



UFRJ

# Confinamento, Dualidade e Violação da Simetria de Lorentz

**Marcelo Santos Guimarães**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

**Orientador: Clóvis José Wotzasek**

Rio de Janeiro

Março de 2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

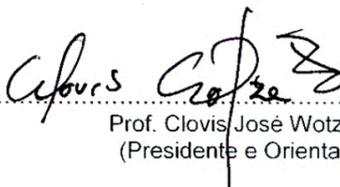
# CONFINAMENTO, DUALIDADE E VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

MARCELO SANTOS GUIMARÃES

CLOVIS JOSE WOTZASEK

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

Aprovada por:



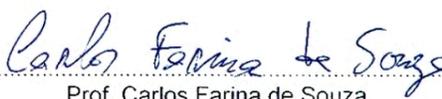
Prof. Clovis José Wotzasek  
(Presidente e Orientador)



Prof. Marcelo Otavio Caminha Gomes



Prof. Jorge Felipe Gamboa Rios



Prof. Carlos Farina de Souza



Prof. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Joras

Guimarães, Marcelo Santos  
G963 Confinamento, Dualidade e Violação da Simetria de Lorentz /  
Marcelo Santos Guimarães - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2009.  
xi, 189f.: il.; 31 cm.  
Orientador: Clóvis José Wotzasek  
Tese (doutorado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de  
Pós-graduação em Física, 2009.  
Referências Bibliográficas: f. 174-189.  
1. Confinamento. 2. Dualidade. 3. Violação da Simetria de Lorentz. 4. Eletrodinâmica Topologicamente Massiva. 3. Defeitos Topológicos. 4. Prescrição de Julia-Toulouse. 5. Mecanismo de Higgs. 6. Modelo Padrão Estendido I. Wotzasek, Clóvis José. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física. III. Confinamento, Dualidade e Violação da Simetria de Lorentz.

# Resumo

## Confinamento, Dualidade e Violação da Simetria de Lorentz

Marcelo Santos Guimarães

Orientador: Clóvis José Wotzasek

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

*Nesta tese o fenômeno do confinamento de cargas é abordado em diversos contextos. Um critério universal para a identificação deste fenômeno é sugerido: a quebra da simetria de brana. Esta simetria tem sua encarnação mais comum na ambiguidade da definição da corda de Dirac na teoria eletromagnética na presença de monopolos. A quebra da simetria de brana significa que a corda se torna observável no regime confinante. O estabelecimento deste regime é alcançado pela condensação de defeitos topológicos. A teoria efetiva do regime confinante pode ser encontrada através da prescrição de Julia-Toulouse que, introduzida originalmente como o mecanismo dual ao mecanismo de Higgs, é generalizado na tese para descrever condensados mais gerais que podem violar simetrias espaço-temporais ( $P$  e  $T$  em  $(2+1)D$  e Lorentz e  $CPT$  em  $(3+1)D$ ).*

*O conceito de dualidade é estudado detalhadamente e se mostra uma ferramenta fundamental nesta análise proporcionando um mapeamento entre cargas e defeitos, representados matematicamente pelo conceito de  $p$ -correntes ( $p$ -formas diferenciais cujas componentes são distribuições). Construimos um formalismo para a descrição do processo de condensação induzido pela presença de defeitos no sistema que generaliza a prescrição de Julia-Toulouse. Esta generalização, em conjunto com a dualidade, nos permite construir uma formulação consistente, fornecendo uma clara interpretação física para a teoria de calibre topologicamente massiva definida em  $(2+1)D$  na presença*

*de instantons magnéticos.*

*A extensão destes resultados para  $(3 + 1)D$  possibilita obter importantes conclusões sobre a teoria de Carroll-Field-Jackiw. Essa teoria viola as simetrias de Lorentz e CPT e pode ser vista como uma generalização para  $(3 + 1)D$  da teoria topologicamente massiva de Maxwell-Chern-Simons. O formalismo que desenvolvemos para descrever a condensação de defeitos nos permite discutir a questão da presença de cargas magnéticas neste sistema. Mostraremos que esta teoria exhibe propriedades confinantes. Explorando ainda a conexão com o modelo de Maxwell-Chern-Simons, discutimos a questão controversa sobre a indução do termo tipo Chern-Simons devido a flutuações quânticas fermiônicas que violam as simetrias de Lorentz e CPT. Argumentamos que a massa fermiônica em  $(2 + 1)D$  é resultado da redução dimensional de um termo fermiônico em  $(3 + 1)D$  que viola as simetrias de Lorentz e CPT, a herança desta violação é a quebra de  $P$  e  $T$  no plano. Esta observação conduz à determinação sem ambiguidades do termo tipo Chern-Simons como resultado de flutuações fermiônicas não massivas em  $(3 + 1)D$ .*

**Palavras-chave:** Confinamento, Dualidade, Violação da Simetria de Lorentz, Eletrodinâmica Topologicamente Massiva, Defeitos Topológicos, Prescrição de Julia-Toulouse, Mecanismo de Higgs, Modelo Padrão Estendido.

Rio de Janeiro

Março de 2009

# Abstract

## Confinement, Duality and Lorentz Symmetry Violation

Marcelo Santos Guimarães

Orientador: Clóvis José Wotzasek

Abstract da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Física).

*In this thesis the phenomenon of charge confinement is approached on various contexts. An universal criterium for the identification of this phenomenon is suggested: brane symmetry breaking. This symmetry has its most common incarnation in the Dirac string ambiguity in the electromagnetic theory in presence of monopoles. Brane symmetry breaking means that the string becomes an observable on the confinement regime. The establishment of this regime can be reached through the condensation of topological defects. The effective theory of the confinement regime can be obtained with the Julia-Toulouse prescription which, originally introduced as the dual mechanism to the Higgs mechanism, is generalized in this thesis to describe more general condensates which may break space-time symmetries ( $P$  and  $T$  in  $(2 + 1)D$  and Lorentz and  $CPT$  in  $(3 + 1)D$ ).*

*The concept of duality is studied thoroughly and it shows a fundamental tool in this analysis, providing a mapping between charges and defects, mathematically represented by the concept of  $p$ -currents (differential  $p$ -forms whose components are distributions). We construct a formalism for the description of the condensation process, induced by the presence of defects in the system, which generalizes the Julia-Toulouse prescription. This generalization, along with duality, allows us to construct a consistent formulation providing a clear physical interpretation for the topologically massive gauge theory defined in  $(2 + 1)D$  at the presence of magnetic instantons.*

*The extension of these results to  $(3+1)D$  leads to important conclusions concerning the Carroll-Field-Jackiw theory. This theory violates the symmetries of Lorentz and CPT and can be seen as a generalization to  $(3+1)D$  of the topologically massive theory of Maxwell-Chern-Simons. The formalism developed to tackle the problem of defects condensation allows us to discuss the problem of the presence of magnetic monopoles in this system. We show that this theory exhibits confining properties. Exploring further the connection with the Maxwell-Chern-Simons model, we discuss the controversial problem of the induction of the Chern-Simons like term due to the fermionic fluctuations that violate the symmetries of Lorentz and CPT. We argue that the fermionic mass in  $(2+1)D$  is the result of the dimensional reduction of a Lorentz and CPT breaking fermionic term in  $(3+1)D$ , the inheritance of this violation is the  $P$  and  $T$  symmetry breaking in the plane. This observation leads to the determination without ambiguities of the Chern-Simons like term due to massless fermionic fluctuations in  $(3+1)D$ .*

**Keywords:** Confinement, Duality, Lorentz Symmetry Violation, Topologically Massive Electrodynamics, Topological Defects, Julia-Toulouse Prescription, Higgs Mechanism, Standard Model Extension.

Rio de Janeiro

Março de 2009

# Agradecimentos

Agradeço especialmente ao Prof. Clóvis Wotzasek, meu orientador nesta tese, por compartilhar comigo sua sabedoria e amizade; por ter me dado grande liberdade e incentivo no desenvolvimento de minhas idéias mas sempre me mantendo no rumo; e também por ter criado um ambiente de pesquisa perfeito, onde discutimos física com enorme entusiasmo, explorando e sempre questionando todos os detalhes de nossos resultados.

Agradeço ainda aos outros membros do grupo, meus amigos Leonardo Grigório e Rômulo Rougemont, que participaram ativamente dessas discussões que formam toda a base das idéias apresentadas nesta tese. Leonardo é co-autor dos artigos que fundamentam a tese e me ajudou opinando durante o processo de redação.

Um agradecimento especial à Malena por todo o apoio durante diversos momentos do doutorado. Agradeço muito também ao meu amigo Davi por me ajudar em várias ocasiões, especialmente quando fui ao Chile. Agradeço também aos meus outros amigos que tiveram alguma influência nesta tese e durante o meu doutorado.

Agradeço principalmente à minha mãe, por tudo. Esta tese é dedicada à ela.

Agradeço à FAPERJ por me financiar através do programa Bolsa Nota 10 durante os últimos 2 anos do doutorado e ao CNPq pela bolsa nos primeiros 2 anos.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Principais resultados . . . . .	5
1.3	Outros resultados . . . . .	12
1.4	Organização . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Dualidade</b>	<b>15</b>
2.1	Introdução . . . . .	15
2.2	Eletromagnetismo no vácuo . . . . .	15
2.3	Eletromagnetismo na presença de fontes . . . . .	20
2.3.1	$p$ -correntes . . . . .	22
2.3.2	Quantização da carga e simetria de brana . . . . .	24
2.3.3	Dualidade . . . . .	27
2.4	Sistemas planares . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Modelos confinantes e defeitos</b>	<b>39</b>
3.1	Introdução . . . . .	39
3.2	O modelo de Ginzburg-Landau . . . . .	40
3.2.1	O potencial confinante . . . . .	47
3.2.2	Fluxos e correntes . . . . .	57
3.3	A prescrição de Julia-Toulouse . . . . .	60
3.4	Defeitos em sistemas planares . . . . .	70
3.4.1	O modelo de Polyakov . . . . .	70

3.4.2	Defeitos e o termo de Chern-Simons . . . . .	79
3.4.2.1	Processos radiativos como um fenômeno de condensação . . . . .	79
3.4.2.2	Julia-Toulouse e o efeito Hall quântico fracionário . . . . .	85
3.4.2.3	Confinamento de instantons . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Violação da invariância de Lorentz</b>	<b>97</b>
4.1	Introdução . . . . .	97
4.2	Deformação da estrutura canônica . . . . .	99
4.2.1	Deformação $P$ - $T$ da teoria de Maxwell . . . . .	101
4.2.2	A teoria Auto-Dual como a deformação da teoria escalar . . . . .	104
4.3	Deformação induzida e dualidade IV/UV em (1+1)D . . . . .	106
4.3.1	O mecanismo de Goldstone-Wilczek . . . . .	107
4.3.2	Decomposição quirial . . . . .	110
4.3.3	Estrutura simplética . . . . .	111
4.3.4	A formulação dual . . . . .	112
4.3.5	Conexão UV/IV . . . . .	115
4.4	O modelo de Carroll-Field-Jackiw . . . . .	118
4.4.1	Possíveis origens . . . . .	120
4.4.2	Relações de dispersão . . . . .	127
4.4.3	A teoria dual . . . . .	129
4.4.4	CFJ na presença de defeitos . . . . .	136
4.4.4.1	CFJ via Julia-Toulouse . . . . .	137
4.4.4.2	Na presença de monopolos . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>146</b>
<b>A</b>	<b>Formas diferenciais: definições e notação</b>	<b>148</b>
A.1	O tensor de Levi-Civita . . . . .	148
A.2	$p$ -formas . . . . .	151

B	Projeção abeliana	159
C	Cálculo da corrente induzida	164
D	O Método de Faddeev-Jackiw	167
E	Cálculo da CFJ dual para $p$ qualquer ( $p^2 \neq 0$ )	169
F	Cálculo da CFJ dual na presença de fontes elétricas	171

# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo deste capítulo introdutório é fornecer uma visão geral dos tópicos que vamos discutir ao longo da tese enfatizando os principais resultados.

### 1.1 Motivação

Uma etapa fundamental na construção de uma teoria quântica de campos é a identificação dos graus de liberdade adequados. Esses serão as pequenas excitações em torno do vácuo da teoria. Essas excitações são denominadas “partículas”. Essa interpretação no entanto só é de fato possível quando o sistema está em um regime descrito por uma teoria fracamente interagente. Ou seja, quando as contribuições dos termos não-lineares de interação puderem ser ignoradas numa primeira aproximação de forma que seja possível definir uma teoria livre na qual identificamos as partículas. As interações são então inseridas como uma perturbação do sistema livre dando origem ao que chamamos de expansão perturbativa. Por outro lado, se a teoria é fortemente acoplada a própria definição do que se qualifica como grau de liberdade adequado se torna obscura. Dizemos que temos um problema não-perturbativo. Não existe uma forma sistemática para estudar um sistema no regime não-perturbativo.

O mais notório problema não-perturbativo é o fenômeno do confinamento de quarks e gluons. Esses são definidos como as excitações fundamentais da cromodinâmica quântica ( $QCD$ ) no regime de altas energias ( $\gg \Lambda_{QCD} \sim 200 \text{ MeV}$ ). Nesse regime

quarks e gluons são os graus de liberdade adequados, pois a teoria que os descreve é fracamente acoplada devido à liberdade assintótica. No regime de baixas energias a  $QCD$  é fortemente acoplada e quarks e gluons não fazem parte do espectro da teoria; eles não aparecem como estados assintóticos e dizemos que estão confinados. Esse fenômeno ocorre para qualquer excitação carregada com respeito a cor. É importante observar que a  $QCD$  prevê o confinamento. A análise perturbativa da teoria não faz sentido em baixas energias, porém cálculos numéricos com as equações da  $QCD$  na rede são capazes de reproduzir o espectro esperado de hadrons e mesons em extraordinário acordo com os dados experimentais. No entanto sabemos muito pouco sobre a dinâmica responsável pelo estabelecimento da fase confinante e principalmente sobre quais são os graus de liberdade relevantes na fase próxima a transição.

Existem diversas estratégias para o estudo da estrutura não-perturbativa da  $QCD$  (veja [1] para uma revisão). Talvez a abordagem mais direta seja formular o sistema em um espaço discretizado (a rede), onde naturalmente se define um corte ultra-violeta (distâncias entre os pontos da rede) e um corte infra-vermelho (tamanho da rede). Essa formulação torna finito o número de graus de liberdade e permite o tratamento computacional das equações (para uma discussão sobre  $QCD$  na rede veja por exemplo [2]). As informações obtidas nessa abordagem ajudam a desenhar o quadro físico da  $QCD$  em baixas energias. A definição de férmions na rede envolve algumas complicações relacionadas à manutenção da simetria quiral, mas confinamento é essencialmente uma propriedade da ação de Yang-Mills e portanto esse fenômeno está presente mesmo na ausência de quarks. Portanto, se o propósito é entender as propriedades confinantes da  $QCD$ , trabalhar apenas com a teoria de Yang-Mills é uma excelente estratégia. Esse é um caminho seguido não apenas na formulação na rede. O estudo de propagadores da teoria de Yang-Mills nesse contexto confirmam que suas excitações fundamentais (ghosts e gluons) não são graus de liberdade adequados no infra-vermelho (o propagador dos gluons parece violar condições de positividade e os ghosts se comportam como partículas livres desacoplando-se do espectro). Cabe observar aqui ainda que a rede constitui um espaço Euclidiano e portanto é especialmente importante no estudo

da  $QCD$  à temperatura finita em equilíbrio. Para fenômenos dinâmicos, extensões analíticas dos resultados se tornam necessárias e isso envolve informações externas que podem influenciar os resultados.

Uma outra abordagem direta é o estudo analítico das equações de Dyson-Schwinger (veja por exemplo [3]). Essas são um conjunto infinito de equações para as funções de correlação da teoria. A vantagem dessa formulação é que existe contato direto com as equações da  $QCD$  no ultra-violeta uma vez que não existe um corte. O cálculo no entanto envolve naturalmente um processo de truncagem, uma vez que são infinitas equações, e a forma como se faz isso influencia diretamente os resultados. Existem outros exemplos de cálculos diretos com as equações da  $QCD$  e essas abordagens podem de fato fornecer informações precisas sobre diversos aspectos não perturbativos da teoria, no entanto envolvem cálculos pesados que muitas vezes obscurecem o entendimento dos mecanismos físicos envolvidos.

Uma outra estratégia que se concentra exatamente no conteúdo físico da teoria é o estudo de teorias efetivas. Essas teorias visam capturar a essência do fenômeno que se quer estudar. Os principais guias para a construção dessas teorias são as simetrias do sistema e suas realizações nos diferentes regimes e escalas de interesse. Por exemplo, um outro fenômeno não-perturbativo muito importante é a quebra da simetria quiral devido à condensação de pares quark-anti-quark. O modelo de Nambu-Jona-Lasinio e suas extensões (veja [4] para uma revisão) são excelentes ferramentas para o estudo desse fenômeno. Esse modelo no entanto não contém confinamento.

No que diz respeito ao fenômeno do confinamento, uma teoria efetiva muito estudada na literatura e que será discutida nesta tese é o modelo do supercondutor dual (uma revisão pode ser encontrada em [75]). Esse modelo é construído na suposição que o vácuo da  $QCD$  no regime de baixas energias se comporta como um supercondutor de correntes cromo-magnéticas. Consequentemente cargas de cor imersas nesse meio dão origem a tubos de fluxo cromo-elétricos (“efeito Meissner dual”). Esses tubos conectam cargas opostas produzindo uma interação cuja energia é proporcional à distância entre as cargas. Esse caráter da interação é uma assinatura do confinamento como eviden-

ciado por cálculos na rede. O supercondutor é um modelo abeliano e portanto sua conexão com a teoria não-abeliana da  $QCD$  precisa ser justificada. A hipótese é que o confinamento é um fenômeno de natureza abeliana; uma propriedade denominada dominância abeliana. Essa hipótese vem sendo confirmada por simulações na rede que indicam ainda a importância dos graus de liberdade magnéticos para a estrutura do vácuo da  $QCD$  em baixas energias. Voltaremos a essas questões e as discutiremos com mais detalhes no Cap. 3.

Aqui queremos chamar a atenção para dois aspectos centrais do modelo do supercondutor dual que figurarão como temas desta tese. O primeiro é a dualidade. Esse modelo é fundamentado na dualidade eletromagnética que discutiremos no Cap. 2. Dualidade, em sua definição mais básica, significa que existem duas representações matemáticas equivalentes de um mesmo sistema físico. “Equivalentes” significa que todos os observáveis de uma teoria podem ser mapeados em observáveis da teoria dual. O sistema mais simples que admite tal construção é o eletromagnetismo no vácuo, onde o mapa simplesmente consiste em renomear o campo elétrico por campo magnético e vice-versa. Esse é de fato um caso especial em que as duas formulações são idênticas e o sistema é auto dual. A dualidade sobrevive na presença de cargas elétricas e magnéticas se essas também participarem do mapa. Uma propriedade extremamente importante surge ao impor que o sistema seja consistente quanticamente: a carga elétrica é quantizada em múltiplos do inverso da carga magnética [25, 26]. Isso sugere que em uma formulação por campos quânticos, um regime de acoplamento forte de natureza elétrica será mapeado por dualidade em uma formulação magnética com acoplamento fraco. As cargas elétricas e magnéticas se manifestam de formas distintas em um determinado regime da teoria. No regime de acoplamento elétrico fraco, as cargas elétricas são as excitações de um campo quântico e constituem graus de liberdade adequados enquanto as cargas magnéticas se manifestam em estruturas não perturbativas, como as soluções clássicas de equações de campo. O conhecimento sobre a análise quântica destes objetos é muito limitado. O modelo do supercondutor dual é formulado no regime de acoplamento magnético fraco e descreve excitações (cromo-)magnéticas que eventualmente

condensam pelo mecanismo de Higgs. As cargas (cromo-)elétricas serão estruturas não perturbativas que imersas nesse condensado resultam estar confinadas. Estas estruturas são percebidas como defeitos pelo campo eletromagnético dual.

Essas observações nos levam ao segundo aspecto central desse modelo: a descrição de cargas e defeitos. Queremos ter maior controle sobre o papel desempenhado pelas diferentes configurações de cargas elétricas e magnéticas no sistema. Uma estratégia muito produtiva é olhar para a resposta do campo eletromagnético à presença desses objetos. Podemos considerar as razões dinâmicas para o estabelecimento de uma determinada configuração como uma informação externa. O caráter elétrico ou magnético se manifesta na forma como esses objetos se acoplam aos campos da teoria. Uma carga elétrica se acopla minimamente ao campo eletromagnético definindo a holonomia desse campo ao longo de sua trajetória. Por outro lado, uma carga magnética induz singularidades no campo cuja manifestação característica é a existência de fluxos não triviais no sistema como consequência da violação da identidade de Bianchi. Matematicamente essas estruturas são incorporadas no sistema por meio de  $p$ -correntes como discutiremos na seção 2.3.1. Essa abordagem permite o desenvolvimento de um formalismo capaz de descrever as consequências do processo de condensação de cargas e defeitos no sistema. Uma versão desse formalismo foi desenvolvida por Julia e Toulouse [92] e mais tarde aplicada a teorias de  $p$ -formas gerais por Quevedo e Trugenberger [93], que formularam uma descrição dual do mecanismo de Higgs. A generalização deste formalismo será o principal resultado desta tese. Vamos discutir este e outros resultados a seguir.

## 1.2 Principais resultados

O resultado central desta tese é a generalização do formalismo de Julia-Toulouse e sua interpretação precisa como um gerador de teorias efetivas. Esta formulação será desenvolvida ao longo do Cap. 3. A idéia original de Julia e Toulouse consiste em uma prescrição para determinar a teoria que descreve a fase do sistema na qual defeitos estão condensados quando conhecemos apenas o modelo na fase antes da condensação. A

prescrição identifica os novos graus de liberdade do sistema representando as excitações de baixa energia do condensado. A prescrição não aborda as razões responsáveis pela transição para o estado condensado, considerado um problema independente. O objetivo é a formulação de uma descrição do sistema que capture o caráter dos novos graus de liberdade na fase condensada.

A generalização que é desenvolvida aqui segue estes mesmos princípios mas incorpora dois novos ingredientes fundamentais:

### **Simetria de Brana**

A *simetria de brana* (veja definição na seção 2.3.2) tem sua encarnação mais comum na ambiguidade da definição da corda de Dirac na teoria eletromagnética na presença de monopolos. Como foi enfatizado por Kleiner [31, 32], é muito importante distinguir esta simetria da simetria de calibre usual. Isto significa na prática que esta é uma outra ambiguidade (além da simetria de calibre) que pode existir nas variáveis que definem a teoria. Ainda mais importante é notar que sendo também uma simetria local, a simetria de brana não pode ser quebrada [86] por processos físicos mas pode ser realizada de forma escondida, exatamente como ocorre com a simetria de calibre no fenômeno de quebra espontânea. Veremos que uma das assinaturas do fenômeno do confinamento é a *quebra espontânea da simetria de brana* que surge como consequência da prescrição de Julia Toulouse generalizada. Esta é uma interpretação alternativa e original deste fenômeno induzida pelo formalismo que desenvolvemos aqui. A chave para a generalização da prescrição de Julia-Toulouse está no uso desta simetria de brana como guia na construção da teoria efetiva, observando suas diferentes realizações no processo de condensação. Estes conceitos aparecerão naturalmente ao estudarmos o confinamento de monopolos em um supercondutor (veja a seção 3.2.1).

### **Conexão fluxo-corrente**

Será fundamental a formulação do sistema em termos de ensembles de defeitos e correntes (ambos representados por  $p$ -correntes) através de uma função partição.

Isto nos permitirá ter maior controle sobre o processo de condensação, interpretando as  $p$ -correntes como variáveis tipo ordem-desordem parametrizando a condensação. Uma relação ordem-desordem se manifesta através do uso da identidade de Poisson para  $p$ -correntes (veja a definição (2.29)). Esta construção é baseada nos trabalhos de Kleinert [32] que a aplicou em alguns casos especiais. Aqui, esta relação é interpretada fisicamente como a familiar relação entre fluxos magnéticos (caracterizando os defeitos) e correntes elétricas (veja a seção 3.2.2 para a discussão desta importante relação fluxo-corrente). Com isso somos capazes de formular sistemas físicos em dois quadros relacionados pelo mapa ordem-desordem (fluxo-corrente). A prescrição de Julia-Toulouse então pode ter sua interpretação natural: a condensação de defeitos (representados por  $p$ -correntes acopladas de forma não-mínima) corresponde a redefinir a soma sobre o ensemble como uma integral funcional sobre a  $p$ -forma que descreverá os novos graus de liberdade do sistema. Por outro lado, usando o mapa ordem-desordem, as  $p$ -correntes são mapeadas em  $q$ -correntes ( $q = D - p$  por (2.29), onde  $D$  é a dimensão do espaço-tempo). A condensação dos defeitos originais se manifesta neste quadro como a diluição das  $q$ -correntes com a soma sobre este novo ensemble se desacoplando. Esta interpretação da prescrição de Julia-Toulouse como a diluição da variável dual (no sentido-ordem desordem) é um novo resultado que apresentamos nesta tese. Discutiremos esta formulação na seção 3.3.

Note que a prescrição parece ter grande arbitrariedade e fica claro que não é possível determinar as razões que levaram à condensação como já mencionamos. No entanto com o auxílio das simetrias do condensado e atentando para a realização da simetria de brana, este procedimento nos fornece resultados altamente não-triviais e de caráter universal sobre as propriedades físicas de diversos sistemas. De fato, uma consequência natural da prescrição de Julia-Toulouse é o fenômeno que denominamos *pulo de posto* associado a geração de massa no sistema. A prescrição estabelece que o campo que descreve os novos graus de liberdade adequados para a fase condensada tenha um posto

maior que o do campo antes da fase condensada. Isso ocorre devido a um mecanismo no qual o defeito “absorve” o campo de calibre no processo de condensação. Fenômeno semelhante ocorre no mecanismo de Higgs onde é o campo de calibre quem absorve o campo de Goldstone, porém não há pulo de posto neste caso. Este fenômeno de pulo de posto é uma assinatura da prescrição de Julia-Toulouse quando existe geração de massa no sistema e constitui uma informação extremamente importante a respeito da natureza dos novos graus de liberdade. Operando na presença de cargas elétricas e magnéticas, este fenômeno tem como consequência a quebra espontânea da simetria de brana que, como já comentamos, está relacionada ao confinamento

Assim como a prescrição de Julia-Toulouse original, a generalização que apresentamos deve ser vista como um gerador de teorias e se insere no contexto geral do estudo de teorias efetivas [5, 6, 7, 8, 9]. Esta interpretação é enfatizada na formulação que desenvolvemos. A construção da teoria no regime condensado envolve uma expansão derivativa dos novos campos que descrevem o condensado. A estrutura dos termos desta expansão é ditada pela simetria do sistema neste estado.

Esta construção torna mais precisa e generaliza a prescrição de Julia-Toulouse ampliando as idéias de Quevedo e Trugener e unificando-as com os conceitos introduzidos por Kleinert. Essa construção constitui um resultado original desta tese que será discutido detalhadamente ao longo do Cap. 3. Acreditamos que este resultado seja de enorme importância e com muitas potenciais aplicações. Para fundamentar este novo formalismo e estabelecer sua relevância, vamos estudar alguns exemplos conhecidos reinterpretando-os nesta nova formulação e apresentaremos também alguns novos resultados referentes à definição de termos topológicos na presença de defeitos magnéticos. Segue uma visão geral dos resultados que apresentaremos:

- Como já mencionamos, o modelo do supercondutor será discutido na tese enfatizando seu papel como teoria confinante (veja a seção 3.2). Nosso principal objetivo ao discutir este modelo é identificar com precisão o fenômeno de quebra espontânea da simetria de brana que vai ser a assinatura universal de uma fase

confinante. Este conceito irá aparecer durante a discussão do potencial confinante na seção 3.2.1.

- Um exemplo clássico de teoria confinante é o modelo da  $QED$  compacta em  $3D$  proposto por Polyakov [76, 77, 78]. Vamos reinterpretar toda a dedução de Polyakov no contexto da prescrição de Julia-Toulouse. Veremos que este sistema exhibe o fenômeno de pulo de posto e também a quebra espontânea da simetria de brana resultando no confinamento. A análise deste sistema dentro do formalismo de Julia-Toulouse nos conduz naturalmente a uma interpretação precisa de um resultado mais recente obtido pelo próprio Polyakov [95]. Este tópico é estudado na seção 3.4.1.
- Outro exemplo muito importante que vamos estudar na seção 3.4.2.2 é a construção dos modelos efetivos que descrevem a estrutura hierárquica de estados do efeito Hall quântico fracionário. A geração destes estados pode ser vista como um processo de “condensação em cadeia”, onde defeitos presentes em um condensado geram o novo estado por um processo de condensação. O novo condensado também pode possuir defeitos que eventualmente condensam e assim por diante. Isso gera toda a hierarquia de estados do efeito Hall quântico fracionário. Esta construção, apresentada originalmente por Wen [46], pode ser naturalmente interpretada dentro do formalismo de Julia-Toulouse generalizado. Neste caso não ocorre a quebra da simetria de brana e não há confinamento.
- A representação efetiva de sistemas em termos de condensados é fundamental para a aplicação do formalismo de Julia-Toulouse. Muitos sistemas admitem esta interpretação. Mostramos em [96] que o modelo topologicamente massivo de Maxwell-Chern-Simons em  $(2 + 1)D$  [54] pode ser interpretado como um condensado elétrico que quebra as simetrias de paridade  $P$  e inversão temporal  $T$ . Esta representação nos leva a solução do problema da formulação deste sistema na presença de defeitos magnéticos (instantons) [79], um assunto bastante controverso na literatura [100, 101, 102, 103]. Observe que este modelo corresponde

a *QED* compacta acrescida de um termo de Chern-Simons. O resultado que é normalmente apresentado é que o termo de Chern-Simons destrói o confinamento de cargas elétricas que encontramos no modelo de Polyakov. Na formulação de Julia-Toulouse nós vamos mostrar que este é um resultado óbvio dada a interpretação de condensado. A teoria de Maxwell-Chern-Simons é uma teoria efetiva para um condensado elétrico e portanto os instantons (que são defeitos magnéticos neste meio) estão confinados. O confinamento elétrico obviamente não faz sentido neste quadro. Esta clara visão física é uma grande vantagem do formalismo de Julia-Toulouse. Estes resultados e outras consequências do formalismo para este sistema são discutidos em [3.4.2.3](#).

- Este resultado nos permite ainda abordar outro problema. A presença de monopolos magnéticos no modelo de Carroll-Field-Jackiw [[120](#)] (o modelo é definido pela ação ([4.68](#))). Este é um problema que até agora permanecia sem solução. O modelo de Carroll-Field-Jackiw viola as simetrias de Lorentz e *CPT* e é definido em  $(3 + 1)D$ . Este modelo pode ser considerado como uma extensão dimensional da teoria de Maxwell-Chern-Simons para  $(3 + 1)D$ . O modelo é um caso especial de um cenário mais completo no qual se estuda efeitos fenomenológicos no modelo padrão decorrentes de possíveis violações das simetrias de Lorentz e *CPT*. O modelo padrão é uma teoria efetiva construída sobre certas hipóteses dentre as quais a validade dessas simetrias. Colladay e Kostelecky [[110](#), [111](#)] propuseram acrescentar termos ao modelo padrão envolvendo tensores constantes contraídos com os campos usuais do modelo padrão estabelecendo assim o que denominaram modelo padrão estendido. Os tensores constantes definem referenciais privilegiados e essa é a razão da quebra da simetria de Lorentz. Os termos que quebram *CPT* na ação são denominados *CPT*-odd, caso contrário são *CPT*-even. Nessa classificação o modelo de Carroll-Field-Jackiw corresponde ao setor eletromagnético *CPT*-odd do modelo padrão estendido.

Os trabalhos que abordam a possibilidade da violação de Lorentz e *CPT* no con-

texto do modelo padrão estendido se dividem, grosseiramente, em investigações da rica fenomenologia trazida pelas modificações ao modelo padrão e análises formais da consistência teórica do modelo. As investigações fenomenológicas objetivam determinar os possíveis sinais observacionais característicos de uma violação de Lorentz e  $CPT$ . As análises de consistência visam selecionar quais termos podemos adicionar ao modelo padrão sem que a teoria apresente patologias, como violações de causalidade e unitariedade por exemplo.

No entanto, existem poucos resultados abordando a estrutura não perturbativa do modelo padrão estendido. Em muitos estudos o modelo de Carroll-Field-Jackiw, por exemplo, é visto como uma deformação do eletromagnetismo usual; supõe-se que essa seja uma pequena deformação, pois caso contrário já teríamos observado os fenômenos decorrentes da violação de Lorentz e  $CPT$ . Porém, por dualidade, essa deformação é bastante radical como observamos em [143]. Em particular a auto dualidade da teoria de Maxwell é destruída. A formulação dual precisa desse modelo será discutida em todos os seus detalhes na seção 4.4.3. Uma consequência da perda da auto dualidade é a enorme assimetria que se estabelece entre cargas magnéticas e cargas elétricas nesse sistema. Aplicando o formalismo de Julia-Toulouse generalizado nós vamos abordar a questão da introdução de monopolos no modelo de Carroll-Field-Jackiw. A similaridade deste modelo com a Maxwell-Chern-Simons sugere uma interpretação de condensado. De fato argumentamos na seção 4.4.4.1 que o modelo de Carroll-Field-Jackiw pode ser interpretado como a teoria efetiva de um condensado elétrico que viola as simetrias de Lorentz e  $CPT$ . Seguindo a prescrição de Julia-Toulouse generalizada a inclusão de monopolos é imediata e será objeto de análise na seção 4.4.4.2. Adiantamos aqui que o modelo exibe a quebra da simetria de brana o que sugere que monopolos estão confinados nesse sistema, mas os efeitos da violação de Lorentz tornam a situação muito peculiar com a quebra da simetria de brana ocorrendo apenas em algumas direções.

Estes resultados mostram a grande abrangência do formalismo de Julia-Toulouse generalizado. Vemos que o formalismo é capaz de unificar sob os mesmos princípios uma variedade de exemplos. Em particular é possível identificar uma assinatura clara para o fenômeno do confinamento: a quebra da simetria de brana, que se revela presente em todos os exemplos que exibem confinamento.

### 1.3 Outros resultados

Vamos abordar nesta tese também alguns outros problemas relacionados. O conceito de um condensado que quebra simetrias espaço-temporais, associada à teoria de Maxwell-Chern-Simons e à teoria de Carrol-Field-Jackiw, é fundamentado no processo dinâmico da indução radiativa devido a flutuações quânticas fermiônicas. A teoria de Maxwell-Chern-Simons é vista como uma teoria efetiva para a  $QED$  em  $(2+1)D$ , onde a presença de férmions (na representação mínima de duas componentes) quebras as simetrias  $P$  e  $T$ . A integração sobre os férmions induz o termo de Chern-Simons que carrega a informação sobre a quebra destas simetrias (isso é discutido na seção 2.4). A indução deste termo representa uma deformação da estrutura canônica da teoria de Maxwell livre. Podemos de fato, guiados pela simetria, postular deformações e obter teorias que irão violar, em geral, simetrias espaço-temporais. Esta é a atitude adotada no estudo das teorias de campos não comutativos [116, 117]. Na seção 4.2 nós vamos discutir essas idéias aplicando-as a Maxwell-Chern-Simons e a sua formulação dual, a teoria Auto-Dual.

Uma questão interessante é a possibilidade de, dada uma deformação, encontrar o efeito dinâmico correspondente. Isso será explorado no estudo de um modelo em  $(1+1)D$  com férmions e bósons em interação, onde estabelecemos uma conexão entre as regiões ultra-violeta e infra-vermelha da teoria bosônica efetiva [123] que será discutido na seção 4.3.

Isto nos coloca em contato com um problema bastante polêmico na literatura. A indução, por flutuações quânticas fermiônicas, do termo tipo Chern-Simons no modelo

de Carroll-Field-Jackiw [146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154]. Discutiremos este problema na seção 4.4.1. Assim como a teoria de Maxwell-Chern-Simons em  $(2 + 1)D$ , podemos interpretar a teoria de Carroll-Field-Jackiw como uma deformação da estrutura canônica da teoria de Maxwell. Isso sugere que esse seja um efeito dinâmico. Neste sentido, o termo tipo Chern-Simons seria induzido por flutuações fermiônicas que violam as simetrias de Lorentz e  $CPT$ . No entanto, o coeficiente do termo induzido resulta ser indeterminado. Uma observação importante que apresentamos em [156] e que será discutida na seção 4.4.1 é que a massa fermiônica em  $(2 + 1)D$  não guarda qualquer relação com a massa fermiônica em  $(3 + 1)D$ . A massa fermiônica em  $(2 + 1)D$  é resultado da redução dimensional de um termo fermiônico em  $(3 + 1)D$  que viola as simetrias de Lorentz e  $CPT$ , a herança dessa violação é a quebra de  $P$  e  $T$  no plano. Essa observação conduz à determinação sem ambiguidades do termo tipo Chern-Simons como resultado de flutuações fermiônicas não massivas em  $(3 + 1)D$  [156].

## 1.4 Organização

Esta tese está organizada da seguinte forma: no Cap. 2 discutiremos os aspectos do conceito de dualidade que se mostrarão essenciais para o resto da tese. Apresentaremos o conceito de  $p$ -correntes que surge naturalmente no estudo da dualidade eletromagnética na presença de fontes. Isso nos leva ao crucial conceito de simetria de brana. Discutiremos ainda a dualidade no plano entre os sistemas Maxwell-Chern-Simons e Auto-Dual e a indução do termo de Chern-Simons por flutuações quânticas fermiônicas. No Cap. 3, começaremos nossos estudos sobre confinamento primeiramente discutindo como este fenômeno surge no modelo do supercondutor, levando naturalmente à definição do sistema supercondutor dual. Após calcular o potencial confinante, construiremos em detalhes a nova formulação que generaliza a prescrição de Julia-Toulouse interpretando o modelo confinante supercondutor nesta linguagem. Mostraremos ainda que os mesmos conceitos contidos na generalização dessa prescrição figuram no modelo de Polyakov em  $3D$  e constituem ainda uma ferramenta natural para a construção dos estados

hierárquicos do efeito Hall quântico fracionário. Finalmente aplicaremos esse formalismo ao problema da presença de defeitos no sistema de Maxwell-Chern-Simons. No Cap. 4 estudaremos sistemas que violam a simetria de Lorentz. Começaremos introduzindo a idéia de deformação da estrutura canônica como um gerador de modelos para a descrição de sistemas onde simetrias espaço-temporais são quebradas. Argumentaremos que essas deformações podem ser representações efetivas de flutuações quânticas que violam simetrias espaço-temporais e estudaremos em detalhes um exemplo específico deste fato em  $(1 + 1)D$ . A seguir vamos nos concentrar no modelo de Carroll-Field-Jackiw discutindo primeiramente suas possíveis origens, incluindo sua interpretação como uma teoria efetiva da eletrodinâmica estendida que viola as simetrias de Lorentz e *CPT*. Mostraremos nesse contexto que a indução quântica do termo tipo Chern-Simons pode ser obtida sem ambiguidades no caso de férmions não massivos. Passaremos então para o estudo da estrutura de dualidades do modelo de Carroll-Field-Jackiw obtendo sua formulação dual completa. Estudaremos por fim o problema da inclusão de monopolos neste sistema usando as idéias da prescrição de Julia-Toulouse generalizada. No Cap. 5 apresentaremos as conclusões.

Nesta tese trabalharemos com  $\hbar = c = 1$ .

# Capítulo 2

## Dualidade

### 2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar e discutir alguns conceitos que serão fundamentais no desenvolvimento desta tese. Aqui estabeleceremos a linguagem que será utilizada nos outros capítulos bem como alguns resultados preliminares que serão úteis mais adiante. Começaremos estudando o conceito de dualidade eletromagnética em  $4D$ . Teremos a oportunidade então de introduzir o importante conceito de  $p$ -correntes ( $p$ -formas que possuem distribuições como componentes) que nos permite discutir a dualidade de uma teoria na presença de fontes e nos levam à definição crucial do conceito de simetria de brana. Discutiremos ainda a dualidade em  $3D$  entre o modelo de Maxwell-Chern-Simons e o modelo Auto-Dual apontando algumas peculiaridades de sistemas nesta dimensionalidade.

No que segue usaremos a notação de formas diferenciais. Suas propriedades gerais são discutidas no apêndice [A](#).

### 2.2 Eletromagnetismo no vácuo

Consideramos o vácuo do eletromagnetismo como definido em uma variedade quadridimensional  $\mathcal{M}_4$ . Trabalharemos com o espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  com métrica com assinatura  $(-, +, +, +)$ , mas os resultados aqui discutidos permanecem válidos desde que o espaço não tenha borda ou que os campos se anulem na borda caso exista

uma. A extensão das considerações feitas aqui para dimensionalidades arbitrárias é imediata e será discutida mais a frente.

As equações de Maxwell que definem a evolução espaço-temporal dos campos eletromagnéticos são:

$$dF = 0, \quad (2.1)$$

$$d^*F = 0, \quad (2.2)$$

onde a 2-forma  $F$  é o tensor de campo definido em termos dos campos observáveis elétrico  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  e magnético  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu; \quad [F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Em (2.2) a operação dual de Hodge é representada pelo operador  $*$ . Essa operação depende da métrica como discutido no apêndice A.

As equações de Maxwell apresentam uma simetria óbvia dada pela transformação

$$F \rightarrow *F, \quad (2.4)$$

$$*F \rightarrow -F, \quad (2.5)$$

onde o sinal negativo em (2.5) é consequência da propriedade  $** = -1$ , satisfeita quando atuando em formas pares no espaço de Minkowski. Essas transformações representam simplesmente a troca do campo elétrico pelo campo magnético e vice-versa, uma possibilidade evidente nesse caso uma vez que não é possível diferencia-los fisicamente no vácuo.

Pelo Lema de Poincaré a equação  $dF = 0$  implica que localmente podemos definir uma 1-forma  $A$ , que denominamos potencial eletromagnético, tal que

$$F = dA, \quad (2.6)$$

o que faz da equação (2.1) uma identidade, conhecida como a *identidade de Bianchi*. A 1-forma  $A$  admite uma interpretação natural como uma conexão em um fibrado vetorial

complexo sendo  $F$  a curvatura. A definição do potencial  $A$  introduz uma ambiguidade na teoria. Observe que as equações de movimento são invariantes por

$$A \rightarrow A + d\lambda, \quad (2.7)$$

onde  $\lambda$  é uma 0-forma. A invariância da teoria sob as transformações (2.7) é denominada *simetria de calibre*, ainda que essa invariância não represente uma simetria física no sentido usual e sim uma redundância nas variáveis que descrevem o sistema.

A equação (2.2) descreve a dinâmica dos campos eletromagnéticos e pode ser obtida como o ponto estacionário, com respeito a variações de  $A$ , da seguinte ação

$$S_{EM} = \int_{\mathcal{M}_4} -\frac{1}{2e^2} dA \wedge *dA \equiv -\frac{1}{2e^2} (dA, dA), \quad (2.8)$$

onde na última igualdade definimos a notação de produto interno que será mais conveniente nos cálculos; suas propriedades estão no Apêndice A. Ao longo da tese, usaremos tanto a notação usual de produto wedge quanto a notação de produto interno dependendo de qual for mais conveniente. A constante  $e$  é o acoplamento no caso da presença de cargas elétricas. Aqui, no caso livre, é apenas um parâmetro que poderia ser absorvido em uma redefinição dos campos. Mantemos esse parâmetro explícito apenas para evidenciar seu comportamento sob transformações de dualidade.

O sistema de Maxwell no vácuo, definido por (2.8), apresenta uma das manifestações mais triviais de dualidade como já antecipamos. No nível da ação podemos obter uma formulação dual pelo seguinte procedimento: observe que uma ação fisicamente equivalente a (2.8) é

$$S_M = \int_{\mathcal{M}_4} G \wedge *dA + \frac{e^2}{2} G \wedge *G, \quad (2.9)$$

onde  $G$  é uma 2-forma auxiliar não possuindo dinâmica independente. Dessa forma,  $S_M$ , denominada *ação mestra*, representa uma ampliação trivial do espaço de configuração da teoria original. O caráter auxiliar de  $G$  significa que suas equações de Euler-Lagrange o determinam totalmente em função de  $A$ :

$$\delta_G S_M = (\delta G, dA + e^2 G) = 0 \Rightarrow G = -\frac{1}{e^2} dA, \quad (2.10)$$

onde  $\delta_G$  denota a variação da ação com respeito a variações  $\delta G$  de  $G$ . Essa equação diz que toda informação sobre a dinâmica está contida em  $A$  e portanto podemos simplesmente substituir esse valor de  $G$  na ação o que nos leva de volta a  $S_{EM}$ , eq.(2.8). Podemos, por outro lado, realizar uma integração por partes no primeiro termo da ação mestra:

$$S_M = (G, dA) + \frac{e^2}{2}(G, G) = (d^\dagger G, A) + \frac{e^2}{2}(G, G), \quad (2.11)$$

onde  $d^\dagger$  denota a coderivada exterior, que é a operação adjunta da derivada exterior com respeito ao produto interno ( $d^\dagger = *d*$  em  $4D$ ). Vemos então que o potencial  $A$  se torna um multiplicador de Lagrange que impõe o vínculo

$$d^\dagger G = 0 \Rightarrow d^*G = 0. \quad (2.12)$$

Esse vínculo pode ser imediatamente resolvido observando que localmente, pelo lema de Poincaré:

$$*G = dB, \quad (2.13)$$

onde  $B$  é uma 1-forma. No espaço de Minkowski em  $4D$  temos então

$$S_M \rightarrow \frac{e^2}{2}(G, G) = -\frac{e^2}{2}(*G, *G) = -\frac{e^2}{2}(dB, dB) = \tilde{S}_{EM}, \quad (2.14)$$

que é o conhecido resultado revelando a autodualidade do sistema de Maxwell no vácuo. Observe que a constante de acoplamento foi invertida no processo. Essa é uma propriedade característica da dualidade. Ainda que trivialmente realizada aqui, essa propriedade se torna altamente não-trivial em uma teoria completa interagente e são muito raros os exemplos onde ela é de fato realizada. Um exemplo é o modelo de Ising bidimensional onde, como foi demonstrado por Kramers e Wannier [10], existe um mapa de dualidade conectando a física em altas temperaturas com a física em baixas temperaturas. O ponto fixo desse mapa corresponde a temperatura crítica da transição de fase. Montonen e Olive [11] propuseram que essa auto-dualidade eletromagnética poderia ser estendida para teorias não-abelianas. Essa expectativa no entanto resulta ser factível

apenas em teorias superssimétricas, Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  [12, 13] e também  $\mathcal{N} = 2$  [14]. Nesse contexto, essa dualidade é denominada dualidade  $S$ , invertendo os regimes fraco e forte de acoplamento (veja por exemplo [15, 16, 17] para revisões neste assunto). Mais recentemente esses conceitos foram incorporados no estudo do chamado programa de Langlands em teoria dos números [18]. Existe ainda muita similaridade com a dualidade  $T$  em teorias de cordas que relaciona teorias com raio de compactificação  $R$  com teorias com raio de compactificação  $\frac{\ell_s^2}{R}$ , onde  $\ell_s$  é a escala de comprimento da corda (veja [19] para uma revisão). Em geral, a inversão de parâmetros é uma característica definidora do processo de dualidade.

As equações do eletromagnetismo descrevem a propagação de ondas eletromagnéticas com duas polarizações transversais à direção de propagação. Correspondentemente a formulação quântica do eletromagnetismo descreve a dinâmica de uma partícula não massiva com dois graus de liberdade internos de helicidade, o foton. Uma generalização muito importante dessa teoria é dada por:

$$S_{Proca} = \int_{\mathcal{M}_4} -\frac{1}{2e^2} dA \wedge *dA - \frac{m^2}{2} A \wedge *A, \quad (2.15)$$

e é conhecida como o modelo de Proca. Essa ação descreve uma excitação massiva com três graus de liberdade internos correspondendo ao spin 1. Esse modelo surge como uma teoria efetiva em baixas energias em teorias com quebra espontânea da simetria de calibre como veremos no próximo capítulo. Também podemos encontrar uma formulação dual a esse modelo. Uma ação equivalente a (2.15) é

$$S_{M-Proca} = \int_{\mathcal{M}_4} G \wedge *dA + \frac{e^2}{2} G \wedge *G - \frac{m^2}{2} A \wedge *A, \quad (2.16)$$

onde  $G$  é uma 2-forma que, como antes atua como um campo auxiliar. Por outro lado vemos que por uma integração por partes a 1-forma  $A$  também tem o caráter de um campo auxiliar. A variação da ação com relação a variações de  $A$  fornece

$$\delta_A S_{M-Proca} = (\delta A, d^\dagger G - m^2 A). \quad (2.17)$$

O ponto estacionário  $\delta_A S_{M-Proca} = 0$  é dado portanto pela condição

$$A = \frac{1}{m^2} d^\dagger G = \frac{1}{m^2} *d^*G, \quad (2.18)$$

que substituindo na ação resulta

$$S_{M-Proca} \rightarrow \frac{1}{2m^2}(d^\dagger G, d^\dagger G) + \frac{e^2}{2}(G, G) = -\frac{1}{2m^2}(d^* G, d^* G) - \frac{e^2}{2}(*G, *G). \quad (2.19)$$

Ou seja, vemos que a teoria dual à Proca é a teoria de uma 2-forma massiva com mesma massa  $me$ . Essa teoria é conhecida como o modelo de Kalb-Ramond massivo.

Essas considerações sobre dualidade são naturalmente estendidas para  $p$ -formas gerais em dimensões arbitrárias. De fato a linguagem de formas diferenciais usada até aqui coloca esses resultados em uma posição de imediata generalização. Alguns padrões são claramente observados. A teoria eletromagnética de uma  $p$ -forma é exatamente a teoria dada pela (2.8) com  $A$  agora uma  $p$ -forma. O campo auxiliar  $G$  será portanto uma  $(p+1)$ -forma pela (2.10) e então pela (2.13) o campo dual  $B$  será uma  $(D-p-2)$ -forma, onde  $D$  é a dimensão do espaço-tempo. Deduzimos assim que para  $p$ -formas não massivas descritas por teorias tipo Maxwell o par dual  $A_p$  e  $\tilde{A}_q$  obedece a relação  $p+q+2=D$ , onde  $p$  e  $q$  são os postos das formas. Podemos seguir um raciocínio análogo para  $p$ -formas massivas: vemos que nesse caso, pelas (2.18) e (2.19), o campo dual à uma  $p$ -forma é uma  $(D-p-1)$ -forma e portanto a relação obedecida pelo par dual no caso massivo será  $p+q+1=D$ . Estudos detalhados sobre as transformações de dualidade e a correspondente estrutura dos grupos de dualidade foram realizados em [20, 21, 22].

## 2.3 Eletromagnetismo na presença de fontes

Para que a teoria eletromagnética seja fisicamente não trivial a presença de fontes é necessária. Nesta seção vamos recordar como fontes localizadas (também denominadas *correntes clássicas*) podem ser introduzidas na teoria.

Fontes elétricas são naturalmente incorporadas na equação (2.2):

$$d^*F = e^*J_e, \quad (2.20)$$

onde  $e$  é a carga elétrica e  $J_e = J_{e\mu}dx^\mu$  é uma 1-forma representando a corrente elétrica.

Isso se traduz em uma modificação da ação (2.8)

$$S_{EM} = \int_{\mathcal{M}_4} -\frac{1}{2}dA \wedge *dA + eA \wedge *J_e. \quad (2.21)$$

A introdução de cargas magnéticas no entanto não é trivial pois viola a identidade de Bianchi, e isso interfere com a definição do potencial  $A$  que é fundamental para a formulação quântica da teoria. Na literatura moderna existem pelo menos duas maneiras equivalentes de introduzir cargas magnéticas. Uma possibilidade, mais relacionada com as idéias de Wu e Yang [23, 24], consiste em reconhecer que o espaço em que a teoria é definida, quando na presença de monopolos, é não-trivial. A inserção de monopolos é representada pela presença de “buracos” no espaço, como visto pelo campo eletromagnético. A variedade não é mais topologicamente equivalente a  $\mathbb{R}^{1,3}$  (ou  $\mathbb{R}^4$  no caso Euclidiano) e existem superfícies que não se contraem a um ponto introduzindo na variedade grupos de homologia e grupos de homotopia não triviais. Mais precisamente, nas vizinhanças de um monopolo o fluxo magnético através de uma esfera  $S^2$  é não nulo, isso, juntamente com o fato de que  $dF = 0$ , resulta em uma classe de cohomologia não trivial definida pelo campo  $F$  que é reconhecido como a *primeira classe de Chern* do fibrado vetorial complexo  $U(1)$ . Isso significa que não é possível escrevê-lo como  $dA$  com  $A$  definido globalmente. O procedimento então é definir diferentes potenciais  $A$  em diferentes regiões. Como  $F$  é bem definido em todo o espaço, os potenciais estão relacionados por uma transformação de calibre nas intersecções das regiões onde são definidos. Uma rica estrutura topológica surge dessas observações mas vemos também que terminamos com uma grande assimetria operacional entre as definições de cargas elétrica e magnética.

Uma outra possibilidade, equivalente obviamente ao que descrevemos acima, foi originalmente introduzida por Dirac [25, 26] e é a que vamos adotar nesta tese. Essa abordagem consiste em estudar as consequências de uma violação explícita da identidade de Bianchi

$$dF = g^* J_g, \quad (2.22)$$

onde  $g$  é a carga magnética e  $J_g = J_{g\mu} dx^\mu$  é uma 1-forma representando a corrente magnética. A introdução do potencial  $A$  ainda é possível se usarmos o conceito de  $p$ -correntes que vamos discutir a seguir.

### 2.3.1 $p$ -correntes

Este é um momento apropriado para definir o conceito de corrente localizada. Uma partícula localizada é um ponto geométrico no espaço e é denominada 0-brana. Essa partícula, no decorrer de seu movimento, traça uma trajetória que constitui uma linha no espaço-tempo, uma 1-brana, e é denominada *linha de mundo* da partícula. Esses conceitos são naturalmente generalizados para  $p$ -branas gerais, onde, por exemplo,  $p = 1$  denota uma corda,  $p = 2$  uma membrana e assim por diante. No espaço Euclidiano existe ainda a possibilidade  $p = -1$  que define um instanton. As  $p$ -branas traçam  $p + 1$ -superfícies ( $p + 1$ -branas) no decorrer de seu movimento no espaço-tempo que são denominadas *superfícies de mundo*. Essa visão geométrica pode ser formalizada introduzindo-se o conceito de *Poincaré dual* (uma discussão sobre esses conceitos pode ser encontrada em [27], veja também [28, 29, 30]).

Se  $\mathcal{N}_p$  é uma  $p$ -superfície ( $\dim \mathcal{N}_p = p$ ) contida em  $\mathcal{M}_D$  ( $\dim \mathcal{M}_D = D$ ) e definida pelas equações  $X^\mu = X^\mu(y^a)$  onde  $y^a$ , ( $a = 0, 1, \dots, p - 1$ ) parametrizam a superfície  $\mathcal{N}_p$ , então a  $p$ -forma

$$J_p = J_{p\ \mu_1, \dots, \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (2.23)$$

com:

$$J_p^{\mu_1, \dots, \mu_p}(x) = \int_{\mathcal{N}_p} \delta^D(x - X(y^a)) \frac{\partial X^{\mu_1}}{\partial y^{a_1}} \dots \frac{\partial X^{\mu_p}}{\partial y^{a_p}} dy^{a_1} \wedge \dots \wedge dy^{a_p}, \quad (2.24)$$

define a  $p$ -corrente Poincaré-dual à superfície  $\mathcal{N}_p$ , fato que representamos por

$$\mathbf{P}(\mathcal{N}_p) = *J_p, \quad (2.25)$$

Observe que uma  $p$ -corrente é uma  $p$ -forma cujas componentes são distribuições. Essa definição constitui um isomorfismo entre as superfícies ( $p$ -branas) e as respectivas cor-

rentes ( $p$ -correntes). Nesta tese vamos nos referir diversas vezes às  $p$ -correntes como  $p$ -branas e vice-versa. Algumas propriedades seguem:

1. Para toda  $p$ -forma  $A_p$ :

$$\int_{\mathcal{M}_D} A_p \wedge *J_p = \int_{\mathcal{N}_p} A_p. \quad (2.26)$$

Essa propriedade muitas vezes é tomada como a definição de  $p$ -correntes. Aqui é fácil verificar que ela é consequência direta da definição de  $p$ -correntes.

2. Se  $\partial$  é o operador borda tal que  $\partial\mathcal{A}_p = \mathcal{B}_{p-1}$  denota a  $p-1$ -superfície que é borda de  $\mathcal{A}_p$ , então, para qualquer  $p$ -superfície  $\mathcal{N}_p$

$$\mathbf{P}(\partial\mathcal{N}_p) = (-1)^p d(\mathbf{P}(\mathcal{N}_p)). \quad (2.27)$$

Essa propriedade é facilmente verificada usando o fato de que  $p$ -correntes são distribuições e portanto tem suas propriedades definidas pela sua atuação dentro de integrais envolvendo funções arbitrárias. Para uma  $(p-1)$ -forma  $A_{p-1}$  qualquer temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_D} A_{p-1} \wedge \mathbf{P}(\partial\mathcal{N}_p) &= \int_{\partial\mathcal{N}_p} A_{p-1} = \int_{\mathcal{N}_p} dA_{p-1} \\ &= \int_{\mathcal{M}_D} dA_{p-1} \wedge \mathbf{P}(\mathcal{N}_p) \\ &= (-1)^p \int_{\mathcal{M}_D} A_{p-1} \wedge d\mathbf{P}(\mathcal{N}_p), \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde a propriedade (2.26) foi usada na primeira linha assim como o teorema de Stokes, e na passagem para a última linha uma integração por partes foi realizada.

3. *Fórmula de Poisson.* Se  $A_p$  é uma  $p$ -forma qualquer então:

$$\sum_{\{\mathcal{N}_p\}} \delta(*A_p - \mathbf{P}(\mathcal{N}_p)) = \sum_{\{\mathcal{Q}_{(D-p)}\}} e^{2\pi i \int_{\mathcal{M}_D} \mathbf{P}(\mathcal{Q}_{(D-p)}) \wedge *A_p}, \quad (2.29)$$

onde a soma formal é efetuada sobre todas as configurações das superfícies indicadas. Essa equação, conhecida como a fórmula de Poisson, pode ser provada

formulando-se essas quantidades em uma rede de  $D$ -dimensões. Nesse caso a  $p$ -forma  $A_p$  é uma variável *real* tomando valores em uma  $p$ -plaqueta da rede e as  $p$ -correntes são variáveis *inteiras* associadas à  $p$ -plaquetas (que são as  $p$ -branas na rede). As somas se tornam então somas sobre números inteiros e a integral na exponencial é uma soma que varre todos os pontos da rede. Nesse contexto a fórmula é facilmente verificada [32].

4. Se duas superfícies contidas em  $\mathcal{M}_D$  possuem dimensões complementares (ou seja, cuja soma é igual à  $\dim \mathcal{M}_D = D$ ) então em geral se interceptarão em um número de *pontos* determinados e é possível atribuir um número inteiro a essas intersecções denominado *intersection number* e definido por

$$I(\mathcal{A}_p, \mathcal{B}_{D-p}) = \int_{\mathcal{M}_D} \mathbf{P}(\mathcal{A}_p) \wedge \mathbf{P}(\mathcal{B}_{D-p}) = n \in \mathbb{Z}. \quad (2.30)$$

O sinal associado ao número é uma consequência da orientação definida pelo espaço  $\mathcal{M}_D$ .

Relacionado a essa última propriedade está a definição de *linking number*. Se  $\mathcal{A}_p$  e  $\mathcal{B}_{D-p-1}$  são superfícies contidas em  $\mathcal{M}_D$  tal que  $\dim \mathcal{A}_p + \dim \mathcal{B}_{D-p-1} + 1 = \dim \mathcal{M}_D$  e se  $\partial \mathcal{C}_{p+1} = \mathcal{A}_p$  então o linking number entre  $\mathcal{A}_p$  e  $\mathcal{B}_{D-p-1}$  é definido por

$$L(\mathcal{A}_p, \mathcal{B}_{D-p-1}) = I(\mathcal{C}_{p+1}, \mathcal{B}_{D-p-1}). \quad (2.31)$$

### 2.3.2 Quantização da carga e simetria de brana

Observe que a eq.(2.27) consolida a idéia geométrica que temos de conservação de correntes. Dizemos que uma corrente é conservada quando sua superfície de mundo não tem borda, ou seja

$$d(\mathbf{P}(\mathcal{N}_p)) = d^* J_p = 0. \quad (2.32)$$

No caso eletromagnético, vemos que tanto a corrente elétrica definida por (2.20) quanto a corrente magnética definida por (2.22) são conservadas pois  $d^2 = 0$ . Essas

observações nos permitem introduzir novamente o potencial  $A$ , pois generalizando o lema de Poincaré para  $p$ -correntes podemos escrever

$$d^*J_p = 0 \Rightarrow *J_p = d^*\Sigma_{p+1}, \quad (2.33)$$

onde  $\Sigma_{p+1}$  é uma  $p + 1$ -corrente. A  $p + 1$ -superfície Poincaré-dual à  $\Sigma_{p+1}$  tem como borda a superfície Poincaré-dual à  $J_p$ . Dessa forma a equação (2.22) nos leva à

$$dF = g^*J_g = gd^*\Sigma_g \Rightarrow d(F - g^*\Sigma_g) = 0 \Rightarrow F = dA + g^*\Sigma_g. \quad (2.34)$$

A superfície Poincaré-dual a  $\Sigma_g$  tem como borda a superfície Poincaré-dual à corrente magnética e portanto é imediatamente reconhecida como a superfície traçada pela *corda de Dirac* [26]. Numa nomenclatura mais generalizada chamaremos essas superfícies ou suas respectivas correntes duais de *branas de Dirac*.

Observe que  $F$ , sendo um campo observável, tem que ser bem definido. Consequentemente  $A$  deve possuir singularidades onde  $\Sigma_g$  for não-nulo tal que  $F$  permaneça bem definido.

A definição da brana de Dirac introduz uma nova ambiguidade na teoria além da redundância de calibre. Vemos que  $J_g$ , um observável, permanece invariante sob a transformação

$$*\Sigma_g \rightarrow *\Sigma_g + d^*\Lambda_g, \quad (2.35)$$

onde  $\Lambda_g$  é uma 3-corrente. Para que a teoria seja consistente e  $F$  permaneça um observável vemos que sob (2.35)  $A$  se transforma como

$$A \rightarrow A - g^*\Lambda_g. \quad (2.36)$$

Denominamos esse tipo de transformação de *transformação de brana*. A importância dessa simetria e sua independência em relação à simetria de calibre foi enfatizada por Kleinert em [31], veja também [32].

Vamos agora estudar as consequências dessa nova simetria. Agora que fomos capazes de reintroduzir o potencial  $A$  podemos construir um funcional de ação para o sistema.

A ação (2.21) deve ser generalizada para uma ação invariante por transformações de brana. Definimos então

$$S_{EM} = \int_{\mathcal{M}_4} -\frac{1}{2}(dA + g^*\Sigma_g) \wedge *(dA + g^*\Sigma_g) + eA \wedge *J_e, \quad (2.37)$$

onde  $\Sigma_g$  é a 2-corrente tal que  $*J_g = d^*\Sigma_g$  é a carga magnética. Vemos que extremizando a ação com respeito a variações de  $A$  de fato obtemos a equação de movimento

$$d^*F = e^*J_e, \quad (2.38)$$

onde agora  $F = dA + g^*\Sigma_g$  é o campo eletromagnético físico. Temos ainda a identidade que segue da definição de  $F$

$$dF = g^*J_g. \quad (2.39)$$

Mas a ação não parece ser invariante por transformações de brana devido ao último termo. De fato a variação  $\delta_B$  da ação devido à transformação (2.35) e (2.36) é

$$\begin{aligned} \delta_B S_{EM} &= -eg \int_{\mathcal{M}_4} *\Lambda_g \wedge *J_e = -eg \int_{\mathcal{M}_4} \mathbf{P}(\mathcal{B}_g^3) \wedge \mathbf{P}(\mathcal{A}_e^1) \\ &= -eg I(\mathcal{B}_g^3, \mathcal{A}_e^1) = -egn \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$  e usamos (2.30). Aqui  $\mathcal{A}_e^1$  é a linha de mundo traçada pela carga elétrica e  $\mathcal{B}_g^3$  é a superfície Poincaré-dual à 3-corrente  $\Lambda_g$  e representa o volume varrido ao deformar a corda de Dirac. Vemos que a variação da ação é uma constante e portanto inócua classicamente. No entanto, quanticamente a variação (2.40) poderia ser observada por experimentos de interferência e a teoria seria inconsistente, pois essas transformações representam apenas uma redundância nas variáveis. Como na formulação quântica a ação é definida como uma fase a teoria será invariante e portanto consistente se

$$eg = 2\pi m; \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (2.41)$$

que é a conhecida condição de quantização de Dirac.

Observe que a simetria de brana magnética é realizada em (2.37) em uma estrutura tipo Stueckelberg [33] (para uma discussão recente veja [34]). Veremos que esta estrutura

dá origem ao fenômeno de pulo de posto, associado à geração de massa no sistema, como consequência da condensação da brana magnética. O formalismo que descreve este fenômeno é a prescrição de Julia-Toulouse que discutiremos na seção 3.3. Uma consequência deste processo é a quebra espontânea da simetria de brana e o consequente confinamento das cargas elétricas na nova fase condensada. Este é um dos resultados originais que apresentaremos nesta tese.

### 2.3.3 Dualidade

O eletromagnetismo na presença de fontes também admite uma reformulação em termos de variáveis duais. Da mesma forma que fizemos no caso livre podemos definir uma ação mestra equivalente fisicamente à (2.37) introduzindo um campo auxiliar  $G$

$$S_M = \int_{\mathcal{M}_4} G \wedge *(dA + g^* \Sigma_g) + \frac{1}{2} G \wedge *G + eA \wedge *J_e. \quad (2.42)$$

As equações de movimento de  $G$  o vinculam totalmente a  $F = dA + g^* \Sigma_g$  e substituindo em (2.42) reobtemos (2.37). Por outro lado, integrando por partes no primeiro termo vemos que  $A$  se torna um multiplicador de Lagrange produzindo o vínculo

$$d^\dagger G = eJ_e \Rightarrow d^* G = -e^* J_e. \quad (2.43)$$

Segue que

$$d(*G + e^* \Sigma_e) = 0 \Rightarrow *G = -dB - e^* \Sigma_e, \quad (2.44)$$

onde  $B$  é uma 1-forma introduzida devido ao lema de Poincaré. A ação dual fica

$$\begin{aligned} S_M &\rightarrow \frac{1}{2}(G, G) + g(G, *\Sigma_g) = -\frac{1}{2}(*G, *G) + g(*G, \Sigma_g) \\ &= -\frac{1}{2}(*G, *G) - g(dB, \Sigma_g) - eg(*\Sigma_e, \Sigma_g) \\ &= \int_{\mathcal{M}_4} -\frac{1}{2}(dB + e^* \Sigma_e) \wedge *(dB + e^* \Sigma_e) + gB \wedge *J_g, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde descartamos o último termo na penúltima linha pois, devido a quantização de Dirac, esse termo é um múltiplo de  $2\pi n$  como já discutimos. Note que na formulação dual

os acoplamentos têm seus papéis trocados: as cargas magnéticas aparecem acopladas minimamente ao campo dual  $B$  e as cargas elétricas aparecem acopladas não minimamente. Cabe observar ainda que, da mesma forma que no caso livre, essas considerações são trivialmente estendidas para  $p$ -formas em dimensões arbitrárias.

Discutimos até aqui a formulação clássica da teoria. No entanto a formulação quântica pode ser formalmente definida através da função partição que tem a forma geral:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \sum_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}A e^{i[S_{EM}(A, \Sigma_e, \Sigma_g) + S_e(J_e) + S_g(J_g)]}, \quad (2.46)$$

onde  $S_{EM}(A, \Sigma_e, \Sigma_g)$  é dada por (2.37) ou sua dual (2.45) e  $S_e(J_e)$  e  $S_g(J_g)$  são ações efetivas para as branas elétricas e magnéticas respectivamente que devem depender apenas das quantidades invariantes de brana  $J_e$  e  $J_g$ . As somas indicadas varrem todas as configurações das superfícies Poincaré-duais às correntes  $\Sigma_e$  e  $\Sigma_g$  ( $\mathbf{P}(\mathcal{B}_e) = *\Sigma_e$  e  $\mathbf{P}(\mathcal{B}_g) = *\Sigma_g$ ) e, portanto, assim como a integral funcional sobre  $A$ , necessitam de um fixador para eliminar a redundância na soma. Ou seja, as configurações fisicamente relevantes são os invariantes de calibre e os invariantes de brana.

Os resultados que obtivemos sobre dualidade permanecem válidos quanticamente. As quantidades relevantes na definição de um sistema quântico são os valores esperados de operadores, então é natural questionarmos como essas quantidades se comportam sob uma transformação de dualidade. Para operadores invariantes de calibre que dependem localmente de  $A$ , ou seja, que são funções da curvatura  $F$ :

$$\mathcal{O}(F), \quad (2.47)$$

os valores médios podem ser calculados no contexto da teoria mestra (2.42) substituindo as inserções desses operadores na função partição por inserções dos operadores correspondentes ao mapa dual  $F \leftrightarrow G$

$$\mathcal{O}(F) \rightarrow \mathcal{O}(G), \quad (2.48)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(F) \rangle &= \sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \sum_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}A \mathcal{O}(F) e^{i[S_{EM}(A, \Sigma_e, \Sigma_g) + S_e(J_e) + S_g(J_g)]} \\ &= \sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \sum_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}ADG \mathcal{O}(G) e^{i[S_M(A, G, \Sigma_e, \Sigma_g) + S_e(J_e) + S_g(J_g)]}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

O caso mais interessante porém são os operadores invariantes de calibre e não locais como o loop de Wilson [35]:

$$W(C) = e^{i\lambda \int_C A}, \quad (2.50)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro e  $C$  é um loop (topologicamente equivalente a  $S^1$ ). A superfície  $C$  é Poincaré-dual à uma 1-corrente conservada  $J$  e portanto

$$W(C) = W(J) = e^{i \int_{\mathcal{M}_4} A \wedge *J}. \quad (2.51)$$

A inserção desse operador portanto corresponde à introdução de um termo de acoplamento mínimo na ação e sabemos que esse tipo de acoplamento se manifesta como um acoplamento não-mínimo na formulação dual. O acoplamento não-mínimo é uma manifestação da presença de um defeito no espaço como visto pelo campo dual ao campo  $A$ . Portanto temos o curioso resultado que o valor esperado de um loop de Wilson é representado no quadro dual pela inserção de defeitos (branas de Dirac) na teoria (para uma discussão sobre isso veja as notas de Witten em [36], veja também [37, 18]). Veremos um exemplo desse resultado no próximo capítulo.

## 2.4 Sistemas planares

Pelas propriedades gerais de dualidade que discutimos no fim da seção (2.2) podemos dizer que em  $3D$  a descrição dual da teoria de Maxwell (originalmente feita em termos de uma 1-forma) é dada em termos de uma 0-forma (lembre que  $D = p + q + 2$  nesse caso). Essa 0-forma é o campo escalar e portanto a teoria dual é a teoria de um campo escalar não massivo. Ambos os modelos descrevem a propagação de um grau de liberdade. Essa dualidade revela ainda que o foton em  $3D$  tem spin 0.

Na verdade qualquer partícula não massiva em  $3D$  tem spin nulo. A álgebra do grupo de Poincaré é (seguiremos aqui o tratamento discutido em [38, 39])

$$[J^\mu, J^\nu] = i\varepsilon^{\mu\nu\rho} J_\rho, \quad (2.52)$$

$$[J^\mu, P^\nu] = i\varepsilon^{\mu\nu\rho} P_\rho, \quad (2.53)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (2.54)$$

Aqui  $J^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho} L_{\nu\rho}$ , onde  $L_{\mu\nu}$  são os geradores das transformações de Lorentz e  $P^\mu$  são os momentos. O único gerador de rotação é o pseudo-escalar  $J^0 = L_{12}$  que induz rotações no plano (em torno do eixo  $z$  “fictício”). As representações irredutíveis são classificadas pelos autovalores dos dois Casimires do grupo:

$$P^2 = P_\mu P^\mu; \quad W = P_\mu J^\mu. \quad (2.55)$$

$W$  é um pseudoescalar pois  $J^\mu$  é um pseudovetor. Estados de uma partícula podem ser classificados pelos autovalores desses operadores. Se  $\Phi$  é o estado de uma partícula massiva então

$$P^2\Phi = m^2\Phi; \quad W\Phi = -sm\Phi, \quad (2.56)$$

onde  $m$  é identificado com a massa da partícula e  $s$  seu spin. Como o único gerador de rotações é um pseudo-escalar o conceito de helicidade (definido como a projeção do spin na direção do momento) não faz sentido em  $3D$  e vemos que para uma partícula não massiva não existe nenhuma noção de graus de liberdade internos associados à rotação, portanto a partícula terá spin nulo.

Teorias com spin não nulo podem ter propriedades curiosas. O grupo de Poincaré é composto de translações espaço-temporais, boosts de Lorentz e rotações no plano ( $SO(2)$ ). O fato do grupo de rotações ser abeliano é o que gera todas as propriedades curiosas das possíveis excitações fundamentais nessa dimensionalidade. Uma vez que não existem restrições impostas pela álgebra do momento angular (que é um pseudo-escalar aqui), o spin de uma partícula pode tomar qualquer valor. Essa é a origem das partículas com estatística fracionária denominadas ânions. Um ponto importante

a notar é que a operação de paridade não é a convencional  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  pois esse é um caso especial de rotação nesse caso. Paridade e inversão temporal são definidos em  $3D$  da forma:

$$P : (t, x, y) \rightarrow (t, -x, y), \quad (2.57)$$

$$T : (t, x, y) \rightarrow (-t, x, y), \quad (2.58)$$

ou seja, inversão temporal é definida da forma usual mas a paridade é definida como a inversão com respeito a um eixo espacial (nessa definição escolhemos inversões com respeito ao eixo  $y$ , mas isso é apenas uma convenção). Essas operações são responsáveis pela inversão do spin.

Um outro fato curioso em  $3D$  é que a teoria de Proca, que possui simetria de paridade e descreve dois graus de liberdade com spin 1, pode ser fatorada em dois setores independentes que descrevem partículas com spins opostos e paridade definida de tal forma que a operação de paridade mapeia um setor no outro. Explicitamente, a ação de Proca em  $3D$  é definida por (métrica  $(-, +, +)$ )

$$S_{Proca} = \int_{\mathcal{M}_3} -\frac{1}{2} dA \wedge *dA - \frac{m}{2} A \wedge *A, \quad (2.59)$$

como já sabemos uma forma equivalente a essa pode ser obtida introduzindo-se um campo auxiliar

$$S_{Proca} \rightarrow (G, dA) + \frac{1}{2}(G, G) - \frac{m}{2}(A, A), \quad (2.60)$$

onde  $G$  é uma 2-forma. Neste ponto tomamos um outro caminho pois nosso intuito não é obter a formulação dual (que sabemos ser a própria teoria de Proca pois  $D = p+q+1$  e  $D = 3$ ;  $p = 1 \Rightarrow q = 1$ ). Nosso objetivo é fatorar a ação em dois termos independentes e isso pode ser feito através de uma redefinição de variáveis; uma rotação no espaço dos campos

$$\begin{aligned} *G &= \frac{1}{2}(A_+ - A_-), \\ A &= \frac{1}{2m}(A_+ + A_-). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Obtemos assim:

$$\begin{aligned}
S_{Proca} &\rightarrow -(*G, *dA) - \frac{1}{2}(*G, *G) - \frac{m}{2}(A, A) \\
&= -\frac{1}{4m}(A_+ - A_-, *d(A_+ + A_-)) \\
&\quad - \frac{1}{4}(A_+, A_+) - \frac{1}{4}(A_-, A_-) \\
&= -\frac{1}{4m}(A_+, *dA_+) - \frac{1}{4}(A_+, A_+) \\
&\quad + \frac{1}{4m}(A_-, *dA_-) - \frac{1}{4}(A_-, A_-) \\
&= \frac{1}{2}S_{AD}^+(A_+) + \frac{1}{2}S_{AD}^-(A_-), \tag{2.62}
\end{aligned}$$

onde na passagem para a penúltima linha usamos o fato de que  $(A_+, *dA_-) = -(A_-, *dA_+)$ , de forma que termos cruzados se cancelam. Portanto de fato a ação de Proca se fatora em dois termos independentes dados por (note que  $(A, *dA) = -\int_{\mathcal{M}_3} A \wedge dA$ ):

$$S_{AD}^\pm(f) = \int_{\mathcal{M}_3} -\frac{1}{2}f \wedge *f \pm \frac{1}{2m}f \wedge df. \tag{2.63}$$

Este procedimento de fatoração é conhecido como *projeção dual* [40, 41]. Para um determinado sinal (que está relacionado à orientação do spin) a ação definida acima é conhecida como *auto-dual* ( $AD$ ) e foi primeiramente introduzida em [42]. Esse modelo é consistente e descreve a propagação de um grau de liberdade com spin definido. A operação de paridade mapeia  $S_{AD}^+ \leftrightarrow S_{AD}^-$ . A denominação “auto-dual” é uma consequência das equações de movimento dadas por

$$*f = \pm \frac{1}{m}df = \left(\mp \frac{1}{m}d^*\right)*f, \tag{2.64}$$

ou seja, existe um operador induzido pelas equações de movimento que tem como ponto fixo  $*f$ . Esse operador pode ser visto de certa forma como a “raiz quadrada” do operador Laplaciano ( $\Delta \equiv dd^\dagger + d^\dagger d$ ) nesta particular situação. Observe que segue de (2.64) que  $d^*f = 0$  então aplicando novamente o operador obtemos

$$\left(\mp \frac{1}{m}d^*\right)*f = \left(\frac{1}{m^2}d^*d^*\right)*f = \left(\frac{1}{m^2}dd^\dagger\right)*f = \frac{1}{m^2}\Delta*f = *f. \tag{2.65}$$

Ou seja, como qualquer campo massivo,  $f$  satisfaz a equação de Klein-Gordon. Diz-se também que a  $AD$  é a raiz quadrada da Proca.

O termo

$$S_{CS}(f) = \int_{\mathcal{M}_3} \frac{1}{2m} f \wedge df, \quad (2.66)$$

que figura na ação da  $AD$  é conhecido como o termo de *Chern-Simons* ( $CS$ ) [43]. Esse termo é o responsável pela quebra de  $P$  e  $T$  e é muito importante observar que por ser de ordem primeira em derivadas ele aparecerá em qualquer teoria efetiva eletromagnética de longa distância que viole  $P$  e  $T$  em  $3D$ . Observe que ele não depende da métrica pois é naturalmente uma 3-forma não necessitando do operador Hodge-dual em sua definição, por isso ele é classificado como um termo topológico. Uma consequência imediata que segue é que, por não depender da métrica, a teoria de  $CS$  possui Hamiltoniano nulo. Isso significa que não existem graus de liberdade propagantes na teoria de  $CS$  pura.

Em espaços com topologia não trivial (como um torus por exemplo), a teoria de  $CS$  carrega informações sobre a degenerescência dos estados de energia que surgem como consequência da topologia do espaço no qual a teoria é definida [44]; nesse contexto ele está associado a diversos fenômenos de muito interesse atual relacionados com o conceito de *ordem topológica* [45, 46]. Esse tipo de ordem se manifesta numa degenerescência do estado fundamental da teoria, mas, diferentemente dos casos mais familiares envolvendo a quebra espontânea de uma simetria onde essa degenerescência também ocorre, a ordem topológica não pode ser caracterizada por um parâmetro de ordem, mas está relacionada com o comportamento coletivo de excitações efetivas com números quânticos fracionários [47]. Isso ocorre em fenômenos planares em matéria condensada, mais notavelmente, mas não exclusivamente, no efeito Hall quântico fracionário [46]. Também diretamente relacionado a essas considerações está o conceito de estatística fracionária que tem sua encarnação no conceito de ânions [49]. Recentemente excitações aniônicas, mais precisamente em sua versão não-abeliana relacionada à versão não-abeliana do termo de  $CS$ , adquiriram ainda mais destaque devido a sua possível aplicação na implementação de algoritmos quânticos que resultam ser prote-

gidos topologicamente contra erros [50].

Uma vez que o termo de  $CS$  não contém informação física em um espaço trivial, vamos adicionar esse termo à ação  $AD$  de tal forma que a única relação com o setor  $AD$  seja seu coeficiente:

$$S_{AD+CS}^{\pm} = \int_{\mathcal{M}_3} -\frac{1}{2}f \wedge *f \pm \frac{1}{2m}f \wedge df \mp \frac{1}{2m}g \wedge dg. \quad (2.67)$$

Em um procedimento inverso ao da projeção dual, conhecido como “solda” [51, 52, 53], podemos efetuar uma redefinição de variáveis

$$\begin{aligned} f &= \frac{m}{2}(C + B), \\ g &= \frac{m}{2}(C - B). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Observe que sob essa redefinição

$$\int_{\mathcal{M}_3} -\frac{1}{2m}f \wedge df + \frac{1}{2m}g \wedge dg = \frac{1}{2m}(f, *df) - \frac{1}{2m}(g, *dg) = \frac{m}{2}(C, *dB), \quad (2.69)$$

onde usamos o fato de que  $(f, *dg) = (g, *df)$ . A ação portanto fica

$$S_{AD+CS}^{\pm} = -\frac{m^2}{8}(B + C, B + C) \mp \frac{m}{2}(C, *dB). \quad (2.70)$$

Portanto,  $C$  é um campo auxiliar e pode ser eliminado pelas suas equações de movimento

$$\delta_C S_{AD+CS}^{\pm} = -\frac{m^2}{4}(\delta C, B + C) \mp \frac{m}{2}(\delta C, *dB) = 0, \quad (2.71)$$

ou

$$C = -B \mp \frac{2}{m}*dB. \quad (2.72)$$

Substituindo esse resultado na ação ficamos com

$$S_{AD+CS}^{\pm} \rightarrow \int_{\mathcal{M}_3} -\frac{1}{2}dB \wedge *dB \mp \frac{m}{2}B \wedge dB = S_{MCS}^{\mp}. \quad (2.73)$$

Essa ação define o modelo de Maxwell-Chern-Simons ( $MCS$ ) [54, 55]. Acabamos de constatar portanto que esse modelo é equivalente ao modelo  $AD$  [56] desde que ambos sejam definidos em um espaço topologicamente trivial. Em outras palavras, qualquer

informação adicional contida na  $MCS$  em relação a  $AD$  é de caráter puramente topológico. Nesse preciso sentido esses dois modelos são duais. De fato ambas as teorias descrevem um grau de liberdade massivo com massa  $m$  e com spin 1 definido (+1 ou  $-1$ ) de acordo com o sinal do termo de  $CS$ . Conseqüentemente a teoria quebra as simetrias de paridade e inversão temporal. Note que a teoria  $MCS$  possui simetria de calibre (no nível da ação), propriedade essa não compartilhada por sua dual, o modelo  $AD$ . Essa redundância de calibre é precisamente a única informação extra trazida pelo termo de  $CS$  puro nesse caso.

Cabe observar ainda que a dualidade entre a teoria do campo escalar não massivo e a teoria de Maxwell, que ocorre nessa dimensionalidade, segue como caso especial da dualidade  $MCS - AD$  discutida anteriormente. De fato, se  $m \rightarrow 0$ , vemos que (2.73) se reduz à teoria de Maxwell. Do outro lado da dualidade, eq. (2.67), o termo de  $CS$  se tornará singular exceto se  $f \rightarrow d\phi$ , onde  $\phi$  é uma 0-forma, caso em que se anula (o mesmo ocorre para  $g$ ). Portanto a teoria resultante é a teoria do campo escalar dada apenas pelo primeiro termo de (2.67) com  $f = d\phi$ .

A teoria  $MCS$  pode ser vista ainda como uma modificação da teoria de Maxwell. Essa modificação envolve obviamente a quebra das simetrias  $P$  e  $T$ ; de fato a eletrodinâmica quântica em  $3D$  ( $QED_3$ ) com fermions massivos naturalmente viola as simetrias de paridade e inversão temporal. Isso é uma consequência das propriedades dos férmions em  $3D$ . A representação irredutível das matrizes de Dirac em  $3D$  consiste de matrizes  $2 \times 2$  significando que a representação mínima fermiônica é através de spinores de 2 componentes. Fisicamente isso significa que férmions nessa representação mínima têm spin com orientação definida. Em  $4D$ , a representação mínima spinorial possui 4 componentes, o spinor carrega informações sobre o férmion e sua anti-partícula e sobre suas duas orientações possíveis de spin, daí as 4 componentes. Unitariedade demanda que em uma teoria quântica relativística existam anti-partículas e isso não é diferente em  $3D$ , portanto as duas componentes da representação mínima spinorial precisam conter informações sobre as anti-partículas o que não deixa espaço para informações sobre a orientação do spin.

Vamos estudar como esse comportamento fermiônico peculiar se manifesta na  $QED_3$  definida pela ação

$$S_{QED_3} = \int_{\mathcal{M}_3} -\frac{1}{2}dA \wedge *dA - \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \bar{\psi}(\mathcal{D} + M)\psi, \quad (2.74)$$

onde  $\mathcal{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)$  é o operador de Dirac,  $A_\mu$  são as componentes do potencial eletromagnético  $A$ ;  $e$  e  $M$  são a carga e a massa do férmion respectivamente e  $\psi$  é um spinor de 2 componentes, com  $\bar{\psi} = \psi^\dagger i\gamma^0$ . A carga elétrica tem dimensão de massa  $= \frac{1}{2}$ . As matrizes de Dirac são definidas como um conjunto de matrizes  $(2 \times 2)$  linearmente independentes que satisfazem  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ ,  $[g_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, +1, +1)$ . Uma representação possível em termos das matrizes de Pauli é

$$\gamma^0 = -i\sigma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = -\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Sob a transformação de paridade e inversão temporal definidas em (2.57), o termo de massa fermiônico se transforma como

$$P : \bar{\psi}\psi \rightarrow -\bar{\psi}\psi, \quad (2.76)$$

$$T : \bar{\psi}\psi \rightarrow -\bar{\psi}\psi. \quad (2.77)$$

Essas são exatamente as mesmas transformações do termo de  $CS$  e exatamente por isso a teoria  $MCS$  é uma teoria efetiva para a  $QED_3$ . A origem física da quebra de  $P$  e  $T$  é muito clara. Em geral o operador momento angular pode ser escrito como a soma direta de uma parte orbital e uma parte representando o momento angular interno (o spin; responsável pelas possíveis transformações não triviais sob rotação da “estrutura interna” da partícula). Atuando em um estado de uma partícula, convenientemente expresso na representação dos momentos,  $J^\mu$  tem a forma geral

$$J^\mu = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho} p_\nu \frac{\partial}{\partial p^\rho} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes i\hat{\lambda}^\mu, \quad (2.78)$$

onde  $\hat{\lambda}^\mu$  representa a atuação nas componentes internas do estado de uma partícula. No caso do férmion temos

$$i\hat{\lambda}^\mu \rightarrow \frac{1}{2}\sigma^3, \quad (2.79)$$

e portanto a densidade de spin é dada por

$$\frac{1}{2}\psi^\dagger\sigma^3\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi, \quad (2.80)$$

ou seja, o termo de massa é proporcional à densidade de spin e portanto, como  $T$  e  $P$  invertem o spin, essa é a razão da quebra dessas simetrias. Uma vez que definimos o sinal da massa definimos uma orientação fixa para o spin.

A ação de  $MCS$  surge então como uma teoria efetiva em baixas energias da  $QED_3$ . A teoria efetiva é construída considerando férmions muito massivos de forma que estados fermiônicos não façam parte do conjunto de estados assintóticos da teoria. No entanto sua contribuição não é apagada completamente pois flutuações quânticas fermiônicas precisam ser levadas em consideração. Matematicamente estamos apenas descrevendo o processo de integrar os férmions na integral funcional e considerar apenas contribuições de mais baixa ordem em uma expansão no inverso da massa fermiônica. A ação efetiva é dada por

$$e^{iS_{eff}(A)} = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-i\int_{\mathcal{M}_3} d^3x \bar{\psi}(\not{D}+M)\psi} = \det(\not{D}+M), \quad (2.81)$$

onde possíveis fatores de normalização foram omitidos. O determinante fermiônico é uma soma de contribuições de 1-loop fermiônico com inserções de campos externos  $A$ . Esquemáticamente

$$\begin{aligned} S_{eff}(A) &= -i \ln \det(\not{D}+M) = -i Tr \ln(\not{D}+M) \\ &= -i Tr \ln(\not{\partial}+M) - i Tr \left( \frac{1}{\not{\partial}+M} ie\mathcal{A} \right) \\ &\quad - \frac{i}{2} Tr \left( \frac{1}{\not{\partial}+M} ie\mathcal{A} \frac{1}{\not{\partial}+M} ie\mathcal{A} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde o símbolo  $Tr$  significa uma integral sobre os momentos e o traço sobre as matrizes de Dirac. O primeiro termo na expansão não depende de  $A$  e pode ser absorvido na definição da ação efetiva, o segundo termo é tipo tadpole e se anula ao integrar sobre os momentos, o terceiro termo é quadrático em  $A$  e vai fornecer o termo de  $CS$  além de uma renormalização de ordem  $\frac{1}{M}$  no termo  $F^2$ . Todas as contribuições codificadas em

... são de ordem superior em  $\frac{1}{M}$ . Portanto a única contribuição de ordem mais baixa de fato é o termo de  $CS$ . Podemos fazer o cálculo explícito e determinar o coeficiente do termo<sup>1</sup> mas como a carga elétrica tem dimensão de  $massa = \frac{1}{2}$  vemos imediatamente que, a menos de uma constante numérica de ordem 1, o termo de  $CS$  obtido desse cálculo será

$$S_{eff}(A) \simeq e^2 \frac{M}{|M|} \int A \wedge dA. \quad (2.83)$$

Um fato interessante é que mesmo se a massa dos férmions for nula ocorrerá uma violação de  $T$  e  $P$  devido a efeitos quânticos. Esse fenômeno é denominado anomalia de paridade [57, 58] e tem origem no fato de que a teoria com férmions de massa nula não é bem definida no infra-vermelho e precisa ser regularizada. Ao considerar a contribuição dos férmions através do cálculo do determinante fermiônico não é possível manter a simetria de paridade e a simetria de calibre num mesmo processo de regularização. Como o determinante codifica a contribuição da dinâmica fermiônica, a simetria de calibre tem que ser preservada pois nada mais é que uma redundância na escolha de variáveis e nenhum processo físico pode influir nisso. A regularização de Pauli-Villars é então adotada pois preserva simetria de calibre. Essa regularização consiste na introdução de graus de liberdade fermiônicos muito massivos que no final dos cálculos são desacoplados da teoria fazendo a massa tender ao infinito tornando-os dinamicamente inertes. O curioso é que nesse processo um termo sobrevive proporcional ao sinal da massa e ao quadrado da carga elétrica, esse é o termo de CS (2.83).

---

<sup>1</sup>faremos explicitamente um cálculo semelhante mais a frente em um sistema em  $2D$

# Capítulo 3

## Modelos confinantes e defeitos

### 3.1 Introdução

Neste capítulo nós vamos estudar diversos modelos que apresentam o fenômeno do confinamento. Sugerimos que o regime confinante seja caracterizado pelo que denominamos de *quebra espontânea da simetria de brana*. Este fenômeno é induzido pelo processo de proliferação de defeitos no sistema. Desenvolveremos um formalismo para descrever este processo que generaliza a prescrição de Julia-Toulouse, introduzido originalmente como o dual do mecanismo de Higgs. A generalização que propomos torna possível a aplicação desta prescrição para condensados mais gerais que violam simetrias espaço-temporais. Isso nos permitirá abordar o problema da definição de defeitos magnéticos na presença do termo de  $CS$  em  $(2 + 1)D$ .

A seguir discutiremos primeiramente o modelo do supercondutor. Comentaremos os aspectos físicos do supercondutor que conduzem naturalmente à presença de vórtices, que surgem como defeitos topológicos no sistema. Estes vórtices constituem a base para a construção da corda confinante responsável pelo potencial linear entre monopolos estáticos imersos no supercondutor. Calcularemos explicitamente este potencial para o modelo de Higgs abeliano. Discutiremos então a importante relação entre fluxos magnéticos e correntes elétricas que são representações “duais”, conectadas pela fórmula de Poisson, caracterizando um mesmo estado físico de um sistema. Este estado físico forma a ponte entre o estado diluído e o estado condensado. Estas observações

fundamentam nossa generalização da prescrição de Julia-Toulouse. A seguir apresentaremos a formulação da prescrição de Julia-Toulouse já nesta linguagem mais geral discutindo seu papel como um gerador de modelos. Finalmente vamos estudar modelos em  $(2 + 1)D$ . Começaremos revisando o modelo de Polyakov da  $QED$  compacta atendendo agora para os conceitos introduzidos e discutidos anteriormente. Vamos mostrar em particular como a prescrição de Julia-Toulouse se manifesta neste caso. Mostraremos ainda que a prescrição de Julia-Toulouse generalizada encontra uma aplicação natural no estudo de estados hierárquicos do efeito Hall quântico fracionário. Por último discutiremos a teoria topologicamente massiva de  $MCS$  argumentando que assim como em outros exemplos estudados anteriormente, este modelo exhibe confinamento devido à quebra espontânea da simetria de brana.

## 3.2 O modelo de Ginzburg-Landau

Nesta seção vamos discutir o fenômeno da supercondutividade apontando sua importância para o entendimento fenomenológico do confinamento. Como ocorre com qualquer sistema termodinâmico, o fenômeno da supercondutividade pode ser caracterizado efetivamente por certas variáveis macroscópicas. Uma propriedade muito curiosa deste sistema é que além das variáveis mais comuns, como por exemplo temperatura e pressão, o supercondutor é caracterizado por um campo escalar complexo. De forma análoga a temperatura e a pressão, que são manifestações efetivas de propriedades microscópicas, o campo escalar também tem origem microscópica na bem estabelecida teoria  $BCS$  de Bardeen, Cooper e Schrieffer [59, 60, 61] e constitui uma representação efetiva dos pares de Cooper. A discussão a seguir é baseada principalmente em [62] e [63].

O estado supercondutor se estabelece quando as seguintes condições se tornam favoráveis energeticamente:

$$|\phi| = v, \tag{3.1}$$

$$d_A \phi \equiv d\phi - ieA\phi = 0, \tag{3.2}$$

onde  $\phi$  é o campo escalar complexo que caracteriza o condensado de pares de Cooper,  $v$  é uma constante real positiva determinada em função das propriedades do material supercondutor e da temperatura,  $e$  é a carga do par de Cooper (= 2 vezes a carga do elétron) e  $A$  é o potencial eletromagnético. A equação (3.1) significa que o estado supercondutor é um estado coerente de pares de Cooper, um condensado elétrico.

Um dos fenômenos mais característicos de um supercondutor é o *efeito Meissner*. Este efeito segue como consequência imediata do fato de que  $\phi \neq 0$  e  $d_A\phi = 0$  em um supercondutor,

$$d_A\phi = 0 \Rightarrow d_A^2\phi = -ie\phi dA - ied\phi \wedge A - ieA \wedge d\phi = -ie\phi F = 0, \quad (3.3)$$

onde  $F = dA$ . Ou seja,  $F$  será nulo sempre que  $\phi \neq 0$ . É esta propriedade que torna os supercondutores tão especiais. Em um condutor perfeito apenas o campo elétrico é nulo mas em um supercondutor o campo eletromagnético total se anula.

Este efeito é consequência de um balanço energético e pode ser violado se o campo eletromagnético for muito intenso. Para entender isso de forma mais precisa vamos considerar o sistema em um regime estacionário de forma que o campo eletromagnético tenha apenas a contribuição magnética. Podemos escrever a forma mais simples do funcional de energia que favorece a configuração dada pelas equações (3.1) e (3.2)

$$E[\phi, A] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left( \frac{1}{2} \vec{B}^2 + \frac{1}{2} |\partial_i\phi - ieA_i\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2 \right), \quad (3.4)$$

onde  $i = x, y, z$  e acrescentamos a contribuição usual da energia magnética. Este funcional define o que é conhecido como modelo de *Ginzburg-Landau* [64, 65]. Certamente poderíamos propor outras estruturas mais complicadas para descrever o supercondutor. Desde que tenham como mínimo as equações (3.1) e (3.2) todos esses modelos resultariam na supercondutividade.

O efeito Meissner pode ser visto como uma competição energética entre o campo magnético e o condensado de Cooper. Em (3.4) um parâmetro  $\lambda$  arbitrário foi introduzido. Este deve ser obtido experimentalmente. Este parâmetro representa uma informação extra introduzida pela formulação via funcional de energia. A informação

é justamente sobre o peso energético relativo das contribuições magnética e do condensado. Mais precisamente, vimos pela (3.3) que se  $\phi \neq 0$  o campo magnético se anula no supercondutor. O custo energético para expulsar o campo  $\vec{B}$  do supercondutor é da ordem de  $\frac{V}{2}\vec{B}^2$  onde  $V$  é o volume da amostra supercondutora. Segue ainda que a única forma de ter um campo magnético não-nulo dentro da amostra é se  $\phi = 0$  e o custo energético desta condição é  $\frac{V}{4}\lambda v^4$ . Podemos concluir portanto que o efeito Meissner irá ocorrer se  $|\vec{B}| < |\vec{B}_c| = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}v^2$ .

Mas o que acontece se  $|\vec{B}| > |\vec{B}_c|$ ? Neste caso o efeito Meissner deixa de ocorrer e o campo magnético é capaz de penetrar na amostra. No entanto, isso não necessariamente implica a destruição total da fase supercondutora pois existe a possibilidade de que  $\phi = 0$  apenas em alguns pontos. A questão é se esta possibilidade representa uma configuração energeticamente finita e estável, ou seja, se esta configuração é uma solução das equações que minimizam o funcional (3.4). Para que a energia seja finita, o integrando em (3.4) deve se anular assintoticamente. Portanto as equações (3.1) e (3.2) devem ser satisfeitas no infinito. A equação (3.1) nos diz que  $\phi \rightarrow ve^{i\theta(x)}$  no infinito enquanto a equação (3.2) determina  $A$  em função de  $\phi$ . O infinito de  $\mathbb{R}^3$  é a esfera  $S^2$  e portanto o campo  $\phi$  estabelece um mapa  $S^2 \rightarrow U(1)$  com  $U(1)$  parametrizado por  $\theta$ . Este mapa pertence a classe de homotopia  $\Pi_2(U(1)) = 0$  cujo único elemento é o mapa trivial. Uma vez que o funcional de energia não diferencia os elementos da classe a única solução possível é o vácuo neste caso.

Observe que estamos efetivamente considerando um sistema de volume infinito e por isso a condição de energia finita se traduz no comportamento assintótico dos campos que acabamos de discutir. No entanto é mais realista exigir apenas que as densidades de energia se mantenham finitas no limite termodinâmico de volume infinito. Com isso em mente podemos de fato obter um resultado mais interessante. Considere uma configuração invariante por translações em uma determinada direção, digamos, a direção  $z$ . Neste caso os campos não dependem da coordenada  $z$  e ficamos com uma densidade

linear de energia dada por

$$\mathcal{E}[\phi, A] = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left( \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} |\partial_a \phi - ie A_a \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - v^2)^2 \right), \quad (3.5)$$

onde  $a = x, y$  e  $B = B_z$ . Agora o infinito espacial é  $S^1$  e o campo assintótico  $\phi \rightarrow v e^{i\theta(x)}$  estabelece um mapa  $S^1 \rightarrow U(1)$  cujo grupo de homotopia  $\Pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$  é não trivial. Os diferentes mapas neste grupo são diferenciados pelo número de voltas que um círculo  $S^1$  pode dar ao ser “enrolado” no outro círculo  $U(1) = S^1$  (winding number). Mapas com diferentes winding numbers não podem ser deformados um no outro e pertencem a classes diferentes. As soluções então podem ser rotuladas por números inteiros. A equação (3.2) nos diz que no infinito  $S^1$  devemos ter

$$A = -\frac{i}{ev^2} \bar{\phi} d\phi \rightarrow A_a = \frac{1}{e} \partial_a \theta, \quad (3.6)$$

onde  $\bar{\phi}$  é o complexo conjugado de  $\phi$ . Segue que

$$\int d^2x B = \int_{S^1} A = \frac{2\pi}{e} n; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

A configuração que estamos procurando portanto possui um fluxo magnético ao longo da direção  $z$  cujo fluxo por uma seção perpendicular é quantizado por números inteiros que classificam as diferentes classes de homotopia. Observe que este fluxo é exatamente o produzido por monopolos de Dirac obedecendo a condição de quantização (2.41).

O comportamento assintótico discutido acima indica que as soluções não-triviais que procuramos podem ser detectadas em grandes distâncias por fluxos magnéticos não nulos, sinalizando o fato de que estas soluções representam vórtices no condensado. Estes vórtices são conhecidos como *vórtices de Abrikosov* [66, 67]. Obviamente no centro do vórtice, onde se localiza o campo magnético,  $\phi = 0$ . Para uma solução tipo vórtice podemos ainda impor simetria de rotação em torno do eixo  $z$  e eliminar mais uma coordenada de forma que os campos só dependam da coordenada radial  $r^2 = x^2 + y^2$ . Uma possível maneira de parametrizar as soluções tipo vórtice é definindo o ansatz (para  $n = 1$ ):

$$\phi(r) = v h(r) e^{i\theta}; \quad A_a = \frac{1}{e} \partial_a \theta f(r), \quad (3.8)$$

onde  $h(r)$  e  $f(r)$  são funções a serem determinadas numericamente. Estas funções se anulam em  $r \rightarrow 0$  e tendem a 1 em  $r \rightarrow \infty$ . Em termos destas variáveis o funcional densidade de energia fica:

$$\mathcal{E}[h, f] = 2\pi \int dr r \left[ \frac{1}{2e^2} \frac{1}{r^2} \left( \frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{v^2}{2} \left( \left( \frac{dh}{dr} \right)^2 + \frac{h^2(1-f)^2}{r^2} \right) + \frac{\lambda v^4}{4e^2} (h^2 - 1)^2 \right] \quad (3.9)$$

Vamos considerar dimensões canônicas para os campos de forma que  $A$  e  $\phi$  tenham dimensão de  $massa = 1$ , dessa forma o único parâmetro dimensional é  $v$  com dimensão de  $massa = 1$ . Podemos colocar a expressão acima numa forma mais conveniente definindo a variável adimensional  $s = evr$ :

$$\mathcal{E}[h, f] = \pi v^2 \int ds s \left[ \frac{1}{s^2} \left( \frac{df}{ds} \right)^2 + \left( \left( \frac{dh}{ds} \right)^2 + \frac{h^2(1-f)^2}{s^2} \right) + \frac{\lambda}{2e^2} (h^2 - 1)^2 \right] \quad (3.10)$$

$$= v^2 \kappa, \quad (3.11)$$

onde  $\kappa$  é um número positivo adimensional determinado pelas soluções  $h$  e  $f$  e pelas propriedades do material supercondutor codificados no parâmetro  $\frac{\lambda}{e^2}$ . A expressão acima mostra que este é o único parâmetro relevante para a descrição do sistema.

Para entender o significado deste parâmetro é interessante estudar o comportamento do supercondutor nas vizinhanças de um vórtice. Como  $F = 0$  no supercondutor,  $A$  é equivalente por transformações de calibre a  $A = 0$  e podemos escolher o calibre tal que esta condição seja satisfeita. Neste calibre  $\phi$  é constante e podemos escolher ainda  $\phi = v$ , por uma transformação global da fase (uma transformação de calibre adicional que mantém  $A = 0$ ). O comportamento próximo ao vórtice pode ser analisado perturbando esta solução; escrevendo  $\phi = v + \rho$  e considerando a energia em ordem mais baixa em  $\rho$  e  $A$ . A energia toma a forma

$$E[\phi, A] \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left( \frac{1}{2} \vec{B}^2 + \frac{v^2 e^2}{2} \vec{A}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \rho)^2 + v^2 \lambda \rho^2 \right), \quad (3.12)$$

que nos diz que as excitações associadas a  $A$  e  $\rho$  são massivas com massas  $M_A = ve$  e  $M_\rho = \sqrt{2\lambda}v$  respectivamente. Vemos então que o parâmetro que figura em (3.10) está relacionado com a razão destas massas:

$$\frac{M_\rho^2}{M_A^2} = \frac{2\lambda}{e^2}. \quad (3.13)$$

O comportamento do supercondutor para  $|\vec{B}| > |\vec{B}_c|$  pode ser caracterizado pela sua resposta à configuração de vórtices. O parâmetro  $\frac{M_\rho}{M_A}$ , sendo adimensional, sugere que algo especial aconteça quando  $\frac{M_\rho}{M_A} = 1$ , de fato este é o ponto que marca a diferença entre um supercondutor tipo I e um supercondutor tipo II [67] (veja também o Cap 21.6 de [68]). Para um supercondutor tipo I,  $M_\rho < M_A$  e é possível mostrar que neste caso os vórtices se atraem. Como consequência da atração entre os vórtices rapidamente se forma uma região macroscópica com  $\phi = 0$  e a fase supercondutora é destruída. Num condutor tipo II, no entanto, temos  $M_A < M_\rho$  e os vórtices se repelem. Para um campo suficientemente forte a supercondutividade também será destruída mas neste caso é possível que uma configuração estável se estabeleça e o estado supercondutor seja mantido na amostra exceto no centro dos tubos de fluxo que terão uma espessura da ordem de  $\frac{1}{M_\rho}$ .

Voltando à expressão (3.10), vemos portanto que em um supercondutor a energia de um vórtice é dada por

$$E = \sigma L, \tag{3.14}$$

onde  $L$  é o comprimento do tubo de fluxo.  $\sigma = v^2\kappa$  é um número real positivo e pode ser interpretado como a tensão da corda representando o tubo em um limite em que sua espessura é desprezível. Este comportamento da energia é característico de um estado confinante. Mas neste caso o que está sendo confinado? Comentamos acima que o fluxo magnético no tubo de fluxo é exatamente o produzido por um monopolo magnético. Imagine que este de fato seja o caso, ou seja, que temos um monopolo com carga  $g$  e um antimonopolo com carga  $-g$  ambos imersos num supercondutor. Pelo que acabamos de discutir a configuração energeticamente favorável é a formação de um tubo de fluxo magnético conectando os dois monopolos que passam a interagir com uma energia proporcional à distância entre eles e isso define o que chamamos de *confinamento*.

Este mecanismo de confinamento foi primeiramente proposto por Nambu [69], 't Hooft [70, 71] e Mandelstan [72, 73, 74] (veja [75] para uma revisão) que introduziram a

idéia de que o vácuo da QCD no regime de baixas energias seria um estado supercondutor dual, ou seja, um estado com um condensado não nulo de cargas (cromo-)magnéticas. A inserção de cargas com cor neste condensado cria tubos de fluxo (cromo-)elétricos (“efeito Meissner dual”) confinando as cargas. Esta formulação é exatamente o que fizemos acima para o supercondutor usual, apenas trocando os rótulos: elétrico  $\leftrightarrow$  magnético. Obviamente isto é fundamentado na dualidade eletromagnética que discutimos no Cap. 2.

Um fato interessante e potencialmente revelador é que todos os cenários que admitem uma descrição analítica do confinamento envolvem o comportamento coletivo de excitações magnéticas, seja em forma de um gás ou de um condensado. Isso ocorre também no modelo de Polyakov em 3D [76, 77, 78], que discutiremos mais à frente, e ainda no modelo de Yang-Mills superssimétrico  $\mathcal{N} = 2$  de Seiberg e Witten [14]. Veremos ainda que conclusões similares são obtidas em teorias envolvendo o termo de  $CS$  [79].

Este cenário de confinamento é necessariamente abeliano. De fato a própria definição dos monopolos só faz sentido em um contexto abeliano. Mesmo os monopolos de 't Hooft-Polyakov [80, 81] do modelo de Georgi-Glashow (um modelo não-abeliano), que são nada mais que soluções clássicas semelhantes à que discutimos acima para os vórtices, só se revelam como monopolos no limite infra-vermelho (IV) de longas distâncias onde podemos definir uma estrutura abeliana e detectar os monopolos através de seus fluxos magnéticos. Fluxo este definido com o auxílio de um campo magnético efetivo construído com os campos da teoria. A QCD é uma teoria não-abeliana. O que sustenta a aplicabilidade destas idéias à QCD é a hipótese da dominância abeliana. Um dos métodos mais eficientes para revelar os monopolos de uma teoria não-abeliana é o método da projeção abeliana [163, 164] cuja idéia é fixar o calibre da teoria original (não-abeliana) reduzindo-a ao seu subgrupo maximal abeliano e eliminar os campos de calibre não-diagonais. A teoria resultante dessa projeção abeliana contém os monopolos necessários para o confinamento. Dominância abeliana é a hipótese de que a teoria resultante da projeção abeliana contém toda informação relevante ao problema

do confinamento de forma que este seria um problema essencialmente abeliano estando mais relacionado com a estrutura topológica da teoria caracterizada pela presença de defeitos. Essa hipótese vem sendo confirmada por cálculos numéricos na rede [82, 83]. Uma pequena revisão da idéia de projeção abeliana se encontra no apêndice B.

### 3.2.1 O potencial confinante

Vimos que a existência das soluções tipo vórtice no modelo de Ginzburg-Landau que acabamos de discutir resulta da relação entre a topologia do espaço assintótico e o grupo de simetria no infravermelho. Neste caso o grupo de simetria no infravermelho resultou ser o grupo  $U(1)$  pois exigimos apenas que as equações (3.1) e (3.2) fossem satisfeitas assintoticamente e estas equações são invariantes por transformações  $\phi \rightarrow e^{i\chi}\phi$  e  $A \rightarrow A + \frac{1}{e}d\chi$ . Ou seja, o vácuo da teoria é uma variedade topologicamente equivalente a  $U(1) = S^1$ . Pelo fato do espaço assintótico, do ponto de vista do funcional densidade de energia, ser também topologicamente equivalente a  $S^1$  fomos capazes de inferir que existe uma solução topologicamente estável classificada pelas classes de homotopia  $\Pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ . Estas considerações são de fato bem gerais. Em uma teoria qualquer, os diferentes vácuos podem ser conectados por transformações geradas por um grupo de simetria  $G$ , mas em uma situação geral pode ocorrer a quebra da simetria para um subgrupo  $H$  na região de baixas energias da teoria. O vácuo será invariante por  $H$  e conseqüentemente o espaço do vácuo será homeomórfico a  $G/H$ . Os possíveis defeitos serão então classificados pelos grupos de homotopia  $\Pi_n(G/H)$ . O índice  $n$  nesta expressão se refere a espaços assintóticos topologicamente equivalentes a esfera  $S^n$ . Se estes grupos forem não triviais então existe a possibilidade de encontrar soluções que podem ser identificadas pelos fluxos não nulos que produzem através das superfícies  $S^n$  que englobam os defeitos (para discussões gerais sobre estes argumentos veja por exemplo [84, 85, 160, 164]).

No infravermelho essas soluções clássicas se apresentam como objetos sem estrutura interna correspondendo a singularidades no espaço e são representadas pelas  $p$ -correntes que discutimos no capítulo anterior. Vamos agora voltar ao nosso exemplo do super-

condutor e escrever uma teoria efetiva para o limite IV. Observe que a energia (3.4) pode ser vista tanto no contexto de um sistema termodinâmico descrevendo um estado estacionário a temperatura finita ou simplesmente como o limite estático de uma teoria definida no espaço-tempo em  $4D$ . Se este espaço-tempo tem métrica de Minkowski o sistema é conhecido como o modelo de *Higgs abeliano*. No caso termodinâmico o limite IV corresponde ao limite de baixas temperaturas. Consideraremos nesta argumentação inicial a extensão relativística dada pelo modelo de Higgs por ser mais geral. Considere então o modelo de Higgs definido pela ação (com métrica  $(-, +, +, +)$ )

$$S_{Higgs} = \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} dA \wedge *dA - \frac{1}{2} d_A \phi \wedge * \overline{d_A \phi} - \frac{\lambda}{4} (\phi \overline{\phi} - v^2) \wedge *(\phi \overline{\phi} - v^2) \right). \quad (3.15)$$

Queremos analisar o limite de baixas energias deste modelo. Este limite corresponde a considerar uma escala de energia na qual as excitações correspondentes ao módulo do campo  $\phi$  estão congeladas, ou seja, somente a fase do campo flutua. De forma equivalente vamos estudar o sistema no *limite de London* definido por  $\lambda \rightarrow \infty$ , ou mais precisamente  $M_\rho \gg M_A$ . Desta forma  $|\phi| = v$  é uma constante e a derivada covariante fica

$$d_A \phi = i v e^{i\theta} (d\eta - eA + 2\pi n^* \Lambda), \quad (3.16)$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta$  é a parte regular do ângulo  $\theta$ , enquanto  $*\Lambda$  codifica o fato de  $\theta$  ser multivalente. Mais precisamente,  $\Lambda$  é uma 3-corrente Poincaré dual a uma 3-superfície normalizada tal que a intersecção desta superfície com o infinito  $S^1$  é

$$\int_{S^1} *\Lambda = 1. \quad (3.17)$$

Isto corresponde ao fato de que no infinito, onde  $d_A \phi = 0$ , recuperamos o vácuo com fluxos não triviais (3.7). A ação efetiva tem a forma

$$S_{eft} = \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} dA \wedge *dA - \frac{v^2}{2} (d\eta - eA + 2\pi n^* \Lambda) \wedge *(d\eta - eA + 2\pi n^* \Lambda) \right). \quad (3.18)$$

Claramente  $*\Lambda$  representa a contribuição dos vórtices do sistema. Esta é uma informação externa, a definição precisa da configuração de vórtices deve ser feita baseada

em informações extras a respeito do estado do sistema. É importante notar que  $*\Lambda$  está associado apenas a linhas de fluxo fechadas; de fato o fluxo magnético descrito por  $*\Lambda$  é proporcional à  $d*\Lambda$  e portanto, como  $d^2 = 0$ , as linhas de fluxo são fechadas. Se existem vários vórtices devemos considerar uma soma de termos deste tipo, possivelmente com diferentes winding numbers. A função partição deve conter uma soma sobre todas as configurações do sistema e é portanto dada por

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathcal{C}_3\}} \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\eta e^{iS_{eff}}, \quad (3.19)$$

onde  $\mathcal{C}_3$  é tal que  $\mathbf{P}(\mathcal{C}_3) = *\Lambda$ . Na presente formulação nós exploramos ao máximo a liberdade em definir a soma sobre  $\mathcal{C}_3$  e, conseqüentemente, a configuração de vórtices do sistema. Neste sentido, devemos olhar para esta soma como uma forma de parametrizar a condensação elétrica: se o número de vórtices se anula temos um estado supercondutor perfeito, por outro lado se os vortices se proliferam a supercondutividade é destruída. Esta informação será deixada em aberto e estará codificada na definição da soma. Observe que  $A$  e  $\eta$  podem ser combinados na redefinição de um novo campo  $B = A - \frac{1}{e}d\eta$  massivo. Esta é a forma mais precisa do fenômeno da quebra espontânea da simetria de calibre. Note que a simetria não foi de fato quebrada e nem poderia [86] (para uma discussão recente neste sentido veja [87]), o que aconteceu simplesmente é que as variáveis não invariantes de calibre  $A$  e  $\eta$  não são as mais convenientes para descrever o sistema nesta escala de energia sendo mais conveniente a introdução de um campo construído como uma combinação invariante de calibre de  $A$  e  $\eta$ ; sob uma transformação de calibre  $A \rightarrow A + \frac{1}{e}d\chi$  e  $\eta \rightarrow \eta + \chi$  de forma que  $B \rightarrow B$ . Portanto podemos escrever:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathcal{C}_3\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2}dB \wedge *dB - \frac{e^2 v^2}{2} (B - \frac{2\pi n}{e} *\Lambda) \wedge * (B - \frac{2\pi n}{e} *\Lambda) \right)}, \quad (3.20)$$

que descreve um ensemble de loops de fluxo magnético em um supercondutor.

Vimos que os monopolos imersos num supercondutor estão confinados. Vamos entender agora como isso acontece de forma um pouco mais precisa. Vamos inserir um par monopolo-antimonoplo externo, estacionário (cargas de prova), no sistema e calcular a energia estática associada a esta configuração. A presença destes monopolos perturba

o sistema e para calcular a variação na energia associada a esta perturbação podemos usar o seguinte raciocínio: a amplitude de transição do estado de vácuo antes da inserção dos monopolos, que ocorre no instante  $-\frac{T}{2}$ , para o estado de vácuo depois da destruição dos monopolos, no instante  $\frac{T}{2}$ , pode ser expressa como uma soma coerente das probabilidades do estado do par de monopolos ser encontrado com energia  $E_n$  em relação ao estado sem monopolos. Explicitamente, se  $\Phi$  é o operador de criação do par monopolo-antimonopolo, temos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi^\dagger \left( \frac{T}{2} \right) \Phi \left( -\frac{T}{2} \right) | 0 \rangle &= \langle 0 | \Phi^\dagger(0) e^{-i\hat{H}T} \Phi(0) | 0 \rangle \\ &= \sum_n |\langle n | \Phi | 0 \rangle|^2 e^{-iE_n T}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $\hat{H}$  é o operador Hamiltoniano do sistema na presença do par monopolo-antimonopolo e na passagem para a segunda linha inserimos a relação de completude para os autoestados  $|n\rangle$  do Hamiltoniano.  $E_n$  representa a diferença de energia entre o  $n$ -ésimo estado excitado do sistema na presença dos monopolos e a energia do vácuo (sem monopolos) codificada em um fator de normalização omitido na expressão acima. A superposição ocorre pois a presença dos monopolos apenas por um instante de tempo  $T$  é visto como uma perturbação do sistema sem monopolos. Para que o estado do sistema com monopolos possa ser considerado um estado estacionário (o vácuo do novo sistema) devemos fazer  $T \rightarrow \infty$ . Assim todos os estados excitados podem ser desprezados e ficamos apenas com o estado fundamental  $E_0$  que é a diferença entre o vácuo do sistema com monopolos e o vácuo do sistema sem monopolos (para ser mais preciso, uma vez que o objetivo é simplesmente evidenciar o estado fundamental, este raciocínio envolve formular a teoria no espaço euclidiano, tomar o limite indicado e então retornar ao espaço de Minkowski, mas podemos considerar isso subentendido):

$$\langle 0 | \Phi^\dagger \left( \frac{T}{2} \right) \Phi \left( -\frac{T}{2} \right) | 0 \rangle \sim e^{-iE_0 T}; \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.22)$$

A energia  $E_0$  deve conter a informação sobre a energia de interação entre os monopolos estáticos. Nosso objetivo a seguir será determinar esta energia.

O lado esquerdo da expressão (3.22) operacionalmente representa a função partição calculada com inserções de monopolos. Como vimos no Cap. 2, monopolos são percebidos pelo campo eletromagnético como defeitos, portanto eles só podem ser inseridos nesta representação através de suas cordas de Dirac por meio de um acoplamento não mínimo como em (2.37). Concluímos portanto que para  $T \rightarrow \infty$

$$e^{-iE_0T} = \sum_{\{C_3\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (dB + g^* \Sigma_g) \wedge^* (dB + g^* \Sigma_g) - \frac{e^2 v^2}{2} (B - \frac{2\pi n}{e} * \Lambda) \wedge^* (B - \frac{2\pi n}{e} * \Lambda) \right)} \quad (3.23)$$

$$= \mathcal{Z}(J_g), \quad (3.24)$$

onde  $*J_g = d^* \Sigma_g$  é a corrente de monopolos. Observe que a simetria de brana

$$* \Sigma_g \rightarrow * \Sigma_g + d^* \Lambda_g; \quad (3.25)$$

$$B \rightarrow B - g^* \Lambda_g, \quad (3.26)$$

precisa ser mantida. Isso constitui um vínculo físico em nosso sistema. A soma que define o ensemble de loops de fluxo tem que ser tal que todas as configurações da corda de Dirac  $* \Sigma_g$  que podem ser alcançadas pelas transformações (3.25), (3.26) estão contidas no ensemble. Esta é uma consequência da perturbação externa introduzida pelos monopolos. Desta forma a simetria de brana será mantida graças ao ensemble de loops de fluxos magnéticos se  $g = \frac{2\pi n}{e}$ . Esta é a razão da notação  $\mathcal{Z}(J_g)$  explicitando o fato de que este funcional depende apenas de  $J_g$  e não de  $\Sigma_g$ . Cabe observar que esta é ainda outra maneira de deduzir a quantização de Dirac (2.41), que surge aqui como uma condição de consistência da formulação. Podemos explicitar a invariância de brana deslocando o campo  $B$

$$B \rightarrow B + \frac{2\pi n}{e} * \Lambda, \quad (3.27)$$

resultando em

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum_{\{C_3\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (dB + g(* \Sigma_g + d^* \Lambda)) \wedge^* (dB + g(* \Sigma_g + d^* \Lambda)) - \frac{e^2 v^2}{2} B \wedge^* B \right)}, \quad (3.28)$$

com  $g = \frac{2\pi n}{e}$ . Desta forma podemos ser um pouco mais precisos sobre a definição do ensemble de loops neste caso. Na presença de monopolos externos a condensação elétrica

é no máximo capaz de expulsar (através do efeito Meissner) aquelas configurações de fluxos fechados que são desconexas da corda de Dirac. Uma vez que as únicas configurações que sobram no estado condensado são os loops conexos com a corda, a soma sobre as 3-superfícies  $\mathcal{C}_3$ , Poincaré duais às 3-correntes  $\Lambda$ , tem o papel de varrer todas as superfícies  $\Sigma_g$  vinculadas por  $*J_g = d*\Sigma_g$  e podemos então substituir, a menos de uma possível constante de normalização,

$$\sum_{\{\mathcal{C}_3\}} \rightarrow \sum'_{\{\mathcal{B}_2\}}, \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{P}(\mathcal{B}_2) = *\tilde{\Sigma}_g \equiv *\Sigma_g + d*\Lambda$  e a notação ( $'$ ) na soma indica que esta soma é vinculada, ou seja, que esta é uma soma sobre superfícies abertas que possuem como borda as linhas de mundo do monopolo e antimonopolo. Temos então a forma equivalente

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{\mathcal{B}_2\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (dB + g*\tilde{\Sigma}_g) \wedge (dB + g*\tilde{\Sigma}_g) - \frac{e^2 v^2}{2} B \wedge *B \right)}. \quad (3.30)$$

Nesta expressão  $\tilde{\Sigma}_g$  é um invariante de brana. Desta forma, a simetria de brana é preservada mas não é manifesta, em exata analogia com o que ocorre com a simetria de calibre. Portanto dizemos que ocorreu uma *quebra espontânea da simetria de brana*. O campo  $B$  aparece numa estrutura gaussiana, portanto sua integração é equivalente a substituir seu valor no ponto estacionário. A equação de movimento de  $B$  é

$$(\Delta + e^2 v^2)B = -gd^\dagger *\tilde{\Sigma}_g, \quad (3.31)$$

onde  $\Delta = -\square = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  no espaço de Minkowski com métrica  $(-, +, +, +)$ . Substituindo esta configuração no funcional, obtemos, a menos de constantes de normalização

$$\mathcal{Z}(J_g) = e^{-\frac{i}{2} \int_{\mathcal{M}_4} *J_g \wedge \left( \frac{g^2}{(\Delta + e^2 v^2)} \right) J_g} \sum'_{\{\mathcal{B}_2\}} e^{\frac{i}{2} \int_{\mathcal{M}_4} *\tilde{\Sigma}_g \wedge \left( \frac{g^2 e^2 v^2}{(\Delta + e^2 v^2)} \right) \tilde{\Sigma}_g}. \quad (3.32)$$

O primeiro termo representa uma interação tipo Yukawa entre os monopolos; uma interação mediada por bosons vetoriais massivos com massa  $ev$ . O segundo termo representa uma interação tipo Yukawa entre os elementos de superfície de mundo das cordas de Dirac; este é o termo responsável pelo confinamento dos monopolos. *Consideramos*

que esta é a assinatura do fenômeno do confinamento em formulações envolvendo condensados. Observe que a soma no segundo termo mostra que a energia do sistema na presença dos monopolos envolve contribuições de todas as configurações possíveis das cordas de Dirac dada uma determinada configuração do par monopolo-antimonopolo. Veja ainda que a ausência do condensado elétrico corresponde a fazer  $v \rightarrow 0$  e neste caso a interação se reduziria à interação de Coulomb entre os monopolos, como esperado.

Seguindo nossa estratégia vamos agora considerar uma configuração estacionária de monopolos separados por uma distância fixa  $R$ :

$$J_g^\mu = \delta^{0\mu} [\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_2)]; \quad R = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|, \quad (3.33)$$

A interação Yukawa entre as correntes no primeiro termo é trivialmente calculada

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}({}^*J_g, \left(\frac{g^2}{(\Delta + e^2v^2)}\right) {}^*J_g) &= -\frac{i}{2} \int d^4x J_{g\mu} \frac{g^2}{(\square - e^2v^2)} J_g^\mu \\ &= \frac{i}{2} T \int d^3x J_g^0 \frac{g^2}{(\nabla^2 - e^2v^2)} J_g^0 \\ &= (\text{auto energia}) + ig^2 T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2 + e^2v^2} \\ &= (\text{auto energia}) + iT \frac{g^2}{4\pi R} e^{-evR}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde o termo de auto energia é independente de  $R$  e vai apenas renormalizar a energia. Os termos na soma em (3.32), que representam a interação Yukawa brana-brana, por outro lado, são bem mais complicados de calcular no caso geral. Note no entanto que esta soma reflete simplesmente a soma dos estados de energia conforme (3.21). Estamos procurando portanto o termo nesta soma que mais contribui no limite  $T \rightarrow \infty$ . Este termo corresponde à configuração da superfície de mundo da corda de Dirac que minimiza a energia de interação entre os seus elementos de superfície. Esperamos que esta seja a configuração que minimiza a área da superfície e que para um instante de tempo fixo corresponderá a uma corda que se estende em uma linha reta conectando o par monopolo-antimonopolo. Uma vez que o cálculo envolvendo configurações arbitrárias de superfícies é muito complicado, uma demonstração rigorosa que de fato a superfície

de menor área é a que minimiza a energia parece não existir. Mas esta é uma hipótese razoável, adotada na literatura [88, 75] e nós vamos adotá-la aqui. A linha “reta” de Dirac descrita acima que tem como borda a configuração de monopolos (3.33) pode ser construída invertendo a fórmula  $*J_g = d*\tilde{\Sigma}_g$  que para uma configuração estática tem a forma

$$J_g^0 = -\partial_i \tilde{\Sigma}^{i0}. \quad (3.35)$$

O vetor  $\vec{R} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  que liga os monopolos pode ser usado para inverter esta fórmula

$$\tilde{\Sigma}^{i0} = -\frac{R^i}{\vec{R} \cdot \nabla} J_g^0. \quad (3.36)$$

Observe que este procedimento introduz uma possível singularidade. Esta singularidade está associada aos modos de Fourier da densidade de monopolos que são perpendiculares a  $\vec{R}$ . Estes modos não são físicos pois violariam maximamente o vínculo que diz que os monopolos são a borda da corda. No entanto, uma vez que a densidade é uma função localizada espacialmente (em  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ ) todos os modos estão presentes inclusive os que representam estas flutuações. Para evitar isso, uma possibilidade seria “suavizar” a densidade de monopolos (3.33). Mas isto não será necessário aqui pois estamos interessados apenas na energia e podemos portanto simplesmente absorver estas contribuições singulares na renormalização da mesma. Substituindo esta configuração na expressão da interação brana-brana obtemos:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \left( * \tilde{\Sigma}_g, \left( \frac{g^2 e^2 v^2}{(\Delta + e^2 v^2)} \right) * \tilde{\Sigma}_g \right) &= -\frac{i}{4} \int d^4 x \tilde{\Sigma}_{g \mu\nu} \frac{g^2 e^2 v^2}{(\square - e^2 v^2)} \tilde{\Sigma}_g^{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{2} \int d^4 x \tilde{\Sigma}_g^{i0} \frac{g^2 e^2 v^2}{(\nabla^2 - e^2 v^2)} \tilde{\Sigma}_g^{i0} \\ &= (\text{auto energia}) + iT \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(gev)^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{(k^2 + e^2 v^2)} \frac{\vec{R}^2}{(\vec{R} \cdot \vec{k})^2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

O termo de auto energia será absorvido na renormalização da energia. A integral na última linha pode ser escrita como

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}}{(k^2 + e^2 v^2)} \frac{\vec{R}^2}{(\vec{R} \cdot \vec{k})^2} = 4\pi \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + e^2 v^2)} \int_0^1 dx \frac{\cos(kRx)}{x^2}. \quad (3.38)$$

Notando que  $x$  é o cosseno do ângulo entre  $k$  e  $R$ , a singularidade em  $x = 0$  na integral em  $x$  corresponde à singularidade que discutimos acima; explicitamente:

$$\int_{\epsilon}^1 dx \frac{\cos(kRx)}{x^2} = -\cos(kR) + \frac{\cos(kR\epsilon)}{\epsilon} - kRSi(kR). \quad (3.39)$$

O segundo termo acima será então absorvido na energia como já antecipamos. Cabe mencionar que no último termo figura a função seno integral definida por

$$Si(t) \equiv \int_0^t dx \frac{\text{sen}(x)}{x}. \quad (3.40)$$

Neste ponto devemos atentar para as escalas envolvidas no problema. Lembre que estamos trabalhando no limite de London no qual  $M_{\rho} \rightarrow \infty$ . Isso significa que  $M_{\rho}$  define a escala ultra-violeta do nosso problema e portanto a integral em  $k$  em (3.38) tem seu limite superior mais precisamente definido por  $M_{\rho}$ . A integral (3.38) fica

$$\begin{aligned} & -4\pi \int_0^{M_{\rho}} \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + e^2v^2)} (\cos(kR) + kRSi(kR)) \\ & = -4\pi R \int_0^{RM_{\rho}} \frac{dy}{(2\pi)^3} \frac{1}{(y^2 + R^2M_A^2)} (\cos(y) + ySi(y)), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde explicitamos ainda a outra escala de massa relevante:  $M_A = ev$ . O potencial confinante é dominante, e por isso identificado, apenas no limite de grandes distâncias onde o potencial de Yukawa (3.34) é efetivamente nulo. Ou seja, a escala de distância relevante é tal que  $R \gg \frac{1}{M_A}$ . Em conjunto com a condição do limite de London  $M_{\rho} \gg M_A$ , podemos ter uma idéia do comportamento do integrando em (3.41) exemplificando essas condições de escala por  $RM_A = 1000$  e  $RM_{\rho} = 10000$ . O comportamento do integrando tem a forma

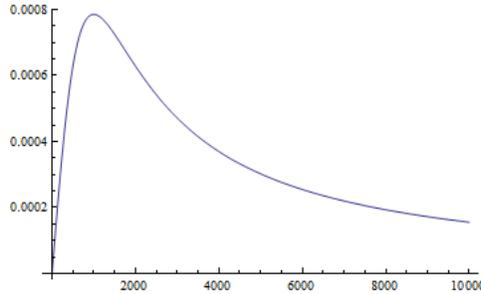


Figura 3.1: comportamento do integrando de (3.41) em função de  $y$  com a forma exata  $\cos(y) + ySi(y)$ .

Por outro lado, observe que substituindo a expressão  $\cos(y) + ySi(y)$  pelo seu valor assintótico  $y\frac{\pi}{2}$  o integrando se comporta como:

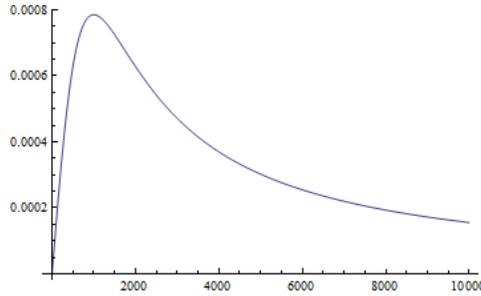


Figura 3.2: comportamento do integrando de (3.41) em função de  $y$  com o valor assintótico  $\cos(y) + ySi(y) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} y\frac{\pi}{2}$ .

Ou seja, vemos que o comportamento dos integrandos nos dois casos não difere significativamente na região de integração considerada. Podemos portanto substituir este valor assintótico na integral e resolvê-la trivialmente:

$$-4\pi R \int_0^{RM_\rho} \frac{dy}{(2\pi)^3} \frac{1}{(y^2 + R^2 M_A^2)} y \frac{\pi}{2} = -R \frac{1}{8\pi} \ln \left( \frac{M_\rho^2 + M_A^2}{M_A^2} \right). \quad (3.42)$$

Obtemos assim a expressão do potencial confinante. Combinando todos os resultados obtidos acima podemos finalmente escrever a expressão da energia  $E_0$ :

$$E_0 = -\frac{g^2}{4\pi R} e^{-M_A R} + \sigma R, \quad (3.43)$$

onde  $\sigma = \frac{g^2 M_A^2}{8\pi} \ln \left( \frac{M_\rho^2 + M_A^2}{M_A^2} \right)$  é a tensão da corda confinante. O caráter assintótico desta energia é o que define o regime confinante da teoria

Lembre que o procedimento que descrevemos acima para identificar a energia  $E_0$  calculando o valor de  $e^{-iE_0 T}$ , corresponde ao cálculo do valor médio do operador que cria um tubo de fluxo magnético aberto conectando dois monopolos em um instante de tempo  $t \rightarrow -\infty$  e destrói em  $t \rightarrow \infty$  (3.22). Vimos que isto corresponde à inserção de defeitos na função partição e pelo que discutimos no capítulo anterior este procedimento é o dual do cálculo do valor médio do operador loop de Wilson. Neste sentido o que acabamos de obter foi simplesmente a lei de áreas que define o regime confinante, para

os monopolos neste caso,  $e^{-iE_0T} \rightarrow e^{-i\sigma RT}$ . O loop de Wilson que calculamos corresponde à holonomia associada ao campo vetorial dual  $\tilde{A}$  (que se acopla minimamente a monopolos) cuja expressão em termos do campo vetorial eletromagnético usual  $A$  (que se acopla minimamente a cargas elétricas) seria não local. Neste contexto o loop de Wilson tem outro nome, para diferenciá-lo do loop de Wilson original, e é chamado de *loop de 't Hooft* [70]. Vemos portanto que enquanto o loop de Wilson está associado a linhas de corrente elétrica o loop de 't Hooft está associado a linhas de fluxo magnético.

### 3.2.2 Fluxos e correntes

A interpretação do sistema no limite de baixas energias como um gás de loops de fluxos magnéticos foi essencial na obtenção dos resultados acima. Nesta subseção nós vamos reinterpretar este resultado sob a luz do que discutimos acima sobre a relação entre correntes elétricas e fluxos magnéticos.

A função partição do gás de loops de fluxo magnético foi definida em (3.20). Sua expressão é repetida aqui por conveniência

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathcal{C}_3\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} dB \wedge *dB - \frac{e^2 v^2}{2} (B - \frac{2\pi n}{e} * \Lambda) \wedge * (B - \frac{2\pi n}{e} * \Lambda) \right)}. \quad (3.44)$$

Como discutimos em torno de (3.20),  $*\Lambda$  representa as linhas fechadas de fluxo magnético. Podemos introduzir um campo auxiliar  $H$  (uma 1-forma) e escrever o sistema acima na forma equivalente

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\{\mathcal{C}_3\}} \int \mathcal{D}B \mathcal{D}H e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} dB \wedge *dB - e (B - \frac{2\pi n}{e} * \Lambda) \wedge *H + \frac{1}{2v^2} H \wedge *H \right)} \\ &= \int \mathcal{D}B \mathcal{D}H e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} dB \wedge *dB - e B \wedge *H + \frac{1}{2v^2} H \wedge *H \right)} \sum_{\{\mathcal{C}_3\}} e^{2\pi i n \int_{\mathcal{M}_4} * \Lambda \wedge *H}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Observe que a expressão contendo a soma sobre superfícies pode ser reescrita usando a fórmula de Poisson (2.29) e ficamos com

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}B \mathcal{D}H e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} dB \wedge *dB - e B \wedge *H + \frac{1}{2v^2} H \wedge *H \right)} \sum_{\{\mathcal{A}_1\}} \delta(*J - *H), \quad (3.46)$$

onde  $*J = \mathbf{P}(\mathcal{A}_1)$ , ou seja,  $\mathcal{A}_1$  é a 1-superfície Poincaré-dual a 1-corrente  $J$ . Integrando sobre  $H$  obtemos

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathcal{A}_1\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} (-\frac{1}{2} dB \wedge *dB - eB \wedge *J + \frac{1}{2v^2} J \wedge *J)}. \quad (3.47)$$

Esta é a teoria que representa um ensemble de correntes elétricas e é uma representação alternativa ao ensemble de loops de fluxo magnético. Observe que aparentemente a teoria não possui ambiguidade de calibre pois a soma sobre as superfícies  $\mathcal{A}_1$  não tem restrições e inclui as configurações de correntes abertas. No entanto, lembre que  $B$  foi definido, no texto acima de (3.20), como função dos campos não invariantes de calibre  $A$  e  $\eta$  e portanto a simetria de calibre deve estar escondida na formulação acima também. Podemos revelá-la notando que a contribuição das superfícies abertas na soma constitui uma redundância da teoria. De fato, por ser gaussiana em  $B$ , toda informação física da teoria está contida no ponto estacionário da ação com respeito a variações de  $B$ . Em outras palavras,  $B$  pode ser trivialmente integrado em (3.47). Sua equação de movimento,

$$d^\dagger dB = -eJ, \quad (3.48)$$

implica a conservação da corrente,

$$d^* J = 0, \quad (3.49)$$

e portanto na soma sobre superfícies somente as superfícies fechadas contribuem fisicamente. A conservação da corrente implica simetria de calibre.

A conexão entre os loops de fluxo e as correntes se manifesta notando que a diluição dos loops de fluxo que estabelece a transição completa para a fase condensada é representada na formulação (3.47) pela condensação elétrica. De fato, a diluição de loops de fluxo em (3.44) é representado pelo desacoplamento da soma sobre superfície que é absorvida na renormalização da função partição, resultando no estabelecimento da teoria de Proca como a teoria efetiva, ou seja, as flutuações magnéticas representadas pelos vórtices são congeladas. Por outro lado, na formulação (3.47), este efeito

se manifesta pela condensação das linhas de corrente. Formalmente, a soma sobre  $\mathcal{A}_1$  é substituída por uma integração sobre  $J$  que agora é um campo designando o condensado. O resultado da integração sobre  $J$  é novamente a teoria de Proca. Este procedimento corresponde à *prescrição de Julia-Toulouse* que discutiremos a seguir na próxima seção. Temos assim uma espécie de *conexão ordem-desordem* entre fluxos e correntes neste contexto. Uma versão particular deste mapa ordem-desordem foi usada por Kleinert para estudar a estrutura de fases de um supercondutor e seus expoentes críticos, veja [89, 90] e a discussão no cap. 5 de [32].

Observe ainda que o estado condensado realiza exatamente o confinamento das cargas magnéticas que discutimos na seção anterior. Se monopolos, tomados como cargas externas, estão imersos no supercondutor a diluição dos loops de fluxo tem como efeito selecionar uma configuração fixa para a corda de Dirac que os conecta, como discutimos antes. A teoria que descreve esta situação é a teoria de Proca acoplada não minimamente com a corda de Dirac. Devido ao termo de massa para o campo de Proca, a simetria de brana não é manifesta, um fenômeno que denominamos quebra espontânea da simetria de brana. Isso significa que os monopolos não são os graus de liberdade relevantes para a descrição do sistema nesta fase. A corda que os liga adquire agora o status de grau de liberdade fundamental.

Por outro lado, se introduzirmos cargas elétricas externas no sistema elas terão um acoplamento mínimo com o campo de Proca e conseqüentemente irão interagir com um potencial tipo Yukawa. Ou seja, assintoticamente, em grandes distâncias, o potencial se anula a menos de uma possível constante. Este é o fenômeno de screening que define a fase de Higgs do sistema. Fisicamente o condensado pode ser visto como um reservatório perfeito de cargas elétricas e a introdução de cargas elétricas de prova perturba o sistema induzindo a produção de pares que tem o efeito de blindar a carga das fontes externas em longas distâncias.

Concluimos que enquanto as cargas elétricas percebem o estado supercondutor como a fase de Higgs, os monopolos magnéticos percebem esta fase como uma fase confinante. Esta é a conexão Higgs-confinamento que generaliza a conexão Coulomb-Coulomb dis-

cutida no capítulo 2. Temos então a seguinte estrutura de fases definida pelo comportamento do potencial assintótico entre cargas de prova [91]:

$$\begin{array}{c|c}
 \text{monopolos} & \text{carga elétrica} \\
 \hline
 \text{Coulomb } V(R) \sim \frac{1}{R} & \text{Coulomb } V(R) \sim \frac{1}{R} \\
 \text{Confinamento } V(R) \sim \sigma R & \text{Higgs } V(R) \sim \text{const.}
 \end{array} \quad (3.50)$$

Comentamos no capítulo 2 sobre a dualidade eletromagnética que mapeia o acoplamento mínimo no acoplamento não-mínimo. Isso significa que cargas são mapeadas em defeitos e vice-versa, mas ambas estão na fase de Coulomb naquele contexto. Aqui vemos que existe uma diferença qualitativa entre o comportamento das cargas no estado supercondutor, as cargas estão condensadas e os defeitos confinados. O confinamento dos monopolos os torna inapropriados para a descrição dos sistema sendo substituídos pelas cordas que os conectam. Veremos na próxima seção que isso pode ser colocado de forma ainda mais evidente pela introdução de um campo dual que se acopla minimamente às cordas mostrando que essas de fato podem ser diretamente detectadas.

Por outro lado poderíamos ter estudado o supercondutor dual desde o início. Tudo seria matematicamente idêntico, exceto que falaríamos de um condensado magnético e um conseqüente confinamento de cargas de prova elétricas. As cargas elétricas apareceriam como defeitos na formulação. A estrutura de fases no contexto do supercondutor dual será

$$\begin{array}{c|c}
 \text{monopolos} & \text{carga elétrica} \\
 \hline
 \text{Coulomb } V(R) \sim \frac{1}{R} & \text{Coulomb } V(R) \sim \frac{1}{R} \\
 \text{Higgs } V(R) \sim \text{const.} & \text{Confinamento } V(R) \sim \sigma R
 \end{array} \quad (3.51)$$

### 3.3 A prescrição de Julia-Toulouse

A teoria de Proca que descreve o condensado elétrico tem sua origem no mecanismo de Higgs. Este mecanismo conecta a teoria de Maxwell à teoria de Proca através de um processo de condensação elétrica. O mecanismo é implementado através da introdução

de um campo escalar com um potencial tipo  $\phi^4$  introduzindo uma escala de energia arbitrária  $v$ , determinada experimentalmente, além de um parâmetro adimensional  $\lambda$  codificando o peso relativo das contribuições energéticas dos termos no funcional de energia, como discutimos anteriormente. Existe grande liberdade na implementação do mecanismo. O modelo que discutimos para o supercondutor é apenas o exemplo mais simples. Mas seja qual for o modelo, o fenômeno físico é a condensação das excitações elétricas. Se não estamos interessados nos detalhes do processo de condensação podemos nos perguntar então se, conhecendo o modelo que descreve o sistema antes da condensação, somos capazes de determinar o modelo efetivo que descreve o sistema na fase condensada. Esta é a idéia da prescrição de Julia-Toulouse [92]. A condensação de defeitos topológicos estabelece um novo meio no qual os defeitos se configuram em uma distribuição contínua no espaço. As excitações de baixa energia deste meio representam os novos graus de liberdade da fase condensada. Julia e Toulouse especificaram uma prescrição para identificar estes novos graus de liberdade, tendo como conhecimento apenas o modelo que descreve a fase antes da condensação. Neste sentido, esta prescrição não se preocupa com a questão dinâmica das razões que favoreceram a condensação. Esta é vista como uma questão independente. O problema abordado pela prescrição diz respeito apenas às propriedades dos novos graus de liberdade uma vez que a condensação ocorreu. Do ponto de vista do que discutimos antes, isso significa que não procuramos informação sobre o valor de  $\lambda$ , este não vai estar presente na teoria efetiva. Apenas a escala  $v$  está presente determinando a escala característica do condensado. De fato vimos anteriormente que  $\lambda$  define a massa  $M_\rho = \sqrt{2\lambda}v$  que é vista como um cut-off do modelo efetivo sinalizando a escala onde as excitações de baixa energia do condensado deixam de ser uma boa descrição do sistema.

O trabalho de Julia e Toulouse foi realizado no contexto de sistemas ordenados em matéria condensada e devido à possível não linearidade das correntes topológicas, a ausência de simetria relativística e a necessidade da introdução de efeitos externos de dissipação neste cenário, a construção de ações efetivas pode ser bem complicada. No entanto, Quevedo e Trugenberger [93] mostraram que em teorias envolvendo  $p$ -formas,

muito comuns em descrições efetivas das teorias de cordas (para uma revisão recente veja [94]), estes problemas não aparecem. Eles mostraram que a prescrição pode ser colocada de forma mais precisa levando à determinação da ação efetiva que descreve o sistema na fase condensada. Mostraram ainda que isso naturalmente leva a uma interpretação dual do mecanismo de Higgs. Pela generalidade das expressões envolvidas, evidenciada pela notação de formas diferenciais, esta dualidade é bem geral e se estende a  $p$ -formas gerais em  $D$ -dimensões conforme os exemplos que discutimos no Cap. 2.

Aqui nós vamos apresentar uma formulação nova e mais completa da prescrição que nos permitirá abordar de forma consistente o processo de condensação e suas consequências em vários sistemas físicos obtendo resultados importantes. Em particular, esta nova formulação estende as considerações de Julia e Toulouse tornando possível agora lidar com fontes acopladas minimamente, não apenas com defeitos. O conceito chave para a generalização está na observação da importância da simetria de brana. Este é o guia para a construção da ação efetiva da fase condensada. A simetria de brana é uma simetria local e portanto constitui uma ambiguidade nas variáveis. Assim como ocorre com a simetria de calibre, nenhum processo físico pode eliminar esta ambiguidade. No entanto, a simetria de brana pode ser realizada de forma “escondida”, assim como ocorre com a simetria de calibre no fenômeno da quebra espontânea. De fato é isso que ocorre como vimos na (3.30). Da mesma forma que a quebra espontânea da simetria de calibre faz com que o campo de calibre “se torne massivo” e portanto observável, a quebra da simetria de brana torna a corda de Dirac observável. Este fenômeno da quebra espontânea da simetria de brana é a assinatura do fenômeno de confinamento e surge como consequência da prescrição de Julia-Toulouse.

Para ilustrar a prescrição de Julia-Toulouse, vamos primeiramente escrever a formulação dual do sistema descrito por (3.30) que reproduzimos aqui

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (dB + g^* \tilde{\Sigma}_g) \wedge^* (dB + g^* \tilde{\Sigma}_g) - \frac{e^2 v^2}{2} B \wedge^* B \right)}. \quad (3.52)$$

Como vimos, esta teoria resulta do mecanismo de Higgs. A ação que define a função

partição, dada por

$$S_{Proca} = \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (dB + g^* \tilde{\Sigma}_g) \wedge * (dB + g^* \tilde{\Sigma}_g) - \frac{e^2 v^2}{2} B \wedge * B \right), \quad (3.53)$$

é a ação de Proca. Como mencionamos antes, a ação não possui simetria de calibre ou de brana manifestas pois ela descreve uma fase em que estas simetrias estão espontaneamente quebradas. Podemos facilmente obter uma formulação dual deste modelo. Como fizemos no Cap. 2, introduzimos um campo auxiliar  $G$  (uma 2-forma):

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}B \int \mathcal{D}G e^{i \left( (G, dB + g^* \tilde{\Sigma}_g) + \frac{1}{2} (G, G) - \frac{e^2 v^2}{2} (B, B) \right)}. \quad (3.54)$$

Podemos tornar  $B$  um campo auxiliar integrando por partes o primeiro termo.  $B$  pode então ser trivialmente integrado:

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}G e^{i \left( \frac{1}{2e^2 v^2} (d^\dagger G, d^\dagger G) + \frac{1}{2} (G, G) + g(G, * \tilde{\Sigma}_g) \right)}, \quad (3.55)$$

ou, renomeando  $*G = H$

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}H e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2e^2 v^2} dH \wedge * dH - \frac{1}{2} H \wedge * H + g H \wedge * \tilde{\Sigma}_g \right)}. \quad (3.56)$$

Esta é a formulação dual do sistema (3.52). A ação que define esta formulação é a ação de Kalb-Ramond massiva, acoplada minimamente ao termo de corda. Esta é a ação dual da teoria de Proca (3.53). Interessante observar que nestas variáveis é evidente que a corda adquiriu realidade física devido ao condensado, uma vez que o campo de Kalb-Ramond é capaz de sondar diretamente este objeto devido ao acoplamento mínimo.

Vamos agora mostrar que é possível obter diretamente a teoria (3.56) através da prescrição de Julia-Toulouse. A idéia é que a teoria de Kalb-Ramond massiva é obtida da teoria de Maxwell dual (onde as cargas elétricas aparecem como defeitos). A teoria de Maxwell dual na presença de defeitos elétricos e cargas magnéticas externas tem a forma geral

$$\mathcal{Z}_{MaxDual}(J_g) = \sum'_{\{\mathcal{B}_e\}} \int \mathcal{D}\tilde{A} e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (d\tilde{A} + e^* \Sigma_e) \wedge * (d\tilde{A} + e^* \Sigma_e) + g \tilde{A} \wedge * J_g \right) + iS(J_e)}, \quad (3.57)$$

onde  $\mathcal{B}_e$  são 2-superfícies Poincaré-duais à 2-corrente  ${}^*\Sigma_e$ . A ação  $S(J_e)$  é função apenas dos invariantes de brana  ${}^*J_e = d{}^*\Sigma_e$ . As 2-correntes  ${}^*\Sigma_e$  são defeitos do ponto de vista do campo eletromagnético dual  $\tilde{A}$  significando que o campo  $\tilde{A}$  é singular onde  ${}^*\Sigma_e$  é não nulo, de tal forma que a combinação  $H = d\tilde{A} + e{}^*\Sigma_e$  seja não-singular em todo espaço (pois este é simplesmente o campo eletromagnético observável). O campo  $H$  é um invariante por transformações de brana elétrica. Consideremos uma situação em que estes defeitos condensam. Isto significa que o campo  $\tilde{A}$  se tornará mais e mais singular até que finalmente ele não será definido em lugar nenhum. A prescrição de Julia-Toulouse diz que as novas excitações do condensado serão descritas pelo campo  $H$ , o único que permanece fisicamente bem definido, e devemos portanto construir uma ação efetiva para o sistema em termos deste novo campo fundamental. Observe que o acoplamento mínimo com a corrente  $J_g$  precisa ser reescrito em termos de campos invariantes por transformações de brana. Isso pode ser feito

$$\begin{aligned}
g(\tilde{A}, J_g) &= g(\tilde{A}, {}^*d{}^*\Sigma_g) = g(\tilde{A}, d^\dagger\Sigma_g) \\
&= g(d\tilde{A}, \Sigma_g + d^\dagger\Lambda_g) \\
&= g(d\tilde{A} + e{}^*\Sigma_e, \Sigma_g + d^\dagger\Lambda_g), \tag{3.58}
\end{aligned}$$

onde na passagem para a segunda linha tomamos o cuidado de evidenciar a ambiguidade na definição da brana magnética  $\Sigma_g$  por meio da 3-corrente  $\Lambda_g$ . Na passagem para a terceira linha acrescentamos o termo de brana elétrica que não contribui devido à quantização de Dirac. De fato, para obter a formulação dual da ação de Maxwell na forma como aparece em (3.57) nós havíamos descartado exatamente este termo pela mesma razão (veja 2.45), aqui apenas o reintroduzimos. Devido à ambiguidade na definição da brana  $\Sigma_g$  temos na verdade uma família de ações fisicamente equivalentes parametrizadas pelas diferentes configurações  $\Lambda_g$ . Podemos explicitar este fato introduzindo uma soma sobre as 3-superfícies  $\mathcal{C}_g$  Poincaré-duais à  $\Lambda_g$  (esta soma é redundante neste estágio, uma vez que voltando à definição anterior ela pode ser reabsorvida na

normalização da função partição). A função partição fica

$$\mathcal{Z}_{MDual}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{C}_g\}} \sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \int \mathcal{D}\tilde{A} e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (d\tilde{A} + e^* \Sigma_e) \wedge^* (d\tilde{A} + e^* \Sigma_e) + g (d\tilde{A} + e^* \Sigma_e) \wedge^* (\Sigma_g + d^\dagger \Lambda_g) \right) + iS(J_e)}. \quad (3.59)$$

A prescrição de Julia-Toulouse neste contexto consiste em elevar a 2-corrente elétrica  $^* \Sigma_e$  à categoria de campo representando o estabelecimento do estado de condensado elétrico. Formalmente

$$\sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \rightarrow \int \mathcal{D}\Sigma_e. \quad (3.60)$$

Resulta então que a simetria de brana elétrica é realizada na estrutura Stuckelberg. Diz-se que o campo  $^* \Sigma_e$  “come” o campo  $\tilde{A}$ . As integrais sobre  $\Sigma_e$  e  $\tilde{A}$  se traduzem em uma integral sobre o campo invariante de brana  $H = d\tilde{A} + e^* \Sigma_e$  realizando a quebra espontânea da simetria de brana elétrica. Esta é uma característica da prescrição de Julia-Toulouse, quando há geração de massa, que chamamos de “*pulo de posto*”, ou seja, o campo original  $\tilde{A}$ , uma 1-forma, é substituído na nova fase pelo campo  $H$ , uma 2-forma. A função partição adquire a seguinte forma após a condensação

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{C}_g\}} \int \mathcal{D}H e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} H \wedge^* H + g H \wedge^* (\Sigma_g + d^\dagger \Lambda_g) \right) + iS(dH)}. \quad (3.61)$$

A geração da massa tem como consequência ainda a quebra espontânea da simetria de brana magnética, que se torna observável. A soma sobre  $\mathcal{C}_g$  é equivalente a varrer todas as superfícies  $\Sigma_g$  que possuem como borda a corrente  $J_g$ , portanto, como fizemos antes, podemos reescrevê-la como uma soma sobre 2-superfícies  $\mathcal{B}_g$  Poincaré-duais aos invariantes de brana  $\tilde{\Sigma}_g \equiv \Sigma_g + d^\dagger \Lambda_g$  vinculadas pela condição  $^* J_g = d^* \tilde{\Sigma}_g$ :

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}H e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} H \wedge^* H + g H \wedge^* \tilde{\Sigma}_g \right) + iS(dH)}. \quad (3.62)$$

O último passo da prescrição consiste em observar que estamos procurando uma descrição efetiva para os modos de baixa energia do estado condensado. Portanto é uma

boa aproximação tratar a ação  $S(dH)$  como uma série de potências nas derivadas mantendo apenas o primeiro termo não trivial consistente com as simetrias que esperamos do condensado. O primeiro termo não trivial neste caso será

$$S(dH) = -\frac{1}{2M^2}dH \wedge *dH, \quad (3.63)$$

onde  $M$  é uma escala de energia característica do condensado. Este é um parâmetro fenomenológico e podemos identificá-lo com o parâmetro equivalente (fenomenológico também) que aparece na (3.56):  $M = ev$ . Reobtemos assim a teoria (3.56).

Este procedimento revela que o fenômeno descrito pela prescrição de Julia-Toulouse é o dual do mecanismo de Higgs na presente situação no sentido em que ele opera no quadro dual. Este é o resultado de Quevedo e Trugenberger [93]. Observe que isso estabelece a dualidade entre a fase de Higgs e a fase confinante pois poderíamos ter partido da teoria de Maxwell original descrevendo o campo eletromagnético na presença de defeitos magnéticos e cargas elétricas externas. Seguindo exatamente os mesmos procedimentos obteríamos uma teoria idêntica em forma à (3.56) porém descrevendo um condensado magnético onde as cargas elétricas estariam confinadas. Estas duas situações e seus correspondentes fenômenos (condensação elétrica e condensação magnética) estão conectados por transformações de dualidade como acabamos de ver.

O exemplo que discutimos acima segue os mesmos princípios propostos por Quevedo e Trugenberger ainda que difira em alguns aspectos. Eles trabalharam no nível da ação, aqui estudamos a função partição. Quevedo e Trugenberger estudaram exclusivamente a condensação de defeitos, no entanto a abordagem adotada aqui se presta a uma direta generalização para tratar a condensação de  $p$ -correntes acopladas minimamente. Como já comentamos na seção anterior, podemos obter a teoria (3.52) partindo do modelo que descreve o sistema de Maxwell original acoplado minimamente a cargas elétricas e acoplado não-minimamente a fontes magnéticas externas.

$$\mathcal{Z}_{Max}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{A}_e\}}' \int \mathcal{D}A e^{i \int_{\mathcal{M}_4} (-\frac{1}{2}(dA+g^*\Sigma_g) \wedge *(dA+g^*\Sigma_g) + eA \wedge *J_e) + iS(J_e)}, \quad (3.64)$$

onde  $\mathcal{A}_e$  são 1-superfícies Poincaré-duais a corrente elétrica  $J_e$  e o vínculo na soma indica

que estas são correntes fechadas (conservadas), como consequência o campo  $A$  possui redundância de calibre. Fazemos isso seguindo os mesmos princípios introduzidos por Julia e Toulouse e, como sempre, atentando para como as redundâncias nas variáveis da teoria, simetrias de brana e de calibre, são realizadas. Na ação que figura na (3.64) a simetria de brana magnética é realizada na forma

$$*\Sigma_g \rightarrow *\Sigma_g + d^*\Lambda_g \quad (3.65)$$

$$A \rightarrow A - g^*\Lambda_g. \quad (3.66)$$

O termo de acoplamento mínimo com a corrente elétrica é invariante sob esta transformação devido à quantização de Dirac. Vamos usar este fato e a conservação da corrente elétrica para modificar o acoplamento mínimo

$$eA \wedge *J_e \rightarrow e(A + d\phi + g^*\Omega_g) \wedge *J_e, \quad (3.67)$$

e incluir uma soma sobre todas as superfícies  $\mathcal{E}_g$ , Poincaré duais à  $\Omega_g$  e conexas com a corda de Dirac  $\Sigma_g$ , assim como uma integral sobre o campo  $\phi$ . Resulta que a única modificação trazida por esta definição é uma renormalização da função partição. Ao introduzir a soma e a integral estamos essencialmente fixando a simetria de brana e a simetria de calibre, respectivamente, na forma de Stuckelberg. Fisicamente, a soma representa a imersão do sistema num “gás virtual” de fluxos magnéticos fechados  $d^*\Omega_g$ , virtual pois eles são objetos não-físicos e podem sempre ser reabsorvidos nos campos, exatamente como o campo puro gauge  $\phi$ . A razão da introdução destes objetos é para explicitar as variáveis físicas (invariantes de brana e de calibre) que são as que definirão o estado do sistema após a prescrição de Julia-Toulouse. A função partição tem agora a forma

$$\mathcal{Z}_{Max}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \sum_{\{\mathcal{E}_g\}} \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (dA + g^*\Sigma_g) \wedge * (dA + g^*\Sigma_g) + e(A + d\phi + g^*\Omega_g) \wedge *J_e \right) + iS(J_e)}. \quad (3.68)$$

Podemos explicitar as variáveis físicas definindo-as como

$$B \equiv A + d\phi + g^*\Omega_g \quad (3.69)$$

$${}^*\tilde{\Sigma}_g \equiv {}^*\Sigma_g - d^*\Omega_g \quad (3.70)$$

de forma que  $B$  e  $\tilde{\Sigma}_g$  são invariantes de calibre e de brana. A soma sobre  $\mathcal{E}_g$  pode então, como sabemos, ser reescrita como uma soma sobre as 2-superfícies  $\mathcal{B}_g$  Poincaré duais às branas magnéticas  $\tilde{\Sigma}_g$ , vinculadas por  ${}^*J_g = d^*\tilde{\Sigma}_g$  enquanto as integrais sobre  $A$  e  $\phi$  se traduzem em uma integral sobre  $B$ . A função partição fica

$$\mathcal{Z}_{Max}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \sum'_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} (-\frac{1}{2}(dB+g^*\tilde{\Sigma}_g) \wedge (dB+g^*\tilde{\Sigma}_g) + eB \wedge {}^*J_e) + iS(J_e)}. \quad (3.71)$$

Note que resultam duas diferenças aqui em relação à teoria inicial (3.64): a soma sobre  $\mathcal{A}_e$  não é mais vinculada, uma vez que a simetria de calibre foi “fixada”, e a fixação da simetria de brana teve como efeito a introdução de uma soma sobre as superfícies de Dirac cuja borda é  $J_g$ . Para prosseguir com a prescrição de Julia-Toulouse devemos especificar uma forma para a ação  $S(J_e)$ . Como antes, temos o intuito de descrever um condensado elétrico em baixas energias. Um termo do tipo  $(J_e, J_e)$  na ação representa efetivamente a energia de criação de excitações elétricas. É um termo tipo “potencial químico” de forma que a expressão (3.71) tem o caráter de uma função grande partição canônica. Dimensionalmente, este termo exige a introdução de uma escala de massa  $v$ , que neste estágio está associado à energia de ativação das excitações elétricas. Potências superiores de  $J_e$  representarão correções a esta energia e serão suprimidas por potências superiores de  $v$ . Para o estabelecimento do condensado e sua descrição em mais baixa energia é suficiente considerar o termo quadrático. Ficamos então com

$$\mathcal{Z}_{Max}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \sum'_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} (-\frac{1}{2}(dB+g^*\tilde{\Sigma}_g) \wedge (dB+g^*\tilde{\Sigma}_g) + eB \wedge {}^*J_e + \frac{1}{2M^2} J_e \wedge {}^*J_e)}. \quad (3.72)$$

Podemos agora “condensar”  $J_e$  formalmente impondo

$$\sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \rightarrow \int \mathcal{D}J_e. \quad (3.73)$$

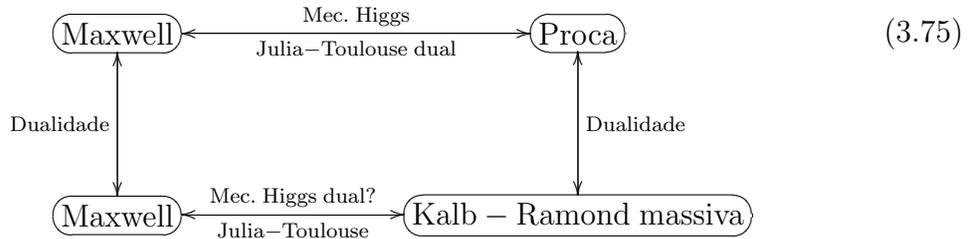
Efetuada a integração em  $J_e$  obtemos portanto a teoria (3.52):

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum_{\{B_g\}}' \int \mathcal{D}B e^{i \int_{\mathcal{M}_4} \left( -\frac{1}{2} (dB + g^* \tilde{\Sigma}_g) \wedge^* (dB + g^* \tilde{\Sigma}_g) - \frac{e^2 v^2}{2} B \wedge^* B \right)}. \quad (3.74)$$

Vemos portanto que os princípios básicos da prescrição podem ser aplicados mesmo na descrição da condensação de correntes acopladas minimamente. Neste sentido este procedimento simula o mecanismo de Higgs neste caso. Vamos denominar este novo procedimento, que nos forneceu (3.74) como resultado, de *Julia-Toulouse dual* para diferenciá-lo da proposta original de Quevedo e Trugenberger que diz respeito apenas à condensação de correntes acopladas não-minimamente (defeitos).

A prescrição de Julia-Toulouse deve ser vista portanto como um “gerador de teorias”. A prescrição simplesmente sugere a resposta para a questão sobre qual teoria descreve o sistema no estado em que ocorre a condensação de uma  $p$ -corrente. Este é um procedimento fenomenológico cuja validade depende de uma verificação a posteriori. Ainda assim, por ser um procedimento sistemático, ele pode ser muito útil nos guiando na obtenção de resultados pouco triviais. Esta situação não é diferente do processo usual de quantização de uma teoria clássica. Existe grande arbitrariedade neste procedimento também; ao elevar quantidades clássicas à categoria de operadores podem surgir ambiguidades no ordenamento dos operadores que só podem ser resolvidos pela comparação com resultados experimentais.

Para finalizar podemos esquematizar as conclusões desta seção no seguinte quadro de conexões:



O que chamamos de *Mec. Higgs dual* no diagrama é uma formulação desconhecida, uma vez que seria necessário o conhecimento de como tratar dinamicamente, via teoria de campos, o campo eletromagnético em interação com defeitos dinâmicos que condensam.

Esta formulação está diretamente relacionada à teoria de campos de monopolos na presença de cargas elétricas, um problema em aberto. No entanto, por dualidade, somos capazes de pelo menos dizer que esta formulação envolverá o “pulo de posto”.

A seguir vamos aplicar estas idéias em sistemas planares, em  $(2 + 1)D$ .

## 3.4 Defeitos em sistemas planares

No capítulo 2 estudamos algumas propriedades dos sistemas planares. Na ocasião vimos que existe a possibilidade da adição de um novo termo nesta dimensionalidade: o termo de Chern-Simons. Nesta seção vamos abordar principalmente a questão de como definir defeitos na presença deste termo.

### 3.4.1 O modelo de Polyakov

Antes vamos discutir um importante resultado obtido por Polyakov [76, 77, 78]. O modelo de Polyakov descreve um sistema que exhibe confinamento como resultado do comportamento coletivo de defeitos, que neste caso são instantons. Um fato muito importante que não é enfatizado na literatura é que este modelo exhibe o fenômeno de *pulo de posto* que, como comentamos na seção anterior, é uma assinatura da geração de massa na prescrição de Julia-Toulouse. Veremos de fato que a prescrição de Julia-Toulouse pode ser aplicada neste caso também e representa uma outra interpretação do resultado obtido mais recentemente pelo próprio Polyakov [95].

Nesta subseção trabalharemos no espaço euclidiano  $\mathcal{M}_3 = \mathbb{R}^3$ . O modelo de Polyakov se propõe a descrever o limite infra-vermelho da teoria de Georgi-Glashow com simetria  $SO(3)$  definida em  $3D$  pela ação

$$S = \int_{\mathcal{M}_3} \frac{1}{2e^2} Tr G \wedge *G + \frac{1}{2} d_W \vec{\phi} \wedge *d_W \vec{\phi} + \frac{\lambda}{4} \left( |\vec{\phi}|^2 - v^2 \right) \wedge * \left( |\vec{\phi}|^2 - v^2 \right), \quad (3.76)$$

onde o traço  $Tr$  é tomado sobre as componentes  $G^a = dW^a + \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}W^b \wedge W^c$ ,  $a, b, c = 1, 2, 3$  ( $\varepsilon^{abc}$  é a constante de estrutura do grupo  $SO(3)$ ). O campo real  $\vec{\phi}$  carrega a notação vetorial pois está na representação  $\mathbf{3}$  do grupo  $SO(3)$  tal que  $|\vec{\phi}|^2 = \phi^a \phi^a$ . O

acoplamento de  $\phi^a$  com o campo  $W^a$  é dado através da derivada covariante  $d_W\phi^a = d\phi^a + \varepsilon^{abc}W^b\phi^c$ .

Queremos estudar a teoria efetiva que descreve este sistema no limite de baixas energias. A expressão “baixas energias” significa uma escala de energia muito menor que escalas da ordem de  $\sqrt{\lambda}v$  associadas às flutuações do campo  $\phi$ . Nesta escala o campo  $\phi$  está em uma configuração tal que  $|\vec{\phi}| = v$ . Portanto trabalharemos numa região onde a simetria  $SO(3)$  foi quebrada para  $SO(2) = U(1)$  (que são as rotações em torno do eixo definido pela direção do valor esperado não nulo de  $\phi^a$  neste estado). Procuramos então por uma teoria efetiva com simetria  $U(1)$ . A chave do problema está em como esta simetria é realizada.

Poderíamos supor que a teoria que procuramos fosse simplesmente a teoria de Maxwell. Observe no entanto que existem defeitos no sistema. Em  $3D$  o espaço assintótico é topologicamente equivalente a  $S^2$  e teremos como consequência da quebra de simetria  $\Pi_2(SO(3)/SO(2)) = \mathbb{Z}$ . Ou seja, existem defeitos na região infra-vermelha da teoria. Isso significa que a teoria de Maxwell usual não é capaz de dar conta dos fluxos não triviais da teoria (indexados por  $\Pi_2(SO(3)/SO(2))$ ). Na teoria original esses defeitos são as soluções clássicas das equações de movimento não lineares. Essas soluções correspondem aos *monopolos de 't Hooft-Polyakov* em uma configuração estacionária em  $4D$ ; neste contexto, em  $3D$ , eles são objetos localizados no espaço-tempo tridimensional e são denominados *instantons*. No infra-vermelho eles se apresentam como singularidades pontuais nos campos da teoria efetiva.

A contribuição do instanton na função partição é da forma  $e^{-\frac{I}{e^2}}$ , onde  $I$  é uma constante independente do acoplamento  $e$ . Esta estrutura é obtida substituindo-se a solução clássica no funcional de ação (3.76).  $e^{-\frac{I}{e^2}}$  é proporcional à densidade de probabilidade de criação de um instanton. Mais precisamente, o número esperado de instantons numa região de volume  $V$  é da ordem de  $V\mu e^{-\frac{I}{e^2}}$ , onde  $\mu$  é uma escala de inverso de volume determinada pela normalização da probabilidade. Se o acoplamento é fraco o número de instantons só será relevante para grandes volumes. Ou seja, a contribuição dos instantons se torna fundamental no infra-vermelho.

No entanto a contribuição dos instantons não se dá através da adição de termos locais (funcionais locais do campo de Maxwell) à teoria de Maxwell. De fato, esses termos deveriam ser relevantes, no sentido do grupo de renormalização, pois os termos relevantes são aqueles que têm sua contribuição ampliada no IV (precisamente por isso são denominados relevantes). Além disso a simetria  $U(1)$  deve ser mantida. O único termo com essas características é o termo de Chern-Simons, porém este quebra  $P$  e  $T$  e não existe nenhuma razão física para que isso aconteça neste caso. Essas observações indicam que uma 1-forma não constitui uma boa descrição efetiva do sistema no limite de baixas energias ainda que este campo apareça na ação  $SO(3)$  original. De fato essas considerações evidenciam ainda que a contribuição de instantons é um problema não-perturbativo.

De forma geral podemos dizer que a teoria efetiva é descrita formalmente pela seguinte função partição

$$\mathcal{Z}_A = \sum_{\{\mathcal{B}_g\}} \int \mathcal{D}A e^{-\int_{\mathcal{M}_3} (\frac{1}{2}(dA+g^*\Sigma_g)\wedge^*(dA+g^*\Sigma_g)) - S_g(J_g)}, \quad (3.77)$$

onde  $g \sim \frac{1}{e}$  e a soma é efetuada sobre as superfícies Poincaré-duais à  $\Sigma_g$ . Note que a soma é irrestrita refletindo o fato de que estes objetos são internos ao sistema (não introduzimos neste estágio nenhuma carga externa), no entanto as superfícies fechadas,  $d^*\Sigma_g = 0$ , não contribuem e podem ser desacopladas ao serem absorvidas por  $A$ . Desta forma esta soma é equivalente a uma soma restrita sobre as configurações de  $\Sigma_g$  com o vínculo  $*J_g = d^*\Sigma_g$  seguida de uma soma sobre as configurações de  $J_g$ . O que afirmamos no parágrafo anterior é que *não existe* uma teoria efetiva apenas em termos de  $A$  que resultaria da soma sobre os instantons em (3.77).

Uma vez que a formulação em termos de  $A$  tem um caráter não-perturbativo no que diz respeito às contribuições de instantons, parece ser uma boa idéia olhar para a formulação dual. Este foi o caminho seguido por Polyakov. A formulação dual da teoria (3.77), pode ser obtida facilmente como fizemos antes através da introdução de

um campo auxiliar  $C$  (uma 2-forma). A ação para  $A$  em (3.77) fica

$$S_A \rightarrow i(dA + g^*\Sigma_g, C) + \frac{1}{2}(C, C), \quad (3.78)$$

de forma que  $A$  é um multiplicador de Lagrange que impõe que  $*C = d\eta$  onde  $\eta$  é um escalar (uma 0-forma). A ação dual é portanto

$$S_\eta = \frac{1}{2}(d\eta, d\eta) - ig(\eta, J_g). \quad (3.79)$$

Observe que a ação só depende de  $J_g$  de forma que a soma sobre as superfícies em (3.77) pode ser equivalentemente escrita como uma soma sobre as superfícies Poincaré-duais à  $J_g$  designadas por  $\mathcal{A}_g$ , a menos de uma normalização da função partição. A formulação dual é portanto

$$\mathcal{Z}_\eta = \sum_{\{\mathcal{A}_g\}} \int \mathcal{D}\eta e^{-\int_{\mathcal{M}_3} (\frac{1}{2}d\eta \wedge *d\eta + ig\eta \wedge *J_g) - S_g(J_g)}. \quad (3.80)$$

A soma sobre superfícies tem um caráter formal e é apenas devidamente definida na rede como mencionamos no Cap. 2. No entanto, neste caso, note que a corrente  $J_g$  é uma 0-corrente. Mais precisamente, pela definição (2.24), um instanton localizado na posição  $x_0$  do espaço-tempo é representado simplesmente por

$$J_g(x) = \delta(x - x_0). \quad (3.81)$$

Segue que podemos construir uma forma explícita para a soma descrevendo um número arbitrário de instantons no espaço, que supostamente constitui uma descrição apropriada do sistema no limite infra-vermelho. Para um instanton apenas, a contribuição na função partição (3.80) seria da forma

$$1 : \sum_{\{\mathcal{A}_g\}} e^{ig(\eta, J_g) - S_g(J_g)} \rightarrow \int d^3x_0 \mu e^{-\frac{I}{e^2}} e^{ig\eta(x_0)}, \quad (3.82)$$

ou seja, uma soma sobre todas as possíveis posições com peso dado pela densidade de probabilidade de existência do instanton no espaço-tempo,  $\mu e^{-\frac{I}{e^2}}$ . Esta informação estaria codificada na expressão formal  $S_g(J_g)$ . Para dois instantons

$$2 : \sum_{\{\mathcal{A}_g\}} e^{ig(\eta, J_g) - S_g(J_g)} \rightarrow \int d^3x_0 \int d^3x'_0 \frac{\mu^2 e^{-\frac{2I}{e^2}}}{2!} e^{ig\eta(x_0)} e^{ig\eta(x'_0)}, \quad (3.83)$$

onde o fator  $2!$  designa o fato de que os instantons são indistinguíveis. Poderíamos ainda ter anti-instantons cuja única diferença é a carga  $-g$ . Portanto em uma situação na qual o sistema possui  $n_+$  instantons e  $n_-$  anti-instantons a contribuição será da forma

$$\frac{\left(\mu e^{-\frac{I}{e^2}}\right)^{n_++n_-}}{n_+!n_-!} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} \int d^3x_0^i \int d^3x_0^j e^{ig\eta(x_0^i)} e^{-ig\eta(x_0^j)}. \quad (3.84)$$

Logo, para um número arbitrário de instantons a soma sobre todas as configurações pode ser escrita de uma forma explícita

$$\sum_{n_+,n_-=0}^{\infty} \frac{\left(\mu e^{-\frac{I}{e^2}}\right)^{n_++n_-}}{n_+!n_-!} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} \int d^3x_0^i \int d^3x_0^j e^{ig\eta(x_0^i)} e^{-ig\eta(x_0^j)}. \quad (3.85)$$

Observe que só estamos considerando instantons de carga  $g$  (e anti-instantons de carga  $-g$ ), para considerar de fato todas as contribuições, a soma deveria varrer todas as cargas também, ou seja, todos os múltiplos inteiros de  $g$ . No entanto, para  $e$  pequeno, as contribuições de ordem superior na carga serão exponencialmente suprimidas. Isso significa que é energeticamente muito mais vantajoso produzir  $n$  instantons de carga  $g$  espalhados em um grande volume do que apenas um instanton de carga  $ng$ .

O fato mais interessante é que neste caso esta soma pode ser realizada exatamente. Observe que as contribuições de instantons e anti-instantons são independentes. Notando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\mu e^{-\frac{I}{e^2}}\right)^n}{n!} \prod_{i=1}^n \int d^3x_0^i e^{ig\phi(x_0^i)} = e^{\mu e^{-\frac{I}{e^2}} \int d^3x e^{ig\eta(x)}}, \quad (3.86)$$

obtemos a contribuição total de instantons e anti-instantons:

$$\sum_{n_+,n_-=0}^{\infty} \frac{\left(\mu e^{-\frac{I}{e^2}}\right)^{n_++n_-}}{n_+!n_-!} \prod_{i=1}^{n_+} \prod_{j=1}^{n_-} \int d^3x_0^i \int d^3x_0^j e^{ig\eta(x_0^i)} e^{-ig\eta(x_0^j)} = e^{2\mu e^{-\frac{I}{e^2}} \int d^3x \cos g\eta(x)}. \quad (3.87)$$

A teoria efetiva que descreve o sistema no infra-vermelho é portanto

$$\mathcal{Z}_\eta = \int \mathcal{D}\eta e^{-\int_{\mathcal{M}_3} (\frac{1}{2} d\eta \wedge * d\eta) + 2\mu e^{-\frac{I}{e^2}} \int d^3x \cos g\eta(x)}. \quad (3.88)$$

Este resultado é muito curioso. Foi necessário irmos para a formulação dual (em termos do campo  $\eta$ ) para dar conta da contribuição dos instantons através de termos locais. Uma forma de entender melhor este resultado é notando que a inserção de um instanton no sistema é representado pela inserção do operador  $e^{ig\eta(x_0)}$ , tomado na posição  $x_0$  do instanton. Este é simplesmente o “loop de Wilson”. Ou seja, a exponencial do operador tomando valores na “linha de mundo” da partícula, que neste caso é apenas um ponto. Isso é esperado, pois esta é a representação dual do acoplamento não-mínimo que aparece em (3.77). Portanto uma forma de construir uma configuração com um número arbitrário de instantons é inserindo todas as combinações possíveis destes operadores na função partição e somando, isso é convenientemente expresso pela expansão de  $e^{e^{ig\eta(x_0)}}$  e ao considerar os anti-instantons também, chegamos no cosseno. Note ainda que o campo  $\eta$  é efetivamente um ângulo na posição do instanton, pois os operadores são invariantes por  $\eta(x_0) \rightarrow \eta(x_0) + \frac{2n\pi}{g}$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ . Esta propriedade permanece válida, agora em todo o espaço, na formulação final devido ao cosseno. Isso sugere uma interpretação via condensado deste sistema.

Uma questão que se mostra natural agora diz respeito ao destino do campo  $A$ . O gás de instantons discutido acima tem o efeito de gerar massa para o campo escalar no valor de  $2g^2\mu e^{-\frac{I}{e^2}}$ , além de termos de auto interação. Sabemos que em  $3D$  um campo escalar massivo (uma 0-forma massiva) é dual a uma 2-forma massiva, um campo de Kalb-Ramond massivo (lembre que para teorias massivas a relação de dualidade é  $p + q + 1 = D$ , onde  $p$  e  $q$  são os postos das formas duais e  $D$  é a dimensão espaço-temporal). Estamos presenciando portanto o fenômeno de pulo de posto.

Vamos agora mostrar que de fato este sistema pode ser representado por meio da prescrição de Julia-Toulouse. Este é um novo resultado que sustenta a generalidade desta prescrição na forma apresentada aqui. Como comentamos acima, deve ser possível representar o comportamento coletivo dos instantons por um condensado (um campo contínuo) mesmo na representação dual. Esta seria a visão via prescrição de Julia-Toulouse dual conforme discutido na seção anterior. De fato, voltemos à formulação dual (3.80). A prescrição de Julia-Toulouse dual consiste em considerar  $J_g$  como um

campo e formalmente considerar a soma sobre superfícies como uma integral sobre  $J_g$ . A pergunta então se torna: qual a forma do funcional  $S_g(J_g)$  tal que a integração sobre  $J_g$  forneça como teoria efetiva a teoria (3.88)?  $J_g$  é um campo auxiliar pois não tem derivadas na ação, portanto integrar  $J_g$  significa resolver a equação:

$$\frac{\delta S_g}{\delta J_g} = ig\eta. \quad (3.89)$$

Queremos determinar  $J_g$  em função de  $\eta$  tal que ao substituir na ação obteremos o termo cosseno. Ou seja devemos resolver (3.89) tal que:

$$-ig \int d^3x J_g(x)\eta(x) + S_g(J_g) = -\epsilon \int d^3x \cos g\eta(x), \quad (3.90)$$

onde definimos  $\epsilon \equiv 2\mu e^{-\frac{I}{e^2}}$ . Este problema pode ser facilmente resolvido. Derivando a expressão (3.90) em relação a  $\eta$  e usando a equação (3.89) obtemos

$$J_g(x) = i\epsilon \sin g\eta(x). \quad (3.91)$$

Substituindo em (3.90) obtemos a forma completa da ação  $S_g(J_g)$

$$S(J_g) = \int d^3x \left( J_g \operatorname{arcsinh} \left( \frac{J_g}{\epsilon} \right) - \epsilon \sqrt{1 + \frac{J_g^2}{\epsilon^2}} \right). \quad (3.92)$$

Agora podemos entender o que acontece no modelo original (3.77) em termos de  $A$ . A prescrição de Julia-Toulouse é implementada na sua forma original, ou seja,  $\Sigma_g$  se torna um campo e o novo campo fundamental da teoria é a combinação invariante de brana  $B \equiv dA + g^*\Sigma_g$  de forma que  $g^*J_g \equiv H = dB$ . Observe como a simetria de calibre é realizada: o campo  $A$  foi comido pela brana  $\Sigma_g$  e a simetria de calibre é realizada de forma escondida no invariante de brana e de calibre  $B$ . A soma sobre as branas se torna uma integral sobre  $\Sigma_g$  que em conjunto com a integral sobre  $A$  se torna efetivamente uma integração sobre  $B$ . A teoria então toma a forma

$$\mathcal{Z}_B = \int \mathcal{D}B e^{-\int_{\mathcal{M}_3} (\frac{1}{2} B \wedge *B) - \int d^3x \left( \frac{*H}{g} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{*H}{g\epsilon} \right) - \epsilon \sqrt{1 + \frac{*H^2}{g^2\epsilon^2}} \right)}. \quad (3.93)$$

Este é o resultado obtido recentemente por Polyakov [95] e descreve a dinâmica dos graus de liberdade relevantes no limite infra-vermelho da teoria (3.76). Essa teoria

descreve um campo de Kalb-Ramond massivo com massa  $g\epsilon$ , a mesma do campo escalar, obviamente, uma vez que estes sistemas são duais.

Observe que a ação envolve uma função multivalente (3.92). Para entender melhor o que isso significa vamos explicitar os diferentes ramos desta função. Note que para um número complexo  $z$  qualquer:

$$\operatorname{arcsinh}(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) + 2i\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.94)$$

onde  $n$  parametriza os diferentes ramos. Podemos elevar esta função à categoria de um funcional e teremos que  $n$  se torna uma distribuição tal que sua integral numa região envolvendo a singularidade definida pela distribuição é um número inteiro (pense primeiramente numa rede onde  $z$  toma valores complexos nos sítios e  $n$  toma valores inteiros, depois extrapole para o contínuo). Esta é a definição de uma 0-corrente. O termo multivalente do funcional fica

$$\frac{{}^*H}{g} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{{}^*H}{g\epsilon}\right) = \frac{{}^*H}{g} \ln\left(\frac{{}^*H}{g\epsilon} + \sqrt{\left(\frac{{}^*H}{g\epsilon}\right)^2 + 1}\right) + \frac{2i\pi n}{g} {}^*H\Lambda. \quad (3.95)$$

Uma soma sobre ramos deve portanto ser incluída na definição da função partição. Esta soma se tornará uma soma sobre 0-superfícies Poincaré-duais a 0-correntes  $\Lambda$  que definem os ramos. Estes são defeitos inerentes ao sistema e têm sua origem na periodicidade do campo  $\eta$  discutido acima; eles são análogos aos loops de fluxo que encontramos no supercondutor. Lembre que lá, no cálculo do potencial confinante, os loops se incorporavam numa soma sobre as branas cuja borda, naquele contexto, eram as linhas de mundo dos monopolos (veja a discussão em torno das eqs. (3.25) e (3.26)). Exatamente o mesmo fenômeno acontecerá aqui (numa versão dual): ao calcularmos o loop de Wilson associado à uma carga elétrica, teremos que expressar esta carga em termos de sua brana  $\Sigma_e$  ( ${}^*J_e = d^*\Sigma_e$ ). Neste caso, a soma sobre os diferentes ramos se traduzirá em uma soma sobre as superfícies cuja borda são as correntes elétricas  $J_e$ . Esta observação foi primeiramente feita por Polyakov em [95]. Observe que também aqui a consistência exige a quantização das cargas elétricas externas como pode ser visto pelo último termo da (3.95) ( $e = \frac{2i\pi n}{g}$ ).

Explicitamente, inserindo o loop de Wilson  $W(C) = e^{ie(A, J_e)}$  em (3.77) e somando sobre o gás de instantons podemos obter o valor médio do loop de Wilson neste sistema. Este terá que ser expresso em termos da brana  $\Sigma_e$  devido ao pulo de posto (mesmo procedimento que em (3.58)). A expressão do valor médio do loop de Wilson na formulação em termos do campo  $B$  será:

$$\langle W(C) \rangle = \sum'_{\{\mathcal{B}_e\}} \int \mathcal{D}B e^{-\frac{1}{2}(B, B) - \int d^3x \left( \frac{{}^*H}{g} \ln \left( \frac{{}^*H}{g\epsilon} + \sqrt{\left( \frac{{}^*H}{g\epsilon} \right)^2 + 1} \right) - \epsilon \sqrt{1 + \frac{{}^*H^2}{g^2\epsilon^2}} \right) + ie(B, \tilde{\Sigma}_e)}, \quad (3.96)$$

onde a soma é realizada sobre as superfícies  $\mathcal{B}_e$  Poincaré-duais à  $\tilde{\Sigma}_e$  vinculadas por  ${}^*J_e = d^*\tilde{\Sigma}_e$ , que é uma carga externa de prova aqui. As branas  $\tilde{\Sigma}_e = \Sigma_e + d^\dagger\Lambda$  são invariantes de brana tipo Stueckelberg. Estes invariantes são construídos com a ajuda dos ramos e a soma sobre os ramos se tornou a soma sobre  $\tilde{\Sigma}_e$ . Observe que, devido ao acoplamento mínimo com o Kalb-Ramond massivo, estas branas agora carregam energia, elas se tornaram reais. Ocorreu uma quebra espontânea da simetria de brana elétrica e a simetria de brana é realizada de forma escondida como já vimos antes. Este modelo, como é bem sabido, exibe confinamento no sentido que o valor médio do loop de Wilson obedece a lei de áreas [76, 77, 78]. O ponto importante que devemos enfatizar é que, aqui, assim como no caso supercondutor, a assinatura do confinamento é a quebra espontânea da simetria de brana. De fato, podemos considerar (3.95) como uma expansão em derivadas de  $B$ . É uma boa aproximação na região-infravermelha considerar apenas a primeira ordem da expansão se a variação do campo  $B$  for suave. Vamos considerar que este é o caso. Obtemos

$$\int d^3x \left( \frac{{}^*H}{g} \ln \left( \frac{{}^*H}{g\epsilon} + \sqrt{\left( \frac{{}^*H}{g\epsilon} \right)^2 + 1} \right) - \epsilon \sqrt{1 + \frac{{}^*H^2}{g^2\epsilon^2}} \right) \approx \int d^3x \frac{{}^*H^2}{2g^2\epsilon}, \quad (3.97)$$

a menos de uma constante, e ficamos com o modelo de Kalb-Ramond massivo acoplado minimamente

$$\langle W(C) \rangle \approx \sum'_{\{\mathcal{B}_e\}} \int \mathcal{D}B e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \frac{1}{2} (B \wedge {}^*B + \frac{1}{g^2\epsilon} H \wedge {}^*H) + i(B, \tilde{\Sigma}_e)}. \quad (3.98)$$

Como foi discutido por Polyakov [95] esta aproximação é suficiente para identificar o confinamento. Isso mostra que o fator determinante para o confinamento é o termo de massa para o campo  $B$  e este por sua vez é a razão da quebra da simetria de brana.

### 3.4.2 Defeitos e o termo de Chern-Simons

Nesta subseção vamos discutir os resultados obtidos em [96, 79]. Nestes trabalhos nós desenvolvemos os fundamentos do formalismo de Julia-Toulouse generalizado para lidar com condensados que quebram as simetrias  $P$  e  $T$ . Vimos acima que o estado de alguns sistemas físicos admite um interpretação efetiva em termos de condensados. Este procedimento é muito semelhante à atitude adotada na teoria do líquido de Fermi, onde a complexa dinâmica dos elétrons em um metal é descrita em baixas energias (próximo a superfície de Fermi) efetivamente por um condensado cujas pequenas excitações são as quasi-partículas [97]. Estas quasi-partículas se comportam como elétrons livres em primeira aproximação (mesma relação de dispersão por exemplo) e constituem uma boa aproximação para a descrição da condutividade em um metal, como evidenciado pelo modelo de Drude. A idéia colocada em [96, 79] é que a dinâmica quântica induzida por férmions muito pesados na  $QED$  em  $3D$  ( $QED_3$ ) pode ser aproximada por um condensado de defeitos em uma formulação dual obtida pela prescrição de Julia-Toulouse.

#### 3.4.2.1 Processos radiativos como um fenômeno de condensação

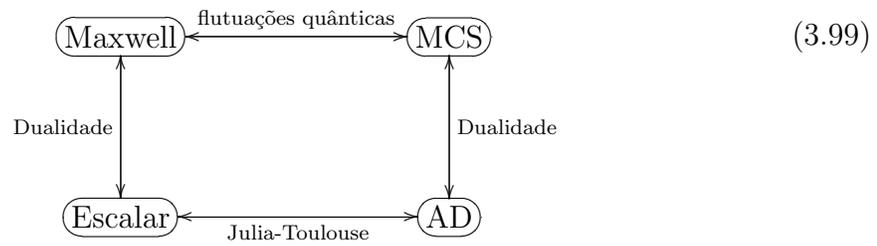
Discutimos no fim do Cap. 2 que a teoria efetiva que descreve a  $QED_3$  em baixas energias é a Maxwell-Chern-Simons (MCS). Esta teoria é obtida em ordem mais baixa numa expansão no inverso da massa do férmion. Esta será uma boa aproximação se os férmions forem muito massivos.<sup>1</sup> A interpretação física da indução do termo de  $CS$  é muito interessante. Ao dizer que determinadas excitações são muito massivas em relação às outras possíveis partículas que constituem o sistema, estamos considerando efetivamente que elas são dinamicamente inertes. No entanto, sua mera presença interfere nos

---

<sup>1</sup>Conforme discutimos no Cap. 2, para fermions não massivos a indução do termo de  $CS$  também ocorre, desta vez induzida pelos fermions reguladores de Pauli-Villars, que também são muito massivos (sem dinâmica)

estados do sistema através de flutuações quânticas e isso resultará numa perturbação da propagação das partículas menos massivas. No caso da  $QED_3$  as flutuações quânticas fermiônicas se manifestam na perturbação da propagação eletromagnética. O mais interessante é que o termo de  $CS$  introduz inércia nesta propagação, os fótons ganham massa. Isso é semelhante ao caso do supercondutor com o mecanismo de Higgs. É natural portanto supor que uma descrição efetiva do sistema possa ser feita por um condensado.

Vimos também no Cap. 2 que a dualidade entre a teoria  $MCS$  e o modelo auto-dual ( $AD$ ) tem como caso especial a dualidade entre a teoria de Maxwell e a teoria de um campo escalar não massivo. Esta última dualidade foi justamente o que discutimos na seção anterior no estudo do modelo de Polyakov. Naquele caso vimos que o sistema de um campo escalar sem massa acoplado minimamente com o gás de instantons é efetivamente descrito por um condensado cujas excitações são campos escalares massivos, diz-se que o campo escalar adquiriu massa devido ao gás de instantons. Aqui nós temos algo similar: a teoria de Maxwell acoplada minimamente a férmions massivos é efetivamente descrita por um “condensado” cujas excitações são partículas vetoriais massivas descritas pela teoria de  $MCS$ . Na seção anterior nós vimos ainda que a teoria dual do condensado é expressa em termos de um campo de Kalb-Ramond massivo (dual ao campo escalar massivo), realizando o fenômeno de pulo de posto característico da prescrição de Julia-Toulouse quando há geração de massa. É portanto natural conjecturar que o mesmo ocorre aqui. Ou seja, deve existir uma formulação dual ao processo de correções quânticas fermiônicas. Por dualidade, este processo deve conectar a teoria do campo escalar sem massa com a teoria do campo  $AD$ , realizando portanto o pulo de posto. Devemos ter então



Vamos agora estudar com mais detalhes a conexão *Escalar – AD* representado na parte inferior do diagrama acima. Como já sabemos, um acoplamento mínimo se traduz, através da dualidade, em um acoplamento não mínimo. Portanto, uma vez que os férmions estão acoplados minimamente com a teoria de Maxwell, a estrutura esperada para a teoria dual escalar é (trabalhamos aqui também no espaço euclidiano)

$$\mathcal{Z}_\phi = \sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_{\mathcal{M}_3} (\frac{1}{2}(d\phi + e^*\Sigma_e) \wedge *(d\phi + e^*\Sigma_e)) - S_e(J_e)}, \quad (3.100)$$

onde  $\phi$  é o campo escalar,  $\Sigma_e$  são 2-correntes tais que  $*J_e = d^*\Sigma_e$  é a corrente elétrica e  $\mathbf{P}(\mathcal{B}_e) = *\Sigma_e$ . Vamos usar a relação “fluxo-corrente” para reescrever esta expressão em outras variáveis. A função partição pode ser equivalentemente escrita como

$$\mathcal{Z}_\phi = \sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}H \delta(*H - *\Sigma_e) e^{-\int_{\mathcal{M}_3} (\frac{1}{2}(d\phi + e^*H) \wedge *(d\phi + e^*H)) - S_e(d^*H)}, \quad (3.101)$$

onde apenas inserimos uma identidade na forma da integral da delta. Usamos agora a fórmula de Poisson (2.29)

$$\sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \delta(*H - *\Sigma_e) = \sum_{\{\mathcal{F}_e\}} e^{-2\pi i \int_{\mathcal{M}_3} *\omega \wedge *H}, \quad (3.102)$$

onde  $\mathcal{F}_e$  são 1-superfícies, Poincaré-duais à 1-forma  $\omega$ . A ação resultante fica

$$S = \frac{1}{2} (d\phi + e^*H, d\phi + e^*H) + 2\pi i (*\omega, H) + S_e(d^*H). \quad (3.103)$$

Redefinimos agora

$$*H \rightarrow f - \frac{1}{e} d\phi \quad (3.104)$$

resulta

$$S = \frac{e^2}{2} (f, f) + 2\pi i (\omega, f) - \frac{2\pi i}{e} (d^\dagger \omega, \phi) + S_e(d^*f). \quad (3.105)$$

Veja que  $\phi$  é agora um multiplicador de Lagrange impondo o vínculo

$$d^*\omega = 0, \quad (3.106)$$

ou seja, os fluxos são fechados. Isso vincula a soma sobre  $\mathcal{F}_e$ , tornando esta uma soma sobre superfícies fechadas. Podemos introduzir superfícies  $\mathcal{G}_e$  das quais as superfícies  $\mathcal{F}_e$  são bordas, ou seja, introduzir uma 2-forma  $\Lambda$  Poincaré-dual à  $\mathcal{G}_e$  tal que  ${}^*\omega = d^*\Lambda$ . A menos de uma normalização a função partição fica

$$\mathcal{Z}_f = \sum_{\{\mathcal{G}_e\}} \int \mathcal{D}f e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{e^2}{2} f \wedge {}^*f + 2\pi i f \wedge d^*\Lambda \right) - S_e(d^*f)}. \quad (3.107)$$

Uma observação extremamente importante é que o condensado descrito pela *MCS* quebra  $P$  e  $T$ . Se quisermos representar o mesmo efeito na formulação dual, esta informação deve estar presente. Sendo uma propriedade do condensado, a quebra destas simetrias deve estar contida na ação  $S_e(d^*f)$ , esta é vista como uma expansão em derivadas pois estamos procurando uma descrição efetiva para as excitações de mais baixa energia. E ainda cada termo deve ser um invariante de brana, que na presente representação significa que os termos em  $S_e$  são invariantes por  $f \rightarrow f + d\chi$  onde  $\chi$  é uma 0-forma. O primeiro termo da expansão é de fato o termo de *CS* que satisfaz todas essas propriedades. Portanto  $S_e$  tem a forma

$$S_e = i\theta \int_{\mathcal{M}_3} f \wedge df, \quad (3.108)$$

onde  $\theta$  é um parâmetro fenomenológico. Ficamos portanto com

$$\mathcal{Z}_f = \sum_{\{\mathcal{G}_e\}} \int \mathcal{D}f e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{e^2}{2} f \wedge {}^*f + i\theta f \wedge df + 2\pi i f \wedge d^*\Lambda \right)}. \quad (3.109)$$

Observe que novamente um campo acoplado não-minimamente sofreu um pulo de posto. Veja no entanto que os defeitos originais do sistema ainda estão presentes na forma de um acoplamento mínimo. Estes objetos são como parâmetros indicando as fases do sistema. Seguindo a idéia de Julia e Toulouse, se estes objetos se proliferam e formam uma distribuição contínua, a soma sobre  $\mathcal{G}_e$  se torna uma integral sobre  $\Lambda$  e o último termo impõe o vínculo  $df = 0$ . Ou seja,  $f = d\phi$  e recuperamos a teoria de um campo escalar. Por outro lado, se formalmente nós anularmos a contribuição dos defeitos  $\omega$ , o que corresponde a uma “diluição” de  $\omega$ , então obteremos como descrição do sistema a

teoria  $AD$

$$\mathcal{Z}_{AD} = \int \mathcal{D}f e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{e^2}{2} f \wedge *f + i\theta f \wedge df \right)}. \quad (3.110)$$

Como sabemos, podemos aplicar um raciocínio similar na teoria original. Lá o “parâmetro” é a brana  $\Sigma_e$  (dual de Poisson à  $\omega$ ). Como já comentamos a relação entre  $\Sigma_e$  e  $\omega$  é uma relação do tipo ordem-desordem. De fato, vemos na (3.100) que se  $\Sigma_e$  é diluída ( $=\omega$  se prolifera) obtemos a teoria do campo escalar. Se por outro lado  $\Sigma_e$  prolifera e se torna uma distribuição contínua então a soma sobre  $\mathcal{B}_e$  se torna uma integral sobre  $\Sigma_e$ . Esta integral em conjunto com a integral sobre  $\phi$  se torna efetivamente uma integral sobre o invariante  $ef \equiv d\phi + e^*\Sigma_e$  e reobtemos (3.110).

Como sabemos, esta é a teoria dual à  $MCS$ . O campo  $f$  é massivo com massa  $\frac{e^2}{2\theta}$  ( $e^2$  tem dimensão de massa). Veja que a  $MCS$  é obtida pela integração dos férmions como discutimos no Cap. 2. A contribuição fermiônica é traduzida no termo de  $CS$ . O que acabamos de ver aqui é que o vácuo quântico com as flutuações fermiônicas pode ser descrito como um condensado que quebra  $P$  e  $T$ . Este condensado tem como principal efeito a geração de massa para o fóton através do termo de  $CS$ . As semelhanças com o mecanismo de Higgs são bem claras. Note ainda que a transição completa para a  $AD$ , ou sua dual  $MCS$ , só é de fato estabelecida no limite em que os defeitos elétricos condensam (ou os fluxos diluem, dependendo do quadro). Este controle que a prescrição de Julia-Toulouse nos dá para passar de uma fase para outra é essencial para o que vamos discutir a seguir.

Antes de passarmos para o próximo tópico vamos analisar a ligação *Maxwell* –  $MCS$  na parte superior do diagrama (3.99). Ao estudar o modelo de Polyakov na seção anterior, vimos que foi possível interpretar a modificação da teoria escalar devido aos instantons através de um condensado representado por um acoplamento mínimo e uma ação para as correntes que era nada mais que a transformada de Legendre do potencial (veja equação (3.90)). No presente caso, temos a teoria de Maxwell acoplada

minimamente

$$\mathcal{Z}_A = \sum_{\{B_e\}} \int \mathcal{D}A e^{-\int_{\mathcal{M}_3} (\frac{1}{2} dA \wedge *dA - ieA \wedge *J_e) - S_e(J_e)}. \quad (3.111)$$

que é simplesmente o modelo dual a (3.100). Se quisermos que o acoplamento com a corrente  $J_e$ , após a condensação da mesma, represente efetivamente o efeito dos férmions então a forma de  $S_e$  tem que ser tal que (espaço Euclidiano)

$$-ie \int_{\mathcal{M}_3} A \wedge *J_e + S_e(J_e) = \ln \det(\not{D} + M), \quad (3.112)$$

de forma que determinando  $J_e$  como função de  $A$  e invertendo, em princípio, é possível determinar a forma da ação  $S_e$ . Estamos interessados apenas em excitações de baixas energias e portanto vamos apenas reter o termo de primeira ordem na expansão derivativa do lado direito. Este é o termo de  $CS$ .

$$\ln \det(\not{D} + M) \approx i \frac{e^2}{8\pi} \frac{M}{|M|} \int_{\mathcal{M}_3} A \wedge dA. \quad (3.113)$$

Nesta aproximação, determinamos imediatamente  $J_e$ :

$$*J_e = -\frac{e}{4\pi} \frac{M}{|M|} dA. \quad (3.114)$$

Substituindo em (3.112) determinamos  $S_e$  que tem uma estrutura tipo  $CS$  também

$$S_e(J_e) = i2\pi \frac{M}{|M|} \int_{\mathcal{M}_3} *\Sigma_e \wedge d*\Sigma_e. \quad (3.115)$$

Note que esta análise é um tanto formal e só faz sentido de fato se  $J_e$  e  $\Sigma_e$  forem campos. Observe que  $S_e$  é invariante de brana e só depende de  $J_e$  como seu argumento indica. Vemos ainda que, comparando com (3.108), parece que podemos identificar  $\theta = 2\pi \frac{M}{|M|}$ , mas note que existe grande arbitrariedade na passagem para o contínuo através da prescrição de Julia-Toulouse e nada garante que esta identificação seja exata. O resultado importante aqui é a identificação da estrutura tipo  $CS$  de  $S_e$ , adequada para simular o comportamento fermiônico visto como um condensado que quebra  $P$  e  $T$ . Este é essencialmente o resultado que reportamos em [96]. Vamos mostrar mais a frente que estes conceitos nos permitem abordar o problema da definição do modelo de  $MCS$  na presença de defeitos magnéticos.

### 3.4.2.2 Julia-Toulouse e o efeito Hall quântico fracionário

Antes de discutir o problema de incluir instantons na teoria de *MCS* devemos comentar brevemente que a análise discutida acima encontra perfeita ressonância na teoria do efeito Hall quântico fracionário (*EHQF*). Especificamente, vamos mostrar agora que é possível obter toda a estrutura hierárquica proposta por Haldane [98] a partir de teorias efetivas obtidas pela prescrição de Julia-Toulouse. O que vamos discutir abaixo está essencialmente contido no artigo de revisão de Wen [46], no entanto é importante observar que aqui este procedimento é visto como um caso especial do formalismo que desenvolvemos.

O efeito Hall quântico ocorre em sistemas de elétrons em baixa temperatura com dinâmica efetivamente planar submetidos a um intenso campo magnético perpendicular ao plano. A manifestação característica do efeito Hall quântico é a quantização da condutividade Hall que caracteriza a resposta eletrônica ao campo eletromagnético aplicado. Explicitamente, para uma corrente elétrica  $J_e$  no plano na presença de um campo eletromagnético  $F = dA$  temos

$$e^* J_e = \sigma F, \quad (3.116)$$

onde

$$\sigma = \frac{\nu e^2}{2\pi}, \quad (3.117)$$

é a condutividade Hall em unidades com  $\hbar = 1$  (em outras unidades  $\sigma = \frac{\nu e^2}{h}$ ). O parâmetro  $\nu$  é denominado filling fraction e os estados energeticamente favoráveis do sistema correspondem a estados incompressíveis com este parâmetro tomando valores inteiros ou fracionários. O caso inteiro, denominado efeito Hall quântico inteiro, pode ser facilmente compreendido com um modelo de elétrons independentes submetidos a um campo magnético externo, o modelo de Landau, que é essencialmente a física de um oscilador harmônico. Para explicar o caso fracionário no entanto, denominado efeito Hall quântico fracionário, as interações entre os elétrons não podem ser ignoradas. De fato o sistema é fortemente correlacionado neste caso e é muito pouco produtivo insistir

em tratar os elétrons como os graus de liberdade aqui. O sistema constitui um *fluido topológico* e as excitações (quasi-partículas) deste fluido constituem os novos graus de liberdade. O mais interessante é que essas excitações são caracterizadas por números quânticos fracionários com relação aos elétrons e isso está diretamente relacionado com os valores fracionários da condutividade. Laughlin [99] propôs funções de onda para definir estes estados. Para o estado fundamental com filling fraction  $\nu = \frac{1}{m}$ ;  $m \in \mathbb{Z}$ , por exemplo, a função de onda tem a forma:

$$\Psi = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2}, \quad (3.118)$$

onde  $z_i = x_i + iy_i$  denota a posição do  $i$ -ésimo elétron no plano. Note que  $m$  deve ser ímpar. Podemos construir uma ação efetiva para este estado. Observe primeiramente que a equação (3.116) tem exatamente a mesma estrutura da (3.114). Portanto uma forma de descrever a resposta linear do sistema de elétrons a um campo eletromagnético externo é dada pela ação

$$S = -ie \int_{\mathcal{M}_3} A \wedge {}^*J_e + im\pi \int_{\mathcal{M}_3} {}^*\Sigma_e \wedge d{}^*\Sigma_e. \quad (3.119)$$

onde  ${}^*J_e = d{}^*\Sigma_e$ . Nesta ação devemos entender  $\Sigma_e$  como um campo representando o condensado de elétrons que forma o fluido Hall. Extremizando esta ação com respeito a  $\Sigma_e$  obtemos (3.116) com  $\nu = \frac{1}{m}$ . O campo dinâmico em (3.119) é  $\Sigma_e$ ,  $A$  é um campo externo, portanto a função partição do sistema tem a forma:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Sigma_e e^{-S(\Sigma_e, A)}. \quad (3.120)$$

Queremos entender agora como as quasi-partículas surgem neste sistema. Estas representarão pequenas excitações em torno do estado fundamental do fluido representado por (3.118). A introdução de quasi-partículas perturba o fluido e pode ser representada pela inserção de 1-correntes acopladas ao campo do fluido  $\Sigma_e$ . A ação portanto é modificada na forma

$$S \rightarrow S' = S - i2\pi q_1 \int_{\mathcal{M}_3} {}^*\Sigma_e \wedge {}^*J_1, \quad (3.121)$$

onde  $q_1$  é a carga da corrente  $J_1$  com respeito ao campo do condensado  $\Sigma_e$ . Pode-se mostrar que  $q_1$  deve ser quantizada por valores inteiros, por simplicidade vamos tomar  $q_1 = 1$  de agora em diante. A proposta de Haldane [98] é que a presença destas excitações é o prelúdio da transição para outros estados Hall caracterizados por outros filling fractions. As excitações perturbam o balanço energético e, ao surgirem mais e mais excitações, eventualmente o sistema se tornará incompressível novamente atingindo uma nova configuração energética favorável e estabelecendo assim um novo estado para o condensado. Podemos entender isso facilmente pelo formalismo de Julia-Toulouse dual. Vamos introduzir na ação um termo caracterizando as quasi-partículas.

$$S' \rightarrow S^{(1)} = S - i2\pi \int_{\mathcal{M}_3} {}^* \Sigma_e \wedge {}^* J_1 + im_1 \pi \int_{\mathcal{M}_3} {}^* \Sigma_1 \wedge d^* \Sigma_1, \quad (3.122)$$

A função partição tem agora a forma

$$\mathcal{Z}^{(1)} = \sum_{\{\mathcal{B}_1\}} \int \mathcal{D}\Sigma_e e^{-S^{(1)}(\Sigma_e, \Sigma_1, A)}, \quad (3.123)$$

onde  $\mathcal{B}_1$  são as superfícies Poincaré-duais à  $\Sigma_1$ . O último termo em (3.122), sendo um termo de auto-intersecção de  $p$ -correntes neste estágio da construção, está relacionado diretamente com a estatística das quasi-partículas que resulta ser fracionário [49]. Não vamos nos alongar neste ponto no entanto, ainda que extremamente importante, e considerar esta ação como intermediária em nossa construção. Seguindo o procedimento de Julia-Toulouse considere que estas excitações se proliferam formando um condensado. Este será um “condensado sobre outro condensado”. Neste caso a soma sobre  $\mathcal{B}_1$  se torna uma integral sobre  $\Sigma_1$  de forma que temos agora dois campos dinâmicos na teoria:  $\Sigma_e$  e  $\Sigma_1$ . Extremizando a ação em relação a estes campos obtemos as equações

$$e^* J_e = \sigma dA + \frac{e}{m} {}^* J_1 \quad (3.124)$$

$${}^* J_1 = \frac{1}{m_1} {}^* J_e. \quad (3.125)$$

Substituindo (3.125) em (3.124) obtemos

$$e^* J_e = \sigma^{(1)} dA, \quad (3.126)$$

onde

$$\sigma^{(1)} = \frac{e^2}{2\pi} \left( \frac{1}{m - \frac{1}{m_1}} \right), \quad (3.127)$$

é o novo coeficiente Hall. Este é o primeiro nível da hierarquia Hall. É evidente que este procedimento pode continuar. Podemos introduzir excitações  $J_2$  no condensado acopladas minimamente com o campo  $\Sigma_1$ . Estas excitações vão então condensar produzindo o próximo nível da hierarquia com

$$\sigma^{(2)} = \frac{e^2}{2\pi} \left( \frac{1}{m - \frac{1}{m_1 - \frac{1}{m_2}}} \right). \quad (3.128)$$

Generalizações deste modelo podem ser consideradas para capturar outras situações mais complicadas. O exemplo discutido diz respeito ao  $EHQF$  em uma camada de material apenas. Para uma situação um pouco mais geral a ação do sistema tem a forma

$$S = -iet_I \int_{\mathcal{M}_3} A \wedge *J^I + i\pi K_{IJ} \int_{\mathcal{M}_3} *\Sigma^I \wedge d*\Sigma^J, \quad (3.129)$$

onde o vetor  $t_I$  codifica a informação sobre os portadores de corrente nas outras camadas da amostra (para uma camada apenas  $t_I = \delta_{I1}$ ) e é denominado vetor de carga. A matriz  $K_{IJ}$  fornece informação sobre o filling fraction através da expressão matricial  $\nu = \mathbf{t}^T K^{-1} \mathbf{t}$ . O fluido Hall é um sistema que apresenta ordem topológica, como comentamos anteriormente, estes sistemas não admitem uma descrição em termos de parâmetros de ordem no contexto usual. De fato os estados deste fluido topológico são caracterizados pela ação topológica (3.129) definida pelas quantidades  $t_I$  e  $K_{IJ}$ . Esta é uma descrição praticamente completa do fluido Hall <sup>2</sup>.

Observe o papel crucial da prescrição de Julia-Toulouse nesta construção. Ainda que a idéia do “condensado sobre condensado” já existisse na literatura é importante notar que a prescrição de Julia-Toulouse permite unificar este conceito em um formalismo mais geral. A seguir vamos discutir uma outra importante aplicação desta prescrição.

---

<sup>2</sup>para sistemas definidos em superfícies curvas pode ser necessária a introdução de uma nova quantidade topológica denominada vetor de spin, veja [46] para mais detalhes

### 3.4.2.3 Confinamento de instantons

A linguagem que desenvolvemos até aqui nos permite ainda abordar uma questão bem controversa na literatura: a definição do termo de Chern-Simons na presença de defeitos magnéticos. Parece não existir um consenso quanto à definição da teoria de  $MCS$  com acoplamento não mínimo. O problema está em tentar incorporar diretamente na teoria um acoplamento não-mínimo com um monopolo externo (um instanton nesta dimensionalidade). Ao fazer isso quebramos explicitamente a simetria de brana magnética devido à presença do termo de  $CS$ . Além disso uma corrente elétrica não conservada parece surgir no sistema. Esta corrente está localizada na brana de Dirac magnética e conseqüentemente esta se torna observável. Portanto ao simplesmente formular a teoria de  $MCS$  com um acoplamento não mínimo obtemos uma formulação no mínimo pouco satisfatória senão inconsistente. Como exatamente a brana, que não é observável por definição, se tornou física? Qual a origem desta corrente não conservada? Isso é consistente com a simetria de calibre?

Na literatura este problema foi primeiramente abordado em [100] onde a conservação da corrente elétrica (e a invariância de calibre) foi reobtida pela introdução *ad hoc* de uma corrente externa. O problema também foi abordado em [101] onde foi percebido pela primeira vez que de fato a brana de Dirac se tornava real na presença do termo de  $CS$  e que a ação resultante do sistema seria proporcional à distância entre os instantons ligados pela brana. Em [102] um outro efeito muito importante foi observado: o termo de  $CS$  destrói o confinamento das cargas elétricas. Vimos na seção anterior que a teoria de Maxwell em  $3D$  na presença de defeitos magnéticos confina as cargas elétricas acopladas minimamente. O que foi observado em [102] é que somando um termo de  $CS$  nesta teoria (obtendo portanto a teoria de  $MCS$ ) o confinamento é destruído. Vimos que a origem do confinamento é o condensado magnético, portanto o termo de  $CS$  suprime a condensação de defeitos magnéticos. A formulação deste problema na rede, usando dualidade e trabalhando com a representação  $AD$ , foi feita em [103] e o comportamento confinante para os instantons, sugerido por Pisarski [101], foi encon-

trado neste contexto. Isso explica por que estes objetos não condensam. No entanto os mesmos problemas de consistência permanecem, na representação  $AD$  o campo  $AD$  se acopla minimamente com a brana e portanto esta é real desde o início. Além disso as questões sobre a simetria de calibre ficam escondidas uma vez que a  $AD$  não possui essa simetria.

A abordagem que estamos desenvolvendo aqui permite clarear e unificar todos esses resultados conforme reportamos em [79]. Vamos adotar a estratégia discutida acima e em seções anteriores. Queremos formular a  $MCS$  na presença de defeitos magnéticos e a  $MCS$  por sua vez pode ser vista como descrevendo um condensado elétrico. Ou seja, a  $MCS$  tem que ser um condensado elétrico com defeitos. Esta é a origem dos problemas de interpretação. Partindo de uma fase em que ambos os defeitos magnéticos e as cargas elétricas estão distribuídas discretamente seremos capazes de construir uma formulação apropriada para o sistema.

Queremos estudar portanto a teoria de Maxwell (3.111) na presença de defeitos magnéticos externos. Considere então a função partição:

$$\mathcal{Z}_A^g(J_g) = \sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \int \mathcal{D}A e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{1}{2} (dA + g^* \Sigma_g) \wedge^* (dA + g^* \Sigma_g) - ieA \wedge^* J_e + i\theta^* \Sigma_e \wedge d^* \Sigma_e \right)}. \quad (3.130)$$

onde  $\Sigma_e$  e  $J_e$  são  $p$ -correntes e  $\theta$  é visto como um parâmetro arbitrário, fenomenológico. Os defeitos magnéticos  $\Sigma_g$  definem os instantons que são simplesmente a borda da superfície Poincaré-dual a 1-corrente  $\Sigma_g$ , ou seja, a densidade de instantons é dada pela 0-corrente  $J_g$  tal que  $*J_g = d^* \Sigma_g$ . Vamos utilizar novamente a fórmula de Poisson para reescrever esta teoria. Inserindo a unidade na forma de uma delta, temos

$$\mathcal{Z}_A^g(J_g) = \sum_{\{\mathcal{B}_e\}} \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}H \delta(*H - *\Sigma_e) e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{1}{2} (dA + g^* \Sigma_g) \wedge^* (dA + g^* \Sigma_g) - ieA \wedge d^* H + i\theta^* H \wedge d^* H \right)}, \quad (3.131)$$

e usando a fórmula (3.102) obtemos

$$\mathcal{Z}_A^g(J_g) = \sum_{\{\mathcal{F}_e\}} \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}H e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{1}{2} (dA + g^* \Sigma_g) \wedge^* (dA + g^* \Sigma_g) - ieA \wedge d^* H + i\theta^* H \wedge d^* H - 2\pi i^* \omega \wedge^* H \right)}. \quad (3.132)$$

Vamos agora integrar em  $H$ . A ação que aparece em (3.132) é

$$S = \frac{1}{2} ((dA + g^* \Sigma_g), (dA + g^* \Sigma_g)) - ie (A, d^\dagger H) + i\theta (*H, d^\dagger H) - 2\pi i (*\omega, H), \quad (3.133)$$

A equação de movimento de  $H$  é

$$-iedA + 2i\theta d^* H - 2\pi i *\omega = 0, \quad (3.134)$$

que imediatamente nos diz que  $d^* \omega = 0$  e portanto podemos escrever  $*\omega = d^* \Lambda$  onde  $\Lambda$  é uma 2-forma. A solução para  $H$  é portanto

$$*H = \frac{e}{2\theta} A + \frac{\pi}{\theta} *\Lambda, \quad (3.135)$$

a menos de um termo de diferencial exata que não vai contribuir ao substituir na ação. A ação fica portanto

$$S = \frac{1}{2} ((dA + g^* \Sigma_g), (dA + g^* \Sigma_g)) - i \frac{e^2}{4\theta} \left( dA + \frac{2\pi}{e} d^* \Lambda, *A + \frac{2\pi}{e} \Lambda \right), \quad (3.136)$$

e obtemos, a menos de uma normalização da função partição

$$\mathcal{Z}_A^g(J_g) = \sum_{\{\mathcal{G}_e\}} \int \mathcal{D}A e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{1}{2} (dA + g^* \Sigma_g) \wedge * (dA + g^* \Sigma_g) - i \frac{e^2}{4\theta} \left( A + \frac{2\pi}{e} *\Lambda \right) \wedge \left( dA + \frac{2\pi}{e} d^* \Lambda \right) \right)}. \quad (3.137)$$

onde a soma é efetuada sobre as configurações das superfícies  $\mathcal{G}_e$  Poincaré-duais a  $\Lambda$ . Definimos agora o campo invariante de brana  $B$ :

$$B \equiv A + \frac{2\pi}{e} *\Lambda \quad (3.138)$$

temos então a forma equivalente

$$\mathcal{Z}_A^g(J_g) = \sum_{\{\mathcal{G}_e\}} \int \mathcal{D}B e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{1}{2} (dB + g^* \Sigma_g - \frac{2\pi}{e} d^* \Lambda) \wedge * (dB + g^* \Sigma_g - \frac{2\pi}{e} d^* \Lambda) - i \frac{e^2}{4\theta} B \wedge dB \right)}. \quad (3.139)$$

Nesta representação toda a informação sobre o condensado elétrico está contido nos fluxos magnéticos  $d^* \Lambda$ . Estes podem ser vistos como parâmetros que controlam a condensação, exatamente como vimos no caso do supercondutor. Ou seja, diluindo  $d^* \Lambda$

estamos nos aproximando da fase condensada elétrica. No entanto, como no supercondutor, vemos que na presença de defeitos magnéticos externos é impossível realizar uma condensação completa consistente com a simetria de brana. O máximo que podemos fazer é diluir todos os loops de fluxos desconexos com a brana de Dirac  ${}^*\Sigma_g$ . Desta forma, desde que a condição de quantização de Dirac seja satisfeita, a soma sobre as superfícies  $\mathcal{G}_e$  (agora envolvendo apenas as conexas com a brana de Dirac) se traduzem em uma soma sobre diferentes configurações da superfície  $\Sigma_g$ , exatamente como vimos antes. Temos finalmente portanto

$$\mathcal{Z}_A^g(J_g) = \sum_{\{\mathcal{B}_g\}}' \int \mathcal{D}B e^{-\int_{\mathcal{M}_3} \left( \frac{1}{2} (dB + \frac{2\pi}{e} {}^*\tilde{\Sigma}_g) \wedge (dB + \frac{2\pi}{e} {}^*\tilde{\Sigma}_g) - i \frac{e^2}{4\theta} B \wedge dB \right)}. \quad (3.140)$$

onde  $\mathcal{B}_g$  são as superfícies Poincaré-duais a  $\tilde{\Sigma}_g \equiv {}^*\Sigma_g - d^*\Lambda$  e a soma é vinculada tal que  ${}^*J_g = d^*\tilde{\Sigma}_g$ . Estas, por construção, são superfícies invariantes de brana. O campo  $B$  também é um invariante de brana. A ação está portanto escrita inteiramente em termos de invariantes de brana mas possui simetria de calibre. A brana  $\tilde{\Sigma}_g$  é física, carrega energia. Esta quebra espontânea da simetria de brana ocorreu exatamente como estudamos anteriormente. Defeitos internos ao sistema foram “absorvidos” por  $\Sigma_g$  que se tornou real.

Veja que, através da fórmula de Poisson, fomos capazes de mapear uma distribuição discreta (um gás) de correntes elétricas  $J_e$  em uma distribuição de fluxos magnéticos fechados  $d^*\Lambda$ . Este é o mapa ordem-desordem. Realizar a condensação elétrica completamente seria o mesmo que diluir estes fluxos magnéticos. Ao fazer isso, apenas uma configuração da brana física  $\tilde{\Sigma}_g$  sobreviveria e corresponderia desta forma de fato a uma configuração externa. Isto explica o problema de interpretação que discutimos antes. Na presença de um condensado elétrico a brana de Dirac é real e sua configuração constitui uma informação relevante fisicamente. Introduzir uma brana magnética diretamente na teoria de *MCS* representa uma quebra explícita da simetria de brana. Ao começarmos com o sistema diluído conseguimos mais controle sobre o que de fato está acontecendo: iniciamos com os instantons  $J_g$  como única informação física no que diz respeito ao conteúdo magnético (a brana  $\Sigma_g$  não é física, apenas sua borda  $J_g$ ). Pela

fórmula de Poisson, o setor elétrico é mapeado em um gás de loops magnéticos. Os constituintes deste gás se combinam com  $\Sigma_g$  e com  $A$  revelando as variáveis fisicamente relevantes neste sistema,  $\tilde{\Sigma}_g$  e  $B$ . Propomos assim que a teoria (3.140) seja o modelo apropriado para a descrição do sistema de  $MCS$  na presença de defeitos magnéticos.

Para entender melhor a relação deste resultado com o obtido por Henneaux e Teitelboim [100] vamos voltar à ação antes da redefinição de  $A$  em (3.138). Henneaux e Teitelboim trabalharam no nível da ação e analisaram subseqüentemente a estrutura Hamiltoniana. A ação postulada por eles para descrever o sistema está relacionada com a ação (3.136). Esta ação está escrita em termo de variáveis não invariantes de brana. Explicitando os termos

$$S = \frac{1}{2} ((dA + g^* \Sigma_g), (dA + g^* \Sigma_g)) - i \frac{e^2}{4\theta} (dA, *A) - i \frac{e\pi}{2\theta} (d^* \Lambda, *A) - i \frac{\pi^2}{\theta} (d^* \Lambda, \Lambda), \quad (3.141)$$

Apenas os três primeiros termos correspondem à ação de Henneaux e Teitelboim. Veja no entanto que o último termo é necessário para manter a invariância de brana. O terceiro termo corresponde a uma interação do campo de calibre  $A$  com uma corrente conservada  $d^* \Lambda$ . Observe que esta corrente, geometricamente, nada mais é que a borda entre  $\Sigma_g$  e  $\tilde{\Sigma}_g$ , uma vez que esta é definida por  $*\tilde{\Sigma}_g = *\Sigma_g - d^* \Lambda$ . Na formulação de Henneaux e Teitelboim  $\Sigma_g$  representa uma corrente elétrica induzida na brana de dirac, esta corrente não é conservada pois tem como borda os instantons  $J_g$ . Eles então introduziram de maneira *ad hoc* uma corrente externa  $\tilde{\Sigma}_g$ , também não conservada, de tal forma que a corrente total, tida como a diferença entre  $\Sigma_g$  e  $\tilde{\Sigma}_g$ , fosse conservada. Na interpretação que estamos apresentando aqui  $\Sigma_g$  não é um objeto físico. O único objeto físico é  $\tilde{\Sigma}_g$  e esta representa de fato uma corrente elétrica não conservada que emana dos instantons que constituem sua borda. Isso é consistente uma vez que mesmo assim a simetria de calibre não é quebrada (explícita ou espontaneamente). O ponto é que  $A$  e  $\Sigma_g$  simplesmente não são as variáveis mais adequadas para descrever o sistema. Vemos portanto que na presente formulação existe uma interpretação natural para essas correntes. Esta situação está ilustrada na figura abaixo:

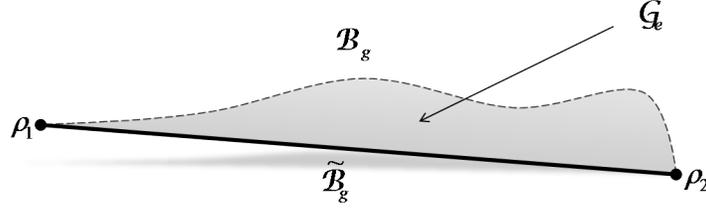


Figura 3.3: Dois instantons  $\rho_1$  e  $\rho_2$  conectados por uma corda confinante física  $\tilde{\mathcal{B}}_g$  Poincaré dual à  $\tilde{\Sigma}_g$ . Conservação total de corrente é conseguida levando em conta a corrente elétrica induzida  $\Sigma_g$ , Poincaré dual a superfície  $\mathcal{B}_g$ . Estas correntes são bordas da superfície  $\mathcal{G}_g$ , Poincaré dual a  $\Lambda$ .

É importante mencionar que um dos principais resultados obtidos por Henneaux e Teitelboim foi a quantização da massa topológica, considerada por eles como um parâmetro independente. Na análise aqui apresentada a massa é definida pela carga  $e$ , que é quantizada e portanto aqui também a massa é quantizada. Não existe porém consenso sobre a forma precisa desta quantização. Henneaux e Teitelboim obtiveram a relação:

$$H - T : \quad m = \frac{2\pi n}{g^2}; \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.142)$$

onde  $m$  é a massa topológica e  $g$  é a carga do instanton. Este resultado foi obtido argumentando que a brana de Dirac carrega carga elétrica de valor  $mg$  e esta deve ser submetida à mesma quantização que qualquer outra carga elétrica. Pisarski, por outro lado, considerando o sistema a temperatura finita, obteve uma quantização mais restritiva

$$Pisarski : \quad m = \frac{4\pi n}{g^2}; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.143)$$

Nosso resultado no entanto indica uma condição ainda mais restritiva; uma vez que  $m = \frac{e^2}{2\theta}$  e  $eg = 2\pi n$  obtemos

$$m = \frac{2\pi^2 n^2}{\theta g^2}; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.144)$$

Devemos ser cautelosos em considerar esta a resposta final pois na prescrição de Julia-Toulouse  $\theta$  é um parâmetro fenomenológico. No entanto a forma desta quantização é uma previsão interessante do formalismo desenvolvido aqui.

Vamos discutir agora o caráter confinante da teoria (3.140) na forma interpretada por Pisarski. Já sabemos que a quebra da simetria de brana de Dirac é um fator deficiente do confinamento das cargas que são a borda da brana; neste caso, os instantons. Vamos explicitar o fato de que a brana  $\tilde{\Sigma}_g$  é real formulando a teoria no quadro dual. A ação que define (3.140) pode ser escrita de forma equivalente introduzindo-se um campo auxiliar

$$S = i \left( dB + \frac{2\pi}{e} * \tilde{\Sigma}_g, \Pi \right) + \frac{1}{2} (\Pi, \Pi) - i \frac{e^2}{4\theta} (B, *dB). \quad (3.145)$$

Podemos redefinir  $B$ :

$$*B \equiv \frac{2\theta}{e^2} (\Pi - C) \quad (3.146)$$

e a ação em termos de  $C$  e  $f \equiv * \Pi$  fica

$$S = -i \frac{\theta}{e^2} (C, *dC) + i \frac{\theta}{e^2} (f, *df) + \frac{1}{2} (f, f) + \frac{2\pi i}{e} (f, \tilde{\Sigma}_g). \quad (3.147)$$

Ou seja,  $C$  é completamente desacoplado da teoria. Esta é simplesmente a dualidade  $MCS - AD$  que discutimos no Cap. 2. A brana  $\tilde{\Sigma}_g$  se acopla diretamente com o campo  $AD$   $f$  explicitando seu caráter físico. Esta forma da ação deixa claro que existe uma interação direta entre as branas  $\tilde{\Sigma}_g$  mediada pelo campo massivo  $f$ . De fato, integrando  $f$  na função partição

$$\mathcal{Z}_f^g(J_g) = \sum_{\{B_g\}}' \int \mathcal{D}f e^{-i \frac{\theta}{e^2} (f, *df) - \frac{1}{2} (f, f) - \frac{2\pi i}{e} (f, \tilde{\Sigma}_g)}, \quad (3.148)$$

obtemos a teoria efetiva para as branas

$$\mathcal{Z}^g(J_g) = \sum_{\{B_g\}}' e^{-\frac{2\pi^2}{e^2} \left( J_g, \left( \frac{1}{\Delta + \left( \frac{e^2}{2\theta} \right)^2} \right) J_g \right) + i \frac{\pi^2}{\theta} \left( \tilde{\Sigma}_g, \left( \frac{1}{\Delta + \left( \frac{e^2}{2\theta} \right)^2} \right) * d\tilde{\Sigma}_g \right) - \frac{e^2 \pi^2}{2\theta^2} \left( \tilde{\Sigma}_g, \left( \frac{1}{\Delta + \left( \frac{e^2}{2\theta} \right)^2} \right) \tilde{\Sigma}_g \right)}. \quad (3.149)$$

A ação efetiva na exponencial é a mesma obtida em [103], onde os autores trabalharam com o sistema definido na rede. O último termo da ação efetiva é responsável

pela quebra da simetria de brana e portanto pelo caráter confinante do resultado. Suponha que  $J_g$  descreva um par instanton-anti-instanton separados por uma distância espaço-temporal  $L$ . Estes instantons são pontos no espaço-tempo. Cada termo na soma sobre branas em (3.149) representa o peso probabilístico atribuído às configurações de linhas de Dirac que emanam destes instantons, representadas por  $\Sigma_g$ . Portanto o último termo da ação nos diz que a probabilidade de existência desta configuração depende da configuração das branas  $\Sigma_g$ . Para calcular explicitamente esta contribuição basta notar que esta é exatamente a mesma situação que encontramos ao calcular o potencial confinante no supercondutor. Naquele caso nós consideramos uma configuração de monopolos estáticos, o que nos levou a um cálculo efetivamente em  $3D$ . Este é exatamente o mesmo cálculo que precisamos fazer aqui. Como no caso do supercondutor, esperamos que o termo na soma (3.149) que mais contribui está associado à linha de Dirac de menor comprimento que conecta o par instanton-antiinstanton. Esta será a linha reta de comprimento  $L$ . Portanto, para esta configuração de brana teremos assintoticamente:

$$e^{-\frac{e^2\pi^2}{2\theta^2} \left( \tilde{\Sigma}_g, \left( \frac{1}{\Delta + \left(\frac{e^2}{2\theta}\right)^2} \right) \tilde{\Sigma}_g \right)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} e^{-\sigma L}, \quad (3.150)$$

onde  $\sigma = \frac{g^2 m^2}{8\pi} \ln \left( \frac{M^2 + m^2}{m^2} \right)$ , com  $m = \frac{e^2}{2\theta}$  a massa topológica e  $g$  a carga do instanton. Aqui  $M$  é um cut-off regularizador. Seguindo a interpretação de Pisarski [101], este resultado nos diz que a probabilidade de criação de um par instanton-anti-instanton é fortemente suprimida quanto maior for a distância entre eles. Em particular a probabilidade de criação de um instanton livre é nula. Por isso dizemos que os instantons estão confinados. Vemos aqui que esta é uma consequência direta da quebra da simetria de brana.

# Capítulo 4

## Violação da invariância de Lorentz

### 4.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar modelos que violam as simetria de Lorentz e  $CPT$ . Grande parte dos estudos nessa área está centrada na busca por teorias efetivas que possuem essas simetrias apenas aproximadamente (para revisões veja por exemplo [104, 105, 106, 107, 108]). Essa atitude está baseada na suposição que violações das simetrias de Lorentz e  $CPT$  ocorram no extremo ultra-violeta, por um processo de quebra espontânea por exemplo [109], e na expectativa que sinais dessas violações sejam observáveis em escalas acessíveis experimentalmente. Colladay e Kostelecky [110, 111] propuseram uma forma geral de incorporar efeitos de violação de Lorentz e  $CPT$  no modelo padrão considerando a possibilidade de condensação de quantidades tensoriais em uma teoria mais completa. Na prática, eles adicionaram termos na ação contendo tensores constantes acoplados aos campos do modelo padrão. A teoria efetiva resultante foi denominada *modelo padrão estendido* ( $MPE$ ). Estudando a fenomenologia no  $MPE$ , sinais da violação de Lorentz podem ser parametrizados pelos tensores constantes e estes podem ter sua magnitude limitada experimentalmente. O  $MPE$  também levanta questões sobre a consistência de teorias desse tipo. Dado que a simetria de Lorentz parece estar intimamente relacionada com a definição da estrutura causal, o estudo de modelos com violação de Lorentz nos obriga a confrontar questões envolvendo problemas de causalidade além de questões sobre unitariedade em mecânica quântica.

No que segue nós vamos primeiramente discutir o conceito de *teorias de campos não comutativos* [116, 117] que são construídas deformando-se a estrutura canônica das teorias de campo usuais. Este procedimento pode ser visto como um gerador de modelos que em geral violam simetrias espaço-temporais nos moldes do *MPE*. Nosso objetivo é estabelecer a conexão desse procedimento com a prescrição de Julia-Toulouse. Essas teorias podem ser vistas como modelos efetivos de uma teoria mais completa onde as simetrias espaço-temporais são violadas nas interações entre os campos. Apresentaremos um modelo em  $(1 + 1)D$  que fornece um exemplo explícito desse fato discutindo uma possível conexão entre os setores infra-vermelho e ultra-violeta dessa teoria e sua consequência para a fenomenologia da violação de Lorentz.

Finalmente discutiremos o setor eletromagnético do *MPE* que viola *CPT*. Este é conhecido como o *modelo de Carroll-Field-Jackiw* [120]. Este modelo tem sido muito estudado recentemente pois representa a deformação mínima da teoria de Maxwell para incluir violações das simetrias de Lorentz e *CPT* dando origem a uma rica e singular fenomenologia que pode ser usada para identificar sinais experimentais dessas violações. Estudaremos diversos aspectos desse modelo discutindo ainda suas possíveis origens teóricas. Explorando a analogia entre o modelo de Maxwell-Chern-Simons e a teoria de Carroll-Field-Jackiw, discutimos a questão controversa sobre a indução do termo tipo Chern-Simons devido a flutuações fermiônicas que violam as simetrias de Lorentz e *CPT*. Introduzimos o interessante resultado que a massa fermiônica em  $(2 + 1)D$  não guarda qualquer relação com a massa fermiônica em  $(3 + 1)D$ . Argumentamos que a massa fermiônica em  $(2 + 1)D$  é resultado da redução dimensional de um termo fermiônico em  $(3 + 1)D$  que viola as simetrias de Lorentz e *CPT*, a herança destas violações é a quebra de *P* e *T* no plano. Esta observação conduz à determinação sem ambiguidades do termo tipo Chern-Simons como resultado de flutuações fermiônicas não massivas em  $(3 + 1)D$ . Com o intuito de estudar as propriedades topológicas da Carroll-Field-Jackiw, nós obteremos ainda sua formulação dual. Este é um resultado pouco trivial por si só uma vez que a violação de Lorentz e *CPT* destrói a auto-dualidade da teoria de Maxwell. Partiremos então para a definição de cargas magnéticas nesse

sistema. Mostramos que com o formalismo da prescrição de Julia-Toulouse podemos construir uma teoria consistente. Um novo resultado sugerido por esta construção é que o modelo de Carroll-Field-Jackiw na presença de monopolos magnéticos apresenta propriedades confinantes.

Neste capítulo vamos adotar métrica com assinatura  $(+, -, -, -, \dots)$  e, devido à grande assimetria introduzida pela violação de Lorentz, nós vamos explicitar os índices tensoriais.

## 4.2 Deformação da estrutura canônica

Vamos começar este capítulo estabelecendo uma ponte entre o que vamos discutir aqui e o que discutimos no capítulo anterior. Sugerimos que a prescrição de Julia-Toulouse deve ser considerada um gerador de teorias. Adotamos como um exemplo desta propriedade as conexões entre a teoria de Maxwell e a teoria escalar, e as teorias de *MCS* e *AD* conforme especificado no diagrama (3.99). Vimos que o guia para implementar a prescrição de Julia-Toulouse é a observação do comportamento das simetrias no processo físico considerado. Nesse exemplo em particular a presença de fermions massivos em interação com o campo eletromagnético de Maxwell estabelece a quebra das simetrias *P* e *T*. Como resultado obtemos como teoria efetiva a *MCS*. No quadro dual essa informação é utilizada na implementação da prescrição. Note que ao considerar esse processo como uma transformação da teoria de Maxwell na teoria de *MCS*, ou da teoria escalar na *AD*, ocorre uma alteração radical na estrutura simplética dessas teorias. O termo de *CS* constitui efetivamente uma deformação do espaço de fase do sistema. Este tipo de deformação pode ser visto como um caso especial de um ramo de pesquisa muito ativo: o estudo das teorias de campos não-comutativos. Importante atentar que não nos referimos aqui a teorias de campos definidas em espaços não-comutativos onde as coordenadas do espaço-tempo satisfazem uma relação do tipo

$$[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

onde  $\theta^{\mu\nu}$  é um parâmetro com dimensão de área. A deformação definida pela eq.(4.1) diz respeito à própria estrutura do espaço-tempo e resulta na impossibilidade de definir o conceito de localização absoluta devido à introdução de uma área mínima (existe uma vasta literatura sobre esse tema, para revisões veja [112, 113] assim como minha tese de mestrado [114] que descreve uma versão da dualidade *MCS AD* nesse espaço, reportada em [115]). No entanto, o tipo de deformação que temos em mente aqui diz respeito às modificações de caráter fenomenológico na estrutura canônica das teorias de campo. Esta proposta foi feita em [116, 117], veja também [118]. Nesse contexto a deformação é realizada no espaço de fase da teoria de campo. Um exemplo genérico de tal deformação em  $(3 + 1)D$  para uma teoria que descreve a dinâmica de um campo  $\Phi_i(x)$  tem a forma

$$\begin{aligned} [\Phi_i(x), \Phi_j(y)] &= i\varepsilon_{ijk} B^k \delta^{(3)}(x - y) \\ [\Phi_i(x), \Pi_j(y)] &= i\delta_{ij} \delta^{(3)}(x - y) \\ [\Pi_i(x), \Pi_j(y)] &= i\varepsilon_{ijk} \Theta^k \delta^{(3)}(x - y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $\Pi_i$  são os momentos canônicos. Os parâmetros  $B$  and  $\Theta$  são fenomenológicos e introduzem novas escalas no problema. Eles possuem dimensões canônicas de comprimento e massa, respectivamente. Se essas deformações puderem ser consideradas pequenas, os parâmetros definem uma escala ultra-violeta e uma escala infra-vermelha, respectivamente. Observe que em  $(3 + 1)D$  essas deformações potencialmente quebram as simetrias de Lorentz e *CPT* (o mesmo ocorre com as teorias no espaço-tempo não comutativo [119]). Considerando as equações (4.2) como um deformação da estrutura canônica estamos de fato gerando uma nova teoria, descrevendo novos fenômenos físicos parametrizados pelos parâmetros de deformação. Veja que este é o mesmo espírito da prescrição de Julia Toulouse, ou seja ambos são considerados um gerador de modelos.

Discutiremos em uma seção mais adiante o modelo de Carroll-Field-Jackiw [120]. Este modelo viola as simetrias de Lorentz e *CPT* e pode ser visto como a generalização da *MCS* para  $4D$ . O que queremos registrar neste momento é que esse modelo pode ser obtido tanto por correções radiativas fermiônicas, a partir de uma teoria onde os

fermions possuem uma interação que viola as simetrias de Lorentz e  $CPT$ , quanto pela deformação da estrutura canônica na forma (4.2).

Nesta seção estamos interessados em analisar a situação em  $(2 + 1)D$  representada pelo diagrama (3.99) sob o ponto de vista da deformação. Nesse caso, a deformação tem como resultado a quebra das simetrias  $P$  e  $T$  mas preserva a simetria de Lorentz. Um ponto interessante é que, com a geração de massa, a prescrição de Julia-Toulouse tem como uma das características o pulo de posto. Veremos como esse efeito se apresenta nesse formalismo. Este constitui um novo resultado no contexto da deformação das estruturas canônicas e foi discutido em [96].

### 4.2.1 Deformação $P$ - $T$ da teoria de Maxwell

Começamos reobtendo o resultado de [121] referente à conexão entre a teoria de Maxwell e a teoria  $MCS$  através da deformação da estrutura canônica. No formalismo Hamiltoniano, a teoria de Maxwell é definida pela seguinte estrutura: um Hamiltoniano

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 \right], \quad (4.3)$$

as relações canônicas de comutação (vamos manter a discussão no quadro clássico de forma que estes são colchetes de Poisson, mas vamos continuar chamando-os de comutadores)

$$\begin{aligned} \{A_i(x), A_j(y)\} &= 0 \\ \{A_i(x), \Pi^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^{(2)}(x - y) \\ \{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

e o vínculo de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{\Pi} = 0. \quad (4.5)$$

O vínculo pode ser incorporado na Hamiltoniana através de um multiplicador de Lagrange que pode ser identificado com o potencial escalar  $A^0$ . Este vínculo reduz o espaço de fase para uma variedade bidimensional deixando o sistema com apenas um

grau de liberdade, como deve ser para a teoria de Maxwell em  $(2 + 1)D$ . As equações de movimento juntamente com esse vínculo nos fornecem as equações de Maxwell com as identificações  $\vec{E} = -\vec{\Pi}$  e  $B = \nabla \times \vec{A}$ :

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{\vec{E}} = \nabla \times B \quad (4.7)$$

$$\dot{B} = -\nabla \times \vec{E}, \quad (4.8)$$

onde o ponto denota a derivada temporal. Note que  $B$  é um pseudo escalar.

Como comentamos, a deformação da estrutura de comutação canônica é uma modificação explícita da dinâmica da teoria. Mas essa modificação não é arbitrária. Queremos simular um efeito físico. No presente caso este efeito é a presença de férmions e a conseqüente quebra de  $P$  e  $T$  representada pela indução do termo de  $CS$ . Um ponto extremamente importante que nos guiou no uso da prescrição de Julia-Toulouse e nos guiará aqui é o fato de que a simetria de calibre não pode ser quebrada por nenhum processo físico [86]. Ela pode ser realizada de forma escondida em certas ocasiões, como no mecanismo de Higgs, mas, uma vez que é uma redundância matemática imposta pela nossa escolha de variáveis, nenhum processo físico é capaz de simplesmente eliminar essa ambigüidade. Com isso em mente, considere a seguinte deformação das relações canônicas

$$\begin{aligned} \{A_i(x), A_j(y)\} &= 0 \\ \{A_i(x), \Pi^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^{(2)}(x - y) \\ \{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\} &= \varepsilon^{ij} m \delta^{(2)}(x - y). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Veja que o parâmetro  $m$  introduz uma escala de massa no problema (quebramos a simetria conforme da teoria de Maxwell). Considerando  $m$  como uma pequena deformação estamos introduzindo uma escala infra-vermelha no sentido de que agora as distâncias características dos fenômenos são consideradas pequenas se forem muito menores que  $\frac{1}{m}$ .

Se considerarmos apenas essas deformações, a simetria de calibre será quebrada uma vez que a Hamiltoniana não comutará com o gerador das transformações de calibre

$$G[\alpha] = \int d^2x \alpha(x) \nabla \cdot \vec{\Pi}. \quad (4.10)$$

Para manter a simetria de calibre da teoria temos que definir um novo gerador que produza a mesma transformação de calibre usual no campo  $A$  e que comute com todos os observáveis da teoria. Uma vez que não deformamos as relações de auto-comutação do campo  $A$ , qualquer função de  $A$  que adicionarmos ao vínculo (4.5) preservará as transformações usuais de calibre para  $A$ . O termo mais simples a adicionar é um termo linear em  $A$ , propomos então o novo gerador:

$$\tilde{G}[\alpha] = \int d^2x \alpha(x) \partial_i (\Pi^i - \varepsilon^{ij} m A_j). \quad (4.11)$$

O coeficiente do termo linear em  $A$  é facilmente determinado exigindo que o gerador tenha comutadores nulos com o momento canônico (um ente físico e portanto invariante de calibre), segue que ele comutará com o Hamiltoniano também. Para construir a Lagrangiana é conveniente colocar os comutadores na forma canônica familiar de maneira que a nova estrutura simplética possa ser imediatamente reconhecida. Fazemos isso redefinindo os momentos

$$\tilde{\Pi}^i = \Pi^i - \frac{\varepsilon^{ij} m}{2} A_j \quad (4.12)$$

de forma que a estrutura deformada (4.9) se torna

$$\begin{aligned} \{A_i(x), A_j(y)\} &= 0 \\ \{A_i(x), \tilde{\Pi}^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^{(2)}(x - y) \\ \{\tilde{\Pi}^i(x), \tilde{\Pi}^j(y)\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A Lagrangeana é então facilmente construída levando-se em conta a nova forma do vínculo como definido em (4.11) (aqui  $\mathcal{H}$  é a densidade Hamiltoniana correspondendo

à (4.3))

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_i \tilde{\Pi}^i \dot{A}_i - \mathcal{H} + A_0 \partial_i (\Pi^i - \varepsilon^{ij} m A_j) \\
&= \sum_i \Pi^i (\dot{A}_i - \partial_i A_0) - \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 - \frac{m}{2} \varepsilon^{i0j} A_i \partial_0 A_j - m A_0 \varepsilon^{0ij} \partial_i A_j \\
&= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho
\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde a última igualdade foi obtida usando a identificação  $\Pi^i = \dot{A}_i - \partial_i A_0 = F_{0i}$  que segue pois  $\Pi^i$  é um campo auxiliar nessa Lagrangiana. Isso estabelece a conexão Maxwell/MCS através da deformação da estrutura canônica.

## 4.2.2 A teoria Auto-Dual como a deformação da teoria escalar

Nesta seção vamos estabelecer a conexão entre a teoria do campo scalar e a teoria do campo *AD* através da deformação das relações canônicas de comutação, este é um novo resultado que reportamos em [96]. Este procedimento é o exato dual do que fizemos acima conectando a Maxwell à *MCS*. Uma vez que a deformação que consideraremos aqui vai transformar um campo escalar em um campo vetorial, será interessante ver como este pulo de posto se manifestará como consequência da deformação. Sabemos que isso é uma consequência da dualidade Maxwell/escalar que também opera um pulo de posto, no entanto, resultando da deformação, esse efeito é consequência de um processo físico que como sabemos está associado à condensação de defeitos e geração de massa conforme vimos através da prescrição de Julia-Toulouse no capítulo anterior.

A teoria escalar é definida pelo Hamiltoniano

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 \right], \tag{4.15}$$

e as relações de comutação

$$\begin{aligned}
\{\phi(x), \phi(y)\} &= 0 \\
\{\phi(x), \Pi(y)\} &= \delta^{(2)}(x - y) \\
\{\Pi(x), \Pi(y)\} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Baseado no mapa de dualidade entre o campo escalar e o campo de Maxwell propomos a seguinte deformação nos comutadores

$$\begin{aligned}\{\partial_i\phi(x), \partial_j\phi(y)\} &= m\varepsilon_{ij}\delta^{(2)}(x-y) \\ \{\phi(x), \Pi(y)\} &= \delta^{(2)}(x-y) \\ \{\Pi(x), \Pi(y)\} &= 0.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Note que essas relações estão deformadas no setor do campo e não no dos momentos. Isso é uma consequência da dualidade. As equações de movimento da teoria deformada são

$$\dot{\Pi} = \nabla^2\phi\tag{4.18}$$

$$\partial_i\dot{\phi} = \partial_i\Pi - m\varepsilon_{ij}\partial^j\phi.\tag{4.19}$$

Se  $m \neq 0$ , essas equações só podem ser escritas em termos das derivadas de  $\phi$ . Para um campo  $\phi$  univalente essas equações só possuem soluções triviais. De fato, note que (4.19) implica  $\nabla^2\phi = 0$ . Com as condições de contorno usuais  $\phi \rightarrow 0$  no infinito espacial, essa equação nos diz que  $\phi \equiv 0$  (uma vez que a solução para a equação de Laplace é univocamente determinada pelas condições de contorno). Mas se o campo  $\phi$  não for univalente, tal que  $\varepsilon_{ij}\partial^i\partial^j\phi \neq 0$ , seremos capazes de construir um sistema não-trivial elevando a derivada do campo à categoria de campo fundamental (esse procedimento corresponde à condensação de defeitos). Definimos portanto

$$\Pi \equiv f^0\tag{4.20}$$

$$\partial^i\phi \equiv f^i.\tag{4.21}$$

Em termos destas variáveis as equações (4.18) e (4.19) se tornam

$$\partial_\mu f^\mu = 0\tag{4.22}$$

$$f^i + \frac{1}{m}\varepsilon^{ij}\partial_j f_0 - \frac{1}{m}\varepsilon^{ij}\partial_0 f_j = 0,\tag{4.23}$$

respectivamente. Observe que tomando a derivada espacial de (4.23) e usando (4.22) obtemos

$$\partial_i f^i = \frac{1}{m}\partial_0(\varepsilon^{ij}\partial_i f_j) = -\partial_0 f^0.\tag{4.24}$$

Que nos permite concluir que

$$f^0 = -\frac{1}{m}\varepsilon^{ij}\partial_i f_j + C(x, y). \quad (4.25)$$

Ou seja, o campo  $f^0$  tem toda sua dinâmica determinada pelos campos  $f^i$  exceto por uma função independente do tempo  $C(x, y)$ , que pode ser absorvida numa redefinição do campo  $f^0$  sem modificar a dinâmica. Fazendo isso nós podemos escrever toda informação física contida em (4.22) e (4.23) na forma mais compacta

$$f^\mu + \frac{1}{m}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu f_\rho = 0, \quad (4.26)$$

que imediatamente reconhecemos como as equações de movimento do sistema  $AD$ . Isso prova portanto que toda informação não-trivial do sistema escalar deformado é reproduzido pelo modelo  $AD$ . A deformação só faz sentido quando consideramos  $\partial\phi$  um campo fundamental efetuando assim o pulo de posto.

### 4.3 Deformação induzida e dualidade IV/UV em (1+1)D

Vimos na seção anterior que a deformação da estrutura canônica pode ser considerada como induzida pela dinâmica quântica fermiônica. Esse fato é na verdade bem geral e a análise das teorias efetivas resultantes pode revelar estruturas não triviais como no caso do termo topológico de  $CS$ . Um outro exemplo é a indução de fases de Berry representadas por termos de Wess-Zumino, que resultam ter um papel decisivo na determinação das transições de fase quânticas em sistemas magnéticos [122] por exemplo. Nesta seção vamos estudar um exemplo em  $(1+1)D$  [123]. A teoria que vamos considerar envolve um campo escalar em interação com férmions através de um termo que viola a simetria de Lorentz. Resulta que a teoria efetiva para o campo escalar tem sua estrutura canônica deformada devido à indução de um termo que modifica a estrutura simplética da teoria. Esse modelo é importante pois representa uma nova realização da idéia geral de deformação induzida que acabamos de mencionar.

No que segue vamos essencialmente reproduzir os resultados que reportamos em [123] onde estudamos o sistema boson-fermion mencionado acima integrando as variáveis fermiônicas através da prescrição de Goldstone-Wilczek [124]. Isso significa que vamos considerar que a variação espaço-temporal das variáveis bosônicas seja muito menor que a das variáveis fermiônicas, ou seja, a escala de energia associada aos bósons é muito menor que a associada aos férmions. Isso nos permitirá obter uma teoria efetiva para os bósons. Estudaremos então a dinâmica dos modos bosônicos descritos por esta teoria efetiva para entender como a quebra da simetria de Lorentz se manifesta. Vamos a seguir analisar a estrutura simplética da teoria obtendo a formulação em termos dos comutadores deformados. Através da dualidade seremos capazes de conectar a região infra-vermelha com a região ultra-violeta da teoria.

### 4.3.1 O mecanismo de Goldstone-Wilczek

O modelo com o qual vamos trabalhar é fundamentado nos mesmos princípios do modelo padrão estendido introduzido por Colladay e Kostelecky [110, 111]. Ou seja, consideramos a adição de um termo que viola a simetria de Lorentz por definir um referencial privilegiado no espaço-tempo. Mais precisamente, considere o seguinte modelo

$$S = \int d^2x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \theta \phi' \bar{\psi} \gamma^1 \psi - g \bar{\psi} e^{\gamma_5 \phi} \psi \right). \quad (4.27)$$

Essa teoria descreve um campo escalar  $\phi$  sem massa acoplado com um campo fermiônico  $\psi$  também sem massa. Aqui adotamos a representação das matrizes de Dirac definida por  $\gamma^0 = \sigma^1$ ,  $\gamma^1 = i\sigma^3$  e  $\gamma_5 = i\sigma^2$ . A interação derivativa viola a simetria de Lorentz explicitamente uma vez que envolve um tensor constante selecionando um referencial de Lorentz privilegiado

$$\phi' \bar{\psi} \gamma^1 \psi = P^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) \bar{\psi} \gamma_\nu \psi; \quad P^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

A abordagem que vamos adotar está relacionada com as aproximações adiabáticas feitas nos cálculos da fase de Berry mencionada acima e, da forma como será aplicada aqui, foi introduzida em [124]. Temos um bóson e um férmion em interação e fazemos a

hipótese de que a escala de energia característica das excitações bosônicas é muito menor que a escala associada aos férmions. Nosso objetivo é encontrar uma teoria efetiva descrevendo as excitações de baixa energia do campo escalar. Também exigiremos que os efeitos da violação de Lorentz sejam pequenos de forma que podemos manter os resultados apenas em primeira ordem em  $\theta$ . Para construir a teoria efetiva nós temos que levar em conta a contribuição fermiônica definindo a teoria efetiva da forma

$$e^{iS_{eff}} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{iS}. \quad (4.29)$$

Vamos ignorar termos de ordem superior nas derivadas escalares de forma que podemos escrever

$$e^{iS_{eff}} = e^{\int d^2x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi} \langle e^{-\int d^2x \theta \phi' \bar{\psi} \gamma^1 \psi} \rangle = e^{\int d^2x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi} e^{-\int d^2x \theta \phi' \langle \bar{\psi} \gamma^1 \psi \rangle}, \quad (4.30)$$

onde

$$\langle \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) e^{i \int d^2x (i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - g \bar{\psi} e^{\gamma^5} \phi \psi)} \quad (4.31)$$

é a corrente fermiônica induzida devido à interação não-derivativa dada pelo último termo em (4.27). Essa expressão é definida a menos de termos em ordem superior em  $\theta$  e nas derivadas de ordem superior de  $\phi$ . O significado físico destas aproximações é que estamos considerando um comportamento clássico para a corrente fermiônica na escala definida pelas variações espaço-temporais do campo  $\phi$ , ou seja  $\langle (j^\mu - \langle j^\mu \rangle)^2 \rangle = 0$ .

Essa corrente pode ser facilmente calculada usando-se a condição  $|\partial\phi| \ll |g|$ . O resultado é [124]:

$$\langle \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (4.32)$$

Um cálculo explícito desse resultado está no apêndice C. Mas vamos fornecer aqui um argumento heurístico baseado em bosonização. Como sabemos, em  $(1+1)D$  os operadores fermiônicos possuem uma representação não-local em termos de operadores bosônicos [125]. Interessante observar que certos operadores fermiônicos bilineares

possuem uma representação local em termos de operadores bosônicos:

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \rightarrow \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi \quad (4.33)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\chi \quad (4.34)$$

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \mu\cos 2\sqrt{\pi}\chi \quad (4.35)$$

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \rightarrow \mu\sin 2\sqrt{\pi}\chi. \quad (4.36)$$

onde  $\mu$  é uma escala arbitrária de energia nesta análise semi-clássica (essa escala pode ser determinada na formulação quântica e está relacionada com a dimensão anômala dos operadores quânticos). Com esse mapa, a ação (4.27) pode ser escrita em sua versão bosonizada:

$$S = \int d^2x \left( \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{\theta}{\sqrt{\pi}}\dot{\phi}'\chi - g\mu\cos(2\sqrt{\pi}\chi - \phi) \right), \quad (4.37)$$

onde  $\phi' \equiv \partial_1\phi$  e  $\dot{\phi} \equiv \partial_0\phi$ . Nas aproximações que estamos considerando, a dinâmica fermiônica caracterizada pela energia cinética do campo  $\chi$  está em uma escala desacoplada da escala característica do campo  $\phi$  como indicado pela condição  $|\partial\phi| \ll |g|$ . Isto sugere que, na construção da teoria efetiva para o campo  $\phi$ , nós podemos ignorar o termo  $\frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi$ . Neste limite ainda, nós temos uma situação análoga ao limite de London em um supercondutor, neste caso forçando o potencial cosseno a um valor de mínimo. Ou seja, a menos de uma constante,  $\chi \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\phi$ . Substituindo na (4.34) nós obtemos a corrente induzida (4.32). A teoria (4.37) se torna nesse limite:

$$S_{eft} = \int d^2x \left( \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\theta}{2\pi}\phi'\dot{\phi} \right). \quad (4.38)$$

Esta é a teoria efetiva para o campo  $\phi$ . A teoria aparentemente não depende do acoplamento  $g$ . No entanto a escala de validade da nossa aproximação e portanto a escala de validade da própria teoria efetiva é determinada por  $g$  que tem dimensão de massa = 1 definindo assim um corte ultravioleta para a teoria efetiva. Essa observação será muito importante na discussão da formulação dual e do mapa UV/IV que vamos construir (de fato, note que sem essa informação a teoria (4.38) é invariante de escala).

### 4.3.2 Decomposição quiral

A violação de Lorentz possui uma manifestação interessante do ponto de vista da teoria efetiva. A ação (4.38) descreve dois modos de propagação independentes com diferentes velocidades. Para ver isso explicitamente vamos realizar uma decomposição quiral da seguinte forma. Escrevemos (4.38) como

$$S_{eft} = \int d^2x \left( \Pi \dot{\phi} - \frac{1}{2} \Pi^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 - \frac{\theta}{2\pi} \phi' \dot{\phi} \right), \quad (4.39)$$

onde  $\Pi$  é um campo auxiliar. Podemos ainda redefinir  $\Pi \rightarrow \eta + \frac{\theta}{2\pi} \phi'$ . Obtemos:

$$S_{eft} = \int d^2x \left( \eta \dot{\phi} - \frac{1}{2} \left( \eta + \frac{\theta}{2\pi} \phi' \right)^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 \right). \quad (4.40)$$

Realizamos agora uma rotação no espaço dos campos

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_+ + \phi_- \\ \eta &= u (\phi'_+ - \phi'_-), \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $u = \sqrt{1 + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$ . Vemos assim que a ação efetiva é decomposta em dois modos independentes

$$S_{eft} = S_+ + S_-, \quad (4.42)$$

onde

$$\begin{aligned} S_+ &= \int d^2x \left( u \dot{\phi}_+ \phi'_+ - \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( u + \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \right] \phi_+'^2 \right) \\ S_- &= \int d^2x \left( -u \dot{\phi}_- \phi'_- - \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( u - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \right] \phi_-'^2 \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Vemos imediatamente que as velocidades de cada modo são diferentes. De fato, para o caso de interesse  $\theta \ll 1$ , temos

$$\begin{aligned} v_+ &= \left( 1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) \\ v_- &= \left( 1 - \frac{\theta}{2\pi} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

A diferença entre as velocidades poderia ser vista diretamente através da relação de dispersão que segue de (4.38). Mas é interessante ver explicitamente a separação dos modos. Compare com o que fizemos para o modelo de Proca em  $(2 + 1)D$  (2.59) no Cap. 2, resultando nos modelos auto-duais de paridades opostas (2.63).

### 4.3.3 Estrutura simplética

A estrutura em primeira ordem em derivadas temporais de (4.39) nos permite imediatamente obter a estrutura canônica da teoria. Podemos usar o método de Faddeev-Jackiw (veja apêndice D) e obter facilmente a matriz

$$f = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{\pi} \partial_x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (4.45)$$

cuja inversa

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{\theta}{\pi} \partial_x \end{pmatrix} \delta(x - y), \quad (4.46)$$

nos fornece imediatamente os comutadores (veja a eq.(D.7) do apêndice D):

$$\begin{aligned} \{\phi(x), \phi(y)\} &= 0 \\ \{\phi(x), \Pi(y)\} &= \delta(x - y) \\ \{\Pi(x), \Pi(y)\} &= \frac{\theta}{\pi} \partial_x \delta(x - y). \end{aligned} \quad (4.47)$$

O Hamiltoniano também aparece explicitamente em (4.39), uma vez que esta tem a forma  $L = p\dot{q} - H(p, q)$  conforme eq.(D.1), e é dado portanto por

$$H = \int dx \frac{1}{2} [\Pi^2 + (\phi')^2]. \quad (4.48)$$

Ou seja, esse sistema descreve um campo escalar livre com estrutura canônica deformada. Este portanto constitui um novo exemplo de como efeitos fermiônicos são capazes de deformar a estrutura canônica de teorias [123]. Um outro exemplo foi obtido em [126], onde foi estudado um modelo de dois campos escalares também em  $(1 + 1)D$  em interação com férmions violando a simetria de Lorentz.

Observe que a deformação em (4.47) ocorre no setor dos momentos. O parâmetro  $\theta$  é adimensional mas a deformação é proporcional à derivada e portanto tem dimensão de massa = 1. Ou seja, a deformação depende da escala de energia característica do fenômeno considerado. Queremos que esta seja uma deformação pequena, pois violações de Lorentz não são observadas. Sempre podemos conseguir isso regulando o parâmetro  $\theta$  e, nesse sentido, a deformação é vista como uma deformação infra-vermelha. No entanto, uma propriedade geral da dualidade é que ela inverte as contribuições cinéticas e potenciais (lembre do mapa  $\vec{E}^2 \leftrightarrow \vec{B}^2$  no eletromagnetismo). Seria então possível transferir essa deformação para o setor dos campos? De fato, vamos ver a seguir que uma representação equivalente do sistema deformado discutido acima é definida pela seguinte deformação

$$\begin{aligned}\{\sigma(x), \sigma(y)\} &= -\frac{\theta}{2\pi}\epsilon(x-y) \\ \{\sigma(x), P(y)\} &= \delta(x-y) \\ \{P(x), P(y)\} &= 0\end{aligned}\tag{4.49}$$

onde o campo escalar  $\sigma$  é a representação dual do campo  $\phi$  e  $\epsilon(x-y)$  é a função degrau anti-simétrica com a propriedade  $\partial_x\epsilon(x-y) = 2\delta(x-y)$ . Nesse sentido, isso poderia representar uma deformação ultra-violeta. A seguir vamos discutir essas questões.

#### 4.3.4 A formulação dual

Com o objetivo de obter as relações deformadas (4.49), podemos nos perguntar quais as transformações de variáveis mais gerais que podemos realizar no sistema Hamiltoniano de forma a obter as mesmas equações de movimento. Vamos primeiramente obter a representação dual. Isso nos possibilitará construir um contínuo de representações equivalentes desse sistema. Note que a ação efetiva pode ser escrita como

$$S_{eft} = \int d^2x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi M^{\mu\nu} \partial_\nu \phi\tag{4.50}$$

onde

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta}{2\pi} \\ -\frac{\theta}{2\pi} & -1 \end{pmatrix} = \left(1 + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2\right) M_{\mu\nu}^{-1}.\tag{4.51}$$

Introduzimos um campo auxiliar  $\Lambda^\mu$  e escrevemos (4.50) na forma equivalente

$$S_{eft} \rightarrow \int d^2x \left( \Lambda^\mu \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \Lambda_\mu (M^{-1})^{\mu\nu} \Lambda_\nu \right) \quad (4.52)$$

Integrando  $\Lambda^\mu$  voltamos a (4.50). Por outro lado  $\phi$  pode ser visto como um multiplicador de Lagrange impondo o vínculo:

$$\partial_\mu \Lambda^\mu = 0 \Rightarrow \Lambda^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma, \quad (4.53)$$

onde  $\varepsilon_{01} = 1 \Rightarrow \varepsilon^{01} = -1$ .  $\sigma$  é o campo dual. Vemos que a teoria dual também descreve um campo escalar. O sistema é auto dual nesse sentido. De fato a teoria dual é

$$S_{eft} \rightarrow *S_{eft} = \int d^2x \frac{1}{2 \left( 1 + \left( \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \right)} \partial_\mu \sigma M^{\mu\nu} \partial_\nu \sigma \quad (4.54)$$

que é exatamente a (4.50) (a menos de uma constante que pode ser trivialmente absorvida em  $\sigma$ ).

No nível das equações de movimento a simetria é na verdade maior. Podemos construir um mapa entre  $\phi$  e  $\sigma$  a partir das equações de movimento derivadas de (4.52):

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \sigma' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{2\pi} & -1 \\ -1 & \frac{\theta}{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \phi' \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

$R(\theta)$  é o “mapa dual”. A linearidade das equações de movimento nos permite construir um mapa ainda mais geral, incluindo a identidade (o mapa trivial)

$$\tilde{R}(\theta) = a\mathbf{1} + bR(\theta) \quad (4.56)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais. Esta transformação preserva as equações de movimento. Um ponto importante a ressaltar aqui é que esse mapa é construído usando-se as equações de movimento de *ambos* os campos  $\phi$  e  $\Lambda$  deduzidas da ação (4.52) e portanto não é lícito usar esse mapa direto na ação. De fato, uma aplicação direta do mapa na ação resulta em

$$S_{eff} \rightarrow \left( \frac{1}{a^2 - b^2 \left( 1 + \left( \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \right)} \right) S_{eff}. \quad (4.57)$$

Note que para  $a = 0$  e  $b = 1$  recuperamos o resultado (4.54) com uma diferença no sinal. Este é um sinal global na ação e obviamente não altera as equações de movimento. Mas este é um caso especial resultante do fato desta ser uma ação quadrática. Nosso ato ilícito não teve uma punição tão severa como consequência, mas isto não o torna menos ilícito. Essa inversão do sinal é algo bem familiar e acontece também no eletromagnetismo, ou qualquer outra ação auto-dual tipo oscilador harmônico, e simplesmente reflete o fato de estarmos trocando a energia potencial pela energia cinética (funções das variações espaço-temporais dos campos fundamentais) sem atentar para o fato de que as variáveis dinâmicas (os campos fundamentais de fato,  $\phi$  e  $\sigma$  aqui) não foram mapeadas adequadamente. De fato, o mapa para estas variáveis seria não local. O formalismo mais seguro para obter formulações duais foi o que nos levou à (4.54) e que discutimos de forma mais geral no Cap. 2. Podemos no entanto usar esse mapa desde que atentemos para essas observações, verificando a posteriore a consistência de nossas conclusões.

Para obter a deformação (4.49) aplicamos o mapa à relação de comutação entre os  $\sigma$ 's:

$$\begin{aligned} \{\sigma'(x), \sigma'(y)\} &= \{-b\dot{\phi} + \left(a + b \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)\right) \phi'(x), -b\dot{\phi} + \left(a + b \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)\right) \phi'(x)\} \\ &= b^2 \left(\frac{\theta}{\pi}\right) \partial_x \delta(x - y) - 2b \left(a + b \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)\right) \partial_x \delta(x - y), \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde as relações de comutação satisfeitas por  $\phi$  foram usadas. Imediatamente vemos que podemos obter as relações deformadas (4.49) fazendo  $a = -b \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$  e  $b = 1$ . Este mapa em particular leva o Hamiltoniano (4.48) em

$$H \rightarrow \int dx \left[ \frac{\sigma'^2}{2} + \frac{P^2}{2} \right] \quad (4.59)$$

onde  $P \equiv \dot{\sigma} - \frac{\theta}{\pi} \sigma'$  é o momento. Resulta que pelo mapa, com os valores de  $a$  e  $b$  já especificados, as relações de comutação para as variáveis  $\sigma$  são exatamente dadas pelas (4.49). Pode ser verificado explicitamente que o sistema definido por (4.59) e as relações (4.49) fornecem exatamente as mesmas equações de movimento que o sistema original.

### 4.3.5 Conexão UV/IV

Vamos discutir agora a correspondência entre os regimes ultra-violeta e infra-vermelho de nossa teoria. Temos dois parâmetros caracterizando o modelo:  $g$  com dimensão de massa = 1 e  $\theta$  que é adimensional. Como já discutimos,  $g$  tem o papel de definir a escala de validade da teoria definindo a região de validade das aproximações relacionadas ao mecanismo de Goldstone-Wilczek.  $\theta$ , por outro lado, define a deformação da estrutura canônica mas, por ser adimensional, sua relação com os parâmetros  $\Theta^k$  e  $B^k$  que introduzimos em (4.2) não é imediata. Para deixar mais claro o significado do mapeamento que discutimos acima, é interessante realizar uma decomposição de Fourier e estudar o mapa modo a modo. Vamos adotar uma decomposição  $O(2)$  (para detalhes veja [133] e [41]) definida de forma que o campo  $\phi$  é decomposto como

$$\phi(x, t) = \int dk q_a(t, k) \hat{e}_a(k, x); \quad a, b = 1, 2 \quad (4.60)$$

onde a base  $O(2)$  é tal que

$$\int dx \hat{e}_a(k, x) \hat{e}_b(k', x) = \delta_{ab} \delta(k - k'). \quad (4.61)$$

Esta é uma base ortonormal definida em cada ponto do espaço e satisfaz ainda a propriedade:  $\partial_x \hat{e}_a(k, x) = \varepsilon_{ab} k \hat{e}_b(k, x)$ . Com essas informações é fácil obter que cada modo é descrito pela Lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_a^2 - \frac{k^2}{2} q_a^2 - \frac{\theta}{2\pi} k q_a \varepsilon_{ab} \dot{q}_b, \quad (4.62)$$

representando um oscilador harmônico bidimensional sob a influência de um campo magnético externo  $\sim \theta k$ . A estrutura Hamiltoniana de cada modo é dada pelo Hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p_a^2 + \frac{k^2}{2} q_a^2, \quad (4.63)$$

e as relações de comutação (deformadas em relação ao oscilador harmônico usual):

$$\begin{aligned} \{q_a, q_b\} &= 0 \\ \{q_a, p_b\} &= \delta_{ab} \delta(k - k') \\ \{p_a, p_b\} &= -\frac{\theta}{\pi} k \varepsilon_{ab} \delta(k - k'). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Nesta linguagem mecânica o mapa discutido anteriormente nos leva a formulação equivalente

$$*H = H(*p, *q), \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \{ *q_a, *q_b \} &= -\frac{\theta}{k\pi} \varepsilon_{ab} \delta(k - k') \\ \{ *q_a, *p_b \} &= \delta_{ab} \delta(k - k') \\ \{ *p_a, *p_b \} &= 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

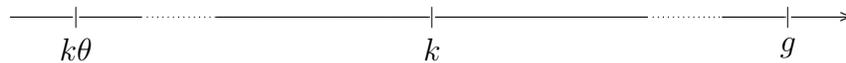
Podemos então definir os parâmetros efetivos de deformação que seguem de (4.64) e (4.66):

$$\Theta \simeq k\theta; \quad B \simeq \frac{\theta}{k}, \quad (4.67)$$

de forma que  $\Theta$  tem dimensão de massa = 1 e  $B$  tem dimensão de massa = -1. Somos então levados a conclusão que existe um mapa entre o setor infra-vermelho caracterizado por  $\Theta$  e o setor ultra-violeta caracterizado por  $B$ . Ou seja, parece que esses dois setores descrevem a mesma física. Este resultado pode nos dar dicas a respeito de possíveis conexões entre os espectros de teorias em outras dimensionalidades que violam a simetria de Lorentz no setor UV [134] e no setor IV [135].

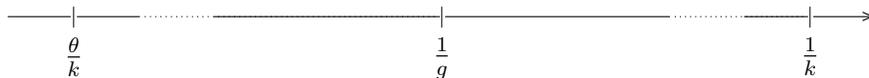
Mas devemos ser cautelosos. Lembre que estamos trabalhando com uma “fatia” no espaço de Fourier. Para reconstruir a teoria de campos nós temos que somar sobre todas as contribuições dos momentos. Se considerarmos essa teoria como fundamental, ao somarmos todos os modos de Fourier não encontraremos nenhuma diferença entre os setores UV e IV uma vez que a teoria é invariante de escala. Mas nós estamos trabalhando com uma teoria efetiva que possui uma escala característica  $g$  definindo sua região de validade. Ainda que esta escala não apareça explicitamente na ação ela aparecerá quando somarmos os modos. A teoria efetiva é válida para  $k \ll g$  e a teoria original possui um parâmetro de deformação de Lorentz dada pelo parâmetro efetivo  $k\theta$ . Para que esta constitua uma pequena violação de Lorentz,  $\theta$  deve ser uma quantidade pequena tal que  $k\theta \ll k$  (ou  $\theta \ll 1$ ), ou seja, a escala da violação de Lorentz tem

que ser muito menor que a escala dos fenômenos relevantes. É por isso que dizemos que esta é uma deformação IV. Um ponto importante a observar é que essa condição é suficiente para garantir que os efeitos da violação de Lorentz sejam pequenos mesmo na teoria completa em altas energias, onde as excitações fermiônicas se tornam mais importantes, como esquematizado no diagrama abaixo



A seta aponta  
para energia crescente

Através do mapa no entanto, a violação de Lorentz é caracterizada pelo parâmetro efetivo  $\frac{\theta}{k}$ . Esta ainda pode ser uma violação de Lorentz pequena, de caráter UV agora devido a dimensão de massa, e nesse sentido teremos um mapa UV/IR. Mas a condição discutida acima ( $\theta \ll 1$ ) não garante mais que a violação de Lorentz seja um efeito pequeno. A condição para isso no quadro dual é  $\frac{\theta}{k} \ll \frac{1}{k}$ , mas uma vez que temos também que  $\frac{1}{g} \ll \frac{1}{k}$  a única forma de garantir um violação de Lorentz pequena (mesmo na teoria completa) é exigindo que  $\frac{\theta}{k} \ll \frac{1}{g}$  (veja o diagrama de escalas de distância abaixo) mas esta condição não segue da teoria original.



A seta aponta  
para distância crescente

Chegamos então a uma conclusão interessante. Ainda que este seja um exemplo não muito realista da natureza, por ser unidimensional, o resultado sugere que mesmo que tentemos “esconder” a violação da simetria de Lorentz em alguma escala ainda não alcançada poderíamos, através de algum mapa, encontrar variáveis com respeito às quais a violação de Lorentz poderia ser detectada em uma escala observável.

## 4.4 O modelo de Carroll-Field-Jackiw

Nesta seção nós vamos estudar um modelo emblemático que viola as simetrias de Lorentz e  $CPT$  em  $(3+1)D$ . O modelo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) [120] definido pela ação invariante de calibre:

$$S_{CFJ} = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + p_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma \right). \quad (4.68)$$

O termo tipo Chern-Simons é responsável pela quebra das simetrias de Lorentz e  $CPT$ . Estas simetrias são quebradas pois  $p_\mu$  é um quadri-vetor constante e consequentemente seleciona uma direção preferencial em cada referencial de Lorentz.

A grande maioria dos estudos a respeito desse modelo se concentra em considerá-lo como uma modificação do eletromagnetismo usual. Nesse sentido, uma consequência imediata que segue da análise das relações de dispersão desse modelo é o fenômeno da birrefringência, ou seja, a propagação da onda eletromagnética se dá com velocidades distintas para as duas polarizações, mesmo no vácuo. Este efeito é parametrizado pelo vetor violador de Lorentz  $p^\mu$  e pode portanto ser usado para definir limites em sua magnitude. Em [120] somente  $p^\mu$  tipo tempo foi considerado e foi argumentado que observações astronômicas de luz polarizada e também dados geomagnéticos parecem excluir a possibilidade de uma magnitude não nula para  $p^\mu$ . No entanto, mais recentemente os autores de [136] dizem ter encontrado sinais nos dados do WMAP e BOOMERANG favorecendo um valor não-nulo. Para o caso tipo espaço, observações astronômicas pareciam suportar a idéia de que o universo não é isotrópico [137] favorecendo um  $p^\mu$  não nulo, porém este resultado foi contestado em [138]. Para uma discussão mais recente envolvendo os diferentes aspectos da violação de Lorentz na teoria eletromagnética no que diz respeito à possibilidade de sua detecção através de fenômenos astronômicos veja [139].

Outros estudos concentram a discussão em aspectos mais formais relacionados com a consistência desse modelo como uma teoria quântica de campos, vista como função do caráter de Lorentz de  $p^\mu$  (veja [140, 141]). Foi observado que um vetor  $p^\mu$  tipo tempo define um modelo no qual unitariedade e microcausalidade não podem ser satisfeitas

simultaneamente. Por outro lado a teoria de campos parece bem definida se  $p^\mu$  for do tipo espaço. Essas observações já se manifestam nas relações de dispersão como vamos discutir momentaneamente.

Nosso interesse nesse modelo no entanto é devido ao seu caráter topológico altamente não-trivial. Este é um aspecto pouco estudado desse modelo. Queremos investigar a possibilidade e as consequências de definir cargas magnéticas na presença do termo tipo  $CS$ . Este problema já foi abordado em [142] onde sua similaridade com o problema análogo em  $(2 + 1)D$  foi explorada em uma análise via redução dimensional. Aqui nós vamos obter novos resultados que sugerem que esse sistema possui propriedades confinantes usando os procedimentos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Vamos discutir inicialmente a formulação dual desse modelo [143], que por si só já se mostra como um resultado pouco trivial. Lembre que em  $(2+1)D$  a teoria de  $MCS$ , que possui simetria de calibre, tem uma representação fisicamente equivalente em termos de uma teoria sem simetria de calibre, a  $AD$ . Dada a semelhança entre a  $MCS$  e o modelo  $CFJ$  (4.68) é natural esperar que algo semelhante aconteça aqui. Veremos que a quebra da simetria de Lorentz tem como efeito uma fatoração apenas parcial da simetria de calibre. Este resultado tem efeitos muito intrigantes ao considerarmos a presença de defeitos e o destino da simetria de brana como vamos discutir mais a frente.

No que segue nós vamos primeiramente comentar superficialmente algumas possíveis origens físicas do modelo  $CFJ$  e analisar também a estrutura de sua relação de dispersão. Isso já nos dará algumas dicas sobre o que esperar da formulação dual. Depois finalmente discutiremos mais detalhadamente a formulação dual para os diferentes tipos de vetores violadores de Lorentz (tipo tempo, tipo espaço e tipo luz) e finalmente consideraremos a questão da presença de cargas magnéticas no sistema. A violação de Lorentz torna a discussão bastante assimétrica e o uso explícito de índices tensoriais se faz necessário. Mas é sempre útil manter em mente a interpretação geométrica de  $p$ -correntes como discutido nos capítulos 2 e 3.

### 4.4.1 Possíveis origens

Poderíamos simplesmente postular esse modelo como o verdadeiro eletromagnetismo como foi feito em [120]. Uma vez que entendemos hoje o eletromagnetismo como uma teoria efetiva para baixas energias, cuja teoria mais completa é o modelo padrão, é mais natural pensar que a quebra de Lorentz no eletromagnetismo seja parte de uma estrutura mais completa que viola Lorentz. Essa é a idéia do modelo padrão estendido introduzido por Colladay e Kostelecky [110, 111]. O MPE é uma espécie de catálogo com todos os possíveis termos que podemos adicionar ao modelo padrão usual tal que a ação resultante permaneça um escalar de Lorentz, de forma que a simetria de Lorentz não seja quebrada no nível do observador. Ou seja, observadores relacionados por transformações de Lorentz ainda percebem a mesma física. Exige-se também que a simetria de calibre seja mantida e que a teoria seja renormalizável por contagem de potências. Esta última exigência não é de fato fundamental uma vez que o próprio modelo padrão usual é uma teoria efetiva e portanto não existe nada de errado, teoricamente, em incluir termos não-renormalizáveis (de fato as oscilações de neutrinos provavelmente são descritas por termos não-renormalizáveis no modelo padrão [144]). O ponto é que estes serão suprimidos em baixas energias. O MPE é visto portanto como uma teoria efetiva onde os termos que violam Lorentz e  $CPT$  possuem a forma geral:

$$T^{\mu\nu\rho\dots}(\text{campos e derivadas})_{\mu\nu\rho\dots}, \quad (4.69)$$

onde  $T^{\mu\nu\rho\dots}$  é um tensor constante e consequentemente tem a propriedade de determinar direções preferenciais em cada referencial inercial quebrando a simetria de Lorentz. Observe que, sendo um escalar, esse termo tem o mesmo valor em todos os referenciais, diz-se que a simetria de Lorentz do tipo “observador” foi mantida mas a simetria tipo “partícula” foi quebrada (veja [110, 111] para maiores detalhes). Se esperamos que esse modelo seja de fato uma generalização do modelo padrão, a magnitude de  $T^{\mu\nu\rho\dots}$  tem que ser muito pequena pois não observamos seus efeitos. Como já comentamos, grande parte dos trabalhos desenvolvidos está relacionado com o estudo dos efeitos fenomenológicos desses termos e já existem vários limites observacionais às magnitudes dos diferentes

tensores que aparecem no MPE. Para uma discussão recente sobre isso, veja [139, 145]. Visto nesse contexto, o modelo *CFJ* é identificado com o setor eletromagnético do MPE, mais precisamente, com o setor que viola *CPT*.

Outra possibilidade é seguir os procedimentos de deformação da estrutura canônica. Esta abordagem foi adotada em [135] e consiste em seguir exatamente os mesmos passos que seguimos na deformação da teoria de Maxwell em  $(2 + 1)D$  resultando na *MCS*. Ou seja, começando com o sistema canônico de Maxwell em  $(3 + 1)D$  definido pelo Hamiltoniano:

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 \right], \quad (4.70)$$

os colchetes de Poisson

$$\begin{aligned} \{A_i(x), A_j(y)\} &= 0 \\ \{A_i(x), \Pi^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^{(3)}(x - y) \\ \{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.71)$$

e o vínculo de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{\Pi} = 0. \quad (4.72)$$

O primeiro passo é deformar a estrutura canônica introduzindo parâmetros  $\Theta_i$  com dimensões de massa.

$$\begin{aligned} \{A_i(x), A_j(y)\} &= 0 \\ \{A_i(x), \Pi^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^{(3)}(x - y) \\ \{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\} &= \varepsilon^{ijk} \Theta_k \delta^{(3)}(x - y). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Exigindo a manutenção da simetria de calibre somos obrigados a modificar a Lei de Gauss. Resulta que o novo gerador das transformações de calibre tem a forma

$$\tilde{G}[\alpha] = \int d^3x \alpha(x) \partial_i (\Pi^i - \varepsilon^{ijk} \Theta_j A_k). \quad (4.74)$$

Compare com (4.11). Redefinindo variáveis de forma análoga ao que fizemos antes vemos que esse sistema deformado é descrito pela ação (4.68) com  $p^\mu$  tipo espaço dado por  $p^\mu = (0, \vec{p}) \equiv \frac{1}{2}(0, \vec{\Theta})$  neste caso. Fisicamente, essa deformação foi interpretada em [135] como um possível gerador de campos magnéticos cosmológicos. Como já discutimos, o modelo de *CFJ* torna o vácuo um meio opticamente ativo. De fato, as equações de Maxwell deformadas que seguem da ação (4.68) e da identidade de Bianchi são:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 2\vec{p} \cdot \vec{B} \\
-\partial_t \vec{E} + \nabla \times \vec{B} &= 2p^0 \vec{B} - 2\vec{p} \times \vec{E} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\partial_t \vec{B} + \nabla \times \vec{E} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

E vemos que, mesmo no limite estático e com  $p^0 = 0$ , um campo magnético inicial é capaz de induzir um campo elétrico que induz um campo magnético e assim por diante. A solução para os campos eletromagnéticos pode ser expressa como uma série de potências de  $p$  (considerado pequeno). Foi sugerido em [135] que este mecanismo pode ser capaz de gerar uma configuração eletromagnética estável representando assim um background cosmológico.

Ainda em analogia com o modelo *MCS*, outra possível origem do modelo de *CFJ* são as flutuações quânticas fermiônicas. Começando com uma extensão da *QED* que viola as simetrias de Lorentz e *CPT*, espera-se que se o termo tipo *CS* não estiver presente no setor eletromagnético ele será inevitavelmente induzido pela dinâmica fermiônica. Mais precisamente, considere o setor fermiônico da *QED* estendida:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi - \bar{\psi}\cancel{b}\gamma_5\psi - e\bar{\psi}\cancel{A}\psi, \tag{4.76}$$

onde  $b^\mu$  é um quadri vetor fixo responsável pela violação de Lorentz. O termo axial no qual ele aparece é responsável pela quebra de *CPT* também. Ao integrar os fermions esperamos que o vetor violador de Lorentz  $p^\mu$  discutido anteriormente seja proporcional

a  $b^\mu$ . A determinação da constante de proporcionalidade é um dos assuntos mais controversos na literatura (veja por exemplo [146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154]). De fato, este é um exemplo em que correções quânticas resultam ser finitas porém aparentemente indeterminadas. Ou seja, o coeficiente só pode ser determinado com informações externas, experimentalmente. Esta situação não é incomum em teorias de campos, como foi apontado por Jackiw [147] e ocorre por exemplo no modelo de Schwinger chiral [155]. A manifestação matemática deste fenômeno é o fato que diferentes regularizações fornecem diferentes resultados.

No entanto, um curioso resultado diz respeito ao caso de férmions não massivos ( $M = 0$  em 4.76). Em [156] nós observamos uma propriedade muito interessante. Pela estrutura da ação (4.68), fica claro que podemos obter a *MCS* por meio de uma redução dimensional do modelo *CFJ*, uma propriedade já explorada em [157]. Sabemos que a *MCS* é uma teoria efetiva para a *QED* em  $(2 + 1)D$  e que, para fermions massivos, o termo de *CS* tem seu coeficiente completamente determinado, sem ambiguidades. Isso nos instiga a perguntar: qual a teoria em  $(3 + 1)D$  cuja redução dimensional nos fornece a ação de Dirac para fermions massivos em  $(2 + 1)D$ ? O fato curioso é que a massa fermiônica em  $(2 + 1)D$  não tem nenhuma relação com a massa fermiônica em  $(3 + 1)D$ . Lembre que o termo de massa fermiônica quebra as simetrias de *P* e *T* em  $(2 + 1)D$ . O que vamos mostrar agora é que, do ponto de vista da redução dimensional, isto pode ser considerado como uma herança da violação de Lorentz em  $(3 + 1)D$  e que a massa fermiônica bidimensional nada mais é que a redução dimensional do termo axial violador de Lorentz  $\bar{\psi}\not{b}\gamma_5\psi$ . Escolhendo  $b^\mu$  tipo espaço, podemos orientar os eixos tal que  $b^\mu$  só tenha a componente 3 não nula,  $b_3 = m$ . Vamos trabalhar com a representação quiral das matrizes de Dirac:

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & \gamma^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma^\mu &= (1, \vec{\sigma}); & \bar{\sigma}^\mu &= (1, -\vec{\sigma}). \end{aligned} \tag{4.77}$$

Obtemos assim

$$b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \rightarrow m(\bar{\psi}_L \psi_L + \bar{\psi}_R \psi_R), \tag{4.78}$$

onde  $\psi_L$  e  $\psi_R$  são os campos espinoriais de duas componentes denominados esquerdo e direito respectivamente. Estes espinores são autoestados da matriz  $\gamma^5$ , com autovalores  $-1$  e  $+1$  respectivamente. Esse resultado é intuitivamente claro. O vetor  $b^\mu$  quebra a simetria de Lorentz em  $(3+1)D$  porque define uma direção e uma orientação privilegiadas no espaço. Fixando esta direção ( $b_3 = m$ ) e projetando a teoria no plano ortogonal correspondente, resta a informação sobre a orientação, que está codificada no sinal de  $m$  em (4.78). Esta é a origem da quebra de  $P$  e  $T$  no plano. Este é um importante resultado que obtivemos em [156] e que parece não ter sido notado na literatura até então.

A equação de Dirac que segue de (4.76)

$$(i\cancel{\partial} - M - \cancel{\not{b}}\gamma_5 - e\cancel{A})\psi = 0, \quad (4.79)$$

pode ser decomposta em suas componentes quirais

$$(i\sigma^\mu\partial_\mu - e\sigma^\mu A_\mu - \sigma^\mu b_\mu)\psi_R - M\psi_L = 0 \quad (4.80)$$

$$(i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu - e\bar{\sigma}^\mu A_\mu + \bar{\sigma}^\mu b_\mu)\psi_L - M\psi_R = 0. \quad (4.81)$$

Para  $M \rightarrow 0$  estas equações se desacoplam e a simetria quiral é restaurada. Realizando a seguir a projeção dimensional no plano  $x_3 = 0$  (ainda trabalhando com  $b_3 = m$ ) a primeira equação em (4.80), digamos, fica

$$(i\sigma^a\partial_a - e\sigma^a A_a - e\sigma^3\phi - \sigma^3 m)\psi_R = 0, \quad (4.82)$$

onde  $\phi \equiv A_3$ ,  $a = 0, 1, 2$  e  $\partial_3\psi = 0$  (não existe momento transverso  $k_3$ ). Escolhendo uma representação apropriada para as matrizes de Dirac em  $(2+1)D$  essa equação pode ser derivada de uma ação da forma

$$S = \int d^3x \bar{\psi}_R (i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - e\phi - m)\psi_R. \quad (4.83)$$

Como já discutimos, esta ação induz um termo de  $CS$  com coeficiente finito e determinado. Este resultado sugere portanto que a ação fermiônica capaz de nos fornecer um resultado não ambíguo em  $(3+1)D$  é a ação (4.76) com  $M = 0$ . De fato, isso é

exatamente o que ocorre. Nós demonstramos em [156] que o mesmo resultado para o coeficiente do termo tipo  $CS$  no modelo de  $CFJ$  pode ser obtido por três esquemas de regularização distintos.

Aqui vamos apenas comentar rapidamente como esses resultados são obtidos, para detalhes dos cálculos veja [156]. A Lagrangiana (4.76) com  $M = 0$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - \cancel{D}\gamma_5 - e\cancel{A})\psi \quad (4.84)$$

dá origem a uma contribuição na ação efetiva eletromagnética representada pelo determinante fermiônico que pode ser escrito como

$$S_{eft}[b, A] = -i \text{Tr} \ln [\cancel{k} - \cancel{D}\gamma_5 - e\cancel{A}], \quad (4.85)$$

onde  $k^\mu$  é o quadri-momento. O símbolo  $\text{Tr}$  significa um traço sobre as matrizes de Dirac, uma integral sobre as coordenadas do espaço assim como uma integral sobre os momentos. Temos assim um problema análogo ao encontrado no cálculo do valor médio da corrente induzida fermiônica (4.31) que realizamos explicitamente no apêndice C. Da mesma forma, aqui temos um problema de ordenamento uma vez que coordenadas espaciais e momento, que não comutam, aparecem como argumentos de uma mesma função. Estamos procurando por um termo específico: o termo tipo  $CS$  que viola Lorentz. Podemos portanto realizar uma expansão derivativa nos moldes do que discutimos anteriormente e buscar pelos termos na expansão que nos forneça o termo tipo  $CS$  na ação efetiva. Graficamente, estamos procurando por um loop fermiônico com duas inserções externas do campo  $A$ . Matematicamente, podemos expressar a contribuição relevante na forma

$$S_{eft}^{(2)}[b, A] = -\frac{ie^2}{2} \text{Tr} [S_b(k) \cancel{A} S_b(k) \cancel{A}], \quad (4.86)$$

onde  $S_b(k)$  é o propagador fermiônico contendo a contribuição de  $b^\mu$

$$S_b(k) = \frac{i}{\cancel{k} - \cancel{D}\gamma_5}. \quad (4.87)$$

Efetuada a expansão derivativa, selecionamos o termo em primeira ordem nas derivadas. Este terá a seguinte estrutura geral:

$$S_{eft}^{(2)}[b, A] = \int d^4x \Pi^{\mu\lambda\nu} \partial_\lambda A_\mu A_\nu, \quad (4.88)$$

onde  $\Pi^{\mu\lambda\nu}$  codifica a contribuição do loop fermiônico que devemos calcular e é dado por

$$\Pi^{\mu\lambda\nu} = -\frac{ie^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [S_b(k) \gamma^\mu S_b(k) \gamma^\lambda S_b(k) \gamma^\nu], \quad (4.89)$$

onde o símbolo  $\text{tr}$  agora representa apenas o traço sobre as matrizes de Dirac. Realizando este traço, a expressão (4.89) adquire a forma explícita

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\lambda} &= ie^2 \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - b^2)^4} \times \\ &b_\rho ((k+b)^4 + (k-b)^4) - k_\rho ((k+b)^4 - (k-b)^4). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Com isso a ação efetiva (4.88) toma a forma do termo violador de Lorentz tipo  $CS$ :

$$S_{eff}^{(2)}[b, A] = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} p_\rho F_{\lambda\mu} A_\nu, \quad (4.91)$$

onde  $p^\mu$  é visto aqui como uma função de  $b^\mu$ . Todo o esforço de cálculo agora está concentrado na determinação desta dependência dada pela integral

$$\begin{aligned} p_\rho &= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{(k^2 - b^2)b_\rho - 4(b \cdot k)k_\rho}{(k^2 - b^2)^3} + \right. \\ &\left. \frac{4[(k^2 b^2 + (b \cdot k)^2)b_\rho - 2b^2(b \cdot k)k_\rho]}{(k^2 - b^2)^4} \right]. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Essa integral possui divergências logarítmicas e precisa ser regularizada. Consideramos em [156] três tipos de regularização: regularização dimensional, por *cut-off* e ainda um novo método que introduzimos de regularização por temperatura finita. Todos esses esquemas de regularização forneceram o mesmo resultado determinando  $p^\mu$  como

$$p_\rho = \frac{e^2}{8\pi^2} b_\rho. \quad (4.93)$$

Esse resultado portanto sugere que, no caso em que os férmions são não massivos, não existe ambiguidade no coeficiente do termo tipo  $CS$  quando este é induzido por flutuações quânticas fermiônicas.

### 4.4.2 Relações de dispersão

Antes de obter a teoria dual vamos entender um pouco mais sobre a física do modelo *CFJ*. Podemos obter muitas informações apenas estudando as relações de dispersão desse sistema. Considerando soluções tipo onda plana  $A_\mu = \epsilon_\mu e^{-ik \cdot x}$  com o quadri-momento  $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ , podemos obter as relações de dispersão que seguem das equações de movimento:

$$k^4 + 4k^2 p^2 - 4(k \cdot p)^2 = 0. \quad (4.94)$$

Consideremos primeiramente o caso em que o vetor violador de Lorentz  $p^\mu$  é do tipo tempo. Este caso, como já mencionamos, será problemático do ponto de vista da consistência da teoria de campos. Para entender isso, considere um referencial no qual  $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$  com  $m > 0$ . A relação de dispersão se torna

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 \pm 2m|\mathbf{k}|. \quad (4.95)$$

As duas possibilidades de sinais correspondem aos dois modos circularmente polarizados [120]. A separação destes dois modos se movendo com velocidades distintas é um sinal claro da violação de Lorentz. O modo com sinal negativo possui energia imaginária para  $|\mathbf{k}| < 2m$ . Em uma teoria quântica, isso resulta em uma violação da unitariedade e para recuperar a consistência é necessário eliminar este modo taquiônico. Mas, como foi demonstrado em [141] a exclusão da região do espectro definida por  $|\mathbf{k}| < 2m$  resulta em uma violação da microcausalidade.

Para o caso de  $p^\mu$  tipo luz parece não haver problemas desse tipo. Trabalhando num referencial onde  $p^\mu = (m, 0, 0, m)$ ,  $m > 0$ . A relação de dispersão fica

$$(\omega \mp m)^2 = (k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3 \mp m)^2. \quad (4.96)$$

Note que este resultado corresponde a uma redefinição das componentes de  $k^\mu$  que são subtraídas pelas correspondentes componentes não-nulas de  $p^\mu$ . Este deslocamento das componentes de  $k^\mu$  só é percebido se o movimento do foton tiver componentes

perpendiculares a  $p^\mu$ . Aparentemente não existem problemas de unitariedade ou causalidade associados com este caso, mas fenômenos interessantes podem ocorrer como por exemplo radiação Cherenkov produzida por uma carga estática [158].

Para o caso tipo espaço, nós podemos trabalhar no referencial onde  $p^\mu = (0, 0, 0, m)$ ,  $m > 0$ . A relação de dispersão tem a forma

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + 2m^2 \pm 2m^2 \sqrt{1 + \frac{k_3^2}{m^2}}. \quad (4.97)$$

Como foi discutido em [141], estes dois graus de liberdade parecem ser bem definidos quando interpretados como as excitações fundamentais de uma teoria de campos, sem problemas de causalidade ou unitariedade. De fato, pode ser facilmente constatado que a velocidade de propagação dos sinais nunca excede a velocidade da luz.

Ao estudar a formulação dual, nós vamos trabalhar principalmente com o caso tipo espaço por parecer ser o caso melhor definido e depois vamos comentar sobre os outros casos. Para entender melhor sobre a natureza das excitações no caso tipo espaço, note que se as excitações forem restritas ao plano perpendicular à direção definida pelo vetor violador de Lorentz (neste caso, a direção  $x^3$ ), ou seja, se fizermos  $k^3 = 0$  em (4.97), o sinal positivo corresponderá a excitações massivas de massa  $2m$  e o sinal negativo corresponderá a excitações não massivas. Podemos ser um pouco mais precisos considerando pequenas variações fora do plano  $x_1 - x_2$ . Se  $\frac{k_3}{m} \ll 1$  então

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + 2m^2 \pm 2m^2 \left(1 + \frac{k_3^2}{2m^2}\right) = \begin{cases} \mathbf{k}^2 + 4m^2 + k_3^2, & \text{caso massivo} \\ \mathbf{k}^2 - k_3^2 = (k^1)^2 + (k^2)^2, & \text{caso não-massivo.} \end{cases} \quad (4.98)$$

Observe que no caso não massivo, em primeira ordem a relação de dispersão não é modificada com relação à propagação no plano.

Podemos ir um pouco mais fundo e nos perguntar: qual a dinâmica dessas partículas? Isso pode ser respondido reescrevendo a Lagrangiana  $CFJ$  (4.68) evidenciando a componente  $A^3$  do campo  $A$ . Renomeando  $A^3 = \phi$  e introduzindo índices latinos  $a, b, c = 0, 1, 2$

para denotar a dinâmica do sistema no plano, a Lagrangiana fica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{CFJ} &= -\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + m\varepsilon^{abc}A_a\partial_bA_c + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi + \phi\partial_a\partial_3A^a + \frac{1}{2}\partial_3A_a\partial_3A^a \\ &= \mathcal{L}_{MCS}(A) + \mathcal{L}_{escalar}(\phi) + \phi\partial_a\partial_3A^a + \frac{1}{2}\partial_3A_a\partial_3A^a,\end{aligned}\quad (4.99)$$

onde  $\mathcal{L}_{MCS}(A)$  é uma Lagrangiana com a estrutura da Lagrangiana de  $MCS$  e  $\mathcal{L}_{escalar}(\phi)$  tem a estrutura da Lagrangiana de um campo escalar sem massa em  $(2+1)D$  (mas os campos ainda dependem de  $x^3$ ). Vemos portanto que, se não existir dependência em  $x^3$ , nós de fato teremos dois graus de liberdade desacoplados no plano  $x_1 - x_2$ . As excitações não massivas são descritas por um campo escalar e as excitações massivas são descritas pela teoria topologicamente massiva de  $MCS$ . Com isso, pelo que discutimos no Cap. 2, podemos já ter uma idéia do que esperar da teoria dual, pelo menos na versão reduzida dimensionalmente:

$$\mathcal{L}_{CFJ} \big|_{k_3=0} \rightarrow \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{AD} + \mathcal{L}_{Maxwell}, \quad (4.100)$$

onde  $\mathcal{L}_{CS}$  é a lagrangiana definida por um termo de  $CS$  puro, independente, que não carrega graus de liberdade mas carrega apenas informação sobre a simetria de calibre, como já foi discutido;  $\mathcal{L}_{AD}$  é a lagrangiana do modelo  $AD$  e  $\mathcal{L}_{Maxwell}$  é a lagrangiana de Maxwell em  $(2+1)D$ .

Se reintroduzirmos a dependência em  $x^3$ , a relação (4.98) mostra que existe uma distorção na relação energia-momento que é simplesmente um reflexo dos últimos dois termos em (4.99). Note ainda que na redução dimensional apenas o campo  $A_a$ , definido no plano, é um campo de calibre. Em  $D = (3+1)$  somente a combinação  $A^\mu = (A^a, \phi)$  pode ser identificada com um campo de calibre. Veremos que no quadro dual, por outro lado, os campos duais (descritos por (4.100) quando restritos ao plano) preservam suas identidades como campos de calibre ou não, ao “ligarmos” ou “desligarmos” a dependência em  $x^3$ .

### 4.4.3 A teoria dual

Nesta seção vamos obter a formulação dual do modelo de  $CFJ$  (4.68) [143]. Além de fornecer uma formulação alternativa para a teoria, nosso principal objetivo aqui é

estudar os efeitos da violação de Lorentz no processo de dualidade. Veremos que, ainda que a Lagrangiana do modelo  $CFJ$  tenha uma estrutura similar às usuais que estamos acostumados em teorias que não violam as simetrias de Lorentz e  $CPT$ , sua formulação dual exhibe uma estrutura totalmente assimétrica com relação à direção definida pelo vetor  $p^\mu$ . A seguir vamos primeiramente obter a teoria dual para o caso especial de  $p^\mu$  tipo espaço. Seguindo os procedimentos usuais de dualidade que viemos estudando até aqui, considere a teoria em primeira ordem nas derivadas, equivalente a (4.68)

$$\mathcal{L}_{MCFJ} = \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma - \frac{1}{4}\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + p_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma. \quad (4.101)$$

Esta é a Lagrangiana mestra do modelo.  $\Pi_{\mu\nu}$  é um campo auxiliar que pode ser integrado nos fornecendo novamente a (4.68). Vamos trabalhar em um referencial no qual  $p^\mu = (0, 0, 0, m)$ ,  $m > 0$  e novamente usar índices latinos para designar as componentes correspondentes no plano ortogonal. Evidenciando estes índices, a Lagrangiana (4.101) tem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ} = & -\frac{1}{2}A_3\varepsilon^{abc}\partial_a\Pi_{bc} + \frac{1}{2}A_a\varepsilon^{abc}\partial_3\Pi_{bc} + A_a\varepsilon^{abc}\partial_b\Pi_{c3} \\ & - \frac{1}{4}\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + m\varepsilon^{abc}A_a\partial_b A_c, \end{aligned} \quad (4.102)$$

onde uma integração parcial foi efetuada e definimos  $\varepsilon^{abc3} \equiv \varepsilon^{abc}$ . Observe que  $A_3$  é um multiplicador de Lagrange que impõe o vínculo

$$\varepsilon^{abc}\partial_a\Pi_{bc} = 0, \quad (4.103)$$

cuja solução pode ser expressa em termos de um novo campo de calibre  $B_a$

$$\Pi_{ab} = \partial_a B_b - \partial_b B_a \equiv G_{ab}. \quad (4.104)$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ} = & \frac{1}{2}A_a\varepsilon^{abc}\partial_3 G_{bc} - A_a\varepsilon^{abc}\partial_b h_c - \frac{1}{4}G_{ab}G^{ab} + \frac{1}{2}h_a h^a + m\varepsilon^{abc}A_a\partial_b A_c \\ = & (-h_a + \partial_3 B_a + mA_a)\varepsilon^{abc}\partial_b A_c - \frac{1}{4}G_{ab}G^{ab} + \frac{1}{2}h_a h^a, \end{aligned} \quad (4.105)$$

onde renomeamos o campo independente  $\Pi^{a3} \equiv h^a$ . Seguindo os passos da projeção dual discutido no Cap. 2, definimos

$$-h_a + mA_a = C_a \quad (4.106)$$

e obtemos

$$\mathcal{L}_{MCFJ} \rightarrow C_a \varepsilon^{abc} \partial_b A_c + \partial_3 B_a \varepsilon^{abc} \partial_b A_c - \frac{1}{4} G_{ab} G^{ab} + \frac{1}{2} (mA_a - C_a)(mA^a - C^a). \quad (4.107)$$

Observe que  $C_a$  herda a simetria de calibre de  $A_a$  de forma que o último termo acima é invariante com respeito a  $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \phi$  com  $C_a \rightarrow C_a + m \partial_a \phi$ . Agora nós podemos efetuar uma transformação canônica que evidencia o conteúdo dinâmico e a estrutura de simetria da teoria

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{1}{2} (A_a^+ - A_a^-) \\ A_a &= \frac{1}{2m} (A_a^+ + A_a^-), \end{aligned} \quad (4.108)$$

o que nos leva à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{4m} A_a^+ \varepsilon^{abc} \partial_b A_c^+ - \frac{1}{4m} A_a^- \varepsilon^{abc} \partial_b A_c^- + \frac{1}{2m} \partial_3 B_a \varepsilon^{abc} \partial_b A_c^+ \\ &+ \frac{1}{2m} \partial_3 B_a \varepsilon^{abc} \partial_b A_c^- - \frac{1}{4} G_{ab} G^{ab} + \frac{1}{2} A_a^- A^{-a}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Podemos realizar mais uma redefinição de variáveis separando o termo de Chern-Simons puro

$$A_a^+ + \partial_3 B_a = D_a, \quad (4.110)$$

e obtemos finalmente (com  $f_a = A_a^-$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{dualCFJ} &= \frac{1}{4m} D_a \varepsilon^{abc} \partial_b D_c - \frac{1}{4m} f_a \varepsilon^{abc} \partial_b f_c + \frac{1}{2} f_a f^a - \frac{1}{4} G_{ab} G^{ab} \\ &+ \frac{1}{2m} f_a \varepsilon^{abc} \partial_b \partial_3 B_c - \frac{1}{4m} \partial_3 B_a \varepsilon^{abc} \partial_b \partial_3 B_c. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Os primeiros quatro termos são definidos no plano perpendicular à direção definida pelo vetor violador de Lorentz. O primeiro é um “Chern-Simons” puro que carrega

parte da simetria de calibre da teoria enquanto o segundo e terceiro termos carregam a dinâmica tipo auto-dual. O quarto termo é um termo tipo Maxwell e carrega a outra parte da simetria de calibre. Os últimos dois termos correspondem à interação na direção da violação de Lorentz. Essa teoria possui o mesmo conteúdo físico da teoria de *CFJ* (4.68) para um vetor  $p^\mu$  tipo espaço (podemos obter outras orientações além de  $p^\mu = (0, 0, 0, m)$  realizando rotações). Como antecipamos, sem a dependência em  $x^3$  nós obteremos (4.100) com campo de Chern-Simons puro  $D^a$ , o campo AD  $f^a$  e o campo de Maxwell  $B^a$ . Estes conservam suas identidades como campos de calibre ( $D^a$  e  $B^a$ ) ou não ( $f^a$ ) mesmo na versão completa da teoria, ampliada dimensionalmente (4.111). Uma propriedade que, como já comentamos, não é compartilhada pelos campos  $\phi$  e  $A^a$  em (4.99).

Realizamos os nossos cálculos com a escolha particular  $p^\mu = (0, 0, 0, m)$  para simplificar a discussão, mas podemos generalizar facilmente esses procedimentos para o caso de um vetor geral que não seja do tipo luz ( $p^2 \neq 0$ ). Esses cálculos estão no apêndice E, mas como esperado eles simplesmente correspondem as seguintes generalizações

$$\begin{aligned}\varepsilon^{abc}\partial_b &\rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho \\ \partial_3 &\rightarrow p^\mu\partial_\mu.\end{aligned}\tag{4.112}$$

De forma que a dual neste caso toma a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{dualCFJ} &= -\frac{1}{4p^4}D_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho D_\sigma + \frac{1}{4p^4}f_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho f_\sigma - \frac{1}{2p^2}f_\mu f^\mu - \frac{1}{2p^2}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho B_\sigma)^2 \\ &+ \frac{1}{2p^4}f_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho[(p^\alpha\partial_\alpha)B_\sigma] + \frac{1}{4p^4}[(p^\alpha\partial_\alpha)B_\mu]\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho[(p^\beta\partial_\beta)B_\sigma].\end{aligned}\tag{4.113}$$

Observe que as componentes ao longo da direção definida por  $p^\mu$  são efetivamente nulas devido à contração com o tensor  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu$ . Essa é a generalização do fato que não existem campos com componentes na direção 3 em (4.111).

Os termos envolvendo  $\frac{1}{p^2}$  não nos permitem um extensão direta desse resultado para o caso de  $p^\mu$  tipo luz. Mas isso pode ser trivialmente conseguido se trabalharmos com coordenadas de cone de luz. Começando novamente com (4.101), definimos  $p^\mu =$

$(p^+, p^1, p^2, p^-)$  com

$$\begin{aligned}
p^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^3) = m \\
p^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^3) = 0 \\
p^1 &= 0 \\
p^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.114}$$

tal que  $p^\mu p_\mu = p^+ p_- = 0$ . Neste sistema de coordenadas tudo segue como antes com  $(a, b, c) = (1, 2, +)$  e  $\varepsilon^{+12-} = 1$ . Portanto o resultado é o mesmo que em (4.111) com  $\partial_3 \rightarrow \partial_-$  e  $f_c = \Pi_{c-}$ ,  $\Pi_{ab} = G_{ab} = \partial_a B_b - \partial_b B_a$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{dualCFJTL} &= \frac{1}{4m} D_a \varepsilon^{abc} \partial_b D_c - \frac{1}{4m} f_a \varepsilon^{abc} \partial_b f_c - \frac{1}{4} \Pi_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} \\
&+ \frac{1}{2m} f_a \varepsilon^{abc} \partial_b \partial_- B_c - \frac{1}{4m} \partial_- B_a \varepsilon^{abc} \partial_b \partial_- B_c.
\end{aligned} \tag{4.115}$$

No entanto, neste caso o termo  $-\frac{1}{4} \Pi_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu}$  não pode ser escrito simplesmente como  $\frac{1}{2} f_a f^a - \frac{1}{4} G_{ab} G^{ab}$  devido a métrica nas coordenadas do cone de luz ( $i = 1, 2$ ):

$$\Pi_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} = -2f_+ f_+ - 4f^i G_{i+} + 2G_{12} G_{12}. \tag{4.116}$$

A separação do conteúdo dinâmico originalmente contido no campo  $A_\mu$  em dois campos  $f_\mu$  e  $B_\mu$ , como em (4.113) por exemplo, devido a dualidade (lembre que  $D_\mu$  é puramente topológico e carrega apenas os aspectos de calibre de  $A_\mu$ ) pode causar um certo desconforto e é natural nos questionarmos se seria possível escrever o conteúdo dinâmico da teoria dual com apenas um campo. Isso parece possível uma vez que a dual foi obtida do potencial vetor apenas evidenciando sua componente na direção da quebra de Lorentz. Esse não é um problema trivial no entanto. Voltando ao nosso ponto de partida (4.101) parece claro que  $\Pi_{\mu\nu}$  é o campo dual de  $A_\mu$ . Porém, para preservar os graus de liberdade de  $A_\mu$ ,  $\Pi_{\mu\nu}$  deve ser vinculado de forma que o número de suas componentes independentes seja reduzido. A forma como este campo é vinculado é no entanto altamente assimétrica devido à violação de Lorentz e é isso que torna interessante esta situação.

Vamos estudar isso com mais detalhes e deixar mais claro como as diferentes componentes se comportam no processo de dualidade. Considere a Lagrangiana mestra (4.101). Nesta Lagrangiana, o campo  $\Pi_{\mu\nu}$  é um campo auxiliar e não possui dinâmica independente sendo completamente determinado pelo campo  $A_\mu$ . No entanto, podemos olhar por outro ponto de vista invertendo o papel dos campos e considerando  $A_\mu$  como um campo auxiliar. Isso é possível pois a estrutura simplética do campo  $A_\mu$  em (4.101) é tipo *CS* que, como sabemos, não gera dinâmica (o Hamiltoniano associado é nulo). Em outras palavras, toda dinâmica de  $A_\mu$  pode ser vista como determinada por  $\Pi_{\mu\nu}$ . Vamos tornar essa discussão mais precisa agora eliminando completamente o campo  $A_\mu$  em função  $\Pi_{\mu\nu}$ . As equações de Euler-Lagrange para  $A_\mu$  que seguem de (4.101) nos fornecem:

$$\Lambda^\mu \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \Pi_{\rho\sigma} = 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma. \quad (4.117)$$

Observe que  $\Lambda^\mu$  por definição satisfaz

$$\partial_\mu \Lambda^\mu = 0, \quad (4.118)$$

e devido as equações de movimento de  $A^\mu$  obedece ainda a propriedade

$$p_\mu \Lambda^\mu = 0. \quad (4.119)$$

Formalmente, podemos substituir (4.117) em (4.101) e obtemos

$$\mathcal{L}_{MCFJ} \rightarrow \frac{1}{4} \Lambda^\mu A_\mu - \frac{1}{4} \Pi_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu}, \quad (4.120)$$

onde  $A^\mu \equiv A^\mu(\Pi)$  é definido por (4.117). Para completar o procedimento temos que reescrever  $\Lambda^\mu A_\mu$  como função de  $\Pi^{\mu\nu}$ . Segue de (4.117) que a solução do vínculo

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu (\Pi_{\rho\sigma} + 2p_{[\rho} A_{\sigma]}) &= 0 \\ \Rightarrow \Pi_{\mu\nu} &= -2p_{[\mu} A_{\nu]} + \partial_{[\mu} B_{\nu]}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

introduz um novo campo de calibre  $B^\mu$ . Portanto

$$p^\mu \Lambda^\nu \Pi_{\mu\nu} = -2p^2 \Lambda^\mu A_\mu + \Lambda^\mu (p^\nu \partial_\nu) B_\mu - \Lambda^\mu \partial_\mu (p^\nu B_\nu), \quad (4.122)$$

onde (4.118) foi usado. O primeiro termo do lado direito da igualdade contém a estrutura do primeiro termo em (4.120). Substituindo portanto em (4.120) nós podemos integrar por partes e o último termo de (4.122) some devido a (4.118), ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{dualCFJ} = & -\frac{1}{8p^2}(p^\alpha \Pi_{\alpha\mu})\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\Pi_{\rho\sigma} - \frac{1}{4}\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{8p^2}[(p^\alpha\partial_\alpha)B_\mu]\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\Pi_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Observe que a relação (4.121) não contém a componente do campo  $A_\mu$  na direção de  $p^\mu$ . De fato, esta componente é um multiplicador de Lagrange em (4.101). No entanto, o vínculo imposto por esta componente estabelece uma relação entre  $\Pi_{\mu\nu}$  e  $B_\mu$  que pode ser lida em (4.121) como sendo

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\Pi_{\rho\sigma} = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho B_\sigma. \quad (4.124)$$

Essa é a origem da separação dos campos.  $\Pi_{\mu\nu}$  é de fato o dual de  $A_\mu$  mas suas componentes precisam satisfazer certos vínculos que são mais facilmente tratados com a introdução do campo  $B_\mu$ . Seguindo adiante, observe que

$$\begin{aligned} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\Pi_{\rho\sigma})^2 &= 2p^2\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} - 4(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu})(p_\beta\Pi^{\beta\mu}) \\ \Rightarrow \Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} &= \frac{2}{p^2}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho B_\sigma)^2 + \frac{2}{p^2}(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu})(p_\beta\Pi^{\beta\mu}), \end{aligned} \quad (4.125)$$

onde usamos (4.124). Quanto ao primeiro termo de (4.123), podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8p^2}(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu})\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\Pi_{\rho\sigma} &= -\frac{1}{4p^4}(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu})\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho[(p^\beta\partial_\beta)B_\sigma] \\ &\quad + \frac{1}{4p^4}(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu})\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho(p^\beta\Pi_{\beta\sigma}). \end{aligned} \quad (4.126)$$

De forma similar para o último termo

$$\begin{aligned} \frac{1}{8p^2}[(p^\alpha\partial_\alpha)B_\mu]\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\Pi_{\rho\sigma} &= \frac{1}{4p^4}[(p^\alpha\partial_\alpha)B_\mu]\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho[(p^\beta\partial_\beta)B_\sigma] \\ &\quad - \frac{1}{4p^4}[(p^\alpha\partial_\alpha)B_\mu]\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho(p^\beta\Pi_{\beta\sigma}). \end{aligned} \quad (4.127)$$

Combinando esses resultados, (4.123) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{dualCFJ} = & \frac{1}{4p^4} (p^\alpha \Pi_{\alpha\mu}) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho (p^\beta \Pi_{\beta\sigma}) - \frac{1}{2p^2} (p^\alpha \Pi_{\alpha\mu}) (p_\beta \Pi^{\beta\mu}) \\ & - \frac{1}{2p^2} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho B_\sigma)^2 + \frac{1}{2p^4} (p^\alpha \Pi_{\alpha\mu}) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho [(p^\beta \partial_\beta) B_\sigma] \\ & + \frac{1}{4p^4} [(p^\alpha \partial_\alpha) B_\mu] \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho [(p^\beta \partial_\beta) B_\sigma]. \end{aligned} \quad (4.128)$$

que corresponde à (4.113) se definirmos  $p^\alpha \Pi_{\alpha\mu} \equiv f_\mu$ .

Para estudar esse sistema é importante que sejamos capazes de incluir fontes externas. Isso permite o estudo de valores esperados de operadores, como por exemplo o loop de Wilson. O acoplamento de uma fonte elétrica ao sistema  $CFJ$  pode ser definido sem problemas e sua representação dual (em termos de acoplamentos não-mínimos) pode também ser obtida [143] (veja o apêndice F). Um problema bem mais complicado é a definição do modelo  $CFJ$  na presença de monopolos magnéticos. Este é o tópico que vamos abordar a seguir.

#### 4.4.4 CFJ na presença de defeitos

Vimos anteriormente que uma possível origem do modelo  $CFJ$  é devido a flutuações quânticas fermiônicas. Estas devem ser percebidas pelo campo eletromagnético como violando as simetrias de Lorentz e  $CPT$ . No capítulo anterior nós introduzimos a idéia que a presença de flutuações fermiônicas poderia ser efetivamente descrita pela prescrição de Julia-Toulouse. Vimos que esta prescrição nos levou a uma formulação mais precisa do modelo de MCS na presença de defeitos magnéticos. Queremos seguir um caminho análogo aqui e argumentar que a teoria  $CFJ$  pode ser interpretada como a teoria de Maxwell em  $4D$  imersa em um condensado elétrico que quebra as simetrias de Lorentz e  $CPT$ .

O problema que encontramos ao tentar definir o modelo  $CFJ$  na presença de defeitos magnéticos é o mesmo que encontramos ao estudar a  $MCS$ . O termo tipo  $CS$  contém o campo de calibre  $A$  explicitamente e isso dificulta a construção de campos invariantes de brana. Se tentarmos incluir um acoplamento não-mínimo diretamente

na teoria teremos uma situação equivalente à encontrada antes, em que a corda de Dirac associada à corrente magnética deve ser entendida como um observável e uma quebra explícita da simetria de brana ocorre. Isso significa que a corda de Dirac se torna uma informação física externa contrariando a suposição inicial de que ela é um objeto não-físico arbitrário. Pouco satisfatório neste cenário é a falta de informação sobre qual a origem do fenômeno da quebra da simetria de brana. Nós vimos que no caso da teoria de *MCS* essa quebra é induzida por defeitos internos ao condensado elétrico representado por fluxos fechados. A estratégia adotada para obter essa conclusão consiste em encontrar uma representação do sistema em termos de  $p$ -correntes tal que, através do processo de condensação dessas correntes implementado pela prescrição de Julia-Toulouse generalizada, a teoria desejada possa ser alcançada. Esta teoria, por construção, terá uma formulação consistente com a simetria de brana. No que segue nós vamos primeiramente discutir a formulação em termos de  $p$ -correntes sem a introdução de monopolos com o intuito de compreender melhor os efeitos da violação de Lorentz. Uma vez feito isso, a introdução de monopolos é imediata e será discutida logo a seguir.

#### 4.4.4.1 CFJ via Julia-Toulouse

O primeiro passo para a implementação da prescrição de Julia-Toulouse no presente caso é encontrar uma representação da teoria em termos de  $p$ -correntes que seja capaz de nos fornecer a fenomenologia que mapeia a teoria de Maxwell na teoria *CFJ*, simulando assim o papel desempenhado pelos férmions. A presença de  $p$ -correntes tem que conter a informação sobre a quebra das simetrias de Lorentz e *CPT*. Seguindo portanto os mesmos passos do Cap. 3, queremos encontrar uma 1-corrente  $J_e$  e uma ação  $S_e(J_e)$  tal que

$$\int d^4x \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e A_\mu J_e^\mu \right) + S_e(J_e) \rightarrow S_{CFJ}, \quad (4.129)$$

onde  $S_{CFJ}$  é definida em (4.68) e a seta indica o processo de condensação descrito pela prescrição de Julia-Toulouse dual. Pelo que discutimos no Cap. 3, se  $J_e$  é interpretado

como campo devemos ter

$$\int d^4x e A_\mu J_e^\mu + S_e(J_e) = \int d^4x p_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma. \quad (4.130)$$

Considerando  $J_e$  uma função de  $A$  e derivando (4.130) em relação a  $A$  obtemos

$$e J_e^\mu = -2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma. \quad (4.131)$$

Veja que a corrente satisfaz:

$$\partial_\mu J_e^\mu = 0, \quad (4.132)$$

$$p_\mu J_e^\mu = 0. \quad (4.133)$$

A primeira equação denota a conservação da corrente e nos diz que  $J_e$  é Poincaré-dual à borda de uma 2-superfície  $\Sigma_e$ :

$$*J_e = d^*\Sigma_e \Rightarrow J_e^\mu = -\partial_\nu \Sigma_e^{\nu\mu}. \quad (4.134)$$

A segunda equação fixa a 2-superfície Poincaré-dual à  $\Sigma_e$  como sendo perpendicular à direção definida por  $p_\mu$ . Este vínculo reduz efetivamente o espaço onde a superfície é definida de  $4D$  para  $3D$ . Conseqüentemente, podemos representar esta superfície por uma 1-corrente  $\Lambda_e$  na forma:

$$\Sigma_e^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \Lambda_{e\sigma}. \quad (4.135)$$

Esta é a manifestação da quebra de Lorentz e  $CPT$ . A Corrente  $J_e$  portanto fica:

$$J_e^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho \Lambda_{e\sigma}. \quad (4.136)$$

Substituindo em (4.130) a ação  $S_e(J_e)$  resulta ter a forma:

$$S(J_e) = \int d^4x \frac{e^2}{4} \Lambda_{e\mu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho \Lambda_{e\sigma}. \quad (4.137)$$

Com essas informações podemos definir formalmente a função partição do sistema:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x (-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e A_\mu J_e^\mu) + i S_e(J_e)}, \quad (4.138)$$

onde a soma é efetuada sobre as configurações das 1-superfícies  $\mathcal{A}_e$  Poincaré-duais a  $\Lambda_e$ .

Vamos agora estudar o sistema definido por (4.138) no que diz respeito às suas diferentes representações. Por construção, o efeito das flutuações fermiônicas é simulado aqui pela condensação da corrente  $\Lambda_e$ . Ou seja, se esta for tomada como um campo e formalmente substituirmos a soma sobre  $\mathcal{A}_e$  por uma integral funcional sobre  $\Lambda_e$  reobteremos o sistema  $CFJ$  descrito pela ação (4.68). A diluição desta corrente, por outro lado, nos deixa com a teoria de Maxwell usual em  $(3+1)D$ . Podemos ir para uma representação alternativa onde trocamos as correntes  $\Lambda_e$  por fluxos magnéticos através da fórmula de Poisson, que no presente caso tem a forma:

$$\sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \delta(H_\mu - \Lambda_\mu) = \sum_{\{\mathcal{C}_e\}} e^{2\pi i \int d^4x H_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Omega_{\nu\rho\sigma}}, \quad (4.139)$$

onde  $H$  é uma 1-forma e no lado direito a soma é efetuada sobre as configurações das 3-superfícies  $\mathcal{C}_e$  Poincaré-duais a  $\Omega$ . Inserindo dessa forma a identidade  $\mathbf{1} = \int \mathcal{D}H \delta(H_\mu - \Lambda_\mu)$  em (4.138) e usando (4.139) obtemos a forma equivalente

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathcal{C}_e\}} \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}H e^{i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + e A_\mu J_e^\mu(H) + 2\pi H_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Omega_{\nu\rho\sigma} \right) + i S_e(J_e(H))}, \quad (4.140)$$

onde as expressões envolvendo a 1-corrente  $\Lambda$  são escritas agora em termos do campo  $H$ , uma 1-forma.

$$J_e^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho H_\sigma \quad (4.141)$$

$$S(J_e) = \int d^4x \frac{e^2}{4} H_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho H_\sigma. \quad (4.142)$$

Vamos agora integrar o campo  $H$ . Uma vez que este aparece numa estrutura gaussiana, integrá-lo equivale a resolver sua equação de movimento que é dada por

$$e \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma + 2\pi \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Omega_{\nu\rho\sigma} + \frac{e^2}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho H_\sigma = 0. \quad (4.143)$$

Note primeiramente que esta equação nos diz que  $\Omega$  possui uma estrutura tal que

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Omega_{\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho \omega_\sigma, \quad (4.144)$$

onde  $\omega$  é uma 1-corrente. De forma que, a menos de outros termos que se anulam ao substituir na ação,  $H$  é dado por

$$H_\mu = -\frac{2}{e}A_\mu - \frac{4\pi}{e^2}\omega_\mu, \quad (4.145)$$

e o sistema fica então definido de forma equivalente pela seguinte função partição (a menos de normalizações)

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathcal{D}_e\}} \int \mathcal{D}A e^{i \int d^4x \left[ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \left( A_\mu + \frac{2\pi}{e}\omega_\mu \right) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho \left( A_\sigma + \frac{2\pi}{e}\omega_\sigma \right) \right]}, \quad (4.146)$$

onde  $\mathcal{D}_e$  são superfícies Poincaré-duais a  $\omega$ . Essa é a formulação em termos de fluxos magnéticos fechados definidos por  $\omega$  (mais precisamente os fluxos fechados estão relacionados a  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \omega_\sigma$  cuja derivada é nula). Como já mencionamos no capítulo anterior estas duas representações do sistema, em termos de  $\Lambda$  na (4.138) e em termos de  $\omega$  na (4.146), correspondem a um mapeamento ordem-desordem. De fato, se os fluxos definidos por  $\omega$  desaparecem (“diluição”) então o sistema é descrito pela *CFJ*. Se por outro lado esses fluxos condensam,  $\omega$  se torna um campo e a soma sobre  $\mathcal{D}_e$  se torna uma integral sobre  $\omega$  e o último termo se desacopla do sistema restando somente a teoria de Maxwell. Nesse sentido, esses fluxos representam defeitos no condensado elétrico uma vez que ao se proliferarem eles destroem a fase do condensado.

#### 4.4.4.2 Na presença de monopolos

Justamente esse controle proporcionado pelos parâmetros de ordem é o que nos permite definir apropriadamente a presença de monopolos magnéticos no sistema (que correspondem à introdução de fluxos abertos) conforme discutimos amplamente no capítulo anterior. Definimos a presença de monopolos com a introdução de uma brana de Dirac  $\Sigma_g$  como discutimos no Cap. 2.

$$F_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g^* \Sigma_g{}^{\mu\nu}, \quad (4.147)$$

de tal forma que a identidade de Bianchi (em princípio satisfeita mesmo no modelo de *CFJ*) seja violada

$$\partial_\mu {}^* G^{\mu\nu} = -g \partial_\mu \Sigma_g{}^{\mu\nu} = g J_g{}^\nu. \quad (4.148)$$

A simetria de brana magnética é realizada aqui na forma

$$\begin{aligned} {}^*\Sigma_{g\ \mu\nu} &\rightarrow {}^*\Sigma_{g\ \mu\nu} + \partial_\mu\sigma_\nu - \partial_\nu\sigma_\mu \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - g\sigma_\mu, \end{aligned} \quad (4.149)$$

tal que o campo  $G_{\mu\nu}$ , sendo um observável, permaneça invariante. O sistema na presença de cargas magnéticas externas é portanto descrito por

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{D}_e\}} \int \mathcal{D}A e^{i\int d^4x \left[ -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - (A_\mu + \frac{2\pi}{e}\omega_\mu)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho(A_\sigma + \frac{2\pi}{e}\omega_\sigma) \right]}. \quad (4.150)$$

A simetria de brana é preservada devido à presença dos fluxos internos  $\omega$  (desde que  $eg = 2\pi$ ). Para obter a teoria de  $CFJ$  devemos diluir os fluxos  $\omega$ . Como sabemos, a manutenção da simetria de brana nos impede de realizar uma diluição completa e os fluxos conexos com a brana de Dirac externa permanecem no sistema construindo as diferentes configurações de  ${}^*\Sigma_g$ . Note que o termo tipo  $CS$  não possui componentes de campos na direção de  $p_\nu$ . Como este termo é o responsável pela quebra da simetria de brana, vemos que componentes da brana magnética de Dirac na direção de  $p_\nu$  não sofrerão a quebra espontânea da simetria de brana. Isso torna mais complicada a análise dos resultados.

Para tentar entender um pouco melhor esse resultado pode ser interessante olhar para a formulação dual, onde os monopolos apareceriam em um acoplamento mínimo. Vamos seguir as mesmas idéias discutidas em torno de (3.64). Considere novamente a (4.138) agora na presença de monopolos externos

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \int \mathcal{D}A e^{i\int d^4x \left( -\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + eA_\mu J_e^\mu \right) + iS_e(J_e)}, \quad (4.151)$$

Vamos primeiramente expressar o sistema em termos de invariantes de brana. Para isso observe que, com  $eg = 2\pi$ , podemos reescrever o acoplamento elétrico como

$$eA_\mu J_e^\mu \rightarrow e(A_\mu + g\Xi_{g\ \mu})J_e^\mu, \quad (4.152)$$

compare com (3.67).  $\Xi_g$  é tal que sob a transformação de brana (4.149):

$$\Xi_{g\ \mu} \rightarrow \Xi_{g\ \mu} + \sigma_\mu. \quad (4.153)$$

Portanto podemos construir os invariantes de brana

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\mu &\equiv A_\mu + g\bar{\Xi}_\mu \\ * \tilde{\Sigma}_g{}_{\mu\nu} &\equiv * \Sigma_g{}_{\mu\nu} - \partial_\mu \bar{\Xi}_\nu + \partial_\nu \bar{\Xi}_\mu.\end{aligned}\quad (4.154)$$

Introduzimos ainda na função partição uma soma sobre as diferentes configurações das superfícies conexas à brana de Dirac  $*\Sigma_g{}_{\mu\nu}$  e Poincaré-duais à  $\bar{\Xi}_g$  representada por  $\mathcal{E}_g$ , como fizemos em (3.68). Esta soma é redundante neste estágio e constitui apenas uma normalização da função partição. O sistema fica então descrito por

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum_{\{\mathcal{E}_g\}} \sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \int \mathcal{D}\tilde{A} e^{i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} G^{\mu\nu}(\tilde{A}) G_{\mu\nu}(\tilde{A}) + e \tilde{A}_\mu J_e^\mu \right) + i S_e(J_e)}, \quad (4.155)$$

onde

$$G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu + g * \tilde{\Sigma}_g{}_{\mu\nu}. \quad (4.156)$$

Podemos ainda reescrever a soma sobre  $\mathcal{E}_g$  como uma soma sobre as superfícies  $\mathcal{B}_g$  Poincaré-duais à  $*\tilde{\Sigma}_g{}_{\mu\nu}$  vinculadas por  $\partial_\mu \tilde{\Sigma}_g{}^{\mu\nu} = -J_g^\nu$ :

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{\mathcal{B}_g\}} \sum_{\{\mathcal{A}_e\}} \int \mathcal{D}\tilde{A} e^{i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} G^{\mu\nu}(\tilde{A}) G_{\mu\nu}(\tilde{A}) + e \tilde{A}_\mu J_e^\mu \right) + i S_e(J_e)}. \quad (4.157)$$

Vamos agora obter a formulação dual dessa teoria com respeito a  $\tilde{A}$ . O setor da teoria contendo  $\tilde{A}$  é descrito pela Lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} G^{\mu\nu}(\tilde{A}) G_{\mu\nu}(\tilde{A}) + e \tilde{A}_\mu J_e^\mu \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \Pi^{\mu\nu} G_{\mu\nu}(\tilde{A}) + \frac{1}{4} \Pi^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu} + e \tilde{A}_\mu J_e^\mu,\end{aligned}\quad (4.158)$$

Onde introduzimos  $\Pi$ , que é um campo auxiliar, como sabemos. Integrando em  $\tilde{A}$  obtemos o seguinte vínculo sobre  $\Pi$ :

$$\partial_\mu \Pi^{\mu\nu} + e \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} p_\mu \partial_\rho \Lambda_{e\sigma} = 0 \quad (4.159)$$

que pode ser resolvido com a introdução de um campo de calibre  $B$ , dual ao campo  $\tilde{A}$

$$\Pi^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho B_\sigma - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \Lambda_{e\sigma}. \quad (4.160)$$

A teoria na representação dual é portanto

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{B_g\}} \sum_{\{A_e\}} \int \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} + \frac{g}{2} H^{\mu\nu} \tilde{\Sigma}_{g\ \mu\nu} \right) + i S_e(J_e)}, \quad (4.161)$$

onde

$$H_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - e(p_\mu \Lambda_{e\ \nu} - p_\nu \Lambda_{e\ \mu}) \quad (4.162)$$

Note como o acoplamento não-mínimo exhibe as consequências da quebra da simetria de Lorentz. A simetria de brana elétrica segue da definição usual da transformação de brana para a brana elétrica  $\Sigma_e$  e levando em consideração a definição (4.135). Essa simetria é realizada aqui na forma:

$$\begin{aligned} p_\mu \Lambda_{e\ \nu} - p_\nu \Lambda_{e\ \mu} &\rightarrow p_\mu \Lambda_{e\ \nu} - p_\nu \Lambda_{e\ \mu} + \partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu \\ B_\mu &\rightarrow B_\mu + e \lambda_\mu, \end{aligned} \quad (4.163)$$

que claramente deixa  $H_{\mu\nu}$  invariante.

O modelo de *CFJ* deve ser obtido condensando a brana elétrica definida por  $\Lambda_e$ . Com o objetivo de facilitar a discussão vamos escolher  $p^\mu = (0, 0, 0, m)$ . A ação que define o sistema terá então a forma

$$\begin{aligned} S = \int d^4x &\left[ -\frac{1}{2} (\partial_a B_3 - \partial_3 B_a + em \Lambda_{e\ a})^2 - \frac{1}{4} (\partial_a B_b - \partial_b B_a)^2 \right. \\ &\left. + g H^{a3} \tilde{\Sigma}_{g\ a3} + \frac{g}{2} H^{ab} \tilde{\Sigma}_{g\ ab} - \frac{me^2}{4} \Lambda_{e\ a} \varepsilon^{abc} \partial_b \Lambda_{e\ c} \right]. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Seguindo a prescrição de Julia-Toulouse, o brana elétrica  $\Lambda_e$  é elevada à categoria de campo e formalmente consideramos a soma sobre  $\mathcal{A}_e$  como uma integral sobre  $\Lambda_e$ .

$$\mathcal{Z}(J_g) \rightarrow \sum'_{\{B_g\}} \int \mathcal{D}\Lambda_e \int \mathcal{D}B e^{i S(\Lambda_e, B, \tilde{\Sigma}_g)}. \quad (4.165)$$

Note que toda a informação sobre a brana está contida em  $H^{a3}$ , que é um invariante de brana. Isso significa que a integral sobre  $\Lambda_e$  é de fato uma integral sobre  $H^{a3}$  uma vez fixada a redundância de brana. O passo natural seria combinar as integrais sobre  $B$  e  $\Lambda_e$  em uma integral sobre  $H$ . Veja no entanto que a violação de Lorentz não permite uma

eliminação trivial completa de  $B$  e o melhor que podemos fazer é absorver a componente  $B_3$ . Mais precisamente, simplesmente renomeando  $H^{a3} \equiv f^a$  ( $\Rightarrow H_{a3} = -f_a$ ) a ação fica

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} f_a f^a - \frac{1}{4} (\partial_a B_b - \partial_b B_a)^2 + g f^a \tilde{\Sigma}_{g\ a3} - g B_b \partial_a \tilde{\Sigma}_g^{ab} - \frac{1}{4m} (f_a - \partial_3 B_a) \varepsilon^{abc} \partial_b (f_c - \partial_3 B_c) \right], \quad (4.166)$$

e a função partição do sistema é dada por

$$\mathcal{Z}(J_g) = \sum'_{\{B_g\}} \int \mathcal{D}f_a \int \mathcal{D}B_a e^{iS(f_a, B_a, \tilde{\Sigma}_g)}. \quad (4.167)$$

Acreditamos que esta seja a formulação adequada da teoria de  $CFJ$  na presença de monopolos. Note que a ação (4.166) com  $g = 0$  é exatamente a ação que obtivemos em (4.111) (exceto pelo  $CS$  desacoplado lá). É interessante observar ainda como ocorre aqui o pulo de posto característico da geração de massa na prescrição de Julia-Toulouse. O sistema inicial definido em (4.161), além das correntes representadas pelas somas, possui o campo de calibre  $B$ , uma 1-forma sem massa. Após a condensação de  $\Lambda_e$  uma nova 1-forma é adicionada ao sistema. Mas esta não é independente. Pelo que discutimos acima, as únicas componentes não nulas da 1-forma  $\Lambda_e$  são perpendiculares a  $p^\mu$  e estas, no processo de condensação, absorvem a componente 3 do campo  $B$ . Este é o pulo de posto. Efetivamente,  $B_3$  foi substituído por  $f_a$ . Sabemos ainda, pelo que discutimos anteriormente ao estudar a dual da  $CFJ$ , que  $f_a$  e  $B_a$  devem ser entendidos como as componentes de uma 2-forma (que no presente caso é simplesmente o campo  $H$ ). Componentes essas que possuem certos vínculos que são melhor expressos com a introdução do campo  $B_a$ .

O pulo de posto tem um efeito muito importante. Ele é a causa da quebra espontânea da simetria de brana. Veja que os termos que envolvem a brana magnética  $\tilde{\Sigma}_g$  em (4.166) não representam um acoplamento mínimo com a corrente de monopolos  $J_g$  como ingenuamente poderíamos esperar, dado que estamos no quadro dual. As componentes  $\tilde{\Sigma}_{g\ a3}$  da brana magnética estão acopladas minimamente com  $f_a$  sugerindo que essa

brana se tornou um observável agora. Ainda que uma análise mais detalhada desse sistema seja necessária, a quebra espontânea da simetria de brana é um forte indício de que esse sistema exhibe propriedades confinantes.

# Capítulo 5

## Conclusões e perspectivas

Estudamos diversas manifestações do fenômeno do confinamento. Vimos o surgimento de um critério universal, presente em todos os exemplos que consideramos, caracterizando o regime confinante: a quebra da simetria de brana. Esse critério surge como consequência do formalismo que introduzimos nesta tese, que consiste em uma generalização das idéias de Julia e Toulouse [92] como apresentadas por Quevedo e Trugenberger [93] incorporando ainda as importantes contribuições de Kleinert [31, 32] na interpretação da simetria de brana e no mapa ordem-desordem.

Essa nova formulação nos conduziu a uma definição apropriada da teoria de Maxwell-Chern-Simons na presença de instantons [79]. Estes estão confinados devido a quebra da simetria de brana. Fundamental nessa construção é a interpretação da Maxwell-Chern-Simons como uma teoria efetiva para um condensado elétrico que viola as simetrias de paridade e inversão temporal [96].

No contexto das teorias que violam as simetrias de Lorentz e  $CPT$ , abordamos a questão controversa da indução radiativa do termo tipo Chern-Simons do modelo de Carroll-Field-Jackiw. Mostramos que é possível obter esse termo sem ambiguidades, induzido por flutuações quânticas de férmions não massivos. Este resultado é fundamentado no fato de que a massa fermiônica que viola  $P$  e  $T$  em  $(2 + 1)D$  é a projeção dimensional de um termo fermiônico que viola Lorentz em  $(3 + 1)D$  [156]. Esses resultados exploram a similaridade entre a teoria de Maxwell-Chern-Simons e a teoria de Carroll-Field-Jackiw.

Explorando ainda mais essa similaridade, após discutir detalhadamente a formulação dual do modelo de Carroll-Field-Jackiw [143], nós partimos para a definição deste modelo na presença de monopolos magnéticos. Usando o formalismo de Julia-Toulouse generalizado que desenvolvemos foi possível definir uma formulação apropriada desse sistema. Vimos que a teoria exhibe propriedades confinantes sugerindo que os monopolos aparecem confinados neste sistema. A quebra da simetria de brana no entanto, ocorre apenas parcialmente. Este é um novo resultado que introduzimos nesta tese e mais estudos são necessários para explorar todas as suas consequências. Uma possibilidade imediata é a determinação explícita do potencial confinante. Essas considerações abrem caminho para estudos da estrutura não perturbativa de teorias que violam a simetria de Lorentz, um assunto muito pouco abordado na literatura. Isso é importante pois, como vimos no exemplo em  $(1 + 1)D$  [123], a definição do que se considera uma “pequena” violação de Lorentz em uma teoria pode ser algo relativo, que depende de qual fenômeno estudamos. Nesse sentido, esses estudos podem servir como uma forma eficiente de excluir teorias que violam simetrias de Lorentz.

Pela abrangência do formalismo de Julia-Toulouse generalizado acreditamos que muitas outras aplicações importantes podem ser desenvolvidas ainda. De fato, a obtenção da estrutura hierárquica do efeito Hall quântico fracionário sugere possíveis aplicações nessa área. Chamamos a atenção ainda para o fato de que esse formalismo unifica sob princípios comuns diversos resultados encontrados na literatura nos fornecendo no mínimo uma maior intuição sobre a natureza dos fenômenos envolvidos.

# Apêndice A

## Formas diferenciais: definições e notação

Neste apêndice vamos expor algumas definições e propriedades relacionadas às formas diferenciais que utilizamos em boa parte desta tese. O propósito deste apêndice não é de forma alguma revisar os conceitos de geometria diferencial mas apenas estabelecer um dicionário para facilitar o acompanhamento dos cálculos e resultados apresentados na tese. Para uma revisão mais completa dos conceitos de geometria diferencial e topologia veja por exemplo [159, 160].

### A.1 O tensor de Levi-Civita

O tensor métrico não desempenha um papel tão proeminente nesta tese uma vez que trabalhamos exclusivamente com espaços de curvatura nula, de forma que a principal função da métrica aqui é na definição dos sinais ao “descer” ou “subir” índices de tensores. No entanto a métrica também é importante no auxílio da definição do que é conhecido como *densidades tensoriais*. Vamos seguir aqui as definições de [161].

A transformação do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  devido a uma transformação geral de coordenadas  $x' \rightarrow x$  é dada por

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (\text{A.1})$$

Essa é a transformação usual de um tensor covariante de posto 2. No entanto se

definirmos o determinante da métrica

$$g = \det g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

e tomarmos o determinante da expressão acima vemos que

$$g' = \left( \det \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right)^2 g = J^2 g, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$J \equiv \det \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \quad (\text{A.4})$$

é o Jacobiano da transformação. Vemos portanto que o determinante da métrica se transforma como um escalar exceto pelo fator do Jacobiano. Dizemos em geral que quantidades que se transformam como tensores exceto por fatores do Jacobiano são densidades tensoriais. Nesse sentido,  $g$  é uma densidade escalar. De forma geral, se um objeto qualquer  $T$  se transforma como

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{\mu_1 \dots \mu_n} = J^{-W} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\rho_n}} \frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T_{\sigma_1 \dots \sigma_n}{}^{\rho_1 \dots \rho_n}, \quad (\text{A.5})$$

dizemos que  $T$  é uma densidade tensorial de *peso*  $W$ . O determinante da métrica é portanto uma densidade escalar de peso  $-2$ . Nesse contexto, sendo a métrica uma quantidade natural e definidora das propriedades do espaço-tempo onde os tensores são definidos, é natural usarmos a métrica como uma forma de construir tensores usuais a partir de densidades tensoriais. Para construir um tensor a partir de uma densidade tensorial de peso  $W$ , basta multiplicá-lo por  $|g|^{\frac{W}{2}}$ . Para o exemplo que acabamos de ver, podemos definir o tensor  $|g|^{\frac{W}{2}} T$  que claramente se transforma da maneira apropriada:

$$|g'|^{\frac{W}{2}} T'_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\rho_n}} \frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial x'^{\nu_n}} |g|^{\frac{W}{2}} T_{\sigma_1 \dots \sigma_n}{}^{\rho_1 \dots \rho_n}, \quad (\text{A.6})$$

Um tensor extremamente importante que encontramos repetidas vezes ao longo da tese é o *tensor de Levi-Civita*. Esse tensor é definido em um espaço de dimensão  $D$  por ter suas componentes em todos os referenciais definidas pelas quantidades  $\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu D}$ .

Essas quantidades são definidas em um sistema de coordenadas qualquer escolhendo-se um ordenamento arbitrário para a disposição das coordenadas representadas pelos índices, por exemplo,  $t, x, y, z$  ou  $t, r, \theta, \phi$  e etc. Dessa forma,  $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_D}$  é definido por

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_D} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mu_1\mu_2\dots\mu_D \text{ for uma permutação par do ordenamento definido} \\ -1 & \text{se } \mu_1\mu_2\dots\mu_D \text{ for uma permutação ímpar do ordenamento definido} \\ 0 & \text{se existirem índices iguais} \end{cases}$$

Como o tensor de Levi-Civita possui as mesmas componentes em todos os referenciais, uma transformação de coordenadas deve fornecer novamente a quantidade  $\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_D}$  exceto por um possível Jacobiano. De fato, note que a identidade

$$\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_D}}{\partial x^{\mu_D}} \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_D} = J^{-1} \varepsilon^{\nu_1\nu_2\dots\nu_D} \quad (\text{A.7})$$

corresponde à transformação que esperamos para uma densidade tensorial de peso  $-1$ . Portanto é possível definir um tensor contravariante usual simplesmente multiplicando por  $|g|^{-\frac{1}{2}}$ . Nos casos que tratamos na tese  $|g| = 1$  e não precisamos nos preocupar muito com isso, mas vamos manter esses fatores apenas neste apêndice.

A partir da forma contravariante do tensor de Levi-Civita podemos definir uma forma covariante da maneira usual

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_D} &= g_{\mu_1\nu_1} \dots g_{\mu_D\nu_D} \varepsilon^{\nu_1\nu_2\dots\nu_D} \\ &= g \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_D}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde na passagem para a última linha apenas utilizamos a propriedade utilizada em (A.7) que define o cálculo do determinante de uma matriz qualquer. Note que devido a essa propriedade, em um espaço de Minkowski o procedimento de “descer” e “subir” índices deste tensor envolve uma mudança de sinal.

Outra propriedade muito importante diz respeito à contração dos índices de dois tensores de Levi-Civita. Se definirmos normalização do tensor tal que  $\varepsilon^{01\dots D} = 1$ , temos:

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_p\mu_{p+1}\dots\mu_D} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_p\nu_{p+1}\dots\nu_D} = p! g \delta_{[\nu_{p+1}}^{\mu_{p+1}} \delta_{\nu_{p+2}}^{\mu_{p+2}} \dots \delta_{\nu_D]}^{\mu_D} \quad (\text{A.9})$$

onde os índices entre colchetes indicam antissimetriação. Essa propriedade pode ser demonstrada observando que se algum índice do conjunto  $\mu_{p+1} \dots \mu_D$  tiver algum valor não contido no conjunto  $\nu_{p+1} \dots \nu_D$  então a expressão é nula pois necessariamente existirão índices iguais em um dos símbolos de Levi-Civita. Por outro lado, se os valores desses índices são os mesmos eles necessariamente estarão relacionados por uma permutação par ou por uma permutação ímpar. Para qualquer permutação par o sinal será positivo e para permutações ímpares será negativo. Essa é a informação contida no símbolo envolvendo as deltas. No lado esquerdo da equação temos uma soma representada pela contração de  $p$  índices. Existem  $p!$  termos e todos eles fornecem o mesmo resultado que acabamos de discutir. Por último, o determinante  $g$  aparece devido à (A.8).

## A.2 $p$ -formas

Se um espaço  $\mathcal{M}_D$  de dimensão  $D$  for uma variedade suave, com uma estrutura diferencial bem definida, então podemos dotar esse espaço com uma estrutura tensorial fundamentada na existência de espaços tangentes e cotangentes em cada ponto do espaço. O espaço tangente pode ser definido em um ponto através da definição usual de tangentes às curvas definidas no espaço nesse ponto. Em um determinado ponto, escolhendo curvas que passem por esse ponto, podemos definir um espaço vetorial que terá a mesma dimensão  $D$  do espaço  $\mathcal{M}_D$ . Temos assim um espaço vetorial em cada ponto do espaço constituindo o que é denominado de fibrado vetorial (*vector bundle*) e representado por  $T_{\mathcal{M}}$ . No caso específico do espaço tangente esse é denominado também de fibrado tangente (*tangent bundle*). Um vetor definido nesse sentido corresponde ao que chamamos de tensor contravariante (índices em “cima”) de posto 1. A generalização para um posto maior é imediata simplesmente colando (produto direto) cópias dos espaços vetoriais em cada ponto. Um tensor contravariante  $V$  de posto  $q$ , nessa construção fundamentada na estrutura diferencial do espaço, é representado pela notação:

$$V = V^{\mu_1 \dots \mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}}. \quad (\text{A.10})$$

Nessa notação os símbolos  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ;  $\mu = 1, \dots, D$  representam uma base do espaço vetorial expressas em termos das coordenadas  $x^\mu$  do espaço base  $\mathcal{M}_D$ . Essa notação é uma consequência da definição do espaço tangente através de derivadas de curvas no espaço. Um vetor contravariante pode ser pensado como atuando em funções definidas no espaço  $\mathcal{M}_D$  mapeando-as em suas derivadas ao longo de direções definidas, reconstruindo assim a curva que lhe deu origem. Essa ação serve ainda para definir o espaço dual  ${}^*T_{\mathcal{M}}$  ao espaço tangente denominado espaço cotangente. Note que ao atuar com um vetor contravariante  $V$  em uma função  $f$  definida em  $\mathcal{M}_D$  obtemos

$$V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.11})$$

Existe portanto uma definição natural do espaço cotangente tomando (A.11) como a definição de um produto interno  $T_{\mathcal{M}} \times {}^*T_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ . Como sugerido por (A.11), os vetores covariantes podem ser representados por diferenciais. A generalização também é imediata para tensores covariantes de posto maior que 1. Um tensor covariante  $U$  de posto  $p$  tem a representação

$$U = U_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.12})$$

Podemos definir ainda um tensor geral  $T$  misto de posto  $(q, p)$  da forma

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_p}. \quad (\text{A.13})$$

Dentre esses objetos, os tensores covariantes definidos em um produto direto totalmente antissimétrico dos espaços cotangentes gozam de certas propriedades especiais e desempenham um papel muito importante no estudo da topologia do espaço  $\mathcal{M}_D$ . Esses objetos recebem o nome de *formas diferenciais*. Uma forma diferencial  $A$  de posto ou ordem  $p$  é denominada de *p-forma* e definida por

$$A_p = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.14})$$

onde  $p!$  é apenas uma convenção e o símbolo  $\wedge$  representa o produto exterior (ou wedge product) definido pela antissimetrização completa do produto direto, ou seja,

por exemplo

$$dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1 \quad (\text{A.15})$$

e assim por diante. O espaço das  $p$ -formas em  $\mathcal{M}_D$  é denotado por  $\Omega^p(\mathcal{M})$ .

A dimensão do espaço  $\Omega^p(\mathcal{M})$  é dada pelo número de componentes independentes de  $A_p$ , dado por

$$\binom{D}{p} = \frac{D!}{(D-p)!p!}, \quad (\text{A.16})$$

Obviamente, a dimensão de  $\Omega^p(\mathcal{M})$  é a mesma de  $\Omega^{D-p}(\mathcal{M})$ . De fato em um espaço de dimensão  $D$  onde uma métrica é definida existe um mapa natural entre  $p$ -formas e  $(D-p)$ -formas. A aplicação desse mapa é representada pela *operação dual de Hodge* (\*) definida por

$$*A_p = \frac{\sqrt{|g|}}{(D-p)!p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D}. \quad (\text{A.17})$$

Temos a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} **A_p &= \frac{\sqrt{|g|}}{(D-p)!p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} *dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_D} \\ &= \frac{|g|}{(D-p)!p!p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_D} \varepsilon^{\nu_{p+1} \dots \nu_D \rho_1 \dots \rho_p} dx^{\rho_1} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_p} \\ &= \frac{|g|}{(D-p)!p!p!} (-1)^{p(D-p)} A_{\mu_1 \dots \mu_p} (D-p)! g \delta_{[\rho_1}^{\mu_1} \delta_{\rho_2}^{\mu_2} \dots \delta_{\rho_p]}^{\mu_p} dx^{\rho_1} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_p} \\ &= (-1)^{p(D-p)} \frac{g|g|}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \\ &= (-1)^{p(D-p)} g|g| A_p, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde usamos a propriedade (A.9).

Uma  $D$ -forma constitui a forma de maior ordem que pode ser definida em um espaço de dimensão  $D$ . Note que essa forma possui apenas uma componente. Uma das propriedades mais importantes das formas diferenciais, no que diz respeito à estrutura topológica do espaço base  $\mathcal{M}_D$ , é que se esse espaço constitui uma variedade orientável então existe uma  $D$ -forma positiva definida que podemos usar para definir o *elemento*

de volume do espaço. Usualmente se normaliza essa  $D$ -forma definindo-a como a dual Hodge da 0-forma  $\mathbf{1}$ , ou seja

$$*\mathbf{1} = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \dots \wedge dx^D \equiv \sqrt{|g|} d^D x. \quad (\text{A.19})$$

Se o espaço não é orientável, define-se um elemento de volume em cada região orientável. Note que esse objeto é invariante por uma transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} \sqrt{|g'|} d^D x' &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^D}{\partial x^{\mu_D}} \sqrt{|g'|} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_D} \\ &= \sqrt{|g|} d^D x, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde supomos que a transformação de coordenadas não inverte a orientação. A integração de uma função  $f$  (uma 0-forma) no espaço é definida portanto como:

$$\int_{\mathcal{M}_D} f^* \mathbf{1} \equiv \int_{\mathcal{M}_D} f(x) \sqrt{|g|} d^D x, \quad (\text{A.21})$$

onde a última expressão no lado direito segue a definição usual de integrais encontrada no cálculo integral.

As definições de integral e dual de Hodge discutidas acima nos levam a uma definição natural de produto interno entre  $p$ -formas como um generalização de (A.21). Definimos o produto interno entre  $p$ -formas  $A_p$  e  $B_p$  por:

$$(A_p, B_p) \equiv \int_{\mathcal{M}_D} A_p \wedge *B_p = \frac{1}{p!} \int_{\mathcal{M}_D} A_{\mu_1 \dots \mu_p} B^{\mu_1 \dots \mu_p} \sqrt{|g|} d^D x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.22})$$

onde a última igualdade segue usando-se a definição (A.17).

Algumas propriedades importantes podem ser deduzidas. Segue direto da definição (A.22) (basta olhar para a última igualdade) que

$$(A_p, B_p) = (B_p, A_p). \quad (\text{A.23})$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} (*A_p, *B_p) &= \int_{\mathcal{M}_D} *A_p \wedge **B_p \\ &= (-1)^{p(D-p)} g|g| \int_{\mathcal{M}_D} *A_p \wedge B_p \\ &= g|g| \int_{\mathcal{M}_D} B_p \wedge *A_p \\ &= g|g| (A_p, B_p), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

onde (A.18) e (A.23) foram usadas. Segue direto da definição que se a métrica for positiva definida (espaço Riemanniano) então

$$(A_p, A_p) \geq 0 \quad (= 0 \text{ se e somente se } A_p = 0). \quad (\text{A.25})$$

Outra propriedade útil é: seja  $C_{D-p}$  uma  $(D-p)$ -forma qualquer, então

$$\begin{aligned} (*A_p, C_{D-p}) &= \int_{\mathcal{M}_D} *A_p \wedge *C_{D-p} \\ &= (-1)^{p(D-p)} \int_{\mathcal{M}_D} *C_{D-p} \wedge *A_p \\ &= (-1)^{p(D-p)} (*C_{D-p}, A_p) \\ &= (-1)^{p(D-p)} (A_p, *C_{D-p}). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Note que a generalização do produto interno para incluir  $p$ -correntes constitui uma forma natural de definir a integração de uma  $p$ -forma ao longo de uma superfície de dimensão  $p$  (uma  $p$ -superfície) contida em  $\mathcal{M}_D$ . De fato, se  $\mathcal{N}_p$  é uma  $p$ -superfície cuja  $p$ -corrente Poincaré-dual denominamos  $J_p$ , então

$$(A_p, J_p) = \int_{\mathcal{M}_D} A_p \wedge *J_p = \int_{\mathcal{N}_p} A_p \quad (\text{A.27})$$

conforme vimos em (2.26).

Já mencionamos a importância das  $p$ -formas para o estudo das propriedades topológicas de um espaço. Essa característica se manifesta mais explicitamente na definição do operador de *derivada exterior*  $d$ . Esse operador mapeia  $p$ -formas em  $(p+1)$ -formas e atua em uma  $p$ -forma qualquer  $A_p$  como

$$dA_p = \frac{1}{p!} \partial_\nu A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.28})$$

Esse operador não depende da métrica. De fato, pode-se mostrar que a atuação de  $d$  não é modificada se o substituirmos por uma derivada covariante  $D$  dependendo da conexão métrica do espaço (isso é fácil mostrar pois a conexão métrica possui certas componentes simétricas que se anulam devido à antissimetrização). Essa independência da métrica e a equivalência com o operador  $D$  significa que  $d$  é um operador covariante

geral ainda que a métrica não entre em sua definição. Portanto  $d$  depende apenas das propriedades topológicas do espaço. Qualquer propriedade do espaço que puder ser expressa inteiramente em termos de propriedades de  $d$ , será um invariante topológico. Formas diferenciais são os únicos campos nos quais podemos definir a atuação de um operador com essas propriedades. Essa é a razão da enorme importância desses objetos em matemática. (veja discussão no Cap.12 de [162])

Atuando em um produto de formas é imediato que

$$d(A_p \wedge B_q) = dA_p \wedge B_q + (-1)^p A_p \wedge dB_q. \quad (\text{A.29})$$

O teorema de Stokes nos permite relacionar o operador derivada exterior com o operador borda  $\partial$  que mapeia uma  $p$ -superfície  $\mathcal{N}_p$  em sua borda  $\partial\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_{p-1}$  (uma  $(p-1)$ -superfície).

$$\int_{\mathcal{N}_p} dA_{p-1} = \int_{\partial\mathcal{N}_p} A_{p-1} \quad (\text{A.30})$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [159] e consiste apenas numa generalização do teorema de Stokes usual do cálculo vetorial (aqui o teorema de Gauss pode ser visto como um caso especial desse resultado).

Uma  $p$ -forma  $A$  é dita fechada se:

$$dA_p = 0. \quad (\text{A.31})$$

Uma  $p$ -forma  $A$  é dita exata se puder ser expressa como a derivada de uma  $(p-1)$ -forma  $B$ :

$$A_p = dB_{p-1}. \quad (\text{A.32})$$

Segue imediatamente da definição da derivada exterior (A.27) que  $d^2 = 0$  atuando em qualquer  $p$ -forma. Portanto qualquer forma exata é fechada. Mas o contrário não necessariamente é válido, apenas localmente. Esse é o conteúdo do *lema de Poincaré*: uma forma fechada é exata em uma região simplesmente conexa do espaço.

O produto interno nos permite definir um operador dual a  $d$ , denominado derivada exterior adjunta e denotado por  $d^\dagger$ . Para uma  $p$ -forma  $A_p$  e uma  $(p-1)$ -forma  $B_{p-1}$

definimos  $d^\dagger$  tal que para um espaço compacto e sem borda (ou tal que todas as formas se anularem na borda)

$$(A_p, dB_{p-1}) = (d^\dagger A_p, B_{p-1}). \quad (\text{A.33})$$

Dessa forma,  $d^\dagger$  mapeia  $p$ -formas em  $(p-1)$ -formas. O operador adjunto está relacionado com o operador  $d$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (A_p, dB_{p-1}) &= \frac{1}{g|g|} (*A_p, *dB_{p-1}) \\ &= \frac{1}{g|g|} \int_{\mathcal{M}_D} *A_p \wedge **dB_{p-1} \\ &= \frac{1}{g|g|} (-1)^{p(D-p)} \int_{\mathcal{M}_D} *A_p \wedge dB_{p-1} \\ &= \frac{1}{g|g|} (-1)^{(D-p)+1} \int_{\mathcal{M}_D} d^*A_p \wedge **B_{p-1} \\ &= \frac{1}{g|g|} (-1)^{(D-p)+1} (d^*A_p, *B_{p-1}) \\ &= \frac{1}{g|g|} (-1)^{(D-p)+1} (-1)^{(D-p)+1} (*d^*A_p, B_{p-1}) \\ &= -\frac{1}{g|g|} (-1)^{D(p+1)} (*d^*A_p, B_{p-1}), \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

de onde deduzimos, comparando com (A.33), que

$$d^\dagger = -\frac{1}{g|g|} (-1)^{D(p+1)} *d^*. \quad (\text{A.35})$$

Note que  $d^\dagger$  depende da métrica pois envolve a operação dual de Hodge.

Usando  $d$  e  $d^\dagger$  podemos construir ainda um operador diferencial  $\Delta$  que mapeia  $p$ -formas em  $p$ -formas definido por

$$\Delta = (d + d^\dagger)^2 = dd^\dagger + d^\dagger d. \quad (\text{A.36})$$

No caso de um espaço com métrica positiva definida esse operador é denominado *Laplaciano*. Nesse caso, uma  $p$ -forma  $A_p$  é denominada forma harmônica se

$$\Delta A_p = 0. \quad (\text{A.37})$$

O Laplaciano é um operador positivo definido pois para uma  $p$ -forma qualquer

$$(A_p, \Delta A_p) = (dA_p, dA_p) + (d^\dagger A_p, d^\dagger A_p) \geq 0, \quad (\text{A.38})$$

onde usamos (A.25).

Por último é importante mencionar que qualquer  $p$ -forma  $A_p$  definida em uma variedade compacta e sem borda satisfaz a *decomposição de Hodge*:

$$A_p = dB_{p-1} + d^\dagger C_{p+1} + D_p; \text{ onde } \Delta D_p = 0 \quad (\text{A.39})$$

# Apêndice B

## Projeção abeliana

Aqui vamos comentar brevemente como monopolos podem ser revelados em uma teoria não abeliana de Yang-Mills  $SU(N)$  através do procedimento de projeção abeliana [163, 164]. O primeiro passo do procedimento é escolher um campo local  $X(x)$  transformando-se na representação adjunta do grupo de calibre. Esse campo é em princípio arbitrário. No entanto a escolha de  $X$  não é inócua e adquire fundamental importância na implementação desse procedimento na rede. Como o propósito aqui é apenas revelar as propriedades topológicas do grupo de calibre, não será necessário especificar quem é  $X$ .

Uma vez escolhido  $X$  nós o diagonalizamos

$$X_0 = UXU^\dagger = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \quad (\text{B.1})$$

Essa é uma fixação parcial da simetria de calibre definida pela escolha de  $X$ . A simetria não é completamente fixada e resta a liberdade de calibre associada aos elementos diagonais da forma:

$$U_0 = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}), \quad \sum_i \theta_i = 0. \quad (\text{B.2})$$

Esses elementos definem o subgrupo abeliano  $U(1)^{N-1}$  de  $SU(N)$  conhecido como o torus abeliano maximal. Essa fixação de calibre pode não ser definida em todos os pontos. Os autovalores de  $X$  são funções do espaço-tempo e para um tempo fixo podem existir pontos no espaço onde dois autovalores coincidem. Esses são pontos singulares

da transformação de calibre onde a simetria é ampliada  $U(1)^{N-1} \rightarrow U(1)^{N-3} \otimes U(2)$ . Nas proximidades desses pontos nós podemos escrever  $X$  como

$$X = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^3 a_k(x) \begin{pmatrix} \ddots & & \dots \\ & \boxed{\sigma_k} & \\ \dots & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\sigma_k$  são as matrizes de Pauli e  $a_k$  são tais que

$$a_k(\vec{x}_0) = 0; \quad k = 1, 2, 3; \quad (\text{B.4})$$

define o ponto singular  $\vec{x}_0$ . Essa é a localização do monopolo magnético. De fato, as funções  $a_k$  podem ser expandidas em torno de  $\vec{x}_0$ .

$$a_k(\vec{x}) = \left. \frac{\partial a_k}{\partial x_l} \right|_{x=x_0} (x_l - x_{0l}) = x'_k. \quad (\text{B.5})$$

Considerando apenas o bloco  $2 \times 2$  em (B.3), o segundo termo se torna

$$\sum_{k=1}^3 a_k(x) \sigma_k \longrightarrow \sum_{k=1}^3 x'_k \sigma_k. \quad (\text{B.6})$$

Uma vez que o bloco no primeiro termo de (B.3) é proporcional a identidade, a diagonalização de  $X$  nas vizinhanças de  $x_0$  corresponde a uma rotação orientando o segundo bloco na direção 3. Em coordenadas esféricas

$$x'_k \sigma_k = r \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

e a diagonalização é dada por

$$U x'_k \sigma_k U^\dagger = r \sigma_3, \quad (\text{B.8})$$

com

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

A expressão (B.8) tem a forma tipo “hedgehog” sinalizando a presença do monopolo. O monopolo pode ser claramente identificado olhando para a expressão do potencial vetor sob a transformação de calibre definida por (B.9):

$$\vec{A} \longrightarrow U(\vec{A} + \frac{i}{e}\nabla)U^\dagger. \quad (\text{B.10})$$

Isso dá origem a uma contribuição singular vinda do termo

$$\frac{i}{e}U\nabla U^\dagger = \frac{1}{2e} \left( \hat{\theta}e^{i\phi}\sigma_2 - \hat{\phi}\frac{1}{r}(\cos\phi\sigma_1 - \sin\phi\sigma_2) + \hat{\phi}\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\sigma_3 \right), \quad (\text{B.11})$$

de forma que a expressão geral para o potencial vetor transformado, escrita na forma original  $N \times N$ , se torna

$$\vec{A} = \vec{A}_a^R T_a + \frac{1}{e}\hat{\phi}\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \boxed{\sigma_3} & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

O primeiro termo é a parte regular, o segundo tem a forma conhecida do potencial de um monopolo com a corda de Dirac ao longo do eixo  $z$ .

Para a teoria de Yang-Mills  $SU(2)$  teremos um monopolo correspondendo a degenerescência de apenas dois auto-valores. Isso está relacionado com o fato da sub-álgebra de Cartan ter apenas um elemento, nesse caso representado por  $T_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$ . O potencial do monopolo se torna simplesmente

$$\frac{1}{e}\hat{\phi}\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\frac{1}{2}\sigma_3. \quad (\text{B.13})$$

Para a teoria de Yang-Mills  $SU(3)$ , existem dois elementos na sub-álgebra de Cartan (os geradores diagonais de  $SU(3)$ ),  $T_3 = \frac{\lambda_3}{2}$  e  $T_8 = \frac{\lambda_8}{2}$ , onde  $\lambda_i$  são as matrizes de Gell-Mann. Então nesse caso nós temos dois monopolos independentes. Com uma matriz  $3 \times 3$  existem 3 maneiras dos autovalores serem iguais, essas correspondem ao número de maneiras que podemos inserir o bloco  $\sigma_3$  como em (B.12), explicitamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Obviamente essas matrizes não são todas independentes (por exemplo, a última é uma combinação linear das duas primeiras) uma vez que temos apenas dois monopolos nesse caso. Mas essa é a estrutura na qual os monopolos aparecem como vimos em (B.12). Existe de fato uma maneira interessante de descrever essa estrutura: as matrizes em (B.14) são combinações lineares dos dois elementos da sub-álgebra de Cartan e os coeficientes dessa combinação são denominados *simple roots*. O potencial do monopolo nesse caso adquire a forma

$$\frac{1}{e} \hat{\phi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} (\alpha_i^a H_i), \quad a = 1, 2, 3; \quad (\text{B.15})$$

onde  $\vec{H} = (T_3, T_8)$  são os elementos da sub-álgebra de Cartan e

$$\vec{\alpha}^1 = (1, 0), \quad \vec{\alpha}^2 = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \vec{\alpha}^3 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (\text{B.16})$$

são os *root vectors*. A carga é o coeficiente multiplicando o potencial e portanto tem a estrutura matricial:

$$g^a = \frac{1}{4\pi e} (\alpha_i^a H_i), \quad a = 1, 2, 3; \quad (\text{B.17})$$

e satisfaz

$$\sum_{a=1}^3 g^a = 0. \quad (\text{B.18})$$

Usando as propriedades gerais dos root vectors, qualquer combinação linear dos geradores diagonais podem ser expressos como em (B.17). Os root vectors satisfazem

$$\sum_{a=1}^3 \alpha_i^a \alpha_j^a = \frac{3}{2} \delta_{ij}. \quad (\text{B.19})$$

Então, para qualquer elemento diagonal nós temos (índices repetidos somam)

$$V = V_3 T_3 + V_8 T_8 = V_i H_i = \delta_{ij} V_i H_j = \frac{2}{3} \sum_{a=1}^3 \alpha_i^a V_i \alpha_j^a H_j = \frac{2}{3} \sum_{a=1}^3 v^a h^a, \quad (\text{B.20})$$

onde

$$v^a = \alpha_i^a V_i, \quad h^a = \alpha_i^a h_i. \quad (\text{B.21})$$

Que são vinculados da mesma forma que em (B.18)

$$\sum_{a=1}^3 v^a = 0, \quad \sum_{a=1}^3 h^a = 0, \quad (\text{B.22})$$

pois os root vectors satisfazem  $\sum_{a=1}^3 \alpha_i^a = 0$ .

Essa estrutura é mantida para teorias gerais de Yang-Mills  $SU(N)$ , e nesse caso nós teríamos  $N - 1$  monopolos independentes que aparecem da mesma forma que em (B.17) com  $a = 1, 2, \dots, N$  e vinculados como em (B.18). Para uma discussão interessante sobre projeção abeliana nesse caso geral veja [165].

# Apêndice C

## Cálculo da corrente induzida

Aqui nós vamos mostrar como obter o valor médio da corrente fermiônica (4.32) seguindo o método apresentado em [127].

A expressão geral para o valor médio é dado pela equação 3.12 em [127]:

$$\langle j^\mu(x) \rangle = -i \left[ Tr \frac{1}{\not{p} - M_0} \gamma^\mu \delta(x - y) + Tr \frac{1}{\not{p} - M_0} \tilde{M} \frac{1}{\not{p} - M_0} \gamma^\mu \delta(x - y) + \dots \right]. \quad (\text{C.1})$$

No presente caso temos

$$M(\phi) = \theta \phi' \gamma^1 + g e^{\gamma^5 \phi} \quad (\text{C.2})$$

$$M_0 = M(\phi_0) = M(\phi(x_0)) \quad (\text{C.3})$$

$$\tilde{M}(\phi) = M(\phi) - M(\phi_0), \quad (\text{C.4})$$

onde  $\phi(x_0)$  é o valor do campo  $\phi$  tomado em um ponto arbitrário  $x_0$ . É conveniente escrever (C.2) como

$$M(\phi) = \theta \phi' \gamma^1 + g(\cos \phi + \gamma^5 \sin \phi) = \theta \phi' \gamma^1 + g(\phi_1 + \gamma^5 \phi_2). \quad (\text{C.5})$$

Em (C.1) o símbolo  $Tr$  representa um traço sobre as matrizes  $\gamma$ , uma integração nos momentos assim como uma integral sobre as coordenadas. O ponto, como explicado em [127], é que  $\tilde{M}$  contém funções de  $x$  de forma que ele não comuta em geral com os momentos. Devido a isso nós temos que ordenar cada termo nessa expressão isolando os  $x$ 's dos  $p$ 's de forma a terminar com algo do tipo

$$\langle j^\mu(x) \rangle = f^\mu(x) \int d^2 p g(p). \quad (\text{C.6})$$

Isso é conseguido usando relações como

$$\begin{aligned} \phi \frac{1}{p^2 - g^2} &= \frac{1}{p^2 - g^2} \phi + \frac{1}{(p^2 - g^2)^2} [p^2, \phi] + \text{ordem superior em derivadas} \\ [p^2, \phi(x)] &= \square \phi + 2ip^\mu \partial_\mu \phi \\ [p^\mu, \phi] &= i\partial^\mu \phi. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Esse procedimento de ordenamento constitui o núcleo dos cálculos, uma vez feito, as integrações sobre os momentos fornecem apenas um fator numérico constante.

É imediato ver que o primeiro termo em (C.1) é nulo. Quanto ao segundo termo nós temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \frac{1}{\not{p} - M_0} \tilde{M} \frac{1}{\not{p} - M_0} \gamma^\mu \delta(x - y) &= \text{Tr} \frac{\not{p} + M_0^\dagger}{p^2 - g^2} \tilde{M} \frac{\not{p} + M_0^\dagger}{p^2 - g^2} \gamma^\mu \delta(x - y) \\ &= \text{Tr}_y \text{Tr}_p \left[ \frac{1}{p^2 - g^2} \text{Tr}_\gamma \left[ (\not{p} - M_0) \tilde{M} (\not{p} - M_0) \gamma^\mu \right] \frac{1}{p^2 - g^2} \right] \delta(x - y). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Podemos realizar primeiramente o traço sobre as  $\gamma$ 's. Ignorando termos de ordem  $\theta$  que forneceriam termos de ordem  $\theta^2$  ao substituir na ação, nós obtemos:

$$\begin{aligned} \langle j^\mu(x) \rangle &= -i \text{Tr}_y \text{Tr}_p \left[ \frac{1}{p^2 - g^2} \left( 2g^2 p^\mu (\tilde{\phi}_1 \phi_1^0 + \tilde{\phi}_2 \phi_2^0) + 2ig^2 \varepsilon^{\mu\nu} p_\nu (\tilde{\phi}_2 \phi_1^0 - \tilde{\phi}_1 \phi_2^0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2g^2 (\tilde{\phi}_1 \phi_1^0 + \tilde{\phi}_2 \phi_2^0) p^\mu - 2ig^2 (\tilde{\phi}_2 \phi_1^0 - \tilde{\phi}_1 \phi_2^0) \varepsilon^{\mu\nu} p_\nu \right) \frac{1}{p^2 - g^2} \right] \delta(x - y). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Antes de realizar as integrais sobre os momentos nós precisamos ordenar esta expressão colocando, digamos, toda a dependência em momentos a esquerda das funções de  $x$ . Após isso, a integral sobre o espaço-tempo é trivialmente realizada e a maioria das integrais sobre os momentos resultam ser nulas por simetria. ficamos com:

$$\begin{aligned} \langle j^\mu(x) \rangle &= -i \left[ \int d^2 p \frac{1}{(p^2 - g^2)^2} \left( -2ig^2 (\phi_1^0 \partial^\mu \tilde{\phi}_1 + \phi_2^0 \partial^\mu \tilde{\phi}_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \int d^2 p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - g^2)^3} \left( 8ig^2 (\phi_1^0 \partial_\nu \tilde{\phi}_1 + \phi_2^0 \partial_\nu \tilde{\phi}_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \int d^2 p \frac{1}{(p^2 - g^2)^2} (-2g^2 \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Os dois primeiros termos se cancelam depois de efetuar as integrais sobre os momentos. Portanto a resposta final dentro das aproximações que estamos considerando é a mesma

obtida por Goldstone e Wilczek [124]:

$$\langle j^\mu(x) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x). \quad (\text{C.11})$$

# Apêndice D

## O Método de Faddeev-Jackiw

O método de Faddeev-Jackiw [128] (veja também [129]) é uma alternativa ao método de Dirac [130, 131]. A idéia é começar com uma lagrangeana de primeira ordem nas derivadas temporais. Isso sempre pode ser feito via transformada de Legendre (é isso que fazemos para obter o hamiltoniano). Dessa forma, a lagrangeana fica:

$$L(\dot{q}, q) \longrightarrow L(\dot{p}, p, \dot{q}, q) = p\dot{q} - H(p, q), \quad (\text{D.1})$$

na verdade  $L(\dot{p}, p, \dot{q}, q)$  não depende de  $\dot{p}$ .

Usando uma notação genérica  $(\xi)$  para as variáveis  $(p, q)$ , a lagrangeana pode ser escrita como:

$$L = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - H(\xi), \quad (\text{D.2})$$

onde  $\xi^i = \xi^i(t)$ . As equações de Euler-Lagrange nos fornecem:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i} = \dot{\xi}^j \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial H}{\partial \xi^i} = \frac{d}{dt} a_i(\xi) = \dot{\xi}^j \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}, \quad (\text{D.3})$$

ou, com  $f_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}$ :

$$\dot{\xi}^j f_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \xi^i}. \quad (\text{D.4})$$

Normalmente, como  $\frac{\partial L}{\partial \xi^i} = a_i(\xi)$ , diz-se que o momento canônico está vinculado a depender apenas das coordenadas e assim para estabelecer o formalismo canônico, o método de Dirac é aplicado.

Mas, como foi observado por Faddeev e Jackiw, podemos estabelecer o formalismo canônico diretamente se  $f_{ij}$  possui uma inversa  $f^{ij}$ . De fato, as equações de movimento seguem diretamente de (D.4):

$$\dot{\xi}^i = f^{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi^j}. \quad (\text{D.5})$$

Estamos interessados nos colchetes da teoria, de tal forma que:

$$\dot{\xi}^i = \{\xi^i, H\} = \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial H}{\partial \xi^j}. \quad (\text{D.6})$$

É imediato, por (D.5) e (D.6), que:

$$f^{ij} = \{\xi^i, \xi^j\}. \quad (\text{D.7})$$

Para quaisquer funções  $F_1(\xi)$  e  $F_2(\xi)$ :

$$\{F_1, F_2\} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi^i} f^{ij} \frac{\partial F_2}{\partial \xi^j}. \quad (\text{D.8})$$

Logo para encontrar os colchetes da teoria precisamos encontrar a inversa de  $f_{ij}$ . Se  $f_{ij}$  for singular ou não possuir uma inversa, então vínculos terão que ser considerados e o tratamento se torna mais complicado, mas não trataremos desse caso nessa tese.

# Apêndice E

## Cálculo da CFJ dual para $p$ qualquer ( $p^2 \neq 0$ )

Aqui calcularemos em detalhes a formulação dual do modelo  $CFJ$  para um vetor violador de Lorentz  $p^\mu$  qualquer mas não do tipo luz ( $p^2 \neq 0$ , o caso  $p^2 = 0$  foi discutido no Cap. 3). Começamos com a lagrangiana em primeira ordem

$$\mathcal{L}_{MCFJ} = \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma - \frac{1}{4}\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + p_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma. \quad (\text{E.1})$$

Podemos evidenciar as componentes na direção  $p^\mu$ , obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ} = & \frac{1}{p^2}p_\mu(p^\alpha\Pi_{\alpha\nu})\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2p^2}\Pi_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho(p^\alpha\partial_\alpha)A_\sigma + \frac{1}{2p^2}\Pi_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho p_\sigma(p^\alpha A_\alpha) \\ & - \frac{1}{8p^2}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\Pi_{\rho\sigma})^2 - \frac{1}{2p^2}(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu})^2 + p_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde usamos o fato que

$$\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} = \frac{1}{2p^2}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\Pi_{\rho\sigma})^2 + \frac{2}{p^2}(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu})^2. \quad (\text{E.3})$$

Vemos que  $p^\alpha A_\alpha$  é um multiplicador de lagrange que impõe

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\mu\partial_\nu\Pi_{\rho\sigma} = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\Pi_{\rho\sigma} = 2\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho B_\sigma \quad (\text{E.4})$$

e ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ} = & \frac{1}{p^2}[-(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu}) - p^2 A_\mu + (p^\alpha\partial_\alpha)B_\mu]\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho A_\sigma \\ & - \frac{1}{2p^2}(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\partial_\rho B_\sigma)^2 - \frac{1}{2p^2}(p^\alpha\Pi_{\alpha\mu})^2. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Podemos realizar uma redefinição nos campos

$$-(p^\alpha \Pi_{\alpha\mu}) - p^2 A_\mu = C_\mu \quad (\text{E.6})$$

Observe que ainda que tenhamos usado índices  $\mu$ ,  $C_\mu$  não possui componentes na direção de  $p^\mu$  (pois já eliminamos  $p^\alpha A_\alpha$  e  $\Pi_{\mu\nu}$  é antissimétrico) essa propriedade permanecerá verdadeira para todas as redefinições de campos posteriores. Com essa redefinição temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ} \rightarrow & \frac{1}{p^2} C_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{p^2} (p^\alpha \partial_\alpha) B_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma \\ & - \frac{1}{2p^2} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho B_\sigma)^2 - \frac{1}{2p^2} (C_\mu + p^2 A_\mu)^2. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Fazemos outra redefinição

$$\begin{aligned} C_\mu &= \frac{1}{2} (A_\mu^+ - A_\mu^-) \\ A_\mu &= \frac{1}{2p^2} (A_\mu^+ + A_\mu^-), \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

que nos fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ} \rightarrow & \frac{1}{4p^4} A_\mu^+ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma^+ - \frac{1}{4p^4} A_\mu^- \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma^- + \frac{1}{2p^4} (p^\alpha \partial_\alpha) B_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma^+ \\ & + \frac{1}{2p^4} (p^\alpha \partial_\alpha) B_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho A_\sigma^- - \frac{1}{2p^2} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho B_\sigma)^2 - \frac{1}{2p^2} (A_\mu^+)^2. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Definindo a seguir

$$D_\mu = (p^\alpha \partial_\alpha) B_\mu - A_\mu^- \quad (\text{E.10})$$

nós finalmente obtemos, com  $A_\mu^+ = f_\mu$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{dualCFJ} = & -\frac{1}{4p^4} D_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho D_\sigma + \frac{1}{4p^4} f_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho f_\sigma - \frac{1}{2p^2} f_\mu f^\mu - \frac{1}{2p^2} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho B_\sigma)^2 \\ & + \frac{1}{2p^4} f_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho [(p^\alpha \partial_\alpha) B_\sigma] + \frac{1}{4p^4} [(p^\alpha \partial_\alpha) B_\mu] \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \partial_\rho [(p^\beta \partial_\beta) B_\sigma]. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

que é o resultado procurado, onde figuram o *CS* puro  $D_\mu$ , o *AD*  $f_\mu$  e o campo de Maxwell  $B_\mu$ , Além dos termos de interação.

# Apêndice F

## Cálculo da CFJ dual na presença de fontes elétricas

Aqui nós vamos obter a representação dual da teoria de Carroll-Field-Jackiw na presença de uma fonte elétrica acoplada minimamente

$$\mathcal{L}_{CFJ}^J = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + p_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma - e J_\mu A^\mu. \quad (\text{F.1})$$

Seguimos introduzindo um campo auxiliar  $\Pi^{\mu\nu}$  que, como sabemos, irá representar o campo dual:

$$\mathcal{L}_{MCFJ}^J = \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma - \frac{1}{4}\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + p_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma - e J_\mu A^\mu. \quad (\text{F.2})$$

Como antes, por simplicidade, trabalharemos com  $p^\mu = (0, 0, 0, m)$ . Como  $J^\mu$  é conservada, existe uma 2-superfície cuja borda é a 1-superfície Poincaré-dual  $J^\mu$ . Podemos representar esse fato aqui introduzindo a 2-corrente  $\Lambda_{\mu\nu}$  tal que:

$$J^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\Lambda_{\rho\sigma} \quad (\text{F.3})$$

ou, explicitando as componentes

$$J^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\partial_3\Lambda_{bc} - \varepsilon^{abc}\partial_b\omega_c \quad (\text{F.4})$$

$$J^3 = -\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\partial_a\Lambda_{bc}. \quad (\text{F.5})$$

Pela sua definição, vemos que a simetria de brana é realizada aqui na forma

$$\Lambda_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda_{\mu\nu} + \partial_\mu H_\nu - \partial_\nu H_\mu. \quad (\text{F.6})$$

A Lagrangiana (F.2) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ}^J = & \frac{1}{2}A_3(-\varepsilon^{abc}\partial_a\Pi_{bc} - 2eJ^3) + \frac{1}{2}A_a\varepsilon^{\nu\rho\sigma}\partial_\rho\Pi_{\rho\sigma} \\ & - \frac{1}{4}\Pi_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + m\varepsilon^{abc}A_a\partial_bA_c - eJ_aA^a. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$A^3$  é um multiplicador de Lagrange impondo o vínculo

$$-\varepsilon^{abc}\partial_a\Pi_{bc} + e\varepsilon^{abc}\partial_a\Lambda_{bc} = 0. \quad (\text{F.8})$$

Esse vínculo pode ser resolvido com a introdução de um campo de calibre  $B$

$$\Pi_{ab} = \partial_aB_b - \partial_bB_a + e\Lambda_{ab} \equiv \bar{G}_{ab}. \quad (\text{F.9})$$

Vemos que o acoplamento não mínimo já se manifesta. Ficamos então com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ}^J = & \frac{1}{2}A_a\varepsilon^{abc}\partial_3\bar{G}_{bc} - A_a\varepsilon^{abc}\partial_bh_c - \frac{1}{4}\bar{G}_{ab}\bar{G}^{ab} + \frac{1}{2}h_a h^a + m\varepsilon^{abc}A_a\partial_bA_c - eJ_aA^a \\ = & (-h_a + e\omega_a + \partial_3B_a + mA_a)\varepsilon^{abc}\partial_bA_c - \frac{1}{4}\bar{G}_{ab}\bar{G}^{ab} + \frac{1}{2}h_a h^a, \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

onde renomeamos o campo independente  $\Pi^{a3} \equiv h^a$  e usamos (F.4). A partir deste ponto tudo segue como o cálculo para o caso livre, após (4.105), mas agora com  $h^a \rightarrow h^a - e\omega^a$ . No entanto é interessante ver como a presença do acoplamento não-mínimo afeta o procedimento. Considere a seguinte redefinição de campos

$$-(h_a - e\omega_a) + mA_a = C_a \quad (\text{F.11})$$

que nos leva à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MCFJ}^J \rightarrow & C_a\varepsilon^{abc}\partial_bA_c + \partial_3B_a\varepsilon^{abc}\partial_bA_c - \frac{1}{4}\bar{G}_{ab}\bar{G}^{ab} \\ & + \frac{1}{2}(mA_a + e\omega_a - C_a)(mA^a + e\omega^a - C^a). \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Observe que agora  $C_a$  precisa herdar a simetria de calibre de  $A_a$  e também a simetria de brana de  $\omega_a$  de forma que o último termo seja simétrico por  $A_a \rightarrow A_a + \partial_a\phi$  e  $\omega_a \rightarrow \omega_a + \partial_a\sigma$  com  $C_a \rightarrow C_a + m\partial_a\phi + e\partial_a\sigma$ . Agora nós realizamos uma transformação

canônica no espaço dos campos

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{1}{2}(A_a^+ - A_a^-) \\ A_a &= \frac{1}{2m}(A_a^+ + A_a^-), \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

que nos fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{4m}A_a^+\varepsilon^{abc}\partial_b A_c^+ - \frac{1}{4m}A_a^-\varepsilon^{abc}\partial_b A_c^- + \frac{1}{2m}\partial_3 B_a\varepsilon^{abc}\partial_b A_c^+ + \frac{1}{2m}\partial_3 B_a\varepsilon^{abc}\partial_b A_c^- \\ &\quad - \frac{1}{4}\bar{G}_{ab}\bar{G}^{ab} + \frac{1}{2}(A_a^- + e\omega_a)(A^{-a} + e\omega^a). \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Fazemos ainda outra redefinição de campos para separar o termo tipo *CS*-puro

$$A_a^+ + \partial_3 B_a = D_a, \quad (\text{F.15})$$

O que nos leva à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{dualCFJ} &= \frac{1}{4m}D_a\varepsilon^{abc}\partial_b D_c - \frac{1}{4m}A_a^-\varepsilon^{abc}\partial_b A_c^- + \frac{1}{2}(A_a^- - e\omega_a)(A^{-a} - e\omega^a) \\ &\quad - \frac{1}{4}\bar{G}_{ab}\bar{G}^{ab} + \frac{1}{2m}A_a^-\varepsilon^{abc}\partial_b\partial_3 B_c - \frac{1}{4m}\partial_3 B_a\varepsilon^{abc}\partial_b\partial_3 B_c. \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

Observe que nessa forma essa Lagrangiana nos diz que  $A_a^-$  é um campo de calibre com a simetria necessária para manter a ambiguidade na definição de  $\omega_a$ . Com a definição tipo Stuckelberg

$$A_a^- - e\omega_a = f_a \quad (\text{F.17})$$

nós podemos escrever (F.16) em termos do campo tipo *AD* sem simetria de calibre  $f_a$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{dualCFJ}^J &= \frac{1}{4m}D_a\varepsilon^{abc}\partial_b D_c - \frac{1}{4m}(f_a - e\omega_a - \partial_3 B_a)\varepsilon^{abc}\partial_b(f_c - e\omega_c - \partial_3 B_c) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_a f^a - \frac{1}{4}\bar{G}_{ab}\bar{G}^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Como esperado, ambos os setores de Maxwell e *AD* induzidos pela dualidade apresentam um acoplamento não-mínimo com a fonte original.

# Bibliografia

- [1] R. Alkofer and J. Greensite, “Quark Confinement: The Hard Problem of Hadron Physics,” *J. Phys. G* **34**, S3 (2007) [arXiv:hep-ph/0610365]. 2
- [2] F. Wilczek, “Opportunities, challenges, and fantasies in lattice QCD,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119**, 3 (2003) [arXiv:hep-lat/0212041]. 2
- [3] C. S. Fischer, “Infrared properties of QCD from Dyson-Schwinger equations,” *J. Phys. G* **32**, R253 (2006) [arXiv:hep-ph/0605173]. 3
- [4] J. Bijnens, “Chiral Lagrangians and Nambu-Jona-Lasinio - like models,” *Phys. Rept.* **265**, 369 (1996) [arXiv:hep-ph/9502335]. 3
- [5] C. P. Burgess, “Introduction to effective field theory,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **57**, 329 (2007) [arXiv:hep-th/0701053]. 8
- [6] A. V. Manohar, “Effective field theories,” arXiv:hep-ph/9606222. 8
- [7] D. B. Kaplan, “Effective field theories,” arXiv:nucl-th/9506035. 8
- [8] I. Z. Rothstein, “TASI lectures on effective field theories,” arXiv:hep-ph/0308266. 8
- [9] J. Polchinski, “Effective Field Theory And The Fermi Surface,” arXiv:hep-th/9210046. 8
- [10] H. A. Kramers and G. H. Wannier, “Statistics of the two-dimensional ferromagnet. Part 1,” *Phys. Rev.* **60**, 252 (1941). 18

- [11] C. Montonen and D. I. Olive, “Magnetic Monopoles As Gauge Particles?,” *Phys. Lett. B* **72**, 117 (1977). [18](#)
- [12] H. Osborn, “Topological Charges For N=4 Supersymmetric Gauge Theories And Monopoles Of Spin 1,” *Phys. Lett. B* **83**, 321 (1979). [19](#)
- [13] C. Vafa and E. Witten, “A Strong coupling test of S duality,” *Nucl. Phys. B* **431**, 3 (1994) [arXiv:hep-th/9408074]. [19](#)
- [14] N. Seiberg and E. Witten, “Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory,” *Nucl. Phys. B* **426**, 19 (1994) [Erratum-ibid. B **430**, 485 (1994)] [arXiv:hep-th/9407087]. [19](#), [46](#)
- [15] J. A. Harvey, “Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry,” arXiv:hep-th/9603086. [19](#)
- [16] L. Alvarez-Gaume and S. F. Hassan, “Introduction to S-duality in N = 2 supersymmetric gauge theories: A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten,” *Fortsch. Phys.* **45**, 159 (1997) [arXiv:hep-th/9701069]. [19](#)
- [17] P. Di Vecchia, “Duality in N = 2,4 supersymmetric gauge theories,” arXiv:hep-th/9803026. [19](#)
- [18] A. Kapustin and E. Witten, “Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program,” arXiv:hep-th/0604151. [19](#), [29](#)
- [19] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume and Y. Lozano, “An introduction to T duality in string theory,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **41**, 1 (1995) [arXiv:hep-th/9410237]. [19](#)
- [20] S. Deser, A. Gomberoff, M. Henneaux and C. Teitelboim, “Duality, self-duality, sources and charge quantization in abelian N-form theories,” *Phys. Lett. B* **400**, 80 (1997) [arXiv:hep-th/9702184]. [20](#)
- [21] C. Wotzasek, “On the dimensional dependence of the electromagnetic duality groups,” *Phys. Rev. D* **58**, 125026 (1998) [arXiv:hep-th/9809136]. [20](#)

- [22] J. L. Noronha, D. Rocha, M. S. Guimaraes and C. Wotzasek, “On the dimensional dependence of duality groups for massive p-forms,” *Phys. Lett. B* **564**, 163 (2003) [arXiv:hep-th/0305102]. [20](#)
- [23] T. T. Wu and C. N. Yang, “Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields,” *Phys. Rev. D* **12**, 3845 (1975). [21](#)
- [24] T. T. Wu and C. N. Yang, “Dirac Monopole Without Strings: Monopole Harmonics,” *Nucl. Phys. B* **107**, 365 (1976). [21](#)
- [25] P. A. M. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **133**, 60 (1931). [4](#), [21](#)
- [26] P. A. M. Dirac, “The Theory of magnetic poles,” *Phys. Rev.* **74**, 817 (1948). [4](#), [21](#), [25](#)
- [27] X. Bekaert, “Issues in electric-magnetic duality,” arXiv:hep-th/0209169. [22](#)
- [28] K. Lechner and P. A. Marchetti, “Duality-invariant quantum field theories of charges and monopoles,” *Nucl. Phys. B* **569**, 529 (2000) [arXiv:hep-th/9906079]. [22](#)
- [29] K. Lechner and P. A. Marchetti, “Interacting branes, dual branes, and dyonic branes: A unifying lagrangian approach in D dimensions,” *JHEP* **0101**, 003 (2001) [arXiv:hep-th/0007076]. [22](#)
- [30] K. Lechner and P. Marchetti, “Chern kernels and anomaly cancellation in M-theory,” *Nucl. Phys. B* **672**, 264 (2003) [arXiv:hep-th/0302108]. [22](#)
- [31] H. Kleinert, “The Extra Gauge Symmetry Of String Deformations In Electromagnetism With Charges And Dirac Monopoles,” *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 4693 (1992). [6](#), [25](#), [146](#)
- [32] H. Kleinert, “Multivalued fields. In condensed matter, electromagnetism, and gravitation,” *Singapore, Singapore: World Scientific (2008) 524 P* [6](#), [7](#), [24](#), [25](#), [59](#), [146](#)

- [33] E. C. G. Stueckelberg, “Interaction energy in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces,” *Helv. Phys. Acta* **11**, 225 (1938). [26](#)
- [34] H. Ruegg and M. Ruiz-Altaba, “The Stueckelberg field,” *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 3265 (2004) [arXiv:hep-th/0304245]. [26](#)
- [35] K. G. Wilson, “Confinement Of Quarks,” *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974). [29](#)
- [36] P. Deligne *et al.*, “Quantum fields and strings: A course for mathematicians. Vol. 1, 2,” *Providence, USA: AMS (1999) 1-1501* [29](#)
- [37] A. Kapustin, “Wilson-’t Hooft operators in four-dimensional gauge theories and S-duality,” *Phys. Rev. D* **74**, 025005 (2006) [arXiv:hep-th/0501015]. [29](#)
- [38] G. V. Dunne, “Aspects of Chern-Simons theory,” arXiv:hep-th/9902115. [30](#)
- [39] D. Boyanovsky, R. Blankenbecler and R. Yahalom, “Physical Origin Of Topological Mass In (2+1)-Dimensions,” *Nucl. Phys. B* **270**, 483 (1986). [30](#)
- [40] C. Wotzasek and A. Ilha, “Three dimensional half-bosons and topological mass,” *Phys. Lett. B* **489**, 377 (2000). [32](#)
- [41] R. Banerjee and C. Wotzasek, “Dual projection and selfduality in three-dimensions,” *Phys. Rev. D* **63**, 045005 (2001) [arXiv:hep-th/0005010]. [32](#), [115](#)
- [42] P. K. Townsend, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, “Selfduality In Odd Dimensions,” *Phys. Lett.* **136B**, 38 (1984) [Addendum-*ibid.* **137B**, 443 (1984)]. [32](#)
- [43] S. S. Chern and J. Simons, “Characteristic Forms And Geometric Invariants,” *Annals Math.* **99**, 48 (1974). [33](#)
- [44] M. Asorey, F. Falceto and S. Carlip, “Chern-Simons states and topologically massive gauge theories,” *Phys. Lett. B* **312**, 477 (1993) [arXiv:hep-th/9304081]. [33](#)

- [45] X. G. Wen and Q. Niu, “Ground-state degeneracy of the fractional quantum Hall states in the presence of a random potential and on high-genus Riemann surfaces,” *Phys. Rev. B* **41**, 9377 (1990). [33](#)
- [46] X. G. Wen, “Topological orders and edge excitations in FQH states,” arXiv:cond-mat/9506066 [9](#), [33](#), [85](#), [88](#)
- [47] M. Oshikawa and T. Senthil, “Fractionalization, Topological Order, and Quasiparticle Statistics,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 060601 (2006) [arXiv:cond-mat/0506008]. [33](#)
- [48] A. Zee, “Quantum Hall fluids,” arXiv:cond-mat/9501022
- [49] F. Wilczek, “Fractional statistics and anyon superconductivity,” *Singapore, Singapore: World Scientific (1990) 447 p* [33](#), [87](#)
- [50] A. Y. Kitaev, “Fault-tolerant quantum computation by anyons,” *Annals Phys.* **303**, 2 (2003) [arXiv:quant-ph/9707021]. [34](#)
- [51] R. Amorim, A. K. Das and C. Wotzasek, “On Soldering Chiralities,” *Phys. Rev. D* **53**, 5810 (1996) [arXiv:hep-th/9511129]. [34](#)
- [52] E. M. C. Abreu, R. Banerjee and C. Wotzasek, “Bose symmetry and chiral decomposition of 2D fermionic determinants,” *Nucl. Phys. B* **509**, 519 (1998) [arXiv:hep-th/9707204]. [34](#)
- [53] C. Wotzasek, “Soldering formalism: Theory and applications,” arXiv:hep-th/9806005. [34](#)
- [54] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, “Topologically massive gauge theories,” *Annals Phys.* **140**, 372 (1982) [Erratum-ibid. **185**, 406.1988 APNYA,281,409 (1988 APNYA,281,409-449.2000)]. [9](#), [34](#)
- [55] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, “Three-Dimensional Massive Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982). [34](#)

- [56] S. Deser and R. Jackiw, “‘Selfduality’ Of Topologically Massive Gauge Theories,” *Phys. Lett. B* **139**, 371 (1984). [34](#)
- [57] A. N. Redlich, “Gauge Noninvariance And Parity Nonconservation Of Three-Dimensional Fermions,” *Phys. Rev. Lett.* **52**, 18 (1984). [38](#)
- [58] A. N. Redlich, “Parity Violation And Gauge Noninvariance Of The Effective Gauge Field Action In Three-Dimensions,” *Phys. Rev. D* **29**, 2366 (1984). [38](#)
- [59] L. N. Cooper, “Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas,” *Phys. Rev.* **104**, 1189 (1956). [40](#)
- [60] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, “Microscopic Theory Of Superconductivity,” *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957). [40](#)
- [61] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, “Theory Of Superconductivity,” *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957). [40](#)
- [62] E. Witten, “From superconductors and four-manifolds to weak interactions,” *Bull. Amer. Math. Soc.* **44** (2007), 361-391. [40](#)
- [63] V. P. Nair, “Quantum field theory: A modern perspective,” *New York, USA: Springer (2005) 557 p* [40](#)
- [64] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, “On the Theory of superconductivity,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 1064 (1950). [41](#)
- [65] V. L. Ginzburg, “Nobel Lecture: On superconductivity and superfluidity (what I have and have not managed to do) as well as on the ‘physical minimum’ at the beginning of the XXI century,” *Rev. Mod. Phys.* **76**, 981 (2004). [41](#)
- [66] A. A. Abrikosov, “On the Magnetic properties of superconductors of the second group,” *Sov. Phys. JETP* **5**, 1174 (1957) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32**, 1442 (1957)]. [43](#)

- [67] A. A. Abrikosov, “Nobel Lecture: Type-II superconductors and the vortex lattice,” *Rev. Mod. Phys.* **76**, 975 (2004). [43](#), [45](#)
- [68] S. Weinberg, “The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1996) 489 p* [45](#)
- [69] Y. Nambu, “Magnetic And Electric Confinement Of Quarks,” *Phys. Rept.* **23**, 250 (1976). [45](#)
- [70] G. 't Hooft, “On The Phase Transition Towards Permanent Quark Confinement,” *Nucl. Phys. B* **138**, 1 (1978). [45](#), [57](#)
- [71] G. 't Hooft, “A Property Of Electric And Magnetic Flux In Nonabelian Gauge Theories,” *Nucl. Phys. B* **153**, 141 (1979). [45](#)
- [72] S. Mandelstam, “Vortices And Quark Confinement In Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Lett. B* **53**, 476 (1975). [45](#)
- [73] S. Mandelstam, “Vortices And Quark Confinement In Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rept.* **23**, 245 (1976). [45](#)
- [74] S. Mandelstam, “Charge - Monopole Duality And The Phases Of Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. D* **19**, 2391 (1979). [45](#)
- [75] G. Ripka, “Dual superconductor models of color confinement,” Lectures delivered at European Center for Theoretical Studies in Nuclear Physics and Related Areas, 2002-2003, ECT, Trento, Italy. Berlin, Germany: Springer (2004) 138 p, (Lecture notes in physics. 639) arXiv:hep-ph/0310102. [3](#), [45](#), [54](#)
- [76] A. M. Polyakov, “Compact gauge fields and the infrared catastrophe,” *Phys. Lett. B* **59**, 82 (1975). [9](#), [46](#), [70](#), [78](#)
- [77] A. M. Polyakov, “Quark Confinement And Topology Of Gauge Groups,” *Nucl. Phys. B* **120**, 429 (1977). [9](#), [46](#), [70](#), [78](#)

- [78] A. M. Polyakov, “Gauge Fields And Strings,” *CHUR, SWITZERLAND: HARWOOD (1987) 301 P. (CONTEMPORARY CONCEPTS IN PHYSICS, 3)* [9](#), [46](#), [70](#), [78](#)
- [79] L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes and C. Wotzasek, “Monopoles in the presence of the Chern-Simons term via the Julia-Toulouse Approach,” arXiv:0808.3698 [hep-th]. [9](#), [46](#), [79](#), [90](#), [146](#)
- [80] G. 't Hooft, “Magnetic Monopoles In Unified Gauge Theories,” Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974). [46](#)
- [81] A. M. Polyakov, “Particle spectrum in quantum field theory,” JETP Lett. **20**, 194 (1974) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 430 (1974)]. [46](#)
- [82] M. N. Chernodub, F. V. Gubarev, M. I. Polikarpov and A. I. Veselov, “Monopoles in the Abelian projection of gluodynamics,” Prog. Theor. Phys. Suppl. **131**, 309 (1998) [arXiv:hep-lat/9802036]. [47](#)
- [83] A. Di Giacomo, “Monopole condensation and colour confinement,” Prog. Theor. Phys. Suppl. **131**, 161 (1998) [arXiv:hep-lat/9802008]. [47](#)
- [84] N. D. Mermin, “The topological theory of defects in ordered media,” Rev. Mod. Phys. **51**, 591 (1979). [47](#)
- [85] A. Rajantie, “Formation of topological defects in gauge field theories,” Int. J. Mod. Phys. A **17**, 1 (2002) [arXiv:hep-ph/0108159]. [47](#)
- [86] S. Elitzur, “Impossibility Of Spontaneously Breaking Local Symmetries,” Phys. Rev. D **12**, 3978 (1975). [6](#), [49](#), [102](#)
- [87] M. N. Chernodub, L. Faddeev and A. J. Niemi, “Non-abelian Supercurrents and Electroweak Theory,” JHEP **0812**, 014 (2008) [arXiv:0804.1544 [hep-th]]. [49](#)

- [88] F. V. Gubarev, M. I. Polikarpov and V. I. Zakharov, “Monopole-antimonopole interaction in Abelian Higgs model,” *Phys. Lett. B* **438**, 147 (1998) [arXiv:hep-th/9805175]. [54](#)
- [89] M. Kiometzis, H. Kleinert and A. M. J. Schakel, “Critical Exponents of the Superconducting Phase Transition ,” *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1975 (1994). [59](#)
- [90] M. Kiometzis, H. Kleinert and A. M. J. Schakel, “Dual description of the superconducting phase transition,” *Fortsch. Phys.* **43**, 697 (1995). [59](#)
- [91] K. A. Intriligator and N. Seiberg, “Lectures on supersymmetric gauge theories and electric-magnetic duality,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **45BC**, 1 (1996) [arXiv:hep-th/9509066]. [60](#)
- [92] B. Julia and G. Toulouse, “The Many Defect Problem: Gauge Like Variables For Ordered Media Containing Defects,” *J. Physique, Lett* **40**, 396 (1979). [5](#), [61](#), [146](#)
- [93] F. Quevedo and C. A. Trugenberger, “Phases of antisymmetric tensor field theories,” *Nucl. Phys. B* **501**, 143 (1997) [arXiv:hep-th/9604196]. [5](#), [61](#), [66](#), [146](#)
- [94] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, “String theory and M-theory: A modern introduction,” *Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2007) 739 p* [62](#)
- [95] A. M. Polyakov, “Confining strings,” *Nucl. Phys. B* **486**, 23 (1997) [arXiv:hep-th/9607049]. [9](#), [70](#), [76](#), [77](#), [79](#)
- [96] J. Gamboa, L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes, F. Mendez and C. Wotzasek, “Radiative processes as a condensation phenomenon and the physical meaning of deformed canonical structures,” *Phys. Lett. B* **668**, 447 (2008) [arXiv:0805.0626 [hep-th]]. [9](#), [79](#), [84](#), [101](#), [104](#), [146](#)
- [97] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski, “Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics,” *New York, USA: Dover Publications (1975) 352 p* [79](#)

- [98] F. D. M. Haldane, “Fractional Quantization Of The Hall Effect: A Hierarchy Of Incompressible Quantum Fluid States,” *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605 (1983). [85](#), [87](#)
- [99] R. B. Laughlin, “Anomalous quantum Hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations,” *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983). [86](#)
- [100] M. Henneaux and C. Teitelboim, “Quantization Of Topological Mass In the Presence Of A Magnetic Pole,” *Phys. Rev. Lett.* **56**, 689 (1986). [9](#), [89](#), [93](#)
- [101] R. D. Pisarski, “Magnetic Monopoles in Topologically Massive Gauge Theories,” *Phys. Rev. D* **34**, 3851 (1986). [9](#), [89](#), [96](#)
- [102] I. Affleck, J. A. Harvey, L. Palla and G. W. Semenoff, “The Chern-Simons Term Versus The Monopole,” *Nucl. Phys. B* **328**, 575 (1989). [9](#), [89](#)
- [103] M. C. Diamantini, P. Sodano and C. A. Trugenberger, “Topological Excitations In Compact Maxwell-Chern-Simons Theory,” *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1969 (1993) [[arXiv:hep-th/9306073](#)]. [9](#), [89](#), [95](#)
- [104] R. Bluhm, “Overview of the SME: Implications and Phenomenology of Lorentz Violation,” *Lect. Notes Phys.* **702**, 191 (2006) [[arXiv:hep-ph/0506054](#)]. [97](#)
- [105] D. Mattingly, “Modern tests of Lorentz invariance,” *Living Rev. Rel.* **8**, 5 (2005) [[arXiv:gr-qc/0502097](#)]. [97](#)
- [106] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, “Lorentz violation at high energy: concepts, phenomena and astrophysical constraints,” *Annals Phys.* **321**, 150 (2006) [[arXiv:astro-ph/0505267](#)]. [97](#)
- [107] R. Lehnert, “CPT- and Lorentz-symmetry breaking: A review,” [arXiv:hep-ph/0611177](#). [97](#)
- [108] V. A. Kostelecky, “Perspectives on Lorentz and CPT Violation,” [arXiv:0802.0581](#) [[gr-qc](#)]. [97](#)

- [109] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989). [97](#)
- [110] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “CPT violation and the standard model,” *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997) [arXiv:hep-ph/9703464]. [10](#), [97](#), [107](#), [120](#)
- [111] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998) [arXiv:hep-ph/9809521]. [10](#), [97](#), [107](#), [120](#)
- [112] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, “Noncommutative field theory,” *Rev. Mod. Phys.* **73**, 977 (2001) [arXiv:hep-th/0106048]. [100](#)
- [113] R. J. Szabo, “Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces,” *Phys. Rept.* **378**, 207 (2003) [arXiv:hep-th/0109162]. [100](#)
- [114] M. S. Guimaraes, “A Dualidade Maxwell-Chern-Simons/Autodual e Sua Extensão Para Espaços Não-Comutativos,” Tese de Mestrado IF-UFRJ (2005) [http://teses.ufrj.br/IF\\_M/MarceloSantosGuimaraes.pdf](http://teses.ufrj.br/IF_M/MarceloSantosGuimaraes.pdf) [100](#)
- [115] M. S. Guimaraes, D. C. Rodrigues, C. Wotzasek and J. L. Noronha, “On duality of the noncommutative extension of the Maxwell-Chern-Simons model,” *Phys. Lett. B* **605**, 419 (2005) [arXiv:hep-th/0410156]. [100](#)
- [116] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa and F. Mendez, “Noncommutativity in field space and Lorentz invariance violation,” *Phys. Lett. B* **565** (2003) 222 [arXiv:hep-th/0207158]. [12](#), [98](#), [100](#)
- [117] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa and F. Mendez, “Quantum theory of noncommutative fields,” *JHEP* **0303** (2003) 058 [arXiv:hep-th/0301248]. [12](#), [98](#), [100](#)
- [118] E. M. C. Abreu, R. Menezes and C. Wotzasek, “On the Lorentz symmetry of the noncommutative chiral bosons,” *Phys. Rev. D* **71**, 065004 (2005) [arXiv:hep-th/0411248]. [100](#)

- [119] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001) [arXiv:hep-th/0105082]. [100](#)
- [120] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990). [10](#), [98](#), [100](#), [118](#), [120](#), [127](#)
- [121] J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and R. F. Ribeiro, “Noncommutative quantization of the Maxwell-Chern-Simons theory,” *Europhys. Lett.* **77**, 51001 (2007) [arXiv:hep-th/0601077]. [101](#)
- [122] T. Senthil, A. Vishwanath, L. Balents, S. Sachdev and M. P. A. Fisher, ““Deconfined” quantum critical points,” *Science* **303**, 1490 (2004) arXiv:cond-mat/0311326. [106](#)
- [123] L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes and C. Wotzasek, “Induced deformation of the canonical structure and UV/IR duality in  $(1 + 1)D$ ,” *Phys. Rev. D* **77**, 105015 (2008) [arXiv:0802.1193 [hep-th]]. [12](#), [106](#), [107](#), [111](#), [147](#)
- [124] J. Goldstone and F. Wilczek, “Fractional Quantum Numbers On Solitons,” *Phys. Rev. Lett.* **47**, 986 (1981). [107](#), [108](#), [166](#)
- [125] M. Stone, “Bosonization,” *Singapore, Singapore: World Scientific (1994) 539 p* [108](#)
- [126] E. Passos and A. Y. Petrov, “Two-dimensional Lorentz-violating Chern-Simons-like action,” *Phys. Lett. B* **662**, 441 (2008) [Erratum-ibid. B **664**, 318 (2008)] [arXiv:0801.4946 [hep-th]]. [111](#)
- [127] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, “Derivative Expansions Of Fermion Determinants: Anomaly Induced Vertices, Goldstone-Wilczek Currents And Skyrme Terms,” *Phys. Rev. D* **31**, 2605 (1985). [164](#)

- [128] L. D. Faddeev and R. Jackiw, “Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems,” *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1692 (1988). [167](#)
- [129] R. Jackiw, “(Constrained) quantization without tears,” arXiv:hep-th/9306075. [167](#)
- [130] P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dynamics,” *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950). [167](#)
- [131] P. A. M. Dirac, “Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation,” *Phys. Rev.* **114**, 924 (1959). [167](#)
- [132] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, (Yeshiva University, New York, NY 1964).
- [133] R. Banerjee and C. Wotzasek, “Soldering and mass generation in four dimensions,” arXiv:hep-th/0004191. [115](#)
- [134] J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion and A. P. Polychronakos, “Ultraviolet modified photons and anisotropies in the cosmic microwave background radiation,” *Phys. Lett. B* **634**, 471 (2006) [arXiv:hep-ph/0510113]. [116](#)
- [135] J. Gamboa and J. Lopez-Sarrion, “U(1) noncommutative gauge fields and magnetogenesis,” *Phys. Rev. D* **71**, 067702 (2005) [arXiv:hep-th/0501034]. [116](#), [121](#), [122](#)
- [136] B. Feng, M. Li, J. Q. Xia, X. Chen and X. Zhang, “Searching for CPT violation with WMAP and BOOMERANG,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 221302 (2006) [arXiv:astro-ph/0601095]. [118](#)
- [137] B. Nodland and J. P. Ralston, “Indication of Anisotropy in Electromagnetic Propagation over Cosmological Distances,” *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3043 (1997) [arXiv:astro-ph/9704196]. [118](#)

- [138] J. F. C. Wardle, R. A. Perley and M. H. Cohen, “Observational Evidence Against Birefringence over Cosmological Distances,” *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1801 (1997) [arXiv:astro-ph/9705142]. [118](#)
- [139] A. Kostelecky and M. Mewes, “Astrophysical Tests of Lorentz and CPT Violation with Photons,” arXiv:0809.2846 [astro-ph]. [118](#), [121](#)
- [140] A. A. Andrianov and R. Soldati, “Patterns of Lorentz symmetry breaking in QED by CPT-odd interaction,” *Phys. Lett. B* **435**, 449 (1998) [arXiv:hep-ph/9804448]. [118](#)
- [141] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons like term,” *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001) [arXiv:hep-ph/0101087]. [118](#), [127](#), [128](#)
- [142] N. M. . Barraç, J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo and J. A. Helayel-Neto, “On Dirac-like monopoles in a Lorentz- and CPT-violating electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **76**, 027701 (2007) [arXiv:hep-th/0703042]. [119](#)
- [143] M. S. Guimaraes, L. Grigorio and C. Wotzasek, “The dual of the Carroll-Field-Jackiw model,” arXiv:hep-th/0609215. [11](#), [119](#), [129](#), [136](#), [147](#)
- [144] M. C. Gonzalez-Garcia and Y. Nir, “Developments in neutrino physics,” *Rev. Mod. Phys.* **75**, 345 (2003) [arXiv:hep-ph/0202058]. [120](#)
- [145] V. A. Kostelecky and N. Russell, “Data Tables for Lorentz and CPT Violation,” arXiv:0801.0287 [hep-ph]. [121](#)
- [146] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999) [arXiv:hep-ph/9901358]. [13](#), [123](#)
- [147] R. Jackiw, “When radiative corrections are finite but undetermined,” *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 2011 (2000) [arXiv:hep-th/9903044]. [13](#), [123](#)

- [148] J. M. Chung, “Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in the formulation of functional integral,” *Phys. Rev. D* **60**, 127901 (1999) [arXiv:hep-th/9904037]. [13](#), [123](#)
- [149] M. Perez-Victoria, “Exact calculation of the radiatively-induced Lorentz and CPT violation in QED,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999) [arXiv:hep-th/9905061]. [13](#), [123](#)
- [150] G. Bonneau, “Regularization: Many recipes, but a unique principle: Ward identities and normalization conditions. The case of CPT violation in QED,” *Nucl. Phys. B* **593**, 398 (2001) [arXiv:hep-th/0008210]. [13](#), [123](#)
- [151] M. Perez-Victoria, “Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and CPT violation in QED,” *JHEP* **0104**, 032 (2001) [arXiv:hep-th/0102021]. [13](#), [123](#)
- [152] G. Bonneau, “Lorentz and CPT violations in QED: A short comment on recent controversies,” arXiv:hep-th/0109105. [13](#), [123](#)
- [153] G. Bonneau, “Extended QED with CPT violation: Clarifying some controversies,” *Nucl. Phys. B* **764**, 83 (2007) [arXiv:hep-th/0611009]. [13](#), [123](#)
- [154] W. F. Chen, “A Note on the Radiatively Induced Lorentz and CPT Violated Chern-Simons-like Term in the Extended Quantum Electrodynamics,” arXiv:0712.2557 [hep-th]. [13](#), [123](#)
- [155] R. Jackiw and R. Rajaraman, “Vector Meson Mass Generation Through Chiral Anomalies,” *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1219 (1985) [Erratum-ibid. **54**, 2060 (1985)]. [123](#)
- [156] F. A. Brito, L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes, E. Passos and C. Wotzasek, “Induced Chern-Simons-like action in Lorentz-violating massless QED,” *Phys. Rev. D* **78**, 125023 (2008) [arXiv:0810.3180 [hep-th]]. [13](#), [123](#), [124](#), [125](#), [126](#), [146](#)
- [157] H. . J. Belich, M. M. . Ferreira, J. A. Helayel-Neto and M. T. D. Orlando, “Dimensional reduction of a Lorentz- and CPT-violating Chern-Simons model,” *Phys. Rev.*

- D **67**, 125011 (2003) [Erratum-ibid. D **69**, 109903 (2004)] [arXiv:hep-th/0212330].  
[123](#)
- [158] R. Lehnert and R. Potting, “Vacuum Cerenkov radiation,” *Phys. Rev. Lett.* **93**, 110402 (2004) [arXiv:hep-ph/0406128]. [128](#)
- [159] M. Nakahara, “Geometry, topology and physics,” *Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics)* [148](#), [156](#)
- [160] C. Nash and S. Sen, “Topology And Geometry For Physicists,” *London, Uk: Academic ( 1983) 311p* [47](#), [148](#)
- [161] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology,” *New York, USA: Wiley (1972) 657p* [148](#)
- [162] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology,” *Cambridge, Uk: Univ. Pr. ( 1987) 596 P. ( Cambridge Monographs On Mathematical Physics)* [156](#)
- [163] G. 't Hooft, “Topology Of The Gauge Condition And New Confinement Phases In Nonabelian Gauge Theories,” *Nucl. Phys. B* **190**, 455 (1981). [46](#), [159](#)
- [164] G. 't Hooft, “Monopoles, instantons and confinement,” arXiv:hep-th/0010225. [46](#), [47](#), [159](#)
- [165] L. Del Debbio, A. Di Giacomo, B. Lucini and G. Paffuti, “Abelian projection in SU(N) gauge theories,” arXiv:hep-lat/0203023. [163](#)

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)