

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Departamento de Física

**Caos em Modelos  
de Bianchi IX  
Anisotrópicos  
com Adição de  
um Termo Quântico**

Gustavo Coelho Corrêa

Orientadora: Teresinha J. Stuchi (IF/UFRJ)

Dissertação de Mestrado

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Caos em Modelos de Bianchi IX  
Anisotrópicos com Adição  
de um Termo Quântico

Gustavo Coelho Corrêa

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
programa de Pós-Graduação em Física,  
Instituto de Física, da Universidade  
Federal do Rio de Janeiro, como parte  
dos requisitos necessários para a  
obtenção do título de  
Mestre em Ciências (Física).

Orientadora: Teresinha J. Stuchi (IF/UFRJ)

Rio de Janeiro  
Outubro de 2007

C824 Corrêa, Gustavo Coelho  
Caos em Modelos de Bianchi IX Anisotrópicos  
com Adição de um Termo Quântico / Gustavo Coelho  
Corrêa. Rio de Janeiro : UFRJ / IF , 2007.  
xi, 99f.: il. ; 29,5cm.  
Orientador(a): Teresinha de Jesus Stuchi  
Dissertação (Mestrado) - UFRJ / IF / Programa de  
Pós-graduação em Física, 2007.  
Referências Bibliográficas: f. 98-99.  
1. Teoria do Caos. 2. Cosmologia. 3. Modelos  
Cosmológicos. I. Corrêa, Gustavo Coelho. II.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de  
Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Caos  
em Modelos de Bianchi IX Anisotrópicos com Adição  
de um Termo Quântico.

*Dies iræ, dies illa  
Solvat sæclum in favilla*

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus tios Sérgio e Lúcia, como reconhecimento pelo imenso apoio recebido.

# Agradecimentos

Para a realização deste trabalho, recebi muitos auxílios. Assim, uso esta oportunidade para agradecer:

Primeiramente a Deus, por ter permitido que eu chegasse até aqui, por ter me concedido, em abundância, vida, saúde, paz de espírito, sabedoria, e por ter me acrescentado tudo o mais.

A meus pais, Orlando e Sueli, por terem me trazido a este mundo, me criado, educado, e contribuído em muito para que eu me tornasse o que sou hoje. Ainda que estejam distantes, meu reconhecimento não foi esquecido.

A meus tios Sérgio e Lúcia, por terem permitido que morasse com eles, e por todo o enorme apoio recebido. Sem o seu auxílio, este trabalho jamais teria sido realizado.

Aos meus tios Eduardo e Dirce, por serem meus "pais adotivos" enquanto moro aqui no Rio de Janeiro, bem como pelas diversas pizzas, e por toda a ajuda que recebi deles.

Ao dr.Fernando e a dona Ivone por terem permitido que eu morasse na casa que, efetivamente, era deles.

A minha orientadora Teresa Stuchi, por todo o esforço em me orientar, ensinar, e principalmente por ter paciência comigo. Espero não ter-lhe causado o aparecimento de muitos cabelos brancos.

Ao professor Nivaldo Lemos, por toda sua atenção e por valiosas discussões concernentes a este trabalho.

Ao professor Jim Skea, pelo excelente curso de Relatividade Geral, e pelo auxílio na elaboração deste trabalho.

Aos professores Ivano Damiano Soares, Ioav Waga, e Marcus Vinícius C. Pinto, pelo auxílio em diversas partes deste trabalho.

Ao meu primeiro orientador, Sérgio Queiróz, por ter permitido que fosse seu orientado, e por ter me mostrado como funciona a pesquisa científica nas universidades.

A todos aqueles que foram meus professores durante este curso, por terem feito o possível para transmitir os seus conhecimentos, e contribuir para minha formação.

Ao Casé, Cristina e Filipe, da secretaria, por sua enorme ajuda enquanto fui aluno do IF, e por sua compreensão com entregas fora de prazo, esquecimentos, e tudo mais.

A Rodrigo Maier, pelo grande auxílio em vários assuntos deste trabalho.

Aos colegas Eduardo Muller, Rafael, Leonardo, Malena, Pedro e Emille, por toda a ajuda, e por serem companheiros de mestrado.

A João Paulo, por ter me dado o computador que foi utilizado na realização deste trabalho.

Ao CNPQ, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo auxílio financeiro, sem o qual este trabalho jamais teria sido realizado.

Ao calouros da EN1-2006/II, por terem sido a primeira turma para quem dei aulas, e por terem sido ótimos alunos.

A todos os avôs, tios, tias, primos, primas, agregados, e todos os (muitos) familiares. Citar todos os nomes seria impraticável. No entanto, agradeço a todos por todos os bons momentos proporcionados por eles.

A minha irmã Gabriela, simplesmente por ser a minha irmã.

A Raquel Toste, companheira de msn, por ter tornado muitas das madrugadas que gastei no computador, fazendo esta tese, mais agradáveis.

Ao Bernardo, por ter quebrado inúmeros galhos durante minhas viagens à Santa Catarina, e por ser um grande amigo.

Aos amigos de Santa Catarina, Jefferson, Fernando, Gabriel, Sabrina, Aline, João e Guilherme, por todos os bons momentos passados juntos.

A todos aqueles que me ajudaram de alguma forma, por menor que seja. Embora eu não possa citar o nome de todos, fica aqui expresso meu agradecimento.

E a todos aqueles que me prejudicaram de alguma forma, pois as dificuldades fortalecem o espírito.



# Resumo

Neste trabalho realizamos uma análise da dinâmica do modelo cosmológico de Bianchi IX, com um termo de potencial quântico adicionado. Este modelo de Bianchi IX é um modelo cosmológico homogêneo e anisotrópico, com dois fatores de escala,  $a(t)$  e  $b(t)$ , derivado da solução das equações de Einstein para a Relatividade Geral, e que pode representar a evolução de um universo preenchido por poeira. A este modelo adicionamos um termo de potencial quântico, que pretende representar efeitos de curta distância devido ao comportamento quântico da matéria em pequenas escalas, e que tem o efeito de uma força repulsiva. Este potencial faz com que a dinâmica do modelo fique restrita à região positiva, ( $a > 0$  e  $b > 0$ ), e altera algumas características qualitativas e quantitativas do comportamento do modelo. Fizemos uma análise da dinâmica deste modelo, obtendo pontos fixos, órbitas periódicas, variedades invariantes, secções de Poincaré, utilizando técnicas de computação numérica tais como globalização de variedades estáveis e instáveis, continuação numérica, dentre outras. Além disso, realizamos uma comparação entre os modelos com e sem o termo quântico adicionado, para verificar as alterações produzidas pelo mesmo. Finalmente, pudemos concluir que a adição deste termo quântico permite a existência de comportamento caótico para este sistema.

Palavras chave: Caos, Cosmologia, Modelo de Bianchi IX.

# Abstract

In this work, we study the dynamics of the Bianchi IX cosmological model, with a term of quantum potential added. The Bianchi IX model is an inhomogeneous, anisotropic and with a cosmological constant cosmologic model, with two scale factors,  $a(t)$  and  $b(t)$ , derived from the solution of Einstein's equations for General Relativity, and which can represent the evolution of a dust filled Universe. To this model we add a term of quantum potential that intends to represent short-range effects due the quantum behavior of matter in small scales and has the effect of a repulsive force. This potential restricts the dynamics of the model to the positive values of  $a(t)$  and  $b(t)$ , and alters some qualitative and quantitative characteristics of the model. We have studied the phase space of the the model finding critical points, periodic orbits, stable/unstable manifolds using numerical techniques such as Poincaré surface of section, numerical continuation and globalization of manifolds. We compared the classical and quantum models and verified that the addition of this quantum potencial term allows the existence of homoclinic crossing of the stable and stable manifolds thus establishing chaotic behavior in the escape to inflation.

# Notação e Convenções

- (1) Os índices gregos variam de 0 a 3.
- (2) Os índices latinos variam de 1 a 3.
- (3) A assinatura da métrica vale:  $(+, -, -, -)$
- (4) No sistema de unidades utilizado as constantes fundamentais valem:  $c = h = 8\pi G = 1$
- (5) A derivada parcial é dada por:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha\phi = \phi_{,\alpha}$$

- (6) O Símbolo de Christoffel é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \rho\alpha \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (g_{\rho\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\rho} - g_{\rho\alpha,\sigma})$$

- (7) O Tensor de Ricci é dado por:

$$R_{\mu\nu} = - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \rho\lambda \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \rho\nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\lambda \end{array} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\lambda \end{array} \right\}.$$

# Índice

Dedicatória . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	v
Abstract . . . . .	vi
Notação e Convenções . . . . .	vii
Índice . . . . .	viii
<b>Introdução . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1 O Modelo Cosmológico . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1 Introdução . . . . .	5
1.2 O Modelo de Bianchi IX . . . . .	5
1.3 Formulação Hamiltoniana do Sistema . . . . .	9
1.4 O Termo de Potencial Quântico . . . . .	11
<b>2 Estudo Linear dos Modelos . . . . .</b>	<b>14</b>
2.1 Introdução . . . . .	14
2.2 Pontos Fixos . . . . .	14
2.3 Linearização . . . . .	21
2.4 Breve Discussão de Sistemas Lineares Hamiltonianos . . . . .	24

2.5 Resultados Numéricos . . . . .	26
2.6 Formas Normais Quadráticas em Torno dos Pontos de Equilíbrio . .	36
2.7 Topologia do Espaço de Fase ao Redor dos Pontos Fixos . . . . .	40
<b>3 Determinação de Órbitas Periódicas . . . . .</b>	<b>43</b>
3.1 Introdução . . . . .	43
3.2 O Método de Continuação Analítica . . . . .	44
3.3 Determinação Numérica de Órbitas Periódicas . . . . .	47
3.4 Continuação Numérica de Soluções . . . . .	48
3.5 Implementação do Método . . . . .	50
3.6 Resultados . . . . .	53
<b>4 As Variedades Invariantes . . . . .</b>	<b>70</b>
4.1 Introdução . . . . .	70
4.2 As Variedades Invariantes . . . . .	70
4.3 Linearização em torno de uma Órbita Periódica . . . . .	71
4.4 Técnica de Globalização Numérica da Variedade Instável . . . . .	75
<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>94</b>
<b>Apêndice . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>98</b>

# Introdução

O estudo do universo como um todo, o estudo de sua origem e evolução são assuntos da Cosmologia. Esta área da Física remonta aos inícios da ciência, e pode-se afirmar que grande parte da Física deriva da tentativa de compreensão do universo pela humanidade. Desde a Antiguidade os primeiros estudiosos já imaginavam modelos que pudessem descrever o universo que observavam.

Com a evolução do conhecimento e da Ciência, os modelos para representação do universo também foram alterados, muitas vezes drasticamente. Um dos marcos desta evolução foi a proposta da Gravitação Universal, por Isaac Newton, pois pela primeira vez foi possível unir, em uma só teoria, fenômenos terrestres, como queda de corpos, com fenômenos astronômicos, como a órbita de planetas ao redor do sol.

A descoberta de outras forças, como a magnética e a elétrica, por exemplo, não alterou o papel da gravidade na organização do universo, pois logo percebeu-se que, em grandes escalas, a única força que permanece é a gravidade, por estar relacionada com a massa, que é sempre positiva, ao contrário da carga elétrica, por exemplo, que é praticamente nula em escalas cósmicas.

Com a criação da Teoria da Relatividade Geral por Einstein, a cosmologia recebeu uma importante inovação. Agora, a atração gravitacional não era mais uma força entre corpos com massa, e sim o resultado da deformação do espaço-tempo ao redor de corpos com massa. Isto permitiu a solução de problemas até então não resolvidos pela gravidade newtoniana, como, por exemplo, o da órbita de Mercúrio. Além disso, a relação da gravidade com a geometria do espaço-tempo (e portanto, a geometria do universo como um todo), abriu novas possibilidades para a compreensão da forma e evolução do universo. Alguns anos depois da publicação da Relatividade Geral, Hubble descobriu que o universo está atualmente em expansão, ao contrário da idéia geral de que o universo era estático. Esta descoberta foi uma das primeiras evidências que levaram a formulação da teoria do Big-Bang, segundo a qual o universo evoluiu a partir de um estado com pequeno volume e alta densidade, e que expandiu-se ao longo de bilhões de anos, até chegar no estágio atual, que é o universo que podemos observar.

As equações da Relatividade Geral, que são as equações que governam a evolução do universo em escala cósmica, admitem diversas soluções, que representam diferentes possibilidades para o comportamento do universo. A solução que descreve o Big-Bang é apenas uma dentre várias outras possíveis. Atualmente o universo está em expansão, porém, não pode-se afirmar qual será seu comportamento futuro. Existe a possibilidade de que este expanda-se para sempre, bem como a possibilidade de que sua expansão cesse, e este torne a contrair-se, até voltar à singularidade inicial.

Muitas das soluções para as equações de Einstein representam um modelo diferente de universo. Neste trabalho, estudamos a dinâmica do modelo Bianchi IX[1]. Este modelo é caracterizado como sendo homogêneo porém anisotrópico. Homogeneidade significa que as propriedades da métrica são as mesmas em qualquer ponto do espaço, e anisotropia significa que as direções no espaço não são todas equivalentes. Grosso modo, pode-se dizer que um universo anisotrópico pareceria "esticado" em uma ou mais direções. Ou, em outras palavras, para um universo fechado, este poderia ter até três "raios de curvatura" diferentes, um para cada direção.

Além disso, no modelo estudado neste trabalho, supomos que o universo seja totalmente preenchido com poeira (a pressão nula), que está permanentemente em repouso, ou comóvel, em relação ao sistema de referência. Uma característica interessante deste modelo que estudamos é que ele pode apresentar um comportamento caótico, significando que, ao contrário de alguns outros modelos nos quais o universo apenas se expande, ou se expande e depois se contrai, este pode expandir-se e contrair-se caoticamente, sem jamais atingir um regime previsível. Um dos primeiros estudos deste modelo foi feito por Oliveira, Damião Soares e Stuchi[2], que mostraram que este modelo pode apresentar um comportamento bastante rico e variável, dependendo da energia total do universo, bem como das suas condições iniciais. Para uma determinada energia crítica, o universo é estacionário. Para energias diferentes desta, o universo pode se expandir indefinidamente, ou recolapsar, de maneira imprevisível. Em um outro artigo, Damião Soares e Stuchi[3] complementam seu estudo anterior, estabelecendo o comportamento caótico através dos cruzamentos homoclínicos das variedades estável e instável. Porém, o comportamento caótico só está presente na região onde os fatores de escala do modelo (que estão relacionados com os "raios de curvatura" do universo governado por este modelo) são negativos, o que não representa uma situação fisicamente realista, de forma que, apesar do caos estar presente, ele aparece apenas como uma característica matemática, e

não física, do modelo.

Contudo, estes modelos estudados são todos clássicos, significando que nenhum efeito quântico é levado em consideração. Isto é extremamente razoável para a maioria dos modelos cosmológicos, uma vez que a escala de fenômenos cosmológicos é muito maior do que a escala de fenômenos quânticos. Mas para modelos de universo que incluam uma singularidade (como o do Big-Bang, por exemplo), é necessário levar efeitos quânticos em consideração, uma vez que, próximo da singularidade, as escalas são pequenas o suficiente para que estes efeitos sejam relevantes. O estudo destes efeitos é domínio da Cosmologia Quântica, uma área que tem sido bastante estudada atualmente.

Portanto, para a elaboração de um modelo mais realista para a evolução do universo, buscamos na cosmologia quântica[4] algo que pudesse servir como base para uma formulação mais adequada do modelo de universo estudado.

Encontramos uma sugestão adequada nos artigos de Lemos e Monerat[5]. Neste artigo, os autores realizam uma quantização do modelo de universo de Friedman-Robertson-Walker. Este modelo representa um universo isotrópico e homogêneo, preenchido com um fluido perfeito, e com um campo escalar minimamente acoplado ao campo gravitacional. O modelo foi quantizado utilizando-se a quantização de Wheeler-DeWitt, e um dos resultados obtidos foi que a quantização deste modelo faz aparecer um termo de potencial quântico, que implica uma força repulsiva, inversamente proporcional ao cubo do fator de escala do universo, e que faz com que o modelo evite a singularidade.

Baseados nestes artigos, decidimos incluir um termo de potencial quântico análogo no modelo de Bianchi IX, de forma a representar de alguma forma os efeitos quânticos próximos da singularidade. Como este termo de potencial quântico refere-se ao modelo de universo FRW, que é isotrópico, enquanto que o modelo estudado neste trabalho, Bianchi IX, é anisotrópico, foi necessário o ajuste deste termo de potencial, para que este ficasse consistente com as condições do modelo estudado.

Para isto, escolhemos, por analogia, a forma mais simples para este potencial, que fosse consistente com o termo de potencial quântico obtido por Lemos e Monerat, e com a característica de anisotropia do nosso modelo. A dedução da forma exata deste termo está fora do escopo deste trabalho, que é basicamente um estudo da dinâmica do modelo. Além disso, pudemos demonstrar que, mesmo este potencial em sua forma mais simples é suficiente para permitir que o modelo exiba um comportamento caótico fi-



sicamente aceitável, uma vez que este termo de potencial quântico faz com que a dinâmica do modelo esteja restrita à região onde os fatores de escala são positivos.

Portanto, este trabalho é uma análise da dinâmica do modelo cosmológico de Bianchi IX, com a adição de um termo de potencial quântico, bem como uma revisão do modelo sem este termo, para comparação com os resultados já publicados na literatura. No primeiro capítulo, deduzimos as equações de movimento e a hamiltoniana do modelo, a partir das equações da Relatividade Geral que descrevem o modelo de Bianchi IX, e também a forma do potencial quântico adicionado. No segundo capítulo, realizamos a análise preliminar do sistema hamiltoniano, encontrando os pontos críticos, o sistema linearizado, e formas normais quadráticas da hamiltoniana.

No terceiro capítulo encontramos, através de técnicas numéricas, a variedade central do sistema, constituída pelas órbitas periódicas em torno dos pontos fixos. Estas órbitas podem representar universos nos quais os fatores de escala têm comportamento periódico, ou seja, universos "pulsantes", embora instáveis, como veremos.

E, no quarto capítulo encontramos as variedades instável e estável, também com o auxílio de técnicas numéricas. Encontramos também as seções de Poincaré das variedades estável e instável, determinando a existência de cruzamentos homoclínicos, que indicam que este modelo apresenta comportamento caótico. Finalmente, apresentamos as conclusões e perspectivas para futuros estudos.

# Capítulo 1

## O Modelo Cosmológico

### 1.1 Introdução

Neste capítulo discutiremos os modelos cosmológicos homogêneos e anisotrópicos do tipo Bianchi IX. Em geral, estes modelos são formulados com três fatores de escala. Porém, neste trabalho consideraremos modelos com simetria axial, ou seja, dois destes fatores são iguais. Desta forma, consideraremos apenas dois fatores de escala distintos, para facilitar o entendimento do espaço de fases. O conteúdo material do modelo é um fluido perfeito não-interagente (poeira). Este caso já foi bastante estudado em trabalhos anteriores por H.P.Oliveira, Soares e Stuchi[2], e portanto faremos uma comparação entre o modelo clássico e o modelo estudado, que apresenta um termo quântico "ad hoc", inspirado no trabalho de Lemos e Monerat[5] para o modelo FRW. Para completude deste texto apresentaremos primeiro a dedução do modelo de Bianchi IX anisotrópico e em seguida apresentaremos a modificação que será objeto deste trabalho.

### 1.2 O Modelo de Bianchi IX

O modelo de Bianchi IX é um modelo fechado, homogêneo e anisotrópico, com dois fatores de escala,  $a(t)$  e  $b(t)$ . O fator de escala  $a(t)$  está na direção do eixo de simetria do sistema. Em coordenadas esféricas, o seu elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\psi^2 - b^2(t)d\theta^2 - [a^2(t)\cos^2\theta + b^2(t)\sin^2\theta]d\phi^2 - 2a^2(t)\cos\theta d\psi d\phi$$

Dado o elemento de linha, é possível encontrar as equações para a descrição do modelo, através das Equações de Einstein para a Relatividade Geral, dadas por[6]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  o escalar de curvatura,  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico,  $\Lambda$  a constante cosmológica e  $T_{\mu\nu}$  o tensor momento-energia.

A partir do elemento de linha, encontram-se os elementos do tensor métrico, relacionados por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

com:

$$dx = [dt, d\theta, d\phi, d\psi]$$

como sendo:

$$\begin{cases} g_{00} = 1 \\ g_{11} = -b(t)^2 \\ g_{22} = -(a(t)^2 \cos^2\theta + b(t)^2 \sin^2\theta) \\ g_{23} = g_{32} = -a(t)^2 \cos\theta \\ g_{33} = -a(t)^2 \end{cases}$$

Para evitar que a notação torne-se demasiadamente carregada, daqui em diante as variáveis  $a(t)$  e  $b(t)$  serão denotadas simplesmente por  $a$  e  $b$ . O determinante deste tensor métrico vale:

$$g = -a^2b^4 \sin^2\theta$$

A partir do tensor métrico, encontram-se os Símbolos de Christoffel, definidos por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \rho\alpha \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma} \right)$$

Para este modelo, os símbolos de Christoffel não-nulos são:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 11 \end{array} \right\} = b\dot{b}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 22 \end{array} \right\} = a\dot{a}\cos^2\theta + b\dot{b}\sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 23 \end{array} \right\} &= a\dot{a}\cos\theta \\
\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 33 \end{array} \right\} &= a\ddot{a} \\
\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 01 \end{array} \right\} &= \frac{\dot{b}}{b} \\
\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 22 \end{array} \right\} &= \frac{(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta}{b^2} \\
\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 23 \end{array} \right\} &= \frac{a^2\sin\theta}{2b^2} \\
\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 02 \end{array} \right\} &= \frac{\dot{b}}{b} \\
\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 12 \end{array} \right\} &= \frac{(2b^2 - a^2)\cos\theta}{2b^2\sin\theta} \\
\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 13 \end{array} \right\} &= -\frac{a^2}{2b^2\sin\theta} \\
\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 02 \end{array} \right\} &= \frac{(\dot{a}b - a\dot{b})\cos\theta}{ab} \\
\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 03 \end{array} \right\} &= \frac{\dot{a}}{a} \\
\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 12 \end{array} \right\} &= \frac{(a^2 - b^2)\cos^2\theta - b^2}{2b^2\cos\theta} \\
\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 13 \end{array} \right\} &= \frac{a^2\cos\theta}{2b^2\sin\theta}
\end{aligned}$$

Com estes Símbolos de Christoffel, pode-se calcular os componentes do Tensor de Ricci, através da relação:

$$R_{\mu\nu} = - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \rho\lambda \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \rho\nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\lambda \end{array} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\lambda \end{array} \right\}.$$

assim, encontra-se que os componentes não-nulos deste tensor valem:

$$R_{00} = \frac{\ddot{a}b + 2a\ddot{b}}{ab}$$

$$R_{11} = \frac{-1}{2ab^2}(2ab^3\ddot{b} - a^3 + 2ab^2 + 2ab^2\dot{b}^2 + 2\dot{a}b\dot{b}^3)$$

$$R_{22} = \frac{-1}{2ab^4}[(2\ddot{a}b^4 + 4\dot{a}b^3\dot{b} + a^3)a^2\cos^2\theta + \\ + (2ab^3\ddot{b} - a^3 + 2ab^2 + 2ab^2\dot{b}^2 + 2\dot{a}b\dot{b}^3)b^2\sin^2\theta]$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{-a\cos\theta}{2b^4}(2\ddot{a}b^4 + 4\dot{a}b^3\dot{b} + a^3)$$

$$R_{33} = \frac{-a}{2b^4}(2\ddot{a}b^4 + 4\dot{a}b^3\dot{b} + a^3)$$

Pode-se também calcular o Escalar de Ricci, definido por:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

como sendo:

$$R = \frac{1}{2ab^4}(8ab^3\ddot{b} + 4\ddot{a}b^4 - a^3 + 4ab^2 + 4ab^2\dot{b}^2 + 8\dot{a}b\dot{b}^3)$$

As equações de movimento deste sistema são obtidas substituindo-se os componentes do tensor de Ricci na equação de Einstein (1). O tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}$$

sendo  $\rho$  a densidade de energia,  $p$  a pressão e  $U_\mu$  o vetor quadrivelocidade do fluido. Neste problema, o fluido é composto de poeira não interagente (exceto pela interação gravitacional, obviamente), cujas partículas estão todas em repouso no referencial considerado, o que implica que  $p = 0$ , e que o vetor quadrivelocidade vale:

$$U_\mu = \delta_\mu^0$$

resultando em:

$$T_{\mu\nu} = \rho\delta_\mu^0\delta_\nu^0$$

Após isto, calcula-se a contração de  $g^{\mu\nu}$  com a equação de Einstein (1):

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}R - \Lambda g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

e lembrando que  $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T$ , encontra-se que:

$$R = -(T + 4\Lambda).$$

Substituindo-se na equação de Einstein (1), chegamos à equação:

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \left(\frac{T}{2} + \Lambda\right)g_{\mu\nu}$$

e finalmente temos as equações de movimento:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\ddot{b}}{b} = \frac{\rho}{2} - \Lambda \quad (1.2)$$

$$2ab^3\ddot{b} - a^3 + 2ab^2 + 2ab^2\dot{b}^2 + 2\dot{a}b\dot{b}^3 = -2ab^4\left(\frac{\rho}{2} + \Lambda\right) \quad (1.3)$$

$$2\ddot{a}b^4 + 4\dot{a}b^3\dot{b} + a^3 = -2ab^4\left(\frac{\rho}{2} + \Lambda\right) \quad (1.4)$$

### 1.3 Formulação Hamiltoniana do Sistema

Para o estudo numérico realizado neste trabalho, é mais conveniente expressar as equações (2)-(4) em formulação hamiltoniana. O procedimento para a obtenção da hamiltoniana de um modelo de relatividade geral é relativamente padrão. Neste estudo, seguimos o trabalho de Barguine.[7] A hamiltoniana do sistema pode ser obtida através da ação, conforme mostrado a seguir.

A ação é dada por:

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}\sqrt{-g}d\Omega, \quad (1.5)$$

sendo  $d\Omega$  o elemento de quadrivolume,  $g$  o determinante do tensor métrico e  $\mathcal{L}$  a densidade total lagrangiana, dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_F,$$

correspondendo, respectivamente, à densidade lagrangiana de Einstein, à densidade de energia associada a constante cosmológica, que pode ser interpretada como a energia de vácuo e à densidade lagrangiana do fluido perfeito, representado pela densidade de energia. Estas densidades lagrangianas valem:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_G = -\frac{1}{2}R \\ \mathcal{L}_E = \Lambda \\ \mathcal{L}_F = \rho \end{cases}$$

Substituindo-se estas expressões na eq. (5), temos:

$$S = \int \left[ -2ab\ddot{b} - \ddot{a}b^2 + \frac{a^3}{4b^2} - a - ab^2 - 2\dot{a}\dot{b}b + \Lambda ab^2 + \rho ab^2 \right] dt \int_v \sin\theta dv$$

sendo  $dv$  o elemento de volume tridimensional. Para a dinâmica dos modelos, apenas a parte temporal da integral é relevante. Desta forma, a ação fica:

$$S \propto \int_t \left[ -2ab\ddot{b} - \ddot{a}b^2 + \frac{a^3}{4b^2} - a - ab^2 - 2\dot{a}\dot{b}b + \Lambda ab^2 + \rho ab^2 \right] dt$$

Com isto, encontramos que a lagrangiana deste sistema, multiplicada por um fator 2, por conveniência, é:

$$\mathcal{L} = -4ab\ddot{b} - 2\ddot{a}b^2 + \frac{a^3}{2b^2} - 2a - 2ab^2 - 4\dot{a}\dot{b}b + 2\Lambda ab^2 + 2\rho ab^2$$

Para se eliminar as derivadas segundas, utilizam-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \ddot{a}b^2 &= \frac{d(\dot{a}b^2)}{dt} - 2\dot{a}\dot{b}b \\ ab\ddot{b} &= \frac{d(ab\dot{b})}{dt} - ab^2 - \dot{a}\dot{b}b, \end{aligned}$$

lembrando que as derivadas totais com relação ao tempo na lagrangiana são irrelevantes, pois estas tornam-se contantes adicionadas a ação. Portanto, a densidade lagrangiana fica:

$$\mathcal{L} = 2a\dot{b}^2 + 4\dot{a}\dot{b}b + \frac{a^3}{2b^2} - 2a + 2\Lambda ab^2 + 2\rho ab^2$$

Determinada a densidade lagrangiana do sistema, pode-se determinar sua densidade hamiltoniana, pois estas grandezas estão relacionadas através de:

$$\mathcal{H} = \sum_i p_{q_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

Os momentos canonicamente conjugados são dados por:

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = 4b\dot{b}$$

$$p_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{b}} = 4(\dot{a}b + a\dot{b})$$

Substituindo estes na relação:

$$\mathcal{H} = p_a \dot{a} + p_b \dot{b} - \mathcal{L}$$

encontra-se a densidade hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(a, b, p_a, p_b) = \frac{p_a p_b}{4b} - \frac{a p_a^2}{8b^2} + 2a - \frac{a^3}{2b^2} - 2\Lambda a b^2 = E_0 \quad (1.6)$$

sendo  $E_0 = 2\rho a b^2$  a energia do conteúdo material do sistema.

## 1.4 O termo de potencial quântico

Introduzimos agora na hamiltoniana (6) o termo representando um potencial quântico, inspirado, conforme já mencionado, nos artigos de Lemos e Monerat.[5] Este artigos analisam o comportamento das funções de onda que obedecem à equação de Wheeler-DeWitt para cosmologia quântica. Estas funções de onda estão associadas à trajetórias de partículas, na interpretação causal de de Broglie-Bohm da mecânica quântica. Porém, conforme descrito nestes artigos, para valores muito pequenos para o fator de escala, os efeitos quânticos tornam-se importantes, sendo que estes equivalem à introdução de um potencial quântico, que faz aparecer uma força repulsiva, o que representa bem o comportamento das trajetórias no limite quântico. Nos artigos já mencionados, para o caso de um universo homogêneo e isotrópico, com apenas um fator de escala  $a$ , este potencial tem a forma:

$$V_Q = \frac{\sigma}{a^2}$$

Porém, neste trabalho analisamos um modelo de universo anisotrópico, com dois fatores de escala,  $a$  e  $b$ . Para encontrar a forma de um potencial quântico para este modelo, escolhemos a aproximação mais simples, que consiste em utilizar um "fator de escala médio",  $r$ , dado por:

$$r = (ab^2)^{\frac{1}{3}},$$



o que resulta em um potencial quântico da forma:

$$V_Q = \frac{\sigma}{r^2} = \frac{\sigma}{(ab^2)^{\frac{2}{3}}}$$

É possível que o potencial calculado através das funções de onda tenha uma forma mais complicada do que esta. Além disso, um artigo de Alvarenga, Batista, Fabris e Gonçalves[8] mostra que para um modelo de universo anisotrópico, a norma das funções de onda encontradas depende do tempo, ou seja, o modelo torna-se não unitário, significando que há uma diferença entre as interpretações de Bohm-de Broglie e de muitos mundos (baseada na interpretação de Copenhagen).

Acreditamos, porém, que isto deve influenciar apenas o comportamento quantitativo do sistema, ou seja, este potencial que utilizamos deve representar adequadamente o comportamento qualitativo de um sistema com um potencial quântico. Esta suposição baseia-se no fato que o termo de potencial quântico só torna-se relevante quando os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  são muito pequenos, e que, fora deste limite, o sistema quântico aproxima-se do sistema clássico, conforme será ilustrado nos capítulos seguintes. Portanto, para a maior parte do espaço de fases, onde a influência do termo quântico é pequena, a forma exata do termo quântico deve produzir apenas pequenas diferenças nas características do sistema, como, por exemplo, a localização exata dos pontos fixos do sistema.

A presença de um potencial deste tipo é suficiente para restringir o movimento do sistema a região positiva ( $a > 0$  e  $b > 0$ ), o que não ocorre com o sistema original, estudado por Oliveira, Damiao Soares e Stuchi[2].

Neste trabalho, primeiramente analisamos qual seria a influência de um termo de potencial quântico do tipo:

$$V_Q = \frac{\sigma}{ab^2}$$

ou seja, sem o expoente  $2/3$ . Isto foi realizado pois este potencial é mais tratável numericamente, e portanto poderia servir de modelo para o estudo do potencial "real", com o expoente  $2/3$ , que é mais "problemático", numericamente falando, conforme será demonstrado nos capítulos posteriores.

Portanto, analisamos primeiramente os efeitos qualitativos que a adição de um termo quântico traria, utilizando o potencial sem o expoente  $2/3$ , e após isto, analisamos o sistema com o expoente  $2/3$ .

Desta forma, a Hamiltoniana do sistema torna-se:

$$\mathcal{H}(a, b, p_a, p_b) = \frac{p_a p_b}{4b} - \frac{a p_a^2}{8b^2} + 2a - \frac{a^3}{2b^2} - 2\Lambda a b^2 + \frac{\sigma}{(ab^2)^\gamma} = E_0,$$

que será estudada em detalhe nos capítulos seguintes.

# Capítulo 2

## Estudo Linear dos Modelos

### 2.1 Introdução

No estudo de um sistema físico governado por uma hamiltoniana, procura-se conhecer o máximo de características do sistema através da análise prévia da hamiltoniana. Esta análise permite extrair características gerais do sistema, sem necessidade de um estudo aprofundado.

O primeiro passo nesta análise é a determinação dos pontos fixos do sistema hamiltoniano. Estes são importantes pois definem, entre outras coisas, características específicas do sistema, já que, de acordo com o chamado Teorema da Retificação [9], caso sejam excluídos os pontos fixos de um fluxo, este se torna topologicamente equivalente a um fluxo linear.

Conhecidos os pontos fixos, pode-se determinar a classificação destes pontos. Para tanto, estudaremos o sistema linearizado em torno dos mesmos escrevendo a hamiltoniana na aproximação quadrática em coordenadas especiais, associadas aos autovalores do sistema linear. Além disso, apresentamos neste capítulo a discussão de um plano invariante do sistema em estudo, bem como as curvas de momento zero.

### 2.2 Pontos fixos

No capítulo anterior, determinamos a hamiltoniana do modelo que estamos estudando, a qual é dada por:

$$\mathcal{H}(a, b, p_a, p_b) = \frac{p_a p_b}{4b} - \frac{a p_a^2}{8b^2} + 2a - \frac{a^3}{2b^2} - 2\Lambda a b^2 + \frac{\sigma}{(ab^2)^\gamma} = E_0. \quad (2.1)$$

Através das equações de Hamilton,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

e

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

podemos encontrar as equações de movimento correspondentes:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{p_b}{4b} - \frac{ap_a}{4b^2} \\ \dot{b} &= \frac{p_a}{4b} \\ \dot{p}_a &= \frac{p_a^2}{8b^2} - 2 + \frac{3a^2}{2b^2} + 2\Lambda b^2 + \frac{\gamma\sigma}{a^{\gamma+1}b^{2\gamma}} \\ \dot{p}_b &= \frac{p_a p_b}{4b^2} - \frac{ap_a^2}{4b^3} - \frac{a^3}{b^3} + 4\Lambda ab + \frac{2\gamma\sigma}{a^\gamma b^{2\gamma+1}}\end{aligned}$$

Usaremos, neste trabalho, os valores  $\Lambda = 1/4$  e  $\sigma = 0.01$ . Estes valores foram escolhidos para permitir a comparação com os trabalhos existentes na literatura.

Um dos primeiros passos na análise de um sistema dinâmico é a localização de seus pontos críticos. Estes pontos, com coordenadas  $(a^*, b^*, p_a^*, p_b^*)$ , são definidos pelas relações:

$$\dot{a} = \dot{b} = \dot{p}_a = \dot{p}_b = 0.$$

Portanto, encontra-se:

$$\dot{b} = 0 \rightarrow p_a^* = 0$$

$$\dot{a} = 0 \rightarrow p_b^* = 0$$

$$\dot{p}_a = -2 + \frac{3a^{*2}}{2b^{*2}} + 2\Lambda b^{*2} + \frac{\gamma\sigma}{a^{*\gamma+1}b^{*2\gamma}} = 0 \quad (2.2)$$

$$\dot{p}_b = -\frac{a^{*3}}{b^{*3}} + 4\Lambda a^* b^* + \frac{2\gamma\sigma}{a^{*\gamma}b^{*2\gamma+1}} = 0 \quad (2.3)$$

Das equações (2.2) e (2.3), chega-se nas seguintes equações:

$$4\Lambda a^{*3\gamma+3} - a^{*3\gamma+1} + 2\sigma\gamma = 0 \quad (2.4)$$

e

$$b^{*2} = a^{*2}$$

No caso clássico (sem o termo quântico),  $\sigma = 0$ , os pontos críticos são facilmente encontrados, sendo:

$$a^* = b^* = \pm \frac{1}{2\sqrt{\Lambda}}$$

Rigorosamente, existe um outro par de pontos fixos dado por:

$$a^* = 0, b^* = \pm \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$$

que, entretanto, não será analisado.

No caso com potencial quântico, com  $\sigma \neq 0$ , a equação para  $a^*$  deve ser resolvida numericamente. Como  $a$  e  $b$  representam grandezas físicas, apenas as soluções reais têm importância. É interessante notar que a existência do termo de potencial quântico faz aparecer um novo ponto crítico, e desloca ligeiramente o outro.

Estes pontos fixos podem ser observados qualitativamente através do gráfico da energia do sistema em função das coordenadas. A figura 1 mostra a energia em função de  $a$  (ou  $b$ ) para  $p_a = p_b = 0$  e  $a = b$ . A curva inferior refere-se ao caso clássico ( $\sigma = 0$ ). Nota-se a existência de somente um ponto fixo, que é um máximo da energia. A curva do meio refere-se ao caso com potencial quântico com  $\gamma = 2/3$ , e a curva superior ao caso com  $\gamma = 1$ .

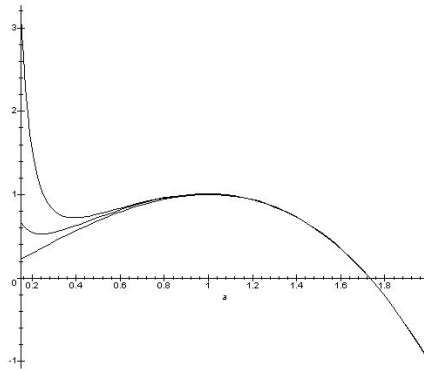


Figura 1 - Energias em função de  $a$  para  $p_a = p_b = 0$  e  $a = b$  para os três casos.

Nota-se que em ambos os casos com  $\sigma \neq 0$  há um segundo ponto fixo, no qual a energia é um mínimo. Nota-se também que, à medida que  $a$  tende a zero, a energia cresce muito mais rapidamente no caso com  $\gamma = 1$  do que no caso com  $\gamma = 2/3$ . Isto tem implicações no comportamento do sistema, conforme será visto em outros capítulos.

As figuras 2, 3 e 4 mostram as "curvas de momento zero" para diversas energias. Estas curvas representam os pontos do plano  $(a, b)$  que correspondem a uma dada energia, para  $p_a = p_b = 0$ . Como a energia cinética não é positiva definida, julgou-se interessante incluir estas curvas. Como ficará claro na análise a seguir, o ponto fixo instável aparece como é usualmente o ponto fixo estável e vice-versa.

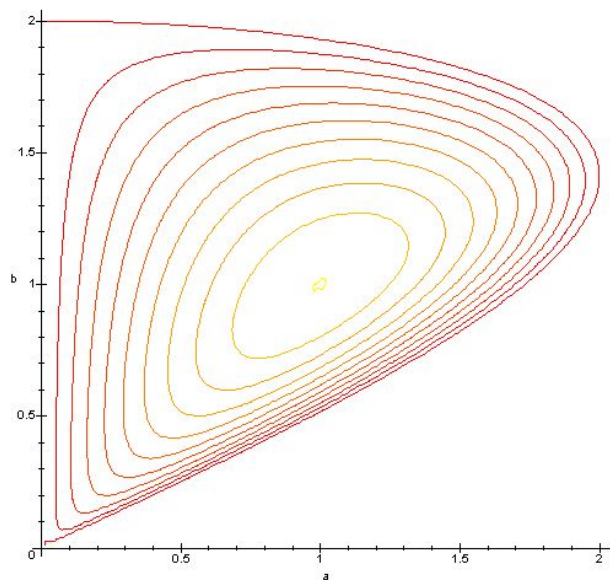


Figura 2 - Curvas de momento zero para o caso clássico. As energias vão de  $E=0$  a  $E=0.99$ , com incrementos de  $0.1$ . A curva mais externa corresponde a  $E=0$ .

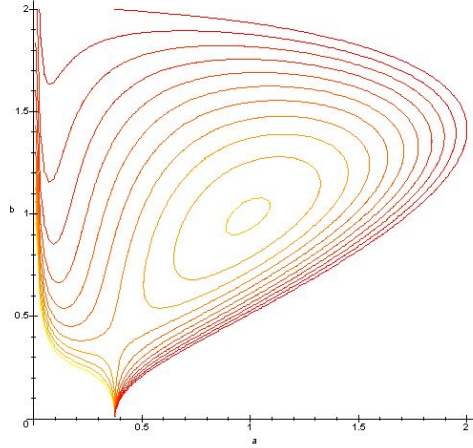


Figura 3 - Curvas de momento zero para o caso com  $\gamma = 1$ . As energias vão de  $E=0$  a  $E=1$ , com incrementos de 0.1. A curva mais externa corresponde a  $E=0$ .

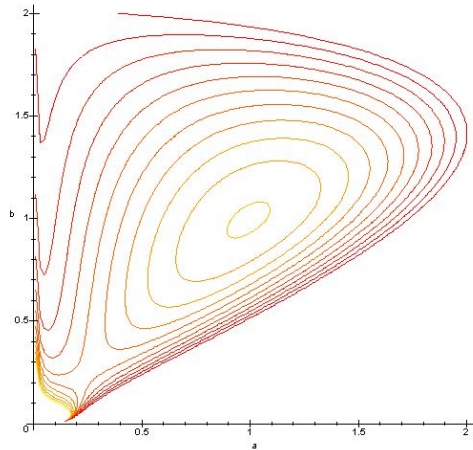


Figura 4 - Curvas de momento zero para o caso com potencial quântico com  $\gamma = 2/3$ . As energias vão de  $E=0$  a  $E=1$ , com incrementos de 0.1. A curva mais externa corresponde a  $E=0$ .

Este sistema, para todos os casos, apresenta também um plano invariante, definido por  $a = b$  e  $p_a = p_b/2$ . Um ponto que inicialmente pertença a este plano, permanecerá nele com o decorrer da evolução do sistema. Neste plano, a hamiltoniana deste sistema, que já foi estudada em trabalhos de Oliveira, Damião Soares e Stuchi[2], torna-se:

$$\mathcal{H}(a, p_a) = \frac{3p_a^2}{8a} + \frac{3a}{2} - 2\Lambda a^3 + \frac{\sigma}{a^{3\gamma}}$$

Como o sistema no plano invariante tem apenas um grau de liberdade, podemos utilizar as curvas de nível da hamiltoniana para desenhar o seu espaço de fases. As figuras 5, 6 e 7 mostram o espaço de fase dos planos invariantes para cada um dos três casos, respectivamente. As curvas denominadas S representam as separatrizes, que são caracterizadas pela energia crítica  $E_{crit}$ , e que separam as regiões I e II dos planos invariantes. Esta energia vale  $E_{crit} = 1$  para o caso clássico ( $\sigma = 0$ ),  $E_{crit} = 1.01015694$  para o caso com  $\gamma = 1$  e  $E_{crit} = 1.01006820$  para o caso com potencial quântico com  $\gamma = 2/3$ . O ponto crítico caracterizado por estas energias está marcado como E.

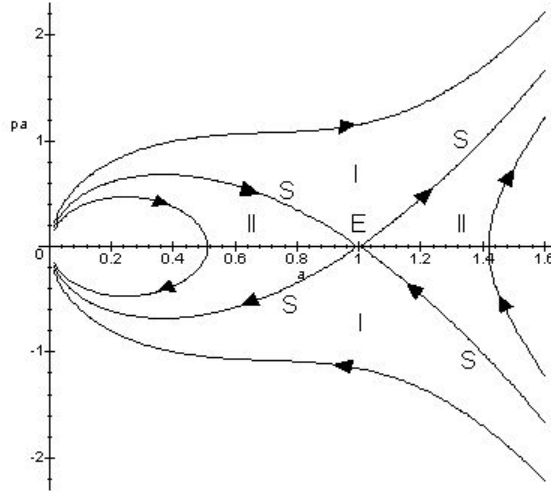


Figura 5 - Espaço de fase para o plano invariante do caso clássico ( $\sigma = 0$ ).



A inclusão do termo quântico elimina a singularidade de  $a = 0$ . Para o caso clássico, na região II temos universos finitos que recolapsam, e para  $\sigma \neq 0$  temos universos finitos sem recolapso.

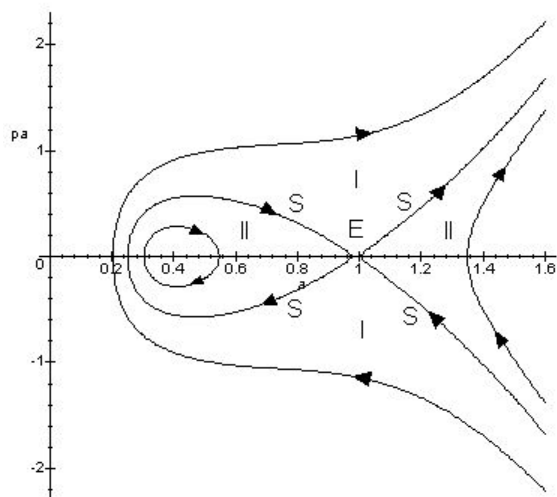


Figura 6 - Espaço de fase para o plano invariante do caso com  $\gamma = 1$ .

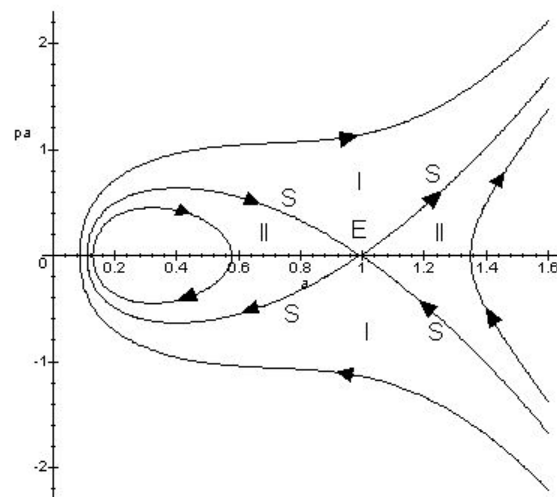


Figura 7 - Espaço de fase para o plano invariante do caso com potencial quântico com  $\gamma = 2/3$ .

Na região à esquerda da separatriz, no caso clássico, temos universos que saem do ponto de equilíbrio E ( $a = 1$ ) e sofrem colapso na singularidade  $a = 0$ , o mesmo ocorrendo com sua vizinhança. A região à direita leva ao escape inflacionário, para a região denominada de de Sitter. Nos casos com  $\sigma \neq 0$  o comportamento do sistema ainda exibe a saída inflacionária, mas o recolapso é evitado, indo novamente para a região de de Sitter após uma excursão em torno do ponto fixo estável. Passaremos agora à linearização do sistema, para determinar o caráter dos pontos fixos.

## 2.3 Linearização

Conhecidos os pontos críticos, deve-se estudar o comportamento do sistema nas vizinhanças destes pontos. Para isso, utiliza-se o procedimento conhecido como linearização do sistema em torno dos pontos fixos. As equações de movimento são expandidas em série de Taylor de primeira ordem ao redor destes pontos. Sendo  $\vec{X} = (a, b, p_a, p_b)$  um ponto qualquer, e  $\vec{X}^* = (a^*, b^*, p_a^*, p_b^*)$  um ponto fixo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= f_a(\vec{X}) = f_a(\vec{X}^*) + (a - a^*) \frac{\partial f_a(\vec{X}^*)}{\partial a} + (b - b^*) \frac{\partial f_a(\vec{X}^*)}{\partial b} + \\ &+ (p_a - p_a^*) \frac{\partial f_a(\vec{X}^*)}{\partial p_a} + (p_b - p_b^*) \frac{\partial f_a(\vec{X}^*)}{\partial p_b} \\ \dot{b} &= f_b(\vec{X}) = f_b(\vec{X}^*) + (a - a^*) \frac{\partial f_b(\vec{X}^*)}{\partial a} + (b - b^*) \frac{\partial f_b(\vec{X}^*)}{\partial b} + \\ &+ (p_a - p_a^*) \frac{\partial f_b(\vec{X}^*)}{\partial p_a} + (p_b - p_b^*) \frac{\partial f_b(\vec{X}^*)}{\partial p_b} \\ \dot{p}_a &= f_{p_a}(\vec{X}) = f_{p_a}(\vec{X}^*) + (a - a^*) \frac{\partial f_{p_a}(\vec{X}^*)}{\partial a} + (b - b^*) \frac{\partial f_{p_a}(\vec{X}^*)}{\partial b} + \\ &+ (p_a - p_a^*) \frac{\partial f_{p_a}(\vec{X}^*)}{\partial p_a} + (p_b - p_b^*) \frac{\partial f_{p_a}(\vec{X}^*)}{\partial p_b} \\ \dot{p}_b &= f_{p_b}(\vec{X}) = f_{p_b}(\vec{X}^*) + (a - a^*) \frac{\partial f_{p_b}(\vec{X}^*)}{\partial a} + (b - b^*) \frac{\partial f_{p_b}(\vec{X}^*)}{\partial b} + \\ &+ (p_a - p_a^*) \frac{\partial f_{p_b}(\vec{X}^*)}{\partial p_a} + (p_b - p_b^*) \frac{\partial f_{p_b}(\vec{X}^*)}{\partial p_b} \end{aligned}$$

Fazendo as substituições:  $\tilde{A} = a - a^*$ ,  $\tilde{B} = b - b^*$ ,  $\tilde{P}_A = p_a - p_a^*$ ,  $\tilde{P}_B = p_b - p_b^*$ , e lembrando que  $f_a(\vec{X}^*) = f_b(\vec{X}^*) = f_{p_a}(\vec{X}^*) = f_{p_b}(\vec{X}^*) = 0$ , encontramos:

$$\dot{\tilde{A}} = -\frac{a^*}{4b^{*2}}\tilde{P}_A + \frac{1}{4b^*}\tilde{P}_B$$

$$\dot{\tilde{B}} = \frac{1}{4b^*}\tilde{P}_A$$

$$\dot{\tilde{P}}_A = \left( \frac{3a^*}{b^{*2}} - \frac{\sigma\gamma(\gamma+1)}{a^{*\gamma+2}b^{*2\gamma}} \right) \tilde{A} + \left( -\frac{3a^{*2}}{b^{*3}} + 4\Lambda b^* - \frac{2\sigma\gamma^2}{a^{*\gamma+1}b^{*2\gamma+1}} \right) \tilde{B}$$

$$\dot{\tilde{P}}_B = \left( -\frac{3a^{*2}}{b^{*3}} + 4\Lambda b^* - \frac{2\sigma\gamma^2}{a^{*\gamma+1}b^{*2\gamma+1}} \right) \tilde{A} + \left( \frac{3a^{*3}}{b^{*4}} + 4\Lambda a^* - \frac{2\sigma\gamma(2\gamma+1)}{a^{*\gamma}b^{*2\gamma+2}} \right) \tilde{B}$$

que podem ser expressas matricialmente como:

$$\dot{\vec{X}} = M\vec{X},$$

sendo:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{A}} & \dot{\tilde{P}}_A & \dot{\tilde{B}} & \dot{\tilde{P}}_B \end{bmatrix}^T,$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{P}_A & \tilde{B} & \tilde{P}_B \end{bmatrix}^T,$$

e

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a^*}{4b^{*2}} & 0 & \frac{1}{4b^*} \\ \frac{3a^*}{b^{*2}} - \frac{\sigma\gamma(\gamma+1)}{a^{*\gamma+2}b^{*2\gamma}} & 0 & -\frac{3a^{*2}}{b^{*3}} + 4\Lambda b^* - \frac{2\sigma\gamma^2}{a^{*\gamma+1}b^{*2\gamma+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4b^*} & 0 & 0 \\ -\frac{3a^{*2}}{b^{*3}} + 4\Lambda b^* - \frac{2\sigma\gamma^2}{a^{*\gamma+1}b^{*2\gamma+1}} & 0 & \frac{3a^{*3}}{b^{*4}} + 4\Lambda a^* - \frac{2\sigma\gamma(2\gamma+1)}{a^{*\gamma}b^{*2\gamma+2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Lembrando sempre que estamos trabalhando com os pontos críticos com  $a$  e  $b$  positivos, temos que  $a^* = b^*$ , e a matriz  $M$  torna-se:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4a^*} & 0 & \frac{1}{4a^*} \\ \frac{3}{a^*} - \frac{\sigma\gamma(\gamma+1)}{a^{*3\gamma+2}} & 0 & -\frac{3}{a^*} + 4\Lambda a^* - \frac{2\sigma\gamma^2}{a^{*3\gamma+2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4a^*} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{a^*} + 4\Lambda a^* - \frac{2\sigma\gamma^2}{a^{*3\gamma+2}} & 0 & \frac{3}{a^*} + 4\Lambda a^* - \frac{2\sigma\gamma(2\gamma+1)}{a^{*3\gamma+2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Lembrando-se ainda que, segundo a equação (2.4):

$$4\Lambda a^{*3\gamma+3} - a^{*3\gamma+1} + 2\sigma\gamma = 0,$$

temos que:

$$\frac{2\gamma\sigma}{a^{*3\gamma+1}} = 1 - 4\Lambda a^{*2}$$

de forma que a matriz M pode ser simplificada, tornando-se:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4a^*} & 0 & \frac{1}{4a^*} \\ \frac{5-\gamma}{2a^*} + 2\Lambda a^*(\gamma+1) & 0 & -\frac{3+\gamma}{a} + 4\Lambda a^*(\gamma+1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{4a^*} & 0 & 0 \\ -\frac{3+\gamma}{a} + 4\Lambda a^*(\gamma+1) & 0 & \frac{2(1-\gamma)}{a} + 8\Lambda a^*(\gamma+1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz deve ser diagonalizada, e para isso deve-se encontrar os seus autovalores e autovetores. Os autovalores são dados pelas soluções da equação:

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

e valem:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{24\Lambda a^{*2}(\gamma+1) - 2(1+3\gamma)}}{4a^*} \quad (2.5)$$

e

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{i\sqrt{2}}{a^*} \quad (2.6)$$

A natureza dos autovalores (reais, imaginários, complexos) determina a natureza do ponto fixo, conforme será visto a seguir.

Os autovetores são dados pelas soluções da equação:

$$M\vec{V} = \lambda\vec{V}$$

E valem:

$$\vec{V}_{1,2} = c_{1,2} \begin{bmatrix} \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{12\Lambda a^{*2}(\gamma+1) - (1+3\gamma)}} \\ 1 \\ \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{12\Lambda a^{*2}(\gamma+1) - (1+3\gamma)}} \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

e

$$\vec{V}_{3,4} = c_{3,4} \begin{bmatrix} -2 \\ \pm 4\sqrt{2}i \\ 1 \\ \mp 4\sqrt{2}i \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

sendo  $c_i$  constantes arbitrárias, que serão determinadas posteriormente de modo que a matriz de diagonalização obedeça à condição de normalização simplética, conforme será mostrado mais adiante.

## 2.4 Breve discussão de sistemas lineares hamiltonianos

Da mesma forma que as equações de movimento, a Hamiltoniana do sistema também pode ser expandida em torno do ponto fixo. Chamando de  $\mathcal{H}_2$  os termos quadráticos da expansão,  $\mathcal{H}_3$  os termos cúbicos, etc, temos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \dots$$

Como estamos na vizinhança do ponto fixo,  $\mathcal{H}_1 = 0$ . Aproximar as equações de movimento por equações lineares equivale a aproximar a hamiltoniana por uma função quadrática. Portanto, manteremos apenas a expansão em  $\mathcal{H}_2$ .

A forma quadrática da hamiltoniana pode ser expressa como:

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \langle x | H | x \rangle$$

sendo H a chamada matriz hessiana, definida por:

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}$$

Esta matriz está relacionada com a matriz M, que representa as equações de movimento linearizadas do sistema, através da relação:

$$M = JH$$

Sendo  $J$  a matriz simplética, definida como:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como  $J^{-1} = -J$ , encontra-se também que:

$$H = -JM$$

Esta relação é válida também para sistemas com mais graus de liberdade. Neste caso, a matriz simplética terá dimensão  $2n$ , sendo  $n$  o número de graus de liberdade, e será composta por duas matrizes identidade  $I$ , de ordem  $n$ , arranjadas da seguinte forma:

$$J_{(n)} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & I \\ -I & 0 \end{array} \right] \Bigg\} 2n$$

Esta forma da matriz  $J$  é válida caso os vetores que representam as variáveis do sistema estejam ordenados da forma:

$$\vec{X} = (x, y, z, \dots, p_x, p_y, \dots)$$

Neste trabalho, preferimos ordenar estes vetores de forma a explicitar cada par coordenado, ou seja:

$$\vec{X} = (x, p_x, y, p_y, \dots)$$

De forma que a matriz simplética toma a forma:

$$J_{(n)} = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \\ & & \dots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{array} \right] \Bigg\} 2n$$

Uma propriedade importante da matriz  $M$  acima é que, como ela representa uma transformação canônica (ou simplética), ela deve obedecer a condição simplética, definida por:

$$M^T J M = J$$

Esta condição significa que a matriz  $M$  deve preservar a chamada área simplética, ou ação. Isto implica, também, que:

$$\det M = 1,$$

que é a forma diferencial do Teorema de Liouville sobre a conservação do volume do espaço de fases.

Outra informação importante que pode ser extraída da matriz  $M$  refere-se à estabilidade dos pontos fixos. Um autovalor real positivo significa que

a direção dada pelo seu autovetor correspondente é instável. Um autovalor real negativo significa que a direção dada pelo seu autovetor correspondente é estável. Um autovalor imaginário indica que a direção dada pelo seu autovetor correspondente é central. Como a matriz  $M$  é simétrica, os autovalores sempre ocorrem em pares, que podem ser reais do tipo  $\pm\lambda$ , imaginários puros do tipo  $\pm i\omega$ , ou ainda em quádruplas do tipo  $\pm\lambda \pm i\omega$ . Portanto, para um sistema como o que está sendo estudado neste trabalho, existem três possibilidades:

- Dois pares de autovalores imaginários, o que indica que o ponto fixo é do tipo centro-centro.
- Um par de autovalores reais e um par de autovalores imaginários, indicando um ponto fixo do tipo centro-sela.
- Dois pares de autovalores reais, o que indica que o ponto fixo é do tipo sela-sela.
- Um quarteto loxodrômico (mas, a presença do plano invariante impede esta possibilidade).

## 2.5 Resultados numéricos

Nesta seção, encontramos as matrizes linearizadas, autovalores, autovetores, e matrizes de transformação para todos os casos.

### 2.5.1 Caso clássico ( $\sigma = 0$ )

Para o caso clássico, com  $\sigma = 0$ , as coordenadas do ponto fixo são:

$$(a^*, b^*, p_a^*, p_b^*) = (1, 1, 0, 0)$$

Estamos utilizando a solução positiva pois  $a$  e  $b$  representam fatores de escala, e portanto soluções com  $a < 0$  ou  $b < 0$  não teriam significado físico.

Com isso, a matriz  $M$  torna-se:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando-se os seus autovalores, encontra-se:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$$

O que implica que este ponto fixo é do tipo centro-sela.

Os seus autovetores são:

$$\vec{V}_{1,2} = c_{1,2} \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{2} \\ 1 \\ \pm \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{V}_{3,4} = c_{3,4} \begin{bmatrix} -2 \\ \pm 4\sqrt{2}i \\ 1 \\ \mp 4\sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

onde  $c_i$  são constantes que facilitarão a obtenção de uma normalização simplética, pois, conforme foi observado anteriormente, estes autovetores foram encontrados com o auxílio do software Maple. Como os autovetores de uma matriz estão definidos a menos de uma contante multiplicativa, é necessária a imposição de uma condição de normalização simplética para o cálculo desta constante, conforme será mostrado a seguir.

A matriz que diagonaliza M é construída a partir dos autovetores. Por conveniência, ela será escrita como produto de duas matrizes, uma contendo apenas as constantes  $c_i$ :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4\sqrt{2}i & -4\sqrt{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4\sqrt{2}i & 4\sqrt{2}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Como este sistema é hamiltoniano, a matriz P que diagonaliza a matriz M deve obedecer a condição simplética, dada por:

$$P^T J P = J \quad (2.10)$$

sendo J a matriz simplética. Esta condição é satisfeita com uma escolha apropriada das constantes  $c_i$ . Denominando C a matriz com as constantes e B a matriz com os autovetores, temos:

$$P = BC \quad (2.11)$$



Substituindo (2.11) em (2.10), temos:

$$(BC)^T J(BC) = J$$

$$C^T B^T JBC = J$$

e chamando  $T = B^T JB$ , temos:

$$C^T TC = J.$$

Como  $C$  é diagonal,  $C^T = C$ . Além disso, caso escolhamos  $c_1 = c_2$  e  $c_3 = c_4$ , teremos que  $CT = TC$ . Assim:

$$TC^2 = J$$

$$C^2 = T^{-1}J$$

Portanto, as constantes tornam-se:

$$c_1^2 = c_2^2 = C_{11} = C_{22} = (T^{-1}J)_{11} = (T^{-1}J)_{22}$$

e

$$c_3^2 = c_4^2 = C_{33} = C_{44} = (T^{-1}J)_{33} = (T^{-1}J)_{44}$$

Calculando  $T^{-1}J = (B^T JB)^{-1}J$ , temos:

$$T^{-1}J = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}i}{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}i}{48} \end{bmatrix}$$

Portanto, as constantes  $c_i$  tornam-se:

$$c_1 = c_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e

$$c_3 = c_4 = \sqrt{-\frac{\sqrt{2}i}{48}} = (1-i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{96}}$$

Substituindo estes valores em (2.9), encontramos a matriz  $P$ , que diagonaliza  $M$ , e que agora obedece à condição simplética  $P^T J P = J$  como sendo:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & -(1-i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{24}} & -(1-i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{24}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & (1+i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}} & -(1+i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & (1-i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{96}} & (1-i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{96}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -(1+i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}} & (1+i)\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}} \end{bmatrix}$$

Porém, esta matriz apresenta elementos complexos, o que para os cálculos numéricos que realizamos não é conveniente. Isto pode ser resolvido multiplicando-se a matriz  $P$  por uma matriz de rotação  $R$  apropriada. A nova matriz obtida, que representa uma transformação simplética real, será chamada  $Q$ , sendo  $Q = PR$ . Como  $R$  é apenas uma matriz de rotação em parte do espaço,  $Q$  também obedece  $Q^T J Q = J$ . Assim, temos:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

resultando em:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{12}} & -\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} & -\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{48}} & \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{48}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} & \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Esta matriz  $Q$  é a transformação simplética sobre os reais que será utilizada para a diagonalização de  $M$ . Notamos que a necessidade desta rotação extra em parte do espaço é provavelmente oriunda do fato de a parte cinética da energia não ser positiva definida, já que em outros trabalhos, onde a energia cinética era positiva definida, esta rotação extra não era necessária.

### 2.5.2 Caso com $\sigma \neq 0$ e $\gamma = 1$

Para o caso com  $\sigma \neq 0$ , existem dois pontos fixos, tanto para  $\gamma = 1$  quanto para  $\gamma = 2/3$ . Um deles fica bastante próximo do ponto fixo do caso clássico,

sendo apenas levemente deslocado pela presença do termo quântico. Ao contrário do caso clássico, as coordenadas dos pontos fixos somente podem ser encontradas numericamente, resolvendo-se a Eq.(2.4).

$$(a^*, b^*, p_a^*, p_b^*) = (0.98951437, 0.98951437, 0, 0)$$

A substituição destes valores na matriz M, resulta em:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -0.25264919 & 0 & 0.25264919 \\ 3.01070786 & 0 & -2.06335823 & 0 \\ 0 & 0.25264919 & 0 & 0 \\ -2.06335823 & 0 & 3.95805748 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz possui os seguintes autovalores, dados pelas equações (2.5) e (2.6):

$$\lambda_{1,2} = \pm 0.48923114$$

$$\lambda_{3,4} = \pm 1.42919962i$$

Significando que este ponto fixo é do tipo centro-sela. Os autovetores desta matriz são encontrados com as eqs. (2.7) e (2.8), e valem:

$$\vec{V}_{1,2} = c_{1,2} \begin{bmatrix} \pm 0.51642090 \\ 1 \\ \pm 0.51642090 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{V}_{3,4} = c_{3,4} \begin{bmatrix} -2 \\ \pm 5.65685425i \\ 1 \\ \mp 5.65685425i \end{bmatrix}$$

Desta forma, a matriz P, construída com os autovetores de M, e que a diagonaliza, é:

$$P = \begin{bmatrix} 0.51642090 & -0.51642090 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 5.65685425i & -5.65685425i \\ 0.51642090 & -0.51642090 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -5.65685425i & 5.65685425i \end{bmatrix} C$$

onde  $C$  é a matriz dos coeficientes  $c_i$ , da mesma forma que no caso anterior. Deve-se novamente encontrar os valores para as constantes  $c_i$ , de tal forma que esta matriz  $P$  satisfaça  $P^T J P = J$ . Realizando o mesmo procedimento utilizado anteriormente, escreve-se  $P = BC$ , e calcula-se a matriz  $(B^T J B)^{-1} J$ , que vale:

$$(B^T J B)^{-1} J = \begin{bmatrix} 0.32273416 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.32273416 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02946278i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.02946278i \end{bmatrix}$$

Com isto, encontra-se que as constantes  $c_i$  valem:

$$c_1 = c_2 = \sqrt{0.32273416} = 0.56809697$$

e

$$c_3 = c_4 = \sqrt{-0.02946278i} = 0.12137294(1 - i)$$

e desta forma, encontra-se a matriz  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 0.29337714 & -0.29337714 & 0.24274589(-1 + i) & -0.24274589(-1 + i) \\ 0.56809697 & 0.56809697 & 0.68658905(1 + i) & 0.68658905(-1 - i) \\ 0.29337714 & -0.29337714 & 0.12137294(1 - i) & 0.12137294(1 - i) \\ 1.13619394 & 1.13619394 & 0.68658905(-1 - i) & 0.68658905(1 + i) \end{bmatrix}$$

Esta matriz também deve ser multiplicada por uma matriz de rotação  $R$ , dada pela eq.(2.12), de forma que a diagonalização se realize sobre os reais. Assim, calculando  $Q = PR$ , encontra-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.29337714 & -0.29337714 & -0.34329452 & -0.34329452 \\ 0.56809697 & 0.56809697 & 0.97098354 & -0.97098354 \\ 0.29337714 & -0.29337714 & 0.17164726 & 0.17164726 \\ 1.13619394 & 1.13619393 & -0.97098354 & 0.97098354 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Uma característica interessante do termo quântico adicionado a este sistema é o surgimento de um novo ponto fixo, inexistente no caso clássico. Este ponto fixo é uma outra solução numérica da eq.(2.4). As coordenadas deste novo ponto fixo são dadas por:

$$(a^*, b^*, p_a^*, p_b^*) = (0.39208512, 0.39208512, 0, 0)$$

A matriz  $M$ , que representa o sistema linearizado em torno deste ponto fixo, vale:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -0.63761665 & 0 & 0.63761665 \\ 5.49301834 & 0 & -9.41769622 & 0 \\ 0 & 0.63761665 & 0 & 0 \\ -9.41769622 & 0 & 1.56834046 & 0 \end{bmatrix}$$

Seus autovalores são:

$$\lambda_{1,2} = \pm 1.58191023i$$

$$\lambda_{3,4} = \pm 3.60690447i$$

Nota-se, que neste caso o ponto fixo é do tipo centro-centro, e é consequência da adição do termo quântico, como já se podia prever pela análise dos planos invariantes.

Calculando-se os autovetores de  $M$ , encontra-se:

$$\vec{V}_{1,2} = c_{1,2} \begin{bmatrix} \pm 0.40306753i \\ 1 \\ \pm 0.40306753i \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{V}_{3,4} = c_{3,4} \begin{bmatrix} -2 \\ \pm 5.65685425i \\ 1 \\ \mp 5.65685425i \end{bmatrix}$$

Para encontrar as constantes  $c_i$ , repete-se o procedimento anterior para os outros pontos fixos, encontrando-se:

$$c_1 = c_2 = \sqrt{0.41349564i} = 0.45469530(1 + i)$$

e

$$c_3 = c_4 = \sqrt{-0.02946278i} = 0.12137294(1 - i)$$

De forma que a matriz  $P$ , que diagonaliza  $M$ , torna-se:

$$P = \begin{bmatrix} 0.18327291(1 - i) & 0.18327291(-1 + i) & 0.24274589(-1 + i) & 0.24274589(-1 + i) \\ 0.45469530(1 + i) & 0.45469530(1 + i) & 0.68658905(1 + i) & 0.68658905(-1 - i) \\ 0.18327291(1 - i) & 0.18327291(-1 + i) & 0.12137294(1 - i) & 0.12137294(1 - i) \\ 0.90939061(1 + i) & 0.90939061(1 + i) & 0.68658905(-1 - i) & 0.68658905(1 + i) \end{bmatrix}$$

Esta matriz também deve ser multiplicada por uma matriz de rotação, que é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Assim, utilizando-se esta matriz para calcular  $Q = PR$ , encontra-se a matriz  $Q$ , que diagonaliza  $M$ , obedece  $Q^T J Q = J$  e apresenta apenas elementos reais, como sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.25918704 & 0.25918704 & -0.34329452 & -0.34329452 \\ -0.64303626 & -0.64303626 & 0.97098354 & -0.97098354 \\ -0.25918704 & 0.25918704 & 0.17164726 & 0.17164726 \\ -1.28607253 & -1.28607253 & -0.97098354 & 0.97098354 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

### 2.5.3 Caso com potencial quântico com $\gamma = 2/3$

Para o caso com potencial quântico com  $\gamma = 2/3$  e  $\sigma = 0.01$ , o procedimento seguido aqui é o mesmo que nas seções anteriores. Desta forma, encontramos o valor numérico de seu primeiro ponto fixo, que vale:

$$(a^*, b^*, p_a^*, p_b^*) = (0.99317156, 0.99317156, 0, 0)$$

A substituição destes valores na matriz  $M$ , resulta em:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -0.25171885 & 0 & 0.25171885 \\ 3.00920630 & 0 & -2.03659047 & 0 \\ 0 & 0.25171885 & 0 & 0 \\ -2.03659047 & 0 & 3.98182214 & 0 \end{bmatrix}$$

A qual possui os seguintes autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \pm 0.49479869$$

$$\lambda_{3,4} = \pm 1.42393682i$$

significando que este ponto fixo é do tipo centro-sela.

Os autovetores desta matriz são encontrados com as eqs. (2.7) e (2.8), e valem:

$$\vec{V}_{1,2} = c_{1,2} \begin{bmatrix} \pm 0.50872982 \\ 1 \\ \pm 0.50872982 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{V}_{3,4} = c_{3,4} \begin{bmatrix} -2 \\ \pm 5.65685425i \\ 1 \\ \mp 5.65685425i \end{bmatrix}$$

Para encontrar as constantes  $c_i$ , repete-se o procedimento realizado anteriormente para os outros pontos fixos, encontrando-se:

$$c_1 = c_2 = \sqrt{0.32761332} = 0.57237516$$

e

$$c_3 = c_4 = \sqrt{-0.02946278} = 0.12137294(1 - i)$$

De forma que a matriz P, que diagonaliza M, torna-se:

$$P = \begin{bmatrix} 0.29118431 & -0.29118431 & 0.24274589(-1 + i) & -0.24274589(-1 + i) \\ 0.57237516 & 0.57237516 & 0.68658905(1 + i) & 0.68658905(-1 - i) \\ 0.29118431 & -0.29118431 & 0.12137294(1 - i) & 0.12137294(1 - i) \\ 1.14475031 & 1.14475031 & 0.68658905(-1 - i) & 0.68658905(1 + i) \end{bmatrix}$$

Esta matriz também deve ser multiplicada por uma matriz de rotação R, dada pela eq.(2.12), de forma a torná-la real. Assim, calculando  $Q = PR$ , encontra-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.29118431 & -0.29118431 & -0.34329452 & -0.34329452 \\ 0.57237516 & 0.57237516 & 0.97098354 & -0.97098354 \\ 0.29118431 & -0.29118431 & 0.17164726 & 0.17164726 \\ 1.14475031 & 1.14475031 & -0.97098354 & 0.97098354 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Assim como para o caso com  $\gamma = 1$ , o termo quântico com expoente  $\gamma = 2/3$  também faz aparecer um outro ponto fixo, inexistente no caso clássico.

Este ponto fixo é uma outra solução numérica da eq.(2.4), e suas coordenadas são dadas por:

$$(a^*, b^*, p_a^*, p_b^*) = (0.24194223, 0.24194223, 0, 0)$$

A matriz M, que representa o sistema linearizado em torno deste ponto fixo, vale:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1.03330452 & 0 & 1.03330452 \\ 9.15692436 & 0 & -14.75189591 & 0 \\ 0 & 1.03330452 & 0 & 0 \\ -14.75189591 & 0 & 3.56195282 & 0 \end{bmatrix}$$

Seus autovalores valem:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2.40443536i$$

$$\lambda_{3,4} = \pm 5.84525307i$$

o que significa que o ponto fixo é do tipo centro-centro. Calculando-se os autovetores de M, encontra-se:

$$\vec{V}_{1,2} = c_{1,2} \begin{bmatrix} \pm 0.42974934i \\ 1 \\ \pm 0.42974934i \\ 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{V}_{3,4} = c_{3,4} \begin{bmatrix} -2 \\ \pm 5.65685425i \\ 1 \\ \mp 5.65685425i \end{bmatrix}$$

Para encontrar as constantes  $c_i$ , repete-se o procedimento realizado anteriormente para os outros pontos fixos, encontrando-se:

$$c_1 = c_2 = \sqrt{-0.38782297i} = 0.44035382(1 - i)$$

e

$$c_3 = c_4 = \sqrt{-0.02946278i} = 0.12137294(1 - i)$$



De forma que a matriz P, que diagonaliza M, torna-se:

$$P = \begin{bmatrix} 0.18924176(1+i) & 0.18924176(-1-i) & 0.24274589(-1+i) & 0.24274589(-1+i) \\ 0.44035381(1-i) & 0.44035381(1-i) & 0.68658905(1+i) & 0.68658905(-1-i) \\ 0.18924176(1+i) & 0.18924176(-1-i) & 0.12137294(1-i) & 0.12137294(1-i) \\ 0.88070763(1-i) & 0.88070763(1-i) & 0.68658905(-1-i) & 0.68658905(1+i) \end{bmatrix}$$

Esta matriz também deve ser multiplicada por uma matriz de rotação R, que vale:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Assim, utilizando-se esta matriz para calcular  $Q = PR$ , encontra-se a matriz Q, que diagonaliza M, obedece  $Q^T J Q = J$  e apresenta apenas elementos reais, como sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.26762827 & -0.26762827 & -0.34329452 & -0.34329452 \\ 0.62275434 & 0.62275434 & 0.97098354 & -0.97098354 \\ 0.26762827 & -0.26762827 & 0.17164726 & 0.17164726 \\ 1.24550868 & 1.24550868 & -0.97098354 & 0.97098354 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

## 2.6 Formas normais quadráticas em torno dos pontos de equilíbrio

Conforme mencionado anteriormente, o comportamento do sistema em torno do ponto de equilíbrio pode ser representado por uma hamiltoniana que apresenta apenas termos quadráticos. E, assim como as matrizes M, que representam as equações de movimento linearizadas do sistema, estas hamiltonianas também podem ser diagonalizadas. Isto significa que pode-se encontrar variáveis novas que são combinações lineares das antigas, e a hamiltoniana, quando escrita em termos destas novas variáveis, adquire uma forma simples. Supondo que a parte quadrática de um sistema seja dada por:

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \langle x | H | x \rangle \quad (2.18)$$

com

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{P}_A \\ \tilde{B} \\ \tilde{P}_B \end{bmatrix}$$

e H sendo a matriz hessiana avaliada no ponto fixo.

Definindo-se um novo conjunto de variáveis, relacionados com o conjunto antigo através da matriz Q:

$$\begin{bmatrix} A \\ P_A \\ B \\ P_B \end{bmatrix} = |X\rangle = Q^{-1} |x\rangle,$$

tem-se que:

$$|x\rangle = Q |X\rangle \quad (2.19)$$

Substituindo-se (2.19) em (2.18), temos:

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \langle X | Q^T H Q | X \rangle = \frac{1}{2} \langle X | H_D | X \rangle$$

Sendo  $H_D = Q^T H Q$ .

Lembramos que a matriz H está relacionada com a matriz M, que representa as equações de movimento do sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio através de:

$$H = J^{-1} M = -JM,$$

pode-se utilizar a matriz Q que diagonaliza a matriz M para calcular  $H_D$ , e obter a forma normal quadrática em torno do ponto de equilíbrio.

### 2.6.1 Caso clássico

Calculando a matriz hessiana para o caso clássico, encontra-se:

$$H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando a matriz  $Q$  calculada para o caso clássico, dada pela eq.(2.13), calcula-se  $H_D$ , obtendo-se:

$$H_D = Q^T H Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

De forma que a forma normal quadrática neste conjunto de variáveis torna-se:

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \langle X | H_D | X \rangle = \frac{1}{2} A P_A - \frac{\sqrt{2}}{2} (B^2 + P_B^2)$$

e o sistema está separado até segunda ordem em uma sela para o par de variáveis  $(A, P_A)$  e um centro para o par  $(B, P_B)$ .

### 2.6.2 Caso com $\sigma \neq 0$ e $\gamma = 1$

Para o primeiro ponto fixo do caso com  $\gamma = 1$ , a matriz hessiana é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} -3.01070786 & 0 & 2.06335823 & 0 \\ 0 & -0.25264919 & 0 & 0.25264919 \\ 2.06335823 & 0 & -3.95805749 & 0 \\ 0 & 0.25264919 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando-se  $H_D = Q^T H Q$ , com a matriz  $Q$  dada pela eq.(2.14), encontra-se:

$$H_D = \begin{bmatrix} 0 & 0.48923114 & 0 & 0 \\ 0.48923114 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.42919962 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.42919962 \end{bmatrix}$$

o que implica na forma normal quadrática:

$$\mathcal{H}_2 = 0.48923114 A P_A - 0.71459981 (B^2 + P_B^2)$$

que, da mesma forma que no caso clássico, representa uma sela para o par de variáveis  $(A, P_A)$  e um centro para o par  $(B, P_B)$ .

E, calculando-se a matriz hessiana para o segundo ponto fixo deste caso, encontra-se:

$$H = \begin{bmatrix} -5.49301834 & 0 & 9.41769622 & 0 \\ 0 & -0.63761665 & 0 & 0.63761665 \\ 9.41769622 & 0 & -1.56834046 & 0 \\ 0 & 0.63761665 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, após sua diagonalização através da matriz Q dada pela eq.(2.15), torna-se:

$$H_D = \begin{bmatrix} 1.58191023 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.58191023 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.60690447 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.60690447 \end{bmatrix}$$

resultando na forma normal quadrática:

$$\mathcal{H}_2 = 0.79095512(A^2 + P_A^2) - 1.80345224(B^2 + P_B^2)$$

que indica um centro para ambos pares de variáveis,  $(A, P_A)$  e  $(B, P_B)$ .

### 2.6.3 Caso com potencial quântico com $\gamma = 2/3$

Para o primeiro ponto fixo do caso com potencial quântico, com  $\gamma = 2/3$ , a matriz hessiana é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} -3.00920630 & 0 & 2.03659047 & 0 \\ 0 & -0.25171885 & 0 & 0.25171885 \\ 2.03659047 & 0 & -3.98182214 & 0 \\ 0 & 0.25171885 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando-se  $H_D = Q^T H Q$ , com a matriz Q dada pela eq.(2.16), encontra-se:

$$H_D = \begin{bmatrix} 0 & 0.49479868 & 0 & 0 \\ 0.49479868 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.42393682 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.42393682 \end{bmatrix}$$

o que implica na forma normal quadrática:

$$\mathcal{H}_2 = 0.49479868AP_A - 0.71196841(B^2 + P_B^2)$$

que, da mesma forma que no caso clássico, representa uma sela para o par de variáveis  $(A, P_A)$  e um centro para o par  $(B, P_B)$ .

E, calculando-se a matriz hessiana para o segundo ponto fixo deste caso, encontra-se:

$$H = \begin{bmatrix} -9.15692436 & 0 & 14.75189591 & 0 \\ 0 & -1.03330452 & 0 & 1.03330452 \\ 14.75189591 & 0 & -3.56195282 & 0 \\ 0 & 1.03330452 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, após sua diagonalização através da matriz  $Q$  dada pela eq.(2.17), torna-se:

$$H_D = \begin{bmatrix} 2.40443536 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.40443536 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5.84525306 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5.84525306 \end{bmatrix}$$

resultando na forma normal quadrática:

$$\mathcal{H}_2 = 1.20221768(A^2 + P_A^2) - 2.92262653(B^2 + P_B^2)$$

indicando um centro para ambos pares de variáveis,  $(A, P_A)$  e  $(B, P_B)$ .

## 2.7 Topologia do espaço de fases ao redor dos pontos fixos

Em todos os casos, clássico e quântico, há um ponto fixo do tipo centro-sela, cuja topologia será descrita a seguir. Para todos os casos, as formas normais quadráticas ao redor dos pontos fixos do tipo centro-sela são da forma:

$$\mathcal{H}_2 = \alpha AP_A - \beta(B^2 + P_B^2).$$

Caso sejam feitas as substituições

$$\begin{aligned} A &= p_1 + q_1 \\ P_A &= p_1 - q_1 \\ B &= q_2 \\ P_B &= p_2 \end{aligned} ,$$

as formas quadráticas tornam-se:

$$\mathcal{H}_2 = \alpha(p_1^2 - q_1^2) - \beta(p_2^2 + q_2^2),$$

ou seja, a hamiltoniana é separável, o que significa que o movimento pode ser compreendido como sendo a composição de um movimento rotacional com um movimento hiperbólico. A energia do movimento rotacional será dada por  $E_r = \beta(p_2^2 + q_2^2)$  e a energia do movimento hiperbólico será dada por  $E_h = \alpha(p_1^2 - q_1^2)$ .

Para chegar-se à topologia do espaço de fases definido por esta hamiltoniana, deve-se considerar duas possibilidades: Se  $E_r \neq 0$ ,  $E_h = 0$  e  $p_1 = q_1 = 0$ , o movimento corresponde a órbitas periódicas instáveis no plano  $(q_2, p_2)$ , denominadas aqui  $\tau_{E_r}$ , e que dependem continuamente da energia  $E_r$ . Estas órbitas periódicas são mostradas na figura 8:

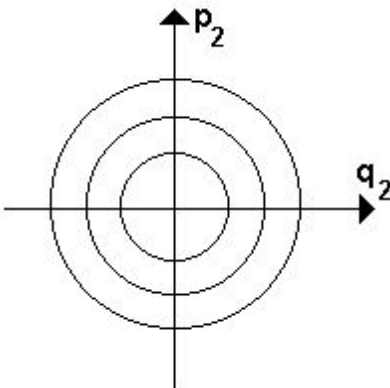


Figura 8 - Órbitas periódicas na vizinhança linear do centro-sela no plano  $(q_2, p_2)$

O caso  $E_r \neq 0$ ,  $E_h = 0$  e  $p_1 = \pm q_1$  define as variedades unidimensionais estável  $V_e$  e instável  $V_i$ . Neste caso, o movimento será dada pelo produto direto das órbitas periódicas  $\tau_{E_r}$  com as variedades  $V_e$  e  $V_i$ , gerando numa vizinhança linear do centro-sela a estrutura dos semi-cilindros estáveis ( $\tau_{E_r} \times V_e$ ) e instáveis ( $\tau_{E_r} \times V_i$ ). Este comportamento está mostrado na figura 9.

Se  $E_h \neq 0$  e  $E_r = 0$ , o movimento resultante consiste em órbitas hiperbólicas no plano  $(q_1, p_1)$ , cujas separatrizes são as variedades unidimensionais estável e instável, conforme ilustrado na figura 10.

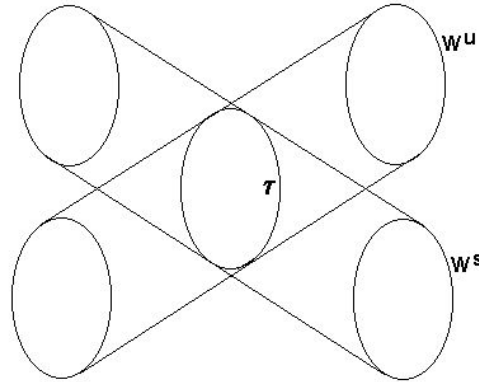


Figura 9 - Uma órbita periódica ( $\tau$ ) e os semi-cilindros estável ( $W^s$ ) e instável ( $W^u$ ).

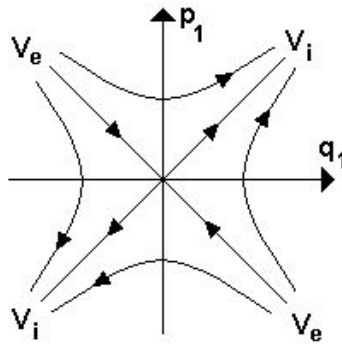


Figura 10 - Variedades unidimensionais estável e instável e órbitas hiperbólicas na vizinhança linear do centro-sela, no plano  $(q_1, p_1)$ .

No caso mais geral,  $E_r \neq 0$  e  $E_h \neq 0$ , as órbitas estarão sobre cilindros infinitos, resultantes do produto direto das hipérboles do plano  $(q_1, p_1)$  com as órbitas periódicas instáveis do plano  $(q_2, p_2)$ .

No próximo capítulo, vamos determinar as órbitas periódicas em torno dos pontos fixos do tipo centro-centro e centro-sela usando as aproximações lineares dadas pela solução das equações de hamilton derivadas das formas quadráticas encontradas aqui, e que serão continuadas numericamente para as órbitas periódicas do sistema completo.

# Capítulo 3

## Determinação de órbitas periódicas

### 3.1 Introdução

Neste capítulo serão calculadas as órbitas periódicas ao redor dos pontos de equilíbrio para os três casos do modelo de Bianchi IX cuja linearização discutimos no capítulo anterior. Primeiramente apresentamos o teorema de Poincaré que afirma que, em sistemas hamiltonianos, uma órbita periódica não aparece isolada como nos sistemas gerais, mas sim em famílias que podem ser parametrizadas pelo valor da hamiltoniana ou por qualquer outro parâmetro do problema. A seguir apresentamos o método de continuação numérica de soluções periódicas. O teorema de Poincaré nos garante que a partir das órbitas lineares determinadas no capítulo 2 podem ser continuadas para órbitas do sistema completo. As órbitas periódicas que mais nos interessam aqui são as que estão ao redor dos pontos de equilíbrio centro-sela e que constituem a variedade invariante denominada variedade central (ver apêndice). Elas serão usadas no Capítulo 4, onde estudaremos sistematicamente as variedades invariantes estáveis e instáveis que se interceptam perpendicularmente na variedade central. As órbitas periódicas, como veremos, representam universos que oscilam em torno do ponto de Einstein e são instáveis. A existência ou não de caos nos modelos está intrinsecamente ligada a como se comportam estas variedades, isto é, se há cruzamentos entre as variedades estáveis e instáveis.



## 3.2 O método de continuação analítica

O método de continuação analítica, devido a Poincaré, consiste em se determinar soluções a partir de uma solução periódica conhecida, através de pequenas modificações nas condições iniciais e no parâmetro de cada solução. O objetivo deste método, como veremos, é expressar a órbita periódica em série para as coordenadas da órbita periódica e de seu período em termos de potências do parâmetro ao longo do qual se deseja continuar a órbita. Seguiremos aqui a apresentação de Puccacio e Bocaleti [10].

Seja o seguinte sistema de equações diferenciais de ordem  $n$ :

$$\dot{X} = g(X, \epsilon) \quad (3.1)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro escalar. A solução que satisfaz uma dada condição inicial  $X_0$  em  $t = 0$  é escrita como

$$X = X(t, X_0, \epsilon)$$

que só será periódica se satisfizer a condição de periodicidade,

$$X(t, X_0^*, \epsilon^*) = X(t + T^*, X_0^*, \epsilon^*)$$

onde  $T^*$  é o período da órbita,  $X_0^*$  e  $\epsilon^*$  são as condições iniciais da solução periódica, ou de maneira análoga,

$$X(0, X_0^*, \epsilon^*) = X(T^*, X_0^*, \epsilon^*) = X_0^*. \quad (3.2)$$

Para que uma solução vizinha a esta seja periódica,

$$f(X_0, \epsilon) = X(T^*, X_0, \epsilon) - X_0 = 0 \quad (3.3)$$

tem que ser satisfeita para todas as variáveis do sistema. Este sistema é satisfeito para  $X_0 = X_0^*$  e  $\epsilon = \epsilon^*$ , visto que a solução de partida é periódica (3.2). Se o jacobiano do sistema (3.3) for diferente de zero para  $X_0 = X_0^*$ ,  $\epsilon = \epsilon^*$ , e as  $f(X, \epsilon)$  forem analíticas numa vizinhança de  $(X_0^*, \epsilon^*)$ , então o teorema da função implícita para funções analíticas (ver apêndice) garante que pode-se encontrar uma série de potência em  $\epsilon - \epsilon^*$ , ou seja:

$$X_k - \bar{X}_k = A_k(\epsilon - \bar{\epsilon}) + B_k(\epsilon - \bar{\epsilon})^2 + \dots$$

onde os coeficientes  $A_k, B_k, \dots$  são constantes.

Deseja-se então determinar uma solução periódica do sistema de equações diferenciais (3.1), tal que a solução seja próxima da solução periódica conhecida

$$X = X(t, X_0^*, \epsilon^*)$$

A solução da órbita periódica desejada deverá ter o seu parâmetro, seu período e suas condições iniciais próximos dos valores da órbita periódica conhecida, porém diferentes dos mesmos, ou seja:

$$\begin{aligned} \epsilon &\neq \epsilon^* \\ X_0 &\neq X_0^* \\ T &\neq T^* \end{aligned}$$

Pela definição de órbita periódica, a solução  $X^*$  deve satisfazer:

$$X(T^*, X_0^*, \epsilon^*) - X_0^* = 0$$

e a equação para a órbita gerada fica:

$$f(T, X_0, \epsilon) = X(T, X_0, \epsilon) - X_0 = 0$$

sendo que existem  $n + 1$  grandezas a serem determinadas para cada valor de  $\epsilon$ :  $n$  componentes do vetor  $x$  mais o período  $T$ . Porém, pode-se considerar um novo vetor de condições iniciais que não resulte em uma nova solução periódica, se  $X_0 \neq X_0^*$ ; mas  $X_0$  representa um outro ponto da solução conhecida; isto é,  $X_0$  pode ser o vetor  $X_0^*$  em um outro instante. A fim de eliminar tal possibilidade, fixa-se uma componente do vetor  $X_0^*$  em  $X_0^{(n)}$  e mudam-se as demais:

$$\begin{aligned} X_0^{(n)} &= X_0^{*(n)} \\ X_0^{(k)} &\neq X_0^{*(k)} \end{aligned}$$

Este procedimento também é adotado quando um certo  $X^*$  considerado gera uma matriz jacobiana de determinante nulo  $D = 0$ . O sistema

$$f(T, X_0, \epsilon) = 0$$

tem sua solução em  $\epsilon = \epsilon^*$ ,  $X_0 = X_0^*$  e  $T = T^*$ . Mas, para buscar outra solução periódica, é necessário determinar a solução do sistema acima na vizinhança de  $\epsilon^*$ , após verificar se a solução desejada realmente existe; isto é, se  $D \neq 0$ .

Então seja o sistema de  $n + 1$  equações:

$$\begin{aligned}
 f_1(T, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(k)}, \dots, X_0^{(n)}, \epsilon) &= 0 \\
 f_2(T, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(k)}, \dots, X_0^{(n)}, \epsilon) &= 0 \\
 &\vdots \\
 f_k(T, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(k)}, \dots, X_0^{(n)}, \epsilon) &= 0 \\
 &\vdots \\
 f_n(T, X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, \dots, X_0^{(k)}, \dots, X_0^{(n)}, \epsilon) &= 0 \\
 X_0^{(n)} &= X_0^{*(n)}
 \end{aligned}$$

O determinante funcional deste sistema é dado por:

$$D = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_0^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_0^{(n-1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial T^0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0^{(1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_0^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_0^{(n-1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial T^0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0^{(1)}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_0^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_0^{(n-1)}} & \frac{\partial f_n}{\partial T^0} \end{vmatrix}$$

que deve ser avaliado em  $T = T^*$ ,  $x_0 = x_0^*$  e  $\epsilon = \epsilon^*$ . O vetor da última coluna é dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial T^0} = \dot{X}(T, X_0, \epsilon) = \chi[X(T, X_0, \epsilon), \epsilon]$$

e pode ser reescrito para  $T = T^*$ ,  $X_0 = X_0^*$  e  $\epsilon = \epsilon^*$ , na seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \chi(X_0^*, \epsilon^*)$$

desde que as condições iniciais não dependam explicitamente do tempo.

Diferenciando as equações de movimento em relação as condições iniciais, obtém-se:

$$\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_0^k} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial X_0^k}$$

Se as condições iniciais não dependerem explicitamente do tempo, a relação acima pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial X_0^k} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial X_0^k}$$

que são as equações variacionais de  $X = \chi(X, \epsilon)$ , onde

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial X_j} = Y_{ij}[X(t, X_0^*, \epsilon^*), \epsilon^*]$$

é avaliada ao longo da solução gerada pela condição inicial. Se  $D \neq 0$ , pode-se resolver o sistema de  $n$  equações com  $n$  variáveis desconhecidas. As soluções são:

$$X_{0i} - X_{0i}^* = A_i(\epsilon - \epsilon^*) + B_i(\epsilon - \epsilon^*)^2 + \dots$$

para  $i = 1, \dots, n - 1$  e

$$X_0^{(n)} - X_0^{*(n)} = 0$$

$$T - T^* = A_i(\epsilon - \epsilon^*) + B_i(\epsilon - \epsilon^*)^2 + \dots$$

Como já mencionado na introdução deste capítulo, baseado neste método podemos usar o método de continuação numérica de soluções que apresentaremos a seguir.

### 3.3 Determinação numérica de órbitas periódicas

Dada a variedade central linear ao redor dos pontos fixos, ou qualquer outra solução próxima, é possível refinar esta órbita para obter a órbita desejada. Feito isto podemos continuar a órbita encontrada em direção a uma outra órbita da mesma família empregando o parâmetro de arco no espaço de fase. Esta técnica[11] permite percorrer toda a família de soluções periódicas do problema sistematicamente de maneira eficiente, inclusive com a vantagem de poder cruzar bifurcações da família de órbitas em outras famílias. Caso continuássemos a família seguindo apenas uma de suas variáveis teríamos problemas também ao encontrar outras singularidades tais como possíveis dobras da curva característica com relação a esta variável, sendo que denominamos aqui curva característica uma curva descrita por uma das variáveis do problema com a variação da energia ou do período.

Consideremos um sistema autônomo  $\dot{X} = f(X)$  para o qual queremos computar uma órbita periódica de período  $T$ . A maneira mais fácil de se

proceder é encontrar as condições iniciais  $X_0$  tais que  $G(X_0) = \Phi(T, X_0) - X_0 = 0$ . Contudo, todos os pontos  $\Phi(T, X_0)$  são soluções desta equação pois pertencem à órbita. Isto equivale a dizer que

$$DG(X_0) = D\Phi(T, X_0) - I \quad (3.4)$$

é uma matriz singular com autovalor 1 e com  $f(X_0)$  como autovetor. A maneira que escolhemos aqui para contornar este problema é determinar a órbita periódica determinando seu ponto fixo em uma secção de Poincaré  $S$  convenientemente escolhida. Se  $\Sigma$  é uma secção transversal ao fluxo gerado pela solução das equações diferenciais, então a solução que se busca é:

$$f(X_0) = (X(t, X_0) \cap \Sigma) - X_0 = S(X_0) - X_0 = 0. \quad (3.5)$$

Desta forma, reduzimos o problema à busca de pontos fixos do mapa de Poincaré  $S$ . Neste caso, o zero de  $f(X)$  pode ser obtido com o método de Newton usando-se a linearização de  $S$ , dada por  $G(X_0, T)$ , que é obtida das soluções das equações variacionais em  $t = T$ . Isto será detalhado na implementação do método, explicada mais adiante. A equação (3.4) pode ser transformada em um problema de continuação descrito pela equação:

$$R(X, \mu) = G(X)\mu + L(X)(1 - \mu)$$

onde  $\mu \in [0, 1)$  e  $L(X)$  é a solução periódica conhecida. Enquanto  $\mu$  varia de 0 a 1,  $R(X, \mu)$  varia de  $L(X)$  a  $G(X)$ , com isto são obtidos os zeros da função  $f(X)$  se a matriz  $DR(X)\Delta X$  for regular ao longo da solução.

### 3.4 Continuação numérica de soluções

A fim de se obter a família de órbitas periódicas, foi utilizado o método de continuação de soluções. A idéia do método é integrar uma curva característica do sistema de equações diferenciais ao longo de um parâmetro de arco  $\epsilon = s$ . Este parâmetro pode ser considerado como uma coordenada adicional, então  $X_{n+1} = \epsilon$ . De  $F(X) = 0$ , tem-se que a matriz  $\Delta F(X)\Delta X = 0$ , onde  $\Delta F(X)$  é a matriz do mapa linear de  $R^{n+1} \rightarrow R^n$ . Seja  $A_i$  o determinante da matriz  $\Delta F(X)$  obtida para a órbita periódica, eliminando-se a  $i$ -ésima coluna e multiplicando a matriz obtida por  $(-1)^{i+1}$ . Então tem-se as relações, provenientes da teoria de equações homogêneas:

$$\frac{\Delta x_0}{A_0} = \frac{\Delta x_1}{A_1} = \frac{\Delta x_2}{A_2} = \dots = \frac{\Delta x_n}{A_n}$$

Pode-se definir o tamanho do comprimento de arco em  $R^{n+1}$  como:

$$\Delta s = A_0 = \left( \sum_{i+1}^n (\Delta x_i)^2 \right)^{1/2}$$

desta forma, é obtido o conjunto de equações diferenciais que será integrado numericamente ao longo do comprimento de arco  $s$ :

$$\frac{da}{ds} = \frac{A_1}{A_0} \quad (3.6)$$

$$\frac{db}{ds} = \frac{A_2}{A_0} \quad (3.7)$$

$$\frac{dp_a}{ds} = \frac{A_3}{A_0} \quad (3.8)$$

onde,

$$A_1 = (f_b^1 f_{p_a}^2 - f_{p_a}^1 f_b^2), \quad A_2 = (f_a^1 f_{p_a}^2 - f_{p_a}^1 f_a^2), \quad A_3 = (f_a^1 f_b^2 - f_b^1 f_a^2).$$

Os índices subscritos de  $f$  representam as derivadas parciais de  $f^{1(2)}$  em relação às respectivas coordenadas. Este método permite passar por pontos de retorno da curva característica, pois avançar ao longo da mesma não privilegia nenhuma das variáveis, com isto, pode-se atravessar o ponto de bifurcação de uma família de órbitas periódicas sem problemas.

O conjunto de equações diferenciais acima pode ser integrado por qualquer método numérico de solução de equações diferenciais ordinárias. Foi implementado um método do tipo preditor-corretor, sendo o preditor o método de Euler e para o corretor foi utilizado o método de Newton modificado, que segue abaixo.

Suponha que:

$$X^k = X^{k-1} + \Delta X^{k-1} \quad (3.9)$$

sendo que a grandeza  $\Delta X^{k-1}$  deve obedecer à seguinte relação:

$$G(\Delta X^{k-1}) = -F(X^{k-1}). \quad (3.10)$$

o lado direito representa a quantidade que falta para se atingir a curva característica mais refinada. A norma é definida por:

$$\Delta X^T \Delta X \quad (3.11)$$

e minimizada por:

$$\Delta X^{k-1} = -G^T(GG^T)^{-1}F(X^{k-1}) \quad (3.12)$$

Com este método, após poucos passos, chega-se à secção da órbita periódica com a precisão requerida.

### 3.5 Implementação do método

Seja o conjunto de condições iniciais da órbita periódica num ponto  $P_0$  da secção de Poincaré em  $p_b = 0$  com  $\dot{p}_b > 0$ , tal que:

$$P_0 = (a_0, b_0, p_{a0}, p_{b0} = 0) = (a, b, p_a, p_b)_0$$

e seja o ponto  $P_f$  a primeira intersecção da mesma órbita com a secção  $p_b = 0, \dot{p}_b > 0$ ,

$$P_f = (a_f, b_f, p_{af}, p_{bf} = 0) = (a, b, p_a, p_b)_f$$

Com as relações abaixo podemos determinar a órbita:

$$\begin{aligned} f^1 &= (a, b, p_a)_0 = a_f - a_0 = 0 \\ f^2 &= (a, b, p_a)_0 = p_{af} - p_{a0} = 0 \end{aligned}$$

isto é, busca-se soluções que interceptem  $p_b = 0$  no mesmo ponto que a condição inicial. É necessária a determinação de apenas duas grandezas, pois o sistema tem quatro variáveis e dois vínculos: cada órbita tem uma energia definida, e  $p_b = 0$ . Este método é um método de tiro simples, pois busca-se um ajuste nas condições iniciais da órbita aproximada na secção de Poincaré, para que a mesma se feche, ao contrário de métodos que utilizam vários pontos na órbita periódica[12].

Em resumo, definindo os conjuntos  $X = (a, b, p_a)$  e  $F = (f^1, f^2)$ , busca-se um  $X_0 = (a_0, b_0, p_{a0})$  que seja solução do sistema não linear, dado pela equação:

$$F(X_0) = 0$$

onde  $X_0$  representa a solução da órbita periódica desejada na secção  $p_b = 0$ .

Supondo que o posto da matriz jacobiana de  $F$ ,

$$G = D_X F$$

seja dois, então  $F(X_0) = 0$  descreve uma curva característica no espaço  $(a, b, p_a)_0$ . O próximo valor de  $X = X_0 + dX$  representará as coordenadas iniciais de uma órbita periódica vizinha, onde  $dX$  é o incremento que se deseja determinar.

Dadas as condições iniciais  $(a_0, b_0, p_{a0}, 0)$  para o ponto  $P_0$  na secção de Poincaré com  $p_b = 0$  e  $\dot{p}_b > 0$ , o próximo ponto  $P_f$  na secção com  $p_b = 0$  e  $\dot{p}_b > 0$  é determinado após o período  $T$ , onde a matriz solução das equações variacionais,  $A = A(T)$ , também é calculada. A matriz  $A$  é uma matriz 4x4, pois a matriz inicial é uma matriz identidade 4x4; ou seja, para cada integração, toma-se o valor unitário de cada uma das variações e zera-se as outras da mesma coluna. Isto significa que necessita-se integrar simultaneamente 20 equações: 4 equações de movimento e 4 conjuntos com 4 condições iniciais para as variações, definidas por  $A(t=0) = I$ . A matriz  $G$  é obtida a partir dos elementos de  $A(T)$ , sendo:

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} + \beta_1 a_{41} - 1 & a_{12} + \beta_1 a_{42} & a_{13} + \beta_1 a_{43} \\ a_{31} + \beta_3 a_{41} & a_{32} + \beta_3 a_{42} - 1 & a_{33} + \beta_3 a_{43} \end{pmatrix}$$

onde  $\beta_1 = -v_1/v_4$  e  $\beta_3 = -v_3/v_4$ ;  $v_1, v_3$  e  $v_4$  representam o campo vetorial no ponto  $P_f$  da órbita. As parcelas que envolvem  $\beta_1$  e  $\beta_3$  representam as correções para a diferença de tempo para se atingir a secção, entre a órbita nominal e suas variações.

Com isto, calcula-se os  $A'_i$ s e os incrementos que faltam ( $dX = (da, db, dp_a)$ ) para atingir o ponto desejado de uma órbita periódica vizinha, da seguinte forma:

$$A_1 = g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}$$

$$A_2 = -g_{11}g_{23} + g_{13}g_{21}$$

$$A_3 = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

$$A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

visto que,

$$da = \frac{A_1}{A_0} ds$$

$$db = \frac{A_2}{A_0} ds$$

$$dp_a = \frac{A_3}{A_0} ds$$



O passo  $ds$  é fornecido ao programa; o preditor fornece os valores aproximados de  $dX = (da, db, dp_a)$  através da integração das equações (3.6)-(3.8); em seguida, os valores das condições iniciais da órbita periódica obtida são refinados com o método de Newton modificado descrito pelas equações (3.9)-(3.12).

Deve-se notar que, no caso das órbitas periódicas ao redor de um ponto fixo do tipo centro-sela, a primeira condição inicial para a órbita, que será posteriormente refinada, deve estar na direção do centro (estável).

Durante o estudo da hamiltoniana linearizada, representada pelas matrizes encontradas no capítulo anterior, percebe-se que o centro está nas variáveis  $(B, P_B)$ , e a sela em  $(A, P_A)$ . Portanto, para escolher as condições iniciais que estejam apenas na direção do centro, deve-se ter  $A = P_A = 0$ . Porém, as equações de movimento estão em termos de  $a, p_a, b$  e  $p_b$ . Lembrando que:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= a - a^* \\ \tilde{B} &= b - b^* \\ \tilde{P}_A &= p_a - p_a^* \\ \tilde{P}_B &= p_b - p_b^*\end{aligned}$$

E que, pela eq.(2.19):

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{P}_A \\ \tilde{B} \\ \tilde{P}_B \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} A \\ P_A \\ B \\ P_B \end{bmatrix},$$

temos:

$$\begin{bmatrix} a - a^* \\ p_a - p_a^* \\ b - b^* \\ p_b - p_b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \\ P_B \end{bmatrix}$$

Conforme determinado anteriormente,  $p_a^* = p_b^* = 0$ . Além disso, as órbitas periódicas serão calculadas na secção de Poincaré  $p_b = 0$ . Além disso, impõe-se também que  $p_a = 0$ , obtendo-se:

$$\begin{aligned}a &= a^* + q_{13}B + q_{14}P_B \\ b &= b^* + q_{33}B + q_{34}P_B \\ 0 &= q_{23}B + q_{24}P_B = q_{43}B + q_{44}P_B\end{aligned}$$

Como, para todas as matrizes  $Q$  encontradas no capítulo 2,  $q_{23} = -q_{24}$  e  $q_{43} = -q_{44}$ , a última condição se reduz a:

$$B = P_B$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} a &= a^* + (q_{13} + q_{14})B \\ b &= b^* + (q_{33} + q_{34})B \end{aligned}$$

Desta forma, definindo-se um valor para  $B$  (ou  $P_B$ ), define-se as condições iniciais, que definem um ponto  $P_0(a_0, b_0, p_{a0})$  na secção de Poincaré  $p_b = 0$ .

### 3.6 Resultados

Nesta seção mostramos as órbitas periódicas obtidas ao redor dos diversos pontos fixos, para todos os casos. Cada família de órbitas forma uma hiper-superfície de duas dimensões imersa no espaço de fases de quatro dimensões. Este espaço, no caso das órbitas instáveis ao redor do centro-sela é a chamada variedade central. Cada órbita correspondente a um valor da hamiltoniana habita apenas o subespaço tridimensional definido pelo valor da hamiltoniana. Por esta razão, mostraremos as várias projeções, para que seja possível a sua visualização, e uma melhor discussão do seu significado para o problema físico em questão.

### 3.6.1 Caso clássico

As figuras a seguir ilustram as diversas projeções da família de órbitas periódicas ao redor do ponto fixo ( $a = 1, b = 1, p_a = 0, p_b = 0$ ), para o caso clássico ( $\sigma = 0$ ). Lembramos que tomamos o valor  $\Lambda = 1/4$ , e que o valor da hamiltoniana no ponto fixo centro-sela é  $E = 1$ , sendo que este ponto representa o chamado Universo de Einstein, por ser uma solução estática, na qual os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  são contantes no tempo.

Na figura 1 mostramos a projeção em  $(a, p_a)$  destas órbitas e notamos que, a medida que a energia diminui, as órbitas aproximam-se de  $a = 0$ , que é uma órbita que colapsa.

Na figura 2, mostramos a projeção em  $(b, p_b)$ . Nota-se que ao contrário do fator de escala  $a$ , o fator de escala  $b$  evita o colapso, tendendo ao valor  $b = 2$ . Lembramos que estas órbitas representam universos "pulsantes", ou seja, universos nos quais os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  são periódicos, ainda que instáveis. Na figura 3, mostramos a projeção das órbitas em  $(a, b)$ .

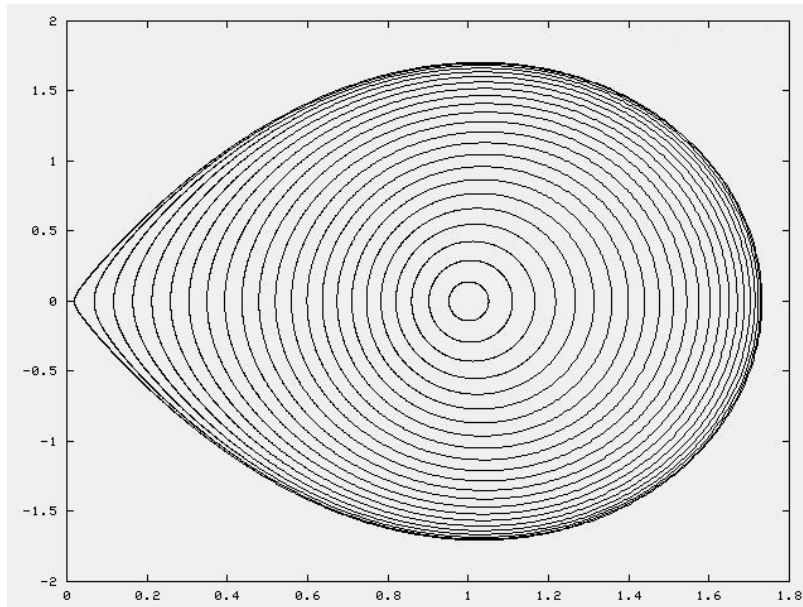


Figura 1 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, p_a)$ .

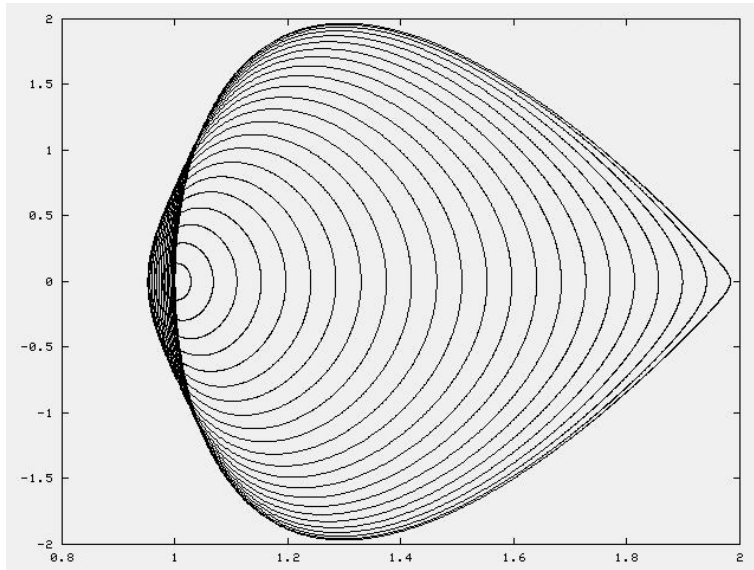


Figura 2 - Projeção das órbitas periódicas em  $(b, p_b)$ .

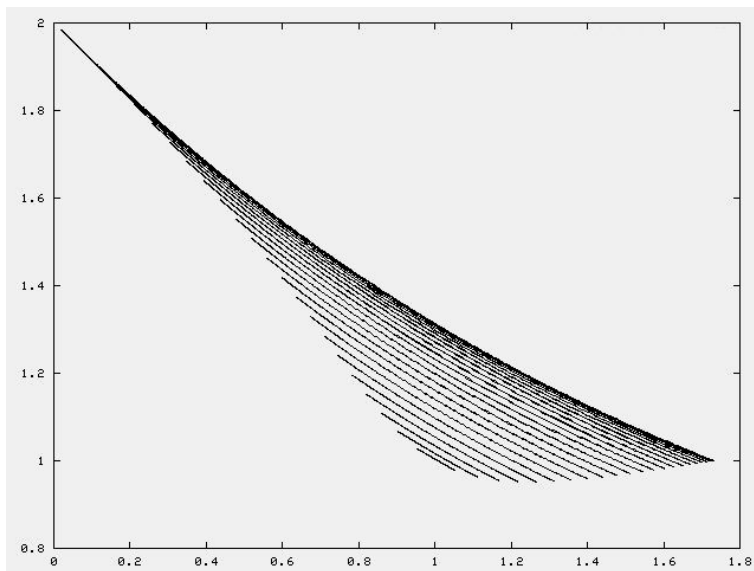


Figura 3 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ .

A figura 4 mostra como os fatores de escala das órbitas periódicas, na secção  $p_b = 0$ , em função da energia, isto é,  $(E, a)$  e  $(E, b)$ .

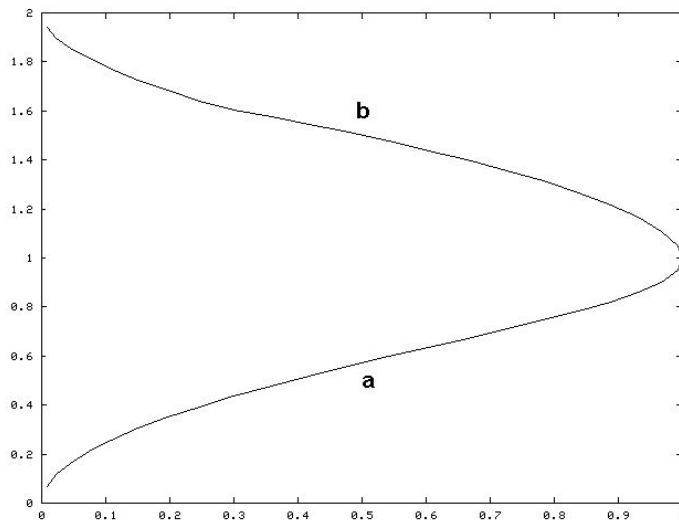


Figura 4 - Valores de  $a$  e  $b$  em função da energia,  $(E, a)$  e  $(E, b)$ .

E a figura 5 mostra a projeção em  $(a, b)$  das órbitas periódicas sobre as curvas de momento zero. Nota-se que as órbitas iniciam no ponto fixo, que aparece como um máximo da energia no gráfico, e decrescem em energia à medida que tornam-se maiores, até a última órbita periódica, que tem  $E = 0$ , e que termina no ponto  $(a = 0, b = 2)$ .

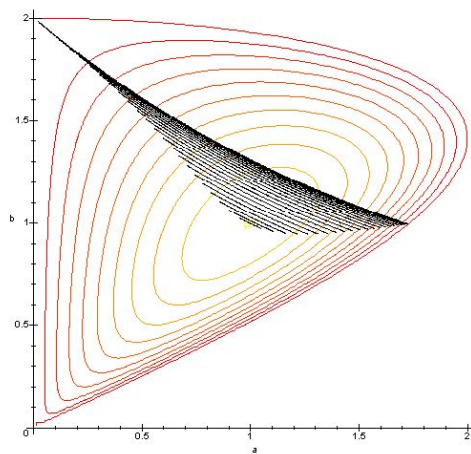


Figura 5 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ , sobrepostas às curvas de momento zero.

### 3.6.2 Caso com $\sigma \neq 0$ e $\gamma = 1$

Para o caso com potencial quântico com  $\gamma = 1$ , como a constante ( $\sigma$ ) que determina a intensidade do termo quântico é pequena (0.01), a pequena variação que vimos nos pontos fixos também se reflete nas órbitas da variedade central. As órbitas para o caso com potencial quântico foram calculadas em torno do ponto fixo com as mesmas características dinâmicas do anterior (centro-sela), com apenas uma pequena diferença na sua posição, causada pela introdução do termo quântico. ( $a = 0.98951437, b = 0.98951437, p_a = 0, p_b = 0$ ).

As figuras 6, 7 e 8 ilustram as projeções das órbitas periódicas para este caso.

Da mesma forma que no caso anterior, estas órbitas periódicas também representam universos nos quais os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  variam periodicamente. Nota-se, porém, que neste caso as órbitas não terminam no ponto  $(a = 0, b = 2)$ , e sim antes.

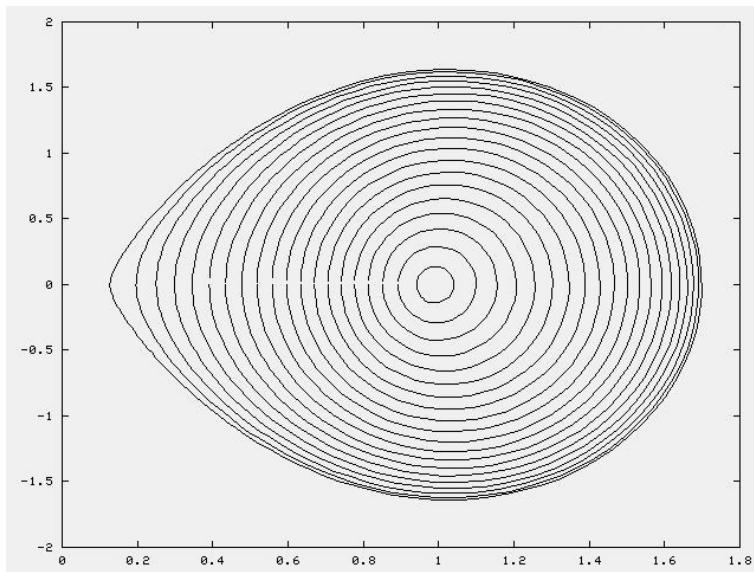


Figura 6 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, p_a)$ .

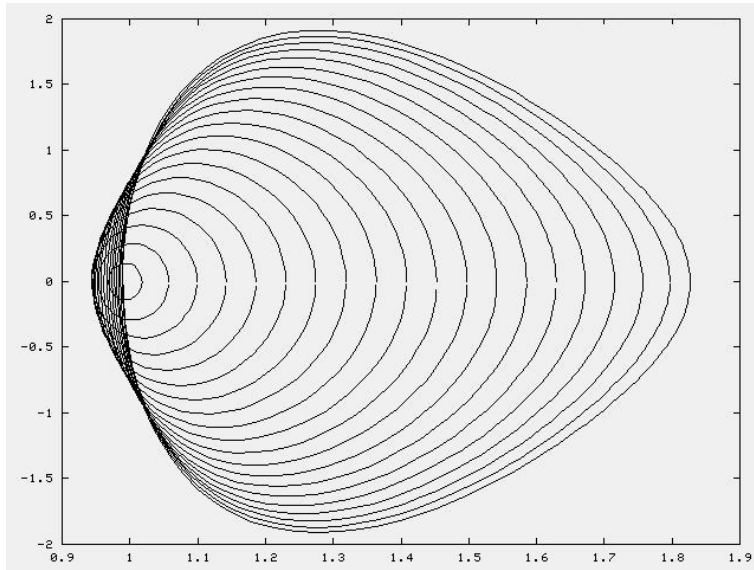


Figura 7 - Projeção das órbitas periódicas em  $(b, p_b)$ .

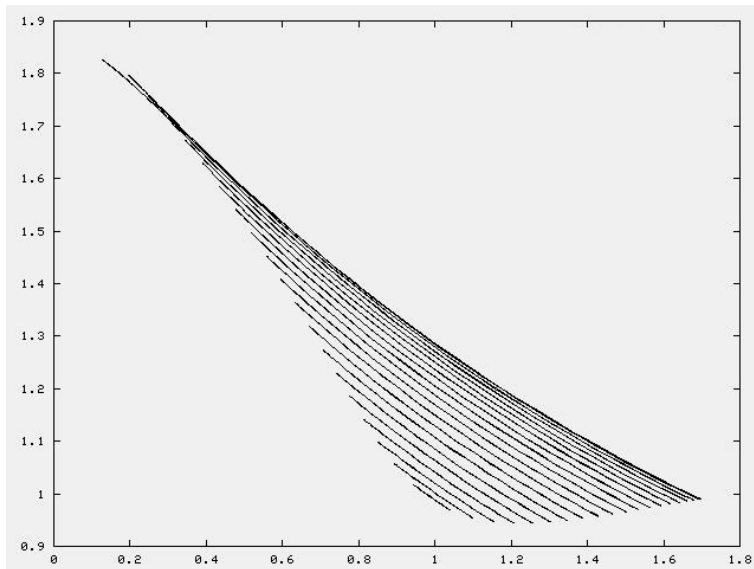


Figura 8 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ .

A figura 9, que mostra a projeção em  $(a, b)$  das órbitas periódicas sobre as curvas de momento zero, ilustra este comportamento. Este caso merece um estudo mais detalhado, para determinar com segurança a razão de as órbitas terminarem aí.

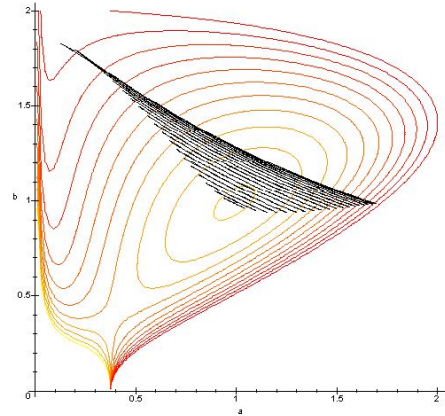


Figura 9 - Projecção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ , sobrepostas às curvas de momento zero.

A figura 10 mostra os fatores de escala  $a$  e  $b$  das órbitas periódicas, na secção  $p_b = 0$ , em função da energia. Da mesma forma que no caso anterior, quanto maior a energia, menores as órbitas, e mais próximas elas estão do ponto fixo.

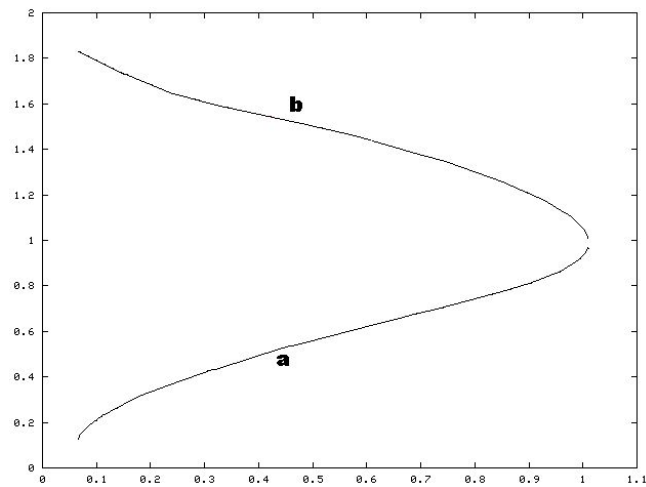


Figura 10 - Valores de  $a$  e  $b$  em função da energia,  $(E, a)$  e  $(E, b)$ .



Como vimos no capítulo 2, neste caso há um outro ponto fixo, do tipo centro-centro, localizado em  $(a = 0.39208512, b = 0.39208512, p_a = 0, p_b = 0)$ . Ao redor deste ponto, também existem órbitas periódicas, que, neste caso, são estáveis (ao contrário das mostradas anteriormente), pois o ponto fixo, conforme mencionado, é do tipo centro-centro. Estas órbitas apresentam um comportamento bastante diferente das órbitas periódicas mostradas anteriormente, pois estas exibem uma dobra acentuada seguida do aparecimento de um laço, tornando as órbitas um pouco mais complexas, conforme pode ser visto nas figuras, principalmente na figura 13.

A figura 11 mostra a projeção destas órbitas em  $(a, p_a)$ , a figura 12 mostra a projeção em  $(b, p_b)$ , e a figura 13 mostra a projeção em  $(a, b)$ .

Na figura 14, podemos ver a projeção em  $(a, b)$  destas órbitas sobre as curvas de momento zero. Pode-se notar que elas iniciam no ponto fixo estável, que aparece como uma sela nas curvas de momento zero, e estendem-se ao redor dele.

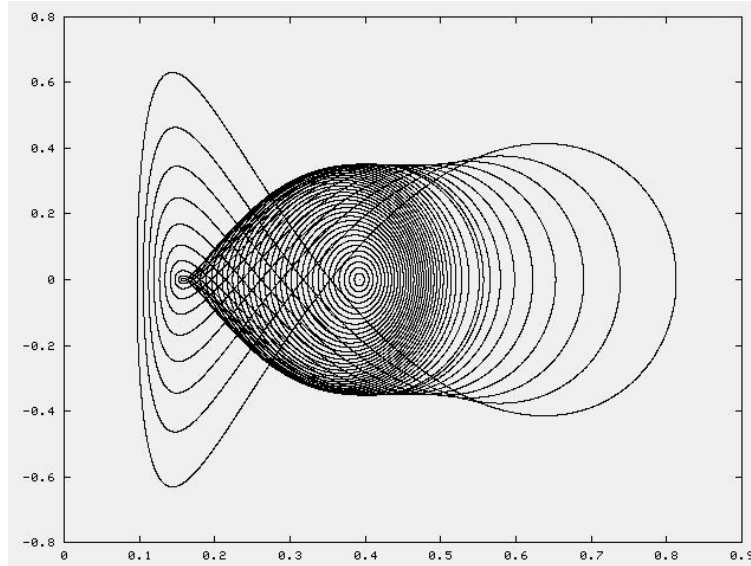


Figura 11 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, p_a)$ .

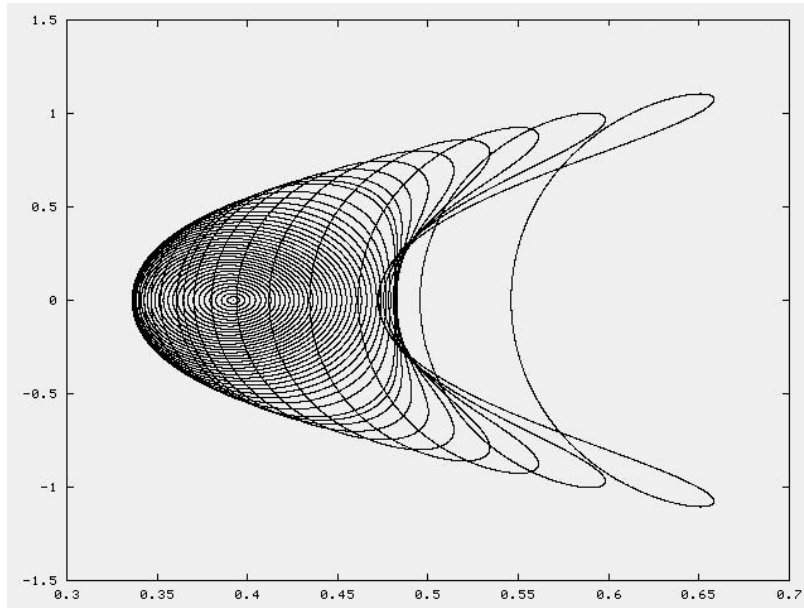


Figura 12 - Projeção das órbitas periódicas em  $(b, p_b)$ .

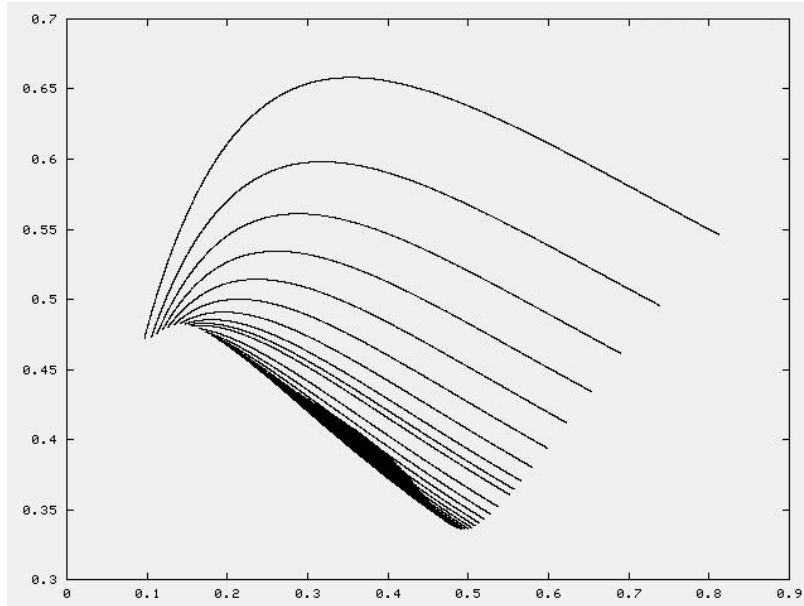


Figura 13 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ .

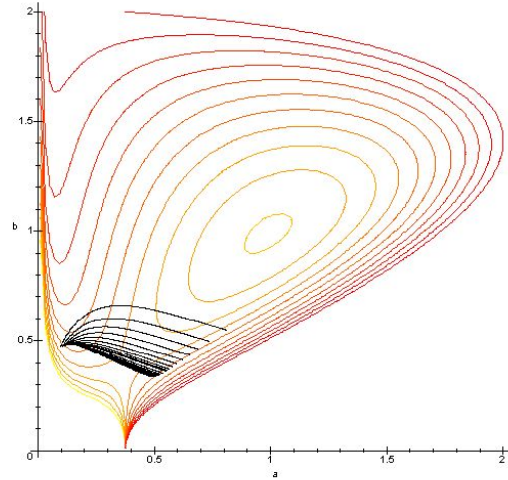


Figura 14 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ , sobrepostas às curvas de momento zero.

Embora esteja fora dos nossos objetivos um estudo detalhado da estabilidade destas famílias de órbitas para além da vizinhança do ponto fixo, mostramos as secções de Poincaré desta região para que se tenha uma idéia de como evoluem. As figuras a seguir mostram as secções de Poincaré para diversas energias, em torno deste ponto fixo centro-centro.

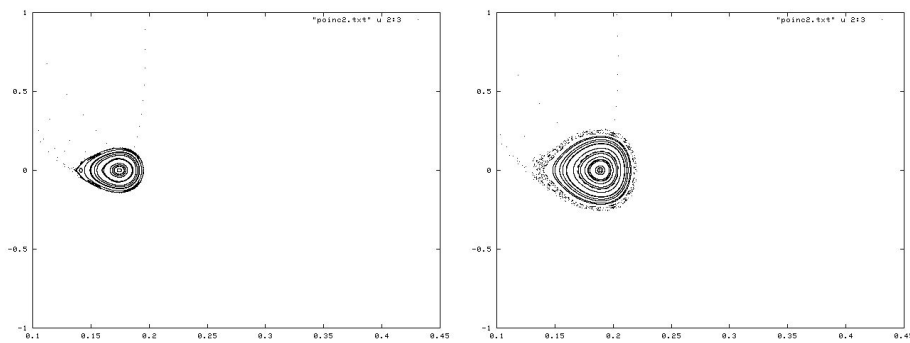


Figura 15 - Secções de Poincaré para  $E=0.57$  e  $E=0.58$ .

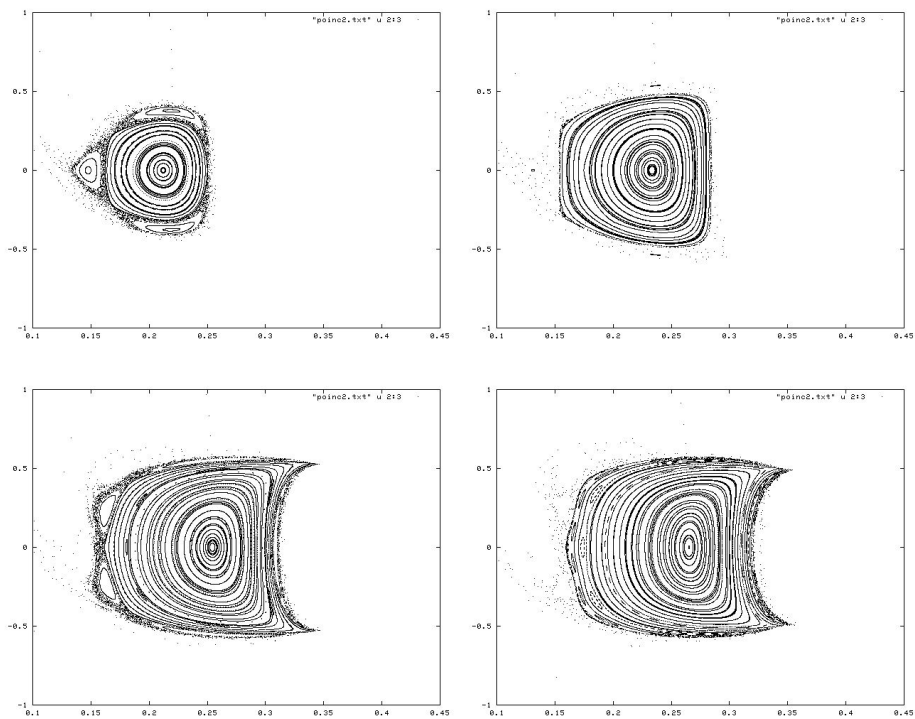


Figura 16 - Secções de Poincaré para  $E=0.60$ ,  $E=0.62$ ,  $E=0.64$  e  $E=0.65$ .

Nota-se que, entre  $E=0.65$  e  $E=0.66$  a órbita estável se bifurca passando a instável, e duas órbitas estáveis são produzidas.

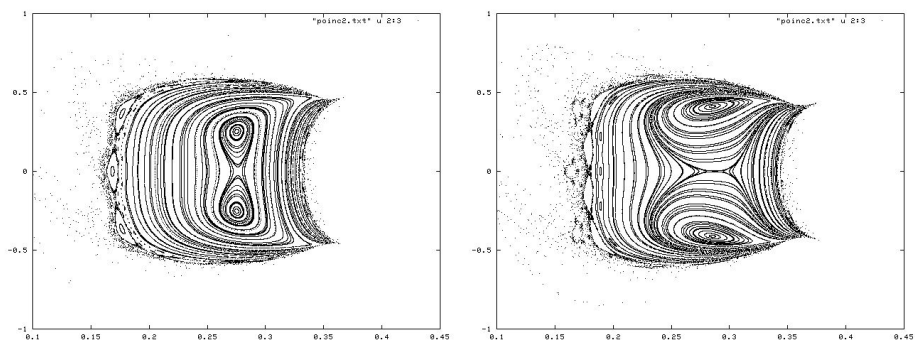


Figura 17 - Secções de Poincaré para  $E=0.66$  e  $E=0.67$ .

Para uma energia um pouco maior que  $E=0.67$ , ocorre uma outra bifurcação e a órbita instável volta a ser estável, produzindo outras duas órbitas instáveis. Porém, o estudo detalhado destas bifurcações está fora do escopo deste trabalho.

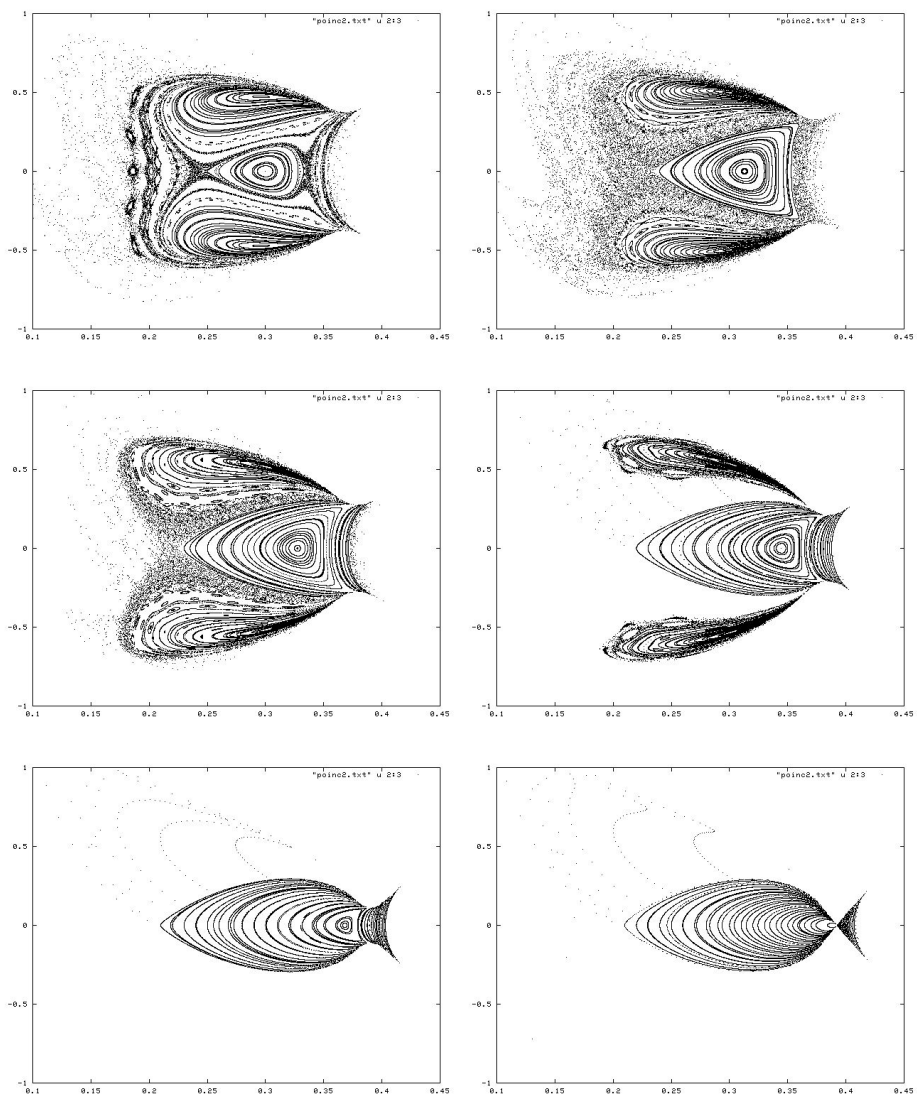


Figura 18 - Secções de Poincaré para  $E=0.68$ ,  $E=0.69$ ,  $E=0.70$ ,  $E=0.71$ ,  $E=0.72$  e  $E=0.73$

### 3.6.3 Caso com potencial quântico com $\gamma = 2/3$

As órbitas periódicas também foram encontradas para o caso com potencial quântico propriamente dito, com  $\gamma = 2/3$ . Estas são bastante semelhantes àquelas encontradas para o caso anterior, com  $\gamma = 1$ . As figuras a seguir referem-se ao ponto fixo localizado em  $(a = 0.99317156, b = 0.99317156, p_a = 0, p_b = 0)$ , que é do tipo centro-sela, implicando que estas órbitas periódicas são instáveis, exatamente como as anteriores. As figuras 19, 20 e 21 mostram as diversas projeções destas órbitas.

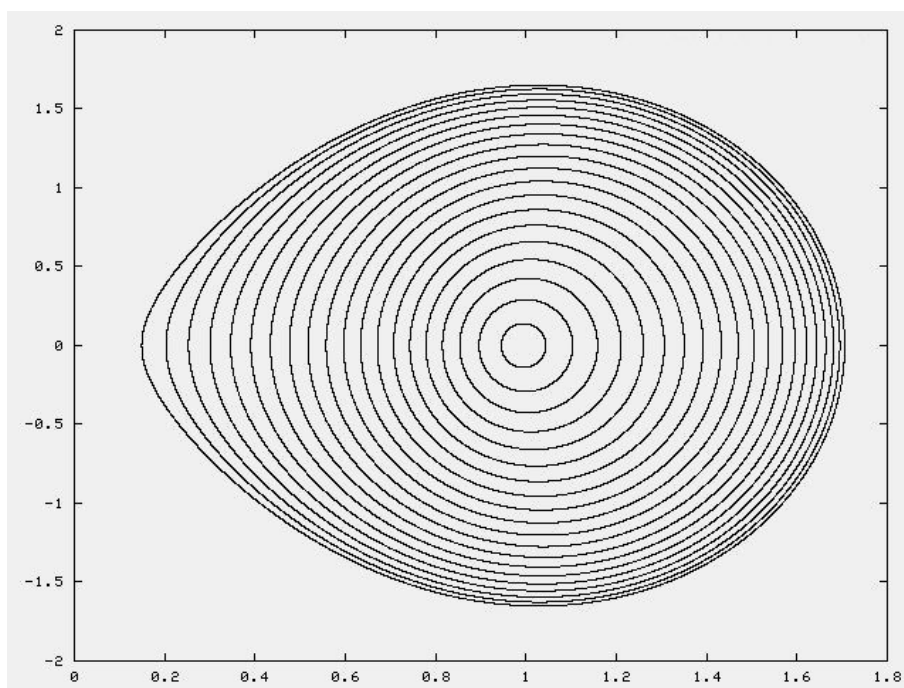


Figura 19 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, p_a)$ .

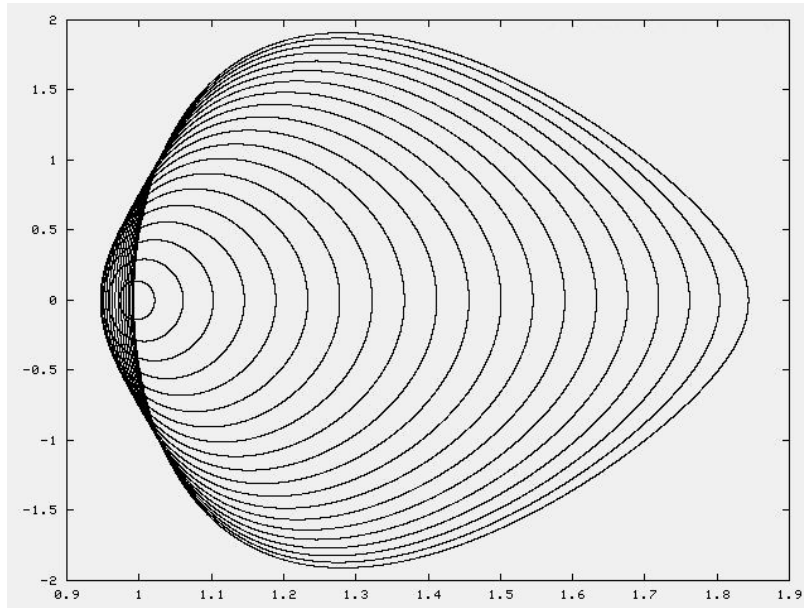


Figura 20 - Projeção das órbitas periódicas em  $(b, p_b)$ .

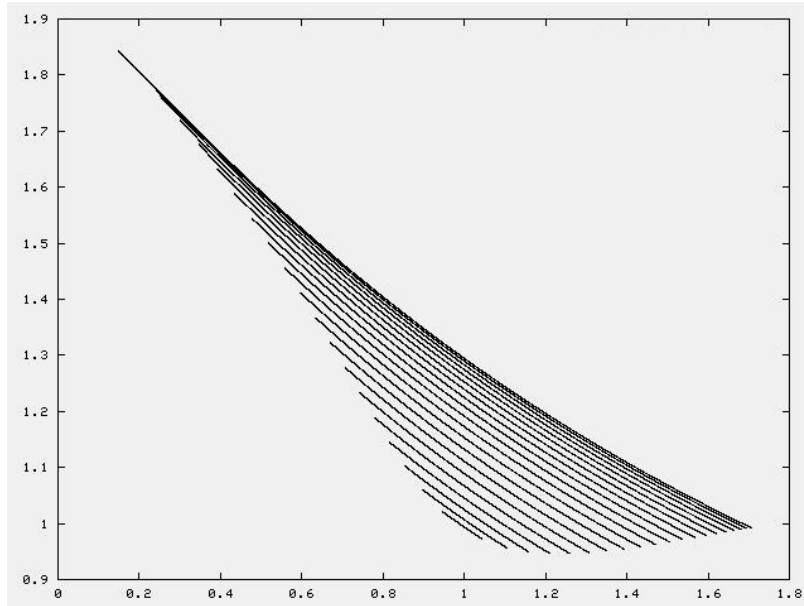


Figura 21 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ .

A figura 22 mostra a projeção em  $(a, b)$  destas órbitas sobre as curvas de momento zero.

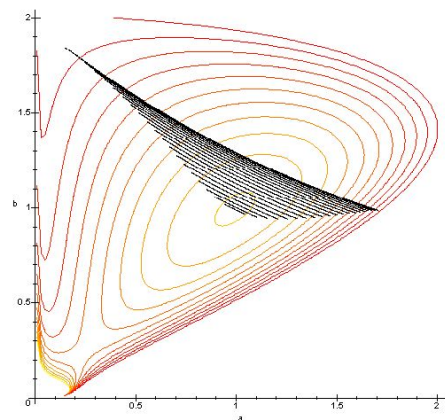


Figura 22 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ , sobrepostas às curvas de momento zero.

A figura 23 mostra os valores dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  na secção  $p_b = 0$  em função da energia.

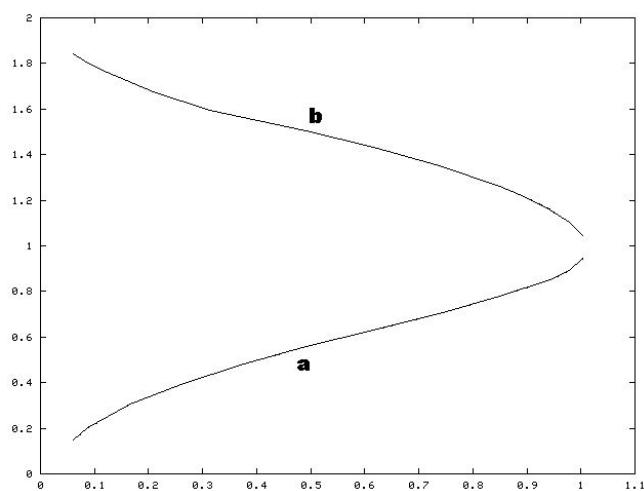


Figura 23 - Valores de  $a$  e  $b$  em função da energia,  $(E, a)$  e  $(E, b)$ .



Neste caso também há um ponto fixo do tipo centro-centro, localizado em  $(a = 0.24194223, b = 0.24194223, p_a = 0, p_b = 0)$ . Ao redor deste ponto, também existem órbitas periódicas, que também são estáveis, pelo menos inicialmente. Estas órbitas, como aquelas do caso com  $\gamma = 1$ , também "dobram-se", conforme pode ser visto nas figuras. As figuras 24, 25 e 26 mostram as diversas projeções destas órbitas periódicas.

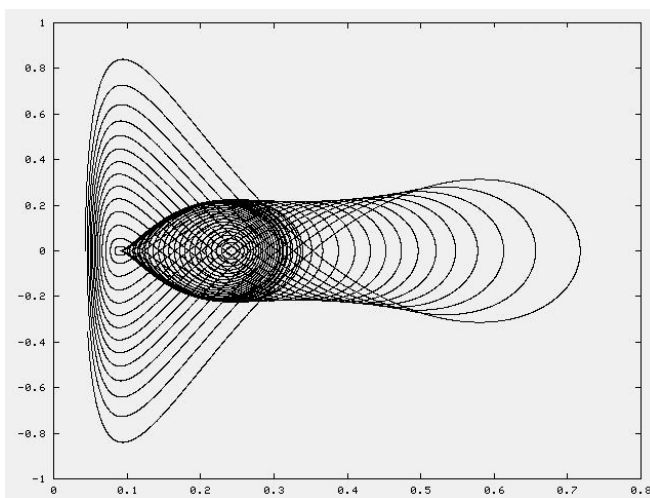


Figura 24 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, p_a)$ .

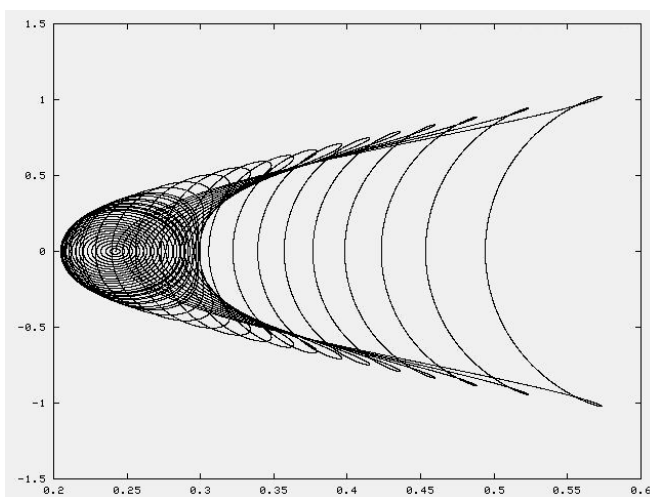


Figura 25 - Projeção das órbitas periódicas em  $(b, p_b)$ .

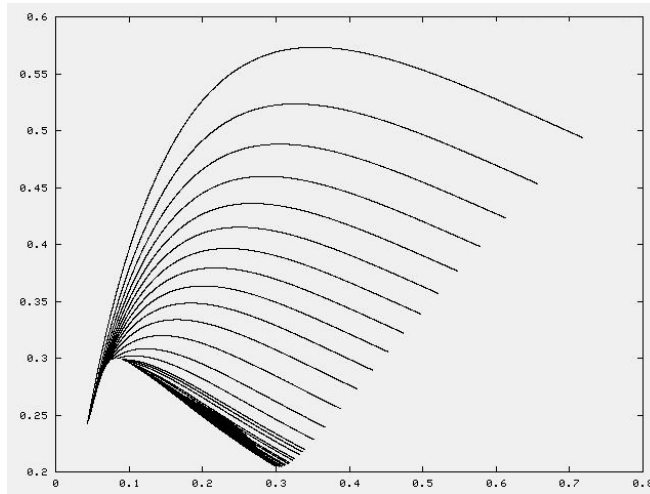


Figura 26 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ .

E a figura 27 mostra a projeção em  $(a, b)$  destas órbitas sobre as curvas de momento zero.

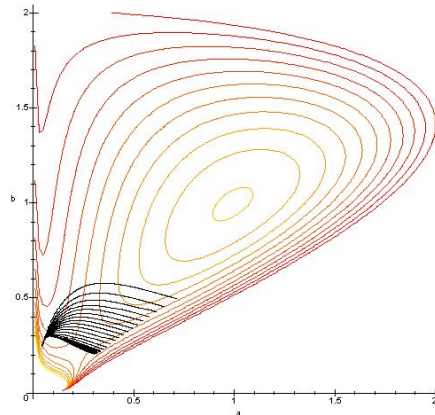


Figura 27 - Projeção das órbitas periódicas em  $(a, b)$ , sobrepostas as curvas de momento zero.

As seções de Poincaré para este caso serão semelhantes as obtidas para o caso com  $\gamma = 1$ , e por isto não foram calculadas, visto que o estudo detalhado das mesmas não é, conforme mencionado, o principal foco de interesse deste trabalho. No próximo capítulo, nos dedicaremos ao ponto principal que é a comparação dos três modelos quanto à existência ou não de caos homoclínico.

# Capítulo 4

## As Variedades Invariantes

### 4.1 Introdução

As famílias de órbitas periódicas em torno dos pontos de equilíbrio encontradas no capítulo anterior definem a chamada variedade central do sistema. Desta variedade emanam as variedades estável e instável, que devem ser determinadas para uma compreensão mais completa da dinâmica do sistema estudado, no que tange à saída para a inflação ser de maneira regular ou caótica. Como veremos mais adiante, este fato está condicionado ao cruzamento homoclínico destas variedades.

Neste capítulo será feita a globalização numérica das variedades estáveis e instáveis, correspondentes às órbitas periódicas parametrizadas pela energia que constituem a variedade central. A compreensão do comportamento destas variedades é crucial para o entendimento da dinâmica global dos modelos e para a verificação da existência ou não de caos no modelo.

### 4.2 As variedades invariantes

Segundo o Teorema da Variedade Estável para órbitas periódicas (ver apêndice)[13], as variedades estável e instável de uma órbita periódica interceptam-se transversalmente nesta órbita periódica e são tangentes às variedades estável e instável lineares, conforme ilustrado na figura 1:

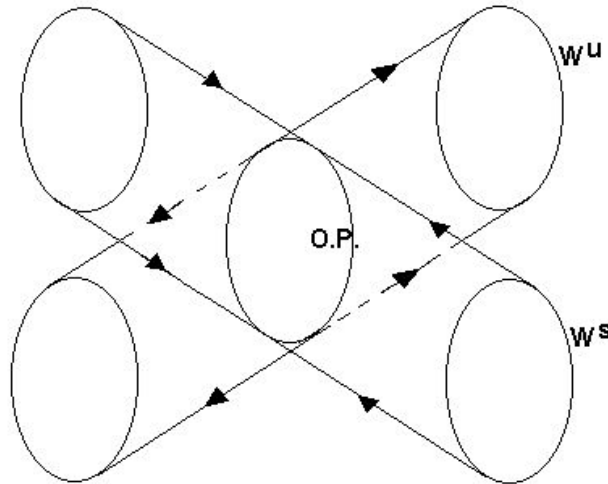


Figura 1 : Intersecção entre as variedades estável e instável lineares

Portanto, pode-se utilizar as órbitas periódicas determinadas anteriormente para encontrar estas variedades numericamente, a partir do estudo linear na vizinhança destas órbitas periódicas.

### 4.3 Linearização em torno de uma órbita periódica

Para utilizar as órbitas periódicas como ponto de partida para a determinação das variedades estável e instável, deve-se estudar o comportamento do sistema nas vizinhanças destas órbitas. Neste caso, o primeiro passo é realizar a linearização do fluxo na vizinhança das órbitas periódicas. O procedimento de linearização do fluxo é similar ao utilizado anteriormente, quando foi realizada a análise de estabilidade dos pontos críticos. Porém, agora, deve-se realizar a linearização em torno de cada órbita periódica. Isto é conseguido lembrando-se que uma órbita é simplesmente um conjunto de pontos. Supondo que o sistema seja governado por:

$$\dot{\vec{a}} = \vec{f}(\vec{a})$$

com

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ p_a \\ p_b \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_{p_a} \\ f_{p_b} \end{bmatrix};$$

lembrando que a linearização do sistema em torno de um ponto fixo  $P$ , com coordenadas  $(a^*, b^*, p_a^*, p_b^*)$  pode ser escrita como:

$$\dot{\vec{x}} = A_P \vec{x}$$

com

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a - a^* \\ b - b^* \\ p_a - p_a^* \\ p_b - p_b^* \end{bmatrix}$$

sendo  $A_P$  a matriz que representa o sistema linearizado ao redor do ponto  $P$ , a qual é definida por:

$$A_P = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_a}{\partial a} \right|_P & \left. \frac{\partial f_a}{\partial b} \right|_P & \left. \frac{\partial f_a}{\partial p_a} \right|_P & \left. \frac{\partial f_a}{\partial p_b} \right|_P \\ \left. \frac{\partial f_b}{\partial a} \right|_P & \left. \frac{\partial f_b}{\partial b} \right|_P & \left. \frac{\partial f_b}{\partial p_a} \right|_P & \left. \frac{\partial f_b}{\partial p_b} \right|_P \\ \left. \frac{\partial f_{p_a}}{\partial a} \right|_P & \left. \frac{\partial f_{p_a}}{\partial b} \right|_P & \left. \frac{\partial f_{p_a}}{\partial p_a} \right|_P & \left. \frac{\partial f_{p_a}}{\partial p_b} \right|_P \\ \left. \frac{\partial f_{p_b}}{\partial a} \right|_P & \left. \frac{\partial f_{p_b}}{\partial b} \right|_P & \left. \frac{\partial f_{p_b}}{\partial p_a} \right|_P & \left. \frac{\partial f_{p_b}}{\partial p_b} \right|_P \end{bmatrix}$$

Como as derivadas são calculadas no ponto  $P$ , nota-se facilmente que a matriz  $A$  será dependente do ponto ao redor do qual está sendo calculada a linearização. No caso da linearização em torno de uma órbita periódica, o ponto  $P$  não é mais fixo, porém varia no tempo, seguindo a trajetória da órbita, ou seja:

$$P(t) = (a^*(t), b^*(t), p_a^*(t), p_b^*(t)),$$

de forma que a matriz  $A_P$  passa a ser dependente do tempo, e o sistema linearizado fica sendo:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}. \quad (4.1)$$

Como as coordenadas do ponto  $P$  são as coordenadas de uma órbita periódica, elas devem repetir-se após o período  $T$  da órbita, o que implica que a matriz  $A(t)$  é contínua e também terá um período  $T$ . Definimos agora a chamada Matriz Fundamental  $\Phi(t)$ , que deve satisfazer a equação matricial:

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi \quad (4.2)$$

para todo  $t$ . As colunas desta matriz  $\Phi(t)$  são  $n$  soluções linearmente independentes de (4.1), dada pelas equações variacionais já utilizadas no capítulo 3. A solução de (4.1) que satisfaz a condição inicial  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$  é dada por:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\vec{x}_0 \quad (4.3)$$

Com isto pode-se utilizar o Teorema de Floquet[13] que afirma que se  $A(t)$  é uma matriz contínua de período  $T$ , então para todo  $t$  qualquer matriz fundamental que seja solução de (4.1) pode ser escrita na forma:

$$\Phi(t) = Q(t)e^{Bt},$$

onde  $Q(t)$  é uma matriz não-singular, diferenciável e de período  $T$ , e  $B$  uma matriz constante. Além disso, se  $\Phi(0) = I$ , então  $Q(0) = I$ . O corolário deste teorema é muito útil para reduzir o estudo do sistema anterior(4.1) a um sistema autônomo:

Sob as hipóteses do teorema de Floquet, através da transformação linear de coordenadas:

$$\vec{y} = Q^{-1}(t)\vec{x},$$

o sistema linear não autônomo (4.1) se reduz ao sistema linear autônomo:

$$\dot{\vec{y}} = B\vec{y} \quad (4.4)$$

A demonstração deste corolário é simples, e será feita a seguir. De acordo com o teorema de Floquet,  $Q(t) = \Phi(t)e^{-Bt}$ . Portanto:

$$\dot{Q}(t) = \dot{\Phi}(t)e^{-Bt} - \Phi(t)e^{-Bt}B$$

$$\dot{Q}(t) = A(t)\Phi(t)e^{-Bt} - \Phi(t)e^{-Bt}B$$

$$\dot{Q}(t) = A(t)Q(t) - Q(t)B,$$

pois  $e^{-Bt}$  e  $B$  comutam. Como  $\vec{x}(t) = Q(t)\vec{y}(t)$ , então:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{Q}(t)\vec{y}(t) + Q(t)\dot{\vec{y}}(t)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)Q(t)\vec{y}(t) - Q(t)B\vec{y}(t) + Q(t)\dot{\vec{y}}(t)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + Q(t)[\dot{\vec{y}}(t) - B\vec{y}(t)]$$

Assim, como  $Q(t)$  é não-singular,  $\vec{x}(t)$  é uma solução de (4.1) se e somente se  $\vec{y}(t)$  for uma solução de (4.4).

Considerando que  $\Phi(0) = I$ , pode-se reescrever a eq.(4.3) como sendo:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{x}(0)$$

pois  $\Phi^{-1}(0) = I^{-1} = I$

Além disso, como  $\Phi$  e  $Q$  têm período  $T$ , pode-se escrever:

$$\Phi(T) = Q(T)e^{BT} = Q(0)e^{BT} = Ie^{BT} = e^{BT}$$

Os autovalores da matriz  $e^{BT}$  são chamados multiplicadores característicos da órbita periódica, e os autovalores da matriz  $B$  são os chamados expoentes característicos da órbita periódica. São estes os expoentes que determinam se o comportamento do sistema nas vizinhanças desta órbita periódica é estável ou instável, e conforme a equação acima, encontrando-se  $\Phi(T)$ , pode-se facilmente encontrar os expoentes característicos, dados pelos autovalores de  $B$ .

Normalmente, é muito difícil encontrar-se analiticamente a matriz  $\Phi(T)$ , que satisfaz (4.2). Porém, é possível determiná-la numericamente, integrando-se um conjunto de quatro equações variacionais por um período, conforme descrito no capítulo 3. Esta matriz também é chamada matriz de monodromia. Convém notar que devido ao caráter hamiltoniano deste sistema, esta matriz de monodromia apresenta algumas propriedades importantes, que são:

- (i)  $\det |\Phi(T)| = 1$
- (ii) se  $\lambda$  é autovalor de  $\Phi(T)$ , então  $\lambda^{-1}$  também é.
- (iii)  $Tr(\Phi(T)) = 2 + \sum_i \lambda_i$

A primeira propriedade corresponde ao teorema de Liouville que é a conservação de volume no espaço de fase do sistema.

A segunda propriedade, como consequência de uma característica de matrizes simpléticas, afirma que os autovalores aparecem em pares recíprocos, ou seja, para todo autovalor  $\lambda$  existe um autovalor  $\lambda^{-1}$ .

A parcela 2 na terceira propriedade corresponde à soma de um autovalor duplo,  $\lambda = 1$ , que são os autovalores correspondentes às soluções periódicas.

## 4.4 Técnica de globalização numérica da variedade instável

O conjunto de autovetores cujo expoente característico correspondente (autovalor da matriz B) tem parte real positiva define um espaço tangente à variedade instável da órbita periódica. Da mesma forma, o conjunto de autovetores cujo expoente característico correspondente tem parte real negativa define um espaço tangente à variedade estável da órbita periódica. E, finalmente, o conjunto de autovetores cujo expoente característico correspondente (autovalor da matriz B) tem parte real nula define um espaço tangente à variedade central na órbita periódica em estudo. Portanto, para encontrar-se um ponto pertencente à variedade instável, encontra-se o autovetor da matriz  $\Phi(T)$  correspondente ao maior autovalor de B. Este vetor, denominado aqui  $\vec{v}$ , define uma direção instável. Portanto, pontos da órbita periódica que sofrerem um pequeno deslocamento nesta direção pertencerão a uma aproximação linear da variedade instável. Para encontrar-se numericamente a variedade instável, seleciona-se um determinado número de pontos pertencentes à órbita periódica, denominados  $P_i$ . Em seguida, desloca-se cada um destes pontos na direção instável dada por  $\vec{v}$ , obtendo-se novos pontos,  $Q_i$ , ou seja:

$$Q_i = P_i + \epsilon \vec{v},$$

Sendo que  $\epsilon$  é o tamanho deste deslocamento, que deve ser pequeno o suficiente para manter a aproximação linear do sistema. Feito isto, realiza-se a integração numérica das equações de movimento do sistema, tendo como condição inicial cada um destes pontos  $Q_i$ . A trajetória no espaço de fases de cada um destes pontos pertence à variedade instável. Escolhendo-se um número razoável destes pontos, obtém-se um conjunto de trajetórias, todas pertencentes à variedade instável, e que permitem a globalização da variedade instável[14,15], e conseqüentemente qualquer informação que necessitemos, inclusive a visualização da mesma. Inicialmente a variedade instável tem a forma de um tubo, conforme seria esperado para um sistema linear, porém este tubo deforma-se ao longo do tempo, devido à não-linearidade do sistema. Este tubo vive em um subespaço tridimensional definido por  $H(a, b, p_a, p_b) = E$ , sendo E o valor da Hamiltoniana na órbita periódica em estudo. A informação dada por estas variedades pode ser melhor analisada em uma secção de Poincaré conveniente. Tais informações são, por exemplo, a existência ou não de órbitas homoclínicas e/ou heteroclínicas.



### 4.4.1 Variedade Instável do Caso Clássico

Inicialmente foi determinada a variedade instável para o caso clássico ( $\sigma = 0$ ), como já realizado por Damião Soares e Stuchi. O principal propósito da determinação da variedade instável para este caso foi o teste dos algoritmos numéricos utilizados, e que foram posteriormente modificados para a inclusão do termo de potencial quântico. Neste caso, especificamente, foi necessária a utilização de uma técnica denominada regularização, pois no caso clássico a dinâmica do sistema pode, em algum momento, levar as variáveis  $a$  ou  $b$  a serem nulas. Como na hamiltoniana aparecem termos com  $b$  no denominador, isto gera problemas numéricos quando  $b$  torna-se próximo de zero. Para superar esta dificuldade, introduz-se a transformação canônica:

$$\tilde{b} = \sqrt{b} \quad \tilde{p}_b = 2\sqrt{b}p_b \quad \tau = \frac{t}{b^2}$$

Desta forma, a hamiltoniana para cada valor numérico de  $E_0$  torna-se:

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{b}\tilde{p}_a\tilde{p}_b}{4} - \frac{\tilde{a}\tilde{p}_a^2}{8} + 2\tilde{a}\tilde{b}^2 - \frac{\tilde{a}^3}{2} - 2\Lambda\tilde{a}\tilde{b}^4 - E_0\tilde{b}^2 = 0,$$

Com isto, consegue-se uma hamiltoniana livre de singularidades, e a integração é realizada sem problemas. Após a integração, pode-se voltar às variáveis originais utilizando-se a transformação inversa. Utilizando esta hamiltoniana, foi encontrada a variedade instável para o caso clássico, conforme as figuras 2, 3 e 4.

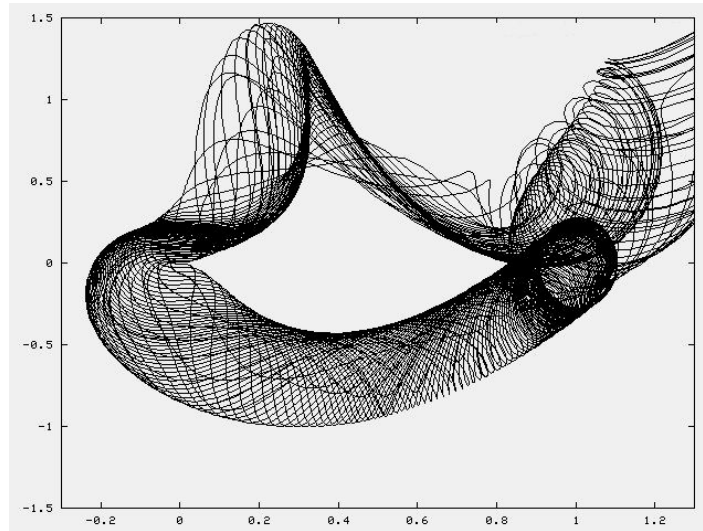


Figura 2: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável.  $E=0.97106090$

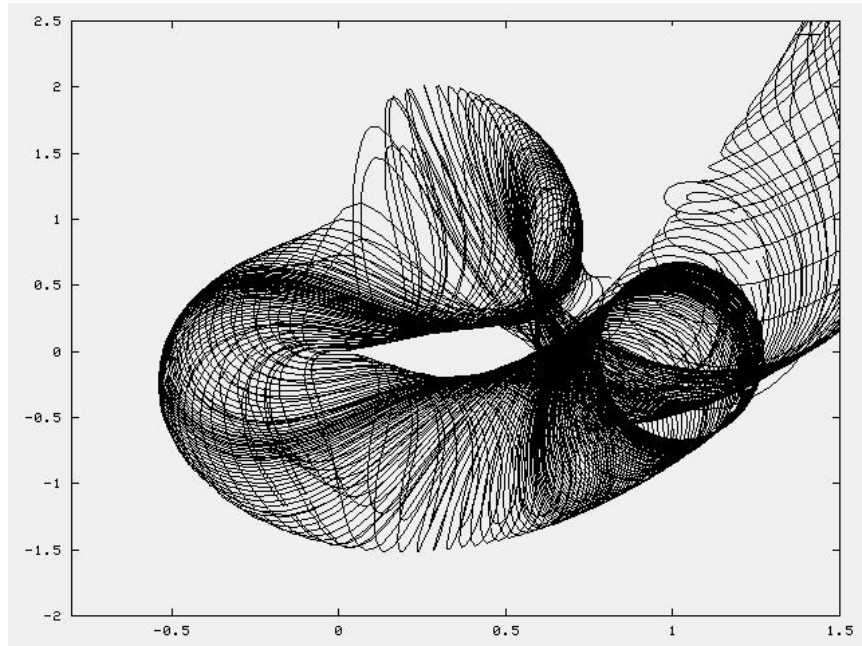


Figura 3: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável.  $E=0.83261990$

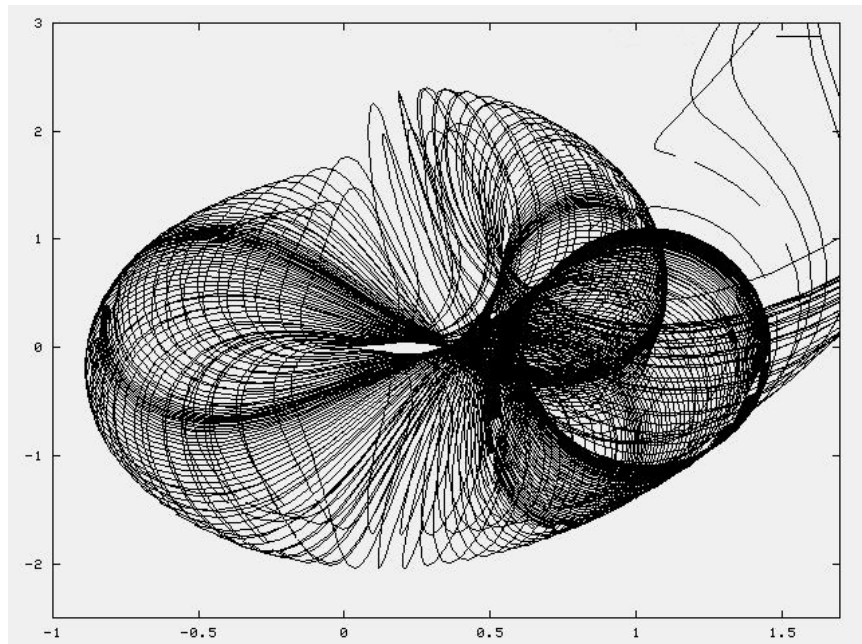


Figura 4: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável.  $E=0.56639600$

Nota-se que em todos os casos a variedade instável cruza  $a = 0$ , retorna próximo à órbita periódica, onde uma parte das órbitas retornam para o recolapso e outra parte escapa para a região de de Sitter. Lembramos que no caso integrável da redução ao plano invariante a separatriz ia assintoticamente ao ponto de equilíbrio. A inclusão de mais um grau de liberdade permite a riqueza de comportamento ilustrado nas figuras.

Como já mencionado anteriormente, informações importantes sobre o sistema podem ser obtidas encontrando-se a secção de Poincaré das variedades estável e instável. A secção de Poincaré da variedade instável pode ser obtida facilmente determinando-se a intersecção de cada uma das trajetórias oriundas de cada um dos pontos iniciais com uma superfície determinada. Neste trabalho, a superfície escolhida foi  $p_b = 0$  e  $\dot{p}_b > 0$ , a mesma que foi usada na determinação das órbitas periódicas no capítulo 3. A figura a seguir mostra a primeira secção de Poincaré do tubo instável, ou seja, o conjunto de pontos que representam a primeira vez que as trajetórias interceptam o plano  $p_b = 0$ , com  $\dot{p}_b > 0$ , calculada para diversas energias. Nesta figura podem ser encontradas as primeiras secções de Poincaré dos tubos mostrados nas figuras anteriores. As energias utilizadas foram:  $E=0.97106090$ ,  $0.90620828$ ,  $0.83261990$ ,  $0.70789778$  e  $0.56639600$ , sendo que a secção mais interna corresponde à maior energia.

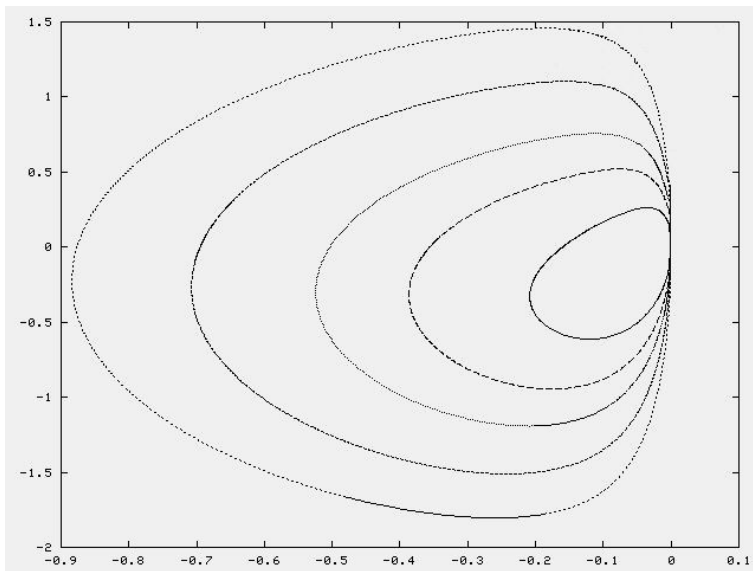


Figura 5: Primeiras secções de Poincaré do tubo instável para as energias  $E=0.97106090$ ,  $0.90620828$ ,  $0.83261990$ ,  $0.70789778$  e  $0.56639600$ .

Analisando-se a hamiltoniana do sistema, percebe-se que caso  $p_b = 0$ , esta é invariante sob a troca  $p_a \rightarrow -p_a$ . Como esta troca implica em uma troca do sentido do tempo,  $t \rightarrow -t$ , a variedade estável torna-se instável e vice-versa. Portanto, partindo-se da secção da variedade instável em  $p_b = 0$ , pode-se encontrar a secção da variedade estável simplesmente trocando-se  $p_a \rightarrow -p_a$ . Portanto, utilizando este procedimento, encontramos os cruzamentos homoclínicos entre as secções de Poincaré das variedades estável e instável, ilustrados na figura 6. Porém, estes cruzamentos estão na região  $a < 0$ , que é uma região não-física para este sistema, já que  $a$  representa um dos fatores de escala. O fator de escala  $b$ , conforme observado por Damião Soares e Stuchi [3], nunca se anula mas, quando os fatores de escala  $a$  e  $b$  ficam muito pequenos temos problema com a integração numérica. Isto é contornado pela regularização do problema. No entanto caberia uma investigação ainda mais refinada do ponto homoclínico que está mais próximo de  $a = 0$ , confirmando sua localização na região  $a < 0$ .

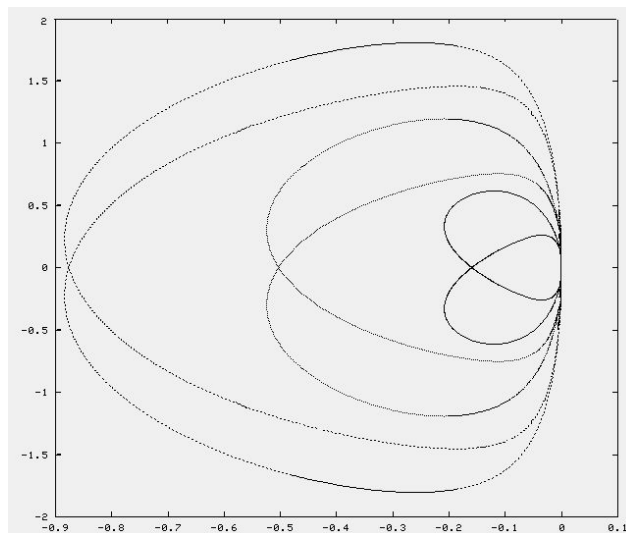


Figura 6: Cruzamentos homoclínicos nas primeiras secções de Poincaré do tubo instável para as energias  $E=0.97106090, 0.90620828, 0.83261990, 0.70789778$  e  $0.56639600$ . A secção mais interna corresponde a maior energia.

#### 4.4.2 Variedade instável do caso com $\gamma = 1$

A adição do termo  $\sigma/(ab^2)$  restringe a dinâmica do sistema à região de  $a$  e  $b$  positivos, pois este termo impede que o sistema cruze o eixo  $a = 0$  ou  $b = 0$ . No entanto,  $a$  e  $b$  podem ser muito pequenos, trazendo problemas numéricos, como no caso clássico. No entanto, para uma região de energia em torno da energia do ponto crítico, as variedades podem ser calculadas sem problemas.

As figuras 7, 8 e 9 mostram as projeções do tubo instável para o caso com  $\gamma = 1$ .

Para energias altas, próximas de  $E=1$ , o tubo instável para o caso com  $\gamma = 1$  é semelhante ao do caso clássico, conforme pode ser notado observando-se as figuras anteriores. Porém, à medida que a energia diminui, algumas trajetórias divergem ( $a \rightarrow 0$  e  $p_a \rightarrow \infty$ ), conforme mostrado nas figuras 10 e 11.

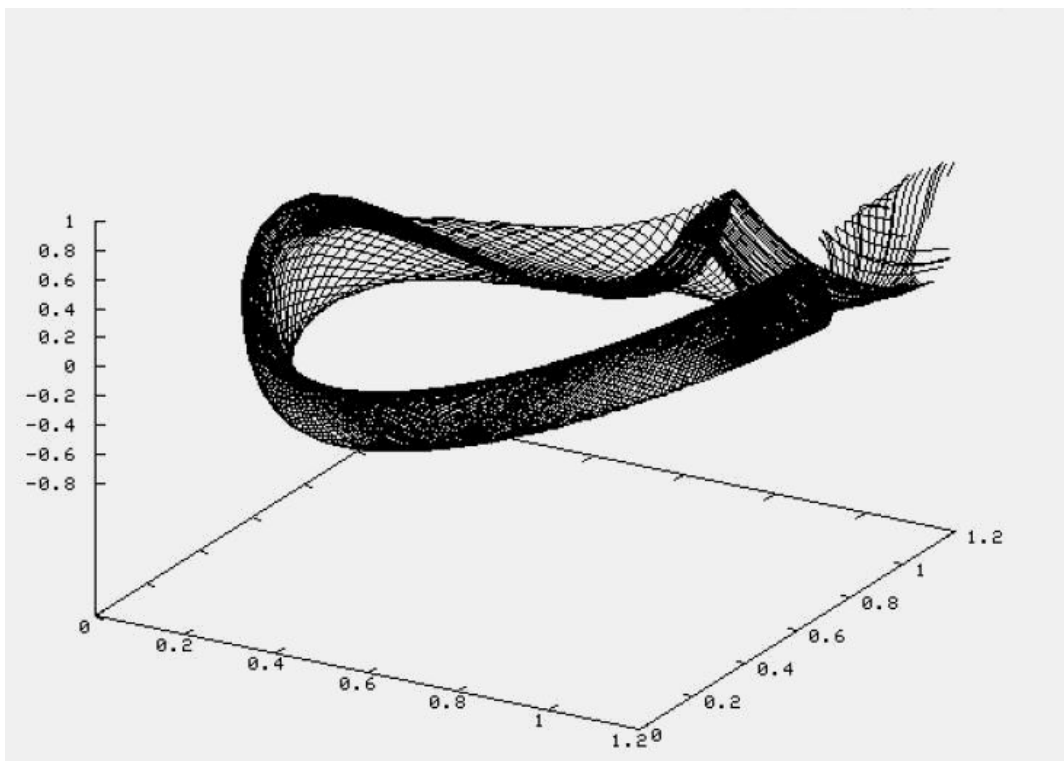


Figura 7: Projeção em  $(a, b, p_a)$  do tubo instável.  $E=0.99470278$

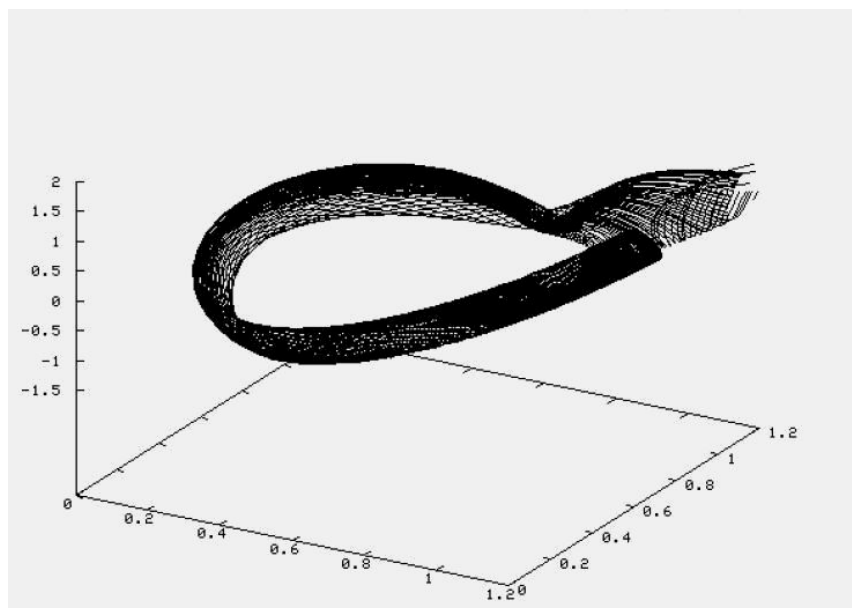


Figura 8: Projeção em  $(a, b, p_b)$  do tubo instável.  $E=0.99470278$

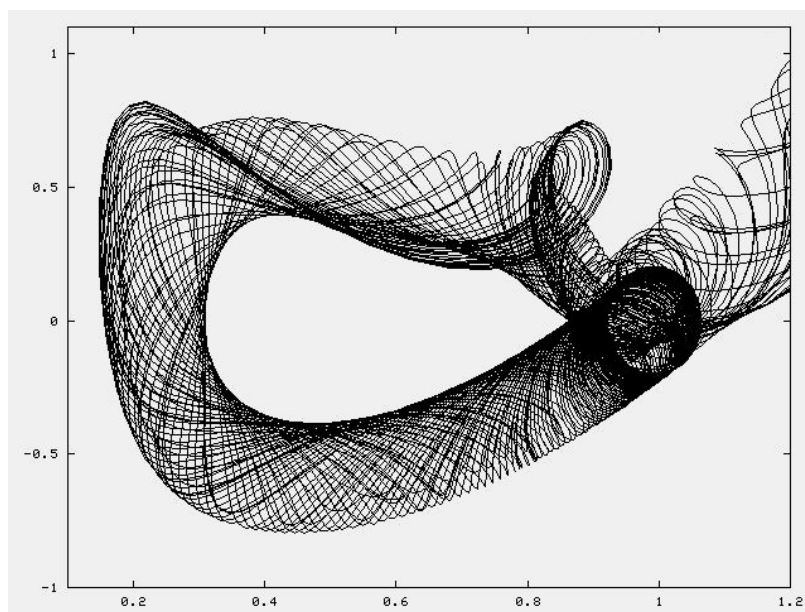


Figura 9: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável.  $E=0.99470278$

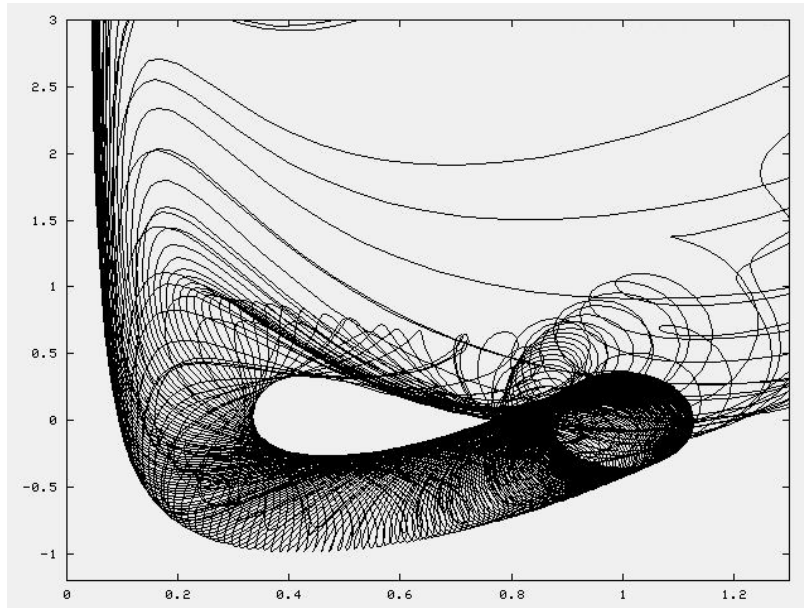


Figura 10: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável. Notar a divergência de algumas trajetórias.  $E=0.96164449$

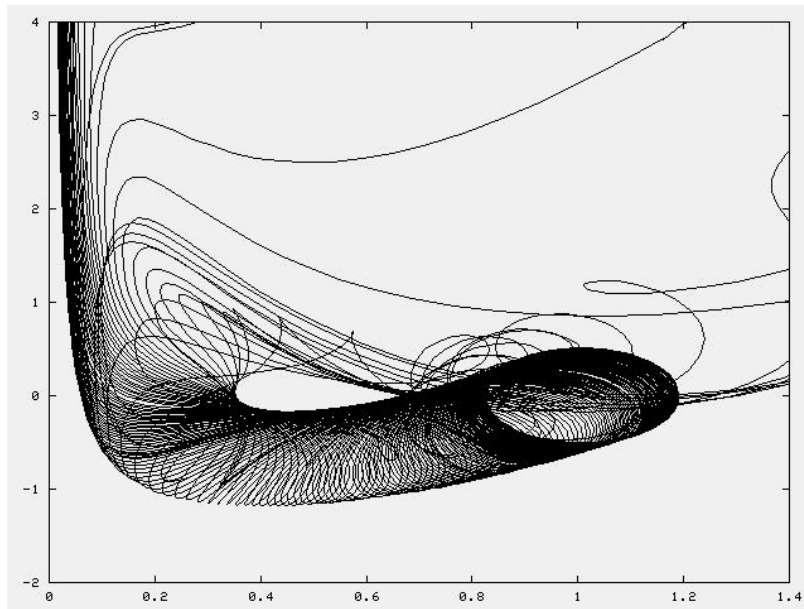


Figura 11: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável. Grande parte das trajetórias diverge.  $E=0.91301337$

A largura da região onde as trajetórias têm um comportamento mais suave pode ser melhor estudada com a mesma secção de Poincaré usada no caso clássico. A figura 12 ilustra este comportamento. Nota-se que, à medida que a energia decresce, forma-se uma "ponta" na secção, que mostra o mecanismo do crescimento de  $p_a$  com a diminuição da energia.

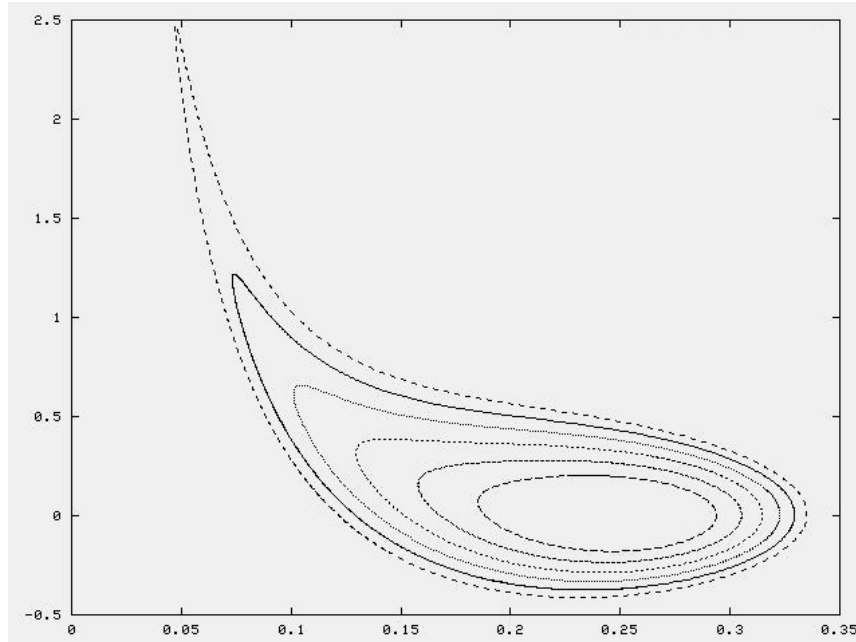


Figura 12: Primeiras secções de Poincaré do tubo instável para as energias  $E=1.00283874, 0.99696824, 0.98975175, 0.98136704, 0.97195880$  e  $0.96164449$ . A secção mais interna corresponde a maior energia.

Esta divergência é muito mais pronunciada no caso com potencial quântico com  $\gamma = 2/3$ , conforme será mostrado mais adiante. Como observamos que o "potencial" cresce mais rapidamente para  $\gamma = 1$ , fizemos este estudo preliminar, para facilitar a análise do caso de interesse físico  $\gamma = 2/3$ .

Como para altas energias não há esta divergência, a análise do sistema foi restringida a este caso. Já os casos com energias mais baixas requerem uma análise mais cuidadosa, e possivelmente uma regularização adequada.

Na figura 13 mostramos a parte do fluxo instável que volta uma segunda vez após passar próximo ao centro-sela. Nota-se que o tubo já não se parece com um cilindro usual. Além disso, parte das órbitas tornam a escapar para o infinito, sendo isto um comportamento típico de caos homoclínico.



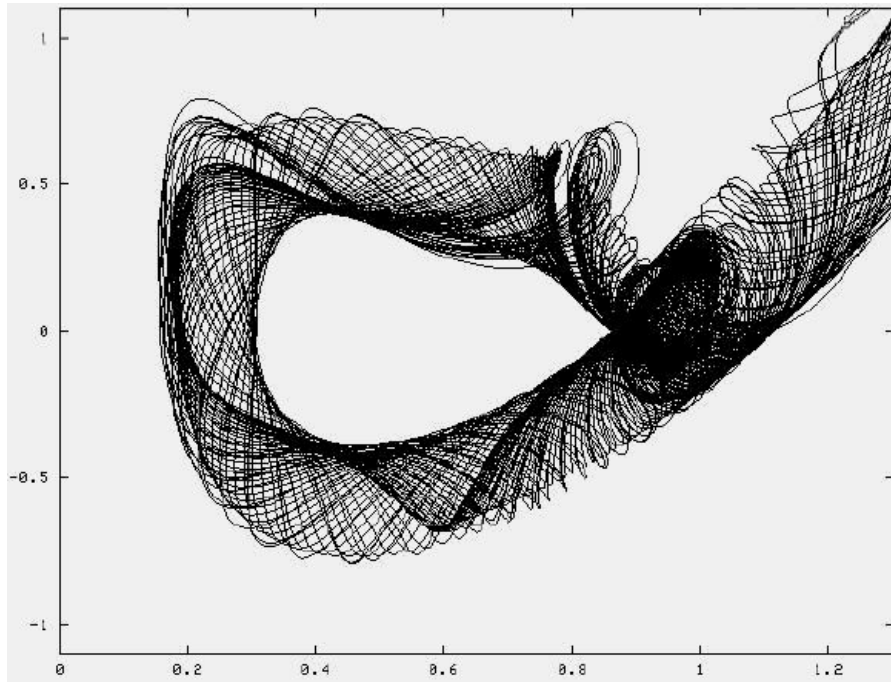


Figura 13: Projeção em  $(a, p_a)$  das trajetórias no tubo instável que retornam para dentro do mesmo.  $E=0.99470278$

Pode-se encontrar a secção de Poincaré destas trajetórias, denominada aqui de segunda secção de Poincaré, pois esta é encontrada determinando-se a segunda vez que as trajetórias interceptam a superfície  $p_b = 0$  com  $\dot{p}_b > 0$ .

A figura 14 mostra a primeira e a segunda secções. A primeira secção é a curva externa, bastante semelhante àquelas presentes na fig.12. A segunda secção é a curva interna, cuja parte interior foi colorida para mostrar o enrolamento que o tubo realiza sobre si mesmo, ao longo de sua evolução. Este processo que o tubo sofre é o que gera os sucessivos cruzamentos homoclínicos. Nota-se também que este tubo enrolado (segunda secção) tem como limite exterior a primeira secção. Este comportamento, de a segunda secção ter como limite a primeira secção, é geral e um exemplo para o problema gravitacional de três corpos pode ser encontrado em Gidea e Masdemont [16]. Um aprofundamento deste comportamento para o caso cosmológico será feito futuramente.

A figura 15 mostra também a terceira secção de Poincaré do tubo instável, a qual tem como limite exterior a segunda secção.

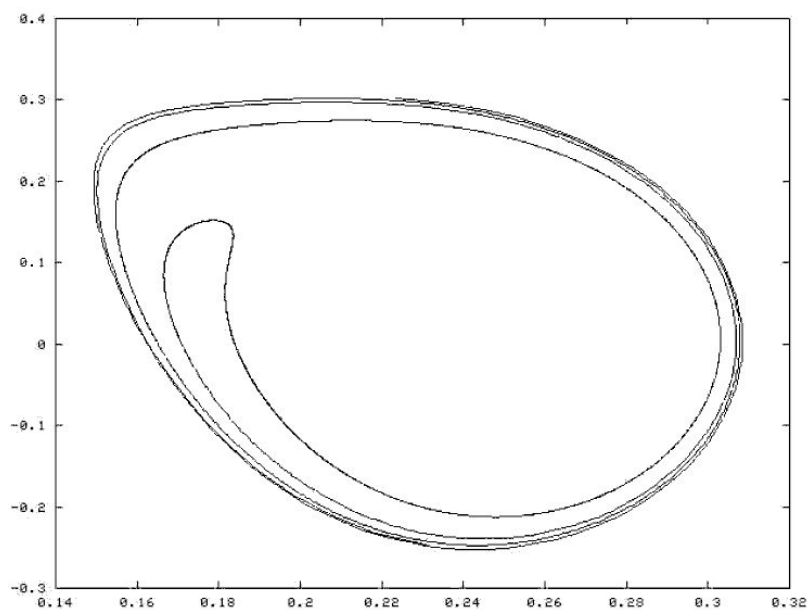


Figura 14: Primeira e segunda secções de Poincaré do tubo instável.  
 $E=0.99470278$

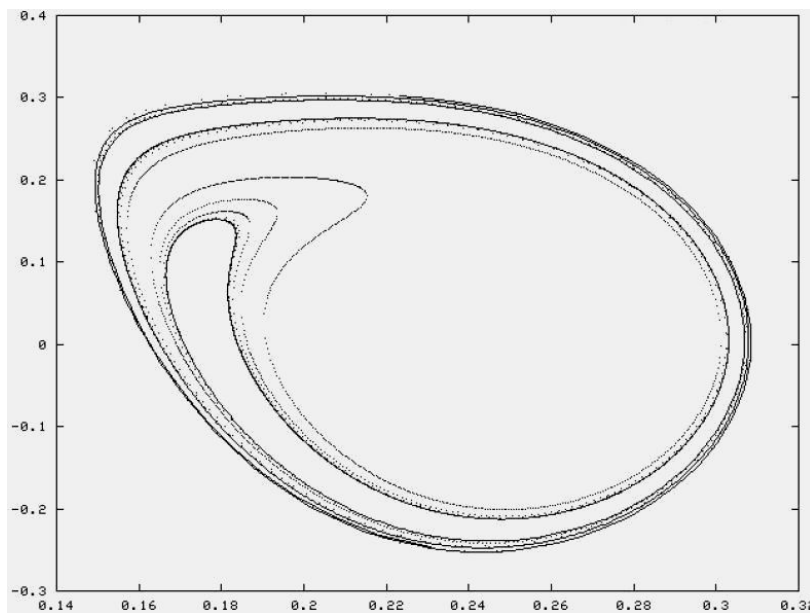


Figura 15: Primeira, segunda e terceira secções de Poincaré do tubo instável.  $E=0.99470278$

A figura 16 mostra, além das três seções, a estrutura de toros KAM que coexistem, e no seu limite há caos que se soma ao gerado pela estrutura das várias ordens de pontos homoclínicos, ilustrados nas figuras 17 e 18.

Nota-se que há uma estreita relação entre as variedades estáveis e instáveis e a região KAM, que neste caso não é bastante complexa, se comparada com a evolução da região KAM mostrada no capítulo 3.

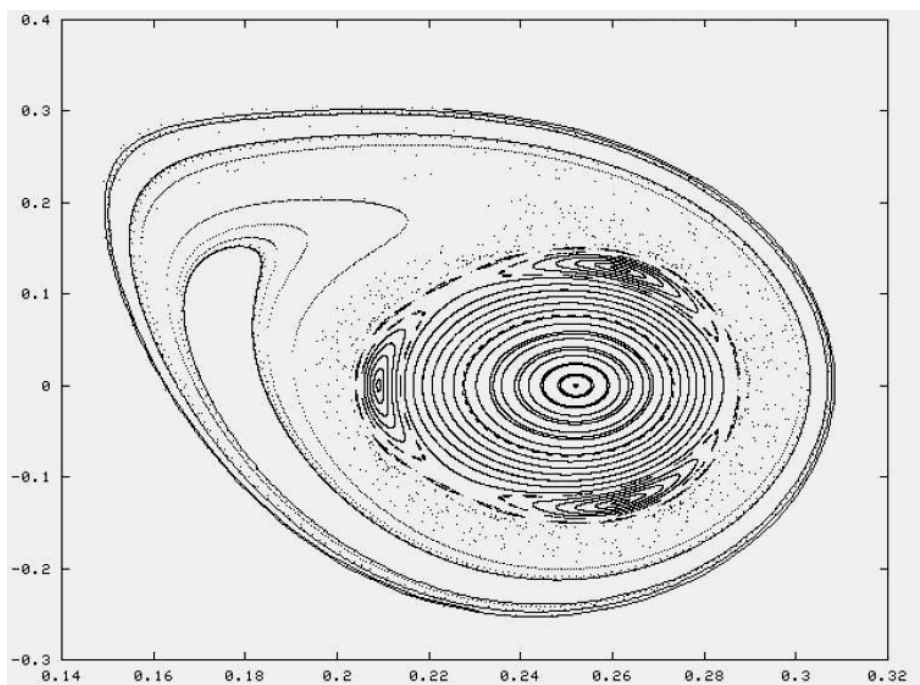


Figura 16: Três seções de Poincaré do tubo instável e o toro.  
E=0.99470278

Para determinar-se a secção da variedade estável, utiliza-se o mesmo procedimento realizado no caso anterior, trocando-se  $p_a \rightarrow -p_a$ . Com isto, encontra-se as seções para as duas variedades, e determina-se se há ou não um cruzamento homoclínico. As figuras 17 e 18 mostram a intersecção entre as variedades estável e instável, na primeira e segunda seções de Poincaré. Existem dois pontos homoclínicos na primeira secção e inúmeros na segunda, o que implica, portanto, na existência de comportamento caótico para este sistema. Sucessivas seções geram o emaranhamento homoclínico característico dos sistemas caóticos.

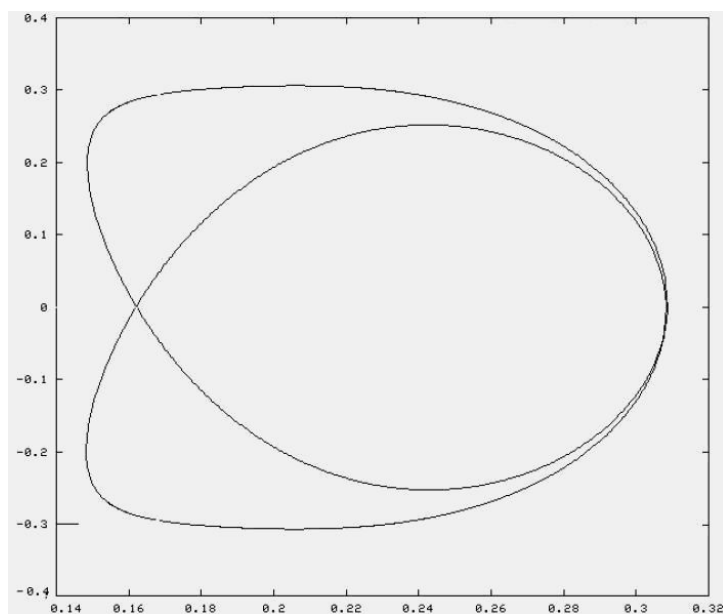


Figura 17: Intersecção entre as variedades estável e instável na primeira secção de Poincaré.  $E=0.99470278$

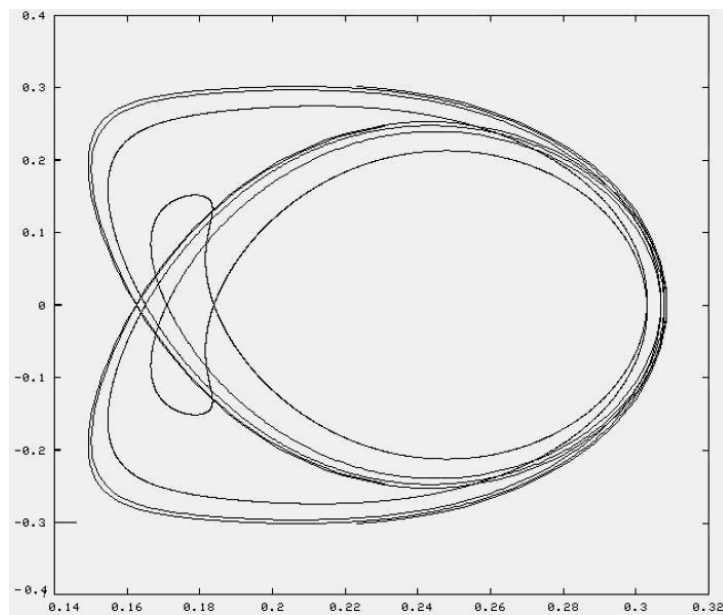


Figura 18: Intersecção entre as variedades estável e instável na segunda secção de Poincaré.  $E=0.99470278$

### 4.4.3 Variedade instável do caso com potencial quântico com $\gamma = 2/3$

Para o caso com potencial quântico com  $\gamma = 2/3$ , as trajetórias no tubo instável tendem a "fugir" para o infinito com muito mais facilidade do que no caso com  $\gamma = 1$ . Portanto, para obter-se um tubo instável no qual as trajetórias não "fujam", é necessário que a energia seja alta, muito próxima de  $E=1$ . Lembramos que o ponto centro-sela está localizado em  $(a = 0.99317156, b = 0.99317156, p_a = 0, p_b = 0)$ , e tem energia  $E = 1.01006820$ . As figuras 19, 20 e 21 mostram as projeções do tubo instável para este caso.

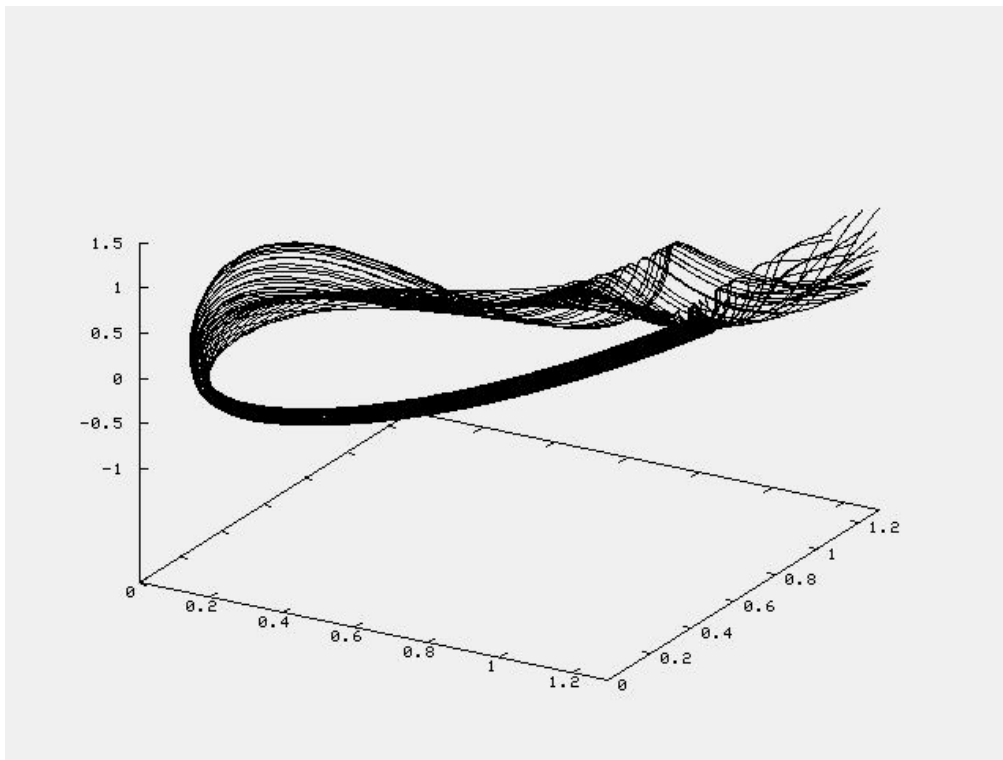


Figura 19: Projeção em  $(a, b, p_a)$  do tubo instável.  $E=1.00706088$

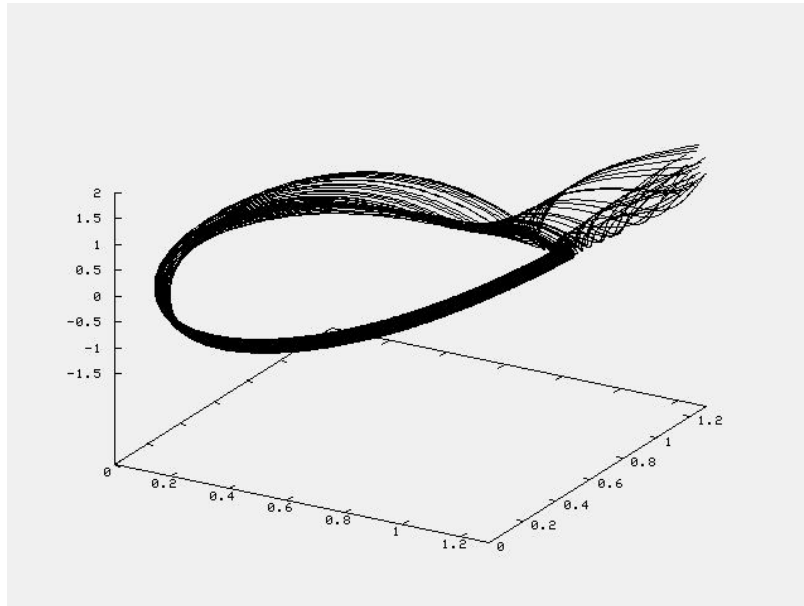


Figura 20: Projeção em  $(a, b, p_b)$  do tubo instável.  $E=1.00706088$

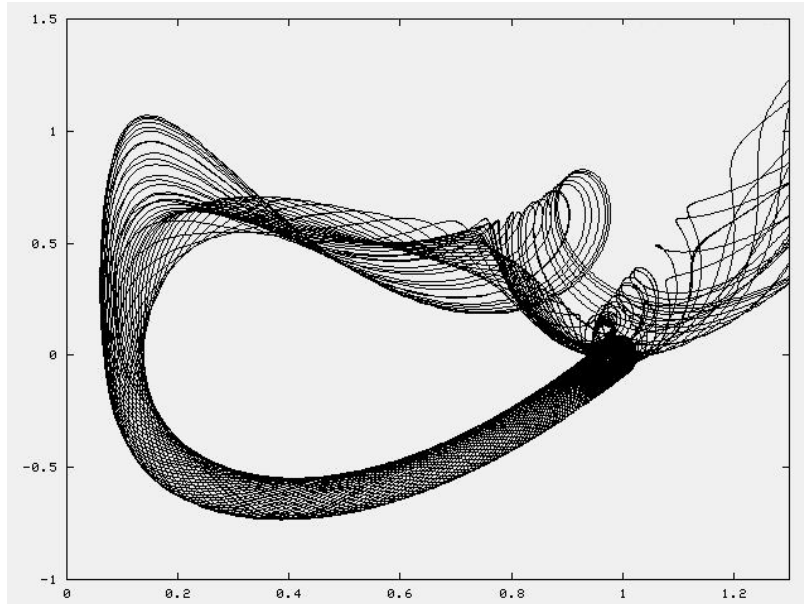


Figura 21: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável.  $E=1.00706088$

À medida que a energia diminui, algumas trajetórias "fogem" para o infinito, ou seja, o valor de  $p_a$  aumenta ilimitadamente, desta vez muito mais rapidamente que no caso com  $\gamma = 1$ . Ao mesmo tempo, nota-se que  $a \rightarrow 0$ . Este comportamento significa, para o modelo físico estudado, que a dimensão representada pelo fator de escala  $a$  colapsa. Porém, como o outro fator de escala  $b$  permanece finito, este colapso não gera uma singularidade pontual, e sim um plano, ou seja, o universo torna-se espacialmente bidimensional.

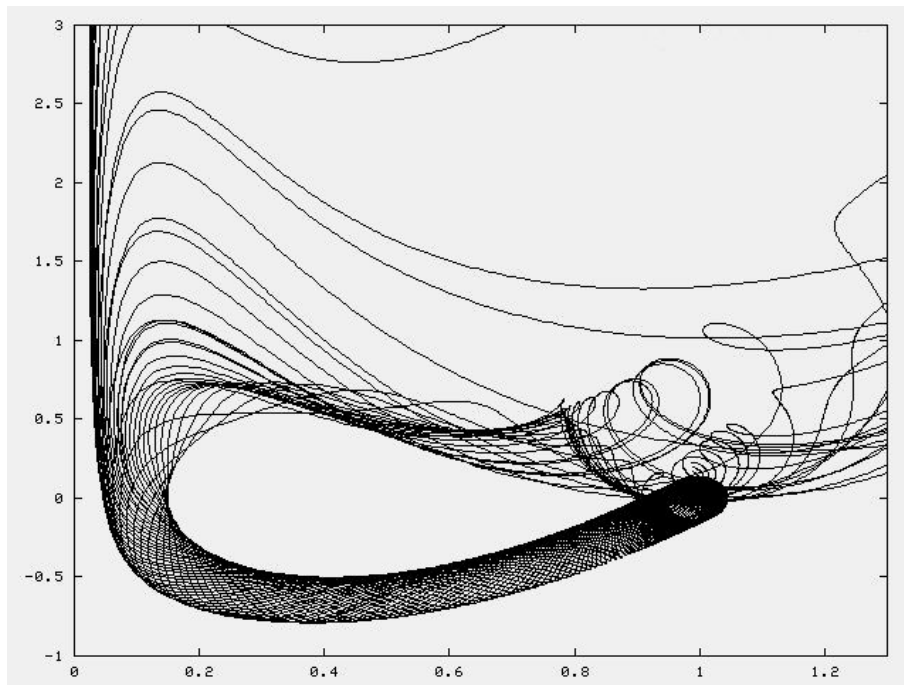


Figura 22: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável. Notar a "fuga" das trajetórias, mesmo sendo  $E=1.00274454$

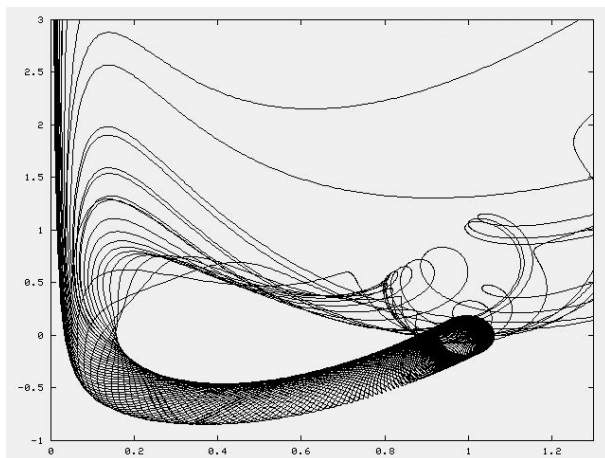


Figura 23: Projeção em  $(a, p_a)$  do tubo instável. Grande parte das trajetórias "foge".  $E=0.99685469$

A primeira secção de Poincaré do tubo instável, para diversas energias, mesmo altas, mostra a fuga das trajetórias, com  $p_a \rightarrow \infty$ . Na figura 24 mostramos esta primeira secção de Poincaré para diversos valores da energia. Nota-se que apenas as secções com energias altas, próximas portanto do ponto fixo, apresentam secções de Poincaré limitadas.

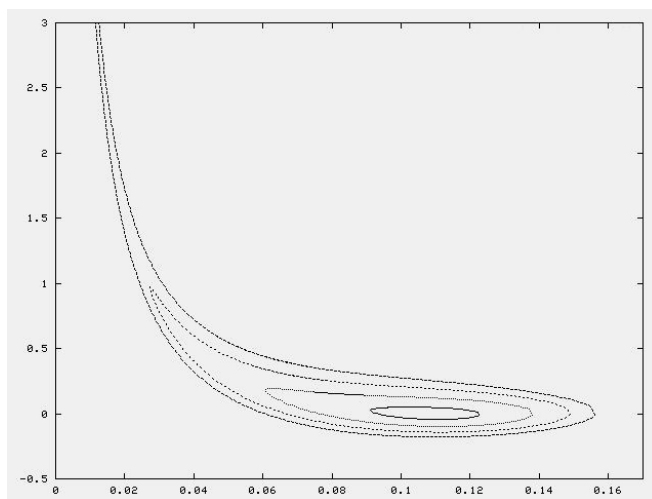


Figura 24: Primeiras secções de Poincaré do tubo instável para as energias  $E=1.00955581$ ,  $1.00706088$ ,  $1.00274454$  e  $0.99685469$ . A secção mais interna corresponde a maior energia.



Da mesma forma que no caso com  $\gamma = 1$ , a análise do sistema foi restrita a uma energia tal que evitasse a "fuga" das trajetórias ( $p_a \rightarrow \infty$ ). Assim, encontrou-se também a segunda e a terceira secções de Poincaré do tubo instável, mostradas nas figuras 25 e 26. Nota-se, na figura 26, que a terceira secção da variedade instável é mais convoluída do que no caso  $\gamma = 1$ .

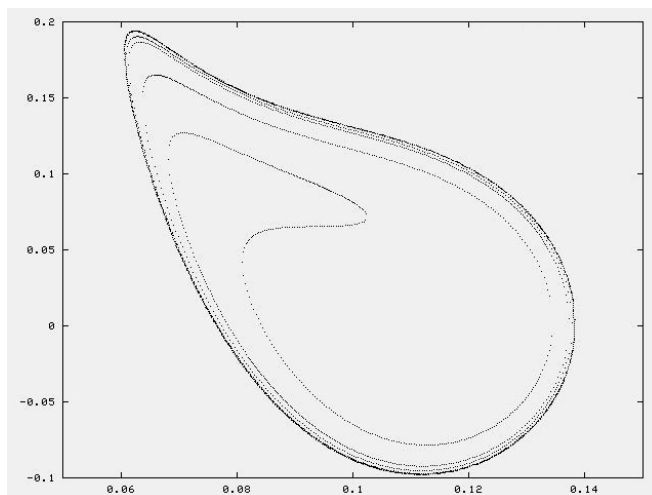


Figura 25: Primeira e segunda secções de Poincaré do tubo instável.  
E=1.00706088

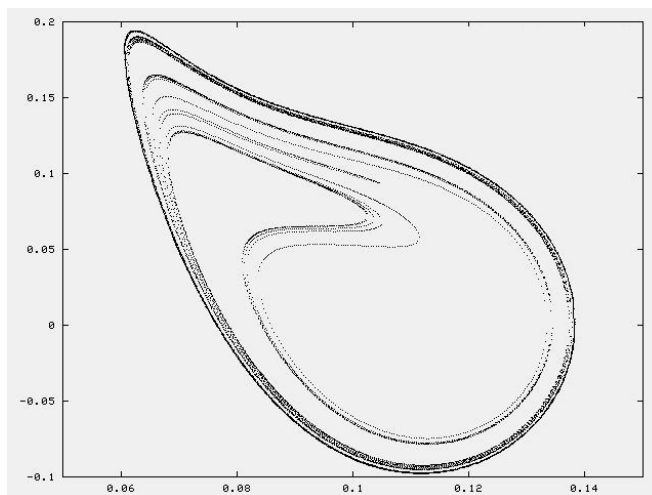


Figura 26: Primeira, segunda e terceira secções de Poincaré do tubo instável. E=1.00706088

As figuras 27 e 28 mostram a intersecção entre as variedades estável e instável, na primeira e segunda secções de Poincaré, respectivamente. Existem dois pontos homoclínicos na primeira secção e inúmeros de ordem superior na segunda secção, confirmando a existência de comportamento caótico para este sistema, apesar da inesperada divergência em  $p_a$ , que merece uma investigação mais acurada.

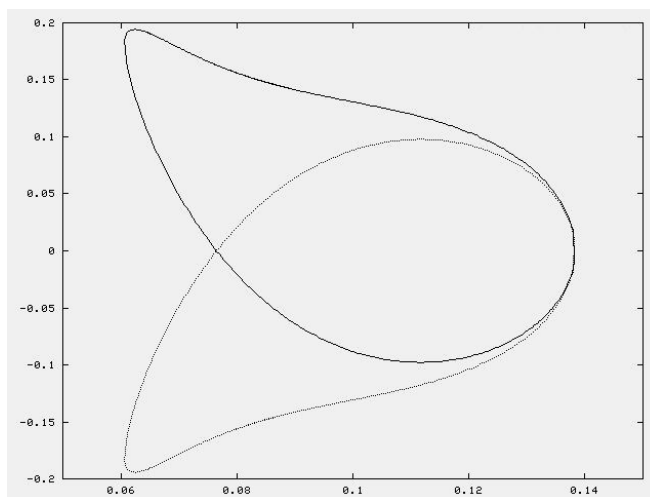


Figura 27: Cruzamentos homoclínicos na primeira secção de Poincaré.  
 $E=1.00706088$

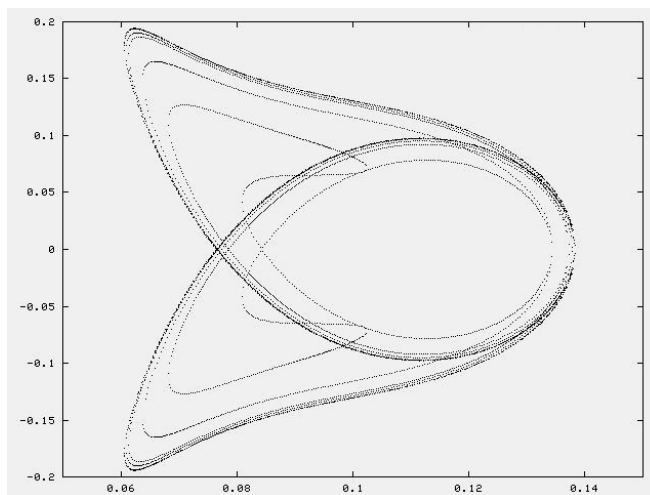


Figura 28: Cruzamentos homoclínicos na segunda secção de Poincaré.  
 $E=1.00706088$

# Conclusão

No decorrer deste trabalho, estudamos a dinâmica do modelo cosmológico homogêneo e anisotrópico de Bianchi IX, com um termo de potencial quântico adicionado, e comparamos os resultados obtidos com aqueles do modelo sem este termo. A dinâmica do modelo, originalmente descrita através das equações de Einstein, foi convertida em um sistema hamiltoniano com dois graus de liberdade, correspondentes aos dois fatores de escala,  $a(t)$  e  $b(t)$ , do modelo estudado. Pudemos determinar que a adição do termo de potencial quântico restringe a dinâmica do sistema à região onde os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  são positivos, ao contrário do caso clássico. Isto é razoável, uma vez que este potencial quântico representa uma força repulsiva, tanto mais forte quanto mais próximo da origem o sistema estiver. Foi realizada então uma análise da hamiltoniana, que permitiu determinar que o sistema apresenta dois pontos críticos. Estes pontos fixos representam universos estáticos, onde os fatores de escala são constantes ao longo do tempo. Através da linearização do sistema ao redor destes pontos, foi possível determinar que um deles é do tipo centro-centro, portanto, estável, e um do tipo centro-sela, ou seja, instável. Pudemos determinar, através da técnica de continuação numérica, as órbitas periódicas ao redor destes pontos fixos, cuja existência é estabelecida pelo teorema de Poincaré. Nestas órbitas, os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  apresentam comportamento periódico, significando que podem existir universos "pulsantes", ou seja, universos que contraem-se e expandem-se periodicamente. Como um dos pontos fixos é do tipo centro-sela, pudemos determinar também as variedades estável e instável, que emanam das órbitas periódicas ao redor deste ponto fixo. No caso quântico, através da análise destas variedades, determinamos que parte das trajetórias escapa para a região de de Sitter, que representa universos que se expandem indefinidamente, e outra parte sofre uma contração no fator de escala  $a$ , o qual tende a zero, representando universos que colapsam em uma dimensão, tornando-se espacialmente bidimensionais.

A secção de Poincaré das variedades estável e instável exhibe o cruzamento das mesmas, o que implica na existência de órbitas biassintóticas à variedade central, ou seja, órbitas homoclínicas. A existência destas órbitas estabelece

que a saída para de Sitter e a tendência ao colapso são regidas por um mecanismo do tipo da ferradura de Smale.

Existem algumas questões que não estão bem esclarecidas, e devem ser analisadas em futuros trabalhos. Uma delas é o por quê de as órbitas periódicas ao redor do centro-sela para o caso com potencial quântico terminarem. No caso clássico, estas terminam por alcançarem um ponto fixo ( $a = 0, b = 2$ ). Porém, on caso com potencial quântico não existe, e mesmo assim não é possível encontrar órbitas periódicas com uma energia menor do que um determinado valor, provavelmente devido à divergência dos momentos.

# Apêndice

## A.1 Definição

Uma variedade topológica  $n$ -dimensional  $M$  é um espaço topológico duplamente enumerável de Hausdorff que é localmente homeomorfo a conjuntos abertos de  $\mathfrak{R}^n$ .

Uma variedade diferenciável é uma variedade topológica com alguma informação adicional sobre sua estrutura.

Uma carta, também conhecida como sistema local de coordenadas, é um mapeamento  $\alpha : U \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , tal que o domínio  $U \subset M$  é um conjunto aberto, e tal que  $U$  é homeomorfo à imagem  $\alpha(U)$ . Sejam  $\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , e  $\beta : U_\beta \rightarrow \mathfrak{R}^n$  duas cartas com domínios sobrepostos. A injeção contínua

$$\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathfrak{R}^n$$

é chamada uma função transição, e também chamada uma mudança de coordenadas.

Um atlas  $\mathcal{A}$  é uma coleção de cartas  $\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathfrak{R}^n$  cujos domínios cobrem  $M$ , isto é:

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}.$$

Mais geralmente, para  $k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$ , o atlas  $\mathcal{A}$  define uma estrutura diferencial  $C^k$ , e  $M$  é dita ser de classe  $C^k$ , se todas as funções de transição são  $k$  vezes continuamente diferenciáveis, ou analíticas no caso de  $C^\omega$ . Duas estruturas diferenciais de classe  $C^k$  em  $M$  são ditas serem isomorfas se a união dos atlas correspondentes é também um atlas  $C^k$ , isto é, se todas as novas funções de transição originárias da união dois atlas permanecem de classe  $C^k$ . Mais geralmente, duas variedades  $M$  e  $N$  são ditas difeomorfas, isto é, têm estruturas diferenciais equivalentes, se existe um homeomorfismo  $\phi : M \rightarrow N$  tal que o atlas de  $M$  é equivalente ao atlas obtido do recuo de  $\phi$  das cartas em  $N$ .

## A.2 Teorema da variedade central

Seja  $f \in C^r(E)$  com  $r \geq 1$  em que  $E$  é um conjunto aberto de  $\mathfrak{R}^n$  que contém a órbita periódica  $\Gamma : x = \gamma(t)$  do sistema  $\dot{x} = f(x)$  cujo período

é  $T$ . Sejam  $\phi_t$  o fluxo de  $\dot{x} = f(x)$  e  $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$ . Se  $k$  expoentes característicos possuírem a parte real negativa,  $j$  possuírem a parte real positiva e  $m = n - k - j$  possuírem a parte real nula, então existe uma variedade central de  $\Gamma$ ,  $W^c(\Gamma)$ , de classe  $C^r$  que é invariante sob o fluxo  $\phi_t$ . Além disso,  $W^s(\Gamma)$ ,  $W^u(\Gamma)$  e  $W^c(\Gamma)$  se interceptam transversalmente em  $\Gamma$ , e, se a origem for trasladada para o ponto de equilíbrio  $x_0$ , então  $\Gamma(t) = \phi_t(0)$ . Portanto  $W^c(\Gamma)$  é tangente ao subespaço central de  $\Gamma$ ,  $E^c(\Gamma)$  no ponto  $0 \in \Gamma$ .

### A.3 Teorema da variedade estável/instável

Seja  $f \in C^r(E)$  com  $r \geq 1$  em que  $E$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  que contém a órbita periódica  $\Gamma : x = \gamma(t)$  do sistema  $\dot{x} = f(x)$  cujo período é  $T$ . Sejam  $\phi_t$  o fluxo de  $\dot{x} = f(x)$  e  $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$ . Se  $k$  expoentes dos expoentes característicos de  $\Gamma(t)$  possuírem parte real onde  $0 \leq k \leq n - 1$  e  $n - k - 1$  expoentes possuírem a parte real positiva, então existe um  $\delta > 0$  tal que a variedade estável de  $\Gamma$ ,

$$S(\Gamma) = \{x \in N_\delta(x_0) | d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow \infty\},$$

é uma variedade  $(k + 1)$ -dimensional diferenciável e positivamente invariante sob o fluxo  $\phi_t$ , sendo  $d(\phi_t(x), \Gamma)$  a distância entre um ponto de uma trajetória sobre as variedades e a órbita  $\Gamma$ . Analogamente, a variedade invariante instável de  $\Gamma$ ,

$$U(\Gamma) = \{x \in N_\delta(x_0) | d(\phi_t(x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow \infty\},$$

é uma variedade  $(n - k)$ -dimensional diferenciável e negativamente invariante sob o fluxo  $\phi_t$ . Além disso, as variedades estáveis e instáveis de  $\Gamma$  se interceptam transversalmente em  $\Gamma$ .

### A.4 Teorema da função implícita para funções analíticas

Suponha que a função  $F : R^{m+n} \rightarrow R^n$  seja real e analítica numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 \in R^m$  e  $y_0 \in R^n$ . Se  $F(x_0, y_0) = 0$  e a matriz  $n \times n$   $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0)$  for não singular, então existe uma função  $f : R^m \rightarrow R^n$ , real e analítica na vizinhança de  $x_0$ , tal que  $F(x, f(x)) = 0$  numa vizinhança de  $x_0$ .

# Bibliografia

- [1] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov and E. M. Lifshitz, *Adv. Phys.* 19, 525 (1970); *Adv. Phys.* 31, 639 (1982).
- [2] H. P. de Oliveira, I. Damião Soares and T. J. Stuchi, *Phys. Rev. D* 56, 730 (1997).
- [3] I. Damião Soares and T. J. Stuchi, *Phys. Rev. D* **72**, 083516, 2005.
- [4] F. F. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos, G. A. Monerat, *Quantum Cosmological Perfect Fluid Models*, *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 34, 2002.
- [5] N. A. Lemos and G. A. Monerat, *A Quantum Cosmological Model with Static and Dynamic Wormholes*, *Gen. Rel. Grav.*, Vol. 35, 2003.
- [6] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [7] R. Barguine, *Caos em Universos Anisotrópicos de Bianchi-IX*, Tese de Mestrado, Instituto de Física, UERJ, 2000.
- [8] F. G. Alvarenga, A. B. Batista, J. C. Fabris, S. V. Goncalves, *Troubles with quantum anisotropic cosmological models: loss of unitarity*, (preprint, 2007).
- [9] A. M. Ozorio de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*, Campinas, Editora UNICAMP, 1987.
- [10] Boccaletti D., Pucacco G., *Theory of Orbits*, New York, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

- [11] A.A.Corrêa, Linhas de Fluxo de Discos de Acresção em Estrelas Binárias com Órbitas Periódicas Simples, Projeto de Final de Curso, Departamento de Astronomia, UFRJ, 1999.
- [12] Burlisch, R., Stoer, J., Introduction to Numerical Analysis, New York, Springer Verlag, 1983.
- [13] L.Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, New York, Springer Verlag, 1981.
- [14] C. Simó, On the analytical and numerical approximation of invariant manifolds, In: Brest, D., Froeschlé, C. (Ed.). Moderne methods in celestial mechanics. Goutelas Éditions Frontière., Dreux,1990, 285-300.
- [15] C. Simó and T.J. Stuchi, Physica D 140, 1-33, 2000.
- [16] J.Gidea e M.Masdemont, Geometry of Homoclinic Connections in a Planar Circular Restricted Three-Body Problem, Pre-Print, Universidade Politécnic da Catalúnia, 2006.
- [17] Krantz S.G., Parks H.A., A primer of real analytic functions, Birkhauser, 2002 (segunda edição).



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)