado, contudo o seu sinal negativo implica que

$$\rho'_4 > 0. \quad (4.38)$$

No limite de grandes momentos $p \rightarrow \infty$, pode-se expandir o propagador do quark (4.1) na forma:

$$\begin{aligned}
S(p) &\sim \frac{1}{\not{p}} \int d\omega \rho(\omega) + \frac{1}{p^2} \int d\omega \omega \rho(\omega) \\
&\quad + \frac{1}{\not{p}^3} \int d\omega \omega^2 \rho(\omega) + \dots
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Na região assintótica o propagador do quark é normalizado para

$$S(p) = \frac{1}{\not{p}}$$

e dessa forma temos a condição espectral

$$\rho_0 = \int d\omega \rho(\omega) = 1. \tag{4.40}$$

Além do mais, desde que $M(p)$ deve assintoticamente se anular, a relação (4.9) se torna

$$\begin{aligned}
M(p) &= \frac{B(p)}{A(p)} \\
&= \frac{\int d\omega \omega \rho(\omega) / (p^2 - \omega^2)}{\int d\omega \rho(\omega) / (p^2 - \omega^2)} \\
M(p \rightarrow \infty) &\rightarrow \frac{\frac{1}{p^2} \int d\omega \omega \rho(\omega)}{\frac{1}{p^2} \int d\omega \rho(\omega)} \Big|_{p \rightarrow \infty} \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_0} \\
M(p \rightarrow \infty) &= \frac{\rho_1}{1} = 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

e dessa forma, vemos que $\rho_1 = 0$.

Apesar da pertinência da expansão assintótica para grandes momentos do propagador do quark para a obtenção das condições espectrais (4.40) e (4.41), é fato certo que se todas as condições espectrais (4.2 - 4.3) fossem determinadas nessa mesma expansão isso produziria um propagador total para o quark, que seria trivial, ou seja, livre e sem massa. Desta forma, a expansão para grandes momentos não pode representar o propagador total e não trivial.

Assim, vemos que a partir de quantidades físicas podemos definir as condições espectrais para os momentos da função espectral $\rho(\omega)$. Não há necessidade de se encontrar a forma explícita dessa distribuição, uma vez que estabelecida a dependência de determinado observável nos momentos negativo e logarítmico, podemos utilizar as relações 1.21 e 1.22 para relacionar os últimos às funções de massa e de renormalização da função de onda, sendo estas funções utilizados também em em modelos não locais para a determinação de observáveis físicos.

4.3 Técnica de Gauge

Na seção anterior obtivemos as condições espectrais para $n = 1, 2, 3$ e 4 . Condições de ordem superior são obtidas a partir da exigência da expansão *twist* para as funções de correlação. Neste trabalho não intenciona-se realizar esta expansão, a qual pode ser consultada em [9]. Não obstante, vamos especificar os acoplamentos das correntes para quarks.

Em QCD, definimos as correntes vetorial e axial, a conservação da corrente vetorial e a conservação parcial da corrente axial PCAC (seções 3.1 e 3.5, capítulo 3), as quais reescrevemos aqui:

$$J^{\mu a}(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu \frac{\tau^a}{2}q(x), \quad (4.42)$$

$$J_5^{\mu a}(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2}q(x), \quad (4.43)$$

$$\partial_\mu J^{\mu a}(x) = 0, \quad (4.44)$$

$$\partial_\mu J_5^{\mu a}(x) = \bar{q}(x)m_i\gamma_5\tau^a q(x), \quad (4.45)$$

sendo $m = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ a matriz de massa dos quarks. Como visto anteriormente, qualquer teoria efetiva da QCD deve incorporar estes vínculos. As relações (4.44) e (4.45) implicam num conjunto de identidades de Ward-Takahashi de gauge e quiral entre funções de correlação envolvendo correntes vetoriais, correntes axiais e operadores de campo de quarks, as quais são baseadas em regras de comutação locais entre correntes e campos:

$$[J^{0a}(x), q(x')]_{x_0=x'_0} = -\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}q(x)\delta(x-x'), \quad (4.46)$$

$$[J_5^{0a}(x), q(x')]_{x_0=x'_0} = -\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}q(x)\delta(x-x'). \quad (4.47)$$

Para resolver as identidades de Ward-Takahashi nós utilizaremos a *técnica de gauge* proposta em [11], a qual lineariza as equações, uma vez que a mesma utiliza funções de Green *não amputadas*.

4.3.1 Vértices com uma corrente

As funções de vértice vetorial e axial não amputadas são definidas como:

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu a}(p', p) &= iS(p')\Gamma^{\mu a}(p', p)iS(p) = \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0|T\{J^{\mu a}(0)q(x')\bar{q}(x)\}|0\rangle e^{ip'\cdot x' - ip\cdot x},\end{aligned}\quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_5^{\mu a}(p', p) &= iS(p')\Gamma_5^{\mu a}(p', p)iS(p) = \\ &= \int d^4x d^4x' \langle 0|T\{J_5^{\mu a}(0)q(x')\bar{q}(x)\}|0\rangle e^{ip'\cdot x' - ip\cdot x},\end{aligned}\quad (4.49)$$

respectivamente, sendo os Γ 's as correspondentes funções de vértice amputadas. A identidade de Ward-Takahashi para o vértice vetor-quark-quark é dada por:

$$(p' - p)_\mu \Lambda^{\mu a}(p', p) = S(p') \frac{\tau^a}{2} - \frac{\tau^a}{2} S(p). \quad (4.50)$$

Da mesma forma, para o vértice axial-quark-quark, tem-se:

$$(p' - p)_\mu \Lambda_5^{\mu a}(p', p) = S(p') \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 - \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} S(p). \quad (4.51)$$

A técnica de gauge consiste em escrever soluções tentativa para o vértice vetorial não amputado,

$$\Lambda^{\mu a}(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}, \quad (4.52)$$

tanto quanto para o vértice axial não amputado

$$\Lambda_5^{\mu a}(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left(\gamma^\mu - \frac{2\omega q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \quad (4.53)$$

As soluções tentativa (4.52) e (4.53) são escritas dessa forma com o intuito de satisfazer as identidades de Ward-Takahashi (4.50) e (4.51), respectivamente.

Uma consequência da identidade axial é a ocorrência de um pólo pseudoscalar em (4.53) identificado com o pión, o qual é válido apenas se $\rho(\omega) \neq \delta(\omega)$, ou seja, se a simetria quiral for espontaneamente quebrada. Vemos então que o vértice axial (4.53), no limite de baixos momentos ou no pólo do pión, torna-se:

$$\Lambda_5^{\mu a}(p', p) \Big|_{q \rightarrow 0} = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} \left(-\frac{2\omega q^\mu}{q^2} \right) \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \quad (4.54)$$

Para baixos momentos esse processo é dominado pelo diagrama

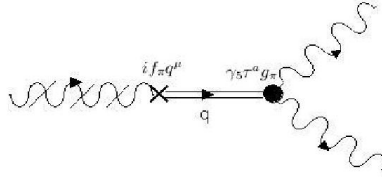


Figura 4.1: Diagrama representando a parte dominante do vértice axial no limite de baixos momentos.

que utilizando a notação espectral representa a amplitude

$$\Lambda_5^{\mu a}(p', p) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{i}{\not{p}' - \omega} i f_\pi q^\mu \frac{1}{q^2} \gamma_5 \tau^a g_{Aqq} \frac{i}{\not{p} - \omega}. \quad (4.55)$$

Comparando as relações (4.54) e (4.55) obtemos a versão espectral da relação de Goldberger-Treiman (seção 3.7) [30]:

$$\begin{aligned} 1 - g_A &= \frac{g_{Aqq} f_\pi}{\omega}, \\ g_{Aqq} &= (1 - g_A) \frac{\omega}{f_\pi}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

a qual será de grande importância no cálculo da anomalia quiral utilizando o modelo espectral de quarks.

4.4 Relação PCAC no Modelo Espectral de Quarks

A relação PCAC (3.39) nos diz que

$$\partial^\mu A_\mu = f_\pi m_\pi^2 \pi, \quad (4.57)$$

com π sendo o campo do pión. Na linguagem da álgebra de operadores, podemos escrever a mesma como

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_\mu J_\nu \partial^\rho A_\rho | 0 \rangle &= f_\pi m_\pi^2 \langle 0 | J_\mu J_\nu \pi | 0 \rangle \\ q^\rho \langle 0 | J_\mu J_\nu A_\rho | 0 \rangle &= f_\pi m_\pi^2 \langle 0 | J_\mu J_\nu \pi | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.58)$$

O elemento de matriz da esquerda de (4.58) representa a amplitude de probabilidade de criação de uma partícula axial e a sua posterior aniquilação de duas partículas vetoriais, ou seja, o acoplamento da corrente axial com duas correntes vetoriais. Por sua vez, o elemento de matriz da direita de (4.58) representa a criação de um pión que se propaga e a posterior aniquilação de duas partículas vetoriais. Utilizando a notação do modelo espectral de quarks, podemos reescrever (4.58) em termos das amplitudes que representam os respectivos elementos de matriz (cap. 5):

$$\begin{aligned} q^\rho T_{\rho\mu\nu} &= i f_\pi m_\pi^2 \frac{i}{q^2 - m_\pi^2} \tau^a T_{\mu\nu}, \\ q^\rho \int d\omega T_{\rho\mu\nu}(\omega) &= i f_\pi m_\pi^2 \frac{i}{q^2 - m_\pi^2} \tau^a \int d\omega T_{\mu\nu}(\omega). \end{aligned} \quad (4.59)$$

As amplitudes em (4.59), como padrão nas abordagens convencionais, são escritas desconsiderando-se os acoplamentos entre os mésons e os quarks. Uma vez que em nossa abordagem a forma funcional do acoplamento dos mésons é essencial, devemos introduzir os acoplamentos axial e pseudoescalar em (4.59) a fim de obtermos resultados pertinentes às nossas considerações:

$$q^\rho \int d\omega T_{\rho\mu\nu}(\omega) g_{Aqq} = i f_\pi m_\pi^2 \frac{i}{q^2 - m_\pi^2} \tau^a \int d\omega T_{\mu\nu}(\omega) g_{Aqq},$$

$$q^\rho \int d\omega T_{\rho\mu\nu}(\omega) g_{Aqq} = (1 - g_A) i f_\pi m_\pi^2 \frac{i}{q^2 - m_\pi^2} \tau^a \int d\omega g_{\pi qq} T_{\mu\nu}(\omega), \quad (4.60)$$

onde utilizamos a relação de Goldberger-Treiman (4.56):

$$g_{Aqq} = (1 - g_A) \frac{\omega}{f_\pi} = (1 - g_A) g_{\pi qq}. \quad (4.61)$$

A amplitude representando o processo axial-vetor-vetor em (4.60) é dada pelas contribuições dos diagramas [26]:

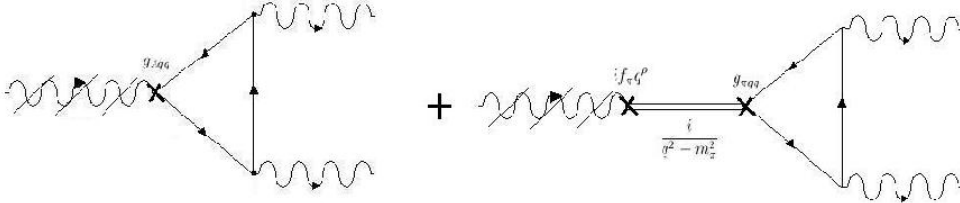


Figura 4.2: Diagrama representando as contribuições para o processo axial-vetor-vetor.

os quais representam:

$$\begin{aligned} T_{\rho\mu\nu} &= \int d\omega T_{\rho\mu\nu}(\omega) = T_{\rho\mu\nu}^{AVV} + i f_\pi q^\rho \frac{i}{q^2 - m_\pi^2} T_{\mu\nu} = \\ &= \int d\omega g_{Aqq}(\omega) \frac{\tau^a}{2} T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(\omega) - (1 - g_A) \frac{q_\rho}{q^2 - m_\pi^2} \tau^a \int d\omega f_\pi g_{\pi qq} T_{\mu\nu}(\omega). \end{aligned} \quad (4.62)$$

As amplitudes $T_{\rho\mu\nu}^{AVV}$ e $T_{\mu\nu}$ são calculadas explicitamente no capítulo 5 e apêndice B, respectivamente. Assim, contraindo (4.62) com q^ρ , vem:

$$q^\rho T_{\rho\mu\nu} = \int d\omega g_{Aqq}(\omega) q^\rho \frac{\tau^a}{2} T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(\omega) - (1 - g_A) \frac{q^2}{q^2 - m_\pi^2} \tau^a \int d\omega f_\pi g_{\pi qq} T_{\mu\nu}(\omega), \quad (4.63)$$

e finalmente, igualando (4.60) a (4.63), teremos:

$$\begin{aligned}
(1 - g_A) f_\pi m_\pi^2 \frac{-1}{q^2 - m_\pi^2} \int d\omega g_{\pi qq} T_{\mu\nu}(\omega) &= \frac{1}{2} \int d\omega g_{Aqq}(\omega) q^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(\omega) - \\
&\quad - (1 - g_A) \frac{q^2}{q^2 - m_\pi^2} \int d\omega f_\pi g_{\pi qq} T_{\mu\nu}(\omega), \\
\int d\omega g_{Aqq}(\omega) q^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(\omega) &= 2(1 - g_A) \frac{q^2 - m_\pi^2}{q^2 - m_\pi^2} \int d\omega f_\pi g_{\pi qq} T_{\mu\nu}(\omega), \\
q^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= 2(1 - g_A) \int d\omega \omega T_{\mu\nu}(\omega), \tag{4.64}
\end{aligned}$$

uma vez que, $f_\pi g_{\pi qq} = \omega$ é a relação de Goldberger-Treiman para o acoplamento entre os pión e os quarks [30]. A relação (4.64) é a versão espectral da hipótese PCAC. Como conhecido em QCD, esta relação é violada pela presença da anomalia quiral. No próximo capítulo, iremos realizar o cálculo explícito da amplitude $T_{\rho\mu\nu}^{AVV}$ no modelo espectral de quarks e verificar como se dá o surgimento da anomalia quiral neste modelo.

A Anomalia Quiral no Modelo Espectral de Quarks

Neste capítulo vamos analisar a anomalia quiral utilizando a regularização espectral. Para isto vamos calcular a amplitude de decaimento de um campo axial em dois fótons, o gráfico triângulo, ou ainda a anomalia Adler-Bell-Jackiw. No decorrer de nossos cálculos deixaremos a forma do acoplamento axial implícito, sendo a sua forma explicitada apenas quando formos analisar as identidades de Ward-Takahashi para a amplitude resultante.

5.1 Anomalia Quiral

O mecanismo de quebra anômala de simetria em teoria quântica de campos foi co-descoberto por J. S. Bell e R. Jackiw [15], e S. L. Adler [31]. Este mecanismo surge do fato de que nem toda simetria da física clássica é necessariamente uma simetria da física quântica, ou seja, flutuações quânticas podem quebrar simetrias clássicas. Essa violação está relacionada a uma amplitude de probabilidade que não satisfaz simultaneamente às simetrias de gauge e quiral, mas cujo resultado é dependente do contexto, e neste sentido ambíguo: na QCD, ou seja, no decaimento anômalo do pión, a anomalia conserva a identidade de Ward-Takahashi de gauge e viola a identidade de Ward-Takahashi quiral; por outro lado, no decaimento do próton de 't Hooft [32], a anomalia preserva a identidade quiral e viola a de Gauge.

O termo anomalia surge do fato que este tipo de fenômeno contrariava todo o pensamento comum dos físicos dos anos 60: à toda simetria da física clássica corresponderia uma análoga quântica. Neste contexto vemos que há

uma violação do princípio da correspondência, violação esta que surge dos infinitos da teoria quântica de campos.

Um fato experimental expressivo a cerca desse fenômeno é o processo de decaimento *anômalo* do pión neutro, no qual temos o pión nulo decaindo em dois fótons $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Pela teoria da época este processo era proibido, uma vez que classicamente tínhamos as conservações das correntes vetorial $\partial_\mu J^{\mu a} = 0$ e axial $\partial_\mu J_5^{\mu a} = 0$, e desta forma não haveria nenhum canal disponível para o processo ocorrer. Em termos mais palpáveis, o pión nulo não tendo carga elétrica nunca poderia interagir com fótons, os mediadores da interação eletromagnética, assim o decaimento não poderia ocorrer e a teoria não conseguia reproduzir os fatos experimentais.

Hoje em dia, sabe-se que a anomalia não é nenhuma patologia obscura da teoria quântica de campos, mas sim um conceito que ainda deve ser entendido na descrição da natureza a partir desta teoria.

A análise original do problema é dada a partir da função de correlação de três correntes: uma axial e duas vetoriais. A mesma é descrita pela amplitude $\langle 0|T J_5^p(0)J^\mu(x_1)J^\nu(x_2)|0\rangle$, a qual é dada na ordem principal pelo gráfico do triângulo fermiônico (fig. 5.1). Esta amplitude representa um par férmion-antiférmion sendo criado em x_1 e um outro tal par sendo criado em x_2 pelas correntes vetoriais, com o férmion de um par se aniquilando com o antiférmion do outro par e o par férmion-antiférmion restante sendo subsequentemente aniquilado pela corrente axial. Com férmions sem massa, essa função de correlação seria transversa nos três canais, como uma consequência das várias simetrias da teoria (seção 3.1.1). A anomalia manifesta-se em qualquer cálculo do diagrama como uma ambiguidade em um termo local, pertencendo a infinitos subjacentes de teoria quântica de campos. Desta forma não importa como fixa-se a ambiguidade, a amplitude calculada não é transversa nos três canais, ou ainda, as simetrias que asseguram a transversalidade nos três canais são quebradas.

A forma de solucionar esse impasse é fazer uma escolha específica de resolver a ambiguidade permitindo que alguns canais (mas não todos os três), sejam transversos, ou seja, sempre podemos utilizar um método de regularização que preserve uma simetria específica, mas que o custo seja a violação da outra. Essa forma de se fixar a ambiguidade, no sentido de escolher qual simetria deve ser satisfeita e qual deve ser violada, é algo que John Bell [33]

sempre insistiu ser arbitrário, ou seja, não há modo intrínscico de escolher o resultado correto.

5.2 Cálculo da Amplitude

A amplitude, ou ainda amplitude de probabilidade é a representação no formalismo de integrais de caminho [20], equivalente à função de onda de transição de um estado à outro, no formalismo da mecânica quântica ondulatória. Dessa forma o quadrado da amplitude fornece a densidade de probabilidade de transição entre estados diferentes. Integrando-se essa densidade de probabilidade em todo o espaço, obtemos a probabilidade de um decaimento ocorrer, de uma colisão formar determinadas partículas, etc., sendo estas obtidas através de taxas de transição, seções de choque, entre outras quantidades que podem ser experimentalmente mensuradas.

A amplitude para o processo axial-vetor-vetor no modelo espectral de quarks, representada pela figura 5.1, é dada por:

$$T_{\rho\mu\nu}^{AVV} = - \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[N_C i g_{Aqq} \tau^3 \gamma_\rho \gamma_5 \right. \\ \left. \times \frac{i}{\not{k} + \not{q} - \omega} iQ \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - \omega} iQ \gamma_\nu \frac{i}{\not{k} - \not{p} - \omega} \right], \quad (5.1)$$

$$T_{\rho\mu\nu}^{AVV} = \lambda \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \\ \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\gamma_\rho \gamma_5 [\not{k} + \not{q} + \omega] \gamma_\mu [\not{k} + \omega] \gamma_\nu [\not{k} - \not{p} + \omega]]}{[(k+q)^2 - \omega^2][k^2 - \omega^2][(k-p)^2 - \omega^2]}, \quad (5.2)$$

sendo ω a massa espectral, N_C o número de cores, τ^3 é a matriz de Pauli σ_z ; g_{Aqq} é o acoplamento axial, que neste caso terá a sua forma não explicitada; Q as matrizes de carga, γ_μ as matrizes de Dirac, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$; $\not{k} = \gamma_\rho k^\rho$; e $\lambda = \text{Tr}[N_C \tau^3 Q Q]$.

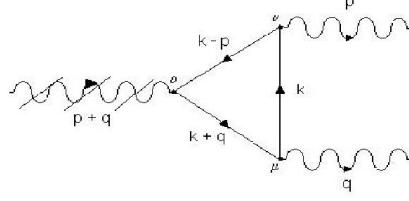


Figura 5.1: Diagrama de Feynman representando o processo axial-vetor-vetor.

Vamos calcular todos os termos de (5.2) e para isto primeiro vamos utilizar a parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{2}{[(A-C)x + (B-C)y + C]^3}, \quad (5.3)$$

onde consideraremos

$$\begin{aligned} A &= (k+q)^2 - \omega^2, \\ B &= (k-p)^2 - \omega^2, \\ C &= k^2 - \omega^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

A amplitude então fica:

$$\begin{aligned} T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= 2\lambda \int d\omega g_{Aqq\rho}(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\ &\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\rho \gamma_5 [\not{k} + \not{q} + \omega] \gamma_\mu [\not{k} + \omega] \gamma_\nu [\not{k} - \not{p} + \omega]]}{[(2kq + q^2)x + (-2kp + p^2)y + k^2 - \omega^2]^3}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Quadrando o denominador de (5.5) teremos:

$$\begin{aligned} D &= [2kqx + q^2x - 2kpy + p^2y + k^2 - \omega^2]^3 = \\ &= [k^2 + 2k(qx - py) + (qx - py)^2 - (qx - py)^2 + q^2x + p^2y - \omega^2]^3 = \\ &= [(k + qx - py)^2 - [q^2x(x-1) + p^2y(y-1) - 2pqxy + \omega^2]]^3 = \\ &= [(k + qx - py)^2 - M^2(x, y, \omega)]^3, \end{aligned} \quad (5.6)$$

sendo

$$M^2(x, y, \omega) = q^2x(x-1) + p^2y(y-1) - 2pqxy + \omega^2. \quad (5.7)$$

Dessa forma a amplitude resulta em:

$$T_{\rho\mu\nu}^{AVV} = 2\lambda \int d\omega g_{Aqq\rho}(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\rho \gamma_5 [\not{k} + \not{q} + \omega] \gamma_\mu [\not{k} + \omega] \gamma_\nu [\not{k} - \not{p} + \omega]]}{[(k+a)^2 - M^2(x, y, \omega)]^3}. \quad (5.8)$$

com $a = qx - py$. A integral em k da amplitude (5.8) é linearmente divergente e desta forma temos de utilizar um método de regularização para resolvê-la, e no caso vamos utilizar um *cutoff* quadridimensional Λ . Antes de fazermos isto, observamos que para grandes valores de k temos a seguinte expansão em Taylor:

$$\begin{aligned} f(k+a) \Big|_{k \rightarrow \infty} &= f(k) + a^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\sigma} f(k) + \frac{1}{2!} a^\sigma a^\rho \frac{\partial^2}{\partial k^\sigma \partial k^\rho} f(k) + \dots = \\ &= \left(1 + a^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\sigma} + \frac{1}{2!} a^\sigma a^\rho \frac{\partial^2}{\partial k^\sigma \partial k^\rho} + \dots \right) f(k) = \\ &= e^{a^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\sigma}} f(k). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Utilizando a expansão (5.9) na amplitude (5.8) e fazendo uma troca de variáveis $k+a \rightarrow k$, temos:

$$\begin{aligned} T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= 2\lambda \int d\omega g_{Aqq\rho}(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\ &\times \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{a^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\sigma}} \left[\frac{\text{Tr}[\gamma_\rho \gamma_5 [\not{k} - \not{q} + \not{q} + \omega] \gamma_\mu [\not{k} - \not{q} + \omega] \gamma_\nu [\not{k} - \not{q} - \not{p} + \omega]]}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3} \right], \\ T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(0) + 2\lambda \int d\omega g_{Aqq\rho}(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\ &\times \left\{ \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} a^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\sigma} \left[\frac{\text{Tr}[\gamma_\rho \gamma_5 [\not{k} - \not{q} + \not{q} + \omega] \gamma_\mu [\not{k} - \not{q} + \omega] \gamma_\nu [\not{k} - \not{q} - \not{p} + \omega]]}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3} \right] + \right. \\ &+ \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{a^\sigma a^\rho}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k^\sigma \partial k^\rho} \left[\frac{\text{Tr}[\gamma_\rho \gamma_5 [\not{k} - \not{q} + \not{q} + \omega] \gamma_\mu [\not{k} - \not{q} + \omega] \gamma_\nu [\not{k} - \not{q} - \not{p} + \omega]]}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3} \right] \\ &\left. + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Em (5.10) temos um termo de ordem zero na expansão em a e os termos

restantes correspondem a integrais de divergências, que utilizando o teorema de Green resultam em termos de superfície. Se as integrais são convergentes elas resultarão em funções finitas e bem comportadas que na superfície são nulas. Dessa forma, temos que os únicos termos de superfície não nulos são aqueles provenientes de integrais divergentes e neste caso:

$$\begin{aligned}
T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(0) - 2\lambda \int d\omega g_{Aqq\rho}(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\
&\quad \times \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} a^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\sigma} \left[\frac{\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\rho \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k}]}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3} \right], \\
T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(0) + T_s.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Vamos determinar os dois termos de (5.11) separadamente. Dessa forma, o termo de ordem zero é dado por:

$$\begin{aligned}
T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(0) &= 2\lambda \int d\omega g_{Aqq\rho}(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3} \\
&\quad \times \text{Tr} \left[\gamma_\rho \gamma_5 [\not{k} + (1-x)\not{q} + y\not{p} + \omega] \gamma_\mu [\not{k} - x\not{q} + y\not{p} + \omega] \right. \\
&\quad \left. \times \gamma_\nu [\not{k} - x\not{q} + (y-1)\not{p} + \omega] \right],
\end{aligned} \tag{5.12}$$

na qual utilizamos $\not{q} = x\not{q} - y\not{p}$.

Utilizando as propriedades do traço das matrizes γ de Dirac [17], o traço em (5.12) fica:

$$\begin{aligned}
T &= -\text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\eta) [k^\alpha + (1-x)q^\alpha + yp^\alpha] \\
&\quad \times \left[k^\beta k^\eta - xk^\beta q^\eta + (y-1)k^\beta p^\eta - xq^\beta k^\eta + x^2 q^\beta q^\eta \right. \\
&\quad \left. - x(y-1)q^\beta p^\eta + yp^\beta k^\eta - xyp^\beta q^\eta + (y^2 - y)p^\beta p^\eta \right] - \\
&\quad - \text{Tr} \left[\gamma_5 \gamma_\rho \not{k} \gamma_\mu \gamma_\nu \omega^2 + (1-x)\gamma_5 \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_\nu \omega^2 + y\gamma_5 \gamma_\rho \not{p} \gamma_\mu \gamma_\nu \omega^2 + \right. \\
&\quad + \gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \omega^2 - x\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\mu \not{q} \gamma_\nu \omega^2 + y\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \omega^2 + \\
&\quad \left. + \gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \not{k} \omega^2 - x\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \not{q} \omega^2 + (y-1)\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p} \omega^2 \right].
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Deste traço podemos desconsiderar os termos ímpares em k , uma vez que o denominador de (5.12) é par e o integrando resultante desta combinação

sendo ímpar anulária a integral. Para os termos restantes utilizaremos as relações:

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\eta \gamma_\mu \gamma_\nu] a^\eta \omega^2 = -4i \epsilon_{\rho\eta\mu\nu} a^\eta \omega^2, \quad (5.14)$$

e uma vez que $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ temos:

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\eta] b^\alpha a^\beta a^\eta = -8i \epsilon_{\rho\alpha\mu\eta} b^\alpha a_\nu a^\eta + 4i \epsilon_{\rho\alpha\mu\nu} b^\alpha a^2, \quad (5.15)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\eta] a^\alpha a^\beta b^\eta = -8i \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} b^\eta a_\mu a^\beta + 4i \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} b^\eta a^2, \quad (5.16)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\eta] a^\alpha b^\beta a^\eta = -8i \epsilon_{\mu\beta\nu\eta} b^\beta a_\rho a^\eta - 4i \epsilon_{\rho\mu\beta\nu} b^\beta a^2. \quad (5.17)$$

Dessa forma substituindo (5.14), (5.15), (5.16) e (5.17) em (5.13), temos:

$$\begin{aligned} T = & 4i \left\{ 2\epsilon_{\rho\beta\mu\eta} \left[k_\nu k^\eta + x^2 q_\nu q^\eta + (y^2 - y) p_\nu p^\eta \right] \left[k^\beta + (1-x)q^\beta + yp^\beta \right] - \right. \\ & - \epsilon_{\rho\eta\mu\nu} \left[k^2 + x^2 q^2 + (y^2 - y) p^2 \right] \left[k^\eta + (1-x)q^\eta + yp^\eta \right] + \\ & + 2\epsilon_{\rho\beta\nu\eta} \left[-xk_\mu k^\beta q^\eta + (y-1)k_\mu k^\beta p^\eta - (x-x^2)(y-1)q_\mu q^\beta p^\eta - \right. \\ & \quad \left. - xy^2 p_\mu p^\beta q^\eta \right] - \\ & - \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \left[-xk^2 q^\eta + (y-1)k^2 p^\eta - (x-x^2)(y-1)q^2 p^\eta - xy^2 p^2 q^\eta \right] + \\ & + 2\epsilon_{\mu\beta\nu\eta} \left[-xk_\rho k^\eta q^\beta + yk_\rho k^\eta p^\beta - (x-x^2) y q_\rho q^\eta p^\beta - \right. \\ & \quad \left. - x(y^2 - y) p_\rho p^\eta q^\beta \right] + \\ & + \epsilon_{\rho\mu\eta\nu} \left[-xk^2 q^\eta + yk^2 p^\eta - (x-x^2) y q^2 p^\eta - x(y^2 - y) p^2 q^\eta \right] + \\ & \left. + \left[\epsilon_{\rho\eta\mu\nu} q^\eta - \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} q^\eta x + \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} p^\eta (y-1) \right] \omega^2 \right\}. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Podemos reescrever esta expressão utilizando as propriedades dos ϵ 's:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\rho\beta\mu\eta} &= -\epsilon_{\rho\mu\beta\eta}, \\ \epsilon_{\rho\eta\mu\nu} &= -\epsilon_{\rho\mu\eta\nu} = \epsilon_{\rho\mu\nu\eta}, \\ \epsilon_{\mu\beta\nu\eta} &= -\epsilon_{\beta\mu\nu\eta}, \\ \epsilon_{\rho\mu\eta\nu} &= -\epsilon_{\rho\mu\nu\eta}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

e dessa forma

$$\begin{aligned}
T = & 8i \left\{ \epsilon_{\rho\mu\beta\eta} k_\nu k^\eta \left[(x-1)q^\beta - yp^\beta \right] + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} k_\mu k^\beta \left[-xq^\eta + (y-1)p^\eta \right] + \right. \\
& \left. + \epsilon_{\beta\mu\nu\eta} k_\rho k^\eta \left[xq^\beta - yp^\beta \right] \right\} - \\
& - 4i \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} k^2 \left[(1-3x)q^\eta + (3y-1)p^\eta \right] + \\
& + 4i \left\{ 2\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} \left[-x^2 y q_\nu q^\eta p^\beta + (y^2 - y)(x-1)p_\nu p^\eta q^\beta \right] + \right. \\
& + 2\epsilon_{\rho\beta\nu\eta} \left[(x^2 - x)(y-1)q_\mu q^\beta p^\eta - xy^2 p_\mu p^\beta q^\eta \right] + \\
& + 2\epsilon_{\beta\mu\nu\eta} \left[y(x-x^2)q_\rho q^\eta p^\beta + x(y^2 - y)p_\rho p^\eta q^\beta \right] - \\
& - \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \left[[(x^2 - x^3)q^2 + (y^2 - y)(1-x)p^2 - xy p^2 + (y - y^2)x p^2] q^\eta + \right. \\
& + [x^2 y q^2 + (y^3 - y^2)p^2 + (x^2 - x)(y-1)q^2 + (x^2 - x)y q^2] p^\eta + \\
& \left. + [(x-1)q^\eta + (1-y)p^\eta] \omega^2 \right\} \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo este traço na amplitude (5.12), temos:

$$\begin{aligned}
T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(0) = & 2\lambda \int d\omega g_{Aqq\rho}(\omega) \left\{ 8i \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \right. \\
& \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} [(1-x)q^\eta + yp^\eta] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k^\beta}{[k^2 - M^2]^3} + \right. \\
& + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} [-xq^\eta + (y-1)p^\eta] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k^\beta}{[k^2 - M^2]^3} - \\
& \left. - \epsilon_{\beta\mu\nu\eta} [xq^\eta - yp^\eta] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k^\beta}{[k^2 - M^2]^3} \right] - \\
& - 4i\epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx [(1-3x)q^\eta + (3y-1)p^\eta] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - M^2]^3} + \\
& + 4i \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[2\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} [-x^2 y q_\nu q^\eta p^\beta + (y^2 - y)(x-1)p_\nu p^\eta q^\beta] + \right. \\
& + 2\epsilon_{\rho\beta\nu\eta} [(x^2 - x)(y-1)q_\mu q^\beta p^\eta - xy^2 p_\mu p^\beta q^\eta] + \\
& + 2\epsilon_{\beta\mu\nu\eta} [y(x-x^2)q_\rho q^\eta p^\beta + x(y^2 - y)p_\rho p^\eta q^\beta] - \\
& - \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \left[(x^2 - x^3)q^2 + (y^2 - y)(1-x)p^2 - xy^2 p^2 + x(y-y^2)p^2 \right] q^\eta + \\
& + [x^2 y q^2 + (y^3 - y^2)p^2 + (x^2 - x)(y-1)q^2 + (x^2 - x)yq^2] p^\eta + \\
& \left. + [(x-1)q^\eta + (1-y)p^\eta] \omega^2 \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2]^3} \left. \right\}, \quad (5.21)
\end{aligned}$$

com $M^2 = M^2(x, y, \omega)$. Esta amplitude é dividida em dois termos, um logaritmicamente divergente e outro finito:

$$T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(0) = T_D + \tilde{T}_{\rho\mu\nu}^{AVV}.$$

Assim vamos calcular os dois termos separadamente. Para o termo divergente, uma vez que a regularização espectral torna as integrais da teoria finita, podemos utilizar a identidade:

$$\int d\omega \rho(\omega) \int d^4k k_\mu k^\nu f(k^2) = \int d\omega \rho(\omega) \frac{g_\mu^\nu}{4} \int d^4k k^2 f(k^2). \quad (5.22)$$

Dessa forma a parte *divergente* fica

$$\begin{aligned}
T_D &= 2\lambda \int d\omega g_{Aqq}\rho(\omega) 2i\epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \left\{ \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[(1-x)q^\eta + yp^\eta - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - xq^\eta - (1-y)p^\eta - xq^\eta + yp^\eta - (2-6x)q^\eta - (6y-2)p^\eta \right] \right. \\
&\quad \left. \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3} \right\}, \\
T_D &= 4i\lambda\epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq}\rho(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[(3x-1)q^\eta + (1-3y)p^\eta \right] \\
&\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3}. \tag{5.23}
\end{aligned}$$

A integral em k de (5.23) é dada por:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3} = -\frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{M^2(x, y, \omega)}{\Lambda^2 + M^2(x, y, \omega)} \right) \right], \tag{5.24}$$

sendo Λ^2 um *cutoff* quadridimensional que deve ser removido no final do cálculo. Assumindo que as partículas externas estão na camada de massa e que estamos no limite quiral:

$$\begin{aligned}
p^2 &= 0, \\
q^2 &= 0, \\
(p+q)^2 &= m_A^2 = 0, \quad pq = 0, \tag{5.25}
\end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned}
M^2(x, y, \omega) &= q^2x(x-1) + p^2y(y-1) - 2pqxy + \omega^2, \\
M^2(x, y, \omega) &= \omega^2, \tag{5.26}
\end{aligned}$$

removendo assim a dependência de M em x e y . Dessa forma, utilizando essas suposições e o resultado (5.24), a amplitude (5.23) fica:

$$\begin{aligned}
T_D &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq}\rho(\omega) \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right] \\
&\quad \times \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[(3x-1)q^\eta + (1-3y)p^\eta \right]. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Resolvendo as integrais em x e y tem-se:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[(3x-1)q^\eta + (1-3y)p^\eta \right] = \\
&= \int_0^1 dy \left[\left(\frac{3}{2}y^2 - 2y + \frac{1}{2} \right) q^\eta - (-3y^2 + 4y - 1) p^\eta \right] \\
&= \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) q^\eta - (-1 + 2 - 1) p^\eta = 0, \tag{5.28}
\end{aligned}$$

e desta forma vemos que a parte divergente da amplitude (5.21) é nula.

Agora, utilizando ainda as suposições de estarmos na camada de massa e no limite quiral, vamos calcular a parte finita de (5.21):

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= 8i\lambda \int d\omega g_{Aqq\rho}(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\
&\quad \left[2\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} \left[-x^2 y q_\nu q^\eta p^\beta + (y^2 - y)(x-1) p_\nu p^\eta q^\beta \right] + \right. \\
&\quad + 2\epsilon_{\rho\beta\nu\eta} \left[(x^2 - x)(y-1) q_\mu q^\beta p^\eta - x y^2 p_\mu p^\beta q^\eta \right] + \\
&\quad + 2\epsilon_{\beta\mu\nu\eta} \left[y(x-x^2) q_\rho q^\eta p^\beta + x(y^2 - y) p_\rho p^\eta q^\beta \right] - \\
&\quad \left. - \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \left[(x-1)q^\eta + (1-y)p^\eta \right] \omega^2 \right] \\
&\quad \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \omega^2]^3}. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Então, sabendo-se que

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \omega^2]^3} = -\frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{\omega^2}, \tag{5.30}$$

e resolvendo as integrais em x e y , a amplitude resultante será:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\rho\mu\nu}^{AVV} = & \frac{1}{4\pi^2} \lambda \left\{ \int d(\omega) \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} \left(-\frac{1}{30} q_\nu q^\eta p^\beta + \frac{7}{60} p_\nu p^\eta q^\beta \right) + \right. \right. \\ & + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} \left(\frac{7}{60} q_\mu q^\beta p^\eta - \frac{1}{30} p_\mu p^\beta q^\eta \right) + \\ & \left. + \epsilon_{\beta\mu\nu\eta} \left(\frac{1}{20} q_\rho q^\eta p^\beta - \frac{1}{20} p_\rho p^\eta q^\beta \right) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{3} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) [q^\eta - p^\eta] \right\}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

e sendo nula a parte divergente, essa relação equivale à amplitude (5.12).

Vamos agora resolver o termo de superfície de (5.11), o qual reescrevemos abaixo:

$$\begin{aligned} T_s = & -2\lambda \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\ & \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} a^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\sigma} \left[\frac{\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\rho \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k}]}{[k^2 - \omega^2]^3} \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

na qual todas as condições utilizadas no cálculo de $T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(0)$ foram assumidas. Utilizando a relação do traço de matrizes γ (5.15), o traço em (5.32) fica:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\eta] k^\alpha k^\beta k^\eta & = -8i \epsilon_{\rho\alpha\mu\eta} k^\alpha k_\nu k^\eta + 4i \epsilon_{\rho\alpha\mu\nu} k^\alpha k^2 \\ & = 4i \epsilon_{\rho\alpha\mu\nu} k^\alpha k^2 \\ & = 4i \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} k^\eta k^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Substituindo este resultado em (5.32) e tomando o limite de grandes momentos temos:

$$T_s = -8i\lambda \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx a^\sigma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\sigma} \left[\frac{k^\eta}{k^4} \right]. \quad (5.34)$$

Para resolver a integral em k de (5.34) vamos introduzir um regularizador, o qual deverá ser removido no final do cálculo, ou seja, o resultado não deve depender do mesmo:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k^\sigma} \left[\frac{k^\eta}{[k^2 - \delta^2]^2} \right] = \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{g^{\eta\sigma}}{[k^2 - \delta^2]^2} - \frac{4k^\eta k^\sigma}{[k^2 - \delta^2]^3} \right] = \\
&= g^{\eta\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \delta^2]^2} - g^{\eta\sigma} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - \delta^2]^3}, \\
I &= -g^{\eta\sigma} \delta^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \delta^2]^3}, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

e utilizando a relação (5.30) a integral resulta em:

$$I = -g^{\eta\sigma} \delta^2 \left(-\frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{\delta^2} \right) = \frac{ig^{\eta\sigma}}{32\pi^2}, \tag{5.36}$$

a qual independe do regularizador, como deveria ser. Assim (5.34) fica:

$$\begin{aligned}
T_s &= -8i\lambda\epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \frac{ig^{\eta\sigma}}{32\pi^2} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx a^\sigma \\
T_s &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda\epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx [xq^\eta - yp^\eta], \tag{5.37}
\end{aligned}$$

onde resolvendo as integrais em x e y chegamos em

$$T_s = \frac{1}{4\pi^2} \lambda\epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \frac{1}{6} [q^\eta - p^\eta] \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega). \tag{5.38}$$

Finalmente, a amplitude (5.11) é obtida a partir da soma de (5.31) e

(5.38), resultando em:

$$\begin{aligned}
T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= T_{\rho\mu\nu}^{AVV}(0) + T_s, \\
T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda \left\{ \int d(\omega) \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} \left(-\frac{1}{30} q_\nu q^\eta p^\beta + \frac{7}{60} p_\nu p^\eta q^\beta \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} \left(\frac{7}{60} q_\mu q^\beta p^\eta - \frac{1}{30} p_\mu p^\beta q^\eta \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\beta\mu\nu\eta} \left(\frac{1}{20} q_\rho q^\eta p^\beta - \frac{1}{20} p_\rho p^\eta q^\beta \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) [q^\eta - p^\eta] \right\}, \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Uma vez que temos de satisfazer à estatística de Bose-Einstein, ou seja, devemos ter uma função de onda totalmente simétrica, a amplitude (5.1) deve ser somada ao diagrama (5.2), no qual troca-se $q \leftrightarrow p$ e $\mu \leftrightarrow \nu$, ou ainda, troca-se os fótons de diferentes polarizações de lugar, sendo tais diagramas (5.1) e (5.2), equivalentes.

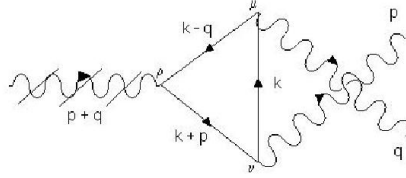


Figura 5.2: Diagrama de Feynman representando o processo axial-vetor-vetor, com as pernas de fótons cruzadas.

Ao diagrama de pernas cruzadas equivale a amplitude:

$$\begin{aligned}
T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= - \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[N_C i g_{Aqq} \tau^3 \gamma_\rho \gamma_5 \right. \\
&\quad \left. \times \frac{i}{\not{k} + \not{p} - \omega} i Q \gamma_\nu \frac{i}{\not{k} - \omega} i Q \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - \not{q} - \omega} \right]. \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Uma vez que a relação (5.40) é nada mais que (5.1) com os momentos e rótulos do fótons trocados, espera-se que seu resultado seja o mesmo de (5.1)

com as devidas alterações. Então temos que (5.40) resultará em:

$$T'_{\rho\mu\nu AVV} = T'_D + \tilde{T}'_{\rho\mu\nu AVV} + T'_s. \quad (5.41)$$

A parte divergente é equivalente à equação (5.27) com as respectivas trocas:

$$T'_D = \frac{1}{4\pi^2} \lambda \epsilon_{\rho\nu\mu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\omega^2}{\Lambda^2 + \omega^2} \right) \right] \\ \times \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[(3x-1)p^\eta + (1-3y)q^\eta \right], \quad (5.42)$$

a qual, como (5.27), se anulará devido às integrais em x e y . Da mesma forma, a parte finita resulta em:

$$\tilde{T}'_{\rho\mu\nu AVV} = \frac{1}{4\pi^2} \lambda \left\{ \int d(\omega) \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} \left(\frac{1}{30} q_\nu q^\beta p^\eta - \frac{7}{60} p_\nu p^\beta q^\eta \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} \left(-\frac{7}{60} q_\mu q^\eta p^\beta + \frac{1}{30} p_\mu p^\eta q^\beta \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \epsilon_{\beta\mu\nu\eta} \left(\frac{1}{20} q_\rho q^\eta p^\beta - \frac{1}{20} p_\rho p^\eta q^\beta \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) [q^\eta - p^\eta] \right\}, \quad (5.43)$$

e o termo de superfície é dado por:

$$T'_s = \frac{1}{4\pi^2} \lambda \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \frac{1}{6} [q^\eta - p^\eta] \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega). \quad (5.44)$$

A amplitude para o processo descrito pelo diagrama cruzado é a soma

de (5.43) e (5.44):

$$\begin{aligned}
T'_{\rho\mu\nu}{}^{AVV} &= T'_{\rho\mu\nu}{}^{AVV}(0) + T'_s, \\
T'_{\rho\mu\nu}{}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda \left\{ \int d(\omega) \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} \left(\frac{1}{30} q_\nu q^\beta p^\eta - \frac{7}{60} p_\nu p^\beta q^\eta \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} \left(-\frac{7}{60} q_\mu q^\eta p^\beta + \frac{1}{30} p_\mu p^\eta q^\beta \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\beta\mu\nu\eta} \left(\frac{1}{20} q_\rho q^\eta p^\beta - \frac{1}{20} p_\rho p^\eta q^\beta \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) [q^\eta - p^\eta] \right\}. \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Finalmente, a amplitude total para o processo axial-vetor-vetor é a soma de (5.39) e (5.45), a qual resulta em:

$$\begin{aligned}
T_{\rho\mu\nu}{}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda \left\{ \int d(\omega) \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} \left(-\frac{2}{30} q_\nu q^\eta p^\beta + \frac{7}{30} p_\nu p^\eta q^\beta \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} \left(-\frac{7}{30} q_\mu q^\eta p^\beta + \frac{2}{30} p_\mu p^\eta q^\beta \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\beta\mu\nu\eta} \left(\frac{1}{10} q_\rho q^\eta p^\beta - \frac{1}{10} p_\rho p^\eta q^\beta \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) [q^\eta - p^\eta] \right\}. \tag{5.46}
\end{aligned}$$

Podemos simplificar este resultado utilizando a identidade:

$$\epsilon_{\beta\mu\nu\eta} a_\rho a^\eta b^\beta = \left[-\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} a_\nu + \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} a_\beta - \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} a_\mu - \epsilon_{\rho\mu\nu\beta} a_\eta \right] a^\eta b^\beta. \tag{5.47}$$

Assim, depois de algumas manipulações, a amplitude resulta em:

$$\begin{aligned}
T_{\rho\mu\nu}{}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int d(\omega) \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) \frac{1}{6} \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} (q_\nu + 2p_\nu) + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} (2q_\mu + p_\mu) \right] p^\eta q^\beta + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) [q^\eta - p^\eta] \right\}, \tag{5.48}
\end{aligned}$$

a qual é totalmente simétrica sobre a troca de $q \leftrightarrow p$ e de $\mu \leftrightarrow \nu$, como esperado e onde utilizamos $\lambda = 1$ (Apêndice A).

5.3 Identidades de Ward-Takahashi

A amplitude obtida acima representa a amplitude de probabilidade do processo axial-vetor-vetor ocorrer. Neste contexto, pode-se obter resultados úteis analisando as simetrias por trás do processo estudado. Uma forma de estudarmos essas simetrias é a aplicação das identidades de Ward-Takahashi de gauge e quiral, para verificarmos se as correspondentes correntes são conservadas.

Assim, aplicando as identidades de Ward-Takahashi na amplitude (5.48), obtemos:

Vetoriais ou de Gauge:

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{6} \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} (q_\nu + 2p_\nu) q^\mu p^\eta q^\beta + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} (2q_\mu + p_\mu) q^\mu p^\eta q^\beta \right] \int d(\omega) \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} q^\mu [q^\eta - p^\eta] \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \right\}, \\
q^\mu T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} q^\mu p^\eta \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega), \tag{5.49}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
p^\nu T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{6} \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} (q_\nu + 2p_\nu) p^\nu p^\eta q^\beta + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} (2q_\mu + p_\mu) p^\nu p^\eta q^\beta \right] \int d(\omega) \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} p^\nu [q^\eta - p^\eta] \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \right\}, \\
p^\nu T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} p^\nu q^\eta \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega). \tag{5.50}
\end{aligned}$$

Axial ou Quiral:

$$\begin{aligned}
(p+q)^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{6} \left[\epsilon_{\rho\mu\beta\eta} (q_\nu + 2p_\nu) (p+q)^\rho p^\eta q^\beta + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon_{\rho\beta\nu\eta} (2q_\mu + p_\mu) (p+q)^\rho p^\eta q^\beta \right] \int d\omega \frac{g_{Aqq}}{\omega^2} \rho(\omega) + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} (p+q)^\rho [q^\eta - p^\eta] \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) \right\}, \\
(p+q)^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} (p^\rho q^\eta - q^\rho p^\eta) \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega), \\
(p+q)^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= -\frac{1}{4\pi^2} 2\epsilon_{\rho\mu\nu\eta} q^\rho p^\eta \int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega). \tag{5.51}
\end{aligned}$$

As indentidades de Ward-Takahashi vetoriais (5.49 e 5.50) e axial (5.51), são obtidas a partir das hipóteses de estarmos na camada de massa e no limite quiral. Elas são gerais no sentido de que ainda não determinamos quais os detalhes da teoria que estamos estudando, ou seja, não explicitamos a forma do acoplamento axial. Dessa forma, para obtermos resultados particulares das possíveis teorias subjacentes, devemos especificar a forma do acoplamento.

5.3.1 A faca de dois gumes

Considerando que o acoplamento axial satisfaça à relação de Goldberger-Treiman (seção 3.7), o termo espectral das equações (5.49), (5.50) e (5.51), resulta em:

$$\int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) = \int d\omega (1 - g_A) \frac{\omega}{f_\pi} \rho(\omega) = \frac{1 - g_A}{f_\pi} \int d\omega \omega \rho(\omega) = 0, \tag{5.52}$$

onde usamos a condição espectral (4.3).

Dessa forma as identidades de Ward-Takahashi de gauge e axial resultam em:

Vetoriais ou de Gauge:

$$q^\mu T_{\rho\mu\nu}^{AVV} = 0, \tag{5.53}$$

$$p^\nu T_{\rho\mu\nu}^{AVV} = 0, \tag{5.54}$$

Axial ou Quiral:

$$(p + q)^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV} = 2(1 - g_A) \int d\omega \omega^2 T_{\mu\nu}(\omega) = 0. \quad (5.55)$$

A identidade de Ward-Takahashi axial (5.55) deve ser comparada à expressão proveniente da hipótese PCAC (eq. 4.64). Embora o resultado para a divergência da amplitude $T_{\rho\mu\nu}^{AVV}$ seja nulo, como era de se esperar, uma vez que estamos lidando com férmions sem massa, a forma funcional da identidade de Ward-Takahashi axial é diferente da esperada, revelando o caráter de violação da hipótese PCAC. Este fato é fundamental para a obtenção do valor correto da amplitude de decaimento do pión neutro, como obtido em [9] e reproduzido no apêndice B.

Resumindo, estes resultados mostram que as identidades vetoriais são conservadas e a axial é violada. Isto corresponde a termos a conservação da corrente vetorial e a violação da relação PCAC, como esperado para a QCD e mais explicitamente para o decaimento do pión nulo.

Agora, se o acoplamento axial for igual a uma constante arbitrária, teremos:

$$\int d\omega g_{Aqq} \rho(\omega) = \int d\omega \kappa \rho(\omega) = \kappa \int d\omega \rho(\omega) = \kappa, \quad (5.56)$$

onde usamos a condição espectral (4.2), e κ é uma constante qualquer, e no nosso caso não tem nenhum significado físico.

Neste caso, as identidades de Ward-Takahashi de gauge e axial resultam em:

Vetoriais ou de Gauge:

$$q^\mu T_{\rho\mu\nu}^{AVV} = -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} q^\mu p^\eta, \quad (5.57)$$

$$p^\nu T_{\rho\mu\nu}^{AVV} = \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} p^\nu q^\eta, \quad (5.58)$$

Axial ou Quiral:

$$\begin{aligned} (p+q)^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= -\frac{1}{4\pi^2} 2\epsilon_{\rho\mu\nu\eta} q^\rho p^\eta, \\ (p+q)^\rho T_{\rho\mu\nu}^{AVV} &= 2 \int d\omega \omega T_{\mu\nu}(\omega). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Neste caso, temos a violação da simetria de gauge e a conservação da simetria quiral, ou ainda a satisfação da hipótese PCAC, caso este descrito pela teoria do decaimento do próton de 't Hooft [32].

Assim, vemos que a aplicação de uma regularização espectral no cálculo da função de correlação entre a corrente axial e duas vetoriais, preserva a liberdade de podermos ter a violação das identidades de Ward-Takahashi vetoriais ou da axial. Entretanto, no modelo espectral de quarks da QCD a relação de Goldberger-Treiman desempenha um papel fundamental na determinação da identidade de Ward-Takahashi a ser violada, ou seja, a identidade quiral. Desta forma, podemos dizer que no Modelo Espectral de Quarks, a forma como a simetria quiral é quebrada (PCAC), é determinante na identificação de qual identidade de Ward-Takahashi será violada pela anomalia quiral.

Conclusões

A anomalia quirial é um fenômeno descoberto no final dos anos 60 e até hoje é estudado de forma meticulosa através de várias abordagens. Seu nome demonstra o assombro com que os físicos teóricos se depararam quando da sua descoberta, mas hoje em dia sabe-se que este é um fenômeno de forma alguma abominável, mas antes totalmente essencial para uma descrição correta da natureza, pelo ponto de vista da Teoria Quântica de Campos.

A ambiguidade que existe por trás da anomalia quirial, tanto quanto a liberdade de escolha sobre qual simetria deve ser violada são fatos que devem ser destacados. A natureza por si só, ou mais corretamente a teoria que almeja modelá-la, parece não se importar com qual simetria será violada: não existe forma intrínseca de se escolher o resultado correto para a anomalia. Se a corrente vetorial é violada temos a não conservação do número de férmions (ou ainda do número bariônico), de nosso sistema e temos uma probabilidade finita para o decaimento do próton [32]. Por outro lado, se a corrente axial não for conservada, a sua divergência atuará como um operador capaz de produzir fótons, e temos o modelo teórico para o fenômeno observado experimentalmente do decaimento anômalo do pión neutro.

Neste trabalho estudamos o problema da determinação da anomalia quirial em um modelo quirial de quarks conhecido como Modelo Espectral de Quarks. Este modelo é construído de forma a ser finito e livre de singularidades, a partir do uso da forma generalizada da representação de Lehmann para o propagador do quark e da Técnica de Gauge. Em nossa abordagem utilizando tal modelo consideramos implícita a teoria subjacente aos cálculos analíticos. Ao fim do cálculo, analisamos as simetrias da teoria e constatamos que a forma do acoplamento dos mésons com os quarks é essencial para

a obtenção da violação de simetria correta para o fenômeno.

A versão espectral da relação de Goldberger-Treiman foi ingrediente central em nossa abordagem. A partir dela conseguimos obter o resultado correto da conservação das correntes vetoriais e da violação da simetria quiral em QCD, ou ainda, obtivemos o resultado correto para as identidades de Ward-Takahashi utilizando o argumento físico da validade da relação de Goldberger-Treiman. A forma espectral da hipótese PCAC foi nosso guia no reconhecimento de que realmente a simetria quiral foi violada em QCD, uma vez que a divergência da corrente axial não satisfazia tal hipótese.

De outra forma, obtivemos o resultado da violação da simetria de Gauge e conservação da simetria quiral, ou ainda, a validade da hipótese PCAC, quando consideramos um acoplamento axial constante não satisfazendo a relação de Goldberger-Treiman, como no caso da abordagem de 't Hooft acerca da quebra de simetria utilizando a anomalia quiral. A falta de dependência entre o acoplamento axial e a massa espectral do quark constituinte é a chave para a obtenção da violação correta neste caso.

Desta forma vemos que a ambiguidade por trás da anomalia quiral está de certa forma ausente quando utilizamos a regularização espectral. Argumentos físicos a cerca da forma do acoplamento, como a relação de Goldberger-Treiman, a hipótese PCAC, o pión como o bóson de Goldstone da quebra espontânea da simetria quiral, foram a base para a violação correta e esperada em QCD.

A liberdade de tanto uma quanto outra simetria ser violada ainda está presente, uma vez que o resultado obtido para a anomalia é dependente da relação entre os acoplamentos e a massa espectral, que pode variar em modelos diferentes. Assim, ambas violações podem ocorrer como em todas as abordagens realizadas até agora.

Como limitação do presente trabalho, ressaltamos que os cálculos foram realizados no Modelo Espectral com quarks não massivos. O desenvolvimento do modelo espectral para quarks massivos e subsequente análise da anomalia quiral neste contexto são prosseguimentos naturais deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

- [1] U. Vogl and W. Weise. The Nambu and Jona Lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 27:195–272, 1991.
- [2] S. P. Klevansky. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649–708, 1992.
- [3] M. K. Volkov. Effective chiral Lagrangians and the Nambu-Jona-Lasinio model. *Phys. Part. Nucl.*, 24:35–58, 1993.
- [4] T. Hatsuda and T. Kunihiro. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian. *Phys. Rept.*, 247:221–367, 1994.
- [5] Chr. V. Christov et al. Baryons as non-topological chiral solitons. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 37:91–191, 1996.
- [6] R. Alkofer, H. Reinhardt, and H. Weigel. Baryons as chiral solitons in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Phys. Rept.*, 265:139–252, 1996.
- [7] G. Ripka. Quarks bound by chiral fields: The quark-structure of the vacuum and of light mesons and baryons. Oxford, UK: Clarendon Pr. (1997) 205 p.
- [8] E. Ruiz Arriola. Pion structure at high and low energies in chiral quark models. ((V)). *Acta Phys. Polon.*, B33:4443–4479, 2002.
- [9] E. Ruiz Arriola and W. Broniowski. Spectral quark model and low-energy hadron phenomenology. *Phys. Rev.*, D67:074021, 2003.

-
- [10] E. Megias, E. Ruiz Arriola, L. L. Salcedo, and W. Broniowski. Low-energy chiral Lagrangian in curved space-time from the spectral quark model. *Phys. Rev.*, D70:034031, 2004.
- [11] R. Delbourgo and P. C. West. A Gauge Covariant Approximation to Quantum Electrodynamics. *J. Phys.*, A10:1049, 1977.
- [12] R. Delbourgo. The Gauge Technique. *Nuovo Cim.*, A49:484–496, 1979.
- [13] R. Jackiw. When radiative corrections are finite but undetermined. *Int. J. Mod. Phys.*, B14:2011–2022, 2000.
- [14] A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio, B. Hiller, and M. C. Nemes. Chiral anomaly in a gamma(5) friendly momentum space regularization framework. *Phys. Rev.*, D64:046013, 2001.
- [15] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ in the sigma model. *Nuovo Cim.*, A60:47–61, 1969.
- [16] M. L. Goldberger and S. B. Treiman. Decay of the pi meson. *Phys. Rev.*, 110:1178–1184, 1958.
- [17] David J. Griffiths. Introduction To Elementary Particles. New York, USA: Wiley (1987) 392p.
- [18] Sítio da Internet. <http://www.sprace.org.br/AventuraDasParticulas/frames.html>. pesquisado em 19/12/2007.
- [19] G. Altarelli. A qcd primer. 2002.
- [20] A. Zee. Quantum field theory in a nutshell. Princeton, UK: Princeton Univ. Pr. (2003) 518 p.
- [21] Michael E. Peskin and D. V. Schroeder. An introduction to quantum field theory. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [22] L. H. Ryder. Quantum field theory. Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p.
- [23] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. Quantum mechanics vol. 1. John Wiley. (1977) 626p.
- [24] Volker Koch. Introduction to Chiral Symmetry. 1995.

-
- [25] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I. *Phys. Rev.*, 122:345–358, 1961.
- [26] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics).
- [27] A. H. Blin, B. Hiller, and M. Schaden. Electromagnetic Form-Factors in the Nambu-Jona-Lasinio Model. *Z. Phys.*, A331:75–82, 1988.
- [28] B. L. Ioffe. Condensates in quantum chromodynamics. *Phys. Atom. Nucl.*, 66:30–43, 2003.
- [29] B. L. Ioffe and K. N. Zyablyuk. Gluon condensate in charmonium sum rules with 3-loop corrections. *Eur. Phys. J.*, C27:229–241, 2003.
- [30] W. Broniowski, A. Steiner, and M. Lutz. N(c) counting rules and the axial vector coupling constant of the constituent quark. *Phys. Rev. Lett.*, 71:1787–1790, 1993.
- [31] S. L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969.
- [32] G. 't Hooft. Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, 37:8–11, 1976.
- [33] R. Jackiw. John Bell's observations on the chiral anomaly and some properties of its descendants. 2000.

Notação e Convenções

Neste apêndice, vamos apresentar a notação de termos utilizados ao longo do texto bem como algumas de suas propriedades.

As matrizes de Pauli são matrizes 2×2 , unitárias, Hermitianas e sem traço, dadas por:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

que podem tanto ser representadas por índices numéricos quanto letras arábicas ($\sigma_1 = \sigma_x$, *etc.*), e índices superiores ou inferiores ($\sigma_1 = \sigma^1$, *etc.*) tendo o mesmo significado uma vez que ambas σ não são parte de um quadrivetor.

Temos as propriedades de produto das matrizes de Pauli

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{A.2})$$

sendo ϵ_{ijk} o símbolo de Levi-Civita.

As matrizes de Dirac são quatro matrizes 4×4 , unitárias e sem traço:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde 1 são matrizes identidade 2×2 e 0 são matrizes nulas também 2×2 , e σ^i as matrizes de Pauli. Como as matrizes de Dirac tem propriedades de quadrivetores se *baixarmos* os índices das mesmas, temos uma troca nos sinais das componentes espaciais:

$$\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_i = -\gamma^i.$$

A partir das matrizes γ podemos introduzir matrizes auxiliares

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu). \quad (\text{A.5})$$

Para qualquer quadrivetor a^μ , pode-se definir as matrizes \not{a} , 4×4 , como:

$$\not{a} \equiv a^\mu\gamma_\mu = a_\mu\gamma^\mu. \quad (\text{A.6})$$

Os índices gregos (μ, ν , etc.) contam de 0, 1, 2 e 3 e os índices arábicos (i, j , etc.) são 1, 2 ou 3. Índices repetidos em uma mesma expressão tem o significado de um somatório.

A métrica de Minkowski é definida por:

$$g^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

notando-se que $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

As matrizes de carga são definidas por:

$$Q = \frac{1}{2N_c} + \frac{\tau^3}{2} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Assim a constante multiplicativa λ presente nas amplitudes para o processo axial-vetorial-vetorial a para o decaimento anômalo do pión nulo, re-

sulta em:

$$\begin{aligned}\lambda &= \text{Tr}[N_c \tau^3 Q Q] = \\ &= \text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/9 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}\right], \\ \lambda &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Todas estas definições, assim como aquelas que não estejam neste, podem ser encontradas nas referências [17, 21].

Cálculo do Decaimento do Píon Neutro

Neste apêndice, vamos apresentar o cálculo do decaimento do píon neutro, utilizando o modelo espectral de quarks.

A amplitude para este decaimento, representada pela figura B.1, é dada por:

$$T_{\mu\nu} = - \int d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[N_C i g_{\pi qq} \tau^3 \gamma_5 \right. \\ \left. \times \frac{i}{\not{k} + \not{q} - \omega} i Q \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - \omega} i Q \gamma_\nu \frac{i}{\not{k} - \not{p} - \omega} \right], \quad (\text{B.1})$$

sendo ω a massa espectral, N_C o número de cores, τ^3 é a matriz de Pauli σ_z , $g_{\pi qq}$ é o acoplamento entre o píon e os quarks e no caso uma constante, Q as matrizes de carga, γ_μ as matrizes de Dirac, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ e $\not{k} = \gamma_\rho k^\rho$.

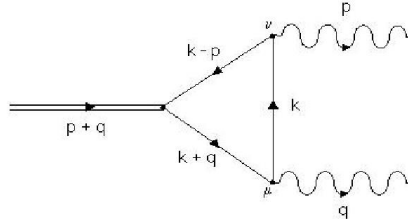


Figura B.1: Diagrama de Feynman representando a amplitude do decaimento $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$.

A amplitude (B.1) pode ainda ser escrita como:

$$T_{\mu\nu} = \lambda \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_5 [\not{k} + \not{q} + \omega] \gamma_\mu [\not{k} + \omega] \gamma_\nu [\not{k} - \not{p} + \omega]]}{[(k+q)^2 - \omega^2][k^2 - \omega^2][(k-p)^2 - \omega^2]}, \quad (\text{B.2})$$

sendo $\lambda = \text{Tr}[N_C \tau^3 Q Q] = 1$ (Apêndice A). O traço em (B.2) é dado por:

$$\begin{aligned} T &= \text{Tr}[\gamma_5 [(\not{k} + \not{q}) + \omega] \gamma_\mu [\not{k} + \omega] \gamma_\nu [(\not{k} - \not{p}) + \omega]] = \\ &= \text{Tr}[\gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k} - \gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{p} + \gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \omega + \\ &\quad + \gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \gamma_\nu \not{k} \omega - \gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p} \omega + \gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \gamma_\nu \omega^2 + \\ &\quad + \gamma_5 \not{q} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k} - \gamma_5 \not{q} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{p} + \gamma_5 \not{q} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \omega + \\ &\quad + \gamma_5 \not{q} \gamma_\mu \gamma_\nu \not{k} \omega - \gamma_5 \not{q} \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p} \omega + \gamma_5 \not{q} \gamma_\mu \gamma_\nu \omega^2 + \\ &\quad + \gamma_5 \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k} \omega - \gamma_5 \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{p} \omega + \gamma_5 \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \omega^2 + \\ &\quad + \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \not{k} \omega^2 - \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p} \omega^2 + \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \omega^3]. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para calcularmos traço (B.3), vamos fazer uso das propriedades dos traços de matrizes γ [17]:

$$\text{Tr}[\gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k}] = \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\delta] k^\sigma k^\rho k^\delta = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \omega] = \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu] k^\sigma k^\rho \omega = -4i \epsilon_{\sigma\mu\rho\nu} k^\sigma k^\rho \omega, \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \not{k} \gamma_\mu \gamma_\nu \omega^2] = \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\nu] k^\sigma \omega^2 = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \omega^3] = \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu] \omega^3 = 0, \quad (\text{B.7})$$

onde $\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}$ é um tensor totalmente antisimétrico pela troca de duas componentes quaisquer

$$\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu} \equiv \begin{cases} -1, & \text{se } \sigma\mu\rho\nu \text{ é uma permutação par de } 0123, \\ +1, & \text{se } \sigma\mu\rho\nu \text{ é uma permutação ímpar,} \\ 0, & \text{se quaisquer índices se repetirem,} \end{cases}$$

e dessa forma, o traço (B.3) resulta em:

$$\begin{aligned}
T &= 0 - 0 - 4i\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}k^\sigma k^\rho\omega - \\
&\quad - 4i\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}k^\sigma k^\rho\omega + 4i\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}k^\sigma p^\rho\omega + 0 + \\
&\quad + 0 - 0 - 4i\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}q^\sigma k^\rho\omega - \\
&\quad - 4i\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}q^\sigma k^\rho\omega + 4i\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}q^\sigma p^\rho\omega + 0 - \\
&\quad - 4i\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho\omega + 4i\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma p^\rho\omega + 0 + \\
&\quad + 0 - 0 + 0 = \\
&= -4i\omega[\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}(k^\sigma k^\rho + q^\sigma k^\rho) + \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}(k^\sigma k^\rho - k^\sigma p^\rho) + \\
&\quad + \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}(k^\sigma k^\rho - k^\sigma p^\rho + q^\sigma k^\rho - q^\sigma p^\rho)]. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Manipulando os ϵ 's, temos:

$$\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} = -\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}, \tag{B.9}$$

$$\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu} = -\epsilon_{\mu\sigma\rho\nu} = \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}, \tag{B.10}$$

então teremos

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}k^\sigma k^\rho = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k^\rho k^\sigma = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}k^\rho k^\sigma = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho = \\
&= 0, \tag{B.11}
\end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}k^\sigma k^\rho = -\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho = 0, \tag{B.12}$$

$$\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}k^\sigma k^\rho = \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}k^\sigma k^\rho = 0. \tag{B.13}$$

Utilizando as relações (B.9 à B.13), o traço em (B.8) fica:

$$\begin{aligned} T &= -4i\omega\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}[q^\sigma k^\rho - k^\sigma p^\rho + k^\sigma p^\rho - q^\sigma k^\rho + q^\sigma p^\rho], \\ T &= 4i\omega\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}p^\sigma q^\rho, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

e finalmente a amplitude (B.2) resulta em

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \int d\omega g_{\pi qq}\rho(\omega) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4i\omega\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}p^\sigma q^\rho}{[(k+q)^2 - \omega^2][k^2 - \omega^2][(k-p)^2 - \omega^2]}, \\ T_{\mu\nu} &= 4i\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq}\rho(\omega)\omega \\ &\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+q)^2 - \omega^2][k^2 - \omega^2][(k-p)^2 - \omega^2]}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Para resolver esta amplitude vamos utilizar a parametrização de Feynman, introduzindo a identidade

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{2}{[(A-C)x + (B-C)y + C]^3}, \quad (\text{B.16})$$

onde consideraremos

$$\begin{aligned} A &= (k+q)^2 - \omega^2, \\ B &= (k-p)^2 - \omega^2, \\ C &= k^2 - \omega^2. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Essa parametrização modificará (B.15) para

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 8i\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq}\rho(\omega)\omega \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\ &\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(2kq + q^2)x + (-2kp + p^2)y + k^2 - \omega^2]^3}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

na qual podemos quadrar o denominador:

$$\begin{aligned}
D &= [(2kq + q^2)x + (-2kp + p^2)y + k^2 - \omega^2]^3 \\
&= [k^2 + 2k(qx - py) + (qx - py)^2 - (qx - py)^2 + q^2x + p^2y - \omega^2]^3 \\
&= [[k + (qx - py)]^2 - (qx - py)^2 + q^2x + p^2y - \omega^2]^3 \\
&= [k'^2 - M^2(x, y, \omega)]^3,
\end{aligned} \tag{B.19}$$

sendo $k' = k + (qx - py)$ e $M^2(x, y, \omega) = (qx - py)^2 - q^2x - p^2y + \omega^2$. A amplitude (B.18) pode ser escrita em termos dessas novas variáveis e analisando-se que

$$\begin{aligned}
k' &= k + (qx - py) \\
dk' &= dk \\
k \rightarrow \pm\infty &, \quad k' \rightarrow \pm\infty
\end{aligned} \tag{B.20}$$

a amplitude fica

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= 8i\epsilon_{\mu\sigma\nu\rho}p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq}\rho(\omega)\omega \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\
&\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3},
\end{aligned} \tag{B.21}$$

onde trocamos $k' \rightarrow k$.

A integral em k de (B.21) é da ordem de grandeza k^{-2} , extrapolando-se os limites de integração

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - M^2(x, y, \omega)]^3} \rightarrow \int d^4k \frac{1}{k^6} \sim k^{-2},$$

de tal forma que a mesma é finita. Assim, para resolvê-la vamos realizar uma rotação de Wick, passando-se do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano:

$$\begin{aligned}
k &= (k_0, k_1, k_2, k_3) \rightarrow (k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv k_E, \\
k^2 &= k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \rightarrow -k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 - k_4^2 \equiv -k_E^2, \\
d^4k &= dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 \rightarrow idk_4 dk_1 dk_2 dk_3 \equiv id^4k_E,
\end{aligned} \tag{B.22}$$

onde $k_0 = ik_4$ é a relação entre a coordenada temporal do quadri-momento e a energia Euclidiana. Passando para coordenadas polares em 4-D:

$$\begin{aligned} d^4 k_E &= k_E^3 dk_E d\phi \sin \theta d\theta \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \\ &= \frac{k_E^2 dk_E^2}{2} d\phi \sin \theta d\theta \sin^2 \theta_2 d\theta_2, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

e resolvendo as integrais em ϕ , θ e θ_2 chegamos em $2\pi^2$. Então,

$$d^4 k \rightarrow i d^4 k_E = i \frac{k_E^2 dk_E^2}{2} 2\pi^2 = \pi^2 i k_E^2 dk_E^2 \quad (\text{B.24})$$

e dessa forma,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{8}{(2\pi)^4} \pi^2 \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\ &\quad \times \int_0^\infty dk_E^2 \frac{k_E^2}{[-k_E^2 - M^2(x, y, \omega)]^3}, \\ T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \\ &\quad \times \int_0^\infty dz \frac{z}{[z + M^2(x, y, \omega)]^3}, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

na qual trocamos $k_E^2 \rightarrow z$.

A integral em z de (B.25) resulta em:

$$\int_0^\infty dz \frac{z}{[z + M^2(x, y, \omega)]^3} = \frac{1}{2} \frac{1}{M^2(x, y, \omega)}, \quad (\text{B.26})$$

e então:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{1}{M^2(x, y, \omega)}. \quad (\text{B.27})$$

Agora, para resolver (B.27) vamos fazer a consideração que as partículas externas do processo estão na camada de massa (*on shell*), ou seja, elas obedecem à equação de energia-momento de Einstein $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$, com p o quadri-momento, E a energia, \vec{p} o vetor momento e m a massa, da partícula. Ainda, vamos admitir que estemos calculando dentro do limite quiral, para o qual a massa do pión é nula $m_\pi = 0$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} q^2 &= m_\gamma^2 = 0, \\ p^2 &= m_\gamma^2 = 0, \\ (p+q)^2 &= m_\pi^2 = 0, \end{aligned}$$

sendo m_γ a massa dos fótons. Consequentemente

$$M^2(x, y, \omega) = (qx + py)^2 - q^2x - p^2y + \omega^2 \rightarrow \omega^2, \quad (\text{B.28})$$

e teremos que (B.27) resultará em:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{1}{\omega^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1} \int_0^1 dy (1-y), \\ T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

A amplitude (B.29) ainda não é a amplitude total para o processo $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Devemos ainda somar a ela o diagrama de pernas cruzadas (figura B.2). A amplitude descrita por esse diagrama não é nada mais do que a amplitude (B.1) com a troca dos momentos $q \leftrightarrow p$ e dos índices $\mu \leftrightarrow \nu$:

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} &= - \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[N_C i g_{\pi qq} \tau^3 \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. \times \frac{i}{\not{k} + \not{p} - \omega} i Q \gamma_\nu \frac{i}{\not{k} - \omega} i Q \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - \not{q} - \omega} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

e dessa forma, vemos que a mesma resultará em (B.29) com os momentos e os índices trocados:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} q^\sigma p^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1}. \quad (\text{B.31})$$

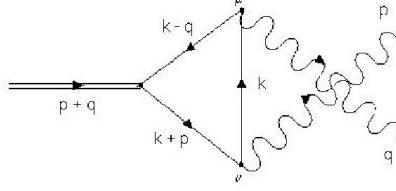


Figura B.2: Diagrama de Feynman de pernas cruzadas representando a amplitude do decaimento $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$.

Assim, a amplitude total para o processo $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$ é a soma de (B.29) e (B.31):

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + T'_{\mu\nu} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} q^\sigma p^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho + \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} q^\sigma p^\rho \right] \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} p^\sigma q^\rho + \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\rho\mu\sigma} q^\rho p^\sigma \right] \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} - \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\sigma\mu\rho} \right] p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1} = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\sigma\nu\rho} \right] p^\sigma q^\rho \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1}, \\
T_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} q^\rho p^\eta \int d\omega g_{\pi qq} \rho(\omega) \omega^{-1} \\
T_{\mu\nu} &= \int d\omega \rho(\omega) g_{\pi qq} T_{\mu\nu}(\omega), \tag{B.32}
\end{aligned}$$

a qual tem uma dependência explícita na massa espectral ω e onde

$$T_{\mu\nu}(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\nu\eta} q^\rho p^\eta \omega^{-1}. \tag{B.33}$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)