Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Sistema de equações elípticas semilineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Paulo Henrique Souza da Costa

Vitória, junho de 2009

Agradecimentos

Primeiramente a Deus.

A minha família.

A meus amigos Edcarlos, Eleonesio, Bernardo, Wesley e Douglas pelo companherismo de sempre.

À Professora Magda Soares Xavier por ter me orientado.

Aos Professores Marcelo Fernandes Furtado, Domingos Sávio Valério Silva e Thiago Fassarela do Amaral por terem aceito participar da banca.

Aos Professores do PPGMAT.

Resumo

Neste trabalho, estuda-se resultados de existência e não-existência de soluções de um sistema de equações elípticas semilineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev em um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Tais resultados foram demonstrados por Alves, de Morais Filho e Souto em 2000 e estendem para sistemas resultados do caso escalar crítico publicados no famoso artigo de Brézis e Nirenberg em 1983. Utilizando o método minimax e a teoria de regularidade, obtém-se a existência de solução positiva quando os autovalores da matriz A associada ao sistema são positivos e menores do que o primeiro autovalor do Laplaciano. Quando os autovalores de A são não-positivos, a não-existência de soluções não-triviais é obtida utilizando-se a Identidade de Pohozaev e o Princípio de Continuação Única. Um argumento de contradição garante a não-existência de soluções positivas quando os autovalores de A são maiores ou iguais ao primeiro autovalor do Laplaciano.

Abstract

In this work, we study results of existence and non-existence of solutions to a semilinear elliptic system involving the critical Sobolev exponent in a bounded domain in $\mathbb{R}^N$. Such results were proved by Alves, de Morais Filho and Souto in 2000 and they extend to systems the critical scalar case published in 1983 in the famous paper by Brézis and Nirenberg. By using the minimax method and the regularity theory, we obtain the existence of positive solution when the eigenvalues of the matrix A associated to the system are positive and smaller than the first eigenvalue of the Laplacian. When the eigenvalues of A are non-positive, the non-existence of non-trivial solutions is obtained by using the Pohozaev's Identity and the Principle of Unique Continuation. A contradiction argument give us the non-existence of positive solutions when the eigenvalues of A are greater than or equal to the first eigenvalue of the Laplacian.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência e não-existência de soluções do seguinte sistema de equações elípticas semilineares

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u|u|^{\alpha-2}|v|^{\beta}, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = bu + cv + \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta} |u|^{\alpha} v|v|^{\beta-2}, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u, v > 0, & x \in \Omega, \end{cases} \qquad (P^{+}_{\alpha,\beta,A})$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\partial\Omega$, $N \geq 3$, a, b, c, α, β são constantes reais e $\alpha, \beta > 1$.

Problemas semilineares elípticos tem sido intensivamente estudados na literatura. É bem conhecido que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, não tem soluções não-triviais no caso em Ω é um domínio estrelado. A demonstração desse fato (veja Lema 2.4) decorre da Identidade de Pohozaev [27] e do Princípio de Continuação Única (veja Seção 1.8).

Em 1983, Brézis e Nirenberg [8] consideraram o seguinte problema com crescimento crítico e uma perturbação de mais baixa ordem:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (BN)$$

onde Ω é domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Eles demonstraram que se $N \geq 4$, o problema (BN) tem uma solução para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_1)$, onde λ_1 denota o primeiro autovalor positivo de $-\Delta$ em Ω com condição de Dirichlet $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, e não tem solução quando $\lambda \geq \lambda_1$ ou quando $\lambda \leq 0$ e Ω é um domínio estrelado. Além disso, eles provaram que quando $N = 3$ e Ω é uma bola em $\mathbb{R}^N$ então (BN) tem uma solução se, e somente se, $\lambda \in (\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1)$. Desde então, muitos artigos vem sendo publicados tratando dessa classe de problemas (veja, por exemplo, [12, 10, 5, 28, 6, 19, 15]), bem como de suas generalizações para o caso quasilinear (veja, por exemplo, [21, 18, 16, 4, 13]) e para o caso onde sistemas de equações com crescimento crítico são consideradas (veja, por exemplo, [14, 3, 11, 30, 2, 22, 32]). A principal dificuldade em tratar o caso crítico é a falta de compacidade da imersão $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

O objetivo desse trabalho é estudar resultados de existência e não-existência de soluções do sistema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$, demonstrados por Alves, de Morais Filho e Souto em [3]. No caso em que $\alpha + \beta = 2^*$, eles adaptaram os argumentos de Brézis e Nirenberg [8] para o sistema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$.

O sistema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ pode ser reescrito na forma vetorial

$$\begin{cases} -\Delta Z = \nabla\left(\frac{1}{2}(AZ, Z) + F(Z)\right), & x \in \Omega, \\ Z = 0, & x \in \partial\Omega, \\ Z > 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{$P^+_{\alpha,\beta,A}$}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $Z = (u,v)^T$, $\Delta Z = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$, $F(Z) = \dfrac{2}{\alpha+\beta}|u|^\alpha|v|^\beta$, $(\ . \ , \ . \ )$ denota o produto interno usual do $\mathbb{R}^2$ e $Z > 0$ significa $u > 0$ e $v > 0$. Escrevemos $(P_{\alpha,\beta,A})$ para nos referir ao sistema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ sem a condição $Z > 0$ em Ω.

Denotamos por μ_1 e μ_2 os autovalores reais da matriz A e vamos admitir que $\mu_1 \leq \mu_2$.

Designamos por X o espaço $H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega)$ dotado da norma

$$\|(u,v)\|^2 = \|u\|^2_{H_o^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H_o^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Uma solução fraca de $(P_{\alpha,\beta,A})$ é um par $(u,v) \in X$ satisfazendo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\zeta dx - \int_\Omega au\varphi dx - \int_\Omega bv\varphi dx - \int_\Omega bu\zeta dx$$

$$- \int_\Omega cv\zeta dx - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^{\alpha-2}|v|^\beta u\varphi dx - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^\alpha|v|^{\beta-2}v\zeta dx = 0, \tag{1}$$

para todo $(\varphi, \zeta) \in X$.

Entendemos por solução de $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ (ou de $(P_{\alpha,\beta,A})$) uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisfaz $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ (ou $(P_{\alpha,\beta,A})$) no sentido pontual.

O resultado principal desse trabalho é o seguinte teorema.

Teorema A *Suponha que $\alpha, \beta > 1$, $\alpha + \beta = 2^*$ e $b \geq 0$. Se*
(i) $N \geq 4$ e $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$ ou
(ii) $N = 3$, Ω é uma bola e $\lambda_1/4 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$,
então o sistema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ tem uma solução.

Também estudamos os seguintes resultados de não-existência.

Teorema B *Suponha $\alpha + \beta \geq 2^*$ e $\mu_2 \leq 0$. No caso em que $\alpha + \beta = 2^*$, $\mu_2 = 0$ e $a, b, c = 0$, suponha também $\alpha, \beta > 2$. Então, se Ω é um domínio estrelado em relação a origem, o sistema $(P_{\alpha,\beta,A})$ possui somente a solução trivial.*

Teorema C *Se $b \geq 0$ e $\mu_2 \geq \lambda_1$ ou se $b \leq 0$ e $\mu_1 \geq \lambda_1$, então o sistema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ não tem solução.*

A demonstração do Teorema B, no caso $\alpha + \beta = 2^*$ e $\mu_2 = 0$, usa o Princípio de Continuação Única. Quando a, b, c não são simultaneamente nulos, podemos demonstrar esse caso mais facilmente sem utilizar esse princípio, se admitirmos a hipótese adicional $\dfrac{\alpha}{\beta} \neq \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$ (veja Observação 2.5).

Observamos que, examinando a demonstração do Teorema C, podemos também concluir que se $b = 0$ e $\mu_1 > \lambda_1$ então o sistema $(P_{\alpha,\beta,A})$ não possui soluções (u, v) em que uma das duas funções u, v muda de sinal e a outra conserva o sinal em Ω (veja Observação 2.6).

Por fim, no caso $\alpha + \beta < 2^*$, temos o seguinte resultado.

Teorema D *Suponha que $b \geq 0$, $\mu_2 < \lambda_1$ e $\alpha + \beta < 2^*$. Então o sistema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ tem solução.*

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 1, reunimos alguns conceitos e resultados preliminares necessários para as demonstrações dos teoremas. No Capítulo 2, demonstramos os Teoremas B e C. No Capítulo 3, demonstramos a regularidade das soluções fracas quando $\alpha + \beta \leq 2^*$, bem como apresentamos a demonstração do Teorema D. Finalmente, no Capítulo 4, demonstramos o Teorema A.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo reunimos alguns conceitos e resultados preliminares que serão utilizados ao longo desse trabalho. Começamos com a definição de topologia fraca em espaços de Banach (ver, por exemplo, [9]).

Seja E um espaço de Banach com norma $\| \ \|$. O espaço dual de E, denotado por E', é o espaço dos funcionais lineares contínuos de E em $\mathbb{R}$. O espaço E' está dotado da norma

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \,.$$

Dado $f \in E'$, designamos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ a aplicação dada por $\varphi_f(x) = f(x)$. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ é definida como sendo a topologia menos fina em E, isto é, com menos abertos, que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_f)_{f \in E'}$. Dada uma sequência (x_n) em E, dizemos que $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E quando $x_n \to x$ na topologia fraca $\sigma(E, E')$.

Proposição 1.1 *Seja (x_n) uma sequência em E. Temos que*
(i) $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E se, e somente se, $f(x_n) \to f(x)$, para todo $f \in E'$;
(ii) Se $x_n \to x$ fortemente em E então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E;
(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E e $f_n \to f$ fortemente em E' então $f_n(x_n) \to f(x)$.

Seja E'' o bidual de E, isto é, o dual de E', dotado da norma

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\xi(f)|.$$

Definimos a aplicação canônica $J : E \to E''$ da seguinte forma. Dado $x \in E$, Jx é a aplicação linear e contínua de E' em $\mathbb{R}$ dada por $Jx(f) = f(x)$, para todo $f \in E'$. Observamos que J é linear e J é uma isometria. Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E''$, ou seja, podemos identificar implicitamente E e E'' (através do isomorfismo J). Em espaços reflexivos, vale o seguinte resultado.

Teorema 1.2 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

Agora recordamos a definição e alguns resultados de convergência dos espaços L^p. Se Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, designamos por $L^1(\Omega)$ o espaço de todas as funções integráveis a Lebesgue sobre Ω. Esse espaço está dotado da norma $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|dx$. Para $1 < p < \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue mensuráveis tais que $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$. Designamos por p' o expoente conjugado de p, isto é, p' é tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b > 0$, vale

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

A desigualdade acima, conhecida como desigualdade de Young, é usada para demonstrar a desigualdade de Hölder.

Teorema 1.3 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$. Então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'}.$$

$L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\|\ \| : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

define uma norma em $L^p(\Omega)$. $(L^p(\Omega), \|\ \|_p)$, $1 < p < \infty$, é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Teorema 1.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*
(ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω*.*
Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_1 \to 0$*.*

Teorema 1.5 *Sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que* $\|f_n - f\|_p \to 0$*. Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *de* (f_n) *tal que*
(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*
(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, se (f_n) é uma sequência limitada de $L^p(\Omega)$ então, pelo Teorema 1.2, existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) que converge fracamente em $L^p(\Omega)$ para uma certa função g. O próximo resultado (ver Lema 4.8 em [24]) garante que se já tivermos que (f_n) converge para f q.t.p. em Ω então, necessariamente, $g = f$.

Teorema 1.6 *Se* (f_n) *é uma sequência limitada de* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *que converge para* f *q.t.p. em* Ω*, então*

$$\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)dx \to \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \qquad \forall\, \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

A seguir listamos algumas definições e notações utilizadas no decorrer desse trabalho.

Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ é chamado um multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Denotamos o operador derivada parcial $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}$ por D^α. Para $0 < \theta \leq 1$, denotamos por $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ o subespaço das funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ tais que, para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ satisfaz em Ω a condição de Hölder com expoente θ, isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq K|x-y|^\theta, \quad x, y \in \Omega.$$

Escrevemos $V \subset\subset \Omega$ quando V está fortemente contido em Ω, isto é, quando $\overline{V} \subset \Omega$ é compacto. Denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u \in L^p(V)$ para todo $V \subset\subset \Omega$.

O suporte de $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ é o conjunto $\overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$. Designamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.

Um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^N$ é de classe $C^{k,\theta}$, $0 < \theta \leq 1$, se para cada ponto $x_o \in \partial\Omega$ existe uma bola B com centro x_o e uma aplicação bijetora ψ de B em $D \subset \mathbb{R}^N$

tal que
(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^N_+$;
(ii) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^N_+$;
(iii) $\psi \in C^{k,\theta}(B)$, $\psi^{-1} \in C^{k,\theta}(D)$,

onde $\mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$.

Dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é estrelado em relação a $x_o \in \Omega$ quando $(x - x_o) \cdot \nu > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, onde ν é o vetor normal unitário exterior a Ω.

1.1 Espaços de Sobolev

O conteúdo dessa seção pode ser encontrado, por exemplo, em [20], [9] e [1].

Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ um multiíndice. A derivada fraca $D^\alpha u$, quando existe, é uma função $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega g_\alpha \, \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx, \qquad \forall \, \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Observamos que $D^\alpha u$ é unicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula. Denotamos por $W^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, o espaço das funções k vezes fracamente diferenciáveis, isto é, o espaço das funções cujas derivadas fracas $D^\alpha u$ existem para todo $|\alpha| \leq k$.

O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é definido por

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \forall \ 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ está dotado da norma $\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_p + \displaystyle\sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p$.

Designamos por $W_o^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o completamento de $C_c^\infty(\Omega)$ na norma de $W^{k,p}(\Omega)$. O espaço $\big(W^{k,p}(\Omega), \|.\|_{W^{k,p}}\big)$ e o espaço $W_o^{k,p}(\Omega)$ com a norma induzida pela norma de $W^{k,p}(\Omega)$ são espaços de Banach separáveis para $1 \leq p < \infty$ e reflexivos para $1 < p < \infty$.

Denotamos o espaço $W^{1,2}(\Omega)$ por $H^1(\Omega)$ e $W_o^{1,2}(\Omega)$ por $H_o^1(\Omega)$. Em $H^1(\Omega)$ usamos a norma equivalente a $\|u\|_{W^{1,2}}$ dada por $\|u\|_{H^1} = \|u\|_2 + \|\nabla u\|_2$, onde por simplicidade de notação escrevemos $\|\nabla u\|_2$ significando a norma L^2 de $|\nabla u|$.

Recordamos que se $(E, \|.\|_E) \subset (F, \|.\|_F)$ são dois espaços de Banach então dizemos que E está imerso continuamente em F se o operador $id : E \to F$, dado por $id(x) = x$, é um operador linear e contínuo, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u\|_F \leq C\|u\|_E$ para todo $u \in E$. Se além disso, cada sequência limitada em E possui uma subsequência convergente na norma de F dizemos que a imersão é compacta.

No que segue, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Teorema 1.7 *Existe uma constante $C = C(N, \Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{2^*} \leq C\|\nabla u\|_2, \quad \forall\, u \in C_c^\infty(\Omega), \tag{1.1}$$

e por completamento, para todo $u \in H_o^1(\Omega)$. Consequentemente, $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é uma imersão contínua.

Como consequência do Teorema 1.7 e da desigualdade de Hölder temos o seguinte resultado:

Proposição 1.8 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Então existe uma constante $C = C(\Omega, N)$ tal que*

$$\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2, \quad \forall\, u \in H_o^1(\Omega).$$

Em particular, a desigualdade de Poincaré nos informa que quando Ω é um domínio limitado, $\|\nabla u\|_2$ é uma norma em $H_o^1(\Omega)$ equivalente à norma $\|u\|_{H^1}$. Denotamos $\|u\|_{H_o^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_2$, $u \in H_o^1(\Omega)$.

Também como consequência do Teorema 1.7 e da desigualdade de Hölder, sendo Ω um domínio limitado, temos que, a imersão $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para todo $1 \leq q \leq 2^*$. Na realidade, podemos enunciar o seguinte resultado de compacidade:

Teorema 1.9 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Então $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é uma imersão compacta para todo $1 \leq q < 2^*$.*

Combinando os resultados acima, podemos enunciar o seguinte resultado.

Proposição 1.10 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Seja (u_n) uma sequência limitada em $H_o^1(\Omega)$. Então existe $u \in H_o^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,*

(i) $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* $H_o^1(\Omega)$*;*
(ii) $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* $L^{2^*}(\Omega)$*;*
(iii) $u_n \to u$ *fortemente em* $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$*;*
(iv) $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* Ω *e*
(v) $|u_n(x)| \leq h_q(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *q.t.p. em* Ω, *com* $h_q(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$.

Demonstração: Como $H_o^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, (i) segue do Teorema 1.2. Pelo Teorema 1.7, (u_n) é também uma sequência limitada no espaço de Banach reflexivo $L^{2^*}(\Omega)$ e daí segue (ii). A afirmação (iii) é consequência direta do Teorema 1.9. (iv) e (v) seguem de (iii) (ver Teorema 1.5). $\square$

Agora vamos mostrar que se $u \in H_o^1(\Omega)$ então $u^+ = \max\{u, 0\} \in H_o^1(\Omega)$. Este fato é consequência dos três lemas a seguir.

Lema 1.11 *Se* $u \in H^1(\Omega)$ *e supp* (u) *é compacto, então* $u \in H_o^1(\Omega)$.

Lema 1.12 *Se* $u \in W^1(\Omega)$ *então* $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$, $|u| = u^+ - u^-$ *pertencem a* $W^1(\Omega)$ *e*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & se\ u > 0, \\ 0, & se\ u \leq 0, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0, & se\ u \geq 0, \\ \nabla u, & se\ u < 0, \end{cases}$$

$$\nabla |u| = \begin{cases} \nabla u, & se\ u > 0, \\ 0, & se\ u = 0, \\ -\nabla u, & se\ u < 0. \end{cases}$$

Lema 1.13 *A aplicação* $T : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ *dada por* $T(u) = u^+$ *é contínua.*

Demonstração: Para mostrarmos que T é contínua é suficiente verificarmos que, dada uma sequência $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$, temos, a menos de subsequência, $u_n^+ \to u^+$. Seja então $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Podemos escrever $u_n = u + h_n$ com $h_n \to 0$ em $H^1(\Omega)$ e portanto $h_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$, $\nabla h_n \to 0$ em $[L^2(\Omega)]^N$. Pelo Teorema 1.5, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} h_n(x) \to 0 & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ \nabla h_n(x) \to 0 & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |h_n(x)| \leq v(x) & \text{para todo } n, \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ com } v \in L^2(\Omega) \text{ e} \\ |\nabla h_n(x)| \leq w(x) & \text{para todo } n, \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ com } w \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{1.2}$$

Por (1.2), temos $(u+h_n)^+ - u^+ \to 0$ q.t.p. em Ω. Além disto,

$$|(u+h_n)^+ - u^+| \ \leq \ |(u+h_n)^+| + |u^+| \ \leq \ |u+h_n| + |u| \ \leq \ 2|u| + v \in L^2(\Omega).$$

Portanto, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega |(u+h_n)^+ - u^+|^2 dx \to 0. \tag{1.3}$$

Afirmamos que $\nabla(u+h_n)^+ - \nabla u^+ \to 0$ q.t.p. em Ω. De fato, por (1.2), basta considerar $x \in \Omega$ tal que $h_n(x) \to 0$ e $\nabla h_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$. Se $u(x) > 0$, $u(x) + h_n(x) > 0$ para n suficientemente grande, e utilizando o Lema 1.12, $\nabla(u+h_n)^+ - \nabla u^+ = \nabla(u+h_n) - \nabla u = \nabla h_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Analogamente, se $u(x) < 0$, $\nabla(u+h_n)^+ - \nabla u^+ = 0$ para n suficientemente grande. Finalmente, se $u(x) = 0$, utilizamos novamente o Lema 1.12 para obter $\nabla(u+h_n)^+ - \nabla u^+ = \nabla h_n^+ \to 0$ quando $n \to \infty$. Isso conclui a verificação de nossa afirmação. Utilizando mais uma vez o Lema 1.12,

$$\begin{aligned} |\nabla(u+h_n)^+ - \nabla u^+| \ &\leq \ |\nabla(u+h_n)^+| + |\nabla u^+| \ \leq \ |\nabla(u+h_n)| + |\nabla u| \\ &\leq \ 2|\nabla u| + |\nabla h_n| \ \leq \ 2|\nabla u| + w \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla(u+h_n)^+ - \nabla u^+|^2 dx \to 0. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) segue que $u_n^+ = (u+h_n)^+ \to u^+$ em $H^1(\Omega)$. $\square$

Corolário 1.14 *Se $u \in H_o^1(\Omega)$ então $u^+ \in H_o^1(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $u \in H_o^1(\Omega)$. Pela definição de $H_o^1(\Omega)$ existe uma sequência $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Pelo Lema 1.13, $\varphi_n^+ \to u^+$ em $H^1(\Omega)$. Além disso, como supp $(\varphi_n^+) \subset$ supp (φ_n) e supp (φ_n) é compacto, pelo Lema 1.11, $\varphi_n^+ \in H_o^1(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $u^+ \in H_o^1(\Omega)$. $\square$

Finalizando essa seção, enunciamos um teorema que reúne as mais importantes imersões dos espaços de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Sua demonstração pode ser encontrada por exemplo, em [1].

Teorema 1.15 *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$. Sejam j e k números inteiros não negativos e $1 \leq p < \infty$. Então*

(i) se $kp < N$ *então a imersão* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *é contínua, para todo* $p \leq q \leq Np/(N-kp)$.
(ii) se $kp = N$ *então a imersão* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *é contínua, para todo* $p \leq q < \infty$.
(iii) se $kp > N > (k-1)p$, *então a imersão* $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\theta}(\overline{\Omega})$ *é contínua para todo* $0 < \theta \leq k - (N/p)$.
(iv) se $N = (k-1)p$, *então a imersão* $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\theta}(\overline{\Omega})$ *é contínua, para todo* $0 < \theta < 1$.

1.2 Funcionais diferenciáveis

Seja E um espaço de Banach. Dizemos que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável em $z \in E$ se existe uma função $L \in E'$ satisfazendo: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, z) > 0$ tal que

$$|I(z+w) - I(z) - Lw| \leq \varepsilon \|w\|_E, \text{ para todo } \|w\|_E \leq \delta.$$

Neste caso, L é a derivada de Fréchet de I em z, e é denotada por $I'(z)$.

Dizemos que I é de classe C^1 quando I é Fréchet diferenciável em cada ponto $z \in E$, e $z \mapsto I'(z)$, como uma aplicação de E em E', é contínua.

Dizemos que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ é Gateaux diferenciável em $z \in E$ se, para todo $h \in E$, existe uma função $L \in E'$ satisfazendo

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[I(z+th) - I(z) - tLh \right] = 0.$$

L é chamada a derivada de Gateaux em z, e é denotada por $I'_G(z)$. Observamos que

$$I'_G(z)h = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[I(z+th) - I(z) \right]$$

e que todo funcional Fréchet diferenciável é Gateaux diferenciável, mas a recíproca não é verdadeira. Entretanto vale o seguinte resultado.

Proposição 1.16 *Se* $I : E \to \mathbb{R}$ *tem derivada de Gateaux* $I'_G : E \to E'$ *contínua então* $I' = I'_G$ *e consequentemente* I *é de classe* C^1.

Demonstração: Suponha que I é Gateaux diferenciável numa vizinhança V do ponto $z_o \in E$ e que a aplicação $z \in V \mapsto I'_G(z) \in E'$ é contínua. Afirmamos que I é Fréchet diferenciável em z_o com $I'(z_o) = I'_G(z_o)$.

A função real $t \in [0,1] \mapsto I(z_o + tw)$ é diferenciável para $w \in E$ com $\|w\|_E$ suficientemente pequeno. Assim, aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\tau \in (0,1)$ tal que

$$|I(z_o + w) - I(z_o) - I'_G(z_o)w| = |I'_G(z_o + \tau w)w - I'_G(z_o)w|. \tag{1.5}$$

Usando a continuidade da derivada de Gateaux, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|\tau w\|_E < \delta_1$ implica que

$$\|I'_G(z_o + \tau w) - I'_G(z_o)\|_{E'} = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\| \leq 1}} |I'_G(z_o + \tau w)v - I'_G(z_o)v| \leq \varepsilon.$$

Logo

$$|I'_G(z_o + \tau w)w - I'_G(z_o)w| \leq \varepsilon \|w\|_E.$$

Voltando a (1.5) obtemos que existe $\delta = \delta_1/\tau > 0$, tal que

$$|I(z_o + w) - I(z_o) - I'_G(z_o)w| \leq \varepsilon \|w\|_E \text{ para todo } \|w\|_E \leq \delta.$$

Isto mostra que $I' = I'_G$ em E e portanto I é de classe C^1. $\square$

Agora vamos mostrar que os funcionais que iremos utilizar mais tarde são de classe C^1.

Proposição 1.17 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Os funcionais $F, G : H^1_o(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por*

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad e \quad G(u) = \int_\Omega u^2 dx$$

são de classe C^1 com

$$F'(u)\varphi = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \quad e \quad G'(u)\varphi = 2\int_\Omega u\varphi \, dx, \qquad u, \varphi \in H^1_o(\Omega).$$

Demonstração: As derivadas de Gateaux de F e G são dadas por

$$F'_G(u)\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon\varphi) - F(u)}{\varepsilon} = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx$$

e

$$G'_G(u)\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{G(u + \varepsilon\varphi) - G(u)}{\varepsilon} = 2\int_\Omega u\varphi \, dx,$$

$u, \varphi \in H^1_o(\Omega)$. Observe que $F'_G(u) : H^1_o(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $G'_G(u) : H^1_o(\Omega) \to \mathbb{R}$ são lineares e, além disso, são contínuas, pois pela desigualdade de Hölder e desigualdade de Poincaré,

$$|F'_G(u)\varphi| \leq 2\,\|u\|_{H^1_o(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1_o(\Omega)}$$

e

$$|G'_G(u)\varphi| \leq 2\,\|u\|_2\|\varphi\|_2 \leq 2\,c\,\|u\|_2\|\varphi\|_{H^1_o(\Omega)}.$$

Pela Proposição 1.16, para concluir a demonstração basta mostrar que F'_G e G'_G são contínuas. De fato, pela desigualdade de Hölder e pela desigualdade de Poincaré,

$$|F'_G(u)\varphi - F'_G(v)\varphi| \leq 2\,\|\nabla(u-v)\|_2\|\nabla\varphi\|_2 = 2\,\|u-v\|_{H^1_o(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1_o(\Omega)},$$

$$|G'_G(u)\varphi - G'_G(v)\varphi| \leq 2\,\|(u-v)\|_2\|\varphi\|_2 \leq 2\,c\,\|u-v\|_{H^1_o(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1_o(\Omega)},$$

para todos $u, v, \varphi \in H^1_o(\Omega)$. Daí,

$$\|F'_G(u) - F'_G(v)\|_{(H^1_o(\Omega))'} = \sup_{\substack{\varphi\in H^1_o(\Omega)\\ \|\varphi\|\leq 1}} |F'_G(u)\varphi - F'_G(v)\varphi| \to 0,\ \text{quando}\ \|u-v\|_{H^1_o(\Omega)} \to 0$$

e

$$\|G'_G(u) - G'_G(v)\|_{(H^1_o(\Omega))'} = \sup_{\substack{\varphi\in H^1_o(\Omega)\\ \|\varphi\|\leq 1}} |G'_G(u)\varphi - G'_G(v)\varphi| \to 0,\ \text{quando}\ \|u-v\|_{H^1_o(\Omega)} \to 0.$$

□

No que se segue, designamos por X o espaço $H^1_o(\Omega) \times H^1_o(\Omega)$ dotado da norma $\|(u,v)\|^2 = \|u\|^2_{H^1_o(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1_o(\Omega)}$.

Proposição 1.18 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. O funcional $P : X \to \mathbb{R}$ dado por*

$$P(u,v) = \int_\Omega uv\,dx$$

é de classe C^1 com

$$P'(u,v)(\varphi,\zeta) = \int_\Omega u\zeta\,dx + \int_\Omega v\varphi\,dx, \qquad (\varphi,\zeta) \in X.$$

Demonstração: A derivada de Gateaux de P é dada por

$$P'_G(u,v)(\varphi,\zeta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P(u+\varepsilon\varphi, v+\varepsilon\zeta) - P(u,v)}{\varepsilon} = \int_\Omega u\zeta\,dx + \int_\Omega v\varphi\,dx, \qquad (\varphi,\zeta) \in X.$$

Observe que $P'_G(u,v) : X \to \mathbb{R}$ é linear e, além disso, é contínua, pois pela desigualdade de Hölder e desigualdade de Poincaré,

$$|P'_G(u,v)(\varphi,\zeta)| \leq \|u\|_2\|\zeta\|_2 + \|\varphi\|_2\|v\|_2 \leq c(\|u\|_2 + \|v\|_2)\,\|(\varphi,\zeta)\|.$$

Pela Proposição 1.16, para concluir a demonstração basta mostrar que P'_G é contínua. De fato, pelas desigualdade de Hölder e pela desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} |P'_G(u_1,v_1)(\varphi,\zeta) - P'_G(u_2,v_2)(\varphi,\zeta)| &\leq \|u_1-u_2\|_2\|\zeta\|_2 + \|\varphi\|_2\|v_1-v_2\|_2 \\ &\leq c\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|\,\|(\varphi,\zeta)\|, \end{aligned}$$

para todos $u_1,u_2,v_1,v_2,\varphi,\zeta \in H^1_o(\Omega)$. Daí,

$$\|P'_G(u_1,v_1) - P'_G(u_2,v_2)\|_{X'} = \sup_{\substack{(\varphi,\zeta)\in X \\ \|(\varphi,\zeta)\|\leq 1}} |P'_G(u_1,v_1)(\varphi,\zeta) - P'_G(u_2,v_2)(\varphi,\zeta)| \to 0,$$

quando $\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\| \to 0$. □

Proposição 1.19 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $\alpha,\beta > 1$ e $\alpha+\beta \leq 2^*$. O funcional $T : X \to \mathbb{R}$ dado por*

$$T(u,v) = \int_\Omega (u^+)^\alpha (v^+)^\beta dx$$

é de classe C^1 com

$$T'(u,v)(\varphi,\zeta) = \int_\Omega \alpha(u^+)^{\alpha-1}(v^+)^\beta \varphi\,dx + \int_\Omega \beta(u^+)^\alpha(v^+)^{\beta-1}\zeta\,dx, \quad (\varphi,\zeta)\in X.$$

Para demonstrar a Proposição 1.19 utilizamos os seguintes resultados auxiliares.

Lema 1.20 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $\alpha,\beta > 1$ e $\alpha+\beta \leq 2^*$. Sejam $f,g : X \to L^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(\Omega)$ dadas por*

$$f(u,v) = \alpha(u^+)^{\alpha-1}(v^+)^\beta, \quad g(u,v) = \beta(u^+)^\alpha(v^+)^{\beta-1}.$$

Se $z_n = (u_n,v_n) \to z = (u,v)$ em X então existe uma subsequência (z_{n_k}) de (z_n) tal que $f(z_{n_k}) \to f(z)$ e $g(z_{n_k}) \to g(z)$ em $L^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(\Omega)$.

Demonstração: Primeiro, observamos que, usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p = (\alpha+\beta-1)/(\alpha-1)$ e $p' = (\alpha+\beta-1)/\beta$ e a continuidade da imersão $H^1_o(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta}(\Omega)$, obtemos que $f(u,v) \in L^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(\Omega)$, para todo $(u,v)\in X$.

Suponha que $z_n = (u_n, v_n) \to z = (u, v)$ em X. Usando novamente que a imersão $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta}(\Omega)$ é contínua, então $u_n \to u$ e $v_n \to v$ em $L^{\alpha+\beta}(\Omega)$. Pelo Teorema 1.5, existe uma subsequência (u_{n_k}, v_{n_k}) de (u_n, v_n) tal que

(i) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ e $v_{n_k}(x) \to v(x)$ q.t.p. em Ω,
(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq h_1(x)$ e $|v_{n_k}(x)| \leq h_2(x)$ q.t.p. em Ω, para todo $k \in \mathbb{N}$, com $h_1, h_2 \in L^{\alpha+\beta}(\Omega)$.

Então $f(u_{n_k}, v_{n_k}) - f(u, v) \to 0$ q.t.p. em Ω e

$$\begin{aligned} |f(u_{n_k}, v_{n_k}) - f(u,v)| &\leq \alpha |u_{n_k}|^{\alpha-1} |v_{n_k}|^{\beta} + \alpha |u|^{\alpha-1}|v|^{\beta} \\ &\leq \alpha h_1^{\alpha-1} h_2^{\beta} + \alpha |u|^{\alpha-1}|v|^{\beta} \in L^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(\Omega). \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$f(u_{n_k}, v_{n_k}) \to f(u,v) \text{ em } L^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(\Omega).$$

Procedendo de forma análoga, podemos mostrar que $g(z_{n_k}) \to g(z)$. □

Corolário 1.21 *As funções f e g dadas no Lema 1.20 são contínuas.*

Demonstração: Seja z_n uma sequência convergindo para z em X. Devemos mostrar que $x_n = \|f(z_n) - f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Argumentando por contradição, suponha que x_n não convirja para zero. Então dado $\varepsilon > 0$, podemos extrair uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $(x_{n_k}) \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 1.20, existe uma subsequência $(x_{n_{k_l}})$ de (x_{n_k}) tal que $x_{n_{k_l}} \to 0$, uma contradição. □

Demonstração da Proposição 1.19: A derivada de Gateaux de T é dada por

$$\begin{aligned} T'_G(u)\varphi &= \lim_{t \to 0} \frac{T(u + t\varphi) - T(u)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \int_{\Omega} \frac{[(u+t\varphi)^+]^{\alpha} [(v+t\zeta)^+]^{\beta} - (u^+)^{\alpha}(v^+)^{\beta}}{t} \, dx. \end{aligned}$$

Seja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = [(u+t\varphi)^+]^{\alpha} [(v+t\zeta)^+]^{\beta}$, onde $u, v, \varphi, \zeta \in H_o^1(\Omega)$. Usando o Teorema do Valor Médio, existe $\tau \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{h(t) - h(0)}{t} &= \frac{[(u+t\varphi)^+]^{\alpha} [(v+t\zeta)^+]^{\beta} - (u^+)^{\alpha}(v^+)^{\beta}}{t} \\ &= \alpha [(u+\tau t\varphi)^+]^{\alpha-1} \varphi [(v+\tau t\zeta)^+]^{\beta} + \beta [(u+\tau t\varphi)^+]^{\alpha} [(v+\tau t\zeta)^+]^{\beta-1} \zeta. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Daí,

$$\left|\frac{h(t)-h(0)}{t}\right| \leq \alpha(|u|+|\varphi|)^{\alpha-1}|\varphi|(|v|+|\zeta|)^{\beta}+\beta(|u|+|\varphi|)^{\alpha}(|v|+|\zeta|)^{\beta-1}|\zeta|.$$

Afirmamos que $(|u|+|\varphi|)^{\alpha-1}|\varphi|(|v|+|\zeta|)^{\beta}$ e $(|u|+|\varphi|)^{\alpha}(|v|+|\zeta|)^{\beta-1}|\zeta| \in L^1(\Omega)$. De fato, usando a desigualdade de Hölder com expoentes $(\alpha+\beta)/(\alpha-1)$, $\alpha+\beta$ e $(\alpha+\beta)/\beta$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|u|+|\varphi|)^{\alpha-1}|\varphi|(|v|+|\zeta|)^{\beta}dx &\leq \|(|u|+|\varphi|)\|_{\alpha+\beta}^{\alpha-1}\|\varphi\|_{\alpha+\beta}\|(|v|+|\zeta|)\|_{\alpha+\beta}^{\beta}\\
&\leq c_1\left(\|u\|_{\alpha+\beta}^{\alpha-1}+\|\varphi\|_{\alpha+\beta}^{\alpha-1}\right)\|\varphi\|_{\alpha+\beta}\left(\|v\|_{\alpha+\beta}^{\beta}+\|\zeta\|_{\alpha+\beta}^{\beta}\right),
\end{aligned}$$

onde $c_1 = 2^{\alpha-1+\beta}$. Usando o fato de que a imersão $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta}(\Omega)$ é contínua, concluímos que $(|u|+|\varphi|)^{\alpha-1}|\varphi|(|v|+|\zeta|)^{\beta} \in L^1(\Omega)$. Analogamente, se mostra que $(|u|+|\varphi|)^{\alpha}(|v|+|\zeta|)^{\beta-1}|\zeta| \in L^1(\Omega)$. Além disso, de (1.6),

$$\lim_{t\to 0}\frac{[(u+t\varphi)^+]^{\alpha}\,[(v+t\zeta)^+]^{\beta}-(u^+)^{\alpha}(v^+)^{\beta}}{t} = \alpha(u^+)^{\alpha-1}(v^+)^{\beta}\varphi+\beta(u^+)^{\alpha}(v^+)^{\beta-1}\zeta.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$T_G'(u,v)(\varphi,\zeta) = \int_\Omega \alpha(u^+)^{\alpha-1}(v^+)^{\beta}\varphi\,dx + \int_\Omega \beta(u^+)^{\alpha}(v^+)^{\beta-1}\zeta\,dx.$$

Pela Proposição 1.16, para concluir a demonstração basta mostrar que T_G' é contínua. Sejam $f(u,v)=\alpha(u^+)^{\alpha-1}(v^+)^{\beta}$ e $g(u,v)=\beta(u^+)^{\alpha}(v^+)^{\beta-1}$, $(u,v)\in X$. Suponha $z_n = (u_n,v_n)\to z=(u,v)$ em X. Pelo Corolário 1.21, $f(z_n)\to f(z)$ e $g(z_n)\to g(z)$ em $L^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}(\Omega)$. Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $p=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}$ e $p'=\alpha+\beta$ e a continuidade da imersão $H_o^1(\Omega)\hookrightarrow L^{\alpha+\beta}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|T_G'(z_n)(\varphi,\zeta)-T_G'(z)(\varphi,\zeta)| &\leq \int_\Omega |f(z_n)-f(z)|\,|\varphi|\,dx+\int_\Omega |g(z_n)-g(z)|\,|\zeta|\,dx\\
&\leq \|f(z_n)-f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\|\varphi\|_{\alpha+\beta}+\|g(z_n)-g(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\|\zeta\|_{\alpha+\beta}\\
&\leq c\|f(z_n)-f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\|\varphi\|_{H_o^1(\Omega)}+\|g(z_n)-g(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\|\zeta\|_{H_o^1(\Omega)}\\
&\leq c\left(\|f(z_n)-f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}+\|g(z_n)-g(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\right)\|(\varphi,\zeta)\|,
\end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\zeta)\in X$. Portanto,

$$\|T_G'(z_n)-T_G'(z)\|_{X'} \leq c\left(\|f(z_n)-f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}+\|g(z_n)-g(z)\|_{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\right)\to 0,$$

quando $n \to \infty$. Logo T'_G é contínua. $\square$

1.3 Multiplicadores de Lagrange

Nesta seção, estudamos o Teorema dos Multiplicadores do Lagrange em espaços de Banach, que nos dá uma técnica para otimizar um funcional sujeito a uma restrição na forma de um funcional auxiliar com um valor fixo. Este método é aplicado no estudo dos autovalores do Laplaciano (veja seção 1.6) e para demonstrar o Teorema D. Para a demonstração do Teorema de Lagrange utilizamos o seguinte resultado (veja [26]).

Proposição 1.22 *Seja X um espaço de Banach. Suponha que $F, G : X \to \mathbb{R}$ são de classe C^1. Se para algum $x_o \in X$ podemos encontrar $v, w \in X$ tais que $F'(x_o)v\, G'(x_o)w \neq F'(x_o)w\, G'(x_o)v$, então F não tem um extremo local em x_o, mesmo quando restrito a $M = \{x \in X : G(x) = G(x_o)\}$.*

Demonstração: Suponha $x_o, v, w \in X$ como na hipótese. Para $s, t \in \mathbb{R}$ considere

$$f(s,t) = F(x_o + sv + tw), \qquad g(s,t) = G(x_o + sv + tw)$$

e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(s,t) = (f(s,t), g(s,t))$. Por hipótese, temos que

$$\left| \frac{\partial(f,g)}{\partial(s,t)}(0,0) \right| = F'(x_o)v\, G'(x_o)w - F'(x_o)w\, G'(x_o)v \neq 0.$$

Como φ é de classe C^1 então podemos aplicar o Teorema da Função Inversa para concluir que existe uma vizinhança V de $(0,0)$ e uma vizinhança W de $\varphi(0,0) = (F(x_o), G(x_o))$ tal que $H : V \to W$ é difeomorfismo.

Seja $B_\delta(x_o) \subset X$, com $\delta > 0$, uma vizinhança de x_o em X. Vamos mostrar que existe $y_o \in M \cap B_\delta(x_o)$ tal que $F(y_o) > F(x_o)$. Para tanto, tome $\delta' > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta' < \delta/(\|v\|_X + \|w\|_X)$ e $B_{\delta'}(0) \subset V \subset \mathbb{R}^2$. Assim, $\varphi|_{B_{\delta'}(0)}$ é um difeomorfismo entre $B_{\delta'}(0)$ e $\widetilde{W} = \varphi(B_{\delta'}(0)) \subset W$.

Tome $(F(x_o) + \varepsilon, G(x_o)) \in \widetilde{W}$, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então existe $(s_o, t_o) \in B_{\delta'}(0)$ tal que $\varphi(s_o, t_o) = (F(x_o) + \varepsilon, G(x_o))$. Daí,

$$F(x_o + s_o v + t_o w) = F(x_o) + \varepsilon > F(x_o) \ \text{ e } \ G(x_o + s_o v + t_o w) = G(x_o).$$

Afirmamos que $y_o = x_o + s_o v + t_o w \in M \cap B_\delta(x_o)$. De fato, como $G(y_o) = G(x_o)$ então $y_o \in M$. Agora, como $(s_o, t_o) \in B_{\delta'}(0)$ então

$$\|y_o - x_o\|_X \leq |s_o|\,\|v\|_X + |t_o|\,\|w\|_X \leq |(s_o, t_o)|(\|v\|_X + \|w\|_X) \leq \delta.$$

Portanto, $y_o \in B_\delta(x_o)$. De $F(y_o) > F(x_o)$ concluímos que x_o não é ponto de máximo local de $F|_M$. De maneira análoga, mostramos que x_o não é ponto de mínimo local de $F|_M$. □

Teorema 1.23 (Lagrange) *Seja X um espaço de Banach. Suponha que $F, G : X \to \mathbb{R}$ são de classe C^1, $G(x_o) = 0$ e $x_o \in X$ é um extremo local para F restrito a $M = \{x \in X : G(x) = 0\}$. Se $G'(x_o)w \neq 0$ para algum $w \in X$ então existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $F'(x_o)v = \mu G'(x_o)v$ para todo $v \in X$.*

Demonstração: Como $x_o \in X$ é um extremo local para F restrito a $M = \{x \in X : G(x) = 0\}$ então pela Proposição 1.22 temos que $F'(x_o)v\, G'(x_o)w = F'(x_o)w\, G'(x_o)v$, para todo $v \in X$. Tomando $\mu = (F'(x_o)w)/(G'(x_o)w)$, obtemos o resultado desejado. □

1.4 Regularidade

Nesta seção, apresentamos alguns resultados de regularidade de soluções que serão utilizados posteriormente.

Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$. Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = h(x), & x \in \Omega, \\ \quad u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $h \in L^2(\Omega)$. Uma solução fraca de (P) é uma função $u \in H_o^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega h\varphi \, dx, \quad \forall\, \varphi \in H_o^1(\Omega).$$

O resultado a seguir pode ser encontrado em Gilbarg e Trudinger [20] (Teorema 9.19, pág. 243).

Teorema 1.24 (Schauder) *Suponha que* Ω *é um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$ *de classe* $C^{2,\alpha}$ *e* $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para algum* $0 < \alpha < 1$. *Se* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *com* $p > 1$ *é solução fraca de* (P) *então* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

O próximo teorema está demonstrado em [20] (Teorema 9.15, pág. 241).

Teorema 1.25 *Seja* Ω *um domínio do* $\mathbb{R}^N$ *de classe* $C^{1,1}$. *Se* $h \in L^p(\Omega)$ *para* $1 < p < \infty$ *então o problema* (P) *tem uma única solução* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_o^{1,p}(\Omega)$.

Usando os resultados acima e um argumento de " bootstrap " podemos mostrar a regularidade da solução fraca do problema de autovalor do Laplaciano (veja, por exemplo, [24]).

Teorema 1.26 *Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$ *de classe* $C^{2,1}$. *Se* $u \in H_o^1(\Omega)$ *é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

então $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *e, consequentemente,* u *satisfaz (1.7) no sentido pontual.*

Demonstração. Seja $u \in H_o^1(\Omega)$ uma solução fraca de (1.7). Como a imersão $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é contínua, então $u \in L^{p_o}(\Omega)$, onde $p_o = 2^*$. Pelo Teorema 1.25, $u \in W^{2,p_o}(\Omega)$. Vamos analisar os casos $2p_o > N$, $2p_o = N$ e $2p_o < N$.

No caso em que $2p_o > N$ temos os seguinte subcasos.

(i) Se $N > p_o$ então pela Proposição 1.15 (iii) com $k = 2$, $p = p_o$ e $j = 0$ temos que $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ para todo $0 < \theta \leq 2 - (N/p_o)$.

(ii) Se $N = p_o$ então pela Proposição 1.15 (iv) com $k = 2$, $p = p_o$ e $j = 0$ temos que $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ para todo $0 < \theta < 1$.

(iii) Se $N < p_o$ então pela Proposição 1.15 (iii) com $k = 1$, $p = p_o$ e $j = 1$ temos que $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ para todo $0 < \theta < 1 - (N/p_o)$, e portanto, $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$.

No caso em que $2p_o = N$, pela Proposição 1.15 (ii) temos que $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq p_o$. Pelo Teorema 1.25, $u \in W^{2,q}(\Omega)$, para todo $q \geq p_o$. Escolhendo $q > p_o$ obtemos que $2q > N$. Argumentando como no caso anterior, obtemos que $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \theta < 1$.

No caso em que $2p_o < N$, segue da Proposição 1.15 (i) que $u \in L^{p_1}(\Omega)$ para $p_1 = Np_o/(N-2p_o) > p_o$. Pelo Teorema 1.25, $u \in W^{2,p_1}(\Omega)$. Se $2p_1 \geq N$, argumentando como nos casos anteriores, concluímos que $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \theta < 1$. Agora, se $2p_1 < N$, pela Proposição 1.15 (i), $u \in L^{p_2}(\Omega)$ para $p_2 = Np_1/(N-2p_1) > p_1$. Repetimos esse processo até que $u \in W^{2,p_k}(\Omega)$ com $2p_k \geq N$ para algum k suficientemente grande. Argumentando como nos casos anteriores, podemos concluir que $u \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \theta < 1$.

Em quaisquer desse casos, pelo Teorema 1.24 temos que $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega}) \subset C^2(\overline{\Omega})$.

Como u é solução fraca de (1.7) então

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega u\varphi dx = 0, \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Aplicando o Teorema da Divergência obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega div(\varphi \nabla u)dx - \int_\Omega \varphi \Delta u\, dx - \lambda \int_\Omega u\varphi dx \\ &= -\int_\Omega (\Delta u + \lambda u)\varphi\, dx, \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Como $h = \Delta u + \lambda u \in C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, podemos tomar uma sequência (φ_n) em $C_c^\infty(\Omega)$ convergindo para h em $L^2(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder,

$$\left| \int_\Omega h\varphi_n dx - \int_\Omega h^2 dx \right| \leq \|h\|_2 \|\varphi_n - h\|_2 \to 0 \tag{1.9}$$

quando $n \to \infty$. De (1.8) e (1.9) vem

$$\int_\Omega h^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h\varphi_n dx = 0.$$

Segue que $h \equiv 0$, ou seja, $-\Delta u = \lambda u$ pontualmente em Ω. $\square$

Podemos considerar o problema (P) com $h(x) = f(x, u(x))$, $x \in \Omega$, Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$, onde $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, satisfaz à uma condição de crescimento

$$|f(x,t)| \leq a_1 + a_2|t|^\theta,$$

onde a_1, a_2 são constantes positivas e $0 \leq \theta \leq 2^* - 1$. A regularidade das soluções fracas de (P) quando f tem crescimento crítico pode ser obtida utilizando a estimativa de Brezis-Kato (veja Lema B.3 em [29]) e os Teoremas 1.24 e 1.25.

O próximo teorema é uma adaptação para o sistema (S) do resultado de Brezis-Kato.

Sejam $f, g \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Dizemos que $(u, v) \in X$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v), & x \in \Omega, \\ -\Delta v = g(x, u, v), & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{S}$$

quando vale

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \zeta \, dx = \int_\Omega f(x, u, v)\varphi \, dx + \int_\Omega g(x, u, v)\zeta \, dx, \quad \forall\, (\varphi, \zeta) \in X.$$

Teorema 1.27 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, e sejam $f, g : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x, s, t)$ e $g(x, s, t)$ são funções mensuráveis em $x \in \Omega$ e contínuas em $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ e satisfazem*

$$|f(x, s, t)| \leq A(x)(1 + |s| + |t|),$$

$$|g(x, s, t)| \leq B(x)(1 + |s| + |t|)$$

com $A, B \in L^{N/2}(\Omega)$. Se $(u, v) \in X$ é uma solução fraca de (S) então $u, v \in L^q(\Omega)$ para qualquer $1 \leq q < \infty$.

Demonstração: Seja $s \geq 0$. Vamos mostrar que se $u, v \in L^{2(s+1)}(\Omega)$ então $u, v \in L^{(s+1)2^*}(\Omega)$. Para isso, consideramos as funções auxiliares

$$m_1 = \min\{|u|^s, L\} \quad \text{e} \quad m_2 = \min\{|v|^s, L\}$$

com $L > 1$. Como $m_1 u, m_2 v \in H_o^1(\Omega)$ e a imersão $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é contínua, existe uma constante $c_1 = c_1(N, \Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |m_1 u|^{2^*} dx + \int_\Omega |m_2 v|^{2^*} dx \leq c_1 \left[\left(\int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla(m_2 v)|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}} \right]. \tag{1.10}$$

A idéia é tentar majorar o lado direito de (1.10) por uma constante c_2 que não dependa de L. Daí podemos fazer $L \to \infty$ em (1.10) para obter, aplicando o Lema de Fatou, que

$$\int_\Omega |u|^{(s+1)2^*} dx + \int_\Omega |v|^{(s+1)2^*} dx \leq c_2.$$

Agora, pela definição de m_1,

$$\nabla(m_1 u) = m_1 \nabla u + s|u|^s \nabla u \, \chi_{_{L^-}},$$

onde $\chi_{_{L^-}}$ é a função característica do conjunto $L^- := \{x \in \Omega : |u(x)|^s < L\}$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx &= \int_\Omega |m_1 \nabla u + s|u|^s \nabla u \chi_{_{L^-}}|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega 2m_1^2 |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega 2s^2 |u|^{2s} |\nabla u|^2 \chi_{_{L^-}} dx \\ &\leq (2+s)\left(\int_\Omega m_1^2 |\nabla u|^2 dx + 2s \int_\Omega |u|^{2s} |\nabla u|^2 \chi_{_{L^-}} dx\right).\end{aligned} \tag{1.11}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\int_\Omega |\nabla(m_2 v)|^2 dx \leq (2+s)\left(\int_\Omega m_2^2 |\nabla v|^2 dx + 2s \int_\Omega |v|^{2s} |\nabla v|^2 \chi_{_{L^-}} dx\right). \tag{1.12}$$

Por outro lado, como (u, v) é solução fraca de (S) temos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \zeta \, dx = \int_\Omega f(x,u,v)\varphi \, dx + \int_\Omega g(x,u,v)\zeta \, dx,$$

para todo $\varphi, \zeta \in H_o^1(\Omega)$. Tomando $\varphi = m_1^2 u$ e $\zeta = m_2^2 v$, vemos que

$$\nabla \varphi = m_1^2 \nabla u + 2s|u|^{2s} \nabla u \chi_{_{L^-}} \quad \text{e} \quad \nabla \zeta = m_2^2 \nabla v + 2s|v|^{2s} \nabla v \chi_{_{L^-}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega m_1^2 |\nabla u|^2 dx + 2s \int_\Omega |u|^{2s} |\nabla u|^2 \chi_{_{L^-}} dx + \int_\Omega m_2^2 |\nabla v|^2 dx + 2s \int_\Omega |v|^{2s} |\nabla v|^2 \chi_{_{L^-}} dx \\ = \int_\Omega f(x,u,v) m_1^2 u dx + \int_\Omega g(x,u,v) m_2^2 v dx.\end{aligned}$$

De (1.11), (1.12) e da igualdade acima vem

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla(m_2 v)|^2 dx &\leq (2+s) \int_\Omega |A(x)|(1 + |u| + |v|)|u| m_1^2 dx \\ &\quad + (2+s) \int_\Omega |B(x)|(1 + |u| + |v|)|v| m_2^2 dx.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Agora, como $L > 1$ temos

$$(1+|u|+|v|)|u|m_1^2 \leq \begin{cases} 3, & \text{se} \quad x \in Q, \\ 2(|u|+|v|)|u|m_1^2, & \text{se} \quad x \notin Q \end{cases}$$

e

$$(1+|u|+|v|)|v|m_2^2 \leq \begin{cases} 3, & \text{se} \quad x \in Q, \\ 2(|u|+|v|)|v|m_2^2, & \text{se} \quad x \notin Q, \end{cases}$$

onde $Q = \{x \in \Omega : |u| < 1 \text{ e } |v| < 1\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |A(x)|(1+|u|+|v|)|u|m_1^2 dx &\leq 3\int_\Omega |A(x)|dx + 2\int_\Omega |A(x)|(|u|+|v|)|u|m_1^2 dx \\ &\leq 3\int_\Omega |A(x)|dx + 2\int_\Omega |A(x)||u|^2 m_1^2 dx \\ &\quad + 2\int_{|v|\leq|u|} |A(x)||u|^2 m_1^2 dx + \int_{|u|\leq|v|} |A(x)||v|^2 m_1^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega |B(x)|(1+|u|+|v|)|v|m_2^2 dx &\leq 3\int_\Omega |B(x)|dx + 2\int_\Omega |B(x)|(|u|+|v|)|v|m_2^2 dx \\ &\leq 3\int_\Omega |B(x)|dx + 2\int_\Omega |B(x)||v|^2 m_2^2 dx \\ &\quad + \int_{|u|\leq|v|} |B(x)||v|^2 m_2^2 dx + \int_{|v|\leq|u|} |B(x)||u|^2 m_2^2 dx. \end{aligned}$$

Usando o fato de que $m_1 \leq m_2$ quando $|u| \leq |v|$ e $m_2 \leq m_1$ quando $|v| \leq |u|$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |A(x)|(1+|u|+|v|)|u|m_1^2 dx &\leq 3\int_\Omega |A(x)|dx + 4\int_\Omega |A(x)||u|^2 m_1^2 dx \\ &\quad + \int_\Omega |A(x)||v|^2 m_2^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega |B(x)|(1+|u|+|v|)|v|m_2^2 dx &\leq 3\int_\Omega |B(x)|dx + 4\int_\Omega |B(x)||v|^2 m_2^2 dx \\ &\quad + \int_\Omega |B(x)||u|^2 m_1^2 dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p = N/2$ e $p' = N/(N-2)$ e que a imersão $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é contínua obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |A(x)|(1+|u|+|v|)|u|m_1^2 dx \\
&\quad \leq 3|\Omega|^{(N-2)/N}\left(\int_\Omega |A(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N} + 4K_1\int_{|A|\leq K_1}|u|^2 m_1^2 dx \\
&\qquad +4\left(\int_{|A|\geq K_1}|A(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N}\left(\int_{|A|\geq K_1}|m_1 u|^{2^*}dx\right)^{(N-2)/N} + K_1\int_{|A|\leq K_1}|v|^2 m_2^2 dx \\
&\qquad +\left(\int_{|A|\geq K_1}|A(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N}\left(\int_{|A|\geq K_1}|m_2 v|^{2^*}dx\right)^{(N-2)/N} \\
&\quad \leq c_3 + 4K_1\int_\Omega |u|^{2(s+1)}dx + 4\varepsilon(K_1)\left(\int_\Omega |m_1 u|^{2^*}dx\right)^{(N-2)/N} + K_1\int_\Omega |v|^{2(s+1)}dx \\
&\qquad +\varepsilon(K_1)\left(\int_\Omega |m_2 v|^{2^*}dx\right)^{(N-2)/N} \\
&\quad \leq c_3 + K_1 c_4 + c_5\varepsilon(K_1)\left(\int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla(m_2 v)|^2 dx\right),
\end{aligned}
$$

e de forma análoga,

$$
\int_\Omega |B(x)|(1+|u|+|v|)|v|m_2^2 dx \leq c_6 + K_2 c_4 + c_5\varepsilon(K_2)\left(\int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla(m_2 v)|^2 dx\right),
$$

onde $K_1, K_2 > 0$ são constantes reais, $c_3 = c_3(\Omega, N, \|A\|_{N/2})$, $c_4 = c_4(\|u\|_{2(s+1)}, \|v\|_{2(s+1)})$, $c_5 = c_5(\Omega, N)$, $c_6 = c_6(\Omega, N, \|B\|_{N/2})$, $\varepsilon(K_1) = \left(\int_{|A|\geq K_1}|A(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N}$ e $\varepsilon(K_2) = \left(\int_{|B|\geq K_2}|B(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N}$.

Substituindo as estimativas anteriores em (1.13) vem

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|\nabla(m_1 u)|^2 + |\nabla(m_2 v)|^2\right) dx \;&\leq\; c_7 + (2+s)c_5\varepsilon(K_1)\int_\Omega (|\nabla m_1 u|^2 + |\nabla m_2 v|^2)\, dx \\
&\quad + (2+s)c_5\varepsilon(K_2)\int_\Omega (|\nabla m_1 u|^2 + |\nabla m_2 v|^2)\, dx,
\end{aligned}
$$

onde $c_7 = c_7(s, c_3, c_4, c_5, c_6, K_1, K_2)$. Como $A, B \in L^{N/2}(\Omega)$ então $\varepsilon(K_1) \to 0$ quando $K_1 \to \infty$ e $\varepsilon(K_2) \to 0$ quando $K_2 \to \infty$. Logo podemos escolher $K_1, K_2 > 0$ suficientemente grandes de modo que $(2+s)c_5\varepsilon(K_1) < 1/2$ e $(2+s)c_5\varepsilon(K_2) < 1/2$. Daí segue que

$$
\int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla(m_2 v)|^2 dx \leq 2c_7.
$$

Agora usando a desigualdade acima em (1.10), obtemos

$$\int_\Omega |m_1 u|^{2^*} dx + \int_\Omega |m_2 v|^{2^*} dx \leq 2c_1(2c_7)^{2^*/2} = c_8.$$

Observe que c_8 não depende de L. Aplicando o Lema de Fatou obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^{(s+1)2^*} dx + \int_\Omega |v|^{(s+1)2^*} dx &= \int_\Omega \liminf_{L\to\infty} |m_1 u|^{2^*} dx + \int_\Omega \liminf_{L\to\infty} |m_2 v|^{2^*} dx \\ &\leq \int_\Omega \liminf_{L\to\infty} (|m_1 u|^{2^*} + |m_2 v|^{2^*}) dx \\ &\leq \liminf_{L\to\infty} \int_\Omega (|m_1 u|^{2^*} + |m_2 v|^{2^*}) dx \leq c_8. \end{aligned}$$

Isto mostra que supondo $u, v \in L^{2(s+1)}(\Omega)$ obtemos $u, v \in L^{(s+1)2^*}(\Omega)$. Fazendo $s = s_o = 0$ e iterando o processo, obtemos $u, v \in L^{(s_{i-1}+1)2^*}(\Omega)$ com $s_i + 1 = (s_{i-1}+1)2^*/2$, $i \geq 1$. Usando que o domínio é limitado concluímos que $u, v \in L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$. $\square$

1.5 Princípios do Máximo

Nessa seção, consideramos os operadores diferenciais lineares da forma

$$Lu = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$, $a_{i,j}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$.

Dizemos que L é elíptico no ponto $x \in \Omega$ se a matriz $[a_{ij}(x)]$ é positiva, isto é, sendo $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ o menor e o maior autovalor de $[a_{ij}(x)]$, respectivamente, então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2, \quad \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Dizemos que L é uniformemente elíptico se L for elíptico e se $\Lambda(x)/\lambda(x)$ for limitado em Ω. Observamos que o operador Laplaciano é uniformemente elíptico.

A demonstração dos resultados a seguir podem ser encontrado em [20].

Teorema 1.28 (Princípio do Máximo Fraco) *Seja L elíptico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Suponha $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

Se $Lu \geq 0$ e $c \leq 0$ em Ω, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Se $Lu \leq 0$ e $c \leq 0$ em Ω, então

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-.$$

Em particular, se $Lu = 0$ em Ω, então

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Teorema 1.29 (Lema de Hopf) *Suponha que L é uniformemente elíptico, $c \equiv 0$, $Lu \geq 0$ em Ω. Seja $x_o \in \partial\Omega$ tal que*
(i) u é contínua em x_o;
(ii) $u(x_o) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$;
(iii) $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_o, isto é, existe uma bola $B \subset \Omega$ com $x_o \in \partial B$.

Então a derivada normal de u em x_o, se existir, satisfaz a desigualdade estrita

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_o) > 0.$$

Teorema 1.30 (Princípio do Máximo Forte) *Suponha que L é uniformemente elíptico e $c \equiv 0$ em Ω. Sejam Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^2(\Omega)$.*

Se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge o seu máximo no interior de Ω então u é constante. No caso em que $c \leq 0$ e $c(x)/\lambda(x)$ é limitado, então u não atinge um máximo não-negativo no interior de Ω, a não ser que u seja constante.

Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge o seu mínimo no interior de Ω então u é constante. No caso em que $c \leq 0$ e $c(x)/\lambda(x)$ é limitado, então u não atinge um mínimo não-positivo no interior de Ω, a não ser que u seja constante.

1.6 Autovalores do Laplaciano

Nesta seção, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.14}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor se existe uma função $u \in H_o^1(\Omega) \setminus \{0\}$ que é solução fraca do problema (1.14), isto é, que satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx, \quad \textit{para todo } v \in H_o^1(\Omega). \tag{1.15}$$

Tal solução, não-trivial por definição, é uma autofunção associada a λ.

Nosso objetivo aqui é mostrar que o problema (1.14) possui um menor autovalor positivo λ_1 cuja autofunção correspondente não muda de sinal em Ω e, além disso, λ_1 é simples, isto é, se u_1, u_2 são autofunções associadas a λ_1 então $u_2 = \alpha u_1$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Primeiro observamos que, por linearidade, se u é uma autofunção associada a λ então αu, $\alpha \in \mathbb{R}$, é uma família de autofunções associadas λ. Assim, basta procurar soluções u tais que $\|u\|_2 = 1$. Usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange.

Vamos definir os funcionais $F, G : H_o^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|^2_{H_o^1(\Omega)} \quad e \quad G(u) = \int_\Omega u^2 dx - 1 \tag{1.16}$$

e procurar u que minimiza F restrito a $M = \{u \in H_o^1(\Omega) : G(u) = 0\}$. Vimos na Seção 1.2 que F e G são de classe C^1 com

$$F'(u)v = 2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \quad e \quad G'(u)v = 2\int_\Omega uv dx, \qquad u, v \in H_o^1(\Omega). \tag{1.17}$$

Seja $I = \inf \{F(u) : u \in M\} \geq 0$. Seja $(u_j) \in M$ tal que $F(u_j) \to I$ e $F(u_j) \leq I + 1$. Pela Proposição 1.10, existe $\overline{u} \in H_o^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_j \to \overline{u} \ \text{ fortemente em } L^2(\Omega) \quad e \quad u_j \rightharpoonup \overline{u} \ \text{ fracamente em } H_o^1(\Omega). \tag{1.18}$$

Agora $\overline{u} \in M$, pois $\|\overline{u}\|_2 = \lim\limits_{j\to\infty} \|u_j\|_2 = 1$. Além disso, $\overline{u}$ minimiza F pois, usando (1.18) e (iii) da Proposição 1.1 obtemos

$$I \leq F(\overline{u}) = \|\overline{u}\|^2_{H_o^1(\Omega)} \leq \lim_{j\to\infty} \inf \|u_j\|^2_{H_o^1(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \inf F(u_j) = I.$$

Pelo Teorema 1.23, existe um multiplicador de Lagrange $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla v dx = \lambda_1 \int_\Omega \overline{u} v dx, \quad \forall\, v \in H_o^1(\Omega). \tag{1.19}$$

Logo $\overline{u}$ é uma autofunção associada a λ_1. Tomando $v = \overline{u}$ em (1.19), encontramos que o autovalor λ_1 é o infimo I:

$$I = F(\overline{u}) = \int_\Omega |\nabla\overline{u}|^2 dx = \lambda_1 \int_\Omega \overline{u}^2 dx = \lambda_1.$$

Isso significa que também podemos definir λ_1 por

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u\in H_o^1(\Omega)\\ \|u\|_2=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \inf_{u\in H_o^1(\Omega)\setminus\{0\}} \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)\right|^2 dx,$$

ou ainda,

$$\lambda_1 = \inf_{u\in H_o^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}. \tag{1.20}$$

A equação (1.20) é conhecida como a caracterização variacional de λ_1.

Afirmamos que $\lambda_1 = F(\overline{u}) > 0$. De fato, se $F(\overline{u}) = \|\overline{u}\|^2_{H_o^1(\Omega)} = 0$ então $\overline{u} = 0$, q.t.p. em Ω, o que contradiz $\|\overline{u}\|_2 = 1$.

Além disso, se $\lambda_2 > 0$ é um autovalor de (1.14) e u_2 a sua autofunção correspondente, então por (1.15) e (1.20),

$$\lambda_2 = \frac{\int_\Omega |\nabla u_2|^2 dx}{\int_\Omega u_2^2 dx} \geq \lambda_1.$$

Isso mostra que λ_1 é o menor autovalor positivo de (1.14).

Agora vamos mostrar que toda autofunção u associada a λ_1 é de sinal constante sobre Ω, isto é, $u > 0$ ou $u < 0$ sobre Ω. De fato, se u é autofunção associada a λ_1, então, por definição, temos $u^+ \not\equiv 0$ ou $u^- \not\equiv 0$. Se $u^+ \not\equiv 0$, então, por (1.15) e pelo Lema 1.12,

$$\int_\Omega |\nabla u^+|^2 dx = \lambda_1 \int_\Omega (u^+)^2 dx. \tag{1.21}$$

Definindo

$$J_{\lambda_1}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2}\lambda_1 \int_\Omega v^2 dx, \quad v \in H_o^1(\Omega),$$

segue de (1.20) que $J_{\lambda_1}(v) \geq 0$, para todo $v \in H_o^1(\Omega)$ e de (1.21) temos $J_{\lambda_1}(u^+) = 0$. Logo u^+ é um ponto de mínimo de J_{λ_1}, ou seja, $J'_{\lambda_1}(u^+)(v) = 0$, para todo $v \in H_o^1(\Omega)$.

Isto mostra que u^+ é uma autofunção associada a λ_1. Pelos resultados de regularidade (ver Teorema 1.26) $u^+ \in C^2(\overline{\Omega})$ e $-\Delta u^+ = \lambda u^+$ pontualmente em Ω. Pelo Princípio do Máximo Forte (Teorema 1.30), $u^+ > 0$ em Ω. Daí $u^- = 0$ em Ω. Portanto, $u > 0$ em Ω. Analogamente, no caso que $u^- \not\equiv 0$ em Ω, segue que $u < 0$ em Ω.

Seja u_1 autofunção associada a λ_1. Vamos mostrar que λ_1 é simples, isto é, se u_2 é autofunção associada a λ_1 então $u_2 = \alpha u_1$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato, por contradição, suponha $u_2 \neq \alpha u_1$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ e seja

$$w_2 = u_2 - \frac{\int_\Omega u_1 u_2\, dx}{\int_\Omega u_1^2 dx} u_1.$$

Observe que $w_2 \neq 0$ e w_2 está bem definido, pois $u_1 \not\equiv 0$. Por um cálculo direto obtemos

$$\int_\Omega \nabla w_2 \cdot \nabla v\, dx = \lambda_1 \int_\Omega w_2 v\, dx, \text{ para todo } v \in H_o^1(\Omega)$$

e portanto w_2 também é autofunção associada a λ_1. Observe que $\int_\Omega u_1 w_2\, dx = 0$. Daí, temos uma contradição com o fato de que u_1 e w_2 são de sinais constantes em Ω.

Finalmente observamos que se $\lambda \leq 0$ então, pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 1.28), o problema (1.14) só possui a solução trivial. $\square$

1.7 Um teorema minimax

Os resultados desta seção encontram-se em [31]. Iniciamos com o conceito de campo pseudo-gradiente definido por Palais em 1966.

Sejam M um espaço métrico, $(X, \|.\|)$ um espaço normado e $h : M \to X' \setminus \{0\}$ uma aplicação contínua. Um campo pseudo-gradiente para h em M é uma aplicação $g : M \to X$ localmente Lipschitziana tal que, para todo $u \in M$,

$$\|g(u)\| \leq 2\|h(u)\|_{X'} \quad \text{e} \quad h(u)g(u) \geq \|h(u)\|_{X'}^2.$$

Lema 1.31 *Sejam M um espaço métrico, $(X, \|.\|)$ um espaço normado e $h : M \to X' \setminus \{0\}$ uma aplicação contínua. Então existe um campo pseudo-gradiente para h em M.*

Na demonstração do Lema 1.31 utilizamos o seguinte fato.

Lema 1.32 *Se* $(X, \|.\|)$ *é um espaço normado,* $A \subset X$ *e* $u_1, u_2 \in X$*, então*

$$|dist(u_1, A) - dist(u_2, A)| \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Demonstração:

$$dist(u_1, A) = \inf_{w \in A} \|u_1 - w\| \leq \|u_1 - w\| \leq \|u_1 - u_2\| + \|u_2 - w\|, \qquad \forall\, w \in A.$$

Daí $\|u_2 - w\| \geq dist(u_1, A) - \|u_1 - u_2\|$, $\forall\, w \in A$. Então

$$dist(u_2, A) = \inf_{w \in A} \|u_2 - w\| \geq dist(u_1, A) - \|u_1 - u_2\|. \tag{1.22}$$

Analogamente,

$$dist(u_1, A) \geq dist(u_2, A) - \|u_1 - u_2\|. \tag{1.23}$$

De (1.22) e (1.23) concluímos que $|dist(u_1, A) - dist(u_2, A)| \leq \|u_1 - u_2\|$. □

Demonstração do Lema 1.31: Pela definição de $\|\cdot\|_{X'}$, para cada $v \in M$ existe $w \in X$ tal que $\|w\| = 1$ e

$$h(v)w > \frac{2}{3}\|h(v)\|_{X'}.$$

Defina $z := \frac{3}{2}\|h(v)\|_{X'}\, w$ e observe que

$$\|z\| < 2\|h(v)\|_{X'} \;\text{ e }\; h(v)z > \|h(v)\|^2_{X'}.$$

Pela continuidade de h, existe uma vizinhança N_v de v tal que para todo $u \in N_v$

$$\|z\| \leq 2\|h(u)\|_{X'} \;\text{ e }\; h(u)z \geq \|h(u)\|^2_{X'}. \tag{1.24}$$

Note que a família $\mathcal{N} := \{N_v\}_{v \in X}$ é uma cobertura aberta de M. Como M é um espaço métrico, então M é paracompacto (veja [7]). Logo existe uma cobertura $\mathcal{M} := \{M_i\}_{i \in I}$ de M aberta e localmente finita que refina $\mathcal{N}$. Isto significa que para cada $v \in M$ existe uma vizinhança W_v de v tal que $W_v \cap M_i = \emptyset$, exceto para um número finito de índices $i \in I$ e, além disso, para cada $M_i \in \mathcal{M}$ existe $N_v \in \mathcal{N}$ tal que $M_i \subset N_v$. Portanto existe $z = z_i$, $i \in I$ tal que (1.24) é satisfeita para cada $u \in M_i$. Defina

$$\rho_i(u) := dist(u, X \backslash M_i), \quad u \in M$$

e

$$g(u) := \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(u)}{\displaystyle\sum_{j \in I} \rho_j(u)} z_i, \quad u \in M.$$

Observe que g está bem definida, pois $\displaystyle\sum_{j \in I} \rho_j(u) > 0$ e $g(u)$ é uma combinação linear finita de elementos de X. Afirmamos que g é um campo pseudo-gradiente para h em M. De fato, como $\|z_i\| \leq 2\|h(u)\|_{X'}$, para todo $u \in M_i$, $i \in I$, então

$$\|g(u)\| \leq \sum_{i \in I} \left| \frac{\rho_i(u)}{\displaystyle\sum_{j \in I} \rho_j(u)} \right| \|z_i\| \leq 2\|h(u)\|_{X'},$$

e de $h(u)z_i \geq \|h(u)\|^2_{X'}$, para todo $u \in M_i$, $i \in I$, segue que

$$h(u)g(u) = \sum_{i \in I} \frac{\rho_i(u)}{\displaystyle\sum_{j \in I} \rho_j(u)} h(u)z_i \geq \|h(u)\|^2_{X'}.$$

Pelo Lema 1.32 a função distância ρ_i, para cada $i \in I$, é Lipschitziana. Concluímos que g é localmente Lipschitziana, pois g é uma soma finita de funções localmente Lipschitzianas. Logo g é um campo pseudo-gradiente para h. $\square$

O seguinte lema de deformação é devido a Willem (veja [31]).

Lema 1.33 *Seja X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ tais que*

$$\textit{para todo } u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta} \textit{ vale } \|\varphi'(u)\|_{X'} \geq 8\varepsilon/\delta,$$

onde $S_{2\delta} := \{u \in X : dist(u, S) \leq 2\delta\}$. Então existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(i) $\eta(t, u) = u$ se $t = 0$ ou se $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$;
(ii) $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$, onde $\varphi^d := \{u \in X : \varphi(u) \leq d\}$.

Demonstração: Seja $M = \{u \in X : \varphi'(u) \neq 0\}$. Pelo Lema 1.31 existe um campo pseudo-gradiente para φ' em M, isto é, existe uma aplicação $g : M \to X$ localmente Lipschitziana tal que, para todo $u \in M$,

$$\|g(u)\| \leq 2\|\varphi'(u)\|_{X'} \quad \text{e} \quad \varphi'(u)g(u) \geq \|\varphi'(u)\|^2_{X'}.$$

Definimos

$$A := \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta},$$

$$B := \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_{\delta}$$

e $\psi : X \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) := \frac{dist(u, X\backslash A)}{dist(u, X\backslash A) + dist(u, B)}.$$

Note que se $u \notin B$ então $dist(u, B) > 0$. E se $u \in B$ então $u \notin \overline{X\backslash A}$, pois se fosse $u \in \overline{X\backslash A}$, teríamos u como limite de uma sequência de pontos $u_n \in X \setminus A$ e, pela continuidade de φ, seria $\varphi(u) \leq c-2\varepsilon$ ou $\varphi(u) \geq c+2\varepsilon$ ou $dist(u, S) \geq 2\delta$, contradizendo $u \in B$. Logo, se $u \in B$, $dist(u, X \setminus A) \geq dist(u, \overline{X\backslash A}) > 0$. Consequentemente $dist(u, X\backslash A) + dist(u, B) > 0$ para todo $u \in X$ e portanto, ψ está bem definida. Além disso, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 0$ em $X \setminus A$ e $\psi \equiv 1$ em B. Afirmamos que ψ é localmente Lipschitziana. De fato, dado $w \in X$,

$$dist(w, X\backslash A) + dist(w, B) > 0.$$

Pelo Lema 1.32 a função distância é contínua. Assim, existe uma constante $k > 0$ e uma vizinhança W de w tal que

$$dist(\overline{w}, X\backslash A) + dist(\overline{w}, B) \geq \frac{1}{k} > 0, \text{ para todo } \overline{w} \in W. \tag{1.25}$$

Sejam $u_1, u_2 \in W$. Denotando, para $i = 1, 2$,

$$d^i_{X\backslash A} = dist(u_i, X\backslash A) \quad \text{e} \quad d^i_B = dist(u_i, B),$$

temos

$$\begin{aligned} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| &= \left| \frac{d^1_{X\backslash A}\, d^2_B - d^2_{X\backslash A}\, d^1_B}{(d^1_{X\backslash A} + d^1_B)(d^2_{X\backslash A} + d^2_B)} \right| \\ &= \left| \frac{d^2_B(d^1_{X\backslash A} - d^2_{X\backslash A}) + d^2_{X\backslash A}(d^2_B - d^1_B)}{(d^1_{X\backslash A} + d^1_B)(d^2_{X\backslash A} + d^2_B)} \right|. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.32 e de (1.25) obtemos

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq \frac{\|u_1 - u_2\|}{d^1_{X\backslash A} + d^1_B} \leq k\|u_1 - u_2\|,$$

mostrando que ψ é localmente Lipschitziana.

Considere agora a função $f : X \to X$ dada por

$$f(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{g(u)}{\|g(u)\|^2}, & u \in A, \\ \\ 0, & u \in X\backslash A. \end{cases}$$

Note que, como $\varphi'(u)g(u) \geq \|\varphi'(u)\|_{X'}^2$ para todo $u \in M$, então

$$\frac{1}{\|g(u)\|} \leq \frac{1}{\|\varphi'(u)\|_{X'}} \leq \frac{\delta}{8\varepsilon}, \quad \forall\, u \in A. \tag{1.26}$$

Afirmamos que f é localmente Lipschitziana. De fato, dado $u \in X$ existe uma vizinhança B_u tal que g e ψ são Lipschitzianas em B_u, isto é, existem $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$|\psi(v) - \psi(w)| \leq k_1\|v - w\| \;\text{ e }\; \|g(v) - g(w)\| \leq k_2\|v - w\|,$$

para todos $v, w \in B_u$. Tome $u_1, u_2 \in B_u$. Temos que, se $u_1, u_2 \in X\backslash A$ então

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| = 0 \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in X\backslash A$ então, como $f(u_2) = 0$, $\psi(u_2) = 0$, por (1.26) temos

$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2)\| &= \left\|-\psi(u_1)\frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2}\right\| \\ &= \left\|-\psi(u_1)\frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2} + \psi(u_2)\frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2}\right\| \\ &\leq \frac{\delta}{8\varepsilon}|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \;\leq\; \frac{\delta k_1}{8\varepsilon}\|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Agora, se $u_1, u_2 \in A$ então

$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2)\| &= \left\|\psi(u_1)\left(\frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} - \frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2}\right) + (\psi(u_2) - \psi(u_1))\,\frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2}\right\| \\ &\leq \left\|\frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} - \frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2}\right\| + \frac{\delta}{8\varepsilon}\,|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\ &\leq \left\|\frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} - \frac{g(u_2)}{\|g(u_1)\|^2}\right\| + \left\|\frac{g(u_2)}{\|g(u_1)\|^2} - \frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2}\right\| \\ &\quad + \frac{\delta}{8\varepsilon}k_1\|u_1 - u_2\|. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Agora, observamos que, por (1.26)

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{g(u_2)}{\|g(u_2)\|^2} - \frac{g(u_2)}{\|g(u_1)\|^2} \right\| &= \|g(u_2)\| \frac{|\, \|g(u_1)\|^2 - \|g(u_2)\|^2 |}{\|g(u_2)\|^2 \|g(u_1)\|^2} \\
&= \frac{(\|g(u_1)\| + \|g(u_2)\|) \,|\, \|g(u_1)\| - \|g(u_2)\| \,|}{\|g(u_2)\| \, \|g(u_1)\|^2} \\
&\leq \left(\frac{1}{\|g(u_2)\| \, \|g(u_1)\|} + \frac{1}{\|g(u_1)\|^2} \right) \|g(u_1) - g(u_2)\| \\
&\leq k_4 \|u_1 - u_2\|,
\end{aligned} \tag{1.28}$$

onde $k_4 = \dfrac{\delta^2}{32\varepsilon^2} k_2$. Além disso,

$$\left\| \frac{g(u_2)}{\|g(u_1)\|^2} - \frac{g(u_1)}{\|g(u_1)\|^2} \right\| \leq \frac{\delta^2}{64\varepsilon^2} \|g(u_2) - g(u_1)\| \leq k_5 \|u_1 - u_2\|, \tag{1.29}$$

onde $k_5 = \dfrac{\delta^2}{64\varepsilon^2} k_2$. Substituindo (1.28) e (1.29) em (1.27) obtemos que

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \leq \overline{k} \|u_1 - u_2\|,$$

onde $\overline{k} = k_4 + k_5 + \frac{\delta}{8\varepsilon} k_1$. Logo, f é localmente Lipschitziana.

Para cada $u \in X$, considere o problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= f(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u) &= u. \end{cases}$$

Temos que f é localmente Lipschitziana e, pela definição de f e (1.26), $\|f(u)\| \leq \delta/8\varepsilon$, para todo $u \in X$. Portanto, para cada $u \in X$, o problema acima tem uma única solução contínua $\sigma(\cdot, u)$ definida para t em um intervalo maximal (t^-, t^+). Afirmamos que $t^+ = +\infty$ e $t^- = -\infty$. De fato, seja σ a solução de (PC) e suponha que $t^+ < +\infty$. Seja ainda $t_n \subset (-\infty, t^+)$ uma sequência tal que $t_n \to t^+$. Então, usando que f é limitada, temos que

$$\|\sigma(t_m, u) - \sigma(t_n, u)\| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} \frac{d}{ds}\sigma(s,u) ds \right\| \leq \int_{t_n}^{t_m} \|f(\sigma(s,u))\| ds \leq \frac{\delta}{8\varepsilon} |t_m - t_n|.$$

Como $(t_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy então $\sigma(t_n, u)$ também é de Cauchy. Daí,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(t_n, u) = \widetilde{u} \in X.$$

Considerando o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= f(\sigma(t,u)), \\ \sigma(t^+,u) &= \widetilde{u}, \end{cases}$$

podemos usar o Teorema de Picard para estender σ para valores $t > t^+$, contradizendo a maximalidade de t^+. A prova para t^- é análoga. A dependência contínua de soluções de (PC) com relação aos dados iniciais implica que $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X, X)$. Desse modo podemos definir

$$\eta : [0,1] \times X \to X \quad \text{por} \quad \eta(t,u) = \sigma(8\varepsilon t, u).$$

Afirmamos que tal η satisfaz (i). De fato, pela definição de η temos que $\eta(0,u) = \sigma(0,u) = u$. Agora, se $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ então $u \in X \backslash A$. Daí $f(u) = 0$. Portanto, $\sigma(t,u) = u$ é uma solução de (PC). Pela existência e unicidade de soluções, $\eta(t,u) = u$.

Agora vamos mostrar que η satisfaz (ii). Primeiro observamos que se $\sigma(t,u) \notin A$ então $f(\sigma(t,u)) = 0$ e consequentemente, $\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) = 0$. Caso contrário, de $\|g(u)\| \leq 2\|\varphi'(u)\|_{X'}$ e $\varphi'(u)g(u) \geq \|\varphi'(u)\|^2_{X'}$ obtemos que

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= \varphi'(\sigma(t,u))\tfrac{d}{dt}\sigma(t,u) = \varphi'(\sigma(t,u))f(\sigma(t,u)) \\ &\leq -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\|g(\sigma(t,u))\|^2}\|\varphi'(\sigma(t,u))\|^2_{X'} \leq -\psi(\sigma(t,u))/4. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Como ψ é não negativa, concluímos que $\varphi(\sigma(.,u))$ é não crescente para todo $u \in X$. Agora tomamos $u \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$. Devemos mostrar que $\varphi(\eta(1,u)) \leq c - \varepsilon$. Vamos dividir a prova em dois casos.

Primeiramente, suponha que exista $t_o \in [0, 8\varepsilon]$ tal que $\varphi(\sigma(t_o,u)) < c - \varepsilon$. Como $\varphi(\sigma(.,u))$ é não crescente, então

$$\varphi(\eta(1,u)) = \varphi(\sigma(8\varepsilon,u)) \leq \varphi(\sigma(t_o,u)) < c - \varepsilon.$$

Agora, suponha que para todo $t \in [0, 8\varepsilon]$ vale $\varphi(\sigma(t,u)) \geq c - \varepsilon$. Como $\varphi(\sigma(.,u))$ é não crescente então $c - \varepsilon \leq \varphi(\sigma(t,u)) \leq \varphi(\sigma(0,u)) = \varphi(u) \leq c + \varepsilon$. Afirmamos que $\sigma(t,u) \in B$. De fato, já temos que $\sigma(t,u) \in \varphi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Só falta mostrar que $\sigma(t,u) \in S_\delta$. Observe que,

$$\|\sigma(t,u) - u\| = \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}\sigma(s,u)ds \right\| \leq \int_0^t \|f(\sigma(s,u))\|ds \leq \frac{\delta t}{8\varepsilon} \leq \delta.$$

Logo, como $u \in S$ então $\sigma(t,u) \in S_\delta$. Por (1.30) e usando que $\psi = 1$ em B, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(\eta(1,u)) &= \varphi(\sigma(8\varepsilon,u)) = \varphi(u) + \int_0^{8\varepsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))dt \\ &\leq \varphi(u) - \frac{1}{4}\int_0^{8\varepsilon} \psi(\sigma(t,u))dt = c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon.\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. □

Proposição 1.34 *Seja X um espaço de Banach. Seja M_o um subespaço fechado do espaço métrico M e $\Gamma_o \subset C(M_o, X)$. Defina*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M,X) : \gamma|_{M_o} \in \Gamma_o\}.$$

Se $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfaz

$$a := \sup_{\gamma_o\in\Gamma_o}\sup_{u\in M_o} \varphi(\gamma_o(u)) < c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{u\in M}\varphi(\gamma(u)) < \infty$$

então, para todo $\varepsilon \in (0,(c-a)/2)$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\sup_{u\in M}\varphi(\gamma(u)) \leq c + \varepsilon, \tag{1.31}$$

existe $u \in X$ tal que
a) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$,
b) $dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$,
c) $\|\varphi'(u)\|_{X'} \leq 8\varepsilon/\delta$.

Demonstração: Suponha que a tese é falsa. Então existe $\varepsilon \in (0,(c-a)/2)$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ satisfazendo (1.31) tais que a hipótese do Lema 1.33 fica satisfeita com $S = \gamma(M)$. Daí, existe $\eta \in C([0,1]\times X, X)$ satisfazendo (i) e (ii) do Lema 1.33. Definimos $\beta : M \to X$ dada por $\beta(u) := \eta(1,\gamma(u))$ e $\gamma_o := \gamma|_{M_o}$. Para todo $u_o \in M_o$ temos que, pela definição de a,

$$\varphi(\gamma_o(u_o)) \leq a < c - 2\varepsilon.$$

Logo, $\gamma_o(u_o) \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$. Portanto, pelo Lema 1.33 (i) temos que $\beta(u_o) = \eta(1,\gamma_o(u_o)) = \gamma_o(u_o) \in \Gamma_o$. Assim, $\beta \in \Gamma$. Pela definição de c, por (1.31) e pelo Lema 1.33 (ii) concluímos que

$$c \leq \sup_{u\in M}\varphi(\beta(u)) = \sup_{u\in M}\varphi(\eta(1,\gamma(u))) \leq c - \varepsilon.$$

Contradição. □

Teorema 1.35 *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ tais que $\|e\| > r$ e*

$$b := \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e).$$

Então existe uma sequência $(u_n) \subset X$ satisfazendo

$$\varphi(u_n) \to c \quad e \quad \varphi'(u_n) \to 0,$$

onde

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0,\, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Basta aplicar a proposição anterior com $M = [0,1]$, $M_o = \{0,1\}$, $\Gamma_o = \{\gamma_o\}$, $\gamma_o(0) = 0$, $\gamma_o(1) = e$. □

1.8 Princípio de Continuação Única

Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$(não necessariamente limitado). Uma função $u \in L^2(\Omega)$ tem um zero de ordem infinita em $x_o \in \Omega$ se para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{|x-x_o|\leq R} u^2 dx = O(R^n)$$

quando $R \to 0$. Uma família de funções de Ω em $\mathbb{R}$ tem a propriedade de continuação única forte se nenhuma função, além da função nula, tem um zero de ordem infinita em algum ponto $x_o \in \Omega$. Uma família de funções de Ω em $\mathbb{R}$ tem a propriedade de continuação única fraca se nenhuma função, além da função nula, se anula num subconjunto aberto de Ω.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [17].

Proposição 1.36 *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Suponha que $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega V(x) u \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

onde $V(x) \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. *Se* $u = 0$ *num conjunto* E *de medida positiva, então* u *tem um zero de ordem infinita.*

Em [23], Jerison e Kenig demostraram o seguinte teorema.

Teorema 1.37 *Seja* Ω *um domínio do* $\mathbb{R}^N$ *e* $V \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. *Então a família de funções* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *que satisfazem a desigualdade* $|\Delta u(x)| \leq |V(x)||u(x)|$ *q.t.p. em* Ω *tem a propriedade de continuação única forte em* $W^{2,q}_{loc}(\Omega)$, *onde* $q = 2N/(N+2)$ *e* $N > 2$.

Capítulo 2

Resultados de não-existência

Neste capítulo demonstramos o Teorema B e o Teorema C. Começamos enunciando a Identidade de Pohozaev [27].

Proposição 2.1 *Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua com primitiva $G(u)=\int_0^u g(s)ds$. Se $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ é solução da equação*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

então

$$\frac{N-2}{N}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - N\int_\Omega G(u)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 (x\cdot\nu)\,dS = 0,$$

onde $(\partial u/\partial\nu)(x)$ é a derivada normal exterior no ponto $x\in\partial\Omega$.

Na demonstração do Teorema B, utilizamos a seguinte versão para sistemas [3] da Identidade de Pohozaev.

Proposição 2.2 *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. Suponha $F\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ com $F(0,0)=0$. Se $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ são soluções do sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u = F_u(u,v), & x\in\Omega,\\ -\Delta v = F_v(u,v), & x\in\Omega,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{2.1}$$

então

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,dx - 2^*\int_\Omega F(u,v)\,dx + \frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(x\cdot\nu)\,dS = 0,$$

onde $(\partial u/\partial\nu)(x)$ *é a derivada normal exterior no ponto* $x \in \partial\Omega$*.*

Para demonstrar a proposição acima usamos o seguinte lema.

Lema 2.3 *Se* $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *e* $w = 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *então*

$$\int_\Omega \Delta w(x \cdot \nabla w)\, dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 (x \cdot \nu)\, dS + \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx,$$

onde ν *é o vetor normal unitário exterior a* Ω*.*

Demonstração: Fazendo os cálculos com $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$ e $w(x) = w(x_1, \ldots, x_N)$ encontramos que

$$\Delta w(x \cdot \nabla w) = div[\nabla w(x \cdot \nabla w)] - \nabla w \cdot \nabla(x \cdot \nabla w), \tag{2.2}$$

$$\nabla w \cdot \nabla(x \cdot \nabla w) = |\nabla w|^2 + x \cdot \nabla\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}\right) \tag{2.3}$$

e

$$\nabla\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}\right) \cdot x = div\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}\, x\right) - N\frac{|\nabla w|^2}{2} \quad . \tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3) e depois substituindo o resultado em (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta w(x \cdot \nabla w) &= div\,[\nabla w(x \cdot \nabla w)] - |\nabla w|^2 - div\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}\, x\right) + N\frac{|\nabla w|^2}{2} \\ &= div\left[\nabla w(x \cdot \nabla w) - \frac{|\nabla w|^2}{2}\, x\right] + \frac{N-2}{2}|\nabla w|^2. \end{aligned}$$

Integrando em Ω e aplicando o Teorema da Divergência na equação acima obtemos

$$\int_\Omega \Delta w(x \cdot \nabla w) dx = \int_{\partial\Omega}\left[(\nabla w \cdot \nu)(x \cdot \nabla w) - \frac{|\nabla w|^2}{2}(x \cdot \nu)\right] dS + \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx, \tag{2.5}$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior. Como $w = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue que $\nabla w = (\nabla w \cdot \nu)\nu$ sobre $\partial\Omega$, pois ∇w é ortogonal à superfície de nível $w = 0$. Daí obtemos

$$\int_{\partial\Omega}\left[(\nabla w \cdot \nu)(x \cdot \nabla w) - \frac{|\nabla w|^2}{2}(x \cdot \nu)\right] dS = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla w \cdot \nu|^2 (x \cdot \nu)\, dS. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.6) em (2.5) concluímos a demonstração do lema. □

Demonstração da Proposição 2.2: Observe que

$$\begin{aligned} div(xF(u,v)) &= div\left(\frac{\nabla(|x|^2)}{2}\,F(u,v)\right) = \frac{\Delta(|x|^2)}{2}\,F(u,v) + \frac{\nabla(|x|^2)}{2}\cdot\nabla F(u,v) \\ &= NF(u,v) + x\cdot(F_u(u,v)\nabla u + F_v(u,v)\nabla v) \\ &= NF(u,v) + F_u(u,v)(x\cdot\nabla u) + F_v(u,v)(x\cdot\nabla v). \end{aligned}$$

Integrando em Ω e aplicando o Teorema da Divergência segue que

$$\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)F(u,v)dS = N\int_\Omega F(u,v)dx + \int_\Omega F_u(u,v)(x\cdot\nabla u)dx + \int_\Omega F_v(u,v)(x\cdot\nabla v)dx.$$

Por (2.1) e usando que $F(u,v)=0$ sobre $\partial\Omega$, pois $u=v=0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos

$$\int_\Omega \Delta u(x\cdot\nabla u)dx + \int_\Omega \Delta v(x\cdot\nabla v)dx - N\int_\Omega F(u,v)dx = 0.$$

Aplicando o Lema 2.3 com $w=u$ e, após, com $w=v$ e substituindo na equação acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(x\cdot\nu)dS + \frac{N-2}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx - N\int_\Omega F(u,v)dx = 0.$$

Multiplicando a equação anterior por $2^*/N$ obtemos

$$\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,dx - 2^*\int_\Omega F(u,v)\,dx + \frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(x\cdot\nu)\,dS = 0.$$

$\square$

O lema a seguir será utilizado na demonstração do Teorema B no caso em que $\alpha+\beta=2^*$ e $\mu_2=0$.

Lema 2.4 *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um domínio estrelado, limitado, de classe $C^{1,1}$. Suponha que $v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta v = K|v|^{2^*-2}v, & x\in\Omega, \\ v=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{C}$$

onde $K>0$ é constante. Então $v\equiv 0$.

Demonstração: Multiplicando a equação em Ω por v e integrando dos dois lados, obtemos

$$\int_\Omega -v\Delta v dx = K\int_\Omega |v|^{2^*}dx.$$

Daí,

$$\int_\Omega -div(v\nabla v)dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = K\int_\Omega |v|^{2^*}dx.$$

Aplicando o Teorema da Divergência e usando o fato de que $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx = K\int_\Omega |v|^{2^*}dx. \tag{2.7}$$

Por outro lado, pela Proposição 2.1,

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 (x\cdot\nu)\,dS + \frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - N\int_\Omega G(v)\,dx = 0,$$

onde $G(v) = \frac{K}{2^*}|v|^{2^*}$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 (x\cdot\nu)\,dS = -\frac{N}{2^*}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - K\int_\Omega |v|^{2^*}dx\right).$$

Combinando a igualdade acima com (2.7) e como $x\cdot\nu > 0$ sobre $\partial\Omega$, concluímos que $\nabla v\cdot\nu = 0$ sobre $\partial\Omega$. Daí, concluímos facilmente que (C) não tem solução não-trivial $v \geq 0$ ou $v \leq 0$ em Ω. Basta observar que se $v \geq 0$ em Ω então

$$K\int_\Omega v^{2^*-1}dx = \int_\Omega -\Delta v\,dx = \int_\Omega -div(\nabla v)dx = -\int_{\partial\Omega}\nabla v\cdot\nu\,dS = 0,$$

o que nos dá $v \equiv 0$ em Ω. E se $v \leq 0$ em Ω, então

$$-K\int_\Omega (-v)^{2^*-1}dx = -\int_{\partial\Omega}\nabla v\cdot\nu\,dS = 0,$$

o que também nos dá $v \equiv 0$.

Vamos agora considerar a possibilidade de existência de uma solução de (C) que muda de sinal. O procedimento anterior somente nos leva a

$$K\int_\Omega |v|^{2^*-2}v\,dx = 0.$$

Para mostrar que $v \equiv 0$ em Ω, utilizamos o argumento de Kenig em [25]. Estendemos v como sendo 0 em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Como v e $\nabla v = (\nabla v\cdot\nu)\nu$ são 0 sobre $\partial\Omega$ então a função estendida $\widetilde{v} \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$. Logo $\widetilde{v} \in W^{1,p}_o(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq p < \infty$. Além disso,

$$-\Delta\widetilde{v} = K|\widetilde{v}|^{2^*-2}\widetilde{v}, \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Seja $V = -K|\widetilde{v}|^{2^*-2}$ em $\mathbb{R}^N$. Então $V \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} |V|^{N/2} dx = K^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{v}|^{2^*} dx = K^{N/2} \int_\Omega |v|^{2^*} dx < \infty.$$

Como $-\Delta\widetilde{v} + V\widetilde{v} = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\widetilde{v} \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\widetilde{v}\varphi \, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Como $\widetilde{v}$ tem suporte compacto em $\mathbb{R}^N$, pela Proposição 1.36, $\widetilde{v}$ tem um zero de ordem infinita. Seja $q = 2N/(N+2)$. Então $V\widetilde{v} \in L^q(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} |V\widetilde{v}|^q = K^q \int_\Omega |v|^{2^*} dx < \infty.$$

Pelo Teorema 9.15 em [20], $\widetilde{v} \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando o Teorema 1.37, concluímos que $\widetilde{v} \equiv 0$. Logo, $v \equiv 0$. $\square$

Antes de demonstrarmos o Teorema B, lembramos que $\mu_1 \leq \mu_2$ são os autovalores da matriz A associada ao sistema $(P_{\alpha,\beta,A})$. O mínimo e o máximo da forma quadrática (AZ, Z), $Z \in \mathbb{R}^2$, restrito a esfera unitária são μ_1 e μ_2, respectivamente, e

$$\mu_1|Z|^2 \leq (AZ, Z) \leq \mu_2|Z|^2, \quad Z \in \mathbb{R}^2. \tag{2.8}$$

Demonstração do Teorema B: Suponha que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ seja a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} u|u|^{\alpha-2}|v|^\beta, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = bu + cv + \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta} |u|^\alpha v|v|^{\beta-2}, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_{\alpha,\beta,A}$}$$

Multiplicando a primeira equação de $(P_{\alpha,\beta,A})$ por u e a segunda por v e depois somando-as obtemos

$$-\int_\Omega (u\Delta u + v\Delta v)\, dx = \int_\Omega (au^2 + 2buv + cv^2)\, dx + 2\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx.$$

Assim,

$$-\int_\Omega div(u\nabla u+v\nabla v)\,dx+\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,dx=\int_\Omega(au^2+2buv+cv^2)\,dx+2\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx.$$

Pelo Teorema da Divergência e usando o fato de que $u=v=0$ sobre $\partial\Omega$ obtemos

$$\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,dx=\int_\Omega(AU,U)\,dx+2\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx. \tag{2.9}$$

Aplicando a Proposição 2.2 com $F(u,v)=\frac{1}{2}(AU,U)+\frac{2}{\alpha+\beta}|u|^\alpha|v|^\beta$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,dx-\frac{2^*}{2}\int_\Omega(AU,U)\,dx-2\frac{2^*}{\alpha+\beta}\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx\\ +\frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(x\cdot\nu)\,dS=0.\end{aligned}$$

Substituindo (2.9) na equação acima vem

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2^*}{2}\right)\int_\Omega(AU,U)\,dx+2\left(1-\frac{2^*}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx\\ +\frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(x\cdot\nu)\,dS=0.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Primeiramente, vamos analisar o caso em que $\alpha+\beta>2^*$. Como $\mu_2\le 0$, de (2.8) temos que $(AU,U)\le 0$. Logo, segue de (2.10) e de $(x\cdot\nu)>0$ que $\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx\le 0$, e portanto, $\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx=0$. Usando (2.9) com o fato de que $\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx=0$ temos

$$\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,dx=\int_\Omega(AU,U)\,dx\le 0.$$

Portanto $u=c_1$ e $v=c_2$ em Ω, onde $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Usando o fato de que $u,v\in C(\overline{\Omega})$ e $u=v=0$ sobre $\partial\Omega$ então $u=v=0$ em Ω.

Agora vamos analisar o caso em que $\alpha+\beta=2^*$. De (2.10) segue que

$$\left(1-\frac{2^*}{2}\right)\int_\Omega(AU,U)\,dx+\frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(x\cdot\nu)\,dS=0. \tag{2.11}$$

Como Ω é um domínio estrelado temos $(x\cdot\nu)>0$. Logo

$$\int_\Omega(AU,U)\,dx\ge 0. \tag{2.12}$$

Se $\mu_2 < 0$ então $U \equiv 0$, caso contrário, teríamos, por (2.8), $\int_\Omega (AU, U)\, dx < 0$, contradizendo (2.12).

Agora suponha que $\mu_2 = 0$. Se $u, v \equiv 0$ a prova está concluída. Argumentando por contradição, suponha que o contrário ocorra. Sem perda de generalidade, podemos supor que $v \not\equiv 0$. Como μ_1 e μ_2 são autovalores de A então μ_1 e μ_2 são raízes do polinômio característico $\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2)$. Assim, $b^2 = ac$ e $\mu_1 = a + c$. Como $\mu_1 \leq \mu_2$ então $a + c \leq 0$. De $b^2 = ac$ e $a + c \leq 0$ concluímos que $a \leq 0$ e $c \leq 0$.

Primeiramente vamos considerar o caso $a < 0$ e $c < 0$. De (2.12) e de (2.8) obtemos que

$$0 = \int_\Omega (AU, U) dx = a\|u\|_2^2 + 2b(u, v)_2 + c\|v\|_2^2, \tag{2.13}$$

onde $(.\,,\,.)_2$ denota o produto interno de L^2. Usando a Desigualdade de Hölder temos $b(u, v)_2 \leq |b||(u, v)_2| \leq |b|\|u\|_2\|v\|_2$ e substituindo na equação acima obtemos

$$a\|u\|_2^2 + 2|b|\|u\|_2\|v\|_2 + c\|v\|_2^2 \geq 0. \tag{2.14}$$

Afirmamos que a desigualdade estrita em (2.14) não pode ocorrer. Caso contrário,

$$a\left(\|u\|_2 + \frac{|b|}{a}\|v\|_2\right)^2 - \left(\frac{b^2 - ac}{a}\right)\|v\|_2^2 = a\|u\|_2^2 + 2|b|\|u\|_2\|v\|_2 + c\|v\|_2^2 > 0.$$

Como $b^2 = ac$ então

$$a\left(\|u\|_2 + \frac{|b|}{a}\|v\|_2\right)^2 > 0.$$

Contradição, pois $a < 0$. Logo

$$a\|u\|_2^2 + 2|b|\|u\|_2\|v\|_2 + c\|v\|_2^2 = 0. \tag{2.15}$$

De (2.13) e (2.15) obtemos que $|(u, v)_2| = \|u\|_2\|v\|_2$. Portanto, por Cauchy-Schwarz existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $u = \delta v$. Por (2.13) obtemos que $a\delta^2 + 2b\delta + c = 0$. Daí como $b^2 = ac$ obtemos que $\delta = -b/a$. Usando a relação $u = \delta v = \frac{-b}{a} v$ em $(P_{\alpha,\beta,A})$ obtemos que $v \not\equiv 0$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{2\alpha}{2^*}|\delta|^{\alpha-2} v|v|^{2^*-2}, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{2\beta}{2^*}|\delta|^{\alpha} v|v|^{2^*-2}, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

De (2.17) e pelo Lema 2.4 concluímos que $v \equiv 0$, uma contradição.

Por fim consideramos o caso em que $\mu_2 = 0$ e a ou c são nulos. Nesse caso, $(AU, U) = 0$. De fato, se $a = 0$ então $b = 0$ e de (2.12) concluímos que $c \geq 0$, mas já temos que $c \leq 0$. Logo $c = 0$, e consequentemente, $(AU, U) = 0$. Analogamente, se $c = 0$, obtemos novamente $(AU, U) = 0$. Em ambos os casos, de (2.11) obtemos que $\nabla u \cdot \nu = 0$ e $\nabla v \cdot \nu = 0$ sobre $\partial\Omega$. Como $a, b, c = 0$ temos que v é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{2\beta}{2^*}|u|^\alpha |v|^{\beta-2}v, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

e por hipótese, $\beta > 2$. Definimos $\widetilde{u}$ e $\widetilde{v}$ como sendo as extensões de u e v para $\mathbb{R}^N$, pondo $\widetilde{u} = \widetilde{v} = 0$ para $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Então $V := -\frac{2\beta}{2^*}|u|^\alpha |v|^{\beta-2} \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$. Procedendo como no final da demonstração do Lema 2.4, concluímos que $v \equiv 0$, uma contradição. $\square$

Observação 2.5 *Na demonstração do Teorema B, no caso em que $\alpha + \beta = 2^*$, $\mu_2 = 0$ e a, b, c não são simultaneamente nulos, de (2.16) e (2.17), se $v \not\equiv 0$ obtemos* $\dfrac{\alpha}{\beta} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$.

Demonstração do Teorema C: Primeiramente consideramos o caso $b \geq 0$ e $\mu_2 \geq \lambda_1$. Sempre podemos assumir que o autovetor $X_o = (x_o, y_o)$ associado ao autovalor μ_2 da matriz A é tal que $x_o \geq 0$ e $y_o \geq 0$. De fato, como X_o é autovetor então $x_o \neq 0$ ou $y_o \neq 0$. Primeiro vamos ver o caso em que $x_o \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_o > 0$, pois se X_o é autovetor de A então $-X_o$ também é.

Se $b = 0$ e $a \neq c$ então de $AX_o = \mu_2 X_o$ segue que $y_o = 0$.

Se $b = 0$ e $a = c$ então qualquer $X_o \in \mathbb{R}^2$ é autovetor de A. Logo podemos escolher $y_o > 0$.

Se $b > 0$ e $y_o < 0$ então de $AX_o = \mu_2 X_o$ obtemos que $(a - \mu_2)x_o = -by_o$ e $(c - \mu_2)y_o = -bx_o$, o que implica $\mu_2 < a$ e $\mu_2 < c$. Com isso, $\mu_2 < (a + c)/2$. Temos também que $\mu_2^2 - (a + c)\mu_2 + (ac - b^2) = 0$. Daí,

$$\mu_2 = \frac{a + c}{2} + \frac{\sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2} > \frac{a + c}{2},$$

uma contradição.

Logo, se $x_o \neq 0$, podemos tomar $x_o > 0$ e $y_o \geq 0$. Analogamente, se $y_o \neq 0$, podemos escolher $y_o > 0$ e $x_o \geq 0$.

Argumentando por contradição, supomos que $(u, v) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução de $(P^+_{\alpha,\beta,A})$. Multiplicando a primeira equação de $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ por $x_o\phi_1$ e a segunda equação por $y_o\phi_1$ e depois somando-as, obtemos

$$(-\Delta U, \phi_1 X_o) = (AU, \phi_1 X_o) + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} x_o \phi_1 u^{\alpha-1} v^{\beta} + \frac{2\beta}{\alpha+\beta} y_o \phi_1 u^{\alpha} v^{\beta-1}, \qquad (2.19)$$

onde ϕ_1 é a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano. Conforme demonstrado na Seção 1.6, podemos admitir que $\phi_1 > 0$ em Ω. Observe que

$$(-\Delta U, \phi_1 X_o) = -div(x_o \phi_1 \nabla u + y_o \phi_1 \nabla v) + (x_o \nabla u \cdot \nabla \phi_1 + y_o \nabla v \cdot \nabla \phi_1)$$

Integrando os dois lados da igualdade acima, usando o Teorema da Divergência e que $\phi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos

$$\int_\Omega (-\Delta U, \phi_1 X_o)\, dx = \int_\Omega (x_o \nabla u \cdot \nabla \phi_1 + y_o \nabla v \cdot \nabla \phi_1)\, dx.$$

Usando o fato de que ϕ_1 é a autofunção associada a λ_1 segue que (veja (1.15))

$$\int_\Omega (-\Delta U, \phi_1 X_o)\, dx = \lambda_1 \int_\Omega (x_o u + y_o v)\phi_1\, dx. \qquad (2.20)$$

Como A é uma matriz simétrica então

$$(AU, \phi_1 X_o) = (U, A(\phi_1 X_o)) = (U, \phi_1 A X_o) = \phi_1 \mu_2 (U, X_o) = (u x_o + v y_o)\phi_1 \mu_2. \qquad (2.21)$$

Integrando os dois lados da igualdade (2.19) obtemos, por (2.20) e (2.21) que

$$(\lambda_1 - \mu_2) \int_\Omega (u\phi_1 x_o + v\phi_1 y_o)\, dx = \int_\Omega \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} x_o \phi_1 u^{\alpha-1} v^{\beta} + \frac{2\beta}{\alpha+\beta} y_o \phi_1 u^{\alpha} v^{\beta-1} \right) dx.$$

Pela nossa escolha de (x_o, y_o), da igualdade acima obtemos que $\lambda_1 > \mu_2$, o que é absurdo.

Agora vamos considerar o caso em que $b \leq 0$ e $\mu_1 \geq \lambda_1$. Similarmente ao caso anterior, podemos admitir que o autovetor $X_1 = (x_1, y_1)$ associado ao autovalor μ_1 da matriz A é tal que $x_1 \geq 0$ e $y_1 \geq 0$.

Suponha que $(u, v) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução de $(P^+_{\alpha,\beta,A})$. Argumentando como no caso anterior, obtemos

$$(\lambda_1 - \mu_1) \int_\Omega (u\phi_1 x_1 + v\phi_1 y_1)\, dx = \int_\Omega \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} x_1 \phi_1 u^{\alpha-1} v^{\beta} + \frac{2\beta}{\alpha+\beta} y_1 \phi_1 u^{\alpha} v^{\beta-1} \right) dx > 0.$$

Logo $\lambda_1 > \mu_1$. Contradição.

$\square$

Observação 2.6 *Suponha que* $b = 0$ *e* $\mu_1 > \lambda_1$*. Seja* $(u, v) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *uma solução não-trivial de* $(P_{\alpha,\beta,A})$*. Sejam* $X_1 = (x_1, y_1)$ *e* $X_2 = (x_2, y_2)$ *autovetores da matriz* A *associados a* μ_1 *e* μ_2*, respectivamente. Procedendo como na demonstração do Teorema C, obtemos*

$$(\lambda_1 - \mu_j) \int_\Omega (u\phi_1 x_j + v\phi_1 y_j)\, dx = \int_\Omega \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta} x_j \phi_1 |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta + \frac{2\beta}{\alpha+\beta} y_j \phi_1 |u|^\alpha |v|^{\beta-2} v \right) dx, \tag{2.22}$$

$j = 1, 2$*. Se* $a = c$*, qualquer vetor* $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *é autovetor de* A*. Se* $a < c$*, os autovetores são da forma* $X_1 = (x, 0)$ *e* $X_2 = (0, y)$*,* $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, enquanto se* $c < a$*, os autovetores são* $X_1 = (0, y)$ *e* $X_2 = (x, 0)$*,* $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*.*

Suponha que $u > 0$ *(ou* $u < 0$*) em* Ω *e* v *qualquer. Neste caso podemos escolher um autovetor* $X_j = (x_j, 0)$*, com* $x_j > 0$*,* $j = 1$ *ou* $j = 2$*, dependendo se* $a < c$ *ou* $c < a$*. Em (2.22) obtemos*

$$(\lambda_1 - \mu_j) \int_\Omega u\phi_1 x_j\, dx = \int_\Omega \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} x_j \phi_1 |u|^{\alpha-2} u |v|^\beta dx,$$

o que nos dá $\lambda_1 \geq \mu_j \geq \mu_1$ *o que contradiz* $\mu_1 > \lambda_1$*.*

No caso em que $v > 0$ *(ou* $v < 0$*) e* u *qualquer, escolhemos* $X_j = (0, y_j)$ *e o argumento é análogo.*

Capítulo 3

Existência de solução no caso subcrítico

Neste capítulo, demonstramos a regularidade das soluções fracas de $(P_{\alpha,\beta,A})$ quando $\alpha+\beta \leq 2^*$, bem como apresentamos a demonstração do Teorema D, devido a C. O. Alves, D. C. de Morais Filho e M. A. S. Souto [3].

Denotamos por X o espaço $H_o^1(\Omega)\times H_o^1(\Omega)$ com a norma

$$\|(u,v)\| = \|u\|_{H_o^1(\Omega)} + \|v\|_{H_o^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Proposição 3.1 *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,1}$, com $N \geq 3$. Suponha $\alpha, \beta > 1$ e $\alpha+\beta \leq 2^*$. Se $(u,v)\in X$ é solução fraca de $(P_{\alpha,\beta,A})$ e $u,v\geq 0$ então $u,v \in C^2(\overline{\Omega})$. Consequentemente, (u,v) satisfaz $(P_{\alpha,\beta,A})$ no sentido pontual.*

Demonstração: Podemos reescrever a primeira e a segunda equação de $(P_{\alpha,\beta,A})$ da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta u = F(x)(1+|u|+|v|), & x\in\Omega,\\ -\Delta v = G(x)(1+|u|+|v|), & x\in\Omega, \end{cases}$$

onde

$$F(x) = \frac{au+bv}{1+|u|+|v|} + \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{u|u|^{\alpha-2}|v|^\beta}{1+|u|+|v|}$$

e

$$G(x) = \frac{bu+cv}{1+|u|+|v|} + \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{|u|^\alpha v|v|^{\beta-2}}{1+|u|+|v|}.$$

Afirmamos que $|F(x)| \in L^{N/2}(\Omega)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|F(x)| &\leq |a|\frac{|u|}{1+|u|+|v|} + |b|\frac{|v|}{1+|u|+|v|} + \left(\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta}}{1+|u|+|v|} \\
&\leq |a| + |b| + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta-1}.
\end{aligned}
$$

Como Ω é limitado, basta mostrar que $|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta-1} \in L^{N/2}(\Omega)$. Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p = \frac{\alpha+\beta-2}{\alpha-1}$ e $p' = \frac{\alpha+\beta-2}{\beta-1}$ obtemos

$$
\int_\Omega \left(|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta-1}\right)^{N/2} dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{(\alpha+\beta-2)N/2} dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}} \left(\int_\Omega |v|^{(\alpha+\beta-2)N/2} dx\right)^{\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-2}}.
$$

Afirmamos que $\int_\Omega |u|^r < \infty$, onde $r = (\alpha+\beta-2)N/2$. De fato, $0 < r \leq (2^*-2)N/2 = 2^*$. Se $1 \leq r \leq 2^*$ a afirmação segue do fato de que $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ continuamente para todo $1 \leq r \leq 2^*$. Se $0 < r < 1$ então

$$
\int_\Omega |u|^r dx \leq \int_{|u|\leq 1} 1\, dx + \int_{|u|>1} |u|\, dx < \infty,
$$

já que Ω é limitado e $H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ continuamente. Do mesmo modo, $\int_\Omega |v|^r dx < \infty$. Isto mostra que $|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ e consequentemente $|F(x)| \in L^{N/2}(\Omega)$. De forma similar, mostramos que $|G(x)| \in L^{N/2}(\Omega)$. Aplicando o Teorema 1.27 com $A(x) = |F(x)|$ e $B(x) = |G(x)|$, concluímos que $u, v \in L^q(\Omega)$ para qualquer $1 \leq q < \infty$. Daí, pela desigualdade de Hölder temos que $f = au + bv + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}u|u|^{\alpha-2}|v|^{\beta}$ e $g = bu + cv + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}v|v|^{\beta-2} \in L^q(\Omega)$ para qualquer $1 \leq q < \infty$. Pelo Teorema 1.25 temos que $u, v \in W^{2,q}(\Omega)$, para todo $q > 1$. Tome q tal que $q > N$. Aplicando o Teorema 1.15 (iii) com $k = 1$, $p = q$ e $j = 1$ obtemos que $u, v \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$, para todo $0 < \theta \leq 1 - (N/q)$. Consequentemente, $u, v \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$. Usando que, para $a \geq 0$ e $b \geq 0$ vale

$$
|a^p - b^p| \leq \begin{cases} |a-b|^p, & 0 < p < 1, \\ p|a-b|\,|a^{p-1} + b^{p-1}|, & 1 \leq p < \infty, \end{cases}
$$

então $|u|^{\alpha-1}$ e $|v|^{\beta} \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \lambda \leq \theta$, e consequentemente $|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta} \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Como $u, v \geq 0$ temos que $f \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Analogamente podemos mostrar que $g \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Aplicando o Teorema 1.24 obtemos que $u, v \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^2(\overline{\Omega})$.

Como (u, v) é solução fraca de $(P_{\alpha,\beta,A})$ então

$$
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\zeta dx - \int_\Omega au\varphi dx - \int_\Omega bv\varphi dx - \int_\Omega bu\zeta dx - \int_\Omega cv\zeta dx
$$

$$-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^{\alpha-2}|v|^\beta u\varphi dx - \frac{2\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^\alpha |v|^{\beta-2} v\zeta dx = 0, \qquad \forall\,(\varphi,\zeta)\in X.$$

Tomando $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\zeta = 0$ obtemos

$$\int_\Omega div(\varphi\nabla u)dx - \int_\Omega \varphi\Delta u\, dx - \int_\Omega \left(au + bv + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}|v|^\beta u\right)\varphi\, dx = 0.$$

Aplicando o Teorema da Divergência e usando que $\varphi = 0$ sobre $\partial\Omega$ obtemos que

$$\int_\Omega h\varphi\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

onde $h = -\Delta u - au - bv - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}|v|^\beta u \in C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$. Argumentando como na parte final do Teorema 1.26, concluímos que $h \equiv 0$, ou seja,

$$-\Delta u \equiv au + bv + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}u|u|^{\alpha-2}|v|^\beta \quad \text{em } \Omega.$$

De forma análoga, obtemos

$$-\Delta v \equiv bu + cv + \frac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^\alpha v|v|^{\beta-2} \quad \text{em } \Omega.$$

Isso conclui a demonstração do teorema. □

Lema 3.2 *Suponha $b \geq 0$ e seja (u, v) uma solução não identicamente nula de $(P_{\alpha,\beta,A})$ com $u, v \geq 0$. Então $u, v > 0$ em Ω.*

Demonstração: No caso em que $a \geq 0$, usando que $b \geq 0$ na primeira equação de $(P_{\alpha,\beta,A})$ obtemos que $\Delta u \leq 0$ e pelo Princípio do Máximo Forte (Teorema 1.30) concluímos que $u > 0$ em Ω.

No caso em que $a < 0$, usando que $b \geq 0$ na primeira equação de $(P_{\alpha,\beta,A})$ obtemos que $\Delta u + au \leq 0$ e novamente pelo Princípio do Máximo Forte concluímos que $u > 0$ em Ω.

A prova de que $v > 0$ é similar. □

Demonstração do Teorema D: A ideia é minimizar o funcional

$$I(u, v) = \frac{1}{2}\|(u, v)\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU, U)dx, \quad (u, v) \in X,$$

restrito a $M = \left\{(u, v) \in (H_0^1)^2 : \int_\Omega (u^+)^\alpha (v^+)^\beta dx = 1\right\}$, e após, usar o Teorema do Multiplicadores de Lagrange e a homogeneidade do problema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$. Primeiramente observamos que, por (2.8),

$$I(u,v) \geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2 - \frac{1}{2}\mu_2\int_\Omega (u^2+v^2)dx.$$

Daí, se $\mu_2 < 0$ temos $I(u,v) \geq \dfrac{1}{2}\|(u,v)\|^2$ e se for $\mu_2 \geq 0$ por (1.20) segue que

$$\begin{aligned} I(u,v) &\geq \frac{1}{2}||(u,v)||^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu_2}{\lambda_1}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)||(u,v)||^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$I(u,v) \geq \frac{1}{2}min\left\{1, \left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\right\}||(u,v)||^2. \tag{3.1}$$

Seja $I_o = \inf\limits_{(u,v)\in M} I(u,v)$ e $(u_n,v_n) \in M$ uma sequência minimizante para I_o, isto é,

$$I(u_n,v_n) = I_o + o_n(1). \tag{3.2}$$

De (3.2) e (3.1) obtemos que (u_n,v_n) é uma sequência limitada de X. Pela Proposição 1.10, existe $(u_o,v_o) \in X$ tal que, a menos de subsequência,
(i) $(u_n,v_n) \rightharpoonup (u_o,v_o)$ fracamente em X;
(ii) $u_n \to u_o$ e $v_n \to v_o$ fortemente em $L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < 2^*$;
(iii) $u_n \to u_o$ e $v_n \to v_o$ q.t.p. em Ω e
(iv) $|u_n| \leq h_1$ e $|v_n| \leq h_2$, q.t.p. em Ω com $h_1, h_2 \in L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < 2^*$.

Afirmamos que $(u_o,v_o) \in M$. De fato, $|(u_n^+)^\alpha (v_n^+)^\beta| \leq h_1^\alpha h_2^\beta$ q.t.p. em Ω com $h_1^\alpha h_2^\beta \in L^1(\Omega)$, pois pela desigualdade de Hölder com expoentes $p = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ e $p' = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, obtemos

$$\int_\Omega h_1^\alpha h_2^\beta dx \leq \left(\int_\Omega h_1^{\alpha+\beta}dx\right)^{\alpha/(\alpha+\beta)} \left(\int_\Omega h_2^{\alpha+\beta}dx\right)^{\beta/(\alpha+\beta)} < \infty,$$

já que $h_1, h_2 \in L^{\alpha+\beta}(\Omega)$. Temos também que $(u_n^+)^\alpha (v_n^+)^\beta \to (u_o^+)^\alpha (v_o^+)^\beta$ q.t.p. em Ω. Assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\int_\Omega (u_o^+)^\alpha (v_o^+)^\beta dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n^+)^\alpha (v_n^+)^\beta dx = 1.$$

Logo $(u_o,v_o) \in M$.

Agora vamos mostrar que $I(u_o, v_o) = I_o$. Por (3.2) e (iii) da Proposição 1.1 obtemos

$$\begin{aligned} I_o &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\|(u_n, v_n)\|^2 - \left(a\int_\Omega u_n^2 dx + 2b\int_\Omega u_n v_n + c\int_\Omega v_n^2 dx\right)\right] \\ &\geq \frac{1}{2}\|(u_o, v_o)\|^2 - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(a\int_\Omega u_n^2 dx + 2b\int_\Omega u_n v_n + c\int_\Omega v_n^2 dx\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $u_n \to u_o$ e $v_n \to v_o$ fortemente em $L^2(\Omega)$ segue que

$$\int_\Omega u_n^2 dx \to \int_\Omega u_o^2 dx, \qquad \int_\Omega v_n^2 dx \to \int_\Omega v_o^2 dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega u_n v_n dx \to \int_\Omega u_o v_o dx, \tag{3.4}$$

pois

$$|\|u_n\|_2 - \|u_o\|_2| \leq \|u_n - u_o\|_2, \qquad |\|v_n\|_2 - \|v_o\|_2| \leq \|v_n - v_o\|_2$$

e

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u_n v_n dx - \int_\Omega u_o v_o dx\right| &\leq \int_\Omega |u_n v_n - u_o v_o| dx \\ &\leq \int_\Omega |u_n(v_n - v_o)| dx + \int_\Omega |v_o(u_n - u_o)| dx \\ &\leq \|u_n\|_2 \|v_n - v_o\|_2 + \|v_o\|_2 \|u_n - u_o\|_2. \end{aligned}$$

De (3.3) e (3.4) vem $I_o \geq I(u_o, v_o)$, e consequentemente, $I_o = I(u_o, v_o)$.

Observamos que, pelo discutido na Seção 1.2, o funcional I e o funcional G dado por $G(u, v) := \displaystyle\int_\Omega (u^+)^\alpha (v^+)^\beta dx - 1$ são de classe C^1 com

$$I'(u, v)(\varphi, \zeta) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \zeta \, dx - \int_\Omega a u \varphi dx - \int_\Omega b v \varphi \, dx - \int_\Omega b u \zeta dx - \int_\Omega c v \zeta \, dx$$

e

$$G'(u, v)(\varphi, \zeta) = \int_\Omega \alpha (u^+)^{\alpha-1} (v^+)^\beta \varphi dx + \int_\Omega \beta (u^+)^\alpha (v^+)^{\beta-1} \zeta dx, \quad \forall\, (\varphi, \zeta) \in X.$$

Aplicando o Teorema 1.23 obtemos um multiplicador de Lagrange $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(u_o, v_o)(\varphi, \zeta) - \eta G'(u_o, v_o)(\varphi, \zeta) = 0, \quad \forall\, (\varphi, \zeta) \in X. \tag{3.5}$$

Tomando $(\varphi, \zeta) = (u_o^-, v_o^-)$ em (3.5) e observando que

$$I'(u_o, v_o)(u_o^-, v_o^-) \;=\; \int_\Omega \left(\nabla u_o \cdot \nabla u_o^- + \nabla v_o \cdot \nabla v_o^- - a u_o u_o^- - b u_o v_o^- - b v_o u_o^- - c v_o v_o^-\right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left[|\nabla u_o^-|^2 + |\nabla v_o^-|^2 - a(u_o^-)^2 - bv_o^-(u_o^+ + u_o^-)\right] dx \\
&\qquad + \int_\Omega \left[-bu_o^-(v_o^+ + v_o^-) - c(v_o^-)^2\right] dx \\
&= 2I(u_o^-, v_o^-) - \int_\Omega (bu_o^+ v_o^- + bv_o^+ u_o^-) dx
\end{aligned}
$$

e

$$
G'(u_o, v_o)(u_o^-, v_o^-) = \int_\Omega \alpha(u_o^+)^{\alpha-1}(v_o^+)^\beta u_o^- \, dx + \int_\Omega \beta(u_o^+)^\alpha (v_o^+)^{\beta-1} v_o^- \, dx = 0,
$$

obtemos $I(u_o^-, v_o^-) = \frac{1}{2}\int_\Omega (bu_o^+ v_o^- + bv_o^+ u_o^-)dx$. Como $b \geq 0$, temos que $I(u_o^-, v_o^-) \leq 0$ e então de (3.1) obtemos $\|(u_o^-, v_o^-)\|^2 \leq 0$ e consequentemente, $(u_o^-, v_o^-) = 0$. Assim, concluímos que $u_o \geq 0$ e $v_o \geq 0$.

Usando (3.5) com $(\varphi, \zeta) = (u_o, v_o)$ vemos que

$$
\begin{aligned}
I'(u_o, v_o)(u_o, v_o) &= \int_\Omega (|\nabla u_o|^2 + |\nabla v_o|^2) dx - \int_\Omega (au_o^2 + 2bu_o v_o + cv_o^2) dx = 2I(u_o, v_o) \\
&= \eta \int_\Omega \left[\alpha(u_o^+)^{\alpha-1}(v_o^+)^\beta u_o + \beta(u_o^+)^\alpha (v_o^+)^{\beta-1} v_o\right] dx \\
&= \eta(\alpha+\beta) \int_\Omega (u_o^+)^\alpha (v_o^+)^\beta dx \\
&= \eta(\alpha+\beta).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\eta(\alpha+\beta) = 2I(u_o, v_o)$. Como $(u_o, v_o) \in M$ segue que $u_o \not\equiv 0$ e $v_o \not\equiv 0$. Logo por (3.1), $I(u_o, v_o) > 0$ e consequentemente, $\eta > 0$. Afirmamos que $\left[\frac{\eta(\alpha+\beta)}{2}\right]^{\frac{1}{(\alpha+\beta-2)}} (u_o, v_o)$ é uma solução fraca para $(P_{\alpha,\beta,A})$. De fato, de (3.5) temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u_o \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega \nabla v_o \cdot \nabla \zeta dx - \int_\Omega au_o \varphi dx - \int_\Omega bv_o \varphi dx - \int_\Omega bu_o \zeta dx - \int_\Omega cv_o \zeta dx \\
&-\eta\alpha \int_\Omega (u_o^+)^{\alpha-1}(v_o^+)^\beta \varphi dx - \eta\beta \int_\Omega (u_o^+)^\alpha (v_o^+)^\beta \zeta dx = 0, \qquad \forall\ (\varphi, \zeta) \in X.
\end{aligned}
$$

Multiplicando essa equação por $K = \left[\frac{\eta(\alpha+\beta)}{2}\right]^{\frac{1}{(\alpha+\beta-2)}}$ e observando que $\eta K = \frac{2}{\alpha+\beta} K^{\alpha+\beta-1}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla(Ku_o) \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega \nabla(Kv_o) \cdot \nabla \zeta dx - \int_\Omega a(Ku_o)\varphi dx - \int_\Omega b(Kv_o)\varphi dx - \int_\Omega b(Ku_o)\zeta dx \\
&- \int_\Omega c(Kv_o)\zeta dx - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \int_\Omega (Ku_o^+)^{\alpha-1}(Kv_o^+)^\beta \varphi dx - \frac{2\beta}{\alpha+\beta} \int_\Omega (Ku_o^+)^\alpha (Kv_o^+)^{\beta-1} \zeta dx = 0.
\end{aligned}
$$

Como $Ku_o \geq 0$ e $Kv_o \geq 0$, então $K(u_o, v_o)$ é solução fraca para $(P_{\alpha,\beta,A})$. Pela Proposição 3.1 temos que $Ku_o, Kv_o \in C^2(\overline{\Omega})$ e consequentemente $K(u_o, v_o)$ é solução de $(P_{\alpha,\beta,A})$. Pelo Lema 3.2 concluímos que $Ku_o > 0$ e $Kv_o > 0$ em Ω. $\square$

Capítulo 4

O caso crítico

Neste capítulo consideramos o sistema $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ no caso crítico $\alpha+\beta = 2^*$ e supomos $\alpha, \beta > 1$, $b \geq 0$, e $N \geq 3$. Para $N \geq 4$, podemos garantir existência de solução quando os autovalores μ_1, μ_2 da matriz A são positivos e menores do que λ_1, onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano. No caso $N = 3$ podemos garantir existência de solução quando Ω é uma bola e $\lambda_1/4 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$. A demonstração desses resultados, objetivo desse capítulo, é devida a C.O. Alves, D.C. de Morais Filho e M.A.S. Souto [3], que adaptaram para sistemas as idéias de Brezis-Nirenberg [8].

Começamos recordando que, para $\alpha+\beta \leq 2^*$, pela continuidade da imersão $H^1_o(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta}(\Omega)$, podemos obter uma melhor constante (maximal) $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$ tal que

$$S_{\alpha+\beta}(\Omega)\,\|u\|^2_{\alpha+\beta} \;\leq\; \|\nabla u\|^2_2, \;\text{ para todo } u \in H^1_o(\Omega),$$

a saber,

$$S_{\alpha+\beta}(\Omega) = \inf_{u\in H^1_o(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{(\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta} dx)^{2/(\alpha+\beta)}} \quad .$$

Para qualquer domínio Ω, $S_{2^*}(\Omega) = S_{2^*}(\mathbb{R}^N)$ (veja [29]). Denotamos $S_{2^*}(\Omega)$ por S.

Agora definimos

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx : (u,v) \in X \text{ com } \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx = 1\right\}. \tag{4.1}$$

Quando $\alpha+\beta = 2^*$, denotamos $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ por $\widetilde{S}$. O lema a seguir nos garante que $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ está bem definido e que $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0$.

Lema 4.1 *Se $\alpha + \beta \leq 2^*$, então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx\right)^{1/(\alpha+\beta)} \leq c\, \|(u,v)\|, \quad \forall\, (u,v) \in X.$$

Demonstração: Da definição de $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$ obtemos, para todo $(u,v) \in X$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx\right)^{1/(\alpha+\beta)} &\leq \left[\int_\Omega (\max\{|u|,|v|\})^{\alpha+\beta}\, dx\right]^{1/(\alpha+\beta)} \\
&\leq \left[\int_\Omega \left(|u|^{\alpha+\beta} + |v|^{\alpha+\beta}\right) dx\right]^{1/(\alpha+\beta)} \\
&\leq \left(2 \;\max\left\{\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta} dx, \int_\Omega |v|^{\alpha+\beta} dx\right\}\right)^{1/(\alpha+\beta)} \\
&\leq 2^{1/(\alpha+\beta)} \left[\left(\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta} dx\right)^{1/(\alpha+\beta)} + \left(\int_\Omega |v|^{\alpha+\beta} dx\right)^{1/(\alpha+\beta)}\right] \\
&\leq \frac{2^{1/(\alpha+\beta)}}{S^{1/2}_{\alpha+\beta}(\Omega)} \left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2}\right] \\
&= \frac{2^{1/(\alpha+\beta)}}{S^{1/2}_{\alpha+\beta}(\Omega)} 2\, \|(u,v)\| \quad .
\end{aligned}$$

□

A próxima proposição, de fundamental importância para a demonstração do Teorema A, nos dá uma relação entre $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$ e $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$.

Proposição 4.2 *Seja Ω um domínio (não necessariamente limitado) e $\alpha + \beta \leq 2^*$. Então*

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha+\beta)} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\right] S_{\alpha+\beta}(\Omega).$$

Além disso, se $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$ é atingido em ω_o então $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ é atingido em $(u_o, v_o) = (\frac{B\omega_o}{A}, \frac{C\omega_o}{A})$ para qualquer par de constantes reais B e C tais que $B/C = \sqrt{\alpha/\beta}$ e $A = \left(B^\alpha C^\beta \int_\Omega |\omega_o|^{\alpha+\beta} dx\right)^{1/(\alpha+\beta)}$.

Demonstração: Seja (ω_n) em $H^1_o(\Omega) \setminus \{0\}$ uma sequência minimizante para $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$. Considere $u_n = s\omega_n$ e $v_n = t\omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, com $s, t > 0$ a serem escolhidos posteriormente. Então

$$A_n = \left(\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx\right)^{1/(\alpha+\beta)} = (s^\alpha t^\beta)^{1/(\alpha+\beta)} \left(\int_\Omega |\omega_n|^{\alpha+\beta} dx\right)^{1/(\alpha+\beta)} \neq 0$$

e $\left(\frac{u_n}{A_n}, \frac{v_n}{A_n}\right)$ é tal que $\displaystyle\int_\Omega \left|\frac{u_n}{A_n}\right|^\alpha \left|\frac{v_n}{A_n}\right|^\beta dx = 1.$

Por (4.1) obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) &\leq \int_\Omega \left(\left|\nabla\left(\frac{u_n}{A_n}\right)\right|^2 + \left|\nabla\left(\frac{v_n}{A_n}\right)\right|^2\right)dx \\ &= \frac{\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)dx}{A_n^2} = \frac{s^2+t^2}{(s^\alpha t^\beta)^{2/(\alpha+\beta)}} \frac{\int_\Omega |\nabla \omega_n|^2 dx}{(\int_\Omega |\omega_n|^{\alpha+\beta}dx)^{2/(\alpha+\beta)}}.\end{aligned}$$

Observamos que

$$\frac{s^2+t^2}{(s^\alpha t^\beta)^{2/(\alpha+\beta)}} = \frac{s^2}{s^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}} t^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}}} + \frac{t^2}{s^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}} t^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}}} = \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{-2\alpha}{\alpha+\beta}}. \tag{4.2}$$

Escolhendo $s, t > 0$ tais que $s/t = \sqrt{\alpha/\beta}$, das duas expressões acima segue que

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha+\beta)} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\right] \frac{\int_\Omega |\nabla\omega_n|^2 dx}{\left(\int_\Omega |\omega_n|^{\alpha+\beta}dx\right)^{2/(\alpha+\beta)}}.$$

Fazendo $n \to \infty$ e lembrando que (ω_n) é uma sequência minimizante para $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$, obtemos

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha+\beta)} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\right] S_{\alpha+\beta}(\Omega). \tag{4.3}$$

Para mostrar a desigualdade contrária, consideramos $((u_n, v_n))$ em X tal que $\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, uma sequência minimizante para $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $z_n = s_n v_n$, onde $s_n > 0$ é tal que

$$\int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta}dx = \int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta}dx.$$

Aplicando a desigualdade de Young com $p = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ e $p' = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n|^\alpha |z_n|^\beta dx &\leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta}dx + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta}dx \\ &= \int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta}dx = \int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta}dx.\end{aligned}$$

Usando a definição de z_n, a desigualdade acima e a definição de $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)dx &= \frac{\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)dx}{\left(\int_\Omega |u_n|^\alpha|v_n|^\beta dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} \\
&= \frac{\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)dx}{\left(\int_\Omega |u_n|^\alpha \left(s_n^{-1}|z_n|\right)^\beta dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} \\
&= \frac{s_n^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}}\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx}{\left(\int_\Omega |u_n|^\alpha|z_n|^\beta dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}+\frac{s_n^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}}\int_\Omega |\nabla v_n|^2dx}{\left(\int_\Omega |u_n|^\alpha|z_n|^\beta dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} \qquad (4.4)\\
&\geq \frac{s_n^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}}\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx}{\left(\int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta}dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}}+\frac{s_n^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}}\int_\Omega s_n^{-2}|\nabla z_n|^2dx}{\left(\int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta}dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} \\
&\geq \left(s_n^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}}+s_n^{\frac{-2\alpha}{\alpha+\beta}}\right)S_{\alpha+\beta}(\Omega).
\end{aligned}$$

Agora definimos a função $g(s)=s^{2\beta/(\alpha+\beta)}+s^{-2\alpha/(\alpha+\beta)},\ \ s>0$. Afirmamos que o mínimo da função g é assumido no ponto $s=\sqrt{\alpha/\beta}$. De fato,

$$g'(s)=\frac{2}{\alpha+\beta}\left(\beta s^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}}-\alpha s^{\frac{-3\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right)=\frac{2}{\alpha+\beta}\,s^{\frac{-3\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\left(\beta s^2-\alpha\right).$$

Portanto, $s=\sqrt{\alpha/\beta}$ é um único ponto crítico de g. Vemos que se $s<\sqrt{\alpha/\beta}$ então $g'(s)<0$ e para $s>\sqrt{\alpha/\beta}$ temos que $g'(s)>0$. Logo $s=\sqrt{\alpha/\beta}$ é um ponto de mínimo local. Mais do que isso, $s=\sqrt{\alpha/\beta}$ é um ponto de mínimo absoluto de g.

De (4.4) e da definição de g vem

$$\begin{aligned}
\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)dx &\geq g(s_n)S_{\alpha+\beta}(\Omega) \ \geq\ g\left(\sqrt{\alpha/\beta}\right)S_{\alpha+\beta}(\Omega) \\
&= \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha+\beta)}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha(\alpha+\beta)}\right]S_{\alpha+\beta}(\Omega).
\end{aligned}$$

Fazendo $n\to\infty$ na desigualdade acima e lembrando que $((u_n,v_n))$ é uma sequência minimizante para $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$, obtemos

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)\geq\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha+\beta)}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha(\alpha+\beta)}\right]S_{\alpha+\beta}(\Omega). \qquad (4.5)$$

De (4.3) e (4.5) obtemos a relação desejada entre $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$ e $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$.

Além disso, se ω_o realiza $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$, isto é, se

$$S_{\alpha+\beta}(\Omega) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla \omega_o|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |\omega_o|^{\alpha+\beta} dx\right)^{\frac{2}{\alpha+\beta}}} ,$$

então, tomando $u_o = B\omega_o/A$ e $v_o = C\omega_o/A$, onde B e C são constantes reais tais que $B/C = \sqrt{\alpha/\beta}$ e $A = \left(B^\alpha C^\beta \int_\Omega |\omega_o|^{\alpha+\beta} dx\right)^{1/(\alpha+\beta)}$, e usando a relação entre $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$ e $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|\nabla u_o|^2 + |\nabla v_o|^2) dx &= \frac{B^2 + C^2}{(B^\alpha C^\beta)^{2/(\alpha+\beta)}} \frac{\int_\Omega |\nabla \omega_o|^2 dx}{(\int_\Omega |\omega_o|^{\alpha+\beta} dx)^{2/(\alpha+\beta)}} \\
&= \left[\left(\frac{B}{C}\right)^{2\beta/(\alpha+\beta)} + \left(\frac{B}{C}\right)^{-2\alpha/(\alpha+\beta)}\right] S_{\alpha+\beta}(\Omega) \\
&= \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha+\beta)} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\right] S_{\alpha+\beta}(\Omega) = \widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega).
\end{aligned}$$

Observe que $\int_\Omega |u_o|^\alpha |v_o|^\beta dx = 1$. Portanto, $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ é atingido em (u_o, v_o). □

Seguindo as idéias de Brezis-Nirenberg [8] definimos

$$Q_\lambda(u) = \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2) dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}, \qquad u \in H_o^1(\Omega) \setminus \{0\}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

e

$$S_\lambda^* = \inf_{u \in H_o^1(\Omega)\setminus\{0\}} Q_\lambda(u).$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in \Omega$. Em [8], Brézis e Nirenberg mostraram que no caso em que $N \geq 4$ e $\lambda > 0$ então $S_\lambda^* < S$. A mesma conclusão vale quando $N = 3$, Ω é uma bola e $\lambda > \lambda_1/4$. A idéia está em usar a função

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{[\varepsilon^2 + |x|^2]^{(N-2)/2}}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad x \in \Omega, \tag{4.6}$$

onde $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ é uma função de corte positiva tal que $\varphi(x) \equiv 1$ para x numa vizinhança de 0, para obter que

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) < S, \tag{4.7}$$

para ε suficientemente pequeno.

O funcional associado a $(P^+_{\alpha,\beta,A})$ é

$$J(u,v)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)\,dx-\frac{1}{2}\int_\Omega(AU,U)\,dx-\frac{2}{2^*}\int_\Omega(u^+)^\alpha(v^+)^\beta dx,\qquad (u,v)\in X.$$

Vimos na Seção 1.2 que este funcional está bem definido e é de classe C^1, com

$$J'(u,v)(\varphi,\zeta)=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx+\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla\zeta\,dx-\int_\Omega au\varphi\,dx-\int_\Omega bv\varphi\,dx-\int_\Omega bu\zeta\,dx-\int_\Omega cv\zeta\,dx$$

$$-\frac{2\alpha}{2^*}\int_\Omega(u^+)^{\alpha-1}(v^+)^\beta\varphi\,dx-\frac{2\beta}{2^*}\int_\Omega(u^+)^\alpha(v^+)^{\beta-1}\zeta\,dx,\quad \text{para todo } \varphi,\zeta\in H^1_o(\Omega).$$

Nos dois próximos lemas verificamos que J tem a geometria do Passo da Montanha.

Lema 4.3 *Suponha $\alpha+\beta=2^*$ e $\mu_2<\lambda_1$. Então existem $\rho,r>0$ tais que $J(u,v)\geq\rho>0$ para todo $(u,v)\in X$ com $\|(u,v)\|=r$.*

Demonstração. Por (2.8), pelo Lema 4.1 e pela caracterização variacional de λ_1 dada em (1.20),

$$\begin{aligned}
J(u,v) &\geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{1}{2}\int_\Omega(AU,U)\,dx-\frac{2}{2^*}\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx\\
&\geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{1}{2}\mu_2\int_\Omega(u^2+v^2)\,dx-C\|(u,v)\|^{2^*}\\
&\geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{1}{2}\frac{\mu_2}{\lambda_1}\|(u,v)\|^2-C\|(u,v)\|^{2^*}\\
&= \|(u,v)\|^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)-C\|(u,v)\|^{2^*-2}\right],
\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva.

Tomando $r=\left[\frac{1}{4}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\frac{1}{C}\right]^{1/(2^*-2)}>0$, obtemos

$$J(u,v)\geq\left[\frac{1}{4}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\right]^{N/2}\left(\frac{1}{C}\right)^{(N-2)/2}>0,\qquad \text{quando } \|(u,v)\|=r.$$

$\square$

Lema 4.4 *Suponha $\alpha+\beta=2^*$. Então existe $(u_1,v_1)\in X$ tal que $\|(u_1,v_1)\|>r$ e $J(u_1,v_1)<0$, onde r é dado pelo Lema 4.3. Além disso,*

(i) se $N\geq4$ e $0<\mu_1\leq\mu_2<\lambda_1$ ou

(ii) se $N = 3$, Ω é uma bola e $\lambda_1/4 < \mu_1 \le \mu_2 < \lambda_1$,
então (u_1, v_1) pode ser escolhido de forma que

$$\sup_{t \ge 0} J(tu_1, tv_1) < \frac{2}{N} \left(\frac{\widetilde{S}}{2} \right)^{N/2}.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, supomos $0 \in \Omega$. Fixe $(u_o, v_o) \in X \setminus \{0\}$ com $u_o, v_o > 0$ numa vizinhança de 0. Por (2.8) obtemos, para $t > 0$,

$$J(tu_o, tv_o) \le \frac{1}{2} t^2 \|(u_o, v_o)\|^2 - \frac{1}{2} \mu_1 t^2 \int_\Omega (u_o^2 + v_o^2)\, dx - \frac{2}{2^*} t^{2^*} \int_\Omega (u_o^+)^\alpha (v_o^+)^\beta dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} J(tu_o, tv_o) &\le \lim_{t \to \infty} t^2 \left[\frac{1}{2} \|(u_o, v_o)\|^2 - \frac{\mu_1}{2} \int_\Omega (u_o^2 + v_o^2)\, dx - \frac{2}{2^*} t^{2^*-2} \int_\Omega (u_o^+)^\alpha (v_o^+)^\beta dx \right] \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Escolhendo $(u_1, v_1) = (t_1 u_o, t_1 v_o)$ com $t_1 > 0$ suficientemente grande, a primeira parte do lema está demonstrada.

Agora sejam u_ε dado em (4.6) e B, C constantes reais positivas tais que $B/C = \sqrt{\alpha/\beta}$. Pela primeira parte do lema podemos escolher $(u_1, v_1) = (t_1 B u_\varepsilon, t_1 C u_\varepsilon)$ com t_1 suficientemente grande de forma que $J(u_1, v_1) < 0$ e $\|(u_1, v_1)\| > r$. Por (2.8) e por nossa escolha de (u_1, v_1) obtemos

$$\begin{aligned} J(tu_1, tv_1) &\le \frac{1}{2} t^2 \int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2) dx - \frac{1}{2} t^2 \mu_1 \int_\Omega (u_1^2 + v_1^2) dx - \frac{2}{2^*} t^{2^*} \int_\Omega (u_1^+)^\alpha (v_1^+)^\beta dx \\ &= \frac{1}{2} (B^2 + C^2) t_1^2 \left[\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx - \mu_1 \int_\Omega u_\varepsilon^2 dx \right] t^2 - \frac{2}{2^*} B^\alpha C^\beta t_1^{2^*} \|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} t^{2^*} \\ &= a_1 t^2 - a_2 t^{2^*}, \end{aligned}$$

onde $a_1 = (1/2)(B^2 + C^2) t_1^2 Q_{\mu_1}(u_\varepsilon) \|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 > 0$ e $a_2 = (2/2^*) B^\alpha C^\beta t_1^{2^*} \|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} > 0$. Note que, por (1.20), $Q_{\mu_1}(u_\varepsilon) > 0$, pois $\mu_1 < \lambda_1$. Definindo $h(t) = a_1 t^2 - a_2 t^{2^*}$, $t \ge 0$, por um cálculo direto vemos que

$$t_o = \left(\frac{2a_1}{2^* a_2} \right)^{1/(2^*-2)} = \frac{1}{t_1 \|u_\varepsilon\|_{2^*}} \left[\frac{1}{2} \frac{B^2 + C^2}{B^\alpha C^\beta} Q_{\mu_1}(u_\varepsilon) \right]^{1/(2^*-2)}$$

é o ponto de máximo absoluto de h e

$$h(t_o) = \frac{2}{N} \left[\frac{1}{2} \frac{B^2 + C^2}{(B^\alpha C^\beta)^{2/2^*}} Q_{\mu_1}(u_\varepsilon) \right]^{N/2} > 0.$$

Por (4.2), usando que $B/C = \sqrt{\alpha/\beta}$, obtemos

$$\sup_{t\geq 0} J(tu_1, tv_1) \;=\; h(t_o) \;=\; \frac{2}{N}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/2^*} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\alpha/2^*}\right] Q_{\mu_1}(u_\varepsilon)\right\}^{N/2}. \tag{4.8}$$

Sob as hipóteses (i) ou (ii), por (4.7) obtemos

$$Q_{\mu_1}(u_\varepsilon) < S.$$

Daí, de (4.8) e da Proposição 4.2, concluímos que

$$\sup_{t\geq 0} J(tu_1, tv_1) < \frac{2}{N}\left(\frac{\widetilde{S}}{2}\right)^{N/2}$$

e portanto, a segunda parte do lema está demonstrada. □

Demonstração do Teorema A. Escolhemos (u_1, v_1) satisfazendo as conclusões do Lema 4.4 e definimos

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = (0,0) \; e \; \gamma(1) = (u_1, v_1)\}$$

e o nível do passo da montanha por

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} J(\gamma(t)). \tag{4.9}$$

Pelo Lema 4.3, vemos que $c \geq \rho > 0$. Além disso, pelo Lema 4.4, obtemos

$$c < \frac{2}{N}\left(\frac{\widetilde{S}}{2}\right)^{N/2}. \tag{4.10}$$

Aplicando o Teorema 1.35, existe uma sequência $(u_n, v_n) \in X$ tal que

$$J(u_n, v_n) \to c \tag{4.11}$$

e

$$J'(u_n, v_n) \to 0 \text{ em } X', \tag{4.12}$$

quando $n \to \infty$. Observe que por (2.8) e (1.20) temos

$$J(u_n, v_n) - \frac{1}{2^*} J'(u_n, v_n)(u_n, v_n) \geq \frac{1}{N}\left(\frac{\lambda_1 - \mu_2}{\lambda_1}\right)\|(u_n, v_n)\|^2.$$

Por outro lado, de (4.11) e (4.12) temos

$$\begin{aligned} J(u_n,v_n) - \frac{1}{2^*}J'(u_n,v_n)(u_n,v_n) &\leq |J(u_n,v_n)| + \frac{1}{2^*}\|J'(u_n,v_n)\|_{X'}\|(u_n,v_n)\| \\ &\leq K_1 + K_2\|(u_n,v_n)\|, \end{aligned}$$

onde K_1 e K_2 são constantes positivas. Como $\mu_2 < \lambda_1$, as duas últimas desigualdades nos dão $\|(u_n,v_n)\|^2 \leq K_3 + K_4\|(u_n,v_n)\|$, onde K_3 e K_4 são constantes positivas. Daí concluímos que (u_n,v_n) é uma sequência limitada em X. Pela Proposição 1.10, existe $(u_o,v_o) \in X$ tal que, a menos de subsequência,

(i) $u_n \rightharpoonup u_o$ e $v_n \rightharpoonup v_o$ fracamente em $H_o^1(\Omega)$,
(ii) $u_n \to u_o$ e $v_n \to v_o$ fortemente em $L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < 2^*$ e
(iii) $u_n \to u_o$ e $v_n \to v_o$ q.t.p. em Ω.

Vamos mostrar que (u_o,v_o) é uma solução de $(P^+_{\alpha,\beta,A})$. De (4.12) temos que

$$J'(u_n,v_n)(\varphi,\zeta) = o_n(1), \quad \forall\,(\varphi,\zeta) \in X,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla\zeta\,dx - \int_\Omega a u_n\varphi\,dx - \int_\Omega b v_n\varphi\,dx - \int_\Omega b u_n\zeta\,dx - \int_\Omega c v_n\zeta\,dx$$

$$-\frac{2\alpha}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha-1}(v_n^+)^\beta\varphi\,dx - \frac{2\beta}{2^*}\int_\Omega (u_n^+)^\alpha(v_n^+)^{\beta-1}\zeta\,dx = o_n(1),\ \ \forall\,(\varphi,\zeta) \in X. \tag{4.13}$$

Vamos analisar o comportamento de cada termo de (4.13) quando $n \to \infty$. Afirmamos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\varphi\,dx \to \int_\Omega \nabla u_o \cdot \nabla\varphi\,dx \tag{4.14}$$

e

$$\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla\zeta\,dx \to \int_\Omega \nabla v_o \cdot \nabla\zeta\,dx, \tag{4.15}$$

quando $n \to \infty$. De fato, seja $f : H_o^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx$, onde $\varphi \in H_o^1(\Omega)$. Observe que f é linear e além disso, pela desigualdade de Hölder, $|f(u)| \leq \|\varphi\|_{H_o^1(\Omega)}\|u\|_{H_o^1(\Omega)}$, logo f é contínua. Portanto $f \in (H_o^1(\Omega))'$. Como $u_n \rightharpoonup u_o$ fracamente em $H_o^1(\Omega)$ então por (i) da Proposição 1.1 temos (4.14). Analogamente, mostra-se (4.15). Também, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega u_n\varphi\,dx - \int_\Omega u_o\varphi\,dx\right| \leq \int_\Omega |(u_n - u_o)\varphi|\,dx \leq \|u_n - u_o\|_2\|\varphi\|_2,$$

e usando o fato de que $u_n \to u_o$ fortemente em $L^2(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega u_n\varphi\, dx \to \int_\Omega u_o\varphi\, dx, \text{ quando } n\to\infty. \tag{4.16}$$

Analogamente, vale

$$\int_\Omega v_n\varphi\, dx \to \int_\Omega v_o\varphi\, dx, \qquad \int_\Omega u_n\zeta\, dx \to \int_\Omega u_o\zeta\, dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega v_n\zeta\, dx \to \int_\Omega v_o\zeta\, dx, \tag{4.17}$$

quando $n\to\infty$. Agora vamos mostrar que para todo $\varphi,\zeta \in H_o^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha-1}(v_n^+)^{\beta}\varphi\, dx \to \int_\Omega (u_o^+)^{\alpha-1}(v_o^+)^{\beta}\varphi\, dx \tag{4.18}$$

e

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha}(v_n^+)^{\beta-1}\zeta\, dx \to \int_\Omega (u_o^+)^{\alpha}(v_o^+)^{\beta-1}\zeta\, dx \tag{4.19}$$

quando $n\to\infty$. Seja $w_n = (u_n^+)^{\alpha-1}(v_n^+)^{\beta}$. Afirmamos que $w_n \in L^{2^*/(2^*-1)}(\Omega)$. De fato, usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p=(2^*-1)/(\alpha-1)$ e $p'=(2^*-1)/\beta$ e a continuidade da imersão $H_o^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ obtemos uma constante $K>0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |w_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx &\leq \int_\Omega \left(|u_n|^{\alpha-1}|v_n|^{\beta}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{\alpha-1}{2^*-1}} \left(\int_\Omega |v_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{\beta}{2^*-1}} \\
&\leq K\|u_n\|_{H_o^1(\Omega)}^{\frac{2^*(\alpha-1)}{2^*-1}} \|v_n\|_{H_o^1(\Omega)}^{\frac{2^*\beta}{2^*-1}} \\
&\leq K\|(u_n,v_n)\|^{2^*(\frac{\alpha-1}{2^*-1}+\frac{\beta}{2^*-1})} \\
&= K\|(u_n,v_n)\|^{2^*}.
\end{aligned}$$

Como (u_n,v_n) é uma sequência limitada em X segue que w_n é uma sequência limitada em $L^{2^*/(2^*-1)}(\Omega)$. Além disso, por (iii), $w_n \to (u_o^+)^{\alpha-1}(v_o^+)^{\beta}$ q.t.p. em Ω. Aplicando o Teorema 1.6 concluímos que

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha-1}(v_n^+)^{\beta}\varphi\, dx \to \int_\Omega (u_o^+)^{\alpha-1}(v_o^+)^{\beta}\varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi\in L^{2^*}(\Omega),$$

e em particular, para todo $\varphi \in H_o^1(\Omega)$. A prova de (4.19) é análoga. Agora fazendo $n\to\infty$ em (4.13) e usando (4.14)-(4.19) obtemos $J'(u_o,v_o)(\varphi,\zeta)=0$, para todo $\varphi,\zeta\in H_o^1(\Omega)$. Agora, de $J'(u_o,v_o)(u_o^-,v_o^-)=0$ obtemos

$$\int_\Omega (|\nabla u_o^-|^2+|\nabla v_o^-|^2)\, dx - \int_\Omega \left[a(u_o^-)^2+2b(u_o^-)(v_o^-)+c(v_o^-)^2\right] dx = b\int_\Omega (v_o^+u_o^- + u_o^+v_o^-)\, dx \leq 0.$$

Daí, e de (2.8), temos

$$\|(u_o^-, v_o^-)\|^2 - \mu_2 \int_\Omega \left[(u_o^-)^2 + (v_o^-)^2\right] \, dx \leq 0.$$

Combinando com (1.20) vem

$$\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right) \|(u_o^-, v_o^-)\|^2 \leq 0,$$

e consequentemente, $(u_o^-, v_o^-) = (0,0)$. Portanto, $u_o \geq 0$ e $v_o \geq 0$. Daí, (u_o, v_o) satisfaz (1) e portanto é solução fraca de $(P_{\alpha,\beta,A})$. Pela Proposição 3.1, temos que $u_o, v_o \in C^2(\overline{\Omega})$ e consequentemente (u_o, v_o) é solução de $(P_{\alpha,\beta,A})$. Para mostrar que esta solução é não trivial, primeiramente observamos que $u_o \equiv 0$ se, e somente se, $v_o \equiv 0$. De fato, se $u_o \equiv 0$ e $v_o \not\equiv 0$ então pela primeira equação de $(P_{\alpha,\beta,A})$ obtemos que $b = 0$. Daí concluímos que $\mu_1 = c$ ou $\mu_2 = c$. Agora, pelas segunda e terceira equação de $(P_{\alpha,\beta,A})$, temos

$$\begin{cases} -\Delta v = cv, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

O fato de que $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$ contradiz λ_1 ser o menor autovalor positivo do Laplaciano. O mesmo raciocínio vale para $v_o \equiv 0$ e $u_o \not\equiv 0$. Concluímos que u_o e v_o são ambas não identicamente nulas ou $(u_o, v_o) \equiv (0,0)$. O último caso não pode ocorrer. De fato, argumentando por contradição, supomos que $(u_o, v_o) \equiv (0,0)$. Como (u_n, v_n) é uma sequência limitada em X, passando uma subsequência se necessário, podemos supor que existe

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) \, dx \geq 0. \tag{4.20}$$

Pela convergência forte de $(u_n), (v_n)$ em $L^2(\Omega)$, obtemos, como na demonstração do Teorema D,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (au_n^2 + 2bu_n v_n + cv_n^2) dx = \int_\Omega (au_o^2 + 2bu_o v_o + cv_o^2) dx = 0. \tag{4.21}$$

De $J'(u_n, v_n)(u_n, v_n) = o_n(1)$ e de (4.20), (4.21), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n^+)^\alpha (v_n^+)^\beta dx = \frac{\ell}{2}. \tag{4.22}$$

Por outro lado, de $J(u_n, v_n) = c + o_n(1)$ e de (4.20), (4.22), obtemos $c = \ell/N$. Se

$A_n = \left(\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx\right)^{1/2^*} \neq 0$ então

$$\int_\Omega \left(\left| \nabla \left(\frac{u_n}{A_n} \right) \right|^2 + \left| \nabla \left(\frac{v_n}{A_n} \right) \right|^2 \right) dx \ \geq \ \widetilde{S}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2) dx &\geq \widetilde{S} A_n^2 = \widetilde{S} \left(\int_\Omega |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx \right)^{2/2^*} \\ &\geq \widetilde{S} \left(\int_\Omega (u_n^+)^\alpha (v_n^+)^\beta dx \right)^{2/2^*}. \end{aligned}$$

Note que se $A_n = 0$, a desigualdade acima é trivialmente satisfeita. Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima e usando que $\ell = cN$, obtemos $c \geq \dfrac{2}{N} \left(\dfrac{\widetilde{S}}{2} \right)^{N/2}$, o que contradiz (4.10). Portanto, $(u_o, v_o) \not\equiv (0,0)$. Pelo Lema 3.2 concluímos que $u_o, v_o > 0$ em Ω. Isto finaliza a demonstração do Teorema A. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] ALVES, C. O.; DE MORAIS FILHO, D. C.; MIYAGAKI, O. H. Multiple solutions for an elliptic system on bounded and unbounded domains. **Nonlinear Anal. TMA**, v. 56, p. 555-568, 2004.

[3] ALVES, C. O.; DE MORAIS FILHO, D. C.; SOUTO M. A. S. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents. **Nonlinear Analysis**, v.42, p. 771-787, 2000.

[4] ALVES, C. O.; DING, Y. H. Multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation involving critical nonlinearity. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 279, p. 508-521, 2003.

[5] AMBROSETTI, A.; STRUWE, M. A note on the problem $-\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2}$. **Manuscripta Math.**, v. 54, p. 372-379, 1986.

[6] BENCI, V.; CERAMI, G. The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems. **Arch. Rational Mech. Anal.**, v. 114, p. 79-93, 1991.

[7] BOURBAKI, N. **Topologie Générale**. Paris: Ed. Hermann, 1974.

[8] BRÉZIS, H.; NIRENBERG L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. **Comm. Pure Appl. Math.**, vol. 36, p. 437-477, 1983.

[9] BRÉZIS, H. **Analyse fonctionnelle, théorie et applications**. 4ª tiragem, Paris: Masson, 1993.

[10] CAPOZZI, A.; FORTUNATO, D.; PALMIERI, G. An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents. **Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Lineaire**, v. 2, p. 463-470, 1985.

[11] CARRIÃO, C.; MIYAGAKI, O. H. Existence of non-trivial solutions of elliptic variational systems in unbounded domains. **Nonlinear Analysis**, v. 51, p. 155-169, 2002.

[12] CERAMI, G.; FORTUNATO, D.; STRUWE, M. Biffurcation and multiplicit result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents. **Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Lineaire**, v. 1, p. 341-350, 1984.

[13] CINGOLANI, S.; VANNELLA, G. Multiple positive solutions for a critical quasilinear equation via Morse theory. **Ann. I. H. Poincaré - AN**, v. 26, p. 397-413, 2009.

[14] DE MORAIS FILHO, D. C.; SOUTO, M. A. S. Systems of p-Laplacian equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees. **Commun. PDE**, v. 24, p. 1537-1553, 1999.

[15] DEVILLANOVA, G.; SOLIMINI, S. Concentration estimates and multiple solutions to elliptic problems at critical growth. **Advances in Differential Equations**, v. 7, p. 1257-1280, 2002.

[16] DRÁBEK, P.; HUANG, Y. X. Multiplicity of positive solutions for some quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent. **J. Differential Equations**, v. 140, p. 106-132, 1997.

[17] FIGUEIREDO, D. G.; GOSSEZ, J. P. Strict Monotonicity of eigenvalues and unique continuation. **Comm. in Partial Differential Equations**, v. 17, p. 339-346, 1992.

[18] GARCIA AZORERO, J.; PERAL ALONSO, I. Multiplicity of solutions for elliptic problems with a nonsymmetric term. **Trans. Am. Math. Soc.**, v. 323, p. 877-895, 1991.

[19] GAZZOLA, G.; RUF, B. Lower-order pertubations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations. **Advances in differential equations**, v. 2, p. 555-572, 1997.

[20] GILBARG, D.; TRUDINGER, N.S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Berlin: Springer-Verlag, 2ª ed., 1983.

[21] GUEDDA, M.; VERON, L. Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. **Nonlinear Anal. T.M.A.**, v. 13, p. 879-902, 1989.

[22] HAN, P. Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems involving critical Sobolev exponents. **Nonlinear Analysis TMA**, v. 64, p. 869-886, 2006.

[23] JERISON, D.; KENIG, C. E. Unique continuation and absence of positive eigevalues fo Schrödinger operators. **Ann. Math.** v. 121, p. 463-494, 1985.

[24] KAVIAN, O. **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problêmes elliptiques**. Paris: Springer-Verlag, 1993.

[25] KENIG, C. E. Restriction theorems, Carleman estimates, uniform Sobolev inequalities and unique continuation. **Harmonic analysis and partial differential equations (El Escorial, 1987)**, p. 69-90, Lecture notes in Math., Springer, 1989.

[26] McOWEN, R. C. **Partial differential equations: methods and applications**. Prentice-Hall, 1996.

[27] POHOZAEV, S. Eingefunctions of the equation $-\nabla u + \lambda f(u) = 0$. **Soviet Math. Dokl**, v. 6, p. 1408-1411, 1985.

[28] REY, O. A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness. **Nonlinear Analysis TMA**, v. 13, p. 1241-1249, 1989.

[29] STRUWE, M. **Variational methods: Applications to nonlinear PDE and Hamiltonian systems**. New York, Springer-Verlag, 1990.

[30] VELIN, J. Existence results for some nonlinear elliptic system with lack of compactness. **Nonlinear Analysis**, v. 52, p. 1017-1034, 2003.

[31] WILLEM, M. **Minimax Theorems**. Boston: Birkhäuser, 1996.

[32] ZHAOXIA, L.; HAN, P., Existence of solutions for singular elliptic systems with critical exponents. **Nonlinear Analysis TMA**, v. 69, p. 2968-2983, 2008.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo