

# Em Busca da Unificação de Matéria e Energia Escuras

Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

*Orientador:* Ioav Waga

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



UFRJ

EM BUSCA DA UNIFICAÇÃO  
DE MATÉRIA E ENERGIA ESCURAS

Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Orientador: Ioav Waga

Rio de Janeiro

Setembro de 2007

Reis, Ribamar Rondon de Rezende dos.

R375 Em Busca da Unificação de Matéria e Energia Escuras/ Ribamar Rondon de Rezende dos Reis.-Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2007. xviii, 124f.: il. ; 29,7cm.

Orientador: Ioav Waga

Tese (doutorado) - UFRJ/ Instituto de Física/ Programa de pós-graduação em Física , 2007.

Referências Bibliográficas: f. 131-140.

1. Cosmologia. 2. Energia escura. 3. Matéria escura. 4. Quarta-essência. 5. Aceleração cósmica. 6. Vínculos sobre parâmetros cosmológicos. I. Waga, Ioav. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de pós-graduação em Física. III. Título.

---

## Resumo

### EM BUSCA DA UNIFICAÇÃO DE MATÉRIA E ENERGIA ESCURAS

Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

Orientador:

Ioav Waga

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, do Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Nós investigamos a hipótese de que matéria e energia escuras seriam manifestações, percebidas em diferentes escalas, de uma única substância, a matéria escura unificada ou quartessência. Analisamos duas classes de modelos de quartessência, caracterizadas pela concavidade da equação de estado  $p = p(\rho)$ , em outras palavras, pela segunda derivada da pressão em relação à densidade de energia,  $d^2p/d\rho^2$ . Todos os modelos apresentados na literatura têm uma equação de estado convexa, ou seja, sua segunda derivada é sempre negativa. Pode-se mostrar que nesses modelos a velocidade do som adiabática ( $c_s^2 \equiv dp/d\rho$ ) se torna importante em tempos recentes, levando a problemas com as observações de estrutura em grande escala e da radiação cósmica de fundo (RCF), se considerarmos perturbações adiabáticas. Com o intuito de contornar este problema nós apresentamos uma nova classe de modelos em que a equação de estado pode mudar de concavidade no curso de sua evolução, de modo que a velocidade do som só é apreciável em torno do ponto de inflexão. Determinamos vínculos sobre os parâmetros desses modelos, usando da-

---

dos observacionais, tais como supernovas do tipo Ia, fração de gás em aglomerados de galáxias, espectro de potência da matéria e medidas de temperatura da RCF. Com isso mostramos que para garantir acordo com todos os dados observacionais considerados é necessário que a evolução de qualquer modelo de quartessência adiabática não pode ser consideravelmente distinta do modelo padrão  $\Lambda$ CDM. A única forma de obter modelos distintos de  $\Lambda$ CDM e compatíveis com os dados observacionais até primeira ordem em teoria de perturbação é considerar perturbações de entropia. Entretanto, mostramos que, em segunda ordem, estes modelos podem se comportar de maneira sensivelmente diferente do modelo padrão e que observações precisas da assimetria da distribuição de densidade e, principalmente, da convergência local de lentes gravitacionais poderiam descartá-los de maneira decisiva. Ainda dentro do contexto de perturbações de entropia, nos propomos a investigar diretamente o comportamento do parâmetro da equação de estado  $w \equiv p/\rho$  da quartessência em função do desvio para o vermelho  $z$  por meio de parametrizações  $w(z)$  nas quais os parâmetros representam o comportamento futuro e passado de  $w$  e o desvio para o vermelho e a rapidez da transição do comportamento de matéria escura para o de energia escura, que caracteriza a quartessência. Cientes da especificidade intrínseca ao estudo de modelos particulares, sejam de energia escura ou de quartessência, apresentamos uma parametrização do parâmetro de desaceleração  $q$ , com o objetivo de obter informação sobre a expansão cósmica usando o mínimo de hipóteses de trabalho.

Palavras-chave: Cosmologia, Energia Escura, Matéria Escura, Quartessência, Aceleração cósmica, Vínculos sobre parâmetros cosmológicos.

Rio de Janeiro

Setembro de 2007

---

# Abstract

## A QUEST FOR DARK MATTER AND DARK ENERGY UNIFICATION

Ribamar Rondon de Rezende dos Reis

Advisor:

Ioav Waga

*Abstract* da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, do Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

We investigate the hypothesis that dark energy and dark matter could be different manifestations, observed at different scales, of the same substance, the unifying dark matter or quartessence. We analyze quartessence models characterized by the concavity of its equation of state  $p = p(\rho)$ , given by the second derivative of the pressure with respect to the energy density,  $d^2p/d\rho^2$ . All models presented in the literature present a convex equation of state, e.g. its second derivative is always negative. It can be shown that, in these models, the adiabatic sound speed  $c_s^2 \equiv dp/d\rho$  becomes important at recent times, leading to problems with observations of large-scale structure and cosmic microwave background, if adiabatic perturbations are assumed. In order to circumvent this problem, we present a new class of models in which the equation of state can change its concavity during the evolution, in such way that the adiabatic sound speed is non negligible only around the inflexion point. We obtain constraints on the parameters of the models using observational data from type Ia supernovae, X-ray clusters gas mass fraction, matter power

spectrum and cosmic microwave background and show that agreement with all cosmological data requires that the cosmic expansion history of adiabatic quartessence models has to be very similar to the  $\Lambda$ CDM one. The only known way of getting models distinct from  $\Lambda$ CDM but still in agreement with observational data up to first order in perturbation theory is considering entropy perturbations. However, we show that, in second order, these models can behave in a way considerably different of  $\Lambda$ CDM and precise measurements of the skewness of density distribution and, specially, the local convergence skewness from gravitational lenses could rule them out. Still in the context of entropy perturbations, we decided to investigate directly the behavior of the quartessence equation of state parameter  $w \equiv p/\rho$  with the redshift  $z$  through  $w(z)$  parametrizations, in which we set parameters that represent the future and the past values of  $w$  and the redshift and the velocity of the transition from a dark matter regime to a dark energy one. Due to the difficulty in getting general conclusions from particular model analysis, we present a parametrization of the deceleration parameter  $q$ , in order to get information on the cosmic expansion with a minimum set of suppositions.

Key-words: Cosmology, Dark Energy, Dark Matter, Quartessence, Cosmic Acceleration, Constraints on cosmological parameters.

Rio de Janeiro

September, 2007



# Agradecimentos

Gostaria de enfatizar a grande sorte que tive em desenvolver meus estudos de pós-graduação em um momento de grande produtividade do grupo de gravitação e cosmologia do IF-UFRJ, o que me deu plenas condições de desenvolver ao máximo minhas capacidades.

Agradeço a Deus, por ter me dado coragem e perseverança para enfrentar as adversidades. A Maurício O. Calvão, Sérgio E. Jorás e Miguel Quartin, pelas discussões extremamente úteis, sempre um desafio ao meu intelecto. A Alan Toribio, Martin Makler e Luca Amendola, pela colaboração no trabalho aqui apresentado. A Émille Ishida pela colaboração, pela ajuda e pela companhia. A Ioav Waga, verdadeiro mentor e amigo, por tudo que me ensinou e que ainda pode me ensinar. A minha família, pelo apoio. À minha mãe, sempre.



# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>O Modelo Padrão da Cosmologia</b>                         | <b>7</b>  |
| <b>3</b> | <b>Teoria de Perturbação em Cosmologia Relativística</b>     | <b>19</b> |
| 3.1      | Formulação invariante de calibre . . . . .                   | 21        |
| 3.2      | Métodos dependentes de calibre . . . . .                     | 24        |
| 3.3      | Perturbações em um fluido multi-componente . . . . .         | 29        |
| <b>4</b> | <b>Modelos de quartessência convexa</b>                      | <b>37</b> |
| 4.1      | Modelos fenomenológicos de quartessência . . . . .           | 37        |
| 4.2      | Evolução linear de perturbações . . . . .                    | 41        |
| 4.3      | Evolução não-linear de perturbações . . . . .                | 47        |
| <b>5</b> | <b>Modelos de quartessência não-convexa</b>                  | <b>57</b> |
| 5.1      | Vínculos Observacionais - Testes de ordem zero . . . . .     | 60        |
| 5.2      | Vínculos Observacionais - Testes de Primeira Ordem . . . . . | 61        |
| <b>6</b> | <b>Modelos para o Parâmetro da Equação de Estado</b>         | <b>67</b> |
| 6.1      | Parametrizações da Energia Escura . . . . .                  | 67        |
| 6.2      | Uma nova parametrização . . . . .                            | 69        |
| 6.3      | Outras Propostas . . . . .                                   | 74        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>7</b> | <b>Parametrizando a Aceleração Cósmica</b>                     | <b>81</b>  |
| <b>8</b> | <b>Conclusão</b>   | <b>93</b>  |
| <b>A</b> | <b>Expansão harmônica</b>                                      | <b>97</b>  |
| <b>B</b> | <b>Funções de Correlação e Espectro de Potência da Matéria</b> | <b>101</b> |
| <b>C</b> | <b>Equações de Boltzmann</b>                                   | <b>107</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                              | <b>115</b> |

# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | <b>À esquerda:</b> Comportamento do fator de escala com o tempo para alguns modelos tipo $\Lambda$ CDM (figura tirada de [24]). <b>À direita:</b> Comportamento do universo no plano $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda0})$ (figura tirada de [25]). . . . .   | 14 |
| 2.2 | Vínculos sobre os parâmetros do modelo $\Lambda$ CDM [26]. . . . .   | 17 |
| 4.1 | Espectros de Potência da matéria para bárions (painel superior) e total (painel inferior), para quartessência exponencial, no caso adiabático. As curvas, de cima para baixo, correspondem a $\alpha = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ e $M^4/\bar{\rho}_0$ é escolhido de forma que todos os modelos tenham $\Gamma_{eff} = 0.18$ . Os quadrados azuis representam dados do “Sloan Digital Sky Survey” conforme compilados em [45] e os círculos vermelhos representam dados do “2dF galaxy redshift survey” conforme compilados em [46]. . . . . | 43 |

- 4.2 Espectros de Potência da matéria para bárions (painel superior) e total (painel inferior), para quartessência logarítmica, no caso adiabático. As curvas, de cima para baixo, correspondem a  $\alpha = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$  e  $M^4/\bar{\rho}_0$  é escolhido de forma que todos os modelos tenham  $\Gamma_{eff} = 0.18$ . Os quadrados azuis representam dados do “Sloan Digital Sky Survey” conforme compilados em [45] e os círculos vermelhos representam dados do “2dF galaxy redshift survey” conforme compilados em [46]. . . . . 44
- 4.3 Espectros de potência da matéria para bárions, para os modelos exponencial (painel superior) e logarítmico (painel inferior), no caso não adiabático, com  $\alpha = 0, 0.1, 0.2$  e  $M^4/\bar{\rho}_0$  escolhido de forma que todos os modelos tenham  $\Gamma_{eff} = 0.18$ . Os quadrados azuis representam dados do “Sloan Digital Sky Survey” conforme compilados em [45] e os círculos vermelhos representam dados do “2dF galaxy redshift survey” conforme compilados em [46]. . . . . 45
- 4.4 Contornos de assimetria constante no plano  $(M^4/\bar{\rho}_0, \alpha)$  para quartessência de Chaplygin (curvas sólidas). Nós também mostramos curvas com densidade da matéria efetiva  $\Omega_m^{eff}$  constante (curvas tracejadas) e valor atual da equação de estado  $w_0$  constante (curvas pontilhadas). . . . . 50
- 4.5 Contornos de assimetria constante no plano  $(M^4/\bar{\rho}_0, \alpha)$  para quartessência logarítmica (curvas sólidas). Nós também mostramos curvas com densidade da matéria efetiva  $\Omega_m^{eff}$  constante (curvas tracejadas) e valor atual da equação de estado  $w_0$  constante (curvas pontilhadas). 51

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.6 | Contornos de assimetria constante no plano $(M^4/\bar{\rho}_0, \alpha)$ para quartessência exponencial (curvas sólidas). Nós também mostramos curvas com densidade da matéria efetiva $\Omega_m^{eff}$ constante (curvas tracejadas) e valor atual da equação de estado $w_0$ constante (curvas pontilhadas). . . . .   | 52 |
| 5.1 | Painel esquerdo: pressão como função da densidade de energia para a sigmoíde. Painel direito: equação de estado e velocidade adiabática do som em função do desvio para o vermelho. . . . .   | 59 |
| 5.2 | Níveis de confiança de 68% e 95% para SNeIa (painel superior) e aglomerados (painel inferior), para o modelo sigmoíde. . . . .  | 62 |
| 5.3 | Níveis de confiança de 68% e 95% para dados de RCF do WMAP [37](painel superior) e dados do SDSS [45] (painel inferior). . . . .  | 64 |
| 5.4 | Níveis de confiança de 68% e 95% para a análise combinada supernovas + aglomerados + RCF + espectro de potência da matéria. . . . .   | 65 |
| 6.1 | Contornos de 68% e 95% de confiança, para o novo modelo, para SNeIa (painel superior esquerdo), SNeIa+aglomerados (painel superior direito), SNeIa+aglomerados+BAO (painel inferior esquerdo) e SNeIa+aglomerados+BAO+deslocamento da RCF+posição do pico de RCF (painel inferior direito). . . . .                     | 73 |
| 6.2 | Contornos de 68% e 95% de confiança, para o modelo de Linder <i>et al.</i> , para SNeIa (painel superior esquerdo), SNeIa+aglomerados (painel superior direito), SNeIa+aglomerados+BAO (painel inferior esquerdo) e SNeIa+aglomerados+BAO+deslocamento da RCF+posição do pico de RCF (painel inferior direito). . . . . | 76 |

- 6.3 Contornos de 68% e 95% de confiança, para o modelo de Bassett *et al.*, para SNeIa (painel superior esquerdo), SNeIa+aglomerados (painel superior direito), SNeIa+aglomerados+BAO (painel inferior esquerdo) e SNeIa+aglomerados+BAO+deslocamento da RCF+posição do pico de RCF (painel inferior direito). . . . . 77
- 6.4 Curvas com  $\Omega_{m0eff}$  constante para o novo modelo (painel superior), o de Linder *et al.* (painel inferior esquerdo) e o de Bassett *et al.* (painel inferior direito). As curvas correspondem a  $\Omega_{m0eff} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  de cima para baixo. . . . . 79
- 7.1 **Esquerda** - Vínculos impostos por dados de SNeIa. O contornos representam níveis de confiança de 68% e 95%. As curvas tracejadas verdes são da amostra *Gold182* e as sólidas azuis são da amostra do primeiro ano do SNLS. **Direita** - Vínculos impostos por dados de  $S_k/D_v$ . A linha horizontal vermelha em ambos os painéis correspondem a modelos  $\Lambda$ CDM. . . . . 86

- 7.2 **Esquerda** - Contornos de confiança de 68% e 95% impostos pelos dados observacionais, usados na figura (7.1), combinados. Os contornos verdes tracejados (azuis ponto-tracejados) representam a combinação *Gold182* (SNLS) +  $S_k/D_v$ . O contorno preto sólido representa 95% de confiança para dados simulados baseados nas especificações do SNAP, supondo intercept conhecido, e considerando que a dispersão em  $S_k/D_v$  possa ser reduzida a 2/3 do valor atual. Como fiducial usamos  $\Lambda$ CDM plano com  $\Omega_{m0} = 0.23$ . A linha vermelha horizontal corresponde a modelos  $\Lambda$ CDM.. **Direita** - Superfície de 95% de confiança, no espaço de parâmetros  $(z_t, \tau, q_0)$ , para o caso de  $q_f$  arbitrário ( $q_f \in (-\infty, 0)$ ), obtida usando os dados combinados SNLS +  $S_k/D_v$  . . . . . 89
- 7.3 Vínculos sobre nossa parametrização de  $q$  conforme simulações de dados futuros de  $S_k/D_v$  combinados SNeIa, de acordo com as especificações do SNAP (à esquerda) e com estudos preliminares para o DES (à direita). . . . . 92
- C.1 Espectro da RCF após 3 anos de observações da sonda WMAP [37].  
A área sombreada representa a variância cósmica. Figura tirada de [37].112
- C.2 Vínculos sobre o modelo  $\Lambda$ CDM usando dados do WMAP3, combinados com dados da “amostra de ouro” de Riess *et al.*, do Supernova Legacy Survey (SNLS), do Hubble Space Telescope (HST) key project, do Sloan Digital Sky Survey (SDSS) e do Two Degree Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS). Figura tirada de [38]. . . . . 113
- C.3 Mudanças em cada parâmetro cosmológico afetam o espectro da RCF de maneira diferente. Figura tirada de [39]. . . . . 114



# Capítulo 1

## Introdução

Atualmente dois problemas fundamentais da cosmologia são a formação de estruturas e a atual aceleração da expansão cósmica. Para dar conta destes dois aspectos, o procedimento padrão tem sido introduzir, no contexto da relatividade geral, dois componentes exóticos: a matéria escura [1] e a energia escura [2]. Não há, entretanto, até agora, qualquer indicação da natureza destes dois componentes. Uma vez que estes componentes foram propostos para explicar observações em diferentes escalas de distância, sugeriu-se que poderiam ser manifestações de uma mesma substância, a matéria escura unificada ou quartessência [3].

Um exemplo popular de quartessência, que foi inicialmente introduzido como energia escura apenas, é o gás de Chaplygin generalizado [4, 5, 6, 7, 8], um fluido exótico com uma equação de estado dada por  $\bar{p} = -M^{4(\alpha+1)}/\bar{\rho}^\alpha$ , onde  $M$  tem dimensão de massa e  $\alpha$  é um parâmetro adimensional ( $\alpha = 1$  é o gás de Chaplygin original). Este modelo pode ser considerado um protótipo de quartessência; inicialmente se comporta como matéria escura sem pressão (poeira) e, no futuro, como constante cosmológica. Para  $\alpha = 0$  o modelo se reduz a  $\Lambda$ CDM.

Para testes cosmológicos que envolvem apenas a métrica de fundo homogênea, a quartessência de Chaplygin é compatível com os dados observacionais para uma con-

siderável região do espaço de parâmetros [9, 10, 11, 12]. No entanto, surgem problemas quando consideramos perturbações no modelo. Para perturbações adiabáticas ( $\delta p/\delta\rho = dp/d\rho$ ), análises da radiação cósmica de fundo (RCF) [13, 14] e da estrutura em grande escala [15] indicam que apenas modelos próximos do “limite  $\Lambda$ CDM” são compatíveis com as observações. Além disso, pode-se mostrar que, se o parâmetro  $\alpha$  não for muito próximo de zero, o espectro de potência da matéria apresenta oscilações e instabilidades [16]. A partir da análise de RCF, conclui-se que modelos compatíveis estão restritos a  $|\alpha| < 0.01$  [17]. Este problema se deve ao valor finito da velocidade do som neste fluido. Quando ela é suficientemente grande e positiva, dificulta aglomeração em pequenas escalas e, portanto, introduz uma supressão no espectro que está em desacordo com as observações; quando é negativa gera instabilidades. Todas estas análises consideram que as perturbações são adiabáticas. Este problema pode ser contornado se considerarmos perturbações de entropia intrínsecas [18], tais que a velocidade do som efetiva  $\delta p/\delta\rho$  do fluido [19] seja nula, situação denominada “silenciosa” [17].

Nós mostramos que o problema das oscilações e instabilidades no espectro de potência é característico de toda uma família de modelos de quartessência da qual faz parte o gás de Chaplygin e que a solução é sempre dada pela adoção da hipótese silenciosa [20]. Nós também mostramos a importância de investigar o comportamento do modelo no regime não linear, analisando quantidades como a assimetria da distribuição de matéria, que quantifica o desvio da distribuição Gaussiana [21].

Todos estes modelos têm como característica básica uma equação de estado convexa, ou seja,  $d^2p/d\rho^2 < 0$  sempre, o que significa que a velocidade do som adiabática  $c_s^2 \equiv dp/d\rho$  se torna importante conforme o parâmetro da equação de estado  $w \equiv p/\rho$  se torna mais negativo. Para fazer com que  $c_s^2 \sim 0$ , em tempos recentes, propomos um modelo em que a equação de estado pode mudar sua concavidade durante a evolução, de modo que  $c_s^2$  só é apreciável durante a inflexão. Neste modelo, a equação

---

de estado é tipo degrau, interpolando os regimes de matéria escura com  $w \approx 0$  e constante cosmológica com  $w = -1$ . A duração e o desvio para o vermelho da transição são controlados por dois parâmetros. Determinamos vínculos sobre esses parâmetros, usando dados observacionais de supernovas do tipo Ia, fração de gás em aglomerados de galáxias, espectro de potência da matéria e medidas de temperatura da radiação cósmica de fundo. Para garantir acordo com todos os dados observacionais considerados é necessário que a evolução do modelo não seja consideravelmente distinta do modelo padrão  $\Lambda$ CDM.

Em todos os modelos considerados acima, nós apresentamos uma parametrização para a equação de estado  $p = p(\rho)$ . Uma alternativa bastante comum na literatura é investigar diretamente a evolução da equação de estado com o desvio para o vermelho através de uma parametrização de  $w$ . Nós analisamos três diferentes modelos, no contexto de quartessência e obtemos vínculos sobre os parâmetros a partir de dados observacionais.

Todas estas análises são aplicadas a modelos específicos. Apesar do esforço em generalizar os modelos, as conclusões continuam condicionadas a algumas hipóteses iniciais. Fixamos a teoria de gravitação como sendo a relatividade geral e especificamos o conteúdo material do universo para cada modelo considerado. Alguns dos dados observacionais considerados também dependem de hipóteses acerca dos constituintes do universo. Em vista disto, podemos nos perguntar se é possível responder a algumas questões da cosmologia moderna com o mínimo de hipóteses iniciais, de forma a obter um resultado válido para um grande número de modelos particulares.

Neste ínterim, nós abandonamos o contexto de quartessência para nos concentrarmos em questões básicas acerca da expansão cósmica: qual é o desvio para o vermelho da transição de expansão desacelerada para acelerada? Quão rápida ela foi (é)? Para investigá-las, nós começamos com um conjunto mínimo de hipóteses e cuidadosamente introduzimos outras de forma a obter vínculos fortes no espaço de

parâmetros. Nosso ponto de partida é o próprio parâmetro de desaceleração  $q$ , de forma que não precisamos especificar a teoria de gravitação subjacente nem tampouco os constituintes do universo. Nós introduzimos uma parametrização de  $q$  e usamos dados de SNeIa e da razão entre a distância comóvel até a última superfície de espalhamento ( $S_k(z_{ls} = 1098)$ ) e a escala de distância de oscilações acústicas de bárions (BAO, do inglês “Baryon Acoustic Oscillation”) ( $D_v(z)$ ) em  $z_{BAO} = 0.2$  e  $z_{BAO} = 0.35$ , conforme obtida em [22], para impor vínculos sobre nossos parâmetros. Como veremos, estes observáveis são particularmente interessantes por dependerem apenas da evolução do parâmetro de Hubble e por serem complementares, possibilitando a obtenção de vínculos fortes sobre os parâmetros.

Nós mostramos que apenas com os dados atuais de SNeIa não é possível impor um limite superior para o desvio para o vermelho da transição de desaceleração para aceleração ( $z_t$ ), embora obtenhamos que a transição ocorreu no passado ( $z_t > 0$ ) com alto nível de confiança. No entanto, a combinação SNeIa +  $S_k/D_v$  nos permite obter fortes vínculos sobre a transição, como veremos.

Este trabalho está organizado como segue: no capítulo 2, apresentaremos o atual modelo padrão da cosmologia e alguns conceitos que utilizamos ao longo do trabalho; no capítulo 3, apresentaremos o formalismo invariante de calibre para perturbações cosmológicas relativísticas, discutiremos algumas escolhas possíveis de calibre, apresentaremos o estudo de perturbações em fluidos multi-componentes e o estudo das equações de Boltzmann para obter as perturbações de temperatura da radiação cósmica de fundo; no capítulo 4, analisaremos modelos de quartessência convexa; no capítulo 5 analisaremos modelos de quartessência não convexa; no capítulo 6 analisaremos algumas parametrizações de  $w$ ; no capítulo 7 consideramos uma parametrização de  $q$ ; no capítulo 8 exporemos nossas conclusões. Nos apêndices discutiremos conceitos importantes utilizados no trabalho, a saber os princípios da expansão das perturbações em funções harmônicas e os conceitos de funções de correlação e

espectro de potência da matéria.



## Capítulo 2

# O Modelo Padrão da Cosmologia

A teoria da relatividade geral estabelece que a geometria do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria e, da mesma forma, a trajetória de qualquer corpo em queda livre, ou seja, uma geodésica, é determinada pela geometria. A relação entre geometria e matéria é dada pelas equações de campo de Einstein que, no sistema de unidades em que  $c = 1$ , é dada por

$$G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica,  $G$  a constante universal da gravitação,  $T_{\mu\nu}$  o tensor energia-momento e  $G_{\mu\nu}$  o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.2)$$

Com o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , definido a partir do tensor de Riemann  $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$  como

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \quad (2.3)$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\gamma\beta}, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_{\nu}g_{\alpha\beta} + \partial_{\beta}g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}g_{\nu\beta}), \quad (2.5)$$

e  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico, que define a métrica, ou elemento de linha do espaço-tempo por meio de

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \quad (2.6)$$

As observações atuais sugerem que é uma boa aproximação considerar o universo espacialmente homogêneo e isotrópico. Tal consideração nos leva à métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que pode ser expressa por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.7)$$

onde  $K$  está associado à curvatura da seção espacial, constante, e  $\mathbf{x} = (r, \theta, \phi)$  são as coordenadas co-móveis. A homogeneidade espacial e a isotropia também limitam a forma do tensor energia-momento à de um fluido perfeito

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia,  $p$  a pressão e  $u^{\mu}$  é o 4-vetor velocidade de um observador comóvel com o fluido, definido de maneira que  $u^{\mu}u_{\mu} = 1$ . Conservação de energia e momento  $\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$  leva à chamada equação de conservação

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.9)$$

Com a métrica (2.7) e o tensor (2.8), as equações de campo (2.1) se reduzem às equações de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.11)$$

Das equações (2.9), (2.10) e (2.11), apenas duas são independentes, de modo que para resolver o sistema é preciso mais uma equação relacionando as variáveis  $a$ ,  $\rho$  e  $p$ , que escolher ser a chamada equação de estado  $p = p(\rho)$ , a qual precisa ser determinada por uma teoria fundamental que descreva o fluido em questão ou, em sua ausência, pela fenomenologia.

Uma quantidade fundamental para a cosmologia é o desvio para o vermelho ( $z$ ), que fornece uma medida da velocidade de recessão de um objeto em relação a um observador. Considerando um fóton viajando ao longo de uma geodésica nula radial em um universo de FLRW, podemos escrever [23]

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}}, \quad (2.12)$$

onde o sinal “+” corresponde a um raio de luz emitido, e o sinal “-”, a um recebido. Para um raio de luz emitido em um instante  $t_1$  e a uma distância  $r_1$  e recebido na origem no instante  $t_0$  nós obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} &= - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{1/2}} = \frac{1}{|K|^{1/2}} \int_0^{|K|^{1/2}r_1} \frac{dr^*}{(1 - kr^{*2})^{1/2}} \\ &= \frac{1}{|K|^{1/2}} S_k^{-1}(|K|^{1/2}r_1), \end{aligned} \quad (2.13)$$

com

$$S_k(x) = \begin{cases} \sinh(x), & \text{se } K < 0, \\ x, & \text{se } K = 0, \\ \sin(x), & \text{se } K > 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

onde nós usamos a substituição  $r^* = |K|^{1/2}r$ , com  $K = k|K|$ . Considere agora que um segunda frente de onda chega no instante  $t_0 + dt_0$ , tendo sido emitida após um

intervalo  $dt_1$ . Neste caso teremos

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{|K|^{1/2}} S_k^{-1}(|K|^{1/2} r_1), \quad (2.15)$$

em que o lado direito não depende do tempo. Com isso, a relação entre a diferença de tempo dos sinais é

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_1}{a(t_1)}, \quad (2.16)$$

o que leva à relação entre as frequências na emissão e na recepção dada por

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{dt_1}{dt_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (2.17)$$

A partir dessa relação podemos expressar o desvio para o vermelho como

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_e}, \quad (2.18)$$

onde  $\lambda_0$  e  $\lambda_e$  são os comprimentos de onda conforme medidos na recepção e na emissão da onda. Ao longo de todo este trabalho o subscrito “0” designará quantidades avaliadas hoje.

Podemos caracterizar a evolução do universo determinando alguns parâmetros convenientemente definidos. Alguns parâmetros particularmente importantes são o parâmetro de Hubble ( $H$ ), o parâmetro de desaceleração ( $q$ ), os parâmetros de densidade ( $\Omega$ ), e os parâmetros de equação de estado ( $w$ ), que são definidos como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad w_i \equiv \frac{p_i}{\rho_i} \quad (2.19)$$

$$\Omega_i \equiv \frac{8\pi G\rho_i}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2} \quad \text{e} \quad \Omega_K \equiv -\frac{K}{H^2 a^2}, \quad (2.20)$$

com o subscrito “ $i$ ” denotando um componente específico. É bastante comum expres-

sar o parâmetro de Hubble hoje como  $H_0 = 100h$  km/s/Mpc (1 Mpc= $3.085 \times 10^{19}$  km). Com estas definições, a primeira equação de Friedmann (2.10) se reduz a um vínculo entre os parâmetros de densidade

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1. \quad (2.21)$$

O modelo padrão da cosmologia, o chamado  $\Lambda$ CDM, considera o universo formado por matéria bariônica, matéria escura fria (CDM, do inglês Cold Dark Matter); com isso, podemos escrever

$$\Omega_m + \Omega_R + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1, \quad (2.22)$$

com  $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{CDM}$  sendo o parâmetro de densidade de toda a matéria não relativística e  $\Omega_R = \Omega_\nu + \Omega_\gamma$  o parâmetro de densidade da radiação ou matéria relativística, como fótons e neutrinos.

A matéria não relativística, ou poeira, é caracterizada por  $p \ll \rho$ , o que leva a  $w_m = 0$  e a seguinte solução para a equação de conservação (2.9)

$$\rho_m = \rho_{m0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (2.23)$$

A matéria relativística, por sua vez, é caracterizada pela pressão de radiação  $p = \rho/3$ , que corresponde a  $w_R = 1/3$  e a

$$\rho_R = \rho_{R0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (2.24)$$

Para compreender a influência de cada fluido na expansão do universo, vamos supor que o universo é composto por apenas uma componente. Uma vez que as densidades de poeira e radiação, ou mesmo o termo de curvatura e a constante cosmológica, são diferentes funções monotônicas decrescentes do fator de escala, tal

suposição revela-se um boa aproximação quando consideramos épocas em que a densidade de uma substância é muito maior que a das outras.

Consideremos, primeiramente, que o universo é constituído por poeira, sem curvatura e constante cosmológica. Neste caso, a equação de Friedmann fica

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_{m0}}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad (2.25)$$

cuja solução é

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \quad (2.26)$$

$$\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^2. \quad (2.27)$$

Supondo, agora, um universo apenas com radiação, temos

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_{R0}}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4, \quad (2.28)$$

cuja solução é

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad (2.29)$$

$$\rho_R = \rho_{R0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^2. \quad (2.30)$$

Para um universo vazio, somente com curvatura, temos

$$H^2 = -\frac{K}{a^2}. \quad (2.31)$$

Se  $K < 0$  temos  $a \sim t$ . Da equação (2.11) obtemos que  $\ddot{a} = 0$

Um modelo bastante interessante é o de de Sitter, que considera um universo vazio, sem curvatura e com constante cosmológica. Com isso, temos que o parâmetro

de Hubble é constante,

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (2.32)$$

o que leva a um crescimento exponencial do fator de escala,

$$a = a_0 e^{H(t-t_0)}. \quad (2.33)$$

É importante notar que para todos os casos acima, exceto o caso com constante cosmológica, o parâmetro de desaceleração é não-negativo. Atualmente, os dados observacionais indicam que a expansão do universo é acelerada, o que implica que  $q_0 < 0$ . No modelo  $\Lambda$ CDM, podemos escrever

$$q = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_i - \Omega_\Lambda, \quad (2.34)$$

portanto uma constante cosmológica positiva poderia explicar a atual fase de aceleração cósmica.

Para uma descrição completa do universo devemos considerá-lo composto por todos os componentes mencionados. A figura 2.1 mostra o comportamento do fator de escala com o tempo para vários modelos com constante cosmológica.

Uma questão central, em cosmologia, é a determinação de distâncias. Existem, no entanto, várias definições de distância, cabendo a nós escolher a mais adequada para o observável que queremos tratar. Neste trabalho, mencionaremos apenas as definições que serão usadas nos próximos capítulos. Dois conceitos muito úteis são os de tempo,  $t_H = 1/H$ , e raio,  $D_H = c/H$  ( $c$  é a velocidade da luz), de Hubble. Hoje, eles podem ser escritos como

$$t_{H0} = H_0^{-1} = 9.78 \times 10^9 h^{-1} \text{ anos}, \quad (2.35)$$

$$D_{H0} = cH_0^{-1} = 3000h^{-1} \text{ Mpc} = 9.26 \times 10^{22} h^{-1} \text{ km}. \quad (2.36)$$

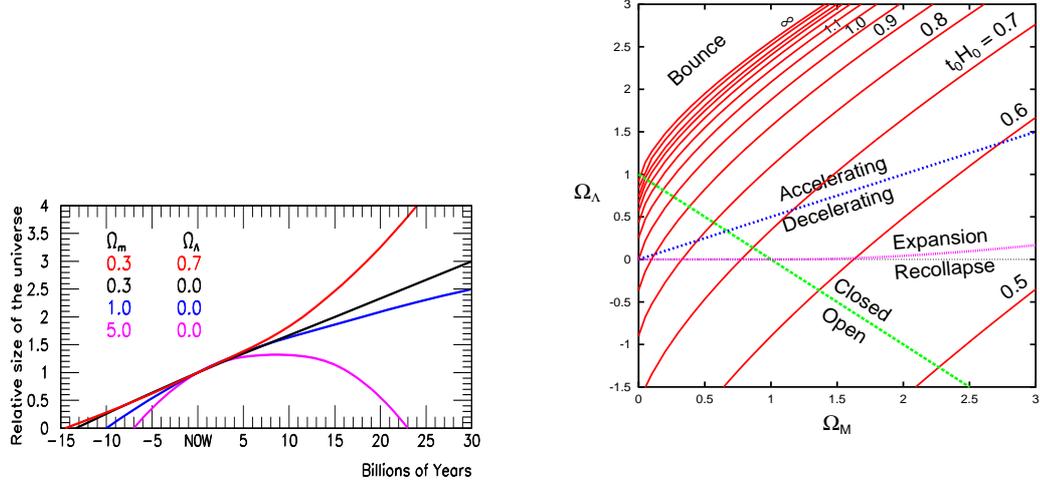


Figura 2.1: **À esquerda:** Comportamento do fator de escala com o tempo para alguns modelos tipo  $\Lambda$ CDM (figura tirada de [24]). **À direita:** Comportamento do universo no plano  $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda0})$  (figura tirada de [25]).

A distância comóvel ( $r_c$ ) é a distância percorrida por um fóton desde uma fonte em uma coordenada  $r$ , em um tempo  $t$ , até um observador na coordenada  $r = 0$ , no tempo  $t_0$ . Para uma geodésica nula, com coordenadas angulares constantes, na métrica de FLRW, temos

$$r_c = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.37)$$

$$r_c = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.38)$$

onde escolhermos  $a_0 = 1$  e manteremos esta escolha ao longo de todo este trabalho. A distância comóvel não depende do tempo, por definição. Usando (2.10), (2.18), (2.25) e (2.28), podemos escrever, para o modelo  $\Lambda$ CDM,

$$\left[ \frac{H(z)}{H_0} \right]^2 = \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{R0} - \Omega_{\Lambda0})(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda0}, \quad (2.39)$$

$$H_0 r_c = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z')^3 + \Omega_{R0}(1+z')^4 + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{R0} - \Omega_{\Lambda0})(1+z')^2 + \Omega_{\Lambda0}}}. \quad (2.40)$$

A distância própria é a distância física entre dois objetos. É definida como

$$D_p = ar_c = \frac{1}{1+z}r_c. \quad (2.41)$$

A distância comóvel é a distância própria hoje.

A distância de diâmetro angular de um objeto em  $r_1$  e  $t_1$ , com tamanho próprio  $D$ , subtendido por um ângulo  $\alpha$  para um observador em  $r = 0$  e  $t = 0$ , é definida como

$$D_A \equiv \frac{D}{\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1+z} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{K0}}} \sinh[\sqrt{\Omega_{K0}}r_c(z)], & \text{se } K < 0 \\ \frac{1}{1+z} r_c(z), & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{1+z} \frac{1}{\sqrt{-\Omega_{K0}}} \sin[\sqrt{-\Omega_{K0}}r_c(z)], & \text{se } K > 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Dada uma fonte com luminosidade absoluta (potência)  $L$ , para a qual um observador mede um fluxo (potência por unidade de área) e um desvio para o vermelho  $z$ , a distância de luminosidade é definida como

$$D_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = \begin{cases} (1+z) \frac{1}{\sqrt{\Omega_{K0}}} \sinh[\sqrt{\Omega_{K0}}r_c(z)], & \text{se } K < 0 \\ (1+z)r_c(z), & \text{se } K = 0 \\ (1+z) \frac{1}{\sqrt{-\Omega_{K0}}} \sin[\sqrt{-\Omega_{K0}}r_c(z)], & \text{se } K > 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Para mais detalhes sobre os conceitos de distância apresentados veja [23].

Como vimos acima, em cosmologia, as distâncias podem ser expressas em termos de quantidades que dependem do modelo cosmológico. Dessa maneira podemos utilizar observáveis que dependam dessas distâncias para impor vínculos sobre os modelos cosmológicos. Tal procedimento é cerne deste trabalho. A figura 2.2 mostra vínculos sobre os parâmetros do modelo  $\Lambda$ CDM, obtidos por meio de três observações independentes: Supernovas Ia, fração de bárions em aglomerados e temperatura da

radiação cósmica de fundo. A nucleossíntese primordial, que explica a formação de elementos leves (H, He, D, Li) no universo primitivo nos informa que o parâmetro de densidade da matéria bariônica (todas as partículas conhecidas, exceto fótons e neutrinos) é dado por  $\Omega_{b0}h^2 = 0.017 - 0.024$ , o que não é mais do que 10% da matéria não relativística no universo, como podemos ver na figura 2.2. Nos próximos capítulos discutiremos com detalhe os procedimentos envolvidos no tratamento destes e outros observáveis.

A densidade de energia atual da radiação pode ser determinada em termos da temperatura da RCF  $T_0 = 2.725 \pm 0.001$  K [27] como

$$\rho_{\gamma 0} = 2.02 \times 10^{-51} \Theta^4 \text{ GeV}^4, \quad (2.44)$$

e

$$\Omega_{\gamma 0} = 2.49 \times 10^{-5} \Theta^4 h^{-2}, \quad (2.45)$$

onde  $\Theta \equiv T_0/2.73$  K. Considerando um fundo primordial de três neutrinos sem massa, podemos determinar que a densidade total de partículas relativísticas como

$$\Omega_{R0} = \Omega_{\gamma 0} + \Omega_{\nu 0} = 4.18 \times 10^{-5} \Theta^4 h^{-2}. \quad (2.46)$$

Conforme  $a$  diminui  $\rho_R$  aumenta mais rapidamente que  $\rho_m$  (matéria não relativística), de modo que o universo esteve dominado pela radiação para temperaturas

$$T > T_{eq} = 5.63 \times 10^{-9} (\Omega_{m0} h^2 \Theta^{-3}) \text{ GeV}. \quad (2.47)$$

Processos cosmológicos de interesse para a física de partículas ocorreram durante a era dominada pela radiação.

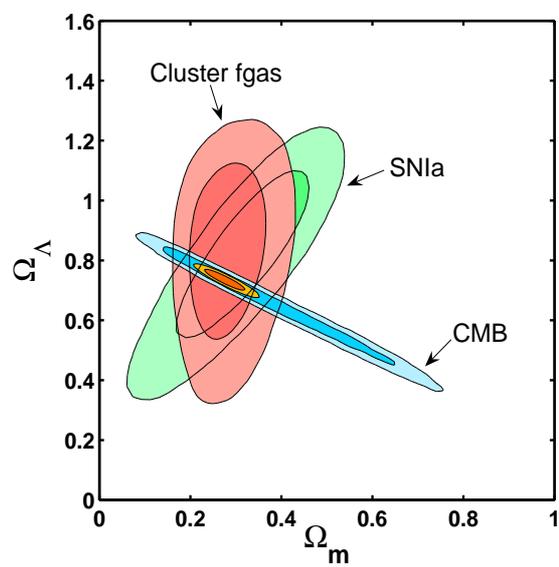


Figura 2.2: Vínculos sobre os parâmetros do modelo  $\Lambda$ CDM [26].



# Capítulo 3

## Teoria de Perturbação em Cosmologia Relativística

Para tratar de perturbações cosmológicas em relatividade geral é preciso lidar com o problema da liberdade de calibre. Ao discutir perturbações estamos lidando com dois espaços-tempos, o espaço-tempo físico perturbado e o espaço-tempo fictício homogêneo, que aqui supomos descrito pela métrica de FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (3.1)$$

Uma correspondência um-a-um entre pontos no espaço-tempo físico e no espaço-tempo de fundo define uma escolha de calibre. Uma mudança em tal correspondência, mantendo fixas as coordenadas, é chamada de transformação de calibre [28].

Uma perturbação em alguma quantidade é definida como a diferença entre o seu valor em um ponto do espaço-tempo físico e o valor no ponto correspondente no espaço-tempo de fundo. Uma transformação de calibre muda o ponto no espaço-tempo de fundo correspondente a um dado ponto no espaço-tempo físico. Portanto,

mesmo se a quantidade é escalar sob transformações de coordenadas, o valor de sua perturbação não será invariante sob transformações de calibre se a quantidade for não-nula e dependente de posição no espaço-tempo de fundo.

Podemos considerar uma transformação de calibre como um mapeamento caracterizado por quatro aspectos [29]:

1. Definimos uma família de linhas de universo em cada no espaço-tempo. Isto determina as linhas de mundo em cada espaço-tempo ao longo das quais nós compararemos a evolução de flutuações de densidade, por exemplo.
2. Definimos uma correspondência específica entre linhas de universo individuais em cada espaço-tempo. Isto especifica como devemos comparar observações devido a cada observador. No caso do espaço-tempo de fundo ser do tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker esta escolha é irrelevante por causa da homogeneidade espacial destes modelos.
3. Definimos famílias correspondentes de hipersuperfícies tipo espaço nos dois espaços-tempos. Uma escolha simples são hipersuperfícies de tempo constante.
4. Definimos uma correspondência entre hipersuperfícies particulares em cada família, e atribuímos valores de tempo particulares para cada evento no espaço-tempo físico.

Para ilustrar a importância do calibre podemos tomar como exemplo a perturbação da densidade de energia. Como a densidade de energia é função do tempo no espaço-tempo de fundo, o valor da perturbação de densidade é alterado por qualquer transformação de calibre que mude a correspondência entre hipersuperfícies de homogeneidade no espaço-tempo físico e no espaço-tempo de fundo. Quando o comprimento de onda da perturbação é muito menor que o horizonte de partículas (tempos tardios na evolução do universo), as hipersuperfícies de homogeneidade são

bem distintas e a mudança na perturbação entre escolhas de calibre é desprezível. Entretanto, em tempos primordiais, diferentes calibres dão resultados bastante diferentes para a dependência temporal da perturbação de densidade. Uma forma de contornar o problema do calibre é definir quantidades invariantes sob transformações de calibre.

### 3.1 Formulação invariante de calibre

Para fazer teoria de perturbação cosmológica devemos introduzir perturbações nas equações básicas da gravitação, as equações de Einstein. Seguindo o trabalho de Kodama & Sasaki [30], nós vamos introduzir perturbações lineares da métrica e do tensor energia-momento

$$\tilde{g}_{00} = -a^2[1 + 2AY], \quad (3.2)$$

$$\tilde{g}_{0j} = -a^2BY_j, \quad (3.3)$$

$$\tilde{g}_{ij} = a^2[\gamma_{ij} + 2H_L Y \gamma_{ij} + 2H_T Y_{ij}], \quad (3.4)$$

$$\tilde{T}^0_0 = -\rho[1 + \delta Y], \quad (3.5)$$

$$\tilde{T}^0_j = (\rho + P)(v - B)Y_j, \quad (3.6)$$

$$\tilde{T}^j_0 = -(\rho + P)vY^j, \quad (3.7)$$

$$\tilde{T}^i_j = P[\delta^i_j + \pi_L \delta^i_j + \pi_T Y^i_j], \quad (3.8)$$

onde  $Y$  são funções harmônicas escalares que satisfazem a equação  $(\Delta_{LB} + k^2)Y = 0$  e  $Y_i$  e  $Y_{ij}$  quantidades vetoriais e tensoriais construídas a partir delas conforme descrito no apêndice A;  $A$ ,  $B$ ,  $H_L$  e  $H_T$  são perturbações na função lapso (que representa a razão da distância de tempo próprio para a distância de coordenada entre duas hipersuperfícies de tempo constante vizinhas), no vetor deslocamento (que representa a taxa de desvio de uma linha de coordenadas espaciais constantes para uma

linha normal a uma hipersuperfície de tempo constante) e nas partes isotrópica e anisotrópica da métrica, respectivamente; e  $\delta$ ,  $v$ ,  $\pi_L$  e  $\pi_T$  são perturbações relativas na densidade de energia (também chamada de contraste de densidade), na velocidade e nas pressões isotrópica e anisotrópica. Neste trabalho vamos nos restringir apenas a perturbações escalares.

As quantidades que representam as perturbações, conforme escritas acima, não são invariantes de calibre. Desenvolver uma teoria em termos destas quantidades apresenta a desvantagem de que seus resultados serão dependentes do calibre escolhido. Uma escolha mais geral é introduzir quantidades invariantes de calibre a partir das anteriores. Desta maneira, os resultados podem ser expressos facilmente em qualquer escolha particular de calibre. Podemos construir vários invariantes, entre eles

$$\Psi = A + k^{-1} \left( \frac{a'}{a} \right) (B - k^{-1} H'_T) + k^{-1} (B' - k^{-1} H''_T), \quad (3.9)$$

$$\Phi = H_L + \frac{H_T}{3} + k^{-1} \left( \frac{a'}{a} \right) (B - k^{-1} H'_T), \quad (3.10)$$

$$\Pi = \pi_T, \quad (3.11)$$

$$\Gamma = \pi_L - \frac{c_s^2}{w} \delta = (c_{eff}^2 - c_s^2) \frac{\delta}{w}, \quad (3.12)$$

$$V = v - k^{-1} H'_T, \quad (3.13)$$

$$\Delta = \delta + 3(1 + w) \left( \frac{a'}{a} \right) k^{-1} (v - B), \quad (3.14)$$

onde  $c_{eff}^2 \equiv \delta P / \delta \rho$  e  $c_s^2 \equiv \dot{P} / \dot{\rho}$ .

Essas quantidades são as mais usadas em virtude de sua fácil interpretação.  $\Psi$  pode ser interpretado como um potencial gravitacional, pois, na ausência de curvatura e de pressão anisotrópica, obedece a uma equação que tem a mesma forma da equação de Poisson newtoniana, como veremos adiante;  $\Gamma$  representa uma amplitude de perturbação de entropia, pois é nulo para perturbações adiabáticas

$c_{eff}^2 = c_s^2$ ;  $\Phi$  pode ser interpretado como curvatura perturbada.

Neste capítulo, vamos manter a notação de [30], em particular a variável temporal usada é o tempo conforme ( $d\eta = dt/a$ ).

Agora, podemos introduzir essas perturbações nas equações de Einstein

$$\delta G^\mu{}_\nu = 8\pi G \delta T^\mu{}_\nu. \quad (3.15)$$

Usando (3.2)-(3.8) e as definições (3.9)-(3.14) nós obtemos o seguinte sistema [30]

$$V' + \frac{a'}{a}V = k \frac{c_s^2}{1+w} \Delta + \frac{w}{1+w} k \Gamma + k \Psi - k \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3K}{k^2}\right) \frac{w}{1+w} \Pi, \quad (3.16)$$

$$\Delta' - 3w \frac{a'}{a} \Delta = - \left(1 - \frac{3K}{k^2}\right) (1+w) k V - 2 \left(1 - \frac{3K}{k^2}\right) \frac{a'}{a} w \Pi. \quad (3.17)$$

Podemos obter um equivalente relativístico da Eq. de Poisson tomando a parte sem traço da equação (3.15),

$$\frac{1}{a^2} (\Delta_{LB} - 3K)(\Psi Y) = 4\pi G \rho \Delta Y + 12\pi G \Delta_{LB}^{-1} {}^s \nabla_i {}^s \nabla_j (P \Pi Y^{ij}). \quad (3.18)$$

onde o operador  ${}^s \nabla_i$  denota diferenciação covariante com respeito à métrica do espaço-tempo de fundo. Esta equação tem a mesma forma da equação de Poisson newtoniana se tomarmos a curvatura  $K$  e a perturbação de pressão anisotrópica  $\Pi$  iguais a zero. Este fato reforça a interpretação de  $\Psi$  como um potencial gravitacional generalizado.

Uma equação de segunda ordem para  $\Delta$  é obtida eliminando  $V$  das equações

(3.16) e (3.17),

$$\Delta'' - [3(2w - c_s^2) - 1] \frac{a'}{a} \Delta' + 3 \left[ \left[ \frac{3}{2}w^2 - 4w - \frac{1}{2} + 3c_s^2 \right] \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{3w^2 - 1}{2}K + \frac{k^2 - 3K}{3}c_s^2 \right] \Delta = \mathcal{I}, \quad (3.19)$$

onde

$$\mathcal{I} = -(k^2 - 3K)w\Gamma - 2 \left( 1 - \frac{3K}{k^2} \right) \frac{a'}{a} w\Gamma' + \left[ \{3(w^2 + c_s^2) - 2w\} \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + w(3w + 2)K + \frac{k^2 - 3K}{3}c_s^2 \right] \left( 1 - \frac{3K}{k^2} \right) 2\Pi. \quad (3.20)$$

Podemos ver da equação (3.19) que a perturbação de entropia e a perturbação de pressão anisotrópica agem como fontes para a perturbação de densidade. Em geral, a presença de  $\Gamma$  e  $\Pi$  é uma consequência de alguma estrutura intrínseca da matéria, particularmente da natureza multi-componente da matéria.

## 3.2 Métodos dependentes de calibre

Em aplicações práticas da teoria de perturbação é necessário fixar o calibre para especificar condições iniciais ou para interpretar resultados obtidos e compará-los com dados observacionais.

Não existe nenhum calibre no qual as equações de evolução das perturbações se tornem mais simples do que as equações invariantes. Portanto, é mais simples trabalhar no formalismo invariante para analisar a evolução temporal das perturbações. Basta apenas expressar as variáveis fundamentais usadas nos vários métodos dependentes de calibre em termos das quantidades invariantes de calibre.

Para especificar um calibre devemos impor duas relações sobre as variáveis dependentes de calibre: uma para fixar a coordenada temporal e outra para as coordenadas espaciais. A condição de calibre para a coordenada temporal, a escolha do “fatia-

mento” temporal do espaço-tempo perturbado, é dada impondo um vínculo sobre uma das variáveis dependentes de calibre cuja mudança sob uma transformação de calibre

$$\bar{\eta} = \eta + TY, \quad (3.21)$$

$$\bar{x}^i = x^i + LY^i, \quad (3.22)$$

é expressa apenas em termos de  $T$ .  $A$  e  $v - B$  são exemplos típicos de tais variáveis. Essas variáveis se transformam como

$$\bar{A} = A - T' - \frac{a'}{a}T, \quad (3.23)$$

$$\bar{v} - \bar{B} = (v - B) - kT. \quad (3.24)$$

O modo mais simples para especificar o “fatiamento” temporal é impor que uma destas variáveis se anule. Para cada “fatiamento” temporal, a maneira padrão de eliminar a liberdade de calibre das coordenadas espaciais é impor que uma quantidade cuja transformação de calibre envolve apenas  $L$  se anule. Exemplos de tais quantidades são  $B$ ,  $v$ ,  $H_L$  e  $H_T$ . Dessa forma, podemos definir várias condições de calibre, entre as quais:

1. “Fatiamento” de tempo próprio:  $A = 0$

A condição  $A = 0$  implica que a distância de tempo próprio entre duas hipersuperfícies vizinhas ao longo do vetor normal coincide com a distância de tempo de coordenada que define estas hipersuperfícies. Esta condição não especifica completamente o “fatiamento” temporal e leva a uma liberdade de calibre parametrizada por uma constante arbitrária  $\alpha$ .

$$T = \alpha a^{-1}. \quad (3.25)$$

Como consequência, um modo não físico chamado modo de calibre aparece no contraste de densidade  $\delta$ , e é dado por

$$c(1+w)\frac{a'}{a}\frac{1}{a}, \quad (3.26)$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária.

(a) Calibre síncrono:  $A = B = 0$

Dentre as condições de calibre pertencentes ao “fatiamento” de tempo próprio, esta é a mais comum. Aqui as coordenadas espaciais são especificadas pela condição de que linhas de coordenadas espaciais constantes são ortogonais a hipersuperfícies de tempo constante. A condição  $B = 0$  também não elimina completamente a liberdade de calibre nas coordenadas espaciais, levando a uma liberdade dada por

$$L = -k\alpha \int \frac{d\eta}{a} + \beta \quad (3.27)$$

onde  $\alpha$  é a mesma constante de (3.25) e  $\beta$  é uma constante arbitrária independente.

No calibre síncrono as variáveis  $h_L$ ,  $H_T$ ,  $\delta$ ,  $v$ ,  $\Gamma$  e  $\Pi$  são normalmente adotadas como variáveis fundamentais onde

$$h_L \equiv 6H_L. \quad (3.28)$$

Neste calibre temos que a variável  $\Psi$  pode ser expressa como [30]

$$\Psi = -\frac{1}{k^2} \left( H_T'' + \frac{a'}{a} H_T' \right). \quad (3.29)$$

Com isso temos que as equações de evolução das perturbações ficam

$$v' + (1 - 3c_s^2) \frac{a'}{a} v = k \frac{c_s^2}{1+w} \delta + k \frac{w}{1+w} \left[ \Gamma - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{3K}{k^2} \right) \Pi \right] \quad (3.30)$$

$$\delta' + 3(c_s^2 - w) \frac{a'}{a} \delta = -(1+w) \left( kv + \frac{1}{2} h'_L \right) - 3w \frac{a'}{a} \Gamma, \quad (3.31)$$

$$h''_L + \frac{a'}{a} h'_L = -(1 + 3c_s^2) 8\pi G \rho a^2 \delta - 24\pi G P a^2 \Gamma. \quad (3.32)$$

(b) Calibre de tempo próprio comóvel:  $A = v = 0$

Esta condição restringe a liberdade de calibre residual a

$$L = \beta, \quad (3.33)$$

onde  $\beta$  é uma constante arbitrária.

2. “Fatiamento” de velocidade ortogonal:  $v = B$

A quantidade  $v - B$  representa o desvio da velocidade da matéria do vetor normal a hipersuperfícies de tempo constante. A condição  $v = B$  elimina completamente a liberdade de calibre associada com o “fatiamento” temporal. Em especial temos

$$\delta = \Delta \quad (3.34)$$

Portanto, a equação fundamental neste calibre é a própria Eq. (3.19).  $A$  pode ser expressado como

$$A = -\frac{1}{1+w} (c_s^2 \Delta + w \Gamma) + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{3K}{k^2} \right) \frac{w}{1+w} \Pi. \quad (3.35)$$

(a) Calibre comóvel de tempo ortogonal:  $v = B = 0$

A liberdade de calibre residual neste calibre também é expressa pela Eq.

(3.33). Em particular temos

$$H'_T = -kV. \quad (3.36)$$

(b) Calibre de velocidade ortogonal isotrópico:  $v = B$ ,  $H_T = 0$

Neste calibre não há liberdade de calibre residual. Além disso, uma vez que agora  $v$  coincide com  $V$ , o formalismo neste calibre é o mais próximo do formalismo invariante. Em particular temos

$$H_L = \Phi - \frac{1}{k} \frac{a'}{a} V. \quad (3.37)$$

3. “Fatiamento” Newtoniano:  $\sigma_g \equiv (1/k)H'_T - B = 0$

Neste “fatiamento” a perturbação na taxa de expansão é isotrópica. Esta escolha elimina completamente a liberdade em  $T$ . O contraste de densidade é, agora, expresso como

$$\delta = \Delta - 3(1+w) \frac{a'}{a} \frac{1}{k} V, \quad (3.38)$$

e  $A$  coincide com  $\Psi$ ,

$$A = \Psi = -\frac{1}{2} \frac{8\pi G \rho a^2}{k^2 - 3K} \Delta - \frac{8\pi G \rho a^2}{k^2} \Pi. \quad (3.39)$$

(a) Calibre longitudinal ou Newtoniano conforme:  $B = H'_T = 0$

A liberdade de calibre residual, neste caso, é expressa pela eq. (3.33), o que resulta no aparecimento de uma constante arbitrária na expressão para  $H_T$ :

$$H_T = kc_3. \quad (3.40)$$

Neste calibre temos

$$v = V, \quad (3.41)$$

$$H_L = \Phi - \frac{1}{3}H_T = \frac{8\pi^G \rho a^2}{2(k^2 - 3K)}\Delta - \frac{kc_3}{3}. \quad (3.42)$$

(b) Calibre Newtoniano comóvel:  $B = (1/k)H'_T$ ,  $v = 0$

A liberdade residual é a mesma do caso anterior.

Nesta seção apresentamos alguns dos calibres mais utilizados, incluindo envolvidos neste trabalho. Para uma discussão mais detalhada destes e de outros calibres veja [30].

### 3.3 Perturbações em um fluido multi-componente

Para descrever melhor as observações nós, em geral, optamos por algum modelo com mais de um componente como matéria bariônica, radiação, matéria escura e energia escura. Para tratar de perturbações em tais sistemas é necessário estender o formalismo examinado até agora, o que é o objetivo desta seção. Nós ainda continuaremos utilizando o formalismo invariante de calibre de [30] e, além disso, obteremos as equações válidas para o calibre síncrono que serão utilizadas posteriormente em um exemplo de aplicação de modelos multi-componentes. Existem, entretanto, alguns erros em [30], em relação a este assunto, e por isso utilizaremos também a referência [31], que corrige esses erros e, para escrever as equações dependentes de calibre, a referência [32].

No caso de um universo com vários componentes, as equações de Einstein têm a mesma estrutura e não é necessária a introdução de nenhuma nova variável métrica. Assim, as equações obtidas no capítulo 3 ainda serão válidas se considerarmos as variáveis de matéria como sendo referentes à mistura como um todo. Resta-nos, por-

tanto, definir variáveis invariantes para cada componente e determinar as equações de evolução satisfeitas por tais variáveis a partir das variáveis totais e suas equações.

Em um sistema multi-componente, o tensor energia-momento de cada componente  $\tilde{T}_{(i)}^\mu{}_\nu$  não precisa ser conservado independentemente, pelo contrário, em geral sua divergência tem um termo de fonte

$$\tilde{T}_{(i)}^\mu{}_{\nu;\mu} = \tilde{Q}_{(i)\nu}. \quad (3.43)$$

Os termos de fonte devem obedecer a um vínculo que vem da conservação do tensor energia-momento total,

$$\tilde{T}^\nu{}_{\mu;\nu} = \sum_i \tilde{T}_{(i)}^\nu{}_{\mu;\nu} = 0, \quad (3.44)$$

ou, mais especificamente,

$$\sum_i \tilde{Q}_{(i)\mu} = 0. \quad (3.45)$$

Aqui supomos que o tensor energia-momento não perturbado de cada componente tem a forma

$$T_{(i)\mu}{}^\nu = (\rho_i + P_i)u_\mu u^\nu + P_i\delta_\mu{}^\nu, \quad (3.46)$$

onde

$$(u^\mu) = (a^{-1}, \mathbf{0}). \quad (3.47)$$

Assim, o termo de fonte não perturbado é escrito como

$$(Q_{(i)\mu}) = (-aQ_i, \mathbf{0}), \quad (3.48)$$

e as equações de movimento para a componente  $i$  não perturbada se reduzem a

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_i &= -3\frac{\dot{a}}{a}h_i + Q_i \\ &= -3\frac{\dot{a}}{a}(1 - q_i)h_i,\end{aligned}\tag{3.49}$$

onde o ponto denota derivada com respeito ao tempo próprio, e

$$h_i \equiv \rho_i + P_i,\tag{3.50}$$

$$q_i \equiv Q_i / \left(3\frac{\dot{a}}{a}h_i\right).\tag{3.51}$$

As quantidades totais não perturbadas são dadas por

$$\rho = \sum_i \rho_i,\tag{3.52}$$

$$P = \sum_i P_i,\tag{3.53}$$

$$h = \sum_i h_i,\tag{3.54}$$

além do vínculo

$$\sum_i Q_i = 0.\tag{3.55}$$

Supondo que a quadrivelocidade e a densidade de energia das componentes sejam definidas como, respectivamente, o auto-vetor tipo tempo unitário e o auto-valor correspondente de  $\tilde{T}_{(i)}^\mu{}_\nu$ , temos que o tensor energia momento perturbado é expresso

como

$$\tilde{T}_{(i)0}^0 = -\rho_{(i)}(1 + \delta_{(i)}Y), \quad (3.56)$$

$$\tilde{T}_{(i)j}^0 = (\rho_{(i)} + P_{(i)})(v_{(i)} - B)Y_j, \quad (3.57)$$

$$\tilde{T}_{(i)0}^j = -(\rho_{(i)} + P_{(i)})v_{(i)}Y^j, \quad (3.58)$$

$$\tilde{T}_{(i)j}^i = P_{(i)}(\delta^i_j + \pi_{L(i)}\delta^i_j + \pi_{T(i)}Y^i_j). \quad (3.59)$$

Somando as Eqs. (3.56)-(3.59) sobre  $i$  e comparando com as equações para o tensor energia-momento total (3.5)-(3.8) podemos obter relações entre perturbações dos componentes e da matéria total, tais como

$$\rho\delta = \sum_i \rho_i\delta_i, \quad (3.60)$$

$$hv = \sum_i h_i v_i, \quad (3.61)$$

$$P\pi_L = \sum_i P_i\pi_{Li}, \quad (3.62)$$

$$P\pi_T = \sum_i P_i\pi_{Ti}. \quad (3.63)$$

Podemos decompor o termo de fonte  $\tilde{Q}_{(i)\mu}$  em

$$\tilde{Q}_{(i)\mu} = \tilde{Q}_{(i)}\tilde{u}_\mu + \tilde{f}_{(i)\mu}, \quad (3.64)$$

onde  $\tilde{f}_{(i)\mu}$  é ortogonal à velocidade média  $\tilde{u}_\mu$ ,

$$\tilde{u}^\mu \tilde{f}_{(i)\mu} = 0. \quad (3.65)$$

As quantidades  $\tilde{Q}_{(i)}$  e  $\tilde{f}_{(i)\mu}$  representam, respectivamente, a taxa de transferência de energia e de momento no referencial do centro de massa. Uma vez que  $\tilde{u}^i$  e  $\tilde{f}_{(i)j}$  são

quantidades de primeira ordem nas perturbações, vemos que a partir de (3.65)

$$\tilde{f}_{(i)0} = 0. \quad (3.66)$$

Podemos escrever  $\tilde{Q}_{(i)}$  e  $\tilde{f}_{(i)j}$  como

$$\tilde{Q}_{(i)} = Q_i(1 + \varepsilon_i)Y, \quad (3.67)$$

$$\tilde{f}_{(i)j} = (a'/a)h_i f_i Y_j, \quad (3.68)$$

onde  $\varepsilon_i$  e  $f_i$  são funções apenas do tempo. Com isso, podemos escrever os termos de fonte como

$$\tilde{Q}_{(i)0} = -aQ_i[1 + (A + \varepsilon_i)Y], \quad (3.69)$$

$$\tilde{Q}_{(i)j} = a[Q_i(v - B) + (\dot{a}/a)h_i f_i]Y_j. \quad (3.70)$$

O vínculo (3.45) pode ser expresso como

$$\sum_i Q_i \varepsilon_i = 0, \quad (3.71)$$

$$\sum_i h_i f_i = 0. \quad (3.72)$$

Novamente podemos construir quantidades invariantes a partir de  $\delta_i$ ,  $v_i$ ,  $\pi_{Li}$  e  $\pi_{Ti}$ , tais como

$$V_i \equiv v_i - k^{-1}H'_T, \quad (3.73)$$

$$\Delta_i \equiv \delta_i + 3(1 + w_i)(a'/a)(1 - q_i)k^{-1}(v_i - B), \quad (3.74)$$

$$\Gamma_i \equiv \pi_{Li} - \frac{c_{si}^2}{w_i}\delta_i, \quad (3.75)$$

$$\Pi_i \equiv \pi_{Ti}, \quad (3.76)$$

onde

$$w_i \equiv \frac{P_i}{\rho_i}, \quad (3.77)$$

$$c_{si}^2 \equiv \frac{\dot{P}_i}{\dot{\rho}_i}. \quad (3.78)$$

As Eqs. (3.60)-(3.63) levam às relações

$$\rho\Delta = \sum_i \rho_i \Delta_i + \frac{a}{k} \sum_i Q_i V_i, \quad (3.79)$$

$$hV = \sum_i h_i V_i, \quad (3.80)$$

$$P\Gamma = P\Gamma_{int} + P\Gamma_{rel}, \quad (3.81)$$

$$P\Pi = \sum_i P_i \Pi_i, \quad (3.82)$$

onde

$$P\Gamma_{int} \equiv \sum_i P_i \Gamma_i, \quad (3.83)$$

$$P\Gamma_{rel} \equiv \sum_i (c_{si}^2 - c_s^2) \delta\rho_i, \quad (3.84)$$

$$c_s^2 = \sum_i \frac{c_{si}^2 \rho'_i}{\rho'}. \quad (3.85)$$

Podemos ainda definir invariantes de calibre para as taxas de transferência de energia e momento como

$$E_{ci} \equiv \varepsilon_i - \frac{Q'_i}{kQ_i} (v - B), \quad (3.86)$$

$$F_{ci} \equiv f_i. \quad (3.87)$$

Essas quantidades estão definidas no referencial do centro de massa. Podemos definir

novas quantidades no referencial de repouso da componente  $i$  como

$$E_i = E_{ci} - \frac{Q'_i}{kQ_i}(V_i - V), \quad (3.88)$$

$$F_i = F_{ci} - 3q_i(V_i - V). \quad (3.89)$$

As equações de evolução para  $\Delta_i$  e  $V_i$  devem ser obtidas a partir da parte perturbada, em primeira ordem, da equação de movimento para cada componente (3.43). Após uma simples, mas trabalhosa, seqüência de cálculos obtemos o sistema [31]

$$\begin{aligned} & \Delta'_i - 3\frac{a'}{a}w_i\Delta_i = 12\pi Gh(1+w_i)\frac{a^2}{k}(V - V_i) \\ & - \left(1 - \frac{3K}{k^2}\right) \left[ (1+w_i)kV_i + 2\frac{a'}{a}(1-q_i)w_i\Pi_i \right] - 3\frac{a'}{a}q_i(w_i\Gamma_i + c_{si}^2\Delta_i) \\ & + 3\frac{a'}{a}(1+w_i)q_iE_i + 3(1-q_i)(1+w_i)\frac{F_i}{k} \left(\frac{a'}{a}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} V'_i + \frac{a'}{a}V_i &= k\Psi + k \left( \frac{c_{si}^2}{1+w_i}\Delta_i + \frac{w_i}{1+w_i}\Gamma_i \right) \\ & - \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{3K}{k^2} \right) \frac{k w_i}{1+w_i} \Pi_i + \frac{a'}{a} F_i. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Usando as definições dos invariantes (3.73), (3.74) e (3.86)-(3.89), podemos obter equações dependentes de calibre [32]

$$\begin{aligned} \delta'_i + 3\frac{a'}{a}(c_{si}^2 - w_i)\delta_i + 3\frac{a'}{a}w_i\Gamma_i &= -(1+w_i)(kv_i + 3H'_L) \\ & + 3\frac{a'}{a}(1+w_i)q_i(A + \varepsilon_i), \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} v'_i - B' + (1 - c_{si}^2)\frac{a'}{a}(v_i - B) - kA - \frac{k w_i}{1+w_i}\Gamma_i \\ - \frac{k c_{si}^2}{1+w_i}\delta_i + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{3K}{k^2} \right) \frac{k w_i}{1+w_i} \Pi_i &= \frac{a'}{a} [3q_i(v - B) + f_i]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Com isso podemos determinar as equações de evolução em qualquer calibre. Em particular, escolhemos o calibre síncrono, para o qual temos

$$\delta'_i + 3\frac{a'}{a}(c_{si}^2 - w_i)\delta_i = -3\frac{a'}{a}w_i\Gamma_i - (1 + w_i)(kv_i + \frac{1}{2}h'_L) + 3\frac{a'}{a}(1 + w_i)q_i\varepsilon_i, \quad (3.94)$$

$$v'_i + (1 - 3c_{si}^2)\frac{a'}{a}v_i = \frac{kw_i}{1 + w_i}\Gamma_i + \frac{kc_{si}^2}{1 + w_i}\delta_i - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3K}{k^2}\right)\frac{kw_i}{1 + w_i}\Pi_i + \frac{a'}{a}[3q_iv + f_i], \quad (3.95)$$

onde introduzimos a quantidade  $h_L \equiv 6H_L$  [30]. Naturalmente estas equações devem ser complementadas por uma equação para a perturbação métrica vinda das equações de Einstein perturbadas. Esta equação é a (3.18), que no calibre síncrono pode ser escrita como (3.32)

$$h''_L + \frac{a'}{a}h'_L = -(1 + 3c_s^2)8\pi Ga^2 \sum_i \rho_i \delta_i - 24\pi Ga^2 \left[ \sum_i P_i \Gamma_i + \sum_i (c_{si}^2 - c_s^2) \delta \rho_i \right], \quad (3.96)$$

onde as variáveis de matéria se referem ao fluido total, que ainda pode ser reescrita como

$$h''_L + \frac{a'}{a}h'_L = - \sum_i (1 + 3c_{si}^2)8\pi Ga^2 \rho_i \delta_i - 24\pi Ga^2 \sum_i P_i \Gamma_i. \quad (3.97)$$

# Capítulo 4

## Modelos de quartessência convexa

### 4.1 Modelos fenomenológicos de quartessência

Nós podemos modelar a quartessência como um fluido perfeito, em ordem zero, de modo que as variáveis dinâmicas são relacionadas pela equação de estado  $\bar{p} = \bar{p}(\bar{\rho})$ . Para que a equação de estado descreva a quartessência ela deve obedecer certas condições. Em tempos tardios,  $\bar{p}$  deve ser suficientemente negativa para causar aceleração da expansão, o que segue das equações de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\bar{\rho} + 3\bar{p}), \quad (4.2)$$

Por outro lado, em tempos primordiais o fluido cósmico deve se comportar como poeira,  $\bar{\rho} \gg \bar{p}$ , de forma que o universo esteve desacelerando e a densidade de energia era proporcional a  $a^{-3}$ .

Da equação de conservação de energia

$$\dot{\bar{\rho}} = -(\bar{\rho} + \bar{p})3\frac{\dot{a}}{a} = -\bar{\rho}(1 + w(\bar{\rho}))3\frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.3)$$

onde  $w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$  é o parâmetro da equação de estado, segue que a linha  $\bar{p} = -\bar{\rho}$  não pode ser cruzada. Portanto, em tempos primordiais, nós devemos ter  $w \approx 0$ , e conforme o tempo passa devemos nos aproximar de  $w = -1$ . Logo, se as observações determinarem que  $w < -1$ , modelos de quartessência em que a parte homogênea é um fluido perfeito e não se acopla com outros componentes estarão automaticamente excluídos.

Um exemplo simples de uma equação de estado que satisfaz estas condições é o gás de Chaplygin generalizado (GCG), mencionado no capítulo 1, que é caracterizado por

$$\bar{p}_{\text{Ch}} = -\frac{M^{4(\alpha+1)}}{\bar{\rho}_{\text{Ch}}^\alpha}, \quad (4.4)$$

em que o parâmetro  $M$  tem dimensão de massa e  $\alpha$  é um parâmetro adimensional.

Neste caso, a equação de conservação (4.3) tem uma solução analítica simples

$$\bar{\rho}_{\text{Ch}} = \bar{\rho}_{\text{Ch}0} \left[ (1 - A) \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3(\alpha+1)} + A \right]^{1/(\alpha+1)}, \quad (4.5)$$

onde  $a_0$  é o valor do fator de escala hoje e  $A = (M^4/\bar{\rho}_{\text{Ch}0})^{(\alpha+1)}$ . Como esperado, quando  $a/a_0 \ll 1$ , nós temos  $\bar{\rho}_{\text{Ch}} \propto a^{-3}$  e o fluido se comporta como matéria escura. Para tempos tardios,  $a/a_0 \gg 1$ , e nós temos  $\bar{p}_{\text{Ch}} = -\bar{\rho}_{\text{Ch}} = -M^4 = \text{const.}$  como no caso de um universo dominado por uma constante cosmológica.

Uma vez que para a quartessência de Chaplygin o parâmetro da equação de estado  $w$  é uma função monotônica decrescente, é fácil ver a partir de (4.3) que a equação de estado se aproxima assintoticamente de uma constante cosmológica,  $\bar{p}(\bar{\rho}) = -\bar{\rho}$ . Denotaremos o valor mínimo da densidade, obtido a partir desta igualdade, como  $\bar{\rho}_{\text{min}}$  e, no caso de Chaplygin, podemos determiná-lo como  $M^4$ . Obviamente, a densidade atual  $\bar{\rho}_{\text{Ch}0}$  não pode ser menor que  $\rho_{\text{min}}$  (do contrário, como a linha  $\bar{p} = -\bar{\rho}$  não pode ser cruzada, o modelo teria sempre  $w < -1$ , nunca se comportando como matéria escura). Portanto,  $\bar{\rho}_{\text{min}} < \bar{\rho}_{\text{Ch}0} < \infty$ , que restringe o

parâmetro  $A$  a faixa  $0 < A < 1$ . Claramente, para  $A = 0$ , o fluido se comporta como poeira, enquanto que para  $A = 1$  ele age como constante cosmológica.

Na maioria das análises na literatura supõe-se que  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Estes limites são impostos porque perturbações adiabáticas são implicitamente supostas. Note que, para estes modelos, existe um valor máximo absoluto para a velocidade do som adiabática  $c_s^2 = (\partial\bar{p}/\partial\bar{\rho})$ , que ocorre quando  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{\min}$  e é dado por  $c_{s\max}^2 = \alpha$  para GCG. Por conseguinte, para evitar propagação superluminal de sinais, o limite superior  $\alpha < 1$  é imposto no caso adiabático. Além disso, para garantir estabilidade das perturbações é preciso que  $(\partial\bar{p}/\partial\bar{\rho}) \geq 0$ , que implica  $\alpha \geq 0$ .

No entanto, quartessência de Chaplygin adiabática está excluída pelos dados atuais [16], salvo para  $\alpha$  muito próximo de zero (limite  $\Lambda$ CDM). Contudo, se perturbações de entropia forem introduzidas, de tal forma que anulem a velocidade do som efetiva, o modelo pode novamente estar em acordo com os dados observacionais [18] para uma ampla faixa de valores de seus parâmetros. Neste caso, os limites sobre  $\alpha$  perdem sentido, uma vez que não há problema de propagação superluminal, e mesmo modelos com  $\alpha$  negativo podem, em princípio ser consistentes com as observações. No entanto, para quartessência é preciso que  $w \approx 0$  quando  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$ , o que introduz o limite  $\alpha > -1$ .

O espectro de potência da quartessência de Chaplygin apresenta fortes oscilações e instabilidades no caso de perturbações adiabáticas. Isto se deve, como veremos adiante, à contribuição de uma velocidade do som adiabática não nula em tempos recentes. Para o caso de Chaplygin, a velocidade do som adiabática é dada por  $c_s^2 = \alpha(M^4/\bar{\rho})^{(\alpha+1)} = -\alpha w$ . Para evitar essas oscilações, o parâmetro  $\alpha$  deve se restringir a  $|\alpha| < 10^{-5}$ , muito próximo do limite  $\Lambda$ CDM [16]. Podemos nos perguntar se uma variação mais abrupta de equação de estado poderia reduzir o problema das oscilações, permitindo uma faixa mais ampla de parâmetros, particularmente distinta

de  $\Lambda$ CDM. Vamos considerar, por exemplo, uma equação de estado exponencial

$$\bar{p} = -M^4 \exp\left(-\frac{\alpha\bar{\rho}}{M^4}\right). \quad (4.6)$$

Neste caso, a velocidade do som adiabática tem uma supressão exponencial,  $c_s^2 = \alpha \exp(-\alpha\bar{\rho}/M^4)$ . Portanto, poderíamos esperar que altos valores de  $\bar{\rho}/M^4$  atenuariam as oscilações no espectro de potência, sem impor fortes vínculos sobre o parâmetro  $\alpha$ . Todavia, o parâmetro da equação de estado  $w$  também possui o mesmo fator exponencial adicional, e se  $\bar{\rho}/M^4$  for sempre alto, o universo nunca entrará na fase acelerada. Logo, como veremos em detalhe, esta modificação não resolve o problema e indica que se trata de uma propriedade geral deste tipo de modelo.

Discutamos algumas características do modelo exponencial. Para a Eq. (4.6) ser um candidato a quartessência ( $w \approx 0$  quando  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$ ) o parâmetro  $\alpha$  deve ser não-negativo. A condição  $\alpha \geq 0$  também garante estabilidade para flutuações adiabáticas. A densidade de energia mínima do modelo é dada  $\bar{\rho}_{\min} = M^4 W(\alpha)/\alpha$ , onde  $W(x)$  é a função de Lambert definida por  $W(x) \exp(W(x)) = x$  [41]. Portanto, a velocidade do som máxima é  $c_{s\max}^2 = W(\alpha)$ .

Outro caso extremo, que tem o modelo  $\Lambda$ CDM como limite, é dado por:

$$\bar{p} = -\frac{M^4}{[\ln(\bar{\rho}/M^4)]^\alpha}. \quad (4.7)$$

Neste caso, para  $w < 0$  ser uma função crescente de  $\bar{\rho}$ , é preciso que  $\alpha \geq 0$  ou  $\alpha < -e$ . A densidade mínima é dada por  $\bar{\rho}_{\min} = M^4 \exp(\alpha W(\alpha^{-1}))$  e  $c_{s\max}^2 = 1/W(\alpha^{-1})$ . Como no caso exponencial e de Chaplygin, para  $\alpha = 0$  nós recuperamos o modelo  $\Lambda$ CDM para o fundo homogêneo.

No caso adiabático, onde a condição  $\alpha > 0$  é necessária para que  $c_s^2 > 0$ , os

três modelos discutidos têm a mesma propriedade comum: a equação de estado é convexa, isto é,  $d^2p/d\rho^2 = dc_s^2/d\rho < 0$ . Por conseguinte, o valor máximo da velocidade do som é alcançado quando a densidade atinge seu valor mínimo. Nós iremos nos referir a este tipo de modelo como quartessência convexa. As novas propostas (Eqs. 4.6 e 4.7), cobrem dois casos extremos de quartessência, nos quais a variação da pressão com a densidade é muito abrupta ou muito suave. Nós acreditamos que analisando estes dois exemplos podemos ter indicações do comportamento genérico de qualquer modelo de quartessência com equação de estado convexa.

## 4.2 Evolução linear de perturbações

As equações relativísticas que governam a evolução linear de perturbações escalares em um fluido multi-componente, no calibre síncrono, são as equações (3.94), (3.95) e (3.97). Considerando conservação do tensor energia-momento para cada componente temos

$$\delta'_i + 3(c_{si}^2 - w_i)\frac{a'}{a}\delta_i = -(1 + w_i)\left(kv_i + \frac{h'_L}{2}\right) - 3w_i\frac{a'}{a}\Gamma_i, \quad (4.8)$$

$$v'_i + (1 - 3c_{si}^2)\frac{a'}{a}v_i = \frac{c_{si}^2}{1 + w_i}k\delta_i + \frac{w_i}{1 + w_i}k\Gamma_i, \quad (4.9)$$

$$h''_L + \frac{a'}{a}h'_L = -\sum_i (1 + 3c_{si}^2)8\pi G\bar{\rho}_i a^2 \delta_i - 24\pi G a^2 \sum_i \bar{p}_i \Gamma_i, \quad (4.10)$$

onde  $\delta_i$ ,  $v_i$  e  $\Gamma_i$  são, respectivamente, o contraste de densidade, a perturbação de velocidade e a perturbação de entropia do componente  $i$ ,  $h_L$  é o traço da perturbação métrica e  $k$  é o número de onda co-móvel. Para simplificar o problema, nós desprezamos a curvatura espacial e a pressão anisotrópica e consideramos que os tensores energia-momento de cada componente são separadamente conservados. Nas equações acima as derivadas são tomadas com respeito ao tempo conforme  $dt = a d\eta$  e  $c_{si}^2 = \bar{p}'_i/\bar{\rho}'_i$  e  $w_i = \bar{p}_i/\bar{\rho}_i$  são, respectivamente, a velocidade do som adiabática e o

parâmetro da equação de estado do componente  $i$ .

Nós consideramos dois componentes no universo: bárions ( $\bar{p}_b = 0$ ) e quartessência. Analisamos os modelos exponencial (Eq. 4.6) e logarítmico (Eq. 4.7). Estes modelos têm  $\Lambda$ CDM como limite quando  $\alpha = 0$ . Em teoria de perturbação, no entanto, estes modelos com  $\alpha = 0$  têm comportamento distinto do da matéria escura em  $\Lambda$ CDM [21, 42]. Consideramos que há conservação independente do tensor energia-momento para bárions e quartessência. Para obter o espectro de Potência nós evoluímos as Eqs. de  $z = 500$  a  $z = 0$ , usando as soluções da equação de conservação para cada modelo. Como, em  $z = 500$ , o fluido de quartessência se comporta como CDM, nós usamos como condições iniciais  $v_q = 0$ , um espectro invariante de escala, e usamos a função de transferência BBKS [43], com o seguinte parâmetro de forma [44, 15]

$$\Gamma_{eff} = (\Omega_{b0} + \Omega_m^{eff})h \exp\left(-\Omega_{b0} - \frac{\sqrt{2h} \Omega_{b0}}{\Omega_{b0} + \Omega_m^{eff}}\right), \quad (4.11)$$

onde

$$\Omega_m^{eff} = (1 - \Omega_{b0}) \lim_{a \rightarrow 0} (ua^3) \quad (4.12)$$

é a densidade de matéria efetiva e  $u \equiv \rho_q/\rho_{q0}$  é a densidade de energia da quartessência, normalizada a 1 hoje.

A amplitude do espectro de potência inicial pode ser re-escalada para que o espectro de bárions se ajuste melhor aos dados. Todavia, a normalização do espectro total pode ser restringida por observações de lentes gravitacionais, o que impõe vínculos sobre a amplitude inicial. Logo, como apontado em [16], não é possível conciliar vínculos de espectro de potência e de lentes, com perturbações adiabáticas, para valores não desprezíveis de  $\alpha$ .

Como discutido em [18] as oscilações (para  $c_s^2 > 0$ ) e instabilidades ( $c_s^2 < 0$ ) no espectro de potência da quartessência, no caso adiabático, surgem devido a um valor

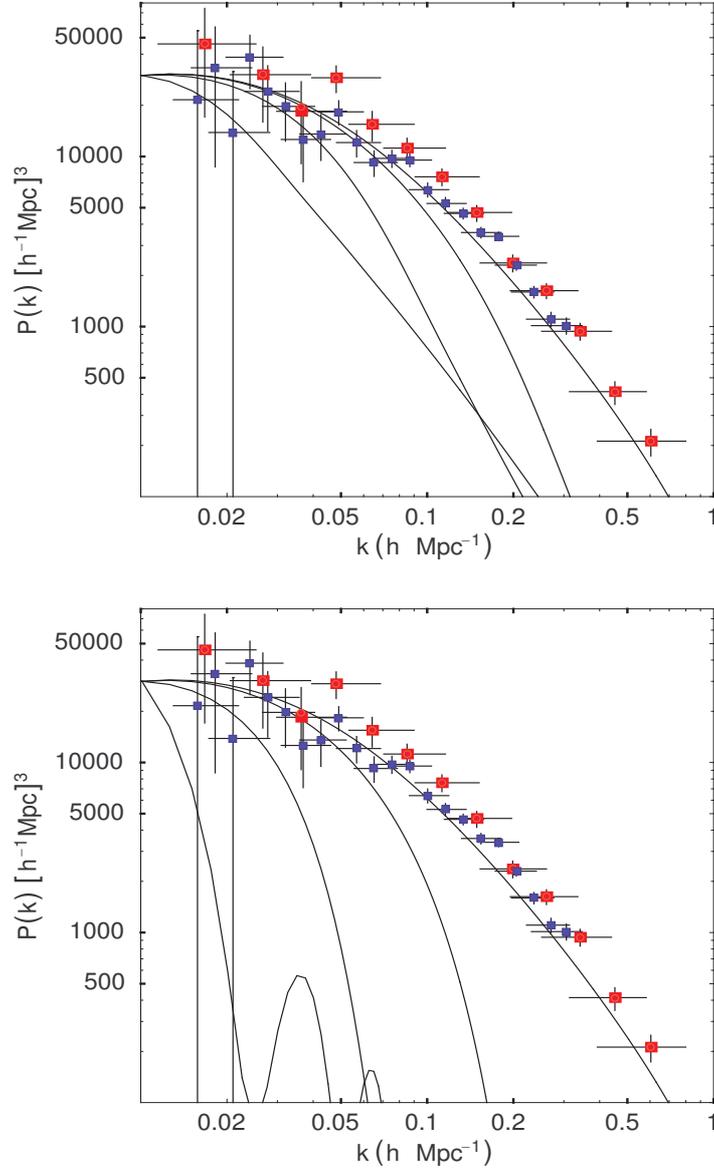


Figura 4.1: Espectros de Potência da matéria para bárions (painel superior) e total (painel inferior), para quartessência exponencial, no caso adiabático. As curvas, de cima para baixo, correspondem a  $\alpha = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$  e  $M^4/\bar{\rho}_0$  é escolhido de forma que todos os modelos tenham  $\Gamma_{eff} = 0.18$ . Os quadrados azuis representam dados do “Sloan Digital Sky Survey” conforme compilados em [45] e os círculos vermelhos representam dados do “2dF galaxy redshift survey” conforme compilados em [46].

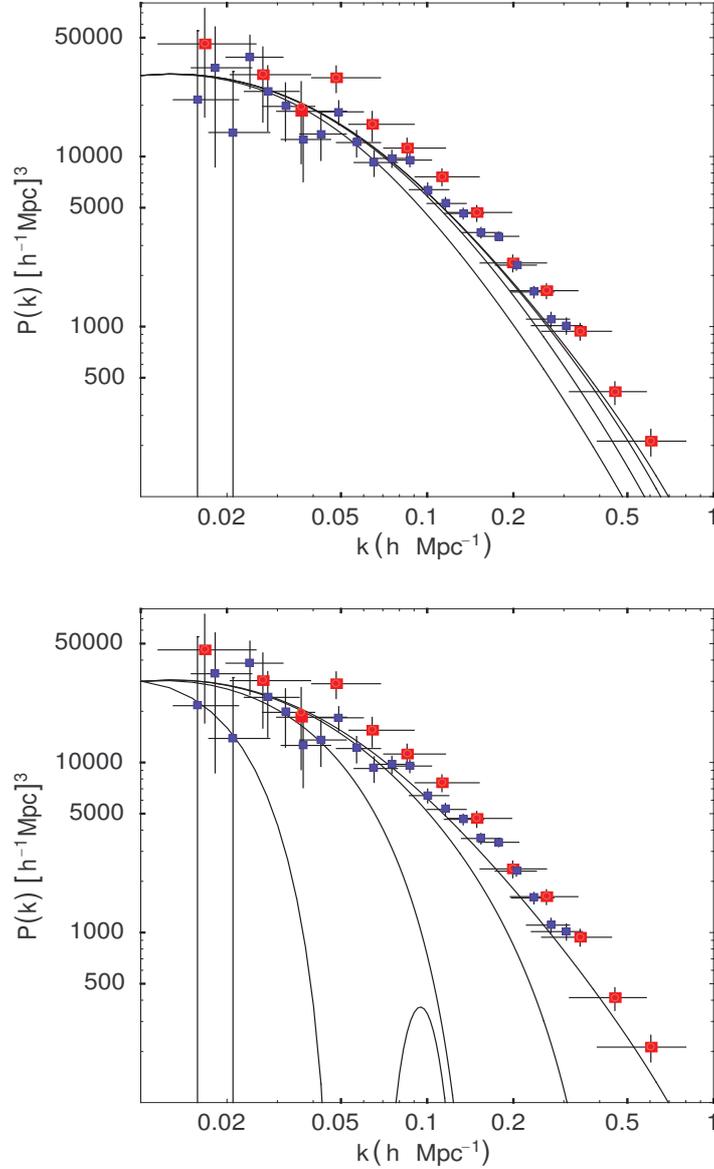


Figura 4.2: Espectros de Potência da matéria para bárions (painel superior) e total (painel inferior), para quartessência logarítmica, no caso adiabático. As curvas, de cima para baixo, correspondem a  $\alpha = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$  e  $M^4/\bar{\rho}_0$  é escolhido de forma que todos os modelos tenham  $\Gamma_{eff} = 0.18$ . Os quadrados azuis representam dados do “Sloan Digital Sky Survey” conforme compilados em [45] e os círculos vermelhos representam dados do “2dF galaxy redshift survey” conforme compilados em [46].

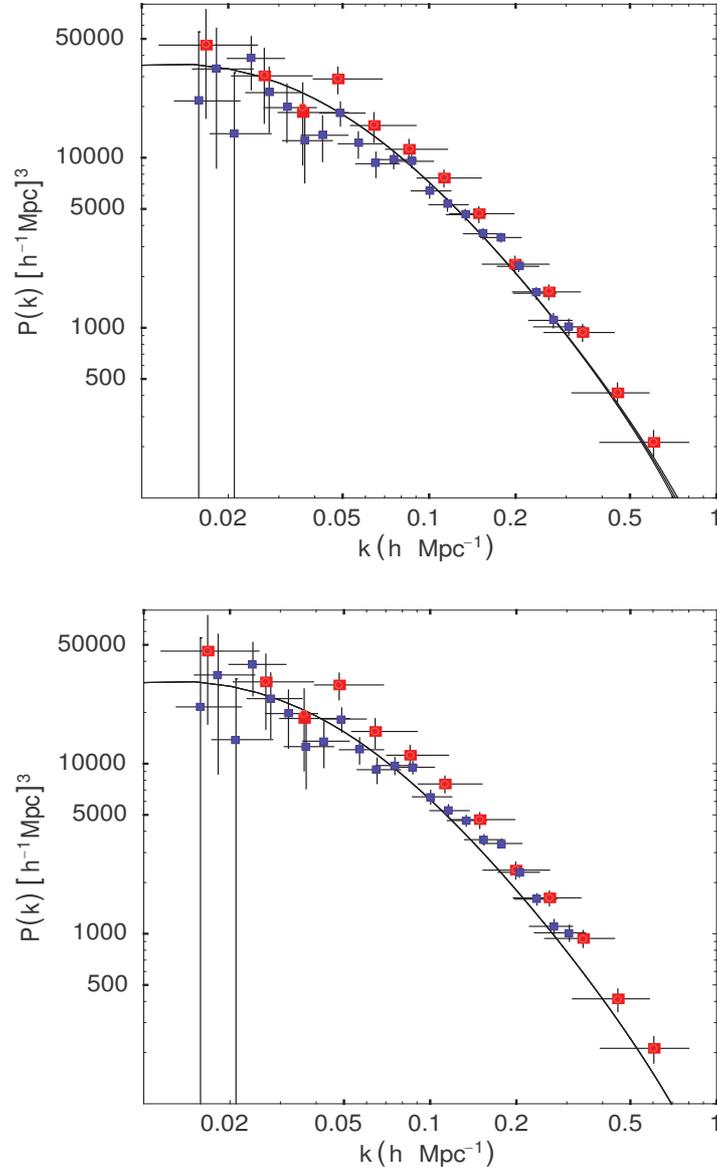


Figura 4.3: Espectros de potência da matéria para bárions, para os modelos exponencial (painel superior) e logarítmico (painel inferior), no caso não adiabático, com  $\alpha = 0, 0.1, 0.2$  e  $M^4/\bar{\rho}_0$  escolhido de forma que todos os modelos tenham  $\Gamma_{eff} = 0.18$ . Os quadrados azuis representam dados do “Sloan Digital Sky Survey” conforme compilados em [45] e os círculos vermelhos representam dados do “2dF galaxy redshift survey” conforme compilados em [46].

não-nulo do lado direito da Eq. (4.9). Para evitar estes efeitos nós escolhemos, para a quartessência

$$\Gamma_q = -\frac{c_{sq}^2}{w_q}\delta_q = -c_{sq}^2\frac{\delta\rho_q}{p_q}. \quad (4.13)$$

Da definição de perturbação de entropia [30], nós temos

$$\delta p = p\Gamma + c_s^2\delta\rho. \quad (4.14)$$

Portanto, a condição (4.13) é equivalente a escolher  $\delta p_q = 0$ . Além disso, é suficiente que a relação (4.13) seja satisfeita em algum tempo inicial, uma vez que esta condição é preservada durante a evolução linear. Isto pode ser verificado derivando (4.14) em relação ao tempo e substituindo (4.13), que implica  $d\delta p_q/dt = 0$ , sem nenhuma consideração quanto à exata forma da equação de estado do fluido.

Nas figuras 4.1 e 4.2, nós mostramos os espectros de bárions e total para os modelos exponencial e logarítmico, respectivamente, no caso adiabático. Em ambas as figuras, as curvas correspondem a  $\alpha = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}$ , de cima para baixo, e  $M^4/\bar{\rho}_0$  é escolhido de forma que todos os modelos tenham  $\Gamma_{eff} = 0.18$ . Podemos ver fortes oscilações nos espectros totais, em ambos os modelos, devido à quartessência, enquanto que nos espectros de bárions, apesar de com menor intensidade, ainda podemos ver uma supressão de potência.

Na Fig. 4.3 nós mostramos os espectros de bárions para os modelos exponencial e logarítmico, no caso  $\Gamma_q = -c_{sq}^2\delta_q/w_q$ , para  $\alpha = 0, 0.1, 0.2$  e  $M^4/\bar{\rho}_0$  escolhido para manter  $\Gamma_{eff} = 0.18$ . Os resultados são visualmente indistinguíveis das previsões do modelo  $\Lambda$ CDM. O mesmo ocorre para a quartessência e, portanto, para o espectro total.

É importante enfatizar que as perturbações de entropia consideradas acima *não* são de isocurvatura, uma vez que existem perturbações de densidade iniciais, apesar de não haver flutuações de pressão. Além disso, se considerarmos a evolução do fluido

de bárions e fótons acoplados, nós escolheríamos  $\delta\rho_b/\dot{\rho}_b = \delta\rho_q/\dot{\rho}_q = (3/4)\delta\rho_r/\dot{\rho}_r$ , que costumam ser nomeadas como “perturbações adiabáticas”. Portanto, as perturbações de entropia necessárias para eliminar as instabilidades e oscilações no espectro de potência não são excluídas pelas observações da radiação cósmica de fundo (RCF), que descartam modos puramente de isocurvatura. Um estudo do espectro de RCF no modelo Chaplygin com perturbações de entropia pode ser encontrado em [17].

### 4.3 Evolução não-linear de perturbações

Para determinar o crescimento gravitacional de perturbações para quartessência utilizamos as equações da cosmologia Newtoniana, conforme discutido em [40, 47]

$$\nabla_r^2 \phi = 4\pi G(\rho + 3P) , \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_r + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r)\vec{u} = -\vec{\nabla}_r \phi - (\rho + P)^{-1} \vec{\nabla}_r P , \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_r + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho \vec{u}) + P \vec{\nabla}_r \cdot \vec{u} = 0 . \quad (4.17)$$

As Eqs. (4.15), (4.16), e (4.17) são, respectivamente, as equações de Poisson, de Euler, e de conservação de energia, onde efeitos relativísticos da pressão (inércia e massa gravitacional ativa) foram incluídos. As quantidades  $\rho$ ,  $P$ ,  $\vec{u}$  e  $\phi$  são, a densidade de energia, pressão, campo de velocidade e potencial gravitacional do fluido cósmico. Pode-se mostrar que, no regime linear, para  $c_{eff} = 0$ , o sistema (4.15-4.17) leva às mesmas equações que a teoria de perturbação relativística em um calibre particular [47]. Além disso a equação de conservação não-linear de energia e a equação de Raychadhuri derivadas deste sistema são formalmente idênticas às relativísticas [29] neste caso, o que dá motivação para o uso desta abordagem.

Introduzindo as variáveis perturbadas  $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$ ,  $P = \bar{P} + \delta P$ ,  $\phi = \bar{\phi} + \varphi$ , e  $\vec{u} = H\vec{r} + \vec{v}$ , usando coordenadas comóveis e desprezando cisalhamento e vorticidade podemos escrever a equação de evolução do contraste de densidade  $\delta$ ,

$$\begin{aligned} & \delta'' + \delta' \left[ \frac{1 - 9w}{2} + 3c_{eff}^2 - \frac{w'}{1 + w + \delta(1 + c_{eff}^2)} \right] \\ & + \delta\delta' \left[ \frac{(w - c_{eff}^2)(5 + 3c_{eff}^2) - c_{eff}^2'}{1 + w + \delta(1 + c_{eff}^2)} \right] - \delta'^2 \left[ \frac{4/3 + c_{eff}^2}{1 + w + \delta(1 + c_{eff}^2)} \right] \\ & + \delta^2 \left[ \frac{3(w - c_{eff}^2)c_{eff}^2' - 3(w - c_{eff}^2)^2}{1 + w + \delta(1 + c_{eff}^2)} - \frac{3}{2}(1 + 3c_{eff}^2)(1 + c_{eff}^2) \right] \\ & + \frac{3}{2}\delta \left[ (3w^2 - 2w - 1) - 2c_{eff}^2(1 + 3w) - 2(w' - c_{eff}^2') + \frac{2(w - c_{eff}^2)w'}{1 + w + \delta(1 + c_{eff}^2)} \right] \\ & = \frac{1 + w + \delta(1 + c_{eff}^2)}{\mathcal{H}^2} \vec{\nabla}_x \cdot \left[ \frac{\vec{\nabla}_x (c_{eff}^2 \delta)}{1 + w + \delta(1 + c_{eff}^2)} \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde as derivadas são com respeito a  $\eta = \ln(a)$  e  $\mathcal{H} = aH$ ,  $w = \bar{P}/\bar{\rho}$  e  $c_{eff}^2 = \delta P/\delta\rho$  [19]. Na aproximação linear, no caso de perturbações adiabáticas temos  $c_{eff}^2 = c_s^2 \equiv \bar{P}'/\bar{\rho}' = w - w'/3(1 + w)$ . Supondo perturbações de entropia tais que  $c_{eff}^2 = 0$  a Eq. (4.18) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \delta'' + \delta' \left[ \frac{1 - 9w}{2} - \frac{w'}{1 + w + \delta} \right] - \delta'^2 \left[ \frac{4/3}{1 + w + \delta} \right] + \delta\delta' \left[ \frac{5w}{1 + w + \delta} \right] \\ & - 3\delta^2 \left[ \frac{w^2}{1 + w + \delta} + \frac{1}{2} \right] + \frac{3}{2}\delta \left[ 3w^2 - 2w - 1 - 2w' + \frac{2ww'}{1 + w + \delta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para estudar o regime fracamente não linear de formação de estruturas e calcular momentos de ordem mais alta da distribuição de densidade podemos expandir  $\delta$  como [48, 49, 50]

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i(\eta)}{i!} \delta_0^i, \quad (4.20)$$

onde  $\delta_0$  é uma pequena perturbação. Usando esta expansão para obter a evolução dos fatores de crescimento de primeira e segunda ordem  $D_1$  e  $D_2$ , temos

$$D_1'' + D_1' \left[ \frac{1-9w}{2} - \frac{w'}{1+w} \right] + \frac{3}{2} D_1 \left[ 3w^2 - 2w - 1 - \frac{2w'}{1+w} \right] = 0, \quad (4.21)$$

e

$$D_2'' + D_2' \left[ \frac{1-9w}{2} - \frac{w'}{1+w} \right] + \frac{3}{2} D_2 \left[ 3w^2 - 2w - 1 - \frac{2w'}{1+w} \right] - D_1'^2 \left[ \frac{8/3}{1+w} \right] + D_1 D_1' \left[ \frac{10w}{1+w} + \frac{2w'}{(1+w)^2} \right] - 3D_1^2 \left[ \frac{2w^2}{1+w} + \frac{2ww'}{(1+w)^2} + 1 \right] = 0. \quad (4.22)$$

Podemos obter modos de ordens superiores recursivamente, usando os modos de ordens mais baixas. O fator de segunda ordem é de particular interesse. Se usarmos condições iniciais Gaussianas ele estará associado ao aparecimento de características não-Gaussianas no campo de densidade. Logo  $D_2$  pode ser relacionado à assimetria (“skewness”) da distribuição de matéria [51, 52]. Neste caso, a assimetria “não suavizada” é dada por  $S_3 = 3D_2/D_1^2$ .

Consideramos os modelos de quartessência exponencial, logarítmico e de Chaplygin. Nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6, mostramos contornos de assimetria constante para os três modelos. Em nossos cálculos consideramos que em  $z = 10^3$  os fatores de crescimento se comportam como no modelo Einstein-de Sitter,  $D_1 \propto a$ ,  $D_2 \propto a^2$  e  $S_3 = 34/7$ . Incluímos nas figuras curvas com o parâmetro de densidade efetivo da matéria  $\Omega_m^{eff}$  (4.12) constante, considerando o valor atual da densidade de energia homogênea  $\bar{\rho}_0$ , de modo que a região entre as curvas é a região preferida pelos dados observacionais atuais. De fato, em [9] pode-se verificar que, no modelo de Chaplygin, os vínculos de fração de gás em aglomerados correspondem essencialmente a

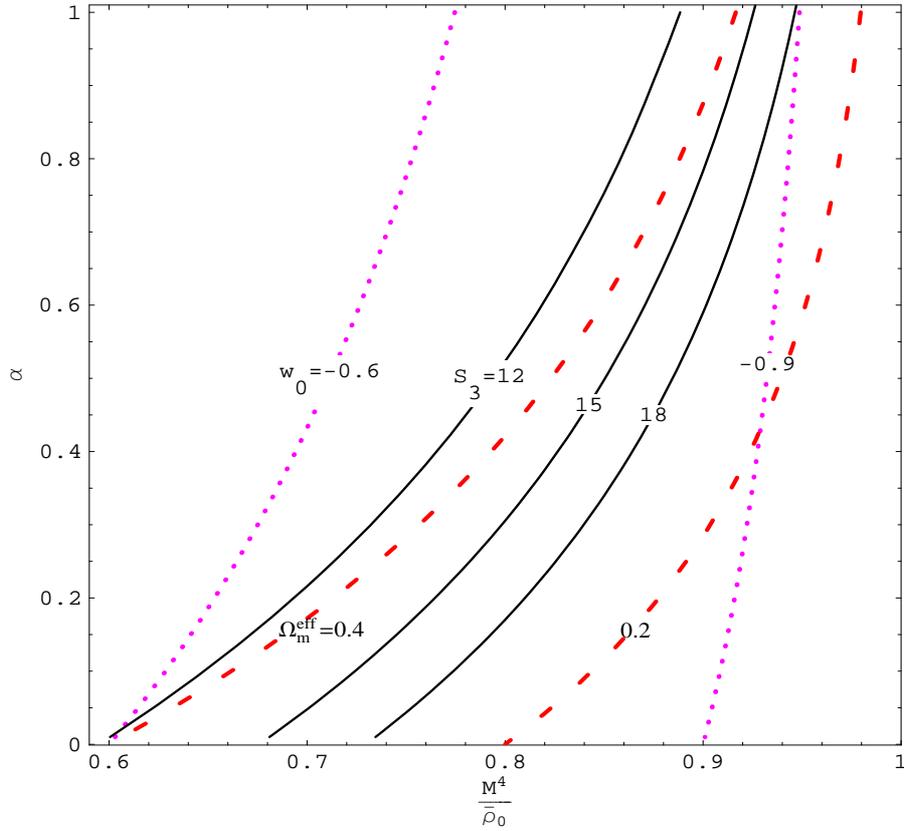


Figura 4.4: Contornos de assimetria constante no plano  $(M^4/\bar{\rho}_0, \alpha)$  para quartessência de Chaplygin (curvas sólidas). Nós também mostramos curvas com densidade da matéria efetiva  $\Omega_m^{eff}$  constante (curvas tracejadas) e valor atual da equação de estado  $w_0$  constante (curvas pontilhadas).

essas curvas. Nas figuras podemos ver que nesta região a assimetria assume valores na faixa  $S_3 \approx 13 - 20$ , o que contrasta fortemente com o esperado para os modelos  $\Lambda$ CDM e quintessência [49, 53, 54, 55, 56]. Em primeira análise, esta discrepância pode ser interpretada como indicativo de que estes modelos são incompatíveis com observações de assimetria em grande escala [57, 58]. Entretanto, nesta discussão nós desprezamos os bárions, e as medidas de distribuição de galáxias em grande escala são baseadas em contagem de objetos luminosos. Portanto, para comparar nossa análise com dados observacionais precisamos generalizar nosso formalismo para um fluido cósmico composto por dois componentes: bárions e quartessência.

As equações para os fatores de crescimento podem ser generalizadas para incluir



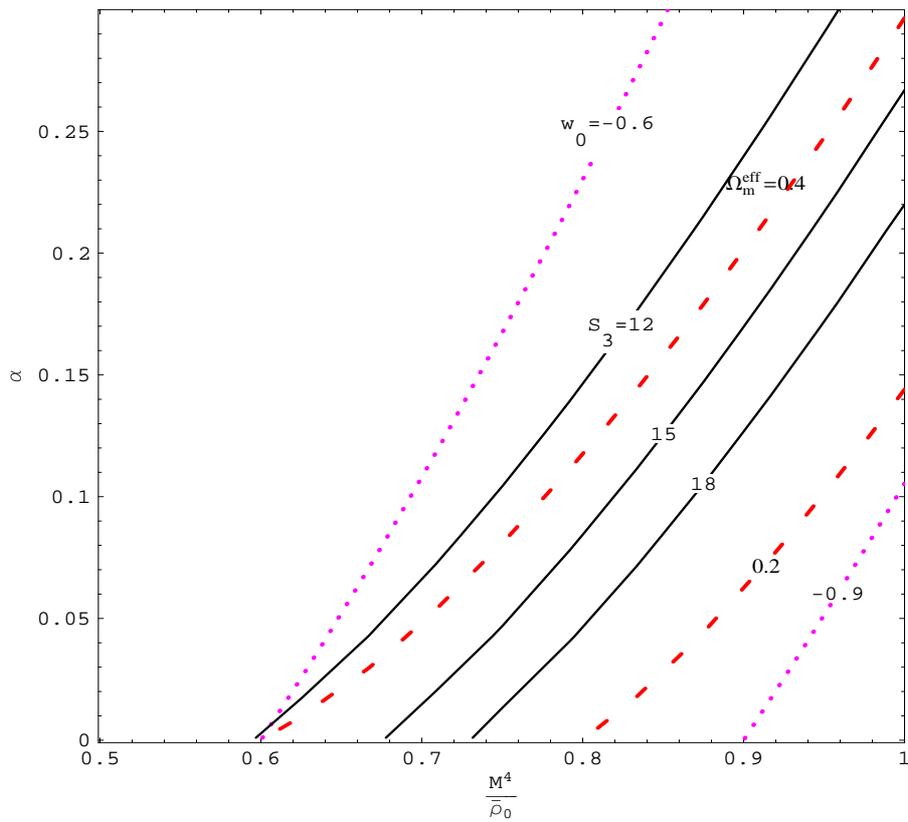


Figura 4.6: Contornos de assimetria constante no plano  $(M^4/\bar{\rho}_0, \alpha)$  para quartessência exponencial (curvas sólidas). Nós também mostramos curvas com densidade da matéria efetiva  $\Omega_m^{eff}$  constante (curvas tracejadas) e valor atual da equação de estado  $w_0$  constante (curvas pontilhadas).

bárions. Para isto devemos reescrever as equações da cosmologia Newtoniana no contexto de um fluido multicomponente:

$$\nabla_r^2 \phi = 4\pi G \sum_j (\rho_j + 3P_j), \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}_j}{\partial t}\right)_r + (\vec{u}_j \cdot \vec{\nabla}_r) \vec{u}_j = -\vec{\nabla}_r \phi - (\rho_j + P_j)^{-1} \vec{\nabla}_r P_j, \quad (4.24)$$

$$\left(\frac{\partial \rho_j}{\partial t}\right)_r + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho \vec{u}_j) + P_j \vec{\nabla}_r \cdot \vec{u}_j = 0, \quad (4.25)$$

onde o sub-índice latino denota um componente específico. Introduzindo, de maneira análoga à descrita acima, perturbações em torno da solução homogênea ( $\rho_j = \bar{\rho}_j(1 + \delta_j)$ ),  $P_j = \bar{P}_j + \delta P_j$ ,  $\phi = \bar{\phi} + \varphi$  e  $\vec{u}_j = H\vec{r}_j + \vec{v}_j$ ) obtemos

$$\begin{aligned} & \delta_j'' + \delta_j' \left[ \frac{\ddot{a}/a}{(\dot{a}/a)^2} + 3(c_{eff(j)}^2 - w_j) - \frac{w_j'}{1 + w_j + \delta_j(1 + c_{eff(j)}^2)} \right] \\ & + \delta_j \delta_j' \left[ \frac{(w_j - c_{eff(j)}^2)(5 + 3c_{eff(j)}^2) - c_{eff(j)}'^2}{1 + w_j + \delta_j(1 + c_{eff(j)}^2)} \right] - \delta_j'^2 \left[ \frac{4/3 + c_{eff(j)}^2}{1 + w_j + \delta_j(1 + c_{eff(j)}^2)} \right] \\ & + 3\delta_j \left[ \frac{\ddot{a}/a}{(\dot{a}/a)^2} (c_{eff(j)}^2 - w_j) - (w_j' - c_{eff(j)}'^2) + \frac{(w_j - c_{eff(j)}^2)w_j'}{1 + w_j + \delta_j(1 + c_{eff(j)}^2)} \right] \\ & + 3\delta_j^2 \left[ \frac{(w_j - c_{eff(j)}^2)c_{eff(j)}'^2 - (w_j - c_{eff(j)}^2)^2}{1 + w_j + \delta_j(1 + c_{eff(j)}^2)} \right] \\ & - \frac{4\pi G a^4}{\dot{a}^2} [1 + w_j + \delta_j(1 + c_{eff(j)}^2)] \sum_k [\bar{\rho}_k \delta_k (1 + 3c_{eff(k)}^2)] \\ & = \frac{1 + w_j + \delta_j(1 + c_{eff(j)}^2)}{(\dot{a}/a)^2} \vec{\nabla}_x \cdot \left[ \frac{\vec{\nabla}_x (c_{eff(j)}^2 \delta)}{1 + w_j + \delta_j(1 + c_{eff(j)}^2)} \right], \quad (4.26) \end{aligned}$$

com o apóstrofo representando derivada com respeito a  $\eta$  e o ponto denotando derivada com respeito ao tempo conforme.

Vamos considerar bárions e quartessência e impor  $c_{eff}^2 = 0$  para a quartessência. É importante lembrar que no caso  $c_{eff}^2 = 0$  podemos ter modelos de quartessência,

distinguíveis de  $\Lambda$ CDM, em acordo com observações até primeira ordem. Neste caso podemos escrever

$$\delta_b'' + \delta_b' \left\{ -\frac{1}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] + 1 \right\} - \frac{4}{3} \frac{\delta_b'^2}{1 + \delta_b} = \frac{3}{2}(\Omega_b \delta_b + \Omega_q \delta_q + \Omega_b \delta_b^2 + \Omega_q \delta_q \delta_b), \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & \delta_q'' + \delta_q' \left\{ -\frac{1}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] + 1 - 3w - \frac{w'}{1+w+\delta_q} \right\} + \frac{5w\delta_q\delta_q'}{1+w+\delta_q} \\ & - \frac{3w^2\delta_q'^2}{1+w+\delta_q} - 3\delta_q \left\{ -\frac{w}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] + w + w' - \frac{w'w}{1+w+\delta_q} \right\} \\ & - \frac{4}{3} \frac{\delta_q'^2}{1+w+\delta_q} = \frac{3}{2}(1+w)(\Omega_b\delta_b + \Omega_q\delta_q) + \frac{3}{2}(\Omega_b\delta_b\delta_q + \Omega_q\delta_q^2), \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde os sub-índices “ $b$ ” e “ $q$ ” se referem, respectivamente, a bárions e quartessência e  $w$  é o parâmetro da equação de estado da quartessência. Para escrever as equações acima utilizamos as seguintes relações, decorrentes das equações de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}/a}{(\dot{a}/a)^2} = -\frac{1}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+3w)] + 1, \quad (4.29)$$

$$\frac{4\pi G a^4}{\dot{a}^2} \sum_k \bar{\rho}_k \delta_k = \frac{3}{2}(\Omega_b \delta_b + \Omega_q \delta_q), \quad (4.30)$$

com  $\Omega_j = 8\pi G \bar{\rho}_j / 3H^2$ .

Expandindo novamente os contrastes de densidade

$$\delta_b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i(\eta)}{i!} \delta_0^i, \quad \delta_q = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_i(\eta)}{i!} \delta_0^i, \quad (4.31)$$

podemos obter as equações para os fatores de crescimento, até segunda ordem,

$$B_1'' + B_1' \left\{ -\frac{1}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] + 1 \right\} - \frac{3}{2} [\Omega_b B_1 + \Omega_q Q_1] = 0, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
& Q_1'' + Q_1' \left[ 1 - 3w - \frac{1}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] - \frac{w'}{1+w} \right] - \frac{3}{2}(1+w)\Omega_b B_1 \\
& - 3Q_1 \left\{ \frac{\Omega_q}{2}(1+w) + w - \frac{w}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] + \frac{w'}{1+w} \right\} = 0, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_2'' + B_2' \left\{ -\frac{1}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] + 1 \right\} - \frac{3}{2} [\Omega_b B_2 + \Omega_q Q_2] - \frac{8}{3} B_1'^2 - 3(\Omega_b B_1^2 + \Omega_q B_1 Q_1) = 0, \\
& \quad (4.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_2'' + Q_2' \left[ 1 - 3w - \frac{1}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] - \frac{w'}{1+w} \right] + \frac{2Q_1 Q_1'}{1+w} \left( 5w + \frac{w'}{1+w} \right) \\
& + 3Q_2 \left\{ \frac{\Omega_q}{2}(1+w) + w - \frac{w}{2}[\Omega_b + \Omega_q(1+w)] + \frac{w'}{1+w} \right\} \\
& - \frac{2Q_1^2}{1+w} \left\{ \frac{3w'w}{1+w} + 3w^2 - \frac{3}{2}\Omega_q(1+w) \right\} \\
& - \frac{8Q_1'^2}{3(1+w)} - 3\Omega_b \left[ B_1 Q_1 + (1+w) \frac{B_2}{2} \right] = 0 \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, verificamos que a assimetria da quartessência não é substancialmente afetada pela presença de uma pequena quantidade de bárions ( $\Omega_{b0} \approx 0.04$ ), no entanto, a assimetria de bárions ( $S_{3b}$ ) resulta ser aproximadamente constante com o desvio para o vermelho. Para bárions temos  $S_{3b} \simeq 34/7$ , que é o valor obtido para o modelo  $\Lambda$ CDM. Isso mostra que observações da assimetria da distribuição de densidade, que são sensíveis a bárions, não seriam capazes de distinguir modelos de quartessência do modelo  $\Lambda$ CDM.

Apesar de ser mais difícil sua observação, a assimetria da convergência em lentes gravitacionais [59] pode ser uma poderosa ferramenta, uma vez que é sensível tanto a bárions como a matéria escura. De acordo com [60], as atuais observações de lentes ainda contém muito ruído para fornecer fortes vínculos sobre parâmetros cosmológicos. Todavia as previsões da assimetria para quartessência são bastante diferentes das de  $\Lambda$ CDM e suas variantes, por isso esperamos que futuros dados possam discriminar com confiança essas duas classes de modelos.



# Capítulo 5

## Modelos de quartessência não-convexa

Em todos os modelos de quartessência que analisamos até agora, a equação de estado é convexa, ou seja,

$$\frac{d^2 p}{d\rho^2} = \frac{dc_s^2}{d\rho} < 0. \quad (5.1)$$

Estabilidade de perturbações adiabáticas e causalidade implicam

$$0 \leq c_s^2 \equiv \frac{dp}{d\rho} \leq 1. \quad (5.2)$$

A condição de convexidade (5.1) implica que  $c_s^2_{max}$  ocorre quando  $\rho = \rho_{min}$ . No entanto, modelos com mudança de concavidade podem apresentar  $c_s^2$  desprezível quando  $\rho \simeq \rho_{min}$ . Nós podemos mostrar que é possível construir modelos [61] em que  $c_s^2$  é relevante apenas por um curto período em uma época remota, de modo que apenas perturbações em grande escala seriam afetadas. Esta idéia simples reconcilia os resultados de Sandvik *et al.* [16] e Reis, Makler & Waga [20] com os de Scherrer [62], que considera como quartessência um campo escalar com termo cinético não canônico na Lagrangeana; nós podemos ter pressão negativa e, simul-

taneamente, velocidade do som nula em modelos de quartessência adiabáticos. É importante salientar que qualquer modelo de quartessência obtido a partir de um campo escalar com Lagrangeana não-canônica puramente cinética é equivalente a um fluido adiabático. Não há diferença fundamental entre quartessência adiabática e quartessência “ $k$ -essencial”. Uma parte de uma equação de estado fenomenológica enquanto que a outra parte de uma ação fenomenológica para um campo escalar.

Uma equação de estado tipo degrau, dada por uma sigmóide constitui um exemplo de quartessência com mudança de concavidade.

$$p = -M^4 \left\{ \frac{1}{1 + \exp \left[ \beta \left( \frac{\rho}{M^4} - \frac{1}{\sigma} \right) \right]} \right\}. \quad (5.3)$$

Para este modelo, a velocidade do som adiabática é dada por

$$c_s^2 = \beta \frac{\exp \left[ \beta \left( \frac{\rho}{M^4} - \frac{1}{\sigma} \right) \right]}{\left\{ 1 + \exp \left[ \beta \left( \frac{\rho}{M^4} - \frac{1}{\sigma} \right) \right] \right\}^2}. \quad (5.4)$$

O modelo tem três parâmetros livres. O parâmetro  $M$  está relacionado com o mínimo da densidade de energia, ou seja, o valor de  $\rho$  quando a equação de estado assintótica  $p_{\min} = -\rho_{\min}$  é alcançada. O parâmetro  $\sigma$  está relacionado ao valor da densidade na transição do regime  $p \simeq 0$  para  $p \simeq -M^4$ ; ( $\rho_{trans} = M^4/\sigma$ ). Se  $\sigma \ll 1$ , a transição ocorre muito antes da densidade mínima ser alcançada. O parâmetro  $\beta$  controla o valor máximo da velocidade do som  $c_{s\max}^2$ . Para a sigmóide temos  $c_{s\max}^2 = \beta/4$  e, portanto, causalidade e estabilidade das perturbações exigem que  $0 \leq \beta \leq 4$ . Neste modelo, o “limite  $\Lambda$ CDM” não está necessariamente associado ao máximo da velocidade do som, ao contrário do caso convexo. Este limite pode ser alcançado quando  $\sigma \rightarrow 0$ , que implica  $p_{\min} = -\rho_{\min} = -M^4$ . Outra possibilidade é tomar  $\beta \rightarrow 0$ ; neste caso  $c_{s\max}^2 \rightarrow 0$  e o modelo também se comporta como  $\Lambda$ CDM, mas com  $p_{\min} = -\rho_{\min} = -M^4/2$ . É importante notar que esses limites

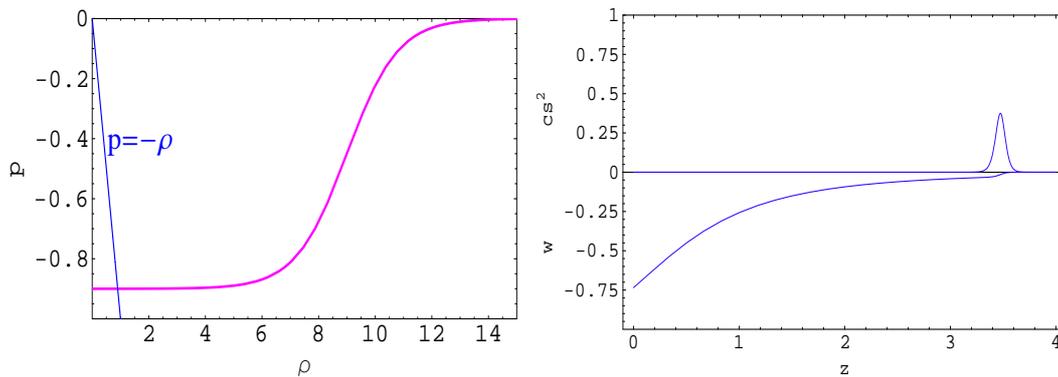


Figura 5.1: Painel esquerdo: pressão como função da densidade de energia para a sigmoíde. Painel direito: equação de estado e velocidade adiabática do som em função do desvio para o vermelho.

são distintos no que se refere a perturbações; se  $\beta \ll 1$ , a velocidade do som pode ser pequena mas não nula durante um longo período, de modo que a transição poderia estar ocorrendo ainda hoje. Pode-se mostrar que  $c_s^2 \neq 0$  por um longo período de tempo tem um efeito drástico sobre o espectro de potência da matéria, praticamente descartando esses modelos.

De modo geral, podemos ter

$$p = M^4 f \left[ \beta \left( \frac{\rho}{M^4} - \frac{1}{\sigma} \right) \right], \quad (5.5)$$

onde  $f$  é uma função tipo degrau ímpar, com  $f(+\infty) = 0$ ,  $f(-\infty) = -1$  e  $f(0) = -1/2$ . A velocidade do som máxima é  $c_{s \max}^2 = \beta f'(0)$ . Para  $\sigma \ll 1$ , obtemos  $p_{\min} = -M^4$ .

## 5.1 Vínculos Observacionais - Testes de ordem zero

Consideramos a distância de luminosidade (2.43) com o parâmetro de Hubble  $H$  dado por

$$H(z) = H_0 [\Omega_{b0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{b0})u]^{1/2}, \quad (5.6)$$

onde  $\Omega_{b0} = 8\pi G\rho_{b0}/3H_0^2$ , e  $u = \rho_q/\rho_{q0}$  é solução da equação de conservação (4.3).

Para uma fonte com magnitude absoluta  $M$  e magnitude aparente  $m$ , nós definimos o módulo de distância

$$\mu = 5 \log \left( \frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (5.7)$$

Considerando a “amostra de ouro” de supernovas Ia compiladas por Riess *et al.*[63], nós podemos calcular a função  $\chi^2$  como

$$\chi_{SN}^2 = \sum_{i=1}^{157} \frac{(\mu_{pi}(M^4/\rho_0, \beta, \sigma, \Omega_{b0}, h, z_i) - \mu_{0i})^2}{\sigma^2}, \quad (5.8)$$

onde  $\mu_p$  é o módulo de distância prevista pelo modelo e  $\mu_0$  são os dados. Estamos interessados em analisar observáveis que dependem essencialmente da evolução do parâmetro de Hubble, uma quantidade muito pouco sensível a variações do parâmetro  $\beta$ . Optamos, por simplicidade, fixar este parâmetro em seu valor intermediário  $\beta = 2$ . Marginalizando sobre  $\Omega_{b0}h^2$  e  $h$ , nós obtemos os níveis de confiança (68% e 95%) mostrados na figura 5.2, painel superior. Podemos notar a grande degenerescência do parâmetro  $\sigma$ .

Nós também consideramos dados de aglomerados de galáxias de Allen *et al.* [64]. Para determinar os níveis de confiança, usamos a função

$$\chi_{cl}^2 = \sum_{i=1}^{26} \frac{[f_{\text{gas}}^{\text{mod}}(M^4/\rho_0, \beta, \sigma, \Omega_{b0}, h, z_i) - f_{\text{gas},i}]^2}{\sigma_{f_{\text{gas},i}}^2}, \quad (5.9)$$

onde  $z_i$ ,  $f_{\text{gas},i}$ , e  $\sigma_{f_{\text{gas},i}}$  são, respectivamente, os desvios para o vermelho, os valores de melhor ajuste para  $\Lambda$ CDM ( $h = 0.5$ ), e os erros para vinte e seis aglomerados compilados em [64]. Na Eq. (5.9),  $f_{\text{gas}}^{\text{mod}}$  é a fração de gás teórica [64]

$$f_{\text{gas}}^{\text{mod}}(z) = \frac{b\Omega_b}{(1 + 0.19\sqrt{h})\Omega_m^{\text{eff}}} \left( \frac{h}{0.5} \frac{d_A^{\text{EdS}}}{d_A(M^4/\rho_0, \beta, \sigma, \Omega_{b0}, h, z)} \right)^{3/2}. \quad (5.10)$$

Aqui,  $d_A$  é a distância de diâmetro angular do aglomerado,  $\Omega_m^{\text{eff}} = (1 - \Omega_{b0}) \lim_{a \rightarrow 0} (ua^3)$  é a densidade efetiva de matéria e  $b$  é fator de “viés” que leva em conta o fato que a fração de bárions nos aglomerados não tem que ser necessariamente a mesma que a do universo como um todo. Os níveis de confiança de 68% and 95% são mostrados na figura 5.2 (painel inferior) e, novamente, o parâmetro  $\sigma$  apresenta grande degenerescência.

## 5.2 Vínculos Observacionais - Testes de Primeira Ordem

Para calcular a verossimilhança usamos uma versão da rotina descrita em [65]. Calculamos o espectro angular com uma modificação do código CMBFAST [34] que inclui perturbações de pressão não-adiabáticas [13] (para uma breve introdução à análise da RCF veja o apêndice C). Nós não incluímos ondas gravitacionais e fixamos a temperatura da RCF  $T_{\text{CMB}} = 2.726\text{K}$ , a abundância de Hélio  $Y_{\text{He}} = 0.24$  e o número de espécies de neutrinos  $N_\nu = 3.04$ . Nós marginalizamos sobre o índice espectral  $n_s$ , a profundidade ótica  $\tau$ , a normalização  $N$  e também  $\Omega_{b0}h^2$  e  $h$ .

Na figura 5.3 nós mostramos os níveis de confiança para os parâmetros  $M^4/\rho_0$  e  $\sigma$ . Note que agora os limites exigem que  $\sigma \lesssim 3 \times 10^{-3}$ , mostrando que testes que envolvem a métrica perturbada são fundamentais para vincular fortemente o modelo.

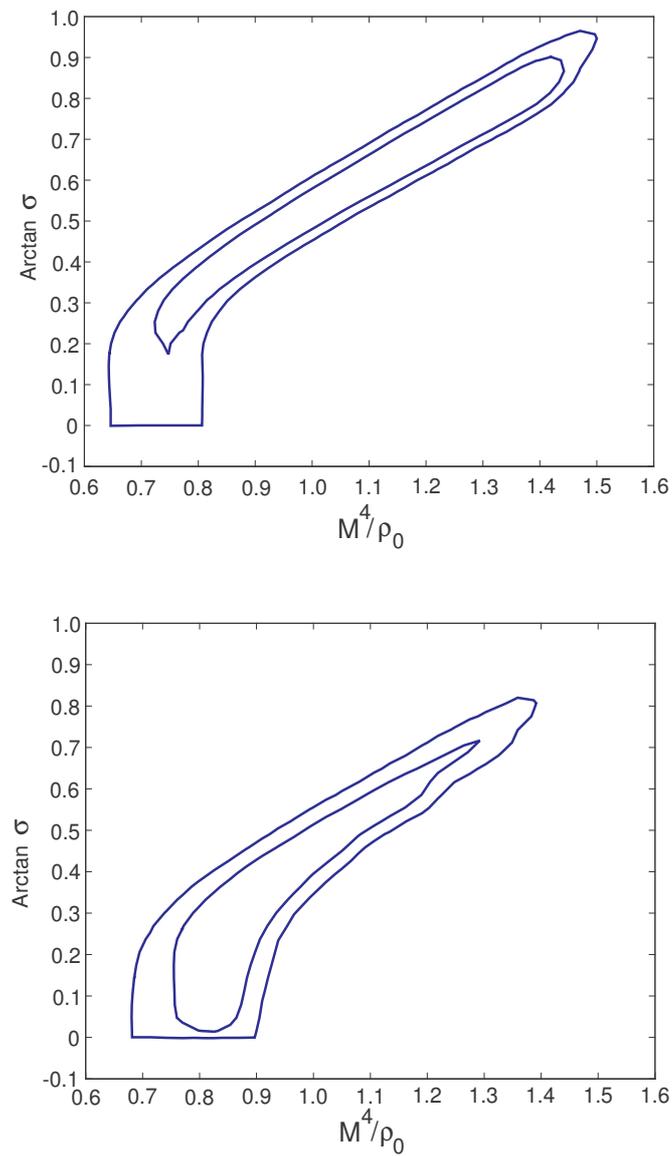


Figura 5.2: Níveis de confiança de 68% e 95% para SNeIa (painel superior) e aglomerados (painel inferior), para o modelo sigmóide.

Para determinar o espectro de potência da matéria, nós usamos o mesmo procedimento da seção 4.2. Com isso usamos os dados do SDSS [45] para calcular a função

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{19} \left( \frac{P_{obs,i} - N_s P_{mod,i}^W(M^4/\rho_0, \beta, \sigma, \Omega_{b0}, h)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (5.11)$$

com

$$P_{mod,i}^W(M^4/\rho_0, \beta, \sigma, \Omega_{b0}, h) = \sum_{j=1}^{57} P_{mod}(M^4/\rho_0, \beta, \sigma, \Omega_{b0}, h, k_{band,j}) W_{ij} \quad (5.12)$$

onde  $k_{band,i}$  e  $W_{ij}$  são, respectivamente, as bandas em  $k$  e as funções janela fornecidas em [45] e  $P_{mod}(M^4/\rho_0, \beta, \sigma, \Omega_{b0}, h, k) = |\delta_b(M^4/\rho_0, \beta, \sigma, \Omega_{b0}, h, k)|^2$ . Nós obtivemos os contornos de  $M^4/\rho_0 \times \sigma$  minimizando  $\chi^2$  em relação a normalização  $N_s$  e marginalizamos em  $\Omega_{b0} h^2$  e  $h$ , com  $\beta = 2$ .

Na figura 5.3 nós apresentamos os níveis de confiança para o espectro de potência. Agora os limites são ainda mais restritivos,  $\sigma \lesssim 4 \times 10^{-5}$ . Sabemos que na transição de matéria para energia escura  $\rho_{trans} = M^4/\sigma$ . Usando a equação de conservação podemos determinar o redshift em que ocorreu a transição como sendo  $z_t \gtrsim 38$ . Nós mostramos, na figura 5.4, o resultado da análise combinada de supernovas, aglomerados, RCF e espectro de potência. Note que o momento da transição do fluido não é o momento em que se inicia a aceleração da expansão cósmica .

Salientamos que dados do espectro de potência da matéria para escalas menores ( $k \gtrsim 0.2 \text{ h Mpc}^{-1}$ ) podem impor fortes vínculos sobre  $\sigma$  deslocando o  $z_t$  mínimo permitido para valores mais altos. Nós checamos que isto, de fato, acontece quando consideramos dados de espectro de potência vindos de observações da “floresta” de Lyman-alpha (Lyman-alpha forest) [66]. Tais dados, no entanto, ainda apresentam incertezas sistemáticas consideráveis, motivo pelo qual decidimos não incluí-los na nossa análise. Independente disso, nossos resultados mostram que, até primeira or-

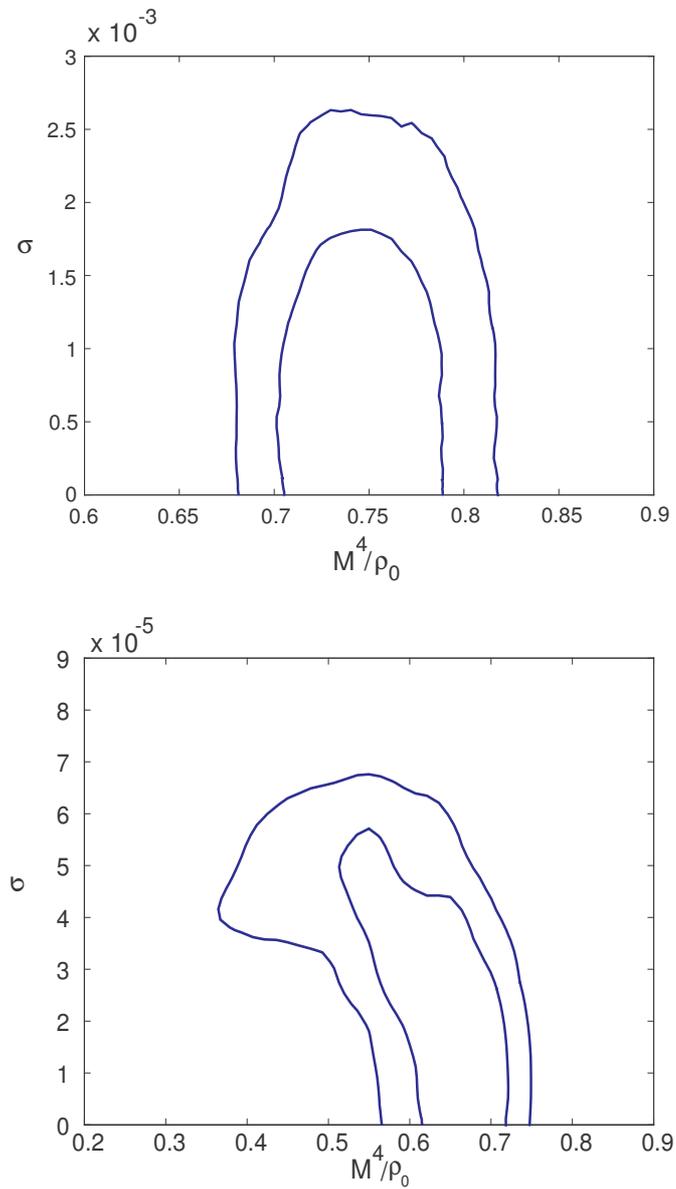


Figura 5.3: Níveis de confiança de 68% e 95% para dados de RCF do WMAP [37](painel superior) e dados do SDSS [45] (painel inferior).

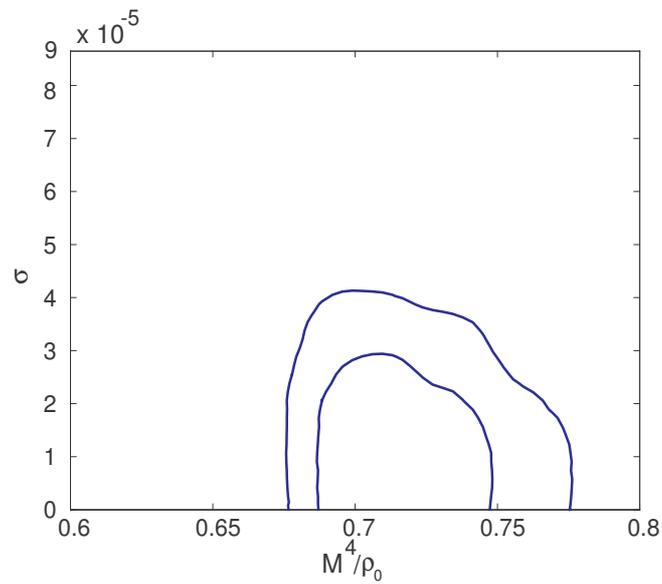


Figura 5.4: Níveis de confiança de 68% e 95% para a análise combinada supernovas + aglomerados + RCF + espectro de potência da matéria.

dem, qualquer modelo de quartessência adiabática não pode ser observacionalmente distinguível de  $\Lambda$ CDM.



# Capítulo 6

## Modelos para o Parâmetro da Equação de Estado

### 6.1 Parametrizações da Energia Escura

Estudamos até agora diferentes propostas para a equação de estado do fluido exótico. Uma outra forma de analisar o problema é estudar diretamente a evolução da equação de estado com o desvio para o vermelho por meio de uma parametrização de  $w$ . Este procedimento tem sido usado amplamente na literatura para descrever o comportamento da energia escura. Nesta seção vamos apresentar algumas destas parametrizações.

Linder [67] e Chevallier *et al.* [68] sugeriram, para energia escura, a seguinte função

$$w(z) = w_0 + \frac{w_1 z}{1 + z}, \quad (6.1)$$

que representa um expansão linear em termos do fator de escala, onde  $w_0 \equiv w(z = 0)$  e  $w_1 \equiv \frac{dw}{dz}|_{z=0}$  são parâmetros livres. Este modelo tem a vantagem de ter um valor finito, para altos valores de desvio para o vermelho, e reproduzir o comportamento

linear para pequenos desvios para o vermelho.

Outro exemplo com dois parâmetros é o modelo proposto por Gerke e Efstathiou [69],

$$w(z) = w_Q - \alpha \ln(1 + z), \quad (6.2)$$

sugerido para garantir acordo com certos modelos de quintessência em baixos desvios para o vermelho.

Seljak *et al.* [70] propuseram um modelo com três parâmetros, baseado em uma expansão até segunda ordem em termos do fator de escala,

$$w_x(a) = w_0 + (a - 1)w_1 + (a - 1)^2w_2, \quad (6.3)$$

uma extensão do modelo (6.1). Pode-se mostrar que os parâmetros  $w_0$ ,  $w_1$  e  $w_2$  são fortemente correlacionados.

Alam *et al.* [71] introduziram um modelo diferente, com três parâmetros, no qual a densidade de energy escura é dada por uma série de Taylor truncada  $\rho = A_0 + A_1x + A_2x^2$ , com  $x = 1 + z$ , que resulta no seguinte parâmetro da equação de estado:

$$w(z) = \frac{(1 + z)[A_1 + 2A_2(1 + z)]}{3[A_0 + A_1(1 + z) + A_2(1 + z)^2]} - 1. \quad (6.4)$$

Esta função pode reproduzir vários cenários. Se  $A_2 = A_1 = 0$  temos uma constante cosmológica, se  $A_0 = A_1 = 0$  ou  $A_0 = A_2 = 0$  temos um comportamento de quiessência ( $w \neq 1$ , constante).

Vale salientar que, em princípio, supondo um campo escalar minimamente acoplado à gravidade, podemos encontrar um potencial, de modo que a dinâmica do modelo seja a mesma de cada um dos modelos citados, uma vez que  $-1 \lesssim w \lesssim 1$ . Isto é possível porque a equação de estado é suficiente para se determinar o parâmetro de Hubble e, dada a dinâmica, é possível reconstruir o potencial. Outras parame-

trizações podem ser encontradas em Corasaniti *et al.* [72], Ananda e Bruni [73], Stefancic [74], J. Weller *et al.* [75], T. Roy Chaudhury *et al.* [76], Y. Gong [77], T. Nakamura *et al.* [78]. Alternativamente, parametrizações para a distância de luminosidade e para o parâmetro de Hubble têm sido também apresentadas na literatura [79], [80].

## 6.2 Uma nova parametrização

Nesta seção, consideramos a seguinte parametrização para quartessência [81]:

$$w(z) = w_f + (w_i - w_f) \exp \left[ - \left( \frac{1 + z_t}{1 + z} \right)^{1/d} \right], \quad (6.5)$$

onde  $w_i$  e  $w_f$  são, respectivamente, os valores inicial ( $w(z \rightarrow \infty)$ ) e final ( $w(z \rightarrow -1)$ ) do parâmetro da equação de estado. O parâmetro  $z_t$  é o desvio para o vermelho da transição do comportamento de matéria escura para energia escura, tal que

$$w(z_t) = w_f + \frac{(w_i - w_f)}{e} \quad (6.6)$$

e  $d$  controla a duração de tal transição. Note que a transição no comportamento do fluido, indicada por  $z_t$ , *não* é a transição de desaceleração para aceleração na expansão cósmica. Para garantir um comportamento de quartessência, é necessário fixar  $w_i = 0$  e  $w_f = -1$ . Como apontado nos capítulos anteriores, uma equação de estado convexa para quartessência implica oscilações e instabilidades nos espectros de potência da matéria e da radiação cósmica de fundo. Portanto, este modelo deve ser considerado no contexto de quartessência “silenciosa”.

Consideramos que o universo é composto de bárions e quartessência e desprezamos a curvatura espacial para obter vínculos sobre os parâmetros  $z_t$  e  $d$  a partir de cinco observações independentes: supernovas tipo Ia (SNeIa), fração de bárions em

aglomerados de galáxias, oscilações acústicas de bárions (BAO, do inglês “Baryon Acoustic Oscillation”), o parâmetro de deslocamento da RCF e a posição dos picos acústicos no espectro da RCF. Para todos estes observáveis, a quantidade chave é o parâmetro de Hubble, dado pela Eq. (5.6),

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{b0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{b0})u(z), \quad (6.7)$$

onde  $u(z) = \rho_q/\rho_{q0}$ , é solução da equação de conservação

$$u'(z) - \frac{3}{1+z}[1 + w(z)]u(z) = 0, \quad (6.8)$$

com o apóstrofo representando derivada com respeito ao desvio para o vermelho.

Em nossa análise de SNeIa nós usamos a amostra do “Supernova Legacy Survey” (SNLS) e seguimos o procedimento descrito na referência [82]. Primeiro calculamos a função

$$\chi_{SN}^2(z_t, d, \Omega_{b0}, M, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{115} \frac{(m_{B,i} - M + \alpha(s_i - 1) - \beta c_i - 5 \log_{10} D_L(z_t, d, \Omega_{b0}, z_i))^2}{\sigma_{m,i}^2 + \alpha^2 \sigma_{s,i}^2 + \beta^2 \sigma_{c,i}^2 + \sigma_{int}^2 + \sigma_{v,i}^2}, \quad (6.9)$$

onde  $M$  é a magnitude absoluta,  $s$  parametriza a relação entre o brilho máximo e a duração da SNeIa,  $c$  é o excesso de cor no referencial de repouso,  $m_B$  é a magnitude aparente na banda B, no referencial de repouso e  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros adicionais, que devem ser ajustados em conjunto com os do modelo. A distância de luminosidade, em unidades de  $cH_0^{-1}$  dada por

$$D_L(z_t, d, \Omega_{b0}, z) = (1+z) \int_0^z \frac{du}{H(z_t, d, \Omega_{b0}, u)/H_0}. \quad (6.10)$$

Supondo uma dispersão de velocidade peculiar de 300 Km/s, podemos escrever

$$\sigma_{v,i}^2 = \left[ \frac{0.005}{\ln 10} \left( \frac{1}{1+z_i} + \frac{1}{H(z_t, d, \Omega_{b0}, z_i)} \int_0^{z_i} \frac{dz}{H(z_t, d, \Omega_{b0}, z)} \right) \right]^2. \quad (6.11)$$

Consideramos inicialmente  $\sigma_{int} = 0.15$  e, então, o ajustamos seguindo a seguinte receita: minimizamos  $\chi^2$ , mantendo fixos os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  no denominador da expressão para garantir que o procedimento não seja tendencioso; atualizamos iterativamente os valores  $\alpha$  e  $\beta$  no denominador com o melhor ajuste até que estes converjam para o nível de acurácia desejado; alteramos  $\sigma_{int}$  de forma que  $\chi_{min}^2$  por graus de liberdade seja próximo de 1 para o nível de acurácia pré-estabelecido; em seguida, repetimos o procedimento de minimização descrito acima. Para obter os contornos de confiança no plano  $(z_t, d)$ , nós usamos os valores de melhor ajuste para  $\alpha$  e  $\beta$  no denominador e marginalizamos a verossimilhança  $\mathcal{L} = \ln(-\chi^2/2)$  nos parâmetros  $M$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  com “a priori” homogêneo em torno do melhor ajuste.

Para a análise dos dados de fração de bárions em aglomerados de galáxias, seguimos o procedimento descrito na seção 5.1.

Para a análise de BAO, consideramos a seguinte estatística

$$\chi_{BAO}^2 = \left[ \frac{A_{BAO} - 0.469(n_S/0.98)^{0.35}}{0.017} \right]^2, \quad (6.12)$$

em que usamos o dado observacional  $A_{BAO}^{obs} = 0.469(n_S/0.98)^{0.35} \pm 0.017$  que foi obtido a partir da amostra de galáxias vermelhas luminosas do SDSS [83],  $n_S$  é o índice espectral e a escala de BAO  $A_{BAO}$  é dada por

$$A_{BAO}(z_t, d, \Omega_{b0}) = \sqrt{\Omega_{m0,eff}} [H(z_t, d, z_{BAO})/H_0]^{-1/3} \left\{ \frac{1}{z_{BAO}} \int_0^{z_{BAO}} \frac{du}{H(z_t, d, u)/H_0} \right\}^{2/3}, \quad (6.13)$$

com  $z_{BAO} = 0.35$ . A verossimilhança depende fracamente do índice espectral e, portanto, decidimos manter  $n_S = 0.98$ , por simplicidade.

Para o parâmetro de deslocamento da RCF, calculamos

$$\chi_R^2(z_t, d, \Omega_{b0}) = \left[ \frac{1.70 - R(z_t, d, \Omega_{b0})}{0.03} \right]^2, \quad (6.14)$$

considerando o dado  $R_{obs} = 1.70 \pm 0.03$  de [84], obtido a partir da análise dos dados da sonda WMAP [38] e usando

$$R = \sqrt{\Omega_{m0,eff}} \int_0^{z_r} \frac{dz}{H_e(z_t, d, h, z)/H_0}, \quad (6.15)$$

com o desvio para o vermelho da recombinação  $z_r = 1089$ . Aqui consideramos  $\Omega_{m0,eff} = \Omega_{b0} + (1 - \Omega_{b0}) \lim_{a \rightarrow 0}(ua^3)$ . Para este teste consideramos a contribuição da radiação escrevendo

$$\left[ \frac{H_e(z_t, d, h, z)}{H_0} \right]^2 = \left[ \frac{H(z_t, d, z)}{H_0} \right]^2 + \frac{4.15 \times 10^{-5}}{h^2} (1+z)^4. \quad (6.16)$$

Para a posição dos picos do espectro da RCF, utilizamos

$$\chi_{pico}^2 = \left( \frac{l_a - 303.6}{1.2} \right)^2 \quad (6.17)$$

onde

$$l_a = \pi \frac{D_A(z_r)}{r_s(a_r)}, \quad (6.18)$$

sendo  $D_A(z_r)$  a distância de diâmetro angular até a recombinação. O horizonte acústico  $r_s$  é dado por

$$r_s(z_r) = \int_0^{t_r} \frac{c_s dt}{a} = \int_{z_r}^{\infty} dz \frac{c_s}{H_e}, \quad (6.19)$$

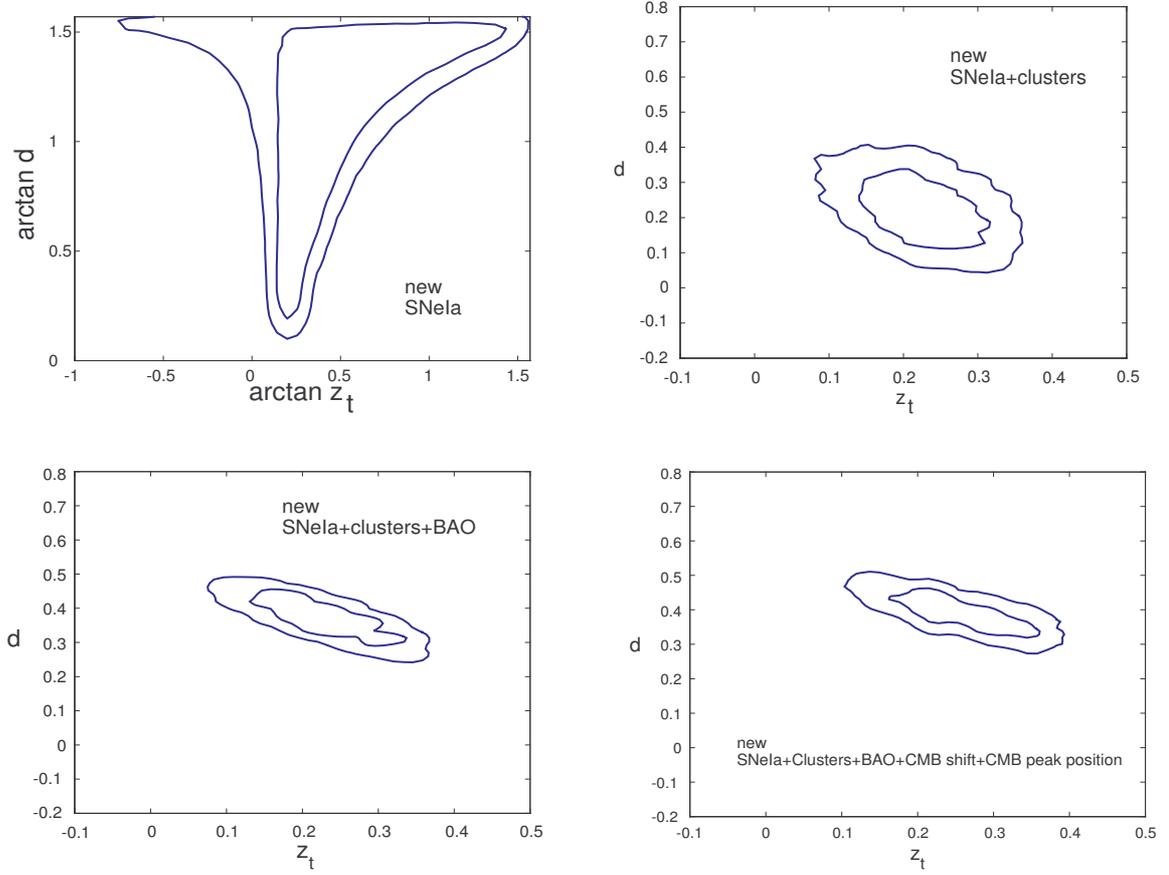


Figura 6.1: Contornos de 68% e 95% de confiança, para o novo modelo, para SNIa (painel superior esquerdo), SNIa+aglomerados (painel superior direito), SNIa+aglomerados+BAO (painel inferior esquerdo) e SNIa+aglomerados+BAO+deslocamento da RCF+posição do pico de RCF (painel inferior direito).

e a velocidade do som do fluido bárion-fóton é dada por

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3(1 + R_b a)}}, \quad (6.20)$$

$$R_b a = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}; \quad (6.21)$$

$R_b = 3\rho_{b0}/4\rho_{\gamma 0}$  é a razão bárion-fóton. Usamos o resultado  $l_a^{obs} = 303.6_{-1.2}^{+1.1}$  de [85] obtido a partir dos dados da sonda WMAP [38] e consideramos, como aproximação, uma distribuição Gaussiana para  $l_a^{obs}$  com desvio padrão  $\sigma_{l_a} = 1.2$ .

Na figura 6.1, nós mostramos contornos de 68% e 95% de confiança para os parâmetros  $z_t$  e  $d$  para as análises de SNeIa, SNeIa + aglomerados, SNeIa + aglomerados + BAO e SNeIa + aglomerados + BAO + deslocamento da RCF + posição do pico de RCF. A análise de SNeIa se revela ser muito pouco restritiva. No entanto, a combinação com outros observáveis é bastante útil para eliminar a degenerescência, limitando os valores dos parâmetros para  $0 \lesssim z_t \lesssim 0.4$  e  $0.3 \lesssim d \lesssim 0.55$ , para SNeIa + aglomerados + BAO + deslocamento da RCF + posição do pico de RCF, com 95% de confiança.

Da análise combinada vemos que  $d = 0$  está excluído com 95% de confiança, o que seria esperado, uma vez que não estamos considerando a existência de matéria escura e, conseqüentemente,  $d = 0$  corresponde ao limite “bárions+ $\Lambda$ ”, que está excluído pelas observações atuais (veja a figura 2.2). De fato, a região no espaço de parâmetros permitida pelos dados corresponde a  $0.2 \lesssim \Omega_{m0,eff} \lesssim 0.4$ , como podemos ver na figura 6.4, em acordo com as estimativas atuais para o parâmetro de densidade da matéria.

### 6.3 Outras Propostas

Nesta seção, nós consideramos outras duas parametrizações, originalmente apresentadas como energia escura, no contexto de quartessência:

$$w(z) = w_i + (w_f - w_i) \frac{\left\{ 1 + \exp \left[ - \left( \frac{1 + z_t}{d} \right) \right] \right\}}{\left[ 1 + \exp \left( \frac{z - z_t}{d} \right) \right]}, \quad (6.22)$$

$$w(z) = w_f + \frac{(w_i - w_f)}{1 + \left( \frac{1 + z_t}{1 + z} \right)^{1/d}}. \quad (6.23)$$

Todos os parâmetros têm o mesmo significado dos apresentados na seção anterior. Entretanto, o valor da equação de estado na transição  $w(z = z_t)$  é diferente. Da equação (6.22) nós temos

$$w(z_t) = w_i + (w_f - w_i) \left\{ 1 + \exp \left[ -\frac{(1 + z_t)}{d} \right] \right\} \quad (6.24)$$

e, para a equação (6.23), temos

$$w(z_t) = -\frac{1}{2}. \quad (6.25)$$

A equação (6.22) foi proposta por Bassett *et al.* [86] porém foi reescrita para descrever o comportamento de quartessência desejado. A equação (6.23) foi proposta por Linder e Huterer [87].

Nós seguimos o mesmo procedimento da seção anterior para obter os contornos mostrados nas figuras 6.2 e 6.3.

Para o modelo de Linder *et al.*, SNeIa restringem pouco o espaço de parâmetros, apesar da forte correlação entre os parâmetros; combinação com outros observáveis é novamente essencial. A combinação SNeIa + aglomerados parece ser suficiente para quebrar a degenerescência. Nós obtivemos  $0.3 \lesssim z_t \lesssim 0.7$  e  $0.2 \lesssim d \lesssim 0.45$ , para SNeIa + aglomerados + BAO + deslocamento da RCF + posição do pico de RCF, com 95% de confiança.

Para o modelo de Bassett *et al.*, SNeIa restringem significativamente o espaço de parâmetros, porém uma futura transição não pode ser descartada. Combinação com aglomerados não muda o quadro geral. Neste caso, a combinação com BAO ou o deslocamento da RCF é necessária para restringir uma transição futura. Nós obtivemos  $-0.2 \lesssim z_t \lesssim 0.8$  e  $0.4 \lesssim d \lesssim 1.1$ , para SNeIa + aglomerados + BAO + deslocamento da RCF + posição do pico de RCF.

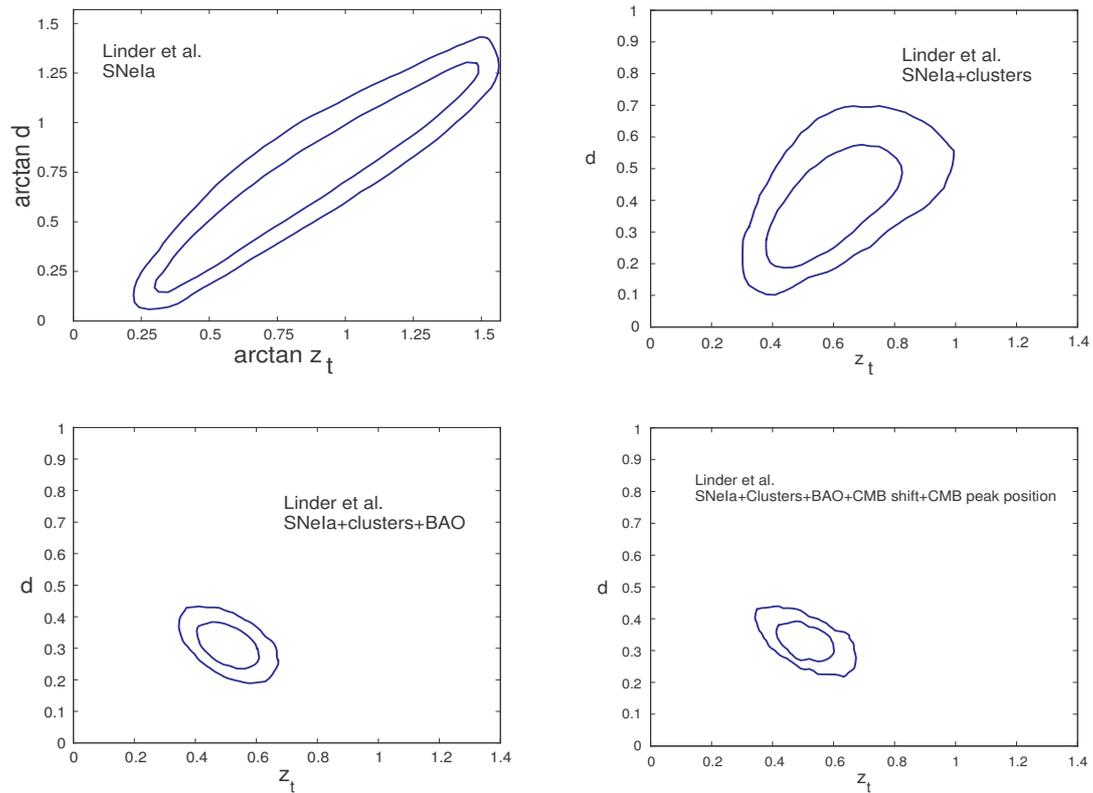


Figura 6.2: Contornos de 68% e 95% de confiança, para o modelo de Linder *et al.*, para SNeIa (painel superior esquerdo), SNeIa+aglomerados (painel superior direito), SNeIa+aglomerados+BAO (painel inferior esquerdo) e SNeIa+aglomerados+BAO+deslocamento da RCF+posição do pico de RCF (painel inferior direito).

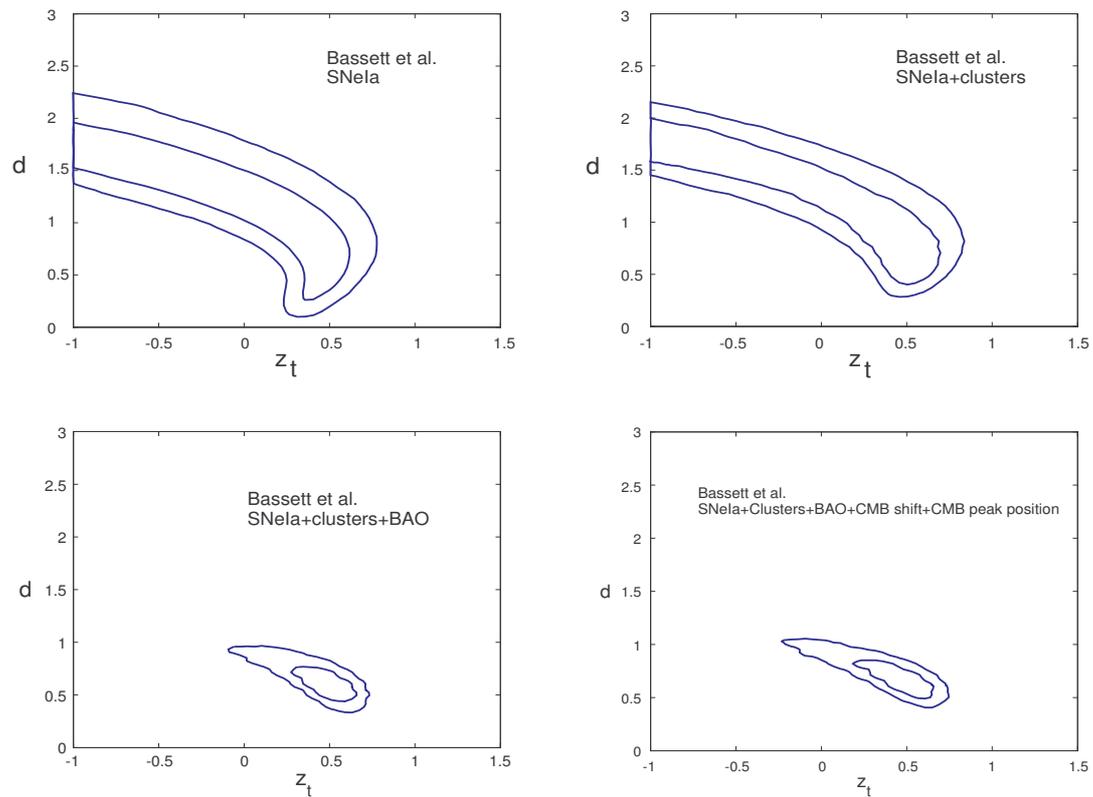


Figura 6.3: Contornos de 68% e 95% de confiança, para o modelo de Bassett *et al.*, para SNeIa (painel superior esquerdo), SNeIa+aglomerados (painel superior direito), SNeIa+aglomerados+BAO (painel inferior esquerdo) e SNeIa+aglomerados+BAO+deslocamento da RCF+posição do pico de RCF (painel inferior direito).

Comparando as figuras 6.1, 6.2 e 6.3, vemos que apenas a parametrização de Bassett *et al.* possui um limite superior para  $z_t$ , quando usamos somente dados de SNeIa. Entretanto, para este caso, uma transição em um futuro distante não está descartada. A combinação com dados de fração de bárions em aglomerados se revelou bastante eficaz em eliminar a degenerescência da nova parametrização e da de Linder *et al.*. Todavia, tal combinação não alterou significativamente os contornos de SNeIa no caso de Bassett *et al.*. Constatamos que, em todos os casos, não houve grande modificação nos contornos com a inclusão da informação extraída da RCF, isto é, o parâmetro de deslocamento e a posição do pico acústico (painel inferior direito, em todas as figuras), em relação ao resultado obtido apenas com a inclusão da observação de BAO (painel inferior esquerdo, em todas as figuras).

É importante notar que não podemos comparar diretamente valores numéricos dos parâmetros em diferentes parametrizações, uma vez que estes são definidos de maneira distinta, como podemos ver nas equações (6.6), (6.24) e (6.25). No entanto, podemos calcular o desvio para o vermelho em que a aceleração cósmica começa,  $q(z_*) = 0$ , usando

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} + \frac{3(1 - \Omega_{b0})wu}{2[\Omega_{b0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{b0})u]}. \quad (6.26)$$

Usando os resultados de 95% de confiança da combinação SNeIa + aglomerados + BAO + deslocamento da RCF + posição do pico, obtemos que, para a nova parametrização,  $0.38 \lesssim z_* \lesssim 1.0$ , para a de Linder *et al.*, temos  $0.5 \lesssim z_* \lesssim 1.1$  e, para a de Bassett *et al.*, temos  $0.1 \lesssim z_* \lesssim 1.47$ . Com isso, obtemos que a parametrização de Bassett permite uma faixa mais ampla para o desvio para vermelho do início da aceleração cósmica, sendo compatível com valores mais recentes e mais remotos em relação às outras. Observamos também que todas as parametrizações mostram, com 95% de confiança, que a aceleração começou em um passado relativamente recente

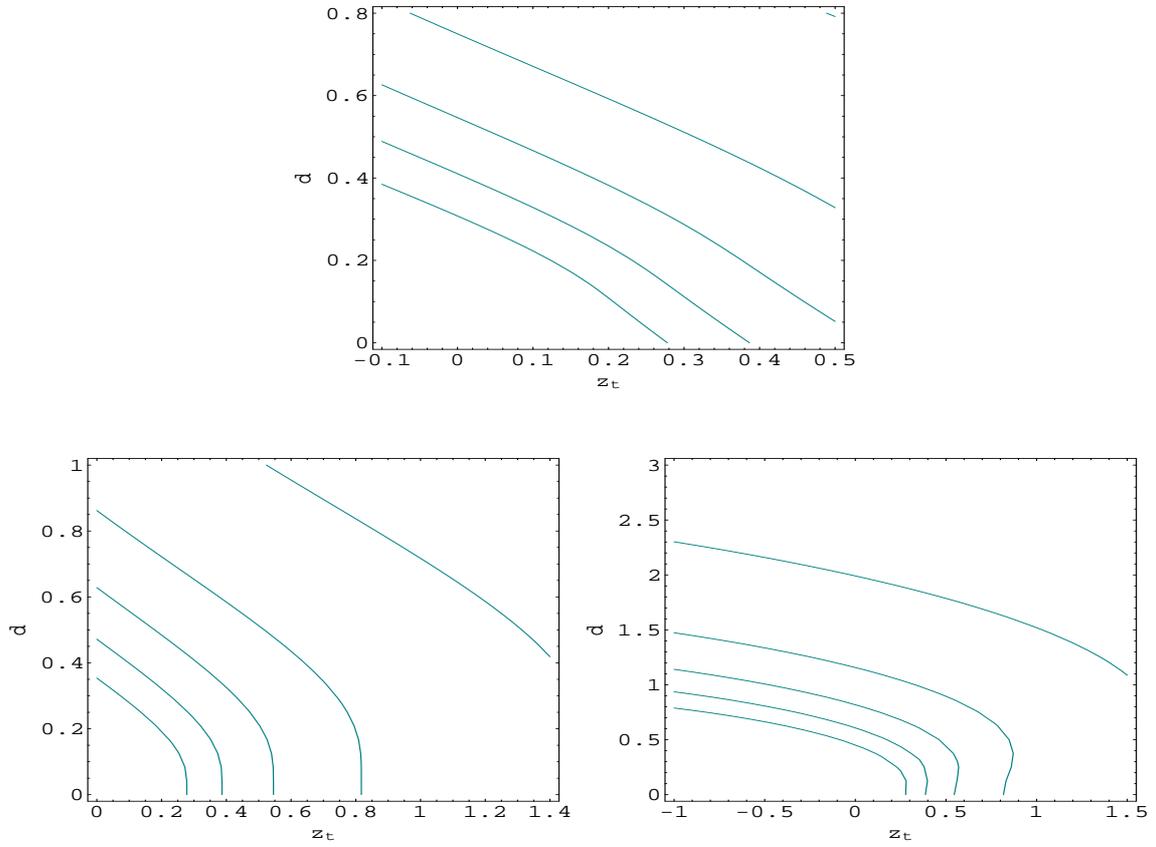


Figura 6.4: Curvas com  $\Omega_{m0eff}$  constante para o novo modelo (painel superior), o de Linder *et al.* (painel inferior esquerdo) e o de Bassett *et al.* (painel inferior direito). As curvas correspondem a  $\Omega_{m0eff} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  de cima para baixo.

( $z_* < 1.5$ ).



# Capítulo 7

## Parametrizando a Aceleração Cósmica

Neste capítulo analisaremos uma nova parametrização para o parâmetro de desaceleração  $q$ , com o intuito de obter informação sobre a expansão cósmica com o mínimo de hipóteses [88]. Em particular, estamos interessados no desvio para o vermelho da transição de desaceleração para aceleração e na duração da mesma.

Supomos homogeneidade e isotropia espaciais, o que nos leva a já mencionada métrica de FLRW (2.7). Observações recentes da RCF [38] indicam que a curvatura espacial do universo é bastante próxima de zero, o que nos motiva a considerar, por simplicidade,  $K = 0$ .

Em termos do parâmetro de Hubble  $H$ , o parâmetro de desaceleração  $q$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1. \quad (7.1)$$

Portanto, dado  $q(z)$  podemos obter o parâmetro de Hubble como

$$H = H_0 \exp \left\{ \int_0^z [q(x) + 1] d \ln(1 + x) \right\}. \quad (7.2)$$

Nós propomos a seguinte forma para o parâmetro de desaceleração:

$$q(z) \equiv q_f + \frac{(q_i - q_f)}{1 - \frac{q_i}{q_f} \left( \frac{1 + z_t}{1 + z} \right)^{1/\tau}}, \quad (7.3)$$

onde  $q_i > 0$  (desaceleração) e  $q_f < 0$  (aceleração) são os valores inicial ( $z \gg z_t$ ) e final ( $z = -1$ ) do parâmetro de desaceleração, respectivamente. O parâmetro  $z_t$  representa o desvio para o vermelho da transição ( $q(z_t) = 0$ ) e  $\tau > 0$  representa a sua duração. Está relacionado à derivada de  $q$  com respeito a  $z$  na transição. Mais precisamente,

$$\tau^{-1} = \left( \frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_f} \right) \left[ \frac{dq(z)}{d \ln(1 + z)} \right]_{z=z_t}. \quad (7.4)$$

A expressão (7.3) é similar, em espírito àquela sugerida em [89] (veja também [90, 91]), porém, aqui nós parametrizamos  $q(z)$  ao invés de  $w(z)$ . Com isso, temos a vantagem de ter um significado físico bastante claro para  $z_t$ . Outras abordagens e parametrizações de  $q(z)$  foram investigadas em [92].

Com a definição acima, a equação (7.2) pode ser integrada analiticamente, resultando em:

$$\left[ \frac{H(z)}{H_0} \right]^2 = (1 + z)^{2(1+q_i)} \left[ \frac{q_i \left( \frac{1 + z_t}{1 + z} \right)^{1/\tau} - q_f}{q_i (1 + z_t)^{1/\tau} - q_f} \right]^{2\tau(q_i - q_f)}. \quad (7.5)$$

Na maioria dos cenários (e nos mais simples), para garantir a formação de estruturas, supõe-se que o universo passou por uma fase dominada por algo que se comporte

como matéria não relativística, de forma que, em tempos primordiais,  $H^2 \propto (1+z)^3$ . Portanto, nós fixamos  $q_i = 1/2$  e reduzimos a três o número de parâmetros livres do modelo. Nós definimos agora um parâmetro de densidade da matéria efetivo,  $\Omega_{m\infty}$ , como

$$\Omega_{m\infty} \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{H(z)}{H_0} \right]^2 (1+z)^{-2(1+q_i)}, \quad (7.6)$$

que, no caso de  $q_i = 1/2$ , pode ser escrito como

$$\Omega_{m\infty} = \left[ 1 - \frac{1}{2q_f} (1+z_t)^{1/\tau} \right]^{-\tau(1-2q_f)}. \quad (7.7)$$

Com a definição acima, nós podemos eliminar  $z_t$  da equação (7.5) e reescrevê-la como

$$\left[ \frac{H(z)}{H_0} \right]^2 = (1+z)^3 \left[ \Omega_{m\infty}^{1/\tau(1-2q_f)} + (1 - \Omega_{m\infty}^{1/\tau(1-2q_f)})(1+z)^{-1/\tau} \right]^{\tau(1-2q_f)}, \quad (7.8)$$

que é bastante útil para comparação com outros modelos discutidos na literatura.

É simples verificar, a partir de (7.8), que a parametrização (7.3), no caso em que  $q_i = 1/2$ , está relacionada ao modelo Cardassiano politrópico modificado (MPC, do inglês “Modified Polytropic Cardassian”) [93], que é caracterizado por

$$\left[ \frac{H(z)}{H_0} \right]_{MPC}^2 = (1+z)^3 \left\{ (\Omega_{m0}^{obs})^p + [1 - (\Omega_{m0}^{obs})^p](1+z)^{-3p(1-n)} \right\}^{1/p}. \quad (7.9)$$

É fácil ver que, se nós identificarmos  $\Omega_{m0}^{obs} = \Omega_{m\infty}$ ,  $p = 1/(\tau(1-2q_f))$  e  $n = 2/3(1+q_f)$ , obtemos a mesma cinemática para ambos os modelos. Note que, uma vez que  $q_f < 0$ , a condição  $n < 2/3$  segue naturalmente. É importante salientar que, em MPC,  $\Omega_{m0}^{obs}$  é o valor atual do parâmetro de densidade da matéria, enquanto  $\Omega_{m\infty}$  é definido em alto desvio para o vermelho. Estas duas quantidades não têm necessariamente o mesmo valor no caso geral [94]. Nós enfatizamos também que,

em nossa formulação, nós não especificamos uma teoria de gravitação nem os constituintes escuros do universo. Em MPC, os componentes são matéria e radiação; não há energia escura. Portanto, a parametrização (7.3) inclui MPC como um caso especial, e pode ser considerada como uma nova motivação para investigá-lo.

Desprezando bárions, a quartessência de Chaplygin [95] é obtida se impusermos  $q_i = 1/2$ ,  $q_f = -1$ ,  $1/\tau = 3(1 + \alpha)$  e  $\Omega_{m\infty} = (1 - w_0)^{1/(1+\alpha)}$ , onde  $w_0 = -M^4/\rho_0^{\alpha+1}$  é o valor atual do parâmetro da equação de estado.

O modelo convencional de energia escura com equação de estado constante ( $w_X$ ) é obtido se identificarmos  $\Omega_{m\infty} = \Omega_{m0}$  e  $-3w_X = 1/\tau = (1 - 2q_f)$  na equação (7.8). Em particular, se  $q_f = -1$  e  $\tau = 1/3$ ,  $\Lambda$ CDM é recuperado. Para este modelo o desvio para o vermelho da transição é dado por  $(2(1 - \Omega_{m0})/\Omega_{m0})^{1/3} - 1$ . Identificar o modelo  $\Lambda$ CDM no espaço de parâmetros é bastante conveniente; uma vez que este modelo se ajusta muito bem aos dados atuais, esperamos que a cosmologia “verdadeira” não esteja muito distante deste limite. Vale mencionar que, no contexto de relatividade geral sem interação entre matéria e energia escuras, se  $\tau < 1/3$  e  $q_f = -1$ , o componente de energia escura apresentará uma fase “fantasma” ( $w < -1$ ) transiente, que pode ter começado no passado ou começar no futuro ( $z < 0$ ). Modelos com  $\tau > 1/3$  nunca apresentam essa fase.

É interessante notar que aplicando a definição de  $\tau$ , dada pela equação (7.4) (escolhendo  $q_i = 1/2$  e  $q_f = -1$ ), ao modelo DGP [96] sem curvatura, nós obtemos  $\tau = 1/2$ , independente de  $\Omega_{m0}$ . Portanto, espera-se que modelos com  $z_t = (2(1 - \Omega_{m0})^2/\Omega_{m0})^{1/3} - 1$  (o desvio para o vermelho da transição no contexto de DGP) e  $\tau \approx 1/2$  sejam uma boa aproximação para modelos DGP planos.

É importante salientar que nossa parametrização (7.3) não descreve a época dominada pela radiação. Durante esta fase, em modelos cosmológicos mais viáveis,  $H \propto (1 + z)^2$  e  $q = 1$ . Por conseguinte, para incluir a contribuição da radiação, nós adicionaremos o termo  $\Omega_{r0}(1 + z)^4$  ao lado direito da equação (7.5) quando

necessário. Não fazê-lo introduziria um erro de  $\sim 20\%$  na estimativa da distância até a superfície de último espalhamento.

Inicialmente, nós limitaremos nossa análise ao caso especial de modelos que possuem uma fase do tipo de Sitter final, fixando  $q_f = -1$ . O caso mais geral será analisado posteriormente [98]. Neste caso as equações (7.3), (7.5) e (7.7) se reduzem a

$$q(z) = -1 + \frac{3}{2 + \left(\frac{1+z_t}{1+z}\right)^{1/\tau}}, \quad (7.10)$$

$$\left[\frac{H(z)}{H_0}\right]^2 = (1+z)^3 \left[ \frac{\left(\frac{1+z_t}{1+z}\right)^{1/\tau} + 2}{(1+z_t)^{1/\tau} + 2} \right]^{3\tau}, \quad (7.11)$$

$$\Omega_{m\infty} = \left[ \frac{1}{2}(1+z_t)^{1/\tau} + 1 \right]^{-3\tau}. \quad (7.12)$$

Vamos agora obter vínculos sobre os parâmetros  $\tau$  e  $z_t$  combinando observações de SNeIa com a razão entre a distância comóvel até a superfície de último espalhamento,  $\mathcal{S}_k(z_{ls} = 1098)$ , e a escala de distância de BAO,  $D_v(z)$ , calculada em  $z_{BAO} = 0.2$  e  $z_{BAO} = 0.35$ , conforme estimada por [22]. De fato, a razão  $\mathcal{S}_k/D_v$  vezes  $z_{BAO}$  é igual à razão entre o parâmetro de deslocamento da RCF ( $\mathcal{R}$ ) [97], no último espalhamento, e o parâmetro de BAO  $\mathcal{A}(z_{BAO})$  [83]. Este observável é apropriado para nossos propósitos por duas razões. Como SNeIa, ele não depende explicitamente dos constituintes escuros do universo e da teoria de gravitação. Ele é essencialmente controlado pela função  $H(z)/H_0$ . Além disso, uma complementaridade com os vínculos de SNeIa é gerada devido ao fato de que a razão  $\mathcal{S}_k/D_v$  e os dados de SNeIa são sensíveis a distâncias a objetos (eventos) em intervalos de desvio para o vermelho diferentes; com SNeIa, sondamos distâncias até  $z \sim 1 - 2$ , enquanto que  $\mathcal{S}_k$  dá a distância comóvel até  $z \sim 1100$ .

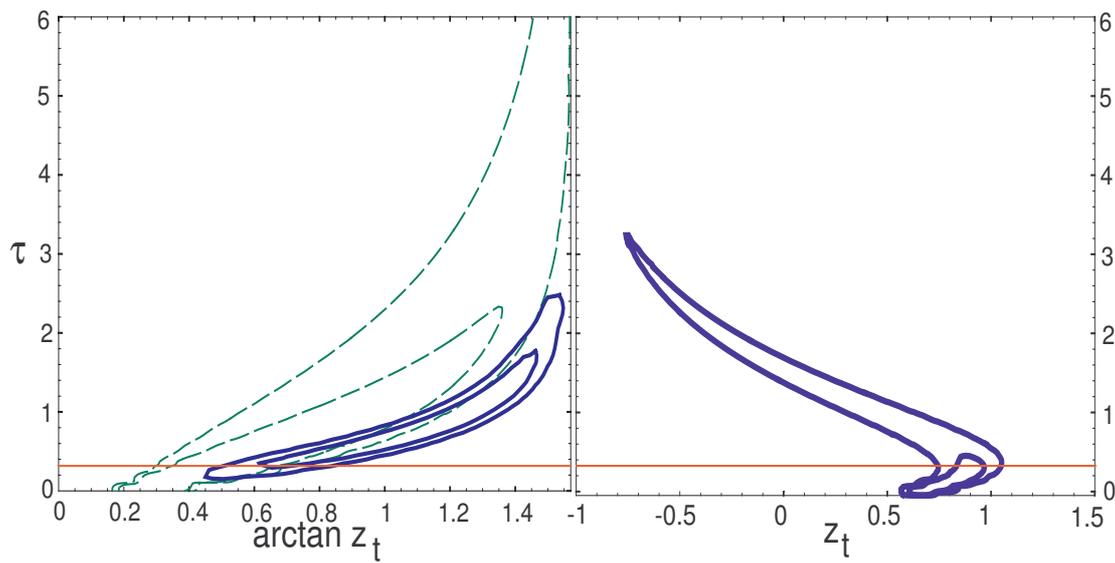


Figura 7.1: **Esquerda** - Vínculos impostos por dados de SNeIa. O contornos representam níveis de confiança de 68% e 95%. As curvas tracejadas verdes são da amostra *Gold182* e as sólidas azuis são da amostra do primeiro ano do SNLS. **Di-  
reita** - Vínculos impostos por dados de  $S_k/D_v$ . A linha horizontal vermelha em ambos os painéis correspondem a modelos  $\Lambda$ CDM.

Na análise de SNeIa nós consideramos duas amostras, a *Gold182* [99] e a do SNLS [82]. Para determinar a verossimilhança dos parâmetros nós seguimos os procedimentos descritos nestas referências, bem como nos capítulos 6 e 7. Em nossos cálculos, quando marginalizamos sobre o parâmetro de Hubble, nós usamos um “a priori” Gaussiano tal que  $h = 0.72 \pm 0.08$  [100]. Na figura 7.1 (painel esquerdo) nós mostramos os contornos de confiança (68% e 95%), no plano  $(\arctan z_t, \tau)$ , permitidos pelos experimentos de SNeIa. Note que, para as duas amostras, mesmo se a transição for instantânea ( $\tau = 0$ ),  $z_t < 0$  está excluído com alto nível de confiança, indicando que a transição ocorreu no passado. Além disso, fica claro na figura 7.1 (painel esquerdo) que observações de SNeIa não podem impor fortes vínculos sobre o valor máximo permitido para  $z_t$ . Isto é esperado, uma vez que observações de SNeIa sondam o universo apenas até  $z \sim 1 - 2$ . Portanto, em um modelo no qual a transição é muito lenta ( $\tau \gtrsim 1$ ), mesmo se  $z_t$  é alto ( $z_t \gg 1$ ), a distância a um objeto, digamos, a  $z \lesssim 1$ , pode ser similar a distância ao mesmo objeto em outro modelo com  $z_t \lesssim 1$  e uma transição mais rápida ( $\tau$  menor). Comparando os contornos para as duas amostras, nós observamos que os da *Gold182* estão deslocadas para a esquerda em relação aos do SNLS. Nós salientamos que mesmo na região de maior interesse ( $z_t \lesssim 1$ ), a diferença entre os dois resultados, apesar de não tão acentuada, existe e é importante. Tal diferença pode estar relacionada a possíveis inhomogeneidades presentes na amostra *Gold182*, como apontado em [101], e deve ser investigada posteriormente.

Para obter os vínculos sobre os parâmetros  $\tau$  e  $z_t$  a partir de  $S_k/D_v$ , nós usamos

$$\chi_{S_k/D_v}^2 = \mathbf{X}^t \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}, \quad (7.13)$$

onde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{S_k}{D_v(0.2)} - 19.04 \\ \frac{S_k}{D_v(0.35)} - 10.52 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

e

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.79198 & -2.59919 \\ -2.59919 & 11.7137 \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

obtida a correlação e o valor da razão entre o horizonte acústico e a distância comóvel até a superfície de último espalhamento  $r_s/S_k$  fornecidos por [22]. Como supomos curvatura espacial nula, podemos escrever

$$S_k(z_t, \tau, h) = \int_0^{1098} \frac{dz}{H_e(z_t, \tau, h, z)}, \quad (7.16)$$

e

$$D_v(z_{BAO}, z_t, \tau) = \left[ \frac{z_{BAO} \left( \int_0^{z_{BAO}} \frac{dx}{H(z_t, \tau, x)} \right)^2}{H(z_t, \tau, z_{BAO})} \right]^{1/3}. \quad (7.17)$$

Na equação (7.16) nós consideramos a contribuição de radiação, em altos desvios para o vermelho, usando

$$\left[ \frac{H_e(z_t, \tau, h, z)}{H_0} \right]^2 = \left[ \frac{H(z_t, \tau, z)}{H_0} \right]^2 + \frac{4.15 \times 10^{-5}}{h^2} (1+z)^4. \quad (7.18)$$

Para obter os vínculos, nós marginalizamos a verossimilhança sobre  $h$  com o mesmo “a priori” Gaussiano usado na análise de SNeIa. De fato,  $S_k$  só depende de  $h$  através do termo de radiação na equação (7.18). Na figura 7.1 (painel direito), nós mostramos os contornos de confiança (68% e 95%), no plano  $(z_t, \tau)$ , permitidos pelo teste de  $S_k/D_v$ . É clara, pela figura, a complementaridade entre este teste e SNeIa.

Para obter os resultados combinados (SNeIa +  $S_k/D_v$ ) nós multiplicamos as verossimilhanças marginalizadas. Na figura 7.2 (painel esquerdo), nós mostramos os

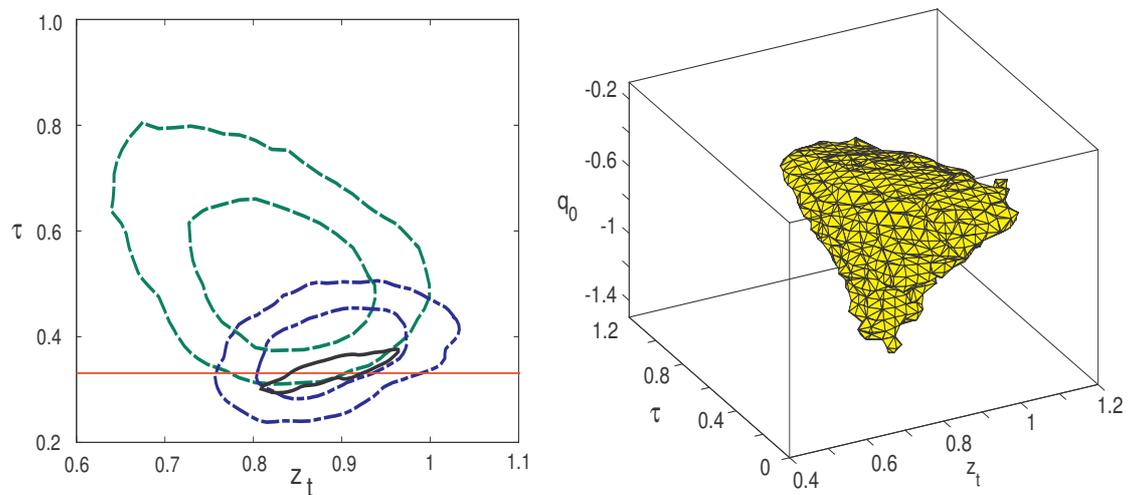


Figura 7.2: **Esquerda** - Contornos de confiança de 68% e 95% impostos pelos dados observacionais, usados na figura (7.1), combinados. Os contornos verdes tracejados (azuis ponto-tracejados) representam a combinação *Gold182* (SNLS) +  $S_k/D_v$ . O contorno preto sólido representa 95% de confiança para dados simulados baseados nas especificações do SNAP, supondo intercept conhecido, e considerando que a dispersão em  $S_k/D_v$  possa ser reduzida a 2/3 do valor atual. Como fiducial usamos  $\Lambda$ CDM plano com  $\Omega_{m0} = 0.23$ . A linha vermelha horizontal corresponde a modelos  $\Lambda$ CDM.. **Direita** - Superfície de 95% de confiança, no espaço de parâmetros  $(z_t, \tau, q_0)$ , para o caso de  $q_f$  arbitrário ( $q_f \in (-\infty, 0)$ ), obtida usando os dados combinados SNLS +  $S_k/D_v$

resultados combinados (68% e 95% de confiança)  $Gold182+S_k/D_v$  e SNLS  $+S_k/D_v$ . A linha vermelha horizontal, na figura, representa o limite  $\Lambda$ CDM ( $\tau = 1/3$ ). Pode-se ver que este modelo está em bom acordo com os dados de  $S_k/D_v +$  SNLS, mas concorda com  $S_k/D_v+Gold182$  apenas marginalmente. Marginalizando sobre o parâmetro extra [102] nós encontramos, para  $S_k/D_v+Gold182$  (com 68.3% de confiança),  $z_t = 0.84 \pm_{0.08}^{0.06}$  e  $\tau = 0.51 \pm_{0.10}^{0.09}$ , enquanto que para  $S_k/D_v +$  SNLS nós temos  $z_t = 0.88 \pm_{0.05}^{0.06}$  e  $\tau = 0.35 \pm_{0.04}^{0.07}$ . Com 68.3% de confiança, nós obtemos  $\Omega_{m\infty} = 0.22 \pm 0.02$  para  $(S_k/D_v + Gold182)$  e  $\Omega_{m\infty} = 0.23 \pm 0.02$  para  $(S_k/D_v+SNLS)$ .

Esses resultados reforçam a necessidade de melhores dados de SNeIa para resolver a tensão entre as amostras *Gold182* e do SNLS. Ressaltamos que, para obter estes resultados, nós apenas supusemos uma fase dominada pela matéria, a existência de radiação e bárions e investigamos o caso especial em que o universo têm uma fase final do tipo de Sitter.

Nós também mostramos na figura 7.2 (painel esquerdo, contornos pretos, contínuos) o que devemos esperar de futuros levantamentos combinando observações de SNeIa e  $S_k/D_v$ . Em nossas simulações de Monte Carlo, nós adotamos como modelo fiducial o modelo  $\Lambda$ CDM, com curvatura espacial nula, e  $\Omega_{m0} = 0.23$  ( $\tau = 1/3, z_t \simeq 0.88$ ). Para SNeIa nós consideramos um levantamento como o SNAP (Supernova Acceleration Probe), supondo que o intercept é conhecido. Para dados de  $S_k/D_v$ , nós consideramos que as incertezas serão reduzidas para 2/3 dos valores atuais sem, no entanto, haver alteração no coeficiente de correlação. Na figura, nós mostramos contornos de 68% e 95% de confiança. Está claro que controle de sistemática deve ser a preocupação principal num futuro próximo.

Finalmente, nós analisamos o caso mais geral com  $q_f$  arbitrário, ainda mantendo  $q_i = 1/2$ . Usando (7.3) podemos determinar o valor atual do parâmetro de desaceleração  $q_0$  em termos de  $z_t, \tau$  e  $q_f$ . Apesar dos dados considerados não fornecerem um limite inferior para  $q_f$ , eles podem restringir  $q_0$ . De fato, nós encontramos

$-1.4 \lesssim q_0 \lesssim -0.3$ . Na figura 7.2, painel direito, nós mostramos a superfície de 95% de confiança no espaço  $(z_t, \tau, q_0)$ , para o caso  $q_f \in (-\infty, 0)$ , obtida usando a análise combinada  $SNLS + S_k/D_v$ .

Nós mostramos na figura 7.3 o que devemos esperar de futuros levantamentos combinando observações de SNeIa e  $S_k/D_v$ , no caso mais geral de  $q_f \in (-\infty, 0)$ . Nós consideramos as mesmas hipóteses, usadas no caso  $q_f = -1$ , para simular os dados de  $S_k/D_v$ . No painel esquerdo da figura 7.3, nós mostramos o resultado para a combinação SNAP +  $S_k/D_v$ , que é uma generalização do resultado mostrado na figura 7.2 (painel esquerdo, contornos pretos contínuos). No painel direito da figura 7.3, nós mostramos os vínculos esperados para uma futura amostra de SNeIa do DES (“Dark Energy Survey”), de acordo com estimativas preliminares da colaboração [103], supondo que os desvios para o vermelho de todas as SNeIa serão obtidos via fotometria. Naturalmente, a estratégia de observação do DES ainda é objeto de estudo da colaboração e estamos trabalhando junto aos grupos de trabalho de SNeIa e BAO do DES para colaborar com a definição da estratégia mais adequada aos interesses do projeto.

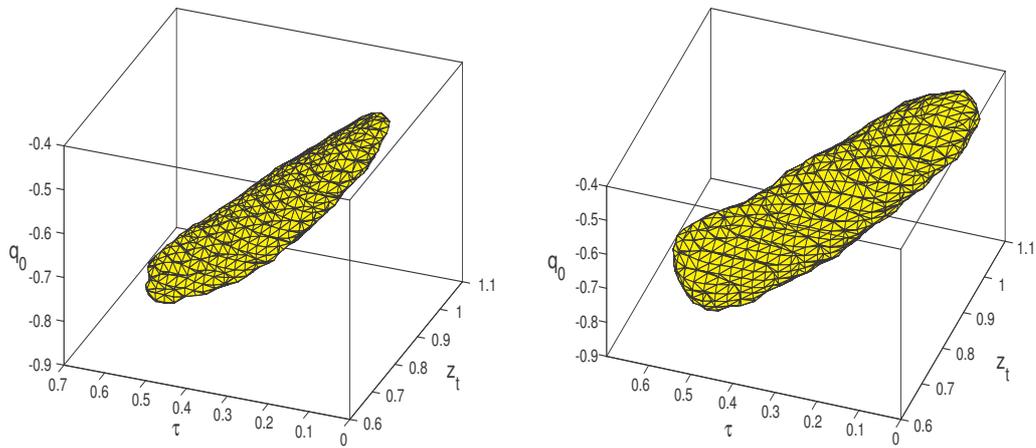


Figura 7.3: Vínculos sobre nossa parametrização de  $q$  conforme simulações de dados futuros de  $S_k/D_v$  combinados SNeIa, de acordo com as especificações do SNAP (à esquerda) e com estudos preliminares para o DES (à direita).

# Capítulo 8

## Conclusão

Sabemos que para explicar os dados observacionais atuais, em particular, a evidência de aceleração da expansão cósmica e a estrutura em grande escala do universo, é necessário introduzir, no contexto da relatividade geral, dois componentes exóticos: a matéria escura e a energia escura. Uma vez que, até o momento, a natureza desses componentes permanece desconhecida, investigamos a hipótese de sejam diferentes aspectos de uma mesma substância, percebidos em diferentes escalas. A tal substância, que deve se comportar como matéria não-relativística sem pressão, inicialmente, e como um fluido com pressão negativa em tempos posteriores, damos o nome de quartessência.

Neste trabalho obtivemos vínculos sobre modelos de quartessência a partir de diversos dados observacionais, tais como supernovas tipo Ia, fração de bárions em aglomerados de galáxias, espectro de potência da matéria e flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo, além de examinar o comportamento destes modelos no regime não linear, por meio da assimetria da distribuição de densidade. Nosso objetivo era determinar se seria possível obter um modelo distinto de  $\Lambda$ CDM compatível com todos os dados observacionais considerados.

Nós mostramos que quando consideramos testes dependentes apenas da métrica

de fundo, homogênea e isotrópica, como supernovas tipo Ia e fração de bárions em aglomerados de galáxias, modelos distintos de  $\Lambda$ CDM podem ser compatíveis com os dados observacionais. A situação, no entanto, é diferente quando consideramos testes que envolvem perturbações em torno da métrica de fundo, como espectro de potência da matéria ou flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo.

Propor parametrizações para o setor escuro do universo é um procedimento que exige a particularização dos modelos, dificultando a transposição das conclusões obtidas para um âmbito mais geral. Com o intuito de contornar esta limitação propusemos uma parametrização de  $q$  e consideramos testes dependentes apenas da evolução do parâmetro de Hubble (SNeIa e  $S_k/D_v$ ), de forma a obter conclusões independentes de teoria de gravitação ou de especificação dos constituintes do universo. Nós mostramos que nossa parametrização pode reproduzir uma série de modelos como  $\Lambda$ CDM, MPC e DGP. Com isso, obtivemos que os dados atuais de SNeIa, isoladamente, excluem uma transição futura com alta nível de confiança mas não são capazes de estabelecer um limite superior para  $z_t$ . A combinação SNeIa +  $S_k/D_v$ , no entanto, é capaz de impor fortes vínculos sobre  $z_t$  e  $\tau$ . Nós encontramos, no caso  $q_f = -1$ , para  $S_k/D_v + Gold182$  (com 68.3% de confiança),  $z_t = 0.84 \pm_{0.08}^{0.06}$  e  $\tau = 0.51 \pm_{0.10}^{0.09}$ , enquanto que para  $S_k/D_v + SNLS$  nós temos  $z_t = 0.88 \pm_{0.05}^{0.06}$  e  $\tau = 0.35 \pm_{0.04}^{0.07}$ , mostrando uma tensão entre as duas amostras de SNeIa consideradas. Nós analisamos também o caso geral  $q_f < 0$  e obtivemos que, para  $S_k/D_v + SNLS$ , o valor atual do parâmetro de desaceleração está restrito a  $-1.4 \lesssim q_0 \lesssim -0.3$ .

Através de simulações, nós pudemos concluir que medidas mais precisas, com rigoroso controle de sistemática, poderão aumentar consideravelmente a precisão na determinação dos parâmetros de nossa parametrização, bem como de modelos de energia escura em geral, e a próxima geração de experimentos de SNeIa (Dark Energy Survey, SNAP), RCF (satélite Planck) e estrutura em grande escala (Dark Energy Survey) nos permitirão um grande avanço nesta direção.

Nosso objetivo para o futuro imediato é contribuir para a colaboração “Dark Energy Survey” (DES) [103], a qual o Brasil se juntou oficialmente, em Janeiro de 2007. Nosso intuito é continuar a contribuir para a definição de estratégia para o DES-SN e participar da obtenção e análise dos dados do levantamento, especialmente os dados de SNeIa e BAO, que poderão nos dar informações valiosas sobre a natureza do agente responsável pela aceleração cósmica.



# Apêndice A

## Expansão harmônica

Neste apêndice seguiremos o trabalho e a notação de Kodama & Sasaki [30]. Quantidades escalares podem ser expandidas por um conjunto completo de funções harmônicas  $Y(\mathbf{x})$  satisfazendo à equação

$$(\Delta_{LB} + k^2)Y = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde  $-k^2$  representa um auto-valor do operador de Laplace-Beltrami  $\Delta_{LB} \equiv \gamma^{ij} {}^s\nabla_i {}^s\nabla_j$ . O autovalor  $k^2$  toma valores contínuos maiores ou iguais a  $(n-2)^2 |K|$  para  $K \leq 0$  e  $l(l+n+1)K$ , ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) para  $K > 0$ . Aqui omite-se os índices para distinguir diferentes auto-funções, pois a forma explícita das funções não é usada no desenvolvimento da teoria e não há acoplamento entre modos. Componentes escalares de vetores são expandidos por

$$Y_i \equiv -k^{-1}Y_{|i}, \text{ onde } |i = {}^s\nabla_i, \quad (\text{A.2})$$

enquanto que componentes escalares de tensores são expandidos por

$$Y_{ij} \equiv k^{-2}(Y_{|ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta_{LB}Y) = (k^{-2}Y_{|ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}Y) \quad (\text{A.3})$$

e por  $\gamma_{ij}Y$ , onde  $\gamma_{ij}$  é a métrica do espaço de curvatura constante, com assinatura  $(+, +, +)$ .

Da mesma maneira, vetores sem divergência são expandidos por um conjunto completo de funções harmônicas  $Y_i^{(1)}$  especificadas por

$$(\Delta_{LB} + k^2)Y_i^{(1)} = 0; \quad (\text{A.4})$$

$$Y^{(1)i}{}_{|i} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Componentes vetoriais de tensores são expandidos por  $Y_{ij}^{(1)}$ , definido por

$$Y_{ij}^{(1)} \equiv -(2k)^{-1}(Y_{i|j}^{(1)} + Y_{j|i}^{(1)}). \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, componentes tensoriais, sem divergência e sem traço de tensores simétricos de segunda ordem, são expandidos por um conjunto completo de funções harmônicas  $Y_{ij}^{(2)}$ , especificadas por

$$(\Delta_{LB} + k^2)Y_{ij}^{(2)} = 0; \quad (\text{A.7})$$

$$Y_i^{(2)i} = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$Y_{ij}^{(2)|j} = 0. \quad (\text{A.9})$$

As funções harmônicas escalares  $Y$  obedecem às seguintes propriedades:

$$Y_i^{|i} = kY, \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta_{LB}Y_j = -[k^2 - (n-1)K]Y_j, \quad (\text{A.11})$$

$$Y_{i|j} = -k \left( Y_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}Y \right), \quad (\text{A.12})$$

$$Y_i^i = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$Y_{ij}^{|j} = \frac{2}{3}k^{-1}(k^2 - 3K)Y_i, \quad (\text{A.14})$$

$$Y_{im}^{|m}{}_{|j} = \frac{2}{3}(3K - k^2) \left( Y_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}Y \right), \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta_{LB}Y_{ij} = -(k^2 - 6K)Y_{ij}, \quad (\text{A.16})$$

$$Y_{ij|m} - Y_{im|j} = \frac{k}{3} \left( 1 - \frac{3K}{k^2} \right) (\gamma_{im}Y_j - \gamma_{ij}Y_m). \quad (\text{A.17})$$

Para uma descrição das propriedades das funções  $Y_i^{(1)}$  e  $Y_{ij}^{(2)}$ , veja [30].



# Apêndice B

## Funções de Correlação e Espectro de Potência da Matéria

Consideremos um campo escalar cósmico, cujas propriedades estatísticas queremos descrever. Neste trabalho, utilizamos o campo de densidade,  $\delta(\mathbf{x})$ , mas poderíamos considerar outros como o potencial gravitacional, velocidade e a convergência local de lentes gravitacionais. Vamos supor que o campo é estatisticamente homogêneo e isotrópico, ou seja, todas as suas funções distribuição de probabilidade multiponto,  $p(\delta_1, \delta_2, \dots)$ , ou seus momentos, médias dos produtos da densidade local no “ensemble”, são invariantes sob translações e rotações de coordenadas. Neste apêndice usaremos a convenção de que quantidades em negrito são vetores.

A função de correlação de dois pontos é definida como a média, no “ensemble”, do contraste de densidade em duas posições diferentes,

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (\text{B.1})$$

que depende apenas da norma de  $\mathbf{r}$  devido a homogeneidade e isotropia estatísticas. É útil escrever o contraste de densidade,  $\delta(\mathbf{x})$ , em termos de seus componentes de

Fourier

$$\delta(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k} \delta(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (\text{B.2})$$

O campo de densidade é, então, completamente determinado pelas propriedades estatísticas da variável aleatória  $\delta(\mathbf{k})$ . Podemos calcular a correlação no espaço de Fourier

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \exp[i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}], \quad (\text{B.3})$$

que pode ser re-escrita como

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle = \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \xi(r) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \equiv \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}')P(k), \quad (\text{B.4})$$

onde  $P(k)$  é, por definição, o espectro de potência da matéria. A relação entre a função de correlação de dois pontos e o espectro de potência da matéria é dada, portanto, por

$$\xi(r) = \int d^3\mathbf{k} P(k) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (\text{B.5})$$

O teorema de Wick estabelece que, se o campo aleatório de interesse for Gaussiano, então qualquer média no “ensemble” de produtos desse campo pode ser escrita em termos do produto de médias no “ensemble” de pares. Para os modos de Fourier teremos

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1)\dots\delta(\mathbf{k}_{2p+1}) \rangle = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1)\dots\delta(\mathbf{k}_{2p}) \rangle = \sum_{\text{todos os pares}} \prod_{\text{p pares } (i,j)} \langle \delta(\mathbf{k}_i)\delta(\mathbf{k}_j) \rangle. \quad (\text{B.7})$$

Neste caso, todas as propriedades estatísticas do campo de densidade estariam determinadas pelo espectro de potência, ou pela função de correlação de dois pontos.

Em geral, pode-se definir funções de correlação de ordem superior. Elas são

definidas como a parte conexa da média conjunta, no “ensemble”, da densidade em um número arbitrário de posições. Podemos escrevê-las como

$$\xi_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \langle \delta(\mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}_N) \rangle_c \quad (\text{B.8})$$

$$\equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}_N) \rangle - \sum_{\mathcal{J} \in \mathcal{P}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)} \prod_{s_i \in \mathcal{J}} \xi_{\#s_i}(\mathbf{x}_{s_i(1)}, \dots, \mathbf{x}_{s_i(\#s_i)}), \quad (\text{B.9})$$

onde a soma é feita sobre as partições próprias (qualquer partição, exceto o próprio conjunto) de  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  e  $s_i$  é um subconjunto de  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  contido na partição  $\mathcal{J}$ . Quando a média de  $\delta(\mathbf{x})$  é zero, apenas as partições que não contém “singletos” contribuem. A parte conexa se anula quando a separação entre dois ou mais pontos é infinita e é útil porque cada correlação conexa fornece uma informação independente.

Estas definições podem ser estendidas ao espaço de Fourier. Homogeneidade nos permite escrever

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \dots \delta(\mathbf{k}_N) \rangle_c = \delta_D(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_N) P_N(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N). \quad (\text{B.10})$$

No caso  $N = 3$ , a função  $P_N(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N)$  é conhecida como bi-espectro e é usualmente denotada por  $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ .

As funções de correlação estão diretamente relacionadas à função distribuição de probabilidade, e podem ser definidas a partir dela. Assim, dada uma distribuição, a probabilidade de se encontrar duas partículas em dois elementos de volume  $dV_1$  e  $dV_2$ , separados por uma distância  $x_{12} \equiv |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  é dada por

$$dP_{12} = n^2 [1 + \xi(x_{12})] dV_1 dV_2, \quad (\text{B.11})$$

onde  $n$  é a densidade média. Se não houver aglomeração,  $\xi = 0$  e a probabilidade é dada apenas pelo quadrado da densidade média, independente da distância. A

probabilidade condicional de haver uma partícula em  $dV_2$ , dado que há uma em  $dV_1$  é

$$dP(2|1) = n[1 + \xi(x_{12})]dV_2. \quad (\text{B.12})$$

Se há aglomeração ( $\xi(x_{12}) > 0$ ), então a probabilidade condicional é maior, por outro lado, se os objetos estão anti-correlacionados ( $\xi(x_{12}) < 0$ ), então a probabilidade é menor.

Analogamente, para três objetos temos

$$dP_{123} = n^3[1 + \xi(x_{12}) + \xi(x_{23}) + \xi(x_{31}) + \xi_3(x_{12}, x_{23}, x_{31})]dV_1dV_2dV_3, \quad (\text{B.13})$$

onde  $\xi_3$  denota a função de correlação (conexa) de três pontos. Se o campo de densidade for Gaussiano,  $\xi_3 = 0$  e as probabilidades são dadas apenas pela função de dois pontos  $\xi(r)$ .

Um caso particular da Eq. (B.9) é quando todos os pontos são o mesmo. Por homogeneidade estatística,  $\xi_p(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x})$  é independente de  $\mathbf{x}$  e se reduz a cumulantes da distribuição,  $\langle \delta^p \rangle_c$ . Pela Eq. (B.9) podemos determinar como as cumulantes se relacionam com os momentos  $\langle \delta^p \rangle$ . Os primeiros termos são dados por

$$\begin{aligned} \langle \delta \rangle_c &= \langle \delta \rangle, \\ \langle \delta^2 \rangle_c &= \sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle - \langle \delta \rangle_c^2 \\ \langle \delta^3 \rangle_c &= \langle \delta^3 \rangle - 3\langle \delta^2 \rangle_c \langle \delta \rangle_c - \langle \delta \rangle_c^3, \\ \langle \delta^4 \rangle_c &= \langle \delta^4 \rangle - 4\langle \delta^3 \rangle_c \langle \delta \rangle_c - 3\langle \delta^2 \rangle_c^2 - 6\langle \delta^2 \rangle_c \langle \delta \rangle_c^2 - \langle \delta \rangle_c^4. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

A primeira quantidade não trivial de interesse, que podemos definir a partir dos

momentos da distribuição é a assimetria

$$S_3 \equiv \frac{\langle \delta^3 \rangle}{\langle \delta^2 \rangle^2}. \quad (\text{B.15})$$

A assimetria nos fornece uma medida do desvio da distribuição em relação a uma Gaussiana. Isto significa que a probabilidade de se encontrar grandes valores de  $\delta$ , comparada com uma Gaussiana, é maior.

Um efeito importante, que é introduzido pela observação, é a suavização. A distribuição de densidade é usualmente suavizada com um filtro  $W_R$  de tamanho  $R$  dado. Isto é requerido devido a natureza discreta dos catálogos de galáxias e das simulações de N-corpos. As quantidades de interesse, então, são os momentos  $\langle \delta_R^p \rangle$  e as cumulantes  $\langle \delta_R^p \rangle_c$  do campo de densidade suavizado [58]

$$\delta_R(\mathbf{x}) = \int W_R(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (\text{B.16})$$



# Apêndice C

## Equações de Boltzmann

A radiação cósmica de fundo (RCF) é uma evidência de que o universo passou por uma fase mais densa e quente e dá suporte a hipótese do “Big-Bang” (apesar de não haver necessidade de uma singularidade inicial para explicar sua existência, como nos chamados modelos “bouncing”). Além disso, a RCF nos mostra que, na época em que foi emitida, o universo era homogêneo e isotrópico com precisão de  $10^{-5}$  K. Para entender o mecanismo de formação desta radiação precisamos entender como evoluíram as anisotropias na distribuição de fótons e inhomogeneidades na matéria. O problema, no entanto, é complicado pela interação entre os diversos componentes. Os fótons são afetados pela gravidade e pelo espalhamento Compton por elétrons livres. Os elétrons estão acoplados aos prótons e ambos à gravidade. A métrica, que determina o potencial gravitacional, é influenciada por todos estes componentes mais os neutrinos e a matéria e a energia escuras. Portanto, para obter a distribuição de matéria e radiação é preciso evoluir todos esses componentes.

Estamos interessados em quantidades como a densidade de energia e de número e a pressão. Todas essas grandezas são momentos (integrais) da função de distribuição, que dá o número de partículas no sistema com posição entre  $x$  e  $x + dx$  e momento entre  $p$  e  $p + dp$ . A evolução da função de distribuição é dada pela equação de

Boltzmann [33],

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (\text{C.1})$$

onde o funcional  $C[f]$  inclui todos os possíveis termos de colisão que, em geral, dependem das funções de distribuição de vários componentes. Na ausência de interações temos  $df/dt = 0$ .

Estamos interessados na temperatura da RCF e para isso basta estudarmos perturbações escalares; pode-se provar que em teoria linear de perturbação os modos escalar, vetorial e tensorial se desacoplam e podem ser tratados individualmente [30]. Com isso, vamos escrever a métrica perturbada como

$$\begin{aligned} g_{00}(\vec{x}, t) &= -1 - 2\Psi(\vec{x}, t), \\ g_{0i}(\vec{x}, t) &= 0, \\ g_{ij}(\vec{x}, t) &= a^2\delta_{ij}[1 + 2\Phi(\vec{x}, t)], \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde  $\Psi$  e  $\Phi$  correspondem ao potencial Newtoniano e à perturbação na curvatura espacial. Estas quantidades são invariantes de calibre, como vimos anteriormente. O calibre nas equações (C.2) é chamado Newtoniano conforme.

Podemos escrever o lado esquerdo da eq. (C.1), para os fótons, como

$$\frac{df}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right], \quad (\text{C.3})$$

onde  $\Theta \equiv \delta T/T$ ,  $p$  e  $\hat{p}^i$  são o módulo e a direção do momento do fóton e  $f^0 \equiv [\exp(p/T) - 1]^{-1}$  é a distribuição não perturbada, que é a distribuição de Bose-Einstein com potencial químico nulo. O termo de colisão para os fótons inclui o espalhamento Compton. Na escala de energia da última superfície de espalhamento ( $T \sim 1$  eV) o fenômeno dominante é o espalhamento Thomson (Compton não-

relativístico). Com isso, podemos escrever o termo de colisão como

$$C[f(\vec{p})] = \frac{1}{p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \\ \times \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}' - \vec{q}') \delta[E(p) + E_e(q) - E(p') - E_e(q')] \\ \times \{f_e(\vec{q}')f(\vec{p}') - f_e(\vec{q})f(\vec{p})\}, \quad (\text{C.4})$$

onde  $\mathcal{M}$  é a amplitude de espalhamento. Para o espalhamento Compton temos

$$|\mathcal{M}|^2 = 6\pi\sigma_T m_e^2 [1 + (\hat{p} \cdot \hat{p}')^2]. \quad (\text{C.5})$$

Introduzindo as quantidades

$$\Theta_0 \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{p}'), \quad (\text{C.6})$$

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a, \quad (\text{C.7})$$

que são respectivamente o monopolo da distribuição e a profundidade ótica, e  $\eta = \int dt/a$  é o tempo conforme, podemos escrever a equação de Boltzmann para fótons como

$$\dot{\Theta} + ik\mu\Theta = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau} \left[ \Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu)\Theta_2 \right], \quad (\text{C.8})$$

válida no espaço de Fourier, com  $k$  o número de onda,  $\mu \equiv \vec{k} \cdot \hat{p}/k$ ,  $\mathcal{P}_l$  polinômios de Legendre,  $v_b$  a perturbação de velocidade dos bárions e

$$\Theta_l \equiv \frac{1}{(-i)^l} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu)\Theta(\mu). \quad (\text{C.9})$$

O ponto denota derivada em relação ao tempo conforme.

Para bárions e matéria escura as variáveis de interesse são a densidade de número

e a velocidade, dadas por

$$n = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \quad (\text{C.10})$$

$$v^i = \frac{1}{n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \frac{p\hat{p}^i}{E}. \quad (\text{C.11})$$

Tomando o momento zero e o primeiro momento da equação de Boltzmann (multiplicando por  $d^3p/(2\pi)^3$  ou por  $d^3p(p/E)\hat{p}^j/(2\pi)^3$  e integrando em todo o espaço de momentos) e introduzindo o contraste de densidade  $\delta$  como

$$n = n^0[1 + \delta(\vec{x}, t)], \quad (\text{C.12})$$

obtemos para a matéria escura, supondo que ela não interage,

$$\dot{\delta} + ikv + 3\dot{\Phi} = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v + ik\Psi = 0. \quad (\text{C.14})$$

Para os bárions precisamos incluir termos de colisão elétron-próton e elétron-fóton. No entanto, estes termos integrados em todo o espaço dão contribuição nula. Com isso, temos a mesma equação para bárions,

$$\dot{\delta}_b + ikv_b + 3\dot{\Phi} = 0; \quad (\text{C.15})$$

já para a velocidade o primeiro momento do termo de colisão não é nulo e resulta em

$$\dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_b + ik\Psi = \frac{\dot{\tau}}{R}[v_b + 3i\Theta_1], \quad (\text{C.16})$$

onde  $R \equiv 3\rho_b^{(0)}/[4\rho_\gamma^{(0)}]$  é a razão bárion-fóton.

Neutrinos, por serem relativísticos, se comportam como radiação sem, no entanto, se acoplarem com os outros componentes. Podemos então escrever a equação

para o contraste de temperatura  $\mathcal{N} \equiv \delta T_\nu / T_\nu$  como

$$\dot{\mathcal{N}} + ik\mu\mathcal{N} = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi. \quad (\text{C.17})$$

Usando as mesmas perturbações nas equações de Einstein obtemos

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = 4\pi Ga^2[\rho_{dm}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0], \quad (\text{C.18})$$

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi Ga^2[\rho_\gamma\Theta_2 + \rho_\nu\mathcal{N}_2]. \quad (\text{C.19})$$

Existem vários códigos disponíveis para evoluir o sistema de equações (C.13)-(C.19) e (C.8) para obter a distribuição atual de temperatura da RCF [34, 35, 36].

Observações da RCF são feitas sobre a esfera celeste e, portanto, é conveniente expressar o contraste de temperatura em termos dos seus coeficientes em uma expansão em harmônicos esféricos

$$\Theta(\vec{x}, \hat{r}, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\vec{x}, \eta) Y_{lm}(\hat{r}), \quad (\text{C.20})$$

onde

$$a_{lm}(\vec{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{r}) \Theta(\vec{k}, \hat{r}, \eta). \quad (\text{C.21})$$

Nós não podemos fazer previsões sobre um particular  $a_{lm}$ , apenas sobre sua distribuição. O valor médio dos  $a_{lm}$ 's é zero, mas eles têm variância não nula:

$$\langle a_{lm} \rangle = 0 \quad ; \quad \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (\text{C.22})$$

Para um dado  $l$ , cada  $a_{lm}$  tem a mesma variância, o que implica em uma incerteza fundamental na determinação dos  $C_l$ , essa incerteza, chamada variância cósmica, é

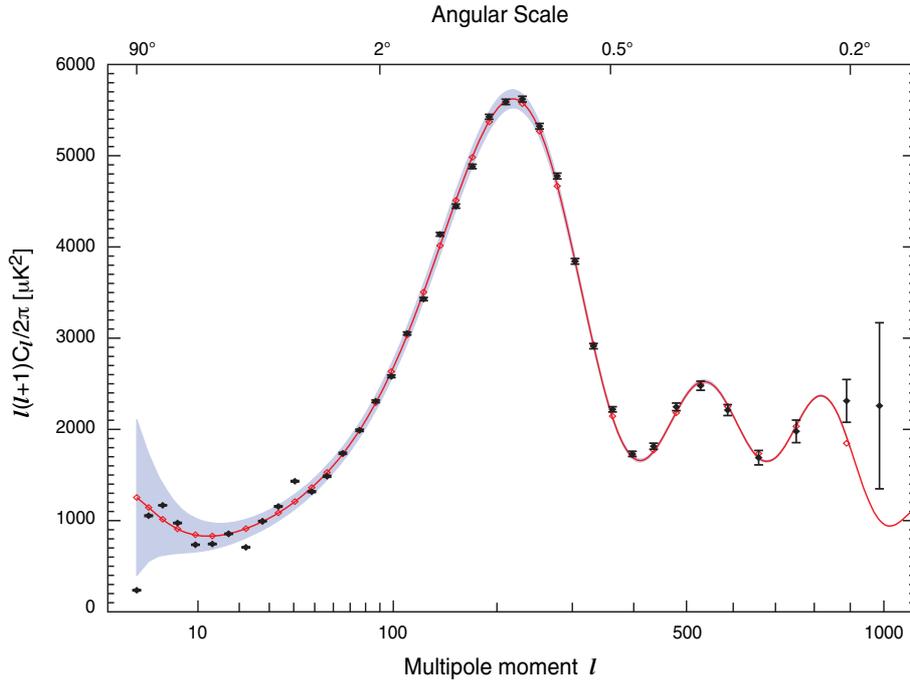


Figura C.1: Espectro da RCF após 3 anos de observações da sonda WMAP [37]. A área sombreada representa a variância cósmica. Figura tirada de [37].

dada por

$$\left(\frac{\Delta C_l}{C_l}\right)_{vc} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}. \quad (\text{C.23})$$

Pode-se mostrar que a variância dos  $a_{lm}$ 's é a soma das variâncias dos  $\Theta_l$ 's para todos os números de onda, ou seja

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 |\Theta_l(k)|^2. \quad (\text{C.24})$$

A figura C.1 mostra os dados mais recentes para o espectro da RCF e a estimativa da variância cósmica. Na figura C.2 temos os vínculos sobre  $\Lambda$ CDM usando os dados da RCF somente, ou combinados com outras observações. O melhor ajuste para RCF é dado por  $(\Omega_m h^2, \Omega_b h^2, h) = (0.127^{+0.007}_{-0.013}, 0.0223^{+0.0007}_{-0.0009}, 0.73 \pm 0.03)$ , resultado que está em acordo com a previsão da nucleossíntese primordial, indicando a existência de matéria escura não bariônica.

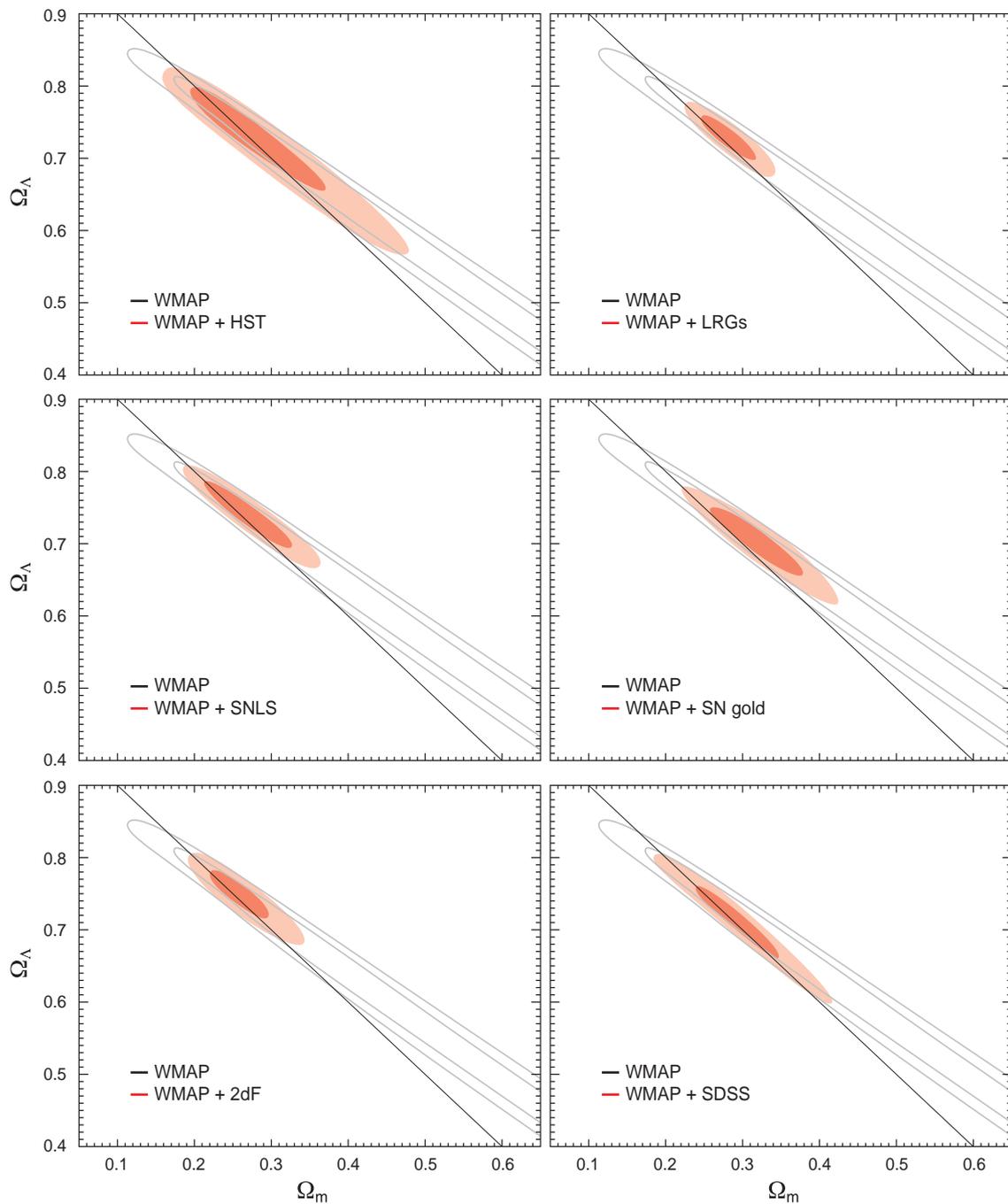


Figura C.2: Vínculos sobre o modelo  $\Lambda$ CDM usando dados do WMAP3, combinados com dados da “amostra de ouro” de Riess *et al.*, do Supernova Legacy Survey (SNLS), do Hubble Space Telescope (HST) key project, do Sloan Digital Sky Survey (SDSS) e do Two Degree Field Galaxy Redshift Survey (2dFGRS). Figura tirada de [38].

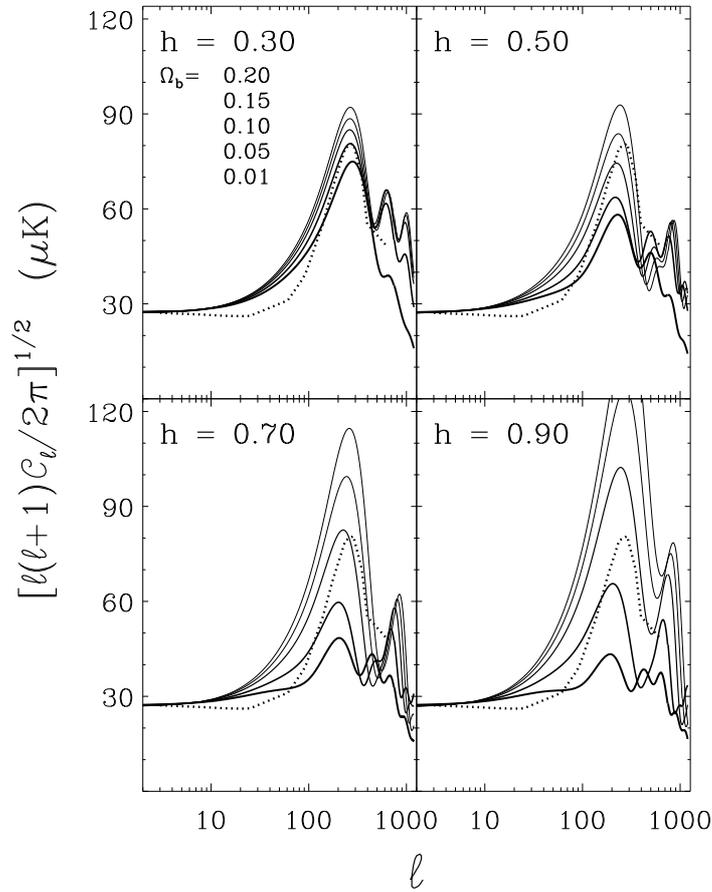


Figura C.3: Mudanças em cada parâmetro cosmológico afetam o espectro da RCF de maneira diferente. Figura tirada de [39].

A C.3 ilustra a influência dos parâmetros cosmológicos sobre o espectro da RCF. Mudanças na densidade de bárions  $\Omega_b h^2$  afetam a posição e a altura dos picos. Quando  $\Omega_b h^2$  aumenta os picos ímpares aumentam, enquanto os pares diminuem. Este tipo de mudança é virtualmente único, o que torna relativamente fácil extrair  $\Omega_b h^2$  dos dados. A constante cosmológica, ou qualquer forma homogênea de energia escura, é importante somente para tempos recentes, deslocando o espectro para escalas angulares maiores ( $l$  menor). Se densidade total de matéria  $\Omega_m h^2$  for menor o espectro é deslocado para escalas angulares menores ( $l$  maior).

# Referências Bibliográficas

- [1] Para revisão veja K. Griest, M. Kamionkowski, Phys. Rep. **333**, 167-182 (2000); M. S. Turner, Phys. Rep. **197**, 67 (1990); G. G. Raffelt, Phys. Rep. **198**, 1 (1990).
- [2] C. Wetterich, Nuclear Physics **B302**, 668 (1988); B. Ratra e P. J. E. Peebles, Phys. Rev. **D37**, 3406 (1988); J. A. Frieman, C.T. Hill, A. Stebbins e I. Waga, Phys. Rev. Lett. **75**, 2077 (1995); P. Ferreira e M. Joyce, Phys. Rev. Lett. **79**, 4740 (1997); R. R. Caldwell, R. Dave e P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998); para revisão veja V. Sahni, e A. A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. **D 9**, 373 (2000); S. M. Carroll, Living Review in Relativity **4**, 1 (2001); e P. J. E. Peebles, e B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [3] M. Makler, S. Q. Oliveira, e I. Waga, Phys. Lett. B **555**, 1 (2003).
- [4] A. Kamenshchik, U. Moschella e V. Pasquier, Phys. Lett. **B511**, 265 (2001).
- [5] M. Makler, *Dinâmica Gravitacional de Formação de Estruturas no Universo*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (2001).
- [6] N. Bilić, G. B. Tupper e R. D. Viollier, Phys. Lett. **B535**, 17 (2002).
- [7] J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves e P.E. Souza, Gen. Rel. Grav. **34**, 53 (2002).
- [8] M. C. Bento, O. Bertolami, e A. A. Sen, Phys. Rev. **D66**, 043507 (2002).

- [9] M. Makler, S. Q. Oliveira, e I. Waga, Phys. Rev. D **68**, 123521 (2003).
- [10] A. Dev, D. Jain e J. S. Alcaniz, Astron. Astrophys. **417**, 847 (2004).
- [11] R. Colistete Jr. e J. C. Fabris, Class. Quant. Grav. **22**, 2813 (2005).
- [12] M. C. Bento, O. Bertolami, N. M. C. Santos, A. A. Sen, Phys. Rev. D **71**, 063501 (2005).
- [13] L. Amendola, F. Finelli, C. Burigana, and D. Carturan, JCAP **07**, 005 (2003).  
D. Carturan, F. Finelli, Phys.Rev. D **68**, 103501 (2003).
- [14] R. Bean and O. Dore, Phys.Rev. D **68**, 023515 (2003).
- [15] L. M. G. Beça, P. P. Avelino, J. P. M. de Carvalho, e C. J. A. P. Martins, Phys. Rev. D **67**, 101301(R) (2003).
- [16] H. Sandvik, M. Tegmark, M. Zaldarriaga e I. Waga, Phys. Rev. D **69**, 123524 (2004).
- [17] L. Amendola, I. Waga e F. Finelli, JCAP **0511**, 009 (2005).
- [18] R. R. R. Reis, I. Waga, M. O. Calvão, e S. E. Jorás, Phys. Rev. D **68**, 061302(R) (2003).
- [19] W. Hu, Astrophys.J. **506**, 485 (1998).
- [20] R. R. R. Reis, M. Makler e I. Waga, Class. Quant. Grav. **22**, 353 (2005).
- [21] R. R. R. Reis, M. Makler, e I. Waga, Phys. Rev. D **69**, 101301(R) (2004).
- [22] Percival, W.J. *et al.*, arXiv:0705.3323v1.
- [23] J. Weller, “Physical Cosmology Part III - Mathematical Tripos Course”,  
<http://zuserver2.star.ucl.ac.uk/~jweller/Teaching/phycos.html>

- [24] L. A. Anchordoqui, “Lectures on Astronomy, Astrophysics and Cosmology”, astro-ph/0706.1988.
- [25] J. García-Bellido, Notas do curso ministrado no “European School of High-Energy Physics” em Sant Feliu de Guixols, Barcelona, Espanha, de 30 Maio a 12 Junho de 2004, astro-ph/0502139.
- [26] S. W. Allen *et al.*, astro-ph/0706.0033.
- [27] J. C. Mather *et al.*, *Astrophys. J.* **512**, 511 (1999).
- [28] J. M. Bardeen, *Phys. Rev.* **D22**, 1882 (1980).
- [29] G. F. R. Ellis e M. Bruni, *Phys. Rev. D* **40**, 1804 (1989).
- [30] H. Kodama e M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984).
- [31] T. Hamazaki e H. Kodama, *Prog. Theor. Phys.* **96**, 1123 (1996).
- [32] K. A. Malik, *Cosmological perturbations in an inflationary universe*, Tese de Doutorado, University of Portsmouth (2001) - astro-ph/0101563.
- [33] S. Dodelson, “Modern Cosmology”, Academic Press (2002).
- [34] U. Seljak e M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **469**, 437 (1996).
- [35] A. Lewis, A. Challinor e A. Lasenby, *Astrophys. J.* **538**, 473 (2000).
- [36] Michael Doran, *JCAP* **10**, 011 (2005).
- [37] G. Hinshaw *et al.* [colaboração WMAP], *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 135 (2003).
- [38] Spergel, D.N. *et al.*, *ApJS* **170**, 335 (2007).
- [39] C. H. Lineweaver, A. Blanchard e J. G. Bartlett, astro-ph/9610133.

- [40] J. A. S. Lima, V. Zanchin, e R. Brandemberger, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **291**, L1 (1997).
- [41] S. R. Cranmer, *Am. J. Phys.* **72**, 1397 (2004), e referências nele indicadas.
- [42] J. C. Fabris, S. V. B. Gonalves, R. de S Ribeiro, *Gen. Rel. Grav.* **36**, 211 (2004).
- [43] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser e A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).
- [44] N. Sugiyama, *Astrophys. J. Supp.* **100**, 281 (1995).
- [45] M. Tegmark, *et al.* (the SDSS collaboration), *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004);  
M. Tegmark, *et al.* (the SDSS collaboration), *Astrophys. J.* **606**, 702 (2004).
- [46] M. Tegmark, A. J. S. Hamilton, e Y. Xu, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **335**, 887 (2002).
- [47] R. R. R. Reis, *Phys. Rev. D* **67**, 087301 (2003), Erratum-ibid. *D* **68**, 089901 (2003).
- [48] F. Bernardeau, *Astrophys. J.* **392**, 1 (1992).
- [49] F. Bernardeau, *Astrophys. J.* **433**, 1 (1994).
- [50] P. Fosalba e E. Gaztañaga, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **301**, 503 (1998).
- [51] P.J.E. Peebles, *The Large Structure of the Universe*, Princeton University Press, Princeton, (1980).
- [52] J. Fry, *Astrophys. J.* **279**, 499 (1984).
- [53] E. Gaztañaga e J.A. Lobo, *Astrophys. J.* **548**, 47 (2001).
- [54] K. Benabed e F. Bernardeau, *Phys. Rev. D* **64**, 083501 (2001).

- [55] T. Multamäki, E. Gaztañaga, e M. Manera, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **344**, 761 (2003).
- [56] T. Multamäki, M. Manera, e E. Gaztañaga, *Phys. Rev. D* **69**, 023004 (2004).
- [57] E. Gaztañaga e J. A. Frieman, *Astrophys. J.* **437**, L13 (1994); F. Hoyle, I. Szapudi e C. M. Baugh, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **317**, L51 (2000); I. Szapudi, M. Postman, T. R. Lauer e W. Oegerle, *Astrophys. J.* **548**, 114 (2001); I. Szapudi *et al.*, *Astrophys. J.* **570**, 75 (2002);
- [58] Para detalhes da teoria veja F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztañaga e R. Scoccimarro, *Phys. Rep.* **367**, 1 (2002).
- [59] F. Bernardeau, L. van Waerbeke e Y. Mellier, *Astron. Astrophys.* **322**, 1 (1997).
- [60] F. Bernardeau, Y. Mellier e L. van Waerbeke, *Astron. Astrophys.* **389**, L28 (2002); U.-L. Pen *et al.*, *Astrophys. J.* **592**, 664 (2003).
- [61] L. Amendola, M. Makler, R. R. R. Reis, e I. Waga *Phys. Rev. D* **74**, 063524 (2006).
- [62] R. J. Scherrer, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 011301 (2004); L. P. Chimento, M. Forte, e R. Lazkoz, [astro-ph/0407288](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407288) ; veja também R. Mainini and S. A. Bonometto, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 121301 (2004) para uma abordagem diferente.
- [63] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [64] S. W. Allen *et al.*, *Monthly Notices of the Royal Astron. Society* **353**, 457 (2004).
- [65] L. Verde *et al.* [colaboração WMAP], *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 195 (2003).
- [66] R.A.C. Croft *et al.*, *Astrophys. J.* **520**, 1 (1999); N.Y. Gnedin e A.J.S. Hamilton, *Monthly Notices of the Royal Astron. Society* **334**, 107 (2002).

- [67] E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **90**, 091301 (2003).
- [68] M. Chevallier e D. Polarski, Int. J. Mod. Phys. D **10** , 213 (2001).
- [69] B. F. Gerke e G. Efstathiou, Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. **335**, 33 (2002).
- [70] U. Seljak *et al.*, Phys. Rev. D **71**, 103515 (2005).
- [71] U. Alam *et al.*, Monthly Notices of the Royal Astron. Soc. **344**, 1057 (2003).
- [72] P. S. Corasaniti *et al.*, Phys. Rev. D **70**, 083006 (2004).
- [73] K. N. Ananda e M. Bruni, Phys. Rev. D **74**, 023523 (2006).
- [74] H. Stefancic, Phys. Rev. D **71**, 124036 (2005).
- [75] J. Weller e A. Albrecht, Phys. Rev. D **65** , 103512 (2002).
- [76] T. Roy Choudhury e T. Padmanabhan, Astron. Astrophys. **429** , 807 (2005).
- [77] Y. Gong, Int. J. Mod. Phys. D **14** , 599 (2005); ,Class. Quant. Grav. **22** , 2121 (2005).
- [78] T. Nakamura e T. Chiba, Mon. Not. Roy. Ast. Soc. **306** , 696 (1999).
- [79] V. Sahni, T. D. Saini, A. A. Starobinsky e U. Alam, JETP Lett. **77** , 201 (2003).
- [80] U. Alam, V. Sahni e A. A. Starobinsky, JCAP **0406** , 008 (2004).
- [81] A. V. Toribio, R. R. R. Reis e I. Waga, em preparação.
- [82] P. Astier *et al.*, Astron. & Astrophys. **447**, 31 (2006).
- [83] D. Eisenstein *et al.*, Astrophys. J. **633**, 560 (2005).

- [84] Y. Wang e P. Mukherjee, *Astrophys. J.* **650**, 1 (2006).
- [85] Ø. Elgarøy e T. Multamäki, *astro-ph/0702343*.
- [86] B. A. Bassett *et al.*, *Monthly Notices of the Royal Astron. Soc.* **336**, 1217 (2002).
- [87] E. V. Linder e D. Huterer, *Phys. Rev. D* **72**, 043509 (2005).
- [88] E. E. O. Ishida *et al.*, *astro-ph/0706.0546*, submetido a publicação.
- [89] B. A. Bassett, M. Kunz, J. Silk e C. Ungarelli, *MNRAS* **336**, 1217 (2002).
- [90] B. A. Bassett, M. Kunz, D. Parkinson e C. Ungarelli, *Phys. Rev. D* **68**, 043504 (2003); P. S. Corasaniti e E. J. Copeland, *Phys. Rev. D* **67**, 063521 (2002); P. S. Corasaniti, B. A. Bassett, C. Ungarelli e E. J. Copeland, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 091303 (2003); S. Hannestad e E. Mortsell, *JCAP* 0409, 001 (2004).
- [91] B. A. Bassett, P. S. Corasaniti e M. Kunz, *Astrophys. J.* **617**, L1 (2004).
- [92] M. S. Turner e A. G. Riess, *Astrophys.J.* **569**, 18 (2002); A. G. Riess *et al.*, *Astrophys.J.* **607**, 665 (2004); C. Shapiro e M. S. Turner, *Astrophys. J.* **649**, 563 (2006); Ø. Elgarøy e T. Multamäki, *JCAP* **0609**, 002 (2006); Y. Gong e A. Wang, *Phys. Rev. D*, **75**, 043520 (2007); D. Rapetti, S. W. Allen, M. A. Amin e R. G. Blandford, *MNRAS* **375**, 1510 (2007); L. Xu, C. Zhang, B. Chang e H. Liu, *astro-ph/0701519*.
- [93] P. Gondolo e K. Freese, *Phys. Rev. D* **68**, 063509 (2003); Y. Wang, K. Freese, P. Gondolo e M. Lewis, *Astrophys.J.* **594**, 25 (2003).
- [94] L. Amendola, *Phys.Rev. D* **62**, 043511 (2000); W. Zimdahl e D. Pavon, *astro-ph/0606555*.

- [95] A. Kamenshchik, U. Moschella e V. Pasquier, Phys. Lett. B **511**, 265 (2001); N. Bilic, G. B. Tupper e R. D. Viollier, Phys. Lett. B **535**, 17 (2002); M. C. Bento, O. Bertolami e A. A. Sen, Phys. Rev. D **66**, 043507 (2002); M. Makler, S. Q. de Oliveira e I. Waga, Phys. Lett. B **555**, 1 (2003).
- [96] T. M. Dvali, G. Gabadadze, e M. Porrati, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000).
- [97] J. R. Bond, G. Efstathiou, e M. Tegmark, MNRAS **291**, L33 (1997); G. Efstathiou e J. R. Bond, MNRAS **304**, 75 (1999); Y. Wang e P. Mukherjee, Astrophys. J. **650**, 1 (2006); S. Nesseris e L. Perivolaropoulos, JCAP **0701**, 018 (2007).
- [98] Analisaremos este caso com mais detalhe em E. E. O. Ishida *et al.*, em preparação.
- [99] A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **659**, 98 (2007).
- [100] W. L. Freedman *et al.*, Astrophys. J. **553**, 47 (2001).
- [101] S. Nesseris e L. Perivolaropoulos, JCAP **0702**, 025 (2007); U. Alam, V. Sahni e A. A. Starobinsky, JCAP **0702**, 011 (2007). Veja também: H. K. Jassal, J. S. Bagla e T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **72**, 103503 (2005); S. Nesseris e L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. D **72**, 123519 (2005).
- [102] R. Colistete Jr., BayEsian Tools for Observational Cosmology using SNe Ia (BETOCS), available on the Internet site <http://www.RobertoColistete.net/BETOCS>, (2006).
- [103] The Dark Energy Survey Collaboration, astro-ph/0510346.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)