

**EFEITOS DE INOMOGENEIDADES
NA TRANSIÇÃO QUIRAL**

BRUNO GOUVÊA TAKETANI

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



EFEITOS DE INOMOGENEIDADES NA TRANSIÇÃO QUIRAL

Bruno Gouvêa Taketani

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa
Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto
de Física, da Universidade Federal do Rio de Ja-
neiro, como parte dos requisitos necessários à ob-
tenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Eduardo Souza Fraga

Rio de Janeiro
março de 2006

T136 Taketani, Bruno Gouvêa

Efeitos de Inomogeneidades na Transição Quiral / Bruno Gouvêa
Taketani. Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2006.

ix, 59f. il.;30cm.

Orientador: Eduardo Souza Fraga

Dissertação de Mestrado: Mestre em Ciências (Física) - UFRJ,
Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física, 2006.

Referências Bibliográficas: f. 78-81.

1. Teoria de campos a temperatura finita. 2. Transição quiral. 3.
Nucleação. 4. Expansão em gradientes.

I. Fraga, Eduardo Souza. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Efeitos
de Inomogeneidades na Transição Quiral.

*Dedico esta Tese à
minha família e à
Émille.*

Agradecimentos

Esta, eu descobri ser a página mais difícil de escrever na tese inteira. A quantidade de pessoas a quem sou grato é muito grande e expressar minha real gratidão parece uma tarefa impossível. A todos que eu possa vir a esquecer peço perdão de cabeça baixa.

Ao meu orientador Eduardo, agradeço por estes últimos anos. A física se mostrou um desafio enorme, muitas vezes intransponível, mas você teve mão forte para não me permitir ser vencido e, ao mesmo tempo, dando o espaço necessário para que eu caminhasse com as próprias pernas. Sei o trabalho que você teve, desde o início da nossa parceria, mas especialmente no final, para que eu encontrasse motivação. Não é um computador de última geração que nos dá gosto no trabalho, mas sim as pessoas que estão ao nosso lado (embora um bom PC sempre caia bem..rs). Obrigado por acreditar em mim.

Aos meus companheiros de sala André, Bruno, Ana, e Bia, e aos companheiros de sala não oficiais, Letícia, que gentilmente me emprestava a "minha" mesa ;) , e Miguel, nosso costureiro visitante, vocês tornaram o ambiente de trabalho muito mais prazeroso e produtivo. Nossas discussões, que pareciam sempre acabar 10 minutos depois do início da aula de alguém, foram uma ótima maneira de relaxar enquanto se aprendia alguma coisa. André, você foi um irmão ao longo destes dois anos, com uma vontade de ajudar jamais vista. Espero que nossos caminhos não se afastem, haja o que houver.

Àqueles que me prepararam para este mestrado, meus amigos da graduação: Alessandro, Diogo, Gabriel, Isa, Mario, Murilo e Novakinho. Obrigado por me acolherem no IF (mesmo que quase todos tenham depois se mandado). Vocês foram grandes professores e amigos, espero que esse fluxo pro exterior acabe logo para que possamos voltar aos nossos frutíferos encontros.

A todo grupo QCD-QGP, espero que seus caminhos sejam tão brilhantes quanto os daqueles que guiam este (cada vez maior) grupo de estudos.

Seria difícil enfrentar a vida sem a ajuda daqueles que estiveram sempre ao meu lado, meus irmãos por opção, Claudio, Elias, Fred e Gabriel. Vocês são os maiores amigos que eu poderia pedir. Obrigado pela força.

Ao maluco do Alexandre, se não fossem os programas de índio que nos fazemos toda hora, não sei o que seria de mim. É correndo, no meio do mato, que eu consigo me esquecer de todos os meus problemas e realmente ficar 100% de bem com a vida.

A meus pais, obrigado por aceitarem meus tropeços, por maiores que eles sejam, por estenderem as mãos pra mim sempre que preciso, mesmo que eu não saiba que preciso. Aos meus irmãos, que estiveram sempre presentes, me mostrando o que todo mundo já sabe de uma maneira que eu entendesse. Aos meus avôs e minhas avós, não existem palavras pra descrever a grandeza da minha gratidão por tudo que vocês são. À Náza, minha mãe preta, pelos ouvidos sempre prontos para me dar atenção. Vocês todos são a origem da força que me faz seguir.

À Émi, você foi a luz que iluminou todo o meu caminho nos últimos seis anos e para sempre irá brilhar. Jamais serei capaz de demonstrar tudo o que você significa para mim. Gostaria de poder escrever livros de dedicatória, mas terei que me contentar com estas poucas linhas.

Ao coordenador da Pós-Graduação Sergio Queiroz e ao trio-maravilha da secretaria da Pós-Graduação, Casé, Cristina e Felipe, obrigado pela ajuda ao longo destes dois últimos anos.

À CAPES pela bolsa de mestrado que, embora pequena, possibilitou a continuação dos meus estudos.

RESUMO**EFEITOS DE INOMOGENEIDADES NA TRANSIÇÃO QUIRAL**

Bruno Gouvêa Taketani

Orientador: Eduardo Souza Fraga

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

A estrutura de fases da QCD tem sido muito estudada nos últimos anos. Acredita-se que, a altos valores de temperatura ou potencial químico, a matéria passe a ser composta de quarks e gluons desconfinados. Uma possível fase da matéria fortemente interagente na qual este desconfinamento ocorre é o chamado plasma de quarks e gluons. Estudos recentes mostraram que a transição entre a fase hadrônica e a fase desconfinada pode estar intimamente ligada a transição de fase quiral da QCD.

Após uma breve revisão sobre simetria quiral, discutimos o modelo sigma-linear acoplado a férmions. Este modelo contém quebra espontânea desta simetria e é comumente utilizado como teoria efetiva para a QCD a baixas energias. O gás de quarks age como um banho térmico sobre os bósons e gera um potencial efetivo para a evolução do parâmetro de ordem da transição quiral.

De posse deste potencial, partimos para um estudo geral da nucleação. Podemos, então, obter as equações de movimento que governam a transição de fase para esta teoria de campos, tanto a temperatura zero quanto a temperatura finita.

A obtenção de soluções exatas analíticas para estas equações de movimento é um problema em aberto devido à presença de um termo de fonte correspondente à densidade fermiônica. O cálculo deste termo é usualmente feito com um campo de fundo homogêneo e estático. Porém, durante uma conversão de fases, inhomogeneidades neste campo devem

estar presentes, desempenhando um papel importante na dinâmica.

Apresentamos, então, o método de expansão em gradientes que permite o cálculo da densidade fermiônica a temperatura finita na presença de um campo de fundo quirial, incorporando sistematicamente efeitos de inomogeneidades deste campo.

Palavras-chave: Teoria quântica de campos a temperatura finita, transição quirial, nucleação.

Rio de Janeiro
março de 2006

ABSTRACT**EFFECTS FROM INHOMOGENEITIES
IN THE CHIRAL PHASE TRANSITION**

Bruno Gouvêa Taketani

Orientador: Eduardo Souza Fraga

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

The QCD phase structure has been thoroughly studied in the past years. It is believed that at high values of temperature or chemical potential, matter consists of deconfined quarks and gluons. A possible phase for strongly interacting matter in which deconfinement takes place is the so-called quark-gluon plasma. Recent studies have shown that the phase transition between the hadronic and the deconfined phases may be closely connected with the QCD chiral phase transition.

After a brief review on chiral symmetry, we discuss the linear sigma-model coupled to fermions. This model contains a spontaneous breaking of such a symmetry and is widely used as an effective theory for QCD at low energies. The quarks gas acts as a heat bath for the bosons and generates an effective potential for the evolution of the order parameter of the chiral transition.

With this potential in hand we proceed to the general study of nucleation. The equations of motion that describe the phase transition for this field theory are determined, both for zero and finite temperature.

Finding exact analytical solutions for the equations of motion is an open problem due to the presence of a source term that corresponds to the fermionic density. The evaluation of this term is usually done with a homogeneous and static background field. However, during

a phase conversion inhomogeneities of this field must be present and play an important role in the dynamics.

We present the method of gradient expansion that allows for the the evaluation of the fermionic density at finite temperature in the presence of a chiral background field and incorporating inhomogeneities systematically.

Key-words: Quantum field theory at finite temperature, chiral transition, nucleation.

Rio de Janeiro
março de 2006

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	5
2	MODELO EFETIVO QUIRAL	8
2.1	Introdução	8
2.2	Simetria Quiral	9
2.3	Modelo Sigma-Linear	13
2.4	Transição Quiral	16
3	NUCLEAÇÃO	20
3.1	Introdução	20
3.2	Campo Escalar a $T = 0$	21
3.3	Campo Escalar a Temperatura Finita	25
3.4	Aproximação de parede fina	28
4	EFEITOS DE INOMOGENEIDADES A TEMPERATURA FINITA	32
4.1	Introdução	32
4.2	Expansão em Gradientes a $T = 0$	34
4.3	Expansão em Gradientes a Temperatura Finita	36
4.4	Correções ao Potencial e ao Laplaceano	38
4.4.1	Campo Homogêneo: Correção ao Potencial	38
4.4.2	Inomogeneidades: Correção ao Laplaceano	42
4.4.3	Expressão final para $\rho_1 + \rho_2$	43
4.5	Limite de Baixa Temperatura	45
4.6	Discussão dos Resultados	47

5 CONCLUSÕES	58
A ALGUNS INGREDIENTES DA TEORIA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA	61
A.1 Função de Partição	61
A.2 Soma Sobre Frequências de Matsubara	62
B CÁLCULO DE TRAÇOS	66
C CÁLCULO DE $(\rho_1 + \rho_2)$	68
C.1 Cálculo de $\rho_1^{(2)}$	68
C.2 Cálculo de $\rho_2^{(1)}$	69
C.3 Expressão final para $\rho_1 + \rho_2$	71
C.3.1 Integral em p_0	73

Lista de Figuras

2.1	Potencial efetivo (a) sem quebra espontânea e (b) com quebra espontânea de simetria.	14
2.2	Potencial efetivo com quebra explícita de simetria.	14
2.3	Evolução do potencial efetivo com a temperatura.	18
2.4	Potencial efetivo em $T = T_{sp}$. Transição dominada por flutuações de longo comprimento de onda	19
3.1	Potencial efetivo com dois mínimos.	22
3.2	Solução do tipo bolha para (a) $T \ll r^{-1}(0)$ e (b) $T > r^{-1}(0)$	26
3.3	Aproximação de parede fina: altura da barreira muito maior que $ V_{ef}(\phi_0(T), T) $. A figura está fora de escala para facilitar a visualização.	28
3.4	Perfil da solução $\phi(r)$ no limite $\epsilon \rightarrow 0$	29
4.1	Diagrama de fases esquemático da QCD.	40
4.2	Potencial efetivo na presença de um campo de fundo constante. Para os dois gráficos, $g = 5,5$. Em (a) $\mu = 0$ MeV e $T = [108, 116, 123, 132]$ MeV e em (b) $\mu = 100$ MeV e $T = [110, 113, 119, 124]$ MeV.	41
4.3	Potencial efetivo na presença de um campo de fundo constante e constante de acoplamento $g = 3,3$. Em (a) $\mu = 0$ MeV e $T = [100, 113, 120]$ MeV e em (b) $\mu = 100$ MeV e $T = [80, 101, 110]$ MeV.	41
4.4	gW a $T = 100$ MeV para $g = 3,3$ (azul) e $g = 5,5$ (vermelho).	48
4.5	Variação de gW com a temperatura. $T = 50$ MeV (vermelho), $T = 100$ MeV (verde) e $T = 150$ MeV (azul); $g = 5,5$ para as três curvas.	49

4.6	Aproximação de baixa temperatura (4.65) (azul) e gW completa (vermelho) para $g = 5,5$. $T = 1$ MeV em (a), $T = 10$ MeV em (b) e $T = 100$ MeV em (c)	50
4.7	Comparação entre as correções ao potencial provenientes de V_{ef} (verde) e V_{in} (vermelho) para $g = 5,5$ e diferentes temperaturas. $T = 108$ MeV em (a), $T = 124$ MeV em (b) e $T = 132$ MeV em (c). O potencial puramente bosônico (azul) aparece para compararmos as correções.	52
4.8	Ajuste polinomial para a derivada do potencial para várias temperaturas. As curvas da legenda correspondem a V'_{in} completo e as outras aos ajustes polinomiais.	53
4.9	Potencial efetivo na presença de um campo de fundo constante (azul) e contendo a primeira correção de inhomogeneidades. Em (a) $T = 108$ MeV, (b) $T = 116$ MeV, (c) $T = 124$ MeV e (d) $T = 132$ MeV.	54
4.10	Ajuste polinomial para o potencial para várias temperaturas. As curvas da legenda correspondem a V'_{in} completo e as outras aos ajustes polinomiais. . .	55
A.1	Contorno usado na integração complexa da Eq.(A.9).	63

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A estrutura de fases da cromodinâmica quântica (QCD) tem recebido muita atenção nos últimos anos. Parte da razão para isto é o desenvolvimento de novas técnicas para o tratamento matemático da teoria (*e.g.* *Hard-Thermal Loops* [1, 2]), associado a dados experimentais recentes em colisões de íons pesados ultra-relativísticos no BNL-RHIC [3, 4, 5] e a resultados da rede [6] que sugerem que a QCD sofra uma transição de fase para um novo estado a temperaturas suficientemente altas.

Cálculos perturbativos em QCD a altas temperaturas e densidades mostram que a constante de acoplamento decresce com a escala de energia [7]. Desta forma, acredita-se que esta fase seja formada por quarks e gluons desconfinados e com simetria quiral aproximadamente restaurada. O plasma de quarks e gluons (QGP) é geralmente aceito como este novo estado da matéria. Experimentos realizados nos aceleradores de partículas Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), em Brookhaven, e Large Hadron Collider (LHC), no CERN, que estudam os fenômenos críticos da QCD estão em busca de evidências do QGP. O universo primordial também é um cenário onde a formação do plasma de quarks e gluons deve ter ocorrido [8, 9].

Uma das grandes dificuldades no estudo da QCD está no fato de que, para a escala de energia associada à transição quiral, a teoria é altamente não-perturbativa. Desta forma, a aplicação de muitos métodos comumente usados em teoria de campos [10, 11, 12] torna-se difícil. Em busca de um tratamento matemático mais simples, procuramos escrever modelos que possam ser usados como “mímica” da cromodinâmica quântica, para certos limites de energia. O modelo sigma linear é amplamente adotado para o estudo da transição quiral,

correspondendo à QCD a baixas energias [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

Este modelo possibilita o estudo do mecanismo de quebra de simetria, assim como dos processos de nucleação de bolhas e decomposição spinodal. Nesta tese, utilizaremos o modelo σ -linear para a equação de movimento do campo quiral na presença de férmions. A baixas energias, o campo quiral é muito mais pesado do que o campo fermiônico e sua dinâmica é, portanto, muito mais lenta. Com isto em mente, podemos tratar os férmions (quarks na QCD) como um banho térmico a temperatura T no qual o campo quiral evolui. Isto equivale, formalmente, a integrarmos sobre os graus de liberdade fermiônicos, usando uma aproximação clássica para o campo quiral. Neste procedimento, encontramos um potencial termodinâmico efetivo para o campo bosônico que contém toda a informação sobre a interação com o campo de Dirac na forma de um determinante fermiônico.

Para obtermos a solução da equação de movimento, precisamos avaliar este determinante usando alguma aproximação. Este cálculo é geralmente feito tomando o campo de fundo bosônico como estático e homogêneo. Porém, devemos esperar que, para um sistema passando por uma transição de fase, inomogeneidades neste campo estejam presentes e desempenhem um papel importante para a dinâmica. Tais efeitos devem, então, ser incorporados ao cálculo.

Apresentamos um procedimento que, supondo que o campo varie suavemente, permite incorporar estas inomogeneidades ao cálculo do determinante. Este método já foi utilizado com sucesso na literatura para o cálculo de correções a temperatura nula, geralmente em sistemas de baixa dimensionalidade. Neste trabalho, consideraremos o caso a temperatura finita em 3 dimensões espaciais.

Esta tese encontra-se dividida da seguinte forma:

O **Capítulo 2** traz uma discussão sobre a simetria quiral e sua quebra na QCD. Apresentamos o modelo σ -linear, descrevendo rapidamente o processo de transição quiral neste modelo. Fazemos uma revisão sucinta da teoria de nucleação no **Capítulo 3**. Começamos o tratamento da nucleação no caso a temperatura nula e fazemos a generalização para temperatura finita. Neste capítulo, consideraremos apenas a direção do campo sigma, correspondendo a uma direção escalar, pois esta será a direção dominante no processo de conversão de fase e seu tratamento é mais simples [17]. No **Capítulo 4** apresentamos o método de expansão em gradientes para a incorporação de inomogeneidades no campo de fundo ao

cálculo do determinante fermiônico. Os casos a temperatura nula e temperatura finita são discutidos. Calculamos correções ao potencial e ao Laplaceano e fazemos uma aproximação de baixas temperaturas para obtermos uma forma analítica mais simples para a correção ao Laplaceano. Mostramos, na última seção, a influência das correções de inomogeneidades sobre grandezas como a energia da bolha crítica, seu raio e tensão superficial e comparamos com resultados da literatura, obtidos na aproximação de campo homogêneo. No **Capítulo 5** discutimos em detalhe nossos resultados e apresentamos nossas considerações finais.

Capítulo 2

MODELO EFETIVO QUIRAL

2.1 Introdução

Sabemos que a QCD não possui simetria quiral exata. Porém, a altas temperaturas, acredita-se que esta simetria seja aproximadamente restaurada. Simulações da QCD na rede a temperatura finita e potencial químico nulo mostram que esta restauração ocorre para $T \sim 150$ MeV [6]. Esta temperatura nos dá uma ordem de grandeza das massas das partículas relevantes à transição de fase. Podemos, então, construir um modelo efetivo que leve em conta apenas os mésons cujas massas são da ordem de 100 MeV. Esses são o méson-sigma e o méson-pi ($m_\sigma \approx 600$ MeV, $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} \approx 140$ MeV e $m_{\pi^0} \approx 135$ MeV)[21, 22, 23]. Tal modelo terá simetria $SU(2)_f$ aproximada, pois os mésons em questão são formados por quarks *up* e *down*.

Muitos trabalhos levam em consideração, também, a presença do quark *strange*, pois as massas destes três são muito menores que as dos quarks *charm*, *top* e *bottom*. A criação do quark *s* se daria devido a grandes flutuações (quânticas ou térmicas), pois embora seja um quark leve, sua massa é muito maior do que as de *u* e *d* ($m_s \approx 80$ – 130 MeV, $m_u \approx 1,5$ – 4 MeV e $m_d \approx 4$ – 8 MeV) [23]. Estudos analíticos de sistemas com 3 quarks utilizam geralmente um dos seguintes cenários: **(i)** todos os quarks tem massa nula ($SU(3)_f$) ou **(ii)** $m_u = m_d = 0$ e $m_s \neq 0$.

A presença de uma escala de massas torna certos graus de liberdade da teoria completa

irrelevantes. Podemos, então, utilizar modelos efetivos para tratar o problema. Teorias efetivas incorporam os efeitos destes graus de liberdade a constantes e interações efetivas, de forma a tornar o tratamento do problema físico em questão mais simples. Para a construção de tais teorias é feita uma aproximação na ação clássica que muda os graus de liberdade da integral funcional. Uma possível aproximação para a QCD a baixas energias transforma os graus de liberdade dos férmions e gluons em bárions e mésons.

A construção de modelos efetivos a partir de uma teoria fundamental nem sempre é possível devido à sua complexidade. Nestes casos, as simetrias do sistema tornam-se a ferramenta principal para a determinação da nova teoria. Usando novamente o exemplo da QCD, sabemos que seus graus de liberdade fundamentais são os quarks, porém estes não são convenientes para a descrição do estado fundamental, mas sim hádrons, que são estados ligados de quarks. Assim, é natural procurar por uma teoria efetiva que contenha hádrons como campos fundamentais, embora estes ainda devam manter informações de sua constituição. Como estas teorias são criadas para funcionar em um certo regime de energia, é natural que estas possam não ser renormalizáveis. O modelo Nambu-Jona-Lasinio [24] é um exemplo no qual a constante de interação possui dimensão de $(\text{energia})^{-2}$ e é portanto não renormalizável. Um corte nas integrais de momento deve ser usado para conter as divergências.

Neste capítulo, discutiremos o modelo sigma-linear, que será a teoria efetiva quiral utilizada ao longo deste trabalho. Este modelo foi sugerido por J. Schwinger [25] em 1958 e M. Gell-Mann e M. Lévy [21] em 1960. Hoje o modelo σ -linear é comumente utilizado como uma réplica da QCD no limite de baixas energias. Ele reproduz a auto-interação entre os campos σ e $\vec{\pi}$, assim como suas interações com um campo fermiônico através de um potencial do tipo Yukawa. As quatro componentes dos campos mesônicos formam o campo quiral da teoria.

2.2 Simetria Quiral

O surgimento do modelo sigma-linear é anterior à cromodinâmica quântica ser conhecida como a teoria para as interações fortes. Porém, iremos nos basear na Lagrangeana da QCD, mais especificamente em sua estrutura de simetrias, para desenvolver nosso modelo. Como os mésons σ e $\vec{\pi}$ são formados pelos quarks leves *up* e *down*, podemos trabalhar apenas com

estes dois sabores.

A Lagrangeana de Dirac com dois sabores de férmions não massivos é da forma

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j , \quad (2.1)$$

onde o índice j representa os dois diferentes sabores.

Considere a seguinte transformação nos campos ψ , chamadas de transformações vetoriais:

$$\begin{aligned} \Lambda_V : \quad \psi &\rightarrow e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}} \psi \simeq \left(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}\right) \psi , \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{+i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}} \simeq \left(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}\right) \bar{\psi} , \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo $\vec{\tau}$ as matrizes de Pauli e $\vec{\theta}$ o parâmetro da transformação.

A Lagrangeana é invariante sob Λ_V :

$$\begin{aligned} i\bar{\psi} \not{\partial} \psi &\rightarrow i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \vec{\theta} \cdot \left(\bar{\psi} \not{\partial} \frac{\vec{\tau}}{2} \psi - \bar{\psi} \frac{\vec{\tau}}{2} \not{\partial} \psi \right) \\ &= i\bar{\psi} \not{\partial} \psi , \end{aligned} \quad (2.3)$$

e a corrente vetorial conservada (corrente de Noether) associada a esta transformação é

$$V_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} \psi . \quad (2.4)$$

Consideremos agora a transformação axial, definida por

$$\begin{aligned} \Lambda_A : \quad \psi &\rightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}} \psi \simeq \left(1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}\right) \psi , \\ \psi^\dagger &\rightarrow \psi^\dagger e^{+i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}} \simeq \left(1 + i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}\right) \psi^\dagger , \end{aligned} \quad (2.5)$$

como $\gamma_0 \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_0$ e $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$, temos

$$\Lambda_A : \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}} \simeq \left(1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}\right) \bar{\psi} . \quad (2.6)$$

A Lagrangeana também é invariante sob Λ_A e a corrente axial conservada tem a forma

$$A_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi . \quad (2.7)$$

As transformações Λ_V e Λ_A são uma representação do grupo quirral $SU(2) \times SU(2)$. Podemos fazer a decomposição do campo ψ em suas componentes quirais, usando o operador

de quiralidade γ_5 , $\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$ e $\psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$. A Lagrangeana da QCD contendo férmions não massivos é, então, invariante sob tais transformações e possui simetria quiral. Em termos das componentes quirais:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L + i\bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R . \quad (2.8)$$

Esta separação natural entre as componentes ψ_L e ψ_R não ocorre quando a Lagrangeana contém um termo de massa. Se introduzirmos um termo, $-m\bar{\psi}\psi$, a teoria continuará invariante sob Λ_V , mas

$$\Lambda_A : \bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi - 2i\vec{\theta} \cdot \left(\bar{\psi} \frac{\vec{\tau}}{2} \gamma_5 \psi \right) . \quad (2.9)$$

Λ_A não é uma simetria exata da Lagrangeana massiva. Contudo, se as massas forem muito menores do que as escalas relevantes da teoria, podemos tratar Λ_A como uma simetria aproximada. Para a QCD com dois quarks leves (up e down), esta simetria deve ser parcialmente conservada.

Sabe-se, experimentalmente, que o méson σ é um escalar sem spin e que o méson $\vec{\pi}$ é um tripleto de isospin pseudoescalar de spin 1/2. A partir de combinações de quarks podemos escrever os estados correspondentes a estes mésons como:

$$\vec{\pi} \equiv i\bar{q}\vec{\tau}\gamma_5 q , \quad (2.10)$$

$$\sigma \equiv \bar{q}q , \quad (2.11)$$

onde q representa o campo espinorial dos quarks.

Vamos aplicar agora Λ_V e Λ_A sobre estes campos:

(i) Transformação Vetorial

$$\begin{aligned} \pi_i : i\bar{q}\tau_i\gamma_5 q &\rightarrow i\bar{q}\tau_i\gamma_5 q + \theta_j \left(\bar{q}\tau_i\gamma_5 \frac{\tau_j}{2} q - \bar{q} \frac{\tau_j}{2} \tau_i\gamma_5 q \right) \\ &= i\bar{q}\tau_i\gamma_5 q + i\epsilon_{ijk}\theta_j \bar{q}\gamma_5 \tau_k q . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Em termos vetoriais podemos escrever

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\theta} \times \vec{\pi} . \quad (2.13)$$

Esta equação representa uma rotação no espaço de isospin de um ângulo θ na direção de isospin do pion. Sigma é invariante sob Λ_V . A transformação vetorial pode ser identificada

como rotações de isospin. Como o campo sigma não tem estrutura de isospin, ele não é afetado.

(ii) Transformação Axial

$$\begin{aligned} \pi_i : i\bar{q}\tau_i\gamma_5q &\rightarrow i\bar{q}\tau_i\gamma_5q + \theta_j \left(\bar{q}\tau_i\gamma_5\gamma_5\frac{\tau_j}{2}q + \bar{q}\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\tau_i\gamma_5q \right) \\ &= i\bar{q}\tau_i\gamma_5q + \theta_i\bar{q}q . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Em termos dos campos mesônicos

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\theta}\sigma . \quad (2.15)$$

Para sigma:

$$\sigma : \quad \bar{q}q \rightarrow \bar{q}q - 2i\vec{\theta} \cdot \left(\bar{q}\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma_5q \right) , \quad (2.16)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma - \vec{\theta} \cdot \vec{\pi} . \quad (2.17)$$

A transformação axial rotaciona os campos σ e $\vec{\pi}$ um no outro, porém suas massas são bastante diferentes. Esta diferença ocorre devido à quebra espontânea da simetria. A combinação dos mésons $\phi \equiv (\sigma, \vec{\pi})$ define o chamado campo quiral ϕ .

A Fig. 2.1 ilustra o papel destas transformações. Ambos os potenciais possuem invariância rotacional, com o eixo vertical correspondendo a coordenada σ e o eixo horizontal a $\vec{\pi}$. Em (a), o estado fundamental está localizado na origem e mantém a invariância rotacional. Fazendo uma analogia com a mecânica clássica, se colocarmos uma bola na origem, em (b), ela irá rolar até o mínimo e ficará em algum ponto do vale. Ao escolher um ponto do vale, o estado fundamental deixa de ser simétrico. Este sistema ainda possui alguns efeitos da simetria da teoria: excitações rotacionais não custam energia, enquanto excitações radiais custam.

Vamos agora usar desta analogia com a mecânica clássica para compreender a quebra da simetria axial. Imagine que o potencial da nossa teoria efetiva tenha a forma da Fig. 2.1(b). Rotações espaciais são equivalentes à transformação axial Λ_A , que rotaciona σ em $\vec{\pi}$. Como o estado fundamental está a uma distância finita do centro, o campo σ deve ter valor esperado finito. Neste cenário, excitações piônicas correspondem a pequenas rotações, com custo energético nulo, enquanto excitações na direção sigma custam energia e devem, então,

ser massivas. Conforme o mecanismo de Higgs, a quebra espontânea de simetria gerou uma massa para o bóson escalar.

Se os dois gráficos da Fig. 2.1 não fossem invariantes rotacionais, eles teriam uma quebra explícita de simetria. Se, por exemplo, os gráficos forem inclinados em uma dada direção, o estado fundamental estará distante do centro e portanto a simetria não mais existirá, como na Fig. 2.2.

Caso o parâmetro de quebra seja pequeno, o deslocamento do centro na Fig. 2.2(a) será pequeno comparado ao deslocamento devido à quebra espontânea. Além disso, excitações rotacionais (píons) exigirão bem menos energia do que excitações radiais (mésons σ). A dinâmica será então dominada por efeitos da quebra espontânea.

2.3 Modelo Sigma-Linear

Podemos agora construir um modelo com invariância quiral, envolvendo mésons e férmions. Vamos agora juntar os ingredientes da Lagrangeana, de forma que esta seja um escalar de Lorentz e invariante sob Λ_V e Λ_A . No tratamento abaixo, os férmions envolvidos serão quarks e nossa notação para estes será q , a menos que explicitamente dito o contrário.

É fácil ver que os quadrados dos campos σ e $\vec{\pi}$ são invariantes sob transformações vetoriais, já que Λ_V é uma rotação de isospin:

$$\Lambda_V : \pi^2 \rightarrow \pi^2 \quad ; \quad \sigma^2 \rightarrow \sigma^2 \quad , \quad (2.18)$$

enquanto sob Λ_A ,

$$\Lambda_A : \pi^2 \rightarrow \pi^2 - 2\sigma\vec{\theta} \cdot \vec{\pi} \quad ; \quad \sigma^2 \rightarrow \sigma^2 + 2\sigma\vec{\theta} \cdot \vec{\pi} \quad , \quad (2.19)$$

Fica claro que a combinação $(\pi^2 + \sigma^2)$ é invariante sob ambas transformações. Esta combinação também é um escalar de Lorentz, logo podemos criar uma teoria invariante quiral a partir desta combinação.

O primeiro ingrediente da Lagrangeana é o termo cinético dos mésons e férmions. Estes termos devem conter derivadas até segunda ordem, assim

$$\text{mésons:} \quad \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi} \cdot \partial^\mu\vec{\pi} \quad ,$$

$$\text{férmions:} \quad \bar{q}(i\cancel{D})q \quad .$$

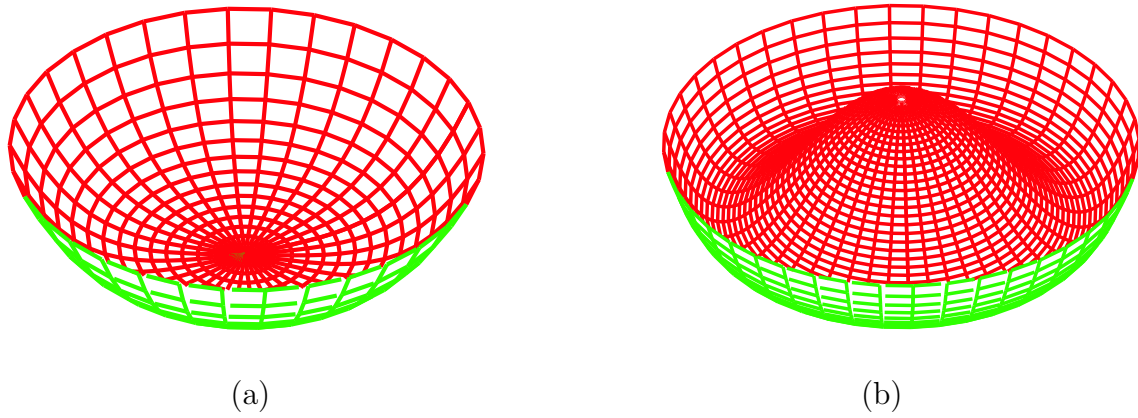


Figura 2.1: Potencial efetivo (a) sem quebra espontânea e (b) com quebra espontânea de simetria.

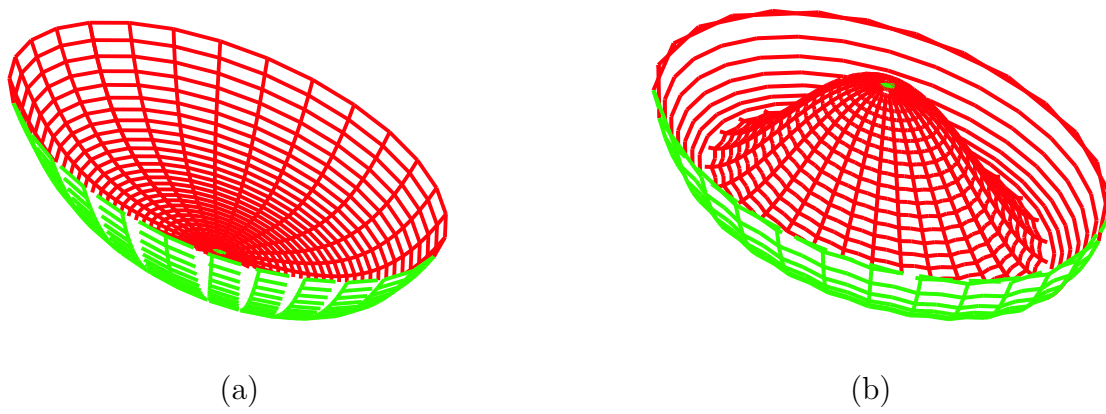


Figura 2.2: Potencial efetivo com quebra explícita de simetria.

Agora vamos inserir termos de interação entre os férmions e os campos σ e $\vec{\pi}$. Estes termos incluirão vértices nos quais σ e $\vec{\pi}$ decaem em dois quarks. A interação, invariante quiral, com tal propriedade é:

$$\text{pion: } g(i\bar{q}\gamma_5\vec{\tau}q) \cdot \vec{\pi} \quad ,$$

sigma: $g(\bar{q}q)\sigma$, onde g é a constante de acoplamento férmion-méson. Poderíamos definir duas constantes de acoplamento (g_π e g_σ). Porém, para que a Lagrangeana seja invariante quiral, devemos ter uma só constante de forma que o termo de interação tenha a estrutura de $(\pi^2 + \sigma^2)$.

Se colocarmos um termo de massa para os quarks na Lagrangeana, a invariância quiral será quebrada, porém sabemos que os quarks são partículas massivas. Para gerarmos tais massas devemos explorar o acoplamento entre quarks e o campo sigma, que tem a forma de um termo de massa. Devemos então gerar um potencial pion-sigma cujo valor esperado no vácuo para o campo σ seja finito. O potencial invariante quiral mais simples é da forma

$$V = V(\pi^2 + \sigma^2) = \frac{\lambda}{4} ((\pi^2 + \sigma^2) - f_\pi^2)^2 \quad , \quad (2.20)$$

onde f_π é a constante de decaimento do pion ($f_\pi \approx 93$ MeV [23]). Esta escolha foi feita para que o mínimo de $V(\pi^2 + \sigma^2)$ para $\pi = 0$ esteja em $\sigma = f_\pi$. Esta relação para o valor esperado de σ no vácuo é obtida a partir da relação de Golberger-Treiman, como um reflexo da quebra de simetria quiral [10, 12, 22, 26].

Como discutido acima, a teoria não é invariante sob transformação axial pois os quarks possuem massa. Desta forma, nosso modelo deve conter um termo de massa que quebre tal simetria explicitamente. Como na QCD a quebra explícita de simetria é associada à massa finita dos quarks ($\sim m\bar{q}q$), devemos seguir o mesmo caminho. Em nossa teoria efetiva, o termo de massa terá a forma

$$\delta\mathcal{L}_{SB} = h\sigma \quad . \quad (2.21)$$

O potencial da Eq.(2.20) pode ser reescrito como

$$V(\sigma, \pi) = \frac{\lambda}{4} ((\pi^2 + \sigma^2) - v_0^2)^2 - h\sigma \quad , \quad (2.22)$$

onde o parâmetro v_0 vai a f_π no limite $h \rightarrow 0$. Este termo quebra explicitamente a simetria inclinando o potencial ligeiramente na direção σ . Em primeira ordem,

$$v_0 = f_\pi - \frac{h}{2\lambda f_\pi^2} \quad . \quad (2.23)$$

As massas de σ e π também são modificadas:

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{\sigma_0} = 2\lambda f_\pi + \frac{h}{f_\pi} \quad ; \quad m_\pi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right|_{\sigma_0} = \frac{h}{f_\pi} \neq 0 \quad , \quad (2.24)$$

que fixa $h = f_\pi m_\pi^2$ e $\lambda = 20$.

Podemos adicionar um termo devido a conservação de número bariônico, na forma $\mu\gamma^0$, onde μ é o potencial químico.

Como esperado, h é proporcional à massa do pion. A Lagrangeana final é da forma

$$\mathcal{L} = \bar{q} [i\gamma^\mu \partial_\mu + \mu\gamma^0 + g(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) - m] q + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.25)$$

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v_0^2)^2 - h\sigma \quad , \quad (2.26)$$

onde utilizamos uma notação compacta para o campo quiral.

2.4 Transição Quiral

A termodinâmica do modelo é dada pela função de partição

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int_\Omega d^3x \mathcal{L}_E \right] \quad , \quad (2.27)$$

onde Ω é o volume do sistema e $\tau = it$ é o tempo Euclideano.

Como a parte fermiônica da Lagrangeana é quadrática, podemos fazer as integrais, obtendo

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} \left\{ \exp \left[- \int_x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + V(\phi) \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \det \left[(p_\mu \gamma^\mu - \mu\gamma^0 - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})) / T \right] \right\} \quad , \quad (2.28)$$

onde $\int_x \equiv \int_0^\beta d\tau \int_\Omega d^3x$.

Reescrevendo o determinante, é possível obtermos um potencial efetivo para a evolução do campo quiral.

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} \left\{ \exp \left[- \int_x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + V_{ef}(\phi, \mu, T) \right) \right] \right\} \quad , \quad (2.29)$$

$$V_{ef}(\phi) = V(\phi) + \frac{T}{\Omega} \ln \det \left[\frac{G_E^{-1} + g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) - m}{T} \right] \quad , \quad (2.30)$$

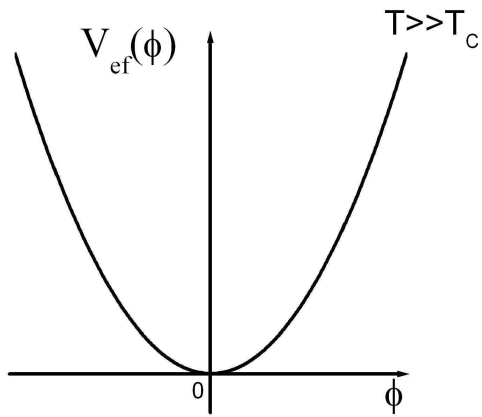
onde $G_E^{-1} = \gamma_\mu \partial_\mu - \mu \gamma^0$ é o inverso do propagador fermiônico Euclideano.

Este procedimento equivale, fisicamente, a tratar os quarks como um banho térmico. Tal banho dá origem a um potencial efetivo no qual o parâmetro de ordem da transição quiral (o campo sigma) evolui. A evolução do universo primordial e colisões de íons pesados ultra-relativísticos (RHIC, LHC, SPS) são exemplos de sistemas físicos descritos por potenciais desta natureza.

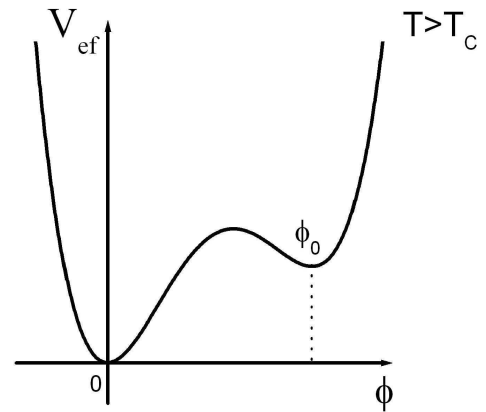
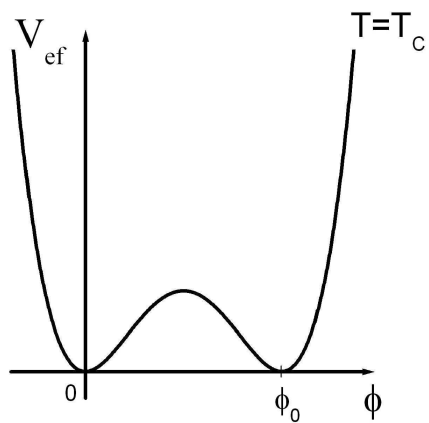
A partir de V_{ef} podemos estudar os processos de conversão de fases. A Fig. 2.3 mostra a evolução do potencial efetivo com a temperatura para um sistema físico arbitrário. Inicialmente, o potencial possui apenas uma fase simétrica. Conforme abaixamos a temperatura, um novo mínimo local, correspondente à fase com simetria quebrada, aparece para $\phi \neq 0$ e a $T = T_c$ os dois mínimos são degenerados. Para $T < T_c$ o mínimo em $\phi \neq 0$ passa a ser o vácuo da teoria e o sistema começa a fazer a transição para esta configuração. Esta transição ocorre devido a flutuações térmicas ou quânticas que fornecem, a uma região do sistema, energia suficiente para que o sistema no estado de maior energia possa romper a barreira energética. Este mecanismo de conversão de fases é chamado nucleação, pois em meio ao sistema que se encontra inicialmente no mínimo metaestável, surgem regiões preenchidas pela configuração de vácuo que podem crescer, como discutiremos no próximo capítulo.

Se continuarmos abaixando a temperatura, o mínimo em $\phi = 0$ e o máximo local que liga os dois mínimos irão se aproximando. Estes dois pontos tornam-se um ponto de inflexão na chamada temperatura spinodal T_{sp} , Fig. 2.4, e somente o estado com simetria quebrada permanece. Para $T < T_{sp}$ a transição de fase se dará pela chamada decomposição spinodal. Tal mecanismo é caracterizado por pequenas flutuações de grande comprimento de onda. O campo que ainda se encontra no estado metaestável irá decair caso ocorram flutuações de qualquer intensidade, em um processo explosivo [17, 19, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]

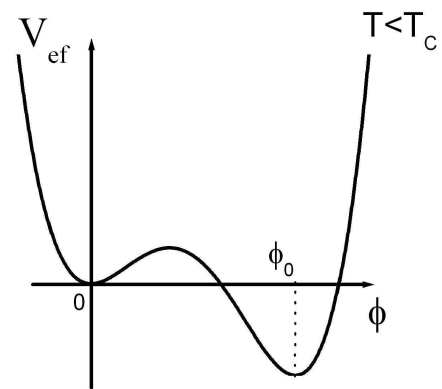
No próximo capítulo descreveremos a teoria da nucleação, tanto a $T = 0$ quanto a temperatura finita. Para a obtenção analítica da equação de movimento, faremos uso da aproximação de parede-fina (que será discutida no próximo capítulo) e analizaremos a natureza das regiões de vácuo formadas durante a transição.



(a) Potencial simétrico

(b) Novo mínimo em $\phi \neq 0$ 

(c) Mínimos degenerados



(d) Início da nucleação

Figura 2.3: Evolução do potencial efetivo com a temperatura.

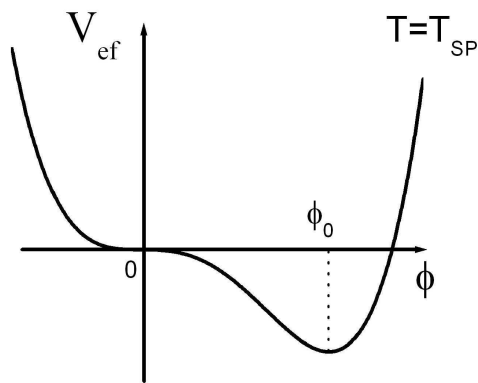


Figura 2.4: Potencial efetivo em $T = T_{sp}$. Transição dominada por flutuações de longo comprimento de onda

Capítulo 3

NUCLEAÇÃO

3.1 Introdução

A teoria clássica da nucleação de gases e líquidos foi muito estudada no início do século passado. Em 1935, Becker e Döring calcularam pela primeira vez a taxa de nucleação de um vapor super-saturado [34]. Mais tarde, Langer, em uma série de trabalhos sobre a dinâmica de transições de fase de primeira ordem, generalizou o cálculo de Becker e Döring utilizando uma corrente de probabilidade estacionária para descrever o processo de conversão de fase [27, 35, 36]. A teoria de nucleação no formalismo da teoria quântica de campos relativística foi desenvolvida por Callan e Coleman [37, 38] para temperatura zero, em 1977, e a extensão para temperatura finita foi feita por Affleck [39] e Linde [40] (veja também [41]).

A teoria da nucleação tem por objetivo o cálculo da probabilidade, como função da temperatura, de uma gota ou bolha de uma dada fase aparecer em um sistema inicialmente em outra fase. Esta teoria pode ser aplicada a transições de primeira ordem nas quais as escalas de tempo associadas a flutuações térmicas críticas sejam menores do que as escalas temporais para o super-resfriamento do sistema. Caso contrário, a dinâmica é dada pela decomposição spinodal.

A teoria de campos clássica permite que um sistema tenha dois estados de equilíbrio com diferentes níveis de energia. Na teoria quântica, o estado de maior energia (falso vácuo na terminologia de Coleman [38]) torna-se metaestável e o sistema adquire uma probabilidade

de tunelar para o estado de menor energia.

Existem dois tipos de nucleação. A mais comum é a nucleação inhomogênea que acontece quando a transição de fase se inicia devido a um distúrbio externo ao sistema. Quando esse distúrbio acontece espontaneamente através de flutuações quânticas ou térmicas, chamamos o fenômeno de nucleação homogênea. Como este último depende de características intrínsecas do sistema, seu estudo é mais interessante e seu tratamento teórico mais simples.

Em seu trabalho pioneiro [36], Langer generaliza os cálculos de Becker e Döring utilizando uma técnica estacionária para calcular a taxa de nucleação. Técnicas estacionárias são uma aproximação utilizada para se tratar problemas fora de equilíbrio. Langer imagina que o estado metaestável é reabastecido à medida em que ele decai. Desta forma, evita-se o estudo do problema completo, com dependência temporal explícita.

Como mostrado em [42], o sistema fará a transição passando pelo menor ponto de sela (no espaço de fase) da energia livre que liga o estado inicial ao final. Em geral, este ponto de sela irá descrever uma configuração igual ao estado metaestável exceto pela presença de uma flutuação.

Nas próximas seções, introduziremos o formalismo usado no cálculo da taxa de nucleação. Primeiramente discutiremos o formalismo a $T = 0$, já no contexto de uma teoria de campos, para depois passarmos ao caso a temperatura finita. Na última seção apresentaremos a aproximação de parede fina, utilizada para obtenção de expressões analíticas para a taxa de nucleação, e discutir a evolução das soluções da equação de movimento.

3.2 Campo Escalar a $T = 0$

Consideremos a Lagrangeana para um campo escalar em quatro dimensões espaço-temporais

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_{ef}(\phi) , \quad (3.1)$$

onde $V_{ef}(\phi)$ não contém interações derivativas e possui dois mínimos, $\phi = 0$ e $\phi = \phi_0$, onde apenas ϕ_0 é um mínimo absoluto (vide Fig. 3.1).

A configuração de campo $\phi(\vec{x}, t) = 0$ é um estado clássico estável a $T = 0$, porém efeitos quânticos como penetração da barreira o tornam um estado metaestável. O decaimento deste estado por efeitos quânticos é similar à nucleação via flutuações térmicas. Nesta,

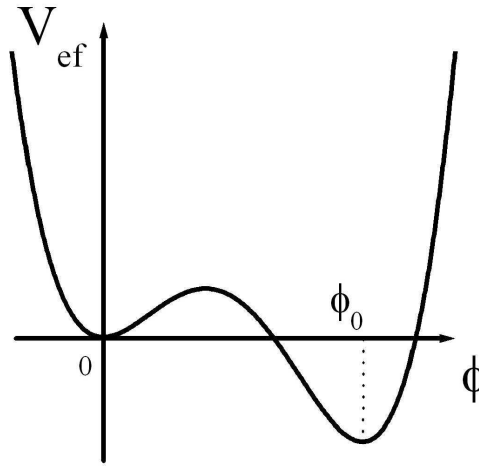


Figura 3.1: Potencial efetivo com dois mínimos.

podemos pensar em $V_{ef}(\phi)$ como sendo, por exemplo, a energia livre de um fluido em função da densidade. $\phi = 0$ corresponderia, então, à fase de um fluido super-aquecido e o vácuo verdadeiro à fase de vapor. Flutuações termodinâmicas fazem surgir bolhas de vapor em meio ao fluido. A bolha tem um ganho de energia volumétrico, pois a configuração de campo em seu interior é energeticamente mais favorável, mas há também perda da energia superficial, necessária para se criar a parede de separação entre as duas fases. Se a bolha for muito pequena, a perda de energia será maior do que o ganho e a bolha irá colapsar. Caso se forme uma bolha cujo raio torne favorável seu crescimento, esta irá expandir-se até converter todo o sistema para a fase estável. É importante notar que a energia potencial da bolha é proporcional a $-r^3$, onde r é o raio da bolha, e que a energia de superfície será proporcional a $+r^2$. O raio crítico da bolha para que esta cresça será determinado a partir destas constantes de proporcionalidade que dependem dos detalhes da teoria em questão.

Em uma abordagem de teoria quântica de campos a $T = 0$, a descrição do processo é análoga. A única diferença é que as flutuações, responsáveis pela criação de bolhas, serão quânticas e não térmicas. Devemos, então, calcular a probabilidade de decaimento do falso vácuo por unidade de tempo por unidade de volume, Γ/V .

Se pensarmos na Lagrangeana (3.1) como descrevendo uma partícula sob a ação de um

potencial $V_{ef}(\phi)$, onde ϕ denotaria a posição da partícula, devemos procurar soluções da equação de movimento na qual a partícula, inicialmente na posição $\phi = 0$, penetre a barreira de potencial e escape no ponto ϕ_0 com energia cinética nula. A partícula passa, então, a propagar-se classicamente. Da aproximação WKB, sabemos que a probabilidade associada a este processo é dada por [43]

$$\Gamma/V = Ae^{-\frac{B}{\hbar}}[1 + O(\hbar)] , \quad (3.2)$$

onde B é a ação Euclideana. Os estados iniciais e finais da partícula estão presentes nesta equação nas condições de contorno do cálculo da ação. Desta forma, B faz um papel de peso estatístico: o caminho clássico dará a maior contribuição e grandes correções quânticas não desempenharão papéis importantes na taxa de nucleação.

A equação de movimento Euclideana (tempo imaginário) oriunda de (3.1) é

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \right) \phi = V'_{ef}(\phi) , \quad (3.3)$$

onde a linha denota diferenciação com respeito a ϕ e $\tau = it$ é o tempo imaginário.

O coeficiente B é dado por

$$B = S_4 = \int d\tau d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + V_{ef} \right] . \quad (3.4)$$

Tomando a energia desta solução como nula, temos

$$B = 2 \int_{\phi=0}^{\phi_0} d\phi (2V_{ef})^{\frac{1}{2}} . \quad (3.5)$$

O estado clássico de equilíbrio $\phi = 0$ só pode ser alcançado assintoticamente, com τ indo ao infinito. Usando a invariância translacional na direção temporal, podemos escolher o tempo imaginário no qual o campo ϕ se transforma em ϕ_0 como sendo $\tau = 0$. Neste momento,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}(0, \vec{x}) = 0 . \quad (3.6)$$

Esta equação nos diz que o movimento do campo para τ positivo é simplesmente a inversão temporal de seu movimento para τ negativo. Logo, o campo assume sua configuração estável e retorna para $\phi = 0$ em $\tau \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\tau, \vec{x}) = 0 . \quad (3.7)$$

Além disso, para que B seja finito é necessário que

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\tau, \vec{x}) = 0 . \quad (3.8)$$

Esta solução da equação de Euler-Lagrange é chamada de *bounce* [38], pois o sistema, inicialmente em $\phi = 0$, evolui no tempo imaginário para a configuração de menor energia ϕ_0 em $\tau = 0$ e retorna a $\phi = 0$ para $\tau \rightarrow \infty$.

Caso existam várias soluções ϕ para este problema, a solução desejada será aquela que minimiza a ação Euclideana. Devido a simetrias da teoria, geralmente existem diferentes soluções com a mesma ação. Deve-se, então, somar as contribuições de todas as soluções a Γ . Claramente, este processo só irá alterar o préfator A .

Translações espaciais das soluções de *bounce* também serão soluções, com a mesma ação Euclideana. Como mencionado no parágrafo anterior, para obtermos a probabilidade de transição devemos integrar sobre o grupo de translações espaciais. Este é o argumento formal para que o volume espacial apareça na Eq.(3.2) [26].

O grupo de transformações associado às translações espaciais no espaço Euclidiano quadridimensional é o grupo $O(4)$. Como não há distinção entre coordenadas espaciais e a coordenada temporal neste espaço, a simetria apropriada é a $O(4)$ e não $O(3, 1)$.

Tomando ϕ invariante sob rotações deste grupo, podemos definir uma coordenada ρ como

$$\rho = (\tau^2 + |\vec{x}|^2)^{1/2} , \quad (3.9)$$

uma vez que ϕ será uma função apenas de ρ . Dessa forma, a Eq.(3.3) se transforma em

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = V'_{ef}(\phi) . \quad (3.10)$$

A parede da bolha é definida pela região em que $d\phi/d\rho$ é grande. As condições de contorno, Eq.(3.7) e Eq.(3.8), são escritas como uma única condição

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = 0 . \quad (3.11)$$

Para que ϕ não seja singular na origem, devemos ter ainda

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_0 = 0 . \quad (3.12)$$

Finalmente, obtemos [38]

$$B = 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V_{ef} \right]. \quad (3.13)$$

A Eq. (3.13) é equivalente à ação de uma partícula se movendo em um potencial $(-V_{ef})$, sujeita a um amortecimento viscoso, onde a posição é dada por ϕ e o tempo por ρ .

A teoria do pré-fator A foi desenvolvida em [37]. Neste trabalho, é mostrado que

$$A = \frac{B^2}{4\pi^2 \hbar^2} \left| \frac{det' [-\partial^2 + V_{ef}''(\phi)]}{det [-\partial^2 + V_{ef}''(0)]} \right|^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.14)$$

onde det' denota que o determinante deve ser calculado omitindo-se os autovalores nulos do operador de flutuações $[-\partial^2 + V_{ef}''(\phi)]$. Em quatro dimensões, existem quatro autofunções ϕ_μ com autovalor nulo que correspondem à possibilidade de translação da solução $\phi(x)$ nas quatro direções do espaço Euclidiano. A contribuição de cada uma destas funções a Γ/V será um fator multiplicativo $(B/2\pi\hbar)^{1/2}$.

Finalmente, podemos escrever [26, 37, 38]

$$\Gamma/V = \frac{B^2}{4\pi^2 \hbar^2} e^{-B/\hbar} \left| \frac{det' [-\partial^2 + V_{ef}''(\phi)]}{det [-\partial^2 + V_{ef}''(0)]} \right|^{-\frac{1}{2}} \times [1 + O(\hbar)]. \quad (3.15)$$

Os determinantes que aparecem em (3.14) tornam a expressão para Γ livre de divergências no ultravioleta (para \mathcal{L} renormalizada). Para conhecer completamente a função Γ , é necessário somar todas as soluções da equação de Euler-Lagrange. Porém, muitas vezes a solução que minimiza a ação é suficiente. Passemos agora à extensão destes resultados ao caso $T \neq 0$.

3.3 Campo Escalar a Temperatura Finita

Para fazer a passagem formal dos resultados a $T = 0$ para o caso a temperatura finita, é necessário lembrar que a estatística quântica a temperatura não nula é formalmente equivalente à teoria quântica de campos (usada até agora) no espaço-tempo Euclidiano, periódica (para bósons) ou anti-periódica (para férmions), com período $\beta = 1/T$, na direção do tempo imaginário¹. A discussão abaixo é baseada principalmente no trabalho de A. D. Linde [40].

¹Para uma dedução em detalhes, ver Apêndice A

O cálculo dos coeficientes A e B é feito de forma análoga ao caso de temperatura nula. Deve-se notar que, agora, a solução da equação de movimento (3.3) não mais possui simetria $O(4)$, mas sim simetria $O(3)$ com respeito às coordenadas espaciais, e é periódica na direção temporal (tempo imaginário) com período T^{-1} .

A solução da Eq. (3.3) para $T = 0$ que corresponde ao mínimo da ação S_4 é uma bolha com simetria $O(4)$ e com um certo raio crítico $r(T = 0) \equiv r(0)$. A $T \ll r^{-1}(0)$ a solução será uma série de bolhas espaçadas na direção temporal por uma distância T^{-1} . Para $T \sim r^{-1}(0)$ estas bolhas começam a se sobrepor. Finalmente, quando temos $T > r^{-1}(0)$, as bolhas passam a se formar muito perto umas das outras (na direção temporal) em comparação ao raio crítico. Desta forma, para $T \gg r^{-1}(0)$, a solução será um cilindro cuja seção reta espacial é uma bolha de raio $r(T)$ com simetria $O(3)$, sendo $r(T)$ o raio crítico, a temperatura T , que a bolha deve ter para que essa flutuação seja energeticamente favorável (ver Fig. 3.2. Neste caso, a integração sobre τ no cálculo da ação é reduzido a uma simples multiplicação por T^{-1} , $S_4 = T^{-1}S_3$, onde S_3 é a ação tridimensional correspondente à bolha com simetria $O(3)$):

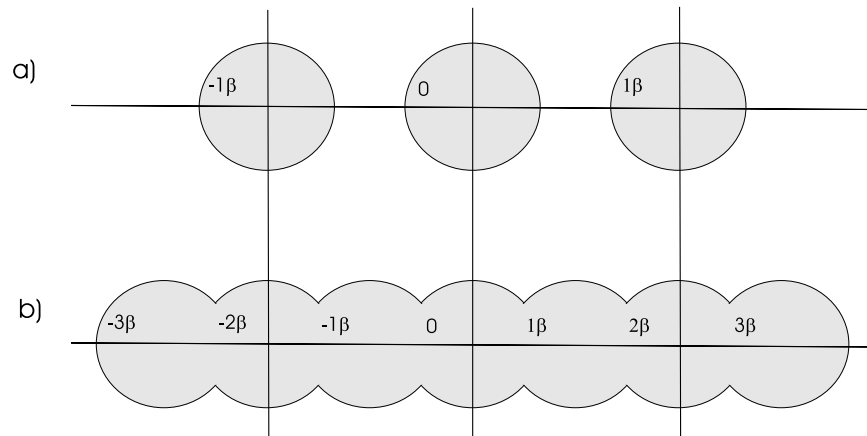


Figura 3.2: Solução do tipo bolha para (a) $T \ll r^{-1}(0)$ e (b) $T > r^{-1}(0)$.

$$S_3(\phi) = \int d^3x \mathcal{V}(\phi, T) = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V_{ef}(\phi, T) \right]. \quad (3.16)$$

Precisamos encontrar a solução da equação de Euler-Lagrange para o campo ϕ a tempe-

ratura finita

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = V'_{ef}(\phi, T) , \quad (3.17)$$

com condições de contorno $\phi \rightarrow 0$ em $r \rightarrow \infty$ e $d\phi/dr = 0$ em $r = 0$.

Com estes resultados, podemos obter uma expressão para o limite de altas temperaturas ($T \gg r^{-1}(0)$) de maneira análoga ao caso $T = 0$ [40]:

$$\Gamma(T) = T \left(\frac{S_3(\phi, T)}{2\pi T} \right)^{3/2} \left(\frac{\det'[-\partial^2 + V''_{ef}(\phi, T)]}{\det'[-\partial^2 + V''_{ef}(0, T)]} \right)^{-1/2} e^{-S_3(\phi, T)/T} . \quad (3.18)$$

Na dedução da Eq.(3.18), métodos de estatística quântica em equilíbrio foram utilizados. Em particular, duas suposições foram feitas: **(i)** o livre caminho médio das partículas no gás (quente e denso) a temperatura T é muito menor do que o raio da bolha; **(ii)** há tempo suficiente para que se atinja o equilíbrio térmico dentro e fora da bolha. Estas suposições não são satisfeitas para muitos sistemas, como por exemplo na análise da formação de bolhas pequenas (raio da ordem do livre caminho médio)[44].

O critério $T \gg r^{-1}(0)$ para a utilização da Eq. (3.18) pode ser generalizado. Soluções com simetria espacial $O(3)$ existem para quaisquer temperaturas, a dificuldade está em acharmos tais soluções em meio a todas as possíveis soluções de (3.3) que correspondem a mínimos de S_4 . Para $T \lesssim r^{-1}(0)$ devemos comparar a ação S_3/T com a ação S_4 : se $S_3/T < S_4$, devemos usar a Eq. (3.18); caso $S_3/T > S_4$ e o raio seja menor que $(2T)^{-1}$, devemos utilizar as Eq. (3.4) e (3.14).

A ação Euclideana tridimensional $S_3(\phi, T)$ para um campo $\phi(r)$ independente do tempo é igual à integral tridimensional de um potencial efetivo $\mathcal{V}(\phi(r), T)$: $S_3 = \int d^3x \mathcal{V}$. Este potencial efetivo contém a energia de superfície da bolha, proporcional a $(\nabla\phi)^2$, e a energia de volume $V_{ef}(\phi, T)$, onde escolhemos $V_{ef}(0, T) = 0$. O campo $\phi(r)$, independente do tempo, é determinado pela condição $\mathcal{V}(\phi(r), T) = F(T)$, onde $F(T)$ é a energia livre a temperatura T na presença de um campo $\phi(r)$. Desta forma, o fator $e^{-S_3/T}$ é simplesmente $e^{-\Delta F/T}$, onde ΔF é a mudança na energia livre devido à formação da bolha.

3.4 Aproximação de parede fina

Consideremos agora um caso limite no qual a teoria de nucleação fica bastante simplificada. Quando o super-resfriamento do sistema é pequeno, a diferença entre o valor de $V_{ef}(\phi, T)$ em cada um dos seus mínimos, $\phi = 0$ e $\phi = \phi_0(T)$, é muito menor do que a altura da barreira. Como $V_{ef}(\phi, T)$ é normalizado para $V_{ef}(0, T) = 0$, então devemos ter $|V_{ef}(\phi_0(T), T)| \equiv \epsilon$ muito menor do que a altura da barreira. Vide Fig. 3.3.

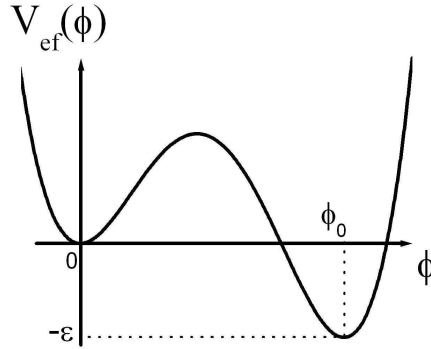


Figura 3.3: Aproximação de parede fina: altura da barreira muito maior que $|V_{ef}(\phi_0(T), T)|$. A figura está fora de escala para facilitar a visualização.

A energia de superfície necessária para a criação de uma bolha ($\propto r^2$) não será alterada pelo valor de ϵ , mas o ganho de energia será claramente afetado ($\propto \epsilon r^3$). Conforme ϵ decresce, o raio crítico para a formação e expansão de uma bolha fica maior e o processo de nucleação fica mais raro.

Se tomarmos o raio da bolha muito maior do que a espessura da parede, podemos ignorar o segundo termo das equações (3.10) e (3.17) quando comparado ao primeiro e assim:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = V'_{ef}(\phi, T) . \quad (3.19)$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$, a forma da curva $\phi(r)$ está na Fig. 3.4. Usando este resultado, podemos calcular as ações S_3 e S_4 analiticamente. Para o caso com simetria $O(4)$,

$$S_4 = -\frac{1}{2}\epsilon\pi^2 r^4 + 2\pi^2 r^3 S_1 , \quad (3.20)$$

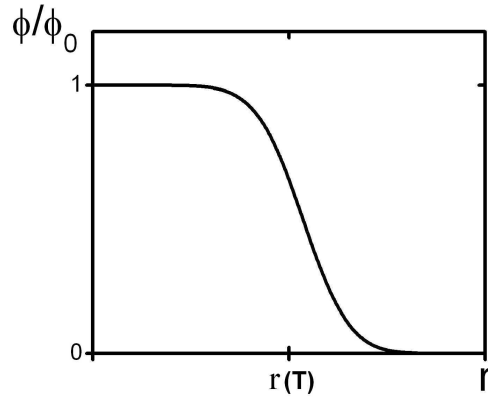


Figura 3.4: Perfil da solução $\phi(r)$ no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

onde S_1 é a tensão superficial da parede da bolha e é igual à ação em uma dimensão no limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\sigma \equiv S_1 = \int_0^\infty dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V_{ef}(\phi) \right] = \int_0^{\phi_0} d\phi \sqrt{2V_{ef}(\phi)} . \quad (3.21)$$

Minimizando S_4 com relação a r , encontramos o raio da bolha $r(0)$,

$$r(0) = \frac{3\sigma}{\epsilon} , \quad (3.22)$$

e então

$$S_4 = \frac{27\pi^2\sigma^4}{2\epsilon^2} . \quad (3.23)$$

Para o caso $T \gg r^{-1}(0)$, o cálculo da ação é feito de maneira análoga. Temos, então:

$$S_3 = -\frac{4}{3}\pi r^3 \epsilon + 4\pi r^2 \sigma(T) , \quad (3.24)$$

$$r(T) = \frac{2\sigma(T)}{\epsilon} , \quad (3.25)$$

$$S_3 = \frac{16\pi\sigma^3(T)}{3\epsilon^2} \quad (3.26)$$

e, finalmente,

$$\Gamma(T) \sim \exp \left[-\frac{16\pi\sigma^3(T)}{3\epsilon^2 T} \right] . \quad (3.27)$$

Consideremos, agora, o caso em que

$$V_{ef}(\phi, T) = \frac{1}{2}M^2(T)\phi^2 - \frac{1}{3}\delta(T)\phi^3 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 . \quad (3.28)$$

Neste caso, podemos obter expressões analíticas exatas para σ , S_3 , S_4 e $r(T)$. No limite $\epsilon \rightarrow 0$, ou seja, $V_{ef}(0, T) \rightarrow V_{ef}(\phi_0(T), T)$, a Eq.(3.28) reduz-se a

$$V_{ef}(\phi, T) = \frac{1}{4}\lambda\phi^2(\phi_0 - \phi)^2 , \quad (3.29)$$

onde $\phi_0 = \frac{2\delta}{3\lambda}$ e $2\delta^2 = gM^2\lambda$.

Com estas relações, obtemos

$$\sigma = \frac{\lambda^{1/2}\phi_0^3}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}\delta^3}{3^4\lambda^{5/2}} . \quad (3.30)$$

Para $T = 0$,

$$S_4 = \frac{\pi^2 2^5 \delta^{12}}{3^{13} \lambda^{10} \epsilon^2} , \quad (3.31)$$

$$r(0) = \frac{2^{3/2} \delta^3}{3^3 \lambda^{5/2} \epsilon} . \quad (3.32)$$

Para $T \gg r^{-1}(0)$,

$$S_3 = \frac{2^{17/2} \pi \delta^9}{3^{13} \lambda^{15/2} \epsilon^2} , \quad (3.33)$$

$$r(T) = \frac{2^{5/2} \delta^3}{3^4 \lambda^{5/2} \epsilon} . \quad (3.34)$$

A aproximação de parede-fina, cuja premissa inicial era $\epsilon \rightarrow 0$, só pode ser aplicada se a probabilidade de um transição como esta for fortemente suprimida ($e^{-S_3/T}$). Apenas quando a taxa de transição é muito pequena em comparação ao super-resfriamento do sistema, essas condições são válidas, o que acontece em poucos casos.

Como vimos, a determinação da taxa de nucleação depende de conhecermos a tensão superficial $\sigma(T)$. O cálculo desta quantidade é, porém, complexo para a maioria dos sistemas físicos, pois requer a solução da equação de Euler-Lagrange.

No capítulo anterior, mostramos como obter uma teoria efetiva para o campo quiral, integrando sobre os graus de liberdade fermiônicos no modelo sigma-linear. Definimos então o potencial efetivo, que carrega os efeitos do banho térmico, sob o qual o campo evolui.

Para progredirmos no estudo da nucleação, devemos agora encontrar as soluções da equação de movimento. No próximo capítulo, mostraremos que a solução analítica da equação de Euler-Lagrange proveniente de (2.29) é desconhecida devido à presença do determinante em V_{ef} . Aproximações de campo homogêneo são geralmente feitas para possibilitar os cálculos, porém mostraremos um procedimento que permite levar em conta inhomogeneidades.

Capítulo 4

EFEITOS DE INOMOGENEIDADES A TEMPERATURA FINITA

4.1 Introdução

Vamos, agora, voltar ao modelo efetivo desenvolvido no primeiro capítulo. Vimos na seção 2.4 que, ao incorporarmos os efeitos dos quarks a uma teoria somente com campos bosônicos, podemos definir um novo potencial, V_{ef} , para o campo quirial. Relembrando, a Lagrangeana original é:

$$\mathcal{L} = \bar{q} \left[i\rlap{\not{\partial}} + \mu\gamma^0 - \hat{M}(\phi) \right] q + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad ,$$
$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v_0^2)^2 - h\sigma \quad , \quad \rlap{\not{\partial}} \equiv \gamma_\mu \partial^\mu \quad ,$$

onde $\hat{M}(\phi) = m + g(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5)$ é a massa efetiva dos quarks e carrega toda a informação sobre a interação com o campo ϕ . Aqui, por simplicidade, consideraremos apenas a direção escalar para o campo quirial, por ser a mais relavante no processo de conversão de fases [17], desta forma, $\phi = \sigma$ e $\hat{M} = m + g\phi$. O acoplamento dos pions com o campo fermiônico pode ser importante para os efeitos das inomogeneidades, porém não trataremos destes efeitos

aqui. Podemos, então, obter a teoria efetiva

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_{ef}(\phi) \quad , \quad (4.1)$$

$$V_{ef}(\phi) = V(\phi) + \frac{T}{\mathcal{V}} \ln \det \left[\frac{G_E^{-1} + \hat{M}(\phi)}{T} \right] \quad . \quad (4.2)$$

A equação de Euler-Lagrange para o campo quiral, obtida a partir de \mathcal{L} , é:

$$\square \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = -g \langle \bar{q}q \rangle \quad . \quad (4.3)$$

Podemos reescrever esta equação como

$$\square \phi + \frac{\partial V_{ef}(\phi, T, \mu)}{\partial \phi} = 0 \quad , \quad (4.4)$$

onde

$$V_{ef}(\phi, T, \mu) = V(\phi) + V_q(\phi, T, \mu) \quad , \quad (4.5)$$

$$g \langle \bar{q}q \rangle = \frac{\partial V_q(\phi, T, \mu)}{\partial \phi} \quad , \quad (4.6)$$

onde o potencial V_q carrega toda a informação sobre o banho de quarks.

O propósito deste trabalho não é estudar a evolução temporal fora de equilíbrio do sistema, por isso trataremos apenas do caso estático, *i.e.*

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial V_{ef}(\phi, T, \mu)}{\partial \phi} = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Comparando as equações para o potencial efetivo, (4.2) e (4.6), temos

$$g \langle \bar{q}q \rangle \equiv g\rho = \frac{\delta}{\delta \phi} \left[\frac{T}{\mathcal{V}} \ln \det \left(\frac{G_E^{-1} + \hat{M}(\phi)}{T} \right) \right] \quad . \quad (4.8)$$

A presença do termo de fonte, correspondendo à densidade fermiônica $\rho \equiv \langle \bar{q}q \rangle$, na Eq. (4.3), torna sua solução difícil. Isto ocorre porque seria necessário conhecer o determinante fermiônico na presença de um campo de fundo arbitrário $\phi(\vec{x})$. Para sistemas unidimensionais (**1+1**), podemos recorrer a técnicas como a do espalhamento inverso [45], o que não é possível em dimensões mais altas. O tratamento amplamente adotado na literatura para este problema consiste em tomar o campo quiral como constante na determinação de ρ [17, 18, 19, 20, 46, 47, 48, 49]. Porém, para um sistema que está em um processo de

conversão de fases, inomogeneidades na configuração do campo quiral devem desempenhar um papel importante.

Em [48], Paech e Dumitru mostraram que a dinâmica fora de equilíbrio do parâmetro de ordem em uma colisão de íons pesados pode gerar grandes flutuações na densidade de bárions. Além disto, a amplitude de tais inomogeneidades depende da estrutura do potencial efetivo: transições de primeira ordem sofrem efeitos maiores do que *crossovers* (vide também [19, 47, 50]). Como veremos mais adiante neste capítulo, a presença do determinante fermiônico na Eq. (4.3) modifica a estrutura do potencial que atua nos bósons, mesmo em cálculos a um-*loop*.

Nas próximas seções, mostraremos como utilizar a expansão derivativa para incorporar tais inomogeneidades ao cálculo da densidade de quarks. Este método foi proposto em 1985 por Fraser [51] para o cálculo de contribuições a um *loop* em teorias efetivas com termos em ordens mais altas na derivada do campo a temperatura nula. No mesmo ano, foi utilizado por Aitchison e Fraser [52] na determinação da contribuição a um *loop* fermiônico em teorias envolvendo vértices induzidos por anomalias, correntes de Goldstone-Wilczek e termos de Skyrme. Em anos posteriores este método encontrou aplicações em diferentes áreas, como por exemplo, na física de ondas de densidade de carga [53, 54], no efeito Hall quântico inteiro com interação de dois corpos [55], no estudo de nucleação de bolhas na presença de férmions [56] e em teorias de gauge não-Abelianas [57]. Nestes trabalhos, o cálculo da densidade fermiônica foi feito sempre a temperatura nula. Na seção 4.3 discutiremos a expansão derivativa para o cálculo do determinante fermiônico a temperatura finita e, na seção 4.4, apresentaremos as primeiras correções à equação de movimento [58, 59].

4.2 Expansão em Gradientes a $T = 0$

A temperatura nula podemos trabalhar no espaço-tempo de Minkowski. Fazendo a transição do espaço-tempo Euclideano, na Eq.(4.8) e usando a identidade $\ln \det \hat{O} = Tr \ln \hat{O}$ (onde \hat{O} é um operador qualquer), podemos escrever a densidade fermiônica em um ponto \vec{x}_0 arbitrário, como

$$g\rho(\vec{x}_0) = \frac{\delta}{\delta\phi} \left[Tr \ln \left(G^{-1} + \hat{M}(\phi) \right) \right] , \quad (4.9)$$

sendo $G^{-1} = i\gamma^\mu \partial_\mu$.

Aplicando a derivada funcional e notando que o operador Tr atua sobre todos os graus de liberdade da teoria (*i.e.* espaço de coordenada, spin, isospin, cor,...), temos

$$g\rho(x_0) = Tr \left[\frac{g}{G^{-1} + \hat{M}(\phi)} \right] \quad (4.10)$$

$$= gTr_\gamma \langle x_0 | \left[\frac{1}{G^{-1} + \hat{M}(\phi)} \right] | x_0 \rangle, \quad (4.11)$$

onde Tr_γ equivale ao traço sem considerar o espaço das coordenadas e $|x_0\rangle$ representa uma função de onda avaliada no ponto x_0 (x_0 é um número complexo e não um operador).

Inserindo a identidade $U^\dagger U = 1$, onde $U = e^{ix_0^\mu k_\mu}$ é o operador unitário de translação espaço-temporal, podemos transferir a dependência em x_0 para $\hat{M}(\hat{x})$:

$$g\rho(x_0) = gTr_\gamma \langle x_0 | U^\dagger U \left[\frac{1}{G^{-1} + \hat{M}(\phi(\hat{x}))} \right] U^\dagger U | x_0 \rangle \quad (4.12)$$

$$= gTr_\gamma \langle 0 | \left[\frac{1}{G^{-1} + \hat{M}(\phi(\hat{x} + x_0))} \right] | 0 \rangle. \quad (4.13)$$

No espaço de momento, onde o propagador fermiônico tem a forma $G^{-1} = \gamma^\mu k_\mu$, a densidade de quarks é dada por

$$g\rho(\vec{x}_0) = gTr_\gamma \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{\gamma^\mu k_\mu + \hat{M}(\hat{x} + x_0)} \right], \quad (4.14)$$

onde d é o número de dimensões espaço-temporais.

Podemos expandir $\hat{M}(\hat{x} + x_0)$ em torno de x_0 , como

$$\hat{M}(\hat{x} + x_0) \equiv \hat{M}(x_0) + \Delta \hat{M}(\hat{x}, x_0) \quad (4.15)$$

$$\Delta \hat{M}\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k}, x_0\right) = \partial_\mu \hat{M}(x_0) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_\mu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \hat{M}(x_0) \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial k_\mu \partial k_\nu} + \dots \quad (4.16)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} g\rho(x_0) &= gTr_\gamma \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu + \hat{M}(x_0) + \Delta \hat{M}(x_0, \hat{x})} \\ &= gTr_\gamma \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu + \hat{M}(x_0)} \left[1 + \Delta \hat{M}(x_0, \hat{x}) \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu + \hat{M}(x_0)} \right]^{-1}, \quad (4.17) \end{aligned}$$

lembrando que $\hat{x}_\mu = (1/i)\partial/\partial k_\mu$. Fazendo a hipótese de um campo de fundo \hat{M} que varia suavemente com x , podemos expandir o termo entre colchetes, para finalmente obter

$$g\rho(x_0) = gTr_\gamma \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu + \hat{M}(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\Delta \hat{M} \left(x_0, \frac{\partial}{i\partial k_\mu} \right) \frac{1}{\gamma^\mu k_\mu + \hat{M}(x_0)} \right]^n. \quad (4.18)$$

Este resultado foi obtido em [56] e comparado a resultados exatos, obtidos com técnicas de espalhamento inverso para $d = 2$ com sucesso [45].

Para $d = 2$ a equação de movimento, com correções até ordem g^2 , tem a forma

$$\square\phi = -\frac{\partial V}{\partial\phi} \left[\frac{(m + g\phi)^2}{(m + g\phi)^2 + \frac{g^2}{6\pi}} \right]. \quad (4.19)$$

Em quatro dimensões, foi observado que o único efeito da presença dos férmions será de renormalizar os parâmetros livres da teoria (até ordem g^2), de modo que

$$\square\phi = -\frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (4.20)$$

Contudo, para $d = 2$ e $d = 4$, soluções metaestáveis da equação de movimento surgem devido ao meio fermiônico, dependendo da ocupação relativa de estados ligados [56]. Desta forma, o comportamento qualitativo da nucleação fica bastante modificado. Em uma teoria puramente bosônica, as únicas soluções são bolhas instáveis.

4.3 Expansão em Gradientes a Temperatura Finita

Para estudar a densidade fermiônica $\rho(\vec{x})$ a temperatura finita, vamos voltar ao espaço-tempo Euclidiano. Neste,

$$g\rho(\vec{x}_0) = \frac{\delta}{\delta\phi} \left[\frac{T}{\mathcal{V}} Tr \ln \left(\frac{G_E^{-1} + \hat{M}(\phi)}{T} \right) \right] \quad (4.21)$$

$$= g \frac{T}{\mathcal{V}} Tr_\gamma \langle \vec{x}_0 | \left[\frac{1}{G_E^{-1} + \hat{M}(\phi)} \right] | \vec{x}_0 \rangle. \quad (4.22)$$

Transferindo a dependência em \vec{x}_0 para o campo de fundo, temos

$$g\rho(\vec{x}_0) = g \frac{T}{\mathcal{V}} Tr_\gamma \langle \vec{0} | \left[\frac{1}{G_E^{-1} + \hat{M}(\phi(\hat{x} + \vec{x}_0))} \right] | \vec{0} \rangle. \quad (4.23)$$

No espaço de momento, onde o propagador Euclideano dos férmions tem a forma $G_E^{-1} = \gamma^0 (i\omega_n - \mu) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k}$, ρ é dado por

$$g\rho(\vec{x}_0) = gTr_\gamma \int_K \left[\frac{1}{\gamma^0 (i\omega_n - \mu) - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}(\phi(\hat{x} + \vec{x}_0))} \right], \quad (4.24)$$

com as definições

$$K \equiv (k_0, \vec{k}) = (i\omega_n - \mu, \vec{k}) \quad e \quad (4.25)$$

$$\int_K \equiv T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (4.26)$$

As frequências de Matsubara, $\omega_n = (2n + 1)\pi T$, são variáveis discretas que aparecem no propagador devido à anti-periodicidade do campo fermiônico no tempo imaginário τ . Vide Apêndice A para detalhes.

A dificuldade, agora, reside na dependência do campo quiral em $(\vec{x}_0 + \hat{x})$. Utilizando a expansão derivativa para o campo de fundo (análoga à Eq.(4.16))

$$\hat{M}(\hat{x} + \vec{x}_0) \equiv \hat{M}(\vec{x}_0) + \Delta\hat{M}(\hat{x}, \vec{x}_0) \quad (4.27)$$

$$= \hat{M}(\vec{x}_0) + \nabla_i \hat{M}(\vec{x}_0) \hat{x}^i + \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j \hat{M}(\vec{x}_0) \hat{x}^i \hat{x}^j + \dots, \quad (4.28)$$

onde $\hat{x}^i = -i\nabla_{k_i}$, temos

$$g\rho(\vec{x}) = gTr_\gamma \int_K \left[\frac{1}{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}(\vec{x}) + \Delta\hat{M}(\vec{x}, \hat{x})} \right] \quad (4.29)$$

$$= gTr_\gamma \int_K \frac{1}{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}(\phi)} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\Delta\hat{M}(\vec{x}, \hat{x}) \left(\frac{1}{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}(\phi)} \right) \right]^n. \quad (4.30)$$

No caso em que temos $\frac{\Delta\hat{M}}{\hat{M}} \ll 1$, podemos truncar a série e, finalmente, escrever a densidade fermiônica na forma:

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}) + \rho_1(\vec{x}) + \rho_2(\vec{x}) + \dots \quad (4.31)$$

A condição $\frac{\Delta\hat{M}}{\hat{M}} \ll 1$ implica em dizer que o banho de quarks transfere pouco momento para o campo quiral e, dessa forma, $\phi(\vec{x})$ varia suavemente.

Cada termo na Eq.(4.31) contém, por sua vez, uma expansão em ∇ :

$$\rho_i = \rho_i^{(1)} + \rho_i^{(2)} + \rho_i^{(3)} + \dots , \quad (4.32)$$

onde $\rho_i^{(n)}$ representa o termo na expansão de ρ_i proporcional a ∇^n .

Podemos, então, interpretar esta série como uma expansão em derivadas de ϕ . É necessário, porém, cuidado, pois para o cálculo de $\rho(\vec{x})$ a uma dada ordem em derivadas, existirão contribuições de diferentes $\rho_i^{(n)}$.

O primeiro termo corresponde a tomar todas essas derivadas como nulas e, portanto, um campo quiral homogêneo. Na próxima seção iremos calcular este termo, assim como a correção ao termo do Laplaceano na equação de movimento.

4.4 Correções ao Potencial e ao Laplaceano

4.4.1 Campo Homogêneo: Correção ao Potencial

A aproximação de campo constante, equivalente a $\rho_0(\vec{x})$ na eq.(4.31), foi amplamente utilizada na literatura [46], como por exemplo em [18]. Neste trabalho, os autores fazem uma aproximação de campo médio, substituindo os campos σ e $\vec{\pi}$ na exponencial da ação (Eq. (2.29)) por seus valores esperados no vácuo. Desta forma, não são consideradas flutuações térmicas nem quânticas nestes campos.

Para o cálculo de cada termo na Eq. (4.31) é necessário efetuar traços. Para facilitar o cálculo destes traços, podemos escrever

$$\frac{1}{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}} = \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}}{k_0^2 - \vec{k}^2 - \hat{M}^2} , \quad (4.33)$$

definindo ainda $E_k \equiv (\vec{k}^2 + \hat{M}^2(\phi))^{1/2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \rho_0(\vec{x}) &= Tr_\gamma \int_K \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \\ &= - \int_K \frac{\nu_s \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} , \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde ν_s é o fator de degenerescência (cor + spin + isospin + ...).

Para efetuarmos a soma sobre frequências de Matsubara em (4.34) são necessários métodos típicos de teoria de campos a temperatura finita [1, 2, 46, 60]. O Apêndice A traz uma breve discussão de tais métodos.

Fazendo a mudança de variáveis $p_0 \equiv k_0 - \mu$ e substituindo o somatório em frequências de Matsubara por uma integral no plano complexo, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_0(\vec{x}) &= -\nu_s \hat{M}(\vec{x}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{T}{2\pi i} \oint_C dp_0 \frac{\frac{\beta}{2} \tanh\left(\frac{\beta p_0}{2}\right)}{(p_0 + \mu)^2 - E_k^2} \\ &= -\nu_s \hat{M}(\vec{x}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_C dp_0 \frac{1}{2} \frac{1}{(p_0 + \mu)^2 - E_k^2} + \right. \\ &\quad \left. - \oint_C dp_0 \frac{1}{(p_0 + \mu + E_k)(p_0 + \mu - E_k)} \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1} \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Descartando termos independentes da temperatura, que podem ser absorvidos por meio de redefinições dos parâmetros da Lagrangeana, e aplicando o teorema de Cauchy, obtemos

$$\rho_0(\vec{x}) = \nu_s \hat{M}(\vec{x}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\frac{1}{E_k}}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} + \frac{\frac{1}{E_k}}{e^{\beta(E_k + \mu)} + 1} \right], \quad (4.36)$$

onde notamos a separação clara das contribuições de partículas e anti-partículas.

Truncando a série para $\rho(\vec{x})$ na primeira aproximação, $\rho(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x})$, a equação de Euler-Lagrange toma a forma

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = -g\rho_0. \quad (4.37)$$

É natural que procuremos escrever (4.36) de uma forma em que $g\rho_0$ represente uma nova contribuição para o potencial. Para o caso de massa dos quarks nula e $\mu = 0$, esta contribuição é dada por [17, 18, 46]:

$$V_q(\phi) = -\nu_s T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-E_k/T}). \quad (4.38)$$

Caso considerássemos os termos independentes da temperatura na obtenção da equação (4.36), encontraríamos um termo divergente na contribuição dos quarks para o potencial efetivo. Como estamos trabalhando com um modelo renormalizável, a parte de vácuo do potencial pode ser parcialmente absorvida nos parâmetros nus da teoria (λ e v_0^2) via renormalização. Porém, uma correção logarítmica, devida à escala de renormalização, persiste

(vide [17, 18] para detalhes). A princípio a física não deveria depender desta escala, mas, ao pararmos a teoria de perturbação em determinada ordem, correções dependentes da escala de renormalização aparecem. Para evitar contribuições logarítmicas grandes, devemos escolher uma escala apropriada, podendo assim ignorar estas correções.

O potencial efetivo é, então,

$$V_{ef} = V(\phi) + V_q(\phi, T, \mu) . \quad (4.39)$$

As Figuras 4.2 e 4.3 mostram como $V_{ef}(\phi)$ varia para diversos parâmetros. Para $g = 5,5$ encontramos uma transição de primeira ordem para quaisquer valores do potencial químico. O caso $g = 5,5$ e $T_c = 123,7$ MeV possui os mínimos degenerados e $T_{sp} = 108$ MeV é a temperatura spinodal. A simetria quiral é aproximadamente restaurada para $T > T_c$, quando a configuração $\phi = 0$ passa a ser o vácuo verdadeiro. Para $T < T_{sp}$, a fase simétrica desaparece e somente a fase quebrada se mantém. No diagrama de fases, Fig.4.1, para $g = 3,3$ a linha de transição de primeira ordem termina em um ponto crítico de segunda ordem e, para valores de potencial químico menores do que este valor crítico a transição ocorre via *crossover* [18]. Note que o potencial puramente bosônico contém sempre dois mínimos.

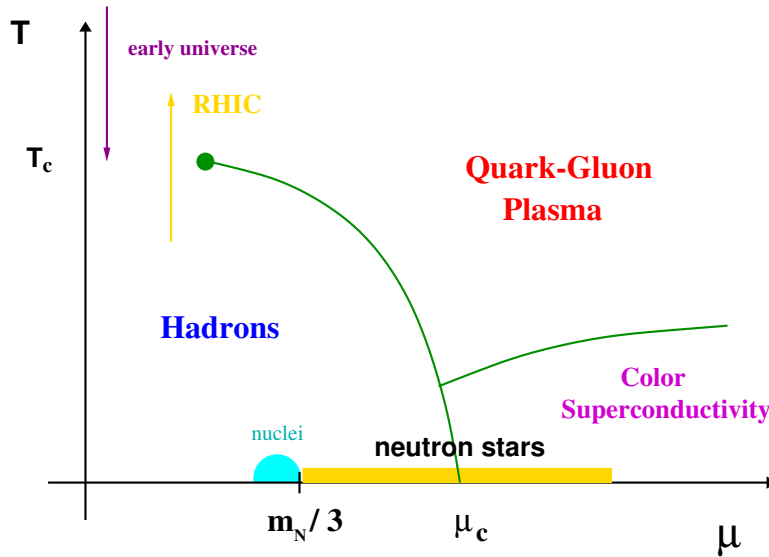


Figura 4.1: Diagrama de fases esquemático da QCD.

Como acabamos de ver, a presença de V_q no potencial efetivo para os bósons muda consideravelmente a transição. Vamos agora estudar a influência da primeira correção contendo

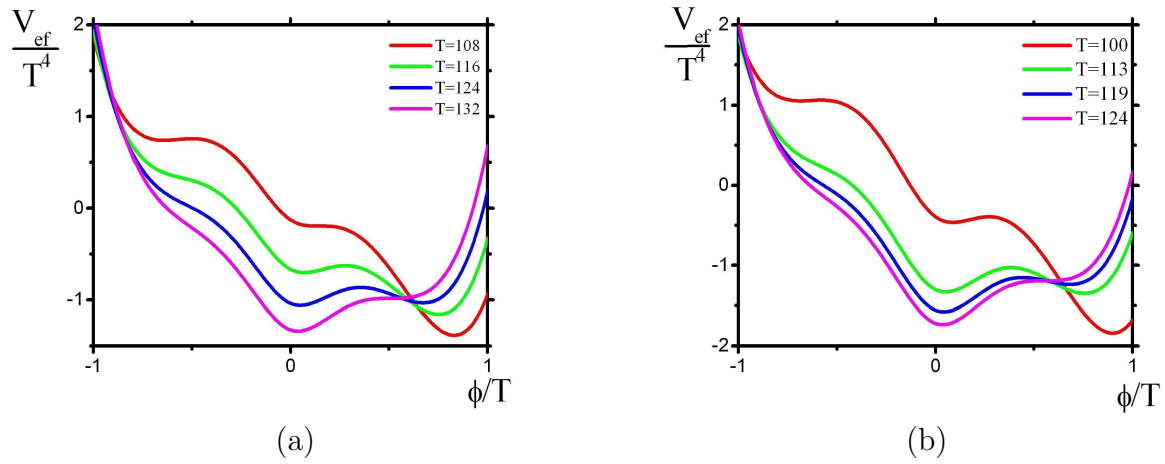


Figura 4.2: Potencial efetivo na presença de um campo de fundo constante. Para os dois gráficos, $g = 5,5$. Em (a) $\mu = 0$ MeV e $T = [108, 116, 123, 132]$ MeV e em (b) $\mu = 100$ MeV e $T = [110, 113, 119, 124]$ MeV.

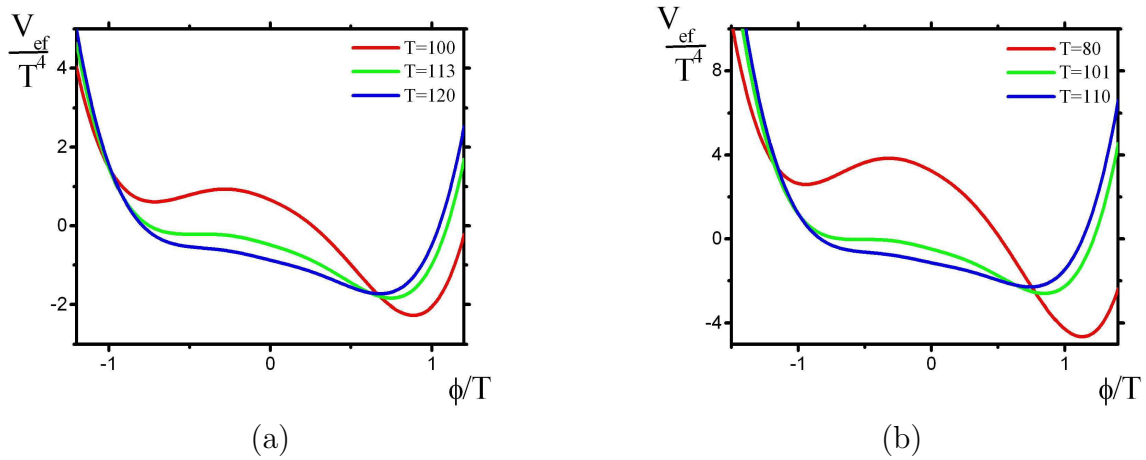


Figura 4.3: Potencial efetivo na presença de um campo de fundo constante e constante de acoplamento $g = 33$. Em (a) $\mu = 0$ MeV e $T = [100, 113, 120]$ MeV e em (b) $\mu = 100$ MeV e $T = [80, 101, 110]$ MeV.

derivadas do campo.

4.4.2 Inomogeneidades: Correção ao Laplaceano

Para incorporarmos correções de inomogeneidades à equação de movimento, devemos primeiramente considerar ρ_1 , que tem a forma:

$$\rho_1(\vec{x}) = -Tr_\gamma \int_K \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \Delta \hat{M}(\vec{x}, \hat{x}) \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right). \quad (4.40)$$

Lembrando que

$$\Delta \hat{M}(\hat{x}, \vec{x}_0) = g \nabla_i \phi(\vec{x}_0) \hat{x}^i + g \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j \phi(\vec{x}_0) \hat{x}^i \hat{x}^j + \dots, \quad (4.41)$$

podemos, calcular a correção ao Laplaceano na equação de movimento, que corresponde à primeira correção não-trivial oriunda das flutuações espaciais de ϕ , supostas pequenas [58, 59].

A primeira contribuição é proveniente de ρ_1 , sendo proporcional a $\nabla_i \nabla_j \phi$:

$$\rho_1^{(2)}(\vec{x}) = -Tr_\gamma \int_K \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \left(\frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j \hat{M}(\vec{x}_0) \hat{x}^i \hat{x}^j \right) \times \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right). \quad (4.42)$$

É, contudo, necessária uma análise cuidadosa para que não percamos outras contribuições de mesma ordem. O termo seguinte na expansão para a densidade fermiônica é

$$\rho_2(\vec{x}) = Tr_\gamma \int_K \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \left[\Delta \hat{M}(\vec{x}, \hat{x}) \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) \right]^2. \quad (4.43)$$

Ao tomarmos somente a parte proporcional a $\nabla \phi$ em $\Delta \hat{M}$, o termo entre colchetes dará uma contribuição $\nabla_i \phi \nabla_j \phi$, correspondente a

$$\rho_2^{(1)}(\vec{x}) = Tr_\gamma \int_K \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \left[\nabla_i \hat{M}(\vec{x}) \hat{x}^i \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) \right]^2, \quad (4.44)$$

que é da mesma ordem que $\nabla_i \nabla_j \phi$ e portanto deve ser mantido na série.

O Apêndice C traz o cálculo detalhado desses termos.

4.4.3 Expressão final para $\rho_1 + \rho_2$

Como forma final para a correção ao Laplaceano do campo quiral, temos (vide Apêndice C)

$$\rho_1 + \rho_2 = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \nu_s \left\{ \nabla^2 \hat{M}(\vec{x}) [F(E_k, \mu, \beta) + F(E_k, -\mu, \beta)] + (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \hat{M}(\vec{x}) [G(E_k, \mu, \beta) + G(E_k, -\mu, \beta)] \right\}, \quad (4.45)$$

onde

$$\begin{aligned} F(E_k, \mu, \beta) = & -\beta^2 \left(-\frac{1}{2^4} \frac{\hat{M}^2}{E_k^3} \right) \left(\frac{e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^3} \right) + \\ & -\beta \left(\frac{1}{2^2 E_k^2} - \frac{3}{2^4} \frac{\hat{M}^2}{E_K^4} \right) \left(\frac{e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^2} \right) + \\ & - \left(\frac{1}{2^3 E_k^3} - \frac{3}{2^4} \frac{\hat{M}^2}{E_K^5} \right) \left(\frac{1}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

e

$$\begin{aligned} G(E_k, \mu, \beta) = & -\beta^4 \left(\frac{1}{2^2} \frac{\hat{M}^4}{E_k^5} \right) \left(\frac{e^{4\beta(E_k-\mu)} - 11e^{3\beta(E_k-\mu)} + 11e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^5} \right) + \\ & -\beta^3 \left(\frac{1}{2^3} \frac{\hat{M}^2}{E_K^4} + \frac{5}{2} \frac{\hat{M}^4}{E_K^6} \right) \left(\frac{e^{3\beta(E_k-\mu)} - 4e^{2\beta(E_k-\mu)} + e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^4} \right) + \\ & -\beta^2 \left(-\frac{1}{2^3 E_K^3} + \frac{3}{2^2} \frac{\hat{M}^2}{E_K^5} + \frac{45}{2^2} \frac{\hat{M}^4}{E_K^7} \right) \left(\frac{e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^3} \right) + \\ & -\beta \frac{3}{2^2} \left(-\frac{1}{2E_K^4} + \frac{5}{2} \frac{\hat{M}^2}{E_K^6} + 35 \frac{\hat{M}^4}{E_K^8} \right) \left(\frac{e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^2} \right) + \\ & -\frac{3}{2^2} \left(-\frac{1}{2E_K^5} + \frac{5}{2} \frac{\hat{M}^2}{E_K^7} + 35 \frac{\hat{M}^4}{E_K^9} \right) \left(\frac{1}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)} \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Um problema ainda persiste para trabalharmos com a eq.(4.45): existe um termo proporcional a $\vec{k} \cdot \nabla$,

$$\begin{aligned} & \int d^3k \left\{ (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \hat{M}(\vec{x}) [G(E_k, \mu, \beta) + G(E_k, -\mu, \beta)] \right\} \\ & = \nabla_i \nabla_j \hat{M} \int dk_x dk_y dk_z (k_i k_j) [G(E_k, \mu, \beta) + G(E_k, -\mu, \beta)] \end{aligned} \quad (4.48)$$

Lembrando que $E_k^2 = \vec{k}^2 + \hat{M}^2$, vemos que estas integrais são nulas para $i \neq j$ (G é par na variável \vec{k}). Assim passamos a ter apenas termos proporcionais a $\nabla^2 \phi$.

O termo que contém $\vec{k} \cdot \nabla$ fica,

$$\nabla_i^2 \hat{M} \int d^3 k k_i^2 [G(E_k, \mu, \beta) + G(E_k, -\mu, \beta)] \quad (4.49)$$

Devemos perceber agora que esta expressão não irá depender de nenhuma das variáveis k_j e ainda que as três integrais que aparecem, cada uma proporcional a ∇_j , são idênticas. Usando, então, a identidade $\int d^3 k k_i^2 G = \frac{1}{3} \int d^3 k \vec{k}^2 G$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int d^3 k \left\{ (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \hat{M}(\vec{x}) [G(E_k, \mu, \beta) + G(E_k, -\mu, \beta)] \right\} = \\ = \frac{1}{3} \nabla^2 \hat{M}(\vec{x}) \int d^3 k \vec{k}^2 [G(E_k, \mu, \beta) + G(E_k, -\mu, \beta)] . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Finalmente, temos como forma final da equação para $\rho_1 + \rho_2$,

$$\rho_1 + \rho_2 = \nabla^2 \phi(\vec{x}) \frac{g\nu_s}{2\pi^2} \int dk \vec{k}^2 [H(E_k, \mu, \beta) + H(E_k, -\mu, \beta)] , \quad (4.51)$$

onde

$$H(E_k, \mu, \beta) \equiv F(E_k, \mu, \beta) + \frac{1}{3} \vec{k}^2 G(E_k, \mu, \beta) . \quad (4.52)$$

Devido à proporcionalidade de $\rho_1 + \rho_2$ ao Laplaceano do campo, este termo irá corrigir o termo correspondente na equação de movimento.

A equação de movimento, com a correção ao Laplaceano, toma a forma

$$[1 + gW_q(\phi, \mu, \beta)] \nabla^2 \phi(\vec{x}) = \frac{\partial V_{ef}(\phi, \mu, \beta)}{\partial \phi} , \quad (4.53)$$

onde

$$(\rho_1 + \rho_2) = - (\nabla^2 \phi) W_q(\phi, T, \mu) . \quad (4.54)$$

Fazendo uso da distribuição de Fermi-Dirac

$$n_{fd}(E_k, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} , \quad (4.55)$$

podemos escrever H explicitamente como:

$$\begin{aligned}
 & -\beta^4 \left(\frac{\hat{M}^4 \vec{k}^2}{12 E_k^5} \right) (e^{4\beta(E_k-\mu)} - 11e^{3\beta(E_k-\mu)} + 11e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}) n_{fd}^5(E_k, \mu) + \\
 & -\beta^3 \left(\frac{\hat{M}^2 \vec{k}^2}{24 E_K^4} + \frac{5\hat{M}^4 \vec{k}^2}{6 E_K^6} \right) (e^{3\beta(E_k-\mu)} - 4e^{2\beta(E_k-\mu)} + e^{\beta(E_k-\mu)}) n_{fd}^4(E_k, \mu) + \\
 & -\beta^2 \left(-\frac{\hat{M}^2}{16 E_k^3} - \frac{1}{24 E_K^3} \frac{\vec{k}^2}{E_K} + \frac{\hat{M}^2 \vec{k}^2}{4 E_K^5} + \frac{15\hat{M}^4 \vec{k}^2}{4 E_K^7} \right) (e^{\beta(E_k-\mu)} - e^{2\beta(E_k-\mu)}) n_{fd}^3(E_k, \mu) + \\
 & -\beta \left(\frac{1}{4 E_k^2} - \frac{3\hat{M}^2}{16 E_K^4} - \frac{1}{8 E_K^4} \frac{\vec{k}^2}{E_K} + \frac{5\hat{M}^2 \vec{k}^2}{8 E_K^6} + \frac{35\hat{M}^4 \vec{k}^2}{4 E_K^8} \right) e^{\beta(E_k-\mu)} n_{fd}^2(E_k, \mu) + \\
 & - \left(\frac{1}{8 E_k^3} - \frac{3}{16 E_k^5} - \frac{1}{8 E_K^5} \frac{\vec{k}^2}{E_K} + \frac{5\hat{M}^2 \vec{k}^2}{8 E_K^7} + \frac{35\hat{M}^4 \vec{k}^2}{4 E_K^9} \right) n_{fd}(E_k, \mu) .
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

A expressão analítica completa para a correção ao Laplaceano não é muito simples e suas propriedades e comportamento exatos devem ser estudados numericamente. Devemos recorrer a aproximações em $H(E_k, \mu, \beta)$ para obtermos uma expressão com a qual possamos trabalhar analiticamente.

Na próxima seção, faremos a aproximação de baixa temperatura e obteremos uma forma mais simples para H . Para o presente estudo, o limite de altas temperaturas não é interessante por diversas razões. Neste limite ocorre a restauração da simetria quiral, interrompendo a nucleação de bolhas. Além disto, as flutuações térmicas serão frequentes e intensas, tornando a hipótese de pequena transferência de momento entre os quarks e o campo quiral pouco realista. No limite de altas energias devemos ter a criação de partículas pesadas, que não estão previstas no modelo efetivo. O caso de baixas energias apenas reforça nossas hipóteses e é, portanto, uma ferramenta útil para se estudar o comportamento da correção acima.

4.5 Limite de Baixa Temperatura

A distribuição de Fermi-Dirac, presente na forma de $H(E_k, \mu, \beta)$, determina a região de momento na qual a integral terá sua maior contribuição. O limite $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$) deve

então ser estudado com cuidado. Por simplicidade, vamos analisar apenas o caso com $\mu = 0$. A distribuição estatística de Fermi-Dirac, dada explicitamente em termos da variável \vec{k} , tem a forma

$$n_{fd} = \frac{1}{e^{\beta E_k} + 1} = \frac{1}{\exp \left[\beta (\vec{k}^2 + \hat{M}^2)^{1/2} \right] + 1} . \quad (4.57)$$

Lembrando que $\hat{M}(\phi) = g\phi + m$, vemos que para $m \neq 0$ a exponencial será sempre muito maior do que 1. Desta forma, aproximamos

$$n_{fd} \approx e^{-\beta E_k} . \quad (4.58)$$

Retornando à expressão (4.56), percebemos que cada termo será multiplicado por uma potência da exponencial. Porém, no limite $T \rightarrow 0$, $e^{-(n+1)\beta E_k} \ll e^{-n\beta E_k}$. A correção de inomogeneidades simplifica-se, então, para

$$\rho_1 + \rho_2 = \left(\nabla^2 \hat{M} \right) \frac{\nu_s}{2\pi^2} 2 \int_0^\infty dk \vec{k}^2 H(E_k, 0, \beta) , \quad (4.59)$$

onde usaremos a definição

$$I(\phi, \beta) \equiv \int_0^\infty dk \vec{k}^2 H(E_k, 0, \beta) , \quad (4.60)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} I(\phi, \beta) = - \int_0^\infty dk e^{-\beta E_k} & \left[\frac{1}{12} \frac{\hat{M}^4}{E_k^5} \beta^4 \vec{k}^4 + \left(\frac{1}{24} \frac{\hat{M}^2}{E_k^4} + \frac{5}{6} \frac{\hat{M}^4}{E_k^6} \right) \beta^3 \vec{k}^4 - \frac{1}{16} \frac{\hat{M}^2}{E_K^3} \beta^2 \vec{k}^2 + \right. \\ & + \left(-\frac{1}{24} \frac{1}{E_K^3} + \frac{1}{4} \frac{\hat{M}^2}{E_K^5} + \frac{15}{4} \frac{\hat{M}^4}{E_K^7} \right) \beta^2 \vec{k}^4 + \left(\frac{1}{4} \frac{1}{E_K^2} - \frac{3}{16} \frac{\hat{M}^2}{E_K^4} \right) \beta \vec{k}^2 + \\ & + \left(-\frac{1}{8} \frac{1}{E_K^4} + \frac{5}{8} \frac{\hat{M}^2}{E_K^6} + \frac{35}{4} \frac{\hat{M}^4}{E_K^8} \right) \beta \vec{k}^4 + \left(\frac{1}{8} \frac{1}{E_K^3} - \frac{3}{16} \frac{\hat{M}^2}{E_K^5} \right) \vec{k}^2 + \\ & \left. + \left(-\frac{1}{8} \frac{1}{E_K^5} + \frac{5}{8} \frac{\hat{M}^2}{E_K^7} + \frac{35}{4} \frac{\hat{M}^4}{E_K^9} \right) \vec{k}^4 \right] . \quad (4.61) \end{aligned}$$

A integral é fortemente suprimida para $\beta E_k \gg 1$. Assim, para baixas temperaturas, esta será dominada por valores pequenos de $|\vec{k}|$, $|\vec{k}| \ll \hat{M}(\phi)$. Podemos, então, aproximar

$E_k \simeq |\hat{M}|$ nos termos entre colchetes¹. Desta forma,

$$I(\phi, \beta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\beta E_k} \left[\left(-\frac{1}{16} \frac{\beta^2}{|\hat{M}|} - \frac{1}{4} \frac{\beta}{\hat{M}^2} - \frac{1}{16} \frac{1}{|\hat{M}|^3} \right) \vec{k}^2 + \left(\frac{1}{12} \frac{\beta^4}{|\hat{M}|} + \frac{21}{24} \frac{\beta^3}{\hat{M}^2} + \frac{95}{24} \frac{\beta^2}{|\hat{M}|^3} + \frac{74}{8} \frac{\beta}{\hat{M}^4} + \frac{74}{8} \frac{1}{|\hat{M}|^5} \right) \vec{k}^4 \right] \quad (4.62)$$

Utilizando novamente a condição $|\vec{k}| \ll \hat{M}(\phi)$, podemos fazer a aproximação $e^{-\beta E_k} \simeq e^{-\beta |\hat{M}|} e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta}{|\hat{M}|} \vec{k}^2}$, para obtermos uma integral analiticamente mais simples:

$$I(\phi, \beta) = -\frac{1}{2} e^{-\beta |\hat{M}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta}{|\hat{M}|} \vec{k}^2} \left[\left(-\frac{1}{16} \frac{\beta^2}{|\hat{M}|} - \frac{1}{4} \frac{\beta}{\hat{M}^2} - \frac{1}{16} \frac{1}{|\hat{M}|^3} \right) \vec{k}^2 + \left(\frac{1}{12} \frac{\beta^4}{|\hat{M}|} + \frac{21}{24} \frac{\beta^3}{\hat{M}^2} + \frac{95}{24} \frac{\beta^2}{|\hat{M}|^3} + \frac{74}{8} \frac{\beta}{\hat{M}^4} + \frac{74}{8} \frac{1}{|\hat{M}|^5} \right) \vec{k}^4 \right]. \quad (4.63)$$

Mantendo apenas termos dominantes, obtemos

$$I(\phi, \beta) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{8} e^{-\beta |\hat{M}|} \left(\beta |\hat{M}| \right)^{3/2}. \quad (4.64)$$

A correção ao Laplaceano, a baixas temperaturas, assume a forma

$$\rho_1 + \rho_2 \approx - \left(\nabla^2 \hat{M} \right) \frac{\nu_s}{\pi^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{8} e^{-\beta |\hat{M}|} \left(\beta |\hat{M}| \right)^{3/2}. \quad (4.65)$$

Podemos notar então que a correção $\rho_1 + \rho_2$ a baixas temperaturas será função de $\beta \hat{M}$ e será fortemente suprimida para $\beta \hat{M} \gg 1$. Os efeitos de inogeneidades no campo de fundo serão, portanto, importantes na região $\beta \hat{M}(\phi) \lesssim 1$. Notamos, ainda, que a Eq. (4.65) se anula exponencialmente para $\phi \rightarrow \infty$ e como uma potência no limite $\phi \rightarrow 0$. Na próxima seção discutiremos os resultados obtidos para a correção de inogeneidades, tanto para a função completa como para a aproximação a baixas temperaturas.

4.6 Discussão dos Resultados

O comportamento da correção ao Laplaceano, gW , Eq. (4.54), está exibido na Fig. 4.4. As curvas não estão centradas exatamente em $\phi = 0$. Isto deve-se, provavelmente, a pequenos

¹A dependência em $|\vec{k}|$ deve ser mantida na exponencial para garantir a supressão da integral no ultravioleta.

erros numéricos nas integrações no espaço de momento, no limite $|\vec{k}| \rightarrow 0$ e $\phi \rightarrow 0$, que não comprometem os resultados que se seguem.

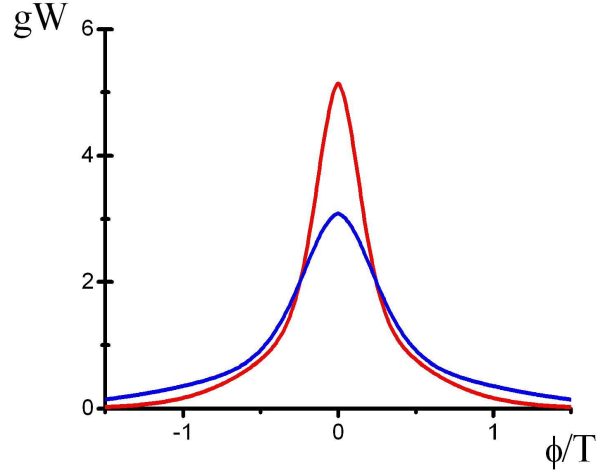


Figura 4.4: gW a $T = 100$ MeV para $g = 3,3$ (azul) e $g = 5,5$ (vermelho).

A $T = 100$ MeV pode-se ver que a correção será importante para $-1 \leq \frac{\phi}{T} \leq 1$. De maneira geral, isto foi observado para as diversas temperaturas testadas. Se voltarmos as Figuras 4.2 e 4.3, veremos que esta é a mesma região de campo na qual a correção ao potencial efetivo, proveniente apenas do termo homogêneo, é importante. As curvas cortam o eixo vertical aproximadamente em $gW = g$. Porém, o estudo analítico do limite de gW quando $\phi \rightarrow 0$ não é simples e como a integração numérica neste limite apresenta problemas, não podemos afirmar se este é realmente o comportamento da função.

A Fig. 4.5 mostra como esta correção gW varia com a temperatura. Como esperado, o efeito das correções de inogeneidades diminui conforme abaixamos a temperatura.

A aproximação de baixas temperaturas (4.65), Fig. 4.6, mostrou ter um comportamento qualitativo parecido com a função completa até $\phi/T \gtrsim 0.8$. Porém, mesmo para estes valores de ϕ , o comportamento aproximado superestima o real. A aproximação não é válida para a região dominada pelo termo de potência na Eq. (4.65).

De posse da forma completa para $\rho_1 + \rho_2$, Eq. (4.51), podemos incorporá-la numérica-

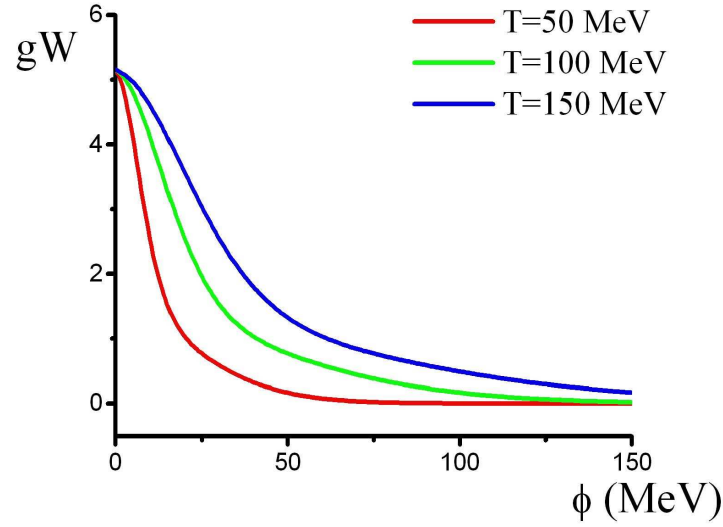


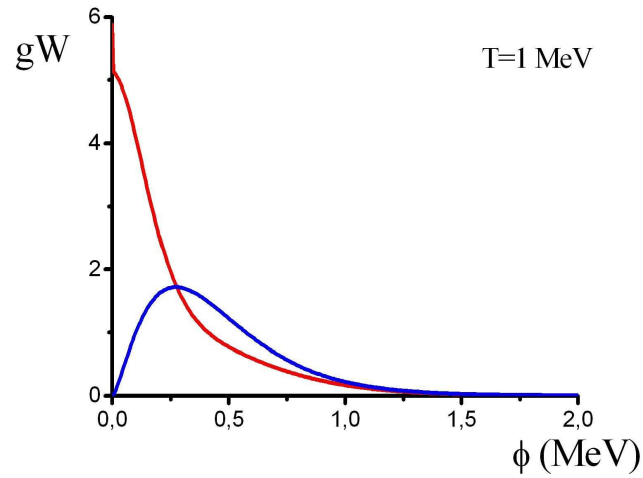
Figura 4.5: Variação de gW com a temperatura. $T = 50$ MeV (vermelho), $T = 100$ MeV (verde) e $T = 150$ MeV (azul); $g = 5,5$ para as três curvas.

mente ao potencial efetivo, obtendo uma equação de movimento da forma²

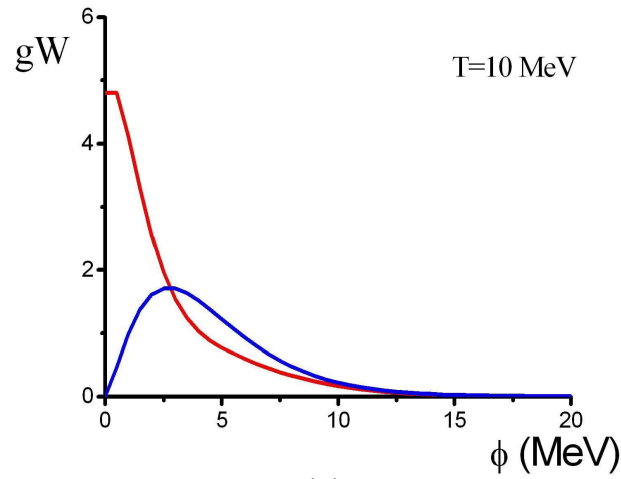
$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{1 + gW} \frac{\partial(V + V_q)}{\partial \phi} \equiv \frac{\partial V_{in}}{\partial \phi} . \quad (4.66)$$

Na verdade o que podemos fazer de forma mais imediata é escrever a derivada de V_{in} e não o próprio potencial.

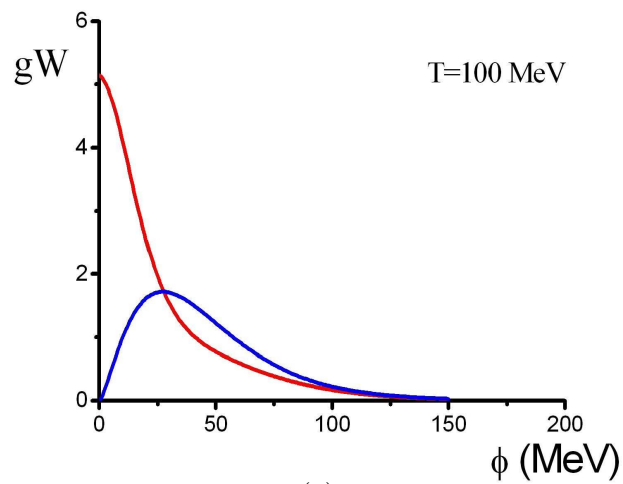
²Como $gW \geq 0$ para qualquer ϕ , a equação de movimento pode ser reescrita desta forma.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.6: Aproximação de baixa temperatura (4.65) (azul) e gW completa (vermelho) para $g = 5,5$. $T = 1$ MeV em (a), $T = 10$ MeV em (b) e $T = 100$ MeV em (c)

Na Fig. 4.7, podemos observar que a presença de inhomogeneidades tende a suavizar os efeitos da correção do termo homogêneo sobre a derivada do potencial na região relevante para a nucleação. A temperatura spinodal não será modificada pela correção $\rho_1 + \rho_2$, pois o termo gW ($gW \geq 0$) na Eq. (4.66) funcionará como um “peso”, apenas diminuindo a inclinação de V_{in} em relação a V_{ef} , deixando inalterados os campos para os quais ocorrem seus extremos. Isto também pôde ser visto nas simulações numéricas para a temperatura T_{sp} , pois esta corresponde à temperatura na qual dois extremos do potencial se encontram, formando um ponto de inflexão podendo, portanto, ser determinada por meio dos zeros da derivada do potencial.

A partir das funções para as derivadas do potencial completo (contendo correções de inhomogeneidades), podemos ajustar um polinômio de quinto grau para estas curvas. Como na região mais interessante os valores das ordenadas são bem menores do que seus valores para campos maiores, é necessário ajustar o polinômio para uma região reduzida de forma a obtermos uma boa aproximação. A Fig. 4.8 mostra estes ajustes para temperaturas de $T = 108$ (azul), 116 (verde), 124 (laranja) e 132 MeV (preto). As curvas da legenda correspondem a derivada do potencial completa enquanto as outras correspondem aos ajustes.

Podemos, agora, integrar estes polinômios, obtendo uma equação para o potencial V_{in} . No processo de integração, a informação sobre o valor do potencial em $\phi = 0$ é perdida e com isso todo o gráfico é deslocado. Contudo, todas as quantidades físicas são funções dos valores relativos entre alturas do potencial e, desta forma, a informação perdida é irrelevante. A Fig. 4.9 mostra os potenciais V_{ef} e V_{in} para as temperaturas de 108, 116, 124 e 132 MeV.

Como discutido anteriormente, a correção de inhomogeneidades suaviza os efeitos de ρ_0 . Para todas as temperaturas estudadas, as alturas relativas diminuem, sinalizando um aumento na probabilidade de transição e ainda, como para $T = 116$ e 124 MeV os mínimos ficaram mais próximos, a aproximação de parede fina deverá trazer melhores resultados do que quando aplicada a V_{ef} . Devemos observar, em particular, que T_c não é mais 124 MeV. A esta temperatura o mínimo em $\phi \neq 0$ ainda é o mínimo global e a simetria está quebrada. O aumento da temperatura crítica vai na direção dos resultados da rede, que apontam para a restauração da simetria para temperaturas maiores que $T \sim 150$ MeV [6].

Estes novos potenciais nos permitem aplicar a aproximação de parede fina. Para obtermos expressões exatas para as grandezas físicas desejadas, utilizando os métodos descritos na

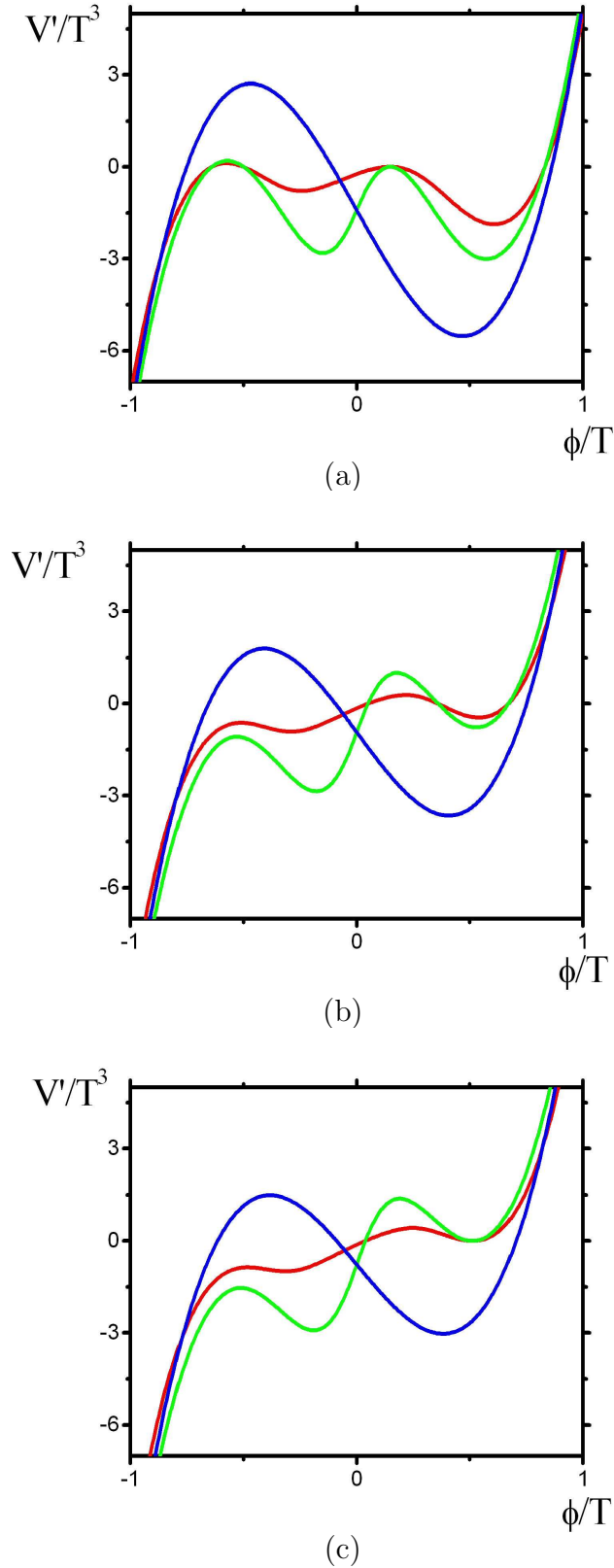


Figura 4.7: Comparação entre as correções ao potencial provenientes de V_{ef} (verde) e V_{in} (vermelho) para $g = 5,5$ e diferentes temperaturas. $T = 108$ MeV em (a), $T = 124$ MeV em (b) e $T = 132$ MeV em (c). O potencial puramente bosônico (azul) aparece para compararmos as correções.

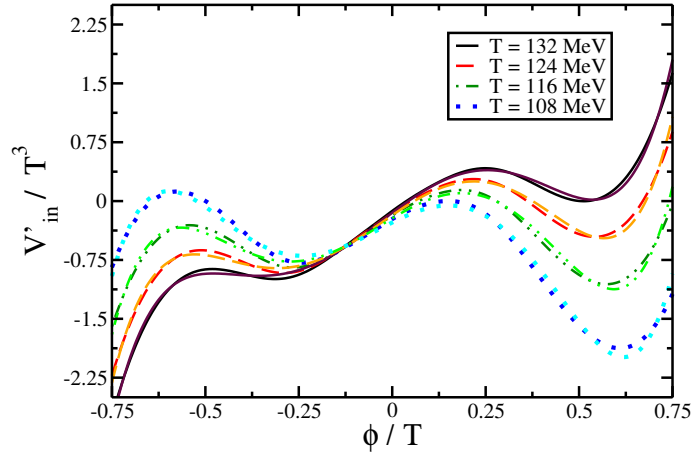


Figura 4.8: Ajuste polinomial para a derivada do potencial para várias temperaturas. As curvas da legenda correspondem a V'_{in} completo e as outras aos ajustes polinomiais.

seção 3.4, devemos aproximar o potencial V_{in} por um polinômio de quarto grau:

$$V_{in} \approx \sum_{n=0}^4 a_n \phi^n . \quad (4.67)$$

Isto só é possível reduzindo-se ainda mais a região em ϕ de validade do polinômio e restringindo também a gama de temperaturas. Tomamos, então, valores de ϕ positivos, e $T_c \geq T \geq T_{sp}$, pois esta é a região relevante para o estudo da nucleação. O ajuste polinomial de quarto grau está mostrado na Fig. 4.10.

Note que o ajuste não é muito adequado para temperaturas mais baixas $T \sim T_{sp}$ e ϕ próximo a zero, errando inclusive a concavidade. Visto que nesta região de temperaturas a aproximação de parede fina não deve ser adequada pois a diferença entre os mínimos do potencial, ϵ , não tende a zero, o pequeno erro no ajuste polinomial apenas corrobora considerarmos apenas $T \lesssim T_c$. Para estas temperaturas podemos obter diversas informações qualitativas sobre grandezas físicas. O estudo quantitativo exigiria soluções numéricas que fogem do escopo deste trabalho.

Potenciais do tipo (4.67) podem ser reescritos na forma

$$U(\varphi) = \alpha (\varphi^2 - a^2)^2 + j\varphi , \quad (4.68)$$

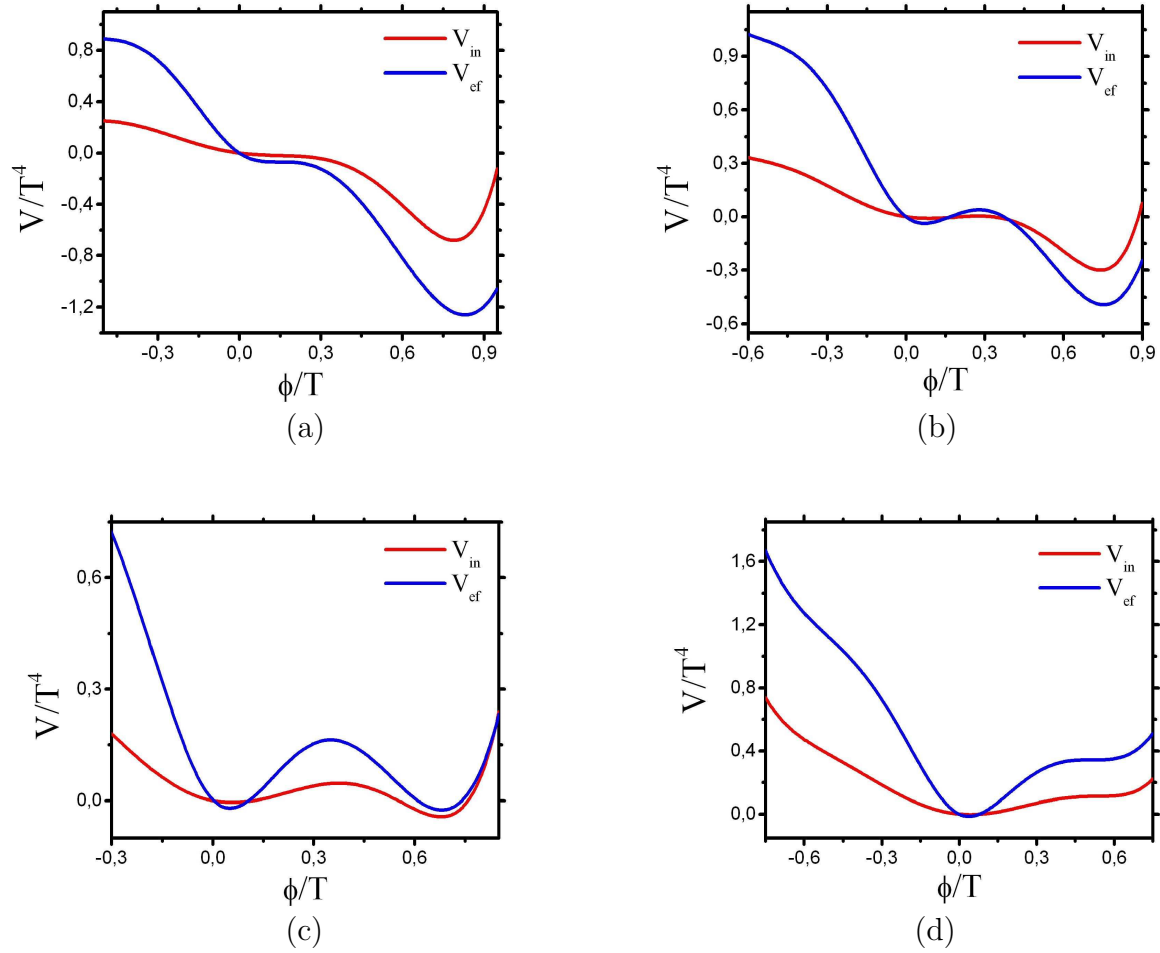


Figura 4.9: Potencial efetivo na presença de um campo de fundo constante (azul) e contendo a primeira correção de inhomogeneidades. Em (a) $T = 108$ MeV, (b) $T = 116$ MeV, (c) $T = 124$ MeV e (d) $T = 132$ MeV.

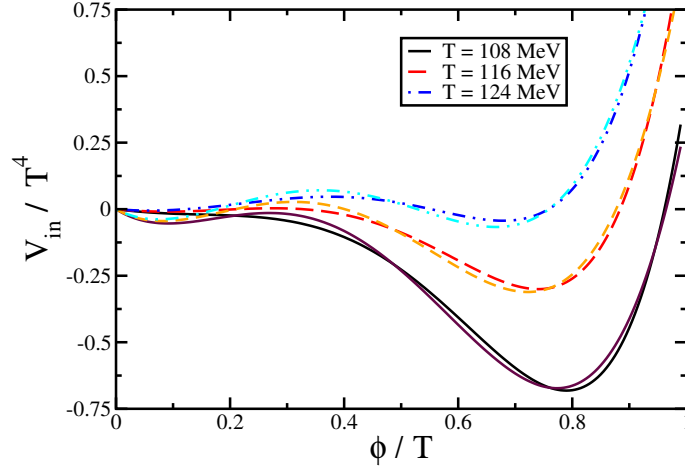


Figura 4.10: Ajuste polinomial para o potencial para várias temperaturas. As curvas da legenda correspondem a V'_{in} completo e as outras aos ajustes polinomiais.

onde $U(\varphi)$ reproduz o potencial inomogêneo a menos de um deslocamento na energia de ponto zero, e

$$\alpha = a_4 \quad , \quad (4.69)$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{a_2}{a_4} + \frac{3}{8} \left(\frac{a_3}{a_4} \right)^2 \right] \quad , \quad (4.70)$$

$$j = a_4 \left[\frac{a_1}{a_4} - \frac{1}{2} \frac{a_2 a_3}{a_4 a_4} + \frac{1}{8} \left(\frac{a_3}{a_4} \right)^3 \right] \quad , \quad (4.71)$$

$$\varphi = \phi + \frac{1}{4} \frac{a_3}{a_4} \quad . \quad (4.72)$$

Em T_c , o potencial deve ter dois mínimos degenerados. Esta situação corresponde a tomarmos $j = 0$, de forma que $U(\varphi)$ tenha mínimos em $\varphi = \pm a$ e máximo em $\varphi = 0$. A forma explícita da bolha crítica, no limite $j \rightarrow 0$ é dada por [45, 56, 61]

$$\varphi_c(r; \xi, r_c) = \varphi_f + \frac{1}{\xi \sqrt{2\alpha}} \left[1 - \tanh \left(\frac{r - r_c}{\xi} \right) \right] \quad , \quad (4.73)$$

onde $\varphi_f \approx a - j/8\alpha a^2$ é o falso vácuo do potencial $U(\varphi)$, r_c é o raio crítico da bolha e $\xi = 2/\sqrt{U''(\varphi_f)} = (\alpha(3\varphi_f^2 - a^2))^{-1/2}$.

A tensão superficial, Eq. (3.21), é dada nesta aproximação por

$$\sigma \approx \frac{2}{3\alpha\xi^3} . \quad (4.74)$$

Da Eq. (3.26), o raio crítico vale

$$r_c \approx \frac{2}{3\alpha\xi^3} \frac{1}{a|j|} . \quad (4.75)$$

Finalmente, a energia da bolha crítica é:

$$E_c = \frac{4\pi\sigma}{3} r_c^2 . \quad (4.76)$$

Para as três temperaturas analisadas, obtivemos os seguintes resultados:

- Tensão superficial:

$$T = 108 \text{ MeV} ; \sigma \approx 5,4 \text{ MeV/fm}^2$$

$$T = 116 \text{ MeV} ; \sigma \approx 6,8 \text{ MeV/fm}^2$$

$$T = 124 \text{ MeV} ; \sigma \approx 9,2 \text{ MeV/fm}^2$$

- Raio crítico:

$$T = 108 \text{ MeV} ; r_c \approx 0,98 \text{ fm}$$

$$T = 116 \text{ MeV} ; r_c \approx 2,15 \text{ fm}$$

$$T = 124 \text{ MeV} ; r_c \approx 35,54 \text{ fm}$$

O resultado numérico exato, considerando apenas a correção homogênea, é [17]:

$$T = 108 \text{ MeV} ; r_c \approx 1,1 \text{ fm}$$

$$T = 116 \text{ MeV} ; r_c \approx 2,2 \text{ fm}$$

$$T = 124 \text{ MeV} ; r_c \rightarrow \infty \text{ (temperatura crítica)}$$

- Energia da bolha crítica em unidades de temperatura:

$$T = 108 \text{ MeV} ; E_c/T \approx 0,20$$

$$T = 116 \text{ MeV} ; E_c/T \approx 1,14$$

$$T = 124 \text{ MeV} ; E_c/T \approx 394$$

A correção ao potencial, calculada numericamente, é [17]:

$$T = 108 \text{ MeV} ; E_c/T \approx 0,9$$

$$T = 116 \text{ MeV} ; E_c/T \approx 2,1$$

$$T = 124 \text{ MeV} ; E_c/T \rightarrow \infty \text{ (temperatura crítica)}$$

Vemos que o raio crítico se comporta como previsto, aumentando com a temperatura de forma rápida. Naturalmente, em $T = 124 \text{ MeV}$, o raio não divergirá, pois esta não é mais a temperatura crítica, como discutido anteriormente. Conforme a temperatura abaixa, chegando próxima a spinodal, a aproximação de parede fina torna-se menos realista. Para $T = 116 \text{ MeV}$, onde a aproximação dever ser boa, as inhomogeneidades alteram a energia da bolha crítica em cerca de 50%, confirmando o aumento da taxa de nucleação de bolha.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

O conhecimento acerca da dinâmica das transições de fase da matéria fortemente interagente é de importância ímpar para a compreensão de sua estrutura de fases. Muitas vezes o estudo desta dinâmica requer a utilização de teorias efetivas que possibilitam um tratamento mais simples do problema em questão. Tais teorias são então “calibradas” por dados experimentais, de forma a reproduzirem certas quantidades conhecidas, tornando-se mais eficazes.

Descrevemos nos capítulos 2 e 3 o modelo efetivo, com transição de fase quiral de primeira ordem, utilizado nesta tese, assim como o processo de nucleação homogênea. Em busca de melhor entender os efeitos de meio na dinâmica do campo quiral, o modelo σ -linear acoplado a um banho de quarks foi escolhido. Sendo renormalizável, correções em *loops* de temperatura nula podem ser incorporadas aos parâmetros da Lagrangeana. Podemos, então, nos concentrar no papel desempenhado pelo meio.

No capítulo 4, vimos como a presença do determinante fermiônico na equação de Euler-Lagrange altera qualitativamente a dinâmica da transição de fase. A interação do campo quiral com o gás de férmions modificou a estrutura do potencial que atua sobre os bósons, mesmo em cálculos do determinante considerando apenas um campo quiral homogêneo. Vale notar que, mesmo em estudos de sistemas a temperatura finita, os cálculos da densidade fermiônica, presentes na literatura, são feitos usualmente a $T = 0$.

De forma a generalizarmos estes cálculos para $T \neq 0$, apresentamos a expansão em gradientes associada a técnicas de TQC a temperatura finita [59]. Esta ferramenta possibilita

a determinação da densidade fermiônica ordem a ordem em derivadas do campo de fundo. Inicialmente, utilizamos esta expansão no caso a $T = 0$ e discutimos seu sucesso em três dimensões espaciais, quando comparada a resultados exatos para uma dimensão obtidos por meio do método do espalhamento inverso.

Introduzimos, então, efeitos de temperatura finita por meio da compactificação da variável temporal (tempo imaginário). Supondo que o banho de quarks transfira pouco momento para o campo quiral e que, desta forma, ϕ varie suavemente, escrevemos uma expressão para a densidade fermiônica na forma de uma série em gradientes do campo.

A incorporação de correções de inomogeneidades à equação de movimento se deu a partir de termos na expansão proporcionais a $\nabla^2\phi$. Desta forma, enquanto a correção homogênea modificou o potencial, a primeira correção derivativa (gW) modificou o termo do Laplaceano na equação de Euler-Lagrange. Tanto a correção ao potencial, V_q , quanto gW foram escritas com contribuições separadas para partículas e anti-partículas.

Devido à forma analítica complicada da correção de inomogeneidades, foi necessário tomar o limite de baixas temperaturas para podermos obter uma expressão mais simples para esta correção. Neste limite observamos que $\rho_1 + \rho_2$ será função de $\beta\hat{M}$ e não de β e de \hat{M} de forma independente. Embora o comportamento qualitativo desta aproximação tenha se mostrado apropriado na região onde as correções são mais importantes, esta superestima os valores exatos para $\phi \lesssim 0.8T$.

Nossos resultados mostraram que a região na qual as correções derivativas são relevantes corresponde à mesma região onde o potencial efetivo fica modificado devido à correção homogênea. Como esperado, estas correções diminuem para temperaturas menores. Reescrevendo a equação de movimento, pudemos obter um novo potencial, $V_{in}(\phi, \beta, \mu)$, que contém as correções de campo homogêneo e as correções derivativas. A presença de inomogeneidades suaviza os efeitos de ρ_0 na região relevante para a nucleação. Esta mudança não altera a temperatura spinodal, pois os extremos de V_{in} e V_{ef} ocorrem para os mesmos valores de ϕ .

A suavização do potencial efetivo tem como efeito imediato a diminuição da altura da barreira entre os dois mínimos ($\phi \geq 0$). Para uma dada temperatura, a energia necessária para se gerar uma bolha crítica é, portanto, menor e desta forma a taxa de nucleação aumentará. Este aumento está diretamente ligado à diminuição do raio da bolha crítica.

Ao considerarmos as correções de inomogeneidades, a temperatura de 124 MeV não é mais

a temperatura crítica, onde o potencial exibe mínimos degenerados. Nesta temperatura, o potencial ainda apresenta simetria quebrada, significando que houve um aumento de T_c , indo em na direção razoável quando levamos em conta os resultados da rede [6].

A correção derivativa, quando estudada na aproximação de parede fina, trouxe mudanças apreciáveis as grandezas estudadas diminuindo, por exemplo, a energia da bolha crítica em cerca de 50% para $T = 116$ MeV. Estas correções devem, portanto, ser incorporadas em estudos mais realistas. São necessários cálculos numéricos para estudarmos este problema fora da aproximação de parede fina e, assim, aumentarmos a precisão destes resultados [48]. Tais cálculos estão fora do escopo desta tese, mas representam um passo importante para uma análise quantitativa do papel desempenhado pelos férmions na dinâmica da transição de fase quiral.

Temos, então, um método sob controle para a incorporação de correções em derivadas do campo de fundo no cálculo do determinante fermiônico a temperatura finita e, portanto, aplicações da expansão derivativa no estudo da influência dos férmions pode também ser feita a outros modelos efetivos, como por exemplo Nambu–Jona-Lasinio [24], Modelo Loops de Polyakov [62] e modelos de quasi-partículas [63].

Podemos, ainda, aplicar o método a modelos efetivos que levem em conta efeitos de dissipação e ruído, ausentes no presente trabalho, pois estudos mostram que seus efeitos podem trazer grandes modificações na transição de fases [64, 65, 66]. Vários aspectos das transições de fase da matéria fortemente interagente vêm sendo estudados pelo grupo QCD-QGP do Instituto de Física da UFRJ [50, 67, 68].

Apêndice A

ALGUNS INGREDIENTES DA TEORIA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Neste apêndice apresentamos, de maneira sucinta, alguns resultados de teoria de campos a temperatura finita, relevantes para os cálculos desta tese. Maiores detalhes podem ser encontrados em [46, 60, 1, 2]

A.1 Função de Partição

Vamos, por simplicidade, considerar o caso do campo escalar. Sua função de partição é definida como

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \mu_i \tilde{N}_i)} . \quad (\text{A.1})$$

Escrevendo o operador traço em uma representação integral, temos

$$Z = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta(H - \mu_i \tilde{N}_i)} | \phi_a \rangle . \quad (\text{A.2})$$

Podemos fazer uma analogia entre esta expressão e a amplitude de transição da mecânica

quântica (MQ). Sabemos da MQ que o valor esperado do operador e^{-iHt_f} é

$$\begin{aligned} \langle \phi_a | e^{-iHt_f} | \phi_a \rangle &= \int [d\pi] \int_{\phi(\vec{x},0)=\phi_a(\vec{x})}^{\phi(\vec{x},t_f)=\phi_a(\vec{x})} [d\phi] \times \\ &\times \exp \left[i \int_0^{t_f} dt \int d^3x \left(\pi(\vec{x},t) \frac{\partial \phi(\vec{x},t)}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde \mathcal{H} é a densidade Hamiltoniana e π é o momento conjugado ao campo ϕ .

Devemos fazer a mudança para tempo imaginário $\tau = it$ e tomar os limites de integração de τ entre 0 e β . Além disto, se o sistema possuir uma carga conservada, devemos ainda fazer a substituição

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) \rightarrow \mathcal{H}(\pi, \phi) - \mu \mathcal{N}(\pi, \phi) . \quad (\text{A.4})$$

Podemos, finalmente, escrever a representação funcional da função de partição como

$$Z = \int [d\pi] \int_{\text{periodico}} [d\phi] \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) + \mu \mathcal{N}(\pi, \phi) \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Como consequência do traço, a integral sobre o campo deve ser periódica, ou seja, sobre campos tais que $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$. Não existem restrições na integral em π .

A.2 Soma Sobre Frequências de Matsubara

Para calcular Z , expandimos o campo ϕ em uma série de Fourier

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \phi_n(\vec{p}) . \quad (\text{A.6})$$

Devido à periodicidade do campo ϕ , ω_n é uma variável discreta, $\omega_n = 2\pi nT$. A normalização é escolhida para que cada amplitude de Fourier seja adimensional. As frequências ω_n são as chamadas frequências de Matsubara.

Esse aspecto das teoria de campos a temperatura finita faz com que contribuições de temperatura não nula ao cálculo de diversas propriedades como a auto-energia envolvam

a necessidade da soma de funções sobre as frequências de Matsubara. Isto pode ser feito usando-se técnicas de integração no plano complexo. Considere a função

$$S = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0 = i\omega_n = i2\pi nT) \quad (\text{A.7})$$

Do Teorema dos Resíduos sabemos que podemos expressar uma integral com pólos por meio da soma dos seus resíduos. Podemos, então, escrever uma função complexa, com os pólos apropriados, de forma que

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_k \text{Res } f(a_k) , \quad (\text{A.8})$$

onde $f(z)$ é singular em a_k e $\sum_k \text{Res } f(a_k)$ representa o somatório em n da eq.(A.7).

Assim, podemos escrever

$$S = \frac{T}{2\pi i} \oint_C dp_0 f(p_0) \frac{1}{2} \beta \coth \left(\frac{1}{2} \beta p_0 \right) . \quad (\text{A.9})$$

O contorno C deve ser escolhido de modo a conter todos os pólos da função $1/2\beta \coth(1/2\beta p_0)$, que estão localizados em $p_0 = 2\pi i n T$. Para isso podemos escolher o contorno da Fig.A.1.

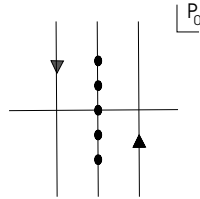


Figura A.1: Contorno usado na integração complexa da Eq.(A.9).

Utilizando o Teorema dos Resíduos na Eq. (A.9), recuperamos a Eq. (A.7).

Reescrevendo a $\coth \theta$, a soma em frequências se separa em uma parte de vácuo, independente da temperatura, e uma contribuição de matéria. Para ver isso, devemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \coth \theta &= \frac{1}{2} \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-2\theta} - 1} . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Outra maneira de escrever $\coth \theta$ é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \coth \theta &= \frac{1}{2} \frac{e^{2\theta} + 1}{e^{2\theta} - 1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{+2\theta} - 1} . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Usando esses dois resultados obtemos

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dp_0 f(p_0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-\beta p_0} - 1} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{+2\theta} - 1} \right) . \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

Tomando $p_0 \rightarrow -p_0$ na primeira integral,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(-p_0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{+2\theta} - 1} \right) . \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

Se $f(p_0)$ for regular no eixo imaginário ($Im(p_0)$), podemos tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$ em duas das integrais, obtendo

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{1}{2} [f(p_0) + f(-p_0)] + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 [f(p_0) + f(-p_0)] \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} . \quad (\text{A.14})
 \end{aligned}$$

Note que, na expressão final para a soma de frequências, surgem duas integrais. A primeira é independente da temperatura e representa a energia de ponto zero do sistema. Na segunda integral, vemos o aparecimento da distribuição de Bose-Einstein. Este termo dá a contribuição da matéria para o somatório.

Este resultado é válido para bósons, pois a função $coth$ possui pólos que correspondem às frequências de Matsubara bosônicas $2\pi nT$. O estudo de soma de frequências para férmions é completamente análogo ao que acabamos de ver, com a substituição da função $coth$ pela tgh , que irá corresponder à função $1/2\beta tgh(1/2\beta p_0)$ e tem pólos em $p_0 = i\omega_n = (2n+1)\pi T i$, onde $\omega_n = (2n+1)\pi T$ são as frequências de Matsubara fermiônicas. Neste caso, obtemos [46]

$$\begin{aligned}
 T \sum_n f(p_0 = i\omega_n + \mu) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} dp_0 f(p_0) \frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)} + 1} + \\
 &\quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} dp_0 f(p_0) \frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)} + 1} + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_C dp_0 f(p_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 f(p_0) . \quad (\text{A.15})
 \end{aligned}$$

Neste caso, no termo que carrega a contribuição da matéria surge naturalmente a distribuição de Fermi-Dirac (n_{fd}). Esta expressão para a soma em frequências de Matsubara fermiônicas será utilizada ao longo desta tese.

Apêndice B

CÁLCULO DE TRAÇOS

Neste apêndice estão calculados os traços dos operadores que aparecem na determinação das equações para $\rho_1(\vec{x})$ e $\rho_2(\vec{x})$.

$$\begin{aligned} Tr_\gamma \left[(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M})^2 \right] &= Tr_\gamma \left[k_0^2 - \{\gamma^0, \gamma^l\} k_0 k_l - \vec{k}^2 + \hat{M}^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{M}(\gamma^0 k_0 - \gamma^l k_l) \right] \\ &= \nu_s \left[k_0^2 - \vec{k}^2 + \hat{M}^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} Tr_\gamma \left[(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}) \gamma^i \right] &= Tr_\gamma \left[\gamma^0 \gamma^i k_0 - \gamma^l \gamma^i k_l + \hat{M} \gamma^i \right] \\ &= \nu_s \left[k^i \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} Tr_\gamma \left[(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}) \gamma^i \gamma^j \right] &= Tr_\gamma \left[\gamma^0 \gamma^i \gamma^j k_0 - \gamma^l \gamma^i \gamma^j k_l + \hat{M} \gamma^i \gamma^j \right] \\ &= -\nu_s \left[\hat{M} \delta^{ij} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
 Tr_\gamma \left[(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}) \gamma^i (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}) \right] &= \\
 &= Tr_\gamma \left[-\gamma^i k_0^2 - \gamma^l \gamma^i \gamma^0 k_0 k_l + \hat{M} k_0 \gamma^i \gamma^0 \right. \\
 &\quad \left. - \gamma^0 \gamma^i \gamma^l k_0 k_l + \gamma^l \gamma^i \gamma^c k_l k_c - \hat{M} k_l \gamma^i \gamma^l \right. \\
 &\quad \left. + \hat{M} k_0 \gamma^0 \gamma^i - \hat{M} k^l \gamma^l \gamma^i + \hat{M}^2 \gamma^i \right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 Tr_\gamma \left[(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M})^2 \gamma^i \right] &= Tr_\gamma \left[\gamma^i k_0^2 - \{ \gamma^0, \gamma^l \} \gamma^i k_0 k_l - \gamma^i \vec{k}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\hat{M}(\gamma^0 \gamma^i k_0 - \gamma^l \gamma^i k_l) + \hat{M}^2 \gamma^i \right] \\
 &= \nu_s \left[2\hat{M} k^i \right]
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 Tr_\gamma \left[(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M})^3 \right] &= Tr_\gamma \left[(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M})(k_0^2 - \{ \gamma^0, \gamma^l \} k_0 k_l - \vec{k}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\hat{M}(\gamma^0 k_0 - \gamma^l k_l) + \hat{M}^2) \right] \\
 &= Tr_\gamma \left[\gamma^0 k_0^3 - \gamma^0 k_0 \vec{k}^2 + \gamma^0 k_0 \hat{M}^2 + 2\hat{M}(k_0^2 - \gamma^0 \gamma^l k_0 k_l) \right. \\
 &\quad \left. - \gamma^l k_l k_0^2 + \gamma^l k_l \vec{k}^2 - \hat{M}^2 k_l \gamma^l + \hat{M} k_0^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\hat{M}(\gamma^l \gamma^0 k_0 k_l + \vec{k}^2) - \hat{M} \vec{k}^2 + \hat{M}^3 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\hat{M}^2(\gamma^0 k_0 - \gamma^l k_l) \right] \\
 &= \nu_s \left[2\hat{M}(k_0^2 - \vec{k}^2) + \hat{M}(k_0^2 - \vec{k}^2) + \hat{M}^3 \right] \\
 &= \nu_s \left[3\hat{M}(k_0^2 - \vec{k}^2) + \hat{M}^3 \right]
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Apêndice C

CÁLCULO DE $(\rho_1 + \rho_2)$

Neste apêndice mostraremos os detalhes do cálculo da correção ao Laplaceano na equação de movimento. Para tal, será necessário utilizar ferramentas descritas nos Apêndices A e B.

C.1 Cálculo de $\rho_1^{(2)}$

O primeiro termo que contribui para a correção ao Laplaceano é

$$\rho_1^{(2)}(\vec{x}) = -Tr_\gamma \int_K \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \left(\frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j \hat{M}(\vec{x}_0) \hat{x}^i \hat{x}^j \right) \times \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right). \quad (\text{C.1})$$

Para que possamos calcular este termo, devemos estudar como ∇_{k_i} atua em $\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2}$.

Temos

$$\nabla_{k_i} \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) = \frac{-\gamma^i}{(k_0^2 - E_k^2)} + \frac{2k^i (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x}))}{(k_0^2 - E_k^2)^2} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{k_j} \nabla_{k_i} \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) &= \frac{-2k^j \gamma^i - 2k^i \gamma^j}{(k_0^2 - E_k^2)^2} + \\ &+ 2\delta^{ij} \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{(k_0^2 - E_k^2)^2} \\ &+ 8k^i k^j \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{(k_0^2 - E_k^2)^3} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Para o cálculo de $\rho_1^{(2)}$, estaremos interessados apenas no termo proporcional à derivada segunda no campo quiral que contém a Eq. (C.3), *i.e.*:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \nabla_{k_j} \nabla_{k_i} \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) = \\ & = \frac{2}{(k_0^2 - E_k^2)^4} \left[\delta^{ij} (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x}))^2 (k_0^2 - E_k^2) + \right. \\ & \quad \left. - (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})) (\gamma^i k^j + \gamma^j k^i) (k_0^2 - E_k^2) + \right. \\ & \quad \left. + 4k^i k^j (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x}))^2 \right]. \end{aligned} \quad (C.4)$$

Os traços destes operadores estão calculados no Apêndice B. Ficamos então com

$$\begin{aligned} g\rho_1^{(2)}(\vec{x}) &= g\nu_s \nabla_i \nabla_j \hat{M}(\vec{x}) \int_K \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^4} \left[\delta^{ij} (k_0^2 - E_k^2) (k_0^2 - \vec{k}^2 + \hat{M}^2) \right. \\ & \quad \left. + 2k^i k^j (k_0^2 - \vec{k}^2 + 3\hat{M}^2) \right]. \end{aligned} \quad (C.5)$$

C.2 Cálculo de $\rho_2^{(1)}$

Para obtermos a contribuição completa da correção proporcional ao termo $\nabla_i \nabla_j \phi$, precisamos calcular também $\rho_2^{(1)}$:

$$\rho_2^{(1)}(\vec{x}) = Tr_\gamma \int_K \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \left[(\nabla_i \hat{M} \hat{x}^i) \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) \right]^2 \quad (C.6)$$

Na expansão do termo entre colchetes, precisaremos apenas da parte que contém a Eq. (C.2), *i.e.*

$$\nabla_{k_j} \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) \nabla_{k_i} \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right). \quad (C.7)$$

Aplicando as derivadas, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{-\gamma^i}{(k_0^2 - E_k^2)} + \frac{2k^i(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x}))}{(k_0^2 - E_k^2)^2} \right) \times \\
 & \quad \times \left(\frac{-\gamma^j}{(k_0^2 - E_k^2)} + \frac{2k^j(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x}))}{(k_0^2 - E_k^2)^2} \right) \\
 & = \frac{4k^i k^j}{(k_0^2 - E_k^2)^4} \left(k_0^2 - \vec{k}^2 + \hat{M}(\vec{x})^2 - 2\hat{M}(\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k}) \right) + \frac{\gamma^i \gamma^j}{(k_0^2 - E_k^2)^2} + \\
 & \quad - \frac{2}{(k_0^2 - E_k^2)^3} \left(k^j \gamma^i (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}) + k^i (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}) \gamma^j \right). \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

O integrando é, então,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \nabla_{k_j} \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) \nabla_{k_i} \left(\frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}(\vec{x})}{k_0^2 - E_k^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \left[4k^i k^j (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M})^3 + (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M})(\gamma^i \gamma^j)(k_0^2 - E_k^2)^2 + \right. \\
 & \quad - 2(k_0^2 - E_k^2) \left(k^j (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}) \gamma^i (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M}) + \right. \\
 & \quad \left. \left. + k^i (\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - \hat{M})^2 \gamma^j \right) \right]. \tag{C.9}
 \end{aligned}$$

Os traços destes operadores também estão calculados no Apêndice B. Com estes traços feitos, obtemos

$$g\rho_2^{(1)}(\vec{x}) = g\nu_s \hat{M} \nabla_i \hat{M}(\vec{x}) \nabla_j \hat{M}(\vec{x}) \int_K \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \left[\delta^{ij} (k_0^2 - E_k^2)^2 + 4k^i k^j (k_0^2 - \vec{k}^2 + 3\hat{M}^2) \right]. \tag{C.10}$$

Lembrando que uma condição de contorno para a solução do tipo bolha, é $\nabla\phi(r \rightarrow \infty) = 0$ podemos reescrever a integral acima como

$$g\rho_2^{(1)}(\vec{x}) = -g\nu_s \hat{M}^2 \nabla_i \nabla_j \hat{M}(\vec{x}) \int_K \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \left[\delta^{ij} (k_0^2 - E_k^2)^2 + 4k^i k^j (k_0^2 - \vec{k}^2 + 3\hat{M}^2) \right] \tag{C.11}$$

C.3 Expressão final para $\rho_1 + \rho_2$

Vamos agora ao cálculo da forma final para a correção ao Laplaceano do campo. Juntando os resultados obtidos acima, temos

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 = \nu_s \nabla_i \nabla_j \hat{M} \int_K \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \left\{ \delta^{ij} (k_0^2 - E_k^2)^2 \left[(k_0^2 - \vec{k}^2 + \hat{M}^2) - \hat{M}^2 \right] + \right. \\ \left. + 2k^i k^j \left[(k_0^2 - \vec{k}^2 + 3\hat{M}^2)(k_0^2 - E_k^2) + \right. \right. \\ \left. \left. - 2\hat{M}^2(k_0^2 - \vec{k}^2 + 3\hat{M}^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} = \nu_s \nabla_i \nabla_j \hat{M} \int_K \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \left\{ \delta^{ij} (k_0^2 - E_k^2)^2 \left[k_0^2 - \vec{k}^2 \right] + \right. \\ \left. + 2k^i k^j \left[(k_0^2 - \vec{k}^2)^2 - 9\hat{M}^4 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Reescrevendo esta equação, temos

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 = \nu_s \nabla_i \nabla_j \hat{M} \int_K \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \left\{ \delta^{ij} (k_0^2 - E_k^2)^2 \left[k_0^2 - E_k^2 + \hat{M}^2 \right] + \right. \\ \left. + 2k^i k^j \left[(k_0^2 - E_k^2 + \hat{M}^2)^2 - 9\hat{M}^4 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} = \nu_s \nabla_i \nabla_j \hat{M} \int_K \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \left\{ \delta^{ij} (k_0^2 - E_k^2)^2 \left[(k_0^2 - E_k^2) + \hat{M}^2 \right] + \right. \\ \left. + 2k^i k^j \left[(k_0^2 - E_k^2)^2 + 2(k_0^2 - E_k^2)\hat{M}^2 - 8\hat{M}^4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Podemos agora fazer a soma implícita nos índices i e j :

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 = \nu_s \nabla^2 \hat{M} \int_K \frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^3} \left[(k_0^2 - E_k^2) + \hat{M}^2 \right] + \\ + \nu_s (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \hat{M} \int_K \frac{2}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \left[(k_0^2 - E_k^2)^2 + 2(k_0^2 - E_k^2)\hat{M}^2 - 8\hat{M}^4 \right] . \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 = \nu_s \int_K \left\{ \nabla^2 \hat{M} \left[\frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^2} + \frac{\hat{M}^2}{(k_0^2 - E_k^2)^3} \right] + \right. \\ \left. + (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \hat{M} \left[\frac{2}{(k_0^2 - E_k^2)^3} + \frac{4\hat{M}^2}{(k_0^2 - E_k^2)^4} - \frac{16\hat{M}^4}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Escrevendo explicitamente \int_K ,

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_n \left\{ \nu_s \nabla^2 \hat{M} \left[\frac{1}{(k_0^2 - E_k^2)^2} + \frac{\hat{M}^2}{(k_0^2 - E_k^2)^3} \right] \right. \\ \left. + \nu_s (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \hat{M} \left[\frac{2}{(k_0^2 - E_k^2)^3} + \frac{4\hat{M}^2}{(k_0^2 - E_k^2)^4} - \frac{16\hat{M}^4}{(k_0^2 - E_k^2)^5} \right] \right\}. \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

Mais uma vez são necessários métodos de integração no plano complexo para o cálculo da soma sobre frequências. Estas técnicas estão discutidas no Apêndice A. Com a substituição de variáveis $p_0 \equiv k_0 - \mu$, a correção ao Laplaceano, $\rho_1 + \rho_2$, toma a forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\nu_s}{2\pi i} \oint_C dp_0 \left\{ \nabla^2 \hat{M} \operatorname{tgh} \left(\frac{\beta p_0}{2} \right) \left[\frac{1/2}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^2} + \frac{\hat{M}^2/2}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^3} \right] + \right. \\ \left. + (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \hat{M} \operatorname{tgh} \left(\frac{\beta p_0}{2} \right) \left[\frac{1}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^3} + \frac{2\hat{M}^2}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^4} - \frac{8\hat{M}^4}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^5} \right] \right\}. \quad (\text{C.19}) \end{aligned}$$

Reescrevendo a $\operatorname{tgh}(\beta p_0/2)$ e ignorando os termos independentes da temperatura, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\nu_s}{2\pi i} \oint_C dp_0 \left\{ \frac{\nabla^2 \hat{M}}{e^{\beta p_0} + 1} \left[\frac{1/2}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^2} + \frac{\hat{M}^2/2}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^3} \right] \right. \\ \left. + \frac{(\vec{k} \cdot \nabla)^2 \hat{M}}{e^{\beta p_0} + 1} \left[\frac{1}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^3} + \frac{2\hat{M}^2}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^4} - \frac{8\hat{M}^4}{((p_0 + \mu)^2 - E_k^2)^5} \right] \right\}. \quad (\text{C.20}) \end{aligned}$$

C.3.1 Integral em p_0

Passemos à integral no plano complexo. Podemos escrever a expressão anterior como

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\nu_s}{2\pi i} \oint_C dp_0 \left\{ \nabla^2 \phi(\vec{x}) \left[\frac{1/2}{(p_0 + \mu - E_k)^2 (p_0 + \mu + E_k)^2} \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\hat{M}^2/2}{(p_0 + \mu - E_k)^3 (p_0 + \mu + E_k)^3} \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1} \right] + \right. \\ \left. + (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \phi(\vec{x}) \left[\frac{1}{(p_0 + \mu - E_k)^3 (p_0 + \mu + E_k)^3} \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\hat{M}^2}{(p_0 + \mu - E_k)^4 (p_0 + \mu + E_k)^4} \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8\hat{M}^4}{(p_0 + \mu - E_k)^5 (p_0 + \mu + E_k)^5} \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Devemos usar o teorema de Cauchy para calcular a integral sobre p_0 . Para isso, precisamos dos seguintes resultados:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+a)^2} \frac{1}{(e^{\beta z} + 1)} \right] = -\beta \frac{1}{(z+a)^2} \frac{e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^2} - 2 \frac{1}{(z+a)^3} \frac{1}{(e^{\beta z} + 1)} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{(z+a)^3} \frac{1}{(e^{\beta z} + 1)} \right] = \beta^2 \frac{1}{(z+a)^3} \frac{e^{2\beta z} - e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^3} + 6\beta \frac{1}{(z+a)^4} \frac{e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^2} + \\ + 12 \frac{1}{(z+a)^5} \frac{1}{(e^{\beta z} + 1)}, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dz^3} \left[\frac{1}{(z+a)^4} \frac{1}{(e^{\beta z} + 1)} \right] = -\beta^3 \frac{1}{(z+a)^4} \frac{e^{3\beta z} - 4e^{2\beta z} + e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^4} + \\ -12\beta^2 \frac{1}{(z+a)^5} \frac{e^{2\beta z} - e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^3} - 60\beta \frac{1}{(z+a)^6} \frac{e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^2} \\ -120 \frac{1}{(z+a)^7} \frac{1}{(e^{\beta z} + 1)}, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4}{dz^4} \left[\frac{1}{(z+a)^5} \frac{1}{(e^{\beta z} + 1)} \right] &= +\beta^4 \frac{1}{(z+a)^5} \frac{e^{4\beta z} - 11e^{3\beta z} + 11e^{2\beta z} - e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^5} + \\
 &+ 20\beta^3 \frac{1}{(z+a)^6} \frac{e^{3\beta z} - 4e^{2\beta z} + e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^4} + \\
 &+ 180\beta^2 \frac{1}{(z+a)^7} \frac{e^{2\beta z} - e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^3} + \\
 &+ 840\beta \frac{1}{(z+a)^8} \frac{e^{\beta z}}{(e^{\beta z} + 1)^2} + \\
 &+ 1680 \frac{1}{(z+a)^9} \frac{1}{(e^{\beta z} + 1)} . \tag{C.25}
 \end{aligned}$$

Como temos dois pólos (de ordens 2 a 5) na integral de caminho, utilizaremos os resultados acima com $z = E_k - \mu$ e $a = E_k + \mu$ para um pólo e $z = -E_k - \mu$ e $a = -E_k + \mu$ para o outro.

Note ainda que

$$\frac{1}{e^{-E_k - \mu} + 1} = \frac{e^{E_k + \mu}}{e^{E_k + \mu} + 1} \tag{C.26}$$

Esta igualdade será necessária para, na expressão final, termos as contribuições de partículas e anti-partículas separadamente.

Com esses resultados em mente vamos calcular as contribuições dos dois pólos somadas para cada termo da eq.(C.21).

- Pólos de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
 & -\beta \frac{1}{(2E_k)^2} \frac{e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^2} - 2 \frac{1}{(2E_k)^3} \frac{1}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)} + \\
 & -\beta \frac{1}{(-2E_k)^2} \frac{e^{\beta(-E_k - \mu)}}{(e^{\beta(-E_k - \mu)} + 1)^2} - 2 \frac{1}{(-2E_k)^3} \frac{1}{(e^{\beta(-E_k - \mu)} + 1)} = \\
 & = -\beta \frac{1}{4E_k^2} \left[\frac{e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^2} + \frac{e^{\beta(-E_k - \mu)}}{(e^{\beta(-E_k - \mu)} + 1)^2} \right] + \\
 & \quad - 2 \frac{1}{8E_k^3} \left[\frac{1}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)} - \frac{1}{(e^{\beta(-E_k - \mu)} + 1)} \right] \\
 & = -2\beta \frac{1}{2^2 E_k^2} \left[\frac{e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^2} + \frac{e^{\beta(E_k + \mu)}}{(e^{\beta(E_k + \mu)} + 1)^2} \right] + \\
 & \quad - 2 \frac{1}{2^3 E_k^3} \left[\frac{1}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)} - 1 + \frac{1}{(e^{\beta(E_k + \mu)} + 1)} \right]
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

- Pólos de terceira ordem:

$$\begin{aligned}
 & \beta^2 \frac{1}{(2E_k)^3} \frac{e^{2\beta(E_k - \mu)} - e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^3} + 6\beta \frac{1}{(2E_k)^4} \frac{e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^2} + \\
 & + 12 \frac{1}{(2E_k)^5} \frac{1}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)} + \beta^2 \frac{1}{(-2E_k)^3} \frac{e^{2\beta(-E_k - \mu)} - e^{\beta(-E_k - \mu)}}{(e^{\beta(-E_k - \mu)} + 1)^3} + \\
 & + 6\beta \frac{1}{(-2E_k)^4} \frac{e^{\beta(-E_k - \mu)}}{(e^{\beta(-E_k - \mu)} + 1)^2} + 12 \frac{1}{(-2E_k)^5} \frac{1}{(e^{\beta(-E_k - \mu)} + 1)} = \\
 & = +\beta^2 \frac{1}{2^3 E_k^3} \left[\frac{e^{2\beta(E_k - \mu)} - e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^3} + \frac{e^{2\beta(E_k + \mu)} - e^{\beta(E_k + \mu)}}{(e^{\beta(E_k + \mu)} + 1)^3} \right] + \\
 & \quad + 6\beta \frac{1}{2^4 E_k^4} \left[\frac{e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^2} + \frac{e^{\beta(E_k + \mu)}}{(e^{\beta(E_k + \mu)} + 1)^2} \right] + \\
 & \quad + 12 \frac{1}{2^5 E_k^5} \left[\frac{1}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)} - 1 + \frac{1}{(e^{\beta(E_k + \mu)} + 1)} \right]
 \end{aligned} \tag{C.28}$$

- Pólos de quarta ordem:

$$\begin{aligned}
 & -\beta^3 \frac{1}{(2E_k)^4} \frac{e^{3\beta(E_k-\mu)} - 4e^{2\beta(E_k-\mu)} + e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^4} + \\
 & -12\beta^2 \frac{1}{(2E_k)^5} \frac{e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^3} + \\
 & -60\beta \frac{1}{(2E_k)^6} \frac{e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^2} - 120 \frac{1}{(2E_k)^7} \frac{1}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)} + \\
 & -\beta^3 \frac{1}{(-2E_k)^4} \frac{e^{3\beta(-E_k-\mu)} - 4e^{2\beta(-E_k-\mu)} + e^{\beta(-E_k-\mu)}}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)^4} + \\
 & -12\beta^2 \frac{1}{(-2E_k)^5} \frac{e^{2\beta(-E_k-\mu)} - e^{\beta(-E_k-\mu)}}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)^3} + \\
 & -60\beta \frac{1}{(-2E_k)^6} \frac{e^{\beta(-E_k-\mu)}}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)^2} - 120 \frac{1}{(-2E_k)^7} \frac{1}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)} = \\
 & = -\beta^3 \frac{1}{2^4 E_k^4} \left[\frac{e^{3\beta(E_k-\mu)} - 4e^{2\beta(E_k-\mu)} + e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^4} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{e^{3\beta(E_k+\mu)} - 4e^{2\beta(E_k+\mu)} + e^{\beta(E_k+\mu)}}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)^4} \right] \\
 & -12\beta^2 \frac{1}{2^5 E_k^5} \left[\frac{e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^3} + \frac{e^{2\beta(E_k+\mu)} - e^{\beta(E_k+\mu)}}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)^3} \right] + \\
 & -60\beta \frac{1}{2^6 E_k^6} \left[\frac{e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^2} + \frac{e^{\beta(E_k+\mu)}}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)^2} \right] + \\
 & -120 \frac{1}{2^7 E_k^7} \left[\frac{1}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)} - 1 + \frac{1}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)} \right] \tag{C.29}
 \end{aligned}$$

- Pólos de quinta ordem:

$$\begin{aligned}
 & +\beta^4 \frac{1}{(2E_k)^5} \frac{e^{4\beta(E_k-\mu)} - 11e^{3\beta(E_k-\mu)} + 11e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^5} + \\
 & +20\beta^3 \frac{1}{(2E_k)^6} \frac{e^{3\beta(E_k-\mu)} - 4e^{2\beta(E_k-\mu)} + e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^4} + \\
 & +180\beta^2 \frac{1}{(2E_k)^7} \frac{e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^3} + \\
 & +840\beta \frac{1}{(2E_k)^8} \frac{e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^2} + 1680 \frac{1}{(2E_k)^9} \frac{1}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)} + \\
 & +\beta^4 \frac{1}{(-2E_k)^5} \frac{e^{4\beta(-E_k-\mu)} - 11e^{3\beta(-E_k-\mu)} + 11e^{2\beta(-E_k-\mu)} - e^{\beta(-E_k-\mu)}}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)^5} + \\
 & +20\beta^3 \frac{1}{(-2E_k)^6} \frac{e^{3\beta(-E_k-\mu)} - 4e^{2\beta(-E_k-\mu)} + e^{\beta(-E_k-\mu)}}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)^4} + \\
 & +180\beta^2 \frac{1}{(-2E_k)^7} \frac{e^{2\beta(-E_k-\mu)} - e^{\beta(-E_k-\mu)}}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)^3} + \\
 & +840\beta \frac{1}{(-2E_k)^8} \frac{e^{\beta(-E_k-\mu)}}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)^2} + 1680 \frac{1}{(-2E_k)^9} \frac{1}{(e^{\beta(-E_k-\mu)} + 1)} = \\
 & = +\beta^4 \frac{1}{2^5 E_k^5} \left[\frac{e^{4\beta(E_k-\mu)} - 11e^{3\beta(E_k-\mu)} + 11e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^5} + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{e^{4\beta(E_k+\mu)} - 11e^{3\beta(E_k+\mu)} + 11e^{2\beta(E_k+\mu)} - e^{\beta(E_k+\mu)}}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)^5} \right] + \\
 & +20\beta^3 \frac{1}{2^6 E_k^6} \left[\frac{e^{3\beta(E_k-\mu)} - 4e^{2\beta(E_k-\mu)} + e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^4} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{e^{3\beta(E_k+\mu)} - 4e^{2\beta(E_k+\mu)} + e^{\beta(E_k+\mu)}}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)^4} \right] + \\
 & +180\beta^2 \frac{1}{2^7 E_k^7} \left[\frac{e^{2\beta(E_k-\mu)} - e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^3} + \frac{e^{2\beta(E_k+\mu)} - e^{\beta(E_k+\mu)}}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)^3} \right] + \\
 & +840\beta \frac{1}{2^8 E_k^8} \left[\frac{e^{\beta(E_k-\mu)}}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)^2} + \frac{e^{\beta(E_k+\mu)}}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)^2} \right] + \\
 & +1680 \frac{1}{2^9 E_k^9} \left[\frac{1}{(e^{\beta(E_k-\mu)} + 1)} - 1 + \frac{1}{(e^{\beta(E_k+\mu)} + 1)} \right] \tag{C.30}
 \end{aligned}$$

Descartando os termos independentes da temperatura, vemos que as equações acima podem agora ser reescritas separando-se contribuições de partículas e anti-partículas.

Para obtermos a expressão final para $\rho_1 + \rho_2$, devemos apenas levar os resultados acima na equação (C.20). Temos, então,

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \nu_s \left\{ \nabla^2 \phi(\vec{x}) [F(E_k, \mu, \beta) + F(E_k, -\mu, \beta)] + \right. \\ & \left. + (\vec{k} \cdot \nabla)^2 \phi(\vec{x}) [G(E_k, \mu, \beta) + G(E_k, -\mu, \beta)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

onde

$$\begin{aligned} F(E_k, \mu, \beta) = & -\beta^2 \left(-\frac{1}{2^4} \frac{\hat{M}^2}{E_k^3} \right) \left(\frac{e^{2\beta(E_k - \mu)} - e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^3} \right) + \\ & -\beta \left(\frac{1}{2^2 E_k^2} - \frac{3}{2^4} \frac{\hat{M}^2}{E_k^4} \right) \left(\frac{e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^2} \right) + \\ & - \left(\frac{1}{2^3 E_k^3} - \frac{3}{2^4} \frac{\hat{M}^2}{E_k^5} \right) \left(\frac{1}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

e

$$\begin{aligned} G(E_k, \mu, \beta) = & -\beta^4 \left(\frac{1}{2^2} \frac{\hat{M}^4}{E_k^5} \right) \left(\frac{e^{4\beta(E_k - \mu)} - 11e^{3\beta(E_k - \mu)} + 11e^{2\beta(E_k - \mu)} - e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^5} \right) + \\ & -\beta^3 \left(\frac{1}{2^3} \frac{\hat{M}^2}{E_k^4} + \frac{5}{2} \frac{\hat{M}^4}{E_k^6} \right) \left(\frac{e^{3\beta(E_k - \mu)} - 4e^{2\beta(E_k - \mu)} + e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^4} \right) + \\ & -\beta^2 \left(-\frac{1}{2^3 E_k^3} + \frac{3}{2^2} \frac{\hat{M}^2}{E_k^5} + \frac{45}{2^2} \frac{\hat{M}^4}{E_k^7} \right) \left(\frac{e^{2\beta(E_k - \mu)} - e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^3} \right) + \\ & -\beta \frac{3}{2^2} \left(-\frac{1}{2E_k^4} + \frac{5}{2} \frac{\hat{M}^2}{E_k^6} + 35 \frac{\hat{M}^4}{E_k^8} \right) \left(\frac{e^{\beta(E_k - \mu)}}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)^2} \right) + \\ & -\frac{3}{2^2} \left(-\frac{1}{2E_k^5} + \frac{5}{2} \frac{\hat{M}^2}{E_k^7} + 35 \frac{\hat{M}^4}{E_k^9} \right) \left(\frac{1}{(e^{\beta(E_k - \mu)} + 1)} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Bibliografia

- [1] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, 1996).
- [2] E. S. Fraga, Notas dos cursos *Introdução a Teoria de Campos a Temperatura Finita*, Instituto de Física, UFRJ, 2005-1 e *Tópicos Especiais em Teoria de Campos a Temperatura Finita*, Instituto de Física, UFRJ, 2005-2.
- [3] J. Adams, *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **91**, 072304 (2003).
- [4] Proceedings of Quark Matter 2004, J. Phys. G **30** S633 (2004).
- [5] Quark Matter 2005, <http://qm2005.kfki.hu/>.
- [6] E. Laermann and O. Philipsen, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 163 (2003).
- [7] D. F. Litim and C. Manuel, Phys. Rept. **364**, 451 (2002).
- [8] A. D. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
- [9] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe* (Westview Press, 1990).
- [10] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill Inc. 1980).
- [11] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, 1985).
- [12] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory* (WestView Press, 1995).
- [13] I. N. Mishustin and O. Scavenius, Phys. Lett. B **396**, 33 (1997).
- [14] I. N. Mishustin and O. Scavenius, Phys. Rev. Lett. **83**, 3134 (1999).

- [15] O. Scavenius and A. Dumitru, Phys. Rev. Lett. **83**, 4697 (1999).
- [16] A. Dumitru and O. Scavenius, Phys. Rev. D **62**, 076004 (2000).
- [17] O. Scavenius, A. Dumitru, E. S. Fraga, J. T. Lenaghan e A. D. Jackson, Phys. Rev. D **63**, 116003 (2001).
- [18] O. Scavenius, A. Mocsy, I. N. Mishustin e D. H. Rischke, Phys. Rev. C **64**, 045202 (2001).
- [19] K. Paech, H. Stoecker and A. Dumitru, Phys. Rev. C **68**, 044907 (2003).
- [20] C. E. Aguiar, E. S. Fraga and T. Kodama, J. Phys. G **32**, 179 (2006).
- [21] M. Gell-Mann e M. Levy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960).
- [22] V. Koch, nucl-th/9512029 (TAPS Workshop).
- [23] D. E. Groom *et al.* [Particle Data Group], Eur. Phys. J. C **15**, 1 (2000).
- [24] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [25] J. S. Schwinger, Annals Phys. **2**, 407 (1957).
- [26] S. Coleman, *Aspects of Symmetry: selected Erice Lectures of Sydney Coleman*, (Cambridge University Press, 1985).
- [27] J. S. Langer. Annals of Phy. **65**, 53 (1971).
- [28] J. S. Langer e K. Binder, *Lecture Notes in Physics* **132** (Springer-Verlag, Sitges, 1980).
- [29] J. D. Gunton, M. San Miguel e P. S. Sahni, *Phase Transitions and Critical Phenomena* (Academic Press, London, 1983), Vol. 8.
- [30] K. Binder, Rep. Prog. Phys. **50**, 783 (1987);
- [31] J. S. Langer *Solids far from equilibrium* (Editado por C. Godrèche, Cambridge University Press, 1992);
- [32] A. J. Bray, Adv. Phys. **43**, 357 (1994).

- [33] O. Scavenius, A. Dumitru and A. D. Jackson, Phys. Rev. Lett. **87**, 182302 (2001).
- [34] R. Becker e W. Döring. Annals Phys. (Leipzig) **24**, 719 (1935).
- [35] J. S. Langer, Annals Phys. **41**, 108 (1967) [Annals Phys. **281**, 941 (2000)].
- [36] J. S. Langer, Annals Phys. **54**, 258 (1969).
- [37] C. G. . Callan e S. R. Coleman, Phys. Rev. D **16**, 1762 (1977).
- [38] S. R. Coleman, Phys. Rev. D **15**, 2929 (1977) [Erratum-ibid. D **16**, 1248 (1977)].
- [39] I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **46**, 388 (1981).
- [40] A. D. Linde. Nucl. Phys. B **216**, 421 (1983).
- [41] C. Aragao De Carvalho and G. C. Marques, Phys. Lett. B **169**, 398 (1986).
- [42] J. S. Langer e M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **19**, 560 (1967); J. S. Langer e V. Ambegaokar, Phys. Rev. **164**, 498 (1967); J. S. Langer, Phys. Rev. Lett. **21**, 973 (1968).
- [43] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* (Hamilton Printing Company, 1961).
- [44] A. D. Linde, Kinetics of the phase transitions in grand unified Theories, Lebedev Phys. Inst. preprint No.266 (1981), ZhETF, submetido.
- [45] E. S. Fraga e C. A. A. de Carvalho, Phys. Rev. B **52**, 7448 (1995).
- [46] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, 1989).
- [47] A. Mocsy, I. N. Mishustin and P. J. Ellis, Phys. Rev. C **70**, 015204 (2004).
- [48] K. Paech and A. Dumitru, Phys. Lett. B **623**, 200 (2005).
- [49] I. N. Mishustin, hep-ph/0512366.
- [50] A. Dumitru, L. Portugal and D. Zschiesche, nucl-th/0511084.
- [51] C. M. Fraser, Z. Phys. C **28**, 101 (1985).
- [52] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, Phys. Rev. D **31**, 2605 (1985).

- [53] Z. B. Su e B. Sakita, Phys. Rev. B **38**, 7421 (1988).
- [54] P. K. Panigrahi, R. Ray e B. Sakita, Phys. Rev. B **42**, 4036 (1990).
- [55] C. A. A. Carvalho, D. G. Barci, e L. Moriconi, Phys. Rev. B **50**, 4648 (1994).
- [56] D. G. Barci, E. S. Fraga e C. A. A. de Carvalho, Phys. Rev. D **55**, 4947 (1997).
- [57] D. Diakonov and M. Oswald, Phys. Rev. D **70**, 016006 (2004).
- [58] B. G. Taketani e E. S. Fraga, *Relatório da XVI Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas*. (Gráfica do Instituto de Física - USP, 2004). B. G. Taketani e E. S. Fraga, *Relatório da XVII Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas*. (Gráfica do Instituto de Física - USP, 2005).
- [59] B. G. Taketani e E. S. Fraga, em fase de redação.
- [60] A. K. Das, *Finite temperature field theory* (World Scientific, 1997).
- [61] S. Alamoudi, D. G. Barci, D. Boyanovsky, C. A. A. de Carvalho, E. S. Fraga, S. E. Jorás e F. I. Takakura, Phys. Rev. D **60**, 125003 (1999)
- [62] R. D. Pisarski, Phys. Rev. D **62**, 111501 (2000).
- [63] A. Peshier, B. Kämpfer, O. P. Pavlenko e G. Soff, Phys. Rev. D **54**, 2399 (1996).
- [64] A. Mocsy, Phys. Rev. D **66**, 056010 (2002).
- [65] E. S. Fraga and G. Krein, Phys. Lett. B **614**, 181 (2005)
- [66] E. S. Fraga, hep-ph/0510344.
- [67] A. Bessa e E. S. Fraga, hep-ph/0511225.
- [68] A. J. Mizher e E. S. Fraga; L. Palhares, E. S. Fraga, T. Kodama e T. Koide; T. Koide; B. M. Tavares; E. S. Fraga; em *Relatório da XVII Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas*. (Gráfica do Instituto de Física - USP, 2005).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)