Universidade
Estadual de Londrina

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sistema Termoelástico em Domínio Não Cilíndrico com Condições de Fronteira Mistas

Michelle Andrade Klaiber

LONDRINA - PR

2009

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sistema Termoelástico em Domínio Não Cilíndrico com Condições de Fronteira Mistas

Michelle Andrade Klaiber

Dissertação de mestrado orientada pela Professora Doutora Luci Harue Fatori e apresentada à Universidade Estadual de Londrina, como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional - PGMAC.

Londrina - PR
Março - 2009

Aos meus pais:
Paulo e Lucinei.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, que me deu forças para alcançar essa conquista e colocou em meu caminho pessoas muito especiais que me ajudaram a vencer todos os obstáculos.

Agradeço em especial à minha família que com muito amor esteve ao meu lado me dando apoio e força e ao meu namorado Daniel, que foi meu ombro amigo e meu companheiro em todos os momentos. Agradeço também à minha orientadora, Profª Drª Luci Harue Fatori, por sua excelente orientação, paciência e dedicação, possibilitando a realização deste trabalho; ao Prof. Dr. Robinson Samuel Vieira Hoto, coordenador do mestrado, que sempre esteve presente e atento às nossas necessidades; e ao Prof. Dr. José Roberto Nogueira, que durante minha graduação foi como um segundo pai, me incentivando a continuar os estudos.

Agradeço aos demais professores do mestrado e aos secretários pela colaboração, agradeço aos amigos de turma e à todos os outros amigos que torceram pelo nosso sucesso, e à amiga Suellen que desde a graduação esteve junto comigo nesta batalha, foi minha companheira de apartamento e de estudos.

Resumo

Neste trabalho mostraremos a existência e unicidade de solução de um sistema termoelástico em domínio não cilíndrico com condições de fronteira mistas bem como provaremos a estabilização da energia total do sistema com taxa de decaimento do tipo exponencial. Para a obtenção da existência de solução utilizaremos o Método de Galerkin, enquanto que o decaimento da energia será obtido através da construção de um funcional de Liapunov com derivada negativa associada à energia do sistema.

Abstract

In this study we will show the existence and uniqueness of solution of a thermoelastic system in a noncylindrical domain with mix boundary conditions as well we will prove the total energy stabilization of the system with decay rate of exponential type. To obtain the existence of a solution we will use the Galerkin method, while the energy decay will be obtained by the build of a Liapunov's functional with negative derivative associated with energy of the system.

Conteúdo

Índice de Notações

$\hat{Q}$	domínio não cilíndrico
Q	domínio cilíndrico
$\hat{\Sigma}$	fronteira lateral em $\hat{Q}$
Σ	fronteira lateral em Q
spp	suporte (fecho do conjunto $\{x \in \Omega \| u(x) \neq 0\}$)
$L^p(\Omega)$	espaço das funções u mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$ tais que $\|u\|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω
$\\|.\\|_p$	norma em $L^p(\Omega)$
L^∞	espaço das funções essencialmente limitadas em Ω
$\\|.\\|_\infty$	norma em $L^\infty(\Omega)$
$supess\ \|u(x)\|$	norma em $L^\infty(\Omega)$
$(.,.)$	produto escalar em $L^2(\Omega)$
$\|.\|$	norma em $L^2(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espaço de Hilbert
$H_0^m(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$
$((.,.))$	produto escalar em $H_0^1(\Omega)$
$\\|.\\|$	norma em $H_0^1(\Omega)$
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções infinitamente diferenciáveis em Ω
$\mathcal{D}(\Omega)$	espaço das funções testes em Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espaço das distribuições vetoriais sobre Ω
$L^p(0,T;H)$	espaço das funções u mensuráveis e que $\\|u(t)\\|_H \in L^p(0,T)$
$\rightarrow$	convergência forte
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	convergência fraca estrela

$\hookrightarrow$	imersão contínua
$\overset{c}{\hookrightarrow}$	imersão compacta
C_p	constante de Poincaré
$\int_\Omega$	integral em Ω
$[w_1, \ldots, w_m]$	subespaço gerado por $w_1, \ldots, w_m$

Introdução

O sistema termoelástico modela vibrações de um corpo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ formado por um material não homogêneo sujeito a efeitos térmicos, sendo deduzido através da lei do movimento de Newton, do princípio de conservação de massa e das leis da termodinâmica. Consideremos as seguintes equações diferenciais que descrevem o movimento de um corpo termoelástico em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \rho x_{tt} - div\tilde{S} = \rho b \\ \rho T \eta_t + divq = \rho r \end{cases} \tag{1}$$

onde ρ é a densidade de massa, η é a densidade específica de entropia, $r = r(x,t)$ é a densidade de fornecimento de calor por fontes externas, $b = b(x,t)$ é a densidade de força do corpo, $q = q(x,t)$ é o fluxo de energia, T é a temperatura absoluta e $\tilde{S}$ é o tensor de tensão. Note que o movimento do corpo termoelástico é dado por uma função $p : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, que a cada vetor posição $X \in \Omega$ associa o vetor posição $x \in \mathbb{R}^3$ no instante t.

Considerando a energia livre de Helmholtz

$$\psi = \varepsilon - T\eta \tag{2}$$

e as seguintes relações, que seguem da Desigualdade de Clausius-Duhem

$$\begin{aligned} &\psi = \psi(F,T), \quad \eta = \eta(F,T) = -\frac{\partial \psi}{\partial T}(F,T), \quad \tilde{S} = \tilde{S}(F,T) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial F}(F,T) \\ &q(F,T,\nabla T) \cdot \nabla T \leq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde as hipótes constitutivas em termoelasticidade afirmam que $\tilde{S}$, q, ψ e η são funções de F, T e ∇T em x; poderemos modelar o problema termoelástico no caso unidimensional onde $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$.

Para isso tomaremos a função $p(t, X) = x$, que a cada vetor posição $X \in \Omega$ associa o vetor posição $x \in \mathbb{R}$ no instante t. Seja $T = T(t, X)$ a temperatura em que x está fixado. Em termos de deslocamento, temos:

$$u(t,x) = p(t,x) - x, \quad \theta(t,x) = T(t,x) - \tau_0$$

onde $x = x_1$, τ_0 é a temperatura de referência constante.
Assim, considerando o meio homogêneo ($\rho \equiv 1$), para $b = 0$ e $r = 0$, obtemos de (1) que

$$\begin{aligned} &u_{tt} - [S(u_x, \theta)]_x = 0 \\ &(\theta + \tau_0)[N(u_x, \theta)]_t - [Q(u_x, \theta, \theta_x)]_x = 0 \end{aligned}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned} &S(u_x, \theta) = \tilde{S}(u_x + 1, \theta + \tau_0), \quad N(u_x, \tau) = \eta(u_x + 1, \theta + \eta_0) \\ &Q(u_x, \theta, \theta_x) = -q(u_x + 1, \theta + \tau_0, \theta_x). \end{aligned} \tag{4}$$

Logo de (2), (3) e (4), seguem as relações

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N}{\partial u_x}(u_x, \theta) = -\frac{\partial S}{\partial \theta}(u_x, \theta), \quad \frac{\partial Q}{\partial u_x}(u_x, \theta, 0) = \frac{\partial Q}{\partial \theta}(u_x, \theta, 0) \\ &\frac{\partial Q}{\partial \theta_x}(u_x, \theta, 0) \geq 0, \quad \forall (u_x, \theta). \end{aligned}$$

É comum supor que $\tilde{S}$ e η sejam monotonamente crescentes em relação a u_x e θ, respectivamente, ou seja,

$$\frac{\partial S}{\partial u_x}(u_x, \theta) \geq 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \theta}(u_x, \theta) \geq 0, \quad \forall (u_x, \theta).$$

Portanto, as equações do sistema termoelástico não linear unidimensional são dadas por

$$\begin{aligned} u_{tt} - [S(u_x, \theta)]_x &= 0 \\ (\theta + \tau_0)[N(u_x, \theta)]_t - [Q(u_x, \theta, \theta_x)]_x &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

onde S e N satisfazem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N}{\partial u_x}(0,0) = -\frac{\partial S}{\partial \theta}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial S}{\partial u_x}(0,0) > 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \theta}(0,0) > 0 \\ &\frac{\partial Q}{\partial u_x}(0,0,0) = \frac{\partial Q}{\partial \theta}(0,0,0) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta_x}(0,0) > 0. \end{aligned}$$

e as condições iniciais e de fronteira são

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0.$$

O caso unidimensional equivale ao sistema termoelástico linear que modela vibrações de uma barra muito fina, homogênea, constituída de material sujeito a variações de temperatura.

Para obter o caso unidimensional, note que o sistema (5) é equivalente à

$$\begin{aligned} u_{tt} - [S(u_x, \theta)]_x &= 0 \\ [N(u_x, \theta)]_t - [\tilde{Q}(u_x, \theta, \theta_x)]_x &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

onde $[\tilde{Q}(u_x, \theta, \theta_x)]_x = \frac{1}{(\theta+\tau_0)}[Q(u_x, \theta, \theta_x)]_x$.

Tomando

$$S(u_x, \theta) = u_x - \alpha\theta, \quad N(u_x, \theta) = \beta u_x + \theta \ \text{ e } \ \tilde{Q}(u_x, \theta, \theta_x) = k\theta_x$$

em (6) obtemos o problema de valor inicial associado a um sistema termoelástico linear unidimensional com condições de Dirichlet, isto é, com condições de fronteira nulas que é dado por

$$\begin{array}{lll} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0, & 0 < x < L, & 0 < t < T \\ \theta_t - k\theta_{xx} + \beta u_{xt} = 0, & 0 < x < L, & 0 < t < T \\ u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0, & & 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & & \\ \theta(x,0) = \theta_0(x), & 0 < x < L & \end{array} \tag{7}$$

onde $u = u(x,t)$ é o deslocamento, $\theta = \theta(x,t)$ é a temperatura da barra, α e β são números reais positivos que descrevem o acoplamento do sistema e k é um número real positivo que representa a condutibilidade térmica do material da barra.

Um trabalho pioneiro no que se refere ao estudo de sistemas termoelásticos é o artigo de C. Dafermos [4], onde estuda-se o clássico sistema termoelástico linear para materiais não homogêneos e anisotrópicos e prova-se que existe apenas uma solução de (7), a qual é diferenciável e assintoticamente estável quando $t \to \infty$. J. E. M. Rivera [13] mostrou que a energia do sistema (7) decai para zero exponencialmente quando

$t \to \infty$, resultado este que veio a complementar o trabalho de C. Dafermos [4] que não obteve taxas uniformes em seu trabalho. No artigo [2], C. S Caldas, J. Limaco e R. K. Barreto estudaram o problema (7) em domínio não cilíndrico com condições de Dirichlet na fronteira e concluíram que a energia associada ao problema decresce inversamente proporcional ao crescimento das funções que descrevem o domínio não cilíndrico, sem estabelecer uma taxa de decaimento.

Neste trabalho mostraremos a exitência e unicidade da solução bem como a taxa de decaimento exponencial da energia do sistema associado ao problema termoelástico linear em domínio não cilíndrico com condições de fronteira mistas, isto é, uma barra com extremidades fixas isolada termicamente em uma extremidade e com temperatura constante igual a 0°C na outra.

A existência de soluções do problema será estabelecida pelo método de Galerkin, e o decaimento exponencial será obtido através de técnicas multiplicativas, ou seja, através da construção de um funcional de Liapunov que é equivalente à energia do sistema cuja derivada é negativa e proporcional a si mesmo.

Este trabalho será desenvolvido em quatro capítulos, no primeiro capítulo apresentaremos os resultados preliminares e as notações utilizadas no desenvolvimento dos próximos capítulos; no segundo capítulo estudaremos a existência e unicidade de soluções do problema acima descrito; e no terceiro capítulo estabeleceremos o decaimento exponencial das soluções obtidas no segundo capítulo. No quarto e último capítulo faremos uma breve conclusão do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços funcionais

Nesta seção serão apresentados os espaços funcionais que serão necessários a este trabalho, as notações adotadas e algumas propriedades importantes.

Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, ao espaço de Banach das funções u mensuráveis definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e} \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$, o conjunto das funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω, munido da norma

$$\|u\|_\infty = supess\ |u(x)| = inf \quad \{C \in \mathbb{R}^+ / med\{x \in \Omega / |u(x)| > C\} = 0\}.$$

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno denotamos por

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e a norma por

$$|u|^2 = (u, u).$$

Dados $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, define-se

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Denotaremos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

o operador derivação de ordem $|\alpha|$. Se $\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$, define-se $D^0 u = u$, o operador identidade.

Definição 1.1 *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Denomina-se suporte de u em Ω o fecho do conjunto $\{x \in \Omega|\ \ u(x) \neq 0\}$ e representa-se por $spp(u)$, ou seja*

$$spp(u) = \overline{\{x \in \Omega|\ \ u(x) \neq 0\}}.$$

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes.

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço topológico $(C_0^\infty(\Omega), \mathcal{D})$, onde $\mathcal{D}$ representa a topologia do limite indutivo. Isto é, muniremos $\mathcal{D}(\Omega)$ da seguinte noção de convergência

$$u_\nu \longrightarrow u \ \text{ em } \ \mathcal{D}(\Omega)$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

(i) $spp(u_\nu) \subset K$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ e $spp(u) \subset K$,

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha u_\nu \longrightarrow D^\alpha u$ uniformemente em K.

O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ denomina-se espaço das funções testes. Representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, o espaço das distribuições vetoriais sobre Ω, isto é, o espaço vetorial formado por todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathbb{R}$ (no sentido da convergência de $\mathcal{D}(\Omega)$).

Denotaremos por $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições sobre Ω.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de todas as funções mensuráveis u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq m$, tem-se $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Ou ainda,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

O espaço $(W^{m,p}(\Omega), \| \cdot \|_{m,p})$ é um espaço de Banach, denominado espaço de Sobolev. Quando $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e denotado por

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Em particular, denotamos

$$\overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{H^m(\Omega)} = H_0^m(\Omega)$$

o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

Denotaremos por $((.,.))$ e $\|.\|$ o produto interno e a norma em $H_0^m(\Omega)$.

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será denotado por $H^{-m}(\Omega)$.

Dado H um espaço de Banach, se $T > 0$ é um número real e $1 \leq p < \infty$, representa-se por $L^p(0, T; H)$ o espaço de Banach das funções $u : (0, T) \longrightarrow H$ mensuráveis e que $\|u(t)\|_H \in L^p(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;H)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Se $1 < p < \infty$ e H é reflexivo, demonstra-se que $L^p(0, T; H)$ também é reflexivo.

Obtem-se que o dual topológico de $L^p(0, T; H)$ é o espaço $L^{p'}(0, T; H')$, sendo H' o dual topológico de H e p' o conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Se $p = 2$ e H é um espaço de Hilbert, então $L^2(0, T; H)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T ((u(t), v(t)))_H dt,$$

e norma

$$\|u\|_{L^2(0,T;H)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt.$$

Quando $p = \infty$ tem-se o espaço de Banach $L^{\infty}(0, T; H)$ formado pelas funções u : $(0, T) \longrightarrow H$ mensuráveis e essencialmente limitadas em H, isto é,

$$supess \|u(t)\|_H < \infty$$

munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} = supess\|u(t)\|_H.$$

Se H é um espaço de Banach separável e $1 \leq p \leq \infty$, então $L^p(0,T;H)$ também é um espaço de Banach separável.

Representamos por $\mathcal{D}'(0,T;H)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $\mathcal{D}'(0,T)$ com valores em H, ou seja, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em H.

Se $u \in L^p(0,T;H)$, $1 \leq p < \infty$, associa-se a u a distribuição $\tilde{u}$, definida por

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Demonstra-se que $\tilde{u}$ é univocamente definida por u.

Identificando-se u com $\tilde{u}$, podemos dizer que

$$L^p(0,T;H) \subset \mathcal{D}'(0,T;H).$$

Seja $u \in \mathcal{D}'(0,T;H)$, define-se a derivada de ordem m de u, no sentido das distribuições, como sendo a distribuição $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}$ definida por

$$\left\langle \frac{\partial^m u}{\partial t^m}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle u, \frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

1.2 Resultados auxiliares

Nesta seção, reuniremos os resultados básicos que serão utilizados para obtermos a existência e unicidade de solução para o problema proposto, cujas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Proposição 1.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $\langle .,. \rangle$, então dadas $u, v \in H$, tem-se*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

onde $\|.\|^2 = \langle .,. \rangle$.

Proposição 1.3 (Desigualdade de Young) *Sejam a e b positivos, se $1 < p, \ \ p' < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Proposição 1.4 (Desigualdade de Holder) *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Definição 1.5 *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínua todas as aplicações $f \in E'$.*

Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de E a qual converge para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E')$, dizemos que

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.6 *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então verifica-se:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \ \forall f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Seja E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos agora, $J : E \longrightarrow E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.7 *A topologia fraca $*$ também designada por $\sigma(E', E)$ é a topologia menos fina sobre E' que torna contínua todas as aplicações J_x.*

Quando $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de E', a qual converge para f em E' na topologia fraca $*$ $\sigma(E, E')$, denotaremos

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Proposição 1.8 *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E'. Então se verifica:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$ $\forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \rightharpoonup f$ em E'.

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.

Lema 1.9 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \text{em} \quad E.$$

Lema 1.10 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{em} \quad E'.$$

Definição 1.11 *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita localmente integrável se para todo compacto $K \subset \Omega$*

$$\int_K |f(x)| dx < \infty.$$

Em particular, toda função contínua é localmente integrável.

Lema 1.12 (Lema de Du Bois Raymond) *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ uma função localmente integrável. Então*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

se e somente se $f = 0$ quase sempre em Ω.

Observação 1.13 *Seja $X = \{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Entende-se por $u = 0$ quase sempre que o conjunto X tem interior vazio, dito de outra maneira, $u = 0$ quase sempre quer dizer que $u = 0$ a menos de um conjunto de medida nula.*

Definição 1.14 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, dizemos que X está imerso continuamente em Y, se $X \subset Y$ e existe uma constante positiva C tal que*

$$\|f\|_Y \leq C\|f\|_X, \quad \forall f \in X.$$

Definição 1.15 (Imersão Compacta) *Sejam X e Y espaços normados onde $X \subset Y$. Se para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em X, podemos extrair uma subsequência de (u_n) que converge forte em Y, dizemos que a imersão é compacta.*

Notação: Denota-se a imersão contínua por "$\hookrightarrow$" e a imersão compacta por "$\overset{c}{\hookrightarrow}$".

Proposição 1.16 *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $p > n$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que,*

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{1,p}$$

ou seja, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.17 (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}), \text{ se } m > \frac{n}{2} + k.$$

Teorema 1.18 (Desigualdade de Poincaré) *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante C_p (dependendo da medida de Ω e de p) tal que*

$$\|u\|_{1,p} \leq C_p\|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Observação 1.19 *A desigualdade de Poincaré também é válida se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ for um aberto limitado somente em uma direção (ver [14], p. 122).*

Como consequência da desigualdade de Poincaré, a expressão $\|\nabla u\|_p$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a norma $\|u\|_{1,p}$ ou seja,

$$c_1\|\nabla u\|_p \leq \|u\|_{1,p} \leq c_2\|\nabla u\|_p$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas. Em particular, em $H_0^1(\Omega)$ a expressão

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

define um produto interno que induz a norma $\|\nabla u\|_2$ equivalente a norma de $\|u\|_{H^1}$.
A seguir enunciaremos mais três resultados, com suas respectivas referências, que serão essenciais no próximo capítulo.

Lema 1.20 (Lema de Gronwall) *Sejam $\varphi \in L^\infty(0,T)$ e $\beta \in L^1(0,T)$ tais que $\beta > 0$, $\varphi \geq 0$ e $K \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq K + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

então tem-se

$$\varphi(t) \leq K e^{\int_0^t \beta(s)\, ds}, \quad \forall t \in (0,T).$$

Demonstração: Ver [5], pg. 624.

Lema 1.21 (Lema de Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach tais que*

$$B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$$

onde B_0, B_1 são reflexivos, e definamos

$$W = \Big\{v; \quad v \in L^{p_0}(0,T;B_0), \quad v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1)\Big\},$$

onde $1 < p_0, \quad p_1 < +\infty$ e $T < +\infty$.
Então W munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

é um espaço de Banach e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [10], pg. 58.

Para obtermos a solução para o problema aproximado, a qual será utilizada no capítulo seguinte para resolver o problema em questão, necessitaremos do resultado a seguir.

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (t, x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Diz-se que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Caratheódory sobre Ω se:

(i) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t, x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$ integrável tal que

$$|f(t, x)|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \quad \forall (t, x) \in K.$$

Teorema 1.22 (Teorema de Caratheódory) *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Caratheódory sobre Ω. Então existe uma solução $x(t)$ de* (1.1) *sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$.*

Demonstração: Ver [3], pg. 43.

1.3 Lema de Lax-Milgram

A seguir será apresentado o Lema de Lax-Milgram, essencial na obtenção do problema aproximado, isto é, na obtenção da projeção do problema em estudo, em um espaço de dimensão finita. Para maiores detalhes, bem como as demonstrações dos resultados aqui apresentados, remetemos o leitor ao texto de Milla Miranda [12].

Teorema 1.23 (Lema de Lax-Milgram) *Seja V um espaço de Hilbert com norma $\|.\|_V$ e denotemos por $a(.,.)$ uma aplicação bilinear simétrica satisfazendo:*

$$a(v,v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2, \qquad a(v,w) \leq \alpha_1 \|v\|_V \|w\|_V$$

ou seja, $a(.,.)$ é contínua e coerciva.
Finalmente, seja $f \in V'$. Então existe uma única solução $u \in V$ do problema

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in V.$$

Demonstração: Ver [12].

Exemplo 1.24 *Seja $\lambda \in \left(0, \frac{1}{C_p}\right)$ e $f = 0$. Mostraremos que existe uma única solução para a equação*

$$((u,v)) - \lambda(u,v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(-1,1).$$

Neste caso tomaremos $V = H_0^1(-1,1)$ e definiremos a bilinear $a(.,.)$ da seguinte forma

$$a(u,v) = ((u,v)) - \lambda(u,v).$$

Verificaremos que $a(.,.)$ é contínua, simétrica e coerciva em $H_0^1(-1,1)$. De fato, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \Big| \int_{-1}^{1} (u_x v_x - \lambda uv)\, dy \Big| \leq \int_{-1}^{1} |u_x v_x| + \lambda |uv|\, dy \\ &\leq \int_{-1}^{1} |u_x v_x| + \lambda C_p |u_x v_x|\, dy = (1 + \lambda C_p) \int_{-1}^{1} |u_x v_x| dy \\ &= C\|uv\| \leq C\|u\|\|v\|. \end{aligned}$$

Logo, $a(.,.)$ é contínua em $H_0^1(-1,1)$.
A simetria é obtida pela própria definição. E por fim, temos

$$\begin{aligned} a(u,u) &= ((u,u)) - \lambda(u,u) = \|u\|^2 - \lambda |u|^2 \geq \|u\|^2 - \lambda C_p \|u\|^2 \\ &= (1 - \lambda C_p)\|u\|^2 = \tilde{C}\|u\|^2. \end{aligned}$$

ou seja, $a(.,.)$ *é coerciva em* $H_0^1(-1,1)$.

Portanto, usando o Lema de Lax-Milgram concluímos que para toda $f \in V'$ *existe uma única* $u \in V$ *tal que*

$$a(u,v) = f(v)$$

isto é,

$$((u,v)) - \lambda(u,v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Tomando $v \in C_0^\infty(-1,1)$, *concluímos que*

$$\int_{-1}^{1} (-u_{xx} - \lambda u) v \, dy = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty.$$

Portanto, no sentido das distribuições temos que

$$-u_{xx} - \lambda u = 0.$$

Capítulo 2

Existência e Unicidade

Utilizando o método de Faedo-Galerkin, mostraremos neste capítulo a existência e unicidade de soluções do problema termoelástico unidimensional em domínio não cilíndrico. Para isso utilizaremos um difeomorfismo com o objetivo de transformar o domínio não cilíndrico em um domínio cilíndrico e assim obtermos a solução do problema.
Consideremos uma função real $K : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$. O *domínio não cilíndrico* $\hat{Q}$ em $\mathbb{R}^2$ será definido por

$$\hat{Q} = \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \quad -K(t) \leq x \leq K(t), \quad t \in]0,T[\Big\}$$

com fronteira lateral de $\hat{Q}$ dada por

$$\hat{\Sigma} = \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \quad x = K(t) \quad ou \quad x = -K(t), \quad t \in]0,T[\Big\}.$$

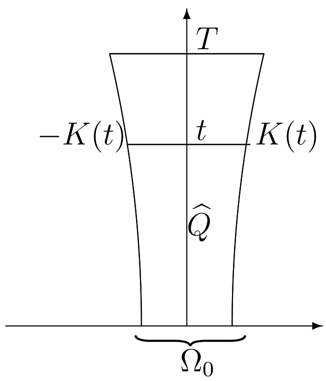

Figura 2.1: Domínio Não Cilíndrico

Em $\hat{Q}$ consideremos o problema

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0 \qquad \text{em} \quad \hat{Q} \tag{2.1}$$

$$\theta_t - k\theta_{xx} + \beta u_{xt} = 0 \qquad \text{em} \quad \hat{Q} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} & u(-K(t),t) = u(K(t),t) = 0 \\ & \theta_x(-K(t),t) = \theta(K(t),t) = 0 \qquad \text{para} \quad 0 < t < T \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} & u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \\ & \theta(x,0) = \theta_0(x) \qquad \text{em} \quad -K(0) < x < K(0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde α, β e k são constantes reais positivas.

Para estabelecer a existência do problema (2.1)-(2.4) assumiremos que

(H1) $K \in C^2([0,T],\mathbb{R}^+)$ e que

$$K_0 = \min_{0 \le t \le T} K(t) > 0,$$

(H2) Existe $k_1 > 0$ tal que

$$1 - (K'(t)y)^2 > k_1,$$

(H3) $k > 0, \quad \alpha.\beta > 0.$

Considere $Q =]-1,1[\times]0,T[$ e a transformação $\tau : \hat{Q} \longrightarrow Q$, que para cada (x,t) em $\hat{Q}$, associa o ponto (y,t) onde $y = \frac{1}{K(t)}x$.

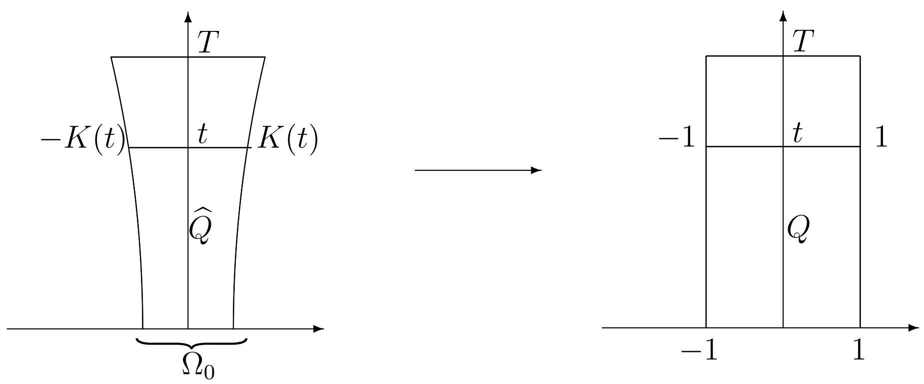

Figura 2.2: Mudança de Domínio

Note que $\tau : \hat{Q} \longrightarrow Q$ é um difeomorfismo, cuja inversa é dada por

$$\begin{aligned} \tau^{-1} : Q \quad &\longrightarrow \quad \hat{Q} \\ (y,t) \quad &\longmapsto \quad \tau^{-1}(y,t) = (K(t)y,t) = (x,t). \end{aligned}$$

Assim, tomando $v = u \circ \tau^{-1}$ temos

$$\begin{aligned} v(y,t) &= u \circ \tau^{-1}(y,t) \\ &= u(\tau^{-1}(y,t)) \\ &= u(K(t)y,t). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} v_y &= u_x(K(t)y,t)K(t) = u_x K \\ v_{yy} &= u_{xx}(K(t)y,t)K(t)K(t) = u_{xx}K^2 \\ v_t &= u_x(K(t)y,t)K'(t) + u_t(K(t)y,t) \\ v_{tt} &= [u_{xx}(K(t)y,t)K'(t)y + u_{xt}(K(t)y,t)]K'(t)y + u_x(K(t)y,t)K''(t)y + \\ &+ u_{tx}(K(t)y,t)K'(t)y + u_{tt}(K(t)y,t) \\ &= K'(t)y[u_{xx}K'(t)y + u_{xt}] + u_x K''(t)y + u_{tx}K'(t)y + u_{tt} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{K}v_y \\ u_{xx} = \frac{1}{K^2}v_{yy} \\ u_t = v_t - K'u_x = v_t - \frac{K'}{K}v_y \\ u_{tt} = v_{tt} - u_x K''y - u_{tx}K'y - K'y[u_{xx}K'y + u_{xt}] \\ \quad\;\; = v_{tt} - \frac{K''}{K}yv_y - \frac{(K'y)^2}{K^2}v_{yy} - 2K'yu_{xt}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Analogamente, tomando $\phi = \theta \circ \tau^{-1}$ então

$$\begin{aligned} \phi_y &= \theta_x(K(t)y,t)K(t) = \theta_x K \\ \phi_{yy} &= \theta_{xx}(K(t)y,t)K(t)^2 = \theta_{xx}K^2 \\ \phi_t &= \theta_x(K(t)y,t)K'(t)y + \theta_t(K(t)y,t) = \theta_x K'y + \theta_t \\ \phi_{yt} &= [\theta_{xx}(K(t)y,t)K'(t) + \theta_{xt}(K(t)y,t)]K(t) + K'(t)\theta_x(K(t)y,t) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{\phi_y}{K} \\ \theta_{xx} = \frac{\phi_{yy}}{K^2} \\ \theta_t = \phi_t - \frac{k'y}{K}\phi_y \\ \theta_{xt} = [\phi_{yt} - K'K\theta_{xx} - K'\theta_x]\frac{1}{K} = \frac{\phi_{yt}}{K} - \frac{K'}{K^2}\phi_{yy} - \frac{K'}{K^2}\phi_y. \end{cases} \tag{2.6}$$

Assim, substituindo (2.5) em (2.1) obteremos

$$
\begin{aligned}
& v_{tt} - \frac{K''}{K} y v_y - \left(\frac{K'y}{K}\right)^2 v_{yy} - 2\frac{K'y}{K}\left[v_{ty} - \frac{K'y}{K} v_{yy} - \frac{K'}{K} v_y\right] - \frac{1}{K^2} v_{yy} + \frac{\alpha}{K}\phi_y \\
= \; & v_{tt} - \frac{K''}{K} y v_y - \left(\frac{K'y}{K}\right)^2 v_{yy} - 2\frac{K'y}{K} v_{ty} + 2\left(\frac{K'y}{K}\right)^2 v_{yy} + 2\frac{K'^2 y}{K} v_y - \frac{1}{K^2} v_{yy} + \frac{\alpha}{K}\phi_y \\
= \; & v_{tt} - \frac{K''}{K} y v_y - 2\frac{K'y}{K} v_{ty} + \left(\frac{K'y}{K}\right)^2 v_{yy} + 2\frac{K'^2 y}{K^2} v_y - \frac{1}{K^2} v_{yy} + \frac{\alpha}{K}\phi_y \\
= \; & v_{tt} - \left[\left(\frac{1}{K^2} - \left(\frac{K'y}{K}\right)^2\right) v_y\right]_y + \frac{\alpha}{K}\phi_y - 2\frac{K'y}{K} v_{yt} - \frac{K''y}{K} v_y \\
= \; & v_{tt} - [a_1(y,t) v_y]_y + a_2(y)\phi_y + a_3(y,t) v_{yt} + a_4(y,t) v_y = 0
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
a_1(y,t) &= \frac{1}{K(t)^2} - \left(\frac{K'(t)y}{K(t)}\right)^2, & a_2(t) &= \frac{\alpha}{K(t)}, \\
a_3(y,t) &= -2\frac{K'(t)y}{K(t)}, & a_4(y,t) &= -\frac{K''(t)y}{K(t)}.
\end{aligned}
$$

Substituindo (2.6) em (2.2) obteremos

$$
\begin{aligned}
& \phi_t - \frac{K'y}{K}\phi_y - \frac{k}{K^2}\phi_{yy} + \frac{\beta}{K}\left[v_{ty} - y\frac{K'}{K} v_{yy} - \frac{K'}{k} v_y\right] \\
= \; & \phi_t - \frac{k}{K^2}\phi_{yy} - \frac{K'y}{K}\phi_y + \frac{\beta}{K} v_{ty} - \beta\frac{K'}{K^2} y v_{yy} - \beta\frac{K'}{K^2} v_y \\
= \; & \phi_t - b_1(t)\phi_{yy} + b_2(t) v_{ty} + b_3(y,t)\phi_y + b_4(t) v_y + b_5(y,t) v_{yy} = 0
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
b_1(t) &= \frac{k}{K(t)^2}, & b_2(t) &= \frac{\beta}{K(t)}, \\
b_3(y,t) &= -\frac{K'(t)y}{K(t)}, & b_4(t) &= -\beta\frac{K'(t)}{K(t)^2}, \\
b_5(y,t) &= -\beta\frac{K'(t)}{K(t)^2} y.
\end{aligned}
$$

Portanto, o sistema (2.1)-(2.4) é transformado pelo difeomorfismo τ em

$$v_{tt} - [a_1(y,t) v_y]_y + a_2(y)\phi_y + a_3(y,t) v_{yt} + a_4(y,t) v_y = 0 \quad \text{em} \quad Q \tag{2.7}$$

$$\phi_t - b_1(t)\phi_{yy} + b_2(t) v_{ty} + b_3(y,t)\phi_y + b_4(t) v_y + b_5(y,t) v_{yy} = 0 \quad \text{em} \quad Q \tag{2.8}$$

$$v(-1,t) = v(1,t) = 0$$

$$\phi_x(-1,t) = 0 = \phi(1,t) \qquad \text{para} \quad 0 < t < T \tag{2.9}$$

$$v(y,0) = v_0(y), v_t(y,0) = v_1(y), \phi(y,0) = \phi_0(y) \qquad \text{em} \quad -1 < y < 1 \tag{2.10}$$

Denotaremos, usualmente, por $((.,.))$ e $\|.\|$ o produto escalar e a norma em $H_0^1(-1,1)$ e por $(.,.)$ e $|.|$ o produto escalar e a norma em $L^2(-1,1)$.

Definiremos o espaço

$$V = \{w \in H^1(-1,1) : w_y(-1) = w(1) = 0\}.$$

Observe que V é um espaço de Hilbert separável, pois V é fechado e é um subconjunto de H_0^1, que é um espaço de Hilbert separável. Assim, V possui uma base ortonormal enumerável (ver [9], p. 171).

O produto escalar e a norma em V serão induzidos por $H^1(-1,1)$, o qual denotaremos por $((.,.))_1$ e $\|.\|_1$ respectivamente.

Introduziremos as formas bilineares em $H_0^1(-1,1)$ e em V respectivamente:

$$a(t,v,w) = \int_{-1}^{1} a_1(y,t) v_y w_y dy \quad \text{e} \quad b(t,v,w) = \int_{-1}^{1} b_1(t) v_y w_y dy.$$

Note que $a(t,v,w)$ e $b(t,v,w)$ são formas contínuas, positivas e simétricas.

De fato, mostraremos a continuidade:

Das hipóteses (H1)-(H3) temos a continuidade de $a_1(y,t)$ e de $b_1(t)$. Logo existem constantes positivas c_a, C_a, c_b e C_b tais que

$$c_a \leq a_1(y,t) \leq C_a \quad \text{e} \quad c_b \leq b_1(t) \leq C_b \tag{2.11}$$

para todo $y \in]-1,1[$ e $t \in [0,t]$.

Assim

$$|a(t,v,w)| \leq \left| \int_{-1}^{1} a_1(y,t) v_y w_y dy \right| \leq \int_{-1}^{1} |a_1(y,t)||v_y w_y| dy \leq C_a |v_y||w_y| = C_a \|v\|\|w\|$$

donde se conclui a continuidade de $a(t,v,w)$. Analogamente, mostra-se a continuidade de $b(t,v,w)$.

Mostraremos agora a positividade:

De (2.11) temos

$$a(t,v,v) \;=\; \int_{-1}^{1} a_1(y,t) |v_y|^2 \, dy \geq c_a \|v\|^2 > 0$$

e

$$b(t,v,v) \;=\; \int_{-1}^{1} b_1(t) |v_y|^2 \, dy \geq c_b \|v\|_1^2 > 0.$$

E por fim, a simetria segue da própria definição.

Observe que $a(t,v,w)$ e $b(t,v,w)$ são coercivas em $H_0^1(-1,1)$, pois de (2.11) temos

$$a(t,v,v) \;=\; \int_{-1}^{1} a_1(y,t)|v_y|^2\,dy \geq c_a\|v\|^2$$

e

$$b(t,v,v) \;=\; \int_{-1}^{1} b_1(t)|v_y|^2\,dy \geq c_b\|v\|_1^2.$$

A idéia para mostrar a existência de soluções fracas para o problema (2.1)-(2.4) é estabelecer a existência de soluções fracas para o problema (2.7)-(2.10) utilizando o Método de Faedo-Galerkin e utilizar o difeomorfismo para estabelecer a existência de soluções fracas do problema original.

2.1 Existência de solução fraca

Inicialmente, definiremos o que se entende por solução fraca do problema (2.7)-(2.10), o que faremos motivados pelos cálculos formais a seguir.

Multiplicando a equação (2.7) por Φw e a equação (2.8) por Φz onde $\Phi \in \mathcal{D}(0,T)$, $w \in H_0^1(-1,1)$, $z \in V$, e integrando em Q obteremos

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} w \int_0^T v_{tt}\Phi dtdy - \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} [a_1 v_y]_y w dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} a_2\phi_y w dydt \\
&\quad + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} a_3 v_{ty} w dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} a_4 v_y w dydt = 0 \\
&\int_{-1}^{1} z \int_0^T \phi_t\Phi dtdy - \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_1\phi_{yy} z dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_2 v_{ty} z dydt \\
&\quad + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_3\phi_y z dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_4 v_y z dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_5 v_{yy} z dydt = 0.
\end{aligned}$$

Utilizando integração por partes teremos

$$\begin{aligned}
&-\int_{-1}^{1} w \int_0^T v_t\Phi_t dtdy + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} a_1 v_y w_y dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} a_2\phi_y w dydt \\
&\quad + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} a_3 v_{ty} w dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} a_4 v_y w dydt = 0 \\
&-\int_{-1}^{1} z \int_0^T \phi\Phi_t dtdy + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_1\phi_y z_y dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_2 v_{ty} z dydt \\
&\quad + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_3\phi_y z dydt + \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_4 v_y z dydt - \int_0^T \Phi \int_{-1}^{1} b_5 v_y z_y dydt = 0
\end{aligned}$$

ou seja

$$\int_0^T [-\Phi_t(v_t,w) + \Phi((a_1 v,w)) + \Phi(a_2\phi_y,w) + \Phi(a_3 v_{ty},w) + \Phi(a_4 v_y,w)]\, dt = 0$$
$$\int_0^T [-\Phi_t(\phi,z) + \Phi((b_1\phi,z)) + \Phi(b_2 v_{ty},z) + \Phi(b_3\phi_y,z) + \Phi(b_4 v_y,z) + \Phi(b_5 v_y,z_y)]\, dt = 0.$$

Utilizando a definição de derivada no sentido das distribuições nos primeiros termos obtemos

$$\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t}(v_t,w) + ((a_1 v,w)) + (a_2\phi_y,w) + (a_3 v_{ty},w) + (a_4 v_y,w)\right)\Phi dt = 0$$
$$\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t}(\phi,z) + ((b_1\phi,z)) + (b_2 v_{ty},z) + (b_3\phi_y,z) + (b_4 v_y,z) + (b_5 v_y,z_y)\right)\Phi dt = 0$$

para todo $w \in H_0^1(-1,1)$, $z \in V$ e $\Phi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Pelo Lema de Du Bois Raymond, obteremos a formulação fraca do problema (2.7)-(2.10)

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_t,w) + ((a_1 v,w)) + (a_2\phi_y,w) + (a_3 v_{ty},w) + (a_4 v_y,w) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi,z) + ((b_1\phi,z)) + (b_2 v_{ty},z) + (b_3\phi_y,z) + (b_4 v_y,z) - (b_5 v_y,z_y) = 0.$$

Definição 2.1 *Sejam $v,\phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ funções. Dizemos que o par $\{v,\phi\}$ é uma solução fraca do problema de valor inicial e fronteira (2.7)-(2.10) na classe*

$$v \in L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)) \quad e \quad \phi \in L^\infty(0,T;V)$$

quando $\{v,\phi\}$ satisfaz a formulação fraca do problema e as condições iniciais

$$v(y,0) = v_0(y), \quad v_t(y,0) = v_1(y) \quad e \quad \phi(y,0) = \phi_0 \quad para \quad -1 < y < 1.$$

Consideremos Ω_t e Ω_0 os intervalos $]-K(t),K(t)[$ e $]-K(0),K(0)[$, respectivamente, com $0 \le t \le T$.

O resultado quanto à Existência e Unicidade do problema (2.7)-(2.10) será estabelecido pelo seguinte teorema

Teorema 2.2 *Dados $v_0 \in H_0^1(-1,1) \cap H^2(-1,1), \phi_0 \in V \cap H^2(-1,1), v_1 \in H_0^1(-1,1)$, então existem*

$$v : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$$

únicas funções, satisfazendo:

(A) $v \in L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)\cap H^2(-1,1))$, $\quad v_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1))$, $\quad v_{tt} \in L^\infty(0,T,L^2(-1,1))$

(B) $\phi \in L^2(0,T;V\cap H^2(-1,1))$, $\quad \phi_t \in L^2(0,T;H^1(-1,1))$

das quais $\{v,\phi\}$ *é uma solução de (2.7)-(2.10) em* Q.

Demonstração: Seja $(w_j,z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ base de $H_0^1(-1,1)\times V$ onde $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é solução do problema espectral $((w_j,v)) = \lambda_j(w_j,v)$ para todo $v\in H_0^1(-1,1)$ e $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de V.

Denotaremos por $V_m = [w_1,\cdots,w_m]\times[z_1,\cdots,z_m]$ o subespaço de $H_0^1(-1,1)\times V$ gerado pelos m primeiros vetores w_j e z_j; podemos supor, sem perda de generalidade, que (w_j) e (z_j) são ortonormais em $L^2(-1,1)$.

Procuramos $v^m(t)\in[w_1,\cdots,w_m]$ *e* $\phi^m(t)\in[z_1,\cdots,z_m]$ soluções do problema:

$$(v_{tt}^m,w)+a(t,v^m,w)+(a_2\phi_y^m,w)+(a_3v_{ty}^m,w)+(a_4v_y^m,w)=0 \tag{2.12}$$

$$(\phi_t^m,z)+b(t,\phi^m,z)+(b_2v_{ty}^m,z)+(b_3\phi_y^m,z)+(2b_4v_y^m,z)-(b_5v_y^m,z_y)=0 \tag{2.13}$$

$$v^m(0)=v_0^m\to v_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(-1,1)\cap H^2(-1,1) \tag{2.14}$$

$$v_t^m(0)=v_1^m\to v_1 \quad \text{em} \quad H_0^1(-1,1) \tag{2.15}$$

$$\phi^m(0)=\phi_0^m\to\phi_0 \quad \text{em} \quad V\cap H^2(-1,1) \tag{2.16}$$

para todo $(w,z)\in V_m$.

Mostraremos agora que o sistema (2.12)-(2.16) possui solução única. Para isso reescreveremos (2.12)-(2.16) como um sistema de equações diferenciais ordinárias e utilizaremos o Teorema de Caratheódory.

Sejam $v^m(t)=\sum_{i=1}^m g_i^m(t)w_i$ *e* $\phi^m(t)=\sum_{i=1}^m h_i^m(t)z_i$ então de (2.12) e (2.13) e tomando $w=w_j$ e $z=z_j$ temos

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^m g_{i,tt}^m(t)(w_i,w_j)+a(t,\sum_{i=1}^m g_i^m(t)w_i,w_j)+(a_2(t)\sum_{i=1}^m h_i^m(t)z_{i,y},w_j)\\ &+(a_3(y,t)\sum_{i=1}^m g_{i,t}^m(t)w_{i,y},w_j)+(a_4(y,t)\sum_{i=1}^m g_i^m(t)w_{i,y},w_j)=0\end{aligned} \tag{2.17}$$

e

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} h_{i,t}^{m}(t)(z_i, z_j) + b(t, \sum_{i=1}^{m} h_i^m(t) z_i, z_j) + (b_2(t) \sum_{i=1}^{m} g_{i,t}^{m}(t) w_{i,y}, z_j) \\
&+(b_3(y,t) \sum_{i=1}^{m} h_i^m(t) z_{i,y}, z_j) + (2b_4(t) \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) w_{i,y}, z_j) \\
&-(b_5(y,t) \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) w_{i,y}, z_j) = 0. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Denotaremos por

$$
\begin{aligned}
G_j^m(t) &= (a_2(t)\phi_y^m, w_j) + (a_3(y,t) v_{ty}^m, w_j) + (a_4(y,t) v_y^m, w_j) \\
H_j^m(t) &= (b_2(t) v_{ty}^m, z_j) + (b_3(y,t)\phi_y^m, z_j) + (2b_4(t) v_y^m, z_j) - (b_5(y,t) v_y^m, z_{j,y})
\end{aligned}
$$

e usando que

$$
a\Big(t, \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) w_i, w_j\Big) = \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) a(t, w_i, w_j) \quad e \quad b\Big(t, \sum_{i=1}^{m} h_i^m(t) z_i, z_j\Big) = \sum_{i=1}^{m} h_i^m(t) b(t, z_i, z_j),
$$

escreveremos (2.17) e (2.18) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} g_{i,tt}^{m}(t)(w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) a(t, w_i, w_j) + G_i^m(t) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{m} h_{i,t}^{m}(t)(z_i, z_j) + \sum_{i=1}^{m} h_i^m(t) b(t, z_i, z_j) + H_i^m(t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Escrevendo

$$C = (c_{ij}) \quad onde \quad c_{ij} = (w_i, w_j)$$

$$D = (d_{ij}) \quad onde \quad d_{ij} = (z_i, z_j)$$

$$A(t) = A = (a_{ij}) \quad onde \quad a_{ij} = a(t, w_i, w_j)$$

$$B(t) = B = (b_{ij}) \quad onde \quad b_{ij} = b(t, z_i, z_j)$$

$$
X = \begin{bmatrix} g_1^m(t) \\ \vdots \\ g_m^m(t) \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} h_1^m(t) \\ \vdots \\ h_m^m(t) \end{bmatrix} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} g_1^m(0) \\ \vdots \\ g_m^m(0) \end{bmatrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} g_{1,t}^m(0) \\ \vdots \\ g_{m,t}^m(0) \end{bmatrix}
$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} h_1^m(0) \\ \vdots \\ h_m^m(0) \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} G_1^m(t) \\ \vdots \\ G_m^m(t) \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} H_1^m(t) \\ \vdots \\ H_m^m(t) \end{bmatrix}$$

obteremos o sistema

$$\begin{cases} CX'' + AX + G(X, X', Y) = 0 \\ DY' + BY + H(X, X', Y) = 0 \\ X(0) = X_0 \\ X'(0) = X_1 \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Como (w_j) e (z_j) são ortonormais em L^2 e fazendo $Z = \begin{bmatrix} X \\ X' \\ Y \end{bmatrix}$ reescreveremos (2.19)

$$Z' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ -AX - G(X, X', Y) \\ -BY - H(X, X', Y) \end{bmatrix}, \quad Z(0) = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

Considerando as projeções

$$P_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad P_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$Z \longmapsto P_1(Z) = X \qquad\qquad Z \longmapsto P_2(Z) = X'$$

$$e \;\; P_3 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$Z \longmapsto P_3(Z) = Y$$

reescrevemos o sistema anterior como

$$\begin{cases} Z' = F(t, Z) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases} \tag{2.20}$$

onde

$$\begin{aligned} F(t, Z) &= (F_1(t, Z), F_2(t, Z), F_3(t, Z)) \\ &= (X', -AX - G(X, X', Y), -BY - H(X, X', Y)) \\ &= (P_2(Z), -AP_1(Z) - G(P_1(Z), P_2(Z), P_3(Z)), -BP_3(Z) - H(P_1(Z), P_2(Z), P_3(Z)). \end{aligned}$$

Provaremos então que $F(t, Z)$ satisfaz as condições de Caratheódory, ou seja

(A) Mensurabilidade em t, para Z fixado:

Note que

$F_1(t,Z)$ é mensurável, pois $F_1(t,Z) = P_2(Z)$ =constante em t;

$F_2(t,Z)$ é mensurável, pois A é contínua, definida em $[0,T]$, logo é limitada; e G não depende de t;

$F_3(t,Z)$ é mensurável pois B é contínua, definida em $[0,T]$, logo é limitada; e H não depende de t.

Assim, F é mensurável.

(B) Continuidade em Z, para t fixado:

Note que

$F_1(t,Z)$ é contínua, pois $P_2(Z)$ é projeção, logo é contínua;

$F_2(t,Z)$ é contínua, pois A é contínua, $P_1(Z)$ é projeção, e também

$$G(Z) = G(X,X',Y) = a_2(t)Y + a_3(y,t)X' + a_4(y,t)X = a_2(t)P_3 + a_3(y,t)P_2 + a_4(y,t)P_1$$

onde a_2 é constante em Z e a_3, a_4 são funções contínuas logo, $G(Z)$ é contínua.

Analogamente, temos $F_3(Z,t)$ contínua, pois B, $b_3(y,t)$ e $b_5(y,t)$ são contínuas.

Portanto, F é contínua.

(C) Integrabilidade:

Consideremos $K = [0,T] \times B$ onde

$$Z_0 \in B = \{Z \in \mathbb{R}^{3m} : \|Z\| \leq \delta\}.$$

Então $proj_t K = (0,T)$ e, para todo $(t,Z) \in K$ temos

$$|F(t,Z)| \leq |P_3(Z)| + |a_1(y,t)P_1(Z) + a_2(t)P_3(Z) + a_3(y,t)P_2(Z) + a_4(y,t)P_1(Z)|$$
$$+ |b_1(y,t)P_3(Z) + b_2(t)P_2(Z) + b_3(y,t)P_3(Z) + 2b_4(t)P_1(Z) - b_5(y,t)P_1(Z)|$$

Usando que as normas das projeções são limitadas por uma constante e majorando todas estas constantes pela constante C obtemos

$$|F(t,Z)| \leq C(1 + |a_1(y,t)| + |a_2(t)| + |a_3(y,t)| + |a_4(y,t)| + |b_1(y,t)| + |b_2(t)| + |b_3(y,t)|$$
$$+ |2b_4(t)| + |b_5(y,t)|) = m_k(t)$$

onde $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ e b_5 são contínuas.

Logo $m_k(t)$ é contínua, e portanto integrável.

Portanto, pelo Teorema de Caratheódory o problema aproximado (2.12)-(2.16) possui solução. ■

Agora, por meio das estimativas a priori, estenderemos a solução a todo o intervalo $[0,T]$, obtendo subsequências (v^m) e (ϕ^m), que convergirão para a solução de (2.7)-(2.10).

2.2 Estimativas a priori

2.2.1 Primeira estimativa

Tomaremos $w = v_t^m$ em (2.12) e $z = \phi^m$ em (2.13), obtendo

$$\begin{aligned}
(v_t^m, v_{tt}^m) &+ a(t, v^m, v_t^m) + (a_2\phi_y^m, v_t^m) + (a_3 v_{ty}^m, v_t^m) + (a_4 v_y^m, v_t^m) = 0 \quad (2.21)\\
(\phi^m, \phi_t^m) &+ b(t, \phi^m, \phi^m) + (b_2 v_{ty}^m, \phi^m) + (b_3\phi_y^m, \phi^m) + (2b_4 v_y^m, \phi^m)\\
&- (b_5 v_y^m, \phi_y^m) = 0 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_t^m|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-1}^{1}|v_t^m|^2 dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2\, v_t^m v_{tt}^m\, dy = (v_t^m, v_{tt}^m) \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi^m|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-1}^{1}|\phi^m|^2 dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2\, \phi^m \phi_t^m\, dy = (\phi^m, \phi_t^m) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
a(t, v^m, v_t^m) &= \int_{-1}^{1} a_1(t,y) v_y^m v_{yt}^m dy = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} a_1(t,y)\frac{d}{dt}|v_y^m|^2 dy\right]\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-1}^{1} a_1(t,y)|v_y^m|^2 dy - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} a_1'(y,t)|v_y^m|^2 dy\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t, v^m, v^m) - \frac{1}{2}a'(t, v^m, v^m) \quad (2.25)
\end{aligned}$$

onde

$$a'(t, v, w) = \int_{-1}^{1} a_1'(y,t) v_y w_y dy.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(a_2\phi_y^m, v_t^m) &= \left(\frac{\alpha}{K}\phi_y^m, v_t^m\right) = \int_{-1}^{1}\frac{\alpha}{K}\phi_y^m v_t^m dy = \frac{\alpha}{K}\int_{-1}^{1}\phi_y^m v_t^m dy\\
&= \frac{\alpha}{K}\left[\phi^m v_t^m\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\phi^m v_{ty}^m dy\right] = -\frac{\alpha}{K}\int_{-1}^{1} v_{ty}^m \phi^m dy\\
&= -\frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{\beta}{K}\int_{-1}^{1} v_{ty}^m\phi^m dy\right] = -\frac{\alpha}{\beta}(b_2 v_{ty}^m, \phi^m) \quad (2.26)
\end{aligned}$$

pois $b_2(t) = \frac{\beta}{K(t)}$.

$$\begin{aligned}
(a_3 v_{ty}^m, v_t^m) &= \int_{-1}^{1} a_3 v_{ty}^m v_t^m dy = a_3 |v_t^m|^2\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial y}[a_3 v_t^m] v_t^m dy \\
&= a_3 |v_t^m|^2\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} a_{3,y} v_t^m v_t^m dy - \int_{-1}^{1} a_3 v_{ty}^m v_t^m dy \\
&= -\int_{-1}^{1} a_{3y} |v_t^m|^2 dy - \int_{-1}^{1} a_3 v_{ty}^m v_t^m dy \\
&= -\int_{-1}^{1} a_{3y} |v_t^m|^2 dy - (a_3 v_{ty}^m, v_t^m). \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Logo, multiplicando (2.21) por β/α, somando com (2.22) e usando (2.23)-(2.27) obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\alpha}\frac{d}{dt}\Big[|v_t^m|^2 + a(t, v^m, v^m) &+ \frac{\alpha}{\beta}|\phi^m|^2\Big] + b(t, \phi^m, \phi^m) \\
= \frac{\beta}{2\alpha} a'(t, v^m, v^m) &+ \frac{\beta}{2\alpha}\int_{-1}^{1} a_{3y} |v_t^m(t)|^2 dy - \frac{\beta}{\alpha}(a_4 v_y^m, v_t^m) \\
-(b_3 \phi_y^m, \phi^m) &- (2b_4 v_y^m, \phi^m) + (b_5 v_y^m, \phi_y^m)
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\alpha}\frac{d}{dt}\Big[|v_t^m|^2 &+ a(t, v^m, v^m) + \frac{\alpha}{\beta}|\phi^m|^2\Big] + b(t, \phi^m, \phi^m) \\
&\leq c[|v_t^m|^2 + \|v^m\|^2 + |\phi^m|^2] \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Integrando (2.28) e observando que $a(t, v, w)$ e $b(t, v, w)$ são formas coercivas, ou seja,

$$c_a \|v^m\|^2 \leq a(t, v^m, v^m) \quad \text{e} \quad c_b \|\phi^m\|_1^2 \leq b(t, \phi^m, \phi^m)$$

teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_1^m|^2 &+ c_a \|v^m\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\phi^m|^2\Big] + c_b \int_0^t \|\phi^m\|_1^2 dt \\
&\leq \frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_t^m|^2 + a(t, v^m, v^m) + \frac{\alpha}{\beta}|\phi^m|^2\Big] + \int_0^t b(\tilde{t}, \phi^m, \phi^m) d\tilde{t} \\
&\leq \frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_t^m(0)|^2 + a(0, v^m(0), v^m(0)) + \frac{\alpha}{\beta}|\phi^m(0)|^2\Big] \\
&+ c\int_0^t (|v_t^m|^2 + \|v^m\|^2 + |\phi^m|^2) dt \\
&\leq \frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_t^m|^2 + c\|v_0^m\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\phi_0^m|^2\Big] + c\int_0^t (|v_t^m|^2 + \|v^m\|^2 + |\phi^m|^2) dt.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
a(0, v_0^m, v_0^m) &= \int_{-1}^{1} a_1(y, 0) v_{0y}^m v_{0y}^m dy \leq \int_{-1}^{1} |a_1(y, 0)| \left|v_{0y}^m\right|^2 dy \\
&\leq \tilde{c}\int_{-1}^{1} \left|v_{0y}^m\right|^2 dy = \tilde{c}\,\|v_0^m\|^2
\end{aligned}$$

onde $\tilde{c} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3-K'(0)^2}{K(0)^2}\right)$. Então tomando $c_1 = min\left\{\dfrac{\beta}{2\alpha}, \dfrac{\beta c_a}{2\alpha}, \dfrac{1}{2}, c_b\right\}$, segue que

$$\begin{aligned} c_1\Big[|v_1^m|^2 &+ \|v_0^m\|^2 + |\phi_0^m|^2 + \int_0^t \|\phi^m\|_1^2\,dt\Big] \leq \frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_t^m|^2 + c_a\,\|v^m\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\phi^m|^2\Big] + c_b\int_0^t \|\phi^m\|_1^2\,dt \\ &\leq \frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_1^m|^2 + \tilde{c}\,\|v_0^m\|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\phi_0^m|^2\Big] + c\int_0^t (|v_t^m|^2 + \|v^m\|^2 + |\phi^m|^2)dt \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} |v_t^m|^2 &+ \|v^m\|^2 + |\phi^m|^2 + \int_0^t \|\phi^m\|_1^2\,dt \leq \qquad (2.29) \\ &\leq c_2[|v_1^m|^2 + \|v_0^m\|^2 + |\phi_0^m|^2] + c_3\int_0^t [|v_t^m|^2 + \|v^m\|^2 + |\phi^m|^2]dt \end{aligned}$$

onde $c_2 = max\left\{\dfrac{\beta}{2c_1\alpha}, \dfrac{\tilde{c}}{c_1}, \dfrac{\alpha}{c_1\beta}\right\}$ e $c_3 = \dfrac{c}{c_1}$.

De (2.29) e da Desigualdade de Gronwall, deduzimos

$$|v_t^m|^2 + \|v^m\|^2 + |\phi^m|^2 + \int_0^t \|\phi^m\|_1^2\,dt \leq c_2[|v_1^m|^2 + \|v_0^m\|^2 + |\phi_0^m|^2]e^{c_3 T}. \qquad (2.30)$$

Finalmente, de (2.14)-(2.16) obteremos

$$(v^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)) \qquad (2.31)$$

$$(v_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \qquad (2.32)$$

$$(\phi^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \qquad (2.33)$$

$$(\phi^m) \text{ é limitada em } L^2(0,T;V). \qquad (2.34)$$

Observe que

$$\big(L^\infty\big(0,T;H_0^1(-1,1)\big)\big)' \equiv L^1\big(0,T;H^{-1}(-1,1)\big), \qquad (2.35)$$

$$\big(L^\infty\big(0,T;L^2(-1,1)\big)\big)' \equiv L^1\big(0,T,L^2(-1,1)\big), \qquad (2.36)$$

$$\big(L^2(0,T;V)\big)' \equiv L^2(0,T,V'). \qquad (2.37)$$

De (2.31), (2.35) e como $L^1\left(0,T;H^{-1}(-1,1)\right)$ é separável, existe uma subsequência da sequência $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual ainda denotaremos por $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$, e uma função $v \in L^\infty\left(0,T;H_0^1(-1,1)\right)$ tal que

$$v^m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)).$$

Agora de (2.32), (2.36) e notando que $L^1(0,T;L^2(-1,1))$ é separável, então existe uma subsequência da sequência $(v_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual ainda denotaremos por $(v_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$, e uma função $v^* \in L^\infty(0,T;L^2(-1,1))$ tal que

$$v_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} v^* \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)).$$

Usando o fato que o operador derivação $\dfrac{d}{dt}$ é contínuo em $\mathcal{D}'(0,T,L^2(-1,1))$ então

$$\frac{d}{dt}v^m \longrightarrow \frac{d}{dt}v \text{ em } \mathcal{D}'(0,T,L^2(-1,1)).$$

Sendo

$$v_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} v^* \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T,L^2(-1,1))$$

pela unicidade do limite $v^* = \dfrac{d}{dt}v = v_t$. Mas, $v \in L^\infty(0,T;L^2(-1,1))$ então

$$v_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_t \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)).$$

Portanto,

$$v^m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)) \tag{2.38}$$

$$v_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_t \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)). \tag{2.39}$$

Temos também de (2.33), (2.36) e como $L^1(0,T;L^2(-1,1))$ é separável, existe uma subsequência da sequência $(\phi^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual ainda denotaremos por $(\phi^m)_{m\in\mathbb{N}}$, e uma função $\phi^* \in L^\infty(0,T;L^2(-1,1))$ tal que

$$\phi^m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi^* \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)).$$

Agora de (2.34), (2.37) e notando que $L^2(0,T;V')$ é separável, então existe uma subsequência da sequência $(\phi^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual ainda denotaremos por $(\phi^m)_{m\in\mathbb{N}}$, e uma função $\phi \in L^2(0,T;V)$ tal que

$$\phi^m \rightharpoonup \phi \text{ em } L^2(0,T;V).$$

Como $L^\infty(0,T;L^2(-1,1))$ e $L^2(0,T;V)$ estão contidos em $L^2(Q)$ segue da unicidade do limite que $\phi^* = \phi$.

Portanto, concluímos

$$\begin{cases} v^m \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em } L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)) \\ v_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_t & \text{em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \\ \phi^m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi & \text{em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1) \\ \phi^m \rightharpoonup \phi & \text{em } L^2(0,T;V)). \end{cases}$$

2.2.2 Segunda estimativa

Derivaremos (2.12) em relação à t e fazendo $w = v_{tt}^m$, obtemos

$$\begin{aligned}&(v_{ttt}^m, v_{tt}^m) + a(t, v_t^m, v_{tt}^m) + (a_2\phi_{ty}^m, v_{tt}^m) + ((a_3' + a_4)v_{ty}^m, v_{tt}^m)\\&+(a_3 v_{tty}^m, v_{tt}^m) + a'(t, v^m, v_{tt}^m) + (a_2'\phi_y^m, v_{tt}^m) + (a_4' v_y^m, v_{tt}^m) = 0.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Agora, derivando (2.13) com relação à t e fazendo $z = \phi_t^m$, segue

$$\begin{aligned}&(\phi_{tt}^m, \phi_t^m) + b(t, \phi_t^m, \phi_t^m) + (b_2 v_{tty}^m, \phi_t^m) + (b_3\phi_{ty}^m, \phi_t^m) + ((b_2' + 2b_4)v_{ty}^m, \phi_t^m)\\&-(b_5 v_{ty}^m, \phi_{ty}^m) + b'(t, \phi^m, \phi_t^m) + (b_3'\phi_y^m, \phi_t^m) + (2b_4' v_y^m, \phi_t^m) - (b_5' v_y^m, \phi_{ty}^m) = 0.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Observe que

$$a(t, v_t^m, v_{tt}^m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t, v_t^m, v_t^m) - \frac{1}{2}a'(t, v_t^m, v_t^m) \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}(a_3 v_{tty}^m, v_{tt}^m) &= \int_{-1}^1 -\frac{2K'y}{K}v_{tty}^m v_{tt}^m dy = \int_{-1}^1 -\frac{2K'y}{K}\frac{1}{2}\frac{d}{dy}|v_{tt}^m|^2 dy\\&= -\frac{K'y}{K}|v_{tt}^m|^2\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{K'}{K}|v_{tt}^m|^2 dy = \frac{K'}{K}\int_{-1}^1 |v_{tt}^m|^2 dy\end{aligned} \tag{2.43}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{ty}^m dy &= \int_{-1}^1 a_1'' v_y^m v_{ty}^m dy + \int_{-1}^1 a_1' v_{ty}^m v_{ty}^m dy + \int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{tty}^m dy\\&= \int_{-1}^1 a_1'' v_y^m v_{ty}^m dy + \int_{-1}^1 a_1' [v_y^m v_{ty}^m]_t dy\\&= \int_{-1}^1 a_1'' v_y^m v_{ty}^m dy + \int_{-1}^1 a_1' [v_{ty}^m v_{ty}^m + v_y^m v_{tty}^m] dt\\&= \int_{-1}^1 a_1'' v_y^m v_{ty}^m dy + \int_{-1}^1 a_1' |v_{ty}^m|^2 dy + \int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{tty}^m dy\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}a'(t, v^m, v_{tt}^m) &= \int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{tty}^m dy\\&= \frac{d}{dt}\int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{ty}^m dy - \int_{-1}^1 a_1'' v_y^m v_{ty}^m dy - \int_{-1}^1 a_1' |v_{ty}^m|^2 dy.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Além disso

$$\begin{aligned}(b_2 v_{tty}^m, \phi_t^m) &= \left(\frac{\beta}{K}v_{tty}^m, \phi_t^m\right) = \int_{-1}^1 \frac{\beta}{K}v_{tty}^m \phi_t^m dy = \frac{\beta}{K}\int_{-1}^1 v_{tty}^m \phi_t^m dy\\&= \frac{\beta}{K}\left[v_{tt}^m \phi_t^m\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 v_{tt}^m \phi_{ty}^m dy\right] = -\frac{\beta}{K}\int_{-1}^1 \phi_{ty}^m v_{tt}^m dy\\&= -\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{K}\phi_{ty}^m, v_{tt}^m\right) = -\frac{\beta}{\alpha}\left(a_2\phi_{ty}^m, v_{tt}^m\right).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Multiplicando (2.40) por β/α, somando com (2.41) e usando (2.42) até (2.45) obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\alpha}\frac{d}{dt}\Big[|v_{tt}^m|^2 &+ a(t,v_t^m,v_t^m) + \int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{ty}^m dy + \frac{\alpha}{\beta}|\phi_t^m|^2\Big] + b(t,\phi_t^m,\phi_t^m) \\
&= \frac{\beta}{2\alpha}a'(t,v_t^m,v_t^m) + \frac{\beta}{\alpha}\int_{-1}^1 \frac{K'}{K}|v_{tt}^m|^2 dy - \frac{\beta}{\alpha}((a_3'+a_4)v_{ty}^m, v_{tt}^m) \\
&+ \frac{\beta}{\alpha}\int_{-1}^1 a_1'' v_y^m v_{ty}^m dy + \frac{\beta}{\alpha}\int_{-1}^1 a_1'|v_{ty}^m|^2 dy - \frac{\beta}{\alpha}(a_2'\phi_y^m, v_{tt}^m) - \frac{\beta}{\alpha}(a_4' v_y^m, v_{tt}^m) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-1}^1 b_{3y}|\phi_t^m|^2 dy - ((2b_4+b_2')v_{ty}^m, \phi_t^m) + (b_5 v_{ty}^m, \phi_{ty}^m) - b'(t,\phi^m,\phi_t^m) \\
&- (b_3'\phi_y^m, \phi_t^m) - (2b_4' v_y^m \phi_t^m) + (b_5' v_y^m, \phi_{ty}^m).
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Young e a regularidade dos a_i e b_i obtemos que existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\alpha}\frac{d}{dt}\Big[|v_{tt}^m|^2 &+ a(t,v_t^m,v_t^m) + \int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{ty}^m dy + \frac{\alpha}{\beta}|\phi_t^m|^2\Big] + \frac{1}{2}b(t,\phi_t^m,\phi_t^m) \\
&\leq c_4[\|v^m\|^2 + \|v_t^m\|^2 + |v_{tt}^m|^2 + \|\phi^m\|_1^2 + |\phi_t^m|^2] + \frac{c_b}{4}\|\phi_t^m\|_1^2 \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

onde c_b é a constante de coercividade de $b(t,v,w)$.

Integrando (2.46) de zero até t para $0 \leq t \leq T$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_{tt}^m|^2 &+ a(t,v_t^m,v_t^m) + \frac{\alpha}{\beta}|\phi_t^m|^2\Big] - \frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_{tt}^m(0)|^2 + a(0,v_t^m(0),v_t^m(0)) + \frac{\alpha}{\beta}|\phi_t^m(0)|^2\Big] \\
&+ \int_0^t\int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{ty}^m dy d\tilde{t} + \frac{1}{2}\int_0^t b(\tilde{t},\phi_t^m,\phi_t^m)d\tilde{t} \\
&\leq c_4\int_0^t [\|v^m\|^2 + \|v_t^m\|^2 + |v_{tt}^m|^2 + \|\phi^m\|_1^2 + |\phi_t^m|^2]dt + \frac{c_b}{4}\int_0^t \|\phi_t^m\|_1^2 dt
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_{tt}^m|^2 &+ a(t,v_t^m,v_t^m) + \frac{\alpha}{\beta}|\phi_t^m|^2\Big] + \frac{1}{2}\int_0^t b(\tilde{t},\phi_t^m,\phi_t^m)d\tilde{t} \\
&\leq \frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_{tt}^m(0)|^2 + a(0,v_t^m(0),v_t^m(0)) + \frac{\alpha}{\beta}|\phi_t^m(0)|^2\Big] \\
&+ c_4\int_0^t [\|v^m\|^2 + \|v_t^m\|^2 + \|\phi^m\|_1^2 + |v_{tt}^m|^2 + |\phi_t^m|^2]d\tilde{t} + \frac{c_b}{4}\int_0^t \|\phi_t^m\|_1^2 dt \\
&- \frac{\beta}{\alpha}\int_{-1}^1 a_1' v_y^m v_{ty}^m dy + \frac{\beta}{\alpha}\int_{-1}^1 a_1'(y,0)v^m(0)_y v_t^m(0)_y dy. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Observe que da Desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} a_1' v_y^m v_{ty}^m dy &\leq \int_{-1}^{1} |a_1'||v_y^m||v_{ty}^m| dy \leq \tilde{c}_5 \int_{-1}^{1} |v_y^m||v_{ty}^m| dy \\
&= \tilde{c}_5 \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2\tilde{c}_5}}{\sqrt{c_a}} |v_y^m| \frac{\sqrt{c_a}}{\sqrt{2\tilde{c}_5}} |v_{ty}^m| dy \\
&\leq \frac{\tilde{c}_5^2}{c_a} \int_{-1}^{1} |v_y^m|^2 dy + \frac{c_a}{4} \int_{-1}^{1} |v_{ty}^m|^2 dy \\
&\leq \frac{\tilde{c}_5^2}{c_a} \|v^m\|^2 + \frac{1}{4} a(t, v_t^m, v_t^m)
\end{aligned}$$

onde c_a é a constante de coercividade de $a(t, v, w)$.

Logo existe uma constante $c_5 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \int_{-1}^{1} a_1' v_y^m v_{ty}^m dy \right| \leq c_5 \|v^m\|^2 + \frac{\beta}{4\alpha} a(t, v_t^m, v_t^m). \tag{2.48}$$

Portanto, de (2.47), (2.48) obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{2\alpha} \Big[|v_{tt}^m|^2 + a(t, v_t^m, v_t^m) &+ \frac{\alpha}{\beta} |\phi_t^m|^2 \Big] + c_5 \|v^m\|^2 + \frac{\beta}{4\alpha} a(t, v_t^m, v_t^m) + \frac{1}{2} \int_0^t b(t, \phi_t^m, \phi_t^m) dt \\
&\leq \frac{\beta}{2\alpha} \Big[|v_{tt}(0)|^2 + a(0, v_t^m(0), v_t^m(0)) + \frac{\alpha}{\beta} |\phi_t^m(0)|^2 \Big] \\
&+ c_4 \int_0^t \|v^m\|^2 + \|v_t^m\|^2 + |v_{tt}^m|^2 + \|\phi^m\|_1^2 + |\phi_t^m|^2 \, dt + \frac{c_b}{4} \int_0^t \|\phi_t^m\|_1^2 dt.
\end{aligned}$$

Usando a coercividade de $a(t, v, w)$ e $b(t, v, w)$ e de (2.30) existem constantes positivas c_6 e c_7 tais que

$$\begin{aligned}
|v_{tt}^m|^2 &+ \|v_t^m\|^2 + |\phi_t^m|^2 + \int_0^t \|\phi_t^m\|_1^2 \, dt \\
&\leq c_6 [|v_{tt}^m(0)|^2 + \|v_t^m(0)\|^2 + |\phi_t^m(0)|^2] \\
&+ c_7 \int_0^t [\|v^m\|^2 + \|v_t^m\|^2 + |v_{tt}^m|^2 + \|\phi^m\|_1^2 + |\phi_t^m|^2] dt.
\end{aligned}$$

Assim, da Desigualdade de Gronwall, temos

$$\begin{aligned}
|v_{tt}^m|^2 &+ \|v_t^m\|^2 + |\phi_t^m|^2 + \int_0^t \|\phi_t^m\|_1^2 \, dt \\
&\leq c_8 [|v_{tt}^m(0)|^2 + \|v_t^m(0)\|^2 + |\phi_t^m(0)|^2].
\end{aligned} \tag{2.49}$$

De (2.14) até (2.16), deduzimos que $|v_{tt}^m(0)|^2$, $|v_t^m(0)|^2$ e $|\phi_t^m(0)|^2$ são limitadas. Então, de (2.49) concluímos

$$(v_{tt}^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \tag{2.50}$$

$$(v_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)) \tag{2.51}$$

$$(\phi_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \tag{2.52}$$

$$(\phi_t^m) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^1(-1,1)). \tag{2.53}$$

De (2.50)-(2.53), pelos Lemas (1.9) e (1.10) existem subsequências de $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$ e de $(\phi^m)_{m\in\mathbb{N}}$, as quais continuaremos denotando por $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(\phi^m)_{m\in\mathbb{N}}$ respectivamente, e funções v_1, v_2, ϕ_1 e ϕ_2 tais que

$$\begin{cases} v_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_1 & \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \\ v_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_2 & \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)) \\ \phi_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi_1 & \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \\ \phi_t^m \rightharpoonup \phi_2 & \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(-1,1)). \end{cases}$$

Como $L^\infty(0,T;L^2(-1,1))$, $L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1))$ e $L^2(0,T;H_0^1(-1,1))$ estão contidos em $L^2(Q)$, segue pela unicidade do limite que

$$v_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_{tt} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \tag{2.54}$$

$$v_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)) \tag{2.55}$$

$$\phi_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \tag{2.56}$$

$$\phi_t^m \rightharpoonup \phi_t \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(-1,1)). \tag{2.57}$$

2.2.3 Terceira estimativa

Tomaremos $w = -v_{yy}^m$ em (2.12) e $z = -\phi_{yy}^m$ em (2.13), obtendo

$$(v_{tt}^m, -v_{yy}^m) + a(t, v^m, -v_{yy}^m) + (a_2\phi_y, -v_{yy}^m) + (a_3 v_{ty}^m, -v_{yy}^m) + (a_4 v_y^m, -v_{yy}^m) = 0 \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} (\phi_t^m, -\phi_{yy}^m) \quad &+ \quad b(t, \phi^m, -\phi_{yy}^m) + (b_2 v_{ty}^m, -\phi_{yy}^m) + (b_3\phi_y^m, -\phi_{yy}^m) \\ &+ \quad (2b_4 v_y^m, -\phi_{yy}^m) - (b_5 v_y^m, -\phi_{yyy}^m) = 0. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Desenvolvendo alguns termos de (2.58) e (2.59), usando integração por partes na variável

y e da escolha da base temos

$$\begin{aligned}
a(t, v^m, -v^m_{yy}) &= -\int_{-1}^{1} a_1 v^m_y v^m_{yyy} dy \\
&= -a_1 v^m_y v^m_{yy}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (a_1 v^m_y)_y v^m_{yy} dy \\
&= \int_{-1}^{1} (a_{1y} v^m_y + a_1 v^m_{yy}) v^m_{yy} dy \\
&= \int_{-1}^{1} a_{1y} v^m_y v^m_{yy} dy + \int_{-1}^{1} a_1 v^m_{yy} v^m_{yy} dy \\
&= a(t, v^m_y, v^m_y) + \int_{-1}^{1} a_{1y} v^m_y v^m_{yy} dy \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b(t, \phi^m, -\phi^m_{yy}) &= -\int_{-1}^{1} b_1 \phi^m_y \phi^m_{yyy} dy \\
&= -b_1 \phi^m_y \phi^m_{yy}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} b_1 \phi^m_{yy} \phi^m_{yy} dy \\
&= b(t, \phi^m_y, \phi^m_y) \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
(b_5 v^m_y, -\phi^m_{yyy}) &= -\int_{-1}^{1} b_5 v^m_y \phi^m_{yyy} dy \\
&= -b_5 v^m_y \phi^m_{yy}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (b_5 v^m_y)_y \phi^m_{yy} dy \\
&= \int_{-1}^{1} b_{5y} v^m_y \phi^m_{yy} dy + \int_{-1}^{1} b_5 v^m_{yy} \phi^m_{yy} dy. \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

De (2.58) e (2.60) segue

$$\begin{aligned}
a(t, v^m_y, v^m_y) &= -\int_{-1}^{1} a_{1y} v^m_y v^m_{yy} dy + (v^m_{tt}, v^m_{yy}) + (a_2 \phi_y, v^m_{yy}) \\
&+ (a_3 v^m_{ty}, v^m_{yy}) + (a_4 v^m_y, v^m_{yy}). \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

Da coercividade temos que

$$a(t, v^m_y, v^m_y) \geq c_a \left\| v^m_y \right\|^2 = c_a |v^m_{yy}|^2 \qquad (2.64)$$

e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$(v^m_{tt}, v^m_{yy}) \leq |v^m_{tt}||v^m_{yy}| = |v^m_{tt}| \sqrt{\frac{5}{c_a}} \sqrt{\frac{c_a}{5}} |v^m_{yy}|$$

e usando a Desigualdade de Young, segue

$$|v_{tt}^m||v_{yy}^m| \leq \frac{1}{2}\left(|v_{tt}^m|^2\frac{5}{c_a} + \frac{c_a}{5}|v_{yy}^m|^2\right) = \frac{5}{2c_a}|v_{tt}^m|^2 + \frac{c_a}{10}|v_{yy}^m|^2. \tag{2.65}$$

Assim, de (2.63)-(2.65) temos

$$\begin{aligned} c_a|v_{yy}^m|^2 &\leq -(a_{1y}v_y^m, v_{yy}^m) + \frac{5}{2c_a}|v_{tt}^m|^2 + \frac{c_a}{10}|v_{yy}^m|^2 + (a_2\phi_y, v_{yy}^m) \\ &+ (a_3 v_{ty}^m, v_{yy}^m) + (a_4 v_y^m, v_{yy}^m). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Note que da Desigualdade de Cauchy-Schwarz e da Desigualdade de Young existem constantes positivas d_1, d_2, d_3 e d_4 tais que

$$\begin{aligned} (a_{1y}v_y^m, v_{yy}^m) &\leq |a_{1y}v_y^m||v_{yy}^m| \leq d_1\|v^m\|\,|v_{yy}^m| \leq \frac{5d_1^2}{2c_a}\|v^m\|^2 + \frac{c_a}{10}|v_{yy}^m|^2 \\ (a_2\phi_y^m, v_{yy}^m) &\leq |a_2\phi_y^m||v_{yy}^m| \leq d_2\|\phi^m\|_1|v_{yy}^m| \leq \frac{5d_2^2}{2c_a}\|\phi^m\|_1^2 + \frac{c_a}{10}|v_{yy}^m|^2 \\ (a_3 v_{ty}^m, v_{yy}^m) &\leq |a_3 v_{ty}^m||v_{yy}^m| \leq d_3\|v_t^m\|\,|v_{yy}^m| \leq \frac{5d_3^2}{2c_a}\|v_t^m\|^2 + \frac{c_a}{10}|v_{yy}^m|^2 \\ (a_4 v_y^m, v_{yy}^m) &\leq |a_4 v_y^m||v_{yy}^m| \leq d_4\|v^m\|\,|v_{yy}^m| \leq \frac{5d_4^2}{2c_a}\|v^m\|^2 + \frac{c_a}{10}|v_{yy}^m|^2. \end{aligned}$$

Usando as estimativas anteriores em (2.66) concluímos que

$$\frac{c_a}{2}|v_{yy}^m|^2 \leq d_5(\|\phi^m\|_1^2 + \|v^m\|^2 + |v_{tt}^m|^2 + \|v_t^m\|^2)$$

onde $\frac{c_a}{2} > 0$ e $d_5 = max\left\{\frac{5d_1^2}{2c_a}, \frac{5d_2^2}{2c_a}, \frac{5}{2c_a}, \frac{5d_3^2}{2c_a}, \frac{5d_4^2}{2c_a}\right\}$.

Portanto, tomando $D_1 = \frac{2d_5}{c_a}$ temos

$$|v_{yy}^m|^2 \leq D_1(\|\phi^m\|_1^2 + \|v^m\|^2 + |v_{tt}^m|^2 + \|v_t^m\|^2). \tag{2.67}$$

Analogamente, de (2.59), (2.61) e (2.62) obtemos

$$\begin{aligned} b(t, \phi^m, -\phi_{yy}^m) &= (\phi_t^m, \phi_{yy}^m) + (b_2 v_{ty}^m, \phi_{yy}^m) + (b_3\phi_y^m, \phi_{yy}^m) \\ &+ (b_{5y}v_y^m, \phi_{yy}^m) + (2b_4 v_y^m, \phi_{yy}^m) + (b_5 v_{yy}^m, \phi_{yy}^m). \end{aligned} \tag{2.68}$$

Da coercividade, segue

$$b(t, \phi_y^m, \phi_{yy}^m) \geq c_b\left\|\phi_y^m\right\|_1^2 \geq c_b|\phi_{yy}^m|^2 \tag{2.69}$$

usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e depois a Desigualdade de Young, temos

$$(\phi_t^m, \phi_{yy}^m) \leq |\phi_t^m||\phi_{yy}^m| \leq \frac{1}{2}\left(|\phi_t^m|^2\frac{6}{c_b} + \frac{c_b}{6}|\phi_{yy}^m|^2\right) = \frac{3}{c_b}|\phi_t^m|^2 + \frac{c_b}{12}|\phi_{yy}^m|^2. \tag{2.70}$$

Assim, de (2.68)-(2.70) obtemos

$$\begin{aligned} c_b|\phi_{yy}^m|^2 &\leq \frac{3}{c_b}|\phi_t^m|^2 + \frac{c_b}{12}|\phi_{yy}^m|^2 + (b_2 v_{ty}^m, \phi_{yy}^m) + (b_3\phi_y^m, \phi_{yy}^m) + \\ &+ (2b_4 v_y^m, \phi_{yy}^m) + (b_5 v_{yy}^m, \phi_{yy}^m) + (b_{5y} v_y^m, \phi_{yy}^m). \end{aligned} \tag{2.71}$$

Agora, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Desigualdade nos termos com produto interno em (2.71) podemos estimar que

$$\begin{aligned} (b_2 v_{ty}^m, \phi_{yy}^m) &\leq |b_2 v_{ty}^m||\phi_{yy}^m| \leq d_6 \|v_t^m\| \, |\phi_{yy}^m| \leq \frac{3}{c_b} d_6^2 \|v_t^m\|^2 + \frac{c_b}{12}|\phi_{yy}^m|^2 \\ (b_3\phi_y^m, \phi_{yy}^m) &\leq |b_3\phi_y^m||\phi_{yy}^m| \leq d_7 \|\phi^m\|_1 \, |\phi_{yy}^m| \leq \frac{3}{c_b} d_7^2 \|\phi^m\|_1^2 + \frac{c_b}{12}|\phi_{yy}^m|^2 \\ (2b_4 v_y^m, \phi_{yy}^m) &\leq |2b_4 v_y^m||\phi_{yy}^m| \leq d_8 \|v^m\| \, |\phi_{yy}^m| \leq \frac{3}{c_b} d_8^2 \|v^m\|^2 + \frac{c_b}{12}|\phi_{yy}^m|^2 \\ (b_5 v_{yy}^m, \phi_{yy}^m) &\leq |b_5 v_{yy}^m||\phi_{yy}^m| \leq d_9 \left\|v_y^m\right\| \, |\phi_{yy}^m| \leq \frac{3}{c_b} d_9^2 \left\|v_y^m\right\|^2 + \frac{c_b}{12}|\phi_{yy}^m|^2 \\ (b_{5y} v_y^m, \phi_{yy}^m) &\leq |b_{5y} v_y^m||\phi_{yy}^m| \leq d_{10} \|v^m\| \, |\phi_{yy}^m| \leq \frac{3}{c_b} d_{10}^2 \|v^m\|^2 + \frac{c_b}{12}|\phi_{yy}^m|^2. \end{aligned}$$

Logo, das estimativas anteriores e de (2.71) concluímos que

$$\frac{c_b}{2}|\phi_{yy}^m|^2 \leq d_{11}(\|v_t^m\|^2 + \|\phi^m\|_1^2 + \|v^m\|^2 + \left\|v_y^m\right\|^2 + \|\phi_t^m\|_1^2)$$

onde $\frac{c_b}{2} = \alpha_1 > 0$ e $d_{11} = max\left\{\frac{3}{c_b}d_6^2, \frac{3}{c_b}d_7^2, \frac{3}{c_b}d_8^2, \frac{3}{c_b}, \frac{3}{c_b}d_9^2, \frac{3}{c_b}d_{10}^2\right\}$.
Portanto, fazendo $D_2 = \frac{2d_{11}}{c_b}$ temos

$$|\phi_{yy}^m|^2 \leq D_2(\|v_t^m\|^2 + \|\phi^m\|_1^2 + \|v^m\|^2 + \left\|v_y^m\right\|^2 + \|\phi_t^m\|_1^2). \tag{2.72}$$

Agora, de (2.31), (2.50), (2.67) e (2.72), temos

$$\begin{aligned} &(v_{yy}^m) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0,T;L^2(-1,1)) \\ &(\phi_{yy}^m) \quad \text{é limitado em} \quad L^2(0,T;L^2(-1,1)). \end{aligned} \tag{2.73}$$

Em (2.73), pelos Lemas (1.9) e (1.10) existem subsequências de $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$ e de $(\phi^m)_{m\in\mathbb{N}}$, as quais denotaremos por v^m e ϕ^m respectivamente, e funções tais que

$$\begin{cases} v_{yy}^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_{yy} & \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(-1,1)) \\ \phi_{yy}^m \rightharpoonup \phi_{yy} & \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(-1,1)) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} v^m \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^2(-1,1)) \\ \phi^m \rightharpoonup \phi & \text{em} \quad L^2(0,T;H^2(-1,1)). \end{cases} \tag{2.74}$$

2.3 Passagem ao limite

Agora tomaremos o limite em (2.12) e (2.13). De (2.50) e tomando $\bar{w} = \psi w$ onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in [w_1, \cdots, w_m]$, segue da Proposição (1.6) que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T (v_{tt}^m(t), w)\psi(t)dt = \int_0^T (v_{tt}(t), w)\psi(t)dt. \tag{2.75}$$

uma vez que $\bar{w} \in L^1(0,T; L^2(-1,1)) = (L^\infty(0,T; L^2(-1,1)))'$.
Das estimativas (2.50) e (2.73) temos

$$\begin{array}{ll} v_y^m & \text{é limitada em} \quad L^2(0,T; H^1(-1,1)) \\ v_{ty}^m & \text{é limitada em} \quad L^2(0,T; L^2(-1,1)). \end{array}$$

Então, pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de (v_y^m), a qual continuaremos denotando por v_y^m, tal que

$$v_y^m \to v_y \quad \text{em} \quad L^2(0,T; L^2(-1,1))$$

logo,

$$\int_0^T |v_y^m(t) - v_y(t)|^2 dt \to 0. \tag{2.76}$$

Por outro lado, tomando $\bar{w} = \psi w_y$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in [w_1, \cdots, w_m]$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^T [a(t, v^m, w) - a(t, v, w)]\psi dt &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 a(y,t) v_y^m w_y \psi dy - \int_{-1}^1 a(y,t) v_y w_y \psi dy \right) dt \\ &= \int_0^T \int_{-1}^1 a(y,t)[v_y^m - v_y] w_y \psi dy dt. \end{aligned}$$

Como $a_1(y,t)$ é contínua em $[0,T] \times [-1,1]$ e de (2.76) concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{-1}^1 a_1(y,t)[v_y^m - v_y] w_y \psi dy dt \right| &\le \int_0^T \tilde{c_1} |v_y^m(t) - v_y(t)||w_y||\psi| dt \\ &\le M_1 \int_0^T |v_y^m(t) - v_y(t)| dt \\ &\le M_1 \left(\int_0^T dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |v_y^m(t) - v_y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\to 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T a(t, v^m, w)\psi dt = \int_0^T a(t, v, w)\psi dt. \tag{2.77}$$

Da estimativa (2.31) temos

$$\phi_y^m \to \phi_y \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(-1,1)). \tag{2.78}$$

Tomando $\bar{w} = wa_2(t)\psi$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in [w_1, \cdots, w_m]$, temos $\bar{w} \in L^2(0,T;L^2(-1,1))$ pois $a_2(t)$ é contínua e assim como

$$\begin{aligned}\int_0^T (a_2\phi_y^m, w)\psi dt &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 a_2(t)\phi_y^m w dy\right)\psi dt \\ &= \int_0^T a_2(t)\left(\int_{-1}^1 \phi_y^m w dy\right)\psi dt \\ &= \int_0^T (\phi_y^m, w)a_2(t)\psi dt\end{aligned}$$

então de (2.78) segue

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T (a_2\phi_y^m, w)\psi dt = \int_0^T (a_2\phi_y, w)\psi dt. \tag{2.79}$$

Integrando por partes obtemos

$$\int_{-1}^1 a_3(y,t)v_{ty}^m w dy = a_3(y,t)v_t^m w\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 a_{3y}v_t^m w dy - \int_{-1}^1 a_3(y,t)v_t^m w_y dy.$$

para todo $w \in [w_1, \cdots, w_m]$.

Da estimativa (2.50) temos $v_t^m \rightharpoonup v_t$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1))$ assim, tomando $\bar{w} = a_3\psi w$ onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in [w_1, \cdots, w_m]$ segue

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T (a_3 v_t^m(t), w_y)\psi dt = \int_0^T (a_3 v_t^m(t), w_y)\psi dt. \tag{2.80}$$

Agora, da estimativa (2.50) temos

$$\begin{aligned}(v_t^m) &\quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(-1,1)) \\ (v_{tt}^m) &\quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(-1,1)).\end{aligned}$$

Então, pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de $(v_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual continuaremos denotando por $(v_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$v_t^m \to v_t \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(-1,1)).$$

Assim,

$$\int_0^T |v_t^m(t) - v_t(t)|^2 dt \to 0.$$

Tomando $\bar{w} = -\psi w_y$, sendo $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in [w_1, \cdots, w_m]$ temos

$$\begin{aligned}\int_0^T [(a_3 v_t^m w_y) - (a_3 v_t w_y)]\psi dt &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 a_3(y,t) v_t^m w_y \psi dy - \int_{-1}^1 a_3(y,t) v_t^m w_y \psi dy \right) dt \\ &= \int_0^T \int_{-1}^1 a_3(y,t)[v_t^m - v_t] w_y \psi dy dt.\end{aligned}$$

Como $a_3(y,t)$ é contínua em $[0,T] \times [-1,1]$, segue que existe uma constante positiva M_2 tal que

$$\begin{aligned}\left| \int_0^T \int_{-1}^1 a_3(y,t)[v_t^m - v_t] w_y \psi dy dt \right| &\leq M_2 \int_0^T \|v_t^m(t) - v_t(t)\| \, dt \\ &\leq M_2 \left(\int_0^T dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v_t^m(t) - v_t(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} \\ &\to 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T (a_3 v_t^m, w_y)\psi dt = \int_0^T (a_3 v_t, w_y)\psi dt. \tag{2.81}$$

Das estimativas (2.50) e (2.73) temos

$$\begin{aligned}&(v_y^m) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T,H_0^1(-1,1)) \\ &(v_{ty}^m) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(-1,1)).\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de (v_y^m) a qual continuaremos denotando por v_y^m, tal que $v_y^m \to v_y \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(-1,1))$.

Logo,

$$\int_0^T \left\|v_y^m(t) - v_y(t)\right\|^2 dt \to 0.$$

Tomando $\bar{w} = \psi w$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in [w_1, \cdots, w_m]$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T [(a_4(y,t) v_y^m, \bar{w}) &- (a_4(y,t) v_y, w)]\psi dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 a_4(y,t) v_y^m w \psi dy - \int_{-1}^1 a_4(y,t) v_y w \psi dy \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 a_4(y,t)[v_y^m - v_y] w \psi dy \right) dt.\end{aligned}$$

Como $a_4(y,t)$ é contínua em $[0,T] \times [-1,1]$, temos que existe uma constante positiva M_3 tal que

$$\begin{aligned}\left| \int_0^T \int_{-1}^1 a_4(y,t)[v_y^m - v_y] w \psi dy dt \right| &\leq M_3 \int_0^T \left\|v_y^m(t) - v_y(t)\right\| dt \\ &\to 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty,\end{aligned}$$

ou seja

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T (a_4 v_y^m, w)\psi dt = \int_0^T (a_4 v_y, w)\psi dt. \tag{2.82}$$

Da estimativa (2.50) temos $\phi_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi_t$ em $L^\infty(0,T;L^2(-1,1))$ assim, tomando $\bar{z} = \psi_t z$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $z \in [z_1, \cdots, z_m]$ temos

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T (\phi_t^m(t), z)\psi_t dt = \int_0^T (\phi_t(t), z)\psi_t dt. \tag{2.83}$$

Das estimativas (2.50) e (2.73) temos

$$\begin{cases} \phi_y^m & \text{é limitada em} \quad L^2(0,T,H^1(-1,1)) \\ \phi_{ty}^m & \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(-1,1)). \end{cases}$$

Então pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de $(\phi_y^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual continuaremos denotando por $(\phi_y^m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que $\phi_y^m \to \phi_y$ em $L^2(0,T;L^2(-1,1))$.
Assim,

$$\int_0^T |\phi_y^m(t) - \phi_y(t)|^2 dt \to 0.$$

Tomando $\bar{z} = \psi z_y$, sendo $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $z \in [z_1, \cdots, z_m]$ segue

$$\begin{aligned} \int_0^T [b(t,\phi^m,z) \quad &- \quad b(t,\phi,z)]\psi dt = \\ &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 b(t)\phi_y^m z_y dy - \int_{-1}^1 b(t)\phi_y z_y \psi dy\right) dt \\ &= \int_0^T b(t)\int_{-1}^1 [\phi_y^m - \phi_y] z_y \psi dy dt. \end{aligned}$$

Como $b_1(t)$ é contínua em $[0,T]\times[-1,1]$, temos que existe uma constante $M_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T b_1(t)\int_{-1}^1 [\phi_y^m - \phi_y] z_y \psi dy dt\right| &\leq M_4 \left(\int_0^T dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T |\phi_y^m - \phi_y|^2 dt\right)^{1/2} \\ &\to 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T b(t,\phi^m,z)\psi dt = \int_0^T b(t,\phi,z)\psi dt. \tag{2.84}$$

Da estimativa (2.50) temos $v_t^m \rightharpoonup v_t$ em $L^\infty(0,T,H_0^1(-1,1))$.

Tomando $\bar{z} = z b_2(t)\psi$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $z \in [z_1, \cdots, z_m]$, segue

$$\begin{aligned} \int_0^T b_2(t)\left(\int_{-1}^1 v_{ty}^m z dy\right)\psi dt &= \int_0^T (v_{ty}^m, z) b_2(t)\psi dt \\ &\to \int_0^T (v_{ty}, z) b_2(t)\psi dt \quad \text{quando} \quad m \to \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T (b_2, v_{ty}^m, z)\psi dt = \int_0^T (b_2, v_{ty}, z)\psi dt. \tag{2.85}$$

Das estimativas (2.50) e (2.73) temos

$$\begin{array}{lll} (\phi_y^m) & \text{é limitada em} & L^2(0,T,H^1(-1,1)) \\ (\phi_{ty}^m) & \text{é limitada em} & L^2(0,T;L^2(-1,1)). \end{array}$$

Então pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de $(\phi_y^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual continuaremos denotando por $(\phi_y^m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que $\phi_y^m \to \phi_y$ em $L^2(0,T;L^2(-1,1))$.

Logo, $\displaystyle\int_0^T |\phi_y^m(t)-\phi_y(t)|^2 dt \to 0.$

Tomando $\bar{z} = \psi z$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $z \in [z_1,\cdots,z_m]$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T [(b_3(y,t)\phi_y^m, z) &- (b_3(y,t)\phi_y, z)]\psi dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 b_3(y,t)\phi_y^m z\psi dy - \int_{-1}^1 b_3(y,t)\phi_y z\psi dy\right) dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 b_3(y,t)[\phi_y^m - \phi_y] z\psi dy\right) dt. \end{aligned}$$

Como $b_3(y,t)$ é contínua em $[0,T]\times[-1,1]$, segue que existe uma constante positiva M_5 tal que

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T\int_{-1}^1 b_3(y,t)[\phi_y^m - \phi_y] z\psi dy dt\right| &\leq M_5 \int_0^T |\phi_y^m(t) - \phi_y(t)| dt \\ &\to 0 \quad \text{quando} \quad m\to\infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T (b_3\phi_y^m, z)\psi dt = \int_0^T (b_3\phi_y, z)\psi dt. \tag{2.86}$$

Da estimativa (2.31) temos $v^m \to v$ em $L^\infty(0,T,H_0^1(-1,1))$.

Tomando $\bar{z} = z2b_4(t)\psi$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $z\in[z_1,\cdots,z_m]$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T 2b_4(t)\left(\int_{-1}^1 v_y^m z dy\right)\psi dt &= \int_0^T (v_y^m, z)2b_4(t)\psi dt \\ &\to \int_0^T (v_y, z)b_4(t)\psi dt \quad \text{quando} \quad m\to\infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T (2b_4 v_y^m, z)\psi dt = \int_0^T (2b_4 v_y, z)\psi dt. \tag{2.87}$$

Das estimativas (2.50) e (2.73) temos

$$\begin{array}{lll} (v_y^m) & \text{é limitada em} & L^2(0,T,H_0^1(-1,1)) \\ (v_{ty}^m) & \text{é limitada em} & L^2(0,T;L^2(-1,1)). \end{array}$$

Então, pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de $(v_y^m)_{m\in\mathbb{N}}$, a qual continuaremos denotando por $(v_y^m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que $v_y^m \to v_y$ em $L^2(0,T;L^2(-1,1))$.

Logo, $\displaystyle\int_0^T |v_y^m(t) - v_y(t)|^2 dt \to 0$.

Tomando $\bar{z} = -\psi z_y$, sendo $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $z \in [z_1, \cdots, z_m]$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T [(b_5 v_y^m, z_y) \quad &- \quad (b_5 v_y, z_y)]\psi dt = \\ &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 b_5(y,t) v_y^m z_y \psi dy - \int_{-1}^1 b_5(y,t) v_y z_y \psi dy \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{-1}^1 b_5(y,t)[v_y^m - v_y] z \psi dy \right) dt. \end{aligned}$$

Como $b_5(y,t)$ é contínua em $[0,T]\times[-1,1]$, segue que existe uma constante positiva M_6 tal que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{-1}^1 b_5(y,t)[v_y^m - v_y] z_y \psi dy dt \right| \quad &\le \quad M_6 \int_0^T |v_y^m(t) - v_y(t)| dt \\ &\to \quad 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T (b_5 v_y^m(t), z_y)\psi dt = \int_0^T (b_5 v_y(t), z_y)\psi dt. \tag{2.88}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (v_{tt}^m, w) \quad &+ \quad a(t, v^m, w) + (a_2 \phi_y^m, w) + (a_3 v_{ty}^m, w) + (a_4 v_y^m, w) = 0 \\ (\phi_t^m, z) \quad &+ \quad b(t, \phi^m, z) + (b_2 v_{ty}^m, z) + (b_3 \phi_y^m, z) + (2b_4 v_y^m, z) - (b_5 v_y^m, z_y) = 0 \end{aligned}$$

para todo $w \in V_m$.

Multiplicando (2.12) e (2.13) por $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando sobre $[0,T]$ segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T (v_{tt}^m, w)\psi dt \quad &+ \quad \int_0^T a(t, v^m, w)\psi dt + \int_0^T (a_2 \phi_y^m, w)\psi dt + \\ &+ \quad \int_0^T (a_3 v_{ty}^m, w)\psi dt + \int_0^T (a_4 v_y^m, w)\psi dt = 0 \end{aligned} \tag{2.89}$$

$$\int_0^T (\phi_t^m, z)\psi dt + \int_0^T b(t, \phi^m, z)\psi dt + \int_0^T (b_2 v_{ty}^m, z)dt + \int_0^T (b_3 \phi_y^m, z)\psi dt +$$
$$+ \int_0^T (2b_4 v_y^m, z)dt - \int_0^T (b_5 v_y^m, z_y)\psi dt = 0 \qquad (2.90)$$

para todo $w \in H_0^1(-1,1)$ e $z \in V$, uma vez que $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de $H_0^1(-1,1)$ e $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de V.

Assim, de (2.75) até (2.88), tomando o limite em (2.89) e (2.90) concluímos

$$\int_0^T (v_{tt}, w)\psi dt + \int_0^T a(t, v, w)\psi dt + \int_0^T (a_2 \phi_y, w)\psi dt +$$
$$+ \int_0^T (a_3 v_t, w)\psi dt + \int_0^T (a_4 v_y, w)\psi dt = 0$$

$$\int_0^T (\phi_t, z)\psi dt + \int_0^T b(t, \phi, z)\psi dt + \int_0^T (b_2 v_{ty}, z)\psi dt + \int_0^T (b_3 \phi_y, z)\psi dt +$$
$$+ \int_0^T (b_4 v_y, z)\psi dt - \int_0^T (b_5 v_y, z_y)\psi dt = 0.$$

Pelo Lema de Du Bois Raymond

$$(v_{tt}, w) + a(t, v, w) + (a_2 \phi_y, w) + (a_3 v_{ty}, w) + (a_4 v_y, w) = 0 \qquad (2.91)$$

$$(\phi_t, z) + b(t, \phi, z) + (b_2 v_{ty}, z) + (b_3 \phi_y, z) + (2b_4 v_y, z) - (b_5 v_y, z_y) = 0 \qquad (2.92)$$

para toda $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$.

Portanto, v e ϕ são soluções de (2.7)-(2.10) em Q.

2.4 Condições iniciais

De (2.55) temos

$$v_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} v_t \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(-1,1)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(-1,1)).$$

Então,

$$\int_0^T (v_t^m(t),\xi(t))dt \longrightarrow \int_0^T (v_t(t),\xi(t))dt$$

para todo $\xi \in L^1(0,T,L^2(-1,1))$.

Seja $\Phi \in C^1(0,T)$ tal que $\Phi(0)=1$, $\Phi(T)=0$ e $w \in H_0^1(-1,1)$. Tomando $\xi = \Phi w$, segue

$$\int_0^T (v_t^m(t),w)\Phi(t)dt \longrightarrow \int_0^T (v_t(t),w)\Phi(t)dt. \tag{2.93}$$

Integrando por partes na variável t e usando que $\Phi(0)=1$, $\Phi(T)=0$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^T (v_t^m(t),w)\Phi(t)dt &= \int_0^T\int_{-1}^1 v_t^m(y,t)w(y)\Phi(t)\,dydt \\
&= \int_{-1}^1 \left[\int_0^T v_t^m(y,t)\Phi(t)dt\right] w(y)\,dy \\
&= \int_{-1}^1 \left[v^m(y,t)\Phi(t)\Big|_0^T - \int_0^T v^m(y,t)\Phi_t(t)dt\right] w(y)\,dy \\
&= \int_{-1}^1 \left[-v^m(y,0) - \int_0^T v^m(y,t)\Phi_t(t)dt\right] w(y)\,dy \\
&= -(v_0^m,w) - \int_0^T (v^m(t),w)\Phi_t(t)dt
\end{aligned}$$

obtemos então

$$(v_0^m,w) = -\int_0^T (v_t^m(t),w)\Phi(t)dt - \int_0^T (v^m(t),w)\Phi_t(t)dt. \tag{2.94}$$

Por outro lado, de (2.38) temos

$$\int_0^T (v^m(t),\eta(t))dt \longrightarrow \int_0^T (v(t),\eta(t))dt$$

para todo $\eta \in L^1(0,T,L^2(-1,1))$.

Tomando em particular $\eta = w\Phi_t$, onde $w \in H_0^1(-1,1)$ e $\Phi \in C^1(0,T)$ teremos

$$\int_0^T (v^m(t),w)\Phi_t dt \longrightarrow \int_0^T (v(t),w)\Phi_t dt. \tag{2.95}$$

Usando (2.93) e (2.95) em (2.94) segue que

$$\begin{aligned}(v_0^m, w) \longrightarrow & -\int_0^T (v_t(t), w)\Phi(t)dt - \int_0^T (v(t), w)\Phi_t(t)dt \\ = & -\int_0^T (v_t(t), w)\Phi(t)dt - (v(t), w)\Phi(t)\Big|_0^T + \int_0^T (v_t(t), w)\Phi_t(t)dt \\ = & \ (v(0), w)\end{aligned}$$

para todo $w \in H_0^1(-1,1)$. Pelo problema aproximado (2.14) temos que

$$v_0^m \longrightarrow v_0 \ \text{ em } \ H_0^1(-1,1) \cap H^2(-1,1)$$

então

$$(v_0^m, w) \longrightarrow (v_0, w)$$

para todo $w \in H_0^1(-1,1) \cap H^2(-1,1)$.
Assim, pela unicidade do limite fraco

$$v(0) = v_0 \ \text{ em } \ H_0^1(-1,1) \cap H^2(-1,1).$$

Mostraremos agora que $v_t(0) = v_1$ em $H_0^1(-1,1)$. Seja $\Phi \in C^1(0,T)$ tal que $\Phi(0) = 1$ e $\Phi(T) = 0$.
Consideraremos $j \in \mathbb{N}$ e o problema aproximado (2.12)-(2.16) com $m > j$. De (2.12) temos

$$\begin{aligned}\int_0^T (v_{tt}^m(t), w_j)\Phi(t)\,dt + \int_0^T a(t, v^m(t), w_j)\Phi(t)\,dt + \int_0^T (a_2\phi_y^m, w_j)\Phi(t)\,dt \\ + \int_0^T (a_3 v_{ty}^m, w_j)\Phi(t)\,dt + \int_0^T (a_4 v_y^m, w_j)\Phi(t)\,dt = 0. \quad (2.96)\end{aligned}$$

Integrando a primeira parcela obtemos

$$\int_0^T (v_{tt}^m(t), w_j)\Phi(t)\,dt = -(v_t^m(0), w_j) - \int_0^T (v_t^m(t), w_j)\Phi_t(t)\,dt.$$

Substituindo em (2.96) segue

$$\begin{aligned}-(v_t^m(0), w_j) & - \int_0^T (v_t^m(t), w_j)\Phi_t(t)\,dt + \int_0^T a(t, v^m(t), w_j)\Phi(t)\,dt + \int_0^T (a_2\phi_y^m, w_j)\Phi(t)\,dt \\ & + \int_0^T (a_3 v_{ty}^m, w_j)\Phi(t)\,dt + \int_0^T (a_4 v_y^m, w_j)\Phi(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$, e de (2.15), (2.77), (2.79), (2.81), (2.82) e (2.93), temos

$$\begin{aligned} -(v_1, w_j) &- \int_0^T (v_t(t), w_j)\Phi_t(t)\, dt + \int_0^T a(t, v(t), w_j)\Phi(t)\, dt + \int_0^T (a_2\phi_y, w_j)\Phi(t)\, dt \\ &+ \int_0^T (a_3 v_{ty}, w_j)\Phi(t)\, dt + \int_0^T (a_4 v_y, w_j)\Phi(t)\, dt = 0. \end{aligned}$$

Pela totalidade dos w_j obtemos

$$\begin{aligned} -(v_1, w) &- \int_0^T (v_t(t), w)\Phi_t(t)\, dt + \int_0^T a(t, v(t), w)\Phi(t)\, dt + \int_0^T (a_2\phi_y, w)\Phi(t)\, dt \\ &+ \int_0^T (a_3 v_{ty}, w)\Phi(t)\, dt + \int_0^T (a_4 v_y, w)\Phi(t)\, dt = 0 \end{aligned}$$

para todo $w \in H_0^1(-1,1)$ e para todo $\Phi \in C^1(0,T)$.

Integrando a segunda parcela da equação acima temos

$$\begin{aligned} -(v_1, w) &- \left(-(v_t(0), w) - \int_0^T (v_{tt}(t), w)\Phi(t)\, dt\right) + \int_0^T a(t, v(t), w)\Phi(t)\, dt \\ &+ \int_0^T (a_2\phi_y, w)\Phi(t)\, dt + \int_0^T (a_3 v_{ty}, w)\Phi(t)\, dt + \int_0^T (a_4 v_y, w)\Phi(t)\, dt = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &-(v_1, w) + (v_t(0), w) + \int_0^T (v_{tt}(t), w)\Phi(t)\, dt + \int_0^T a(t, v(t), w)\Phi(t)\, dt \\ &+ \int_0^T (a_2\phi_y, w)\Phi(t)\, dt + \int_0^T (a_3 v_{ty}, w)\Phi(t)\, dt + \int_0^T (a_4 v_y, w)\Phi(t)\, dt = 0. \quad (2.97) \end{aligned}$$

De (2.91) e (2.97) temos

$$(v_1, w) = (v_t(0), w), \quad \text{para todo } w \in H_0^1(-1,1).$$

Logo, $v_1 = v_t(0)$ em $H_0^1(-1,1)$.

Finalmente, mostraremos que $\phi(0) = \phi_0$ em $V \cap H^2(-1,1)$. De (2.56) temos

$$\phi_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi_t \ \text{ em } \ L^\infty(0,T; L^2(-1,1)).$$

Então,

$$\int_0^T (\phi_t^m(t), \xi(t))dt \longrightarrow \int_0^T (\phi_t(t), \xi(t))dt$$

para todo $\xi \in L^1(0,T,L^2(-1,1))$.

Seja $\Phi \in C^1(0,T)$ tal que $\Phi(0) = 1$, $\Phi(T) = 0$ e $z \in V$. Tomando $\xi = \Phi z$, segue

$$\int_0^T (\phi_t^m(t), z)\Phi(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\phi_t(t), z)\Phi(t)dt. \quad (2.98)$$

Integrando por partes na variável t e usando que $\Phi(0) = 1$, $\Phi(T) = 0$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\phi_t^m(t), z)\Phi(t)dt &= \int_0^T \int_{-1}^1 \phi_t^m(y,t)z(y)\Phi(t)\,dydt \\
&= \int_{-1}^1 \left[\int_0^T \phi_t^m(y,t)\Phi(t)dt\right] z(y)\,dy \\
&= \int_{-1}^1 \left[\phi^m(y,t)\Phi(t)\Big|_0^T - \int_0^T \phi^m(y,t)\Phi_t(t)dt\right] z(y)\,dy \\
&= \int_{-1}^1 \left[-\phi^m(y,0) - \int_0^T \phi^m(y,t)\Phi_t(t)dt\right] z(y)\,dy \\
&= -(\phi_0^m, z) - \int_0^T (\phi^m(t), z)\Phi_t(t)dt
\end{aligned}$$

obtemos então

$$(\phi_0^m, z) = -\int_0^T (\phi_t^m(t), z)\Phi(t)dt - \int_0^T (\phi^m(t), z)\Phi_t(t)dt. \tag{2.99}$$

Por outro lado, de (2.74) temos

$$\int_0^T (\phi^m(t), \eta(t))dt \longrightarrow \int_0^T (\phi(t), \eta(t))dt$$

para todo $\eta \in L^2(0,T,L^2(-1,1))$.

Tomando em particular $\eta = z\Phi_t$, onde $z \in V$ e $\Phi \in C^1(0,T)$ teremos

$$\int_0^T (\phi^m(t), z)\Phi_t dt \longrightarrow \int_0^T (\phi(t), z)\Phi_t dt. \tag{2.100}$$

Usando (2.98) e (2.100) em (2.99) segue que

$$\begin{aligned}
(\phi_0^m, z) \longrightarrow &- \int_0^T (\phi_t(t), z)\Phi(t)dt - \int_0^T (\phi(t), z)\Phi_t(t)dt \\
&= -\int_0^T (\phi_t(t), z)\Phi(t)dt - (\phi(t), z)\Phi(t)\Big|_0^T + \int_0^T (\phi_t(t), z)\Phi_t(t)dt \\
&= (\phi(0), z)
\end{aligned}$$

para todo $w \in V$. Pelo problema aproximado (2.16) temos que

$$\phi_0^m \longrightarrow \phi_0 \;\text{ em }\; V \cap H^2(-1,1)$$

então

$$(\phi_0^m, z) \longrightarrow (\phi_0, z)$$

para todo $z \in V \cap H^2(-1,1)$.

Assim, pela unicidade do limite fraco

$$\phi(0) = \phi_0 \;\text{ em }\; V \cap H^2(-1,1).$$

2.5 Unicidade

Sejam $(\hat{v},\hat{\phi}),(\tilde{v},\tilde{\phi})$ soluções de (2.7)-(2.10). Então $v=\hat{v}-\tilde{v}$ e $\phi=\hat{\phi}-\tilde{\phi}$ são soluções de (2.7)-(2.10) com condições iniciais nulas.

Multiplicando as equações (2.7)-(2.8) por $(\beta/\alpha)v_t$ e ϕ respectivamente e somando uma com a outra, segue

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{2\alpha}\frac{d}{dt}|v_t|^2 &+ \frac{\beta}{\alpha}a(t,v,v_t)+\frac{\beta}{\alpha}(a_2\phi_y,v_t)+\frac{\beta}{\alpha}(a_3v_{ty},v)+\frac{\beta}{\alpha}(a_4v_y,v_t)+\\ +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi|^2 &+ b(t,\phi,\phi)+(b_2v_{ty},\phi)+(b_3\phi_y,\phi)+(b_4v_y,\phi)-(b_5v_y,\phi_y)=0.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}a(t,v,v_t) &= \frac{\beta}{2\alpha}\frac{d}{dt}a(t,v,v)-\frac{\beta}{2\alpha}a'(t,v,v)\\ \frac{\beta}{\alpha}(a_2\phi_y,v) &= -(b_2v_{ty},\phi)\\ \frac{\beta}{\alpha}(a_3v_{ty},v_t) &= -\frac{\beta}{\alpha}\int_{-1}^{1}a_{3y}|v_t|^2dy-\frac{\beta}{\alpha}\int_{-1}^{1}a_3v_{ty}v_tdy,\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{2\alpha}\frac{d}{dt}\Big[|v_t|^2+a(t,v,v) &+ \frac{\alpha}{\beta}|\phi|^2\Big]+b(t,\phi^m,\phi^m)=\frac{\beta}{2\alpha}a(t,v,v)+\\ +\frac{\beta}{2\alpha}\int_{-1}^{1}a_{3y}|v_t|^2dy &- \frac{\beta}{\alpha}(a_4v_y,v_t)-(b_3\phi_y,\phi)-(b_4v_y,\phi)+(b_5v_y,\phi_y).\end{aligned}$$

Da regularidade de v,ϕ e das funções a_i e b_i segue, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Desigualdade de Young, que existe uma constante $c_1>0$ tal que

$$\frac{\beta}{2\alpha}\frac{d}{dt}\Big[|v_t|^2+a(t,v,v) + \frac{\alpha}{\beta}|\phi|^2\Big]+b(t,\phi,\phi)\le C_1[|v_t|^2+\|v\|^2+|\phi|^2]+\frac{c_1}{2}\|\phi\|_1^2.$$

Integrando e observando que a e b são formas coercivas, obteremos

$$\begin{aligned}&\frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_t|^2+c_a\|v\|^2+\frac{\alpha}{\beta}|\phi|^2\Big]+c_b\int_0^t\|\phi\|_1^2\,dt\le\\ &\qquad\frac{\beta}{2\alpha}\Big[|v_1|^2+C_2\|v_0\|^2+\frac{\alpha}{\beta}|\phi_0|^2\Big]+C_1\int_0^t|v_t|^2+\|v\|^2+|\phi|^2dt.\end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante positiva.

E pelas condições iniciais nulas, segue que existe $C_3>0$ tal que

$$|v_t|^2+\|v\|^2+|\phi|^2\le C_3\int_0^t(|v_t|^2+\|v\|^2+|\phi|^2)dt.$$

Então, pela Desigualdade de Gronwall, teremos que

$$|v_t|^2 + \|v\|^2 + |\phi|^2 = 0.$$

Portanto, $\hat{v} = \tilde{v}$ e $\hat{\phi} = \tilde{\phi}$, confirmando a unicidade. O que conclui a demonstração do Teorema (2.2).

2.6 Solução do problema no domínio não cilíndrico

Considere o espaço

$$\hat{V} = \{w \in H^1(\Omega_0) : w_y(-K(0)) = 0 = w(K(0))\}.$$

Teorema 2.3 *Dados $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$, $\theta_0 \in \hat{V} \cap H^2(\Omega_0)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega_0)$, existem únicas funções*

$$u : \hat{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \theta : \hat{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo as condições:

($\hat{A}$) $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t))$, $u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_t))$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_t))$,

($\hat{B}$) $\theta \in L^2(0,T, V \cap H^2(\Omega_t))$, $\theta_t \in L^2(0,T; H^1(\Omega_t))$

as quais são soluções de (2.1)-(2.4) em $\hat{Q}$.

Demonstração: Se (v, ϕ) é uma solução do Teorema (2.2), consideremos as funções:

$$\begin{cases} u(x,t) &= v(y,t), \quad x = K(t)y \\ \theta(x,t) &= \phi(y,t). \end{cases} \tag{2.101}$$

E também

$$\begin{aligned} v_t(y,t) &= \frac{d}{dt}u(K(t)y,t) = u_t(K(t)y,t) = u_x(K(t)y,t)K'(t)y + u_t(K(t)y,t) \\ v_t(y,0) &= u_{0,x}(K(0)y)K'(0)y + u_{0,t}(K(0)y) = K'(0)y\, u_{0,x}(K(0)y) + u_1(K(0)y). \end{aligned}$$

ou seja

$$v_0(y) = u_0(k(0)y), \quad \phi_0(y) = \theta_0(K(0)y) \tag{2.102}$$

$$v_1(y) = u_1(k(0)y) + K'(0)y\, u_{0,x}(K(0)y) \tag{2.103}$$

As funções $u(x,t)$ e $\theta(x,t)$ definidas por (2.101) são soluções do Teorema (2.3). Para isto, é suficiente observar que a aplicação

$$(x,t) \longmapsto \left(\frac{x}{K(t)}, t\right)$$

de $\hat{Q}$ em $]-1,1[\times]0,T[$ é de classe C^2 e as derivadas de u, θ satisfazem

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{K^2} v_{yy}(y,t) \tag{2.104}$$

$$\alpha\theta_x(x,t) = a_2(t)\phi_y(y,t) \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= v_{tt}(y,t) - [a_1(y,t)v_y(y,t)]_y + \\ &+ a_3(y,t)v_{ty}(y,t) + a_4(y,t)v_y(y,t) + \frac{1}{K^2}v_{yy}(y,t) \end{aligned} \tag{2.106}$$

$$K\theta_{xx}(x,t) = b_1(t)\phi_{yy}(y,t) \tag{2.107}$$

$$\theta_t(x,t) = \phi_t(y,t) + b_3(y,t)\phi_y(y,t) \tag{2.108}$$

$$\beta u_{xt}(x,t) = b_2(t)v_{yt}(y,t) + b_4(t)v_y(y,t) + b_5(y,t)v_{yy}(y,t) \tag{2.109}$$

Então, de (2.104) a (2.109) e do Teorema (2.2) segue a existência no Teorema (2.3). Analogamente, de (2.104) a (2.109) segue que, se (u,θ) é solução de (2.1)-(2.4) então (v,ϕ) definida por (2.101) é solução de (2.7)-(2.10). Portanto, os sistemas (2.1)-(2.4) e (2.7)-(2.10) são equivalentes.

Unicidade

Sejam $(\hat{u},\hat{\theta})$, $(\tilde{u},\tilde{\theta})$ soluções de (2.1)-(2.4). Como (2.1)-(2.4) e (2.7)-(2.10) são equivalentes, $(\hat{v},\hat{\theta})$, $(\tilde{v},\tilde{\theta})$ definidas por (2.101) são soluções de (2.7)-(2.10). Pela unicidade no Teorema (2.2), temos que

$$\hat{v} = \tilde{v} \quad \text{e} \quad \hat{\phi} = \tilde{\phi}.$$

Então, de (2.101) concluímos que

$$\hat{u} = \tilde{u} \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = \tilde{\theta}.$$

Completando a prova do Teorema (2.3). ■

Capítulo 3

Decaimento exponencial da solução

Neste capítulo, com o uso de técnicas multiplicativas mostraremos a existênica de um funcional de Liapunov $\mathcal{L}(t)$ onde $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -c\mathcal{L}(t)$ que é equivalente à energia associada às equações (2.1) e (2.2), obtendo assim o decaimento exponencial da energia do sistema (2.1)-(2.4).

Para isto assumiremos as seguintes hipóteses

(H1) Existe uma constante positiva K_1 tal que

$$0 < K_0 \leq K(t) \leq K_1, \qquad t \geq 0$$

(H2) Existe uma constante positiva $k_0 \leq min\left\{1, \frac{k}{C_0(2\alpha\beta+1)}\right\}$ tal que

$$0 < K'(t) \leq k_0, \qquad t \geq 0$$

onde $C_0 > 0$ é a constante da imersão $H^1 \hookrightarrow L^\infty$.

(H3) α e β são constantes positivas.

Introduziremos o funcional de energia

$$E(t) =: E(t; u, \theta) = \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} \left(|u_t|^2 + |u_x|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right) dx.$$

Lema 3.1 *Seja $\{u, \theta\}$ solução de (2.1)-(2.4) dada pelo Teorema (2.3), temos então:*

$$\frac{d}{dt}E(t; u, \theta) \leq -\frac{k\alpha}{2\beta}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2 dx - \frac{K'(t)}{4}\left(1 - k_0^2\right)\left(|u_x(K(t), t)|^2 + |u_x(-K(t), t)|^2\right).$$

Demonstração: Multiplicando (2.1) por u_t e integrando na variável x temos

$$\int_{-K(t)}^{K(t)} u_{tt}u_t\, dx - \int_{-K(t)}^{K(t)} u_{xx}u_t\, dx + \alpha\int_{-K(t)}^{K(t)} \theta_x u_t\, dx = 0 \tag{3.1}$$

utilizando a hipótese $u(K(t),t)=0=u(-K(t),t)$ segue

$$u_t(K(t),t) = -K'(t)u_x(K(t),t) \quad e \quad u_t(-K(t),t) = K'(t)u_x(-K(t),t). \tag{3.2}$$

Assim, de

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} \frac{d}{dt}|u_t|^2\,dx + \frac{K'(t)}{2}|u_t(K(t),t)|^2 + \frac{K'(t)}{2}|u_t(-K(t),t)|^2$$

e (3.2) obteremos

$$\begin{aligned}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_{tt}u_t dx &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx - K'(t)|u_t(K(t),t)|^2 - K'(t)|u_t(-K(t),t)|^2\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx - K'(t)^3|u_x(K(t),t)|^2 - K'(t)^3|u_x(-K(t),t)|^2\right]. \end{aligned}\tag{3.3}$$

Aplicando integração por partes e usando (3.2) segue

$$\begin{aligned}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_{xx}\,u_t dx &= -u_x u_t\Big|_{-K(t)}^{K(t)} + \int_{-K(t)}^{K(t)} u_x u_{tx}\,dx\\ &= -u_x(K(t),t)u_t(K(t),t) + u_x(-K(t),t)u_t(-K(t),t) + \int_{-K(t)}^{K(t)} u_x u_{tx}\,dx\\ &= K'(t)|u_x(K(t),t)|^2 + K'(t)|u_x(-K(t),t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx\\ &- \frac{1}{2}K'(t)|u_x(K(t),t)|^2 - \frac{1}{2}K'(t)|u_x(-K(t),t)|^2\\ &= \frac{K'(t)}{2}|u_x(K(t),t)|^2 + \frac{K'(t)}{2}|u_x(-K(t),t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx. \end{aligned}\tag{3.4}$$

Assim, substituindo as igualdades (3.3) e (3.4) em (3.1) segue

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} \left(|u_t|^2 + |u_x|^2\right)dx &= \frac{1}{2}K'(t)^3|u_x(K(t),t)|^2 + \frac{1}{2}K'(t)^3|u_x(-K(t),t)|^2\\ &\quad -\frac{K'(t)}{2}|u_x(K(t),t)|^2 - \frac{K'(t)}{2}|u_x(-K(t),t)|^2\\ &\quad -\alpha\int_{-K(t)}^{K(t)} \theta_x u_t\,dx. \end{aligned}\tag{3.5}$$

Agora multiplicando (2.2) por θ e integrando na variável x obteremos

$$\int_{-K(t)}^{K(t)} (\theta_t\theta - k\theta_{xx}\theta + \beta u_{tx}\theta)\,dx = 0. \tag{3.6}$$

Como

$$
\begin{aligned}
\int_{-K(t)}^{K(t)} \theta_t \theta \, dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2 \, dx - \frac{K'(t)}{2}|\theta(-K(t),t)|^2 \\
-k\int_{-K(t)}^{K(t)} \theta_{xx}\theta \, dx &= k\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2 \, dx \\
\beta\int_{-K(t)}^{K(t)} u_{xt}\theta \, dx &= -\beta u_t(-K(t),t)\theta(-K(t),t) - \beta\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t\theta_x \, dx
\end{aligned}
$$

substituindo em (3.6) e usando (3.2) obteremos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2 \, dx &= \frac{K'(t)}{2}|\theta(-K(t),t)|^2 - k\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2 \, dx + \beta\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t\theta_x \, dx \\
&+ \beta K'(t)u_x(-K(t),t)\theta(-K(t),t). \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Multiplicando (3.7) por $\dfrac{\alpha}{\beta}$ e somando com a equação (3.5), segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} \left[|u_t|^2 + |u_x|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right] dx &= -\frac{k\alpha}{\beta}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2 \, dx \\
&+ \frac{K'(t)^3}{2}\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] \\
&- \frac{K'(t)}{2}\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] \\
&+ \frac{\alpha}{2\beta}K'(t)|\theta(-K(t),t)|^2 \\
&+ \alpha K'(t)u_x(-K(t),t)\theta(-K(t),t).
\end{aligned}
$$

Utilizando a Desigualdade de Young no último termo da equação acima temos

$$
\begin{aligned}
\alpha K'(t)u_x(-K(t),t)\theta(-K(t),t) &\leq \alpha K'(t)|u_x(-K(t),t)||\theta(-K(T),t)| \\
&\leq \frac{\sqrt{K'(t)}}{2}\left(|u_x(-K(t),t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} 2\alpha\sqrt{K'(t)}\left(|\theta(-K(t),t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{K'(t)}{4}|u_x(-K(t),t)|^2 + \alpha^2 K'(t)|\theta(-K(t),t)|^2.
\end{aligned}
$$

Da imersão $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ temos

$$
\alpha K'(t)u_x(-K(t),t)\theta(-K(t),t) \leq \frac{K'(t)}{4}|u_x(-K(t),t)|^2 + \alpha^2 K'(t)C_0\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2 \, dx
$$

onde $C_0 > 0$ é a constante da imersão.

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)}\left[|u_t|^2+|u_x|^2+\frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right]dx \ &\leq\ -\frac{k\alpha}{\beta}\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx\\
&+\ \frac{K'(t)^3}{2}\left[|u_x(K(t),t)|^2+|u_x(-K(t),t)|^2\right]\\
&-\ \frac{K'(t)}{4}\left[|u_x(K(t),t)|^2+|u_x(-K(t),t)|^2\right]\\
&+\ C_0\left(\alpha^2+\frac{\alpha}{2\beta}\right)K'(t)\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Segue, da hipótese $(H2)$ que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)}\left[|u_t|^2+|u_x|^2+\frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right]dx \ &\leq\ -\frac{k\alpha}{2\beta}\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx\\
&-\ \frac{K'(t)}{4}\left(1-k_0^2\right)\left[|u_x(K(t),t)|^2+|u_x(-K(t),t)|^2\right]
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Para estimar o termo $\displaystyle\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_x|^2\,dx$ da energia usaremos o seguinte lema

Lema 3.2 *Das hipóteses do Lema 3.1, temos*

$$\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t u\,dx \leq \int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_x|^2\,dx+C_p\frac{\alpha^2}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx$$

onde C_p é a constante de Poincaré.

Demonstração: Da condição de contorno $u(-K(t),t)=u(K(t),t)=0$ segue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t u\,dx \ &=\ \int_{-K(t)}^{K(t)}\frac{\partial}{\partial t}(uu_t)\,dx+K'(t)\left[|u(K(t),t)|^2|u_t(K(t),t)|^2\right]\\
&\quad +K'(t)\left[|u(-K(t),t)|^2|u_t(-K(t),t)|^2\right]\\
&=\ \int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx+\int_{-K(t)}^{K(t)}uu_{tt}\,dx.
\end{aligned}$$

Substituindo $u_{tt}=u_{xx}-\alpha\theta_x$ na derivada acima temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t u\,dx \ &=\ \int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx+\int_{-K(t)}^{K(t)}uu_{xx}\,dx-\alpha\int_{-K(t)}^{K(t)}u\theta_x\,dx\\
&=\ \int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx-\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_x|^2\,dx+\alpha\int_{-K(t)}^{K(t)}u_x\theta\,dx \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Desigualdade de Young em (3.8) temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t u\,dx &\leq \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx - \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx + \alpha\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx - \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx + \frac{\alpha^2}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx\\
&\leq \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx + C_p\frac{\alpha^2}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx
\end{aligned}$$

obtendo a conclusão desejada. ■

Para estimarmos o termo $\displaystyle\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx$ da energia introduziremos a função $q = \displaystyle\int_{-K(t)}^{x} \theta\,ds$. Nestas condições temos o seguinte lema

Lema 3.3 *Das hipóteses do Lema (3.1), temos que existem constantes positivas* $\tilde{C}_1$ *e* $\tilde{C}_2$ *tais que*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t q\,dx \leq\ & \tilde{C}_1\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx - \int_{-K(t)}^{K(t)} u_x\theta\,dx - \frac{\beta}{4}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx\\
&+\varepsilon K(t)|u_x(K(t),t)|^2 + \tilde{C}_2 K'(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right].
\end{aligned}$$

Demonstração: Calculando a derivada

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t q\,dx &= \int_{-K(t)}^{K(t)} \frac{\partial}{\partial t}(u_t q)\,dx + K'(t)u_t(K(t),t)q(K(t),t) +\\
&\quad +K'(t)u_t(-K(t),t)q(-K(t),t)\\
&= \int_{-K(t)}^{K(t)} u_{tt}q\,dx + \int_{-K(t)}^{K(t)} u_t q_t\,dx + K'(t)u_t(K(t),t)q(K(t),t).
\end{aligned}$$

Substituindo $\quad u_{tt} = u_{xx} - \alpha\theta_x \quad$ e $\quad q = \displaystyle\int_{-K(t)}^{x} \theta\,ds \quad$ na derivada acima

$$\begin{aligned}
I_1 &=: \frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t q\,dx\\
&= \int_{-K(t)}^{K(t)} (u_{xx} - \alpha\theta_x)q\,dx + \int_{-K(t)}^{K(t)} u_t\left[\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{x} \theta\,ds\right]dx\\
&\quad +K'(t)u_t(K(t),t)q(K(t),t).
\end{aligned}$$

Integrando por partes e aplicando a regra de derivação sob o sinal de integração temos

$$\begin{aligned}
I_1 &= (u_x - \alpha\theta)\,q\Big|_{-K(t)}^{K(t)} - \int_{-K(t)}^{K(t)} (u_x - \alpha\theta_x)q_x\,dx\\
&\quad + \int_{-K(t)}^{K(t)} u_t\left[\int_{-K(t)}^{x} \theta_t\,ds + K'(t)\theta(-K(t),t)\right]dx\\
&\quad +K'(t)u_t(K(t),t)q(K(t),t).
\end{aligned}$$

De $q(-K(t),t)=\theta(K(t),t)=0$ segue que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= u_x(K(t),t)q(K(t),t)-\int_{-K(t)}^{K(t)} u_xq_x\,dx+\int_{-K(t)}^{K(t)}\alpha\theta\left[\frac{d}{dx}\int_{-K(t)}^{x}\theta\,ds\right]dx\\
&\quad+\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t\,dx\left[\int_{-K(t)}^{x}\theta_t\,ds\right]-K'(t)\theta(-K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t\,dx\\
&\quad+K'(t)u_t(K(t),t)q(K(t),t).
\end{aligned}
$$

Como $q_x=\theta$ e $q_t=\displaystyle\int_{-K(t)}^{x}\theta_t\,ds+K'(t)\theta(-K(t),t)$ obteremos

$$
\begin{aligned}
I_1 &= u_x(K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta\,dx-\int_{-K(t)}^{K(t)}u_x\theta\,dx+\alpha\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta|^2\,dx\\
&\quad+\int_{-K(t)}^{K(t)}u_tq_t\,dx+K'(t)u_t(K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta\,dx.
\end{aligned}
$$

Agora integraremos a equação (2.2) de $-K(t)$ até x

$$
\int_{-K(t)}^{x}\theta_t\,ds-k\int_{-K(t)}^{x}\theta_{xx}\,ds+\beta\int_{-K(t)}^{x}u_{xt}\,ds=0
$$

recordando que definimos $q=\displaystyle\int_{-K(t)}^{x}\theta\,ds$ segue

$$
q_t-K'(t)\theta(-K(t),t)-k\theta_x+\beta u_t-\beta u_t(-K(t),t)=0.
$$

Multiplicando por u_t e integrando de $-K(t)$ até $K(t)$

$$
\begin{aligned}
I_2=:\int_{-K(t)}^{K(t)}u_tq_t\,dx &= K'(t)\theta(-K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t\,dx+k\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta_xu_t\,dx\\
&- \beta\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx+\beta u_t(-K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t\,dx.
\end{aligned}
$$

Substituindo (I_2) em (I_1) e de (3.2) obteremos

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)}u_tq\,dx\\
&= u_x(K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta\,dx-\int_{-K(t)}^{K(t)}u_x\theta\,dx\\
&\quad+\alpha\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta|^2\,dx+K'(t)\theta(-K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t\,dx\\
&\quad+k\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta_xu_t\,dx-\beta\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx+\beta K'(t)u_x(-K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t\,dx\\
&\quad-[K'(t)]^2u_x(K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta\,dx. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Façamos agora algumas estimativas:

Usando a Desigualdade de Cauchy Schwarz e a Desigualdade de Young para estimar cada termo da equação (I_1) e usando a Desigualdade de Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
u_x(K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta\,dx &\leq |u_x(K(t),t)|\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta|\,dx \\
&\leq |u_x(K(t),t)|\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}1\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\varepsilon}\,|u_x(K(t),t)|\,\sqrt{2K(t)}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varepsilon K(t)|u_x(K(t),t)|^2+\frac{C_p}{2\varepsilon}\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

onde ε é uma constante positiva satisfazendo $\varepsilon < \frac{\beta}{64}$.

Usando que $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ segue

$$\begin{aligned}
K'(t)\theta(-K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t\,dx &\leq K'(t)\,|\theta(-K(t),t)|\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|\,dx \\
&\leq K'(t)\,|\theta(-K(t),t)|\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}1\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\beta}}K'(t)\,|\theta(-K(t),t)|\,\sqrt{2K(t)}\frac{\sqrt{\beta}}{2}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{4}{\beta}K(t)K'(t)^2|\theta(-K(t),t)|^2+\frac{\beta}{8}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx \\
&\leq \frac{4}{\beta}K(t)K'(t)^2C_0\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx+\frac{\beta}{8}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

onde $C_0 > 0$ é a constante da imersão $H^1 \hookrightarrow L^\infty$.

$$\begin{aligned}
k\int_{-K(t)}^{K(t)}u_t\theta_x\,dx &\leq k\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|\,|\theta_x|\,dx \\
&\leq \sqrt{\beta}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\frac{k}{\sqrt{\beta}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\beta}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx+\frac{k^2}{2\beta}\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta K'(t)u_x(-K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t\,dx &\leq \beta K'(t)\,|u_x(-K(t),t)|\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|\,dx \\
&\leq \beta K'(t)\,|u_x(-K(t),t)|\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} 1\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2\beta}{\sqrt{\beta}}K'(t)\,|u_x(-K(t),t)|\,\sqrt{2K(t)}\frac{\sqrt{\beta}}{2}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 4\beta K'(t)^2|u_x(-K(t),t)|^2K(t)+\frac{\beta}{8}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Finalmente, estimando o último termo de (3.9) temos

$$
\begin{aligned}
K'(t)^2u_x(K(t),t)\int_{-K(t)}^{K(t)} \theta\,dx &\leq K'(t)^2\,|u_x(K(t),t)|\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|\,dx \\
&\leq K'(t)\,|u_x(K(t),t)|\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} 1\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= K'(t)^2\,|u_x(K(t),t)|\,\sqrt{2K(t)}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K(t)K'(t)^4|u_x(K(t),t)|^2+\frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\,dx \\
&\leq K(t)K'(t)^4|u_x(K(t),t)|^2+\frac{C_p}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Substituindo as estimativas (3.12) - (3.14) em (3.9) obteremos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_tq\,dx &\leq \alpha\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\,dx-\int_{-K(t)}^{K(t)} u_x\theta\,dx-\frac{\beta}{4}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx \\
&+ 4\beta K(t)K'(t)^2|u_x(-K(t),t)|^2+\frac{4}{\beta}K(t)K'(t)^2C_0\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx \\
&+ \varepsilon K(t)|u_x(K(t),t)|^2+K(t)K'(t)^4|u_x(K(t),t)|^2 \\
&+ \frac{k^2}{2\beta}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx+\left(\frac{C_p}{2}+\frac{C_p}{2\varepsilon}\right)\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré no primeiro termo da desigualdade anterior e agrupando os termos em comum obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_tq\,dx &\leq \left(\alpha C_p+\frac{4}{\beta}K(t)k_0^2C_0+\frac{k^2}{2\beta}+\frac{C_p}{2}+\frac{C_p}{2\varepsilon}\right)\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx \\
&- \int_{-K(t)}^{K(t)} u_x\theta\,dx-\frac{\beta}{4}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx+4\beta K(t)K'(t)^2|u_x(-K(t),t)|^2 \\
&+ K(t)K'(t)^4|u_x(K(t),t)|^2+\varepsilon K(t)|u_x(K(t),t)|^2.
\end{aligned}
$$

Das hipóteses (H1) e (H2) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t q\,dx &\leq \left(\alpha C_p + \frac{C_p}{2} + \frac{C_p}{2\varepsilon} + \frac{k^2}{2\beta} + \frac{4}{\beta}K_1 k_0^2 C_0\right)\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx \\
&- \int_{-K(t)}^{K(t)} u_x\theta\,dx - \frac{\beta}{4}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx + \varepsilon K(t)|u_x(K(t),t)|^2 \\
&+ K'(t)K_1 k_0\left(4\beta + k_0^2\right)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right]
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t q\,dx &\leq \tilde{C}_1\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx - \int_{-K(t)}^{K(t)} u_x\theta\,dx - \frac{\beta}{4}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx \\
&+ \varepsilon K(t)|u_x(K(t),t)|^2 + \tilde{C}_2 K'(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right]
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{C}_1 = \alpha C_p + \dfrac{C_p}{2} + \dfrac{C_p}{2\varepsilon} + \dfrac{k^2}{2\beta} + \dfrac{4}{\beta}K_1 k_0^2 C_0$ e $\tilde{C}_2 = K_1 k_0\left(4\beta + k_0^2\right)$ o que conclui a demonstração do lema. ■

Para estimar os termos pontuais $|u_x(K(t),t)|^2$ e $|u_x(-K(t),t)|^2$ usaremos o seguinte lema:

Lema 3.4 *Com as mesmas hipóteses do Lema (3.1), temos que:*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t x u_x\,dx &= \frac{K(t)}{2}\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] \\
&- \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx - \alpha\int_{-K(t)}^{K(t)} \theta_x x u_x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx \\
&- \frac{K'(t)^2 K(t)}{2}\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right].
\end{aligned}
$$

Demonstração: Inicialmente calcularemos a derivada

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t x u_x\,dx &= \int_{-K(t)}^{K(t)} \frac{d}{dt}\left(u_t x u_x\right)dx + K'(t)K(t)\left[u_t(K(t),t)u_x(K(t),t)\right] \\
&\quad -K'(t)K(t)\left[u_t(-K(t),t)u_x(-K(t),t)\right].
\end{aligned}
$$

De (3.2) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t x u_x\,dx &= \int_{-K(t)}^{K(t)} \left[u_{tt} x u_x + u_t x u_{xt}\right]dx - K'(t)^2 K(t)\left[u_x(K(t),t)\right]^2 \\
&\quad -K'(t)^2 K(t)\left[u_x(-K(t),t)\right]^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo $u_{tt} = u_{xx} - \alpha\theta_x$ na derivada acima

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t x u_x \, dx &= \int_{-K(t)}^{K(t)} (u_{xx} - \alpha\theta_x)\, x u_x \, dx + \int_{-K(t)}^{K(t)} u_t x u_{xt} \, dx \\
&\quad -K'(t)K(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] \\
&= \int_{-K(t)}^{K(t)} u_{xx} x u_x \, dx - \alpha \int_{-K(t)}^{K(t)} \theta_x x u_x \, dx + \int_{-K(t)}^{K(t)} \frac{x}{2}\frac{d}{dx}|u_t|^2 \, dx \\
&\quad -K'(t)K(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] \\
&= \int_{-K(t)}^{K(t)} \frac{x}{2}\frac{d}{dx}|u_x|^2 \, dx - \alpha \int_{-K(t)}^{K(t)} \theta_x x u_x \, dx + \int_{-K(t)}^{K(t)} \frac{x}{2}\frac{d}{dx}|u_t|^2 \, dx \\
&\quad -K'(t)K(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right]. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Integrando por partes alguns termos e usando (3.2) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} x\frac{d}{dx}|u_t|^2 \, dx &= \frac{1}{2}\left[x|u_t|^2\Big|_{-K(t)}^{K(t)} - \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2 \, dx \right] \\
&= \frac{1}{2}\left(K(t)|u_t(K(t),t)|^2 + K(t)|u_t(-K(t),t)|^2\right) - \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2 \, dx \\
&= \frac{K'(t)^2K(t)}{2}\left(|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right) - \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2 \, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} x\frac{d}{dx}|u_x|^2 \, dx &= \frac{1}{2}\left[x|u_x|^2\Big|_{-K(t)}^{K(t)} - \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2 \, dx \right] \\
&= \frac{1}{2}\left(K(t)|u_x(K(t),t)|^2 + K(t)|u_x(-K(t),t)|^2\right) - \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

Substituindo as duas últimas identidades em (3.15) obteremos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t x u_x \, dx &= \frac{K(t)}{2}\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] - \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2 \, dx \\
&- \alpha\int_{-K(t)}^{K(t)} \theta_x x u_x \, dx - \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2 \, dx \\
&- \frac{K'(t)^2K(t)}{2}\left(|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right)
\end{aligned}
$$

concluindo assim a demonstração. ∎

O principal resultado deste capítulo será estabelecido pelo seguinte teorema:

Teorema 3.5 *Sob as mesmas condições do Lema 3.1, existem constantes positivas $\tilde{C}$ e γ tais que*

$$E(t;u,\theta) \le \tilde{C}E(0;u,\theta)e^{-\gamma t}.$$

Demonstração: Multiplicando a desigualdade do Lema 3.2 por $\frac{\beta}{8}$ e somando com a desigualdade do Lema 3.3, obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)}\left(\frac{\beta}{8}u_t u + u_t q\right)dx \quad &\le \quad -\frac{\beta}{16}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_x|^2\,dx - \int_{-K(t)}^{K(t)}u_x\theta\,dx \\
+\left(\frac{\beta}{16}C_p\alpha^2+\tilde{C}_1\right)&\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx - \frac{\beta}{8}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx + \varepsilon K(t)|u_x(K(t),t)|^2 \\
&+\tilde{C}_2K'(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2+|u_x(-K(t),t)|^2\right].
\end{aligned}$$

Logo, usando a Desigualdade de Young e a Desigualdade de Poincaré em $\displaystyle\int_{-K(t)}^{K(t)}u_x\theta\,dx$ obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-K(t)}^{K(t)}\left(\frac{\beta}{8}u_t u + u_t q\right)dx \quad &\le \quad -\frac{\beta}{32}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_x|^2\,dx + \left(\frac{\beta}{16}C_p\alpha^2+\tilde{C}_1+\frac{8C_p}{\beta}\right)\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx \\
-\frac{\beta}{8}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx + \varepsilon K(t)&|u_x(K(t),t)|^2 + \tilde{C}_2K'(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2+|u_x(-K(t),t)|^2\right]. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Considere o funcional

$$\mathcal{F}(t) = \int_{-K(t)}^{K(t)}\left(\frac{\beta}{8}u_t u + u_t q - \frac{\beta}{32}u_t x u_x\right)dx.$$

De (3.16) e do Lema 3.4 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \quad \le \quad & -\frac{\beta}{64}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_x|^2\,dx - \frac{\alpha\beta}{32}\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta_x x u_x\,dx - \frac{7\beta}{64}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_t|^2\,dx \\
&+\tilde{C}_2K'(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2+|u_x(-K(t),t)|^2\right] \\
&+K(t)\left(\varepsilon-\frac{\beta}{64}\right)\left[|u_x(K(t),t)|^2+|u_x(-K(t),t)|^2\right] \\
&+\left(\frac{\beta}{16}C_p\alpha^2+\tilde{C}_1+\frac{8C_p}{\beta}\right)\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Note que, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a Desigualdade de Young e da hipótese (H1) segue

$$\begin{aligned}
\int_{-K(t)}^{K(t)}\theta_x x u_x\,dx \quad &\le \quad 2K_1\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x||u_x|\,dx \\
&\le \quad 2K_1\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_x|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \quad \frac{\beta}{128}\int_{-K(t)}^{K(t)}|u_x|^2\,dx + \frac{128K_1^2}{\beta}\int_{-K(t)}^{K(t)}|\theta_x|^2\,dx. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.18) em (3.17)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) &\leq -\frac{\beta}{128}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx - \frac{7\beta}{64}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx \\ &+ \tilde{C}_2 K'(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] + \tilde{C}_3\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx \quad (3.19)\end{aligned}$$

onde $\tilde{C}_3 = \left(\dfrac{\beta C_p \alpha^2}{16} + \tilde{C}_1 + \dfrac{8C_p}{\beta} + \dfrac{128K_1^2}{\beta}\right)$ é uma constante positiva.
Finalmente introduziremos o funcional

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{F}(t) + NE(t)$$

onde $N \in \mathbb{N}$ será escolhido posteriormente.

Note que

$$E(t;u,\theta) \leq \mathcal{L}(t) \leq \tilde{C}_4 E(t;u,\theta) \quad (3.20)$$

ou seja, $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$ são equivalentes, pois

$$\frac{N}{2}E(t) \leq \mathcal{L}(t)$$

e como

$$\mathcal{F}(t) = \frac{\beta}{8}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t u\,dx + \int_{-K(t)}^{K(t)} u_t\left[\int_{-K(t)}^{x}\theta\,ds\right]dx - \frac{\beta}{32}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t x u_x\,dx$$

usando as estimativas

$$\begin{aligned}\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t u\,dx &\leq \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|\,|u|\,dx \\ &\leq \left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |u|^2\,dx\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u|^2\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx + \frac{C_p}{2}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx \quad (3.21)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-K(t)}^{K(t)} u_t \left[\int_{-K(t)}^{x} \theta\, ds\right] dx &\leq \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t| \left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|\, dx\right) dx \\
&= \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|\, dx \int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|\, dx \\
&\leq \left(\int_{-K(t)}^{K(t)} 1\, dx\right) \left[\left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \frac{2\beta K(t)}{\alpha} \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\, dx + \frac{\alpha K(t)}{2\beta} \int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\, dx \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-K(t)}^{K(t)} u_x x u_t\, dx &\leq \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|\, |x|\, |u_t|\, dx \\
&\leq 2K_1 \left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_1^2 \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\, dx \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

segue de (3.21), (3.22) e (3.23) que

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}(t) &\leq \left(\frac{\beta}{16} + \frac{2\beta K_1}{\alpha} + \frac{\beta}{32} K_1^2\right) \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\, dx \\
&\quad + \left(\frac{\beta C_p}{16} + \frac{\beta}{32}\right) \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\, dx + \frac{\alpha K_1}{2\beta} \int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta|^2\, dx \\
&\leq \tilde{C}_5 \left(\frac{1}{2} \int_{-K(t)}^{K(t)} \left[|u_t|^2 + |u_x|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right] dx\right) \\
&\leq \tilde{C}_5 E(t)
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{C}_5 = max\ \left\{\frac{\beta}{8} + \frac{4\beta K_1}{\alpha} + \frac{K_1^2 \beta}{16},\ \frac{\beta C_p}{8} + \frac{\beta}{16},\ \frac{\alpha K_1}{\beta}\right\}$.
Logo, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}(t) &\leq NE(t) + \tilde{C}_5 E(t) \\
&\leq \tilde{C}_6 E(t)
\end{aligned}
$$

onde $\tilde{C}_6 = max\ \{N, \tilde{C}_5\}$.

Do Lema (3.1) e de (3.19) segue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathfrak{L}(t) &\leq -\frac{NK'(t)}{4}\left(1-k_0^2\right)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] \\
&\quad -\frac{N\alpha k}{2\beta}\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx - \frac{\beta}{128}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx - \frac{7\beta}{64}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx \\
&\quad +\tilde{C}_2 K'(t)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right] + \tilde{C}_3\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx \\
&= -\frac{\beta}{128}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx - \frac{7\beta}{64}\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx - \left(\frac{N\alpha k}{2\beta} - \tilde{C}_3\right)\int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx \\
&\quad -K'(t)\left(\frac{N}{4}\left(1-k_0^2\right) - \tilde{C}_2\right)\left[|u_x(K(t),t)|^2 + |u_x(-K(t),t)|^2\right].
\end{aligned}$$

Tomando N suficientemente grande concluímos que existe uma constante positiva C_7 tal que

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{L}(t) \leq -C_7\left[\int_{-K(t)}^{K(t)} |u_x|^2\,dx + \int_{-K(t)}^{K(t)} |u_t|^2\,dx + \int_{-K(t)}^{K(t)} |\theta_x|^2\,dx\right].$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{L}(t) \leq -C_7 E(t; u, \theta).$$

Agora, da equivalência (3.20) segue

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{L}(t) \leq -C_7 E(t) \leq -\frac{C_7}{\tilde{C}_4}\mathfrak{L}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{L}(t) \leq -\gamma\mathfrak{L}(t)$$

ou seja,

$$\mathfrak{L}(t) \leq \mathfrak{L}(0)e^{-\gamma t}.$$

Assim

$$\frac{N}{2}E(t) \leq \mathfrak{L}(t) \leq \mathfrak{L}(0)e^{-\gamma t} \leq \tilde{C}_4 E(0)e^{-\gamma t}.$$

Concluindo

$$E(t) \leq \tilde{C}E(0)e^{-\gamma t}$$

onde $\tilde{C} = \dfrac{2\tilde{C}_4}{N}$. O que completa a demonstração. ■

Observação 3.6 *A demonstração do Teorema 3.5 também é válida no caso particular em que, na hipótese* $(H2)$, *temos* $K'(t) = 0$ *para todo* $t \geq 0$, *ou seja, no domínio cilíndrico.*

Observação 3.7 *As funções do tipo* $K(t) = a + be^{-t}$, *onde* a *e* b *são constantes positivas com* $a > b$ *e* $b \leq k_0 \leq min\left\{1, \frac{k}{C_0(2\alpha\beta+1)}\right\}$, *satisfazem as hipóteses (H1) e (H2) para todo* $t \geq 0$, *basta tomarmos:*

$$K_0 = a - b \quad e \quad K_1 = a.$$

Conclusão

Neste trabalho estudamos o problema termoelástico unidimensional em domínio não cilíndrico com condições de fronteira mistas, isto é, um domínio cuja fronteira depende da variável temporal dada por uma função $K(t)$ e com condições de Dirichlet no deslocamento, temperatura nula numa extremidade e isolada termicamente na outra.

Estabelecemos a existência e unicidade do problema. Inicialmente, utilizamos um difeomorfismo com o objetivo de transformar o domínio não cilíndrico em um domínio cilíndrico, em seguida utilizamos o método de Galerkin para estabelecer a solução fraca do problema com condições de Dirichlet na fronteira.

A motivação do trabalho foi a de exibir uma taxa de decaimento visto que em domínio cilíndrico a solução decai exponencialmente e que em [2] foi mostrado que a solução decai conforme o domínio cresce, no entanto não se obteve nenhuma taxa.

No cálculo do decaimento com condições de Dirichlet para estabelecer um funcional de Liapunov que nos levaria ao decaimento exponencial deparamo-nos com termos que não conseguimos estimar. Assim, optamos por utilizar condições de fronteira mistas em nosso trabalho.

Desta forma, estabelecemos que a dissipação térmica foi suficiente para que a solução possuísse decaimento do tipo exponencial.

Bibliografia

[1] BRÉZIS, H. **Análisis funcional, Teoría y aplicaciones**. París: Masson Editeur, 1983.

[2] CALDAS, C.S.; LIMACO, J.; BARRETO, R.K. **Linear Thermoelastic System in Noncilindrical Domains.** Funkcialaj Ekvacioj, 42 (1999), 115-127.

[3] CODDINGTON, E.A.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. New York: McGraw-Hill, 1955.

[4] DAFERMOS, C.M. **On the Existence and the Asymptotic Stability of Solution to the Equations of Linear Thermoelasticity.** Arch. Rational Mech. Anal., 29 (1968), 241-271.

[5] EVANS, L.C. **Partial Differential Equations.** University of California, Berkeley, 1998.

[6] FIGUEIREDO, D.G; NEVES, A.F. **Equações Diferenciais Aplicadas.** Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1997.

[7] HALE, J.K. **Ordinary Differential Equations**. New York: John Wiley & Sons, 1969.

[8] KESAVAN, S. **Topics in Functional Analysis and Applications**. New York: John Wiley, 1989.

[9] KREYSZIG.E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** New York: John Wiley. 1989.

[10] LIONS, J.L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problêmes aux Limites Non Linéaires**. París: Dunod. 1969.

[11] MEDEIROS, L.A.; MELLO, E.A. **A Integral de Lebesgue**. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos 18, IM-UFRJ, 1989.

[12] MILLA MIRANDA, M.A.; MEDEIROS, L.A. **Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos 25, IM-UFRJ, 1993.

[13] RIVERA, J.E.M. **Exponential Decay in Thermoelasticity.** Funkcialaj Ekvacioj, 35 (1992), 19-30.

[14] RIVERA, J.E.M. **Introdução às Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Rio de Janeiro, LNCC, 2004.

[15] RIVERA, J.E.M. **Tópicos em termo e visco elasticidade.** Rio de Janeiro, LNCC Série: Textos Avançados, 1998.