

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

**KAREN REZENDE CAINO DE OLIVEIRA**

**Método rápido para avaliação da  
margem de estabilidade de tensão  
devido a bifurcação de Hopf**

São Carlos  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**KAREN REZENDE CAINO DE OLIVEIRA**

**Método rápido para avaliação da  
margem de estabilidade de tensão  
devido a bifurcação de Hopf**

Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Elétricos de Potência

ORIENTADOR: Prof. Dr. Newton Geraldo Bretas

São Carlos  
2009



**KAREN REZENDE CAINO DE OLIVEIRA**

**Método rápido para avaliação da  
margem de estabilidade de tensão  
devido a bifurcação de Hopf**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas Elétricos de Potência

Aprovado em:

Banca Examinadora:

Prof. Dr. (Newton Geraldo Bretas), USP

Doutor pela University of Missouri – Columbia, Estados Unidos

Julgamento: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Luis Fernando Costa Alberto), USP

Doutor pela Universidade de São Paulo – São Carlos, Brasil)

Julgamento: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. (Antônio Carlos Zambroni de Souza), UNIFEI

Doutor pela University Of Waterloo – Waterloo, Canadá)

Julgamento: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_



*Com os princípios quer-se tiranizar os hábitos, ou justificá-los ou honrá-los ou injuriá-los ou escondê-los: - dois homens com princípios iguais querem, verosimilmente, atingir com eles algo de fundamentalmente diferente. Quem for fundamentalmente um mestre, apenas toma a sério tudo o que se relaciona com os seus discípulos, - incluindo a si próprio.*

Friedrich Wilhelm Nietzsche, 1881.





## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho à minha família, Rodrigo Hartstein Salim, pelo carinho, respeito, sensibilidade e pela base sólida sobre a qual construímos nossos sonhos e concretizamos nossos ideais.



## AGRADECIMENTOS

A Deus.

A Rodrigo Hartstein Salim pela resiliência, amizade, paciência, companheirismo e colaboração neste trabalho.

Ao orientador Newton Geraldo Bretas pela oportunidade de crescimento pessoal e profissional.

Ao co-orientador Luis Fernando Costa Alberto pela ajuda e colaboração.

Ao Nuno pela sua felicidade incondicional.

Aos meus pais José Carlos Caino de Oliveira e Ana Luiza Rezende de Oliveira pela inspiração, pelos momentos de alegria e pela vida.

Ao meu irmão Felipe Rezende Caino de Oliveira pela amizade.

Aos amigos Paulo Salim, Rosana Hartstein, Teresinha Hartstein e Patrícia Hartstein Salim pelo cuidado e carinho sempre presentes.

À prima e amiga Juliana Rezende Ferreira pela paciência e ajuda fundamental na reta final deste trabalho.

Às amigas Amanda Liz Pacífico Manfrim, Luciana Gobato, Carolina Ribeiro Rodrigues e às meninas do basquete pelos momentos de lazer.

Aos meus tios pelo carinho e disponibilidade.

À Neusa pelo carinho e cuidado com o nuno e com a casa.

Aos colegas de laboratório pelas oportunidades de trabalho em conjunto e descontração.

Aos professores do programa de pós-graduação em engenharia elétrica da Escola de Engenharia de São Carlos.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Científico e Tecnológico, o CNPq, pela provisão da bolsa de mestrado nos primeiros 6 meses.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela concessão da bolsa de mestrado e pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.



## RESUMO

Apesar do crescente desenvolvimento das metodologias de detecção de bifurcações de Hopf em sistemas de energia elétrica nas últimas décadas, alguns aspectos ainda carecem de progressos, especialmente frente à crescente necessidade de aumento da segurança na operação dos sistemas eletroenergéticos. Um destes aspectos diz respeito ao tempo de processamento destas metodologias para serem utilizadas em tempo real na operação do sistema. Este tempo computacional é pouco considerado para este fim pelas metodologias atualmente existentes. Assim sendo, o presente trabalho apresenta um novo desenvolvimento relativo a estimação da margem de estabilidade do sistema de potência referente à bifurcação de Hopf e considera o tempo computacional envolvido neste processo a fim de incluir a margem devido a Hopf na operação em tempo real do sistema. O desenvolvimento apresentado estende uma das metodologias que compõe o estado da arte através da flexibilização de um dos parâmetros de interesse em relação a margem de estabilidade devido a bifurcação de Hopf, a saber, a frequência do autovalor no ponto de bifurcação. Esta metodologia utiliza o método de Newton em um conjunto de equações, e neste trabalho ainda é proposta a utilização de um tratamento da esparsidade para este conjunto de equações, deixando o algoritmo mais rápido. De forma a apresentar a eficiência desta metodologia proposta, esta foi testada em dois sistemas, o sistema Kundur de duas áreas e o sistema IEEE 39 barras. Os resultados obtidos são comparados frente a resultados obtidos também para a metodologia clássica utilizada em centros de operação. Através destes resultados é possível mostrar a possibilidade de sua utilização em tempo real e elucidar as grandes melhorias obtidas através do desenvolvimento proposto.

**Palavras-chave:** Estabilidade de tensão, sistemas não lineares, bifurcações de Hopf, margem de estabilidade.



## RESUMO

Despite the increasing development of Hopf bifurcations detection methods for electric power systems in the last decades, some aspects still require to progress, especially with the increasing necessity for higher safety in the electrical energy systems operation. One of these aspects concerns to the processing time of these methodologies to be used in real-time system operation. The computational time is disregarded for this purpose by the methods currently available. Therefore, this paper presents a new development for the power system stability margin estimation due to Hopf bifurcation and considers the computational time involved in this process to include the margin due to Hopf in electrical energy real-time operation. The presented development extends a methodology that makes up the state-of-the-art through an interest parameter relaxation in the stability margin due to Hopf bifurcation, namely, the eigenvalue frequency at the bifurcation point. This method uses Newton's method on a set of equations, and this work also proposes the use of a sparsity treatment for this set of equations, speeding up the algorithm. In order to demonstrate the proposed methodology efficiency, it was tested in two systems, the two areas Kundur system and the IEEE 39 bus system. The results are compared against the results of the classic methodology used in operation centers. Through these results it is possible to show the possibility of their use in real time and elucidate the major improvements resulting from the proposed development.

**Palavras-chave:** Voltage stability, nonlinear systems, Hopf bifurcations, stability margin.





# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	III
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	V
<b>LISTA DE ABREVIATURAS</b> . . . . .	VII
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	IX
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	1
1.1 <b>Objetivos</b> . . . . .	4
1.2 <b>Estrutura do Trabalho</b> . . . . .	5
<b>2 BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA</b> . . . . .	7
2.1 <b>Bifurcação</b> . . . . .	7
2.2 <b>Bifurcação Sela-Nó</b> . . . . .	9
2.2.1 <b>Bifurcações Sela-Nó em Sistemas Elétricos de Potência</b> . . . . .	11
2.3 <b>Bifurcação de Hopf</b> . . . . .	12
2.3.1 <b>Teorema</b> . . . . .	13
2.3.2 <b>Ferramentas Matemáticas para Detecção/Predição de BH</b> . . . . .	15
2.4 <b>Bifurcação de Hopf em Sistemas Elétricos de Potência</b> . . . . .	18
2.4.1 <b>Metodologias de Detecção/Predição de Bifurcações de Hopf em Sistemas Elétricos de Potência</b> . . . . .	19
<b>3 DESENVOLVIMENTO PROPOSTO PARA LOCALIZAÇÃO DO PONTO DE BIFURCAÇÃO DE HOPF UTILIZANDO MÉTODO DIRETO</b> . . . . .	27
3.1 <b>Modelo para um Sistema Algébrico-Diferencial</b> . . . . .	28
3.1.1 <b>Formulação pelo método de Newton</b> . . . . .	30
3.1.2 <b>Equacionamento Aplicado a um Sistema Diferencial-Algébrico</b> . . . . .	31
3.2 <b>Equacionamento Aplicado a um Modelo de Sistema de Potência</b> . . . . .	33
3.2.1 <b>Modelo Diferencial-Algébrico Dependente do Parâmetro de Carga</b> . . . . .	33

3.2.2	Linearização do Modelo Diferencial-Algébrico Dependente do Parâmetro da Carga . . . . .	36
3.2.3	Margem de Estabilidade Devido ao Ponto de Bifurcação de Hopf Calculado	43
<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>4.1</b>	<b>Método Clássico . . . . .</b>	<b>47</b>
4.1.1	Sistema de Duas Áreas . . . . .	47
4.1.2	Sistema New England 39 Barras . . . . .	50
<b>4.2</b>	<b>Metodologia Proposta . . . . .</b>	<b>54</b>
4.2.1	Sistema de Duas Áreas . . . . .	55
4.2.2	Sistema New England 39 Barras . . . . .	55
<b>4.3</b>	<b>Comparação das Metodologias . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos Futuros . . . . .</b>	<b>61</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>APÊNDICE A DERIVADAS DA MATRIZ JACOBIANA DO SISTEMA DIFERENCIAL-ALGÉBRICO . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>A.1</b>	<b>Derivadas da matriz <math>A</math> . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>A.2</b>	<b>Derivadas da matriz <math>B</math> . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>A.3</b>	<b>Derivadas da matriz <math>C</math> . . . . .</b>	<b>69</b>
<b>A.4</b>	<b>Derivadas da matriz <math>D</math> . . . . .</b>	<b>70</b>
A.4.1	Derivadas da matriz $B_2$ . . . . .	70
A.4.2	Derivadas da matriz $B_3$ . . . . .	71
A.4.3	Derivadas da matriz $C_2$ . . . . .	71
A.4.4	Derivadas da matriz $C_3$ . . . . .	72
A.4.5	Derivadas da matriz $C_4$ . . . . .	74
A.4.6	Derivadas da matriz $D_1$ . . . . .	75
A.4.7	Derivadas da matriz $D_2$ . . . . .	76
	<b>ANEXO A ESTUDO DE CASO . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>A.1</b>	<b>Sistema de Duas Áreas . . . . .</b>	<b>79</b>
A.1.1	Dados Estáticos . . . . .	80
A.1.2	Dados Dinâmicos . . . . .	80
<b>A.2</b>	<b>Sistema New England 39 Barras . . . . .</b>	<b>81</b>
A.2.1	Dados Estáticos . . . . .	82
A.2.2	Dados Dinâmicos . . . . .	84

<b>ANEXO B</b>	<b>DEFINIÇÕES</b>	85
<b>B.1</b>	<b>Topologia do Espaço Euclidiano</b>	85
B.1.1	Norma	85
<b>B.2</b>	<b>Equações Diferenciais Ordinárias</b>	86
B.2.1	Teoria Geral	86
B.2.2	Comportamento Assintótico	88
B.2.3	Equilíbrios e Estabilidade Local	89



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1:	Bifurcação dos pontos de equilíbrio . . . . .	9
Figura 2.2:	Comportamento de um sistema próximo a um ponto de equilíbrio sela-nó . . . . .	10
Figura 2.3:	Curva $P - V$ de um sistema de potência . . . . .	11
Figura 2.4:	Tipos de bifurcação de Hopf . . . . .	14
Figura 2.5:	Bifurcação de Hopf . . . . .	14
Figura 3.1:	Circuito dinâmico para o modelo de máquina síncrona . . . . .	34
Figura 3.2:	Modelo do AVR rápido . . . . .	34
Figura 3.3:	Modelo geral com $m$ -máquinas e $n$ -barras . . . . .	34
Figura 3.4:	Algoritmo Completo para a determinação da Margem de Estabilidade do Sistema . . . . .	45
Figura 3.5:	Margem de Estabilidade devido à Hopf e à Sela-Nó . . . . .	46
Figura 4.1:	Deslocamento do autovalor para o semiplano direito . . . . .	48
Figura 4.2:	Comportamento do Sistema no Ponto da Bifurcação de Hopf . . . . .	48
Figura 4.3:	Margem de Estabilidade Calculada pelo Método Clássico Devido à BH	50
Figura 4.4:	Deslocamento do autovalor para o semiplano direito . . . . .	53
Figura 4.5:	Margem de Estabilidade Calculada pelo Método Clássico Devido à BH	53



## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1:	Autovalores do sistema de testes para o caso base . . . . .	49
Tabela 4.2:	Autovalores do sistema de testes para o caso de bifurcação de Hopf .	49
Tabela 4.3:	Avaliação do Método Clássico para o Sistema de Duas Áreas . . . . .	50
Tabela 4.4:	Autovalores do sistema de testes para o caso base . . . . .	51
Tabela 4.5:	Autovalores do sistema de testes para o caso de bifurcação de Hopf .	52
Tabela 4.6:	Avaliação do Método Clássico para o Sistema New England . . . . .	54
Tabela 4.7:	Casos Analisados Numericamente . . . . .	55
Tabela 4.8:	Resultado do Método Proposto para os Diferentes Casos . . . . .	55
Tabela 4.9:	Resultado do Método Proposto para os Diferentes Casos . . . . .	56
Tabela 4.10:	Comparação Entre as Metodologias Para o Sistema de Duas Áreas . .	57
Tabela 4.11:	Comparação Entre as Metodologias Para o Sistema New England . .	57





## LISTA DE ABREVIATURAS

SEP	Sistemas Eléctricos de Potência
BH	Bifurcações de Hopf
AVR	Auto-Voltage Regulator
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
LI	Linearmente Independente



## LISTA DE SÍMBOLOS

$P_{max}$	Potência máxima
$\mu$	Parâmetro de bifurcação
$\nu_R$	Parte real do autovetor associado ao autovalor no ponto de bifurcação
$\nu_I$	Parte imaginária do autovetor associado ao autovalor no ponto de bifurcação
$i$	Número das barras que contém geradores
$\delta_i$	Ângulo do gerador da barra $i$ em $[rad]$
$\omega_i$	Velocidade do gerador em $[rad/s]$
$\omega_s$	Velocidade síncrona em $[rad/s]$
$M_i$	Constante de inércia em $[s^2]$
$P_{m_i}$	Potência mecânica do gerador $i$ em [MW]
$M_t$	Soma das constantes de inércia de todas as máquinas
$P_{L_0}$	Potência ativa na carga especificada para o caso base, $\mu = 0$ em [MW]
$E'_{q_i}$	Fluxo concatenado no enrolamento amortecedor do eixo direto em [p.u.]
$E'_{d_i}$	Fluxo concatenado no enrolamento amortecedor do eixo de quadratura em [p.u.]
$I_{d_i}$	Corrente de armadura do eixo de quadratura em [p.u.]
$I_{q_i}$	Corrente de armadura do eixo direto em [p.u.]
$X_{q_i}$	Reatância de eixo de quadratura em [p.u.]
$X_{d_i}$	Reatância de eixo direto em [p.u.]
$X'_{d_i}$	Reatância transitória de eixo direto em [p.u.]
$X'_{q_i}$	Reatância transitória de eixo de quadratura em [p.u.]
$E_{fd_i}$	Tensão de campo dimensionada [p.u.]
$V_{ref}$	Tensão de referência do AVR em [p.u.]

$V_i$	Tensão da barra $i$ em [p.u]
$K_A$	Constante de ganho amplificadora
$T_A$	Constante de tempo amplificadora em [s]
$R_{s_i}$	Resistência da armadura em [p.u.]
$\theta_i$	Ângulo da carga na barra $i$ em [rad].

# 1 INTRODUÇÃO

O aumento continuado da demanda por energia elétrica nas últimas décadas juntamente com o crescente número de interligações entre os sistemas elétricos existentes tornaram a operação e o controle destes sistemas uma tarefa complexa. Sistemas de potência estão continuamente expostos a condições adversas e imprevisíveis que podem levar a situações de falha ou operação fora dos limites técnicos exigidos. Por este motivo, é necessário um aprimoramento nas técnicas de operação dos sistemas elétricos de potência (SEP) de forma a manter um fornecimento contínuo de energia, preservando um elevado grau de qualidade e segurança.

Para que o sistema opere em condições normais, mantendo a segurança, as seguintes condições devem ser atendidas: a demanda de todas as cargas alimentadas pelo sistema deve ser atendida, a frequência e a tensão do sistema devem ser mantidas em uma faixa definida e próxima ao seu valor nominal e os limites dos equipamentos devem ser respeitados. Desta forma, pode-se definir um sistema como estável quando este possui a habilidade, dada uma condição inicial de operação, de recuperar seu estado de equilíbrio após ser submetido a uma perturbação<sup>1</sup> física, de modo que praticamente todo o sistema permaneça intacto (KUNDUR et al., 2004).

Neste contexto, dado pela definição de Kundur *et al.* (2004), o estudo de estabilidade é essencialmente um problema único. Entretanto, as diversas formas de instabilidades, às quais o sistema pode estar sujeito, não podem ser propriamente compreendidas e efetivamente tratadas se consideradas como um problema único. Sendo assim, o estudo de estabilidade é dividido em duas categorias principais, a estabilidade angular e a estabilidade de tensão. A primeira refere-se à habilidade das máquinas síncronas, de um sistema de potência interconectado, de permanecerem em sincronismo após serem submetidas a uma perturbação. Já a estabilidade de tensão refere-se à habilidade de um sistema de potência em manter o valor das tensões, dentro de uma faixa, no valor de regime em suas barras após este ser submetido a uma perturbação, dado um ponto de operação inicial (KUNDUR et al., 2004).

---

<sup>1</sup>Perturbação, por exemplo, pode ser curto-circuito, defeitos nos equipamentos, erro humano, contingências em equipamentos da rede.

Durante muitas décadas, o estudo da estabilidade angular foi priorizado pois, com o investimento pelo governo na adição de novas máquinas geradoras ao sistema, o problema relacionado à permanência em sincronismo das máquinas no sistema de potência tornou-se significativo. Entretanto, a partir dos anos 80, devido ao declínio de investimentos na geração e transmissão de energia elétrica, os sistemas começaram a ficar estressados, operando, durante longos períodos, cada vez mais carregados e muito próximos aos seus limites de estabilidade de tensão. Quando um sistema de potência opera próximo aos limites de estabilidade, uma perturbação relativamente pequena pode causar uma instabilidade de tensão no sistema, cujo estudo havia sido inexpressivo durante muito tempo.

A instabilidade de tensão, segundo Taylor (1981), é definida como a ausência da estabilidade de tensão. A sequência de eventos que acompanham a instabilidade definida anteriormente leva o sistema a um perfil de baixa tensão, inaceitável em uma significativa parte do sistema de potência, caracterizando o colapso de tensão. Logo, a importância do estudo de estabilidade de tensão cresce atualmente na medida em que a avaliação desta se torna complicada pois, em sistemas fortemente compensados ou em condições em que haja grande carregamento no sistema, os valores de tensão não indicam a proximidade de um ponto de colapso.

Ainda, devido ao desenvolvimento tecnológico dos equipamentos, a estabilidade angular do sistema tem, raramente, sido uma restrição para transferências de potência no sistema. Enquanto que os blecautes<sup>2</sup> ocorridos nos últimos 20 anos, em sistemas do mundo inteiro, vêm acontecendo devido a colapsos de tensão (CUTSEM; VOURNAS, 2003).

Recentemente, foi demonstrado que o SEP pode ser levado à instabilidade através de incrementos de carga lentos e sucessivos (KWATNY; FISCHL; NWANKPA, 1995). Para a caracterização deste fenômeno de instabilidade é utilizada a teoria de bifurcações. Esta descreve mudanças qualitativas no sistema estudado, assim como a perda da estabilidade, com a variação de um parâmetro do mesmo. Em SEP a variação da carga pode ser considerada como um parâmetro do sistema, que, quando elevado gradativamente, conduz o sistema a uma bifurcação Sela-Nó ou a uma bifurcação de Hopf (BH). Aquelas são traduzidas pela singularidade da matriz Jacobiana e cuja ocorrência incide no ponto de máxima transferência de potência do sistema. Já as bifurcações de Hopf produzem órbitas periódicas provocando oscilações no sistema.

Alguns fatores, como por exemplo a determinação precisa da máxima capacidade de transmissão do sistema de potência aumentaram a demanda por informações mais precisas e confiáveis nos centros de operação, visando a segurança do sistema. Estudos de segurança em SEP são baseados em condições existentes<sup>3</sup> que são suficientemente precisas para promover um estudo detalhado do funcionamento do sistema de potência, as-

---

<sup>2</sup>Perda de energia elétrica de curta ou longa duração.

<sup>3</sup>Como por exemplo a quantidade de carga e a topologia do sistema.

sim como dos seus limites de operação. Um procedimento utilizado atualmente para estes estudos de segurança e abordado neste trabalho consiste na estimativa da margem de carregamento do sistema através da avaliação de sua respectiva curva P-V. Esta margem é definida como a distância, em termos de MW e/ou MVar, do ponto atual de operação até o ponto de limite da rede do sistema parametrizado. Este procedimento possui um elevado esforço computacional quando associado a contingências e, quando utilizado em conjunto com a avaliação de problemas de instabilidade devido a fenômenos oscilatórios, não pode ser executado em tempo real, e, portanto, não satisfaz as necessidades desejadas pelo operador do sistema.

Dentre estes fenômenos oscilatórios destacam-se as bifurcações de Hopf. Estas foram detectadas em uma variedade de modelos matemáticos de SEP, assim como em sistemas reais (MITHULANANTHAN; SRIVASTAVA, 1998), e podem ser causadas por vários motivos, dentre eles: variação do amortecimento do sistema<sup>4</sup>, contingências<sup>5</sup>, dependência de frequência do torque eletromecânico, problemas com controladores de tensão. Entretanto, os motivos mais frequentes são a variação do amortecimento, associada aos modos eletromecânicos dos geradores, e a atuação rápida dos reguladores de tensão, associada aos modos de excitação em geral (ABED; VARAIYA, 1984).

Variações de carga, característica intrínseca dos sistemas de potência, tendem a interferir nestas oscilações, às quais devem ser atenuadas com eficiência de forma a se manter uma operação estável e segura do sistema. No centro de operação nenhum alerta é dado para a ocorrência de oscilações, causadas por instabilidade oscilatória. Estas precisam ser evitadas pois podem: danificar equipamentos, interferir nos sistemas de controle do SEP, ou ainda, levar rapidamente o sistema para o colapso de tensão (VENKATASUBRAMANIAN; LI, 2004). Assim, é difícil para os operadores intervirem manualmente para restaurar a estabilidade do sistema. Logo, é de grande importância analisar o comportamento oscilatório do sistema de potência, como no caso das BH, com a finalidade de entender os seus limites. Nesse contexto, o estudo para prever a margem de estabilidade devido a BH torna-se fundamental na operação do sistema em tempo real, permitindo que ações preventivas sejam executadas o mais rápido possível.

Atualmente, nos centros de operação é empregado o método clássico offline para a estimativa da margem de estabilidade devido a BH, que é baseado no cálculo de autovalores do sistema linearizado. Este método é inadequado para uso em tempo real, pois em sistemas de grande porte, o cálculo de autovalores torna-se excessivamente lento. Como estes autovalores devem ser recalculados a cada alteração de carregamento do sistema,

---

<sup>4</sup>Enquanto o SEP está em funcionamento, o seu ponto de operação está constantemente sendo modificado através da variação das cargas e das potências injetadas pelos geradores, ocasionando uma modificação da resposta dinâmica do mesmo, caracterizada pelo seu amortecimento.

<sup>5</sup>Termo utilizado para classificar ocorrências que podem originar alterações no perfil de carga ou na topologia da rede elétrica do SEP. Contingências mais comuns: saídas de linhas de transmissão ou transformadores, desligamento de geradores ou componentes em derivação e ainda a saída de cargas (ELGERD, 1981).



operação constante nos SEP, este método acarreta em um tempo de resposta acima do esperado para a operação, tornando-se proibitivo devido ao seu grande esforço computacional.

Outros métodos existentes para detecção/predição de BH são divididos em duas categorias: métodos diretos ou indiretos. Método indireto é o que depende de no mínimo uma solução conhecida do sistema, empregando um corretor-preditor continuado para encontrar o caminho da solução, e então decidir se os autovalores calculados satisfazem as condições de bifurcação (AJJARAPU, 1992). Este método, apesar de mais eficiente, necessita também do cálculo de autovalores, tornando-o pouco vantajoso em relação ao método clássico.

Já os métodos diretos permitem calcular pontos de bifurcação para sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias sem a necessidade do cálculo prévio de autovalores ou ainda a resolução destas equações diferenciais. Outra vantagem dos métodos diretos é que estes não só preservam a esparsidade da estrutura de dados na análise dinâmica, como também incluem informações importantes, tais como: autovalores críticos e autovetores à esquerda (KWATNY; FISCHL; NWANKPA, 1995).

Baseado nestas informações sobre métodos diretos e indiretos, este trabalho propõe uma formulação de método direto objetivando encontrar o valor do carregamento do sistema no qual ocorre o ponto de bifurcação de Hopf, sendo o parâmetro utilizado o próprio carregamento do sistema. A partir deste valor de carregamento onde há uma BH, pode-se determinar a margem de carregamento suportada pelo SEP, considerando este fenômeno oscilatório.

## 1.1 Objetivos

Considerando as limitações existentes<sup>6</sup> nas atuais metodologias para a avaliação da margem de estabilidade do sistema devido a bifurcações de Hopf, as quais serão apresentadas no Capítulo 2, o presente trabalho possui o seguinte objetivo:

- Propor a formulação de um método direto para a estimativa da margem de estabilidade devido à BH, que proporcione ao operador do sistema a possibilidade de sua utilização em um programa em tempo real, ou seja, sem o prévio cálculo de autovalores e sem a fixação de variáveis em suas equações, como por exemplo o valor da frequência do autovalor quando da ocorrência de uma bifurcação.

Visando este objetivo, ao longo deste trabalho, também serão apresentadas:

- A teoria de bifurcações, dando evidência principalmente às bifurcações de Hopf e sua influência em sistemas elétricos de potência;

---

<sup>6</sup>Como por exemplo alto tempo computacional, necessidade do cálculo de autovalores, obtenção do valor de frequência do autovalor no ponto de bifurcação para inserção prévia nas equações do sistema.

- A análise do trabalho implementado para um modelo de sistemas de potência, procurando ressaltar suas melhorias em comparação à metodologia utilizada atualmente nos centros de operação, e ressaltando algumas limitações a serem corrigidas em trabalhos futuros;

## 1.2 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

- No Capítulo 2 é apresentada uma revisão teórica e bibliográfica sobre bifurcações, evidenciando as bifurcações de Hopf e sua influência nos SEP. Este capítulo ainda apresenta métodos existentes para o tratamento do problema desta bifurcação. Neste também são abordadas algumas metodologias existentes na literatura para detecção do ponto de BH, e as principais ferramentas matemáticas que formaram uma base para a formulação destas metodologias, como por exemplo o método clássico.
- No Capítulo 3 são apresentados os desenvolvimentos propostos neste trabalho. O equacionamento geral para o método direto é apresentado, assim como o embasamento teórico de suas equações, e sua aplicação para a sua utilização em SEP.
- O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos utilizando o método proposto. Neste capítulo também são apresentados resultados da metodologia clássica para os sistemas estudados, de forma a comparar os resultados obtidos com os existentes, em termos de eficiência, quando não é utilizado cálculo de autovalores para determinação do ponto de bifurcação.
- No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais deste trabalho, elucidando os conhecimentos agregados durante o desenvolvimento do mesmo.



## 2 BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Em estudos anteriores apresentados em (ABED; VARAIYA, 1984; AJJARAPU; LEE, 1992; CHEN; VARAIYA, 1988; CHIANG; WU; VARAIYA, 1988), verificou-se que alguns problemas de estabilidade em SEP, tais como, fenômenos oscilatórios e colapso de tensão, podem ser investigados pelo uso da teoria de bifurcações. As principais bifurcações encontradas em SEP são do tipo Sela-Nó, Hopf e Induzida por limites, e influenciam tanto a faixa de pontos de operação estáveis do SEP como também as propriedades de estabilidade destes pontos, tornando o estudo de bifurcações muito útil do ponto de vista da engenharia .

A teoria de bifurcações estuda as mudanças qualitativas do comportamento dinâmico em um sistema em termos da variação de seus parâmetros, os quais podem ou não variar com o tempo e com as condições de operação.

Neste Capítulo apresenta-se uma revisão teórica sobre bifurcações. Além disto, uma introdução sobre as bifurcações sela-nó, uma bifurcação muito comum em sistemas de potência, também é apresentada visando o entendimento básico de sua teoria e alguns motivos dos seus acontecimentos em SEP. Após o entendimento destas bifurcações existentes, é apresentada a teoria de bifurcações de Hopf, cujo conceito fundamenta esta dissertação, buscando o claro entendimento sobre a sua influência nos SEP.

Além desta revisão teórica, uma revisão bibliográfica sobre as metodologias existentes para detecção e/ou previsão de BH também é apresentada, permitindo assim a observação das suas limitações para utilização nos centros de operação de SEP.

### 2.1 Bifurcação

A teoria de bifurcações é o estudo matemático de mudanças estruturais qualitativas<sup>1</sup> ou topológicas de uma determinada família. Exemplos destas famílias podem ser as curvas de integrais, campos vetoriais ou ainda soluções de uma família de equações

---

<sup>1</sup>Número de pontos de equilíbrio, número de ciclos limite, estabilidade de pontos de equilíbrio ou ciclos limite, são exemplos de mudanças estruturais em um sistema dinâmico

ordinárias diferenciais (EDO). Assim, essa teoria é muito aplicada ao estudo de sistemas dinâmicos (KUZNETSOV, 1999).

Desta forma, uma bifurcação ocorre, em um sistema dinâmico, quando uma pequena mudança em um parâmetro de um sistema, denominado parâmetro de bifurcação, causa uma mudança estrutural qualitativa ou topológica em seu comportamento, como por exemplo uma alteração no número de pontos de equilíbrio do sistema. Matematicamente, considere a família de EDOs citada anteriormente:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

onde  $\mu$  é o vetor de parâmetros do sistema. A equação 2.2 apresenta a formulação para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (2.1) para cada valor de  $\mu$ :

$$f(x^*, \mu) = 0 \quad (2.2)$$

onde  $x^*$  representa pontos de equilíbrio do sistema. Considerando dois pontos de equilíbrio,  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$ , correspondentes ao parâmetro  $\mu_0$  e admitindo que a Jacobiana de  $f$  em relação a  $x$ , ou seja,  $J = f_x$ , é não-singular nestes pontos, logo:

$$\begin{aligned} \det J(x^{(1)}, \mu_0) &\neq 0 \\ \det J(x^{(2)}, \mu_0) &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo que  $\det$  denota o determinante de uma matriz. Pelo teorema da função implícita (RUDIN, 1989) existe uma única função,  $g^{(i)}$  para cada ponto de equilíbrio, tal que:

$$\begin{aligned} x^* &= g^{(1)}\mu \\ x^* &= g^{(2)}\mu \end{aligned} \quad (2.4)$$

com  $x^{(1)} = g^{(1)}(\mu_0)$  e  $x^{(2)} = g^{(2)}(\mu_0)$  resultando em dois diferentes ramos de pontos de equilíbrio de (2.1) como uma função de  $\mu$ .

Logo, o termo bifurcação se origina do conceito de diferentes ramos de pontos de equilíbrio interceptando uns aos outros, e assim bifurcando. Nesses pontos de bifurcação a Jacobiana,  $J$ , é singular e conseqüentemente o teorema da função implícita não pode ser aplicado.

O seguinte exemplo, apresentado em Cutsem *et al.* (2003), ilustra os conceitos apresentados anteriormente. Considere o sistema de primeira ordem:

$$\dot{x} = x^2 - 2x + 1.1 - \mu \quad (2.5)$$

A Figura 2.1 apresenta os dois ramos de pontos de equilíbrio,  $g^{(1)}\mu$  e  $g^{(2)}\mu$  desse sistema no espaço de variáveis de estado,  $(\mu, x)$ . Estes se interceptam no ponto de bifurcação,  $\mathbf{A}$ ,

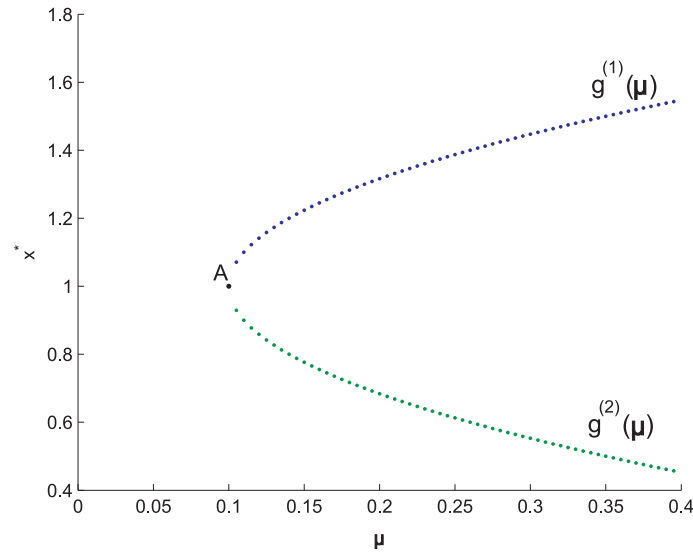


Figura 2.1: Bifurcação dos pontos de equilíbrio

em  $\mu = 0.1$ , ilustrado na figura, onde, a Jacobiana é singular,  $J = 0$ .

O estudo aqui apresentado não usará de forma rigorosa a definição de estrutura qualitativa do sistema que são relacionados a conceitos como por exemplo estabilidade estrutural (PAI et al., 1995). Desta forma, a teoria de bifurcações pode ser normalmente desenvolvida em duas formas (SAVI, 2007): Bifurcações locais e globais.

- *Bifurcações Locais:* tratam das mudanças estruturais qualitativas de um sistema dinâmico nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, como consequência da variação dos parâmetros do sistema;
- *Bifurcações Globais:* representam mudanças qualitativas nos aspectos globais do fluxo de um sistema dinâmico. A partir da variação de um parâmetro do sistema pode ocorrer uma variação na estrutura das órbitas, as quais não podem ser detectadas puramente pela análise de estabilidade dos pontos de equilíbrios;

No contexto do estudo deste trabalho, este capítulo apresenta apenas as bifurcações locais, Sela-Nó e Hopf, às quais englobam as bifurcações de maior interesse em sistemas elétricos de potência, visto que estas são encontradas em famílias de EDOs com parâmetro único (KWATNY; FISCHL; NWANKPA, 1995), apesar de bifurcações globais em SEP também terem sido reportadas na literatura (LEE; AJJARAPU, 1993).

## 2.2 Bifurcação Sela-Nó

A bifurcação Sela-nó, segundo Levine (1981), ocorre quando um sistema dinâmico, 2.1, linearizado possui um autovalor nulo em  $\mu = \mu_0$ , porém a origem não persiste como ponto de equilíbrio após o ponto crítico (ou ponto de bifurcação). Para definir e caracteri-

zar esta bifurcação, considere a equação diferencial de primeira ordem com apenas um parâmetro de variação:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (2.6)$$

Supõe-se que existe um equilíbrio  $x_{e,0}$ , para  $\mu = \mu_0$ , para o qual os seguintes pressupostos devem ser satisfeitos:

$$\frac{\partial f(x_{e,0}, \mu_0)}{\partial x} = 0 \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_{e,0}, \mu_0)}{\partial x^2} \neq 0 \quad (2.7b)$$

$$\frac{\partial f(x_{e,0}, \mu_0)}{\partial \mu} \neq 0 \quad (2.7c)$$

Seguindo o teorema do comportamento do sistema próximo a este tipo de equilíbrio (SOTOMAYOR, 1973), dependendo do sinal apresentado pelas equações (2.7b) e (2.7c), no seu comportamento em SEP, existe:

- Nenhum ponto de equilíbrio próximo a  $(x_{e,0}, \mu_0)$  quando  $\mu < \mu_0$  ( $\mu > \mu_0$ );
- Dois equilíbrios próximos a  $(x_{e,0}, \mu_0)$  para cada valor de parâmetro  $\mu > \mu_0$  ( $\mu < \mu_0$ ). Esses pontos de equilíbrio são hiperbólicos<sup>2</sup>, um deles é estável e o outro instável.

Para um maior entendimento das afirmativas dos itens anteriores, considere a Figura 2.2, que apresenta uma demonstração deste comportamento próximo ao ponto de equilíbrio.

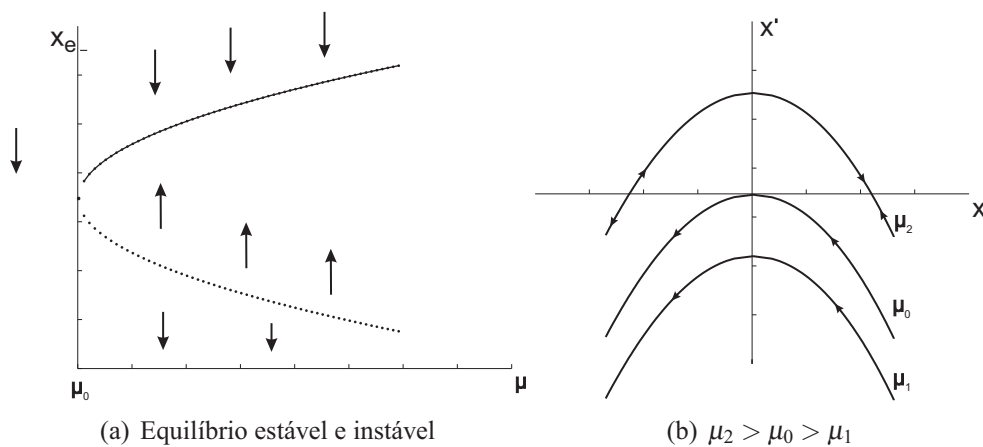


Figura 2.2: Comportamento de um sistema próximo a um ponto de equilíbrio sela-nó

<sup>2</sup>Um ponto de equilíbrio é hiperbólico se todos os autovalores da matriz Jacobiana do sistema linearizado associado possuem parte real não nula.

Assim, pode-se afirmar que nas hipóteses do teorema acima, o parâmetro  $\mu_0$  é um valor de bifurcação local, já que para  $\mu$  variando suficiente próximo de  $\mu_0$  existe uma mudança no número de pontos de equilíbrios do sistema. A este valor de bifurcação, dadas as condições (2.7) atendidas, dá-se o nome de valor de bifurcação sela-nó, ou simplesmente diz-se que  $(x_{e,0}, \mu_0)$  é um ponto de bifurcação sela-nó do sistema (2.6).

### 2.2.1 Bifurcações Sela-Nó em Sistemas Elétricos de Potência

A bifurcação sela-nó (ou bifurcação estática) em sistemas elétricos de potência é estabelecida, em um modelo de fluxo de potência (modelo não-linear), como um ponto onde duas soluções do fluxo de potência se fundem e desaparecem. Esta situação ocorre quando a carga, um parâmetro do sistema, é aumentada excessivamente (GRIGSBY, 2007). Devido a isso, estudos de estabilidade de tensão (KWATNY; FISCHL; NWANKPA, 1995) reafirmam a importância dos índices de sensibilidade próximo a bifurcações sela-nó, onde a demanda de potência é aumentada até o limite de operação do sistema, atingindo o limite máximo de transferência de potência ( $P_{max}$ ) (TAN et al., 1993).

Esta característica física é comumente referida na literatura como o "nariz" da curva  $P-V$ , sendo  $P$  e  $V$  respectivamente a potência ativa total no sistema e a tensão em alguma barra do mesmo. Este ainda é chamado de *ponto de colapso de tensão* ou ainda *limite de estabilidade estática de tensão* (TAYLOR, 1981). O nariz da curva  $P-V$  só coincide com a máxima transferência de potência no caso em que as cargas são modeladas como  $PQ$  constantes. A Figura 2.3 ilustra a curva  $P-V$  de um sistema elétrico e o respectivo ponto de bifurcação na condição de máxima transferência de potência. Neste está definido  $V_0$  como a tensão inicial na barra em estudo e  $P_0$  como a condição base de potência do sistema.

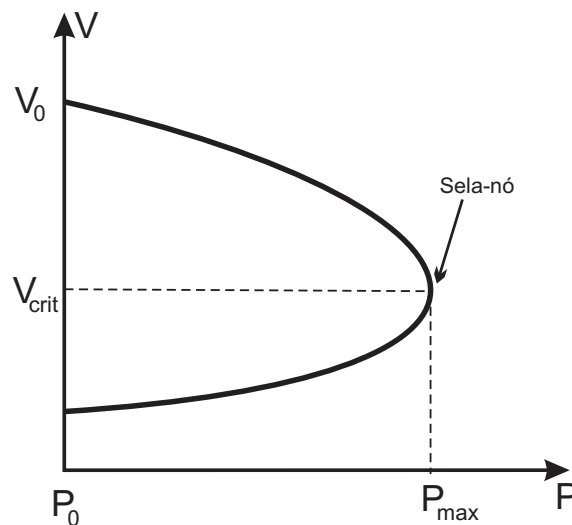


Figura 2.3: Curva  $P-V$  de um sistema de potência



## 2.3 Bifurcação de Hopf

O teorema de bifurcação de Hopf possui várias diferentes demonstrações realizadas através do uso de diferentes técnicas matemáticas (MARSDEN; MCCRACKEN, 1976; MEES; CHUA, 1979; HSU; KAZARINOFF, 1976; ALLWRIGHT, 1977). Nesta seção será introduzido o teorema clássico formulado no domínio do tempo, o qual vem sendo aplicado em, por exemplo, campos de dinâmicas não lineares, EDOs e sistemas de controle.

Este teorema relata o aparecimento de soluções periódicas em uma dada EDO quando um parâmetro real da equação varia. Para a introdução deste resultado, algumas considerações preliminares serão feitas. Considere novamente o sistema apresentado em (2.1). Assume-se que este sistema possui condições suficientes para a existência de uma solução única para cada valor de condição inicial dado,  $x(t_0) = x_0$ , e para cada valor de  $\mu$ , e ainda que  $x^*$  é um ponto de equilíbrio, ou seja,  $f(x^*, \mu) = 0$ .

Linearizando o sistema (2.1) em torno do ponto de equilíbrio,  $x^*$ , a seguinte equação é obtida:

$$\Delta \dot{x} = J \cdot (x - x^*) \quad (2.8)$$

onde supõe-se que  $J$  é a matriz Jacobiana do sistema definida anteriormente. Esta possui um único par de autovalores puramente imaginários quando o sistema encontra um ponto de BH, ou seja, no valor crítico  $\mu = \mu_0$ . Quando os autovalores do sistema estável,  $\lambda(\mu)$ , cruzam o eixo imaginário com a variação de  $\mu$  no valor crítico, fenômenos dinâmicos podem ser observados, como por exemplo o surgimento de um ciclo limite na vizinhança de uma solução do sistema. Em outras palavras, a partir do valor crítico  $\mu_0$  um ramo de soluções periódicas com amplitudes crescentes pode ser encontrado<sup>3</sup>. Quando o parâmetro  $\mu$  é variado, perto do valor crítico, ciclos limite podem surgir para valores de  $\mu$  menores ou maiores que  $\mu_0$ , respectivamente caracterizando uma bifurcação subcrítica e supercrítica (HASSARD; KAZARINOFF; WAN, 1981).

Ainda, estes dois tipos de BH (supercrítica e subcrítica) podem ser melhor ilustrados conforme a Figura 2.4. Na Figura 2.4(a) a amplitude do ciclo limite instável (curva tracejada) diminui à medida que o parâmetro se aproxima do valor da bifurcação. No ponto de bifurcação o ciclo limite desaparece e o ponto de equilíbrio torna-se instável. As trajetórias após a bifurcação não são limitadas, e possuem oscilações crescentes. Este fato é definido na literatura como *perda brusca de estabilidade* (CUTSEM; VOURNAS, 2003). Já para a bifurcação supercrítica ilustrada na Figura 2.4(b), antes do seu ponto crítico não existe ciclo limite, este é gerado apenas no ponto de bifurcação e é estável. Ao contrário da subcrítica, após o ponto de bifurcação as oscilações possuem amplitude limitada.

A principal contribuição do teorema fundamental da bifurcação de Hopf, segundo Moiola *et al.* (1996), se apresenta de forma que é possível, para certos valores de  $\mu$ , que

<sup>3</sup>Todos dependentes da função não linear  $f$

o sistema tenha apenas solução única, enquanto que para outros valores de  $\mu$  esta solução e a solução periódica coexistam. Em alguns sistemas não-lineares geralmente surge a necessidade de determinar para quais valores de  $\mu$  o ramo de soluções periódicas existe, através do pressuposto de que todos os outros autovalores da Jacobiana estão localizados no semi-plano esquerdo.

Para exemplificar esta contribuição, o retrato de fase<sup>4</sup> de um sistema bi-dimensional, que satisfaz a condição mencionada anteriormente de cruzamento dos autovalores através da variação de um parâmetro, é ilustrada na Figura 2.5. Nesta Figura, a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema analisado muda de um foco estável ( $\mu < \mu_0$ ) para um instável ( $\mu > \mu_0$ ). Para o valor crítico ( $\mu = \mu_0$ ) existem soluções contínuas periódicas no plano de fase, às quais não são isoladas se forem consideradas apenas as dinâmicas do sistema linearizado. Assim, pode-se verificar através da Figura 2.5 o acontecimento de uma bifurcação.

Aplicando o teorema de Hopf para este exemplo determina-se se o sistema possui uma bifurcação subcrítica ou supercrítica, Figura 2.5 (b) e (a) respectivamente, dependendo se o ciclo limite é criado ou extinto no ponto de bifurcação. Deve-se ainda ressaltar que quando  $\mu = \mu_0$  a teoria de sistemas lineares prevê um contínuo de órbitas periódicas, assim como ilustrado na Figura 2.5, entretanto, a situação real de um sistema não linear apresenta-se diferente. O teorema de Hopf prevê apenas uma órbita periódica para o valor crítico (MOIOLA; CHEN, 1996).

### 2.3.1 Teorema

Visando a simplificação do teorema e um melhor entendimento do significado geométrico dos resultados, a teoria da bifurcação de Hopf será agora apresentada para um sistema de EDOs de segunda ordem. No entanto, todos os resultados podem ser estendidos para um sistema genérico de  $n$  dimensões.

Considere o sistema de EDOs de segunda ordem não linear na forma:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

Supõe-se que todas as condições necessárias do campo vetorial  $f$  são satisfeitas, de forma a garantir assim que para qualquer condição inicial ( $x_0$ ) pertencente a uma região do  $\mathbb{R}^2$ , o sistema de equações diferenciais (2.9) possui solução única para cada valor do parâmetro  $\mu \in \mathbb{R}$ . O teorema da BH sobre estabilidade de ciclos limite para um sistema dinâmico não linear (2.9) é formulado a seguir (ARROWSMITH; PLACE, 1990).

### Teorema Poincaré-Andronov-Hopf

<sup>4</sup>O retrato de fase é uma representação geométrica de todas as trajetórias de um sistema dinâmico no plano. Cada curva representa uma diferente condição inicial.



Suponha que o sistema  $\dot{x} = f_\mu(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\mu \in \mathfrak{R}$  possui um equilíbrio  $(x_0, \mu_0)$ , no qual as seguintes propriedades são satisfeitas:

- I)  $D_x f_{\mu_0}$  possui um par simples de autovalores puramente imaginários e nenhum outro autovalor com parte real zero. Isto implica que existe uma curva de equilíbrio  $(x(\mu), \mu)$  com  $x(\mu_0) = x_0$ . Os autovalores  $\lambda(\mu)$ ,  $\lambda^*(\mu)$  de  $D_x f_\mu$  que são imaginários em  $\mu = \mu_0$  variam suavemente com  $\mu$ . Se, além disso,
- II)  $\left. \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}\lambda(\mu)) \right|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$ , então existe uma variedade central tridimensional único passando por  $(x_0, \mu_0)$  em  $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$  e um sistema de coordenadas (preservando os planos  $\mu = \text{const.}$ ) para o qual a expansão de Taylor de grau 3 no centro coletor é dada por:  $\dot{x} = (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y$ ,  
 $\dot{y} = (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x - (d\mu + a(x^2 + y^2))y$ ,

que é expressa em coordenadas polares como:  $\dot{r} = (d\mu + ar^2)r$ ,  $\dot{\theta} = (\omega + c\mu + br^2)$ .

Se  $a \neq 0$ , existe uma superfície de soluções periódicas na variedade central que tem uma tangência quadrada com o espaço de autovalores de  $\lambda(\mu_0)$ ,  $\lambda^*(\mu_0)$  concorrendo com a segunda ordem do parabolóide  $\mu = -(a/d)(x^2 + y^2)$ . Se  $a < 0$  então essas soluções periódicas são ciclos limites estáveis, enquanto se  $a > 0$ , as soluções periódicas são repulsivas.

### 2.3.2 Ferramentas Matemáticas para Detecção/Predição de BH

Para detecção e/ou predição da bifurcação de Hopf, várias ferramentas matemáticas foram desenvolvidas com a finalidade de encontrar o ponto em que o sistema apresentaria uma BH, ou seja, encontrar o valor crítico,  $\mu_0$ . Como mencionado anteriormente no capítulo introdutório, existem 2 tipos de metodologias que calculam este ponto: métodos diretos e métodos indiretos:

- Métodos diretos são aqueles que, exceto por erros de arredondamento, fornecem a solução precisa do sistema, caso esta exista, após um número definido de operações. Os mais conhecidos são os métodos de Gauss e de Newton (BARROSO, 1987). Estes necessitam de um tratamento para melhorar, ou ainda garantir, a sua convergência.
- Métodos indiretos são aqueles que dependem de um processo continuado onde pelo menos uma solução do sistema é calculada ou previamente conhecida. Se a primeira solução do sistema for denotada por  $(x_0, \mu_0)$ , então o problema de continuação é calcular os pontos seguintes  $(x_1, \mu_1)$ ,  $(x_2, \mu_2)$ , ..., até que um atinja o ponto de bifurcação. Este método de continuação emprega um esquema de predição-correção para encontrar o caminho de solução das equações do sistema, e assim, verificar se o resultado encontrado satisfaz as condições de bifurcação.

Como este trabalho propõe a utilização de um método direto para a resolução do conjunto de equações proposto, serão apresentadas nesta seção apenas as ferramentas matemáticas que utilizam em suas formulações, para encontrar pontos de BH, os métodos diretos, e que serviram como base para o desenvolvimento do presente trabalho.

### 2.3.2.1 Método de Holodnik e Kubicek

O método de Holodniok *et al.* (1984), intitulado "*New Algorithms for the Evaluation of Complex Bifurcation Points in Ordinary Differential Equations. A Comparative Study*", apresenta um algoritmo para encontrar o ponto BH. Nesta seção será apresentado o trabalho deste artigo de forma a destacar de forma sucinta sua formulação e os seus pontos mais importantes. Uma descrição completa do mesmo pode ser encontrada em (HOLODNIOK; KUBICEK, 1984).

Considere o sistema autônomo de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, \mu) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.10)$$

Uma solução de equilíbrio  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  deste sistema, para um dado valor de  $\mu$ , deve satisfazer o seguinte sistema de equações algébricas não-lineares:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Variando-se  $\mu$ , é possível obter as variedades de soluções para este sistema. A estabilidade é dada pela análise dos autovalores da sua matriz Jacobiana,  $J$ . Esta pode mudar em pontos de bifurcação onde os autovalores mencionados têm a característica de serem puramente imaginários, ou seja, características das BH.

O método proposto em (HOLODNIOK; KUBICEK, 1984) descreve um algoritmo que não requer o cálculo de autovalores para a determinação do ponto de bifurcação. Para um dado autovalor  $\lambda$  da matriz Jacobiana, a seguinte equação é válida:

$$J \cdot u = \lambda \cdot u \quad (2.12)$$

onde  $u$  denota um autovetor à esquerda. Considera-se  $\lambda = r + js$ , e, portanto, seu autovetor também é complexo,  $u = v + j\omega$ , onde  $v$  e  $\omega$  são vetores reais. Para o caso da BH, onde a parte real do autovalor no ponto de bifurcação é nula, ( $r = 0$ ), a equação (2.12) pode ser reescrita conforme:

$$\begin{aligned} Jv + s\omega &= 0 \\ J\omega - sv &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pode-se, assim, reescrever as equações apresentadas em (2.13), da seguinte forma :

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, v_1, v_2, \dots, v_n, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 0 \quad i = n+1, n+2, \dots, 3n \quad (2.14)$$

Cada complexo múltiplo do autovetor  $u = v + \omega$  é também um autovetor de  $J$ , associado ao autovalor  $\lambda = js$ . Isto significa que pode-se escolher duas componentes dos vetores  $v$  e  $\omega$  arbitrariamente para a resolução do sistema. Ou seja, tem-se  $3n$  equações algébricas não-lineares e  $3n+2$  variáveis a serem calculadas. Desta forma, o autor fixa duas variáveis com valores pré-definidos, possuindo então  $3n$  equações (2.11) e (2.13) para as variáveis restantes não fixadas. O método direto utilizado para a solução dessas equações é o método de Newton, com o qual encontra-se o ponto de bifurcação de Hopf do sistema. O sistema final utilizado calculado com o método de Newton é dado por:

$$\begin{cases} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ Jv + s\omega = 0 \\ J\omega - sv = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

### 2.3.2.2 Método de Spence-Moore

O trabalho de Spence-Moore, intitulado "*The Calculation of Turning Points of Non-linear Equations*", determina, de forma direta, o ponto no sistema em que ocorre uma BH. Este ponto é chamado pelo autor de ponto "limite". Moore *et al.* (1993) apresenta um sistema de equações aumentado quando comparado ao sistema sugerido por Holodniok *et al.* (1984) e, assim como este, utiliza métodos diretos para a solução deste sistema aumentado, o qual possui, entre suas variáveis, o parâmetro crítico de bifurcação  $\mu_0$ . Este trabalho ainda apresenta uma nova formulação do método de Newton para a eficiência numérica do algoritmo (MOORE; SPENCE, 1993).

Seja o sistema de equações não lineares descrito da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = G(x, \mu) \quad (2.16)$$

seja ainda uma solução  $(x^0, \mu^0)$  para um dado valor de  $\mu^0$  satisfazendo um sistema de equações algébricas não lineares.

$$G(x, \mu) = 0 \quad (2.17)$$

A idéia básica apresentada em (MOORE; SPENCE, 1993) é de simplesmente resolver três equações:

$$G(x, \mu) = 0 \quad (2.18a)$$

$$G_x(x, \mu) \cdot u = \lambda \cdot u \quad (2.18b)$$

$$l(u) - 1 = 0 \quad (2.18c)$$

onde  $G_x$  denota a Jacobiana do sistema,  $l(\cdot)$  denota uma função de normalização, e  $\mu$  denota o parâmetro de bifurcação. A equação (2.18b) pode ser trabalhada na formulação dada anteriormente focando nos autovalores e autovetores da matriz Jacobiana conforme (2.19):

$$\begin{aligned} G_x v + \beta \omega &= 0 \\ G_x \omega - \beta v &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

sendo  $u = v + j\omega$  e onde  $\beta$  refere-se à parte imaginária do autovalor no ponto de bifurcação.

Estas equações são resolvidas neste trabalho, fixando-se o valor de  $\beta$ , através de um método de Newton eficiente, e encontrando-se o ponto de bifurcação. O autor afirma existir neste trabalho uma melhoria com relação ao equacionamento apresentado na seção 2.3.2.1 visto que este método aqui descrito apenas fixa uma variável,  $\beta$ , e adiciona uma equação linearmente independente ao conjunto de equações que definem a bifurcação. O sistema utilizado por esta metodologia é apresentado em (2.20):

$$\begin{cases} G(x, \mu) = 0 \\ G_x v + \beta \omega = 0 \\ G_x \omega - \beta v = 0 \\ u' \cdot u = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Esta última equação é simplesmente uma equação utilizada para forçar a normalização do autovetor  $u$ , e assim como esta, outras equações de normalização podem ser utilizadas em seu lugar.

## 2.4 Bifurcação de Hopf em Sistemas Elétricos de Potência

As BH, diferentemente das bifurcações sela-nó, produzem ciclos limite, definidos no Anexo B, levando o sistema a problemas oscilatórios e possíveis instabilidades, reduzindo consideravelmente a margem de carregamento do sistema. Estes problemas oscilatórios, características de grandes sistemas interconectados, são tratados com a análise e o controle das oscilações de baixa frequência (ROGERS, 1999).

Desta forma, esta é uma bifurcação dinâmica que está tipicamente relacionada ao SEP, levando este ao surgimento de oscilações, podendo ser crescentes, que levam o sistema ao colapso de tensão. Conforme apresentado anteriormente, estas bifurcações podem ser causadas, por exemplo, por contingências, pelo amortecimento variável da rede e por problemas no AVR, causando possivelmente danos irreversíveis. Por este motivo, surge a necessidade de um estudo detalhado específico para este tipo de bifurcação, de forma que possa ser realizado um monitoramento, e possivelmente um controle preventivo do sistema em tempo real, evitando assim a ocorrência de possíveis blecautes.

Esta seção apresenta sucintamente algumas metodologias existentes na literatura para a predição/deteção desta bifurcação em SEP.

### 2.4.1 Metodologias de Deteção/Predição de Bifurcações de Hopf em Sistemas Elétricos de Potência

As seis metodologias aqui consideradas não serão apresentadas conforme a característica de seus métodos empregados, sejam estes métodos diretos ou indiretos. Estas serão apenas dispostas em ordem cronológica, elucidando os sistemas utilizados para apresentação dos respectivos resultados e ainda suas desvantagens, visando o melhor entendimento da evolução de sua utilização em SEP e também a apresentação de suas limitações e desvantagens para o monitoramento de sistemas em tempo real.

Para facilitar a apresentação das metodologias serão utilizadas as mesmas notações para os parâmetros de interesse dos SEP. As dinâmicas deste podem ser modeladas por equações diferenciais algébricas que possuem a dependência de um parâmetro conforme (2.21):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) & f: \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ 0 = g(x, y, \mu) & g: \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (2.21)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ , e

$x$  vetor de variáveis de estado dinâmicas;

$y$  vetor de variáveis estáticas;

$\mu$  carregamento do sistema.

Ainda, vale ressaltar que as variáveis do vetor  $x$  descrevem elementos com comportamento dinâmico em SEP, como por exemplo o ângulo de potência do gerador e a velocidade do rotor. As variáveis do vetor  $y$  são geralmente conectadas à estrutura da rede, tipicamente incluindo variáveis do fluxo de potência. Linearizando o sistema (2.21), obtém-se:

$$\Delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial \mu} \Delta \mu \quad (2.22)$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial g}{\partial \mu} \Delta \mu \quad (2.23)$$

Denotando:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f}{\partial x} & B &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ C &= \frac{\partial g}{\partial x} & D &= \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

A partir destas definições é possível calcular a matriz reduzida do sistema, conforme



(2.24):

$$A_{red} = (A - B \cdot D^{-1} \cdot C) \quad (2.24)$$

Segundo Huang *et al.* (2002), esta matriz é normalmente utilizada para a análise da estabilidade do sistema, pois esta apresenta as características do sistema não reduzido (HUANG; ZHAO; SONG, 2002). Definidas as matrizes anteriores serão apresentadas a seguir as metodologias para detecção/predição de BH.

#### 2.4.1.1 Metodologia Clássica

Esta metodologia busca encontrar o ponto de bifurcação do sistema, utilizando a formulação apresentada em (2.21), a partir do cálculo sucessivo de autovalores da matriz reduzida do sistema definida pela equação (2.24). Este nome é atribuído à esta metodologia na literatura devido ao fato de ser a primeira metodologia utilizada, não existindo um algoritmo específico de detecção/predição definido mas sim um algoritmo de força bruta. Normalmente esta metodologia está associada ao cálculo da curva  $P - V$ , onde a cada iteração (incremento do parâmetro de carregamento do sistema) a matriz  $A_{red}$  é calculada e seus autovalores são encontrados. A desvantagem associada a esta metodologia reside no alto esforço computacional necessário, visto que há a necessidade de sucessivos cálculos de autovalores, prejudicando sua eficiência principalmente em se tratando de sistemas de grande porte onde esse cálculo sucessivo se torna inviável em tempo real.

#### 2.4.1.2 Método de Gupta *et al.* (1998)

O método de Gupta *et al.* (1998) é um método direto que visa encontrar o ponto de bifurcação de Hopf mais próximo de um dado ponto de operação do sistema. Esse ponto de bifurcação é calculado no espaço de parâmetros de carga, utilizando um modelo baseado em otimização.

A metodologia apresentada faz uso do conjunto de equações apresentado em (2.15), utilizando as equações de norma euclidiana, definidas no Anexo B, como equações complementares do sistema, tanto para a parte real do autovetor associado à bifurcação como também para a sua parte imaginária, ou seja,  $\|v^r\| \neq 0$  e  $\|v^i\| \neq 0$ . Em (GUPTA; VARMA; SRIVASTAVA, 1998) afirma-se que o ponto de bifurcação mais próximo pode ser estimado minimizando a norma Euclidiana da distância entre  $\mu$  e  $\mu_0$ , na superfície  $\Sigma$  formada no espaço do parâmetro de carga do sistema, conforme (2.25):

$$\text{Minimizar } f = \|\mu - \mu_0\|^2 \quad (2.25)$$

Entretanto, antes de proceder à resolução destas equações, Gupta *et al.* (1998) apresentam uma forma de determinar as condições iniciais do sistema. Este tratamento foi ressaltado em (GUPTA; VARMA; SRIVASTAVA, 1998) afim de destacar uma das possíveis formas para que o método direto possua convergência. Este procedimento inclui:

- I) Resolução do fluxo de carga, determinando valores iniciais para as variáveis do fluxo, ou seja,  $y$  na equação (2.21);
- II) Obtenção da solução de  $\dot{x} = 0$  em (2.21), para a obtenção dos valores iniciais de  $x$ ;
- III) Obtenção de  $A_{red}$ , conforme (2.24), utilizando os valores de  $x$  e  $y$  obtidos nos passos I e II;
- IV) Cálculo dos autovalores de  $A_{red}$ , definindo  $s = Imag\{\lambda\}$ , onde  $s$  é definido na equação (2.13),  $imag$  denota a parte imaginária de um número complexo e  $\lambda$  é o autovalor selecionado como possuindo a menor parte real da matriz  $A_{red}$ ;
- V) Cálculo de  $v^r$  e  $v^i$  representando a parte real e a parte imaginária do autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ ;
- VI) Garantir que a norma dos autovetores associados à bifurcação seja diferente de zero dividindo cada autovetor pelo seu primeiro elemento;

Após o cálculo das condições iniciais estas são então utilizadas em um programa sequencial quadrático para minimizar (2.25) e satisfazer as equações do sistema aumentado.

O método de Gupta *et al.* (1998) visava apenas apresentar uma metodologia, para o cálculo de BH, que foi testada em um sistema de 3 barras e não foi levado em consideração o tempo necessário para a sua execução em tempo real, e sequer deixa alguma evidência da sua eficiência ou possibilidade de utilização em tempo real. Esta metodologia possui como desvantagem o cálculo de  $A_{red}$  e dos seus autovalores para a determinação de condições iniciais, bem como o esforço utilizado para minimizar a função objetivo juntamente com a solução das equações do sistema.

#### 2.4.1.3 Método de Mithlananthan *et al.* (2000)

O método de Mithlananthan *et al.* (2000) apresenta índices para detectar e prever problemas de estabilidade. O sistema utilizado é o da equação (2.21), a partir do qual os autores calculam a matriz reduzida  $A_{red}$ , considerando (2.24). Utilizando a matriz:

$$A_m = \begin{bmatrix} A_{red} & \beta I_n \\ -\beta I_n & A_{red} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

É definido um índice de bifurcação chamado de  $HB_1$ , como o menor valor singular da matriz  $A_m$ , ou seja,  $HB_1 = \sigma_{min}(A_m)$ . O objetivo da utilização da matriz aumentada é encontrar índices lineares para encontrar o ponto da bifurcação. Os autores ainda propõem um segundo índice baseado no modelo preservado da rede evitando assim o cálculo de

$A_{red}$ . Para tanto é definida a matriz:

$$J_m = \begin{bmatrix} A & B & \beta I & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ -\beta I & 0 & A & B \\ 0 & 0 & C & D \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

O segundo índice é definido como  $HB_2 = \sigma_{min}(J_m)$ .

Estes índices foram testados em 3 sistemas pelo autor: um sistema de 2 barras, o sistema IEEE 14 barras e o sistema encontrado em (KUNDUR, 1994, pág. 813). A grande desvantagem deste método é que o mesmo se utiliza de uma metodologia muito similar à do método clássico, calculando autovalores sucessivamente para cada valor de carregamento, com a finalidade de montar a matriz do sistema e calcular os índices propostos,  $HB_1$  e  $HB_2$ . Os índices facilitam a visualização da bifurcação porém aumentam o esforço computacional exigido para o cálculo do valor crítico  $\mu_0$ , em relação ao método clássico, não tornando-o apto para utilização em tempo real.

#### 2.4.1.4 Método de Marakov *et al.* (2000)

O método de Marakov *et al.* (2000) é dedicado a resolver os seguintes problemas: viabilidade do fluxo de carga, sela-nó e fronteiras de bifurcação de Hopf no espaço dos parâmetros dos sistemas de potência. Como o foco desta dissertação são as BH, será resumida aqui apenas a metodologia desenvolvida em (MAKAROV; HILL; DONG, 2000) para esta bifurcação.

Primeiramente considera-se o sistema apresentado em (2.21). Segundo o autor, as condições de operação do sistema devem ser mantidas dentro dos domínios de viabilidade e estabilidade do mesmo, as quais são definidas por superfícies que satisfazem a seguinte condição geral:

$$\det[J(x,y) \pm j\omega I] = 0 \quad (2.28)$$

onde  $\omega$  denota a parte imaginária do autovalor no ponto de bifurcação,  $J$  a matriz Jacobiana do sistema e  $I$  denota uma matriz identidade. Entretanto, a condição (2.28) corresponde a uma superfície muito complicada e a visualização da geometria apresentada pela mesma é um problema difícil. Esta visualização é geralmente feita em planos definidos por um par de parâmetros escolhidos  $x$  ou  $y$ , sendo que alguns recursos importantes referentes à superfície de bifurcação e múltiplos pontos de equilíbrios não podem ser observados nestes planos.

O método de Marakov *et al.* (2000), chamado de  $\Delta$ -Plano, introduz um plano que permite a visualização da superfície de bifurcação enquanto esta se intercepta ao mesmo. Este  $\Delta$ -plano é definido por três vetores linearmente independentes,  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , que, para o caso de sistemas de potência, são escolhidos como três pontos de operação distintos

do sistema. Esta metodologia desenvolvida visa a obtenção da intersecção da fronteira do domínio de viabilidade do fluxo de potência com um plano no espaço de variáveis dependentes  $x$ . Sabe-se que esta fronteira é constituída por pontos onde o determinante da jacobiana do sistema é nulo, ou seja  $\det J(x) = 0$ .

A metodologia possui dois passos principais: a obtenção das curvas de bifurcação no  $\Delta$ -Plano em  $\mathbb{R}_x^n$  e a visualização do  $\Delta$ -Plano em  $\mathbb{R}_x^n$ . A descrição destes passos pode ser encontrada de forma detalhada em (MAKAROV; HILL; DONG, 2000). É de principal interesse ressaltar que, nesta metodologia, no passo da obtenção das curvas de bifurcação no  $\Delta$ -Plano, o autor utiliza-se do cálculo sucessivo de autovalores da matriz  $J^{-1}(x_1) \cdot J(x)$  para a determinação dos pontos referentes à curva de bifurcação, elevando seu esforço computacional.

Esta metodologia apresentou bons resultados, para a estimativa da solução do problema, testado no sistema New-England de 39 barras. Entretanto, o tempo/esforço computacional necessário para a aplicação deste método não é mencionado no respectivo trabalho, e desta forma, admitindo-se que este seja elevado, compromete sua utilização em centros de operação em tempo real.

#### 2.4.1.5 Método de Gomes *et al.* (2002)

O método de Gomes *et al.* (2002) tem por objetivo determinar o valor de um parâmetro do sistema para o qual ocorre o cruzamento de um par de autovalores complexos conjugados para o semi-plano direito. Da mesma forma como nas metodologias previamente descritas, em (GOMES; MARTINS; PORTELA, 2002) o sistema e sua linearização são definidas por, (2.21), (2.22) e (2.23) respectivamente.

Em (GOMES; MARTINS; PORTELA, 2002) ainda é afirmado que a utilização de uma equação de normalização do autovetor, como proposto pelos autores na sua metodologia, é mais indicada para o uso com BH do que as de norma euclidiana, utilizadas em trabalhos anteriores à este. Neste mesmo trabalho, um lugar geométrico no plano complexo é utilizado para definir o amortecimento mínimo dos autovalores do sistema (fronteira de segurança). Este lugar pode ser definido pela equação:

$$B(\sigma, \omega) = \sigma + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \omega \quad (2.29)$$

onde  $\zeta$  é um valor de amortecimento especificado,  $\sigma$  e  $\omega$  são as partes reais e imaginárias dos autovalores do sistema, respectivamente. A partir desta definição, Gomes *et al.* (2002) utilizam o seguinte sistema, propondo a resolução do mesmo através do método

de Newton:

$$\begin{cases} f(x, y, \mu) = 0 \\ (\lambda \cdot T - J) \cdot v = 0 \\ c \cdot v = 1 \\ B(\sigma, \omega) = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

onde  $T$  é o multiplicador de  $\dot{x}$  no sistema de equações diferenciais, e  $c$  é um vetor escolhido arbitrariamente.

Gomes *et al.* (2002) ainda apresenta um algoritmo baseado no conceito de função de transferência para BH, no domínio da frequência. Ambos os algoritmos apresentados demonstraram um desempenho muito próximo quando comparados entre si. Gomes *et al.* (2002) não mencionam a questão das condições iniciais, porém relatam o tempo computacional exigido pelo programa desenvolvido sendo este relativamente reduzido para o cálculo de um autovalor que cruza uma fronteira de segurança pré-estabelecida. O sistema utilizado para apresentar os resultados foi o Norte-Sul brasileiro equivalente.

O trabalho apresenta uma metodologia para o cálculo de BH com a finalidade de encontrar o autovalor que cruza uma fronteira de segurança, ou seja, encontrar um autovalor com potencial para causar uma BH. A desvantagem apresentada por este fato recai no cálculo de possíveis autovalores de ocorrência da BH, e não apenas do ponto de ocorrência da mesma, aumentando o esforço computacional exigido pelo algoritmo já que este calcula vários possíveis autovalores, e comprometendo sua utilização em tempo real para a determinação de uma margem precisa de carregamento do sistema devido à estas bifurcações.

#### 2.4.1.6 Método de An *et al.* (2008)

O método de An *et al.* (2008) busca encontrar o ponto de BH através da adição de uma equação auxiliar às equações propostas em (MOORE; SPENCE, 1993), e citadas anteriormente. Para isto, utiliza-se do sistema (2.21) e das condições de bifurcação apresentadas na seção 2.3.2.1. O sistema aumentado utilizado é dado por 2.31. Sendo:

- $J$  é a Jacobiana do sistema diferencial-algébrico;
- $\omega$  é a parte imaginária do autovalor de bifurcação;
- $\alpha$  um valor qualquer especificado pelo autor.

$$\begin{cases} f(x, y, \mu) = 0 \\ g(x, y, \mu) = 0 \\ v_n^T - v_m^T y - \alpha = 0 \\ J - \omega_j \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ v^T v - 1 = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

onde  $v = \begin{bmatrix} v_n \\ v_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$  e:

O sistema aumentado é desacoplado e calculado em partes, produzindo assim um algoritmo de Newton mais eficiente o que diminui o tempo computacional para aplicações em tempo real. Entretanto, nesta metodologia são calculados os parâmetros  $x$ ,  $y$ ,  $\mu$  e  $v$ , supondo  $\omega$  conhecido, o que é uma grande desvantagem desta metodologia, dado que na prática não há garantias de que  $\omega$  tenha uma variação pouco significativa do caso base até o ponto de ocorrência da bifurcação. Em (AN et al., 2008) não é mencionado o tratamento das condições iniciais nem o tempo computacional exigido pelo programa proposto. Entretanto, um modelo de sistema de 3 barras foi utilizado para a apresentação de resultados. A grande desvantagem ainda nesta metodologia é a determinação do valor inicial de  $\omega$ , ou seja, da parte imaginária do autovalor no ponto da bifurcação, pois esta, se não especificada próxima à condição de bifurcação, proporciona a não convergência do algoritmo. E ainda, o cálculo prévio desta parte imaginária para uso de condição inicial exige um grande esforço computacional.



### 3 DESENVOLVIMENTO PROPOSTO PARA LOCALIZAÇÃO DO PONTO DE BIFURCAÇÃO DE HOPF UTILIZANDO MÉTODO DIRETO

A revisão bibliográfica apresentada no Capítulo 2 mostrou que as metodologias existentes de detecção/predição da bifurcação de Hopf em sistemas de potência, independentemente se utilizadas de métodos diretos ou indiretos, desconsideram o tempo associado ao esforço computacional necessário para sua utilização em centros de operação, ou seja, em tempo real.

Neste capítulo é apresentado um equacionamento baseado nas equações do sistema aumentado de (MOORE; SPENCE, 1993) e (HOLODNIOK; KUBICEK, 1984), porém utilizando equações complementares ao sistema, de forma que estas sejam linearmente independentes das equações de equilíbrio e de bifurcação. Busca-se através deste conceito a não fixação de parâmetros de interesse, a saber, o valor de  $\omega_0$  no ponto de bifurcação, com valores pré-definidos mas sim a adição destes ao espaço de variáveis de estado. Ainda, vale ressaltar que o modelo utilizado para utilização dessas ferramenta matemáticas teve de ser modificado com a finalidade de adaptar as equações ordinárias diferenciais para um sistema diferencial-algébrico. Neste capítulo também é apresentada a linearização das equações propostas aplicadas a SEP, visto que estas serão utilizadas na formulação do método de Newton, também apresentado.

A metodologia utilizada para solução desse conjunto de equações, citada anteriormente, é o método de Newton, que possui a característica de ser preciso e robusto (BARROSO, 1987). Cabe ainda ressaltar que devido a grande esparsidade apresentada pela Jacobiana montada para a solução através do método de Newton, uma técnica de otimização é adicionada a mesma, visando a exploração desta característica, reduzindo o tempo e o esforço computacional.

A utilização de tal conjunto de equações é adequada para a análise proposta, dado que além de não fixar valores a alguma variável, a análise do sistema é realizada considerando-se condições que adicionam às equações de solução de autovetores do sistema uma possibilidade prévia de solução, melhorando a convergência do método utilizado.



### 3.1 Modelo para um Sistema Algébrico-Diferencial

Seja o sistema genérico algébrico-diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) \\ 0 = g(x, y, \mu) \end{cases} \quad \begin{array}{l} f: n+m+1 \rightarrow n \\ g: n+m+1 \rightarrow m \end{array} \quad (3.1)$$

que possui como matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Agora considere o equacionamento apresentado na seção 2.3.2.1. O primeiro conjunto de equações necessárias para a formulação da respectiva metodologia são as equações de equilíbrio, que para o caso algébrico-diferencial são dadas por:

$$\begin{cases} f(x, y, \mu) = 0 \\ g(x, y, \mu) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

A metodologia dada em 2.3.2.1 ainda apresenta o conjunto de equações relacionadas ao ponto de bifurcação às quais foram demonstradas em (2.12) e (2.13), e neste capítulo serão adaptadas para o sistema de interesse. As equações (3.4) e (3.5) apresentam essas alterações:

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Sendo  $\lambda = a + j\omega_0$ . Quando ocorre a bifurcação,  $\lambda = j\omega_0$ , e no lado direito da equação (3.4) o autovalor no ponto de bifurcação multiplica apenas a parte do autovetor  $u$  associada à parte dinâmica do sistema. Assim, a equação (3.4) pode ser reescrita conforme (3.5).

Definidas estas equações para o sistema diferencial-algébrico seguindo as equações apresentadas em (HOLODNIOK; KUBICEK, 1984), enfrenta-se o problema apresentado no mesmo onde há a necessidade da pré-determinação de duas variáveis, pois obtemos  $3n + 3m$  equações e  $3n + 3m + 2$  variáveis. Desta forma utiliza-se o equacionamento complementar proposto em (MOORE; SPENCE, 1993), para a eliminação de mais uma

destas variáveis.

Este equacionamento utiliza uma normalização do autovetor referente ao autovalor de interesse. Devido aos estudos apresentados anteriormente (AN et al., 2008; GUPTA; VARMA; SRIVASTAVA, 1998), será utilizada uma norma euclidiana<sup>1</sup>, com a restrição definida,  $r = 1$ . Assim, (3.6) apresenta a normalização utilizada como equação linearmente independente dos conjuntos de equações apresentados (3.3) e (3.5).

$$\begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 1 \quad (3.6)$$

Esta normalização garante que os autovetores calculados tenham magnitude igual a 1. Para não haver a necessidade da fixação do valor de uma das variáveis, como adotado em outros trabalhos, será introduzida mais uma equação que é linearmente independente (LI) das equações já apresentadas, com a mesma finalidade adotada para a adição da equação de normalização, que advém da necessidade da resolução do sistema sem a fixação de variáveis de interesse.

Desta forma, procura-se por uma equação que relacione propriedades dos autovetores associados ao ponto de bifurcação e que também seja LI com relação ao sistema em estudo. Com estes objetivos utilizou-se de uma condição que determina mais uma restrição a estes autovetores, de modo que a parte real e imaginária destes sejam ortogonais entre si, de acordo com (3.7).

$$\begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y, \mu) = 0 \\ g(x, y, \mu) = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 1 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Por fim, reunindo o conjunto de equações dadas por (3.3), (3.5), (3.6) e (3.7), tem-se o modelo de equações que podem ser resolvidas pelo algoritmo de Newton. Este conjunto de equações está apresentado em (3.8) e inclui a condição necessária para a ocorrência de

<sup>1</sup>Norma que mede a distância entre a origem e o ponto de interesse,  $r = \sqrt{x^T x}$ .

uma bifurcação de Hopf.

### 3.1.1 Formulação pelo método de Newton

Esta seção apresenta a formulação da matriz Jacobiana utilizada para a resolução do método de Newton utilizando o conjunto de equações (3.8). Para facilitar a notação será adotado que:

$$J = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

e ainda que  $A_x$  denota a derivada da matriz  $A$  com relação à variável  $x$ . A equação (3.10) apresenta a formulação pelo método de Newton do sistema definido no conjunto (3.8).

$$\begin{bmatrix} A & B & F_\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C & D & G_\mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \begin{pmatrix} A_x \cdot v_R + \\ B_x \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_y \cdot v_R + \\ B_y \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_\mu \cdot v_R + \\ B_\mu \cdot \omega_R \end{pmatrix} & A & \omega_0 \cdot I & B & \emptyset & v_I \\ \begin{pmatrix} C_x \cdot v_R + \\ D_x \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_y \cdot v_R + \\ D_y \cdot \omega_R \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_\mu \cdot v_R + \\ D_\mu \cdot \omega_R \end{pmatrix} & C & \emptyset & D & \emptyset & \emptyset \\ \begin{pmatrix} A_x \cdot v_I + \\ B_x \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_y \cdot v_I + \\ B_y \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_\mu \cdot v_I + \\ B_\mu \cdot \omega_I \end{pmatrix} & -\omega_0 \cdot I & A & \emptyset & B & -v_R \\ \begin{pmatrix} C_x \cdot v_I + \\ D_x \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_y \cdot v_I + \\ D_y \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_\mu \cdot v_I + \\ D_\mu \cdot \omega_I \end{pmatrix} & \emptyset & C & \emptyset & D & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 2v_R^T & 2v_I^T & 2\omega_R^T & 2\omega_I^T & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & v_I^T & v_R^T & \omega_I^T & \omega_R^T & \emptyset \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \mu \\ \Delta v_R \\ \Delta v_I \\ \Delta \omega_R \\ \Delta \omega_I \\ \Delta \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_R \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I^T & \omega_I^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} - 1 \\ \begin{bmatrix} v_R^T & \omega_R^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_I \\ \omega_I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Equacionamento Aplicado a um Sistema Diferencial-Algébrico

Com a finalidade de validar o equacionamento apresentado em (3.8) e ainda o método de Newton formulado em (3.10) para estas equações, será utilizado um sistema diferencial-algébrico simples, como exemplo, para o cálculo do ponto de BH.

Sendo assim, considere o sistema (3.11):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \mu x_1 - y \\ \dot{x}_2 = -\mu x_2 + x_2 + y \\ 0 = -x_2 - x_1 - y \end{cases} \quad (3.11)$$

o qual possui um equilíbrio na origem para qualquer  $\mu$ , e para  $\mu = 0$ , tem-se uma BH com  $\omega_0 = 1$ , ou seja, a parte imaginária do autovalor no ponto de bifurcação é igual a 1. Aplica-se então a formulação (3.8) com a finalidade de encontrar estes valores e confirmar a funcionalidade desta metodologia proposta. Sendo:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 - \mu & 0 \\ 0 & -\mu + 1 \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}; & D &= [-1] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Logo,

$$\left\{ \begin{aligned} & -x_1 - \mu x_1 - y & = & 0 \\ & -\mu x_2 + x_2 + y & = & 0 \\ & -x_2 - x_1 - y & = & 0 \\ & \begin{bmatrix} -1 - \mu & 0 & -1 \\ 0 & -\mu + 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{R1} \\ v_{R2} \\ \omega_R \end{bmatrix} + \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ 0 \end{bmatrix} & = & 0 \\ & \begin{bmatrix} -1 - \mu & 0 & -1 \\ 0 & -\mu + 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ \omega_I \end{bmatrix} - \omega_0 \cdot \begin{bmatrix} v_{R1} \\ v_{R2} \\ 0 \end{bmatrix} & = & 0 \\ & \begin{bmatrix} v_{R1} & v_{R2} & \omega_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{R1} \\ v_{R2} \\ \omega_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{I1} & v_{I2} & \omega_I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ \omega_I \end{bmatrix} & = & 1 \\ & \begin{bmatrix} v_{R1} & v_{R2} & \omega_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{I1} \\ v_{I2} \\ \omega_I \end{bmatrix} & = & 0 \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

Calculando a Jacobiana do método de Newton para a formulação (3.10) obtém-se que:

$$J_N = \begin{bmatrix} -1 - \mu & 0 & -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + 1 & 1 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_{R1} & -1 - \mu & 0 & \omega_0 & 0 & -1 & 0 & v_{I1} \\ 0 & 0 & 0 & -v_{R2} & 0 & -\mu + 1 & 0 & \omega_0 & 1 & 0 & v_{I2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_{I1} & -\omega_0 & 0 & -1 - \mu & 0 & 0 & -1 & -v_{R1} \\ 0 & 0 & 0 & -v_{I2} & 0 & -\omega_0 & 0 & -\mu + 1 & 0 & 1 & -v_{R2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2v_{R1} & 2v_{R2} & 2v_{I1} & 2v_{I2} & 2\omega_R & 2\omega_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_{I1} & v_{I2} & v_{R1} & v_{R2} & 2\omega_I & 2\omega_R & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Escolhendo valores unitários como condições iniciais e resolvendo previamente as duas últimas equações do conjunto (3.13) para a obtenção de uma estimativa inicial dos autovetores de forma a melhorar a convergência, tem-se como resultado após 2 iterações:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \\ \mu \\ v_{R1} \\ v_{R2} \\ v_{I1} \\ v_{I2} \\ \omega_R \\ \omega_I \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3536 \\ -0.3536 \\ -0.3536 \\ 0.3536 \\ 0.7071 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Nota-se que o valor de  $\omega_0$  pode ser um valor tanto positivo quanto negativo visto que o par de autovalores cruzam o eixo imaginário em 1 e  $-1$ . Dessa forma confirma-se a funcionalidade da metodologia apresentada. De acordo com a equação (3.15) verifica-se que os valores de equilíbrio calculados são os mencionados anteriormente,  $\Delta x_1 = 0$ ,  $\Delta x_2 = 0$  e  $\Delta y = 0$ , e ainda o parâmetro de bifurcação encontrado é igual a zero. Ainda, os autovetores referentes ao parâmetro de bifurcação também foram encontrados corretamente.

A pré-solução das equações que envolvem apenas os autovalores melhora o desempenho do programa em relação à convergência, visto que esta passa de três para duas iterações. Neste exemplo a otimização do método de Newton levando em consideração a

esparsidade da matriz não foi utilizada, na medida em que o número de iterações fornecido pelo programa já se apresentava deveras reduzido.

## 3.2 Equacionamento Aplicado a um Modelo de Sistema de Potência

Nesta seção aplica-se o equacionamento apresentado na seção 3.1 a um modelo específico de SEP. Entretanto, este equacionamento pode ser aplicado a qualquer modelo de SEP ou até a qualquer sistema diferencial-algébrico, como por exemplo o sistema apresentado em 3.1.2.

Para a aplicação da metodologia proposta neste trabalho, apresentada neste modelo específico de sistema de potência, será necessária a determinação de um modelo de gerador e AVR utilizados. Inicialmente, visando simplificar o equacionamento, serão utilizados os modelo de gerador de 4ª ordem e o modelo simplificado de AVR, ou AVR rápido. As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram o modelo dos mesmos respectivamente, e a Figura 3.3 apresenta um sistema geral com  $m$  geradores e  $n$  barras.

Este desenvolvimento aqui realizado possui uma grande semelhança ao encontrado em (SAUER; PAI, 1998) com a diferença da inclusão do parâmetro de bifurcação nas equações do sistema de potência. O parâmetro a ser considerado, para o sistema de potência, será um parâmetro de carregamento do sistema,  $\mu$ , que tem como função controlar o tamanho do incremento dado às potências ativas e reativas tanto da geração quanto da carga. O modelo adotado para o crescimento de carga é o baseado no momento de inércia dos geradores onde a direção de carga é equivalente à inércia de cada gerador. Este modelo pode ser encontrado com detalhes em (SANTOS, 2008). A formulação utilizada, bem como o desenvolvimento das equações para a utilização em (3.8) e (3.10), é descrita nas subseções seguintes.

### 3.2.1 Modelo Diferencial-Algébrico Dependente do Parâmetro de Carga

Nesta seção são apresentadas as equações diferenciais do sistema (3.16), referentes ao gerador e ao AVR e as equações algébricas (3.17) e (3.18), referentes ao estator e à rede, com a finalidade da formulação destas equações conforme (3.8). Estas equações representam as funções  $\dot{x} = f(x, y, \mu)$  e  $0 = g(x, y, \mu)$  do conjunto de equações (3.1), respectivamente.

Este modelo diferencial-algébrico desconsidera os efeitos sub-transitórios da máquina síncrona e a saturação da mesma e do regulador de tensão desta, visando simplificar o modelo para utilização em simulações. Também é considerado  $P_{m_i}$ , a potência mecânica estabelecida em cada máquina, como constante e o amortecimento linear proporcional ao desvio de frequência.

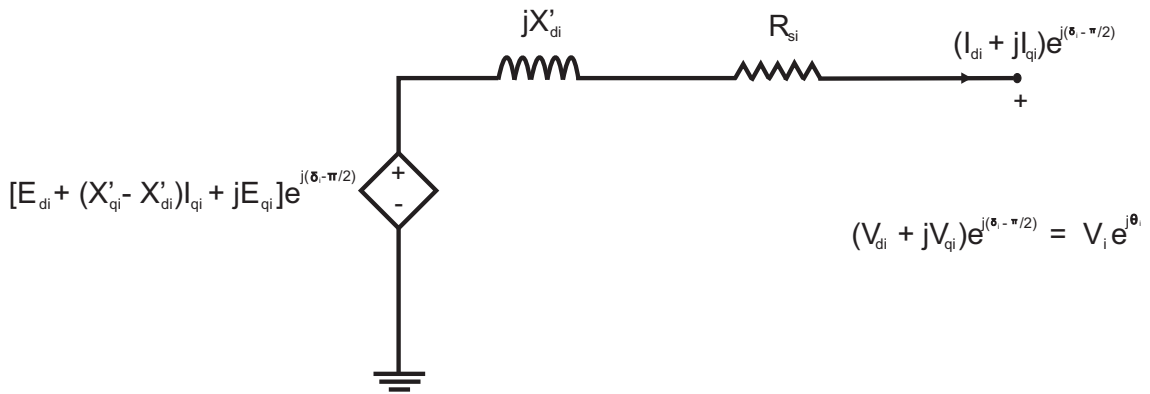


Figura 3.1: Circuito dinâmico para o modelo de máquina síncrona

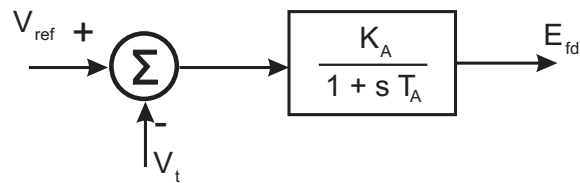


Figura 3.2: Modelo do AVR rápido

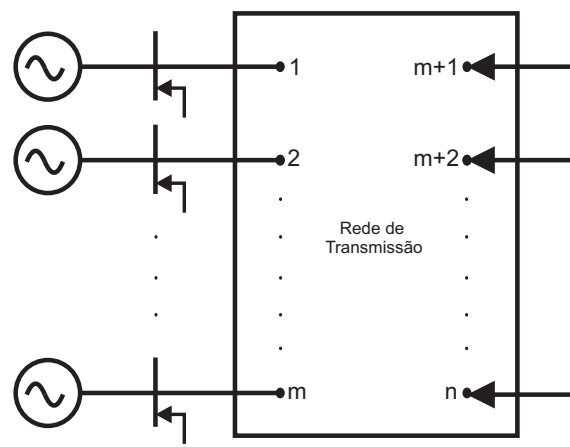


Figura 3.3: Modelo geral com  $m$ -máquinas e  $n$ -barras

3.2.1.1 Equações Diferenciais  $\dot{x} = f(x, y, \mu)$ 

Para cada gerador tem-se o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_s \quad (3.16a)$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{1}{M_i} \cdot \left( P_{m_i} + \frac{M_i}{M_t} (\mu - 1) \sum_{i=1}^n P_{L_{0i}} \right) - \frac{[E'_{qi} - X'_{d_i} I_{d_i}] I_{qi}}{M_i} - \frac{[E'_{d_i} - X'_{q_i} I_{q_i}] I_{d_i}}{M_i} - \frac{D_i (\omega_i - \omega_s)}{M_i} \quad (3.16b)$$

$$\dot{E}'_{qi} = -\frac{E'_{qi}}{T'_{d0i}} - \frac{(X_{d_i} - X'_{d_i}) I_{d_i}}{T'_{d0i}} + \frac{E_{fd_i}}{T'_{d0i}} \quad (3.16c)$$

$$\dot{E}'_{d_i} = -\frac{E'_{d_i}}{T'_{q0i}} + \frac{(X_{q_i} - X'_{q_i}) I_{q_i}}{T'_{q0i}} \quad (3.16d)$$

$$\dot{E}_{fd_i} = -\frac{E_{fd_i}}{T_{A_i}} + \frac{K_{A_i}}{T_{A_i}} (V_{ref_i} - V_i) \quad (3.16e)$$

sendo  $i = 1, \dots, m$ , onde  $m$  é o número de geradores do sistema e

- $\delta_i$  ângulo do gerador da barra  $i$  em  $[rad]$ ;
- $\omega_i$  velocidade do gerador em  $[rad/s]$ ;
- $\omega_s$  velocidade síncrona em  $[rad/s]$ ;
- $M_i$  constante de inércia em  $[s^2]$ ;
- $P_{m_i}$  potência mecânica do gerador  $i$  em  $[MW]$ ;
- $M_t$  soma das constantes de inércia de todas as máquinas;
- $P_{L_0}$  potência ativa na carga especificada para o caso base,  $\mu = 1$  em  $[MW]$ ;
- $E'_{qi}$  fluxo concatenado no enrolamento amortecedor do eixo de quadratura em  $[p.u.]$ ;
- $E'_{d_i}$  fluxo concatenado no enrolamento amortecedor do eixo direto em  $[p.u.]$ ;
- $I_{d_i}$  corrente de armadura do eixo direto em  $[p.u.]$ ;
- $I_{q_i}$  corrente de armadura do eixo de quadratura em  $[p.u.]$ ;
- $X_{q_i}$  reatância de eixo de quadratura em  $[p.u.]$ ;
- $X_{d_i}$  reatância de eixo direto em  $[p.u.]$ ;
- $X'_{d_i}$  reatância transitória de eixo direto em  $[p.u.]$ ;
- $X'_{q_i}$  reatância transitória de eixo de quadratura em  $[p.u.]$ ;
- $E_{fd_i}$  tensão de campo dimensionada  $[p.u.]$ ;
- $V_{ref_i}$  tensão de referência do AVR em  $[p.u.]$ ;
- $V_i$  tensão da barra  $i$  em  $[p.u.]$ ;
- $K_{A_i}$  constante de ganho do AVR do gerador  $i$ ;
- $T_{A_i}$  constante de tempo do AVR do gerador  $i$   $[s]$ .



### 3.2.1.2 Equações Algébricas Referentes ao Estator

$$E'_{d_i} - V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) + R_{s_i} I_{d_i} + X'_{q_i} I_{q_i} = 0 \quad (3.17a)$$

$$E'_{q_i} - V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) - R_{s_i} I_{q_i} + X'_{d_i} I_{d_i} = 0 \quad (3.17b)$$

### 3.2.1.3 Equações Algébricas Referentes à Rede

A equações (3.18a) e (3.18b) referem-se a barras que possuem conexão com gerador e as equações (3.18c) e (3.18d) a barras sem geradores:

$$0 = \mu \cdot P_L(V_i) + I_{d_i} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) + I_{q_i} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \quad (3.18a)$$

$$- \sum_{k=1}^n V_i V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k})$$

$$0 = \mu \cdot Q_L(V_i) + I_{d_i} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) - I_{q_i} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \quad (3.18b)$$

$$- \sum_{k=1}^n V_i V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k})$$

$$0 = \mu \cdot P_{L_0}(V_j) - \sum_{k=1}^n V_j V_k Y_{j,k} \text{cos}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{i,k}) \quad (3.18c)$$

$$0 = \mu \cdot Q_{L_0}(V_j) - \sum_{k=1}^n V_j V_k Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{i,k}) \quad (3.18d)$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = m + 1, \dots, n$ , onde,

$R_{s_i}$  resistência da armadura em [p.u.];

$\theta_i$  ângulo da carga na barra  $i$  em [rad];

$Y_{i,k}$  valor absoluto do elemento  $(i, k)$  da matriz admitância do sistema em [p.u.];

$\alpha$  ângulo referente ao valor absoluto da matriz admitância em [rad];

## 3.2.2 Linearização do Modelo Diferencial-Algébrico Dependente do Parâmetro da Carga

Linearizando o conjunto de equações diferenciais (3.16) obtém-se (3.19):

$$\Delta \dot{\delta}_i = \Delta \omega_i \quad (3.19a)$$

$$\Delta \dot{\omega}_i = \frac{1}{M_i} \Delta P_{m_i} + \frac{1}{M_i} \sum_{k=1}^n P_{L_{0k}} \Delta \mu - \frac{E'_{q_i}}{M_i} \Delta I_{q_i} + \frac{X'_{d_i} I_{d_i}}{M_i} \Delta I_{q_i} + \frac{X'_{d_i} I_{q_i}}{M_i} \Delta I_{d_i} \quad (3.19b)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{I_{q_i}}{M_i} \Delta E'_{q_i} - \frac{E'_{d_i}}{M_i} \Delta I_{d_i} - \frac{I_{d_i}}{M_i} \Delta E'_{d_i} - \frac{X'_{q_i} I_{d_i}}{M_i} \Delta I_{q_i} - \frac{X'_{q_i} I_{q_i}}{M_i} \Delta I_{d_i} - \frac{D_i}{M_i} \Delta \omega \\ \Delta E'_{q_i} = & - \frac{\Delta E'_{q_i}}{T'_{d0_i}} - \frac{(X_{d_i} - X'_{d_i}) \Delta I_{d_i}}{T'_{d0_i}} + \frac{\Delta E_{fd_i}}{T'_{d0_i}} \end{aligned} \quad (3.19c)$$

$$\Delta \dot{E}'_{d_i} = -\frac{\Delta E'_{d_i}}{T'_{q0i}} + \frac{(X_{q_i} - X'_{q_i})\Delta I_{q_i}}{T'_{q0i}} \quad (3.19d)$$

$$\Delta \dot{E}_{f_{d_i}} = -\frac{\Delta E_{f_{d_i}}}{T_{A_i}} + \frac{K_{A_i}}{T_{A_i}}(\Delta V_{ref} - \Delta V_i) \quad (3.19e)$$

Escrevendo estas equações na notação de matrizes tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta}_i \\ \Delta \dot{\omega}_i \\ \Delta \dot{E}'_{q_i} \\ \Delta \dot{E}'_{d_i} \\ \Delta \dot{E}_{f_{d_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-D_i}{M_i} & \frac{-I_{q_i}}{M_i} & \frac{-I_{d_i}}{M_i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{T'_{d0i}} & 0 & \frac{1}{T'_{d0i}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T'_{q0i}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{T_{A_i}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_i \\ \Delta \omega_i \\ \Delta E'_{q_i} \\ \Delta E'_{d_i} \\ \Delta E_{f_{d_i}} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{I_{q_i}(X'_{d_i} - X'_{q_i}) - E'_{d_i}}{M_i} & \frac{I_{d_i}(X'_{d_i} - X'_{q_i}) - E'_{q_i}}{M_i} \\ \frac{(X_{d_i} - X'_{d_i})}{T'_{d0i}} & 0 \\ 0 & \frac{(X_{q_i} - X'_{q_i})}{T'_{q0i}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_{d_i} \\ \Delta I_{q_i} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_{A_i}}{T_{A_i}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{A_i}}{T_{A_i}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P_{m_i} \\ \Delta V_{ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^n \frac{P_{L0k}}{M_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta \mu \quad (3.20)$$

Denotando  $\begin{bmatrix} \Delta I_{d_i} \\ \Delta I_{q_i} \end{bmatrix} = \Delta I_{g_i}$ ,  $\begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} = \Delta V_{g_i}$  e  $\begin{bmatrix} \Delta P_{m_i} \\ \Delta V_{ref} \end{bmatrix} = \Delta u_i$ , obtém-se:

$$\Delta \dot{X}_i = A_{1i}\Delta X_i + A_{2i}\Delta I_{g_i} + A_{3i}\Delta V_{g_i} + E_i\Delta u_i + A_{4i}\Delta \mu \quad (3.21)$$

Para um sistema com  $m$  máquinas, a equação (3.21) pode ser expressa conforme (3.22):

$$\Delta \dot{X}_i = A_1\Delta X_i + A_2\Delta I_{g_i} + A_3\Delta V_{g_i} + E\Delta u_i + A_4\Delta \mu \quad (3.22)$$

onde  $A_1, A_2, A_3$  e  $E$  são matrizes bloco diagonais, e  $A_4$  tem a forma  $\begin{bmatrix} A_{41} \\ \vdots \\ A_{4m} \end{bmatrix}$ . Agora, a linearização das equações algébricas do estator dadas em (3.17) resulta em:

$$0 = \Delta E'_{d_i} - \text{sen}(\delta_i - \theta_i)\Delta V_i - V_i \cos(\delta_i - \theta_i)\Delta \delta_i + V_i \cos(\delta_i - \theta_i)\Delta \theta_i \quad (3.23a)$$

$$+ R_{s_i}\Delta I_{d_i} + X'_{q_i}\Delta I_{q_i}$$

$$0 = \Delta E'_{q_i} - \cos(\delta_i - \theta_i)\Delta V_i + V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i)\Delta \delta_i - V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i)\Delta \theta_i \quad (3.23b)$$

$$- R_{s_i}\Delta I_{q_i} - X'_{d_i}\Delta I_{d_i}$$

Escrevendo estas equações na forma de matriz e utilizando uma notação compacta,

$$0 = \begin{bmatrix} -V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_i \\ \Delta \omega_i \\ \Delta E'_{q_i} \\ \Delta E'_{d_i} \\ \Delta E_{fd_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +R_{s_i} & X'_{q_i} \\ -X'_{d_i} & -R_{s_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_{d_i} \\ \Delta I_{q_i} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & -\text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ -V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & -\cos(\delta_i - \theta_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$0 = B_{1i}\Delta X_i + B_{2i}\Delta I_{g_i} + B_{3i}\Delta V_{g_i} \quad (3.25)$$

que para o sistema multi-máquinas resulta em:

$$0 = B_1\Delta X_i + B_2\Delta I_{g_i} + B_3\Delta V_{g_i} \quad (3.26)$$

onde  $B_1, B_2$  e  $B_3$  são matrizes bloco diagonais. Linearizando as equações da rede (3.18a) e (3.18b) referentes aos geradores, tem-se que:

$$0 = V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i)\Delta I_{d_i} + I_{d_i} \text{sen}(\delta_i - \theta_i)\Delta V_i - I_{d_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i)\Delta \theta_i + \quad (3.27a)$$

$$I_{d_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i)\Delta \delta_i + V_i \cos(\delta_i - \theta_i)\Delta I_{q_i} + I_{q_i} \cos(\delta_i - \theta_i)\Delta V_i$$

$$- I_{q_i} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i)\Delta \delta_i + I_{q_i} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i)\Delta \theta_i - \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \right] \Delta V_i$$

$$\begin{aligned}
& -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n [Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k})] \Delta V_k + \left[ V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \right] \Delta \theta_i \\
& -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n [V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k})] \Delta \theta_k - 2V_i Y_{i,i} \cos(-\alpha_{i,i}) \Delta V_i + P_{L_{0i}} \Delta \mu
\end{aligned}$$

$$0 = V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \Delta I_{d_i} + I_{d_i} \cos(\delta_i - \theta_i) \Delta V_i + I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \Delta \theta_i \quad (3.27b)$$

$$-I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \Delta \delta_i - V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \Delta I_{q_i} - I_{q_i} \sin(\delta_i - \theta_i) \Delta V_i$$

$$-I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \Delta \delta_i + I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \Delta \theta_i - \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \right] \Delta V_i$$

$$-V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n [Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k})] \Delta V_k - \left[ V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \right] \Delta \theta_i$$

$$+V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n [V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k})] \Delta \theta_k - 2V_i Y_{i,i} \sin(-\alpha_{i,i}) \Delta V_i + Q_{L_{0i}} \Delta \mu$$

que colocando em forma de matriz obtém-se (3.29) (na página seguinte). Rearranjando para um sistema com  $m$ -máquinas:

$$\begin{aligned}
0 = & \begin{bmatrix} C_{11} & & & \\ & C_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{1m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \vdots \\ \Delta X_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{21} & & & \\ & C_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_{g1} \\ \Delta I_{g2} \\ \vdots \\ \Delta I_{gm} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \left( \begin{matrix} P_{L_{0i}} \\ Q_{L_{0i}} \end{matrix} \right) \\ \vdots \\ \left( \begin{matrix} P_{L_{0m}} \\ Q_{L_{0m}} \end{matrix} \right) \end{bmatrix} \cdot \Delta \mu + \begin{bmatrix} C_{3,11} & C_{3,12} & \cdots & C_{3,1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{3,m1} & C_{3,m2} & \cdots & C_{3,mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_{g1} \\ \Delta V_{g2} \\ \vdots \\ \Delta V_{gm} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} C_{4,1m+1} & C_{4,1m+2} & \cdots & C_{4,1n} \\ C_{4,2m+1} & C_{4,2m+2} & \cdots & C_{4,2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{4,mm+1} & C_{4,mm+2} & \cdots & C_{4,mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_{lm+1} \\ \Delta V_{lm+2} \\ \vdots \\ \Delta V_{ln} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = & \begin{bmatrix} I_{d_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{q_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) - I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta \delta_i & \Delta \omega_i & \Delta E'_{d_i} & \Delta E'_{q_i} & \Delta E'_{fd_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) & V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \\ V_i \cos(\delta_i - \theta_i) & -V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta J_{d_i} \\ \Delta J_{q_i} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \\ -I_{d_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \\ +V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \\ +I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \\ -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \\ +I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \\ -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ -V_i V_j Y_{i,j} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ V_i V_j Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{d_i} \sin(\delta_i - \theta_i) \\ +I_{q_i} \cos(\delta_i - \theta_i) \\ -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ -2V_i Y_{i,i} \cos(-\alpha_{i,i}) \\ I_{d_i} \cos(\delta_i - \theta_i) \\ -I_{q_i} \sin(\delta_i - \theta_i) \\ -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ -2V_i Y_{i,i} \sin(-\alpha_{i,i}) \\ -V_i Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ -V_i Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ -V_i Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ -V_i Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ -V_i Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ -V_i Y_{i,j} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta V_i \end{bmatrix} \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \begin{bmatrix} -V_i V_k Y_{i,k} \sin(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \\ V_i V_k Y_{i,k} \cos(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \\
& + \sum_{\substack{j=m+1 \\ k \neq i}}^n \begin{bmatrix} -V_i V_j Y_{i,j} \sin(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ V_i V_j Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_j \\ \Delta V_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{L_{0i}} \\ Q_{L_{0i}} \end{bmatrix} \Delta \mu
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Colocando na notação utilizada anteriormente:

$$0 = C_1 \Delta x + C_2 \Delta I_g + C_3 \Delta V_g + C_4 \Delta V_l + C_5 \Delta \mu \quad (3.30)$$

onde  $V_{lj} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_j \\ \Delta V_j \end{bmatrix}$  e  $j = m+1, \dots, n$  para as barras de carga. Nota-se ainda que  $C_1$  e  $C_2$  são matrizes bloco diagonais e  $C_3$  e  $C_4$  são matrizes cheias. Linearizando as equações da rede (3.18c) e (3.18d) para as barras de carga (PQ), obtém-se:

$$0 = - \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n V_k Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \right] \Delta V_j \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} & -V_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n [Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k})] \Delta V_k + \left[ V_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n V_k Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \right] \Delta \theta_j \\ & -V_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n [V_k Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k})] \Delta \theta_k + P_{L0j} \Delta \mu \end{aligned}$$

$$0 = - \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n V_k Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \right] \Delta V_j \quad (3.31b)$$

$$\begin{aligned} & -V_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n [Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k})] \Delta V_k - \left[ V_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n V_k Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \right] \Delta \theta_j \\ & +V_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n [V_k Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k})] \Delta \theta_k + Q_{L0j} \Delta \mu \end{aligned}$$

Reescrevendo (3.31a) e (3.31b) na forma matricial e na forma de notação compacta:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^m \begin{bmatrix} -V_j V_k Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) & -V_j Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \\ V_j V_k Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) & -V_j Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \neq j}}^n \begin{bmatrix} -V_j V_k Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) & -V_j Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \\ V_j V_k Y_{j,k} \cos(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) & -V_j Y_{j,k} \text{sen}(\theta_j - \theta_k - \alpha_{j,k}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_k \\ \Delta V_k \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} P_{L0j} \\ Q_{L0j} \end{bmatrix} \Delta \mu \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para um sistema com  $m$ -máquinas:

$$\begin{aligned}
 0 = & \begin{bmatrix} D_{1,m+1,1} & D_{1,m+1,2} & \cdots & D_{1,m+1,m} \\ D_{1,m+2,1} & D_{1,m+2,2} & \cdots & D_{1,m+2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{1,n,1} & D_{1,n,2} & \cdots & D_{1,n,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_{g1} \\ \Delta V_{g2} \\ \vdots \\ \Delta V_{gm} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} D_{2,m+1,m+1} & D_{2,m+1,m+2} & \cdots & D_{2,m+1,n} \\ D_{2,m+2,m+1} & D_{2,m+2,m+2} & \cdots & D_{2,m+2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{2,n,m+1} & D_{2,n,m+2} & \cdots & D_{2,n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_{l_{m+1}} \\ \Delta V_{l_{m+2}} \\ \vdots \\ \Delta V_{l_n} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} P_{L_{0m+1}} \\ Q_{L_{0m+1}} \\ \vdots \\ P_{L_{0n}} \\ Q_{L_{0n}} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} P_{L_{0n}} \\ Q_{L_{0n}} \end{array} \right) \end{bmatrix} \Delta \mu
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Colocando na notação compacta:

$$0 = D_1 \Delta V_g + D_2 \Delta V_l + D_3 \Delta \mu \tag{3.34}$$

Logo, escrevendo (3.22), (3.26), (3.30) e (3.34) juntas tem-se:

$$\Delta \dot{x} = A_1 \Delta x + A_2 \Delta I_g + A_3 \Delta V_g + E \Delta u + A_4 \Delta \mu \tag{3.35a}$$

$$0 = B_1 \Delta x + B_2 \Delta I_g + B_3 \Delta V_g \tag{3.35b}$$

$$0 = C_1 \Delta x + C_2 \Delta I_g + C_3 \Delta V_g + C_4 \Delta V_l + C_5 \Delta \mu \tag{3.35c}$$

$$0 = D_1 \Delta V_g + D_2 \Delta V_l + D_3 \Delta \mu \tag{3.35d}$$

onde  $T$  denota a transposição da matriz:

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} x_1^T & \cdots & x_m^T \end{bmatrix}^T \\
 x_i &= \begin{bmatrix} \delta_i & \omega_i & E'_{qi} & E'_{di} & E'_{fdi} \end{bmatrix}^T \\
 I_g &= \begin{bmatrix} I_{d1} & I_{q1} & \cdots & I_{dm} & I_{qm} \end{bmatrix}^T \\
 V_g &= \begin{bmatrix} \theta_1 & V_1 & \cdots & \theta_m & V_m \end{bmatrix}^T \\
 V_l &= \begin{bmatrix} \theta_{m+1} & V_{m+1} & \cdots & \theta_n & V_n \end{bmatrix}^T \\
 u &= \begin{bmatrix} u_1^T & \cdots & u_m^T \end{bmatrix}^T \\
 u_i &= \begin{bmatrix} P_{m_i} & V_{ref_i} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

Este é o modelo diferencial-algébrico linearizado para um sistema multi-máquinas, com gerador de 4ª ordem e AVR de primeira ordem. Agora, rearranjando as equações (3.35) para a utilização no conjunto de equações (3.8), para  $\dot{x} = f(x, y, \mu)$  e  $0 = g(x, y, \mu)$ , onde  $y = [\Delta I_g \ \Delta V_g \ \Delta V_l]^T$ , e  $x$  definido anteriormente, tem-se:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A_1 \Delta x + \begin{bmatrix} A_2 & A_3 & \emptyset \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_g \\ \Delta V_g \\ \Delta V_l \end{bmatrix} + A_4 \Delta \mu \\ 0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} B_2 & B_3 & \emptyset \\ C_2 & C_3 & C_4 \\ \emptyset & D_1 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_g \\ \Delta V_g \\ \Delta V_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ C_5 \\ D_3 \end{bmatrix} \Delta \mu \end{cases} \quad (3.36)$$

Obtém-se então a partir destas equações o conjunto (3.8). Igualando as notações pode-se dizer que:

$$\begin{aligned} A &= A_1; & B &= \begin{bmatrix} A_2 & A_3 & \emptyset \end{bmatrix}; \\ C &= \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} & e \quad D &= \begin{bmatrix} B_2 & B_3 & \emptyset \\ C_2 & C_3 & C_4 \\ \emptyset & D_1 & D_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Obtidas as equações, o método de Newton é formulado conforme (3.10), de forma que, para a montagem da matriz Jacobiana deste método,  $J_N$ , são utilizadas as derivadas da matriz Jacobiana do sistema linearizado,  $J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ . Estas estão descritas no apêndice A visto que são muito extensas para serem aqui apresentadas.

Para o início do programa, um fluxo de carga é calculado e a partir deste, as condições iniciais do sistema são obtidas conforme apresentado em (SAUER; PAI, 1998). Já para as condições iniciais dos autovetores, as duas últimas equações do conjunto (3.8) são previamente calculadas, fixando-se os valores descritos anteriormente, obtendo-se assim uma estimativa dos mesmos. Uma técnica de esparsidade utilizada para o melhoramento da convergência é o Esquema RR(C)U (*Row-wise Representation Complete and Unordered*), cuja descrição detalhada pode ser encontrada em (PISSANETZKY, 2006). Após a convergência do método de Newton, os autovalores do sistema com o carregamento encontrado são calculados com a finalidade de garantir que não há autovalores no semiplano direito, garantindo assim que o ponto encontrado caracteriza de fato a primeira BH ocorrida no sistema.

### 3.2.3 Margem de Estabilidade Devido ao Ponto de Bifurcação de Hopf Calculado

Após o cálculo do ponto de bifurcação através do método de Newton e das equações (3.36), obtém-se o valor de  $\mu$ , que é o carregamento do sistema quando ocorre a BH. De



posse deste, obtém-se a margem de estabilidade devido a BH. A Figura 3.5 ilustra essa margem.

Através desta pode-se ainda observar que a margem devido ao ponto de BH, quando ocorrido na parte estável da curva  $P - V$ , é menor que a margem obtida para uma bifurcação sela-nó (apresentada no capítulo anterior). Dessa forma evidencia-se a necessidade da estimativa desta margem, visto que a margem de estabilidade utilizada nos centros de operação pode ser maior do que a margem real de estabilidade do sistema, conferindo a este uma falsa segurança (CUTSEM; VOURNAS, 2003).

Ainda, esta seção apresenta um fluxograma do processo de determinação da margem de estabilidade de um sistema para a previsão do ponto de bifurcação de Hopf. A Figura 3.4 ilustra esse processo.

Como pode ser observado no fluxograma, após a modelagem do sistema, segue o cálculo do fluxo de potência para obtenção de valores utilizados no cálculo das condições iniciais referentes ao sistema, detalhado em (SAUER; PAI, 1998). Já para o cálculo dos autovetores utilizados como condições iniciais, utilizam-se as 2 últimas equações de (3.8), encontrando uma das possíveis soluções para as mesmas, supondo que  $v_R$  e  $v_I$  possuem a mesma magnitude,  $v_I$  possui sinal negativo alternado entre seus valores, caracterizando o autovetor complexo conjugado, e ainda admitindo-se  $\omega_I = 0$ .

Segue então a formulação do método de Newton e a montagem de sua matriz Jacobiana, apresentada na equação (3.10). O método de Newton possui um critério de parada com erro absoluto igual a 0.001, ou seja, a diferença entre o incremento das variáveis da iteração atual e da anterior deve ser menor que 0.001 e ainda estes valores devem garantir que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas, caso o algoritmo tenha convergência, a metodologia faz o cálculo tradicional de autovalores do sistema visando garantir que não haja autovalores no semiplano direito para o carregamento encontrado. Caso o algoritmo tenha divergência, o programa recalcula as condições iniciais do sistema resolvendo apenas as condições de equilíbrio, que referem-se às duas primeiras equações do conjunto (3.8), para então obter uma estimativa mais próxima do resultado. Se mesmo assim o programa não apresentar convergência, isto implica que não foram encontradas bifurcações de Hopf no sistema.

Ainda, se, após o cálculo tradicional de autovalores, este encontrar autovalores no semi-plano direito, o programa proposto recalcula os autovetores das condições iniciais para o autovalor encontrado no semiplano direito, e utiliza os mesmos como condição inicial, de forma a garantir o resultado da metodologia, ou seja, as condições iniciais adotadas serão referentes ao autovalor da bifurcação. Caso não haja autovalores no semi-plano direito, isto significa que o ponto de BH encontrado é o primeiro ponto de bifurcação do sistema, e então o algoritmo encontra a margem de carregamento do sistema a partir do parâmetro de carregamento fornecido pelo programa.

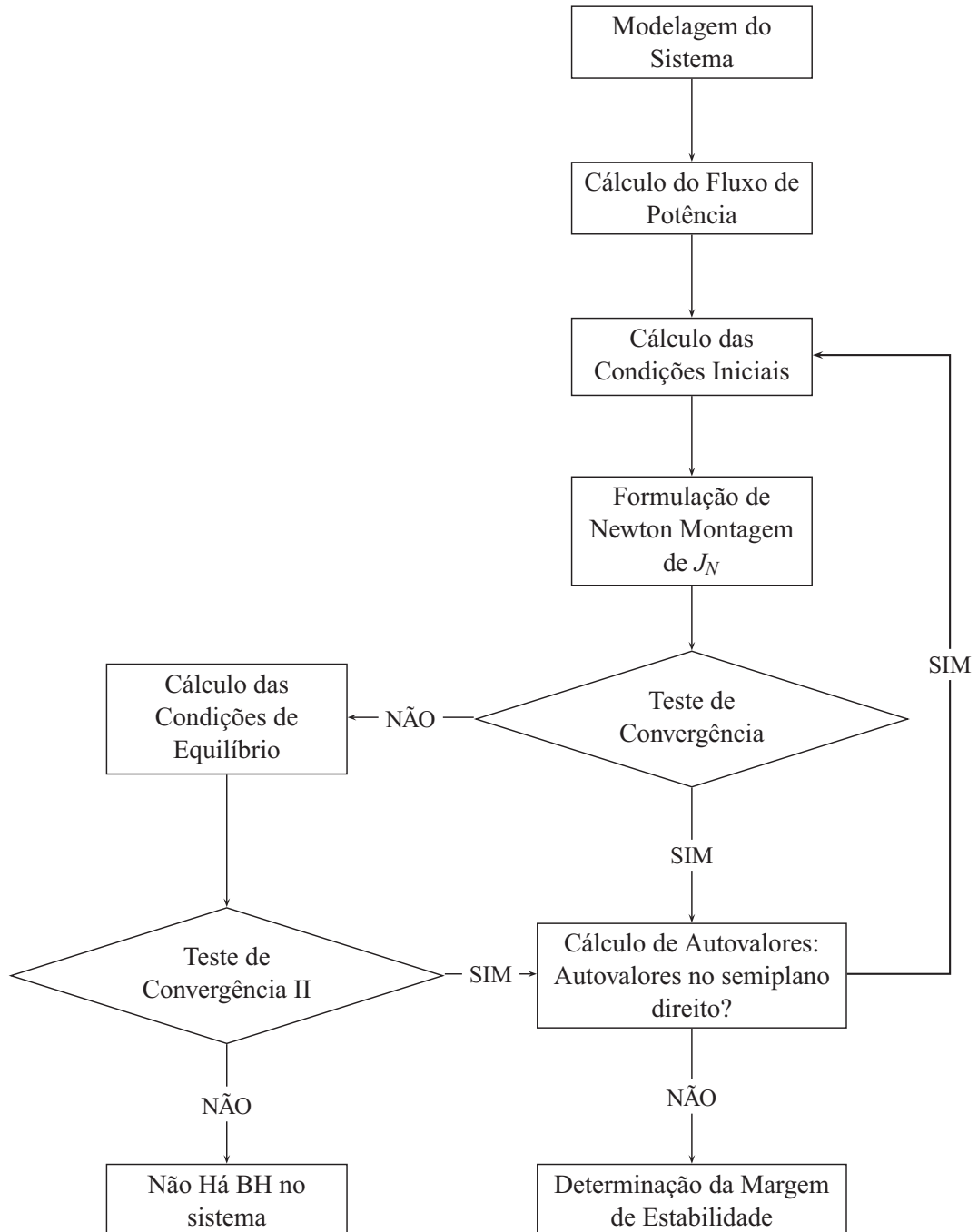


Figura 3.4: Algoritmo Completo para a determinação da Margem de Estabilidade do Sistema

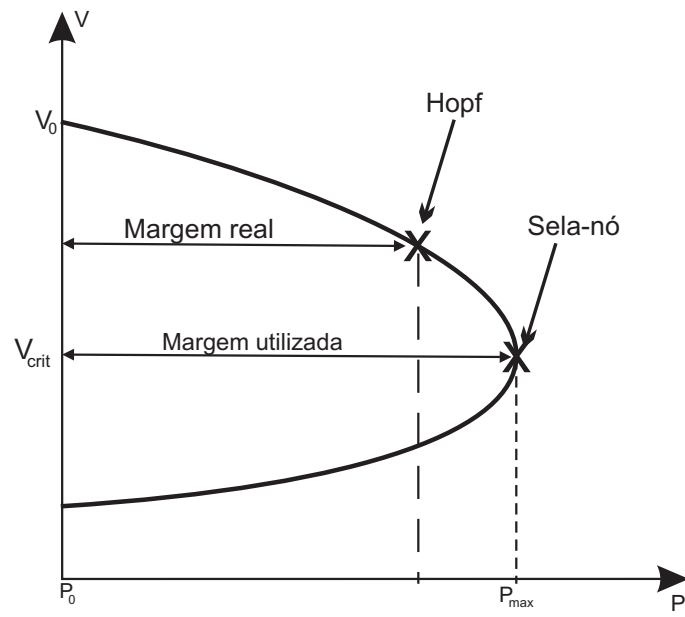


Figura 3.5: Margem de Estabilidade devido à Hopf e à Sela-Nó

## 4 RESULTADOS

Neste Capítulo serão apresentados os resultados obtidos da predição da margem de estabilidade devido a bifurcações de Hopf utilizando o método clássico e também a metodologia proposta. Para tal avaliação foram utilizados os sistemas apresentados no Capítulo A. Ressalta-se que todos os testes foram realizados em um computador de processador Intel Core 2 de 1.86GHz e 4GB de RAM e ainda que toda a implementação do algoritmo foi feita em MATLAB (MATLAB, 2002). Os dados dos sistemas utilizados estão detalhados no Anexo A.

### 4.1 Método Clássico

O método clássico apresentado no Capítulo 2 calcula efetivamente os autovalores do sistema a cada passo de incremento de carga. Baseado em um método iterativo, o método clássico, a cada iteração do cálculo da curva  $P - V$ , ou seja a cada incremento de carga dado no sistema, faz o cálculo dos autovalores do sistema. Este método apresenta um passo variável, que é reduzido quando a parte real de algum autovalor aproxima-se do zero, com a finalidade de encontrar este ponto com uma maior precisão.

Ainda, este método não utiliza nenhuma metodologia para o tratamento da esparsidade da matriz, o que poderia reduzir o seu esforço computacional, e por consequência, seu o tempo de execução.

#### 4.1.1 Sistema de Duas Áreas

Os resultados desta seção são referentes ao sistema descrito em (KUNDUR, 1994). As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam os autovalores do sistema para o caso base e para o ponto de bifurcação, respectivamente. As Figuras 4.1 e 4.2 ilustram o autovalor associado à bifurcação de Hopf no plano complexo, e também seu deslocamento do semiplano esquerdo para o semiplano direito a cada incremento de carga e o ciclo limite existente no ponto da BH, respectivamente.

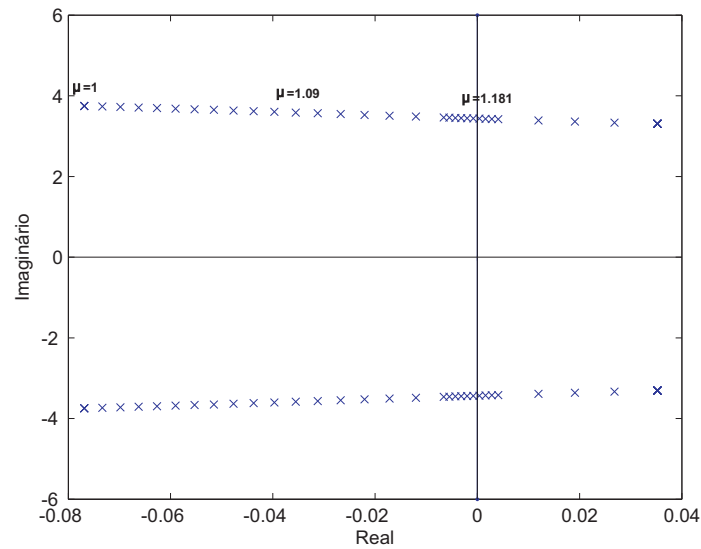


Figura 4.1: Deslocamento do autovalor para o semiplano direito

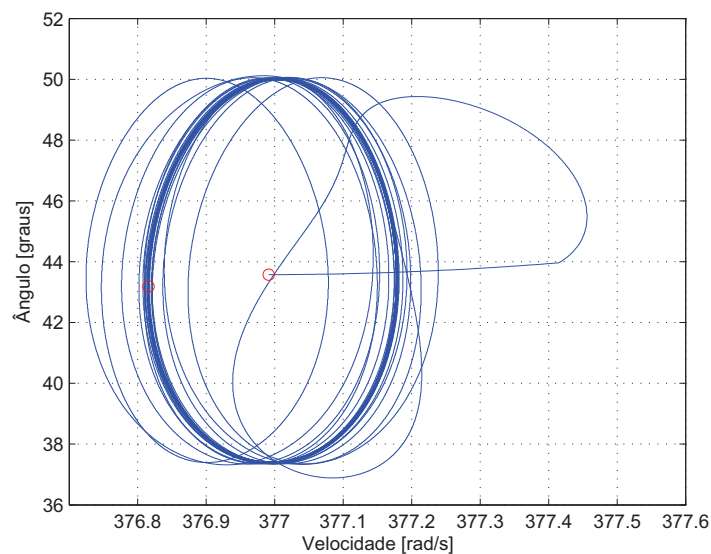


Figura 4.2: Comportamento do Sistema no Ponto da Bifurcação de Hopf

A Figura 4.3 ilustra a curva  $P - V$  do sistema de duas áreas apontando a bifurcação de Hopf e a bifurcação sela-nó, e suas respectivas margens de estabilidade. A diferença entre estas margens reside no fato de que uma apresenta a margem de estabilidade devido ao máximo carregamento de potência suportado pelo sistema e a outra devido ao aparecimento de oscilações crescentes no mesmo. Esta Figura também demonstra o carregamento no ponto de BH que para este caso foi de  $\mu = 1.181$ , ou seja, dando uma margem de 18% a partir do caso base para a ocorrência destas oscilações. Com base nestes dados, a Tabela 4.3 apresenta o tempo de simulação a cada iteração e o tempo total do método para encontrar o ponto de BH.

Tabela 4.1: Autovalores do sistema de testes para o caso base

Autovalor	Parte Real	Parte Imaginária	Valor Absoluto	Amortecimento [%]	Freq. [Hz]
1	-16.7856	0.000	16.786	100.0	0.00
2	-17.2496	0.000	17.250	100.0	0.00
3	-17.7005	0.000	17.700	100.0	0.00
4	-17.7174	0.000	17.717	100.0	0.00
5	-0.4893	6.500	6.519	7.5	1.03
6	-0.4893	-6.500	6.519	7.5	1.03
7	-0.4881	6.689	6.707	7.3	1.06
8	-0.4881	-6.689	6.707	7.3	1.06
9	-0.0769	3.748	3.748	2.1	0.60
10	-0.0769	-3.748	3.748	2.1	0.60
11	-5.4925	0.000	5.493	100.0	0.00
12	-5.5445	0.000	5.545	100.0	0.00
13	-4.1729	0.000	4.173	100.0	0.00
14	-2.9625	0.000	2.962	100.0	0.00
15	-1.8251	0.000	1.825	100.0	0.00
16	-0.9936	0.000	0.994	100.0	0.00
17	-0.5259	0.000	0.526	100.0	0.00
18	-0.4954	0.000	0.495	100.0	0.00
19	-0.0000	0.000	0.000	0.0	0.00
20	-0.0000	-0.000	0.000	0.0	0.00

Tabela 4.2: Autovalores do sistema de testes para o caso de bifurcação de Hopf

Autovalor	Parte Real	Parte Imaginária	Valor Absoluto	Amortecimento [%]	Freq. [Hz]
1	-16.5293	0.000	16.529	100.0	0.00
2	-17.2207	0.000	17.221	100.0	0.00
3	-17.7023	0.000	17.702	100.0	0.00
4	-17.7158	0.000	17.716	100.0	0.00
5	-0.4183	6.553	6.566	6.4	1.04
6	-0.4183	-6.553	6.566	6.4	1.04
7	-0.4203	6.706	6.719	6.3	1.07
8	-0.4203	-6.706	6.719	6.3	1.07
9	0.0000	3.436	3.436	0.0	0.55
10	0.0000	-3.436	3.436	0.0	0.55
11	-5.5952	0.000	5.595	100.0	0.00
12	-5.6358	0.000	5.636	100.0	0.00
13	-4.1648	0.000	4.165	100.0	0.00
14	-2.4555	1.119	2.699	91.0	0.18
15	-2.4555	-1.119	2.699	91.0	0.18
16	-1.1385	0.000	1.138	100.0	0.00
17	-0.5607	0.000	0.561	100.0	0.00
18	-0.5392	0.000	0.539	100.0	0.00
19	-0.0000	0.000	0.000	100.0	0.00
20	0.0000	0.000	0.000	-100.0	0.00

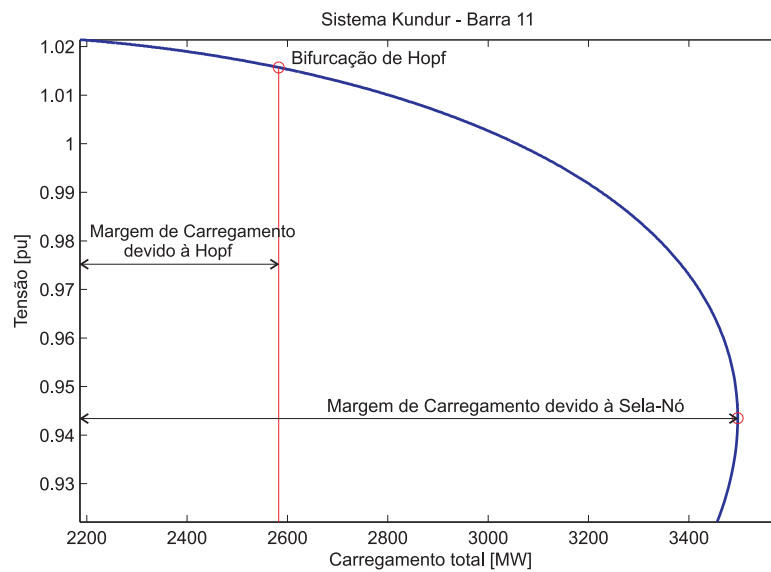


Figura 4.3: Margem de Estabilidade Calculada pelo Método Clássico Devido à BH

Visando apresentar a melhoria introduzida em qualquer metodologia que envolva matrizes esparsas, uma técnica de esparsidade foi aplicada ao método clássico e seu tempo de execução foi comparado à metodologia sem esta técnica, conforme apresentado na Tabela 4.3. Nesta, o número de iterações refere-se a quantas vezes o método do Newton-Raphson juntamente com o cálculo dos autovalores é realizado. Pode-se observar através da Tabela 4.3 que a aplicação da metodologia de esparsidade no método clássico reduz seu tempo computacional pela metade.

Tabela 4.3: Avaliação do Método Clássico para o Sistema de Duas Áreas

Método	Nº iterações	Tempo por iteração [ms]	Tempo total[ms]
Clássico	24	0.34	8.16
Clássico com RR(C)U	24	0.15	3.6

#### 4.1.2 Sistema New England 39 Barras

Os resultados desta seção referem-se ao modelo reduzido do sistema de potência em New England. As Tabelas 4.4 e 4.5 apresentam os autovalores do sistema para o caso base e para o ponto de bifurcação, respectivamente. A Figura 4.4 ilustra o autovalor associado à bifurcação de Hopf no plano complexo, e também seu deslocamento do semiplano esquerdo para o semiplano direito a cada incremento de carga.

A curva  $P - V$  deste sistema está ilustrada na Figura 4.5 ressaltando mais uma vez a bifurcação de Hopf e a bifurcação sela-nó, e suas respectivas margens de estabilidade. Esta também apresenta o carregamento no ponto de BH sendo este de  $\mu = 1.234$ , dando uma margem de 23% a partir do caso base para a ocorrência das oscilações devido a Hopf.

Tabela 4.4: Autovalores do sistema de testes para o caso base

Autovalor	Parte Real	Parte Imaginária	Valor Absoluto	Amortecimento [%]	Freq. [Hz]
1	-27.0861	0.000	27.086	100.0	0.00
2	-64.4249	0.000	64.425	100.0	0.00
3	-65.6001	0.000	65.600	100.0	0.00
4	-66.2853	0.000	66.285	100.0	0.00
5	-66.4245	0.000	66.424	100.0	0.00
6	-66.5083	0.000	66.508	100.0	0.00
7	-66.5616	0.000	66.562	100.0	0.00
8	-66.5961	0.000	66.596	100.0	0.00
9	-66.6276	0.000	66.628	100.0	0.00
10	-66.6594	0.000	66.659	100.0	0.00
11	-66.6450	0.000	66.645	100.0	0.00
12	-0.4381	10.574	10.583	4.1	1.68
13	-0.4381	-10.574	10.583	4.1	1.68
14	-0.4207	10.210	10.219	4.1	1.62
15	-0.4207	-10.210	10.219	4.1	1.62
16	-0.4524	9.651	9.661	4.7	1.54
17	-0.4524	-9.651	9.661	4.7	1.54
18	-2.6827	7.599	8.059	33.3	1.21
19	-2.6827	-7.599	8.059	33.3	1.21
20	-0.3016	8.676	8.681	3.5	1.38
21	-0.3016	-8.676	8.681	3.5	1.38
22	-0.3535	8.034	8.042	4.4	1.28
23	-0.3535	-8.034	8.042	4.4	1.28
24	-0.1957	7.486	7.488	2.6	1.19
25	-0.1957	-7.486	7.488	2.6	1.19
26	-0.4233	7.143	7.156	5.9	1.14
27	-0.4233	-7.143	7.156	5.9	1.14
28	-8.0527	0.000	8.053	100.0	0.00
29	-6.9770	0.000	6.977	100.0	0.00
30	-0.2384	4.721	4.727	5.0	0.75
31	-0.2384	-4.721	4.727	5.0	0.75
32	-4.8732	0.000	4.873	100.0	0.00
33	-2.0477	0.480	2.103	97.4	0.08
34	-2.0477	-0.480	2.103	97.4	0.08
35	-1.5149	0.000	1.515	100.0	0.00
36	-1.4781	0.000	1.478	100.0	0.00
37	-1.2321	0.000	1.232	100.0	0.00
38	-1.0683	0.005	1.068	100.0	0.00
39	-1.0683	-0.005	1.068	100.0	0.00
40	-1.0347	0.000	1.035	100.0	0.00
41	-0.5020	0.000	0.502	100.0	0.00
42	-0.4249	0.000	0.425	100.0	0.00
43	-0.3000	0.000	0.300	100.0	0.00
44	-0.1028	0.000	0.103	100.0	0.00
45	-0.2450	0.000	0.245	100.0	0.00
46	-0.1859	0.000	0.186	100.0	0.00
47	-0.1933	0.000	0.193	100.0	0.00
48	-0.1574	0.000	0.157	100.0	0.00
49	0.0000	0.000	0.000	-100.0	0.00
50	-0.0000	0.000	0.000	100.0	0.00



Tabela 4.5: Autovalores do sistema de testes para o caso de bifurcação de Hopf

Autovalor	Parte Real	Parte Imaginária	Valor Absoluto	Amortecimento [%]	Freq. [Hz]
1	-23.3494	0.000	23.349	100.0	0.00
2	-63.4894	0.000	63.489	100.0	0.00
3	-65.6804	0.000	65.680	100.0	0.00
4	-66.2488	0.000	66.249	100.0	0.00
5	-66.3845	0.000	66.384	100.0	0.00
6	-66.4982	0.000	66.498	100.0	0.00
7	-66.5459	0.000	66.546	100.0	0.00
8	-66.5895	0.000	66.590	100.0	0.00
9	-66.6270	0.000	66.627	100.0	0.00
10	-66.6587	0.000	66.659	100.0	0.00
11	-66.6443	0.000	66.644	100.0	0.00
12	-7.9659	0.000	7.966	100.0	0.00
13	-7.0060	0.000	7.006	100.0	0.00
14	-0.4296	10.041	10.050	4.3	1.60
15	-0.4296	-10.041	10.050	4.3	1.60
16	-0.3864	9.723	9.730	4.0	1.55
17	-0.3864	-9.723	9.730	4.0	1.55
18	-2.3387	7.955	8.292	28.2	1.27
19	-2.3387	-7.955	8.292	28.2	1.27
20	-0.4025	9.210	9.219	4.4	1.47
21	-0.4025	-9.210	9.219	4.4	1.47
22	-0.2534	8.640	8.643	2.9	1.38
23	-0.2534	-8.640	8.643	2.9	1.38
24	0.0000	7.179	7.179	0.0	1.14
25	0.0000	-7.179	7.179	0.0	1.14
26	-0.1436	7.261	7.262	2.0	1.16
27	-0.1436	-7.261	7.262	2.0	1.16
28	-0.3867	7.030	7.041	5.5	1.12
29	-0.3867	-7.030	7.041	5.5	1.12
30	-4.1838	3.277	5.314	78.7	0.52
31	-4.1838	-3.277	5.314	78.7	0.52
32	-0.1879	4.397	4.401	4.3	0.70
33	-0.1879	-4.397	4.401	4.3	0.70
34	-1.9981	0.000	1.998	100.0	0.00
35	-1.7864	0.000	1.786	100.0	0.00
36	-1.4004	0.000	1.400	100.0	0.00
37	-0.9985	0.000	0.999	100.0	0.00
38	-1.0145	0.000	1.015	100.0	0.00
39	-1.0445	0.002	1.045	100.0	0.00
40	-1.0445	-0.002	1.045	100.0	0.00
41	-0.6535	0.000	0.654	100.0	0.00
42	-0.4433	0.000	0.443	100.0	0.00
43	-0.3458	0.000	0.346	100.0	0.00
44	-0.3167	0.000	0.317	100.0	0.00
45	-0.1281	0.000	0.128	100.0	0.00
46	-0.1740	0.000	0.174	100.0	0.00
47	-0.2317	0.000	0.232	100.0	0.00
48	-0.2438	0.000	0.244	100.0	0.00
49	0.0000	0.000	0.000	-0.0	0.00
50	0.0000	-0.000	0.000	-0.0	0.00

A Tabela 4.6 apresenta o tempo de simulação a cada iteração e o tempo total do método para encontrar o ponto de BH com e sem a utilização da técnica de esparsidade. Nesta também, o número de iterações refere-se a quantas vezes o cálculo do Newton-Raphson juntamente com o cálculo dos autovalores é realizado.

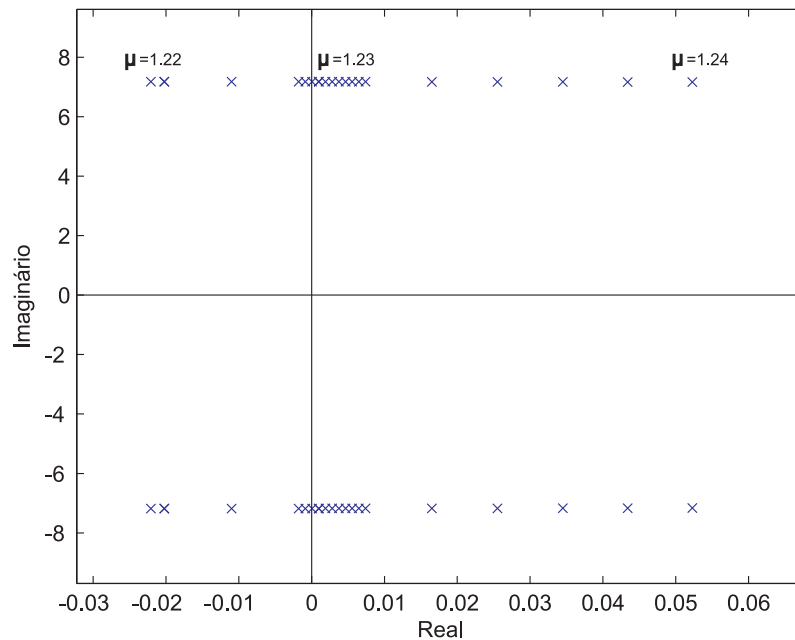


Figura 4.4: Deslocamento do autovalor para o semiplano direito

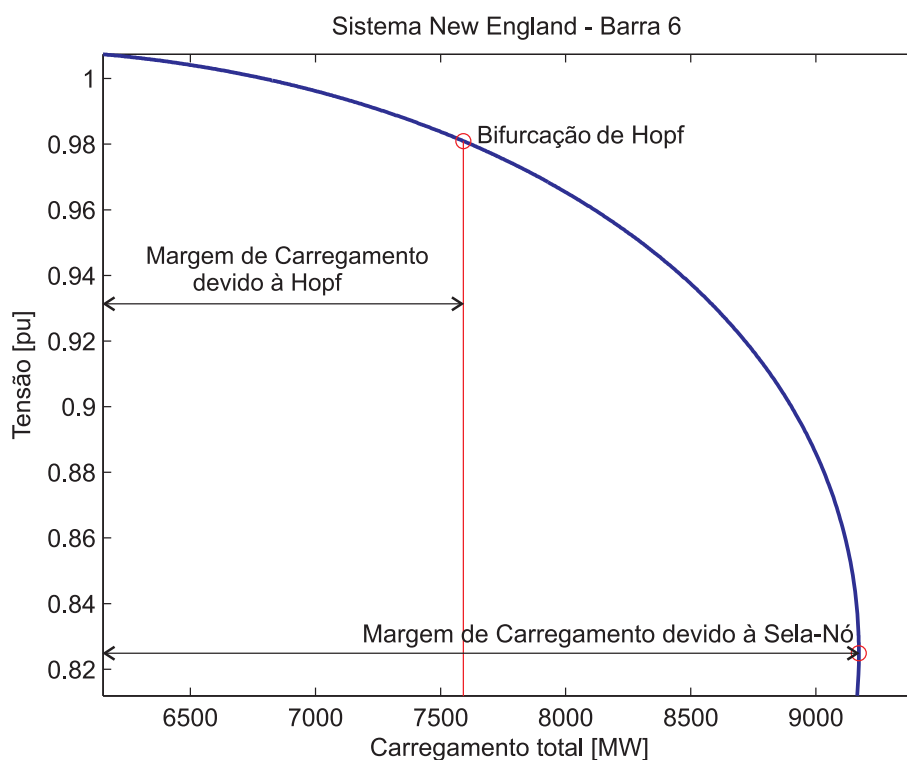


Figura 4.5: Margem de Estabilidade Calculada pelo Método Clássico Devido à BH

Tabela 4.6: Avaliação do Método Clássico para o Sistema New England

Método	Nº iterações	Tempo por iteração [ms]	Tempo total[ms]
Clássico	57	0.64	36.48
Clássico com RR(C)U	57	0.22	12.54

## 4.2 Metodologia Proposta

A metodologia proposta, apresentada no capítulo 3 realiza o cálculo do ponto de bifurcação através de um algoritmo que utiliza o método de Newton. As condições iniciais das equações de equilíbrio são dadas através de um cálculo prévio do fluxo de potência do sistema. A estimativa inicial para o ponto de bifurcação é dada pelo caso base, ou seja,  $\mu = 1$ , e as condições iniciais dos autovetores são dadas pela prévia resolução das equações que envolvem somente os mesmos, ou seja, (3.6) e (3.7), conforme descrito no Capítulo 3.

Foram realizados testes da metodologia proposta, levando em consideração diversos casos como apresentado na Tabela 4.7. Estes casos incluem a utilização ou não da técnica de esparsidade, e o cálculo prévio ou não das condições iniciais dos autovetores. Ressalta-se que a metodologia proposta é o **Caso I**. Como critério de convergência no método de Newton, adotou-se um erro de 0.001. Após essa convergência a margem de estabilidade foi calculada sendo esta muito próxima da margem calculada pelo método clássico. O número de iterações aqui apresentado refere-se apenas ao método de Newton, diferentemente do apresentado no método clássico.

Observa-se, com os resultados em ambos os sistemas, que o **Caso I** apresentou os melhores resultados quando comparados aos outros casos. Este fato é associado à utilização conjunta do cálculo das condições iniciais referentes às equações dos autovetores do sistema e ainda a utilização de uma técnica de esparsidade para o tratamento das matrizes do mesmo.

Entretanto, a análise dos outros testes referentes aos **Casos II, III e IV**, demonstra que mesmo sem a utilização destas melhorias no algoritmo, seja o cálculo prévio dos autovetores ou a inclusão de técnicas de esparsidade, o tempo computacional envolvido no processo total de cálculo do ponto de bifurcação, é de fato consideravelmente inferior ao método clássico utilizado nos centros de operação. A rápida convergência também está associada à proximidade do ponto de bifurcação em relação ao caso base para este sistema específico. É observado também que a utilização da técnica de esparsidade reduz o número total de iterações necessárias para o caso onde as condições iniciais referentes aos autovalores não são previamente calculadas, **Caso IV**.

Tabela 4.7: Casos Analisados Numericamente

	Cálculo das Condições Iniciais	Utilização do RR(C)U
<b>Caso I</b>	✓	✓
<b>Caso II</b>	✓	-
<b>Caso III</b>	-	✓
<b>Caso IV</b>	-	-

#### 4.2.1 Sistema de Duas Áreas

Primeiramente foram realizados os diferentes testes da metodologia para o sistema Kundur (KUNDUR, 1994). Observa-se os resultados para este sistema na Tabela 4.8. Em termos de esforço computacional e tempo de execução, a redução é considerável. O resultado obtido nos casos que possuem o uso da técnica de esparsidade, **Caso I** e **Caso III**, é reduzido pela metade em comparação aos obtidos nos outros casos, encorajando seu uso para sistemas de potência de grande porte. A diferença no valor de  $\mu$  nas iterações encontradas ocorre devido à aproximação utilizada ao longo do algoritmo.

Tabela 4.8: Resultado do Método Proposto para os Diferentes Casos

	$\mu$	Iteração	Tempo Total [ms]
<b>Caso I</b>	1.0859	1	0.12
	1.1809	2	0.31
<b>Caso II</b>	1.0950	1	0.32
	1.1798	2	0.77
<b>Caso III</b>	1.0552	1	0.12
	1.1623	2	0.31
	1.1809	3	0.43
<b>Caso IV</b>	1.0731	1	0.32
	1.1242	2	0.77
	1.1663	3	1.43
	1.1798	4	2.11

#### 4.2.2 Sistema New England 39 Barras

Os testes envolvendo os quatro casos foram também realizados para o sistema New England e são apresentados na Tabela 4.9. Evidencia-se, através desta, o padrão ocorrido no sistema Kundur de duas áreas, onde o número de iterações do Newton-Raphson no algoritmo aumenta à medida que alteram-se os Casos, ou seja, retirando o cálculo das condições iniciais ou ainda retirando o tratamento da esparsidade. Este sistema apresentou também um maior número de iterações para chegar ao ponto da BH devido à distância que o ponto da BH encontrava-se do caso base, demonstrando que o algoritmo convergiu mesmo para um caso onde a BH não se encontra tão próximo do caso onde  $\mu = 1$ .

Tabela 4.9: Resultado do Método Proposto para os Diferentes Casos

	$\mu$	Iteração	Tempo Total [ms]
<b>Caso I</b>	1.1956	1	0.22
	1.2119	2	0.46
	1.2278	3	0.68
	1.2320	4	0.97
	1.2341	5	1.15
<b>Caso II</b>	1.1565	1	0.99
	1.2053	2	1.83
	1.2276	3	2.74
	1.2300	4	3.55
	1.2339	5	4.14
<b>Caso III</b>	1.1732	1	0.22
	1.1958	2	0.49
	1.2054	3	0.85
	1.2102	4	1.16
	1.2175	5	1.59
	1.2204	6	1.13
	1.2299	7	2.75
<b>Caso IV</b>	1.1175	1	1.29
	1.1346	2	2.67
	1.1764	3	3.43
	1.1833	4	4.75
	1.1965	5	5.23
	1.2094	6	6.12
	1.2198	7	7.37
	1.2276	8	8.42
	1.2340	9	9.5

### 4.3 Comparação das Metodologias

De forma a apresentar as reais vantagens dos desenvolvimentos propostos para a predição da margem de estabilidade devido à bifurcações de Hopf, é importante analisar as diferenças apresentadas nos resultados obtidos com a metodologia proposta e a metodologia clássica, pois esta é utilizada em centros de operação para a análise da ocorrência destas bifurcações. Nenhum resultado diferente será apresentado nesta Seção, apenas serão comparados os resultados previamente obtidos para os dois sistemas para as duas metodologias, considerando o tempo computacional.

De acordo com os resultados apresentados nas Tabelas 4.10 e 4.11, sistema de duas áreas e o sistema New England respectivamente, é possível verificar que os resultados obtidos através da utilização do desenvolvimento proposto, **Caso I**, proporciona uma redução significativa no tempo de execução em comparação à metodologia clássica com tratamento de esparsidade e também em comparação ao **Caso IV**, que apresenta o desenvolvimento proposto sem o prévio cálculo das condições iniciais e ainda sem a técnica de esparsidade RR(C)U (PISSANETZKY, 2006).

Conforme a Tabela 4.10, os resultados, para o sistema de duas áreas, demonstram que

a metodologia apresentada, para o caso onde as condições iniciais dos autovetores são previamente calculadas, **Caso II**, em comparação com a metodologia clássica, reduziu em até 11 vezes o tempo computacional para a execução do programa no sistema teste. Já com a aplicação da técnica de esparsidade em conjunto com as condições iniciais, **Caso I**, esta redução de tempo computacional pode chegar a 25 vezes entre ambas as metodologias.

A Tabela 4.11 apresenta a comparação entre as metodologias, clássica e desenvolvida, para o sistema New England. É possível observar que a redução de tempo computacional entre a metodologia clássica e o **Caso I** é de aproximadamente 30 vezes, esta redução é superior à apresentada pelo sistema de duas áreas devido à diferença significativa no grau de esparsidade das matrizes Jacobianas dos sistemas.

As Tabelas 4.10 e 4.11 ainda apresentam, que mesmo para o caso onde as condições iniciais dos autovetores não foram previamente solucionadas, **Caso III**, ou ainda que a técnica de esparsidade não foi aplicada, **Caso IV**, a redução do tempo da metodologia proposta em relação à clássica foi considerável, confirmando que, mesmo sem a aplicação de um tratamento prévio na metodologia proposta, esta ainda se torna mais vantajosa, para a utilização na operação e tempo real, do que a aplicação do método clássico com a técnica de esparsidade RR(C)U.

Tabela 4.10: Comparação Entre as Metodologias Para o Sistema de Duas Áreas

<b>Método</b>	Tempo total[ms]
Clássico	8.16
Clássico com RR(C)U	3.6
<b>Caso I</b>	0.31
<b>Caso II</b>	0.77
<b>Caso III</b>	0.43
<b>Caso IV</b>	2.11

Tabela 4.11: Comparação Entre as Metodologias Para o Sistema New England

<b>Método</b>	Tempo total[ms]
Clássico	36.48
Clássico com RR(C)U	12.54
<b>Caso I</b>	1.15
<b>Caso II</b>	4.14
<b>Caso III</b>	2.75
<b>Caso IV</b>	9.5



## 5 CONCLUSÕES

A predição da margem de estabilidade devido à bifurcações de Hopf em SEP vem recebendo atenção especial nos últimos anos devido à necessidade crescente de aumento da confiabilidade e segurança da energia elétrica dos SEPs. Diversas metodologias foram desenvolvidas para tanto porém nenhuma delas visa a utilização da mesma em tempo real nos centros de operação.

Esta dissertação teve o objetivo de contribuir para o desenvolvimento destas metodologias considerando como fator importante o tempo de execução desta tarefa em tempo real, pois este foi raramente considerado na literatura, e somente em metodologias específicas, para a predição da margem de estabilidade real nos sistemas elétricos de potência. Para tanto, foi utilizado um modelo de quarta ordem como modelo de geradores, e para o modelo de AVR foi utilizado um modelo simplificado chamado também de AVR rápido. Os sistemas utilizados para a realização de testes foram os sistemas: Kundur encontrado em (KUNDUR, 1994, pág. 813), que possui 2 áreas, e o sistema Ieee 39 barras, conhecido como New England, sendo estes descritos no Anexo A.

O presente trabalho apresentou um equacionamento baseado nas ferramentas matemáticas apresentadas em (MOORE; SPENCE, 1993) e (HOLODNIOK; KUBICEK, 1984) que caracteriza o aparecimento de BH. Este equacionamento difere-se dos já existentes pela adição de mais uma equação com a finalidade da não fixação da variável  $\omega$ , de forma que não há a necessidade da pré-determinação das mesmas. Estas equações, foram utilizadas em uma formulação do método de Newton, que pode utilizar, se necessário, técnicas de esparsidade para melhorar o tempo computacional envolvido no processo. Após a convergência do método de Newton, os autovalores do sistema com o carregamento encontrado são calculados com a finalidade de garantir que não há autovalores no semiplano direito, garantindo assim que o ponto encontrado caracteriza de fato uma bifurcação de Hopf.

Obtida esta formulação de Newton, o ponto de bifurcação de Hopf foi encontrado para a determinação da margem de estabilidade devido ao mesmo. A partir desta análise as seguintes conclusões puderam ser observadas:

- A margem de estabilidade utilizada atualmente para a bifurcação Sela-Nó, ou "nariz



*da curva*" é uma margem insegura dado que pode ser maior do que a margem prevista devido à uma BH;

- Atualmente há a necessidade da implementação de ferramentas computacionais para a predição de bifurcações de Hopf em tempo real.

A metodologia proposta, para a determinação desta margem, inclui a preocupação com o tempo de execução do mesmo, incluindo em seu programa técnicas de esparsidade quando necessário, e também a preocupação com a convergência do algoritmo. A metodologia proposta foi submetida a testes, realizados a partir da modelagem do sistema nas condições citadas anteriormente, para dois sistemas de potências. Estes mesmos testes foram realizados na metodologia clássica, devido a esta apresentar como resultado de seu programa uma resposta similar à metodologia implementada. A partir desta comparação pôde-se observar que:

- A metodologia clássica utiliza-se do cálculo de autovalores para a determinação do ponto de bifurcação de Hopf. Este cálculo é realizado em conjunto com o cálculo da curva  $P - V$ , sendo este um processo dispendioso e de tempo acima do desejado para a determinação desta margem;
- A metodologia desenvolvida, mesmo tendo sido testada apenas para valores próximos da bifurcação, apresenta resultados satisfatórios, visto que não houve a necessidade da utilização das técnicas de esparsidade para que o tempo de execução fosse inferior ao da metodologia clássica, apresentando convergência satisfatória;
- A resolução prévia das equações referentes aos autovalores do sistema influi de forma positiva na eficiência de convergência da metodologia;
- Comparando-se os resultados obtidos entre a metodologia clássica e os desenvolvimentos propostos, verificou-se uma melhora significativa nos resultados com relação ao tempo de execução e esforço computacional, o que mostra o potencial desta metodologia para análises de margem de estabilidade quando da ocorrência de uma contingência;
- A estimativa inicial utilizada para as condições iniciais das equações de equilíbrio proporcionou uma convergência adequada do algoritmo, reduzindo o esforço computacional do mesmo e contribuindo para a rapidez do algoritmo.

É interessante notar que as análises apresentadas nesta dissertação foram realizadas considerando apenas um modelo específico de gerador e AVR e desconsiderando-se possíveis controladores existentes no sistema, visando apenas a demonstração da funcionalidade da metodologia apresentada. Baseando-se no desempenho obtido pelo desenvolvimento proposto em relação aos algoritmos existentes de localização do ponto de BH, é

possível concluir que o desenvolvimento proposto apresenta-se promissor para a detecção de BH e ainda da margem de estabilidade de SEP. O esforço computacional reduzido e a atuação eficiente da metodologia proposta mostraram-se necessários para um bom desempenho prático nesta área.

## 5.1 Trabalhos Futuros

Não obstante o ótimo desempenho apresentado pela metodologia apresentada (equações e algoritmo), este trabalho não abrangeu toda a gama de modelos de sistemas de energia elétrica, na medida em que diversos aspectos referentes aos mesmos fugiam do escopo desta dissertação. Como sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros nesta área, são propostas as seguintes questões:

- Adição de outros modelos de geradores e AVRs;
- Análise do desempenho do programa frente à análise de contingências;
- Verificação do funcionamento da metodologia para condições iniciais muito afastadas do ponto de bifurcação e se necessário a melhoria das condições de convergência para os mesmas;



## REFERÊNCIAS

ABED, E. H.; VARAIYA, P. P. Nonlinear Oscillations in Power Systems. **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, Amsterdam, v.6, n.1, p.37–43, Janeiro 1984.

AJJARAPU, V. Nonlinear static and dynamical aspects of power systems: a bifurcation approach. **ISCAS '92. Proceedings. IEEE International Symposium on Circuits and Systems**, San Diego, CA, USA, v.6, p.3013–3016 vol.6, May 1992.

AJJARAPU, V.; LEE, B. Bifurcation Theory and its Application to Nonlinear Dynamical Phenomena in an Electrical Power System. **IEEE Transactions on Power Systems**, Piscataway, NJ, v.7, n.1, p.424–431, Fevereiro 1992.

ALLWRIGHT, D. J. Harmonic balance and the Hopf bifurcation. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge, v.82, p.453–467, Agosto 1977.

AN, Y.; DUAN, X.; ZHANG, Q.; LI, Q.; ZHANG, D.; ZHENG, M. Extended Moore-Spence Equations Based Reduced Method for Computing Bifurcations Points of Power System Model. **Proceedings of the 17th World Congress**, Seoul, Korea, p.6–11, Julho 2008.

ARROWSMITH, D. K.; PLACE, C. M. **Dynamical Systems**. Boca Raton: CRC PRress, 1990.

BARROSO, L. C. **Cálculo Numérico**. São Paulo, SP: Harbra, 1987.

CHEN, R.; VARAIYA, P. P. Degenerate Hopf Bifurcations in Power Systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, Piscataway, NJ, v.35, n.7, p.818–834, Julho 1988.

CHIANG, H.; WU, F. F.; VARAIYA, P. P. Foundations of the Potential Energy Boundary Surface Method for Power System Transient Stability Analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, Piscataway, NJ, v.35, n.6, p.712–728, Junho 1988.

CUTSEM, T. V.; VOURNAS, C. **Voltage Stability of Electric Power Systems**. Boston: Kluwer Academic, 2003.

ELGERD, O. I. **Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica**. São Paulo, SP: McGraw-Hill, 1981.

GOMES, S.; MARTINS, N.; PORTELA, C. Computing Small-Signal Stability Boundaries for Large-Scale Power Systems. **Power Engineering Review, IEEE**, Piscataway, NJ, v.22, n.12, p.61–61, Dezembro 2002.

GRIGSBY, L. L. **Power System Stability and Control**. Boca Raton: CRC Press, 2007.

GUPTA, C.; VARMA, R.; SRIVASTAVA, S. A method to determine closest Hopf bifurcation in power systems considering exciter and load dynamics. **International Conference on Energy Management and Power Delivery**, Singapore, v.1, p.293–297, Março 1998.

HASSARD, B. D.; KAZARINOFF, N. D.; WAN, Y. H. **Theory and Applications of Hopf Bifurcation**. Cambridge: Cambridge Press, 1981.

HOLODNIOK, M.; KUBICEK, M. New Algorithms for the Evaluation of Complex Bifurcation Points in Ordinary Differential Equations. A Comparative Study. **Applied Mathematics and Computation**, New York, NY, v.15, p.261–274, 1984.

HSU, I.; KAZARINOFF, N. An Applicable Bifurcation Formula and Instability of Small Periodic Solutions of the Field-Noyes Model. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Amsterdam, v.55, p.61–89, Julho 1976.

HUANG, G.; ZHAO, L.; SONG, X. A New Bifurcation Analysis for Power System Dynamic Voltage Stability Studies. **Power Engineering Society Winter Meeting**, New York, NY, v.2, p.27–31, Janeiro 2002.

KUNDUR, P. **Power System Stability and Control**. New York, NY: McGraw-Hill, 1994.

KUNDUR, P.; PASERBA, J.; AJJARAPU, V.; ANDERSSON, G.; BOSE, A.; CANIZARES, C.; HATZIARGYRIOU, N.; HILL, D.; STANKOVIC, A.; TAYLOR, C.; CUTSEM, T. V.; VITTAL, V. Definition and Classification of Power System Stability. **IEEE Transactions on Power Systems**, Piscataway, NJ, v.19, n.2, p.1387–1401, 2004.

KUZNETSOV, Y. A. **Elements of applied bifurcation theory**. Boston: Springer, 1999.

KWATNY, H.; FISCHL, R.; NWANKPA, C. Local bifurcation in power systems: theory, computation, and application. **Proceedings of the IEEE**, Piscataway, NJ, v.83, n.11, p.1456–1483, Nov 1995.

LEE, B.; AJJARAPU, V. Period Doubling Route to Chaos in an electric Power System. **IEEE Proceedings**, Piscataway, NJ, v.140, n.11, p.490–496, 1993.

LEVINE, W. S. **The Control Handbook**. Boca Raton: CRC Press, 1981.

MAKAROV, Y.; HILL, D.; DONG, Z. Y. Computation of Bifurcation Boundaries for Power Systems: a new delta-plane method. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, Piscataway, NJ, v.47, n.4, p.536–544, Abril 2000.

MARSDEN, J. E.; MCCRACKEN, M. **Power System Voltage Stability**. New York, NY: Springer, 1976.

MATLAB. **The Language of Technical Computing**. [S.l.]: The Mathworks, 2002.

MEES, A. I.; CHUA, L. O. Harmonic balance and the Hopf bifurcation. **The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications to Nonlinear Oscillations in Circuits and Systems**, Piscataway, NJ, v.26, n.1, p.235–254, Abril 1979.

MITHULANANTHAN, N.; CAÑIZARES, C. A.; REEVE, J. Índices para detectar Bifurcações de Hopf em Sistemas de Potência. **North American Power Symposium**, Waterloo, Outubro 2000.

MITHULANANTHAN, N.; SRIVASTAVA, S. C. Investigation of a Voltage Collapse Incident in Sri Lankan Power System Network. **Proceedings of EMPD'98, IEEE Catalogue n° 98EX137**, Singapura, n.6, p.47–52, Março 1998.

MOIOLA, J. L.; CHEN, G. **Hopf Bifurcation Analysis**. Hackensack, NJ: World Scientific, 1996.

MOORE, G.; SPENCE, A. The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, Philadelphia, PA, v.17, p.567–576, Agosto 1993.

PAI, M. A.; SAUER, P. W.; LESIEUTRE, B. C.; ADAPA, R. Structural Stability in Power Systems - Effect of Load Models. **IEEE Transactions on Power Systems**, Piscataway, NJ, v.10, n.1, p.609–615, Setembro 1995.

PISSANETZKY, S. **Refactoring with Relations**. Texas: SciControls, 2006.

ROGERS, G. **Power System Oscillations**. Boston: Springer, 1999.

RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. New York, NY: MacGraw-Hill, 1989.

SANTOS, C. J. R. dos. **Método Rápido para Avaliação da Margem de Estabilidade de Tensão Considerando os Limites de Potência Reativa dos Geradores**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — EESC - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, SP.

SAUER, P. W.; PAI, M. A. **Power System Dynamics and Stability**. New Jersey, NJ: Prentice Hall, 1998.

SAVI, M. A. **Dinâmica Não-Linear e Caos**. Rio de Janeiro, RJ: E-papers, 2007.

SOTOMAYOR, J. Generic bifurcations of dynamical systems. In: PEIXOTO, M. M. (Ed.). **Dinamical Systems**. New York, NY: Academic Press, 1973. p.549–560.

SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro, RJ: Impa, 1979.

TAN, C.; VARGHESE, M.; VARAIYA, P.; WU, F. Bifurcation and Chaos in Power Systems. In: VISWANADHAN, N. (Ed.). **Academy Proceedings in Engineering Sciences**. Bangalore, IN: Indian Academy of Sciences, 1993. p.761–786.

TAYLOR, C. W. **Power System Voltage Stability**. New York, NY: McGraw-Hill, 1981.

VENKATASUBRAMANIAN, V.; LI, Y. Analysis of 1996 Western American Electric Blackouts. **Bulk Power System Dynamics and Control - VI**, Cortina d'Ampezzo, Italy, p.22–27, Agosto 2004.

## APÊNDICE A DERIVADAS DA MATRIZ JACOBIANA DO SISTEMA DIFERENCIAL-ALGÉBRICO

Este anexo apresenta as derivadas utilizadas na montagem da matriz Jacobiana do método de Newton para a realização do cálculo do resultado do sistema diferencial-algébrico. As equações são apresentadas conforme a descrição da metodologia apresentada anteriormente no Capítulo 3.

Devido ao modelo utilizado para o gerador, 4ª ordem, e do modelo de AVR rápido, 1ª ordem, o número de equações diferenciais por gerador são 5. Dessa forma, seguem as derivadas.

### A.1 Derivadas da matriz $A$

$$\begin{aligned} A_{\delta i} = 0; \quad A_{\omega i} = 0; \quad A_{E'qi} = 0; \\ A_{E'di} = 0; \quad A_{Efdi} = 0; \quad A_{Vi} = 0; \quad A_{\theta i} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$A_{Idi} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{M_i} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & \emptyset & & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$A_{Iqi} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{-1}{M_i} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & \emptyset & & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.3})$$

onde,

$$i = 1, \dots, m;$$



$m$  é o número de geradores;

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $5m \times 5m$ .

## A.2 Derivadas da matriz $B$

$$\begin{aligned} B_{\delta i} &= \emptyset; & B_{\omega i} &= \emptyset; \\ B_{Efdi} &= \emptyset; & B_{Vi} &= \emptyset; & B_{\theta i} &= \emptyset \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$B_{Iqi} = \left[ \begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & & & \\ \frac{(X'_d - X'_q)}{M_i} & 0 & & & \\ 0 & 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & \emptyset & & \end{array} \right] \quad (\text{A.5})$$

$$B_{Idi} = \left[ \begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & & & \\ 0 & \frac{(X'_d - X'_q)}{M_i} & & & \\ 0 & 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & \emptyset & & \end{array} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$B_{E'di} = \left[ \begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & & & \\ \frac{-1}{M_i} & 0 & & & \\ 0 & 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & \emptyset & & \end{array} \right] \quad (\text{A.7})$$

$$B_{E'qi} = \left[ \begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & & & \\ 0 & \frac{-1}{M_i} & & & \\ 0 & 0 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & \emptyset & \emptyset & & \end{array} \right] \quad (\text{A.8})$$

onde,

$i = 1, \dots, m$ ;

$m$  é o número de geradores;

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $5m \times 2(m + nbus)$ ;

$nbus$  denota o número de barras do sistema.

### A.3 Derivadas da matriz $C$

$$\begin{aligned} C_{\omega i} &= \emptyset; & C_{E'di} &= \emptyset; \\ C_{E'qi} &= \emptyset; & C_{Efdi} &= \emptyset; \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$C_{\delta i} = \left[ \begin{array}{ccccc|c|c} -V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ \hline \emptyset & & & & & \emptyset & \\ \hline -I_{di} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) - I_{qi} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ -I_{di} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) + I_{qi} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ \hline \emptyset & & & & & \emptyset & \\ \hline \emptyset & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$C_{Idi} = \left[ \begin{array}{ccccc|c|c} \emptyset & & & & & & \\ \hline V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ -V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ \hline \emptyset & & & & & \emptyset & \\ \hline \emptyset & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.11})$$

$$C_{Iqi} = \left[ \begin{array}{ccccc|c|c} \emptyset & & & & & & \\ \hline -V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ -V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset & \\ \hline \emptyset & & & & & \emptyset & \\ \hline \emptyset & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A.12})$$

$$C_{Vi} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} \cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & \emptyset \\ I_{di}\cos(\delta_i - \theta_i) - I_{qi}\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ -I_{di}\text{sen}(\delta_i - \theta_i) - I_{qi}\cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.13})$$

$$C_{\theta i} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} V_i\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ -V_i\cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & \emptyset \\ I_{di}V_i\text{sen}(\delta_i - \theta_i) + I_{qi}V_i\cos(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ I_{di}V_i\cos(\delta_i - \theta_i) - I_{qi}V_i\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & \emptyset \\ \hline & \emptyset & & & & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.14})$$

onde,

$i = 1, \dots, m$ ;

$m$  é o número de geradores;

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $2(m + n_{bus}) \times 5m$ ;

$n_{bus}$  denota o número de barras do sistema.

## A.4 Derivadas da matriz $D$

As derivadas de  $D$  serão apresentadas através das derivadas das suas respectivas sub-matrizes de modo a facilitar sua visualização em detalhes.

### A.4.1 Derivadas da matriz $B_2$

$$\begin{aligned} B_{2_{\delta_i}} &= \emptyset; & B_{2_{\omega_i}} &= \emptyset; & B_{2_{E'_{qi}}} &= \emptyset; & B_{2_{E'_{di}}} &= \emptyset; \\ B_{2_{I_{qi}}} &= \emptyset; & B_{2_{I_{di}}} &= \emptyset; & B_{2_{V_i}} &= \emptyset; & B_{2_{\theta_i}} &= \emptyset; & B_{2_{E_{fdi}}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde,

$i = 1, \dots, m$ ;

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $2m \times 2m$ ;

#### A.4.2 Derivadas da matriz $B_3$

$$\begin{aligned} B_{3_{\omega i}} &= \emptyset; & B_{3_{E'qi}} &= \emptyset; & B_{3_{E'di}} &= \emptyset; \\ B_{3_{Iqi}} &= \emptyset; & B_{3_{Idi}} &= \emptyset; & B_{3_{Efdi}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$B_{3_{\delta i}} = \left[ \begin{array}{cc|c} -V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & -\text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ -V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.17})$$

$$B_{3_{v_i}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & 0 & \emptyset \\ -\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & 0 & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.18})$$

$$B_{3_{\theta i}} = \left[ \begin{array}{cc|c} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & -\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.19})$$

onde,

$i = 1, \dots, m$ ;

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $2m \times 2m$ ;

#### A.4.3 Derivadas da matriz $C_2$

$$\begin{aligned} C_{2_{\omega i}} &= \emptyset; & C_{2_{E'qi}} &= \emptyset; & C_{2_{E'di}} &= \emptyset; \\ C_{2_{Iqi}} &= \emptyset; & C_{2_{Idi}} &= \emptyset; & C_{2_{Efdi}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$C_{2_{\delta i}} = \left[ \begin{array}{cc|c} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & -V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ -V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & -V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.21})$$

$$C_{2_{v_i}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & -\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.22})$$

$$C_{2\theta_i} = \left[ \begin{array}{cc|c} \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & -\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.23})$$

onde,

$i = 1, \dots, m$ ;

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $2m \times 2m$ ;

#### A.4.4 Derivadas da matriz $C_3$

$$C_{3_{\omega_i}} = \emptyset; \quad C_{3_{E'_{qi}}} = \emptyset; \quad C_{3_{E'_{di}}} = \emptyset; \quad C_{3_{E_{fdi}}} = \emptyset. \quad (\text{A.24})$$

$$C_{3_{\delta_i}} = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{qi}V_i\text{cos}(\delta_i - \theta_i) + I_{di}V_i\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & I_{di}\text{cos}(\delta_i - \theta_i) - I_{qi}\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ I_{di}V_i\text{cos}(\delta_i - \theta_i) - I_{qi}V_i\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & -I_{di}\text{sen}(\delta_i - \theta_i) - I_{qi}\text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.25})$$

$$C_{3_{I_{qi}}} = \left[ \begin{array}{cc|c} V_i\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ V_i\text{cos}(\delta_i - \theta_i) & -\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.26})$$

$$C_{3_{I_{di}}} = \left[ \begin{array}{cc|c} -V_i\text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ V_i\text{sen}(\delta_i - \theta_i) & \text{cos}(\delta_i - \theta_i) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.27})$$

$$C_{3_{v_i}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{l} I_{qi}\text{sen}(\delta_i - \theta_i) - I_{di}\text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & -2Y_{i,i}\text{cos}(\alpha_{i,i}) & \emptyset \\ \left( \begin{array}{l} I_{di}\text{sen}(\delta_i - \theta_i) + I_{qi}\text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & -2Y_{i,i}\text{sen}(\alpha_{i,i}) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.28})$$

$$C_{3_{V_k}} = \left[ \begin{array}{cc|c} V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \emptyset \\ -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.29})$$

$$C_{3_{\theta_i}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \left( \begin{array}{c} -I_{qi} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ -I_{di} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ +V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} -I_{di} \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ +I_{qi} \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & \emptyset \\ \left( \begin{array}{c} -I_{di} V_i \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ +I_{qi} V_i \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ +V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} I_{di} \text{sen}(\delta_i - \theta_i) \\ +I_{qi} \text{cos}(\delta_i - \theta_i) \\ - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) \end{array} \right) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.30})$$

$$C_{3_{\theta_k}} = \left[ \begin{array}{cc|c} -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \emptyset \\ -V_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{sen}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{i,k} \text{cos}(\theta_i - \theta_k - \alpha_{i,k}) & \emptyset \\ \hline & \emptyset & \emptyset \end{array} \right] \quad (\text{A.31})$$

onde,

$i = 1, \dots, m;$

$k = m + 1, \dots, n_{bus};$

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $2m \times 2m;$

A.4.5 Derivadas da matriz  $C_4$ 

$$\begin{aligned} C_{4\delta_i} &= \mathbf{0}; & C_{4\omega_i} &= \mathbf{0}; & C_{4E'qi} &= \mathbf{0}; \\ C_{4E'di} &= \mathbf{0}; & C_{4Iqi} &= \mathbf{0}; & C_{4Idi} &= \mathbf{0}; & C_{4Efdi} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$C_{4V_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_j Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & -Y_{i,j} \text{cos}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ V_j Y_{i,j} \text{cos}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & -Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix}$$

$$C_{4V_j} = \begin{bmatrix} 0 & b_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b_{i,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$b_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_i Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & 0 \\ V_i Y_{i,j} \text{cos}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{4\theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{i,1} & c_{i,2} & \cdots & c_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$c_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_i V_j Y_{i,j} \text{cos}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & V_i Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ -V_i V_j Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & -V_i Y_{i,j} \text{cos}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix}$$

$$C_{4\theta_j} = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & d_{i,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$d_{i,j} = \begin{bmatrix} V_i V_j Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & -V_i Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \\ V_i V_j Y_{i,j} \text{sen}(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) & V_i Y_{i,j} \cos(\theta_i - \theta_j - \alpha_{i,j}) \end{bmatrix}$$

onde,

$i = 1, \dots, m$ ;

$j = m + 1, \dots, nbus$ ;

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $2m \times 2(nbus - m)$ ;

#### A.4.6 Derivadas da matriz $D_1$

$$\begin{aligned} D_{1\delta_i} &= \emptyset; & D_{1\omega_i} &= \emptyset; & D_{1E'qi} &= \emptyset; \\ D_{1E'di} &= \emptyset; & D_{1Iqi} &= \emptyset; & D_{1Idi} &= \emptyset; & D_{1Efdi} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$D_{1V_i} = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{i,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$a_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_j Y_{j,i} \text{sen}(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & 0 \\ V_j Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{1V_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$b_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_i Y_{j,i} \text{sen}(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \\ V_i Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -Y_{j,i} \text{sen}(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \end{bmatrix}$$



$$D_{1\theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & c_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & c_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & c_{i,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$c_{i,j} = \begin{bmatrix} V_j V_i Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -V_j Y_{j,i} \text{sen}(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \\ V_j V_i Y_{j,i} \text{sen}(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & V_j Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \end{bmatrix}$$

$$D_{1\theta_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{i,1} & d_{i,2} & \cdots & d_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$d_{i,j} = \begin{bmatrix} -V_j V_i Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -V_j Y_{j,i} \text{sen}(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \\ -V_j V_i Y_{j,i} \text{sen}(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) & -V_j Y_{j,i} \cos(\theta_j - \theta_i - \alpha_{j,i}) \end{bmatrix}$$

$i = 1, \dots, m;$

$j = m + 1, \dots, n_{bus};$

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $2(n_{bus} - m) \times 2m;$

#### A.4.7 Derivadas da matriz $D_2$

$$\begin{aligned} D_{2\delta_i} &= \emptyset; & D_{2\omega_i} &= \emptyset; & D_{2E'_{qi}} &= \emptyset; & D_{2V_i} &= \emptyset; \\ D_{2E'_{di}} &= \emptyset; & D_{2I_{qi}} &= \emptyset; & D_{2I_{di}} &= \emptyset; & D_{2E_{fdi}} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$D_{2V_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \cdots & c_{d,d} & \cdots & b_{d,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{d,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{d,j} = \begin{bmatrix} -V_d Y_{d,j} \text{sen}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & 0 \\ V_d Y_{d,j} \text{cos}(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

$$b_{d,j} = \begin{bmatrix} -V_j Y_{j,d} \text{sen}(\theta_j - \theta_d - \alpha_{j,d}) & Y_{j,d} \text{cos}(\theta_j - \theta_d - \alpha_{j,d}) \\ V_j Y_{j,d} \text{cos}(\theta_j - \theta_d - \alpha_{j,d}) & -Y_{j,d} \text{sen}(\theta_j - \theta_d - \alpha_{j,d}) \end{bmatrix}$$

$$c_{d,d} = \begin{bmatrix} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \text{sen}(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) & -2Y_{d,d} \text{cos}(\alpha_{d,d}) \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \text{cos}(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) & -2Y_{d,d} \text{sen}(\alpha_{d,d}) \end{bmatrix}$$

$$D_{2\theta_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1,j} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \cdots & c_{d,d} & \cdots & b_{d,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{d,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{d,j} = \begin{bmatrix} V_d V_j Y_{d,j} \cos(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & -V_d Y_{d,j} \sin(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) \\ V_d V_j Y_{d,j} \sin(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & V_d Y_{d,j} \cos(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) \end{bmatrix}$$

$$b_{d,j} = \begin{bmatrix} -V_j V_d Y_{d,j} \cos(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & V_d Y_{d,j} \sin(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) \\ -V_j V_d Y_{d,j} \sin(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) & -V_d Y_{d,j} \cos(\theta_d - \theta_j - \alpha_{d,j}) \end{bmatrix}$$

$$c_{d,d} = \begin{bmatrix} V_d \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \cos(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \sin(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) \\ V_d \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \sin(\theta_{dj} - \theta_k - \alpha_{d,k}) & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n V_k Y_{d,k} \cos(\theta_d - \theta_k - \alpha_{d,k}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

onde,

$$i = 1, \dots, m;$$

$$j = m + 1, \dots, nbus;$$

$$d = m + 1, \dots, nbus;$$

$\emptyset$  denota uma matriz de zeros;

Todas as matrizes possuem tamanho  $2(nbus - m) \times 2(nbus - m)$ ;

## ANEXO A ESTUDO DE CASO

Os sistemas utilizados para teste da metodologia são descritos a seguir conforme os dados utilizados e não referente aos dados encontrados na literatura.

### A.1 Sistema de Duas Áreas

Para estudos preliminares da metodologia proposta foi utilizado o sistema de 2 áreas descrito em (KUNDUR, 1994). Sua topologia básica é ilustrada na Figura A.1. Este contém 11 barras e duas áreas conectadas por uma *tie line* entre as barras 7 e 9, as quais possuem cargas e capacitores para a compensação de reativos. Cada área ainda possui dois geradores de 900 MVA e 20 kV.

Os modelos de gerador utilizados para o cálculo da margem de estabilidade deste sistema são os descritos no capítulo 3, e devido a isto seus resultados não coincidem com o apresentado em (KUNDUR, 1994), já que os modelos lá apresentados são diferentes.

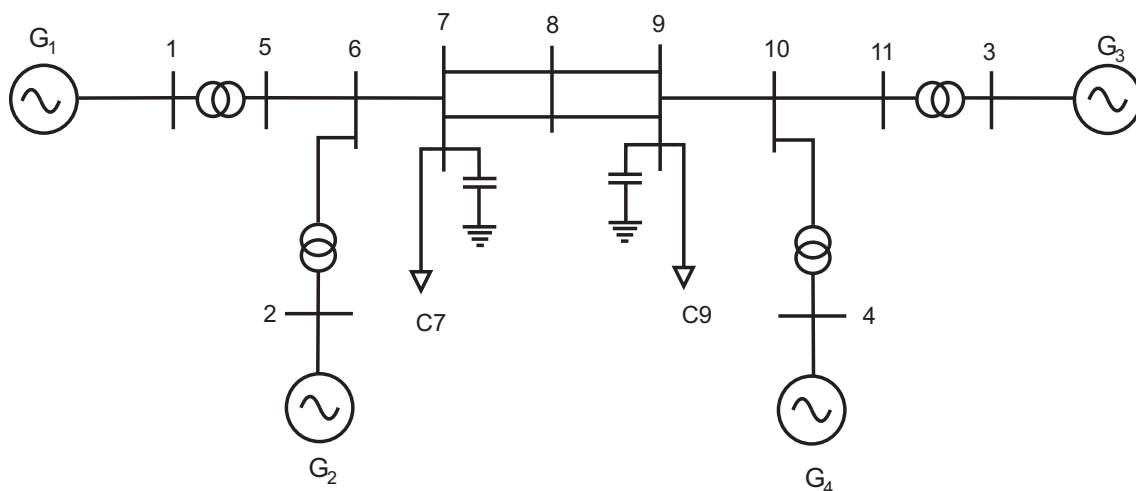


Figura A.1: Diagrama unifilar do sistema Kundur de duas áreas

### A.1.1 Dados Estáticos

As Tabelas A.1 e A.2 apresentam os dados estáticos do sistema Kundur apresentado anteriormente, sendo a primeira tabela referente aos dados das barras e a segunda aos dados das linhas do sistema. A carga do sistema foi reduzida, se comparada ao caso base encontrado no livro, de forma que, para o modelo do AVR rápido utilizado o sistema fosse estável no caso base.

Tabela A.1: Dados das barras do sistema Kundur de duas áreas

Nº	Tipo	V [p.u]	A	$P_g$ [MW]	$Q_g$ [MVAR]	$P_l$ [MW]	$Q_l$ [MVar]	Sh.	Ar.
1	PV	1.030	0.0	560	0				1
2	PV	1.010	0.0	560	0				1
3	S	1.030	-6.8	575.2	0				2
4	PV	1.010	0.0	560	0				2
5	PQ								1
6	PQ								1
7	PQ					773.6	80	200	1
8	PQ								1
9	PQ					1413.6	80	350	2
10	PQ								2
11	PQ								2

Tabela A.2: Dados das linhas do sistema Kundur de duas áreas

De	Para	R [p.u]	X [p.u]	B [MVar]
1	5	0.0000	.0166	
5	6	0.0025	.0250	4.375
6	7	0.0010	.0100	1.750
2	6	0.0000	.0166	
7	8	1.0010	.110	19.25
8	9	1.0010	.110	19.25
9	10	0.0010	.0100	1.750
10	11	0.0025	.0250	4.375
10	4	0.0000	.0166	
11	3	0.0000	.0166	

### A.1.2 Dados Dinâmicos

As Tabelas A.3 e A.4 apresentam os dados dos geradores e dos AVRs, respectivamente.

Tabela A.3: Dados dos geradores do sistema Kundur de duas áreas

Nº	H	$X_d$	$X'_d$	$X_q$	$X'_q$	$T'_{d0}$	$T'_{q0}$	D
1	6.5	1.8	0.3	1.7	0.55	8	0.4	0.0
2	6.5	1.8	0.3	1.7	0.55	8	0.4	0.0
3	6.175	1.8	0.3	1.7	0.55	8	0.4	0.0
4	6.175	1.8	0.3	1.7	0.55	8	0.4	0.0

Tabela A.4: Dados dos AVR's do sistema Kundur de duas áreas

$K_A$	$T_A$
10	0.055
10	0.055
10	0.055
10	0.055

## A.2 Sistema New England 39 Barras

O sistema de 39 barras é um sistema padrão para teste de novas metodologias e representa um modelo reduzido do sistema de potência em New England. Este sistema vem sendo utilizado para solução de problemas estáticos e dinâmicos em sistemas de potência.

O sistema New England 39 barras possui 10 geradores, 19 cargas, 36 linhas de transmissão e 12 transformadores, sendo estes organizados em 3 áreas. A Figura A.2 ilustra este sistema.

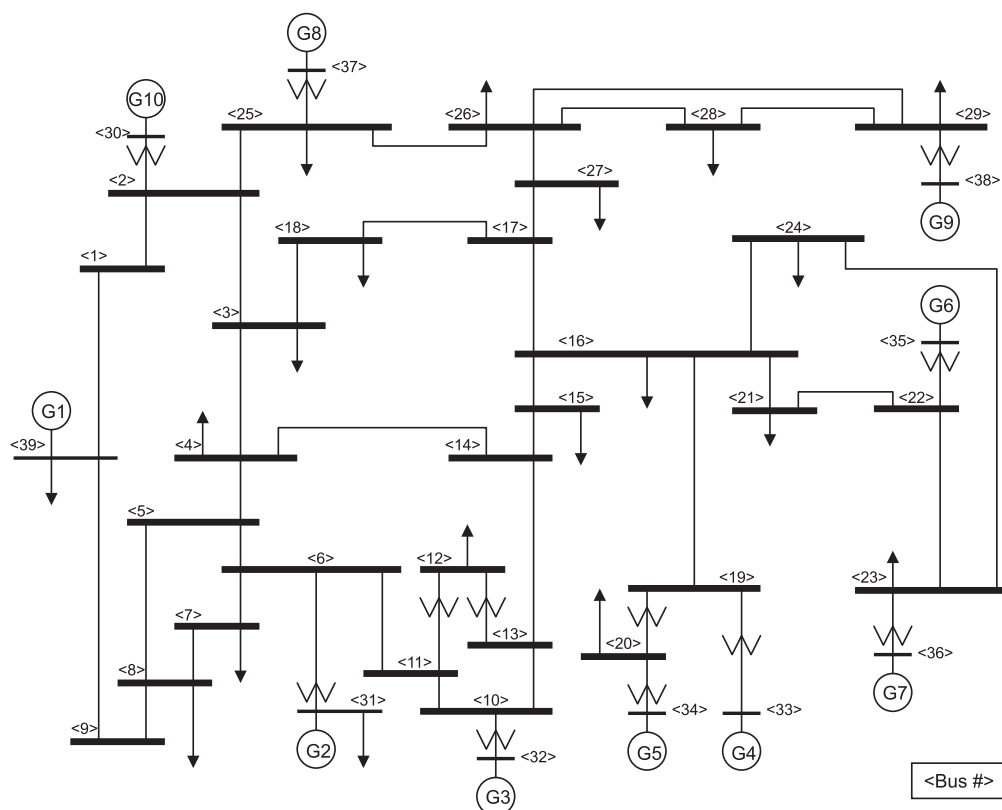


Figura A.2: Diagrama unifilar do sistema New England 39 barras

### A.2.1 Dados Estáticos

As Tabelas A.5 e A.6 apresentam os dados estáticos do sistema de 39 barras, sendo a primeira tabela referente aos dados das barras e a segunda aos dados das linhas do sistema.

Tabela A.5: Dados das barras do sistema New England

Nº	Tipo	V [p.u]	A	$P_g$ [MW]	$Q_g$ [MVAR]	$P_l$ [MW]	$Q_l$ [MVar]	Sh.	Ar.
1	PQ	1.0	0.0						1
2	PQ	1.0	0.0						1
3	PQ	1.0	0.0			322.0	2.4		1
4	PQ	1.0	0.0			500.0	184.0		2
5	PQ	1.0	0.0						2
6	PQ	1.0	0.0						2
7	PQ	1.0	0.0			233.8	84.0		2
8	PQ	1.0	0.0			522.0	176.0		2
9	PQ	1.0	0.0						2
10	PQ	1.0	0.0						2
11	PQ	1.0	0.0						2
12	PQ	1.0	0.0			7.5	88.0		2
13	PQ	1.0	0.0						2
14	PQ	1.0	0.0						2
15	PQ	1.0	0.0			320.0	153.0		3
16	PQ	1.0	0.0			329.0	32.0		3
17	PQ	1.0	0.0						1
18	PQ	1.0	0.0			158.0	30.0		1
19	PQ	1.0	0.0						3
20	PQ	1.0	0.0			628.0	103.0		3
21	PQ	1.0	0.0			274.0	115.0		3
22	PQ	1.0	0.0						3
23	PQ	1.0	0.0			247.5	84.6		3
24	PQ	1.0	0.0			308.6	-92.0		3
25	PQ	1.0	0.0			224.0	47.2		1
26	PQ	1.0	0.0			139.0	17.0		1
27	PQ	1.0	0.0			281.0	75.5		1
28	PQ	1.0	0.0			206.0	27.6		3
29	PQ	1.0	0.0			283.5	26.9		3
30	PV	1.0475	0.0	250.0	0.0				1
31	S	0.9820	0.0	0.0	0.0	9.2	4.6		2
32	PV	0.9831	0.0	650.0	0.0				2
33	PV	0.9972	0.0	632.0	0.0				3
34	PV	1.0123	0.0	508.0	0.0				3
35	PV	1.0493	0.0	650.0	0.0				3
36	PV	1.0635	0.0	560.0	0.0				3
37	PV	1.0278	0.0	540.0	0.0				1
38	PV	1.0265	0.0	830.0	0.0				3
39	PV	1.0300	0.0	1000.0	0.0	1104.0	250.0		2

Tabela A.6: Dados das linhas do sistema New England

De	Para	R [p.u]	X [p.u]	B [MVar]
1	2	0.0035	0.0411	0.6987
1	39	0.0010	0.0250	0.7500
2	3	0.0013	0.0151	0.2572
2	25	0.0070	0.0086	0.1460
3	4	0.0013	0.0213	0.2214
3	18	0.0011	0.0133	0.2138
4	5	0.0008	0.0128	0.1342
4	14	0.0008	0.0129	0.1382
5	6	0.0002	0.0026	0.0434
5	8	0.0008	0.0112	0.1476
6	7	0.0006	0.0092	0.1130
6	11	0.0007	0.0082	0.1389
7	8	0.0004	0.0046	0.0780
8	9	0.0023	0.0363	0.3804
9	39	0.0010	0.0250	1.2000
10	11	0.0004	0.0043	0.0729
10	13	0.0004	0.0043	0.0729
13	14	0.0009	0.0101	0.1723
14	15	0.0018	0.0217	0.3660
15	16	0.0009	0.0094	0.1710
16	17	0.0007	0.0089	0.1342
16	19	0.0016	0.0195	0.3040
16	21	0.0008	0.0135	0.2548
16	24	0.0003	0.0059	0.0680
17	18	0.0007	0.0082	0.1319
17	27	0.0013	0.0173	0.3216
21	22	0.0008	0.0140	0.2565
22	23	0.0006	0.0096	0.1846
23	24	0.0022	0.0350	0.3610
25	26	0.0032	0.0323	0.5130
26	27	0.0014	0.0147	0.2396
26	28	0.0043	0.0474	0.7802
26	29	0.0057	0.0625	1.0290
28	29	0.0014	0.0151	0.2490
12	11	0.0016	0.0435	0.0000
12	13	0.0016	0.0435	0.0000
6	31	0.0000	0.0250	0.0000
10	32	0.0000	0.0200	0.0000
19	33	0.0007	0.0142	0.0000
20	34	0.0009	0.0180	0.0000
22	35	0.0000	0.0143	0.0000
23	36	0.0005	0.0272	0.0000
25	37	0.0006	0.0232	0.0000
2	30	0.0000	0.0181	0.0000
29	38	0.0008	0.0156	0.0000
19	20	0.0007	0.0138	0.0000





## ANEXO B DEFINIÇÕES

Este anexo tem como finalidade fazer uma revisão de alguns conceitos e resultados que serão usados ao longo do trabalho. Ao leitor familiarizado com a revisão proposta para este anexo fica a seu critério dispensar ou não a leitura, retornando ao mesmo conforme a necessidade. Estas definições podem ser encontradas em detalhes em (SOTOMAYOR, 1979).

### B.1 Topologia do Espaço Euclidiano

Nesta seção serão apresentados alguns itens relevantes sobre a topologia do espaço euclidiano..

#### B.1.1 Norma

Seja  $n$  um número natural. O espaço *euclidiano  $n$ -dimensional* é o produto de  $n$  fatores iguais a  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}.$$

Os pontos de  $\mathbb{R}^n$  são todas as  $n$ -listas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  cujas coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  são números reais.

É conhecido da álgebra linear que  $\mathbb{R}^n$  com as operações usuais de soma e multiplicação tem estrutura de espaço vetorial de dimensão  $n$  sobre o corpo dos reais.

Um *produto interno* num espaço vetorial real  $E$  é uma aplicação  $\langle, \rangle: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^n$  que faz corresponder a cada par de vetores  $x, y \in E$  um número real, indicado por  $\langle x, y \rangle$ , de tal modo que, para quaisquer  $x, z, y \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , valham:

- P1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
- P2.  $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$ ;
- P3.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$ ;
- P4.  $x \neq 0 \implies \langle x, x \rangle > 0$ .

Um exemplo de produto interno em  $\mathbb{R}^n$  e o mais importante é o produto interno

canônico, o qual é dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , escreveremos  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , onde  $\langle, \rangle$  é o produto interno canônico. Assim,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

O número  $\|x\|$  chama-se a *norma euclidiana*. A norma euclidiana goza das seguintes propriedades, onde  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $|\alpha|$  significa o valor absoluto do número real  $\alpha$ :

$$N1. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

$$N2. \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$

$$N3. x \neq 0 \implies \|x\| > 0.$$

De um modo geral, uma *norma* num espaço vetorial  $E$  é qualquer função real  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpra as condições N1, N2 e N3 acima. Há uma infinidade de normas que se podem considerar no espaço euclidiano.

Uma norma num espaço vetorial  $E$  dá origem a uma noção de distância em  $E$ . Dados  $x, y \in E$ , a *distância* de  $x$  a  $y$  é definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Verifica-se facilmente que a distância goza das seguintes propriedades, para  $x, y, z \in E$  quaisquer:

$$d1. d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z);$$

$$d2. d(x, y) = d(y, x);$$

$$d3. x \neq y \implies d(x, y) > 0.$$

A primeira dessas propriedades é chamada a desigualdade triangular.

## B.2 Equações Diferenciais Ordinárias

O modo mais comum para definir um sistema dinâmico de tempo contínuo é através de equações diferenciais ordinárias do tipo  $\dot{x} = f(x)$  onde  $f(x)$  representa um vetor de funções. Um sistema dinâmico em que a equação diferencial ordinária depende explicitamente do tempo é dito ser um sistema dinâmico variante no tempo ou um sistema dinâmico não autônomo. Caso não dependa diretamente do tempo é dito ser um sistema dinâmico autônomo.

### B.2.1 Teoria Geral

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  e  $I$  um intervalo não degenerado da reta.

**Definição B.2.1.** Uma função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \Omega$  é uma solução da equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = f(x)$$

no intervalo  $I$  se o gráfico de  $\varphi$  em  $I$  está contido em  $\Omega$  e

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t)) \text{ para todo } t \in I.$$

Se uma condição inicial é conhecida, a solução  $\varphi(t)$ , também deve satisfazer essa condição. Dessa forma, para um problema de valor inicial (P.V.I.)

$$\dot{x} = f(x) ; x(0) = x_0$$

deve se achar uma solução  $\varphi$  tal que tanto a equação diferencial quanto a condição inicial estejam satisfeitas. Nesse sentido, o teorema de existência e unicidade, mostrado a seguir estabelece quais são as condições para se a existência e a unicidade das soluções num determinado conjunto denotado por  $\Omega$ .

**Teorema B.2.1.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$  e  $x_0 \in \Omega$ . Então existe um  $\alpha > 0$  e uma única solução  $\varphi : (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$  do (P.V.I.)

$$\dot{x} = f(x) ; x(0) = x_0$$

com  $\varphi(0) = x_0$ .

Supondo ainda que as hipóteses do Teorema anterior estejam satisfeitas. Então para cada  $x_0 \in \Omega$  existe uma única solução maximal  $\varphi(\cdot, x_0)$  de

$$\dot{x} = f(x) ; x(0) = x_0$$

definida num intervalo maximal de existência de  $\varphi$ . Denota-se este intervalo maximal por  $I_{x_0} = (w_-(x_0), w_+(x_0))$ .

Uma questão importante da teoria de equações diferenciais ordinárias (E.D.O.) é a continuidade da solução com relação as condições iniciais. Nessa linha, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema B.2.2.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ . Considere  $\varphi(t, x_0)$  a solução do (P.V.I.)

$$\dot{x} = f(x) ; x(0) = x_0$$

definida no seu intervalo maximal de existência  $(w_-(x_0), w_+(x_0))$ . Então

$$D = \{(t, x_0) : x_0 \in \Omega \text{ e } t \in (w_-(x_0), w_+(x_0))\}$$

é aberto em  $\mathbb{R} \times \Omega$  e  $\varphi$  é contínua em  $D$ .

Além da continuidade com relação as condições iniciais a solução de uma E.D.O. autônoma satisfaz as seguintes propriedades:

- (1)  $\varphi(0, x) = x$  para todo  $x \in \Omega$ ;
- (2)  $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$  para todo  $x \in \Omega$  e todos  $t, s \in \mathbb{R}$  tais que  $t+s \in (w_-(x), w_+(x))$  e  $t \in (w_-(\varphi(s, x)), w_+(\varphi(s, x)))$ .

**Observação B.2.1.** A aplicação  $f$  é também chamada de campo vetorial e a aplicação  $t \rightarrow \varphi(t, x_0)$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$  define uma curva em  $\Omega$ , passando por  $x_0$  a qual denomina-se trajetória ou órbita passando por  $x_0$  e que denotaremos pelo conjunto  $\{\varphi(t, x_0); t \in (w_-(x_0), w_+(x_0))\}$ . A unicidade das soluções garante que as trajetórias não se interceptam.

Neste trabalho, estudam-se os modelos descritos pela equação diferencial ordinária não linear

$$\dot{x} = f(x) \tag{B.1}$$

onde  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é pelo menos um campo vetorial de classe  $C^1$ . Além disso, por questão de simplicidade e até mesmo pelo fato que geralmente as equações diferenciais ordinárias que representam modelos físicos estejam definidas para todo o tempo, considera-se que a equação (B.1) é tal que as soluções estejam definidas para todo o tempo.

## B.2.2 Comportamento Assintótico

Dado uma condição inicial do sistema (B.1) pode-se perguntar o que acontece com a trajetória que passa por  $x_0$  quando o tempo tende para o  $\infty$  ou  $-\infty$ . Usualmente essas trajetórias se aproximam de equilíbrios, ciclos limites, órbitas quase-periódicas, órbitas caóticas ou até mesmo união de um certo conjunto de órbitas. Todos esses conjuntos mencionados acima onde a trajetória pode se aproximar são chamados de conjuntos limites cuja definição matemática e algumas de suas propriedades serão exploradas a seguir.

**Definição B.2.2.** Um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é um ponto  $\omega$ -limite da solução  $\varphi(t, x_0)$  de (B.1) se existir uma sequência  $\{t_j\}$ , com  $t_j \rightarrow +\infty$  quando  $j \rightarrow +\infty$  tal que  $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow p$  quando  $j \rightarrow +\infty$ . O conjunto de todos os pontos  $\omega$ -limite de  $\varphi(t, x_0)$  é chamado conjunto  $\omega$ -limite da solução  $\varphi(t, x_0)$ , ou simplesmente,  $\omega$ -limite de  $x_0$ , e é denotado por  $\omega(x_0)$ .

**Definição B.2.3.** Um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é um ponto  $\alpha$ -limite da solução  $\varphi(t, x_0)$  de (2.1) se existir uma sequência  $\{t_j\}$ , com  $t_j \rightarrow -\infty$  quando  $j \rightarrow +\infty$  tal que  $\varphi(t_j, x_0) \rightarrow p$  quando  $j \rightarrow +\infty$ .

$p$  quando  $j \rightarrow +\infty$ . O conjunto de todos os pontos  $\alpha$ -limite de  $\varphi(t, x_0)$  é chamado conjunto  $\alpha$ -limite da solução  $\varphi(t, x_0)$ , ou simplesmente,  $\alpha$ -limite de  $x_0$ , e é denotado por  $\alpha(x_0)$ .

O próximo teorema exhibe propriedades para o conjunto  $\omega$ -limite de uma solução qualquer  $\varphi(t, x_0)$  de (B.1). De maneira análoga vale as mesmas propriedades para o conjunto  $\alpha$ -limite.

**Teorema B.2.3.** *O conjunto  $\omega$ -limite de uma solução  $\varphi(t, x_0)$  do sistema autônomo (B.1) é fechado e invariante.*

### B.2.3 Equilíbrios e Estabilidade Local

Dada uma solução conhecida do sistema (B.1) muitas vezes é de interesse saber qual o comportamento qualitativo do sistema nas vizinhanças dessa solução, nesse sentido é a teoria de estabilidade que fornece todo o ferramental matemático para se entender fenômenos relacionados a esse tipo de problema. Na literatura existem diversas definições sobre conceitos que envolvem estabilidade, nesse texto utilizaremos a definição de estabilidade no sentido de Lyapunov.

Uma solução  $\varphi(t)$  do sistema (B.1) é estável quando toda solução com valores iniciais próximos aos de  $\varphi(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$  e permanece próxima de  $\varphi(t)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Utilizando a formulação matemática o que foi escrito acima toma o seguinte aspecto.

**Definição B.2.4.** *Seja  $\varphi(t)$  um solução de (B.1) definida para  $t \geq 0$ . Diz-se que  $\varphi(t)$  é estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que se  $\psi(t)$  é solução de (B.1) e  $\|\psi(0) - \varphi(0)\| < \delta$  então  $\psi(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$  e  $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ . Se além disso existir  $\delta_1 > 0$  tal que  $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \delta_1$  implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| = 0$ , então  $\varphi$  diz-se assintoticamente estável.*

Um caso especial de soluções apresentados a seguir são os pontos de equilíbrio. É nesse tipo de solução que existe o interesse para estudos de estabilidade.

**Definição B.2.5.** *Um ponto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio do sistema (B.1) se  $f(x^*) = 0$ .*

Note que, se  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio do sistema (B.1), então a solução  $\varphi$  de (B.1) iniciando em  $x^*$  no tempo  $t = 0$  é a função constante, ou seja,  $\varphi(t) = x^*$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Sem maiores dificuldades pode-se verificar que o ponto de equilíbrio é um conjunto invariante de (B.1).

Um pergunta que pode ser feita é como calcular pontos de equilíbrio para um sistema do tipo (B.1), dependendo da complexidade do modelo o cálculo de tais equilíbrios se torna complicado até mesmo usando ferramental numérico. Por outro lado, conhecendo

o ponto de equilíbrio analisa-se o comportamento local do modelo nas vizinhanças deste ponto de equilíbrio. Nesse sentido, os conceitos propostos abaixo caracterizam a estabilidade de pontos de equilíbrio.

**Definição B.2.6.** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (B.1) é estável se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existir um  $\delta > 0$  tal que, para toda condição inicial  $x_0$  satisfazendo  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  tem-se  $\|\varphi(t, x_0) - x^*\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Definição B.2.7.** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  do sistema (B.1) é instável se ele não é estável.*

Um outra propriedade interessante dos pontos de equilíbrio é a atratividade definida a seguir.

**Definição B.2.8.** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  é atrativo se existir  $\delta > 0$  tal que a bola aberta  $B(x^*; \delta)$  tem a seguinte propriedade*

$$x_0 \in B(x^*; \delta) \implies \varphi(t, x_0) \longrightarrow x^* \text{ quando } t \longrightarrow +\infty.$$

**Definição B.2.9.** *Um ponto de equilíbrio de (B.1) é assintoticamente estável se for estável e atrativo.*

Em algumas situações deseja-se que não apenas o ponto de equilíbrio seja assintoticamente estável mas que todas as soluções tendam para este equilíbrio quando o tempo tende ao infinito. Para isto define-se o conceito de estabilidade global assintótica.

**Definição B.2.10.** *Um ponto de equilíbrio de (B.1) é globalmente assintoticamente estável se ele é estável e para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(t, x_0) \longrightarrow x^*$  quando  $t \longrightarrow +\infty$ .*

Da definição anterior pode-se concluir que se  $x^*$  é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (B.1) então ele é único.

**Definição B.2.11.** *Um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (B.1) é hiperbólico se todos os autovalores da matriz Jacobiana do sistema linearizado associado possuem parte real não nula.*

A demonstração destas definições podem ser encontradas de forma detalhada em (SOTOMAYOR, 1979).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)