

Processos Estocásticos na
Interação da Luz com a Matéria

Elizabeth Agudelo Ospina

Agosto de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Processos Estocásticos na Interação da Luz com a Matéria

Elizabeth Agudelo Ospina

Orientadores:

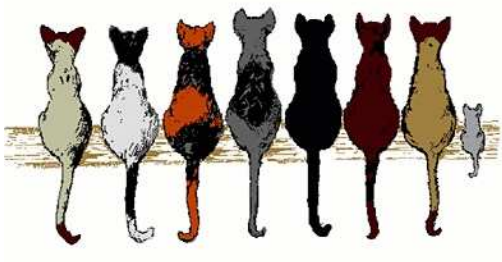
Dra. Maria Carolina Nemes

Dr. Carlos Henrique Costa Moreira

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE
FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito
parcial para a obtenção do grau de MESTRE EM
FÍSICA.

Belo Horizonte, Brasil
Agosto de 2009

*A mi familia,
por su valor incalculable,
porque nunca me ha dejado sola.*



Agradecimientos

A Sebas, por estar ahí, por ser la representación de amor, por sus horribles preguntas de filósofo, por su calma, por recordarme siempre que hay que seguir y no dejarme caer en la búsqueda de los sueños y las pasiones. A Luz, por los abrazos, esos abrazos de oso que te liberan del cansancio y las dudas, por el amor y el ejemplo. Y a Diego por “Alexis Zorba el Griego” y por las historias de su vida, de la cual me siento profundamente orgullosa.

Muy especialmente a Maria Carolina por haberme adoptado, por permitirme crecer al lado de su linda familia de física; hoy me siento muy orgullosa de haber podido aprender de una gran mujer. Al profesor Carlos Moreira por habernos guiado a través de los caminos que al principio parecían muy oscuros de los cálculos que incluían el tratamiento con variables estocásticas. A Zé “junior” por las discusiones, por las ideas, por la alegría contagiosa.

A Carlos Monken y a los Marcelos por ser un excelente ejemplo como profesores y físicos, cuando crezca quiero ser como ustedes :)

A Julia, Pablo, Bárbara, Romero, Leo, Thales, Pablito, Samir, Dudu, Pierre, Viviane, Daniel Elias y Alejandra. Mis mejores días e historias en Belo Horizonte llevan sus nombres.

A los amigos de siempre para los que a pesar de estar a 4500 km de distancia o más, supieron seguir cerca y hacerse sentir reales: Juan Pablo, Juanes, Jorge, Esteban. A Clarita en especial, por todas las conversadas y por los truquitos que me enseñó, que hacen que este trabajo tengas cositas muy bonitas.

A los de aquí y allá: El negrito, Mónica y Claudia, a Ingrid. A los profesores Sebastião y Paulo Sergio, muchas gracias.

A Taty, por su incondicionalidad y su cariño, gracias por ser mi familia, por los abrazos, por escucharme infinitamente.

A Andru, por el esfuerzo, la historia y la ternura.

A CAPES y al colegiado de física por la beca concedida, por la oportunidad !!

Gracias !!!

Sumário

Agradecimentos	VII
Resumo	XI
Abstract	XIII
1 Introdução	1
2 O modelo de Jaynes-Cummings	5
2.1. O hamiltoniano	5
2.1.1. O átomo	6
2.1.2. O campo	7
2.1.3. A interação	10
2.2. Inversão de população	12
3 Flutuações estocásticas no modelo de Jaynes-Cummings	15
3.1. Características do sistema	15
3.2. Dinâmica do JCM com acoplamento estocástico	17
3.3. Inversão de população	21
4 Estocasticidade vs Dissipação	29
4.1. Caso ideal	29
4.2. Caso dissipativo	33
4.3. Processos estocásticos	37
5 Conclusões	41
A Dinâmica do modelo de Jaynes-Cummings estocástico	43
B Transformada de Laplace	51
C Aproximação gaussiana	55
D Aproximação assintótica	57
Bibliografia	67

Resumo

Estuda-se a dinâmica e caracteriza-se a inversão de população para o modelo de Jaynes-Cummings. Inicialmente foi analisado um caso que tem sido bem menos explorado, considerando flutuações estocásticas na fase do coeficiente de acoplamento, flutuações que foram modeladas segundo o processo de telegrafia aleatória. Obtém-se expressões analíticas exatas para o operador densidade médio do sistema e para a inversão de população média sobre a distribuição de probabilidade das flutuações. Apresentam-se as expressões analíticas achadas para efeitos quânticos não perturbativos como os ressurgimentos na inversão para um estado coerente inicial do campo, estas expressões foram calculadas usando a fórmula da ressonância de Poisson e o método de “steepest descent”. Expressões a partir das quais se calculou o tempo de ocorrência, a frequência de oscilação, a largura dos diferentes ressurgimentos e o intervalo temporal entre dois ressurgimentos sucessivos. A mesma análise foi feita para o sistema átomo-campo isolado e com coeficiente de acoplamento constante e para o sistema que troca energia com o ambiente (modelado como um sistema infinito de osciladores a temperatura zero), comparando-se no final do trabalho os efeitos dos diferentes processos. Em particular se observou como os efeitos quânticos desaparecem com a diminuição da duração dos intervalos temporais entre saltos no coeficiente de acoplamento ou com o aumento na taxa de dissipação do sistema, onde a inversão de população vai ter um comportamento completamente clássico. É mostrado como o limite clássico do modelo surge de maneira diferente para cada processo.

Abstract

We study and characterize the dynamics of population inversion in the Jaynes-Cummings model. Initially we analyze the less studied case of stochastic phase fluctuations in the atom-field coupling coefficient where the fluctuations are modelled by a random phase telegraph process. We have obtained an equation for the density operator and for the population inversion averaged over the distribution of fluctuations. We present analytical expressions for non-perturbative quantum effects such as revivals in the inversion for an initial coherent state of the field that was calculated using the Poisson summation and the steepest descent method. The expression found for each revival allow us to estimate their time of occurrence, the oscillation frequency, the width and the time intervals between two consecutive revivals. The same analysis is performed for an ideal atom-field interacting system and for the dissipative one. In the end, we compare the effects on the population inversion due to different processes. We pay particular attention to how quantum effects disappear with the decrease of time intervals between jumps in the atom-field coupling parameter or the increase of the dissipation rate for the field, and the result seems to be completely classical. We show that the details of obtaining the “classical limit” can be very different for each different process.

Introdução

Poderia-se afirmar que o longo caminho para o entendimento quântico da interação entre a luz e a matéria nasce com a explicação do fenômeno de radiação de corpo negro em 1900 por M. Planck [1, 2]. Este momento marca o ponto de partida para a concepção da teoria da mecânica quântica. Só 30 anos depois estrutura-se a teoria da óptica quântica.

Desde o século V a.C. a matéria era considerada como constituída de pequenas partículas chamadas átomos. Os filósofos gregos concebiam o átomo como uma partícula fundamental e indivisível. Foi somente no século XIX que o átomo passou a ser considerado como constituído por elétrons e núcleo. O elétron foi postulado pelo físico irlandês G. Johnstone em 1874, mas foi J. J. Thompson quem descobriu seu caráter de partícula fundamental 20 anos depois. O ponto de partida para a concepção do fóton foi a necessidade de M. Planck de introduzir um mecanismo de troca discreta de energia entre a radiação e a matéria; idéia que cinco anos depois seria explorada por A. Einstein para a explicação teórica do efeito fotoelétrico [3], onde introduz o conceito de quantum de luz, que hoje denominamos fóton.

Em meados do século XX, os conceitos de átomo, elétron e fóton e as idéias que constituem a mecânica quântica estavam bem estabelecidas e haviam sido usadas na elaboração de uma teoria coerente e consistente. No entanto, considerava-se impossível a manipulação individual de átomos, elétrons e fótons, devido à falta de tecnologia da época. Hoje em dia, em muitos laboratórios ao redor do mundo, físicos de diferentes áreas realizam experimentos com poucos átomos, elétrons e fótons. Manipulando estes sistemas em ambientes altamente controlados tem sido possível descobrir e estudar as características que faziam da mecânica quântica uma teoria estranha. Assim, as leis que algum dia pareciam descrever eventos contra-intuitivos hoje podem ser “vistas” em ação. Agora pode-se não apenas confinar átomos e fótons em pequenas regiões do espaço, mas também prepará-los em estados quânticos bem definidos e seguir sua evolução em tempo real.

A física por trás da descrição de experimentos de fótons confinados em cavidades com alto fator de qualidade interagindo com átomos, bem como a de experimentos de íons ou átomos frios em redes ópticas, possui o mesmo formalismo que descreve a interação de sistemas de spin meio com osciladores harmônicos quânticos. O modelo que descreve esta dinâmica é conhecido atualmente como modelo de Jaynes-Cummings (JCM). Sua representação mais simples trata

a interação entre um átomo de dois níveis que atravessa uma cavidade que confina um único modo do campo eletromagnético quantizado. Em 1963 E. T. Jaynes e F. W. Cummings estudaram a relação entre as teorias quântica e semiclássica da radiação na descrição do fenômeno de emissão espontânea de átomos. Estes estudos revelaram a existência de oscilações de Rabi nas probabilidades de excitação atômica para campos com número de fótons bem definido [4].

A popularidade do JCM se deve ao fato de ser um modelo fisicamente realista, matematicamente tratável e que possui soluções analíticas para diferentes estudos de interações átomo-campo. Para átomos de dois níveis, por exemplo, a equação de onda de Schrödinger pode ser resolvida analiticamente [5], mesmo que contenha termos de interação dependentes do tempo no Hamiltoniano, com a ajuda da aproximação de onda girante (RWA). Esta aproximação foi validada para muitos casos de interesse prático por Bloch e Siegert em 1940 [6].

As predições do JCM têm sido experimentalmente comprovadas nas regiões de microondas e visível do espectro. Isto se torna possível devido ao recente desenvolvimento da tecnologia necessária. Com o objetivo de explorar e entender diferentes efeitos não-clássicos (tais como as oscilações de Rabi, o colapso e ressurgimentos presentes na inversão de população, estatísticas sub-Poissonianas e “squeezing” do campo de radiação), o JCM tem sido generalizado de diferentes maneiras. Já foram incluídos efeitos de decaimento do campo na cavidade [7, 8], a interação do campo com vários átomos [9, 10, 11], efeitos de dependência temporal do coeficiente de acoplamento entre o modo do campo e o átomo [12], dentre outros.

Neste presente trabalho estuda-se outra generalização do modelo. Calcula-se analiticamente a dinâmica e caracteriza-se a inversão de população para um sistema em que o coeficiente de acoplamento entre átomos de dois níveis e o modo eletromagnético confinado na cavidade sofre variações estocásticas. Estas flutuações se dão na forma de saltos instantâneos entre diferentes valores constantes da fase do coeficiente, de modo que um valor dado à fase não está correlacionado com seus valores adjacentes.

Estas flutuações podem ser adquiridas pela cavidade diretamente da fonte de campo coerente monocromático que está acoplada a ela ou podem ser geradas por qualquer variação no mecanismo de produção dos átomos de Rydberg. As fontes mais prováveis destas flutuações são o campo elétrico gerado pela deposição de rubídio nos orifícios de acoplamento da cavidade ou o campo elétrico entre os diferentes planos cristalinos das paredes de nióbio das cavidades. Como o fluxo de átomos é bem controlado, o processo dominante é a interação de um único átomo de cada vez com o campo, de modo que o dito processo de interação, mais especificamente a constante de acoplamento, é quem herda essas flutuações. Diferentes experimentos confirmam que o coeficiente de acoplamento átomo-campo flutua cerca de 20% e que essas flutuações são aleatórias [13].

A dissertação está organizada da seguinte maneira: Primeiro, no capítulo dois, apresenta-se uma breve introdução teórica ao modelo de Jaynes-Cummings e calcula-se a inversão de população. No capítulo três é estudada a dinâmica do sistema ao incluir flutuações estocásticas no coeficiente de acoplamento, é também nesse capítulo que se encontra o tratamento assintótico da inversão de população, que usa a ressonância de Poisson para reescrever as integrais e a técnica de “steepest descent” para sua estimativa. Obtém-se uma expressão que permite a caracte-

rização e o estudo de cada um dos ressurgimentos independentemente. No capítulo quatro compara-se os resultados da caracterização da inversão de população no caso estocástico com o caso ideal, ou seja, com o sistema isolado e sem nenhum tipo de flutuações no coeficiente de acoplamento, e com o caso em que o sistema interage com o ambiente, dissipando energia. O último capítulo contém as conclusões sobre os principais resultados e perspectivas. São incluídos quatro apêndices que contém material útil, descrevendo em detalhe os procedimentos matemáticos que aparecem na dissertação completa.

O modelo de Jaynes-Cummings

O estudo das características quânticas da luz requer a quantização do campo eletromagnético. O modelo mais simples que descreve a interação de um átomo de dois níveis com um campo eletromagnético completamente quantizado é chamado o modelo de Jaynes-Cummings (JCM). Esse modelo foi primeiro usado (em 1963) para estudar os aspectos clássicos da emissão espontânea e revelou a existência de oscilações de Rabi nas probabilidades de excitação atômica para campos com um número de fótons bem definido [4]. Para campos com distribuições estatísticas de número de fótons, dadas condições iniciais apropriadas, as oscilações de Rabi colapsam e ressurgem repetidamente, características puramente quânticas reveladas na inversão de população. Apresenta-se neste capítulo a dedução do hamiltoniano no JCM, considerando as aproximações de dipolo e a de onda girante. Encontra-se no final o cálculo da inversão de população.

2.1. O hamiltoniano

A interação de um átomo com apenas um elétron com o campo eletromagnético \vec{E} é descrita segundo o hamiltoniano

$$H = H_a + H_c + H_I, \quad (2.1)$$

onde H_a e H_c representam as energias do átomo e do campo sem interação, e são dados respectivamente por

$$H_a = \sum_i E_i \sigma_{ii} \quad \text{e} \quad H_c = \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.2)$$

O hamiltoniano atômico é escrito em termos das energias dos níveis E_i e dos operadores de transição atômica $\sigma_{ij} = |i\rangle \langle j|$, onde $\{|i\rangle\}$ representa um conjunto completo de autoestados de energia do átomo, e o hamiltoniano do campo está em termos dos operadores de criação (a^\dagger) e destruição (a). A interação é descrita segundo a aproximação de dipolo como

$$H_I = -e \vec{r} \cdot \vec{E}. \quad (2.3)$$

2.1.1. O átomo

O hamiltoniano para um átomo em termos dos operadores de transição atômica se escreve $H_a = \sum_i E_i \sigma_{ii}$. Se os valores de energia atômicos são E_g para o estado fundamental (g pela palavra *ground* em inglês) e E_e no estado excitado (*excited*), e os operadores de transição atômica são

$$\sigma_{ee} = |e\rangle \langle e| \quad \text{e} \quad \sigma_{gg} = |g\rangle \langle g|, \quad (2.4)$$

o hamiltoniano para um átomo de dois níveis é

$$H_a = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g|. \quad (2.5)$$

Definindo o ponto zero da energia atômica no meio dos dois níveis (fig. 2.1), e $E_e = -E_g = \hbar\omega_a/2$, o hamiltoniano atômico resulta em

$$H_a = \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z, \quad (2.6)$$

onde o operador σ_z é dado por

$$\sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|. \quad (2.7)$$

Um átomo certamente não tem só dois níveis de energia, mas como estudam-se sistemas onde a frequência do modo do campo na cavidade ω_c é tal que $\hbar\omega_c$ é aproximadamente igual à diferença de energia entre dois dos níveis de energia atômicos $\hbar\omega_a$ (níveis que por sua vez estão suficientemente afastados dos outros) então apenas os dois estados relacionados por tal energia terão participação efetiva na dinâmica do sistema.

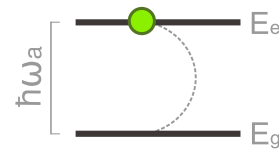


Figura 2.1: Esquema das energias do átomo, sistema de dois níveis.

Na realização de experimentos em eletrodinâmica quântica de cavidades utilizam-se átomos, em geral de elementos alcalinos (só um elétron no seu nível energético mais externo), que possuem número quântico principal, n , muito grande ($n \sim 50$). Devido ao grande tamanho destes átomos o elétron mais externo passará a maior parte do tempo muito afastado do núcleo e dos outros elétrons. Suas grandes dimensões implicam em um grande momento de dipolo, o que permite um acoplamento forte com o campo.

Quando preparados em “estados circulares” onde o momento angular orbital, l , e sua projeção no eixo z , m , têm valores máximos $m = l = n - 1$, os tempos de vida aumentam, de modo que estes átomos ficam com tempos de vida consideravelmente maiores que para estados pouco excitados, os quais são da ordem de $10^{-2}ms$. Entretanto, os tempos para $n = 50$, por exemplo, são da ordem de $20 - 30ms$. Característica que faz de átomos em estados circulares ferramentas ideais para a interação com campos de microondas, pois se os tempos de vida não fossem longos, o átomo teria uma probabilidade não desprezível de mudar de estado no “trajeto” entre a cavidade e o sistema de detecção. Isso prejudicaria a medida, já que o conhecimento do estado do átomo fornece informação sobre o campo.

2.1.2. O campo

O hamiltoniano para o campo sem interação em (2.2) representa um campo quantizado. Como ponto de partida em direção à descrição da quantização do campo, escreve-se as equações de Maxwell. Equações essas que regem o comportamento dos campos clássicos e são dadas, segundo o SI, pelas seguintes relações

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é o campo elétrico e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ o campo magnético, no ponto (\vec{r}, t) . Estas equações descrevem o comportamento do campo livre, ou seja, no vácuo, na ausência de cargas, correntes, ou algum material dielétrico. Quando não se tem presença de fontes as equações de Maxwell são invariantes de calibre. Um calibre muito comumente usado na óptica quântica é o calibre de Coulomb, que permite que os campos elétrico e magnético sejam escritos em termos do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ segundo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t},\tag{2.9}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t).\tag{2.10}$$

A condição do calibre de Coulomb é que a divergência do potencial vetor é nula, ou seja, $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$. Calculando as equações de Maxwell para os campos anteriores obtém-se que o vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}.\tag{2.11}$$

Com a idéia de manipular variáveis discretas em vez de contínuas, o que certamente simplifica as contas, considera-se o campo dentro de uma cavidade cúbica de lado L , impondo-se condições de fronteira periódicas. A expansão do potencial vetor nos modos normais da cavidade fornece

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \frac{\omega_k}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \left[(\omega_k q_k + i p_k) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \hat{\epsilon} + (\omega_k q_k - i p_k) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \hat{\epsilon}^* \right],\tag{2.12}$$

onde ω_k é a frequência do modo e k o número de onda, tal que: $k = \omega_k/c$, onde c é a velocidade da luz; ε_0 é a permissividade elétrica; $\hat{\epsilon}$, vetor unitário de polarização; q_k é a amplitude do modo normal (com dimensões de comprimento) que age como uma posição canônica, sendo que $p_k = \dot{q}_k$ é o momento canônico.

A energia do campo clássico é dada por

$$H_c = \frac{1}{2} \int_{V=L^3} \left\{ \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \right\} d\vec{r}.\tag{2.13}$$

Escrevendo os campos elétrico (2.9) e magnético (2.10) em termos do $\vec{A}(\vec{r}, t)$ dado por (2.12), obtém-se que a energia do campo é

$$H_c = \frac{1}{2} \sum_k \{p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2\}. \quad (2.14)$$

Este hamiltoniano expressa o campo de radiação como uma somatória das energias de osciladores harmônicos independentes, um para cada modo k . Para descrever o campo quanticamente usamos as variáveis q_k e p_k já identificadas acima como variáveis canônicas, definindo-as como os operadores equivalentes: \hat{q}_k e \hat{p}_k , operadores que satisfazem às seguintes relações de comutação

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_{k'}] = i\hbar \delta_{kk'}, \quad [\hat{q}_k, \hat{q}_{k'}] = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{p}_k, \hat{p}_{k'}] = 0. \quad (2.15)$$

Trocando as variáveis dinâmicas pelos operadores hermitianos, a energia do campo será dada por

$$\hat{H}_c = \frac{1}{2} \sum_k \{\hat{p}_k^2 + \omega_k^2 \hat{q}_k^2\}. \quad (2.16)$$

Definindo os operadores a_k e a_k^\dagger como

$$a_k = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{q}_k + i\hat{p}_k) \quad (2.17)$$

e

$$a_k^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{q}_k - i\hat{p}_k), \quad (2.18)$$

escrevemos o hamiltoniano do campo como

$$\hat{H}_c = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k (a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k). \quad (2.19)$$

Os operadores de criação (a_k^\dagger) e de destruição (a_k) são operadores não hermitianos e adimensionais; que satisfazem as relações de comutação para bósons

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad [a_k, a_{k'}] = 0 \quad \text{e} \quad [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0. \quad (2.20)$$

Levando em conta a relação comutação entre a_k e a_k^\dagger , o hamiltoniano torna-se

$$\hat{H}_c = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.21)$$

Este hamiltoniano representa a somatória do número de fótons em cada modo do campo multiplicado pela energia de um fóton nesse modo, mais $\hbar\omega_k/2$, que representa a energia das flutuações do vácuo em cada modo. Para um só modo de frequência ω_c e redefinindo o ponto zero da energia

$$\hat{H}_c = \hbar\omega_c a^\dagger a. \quad (2.22)$$

A quantização de campo permite a interpretação do fóton como uma excitação elementar de um modo normal do campo. Outra consequência interessante da quantização do campo são

as flutuações associadas com o ponto zero de energia, chamadas flutuações do vácuo. Estas flutuações não têm análogo clássico e são as responsáveis por muitos fenômenos interessantes na óptica quântica.

Existem diferentes estados quânticos do campo eletromagnético que permitem uma apropriada descrição dos campos ópticos. Introduzem-se duas bases:

- **Estados de número ou estados de Fock**

São representados como $|n\rangle$ e definidos a partir de uma operação sucessiva do operador criação sobre o estado de mínima energia do campo

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n |0\rangle. \quad (2.23)$$

O conjunto de estados de Fock $\{|n\rangle\}$ constitui uma base ortonormal, ou seja, $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ e completa $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1$ para o espaço de Hilbert \mathcal{H} . Estes estados são autovalores do operador número de fótons $N = a^\dagger a$, que representa o número de fótons do campo e por isso representam um campo com um número bem definido de fótons.

Os operadores a e a^\dagger sobem ou descem entre os níveis de energia do oscilador harmônico. Em termos de fótons eles representam a destruição e a criação de um fóton. A aplicação de a e a^\dagger nos estados de número fornece

$$\begin{aligned} a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \\ a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde para o estado de Fock do vácuo: $a |0\rangle = 0$. Os estados de Fock são uma representação muito útil para fótons de altas energias, por exemplo, raios γ , onde o número de fótons é muito baixo. Para campos ópticos onde o número de fótons é grande e geralmente indefinido, será mais acertado falar de superposições ou misturas de estados número. Estes estados têm sido usados como base em muitas situações estudadas pela óptica quântica, incluindo algumas teorias do laser.

- **Estados coerentes**

Na representação dos estados de Fock, um estado coerente está definido como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.25)$$

Estes estados não são autoestados do hamiltoniano do campo e também não são ortogonais. O conjunto de estados coerentes forma uma base supercompleta. São autoestados do operador destruição $a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$ e, sendo que o operador a não é hermitiano, seus autovalores α são números complexos (adimensionais). Para $\alpha = 0$ o estado coerente é igual ao estado de Fock do vácuo, e para qualquer número complexo $\alpha \neq 0$ o estado $|\alpha\rangle$ tem uma projeção não nula no estado de número $|n\rangle$, dada por

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (2.26)$$

O quadrado do módulo de $\langle n|\alpha\rangle$ dá a probabilidade de encontrar n fótons no estado coerente $|\alpha\rangle$, o que resulta em uma distribuição de Poisson no número de fótons com parâmetro $\bar{n} = |\alpha|^2$. A média da distribuição é igual a $|\alpha|^2$ de onde se conclui que não importa o quão pequeno seja α , existe sempre uma probabilidade diferente de zero de que qualquer número de fótons esteja presente no campo (exceto, naturalmente para $\alpha = 0$).

Média	$\langle N \rangle = \langle \alpha N \alpha \rangle = \alpha ^2$
Variância	$\langle \Delta N \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \alpha ^2$

Os estados coerentes contêm um número indeterminado de fótons e uma fase mais ou menos bem definida o que não ocorre com os estados de número, que tem uma fase completamente aleatória. Isso faz deles uma ferramenta ótima para a descrição dos feixes de luz que normalmente são utilizados na óptica. Além de ter um alto grau de coerência óptica, os estados coerentes têm a menor incerteza em fase e amplitude permitida pelo princípio de incerteza, o que os converte nos estados quânticos mais clássicos possível, no sentido que são os estados quânticos que melhor descrevem um campo eletromagnético monocromático clássico. Embora definidos por Schrödinger muito antes, é a partir dos trabalhos de Glauber de 1963 que estes estados foram reconhecidos como fundamentais no tratamento quântico dos campos ópticos [14].

2.1.3. A interação

A interação do campo de radiação \vec{E} e um átomo de um elétron é descrita segundo o hamiltoniano na aproximação de dipolo, onde a interação com o campo externo está descrita pelo termo de acoplamento entre o momento de dipolo atômico e o campo externo calculado na posição do átomo

$$H_I = -e \vec{r} \cdot \vec{E} \quad (2.27)$$

onde \vec{r} é o vetor posição do elétron. Na aproximação de dipolo, considera-se que as dimensões do átomo são bem menores que o comprimento de onda do campo eletromagnético incidente, então despreza-se a variação espacial do campo sobre o átomo todo. O dipolo se expressa em termos dos operadores de transição atômica de acordo com

$$e \vec{r} = \sum_{i,j} e |i\rangle \langle i|\vec{r}|j\rangle \langle j| = \sum_{i,j} \vec{\rho}_{ij} \sigma_{ij}, \quad (2.28)$$

onde o elemento da matriz de transição do dipolo elétrico $\vec{\rho}_{ij} = e \langle i|\vec{r}|j\rangle$ foi definido. Um campo mono-modo é descrito por

$$\vec{E} = \mathcal{E}(a + a^\dagger) \hat{e}, \quad (2.29)$$

onde \hat{e} é o vetor unitário de polarização e o coeficiente \mathcal{E} depende da frequência do campo, da permissividade elétrica do vácuo e do volume de quantização [15]. Para um átomo de dois níveis com $\sigma_+ = |e\rangle \langle g|$ e $\sigma_- = |g\rangle \langle e|$, tem-se que

$$H_I = \hbar\lambda(\sigma_+ + \sigma_-)(a^\dagger + a), \quad (2.30)$$

onde, $\lambda = \vec{\varphi}_{eg} \cdot \mathcal{E} \hat{\epsilon}$ (no caso de $\vec{\varphi}_{eg}$ real) é a metade da frequência de Rabi do vácuo. Na representação de interação, considerando $H_0 = H_a + H_c$

$$H_{\text{Int}} = e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (2.31)$$

de onde os operadores no hamiltoniano obedecem

$$\begin{aligned} e^{i\omega_c a^\dagger a t} a e^{-i\omega_c a^\dagger a t} &= a e^{-i\omega_c t}, \\ e^{i\omega_c a^\dagger a t} a^\dagger e^{-i\omega_c a^\dagger a t} &= a^\dagger e^{i\omega_c t}, \\ e^{i\omega_a \sigma_z t} \sigma_+ e^{i\omega_a \sigma_z t} &= \sigma_+ e^{i\omega_a t}, \\ e^{i\omega_a \sigma_z t} \sigma_- e^{i\omega_a \sigma_z t} &= \sigma_- e^{-i\omega_a t}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

A aproximação RWA consiste em levar em conta só os termos da forma $\sigma_- a^\dagger$ e $\sigma_+ a$, processos de maior probabilidade. Justifica-se a validade desta aproximação no fato de que o interesse está em estudar o regime no qual a soma entre a frequência do campo eletromagnético e a frequência da transição atômica é muito maior que a diferença entre elas, i.e. $\omega_a + \omega_c \gg |\omega_a - \omega_c|$, de modo que pode-se fazer uma separação de escalas temporais.

Os termos $\sigma_- a$ e $\sigma_+ a^\dagger$ são proporcionais a $e^{\pm i(\omega_a + \omega_c)t}$ e variam muito rapidamente, de forma que a sua média sobre uma escala de tempo maior que $1/\omega_c$ é zero. Existem casos nos quais estes termos contra-girantes simplesmente não aparecem, de modo que se tem uma solução exata.

A dinâmica de um átomo interagindo com um mono-modo confinado em uma cavidade será governada pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings, que na aproximação de onda girante (RWA) escreve-se

$$H_{JC} = \hbar\lambda(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t}), \quad (2.33)$$

definindo $\Delta = \omega_a - \omega_c$. Apesar do modelo envolver conceitos bastante simples, este apresenta uma dinâmica bastante rica; é por exemplo a ilustração mais simples para o processo de emissão espontânea e explica os efeitos de vários tipos de estatísticas quânticas do campo em sistemas mais complexos como o micromaser e o laser.

O JCM tem solução exata para constantes de acoplamento arbitrárias: dependentes e independentes do tempo, de variação contínua ou em forma de saltos. Outro aspecto muito importante é que é um modelo realizável experimentalmente. Com a tecnologia das cavidades de alto Q, testar as previsões do JCM têm sido possível no regimes óptico e de micro-ondas, fato que estimula o interesse para o estudo e a generalização do modelo de diferentes maneiras, por exemplo, incluindo efeitos do decaimento do modo do campo na cavidade [7, 8], aumentando o número de átomos [9, 10, 11], ou o número de níveis do átomo [16, 17], entre outros.

2.2. Inversão de população

A inversão de população é a probabilidade de o átomo estar no estado excitado menos a probabilidade dele estar no estado fundamental, definida como

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle \psi(t) | \sigma_z | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \psi(t) | e \rangle \langle e | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | g \rangle \langle g | \psi(t) \rangle \\ &= |\langle e | \psi(t) \rangle|^2 - |\langle g | \psi(t) \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

O hamiltoniano de interação

$$H_{\text{Int}} = \hbar\lambda(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t}) \quad (2.35)$$

permite apenas transições entre os estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$, de modo que as contas estarão restringidas a este subespaço. O estado do sistema é representado por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \{a_n(t) |e, n\rangle + b_{n+1}(t) |g, n+1\rangle\}. \quad (2.36)$$

As equações de movimento para as diferentes amplitudes de probabilidade $a_n(t)$ e $b_{n+1}(t)$ serão obtidas através da solução da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H_{\text{Int}} |\psi(t)\rangle \quad (2.37)$$

Substituindo H_{Int} e $|\psi(t)\rangle$ de (2.35) e (2.36) e logo projetando em $\langle e, n|$ e $\langle g, n+1|$, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{a}_n(t) &= -i\lambda\sqrt{n+1} e^{i\Delta t} b_{n+1}(t), \\ \dot{b}_{n+1}(t) &= -i\lambda\sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} a_n(t). \end{aligned} \quad (2.38)$$

A solução para este sistema de equações¹ é

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \left\{ a_n(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - i b_{n+1}(0) \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{\frac{i\Delta}{2}t}, \\ b_{n+1}(t) &= \left\{ b_{n+1}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - i a_n(0) \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{-\frac{i\Delta}{2}t}, \end{aligned}$$

onde $a_n(0)$ e $b_{n+1}(0)$ são as condições iniciais e Ω_n foi definido segundo

$$\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4\lambda^2(n+1). \quad (2.39)$$

Em termos dos coeficientes $a_n(t)$ e $b_{n+1}(t)$, a inversão de população será escrita como

$$W(t) = \sum_n^{\infty} [|a_n(t)|^2 - |b_{n+1}(t)|^2]. \quad (2.40)$$

¹Esta seção foi escrita com base no capítulo 5 (“Atom-field interaction quantum theory”) do livro: “Quantum Optics” escrito por: Marlan O. Scully e M. Suhail Zubairy [15].

Se o átomo está inicialmente em estado excitado $a_n(0) = c_n(0)$, onde $c_n(0)$ é a amplitude inicial de probabilidade para o campo, e $b_{n+1}(0) = 0$, então as probabilidades de achar o átomo em estado excitado ou no estado fundamental no tempo t são respectivamente

$$|a_n(t)|^2 = |c_n(0)|^2 \left[\cos^2 \left(\frac{\Omega_n t}{2} \right) + \frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} \sin^2 \left(\frac{\Omega_n t}{2} \right) \right], \quad (2.41)$$

e

$$|b_{n+1}(t)|^2 = |c_n(0)|^2 \frac{4\lambda^2(n+1)}{\Omega_n^2} \sin^2 \left(\frac{\Omega_n t}{2} \right). \quad (2.42)$$

Para um campo preparado inicialmente em estado coerente, com $|\alpha|^2 \sim \bar{n}$, a amplitude inicial de probabilidade é

$$|c_n(0)|^2 = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (2.43)$$

e substituindo (2.41) e (2.42) em (2.40) se obtém a expressão para a inversão de população

$$W(t) = \sum_n \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4\lambda^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right]. \quad (2.44)$$

A figura 2.2 mostra a evolução no tempo da inversão de população, quando a condição inicial do sistema é que o átomo entra em estado excitado na cavidade que confina um campo em estado coerente tal que a interação é ressonante. Note-se que $W(t)$ apresenta oscilações (oscilações de Rabi) entre os estados excitado e fundamental atômico, fenômeno que se observa também quando se tem um campo não quantizado. A diferença é que no caso quantizado a envoltória das oscilações senoidais de Rabi “colapsa” (cai a zero) rapidamente e à medida que o tempo aumenta, ela ressurgiu.

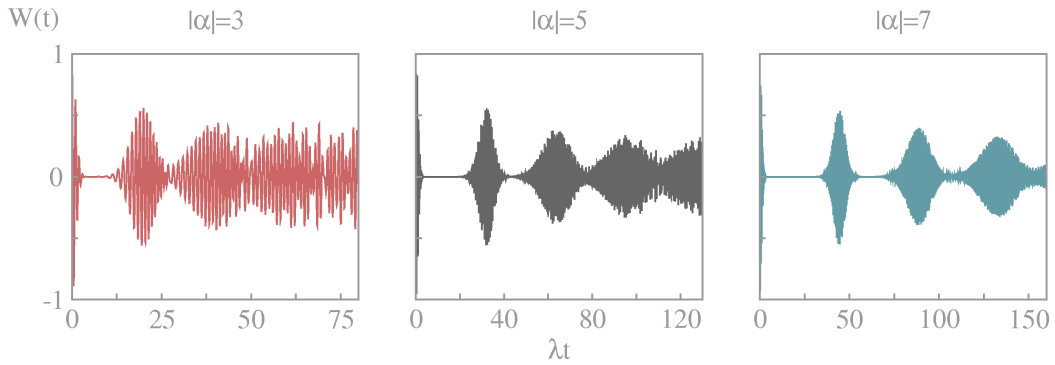


Figura 2.2: Inversão de população como função de λt . Sistema isolado, comparação do colapso e os ressurgimentos para diferentes valores de alpha: $|\alpha| = 3$, $|\alpha| = 5$ e $|\alpha| = 10$, com $\Delta = 0$.

Cada termo da soma (2.44) representa as oscilações de Rabi para um determinado n . Em $t = 0$, o átomo está preparado em um estado definido e portanto todos os termos da soma estão correlacionados. À medida que o tempo passa, as várias frequências de Rabi interferem entre si, e a inversão de população rapidamente colapsa, mas quando o tempo cresce ainda mais, a correlação entre as oscilações de Rabi é restaurada e ocorre um ressurgimento, tendo assim

uma sequência infinita de ressurgimentos, de modo que a amplitude das oscilações de Rabi vai diminuindo. Esse comportamento de colapsos e ressurgimentos se repete com o passar do tempo.

As durações temporais dos ressurgimentos aumentam de cada vez e assim eles começam a se superpor, chegando em um tempo no qual não é mais possível definir cada um separadamente. A condição inicial do campo determina o peso relativo para cada valor de n . Para diferentes números médios iniciais de fótons, o espaçamento entre os ressurgimentos e as amplitudes serão modificadas. Se o número médio de fótons é menor, os ressurgimentos superpor-se-ão mais rapidamente e a amplitude da envoltória será maior do que se inicialmente o campo fosse mais intenso.

Sempre tem-se os sucessivos colapsos e ressurgimentos, mas quando o número médio de fótons inicial do estado coerente for muito grande, o primeiro ressurgimento acontecerá tão longe da origem que teremos efetivamente só o colapso inicial, e o comportamento da inversão de população será igual ao caso de ter um campo clássico aleatório.

Se o campo está inicialmente no estado de vácuo a inversão de população tem a forma:

$$W(t) = \frac{1}{\Delta^2 + 4\lambda^2} \left[\Delta^2 + 4\lambda^2 \cos \left(\sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2} t \right) \right]. \quad (2.45)$$

Aqui o átomo no estado excitado pode fazer uma transição ao nível fundamental na ausência de campo, coisa que não acontece quando é considerado um campo clássico, onde um átomo em estado excitado precisa da interação com o campo para ter uma transição a seu estado fundamental. A equação anterior é o exemplo mais simples de emissão espontânea no qual o fóton espontaneamente emitido contribui ao mono-modo do campo na cavidade.

Flutuações estocásticas no modelo de Jaynes-Cummings

Apresentamos a generalização do JCM ao incluir efeitos de flutuações estocásticas na fase do coeficiente de acoplamento entre o átomo e o campo. É obtida a expressão para o operador densidade médio do sistema sobre a distribuição das flutuações [18]. Calculamos a inversão de população, logo transformamos esta soma sobre n em uma soma infinita de integrais que posteriormente são estimadas usando o método de “steepest descent”. Para um número grande de fótons cada uma dessas integrais representa um ressurgimento, permitindo o estudo de cada um independentemente. A primeira das integrais representa o colapso inicial.

3.1. Características do sistema

Estuda-se a interação de um átomo de dois níveis com uma diferença de energia entre eles igual a $\hbar\omega_a$ e um mono-modo do campo com frequência ω_c (de modo ressonante, ou seja, $\omega_a = \omega_c$ sendo iguais a ω_0). O Hamiltoniano do sistema se escreve

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\omega_0 a^\dagger a + \frac{\hbar}{2} g^*(t) \sigma_+ a + \frac{\hbar}{2} g(t) \sigma_- a^\dagger, \quad (3.1)$$

onde σ_z , σ_+ e σ_- são os operadores de spin de Pauli, que aqui representam a transição atômica. a e a^\dagger são os operadores de destruição e criação de fótons do campo. A dinâmica da interação é governada por

$$H_{\text{Int}} = \frac{\hbar}{2} [g^*(t) \sigma_+ a + g(t) \sigma_- a^\dagger], \quad (3.2)$$

o acoplamento entre o átomo e o campo dependerá do tempo da seguinte maneira

$$g(t) = g_0 e^{i\phi(t)}, \quad (3.3)$$

com a fase $\phi(t)$ representando um processo estocástico, e a amplitude g_0 sendo uma quantidade real, positiva e não estocástica. As mudanças de $\phi(t)$ acontecem em saltos instantâneos separados por intervalos de tempo de duração média τ_0 , como ilustrado na fig. 3.1. O elemento de aleatoriedade é introduzido na dependência temporal do Hamiltoniano do sistema segundo

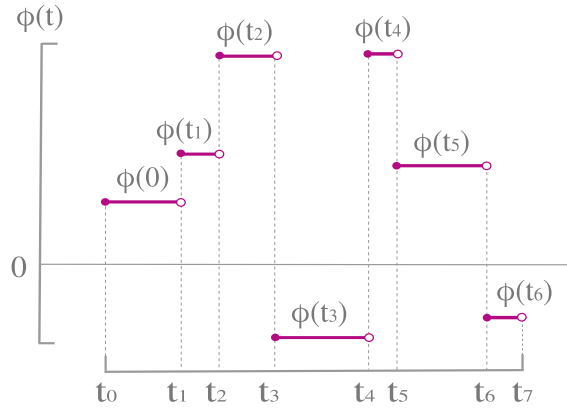


Figura 3.1: Esquema da distribuição de probabilidade da fase do acoplamento átomo-campo.

as mudanças de $\phi(t)$.

Modelos que representam ruído com processos de saltos discretos foram considerados pela primeira vez para sistemas de interação radiação-matéria em torno do ano 1967. Os precursores, Burshtein e Oseledchik [19], assumiram que as amplitudes, frequências e fases do campo de radiação são processos markovianos estacionários de variação aleatória no tempo, em forma de saltos. Estes processos foram chamados de telegrafia aleatória, ou em inglês: *random phase telegraph*.

O processo de telegrafia aleatória constitui um modelo simples para a descrição das propriedades estatísticas do campo, que permite obter expressões para as quantidades médias que têm solução algébrica exata. Com processos deste tipo pode-se descrever o ruído introduzido pelas flutuações do campo eletromagnético pelas diferentes colisões que se apresentam ou pelas forças externas que agem sobre o sistema. As colisões e as forças externas podem ser devidas também ao fato de que os átomos apresentam muitas interações que provêm de um ambiente altamente flutuante. A incorporação de fenômenos estocásticos é um passo comum visando construir um modelo teórico mais realista.

Tem-se duas variáveis estocásticas: os intervalos temporais entre um salto e o seguinte e o valor da fase constante em cada um desses intervalos. A variável $\tau = t_i - t_{i-1}$ segue a distribuição de probabilidade

$$dQ(\tau) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau, \quad (3.4)$$

com $t_0 = 0$. A distribuição anterior tem intervalos de duração média τ_0 , como anteriormente mencionado.

A distribuição de probabilidade para a fase é suposta uniforme sobre $[0, 2\pi)$, ou seja, todas as fases são igualmente prováveis. O valor que $\phi(t)$ assume sobre o intervalo $[t_i, t_{i+1})$ é denotado ϕ_i . Considera-se apenas o caso em que as fases sobre os intervalos adjacentes são não

correlacionadas. A distribuição de probabilidade para a fase é dada por

$$dq(\phi) = \frac{d\phi}{2\pi}, \quad (3.5)$$

com valor médio $\langle \phi \rangle = \pi$. Embora o interesse deste trabalho seja o caso da distribuição uniforme para a fase, manter-se-á a notação genérica até onde for possível para que outros casos sejam mais facilmente tratados, se necessário.

3.2. Dinâmica do JCM com acoplamento estocástico

A evolução temporal da matriz densidade¹ no intervalo $[t', t]$, supondo ϕ constante durante todo esse intervalo, é dada através da transformação unitária $\mathcal{U}(\phi, t, t')$

$$\rho(t; \phi) = \mathcal{U}(\phi; t, t') \rho(t') \mathcal{U}^{-1}(\phi; t, t'). \quad (3.6)$$

No intervalo $[0, t]$ ocorrem k saltos em ϕ . Sendo que em $[0, t_1)$ a fase vale ϕ_0 ; em $[t_1, t_2)$, ϕ_1 ; em $[t_2, t_3)$, ϕ_2 até que em $[t_k, t)$ vale ϕ_k , com $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < t$. O operador densidade no tempo t se escreve

$$\begin{aligned} \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k) &= \mathcal{U}(\phi_k; t, t_k) \mathcal{U}(\phi_{k-1}; t_k, t_{k-1}) \dots \mathcal{U}(\phi_1; t_2, t_1) \mathcal{U}(\phi_0; t_1, 0) \\ &\times \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; t_1, 0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_1; t_2, t_1) \dots \mathcal{U}^{-1}(\phi_{k-1}; t_k, t_{k-1}) \mathcal{U}^{-1}(\phi_k; t, t_k). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Os t_i 's e os ϕ_i 's que aparecem à direita dos ";" são as variáveis aleatórias já escolhidas. Para expressões como esta, de natureza multiplicativa, é relativamente fácil tirar a média. A probabilidade de que no intervalo $(0, t)$ ocorram k saltos em ϕ nos tempos t_1, t_2, \dots, t_k com ϕ valendo $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k$ em cada intervalo respectivamente é

$$\begin{aligned} dP(t_1, t_2, \dots, t_k, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k; t) &= \\ &\text{Prob} \{ \phi(0) = \phi_0 \} \times \text{Prob} \{ \tau_1 = t_1 - 0 \} \times \\ &\text{Prob} \{ \phi(t_1) = \phi_1 \} \times \text{Prob} \{ \tau_2 = t_2 - t_1 \} \times \\ &\text{Prob} \{ \phi(t_2) = \phi_2 \} \times \text{Prob} \{ \tau_3 = t_3 - t_2 \} \times \dots \\ &\dots \times \text{Prob} \{ \phi(t_{k-1}) = \phi_{k-1} \} \times \text{Prob} \{ \tau_k = t_k - t_{k-1} \} \times \\ &\text{Prob} \{ \phi(t_k) = \phi_k \} \times \text{Prob} \{ \tau_{k+1} > t - t_k \}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De acordo com (3.4) a $\text{Prob} \{ \tau_i = t_i - t_{i-1} \} = dQ(t_i - t_{i-1})$ para $i = 1, \dots, k$ e de (3.5) temos que $\text{Prob} \{ \phi(t_i) = \phi_i \} = dq(\phi)$ para $i = 0, \dots, k$. Impõe-se que no intervalo $[t_k, t]$ o $(k+1)$ -ésimo salto não ocorra, portanto $\tau_{k+1} > t - t_k$. Por não ser uma probabilidade puntual (é sobre um intervalo), deve-se integrar, obtendo-se que

$$\text{Prob} \{ \tau_{k+1} > t - t_k \} = \int_{t-t_k}^{\infty} dQ(\tau_{k+1}) = e^{-(t-t_k)/\tau_0}, \quad (3.9)$$

¹A cada estado quântico corresponde um único operador de estado, também chamado operador densidade ou matriz densidade, que deve ser: hermitiano ($\rho = \rho^\dagger$); não negativo ($\langle u | \rho | u \rangle \geq 0, \forall$ vetor unitário $|u\rangle$); e normalizado ($\text{Tr} \rho = 1$). O formalismo do operador densidade foi introduzido na teoria por J. von Neumann em 1927, e é descrito detalhadamente por diferentes autores, ver e.g. L. E. Ballentine [20], J.J. Sakurai [21] ou L.D. Landau e E. M. Lifshitz [22].

assim

$$\begin{aligned}
dP(t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k; t) &= \\
& dq(\phi_0) \cdot \frac{1}{\tau_0} e^{-(t_1-0)/\tau_0} d\tau_1 \cdot dq(\phi_1) \cdot \frac{1}{\tau_0} e^{-(t_2-t_1)/\tau_0} d\tau_2 \dots \\
& \dots dq(\phi_{k-1}) \cdot \frac{1}{\tau_0} e^{-(t_k-t_{k-1})/\tau_0} d\tau_k \cdot dq(\phi_k) \cdot e^{-(t-t_k)/\tau_0} \\
& = e^{-t/\tau_0} \frac{1}{\tau_0^k} \left(\prod_{i=1}^k d\tau_i \right) \left(\prod_{i=0}^k dq(\phi_i) \right), \tag{3.10}
\end{aligned}$$

o espaço amostral inclui apenas a região onde $\tau_i > 0$ com $i = 1, \dots, k$ e $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k < t$. Pode-se passar das integrais nas variáveis $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ para integrais nas variáveis t_1, t_2, \dots, t_k , o determinante da matriz jacobiana desta transformação é 1, logo

$$dP(t_1, t_2, \dots, t_k, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k; t) = e^{-t/\tau_0} \frac{1}{\tau_0^k} \left(\prod_{i=1}^k dt_i \right) \left(\prod_{i=0}^k dq(\phi_i) \right). \tag{3.11}$$

Equivalentemente o espaço amostral inclui apenas a região onde $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$. Portanto o valor médio da matriz densidade no instante t , supondo que a fase ϕ sofra uma quantidade estocástica de saltos, será

$$\bar{\rho}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \int_{\Lambda} dP(t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k; t) \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k), \tag{3.12}$$

sendo $\Gamma = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$ e $\Lambda = 0 \leq \phi_i < 2\pi$. Reescrevendo o operador densidade segundo (3.11)

$$\bar{\rho}(t) = e^{-t/\tau_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\tau_0^k} \int_{\Gamma} \dots \int \prod_{i=1}^k dt_i \int_{\Lambda} \dots \int \prod_{i=0}^k dq(\phi_i) \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k), \tag{3.13}$$

o termo da somatória com $k = 0$ será

$$\int dq(\phi_0) \rho(t; \phi_0), \tag{3.14}$$

observe que este termo não contém integrais com respeito ao tempo, o que é devido ao fato de que, quando não há saltos tem-se uma fase constante em todo o intervalo. Em geral

$$\int_{\Gamma} \dots \int \prod_{i=1}^k dt_i = \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1, \tag{3.15}$$

e (para o caso das distribuições uniformes na fase)

$$\int_{\Lambda} \dots \int \prod_{i=0}^k dq(\phi_i) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \dots \int_0^{2\pi} d\phi_k. \tag{3.16}$$

Reescrevendo (3.13) para uma distribuição de fases qualquer

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t) = & e^{-t/\tau_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\tau_0^k} \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \times \\ & \int dq(\phi_k) \int dq(\phi_{k-1}) \dots \int dq(\phi_0) \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Usando a expressão (3.7) e listando explicitamente os primeiros termos

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t)e^{t/\tau_0} = & \int dq(\phi_0) \rho(t; \phi_0) + \frac{1}{\tau_0} \int_0^t dt_1 \int dq(\phi_1) \int dq(\phi_0) \rho(t; t_1, \phi_0, \phi_1) \\ & + \frac{1}{\tau_0^2} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int dq(\phi_2) \int dq(\phi_1) \int dq(\phi_0) \rho(t; t_1, t_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) + \dots \\ = & I_0(t) + I_1(t) + I_2(t) + \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

Definiram-se as integrais $I_i(t)$ com $i = 0, 1, 2, \dots$, observe que tais integrais obedecem

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) I_0(t) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) \\ = & \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \rho(t; \phi_0) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) \\ = & \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \int dq(\phi_0) \rho(\tau; t, \phi_0, \phi) = I_1(\tau), \end{aligned} \quad (3.19)$$

analogamente

$$\frac{1}{\tau_0^k} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) I_k(t) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) = I_{k+1}(\tau). \quad (3.20)$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \bar{\rho}(t) e^{t/\tau_0} \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) \\ = & \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \sum_{k=0}^{\infty} I_k(t) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} I_{k+1}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(\tau) - \int dq(\phi_0) \rho(\tau; \phi_0) \\ = & \bar{\rho}(\tau) e^{\tau/\tau_0} - \int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi_0; \tau, 0) \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; \tau, 0), \end{aligned} \quad (3.21)$$

com o que finalmente se obtém a equação integral

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\tau) e^{\tau/\tau_0} = & \int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi_0; \tau, 0) \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; \tau, 0) \\ & + \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \bar{\rho}(t) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Observe que $\bar{\rho}(\tau)$, $\mathcal{U}(\phi; \tau, t)$ e $\mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t)$ são operadores representados por matrizes quadradas, de modo que se reescreve-se a equação anterior indicando os índices dos elementos de cada uma das matrizes tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\tau)_{im} e^{\tau/\tau_0} &= \int dq(\phi_0) \sum_{k,l} \mathcal{U}(\phi_0; \tau, 0)_{ik} \rho(0)_{kl} \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; \tau, 0)_{lm} \\ &+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \int dq(\phi) \sum_{k,l} \mathcal{U}(\phi; \tau, t)_{ik} \bar{\rho}(t)_{kl} \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t)_{lm}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

como os elementos de matriz naturalmente comutam, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\tau)_{im} e^{\tau/\tau_0} &= \sum_l \left[\sum_k \left(\int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi_0; \tau, 0)_{ik} \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; \tau, 0)_{lm} \right) \rho(0)_{kl} \right] \\ &+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \sum_l \left[\sum_k \left(\int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t)_{ik} \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t)_{lm} \right) \bar{\rho}(t)_{kl} \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Definindo-se o conjunto de matrizes $\{\mathbb{G}^{im}(\tau, t)\}$, cujos elementos são

$$G^{im}(\tau, t)_{lk} = \int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi; \tau, t)_{ik} \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t)_{lm}, \quad (3.25)$$

a variação média do operador densidade é

$$\bar{\rho}(\tau)_{im} e^{\tau/\tau_0} = \sum_l \left[\sum_k G^{im}(\tau, 0)_{lk} \rho(0)_{kl} \right] + \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \sum_l \left[\sum_k G^{im}(\tau, t)_{lk} \bar{\rho}(t)_{kl} \right]. \quad (3.26)$$

Note-se que achando a forma explícita das matrizes $\{\mathbb{G}^{im}(\tau, t)\}$ se conhece a dinâmica do sistema. O elemento de matriz $\bar{\rho}(\tau)_{im}$ pode-se escrever também como

$$\bar{\rho}(\tau)_{im} e^{\tau/\tau_0} = \sum_l [\mathbb{G}^{im}(\tau, 0) \rho(0)]_{ll} + \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \sum_l [\mathbb{G}^{im}(\tau, t) \bar{\rho}(t)]_{ll}. \quad (3.27)$$

Lembrando que $\text{Tr} A = \sum_l a_{ll}$, obtém-se finalmente que

$$\bar{\rho}(\tau)_{im} = e^{-\tau/\tau_0} \text{Tr} [\mathbb{G}^{im}(\tau, 0) \rho(0)] + \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{-(\tau-t)/\tau_0} \text{Tr} [\mathbb{G}^{im}(\tau, t) \bar{\rho}(t)], \quad (3.28)$$

que é a expressão da matriz densidade média sobre a variável aleatória $\phi(t)$. A partir deste ponto estudamos os intervalos de fase constante, ou seja, de acoplamento constante, independentemente. Intervalos onde o comportamento do operador densidade é usual.

O operador unitário responsável pela evolução temporal associado ao sistema é

$$\mathcal{U}_n(\phi; \tau, 0) = e^{-iH_{\text{int}} t} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n t) & -ie^{-i\phi} \text{sen}(\theta_n t) \\ -ie^{i\phi} \text{sen}(\theta_n t) & \cos(\theta_n t) \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde $\theta_n = g_0 \sqrt{n+1}$. A transformação inversa de $\mathcal{U}(\phi; \tau, 0)$ é dada por

$$\mathcal{U}_n^{-1}(\phi; \tau, 0) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n t) & ie^{-i\phi} \text{sen}(\theta_n t) \\ ie^{i\phi} \text{sen}(\theta_n t) & \cos(\theta_n t) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Usando a distribuição de fases uniforme $dq(\phi) = d\phi/2\pi$ obtemos que

$$\mathbb{G}^{11}(\tau, t) = \begin{bmatrix} \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\mathbb{G}^{12}(\tau, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\mathbb{G}^{21}(\tau, t) = \begin{bmatrix} 0 & \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

e

$$\mathbb{G}^{22}(\tau, t) = \begin{bmatrix} \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] & 0 \\ 0 & \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Tirando o traço da matriz $\mathbb{G}^{im}(\tau, t)\rho(t)$, obtém-se que o primeiro dos elementos da matriz densidade média é dado por

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_n(\tau)_{11} e^{\tau/\tau_0} &= \cos^2(\theta_n \tau) \rho_n(0)_{11} + \text{sen}^2(\theta_n \tau) \rho_n(0)_{22} \\ &+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \{ \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] \bar{\rho}_n(t)_{11} + \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] \bar{\rho}_n(t)_{22} \}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

reescrevendo a equação anterior

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_n(\tau)_{11} e^{\tau/\tau_0} &= \rho_n(0)_{11} + [\rho_n(0)_{22} - \rho_n(0)_{11}] \text{sen}^2(\theta_n \tau) \\ &+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau e^{t/\tau_0} \{ \bar{\rho}_n(t)_{11} + [\bar{\rho}_n(t)_{22} - \bar{\rho}_n(t)_{11}] \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] \} dt. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para $\bar{\rho}_{22}(\tau)$ se tem

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_n(\tau)_{22} e^{\tau/\tau_0} &= \rho_n(0)_{22} + [\rho_n(0)_{11} - \rho_n(0)_{22}] \text{sen}^2(\theta_n \tau) \\ &+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau e^{t/\tau_0} \{ \bar{\rho}_n(t)_{22} + [\bar{\rho}_n(t)_{11} - \bar{\rho}_n(t)_{22}] \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] \} dt. \end{aligned} \quad (3.37)$$

O interesse deste trabalho é estudar o comportamento da inversão de população, quantidade definida em termos de $\bar{\rho}(\tau)_{11}$ e $\bar{\rho}(\tau)_{22}$ somente. Para conhecer a dinâmica do sistema basta calcular os elementos $\bar{\rho}(\tau)_{11}$ e $\bar{\rho}(\tau)_{12}$ pois $\bar{\rho}(\tau)_{11} + \bar{\rho}(\tau)_{22} = 1$ e $\bar{\rho}(\tau)_{12} = \bar{\rho}^*(\tau)_{21}$.

3.3. Inversão de população

A inversão de população é definida como a diferença entre as probabilidades do sistema estar no estado excitado e a probabilidade deste estar no estado fundamental, como definido no capítulo anterior

$$W_n(\tau) = \rho_n(\tau)_{11} - \rho_n(\tau)_{22}. \quad (3.38)$$

Para obter o valor médio da inversão de população no caso em que o coeficiente de acoplamento sofre variações estocásticas se subtraem (3.36) e (3.37), de onde

$$\begin{aligned} \overline{W_n(\tau)} e^{\tau/\tau_0} &= W_n(0)[1 - 2 \text{sen}^2(\theta_n \tau)] \\ &+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau e^{t/\tau_0} \{ 1 - 2 \text{sen}^2[\theta_n(\tau - t)] \overline{W_n(t)} \} dt. \end{aligned} \quad (3.39)$$

A solução da equação anterior foi obtida levando em conta as propriedades da transformada de Laplace e é apresentada no apêndice B, sendo que $\overline{W_n(\tau)}$ é

$$\overline{W_n(t)} = W_n(0) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \text{sen}(\Omega_n t) \right], \quad (3.40)$$

onde o parâmetro Ω_n foi definido como

$$\Omega_n = 2g_0 \sqrt{n+1 - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}}. \quad (3.41)$$

Devido ao fato de que o campo considerado foi inicialmente preparado em um estado coerente a inversão de população se escreve como [15]

$$\overline{W(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \overline{W_n(t)}, \quad (3.42)$$

com o estado coerente descrito segundo

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad \text{com} \quad C_n = \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2}\right] \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (3.43)$$

obtendo que

$$\begin{aligned} \overline{W(t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} W_n(0) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \text{sen}(\Omega_n t) \right] \\ &= e^{-|\alpha|^2 - \frac{t}{2\tau_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} W_n(0) \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \text{sen}(\Omega_n t) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

com o átomo entrando na cavidade em estado excitado $W_n(0) = 1$.

Visando encontrar as expressões para o colapso e para cada um dos ressurgimentos reescreve-se $\overline{W(t)}$ definindo

$$A_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad \text{e} \quad B_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n}, \quad (3.45)$$

de modo que

$$\overline{W(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(\Omega_n t) + B_n \text{sen}(\Omega_n t)] e^{-t/2\tau_0}. \quad (3.46)$$

A_n e B_n independem de t e portanto as séries em (3.46) convergem uniforme e absolutamente

em $t \in \mathbb{R}$, pode-se então usar a soma de Poisson² [23] para escrever $\overline{W}(t)$ como

$$\begin{aligned} \overline{W}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} A(n) e^{2\pi i \nu n} \cos(\Omega_n t) dn + \frac{1}{2} A(0) \cos(\Omega_0 t) \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} B(n) e^{2\pi i \nu n} \sen(\Omega_n t) dn + \frac{1}{2} B(0) \sen(\Omega_0 t) \right] e^{-t/2\tau_0}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

o que é igual a

$$\overline{W}(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[a_{\nu}(t) + b_{\nu}(t) + \frac{1}{2} A(0) \cos(\Omega_0 t) + \frac{1}{2} B(0) \sen(\Omega_0 t) \right] e^{-t/2\tau_0}, \quad (3.48)$$

se

$$a_{\nu}(t) = \int_0^{\infty} A(n) e^{2\pi i \nu n} \cos(\Omega_n t) dn, \quad (3.49)$$

e

$$b_{\nu}(t) = \int_0^{\infty} B(n) e^{2\pi i \nu n} \sen(\Omega_n t). \quad (3.50)$$

Os coeficientes $A(n)$ e $B(n)$ estendem a A_n e B_n respetivamente para $n \in \mathbb{R}$. Para valores grandes de $|\alpha|^2$ usa-se a aproximação gaussiana para calcular o valor dos coeficientes. Como mostra-se no apêndice C, $A(n)$ e $B(n)$ são

$$A(n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-2(\sqrt{n}-|\alpha|^2)}, \quad (3.51)$$

e

$$B(n) \approx \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-2(\sqrt{n}-|\alpha|^2)}. \quad (3.52)$$

Para estimar o valor das integrais (3.49) e (3.50) usar-se-á o método de “steepest descents”³. Primeiro se estima o valor da integral dada por (3.49), onde substituindo-se o valor de $A(n)$ dado por (3.51) com $|\alpha|^2 = \bar{n}$, e reescrevendo o $\cos(\Omega_n t)$ como a parte real de $e^{-i\Omega_n t}$, obtém-se a seguinte a integral

$$a'_{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \int_0^{\infty} e^{-2(\sqrt{n}-\sqrt{\bar{n}})^2} \Re \left[e^{i(2\pi\nu n - \Omega_n t)} \right] dn. \quad (3.53)$$

²As fórmulas de soma de Poisson utilizam técnicas de séries de Fourier para expressar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i2\pi\nu x} dx \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \frac{1}{2} f_0 + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x) e^{i2\pi\nu x} dx,$$

onde $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) é uma interpolação contínua e continuamente diferenciável de f_n ($n \in \mathbb{R}$), ou seja, $f(n) = f_n$ para $n \in \mathbb{Z}$.

³Que é uma generalização do método de Laplace para resolver integrais no plano complexo. Tem um efeito mais prático na resolução de uma classe específica de integrais do tipo

$$f(\lambda) = \int_C g(z) e^{\lambda h(z)} dz,$$

onde C é um contorno no plano complexo, as funções $g(z)$ e $h(z)$ são funções analíticas em z em alguma região do plano complexo que contenha a C e (no caso mais simples) independem de λ , onde λ é um número real positivo. O que o método nos dá é a solução assintótica para $f(\lambda)$ com valores do parâmetro λ grandes [24].

Escrevendo explicitamente Ω_n dado por (3.41), a'_ν é

$$a'_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \Re \left[\int_0^\infty \exp \left\{ -2(\sqrt{n} - \sqrt{\bar{n}})^2 + 2i\pi\nu n - 2ig_0 t \sqrt{(n+1) - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}} \right\} dn \right]. \quad (3.54)$$

Fazendo uma mudança de variáveis onde $n = \bar{n}x^2 - \nu$, o coeficiente a'_ν torna-se⁴

$$a'_\nu(\tau) = \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu\nu} \int_{\sqrt{\nu/\bar{n}}}^\infty x e^{-2\bar{n}(\sqrt{x^2 - \nu/\bar{n}} - 1)^2 - 2i\pi\nu\bar{n}(x^2 - 2\tau x)} dx \right], \quad (3.55)$$

onde se tem definido

$$\lambda = 2g_0, \quad \delta = \frac{1}{2\tau_0}, \quad \nu = \frac{\lambda^2 - \delta^2}{\lambda^2} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{g_0 t}{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}. \quad (3.56)$$

Para \bar{n} grande a contribuição principal está na vizinhança de $x = 1$, então se pode integrar entre $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, com ϵ pequeno tal que $1 - \epsilon > \sqrt{\nu/\bar{n}}$.

Considerando \bar{n} grande e x próximo de 1

$$a'_\nu(\tau) \approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu\nu} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} x e^{-2\bar{n}(x-1)^2 + 2i\pi\nu\bar{n}(x^2 - 2\tau x)} dx \right]. \quad (3.57)$$

Definindo-se

$$h(x) = -2(x-1)^2 + 2i\pi\nu(x^2 - 2\tau x), \quad (3.58)$$

tem-se que

$$a'_\nu \approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu\nu} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} x e^{\bar{n}h(x)} dx \right]. \quad (3.59)$$

Em termos da variável complexa z e extendendo os limites de integração, a'_ν é aproximadamente

$$a'_\nu \approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu\nu} \int_{-\infty}^\infty z e^{\bar{n}h(z)} dz \right]. \quad (3.60)$$

A Integral acima pode ser estimada segundo o método de “steepest descent” [24], com o que o coeficiente a'_ν escreve-se

$$\begin{aligned} a'_\nu &\approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu\nu} \sqrt{\frac{-2\pi}{\bar{n}h''(z_0)}} z_0 e^{\bar{n}h(z_0)} \right] \\ &= 2 \Re \left[e^{-2i\pi\nu\nu} \sqrt{\frac{-1}{h''(z_0)}} z_0 e^{\bar{n}h(z_0)} \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde o ponto de sela é dado por

$$z_0 = \frac{1 - i\pi\nu\tau}{1 - i\pi\nu}, \quad (3.62)$$

⁴Detalhes das contas da presente seção no apêndice D

segundo a relação $h'(z_0) = 0$. A função $h(z)$ definida em (3.58) avaliada no ponto z_0 dá

$$h(z_0) = \frac{-2\pi^2\nu^2(\tau-1)^2 + 2i\pi\nu(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2}, \quad (3.63)$$

e a raiz da segunda derivada de $h(z)$, também calculada em z_0 , fornece

$$\left\{ \frac{-1}{h''(z_0)} \right\}^{1/2} = \frac{1}{2(1+\pi^2\nu^2)^{1/4}} e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]}. \quad (3.64)$$

De acordo com as expressões anteriores, a'_ν é dado por

$$a'_\nu \sim \Re \left\{ e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]} [1+\pi^2\nu^2\tau+i\pi\nu(1-\tau)] e^{-i2\pi\nu v + \frac{2i\pi\nu\bar{n}(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2}} \right\}. \quad (3.65)$$

Definindo-se

$$\varphi = 2\pi\bar{n}\nu \left[-\frac{v}{\bar{n}} + \frac{(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2} \right], \quad (3.66)$$

a'_ν se escreve como

$$a'_\nu \sim -\frac{e^{\frac{-2\bar{n}\pi^2\nu^2(\tau-1)^2}{1+\pi^2\nu^2}}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} \left[\{(1+\pi^2\nu^2\tau)\sin[\arctan(\pi\nu)] + \pi\nu(1-\tau)\cos[\arctan(\pi\nu)]\} \cos\varphi \right. \\ \left. + \{(1+\pi^2\nu^2\tau)\cos[\arctan(\pi\nu)] - \pi\nu(1-\tau)\sin[\arctan(\pi\nu)]\} \sin\varphi \right]. \quad (3.67)$$

Note-se que a'_ν será relevante para $\tau \approx 1$, ou seja, para

$$\frac{g_0 t}{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}} \approx 1. \quad (3.68)$$

Fazendo uso da soma de Poisson [23] e do método de “steepest descents” [24], estima-se também a integral que define o coeficiente b'_ν , para o qual encontra-se que

$$b'_\nu \sim -\left(\frac{1}{4\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \right) \frac{e^{\frac{-2\bar{n}\pi^2\nu^2(\tau-1)^2}{1+\pi^2\nu^2}}}{2(1+\pi^2\nu^2)^{1/4}} \{ \cos[\arctan(\pi\nu)] \cos\varphi - \sin[\arctan(\pi\nu)] \sin\varphi \}, \quad (3.69)$$

onde τ e φ estão definidas por (3.56) e (3.66) respectivamente.

Os termos para $\nu = 0$ representam o colapso inicial. Os coeficientes a'_0 e b'_0 foram estimados independentemente (ver apêndice D) achando que

$$a'_0 \sim \frac{1}{2} e^{-\bar{n}\frac{\xi^2}{2}} [2\cos(2\bar{n}\xi) - \xi\sin(2\bar{n}\xi)], \quad (3.70)$$

e

$$b'_0 \sim \frac{1}{2g_0\tau_0\sqrt{\bar{n}}} e^{-\bar{n}\frac{\xi^2}{2}} \sin[2\bar{n}\xi], \quad (3.71)$$

onde definiu-se

$$\xi = \frac{\lambda t}{2\sqrt{\bar{n}}}. \quad (3.72)$$

Reescrevendo as equações anteriores tem-se que a inversão de população é

$$W(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [\omega_{\nu}(t) + K(t)] \quad (3.73)$$

onde

$$\omega_{\nu}(t) = [a'_{\nu}(t) + b'(t)] e^{-t/2\tau_0}, \quad (3.74)$$

e

$$K(t) = \left[\frac{1}{2} \{A(0) \cos(\Omega_0 t) + B(0) \sin(\Omega_0 t)\} + a'_0(t) + b'_0(t) \right] e^{-t/2\tau_0}. \quad (3.75)$$

Como $t \geq 0$, para $\nu < 0$, a'_{ν} e b'_{ν} serão muito pequenos e portanto vamos desprezar os termos para $\nu \in [-1, -\infty)$. $\omega_{\nu}(t)$ é explicitamente

$$\omega_{\nu}(t) = -\frac{e^{-\frac{g_0^2}{2(1+\pi^2\nu^2)}(t-t\nu)^2 - \kappa}}{(1 + \pi^2\nu^2)^{5/4}} \left[\left\{ \left(\pi\nu - \frac{g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1 + \pi^2\nu^2}{8\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \right) \cos \beta + \left(1 + \frac{\pi\nu g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} \right) \sin \beta \right\} \cos \varphi \right. \\ \left. + \left\{ \left(1 + \frac{\pi\nu g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} \right) \cos \beta - \left(\pi\nu - \frac{g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1 + \pi^2\nu^2}{8\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \right) \sin \beta \right\} \sin \varphi \right] \quad (3.76)$$

onde

$$\kappa = -\frac{1}{4\tau_0} \left(\frac{4\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}{g_0} - 1 \right) \quad \text{e} \quad \beta = \arctan(\pi\nu). \quad (3.77)$$

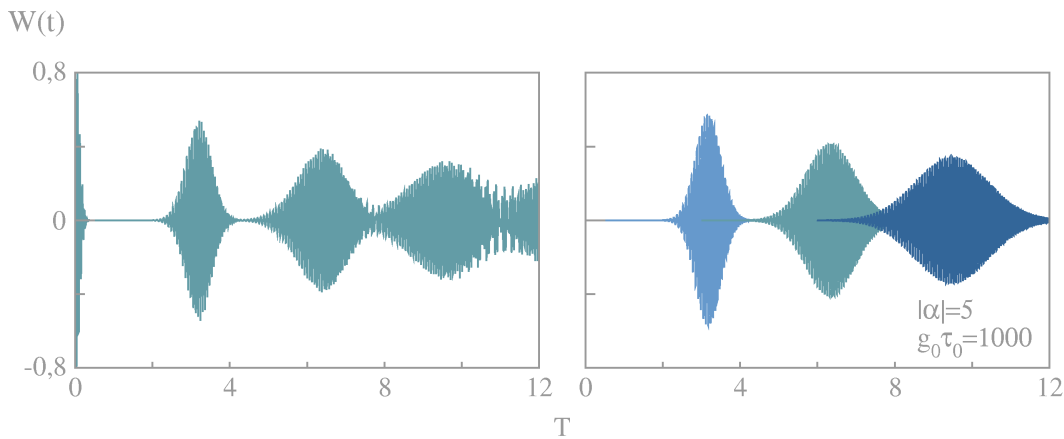


Figura 3.2: Inversão de população como função de $T = g_0 t$. Comparação do colapso e os ressurgimentos obtidos da solução exata para $W(t)$ (3.44) e os obtidos com a aproximação assintótica (3.76). Para $|\alpha| = 5$ e $g_0 \tau_0 = 1000$.

A frequência e o tempo escritos em termos dos parâmetros originais ficam

$$\varphi = -\frac{2\pi\nu((4g_0\tau_0)^2 - 1)}{(4g_0\tau_0)^2} + \frac{4\pi\nu\bar{n} - 4g_0t\sqrt{\bar{n}} - \pi\nu g_0^2 t^2}{2(1 + \pi^2\nu^2)} \quad (3.78)$$

e

$$t_\nu = \frac{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}{g_0} \left(1 - \frac{1 + \pi^2\nu^2}{2\tau_0 g_0^2} \right). \quad (3.79)$$

A fig. 3.2(a) mostra a evolução temporal da inversão de população exata, dada pela equação (3.40), na parte (b) são apresentados os três primeiros ressurgimentos dados por ω_ν de (3.76) com $\nu = 1, 2$ e 3 respectivamente. Observe que o resultado exato e a aproximação assintótica estão em excelente acordo. Pode-se notar que para $T \approx 8$ os ressurgimentos começam a se superpor (quando o estado coerente inicial tem $\alpha = 5$ e o sistema é muito estável, ou seja, o parâmetro $g_0\tau_0$ é grande, por exemplo $g_0\tau_0 = 1000$) logo disso se tem um tempo para o qual é impossível distinguir um ressurgimento do seguinte.

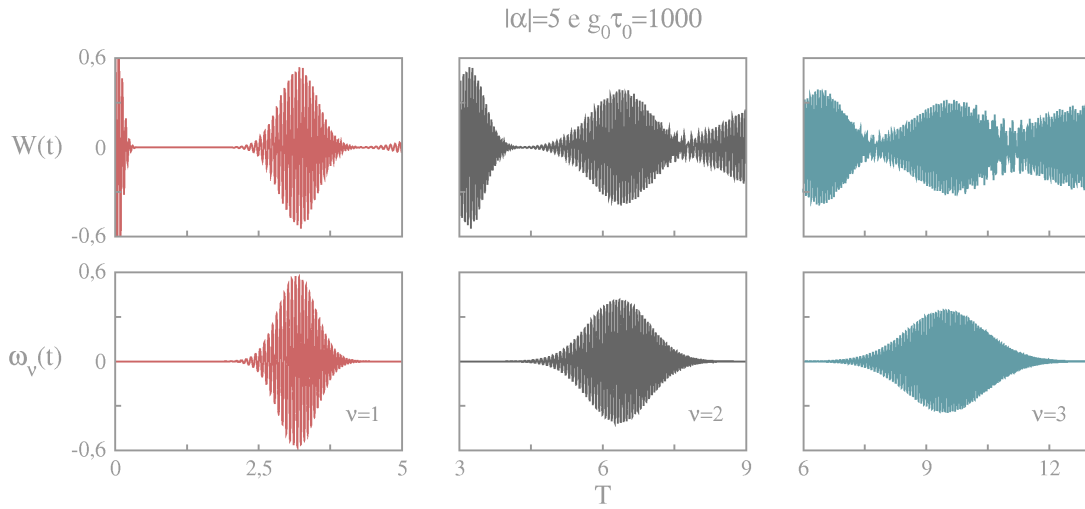


Figura 3.3: Ressurgimentos da inversão de população como função de $T = g_0 t$. Sistema com flutuações estocásticas no coeficiente de acoplamento. Comparação da solução exata e a aproximação assintótica, para $|\alpha| = 10$ e $g_0\tau_0 = 1000$.

Comparando-se cada um dos ressurgimentos (ver fig. 3.3) da inversão de população com cada um dos termos na aproximação assintótica, vemos que cada ω_ν contém exclusivamente um ressurgimento e este aparece em torno do tempo t_ν . Ao ter uma expressão para o colapso e para cada ressurgimento pode-se conhecer e estudar cada um separadamente, mesmo para tempos grandes para os quais já estão superpostos na expressão original, podendo-se caracterizar completamente estudando-se sua largura, frequência de oscilação, tempo de ocorrência, intervalos entre ressurgimentos consecutivos e amplitude com uma excelente aproximação.

Estocasticidade vs Dissipação

O valor esperado da inversão de população atômica pode ser obtido analiticamente sem o uso de aproximações nos casos isolados, com e sem flutuações no coeficiente de acoplamento, e usando a perturbação de primeira ordem no caso dissipativo [25]. Utilizando a soma de Poisson e o método de “steepest descents”, na expressão para a inversão obtiveram-se fórmulas analíticas para o colapso inicial e para cada um dos ressurgimentos. A partir destas expressões extraem-se informações relevantes tais como o tempo de ocorrência, a amplitude, a frequência e a largura aproximadas de cada um dos ressurgimentos. Comparar-se-á os efeitos dos processos estocásticos e da dissipação em cada uma das quantidades que caracterizam $W(t)$.

4.1. Caso ideal

O hamiltoniano do modelo de Jaynes-Cummings é dado por

$$H_{JC} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z + \hbar\lambda(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger), \quad (4.1)$$

em que ω_c é a frequência do modo de interesse do campo na cavidade, $\hbar\omega_a$ é a diferença de energia entre os dois estados atômicos e λ é a constante de acoplamento. A partir desta dinâmica obtém-se que inversão de população [26] é

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{1}{\Omega_n^2} [\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1) \cos(\Omega_n t)], \quad (4.2)$$

onde $\Delta = \omega_c - \omega_a$, é a dessintonia (ou *detuning* em inglês) e $\Omega_n = \Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)$ é conhecida como a frequência de Rabi. O átomo está inicialmente em estado excitado e o campo na cavidade é um estado coerente, o sistema é isolado e o coeficiente de acoplamento não flutua.

Como a cavidade é preparada em um estado coerente, a inversão de população apresenta uma série infinita de colapsos e ressurgimentos, como mostrado na seção final do capítulo 2, e para diferente número inicial de fótons o comportamento da inversão mudará. Na fig. 4.1 a evolução da inversão de população para diferentes condições iniciais do sistema isolado é apresentada.

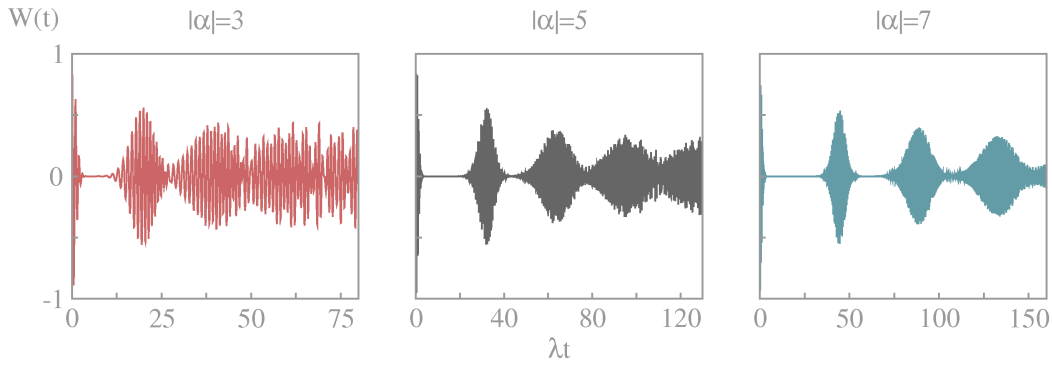


Figura 4.1: Inversão de população como função de λt . Sistema isolado. Ressurgimentos para diferentes valores do número médio inicial de fótons $|\alpha| = 3$, $|\alpha| = 5$ e $|\alpha| = 7$.

Quanto maior $|\alpha|$ os ressurgimentos são mais afastados entre si, o que significa que para um campo muito intenso, o comportamento do sistema será efetivamente igual ao caso em que o campo considerado fosse um campo clássico aleatório tendo só o colapso inicial [27], de modo que a precisão experimental limitará, nestes casos, a detecção do comportamento quântico.

Agora definindo

$$A_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{1}{\Omega_n^2} \Delta^2 \quad \text{e} \quad C_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \frac{1}{\Omega_n^2} 4\lambda^2(n+1), \quad (4.3)$$

a inversão resulta em

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n + C_n \cos(\Omega_n t)]. \quad (4.4)$$

O coeficiente A_n é constante no tempo e sua soma apenas desloca levemente o gráfico da inversão de população no eixo vertical, para a análise dos ressurgimentos não é necessário levar este termo em consideração. Utilizando a soma de Poisson $W(t)$ torna-se

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{1}{2} C_0 \cos(\Omega_0 t) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} C(n) e^{2i\pi\nu n} \cos(\Omega_n t) dn \\ &= \frac{1}{2} C_0 \cos(\Omega_0 t) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu(t) dn, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde

$$c_\nu(t) = \Re \left\{ \int_0^{\infty} C(n) e^{i(2\pi\nu n - \Omega_n t)} dn \right\}. \quad (4.6)$$

A função $C(n)$ estende o coeficiente C_n para um $n \in \mathbb{R}^+$. Segundo a aproximação gaussiana (apêndice C)

$$C(n) \approx \frac{4\lambda^2(n+1)}{\Omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-2(\sqrt{n} - \sqrt{\bar{n}})^2}, \quad (4.7)$$

onde \bar{n} é o número médio de fótons (que é equivalente a $|\alpha|^2$). A integral em (4.6) foi estimada segundo o método de “steepest descent” [24], fornecendo

$$c_\nu \sim \frac{e^{-\frac{\lambda^2(t-t_\nu)^2}{2(1+\pi^2\nu^2)}}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} \left[\left\{ \left(1 + \frac{\pi\nu\lambda t}{2\sqrt{\bar{n}}}\right) \text{sen } \beta + \frac{\lambda}{2\sqrt{\bar{n}}}(t-t_\nu) \text{cos } \beta \right\} \text{cos } \varphi - \left\{ \left(1 + \frac{\pi\nu\lambda t}{2\sqrt{\bar{n}}}\right) \text{cos } \beta - \frac{\lambda}{2\sqrt{\bar{n}}}(t-t_\nu) \text{sen } \beta \right\} \text{sen } \varphi \right], \quad (4.8)$$

com φ definido como

$$\varphi = -\frac{2\pi\nu(\delta^2 + 4\lambda^2)}{4\lambda^2} + \frac{4\pi\nu\bar{n} - 4\lambda t\sqrt{\bar{n}} - \pi\nu\lambda^2 t^2}{2(1 + \pi^2\nu^2)}, \quad (4.9)$$

β como

$$\beta = \arctan(\pi\nu), \quad (4.10)$$

e t_ν dado por

$$t_\nu = \frac{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}{\lambda}. \quad (4.11)$$

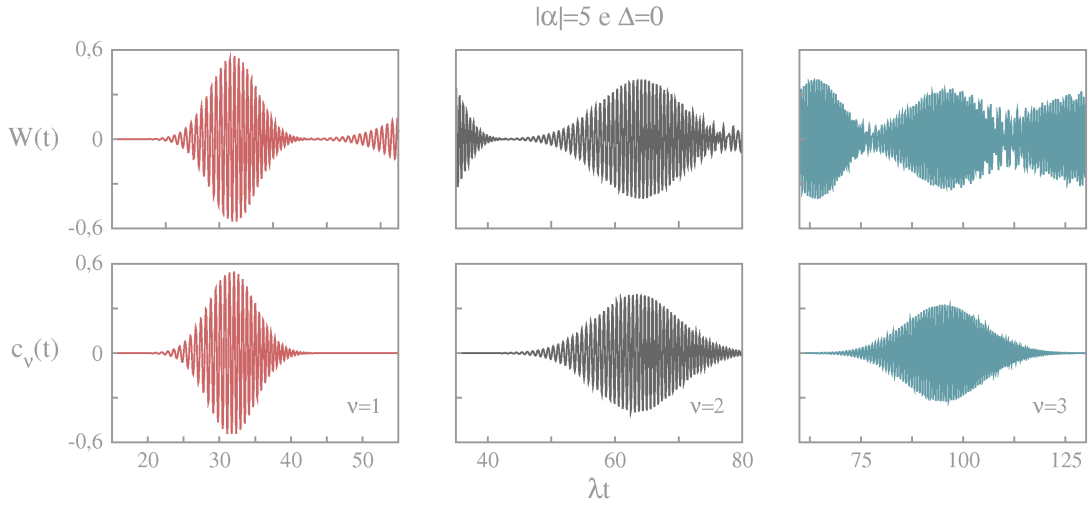


Figura 4.2: Colapso e ressurgimentos como função de λt . Sistema isolado. Comparação entre solução exata e a aproximação assintótica, para $|\alpha| = 5$ e $\Delta = 0$.

Como no caso do JCM com flutuações estocásticas, achou-se uma expressão para cada um dos ressurgimentos no caso ideal, c_ν . Comparam-se (ver fig. 4.2) os ressurgimentos dados pela expressão original (4.2) com os coeficientes c_ν (4.8), para $\nu = 1, 2$ e 3 . Note-se que também para este caso a expressão achada para cada ressurgimento está em excelente acordo com a solução exata, mesmo para $|\alpha| = 5$ (que equivale a um número médio de fótons relativamente pequeno). A partir da equação para c_ν pode-se caracterizar completamente cada um dos ressurgimentos.

A frequência de oscilação aproximada de cada ressurgimento, por exemplo, obtém-se expandindo em série de Taylor a função $\varphi = \varphi(t)$ em torno do valor relevante t_ν , ou seja

$$\varphi(t) = \varphi(t_\nu) + \varphi'(t_\nu)(t - t_\nu) + \mathcal{O}((t - t_\nu)^2). \quad (4.12)$$

Os termos $\varphi(t_\nu)$ e $\varphi'(t_\nu)t_\nu$ são constantes no tempo, eles representam apenas uma fase, de forma que o termo $\varphi'(t_\nu)$ que multiplica t representa a frequência aproximada de oscilação, onde

$$\varphi'(t_\nu) = \frac{-2\lambda\sqrt{\bar{n}} - \pi\nu\lambda^2 t_\nu}{(1 + \pi^2\nu^2)}, \quad (4.13)$$

e de acordo com isto a

$$\text{frequência} \approx 2\lambda\sqrt{\bar{n}}. \quad (4.14)$$

Veja que independe de ν , portanto a frequência de oscilação para todos os ressurgimentos é sempre a mesma.

A partir da definição para o tempo t_ν pode-se definir a separação temporal δt_ν de dois ressurgimentos consecutivos como

$$\delta t_\nu \equiv t_{\nu+1} - t_\nu = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\bar{n}}. \quad (4.15)$$

E a duração do ressurgimento Δt_ν será definida como a largura da gaussiana envoltória do coeficiente (4.8) à altura de $1/e^2$ como mostrado na fig. 4.3, de onde se obtém que

$$\Delta t_\nu = \frac{4\sqrt{1 + \pi^2\nu^2}}{\lambda} \approx \frac{4\pi\nu}{\lambda}. \quad (4.16)$$

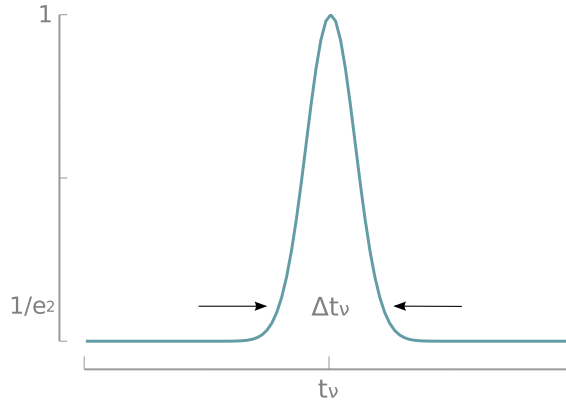


Figura 4.3: Gaussiana. Esquema para a definição da duração de cada ressurgimento.

A separação temporal dos ressurgimentos depende do número médio de fótons do campo, mas a duração de cada um deles não, fato que pode ser observado já desde a fig. 4.1 onde pode-se ver que na inversão para diferentes valores do parâmetro $|\alpha|$ os primeiros ressurgimentos têm aproximadamente a mesma duração, os segundos ressurgimentos para cada caso também e assim para os outros ressurgimentos, mas a distância entre eles muda com $|\alpha|$, veja que para um número maior de fótons os ressurgimentos são cada vez mais distantes um do outro.

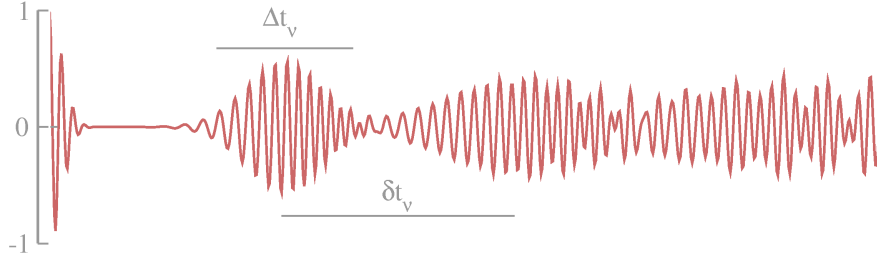


Figura 4.4: Duração dos ressurgimentos e separação temporal entre dois ressurgimentos consecutivos.

Quando $\delta t_\nu > \Delta t_\nu$ (fig. 4.4) os dois ressurgimentos separam-se temporalmente, ou seja, quando a desigualdade (que implica $\nu < \sqrt{\bar{n}}/2$) é violada há superposição dos ressurgimentos. Note-se que (de acordo com este resultado) sempre os primeiros ressurgimentos são bem nítidos e isolados.

O coeficiente c_ν para $\nu = 0$ está centrado em $t = 0$, ele representa o **colapso** inicial e é dado por

$$c_0 \sim e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{2}} \left[\cos(2\lambda t \sqrt{\bar{n}}) - \frac{\lambda t}{2\sqrt{\bar{n}}} \sin(2\lambda t \sqrt{\bar{n}}) \right]. \quad (4.17)$$

4.2. Caso dissipativo

A dinâmica do sistema quando “se permite” interação com o ambiente¹ é governada pela equação mestra

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_{JC}, \rho(t)] + \gamma(2a\rho(t)a^\dagger - a^\dagger a\rho(t) - \rho(t)a^\dagger a), \quad (4.18)$$

onde $\rho(t)$ é a matriz densidade do sistema (átomo-campo), H_{JC} está dado por (4.1), e γ a taxa de dissipação de fótons da cavidade.

Aqui o ambiente está modelado como um conjunto infinito de osciladores a temperatura zero. O superoperador $\gamma(2a\rho(t)a^\dagger - a^\dagger a\rho(t) - \rho(t)a^\dagger a)$ representa a perda de fótons da cavidade com frequência ω_f bem definida e seu posterior acoplamento aos modos contínuos do reservatório. A taxa de dissipação $\gamma \propto \omega_f/Q$ onde Q é o fator de qualidade da cavidade.

Q é definido como a razão entre a energia armazenada e a energia dissipada na cavidade, é uma quantidade sempre finita. Esse fato implica que sempre se vão ter perdas, é por isso que na busca da construção de um modelo teórico realista devem ser levados em consideração os efeitos da dissipação do sistema.

¹Sistema maior, com muitos graus de liberdade. No limite em que este tenha um contínuo de estados quânticos a evolução do operador densidade reduzido do sistema de interesse é irreversível. Aqui a interação com o ambiente implica na perda de fótons do campo na cavidade.

A inversão de população aproximada para o sistema sob tais condições é

$$\begin{aligned}
W^{(1)}(t) &= \text{Tr}(\sigma_z \rho^{(1)}(t)) \\
&= \text{Tr}(|e\rangle \langle e| \rho^{(1)}(t) - |g\rangle \langle g| \rho^{(1)}(t)) \\
&= e^{-|\alpha|^2 e^{-2\gamma t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} e^{-2n\gamma t}}{n!} \frac{1}{\Omega_n^2} [\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1) \cos(\Omega_n t)].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

A expressão acima foi obtida a partir do operador densidade²

$$\begin{aligned}
\rho^{(1)}(t) &= \left[\cos \hat{\beta} - \frac{i\Delta t}{2\hat{\beta}} \text{sen } \hat{\beta} \right] |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \otimes |e\rangle \langle e| \left[\cos \hat{\beta} - \frac{i\Delta t}{2\hat{\beta}} \text{sen } \hat{\beta} \right] \\
&+ \left[\cos \hat{\beta} - \frac{i\Delta t}{2\hat{\beta}} \text{sen } \hat{\beta} \right] |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \otimes |e\rangle \langle g| \left[\frac{i\lambda t}{2\hat{\beta}} a \text{sen } \hat{\beta} \right] \\
&- \left[\frac{i\lambda t}{2\hat{\beta}} a^\dagger \text{sen } \hat{\beta} \right] |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \otimes |g\rangle \langle e| \left[\cos \hat{\beta} + \frac{i\Delta t}{2\hat{\beta}} \text{sen } \hat{\beta} \right] \\
&+ \left[\frac{2\lambda^2 t}{\hat{\beta}} a^\dagger \text{sen } \hat{\beta} \right] |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \otimes |g\rangle \langle g| \left[\frac{t}{2\hat{\beta}} a \text{sen } \hat{\beta} \right],
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde foram definidos

$$\hat{\beta} = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2 a a^\dagger}}{2} t \quad \text{e} \quad \alpha(t) = \alpha e^{-\gamma t}, \tag{4.21}$$

o fator Δ é a dessintonia (a diferença entre as frequências do campo e da transição atômica), λ é o coeficiente de acoplamento, α o número característico do estado coerente inicial e γ é a taxa de dissipação do sistema.

A inversão de população apresenta mudanças bem drásticas ao aumentar a taxa de dissipação, a fig. 4.5 mostra que para γ pequeno ($\gamma/\omega_f \ll 1$) enxergamos o colapso e os sucessivos ressurgimentos na inversão de população. À medida que γ aumenta as oscilações de Rabi vão tendo amplitudes mais constantes e os colapsos começam a desaparecer. Com a aproximação feita só se têm resultados confiáveis para tempos, comparativamente, muito curtos e suas previsões para $\gamma \approx 1$ (que representa um sistema altamente dissipativo) não são boas. Mesmo para uma taxa de dissipação muito pequena, em tempos suficientemente grandes a inversão de população perderá seu caráter quântico pois neste regime não é mais possível ter colapsos e ressurgimentos bem definidos.

Do mesmo jeito que para os casos ideal e estocástico foram usadas a soma de Poisson e o método de “steepest descent” para calcular os coeficientes que caracterizam os ressurgimentos na inversão de população. Obteve-se um resultado simples, formalmente equivalente à inversão de população no caso ideal, onde se faz a troca $\alpha \rightarrow \alpha(t)$. Neste caso

$$\bar{n}(t) = |\alpha(t)|^2 = |\alpha|^2 e^{-2\gamma t}, \tag{4.22}$$

²Obtido na dissertação de mestrado de Clarissa do Vale da Silva Lima [25], a partir da solução aproximada da equação mestra.

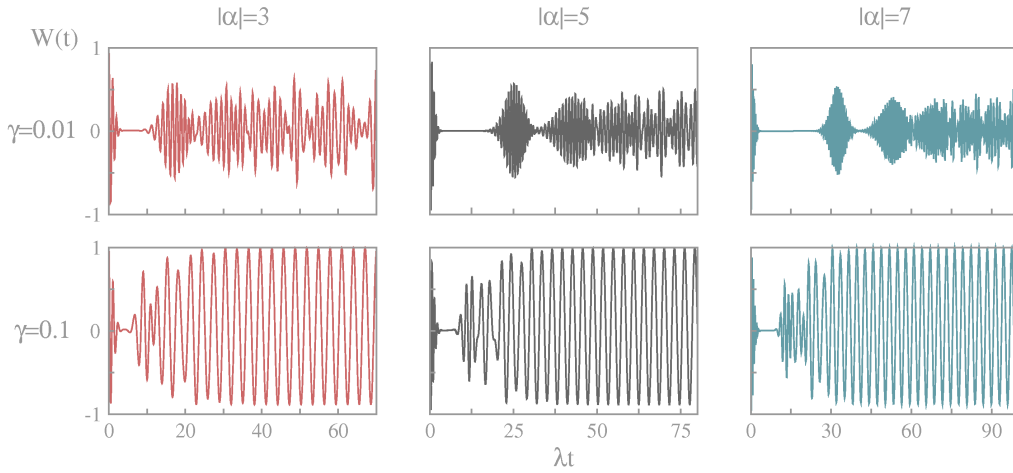


Figura 4.5: Inversão de população como função de λt . Ação da dissipação sobre os ressurgimentos, comparação para diferentes valores das intensidades do campo inicial: $|\alpha| = 3$, $|\alpha| = 5$ e $|\alpha| = 7$, e diferentes valores da taxa de dissipação: $\gamma = 0,01$ e $\gamma = 0,1$, com $\Delta = 0$.

de modo que o coeficiente d_ν é dado pela relação

$$d_\nu \sim \frac{e^{-\frac{\lambda^2(t-t_\nu)^2}{2(1+\pi^2\nu^2)}}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} \left[\left\{ \left(1 + \frac{\pi\nu\lambda t}{2\sqrt{\bar{n}(t)}}\right) \text{sen } \beta + \frac{\lambda}{2\sqrt{\bar{n}(t)}}(t-t_\nu) \text{cos } \beta \right\} \text{cos } \varphi - \left\{ \left(1 + \frac{\pi\nu\lambda t}{2\sqrt{\bar{n}(t)}}\right) \text{cos } \beta - \frac{\lambda}{2\sqrt{\bar{n}(t)}}(t-t_\nu) \text{sen } \beta \right\} \text{sen } \varphi \right]. \quad (4.23)$$

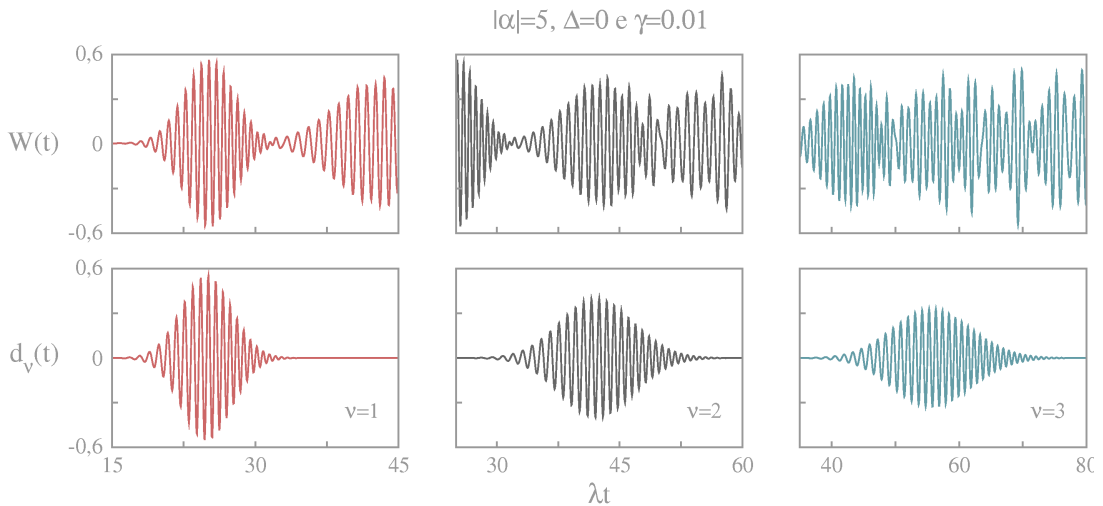


Figura 4.6: Colapso e ressurgimentos como função de λt . Sistema dissipativo. Comparação da solução exata e a aproximação assintótica, para $|\alpha| = 5$, $\Delta = 0$ e $\gamma = 0,01$.

É claro da comparação apresentada na fig. 4.6 da inversão de população com os 3 primeiros

coeficientes d_ν que as duas expressões estão em excelente acordo, e portanto, usar-se-á (4.23) para caracterizar os ressurgimentos para o sistema dissipativo.

O ângulo φ na equação para d_ν é dado por

$$\varphi = -\frac{2\pi\nu(\delta^2 + 4\lambda^2)}{4\lambda^2} + \frac{4\pi\nu\bar{n}(t) - 4\lambda t\sqrt{\bar{n}(t)} - \pi\nu\lambda^2 t^2}{2(1 + \pi^2\nu^2)}, \quad (4.24)$$

e a solução implícita da equação

$$t_\nu = \frac{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}(t_\nu)}}{\lambda}, \quad (4.25)$$

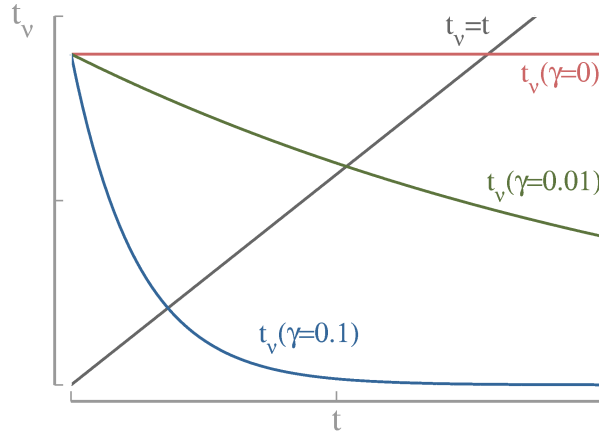


Figura 4.7: Método gráfico para a estimativa do valor do parâmetro t_ν , para diferentes valores da taxa de dissipação γ e $\nu = 1$.

dá o tempo no qual o ressurgimento para um ν dado é centrado (o coeficiente d_ν é quantitativamente relevante só na vizinhança de t_ν). Para conhecer o valor de tal parâmetro deve-se resolver a equação trascendental anterior. Pode-se estimar o valor de t_ν , a partir de uma análise gráfica, achando o ponto no qual a linha $t_\nu = t$ e a curva $t_\nu = 2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}e^{-2\gamma t}/\lambda$ se cruzam.

Na fig. 4.7 as diferentes curvas coloridas correspondem a valores de t_ν para diferentes valores da taxa de dissipação, o ponto onde a linha cinza, que representa $t_\nu = t$, cruza com as outras curvas é o valor do tempo no qual o ressurgimento é centrado. Pode-se observar que o tempo t_ν depende do valor da dissipação e é cada vez menor quanto a taxa de dissipação do sistema aumenta.

A frequência de oscilação é dada pela expressão

$$\varphi'(t_\nu) = \frac{-4\gamma[(\pi\nu\bar{n}(t_\nu) + \lambda t_\nu\sqrt{\bar{n}(t_\nu)}) - 2\lambda\sqrt{\bar{n}(t_\nu)} - \pi\nu\lambda^2 t_\nu]}{(1 + \pi^2\nu^2)}. \quad (4.26)$$

Note-se que diferentemente do caso ideal aqui a frequência de oscilação depende de ν , o parâmetro ν cresce com o tempo. Devido aos efeitos dissipativos o campo muda a cada instante, o que resulta em um campo com diferentes características para diferentes tempos, de

modo que a frequência que originalmente dependia só da intensidade do campo e do coeficiente de acoplamento e que era constante no caso ideal agora muda de um ressurgimento para outro. Se $\gamma = 0$ recupera-se a expressão para a frequência achada no caso ideal (4.14).

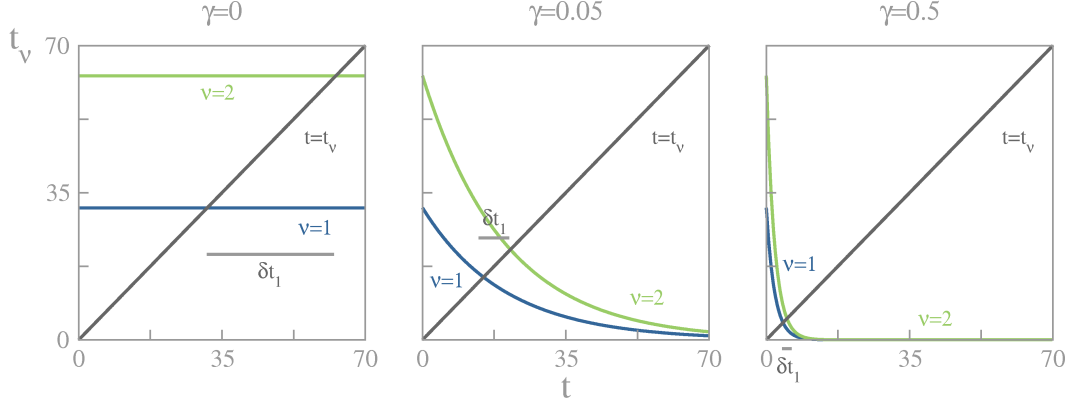


Figura 4.8: Método gráfico para a estimativa do valor do intervalo temporal entre dois ressurgimentos consecutivos δt_ν , para diferentes valores da taxa de dissipação γ .

Para conhecer a separação entre dois ressurgimentos sucessivos δt_ν definida como $t_{\nu+1} - t_\nu$, para um dado ν e γ , usa-se de novo uma análise gráfica, fig. 4.8, Note que ao aumentar a dissipação na cavidade os ressurgimentos começam a acontecer mais juntos.

Encontra-se que a expressão que caracteriza o colapso inicial é

$$c_0 \sim e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{2}} \left[\cos(2\lambda t \sqrt{\bar{n}(t)}) - \frac{\lambda t}{2\sqrt{\bar{n}(t)}} \text{sen}(2\lambda t \sqrt{\bar{n}(t)}) \right]. \quad (4.27)$$

4.3. Processos estocásticos

No capítulo anterior obteve-se a inversão de população para um sistema composto por um átomo de dois níveis que interage com um único modo do campo tal que o coeficiente de acoplamento sofre variações estocásticas. Como condição inicial se considerou que o átomo entra na cavidade em estado excitado, de onde a inversão de população média $\overline{W}(t)$ obtida foi

$$\begin{aligned} \overline{W}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \text{sen}(\Omega_n t) \right] \\ &= e^{-|\alpha|^2 - \frac{t}{2\tau_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \text{sen}(\Omega_n t) \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

O comportamento da inversão de população para campos coerentes preparados inicialmente com diferentes números de fótons e para diferentes valores do parâmetro de estocasticidade apresenta-se na fig. 4.9. Como é usual o colapso se dá rapidamente, e à medida que o tempo passa ocorre um ressurgimento e este comportamento de colapsos e ressurgimentos se repete

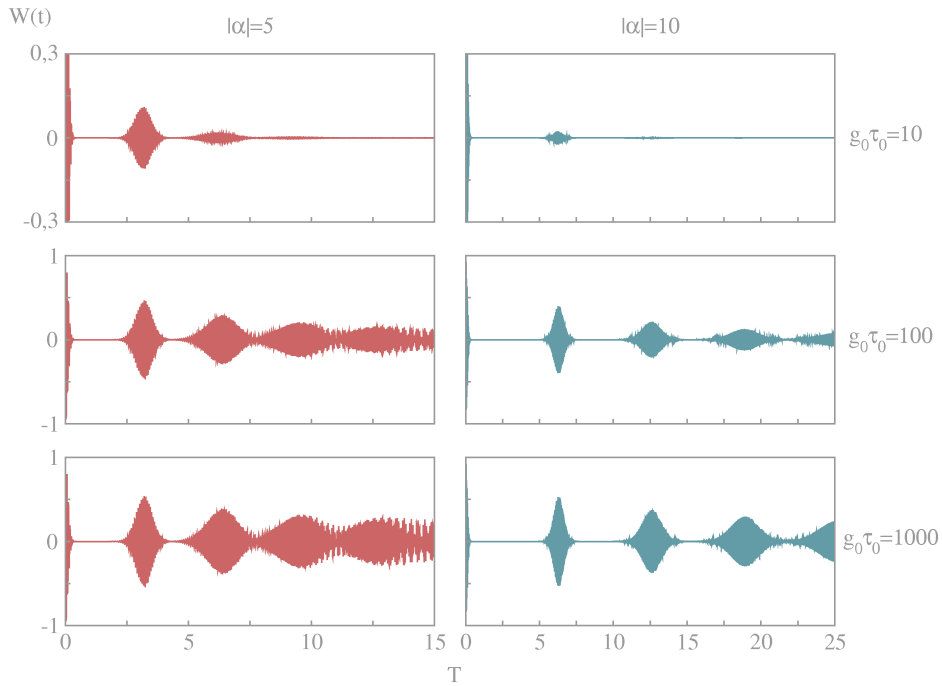


Figura 4.9: Inversão de população como função de $T = g_0 t$. Comparação do colapso e os ressurgimentos para diferentes valores iniciais do número de fótons $|\alpha|^2$ e diferentes valores do parâmetro de estocasticidade $g_0 \tau_0$.

no tempo.

Observe que quanto maior τ_0 o comportamento de $\overline{W(t)}$ é mais parecido com o caso quântico do sistema sem flutuações no acoplamento. Lembre que o τ_0 é o valor médio dos intervalos temporais nos que a fase do acoplamento é fixa, portanto, um τ_0 grande significa uma fase com poucas flutuações no intervalo de interação entre o campo e o átomo.

Um τ_0 pequeno representa um sistema muito instável, o que acontece é que a amplitude da envoltória diminui notavelmente até que os ressurgimentos definitivamente não aparecem, fig. 4.10, tornando-se experimentalmente invisíveis. Neste ponto é recuperado o comportamento da inversão para um campo clássico aleatório.

A inversão de população segundo a aproximação assintótica³ é:

$$W(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_{\nu}(t) + K(t) \tag{4.29}$$

em que

$$\omega_{\nu}(t) = [a'_{\nu}(t) + b'(t)] e^{-t/2\tau_0}, \tag{4.30}$$

³É importante lembrar que para um $\alpha \lesssim 3$ a aproximação falha.

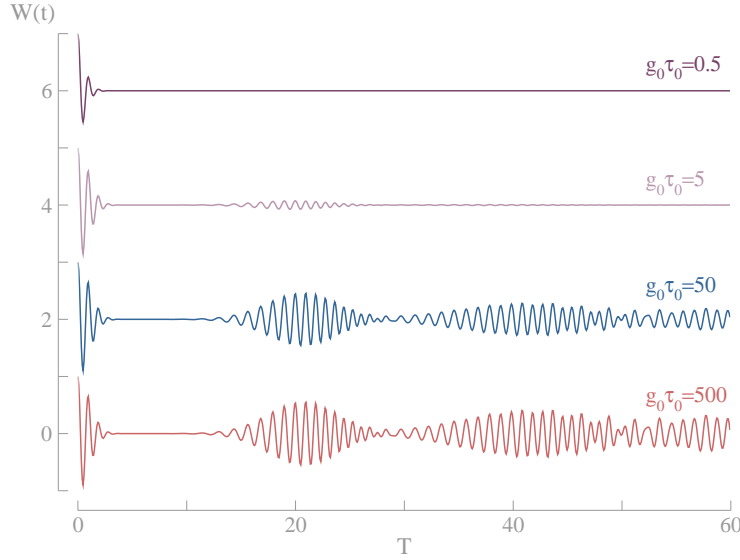


Figura 4.10: Inversão de população como função do tempo $T = g_0 t$. Campo coerente com um número médio inicial de fótons: $\bar{n} = 10$ e diferentes valores do parâmetro $g_0 \tau_0$. A curva para $g_0 \tau_0 = 500$ é $W(t)$, a seguinte curva para $g_0 \tau_0 = 50$ é $W(t) + 2$, para $g_0 \tau_0 = 5$ temos $W(t) + 4$ e finalmente para $g_0 \tau_0 = 0,5$ é $W(t) + 6$.

e

$$K(t) = \left[\frac{1}{2} \{A(0) \cos(\Omega_0 t) + B(0) \sin(\Omega_0 t)\} + a'_0(t) + b'_0(t) \right] e^{-t/2\tau_0}. \quad (4.31)$$

Como achado no capítulo anterior, a expressão para ω_ν é

$$\omega_\nu(t) = -\frac{e^{-\frac{g_0^2}{2(1+\pi^2\nu^2)}(t-t_\nu)^2 - \kappa}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} \left[\left\{ \left(\pi\nu - \frac{g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1+\pi^2\nu^2}{8\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \right) \cos \beta + \left(1 + \frac{\pi\nu g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} \right) \sin \beta \right\} \cos \varphi \right. \\ \left. + \left\{ \left(1 + \frac{\pi\nu g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} \right) \cos \beta - \left(\pi\nu - \frac{g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1+\pi^2\nu^2}{8\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \right) \sin \beta \right\} \sin \varphi \right] \quad (4.32)$$

onde

$$\kappa = -\frac{1}{4\tau_0} \left(\frac{4\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}{g_0} - 1 \right) \quad \text{e} \quad \beta = \arctan(\pi\nu). \quad (4.33)$$

A frequência escrita em termos dos parâmetros originais fica

$$\varphi = -\frac{2\pi\nu((4g_0\tau_0)^2 - 1)}{(4g_0\tau_0)^2} + \frac{4\pi\nu\bar{n} - 4g_0 t \sqrt{\bar{n}} - \pi\nu g_0^2 t^2}{2(1+\pi^2\nu^2)}, \quad (4.34)$$

e o tempo de ocorrência de cada ressurgimento é dado segundo a expressão

$$t_\nu = \frac{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}{g_0} \left(1 - \frac{1+\pi^2\nu^2}{2\tau_0 g_0^2} \right). \quad (4.35)$$

A frequência aproximada de oscilação é dada por: $\varphi'(t_\nu)$, de onde se obtém que

$$\text{frequência} \approx 2g_0\sqrt{\bar{n}} - \frac{\pi^2\nu^2\sqrt{\bar{n}}}{g_0\tau_0} \quad (4.36)$$

Quando $g_0\tau_0 \gg 1$ isto equivale a ter uma única fase constante durante todo o processo de interação na cavidade, e o comportamento da inversão de população é igual ao caso ideal, como anteriormente mencionado. Veja-se que efetivamente para $g_0\tau_0$ grande, o tempo de ocorrência dos ressurgimentos e a frequência aproximada de oscilação coincidem com as expressões análogas às achadas para o caso ideal, com $\lambda = g_0$.

A separação entre ressurgimentos sucessivos é definida como a subtração entre o tempo de ocorrência para um dado ressurgimento e o tempo de ocorrência do ressurgimento imediatamente anterior. Segundo tal definição δt_ν neste caso obedece

$$\delta t_\nu = \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{g_0} \left[\frac{\pi^2}{2g_0\tau_0} (\nu^3 + (\nu+1)^3) + 1 \right]. \quad (4.37)$$

De novo para $g_0\tau_0 \rightarrow \infty$, δt_ν coincide com a separação temporal entre dois sucessivos ressurgimentos para o caso em que o sistema átomo-campo é isolado e o coeficiente de acoplamento não flutua. Para $g_0\tau_0 \approx 1$ (fig. 4.10), os efeitos estocásticos já modificaram notavelmente o comportamento da inversão de população, pois neste regime os ressurgimentos tem uma amplitude bem reduzida, e as separações entre ressurgimentos é muito maior, de modo que se perde informação sobre os ressurgimentos de ordem maior. Por exemplo para $|\alpha| = 5$ e $g_0\tau_0 = 1$ se tem que $\delta t_1 \sim 1400$ o que é muito maior que $\delta t_1 \sim 30$ que é o valor da separação entre os dois primeiros ressurgimentos para o mesmo campo no caso $g_0\tau_0 = 500$.

O colapso inicial é dado pela função (4.31) onde os coeficientes para $\nu = 0$ são dados por

$$a'_0 \sim \frac{1}{2} e^{-\bar{n}\frac{\xi^2}{2}} [2 \cos(2\bar{n}\xi) - \xi \text{sen}(2\bar{n}\xi)], \quad (4.38)$$

e

$$b'_0 \sim \frac{1}{2g_0\sqrt{\bar{n}}} e^{-\bar{n}\frac{\xi^2}{2}} \text{sen}[2\bar{n}\xi]. \quad (4.39)$$

Tanto os efeitos das flutuações no coeficiente de acoplamento como a dissipação no JCM vão mudar a forma, frequência e os tempos que caracterizam a inversão de população. Ambos processos “matam” os ressurgimentos (que são a característica quântica da inversão). Os saltos estocásticos da fase do acoplamento por outro lado vão significar um decaimento muito rápido na amplitude tal que com a diminuição do parâmetro τ_0 vai ficando mais difícil enxergar os ressurgimentos de ordem maior, fazendo que no limite $\tau_0 \rightarrow 0$ só se apresentará o colapso inicial, lembrando o comportamento da inversão no caso em que a cavidade confina um campo clássico completamente aleatório.

Conclusões

Nas montagens em eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC) com certeza há flutuações dos campos utilizados e este é um fator que pode influenciar os resultados do modelo de interesse como sistema fechado. Influências externas em sua grande maioria são levadas em consideração através da inclusão de um banho de osciladores. Neste contexto os efeitos de flutuações por exemplo na constante de acoplamento átomo-campo são bem menos explorados. O objetivo do presente trabalho é contribuir no sentido de esclarecer e comparar os dois efeitos (dissipativos e estocástico) com especial ênfase nos efeitos das flutuações estocásticas.

Assim, estudou-se a interação entre um átomo e um único modo de um campo eletromagnético quantizado, considerando que devido a diferentes aspectos da preparação do estado atômico ou do controle da fonte do campo podem-se apresentar flutuações estocásticas na interação. Por este motivo, considerou-se um coeficiente de acoplamento complexo, tal que, a fase é dependente do tempo e sofre variações estocásticas em forma de saltos instantâneos separados por intervalos de tempo de duração média τ_0 , onde o valor da fase segue uma distribuição de probabilidade uniforme. Para tal sistema obteve-se expressões analíticas exatas para o operador densidade médio (sobre as flutuações do coeficiente) e para a inversão de população, que não é mais que a relação entre as amplitudes de probabilidade do átomo estar no estado excitado e o átomo estar no estado fundamental para um dado t . Como condições iniciais se considerou que o átomo entra na cavidade em estado excitado e o campo está em estado coerente.

Usando a técnica da ressonância de Poisson e o método de “steepest descent” construiu-se uma aproximação assintótica, que nos permitiu obter resultados analíticos para a forma, frequências e tempos característicos do colapso inicial e de cada um dos ressurgimentos presentes na inversão de população para estados coerentes. Do ponto de vista formal, pode-se testar a qualidade da aproximação assintótica utilizada e determinar dentro do contexto experimental de EQC o número mínimo de fótons a ser usado e comparado com segurança a nosso modelo. Vemos que surpreendentemente para $|\alpha| \gtrsim 3$ o acordo já é bom.

Apresentam-se também a inversão de população e a correspondente aproximação assintótica para o caso ideal, no qual o sistema átomo-campo é isolado e o coeficiente de acoplamento não flutua, e para o caso dissipativo, no qual é levada em conta a troca de energia do sistema

com o ambiente, aqui modelado como um conjunto infinito de osciladores a temperatura zero.

Em todos os casos se vê que quanto menor é o número médio inicial de fótons do campo mais rápido se apresentará o primeiro dos ressurgimentos, e também mais rápido se terá a superposição deles, tem um tempo posterior a tais superposições a partir do qual não será possível distinguir um ressurgimento do seguinte. É importante notar que para qualquer número médio de fótons o tempo entre dois ressurgimentos é menor que o tempo de duração do anterior, sempre haverá superposição de ressurgimentos para ν suficientemente grande, ou seja, a inversão de população terá ressurgimentos superpostos e indefinidos para t suficientemente grande.

Uma outra questão do sistema neste contexto é o limite clássico do modelo. Observamos que o efeito tanto das flutuações estocásticas quanto da dissipação é antecipar os ressurgimentos com a diminuição do valor médio dos intervalos entre dois saltos sucessivos τ_0 ou com o aumento da taxa de dissipação do sistema de forma que a curva para a inversão se assemelha à obtida através de uma consideração semiclássica. Tais processos apagam os efeitos quânticos fundamentais para o colapso do emaranhamento entre os dois subsistemas provocado pela interação átomo-campo. Para $\tau_0 \rightarrow 0$ ocorre só o primeiro dos ressurgimentos, do mesmo modo que a inversão de população para um sistema que considera a interação com um campo clássico aleatório. A precisão experimental limitará a detecção do comportamento quântico, de modo que podemos definir limites em τ_0 e γ a partir dos quais os efeitos quânticos não poderão ser detectados.

Dinâmica do modelo de Jaynes-Cummings estocástico

Apresenta-se a conta da dinâmica do sistema constituído por um mono-modo do campo quantizado interagindo com um átomo de dois níveis. O sistema encontra-se isolado e o coeficiente de acoplamento é uma variável dependente do tempo de modo que a sua fase representa um processo estocástico e varia em forma de saltos instantâneos. O Hamiltoniano que governa a interação é

$$H_{Int} = g^*(t)S_+a + g(t)S_-a^\dagger, \quad (\text{A.1})$$

onde S_+ e S_- são os operadores de spin de Pauli, que aqui representam os operadores de transição atômica. E a e a^\dagger são os operadores de destruição e criação de fótons do campo. O acoplamento entre o átomo e o campo depende do tempo da seguinte maneira

$$g(t) = g_0 e^{i\phi(t)}, \quad (\text{A.2})$$

com a fase $\phi(t)$ variando estocasticamente e a amplitude g_0 sendo uma quantidade constante, real e positiva. Os saltos instantâneos de $\phi(t)$ acontecem separados por intervalos de tempo de duração média τ_0 .

No problema têm-se duas variáveis estocásticas: os intervalos temporais entre um salto e o seguinte e o valor da fase constante em cada um desses intervalos. Definindo $\tau = t_i - t_{i-1}$ com $t_0 = 0$, e considerando que esta variável segue a distribuição de probabilidade:

$$dQ(\tau) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau, \quad (\text{A.3})$$

como toda distribuição de probabilidade ela obedece que

$$\int_0^\infty dQ(\tau) = \frac{1}{\tau_0} \int_0^\infty e^{-\tau/\tau_0} d\tau = \left[-e^{-\tau/\tau_0} \right]_0^\infty = 1, \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\langle \tau \rangle = \int_0^\infty \tau d\tau = \int_0^\infty \frac{\tau}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} d\tau = \left[-(\tau + \tau_0) e^{-\tau/\tau_0} \right]_0^\infty = \tau_0, \quad (\text{A.5})$$

de onde $dQ(\tau)$ é uma distribuição de probabilidade com intervalos de duração média τ_0 , como acima mencionado.

A distribuição de probabilidade para a fase é suposta uniforme sobre $[0, 2\pi)$. O valor que $\phi(t)$ assume sobre o intervalo $[t_i, t_{i+1})$ é denotado ϕ_i . É considerado apenas o caso em que os $\phi(t)$ sobre os intervalos adjacentes não são correlacionados. A distribuição de probabilidade para $\phi(t)$ é dada por

$$dq(\phi) = \frac{d\phi}{2\pi}, \quad (\text{A.6})$$

que obedece

$$\int_0^{2\pi} dq(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = 1, \quad (\text{A.7})$$

com valor médio

$$\langle \phi \rangle = \int_0^{2\pi} \phi dq(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi d\phi = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\phi^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi. \quad (\text{A.8})$$

A evolução temporal da matriz densidade no intervalo $[t', t]$, supondo ϕ constante durante todo esse intervalo, é dada através da transformação unitária $\mathcal{U}(\phi, t, t')$

$$\rho(t; \phi) = \mathcal{U}(\phi; t, t') \rho(t') \mathcal{U}^{-1}(\phi; t, t') \quad (\text{A.9})$$

Se no intervalo $(0, t)$ ocorrem k saltos em ϕ , que valerá ϕ_0 em $[0, t_1)$, ϕ_1 em $[t_1, t_2)$, ϕ_2 em $[t_2, t_3)$, etc, até ϕ_k em $[t_k, t)$, com $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < t$, no primeiro intervalo temporal a dinâmica esta dada por

$$\rho(t_1; \phi_0) = \mathcal{U}(\phi_0; t_1, 0) \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; t_1, 0), \quad (\text{A.10})$$

e assim para o segundo intervalo se tem

$$\begin{aligned} \rho(t_2; t_1, \phi_0, \phi_1) &= \mathcal{U}(\phi_1; t_2, t_1) \rho(t_1; \phi_0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_1; t_2, t_1) \\ &= \mathcal{U}(\phi_1; t_2, t_1) \mathcal{U}(\phi_0; t_1, 0) \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; t_1, 0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_1; t_2, t_1), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e para o terceiro

$$\begin{aligned} \rho(t_3; t_1, t_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) &= \mathcal{U}(\phi_2; t_3, t_2) \rho(t_2; t_1, \phi_0, \phi_1) \mathcal{U}^{-1}(\phi_2; t_3, t_2) \\ &= \mathcal{U}(\phi_2; t_3, t_2) \mathcal{U}(\phi_1; t_2, t_1) \mathcal{U}(\phi_0; t_1, 0) \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; t_1, 0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_1; t_2, t_1) \mathcal{U}^{-1}(\phi_2; t_3, t_2), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

aqui os t_i 's e os ϕ_i 's que aparecem à direita dos ";" são as variáveis aleatórias já escolhidas. Finalmente no tempo t

$$\begin{aligned} \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k) &= \mathcal{U}(\phi_k; t, t_k) \mathcal{U}(\phi_{k-1}; t_k, t_{k-1}) \dots \mathcal{U}(\phi_1; t_2, t_1) \mathcal{U}(\phi_0; t_1, 0) \\ &\quad \times \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; t_1, 0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_1; t_2, t_1) \dots \mathcal{U}^{-1}(\phi_{k-1}; t_k, t_{k-1}) \mathcal{U}^{-1}(\phi_k; t, t_k). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A probabilidade de que no intervalo $(0, t)$ ocorrerem k saltos em ϕ nos tempos t_1, t_2, \dots, t_k com ϕ valendo $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k$ em cada intervalo respetivamente é

$$\begin{aligned} dP(t_1, t_2, \dots, t_k, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k; t) = & \\ & \text{Prob} \{ \phi(0) = \phi_0 \} \times \text{Prob} \{ \tau_1 = t_1 - 0 \} \times \\ & \text{Prob} \{ \phi(t_1) = \phi_1 \} \times \text{Prob} \{ \tau_2 = t_2 - t_1 \} \times \\ & \text{Prob} \{ \phi(t_2) = \phi_2 \} \times \text{Prob} \{ \tau_3 = t_3 - t_2 \} \times \dots \\ & \dots \times \text{Prob} \{ \phi(t_{k-1}) = \phi_{k-1} \} \times \text{Prob} \{ \tau_k = t_k - t_{k-1} \} \times \\ & \text{Prob} \{ \phi(t_k) = \phi_k \} \times \text{Prob} \{ \tau_{k+1} > t - t_k \}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Onde $t_0 = 0$ e de acordo com (A.3) $\text{Prob} \{ \tau_i = t_i - t_{i-1} \} = dQ(t_i - t_{i-1})$ para $i = 1, \dots, k$ e de (A.6) temos que $\text{Prob} \{ \phi(t_i) = \phi_i \} = dq(\phi)$ para $i = 0, \dots, k$. Se impõe que no intervalo $[t_k, t]$ o $(k+1)$ -ésimo salto não ocorra, por tanto $\tau_{k+1} > t - t_k$. Deve-se integrar porque não é uma probabilidade puntual, é sobre um intervalo

$$\begin{aligned} \text{Prob} \{ \tau_{k+1} > t - t_k \} &= \int_{t-t_k}^{\infty} dQ(\tau_{k+1}) = \frac{1}{\tau_0} \int_{t-t_k}^{\infty} e^{-\tau_{k+1}/\tau_0} d\tau_{k+1} \\ &= \left[-e^{-\tau_{k+1}/\tau_0} \right]_{t-t_k}^{\infty} = e^{-(t-t_k)/\tau_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

assim,

$$\begin{aligned} dP(t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k; t) &= \\ & dq(\phi_0) \cdot \frac{1}{\tau_0} e^{-(t_1-0)/\tau_0} d\tau_1 \cdot dq(\phi_1) \cdot \frac{1}{\tau_0} e^{-(t_2-t_1)/\tau_0} d\tau_2 \dots \\ & \dots dq(\phi_{k-1}) \cdot \frac{1}{\tau_0} e^{-(t_k-t_{k-1})/\tau_0} d\tau_k \cdot dq(\phi_k) \cdot e^{-(t-t_k)/\tau_0} \\ &= e^{-t/\tau_0} \frac{1}{\tau_0^k} \left(\prod_{i=1}^k d\tau_i \right) \left(\prod_{i=0}^k dq(\phi_i) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

o espaço amostral inclui apenas a região onde $\tau_i > 0$ com $i = 1, \dots, k$ e $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k < t$.

Se pode passar das integrais nas variáveis $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ para integrais nas variáveis t_1, t_2, \dots, t_k através da matriz Jacobiana

$$\frac{\partial(\tau_1, \dots, \tau_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\tau_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\tau_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\tau_1}{\partial t_k} \\ \frac{\partial\tau_2}{\partial t_1} & \frac{\partial\tau_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\tau_2}{\partial t_k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial\tau_k}{\partial t_1} & \frac{\partial\tau_k}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\tau_k}{\partial t_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal

$$\det \left[\frac{\partial(\tau_1, \dots, \tau_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)} \right] = 1, \quad (\text{A.18})$$

logo,

$$dP(t_1, t_2, \dots, t_k, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k; t) = e^{-t/\tau_0} \frac{1}{\tau_0^k} \left(\prod_{i=1}^k dt_i \right) \left(\prod_{i=0}^k dq(\phi_i) \right) \quad (\text{A.19})$$

de maneira análoga o espaço amostral inclui apenas a região onde $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$. Portanto, o valor médio da matriz densidade no instante t , supondo que a fase ϕ sofra uma quantidade estocástica de saltos, será

$$\bar{\rho}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \int_{\Lambda} dP(t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k; t) \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k) \quad (\text{A.20})$$

sendo $\Gamma = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$ e $\Lambda = 0 \leq \phi_i < 2\pi$, tem-se

$$\bar{\rho}(t) = e^{-t/\tau_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\tau_0^k} \int_{\Gamma} \dots \int \prod_{i=1}^k dt_i \int_{\Lambda} \dots \int \prod_{i=0}^k dq(\phi_i) \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k), \quad (\text{A.21})$$

onde o termo da somatória com $k = 0$ será

$$\int dq(\phi_0) \rho(t; \phi_0), \quad (\text{A.22})$$

e em geral

$$\int_{\Gamma} \dots \int \prod_{i=1}^k dt_i = \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1. \quad (\text{A.23})$$

Para o caso das distribuições uniformes

$$\int_{\Lambda} \dots \int \prod_{i=0}^k dq(\phi_i) = \int_0^{2\pi} d\phi_0 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \dots \int_0^{2\pi} d\phi_k \quad (\text{A.24})$$

reescrevendo (A.21) para uma distribuição de fases qualquer, fica

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t) = & e^{-t/\tau_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\tau_0^k} \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \times \\ & \int dq(\phi_k) \int dq(\phi_{k-1}) \dots \int dq(\phi_0) \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Usando a expressão (A.13) e listando explicitamente os primeiros termos

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t)e^{t/\tau_0} = & \int dq(\phi_0) \rho(t; \phi_0) + \frac{1}{\tau_0} \int_0^t dt_1 \int dq(\phi_1) \int dq(\phi_0) \rho(t; t_1, \phi_0, \phi_1) \\ & + \frac{1}{\tau_0^2} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int dq(\phi_2) \int dq(\phi_1) \int dq(\phi_0) \rho(t; t_1, t_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) + \dots \\ = & I_0(t) + I_1(t) + I_2(t) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Observe que

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) I_0(t) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) \\
&= \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \rho(t; \phi_0) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) \\
&= \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \int dq(\phi_0) \rho(\tau; t, \phi_0, \phi) = I_1(\tau),
\end{aligned} \tag{A.27}$$

analogamente

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) I_k(t) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) = \\
& \frac{1}{\tau_0^{k+1}} \int_0^\tau dt \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int dq(\phi) \int dq(\phi_k) \dots \int dq(\phi_0) \times \\
& \quad \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \rho(t; t_1, \dots, t_k, \phi_0, \dots, \phi_k) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) = \\
& \frac{1}{\tau_0^{k+1}} \int_0^\tau dt \int_0^t dt_k \int_0^{t_k} dt_{k-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int dq(\phi) \int dq(\phi_k) \dots \int dq(\phi_0) \times \\
& \quad \rho(\tau; t_1, \dots, t_k, t, \phi_0, \dots, \phi_k, \phi) = I_{k+1}(\tau),
\end{aligned} \tag{A.28}$$

com isto

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \bar{\rho}(t) e^{t/\tau_0} \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) \\
&= \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \sum_{k=0}^{\infty} I_k(t) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} I_{k+1}(\tau) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} I_k(\tau) - \int dq(\phi_0) \rho(\tau; \phi_0) \\
&= \bar{\rho}(\tau) e^{\tau/\tau_0} - \int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi_0; \tau, 0) \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; \tau, 0),
\end{aligned} \tag{A.29}$$

de onde se obtém a equação integral

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\tau) e^{\tau/\tau_0} &= \int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi_0; \tau, 0) \rho(0) \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; \tau, 0) \\
&+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t) \bar{\rho}(t) \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t).
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Observe que $\bar{\rho}(\tau)$, $\mathcal{U}(\phi; \tau, t)$, $\mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t)$ são operadores representados por matrizes quadradas. Reescrevendo a equação anterior indicando os índices dos elementos de cada uma das matrizes se tem

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\tau)_{im} e^{\tau/\tau_0} &= \int dq(\phi_0) \sum_{k,l} \mathcal{U}(\phi_0; \tau, 0)_{ik} \rho(0)_{kl} \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; \tau, 0)_{lm} \\
&+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \int dq(\phi) \sum_{k,l} \mathcal{U}(\phi; \tau, t)_{ik} \bar{\rho}(t)_{kl} \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t)_{lm}.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Os elementos de matriz naturalmente comutam, usando este fato

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\tau)_{im} e^{\tau/\tau_0} = & \sum_l \left[\sum_k \left(\int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi_0; \tau, 0)_{ik} \mathcal{U}^{-1}(\phi_0; \tau, 0)_{lm} \right) \rho(0)_{kl} \right] \\ & + \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \sum_l \left[\sum_k \left(\int dq(\phi) \mathcal{U}(\phi; \tau, t)_{ik} \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t)_{lm} \right) \bar{\rho}(t)_{kl} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Definindo o conjunto de matrizes $\{\mathbb{G}^{im}(\tau, t)\}$ cujos elementos de matriz são

$$G^{im}(\tau, t)_{lk} = \int dq(\phi_0) \mathcal{U}(\phi; \tau, t)_{ik} \mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, t)_{lm}, \quad (\text{A.33})$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\tau)_{im} e^{\tau/\tau_0} = & \sum_l \left[\sum_k G^{im}(\tau, 0)_{lk} \rho(0)_{kl} \right] \\ & + \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \sum_l \left[\sum_k G^{im}(\tau, t)_{lk} \bar{\rho}(t)_{kl} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

em termos das matrizes

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\tau)_{im} e^{\tau/\tau_0} = & \sum_l [\mathbb{G}^{im}(\tau, 0) \rho(0)]_{ll} \\ & + \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \sum_l [\mathbb{G}^{im}(\tau, t) \bar{\rho}(t)]_{ll}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Como $\text{Tr} A = \sum_l a_{ll}$ obtemos finalmente

$$\bar{\rho}(\tau)_{im} = e^{-\tau/\tau_0} \text{Tr} [\mathbb{G}^{im}(\tau, 0) \rho(0)] + \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{-(\tau-t)/\tau_0} \text{Tr} [\mathbb{G}^{im}(\tau, t) \bar{\rho}(t)]. \quad (\text{A.36})$$

A evolução temporal do sistema esta dada pela transformação unitária $\mathcal{U}(\phi; \tau, 0)$, associada ao Hamiltoniano de interação tal que

$$\mathcal{U}(\phi; \tau, 0) = e^{-iH_{Int}t} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n t) & -ie^{-i\phi} \text{sen}(\theta_n t) \\ -ie^{i\phi} \text{sen}(\theta_n t) & \cos(\theta_n t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

onde $\theta_n = g_0 \sqrt{n+1}$ e a transformação inversa é

$$\mathcal{U}^{-1}(\phi; \tau, 0) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n t) & ie^{-i\phi} \text{sen}(\theta_n t) \\ ie^{i\phi} \text{sen}(\theta_n t) & \cos(\theta_n t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.38})$$

Usando a distribuição uniforme $dq(\phi) = d\phi/2\pi$ obtem-se

$$\begin{aligned}
G^{11}(\tau, t)_{11} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] = \cos^2 [\theta_n(\tau - t)], \\
G^{11}(\tau, t)_{12} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi (-i)e^{-i\phi} \text{sen} [\theta_n(\tau - t)] \cos [\theta_n(\tau - t)] = 0, \\
G^{11}(\tau, t)_{21} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi ie^{i\phi} \cos [\theta_n(\tau - t)] \text{sen} [\theta_n(\tau - t)] = 0, \\
G^{11}(\tau, t)_{22} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi (-i)e^{-i\phi} \text{sen} [\theta_n(\tau - t)] ie^{i\phi} \text{sen} [\theta_n(\tau - t)] = \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)],
\end{aligned} \tag{A.39}$$

com isto facilmente calculamos

$$\mathbb{G}^{11}(\tau, t) = \begin{bmatrix} \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] \end{bmatrix}, \tag{A.40}$$

$$\mathbb{G}^{12}(\tau, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.41}$$

$$\mathbb{G}^{21}(\tau, t) = \begin{bmatrix} 0 & \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.42}$$

e

$$\mathbb{G}^{22}(\tau, t) = \begin{bmatrix} \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] & 0 \\ 0 & \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] \end{bmatrix}. \tag{A.43}$$

Escrevendo a matriz $\mathbb{G}^{im}(\tau, t)\rho(t)$ e tirando o traço tem-se

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\tau)_{11}e^{\tau/\tau_0} &= \cos^2(\theta_n\tau)\rho_{11}(0) + \text{sen}^2(\theta_n\tau)\rho_{22}(0) \\
&+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau dt e^{t/\tau_0} \{ \cos^2 [\theta_n(\tau - t)] \rho_{11}(t) + \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] \rho_{22}(t) \},
\end{aligned} \tag{A.44}$$

pode-se reescrever a anterior equação como

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_{11}(\tau)e^{\tau/\tau_0} &= \rho_{11}(0) + [\rho_{22}(0) - \rho_{11}(0)] \text{sen}^2(\theta_n\tau) \\
&+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau e^{t/\tau_0} \{ \bar{\rho}_{11}(t) + [\bar{\rho}_{22}(t) - \bar{\rho}_{11}(t)] \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] \} dt.
\end{aligned} \tag{A.45}$$

para o outro elemento da diagonal, encontra-se

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_{22}(\tau)e^{\tau/\tau_0} &= \rho_{22}(0) + [\rho_{11}(0) - \rho_{22}(0)] \text{sen}^2(\theta_n\tau) \\
&+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^\tau e^{t/\tau_0} \{ \bar{\rho}_{22}(t) + [\bar{\rho}_{11}(t) - \bar{\rho}_{22}(t)] \text{sen}^2 [\theta_n(\tau - t)] \} dt.
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Ao ser o interesse deste trabalho estudar e caracterizar a inversão de população só foram calculadas os elementos $\bar{\rho}_{11}(\tau)$ e $\bar{\rho}_{22}(\tau)$, que a definem. Para conhecer a dinâmica do sistema basta com calcular os elementos $\bar{\rho}_{11}(\tau)$ e $\bar{\rho}_{12}(\tau)$ pois para um átomo de dois níveis: $\bar{\rho}_{11}(\tau) + \bar{\rho}_{22}(\tau) = 1$ e $\bar{\rho}_{12}(\tau) = \bar{\rho}_{21}^*(\tau)$.

Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ definida para todos os números reais $t \geq 0$, é a função $\hat{f}(s)$ definida como

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (\text{B.1})$$

sempre e quando a integral este definida. Esta transformada integral tem algumas propriedades que fazem que seja muito útil no análise de sistemas lineares.

Propriedades

- Linearidade

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (\text{B.2})$$

- Seno

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (\text{B.3})$$

- Coseno

$$\mathcal{L}\{\text{cos}(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (\text{B.4})$$

- Transformação da derivada

$$\hat{f}^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \hat{f}(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-1} f^{(i-1)}(0). \quad (\text{B.5})$$

- Convolução

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \theta) g(\theta) d\theta, \quad (\text{B.6})$$

$$\widehat{(f * g)}(s) = \hat{f}(s) \hat{g}(s). \quad (\text{B.7})$$

Exemplos

- Se $\hat{f}(s) = 1$

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}. \quad (\text{B.8})$$

- Se $\hat{f}(s) = e^{\lambda t}$

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-(s-\lambda)t}}{s-\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-\lambda}. \quad (\text{B.9})$$

Transformada de Laplace na Inversão de População

A expressão para a inversão de população média, no JCM com flutuações estocásticas no coeficiente de acoplamento, esta dada por

$$\begin{aligned} \overline{W_n(\tau)} e^{\tau/\tau_0} &= W_n(0) [1 - 2 \text{sen}^2(\theta_n \tau)] \\ &+ \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau} e^{t/\tau_0} \left\{ 1 - 2 \text{sen}^2[\theta_n(\tau - t)] \overline{W_n(t)} \right\} dt, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

identifique

$$f(t) = \overline{W_n(t)} e^{t/\tau_0} \quad \text{e} \quad g(t) = 1 - 2 \text{sen}^2(\theta_n t) = \cos(2\theta_n t), \quad (\text{B.11})$$

reescrevendo (B.10)

$$f(\tau) = W_n(0)g(\tau) + \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau} f(t)g(\tau - t) dt. \quad (\text{B.12})$$

Usando a definição de convolução

$$f(\tau) = W_n(0)g(\tau) + \frac{1}{\tau_0} (f * g)(\tau), \quad (\text{B.13})$$

e aplicando a transformada nos dois lados da equação anterior obtemos

$$\hat{f}(s) = W_n(0)\hat{g}(s) + \frac{1}{\tau_0} \hat{f}(s)\hat{g}(s), \quad (\text{B.14})$$

donde

$$\hat{f}(s) = W_n(0) \frac{\hat{g}(s)}{\left[1 - \frac{1}{\tau_0} \hat{g}(s) \right]}. \quad (\text{B.15})$$

Conhecemos a transformada da função cosseno, portanto sabemos que

$$\hat{g}(s) = \mathcal{L} \{ \cos(2\theta_n t) \} = \frac{s}{s^2 + (2\theta_n)^2}, \quad (\text{B.16})$$

assim

$$\hat{f}(s) = W_n(0) \frac{\frac{s}{s^2 + (2\theta_n)^2}}{1 - \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{s}{s^2 + (2\theta_n)^2} \right)} = W_n(0) \frac{s}{s^2 - \frac{1}{\tau_0} s + 4\theta_n^2}. \quad (\text{B.17})$$

Lembrando que $\theta_n = g_0 \sqrt{n+1}$, define-se

$$\Delta = (4g_0)^2 \left[\frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2} - (n+1) \right], \quad (\text{B.18})$$

o discriminante associado ao polinômio de grau 2 no denominador de (B.17). Temos aqui dois casos possíveis: Se $4\tau_0 g_0 > 1$ teremos $\Delta < 0$ para todo $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e se $4\tau_0 g_0 \leq 1$ teremos

$$\begin{aligned} \Delta > 0 & \quad \text{para} \quad 0 \leq n < \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2} - 1, \\ \Delta < 0 & \quad \text{para} \quad n > \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2} - 1, \\ \Delta = 0 & \quad \text{para} \quad n = \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2} - 1, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

naturalmente, se $\frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2} - 1 \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ o caso $\Delta = 0$ não ocorre.

Analisando o primeiro caso, quando $4\tau_0 g_0 > 1$

$$\begin{aligned} s^2 - \frac{1}{\tau_0}s + 4\theta_n^2 &= s^2 - \frac{1}{\tau_0}s + 4g_0^2(n+1) \\ &= \left(s - \frac{1}{2\tau_0}\right)^2 + 4g_0^2 \left[n + 1 - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}\right], \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

portanto

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= W_n(0) \frac{s}{\left(s - \frac{1}{2\tau_0}\right)^2 + 4g_0^2 \left[n + 1 - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}\right]} \\ &= W_n(0) \left[\frac{\left(s - \frac{1}{2\tau_0}\right)}{\left(s - \frac{1}{2\tau_0}\right)^2 + \Omega_n^2} + \frac{1}{2\tau_0} \frac{1}{\Omega_n} \frac{\Omega_n}{\left(s - \frac{1}{2\tau_0}\right)^2 + \Omega_n^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

onde

$$\Omega_n = 2g_0 \sqrt{n + 1 - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}}. \quad (\text{B.22})$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa em $\hat{f}(s)$ se obtém

$$f(t) = W_n(0) \left[e^{\frac{1}{2\tau_0}t} \cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} e^{\frac{1}{2\tau_0}t} \text{sen}(\Omega_n t) \right], \quad (\text{B.23})$$

como $\overline{W_n(t)} = f(t)e^{-\frac{t}{\tau_0}}$ segue

$$\overline{W_n(t)} = W_n(0) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \text{sen}(\Omega_n t) \right]. \quad (\text{B.24})$$

Aproximação gaussiana

O objetivo desta seção é estimar assintoticamente, ou seja, para $|\alpha|$ positivo e grande, a função

$$a_n = \frac{|\alpha^n|^2}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (\text{C.1})$$

Primeiro se calcula o logaritmo de a_n

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln \frac{1}{n!} + \ln |\alpha|^{2n} + \ln e^{-|\alpha|^2} \\ &= -\ln n! + 2n \ln |\alpha| - |\alpha|^2 \\ &= -\left(\frac{1}{2} \ln 2\pi + n \ln n + \frac{1}{2} \ln n - n + \mathcal{E}(n)\right) + 2n \ln |\alpha| - |\alpha|^2, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde foi usada uma aproximação para fatoriais grandes, chamada fórmula de Stirling [28]

$$\ln n! = \frac{1}{2} \ln 2\pi + n \ln n + \frac{1}{2} \ln n - n + \mathcal{E}(n) \quad (\text{C.3})$$

com $|\mathcal{E}(n)| < 1/12n$.

Seja $x = \sqrt{n}$, quer-se expandir em série de Taylor à função $\ln a_n(x)$ em torno a $x \approx |\alpha|$

$$\begin{aligned} \ln a_n(x) &= \ln a_n(|\alpha|) + \left. \frac{d \ln a_n(x)}{dx} \right|_{x=|\alpha|} (x - |\alpha|) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 \ln a_n(x)}{dx^2} \right|_{x=|\alpha|} (x - |\alpha|)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 \ln a_n(x)}{dx^3} \right|_{x=|\alpha|} (x - |\alpha|)^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

os termos na soma são

$$\begin{aligned} \ln a_n(|\alpha|) &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi - |\alpha|^2 \ln |\alpha|^2 - \frac{1}{2} \ln |\alpha|^2 + |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 \ln |\alpha| - |\alpha|^2 + \mathcal{E}(|\alpha|^2) \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln |\alpha| + \mathcal{E}(|\alpha|^2), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\left. \frac{d \ln a_n(x)}{dx} \right|_{x=|\alpha|} = -\frac{2}{|\alpha|}, \quad (\text{C.6})$$

e

$$\frac{d^2 \ln a_n(x)}{dx^2} \Big|_{x=|\alpha|} = -4 + \frac{1}{|\alpha|^2} \quad (\text{C.7})$$

obtendo

$$\ln a_n = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln |\alpha| - \frac{2}{|\alpha|} (x - |\alpha|) + \frac{1}{2} \left(-4 + \frac{1}{|\alpha|^2} \right) (x - |\alpha|)^2 + \mathcal{E}(|\alpha|^2) + \dots \quad (\text{C.8})$$

Consideramos que $n \approx |\alpha|^2$ por tanto

$$\ln a_n = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln |\alpha| - 2(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 + \mathcal{E}(n) + \mathcal{R}(n), \quad (\text{C.9})$$

também sabemos que $\mathcal{E}(n)$ é $\mathcal{O}(|\alpha|^{-2})$ e definimos $\mathcal{R}(n)$ como os termos de $\mathcal{O}(|\alpha|^{-1})$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \ln a_n &= -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln |\alpha| - 2(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 + \mathcal{O}(|\alpha|^{-1}) \\ &= \ln(2\pi)^{-1/2} - \ln |\alpha| - 2(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 + \mathcal{O}(|\alpha|^{-1}) \\ &= \ln \frac{(2\pi)^{-1/2}}{|\alpha|} - 2(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 + \mathcal{O}(|\alpha|^{-1}) \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} - 2(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 + \mathcal{O}(|\alpha|^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

A aproximação gaussiana será

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-2(\sqrt{n}-|\alpha|)^2} e^{\mathcal{O}(|\alpha|^{-1})}, \quad (\text{C.11})$$

como $\mathcal{O}(|\alpha|^{-1})$ é uma quantidade pequena cumpre que $e^{\mathcal{O}(|\alpha|^{-1})} \approx 1 + \mathcal{O}(|\alpha|^{-1})$, de onde se obtém finalmente que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-2(\sqrt{n}-|\alpha|)^2} [1 + \mathcal{O}(|\alpha|^{-1})]. \quad (\text{C.12})$$

Aproximação assintótica

Como resultado da subtração dos termos do operador densidade que representam a probabilidade do átomo estar no estado excitado e do átomo estar no estado base, para um sistema isolado composto por mono-modo do campo e um átomo de dois níveis, obteve-se a inversão de população:

$$\begin{aligned}\overline{W(t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp -|\alpha|^2 \frac{|\alpha^n|^2}{n!} W_n(0) e^{-\frac{t}{2\tau_0}} \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \text{sen}(\Omega_n t) \right] \\ &= e^{-|\alpha|^2 - \frac{t}{2\tau_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha^n|^2}{n!} W_n(0) \left[\cos(\Omega_n t) + \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} \text{sen}(\Omega_n t) \right].\end{aligned}\quad (\text{D.1})$$

com condição inicial de que átomo entra na cavidade que confina o campo em estado excitado. Considera-se que o coeficiente de acoplamento sofre variações estocásticas em forma de saltos instantâneos, de modo que a sua fase fica constante entre um salto e o próximo, sendo estes decorrelacionados.

Ω_n esta dado por:

$$\Omega_n = 2g_0 \sqrt{n+1 - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}}. \quad (\text{D.2})$$

Definindo-se os seguintes coeficientes:

$$A_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha^n|^2}{n!} \quad \text{e} \quad B_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha^n|^2}{n!} \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n}, \quad (\text{D.3})$$

pode-se reescrever a inversão de população como:

$$\overline{W(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(\Omega_n t) + B_n \text{sen}(\Omega_n t)] e^{-t/2\tau_0}. \quad (\text{D.4})$$

Os somatórios $\sum_n^{\infty} A_n$ e $\sum_n^{\infty} B_n$ independem de t , portanto, convergem uniforme e absolu-

tamente em $t \in \mathbb{R}$. Segundo a soma de Poisson [23], $W(t)$ é:

$$\begin{aligned} \overline{W}(t) = & \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} A(n) e^{2\pi i \nu n} \cos(\Omega_n t) dn + \frac{1}{2} A(0) \cos(\Omega_0 t) \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} B(n) e^{2\pi i \nu n} \sin(\Omega_n t) + \frac{1}{2} B(0) \sin(\Omega_0 t) \right] e^{-t/2\tau_0}, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

o que é igual a:

$$\overline{W}(t) = \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu}(t) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_{\nu}(t) + \frac{1}{2} A(0) \cos(\Omega_0 t) + \frac{1}{2} B(0) \sin(\Omega_0 t) \right] e^{-t/2\tau_0}, \quad (\text{D.6})$$

onde:

$$a_{\nu}(t) = \int_0^{\infty} A(n) e^{2\pi i \nu n} \cos(\Omega_n t) dn, \quad (\text{D.7})$$

e

$$b_{\nu}(t) = \int_0^{\infty} B(n) e^{2\pi i \nu n} \sin(\Omega_n t) dn. \quad (\text{D.8})$$

Os coeficientes $A(n)$ e $B(n)$ estendem A_n e B_n respetivamente para $n \in \mathbb{R}$. Segundo à aproximação gaussiana (apêndice C):

$$A(n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-2(\sqrt{\bar{n}}-|\alpha|)^2}, \quad (\text{D.9})$$

e

$$B(n) \approx \frac{1}{2\tau_0\Omega_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-2(\sqrt{\bar{n}}-|\alpha|)^2}, \quad (\text{D.10})$$

onde $|\alpha|^2 \sim \bar{n}$, e \bar{n} é o número médio de fótons. Para uma completa caracterização de $W(t)$ precisa-se estimar o valor das integrais (D.7) e (D.8). Começa-se com a integral para $a_{\nu}(t)$ que é dada por:

$$a_{\nu}(t) = \int_0^{\infty} A(n) e^{2\pi i \nu n} \cos(\Omega_n t) dn. \quad (\text{D.11})$$

O coeficiente $a_{\nu}(t)$ cumpre que:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu}(t) = a_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu}(t) + a_{-\nu}(t)), \quad (\text{D.12})$$

pode-se escrever então:

$$\begin{aligned} a_{\nu}(t) + a_{-\nu}(t) &= \int_0^{\infty} A(n) e^{2\pi i \nu n} \cos(\Omega_n t) dn + \int_0^{\infty} A(n) e^{-2\pi i \nu n} \cos(\Omega_n t) dn \\ &= \int_0^{\infty} A(n) (e^{2\pi i \nu n} + e^{-2\pi i \nu n}) \cos(\Omega_n t) dn = 2 \int_0^{\infty} A(n) \cos(2\pi \nu n) \cos(\Omega_n t) dn, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

de onde:

$$a_{\nu}(t) + a_{-\nu}(t) = \Re \left[2 \int_0^{\infty} A(n) e^{i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} dn \right]. \quad (\text{D.14})$$

Por outro lado, olhando para (D.11) pode-se ver que:

$$\begin{aligned} a_\nu(t) &= \int_0^\infty A(n) e^{2\pi i \nu n} \left(\frac{e^{i\Omega_n t} + e^{-i\Omega_n t}}{2} \right) dn \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} A(n) e^{i(2\pi \nu n + \Omega_n t)} dn + \int_0^\infty \frac{1}{2} A(n) e^{i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} dn, \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

donde:

$$\begin{aligned} a_\nu(t) + a_{-\nu}(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{2} A(n) \left\{ e^{i(2\pi \nu n + \Omega_n t)} + e^{i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} + e^{i(2\pi(-\nu)n - \Omega_n t)} + e^{i(2\pi(-\nu)n + \Omega_n t)} \right\} dn \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} A(n) \left\{ e^{i(2\pi \nu n + \Omega_n t)} + e^{-i(2\pi \nu n + \Omega_n t)} + e^{i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} + e^{-i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} \right\} dn \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} A(n) \left\{ 2\Re \left[e^{-i(2\pi \nu n + \Omega_n t)} \right] + 2\Re \left[e^{i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} \right] \right\} dn \\ &= \int_0^\infty A(n) \left\{ \Re \left[e^{i(2\pi(-\nu)n - \Omega_n t)} \right] + \Re \left[e^{i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} \right] \right\} dn = a'_{-\nu}(t) + a'_\nu(t). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

com

$$a'_\nu(t) = \int_0^\infty A(n) \Re \left[e^{i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} \right] dn. \quad (\text{D.17})$$

pode-se ver que:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(t) = a_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_\nu(t) + a_{-\nu}(t)] = a_0(t) + \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{\infty} a'_\nu(t). \quad (\text{D.18})$$

Com isto e reemplazando o valor de $A(n)$ dado por (D.9) com $|\alpha|^2 = \bar{n}$, finalmente temos a expressão da integral a ser estimada:

$$a'_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \int_0^\infty e^{-2(\sqrt{n} - \sqrt{\bar{n}})^2} \Re \left[e^{i(2\pi \nu n - \Omega_n t)} \right] dn. \quad (\text{D.19})$$

Escrevendo explicitamente Ω_n que é igual a $2g_0 \sqrt{n+1 - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}}$, obtem-se:

$$a'_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \Re \left[\int_0^\infty \exp \left\{ -2(\sqrt{n} - \sqrt{\bar{n}})^2 + 2i\pi \nu n - 2ig_0 t \sqrt{(n+1) - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}} \right\} dn \right]. \quad (\text{D.20})$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$n = \bar{n}x^2 - v \quad \text{e} \quad v = \frac{\lambda^2 - \delta^2}{\lambda^2}, \quad (\text{D.21})$$

tem-se à parte real do expoente de (D.20):

$$\sqrt{n} - \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{\bar{n}x^2 - v} - \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{\bar{n}} \left(\sqrt{x^2 - \frac{v}{\bar{n}}} - 1 \right). \quad (\text{D.22})$$

E para a parte imaginaria:

$$2\pi\nu n - 2g_0 t \sqrt{(n+1) - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}} = 2\pi\nu(\bar{n}x^2 - v) - t \sqrt{4g_0^2(\bar{n}x^2 - v + 1) - \frac{4g_0^2}{(4\tau_0 g_0)^2}} \quad (\text{D.23})$$

Definindo:

$$\lambda = 2g_0 \quad \text{e} \quad \delta = \frac{1}{2\tau_0}, \quad (\text{D.24})$$

tem-se que (D.23) é igual a:

$$\begin{aligned} 2\pi\nu\bar{n} \left\{ x^2 - \frac{v}{\bar{n}} - \frac{t}{2\pi\nu\bar{n}} \sqrt{\lambda^2(\bar{n}x^2 - v + 1) - \delta^2} \right\} &= 2\pi\nu\bar{n} \left\{ x^2 - \frac{v}{\bar{n}} - \frac{t}{2\pi\nu\bar{n}} \sqrt{\lambda^2\bar{n}x^2} \right\} \\ &= 2\pi\nu\bar{n} \left\{ x^2 - \frac{v}{\bar{n}} - \frac{\lambda x t}{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}} \right\} = 2\pi\nu\bar{n} \left\{ x^2 - \frac{v}{\bar{n}} - \frac{g_0 x t}{\pi\nu\sqrt{\bar{n}}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Reescrevendo $a'_\nu(t)$ levando em conta que $dn = 2\bar{n}x dx$ e definindo:

$$\tau = \frac{g_0 t}{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}, \quad (\text{D.26})$$

obtem-se que:

$$a'_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \Re \left[\int_{\sqrt{v/\bar{n}}}^{\infty} e^{-2\bar{n}(\sqrt{x^2 - v/\bar{n}} - 1)^2 - 2i\pi\nu v - 2i\pi\nu\bar{n}(x^2 - 2\tau x)} 2\bar{n}x dx \right] \quad (\text{D.27})$$

para \bar{n} grande a contribuição principal esta na vizinhança de $x = 1$, posso integrar entre $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, com ϵ pequeno tal que $1 - \epsilon > \sqrt{v/\bar{n}}$, $\epsilon = \sqrt{\ln \bar{n}/2\bar{n}}$. Na parte real do expoente da integral anterior:

$$\begin{aligned} -2\bar{n} \left(\sqrt{x^2 - \frac{v}{\bar{n}}} - 1 \right)^2 &= -2\bar{n} \left(x^2 - \frac{v}{\bar{n}} - 2\sqrt{x^2 - \frac{v}{\bar{n}}} + 1 \right) \\ &= -2\bar{n} \left(x^2 + 1 - \frac{v}{\bar{n}} - 2\sqrt{x^2 - \frac{v}{\bar{n}}} \right) \\ &= -2\bar{n} \left[(x-1)^2 + 2x - \frac{v}{\bar{n}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{v}{\bar{n}x} - 2\sqrt{x^2 - \frac{v}{\bar{n}}} \right] \\ &= -2\bar{n} \left[(x-1)^2 - \frac{v}{\bar{n}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] - 2\bar{n} \left[2x + \frac{v}{\bar{n}x} - 2\sqrt{x^2 - \frac{v}{\bar{n}}} \right] \\ &= -2\bar{n}(x-1)^2 + \frac{2v}{x}(x-1) + 4\bar{n} \left[-x - \frac{v}{2\bar{n}x} + \sqrt{x^2 - \frac{v}{\bar{n}}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Considerando \bar{n} grande, e x próximo de um:

$$a'_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu v} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} x e^{-2\bar{n}(x-1)^2 + 2i\pi\nu\bar{n}(x^2 - 2\tau x)} dx \right]. \quad (\text{D.29})$$

Definindo a função:

$$h(x) = -2(x-1)^2 + 2i\pi\nu(x^2 - 2\tau x), \quad (\text{D.30})$$

$a'_\nu(t)$ é dada por:

$$a'_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu t} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} x e^{\bar{n}h(x)} dx \right]. \quad (\text{D.31})$$

Reescrevendo em termos da variável complexa z e estender os limites de integração (pode ser assumido porque a exponencial decai muito rapidamente longe de 1), tem-se:

$$a'_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{\bar{n}h(x)} dx \right]. \quad (\text{D.32})$$

Aproximando segundo o método de "steepest descent" [24], fica:

$$a'_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi}} \Re \left[e^{-2i\pi\nu t} \sqrt{\frac{-2\pi}{\bar{n}h''(z_0)}} z_0 e^{\bar{n}h(z_0)} \right] = 2\Re \left[e^{-2i\pi\nu t} \sqrt{\frac{-1}{h''(z_0)}} z_0 e^{\bar{n}h(z_0)} \right], \quad (\text{D.33})$$

onde z_0 é o ponto de sela, dado por: $h'(z_0) = 0$. Se

$$h'(z_0) = -4(z_0 - 1) + 2i\pi\nu(2z_0 - 2\tau), \quad (\text{D.34})$$

então o z_0 é:

$$z_0 = \frac{1 - i\pi\nu\tau}{1 - i\pi\nu}. \quad (\text{D.35})$$

Reescrevendo a função $h(z_0)$ obtem-se:

$$\begin{aligned} h(z_0) &= -2(z_0 - 1)^2 + 2i\pi\nu(z_0^2 - 2\tau z_0) \\ &= -2[(z_0 - \tau) + (\tau - 1)]^2 + 2i\pi\nu[(z_0 - \tau)^2 - \tau^2] \\ &= -2(z_0 - \tau)^2(1 - i\pi\nu) - 4(z_0 - \tau)(\tau - 1) - 2(\tau - 1)^2 - 2i\pi\nu\tau^2, \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

onde:

$$z_0 - \tau = \frac{1 - i\pi\nu\tau - \tau(1 - i\pi\nu)}{1 - i\pi\nu} = -\frac{(\tau - 1)}{1 - i\pi\nu} \quad (\text{D.37})$$

então:

$$\begin{aligned} h(z_0) &= -2\frac{(\tau - 1)^2}{1 - i\pi\nu} + 4\frac{(\tau - 1)^2}{1 - i\pi\nu} - 2(\tau - 1)^2 - 2i\pi\nu\tau^2 \\ &= \frac{2(\tau - 1)^2}{1 - i\pi\nu} - 2(\tau - 1)^2 - 2i\pi\nu\tau^2 \\ &= \frac{[2(\tau - 1)^2 - 2(\tau - 1)^2 - 2i\pi\nu\tau^2](1 + i\pi\nu)}{1 + \pi^2\nu^2} \\ &= \frac{-2\pi^2\nu^2(\tau - 1)^2 + 2i\pi\nu(1 - 2\tau - \pi^2\nu^2\tau^2)}{1 + \pi^2\nu^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

e a segunda derivada de $h(z)$, independe de z e esta dada por: $h''(z) = -4(1 - i\pi\nu)$. Se

$$h''(z) = |h''(z_0)|e^{i\eta} \quad (\text{D.39})$$

então $\eta = \arctan(\pi\nu)$ e:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{-1}{h''(z_0)} \right\}^{1/2} &= |h''(z_0)|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\pi-\eta)} \\ &= \frac{1}{2(1+\pi^2\nu^2)^{1/4}} e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]} \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

Reescrevendo a expressão para $a'_\nu(t)$ levando em conta os valores achados para z_0 , $h(z_0)$ e $h''(z_0)$, tem-se:

$$\begin{aligned} a'_\nu(t) &\sim 2\text{Re} \left\{ e^{-i2\pi\nu v} \frac{e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]}}{2(1+\pi^2\nu^2)^{1/4}} \left(\frac{1-i\pi\nu\tau}{1-i\pi\nu} \right) e^{\bar{n} \left[\frac{-2\pi^2\nu^2(\tau-1)^2+2i\pi\nu(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2} \right]} \right\} \\ &\sim \text{Re} \left\{ e^{-i2\pi\nu v} \frac{e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]}}{(1+\pi^2\nu^2)^{1/4}} \left(\frac{1-i\pi\nu\tau}{1-i\pi\nu} \right) \left(\frac{1+i\pi\nu}{1+i\pi\nu} \right) e^{\bar{n} \left[\frac{-2\pi^2\nu^2(\tau-1)^2+2i\pi\nu(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2} \right]} \right\} \\ &\sim \text{Re} \left\{ e^{-i2\pi\nu v} \frac{e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} (1-i\pi\nu\tau)(1+i\pi\nu) e^{\bar{n} \left[\frac{-2\pi^2\nu^2(\tau-1)^2+2i\pi\nu(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2} \right]} \right\} \\ &\sim \frac{e^{\frac{-2\bar{n}\pi^2\nu^2(\tau-1)^2}{1+\pi^2\nu^2}}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} \text{Re} \left\{ e^{-i2\pi\nu v} e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]} (1-i\pi\nu\tau)(1+i\pi\nu) e^{\frac{2i\bar{n}\pi\nu(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2}} \right\} \\ &\sim \frac{e^{\frac{-2\bar{n}\pi^2\nu^2(\tau-1)^2}{1+\pi^2\nu^2}}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} \text{Re} \left\{ e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]} [1+\pi^2\nu^2\tau+i\pi\nu(1-\tau)] e^{-i2\pi\nu v + \frac{2i\pi\nu\bar{n}(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Se definimos

$$\varphi = 2\pi\bar{n}\nu \left[-\frac{v}{\bar{n}} + \frac{(1-2\tau-\pi^2\nu^2\tau^2)}{1+\pi^2\nu^2} \right], \quad (\text{D.42})$$

(D.41) escreve-se:

$$a'_\nu \sim \frac{e^{\frac{-2\bar{n}\pi^2\nu^2(\tau-1)^2}{1+\pi^2\nu^2}}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} \text{Re} \left\{ e^{\frac{i}{2}[\pi-\arctan(\pi\nu)]} [1+\pi^2\nu^2\tau+i\pi\nu(1-\tau)] (\cos\varphi + i\text{sen}\varphi) \right\} \quad (\text{D.43})$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ (i \cos[\arctan(\pi\nu)] - \text{sen}[\arctan(\pi\nu)]) [1+\pi^2\nu^2\tau+i\pi\nu(1-\tau)] (\cos\varphi + i\text{sen}\varphi) \} \\ = - \{ (1+\pi^2\nu^2\tau) \text{sen}[\arctan(\pi\nu)] + \pi\nu(1-\tau) \cos[\arctan(\pi\nu)] \} \cos\varphi \\ - \{ (1+\pi^2\nu^2\tau) \cos[\arctan(\pi\nu)] - \pi\nu(1-\tau) \text{sen}[\arctan(\pi\nu)] \} \text{sen}\varphi, \end{aligned}$$

finalmente:

$$\begin{aligned} a'_\nu \sim - \frac{e^{\frac{-2\bar{n}\pi^2\nu^2(\tau-1)^2}{1+\pi^2\nu^2}}}{(1+\pi^2\nu^2)^{5/4}} \left[\{ (1+\pi^2\nu^2\tau) \text{sen}[\arctan(\pi\nu)] + \pi\nu(1-\tau) \cos[\arctan(\pi\nu)] \} \cos\varphi \right. \\ \left. + \{ (1+\pi^2\nu^2\tau) \cos[\arctan(\pi\nu)] - \pi\nu(1-\tau) \text{sen}[\arctan(\pi\nu)] \} \text{sen}\varphi \right] \end{aligned} \quad (\text{D.44})$$

$a'_\nu(t)$ será relevante para $\tau \approx 1$, ou seja, para:

$$\frac{g_0 t}{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}} \approx 1. \quad (\text{D.45})$$

Como $t \geq 0$, para $\nu < 0$, O coeficiente $a'_\nu(t)$ será muito pequeno e por tanto, vamos desprezar esses termos.

Para o termo com $\nu = 0$:

$$a'_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \Re \left[\int_0^\infty \exp \left\{ -2(\sqrt{n} - \sqrt{\bar{n}})^2 - 2ig_0 t \sqrt{(n+1) - \frac{1}{(4\tau_0 g_0)^2}} \right\} dn \right]. \quad (\text{D.46})$$

Segundo a mudança de variáveis (D.21):

$$a'_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \Re \left[\int_{\sqrt{v/\bar{n}}}^\infty \exp \left\{ -2\bar{n}(\sqrt{x^2 - v/\bar{n}} - 1)^2 - it\lambda x\sqrt{\bar{n}} \right\} 2\bar{n}x dx \right] \quad (\text{D.47})$$

depois de considerar que x é muito próximo de 1 e que \bar{n} é muito grande:

$$a'_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \Re \left[\int_{1+\epsilon}^{1-\epsilon} 2\bar{n}x e^{-2\bar{n}(x-1)^2 - it\lambda x\sqrt{\bar{n}}} dx \right]. \quad (\text{D.48})$$

Definindo

$$\xi = \frac{\lambda t}{2\sqrt{\bar{n}}}, \quad (\text{D.49})$$

extendendo os limites da integral e escrevendo em termos da variável complexa z , $a'_0(t)$ é:

$$a'_0(t) \sim \frac{2\bar{n}}{\sqrt{\pi}} \Re \left[\int_\infty^\infty z e^{\bar{n}h(z)} dz \right] \quad (\text{D.50})$$

com $h(z) = -2(z-1)^2 - 2i\xi z$, onde: $h'(z) = -4(z-1) - 2i\xi$ e $h''(z) = -4$. Para achar o ponto de sela faz-se:

$$h'(z_0) = -4(z_0 - 1) - 2i\xi = 0 \quad \text{de onde} \quad z_0 = \frac{1}{2}(2 - i\xi), \quad (\text{D.51})$$

e

$$h(z_0) = -\frac{\xi^2}{2} - 2i\xi. \quad (\text{D.52})$$

Segundo a aproximação assintótica:

$$\begin{aligned} a'_0(t) &\sim \frac{2\bar{n}}{\sqrt{\pi}} \Re \left[\sqrt{\frac{-2\pi}{\bar{n}h''(z_0)}} z_0 e^{\bar{n}h(z_0)} \right] \\ &= 2\Re \left[\sqrt{\frac{-1}{h''(z_0)}} z_0 e^{\bar{n}h(z_0)} \right] = 2\Re \left[\sqrt{\frac{-1}{-4}} \left(\frac{1}{2}(2 - i\xi) \right) e^{-\bar{n}\left(\frac{\xi^2}{2} + 2i\xi\right)} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-\bar{n}\frac{\xi^2}{2}} \Re \left[(2 - i\xi) e^{-2i\bar{n}\xi} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.53})$$

obtem-se finalmente:

$$a'_0(t) \sim \frac{1}{2} e^{-\bar{n} \frac{\xi^2}{2}} [2 \cos(2\bar{n}\xi) - \xi \operatorname{sen}(2\bar{n}\xi)] \quad (\text{D.54})$$

Agora são conhecidos os valores estimados para as integrais que definem o primeiro coeficiente, para estimar a integral para $b_\nu(t)$ o procedimento é completamente análogo. O coeficiente $b_\nu(t)$ está definido como:

$$b_\nu(t) = \int_0^\infty B(n) e^{2\pi i \nu n} \operatorname{sen}(\Omega_n t) dn. \quad (\text{D.55})$$

É fácil ver que:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu(t) = b_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [b_\nu(t) + b_{-\nu}(t)], \quad (\text{D.56})$$

onde

$$\begin{aligned} b_\nu(t) + b_{-\nu}(t) &= \int_0^\infty B(n) (e^{2\pi i \nu n} + e^{-2\pi i \nu n}) \operatorname{sen}(\Omega_n t) dn \\ &= \int_0^\infty B(n) (e^{2\pi i \nu n} + e^{-2\pi i \nu n}) \left(\frac{e^{i\Omega_n t} - e^{-i\Omega_n t}}{2i} \right) dn. \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

Lembrando que $z - z^* = 2i\Im[z]$ a anterior expressão escreve-se:

$$\begin{aligned} b_\nu(t) + b_{-\nu}(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{2i} B(n) \left\{ 2i\Im \left[e^{i(2\pi\nu n + \Omega_n t)} \right] + 2i\Im \left[e^{i(-2\pi\nu n + \Omega_n t)} \right] \right\} dn \\ &= - \int_0^\infty B(n) \left\{ \Im \left[e^{-i(2\pi\nu n + \Omega_n t)} \right] + \Im \left[e^{-i(2\pi(-\nu)n + \Omega_n t)} \right] \right\} dn \\ &= b'_{-\nu}(t) + b'_\nu(t), \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

onde:

$$b'_\nu(t) = -\Im \left[\int_0^\infty B(n) e^{i(2\pi\nu n - \Omega_n t)} dn \right]. \quad (\text{D.59})$$

E (D.56) reescreve-se como:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu(t) = b_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [b_\nu(t) + b_{-\nu}(t)] = b_0(t) + \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{\infty} b'_\nu(t). \quad (\text{D.60})$$

Reemplazando o valor de $B(n)$ dado por (D.10) com $|\alpha|^2 = \bar{n}$, tem-se que:

$$b'_\nu(t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \Im \left[\int_0^\infty \frac{1}{2\tau_0\Omega_n} e^{-2(\sqrt{\bar{n}} - \sqrt{\bar{n}})^2} e^{i(2\pi\nu n - \Omega_n t)} dn \right] \quad (\text{D.61})$$

mudando as variáveis segundo (D.21), para $x \approx 1$ é \bar{n} grande:

$$b'_\nu(t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \left(\frac{1}{2\tau_0} \right) \Im \left[e^{-2i\pi\nu v} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\bar{n}}}{g_0\lambda} e^{-2\bar{n}(\sqrt{x^2 - v/n} - 1)^2 + 2i\pi\nu\bar{n}(x^2 - 2\tau x)} dx \right] \quad (\text{D.62})$$

definindo $h(x)$ segundo (D.30):

$$b'_\nu(t) \approx \frac{-1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \left(\frac{\sqrt{\bar{n}}}{4\tau_0 g_0^2} \right) \Im \left[e^{-2i\pi\nu v} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} e^{\bar{n}h(x)} dx \right]. \quad (\text{D.63})$$

De novo escrevendo em termos da variável complexa z , extendendo os limites de integração e fazendo a aproximação assintótica,

$$\begin{aligned} b'_\nu(t) &\approx \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{4\tau_0 g_0^2} \right) \Im \left[e^{-2i\pi\nu v} \sqrt{\frac{-2\pi}{\bar{n}h''(z_0)}} e^{\bar{n}h(z_0)} \right] \\ &= \frac{-1}{4\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \Im \left[e^{-2i\pi\nu v} \sqrt{\frac{-1}{h''(z_0)}} e^{\bar{n}h(z_0)} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

o valor estimado da integral para o segundo coeficiente será:

$$b'_\nu \sim - \left(\frac{1}{4\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \right) \frac{e^{\frac{-2\bar{n}\pi^2\nu^2(\tau-1)^2}{1+\pi^2\nu^2}}}{2(1+\pi^2\nu^2)^{1/4}} \{ \cos[\arctan(\pi\nu)] \cos\varphi - \text{sen}[\arctan(\pi\nu)] \text{sen}\varphi \}. \quad (\text{D.65})$$

para b'_0 se tem:

$$b'_0 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \Im \left[\int_0^\infty \frac{1}{2\tau_0 \Omega_n} e^{-2(\sqrt{\bar{n}}-\sqrt{\bar{n}})^2} e^{-i\Omega_n t} dn \right] \quad (\text{D.66})$$

levando em conta a mudança de variáveis (D.21), e considerando \bar{n} grande e x perto de um, $b'(0)$ se escreve:

$$b'_0 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \Im \left[\int_0^\infty \frac{1}{4\tau_0 g_0^2} \exp \left\{ -2\bar{n}(\sqrt{x^2 - v/n} - 1)^2 + 2i\xi\bar{n}x \right\} dx \right] \quad (\text{D.67})$$

fazendo a aproximação assintótica, com z_0 dado por (D.51):

$$\begin{aligned} b'_0 &\sim \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{4\tau_0 g_0^2} \right) \Im \left[\sqrt{\frac{-2\pi}{\bar{n}h''(z_0)}} e^{\bar{n}h(z_0)} \right] \\ &= \frac{-1}{4\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \Im \left[e^{\bar{n}(-\frac{\xi^2}{2} - 2i\xi)} \right] \\ &= \frac{-1}{4\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} e^{-\bar{n}\frac{\xi^2}{2}} \Im \left[e^{-2i\bar{n}\xi} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.68})$$

obtem-se que o coeficiente b'_0 esta dado por:

$$b'_0 \sim \frac{-1}{4\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} e^{-\bar{n}\frac{\xi^2}{2}} \text{sen}[2\bar{n}\xi] \quad (\text{D.69})$$

onde a variável ξ foi definida em (D.49).

Reescrevendo as anteriores expressões temos que a inversão de população é:

$$W(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [\omega_\nu(t) + K(t)] \quad (\text{D.70})$$

onde

$$\omega_\nu(t) = [a'_\nu(t) + b'(t)] e^{-t/2\tau_0}, \quad (\text{D.71})$$

e

$$K(t) = \left[\frac{1}{2} \{A(0) \cos(\Omega_0 t) + B(0) \sin(\Omega_0 t)\} + a'_0(t) + b'_0(t) \right] e^{-t/2\tau_0}. \quad (\text{D.72})$$

Como $t \geq 0$, para $\nu < 0$, a'_ν e b'_ν serão muito pequenos e por tanto, vamos desprezar os termos para $\nu \in [-1, -\infty)$. $\omega_\nu(t)$ é explicitamente:

$$\omega_\nu(t) = -\frac{e^{-\frac{g_0^2}{2(1+\pi^2\nu^2)}(t-t_\nu)^2 - \kappa}}{(1 + \pi^2\nu^2)^{5/4}} \left[\left\{ \left(\pi\nu - \frac{g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1 + \pi^2\nu^2}{8\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \right) \cos \beta + \left(1 + \frac{\pi\nu g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} \right) \sin \beta \right\} \cos \varphi \right. \\ \left. + \left\{ \left(1 + \frac{\pi\nu g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} \right) \cos \beta - \left(\pi\nu - \frac{g_0 t}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1 + \pi^2\nu^2}{8\tau_0 g_0^2 \sqrt{\bar{n}}} \right) \sin \beta \right\} \sin \varphi \right] \quad (\text{D.73})$$

onde

$$\kappa = -\frac{1}{4\tau_0} \left(\frac{4\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}{g_0} - 1 \right) \quad \text{e} \quad \beta = \arctan(\pi\nu). \quad (\text{D.74})$$

A frequência e o tempo escritos em termos dos parâmetros originais ficam:

$$\varphi = -\frac{2\pi\nu((4g_0\tau_0)^2 - 1)}{(4g_0\tau_0)^2} + \frac{4\pi\nu\bar{n} - 4g_0 t\sqrt{\bar{n}} - \pi\nu g_0^2 t^2}{2(1 + \pi^2\nu^2)} \quad (\text{D.75})$$

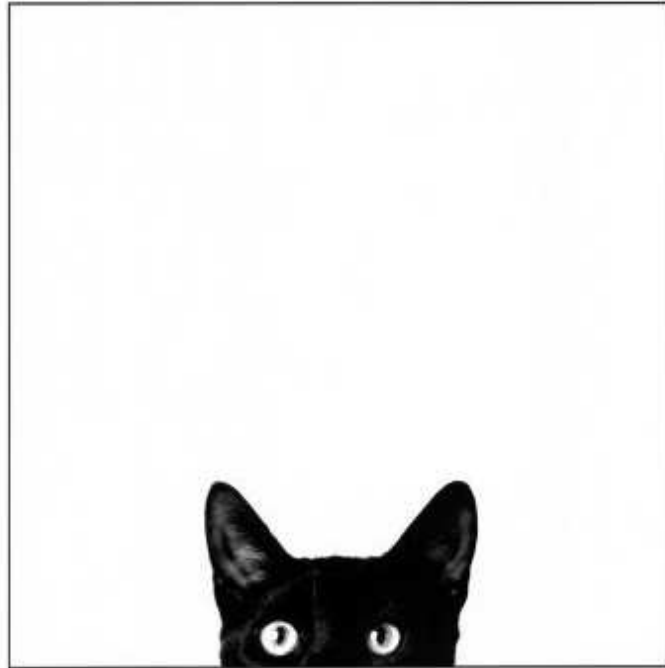
e

$$t_\nu = \frac{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}}{g_0} \left(1 - \frac{1 + \pi^2\nu^2}{2\tau_0 g_0^2} \right). \quad (\text{D.76})$$

Bibliografia

- [1] M. Planck. Entropie und temperatur strahlender wärme (Entropy and temperature of radiant heat). *Annalen der Physik*, 306(4):719–737, 1900.
- [2] M. Planck. Ueber das gesetz der energieverteilung im normalspectrum (Law of energy distribution in normal spectra). *Annalen der Physik*, 309(3):553–563, 1901.
- [3] A. Einstein. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtet betreffenden heuristischen gesichtspunkt (A heuristic model for the creation and transformation of light). *Annalen der Physik*, 322(6):132–148, 1905.
- [4] E. T. Jaynes e F. W. Cummings. Comparison of quantum semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, 1963.
- [5] I. I. Rabi, N. F. Ramsey e J. Schwinger. Use of rotating coordinates in magnetic resonance problems. *Reviews of Modern Physics*, 26(2):167–171, 1954.
- [6] F. Bloch e A. Siegert. Magnetic resonance for nonrotating fields. *Physical Review*, 57(6):522–527, 1940.
- [7] S. M. Barnett e P. L. Knight. Dissipation in a fundamental model of quantum optical resonance. *Physical Review A*, 33(4):2444–2448, 1986.
- [8] R. R. Puri e G. S. Agarwal. Collapse and revival phenomena in the Jaynes-Cummings model with cavity damping. *Physical Review A*, 33(5):3610–3613, 1986.
- [9] M. Tavis e F. W. Cummings. Exact solution for an N-molecule-radiation-field hamiltonian. *Physical Review*, 170(2):379–384, 1968.
- [10] Z. Deng. Separated subsystems in four-level atom. *Optics Communications*, 48(4):284–286, 1983.
- [11] A. Joshi e S. Lawande. Effects of dipole interaction on the colapse-revival phenomenon of Rabi oscillations. *Journal of Modern Optics*, 38(7):1407–1413, 1991.
- [12] A. Joshi e S. V. Lawande. Generalized Jaynes-Cummings models with a time-dependent atom-field coupling. *Physical Review A*, 48(3):2276–2284, 1993.
- [13] G. Raithel, C. Wagner, H. Walther, L. M. Narducci e M. O. Scully. The micromaser: a proving ground for quantum physics. *Advances in atomic, molecular and optical physics*, Suppl. 2:57–121, 1994.

-
- [14] R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766–2788, 1963.
- [15] M. O. Scully e M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [16] T. M. Makhviladze e L. A. Shelepin. Cooperative effects in radiation processes (multilevel particles and second-order perturbation theory). *Physical Review A*, 9(1):538–549, 1974.
- [17] N. Bogolubov, F. Le Kien e A. S. Shumovski. Two-photon process in a three-level system. *Physics Letters*, 101A(4):201–203, 1984.
- [18] A. Joshi. Effects of phase fluctuations in the atom-field coupling coefficient of the Jaynes-Cummings model. *Journal of Modern Optics*, 42(12):2561–2569, 1995.
- [19] A. S. Burshtein e Y. S. Oseledchik. Relaxation in a system subjected to suddenly changing perturbations in the presence of correlation between successive values of the perturbation. *Soviet Physics JETP (English Translation)*, 24(4):716–724, 1967.
- [20] L. E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1998.
- [21] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1994.
- [22] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics, Volume 3: Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*. Pergamon Press Ltd., Oxford, 1977.
- [23] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Philippines, 1974.
- [24] J. D. Murray. *Asymptotic Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [25] Clarisa do Valle da Silva Lima. *Efeitos dissipativos na inversão de população segundo o modelo de Jaynes-Cummings*. Dissertação de mestrado, UFMG, Belo Horizonte, Brasil, 2005.
- [26] C. Gerry e P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [27] P. L. Knight e P. W. Milonni. The Rabi frequency in optical spectra. *Physics Reports*, 66(2):21–107, 1980.
- [28] G. B. Arfken e H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Harcourt, Academic Press, San Diego, 2001.



... Vea: "La mayor parte de los hombres no quieren nadar antes de saber." ¿No es esto espiritual? ¡No quieren nadar naturalmente! Han nacido para la tierra, no para el agua. Y, naturalmente, no quieren pensar; como que han sido creados para la vida, ¡no para pensar! Claro, y el que piensa, el que hace del pensar lo principal, ese podrá acaso llegar muy lejos en esto; pero ese precisamente ha confundido la tierra con el agua, y un día u otro se ahogará...

Fragmento, El lobo estepario, Herman Hesse.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)