

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

“Projeto de Controladores Baseados em LMIs: Realimentação Derivativa e
Sistemas Chaveados Utilizando Estrutura Variável”

RODRIGO CARDIM

Engenheiro Eletricista - FEIS/UNESP

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira - SP
Setembro / 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

Cardim, Rodrigo.

C267p Projeto de controladores baseados em LMIs : realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável / Rodrigo Cardim. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2009. 120f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2009

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Bibliografia: p. 106-113

1. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). 2. Sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. 3. Sistemas de controle por realimentação. 4. Realimentação derivativa. 5. Sistemas chaveados. 6. Sistemas ERP. 7. Liapunov, funções de.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Projeto de Controladores Baseados em LMIs: Realimentação Derivativa e Sistemas Chaveados Utilizando Estrutura Variável

AUTOR: RODRIGO CARDIM
ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR em ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. ALDAYR DANTAS DE ARAUJO
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. RAMON ROMANKEVICIUS COSTA
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal do Rio de Janeiro

Data da realização: 12 de setembro de 2009.

*Aos meus pais, Gerson e Neusa, e à minha irmã
Fabiana, pelo amor e carinho que me concedem.*

DEDICO

*“Conhece-se um ser humano não pelo seu discurso,
mas pelos seus atos e comportamentos.”*

*“A Humildade é a capacidade de desapegar-se
da necessidade neurótica de estar sempre certo, de
reconhecer os próprios erros e de aprender.”*

Augusto Cury

Agradecimentos

Presto meus sinceros agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- À Deus, por ter me dado a vida, a saúde e o privilégio de ter uma família maravilhosa.
- Ao Prof. Marcelo C. M. Teixeira, pelos grandes ensinamentos, pelo incentivo e pela orientação, dada com muita sabedoria, determinação e humildade.
- Ao Prof. Edvaldo Assunção, pelo apoio e pelos valiosos conselhos, sempre motivando e transmitindo confiança e serenidade.
- Aos meus pais, Gerson e Neusa, à minha irmã Fabiana, ao meu cunhado Moacir, ao meu tio Osmar e à minha namorada Rafaela. Com eles tenho dividido os momentos difíceis e multiplicado os momentos de felicidade.
- Aos professores José Paulo, Erica e Neusa, pela força e pelas sugestões.
- Aos amigos que trabalharam comigo no laboratório de controle, Cristiano, Flávio, Márcio, Jean, Emerson, Ruberlei, Renato, Gisele, Fernando, Leandro, Adilson, Carlos, Eli-seu, Grace e Tatiane, pela amizade e companheirismo em tantos longos dias de trabalho.
- Aos meus amigos da antiga república, pelo companheirismo e pela amizade.
- Aos professores Aldayr e Ramon, pelas sugestões dadas à este trabalho.
- À Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS-UNESP), local onde estudei durante a graduação e o doutorado.
- Finalmente, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pela oportunidade e apoio financeiro.

Talvez eu não tenha lembrado de todos neste momento, mas pode ter a certeza que eu não os esqueci.

Resumo

Neste trabalho são apresentados estudos teóricos, projetos de controladores e simulações numéricas de alguns sistemas de controle automáticos, que no decorrer das pesquisas geraram novas contribuições. Primeiramente foi feito um breve estudo sobre os sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS) e realizadas algumas simulações envolvendo exemplos acadêmicos como o sistema bola-viga e o levitador magnético. Em decorrência desses estudos foi proposto um novo método para o controle de sistemas mecânicos não-lineares, descritos através de modelos fuzzy TS, considerando o acesso somente às derivadas das variáveis de estado da planta, com projeto baseado em desigualdades matriciais lineares, em inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) e estabilidade assegurada através de funções de Lyapunov. Adicionalmente, foram feitos estudos sobre realimentação derivativa, e proposto um novo método para projetar a matriz de realimentação discreta no tempo da derivada do vetor de estado, tal que o sinal de controle obtido seja equivalente a uma dada lei de controle contínua no tempo com realimentação do vetor de estado. O controlador discreto é obtido com base no controlador contínuo, utilizando um método de aproximação, baseado em LMIs. É suposto que a planta é controlável, linear e invariante no tempo, com uma (SI) ou múltiplas (MI) entradas. Este procedimento permite o uso de métodos de projeto bem conhecidos de realimentação das variáveis de estado em sistemas contínuos no tempo, para calcular diretamente os ganhos de realimentação da derivada das variáveis de estado em sistemas discretos no tempo. Os projetos com realimentação derivativa podem ser úteis no controle de sistemas mecânicos, utilizando-se acelerômetros como sensores. Finalizando, um outro assunto abordado neste trabalho e que também trouxe contribuições relevantes, envolve os sistemas chaveados e o Controle com Estrutura Variável (CEV) considerando disponível o vetor de estado da planta. O projeto é baseado em desigualdades de Lyapunov-Metzler (LM) e em resultados de estabilidade de sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP). Foram definidos os sistemas Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP), que permitiram o desenvolvimento de um novo método de projeto de CEV para sistemas com comutação. O método também foi aplicado no controle de um conversor dc-dc, e foram obtidos resultados com desempenho superior, comparado com métodos recentes de controle com modos deslizantes para sistemas chaveados. Para verificar a validade dos métodos propostos, são apresentados exemplos numéricos e simulações utilizando o software MATLAB.

Palavras chave: Desigualdades matriciais lineares (LMIs), Modelos fuzzy Takagi-Sugeno, Realimentação derivativa, Sistemas Chaveados, Sistemas ERP, Desigualdades de Lyapunov-Metzler.

Abstract

In this work, theoretical studies, controller designs and numeric simulations of several automatic control systems that generated new contributions are presented. Firstly, a study on Takagi-Sugeno fuzzy systems modeling, control designs and simulations with practical examples, such as a ball-beam system and a nonlinear magnetic suspension system, are described. With these studies a simple method, based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and Lyapunov functions, for designing a control system using the Takagi-Sugeno fuzzy models in mechanical systems, where the available signals for the control are state-derivative, is proposed. Additionally, new results about state-derivative feedback including a simple method for designing a digital state-derivative feedback gain such that the control law is equivalent to a known and adequate continuous-time state feedback control law with a guaranteed stability are proposed. The digital controller is obtained by the continuous controller, using an approach method, based on LMIs. It is assumed that the plant is a linear controllable, time-invariant, Single-Input (SI) or Multiple-Input (MI) system. This procedure allows the use of well-known continuous-time state feedback design methods to directly design discrete-time state-derivative feedback control systems. The state-derivative feedback can be useful in the vibration control of mechanical systems, where the main sensors are accelerometers. Finally, we have the study with the design of state-feedback Variable Structure Controllers (VSC) for a class of continuous-time switched plants where is assume that the state vector is available for feedback. The design is based on Lyapunov-Metzler (LM) inequalities and also on Strictly Positive Real (SPR) systems stability results. The recent definition of Lyapunov-Metzler-SPR (LMSPR) systems is presented and a new direct application in the design of VSC for switched systems is proposed. The method is also applied to the control of a dc-dc power converter: The performance of the resulting control system is superior to that afforded by a recently proposed alternative sliding-mode control technique. To verify the validity of the proposed methods, numeric examples and simulations using the software MATLAB are presented.

Keywords: Linear matrix inequalities (LMIs), Takagi-Sugeno fuzzy models, State-Derivative Feedback, Switched systems, SPR systems, Lyapunov-Metzler inequalities.

Lista de Siglas e Abreviações

- **LMI**s: *Linear Matrix Inequalities*.
- **SI**: *Single Input*.
- **MI**: *Multiple Input*.
- **CEV**: Controle com Estrutura Variável.
- **VSC**: *Variable Structure Controller*.
- **LM**: *Lyapunov-Metzler*.
- **ERP**: Estritamente Real Positivo.
- **SPR**: *Strictly Positive Real*.
- **LMERP**: Lyapunov-Metzler-ERP.
- **LMSPR**: *Lyapunov-Metzler-SPR*.
- **TS**: Takagi e Sugeno.
- **TSK**: Takagi, Sugeno e Kang.
- **CDP**: Compensação Distribuída Paralela.
- **BMI**: *Bilinear Matrix Inequality*.
- **SLIT**: Sistema Linear Invariante no Tempo.

Lista de Figuras

2.1	Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.	21
2.2	Sistema Bola-Viga.	31
2.3	Simulação com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$ – Estabilidade. . .	35
2.4	Simulação com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$ – Estabilidade e Restrição na entrada ($ u(t) < 10$).	36
2.5	Simulação com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$ – Estabilidade, Restrição na entrada ($ u(t) < 10$) e Restrição na saída ($ x_1(t) < 1$).	38
2.6	Simulação com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$ – Estabilidade, Restrição na entrada ($ u(t) < 10$), Restrição na saída ($x_1(t) < 1$) e Taxa de decaimento ($\beta = 0.021$).	39
2.7	Levitador Magnético.	40
2.8	Levitador Magnético Quanser.	40
2.9	Sistema de controle do levitador utilizando o modelo fuzzy TS.	44
2.10	Respostas do sistema considerando a condição inicial $\bar{x}_{10} = 12\text{cm}$ e $\bar{x}_{20} = 0$. . .	44
3.1	Sistema de controle com o método de estimação de estados.	48
3.2	Respostas para a condição inicial ($\bar{x}_{10} = 0.12\text{m}$, $\bar{x}_{20} = 0$) com x_1 disponível (Figura 2.9) e x_1 estimado (Figura 3.1), curvas praticamente sobrepostas.	49
3.3	Sistema com o método de estimação de estados, eliminando o <i>loop</i> algébrico. . .	49
3.4	Respostas do sistema com o integrador, considerando a condição inicial ($\bar{x}_{10} = 0.075\text{m}$, $\bar{x}_{20} = 0$ e $x_{30} = 0$), curvas praticamente sobrepostas.	50
3.5	Representação esquemática da perna.	51
3.6	Curva exata e aproximada da função não-linear $\tilde{f}_{21}(x_1)$	56
3.7	Curva exata e aproximada da função $\tilde{f}_{21}(x_1)x_1$, praticamente sobrepostas.	56

3.8	<i>Root locus</i> com $c(t) > 0$	57
3.9	<i>Root locus</i> com $c(t) < 0$	57
3.10	Sistema de controle com o método proposto.	58
3.11	Comportamento da posição angular ($\theta_v(t)$) da perna, com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$, curvas praticamente sobrepostas.	58
3.12	Comportamento da velocidade angular ($\dot{\theta}_v(t)$) da perna, com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$, curvas praticamente sobrepostas.	59
3.13	Comportamento do torque ativo ($M_a(t)$) produzido pela estimulação, com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$, curvas praticamente sobrepostas.	59
3.14	Comportamento da largura de pulso ($P(t)$) do sistema com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$, curvas praticamente sobrepostas.	60
3.15	Respostas sem o sinal de controle (P_N), com a condição inicial $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$	60
4.1	Respostas transitórias dos sistemas contínuo e discreto (com o método proposto por (CHANG et al., 2002)).	68
4.2	Ilustração do helicóptero com algumas variáveis de estado.	72
4.3	Respostas transitórias com as leis de controle (4.2) (contínuo) e (4.7) (discreto).	74
4.4	Respostas transitórias com as leis de controle (4.7) e (4.29).	74
4.5	Sinais de controle $u_c(t)$, $u_d(kT)$ e $u_{df}(kT)$	74
5.1	Sistema realimentado para síntese Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP).	84
5.2	Região de factibilidade para as condições do Teorema 5.	88
5.3	Região de factibilidade para as condições do Teorema 6.	89
5.4	Regiões de factibilidade para as condições impostas no Teorema 5 (“o”), e nos Teoremas propostos 6 e 7 (“.”).	93
5.5	Plano de fase (Exemplo 2).	95
5.6	Trajetória do sinal $x_1(t)$	95
5.7	Trajetória do sinal $x_2(t)$	95
5.8	Esquema elétrico de um conversor dc-dc.	96
5.9	Respostas transitórias da variável de estado $x_1(t) = i_L(t)$ ($x_{1r} = 2$ A).	100

5.10	Respostas transitórias da variável de estado $x_2(t) = v_C(t)$ ($x_{2r} = -40$ V).	101
5.11	Respostas transitórias da função de Lyapunov dada em (5.72).	101

Sumário

1	Introdução	15
2	Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	19
2.1	Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	24
2.2	Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy	25
2.3	Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs	27
2.4	Taxa de Decaimento	28
2.5	Restrição da Entrada	30
2.6	Restrição da Saída	30
2.7	Exemplo 1 - Sistema Bola-Viga	31
2.8	Exemplo 2 - Levitador Magnético	38
2.9	Conclusões Parciais	45
3	Controle Utilizando Modelos Fuzzy e Estimador com a Derivada do Vetor de Estado da Planta	46
3.1	Exemplo 1 - Levitador Magnético	47
3.2	Exemplo 2 - Controle de Posição da Perna de Pacientes Paraplégicos	50
3.3	Conclusões Parciais	60
4	Projeto da Realimentação Derivativa Discreta com a Realimentação Não-Derivativa Contínua (<i>Redesign</i>)	62
4.1	Introdução	62
4.2	<i>Redesign</i> Discreto com Realimentação do Vetor de Estado	63

4.3	Exemplo 1	67
4.4	<i>Redesign</i> Discreto com Realimentação da Derivada do Vetor de Estado	68
4.5	Implementação do Controlador	70
4.6	Exemplo 2	71
4.7	Conclusões Parciais	75
5	Controle com Estrutura Variável de Sistemas Chaveados baseados nos Sistemas Lyapunov-Metzler-ERP	76
5.1	Introdução	76
5.2	Sistemas ERP	79
5.3	Sistemas com Comutação	81
5.4	Formulação do Problema	82
5.5	Condições Necessárias e Suficientes para Sistemas LMERP - Método 1	84
5.6	Exemplo 1 (Utilizando o Método 1)	87
5.7	Condições Necessárias e Suficientes para Sistemas LMERP - Método 2	89
5.8	Exemplo 2 (Utilizando o Método 2)	91
5.9	Controle com Estrutura Variável usando Sistemas LMERP	92
5.10	Exemplo 3	94
5.11	Exemplo 4 - Conversor dc-dc	95
5.12	Conclusões Parciais	101
6	Conclusões	103
6.1	Sugestões para Pesquisas Futuras	105
	Referências	106
	Apêndice A – Complemento de Schur	114
	Apêndice B – Derivada Direcional	115

Anexo A – Participação em Trabalhos	117
A.1 Artigos em Periódicos Internacionais	117
A.2 Capítulo de Livro	118
A.3 Artigos em Congressos Internacionais	118
A.4 Artigos em Congressos Nacionais - (Completo)	119
A.5 Artigo em Congresso Nacional - (Resumo Expandido)	120
A.6 Artigo em Congresso Nacional - (Resumo)	120

1 *Introdução*

Nos últimos anos, houve um crescente interesse em pesquisas sobre a teoria e aplicações de sistemas nebulosos, mais conhecidos como sistemas fuzzy. O interesse se deve à similaridade destes sistemas com o comportamento humano na solução de problemas complexos. Assim, os sistemas fuzzy permitem que o projetista utilize o seu conhecimento experimental para elaborar o projeto de sistemas de controle. Se observarmos nossas atitudes do cotidiano, verificaremos facilmente que somos constantemente conduzidos a tomar várias decisões para resolver os mais variados tipos de problemas. Em geral, as decisões são feitas em função de algum aprendizado adquirido com experiências anteriores, muitas vezes, similares. Entretanto, podemos ser submetidos a situações inusitadas ou pouco convencionais, que podem nos deixar com dúvidas sobre qual atitude devemos tomar. Então, embora não tenhamos absoluta certeza, temos que tomar decisões que são elaboradas a partir de uma interação de aprendizados que foram adquiridos anteriormente, em situações diferentes, mas que sejam as mais próximas da situação em questão. Os sistemas reais, em geral, são complexos e esta complexidade surge de incertezas na forma de ambiguidades. Problemas característicos de complexidade e ambiguidade são tratados de forma subconsciente pelos humanos na solução de vários problemas sociais, técnicos, biológicos e emocionais. Multidimensionalidade, estruturas hierárquicas, interações mútuas, mecanismos de realimentação e dinâmicas imprevisíveis são apenas parte das características de tais sistemas complexos (MACHADO, 2003).

Analisando o comportamento humano diante de problemas, no início dos anos 60, pesquisadores começaram a questionar se o conceito de incertezas, ambiguidades e o conhecimento humano poderiam ser utilizados para completar a descrição e compreensão de sistemas reais complexos. Baseado nestes princípios, em 1965, Lotfi A. Zadeh introduziu a teoria fuzzy (cuja tradução em português é nebulosa ou difusa). Em seu artigo “*Fuzzy Sets*”, (ZADEH, 1965) ele formalizou suas idéias sobre uma nova ferramenta matemática que utiliza conhecimento e incertezas sem descrevê-las em termos de probabilidade. A proposta de Zadeh era modelar o mecanismo do pensamento humano, com valores linguísticos em lugar de números, levando estes valores para a teoria de sistemas e desenvolver uma nova classe denominada sistemas fuzzy.

Duas razões principais motivam o estudo da teoria fuzzy. A primeira é que esses sistemas conjugam a capacidade de processar informação de natureza incerta ou qualitativa com a capacidade de aproximação universal (CAMPELLO, 2002; KOSKO, 1996). A precisão com que os sistemas fuzzy podem aproximar sistemas reais pode ser, em geral, estipulada pelo projetista. A segunda razão está relacionada com a existência de vários modelos existentes, adequados a diferentes tipos de aplicação, indo dos modelos linguísticos na modelagem de um determinado sistema, aos modelos Takagi-Sugeno (TS), com estruturas adequadas para aplicações em controle.

Uma parte dos estudos presentes nesta tese, concentram-se nos modelos fuzzy TS para o controle de sistemas não-lineares. A idéia dos modelos fuzzy TS (TAKAGI; SUGENO, 1985) ou Takagi-Sugeno-Kang (TSK) (SUGENO; KANG, 1988) consiste da descrição de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos lineares invariantes no tempo locais, que descrevem o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy TS, consistindo apenas de um modelo local. Esta classe de modelos de projeto permite que o engenheiro utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos. O modelo global do sistema é obtido através da combinação destes modelos lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. O regulador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação de cada regulador linear individual.

Mais significativamente, problemas como as análises de estabilidade e o projeto de controle são reduzidos a problemas descritos por Desigualdades Matriciais Lineares, também conhecidas por LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) (BOYD et al., 1994). Numericamente, os problemas de LMIs podem ser resolvidos muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática (GAHINET et al., 1995; PEAUCELLE et al., 2002). Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original. Em certas classes de sistemas não-lineares, os modelos fuzzy permitem uma modelagem exata e assim os projetos baseados em LMI são rigorosos. No Capítulo 2 são apresentados mais detalhes sobre a modelagem exata.

Ultimamente o controle fuzzy tem atraído grande atenção e muitas aplicações têm sido feitas, por exemplo, na análise de novos sistemas de controle para automóveis (WILL; TEIXEIRA; ŽAK, 1997) e controle de elevadores de alta velocidade (TANAKA; NISHIMURA;

WANG, 1998). A análise da estabilidade é um dos conceitos mais importantes em sistemas de controle fuzzy. É possível projetar teoricamente um regulador fuzzy se for disponível um bom critério para a análise da estabilidade, e muitos esforços têm sido feitos nesta área (TANAKA; SUGENO, 1992; TANAKA; SANO, 1994; CAO; REES; FENG, 1997a, 1997b; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; KIM; LEE, 2000). Neste trabalho são apresentadas condições suficientes sobre a estabilidade de sistemas fuzzy TS utilizando o método direto de Lyapunov. Os projetos são baseados em LMIs e na Compensação Distribuída Paralela (CDP) (TANAKA; SUGENO, 1992; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996). Os resultados são verificados através de exemplos numéricos, utilizando como modelos, o sistema bola-viga (pg. 31) e o levitador magnético (pg. 38). Adicionalmente, no Capítulo 3, são estudados os sistemas com realimentação derivativa, sendo proposto um método para utilizar as técnicas de controle fuzzy TS em sistemas mecânicos nos quais os sinais disponíveis para o controle são as derivadas dos estados da planta. O método é aplicado numericamente no exemplo de um levitador magnético e num sistema para controlar a posição da perna de pacientes paraplégicos, que utiliza acelerômetros como sensores.

Nesta tese, além dos estudos sobre os sistemas fuzzy TS, também são abordados outros métodos e sistemas de controle, que no decorrer das pesquisas geraram novos resultados. Como estes estudos envolveram assuntos relativamente distintos, uma descrição mais detalhada é introduzida no início dos capítulos que abordam os sistemas e métodos propostos.

Uma contribuição relevante é apresentada no Capítulo 4. Neste capítulo é proposto um método simples para projetar a matriz de realimentação da derivada do vetor de estado e a matriz de alimentação direta (do inglês *feedforward gain*), tal que o sinal de controle obtido seja equivalente a uma lei de controle contínua no tempo com realimentação do vetor de estado com uma matriz de alimentação direta. A lei de controle discreta é obtida através da lei de controle contínua, utilizando um método adequado de aproximação, baseado em LMIs. É suposto que a planta é controlável, linear e invariante no tempo, com uma (SI) ou múltiplas (MI) entradas. O procedimento adotado permite o uso de métodos de projeto bem conhecidos de realimentação das variáveis de estado para calcular diretamente os ganhos de realimentação da derivada das variáveis de estado em sistemas discretos. Projetos com realimentação derivativa podem ser úteis no controle de sistemas mecânicos, utilizando-se acelerômetros como sensores. Para exemplificar a eficiência do método, na Seção 4.6 foi considerado como exemplo, o sistema de controle de um helicóptero.

Uma outra contribuição relevante deste trabalho é apresentada no Capítulo 5, no qual é proposto um novo método de controle com estrutura variável inspirado na teoria de sistemas

Estritamente Reais Positivos (ERP) (ANDERSON, 1968; LANDAU, 1979; HUANG et al., 1999; OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; KAUFMAN; BARKANA; SOBEL, 1997; TEIXEIRA, 1989; HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994; DECARLO; ŽAK; MATHEWS, 1988; TEIXEIRA, 1993; TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000; TEIXEIRA et al., 2002; TEIXEIRA, 1990; STEINBERG; CORLESS, 1985; CUNHA et al., 2003; XIANG; SU; CHU, 2005; BARKANA; TEIXEIRA; HSU, 2006) e sistemas com comutação (GEROMEL; COLANERI, 2006; DEAECTO, 2007; GEROMEL; DEAECTO; COLANERI, 2007; JOHANSSON, 2003). São propostas condições necessárias e suficientes (usando LMIs) para tornar o sistema global, obtido pela comutação de sistemas lineares contínuos no tempo, ERP. Uma introdução mais detalhada sobre este assunto é apresentada na Seção 5.1.

2 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Como descrito anteriormente, o modelo fuzzy Takagi-Sugeno (TAKAGI; SUGENO, 1985; TANAKA; WANG, 2001) consiste da descrição de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariante no tempo, sendo que estes modelos descrevem o comportamento de forma aproximada ou exata deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Na maioria dos casos esta descrição é aproximada, sendo que o erro em relação ao modelo real depende do número de modelos locais utilizado. Portanto, para um determinado sistema não-linear, a quantidade de modelos locais a ser utilizada no projeto fica a critério do projetista, que deve analisar suas necessidades preocupando-se com a relação custo-benefício, pois um grande número de modelos locais pode exigir um grande esforço computacional no projeto e/ou dificultar a implementação do controlador. O modelo fuzzy global do sistema é obtido pela combinação fuzzy dos modelos locais lineares. Esta é a grande importância do modelo fuzzy Takagi-Sugeno em sistemas de controle, além disso, para um determinado número de modelos locais (lineares), pode-se representar de forma exata o sistema não-linear. Esta representação exata permite o projeto de controladores com todo o rigor da teoria dos sistemas não-lineares (SLOTINE; LI, 1991).

Os estudos realizados neste capítulo também serão utilizados no Capítulo 3, para fundamentar uma nova contribuição da tese, relacionada ao controle fuzzy TS em sistemas com realimentação da derivada do vetor de estado da planta.

Especificamente, o sistema fuzzy Takagi-Sugeno é descrito pelas regras fuzzy SE-ENTÃO, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema. Tem-se os seguintes modelos lineares locais:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$ (r é o número de modelos lineares), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de saída, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$. A informação

acima é então fundida com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a i -ésima regra tem a forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i & : \text{ SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ & \text{ ENTÃO } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Tem-se que M_j^i , $j=1,2,\dots,p$ é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ o “peso” do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$, e seja

$$w^i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad \mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)].$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$w^i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) > 0.$$

Uma escolha conveniente para a obtenção de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno para sistemas não-lineares é adotar $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t)$ o vetor de estado do sistema não-linear. Defina

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T.$$

Desta forma, dados $[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)]$, a saída final do sistema fuzzy é inferida utilizando o método do centro de gravidade para a defuzzificação (TANIGUCHI et al., 2001), e é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)), \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{B}_i \right) \mathbf{u}(t), \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo,

$$\alpha_i(\mathbf{z}(t)) = \frac{w^i(\mathbf{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (2.3)$$

Em (2.3), $\alpha_i(\mathbf{z}(t))$ é o peso normalizado de cada modelo de regra, também conhecido como função de pertinência do modelo local i , $i = 1, 2, \dots, r$.

O sistema não forçado ($\mathbf{u}(t) = 0$) é definido como segue:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t), \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x}(t).\end{aligned}\quad (2.4)$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t), \\ &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x}(t).\end{aligned}\quad (2.5)$$

É importante observar que, para $i = 1, 2, \dots, r$, tem-se a combinação linear convexa dos modelos, ou seja,

$$\alpha_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) = 1. \quad (2.6)$$

Exemplo:

O exemplo a seguir ilustra a aproximação obtida pelos modelos fuzzy TS (MACHADO, 2003).

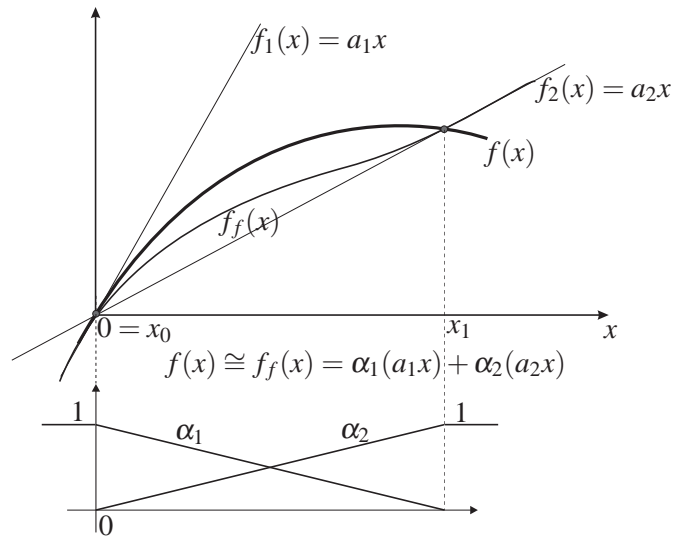


Figura 2.1: Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.

Considerando a função não-linear $f(x)$ descrita na Figura 2.1, nota-se que esta pode ser aproximada, para $x \approx x_0 = 0$, por $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$. Uma aproximação linear para esta função, para $x \approx x_1$, é $f_2(x) = a_2x$; observe que esta segunda apro-

ximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois $f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definidas na Figura 2.1 (observe que $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ são positivas ou nulas e que $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$), um modelo fuzzy TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 2.1. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $\alpha_2 \approx 1$, $\alpha_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Finalmente, verifica-se que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, por exemplo para $x_0 \leq x \leq x_1$. Obviamente, se aumentarmos o número de modelos locais, a aproximação torna-se melhor. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos fuzzy TS, no tratamento de funções e/ou de sistemas não-lineares. Adicionalmente, como será visto nesta seção, neste caso é possível representar exatamente a função $f(x)$ através de $f_f(x)$, escolhendo-se convenientemente as funções $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$.

Considere a planta descrita pela seguinte equação, na qual $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}. \quad (2.7)$$

Um modelo de projeto para esta planta, com modelos fuzzy Takagi-Sugeno, tendo em vista (2.6), é descrito em (2.2).

Suponha que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único ponto de equilíbrio deste sistema com $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, isto é, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ somente para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Então, considerando a existência de $\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j$, em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, um modelo local linear para a operação em $\mathbf{x} \approx \mathbf{0}$ pode ser obtido através da linearização por série de Taylor em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Agora, surge o problema da obtenção de um modelo local linear que represente aproximadamente a planta descrita em (2.7), em $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$, sendo que $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Em (TEIXEIRA; ŽAK, 1999) foi utilizado o seguinte paradigma para a obtenção deste modelo local:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \approx \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{para todo } \mathbf{u}, \quad (2.8)$$

para $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$, e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{para todo } \mathbf{u}. \quad (2.9)$$

A solução ótima, descrita em (TEIXEIRA; ŽAK, 1999) é a seguinte:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{B} \quad (2.10)$$

e se \mathbf{a}_i^T é a linha i de \mathbf{A} , então

$$\mathbf{a}_i = \nabla f_i(\mathbf{x}_0) + \frac{f_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0^T \nabla f_i(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

sendo que nesta fórmula, $\|\mathbf{x}_0\|^2 = \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0$ e $\nabla f_i(\mathbf{x}) = [\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_1 \dots \partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_n]^T$. É interessante observar que os modelos locais ótimos, em pontos diferentes do ponto de equilíbrio não podem ser obtidos através da linearização por série de Taylor no ponto considerado. A fórmula apresentada em (2.11) mostra que a aproximação ótima é a soma de dois termos, enquanto que a linearização por Taylor, desprezando-se os termos constantes, forneceria apenas o primeiro termo da fórmula, que é o gradiente da função $f_i(\mathbf{x})$ no ponto considerado. Finalmente, é oportuno mencionar que a fórmula (2.11) tem sido bem aceita pela comunidade científica, pela facilidade que ela oferece na obtenção dos modelos locais, e está sendo utilizada com sucesso. Pode ser citado como exemplo, por Zheng, no projeto de um controlador PI robusto para uma turbina termoelétrica (ZHENG et al., 2001), por Bergsten, no projeto de observadores fuzzy (BERGSTEN; PALM; DRIANKOV, 2002), por Cao e Frank, no controle de um processo químico com atraso de transporte (CAO; FRANK, 2000), por Kim, no controle de um pêndulo invertido, utilizando sistemas fuzzy Singleton e também por (MACHADO, 2003) na modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. Esta fórmula também tem sido empregada em sistemas não-lineares que não utilizam modelos fuzzy como em (GUO et al., 2000), para rastreamento de órbitas de sistemas caóticos.

É possível modelar exatamente certas classes de sistemas não-lineares com modelos fuzzy TS utilizando-se o método descrito em (TANIGUCHI et al., 2001). Este método é adotado nesta tese, nos exemplos envolvendo projetos de controle com modelos fuzzy TS. Neste método de construção, os modelos locais são obtidos em função da região de operação e correspondem aos valores máximos e mínimos das funções não-lineares do sistema. Desta forma o número de modelos está diretamente relacionado ao número de funções não-lineares. Esta técnica permite modelar uma grande variedade de sistemas que estejam no intervalo de operação. Portanto, na construção dos modelos, em geral não são consideradas particularidades do comportamento das funções não-lineares, mas apenas seus valores extremos. Neste método, para a determinação dos modelos locais, é considerada a seguinte classe de sistemas não-lineares:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(\mathbf{x}(t))u_k(t), \quad (2.12)$$

sendo neste caso $i = 1, 2, \dots, n$, n é o número de estados, m o número de entradas e $\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))$ e $g_{ik}(\mathbf{x}(t))$ são funções de $\mathbf{x}(t)$, sendo $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$. Para obter a forma generalizada deste método, considere as seguintes variáveis:

$$a_{ij1} \equiv \max_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))\},$$

$$a_{ij2} \equiv \min_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{ij}(\mathbf{x}(t))\},$$

$$b_{ik1} \equiv \max_{\mathbf{x}(t)} \{g_{ik}(\mathbf{x}(t))\},$$

$$b_{ik2} \equiv \min_{\mathbf{x}(t)} \{g_{ik}(\mathbf{x}(t))\}.$$

Desta forma, para representar o sistema verdadeiro com a forma generalizada são necessários 2^s modelos locais, sendo s o número de não-linearidades distintas existentes no sistema (TANIGUCHI et al., 2001). O exemplo apresentado na Seção 2.7 mostra mais detalhes deste método.

2.1 Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

No projeto de reguladores fuzzy é normalmente considerado o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP) para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy TS. A idéia é projetar um compensador para cada regra do modelo fuzzy. Para cada regra, são utilizadas técnicas de projeto de controle linear. O regulador fuzzy global resultante, que é em geral não-linear, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual. A CDP oferece um procedimento de projeto do regulador para o modelo fuzzy Takagi-Sugeno, onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo Takagi-Sugeno da planta. O regulador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas. Para o modelo fuzzy (2.1), sendo $i = 1, 2, \dots, r$, os reguladores fuzzy via CDP possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i &: \text{ SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ &\text{ ENTÃO } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_i \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Portanto, de forma análoga à efetuada na obtenção de (2.2), o regulador fuzzy é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{z}(t))}, \\ &= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t), \\ &= -\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Substituindo a equação (2.14) na equação (2.2) tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{B}_i \left[-\sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t) \right], \quad (2.15)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t). \quad (2.16)$$

Sabemos que

$$\alpha_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Desta forma, pode-se escrever

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \mathbf{x}(t), \quad (2.17)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t), \quad (2.18)$$

ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t), \quad (2.19)$$

de acordo com (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

2.2 Condições para a Estabilidade de Reguladores Fuzzy

Da teoria clássica de mecânica sabe-se que um sistema vibratório é assintoticamente estável se sua energia total (uma função definida positiva) for continuamente decrescente (o que significa que a derivada em relação ao tempo é definida negativa) até que um ponto de equilíbrio seja alcançado. O segundo método de Lyapunov é baseado em uma generalização deste fato: se um sistema possui um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada transferida no interior do domínio de atração decai à medida que o tempo cresce até que finalmente assume seu valor mínimo no ponto de equilíbrio. Para sistemas puramente matemáticos, contudo, não há forma simples de se definir uma “função energia”. Para contornar esta dificuldade, Lyapunov introduziu a função de Lyapunov, uma “função energia” fictícia. Esta idéia, contudo, é mais geral que a de energia e é aplicada de forma mais abrangente (OGATA, 2003). Para modelos fuzzy contínuos no tempo, podem-se obter as condições suficientes para a estabilidade através de funções de Lyapunov quadráticas do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$ (TANAKA; SUGENO, 1992; PIETROBOM, 1999; TEIXEIRA; PIETROBOM; ASSUNÇÃO, 2000; KIM; LEE, 2000; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; XIAODONG; QINGLING, 2003; TUAN et al., 2001).

Temos que,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t). \quad (2.20)$$

Seja

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j, \quad (2.21)$$

então,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ij} \mathbf{x}(t), \quad (2.22)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t), \quad (2.23)$$

sendo,

$$\sum_{i<j}^r a_{ij} = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r a_{ij}.$$

Lema 1 (TANAKA; WANG, 2001) *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ do sistema fuzzy contínuo descrito por (2.4) é globalmente assintoticamente estável se existe uma matriz simétrica positiva definida comum \mathbf{P} tal que*

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.

Prova: Considere a candidata a função de Lyapunov do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$. Desta forma, sua derivada em relação ao tempo (que no caso deve ser negativa definida) é dada por,

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \dot{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(t) < 0. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.4) em (2.25) tem-se:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) \right)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) \right) < 0, \quad (2.26)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) < 0, \quad (2.27)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i) \mathbf{x}(t) < 0. \quad (2.28)$$

Assim, tendo em vista (2.6),

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.29)$$

é uma condição necessária e suficiente para (2.28) (estabilidade quadrática) pois de (2.6), para $\alpha_i = 1, \alpha_j = 0, i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ e assim, (2.28) implica em (2.29) (condição necessária). Agora, a condição (2.29) e (2.6) implica em (2.28) (condição suficiente). ■

Nosso maior interesse com relação ao Lema 1 é aplicá-lo no sistema realimentado (2.23), para que seja projetado um regulador que estabilize o sistema.

Substituindo (2.23) em (2.25) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = & \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{G}_{ii}^T + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{x}(t)^T \left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \right] \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \\ & + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \mathbf{x}(t) \right]. \end{aligned}$$

Organizando os termos da equação tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = & \mathbf{x}(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii}) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Assim, verificando a equação (2.30), como $\alpha_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\alpha_1(\mathbf{z}(t)) + \dots + \alpha_r(\mathbf{z}(t)) = 1$, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do sistema (2.2) realimentado com a lei de controle (2.14) (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998):

$$\mathbf{P} > 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j. \quad (2.33)$$

2.3 Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs

Os problemas com o projeto de controle e a análise de estabilidade, podem algumas vezes ser reduzidos em problemas descritos por LMIs. Numericamente, as soluções de LMIs, quando existem, podem ser obtidas muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas, disponíveis na literatura de programação matemática (BOYD et al., 1994). Desta forma, as soluções encontradas para os problemas descritos por LMIs são equivalentes às soluções encontradas para o problema original. As técnicas de projeto usando LMIs também permitem, por exemplo, a especificação da resposta transitória através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle e nas saídas.

Como descrito anteriormente, as condições (2.31), (2.32) e (2.33) garantem a estabilidade assintótica global do sistema (2.2) realimentado com a lei de controle (2.14). Substituindo (2.21) na condição (2.32) tem-se,

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i) < 0,$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_i^T - \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_i^T) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i) &< 0, \\
\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i - \mathbf{P} \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i &< 0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Sejam,

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}.$$

Então, (2.34) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}_i - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1} &< 0, \\
\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i &< 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Portanto,

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \tag{2.36}$$

Agora, analisando a terceira condição temos que:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i) &\leq 0, \\
(\mathbf{A}_i^T - \mathbf{F}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_j^T - \mathbf{F}_i^T \mathbf{B}_j^T) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_i) &\leq 0.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_i^T \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{A}_j^T \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T \mathbf{X}^{-1} \\
+ \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}_i - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}_j - \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1} &\leq 0, \\
\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T - \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T - \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T + \mathbf{A}_i \mathbf{X} - \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{X} - \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i &\leq 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i &\geq 0, \\
i = 1, 2, \dots, r-1, \quad j = i+1, i+2, \dots, r.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Assim, as LMIs (2.36) e (2.39) garantem a estabilidade assintótica global do sistema (2.2) realimentado com a lei de controle (2.14).

2.4 Taxa de Decaimento

É importante considerar não apenas a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado, tais como a velocidade de resposta, restrições da entrada e da saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento (β). Considere uma função

candidata a função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$, com $(\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0)$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$. A taxa de decaimento β , $\beta > 0$ é obtida se a condição $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta V(\mathbf{x}(t))$ for satisfeita para toda a trajetória $\mathbf{x}(t)$ do sistema (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998).

Lembrando-se que (da equação (2.30)),

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = & \mathbf{x}(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii}) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (2.40)$$

e que:

- $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$,
- $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(\mathbf{z}(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) = 1$,

tem-se,

$$V(\mathbf{x}(t)) = \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \right] \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t). \quad (2.41)$$

Dessa forma, de (2.40) e $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta V(\mathbf{x}(t))$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} + 2\beta \mathbf{P}) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) + 2\beta \mathbf{P} \right] \right\} \mathbf{x}(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assim, como $\alpha_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) = 1$, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento maior ou igual a β ($\beta > 0$):

$$\mathbf{P} > 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} + 2\beta \mathbf{P} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.44)$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) + 2\beta \mathbf{P} \leq 0, \quad i < j. \quad (2.45)$$

Analogamente ao cálculo das LMIs considerando apenas a estabilidade do sistema, obtém-se:

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i - 2\beta \mathbf{X} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i - 4\beta \mathbf{X} \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, r-1, \quad j = i+1, i+2, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Assim, as LMIs (2.46) e (2.47) garantem a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento maior ou igual a β .

2.5 Restrição da Entrada

Considere que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida. A restrição $\|u(t)\|_2 \leq \gamma$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.48)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.49)$$

se mantêm ((BOYD et al., 1994) e (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998)), sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$.

2.6 Restrição da Saída

Considere que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida e defina $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)$.

A restrição $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.50)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{C}_i^T \\ \mathbf{C}_i \mathbf{X} & \lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.51)$$

se mantêm ((BOYD et al., 1994) e (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998)), sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$.

Observação 1 *As LMIs que especificam as restrições da entrada e/ou da saída devem ser consideradas juntamente com as LMIs que garantem a estabilidade do sistema e a taxa de decaimento, quando especificada.*

A seguir serão estudados alguns exemplos, utilizando o modelo fuzzy TS na representação de sistemas não-lineares e na definição e projeto nas leis de controle.

2.7 Exemplo 1 - Sistema Bola-Viga

Considere o sistema bola-viga mostrado na Figura 2.2, estudado em (SILVA, 2005).

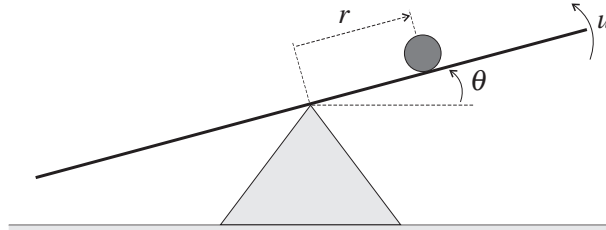


Figura 2.2: Sistema Bola-Viga.

De acordo com (SILVA, 2005) e (WANG, 1997), a dinâmica do sistema pode ser descrita como:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = \alpha r(t) \dot{\theta}^2(t) - \alpha \beta \text{sen}(\theta(t)), \\ \ddot{\theta}(t) = u(t), \end{cases} \quad (2.52)$$

sendo:

- $r(t) \rightarrow$ Posição da bola;
- $\theta(t) \rightarrow$ Ângulo da viga;
- $u(t) \rightarrow$ Sinal de controle;
- $\alpha, \beta \rightarrow$ Parâmetros, $\alpha = 0.7143$ e $\beta = 9.81$.

Considerando as variáveis de estado do sistema $x_1(t) = r(t)$, $x_2(t) = \dot{r}(t)$, $x_3(t) = \theta(t)$, $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ e a saída $y(t) = x_1(t)$, as equações de estado ficam descritas por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) x_4^2(t) - \alpha \beta \text{sen}(x_3(t)), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = u(t). \end{cases} \quad (2.53)$$

Supõe-se que durante a operação deste sistema, para $t \geq 0$, $-1 \leq x_1(t) \leq 1$; $-1 \leq x_2(t) \leq 1$; $-\frac{\pi}{12} \leq x_3(t) \leq \frac{\pi}{12}$ e $-2 \leq x_4(t) \leq 2$.

A seguir, o sistema não-linear (2.53) será representado na forma generalizada do sistema fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (TANIGUCHI et al., 2001).

Reescrevendo (2.53) na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha\beta\text{sen}(x_3(t))}{x_3(t)} & \alpha x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (2.54)$$

Seja,

$$\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t)) = \frac{-\alpha\beta\text{sen}(x_3(t))}{x_3(t)} \quad e \quad \tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t)) = \alpha x_1(t)x_4(t),$$

as funções que contém as não-linearidades do sistema. Desta forma, podemos reescrever (2.54) como sendo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t)) & \tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (2.55)$$

Para obter a forma generalizada, de acordo com (TANIGUCHI et al., 2001), é necessário determinar os valores máximos e mínimos das funções $\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t))$ e $\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t))$ no conjunto considerado. Assim, tem-se

$$a_{231} = \max_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t))\} = -6.9275,$$

$$a_{232} = \min_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t))\} = -7.0073,$$

$$a_{241} = \max_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t))\} = 1.4286,$$

$$a_{242} = \min_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t))\} = -1.4286.$$

Segundo o método proposto por (TANIGUCHI et al., 2001), a função não-linear $\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t))$ pode ser representada, de forma exata, por um modelo fuzzy TS, considerando dois modelos locais: a_{231} e a_{232} , ou seja, existem $\sigma_{231}(\mathbf{x}(t))$ e $\sigma_{232}(\mathbf{x}(t))$ tais que,

$$\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t)) = \sigma_{231}(\mathbf{x}(t))a_{231} + \sigma_{232}(\mathbf{x}(t))a_{232}, \quad (2.56)$$

sendo

$$0 \leq \sigma_{231}(\mathbf{x}(t)), \sigma_{232}(\mathbf{x}(t)) \leq 1,$$

$$\sigma_{231}(\mathbf{x}(t)) + \sigma_{232}(\mathbf{x}(t)) = 1,$$

$$\sigma_{231}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t)) - a_{232}}{a_{231} - a_{232}}.$$

Da mesma forma, a função $\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t))$ pode ser representada por:

$$\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t)) = \xi_{241}(\mathbf{x}(t))a_{241} + \xi_{242}(\mathbf{x}(t))a_{242}, \quad (2.57)$$

sendo que,

$$0 \leq \xi_{241}(\mathbf{x}(t)), \xi_{242}(\mathbf{x}(t)) \leq 1,$$

$$\xi_{241}(\mathbf{x}(t)) + \xi_{242}(\mathbf{x}(t)) = 1,$$

$$\xi_{241}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t)) - a_{242}}{a_{241} - a_{242}}.$$

Desta forma, podemos escrever:

$$\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t)) = (\xi_{241}(\mathbf{x}(t)) + \xi_{242}(\mathbf{x}(t))) (\sigma_{231}(\mathbf{x}(t))a_{231} + \sigma_{232}(\mathbf{x}(t))a_{232}), \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} &= \xi_{241}(\mathbf{x}(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}(t))a_{231} + \xi_{241}(\mathbf{x}(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}(t))a_{232} + \\ &+ \xi_{242}(\mathbf{x}(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}(t))a_{231} + \xi_{242}(\mathbf{x}(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}(t))a_{232}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Defina,

$$\alpha_1(\mathbf{x}(t)) = \xi_{241}(\mathbf{x}(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.60)$$

$$\alpha_2(\mathbf{x}(t)) = \xi_{241}(\mathbf{x}(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.61)$$

$$\alpha_3(\mathbf{x}(t)) = \xi_{242}(\mathbf{x}(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.62)$$

$$\alpha_4(\mathbf{x}(t)) = \xi_{242}(\mathbf{x}(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}(t)). \quad (2.63)$$

Note que,

$$\alpha_1(\mathbf{x}(t)) + \alpha_2(\mathbf{x}(t)) + \alpha_3(\mathbf{x}(t)) + \alpha_4(\mathbf{x}(t)) = 1 \quad (2.64)$$

Assim tem-se:

$$\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}(t))a_{231} + \alpha_2(\mathbf{x}(t))a_{232} + \alpha_3(\mathbf{x}(t))a_{231} + \alpha_4(\mathbf{x}(t))a_{232}. \quad (2.65)$$

Analogamente,

$$\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}(t))a_{241} + \alpha_3(\mathbf{x}(t))a_{242} + \alpha_2(\mathbf{x}(t))a_{241} + \alpha_4(\mathbf{x}(t))a_{242}. \quad (2.66)$$

Finalmente, substituindo (2.65) e (2.66) em (2.55), pode-se obter uma representação exata do sistema (2.54) com modelos fuzzy TS:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(\mathbf{x}(t))\mathbf{B}_i \right) u(t). \quad (2.67)$$

Portanto os modelos locais são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.9275 & 1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0073 & 1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.9275 & -1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0073 & -1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

De uma maneira geral, segundo este método, se o sistema apresenta s ($s = 2$) funções não lineares ($\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}(t))$ e $\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}(t))$), são necessários 2^s ($2^2 = 4$) modelos locais para a sua representação exata através de modelos fuzzy TS.

Utilizando o MATLAB (*lmiedit*), pode-se calcular através das LMIs, os parâmetros \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 , \mathbf{M}_4 e \mathbf{X} , no projeto do regulador para o sistema (2.52). Considerou-se como exemplo para simulação os seguintes casos:

a) Estabilidade \rightarrow LMIs (2.36) e (2.39)

Considerando como exigência no projeto apenas a estabilidade do sistema da Figura 2.2, obteve-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = [-20.2102 \quad -40.1556 \quad 415.0558 \quad 23.1590], \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = [-20.1940 \quad -40.1049 \quad 414.7920 \quad 23.1439], \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{M}_3 \mathbf{X}^{-1} = [-30.8668 \quad -73.6667 \quad 589.3973 \quad 33.1809], \\ \mathbf{F}_4 &= \mathbf{M}_4 \mathbf{X}^{-1} = [-30.8507 \quad -73.6160 \quad 589.1335 \quad 33.1657], \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0016 & 0.0021 & -0.0154 & -0.0009 \\ 0.0021 & 0.0068 & -0.0351 & -0.0020 \\ -0.0154 & -0.0351 & 0.3008 & 0.0168 \\ -0.0009 & -0.0020 & 0.0168 & 0.0015 \end{bmatrix}.$$

Para a simulação do sistema, considerou-se a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$. A Figura 2.3 ilustra o resultado obtido.

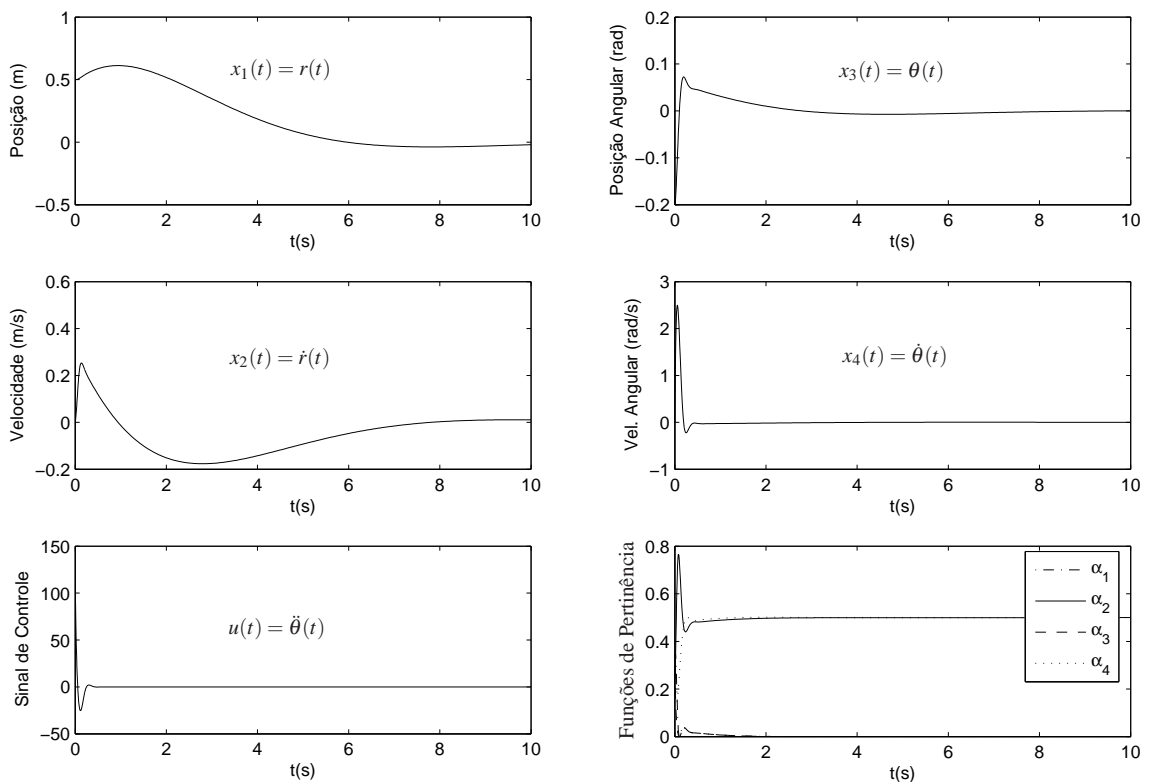


Figura 2.3: Simulação com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$ – Estabilidade.

b) Estabilidade + Restrição na Entrada \rightarrow LMIs (2.36), (2.39), (2.48) e (2.49)

Analisando a Figura 2.3 pode-se perceber que o objetivo imposto no item (a) foi alcançado, ou seja, o sistema ficou estável. Porém, verifica-se que o comportamento da variável de estado $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ apresenta valores fora do intervalo especificado ($-2 \leq x_4(t) \leq 2$). Percebem-se também oscilações abruptas no sinal de controle ($u(t)$) durante o período inicial do transitório e sabendo-se que $u(t) = \ddot{\theta}(t)$ está diretamente ligado com a variável de estado $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$, pode-se tentar resolver o problema de duas formas, ou seja, adicionando a restrição na entrada (sinal de controle) ou na variável $x_4(t)$.

Vamos supor que na realidade (para uma possível implementação prática), o sinal de controle ($u(t)$) não possa ter magnitudes tão grandes como obtidas em (a). Para isso, adicionou-se nas LMIs a restrição na entrada, considerando como exemplo $|u(t)|_{max} = 10$. Obteve-se os seguintes resultados (ver Figura 2.4):

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = [-0.0814 \quad -0.3123 \quad 3.0106 \quad 2.2132],$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = [-0.0817 \quad -0.3137 \quad 3.0229 \quad 2.2171],$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{M}_3 \mathbf{X}^{-1} = [-0.0743 \quad -0.2608 \quad 2.7153 \quad 2.0481],$$

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{M}_4 \mathbf{X}^{-1} = [-0.0738 \quad -0.2603 \quad 2.7168 \quad 2.0460],$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0007 & 0.0009 & -0.0071 & -0.0033 \\ 0.0009 & 0.0032 & -0.0184 & -0.0113 \\ -0.0071 & -0.0184 & 0.1565 & 0.0821 \\ -0.0033 & -0.0113 & 0.0821 & 0.0632 \end{bmatrix}.$$

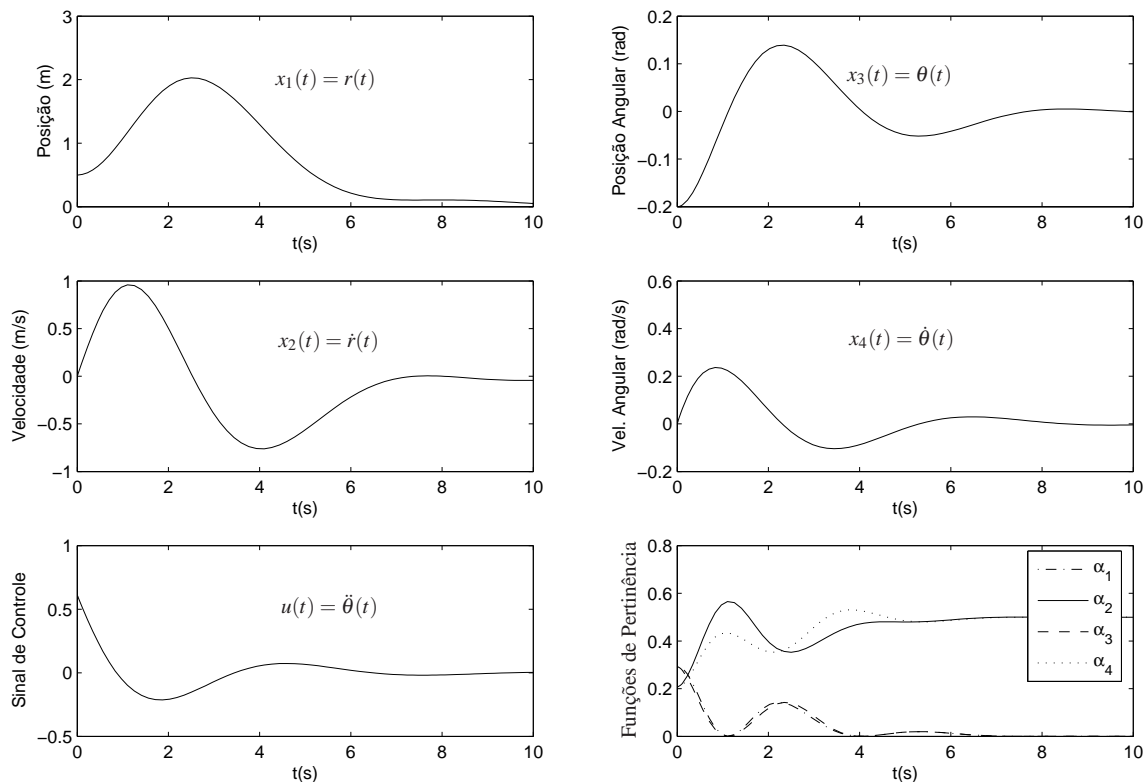


Figura 2.4: Simulação com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$ – Estabilidade e Restrição na entrada ($|u(t)| < 10$).

c) Estabilidade + Restrição na Entrada + Restrição na Saída → LMIs (2.36), (2.39), (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51)

Analisando a Figura 2.4, percebe-se que foi obtido uma solução factível para as LMIs, ou seja, o sistema apresenta estabilidade e valores de entrada menores que o máximo imposto. Além disso, percebe-se que o problema observado na primeira simulação (Figura 2.3) foi resolvido, obtendo-se valores para $x_4(t)$ dentro do intervalo. No entanto, a resposta temporal da posição da bola ($r(t)$) apresenta valores fora do intervalo estabelecido ($-1 \leq r(t) \leq 1$). Para tentar contornar o problema, adicionou-se a restrição na saída ($|x_1(t)| < 1$), obtendo os seguintes resultados (ver Figura 2.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = [-1.7067 \quad -5.4940 \quad 24.4657 \quad 4.0580], \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = [-1.7239 \quad -5.5216 \quad 24.5947 \quad 4.0312], \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{M}_3 \mathbf{X}^{-1} = [-3.1506 \quad -6.2927 \quad 25.9144 \quad 4.8773], \\ \mathbf{F}_4 &= \mathbf{M}_4 \mathbf{X}^{-1} = [-3.1506 \quad -6.2858 \quad 25.9710 \quad 4.8626], \\ \mathbf{P} &= \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2760 & 0.4642 & -1.4970 & -0.0911 \\ 0.4642 & 1.4730 & -2.9083 & -0.5673 \\ -1.4970 & -2.9083 & 9.4711 & 1.1609 \\ -0.0911 & -0.5673 & 1.1609 & 0.4583 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Analisando a Figura 2.5 percebe-se que todos os parâmetros relacionados ao sistema bola-viga estão de acordo com as restrições impostas.

d) Estabilidade + Restrição na Entrada + Restrição na Saída + Taxa de Decaimento → LMIs (2.46), (2.47), (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51)

Analisando a Figura 2.5 pode-se verificar que o sistema praticamente entra em regime permanente em torno de nove segundos. Com a preocupação de uma necessidade de se obter um tempo de estabelecimento menor, adicionou-se a restrição para a taxa de decaimento ($\beta = 0.021$). Obteve-se os seguintes resultados (ver Figura 2.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = [-1.7630 \quad -5.2723 \quad 24.8905 \quad 3.7153], \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = [-1.7890 \quad -5.2775 \quad 25.0224 \quad 3.6657], \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{M}_3 \mathbf{X}^{-1} = [-3.2573 \quad -5.7140 \quad 26.3111 \quad 4.3134], \end{aligned}$$

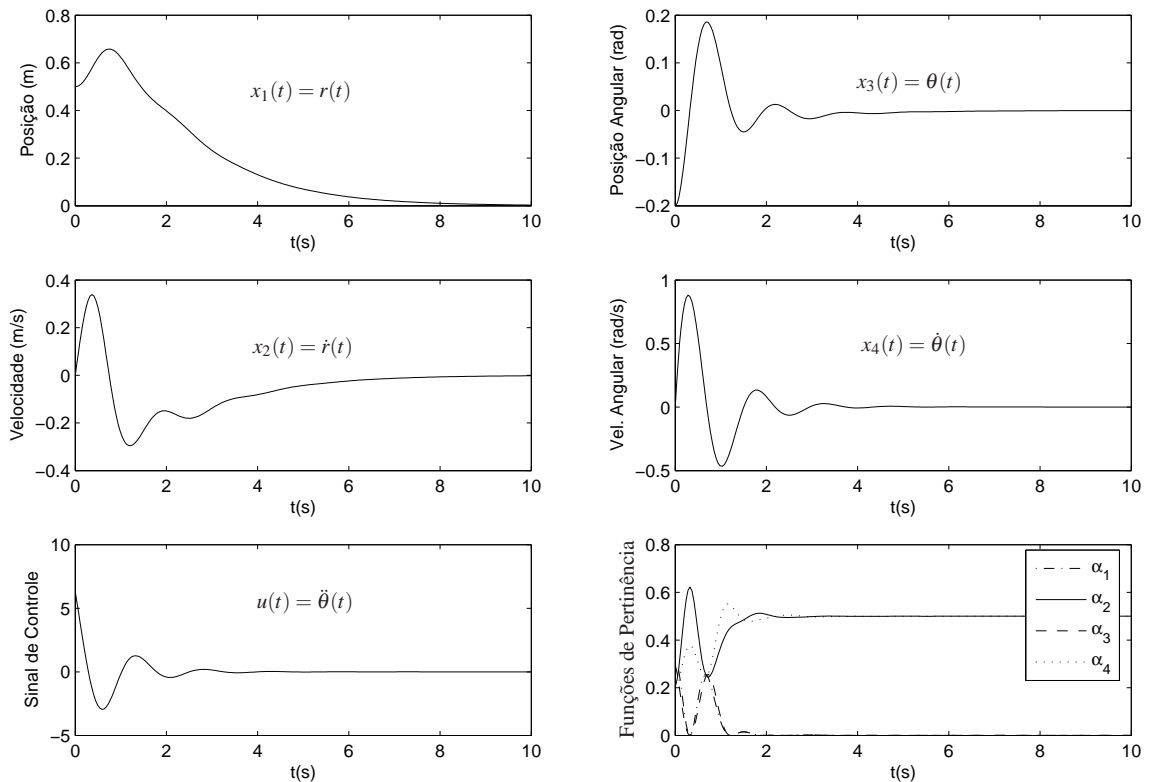


Figura 2.5: Simulação com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$ – Estabilidade, Restrição na entrada ($|u(t)| < 10$) e Restrição na saída ($|x_1(t)| < 1$).

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{M}_4 \mathbf{X}^{-1} = [-3.2663 \quad -5.6901 \quad 26.3730 \quad 4.2801],$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2696 & 0.4316 & -1.4759 & -0.0668 \\ 0.4316 & 1.8016 & -3.1175 & -0.7434 \\ -1.4759 & -3.1175 & 9.6675 & 1.2346 \\ -0.0668 & -0.7434 & 1.2346 & 0.5606 \end{bmatrix}.$$

Através da Figura 2.6 pode-se perceber, em relação a Figura 2.5, que o tempo de estabelecimento diminuiu para, em torno de sete segundos, obtendo-se o resultado esperado, ou seja, a diminuição do período transitório.

2.8 Exemplo 2 - Levitador Magnético

Atualmente os sistemas de suspensão magnética estão sendo muito utilizados, principalmente em aplicações onde a redução de força de atrito e contato mecânico são essenciais. Geralmente são encontrados em trens de alta velocidade, giroscópios e acelerômetros. Em

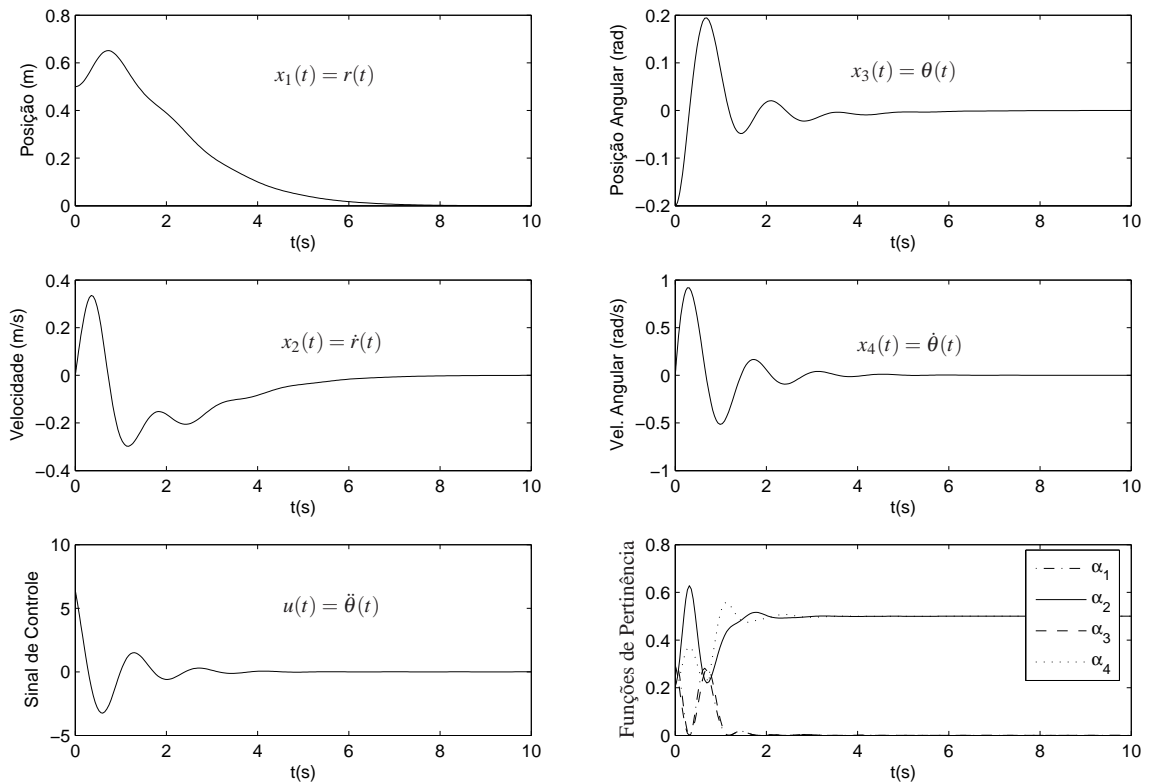


Figura 2.6: Simulação com a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [0.5 \ 0 \ -0.2 \ 0]^T$ – Estabilidade, Restrição na entrada ($|u(t)| < 10$), Restrição na saída ($x_1(t) < 1$) e Taxa de decaimento ($\beta = 0.021$).

(KOMORI; YAMANE, 2001) e (ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2002) é apresentado o modelo e o sistema de controle de um micromotor para um coração artificial (em desenvolvimento) que também utiliza um sistema de suspensão magnética para sustentar o rotor do micromotor.

A seguir será apresentado um modelo matemático de um levitador magnético para a aplicação dos sistemas de controle fuzzy estudados. A Figura 2.7 mostra a configuração básica de um levitador magnético e a Figura 2.8 ilustra um modelo didático fabricado pela Quanser.

De acordo com a segunda lei de Newton tem-se a partir da Figura 2.7 (MARQUEZ, 2003):

$$m\ddot{y} = -f_k + mg + F, \quad (2.68)$$

sendo:

- m : massa da bola;
- f_k : força de atrito viscoso;
- g : aceleração da gravidade;
- F : força eletromagnética;
- L : indutância do eletroímã.

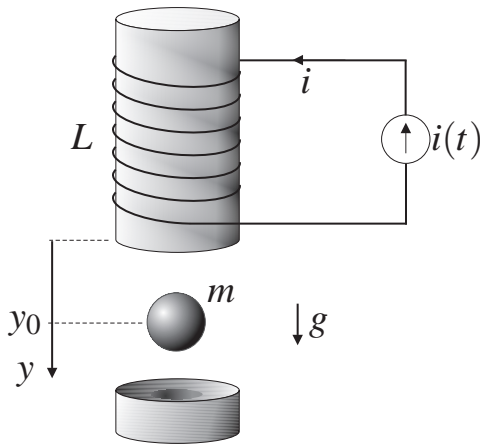


Figura 2.7: Levitador Magnético.



Figura 2.8: Levitador Magnético Quanser.

Para completar o modelo é necessário encontrar as propriedades da força eletromagnética F . A energia eletromagnética armazenada é dada por:

$$E(i) = \frac{1}{2}Li^2. \quad (2.69)$$

A indutância L não é constante, pois depende da posição da bola. De acordo com (MARQUEZ, 2003) podemos aproximar L como:

$$L = L(y) = \frac{\lambda}{1 + \mu y}, \quad (2.70)$$

sendo λ e μ constantes positivas. A equação (2.70) considera o fato de que a posição da bola altera o fluxo magnético no circuito, resultando numa alteração da indutância L . A energia no circuito é então dada por:

$$E(i, y) = \frac{1}{2}L(y)i^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(1 + \mu y)} i^2. \quad (2.71)$$

A força magnética F pode ser escrita como:

$$F(i, y) = \frac{\partial E(i, y)}{\partial y} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L(y)}{\partial y}, \quad (2.72)$$

$$F(i, y) = \frac{-1}{2} \frac{\lambda \mu i^2}{(1 + \mu y)^2}. \quad (2.73)$$

Assumindo que a força de atrito f_k é da forma

$$f_k = k\dot{y}, \quad (2.74)$$

sendo $k > 0$ o coeficiente de atrito viscoso entre a bola e o ar, e substituindo (2.73) e (2.74) em

(2.68), tem-se a equação de movimento da bola:

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + mg - \frac{1}{2} \frac{\lambda \mu i^2}{(1 + \mu y)^2}. \quad (2.75)$$

Definindo como variáveis de estado, $\bar{x}_1 = y$ e $\bar{x}_2 = \dot{y}$ tem-se:

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \quad (2.76)$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = g - \frac{k}{m} \bar{x}_2 - \frac{\lambda \mu i^2}{2m(1 + \mu \bar{x}_1)^2}. \quad (2.77)$$

O objetivo do projeto é manter a bola numa posição arbitrária $y = y_0$, para isso, de (2.75) devemos ter:

$$m\ddot{y}_0 = -k\dot{y}_0 + mg - \frac{1}{2} \frac{\lambda \mu i_0^2}{(1 + \mu y_0)^2}, \quad (2.78)$$

$$i_0^2 = \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2. \quad (2.79)$$

Pode-se verificar que o ponto de equilíbrio é instável e, além disso, o mesmo não se encontra na origem (condição necessária no projeto de controladores usando funções de Lyapunov), pois $\bar{x}_e = (\bar{x}_{1e}, \bar{x}_{2e})^T = (y_0, 0)^T$. Para contornar o problema, pode-se proceder da forma a seguir.

Seja,

$$x_1 = \bar{x}_1 - y_0 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\bar{x}}_1, \quad (2.80)$$

$$x_2 = \bar{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\bar{x}}_2, \quad (2.81)$$

$$u = i^2 - i_0^2 \Rightarrow u = i^2 - \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2. \quad (2.82)$$

De (2.82) tem-se

$$i^2 = u + \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2. \quad (2.83)$$

Substituindo em (2.76) e (2.77),

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (2.84)$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m} x_2 - \frac{\lambda \mu [u + \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2]}{2m[1 + \mu(x_1 + y_0)]^2}. \quad (2.85)$$

Com o objetivo de descrever o comportamento dinâmico do sistema na forma de espaço de estados, podemos escrever (2.85) da seguinte forma:

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m} x_2 - \frac{g(1 + \mu y_0)^2}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} - \frac{\lambda \mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} u, \quad (2.86)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_2 + g \frac{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2 - (1 + \mu y_0)^2}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} - \frac{\lambda \mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} u, \quad (2.87)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} x_1 - \frac{k}{m} x_2 - \frac{\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} u. \quad (2.88)$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} \end{bmatrix} u, \quad (2.89)$$

é uma representação no espaço de estados do levitador magnético ilustrado na Figura 2.7.

Para a simulação deste sistema (não-linear), será utilizada a modelagem fuzzy TS exata, apresentada em (TANIGUCHI et al., 2001). Neste caso, como existem duas não-linearidades no sistema, serão necessários quatro modelos locais (2^2). A Tabela 2.1 mostra os valores dos parâmetros que serão considerados para o sistema.

Tabela 2.1: Parâmetros do sistema.

m	$50 \times 10^{-3} \text{ Kg}$
g	9.8 m/s^2
k	$1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}$
λ	$460 \times 10^{-3} \text{ H}$
μ	2 m^{-1}
y_0	0.04 m
$0 \leq \bar{x}_1 \leq 0.15 \text{ m}$	

Sejam:

$$\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}) = \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2}, \quad (2.90)$$

$$g_{21}(\mathbf{x}) = \frac{-\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2}. \quad (2.91)$$

Pode-se encontrar os modelos locais para a modelagem exata da seguinte forma:

Com base nos valores da Tabela 2.1 e nas equações (2.80), (2.90) e (2.91), tem-se (através dos comandos *max* e *min* do MATLAB)

$$a_{211} = \max_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{21}(\mathbf{x})\} = 40.7680, \quad (2.92)$$

$$a_{212} = \min_{\mathbf{x}(t)} \{\tilde{f}_{21}(\mathbf{x})\} = 27.6024, \quad (2.93)$$

$$b_{211} = \max_{\mathbf{x}(t)} \{g_{21}(\mathbf{x})\} = -5.4438, \quad (2.94)$$

$$b_{212} = \min_{\mathbf{x}(t)} \{g_{21}(\mathbf{x})\} = -9.2000, \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}) &= \sigma_{211}(\mathbf{x})a_{211} + \sigma_{212}(\mathbf{x})a_{212}, \\ \sigma_{211}(\mathbf{x}) + \sigma_{212}(\mathbf{x}) &= 1,\end{aligned}\tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}g_{21}(\mathbf{x}) &= \xi_{211}(\mathbf{x})b_{211} + \xi_{212}(\mathbf{x})b_{212}, \\ \xi_{211}(\mathbf{x}) + \xi_{212}(\mathbf{x}) &= 1,\end{aligned}\tag{2.97}$$

logo, de (2.96) e (2.97)

$$\sigma_{211}(\mathbf{x}) = (\tilde{f}_{21}(\mathbf{x}) - a_{212}) / (a_{211} - a_{212}),\tag{2.98}$$

$$\sigma_{212}(\mathbf{x}) = (a_{211} - \tilde{f}_{21}(\mathbf{x})) / (a_{211} - a_{212}),\tag{2.99}$$

$$\xi_{211}(\mathbf{x}) = (g_{21}(\mathbf{x}) - b_{212}) / (b_{211} - b_{212}),\tag{2.100}$$

$$\xi_{212}(\mathbf{x}) = (b_{211} - g_{21}(\mathbf{x})) / (b_{211} - b_{212}).\tag{2.101}$$

Considerando,

$$\alpha_1(\mathbf{x}) = \xi_{211}(\mathbf{x})\sigma_{211}(\mathbf{x}),$$

$$\alpha_2(\mathbf{x}) = \xi_{211}(\mathbf{x})\sigma_{212}(\mathbf{x}),$$

$$\alpha_3(\mathbf{x}) = \xi_{212}(\mathbf{x})\sigma_{211}(\mathbf{x}),$$

$$\alpha_4(\mathbf{x}) = \xi_{212}(\mathbf{x})\sigma_{212}(\mathbf{x}),$$

as funções de pertinências para este sistema, os modelos locais para o mesmo são:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{211} & -0.0200 \end{bmatrix},\tag{2.102}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{212} & -0.0200 \end{bmatrix},\tag{2.103}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{211} \end{bmatrix},\tag{2.104}$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{212} \end{bmatrix}.\tag{2.105}$$

Nota-se que, para $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\alpha_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^4 \alpha_i(\mathbf{x}) = 1.\tag{2.106}$$

Para o projeto do controlador, utilizando a modelagem fuzzy TS, considerou-se a restrição na entrada $|u(t)| \leq 25$ ($\gamma = 25$). Através das LMIs (2.36), (2.39), (2.48) e (2.49) obtiveram-se os

seguintes valores:

$$\mathbf{F}_1 = [-8.2878 \quad -1.3703], \quad (2.107)$$

$$\mathbf{F}_2 = [-7.6745 \quad -1.3193], \quad (2.108)$$

$$\mathbf{F}_3 = [-7.0624 \quad -1.0479], \quad (2.109)$$

$$\mathbf{F}_4 = [-7.0130 \quad -1.1492], \quad (2.110)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1211 & 0.0223 \\ 0.0223 & 0.0053 \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

A Figura 2.9 mostra a representação em diagrama de blocos (feito no SIMULINK) do sistema de controle, e a Figura 2.10 mostra algumas simulações, considerando a condição inicial, $\bar{x}_{1_0} = y(0) = 12\text{cm}$ e $\bar{x}_{2_0} = \dot{y}(0) = 0$.

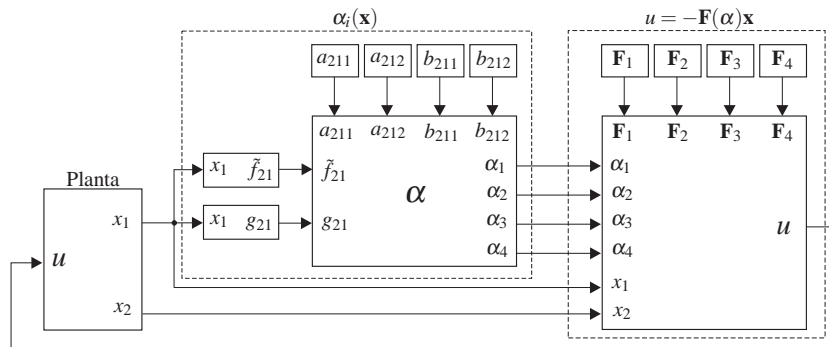


Figura 2.9: Sistema de controle do levitador utilizando o modelo fuzzy TS.

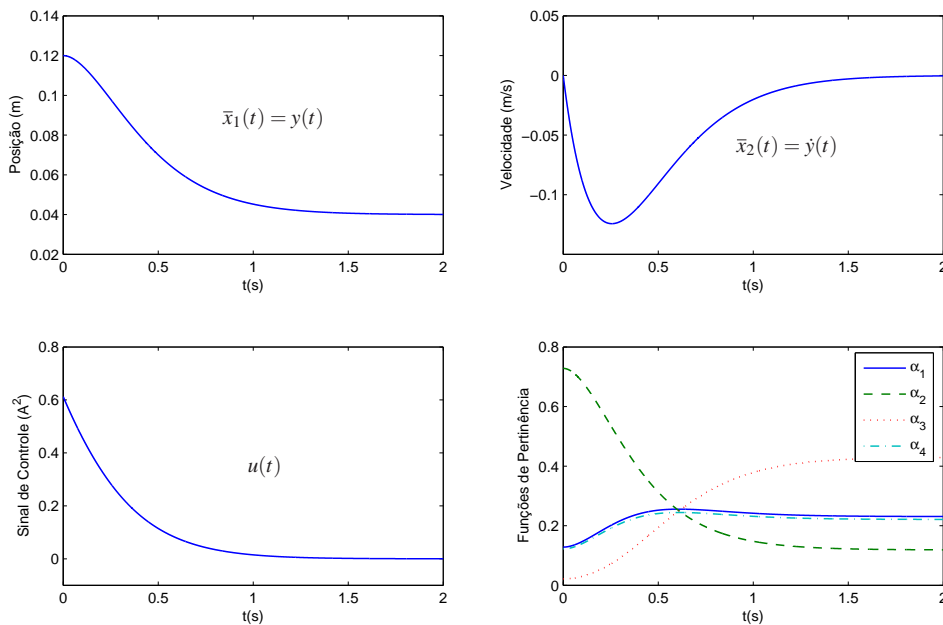


Figura 2.10: Respostas do sistema considerando a condição inicial $\bar{x}_{1_0} = 12\text{cm}$ e $\bar{x}_{2_0} = 0$.

Pode-se observar na simulação ilustrada na Figura 2.10, o comportamento das funções de

pertinência, que realizam a combinação convexa dos modelos locais e dos ganhos da lei de controle (u), para levar a bola na posição $y_0 = 0.04$ m, entrando em regime a partir de aproximadamente 1.5 s, com valores $\alpha_1 \approx 0.24$, $\alpha_2 \approx 0.12$, $\alpha_3 \approx 0.42$ e $\alpha_4 \approx 0.22$.

2.9 Conclusões Parciais

Neste capítulo, foi apresentado um estudo sobre os modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) no controle de sistemas não-lineares. Foram descritas condições, em termos de LMIs para o regulador e estudados dois exemplos numéricos utilizando a modelagem fuzzy TS exata, o sistema bola-viga (pg. 31) e o levitador magnético (pg. 38). Com estes exemplos, pode-se verificar através das simulações em computador, a utilidade deste método no controle de sistemas não-lineares. Como o projeto é baseado em LMIs, a solução do problema é relativamente simples de se obter através do computador, sendo possível também, adicionar restrições como taxa de decaimento, restrição na entrada e restrição na saída. Os estudos realizados neste capítulo também serão utilizados no Capítulo 3 a seguir, para fundamentar uma nova contribuição da tese, relacionada ao controle fuzzy TS em sistemas com realimentação da derivada do vetor de estado.

3 Controle Utilizando Modelos Fuzzy e Estimador com a Derivada do Vetor de Estado da Planta

Assim como os modelos fuzzy TS, nos últimos anos, a realimentação proporcional e derivativa das variáveis de estado tem sido utilizada no projeto de controladores para solucionar vários problemas, tais como: estabilização com robustez de sistemas lineares descritores (DUAN; IRWIN; LIU, 1999), controle realimentado de sistemas singulares (JIN, 1994), controle não-linear realimentado com linearização exata (BOUKAS; HABETLER, 2004), e controle \mathcal{H}_∞ de sistemas contínuos com atraso (FRIDMAN; SHAKED, 2002). Neste capítulo é proposta uma forma de utilizar as técnicas de controle fuzzy TS em sistemas mecânicos nos quais os sinais disponíveis para o controle são as derivadas das variáveis de estado. Existem vários problemas práticos nos quais os sinais da derivada das variáveis de estado são fáceis de obter, por exemplo, em sistemas mecânicos para controle de vibrações (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004; TEIXEIRA et al., 2006a; CARDIM et al., 2007b, 2007, 2008a), nos quais os sensores mais usados são os acelerômetros. A partir da aceleração, é possível obter a velocidade com boa precisão, porém é mais complexo obter o deslocamento (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). Definindo como variáveis de estados o deslocamento e a velocidade, podem-se usar os sinais da derivada do vetor de estado (velocidade e aceleração) para realimentar esses sistemas.

O método proposto utiliza um processo de inversão para estimar as variáveis de estado não disponíveis no sistema, supondo o acesso somente aos sinais das derivadas das variáveis de estado. Esta forma de estimação do vetor de estado, conhecido como estimador em malha aberta, é específica para cada tipo de problema e portanto será apresentada na forma de exemplos. Será utilizado o exemplo do levitador magnético, já apresentado na Seção 2.8 e um exemplo para controlar a posição da perna de pacientes paraplégicos, utilizando acelerômetros como sensores. A técnica apresentada conta com a colaboração do Prof. Aparecido A. de Carvalho, da FEIS, que possui projetos de controle da marcha de pacientes com lesões medulares financiados pela FAPESP, e poderá ser muito útil em Engenharia de Reabilitação e Engenharia Biomédica.

3.1 Exemplo 1 - Levitador Magnético

Considerando o mesmo sistema apresentado no Exemplo 2 (pg. 38), verifica-se a partir das equações (2.90)-(2.97) que as funções de pertinência dependem apenas da variável de estado x_1 , pois as funções não-lineares dependem apenas de x_1 . Uma representação em diagrama de blocos do sistema de controle com o modelo fuzzy TS, foi apresentada na Figura 2.9. Suponha agora que, existam apenas sensores acelerométricos neste sistema, ou seja, tem-se acesso apenas aos valores de \dot{x}_1 e \dot{x}_2 . Neste caso, analisando as equações (2.90) e (2.91), observa-se que a variável de estado x_1 , necessária para o cálculo das funções de pertinências ($\alpha_i(\mathbf{x})$) e o controle do sistema, via realimentação de estados, não estará disponível. Uma forma de resolver este problema é proposta, utilizando o método de inversão descrito a seguir (CARDIM et al., 2007a).

No sistema da Figura 2.7 tem-se que $y = \bar{x}_1 \geq 0$. Portanto, de (2.80) verifica-se que $x_1 + y_0 \geq 0$. Defina,

$$W = (1 + \mu(x_1 + y_0)), \quad W > 0, \quad (3.1)$$

e $|W| < \infty$ para $|x_1| < \infty$. Logo, das equações (2.84) e (2.86) tem-se:

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m}\dot{x}_1 - \frac{g(1 + \mu y_0)^2}{W^2} - \frac{\lambda \mu / (2m)}{W^2} u, \quad (3.2)$$

ou ainda,

$$W^2 = \frac{g(1 + \mu y_0)^2 + \frac{\lambda \mu}{2m} u}{(g - \frac{k}{m}\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}. \quad (3.3)$$

Da equação (3.1) temos que W deve assumir valores finitos, e ainda $W > 0$, pois μ é uma constante positiva e $(x_1 + y_0) = y \geq 0$. De (3.3), (2.84) e (2.86) tem-se que

$$(g - \frac{k}{m}\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = g - \frac{k}{m}x_2 - g + \frac{k}{m}x_2 + \frac{g(1 + \mu y_0)^2}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} + \frac{\lambda \mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} u \quad (3.4)$$

$$= \frac{g(1 + \mu y_0)^2 + \frac{\lambda \mu}{2m} u}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2}. \quad (3.5)$$

Note que de (3.5), a indeterminação em (3.3) poderia ocorrer em

$$(g - \frac{k}{m}\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2 = -i_0^2. \quad (3.6)$$

Neste caso, de (2.82) e (3.6) a corrente elétrica $i = 0$, e de (2.73) a força magnética $F(i, y) = 0$. Então, impondo que $u = i^2 - i_0^2 > -i_0^2$, tem-se que $i^2 > 0$, $i \neq 0$ e assim evita-se o problema de

indeterminação em (3.3). Desta forma, de (3.3) tem-se que

$$W = + \sqrt{\frac{g(1 + \mu y_0)^2 + \frac{\lambda \mu}{2m} u}{(g - \frac{k}{m} \dot{x}_1 - \dot{x}_2)}}. \quad (3.7)$$

Portanto, de (3.1),

$$x_1 = \frac{W - 1}{\mu} - y_0. \quad (3.8)$$

Um problema prático deste tipo poderia ser aplicado, por exemplo, em uma locomotiva com suspensão magnética inteligente, na qual ficariam os acelerômetros para a medição dos sinais necessários no controle. A Figura 3.1 ilustra o sistema utilizando o método proposto.

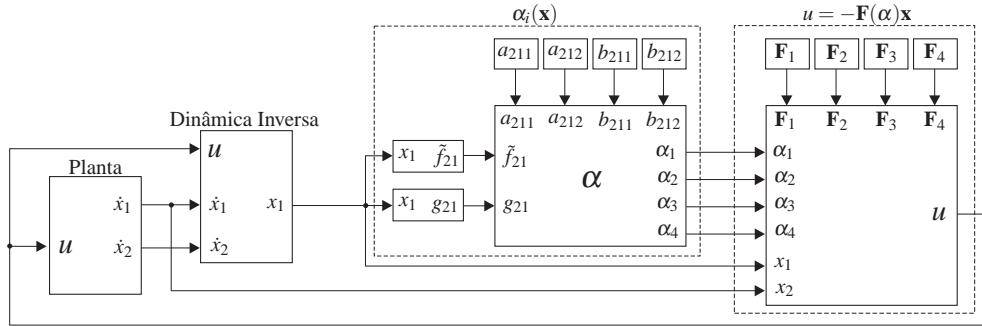


Figura 3.1: Sistema de controle com o método de estimação de estados.

A seguir são apresentadas algumas simulações, feitas no software SIMULINK, considerando os mesmos valores dos parâmetros apresentados na Tabela 2.1, com o intuito de comprovar a validade deste método. Os ganhos para o controlador também são iguais aos anteriores, $\mathbf{F}_1 = [-8.2878 \quad -1.3703]$, $\mathbf{F}_2 = [-7.6745 \quad -1.3193]$, $\mathbf{F}_3 = [-7.0624 \quad -1.0479]$ e $\mathbf{F}_4 = [-7.0130 \quad -1.1492]$. A Figura 3.2 mostra os resultados obtidos para o deslocamento ($y(t)$) da bola e para o sinal de controle ($u(t)$), com o método convencional (Figura 2.9) e com o método proposto (Figura 3.1). Observe que as respostas são as mesmas para os dois casos e note ainda que o sinal de controle $u(t)$ satisfaz a condição $u(t) > -i_0^2 = -1.5437$, permitindo a estimação de $x_1(t)$ através de (3.8).

Observação 2 De (3.2)-(3.8) pode-se observar a inversão do processo para estimar a variável x_1 . Este procedimento causa no sistema de controle um laço (loop) algébrico, pois a variável x_1 depende do sinal de controle u , e este depende (ao mesmo tempo) de x_1 . Uma forma de eliminar o mesmo é adicionar um integrador no sistema, modificando-se o sinal de controle u para $u_{\text{novo}} = \dot{u}$, como ilustrado na Figura 3.3. Neste caso, haverá uma variável de estado adicional, $x_3 = u$, sendo o novo modelo em espaço de estados dado por:

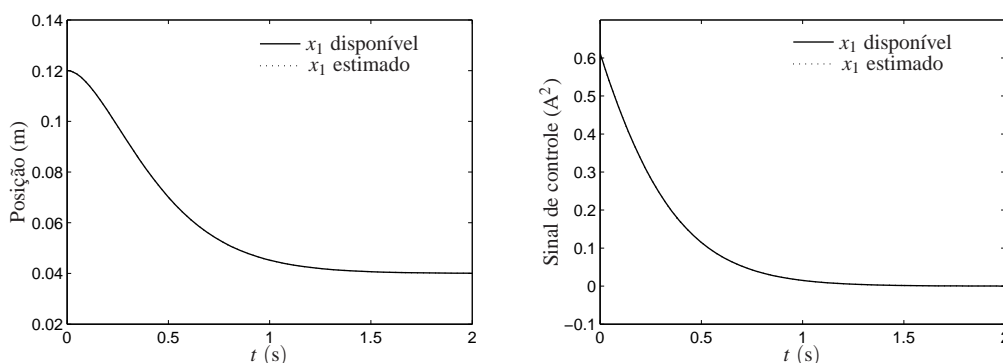


Figura 3.2: Respostas para a condição inicial ($\bar{x}_{10} = 0.12\text{m}$, $\bar{x}_{20} = 0$) com x_1 disponível (Figura 2.9) e x_1 estimado (Figura 3.1), curvas praticamente sobrepostas.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21} & \frac{-k}{m} & g_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{\text{nov}}. \quad (3.9)$$

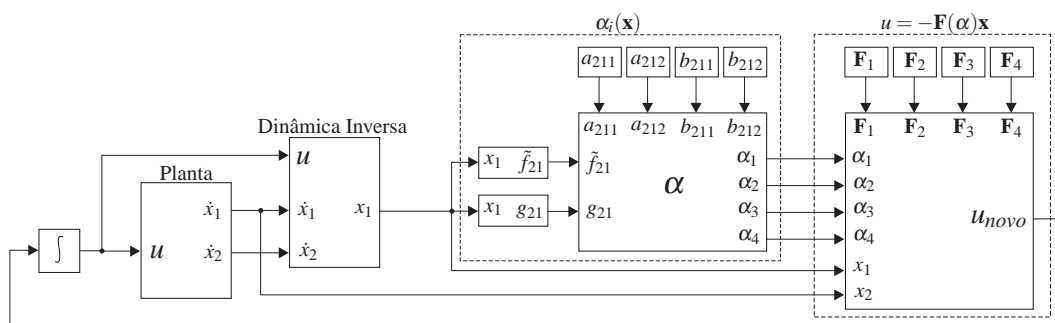


Figura 3.3: Sistema com o método de estimação de estados, eliminando o *loop* algébrico.

Considerando as mesmas condições de estabilidade do modelo anterior, com $\gamma = 25$, $\bar{x}_{10} = 0.075\text{m}$, $\bar{x}_{20} = 0$ e $x_{30} = 0$, encontrou-se os seguintes ganhos para o controlador:

$$\mathbf{F}_1 = [-125.2945 \quad -20.3299 \quad 15.9613], \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F}_2 = [-111.6077 \quad -19.4817 \quad 15.2303], \quad (3.11)$$

$$\mathbf{F}_3 = [-103.4396 \quad -16.8688 \quad 15.8650], \quad (3.12)$$

$$\mathbf{F}_4 = [-88.6573 \quad -15.6209 \quad 14.9819]. \quad (3.13)$$

A Figura 3.4 mostra os resultados obtidos para o deslocamento (y) da bola com o método sugerido para eliminar o *loop* algébrico (Figura 3.3).

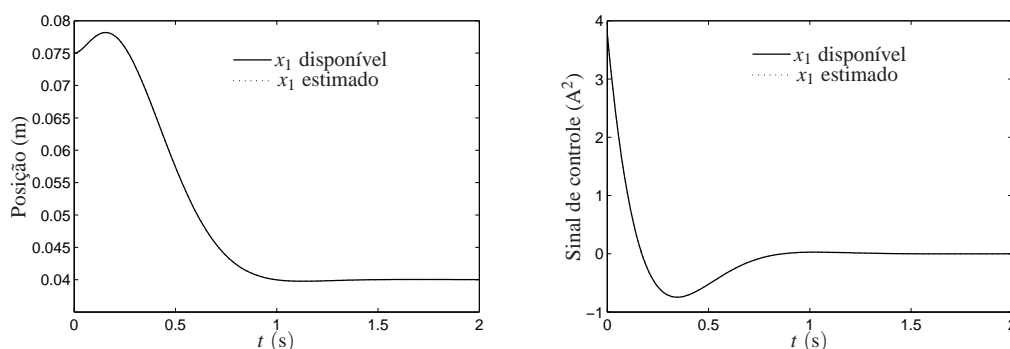


Figura 3.4: Respostas do sistema com o integrador, considerando a condição inicial ($\bar{x}_{1_0} = 0.075\text{m}$, $\bar{x}_{2_0} = 0$ e $x_{3_0} = 0$), curvas praticamente sobrepostas.

Pode-se perceber na simulação do sistema com o integrador adicional, apresentada na Figura 3.4, uma resposta oscilatória maior no período transitório, quando comparado com o sistema sem o integrador, porém neste caso consegue-se resolver o problema do *loop* algébrico.

3.2 Exemplo 2 - Controle de Posição da Perna de Pacientes Paraplégicos

O estudo de sistemas de controle, para controlar o movimento de pacientes paraplégicos através de estimulação elétrica, é um assunto de grande importância dentro da engenharia biomédica. Por exemplo (RIENER; FUHR, 1998), estudaram esse problema e utilizaram um controlador fuzzy do tipo Mamdani. Nesta seção é proposto um controlador fuzzy TS de forma a controlar a posição da perna de um paciente paraplégico. O controlador é projetado visando variar o ângulo da articulação do joelho de 30° , mediante estimulação elétrica no músculo quadríceps. É considerado o modelo matemático da perna proposto por (FERRARIN; PEDOTTI, 2000). Este modelo relaciona a largura do pulso aplicado com o torque gerado na articulação do joelho. Realizado o controle, a perna deve voltar à posição de repouso através da retirada da estimulação no músculo mencionado. Assim, o controlador deixa de atuar fazendo com que a perna volte à posição de repouso através da ação da gravidade (TEIXEIRA et al., 2006b; GAINO et al., 2008).

Na modelagem (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) consideraram o membro inferior como uma cadeia cinemática aberta composta de dois segmentos rígidos: a coxa, e o complexo canela-pé, conforme mostra a Figura 3.5. A dinâmica do sistema em torno da junção do joelho é dada por:

$$J\ddot{\theta}_v = -mgl\text{sen}(\theta_v) + M_s - B\dot{\theta} + M_a, \quad (3.14)$$

sendo:

- J momento de inércia do complexo composto pela canela-pé,
- θ ângulo comum do joelho (ângulo entre a canela e a coxa no plano sagital),
- $\dot{\theta}$ velocidade angular comum do joelho,
- θ_v ângulo da canela (ângulo entre a canela e o eixo vertical no plano sagital),
- $\ddot{\theta}_v$ aceleração angular da canela,
- m massa do complexo canela-pé,
- g aceleração gravitacional,
- l distância entre o joelho e o centro da massa do complexo canela-pé,
- B coeficiente de atrito viscoso,
- M_s torque devido ao componente de rigidez,
- M_a torque ativo do joelho produzido pela estimulação elétrica.

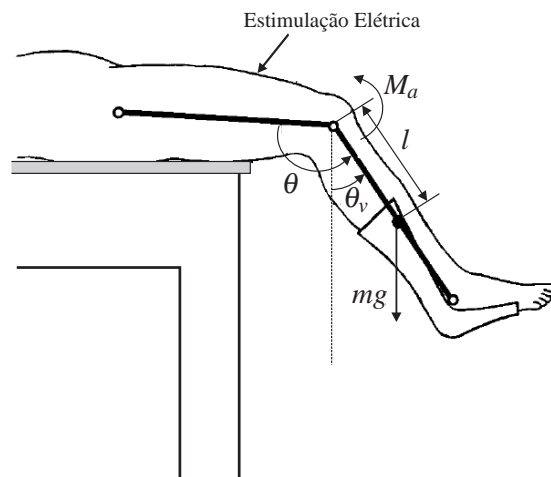


Figura 3.5: Representação esquemática da perna.

O equilíbrio dinâmico em torno da junção do joelho é representado pela seguinte equação.

$$M_i = M_g + M_s + M_d + M_a, \quad (3.15)$$

$$M_s = -\lambda e^{-E\theta} (\theta - \omega). \quad (3.16)$$

- M_i torque total inercial,
- M_g torque gravitacional,

- M_d componente que depende do ângulo de joelho e da velocidade angular,
- λ, E coeficientes dos termos exponenciais,
- ω ângulo elástico de repouso do joelho.

O torque que o músculo estará sujeito (M_a) e a largura dos pulsos da estimulação elétrica (P) podem ser relacionados adequadamente pela função de transferência (FERRARIN; PEDOTTI, 2000),

$$H(s) = \frac{M_a(s)}{P(s)} = \frac{G}{1 + s\tau}, \quad (3.17)$$

sendo G e τ o ganho estático e a constante de tempo respectivamente.

A Tabela 3.1 apresenta os valores considerados para análise numérica do sistema.

Tabela 3.1: Parâmetros do sistema (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

J	0.362 Kgm^2
m	4.37 Kg
l	23.8 cm
B	0.27 Nms/rad
λ	41.208 Nm/rad
E	2.024 $1/rad$
ω	2.918 rad
τ	0.951 s
G	42500 Nm/s
θ_{v0}	30°

Substituindo M_s de (3.16) em (3.14) e considerando que $\theta = \theta_v + \pi/2$ (Figura 3.5) tem-se,

$$\ddot{\theta}_v = \frac{1}{J} \left[-mgl \sin(\theta_v) - \lambda e^{-E(\theta_v + \frac{\pi}{2})} \left(\theta_v + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - B\dot{\theta}_v + M_a \right]. \quad (3.18)$$

Antes de iniciar a modelagem, encontrou-se os valores de M_a e P calculados no ponto de operação de interesse, ou seja, $\theta_{v0} = 30^\circ$. Sabendo-se que no ponto de operação as derivadas primeiras e segundas são nulas e isolando-se M_{a0} de (3.18),

$$\begin{aligned} M_{a0} &= mgl \sin(\theta_{v0}) + \lambda e^{-E(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right), \\ &= 4.6068 \text{ Nm}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De (3.17),

$$(1 + s\tau)M_a(s) = GP(s). \quad (3.20)$$

Transferindo (3.20) para o domínio do tempo,

$$\tau \dot{M}_a + M_a = GP. \quad (3.21)$$

Seja

$$\Delta M_a = M_a - M_{a0}, \quad (3.22)$$

então,

$$\Delta \dot{M}_a = \dot{M}_a. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.21) obtém-se,

$$\tau \Delta \dot{M}_a + \Delta M_a + M_{a0} = GP, \quad (3.24)$$

logo,

$$\tau \Delta \dot{M}_a + \Delta M_a = G \left(P - \frac{M_{a0}}{G} \right), \quad (3.25)$$

Da equação (3.25),

$$P_0 = \frac{M_{a0}}{G}. \quad (3.26)$$

Substituindo os valores (Tabela 3.1),

$$P_0 = 1.0839 \times 10^{-4} \text{ s}. \quad (3.27)$$

Da teoria de controle de Lyapunov, sabe-se que para o projeto do controlador, a origem deve ser o ponto de equilíbrio para as variáveis de estado do sistema. Neste caso, pode-se proceder da seguinte forma. Seja,

$$\Delta \theta_v = \theta_v - \theta_{v0}, \quad (3.28)$$

assim,

$$\dot{\theta}_v = \Delta \dot{\theta}_v, \quad (3.29)$$

$$\ddot{\theta}_v = \Delta \ddot{\theta}_v. \quad (3.30)$$

Desta forma, substituindo (3.22) e (3.28) em (3.18) tem-se:

$$J \Delta \ddot{\theta}_v = \left[\frac{-mgl \sin(\Delta \theta_v + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(\Delta \theta_v + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} (\Delta \theta_v + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega) + M_{a0}}{\Delta \theta_v} \right] \Delta \theta_v - B \Delta \dot{\theta}_v + \Delta M_a. \quad (3.31)$$

Definindo as variáveis de estado na forma,

$$\begin{aligned}x_1 &= \Delta\theta_v, \\x_2 &= \Delta\dot{\theta}_v = \dot{x}_1, \\x_3 &= \Delta M_a\end{aligned}$$

e substituindo em (3.31) tem-se,

$$J\dot{x}_2 = \left[\frac{-mglsen(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} (x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega) + M_{a0}}{x_1} \right] x_1 - Bx_2 + x_3. \quad (3.32)$$

Pode-se reescrever (3.25) na forma,

$$\begin{aligned}\tau\Delta\dot{M}_a &= -\Delta M_a + G \left(P - \frac{M_{a0}}{G} \right), \\ \tau\Delta\dot{M}_a &= -\Delta M_a + GP_N, \\ P_N &= P - \frac{M_{a0}}{G}.\end{aligned} \quad (3.33)$$

Sendo $\Delta M_a = x_3$, de (3.33) tem-se,

$$\dot{x}_3 = \frac{-1}{\tau}x_3 + \frac{G}{\tau}P_N. \quad (3.34)$$

Logo, de (3.32) e (3.34) pode-se escrever o sistema no espaço de estado,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21}(x_1) & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix} P_N, \quad (3.35)$$

sendo $\tilde{f}_{21}(x_1)$ dada por:

$$\tilde{f}_{21}(x_1) = \frac{1}{Jx_1} \left[-mglsen(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) + M_{a0} \right]. \quad (3.36)$$

De (3.35) pode-se encontrar os modelos locais e as funções de pertinência para a modelagem fuzzy TS (modelagem exata), ou seja,

$$\tilde{f}_{21}(x_1) = \alpha_1(x_1(t))a_{211} + \alpha_2(x_1(t))a_{212}, \quad (3.37)$$

sendo

$$a_{211} = \max \{ \tilde{f}_{21}(x_1(t)) \}, \quad (3.38)$$

$$a_{212} = \min \{ \tilde{f}_{21}(x_1(t)) \}, \quad (3.39)$$

$$\alpha_1(x_1(t)) + \alpha_2(x_1(t)) = 1, \quad \alpha_1(x_1(t)) \geq 0, \quad \alpha_2(x_1(t)) \geq 0. \quad (3.40)$$

Assim,

$$\alpha_1(x_1(t)) = \frac{\tilde{f}_{21}(x_1) - a_{212}}{a_{211} - a_{212}}, \quad \alpha_2(x_1(t)) = \frac{\tilde{f}_{21}(x_1) - a_{211}}{a_{212} - a_{211}}. \quad (3.41)$$

Considerando os valores da Tabela 3.1, $\theta_v \in [0^\circ, 60^\circ]$ e $\theta_{v0} = 30^\circ$ tem-se, $a_{211} = -21.9396$ e $a_{212} = -36.4938$. Logo, o modelo fuzzy TS é dado por,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(x_1(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)), \quad (3.42)$$

sendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{211} & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{212} & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (3.43)$$

Assim como no exemplo do levitador magnético, verifica-se através das equações (3.41) que as funções de pertinências dependem apenas da variável de estado x_1 , pois a função não-linear \tilde{f}_{21} depende de x_1 . Suponha que existam apenas sensores acelerométricos neste sistema, ou seja, tem-se acesso apenas aos valores de \dot{x}_1 e \dot{x}_2 . A variável de estado x_3 pode ser obtida a partir do circuito eletrônico de estimulação. Necessita-se então da variável x_1 . Neste caso, também pode-se utilizar o método de inversão para obtê-la.

Da equação (3.35),

$$\dot{x}_2 = \tilde{f}_{21}(x_1)x_1 - \frac{B}{J}\dot{x}_1 + \frac{1}{J}x_3, \quad (3.44)$$

$\tilde{f}_{21}(x_1)$ dado em (3.36).

Analisando a função não-linear $\tilde{f}_{21}(x_1)$, representada na Figura 3.6, verifica-se que, para $x_1 \in [-\pi/6, \pi/6]$ que corresponde a $0^\circ \leq \theta_v \leq 60^\circ$ (com $\theta_{v0} = 30^\circ$), $\tilde{f}_{21}(x_1)$ pode ser aproximada por uma reta. Desta forma, com o auxílio do comando “*basic fitting*” do MATLAB e utilizando os valores da Tabela 3.1 tem-se:

$$\dot{x}_2 = \underbrace{(ax_1 + b)}_{\cong \tilde{f}_{21}(x_1)} x_1 - \frac{B}{J}\dot{x}_1 + \frac{1}{J}x_3, \quad (3.45)$$

$a = 13.584$ e $b = -28.896$.

A Figura 3.7 mostra a curva $\tilde{f}_{21}(x_1)x_1$, utilizando a forma aproximada (equação (3.45)). Verifica-se um bom resultado, com um erro padrão máximo de 1.33%.

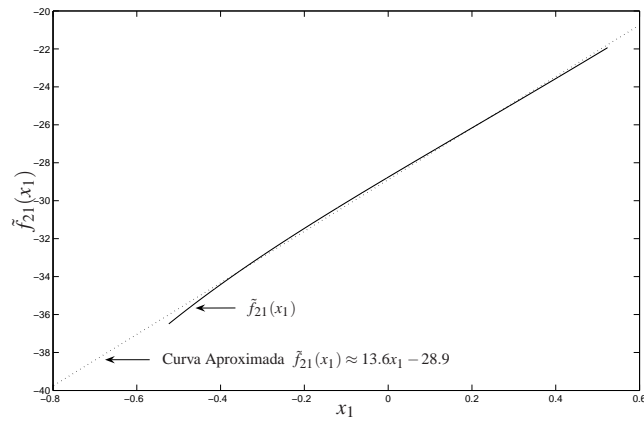


Figura 3.6: Curva exata e aproximada da função não-linear $\tilde{f}_{21}(x_1)$.

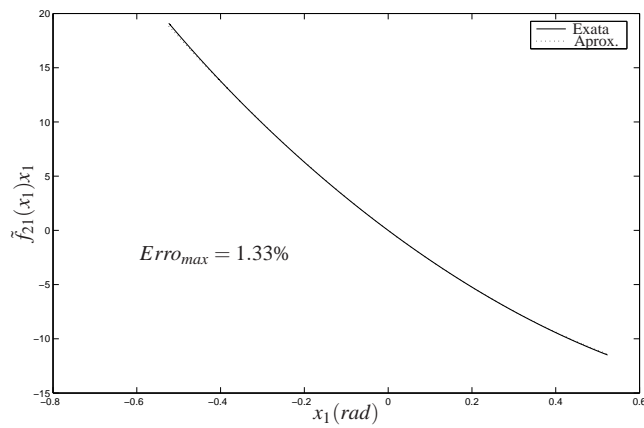


Figura 3.7: Curva exata e aproximada da função $\tilde{f}_{21}(x_1)x_1$, praticamente sobrepostas.

De (3.45),

$$\dot{x}_2 = ax_1^2 + bx_1 - \frac{B}{J}\dot{x}_1 + \frac{1}{J}x_3, \quad (3.46)$$

$$ax_1^2 + bx_1 - \frac{B}{J}\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \frac{1}{J}x_3 = 0. \quad (3.47)$$

Seja $c(t) = -\frac{B}{J}\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \frac{1}{J}x_3$. Assim,

$$ax_1^2 + bx_1 + c(t) = 0. \quad (3.48)$$

Note que de (3.48) tem-se

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac(t)}}{2a}. \quad (3.49)$$

Através de (3.48) pode-se obter a equação característica

$$1 + \frac{c(t)}{ax_1^2 + bx_1} = 0. \quad (3.50)$$

Como $c(t)$ é um parâmetro variável, as raízes características do sistema devem satisfazer a equação (3.50) onde se posicionam as raízes (x_1) no plano, (DORF; BISHOP, 2001). Como (3.49) é solução do problema ($x_1 \in \mathbb{R}, x_1 \in [-\pi/6, \pi/6]$), o *root locus* da equação característica (3.50) também deve ser real no intervalo $[-\pi/6, \pi/6]$ quando $c(t)$ variar. As Figuras 3.8 e 3.9 mostram o *root locus* quando $c(t) > 0$ e $c(t) < 0$ respectivamente.

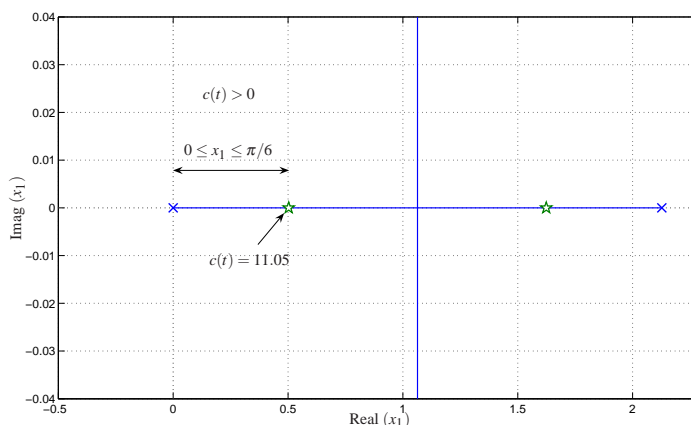


Figura 3.8: *Root locus* com $c(t) > 0$.

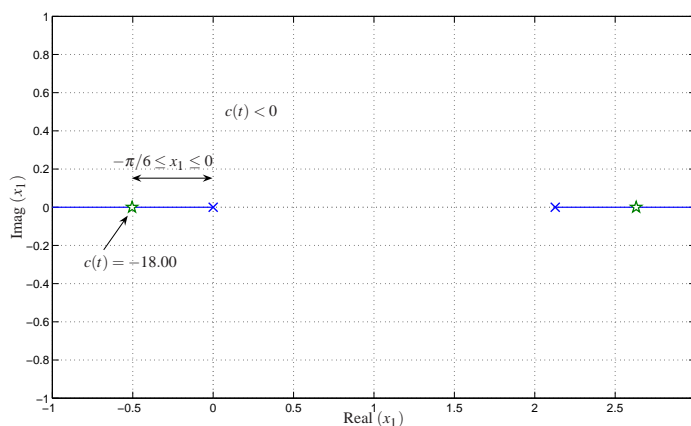


Figura 3.9: *Root locus* com $c(t) < 0$.

Note que analisando as Figuras 3.8 e 3.9, verifica-se a existência do *root locus* no intervalo $-\pi/6 \leq x_1 \leq \pi/6$ quando $-18.00 \leq c(t) \leq 11.05$. Desta forma, pode-se concluir que a solução analítica da equação (3.48) existe e é única no intervalo $[-\pi/6, \pi/6]$. Logo,

$$x_1 = 1.0636 - \sqrt{1.1313 - 0.0736c(t)}, \quad (3.51)$$

é a solução de (3.48). Assim, x_1 pode ser obtida em função de \dot{x}_1 , \dot{x}_2 e x_3 . Uma representação em diagrama de blocos do sistema de controle proposto é ilustrado na Figura 3.10.

Para o projeto do controlador, considerou-se a restrição na entrada $\gamma = 500 \times 10^{-6}$ e a taxa de decaimento $\beta = 1.4$. Desta forma, através das LMIs (2.46), (2.47), (2.48) e (2.49) foram

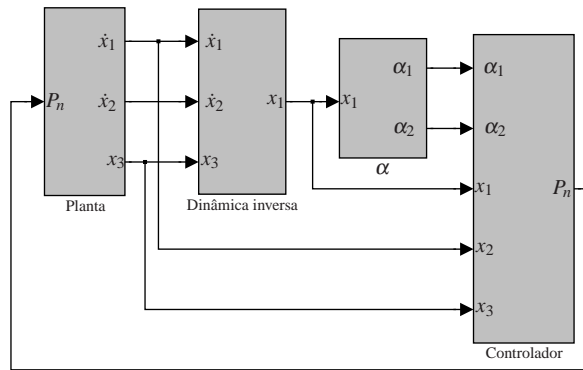


Figura 3.10: Sistema de controle com o método proposto.

obtidos os seguintes ganhos:

$$\mathbf{F}_1 = 1 \times 10^{-3} [-0.6197 \ 0.1286 \ 0.1174], \quad (3.52)$$

$$\mathbf{F}_2 = 1 \times 10^{-3} [-0.8619 \ 0.1347 \ 0.1175]. \quad (3.53)$$

As Figuras 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 mostram os resultados das simulações considerando a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{d0}]^T$ e a Figura 3.15 mostra o comportamento do sistema sem o sinal de controle P_N com a perna na posição inicial $\theta_v = 30^\circ = \theta_{v0}$. Note que as respostas aproximadas mostram com fidelidade o comportamento exato do sistema.

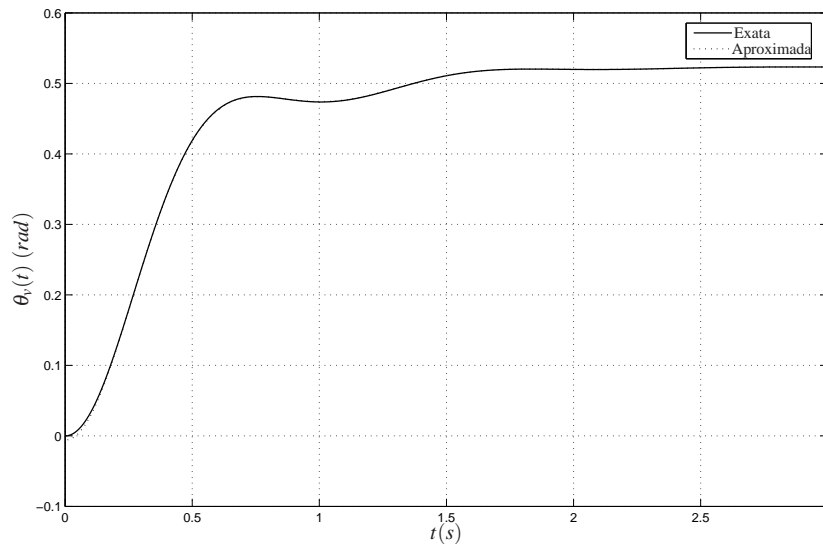


Figura 3.11: Comportamento da posição angular ($\theta_v(t)$) da perna, com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{d0}]^T$, curvas praticamente sobrepostas.

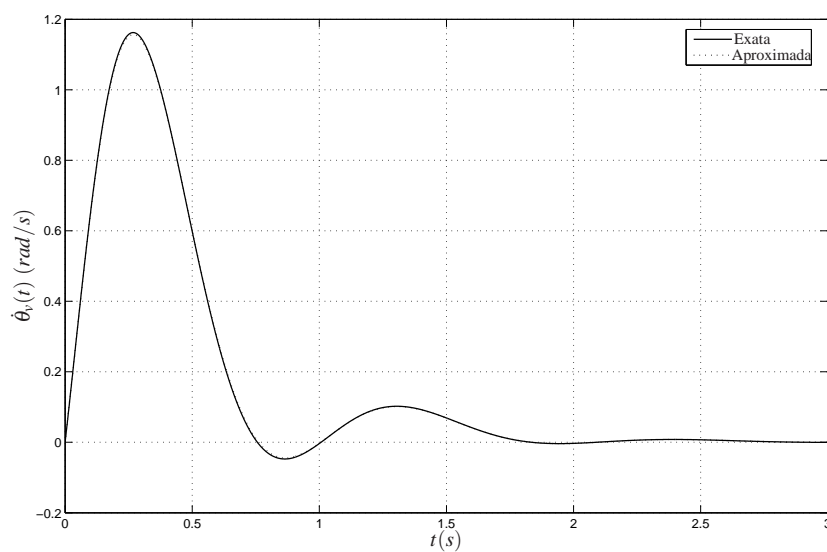


Figura 3.12: Comportamento da velocidade angular ($\dot{\theta}_v(t)$) da perna, com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$, curvas praticamente sobrepostas.

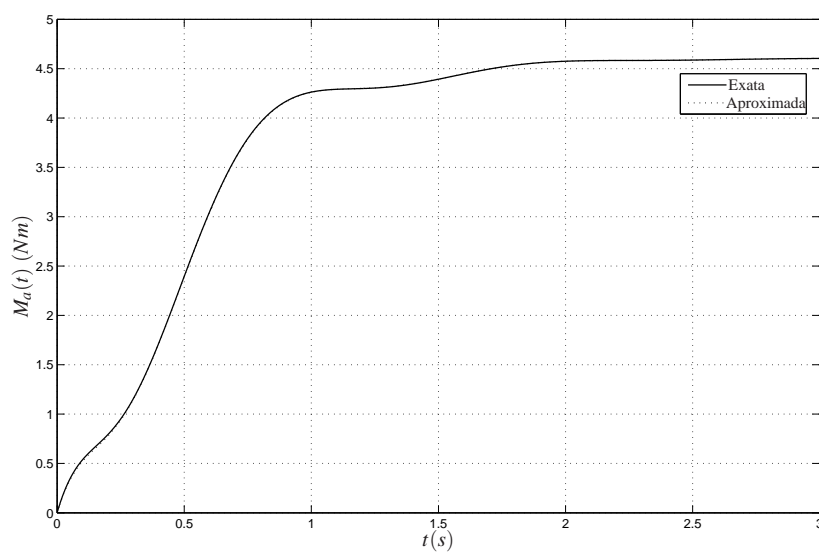


Figura 3.13: Comportamento do torque ativo ($M_a(t)$) produzido pela estimulação, com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$, curvas praticamente sobrepostas.

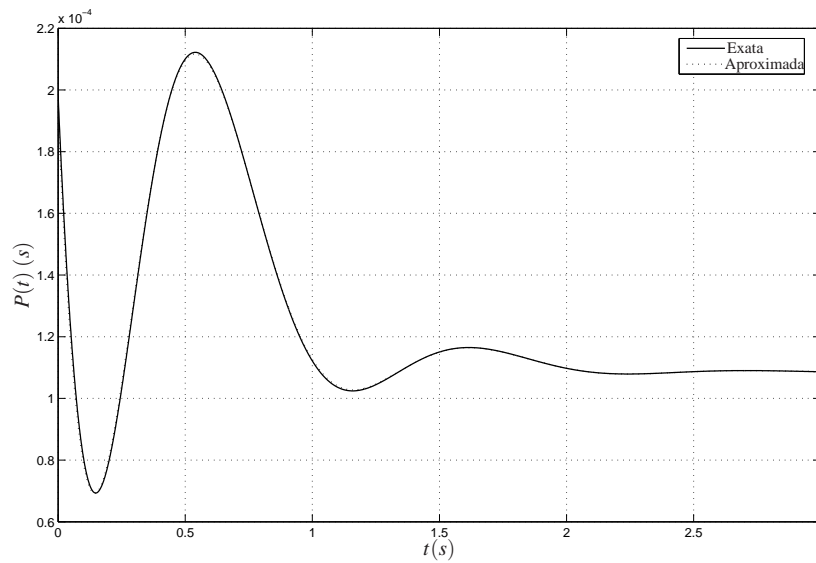


Figura 3.14: Comportamento da largura de pulso ($P(t)$) do sistema com a condição inicial $x_0 = [-\theta_{v0} \ 0 \ -M_{a0}]^T$, curvas praticamente sobrepostas.

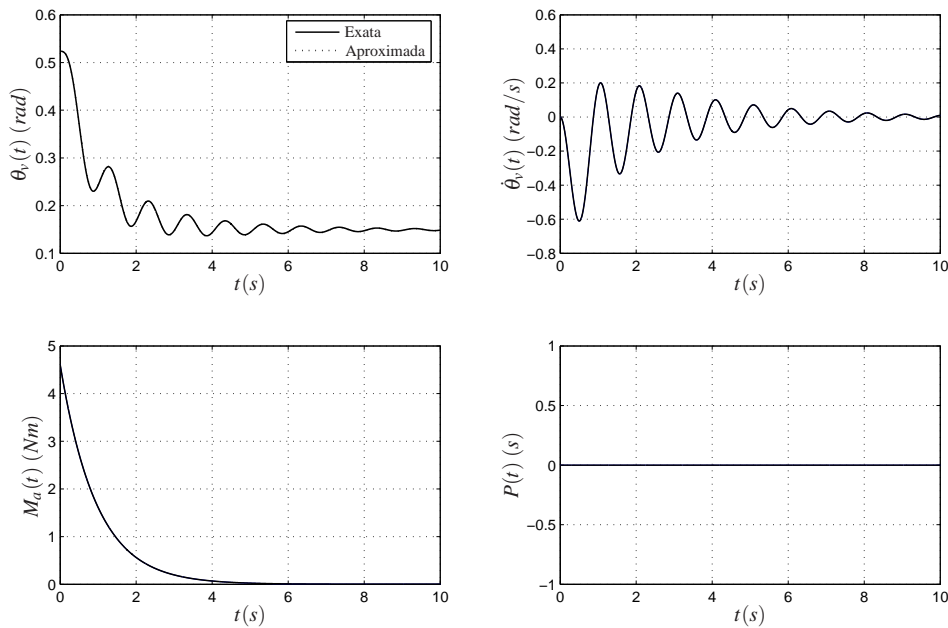


Figura 3.15: Respostas sem o sinal de controle (P_N), com a condição inicial $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$.

3.3 Conclusões Parciais

Neste Capítulo foi proposto um novo método para o controle de sistemas mecânicos não-lineares considerando o acesso somente às derivadas dos estados da planta, com projeto baseado em LMIs. Primeiramente, o método foi aplicado no controle de um levitador magnético, no qual

foi possível calcular analiticamente uma variável de estado (x_1) através do método de inversão e utilizar um controlador fuzzy TS. Nas simulações, foram obtidos os mesmos resultados do modelo convencional, no qual o vetor de estado é disponível. Adicionalmente, o mesmo método de projeto foi proposto para um sistema de controle de posição da perna de pacientes paraplé-gicos. Neste caso, foi necessário obter uma aproximação de uma função não-linear ($\tilde{f}_{21}(x_1)$) para encontrar, de forma analítica, a expressão para o cálculo da variável de estado x_1 , e assim utilizar o controle fuzzy TS.

4 *Projeto da Realimentação Derivativa Discreta com a Realimentação Não-Derivativa Contínua (Redesign)*

4.1 Introdução

Como já descrito no Capítulo 3, nos últimos anos, o controle com realimentação da derivada do vetor de estado tem sido muito utilizado, por exemplo, no projeto de controladores para solucionar os seguintes problemas: realimentação derivativa em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs (FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009), alocação de pólos com robustez de sistemas lineares, baseado em projetos com LMIs (FARIA et al., 2009; ASSUNÇÃO et al., 2007), estabilização com robustez de sistemas lineares descritores (DUAN; IRWIN; LIU, 1999; CARDIM et al., 2008a), controle de sistemas singulares (JIN, 1994), controle não-linear com linearização exata (BOUKAS; HABETLER, 2004), e controle \mathcal{H}_∞ de sistemas contínuos no tempo com atraso nas variáveis de estado (FRIDMAN; SHAKED, 2002).

Em (CARDIM et al., 2007b) foi proposto um método para projetar um ganho de realimentação derivativa e um ganho de alimentação direta (do inglês *feedforward gain*), tal que a lei de controle obtida seja equivalente a uma lei de controle com realimentação do vetor de estado. Este método apresenta uma análise teórica simples e estende os resultados descritos em (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004) para uma classe mais geral de sistemas de controle, como por exemplo, o problema de controle com desacoplamento (*noninteracting control*).

Em (CHANG et al., 2002) foi proposto um método interessante para o cálculo aproximado de uma igualdade matricial através de um processo de minimização utilizando LMIs. O método foi utilizado para calcular os parâmetros de um controlador discreto no tempo, partindo de um controlador contínuo no tempo adequado, utilizando uma técnica de aproximação. Este método também foi estudado em (LEE; PARK; JOO, 2006) para projetar um controlador de um sistema discreto no tempo, a partir de um controlador contínuo no tempo, sem perder as propriedades

do sistema controlado contínuo no tempo original.

Nesta seção, a técnica estudada em (CHANG et al., 2002) será muito útil para o desenvolvimento de um novo método, e será adotada a terminologia **Redesign** para se referir ao sistema discreto obtido através do método proposto em (CHANG et al., 2002). É suposto que a planta é controlável, linear e invariante no tempo, com uma (SI) ou múltiplas (MI) entradas. Este procedimento permite o uso de métodos de projeto bem conhecidos de realimentação (contínua no tempo) das variáveis de estado, para então, calcular diretamente os ganhos de realimentação da derivada das variáveis de estado em sistemas discretos no tempo. Alguns métodos apresentados em (LEWIS; SYRMOS, 1991; JIN, 1994; ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004; DUAN; IRWIN; LIU, 1999; FRIDMAN; SHAKED, 2002; BOUKAS; HABETLER, 2004; ASSUNÇÃO et al., 2007; CARDIM et al., 2007b, 2007, 2008a; FARIA et al., 2009) consideram projetos de sistemas contínuos com realimentação da derivada do vetor de estado, mas pelo conhecimento dos autores, até o momento a literatura não registra artigos aplicando o método *redesign* em sistemas discretos com realimentação derivativa.

Para ilustrar a eficiência do método proposto, foi considerado como exemplo, um sistema de controle de um helicóptero, utilizando alocação de pólos como técnica de projeto.

4.2 Redesign Discreto com Realimentação do Vetor de Estado

Esta seção descreve os principais resultados apresentados em (CHANG et al., 2002). Estes resultados são utilizados na solução de um novo problema, que é uma das contribuições deste trabalho, sendo que os novos resultados obtidos foram apresentados recentemente em (CARDIM et al., 2009b) e (TEIXEIRA et al., 2009).

Considere o sistema linear controlável e invariante no tempo descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = Ax_c(t) + Bu_c(t), & x_c(0) = x_0, \\ y_c(t) = Cx_c(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_c(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de controle, $y_c(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saída, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrizes invariantes no tempo. O sinal de controle $u_c(t)$ é dado por

$$u_c(t) = -K_c x_c(t) + E_c r, \quad (4.2)$$

sendo $K_c \in \mathbb{R}^{m \times n}$ o ganho de realimentação de estado, $E_c \in \mathbb{R}^{m \times p}$ o ganho de alimentação direta, e $r \in \mathbb{R}^m$ o sinal de referência constante. Note que o ganho K_c pode ser projetado

através de métodos bem conhecidos na literatura, por exemplo, tal que os pólos do sistema em malha fechada (4.1) e (4.2) sejam alocados em posições desejadas (CHEN, 1999; VALÁŠEK; OLGAC, 1995a, 1995b).

De (4.1) e (4.2) tem-se que

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = (A - BK_c)x_c(t) + BE_cr, \\ y_c(t) = Cx_c(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

O modelo discreto do sistema em malha fechada (4.3), com $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$ e T o período de amostragem, é dado por (CHANG et al., 2002)

$$\begin{cases} x_c(kT + T) = G_c x_c(kT) + H_c E_c r, \\ y_c(kT) = Cx_c(kT), \end{cases} \quad (4.4)$$

sendo $G_c = e^{(A - BK_c)T}$ e

$$H_c = \int_{kT}^{kT+T} e^{(A - BK_c)(kT+T-\tau)} B d\tau = (G_c - I_n)(A - BK_c)^{-1} B. \quad (4.5)$$

Note que a equação (4.4) é uma representação discreta no tempo do sistema contínuo no tempo (4.3), nos instantes $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Considerando a mesma análise apresentada em (CHANG et al., 2002), seja a equação de estado do sistema contínuo no tempo (4.1) com uma entrada de controle digital, representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu_d(t), \quad x_d(0) = x_0, \\ y_d(t) = Cx_d(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} u_d(t) &= u_d(kT) = -K_d x_d(kT) + E_d r, \\ kT &\leq t < kT + T, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo $K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$ o ganho de realimentação digital e $E_d \in \mathbb{R}^{m \times p}$ o ganho de alimentação direta. Assim, o sistema em malha fechada é dado por

$$\dot{x}_d(t) = Ax_d(t) - BK_d x_d(kT) + BE_d r, \quad kT \leq t < kT + T, \quad (4.8)$$

e o modelo discreto do sistema (4.6) com (4.7) é

$$\begin{cases} x_d(kT + T) = (G - HK_d)x_d(kT) + HE_d r, \\ y_d(kT) = Cx_d(kT), \end{cases} \quad (4.9)$$

com $G = e^{AT}$ e

$$H = \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} B d\tau = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = (G - I_n)A^{-1}B. \quad (4.10)$$

Se A for uma matriz singular, então a matriz H pode ser calculada através da seguinte equação (CHANG et al., 2002):

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (AT)^{i-1} BT. \quad (4.11)$$

O problema proposto em (CHANG et al., 2002) foi o seguinte:

Problema 1 (CHANG et al., 2002) Para os ganhos K_c e E_c projetados, utilizando a lei de controle convencional (4.2), determine os ganhos de controle discreto K_d e E_d da lei de controle (4.7) tais que:

- (i) O sistema de controle digital em (4.8) seja estável no sentido de Lyapunov;
- (ii) As saídas do sistema de controle digital (4.9) estejam o mais próximo possível das saídas do sistema (4.4).

O Teorema 1 resolve o Problema 1 proposto em (CHANG et al., 2002).

Teorema 1 (CHANG et al., 2002) Se existirem uma matriz simétrica definida positiva Γ , uma matriz F , e um escalar $\alpha > 0$ tais que as restrições para o problema de minimização a seguir forem satisfeitas, então a lei de controle digital dada em (4.7) atende os objetivos de projeto descritos no Problema 1.

$$\min \alpha \begin{bmatrix} -\alpha\Gamma & * \\ G_c\Gamma - G\Gamma + HF & -\alpha I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.12)$$

$$\begin{bmatrix} -\Gamma & * \\ G\Gamma - HF & -\Gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (4.13)$$

sendo que $F = K_d\Gamma$ e $*$ representa a transposta do elemento da posição simétrica. O ganho de realimentação K_d e de alimentação direta E_d são dados por,

$$K_d = F\Gamma^{-1}, \quad (4.14)$$

$$E_d = ((I - (G - HK_d))^{-1}H)^{+1} (I - G_c)^{-1} H_c E_c. \quad (4.15)$$

A notação $(\cdot)^{+1}$ representa a pseudo-inversa de (\cdot) . No caso, sendo $\phi = (I - (G - HK_d))^{-1}H \in \mathbb{R}^{n \times m}$, então $\phi^{+1} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Prova: Veja (CHANG et al., 2002). ■

Observação 3 A solução do problema de minimização descrito no Teorema 1 pode ser facilmente encontrada através de softwares baseados em técnicas de programação convexa, por exemplo, o LMI Control Toolbox do MATLAB (GAHINET et al., 1995). Observe que (4.12) é uma desigualdade matricial bilinear nas variáveis α e Γ . Este problema pode ser resolvido, considerando que

$$\begin{bmatrix} -\alpha\Gamma & * \\ G_c\Gamma - G\Gamma + HF & -\alpha I \end{bmatrix} < 0$$

é equivalente a

$$Z \begin{bmatrix} -\alpha\Gamma & * \\ G_c\Gamma - G\Gamma + HF & -\alpha I \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} -\Gamma & * \\ G_c\Gamma - G\Gamma + HF & -\alpha^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.16)$$

sendo que a matriz não-singular Z é dada por

$$Z = \begin{bmatrix} (\sqrt{\alpha})^{-1}I & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} I \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Portanto, (4.12) é equivalente a:

$$\min \mu \begin{bmatrix} -\Gamma & * \\ G_c\Gamma - G\Gamma + HF & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.18)$$

com $\mu = \alpha^2$. Assim, note que (4.18) é uma LMI e (4.12) uma Bilinear Matrix Inequality (BMI). O procedimento acima é conveniente, porque a solução do problema de LMIs é muito mais simples de se obter.

Observação 4 (CHANG et al., 2002) Se o sistema original (4.3) e o sistema “redesigned” (4.9) forem assintoticamente estáveis, utilizando os ganhos K_d e E_d dados em (4.14) e (4.15), respectivamente, então as saídas destes sistemas satisfazem a equação abaixo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(kT) - y_d(kT)) = 0. \quad (4.19)$$

4.3 Exemplo 1

Para ilustrar o método proposto em (CHANG et al., 2002) considere o sistema instável com os seguintes parâmetros:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -17.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -53.90 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (4.20)$$

Como descrito em (CHANG et al., 2002), utilizando o método de controle LQR com a otimização da função custo $J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt$, com

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad (4.21)$$

e considerando o sinal de referência $r = 1$, foram encontrados os seguintes ganhos para o controlador do sistema contínuo:

$$K_c = [3.1623 \ 2.8864 \ -14.9723 \ -4.3837], \quad (4.22)$$

$$E_c = 3.1623, \quad (4.23)$$

Para os períodos de amostragem $T = 0.7 \text{ s}$, $T = 0.6 \text{ s}$, $T = 0.4 \text{ s}$ e $T = 0.1 \text{ s}$ foram encontrados os seguintes ganhos para o controlador digital:

$$T = 0.7 \text{ s} \rightarrow \begin{cases} K_d = [1.2247 \ 0.7131 \ 8.9551 \ 2.7088], \\ E_d = 1.2247, \end{cases} \quad (4.24)$$

$$T = 0.6 \text{ s} \rightarrow \begin{cases} K_d = [1.2194 \ 0.3934 \ 15.2703 \ 0.6427], \\ E_d = 1.2194, \end{cases} \quad (4.25)$$

$$T = 0.4 \text{ s} \rightarrow \begin{cases} K_d = [1.4705 \ 0.5550 \ 18.7837 \ 1.5978], \\ E_d = 1.4705, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$T = 0.1 \text{ s} \rightarrow \begin{cases} K_d = [2.3401 \ 1.7524 \ -1.9662 \ -3.5781], \\ E_d = 2.3401. \end{cases} \quad (4.27)$$

A Figura 4.1 mostra os resultados para a condição inicial $x_c = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e sinal de referência $r = 1$.

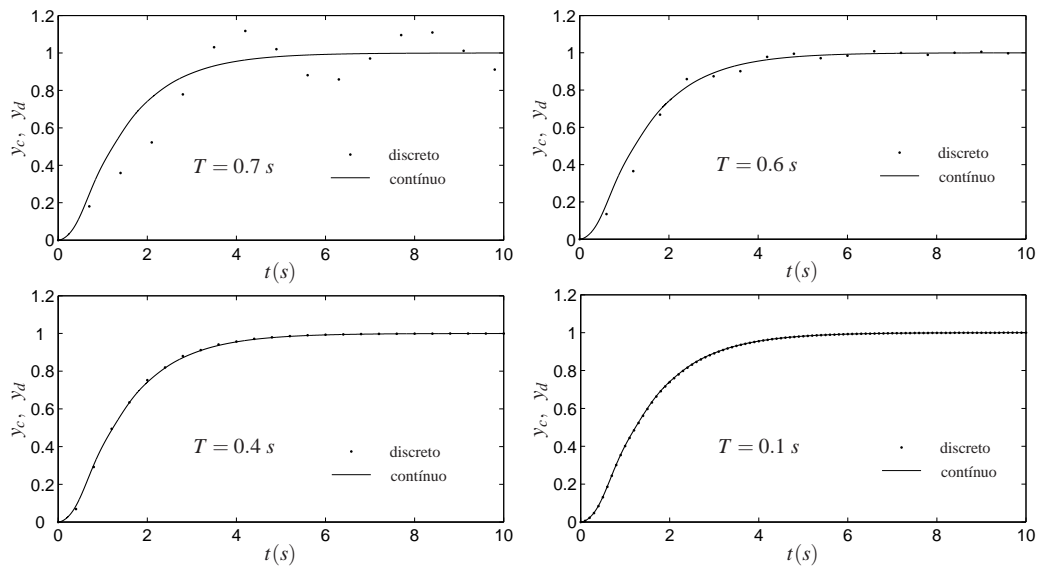


Figura 4.1: Respostas transitórias dos sistemas contínuo e discreto (com o método proposto por (CHANG et al., 2002)).

Note que o período de amostragem é um parâmetro muito importante para se obter um bom resultado, sendo que, como se espera, a semelhança do sistema discreto é mais próxima do sistema original (contínuo) quanto menor o período de amostragem. No entanto, quando analisado de forma prática, um período de amostragem muito pequeno pode ser inconveniente, sendo que este depende diretamente dos limites impostos pela placa de aquisição de dados e das restrições dos sensores utilizados no sistema.

4.4 Redesign Discreto com Realimentação da Derivada do Vetor de Estado

Pelo Teorema 1 proposto em (CHANG et al., 2002), pode-se obter uma solução para o Problema 1, dada pelas matrizes K_d e E_d . Então a lei de controle discreta no tempo (4.7) é praticamente equivalente à lei de controle contínua no tempo (4.2). Com base nestes resultados, foi proposto o seguinte problema.

Problema 2 *Determine as matrizes K_{df} e E_{df} de modo que, para $k = 0, 1, \dots$, a lei de controle discreta (4.7), com realimentação do vetor de estado, seja igual à lei de controle discreta, com realimentação da derivada do vetor de estado, dada abaixo:*

$$u_d(kT) = -K_d x_d(kT) + E_d r = -K_{df} \dot{x}_d(kT) + E_{df} r, \quad (4.28)$$

sendo que a notação $\dot{x}_d(kT)$ representa o vetor $\dot{x}_d(t)$ no instante $t = kT$.

A equação (4.28) mostra que o sistema (4.6) apresenta o mesmo vetor $x_d(t)$, para $t > 0$, com o sinal de controle $u_d(kT) = u_{df}(kT) = -K_{df}\dot{x}_d(kT) + E_{df}r$ (realimentação derivativa) e $u_d(kT) = -K_d x_d(kT) + E_d r$ (realimentação do vetor de estado).

Para resolver o problema proposto, são consideradas as seguintes hipóteses:

- (i) O determinante da matriz A na equação (4.1) é diferente de zero;
- (ii) O determinante da matriz $(A - BK_d)$ é diferente de zero;
- (iii) A matriz B tem posto igual a m .

A hipótese (i) também foi utilizada em (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004) e é uma condição importante para a estabilidade do sistema (4.1), com o método proposto e a lei de controle $u_d(kT) = u_{df}(kT) = -K_{df}\dot{x}_d(kT) + E_{df}r$. A hipótese (ii) é necessária para que o sistema (4.6), com a lei de controle (4.7) seja globalmente assintoticamente estável, pois caso contrário, a matriz $(A - BK_d)$ teria pelo menos um autovalor igual a zero, ou seja, $\det(A - BK_d) = 0$. Por exemplo, de (4.6) e (4.7) (supondo $E_d = 0$) tem-se que

$$\dot{x}_d(kT) = Ax_d(kT) + B(-K_d x_d(kT)) = (A - BK_d)x_d(kT).$$

Se $\det(A - BK_d) = 0$, então existe $x_d(kT) \neq 0$ tal que $(A - BK_d)x_d(kT) = 0$, e assim $\dot{x}_d(kT) = 0$. Desta forma, este $x_d(kT) \neq 0$ seria um ponto de equilíbrio e $x_d = 0$ não seria globalmente assintoticamente estável.

A necessidade da hipótese (iii) é descrita no final da prova do Teorema 2 apresentado a seguir. Este teorema resolve o Problema 2 proposto.

Teorema 2 *Considere que o sistema (4.6) com a lei de controle dada em (4.7), apresenta um desempenho adequado. Então, se as hipóteses (i), (ii) e (iii) forem satisfeitas, o sinal de controle por realimentação da derivada do vetor de estado*

$$u_d(t) = u_d(kT) = u_{df}(kT) = -K_{df}\dot{x}_d(kT) + E_{df}r, \quad kT \leq t < kT + T, \quad (4.29)$$

$$K_{df} = K_d(A - BK_d)^{-1}, \quad (4.30)$$

$$E_{df} = (I_m + K_{df}B)E_d, \quad (4.31)$$

é tal que, para o sistema controlado (4.6) e (4.29),

$$u_d(kT) = -K_{df}\dot{x}_d(kT) + E_{df}r = -K_d x_d(kT) + E_d r. \quad (4.32)$$

Prova: De (4.6), (4.29) e $t = kT$ tem-se que,

$$\begin{aligned}\dot{x}_d(kT) &= Ax_d(kT) - BK_{df}\dot{x}_d(kT) + BE_{df}r, \\ (I_n + BK_{df})\dot{x}_d(kT) &= Ax_d(kT) + BE_{df}r.\end{aligned}\quad (4.33)$$

De E_{df} dado em (4.31) e (4.33),

$$(I_n + BK_{df})\dot{x}_d(kT) = Ax_d(kT) + B(I_m + K_{df}B)E_{df}r = Ax_d(kT) + (I_n + BK_{df})BE_{df}r. \quad (4.34)$$

Note que, de K_{df} dado em (4.30),

$$\begin{aligned}(I_n + BK_{df}) &= [I_n + BK_d(A - BK_d)^{-1}] \\ &= [(A - BK_d)(A - BK_d)^{-1} + BK_d(A - BK_d)^{-1}] \\ &= A(A - BK_d)^{-1},\end{aligned}\quad (4.35)$$

e assim, com base na hipótese (i), esta matriz é invertível. Portanto, de (4.34) e (4.35) obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d(kT) &= (I_n + BK_{df})^{-1}Ax_d(kT) + BE_{df}r \\ &= [A(A - BK_d)^{-1}]^{-1}Ax_d(kT) + BE_{df}r \\ &= (A - BK_d)x_d(kT) + BE_{df}r \\ &= Ax_d(kT) + B(-K_dx_d(kT) + E_{df}r).\end{aligned}\quad (4.36)$$

Finalmente, através da hipótese (iii) e das equações (4.6) e (4.36) observe que (4.7) é satisfeita. Assim, a condição (4.32) é atendida. ■

4.5 Implementação do Controlador

Considere que em (4.6) $\dot{x}_d(t)$ esteja disponível, mas $x_d(t)$ não esteja completamente disponível, para $t = kT$, $k = 0, 1, \dots$. Note que em (4.6), para $u_d(kT) = u_{df}(kT)$ dado em (4.29), $\dot{x}_d(kT)$ depende de $u_{df}(kT)$ e $u_{df}(kT)$ depende de $\dot{x}_d(kT)$ (*loop* algébrico). Para contornar este problema, uma alternativa de implementação da lei de controle (4.29) é apresentada a seguir. Considere os seguintes sistemas:

$$\dot{x}_A(kT) = Ax_d(kT) + Bu_{df}(kT - T), \quad (4.37)$$

$$\dot{x}_d(kT) = Ax_d(kT) + Bu_{df}(kT), \quad (4.38)$$

$$u_{df}(kT) = -K_{df}\dot{x}_d(kT) + E_{df}r. \quad (4.39)$$

Note que foi introduzido o vetor auxiliar $x_A(kT)$ definido em (4.37). Adicionalmente, observe que $\dot{x}_A(kT) \approx \dot{x}_d(t)$, para $t < kT$ e $t \approx kT$. Então, a lei de controle $u_d(kT) = u_{df}(kT)$ dada em (4.29) também pode ser obtida da seguinte forma: de (4.37)

$$Ax_d(kT) = \dot{x}_A(kT) - Bu_{df}(kT - T), \quad (4.40)$$

e de (4.38),

$$\dot{x}_d(kT) = \dot{x}_A(kT) - Bu_{df}(kT - T) + Bu_{df}(kT), \quad (4.41)$$

$$= \dot{x}_A(kT) + B(u_{df}(kT) - u_{df}(kT - T)). \quad (4.42)$$

De (4.39) e (4.41), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(kT) &= \dot{x}_A(kT) - Bu_{df}(kT - T) - BK_{df}\dot{x}_d(kT) + BE_{df}r, \\ \dot{x}_d(kT) + BK_{df}\dot{x}_d(kT) &= \dot{x}_A(kT) - Bu_{df}(kT - T) + BE_{df}r, \\ \dot{x}_d(kT) &= (I_n + BK_{df})^{-1}(\dot{x}_A(kT) - Bu_{df}(kT - T) + BE_{df}r). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Agora, de (4.39) e (4.43),

$$u_{df}(kT) = -K_{df}(I_n + BK_{df})^{-1}(\dot{x}_A(kT) - Bu_{df}(kT - T) + BE_{df}r) + E_{df}r, \quad (4.44)$$

$$u_{df}(kT) = -Q_1\dot{x}_A(kT) + Q_2u_{df}(kT - T) + Q_3r, \quad (4.45)$$

sendo $Q_1 = K_{df}(I_n + BK_{df})^{-1}$, $Q_2 = Q_1B$ e $Q_3 = -K_{df}(I_n + BK_{df})^{-1}BE_{df} + E_{df}$.

Para a implementação da lei de controle, note que das equações (4.6), (4.37) e (4.38),

$$\dot{x}_A(kT) = \dot{x}_d(kT) \quad \text{para} \quad u_d(kT) = u_{df}(kT - T). \quad (4.46)$$

Assim, $\dot{x}_A(kT)$ pode ser obtido, aproximadamente, da seguinte forma: $\dot{x}_A(kT) \approx \dot{x}_d(t)$, $t < kT$ e $t \approx kT$. Considerando que $u_d(kT) = u_{df}(kT)$, note que no instante t definido anteriormente, $u_d(t) = u_{df}(kT - T)$ e assim, de (4.6) e (4.37), $\dot{x}_d(t) \approx \dot{x}_A(kT)$.

Observação 5 Note que em (4.37), se $k = 0$, $\dot{x}_A(0) = Ax(0) + Bu_{df}(-T)$. Neste caso é suposto que $u_{df}(-T) = 0$.

4.6 Exemplo 2

Considere o problema de controle de um helicóptero, também conhecido como Veículo de Aterrissagem e Pouso Vertical (VTOL) do inglês *Vertical Take Off and Landing*, apresen-

tado em (KEEL; BHATTACHARYYA; HOWZE, 1988). A equação (4.47) mostra a dinâmica linearizada do sistema no espaço de estados.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.010 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.707 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_c(t) \\ &= Ax_c(t) + Bu_c(t), \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$y_c(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_c(t) = Cx_c(t). \quad (4.48)$$

A descrição física para as variáveis das equações (4.47) e (4.48) é a seguinte:

$x_{c1}(t)$ - velocidade horizontal, [nós];

$x_{c2}(t)$ - velocidade vertical, [nós];

$x_{c3}(t)$ - velocidade de arfagem (*pitch rate*), [graus/s];

$x_{c4}(t)$ - ângulo de arfagem (*pitch angle*), [graus];

$u_{c1}(t)$ - *collective pitch control*;

$u_{c2}(t)$ - *longitudinal cyclic pitch control*,

sendo $x_c(t) = [x_{c1}(t) \ x_{c2}(t) \ x_{c3}(t) \ x_{c4}(t)]^T$ e $u_c(t) = [u_{c1}(t) \ u_{c2}(t)]^T$.

A Figura 4.2 mostra o VTOL com a indicação de algumas variáveis do sistema.

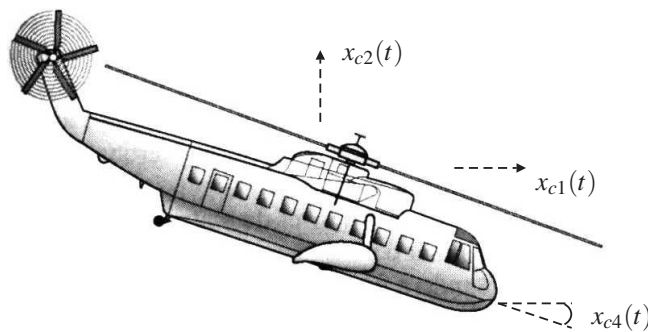


Figura 4.2: Ilustração do helicóptero com algumas variáveis de estado.

Suponha que, para a implementação da lei de controle, somente acelerômetros são usados como sensores. Então, $\dot{x}_{c1}(t)$, $\dot{x}_{c2}(t)$ e $\dot{x}_{c3}(t)$ são disponíveis. Através dos sinais $\dot{x}_{c1}(t)$, $\dot{x}_{c2}(t)$ e $\dot{x}_{c3}(t)$ é possível obter diretamente as velocidades $x_{c1}(t)$, $x_{c2}(t)$ e $x_{c3}(t)$ com boa precisão, mas não o ângulo $x_{c4}(t)$ (ASSUNÇÃO et al., 2007; CARDIM et al., 2007b). Assim, o vetor $\dot{x}_c(t) = [\dot{x}_{c1}(t) \ \dot{x}_{c2}(t) \ \dot{x}_{c3}(t) \ x_{c4}(t)]^T$ é disponível e a realimentação da derivada do vetor de estado do sistema discreto pode ser implementada através do método proposto.

O sistema em malha aberta possui os pólos: $0.2758 \pm j0.2576$, -0.2325 e -2.0727 . Utilizando a alocação de pólos como técnica de projeto, considere por exemplo, os seguintes pólos para o sistema realimentado:

$$-1, -5, -3 \pm j15.$$

Com esses dados, a matriz de ganho K_c pode ser facilmente obtida através do comando *place* do MATLAB.

$$K_c = \begin{bmatrix} 34.6217 & 7.3049 & 1.2743 & -25.7776 \\ 28.4481 & 4.2729 & 0.7815 & -20.7768 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Com base no Teorema 1, considerando um período de amostragem $T = 0.01$ s, a matriz de ganho K_d é dada por:

$$K_d = \begin{bmatrix} 34.7490 & 6.9373 & 1.0923 & -26.0029 \\ 27.6946 & 3.9035 & 0.6216 & -20.3129 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Note que o sistema (4.47) com (4.49), satisfaz as hipóteses (i), (ii) e (iii). Então, através do Teorema 2, a matriz de ganho K_{df} é a seguinte:

$$K_{df} = K_d(A - BK_d)^{-1},$$

$$K_{df} = \begin{bmatrix} -0.3537 & 0.1295 & 0.2411 & 0.1689 \\ -0.9042 & 0.1031 & 0.0055 & 0.0013 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Portanto, considerando que $E_c = E_d = E_{df} = 0$, para o sistema controlado (4.6), (4.29) e (4.51), $u_d(kT) = -K_{df}\dot{x}_d(kT) = -K_dx_d(kT)$.

Para a implementação da lei de controle $u_d(kT) = u_{df}(kT)$, como discutido na Seção 4.5, foi considerado o sinal $u_{df}(kT)$ dado na equação (4.45), sendo

$$Q_1 = K_{df}(I_n + BK_{df})^{-1} = \begin{bmatrix} 69.4906 & 111.1519 & 318.7109 & 224.8477 \\ 43.5076 & 88.3402 & 249.7908 & 176.1937 \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

$$Q_2 = Q_1B = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} -1.3346 & 0.5994 \\ -1.0465 & 0.4585 \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

$$Q_3 = -K_{df}(I_n + BK_{df})^{-1}BE_{df} + E_{df} = 0. \quad (4.54)$$

Além disso, o atraso $\delta = T/100$ s foi usado para estimar $\dot{x}_A(kT)$: $\dot{x}_A(kT) \approx \dot{x}_d(kT - \delta)$, (veja mais detalhes no final da Seção 4.5).

As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostram os resultados de uma simulação do sistema com a condição inicial $x(0) = [1 \ -0.5 \ 0 \ 0]^T$ e período de amostragem $T = 0.01$ s. Note que os sistemas

controlados, contínuos e discretos no tempo (com realimentação não-derivativa e derivativa do vetor de estado), apresentam praticamente as mesmas respostas.

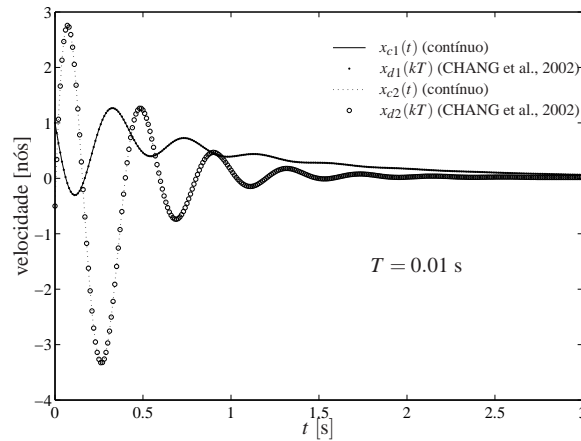


Figura 4.3: Respostas transitórias com as leis de controle (4.2) (contínuo) e (4.7) (discreto).

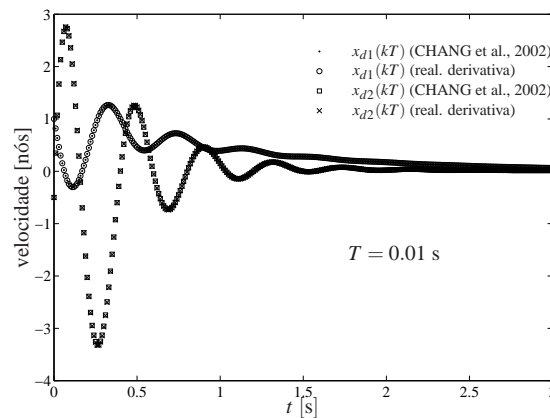


Figura 4.4: Respostas transitórias com as leis de controle (4.7) e (4.29).

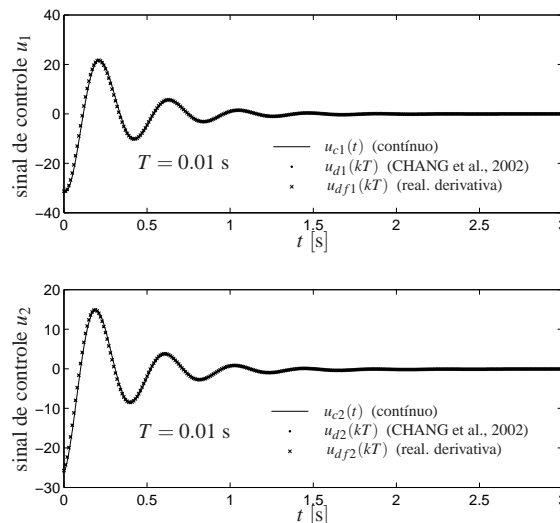


Figura 4.5: Sinais de controle $u_c(t)$, $u_d(kT)$ e $u_{df}(kT)$.

4.7 Conclusões Parciais

Nesta seção foi proposto um novo método para projetar o ganho de realimentação da derivada do vetor de estado em um sistema discreto no tempo. O projeto foi baseado em alguns trabalhos já publicados sobre realimentação derivativa ((TEIXEIRA et al., 2006a; CARDIM et al., 2007b, 2007, 2008a)) e nos resultados apresentados em (CHANG et al., 2002), que propôs um método para o cálculo aproximado de uma igualdade matricial através de um processo de minimização utilizando LMIs. O método estudado pode ser usado na aplicação do controle digital de sistemas mecânicos, que podem utilizar sensores acelerométricos na medição dos sinais necessários para o controle do sistema. A validade do método foi ilustrada no exemplo de um sistema de controle digital de um helicóptero. Os novos resultados obtidos foram apresentados recentemente em (CARDIM et al., 2009b).

5 Controle com Estrutura Variável de Sistemas Chaveados baseados nos Sistemas Lyapunov-Metzler-ERP

Nesta seção são estudados métodos de projeto de controle com estrutura variável para uma classe de sistemas com comutação (LIBERZON; MORSE, 1999; DECARLO et al., 2000), tendo como base os resultados importantes e promissores obtidos em (GEROMEL; COLANERI, 2006) e as propriedades de estabilidade usuais dos sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP) (ANDERSON, 1968; LANDAU, 1979; STEINBERG; CORLESS, 1985; OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; DECARLO; ŽAK; MATHEWS, 1988; TEIXEIRA, 1989, 1990, 1993; KAUFMAN; BARKANA; SOBEL, 1997; HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994; HUANG et al., 1999; TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000; TEIXEIRA et al., 2002; CUNHA et al., 2003; XIANG; SU; CHU, 2005; BARKANA; TEIXEIRA; HSU, 2006; COVACIC et al., 2008). Primeiramente é apresentada uma breve introdução sobre o assunto, com alguns conceitos sobre sistemas ERP (LORDELO, 2000; COVACIC, 2006) e sistemas com comutação (JOHANSSON, 2003; GEROMEL; COLANERI, 2006; DEAECTO, 2007; GEROMEL; DEAECTO; COLANERI, 2007; DEAECTO; GEROMEL, 2008; GEROMEL; DEAECTO, 2009). Em seguida são definidos os sistemas ERP com comutação, denominados sistemas Lyapunov-Metzler-ERP (CARDIM et al., 2008c), e então são propostas condições necessárias e suficientes (usando LMIs) para tornar um sistema realimentado, obtido pela comutação de sistemas lineares contínuos no tempo, Lyapunov-Metzler-ERP.

5.1 Introdução

Um Sistema Linear Invariante no Tempo (SLIT) que é ERP tem as seguintes propriedades: é um sistema Real Positivo (RP), é assintoticamente estável e todos os zeros de transmissão apresentam parte real negativa. Os sistemas RP, também conhecidos como passivos, nasceram na teoria de circuitos elétricos e foram definidos, inicialmente, dentro dos SLIT. As matrizes

de transferência RP e ERP possuem duas interpretações interessantes em termos de circuitos elétricos. Considere dois nós de um circuito elétrico composto pela conexão de elementos passivos com parâmetros concentrados R , L e C (resistores, indutores e capacitores), de modo arbitrário. Então, a impedância usando a Transformada de Laplace entre os dois nós, $Z(s)$ é RP, e, de modo inverso, qualquer função de transferência $Z(s)$ RP pode ser realizada como a impedância entre dois nós de um circuito elétrico com elementos passivos R , L e C . Agora, se aplicarmos uma tensão entre estes dois nós mencionados anteriormente e se $Z(s)$ for RP, então a soma da energia inicial armazenada no circuito, no instante inicial $t = 0$, com a energia fornecida no intervalo $t \in [0, T]$, $T > 0$, deve ser maior ou igual à energia armazenada em $t = T$ (COVACIC, 2006).

Existem resultados significativos sobre os sistemas ERP, tal como a hiperestabilidade assintótica de Popov (ANDERSON, 1968). Estes resultados têm sido aplicados, por exemplo, no projeto de sistemas com controle adaptativo (LANDAU, 1979; HUANG et al., 1999; OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; KAUFMAN; BARKANA; SOBEL, 1997; TEIXEIRA, 1989; HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994), Controle com Estrutura Variável (CEV) (DECARLO; ŽAK; MATHEWS, 1988; TEIXEIRA, 1993; TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000; TEIXEIRA et al., 2002; TEIXEIRA, 1990) e controle com realimentação das saídas de sistemas incertos (STEINBERG; CORLESS, 1985; CUNHA et al., 2003; XIANG; SU; CHU, 2005). O primeiro passo nestas aplicações é construir uma estrutura de compensação para tornar o sistema interno ERP e, então, a lei de controle é projetada utilizando resultados de estabilidade ERP. Um problema relacionado a este método de projeto, chamado de Síntese ERP (do inglês “*SPR Synthesis*”), é o seguinte: dada uma planta linear invariante no tempo, controlável e observável $\{A, B, C\}$, encontre matrizes constantes F e K_o de modo que o sistema controlado $\{A - BK_oC, B, FC\}$ seja ERP. Em (TEIXEIRA, 1989, 1990) foi mostrado que este problema é equivalente a um problema de estabilização com realimentação das saídas. Quando a planta possui o número de entradas m igual ao número de saídas p , a condição necessária e suficiente para este problema é que todos os zeros de transmissão da planta devem ter parte real negativa e $\det(CB) \neq 0$ (OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; KAUFMAN; BARKANA; SOBEL, 1997; TEIXEIRA, 1989). Em trabalhos recentes como (HUANG et al., 1999; TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000; TEIXEIRA et al., 2002; CHOI, 1997, 1998, 1999), foram estudadas as condições para a solução do problema utilizando LMIs (BOYD et al., 1994). Como já foi mencionado neste trabalho, a vantagem de utilizar as LMIs é que, quando factíveis, podem ser facilmente resolvidas por softwares disponíveis (GAHINET et al., 1995; OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997; PEAUCELLE et al., 2002) e além disso, também podem ser consideradas outras especificações de projeto, como por exemplo, incerte-

zas na planta, taxa de decaimento e restrições na entrada e na saída (TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000; TEIXEIRA et al., 2002; BERNUSSOU; GEROMEL; OLIVEIRA, 1999). Para o problema descrito anteriormente, com $p > m$, somente condições suficientes baseadas em LMIs são conhecidas (TEIXEIRA et al., 2002). Em (TEIXEIRA; COVACIC; ASSUNÇÃO, 2006) foram apresentadas condições necessárias e suficientes para o seguinte problema: dada uma planta linear e invariante no tempo $G(s) = N(s)D(s)^{-1} = C(sI - A)^{-1}B$, com m entradas e p saídas, $p > m$, $\text{rank}(C) = p$ e $\text{rank}(B) = \text{rank}(CB) = m$, encontre um controlador dinâmico (cuja entrada é a saída da planta e a sua saída é a saída do sistema controlado) $G_c(s) = D_c(s)^{-1}N_c(s) = C_c(s)(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$, com p entradas e m saídas e uma matriz constante de realimentação $K_o \in \mathbb{R}^{m \times p}$ que realimenta a saída do controlador, tal que o sistema seja ERP. É mostrado que este problema tem solução se e somente se todos os zeros de transmissão da planta tiverem parte real negativa.

Em (GEROMEL; COLANERI, 2006) foram fornecidos novos resultados sobre síntese de controle para sistemas lineares, contínuos no tempo, com comutação $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$, $x(0) = x_0$, sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $\sigma(t)$ a regra de controle de comutação e x_0 a condição inicial. Considerando um dado conjunto de matrizes constantes $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, Geromel e Colaneri (GEROMEL; COLANERI, 2006) apresentaram um método interessante de projeto da lei de controle de comutação $\sigma(t) \in \{1, 2, \dots, N\}$, $t \geq 0$, que faz com que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema global controlado seja assintoticamente estável. O projeto desta lei de controle foi descrito como a solução de Desigualdades de Lyapunov-Metzler (LM), introduzida em (GEROMEL; COLANERI, 2006). As desigualdades de LM são uma classe de Desigualdades Matriciais Bilineares (do inglês “*Bilinear Matrix Inequalities - BMIs*”) e para resultados de estabilidade mais conservativos, suas soluções podem ser obtidas através da busca bidimensional de um conjunto de LMIs (BOYD et al., 1994). Em (GEROMEL; COLANERI, 2006) um exemplo interessante mostra que este método pode estabilizar plantas quando $N = 2$, sendo que os sistemas individuais $\dot{x}(t) = A_1x(t)$ e $\dot{x}(t) = A_2x(t)$ não são globalmente assintoticamente estáveis. Mais detalhes sobre sistemas com comutação (ou chaveado) podem ser encontrados em (LIBERZON; MORSE, 1999; DECARLO et al., 2000; DEAECTO; GEROMEL, 2008; GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008; GEROMEL; DEAECTO, 2009).

Considerando os fatos descritos acima, este capítulo estende para uma classe de plantas chaveadas, alguns resultados sobre síntese ERP e suas aplicações para CEV, aplicados em Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT) (ANDERSON, 1968; LANDAU, 1979; HUANG et al., 1999; OWENS; PRATZEL-WOLTERS; ILCHMANN, 1987; KAUFMAN; BARKANA; SOBEL, 1997; TEIXEIRA, 1989; HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994; DECARLO; ŽAK; MATHEWS, 1988; TEIXEIRA, 1993; TEIXEIRA; LORDELO; ASSUNÇÃO, 2000;

TEIXEIRA et al., 2002; TEIXEIRA, 1990; STEINBERG; CORLESS, 1985; CUNHA et al., 2003; XIANG; SU; CHU, 2005). Para esta nova síntese ERP, inspirada em (GEROMEL; COLANERI, 2006), é introduzida a definição de sistemas Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP) (ou Lyapunov-Metzler-SPR (LMSPR)) (já publicados pelos autores em (CARDIM et al., 2008b, 2008c, 2009a)) que é diretamente aplicada no projeto de CEV considerando uma classe de sistemas chaveados, seguindo a mesma idéia do projeto de CEV de SLIT baseados na síntese ERP. Alguns exemplos numéricos ilustram os resultados.

5.2 Sistemas ERP

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ a saída do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de saída do sistema (COVACIC, 2006).

Definição 1 (ANDERSON, 1968) *A matriz de transferência $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ do sistema (5.1) é Real Positiva (RP) se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- (a) *Os elementos de $G(s)$ não possuem pólos com parte real positiva;*
- (b) *$G^*(s) = G^T(s^*)$ e*
- (c) *A matriz hermitiana $J(s) = G(s) + G^T(s^*)$ é semi-definida positiva em $Re(s) > 0$,*

sendo que o asterisco () denota o complexo conjugado de um escalar ou o complexo conjugado transposto de um vetor ou matriz.*

Definição 2 (ANDERSON, 1968) *A matriz de transferência $G(s)$ é Estritamente Real Positiva (ERP) se $G(s - \varepsilon)$ for RP para algum $\varepsilon > 0$.*

Considere, agora, a planta linear invariante no tempo, controlável e observável abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}\tag{5.2}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de entrada $u \in \mathbb{R}^m$ tal que, para todo T positivo,

$$\int_0^T u(t)^T y(t) dt < \delta [\|x(0)\| \sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.3)$$

Neste caso, δ é uma constante positiva, que depende do estado inicial do sistema $x(0)$ mas independe do tempo T . Os resultados a seguir foram formulados por V. M. Popov na década de 1960 (ANDERSON, 1968).

Definição 3 (ANDERSON, 1968) *O sistema (5.2) é dito hiperestável se, para qualquer $u(\cdot)$ limitado satisfazendo (5.3), a inequação*

$$\|x(t)\| \leq K(\|x(0)\| + \delta) \quad (5.4)$$

é satisfeita para alguma constante positiva K e para todo $t \geq 0$.

Definição 4 (ANDERSON, 1968) *O sistema (5.2) é dito assintoticamente hiperestável se, para qualquer $u(\cdot)$ limitado satisfazendo (5.3), a inequação (5.4) é satisfeita e, também,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (5.5)$$

Seja $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a matriz de transferência do sistema (5.2), então:

Teorema 3 (ANDERSON, 1968) *A condição necessária e suficiente para que o sistema (5.2) seja hiperestável é que $G(s)$ seja RP.*

Teorema 4 (ANDERSON, 1968) *A condição necessária e suficiente para que o sistema (5.2) seja assintoticamente hiperestável é que $G(s)$ seja ERP.*

O Lema 2, a seguir, fornece condições para os sistemas ERP.

Lema 2 (ANDERSON, 1968) *A matriz de transferência do sistema (5.1), $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, é ERP se e somente se existir uma matriz $P = P^T$, tal que:*

$$\begin{aligned} PA + A^T P &< 0, \\ B^T P &= C, \\ P &> 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.3 Sistemas com Comutação

Os sistemas dinâmicos, contínuos no tempo, com comutação são caracterizados pela interação entre subsistemas contínuos e eventos discretos, de tal forma que estes últimos determinam a dinâmica do sistema global, uma vez que, a cada instante de tempo, posicionam a chave de comutação em um dos subsistemas. Um exemplo clássico de sistema com comutação é apresentado a seguir (DEAECTO, 2007).

Exemplo: O modelo simplificado do movimento de um automóvel é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(u, q),\end{aligned}$$

em que x_1 é a posição, x_2 é a velocidade, $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, -1, 0\}$ é uma variável discreta que indica a marcha do automóvel nas posições de 1 a 5, ré e ponto morto, respectivamente. A variável de entrada $u \geq 0$ é a aceleração. Assim, quando $q = -1$ a função f é negativa e seu módulo cresce em função de u ; quando q é 0 a função f é decrescente e independente de u . Para cada valor de q de 1 a 5, a função f é positiva, cresce em função de u , mas decresce à medida que q aumenta.

Observe que os eventos discretos determinam a dinâmica do automóvel em cada instante de tempo, caracterizando um sistema com comutação. Estes eventos podem ser controlados automaticamente, como é o caso de automóveis com câmbio automático em que a variável de controle depende da velocidade x_2 , caso contrário, são determinadas manualmente pelo motorista.

Como pode ser observado por este exemplo, os sistemas com comutação são bastante complexos cujos modelos envolvem equações diferenciais e controle discreto.

Para o estudo da estabilidade destes sistemas, podemos utilizar uma função de Lyapunov que seja monotonamente decrescente para qualquer possível trajetória do sistema, incluindo transições discretas e, posteriormente, utilizá-la para encontrar condições suficientes que garantam a estabilidade do sistema global. Este procedimento é estudado em (GEROMEL; COLANERI, 2006; DEAECTO, 2007), sendo a base para obtenção de sistemas ERP com comutação, proposto neste trabalho.

5.4 Formulação do Problema

Primeiramente, considere o sistema linear com comutação (GEROMEL; COLANERI, 2006)

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.7)$$

definido para todo $t \geq 0$, em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $\sigma(t)$ é a regra de comutação e x_0 é a condição inicial. Considerando um conjunto conhecido de matrizes constantes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, a regra de comutação $\sigma(t)$, para todo $t \geq 0$, é tal que

$$A_{\sigma(t)} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}, \quad (5.8)$$

sendo que $A_{\sigma(t)}$ deve comutar instantaneamente de A_i para A_j para algum $i \neq j = 1, \dots, N$ quando ocorrer a comutação de $\sigma(t) = i$ para $\sigma(t) = j$. Portanto, $A_{\sigma(t)}$ é comutado entre os N vértices do politopo $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$.

Suponha que o vetor de estado $x(t)$ está disponível para a realimentação para todo $t \geq 0$. Então, o problema proposto em (GEROMEL; COLANERI, 2006) é determinar a função $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que

$$\sigma(t) = u(x(t)) \quad (5.9)$$

torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ de (5.7) globalmente assintoticamente estável. Note que, não é considerado que cada matriz do conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ seja assintoticamente estável.

Seja $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ um conjunto de matrizes simétricas positivas definidas e considere por definição a seguinte função de Lyapunov quadrática por partes

$$v(x) := \min_{i=1,2,\dots,N} x^T P_i x. \quad (5.10)$$

O teorema a seguir, apresentado em (GEROMEL; COLANERI, 2006) será muito útil para a solução do método proposto nesta seção. Inicialmente é necessário definir uma classe de matrizes de Metzler denotada por \mathcal{M} , consistindo de todas as matrizes $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com elementos π_{ji} , tais que:

$$\pi_{ji} \geq 0 \text{ para } j \neq i \text{ e } \sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0, \quad j, i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.11)$$

Observe que para qualquer matriz de Metzler \mathcal{M} , todos os elementos da diagonal principal são não positivos.

Teorema 5 (GEROMEL; COLANERI, 2006) *Considere a existência de um conjunto de matrizes simétricas positivas definidas $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ e $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as desigualdades de*

Lyapunov-Metzler (5.11) e

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.12)$$

Então, a lei de controle (5.9) com

$$u(x(t)) = \arg \min_{i=1,2,\dots,N} x(t)^T P_i x(t), \quad (5.13)$$

faz com que a origem $x = 0$ do sistema (5.7) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Prova: Veja (GEROMEL; COLANERI, 2006; DEAECTO, 2007). ■

Baseado no Teorema 5 e no Lema 2 é proposta a definição de sistemas Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP) para o seguinte sistema linear com comutação:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u_a(t), \quad x(0) = x_0, \quad (5.14)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)} x(t), \quad (5.15)$$

sendo $A_{\sigma(t)}$, $x(t)$ e $\sigma(t)$ definidos em (5.7) e (5.8), $u_a(t)$ é uma entrada de controle adicional, $B_{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C_{\sigma} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são tais que

$$B_{\sigma(t)} \in \{B_1, B_2, \dots, B_N\}, \quad C_{\sigma(t)} \in \{C_1, C_2, \dots, C_N\}, \quad (5.16)$$

e $\text{rank}(B_i) = m$, $i = 1, 2, \dots, N$. A definição a seguir foi introduzida em (CARDIM et al., 2008c).

Definição 5 (CARDIM et al., 2008c) *O sistema linear com comutação (5.14)-(5.16) é um sistema Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP) se existirem matrizes $P_i = P_i^T$ e π_{ji} , $i, j = 1, 2, \dots, N$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$P_i A_i + A_i^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j < 0, \quad P_i > 0, \quad (5.17)$$

$$B_i^T P_i = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.18)$$

sendo que π_{ji} são os elementos de uma matriz de Metzler, que obedecem as condições dadas em (5.11).

Observação 6 *Note que quando $N = 1$, as condições (5.6) do Lema 2 e (5.17) e (5.18) da Definição 5 são equivalentes, pois neste caso, de (5.11) $\pi_{11} = 0$. Agora é proposto o seguinte problema:*

Problema 3 (LMERP) Dado um sistema linear com comutação (5.14)-(5.16), encontre condições necessárias e suficientes para a existência de matrizes $F_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $K_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, sendo $F_{\sigma} \in \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$ e $K_{\sigma} \in \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$, tais que o sistema realimentado ilustrado na Figura 5.1, com entrada $\tilde{u}(t)$ e saída $\tilde{y}(t)$ seja um sistema LMERP.

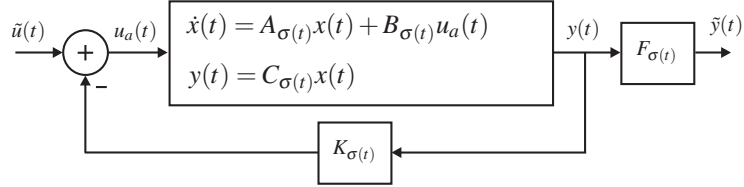


Figura 5.1: Sistema realimentado para síntese Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP).

5.5 Condições Necessárias e Suficientes para Sistemas LMERP - Método 1

Nesta seção são apresentadas condições para a solução do Problema 3, quando $p = n$.

Teorema 6 O Problema 3 tem solução para $p = n$ e $\det(C_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, se e somente se existirem matrizes $X_i = X_i^T$, $\pi_{ji} \neq 0$ para $j \neq i$ e tal que $\pi_{ji} \in \Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{bmatrix} -B_{i\perp}^T (A_i X_i + X_i A_i^T + \pi_{ii} X_i) B_{i\perp} & B_{i\perp}^T X_i & \cdots & B_{i\perp}^T X_i \\ X_i B_{i\perp} & \frac{X_i}{\pi_{1i}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \frac{X_{i-1}}{\pi_{i-1,i}} & 0 & \vdots \\ X_i B_{i\perp} & 0 & 0 & \frac{X_{i+1}}{\pi_{i+1,i}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ X_i B_{i\perp} & 0 & \cdots & 0 & \frac{X_N}{\pi_{Ni}} \end{bmatrix} > 0, \quad (5.19)$$

$$X_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.20)$$

Quando as condições (5.19) e (5.20) são factíveis, as seguintes matrizes F_i e K_i , calculadas com a solução $X_i = P_i^{-1}$ e π_{ji} , $i, j = 1, 2, \dots, N$ de (5.19) e (5.20), resolvem o problema:

$$F_i = B_i^T P_i C_i^{-1} = B_i^T X_i^{-1} C_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.21)$$

$$K_i = \gamma_0 B_i^T P_i C_i^{-1} = \gamma_0 B_i^T X_i^{-1} C_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.22)$$

sendo $\gamma_0 > 0$ obtido através da LMI:

$$P_i(A_i - B_i\gamma_0 B_i^T P_i) + (A_i^T - P_i B_i \gamma_0 B_i^T) P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j < 0. \quad (5.23)$$

Prova: (Necessidade) Através das equações (5.14)-(5.15) e da Figura 5.1 tem-se o sistema realimentado dado por

$$\dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)} - B_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)} C_{\sigma(t)}) x(t) + B_{\sigma(t)} \tilde{u}(t), \quad (5.24)$$

$$\tilde{y}(t) = F_{\sigma(t)} C_{\sigma(t)} x(t). \quad (5.25)$$

Da Definição 5, as seguintes condições devem se manter para a solução do Problema 3

$$P_i(A_i - B_i K_i C_i) + (A_i - B_i K_i C_i)^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j < 0, \quad (5.26)$$

$$P_i = P_i^T > 0, \quad (5.27)$$

$$B_i^T P_i = F_i C_i, \quad (5.28)$$

com π_{ji} satisfazendo as condições dadas em (5.11), para $i, j = 1, 2, \dots, N$. Considerando que $\text{rank}(B_i) = m$, defina $B_{i\perp} \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$ tal que $B_i^T B_{i\perp} = 0$ e $\text{rank}(B_{i\perp}) = n - m$. Multiplicando (5.26) por $B_{i\perp}^T P_i^{-1}$ pela esquerda e por $P_i^{-1} B_{i\perp}$ pela direita e definindo $X_i = P_i^{-1} = X_i^T > 0$ obtém-se:

$$B_{i\perp}^T (A_i X_i + X_i A_i^T + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} X_i P_j X_i) B_{i\perp} \quad (5.29)$$

$$= B_{i\perp}^T (A_i X_i + X_i A_i^T + \pi_{ii} X_i) B_{i\perp} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ji} B_{i\perp}^T X_i P_j X_i B_{i\perp} \quad (5.30)$$

$$= B_{i\perp}^T (A_i X_i + X_i A_i^T + \pi_{ii} X_i) B_{i\perp} + B_{i\perp}^T [X_i \cdots X_i] \text{diag}(\pi_{1i} P_1, \pi_{2i} P_2, \dots, \pi_{i-1,i} P_{i-1}, \pi_{i+1,i} P_{i+1}, \dots, \pi_{N-1,i} P_{N-1}, \pi_{N,i} P_N) [X_i \cdots X_i]^T B_{i\perp} < 0, \quad (5.31)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, N$ e $\text{diag}(\pi_{1i} P_1, \pi_{2i} P_2, \dots, \pi_{i-1,i} P_{i-1}, \pi_{i+1,i} P_{i+1}, \dots, \pi_{N-1,i} P_{N-1}, \pi_{N,i} P_N) \in \mathbb{R}^{n(i-1) \times n(i-1)}$ é um bloco matricial diagonal. Da equação (5.11), $\pi_{ji} \geq 0$, $j \neq i$ e $i, j = 1, 2, \dots, N$. Para o próximo passo da prova, é suposto que $\pi_{ji} > 0$ $j \neq i$ e $i, j = 1, 2, \dots, N$. Note que, se (5.31) é satisfeita quando algum $\pi_{ji} = 0$, então esta também é satisfeita quando $\pi_{ji} > 0$ e suficientemente pequeno. Portanto, a suposição que $\pi_{ji} > 0$, $j \neq i$ e $i, j = 1, 2, \dots, N$ não muda a condição para a solução do problema proposto. Assim, considerando $\pi_{ji} > 0$, $j \neq i$ e aplicando o Complemento de Schur (Apêndice A) em (5.31), com $X_i = P_i^{-1}$, as inequações (5.19) e (5.20) são condições necessárias para a solução do problema. ■

Prova: (Suficiência) Multiplicando à esquerda de (5.26) por $[B_i \ B_{i\perp}]^T P_i^{-1}$, à direita por

$P_i^{-1}[B_i \ B_{i\perp}]$ e com $X_i = P_i^{-1}$ obtém-se:

$$\begin{bmatrix} B_i^T L_i B_i & B_i^T L_i B_{i\perp} \\ B_{i\perp}^T L_i B_i & B_{i\perp}^T L_i B_{i\perp} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.32)$$

sendo

$$L_i = A_i X_i + X_i A_i^T - B_i K_i C_i X_i - X_i C_i^T K_i^T B_i^T + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} X_i P_j X_i. \quad (5.33)$$

Da análise feita durante a prova da necessidade, note que a condição (5.19) é equivalente à $B_{i\perp}^T L_i B_{i\perp} < 0$. Portanto, quando (5.19) é satisfeita, aplicando o complemento de Schur na equação (5.32),

$$-B_i^T L_i B_i - B_i^T L_i B_{i\perp} (B_{i\perp}^T L_i B_{i\perp})^{-1} B_{i\perp}^T L_i B_i > 0. \quad (5.34)$$

Agora, para o ganho de realimentação dado por

$$\begin{aligned} K_i &= \gamma_0 B_i^T P_i C_i^{-1} = \gamma_0 B_i^T X_i^{-1} C_i^{-1}, \\ \gamma_0 &> 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.35)$$

de (5.33) note que

$$B_i^T L_i B_i = B_i^T (A_i X_i + X_i A_i^T + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} X_i P_j X_i) B_i - 2\gamma_0 B_i^T (B_i B_i^T) B_i \quad (5.36)$$

é negativa definida para grandes valores de $\gamma_0 > 0$, porque $\text{rank}(B_i) = m$, X_i e π_{ji} são matrizes constantes e parâmetros, respectivamente, e foram obtidos como uma solução de (5.19) e (5.20). Finalmente, note que de (5.34), considerando K_i dado em (5.35), o parâmetro γ_0 não aparece em $B_i^T L_i B_{i\perp} (B_{i\perp}^T L_i B_{i\perp})^{-1} B_{i\perp}^T L_i B_i$. Então, de (5.36), note que para grandes valores de $\gamma_0 > 0$, (5.34) se mantém. Consequentemente, quando (5.19) e (5.20) forem factíveis, existe um ganho de realimentação dado em (5.35) tal que as condições (5.26) e (5.27) existam (para $P_i^{-1} = X_i$). Neste caso, (5.26) com (5.22) pode ser descrita por (5.23). Finalmente, para

$$F_i = B_i^T P_i C_i^{-1} \quad (5.37)$$

observe que (5.28) é satisfeita e assim se completa a prova de suficiência. ■

Observação 7 Na Seção 5.9 será mostrado que os sistemas LMERP também podem ser diretamente aplicados no projeto de CEV de sistemas incertos com comutação, caracterizado pelo sistema (5.14)-(5.16) com um distúrbio casado adicional, seguindo as mesmas idéias do Lema 2 e projeto de CEV de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT).

A seguir, tem-se um exemplo com aplicações numéricas do método apresentado em (GEROMEL; COLANERI, 2006; DEAECTO, 2007) e do método proposto, utilizando o Teorema 6.

5.6 Exemplo 1 (Utilizando o Método 1)

Considere a seguinte planta, estudada em (BACCIOTTI, 2004) com $N = 2$ e matrizes instáveis $\{A_1, A_2\}$ dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Com base na teoria de controle proposta em (GEROMEL; COLANERI, 2006) para sistemas lineares com comutação, as desigualdades de Lyapunov-Metzler que asseguram $x = 0$ de (5.7) globalmente assintoticamente estável são:

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \pi_{11} P_1 + \pi_{21} P_2 < 0, \quad (5.39)$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 + \pi_{12} P_1 + \pi_{22} P_2 < 0, \quad (5.40)$$

$$P_1 > 0, \quad P_2 > 0. \quad (5.41)$$

De (5.11), tem-se que $\pi_{11} + \pi_{21} = 0$ e $\pi_{12} + \pi_{22} = 0$. Logo, (5.39) e (5.40) podem ser reescritas como:

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \pi_{21} (P_2 - P_1) < 0, \quad (5.42)$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 + \pi_{12} (P_1 - P_2) < 0, \quad (5.43)$$

e da condição (5.11), $\pi_{21} > 0$ e $\pi_{12} > 0$.

A Figura 5.2 mostra a região de factibilidade para as condições de estabilidade descritas nas LMIs (5.41), (5.42) e (5.43). Considerando, por exemplo, $\pi_{21} = 5$ e $\pi_{12} = 10$ obteve-se:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 50.8557 & 0 \\ 0 & 62.1941 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 67.2021 & 0 \\ 0 & 28.0041 \end{bmatrix}.$$

Agora, considere as matrizes de entrada $\{B_1, B_2\}$, e as matrizes de saídas $\{C_1, C_2\}$ dadas por

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

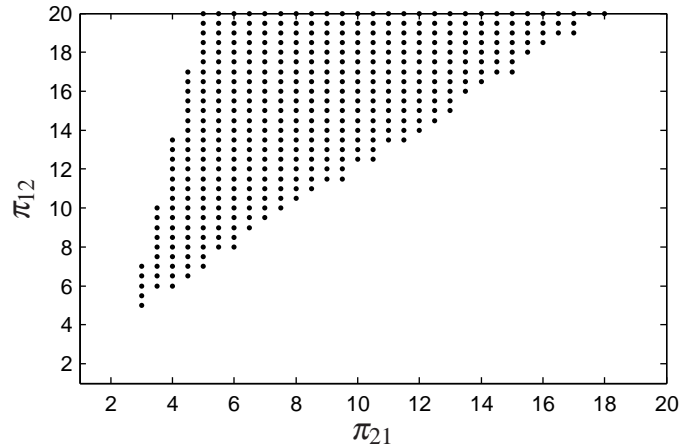


Figura 5.2: Região de factibilidade para as condições do Teorema 5.

Note que (A_1, B_1) e (A_2, B_2) são não controláveis e não estabilizáveis com realimentação do vetor de estado. De acordo com o Teorema 6 proposto, obtém-se as seguintes condições que também asseguram o ponto de equilíbrio $x = 0$ globalmente assintoticamente estável para o sistema em malha fechada ilustrado na Figura 5.1:

$$\begin{bmatrix} -B_{1\perp}^T (A_1 X_1 + X_1 A_1^T + \pi_{11} X_1) B_{1\perp} & B_{1\perp}^T X_1 \\ X_1 B_{1\perp} & \frac{X_2}{\pi_{21}} \end{bmatrix} > 0, \quad (5.45)$$

$$\begin{bmatrix} -B_{2\perp}^T (A_2 X_2 + X_2 A_2^T + \pi_{22} X_2) B_{2\perp} & B_{2\perp}^T X_2 \\ X_2 B_{2\perp} & \frac{X_1}{\pi_{12}} \end{bmatrix} > 0, \quad (5.46)$$

$$X_1 > 0, \quad X_2 > 0. \quad (5.47)$$

De (5.11), tem-se que $\pi_{11} + \pi_{21} = 0$ e $\pi_{12} + \pi_{22} = 0$. Logo, (5.45) e (5.46) podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} -B_{1\perp}^T (A_1 X_1 + X_1 A_1^T - \pi_{21} X_1) B_{1\perp} & B_{1\perp}^T X_1 \\ X_1 B_{1\perp} & \frac{X_2}{\pi_{21}} \end{bmatrix} > 0, \quad (5.48)$$

$$\begin{bmatrix} -B_{2\perp}^T (A_2 X_2 + X_2 A_2^T - \pi_{12} X_2) B_{2\perp} & B_{2\perp}^T X_2 \\ X_2 B_{2\perp} & \frac{X_1}{\pi_{12}} \end{bmatrix} > 0. \quad (5.49)$$

Estas condições são necessárias para a solução do Problema 3, sendo que F_σ , K_σ e γ_0 podem ser obtidos por (5.21), (5.22) e (5.23), respectivamente.

A Figura 5.3 mostra a região de factibilidade do sistema utilizando o método proposto. Note que esta região apresenta uma área factível maior que a região de factibilidade obtida com o método apresentado em (GEROMEL; COLANERI, 2006).

Considerando, por exemplo, $\pi_{21} = 5$ e $\pi_{12} = 10$, foram obtidos os seguintes resultados:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.8722 & 0 \\ 0 & 2.7827 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 6.9224 & 0 \\ 0 & 0.8233 \end{bmatrix}, \quad \gamma_0 = 18.7342,$$

$$K_1 = [16.3407 \ 0], \quad K_2 = [0 \ 15.4239], \quad F_1 = [0.8722 \ 0] \text{ e } F_2 = [0 \ 0.8233].$$

Deste modo, com estes parâmetros, o sistema realimentado ilustrado na Figura 5.1 é um sistema LMERP.

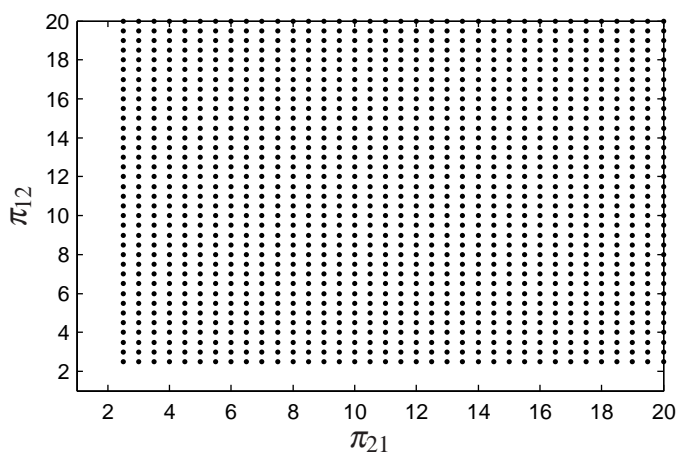


Figura 5.3: Região de factibilidade para as condições do Teorema 6.

5.7 Condições Necessárias e Suficientes para Sistemas LMERP - Método 2

Nesta seção são apresentadas novas condições para a solução do Problema 3, quando $p = n$. Estas condições foram baseadas nas primeiras condições propostas (Seção 5.5), introduzidas em (CARDIM et al., 2008c) e apresentam uma vantagem considerável em relação ao Método 1, pois utiliza um menor número de LMIs para resolver o Problema 3. As novas condições foram publicadas em (CARDIM et al., 2008b).

Teorema 7 *O Problema 3 tem solução para $p = n$ e $\det(C_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, se e somente se existirem $\pi_{ji} \neq 0$ com $i \neq j$, e matrizes $X_i = X_i^T$, $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfazem as condições (5.11),*

(5.50) e (5.51).

$$\begin{bmatrix} -(A_i X_i + X_i A_i^T - B_i M_i - M_i^T B_i^T + \pi_{ii} X_i) & X_i & \cdots & X_i \\ & X_i & \frac{X_1}{\pi_{1i}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \frac{X_{i-1}}{\pi_{i-1,i}} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \frac{X_{i+1}}{\pi_{i+1,i}} & \\ & X_i & 0 & \cdots & 0 & \frac{X_N}{\pi_{Ni}} \end{bmatrix} > 0, \quad (5.50)$$

$$X_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.51)$$

Quando as condições (5.50) e (5.51) são factíveis, com as soluções $X_i = P_i^{-1}$, M_i e π_{ji} , $i, j = 1, 2, \dots, N$, as seguintes matrizes F_i e K_i resolvem o problema:

$$F_i = B_i^T P_i C_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.52)$$

$$K_i = M_i P_i C_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.53)$$

Observação 8 Note que, o primeiro método (Teorema 6) utiliza as LMIs (5.19), (5.20) e (5.23) para resolver o Problema 3, e o segundo método (Teorema 7) utiliza as apenas as LMIs (5.50) e (5.51) para solucionar o mesmo problema.

Prova: (Necessidade e Suficiência) Através das equações (5.14)-(5.15) e da Figura 5.1 tem-se o sistema realimentado dado por

$$\dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)} - B_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)} C_{\sigma(t)})x(t) + B_{\sigma(t)} \tilde{u}(t), \quad (5.54)$$

$$\tilde{y}(t) = F_{\sigma(t)} C_{\sigma(t)} x(t). \quad (5.55)$$

Da Definição 5, as seguintes condições são equivalentes à solução do Problema 3:

$$P_i (A_i - B_i K_i C_i) + (A_i - B_i K_i C_i)^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j < 0, \quad (5.56)$$

$$P_i = P_i^T > 0, \quad (5.57)$$

$$B_i^T P_i = F_i C_i, \quad (5.58)$$

com o parâmetro π_{ji} satisfazendo as condições dadas em (5.11), para $i, j = 1, 2, \dots, N$. Multiplicando-se à esquerda e à direita de (5.56) por P_i^{-1} e definindo $X_i = P_i^{-1} = X_i^T > 0$, (5.56) é

equivalente a:

$$A_i X_i + X_i A_i^T - B_i K_i C_i X_i - X_i C_i^T K_i^T B_i^T + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} X_i P_j X_i < 0. \quad (5.59)$$

Seja $M_i = K_i C_i X_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$. De (5.59) tem-se:

$$\begin{aligned} & A_i X_i + X_i A_i^T - B_i M_i - M_i^T B_i^T + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} X_i P_j X_i \\ &= A_i X_i + X_i A_i^T - B_i M_i - M_i^T B_i^T + \pi_{ii} X_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ji} X_i P_j X_i \\ &= A_i X_i + X_i A_i^T - B_i M_i - M_i^T B_i^T + \pi_{ii} X_i + [X_i \cdots X_i] \text{diag}(\pi_{1i} P_1, \pi_{2i} P_2, \cdots, \pi_{i-1,i} P_{i-1}, \pi_{i+1,i} P_{i+1}, \cdots \\ & \quad , \pi_{N-1,i} P_{N-1}, \pi_{N,i} P_N) [X_i \cdots X_i]^T < 0, \end{aligned} \quad (5.60)$$

$\text{diag}(\pi_{1i} P_1, \pi_{2i} P_2, \cdots, \pi_{i-1,i} P_{i-1}, \pi_{i+1,i} P_{i+1}, \cdots, \pi_{N-1,i} P_{N-1}, \pi_{N,i} P_N) \in \mathbb{R}^{n(i-1) \times n(i-1)}$ é um bloco matricial diagonal e $i = 1, 2, \dots, N$.

De (5.11), $\pi_{ji} \geq 0$, $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, \dots, N$. Para o próximo passo da prova, é suposto que $\pi_{ji} > 0$ $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, \dots, N$. Note que, se (5.60) é satisfeita para algum $\pi_{ji} = 0$, $i \neq j$, então ela também é satisfeita quando este $\pi_{ji} > 0$ e suficientemente pequeno. Portanto, a suposição que $\pi_{ji} > 0$, $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, \dots, N$ não muda as condições para a solução do problema. Assim, considerando $\pi_{ji} > 0$, $i \neq j$ e aplicando o Complemento de Schur em (5.60), com $X_i = P_i^{-1}$, as inequações (5.50) e (5.51) são condições equivalentes às equações (5.56) e (5.57) pois como foi visto acima, as equações (5.56), (5.59) e (5.60) são equivalentes e $X_i = P_i^{-1} = X_i^T > 0$. Finalmente, (5.58) e (5.52) são equivalentes e (5.53) segue da condição $M_i = K_i C_i X_i$. ■

A seguir, tem-se um exemplo com aplicações numéricas do método proposto, utilizando o Teorema 7.

5.8 Exemplo 2 (Utilizando o Método 2)

Considere a mesma planta estudada no Exemplo 1, com matrizes dadas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_1 &= C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que (A_1, B_1) e (A_2, B_2) são não controláveis e não estabilizáveis com realimentação do vetor de estado. De acordo com o Teorema 7 proposto, obtém-se as seguintes condições que asseguram o ponto de equilíbrio $x = 0$ globalmente assintoticamente estável para o sistema em malha fechada ilustrado na Figura 5.1:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -A_1 X_1 - X_1 A_1^T + B_1 M_1 + M_1^T B_1^T + \pi_{21} X_1 & X_1 \\ & X_1 \\ & & \frac{X_2}{\pi_{21}} \end{bmatrix} > 0, \\ & \begin{bmatrix} -A_2 X_2 - X_2 A_2^T + B_2 M_2 + M_2^T B_2^T + \pi_{12} X_2 & X_2 \\ & X_2 \\ & & \frac{X_1}{\pi_{12}} \end{bmatrix} > 0, \\ & X_1 > 0, \quad X_2 > 0. \end{aligned}$$

Estas condições são necessárias e suficientes para a solução do Problema 3, sendo que F_σ pode ser obtido através da equação (5.52) e K_σ através de (5.53). Considerando, como no Exemplo 1, $\pi_{21} = 5$ e $\pi_{12} = 10$, obteve-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} 0.3910 & 0 \\ 0 & 1.4381 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.6414 & 0 \\ 0 & 0.6726 \end{bmatrix}, \\ M_1 &= [5.5501 \ 0], \quad M_2 = [0 \ 1.6384], \quad K_1 = [2.1701 \ 0], \\ K_2 &= [0 \ 1.1020], \quad F_1 = [0.3910 \ 0], \quad F_2 = [0 \ 0.6726]. \end{aligned}$$

Deste modo, com estes parâmetros, o sistema realimentado ilustrado na Figura 5.1 é um sistema LMERP.

A Figura 5.4 mostra as regiões de factibilidade para as condições de estabilidade impostas nos Teoremas 5, 6 e 7. Note que, embora a região de factibilidade para as condições impostas nos Teoremas 6 e 7 sejam as mesmas, o Teorema 7 apresenta uma considerável vantagem em relação ao Teorema 6, pois utiliza um número menor de LMIs para resolver o problema.

A seguir é demonstrado que os métodos propostos (Teoremas 6 e 7) também podem ser aplicados no CEV de sistemas com distúrbios na entrada.

5.9 Controle com Estrutura Variável usando Sistemas LMERP

Considere o sistema incerto descrito por:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}(u(t) + \xi(t)), \quad (5.61)$$

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t), \quad (5.62)$$

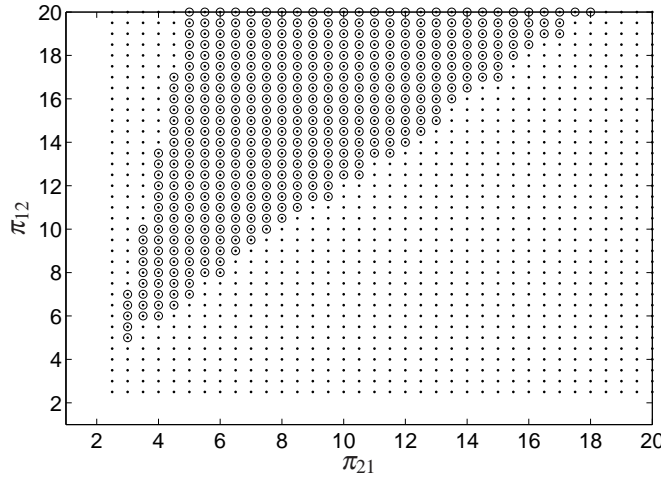


Figura 5.4: Regiões de factibilidade para as condições impostas no Teorema 5 (“o”), e nos Teoremas propostos 6 e 7 (“.”).

sendo $A_{\sigma(t)}$, $x(t)$, $\sigma(t)$, $B_{\sigma(t)}$ e $C_{\sigma(t)}$ definidos em (5.7), (5.8), (5.14)-(5.16), $u(t)$ é a entrada de controle e $\xi(t)$ é um sinal de distúrbio desconhecido, mas limitado, ou seja, existe uma constante positiva conhecida ξ_0 , tal que $\|\xi(t)\|_1 = |\xi_1(t)| + |\xi_2(t)| + \dots + |\xi_m(t)| \leq \xi_0$.

Seja a lei de controle dada por:

$$u(t) = -K_{\sigma(t)}y(t) - (\xi_0 + \varepsilon)\text{sign}(B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)}x(t)), \quad (5.63)$$

sendo $K_{\sigma(t)} \in \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ definido no Problema 3, K_i , $i = 1, 2, \dots, N$ dado em (5.22) (pelo Teorema 6) ou em (5.53) (pelo Teorema 7), e $\varepsilon > 0$ um parâmetro constante conhecido.

Teorema 8 *As condições para a estabilidade do sistema de CEV com distúrbio na entrada (5.61)-(5.63), são as mesmas apresentadas nos Teoremas 6 e 7 para o sistema (5.14)-(5.16).*

Prova: Defina o conjunto $I(x) = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} / x^T P_i x = v(x)\}$, sendo $v(x)$ dada em (5.10) (GEROMEL; COLANERI, 2006; GEROMEL; DEAECTO; COLANERI, 2007; DEAECTO; GEROMEL, 2008). Suponha que para $t \geq 0$, de (5.13) $u(x(t)) = i$, para algum $i \in I(x)$. Então, de (5.9) $\sigma(t) = i$. Assim, de (5.61)-(5.63), a derivada de Dini à direita da função (5.10), que por definição é dada por (GEROMEL; COLANERI, 2006; DEAECTO, 2007)

$$D^+v(x(t)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(x(t+h)) - v(x(t))}{h}, \quad (5.64)$$

é a seguinte (veja mais detalhes sobre derivada direcional no Apêndice B):

$$\begin{aligned} D^+v(x(t)) &= \min_{i \in I(x)} (x(t)^T P_i \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P_i x(t)) \\ &\leq x(t)^T P_i (A_i x(t) + B_i (-K_i C_i x(t) - (\xi_0 + \varepsilon)\text{sign}(B_i^T P_i x(t)) + \xi)) \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$+(A_i x(t) + B_i(-K_i C_i x(t) - (\xi_0 + \varepsilon)\text{sign}(B_i^T P_i x(t)) + \xi))^T P_i x(t). \quad (5.66)$$

Note que em (5.66), com $\xi_0 \geq |\xi(t)|$ e $\varepsilon > 0$

$$\text{sign}((\xi_0 + \varepsilon)\text{sign}(B_i^T P_i x(t)) + \xi) = \text{sign}(B_i^T P_i x(t)). \quad (5.67)$$

Assim, o sinal de distúrbio casado ($\xi(t)$) não interfere significativamente no sistema pois $\text{sign}(u(t) + \xi(t)) = \text{sign}(u(t))$. Adicionalmente, lembrando que (5.11) é válido para $\Pi \in \mathcal{M}$ e que $x(t)^T P_j x(t) \geq x(t)^T P_i x(t)$ para todo $j \neq i = 1, 2, \dots, N$ obtém-se:

$$x(t)^T \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j x(t) \geq x(t)^T \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_i x(t) = 0. \quad (5.68)$$

Desta forma, de (5.66) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & x(t)^T P_i (A_i x(t) + B_i(-K_i C_i x(t) - (\xi_0 + \varepsilon)\text{sign}(B_i^T P_i x(t)) + \xi(t))) \\ & + (A_i x(t) + B_i(-K_i C_i x(t) - (\xi_0 + \varepsilon)\text{sign}(B_i^T P_i x(t)) + \xi(t)))^T P_i x(t) \\ & \leq x(t)^T (P_i A_i + A_i^T P_i - P_i B_i K_i C_i - C_i^T K_i^T B_i^T P_i) x(t) + x(t)^T \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j x(t), \quad (5.69) \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Finalmente, tem-se a condição para a estabilidade:

$$\begin{aligned} & P_i A_i + A_i^T P_i - P_i B_i K_i C_i - C_i^T K_i^T B_i^T P_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j < 0, \quad (5.70) \\ & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Note que a condição (5.70) é a mesma que (5.26) e (5.56), e também deve ser satisfeita para a solução do Problema 3 com o sistema (5.61)-(5.63). Se (5.70) é satisfeita, então se conclui através de (5.66), que $D^+ v(x(t)) < 0$. ■

5.10 Exemplo 3

Considere o sistema (5.61)-(5.63) com os parâmetros: $\xi(t) = \text{sen}(10t)$, $\xi_0 = 1$, $\varepsilon = 0.5$ e as matrizes A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 apresentadas no Exemplo 1.

Assim como no Exemplo 1, a Figura 5.3 mostra a região de factibilidade para as condições de estabilidade deste sistema. As Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 mostram uma simulação do sistema realimentado, considerando por exemplo, $\pi_{21} = 5$, $\pi_{12} = 10$ e a condição inicial $x_0 = [3\cos(\theta) \ 3\text{sen}(\theta)]^T$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{24}, \frac{2\pi}{24}, \dots, 2\pi]$.

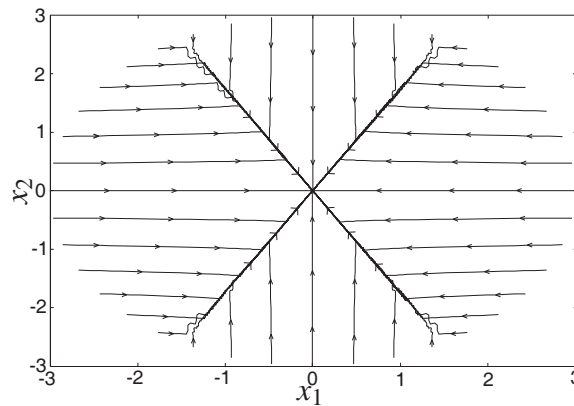
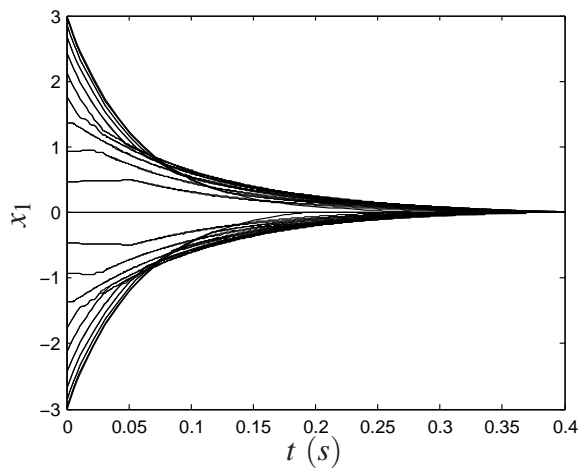
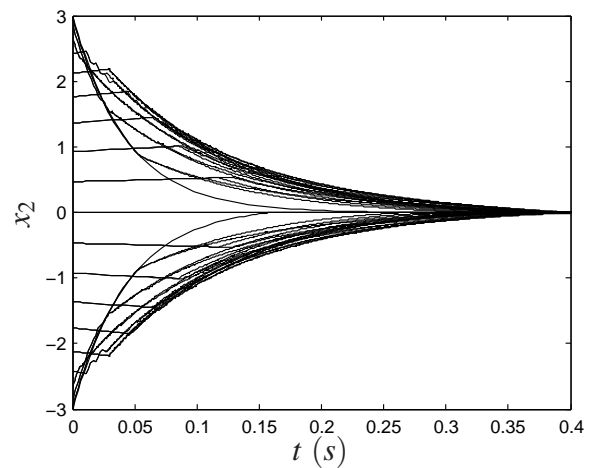


Figura 5.5: Plano de fase (Exemplo 2).

Figura 5.6: Trajetória do sinal $x_1(t)$.Figura 5.7: Trajetória do sinal $x_2(t)$.

5.11 Exemplo 4 - Conversor dc-dc

Neste exemplo, o método proposto neste capítulo é aplicado no controle de um conversor dc-dc, sendo que os resultados obtidos foram recentemente publicados em (CARDIM et al., 2009a). O desempenho do sistema de controle resultante é superior a um método que utiliza uma técnica de controle alternativa com modo deslizante, também proposta recentemente em (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006). Mais detalhes sobre CEV em conversores dc-dc são encontrados em (TAN; LAI; TSE, 2008).

Considere o conversor dc-dc, ilustrado na Figura 5.8 (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006). Este sistema possui duas entradas de controle $u^T = [u_1, u_2]$, sendo $u_1, u_2 \in \{0, 1\}$, que controlam as chaves (T_1, T_2) e (T_3, T_4) da seguinte maneira: $u_1 = 0$ para T_1 OFF e T_2 ON; $u_1 = 1$ para T_1 ON e T_2 OFF; $u_2 = 0$ para T_3 OFF e T_4 ON; $u_2 = 1$ para T_3 ON e T_4 OFF.

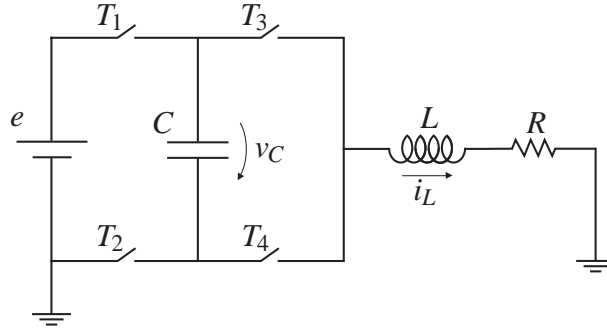


Figura 5.8: Esquema elétrico de um conversor dc-dc.

Este sistema pode ser descrito da seguinte forma (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006):

$$\begin{bmatrix} di_L/dt \\ dv_C/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{(u_1-u_2)}{L} \\ \frac{(u_2-u_1)}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e}{L}. \quad (5.71)$$

Defina o vetor de estado $x^T = [x_1 \ x_2] = [i_L \ v_C]$ e considere o ponto de referência $x_r^T = [x_{1r} \ x_{2r}] = [i_{Lr} \ v_{Cr}]$, tal que $-e < v_{Cr} = -Ri_{Lr} < 0$ e $i_{Lr} > 0$. Assim, o problema de controle é o seguinte: encontre uma estratégia de entrada de controle u_1 e u_2 tal que o ponto de equilíbrio $\Delta x^T = [\Delta x_1 \ \Delta x_2] = x^T - x_r^T = [(x_1 - x_{1r}) \ (x_2 - x_{2r})] = 0$ seja globalmente assintoticamente estável.

Em (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006) um método de projeto foi proposto para a solução deste problema. Este método foi baseado nas propriedades estruturais de sistemas chaveados Hamiltonianos e na análise de estabilidade considerando a função de Lyapunov

$$v(\Delta x) = \frac{1}{2} \Delta x^T F \Delta x, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = F^T > 0. \quad (5.72)$$

Note que $LCv(x)$ representa a energia armazenada no sistema (5.71). A motivação para utilizar este exemplo foi a aplicação de uma função de Lyapunov mais geral, baseada na função dada em (5.10) para $N = 2$, no projeto da lei de controle para melhorar a convergência do sistema controlado (CARDIM et al., 2009a).

Da definição de Δx , $x = \Delta x + x_r$ e assim (5.71) pode ser reescrita como

$$\Delta \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{(u_1-u_2)}{L} \\ \frac{(u_2-u_1)}{C} & 0 \end{bmatrix} (\Delta x + x_r) + \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e}{L}. \quad (5.73)$$

Como $u_1, u_2 \in \{0, 1\}$, então existem dois casos possíveis: $u_1 = u_2$ ou $u_1 \neq u_2$.

Se $u_1 = u_2$, de (5.73) segue que

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{e}{L} u_1 - \frac{R}{L} i_{Lr} \right) = A_1 \Delta x + B_1 \left(\frac{e}{L} u_1 - \frac{R}{L} i_{Lr} \right). \quad (5.74)$$

Observe que o par (A_1, B_1) não é controlável.

Se $u_1 \neq u_2$, então $u_2 = 1 - u_1$. Assim, de (5.73) obtém-se (lembrando que $v_{Cr} = -Ri_{Lr}$):

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} \frac{2\Delta x_2}{L} \\ \frac{-2\Delta x_1}{C} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \frac{2v_{Cr}}{L} + \frac{e}{L} \\ \frac{-2i_{Lr}}{C} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i_{Lr}}{C} \end{bmatrix} \\ &= A_2 \Delta x + \begin{bmatrix} \frac{2\Delta x_2}{L} \\ \frac{-2\Delta x_1}{C} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} (au_1 + b), \end{aligned} \quad (5.75)$$

sendo $a^T = [2v_{Cr} + e \quad -2i_{Lr}]$ e $b^T = [0 \quad i_{Lr}]$.

De (5.75), note que se $v_{Cr} \neq -e/2$, então para $\Delta x = 0$ não é possível encontrar $u_1 \in [0, 1]$ tal que $\Delta\dot{x} = 0$. Como mencionado em (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006), este não é um exemplo trivial de conversor de potência dc-dc. É importante ressaltar, que representou-se em (5.74) e (5.75) o sistema chaveado (original) (5.73), com $\sigma(t) \in \{1, 2, 3, 4\}$, como um sistema chaveado com $\sigma(t) \in \{1, 2\}$ e o CEV especificando o sinal de entrada $u_1(t)$ (CARDIM et al., 2009a). Esta é uma contribuição desta tese. Agora, considere a candidata a função de Lyapunov,

$$v(\Delta x) = \min_{i=1,2} \Delta x^T P_i \Delta x, \quad (5.76)$$

sendo $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ e a seguinte estratégia de controle: $u_1 = u_2$ se $\Delta x^T (P_2 - P_1) \Delta x > 0$ e $u_1 \neq u_2$ se $\Delta x^T (P_2 - P_1) \Delta x < 0$. Assim, se $\Delta x^T (P_2 - P_1) \Delta x > 0$, de (5.76) $v(\Delta x) = \Delta x^T P_1 \Delta x$, a condição $u_1 = u_2$ se mantém e a planta (5.73) pode ser descrita como (5.74). Considerando a derivada de Dini de $v(\Delta x)$, como descrito em (GEROMEL; COLANERI, 2006) e na equação (5.66),

$$\begin{aligned} D^+ v(\Delta x) &\leq \Delta x^T (P_1 A_1 + A_1^T P_1) \Delta x + 2\Delta x^T P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{e}{L} u_1 - \frac{R}{L} i_{Lr} \right) \\ &\leq \Delta x^T (P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \pi_{21} (P_2 - P_1)) \Delta x + 2\Delta x^T P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{e}{L} u_1 - \frac{R}{L} i_{Lr} \right), \end{aligned} \quad (5.77)$$

sendo $\pi_{21} \geq 0$ uma constante arbitrária. Considerando que $\frac{e}{L} - \frac{R}{L} i_{Lr} > 0$ e $\frac{-R}{L} i_{Lr} < 0$, então para

a lei de controle

$$u_1 = \begin{cases} 1, & \text{se } \text{sign}(\Delta x^T P_1 [1 \ 0]^T) < 0, \\ 0, & \text{se } \text{sign}(\Delta x^T P_1 [1 \ 0]^T) \geq 0, \end{cases} \quad (5.78)$$

note que $2\Delta x^T P_1 [1 \ 0]^T (\frac{e}{L}u_1 - \frac{R}{L}i_{Lr}) \leq 0$ e assim

$$D^+v(\Delta(x)) \leq \Delta x^T (P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \pi_{21}(P_2 - P_1))\Delta x. \quad (5.79)$$

Portanto, se $\Delta x^T (P_2 - P_1)\Delta x > 0$, com a lei de controle (5.78) e $u_2 = u_1$, então $D^+v(\Delta x) < 0$ para $\Delta x \neq 0$, se

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \pi_{21}(P_2 - P_1) < 0. \quad (5.80)$$

Observe que neste caso, a análise é similar ao procedimento proposto na Seção 5.9, com $K_{\sigma(t)} = 0$.

Agora, se $\Delta x^T (P_2 - P_1)\Delta x < 0$, de (5.76), $v(\Delta x) = \Delta x^T P_2 \Delta x$. Então, como descrito acima, neste caso $u_1 \neq u_2$ (significa que $u_2 = 1 - u_1$) e a planta (5.73) pode ser reescrita como (5.75). Assim, de (GEROMEL; COLANERI, 2006) e da equação (5.66),

$$D^+v(\Delta x) \leq \Delta x^T (P_2 A_2 + A_2^T P_2)\Delta x + 4\Delta x^T P_2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_2}{L} \\ -\frac{\Delta x_1}{C} \end{bmatrix} + 2\Delta x^T P_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} (au_1 + b). \quad (5.81)$$

Seja P_2 igual a θLCF , sendo θ uma constante positiva e F definida em (5.72):

$$P_2 = \begin{bmatrix} \theta L & 0 \\ 0 & \theta C \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

Então, de (5.75), (5.81) e (5.82), segue que $\Delta x^T P_2 [\frac{\Delta x_2}{L} \ -\frac{\Delta x_1}{C}]^T = 0$, $\Delta x^T (P_2 A_2 + A_2^T P_2)\Delta x = -2\theta \Delta x_1^2 R$, e

$$D^+v(\Delta x) \leq -2\theta R \Delta x_1^2 + 2\theta (\Delta x^T a u_1 + \Delta x^T b). \quad (5.83)$$

Além disso, considere que

$$P_2 - P_1 = b(a+b)^T + (a+b)b^T, \quad (5.84)$$

sendo a e b definidas em (5.75).

Agora, lembrando que $\Delta x^T (P_2 - P_1)\Delta x < 0$, de (5.84),

$$\Delta x^T (P_2 - P_1)\Delta x = 2(\Delta x^T b)[\Delta x^T (a+b)] < 0. \quad (5.85)$$

Assim, $(\Delta x^T b)$ e $\Delta x^T (a+b)$ são diferentes de zero e $\text{sign}(\Delta x^T b) = -\text{sign}(\Delta x^T (a+b))$.

Assim, considerando a lei de controle

$$u_1 = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta x^T(a+b) < 0, \\ 0, & \text{se } \Delta x^T(a+b) > 0, \end{cases} \quad (5.86)$$

então, se $\Delta x^T(a+b) < 0$, tem-se $u_1 = 1$, a condição $\Delta x^T b > 0$ se mantém e $(\Delta x^T a u_1 + \Delta x^T b) = \Delta x^T(a+b) < 0$. Agora, se $\Delta x^T(a+b) > 0$ então $u_1 = 0$, a condição $\Delta x^T b < 0$ se mantém e $(\Delta x^T a u_1 + \Delta x^T b) = \Delta x^T b < 0$.

Portanto, de (5.83)-(5.86) note que $D^+v(\Delta x) < 0$ se $\Delta x^T(P_2 - P_1)\Delta x < 0$.

Assim, como descrito anteriormente, se $\Delta x^T(P_2 - P_1)\Delta x > 0$, (5.80) é uma condição suficiente para $D^+v(\Delta x) < 0$.

Para analisar esta condição, suponha os seguintes valores para os parâmetros (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006):

$$C = 1.0 \text{ mF}, L = 75.0 \text{ mH}, R = 20.0 \Omega, e = 100.0 \text{ V}, \quad (5.87)$$

e o ponto de referência $x_r^T = [i_{Lr} \ v_{Cr}] = [2 \ -40]$. Observe que o método de projeto proposto pode também ser usado com valores diferentes de parâmetros e pontos de referência. Então, para $\pi_{21} = 1$ e de (5.80), (5.82) e (5.84) segue que

$$\begin{aligned} & P_1 A_1 + A_1^T P_1 + \pi_{21}(P_2 - P_1) \\ &= [P_2 - (P_2 - P_1)]A_1 + A_1^T [P_2 - (P_2 - P_1)] + \pi_{21}(P_2 - P_1) \\ &= \begin{bmatrix} -2R\theta & 40(\frac{R}{L} + 1) \\ 40(\frac{R}{L} + 1) & -8 \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (5.88)$$

para $\theta = 4 \times 10^5$. Adicionalmente,

$$P_2 = \begin{bmatrix} 30000 & 0 \\ 0 & 400 \end{bmatrix}, \quad (5.89)$$

$$P_1 = P_2 - (P_2 - P_1) = \begin{bmatrix} 30000 & -40 \\ -40 & 408 \end{bmatrix} > 0, \quad (5.90)$$

e a lei de controle completa é a seguinte: Se $\Delta x^T(P_2 - P_1)\Delta x > 0$, escolha u_1 como descrito em (5.78) e $u_2 = u_1$. Se $\Delta x^T(P_2 - P_1)\Delta x < 0$, escolha u_1 como em (5.86) e $u_2 = 1 - u_1$. Então, $D^+v(\Delta x) < 0$ para $\Delta x \neq 0$ e o ponto de equilíbrio $\Delta x = 0$ do sistema controlado (5.73) é globalmente assintoticamente estável. Resultados de simulação, para as condições iniciais $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ e $(2.6667, -150)$, considerando o método proposto e o procedimento

apresentado em (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006) são mostrados nas Figuras 5.9-5.11. Note que o método proposto apresenta uma melhor velocidade de convergência, pois combina duas funções de Lyapunov ($v_1(\Delta x) = \Delta x^T P_1 \Delta x$ e $v_2(\Delta x) = \Delta x^T P_2 \Delta x$), sendo $P_2 = \theta LCF$ e $v(\Delta x) = \frac{1}{2} \Delta x^T F \Delta x$ a função de Lyapunov usada em (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006).

Observe que, com a lei de controle proposta, se $\Delta x^T (P_2 - P_1) \Delta x < 0$, então de (5.76), $v(\Delta x) = \Delta x^T P_2 \Delta x$ e a planta é dada por (5.75). De (5.87) e $v_{Cr} = -40$ V, segue que $2v_{Cr} + e = 20$ V. Então, para o sistema (5.75), não é possível encontrar $u_1 \in [0, 1]$, se $\Delta x = 0$, tal que $\Delta \dot{x} = 0$. Desta forma, para alguma condição inicial diferente de zero, a condição $\Delta x(t) = 0$ para $t \rightarrow \infty$ não pode ser obtida somente com $v(\Delta x) = \Delta x^T P_2 \Delta x$, para $t \geq 0$.

Agora, se $\Delta x^T (P_2 - P_1) \Delta x > 0$, então de (5.76) $v(\Delta x) = \Delta x^T P_1 \Delta x$ e a planta é dada por (5.74). O sistema (5.74) não é controlável, mas note que, se a condição inicial é $\Delta x_2 = 0$, então existe $u_1 \in [0, 1]$ tal que $\Delta x(t) = 0$ para $t \rightarrow \infty$. Neste caso ($\Delta x_2 = 0$), de (5.89) e (5.90), $v_1(\Delta x) = \Delta x^T P_1 \Delta x = v_2(\Delta x) = \Delta x^T P_2 \Delta x = 30000 \Delta x_1^2$. Agora, para a situação com a condição inicial $\Delta x_2 \neq 0$, então a condição $\Delta x = 0$ para $t \rightarrow \infty$ não pode ser obtida somente com $v(\Delta x) = \Delta x^T P_1 \Delta x$, para $t \geq 0$, pois neste caso, de (5.74) $\Delta \dot{x}_2 = 0$.

Com a análise descrita acima, e considerando que $D^+ v(\Delta x) < 0$ para $t \geq 0$, e $v(\Delta x)$ dado (5.76), para alguma condição inicial é necessário que $v(\Delta x(t)) = v_1(\Delta x(t)) = v_2(\Delta x(t))$ para $t \geq 0$. Finalmente, considerando (5.76), sendo $v_1(\Delta x) = v_2(\Delta x)$, então $v(\Delta x)$ é igual a $v_1(\Delta x)$ se $\dot{v}_1(\Delta x) < \dot{v}_2(\Delta x)$ ou $v_2(\Delta x)$ se $\dot{v}_2(\Delta x) < \dot{v}_1(\Delta x)$. Portanto, a velocidade de convergência é melhor que no caso em que somente a função de Lyapunov $v_2(\Delta x)$ é usada, como em (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006). Em (GEROMEL; COLANERI; BOLZERN, 2008) foi usada a função de Lyapunov (5.76), e melhorou o desempenho da suspensão ativa de veículos.

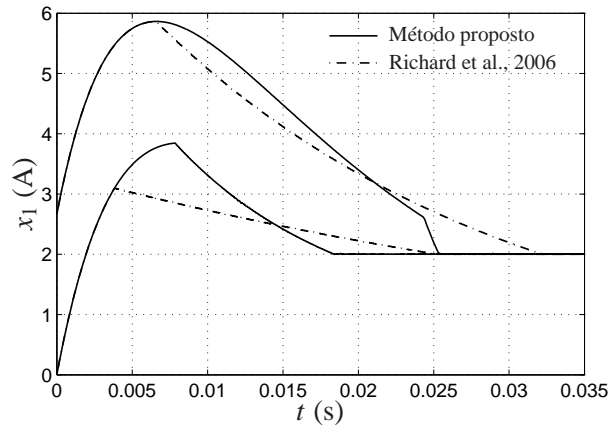


Figura 5.9: Respostas transitórias da variável de estado $x_1(t) = i_L(t)$ ($x_{1r} = 2$ A).

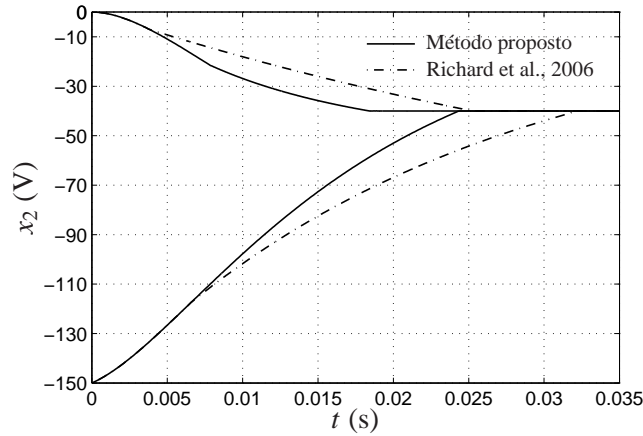


Figura 5.10: Respostas transitórias da variável de estado $x_2(t) = v_C(t)$ ($x_{2r} = -40$ V).

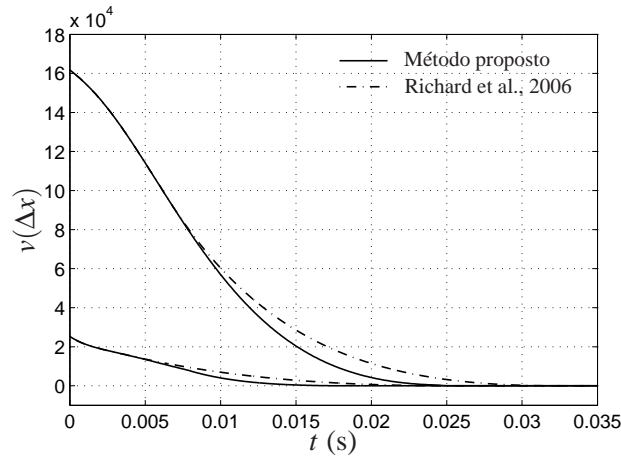


Figura 5.11: Respostas transitórias da função de Lyapunov dada em (5.72).

5.12 Conclusões Parciais

Neste capítulo foram apresentadas condições para a estabilidade de sistemas lineares com comutação, propostas em (GEROMEL; COLANERI, 2006). Com base nesta teoria, foi proposto um novo método para encontrar condições necessárias e suficientes para a existência de matrizes $F_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $K_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, sendo $F_{\sigma} \in \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$ e $K_{\sigma} \in \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$, tal que o sistema realimentado ilustrado na Figura 5.1, com entrada $\tilde{u}(t)$ e saída $\tilde{y}(t)$ seja um sistema Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP), introduzido em (CARDIM et al., 2008c). Foram propostos dois métodos para o cálculo das matrizes F_{σ} e K_{σ} . O primeiro método (Teorema 6) utiliza as LMIs (5.19), (5.20) e (5.23) para resolver o problema, e o segundo método (Teorema 7) utiliza as LMIs (5.50) e (5.51). Embora a região de factibilidade para as condições impostas nos Teoremas 6 e 7 sejam as mesmas, o Teorema 7 apresenta uma vantagem em relação ao Teorema 6, pois utiliza um número menor de LMIs para resolver o problema. Adicionalmente, foi mostrado que os sistemas LMERP também podem ser aplicados no projeto de CEV de sistemas

com comutação com sinal de distúrbio casado ($\xi(t)$). Os métodos propostos foram aplicados em exemplos numéricos e no controle de um conversor dc-dc, sendo obtidos resultados com desempenho superior, comparado com métodos recentes de controle com modos deslizantes para sistemas chaveados. Os novos métodos propostos neste capítulo, foram publicados recentemente em (CARDIM et al., 2008b, 2008c, 2009a).

6 *Conclusões*

Foram estudados vários sistemas, que abordaram diferentes métodos de controle, incluindo o controle com modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS), controle com estrutura variável e sistemas chaveados estritamente reais positivos, controle utilizando a realimentação da derivada do vetor de estado em sistemas contínuos lineares, não-lineares, e em sistemas discretos no tempo.

Inicialmente teve-se um breve estudo sobre os modelos fuzzy TS (TAKAGI; SUGENO, 1985), que resumidamente consiste da descrição de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariante no tempo, e o sistema global obtido através da combinação fuzzy dos modelos locais lineares. Verificou-se que para um determinado número de modelos locais (lineares), pode-se representar de forma exata o sistema não-linear, como mostrado no exemplo do sistema bola-viga (Figura 2.2), utilizando quatro modelos locais.

Dando continuidade aos estudos com modelos fuzzy TS, foi proposto no Capítulo 3 um novo método para o controle de sistemas mecânicos não-lineares considerando o acesso somente às derivadas dos estados da planta, com projeto baseado em LMIs e a estabilidade assegurada através de funções de Lyapunov. Primeiramente, foi utilizado como exemplo o modelo de um levitador magnético. Neste sistema, foi possível calcular analiticamente uma variável de estado (x_1) através do método de inversão (Figura 3.1) e utilizar um controlador fuzzy TS. Nas simulações do sistema, foram obtidos os mesmos resultados do modelo convencional, no qual o vetor de estado é disponível. Adicionalmente, o mesmo método de projeto foi proposto para um sistema de controle de posição da perna de pacientes paraplégicos. A idéia principal neste projeto foi utilizar acelerômetros como sensores, ao invés de eletrogoniômetros, pois possuem dimensões bem menores, são mais leves e mais confortáveis para o paciente. O controlador foi projetado visando variar o ângulo da articulação do joelho de 30° , mediante estimulação elétrica no músculo quadríceps, sendo considerado, o modelo matemático da perna proposto por (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) que relaciona a largura do pulso aplicado com o torque gerado na articulação do joelho. Neste método proposto, foi necessário obter uma aproximação da função não-linear ($\tilde{f}_{21}(x_1)$) para encontrar, de forma analítica, a expressão para o cálculo da variável de estado x_1 , e assim utilizar o controle fuzzy TS.

O Capítulo 4 também apresentou uma contribuição neste assunto, sendo estudado um novo método para projetar o ganho de realimentação da derivada do vetor de estado num sistema linear invariante no tempo e num sistema discreto no tempo. O projeto foi baseado em alguns trabalhos já publicados pelos autores sobre realimentação derivativa ((TEIXEIRA et al., 2006a; CARDIM et al., 2007b, 2007, 2008a)) e nos resultados apresentados em (CHANG et al., 2002), que propôs um método para o cálculo aproximado de uma igualdade matricial através de um processo de minimização utilizando LMIs. Verificou-se que esta idéia pode ser importante na aplicação do controle digital de sistemas mecânicos, que podem utilizar sensores acelerométricos na medição dos sinais necessários para o controle. Os resultados obtidos com os métodos propostos, motivaram a produção dos artigos (CARDIM et al., 2009b; TEIXEIRA et al., 2009).

Um outro assunto abordado neste trabalho e que trouxe uma contribuição relevante, encontra-se no Capítulo 5. Neste capítulo foi proposto um novo método de controle com estrutura variável inspirado na teoria de sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP). A teoria deste projeto foi baseada nas condições para a estabilidade de sistemas lineares com comutação, propostas em (GEROMEL; COLANERI, 2006), e consiste em encontrar condições necessárias e suficientes para a existência de matrizes $F_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $K_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, sendo $F_{\sigma} \in \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$ e $K_{\sigma} \in \{K_1, K_2, \dots, K_N\}$, tais que o sistema realimentado (ilustrado na Figura 5.1), com entrada $\tilde{u}(t)$ e saída $\tilde{y}(t)$ seja um sistema Lyapunov-Metzler-ERP (LMERP) ou LMSPR (do inglês *Lyapunov-Metzler-SPR*), introduzido em (CARDIM et al., 2008c). Foram propostos dois métodos para o cálculo das matrizes F_{σ} e K_{σ} . O primeiro (Teorema 6) utiliza as LMIs (5.19), (5.20) e (5.23) para resolver o problema, e o segundo (Teorema 7) utiliza as LMIs (5.50) e (5.51). Embora a região de factibilidade obtida para as condições impostas nos Teoremas 6 e 7 foram as mesmas, o Teorema 7 apresentou uma vantagem em relação ao Teorema 6, pois utiliza um número menor de LMIs para resolver o problema. Adicionalmente, foi mostrado que os sistemas LMERP também podem ser aplicados no projeto de CEV de sistemas com comutação com sinal de distúrbio casado ($\xi(t)$). Exemplos numéricos ilustraram a validade dos métodos propostos, e os bons resultados motivaram a produção dos artigos (CARDIM et al., 2008c, 2008b, 2009a). No Exemplo 4 foi proposta uma aplicação no controle de um conversor dc-dc, e os resultados obtidos com o novo método de projeto apresentaram uma melhor velocidade de convergência, quando comparados com métodos recentes de controle com modos deslizantes para sistemas chaveados (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006). Pelo conhecimento dos autores, este exemplo foi a primeira aplicação utilizando desigualdades de LM no projeto de controle de sistemas chaveados lineares e invariantes no tempo afins no controle.

É importante ressaltar, que praticamente todos os estudos abordados nesta tese geraram publicações em periódicos e congressos, nacionais e internacionais. Estas publicações estão

descritas no Anexo A que apresenta uma relação dos trabalhos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa em controle da UNESP de Ilha Solteira, que contaram com a participação do autor, como co-autor nestes trabalhos.

6.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Em resumo, alguns trabalhos futuros relacionados aos resultados obtidos nesta tese são:

- Análise teórica no projeto de CEV para uma classe de sistemas com comutação, considerando imperfeições no chaveamento, como por exemplo, atraso na comutação;
- Análise de robustez nos sistemas com comutação e projeto baseados em LMIs considerando as saídas no CEV;
- Validação experimental utilizando conversores dc-dc, considerando os resultados obtidos em (CARDIM et al., 2009a);
- Análise de restrições como taxa de decaimento, restrição na entrada e restrição na saída nos sistemas ERP baseados em desigualdades de Lyapunov-Metzler;
- Análise de robustez utilizando o método *redesign* para sistemas com realimentação derivativa.

Referências

- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. Pole-placement for SISO linear systems by state-derivative feedback. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, New York, v. 151, n. 4, p. 377–385, 2004.
- ANDERSON, B. D. O. A simplified viewpoint of hyperstability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 13, p. 292–294, 1968.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Comments on “magnetically levitated micro pm motors by two types of active magnetic bearings”. *IEEE Transactions on Mechatronics*, New York, v. 7, n. 1, p. 99–100, March 2002.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. da; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, august 2007.
- BACCIOTTI, A. Stabilization by means of state space depending switching rules. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 53, n. 3-4, p. 195–201, 2004.
- BARKANA, I.; TEIXEIRA, M. C. M.; HSU, L. Mitigation of symmetry condition in positive realness for adaptive control. *Automatica*, Oxford, v. 42, n. 9, p. 1611–1616, September 2006.
- BERGSTEN, P.; PALM, R.; DRIANKOV, D. Observers for takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, Orlando, v. 32, n. 1, p. 114–121, 2002.
- BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C.; OLIVEIRA, M. C. de. On strict positive real systems design: Guaranteed cost and robustness issues. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 36, n. 2, p. 135–141, 1999.
- BOUKAS, T. K.; HABETLER, T. G. High-performance induction motor speed control using exact feedback linearization with state and state derivative feedback. *IEEE Transactions on Power Electronics*, New York, v. 19, n. 4, p. 1022–1028, 2004.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. 2. ed. USA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. (Studies in Applied Mathematics). Disponível em: <<http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/>>. Acesso em: 06 Set. 2009.
- CAMPELLO, R. J. G. B. *Arquiteturas e Metodologias para Modelagem e Controle de Sistemas Complexos Utilizando Ferramentas Clássicas e Modernas*. 2002. 277 f. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 28, n. 4, p. 397–404, April 1997a.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Lyapunov-like stability theorems for discrete-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 28, n. 3, p. 297–308, March 1997b.

CAO, Y. Y.; FRANK, P. M. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, n. 2, p. 200–211, 2000.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Projeto de controle de sistemas mecânicos utilizando a realimentação da derivada de estados. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, 6., 2007, São José do Rio Preto. *Proceedings of the...* São José do Rio Preto: IBILCE, 2007. p. 1443–1448.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; COVACIC, M. R. Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estados da planta. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 8., 2007, Florianópolis. *Anais...* Florianópolis: [s.n.], 2007a. v. 1. 6p. (Artigo 30693).

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Design of state-derivative feedback controllers using a state feedback control design. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM, STRUCTURE AND CONTROL, 3., 2007, Iguassu Falls. *Proceedings of the...* Iguassu Falls: [s.n.], 2007b. v. 1. 6p. (Artigo 135).

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Control designs for linear systems using state-derivative feedback. In: HUSEK, P. (Ed.). *Systems, Structure and Control*. In-Teh, 2008a. p. 1–28. Disponível em: <<http://www.books.i-techonline.com>>. Acesso em: 20 Mar. 2008.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Controle com estrutura variável e sistemas chaveados estritamente reais positivos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 17., 2008, Juiz de Fora. *Anais...* Juiz de Fora: SBA, 2008b. v. 1. 6p. (Artigo 41410).

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable structure control of switched systems based on lyapunov-metzler-spr systems. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 10., 2008, Antalya. *Proceedings of the...* Antalya: IEEE, 2008c. v. 1, p. 18–23.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable structure control design of switched systems with an application to a dc-dc power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, september 2009a.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E. LMI-based digital redesign of linear time-invariant systems with state-derivative feedback. In: MULTICONFERENCE ON SYSTEMS AND CONTROL, 3., 2009, Saint Petersburg. *Proceedings of the...* Saint Petersburg: IEEE, 2009b. v. 1, p. 745–749.

- CHANG, W.; PARK, J. B.; LEE, H. J.; JOO, Y. H. LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Stevenage, v. 149, n. 4, p. 297–302, July 2002.
- CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed. New York: Oxford, 1999. 352 p. (Oxford University Press).
- CHOI, H. H. A new method for variable structure control system design: A linear matrix inequality approach. *Automatica*, Oxford, v. 33, n. 11, p. 2089–2092, 1997.
- CHOI, H. H. An explicit formula of sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, Oxford, v. 34, n. 8, p. 1015–1020, 1998.
- CHOI, H. H. On the existence of linear sliding surfaces for a class uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, Oxford, v. 35, n. 10, p. 1707–1715, 1999.
- COVACIC, M. R. *Síntese de Sistemas ERP Baseada em LMIs e Controle com Estrutura Variável*. 2006. 237 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- COVACIC, M. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Comparative study of LMI-based output feedback spr synthesis for plants with different numbers of inputs and outputs. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 10., 2008, Antalya. *Proceedings of the...* Antalya: IEEE, 2008. v. 1, p. 130–135.
- CUNHA, J. P. V. S.; HSU, L.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F. Output-feedback model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 48, n. 12, p. 2245–2250, 2003.
- DEAECTO, G. S. *Síntese de Controle para Sistemas Dinâmicos com Comutação*. 2007. 69 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Controle de sistemas lineares com comutação. *Revista Controle & Automação*, Natal, v. 19, n. 4, p. 431–443, dez. 2008.
- DECARLO, R. A.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, New York, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, July 2000.
- DECARLO, R. A.; ŽAK, S. H.; MATHEWS, G. P. Variable structure control of multivariable systems: a tutorial. *Proceedings of IEEE*, New York, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos*. 8th. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 684 p.
- DUAN, G. R.; IRWIN, G. W.; LIU, G. P. Robust stabilization of descriptor linear systems via proportional-plus-derivative state feedback. In: PROCEEDINGS OF THE 1999 AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1999, San Diego. *Proceedings of the...* San Diego: [s.n.], 1999. p. 1304–1308.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Controle & Automação*, Natal, v. 20, n. 1, p. 83–93, jan./mar. 2009.

- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, N. A. P. da. Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009.
- FERRARIN, M.; PEDOTTI, A. The relationship between electrical stimulus and joint torque: A dynamic model. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, v. 8, n. 3, p. 342–352, September 2000.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. \mathcal{H}_∞ -control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach. *Linear Algebra and Its Applications*, New York, v. 351, n. 1, p. 271–302, July 2002.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control Toolbox - For use with Matlab*. [S.l.], 1995. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/access>>. Acesso em: 22 Set. 2009.
- GAINO, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; CARVALHO, A. A. de; ASSUNÇÃO, E.; SANCHES, M. A. A. Controle não-linear fuzzy Takagi-Sugeno do movimento de paraplégicos utilizando acelerômetros. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA, 21., 2008, Salvador. *Anais...* Salvador: [s.n.], 2008. p. 1254–1257.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM J. Control Optim.*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New Jersey, v. 53, n. 3, p. 720–733, 2008.
- GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. *Automatica*, Oxford, v. 45, n. 2, p. 593–597, 2009.
- GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S.; COLANERI, P. Multiobjective \mathcal{H}_2 control via switched linear systems. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM, STRUCTURE AND CONTROL, 3., 2007, Iguassu Falls. *Anais...* Iguassu Falls: [s.n.], 2007. v. 1. 6p. (Artigo 77).
- GUO, S.; SHIEH, L.; CHEN, G.; LIN, C. Effective chaotic orbit tracker: A prediction-based digital redesign approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I - Fundamental Theory and Application*, Pennsylvania, v. 47, n. 11, p. 1557–1570, 2000.
- HSU, L.; ARAÚJO, A.; COSTA, R. R. Analysis and design of I/O based variable-structure adaptive-control. *IEEE Transaction on Automatic Control*, New York, v. 39, n. 1, p. 4–21, 1994.
- HUANG, C. H.; IOANNOU, P. A.; MAROULAS, J.; SAFONOV, M. G. Design of strictly positive real systems using constant output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 44, n. 3, p. 569–573, 1999.
- JIN, H. Y. Eigenstructure assignment by proportional-derivative state feedback in singular systems. *System & Control Letters*, Amsterdam, v. 22, n. 1, p. 47–52, 1994.
- JOHANSSON, M. *Piecewise Linear Control Systems*. 1st. ed. New York: Springer Verlag, 2003. 205 p.
- KAUFMAN, H.; BARKANA, I.; SOBEL, K. *Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications*. 2nd. ed. Heidelberg: Springer Verlag, 1997. 424 p.

- KEEL, L. H.; BHATTACHARYYA, S. P.; HOWZE, J. W. Robust control with structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 33, n. 1, p. 68–78, 1988.
- KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, n. 5, p. 523–534, October 2000.
- KOMORI, M.; YAMANE, T. Magnetically levitated micro pm motors by two types of active magnetic bearings. *IEEE Transactions on Mechatronics*, New York, v. 6, n. 1, p. 43–49, March 2001.
- KOSKO, B. *Fuzzy Engineering*. 1st. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. 550 p.
- LANDAU, I. *Adaptive Control: The Model Reference Approach*. New York: Marcel Dekker, 1979. 432 p.
- LASDON, L. S. *Optimization Theory for Large Systems*. 1st. ed. New York: Dover Science, 2002. 544 p.
- LEE, H. J.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. Further refinement on LMI-based digital redesign: Delta-operator approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Toronto, v. 53, n. 6, p. 473–477, 2006.
- LEWIS, F. L.; SYRMOS, V. L. A geometric theory for derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 9, p. 1111–1116, 1991.
- LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, Michigan, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999.
- LORDELO, A. D. S. *Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI*. 2000. 110 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2000.
- MACHADO, E. R. M. D. *Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno*. 2003. 209 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.
- MARQUEZ, H. J. *Nonlinear Control Systems - Analysis and Design*. 1st. ed. Canada: John Wiley Professional, 2003. 376 p.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 4th. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2003. 800 p.
- OLIVEIRA, M. C. de; FARIAS, D. P.; GEROMEL, J. C. *LMISol, User's guide*. Universidade Estadual de Campinas: UNICAMP, 1997. Disponível em: <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~mauricio/software.html>>. Acesso em: 20 Ago. 2009.
- OWENS, D. H.; PRATZEL-WOLTERS, D.; ILCHMANN, A. Positive-real structure and high-gain adaptive stabilization. *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, Oxford, v. 4, n. 2, p. 167–181, 1987.
- PEAUCELLE, D.; HENRION, D.; LABIT, Y.; TAITZ, K. *User's Guide for SeDuMi Interface 1.04*. Toulouse, 2002. 37 p. Disponível em: <<http://www.laas.fr/~peaucell/software>>. Acesso em: 22 Set. 2009.

- PIETROBOM, H. C. *Controle de Sistemas Não-Lineares Baseados em LMI Utilizando Modelos Fuzzy*. 1999. 95 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 1999.
- RICHARD, P. Y.; CORMERAIS, H.; BUISSON, J. A generic design methodology for sliding mode control of switched systems. *Nonlinear Analysis - Theory Methods & Applications*, Cesson-Sévigné Cedex, v. 65, n. 9, p. 1751–1772, March 2006.
- RIENER, R.; FUHR, T. Patient-driven control of FES-supported standing up. a simulation study. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, Pennsylvania, v. 6, n. 2, p. 113–124, June 1998.
- SILVA, N. A. P. da. *Projeto de Controladores Automáticos com Atualização das Condições Iniciais*. 2005. 218 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- SLOTINE, J. J. E.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. 1st. ed. USA: Prentice Hall, 1991. 352 p.
- STEINBERG, A.; CORLESS, M. Output feedback stabilization of uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 30, n. 10, p. 1025–1027, 1985.
- SUGENO, M.; KANG, G. T. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 28, n. 1, p. 15–33, October 1988.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, Jan./Feb. 1985.
- TAN, S. C.; LAI, Y. M.; TSE, C. K. General design issues of sliding-mode controllers in dc-dc converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 55, n. 3, p. 1160–1174, March 2008.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, May 1998.
- TANAKA, K.; NISHIMURA, M.; WANG, H. O. Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 4., 1998, Philadelphia. *Proceedings of the...* Philadelphia: [s.n.], 1998. p. 3450–3454.
- TANAKA, K.; SANO, M. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 2, n. 2, p. 119–134, May 1994.
- TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 135–156, 1992.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. 1st. ed. Canada: John Wiley Professional, 2001. 432 p.
- TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.

TEIXEIRA, M. C. M. *Real Positive Systems and Adaptive Control*. 1989. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 1989.

TEIXEIRA, M. C. M. Condições para tornar um sistema estritamente real positivo e aplicação no controle com EVMD utilizando somente as saídas da planta. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 8., 1990, Belém. *Anais...* Belém: SBA, 1990. p. 291–296.

TEIXEIRA, M. C. M. Output control with dynamical compensators and strictly positive real systems. *International Journal of Control*, London, v. 57, n. 5, p. 1101–1105, 1993.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. On relaxed lmi-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, October 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; COVACIC, M. R. Realimentação da derivada de estados a partir do projeto com realimentação de estados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 16., 2006, Salvador. *Anais...* Salvador: SBA, 2006a. v. 1, p. 726–731.

TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E. Projeto da realimentação derivativa discreta no tempo utilizando o projeto com realimentação não-derivativa contínua no tempo. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 9., 2009, Brasília. *Anais...* Brasília: [s.n.], 2009. 6p. (Artigo 55652).

TEIXEIRA, M. C. M.; COVACIC, M. R.; ASSUNÇÃO, E. Design of SPR systems with dynamic compensators and output variable structure control. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VARIABLE STRUCTURE SYSTEMS, 9., 2006, Alghero. *Proceedings of the...* Alghero: IEEE, 2006. v. 1, p. 328–333.

TEIXEIRA, M. C. M.; COVACIC, M. R.; ASSUNÇÃO, E.; LORDELO, A. D. S. Design of SPR systems and output variable structure controllers based on LMI. In: *Advances in Variable Structure Systems: Theory and Applications*. Sarajevo: University of Sarajevo, Faculty of Electrical Engineering, 2002. p. 133–144.

TEIXEIRA, M. C. M.; DEAECTO, G. S.; GAINO, R.; ASSUNÇÃO, E.; CARVALHO, A. A.; FARIAS, U. C. Projeto de um controlador fuzzy Takagi-Sugeno para variar o ângulo da articulação do joelho. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 16., 2006, Salvador. *Anais...* Salvador: SBA, 2006b. v. 1, p. 2287–2292.

TEIXEIRA, M. C. M.; LORDELO, A. D. S.; ASSUNÇÃO, E. On LMI based design of SPR systems and output variable structure controllers. In: *Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000. p. 199–208.

TEIXEIRA, M. C. M.; PIETROBOM, H. C.; ASSUNÇÃO, E. Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI. *Controle & Automação*, Campinas, v. 11, n. 1, p. 37–48, Jan-Abr 2000.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, April 1999.

TUAN, H. D.; APKARIAN, P.; NARIKIYO, T.; YAMAMOTO, Y. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 2, p. 324–332, April 2001.

VALÁŠEK, M.; OLGAC, N. An efficient pole-placement technique for linear time-variant SISO system. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, New York, v. 142, n. 5, p. 451–458, 1995a.

VALÁŠEK, M.; OLGAC, N. Efficient eigenvalue assignments for general linear mimo systems. *Automatica*, Oxford, v. 31, n. 11, p. 1605–1617, 1995b.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 4, n. 1, p. 14–23, February 1996.

WANG, L. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. 1st. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997. 424 p.

WILL, A. B.; TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Four wheel steering control systems design using fuzzy models. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 6., 1997, Hartford. *Proceedings of the...* Hartford: IEEE, 1997. p. 73–78.

XIANG, J.; SU, H.; CHU, J. Robust sliding mode output feedback control design using ILMI approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 24., 2005, Portland. *Proceedings of the...* Portland: [s.n.], 2005. p. 4078–4083.

XIAODONG, L.; QINGLING, Z. New approaches to \mathcal{H}_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, Oxford, v. 9, n. 39, p. 1571–1582, 2003.

ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and control*, California, v. 8, n. 1, p. 338–353, 1965.

ZHENG, F.; WANG, Q.; LEE, T.; HUANG, X. Robust PI controller design of nonlinear systems via fuzzy modeling approach. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, Orlando, v. 31, n. 6, p. 666–675, 2001.

APÊNDICE A – Complemento de Schur

O Complemento de Schur é um método que possibilita converter um conjunto de inequações não-lineares (convexas) em LMIs, que podem ser facilmente resolvidas por softwares disponíveis (GAHINET et al., 1995; OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997; PEAUCELLE et al., 2002).

A idéia básica é a seguinte: a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{A.1})$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x , é equivalente a:

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0. \quad (\text{A.2})$$

Em outras palavras, o conjunto de inequações (A.2) pode ser representado pela LMI (A.1). Assim podemos representar

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \\ R(x) > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R(x) & S(x)^T \\ S(x) & Q(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{A.3})$$

Maiores detalhes sobre o Complemento de Schur podem ser encontrados em (BOYD et al., 1994).

APÊNDICE B – Derivada Direcional

Este apêndice foi extraído de (DEAECTO, 2007).

Neste apêndice é apresentado o Teorema de Danskin (LASDON, 2002), muito utilizado no cálculo de derivadas direcionais. Seja $f(x, i)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $i \in I$, com derivadas parciais $\partial f / \partial x_i$ contínuas, sendo que I é um conjunto compacto de índices, por exemplo, $I = 1, 2, \dots, n$. Desta forma, pode-se definir a função

$$\bar{v}(x) = \min_{i \in I} f(x, i), \quad (\text{B.1})$$

que é contínua, porém não diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, esta função deixa de ser diferenciável para todo $x \in Z(x)$, sendo

$$Z(x) = \{i \in I : \bar{v}(x) = f(x, i)\} \quad (\text{B.2})$$

composto por mais de um elemento. A derivada direcional à direita da função (B.1) no ponto x e na direção d é definida da seguinte forma:

$$D^+(\bar{v}(x, d)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x + hd) - \bar{v}(x)}{h}. \quad (\text{B.3})$$

O Teorema de Danskin (LASDON, 2002), enunciado a seguir, apresenta uma forma simples de calcular derivadas direcionais como a definida em (B.3).

Teorema 9 *Para uma função $\bar{v}(x)$ definida em (B.1), com o conjunto $Z(x)$ dado por (B.2), a derivada direcional de $\bar{v}(x)$ existe em qualquer direção d para qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$, e é dada por*

$$D^+(\bar{v}(x, d)) = \min_{i \in Z(x)} \nabla f(x, i)^T d, \quad (\text{B.4})$$

sendo que $\nabla f(x, i)^T = [\partial f(x, i) / \partial x_1 \quad \partial f(x, i) / \partial x_2 \quad \dots \quad \partial f(x, i) / \partial x_n]$.

A prova deste teorema pode ser encontrada em detalhes em (LASDON, 2002). Nesta tese, utilizamos este teorema no Capítulo 5 para o cálculo de derivadas em relação ao tempo de

funções de Lyapunov associadas a sistemas lineares com comutação. Entretanto, como exemplo, vamos considerar um caso mais simples, que trata da determinação da derivada temporal da função (B.1), com $f(x, i) = x^T P_i x$, sendo que x é uma trajetória genérica do sistema linear $\dot{x} = Ax$, para todo $t \geq 0$. Para $h \rightarrow 0^+$, temos $x(t+h) = x(t) + h\dot{x}(t) = x(t) + hAx(t)$ e portanto (DEAECTO, 2007),

$$D^+(\bar{v}(x, Ax)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x + hAx) - \bar{v}(x)}{h}. \quad (\text{B.5})$$

Considerando $Z(x)$ definido em (B.2) e aplicando o Teorema de Danskin, tem-se

$$\begin{aligned} D^+(\bar{v}(x, Ax)) &= \min_{i \in Z(x)} \nabla f(x, i)^T Ax \\ &= \min_{i \in Z(x)} x^T (A^T P_i + P_i A)x. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Logo, a equação (B.6) representa a derivada direcional à direita de $\bar{v}(x)$, sobre uma trajetória qualquer do sistema linear $\dot{x} = Ax$ (DEAECTO, 2007).

ANEXO A – Participação em Trabalhos

Neste anexo é apresentado uma relação dos trabalhos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa em controle da UNESP de Ilha Solteira, que contaram com a participação do autor durante o doutorado, como co-autor nestes trabalhos.

A.1 Artigos em Periódicos Internacionais

- Variable Structure Control Design of Switched Systems with an Application to a DC-DC Power Converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2009, v.56 (9), p.3505-3513. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção e Márcio R. Covacic.
- On Complementary Root Locus of Biproper Transfer Functions. *Mathematical Problems in Engineering*. Artigo Aceito. Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção, Rodrigo Cardim, Neusa A. P. da Silva e Erica R. M. D. Machado.
- Robust State-Derivative Feedback LMI-Based Designs for Linear Descriptor Systems. *Mathematical Problems in Engineering*. Artigo Aceito. Flávio A. Faria, Edvaldo Assunção, Marcelo C. M. Teixeira e Rodrigo Cardim.
- Robust State-Derivative Pole Placement LMI-Based Designs for Linear Systems. *International Journal of Control*. 2009, v.82, p.1-12. Flávio A. Faria, Edvaldo Assunção, Marcelo C. M. Teixeira, Rodrigo Cardim e Neusa A. P. da Silva.
- Robust State-Derivative Feedback LMI-Based Designs for Multivariable Linear Systems. *International Journal of Control*. 2007, v.80, p.1260-1270. Edvaldo Assunção, Marcelo C. M. Teixeira, Flávio A. Faria, Neusa A. P. da Silva e Rodrigo Cardim.
- Hardware Implementation of an Analog Neural Nonderivative Optimizer. *Lecture Notes in Computer Science*. 2006, v.4234, p.1131-1140. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção, Nobuo Oki, Aparecido A. de Carvalho e Márcio R. Covacic.

A.2 Capítulo de Livro

- Control Designs for Linear Systems Using State-Derivative Feedback. *System, Structure and Control*. 1 ed. : In-Teh, 2008, v.1, p. 1-28. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção e Flávio A. Faria.

A.3 Artigos em Congressos Internacionais

- LMI-Based Digital Redesign of Linear Time-Invariant Systems with State-Derivative Feedback. *3rd IEEE Multi-conference on Systems and Control*. IEEE-MSC2009, São Petersburgo - Rússia, 2009, p.745-749. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Flávio A. Faria e Edvaldo Assunção.
- Aplicações de Controle e Atenuação de Falhas no Módulo Helicóptero 3D da Quanser. *International Conference on Engineering and Computer Education*. ICECE2009, Buenos Aires - Argentina, 2009, p.630-634. José P. F. Garcia, Rafael K. B. Manea, Rodrigo Cardim e Marcelo C. M. Teixeira.
- Variable Structure Control of Switched Systems Based on Lyapunov-Metzler-SPR Systems. *10th International Workshop on Variable Structure Systems*. IEEE-VSS2008, Antalya - Turquia, 2008, p.18-23. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção e Márcio R. Covacic.
- Comparative Study of LMI-Based Output Feedback SPR Synthesis for Plants with Different Numbers of Inputs and Outputs. *10th International Workshop on Variable Structure Systems*. IEEE-VSS2008, Antalya - Turquia, 2008, p.130-135. Márcio R. Covacic, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção e Rodrigo Cardim.
- Design of State-Derivative Feedback Controllers using a State Feedback Control Design. *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*. IFAC-SSSC2007, Foz do Iguaçu - PR, 2007, artigo 135 - 6 páginas. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção e Márcio R. Covacic.
- Tracking Methodology with Zeros Variation and Disturbance Rejection Applied to Uncertain Systems. *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*. IFAC-SSSC2007, Foz do Iguaçu - PR, 2007, artigo 146 - 6 páginas. Edvaldo Assunção, Cristiano Q. Andrea, Marcelo C. M. Teixeira e Rodrigo Cardim.

A.4 Artigos em Congressos Nacionais - (Completo)

- Projeto da Realimentação Derivativa Discreta no Tempo Utilizando o Projeto com Realimentação Não-Derivativa Contínua no Tempo. *IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. SBAI2009, Brasília - DF, 2009, artigo 55652 - 6 páginas. Marcelo C. M. Teixeira, Rodrigo Cardim, Flávio A. Faria, Edvaldo Assunção e Silvio R. Castelão.
- Projeto de Controladores Fuzzy Usando Realimentação da Derivada dos Estados. *IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. SBAI2009, Brasília - DF, 2009, artigo 54485 - 6 páginas. Edvaldo Assunção, Flávio A. Faria, Marcelo C. M. Teixeira e Rodrigo Cardim.
- Um Método Baseado em LMI para Obter o Ganho da Realimentação Derivativa a Partir da Realimentação de Estados. *8th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*. DINCON2009, Bauru - SP, 2009. Flávio A. Faria, Rodrigo Cardim, Edvaldo Assunção e Marcelo C. M. Teixeira.
- Controle com Estrutura Variável e Sistemas Chaveados Estritamente Reais Positivos. *XVII Congresso Brasileiro de Automática*. CBA2008, Juiz de Fora - MG, 2008, paper 41410 - 6 páginas. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção e Márcio R. Covacic.
- Síntese de Sistemas ERP com Compensadores Dinâmicos. *XVII Congresso Brasileiro de Automática*. CBA2008, Juiz de Fora - MG, 2008, paper 41452 - 6 páginas. Márcio R. Covacic, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção e Rodrigo Cardim.
- Controle Não-Linear Fuzzy Takagi-Sugeno do Movimento de Paraplégicos Utilizando Acelerômetros. *21 Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica*. CBEB2008, Salvador - BA, 2008, p.1254-1258. Ruberlei Gaino, Marcelo C. M. Teixeira, Rodrigo Cardim, Aparecido A. de Carvalho, Edvaldo Assunção e Marcelo A. A. Sanches.
- Controle de um Levitador Magnético Utilizando Modelos Fuzzy e Derivada de Estados da Planta. *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. SBAI2007, Florianópolis - SC, 2007, artigo 30693 - 6 páginas. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção, Flávio A. Faria e Márcio R. Covacic.
- Controle Ótimo \mathcal{H}_∞ de Sistemas Não-lineares com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. SBAI2007, Florianópolis - SC, 2007, artigo 30044 - 6 páginas. Edvaldo Assunção, Cristiano Q. Andrea, Marcelo C. M. Teixeira, João O. P. Pinto e Rodrigo Cardim.

- Realimentação da Derivada dos Estados em Sistemas Fuzzy Takagi Sugeno. *VIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. SBAI2007, Florianópolis - SC, 2007, artigo 29542 - 6 páginas. Edvaldo Assunção, Flávio A. Faria, Marcelo C. M. Teixeira e Rodrigo Cardim.
- Projeto de Controle de Sistemas Mecânicos Utilizando a Realimentação da Derivada de Estados. *6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*. DINCON2007, São José do Rio Preto - SP, 2007, p.1443-1448. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção e Márcio R. Covacic.
- Realimentação da Derivada de Estados a Partir do Projeto com Realimentação de Estados. *XVI Congresso Brasileiro de Automática*. CBA2006, Salvador - BA, 2006, p.726-731. Marcelo C. M. Teixeira, Edvaldo Assunção, Rodrigo Cardim e Márcio R. Covacic.
- Utilização de um Otimizador Analógico Não-Derivativo para a Correção do Fator de Potência. *II Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications*. DINCON2003, São José dos Campos - SP, 2003, p.1474-1483. Rodrigo Cardim, Marcelo C. M. Teixeira e Edvaldo Assunção.

A.5 Artigo em Congresso Nacional - (Resumo Expandido)

- Identificação de Funções de Transferência Estáveis Utilizando como Entrada um Degrau. *I Simpósio Regional de Matemática e suas Aplicações de Ilha Solteira*. I SRMAIS, Ilha Solteira - SP, 2007, p.40-43. Dárcio dos Santos Silva, Marcelo C. M. Teixeira, Francisco Villareal, Edvaldo Assunção, Rodrigo Cardim e Ruberlei Gaino.

A.6 Artigo em Congresso Nacional - (Resumo)

- Implementação de um Otimizador Analógico Não-Derivativo no Software PSpice. *XVI Congresso de Iniciação Científica da UNESP*. Ilha Solteira - SP, 2004. Rodrigo Cardim e Marcelo C. M. Teixeira.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)