

Fabian David Backx

**Estimação de Canal e Detecção Cega de
Sinais em Sistemas de Transmissão OFDM**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica

Orientador: Dr. Raimundo Sampaio Neto

Rio de Janeiro
Abril de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Fabian David Backx

Estimação de Canal e Detecção Cega de Sinais em Sistemas de Transmissão OFDM

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC–Rio.

Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Dr. Raimundo Sampaio Neto

Orientador

Centro de Estudos em Telecomunicações/PUC–Rio

Dr. Ernesto Leite Pinto

IME

Dr. Marcello Luiz Rodrigues de Campos

COPPE/UFRJ

Dr. José Mauro Pedro Fortes

Centro de Estudos em Telecomunicações/PUC–Rio

Dr. Weiler Alves Finamore

Centro de Estudos em Telecomunicações/PUC–Rio

Dr. Sergio Lima Netto

COPPE/UFRJ

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —
PUC–Rio

Rio de Janeiro, 03 de Abril de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Fabian David Backx

Graduou-se em Engenharia de Telecomunicações na UFF (Universidade Federal Fluminense) em 2002. Recebeu o título de Mestre em Engenharia Elétrica na área de Sistemas de Comunicação pela PUC–Rio em 2004.

Ficha Catalográfica

David Backx, Fabian

Estimação de Canal e Detecção Cega de Sinais em Sistemas de Transmissão OFDM / Fabian David Backx; orientador: Raimundo Sampaio Neto . – 2009.

119 f. : il. (color.) ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. OFDM. 3. Estimação cega de canal. 4. Estimação de canal via Subespaço de ruído. 5. Casamento de correlação. I. Sampaio Neto, Raimundo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

Aos meus pais, Arago e Janine.

Agradecimentos

Ao professor Raimundo, pela orientação e ajuda na elaboração deste trabalho. Muito obrigado por todos os seus ensinamentos, e por estar sempre disposto a ingressar nos mais variados debates suscitados pelas minhas eternas dúvidas.

Aos membros da banca examinadora, pelas valiosas sugestões que contribuíram para enriquecer a versão final deste texto.

À minha família, por todo o carinho e suporte, e pela confiança em mim depositada.

Aos meus amigos. Em especial aos meus colegas do laboratório de Sistemas de Comunicação ao longo de todos estes anos: Amanda Cunha, Bernardo Costa, Carol Finamore, Cesar Medina, Cláudia Quevedo, Danilo Silva, Deolinda Cardoso, Fred Berkowicz, José Antônio Seibnitz, Juan Otálora, Marcio A. de Souza, Rodrigo de Lamare, e Tiago Vinhoza.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelo apoio financeiro concedido.

Resumo

David Backx, Fabian; Sampaio Neto, Raimundo (Orientador) . **Estimação de Canal e Detecção Cega de Sinais em Sistemas de Transmissão OFDM**. Rio de Janeiro, 2009. 119p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O esquema OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) é um esquema de transmissão de sinais por multiplexação em frequência e sua adoção vem mostrando-se bastante promissora no que diz respeito à transmissão de sinais em canais seletivos em frequência. Sua relativa robustez frente a canais com múltiplos percursos é conseguida efetuando-se a transmissão paralela de dados em subportadoras ortogonais estreitas. Os receptores OFDM, de uma forma geral, necessitam de estimativas do canal de comunicação para realizar a detecção coerente dos sinais recebidos. Estimativas do canal podem ser obtidas de forma assistida por meio da utilização de pilotos que consomem preciosa banda, ou de forma cega, valendo-se apenas do conhecimento de características estatísticas dos sinais transmitidos. Esta tese segue a linha de estimação cega de canal. São propostos dois estimadores cegos de canal, para sistemas OFDM com intervalo de guarda ZP ou CP. O primeiro baseia-se no casamento de correlação, a saber: a estimativa do canal corresponde ao argumento que minimiza a norma quadrática de Frobenius da diferença entre a matriz correlação teórica parametrizada dos sinais recebidos e uma estimativa desta matriz obtida por meio das observações no receptor. O segundo estimador é desenvolvido a partir de uma modificação do método de identificação de canal por meio da estimação do subespaço de ruído, lançando mão de uma estimativa para o operador projeção no subespaço de ruído. Técnicas para resolver a ambigüidade complexa presente nas estimativas do canal que resultam dos métodos propostos são abordadas. Os estimadores propostos são estendidos para sistemas OFDM ditos com intervalo de guarda insuficiente. Resultados de simulações ilustram o desempenho, tanto em termos de erro quadrático médio dos estimadores, quanto em taxa de erro de bit dos sistemas.

Palavras-chave

OFDM. Estimação cega de canal. Estimação de canal via Subespaço de ruído. Casamento de correlação.

Abstract

David Backx, Fabian; Sampaio Neto, Raimundo (Advisor) . **Blind Channel Estimation and Signal Detection in OFDM Transmission Systems**. Rio de Janeiro, 2009. 119p. DSc Thesis — Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Orthogonal Frequency Division Multiplexing is a multi-carrier transmission technique suitable for wireless communications through frequency selective channels, thus making it an appealing scheme for next-generation applications demanding high data rates. Its robustness with respect to multipath channels is obtained by modulating a set of closely-spaced orthogonal sub-carriers. In order to coherently detect the received signals, Channel State Information must be available to OFDM receivers. Supervised channel estimation is achieved by multiplexing known pilot symbols and data symbols, thus reducing effective system throughput. On the other hand, unsupervised or blind estimation techniques rely solely on the knowledge of statistical characteristics of the transmitted signal in order to identify the channel. This thesis proposes two blind channel estimators, for OFDM systems with CP or ZP guard interval. The first estimator is based on correlation matching: a channel estimate is obtained as the argument which minimizes the Frobenius quadratic norm of the difference between the parameterized theoretical correlation matrix of the transmitted signals and an estimate of that matrix obtained by means of observations at the receiver. The second estimator is obtained by modifying the noise subspace based channel estimator and using an estimate for the noise subspace projector which relies on powers of the inverse correlation matrix. Techniques to eliminate the inherent complex ambiguity derived from the proposed blind channel estimators are addressed. The proposed estimators' formulation is also extended to the case of OFDM systems with insufficient guard intervals. Simulation results depict Mean Square Error of the proposed estimators, as well as Bit Error Rate performance of systems using those estimators in various scenarios.

Keywords

OFDM. Blind channel estimation. Noise subspace based channel estimation. Correlation matching.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Breve Histórico do OFDM	13
1.2	Motivação e Objetivo	14
1.3	Organização do Texto	17
1.4	Notação Adotada	18
2	Modelo de Sinais	19
2.1	Introdução	19
2.2	Modelo de Comunicação	19
2.2.1	Transmissão do Sinal OFDM	19
2.2.2	Recepção do Sinal OFDM	22
3	Receptores OFDM para Intervalo de Guarda Suficiente	27
3.1	Introdução	27
3.2	Receptores Convencionais	27
3.2.1	Receptor Convencional para OFDM-CP	27
3.2.2	Receptor Convencional para OFDM-ZP	30
3.3	Analogia entre os Sinais OFDM e CDMA	36
4	Estimação Cega de Canal para Intervalo de Guarda Suficiente	38
4.1	Introdução	38
4.2	Estimação Cega de Canal por meio do Subespaço de Ruído	38
4.3	Método das Potências: OFDM-ZP	42
4.3.1	Implementação Alternativa pós-DFT	45
4.4	Método das Potências: OFDM-CP	49
4.5	Casamento de Correlação: OFDM-ZP	53
4.6	Casamento de Correlação: OFDM-CP	57
4.7	Resultados	59
4.7.1	Preliminares	59
4.7.2	Casamento de Correlação – OFDM-ZP	59
4.7.3	Método das Potências – OFDM-ZP	66
4.7.4	Casamento de Correlação – OFDM-CP	72
4.7.5	Método das Potências – OFDM-CP	75
4.7.6	Estimação de σ^2 – OFDM-ZP	79
4.7.7	Expressão Analítica do MSE – OFDM-ZP	80
4.8	Resolvendo a Ambigüidade – OFDM-ZP	83
5	Sistemas OFDM com Intervalo de Guarda Insuficiente	88
5.1	Introdução	88
5.2	Deteção de Sinais	88
5.3	Estimação Cega de Canal	88
5.3.1	Estimação de Canal por meio do Método das Potências	89
5.3.2	Estimação de Canal com Casamento de Correlação	97
5.3.3	Resultados	100

6	Conclusão	104
	Referências Bibliográficas	107
A	Equalizadores MMSE e ZF	115
A.1	Equalizador MMSE	115
A.1.1	Exemplo: OFDM-ZP	115
A.1.2	Exemplo: OFDM-CP	116
A.2	Equalizador ZF	117
A.2.1	Exemplo: OFDM-ZP	118
A.2.2	Exemplo: OFDM-CP	119

Lista de figuras

2.1	Modelo do Transmissor	19
2.2	Equivalente passa-baixa do sistema de comunicações	23
2.3	Modelo vetorial de sinais	25
3.1	Modelo vetorial de sinais: OFDM-CP	28
3.2	Estrutura do Receptor Convencional OFDM-CP	30
3.3	Modelo vetorial de sinais: OFDM-ZP	31
3.4	Estrutura do Receptor <i>Zero Forcing</i> OFDM-ZP	32
3.5	Estrutura do Receptor MMSE OFDM-ZP	33
3.6	Estrutura do Receptor <i>Zero Forcing</i> Pós-DFT OFDM-ZP	35
4.1	Resposta em Frequência do canal fixo	60
4.2	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 0dB$	61
4.3	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$	61
4.4	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 10dB$	62
4.5	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 15dB$	62
4.6	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 20dB$	63
4.7	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 25dB$	63
4.8	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-ZP	64
4.9	Taxa de Erro de Bit, 'corrmatch', OFDM-ZP	65
4.10	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 0dB$	67
4.11	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$	67
4.12	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 10dB$	68
4.13	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 15dB$	68
4.14	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 20dB$	69
4.15	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-ZP, $\frac{E_B}{N_0} = 25dB$	69
4.16	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-ZP	70
4.17	Taxa de Erro de Bit, 'Pot', OFDM-ZP	71
4.18	Resposta em Frequência do canal fixo	72
4.19	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-CP, $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$	73
4.20	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-CP, $\frac{E_B}{N_0} = 15dB$	74
4.21	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-CP, $\frac{E_B}{N_0} = 25dB$	74
4.22	Erro quadrático médio, 'corrmatch', OFDM-CP	75
4.23	Taxa de Erro de Bit, 'corrmatch', OFDM-CP	76
4.24	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-CP, $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$	77
4.25	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-CP, $\frac{E_B}{N_0} = 15dB$	77
4.26	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-CP, $\frac{E_B}{N_0} = 25dB$	78
4.27	Erro quadrático médio, 'Pot', OFDM-CP	78
4.28	Taxa de Erro de Bit, 'Pot', OFDM-CP	79
4.29	Estimação de σ^2 , 'corrmatch', OFDM-ZP, $\hat{L} = L$	80
4.30	Estimação de σ^2 , 'corrmatch', OFDM-ZP, $\hat{L} = D$	81
4.31	Resposta em Frequência do canal fixo	82
4.32	Erro quadrático médio, Analítico, 'corrmatch', OFDM-ZP	83

4.33 Resolvendo a ambigüidade, MSE	87
4.34 Resolvendo a ambigüidade, Taxa de Erro de Bit	87
5.1 Resposta ao Impulso do canal fixo	100
5.2 Resposta em Frequência do canal fixo	101
5.3 Desempenho MSE, 'corrmatch-IBI', OFDM-ZP	101
5.4 Taxa de Erro de Bit, corrmatch-IBI, OFDM-ZP	102

Lista de tabelas

5.1	Coeficientes do Canal	103
-----	-----------------------	-----

1

Introdução

1.1

Breve Histórico do OFDM

O esquema OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) é um esquema de transmissão de sinais por multiplexação em frequência que data do final da década de sessenta, e pode ser visto como uma evolução natural do esquema FDM (Frequency Division Multiplexing).

A transmissão dos sinais de comunicação pode ser dividida em dois paradigmas: transmissão por meio de portadora única (ou *Single Carrier Modulation–SCM*) ou transmissão por meio de múltiplas portadoras (ou *Multicarrier Modulation–MCM*). No caso de transmissão por portadora única, os símbolos que compõem os sinais de dados modulam uma única portadora, e são transmitidos serialmente a cada intervalo de sinalização. Já para o caso de transmissão por múltiplas portadoras, os sinais de dados são divididos em blocos de N símbolos ao longo do tempo, sendo que cada símbolo modula uma dentre N portadoras. Os N símbolos do bloco são portanto transmitidos de forma paralela (i.e. simultaneamente) a cada intervalo de sinalização, dividindo assim o espectro de frequências em vários subcanais estreitos. Todavia, a duração de um símbolo transmitido por meio de MCM é N vezes maior do que a duração de um símbolo transmitido usando SCM, de forma que a taxa de transmissão permanece inalterada. Daí decorre que, idealmente, sistemas MCM experimentam Interferência entre Símbolos (IES, ou *ISI–Inter Symbol Interference*) menos severa do que sistemas SCM, e portanto na recepção podem ser empregados equalizadores mais curtos e assim menos complexos. Esta parece ter sido a principal motivação para pesquisa e emprego de sistemas MCM à época dos seus estágios iniciais de desenvolvimento. Mas os sistemas MCM não trouxeram somente os benefícios de uma equalização mais simples.

Os primeiros sistemas MCM conseguiam a separação dos subcanais às custas de filtros com faixa de transição muito abrupta de modo a separar completamente os sinais no domínio da frequência, e com o emprego de faixas de guarda entre os subcanais. O arranjo de filtros era custoso e a faixa de guarda acarretava uma baixa eficiência espectral do sistema.

Destas dificuldades, e da constatação de que subportadoras ortogonais e superposição em frequência não são eventos mutuamente exclusivos, surgiram os precursores do OFDM moderno [1, 2, 3, 4], que apresentavam eficiência espectral muito mais elevada que a de seus antecessores. De fato, se o espaçamento Δf entre as portadoras for tal que $\Delta f = \frac{1}{T}$, onde T é a duração do símbolo transmitido em um subcanal, então apesar dos canais não serem disjuntos no domínio da frequência, ainda assim eles podem ser separados na recepção. Porém, como a implementação do banco de moduladores no transmissor e demoduladores no receptor era feita de forma analógica, a condição de ortogonalidade era difícil de ser conseguida na prática.

Por conta das dificuldades práticas de implementação, apenas algumas poucas aplicações [3, 5], em sua maioria militares, adotaram esta técnica no passado. A situação começou a mudar [6, 7] depois da publicação de [8], onde mostra-se que sinais OFDM podem ser gerados digitalmente a partir da transformada discreta de Fourier. Mais especificamente, o banco de moduladores pode ser implementado de forma eficiente no domínio digital por meio da transformada inversa discreta de Fourier, e o banco de demoduladores coerentes pode ser implementado por uma transformada direta discreta de Fourier.

Com o advento de processadores especializados em calcular a agora corrente transformada discreta de Fourier (e sua inversa), a técnica OFDM vem ganhando cada vez mais destaque desde o início da década de noventa e vem sendo empregada com sucesso em vários tipos de aplicações diferentes como por exemplo: em redes de acesso fixas ADSL [9] (ex: padrão G.DMT [10]), nos sistemas de transmissão de áudio digital (ex: padrão DAB [11]) e televisão digital [12] (ex: padrões DVB-T [13], ISDB-T), e em redes locais sem fio [14] (ex: padrão IEEE802.11a/g [15, 16]). O OFDM também é um dos alicerces de técnicas de múltiplo acesso recentemente propostas [17, 18], como o OFDMA [19], o MC-DS-CDMA [20] e o MC-CDMA [21].

1.2

Motivação e Objetivo

Uma vez que o OFDM efetua a transmissão paralela de dados em subportadoras ortogonais estreitas, seu emprego vem se mostrando bastante promissor no que diz respeito à transmissão de sinais em canais seletivos em frequência, dada sua robustez frente a canais com múltiplos percursos. A idéia básica do OFDM é: converter um canal seletivo em frequência em vários canais planos paralelos (um canal plano para cada portadora). Para que este efeito seja obtido, é necessária a inserção de um intervalo de guarda com estrutura bem definida e de comprimento maior ou igual ao comprimento do canal de comunicação. Os sistemas OFDM podem ser

classificados quanto à estrutura do intervalo de guarda adotado. Existem pelo menos dois tipos de OFDM: a saber o OFDM-CP (OFDM *with Cyclic Prefixing*) e o OFDM-ZP (OFDM *with Zero Padding*).

No caso do OFDM-CP, o intervalo de guarda, inserido no início de cada símbolo OFDM, é na verdade um prefixo cíclico, e tem dupla finalidade: garantir a ausência de interferência entre símbolos OFDM (ou interferência entre blocos; *Inter Block Interference* – IBI) e permitir a recuperação dos símbolos de dados por meio de um processamento simples conhecido por equalização no domínio da frequência lançando mão de um equalizador de um único tap por portadora. Todavia, se uma portadora estiver experimentando um nulo do canal, a informação por ela transmitida não é passível de ser recuperada.

Isso motivou a introdução de outro tipo de OFDM, o OFDM-ZP [22], que tem um intervalo de guarda inserido ao fim do símbolo OFDM a ser transmitido. Este intervalo de guarda na verdade é um intervalo de silêncio que também evita o aparecimento de IBI mas não permite uma equalização tão simples quanto sua contraparte OFDM-CP. Por outro lado, o OFDM-ZP não padece do mesmo problema de não-detectabilidade do OFDM-CP.

Os receptores OFDM de uma forma geral necessitam de estimativas do canal de comunicação para poder realizar a detecção coerente dos sinais. Essa estimação de canal pode ser feita de forma assistida por meio de pilotos [23, 24, 25, 26, 27] que consomem preciosa banda, ou de forma cega (ou semi-cega), valendo-se apenas de algumas informações a respeito das características (estatísticas) dos sinais recebidos.

Os métodos ditos cegos exploram o fato de que os sinais transmitidos possuem características supostas conhecidas *a priori* [28]. Estas características são modificadas pelo canal de comunicação, que eventualmente também pode apresentar alguma estrutura conhecida e passível de ser explorada. Na recepção, comparando as características do sinal recebido com as do sinal transmitido, é possível com base nas distorções introduzidas realizar a estimação cega do canal e a posterior detecção dos dados. Por causa do modelo de sinais adotado, os primeiros métodos exploravam somente estatísticas de ordem superior (*higher order statistics* – HOS) do sinal [29, 30, 31]. Em [32], ficou comprovado que sob certas condições é possível realizar a estimação cega do canal empregando exclusivamente estatísticas de segunda ordem (*second order statistics* – SOS) do sinal.

O método de [32] é um método de subespaço, mas que não explora a estrutura inerente apresentada pelo canal. Este fato foi explorado em [33, 34], dando origem a um método conhecido como estimação de canal por meio do subespaço de ruído. De forma sucinta, o método explora a ortogonalidade entre os ditos subespaço de sinal e subespaço de ruído, e leva em conta que os vetores que geram o subespaço

de sinal se relacionam de forma linear com o canal. A partir de estimativas do subespaço de ruído, que podem ser obtidas das observações, força-se a condição de ortogonalidade entre os subespaços, tendo o canal como parâmetro livre. Este método vem sendo usado desde então exaustivamente na literatura [35], sendo aplicado por exemplo em sistemas CDMA [36, 37] e OFDM [38, 39, 40, 41, 42].

Outra classe de algoritmos cegos para estimação de canal atende pelo nome de método dos momentos (*moment methods*) ou casamento de momentos (*moment matching*) [43]. De forma geral, estes métodos parametrizam com relação ao canal, o momento de n -ésima ordem das observações. Alguma métrica entre a estimativa do momento de n -ésima ordem – obtida por meio das observações – e o momento de n -ésima ordem teórico é minimizada, tendo o canal como parâmetro livre. Um caso particular do casamento de momentos é o casamento de correlação (*correlation matching*), que emprega exclusivamente SOS das observações. Este método foi aplicado com sucesso em sistemas CDMA em [44, 45].

Cabe mencionar também o dual de estimação cega de canal, a equalização cega de canal [46], que também permite a detecção dos dados, utilizando HOS [47, 48] ou SOS [49, 50, 51, 52, 53, 54].

Com relação à estimação de canal em sistemas OFDM mais especificamente, em [55], é proposto um método de subespaço que estima de forma cega o canal a partir da correlação cíclica do sinal OFDM-CP recebido. Já em [38] e em [39], são introduzidos métodos semelhantes explorando a ortogonalidade entre os subespaços de ruído e de sinal, com inspiração em [34] para sistemas OFDM-CP, explorando a redundância introduzida pelo intervalo de guarda. Ainda inspirado pelo método em [34], [41] investiga a possibilidade de estimar o canal de forma cega em sistemas OFDM sem intervalo de guarda; esta abordagem necessita que o sinal seja sobre-amostrado ou que se use um arranjo de antenas na recepção. Os mesmos autores estendem também o método de subespaço de ruído para sistemas OFDM-CP com portadoras nulas em [42]. Um algoritmo cego de estimação de canal também baseado no subespaço de ruído foi apresentado em [56], para sistemas OFDM-ZP.

Recentemente tem havido um crescente interesse em desenvolver receptores que operem em sistemas OFDM com intervalo de guarda insuficiente e também é preciso estimar o canal nestas condições [41, 57, 58, 59, 60]. De fato, quanto mais dispersivo for o canal de comunicação, maior deverá ser a duração do intervalo de guarda inserido para que não haja IBI. Como o intervalo de guarda consome energia na transmissão (no caso do OFDM-CP) e diminui o throughput, visto que não carrega informação, deve existir um compromisso entre sua duração e o desempenho do sistema.

O presente trabalho propõe investigar técnicas cegas de estimação de canal para sistemas OFDM com intervalo de guarda suficiente e também para sistemas

OFDM com intervalo de guarda insuficiente. Mais especificamente, propõe-se estender e aplicar técnicas cegas de estimação oriundas da literatura de sistemas CDMA em sistemas OFDM, uma vez que esses dois sistemas apresentam muitas semelhanças entre si.

1.3

Organização do Texto

O Capítulo 2 apresenta o modelo de comunicações adotado. O sistema de interesse é definido. Os diferentes elementos do sistema, tais como o transmissor, o canal, o receptor são abordados. O modelo matemático dos sinais para sistemas de transmissão em blocos é elaborado. O modelo vetorial equivalente é apresentado. O modelo é particularizado para descrever dois casos de interesse: OFDM-ZP e OFDM-CP.

O Capítulo 3 aborda os receptores usuais para sistemas OFDM com intervalo de guarda suficiente. São apresentadas as estruturas para os dois tipos de OFDM introduzidos no Capítulo 2. O capítulo termina com uma discussão sobre as analogias entre sistemas OFDM e CDMA e as oportunidades que estas semelhanças proporcionam.

O Capítulo 4 apresenta técnicas cegas de estimação de canal para sistemas OFDM com intervalo de guarda suficiente. Foi constatado ao longo do Capítulo 3 que os receptores passíveis de serem utilizados para sistemas OFDM necessitam de estimativas de canal. Dois métodos de estimação cega de canal são abordados: estimação de canal por identificação do subespaço do ruído e estimação de canal por casamento de correlação. Em um primeiro momento, um esquema de estimação de canal por subespaço próprio para sistemas OFDM-ZP é descrito com vistas a introduzir o problema. A seguir, lançando mão da analogia entre sistemas OFDM e CDMA, um método usado em sistemas CDMA para estimação de canal [37] é proposto para sistemas OFDM-ZP [61]. O mesmo método também é aplicado em sistemas OFDM-CP. O esquema de estimação por casamento de correlação abordado em seguida é ele também emprestado de sistemas CDMA [44, 45] e sua aplicação para sistemas OFDM-ZP [62] e OFDM-CP é proposta. Resultados de simulações ilustram o desempenho dos estimadores apresentados.

O Capítulo 5 trata de sistemas OFDM com intervalo de guarda insuficiente. O modelo de sinais é revisado para refletir a imperfeição introduzida no sistema. O problema de estimação de canal é revisitado. Os esquemas propostos no Capítulo 4 são estendidos ao novo modelo de sinais e seus desempenhos obtidos por meio de simulações são ilustrados para alguns casos de interesse.

O Capítulo 6 apresenta algumas considerações finais.

1.4

Notação Adotada

Caracteres maiúsculos em negrito denotam matrizes. Caracteres minúsculos em negrito denotam vetores.

Os operadores $\Re\{\cdot\}$ e $\Im\{\cdot\}$ retornam, respectivamente, as partes real e imaginária de um número complexo.

Os símbolos $\star \otimes \odot {}^T H^\dagger *$ indicam respectivamente: convolução linear, produto de Kronecker, produto de Hadamard, transposto de um vetor (ou de uma matriz), transposto conjugado de um vetor (ou de uma matriz), pseudoinversa de uma matriz, e conjugado de um escalar (ou vetor) complexo.

A matriz $\mathbf{I}_K$ denota a matriz identidade de tamanho $K \times K$.

A matriz $\text{diag}(\mathbf{a})$ é uma matriz diagonal que contém as componentes do vetor $\mathbf{a}$.

Define-se o operador $\text{vec}(\cdot)$ como o operador que empilha as colunas de uma matriz, produzindo um vetor, ou seja, se $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_K]$ então $\text{vec}(\mathbf{A}) = [\mathbf{a}_1^T \ \mathbf{a}_2^T \ \dots \ \mathbf{a}_K^T]^T$ e $\text{unvec}(\text{vec}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$.

A norma de Frobenius de uma matriz $\mathbf{A}$ de tamanho $M \times N$, denotada $\|\mathbf{A}\|_F$, é definida como $\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\text{vec}^H(\mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{A}) \right)^{\frac{1}{2}}$, onde a_{ij} é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de $\mathbf{A}$.

O traço de uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de tamanho $N \times N$ é definido como $\text{Tr}[\mathbf{A}] = \sum_{i=1}^N a_{ii}$.

2

Modelo de Sinais

2.1

Introdução

No presente capítulo é apresentado o modelo de comunicação adotado.

O modelo matemático de sinais transmitidos por sistemas de transmissão em blocos e mais particularmente para sistemas OFDM-ZP e OFDM-CP é apresentado na Seção 2.2.1.

Na Seção 2.2.2, os sinais transmitidos são discretizados no receptor, obtendo-se um modelo vetorial equivalente para os sinais recebidos.

2.2

Modelo de Comunicação

2.2.1

Transmissão do Sinal OFDM

Um sistema de transmissão OFDM admite uma implementação digital [63] e pode ser visto de uma forma mais geral como um sistema de transmissão digital em blocos [18, 64], sendo cada bloco composto por P amostras (também chamadas sub-símbolos) transmitidas serialmente.

O modelo adotado para o transmissor de um sistema de transmissão em blocos está ilustrado na Figura 2.1.

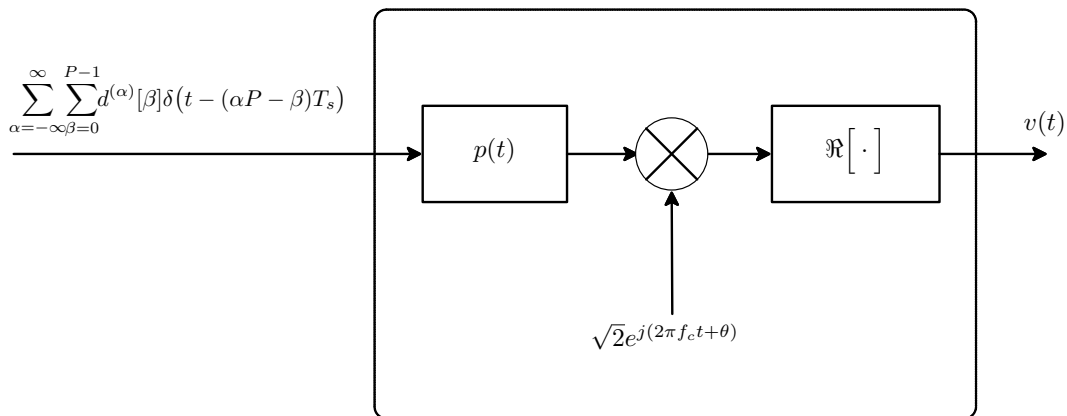


Figura 2.1: Modelo do Transmissor

Seja $v(t)$, dado por

$$\begin{aligned} v(t) &= \Re\{m(t)e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \Re\{m(t)\} \cos 2\pi f_c t - \Im\{m(t)\} \sin 2\pi f_c t, \end{aligned}$$

o sinal que representa uma sequência infinita de blocos transmitidos, e sua envoltória complexa [65, 66, 67] com relação à frequência f_c , $m(t)$, dada por:

$$m(t) = \sqrt{2}e^{j\theta} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \alpha PT_s - \beta T_s) \star p(t), \quad (2.1)$$

onde $p(t)$ é o pulso formatador, de duração T_s , $d^{(\alpha)}[\beta]$ é a β -ésima amostra associada ao α -ésimo bloco transmitido, e θ é uma fase arbitrária introduzida pelo oscilador presente no transmissor. Como um bloco é composto por P amostras sua duração é portanto PT_s .

Para o caso de um sistema OFDM com M portadoras e intervalo de guarda de duração DT_s , um bloco corresponde a um símbolo OFDM acrescido de seu intervalo de guarda e tem-se $P = M + D$. As amostras que formam um sub-símbolo têm expressões diferentes para sistemas OFDM-ZP e OFDM-CP.

OFDM-ZP

Sistemas OFDM-ZP têm um intervalo de guarda inserido ao final de cada símbolo. Esse intervalo de guarda nada mais é do que um período de silêncio [56]. A envoltória complexa do sinal que representa uma sequência infinita de símbolos OFDM-ZP transmitidos é dada por:

$$m_{\text{ZP}}(t) = \sqrt{2}e^{j\theta} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} \tilde{s}_{\text{ZP}}^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \alpha PT_s - \beta T_s) \star p(t). \quad (2.2)$$

As amostras $\tilde{s}_{\text{ZP}}$ em (2.2) satisfazem:

$$\tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=0}^{M-1} s^{(i)}[n] e^{\frac{j2\pi nk}{M}} & , \quad 0 \leq k \leq M-1 \\ 0 & , \quad M \leq k \leq P-1 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $s^{(i)}[n]$ é uma variável aleatória complexa que representa o i -ésimo símbolo de informação oriundo de uma constelação bidimensional e transmitido pela n -ésima subportadora, com $\mathbb{E}[|s^{(i)}[n]|^2] = E_{i,n}$ e $\mathbb{E}[s^{(i)}[n]] = 0$. Ainda na expressão (2.3), que define as amostras $\tilde{s}_{\text{ZP}}$, observa-se que $\tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[k]$, para $0 \leq k \leq M-1$, é a k -ésima componente da transformada de Fourier discreta inversa (IDFT) de M pontos da sequência discreta $\{s^{(i)}[n]\}_{n=0}^{M-1}$ [8].

Seja F_M a matriz da transformada discreta de Fourier (DFT) (normalizada) de M pontos definida como [68]:

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_M^1 & W_M^2 & \dots & W_M^{(M-1)} \\ 1 & W_M^2 & W_M^4 & \dots & W_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_M^{(M-1)} & W_M^{2(M-1)} & \dots & W_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

com $W_M = e^{\frac{-j2\pi}{M}}$. A matriz $\mathbf{F}_M$ é unitária, ou seja:

$$\mathbf{F}_M^{-1} = \mathbf{F}_M^H, \quad \mathbf{F}_M \mathbf{F}_M^H = \mathbf{I}_M, \quad \mathbf{F}_M^H \mathbf{F}_M = \mathbf{I}_M.$$

Seja também o vetor $\mathbf{s}(i)$, de tamanho $M \times 1$, definido por

$$\mathbf{s}(i) = [s^{(i)}[0] \ s^{(i)}[1] \ \dots \ s^{(i)}[M-1]]^T,$$

e que contém os símbolos de informação transmitidos por cada uma das M subportadoras durante o i -ésimo intervalo de sinalização OFDM.

O vetor $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{ZP}}(i)$, de tamanho $P \times 1$, dado por

$$\tilde{\mathbf{s}}_{\text{ZP}}(i) = [\tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[0] \ \tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[1] \ \dots \ \tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[P-1]]^T,$$

que contém as P amostras do i -ésimo símbolo OFDM-ZP transmitido, pode portanto ser escrito em função do vetor $\mathbf{s}(i)$ e da matriz $\mathbf{F}_M$ como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}_{\text{ZP}}(i) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) \\ &= \mathbf{F}_{\text{ZP}} \mathbf{s}(i), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\mathbf{F}_{\text{ZP}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

OFDM-CP

Sistemas OFDM-CP têm um intervalo de guarda inserido no início de cada símbolo OFDM a ser transmitido. O intervalo de guarda é na verdade um prefixo cíclico, ou seja, uma cópia das D últimas amostras do símbolo OFDM (antes da inserção do intervalo de guarda) [56]. Assim, a envoltória complexa do sinal que representa uma seqüência infinita de símbolos OFDM-CP transmitidos é dada por:

$$m_{\text{CP}}(t) = \sqrt{2}e^{j\theta} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} \tilde{s}_{\text{CP}}^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \alpha PT_s - \beta T_s) \star p(t), \quad (2.7)$$

onde as amostras $\tilde{s}_{\text{CP}}$ obedecem:

$$\tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[k] = \begin{cases} \tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[k + M] & , \quad 0 \leq k \leq D - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=0}^{M-1} s^{(i)}[n] e^{\frac{j2\pi n(k-D)}{M}} & , \quad D \leq k \leq P - 1 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Identificando uma vez mais a IDFT na expressão para as amostras $\tilde{s}_{\text{CP}}$ em (2.8), pode-se escrever o vetor $\tilde{s}_{\text{CP}}(i)$, de tamanho $P \times 1$, contendo as P amostras do i -ésimo símbolo OFDM-CP transmitido e definido por

$$\tilde{s}_{\text{CP}}(i) = [\tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[0] \ \tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[1] \ \dots \ \tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[P - 1]]^T,$$

em função do vetor $s(i)$ como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{\text{CP}}(i) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{D \times (M-D)} & \mathbf{I}_D \\ & \mathbf{I}_M \end{bmatrix} \mathbf{F}_M^H s(i) \\ &= \mathbf{F}_{\text{CP}} s(i), \end{aligned} \quad (2.9)$$

com

$$\mathbf{F}_{\text{CP}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{D \times (M-D)} & \mathbf{I}_D \\ & \mathbf{I}_M \end{bmatrix} \mathbf{F}_M^H. \quad (2.10)$$

2.2.2

Recepção do Sinal OFDM

O diagrama em blocos do equivalente passa-baixas do sistema de transmissão/recepção está ilustrado na Figura 2.2. A envoltória complexa $m(t)$, do sinal $v(t)$, definida na Seção anterior, é transmitida através de um canal passa-baixa seletivo em frequência e não-seletivo no tempo, cuja resposta ao impulso é denotada $h_c(t)$. O sinal resultante é corrompido por ruído aditivo gaussiano branco (AWGN) e filtrado por um filtro de detecção com resposta ao impulso⁽¹⁾ $h_d(t)$. Supondo recuperação perfeita de portadora pelo receptor, a envoltória complexa do agregado de sinais presente na saída do filtro de detecção, denotada $r(t)$, é dada por:

$$r(t) = \frac{e^{-j\theta}}{\sqrt{2}} \left\{ m(t) \star h_c(t) \star h_d(t) + n_w(t) \star h_d(t) \right\}, \quad (2.11)$$

⁽¹⁾Usualmente, o filtro de detecção $h_d(t)$ é casado ao filtro formatador de pulso $p(t)$, garantindo assim, em canal AWGN, a máxima razão sinal-ruído na saída do filtro de detecção nos instantes de amostragem.

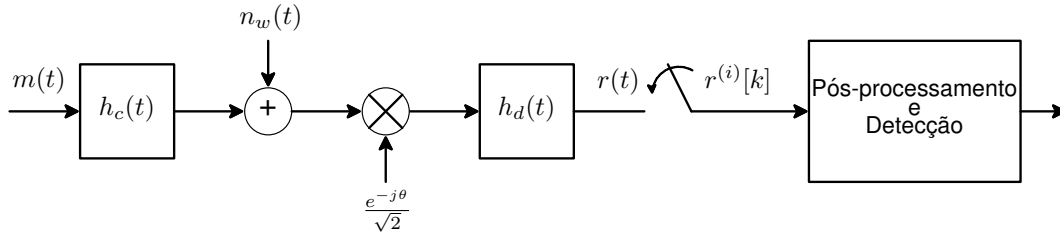


Figura 2.2: Equivalente passa-baixa do sistema de comunicações

onde $n_w(t)$ é a envoltória complexa, com relação à frequência f_c , do ruído aditivo gaussiano branco presente na entrada do receptor.

O processo $n_w(t)$ é caracterizado como segue:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[n_w(t)] &= 0 \quad \forall t; \\ \mathbb{E}[n_w(t_1)n_w^*(t_2)] &= 2N_0\delta(t_2 - t_1); \\ \mathbb{E}[n_w(t_1)n_w(t_2)] &= 0, \quad \forall (t_1, t_2), \text{ (incluindo } t_1 = t_2)\end{aligned}$$

e sua densidade espectral de potência é dada por:

$$S_{n_w}(f) = 2N_0.$$

Susbtituindo (2.1) em (2.11) chega-se a:

$$\begin{aligned}r(t) &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \alpha PT_s - \beta T_s) \star p(t) \star h_c(t) \star h_d(t) + \\ &\quad + \frac{e^{-j\theta}}{\sqrt{2}} n_w(t) \star h_d(t) \\ &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta] h(t - \alpha PT_s - \beta T_s) + n(t),\end{aligned}$$

onde

$$h(t) = p(t) \star h_c(t) \star h_d(t)$$

é a resposta ao impulso do canal equivalente formado pela associação em cascata do filtro formatador $p(t)$, do canal de comunicação $h_c(t)$ e do filtro de detecção $h_d(t)$, e

$$n(t) = \frac{e^{-j\theta}}{\sqrt{2}} n_w(t) \star h_d(t)$$

é o ruído gaussiano presente na saída do filtro de detecção⁽²⁾.

⁽²⁾É comum a escolha do par $\{p(t), h_d(t)\}$ de tal forma que o pulso $u(t) = p(t) \star h_d(t)$ satisfaça o primeiro critério de Nyquist [69, 66]. Nestas condições, e supondo que $h_c(t) = \sum_n a_n \delta(t - \tau_n)$ com $\tau_n = m_n T_s$ e $\{m_n\}$ inteiros, então $h(lT_s) = a_l u(0)$ para l inteiro. Por exemplo, se $p(t)$ tem resposta em frequência da forma raiz quadrada de cosseno levantado, a resposta em frequência de

Amostrando o sinal $r(t)$ na saída do filtro de detecção nos instantes $t = iPT_s + kT_s$, ou seja, amostrando à taxa de sub-símbolo, tem-se:

$$\begin{aligned} r^{(i)}[k] &= r(t = iPT_s + kT_s) \\ &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta] h((i - \alpha)PT_s + (k - \beta)T_s) + \\ &\quad + n(iPT_s + kT_s). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Definindo a resposta ao impulso discreta do canal (equivalente) como

$$h[(i - \alpha)P + (k - \beta)] = h((i - \alpha)PT_s + (k - \beta)T_s),$$

e as amostras do processo de ruído na saída do filtro de detecção como

$$n^{(i)}[k] = n(iPT_s + kT_s),$$

a Equação (2.12) fica:

$$\begin{aligned} r^{(i)}[k] &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta] h[(i - \alpha)P + (k - \beta)] + n^{(i)}[k] \\ &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=k-P+1}^k d^{(\alpha)}[k - \gamma] h[(i - \alpha)P + \gamma] + n^{(i)}[k]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Supondo agora que $h[l] = 0$ para $l \notin \{0, 1, \dots, L\}$, ou seja, que a resposta ao impulso do canal (equivalente) amostrado tenha ordem L (ou comprimento $L + 1$), e $L < P$, chega-se à seguinte expressão para as amostras do sinal discreto recebido $r^{(i)}[k]$ em (2.13):

$$r^{(i)}[k] = \begin{cases} \sum_{\gamma=0}^k d^{(i)}[k - \gamma] h[\gamma] + \sum_{\gamma=k+1}^L d^{(i-1)}[P + k - \gamma] h[\gamma] + \\ \quad + n^{(i)}[k], & 0 \leq k \leq L - 1 \\ \sum_{\gamma=0}^L d^{(i)}[k - \gamma] h[\gamma] + n^{(i)}[k] & , \quad L \leq k \leq P - 1 \end{cases}. \quad (2.14)$$

Da Equação (2.14) observa-se que as L primeiras amostras do i -ésimo bloco recebido contêm amostras do i -ésimo bloco transmitido mas também amostras do $(i - 1)$ -ésimo bloco transmitido, caracterizando assim a chamada interferência entre

$h_d(t)$ também será da forma raiz quadrada de cosseno levantado e por conseguinte $u(t)$ terá resposta em frequência da forma cosseno levantado satisfazendo assim o primeiro critério de Nyquist.

blocos (ou *InterBlock Interference* - IBI). O termo $\sum_{\gamma=0}^L d^{(i)}[k - \gamma]h[\gamma]$ no lado direito da Equação (2.14) caracteriza a convolução discreta do equivalente discreto do canal com as amostras que compõem os blocos transmitidos.

Definindo o vetor $\mathbf{d}(i)$, de tamanho $P \times 1$, contendo as P amostras do i -ésimo bloco:

$$\mathbf{d}(i) = [d^{(i)}[0] \ d^{(i)}[1] \ \dots \ d^{(i)}[P-1]]^T,$$

e coletando P amostras (supondo sincronismo de blocos perfeito), é possível reescrever a Equação (2.14) de forma matricial:

$$\mathbf{r}(i) = \mathbf{H}\mathbf{d}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{d}(i-1) + \mathbf{n}(i). \quad (2.15)$$

A Figura 2.3 ilustra o modelo vetorial de sinais obtido em (2.15).

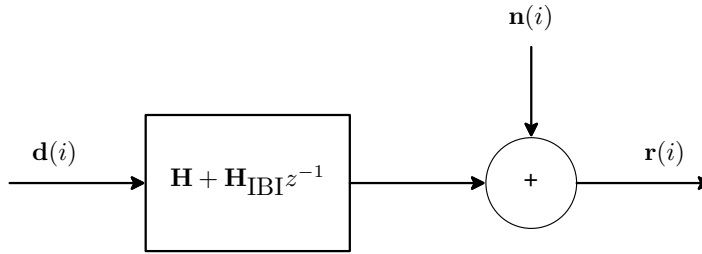


Figura 2.3: Modelo vetorial de sinais

Em (2.15), a matriz $\mathbf{H}$, de tamanho $P \times P$ é uma matriz Toeplitz com primeira coluna $[h[0] \ \dots \ h[L] \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{P-L-1 \text{ zeros}}]^T$, ou seja:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & h[0] & \vdots & \dots & \vdots \\ h[L] & h[L-1] & h[L-2] & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h[L] & \dots & h[0] \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

e representa a matriz de convolução do canal discreto $h[k]$. A matriz $\mathbf{H}_{\text{IBI}}$, Toeplitz e de tamanho $P \times P$, com primeira linha $[\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{P-L \text{ zeros}} \ h[L] \ \dots \ h[1]]$ ou seja:

$$\mathbf{H}_{\text{IBI}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & h[L] & \dots & h[1] \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & h[L] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

modela a interferência entre blocos. Ainda na Equação (2.15),

$$\mathbf{n}(i) = [n^{(i)}[0] \ n^{(i)}[1] \ \dots \ n^{(i)}[P-1]]^T \quad (2.18)$$

é vetor gaussiano complexo com a seguinte caracterização⁽³⁾:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[n^{(i)}[k]] &= 0, \text{ para } k = (1, 2, \dots, P); \\ \mathbb{E}[n^{(i)}[k]n^{(i)}[l]^*] &= \begin{cases} N_0 & , \ k = l; \\ 0 & , \ k \neq l; \end{cases} \\ \mathbb{E}[n^{(i)}[k]n^{(i)}[l]] &= 0, \ \forall (l, k), \text{ (incluindo } k = l) \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{n}(i)$ é vetor Gaussiano branco (complexo) com matriz covariância dada por:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}[\mathbf{n}(i)\mathbf{n}(i)^H] = N_0 \mathbf{I}_P = \sigma^2 \mathbf{I}_P \quad (2.19)$$

e

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}(i)\mathbf{n}(i)^T] = \mathbf{0}.$$

Finalmente, substituindo-se (2.5) em (2.15) chega-se ao modelo vetorial de sinais para o OFDM-ZP:

$$\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) = \mathbf{H}\mathbf{F}_{\text{ZPS}}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}_{\text{ZPS}}(i-1) + \mathbf{n}(i). \quad (2.20)$$

De forma análoga, utilizando (2.9) chega-se ao modelo vetorial de sinais para o OFDM-CP:

$$\mathbf{r}_{\text{CP}}(i) = \mathbf{H}\mathbf{F}_{\text{CPS}}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}_{\text{CPS}}(i-1) + \mathbf{n}(i). \quad (2.21)$$

A detecção dos vetores $\mathbf{s}(i)$ é objeto do próximo capítulo.

⁽³⁾Supõe-se que o pulso $\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_d(\beta - t)h_d^*(\beta)d\beta$ satisfaz o primeiro critério de Nyquist, e que $\int_{-\infty}^{\infty} |h_d(t)|^2 dt = 1$. Por exemplo, se $h_d(t)$ tem resposta em frequência da forma raiz quadrada de cosseno levantado, então $\zeta(t)$ satisfaz o primeiro critério de Nyquist.

3

Receptores OFDM em Sistemas com Intervalo de Guarda Suficiente

3.1

Introdução

Neste Capítulo são apresentados os receptores convencionais para sistemas OFDM com intervalo de guarda suficiente, ou seja, nos quais a ordem do canal não ultrapassa o comprimento de intervalo de guarda isto é $L \leq D$.

A Seção 3.2 aborda as estruturas usuais de recepção para sistemas OFDM. O sistema OFDM-CP é considerado em mais detalhes na Seção 3.2.1. Receptores usuais para o OFDM-ZP são assunto da Seção 3.2.2.

A Seção 3.3 explicita a analogia existente entre os sinais de sistemas OFDM e sistemas CDMA.

3.2

Receptores Convencionais

3.2.1

Receptor Convencional para OFDM-CP

Nesta Seção, o processamento efetuado pelo receptor OFDM-CP convencional é descrito. O receptor opera sobre o vetor de observação $\mathbf{r}_{CP}(i)$ para detectar o vetor de informação $\mathbf{s}(i)$ transmitido. De acordo com (2.21), reproduzida abaixo por conveniência, o vetor observação é dado por:

$$\mathbf{r}_{CP}(i) = \mathbf{H}\mathbf{F}_{CP}\mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_{IBI}\mathbf{F}_{CP}\mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i),$$

com as matrizes $\mathbf{F}_{CP}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}_{IBI}$ definidas respectivamente em (2.10), (2.16) e (2.17). O vetor $\mathbf{n}(i)$, de tamanho $P \times 1$, é vetor Gaussiano de ruído branco com média nula e matriz covariância dada por (2.19).

O diagrama em blocos do sistema de transmissão OFDM-CP encontra-se na Figura 3.1.

Como visto em (2.14), as L primeiras componentes de $\mathbf{r}_{CP}(i)$ dependem não somente de componentes de $\mathbf{s}(i)$ mas também de componentes de $\mathbf{s}(i-1)$,

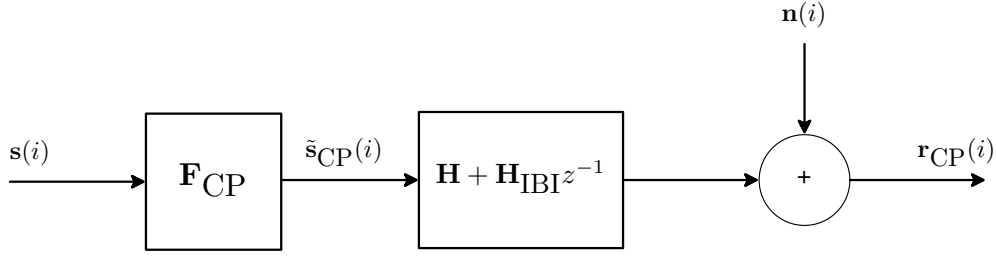


Figura 3.1: Modelo vetorial de sinais: OFDM-CP

caracterizando assim a Interferência entre Blocos (ou IBI). Assim sendo, para efetuar a detecção de $s(i)$ livre de IBI, as D primeiras componentes de $\mathbf{r}_{CP}(i)$ são descartadas no receptor, dando origem ao vetor $\tilde{\mathbf{x}}_M(i)$, contendo as últimas M amostras de $\mathbf{r}_{CP}(i)$. O descarte, em princípio, não acarreta perda de informação sobre o símbolo OFDM transmitido, uma vez que para o OFDM-CP, o intervalo de guarda é na verdade uma réplica das últimas D amostras do símbolo OFDM transmitido. Após o descarte tem-se [56]:

$$\tilde{\mathbf{x}}_M(i) = \mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M) \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_M(i), \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{C}_M$ é uma matriz circulante de tamanho $M \times M$ com primeira coluna $\mathbf{h}_M = [h[0] \ h[1] \ \dots \ h[L] \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{M-L-1 \text{ zeros}}]^T$, ou seja:

$$\mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M) = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 & h[L] & \dots & h[2] & h[1] \\ h[1] & h[0] & \ddots & 0 & 0 & \ddots & h[3] & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \dots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & h[L] \\ h[L] & \ddots & \ddots & h[1] & h[0] & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & h[L] & \ddots & \ddots & h[1] & h[0] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h[L] & h[L-1] & \dots & h[1] & h[0] \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

e $\mathbf{F}_M$ é a matriz da transformada discreta de Fourier normalizada de M pontos definida em (2.4). Ainda em (3.1), o vetor $\tilde{\mathbf{n}}_M(i)$ de tamanho $M \times 1$ contém as M últimas amostras do vetor $\mathbf{n}(i)$. O vetor $\tilde{\mathbf{n}}_M(i)$ é portanto vetor Gaussiano complexo de média nula e matriz covariância dada por:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{n}}_M} = N_0 \mathbf{I}_M, \quad (3.3)$$

ou seja, $\tilde{\mathbf{n}}_M(i)$ é vetor de ruído branco. É possível detectar o vetor $\mathbf{s}(i)$ diretamente a partir do vetor $\tilde{\mathbf{x}}_M$, todavia este não é o modo mais eficiente de proceder, em termos de complexidade computacional.

De fato, sabendo que é possível diagonalizar uma matriz circulante pré- e pós-

multiplicando-a pelas matrizes DFT e IDFT respectivamente [70], pré-multiplica-se $\tilde{\mathbf{x}}_M(i)$ por $\mathbf{F}_M$ de forma a obter-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_M(i) &= \mathbf{F}_M \tilde{\mathbf{x}}_M(i) \\ &= \mathbf{F}_M (\mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M) \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_M(i)) \\ &= (\mathbf{F}_M \mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M) \mathbf{F}_M^H) \mathbf{s}(i) + \mathbf{F}_M \tilde{\mathbf{n}}_M(i) \\ &= \text{diag}(H[0] \dots H[M-1]) \mathbf{s}(i) + \mathbf{F}_M \tilde{\mathbf{n}}_M(i) \\ &= \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M) \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}_M(i). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em (3.4), $\mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)$ é matriz diagonal de tamanho $M \times M$ e que tem as componentes do vetor $\tilde{\mathbf{h}}_M$ em sua diagonal, sendo

$$\tilde{\mathbf{h}}_M = [H[0] \dots H[M-1]]^T = \sqrt{M} \mathbf{F}_M \mathbf{h}_M, \quad (3.5)$$

com $H[k] = \sum_{l=0}^L h[l] e^{-j2\pi kl/M}$, ou seja, $\tilde{\mathbf{h}}_M$ contém as componentes da transformada discreta de Fourier de M pontos de $\mathbf{h}_M$, logo $\tilde{\mathbf{h}}_M$ esta associado à resposta em frequência discreta do canal $\mathbf{h} = [h[0] \ h[1] \ \dots \ h[L]]^T$. Ainda em (3.4), $\mathbf{n}_M(i) = \mathbf{F}_M^H \tilde{\mathbf{n}}_M(i)$ é ruído Gaussiano branco com matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{n}_M} = N_0 \mathbf{I}_M$, uma vez que $\mathbf{F}_M$ é unitária. Numa clara analogia ao modelo analógico clássico do OFDM, a pré-multiplicação pela matriz DFT representa a demodulação dos sinais, ou ainda o processamento dos sinais por um banco de filtros casados às portadoras.

Nestas condições, o vetor de informação $\mathbf{s}(i)$ pode ser então detectado de forma simples, a partir da observação $\mathbf{x}_M(i)$, invertendo-se a matriz diagonal $\mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)$. De fato, a k -ésima componente de $\mathbf{s}(i)$, denotada $s^{(i)}[k]$, pode ser detectada de forma independente das demais uma vez que, de (3.4), pode-se escrever a k -ésima componente de $\mathbf{x}_M(i)$, denotada $x_M^{(i)}[k]$, como:

$$x_M^{(i)}[k] = H[k] s^{(i)}[k] + n_M^{(i)}[k]. \quad (3.6)$$

Do ponto de vista da representação analógica do OFDM, o papel do prefixo cíclico (ou CP) é justamente este: o de restaurar a ortogonalidade entre as portadoras, na recepção.

A estimativa *Zero Forcing* (ou ZF) de $s^{(i)}[k]$, denotada $\hat{s}_{\text{ZF}}^{(i)}[k]$, que não leva em conta a presença de ruído na observação é dada por (vide Apêndice A):

$$\begin{aligned} \hat{s}_{\text{ZF}}^{(i)}[k] &= \frac{x_M^{(i)}[k]}{H[k]} \\ &= s^{(i)}[k] + \frac{n_M^{(i)}[k]}{H[k]}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Todavia, se $H[k] \approx 0$, o símbolo $s^{(i)}[k]$ da k -ésima subportadora não poderá ser recuperado, o que vem a ser provavelmente o maior ponto fraco do esquema

OFDM-CP. Por outro lado, a baixa complexidade envolvida na detecção (a inversão de um escalar complexo por subportadora) é certamente um dos pontos fortes deste esquema. Note-se que para a detecção, faz-se necessário o conhecimento dos escalares $H[k]$, ou seja, é preciso dispor de uma estimativa do canal.

A Figura 3.2 ilustra o receptor convencional para o esquema OFDM-CP.

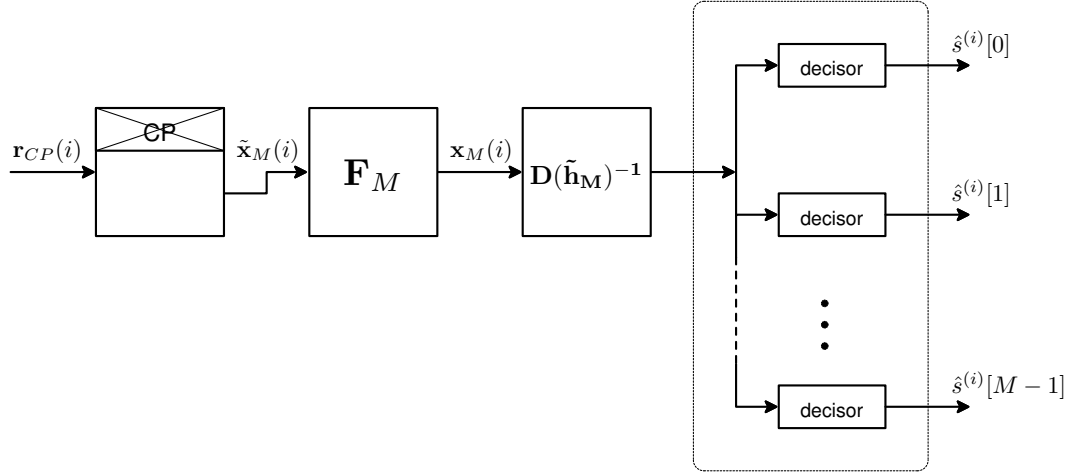


Figura 3.2: Estrutura do Receptor Convencional OFDM-CP

Com vistas a mitigar os efeitos da amplificação do ruído em (3.7), é possível realizar a detecção MMSE de $s^{(i)}[k]$ (vide Apêndice A):

$$\hat{s}_{\text{MMSE}}^{(i)}[k] = \frac{H[k]^*}{|H[k]|^2 + \frac{N_0}{\sigma_s^2}} x_M^{(i)}[k].$$

O receptor MMSE contudo não resolve o problema da não-detectabilidade do OFDM-CP.

3.2.2

Receptor Convencional para OFDM-ZP

O vetor observação $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$ a ser processado pelo receptor, no caso do OFDM-ZP, é dado por (2.20) reproduzida abaixo:

$$\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) = \mathbf{H}\mathbf{F}_{\text{ZP}}\mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}_{\text{ZP}}\mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i), \quad (3.8)$$

com as matrizes $\mathbf{F}_{\text{ZP}}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}_{\text{IBI}}$ definidas respectivamente em (2.6), (2.16) e (2.17). O vetor $\mathbf{n}(i)$, de tamanho $P \times 1$, é vetor Gaussiano de ruído branco com média nula e matriz covariância dada por (2.19). O sistema OFDM-ZP em questão é ilustrado na Figura 3.3.

É possível particionar as matrizes $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_0 \ \mathbf{H}_{\text{ZP}}]$, com $\mathbf{H}_0$ de tamanho $P \times M$, e $\mathbf{H}_{\text{IBI}} = [\mathbf{H}_0^{\text{IBI}} \ \mathbf{H}_{\text{ZP}}^{\text{IBI}}]$, com $\mathbf{H}_0^{\text{IBI}}$ de tamanho $P \times M$.

A matriz $\mathbf{H}_0$, assim como $\mathbf{H}$, é Toeplitz e encontra-se explicitada a seguir:

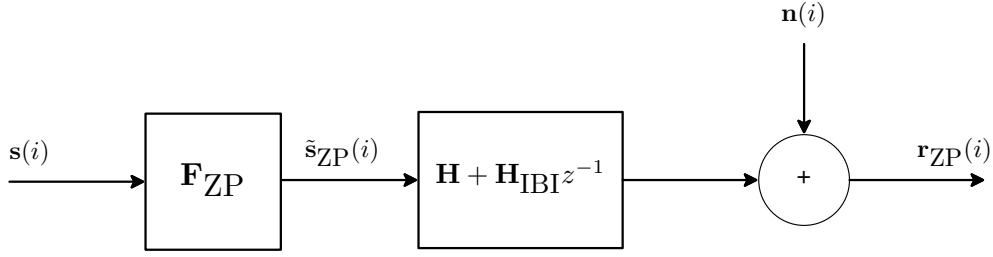


Figura 3.3: Modelo vetorial de sinais: OFDM-ZP

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & h[0] & \ddots & \vdots \\ h[L] & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & h[L] & \ddots & h[0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h[L] \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Convém frisar que a matriz $\mathbf{H}_0$ tem suas últimas $(D - L)$ linhas nulas.

Observando-se que as M primeiras colunas da matriz $\mathbf{H}_{\text{IBI}}$ são nulas (para $L \leq D$), vide (2.17), conclui-se que a matriz $\mathbf{H}_0^{\text{IBI}}$, que por definição contém as M primeiras colunas de $\mathbf{H}_{\text{IBI}}$, é toda de zeros.

A Equação (3.8) pode ser então reescrita como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) &= [\mathbf{H}_0 \ \mathbf{H}_{\text{ZP}}] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) + [\mathbf{H}_0^{\text{IBI}} \ \mathbf{H}_{\text{ZP}}^{\text{IBI}}] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_0^{\text{IBI}} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i); \end{aligned} \quad (3.10)$$

ou seja, para o OFDM-ZP, $\mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F}_{\text{ZP}} = \mathbf{0}$. Assim fica evidenciado uma das peculiaridades do esquema OFDM-ZP: a ausência de IBI na recepção (vide (3.10)), sem que seja necessário para isso descartar amostras da observação (diferentemente do que é usualmente feito no OFDM-CP).

A estimativa *Zero Forcing* de $\mathbf{s}(i)$, denotada $\hat{\mathbf{s}}_{\text{ZF}}(i)$, é obtida por meio de:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ZF}}(i) = \mathbf{W}_{\text{ZF}}^H \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i), \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{W}_{\text{ZF}}$ é matriz de tamanho $P \times M$. A k -ésima coluna de $\mathbf{W}_{\text{ZF}}$, denotada $\mathbf{w}_k$, contém os pesos do equalizador linear associado à k -ésima portadora. A matriz

$\mathbf{W}_{\text{ZF}}$ é tal que:

$$\mathbf{W}_{\text{ZF}}^H \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H = \mathbf{I}_M,$$

ou seja, $\mathbf{W}_{\text{ZF}}^H$ é a pseudo-inversa de $\mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H$ [56], e é dada por (vide Apêndice A):

$$\mathbf{W}_{\text{ZF}} = (\mathbf{H}_0^\dagger)^H \mathbf{F}_M^H \quad (3.12)$$

$$= \mathbf{H}_0 (\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{F}_M^H. \quad (3.13)$$

Susbtituindo (3.12) em (3.11) chega-se a:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_{\text{ZF}}(i) &= \mathbf{F}_M \mathbf{H}_0^\dagger \mathbf{r}_{\text{ZF}}(i) \\ &= \mathbf{s}(i) + \mathbf{F}_M \mathbf{H}_0^\dagger \mathbf{n}(i). \end{aligned}$$

A Figura 3.4 ilustra a estrutura que implementa o receptor ZF OFDM-ZP.

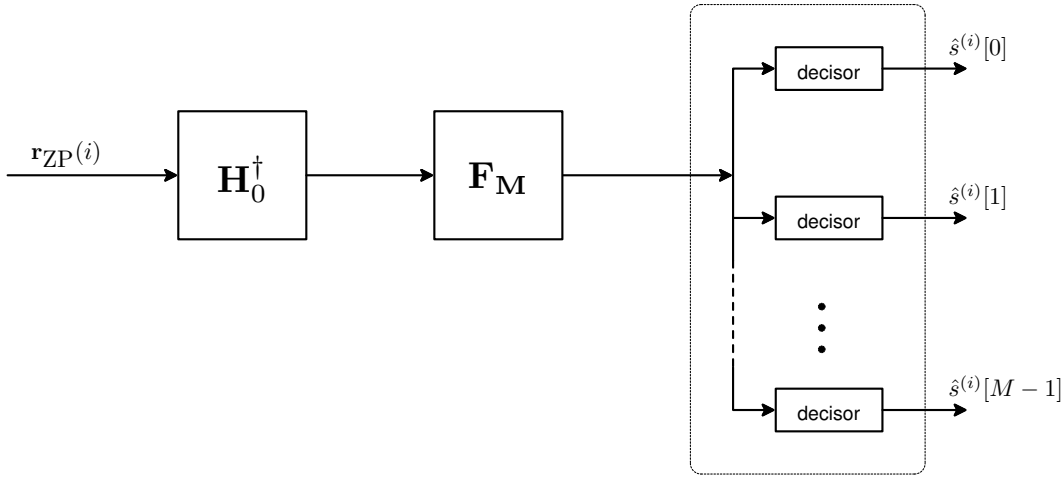


Figura 3.4: Estrutura do Receptor *Zero Forcing* OFDM-ZP

Lembrando que $\mathbf{H}_0$ é Toeplitz de tamanho $P \times M$, convém frisar que $(\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0)$ “sempre” admite inversa⁽¹⁾. Isso implica que o OFDM-ZP não padece do mesmo problema de não-detectabilidade do OFDM-CP. Todavia a detecção feita após o estágio de equalização *Zero Forcing* não será ótima caso as componentes $s^{(i)}[k]$ sejam detectadas de forma independente, visto que o ruído não é mais branco. De fato, o ruído após a equalização tem matriz covariância dada por: $N_0 \mathbf{F}_M \mathbf{H}_0^\dagger (\mathbf{F}_M \mathbf{H}_0^\dagger)^H = N_0 \mathbf{F}_M (\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{F}_M^H$. Porém, na prática, por questões de complexidade computacional, as componentes são detectadas de forma independente.

Por sua vez, a estimativa MMSE de $\mathbf{s}(i)$, denotada $\hat{\mathbf{s}}_{\text{MMSE}}(i)$, é obtida por meio de:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{MMSE}}(i) = \mathbf{W}_{\text{MMSE}}^H \mathbf{r}_{\text{ZF}}(i). \quad (3.14)$$

⁽¹⁾exceto para $\mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{P \times M}$.

A matriz $\mathbf{W}_{\text{MMSE}}$ de tamanho $P \times M$ satisfaz (vide Apêndice A):

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} = [\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + N_0 \mathbf{I}_P]^{-1} \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \sigma_s^2 \quad (3.15)$$

$$= \mathbf{R}_{\text{ZP}}^{-1} \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \sigma_s^2, \quad (3.16)$$

que envolve a inversão da matriz autocorrelação de $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$, $\mathbf{R}_{\text{ZP}}$, de tamanho⁽²⁾ $P \times P$, e o conhecimento de N_0 .

A Figura 3.5 descreve a estrutura do receptor MMSE OFDM-ZP.

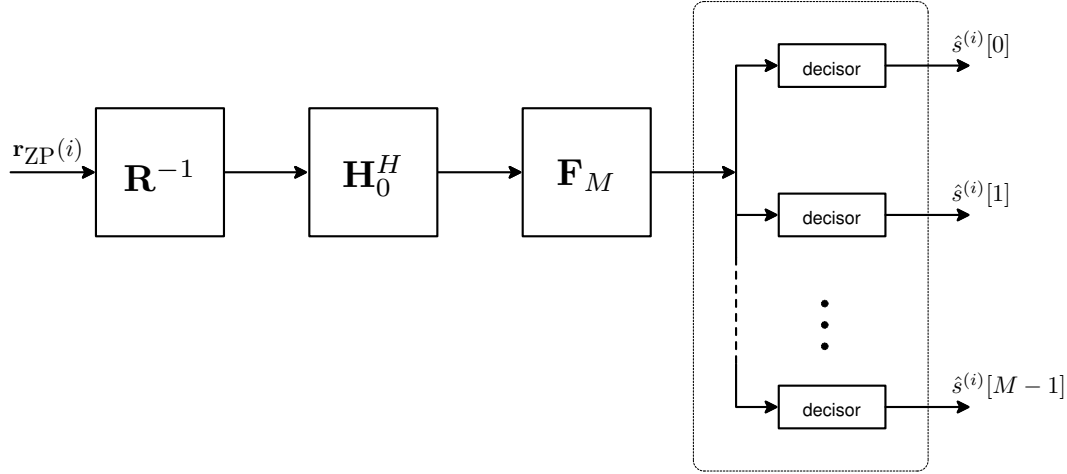


Figura 3.5: Estrutura do Receptor MMSE OFDM-ZP

Existe todavia uma abordagem alternativa [56] (ou abordagem “Pós-DFT”) no que diz respeito ao esquema OFDM-ZP e à detecção dos sinais. De fato, observando que as últimas D colunas da matriz $\mathbf{H}$ não afetam o bloco recebido, graças aos zeros inseridos, é possível alterar as suas últimas D colunas de modo que a matriz $\mathbf{H}$ passe a ser uma matriz circulante de tamanho $P \times P$ denotada $\mathbf{C}_P(\mathbf{h}_P)$ cuja primeira coluna é $\mathbf{h}_P = [h[0] \ h[1] \ \dots \ h[L] \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{P-L-1 \text{ zeros}}]^T$.

Lançando mão deste artifício e rebatizando o vetor $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$ de $\tilde{\mathbf{x}}_P(i)$ e o vetor $\mathbf{n}(i)$ de $\tilde{\mathbf{n}}_P(i)$ (numa analogia com a notação para os sinais do esquema OFDM-CP)

⁽²⁾Por meio do lema de inversão de matrizes [71, 72], é possível reescrever $[\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + N_0 \mathbf{I}_P]^{-1}$ em (3.15) e por conseguinte obter uma expressão alternativa para $\mathbf{W}_{\text{MMSE}}$, a saber:

$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} = \mathbf{H}_0 [\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 + \frac{N_0}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_M]^{-1} \mathbf{F}_M^H$, de modo que $\mathbf{W}_{\text{MMSE}}$ envolve a inversão de uma matriz de tamanho $M \times M$. Comparando (3.13) com a expressão alternativa para $\mathbf{W}_{\text{MMSE}}$, nota-se que quando $\frac{\sigma_s^2}{N_0} \rightarrow \infty$, $\mathbf{W}_{\text{MMSE}} \rightarrow \mathbf{W}_{\text{ZF}}$.

é possível reescrever a Equação (3.8) (já sem os termos relativos à IBI) como segue:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{x}}_P(i) &= [\mathbf{H}_0 \ \mathbf{H}_{\text{ZP}}] \mathbf{F}_{\text{ZP}} \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i) \\
 &= [\mathbf{H}_0 \ \mathbf{H}_{\text{ZP}}] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i) \\
 &= [\mathbf{H}_0 \ \Xi] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i) \\
 &= \mathbf{C}_P(\mathbf{h}_P) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i),
 \end{aligned}$$

com Ξ tal que a matriz $[\mathbf{H}_0 \ \Xi]$ é circulante.

Lembrando uma vez mais que uma matriz circulante pode ser diagonalizada pré- e pós-multiplicando-a respectivamente pelas matrizes DFT e IDFT, e que $\mathbf{F}_P^H \mathbf{F}_P = \mathbf{I}_P$, pré-multiplica-se $\tilde{\mathbf{x}}_P(i)$ pela matriz DFT de P pontos $\mathbf{F}_P$ de modo a obter-se o modelo alternativo de sinais para o OFDM-ZP:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_P(i) &= \mathbf{F}_P \tilde{\mathbf{x}}_P(i) \\
 &= \mathbf{F}_P \left(\mathbf{C}_P(\mathbf{h}_P) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i) \right) \\
 &= (\mathbf{F}_P \mathbf{C}_P(\mathbf{h}_P) \mathbf{F}_P^H) \mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) + \mathbf{F}_P \tilde{\mathbf{n}}_P(i) \\
 &= \mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) + \mathbf{F}_P \tilde{\mathbf{n}}_P(i) \\
 &= \mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}_P(i).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Em (3.17), $\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P) = \mathbf{F}_P \mathbf{C}_P(\mathbf{h}) \mathbf{F}_P^H$ é matriz diagonal de tamanho $P \times P$ e que tem as componentes do vetor $\tilde{\mathbf{h}}_P$ em sua diagonal, sendo

$$\tilde{\mathbf{h}}_P = [H[0] \ \dots \ H[P-1]]^T = \sqrt{P} \mathbf{F}_P \mathbf{h}_P, \tag{3.18}$$

com $H_k = \sum_{l=0}^L h[l] e^{-j \frac{2\pi k l}{P}}$, ou seja, $\tilde{\mathbf{h}}_P$ contém as componentes da transformada discreta de Fourier de P pontos de $\mathbf{h}$, logo $\tilde{\mathbf{h}}_P$ é a resposta em frequência discreta do canal $\mathbf{h}$. Ainda em (3.17), $\mathbf{n}_P(i) = \mathbf{F}_P^H \tilde{\mathbf{n}}_P(i)$ é ruído Gaussiano branco com matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{n}_P} = N_0 \mathbf{I}_P$, uma vez que $\mathbf{F}_P$ é unitária. Por fim, a matriz $\mathbf{V}$, de tamanho $P \times M$, é definida como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Convém ressaltar que a matriz $\mathbf{V}$ não depende do canal, mas somente de matrizes (I)DFT e pode por conseguinte ser pré-alocada no receptor.

A detecção dos sinais $s(i)$ é feita a partir de (3.17). Por exemplo, a estimativa ZF de $s(i)$, denotada $\hat{s}_{ZF}(i)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{s}_{ZF}(i) &= (\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})^\dagger \mathbf{x}_P(i) \\ &= \mathbf{s}(i) + (\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})^\dagger \mathbf{n}_P(i),\end{aligned}\quad (3.20)$$

e o receptor é ilustrado na Figura 3.6.

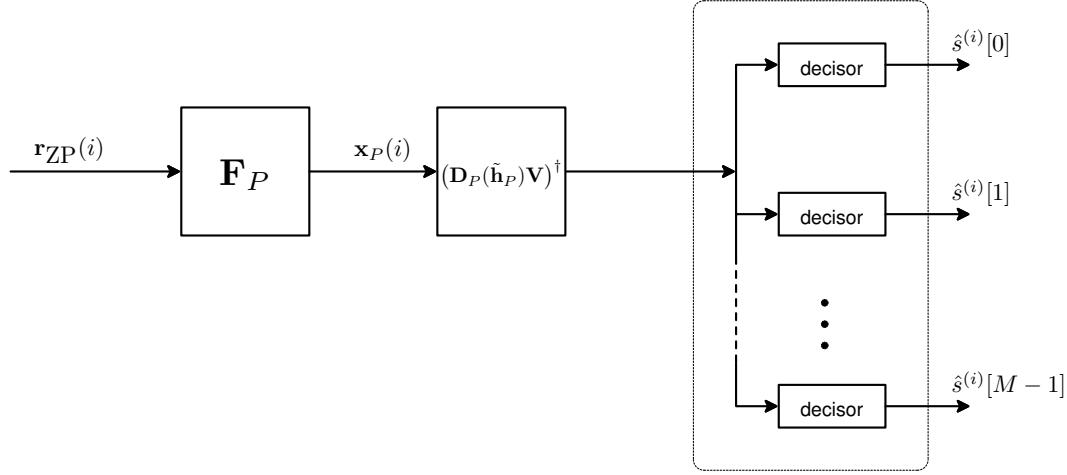


Figura 3.6: Estrutura do Receptor *Zero Forcing* Pós-DFT OFDM-ZP

Como o canal tem ordem L , $\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)$ pode ter no máximo L elementos diagonais nulos. Ao contrário do OFDM-CP, os elementos não-nulos restantes da diagonal garantem a recepção ZF. Todavia, é necessário calcular a pseudoinversa de $\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$.

É interessante comparar as Equações (3.4) e (3.17). No caso do OFDM-CP, consegue-se efetuar a detecção com baixa complexidade computacional às custas de uma eventual não-detectabilidade dos sinais. Já no caso do OFDM-ZP, para efetuar a detecção, faz-se necessário calcular a pseudoinversa de uma matriz de tamanho $P \times M$ resultante do produto $\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$. A detectabilidade, todavia, é nesse caso garantida [56].

Convém frisar mais uma vez que a detecção das componentes de $s(i)$ de forma independente, após a multiplicação pela pseudoinversa de $\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$, é sub-ótima, uma vez que o ruído passa a ser colorido com matriz covariância igual a $N_0(\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})^\dagger((\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})^\dagger)^H = N_0[(\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})^H(\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})]^{-1} = N_0\mathbf{F}_M(\mathbf{H}_0^H\mathbf{H}_0)^{-1}\mathbf{F}_M^H$.

Convém também ressaltar que todos os receptores apresentados ao longo deste Capítulo, tanto para o OFDM-ZP quanto para o OFDM-CP, necessitam de estimativas do canal.

3.3

Analogia entre os Sinais OFDM e CDMA

O DS/CDMA [73, 74] é uma técnica de múltiplo acesso [75, 69] na qual os usuários podem transmitir simultaneamente na mesma faixa de frequências, sendo separáveis no receptor pela ortogonalidade, ou quase ortogonalidade, entre os sinais utilizados pelos diferentes usuários para transmissão da informação.

O modelo vetorial para o agregado de sinais CDMA na entrada do receptor é descrito por:

$$\mathbf{r}(i) = \mathbf{P}\mathbf{b}(i) + \text{ISI} + \mathbf{n}(i), \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{P}$ é a matriz cujas colunas são as assinaturas (seqüências de espalhamento) efetivas (ou seja, após sua convolução com o canal de comunicação) dos usuários ativos no sistema; $\mathbf{b}(i)$ é o vetor que contém os símbolos transmitidos pelos usuários durante o i -ésimo intervalo de sinalização e $\mathbf{n}(i)$ é um vetor de ruído branco. Convém ressaltar a semelhança de (3.21) com (3.1) ou (3.4) para o caso OFDM-CP, ou ainda com (3.10) ou (3.17) para o caso OFDM-ZP. De fato, o sinal OFDM pode ser visto como: um sinal CDMA downlink onde todas as assinaturas são conhecidas pelo receptor, ou ainda como um sinal CDMA uplink onde todos os usuários experimentam o mesmo canal de comunicação. Isso implica que muitas técnicas empregadas na estimação de canal e detecção de sinais CDMA podem ser aplicadas a sistemas OFDM, observando e tirando proveito destas particularidades.

Por exemplo, é sabido da literatura de CDMA, que caso as assinaturas sejam ortogonais na recepção, então o receptor ótimo⁽³⁾ usa um banco de filtros casados $\mathbf{P}^H$. Observando agora (3.4), é fácil notar que as 'assinaturas' são ortogonais, uma vez que as colunas de $\mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)$ são ortogonais (a matriz $\mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)$ é diagonal). Assim, conclui-se que o receptor da Figura 3.2, que implementa um banco de filtros casados, é o receptor ótimo para o caso OFDM-CP.

Já para o OFDM-ZP, as colunas de $\mathbf{P}$, isto é $\mathbf{D}_P(\hat{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$, não são ortogonais e é possível explorar mais uma vez a analogia entre os sinais.

De fato, a técnica de múltiplo acesso CDMA tem seu desempenho limitado pela interferência de múltiplo acesso (IMA), devido à não ortogonalidade dos sinais dos diferentes usuários na recepção, e pelo efeito *near-far*, caracterizado por sinais com níveis de potência diferentes na recepção. Essas dificuldades acabaram por motivar o surgimento de uma nova área de pesquisa: a detecção multiusuário. Verdú, em [76], propôs o detector multiusuário ótimo, que padece de uma complexidade exponencial com o número de usuários ativos no sistema, o que torna o seu uso proibitivo em sistemas com grande número de usuários. Ficou no entanto estabelecido um limitante inferior para a probabilidade de erro de símbolo.

⁽³⁾ótimo segundo o critério de Máxima Verossimilhança; também ótimo segundo o critério de Máxima Probabilidade *a Posteriori* caso as mensagens sejam equiprováveis

Vários receptores sub-ótimos foram propostos em seguida, como o decorrelator [77, 78] e o MMSE (*Minimum Mean Square Error*) [79, 80] que pertencem à classe dos receptores lineares e o PIC (*Parallel Interference Cancellor*) [81, 82] e o SIC (*Serial Interference Cancellor*) [83], canceladores subtrativos de interferência, que pertencem à classe de receptores não-lineares.

É possível aplicar a $\mathbf{x}_P(i)$ o receptor decorrelator $\mathbf{P}^\dagger = (\mathbf{D}_P(\hat{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})^\dagger$. Contudo, de acordo com o que foi visto em (3.20), o receptor decorrelator aplicado ao OFDM-ZP equivale ao receptor ZF para o OFDM-ZP.

Outra alternativa é aplicar em $\mathbf{x}_P(i)$ o receptor MMSE $\mathbf{P}^H \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{P}^H (\mathbf{P} \mathbf{P}^H + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} = (\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})^H \left((\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})(\mathbf{D}_P(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V})^H + \sigma^2 \mathbf{I} \right)^{-1}$. Também é fácil mostrar que estes receptores MMSE (pós- e pré- DFT) se equivalem.

4

Técnicas Cegas de Estimação de Canal em Sistemas OFDM com Intervalo de Guarda Suficiente

4.1

Introdução

Dois métodos de estimação cega de canal são abordados neste capítulo: estimação de canal por meio do subespaço de ruído, e estimação de canal via casamento de correlação (*correlation matching*).

Em um primeiro momento, um esquema de estimação cega de canal por meio do subespaço de ruído, próprio para sistemas OFDM-ZP, é descrito na Seção 4.2, com vistas a situar o problema e introduzir alguns conceitos.

Na Seção 4.3, capitalizando a analogia entre sinais OFDM e CDMA, um método de estimação cega de canal baseado no subespaço de ruído e aplicado com sucesso em sistemas CDMA é proposto para sistemas OFDM-ZP. Alguns resultados preliminares encontram-se publicados em [61].

O método proposto é particularizado para sistemas OFDM-CP na Seção 4.4.

A Seção 4.5 apresenta um estimador cego de canal baseado no casamento de correlação, para sistemas OFDM-ZP. Resultados preliminares foram relatados em [62].

Sua contraparte para sistemas OFDM-CP é assunto da Seção 4.6.

Por fim, da Seção 4.7 consta a aferição do desempenho dos diversos estimadores apresentados ao longo deste capítulo.

Observação: Ao longo deste capítulo supõe-se que $L \leq D < P$, onde L é a ordem do canal, D é o comprimento do intervalo de guarda e P é o tamanho do bloco.

4.2

Estimação Cega de Canal por meio de Identificação do Subespaço de Ruído: OFDM-ZP

Nesta Seção é apresentado um método de estimação cega de canal, baseado na identificação do subespaço de ruído, próprio para o esquema OFDM-ZP [56]. O modelo dos sinais OFDM-ZP com M portadoras e intervalo de guarda de

comprimento $D = P - M$ é (vide (3.10)):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_P(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i) \\ &= \mathbf{H}_0 \tilde{\mathbf{s}}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i),\end{aligned}$$

onde $\mathbf{H}_0$ é a matriz Toeplitz de tamanho $P \times M$ definida em (3.9), $\mathbf{F}_M$ é a matriz DFT de M pontos definida em (2.4), $\tilde{\mathbf{n}}_P(i)$ é vetor gaussiano branco cujas componentes têm média nula e variância $\sigma^2 = N_0$, e $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}$.

O método apresentado baseia-se nos seguintes pontos:

- as colunas da matriz $\mathbf{H}_0$ geram (e portanto, também pertencem a) um subespaço chamado de subespaço de sinal,
- qualquer vetor do subespaço de sinal é ortogonal a qualquer vetor do chamado subespaço de ruído, seu complemento ortogonal.
- a matriz $\mathbf{H}_0$ e a matriz correlação das observações $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_P(i)\tilde{\mathbf{x}}_P(i)^H]$ compartilham do mesmo subespaço de sinal.

A decomposição em valores singulares (*singular value decomposition*, doravante denotada simplesmente “SVD”) [70, 72] da matriz $\mathbf{H}_0$ é dada por:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}_2^H. \quad (4.1)$$

Em (4.1), $\mathbf{U}_1$ é uma matriz unitária de tamanho $P \times P$ que contém em suas colunas os vetores singulares (*singular vectors*) da esquerda de $\mathbf{H}_0$, e $\mathbf{U}_2$ é uma matriz unitária de tamanho $M \times M$ que contém em suas colunas os vetores singulares da direita de $\mathbf{H}_0$. Ainda em (4.1), $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz “diagonal”⁽¹⁾ de tamanho $P \times M$. Os primeiros K elementos de sua diagonal são positivos (não-nulos) e correspondem aos K valores singulares (*singular values*) de $\mathbf{H}_0$, dispostos em ordem decrescente; os elementos restantes da diagonal são nulos. Convém frisar que K é o posto da matriz decomposta. Uma vez que o posto de $\mathbf{H}_0$ é $K = M$, $\mathbf{H}_0$ tem M valores singulares. Mais ainda, é possível particionar a matriz $\mathbf{U}_1$ como $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_n]$ onde $\mathbf{U}_s$, de tamanho $P \times M$, e $\mathbf{U}_n$, de tamanho $P \times D$, são bases ortonormais dos chamados subespaço de sinal (*signal subspace*) e subespaço de ruído (*noise subspace*) respectivamente. Em particular, convém ressaltar que, como $\mathbf{U}_1$ é unitária, então $\mathbf{U}_n^H \mathbf{U}_s = \mathbf{0}_{D \times M}$.

⁽¹⁾Alguns autores, como por exemplo Strang em [70], aceitam os conceitos de “matriz diagonal retangular” e “diagonal de uma matriz retangular”. Para esses autores, uma matriz diagonal retangular $\mathbf{A}$ é tal que os seus elementos obedecem $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, o que vem a ser simplesmente uma generalização do conceito de matriz diagonal quadrada.

A matriz correlação do vetor de observação $\tilde{\mathbf{x}}_P(i)$, denotada por $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$, tem tamanho $P \times P$ e é definida como:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} &= \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_P(i)\tilde{\mathbf{x}}_P(i)^H] \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P,\end{aligned}\quad (4.2)$$

com $\sigma^2 = N_0$.

Substituindo (4.1) em (4.2) resulta que:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} &= \sigma_s^2 \mathbf{U}_1 \Sigma \Sigma^H \mathbf{U}_1^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P \\ &= \mathbf{U}_1 \left(\sigma_s^2 \Sigma \Sigma^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P \right) \mathbf{U}_1^H \\ &= [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \Lambda_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Em (4.3), Λ_s é matriz diagonal de tamanho $M \times M$ contendo os valores singulares associados aos vetores singulares que formam $\mathbf{U}_s$. Comparando (4.1) e (4.3), verifica-se que as matrizes $\mathbf{H}_0$ e $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$ compartilham o mesmo subespaço de sinal e o mesmo subespaço de ruído⁽²⁾.

Lembrando que as colunas da matriz $\mathbf{H}_0$ pertencem ao subespaço gerado pelas colunas de $\mathbf{U}_s$, ou seja, que elas pertencem subespaço de sinal⁽³⁾, então qualquer vetor $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_P]^T$, de tamanho $P \times 1$, pertencente ao subespaço de ruído satisfaz:

$$\mathbf{v}^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{1 \times M}. \quad (4.4)$$

Explorando a estrutura da matriz $\mathbf{H}_0$ (vide (3.9)) e sua dependência com o vetor $\mathbf{h}$ de tamanho $(L+1) \times 1$, é possível reescrever (4.4) como

$$\mathbf{v}^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{h}^T \mathbf{V}^* = \mathbf{0}_{1 \times M}, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{V}$ é uma matriz Hankel de tamanho $(L+1) \times M$ e explicitada a seguir:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_M \\ v_2 & v_3 & \dots & v_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{L+1} & v_{L+2} & \dots & v_{L+D} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

De (4.5), resulta que:

$$\mathbf{v}^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{1 \times M} \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{h} = 0. \quad (4.7)$$

⁽²⁾Vale ressaltar todavia que, apesar da nomenclatura, o subespaço de sinal contém também, além do sinal, ruído aditivo gaussiano branco; já o subespaço de ruído contém apenas ruído aditivo gaussiano branco, como é possível constatar em (4.3).

⁽³⁾A i -ésima coluna de $\mathbf{H}_0$ pode ser escrita como $\mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H \mathbf{a}_i$, onde $\mathbf{a}_i$ é um vetor arbitrário do espaço $\mathbb{C}^P$.

Sejam agora $\mathbf{v}_l$, $l = 1, 2, \dots, D$, D vetores do subespaço de ruído. Uma escolha natural para os D vetores $\mathbf{v}_i$ é utilizar os D vetores de $\mathbf{U}_n$. De (4.7) segue que

$$\mathbf{v}_l^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{1 \times M}, l \in \{1, \dots, D\} \Leftrightarrow \sum_{l=1}^D \mathbf{h}^H \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l^H \mathbf{h} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h} = 0, \quad (4.8)$$

onde

$$\mathbf{W} = \sum_{l=1}^D \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l^H. \quad (4.9)$$

Para evitar a solução trivial $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ em (4.8), é necessário estabelecer alguma restrição acerca de $\mathbf{h}$. É comum adotar-se a restrição de módulo unitário ou seja $\|\mathbf{h}\| = 1$. Assim, uma estimativa do vetor de canal, $\hat{\mathbf{h}}$, pode ser obtida resolvendo-se o seguinte problema de minimização com restrição:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \{\mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h}\}. \quad (4.10)$$

Nota-se que a função quadrática a ser minimizada em (4.10) nada mais é do que um quociente de Rayleigh [72] de $\mathbf{h}$ e $\mathbf{W}$. Logo, $\hat{\mathbf{h}}$ é o vetor associado ao menor valor singular de $\mathbf{W}$ (valor singular este, que é nulo).

Vale frisar também que se $\hat{\mathbf{h}}$ é uma solução para (4.10), também o é $\alpha \hat{\mathbf{h}}$, onde α é um escalar complexo, com módulo unitário. A ambigüidade da solução é inerente a este método de estimação de canal.

O método de estimação cega de canal acima descrito lança mão portanto de duas SVDs. A primeira provê D vetores que pertencem⁽⁴⁾ ao subespaço de ruído. Estes D vetores estão associados aos D menores valores singulares de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$, uma matriz $P \times P$. A segunda SVD advém da resolução/minimização de (4.10); a matriz $\mathbf{W}$ de tamanho $D \times D$ é decomposta por meio de uma SVD para obter o vetor associado ao seu menor valor singular. O vetor obtido é o vetor $\hat{\mathbf{h}}$, uma estimativa do vetor $\mathbf{h}$, a menos de um escalar complexo.

Na prática, apenas estimativas $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)$ da matriz correlação estão disponíveis no receptor e portanto, apenas estimativas $\hat{\mathbf{U}}_n(i)$ de $\mathbf{U}_n$ podem ser utilizadas. Em decorrência disto, uma estimativa do canal é o vetor $\hat{\mathbf{h}}(i)$ obtido por meio de (4.10): este vetor é o vetor que mais perto chega de satisfazer a condição de ortogonalidade entre $\hat{\mathbf{U}}_n$ e $\mathbf{H}_0$ em termos de mínimos quadrados. Ademais, para cada nova estimativa de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$, uma nova estimativa do canal pode ser obtida. Convém frisar que a cada nova estimativa, uma nova SVD sobre a matriz $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)$ deve ser efetuada, bem como uma nova matriz $\mathbf{W}$ deve ser computada, a fim de obter uma nova solução para (4.10). O primeiro passo, a saber, efetuar a SVD de uma matriz de tamanho $P \times P$ considerável, é computacionalmente penoso

⁽⁴⁾na verdade, geram

$(O(P^3))$.

Quanto à identificabilidade do canal por meio deste método, vale fazer as seguintes considerações. A matriz $\mathbf{H}_0$ tem posto M para $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{H}_0$ tem posto completo (*full column rank*). Assim sendo, o subespaço de ruído tem, invariavelmente, dimensão $P - M = D$. Daí decorre que por meio da SVD da matriz correlação obtém-se D vetores linearmente independentes que pertencem, de forma inequívoca, ao subespaço de ruído. Utilizando estes D vetores em (4.8), a identificabilidade do canal (a menos de uma ambigüidade representada por um escalar complexo) fica garantida [56].

4.3

Estimação Cega de Canal por meio do Método das Potências: OFDM-ZP

Em [37] é proposto um método de estimação cega de canal para sistemas CDMA baseado na seguinte igualdade:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sigma^2 \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}^{-1} \right)^m = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H, \quad (4.11)$$

onde $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$ é a matriz correlação da observação.

De fato, considere a matriz correlação, dada por (4.2), e sua SVD, como indicada em (4.3). Denotando agora $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M > 0$ as componentes da matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}_s$ (vide (4.3)), pode-se escrever:

$$\left(\sigma^2 \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}^{-1} \right)^p = [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \left(\frac{\sigma_s^2 \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M}{\sigma^2} \right)^{-p} & \mathbf{0}_{M \times D} \\ \mathbf{0}_{D \times M} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

A matriz $\frac{\sigma_s^2 \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M}{\sigma^2}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são da forma: $\frac{\sigma_s^2 \lambda_k + \sigma^2}{\sigma^2}$, para $k = 1, 2, \dots, M$. Sendo assim,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma_s^2 \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2}{\sigma^2} \right)^{-p} = 0. \quad (4.13)$$

Combinando (4.12) e (4.13) fica verificada (4.11).

Basicamente, a expressão (4.11) fornece uma estimativa para o operador $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$, que opera a projeção de um vetor do $\mathbb{C}^P$ no subespaço gerado pelas colunas de $\mathbf{U}_n$ (ou seja, projeta no subespaço de ruído).

Deseja-se então, explorando a ortogonalidade dos subespaços de sinal e de ruído, *reformular* o problema de identificação cega de canal para sistemas OFDM-ZP, de modo que o produto $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ apareça explicitamente na função custo a ser otimizada.

Observando que as colunas da matriz $\mathbf{H}_0$ são réplicas deslocadas e completadas com zeros do vetor $\mathbf{h}$, é possível escrever:

$$\mathbf{H}_0 = [\mathbf{S}_1 \mathbf{h} \ \mathbf{S}_2 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M \mathbf{h}]. \quad (4.14)$$

As matrizes $\mathbf{S}_i$ de tamanho $P \times (L+1)$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ em (4.14) satisfazem:

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times (L+1)} \\ \mathbf{I}_{L+1} \\ \mathbf{0}_{(P-i-L) \times (L+1)} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Uma vez que a i -ésima coluna de $\mathbf{H}_0$, dada por $\mathbf{S}_i \mathbf{h}$, com $\mathbf{S}_i$ definida em (4.15), pertence ao subespaço de sinal, da condição de ortogonalidade entre os subespaços de sinal e de ruído segue que:

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \mathbf{h} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \mathbf{h}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \mathbf{h} = 0. \quad (4.16)$$

Algumas observações se fazem necessárias neste ponto.

O primeiro comentário, e também o mais óbvio, é que o operador de projeção no subespaço de ruído aparece explicitamente em (4.16). Este operador pode ser determinado de duas formas: a partir da matriz $\mathbf{U}_n$, obtida da SVD da matriz correlação, e realizando o cômputo do produto, ou diretamente, por meio de (4.11). Embora a igualdade (4.11) seja somente válida no limite, ficou constatado em [37] que, na prática, para pequenas potências inteiras da inversa da matriz correlação já se consegue uma boa estimativa/aproximação para o operador projeção. Como será visto na Seção de Resultados, o mesmo ocorre para sistemas OFDM-ZP.

A segunda nota diz respeito à analogia dos sinais OFDM e CDMA. Uma expressão semelhante para identificação cega de canal no enlace direto de sistemas CDMA é obtida em [37]: a matriz que faz as vezes da matriz $\mathbf{S}_i$ contém em suas colunas réplicas deslocadas e completadas com zeros, da assinatura do i -ésimo usuário na transmissão. Como já discutido no Capítulo 3, o OFDM pode ser visto como um enlace direto CDMA com todas as assinaturas conhecidas pelo receptor. Assim, ao invés de utilizar somente uma “assinatura”, pode-se utilizar todas as assinaturas conhecidas, ou seja, pode-se explorar todas as colunas de $\mathbf{H}_0$ de forma conjunta.

Levando em conta todas as colunas da matriz $\mathbf{H}_0$, tem-se:

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{D \times M} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0\|_F^2 = 0. \quad (4.17)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0\|_F^2 &= \sum_{i=1}^M \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \mathbf{h}\|^2 \\ &= \mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \right) \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Logo, substituindo (4.18) em (4.17), a condição de ortogonalidade fica:

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{D \times M} \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \right) \mathbf{h} = 0. \quad (4.19)$$

Mais uma vez, a fim de evitar a solução trivial, firma-se a restrição de módulo unitário para $\mathbf{h}$, isto é, $\|\mathbf{h}\| = 1$, e assim, uma estimativa do canal (a menos de um escalar complexo) pode ser obtida por meio de:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[\mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (4.20)$$

Reconhecendo novamente em (4.20) um quociente de Rayleigh, segue que $\hat{\mathbf{h}}$ é o vetor associado ao menor valor singular da matriz $\sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i$ (valor singular este que é nulo, quando emprega-se o verdadeiro subespaço de ruído, ou o verdadeiro operador projeção).

Lançando agora mão de (4.11), levando em conta (4.20), o produto $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ pode ser substituído por potências ascendentes inteiras da inversa da matriz correlação $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$ de modo a obter o seguinte estimador de canal (a menos de uma ambigüidade na forma de um escalar complexo):

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[\mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H (\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}^{-1})^m \mathbf{S}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (4.21)$$

É importante salientar que, a medida que $m \rightarrow \infty$, (4.21) $\rightarrow$ (4.20). Vale também lembrar que, na prática, somente estimativas $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)$ da matriz correlação estão disponíveis no receptor.

Ao longo do texto, este método de estimação cega de canal, ilustrado por exemplo em (4.21), que utiliza a aproximação do operador de projeção por alguma potência m da inversa da matriz de correlação das observações, é denominado de “método das potências”.

Propõe-se agora mostrar que os estimadores obtidos em (4.10) e (4.20) são equivalentes. Para tal, basta mostrar que as formas quadráticas a serem minimizadas são equivalentes. Observando (4.8), conclui-se que a forma quadrática em (4.10) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h} = \sum_{i=1}^D \|\mathbf{v}_i^H \mathbf{H}_0\|^2.$$

Assim, basta mostrar que:

$$\sum_{i=1}^D \|\mathbf{v}_i^H \mathbf{H}_0\|^2 = \mathbf{h}^H \left(\sum_{j=1}^M \mathbf{S}_j^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_j \right) \mathbf{h}. \quad (4.22)$$

Senão vejamos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^D \|\mathbf{v}_i^H \mathbf{H}_0\|^2 &= \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^M |\mathbf{v}_i^H \mathbf{S}_j \mathbf{h}|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^M \mathbf{h}^H \mathbf{S}_j^H \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{S}_j \mathbf{h} \\
 &= \mathbf{h}^H \left[\sum_{j=1}^M \mathbf{S}_j^H \left(\sum_{i=1}^D \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{S}_j \right] \mathbf{h} \\
 &= \mathbf{h}^H \left(\sum_{j=1}^M \mathbf{S}_j^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_j \right) \mathbf{h},
 \end{aligned}$$

onde foi usado o seguinte fato $\sum_{i=1}^D \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$.

A igualdade em (4.22) implica que os esquemas de estimação de canal descritos por (4.10) e (4.20) levam à mesma estimativa de canal (a menos de um escalar complexo). Todavia, vale ressaltar que somente graças à nova formulação do problema obtida em (4.20) o operador projeção aparece, permitindo que se tire proveito de (4.11). Ademais, isso implica que a solução obtida por meio de (4.21) tende à solução obtida por meio de (4.10) (ou (4.20)) quando a potência m tende ao infinito⁽⁵⁾.

4.3.1

Implementação Alternativa pós-DFT

Nesta Seção, é explorada uma vez mais a ortogonalidade entre os subespaços de sinal e de ruído, levando porém em conta o modelo de sinais pós-DFT para o OFDM-ZP, apresentado na Seção 3.2.2.

O modelo de sinais pós-DFT para o OFDM-ZP com M portadoras e intervalo de guarda de comprimento $D = P - M$ é (vide (3.17)):

$$\mathbf{x}_P(i) = \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}_P(i), \quad (4.23)$$

onde $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)$ é a matriz diagonal de tamanho $P \times P$ e que tem as componentes do

⁽⁵⁾Como poderá ser constatado na Seção de Resultados, na prática para $m = 3$ já se obtém o efeito desejado, a saber, obtém-se estimativas de qualidade comparável tanto por meio de (4.10) quanto por meio de (4.21).

vetor $\tilde{\mathbf{h}}_P$ em sua diagonal, sendo:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{h}}_P &= \sqrt{P}\mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{(L+1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(P-L-1) \times 1} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{P}\mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(L+1)} \\ \mathbf{0}_{(P-L-1) \times (L+1)} \end{bmatrix} \mathbf{h} \\ &= \sqrt{P}\mathbf{F}_{P,L+1} \mathbf{h},\end{aligned}\tag{4.24}$$

onde

$$\mathbf{F}_{P,L+1} = \mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(L+1)} \\ \mathbf{0}_{(P-L-1) \times (L+1)} \end{bmatrix};$$

ou seja, $\mathbf{F}_{P,L+1}$ é uma matriz de tamanho $P \times (L+1)$ que contém as $L+1$ primeiras colunas da matriz DFT de P pontos. Ainda em (4.23), $\mathbf{V}$ é a matriz de tamanho $P \times M$ definida em (3.19) (e que *não tem relação* com a matriz $\mathbf{V}$ da Seção 4.2). Finalmente, $\mathbf{n}_P(i)$ é vetor gaussiano branco, com vetor média nulo e matriz covariância $\sigma^2\mathbf{I}_P$.

A matriz de correlação das observações $\mathbf{x}_P(i)$, denotada $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$, é definida como:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P} &= \mathbb{E}[\mathbf{x}_P(i)\mathbf{x}_P^H(i)] \\ &= \sigma_s^2\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}\mathbf{V}^H\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)^H + \sigma^2\mathbf{I}_P,\end{aligned}\tag{4.25}$$

e possui a seguinte SVD:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P} = [\mathbf{U}'_s \mathbf{U}'_n] \begin{bmatrix} \sigma_s^2\mathbf{\Lambda}'_s + \sigma^2\mathbf{I}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2\mathbf{I}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}'_s{}^H \\ \mathbf{U}'_n{}^H \end{bmatrix}.\tag{4.26}$$

Seguindo linha de raciocínio semelhante à que foi apresentada nas seções anteriores, as matrizes $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$ compartilham o mesmo subespaço de sinal e o mesmo subespaço de ruído: em (4.26), $\mathbf{U}'_s$ de tamanho $P \times M$ é uma base para o subespaço de sinal da matriz $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$, e $\mathbf{U}'_n$ de tamanho $P \times D$ é uma base para o subespaço de ruído da matriz $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$. Como as colunas de $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$ pertencem ao subespaço de sinal, então da ortogonalidade entre os subespaços de sinal e de ruído tem-se que:

$$\mathbf{U}'_n{}^H\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V} = \mathbf{0}_{D \times M} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}'_n{}^H\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}\|_F^2 = 0.\tag{4.27}$$

Observando que é possível reescrever $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$ como:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V} &= \text{diag}(\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \dots \tilde{h}_P) [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_M] \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 v_{11} & \tilde{h}_1 v_{21} & \dots & \tilde{h}_1 v_{M1} \\ \tilde{h}_2 v_{12} & \tilde{h}_2 v_{22} & \dots & \tilde{h}_2 v_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_P v_{1P} & \tilde{h}_P v_{2P} & \dots & \tilde{h}_P v_{MP} \end{bmatrix} \\ &= [\text{diag}(\mathbf{v}_1)\tilde{\mathbf{h}}_P \text{diag}(\mathbf{v}_2)\tilde{\mathbf{h}}_P \dots \text{diag}(\mathbf{v}_M)\tilde{\mathbf{h}}_P],\end{aligned}\quad (4.28)$$

chega-se a:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}'_n \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}\|_F^2 &= \sum_{k=1}^M \tilde{\mathbf{h}}_P^H \text{diag}(\mathbf{v}_k)^H \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \text{diag}(\mathbf{v}_k) \tilde{\mathbf{h}}_P \\ &= \tilde{\mathbf{h}}_P^H \left[\sum_{k=1}^M \text{diag}(\mathbf{v}_k)^H \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \text{diag}(\mathbf{v}_k) \right] \tilde{\mathbf{h}}_P \\ &= \tilde{\mathbf{h}}_P^H \left[\sum_{k=1}^M \mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_k^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \right] \tilde{\mathbf{h}}_P \\ &= \tilde{\mathbf{h}}_P^H [\mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H] \tilde{\mathbf{h}}_P \\ &= P \mathbf{h}^H \mathbf{F}_{P,L+1}^H [\mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H] \mathbf{F}_{P,L+1} \mathbf{h},\end{aligned}\quad (4.29)$$

onde os seguintes fatos foram usados:

$$\text{diag}(\mathbf{u})\mathbf{A}\text{diag}(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\mathbf{v}^T) \odot \mathbf{A}$$

e

$$\sum_i (\mathbf{B}_i \odot \mathbf{A}) = \left(\sum_i \mathbf{B}_i \right) \odot \mathbf{A}.$$

Substituindo-se agora (4.29) em (4.27) e impondo a restrição $\|\mathbf{h}\| = 1$ para evitar a solução trivial, chega-se ao seguinte estimador de canal:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[\mathbf{h}^H \mathbf{F}_{P,L+1}^H [\mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H] \mathbf{F}_{P,L+1} \mathbf{h} \right], \quad (4.30)$$

que também padece de uma ambigüidade modelada por um escalar complexo. O vetor solução é o vetor associado ao menor valor singular da matriz de tamanho $(L+1) \times (L+1)$:

$$\mathbf{F}_{P,L+1}^H [\mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H] \mathbf{F}_{P,L+1}.$$

É interessante notar que o operador projeção no subespaço de ruído de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$ aparece explicitamente em (4.30). É possível portanto obter $\mathbf{U}'_n$ a partir da SVD de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$ e

computar o produto $\mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n{}^H$, ou obter diretamente o operador projeção utilizando (4.11).

Assim, o estimador de canal baseado em potências ascendentes da inversa da matriz correlação $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$ é dado por:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[\mathbf{h}^H \mathbf{F}_{P,L+1}^H [\mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}^{-m}] \mathbf{F}_{P,L+1} \mathbf{h} \right]. \quad (4.31)$$

Convém frisar que, tanto em (4.30) quanto em (4.11), o produto $\mathbf{V}^* \mathbf{V}^T$ e $\mathbf{F}_{P,L+1}$ podem ser pré-computados e pré-alocados no receptor, visto que as matrizes $\mathbf{V}$ e $\mathbf{F}_{P,L+1}$ só dependem de matrizes DFTs. Ademais, vale ressaltar também a presença de um produto elemento-a-elemento de matrizes (produto de Hadamard), uma operação computacionalmente menos custosa do que um produto matricial. Na prática, apenas estimativas $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_P}(i)$ de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$ estão disponíveis. Estas estimativas são empregadas em (4.31).

A seguir, mostra-se que, apesar de derivados de forma independente, os estimadores dados por (4.30) e (4.20) (e portanto (4.10)) são equivalentes. Para tal, basta mostrar que:

$$\|\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}\|_F^2 = \|\mathbf{U}_n'^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V}\|_F^2.$$

Lembrando que

$$\tilde{\mathbf{x}}_P(i) = \mathbf{F}_P^H \mathbf{x}_P(i) = \mathbf{F}_P^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i),$$

e comparando com

$$\tilde{\mathbf{x}}_P(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i),$$

conclui-se que

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{F}_P^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{F}_M.$$

Observando agora que $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P} = \mathbf{F}_P \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} \mathbf{F}_P^H$, $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$ pode ser vista como obtida a partir de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$ por meio de uma transformação de similaridade (uma vez que $\mathbf{F}_P$ é unitária), e portanto tem-se que $\Lambda'_s = \Lambda_s$ e $[\mathbf{U}'_s \ \mathbf{U}'_n] = \mathbf{F}_P [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n]$ em (4.26).

Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0\|_F^2 &= \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{F}_P^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{F}_M^H\|_F^2 \\ &= \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{F}_P^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V}\|_F^2 \\ &= \|\mathbf{U}_n'^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V}\|_F^2 \end{aligned}$$

como queria-se demonstrar.

4.4

Estimação Cega de Canal por meio do Método das Potências: OFDM-CP

O modelo dos sinais OFDM-CP com M portadoras, e intervalo de guarda $D = P - M$ é dado por (vide (2.21)):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{CP}}(i) &= \mathbf{H}\mathbf{F}_{\text{CP}}\mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}_{\text{CP}}\mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\text{IBI}} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{CP}} & \mathbf{0}_{P \times M} \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{F}_{\text{CP}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{s}(i) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(i), \end{aligned}$$

com $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_{\text{IBI}}$ e $\mathbf{F}_{\text{CP}}$ definidos em (2.16), (2.17) e (2.10) respectivamente; o vetor observação $\mathbf{r}_{\text{CP}}(i)$ tem comprimento P , o vetor de dados $\mathbf{s}(i)$ possui M componentes, e $\mathbf{n}(i)$ é vetor gaussiano branco cujos elementos possuem média nula e variância $\sigma^2 = N_0$.

Definindo a seguinte matriz de tamanho $P \times M$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{D \times (M-D)} & \vdots & \mathbf{I}_D \\ & \mathbf{I}_M & \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{f}_1 \ \cdots \ \mathbf{f}_M] \end{aligned} \quad (4.32)$$

e observando (2.10), tem-se que

$$\mathbf{F}_{\text{CP}} = \mathbf{F}\mathbf{F}_M^H,$$

de modo que a equação (2.21) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{r}_{\text{CP}}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{F} & \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H\mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{F}_M^H\mathbf{s}(i) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(i).$$

Uma condição necessária para garantir a existência do subespaço de ruído é $P > 2M$. Para sistemas OFDM usuais, essa desigualdade não se verifica⁽⁶⁾ e é preciso portanto considerar mais de um vetor observação $\mathbf{r}_{\text{CP}}(i)$ simultaneamente. De [40], sabe-se que é possível aplicar as técnicas de subespaço utilizando-se apenas

⁽⁶⁾é usual [11, 13, 15] ter-se $P = \frac{5}{4}M$, ou seja o intervalo de guarda representa 25% do símbolo OFDM original.

2 vetores observação por vez, como segue⁽⁷⁾:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{CP}}^{(t)}(i-1) \\ \mathbf{r}_{\text{CP}}(i) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{r}}(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_t & \mathbf{0}_{(P-L) \times P} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0}_{P \times M} \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(t)}(i-1) \\ \mathbf{n}(i) \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_t \mathbf{F} & \mathbf{0}_{(P-L) \times M} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} & \mathbf{H} \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}(i)} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(t)}(i-1) \\ \mathbf{n}(i) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{n}}(i)}, \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

com $\mathbf{F}$ definida em (4.32). Em (4.33), $\bar{\mathbf{r}}(i)$ é um vetor de tamanho $(2P - L) \times 1$, bem como $\bar{\mathbf{n}}(i)$. Por sua vez, $\bar{\mathbf{A}}$ tem tamanho $(2P - L) \times 2M$. Já o vetor $\bar{\mathbf{x}}(i)$ possui $2M$ componentes.

Em (4.33), $\mathbf{r}_{\text{CP}}^{(t)}(i-1)$ (respectivamente $\mathbf{n}^{(t)}(i-1)$) é o vetor que contém os últimos $P - L$ elementos do vetor $\mathbf{r}_{\text{CP}}(i-1)$ (respectivamente $\mathbf{n}(i-1)$). Ainda em (4.33), $\mathbf{H}_t$ é uma matriz Toeplitz de tamanho $(P - L) \times P$ com primeira coluna $[h_L \underbrace{0 \cdots 0}_{P-L-1 \text{ zeros}}]^T$ e primeira linha $[h_L \cdots h_0 \underbrace{0 \cdots 0}_{P-L-1 \text{ zeros}}]$ ou seja:

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_L & \cdots & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_L & \cdots & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_L & \cdots & h_0 \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

A matriz de correlação das observações $\bar{\mathbf{r}}(i)$ em (4.33), denotada $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$ e de tamanho $(2P - L) \times (2P - L)$, é definida como:

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}} = \mathbb{E}[\bar{\mathbf{r}}(i)\bar{\mathbf{r}}^H(i)] \tag{4.35}$$

$$= \sigma_s^2 \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{A}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{2P-L}, \tag{4.36}$$

e pode ser decomposta por SVD como segue:

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}} = [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \boldsymbol{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_{2M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{2D-L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Da condição de ortogonalidade dos subespaços de sinal e de ruído, e sabendo que

⁽⁷⁾de modo a contemplar também o caso $L = D$, ou ainda $\hat{L} = D$.

as colunas de $\bar{\mathbf{A}}$ pertencem ao subespaço de sinal, tem-se que:

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}_{(2D-L) \times 2M}. \quad (4.38)$$

Neste ponto, pode-se proceder de forma análoga à Seção 4.2, isto é seguindo os moldes de (4.5), (4.7) e (4.8) com $\bar{\mathbf{A}}$ fazendo as vezes de $\mathbf{H}_0$, ou escolher um enfoque semelhante ao da Seção 4.3 que explicita o operador projeção no subespaço de ruído de $\bar{\mathbf{A}}$. Desenvolvimentos semelhantes à primeira opção podem ser encontrados em [39, 40, 42]. A seguir, adota-se a segunda alternativa, resultando num estimador de canal semelhante ao apresentado na Seção 4.3.

As colunas de $\bar{\mathbf{A}}$ dependem do vetor $\mathbf{h}$. A seguir, esta dependência é explicitada.

Considerando primeiro a matriz $\mathbf{HF}$, pode-se escrever:

$$\mathbf{HF} = \mathbf{H}[\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_M], \quad (4.39)$$

de tal forma que a k -ésima coluna de $\mathbf{HF}$ vale:

$$\mathbf{H}\mathbf{f}_k = \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)} \mathbf{h} \quad (4.40)$$

onde $\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)}$ é uma matriz Toeplitz de tamanho $P \times (L+1)$ com primeira coluna $\mathbf{f}_k$ e primeira linha $[f_k^{(1)} \underbrace{0 \cdots 0}_{L \text{ zeros}}]$, e $f_k^{(l)}$ é o l -ésimo elemento do vetor $\mathbf{f}_k$. Portanto

$$\mathbf{HF} = [\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}]. \quad (4.41)$$

Assim conclui-se que a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times M} \\ \mathbf{HF} \end{bmatrix}$, presente na matriz $\bar{\mathbf{A}}$ em (4.33) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times M} \\ \mathbf{HF} \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}],$$

com

$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times (L+1)} \\ \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Considerando agora a matriz $\mathbf{H}_t \mathbf{F}$, tem-se que:

$$\mathbf{H}_t \mathbf{F} = \mathbf{H}_t [\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_M], \quad (4.43)$$

de modo que sua k -ésima coluna se escreve:

$$\mathbf{H}_t \mathbf{f}_k = \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(k)} \mathbf{h}, \quad (4.44)$$

onde $\mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(k)}$ é uma matriz de tamanho $(P-L) \times (L+1)$ dada por:

$$\mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(k)} = \begin{bmatrix} f_k^{(L+1)} & f_k^{(L)} & \cdots & f_k^{(2)} & f_k^{(1)} \\ f_k^{(L+2)} & f_k^{(L+1)} & \cdots & f_k^{(3)} & f_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k^{(P)} & f_k^{(P-1)} & \cdots & f_k^{(P-L+1)} & f_k^{(P-L)} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Segue que

$$\mathbf{H}_t \mathbf{F} = [\mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(M)} \mathbf{h}]. \quad (4.46)$$

Por fim, a k -ésima coluna da matriz $\mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F}$ pode ser expressa como:

$$\mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{f}_k = \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)} \mathbf{h},$$

onde $\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)}$ é uma matriz Toeplitz de tamanho $P \times (L+1)$ com primeira coluna nula e primeira linha $[0 \ f_k^{(P)} \cdots f_k^{(P-L+1)}]$, de modo que

$$\mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} = [\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)} \mathbf{h}]. \quad (4.47)$$

Capitalizando (4.46) e (4.47), segue que a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{H}_t \mathbf{F} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \end{bmatrix}$ presente em (4.33) admite portanto a seguinte expressão alternativa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_t \mathbf{F} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(1)} \mathbf{h} & \cdots & \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(M)} \mathbf{h} \\ \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)} \mathbf{h} & \cdots & \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)} \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$= [\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(M)} \mathbf{h}], \quad (4.49)$$

onde $\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(k)}$ é uma matriz Toeplitz de tamanho $(2P-L) \times (L+1)$ com primeira coluna $[f_k^{(L+1)} \cdots f_k^{(P)}]^T$ e primeira linha $[f_k^{(L+1)} \cdots f_k^{(1)}]$.

Portanto, a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ pode ser reescrita como:

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(M)} \mathbf{h} \ \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}] \quad (4.50)$$

$$= [\bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{2M} \mathbf{h}], \quad (4.51)$$

com

$$\bar{\mathbf{S}}_k = \begin{cases} \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(k)} & , k = 1, \dots, M \\ \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(k-M)} & , k = M+1, \dots, 2M \end{cases}. \quad (4.52)$$

Da condição de ortogonalidade entre os subespaços decorre que, para cada coluna de $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_k \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad , \quad k = 1, \dots, 2M. \quad (4.53)$$

Logo, de (4.38), chega-se a

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}_{(2D-L) \times 2M} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{A}}\|_F^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{2M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} = 0, \quad (4.54)$$

e portanto pode-se obter uma estimativa para o canal (a menos de um escalar complexo) por meio de:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left[\mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{2M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (4.55)$$

Reconhecendo novamente em (4.55) um quociente de Rayleigh, segue que $\hat{\mathbf{h}}$ é o vetor associado ao menor valor singular da matriz $\sum_{i=1}^{2M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i$.

Lançando agora mão de (4.11), levando em conta (4.55), o produto $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ pode ser substituído por potências ascendentes inteiras da inversa da matriz correlação $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$ de modo a obter o seguinte estimador de canal (a menos de uma ambigüidade):

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left[\mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{2M} \bar{\mathbf{S}}_i^H (\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}^{-1})^m \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (4.56)$$

Quanto à identificabilidade do canal por meio do subespaço do ruído, foi demonstrado em [40] que, contanto que nenhuma portadora seja atingida por um zero do canal na frequência (isto é $\tilde{h}_M[k] \neq 0$, $k = 0, \dots, M-1$), a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ tem posto $2M$, ou seja tem posto completo. Neste caso, o subespaço de ruído tem dimensão $2P - L - 2M = 2D - L$. O algoritmo de [40] extrai $2D - L$ vetores linearmente independentes pertencentes ao subespaço de ruído por meio da SVD da matriz correlação $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$. Estes $2D - L$ vetores são empregados de forma análoga à (4.8) em uma função custo semelhante à (4.10).

Caso Z portadoras ($Z \neq 0$) sejam atingidas por zeros (da resposta em frequência) do canal, a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ tem posto reduzido (*rank deficient*): seu posto é $2M - Z$ [40] (a dimensão do subespaço de ruído é $2D - L + Z$). Como na prática não é possível determinar o número Z de zeros atingindo as portadoras, somente $2D - L$ vetores dentre os $2D - L + Z$ disponíveis são empregados acarretando que o algoritmo em [40] não garante a identificabilidade do canal.

É importante ressaltar que o método proposto nesta seção não padece desse problema: como utiliza-se uma aproximação para o operador projeção, todos os $2D - L + Z$ vetores são, implicitamente, utilizados, e a identificabilidade do canal (a menos de um escalar complexo) é portanto garantida à medida que $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}^{-m} \rightarrow \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$.

4.5

Estimação Cega de Canal por meio de Casamento de Correlação: OFDM-ZP

Nesta Seção, é proposto um método de estimação cega de canal, baseado no casamento de correlação (do inglês *correlation matching*) e já empregado com sucesso em sistemas CDMA [44, 45].

O modelo de sinais é o mesmo adotado na Seção 4.2.

Uma vez que a matriz correlação pode ser parametrizada pelo vetor contendo a resposta ao impulso do canal, a idéia básica deste método é obter o vetor de parâmetros que minimiza alguma métrica envolvendo a matriz correlação parametri-

zada e suas estimativas adquiridas de alguma forma, ao longo do tempo. A métrica adotada a seguir é o quadrado da norma de Frobenius da diferença entre a matriz correlação e suas estimativas, ou seja, a distância euclidiana entre as matrizes em questão.

Define-se a matriz erro $\mathbf{E}(i)$ entre a matriz de correlação suposta conhecida (isto é, teórica) $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_P(i)\tilde{\mathbf{x}}_P(i)^H]$ e a matriz de correlação estimada $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)$ obtida de alguma forma a partir das observações $\tilde{\mathbf{x}}_P(i)$, como segue:

$$\mathbf{E}(i) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} - \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i), \quad (4.57)$$

com

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} = \sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P. \quad (4.58)$$

Seja agora a função custo $J(i)$ dada por:

$$J(i) = \|\mathbf{E}(i)\|_F^2 = \text{vec}^H(\mathbf{E}(i))\text{vec}(\mathbf{E}(i)). \quad (4.59)$$

Utilizando (4.57) pode-se escrever:

$$\text{vec}(\mathbf{E}(i)) = \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) - \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)). \quad (4.60)$$

Aplicando o operador $\text{vec}\{\cdot\}$ em (4.58), tem-se:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) &= \text{vec}(\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P) \\ &= \text{vec}(\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H) + \text{vec}(\sigma^2 \mathbf{I}_P). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Lembrando que $\mathbf{H}_0 = [\mathbf{S}_1 \mathbf{h} \ \mathbf{S}_2 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M \mathbf{h}]$, com as matrizes $\mathbf{S}_i$ definidas em (4.15), tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H &= [\mathbf{S}_1 \mathbf{h} \ \mathbf{S}_2 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M \mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_1^H \\ \mathbf{h}^H \mathbf{S}_2^H \\ \vdots \\ \mathbf{h}^H \mathbf{S}_M^H \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_k^H. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
 \text{vec}(\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H) &= \text{vec} \left(\sigma_s^2 \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_k^H \right) \\
 &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_k \sigma_s^2 \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_k^H) \\
 &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_k \mathcal{X} \mathbf{S}_k^H), \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

com $\mathcal{X} = \sigma_s^2 \mathbf{h} \mathbf{h}^H$.

Substituindo (4.62) em (4.61), e utilizando o seguinte fato [71]:

$$\text{vec}(\mathbf{S}_k \mathcal{X} \mathbf{S}_k^H) = (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k) \text{vec}(\mathcal{X}),$$

resulta que:

$$\begin{aligned}
 \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k) \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P) \sigma^2 \\
 &= \mathbf{M} \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P) \sigma^2, \tag{4.63}
 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{M} = \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k)$ é uma matriz conhecida e de tamanho $P^2 \times (L+1)^2$.

Susbtituindo (4.63) em (4.60), obtem-se:

$$\text{vec}(\mathbf{E}(i)) = \mathbf{M} \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P) \sigma^2 - \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)). \tag{4.64}$$

Definindo agora, para facilitar a notação, os seguintes vetores:

$$\mathbf{v} = \text{vec}(\mathcal{X}), \quad \mathbf{i} = \text{vec}(\mathbf{I}_P), \quad \mathbf{q}(i) = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)),$$

e de posse de (4.64) pode-se reescrever a função custo em (4.59) como segue:

$$\begin{aligned}
 J(i) &= \left\| \mathbf{M} \text{vec}(\mathcal{X}) + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I}_P) - \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)) \right\|^2 \\
 &= \left[\mathbf{M} \mathbf{v} + \sigma^2 \mathbf{i} - \mathbf{q}(i) \right]^H \left[\mathbf{M} \mathbf{v} + \sigma^2 \mathbf{i} - \mathbf{q}(i) \right] \\
 &= \mathbf{v}^H \mathbf{M}^H \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{v}^H \mathbf{M}^H \mathbf{i} \sigma^2 - \mathbf{v}^H \mathbf{M}^H \mathbf{q}(i) + \mathbf{i}^H \sigma^2 \mathbf{M} \mathbf{v} \\
 &\quad + \mathbf{i}^H \sigma^4 \mathbf{i} - \mathbf{i}^H \sigma^2 \mathbf{q}(i) - \mathbf{q}(i)^H \mathbf{M} \mathbf{v} - \mathbf{q}(i)^H \mathbf{i} \sigma^2 + \mathbf{q}(i)^H \mathbf{q}(i). \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

Convém observar que a função custo $J(i)$ envolve produtos de até segunda ordem do vetor $\mathbf{v}$, e portanto de até quarta ordem do vetor $\mathbf{h}$, o que dificulta a minimização de $J(i)$ com relação a $\mathbf{h}$. Todavia, note que é possível recuperar $\mathbf{h}$, a menos de um escalar complexo, a partir de $\mathcal{X}$, uma vez que $\mathcal{X}$ é uma matriz de

posto unitário⁽⁸⁾. Assim, procede-se como em [45], e minimiza-se $J(i)$ com relação a $\mathbf{v}$ e σ^2 ; como $J(i)$ é função quadrática nestas variáveis, fica garantida a existência de mínimos globais,

As derivadas conjugadas [72] da função custo $J(i)$ com relação a $\mathbf{v}$ e σ^2 são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial J(i)}{\partial \mathbf{v}^*} = \mathbf{M}^H \mathbf{M} \mathbf{v} + \sigma^2 \mathbf{M}^H \mathbf{i} - \mathbf{M}^H \mathbf{q}(i), \\ \frac{\partial J(i)}{\partial (\sigma^2)^*} = \mathbf{i}^H \mathbf{M} \mathbf{v} + \sigma^2 \mathbf{i}^H \mathbf{i} - \mathbf{i}^H \mathbf{q}(i). \end{cases}$$

Resolvendo $\frac{\partial J(i)}{\partial (\sigma^2)^*} = 0$ para σ^2 obtém-se

$$\sigma^2 = \frac{1}{P} \{ \mathbf{i}^H \mathbf{q}(i) - \mathbf{i}^H \mathbf{M} \mathbf{v} \}. \quad (4.66)$$

Resolvendo $\frac{\partial J(i)}{\partial \mathbf{v}^*} = \mathbf{0}$ com (4.66) chega-se a:

$$\hat{\mathbf{v}}(i) = [\mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{q}(i). \quad (4.67)$$

Lembrando que $\mathbf{v} = \text{vec}(\mathcal{X})$, então $\text{unvec}(\mathbf{v}) = \mathcal{X}$ e uma estimativa do vetor $\mathbf{h}$ pode ser obtida, a menos de um escalar complexo, determinando-se o vetor singular associado ao maior valor singular de $\mathcal{X}$, uma vez que $\mathcal{X}$ tem posto 1. Convém frisar que a matriz $\mathcal{X}$ sobre a qual se opera para obter $\mathbf{h}$, tem tamanho $(L+1) \times (L+1)$.

A seguir, mostra-se que ao adotar-se

$$\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \tilde{\mathbf{x}}_P(j) \tilde{\mathbf{x}}_P^H(j)$$

como estimativa da matriz correlação⁽⁹⁾, então para $i \rightarrow \infty$, $\hat{\mathbf{v}}(i) \rightarrow \mathbf{v}$, daí decorre que $\hat{\mathcal{X}}(i) \rightarrow \mathcal{X}$, portanto $\hat{\mathbf{h}}(i) \rightarrow \mathbf{h}$ (a menos de uma ambigüidade) e o estimador é consistente.

De fato, partindo da suposição usual de que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P},$$

então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}(i) = [\mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}). \quad (4.68)$$

Substituindo (4.63) em (4.68) chega-se a:

⁽⁸⁾De fato, $\mathbf{h}$ é o vetor associado ao único valor singular não-nulo de $\mathcal{X}$.

⁽⁹⁾estimativa adequada para canal invariante no tempo.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}(i) = \mathbf{v} + [\mathbf{M}^H(\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P}\mathbf{ii}^H)\mathbf{M}]^{-1}\mathbf{M}^H(\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P}\mathbf{ii}^H)\sigma^2\mathbf{i}. \quad (4.69)$$

Para mostrar que o estimador é consistente, basta mostrar, por exemplo, que $(\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P}\mathbf{ii}^H)\mathbf{i} = \mathbf{0}$ em (4.69). Lembrando que $\mathbf{i} = \text{vec}(\mathbf{I}_P)$, tem-se por definição que:

$$\mathbf{i}^H\mathbf{i} = \|\mathbf{I}_P\|_F^2 = P.$$

Assim

$$(\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P}\mathbf{ii}^H)\mathbf{i} = \mathbf{i} - \frac{1}{P}\mathbf{ii}^H\mathbf{i} = \mathbf{0},$$

logo

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}(i) = \mathbf{v}$$

e o estimador é consistente.

Com relação à complexidade computacional do algoritmo proposto, vale a pena ressaltar que a matriz pré-multiplicando $\mathbf{q}(i)$ em (4.67) é conhecida *a priori* e pode ser portanto pré-computada, de modo que o cômputo de (4.67) requer idealmente $P^2(L+1)^2$ multiplicações. Uma vez que as matrizes envolvidas são esparsas este número é drasticamente reduzido.

4.6

Estimação Cega de Canal por meio de Casamento de Correlação: OFDM-CP

De modo geral, o procedimento para sinais OFDM-CP é análogo ao dos sinais OFDM-ZP. Também define-se uma função custo $J(i)$ como em (4.59); contudo para o OFDM-CP a matriz correlação é dada por

$$\mathbf{R}_{\text{rCP}} = \sigma_s^2 \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H + \sigma_s^2 \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}_{\text{IBI}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P. \quad (4.70)$$

Lembrando que (vide (4.41)):

$$\mathbf{H} \mathbf{F} = [\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}],$$

chega-se à seguinte expressão para $\mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H$ presente em (4.70):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H &= [\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(1)H} \\ \vdots \\ \mathbf{h}^H \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(M)H} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)} \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)H}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Lembrando agora que (vide (4.47)):

$$\mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F} = [\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)}\mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)}\mathbf{h}],$$

tem-se que $\mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}_{\text{IBI}}^H$ em (4.70) vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}_{\text{IBI}}^H &= [\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)}\mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)}\mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}^H\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)H} \\ \vdots \\ \mathbf{h}^H\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)H} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)}\mathbf{h}\mathbf{h}^H\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)H}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Assim de (4.71),

$$\begin{aligned} \text{vec}(\sigma_s^2\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H) &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)}\mathcal{X}\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)H}) \\ &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}), \end{aligned} \quad (4.73)$$

com $\mathcal{X} = \sigma_s^2\mathbf{h}\mathbf{h}^H$. Analogamente, de (4.72):

$$\begin{aligned} \text{vec}(\sigma_s^2\mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}_{\text{IBI}}^H) &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)}\mathcal{X}\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)H}) \\ &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Aplicando o operador $\text{vec}\{\cdot\}$ em (4.70) e utilizando (4.73) e (4.74) chega-se a:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{R}_{\text{rCP}}) &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}) + \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}) + \\ &\quad + \sigma^2\text{vec}(\mathbf{I}_P) \\ &= \mathbf{M}_{\text{CP}}\text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P)\sigma^2, \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde:

$$\mathbf{M}_{\text{CP}} = \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}) + \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}). \quad (4.76)$$

Seguindo linha de raciocínio semelhante a da Seção 4.5 conclui-se que $\mathcal{X} = \text{unvec}\{\mathbf{v}\}$, com

$$\hat{\mathbf{v}}(i) = [\mathbf{M}_{\text{CP}}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{ii}^H) \mathbf{M}_{\text{CP}}]^{-1} \mathbf{M}_{\text{CP}}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{ii}^H) \mathbf{q}(i), \quad (4.77)$$

e uma estimativa $\hat{\mathbf{h}}$ de $\mathbf{h}$ é (a menos de um escalar complexo) o vetor singular associado ao maior valor singular de $\mathcal{X}$. De forma análoga, é possível mostrar que o estimador é consistente.

4.7 Resultados

Nesta seção são apresentados resultados de simulações que ilustram alguns aspectos dos estimadores de canal tratados ao longo deste capítulo.

4.7.1 Preliminares

Conforme mencionado, os estimadores abordados/propostos padecem de uma ambigüidade representada por um escalar complexo. Por ora, adota-se um procedimento bastante usual na literatura, que consiste em supor que a fase de uma componente do vetor $\mathbf{h}$ (verdadeiro) é conhecida no receptor [54, 45].

Sem perda de generalidade, seja ψ a fase do primeiro elemento do vetor $\mathbf{h}$ (canal verdadeiro), suposta conhecida pelo receptor. Denota-se a estimativa cega de canal por $\hat{\mathbf{h}}_b = [\hat{h}_0^{(b)} \cdots \hat{h}_L^{(b)}]^T$. Seja agora θ a fase do elemento $\hat{h}_0^{(b)}$. Então, uma estimativa do canal, já sem ambigüidade de fase, é $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}_b e^{j(\psi - \theta)}$.

No que diz respeito à resolução da ambigüidade, os resultados apresentados nas seções 4.7.2, 4.7.3, 4.7.4 e 4.7.5 são obtidos empregando-se o método (“gênio”) descrito acima.

O desempenho dos estimadores de canal é avaliado em termos de seu erro quadrático médio (denotado MSE, do inglês *Mean Square Error*) definido como $\mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}\|^2]$, onde $\mathbf{h}$ é o canal verdadeiro e $\hat{\mathbf{h}}$ é o canal estimado (com a ambigüidade resolvida).

Esquemas “práticos” para resolução da ambigüidade inerente aos estimadores de canal são assunto da seção 4.8.

4.7.2 Casamento de Correlação – OFDM-ZP

Propõe-se apreciar o desempenho do estimador de canal baseado em casamento de correlação, doravante apelidado de ‘corrmatch’. Considera-se um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras transmitindo símbolos oriundos de uma constelação BPSK, e intervalo de guarda de comprimento $D = 16$, de modo que o tamanho do símbolo OFDM efetivamente transmitido é $P = 80$ amostras. Os sinais transmitidos experimentam um canal *fixo* $\mathbf{h} = \frac{1}{1.8804} \begin{bmatrix} -1.28 - j0.301 & -0.282 + \end{bmatrix}$

$j0.562 \ 0.031 - j0.211 \ 0.106 + j1.164]^T$ de ordem $L = 3$ e satisfazendo $\|\mathbf{h}\|^2 = 1$ cuja resposta em frequência encontra-se ilustrada na Figura 4.1.

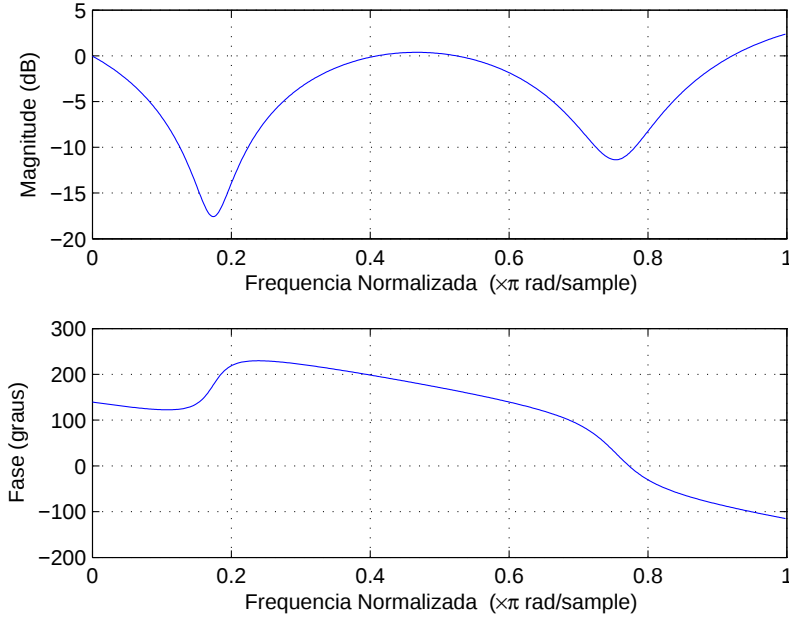


Figura 4.1: Resposta em Frequência do canal fixo de ordem $L = 3$

O desempenho do estimador ‘corrmatch’ é avaliado em termos de seu erro quadrático médio (denotado MSE), definido como $\mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}\|^2]$, onde $\mathbf{h}$ é o canal verdadeiro e $\hat{\mathbf{h}}$ é o canal estimado (com a ambigüidade resolvida). Os resultados são obtidos realizando-se uma média ao longo de 30 experimentos independentes; para cada experimento são considerados 1000 símbolos OFDM, ou seja, simula-se a transmissão de 64000 bits.

A matriz correlação das observações, necessária no esquema ‘corrmatch’, é estimada recursivamente por: $\hat{\mathbf{R}}_n = \frac{1}{n+1}(n\hat{\mathbf{R}}_{n-1} + \tilde{\mathbf{x}}_P(n)\tilde{\mathbf{x}}_P(n)^H)$.

As figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, ilustram o MSE do estimador ‘corrmatch’, para razões $\frac{E_B}{N_0}$ de 0dB, 5dB, 10dB, 15dB, 20dB e 25 dB respectivamente. O desempenho MSE do estimador da Seção 4.2, denotado ‘subspace’, também consta das figuras, como referência. A ordem do canal é suposta conhecida, ou seja, estima-se um canal de ordem 3.

Das figuras, observa-se que o esquema ‘corrmatch’ tem desempenho superior para razões $\frac{E_B}{N_0}$ pequenas e moderadas, de até 10dB. Para $\frac{E_B}{N_0} = 15\text{dB}$, os estimadores têm desempenhos MSE semelhantes. Já para razões $\frac{E_B}{N_0}$ altas, o estimador baseado no método do subespaço de ruído tem desempenho bem superior, em termos de MSE.

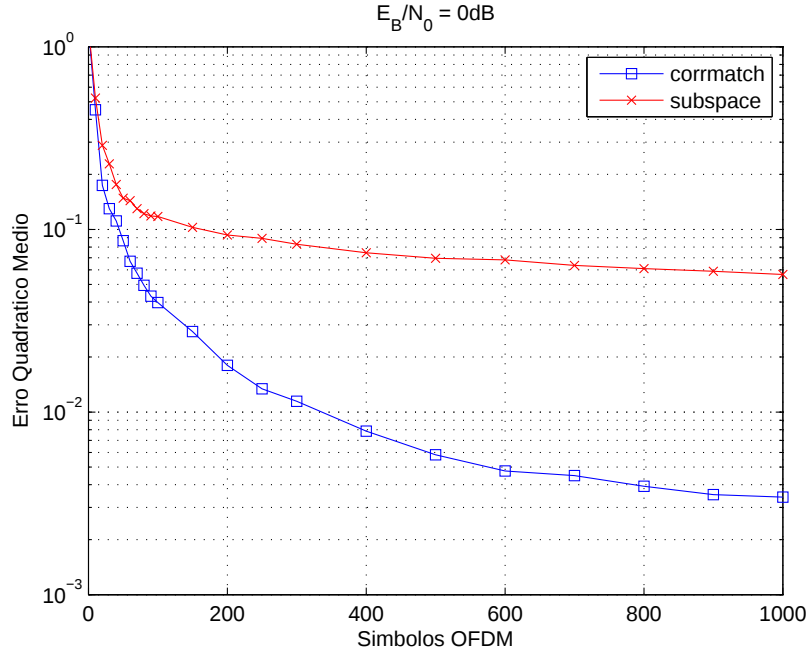


Figura 4.2: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 0dB$

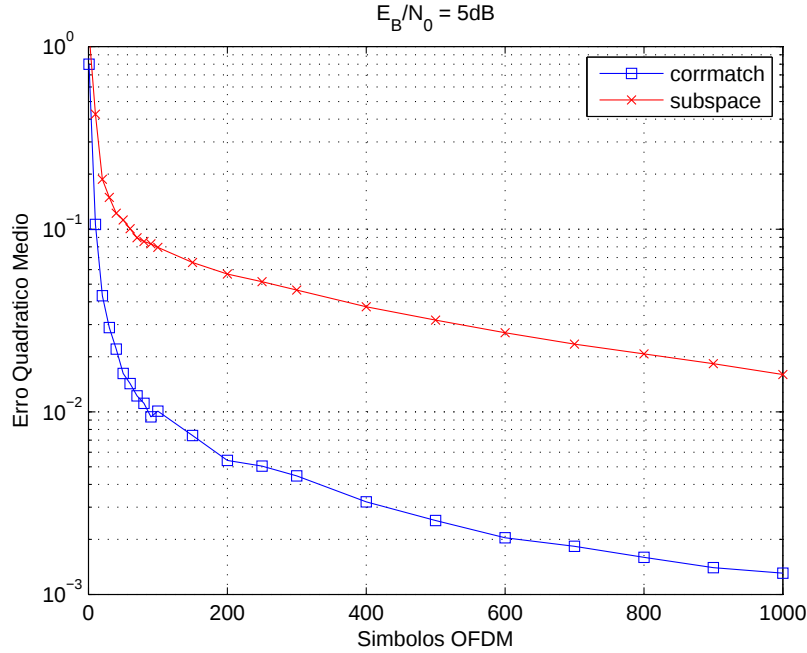


Figura 4.3: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$

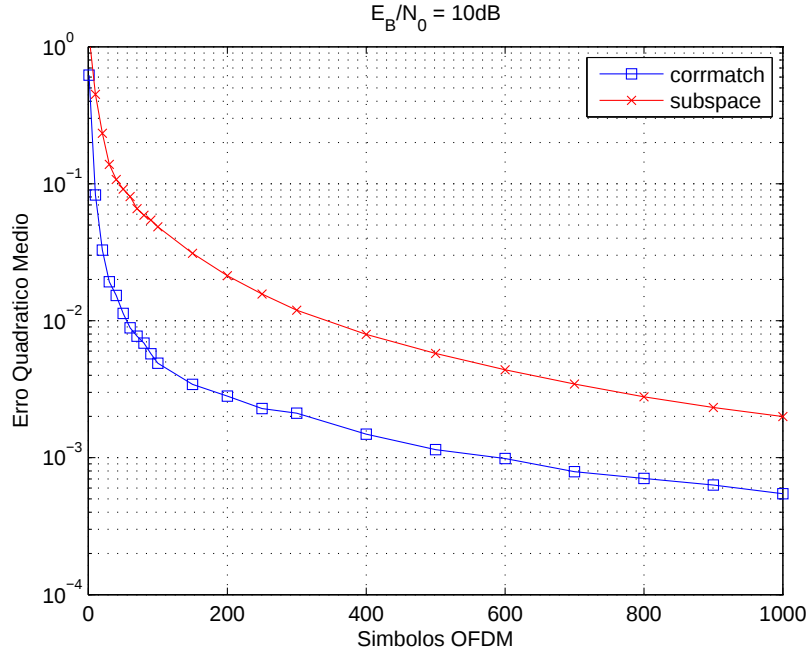


Figura 4.4: Erro quadrático médio dos estimadores ‘cormatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 10dB$

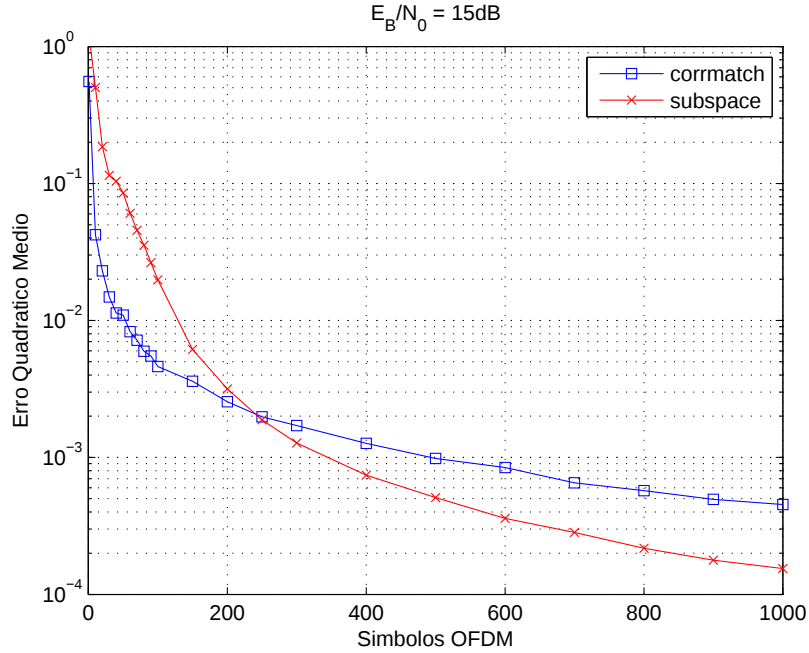


Figura 4.5: Erro quadrático médio dos estimadores ‘cormatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 15dB$

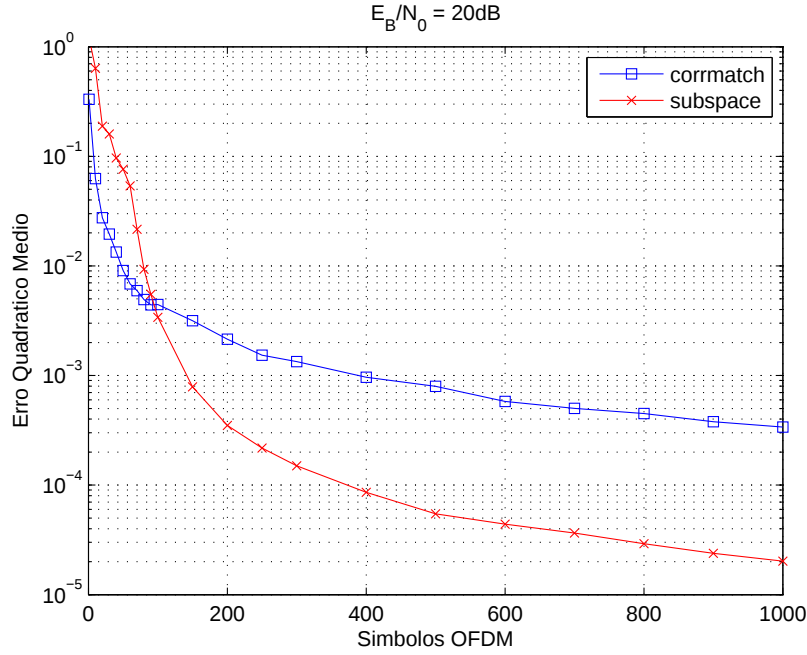


Figura 4.6: Erro quadrático médio dos estimadores ‘cormatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 20dB$

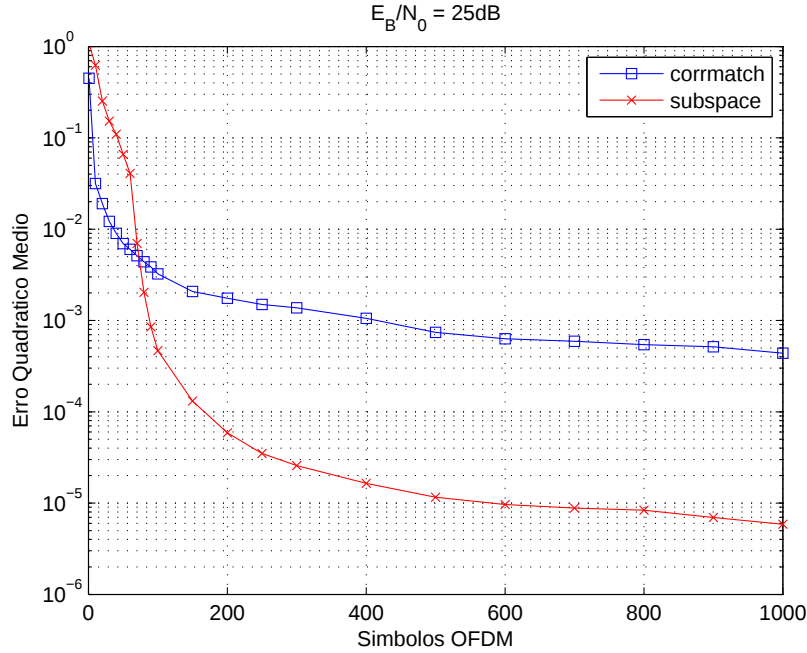


Figura 4.7: Erro quadrático médio dos estimadores ‘cormatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 25dB$

Propõe-se a seguir investigar a robustez do estimador com relação a sobremodelamento (*overmodelling*) do canal estimado. Os parâmetros desta experiência são os mesmos da experiência anterior. A Figura 4.8 ilustra o MSE *versus* razão $\frac{E_B}{N_0}$ dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’ após 1000 símbolos OFDM serem recebidos. As linhas cheias são relativas aos desempenhos considerando a ordem de canal estimado como sendo a mesma do canal verdadeiro. Já as linhas tracejadas indicam o desempenho dos estimadores operando com *overmodelling*: o canal estimado é suposto de ordem $\hat{L} = D = 16$, ou seja, o canal estimado tem mais de 4 vezes o comprimento do canal verdadeiro. Nota-se da Figura 4.8, que o estimador ‘corrmatch’ é um pouco mais sensível a *overmodelling* do que o estimador ‘subspace’. Todavia, o ‘corrmatch’ é robusto no que diz respeito à razão $\frac{E_B}{N_0}$.

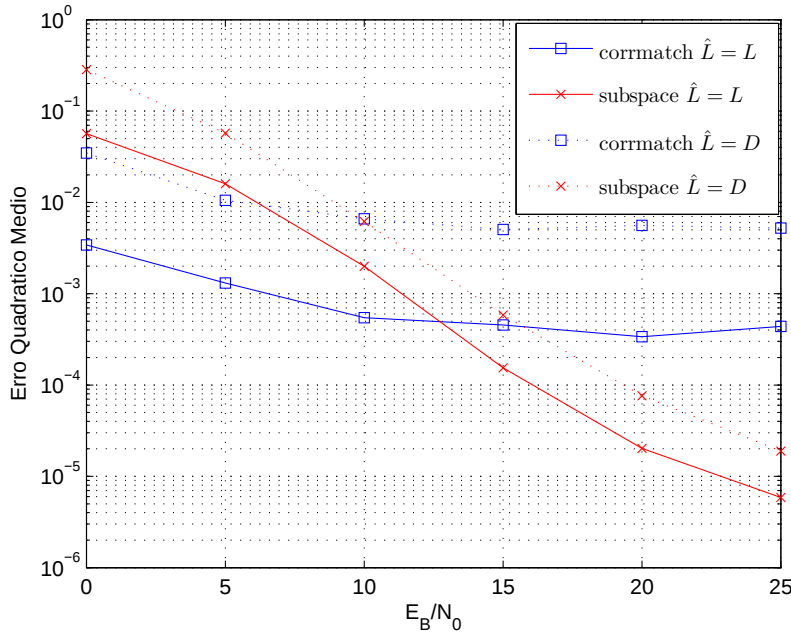


Figura 4.8: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$

O desempenho em termos de taxa de erro de bit também é investigado. Mais especificamente, supõe-se um sistema com os mesmos parâmetros das experiências anteriores, e supõe-se que o receptor realiza detecção *Zero Forcing*, por meio de (3.11), ou seja, o receptor estima o canal de modo a dispor de uma estimativa da matriz⁽¹⁰⁾ $\mathbf{H}_0$ necessária para o processo de equalização, como indicado em (3.12). O desempenho de um receptor que emprega o estimador ‘corrmatch’ está ilustrado na Figura 4.9. Assim como para o desempenho MSE, o desempenho em termos de taxa de erro de bit para um receptor que realiza a estimação de canal

⁽¹⁰⁾a matriz $\hat{\mathbf{H}}_0$, estimativa de $\mathbf{H}_0$, é reconstruída a partir de $\hat{\mathbf{h}}$.

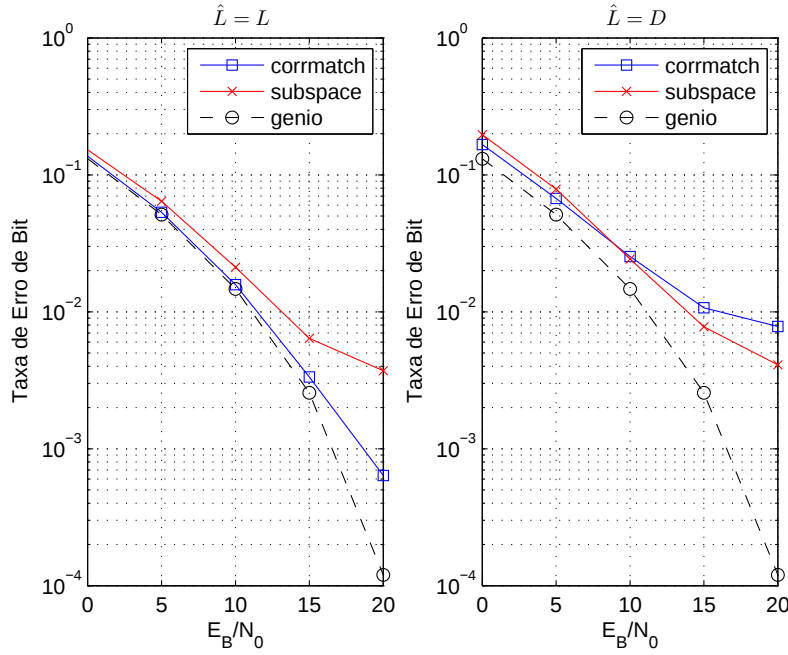


Figura 4.9: Taxa de Erro de Bit com o uso dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$

por meio do estimador ‘subspace’ também é ilustrado, como referência. Além disto, o desempenho de um receptor hipotético operando com o conhecimento perfeito do canal (denotado ‘genio’) também é indicado para fins de comparação. Ademais, tanto o caso de canal estimado com ordem verdadeira, isto é $\hat{L} = L = 3$, quanto o caso dos estimadores operando com *overmodelling*, isto é $\hat{L} = D = 16$, estão ilustrados. Da Figura 4.9, percebe-se que o desempenho obtido com os estimadores é bem semelhante ao desempenho obtido com o “gênio”, para razões $\frac{E_B}{N_0}$ moderadas. Já para razões mais altas, ocorre certa perda de desempenho por parte dos estimadores. Curiosamente, para o caso de canal estimado com ordem verdadeira, o desempenho superior do estimador ‘subspace’, em termos de MSE, não se traduziu em um melhor desempenho em termos de taxa de erro de bit. Já para o caso de *overmodelling*, ocorre o esperado: o desempenho do receptor com ‘subspace’ é superior ao receptor com ‘corrmatch’, a partir de $\frac{E_B}{N_0} = 10\text{dB}$, como fica sugerido pelo cruzamento das curvas de MSE na Figura 4.8. Por fim, ainda da Figura 4.9, é possível observar a relativa maior robustez do estimador ‘subspace’ face a *overmodelling*.

Com relação à complexidade do estimador ‘corrmatch’ faz-se as seguintes considerações. A matriz que multiplica $\mathbf{q}(i)$ em (4.67) tem tamanho $(L + 1)^2 \times P^2$. Idealmente, o produto desta matriz pelo vetor $\mathbf{q}(i)$ implicaria em $(L + 1)^2 P^2$ multiplicações, ou seja, supondo $\hat{L} = D = 16$, 1.849.600 multiplicações. Ocorre

que, como já foi adiantado na Seção 4.5, as matrizes envolvidas são esparsas, de modo que, para o caso em questão, a matriz que pré-multiplica $\mathbf{q}(i)$ tem apenas 20.928 de seus 1.849.600 elementos não nulos (aproximadamente 1,13%). Ou seja, é necessário efetuar apenas 20.928 multiplicações. Isto coloca a complexidade da implementação de (4.67) entre $O(P(L+1))$ e $O(P(L+1)^2)$.

4.7.3

Método das Potências – OFDM-ZP

Nesta seção, resultados de simulações ilustram o desempenho em termos de MSE e taxa de erro de bit para o estimador apresentado na Seção 4.3, baseado no método das potências para aproximação do operador projeção no subespaço de ruído, e denotado ‘Pot’.

O sistema OFDM-ZP considerado é o mesmo da Seção 4.7.2.

Para os esquemas da Seção 4.3, necessita-se uma estimativa da inversa da matriz correlação das observações. Uma estimativa recursiva, obtida utilizando o lema de inversão de matrizes e com $O(P^2)$, é dada por:

$$\hat{\mathbf{R}}_n^{-1} = \frac{n+1}{n} \left(\hat{\mathbf{R}}_{n-1}^{-1} - \frac{\hat{\mathbf{R}}_{n-1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_P(n) \tilde{\mathbf{x}}_P^H(n) \hat{\mathbf{R}}_{n-1}^{-1}}{n + \tilde{\mathbf{x}}_P^H(n) \hat{\mathbf{R}}_{n-1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_P(n)} \right).$$

O desempenho MSE do estimador ‘Pot’ para potências 1, 2, 3, 4 e 5 da inversa de matriz correlação está ilustrado nas figuras 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15, para razões $\frac{E_B}{N_0}$ de 0dB, 5dB, 10dB, 15dB, 20dB e 25 dB respectivamente. A título de comparação, o desempenho MSE do estimador ‘subspace’ também está indicado nas figuras.

Das figuras, observa-se que o estimador ‘Pot’ tem propriedades de convergência semelhantes às do estimador ‘subspace’. Conclui-se também que, para uma dada razão $\frac{E_B}{N_0}$, quanto maior a potência da inversa da matriz correlação, melhor é o desempenho do estimador, ou seja, os estimadores com potências diferentes obedecem uma hierarquia. Para razões $\frac{E_B}{N_0}$ moderadas e altas, os desempenhos MSE do estimador ‘Pot’ com potências 3, 4 e 5 são comparáveis. Ademais, este desempenho é bem próximo daquele apresentado pelo estimador ‘subspace’. Isso corrobora a afirmação feita na Seção 4.3 de que para pequenas potências inteiras da inversa da matriz correlação já obtém-se uma boa aproximação para o operador projeção. De fato, para razões $\frac{E_B}{N_0}$ altas, apenas o estimador ‘Pot’ empregando potência $m = 1$ tem desempenho destoante. Vale lembrar que é este estimador de canal (i.e. com potência $m = 1$) que é usado implicitamente em receptores MOE [53] para sistemas CDMA.

O desempenho MSE *versus* $\frac{E_B}{N_0}$ do estimador ‘Pot’ operando com diversas potências, após a recepção de 1000 símbolos OFDM, está ilustrado na Figura 4.16,

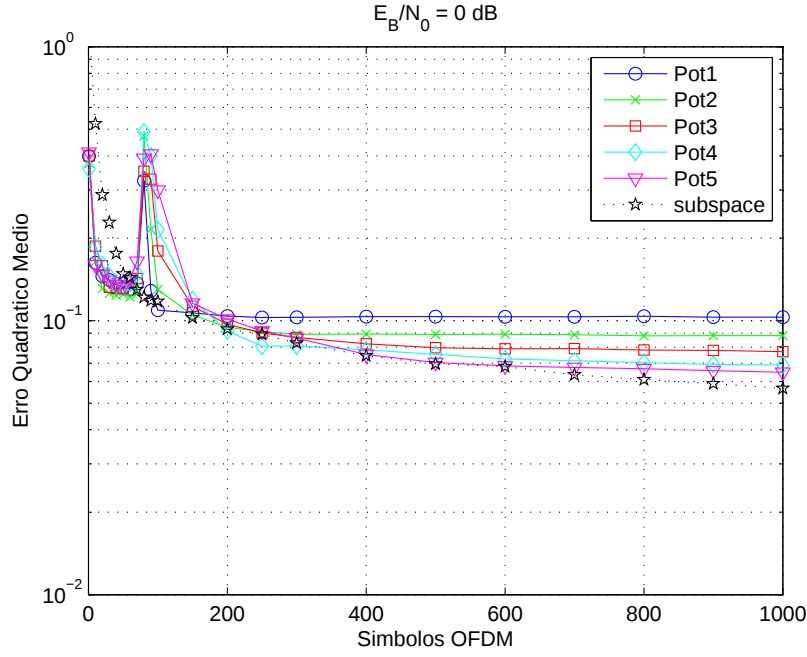


Figura 4.10: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 0 \text{ dB}$

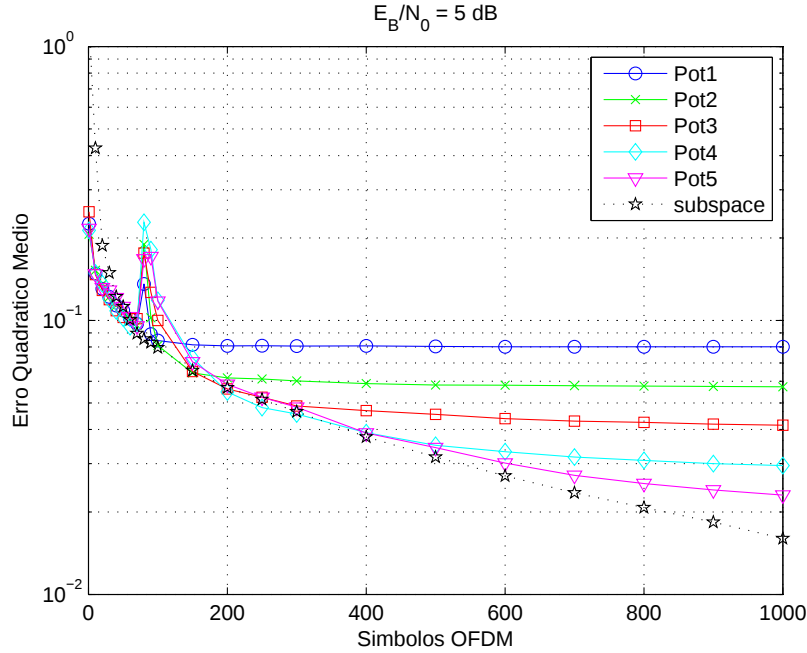


Figura 4.11: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 5 \text{ dB}$

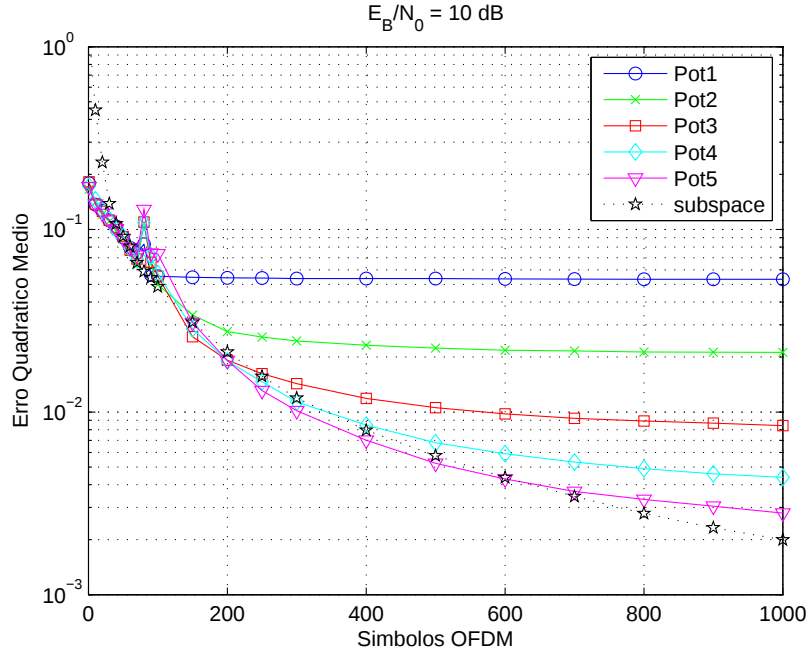


Figura 4.12: Erro quadrático médio dos estimadores 'Pot' e 'subspace', para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 10 \text{ dB}$

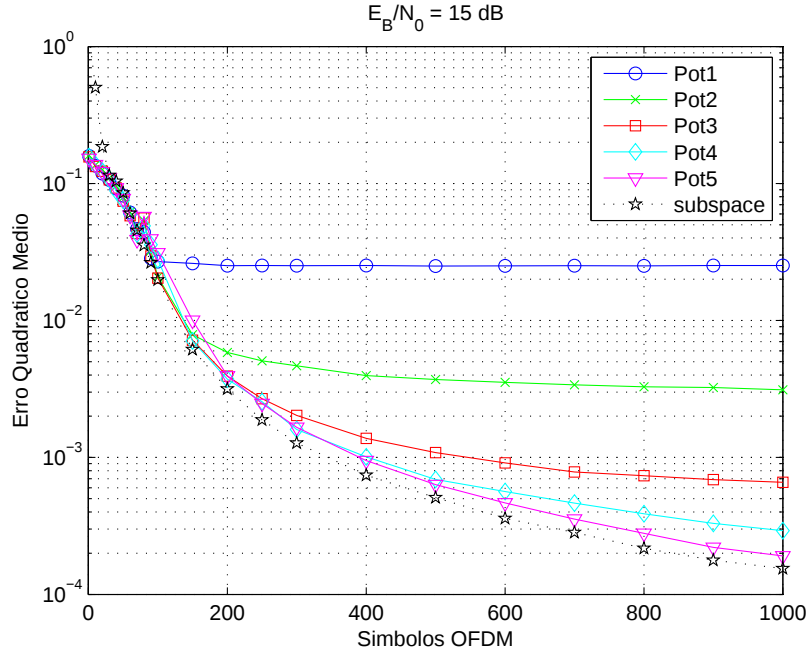


Figura 4.13: Erro quadrático médio dos estimadores 'Pot' e 'subspace', para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 15 \text{ dB}$

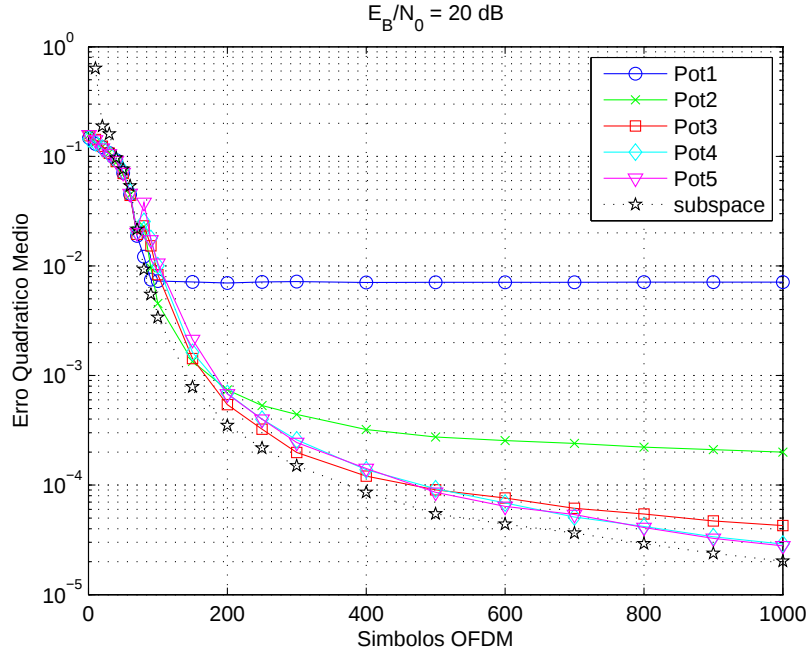


Figura 4.14: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 20$ dB

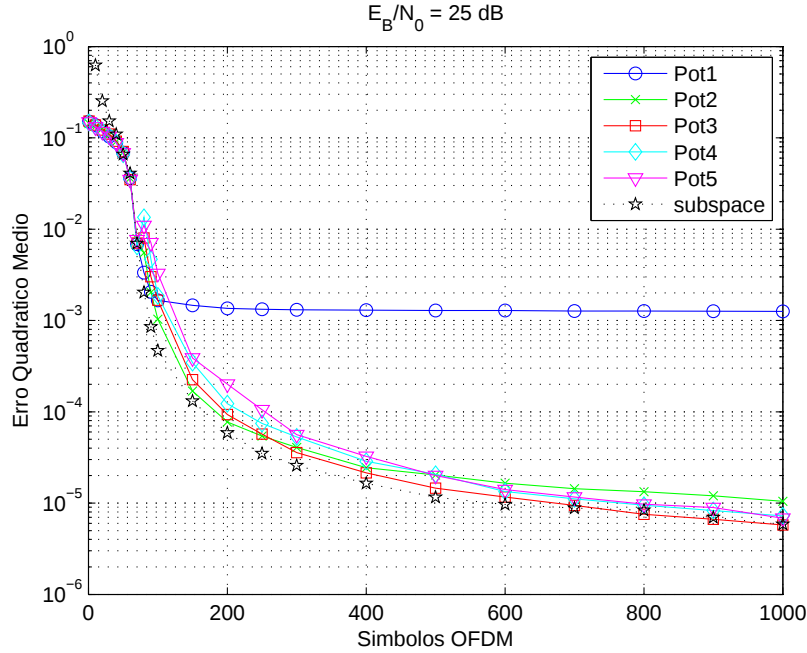


Figura 4.15: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 25$ dB

juntamente com o desempenho do estimador ‘subspace’. Observa-se que uma vez alcançada a convergência, os estimadores ‘Pot’ empregando potências 3, 4 e 5, e o estimador ‘subspace’, têm desempenho MSE comparável. A perda de desempenho em virtude do uso de uma estimativa do operador projeção por meio do método das potências ao invés do uso de uma estimativa do subespaço do ruído por meio de uma SVD é, portanto, desprezível.

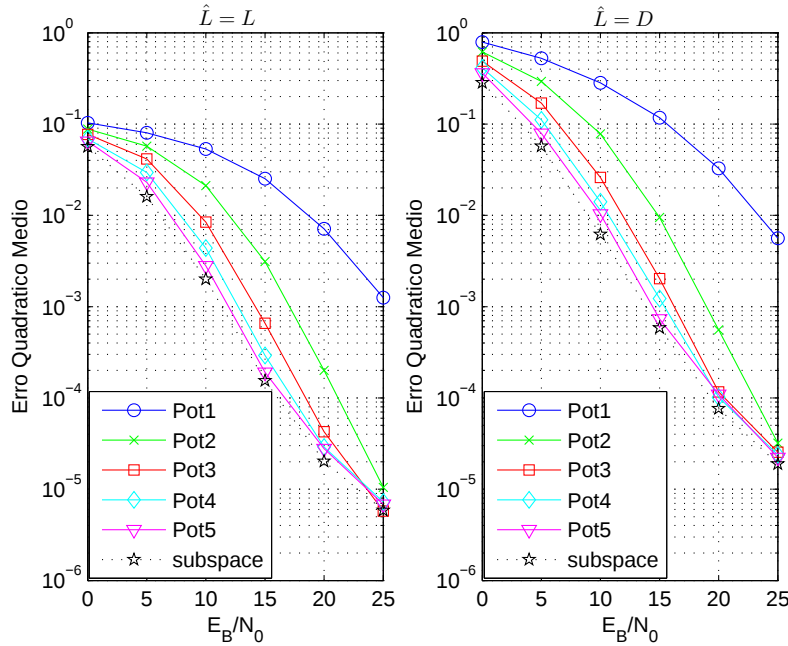


Figura 4.16: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$

Assim como para o estimador ‘corrmatch’, propõe-se avaliar a robustez do estimador ‘Pot’ operando em *overmodelling*. O desempenho MSE *versus* $\frac{E_B}{N_0}$ para o estimador ‘Pot’ operando com várias potências e com *overmodelling* também pode ser apreciado na Figura 4.16: a perda de desempenho acarretada pelo *overmodelling* parece aceitável.

Por fim, investiga-se o desempenho em termos da taxa de erro de bit, fornecido por um receptor ZF munido do estimador ‘Pot’. Da Figura 4.17 constam as taxas de erro de bit relativas a receptores empregando diversas potências da inversa da matriz correlação. Nota-se que para potências iguais ou superiores a 2 (isto é, $m \geq 2$), o desempenho é bastante semelhante. A Figura 4.17 também contempla o desempenho dos receptores ZF cujos estimadores de canal operam em *overmodelling*. Apesar da perda de desempenho, o desempenho para potências iguais ou superiores a 2 continua comparável.

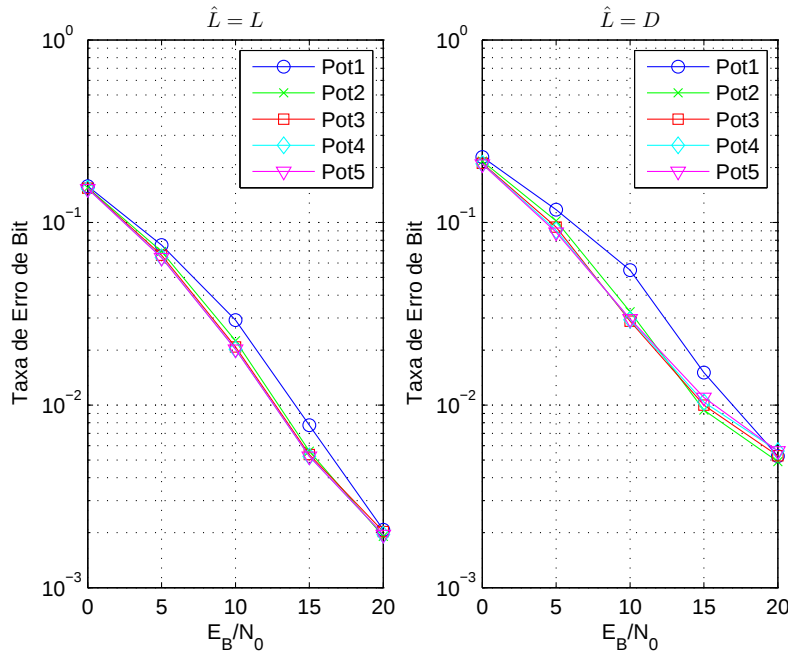


Figura 4.17: Taxa de Erro de Bit com o uso dos estimadores ‘Pot’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$

Quanto à complexidade do método, é bem verdade que o estágio mais custoso é o que efetua o processamento de modo a obter a inversa da matriz correlação elevada à potência desejada. Tal processamento pode ser dividido em duas etapas. A primeira etapa consiste da obtenção da inversa da matriz correlação, o que pode ser feito de forma recursiva e utilizando o lema de inversão de matrizes, acarretando uma complexidade computacional de ordem quadrática em P , isto é $O(P^2)$. A segunda consiste em multiplicar a inversa da matriz correlação por ela mesma o número necessário de vezes para se obter a inversa da matriz correlação elevada à potência desejada, o que implica em uma complexidade computacional cúbica em P . Portanto, assim como o método original da Seção 4.2, o método proposto tem complexidade cúbica em P , isto é $O(P^3)$. Porém, levando em conta o número de multiplicações envolvidas e a facilidade de implementação, sugere-se que o método proposto é mais vantajoso, sobretudo quando o uso de pequenas potências inteiras da inversa da matriz correlação já permite obter uma estimativa satisfatória do canal. Para o estimador ‘Pot’ com potência $m > 1$, é necessário efetuar apenas⁽¹¹⁾ $(m - 1)P^3$ multiplicações⁽¹²⁾, valor este obtido sem levar em conta que a matriz correlação é hermitiana.

⁽¹¹⁾levando apenas em conta as multiplicações da segunda etapa.

⁽¹²⁾Por exemplo, se uma implementação da SVD consome da ordem de $8P^3$ multiplicações, o método proposto só deixaria de ser mais vantajoso computacionalmente se a potência m utilizada necessária para gerar estimativas satisfatórias fosse tal que $m > 9$.

4.7.4 Casamento de Correlação – OFDM-CP

Nesta seção, afere-se o desempenho do estimador baseado no casamento de correlação introduzido na Seção 4.6 para sistemas OFDM-CP. O sistema em questão comporta $M = 32$ portadoras transmitindo símbolos BPSK, e o intervalo de guarda usado tem comprimento $D = 8$, implicando que o tamanho do bloco transmitido é $P = 40$ amostras. O canal fixo $\mathbf{h} = [-0.189 + j0.427 \quad -0.284 + j0.698 \quad 0.127 + j0.432 \quad -0.045 + j0.091]^T$ experimentado pelo sistema tem comprimento 4 (isto é $L = 3$), sendo que $\|\mathbf{h}\|^2 = 1$. Sua resposta em frequência esta ilustrada na Figura 4.18.

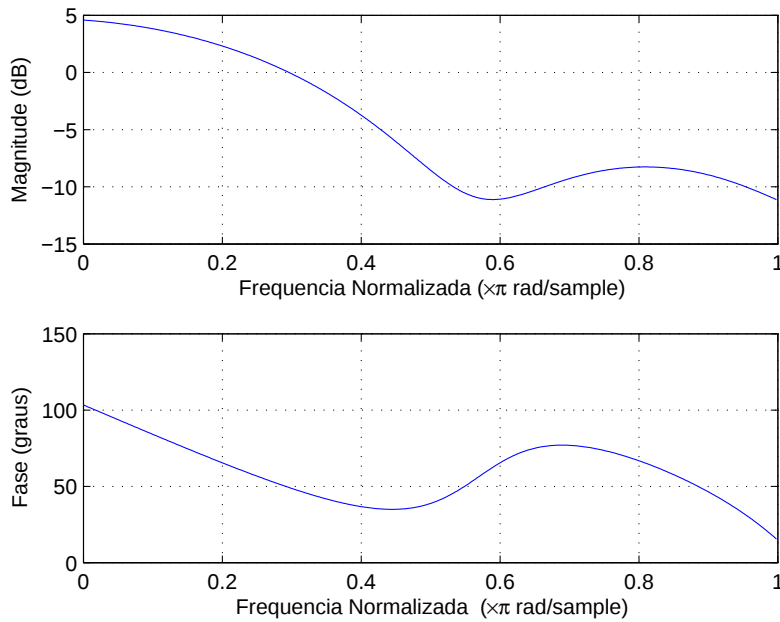


Figura 4.18: Resposta em Frequência do canal fixo de ordem $L = 3$

São realizados 25 experimentos independentes; para cada experimento simula-se a transmissão de 2000 símbolos OFDM-CP, ou seja, 64000 bits.

As figuras 4.19, 4.20 e 4.21 apresentam o desempenho em termos de MSE do estimador ‘corrmatch’ para razões $\frac{E_B}{N_0}$ de 5dB, 15dB, e 25dB, respectivamente. Também na Figura 4.19, está indicado o MSE do estimador ‘subspace’ para sistemas OFDM-CP proposto em [40]. O desempenho relativo dos dois estimadores é análogo ao apresentado na Seção 4.7.2 para os estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’. Assim, para baixas razões $\frac{E_B}{N_0}$, o desempenho MSE do ‘corrmatch’ é bastante superior ao do ‘subspace’. Para razões $\frac{E_B}{N_0}$ moderadas, os desempenhos são semelhantes. Por fim, para altas razões $\frac{E_B}{N_0}$, a hierarquia das curvas se inverte, e o estimador ‘subspace’ passa a ter melhor desempenho relativo. Convém lembrar porém,

que o ‘corrmatch’ processa vetores observação de tamanho $P = 40$, enquanto que o estimador ‘subspace’ necessita trabalhar com vetores observação de comprimento $2P - L = 77$ (ou para o caso de *overmodelling*, 72).

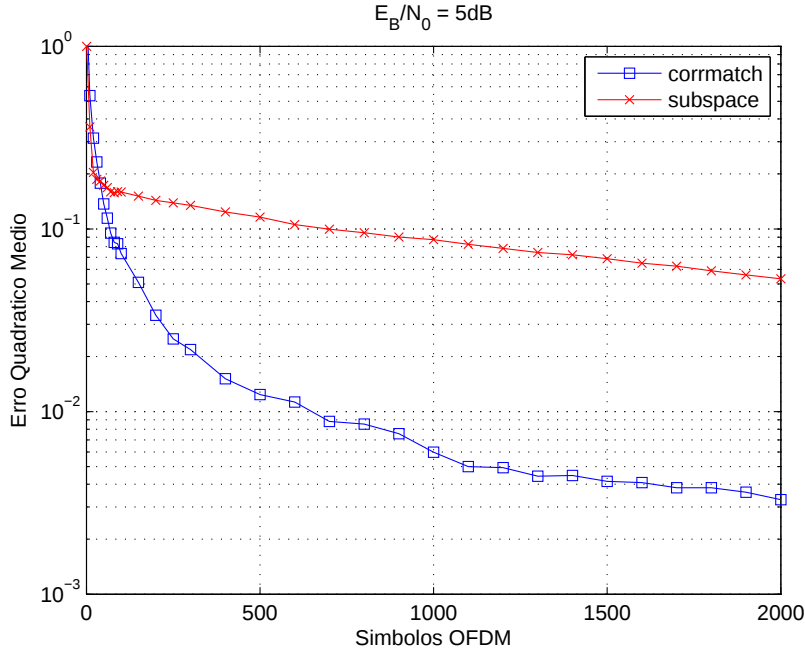


Figura 4.19: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$

O desempenho MSE *versus* $\frac{E_B}{N_0}$ do estimador ‘corrmatch’, após recepção de 2000 símbolos OFDM, é ilustrado na Figura 4.22. Para fins de comparação, o desempenho do estimador ‘subspace’ também é traçado. Assim como para o OFDM-ZP, o ‘corrmatch’ apresenta relativa robustez em termos de razão $\frac{E_B}{N_0}$.

Ainda da Figura 4.22, constam o desempenho MSE dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’ para o caso de *overmodelling*. Nestas circunstâncias, apesar do canal verdadeiro ser de ordem $L = 3$, o canal estimado é suposto de ordem $\hat{L} = D = 8$. Proporcionalmente, o *overmodelling* para este cenário simulado é menos severo do que o *overmodelling* do cenário da Seção 4.7.2. Isto possivelmente explica por que a perda de desempenho é menos pronunciada na Figura 4.22 (OBS: para uma certa faixa de $\frac{E_B}{N_0}$, o MSE do estimador ‘subspace’ com *overmodelling* é menor do que o MSE do mesmo estimador utilizando a ordem verdadeira. Isto se deve provavelmente a um número insuficiente de experimentos, aliado ao fato do estimador ser menos sensível a erros na ordem do canal estimado).

O desempenho em termos de taxa de erro de bit de um sistema OFDM-CP operando com um receptor ZF (vide (3.7)) e empregando o estimador ‘corrmatch’ está ilustrado na Figura 4.23. Convém lembrar que uma vez que o receptor realiza

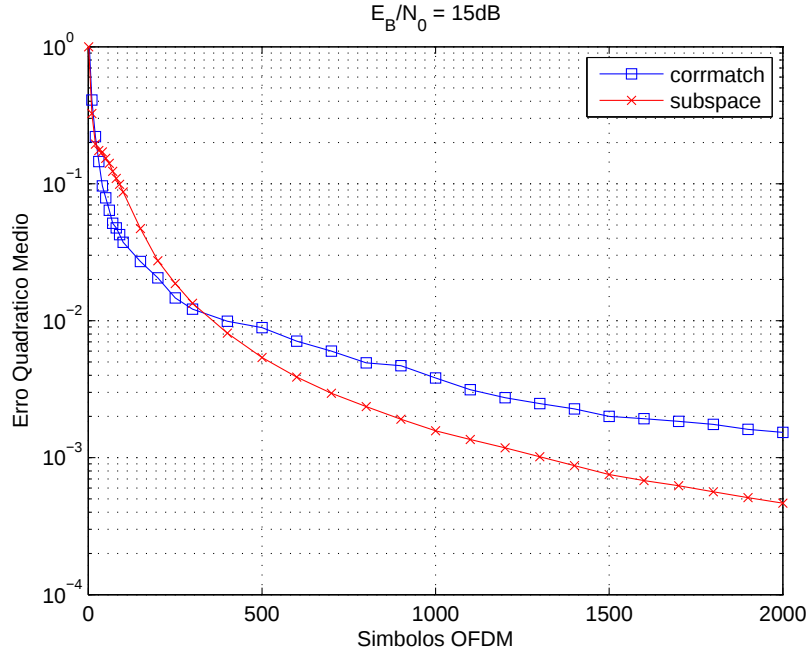


Figura 4.20: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 15dB$

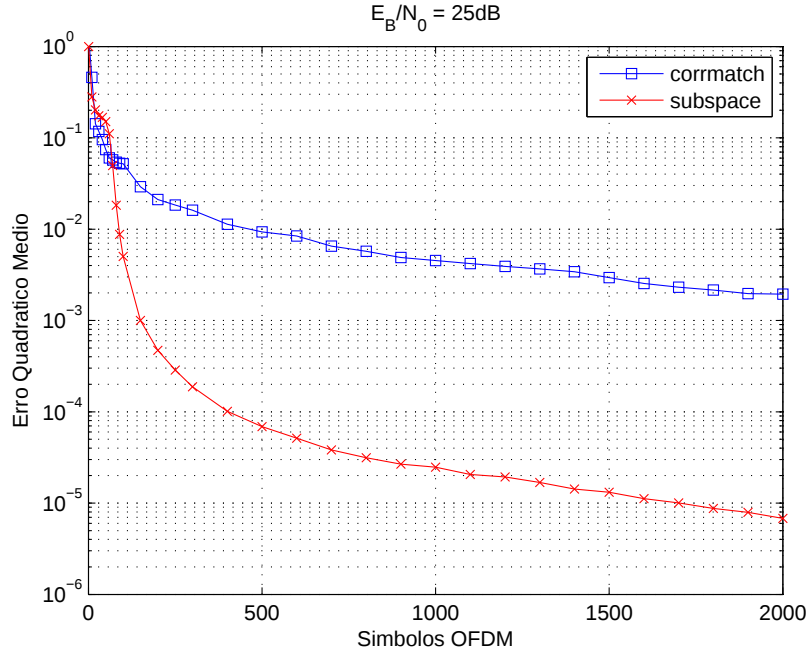


Figura 4.21: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 25dB$

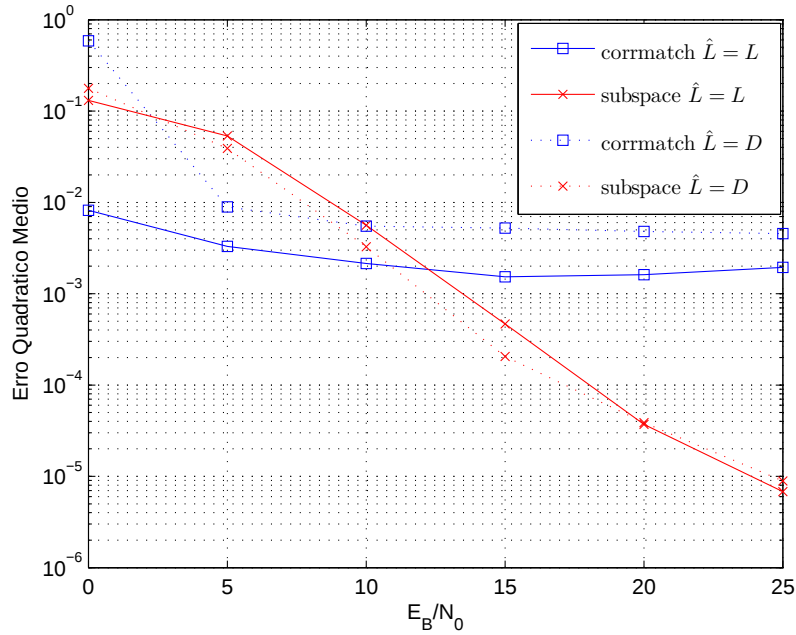


Figura 4.22: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$

a chamada equalização no domínio da frequência, as estimativas fornecidas pelo ‘corrmatch’ são transformadas para o domínio da frequência por meio de uma DFT. A Figura 4.23 também apresenta a taxa de erro de bit para um receptor operando com o estimador ‘subspace’, assim como o desempenho de um receptor hipotético que dispõe de estimativas perfeitas do canal (“gênio”). Como para o caso do OFDM-ZP, um melhor desempenho MSE por parte do estimador ‘subspace’ relativamente ao estimador ‘corrmatch’ não se traduziu em um melhor desempenho em termos de taxa de erro de bit.

O desempenho para os receptores operando com os estimadores em condição de *overmodelling* também consta da Figura 4.23. Neste caso, devido à sua maior robustez contra erros na ordem do canal estimado, o estimador ‘subspace’ proporcionou desempenho pouco superior ao do estimador ‘corrmatch’.

4.7.5 Método das Potências – OFDM-CP

Esta seção propõe examinar o desempenho do estimador introduzido na Seção 4.4. O sistema OFDM-CP considerado é o mesmo da seção anterior.

As figuras 4.24, 4.25 e 4.26 ilustram, respectivamente para razões $\frac{E_B}{N_0}$ de 5dB, 15dB e 25dB, o desempenho em termos de MSE do estimador ‘Pot’ proposto com diversas potências m da inversa da matriz correlação, para sistemas OFDM-CP.

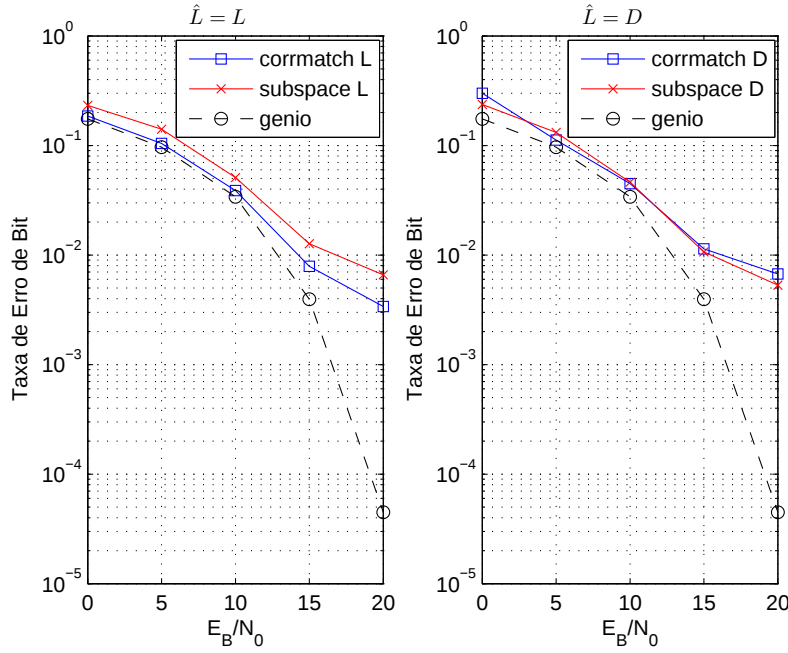


Figura 4.23: Taxa de Erro de Bit com o uso dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$

O desempenho do estimador ‘subspace’ também consta da figura, servindo como referência.

Das figuras, pode-se tirar conclusões análogas as da Seção 4.7.3, isto é: o desempenho MSE segue uma hierarquia. Para uma dada razão $\frac{E_B}{N_0}$, quanto maior a potência m da inversa da matriz correlação empregada, melhor é o desempenho, até atingir a saturação no patamar do estimador ‘subspace’. Ademais, fixada uma potência m para o estimador ‘Pot’, um aumento na razão $\frac{E_B}{N_0}$, implica num desempenho cada vez mais próximo ao do estimador ‘subspace’.

Estas observações são verificadas também pela Figura 4.27, da qual consta o desempenho MSE *versus* $\frac{E_B}{N_0}$, obtido ao final da transmissão de 2000 símbolos OFDM, para o estimador ‘Pot’ com potências 1, 3 e 5. O desempenho do estimador ‘subspace’ também é indicado na figura.

O impacto de um canal estimado com ordem maior do que a ordem verdadeira também pode ser visto na Figura 4.27. A perda de desempenho por causa de *overmodelling* é desprezível para razões $\frac{E_B}{N_0}$ moderadas e altas, e pode ser verificado que a hierarquia se mantém.

Por fim, a Figura 4.28 ilustra o desempenho de um receptor ZF que emprega o estimador ‘Pot’. Percebe-se que somente para o estimador com potência 5 o desempenho em termos de taxa de erro de bit é comparável ao do estimador ‘subspace’, para razões $\frac{E_B}{N_0}$ moderadas. Para altas razões $\frac{E_B}{N_0}$, pode-se utilizar o

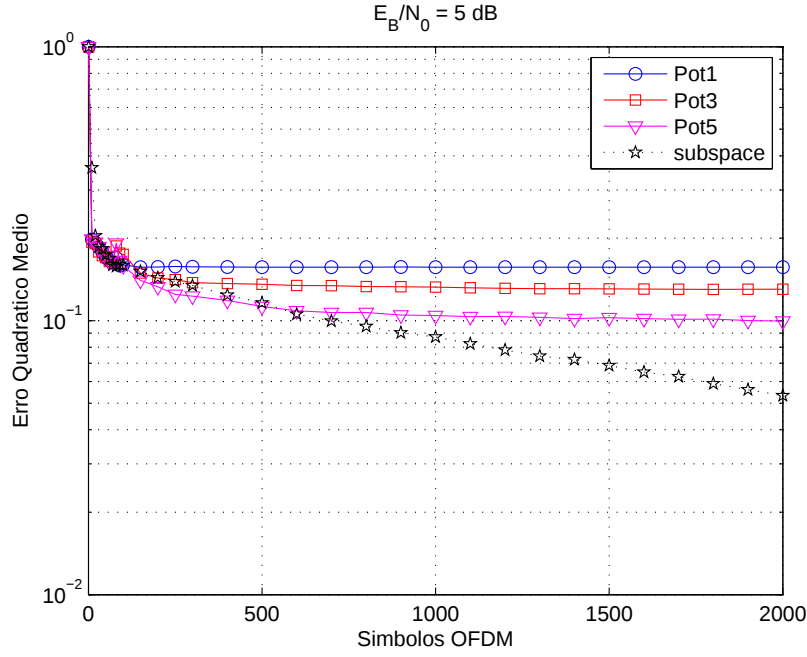


Figura 4.24: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$

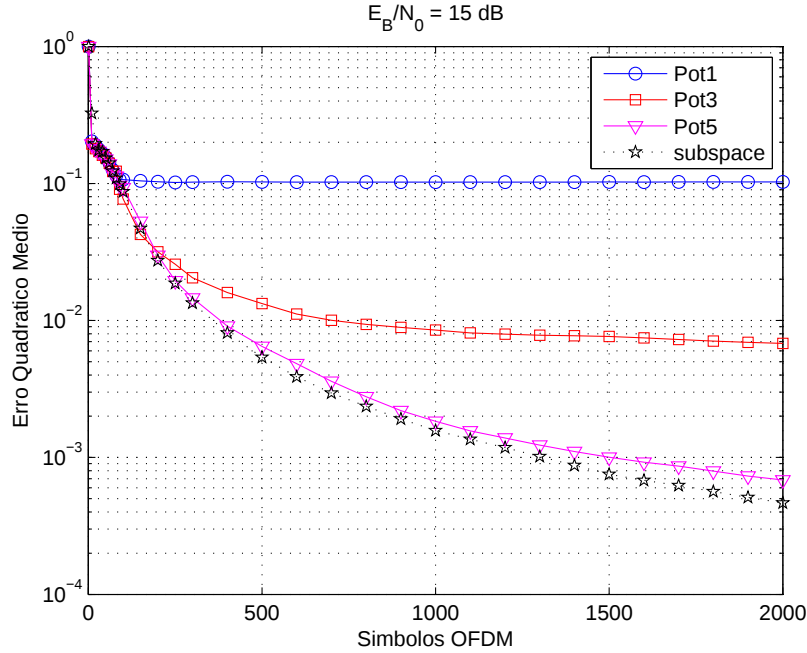


Figura 4.25: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 15dB$

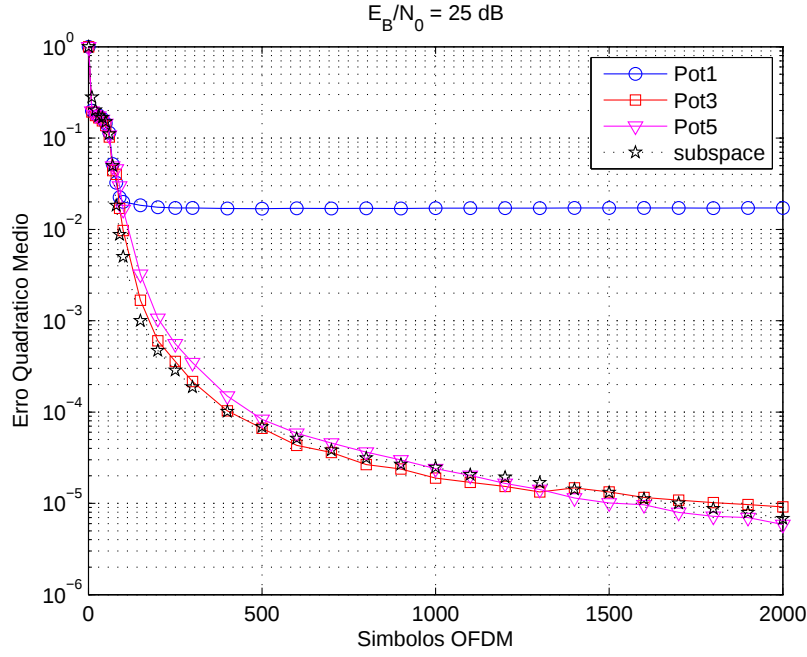


Figura 4.26: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$ e razão $\frac{E_B}{N_0} = 25$ dB

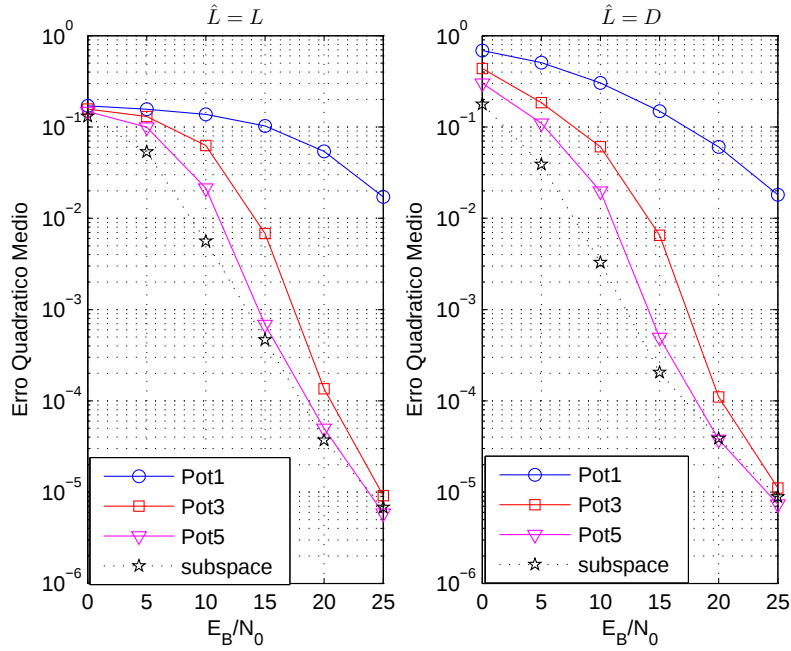


Figura 4.27: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$

estimador ‘Pot’ com potência $m = 3$ com perda de desempenho desprezível.

O desempenho de receptores operando com os estimadores em *overmodelling* também está ilustrado na Figura 4.28. Assim como o MSE dos estimadores não se mostrou muito sensível a erros na ordem do canal estimado, o desempenho dos receptores não foi afetado de forma acentuada.

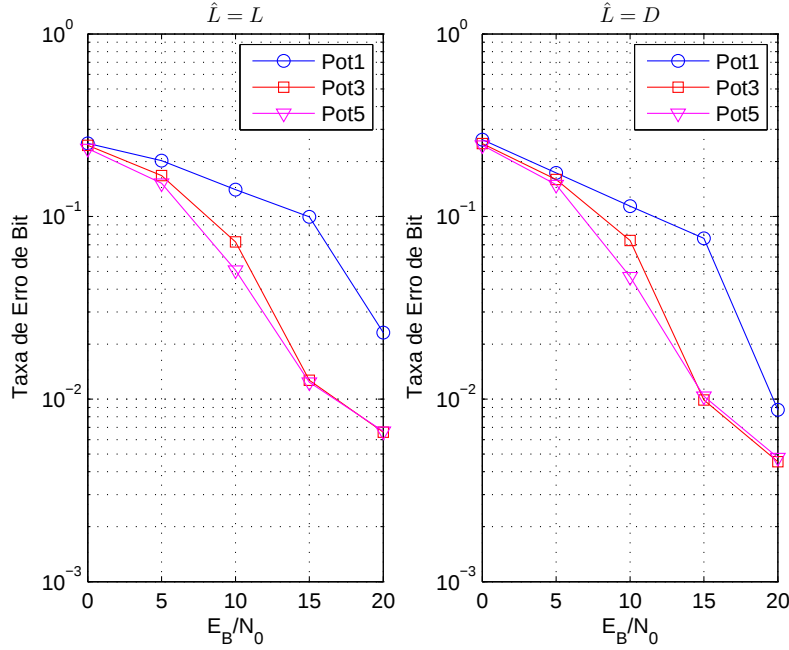


Figura 4.28: Taxa de Erro de Bit com o uso dos estimadores ‘Pot’, para um sistema OFDM-CP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$

4.7.6

Estimação de σ^2 – OFDM-ZP

Embora não seja usado *explicitamente* no cômputo do estimador ‘corrmatch’, um estimador de σ^2 foi obtido num passo intermediário da derivação apresentada na Seção 4.5. De fato, (4.66) pode ser empregada de forma a se obter estimativas $\hat{\sigma}^2$ de σ^2 . Ademais, seguindo linha de raciocínio semelhante à que foi adotada para provar que o estimador ‘corrmatch’ é consistente, também é possível provar que o estimador em (4.66) é consistente. Nesta seção, pretende-se ilustrar a capacidade de (4.66) em estimar σ^2 .

Embora (4.66) seja válida tanto para o OFDM-ZP quanto para o OFDM-CP, o desempenho do estimador é aqui apresentado para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras transmitindo símbolos BPSK, e com intervalo de guarda de comprimento $D = 16$. Os sinais passam por um canal fixo de ordem $L = 3$ com resposta em frequência representada na Figura 4.1.

São realizados 100 experimentos independentes. Para cada experimento, é simulada a transmissão de 5000 símbolos OFDM.

A Figura 4.29 ilustra a evolução das estimativas ao longo dos símbolos OFDM recebidos, para várias razões $\frac{E_B}{N_0}$, supondo a ordem do canal conhecida, isto é, $\hat{L} = L$. Na figura, a linha reta de cor verde representa o verdadeiro valor de σ^2 , mantido fixo em 1.

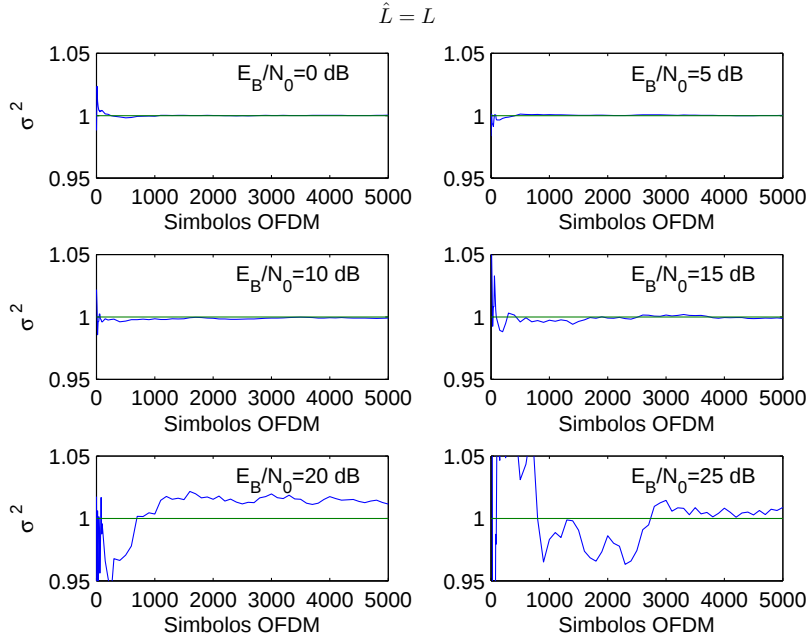


Figura 4.29: Estimação de σ^2 via estimador ‘corrmatch’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$. σ^2 fixo.

Na Figura 4.30, o mesmo tipo de experimento é repetido porém para cada razão $\frac{E_B}{N_0}$, E_B é mantido fixo em 1, e por conseguinte o valor de σ^2 varia (para diferentes razões $\frac{E_B}{N_0}$). Na figura, σ^2 assume os valores: 1.0, 0.3162, 0.1, 0.0316, 0.01, e 0.0032, para $\frac{E_B}{N_0} = 0\text{dB}$, 5dB, 10dB, 15dB, 20dB e 25dB respectivamente.

4.7.7

Expressão Analítica do MSE – OFDM-ZP

Uma expressão analítica para o desempenho MSE do estimador ‘corrmatch’ pode ser obtida nos mesmos moldes de [84].

É possível mostrar que:

$$\text{MSE}(i) = \mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}(i)\|^2] = \mathbb{E}[\|\delta\mathbf{h}\|^2] = \text{Tr}\left\{\mathbb{E}[\delta\mathbf{h}\delta\mathbf{h}^H]\right\}. \quad (4.78)$$

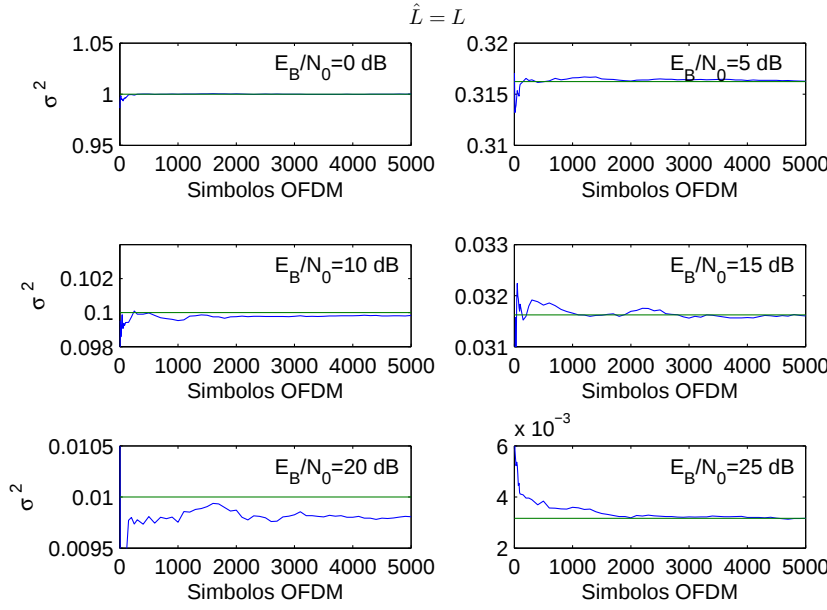


Figura 4.30: Estimação de σ^2 via estimador ‘corrmatch’, para um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras, intervalo de guarda $D = 16$, para canal fixo de ordem $L = 3$. E_B fixo.

onde i é um índice no tempo discreto (relativo ao número de símbolos OFDM recebidos). Mas⁽¹³⁾,

$$\mathbb{E}[\delta \mathbf{h} \delta \mathbf{h}^H] \approx \frac{1}{\sigma_s^2} \mathbf{\Pi} \left[\sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^L h_l h_m^* \mathbf{K}_{l+1} \Phi(\hat{\mathbf{q}}(i)) \mathbf{K}_{m+1}^* \right] \mathbf{\Pi}, \quad (4.79)$$

com:

- $\mathbf{\Pi} = \mathcal{U}\mathcal{U}^H$, tal que $\mathcal{U}$ é o complemento ortogonal de dimensão L de $\mathbf{h}$;
- $\mathbf{K}_l$ é uma submatriz de $\mathbf{K}$, e de tamanho $(L+1) \times P^2$. $\mathbf{K}$ é a matriz de tamanho $(L+1)^2 \times P^2$ que multiplica o vetor $\mathbf{q}(i)$ em (4.67). Mais especificamente $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1^H \ \dots \ \mathbf{K}_{L+1}^H]^H$.
- $\Phi(\hat{\mathbf{q}}(i)) = \frac{1}{i} \mathbf{\Psi}$, onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi} = & (\tilde{\mathbf{H}}_0^* \otimes \tilde{\mathbf{H}}_0) \left\{ K_{4s} \mathbf{X}_1 + \sigma_s^4 \mathbf{X}_2 + \sigma_s^4 \mathbf{I}_{M^2} \right\} (\tilde{\mathbf{H}}_0^T \otimes \tilde{\mathbf{H}}_0^H) + \\ & + \sigma^4 \mathbf{I}_{P^2} + \sigma_s^2 \sigma^2 (\tilde{\mathbf{H}}_0^* \tilde{\mathbf{H}}_0^T) \otimes \mathbf{I}_P + \sigma_s^2 \sigma^2 \mathbf{I}_P \otimes (\tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^H) \end{aligned}$$

$$- \mathbf{X}_1 = \sum_{m=1}^M [\mathbf{1}_{(m)} \mathbf{1}_{(m)}^T] \otimes [\mathbf{1}_{(m)} \mathbf{1}_{(m)}^T]$$

- * $\mathbf{1}_{(m)}$ é o vetor indicador, de comprimento M , e tal que suas componentes, exceto a m -ésima, são todas nulas.

⁽¹³⁾utilizando apenas perturbações de primeira ordem

- $\mathbf{X}_2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M [\mathbf{1}_{(m)} \mathbf{1}_{(n)}^T] \otimes [\mathbf{1}_{(n)} \mathbf{1}_{(m)}^T]$
- $K_{4s} = m_{4s} - 3\sigma_s^4$ é o cumulante de quarta ordem das componentes do vetor de dados (isto é, dos símbolos BPSK)

O sistema OFDM-ZP considerado tem $M = 32$ portadoras com modulação BPSK, e o intervalo de guarda tem comprimento $D = 8$. O canal fixo $\mathbf{h} = [0.555 + j0.214 \ 0.160 + j0.636 \ 0.141 + j0.290 \ 0.316 - j0.114]^T$ considerado tem ordem $L = 3$ e sua resposta em frequência está ilustrada na Figura 4.31.

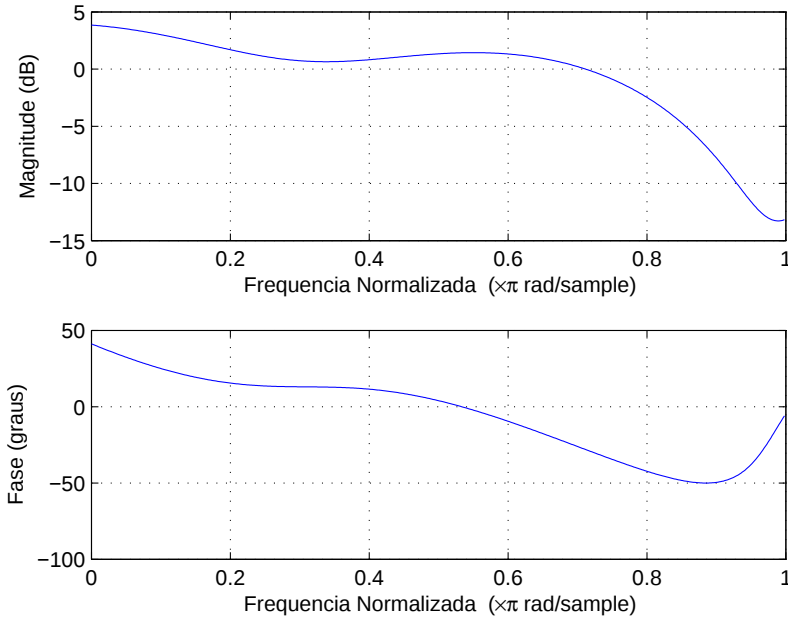


Figura 4.31: Resposta em Frequência do canal fixo

São realizados 100 experimentos independentes. Para cada experimento, a transmissão de 5000 símbolos OFDM é simulada. O desempenho MSE do estimador ‘corrmatch’, para diversas razões $\frac{E_B}{N_0}$ consta da Figura 4.32 (denotado ‘simulado’). As curvas obtidas por meio de (4.78) e (4.79), denotadas ‘analítico’, também estão presentes na Figura 4.32. Da figura verifica-se que a expressão analítica obtida por meio da teoria de perturbações de primeira ordem está em acordo com os resultados obtidos por meio de simulação.

Convém frisar que, apesar desta seção considerar o ‘corrmatch’ em sistemas OFDM-ZP, o mesmo tipo de estudo pode ser feito para o estimador baseado em casamento de correlação em sistemas OFDM-CP.

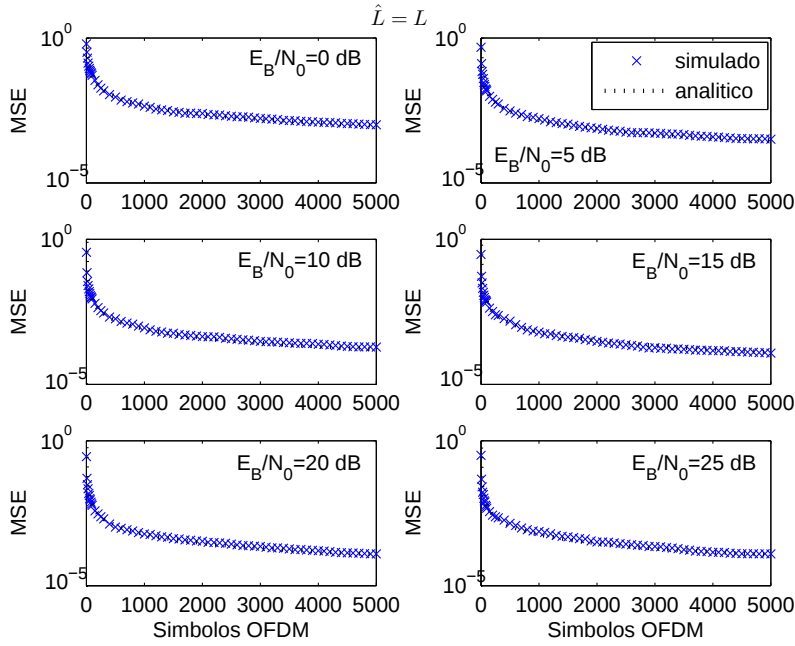


Figura 4.32: Erro quadrático médio do estimador ‘corrmatch’, analítico e simulado, para um sistema OFDM-ZP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 8$, para canal fixo de ordem $L = 3$

4.8 Resolvendo a Ambigüidade – OFDM-ZP

Conforme mencionado ao longo do capítulo, todos os estimadores abordados fornecem estimativas de canal afetadas por uma ambigüidade representada por um escalar complexo. Um procedimento para resolver esta ambigüidade já foi mencionado na seção 4.7.1 e desde então empregado para gerar todos os resultados de simulação até este ponto. A seguir, outros métodos para resolução da ambigüidade são mencionados/propostos. Resultados de simulação para o desempenho em termos de erro quadrático médio e taxa de erro de bit para o estimador ‘corrmatch’ com a ambigüidade resolvida pelos diversos métodos fecham esta seção.

Ao longo desta seção supõe-se que o esquema de estimação cega de canal fornece uma estimativa $\hat{\mathbf{h}}_b(i)$ de modo que a estimativa a ser usada na detecção é $\hat{\mathbf{h}}(i) = \alpha(i)\hat{\mathbf{h}}_b(i)$.

O primeiro método apresentado é na verdade de interesse puramente teórico, e surge como resposta para a seguinte pergunta: Qual é o escalar complexo w que minimiza o erro quadrático entre o canal verdadeiro $\mathbf{h}$ e a estimativa $\hat{\mathbf{h}}_b(i)$ obtida por meio do esquema cego? Ou, em termos matemáticos:

$$\begin{aligned} \alpha(i) &= \arg \min_w \{ \|\mathbf{h} - w\hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2 \} \\ &= \hat{\mathbf{h}}_b^H(i)\mathbf{h}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Este "estimador de ambigüidade" é na verdade uma espécie de "gênio", e não pode ser usado na prática uma vez que é suposto o conhecimento do canal verdadeiro. Como este esquema minimiza o erro quadrático, com seu emprego é possível vislumbrar o melhor MSE atingível pelo estimador de canal. Este método pode ser visto como uma generalização do método utilizado anteriormente nas simulações, em que somente um coeficiente do canal verdadeiro era suposto conhecido.

Os próximos métodos sugeridos são de ordem prática. Lembrando o modelo de sinais para o OFDM-ZP:

$$\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i), \quad (4.81)$$

deseja-se explicitar o vetor de canal $\mathbf{h}$ em (4.81). Para tal, o sinal OFDM-ZP é processado como segue, no estilo *OLA* [56]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{ZP-OLA}}(i) &= \mathbf{T}_{\text{OLA}} \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) \\ &= \mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M) \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}_{\text{OLA}}(i) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{r}_{\text{ZP-OLA}}(i)$ é um vetor de comprimento M (e não mais P), e $\mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M)$ é uma matriz circulante, como em (3.1), e com:

$$\mathbf{T}_{\text{OLA}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_D & \mathbf{0}_{D \times (M-D)} & \mathbf{I}_D \\ \mathbf{0}_{(M-D) \times M} & \mathbf{I}_{(M-D) \times M} & \mathbf{0}_{(M-D) \times D} \end{bmatrix}.$$

Dai decorre que a matriz $\mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M)$ pode ser diagonalizada com o auxílio de uma DFT, como visto a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(i) &= \mathbf{F}_M \mathbf{r}_{\text{ZP-OLA}}(i) \\ &= \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}}_M) \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}'(i) \\ &= \text{diag}(\mathbf{s}(i)) \tilde{\mathbf{h}}_M + \mathbf{n}'(i) \\ &= \text{diag}(\mathbf{s}(i)) \sqrt{M} \mathbf{F}_M \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{0}_{M-L-1 \times 1} \end{bmatrix} + \mathbf{n}'(i). \end{aligned}$$

Considerando que, em cada símbolo OFDM, são transmitidos N_{pil} símbolos pilotos nas portadoras $p_1, p_2, \dots, p_{N_{\text{pil}}}$, o vetor observação $\mathbf{z}_{\text{pil}}(i)$ que só contém informação dos pilotos pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{\text{pil}}(i) &= \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \Phi_{\text{pil}} \mathbf{h} + \mathbf{n}'_{\text{pil}}(i) \\ &= \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \Phi_{\text{pil}} \alpha \mathbf{h}_b + \mathbf{n}'_{\text{pil}}(i), \end{aligned} \quad (4.82)$$

onde Φ_{pil} é uma matriz de tamanho $N_{\text{pil}} \times (L + 1)$ que contém as $L + 1$ primeiras colunas das linhas $p_1, p_2, \dots, p_{N_{\text{pil}}}$ da matriz $\sqrt{M} \mathbf{F}_M$; e, $\mathbf{z}_{\text{pil}}(i) = [z_{\text{pil}}^{(i)}[p_1] \ z_{\text{pil}}^{(i)}[p_2] \ \dots \ z_{\text{pil}}^{(i)}[p_{N_{\text{pil}}}]^T$, $\mathbf{s}_{\text{pil}}(i) = [s_{\text{pil}}^{(i)}[p_1] \ s_{\text{pil}}^{(i)}[p_2] \ \dots \ s_{\text{pil}}^{(i)}[p_{N_{\text{pil}}}]^T$, e

$\mathbf{n}'_{\text{pil}}(i) = [n'_{\text{pil}}(i)[p_1] \ n'_{\text{pil}}(i)[p_2] \ \cdots \ n'_{\text{pil}}(i)[p_{N_{\text{pil}}}]^T$. Ademais, $\mathbf{z}_{\text{pil}}(i) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$, com $\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \mathbf{T}_{\text{OLA}}$.

Observando (4.82), propõe-se estimar α segundo o critério de máxima verossimilhança (ou *Maximum Likelihood* – ML). Uma vez que $\mathbf{n}'_{\text{pil}}(i)$ é vetor gaussiano de média nula e matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}}$, a função de log-verossimilhança de $\mathbf{z}_{\text{pil}}(i)$, $\ln p_{\mathbf{z}_{\text{pil}}}(\mathbf{Z}, \alpha)$, é proporcional a $(\mathbf{Z} - \alpha \mathbf{m})^H \mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}}^{-1} (\mathbf{Z} - \alpha \mathbf{m})$, com $\mathbf{m} = \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b$ e $\mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}} = N_0 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H$. Daí decorre que a estimativa ML de α é:

$$\alpha = \frac{\mathbf{m}^H \mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}}^{-1} \mathbf{Z}}{\mathbf{m}^H \mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}}^{-1} \mathbf{m}}.$$

Ou, reescrevendo:

$$\alpha(i) = \frac{\left(\text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)^H \left(\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H \right)^{-1} \mathbf{z}_{\text{pil}}(i)}{\left(\text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)^H \left(\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H \right)^{-1} \left(\text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)}.$$

Uma versão filtrada é proposta a seguir, e cunhada "ML filtrada":

$$\alpha(i) = \lambda \alpha(i-1) + \frac{(1-\lambda) \left(\text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)^H \left(\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H \right)^{-1} \mathbf{z}_{\text{pil}}(i)}{\left(\text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)^H \left(\mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H \right)^{-1} \left(\text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)}, \quad (4.83)$$

com $0 < \lambda < 1$.

Outro método de resolução da ambigüidade é sugerido, inspirado no “gênio” apresentado no início desta seção. De fato, considerando que é possível obter estimativas da resposta em frequência nas frequências das portadoras que transportam pilotos, é possível obter o seguinte estimador para α :

$$\begin{aligned} \alpha(i) &= \arg \min_w \{ \|\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}} - w \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2 \} \\ &= \arg \min_w \{ \|\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}} - w \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2 \} \\ &= \frac{(\mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i))^H \hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}}(i)}{\|\mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

onde $\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}} = [\hat{h}[p_1] \ \hat{h}[p_2] \ \cdots \ \hat{h}[p_{N_{\text{pil}}}]^T$.

Todavia, ainda é necessário estimar de alguma forma $\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}}$. Sugere-se então empregar estimativas ZF de $\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}}$, dadas por:

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}} = \text{diag}^{-1}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{z}_{\text{pil}}(i).$$

Substituindo em (4.84), chega-se ao seguinte estimador para α :

$$\alpha(i) = \frac{(\mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i))^H \text{diag}^{-1}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{z}_{\text{pil}}(i)}{\|\mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2}. \quad (4.85)$$

Uma versão filtrada, denotada "ZF filtrada" é dada por:

$$\alpha(i) = \frac{(\Phi_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i))^H (\lambda \hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}}(i-1) + (1-\lambda) \text{diag}^{-1}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{z}_{\text{pil}}(i))}{\|\Phi_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2}, \quad (4.86)$$

com $0 < \lambda < 1$.

O desempenho do estimador ‘corrmatch’ em conjunto com o emprego dos esquemas de resolução da ambigüidade é investigado. Os métodos de resolução da ambigüidade comparados são: o “gênio” em (4.80), o “gênio” utilizando apenas um coeficiente do canal verdadeiro (vide seção 4.7.1), o esquema ML filtrado em (4.83), e o esquema ZF filtrado em (4.86).

Considera-se um sistema OFDM-ZP com $M = 64$ portadoras transmitindo símbolos oriundos de uma constelação BPSK. O intervalo de guarda inserido tem comprimento $D = 16$. O canal fixo experimentado pelos sinais tem ordem $L = 3$ e sua resposta em frequência está ilustrada na Figura 4.1.

São realizados 15 experimentos independentes. Para cada experimento, é simulada a transmissão de 5000 símbolos OFDM (ou seja, 160000 bits). A ordem do canal é suposta conhecida, ou seja $\hat{L} = L = 3$. Para cada símbolo OFDM transmitido, $M - 1$ portadoras carregam símbolos de informação, e 1 única portadora carrega 1 símbolo piloto (isto é, símbolo conhecido tanto pelo transmissor quanto pelo receptor).

O desempenho MSE está ilustrado na Figura 4.33, e observa-se que o desempenho do estimador ‘corrmatch’ juntamente com os estimadores práticos da ambigüidade, apesar de apresentar degradação um pouco mais acentuada para baixas razões $\frac{E_B}{N_0}$, não destoa do desempenho do estimador ‘corrmatch’ acoplado ao estimador ideal de ambigüidade (“gênio”).

A Figura 4.34 ilustra o desempenho, em termos de taxa de erro de bit, de um receptor empregando o estimador ‘corrmatch’ em conjunto com os esquemas de resolução de ambigüidade. Conforme sugerido pelo desempenho MSE, não houve perda de desempenho significativa em termos de taxa de erro de bit ao se usar os esquemas práticos de resolução de ambigüidade.

Vale ressaltar que embora tenha sido considerado o estimador ‘corrmatch’ em sistema OFDM-ZP, o conteúdo desta seção aplica-se aos outros estimadores de canal, bem como ao OFDM-CP.

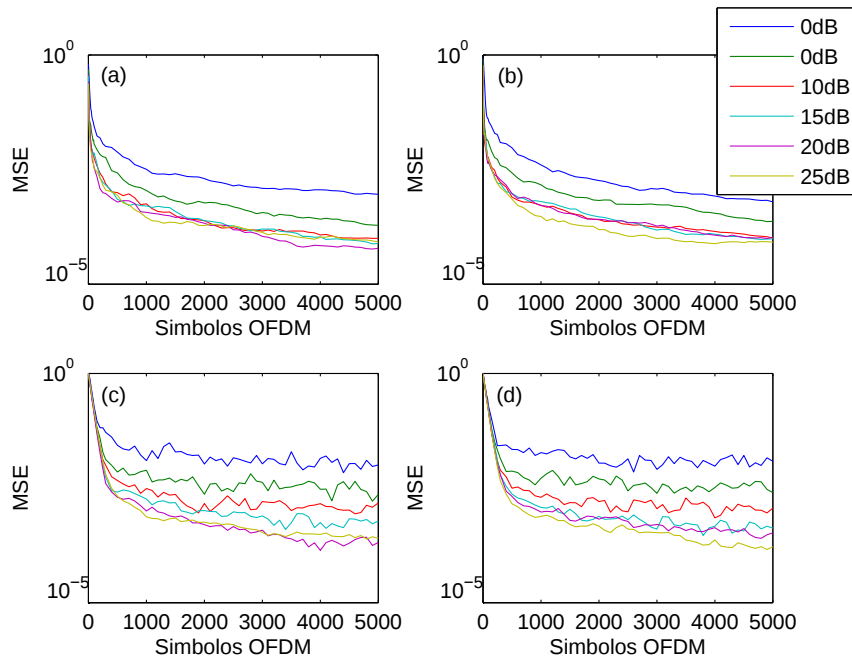


Figura 4.33: Desempenho MSE para o estimador ‘corrmatch’, para várias razões $\frac{E_B}{N_0}$ com ambigüidade resolvida com: a) “gênio”, b) um único coeficiente do canal verdadeiro conhecido, c) ML filtrado, e d) ZF filtrado

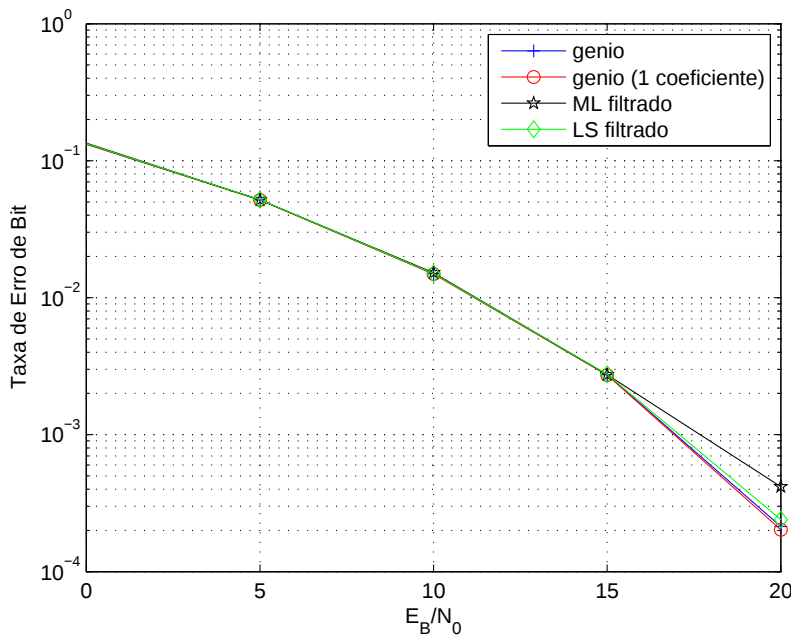


Figura 4.34: Taxa de Erro de Bit para estimador ‘corrmatch’, para ambigüidade resolvida de diversas formas

5

Sistemas OFDM com Intervalo de Guarda Insuficiente

5.1

Introdução

Neste Capítulo considera-se sistemas OFDM com intervalo de guarda insuficiente.

A Seção 5.3.1 trata da extensão do método das potências para sistemas OFDM-ZP e OFDM-CP.

Na Seção 5.3.2, o esquema de estimação de canal por meio de casamento de correlação é estendido para sistemas OFDM-ZP e OFDM-CP.

A Seção 5.3.3 apresenta alguns resultados quanto ao desempenho de estimadores de canal para sistemas OFDM operando com intervalo de guarda insuficiente.

5.2

Deteccção de Sinais

O problema de equalização em sistemas OFDM-CP já foi estudado, por exemplo, em [57, 58]. Em [57], a IBI é cancelada de forma subtrativa utilizando o símbolo detectado no intervalo de sinalização anterior, e um esquema ZF é então aplicado ao sinal resultante (teoricamente livre de IBI, caso o símbolo anterior tenha sido detectado corretamente). Em [58] a IBI também é cancelada de forma subtrativa utilizando decisões passadas, mas é aplicado ao sinal resultante (teoricamente livre de IBI) um esquema MMSE.

Mais recentemente sistemas OFDM-ZP com intervalo de guarda insuficiente foram abordados em [60]. A aplicação de um esquema MMSE sobre a observação $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$ é proposta, de modo que a solução proposta é na verdade uma extensão do receptor MMSE apresentado no Capítulo 3.

5.3

Estimação Cega de Canal

Nesta Seção, as técnicas apresentadas ao longo do Capítulo 4 são estendidas para o caso de intervalo de guarda insuficiente, ou seja, a ordem L do canal é tal que $D < L < P$, onde D é o comprimento do intervalo de guarda e P é o tamanho do Símbolo OFDM transmitido.

5.3.1

Estimação de Canal por meio do Método das Potências

OFDM-ZP

Em sistemas OFDM-ZP com intervalo de guarda insuficiente, a Equação (3.8) fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_1 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i) \\ &= [\mathbf{H}_1 \ \mathbf{H}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(i), \end{aligned} \quad (5.1)$$

com

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & h[0] & & \vdots \\ h[D] & \vdots & & \vdots \\ \vdots & h[D] & & \vdots \\ h[L] & \vdots & & \vdots \\ 0 & h[L] & & 0 \\ \vdots & 0 & & h[0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h[D] \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

e

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & h[L] & h[L-1] & \dots & h[D+1] \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h[L] & \dots & h[D+2] \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h[L] \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

ou seja, as últimas $L - D$ colunas de $\mathbf{H}_1$ são não-nulas.

O método de estimação cega de canal da Seção 4.3, que aproxima o produto $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ por potências ascendentes da inversa da matriz correlação das observações, pode ser estendido para o caso de intervalo de guarda insuficiente empilhando α vetores de observação:

$$\bar{\mathbf{r}}(i) = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{s}}(i) + \bar{\mathbf{n}}(i), \quad (5.4)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{r}}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{ZP}}^{(t)}(i - \alpha + 1) \\ \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i - \alpha + 2) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) \end{bmatrix},$$

de tal modo que $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(k)$, $k = i - \alpha + 2, \dots, i$, tem tamanho $P \times 1$, e $\mathbf{r}_{\text{ZP}}^{(t)}(i - \alpha + 1)$ é um vetor que contém as últimas $P - (L - D)$ componentes do vetor $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i - \alpha + 1)$; $\bar{\mathbf{r}}(i)$ é portanto um vetor de comprimento $(\alpha - 1)P + P - (L - D) = \alpha P + D - L$.

Por sua vez, a matriz $\bar{\mathbf{H}}$ de tamanho $(\alpha P + D - L) \times \alpha M$ é dada por:

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^{(t)} & \mathbf{0}_{(P-L+D) \times M} & \dots & \mathbf{0}_{(P-L+D) \times M} & \mathbf{0}_{(P-L+D) \times M} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \dots & \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{0}_{P \times M} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{0}_{P \times M} & \dots & \mathbf{H}_0 & \mathbf{0}_{P \times M} \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{0}_{P \times M} & \dots & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

onde $\mathbf{H}_0^{(t)}$ é uma matriz de tamanho $(P - L + D) \times M$ que contém as últimas $(P - L + D)$ linhas de $\mathbf{H}_0$, e $\mathbf{H}_0$ e $\mathbf{H}_1$, ambas de tamanho $P \times M$, são dadas por (5.2) e (5.3), respectivamente. O vetor $\bar{\mathbf{s}}(i)$, de tamanho $\alpha M \times 1$ é dado por:

$$\bar{\mathbf{s}}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i - \alpha + 1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, o vetor $\bar{\mathbf{n}}(i)$, de comprimento $\alpha P - L + D$ tem expressão:

$$\bar{\mathbf{n}}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(t)}(i - \alpha + 1) \\ \mathbf{n}(i - \alpha + 2) \\ \vdots \\ \mathbf{n}(i) \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{n}^{(t)}(i - \alpha + 1)$ é um vetor que contém as últimas $P - (L - D)$ componentes do vetor $\mathbf{n}(i - \alpha + 1)$.

A matriz de correlação das observações $\bar{\mathbf{r}}(i)$ em (5.4), denotada por $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$, tem tamanho $(\alpha P - L + D) \times (\alpha P - L + D)$ e é definida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}} &= \mathbb{E}[\bar{\mathbf{r}}(i)\bar{\mathbf{r}}^H(i)] \\ &= \sigma_s^2 \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{H}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{(\alpha P - L + D)}. \end{aligned}$$

A matriz $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$ pode ser decomposta por SVD como segue:

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}} = [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_{\alpha M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{(\alpha+1)D-L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Uma vez que $\bar{\mathbf{H}}$ tem tamanho $(\alpha P + D - L) \times \alpha M$, uma condição necessária para que exista subespaço de ruído é $\alpha > \frac{L-D}{D}$, ou seja é necessário empilhar $\alpha > \frac{L-D}{D}$ vetores observação $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$, como também pode ser observado em (5.6).

Da condição de ortogonalidade dos subespaços de sinal e de ruído, e sabendo que as colunas de $\bar{\mathbf{H}}$ pertencem ao subespaço de sinal, tem-se que:

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{0}_{((\alpha+1)D-L) \times \alpha M}. \quad (5.7)$$

As colunas de $\bar{\mathbf{H}}$ dependem de $\mathbf{h}$. A seguir, esta dependência é explicitada.

Uma vez que a matriz $\mathbf{H}_0$ em (5.2) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}_0 = [\mathbf{S}_1 \mathbf{h} \ \mathbf{S}_2 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M \mathbf{h}],$$

com

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times (L+1)} \\ \mathbf{I}_{\min[L+1; P-i+1] \times (L+1)} \\ \mathbf{0}_{P-i+1-\min[L+1; P-i+1] \times (L+1)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, M, \quad (5.8)$$

as M últimas colunas de $\bar{\mathbf{H}}$, a saber (vide (5.5)):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((\alpha-2)P+P-L+D) \times M} \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix}$$

podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((\alpha-2)P+P-L+D) \times M} \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((\alpha-2)P+P-L+D) \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{((\alpha-2)P+P-L+D) \times 1} \\ \mathbf{S}_1 \mathbf{h} & \dots & \mathbf{S}_M \mathbf{h} \end{bmatrix},$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((\alpha-2)P+P-L+D) \times M} \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{S}}_1^{(0)} \mathbf{h} \ \dots \ \bar{\mathbf{S}}_M^{(0)} \mathbf{h}], \quad (5.9)$$

onde

$$\bar{\mathbf{S}}_i^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((\alpha-2)P+P-L+D) \times (L+1)} \\ \mathbf{S}_i \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Procedimento análogo é efetuado a seguir para as primeiras M colunas de $\bar{\mathbf{H}}$, a saber (vide (5.5)):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^{(t)} \\ \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2)P \times M} \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{H}_1$ em (5.3) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0} \ \mathbf{S}'_1 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}'_{L-D} \mathbf{h}], \quad (5.11)$$

onde

$$\mathbf{S}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{i \times (L+1-i)} & \mathbf{I}_i \\ \mathbf{0}_{(P-i) \times (L+1)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, L-D. \quad (5.12)$$

A matriz $\mathbf{H}_0^{(t)}$ em (5.5), de tamanho $(P-L+D) \times M$, contém as últimas $(P-L+D)$ linhas da matriz $\mathbf{H}_0$. Definindo a matriz de tamanho $(P-L+D) \times P$ $\mathbf{S}_w = [\mathbf{0}_{(P-L+D) \times (L-D)} \ \mathbf{I}_{(P-L+D)}]$, tem-se que $\mathbf{H}_0^{(t)} = \mathbf{S}_w \mathbf{H}_0$. Logo, é possível reescrever $\mathbf{H}_0^{(t)}$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^{(t)} &= [\mathbf{S}_w \mathbf{S}_1 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_w \mathbf{S}_M \mathbf{h}] \\ &= [\mathbf{S}_1^{(t)} \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M^{(t)} \mathbf{h}], \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde

$$\mathbf{S}_i^{(t)} = \mathbf{S}_w \mathbf{S}_i, \quad i = 1, \dots, M.$$

Assim, com a ajuda de (5.11) e (5.13), pode-se reescrever as M primeiras colunas de $\bar{\mathbf{H}}$ como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^{(t)} \\ \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2)P \times M} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{(t)} \mathbf{h} & \dots & \mathbf{S}_{M-L+D+1}^{(t)} \mathbf{h} & \dots & \mathbf{S}_M^{(t)} \mathbf{h} \\ \mathbf{0}_{P \times 1} & \dots & \mathbf{S}'_1 \mathbf{h} & \dots & \mathbf{S}'_{L-D} \mathbf{h} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2)P \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{(\alpha-2)P \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{(\alpha-2)P \times 1} \end{bmatrix} \\ &= [\bar{\mathbf{S}}_1^{(t)} \mathbf{h} \ \dots \ \bar{\mathbf{S}}_M^{(t)} \mathbf{h}], \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde

$$\bar{\mathbf{S}}_i^{(t)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i^{(t)} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-1)P \times (L+1)} \end{bmatrix}, & i = 1, \dots, M-L+D \\ \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i^{(t)} \\ \mathbf{S}'_{i-(M-L+D)} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2)P \times (L+1)} \end{bmatrix}, & i = M-L+D+1, \dots, M \end{cases}. \quad (5.15)$$

Finalmente, busca-se explicitar o vetor $\mathbf{h}$ nas $(\alpha-2)M$ colunas restantes⁽¹⁾ de $\bar{\mathbf{H}}$. Estas colunas podem ser particionadas em blocos de M colunas cada. O k -ésimo bloco, $k = 1, \dots, \alpha-2$, pode ser reescrito (vide (5.5)):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L+D) \times M} \\ \mathbf{0}_{(k-1)P \times M} \\ \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2-k)P \times M} \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{S}}_1^{(1)}(k) \mathbf{h} \ \dots \ \bar{\mathbf{S}}_M^{(1)}(k) \mathbf{h}], \quad (5.16)$$

⁽¹⁾Obviamente, estas colunas só existem se $\alpha \geq 3$.

onde

$$\bar{\mathbf{S}}_i^{(1)}(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L+D) \times (L+1)} \\ \mathbf{0}_{(k-1)P \times (L+1)} \\ \mathbf{S}_i \\ \mathbf{0}_{P \times (L+1)} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2-k)P \times (L+1)} \end{bmatrix}, & i = 1, \dots, M - L + D \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L+D) \times (L+1)} \\ \mathbf{0}_{(k-1)P \times (L+1)} \\ \mathbf{S}_i \\ \mathbf{S}'_{i-(M-L+D)} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2-k)P \times (L+1)} \end{bmatrix}, & i = M - L + D + 1, \dots, M \end{cases}. \quad (5.17)$$

De posse de (5.9), (5.14) e (5.16), a matriz $\bar{\mathbf{H}}$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1^{(t)} \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(t)} \mathbf{h} & \bar{\mathbf{S}}_1^{(1)}(1) \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(1)}(1) \mathbf{h} & \dots \\ \dots & \bar{\mathbf{S}}_1^{(1)}(\alpha-2) \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(1)}(\alpha-2) \mathbf{h} & \bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M \mathbf{h} \end{bmatrix} \\ &= [\bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{h} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{S}}_{\alpha M} \mathbf{h}]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Da condição de ortogonalidade entre os subespaços decorre que, para cada coluna de $\bar{\mathbf{H}}$:

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_k \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad , \quad k = 1, \dots, \alpha M. \quad (5.19)$$

Logo, de (5.7), chega-se a

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{0}_{(\alpha P - L + D) \times \alpha M} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{H}}\|_F^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{\alpha M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} = 0,$$

e portanto pode-se obter uma estimativa para o canal (a menos de um escalar complexo) por meio de:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[\mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{\alpha M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (5.20)$$

Reconhecendo em (5.20) um quociente de Rayleigh, segue que $\hat{\mathbf{h}}$ é o vetor associado ao menor valor singular da matriz $\sum_{i=1}^{\alpha M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i$.

De posse de (4.11), e levando em conta (5.20), o produto $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ pode ser substituído por potências ascendentes inteiras da inversa da matriz correlação $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$ de modo a obter o seguinte estimador de canal (a menos de uma ambigüidade):

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[\mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{\alpha M} \bar{\mathbf{S}}_i^H (\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}^{-1})^m \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (5.21)$$

Convém frisar que as matrizes $\bar{\mathbf{S}}_i$, $i = 1, \dots, \alpha M$, envolvidas, são esparsas e envolvem apenas 1's e 0's (vide (5.10), (5.15), e (5.17)).

OFDM-CP

De (2.21), chega-se ao modelo de sinais para o OFDM-CP com intervalo de guarda insuficiente, a saber:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{CP}}(i) &= \mathbf{H}\mathbf{F}_{\text{CP}}\mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}_{\text{CP}}\mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}_M^H\mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}\mathbf{F}_M^H\mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i), \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_{\text{IBI}}$, $\mathbf{F}_{\text{CP}}$ e $\mathbf{F}$ estão definidos em (2.16), (2.17), (2.10) e (4.32) respectivamente. Convém salientar que este modelo de sinais é análogo ao modelo de sinais para o OFDM-CP com intervalo de guarda suficiente⁽²⁾.

O procedimento para a obtenção do estimador de canal baseado no método das potências ascendentes da inversa da matriz correlação é análogo ao efetuado para o OFDM-ZP com intervalo de guarda insuficiente.

Empilha-se α vetores de observação:

$$\bar{\mathbf{r}}(i) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(i) + \bar{\mathbf{n}}(i) \quad (5.23)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{r}}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{CP}}^{(t)}(i - \alpha + 1) \\ \mathbf{r}_{\text{CP}}(i - \alpha + 2) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{\text{CP}}(i) \end{bmatrix},$$

de tal modo que $\mathbf{r}_{\text{CP}}(k)$, $k = i - \alpha + 2, \dots, i$, tem tamanho $P \times 1$, e $\mathbf{r}_{\text{CP}}^{(t)}(i - \alpha + 1)$ é um vetor que contém as últimas $P - L$ componentes do vetor $\mathbf{r}_{\text{CP}}(i - \alpha + 1)$; $\bar{\mathbf{r}}(i)$ é portanto um vetor de comprimento $(\alpha - 1)P + P - L = \alpha P - L$.

Por sua vez, a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ de tamanho $(\alpha P - L) \times \alpha M$, em (5.23), é dada por:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(t)}\mathbf{F} & \mathbf{0}_{(P-L) \times M} & \dots & \mathbf{0}_{(P-L) \times M} & \mathbf{0}_{(P-L) \times M} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F} & \mathbf{H}\mathbf{F} & \dots & \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{0}_{P \times M} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{0}_{P \times M} & \dots & \mathbf{H}\mathbf{F} & \mathbf{0}_{P \times M} \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{0}_{P \times M} & \dots & \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F} & \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

⁽²⁾Para intervalo de guarda suficiente, não existe IBI na recepção para o caso do OFDM-ZP (vide (3.10)); o mesmo não acontece com o OFDM-CP e é por esse motivo que ocorre o descarte das D primeiras amostras de cada bloco recebido. Para o caso de intervalo de guarda insuficiente, existe IBI na recepção de sinais OFDM-ZP (vide (5.1)) e a matriz $\mathbf{H}_1$ aparece para representar este efeito; para o OFDM-CP, a IBI atinge simplesmente mais amostras consecutivas de um mesmo símbolo OFDM e o modelo permanece portanto o mesmo.

onde $\mathbf{H}_0^{(t)}$ é uma matriz de tamanho $(P - L) \times P$ que contém as últimas $(P - L)$ linhas de $\mathbf{H}$; $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}_{\text{IBI}}$, ambas de tamanho $P \times P$, são dadas por (2.16) e (2.17), respectivamente. A matriz $\mathbf{F}$, de tamanho $P \times M$ esta definida em (4.32).

O vetor $\bar{\mathbf{x}}(i)$, de tamanho $\alpha M \times 1$, em (5.23), é dado por:

$$\bar{\mathbf{x}}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i - \alpha + 1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, o vetor $\bar{\mathbf{n}}(i)$, de comprimento $\alpha P - L$ tem expressão:

$$\bar{\mathbf{n}}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(t)}(i - \alpha + 1) \\ \mathbf{n}(i - \alpha + 2) \\ \vdots \\ \mathbf{n}(i) \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{n}^{(t)}(i - \alpha + 1)$ é um vetor que contém as últimas $P - L$ componentes do vetor $\mathbf{n}(i - \alpha + 1)$.

A matriz de correlação das observações $\bar{\mathbf{r}}(i)$ em (5.23), denotada por $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$ e de tamanho $(\alpha P - L) \times (\alpha P - L)$, é definida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}} &= \mathbb{E}[\bar{\mathbf{r}}(i)\bar{\mathbf{r}}^H(i)] \\ &= \sigma_s^2 \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{A}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{(\alpha P - L)}, \end{aligned}$$

e pode ser decomposta por SVD como segue:

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}} = [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_{\alpha M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{\alpha D - L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Uma vez que $\bar{\mathbf{A}}$ tem tamanho $(\alpha P - L) \times \alpha M$, uma condição necessária para que exista subespaço de ruído é $\alpha > \frac{L}{D}$, ou seja é necessário empilhar $\alpha > \frac{L}{D}$ vetores observação $\mathbf{r}_{\text{CP}}(i)$, como também pode ser observado em (5.25).

Da condição de ortogonalidade dos subespaços de sinal e de ruído, e sabendo que as colunas de $\bar{\mathbf{A}}$ pertencem ao subespaço de sinal, tem-se que:

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}_{(\alpha D - L) \times \alpha M}. \quad (5.26)$$

As colunas de $\bar{\mathbf{A}}$ dependem de $\mathbf{h}$. As últimas M colunas de $\bar{\mathbf{A}}$ podem ser reescritas como (vide (5.24)):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((\alpha-1)P-L) \times M} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1^{(0)} \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(0)} \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

onde (vide (4.41))

$$\bar{\mathbf{S}}_i^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{((\alpha-1)P-L) \times (L+1)} \\ \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, M.$$

As primeiras M colunas de $\bar{\mathbf{A}}$ podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_t \mathbf{F} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2)P \times M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1^{(t)} \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(t)} \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

onde (vide (4.46) e (4.47))

$$\bar{\mathbf{S}}_i^{(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(i)} \\ \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(i)} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2)P \times (L+1)} \end{bmatrix}, \quad i = M - L + D + 1, \dots, M.$$

Finalmente, as $(\alpha - 2)M$ colunas restantes⁽³⁾ de $\bar{\mathbf{A}}$ admitem a seguinte forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times M} \\ \mathbf{0}_{(k-1)P \times M} \\ \mathbf{H} \mathbf{F} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2-k)P \times M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1^{(1)}(k) \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(1)}(k) \mathbf{h} \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

onde (vide (4.46) e (4.47))

$$\bar{\mathbf{S}}_i^{(1)}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times (L+1)} \\ \mathbf{0}_{(k-1)P \times (L+1)} \\ \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(i)} \\ \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(i)} \\ \mathbf{0}_{(\alpha-2-k)P \times (L+1)} \end{bmatrix}, \quad i = M - L + D + 1, \dots, M.$$

Com a ajuda de (5.27), (5.28) e (5.29), a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1^{(t)} \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(t)} \mathbf{h} & \bar{\mathbf{S}}_1^{(1)}(1) \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(1)}(1) \mathbf{h} & \dots \\ \dots & \bar{\mathbf{S}}_1^{(1)}(\alpha-2) \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M^{(1)}(\alpha-2) \mathbf{h} & \bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_M \mathbf{h} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{h} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_{\alpha M} \mathbf{h} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Da condição de ortogonalidade entre os subespaços decorre que, para cada

⁽³⁾somente se $\alpha \geq 3$.

coluna de $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_k \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad , \quad k = 1, \dots, \alpha M.$$

Logo, de (5.26), chega-se a

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}_{(\alpha P - L + D) \times \alpha M} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{H}}\|_F^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{\alpha M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} = 0,$$

e segue que uma estimativa para o canal (a menos de um escalar complexo) pode ser obtida por meio de:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[\mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{\alpha M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} \right], \quad (5.31)$$

ou seja, $\hat{\mathbf{h}}$ é o vetor associado ao menor valor singular da matriz $\sum_{i=1}^{\alpha M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i$.

Explorando uma vez mais (4.11), e levando em conta (5.31), o produto $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ pode ser substituído por potências ascendentes inteiras da inversa da matriz correlação $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$ de modo a obter o seguinte estimador de canal (a menos de uma ambigüidade):

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[\mathbf{h}^H \left(\sum_{i=1}^{\alpha M} \bar{\mathbf{S}}_i^H (\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}^{-1})^m \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (5.32)$$

5.3.2

Estimação de Canal com Casamento de Correlação

OFDM-ZP

O método utilizando casamento de correlação também é facilmente estendido para o caso de intervalo de guarda insuficiente.

Define-se a matriz erro $\mathbf{E}(i)$ entre a matriz de correlação suposta conhecida $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_P(i) \tilde{\mathbf{x}}_P(i)^H]$ e a matriz de correlação estimada $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)$, isto é, obtida de alguma forma a partir das observações $\tilde{\mathbf{x}}_P(i)$, como segue:

$$\mathbf{E}(i) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} - \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i) \quad (5.33)$$

com

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} = \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_1^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P. \quad (5.34)$$

Seja agora a função custo $J(i)$ dada por:

$$J(i) = \text{vec}^H(\mathbf{E}(i)) \text{vec}(\mathbf{E}(i)). \quad (5.35)$$

Utilizando (5.33) pode-se escrever:

$$\text{vec}(\mathbf{E}(i)) = \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) - \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)). \quad (5.36)$$

Utilizando agora (5.34), tem-se:

$$\begin{aligned}\text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) &= \text{vec}(\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^H + \mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^H + \sigma^2\mathbf{I}_P) \\ &= \text{vec}(\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^H) + \text{vec}(\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^H) + \text{vec}(\sigma^2\mathbf{I}_P).\end{aligned}\quad (5.37)$$

Lembrando que

$$\mathbf{H}_0 = [\mathbf{S}_1\mathbf{h} \ \mathbf{S}_2\mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M\mathbf{h}],$$

com as matrizes $\mathbf{S}_i, i = 1, \dots, M$ definidas em (5.8), e

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0} \ \mathbf{S}'_1\mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}'_{L-D}\mathbf{h}],$$

com as matrizes $\mathbf{S}'_i, i = 1, \dots, L - D$ definidas em (5.12), então

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^H &= [\mathbf{S}_1\mathbf{h} \ \mathbf{S}_2\mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M\mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}^H\mathbf{S}_1^H \\ \mathbf{h}^H\mathbf{S}_2^H \\ \vdots \\ \mathbf{h}^H\mathbf{S}_M^H \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k\mathbf{h}\mathbf{h}^H\mathbf{S}_k^H\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1\mathbf{H}_1^H &= [\mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0} \ \mathbf{S}'_1\mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}'_{L-D}\mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{0}^H \\ \vdots \\ \mathbf{0}^H \\ \mathbf{h}^H\mathbf{S}'_1{}^H \\ \vdots \\ \mathbf{h}^H\mathbf{S}'_{L-D}{}^H \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{L-D} \mathbf{S}'_k\mathbf{h}\mathbf{h}^H\mathbf{S}'_k{}^H.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\text{vec}(\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^H) &= \text{vec}\left(\sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k\mathbf{h}\mathbf{h}^H\mathbf{S}_k^H\right) \\ &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_k\mathbf{h}\mathbf{h}^H\mathbf{S}_k^H) \\ &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_k\mathcal{X}\mathbf{S}_k^H),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{vec}(\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_1^H) &= \text{vec} \left(\sum_{k=1}^{L-D} \mathbf{S}'_k \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}'_k^H \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{L-D} \text{vec}(\mathbf{S}'_k \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}'_k^H) \\
 &= \sum_{k=1}^{L-D} \text{vec}(\mathbf{S}'_k \mathcal{X} \mathbf{S}'_k^H),
 \end{aligned}$$

com $\mathcal{X} = \mathbf{h} \mathbf{h}^H$. Utilizando o fato de que [71]:

$$\text{vec}(\mathbf{S}_k \mathcal{X} \mathbf{S}_k^H) = (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k) \text{vec}(\mathcal{X}) \quad (5.38)$$

em (5.37) chega-se a:

$$\begin{aligned}
 \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k) \text{vec}(\mathcal{X}) + \sum_{k=1}^{L-D} (\mathbf{S}'_k^* \otimes \mathbf{S}'_k) \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P) \sigma^2 \\
 &= \mathbf{M} \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P) \sigma^2,
 \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k) + \sum_{k=1}^{L-D} (\mathbf{S}'_k^* \otimes \mathbf{S}'_k) \quad (5.40)$$

é uma matriz conhecida de tamanho $P^2 \times (L+1)^2$.

Por analogia ao que foi apresentado na Seção 4.5, a solução é a mesma que em (4.67), com $\mathbf{M}$ dada por (5.40). Ou seja,

$$\mathbf{v} = [\mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{ii}^H) \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{ii}^H) \mathbf{q}(i). \quad (5.41)$$

Lembrando que $\mathbf{v} = \text{vec}(\mathcal{X})$, então $\text{unvec}(\mathbf{v}) = \mathcal{X}$ e uma estimativa do vetor $\mathbf{h}$ pode ser obtida, a menos de um escalar complexo, determinando-se o vetor singular associado ao maior valor singular de $\mathcal{X}$, uma vez que $\mathcal{X}$ tem posto 1. Convém frisar que a matriz $\mathcal{X}$ sobre a qual se opera para obter $\mathbf{h}$, tem tamanho $(L+1) \times (L+1)$.

OFDM-CP

Uma vez que os modelos de sinais para o OFDM-CP com intervalo de guarda suficiente e insuficiente são os mesmos, segue que uma estimativa do canal (a menos de um escalar complexo), por meio do método de casamento de correlação, é o vetor singular associado ao maior valor singular de $\mathcal{X}$, onde $\mathcal{X} = \text{unvec}(\mathbf{v})$, e $\mathbf{v}$ é dado por (4.77).

5.3.3 Resultados

Alguns resultados são apresentados de modo a ilustrar o desempenho do estimador ‘corrmatch’ para OFDM-ZP. Considera-se um sistema com $M = 32$ portadoras, transmitindo símbolos BPSK, e intervalo de guarda $D = 4$. O sistema experimenta um canal de ordem $L = 15$, com suas respostas ao impulso e em frequência ilustradas nas figuras 5.1 e 5.2 respectivamente (vide Tabela 5.1). Convém ressaltar que o receptor está operando na condição de intervalo de guarda insuficiente.

São realizados 25 experimentos independentes; para cada experimento é simulada a transmissão de 4000 símbolos OFDM.

O desempenho MSE de dois estimadores é comparado na Figura 5.3, para razões $\frac{E_B}{N_0}$ de 0dB, 5dB, 10dB, 15dB, 20dB e 25dB. Os dois estimadores são baseados no método de casamento de correlação. O primeiro estimador ‘corrmatch’ porém, estima um canal de ordem $\hat{L} = D = 4$, ou seja, este estimador se comporta como se estivesse operando na condição de intervalo de guarda suficiente, como na Seção 4.5. Já o segundo estimador, ‘corrmatch-IBI’, estima um canal de ordem $\hat{L} = L = 15$, tirando proveito do que foi desenvolvido na Seção 5.3.2.

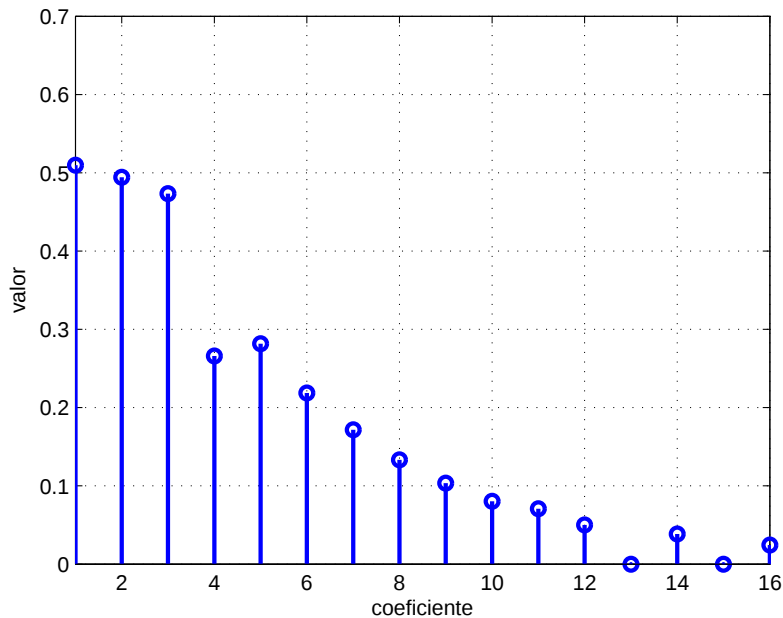


Figura 5.1: Resposta ao Impulso do canal fixo de ordem 15

Da Figura 5.3, é notável a perda de desempenho do estimador ‘corrmatch’ "tradicional". Embora ele apresente o que se poderia chamar de convergência mais rápida, o desempenho em estado estacionário é sofrível. A convergência mais

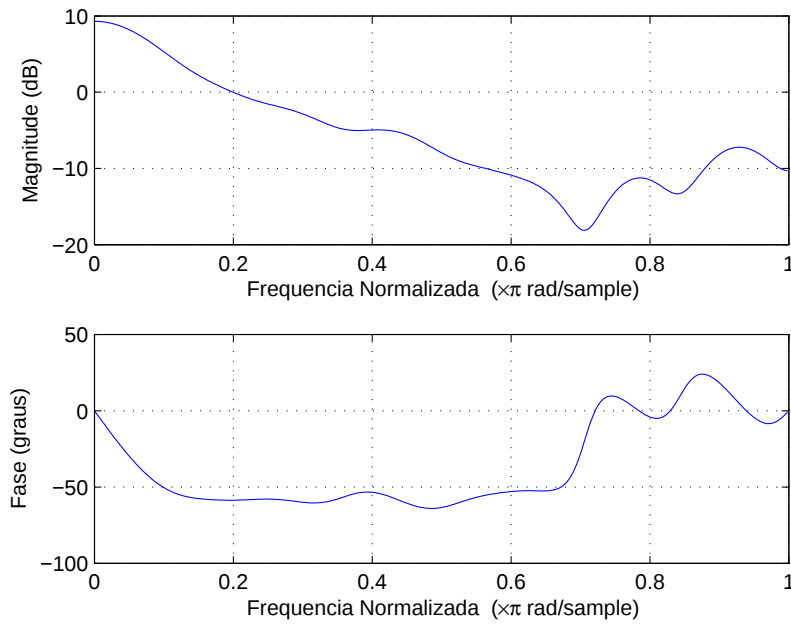


Figura 5.2: Resposta em Frequência do canal fixo de ordem 15

rápida pode ser explicada pelo fato deste estimador estar rastreando um parâmetro vetorial de pequena dimensão (5 taps, se comparado com o estimador melhorado ‘corrmatch-IBI’, que estima 16 taps).

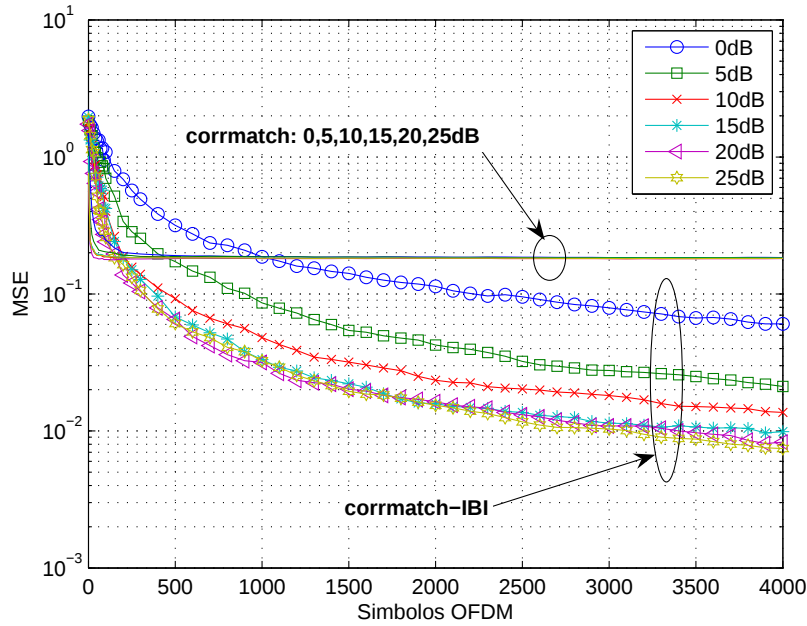


Figura 5.3: Desempenho MSE dos estimadores ‘corrmatch-IBI’ e ‘corrmatch’ tradicional, para um sistema OFDM-ZP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 4$, para canal fixo de ordem $L = 15$

Por fim, ilustra-se na Figura 5.4 o desempenho em termos de taxa de erro de bit para um receptor MMSE como proposto em [60] (o receptor, de posse de uma estimativa de canal, reconstrói as matrizes $\mathbf{H}_0$ e $\mathbf{H}_1$, necessárias para a implementação do equalizador. Para o caso do estimador ‘corrmatch’ tradicional, a matriz $\mathbf{H}_1$ será nula.)

A diferença de desempenho em favor do receptor que emprega o estimador ‘corrmatch-IBI’ para o caso de intervalo de guarda insuficiente é notável.

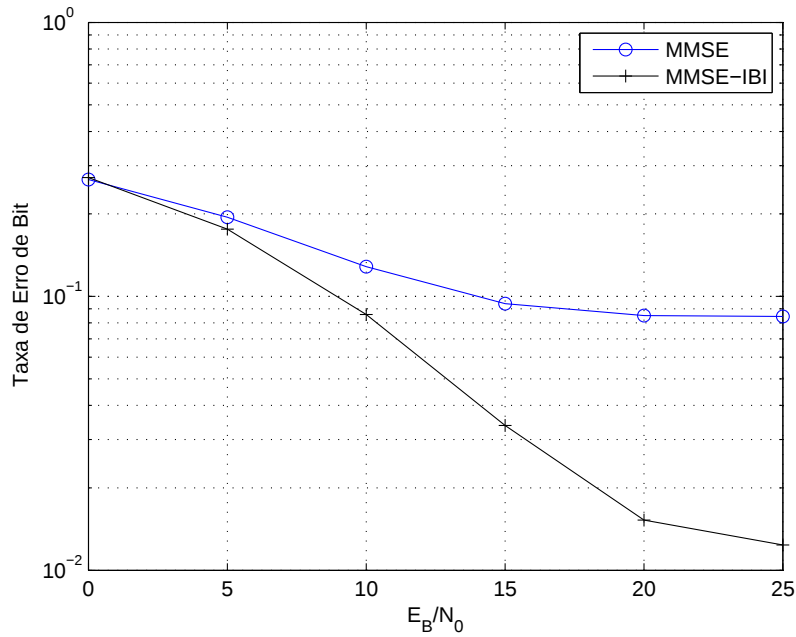


Figura 5.4: Taxa de Erro de Bit para receptor MMSE empregando os estimadores ‘corrmatch-IBI’ (MMSE-IBI) e ‘corrmatch’ tradicional (MMSE), para um sistema OFDM-ZP com $M = 32$ portadoras, intervalo de guarda $D = 4$, para canal fixo de ordem $L = 15$

Tabela 5.1: Coeficientes do Canal

coeficiente	valor
1	0.5098
2	0.4942
3	0.4733
4	0.2659
5	0.2817
6	0.2186
7	0.1717
8	0.1333
9	0.1034
10	0.0803
11	0.0707
12	0.0501
13	0
14	0.0384
15	0
16	0.0245

6

Conclusão

Esta tese abordou o problema de estimação de canal e detecção cega de sinais em sistemas OFDM. Dois esquemas OFDM foram considerados, a saber: OFDM com intervalo de guarda CP, e OFDM com intervalo de guarda ZP.

Da semelhança entre os sinais CDMA e OFDM, surgiu a motivação de investigar a aplicabilidade de técnicas provenientes da literatura específica de CDMA, em sistemas OFDM. Uma vez que é possível fazer uma analogia entre os usuários em um sistema CDMA e as portadoras em um sistema OFDM, técnicas multiusuário podem ser aplicadas em sistemas OFDM.

Para cada um dos sistemas OFDM, foram propostos dois estimadores cegos de canal, provenientes de duas classes de algoritmos cegos: estimação por meio do subespaço de ruído, e estimação via casamento de correlação.

O problema de estimação cega de canal baseado no subespaço de ruído foi reformulado de modo a explicitar a presença do operador projeção no subespaço de ruído. No esquema original, estimativas de uma base para o subespaço de ruído são obtidas por meio da SVD da matriz correlação das observações. Graças à reformulação do problema, a SVD pode ser substituída por um produto de matrizes. Mais especificamente, com a reformulação do problema, estimativas do operador projeção são obtidas por meio de potências inteiras da inversa da matriz correlação das observações, dando origem ao que se convencionou chamar ao longo do texto de “método das potências”. Resultados de simulação indicam que para potências maiores ou iguais a 3 (isto é, 2 multiplicações de matrizes), já se consegue uma boa aproximação para o operador projeção.

Se no caso do OFDM-ZP, a dimensão do subespaço de ruído é invariavelmente D , este não é o caso para sistemas OFDM-CP. Decorre que se para o OFDM-ZP, a adoção do método das potências tem como único objetivo evitar uma SVD, no caso do OFDM-CP o método proposto garante a identificabilidade do canal, uma vez que a dimensão do subespaço de ruído em última análise depende do número de portadoras atingidas por nulos do canal. Outra diferença entre os estimadores baseados no método das potências para o OFDM-CP e o OFDM-ZP é a complexidade computacional envolvida, uma vez que para viabilizar a existência do subespaço de ruído, e assim, viabilizar a existência dos próprios estimadores, no caso do OFDM-

CP faz-se necessário processar mais de um vetor observação por vez.

Quanto aos estimadores baseados no casamento de correlação, conclui-se que estes oferecem uma excelente relação custo-benefício. De fato, a complexidade destes estimadores é bem inferior aos estimadores baseados no método do subespaço de ruído ou ainda baseado no método das potências, devido à natureza esparsa das matrizes envolvidas, bem como por operarem processando apenas um único vetor observação por vez. Por outro lado, resultados de simulação indicaram que receptores realizando a detecção com as estimativas obtidas por meio de casamento de correlação apresentam desempenho semelhante ao de receptores operando com estimativas obtidas via subespaço de ruído, para a faixa de $\frac{E_B}{N_0}$ considerada.

Além disso, obteve-se também um estimador para a variância do ruído. Este parâmetro pode ser útil tanto para reconstruir as matrizes necessárias a um equalizador MMSE, quanto para servir de chave seletora com relação ao esquema de estimação de canal ou detecção de sinais a ser empregado. Para pequenos valores de σ^2 , pode ser mais vantajoso empregar o esquema de estimação baseado no método das potências, com potência 2 por exemplo, e esquema de detecção ZF. Já para valores elevados de σ^2 , o estimador de canal baseado no casamento de correlação poderá ser utilizado, junto com um esquema de detecção MMSE.

Como as estimativas cegas de canal obtidas por meio dos estimadores propostos são afetadas por uma ambigüidade inerente representada por um escalar complexo, foram investigados alguns esquemas capazes de resolvê-la. Para tal, a presença de símbolos pilotos foi explorada. De fato, todo padrão de comunicação comercial de que se tem notícia transmite intercalando dados e seqüências pré-definidas, seja para efeitos de sincronismo de relógio ou de portadora, seja para ajudar na estimação de canal. Resultados de simulação sugerem que os métodos propostos operaram de forma satisfatória explorando a presença dos pilotos para resolver a ambigüidade.

A extensão dos métodos propostos para o caso de sistemas OFDM com intervalo de guarda insuficiente é direta. Os estimadores baseados no método das potências operam processando possivelmente vários vetores observação por vez, de modo a garantir a existência do subespaço de ruído, e acarretando assim um aumento em sua complexidade. Por outro lado, um fato marcante é a capacidade dos estimadores baseados no casamento de correlação de estimarem o canal processando apenas um vetor observação por vez.

Como sugestões de trabalhos futuros pode-se mencionar os seguintes tópicos. O modelo de sinais pode ser estendido de forma a contemplar o caso de portadoras nulas; estas auxiliam na formatação do espectro, em aplicações práticas. Os estimadores podem ser testados em sistemas com desvio de frequência (*frequency offset*). O problema de estimação cega de canal para canais que variam ao longo de um

símbolo OFDM é desafiador, e também pode ser abordado; muito provavelmente os algoritmos propostos deverão ser repensados (os métodos propostos supõem que o canal permanece fixo ao longo de cada símbolo OFDM; o canal, contudo, pode variar de um símbolo para outro). A viabilidade de extensão dos métodos de estimação propostos também pode ser investigada para o caso de múltiplas antenas no receptor e/ou no transmissor. Vale mencionar também que a estreita relação entre os sinais OFDM e MC-DS-CDMA [20] já permitiu a extensão dos métodos de estimação propostos para esse sistema de múltiplo acesso, e resultados preliminares constam de [85, 86, 87].

Referências bibliográficas

- [1] R. W. Chang, "Synthesis of band-limited orthogonal signals for multi-channel data transmission," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 1775–1796, Dezembro 1966.
- [2] B. R. Saltzberg, "Performance of an efficient parallel data transmission system," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. COM-15, pp. 805–811, Dezembro 1967.
- [3] M. S. Zimmerman and A. L. Kirsch, "The AN/GSC-10 (KATHRYN) variable rate data modem for HF radio," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. COM-15, pp. 197–204, Abril 1967.
- [4] B. Hirosaki, "An analysis of automatic equalizers for orthogonally multiplexed QAM systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 73–83, 1980.
- [5] M. L. Doelz, E. T. Heald, and D. L. Martin, "Binary data transmission techniques for linear systems," *Proc. IRE*, vol. 45, Maio 1957.
- [6] B. Hirosaki, "An orthogonally multiplexed QAM system using the discrete Fourier transform," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp. 982–989, Julho 1981.
- [7] J. A. C. Bingham, "Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come," *IEEE Commun. Mag.*, pp. 5–14, Maio 1990.
- [8] S. B. Weinstein and P. M. Ebert, "Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete Fourier transform," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. COM-19, no. 5, pp. 628–634, Outubro 1971.
- [9] J. A. C. Bingham, *ADSL, VDSL, and Multicarrier Modulation*. Wiley, 2000.
- [10] *Asymmetric digital subscriber line (ADSL) transceivers: Transmission Systems and Media Digital Systems and Networks*, ITU-T Std. G.992.1, 1999.

- [11] *Radio broadcasting systems: Digital Audio Broadcasting (DAB) to mobile, portable and fixed receivers*, ETSI Std. ETS 300 401, Maio 1997.
- [12] H. Sari, G. Karam, and I. Jeanclaude, "Transmission techniques for digital terrestrial TV broadcasting," *IEEE Commun. Mag.*, pp. 100–109, Fevereiro 1995.
- [13] *Framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television*, ETSI Std. EN 300 744 V1.6.1, 2009.
- [14] R. van Nee, G. Awater, M. Morikura, M. Webster, and K. W. Halford, "New high-rate wireless LAN standards," *IEEE Commun. Mag.*, pp. 82–88, Dezembro 1999.
- [15] *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specification*, IEEE Std. 802.11, 1999.
- [16] B. P. Crow, I. Widjada, J. G. Kim, and P. T. Sakai, "IEEE 802.11 wireless local area networks," *IEEE Commun. Mag.*, pp. 116–126, Setembro 1997.
- [17] S. Hara and R. Prasad, "Overview of multicarrier CDMA," *IEEE Commun. Mag.*, pp. 126–133, Dezembro 1997.
- [18] Z. Wang and G. B. Giannakis, "Wireless multicarrier communications," *IEEE Signal Process. Mag.*, pp. 29–48, Maio 2000.
- [19] R. Nogueroles, M. Bossert, A. Donder, and V. Zyablov, "Improved performance of a random OFDMA mobile communication system," in *Proc. IEEE VTC*, vol. 3, Maio 1998, pp. 2502–2506.
- [20] S. Kondo and L. B. Milstein, "Performance of multicarrier DS CDMA systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 2, pp. 238–246, Fevereiro 1996.
- [21] L. Hanzo, M. Münster, B. J. Choi, and T. Keller, *OFDM and MC-CDMA for Broadband Multi-User Communications, WLANs and Broadcasting*. John Wiley and Sons, 2003.
- [22] A. Scaglione, G. B. Giannakis, and S. Barbarossa, "Redundant filter-bank precoders and equalizers - Part I: Unification and optimal designs," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, pp. 1988–2006, Julho 1999.

- [23] L. J. Cimini, "Analysis and simulation of a digital mobile channel using orthogonal frequency division multiplexing," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-33, no. 7, pp. 665–675, Julho 1985.
- [24] J. Rinne and M. Renfors, "Pilot spacing in orthogonal frequency division multiplexing systems on practical channels," *IEEE Trans. Consum. Electron.*, vol. 42, pp. 959–962, Novembro 1996.
- [25] Y. Le, "Pilot-symbol-aided channel estimation for OFDM in wireless systems," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, pp. 1207–1215, Julho 2000.
- [26] R. Negi and J. Cioffi, "Pilot tone selection for channel estimation in a mobile OFDM system," *IEEE Trans. Consum. Electron.*, vol. 44, pp. 1122–1128, Agosto 1998.
- [27] M. Morelli and U. Mengalli, "A comparasion of pilot-aided channel estimation methods for OFDM systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 12, no. 12, pp. 3065–3073, Dezembro 2001.
- [28] L. Tong and S. Perreau, "Multichannel blind identification: From subspace to maximum likelihood methods," *Signal Processing*, vol. 86, no. 10, pp. 1951–1968, Outubro 1998.
- [29] G. Giannakis, Y. Inouye, and J. Mendel, "Cumulant-based identification of multichannel moving average models," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 34, pp. 783–787, 1989.
- [30] G. Giannakis and J. Mendel, "Identification of non-minimum phase systems using high-order statistics," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 37, pp. 360–377, 1989.
- [31] J. Mendel, "Tutorial on high-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications," *Proc. IEEE*, pp. 278–305, Março 1991.
- [32] L. Tong, G. Xu, and T. Kailath, "A new approach to blind identification and equalization of multipath channels," in *Proc. 25th Asilomar Conf.*, 1991, pp. 856–860.
- [33] E. Moulines, P. Duhamel, J. Cardoso, and S. Mayrargue, "Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters," in *Proc. IEEE ICASSP*, vol. iv, Fevereiro 1994, pp. 573–576.

- [34] E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso, and S. Mayrague, "Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, 1995.
- [35] A. Scaglione, G. B. Giannakis, and S. Barbarossa, "Redundant filterbank precoders and equalizers - Part II: Blind channel estimation, synchronization and direct equalization," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, pp. 2007–2022, Julho 1999.
- [36] S. E. Bensley and B. Aazhang, "Subspace-based channel estimation for code division multiple access communication systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 8, pp. 1009–1020, Agosto 1996.
- [37] X. G. Doukopoulos and G. V. Moustakides, "Blind channel estimation for downlink CDMA systems," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Comm.*, vol. 4, Maio 2003, pp. 2416–2420.
- [38] X. Cai and A. Akansu, "A subspace method for blind channel identification in OFDM systems," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Communications*, 2000.
- [39] B. Muquet, M. de Courville, P. Duhamel, and V. Buzenac, "A subspace-based blind and semi-blind channel identification method for OFDM systems," in *Proc. SPAWC*, Maio 1999, pp. 170–173.
- [40] B. Muquet, M. de Courville, and P. Duhamel, "Subspace-based blind and semi-blind channel estimation for OFDM systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 7, pp. 1699–1712, Julho 2002.
- [41] S. Roy and C. Li, "A subspace blind channel estimation method for OFDM systems without cyclic prefix," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 1, no. 4, pp. 572–578, Janeiro 2002.
- [42] C. Li and S. Roy, "Subspace-based blind channel estimation for OFDM by exploiting virtual carriers," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 2, no. 1, pp. 141–150, Janeiro 2003.
- [43] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing – Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.
- [44] Z. Xu and M. K. Tsatsanis, "On correlation matching approaches to multipath parameter estimation in multiuser CDMA systems," in *Proc. SPAWC*, Maio 1999, pp. 38–41.

- [45] —, “Blind channel estimation for long codes multiuser CDMA systems,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, no. 4, pp. 988–1001, Abril 2000.
- [46] H. Liu, G. Xu, L. Tong, and T. Kailath, “Recent developments in blind channel equalization: From cyclostationarity to subspace,” *Signal Processing*, vol. 50, no. 1-2, pp. 83–99, Abril 1996.
- [47] Y. Sato, “A method of self-recovering equalization for multi-level amplitude modulation,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-6, pp. 679–682, 1975.
- [48] D. Godard, “Self recovering equalization and carrier-tracking in two-dimensional data communication systems,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 28, pp. 1867–1875, Novembro 1980.
- [49] S. Verdú, B. D. O. Anderson, and R. Kennedy, “Blind equalization without gain identification,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 39, pp. 292–297, 1993.
- [50] M. Honig, U. Madhow, and S. Verdú, “Blind adaptive multiuser detection,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 41, pp. 944–960, Julho 1995.
- [51] M. K. Tsatsanis, “Inverse filtering criteria for CDMA systems,” *IEEE Trans. Signal Process.*, 1997.
- [52] M. K. Tsatsanis and Z. Xu, “On minimum output energy CDMA receivers in the presence of multipath,” in *Proc. 31st Conf. Inform. Sci. Systems*, Março 1997, pp. 724–729.
- [53] —, “Performance analysis of minimum variance CDMA receivers,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, no. 11, pp. 3014–3022, Novembro 1998.
- [54] Z. Xu and M. K. Tsatsanis, “Blind adaptive algorithms for minimum variance CDMA receivers,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 1, pp. 180–194, Janeiro 2001.
- [55] R. W. Heath and G. B. Giannakis, “Exploiting input cyclostationarity for blind channel identification in OFDM systems,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, no. 3, pp. 848–856, 1999.

- [56] B. Muquet, Z. Wang, G. B. Giannakis, M. de Courville, and P. Duhamel, "Cyclic prefixing or zero padding for wireless multicarrier transmissions?" *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 12, pp. 2136–2148, Dezembro 2002.
- [57] J. Zhu, W. Ser, and A. Nehorai, "Channel equalization for DMT with insufficient cyclic prefix," in *Proc. Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, vol. 2, Outubro 2000, pp. 951–955.
- [58] G. Parsaee, A. Yarali, and H. Ebrahimzad, "MMSE-DFE equalizer design for OFDM systems with insufficient cyclic prefix," in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf.*, vol. 6, Setembro 2004, pp. 3828–3832.
- [59] T. Karp, C. Bauer, and N. J. Fliege, "Optimal one-tap equalization for DMT transceivers with insufficient guard interval," in *Proc. IEEE Int. Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 3, Março 2005, pp. 881–884.
- [60] F. D. Beaulieu and B. Champagne, "MMSE equalization for zero padded multicarrier systems with insufficient guard length," in *Proc. IEEE Int. Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 4, Abril 2006, pp. 377–380.
- [61] F. D. Backx, T. T. V. Vinhoza, and R. Sampaio-Neto, "Power techniques for blind channel estimation in zero-padded OFDM systems," in *Proc. IEEE PIRMC*, Athens, Greece, Setembro 2007.
- [62] —, "Blind channel estimation for zero-padded OFDM systems based on correlation matching," in *Proc. IEEE VTC Fall*, Baltimore, USA, Setembro 2007, pp. 1308–1311.
- [63] Y.-P. Lin and S.-M. Phoong, "OFDM transmitters: Analog representation and DFT-based implementation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 51, no. 9, pp. 2450–2453, Setembro 2003.
- [64] S. Barbarossa, *Multiantenna Wireless Communication Systems*. Artech House Publishers, 2005.
- [65] S. Benedetto and E. Biglieri, *Principles of Digital Transmission: with Wireless Applications*. Kluwer Academic, 1999.
- [66] B. Sklar, *Digital Communications - Fundamentals and Applications*. Prentice Hall, 2001.

- [67] W. H. Tranter, K. S. Shamugan, T. S. Rappaport, and K. L. Kosbar, *Principles of Communication Systems Simulation with Wireless Applications*, T. S. Rappaport, Ed. Prentice Hall, 2004.
- [68] S. K. Mitra, *Digital signal processing: a computer-based approach*. McGraw-Hill, 2006.
- [69] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: principles and practice*. Prentice Hall, 1999.
- [70] G. Strang, *Linear Algebra and its applications*, 4th ed. Thomson Brooks/Cole, 2006.
- [71] H. L. V. Trees, *Optimum Array Processing*. John Wiley and Sons, 2002.
- [72] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory, Fourth Edition*. Prentice Hall Information and System Sciences Series, 2002.
- [73] M. Zeng and V. Bhargava, "Recent advances in cellular wireless communications," *IEEE Commun. Mag.*, pp. 128–138, Setembro 1999.
- [74] A. J. Viterbi, *CDMA: principles of spread spectrum communication*. Addison-Wesley wireless communications series, 1995.
- [75] D. J. Goodman, *Wireless personal communications systems*. Addison-Wesley wireless communications series, 1997.
- [76] S. Verdú, "Minimum probability of error for asynchronous gaussian multiple access channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 32, pp. 85–96, Janeiro 1986.
- [77] R. Lupas and S. Verdú, "Linear multiuser detectors for synchronous CDMA channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 35, pp. 123–136, Janeiro 1986.
- [78] —, "Near-far resistance of multiuser detectors in asynchronous channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, Abril 1990.
- [79] R. T. S. Z. Xie and C. K. Rushforth, "A family of suboptimum detectors for coherent multiuser communications," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 8, pp. 683–690, Maio 1990.
- [80] H. V. Poor and S. Verdú, "Probability of error in MMSE multiuser detection," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 43, pp. 858–871, Maio 1997.

- [81] M. K. Varanasi and B. Aazhang, "Multistage detection in asynchronous CDMA communications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, pp. 509–519, Abril 1990.
- [82] —, "Near-optimum detection in synchronous code-division multiple-access systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 39, Maio 1991.
- [83] P. Patel and J. Holtzmann, "Analysis of a simple successive interference cancellation scheme in DS/CDMA system," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 12, Junho 1994.
- [84] Z. Xu, "Statistical performance of a data-based covariance estimator," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, no. 3, Maio 2004.
- [85] D. F. Cardoso, F. D. Backx, and R. Sampaio-Neto, "Estimação cega de canal para sistemas MC-DS-CDMA ZP basead nos métodos das potências e de subespaço," in *Anais do XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Setembro 2008.
- [86] —, "Alternative subspace method for improved blind channel estimation in uplink zero padded MC-DS/CDMA systems," in *Proc. Australasian Telecommunication Networks and Applications Conference (AT-NAC)*, vol. 4, Dezembro 2008, pp. 147–152.
- [87] —, "On correlation matching approaches to blind multipath parameter estimation in MC-DS-CDMA ZP systems," in *Proc. IEEE Radio and Wireless Symposium (RWS)*, Janeiro 2009.
- [88] R. W. Lucky, "Automatic equalization for digital communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, pp. 547–588, 1965.

A

Equalizadores MMSE e ZF

A.1

Equalizador MMSE

Sejam $\mathbf{r}(i)$ o vetor observação, de tamanho $P \times 1$, e $\mathbf{s}(i)$ o vetor do sinal desejado, de tamanho $M \times 1$. O banco de filtros lineares que minimiza o erro quadrático médio de estimação do sinal $\mathbf{s}(i)$ processando a observação $\mathbf{r}(i)$ é chamado de banco de equalizadores MMSE (*Minimum Mean Square Error*). O banco de filtros lineares é representado por uma matriz $\mathbf{W}$, de tamanho $P \times M$. Cada coluna de $\mathbf{W}$ representa um equalizador. A estimativa MMSE de $\mathbf{s}(i)$, denotada por $\hat{\mathbf{s}}_{\text{MMSE}}(i)$, é obtida por meio de:

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{MMSE}}(i) = \mathbf{W}_{\text{MMSE}}^H \mathbf{r}(i).$$

Logo, a matriz $\mathbf{W}_{\text{MMSE}}$ de tamanho $P \times M$ satisfaz [71, 72]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\text{MMSE}} &= \arg \left\{ \min_{\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{P \times M}} \mathbb{E} \left[\|\mathbf{s}(i) - \mathbf{W}^H \mathbf{r}(i)\|^2 \right] \right\} \\ &= \arg \left\{ \min_{\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{P \times M}} \mathbb{E} \left[(\mathbf{s}(i) - \mathbf{W}^H \mathbf{r}(i))^H (\mathbf{s}(i) - \mathbf{W}^H \mathbf{r}(i)) \right] \right\} \\ &= \arg \left\{ \min_{\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{P \times M}} \mathbb{E} \left[\text{Tr} \{ (\mathbf{s}(i) - \mathbf{W}^H \mathbf{r}(i)) (\mathbf{s}(i) - \mathbf{W}^H \mathbf{r}(i))^H \} \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{r}(i) \mathbf{r}(i)^H]^{-1} \mathbb{E} [\mathbf{r}(i) \mathbf{s}(i)^H], \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

e depende portanto da matriz autocorrelação das observações, bem como da matriz de correlação cruzada entre as observações e os sinais desejados.

A.1.1

Exemplo: OFDM-ZP

O modelo de sinais para o OFDM-ZP é (vide Capítulo 3):

$$\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i), \quad (\text{A.2})$$

com $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{F}_M$, $\mathbf{s}(i)$ e $\mathbf{n}(i)$ de tamanhos $P \times 1$, $P \times M$, $M \times M$, $M \times 1$ e $P \times 1$ respectivamente. A matriz autocorrelação das observações, de tamanho $P \times P$, vale:

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)^H] = \sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + N_0 \mathbf{I}_P, \quad (\text{A.3})$$

e a matriz de correlação cruzada entre as observações e os sinais desejados, de tamanho $P \times M$, vale:

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)\mathbf{s}(i)^H] = \sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.3) e (A.4) em (A.1) chega-se à expressão para o banco de equalizadores MMSE para o caso de sinais OFDM-ZP:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\text{MMSE}} &= [\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + N_0 \mathbf{I}_P]^{-1} \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \sigma_s^2 \\ &= \mathbf{R}_{\text{ZP}}^{-1} \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \sigma_s^2 \\ &= \left[\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{N_0}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_P \right]^{-1} \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A obtenção da matriz $\mathbf{W}_{\text{MMSE}}$ envolve a inversão da matriz autocorrelação de $\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$, $\mathbf{R}_{\text{ZP}}$, e pressupõe o conhecimento de N_0 (ou uma estimativa do mesmo) no receptor.

Uma expressão alternativa⁽¹⁾ para o banco de equalizadores MMSE em (A.5) pode ser obtida com a ajuda do lema de inversão de matrizes [71, 72]:

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} = \mathbf{H}_0 \left[\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 + \frac{N_0}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_M \right]^{-1} \mathbf{F}_M^H. \quad (\text{A.6})$$

A.1.2

Exemplo: OFDM-CP

O modelo de sinais para o OFDM-CP satisfaz (vide Capítulo 3):

$$\mathbf{x}_M(i) = \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)\mathbf{s}(i) + \mathbf{n}_M(i), \quad (\text{A.7})$$

com $\mathbf{x}_M(i)$, $\mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)$, $\mathbf{s}(i)$ e $\mathbf{n}_M(i)$ de tamanhos $M \times 1$, $M \times M$, $M \times 1$ e $M \times 1$ respectivamente. Ademais, $\mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M) = \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}}_M)$. A matriz autocorrelação das observações, de tamanho $M \times M$, vale:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{r}_{\text{CP}}(i)\mathbf{r}_{\text{CP}}(i)^H] &= \sigma_s^2 \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M) \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)^H + N_0 \mathbf{I}_M \\ &= \sigma_s^2 \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}}_M \odot \tilde{\mathbf{h}}_M^*) + N_0 \mathbf{I}_M, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde $\odot$ denota o produto de Hadamard. A matriz de correlação cruzada entre as observações e os sinais desejados, de tamanho $M \times M$, vale:

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_{\text{CP}}(i)\mathbf{s}(i)^H] = \sigma_s^2 \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M). \quad (\text{A.9})$$

⁽¹⁾expressão válida somente se $N_0 \neq 0$; se $N_0 = 0$, a matriz $\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H$ de tamanho $P \times P$ resultante em (A.5) não admite inversa, uma vez que $\mathbf{H}_0$ tem posto M e $P > M$.

Substituindo (A.8) e (A.9) em (A.1), obtém-se a expressão para o banco de equalizadores MMSE para os sinais OFDM-CP:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{\text{MMSE}} &= [\sigma_s^2 \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}}_M \odot \tilde{\mathbf{h}}_M^*) + N_0 \mathbf{I}_M]^{-1} \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M) \sigma_s^2 \\ &= \mathbf{R}_{\text{CP}}^{-1} \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M) \sigma_s^2 \\ &= \left[\text{diag}(\tilde{\mathbf{h}}_M \odot \tilde{\mathbf{h}}_M^*) + \frac{N_0}{\sigma_s^2} \mathbf{I}_M \right]^{-1} \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M).\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

Convém ressaltar que a matriz obtida em (A.10) é diagonal.

Sabendo que

$$\tilde{\mathbf{h}}_M = [H[0] \ H[1] \ \dots \ H[M-1]]^T$$

e

$$\tilde{\mathbf{h}}_M \odot \tilde{\mathbf{h}}_M^* = [|H[0]|^2 \ |H[1]|^2 \ \dots \ |H[M-1]|^2],$$

pode-se reescrever (A.10) como:

$$\mathbf{W}_{\text{MMSE}} = \text{diag} \left(\frac{H[0]}{|H[0]|^2 + \frac{N_0}{\sigma_s^2}} \ \frac{H[1]}{|H[1]|^2 + \frac{N_0}{\sigma_s^2}} \ \dots \ \frac{H[M-1]}{|H[M-1]|^2 + \frac{N_0}{\sigma_s^2}} \right). \quad (\text{A.11})$$

Convém lembrar que a k -ésima componente de $\mathbf{x}_M(i)$ está associada ao sinal transmitido pela k -ésima portadora. De (A.11) conclui-se portanto que o filtro linear ótimo, segundo o critério MMSE, que equaliza o sinal transmitido pela k -ésima portadora possui apenas um coeficiente (ou *tap*), que é dado por:

$$w_{\text{MMSE}}[k] = \frac{H[k]}{|H[k]|^2 + \frac{N_0}{\sigma_s^2}}.$$

A.2

Equalizador ZF

O banco de equalizadores *Zero Forcing* (ou ZF) é um banco de filtros lineares que objetiva processar o sinal recebido de forma a desfazer os efeitos do canal sobre o sinal transmitido, sem levar em conta a presença de perturbações tais como o ruído aditivo [88]. A estimativa *Zero Forcing* do sinal desejado $s(i)$, denotada por $\hat{s}_{\text{ZF}}(i)$, é obtida por meio de:

$$\hat{s}_{\text{ZF}}(i) = \mathbf{W}_{\text{ZF}}^H \mathbf{r}(i),$$

onde $\mathbf{W}_{\text{ZF}}$ é uma matriz de tamanho $P \times M$ e $\mathbf{r}(i)$ é o vetor de sinal recebido, de tamanho $P \times 1$.

Para um sinal recebido $\mathbf{r}(i)$ que se relaciona de modo linear com o sinal

desejado $s(i)$ por meio de uma matriz de canal $\mathbf{H}$ de tamanho $P \times M$, isto é:

$$\mathbf{r}(i) = \mathbf{H}\mathbf{s}(i),$$

a matriz $\mathbf{W}_{\text{ZF}}$ é tal que:

$$\mathbf{W}_{\text{ZF}}^H \mathbf{H} = \mathbf{I}_M,$$

ou seja, $\mathbf{W}_{\text{ZF}}^H$ é a pseudo-inversa de $\mathbf{H}$ ou ainda:

$$\mathbf{W}_{\text{ZF}}^H = \mathbf{H}^\dagger. \quad (\text{A.12})$$

Convém frisar que a estimativa $\hat{s}_{\text{ZF}}(i)$ é perfeita (ideal) caso o canal de comunicação seja livre de ruído (isto é, o sinal transmitido não é corrompido por ruído na recepção). Em presença de ruído, o desempenho do sistema tende a sofrer degradação, devido ao fenômeno de amplificação do ruído pelo equalizador ZF.

A.2.1

Exemplo: OFDM-ZP

Observando o modelo de sinais para o OFDM-ZP em (A.2), e substituindo $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H$ em (A.12), chega-se a [56]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\text{ZF}}^H &= (\mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H)^\dagger \\ &= [(\mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H)^H (\mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H)]^{-1} (\mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H)^H \\ &= (\mathbf{F}_M \mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H)^{-1} \mathbf{F}_M \mathbf{H}_0^H \\ &= \mathbf{F}_M (\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{F}_M^H \mathbf{F}_M \mathbf{H}_0^H \\ &= \mathbf{F}_M (\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{H}_0^H \\ &= \mathbf{F}_M \mathbf{H}_0^\dagger; \end{aligned}$$

ou seja, o banco de equalizadores ZF para sinais OFDM-ZP satisfaz a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\text{ZF}} &= (\mathbf{H}_0^\dagger)^H \mathbf{F}_M^H \\ &= \mathbf{H}_0 (\mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{F}_M^H. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

É interessante comparar (A.13) e (A.6): a expressão para o equalizador MMSE tende à expressão para o equalizador ZF quando a razão “sinal ruído” $\frac{\sigma_s^2}{N_0}$ tende ao infinito (ou o ruído tende a zero).

A.2.2**Exemplo: OFDM-CP**

Para os sinais OFDM-CP (vide (A.7)), o banco de equalizadores ZF é obtido substituindo $\mathbf{H} = \mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)$ em (A.12), de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\text{ZF}} &= (\mathbf{D}_M(\tilde{\mathbf{h}}_M)^{-1})^H \\ &= \text{diag}\left(\frac{1}{H[0]^*}, \frac{1}{H[1]^*}, \dots, \frac{1}{H[M-1]^*}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

De modo análogo ao que ocorre com o OFDM-ZP, a expressão do equalizador MMSE em (A.11) tende à expressão do equalizador ZF em (A.14) quando a razão “sinal ruído” $\frac{\sigma_s^2}{N_0}$ tende ao infinito (ou o ruído tende a zero).

Uma vez que a k -ésima componente de $\mathbf{x}_M(i)$ em (A.7) está associada ao sinal transmitido pela k -ésima portadora, e que a k -ésima coluna de $\mathbf{W}_{\text{ZF}}$ contém os pesos do equalizador linear associado à k -ésima portadora, de (A.14) conclui-se portanto que o filtro linear ZF que equaliza o sinal transmitido pela k -ésima portadora possui apenas um coeficiente (ou *tap*), que é dado por:

$$w_{\text{ZF}}[k] = \frac{1}{H[k]^*}.$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)