



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



GOVERNO FEDERAL

INPE-15649-TDI/1428

## PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS NA NAVEGAÇÃO DE VEÍCULOS AEROESPACIAIS VISANDO MINIMIZAR O RISCO DE COLISÃO

Álvaro de Albuquerque Arraes

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia  
Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Marcelo Lopes de  
Oliveira e Souza, aprovada em 17 de outubro de 2008

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2008/10.14.00.42>>

INPE  
São José dos Campos  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO:**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

## **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-15649-TDI/1428

## PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS NA NAVEGAÇÃO DE VEÍCULOS AEROESPACIAIS VISANDO MINIMIZAR O RISCO DE COLISÃO

Álvaro de Albuquerque Arraes

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia  
Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Marcelo Lopes de  
Oliveira e Souza, aprovada em 17 de outubro de 2008

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2008/10.14.00.42>>

INPE  
São José dos Campos  
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

A69p Arraes, Álvaro de Albuquerque.

Propagação de incertezas na navegação de veículos aeroespaciais visando minimizar o risco de colisão / Álvaro de Albuquerque Arraes. – São José dos Campos: INPE, 2009.

175p. ; (INPE-15649-TDI/1428)

Dissertação (Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2008.

1. Elisão de colisão. 2. Formação de satélites. 3. Estimacão de trajetória. 4. Propagação de matriz de covariância. 5. Detritos espaciais. I.Título.

CDU 521.3

---

Copyright © 2009 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, microfílmico, reprográfico ou outros, sem a permissão escrita da Editora, com exceção de qualquer material fornecido especificamente no propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2009 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, microfilming, recording or otherwise, without written permission from the Publisher, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em

Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

Dr. Mario Cesar Ricci



Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza



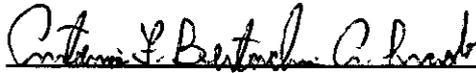
Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Evandro Marconi Rocco



Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



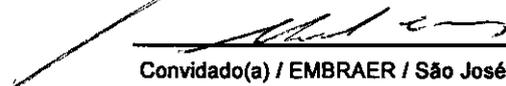
Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Hélio Koiti Kuga



Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Marcelo Curvo



Convidado(a) / EMBRAER / São José dos Campos - SP

Aluno (a): Álvaro de Albuquerque Arraes

São José dos Campos, 17 de outubro de 2008



*“Inventar é imaginar o que ninguém pensou; é acreditar no que ninguém jurou; é arriscar o que ninguém ousou; é realizar o que ninguém tentou. Inventar é transcender.”*

*Alberto Santos Dumont*



*Aos meus pais a quem devo tudo e a quem dedico todo o meu amor e respeito.*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, fonte e razão de tudo.

Agradeço a todos que me ajudaram e me apoiaram no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza que me orientou e apoiou nos momentos de dúvida, empurrando-me sempre para frente, nunca me deixando desistir.

Ao Dr. Hélio K. Kuga, pela boa-vontade em compartilhar seu conhecimento.

Aos engenheiros da Embraer Rogério Mimessi, Armando Carbonari e Bruno Gomes Ribeiro, que me apoiaram e me deram as condições para que pudesse me dedicar a esse trabalho.

Ao engenheiro Gilberto Trivelato que me convenceu a iniciar o mestrado.

À Embraer S/A pelo tempo que me foi concedido.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE, pela oportunidade de estudos e utilização de suas instalações.

Aos amigos e colegas de mestrado Alexandre Carvalho Leite, Carlos Henrique Hassmann, Francisco Carlos de Amorim Terceiro e Paula Cristiane P. M. Pardal pelo tempo que estudamos juntos. Dentro desse grupo, nunca faltaram apoio mútuo e dedicação.

A meus pais por serem meus modelos de vida e honestidade.

A minha esposa Sheila e às minhas filhas Beatriz e Carolina pela paciência durante as noites e fins-de-semana em que permaneci longe delas.



## RESUMO

Neste trabalho estudou-se a propagação de incertezas na navegação de veículos aeroespaciais visando minimizar o risco de colisão. Utilizou-se como cenário de simulação a situação de satélites em formação, estudando os aspectos de predição de probabilidade de colisão. As seguintes restrições foram consideradas: a preocupação com a operação em tempo real, com seu requisito de previsibilidade de tempo máximo de execução, determinou a necessidade de estabelecer critérios de parada para os algoritmos; os cenários foram considerados cooperativos; e o trabalho foi focado na minimização dos riscos de colisão. Além disso, procurou-se fazer uma discussão para o cenário aeronáutico, buscando identificar a possibilidade de aproveitar algumas das idéias para casos em que o risco de colisão de aeronaves é maior. A autoridade da torre de controle foi considerada como o controlador responsável pela reconfiguração das rotas das aeronaves. O trabalho tem o potencial de vir a ser estendido para cenários espaciais e/ou aeronáuticos com as seguintes restrições: o sistema deverá operar em tempo real (tempo de convergência do método / algoritmo deverá ser determinístico); os cenários serão considerados não cooperativos; e se visará maximizar o risco de colisão.



# **PROPAGATION OF UNCERTAINTIES IN THE NAVIGATION OF AEROSPACE VEHICLES TO MINIMIZE THE COLLISION RISK**

## **ABSTRACT**

In this work, the propagation of uncertainties in the navigation of aerospace vehicles to minimize the collision risk was studied. The scenario of Satellites Formation Flying was used for the simulations, with focus on the prediction of the collision probability. The following restrictions apply: the concern about developing real time methods, with its requirement of maximum time predictability for the employed method determined the establishment of stop criteria for the algorithms; the scenarios were cooperative; and the minimization of the collision risk was envisaged. The discussion was extended to aeronautical scenarios, in an attempt to identify commonalities that could lead to the use of the same ideas to the problem of aircraft collision. The control tower was considered the authority responsible for rerouting the airplanes. This work has the potential to be extended to space and/or aeronautical scenarios, with the following restrictions: the system shall work in real time (deterministic time for the employed method / algorithm); the scenarios shall be non-cooperative; and the maximization of the collision risk shall be envisaged.



# SUMÁRIO

**Pág.**

## **LISTA DE FIGURAS**

## **LISTA DE TABELAS**

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

## **LISTA DE SÍMBOLOS**

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>27</b>
1.1 Considerações Gerais e Objetivo do Trabalho .....	27
1.2 Motivação .....	28
1.2.1 Cenário Espacial .....	29
1.2.2 Cenário Aeronáutico.....	31
1.3 Organização do Trabalho .....	32
<b>2 CONCEITOS BÁSICOS E REVISÃO DA LITERATURA</b> .....	<b>33</b>
2.1 Conceitos Básicos .....	33
2.1.1 Constelação de Satélites.....	33
2.1.2 Formação de Satélites .....	33
2.1.3 Incerteza de Navegação .....	34
2.1.4 Elipsóide de Incerteza.....	34
2.1.5 Colisão .....	35
2.1.6 Risco de Colisão .....	39
2.1.7 Configuração e Reconfiguração.....	39
2.2 Revisão Bibliográfica .....	40
<b>3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E DISCUSSÃO DOS MÉTODOS DE SOLUÇÃO</b> .....	<b>43</b>
3.1 Sistemas de coordenadas .....	44
3.1.1 Sistema Cartesiano Celeste.....	44
3.1.2 Sistema orbital de coordenadas (PQW).....	45

3.1.3	Sistema RSW de Coordenadas do Satélite.....	46
3.1.4	Elementos Orbitais keplerianos.....	47
3.1.5	Transformação de coordenadas orbitais.....	49
3.2	Escolha de Cenários para Teste.....	54
3.3	Triagem.....	55
3.4	Estimação de estados.....	56
3.5	Cálculo da matriz de transição de estados.....	58
<b>4</b>	<b>MODELAGEM E EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA.....</b>	<b>61</b>
4.1	Formulação do Problema.....	61
4.2	Abordagem ao Problema.....	62
4.3	Arquitetura de Simulação.....	63
4.4	Modelo Dinâmico.....	67
4.5	Critério de Decisão.....	67
4.5.1	Cálculo da conjunção.....	76
4.5.2	Equações de Hill.....	76
4.5.3	Método dos Elementos Orbitais Relativos (ROEM).....	79
4.5.4	Casos de Estudo para Simulações.....	84
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....</b>	<b>87</b>
5.1	Geração de Trajetórias.....	87
5.1.1	Trajetórias sem ruído.....	87
5.1.2	Trajetórias com ruído.....	90
5.2	Estimativa do ponto inicial.....	91
5.3	Comparação dos modelos dinâmicos.....	92
5.4	Estimativa do último ponto medido.....	107
5.4.1	Filtragem utilizando Kalman linearizado.....	107
5.4.2	Filtragem utilizando Kalman estendido.....	107
<b>6</b>	<b>EXTENSÃO PARA O CASO AERONÁUTICO.....</b>	<b>109</b>
6.1	Limites do Espaço Aéreo.....	110
6.2	Perfil de voo.....	113
6.3	Aplicabilidade das idéias de cálculo de probabilidade de colisão.....	115

<b>7 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS.....</b>	<b>119</b>
7.1 Conclusões.....	119
7.2 Comentários.....	120
7.3 Trabalhos Futuros.....	121
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>123</b>
<b>GLOSSÁRIO.....</b>	<b>127</b>
<b>APÊNDICE A – CENÁRIOS PROPOSTOS POR CARPENTER.....</b>	<b>131</b>
<b>APÊNDICE B – DESCRIÇÃO DOS FILTROS PARA PRÉ-FILTRAGEM .....</b>	<b>135</b>
<b>APÊNDICE C – TABELA DE NÍVEIS DE CRUZEIRO (COMAER, 2006) .....</b>	<b>141</b>
<b>APÊNDICE D– GRÁFICOS DE ANÁLISE DE MÁXIMA PROBABILIDADE. ....</b>	<b>143</b>
<b>APÊNDICE E– CÓDIGO FONTE DOS PROGRAMAS UTILIZADOS .....</b>	<b>149</b>



## LISTA DE FIGURAS

2-1:	Exemplo de formação com 3 satélites.....	33
2-2:	Geometria da região de incerteza elipsoidal.....	35
2-3:	Espalhamento inicial de detritos do teste anti-satélite chinês.....	38
2-4:	Geometria de conjunção.....	39
2-5:	Reconfiguração da formação.....	40
3-1:	Sistema Cartesiano Celeste .....	45
3-2:	Sistema de Coordenadas PQW.....	46
3-3:	Sistema de Coordenadas RSW.....	47
3-4:	Elementos Orbitais .....	49
3-5:	Elipse do movimento orbital.....	50
3-6:	Coordenadas do plano orbital x,y,z e coordenadas ECI x,y,z .....	52
4-1:	Predição de ponto de conjunção. ....	61
4-2:	Arquitetura de levantamento de risco de colisão do ESOC .....	64
4-3:	Mecanismo proposto para avaliação de risco de colisão.....	65
4-4:	Mecanismo a ser estudado.....	65
4-5:	Simulação das trajetórias e incertezas. ....	66
4-6:	Sistema de coordenadas na conjunção.....	70
4-7:	Probabilidade x Desvio para distância de conjunção de 1000 m.....	73
4-8:	Máximas Probabilidades para AR=1 .....	74
4-9:	Objeto combinado de tamanho 5m c/100m de offset. ....	75
4-10:	Movimento de satélite em plano orbital. ....	80
4-11:	Movimento relativo entre dois satélites.....	81
5-1:	Cenário: 3 satélites em formação em uma mesma órbita.....	87
5-2:	Satélite 1: $x(t)$ , $y(t)$ , $z(t)$ .....	88
5-3:	Satélite 1: $v_x(t)$ , $v_y(t)$ , $v_z(t)$ .....	88
5-4:	Satélite 1: Órbita simulada.....	89
5-5:	Posição do satélite 2 no referencial do sat. 1 .....	89
5-6:	Posição do satélite 3 no referencial do sat. 1 .....	90
5-7:	Coordenadas de posição do satélite 1 com ruído gaussiano ( $\sigma = 10m$ ) .....	90
5-8:	Posição dos satélites 1,2 e 3 com ruído gaussiano ( $\sigma = 10m$ ) .....	91
5-9:	Configuração do teste de sensibilidade à distância.....	92
5-10:	Sensibilidade das equações C-W à distância relativa. ....	93
5-11:	Curvas normalizadas pela distância relativa.....	94
5-12:	Curvas normalizadas (um décimo da órbita) .....	95
5-13:	Curvas normalizadas pela distância relativa ( $e=0,01$ ) .....	96
5-14:	Curvas normalizadas (um décimo da órbita; $e=0,01$ ) .....	96
5-15:	Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 pelo algoritmo ROEM.....	97
5-16:	Sensibilidade das equações ROEM à distância relativa.....	98
5-17:	Erros ROEM normalizados pela distância relativa.....	98
5-18:	Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e = 0,01$ ) .....	99

5-19:	Sensibilidade das equações ROEM à distância relativa ( $e = 0,01$ ) ...	100
5-20:	Erros ROEM normalizados pela distância relativa ( $e = 0,01$ ) .....	100
5-21:	Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e = 0,02$ ) .....	101
5-22:	Erros ROEM normalizados pela distância relativa ( $e = 0,02$ ) .....	101
5-23:	Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e = 0,1$ ) .....	102
5-24:	Erros ROEM normalizados pela distância relativa ( $e = 0,1$ ) .....	102
5-25:	Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e_1 = 0; e_2 = 0,01$ ) ..	103
5-26:	Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e_1 = 0; e_2 = 0,01$ ) ..	104
5-27:	Erros ROEM normalizados ( $e_1 = 0; e_2=0,01; e_3=0,02; e_4=0,03$ ).....	104
5-28:	Posição relativa entre o satélite 1 e os demais ( $e_1 = 0; e_2 = 0,2; e_3 = 0,1; e_4 = 0,01$ ) pelo método ROEM .....	105
5-29:	Erros ROEM normalizados ( $e_1 = 0; e_2=0,2; e_3=0,1; e_4=0,01$ ).....	105
7-4:	Fases típicas de vôo comercial. ....	113
B-1:	Filtro da distância apogeu-perigeu.....	135
B-2:	Distância de Segurança (“threshold”) .....	136
B-3:	Cálculo da Distância de Segurança.....	137
B-4:	Distância mínima desprezando aceleração .....	138
B-5:	Filtro R2 refinado .....	139

## LISTA DE TABELAS

3.1:	Condições iniciais para teste .....	54
5.1:	Valores iniciais para o teste1 .....	93
A.1:	Elementos Orbitais Médios para o cenário LEO .....	131
A.2:	Elementos Orbitais Médios para o cenário HEO .....	133



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AFSPC	Air Force Space Command
AFSPACECOM	AFSPC
CENIPA	Centro de Investigação e Prevenção de Acidentes Aeronáuticos
DMSP	Defense Meteorological Satellite Program
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
NASA	National Aeronautic and Space Administration
NAVSPACECOM	Naval Space Command
USSPACECOM	United States Space Command
IFR	Regras de voo por instrumento (Instrument Flight Rules)
VFR	Regras de voo visual (Visual Flight Rules)
ATM	Gerência de Tráfego Aéreo (Air Traffic Management)
ATC	Controle de Tráfego Aéreo (Air Traffic Control)
ATS	Serviço de Tráfego Aéreo (Air Traffic System)
ERC	Cartas de Rota (En Route Charts)



## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>a</b>	Semi-eixo maior
<b>e</b>	Ecentricidade
<b>i</b>	Inclinação
<b><math>\Omega</math></b>	Ascensão reta do nó ascendente
<b><math>\omega</math></b>	Argumento do perigeu
<b>f</b>	Anomalia verdadeira
<b>n</b>	Velocidade angular (movimento médio)
<b><math>\mu</math></b>	Constante gravitacional da Terra (3,9860064e14 m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup> )
<b>M</b>	Anomalia média
<b>u</b>	Anomalia excêntrica
<b><math>M_T</math></b>	Massa da Terra (5,9733328e24 kg)
<b>G</b>	Constante gravitacional universal (6,673e-20 km <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup> )
<b>G</b>	Matriz de adição de ruído dinâmico
<b><math>R_T</math></b>	Raio da Terra (6378139 m)
<b><math>R_x(\cdot)</math></b>	Matriz de rotação em torno do eixo x
<b><math>R_y(\cdot)</math></b>	Matriz de rotação em torno do eixo y
<b><math>R_z(\cdot)</math></b>	Matriz de rotação em torno do eixo z
<b><math>\bar{x}_k</math></b>	Vetor de estados a priori no instante k
<b><math>\bar{P}_k</math></b>	Matriz de covariância a priori no instante k
<b><math>\hat{x}_k</math></b>	Vetor de estados a posteriori no instante k
<b><math>\hat{P}_k</math></b>	Matriz de covariância a posteriori no instante k
<b><math>F_{x_n}</math></b>	Matriz de transição de estado calculada para o ponto $x_n$
<b>P<sub>c</sub></b>	Probabilidade de colisão
<b>P<sub>c max</sub></b>	Probabilidade máxima de colisão
<b><math>\vec{\rho}</math></b>	Posição relativa entre satélite e detritos, $\vec{r}_d - \vec{r}_s$
<b><math>\vec{v}_d</math></b>	Velocidade dos detritos espaciais

$\vec{v}_s$	Velocidade do satélite
$\vec{v}_r$	Velocidade relativa entre satélite e detritos, $\vec{v}_d - \vec{v}_s$
L	Distância entre o satélite e a interseção dos planos de órbita na conjunção
$\beta$	Ângulo entre os planos de órbita do satélite e dos detritos
d	Distância de separação horizontal dos planos na conjunção
$K_d$	Fator multiplicativo devido às incertezas de posição
$K_{dv}$	Fator multiplicativo devido às incertezas de velocidade
$\sigma$	Desvio-padrão
$x_m$	Projeção no eixo x da distância entre os objetos no plano de conjunção
$y_m$	Projeção no eixo y da distância entre os objetos no plano de conjunção
OBJ	Raio do objeto combinado
AR	Relação de aspecto (razão entre o maior e o menor eixos da elipse)

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Gerais e Objetivo do Trabalho

O objetivo desse trabalho é estudar a propagação de incertezas na navegação de veículos aeroespaciais visando minimizar o risco de colisão. As idéias estudadas referem-se aos seguintes tópicos:

- a) Cálculo de probabilidade de colisão;
- b) Propagação de erros de navegação;
- c) Pré-seleção de objetos com risco de colisão;
- d) Métodos de propagação de trajetória relativa;
- e) Filtragem de Kalman.

Este trabalho procura fazer a composição de algumas dessas idéias, obtendo um quadro mais completo do problema de colisão. Procura, então, discutir um algoritmo de estimativa de colisão entre satélites para uma trajetória projetada no futuro.

O trabalho não lida com os controles de órbita e de atitude dos satélites, mas com alguns critérios de decisão que podem levar à necessidade de colocar esses controles em ação. A idéia é estimar trajetórias de satélites durante um intervalo de tempo futuro e verificar se há ou não perigo de colisão entre eles. O perigo de colisão é definido pela escolha de um limite aceitável de probabilidade de colisão.

Nesse estudo, algumas simulações de trajetórias e estimação por filtragem de Kalman foram realizadas.

Um segundo objetivo que se pretende com esse trabalho é estudar a possibilidade de aplicação de algumas dessas idéias ao mundo aeronáutico. Sendo assim, ao final do trabalho, alguns comentários e sugestões relativos ao problema da colisão entre aeronaves são apresentados.

## **1.2 Motivação**

Apresentamos abaixo alguns dos motivos que nos levam a acreditar que a preocupação com colisões é válida tanto no contexto espacial quanto no contexto aeronáutico.

No cenário espacial, o crescente interesse na utilização de formações de pequenos satélites em lugar de um único satélite maior traz consigo a preocupação de reduzir o risco de colisões durante o posicionamento inicial, as reconfigurações, e as eventuais manobras de substituição de satélites da formação (KOON et al, 2001).

No mesmo cenário, o crescente número de constelações de satélites e o crescente número de detritos nas órbitas utilizadas tornam necessárias as tarefas de catalogar e acompanhar os detritos; e reposicionar os satélites de forma a evitar colisões (MATNEY et al, 2004).

No cenário aeronáutico, o aumento do número de aeronaves e de rotas não tem sido acompanhado pelo crescimento do número de aeroportos no mesmo ritmo. Isso vem causando congestionamentos na utilização dos aeroportos e rotas mais utilizadas, causando sobrecarga ao sistema de controle das torres de controle de tráfego aéreo (ATHENES et al, 2002). A possibilidade de estimar antecipadamente o risco de colisões poderia ser uma resposta para reduzir essa sobrecarga.

No mesmo cenário, a situação de uma aeronave voando em um ponto cego do radar de tráfego aéreo em ausência de comunicação é um bom exemplo de uma situação em que a detecção antecipada do risco de colisão seria importante. Esta detecção poderia ser utilizada em torres de tráfego aéreo como auxílio à tomada de decisão para reorientação das demais aeronaves voando nas proximidades. Isso possibilitaria medidas eficazes para evitar uma tragédia.

No cenário militar, a necessidade de desempenhar missões de interceptação de aeronaves ilegais motiva a pesquisa de algoritmos de busca e evasão que possam gerar trajetórias mais eficazes de perseguição (NUSYIRWAN & BIL, 2005).

Em ambos os cenários aeronáuticos, a perspectiva futura de um regime de operação em “free-flight”, onde as aeronaves não terão de seguir rigorosamente rotas pré-definidas, mas alterá-las para o aproveitamento de condições meteorológicas, visando otimizar o gasto de combustível, tornará ainda mais necessária a capacidade de se estimar o risco de colisão (KUEN et al, 1997).

### **1.2.1 Cenário Espacial**

No cenário espacial, existe um crescente interesse na utilização de conjuntos de pequenos satélites em lugar de um único satélite maior pelos seguintes motivos, conforme (KOON et al, 2001).

- a) Aumento do desempenho de observação da Terra pela atuação em paralelo dos vários satélites.
  
- b) Vários satélites podem sintetizar uma abertura muito maior do que pode ser obtido com uma única plataforma, aumentando significativamente a resolução de imagens obtidas por interferometria.

- c) Preço menor dos satélites individuais, o que permite redundância de componentes críticos.
- d) A constelação pode ser expandida pelo acréscimo de novos satélites.
- e) A constelação pode ser reconfigurada para atender a novos objetivos.
- f) A constelação pode ser expandida para acrescentar novos sensores.
- g) Se um dos satélites na constelação parar de funcionar, pode ser substituído ou a formação pode ser reconfigurada para compensar a falta dele.

O cálculo de trajetória e o reposicionamento podem ser feitos da estação de solo ou de maneira autônoma. Se for autônoma, certo grau de cooperação entre os satélites é esperado.

Há diversos desafios tecnológicos envolvidos na implementação de missões com satélites em formação, de acordo com (2006.PERNICKA et al, 2006):

- a) Prover rastreamento acurado, mas a baixo custo, das posições relativas entre os satélites da formação.
- b) É necessário equipamento que possa produzir, de forma controlada, empuxos de ordem muito pequena com precisão suficiente para manter a formação com tolerância de 1 cm de erro de posição relativa, conforme é exigido pelos projetos de formações com abertura virtual para operações de observação.

## **1.2.2 Cenário Aeronáutico**

### **1.2.2.1 Cenário Civil de Aviação**

O cenário civil de aviação consiste na seguinte situação: os aviões deslocam-se entre os aeroportos seguindo aerovias (INGALS, 1997). As aerovias são percursos em uma faixa de altitude definida e com uma largura definida. Esses percursos são compostos por vários segmentos de reta ligando pontos intermediários chamados “pontos de rota” (“way points”).

As torres de controle de tráfego aéreo são responsáveis por controlar aeronaves dentro de uma zona de controle, definindo qual a aerovia a ser utilizada e a velocidade de cruzeiro a ser mantida pela aeronave. Quando uma aeronave atinge a interface entre duas zonas, uma torre passa o controle para a outra (STAATS, 2003).

O acompanhamento da posição da aeronave é feito por comunicação via rádio, de forma que, em regiões em que a comunicação seja difícil, tais como nas situações de vôo sobre o mar ou sobre florestas, estimar a posição da aeronave é uma necessidade premente.

### **1.2.2.2 Cenário Militar de Aviação**

O cenário militar de aviação não segue as restrições impostas às aeronaves civis, mas mantém distância das rotas civis. Em situações de treinamento ou de locomoção, as aeronaves militares normalmente seguem rotas também compostas de segmentos de retas ligando pontos de rota.

Em situação de perseguição ou combate, procura-se utilizar algoritmos de interceptação que garantam a interceptação de uma aeronave fugitiva ou a evasão em menor tempo possível.

### **1.3 Organização do Trabalho**

No Capítulo 2, é feita uma revisão dos trabalhos encontrados na literatura que tiveram maior importância no desenvolvimento desta dissertação. São também apresentados definições e conceitos básicos necessários para a abordagem do problema colisão de satélites.

No Capítulo 3, são feitas a formulação do problema e a seleção dos métodos a serem utilizados na solução. As equações e resultados encontrados na literatura são descritos neste capítulo. Por fim, são apresentados os cenários propostos e o cenário escolhido para simulações.

No Capítulo 4 são apresentadas a modelagem e o equacionamento do problema, uma seqüência de passos de uma proposta de abordagem para a solução do problema da colisão, e as equações que representam os modelos utilizados nas simulações e a sua utilização.

No Capítulo 5 são apresentadas as simulações e os resultados obtidos

No Capítulo 6 é apresentada uma discussão sobre a aplicabilidade no cenário aeronáutico das idéias e algoritmos que compõem esse trabalho.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões, alguns comentários e sugestões para a evolução futura deste trabalho.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS E REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 Conceitos Básicos

#### 2.1.1 Constelação de Satélites

Uma constelação de satélites consiste em um conjunto de satélites operando em forma coordenada, não necessariamente cooperativa, com trajetórias planejadas, normalmente com objetivo de otimizar a cobertura de uma zona, região ou do planeta inteiro.

#### 2.1.2 Formação de Satélites

Uma formação de satélites é um tipo muito especial de constelação, consistindo de um conjunto de pequenos satélites, mantendo distâncias relativas controladas e operando em conjunto de forma a compor um grande satélite virtual (GAO et al, 2003). A Figura 2-1 ilustra uma formação com três satélites.

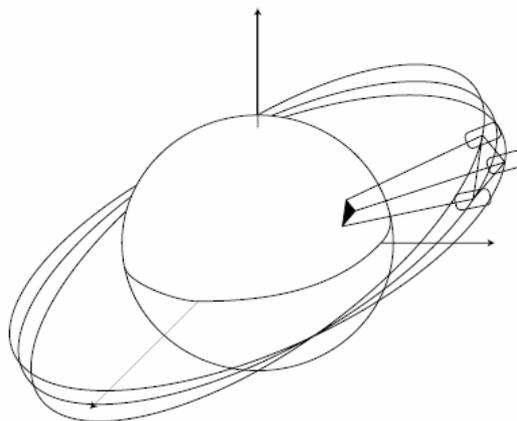


Figura 2-1: Exemplo de formação com 3 satélites.

Fonte: MILAM et al. (2001)

Dessa forma, é possível sintetizar uma abertura muito maior que a que seria possível com um único satélite. Em outros termos, pela composição das informações colhidas dos diversos satélites, é possível sintetizar o comportamento de uma antena ou de lentes muito maiores do que o que seria praticável instalar em um único satélite.

### **2.1.3 Incerteza de Navegação**

O conhecimento sobre a posição e velocidade lineares de um satélite depende das informações obtidas a partir de sensores presentes no satélite ou em estações terrestres de rastreamento. Contudo, esse conhecimento contém imprecisões, pois erros (ou incertezas) de posição e velocidade advêm de diferentes origens (MATNEY et al, 2004):

- a) Erro de condições iniciais, devido às imprecisões e atrasos dos próprios sensores nos momentos de medida.
- b) Incerteza no cálculo de posição e velocidade entre uma medida e outra, devida aos efeitos de perturbações gravitacionais, magnéticas, de arrasto, etc.
- c) Erros provenientes da imprecisão das acelerações de controle.

No momento de cada medida, temos apenas o primeiro tipo de incerteza. No lapso de tempo entre uma medida e outra, os outros dois tipos de incerteza devem ser considerados.

### **2.1.4 Elipsóide de Incerteza**

Se as medidas de posição e velocidade lineares fossem contínuas, exatas e precisas, a extrapolação da posição dos satélites seria suficiente para detectar

o risco de colisão. No entanto, devido à presença das incertezas, a posição do satélite é normalmente representada por um elipsóide, dentro do qual o satélite poderia estar à medida que se desloca..

Contudo, além das incertezas iniciais, há o lapso de tempo a considerar entre uma medida e outra. A propagação das incertezas iniciais, bem como das incertezas devidas a perturbações e controle, faz com que as incertezas de posição e velocidade aumentem, fazendo que esse volume aumente ao longo da trajetória.

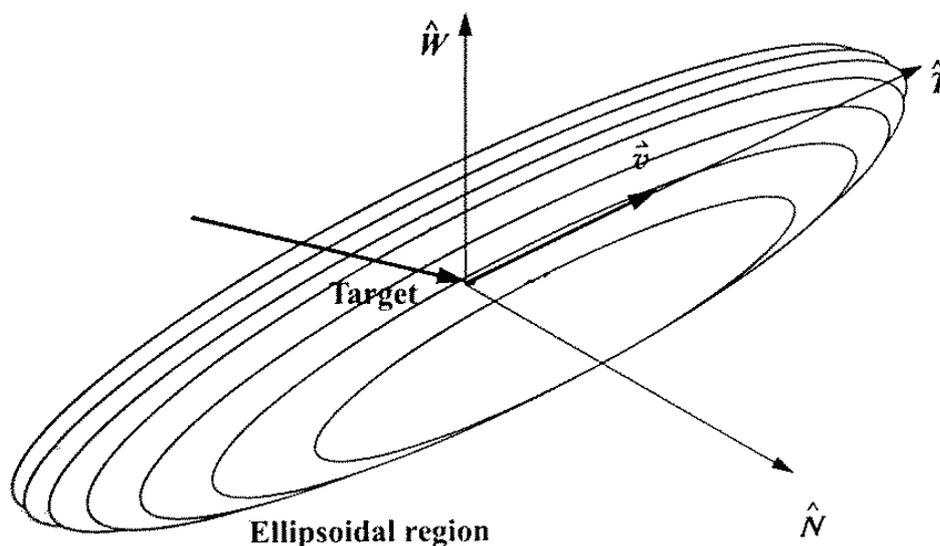


Figura 2-2: Geometria da região de incerteza elipsoidal.

Fonte: baseado em VALLADO e MCCLAIN (2007, p. 913)

### 2.1.5 Colisão

O impacto entre dois satélites no espaço, ou entre um satélite e um fragmento espacial (detritos) é suficiente para danificá-los ou destruí-los, devido à grande velocidade com que se deslocam.

É de grande interesse dos órgãos espaciais evitar que tais colisões ocorram. De acordo com (MATNEY et al, 2004), o “Space Surveillance Network”, operado pelo Comando Espacial Naval (“Naval Space Command”), um dos comandos que compõem o USSPACECOM<sup>1</sup>, mantém um catálogo dos objetos maiores que 10 cm (detritos) em órbita da Terra. As órbitas desses objetos são mantidas com exatidão suficiente para que seja possível readquiri-las novamente em um novo ponto de detecção.

(VALLADO & MCCLAIN, 2007, p. 907-908) apresenta uma série de eventos que ressaltam a necessidade de medidas precisas em situações de conjunção de órbitas:

- a) Em 11 de janeiro de 2007, os chineses executaram um teste anti-satélite e destruíram um satélite meteorológico antigo (NORAD 25730) com um míssil lançado de Xichang. Os detritos resultantes espalharam-se rapidamente e entraram em vários regimes orbitais. A situação inicial da nuvem de detritos é apresentada na (Figura 2-3). Em fevereiro de 2007, cerca de 900 detritos estavam sendo acompanhados pelo AFSCP. Pela figura, pode-se observar que, em apenas 4h após o evento, os detritos entraram em uma ampla gama de órbitas excêntricas.
  
- b) Em 24 de julho de 1996, um satélite francês (Cerise – 700 km de altitude em órbita polar) colidiu com um fragmento de um foguete Ariane que foi lançado em 1986.

---

<sup>1</sup> Para uma descrição mais detalhada, olhar o glossário.

- c) A análise sugere que os satélites Cosmos 1394 e Cosmos 926 tenham colidido em dezembro de 1991 (980Km de altitude, 83° de órbita).
  
- d) O terceiro estágio do lançador chinês CZ-4 e o corpo de um foguete do DMSP colidiram em janeiro de 2005 (885 Km de altitude sobre o pólo Sul).
  
- e) Nas missões 44 e 48 da Shuttle, a NASA precisou realizar manobras de desvio, devido a previsão de entrada de detritos na zona de segurança da espaçonave.
  
- f) Na missão 57, as manobras de desvio foram causadas pela previsão de conjunção com um resto de um propulsor de um lançador Cosmos.
  
- g) Numerosos vôos da Shuttle foram atingidos por pequenos detritos espaciais.

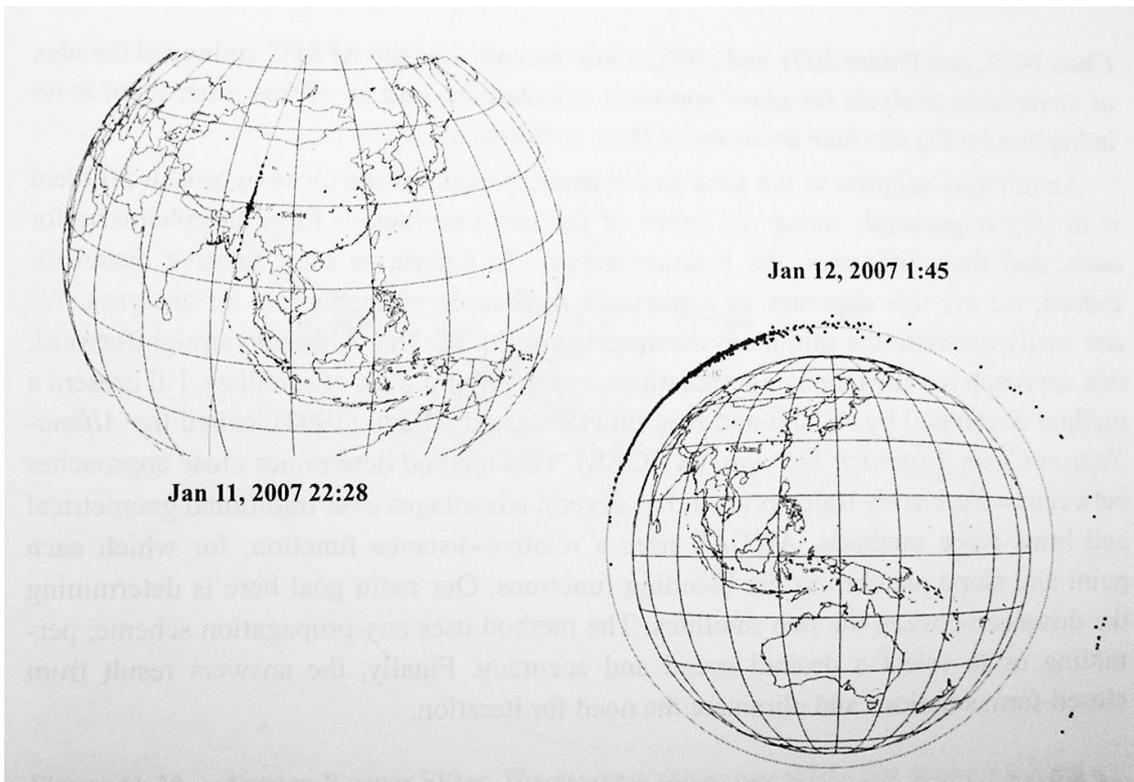


Figura 2-3: Espalhamento inicial de detritos do teste anti-satélite chinês.  
 Fonte: VALLADO e MCCLAIN (2007, p. 909)

No desenvolvimento desse trabalho, o risco de colisão poderá ser definido como a probabilidade de a distância entre os dois objetos ser menor que um valor definido como mínimo aceitável; ou, de forma equivalente, existir interseção entre os elipsóides de erro dos dois objetos.

É razoável supor que o risco de colisão seja maior na conjunção, isto é, no momento em que as trajetórias nominais dos objetos os colocam em situação de maior proximidade. A Figura 2-4 ilustra uma situação de aproximação, onde os elipsóides de incerteza dos dois objetos estão representados.

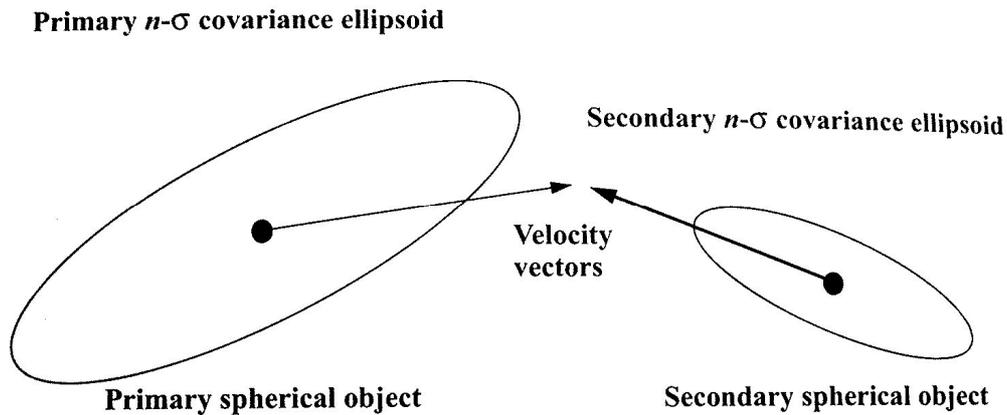


Figura 2-4: Geometria de conjunção  
 Fonte: VALLADO e MCCLAIN (2007, p. 924)

### 2.1.6 Risco de Colisão

Consideraremos risco de colisão a probabilidade de a distância entre dois objetos ser menor que alguma métrica de colisão, chamada de “risco aceitável”. Essa probabilidade é considerada uma função das condições iniciais, da incerteza do estado inicial, das perturbações, das acelerações e do tempo remanescente até a conjunção.

### 2.1.7 Configuração e Reconfiguração

Em uma formação, a necessidade de manter uma configuração estável de posições relativas entre os satélites requer ações com o objetivo de colocar os satélites estabilizados em sua configuração inicial. De acordo com (ALFRIEND, 2001), a correta escolha da órbita inicial implica em grande economia no consumo de combustível necessário para a manutenção dessa estabilidade. De acordo com a órbita inicial, a preocupação com perturbações na órbita tem um papel mais ou menos relevante nas incertezas de posição e velocidade. Após a configuração inicial, pode ser necessário realizar reconfigurações na

formação de satélites, seja para suprir a deficiência de um satélite defeituoso ou pela atribuição de uma nova função à formação. Tanto na configuração inicial quanto nas reconfigurações, a preocupação com o risco de colisões está presente.

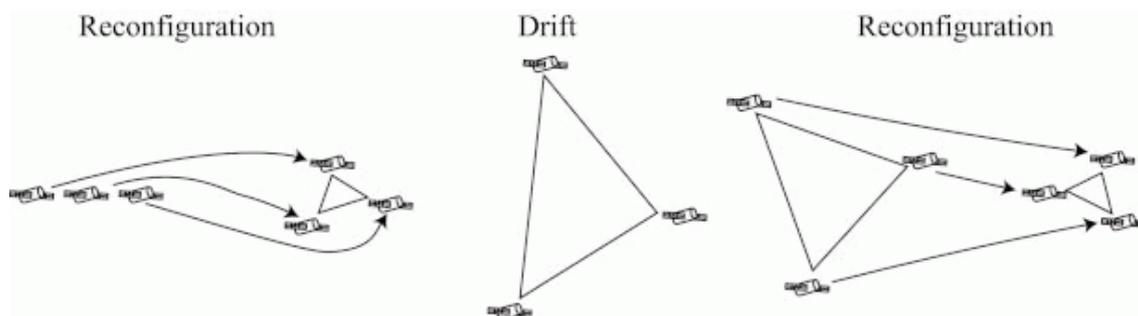


Figura 2-5: Reconfiguração da formação

Fonte: Adaptado de KOON et al.(2001)

## 2.2 Revisão Bibliográfica

Certos livros são referências básicas e usualmente são escolhidos como livros-texto de cursos de Astrodinâmica, nos quais se podem encontrar conceitos, teoremas e deduções que são a base para entender o conteúdo de todas as outras referências. Um deles é (BATE et al, 1971). Outro é (VALLADO & MCCLAIN, 2007) que, além do vasto conteúdo conceitual, varrendo desde as equações do movimento até o tratamento de colisões em conjunções, complementa a teoria com diversos algoritmos que podem servir de subsídios para elaboração de programas de computador.

Além das referências já mencionadas, uma visão geral dos conceitos envolvidos pelo assunto satélites em formação pode ser obtido das seguintes referências: [CARPENTER, 2003], [WECK, 2004], [PERNICKA, 2006] e [ALFRIEND, 2001].

Em [SLATER, 2006], o problema do cálculo de probabilidade de colisão é apresentado para o cenário de satélites em formação. O risco de colisão entre os satélites ou entre um satélite e corpos externos à formação é focado. A abordagem é propagar a matriz de covariância do estado inicial, usando teoria linear e determinando a probabilidade de a distância entre dois objetos ser menor que alguma “métrica de colisão”. O modelo linear utilizado é baseado nas equações de Clohessy-Wiltshire (“equações C-W”) também conhecidas como equações de Hill.

Já [GAO, 2003] discute a aplicabilidade das equações de Hill para o caso de formações em que os satélites não estejam muito próximos. Ele propõe a utilização de um modelo alternativo chamado “Relative Orbital Element Method” (ROEM) e, por comparação com este novo modelo, apresenta as limitações do modelo baseado nas equações de Hill.

Procuramos, neste trabalho, comparar os dois modelos acima para representar o comportamento dinâmico do movimento relativo entre os satélites.

Refinamentos adicionais poderão ser incluídos futuramente ao modelo, como a inclusão da perturbação J<sub>2</sub>, como proposto por [MILAM, 2001] ou a tentativa de utilização de modelos não-lineares, como os propostos por [QUEIROZ, 2000] ou por [GURFIL, 2003].

Em [CARPENTER, 2003], encontramos a proposta de 3 problemas (ou cenários) a serem utilizados como padrão na comparação entre algoritmos e tecnologias quando são aplicados em missões envolvendo formação de satélites: LEO, HEO e LP. Os problemas são descritos no apêndice A, na página 131. Embora não sejam utilizados nesse trabalho, a sua utilização é sugerida para a realização de trabalhos futuros.

Para obter subsídios para estender o trabalho para o meio aeronáutico, modelos de sistemas de tráfego (ATS) aéreo podem ser encontrados em (INGALS, 1997). O sistema atual de controle de tráfego aéreo (ATC), em que

colisões de aeronaves são evitadas por segregação de rotas aéreas é descrito. A evolução para um sistema de “free-flight” é analisado, sendo possibilitado pelo crescente uso de GPS embarcado. Algoritmos para determinação de trajetórias inteligentes para solução de conflitos são apresentados e sua otimalidade é analisada.

Na área de aviação militar, (CANIÇALI, 2002) apresenta a utilização de técnicas de controle ótimo ao processo de interceptação de alvos, utilizando um estimador linear quadrático para o caso de o interceptador operar velocidade constante; e um solução numérica baseada no método do gradiente para o caso de o interceptador operar em velocidade variável.

As definições do sistema de tráfego aéreo brasileiro, com as estrutura do espaço aéreo, classificação do espaço aéreo, dimensões das aerovias, tabelas de classes de espaço aéreo e tipos de vôo e podem ser encontradas em (COMAER, 2006).

Descrições da utilização de cartas de rota, segregação de altura podem ser encontradas na internet. Várias informações ao longo desse texto foram colhidas da internet. Sempre que alguma dessas informações for usada, o endereço da página na internet é citado.

### **3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E DISCUSSÃO DOS MÉTODOS DE SOLUÇÃO**

O contexto geral do problema consiste em tomar um satélite e verificar qual a probabilidade de ocorrer uma colisão desse satélite com qualquer outro objeto (satélite/detritos) em um intervalo de tempo definido. Se a probabilidade for maior que um valor aceitável, o satélite deverá ser reposicionado para evitar a colisão. Sendo assim, o intervalo de tempo escolhido deve ser grande o suficiente para garantir que as manobras de reposicionamento possam ser executadas.

O problema específico abordado aqui é estimar a probabilidade de colisão de um satélite, chamado de satélite principal, com um outro objeto, chamado de satélite secundário, a partir de condições iniciais conhecidas: posição, velocidade e matriz de covariância dessas medidas.

A idéia é melhorar a estimativa da última medição de posição e velocidade através de filtragem de Kalman; estimar as posições futuras, bem como as incertezas; determinar a posição de mínima distância nominal (conjunção); e calcular a probabilidade de colisão no momento da conjunção.

Como resultado, a trajetória pode ser visualizada como o movimento de um volume que cresce enquanto se desloca. Como o momento da conjunção corresponde à situação de máxima probabilidade de colisão, é bastante conveniente escolher esse momento para o cálculo de probabilidade de colisão. Se na conjunção, a colisão for improvável, não haverá risco em momentos anteriores.

Deve-se ter sempre em mente que, caso se deseje usar o algoritmo em condições reais de operação (processamento em tempo real), o cálculo do risco de colisão deve ser feito de maneira a que o tempo máximo gasto no cálculo possa ser previsível. Isso significa que o número máximo de iterações

em operações cíclicas a serem realizadas para convergência de funções (e.g., integrações, cálculo de solução para equação de Kepler) deve ser limitado.

Como é sugerido por (ALARCON et al, 2002), é bastante razoável que, antes de realizar um processo complexo de cálculo de probabilidade de colisão, um processo mais simples de triagem seja executado entre os pares de satélites (ou satélites e detritos) para verificar se realmente há algum risco de colisão durante o intervalo de tempo de interesse. Por exemplo, satélites em órbitas muito distantes já seriam descartados de imediato.

### **3.1 Sistemas de coordenadas**

Para contextualizar o problema, o movimento dos satélites é representado alternativamente pelas seis grandezas que constituem o vetor de **estado** do satélite no espaço ou pelo vetor de **elementos orbitais**, de acordo com as vantagens matemáticas que a escolha de um ou de outro possam trazer.

O vetor de estados contém posição e velocidade com base em um sistema de coordenadas cartesianas; o vetor de elementos orbitais contém os elementos keplerianos.

Utilizaremos três sistemas de coordenadas: um sistema com direções inerciais centrado na Terra; um sistema centrado na Terra, alinhado com o plano orbital; e outro não-inercial centrado no satélite principal. Para calcular o comportamento do segundo satélite em relação ao primeiro, é conveniente fazer a transformação de coordenadas do sistema inercial para o sistema não inercial do satélite principal.

#### **3.1.1 Sistema Cartesiano Celeste**

Conhecido também como Sistema de Coordenadas Inerciais Centradas na Terra (ECI – “Earth Centered Inertial”), é um sistema de coordenadas cartesianas conforme apresentado na Figura 3-1. O eixo z determina o eixo de

rotação da Terra apontando para o Norte, o eixo  $x$  aponta na direção do Equinócio Vernal ( $\Upsilon$ ) e o eixo  $y$  completa o sistema ortogonal, apontando a  $90^\circ$  para o Leste no plano equatorial (VALLADO & MCCLAIN, 2007). O Equinócio Vernal é um ponto imaginário no espaço que se situa ao longo de uma linha que representa a intersecção do plano equatorial da Terra e o plano da órbita desta em torno do Sol, a eclíptica. Este eixo é o segmento de linha que aponta do centro da Terra em direção ao centro do Sol no início da Primavera, ou equinócio da Primavera, quando ele cruza o equador terrestre na direção Norte. O eixo  $x$  se situa tanto no plano equatorial quanto na eclíptica.

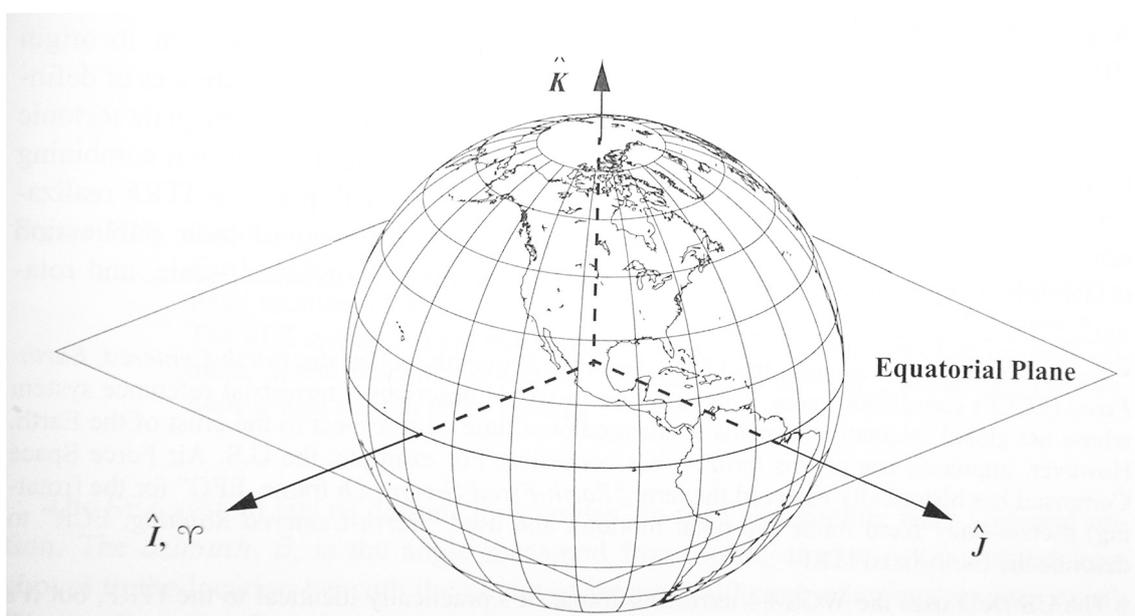


Figura 3-1: Sistema Cartesiano Celeste  
Fonte: VALLADO & MCCLAIN (2007, p. 159).

### 3.1.2 Sistema orbital de coordenadas (PQW)

Este sistema é também conhecido como sistema de coordenadas perifocal (ou PQW). Nesse sistema o plano fundamental é a órbita do satélite e a origem é o centro na Terra. O eixo P aponta para o perigeu, o eixo Q está a  $90^\circ$  do eixo P, na direção do movimento do satélite.

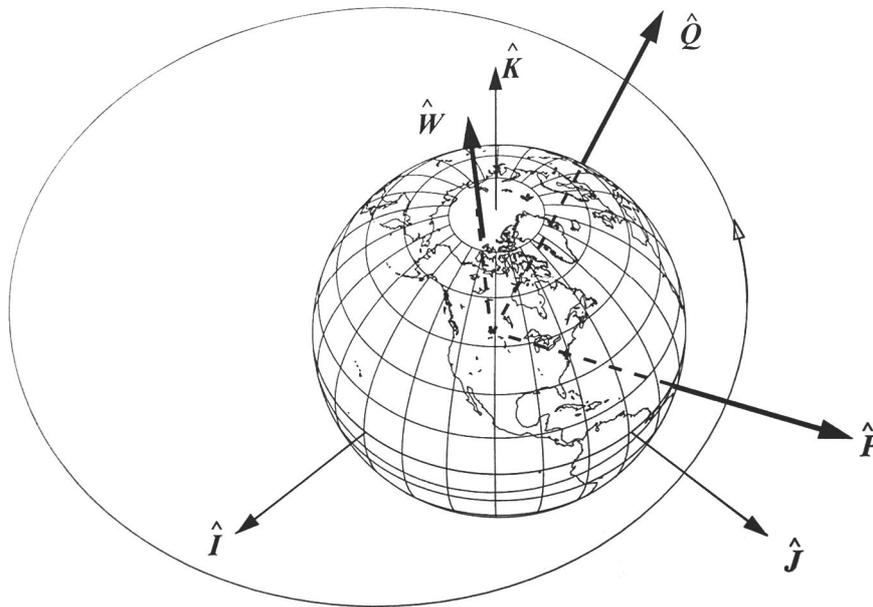


Figura 3-2: Sistema de Coordenadas PQW

Fonte: Adaptado de VALLADO & MCCLAIN (2007, p. 164).

### 3.1.3 Sistema RSW de Coordenadas do Satélite

É um sistema adequado para estudos de movimento relativo. É um sistema que se move com o satélite e é também chamado de “Sistema Coordenado Gaussiano” ou RTN (Radial, Transverse, Normal) ou LVLH (Local Vertical, Local Horizontal). O eixo **R** aponta do centro da Terra na direção do raio vetor que aponta para o satélite à medida que ele se move em sua órbita. O eixo **S** aponta na direção do vetor velocidade (não necessariamente paralelo a ele) e é perpendicular ao raio vetor. O eixo **W** é normal ao plano orbital, completando o sistema ortogonal. O sistema é representado na Figura 3-3.

O eixo **S** só é alinhado com o vetor velocidade em órbitas circulares ou no perigeu e apogeu de órbitas elípticas (VALLADO & MCCLAIN, 2007).

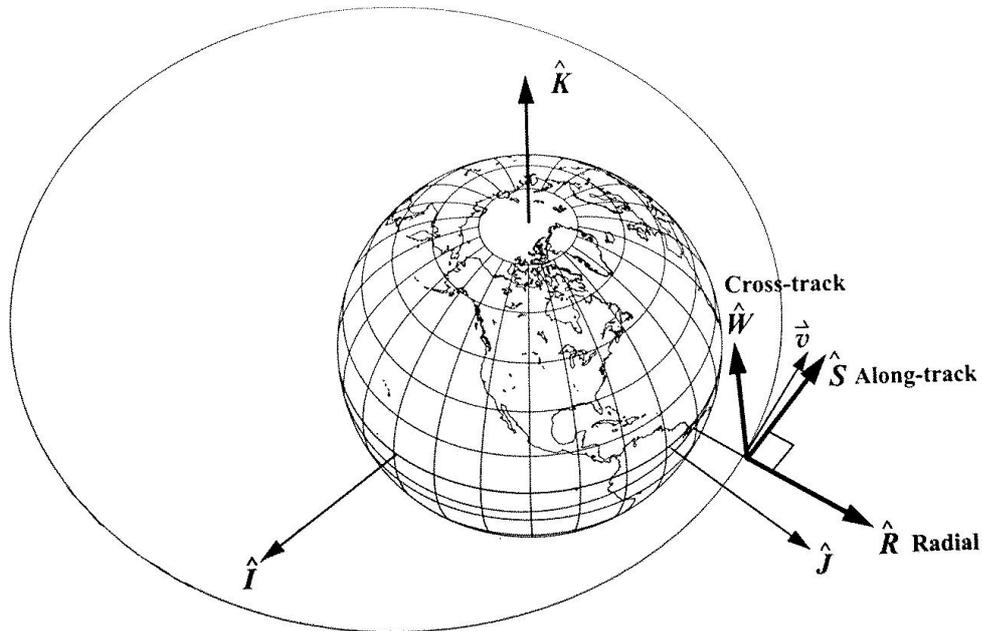


Figura 3-3: Sistema de Coordenadas RSW

Fonte: Adaptado de VALLADO & MCCLAIN (2007, p. 165).

### 3.1.4 Elementos Orbitais keplerianos

Os elementos keplerianos ou clássicos são 6 coordenadas independentes que posicionam completamente o satélite e sua órbita, sendo 5 delas suficientes para caracterizar completamente o tamanho, a forma e a orientação de uma órbita; e a 6ª necessária para localizar a posição do satélite ao longo da órbita em um tempo específico. As definições que se seguem podem ser encontradas em vasta literatura, entre as quais: KUGA & RAO, 1995; PILCHOWSKI et al, 1981; VALLADO & MCCLAIN, 2007; BATE et al, 1971.

Três dos elementos keplerianos são definidos no movimento plano, definindo a elipse e posicionando o satélite no plano da elipse:  $a$ ,  $e$  e  $f$ . Para se definir a órbita espacialmente, utilizam-se os ângulos de Euler da órbita, definidos para um sistema de coordenadas Cartesiano Celeste (Figura 3-4).

- a) Semi-eixo maior  $a$  – constante que define o tamanho da órbita cônica.
- b) Ecentricidade  $e$  – constante que define a forma da órbita cônica.
- c) Inclinação  $i$  - a inclinação da órbita em relação ao equador.  
 $0 \leq i \leq 180^\circ$
- d) Ascensão reta do nodo ascendente  $\Omega$  - ângulo entre a origem do eixo  $OX$  e o eixo do nodo ascendente  $O\Omega$  (ponto onde a órbita cruza o plano do Equador, a partir do hemisfério sul para o norte).  
 $(0 \leq \Omega \leq 360^\circ)$
- e) Argumento do perigeu  $\omega$  - ângulo entre  $OX$  e  $O\Pi$  (onde  $\Pi$  é o perigeu, ponto da elipse mais próximo do foco, o centro da Terra).  
 $(0 \leq \omega \leq 360^\circ)$
- f) Anomalia verdadeira  $f$  - posição atual do satélite em relação ao perigeu.  $(0 \leq f \leq 360^\circ)$



Valem as seguintes relações para a órbita (Figura 3-5), as quais nos permitirão transformar elementos orbitais em vetores de estado no sistema de coordenadas orbitais (PILCHOWSKI et al, 1981).

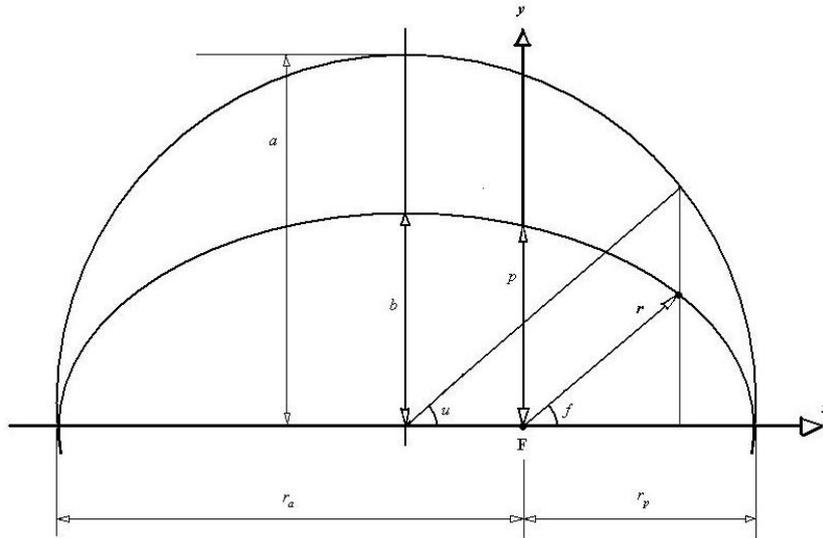


Figura 3-5: Elipse do movimento orbital  
 Fonte: KUGA & RAO (1995 , p. 26)

Obtendo  $a$  a partir de  $p$ :

$$p = a(1 - e)^2 \quad (3.1)$$

Obtendo a velocidade angular (movimento médio):

$$n = \sqrt{\left(\frac{\mu}{a^3}\right)} \quad (3.2)$$

onde

$$\mu = GM_T = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \text{const} = 3,986004 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2} \quad (3.3)$$

$G$  é a constante gravitacional e  $M_T$  é a massa da Terra.

Obtendo a anomalia média:

$$M = n(t - T) \quad (3.4)$$

Obtendo a anomalia excêntrica (Eq. de Kepler):

$$M = u - e \sin(u) \quad (3.5)$$

A equação de Kepler é uma equação transcendental, cuja solução é obtida de forma iterativa.

Obtendo a anomalia verdadeira:

$$\tan^2\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{(1+e)}{(1-e)} \tan^2\left(\frac{u}{2}\right) \quad (3.6)$$

Obtendo o vetor de estado (coordenadas do plano orbital):

$$x = r \cos f = a(\cos u - e) \quad (3.7)$$

$$y = r \sin f = a\sqrt{(1-e^2)} \sin(u) \quad (3.8)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos f - r \dot{f} \sin f = -a\dot{u} \sqrt{(1-e^2)} \cos u \quad (3.9)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin f + r \dot{f} \cos f = a\dot{u} \sqrt{(1-e^2)} \sin u \quad (3.10)$$

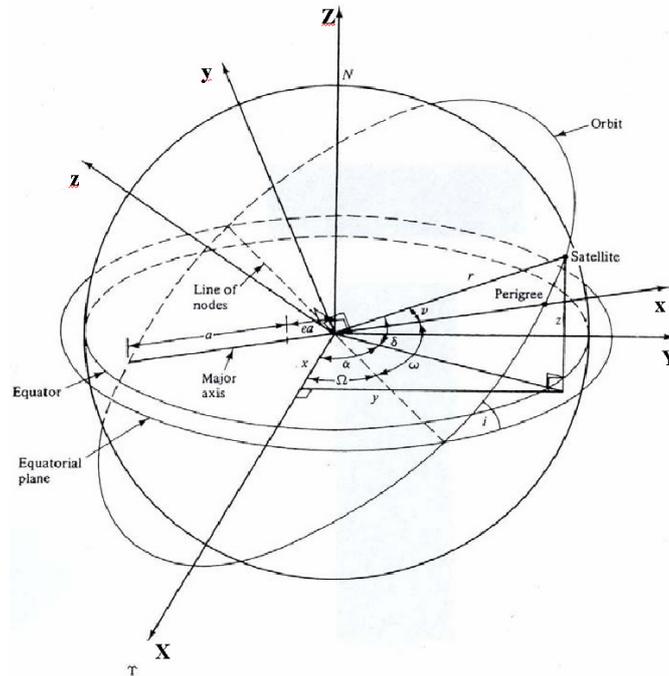


Figura 3-6: Coordenadas do plano orbital  $x,y,z$  e coordenadas ECI  $X,Y,Z$   
 Fonte: baseado em ALMEIDA (2003)

A transformação das coordenadas  $(x, y, z)$  do plano orbital para coordenadas ECI  $(X, Y, Z)$ , apresentada na Figura 3-6, é dada por:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(\Omega, i, \omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde  $R(\Omega, i, \omega)$  é a matriz de rotação:

$$R(\Omega, i, \omega) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\
R_{12} &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\
R_{13} &= \sin \Omega \sin i \\
R_{21} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\
R_{22} &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\
R_{23} &= -\sin i \cos \Omega \\
R_{31} &= \sin \omega \sin i \\
R_{32} &= \cos \omega \sin i \\
R_{33} &= \cos i
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ou, utilizando-se as equações 3.7 e 3.8, temos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\cos u - e) \\ a\sqrt{(1 - e^2)}\sin u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

De onde obtemos:

$$\begin{aligned}
X &= A_x(\cos u - e) + B_x \sin u \\
Y &= A_y(\cos u - e) + B_y \sin u \\
Z &= A_z(\cos u - e) + B_z \sin u
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde  $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ , chamadas “constantes de Brower”, são dadas por:

$$\begin{aligned}
A_x &= aR_{11} \\
A_y &= aR_{21} \\
A_z &= aR_{31} \\
B_x &= a\sqrt{(1 - e^2)}R_{12} \\
B_y &= a\sqrt{(1 - e^2)}R_{22} \\
B_z &= a\sqrt{(1 - e^2)}R_{32}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

As componentes de velocidade do vetor de estado são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} = \frac{an}{r} (-A_x \sin u + B_x \cos u) \\ \dot{Y} = \frac{an}{r} (-A_y \sin u + B_y \cos u) \\ \dot{Z} = \frac{an}{r} (-A_z \sin u + B_z \cos u) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

### 3.2 Escolha de Cenários para Teste

Foram estudadas algumas alternativas de cenários para teste.

(KUGA & OLIVEIRA, 2005) propõe um cenário para simulação de propagação de trajetória com o modelo de Clohessy-Wiltshire composto por 3 satélites em órbita circular, com as seguintes condições iniciais:

Tabela 3.1: Condições iniciais para teste

Elementos orbitais		Satélite 1 (primário)	Satélite 2	Satélite 3
Semi-eixo maior	a	15.000 km	15.000 km	15.000 km
Ecentricidade	e	0	0	0
inclinação	i	0	0	0
Ascensão reta do nodo ascendente	$\Omega$	0	0,01 graus	0,02 graus
Argumento do perigeu	$\omega$	0	0	0
Anomalia verdadeira	f	0	0	0

(CARPENTER, 2003) propõe três cenários, descritos com detalhes no Apêndice A, na página 131, a serem utilizados como padrão na comparação entre algoritmos e tecnologias quando são aplicados em missões envolvendo formação de satélites.

No presente trabalho, optou-se por utilizar o cenário proposto por (KUGA & OLIVEIRA, 2005) como cenário básico para teste de algoritmos pelo fato de ter resultados disponíveis para comparação e validação. No entanto, foram utilizados apenas dois satélites em vez de três, já que a colisão é sempre analisada em um par de objetos.

A utilização dos cenários propostos por (CARPENTER, 2003) era almejada, mas não houve tempo de utilizá-los. Sua utilização fica como sugestão para trabalhos futuros. A utilização desses cenários pode vir a ser ainda mais interessante se os algoritmos de estimação de probabilidade de colisão forem agregados a ambientes de simulação de constelações de satélites.

### **3.3 Triagem**

O objetivo da pré-filtragem é identificar pares de objetos para os quais valeria a pena calcular o risco de colisão. Através de alguns testes simples, baseados em princípios simples de dinâmica de vôo, é possível verificar se há condições para a conjunção. Caso não haja, não haverá necessidade de proceder a cálculos mais refinados.

Vale observar que os filtros são utilizados em ordem crescente de complexidade, que seria a ordem lógica de utilização, pois os pares de objetos descartados pelos primeiros filtros acarretariam um custo computacional menor.

Não são implementados nesse trabalho esquemas de triagem, mas o estudo e discussão do tema são importantes no contexto de colisão, sendo incluída uma descrição no apêndice B (página 135) de alguns métodos para maior completeza do trabalho.

### 3.4 Estimação de estados

A estimação é feita por filtragem de Kalman. Colocaremos abaixo as equações para o filtro de Kalman como apresentado por (KUGA, 2005).

Consideraremos um modelo dinâmico não-linear dado por:

$$\dot{x} = f(x, t) + Gw \quad (3.18)$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (3.19)$$

onde  $x(t) = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$  é o vetor de estado do sistema;  $f(x, t)$  é a função do estado  $x$  e do tempo  $t$ ;  $G$  é a matriz de adição de ruído dinâmico;  $w$  é o ruído dinâmico, que representa os erros no modelo, flutuações e outros efeitos que não se possa modelar;  $y_k$  é o vetor de medidas;  $h_k$  define como o estado se relaciona às medidas; e  $v_k$  é o ruído de medida.

Os ruídos são considerados gaussianos com média zero:  $w = N(0, Q)$  e  $v = N(0, R)$ .

O filtro de Kalman é solução ótima de mínima variância para o problema linear-quadrático-gaussiano.

Para sistemas lineares, utiliza-se o filtro linear de Kalman. A dinâmica linear simplifica consideravelmente a propagação.

Para sistemas não-lineares utiliza-se o filtro linearizado ou o filtro estendido. O filtro de Kalman linearizado usa uma trajetória de referência e calcula as diferenças em relação a essa trajetória; o filtro de Kalman estendido usa o estado atual estimado para gerar uma nova trajetória de referência a cada observação, obtendo, em geral, melhores resultados, mas a um custo computacional bem superior aos demais. Por esse motivo, para aplicações

não-lineares que tenham requisitos de tempo real, o filtro linearizado é preferido.

Como o movimento de um satélite é não-linear, o filtro linear de Kalman não é adequado. Como é interesse desse trabalho o processamento em tempo real, o filtro linearizado foi utilizado. No entanto, o filtro estendido foi também implementado para servir de padrão de comparação.

O filtro linearizado de Kalman consiste de duas etapas:

Propagação ou predição (“time update”) do instante  $t_{k-1}$  a  $t_k$  :

$$\dot{\bar{x}} = f(x_n) + F_{x_n}(\bar{x} - x_n) \quad (3.20)$$

$$\dot{\bar{P}} = F_{x_n}\bar{P} + \bar{P}F_{x_n}^t + GQG^t \quad (3.21)$$

com condições iniciais  $\bar{x}_{k-1} = \hat{x}_{k-1}$  e  $\bar{P}_{k-1} = \hat{P}_{k-1}$ ; e  $F_{x_n} \equiv [\partial f / \partial x]_{x=x_n}$ .

$\bar{x}_k$  e  $\bar{P}_k$  representam o estado e a covariância a priori no instante k;  $\hat{x}_k$  e  $\hat{P}_k$  representam o estado e a covariância a posteriori no instante k;  $F_{x_n}$  é a matriz de transição de estado calculada para o ponto  $x_n$ .

Atualização ou correção (“measurement update”) no instante  $t_k$  :

$$K_k = \bar{P}_k H_k^t (H_k \bar{P}_k H_k^t + R_k)^{-1} \quad (3.22)$$

$$\hat{P}_k = (I - K_k H_k) \bar{P}_k \quad (3.23)$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_k (y_k - h_k(x_n(t_k)) - H_k(\bar{x}_k - x_n(t_k))) \quad (3.24)$$

com  $H_k \equiv [\partial h_k / x]_{x=x_n(t_k)}$ .

### 3.5 Cálculo da matriz de transição de estados

Consideraremos que o nosso vetor de medidas será o próprio vetor de estados, de forma que  $H_k = I$ .

Calculemos a matriz  $F_{x_n}$ :

$$F_{x_n} \equiv \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_n} \quad (3.25)$$

Tomemos equações de movimento de um satélite:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.26)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$F_{x_n} \equiv \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{array} \right]_{x=x_n} \quad (3.28)$$

Temos que:

$$\vec{r} = [x \quad y \quad z]^t \quad (3.29)$$

$$\vec{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^t \quad (3.30)$$

$$\dot{\vec{v}} = [\dot{v}_x \quad \dot{v}_y \quad \dot{v}_z]^t = -\frac{\mu}{r^3} [x \quad y \quad z] \quad (3.31)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.32)$$

Temos, então:

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} \equiv \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{array} \right]_{x=x_n} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right]_{x=x_n} = 0_{3 \times 3} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} \equiv \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial v_x} & \frac{\partial f_1}{\partial v_y} & \frac{\partial f_1}{\partial v_z} \end{array} \right]_{x=x_n} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_x}{\partial v_x} & \frac{\partial v_x}{\partial v_y} & \frac{\partial v_x}{\partial v_z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial v_x} & \frac{\partial v_y}{\partial v_y} & \frac{\partial v_y}{\partial v_z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial v_x} & \frac{\partial v_z}{\partial v_y} & \frac{\partial v_z}{\partial v_z} \end{array} \right]_{x=x_n} = I_{3 \times 3} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} \equiv \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array} \right]_{x=x_n} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial y} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial y} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial x} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial y} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial z} \end{array} \right]_{x=x_n} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \dot{v}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\mu x}{r^3} \right) = \frac{\partial(-\mu x)}{\partial x} \left( \frac{1}{r^3} \right) - \mu x \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu x^2}{r^5} \quad (3.36)$$

Procedendo analogamente para todos os termos, teremos:

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = \left[ \begin{array}{ccc} -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu x^2}{r^5} & \frac{3\mu xy}{r^5} & \frac{3\mu xz}{r^5} \\ \frac{3\mu xy}{r^5} & -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu y^2}{r^5} & \frac{3\mu yz}{r^5} \\ \frac{3\mu xz}{r^5} & \frac{3\mu yz}{r^5} & -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu z^2}{r^5} \end{array} \right]_{x=x_n} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v} \equiv \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_2}{\partial v_x} & \frac{\partial f_2}{\partial v_y} & \frac{\partial f_2}{\partial v_z} \end{array} \right]_{x=x_n} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_x}{\partial v_z} \\ \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_y}{\partial v_z} \\ \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_x} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_y} & \frac{\partial \dot{v}_z}{\partial v_z} \end{array} \right]_{x=x_n} = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (3.38)$$

Enfim:

$$F_{x_n} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu x^2}{r^5} & \frac{3\mu xy}{r^5} & \frac{3\mu xz}{r^5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3\mu xy}{r^5} & -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu y^2}{r^5} & \frac{3\mu yz}{r^5} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3\mu xz}{r^5} & \frac{3\mu yz}{r^5} & -\frac{\mu}{r^3} + \frac{3\mu z^2}{r^5} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{x=x_n} \quad (3.39)$$

## 4 MODELAGEM E EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

### 4.1 Formulação do Problema

O problema está representado na Figura 4-1.

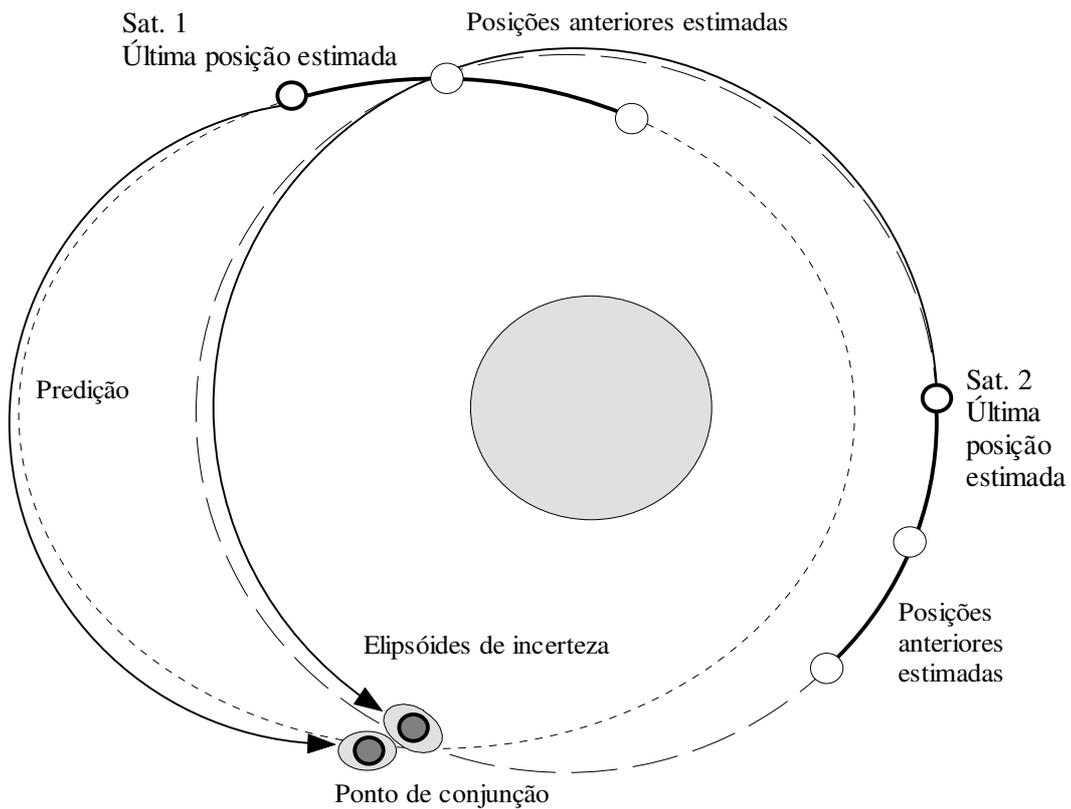


Figura 4-1: Predição de ponto de conjunção.

São dados dois satélites, dos quais são conhecidos os elementos orbitais, as matrizes de covariância e os erros dinâmicos no mesmo instante, estimados a partir da última medida e de medidas anteriores.

Deseja-se, dentro de um limite, prever a posição futura de maior proximidade entre os dois satélites e calcular a probabilidade de colisão entre eles.

## 4.2 Abordagem ao Problema

O presente trabalho preconiza a execução dos seguintes passos, os quais serão estudados e discutidos:

- a) Predizer a trajetória futura do satélite principal a partir da última posição conhecida.
- b) Predizer posição e velocidade relativas entre o satélite principal e o secundário e determinar o ponto de conjunção (momento de maior proximidade).
- c) Propagar a matriz de covariância por filtragem de Kalman até o ponto de conjunção.
- d) Obter a máxima probabilidade de colisão e compará-la ao limiar de decisão.

As incertezas associadas a posição e velocidade que são utilizadas para a obtenção das matrizes de covariância podem normalmente ser obtidas dos proprietários/operadores dos satélites ou de fontes independentes de observações, como o “US Satellite Catalog” (ALFANO 2003)

Contudo, para o objetivo desse trabalho, a trajetória foi simulada assim como as incertezas, com a suposição de densidades de probabilidade gaussianas. A trajetória simulada fez o papel de trajetória real. Adicionando ruído gaussiano aos valores, foi simulada a trajetória com as incertezas associadas.

Para a simulação das trajetórias, utilizamos o algoritmo proposto por (KUGA, 1986), o qual é uma simplificação para aplicação a órbitas elípticas do algoritmo mais geral proposto por (GOODYEAR, 1966).

É importante lembrar que, em operação real, dados novos são obtidos periodicamente. Isso permite aplicar um filtro de Kalman para melhorar a estimativa de posição e velocidade, bem como a matriz de covariância, reduzindo-a. O ideal seria refazer os cálculos sempre que houvesse dados novos, reiniciando o processo, reduzindo as incertezas ao mínimo novamente e melhorando a precisão do cálculo de probabilidade de colisão. Se a frequência de aquisição de dados for alta, isso pode não ser possível. E se a frequência for muito baixa, a matriz de covariância irá crescendo e, com ela, a incerteza na predição da posição dos satélites.

O estimador que fará a estimação da proximidade entre os dois satélites utiliza modelos dinâmicos que descrevem o movimento relativo entre dois objetos. Foram estudados dois modelos:

- a) Clohessy-Wiltshire (ou equações de Hill)
  
- b) Relative Orbital Element Method (ROEM)

### **4.3 Arquitetura de Simulação**

A arquitetura a que almejamos a longo prazo é inspirada na arquitetura apresentada por (ALARCON et al, 2004), apresentada na Figura 4-2. Essa arquitetura é utilizada pelo ESOC (“ESA’s European Space Operation Centre”).

O objeto desse trabalho se restringe ao papel que, nessa arquitetura, é representado pelo bloco de avaliação do risco de colisão (CRASS).

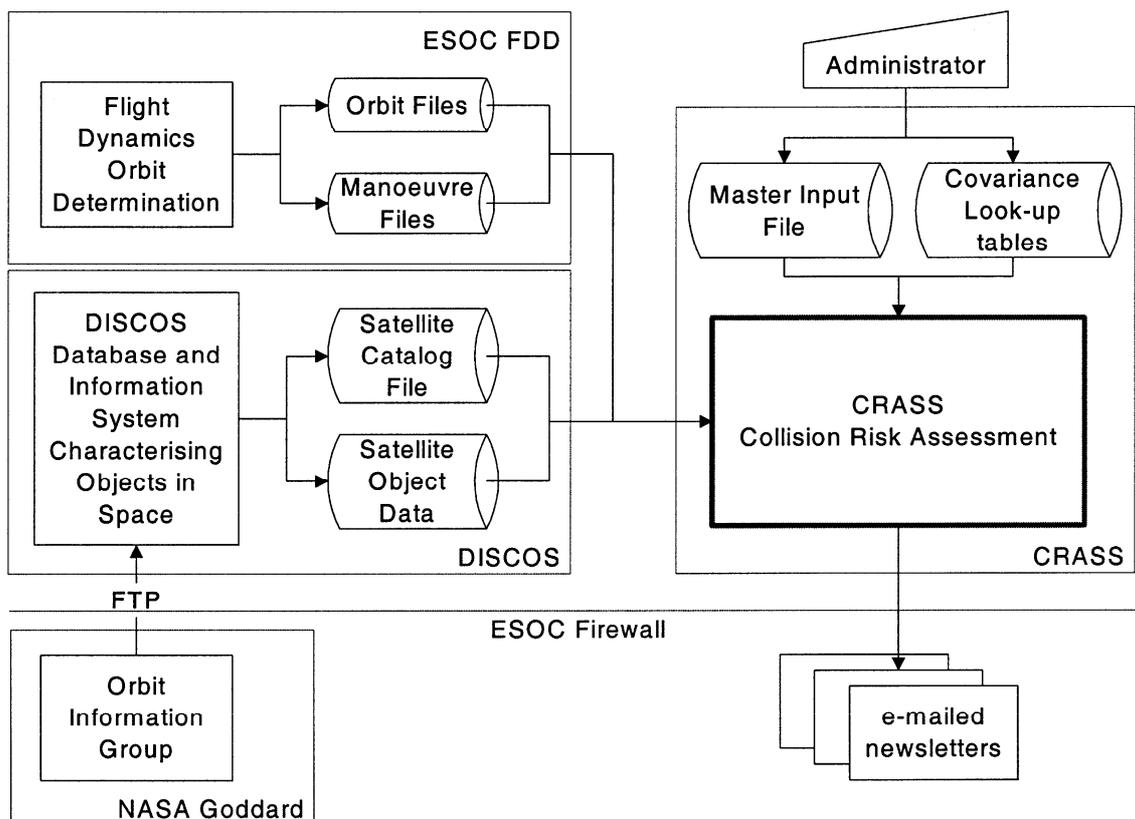


Figura 4-2: Arquitetura de levantamento de risco de colisão do ESOC

Fonte: ALARCON et al.(2004)

O mecanismo interno que propomos para o bloco de avaliação de risco de colisão é apresentado na Figura 4-3.

O bloco de triagem, como já foi dito anteriormente, está presente no diagrama pela sua importância em uma possível evolução desse trabalho para um sistema de tratamento de dados reais.

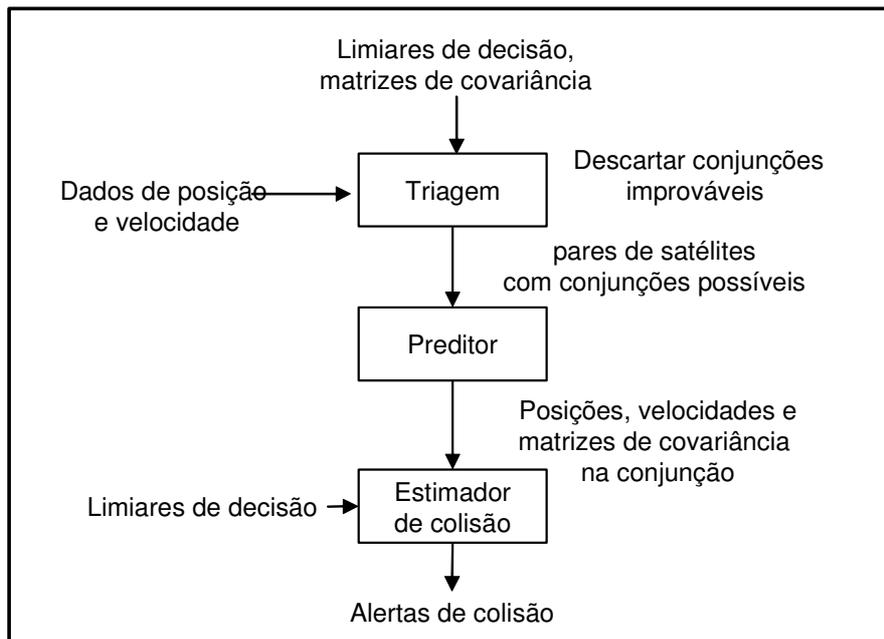


Figura 4-3: Mecanismo proposto para avaliação de risco de colisão.

Sendo assim, faremos um estudo apenas dos mecanismos “Preditor” e “Estimador de Colisão”, reduzindo o mecanismo ao que é apresentado na Figura 4-4.

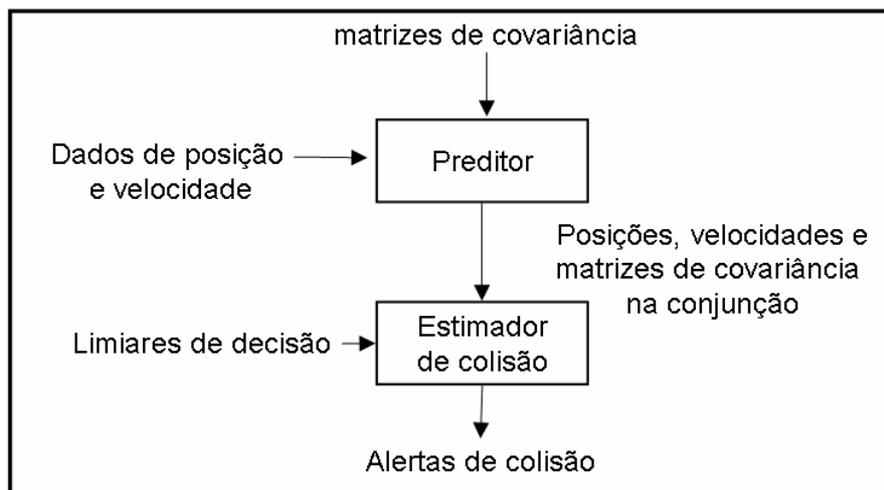


Figura 4-4: Mecanismo a ser estudado.

A simulação é composta das seguintes partes:

- a) Simulação da trajetória de referência: A trajetória do satélite principal deverá ser calculada para o intervalo de interesse (Figura 4-5),.

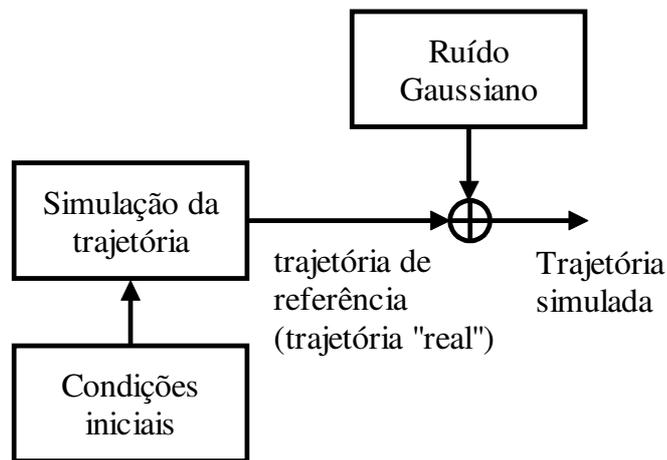


Figura 4-5: Simulação das trajetórias e incertezas.

- b) Estimador de movimento relativo: a simulação de movimento depende do seguinte:

- Modelo dinâmico: equações que descrevem a posição relativa entre o satélite principal e o secundário.
- Filtro de Kalman: para propagar a posição e covariância dos objetos.
- Inicialização do cenário: para estabelecer as condições iniciais dos objetos.

- c) Preditor de colisão: deverá calcular a probabilidade de colisão e compará-la a um limiar de decisão, e, assim, prover subsídios para a decisão de manobra.

#### 4.4 Modelo Dinâmico

Os modelos dinâmicos usados nesse trabalho equacionam o movimento relativo entre dois satélites. Os dois modelos estudados são: as equações de Clohessy-Wiltshire (CLOHESSY & WILTSHIRE, 1960, citado por KUGA & OLIVEIRA, 2005), conhecidas também com equações de Hill; e o modelo “Relative Orbit Element Method” ROEM (GAO et al, 2003).

As equações de Hill têm sido usadas por muitos artigos recentes sobre formações de satélites. Foram obtidas por aproximação linear e têm algumas restrições no que tange ao aumento de erros quando a distância entre os satélites é grande (GAO et al, 2003). Contudo, para situações em que a distância entre os satélites na formação seja pequena, pode ser uma escolha adequada.

O método ROEM foi apresentado por (GAO et al, 2003). Ele foi proposto como uma alternativa para as equações de Hill para superar as limitações do primeiro modelo, já que as aproximações algébricas usadas para obter as primeiras não são sempre aceitáveis, resultado em inconsistências físicas (resultados absurdos) em algumas situações.

#### 4.5 Critério de Decisão

A decisão de manobrar uma espaçonave ou satélite para evitar uma colisão potencial é baseada na máxima probabilidade de colisão PC. Se a máxima PC calculada for maior que uma probabilidade aceitável de colisão (limiar), uma manobra de evasão será necessária. A probabilidade aceitável de colisão significa o máximo risco que a agência espacial ou o operador está disposto a correr. Poderia ser expressa pela frase: “É aceitável que haja uma colisão a cada n anos”, que se traduz, matematicamente em: “a probabilidade máxima de colisão deverá ser menor que  $P_{limiar}$ ”.

Uma vez que o limiar seja definido, é necessário computar a probabilidade de colisão  $P_c$  entre o satélite e cada objeto espacial que possa vir a aproximar-se dele. O cálculo de  $P_c$  requer conhecimento da geometria do encontro e da covariância de ambos os objetos no momento da conjunção. A abordagem utilizada neste trabalho foi derivada por (ALFRIEND et al, 1999) para o cálculo da probabilidade máxima de colisão  $P_{c \max}$  entre a “International Space Station” (ISS) e detritos, o qual mostrou, também, que os resultados são muito sensíveis a pequenas variações nas covariâncias, o que impõe a necessidade de valores acurados para as covariâncias.

O algoritmo proposto por (ALFRIEND et al, 1999) foi comparado a outros dois algoritmos por (ALARCON et al, 2004) em testes via simulações Monte-Carlo e foi escolhido como o melhor em termos de acurácia, o que motivou a sua escolha para ser utilizado neste trabalho.

Esse algoritmo foi usado por (ALFANO, 2005) no desenvolvimento de um algoritmo para calcular a probabilidade de colisão de objetos modelados como esferas. Este novo algoritmo limita o número de iterações usadas para calcular a probabilidade de colisão, uma condição necessária para processamento em tempo real.

O desenvolvimento do algoritmo considera a situação em que os satélites estão mais próximos (conjunção) como o ponto de maior probabilidade de colisão.

É imediato perceber que, durante a aproximação, existe uma componente da velocidade relativa na direção do eixo imaginário que passa pelos dois satélites; no ponto de conjunção, a componente torna-se zero; após o qual, a componente tem o sentido invertido e passa a causar o afastamento.

Sendo assim, já que a componente no eixo dos satélites é zero na conjunção, resulta que, nesse momento, a velocidade relativa é perpendicular ao eixo dos satélites (ALFRIEND et al, 1999). A geometria do encontro é apresentada na Figura 4-6.

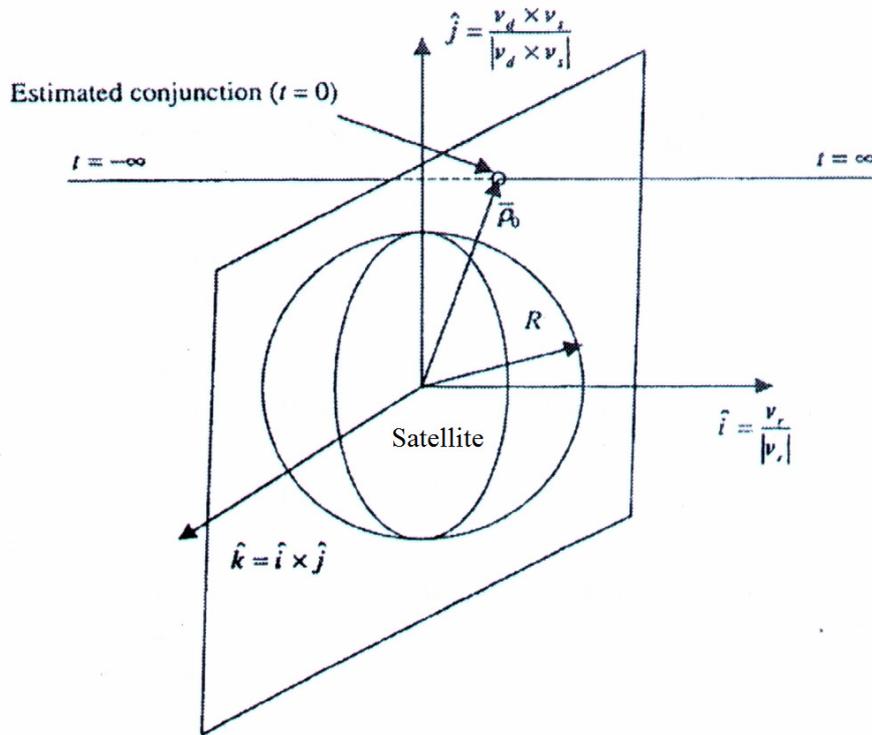


Figura 4-6: Geometria da conjunção.

Fonte: baseado em ALFRIEND & AKELLA (2000)

Isso permite reduzir a dimensionalidade do problema de 3 para 2 dimensões. Chamamos de plano de conjunção ao plano que contém os dois satélites e é perpendicular à velocidade relativa. Os objetos e suas covariâncias são projetadas no plano de conjunção.

Na Figura 4-7, podemos observar uma visão lateral do plano de conjunção. No diagrama apresentado, o plano de conjunção contém o eixo que liga o satélite aos detritos, sendo perpendicular ao papel. Temos que  $\vec{v}_d$  é a velocidade dos detritos espaciais;  $\vec{v}_s$  é a velocidade do satélite; e  $\vec{v}_r$  é a velocidade relativa;  $L$  é a distância entre o satélite e a interseção dos planos de órbita na conjunção;  $\beta$  é o ângulo entre os planos de órbita do satélite e dos detritos;  $d$  é a distância de separação horizontal dos planos na conjunção.

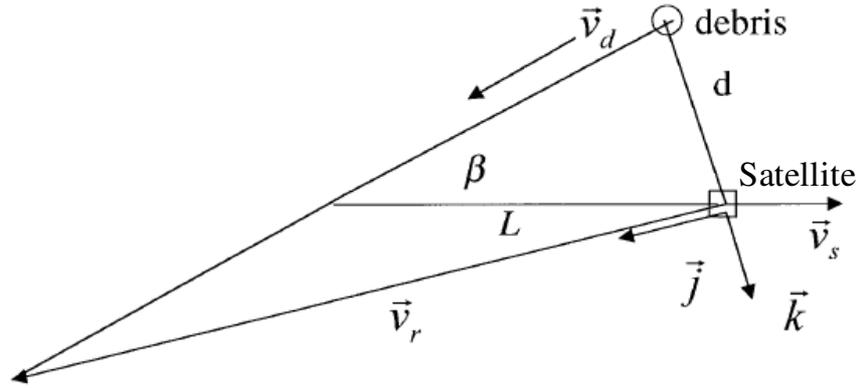


Figura 4-7: Sistema de coordenadas na conjunção.  
 Fonte: ALFRIEND et al.(1999)

Presume-se que a covariância dos detritos esteja alinhada com as direções ao longo da trajetória (“in-track”), radial e para fora do plano (“out-of-plane”) e que as componentes radial e para fora do plano sejam iguais a  $K_d\sigma$ ; e que a componente ao longo da trajetória seja  $K_d(K_{dv}\sigma)$ .

A probabilidade de colisões é dada por (ALFRIEND et al, 1999):

$$P_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}K_d\sigma} \int_{-R}^R \exp\left[-\frac{(x-h)^2}{2K_d^2\sigma^2}\right] \times \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}+d}{\sqrt{2}\sigma_2}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-\sqrt{R^2-x^2}+d}{\sqrt{2}\sigma_2}\right) \right\} dx \quad (4.1)$$

onde:

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma^2(K_{dv}^2 + 1 - (K_{dv}^2 - 1)\cos\beta)}/2 \quad (4.2)$$

R é o raio em torno do satélite que define a colisão, chamado de “esfera de colisão”; h é a distância de separação radial na conjunção.

De acordo com (ALFANO 2003), esta equação pode ser simplificada com as seguintes suposições:

- a) Movimento relativo é suposto linear durante a conjunção;
- b) Covariâncias são supostas não-correlacionadas e são somadas para formar uma covariância combinada, centrada no objeto secundário.
- c) Os raios dos dois objetos são somados para formar um objeto combinado esférico centrado no objeto primário.

A conjunção ocorre quando a trajetória (tubo) do objeto primário toca o objeto secundário (Figura 4-8). No plano de colisão, isso ocorre quando a distância entre as projeções dos centros dos dois objetos for menor que a soma de seus raios.

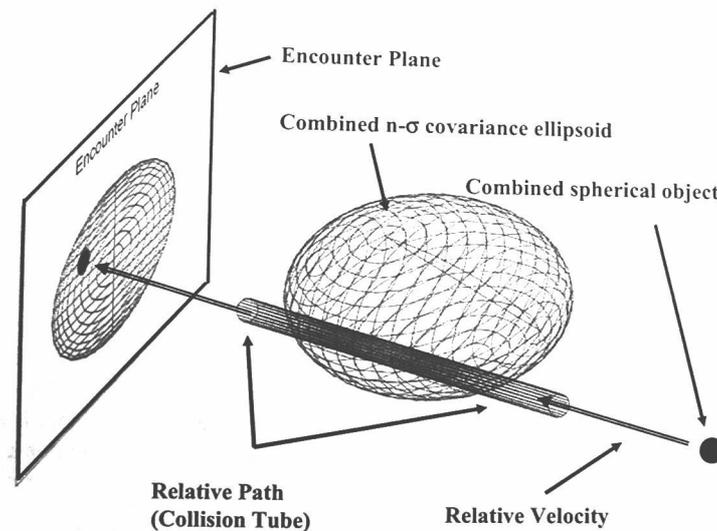


Figura 4-8: Simplificação da representação da conjunção.

Fonte: VALLADO & MCCLAIN (2007)

A probabilidade de colisão será dada por:

$$P = \frac{2OBJ}{\sqrt{8\pi}\sigma_x n} \sum_{i=0}^n \left[ \left[ erf \left[ \frac{y_m + \frac{2OBJ}{n} \sqrt{(n-i)i}}{(\sigma_y \sqrt{2})} \right] + erf \left[ \frac{-y_m + \frac{2OBJ}{n} \sqrt{(n-i)i}}{(\sigma_y \sqrt{2})} \right] \right] \exp \left[ \frac{[-OBJ(2i-n) + x_m]^2}{2\sigma_x^2} \right] \right] \quad (4.3)$$

onde OBJ é o raio combinado dos objetos;  $x = \text{OBJ} (2i-n)/n$ ; n é o número de termos na série numérica;  $x_m$  é a projeção no eixo x da distância entre os objetos no plano de conjunção;  $y_m$  é a projeção no eixo y da distância entre os objetos no plano de conjunção; os eixos menor e maior da covariância projetada são equivalentes aos desvios-padrão  $\sigma_x$  e,  $\sigma_y$  respectivamente.

A acurácia de P é dependente do número de termos da série. Testes numéricos realizados por (ALFANO, 2005) mostraram que o número de termos da série pode ser limitado, o que torna previsível o tempo máximo de computação, o que é uma condição necessária para processamento em tempo real.

O diagrama da figura Figura 4-9 apresenta diagramas de probabilidade de colisão versus desvio-padrão combinado para relação de aspecto AR=1; para uma distância nominal de afastamento na conjunção (“offset”) de 1000m. As curvas foram traçadas para objetos tamanho combinado de 1m, 2m, 5m, 10m, 20m e 40m.

Observa-se, nas curvas, a alta sensibilidade da probabilidade de colisão ao aumento do desvio padrão combinado. Pequenos aumentos no desvio padrão combinado ocasionam rápidos aumentos na probabilidade de colisão, até atingir um valor máximo, a partir do qual a probabilidade de colisão diminui.

É necessário tomar muito cuidado com esse comportamento, pois a diminuição da probabilidade de colisão é ilusória, sendo provocado pelo fato de, com o aumento excessivo da incerteza, os dados deixam de ser significativos e o cálculo de probabilidade perde o sentido (diluição da probabilidade).



## Maximum Probability Analysis (AR = 1)

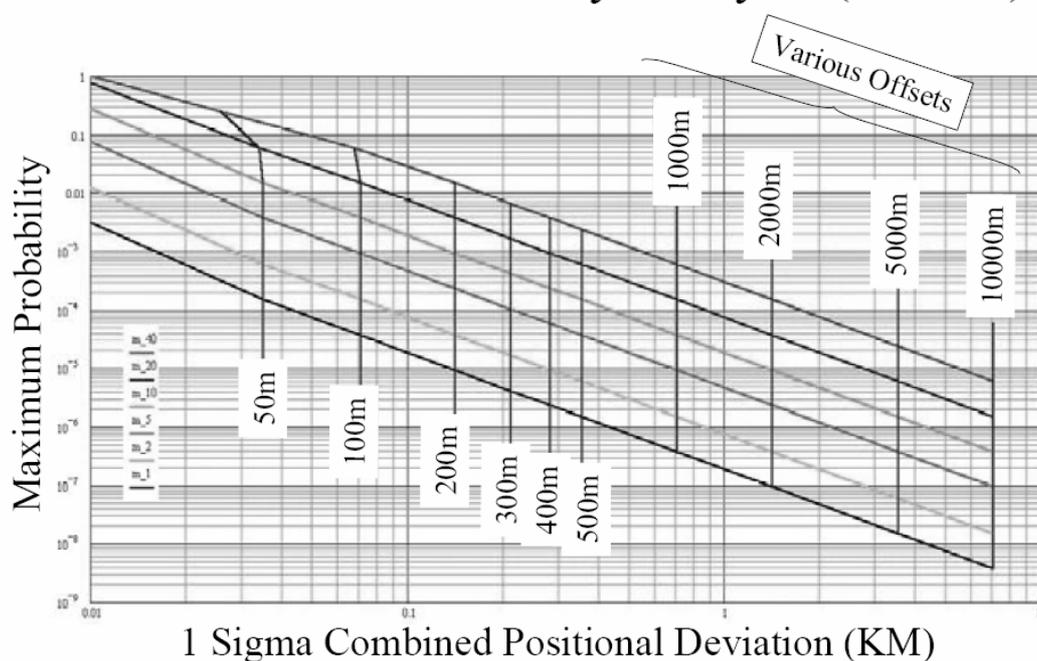


Figura 4-10: Máximas Probabilidades para AR=1

Fonte: ALFANO (2003)

As curvas, de baixo para cima, correspondem a objetos combinados de 1m, 2m, 5m, 10m, 20m e 40m.

A partir desse diagrama, vários resultados práticos podem ser obtidos. Tomando o exemplo da Figura 4-11, se tomarmos dois objetos com tamanho combinado de 5m (3ª curva), com uma distância de conjunção estimada (offset) de 100m (2ª linha vertical a partir da esquerda) terá uma probabilidade máxima de  $10^{-3}$ . Se, nessa situação, um operador definisse um limiar para manobra de  $10^{-4}$ , uma manobra seria necessária. Nessa situação, observamos na abscissa que o desvio padrão combinado é de 0,07 (o que equivale a 7m). As efemérides dos dois objetos em conjunção devem ter incertezas que, quando combinadas não ultrapassem o desvio padrão de 7m. Se isso ocorrer, as probabilidades de colisão calculadas serão menores, devido à diluição, dando a

falsa impressão de segurança. Existe, então, a necessidade de se definir um mínimo de precisão nos dados para que as probabilidades calculadas tenham sentido.

### Maximum Probability Analysis (AR = 1)

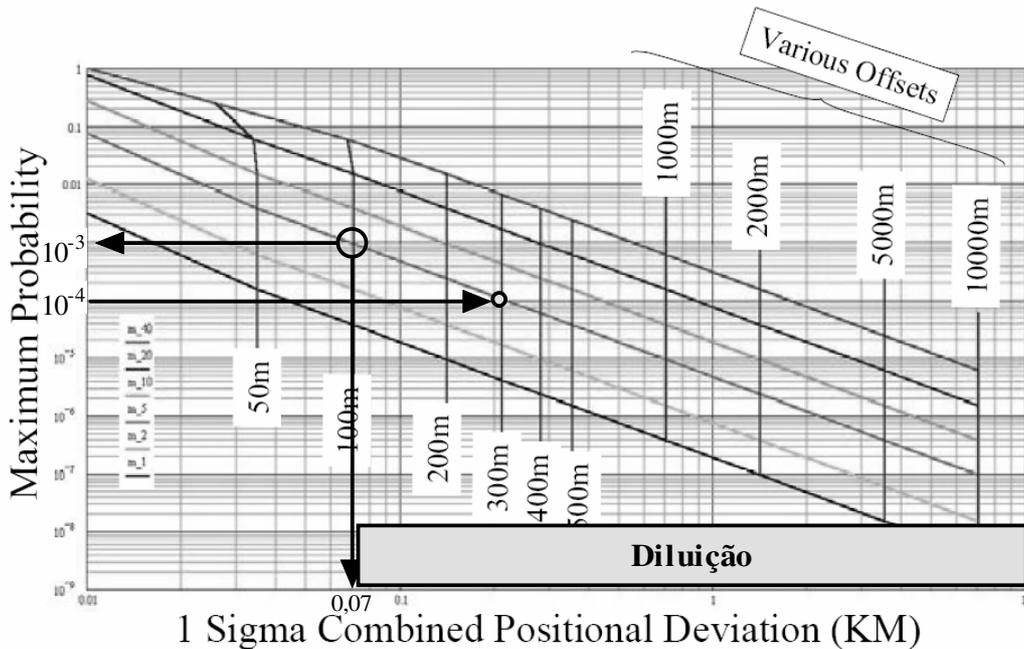


Figura 4-11: Objeto combinado de tamanho 5m c/100m de offset.

Fonte: Adaptado de ALFANO (2003)

Usando o mesmo exemplo, é possível ver que, se o limiar de probabilidade definido for de  $10^{-4}$ , e os objetos tiverem um raio combinado de 5m, não haverá necessidade de calcular a probabilidade se a distância na conjunção for de mais de 300m.

No Apêndice D, encontram-se as tabelas de máxima probabilidade para relações de aspecto 1, 3, 5, 10 e 100. Esses gráficos são utilizados para obtenção dos valores máximos aceitáveis de desvio-padrão na propagação das matrizes de covariância. Em outros termos, a equação 4.3 poderá ser usada

enquanto o desvio-padrão for menor que o valor máximo aceitável obtido desses gráficos.

#### 4.5.1 Cálculo da conjunção

No caso de objetos distantes, é interessante propagar a posição de ambos durante o tempo de interesse e determinar a posição de mínima distância (ou a posição em que a velocidade relativa é zero e a aceleração relativa é positiva). Para satélites em formação, devido a proximidade e também ao fato de estarem já bastante próximos, parece-nos conveniente ir propagando a matriz de covariância iterativamente à medida em que se propaga a trajetória, de forma a determinar quando a incerteza estará tão grande a ponto de gerar alarme de colisão. Isso servirá como critério para verificar com que frequência será necessário amostrar a posição de satélites em formação para garantir sua segurança.

#### 4.5.2 Equações de Hill

O propósito desse modelo é descrever a posição relativa entre dois satélites. Um dos satélites é chamado satélite principal e a posição do segundo satélite é mapeado no sistema de coordenadas do primeiro satélite.

As equações de Hill modelam a posição relativa para satélites em órbita circular de acordo com (CLOHESSY & WILTSHIRE, 1960, citado por KUGA & OLIVEIRA, 2005):

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3n^2x - 2n\dot{y} = f_x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = f_y \\ \ddot{z} + n^2z = f_z \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $n = (\mu/R^3)^{1/2}$  é a velocidade angular do satélite principal em torno da Terra;  $f_x, f_y, f_z$  são acelerações relativas entre os dois satélites. Quando  $f_x, f_y, f_z$  são zero, as equações de Hill tem solução analítica, como pode ser visto abaixo. Não é descabido considerar  $f_x, f_y, f_z$  como zero, pois os impulsos responsáveis pelas acelerações ocorrem em intervalos muito curtos de tempo. Depois disso, basta usar as novas condições iniciais.

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3n^2x - 2n\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + n^2z = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Observar que a última equação é desacoplada das duas primeiras.

Fazendo as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} x_1 &= x & x_2 &= y \\ x_3 &= \dot{x} & x_4 &= \dot{y} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 3n^2x_1 + 2nx_4 \\ -2nx_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Expandindo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Temos um sistema de equações diferenciais lineares do tipo:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (4.9)$$

Da teoria de sistemas lineares (TAKAHASHI et al, 1972, p. 61), temos que a matriz de transição de estados será dada por :

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (4.10)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0 + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)] \quad (4.11)$$

O segundo termo é nulo, pois  $u=0$  na equação 4.8. Temos então:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ sI - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} x_0 \quad (4.12)$$

Daí,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 4n^2}{s(s^2 + n^2)} & 0 & \frac{1}{(s^2 + n^2)} & \frac{2n}{s(s^2 + n^2)} \\ \frac{-6n^3}{s^2(s^2 + n^2)} & \frac{1}{s} & \frac{-2n}{s(s^2 + n^2)} & \frac{(s^2 - 3n^2)}{s^2(s^2 + n^2)} \\ \frac{3n^2}{(s^2 + n^2)} & 0 & \frac{s}{(s^2 + n^2)} & \frac{2n}{(s^2 + n^2)} \\ \frac{-6n^3}{s(s^2 + n^2)} & 0 & \frac{-2n}{(s^2 + n^2)} & \frac{s^2 - 3n^2}{s(s^2 + n^2)} \end{bmatrix} \right\} x_0 \quad (4.13)$$

Finalmente, fazendo a transformada inversa, obtém-se a matriz de transição de estado:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3\cos(nt) & 0 & \frac{\sin(nt)}{n} & \frac{2(1 - \cos(nt))}{n} \\ 6(\sin(nt) - nt) & 1 & \frac{2(\cos(nt) - 1)}{n} & \frac{4\sin(nt)}{n} - 3t \\ 3n \sin(nt) & 0 & \cos(nt) & 2\sin(nt) \\ 6n(\cos(nt) - 1) & 0 & -2\sin(nt) & 4\cos(nt) - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Fazendo de forma análoga para a equação em z, temos:

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(nt) & \frac{\sin(nt)}{n} \\ -n \sin(nt) & \cos(nt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

#### 4.5.3 Método dos Elementos Orbitais Relativos (ROEM)

O seguinte método é proposto por (GAO et al, 2003) e por (LI et al., 2005).

Dados os 6 elementos orbitais:

- a) Ascensão do nodo ascendente  $\Omega$ ;
- b) Ângulo de inclinação do plano orbital  $i$ ;
- c) Argumento do perigeu  $\omega$ ;
- d) Semi-eixo maior  $a$ ;
- e) Ecentricidade  $e$ ;
- f) Tempo de passagem pelo perigeu  $t_p$ ;

O movimento de um satélite é apresentado em seu plano orbital na Figura 4-12.

O é o centro de massa da Terra; S o centro de massa do satélite; P é o perigeu; o segmento ON define a linha dos nodos.

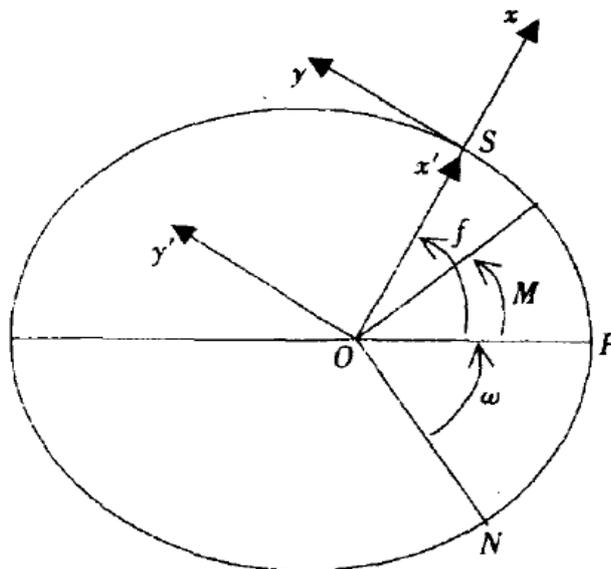


Figura 4-12: Movimento de satélite em plano orbital.

Fonte: GAO et al.(2003)

A posição relativa entre o satélite principal e o secundário pode ser vista na Figura 4-13. A posição relativa entre os satélites é dada por:

$$\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (4.16)$$

onde  $r_1 = |\vec{r}_1| = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos f_1}$  e  $r_2 = |\vec{r}_2| = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos f_2}$ .

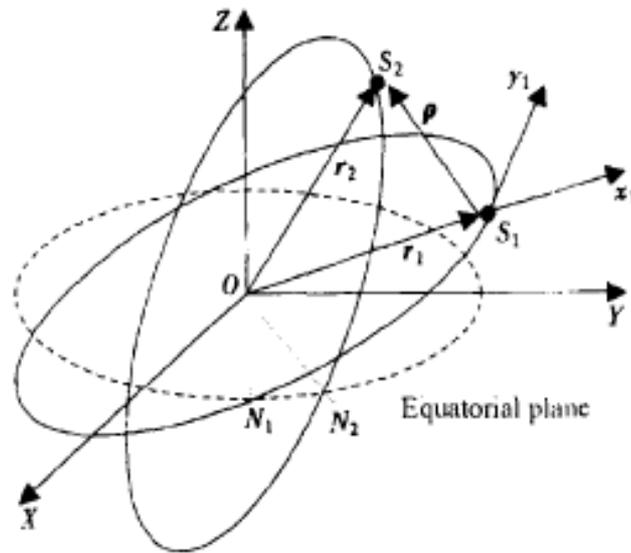


Figura 4-13: Movimento relativo entre dois satélites.  
 Fonte: GAO et al.(2003)

As coordenadas de  $\vec{r}_2$ , no sistema de coordenadas terrestres podem ser representadas pelo uso de matrizes de rotação:

$$\vec{r}_2 = R_{02} \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R(\Omega_2)R(i_2)R(\theta_2) \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde  $R_{02}$  é a transformação (matriz de rotação) do sistema de **coordenadas orbitais** do satélite 2 para o sistema de coordenadas terrestres. O argumento da latitude  $\theta$  é dado por :

$$\theta_j = w_j + f_j \quad (j = 1,2) \quad (4.18)$$

Transportando para o sistema de **coordenadas orbitais** do primeiro satélite:

$$\vec{r}_2 = R_{10}R_{02} \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R_{01}^T R_{02} \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R_{12} \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Expandindo:

$$\vec{r}_2 = R(-\theta_1)R(-i_1)R(-\Omega_1)R(\Omega_2)R(i_2)R(\theta_2) \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

onde

$$R(\Omega_j) = \begin{bmatrix} \cos \Omega_j & -\sin \Omega_j & 0 \\ \sin \Omega_j & \cos \Omega_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (j = 1,2) \quad (4.21)$$

$$R(i_j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_j & -\sin i_j \\ 0 & \sin i_j & \cos i_j \end{bmatrix}, (j = 1,2) \quad (4.22)$$

$$R(\theta_j) = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (j = 1,2) \quad (4.23)$$

Transladando para o sistema de coordenadas do satélite, temos:

$$\vec{\rho}_1 = R_{12} \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (4.24)$$

onde

$$R_{12} = R(-\theta_1)R(-i_1)R(-\Omega_1)R(\Omega_2)R(i_2)R(\theta_2) \quad (4.25)$$

A posição relativa do satélite 2 em relação ao satélite 1, no sistema de coordenadas do satélite 1, será dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{S_1} = R(-\theta_1)R(-i_1)R(-\Omega_1)R(\Omega_2)R(i_2)R(\theta_2) \begin{bmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Colocando as coordenadas do segundo satélite em termos das diferenças entre os dois satélites, temos:

$$\Omega_2 = \Omega_1 + \delta\Omega; \quad i_2 = i_1 + \delta i; \quad \theta_2 = \theta_1 + \delta\theta \quad (4.27)$$

Para satélites em formação, considerando que a diferença entre os elementos orbitais  $\Omega$  e  $i$  dos satélites seja pequena, fazemos as seguintes aproximações:

$$\sin \delta i \approx \delta i \quad ; \quad \cos \delta i \approx 1 \quad ; \quad \sin \delta\Omega \approx \delta\Omega \quad ; \quad \cos \delta\Omega \approx 1 \quad (4.28)$$

Utilizaremos, então, as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \sin(i_1 + \delta i) &= \sin(i_1) + \delta i \cos i_1 \\ \cos(i_1 + \delta i) &= \cos i_1 - \delta i \sin i_1 \\ \sin(\Omega_1 + \delta\Omega) &= \sin(\Omega_1) + \delta\Omega \cos \Omega_1 \\ \cos(\Omega_1 + \delta\Omega) &= \cos \Omega_1 - \delta\Omega \sin \Omega_1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Substituindo as equações 4.27 e 4.29 em 4.26, obtemos as equações que representam a posição do satélite 2 ( $S_2$ ) no referencial do satélite 1 ( $S_1$ ):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{S_1} = r_2 \begin{bmatrix} \cos \delta\theta - \delta\Omega \cos i_1 \sin \delta\theta \\ \sin \delta\theta + \delta\Omega \cos i_1 \cos \delta\theta \\ \delta i \sin \theta_2 - \delta\Omega \sin i_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} - r_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Se considerarmos que  $\delta\theta$  seja bem pequeno, poderemos simplificar:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{S_1} = \begin{bmatrix} r_2 - r_1 \\ r_2(\delta\theta + \delta\Omega \cos i_1) \\ r_2(\delta i \sin \theta_i - \delta\Omega \cos \theta_1 \sin i_1) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Se, além disso, considerarmos que as excentricidades são pequenas, poderemos simplificar ainda mais.

$$r_2 - r_1 \approx \frac{a_2}{1 + e_2 \cos f_2} - \frac{a_1}{1 + e_1 \cos f_1} \quad (4.32)$$

Se considerarmos satélites em formação, os períodos de órbita dos satélites deverão ser iguais e, conseqüentemente, os semi-eixos maiores também. Se considerarmos que  $f_1 \approx f_2$ , teremos:

$$\begin{aligned} x &= r_2 - r_1 \approx -a_1 \delta e \cos f_1 \\ y &\approx a_1 (\cos i_1 \delta \Omega + (\delta \omega - n_1 \delta t_p) + 2 \sin f_1 \delta e) \\ z &\approx a_1 (\sin(\omega_1 + f_1) \delta i - \cos(\omega_1 + f_1) \sin i_1 \delta \Omega) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Essa última aproximação será adequada apenas para satélites em formação próxima com órbita aproximadamente circular.

É importante comentar que, com exceção de  $f_1$ , todos os outros parâmetros são constantes.

#### 4.5.4 Casos de Estudo para Simulações

O objetivo das simulações não é o desenvolvimento de um produto integrado que contenha todas as idéias apresentadas, mas avaliar várias idéias quanto à sua aplicabilidade na determinação de Probabilidade de Colisões.

As simulações visam gerar os seguintes resultados:

- a) Geração de trajetórias sem ruído, as quais são consideradas trajetórias reais simuladas. Servirão de padrão para comparação e cálculo de erros.
- b) Adição de ruído gaussiano às trajetórias, as quais são consideradas trajetórias com diversas incertezas incorporadas, ou seja, como se fossem as trajetórias detectadas por sensores.

- c) Estudo de aplicabilidade do modelo utiliza as equações de Hill para propagação de trajetória.
  
- d) Estudo de aplicabilidade do modelo ROEM para propagação de trajetória.



## 5 SIMULAÇÕES E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

As simulações foram feitas no MATLAB® versão 6.5. O código utilizado está no Apêndice E deste trabalho.

### 5.1 Geração de Trajetórias

O cenário utilizado para as simulações foi o de uma formação com 3 satélites em uma mesma órbita, separados um do outro de  $0.01^\circ$ , proposto na Tabela 3.1. A configuração é ilustrada na Figura 5-1.

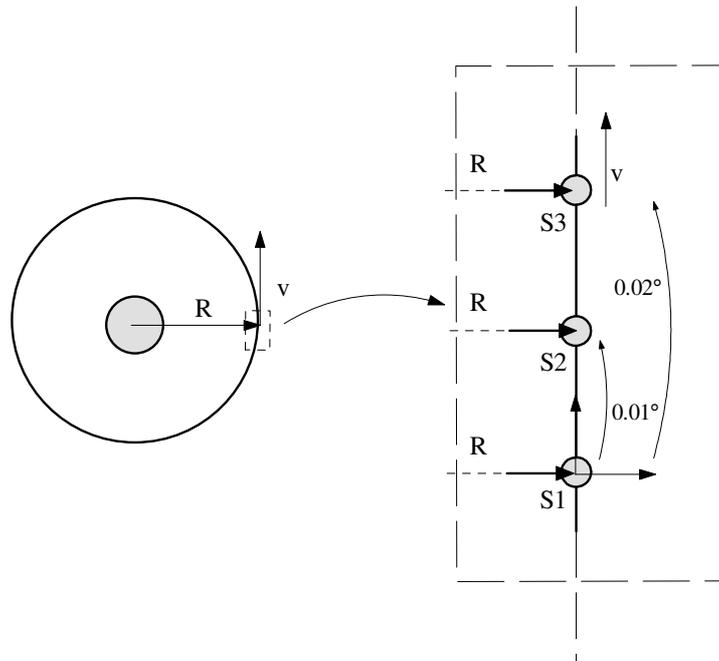


Figura 5-1: Cenário: 3 satélites em formação em uma mesma órbita.

#### 5.1.1 Trajetórias sem ruído

Foi utilizado o programa **Três\_satelites.m** para a geração das trajetórias dos 3 satélites. Foram simulados 100 pontos igualmente espaçados dentro de um período orbital. O resultado apresentado na Figura 5-2 visa observar o que era esperado. Como não há perturbações, o movimento é plano ( $z=0$ ) e  $x(t)$  e  $y(t)$

são funções senoidais. O gráfico é útil para observarmos que não há erro no algoritmo. Da mesma forma  $v_z = 0$  e  $v_x$  e  $v_y$  são funções senoidais.

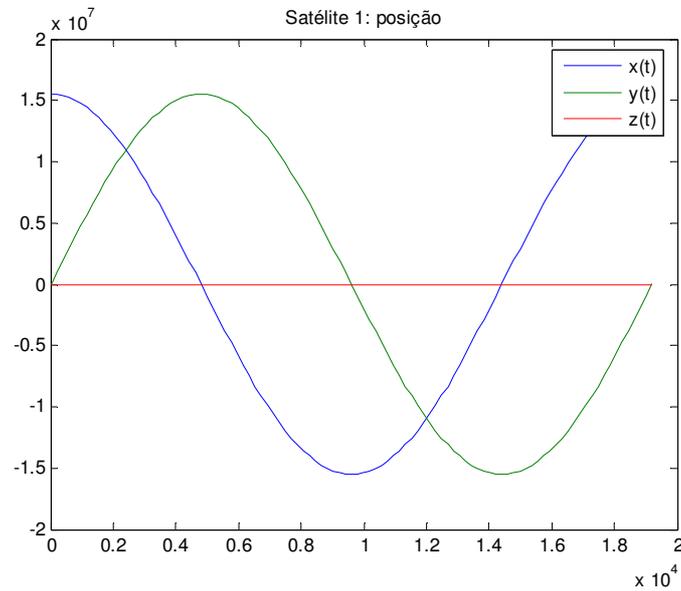


Figura 5-2: Satélite 1:  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$

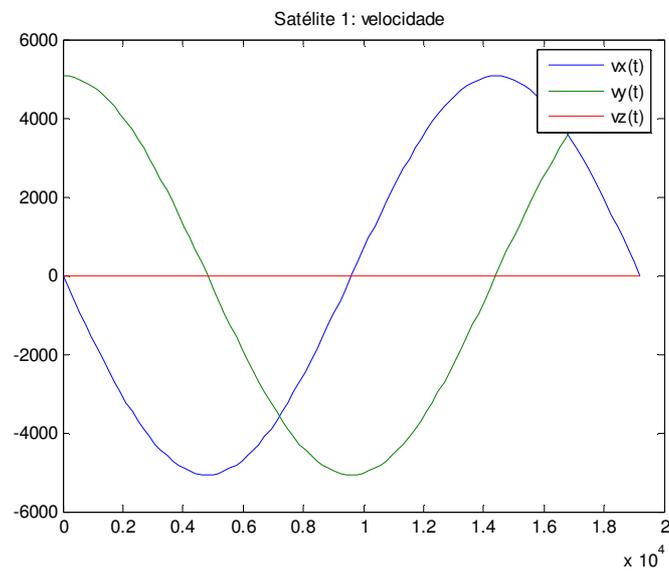


Figura 5-3: Satélite 1:  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$

O movimento é circular, como podemos observar na Figura 5-4.

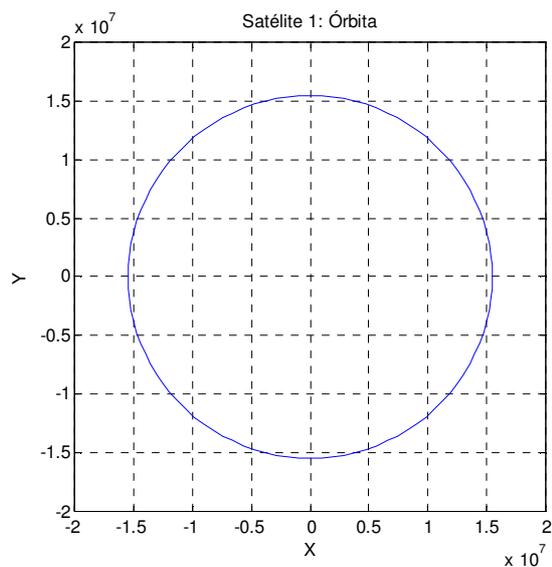


Figura 5-4: Satélite 1: Órbita simulada

No referencial do satélite principal (satélite 1), os dois outros satélites estão imóveis (Figura 5-5 e Figura 5-6). O sistema de coordenadas é o RSW (radial, transverse, normal)

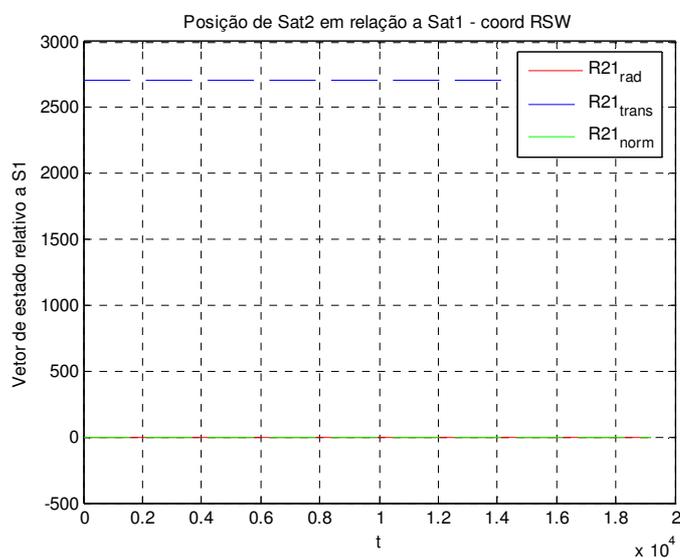


Figura 5-5: Posição do satélite 2 no referencial do sat. 1

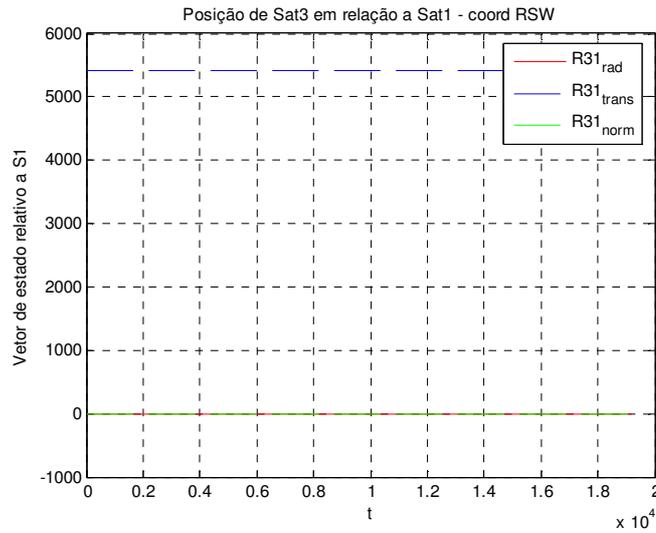


Figura 5-6: Posição do satélite 3 no referencial do sat. 1

### 5.1.2 Trajetórias com ruído

As trajetórias com ruído foram obtidas somando o erro de medida às trajetórias originais. Presumindo  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_p$  (desvio-padrão de posição) e  $\sigma_{vx} = \sigma_{vy} = \sigma_v$  (desvio-padrão de velocidade). Foi utilizado o programa `sim_ruído.m`. Utilizou-se  $\sigma_p = 10\text{m}$  e  $\sigma_v = 1\text{ m/s}$ . O gráfico da Figura 5-7 apresenta o resultado de uma das simulações.

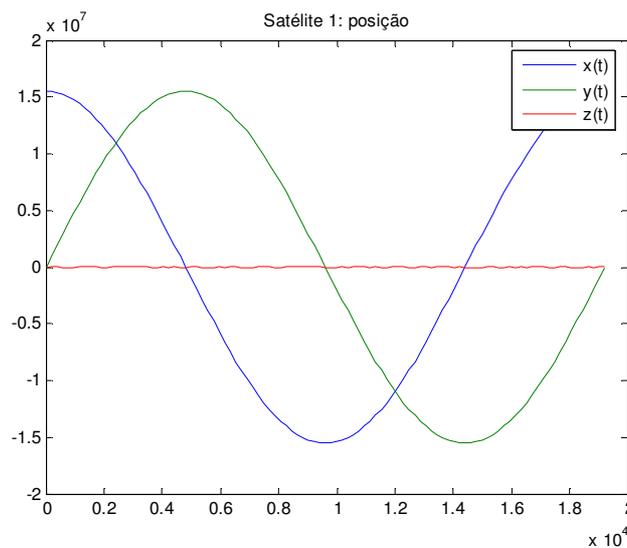


Figura 5-7: Coordenadas de posição do satélite 1 com ruído gaussiano ( $\sigma_p = 10\text{m}$ )

O mesmo procedimento foi tomado com os demais satélites. O resultado é apresentado na Figura 5-8, em um gráfico tridimensional (atenção: as escalas não são as mesmas para os três eixos).

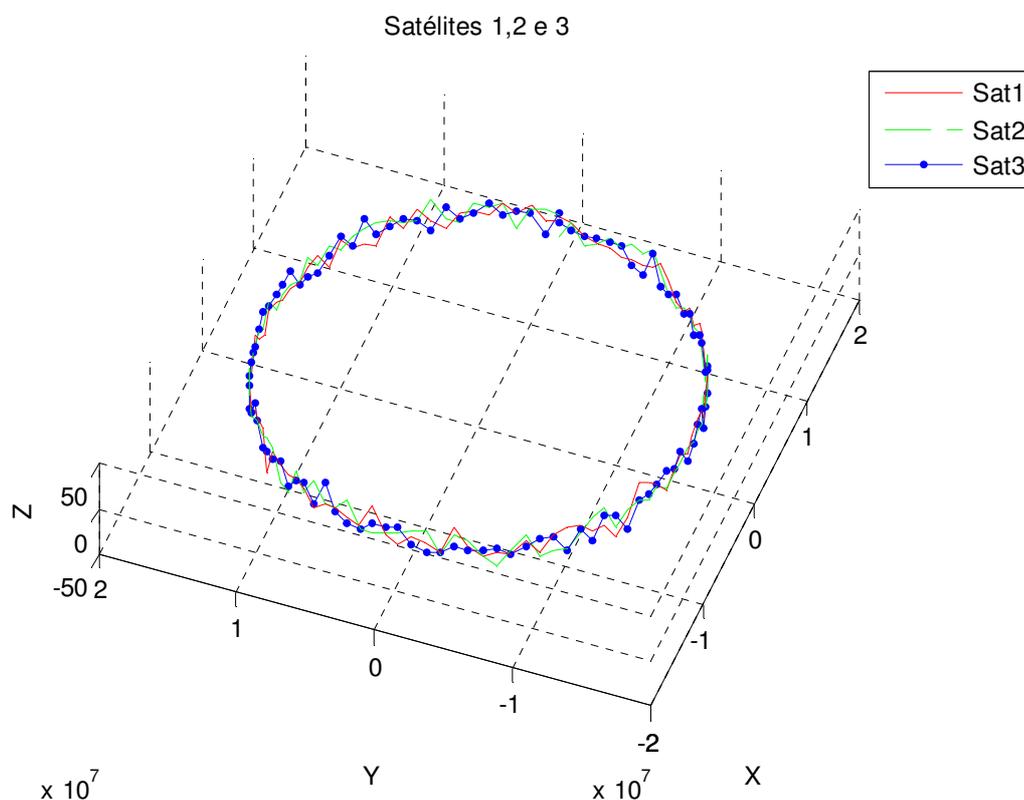


Figura 5-8: Posição dos satélites 1,2 e 3 com ruído gaussiano ( $\sigma_p = 10\text{m}$ )

De forma semelhante foi realizado com as velocidades.

## 5.2 Estimativa do ponto inicial

Situação considerada: os primeiros 25 dos 100 pontos simulados são considerados medidas. Os demais são considerados parte do futuro.

Os satélites estão em um mesmo plano orbital com órbita de raio 15500 km. A separação entre eles é de 0,01 graus. O erro de medida de posição inicial considerado é de  $\pm 1000$  m; o erro de medida de velocidade inicial é de  $\pm 100$  m/s.

A matriz de covariância inicial é dada por:

$$\hat{P}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{v_z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^4 \end{bmatrix}$$

### 5.3 Comparação dos modelos dinâmicos

Foram realizados alguns testes para avaliar o comportamento dos modelos dinâmicos, sem ruído, apenas para avaliar o erro inserido pelos modelos.

Teste 1: Verificar sensibilidade à distância de separação (equação de Hill)

Utilizou-se a configuração apresentada na Figura 5-9, com apenas dois satélites, variando-se a distância entre eles.

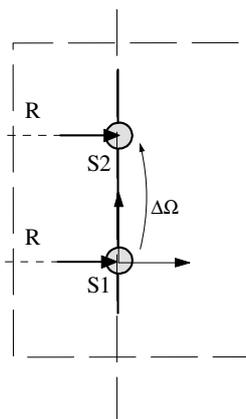


Figura 5-9: Configuração do teste de sensibilidade à distância

Tabela 5.1: Valores iniciais para o teste1

		a	e	i	$\Omega$	$\omega$	f
	Satélite 1	15500Km	0	0	0	0	0
caso 1	Satélite 2	15500Km	0	0	0.01 <sup>o</sup>	0	0
caso 2	Satélite 2	15500Km	0	0	0.001 <sup>o</sup>	0	0
caso 3	Satélite 2	15500Km	0	0	0.0001 <sup>o</sup>	0	0

Para a propagação usando o modelo dinâmico de Hill, obteve-se o resultado apresentado pela Figura 5-10. Foi utilizada a função **calcula\_erro\_cw.m**:

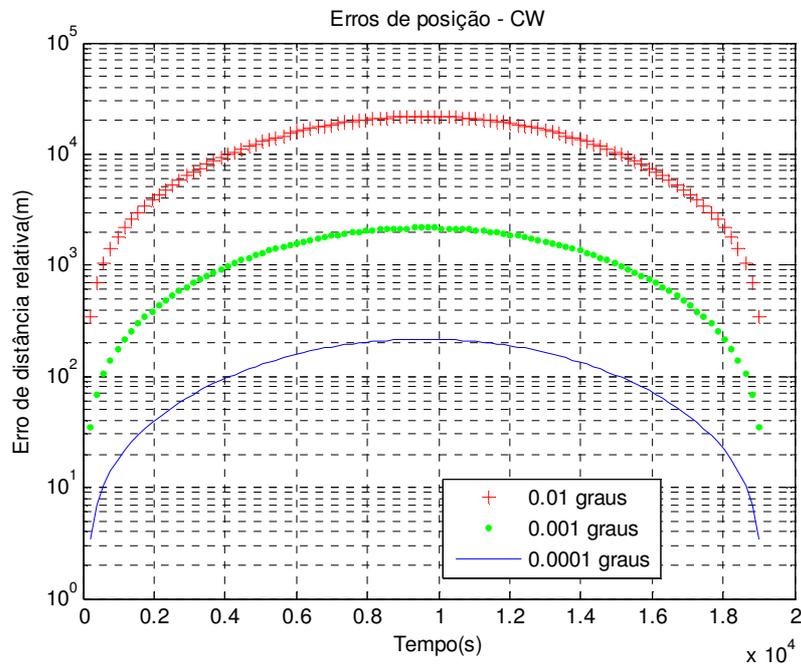


Figura 5-10: Sensibilidade das equações C-W à distância relativa.

Esse gráfico apresenta a diferença entre a distância relativa entre os dois satélites: (1) obtida com o programa **simorb.m** que, para o objetivo desse teste é considerado a “trajetória real” e (2) obtida com a propagação usando o modelo de Hill.

Esse resultado é uma repetição intencional do que é apresentado por (KUGA & OLIVEIRA, 2005). Foram usados os mesmos valores da referência para

podemos comparar o resultado. É um resultado importante que mostra a alta sensibilidade das equações à distância de separação entre os satélites.

As distâncias relativas entre os satélites são 2700m, 270m, 27m, correspondendo a  $0.01^\circ$ ,  $0.001^\circ$  e  $0.0001^\circ$ , respectivamente. Ao calcularmos o mesmo resultado, normalizando pela distâncias relativas, obtemos o resultado da Figura 5-11.

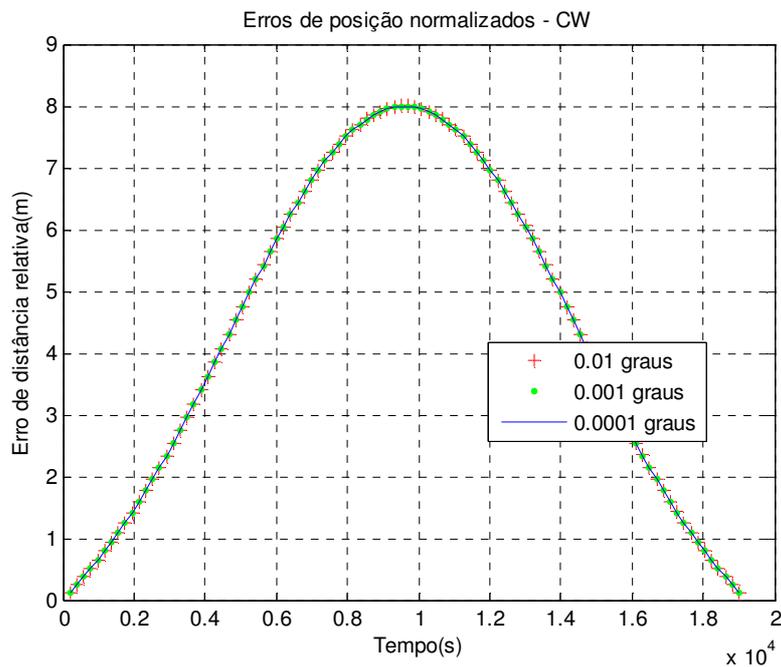


Figura 5-11: Curvas normalizadas pela distância relativa

Podemos observar que as curvas se superpõem e que o erro cometido ao utilizar as equações de Hill é, na maior parte do tempo, superior à distância entre os satélites, chegando a ser oito vezes o seu valor.

Observando apenas o início do gráfico anterior, tomando os dez primeiros pontos, que correspondem a um décimo da órbita, temos o gráfico da Figura 5-12.

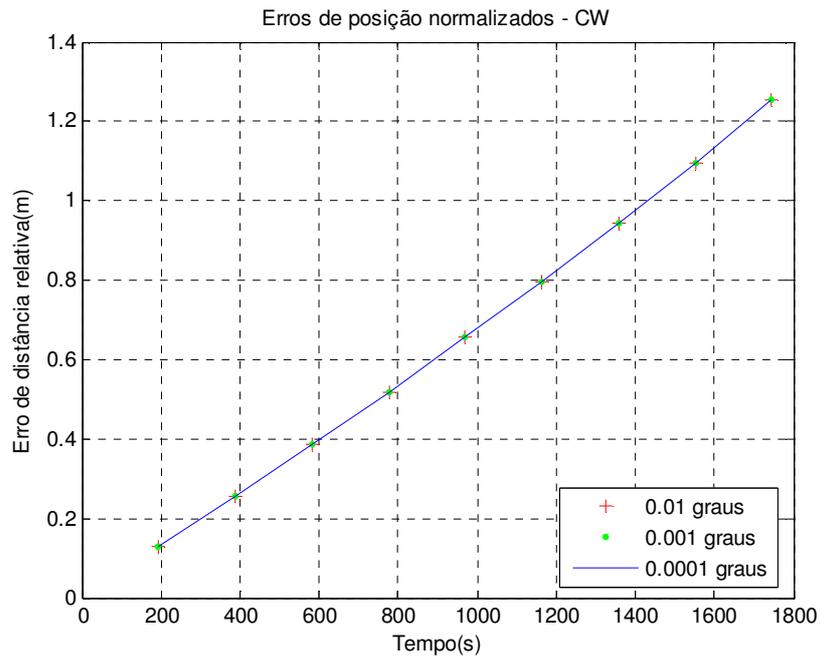


Figura 5-12: Curvas normalizadas (um décimo da órbita)

Se considerarmos razoável um erro máximo de 10% da distância entre os satélites, esse valor já terá sido atingido nos primeiros 200 s, o que equivale a cerca de 1% do período (19204 s).

Para podermos, então, usar esse método de propagação para o cálculo de probabilidade de colisão nessa configuração de satélites em formação, teremos de ter uma nova medida de posição e velocidade a cada 200 s. Ao normalizar as curvas, observamos que variar a distância entre os satélites não irá alterar isso.

Se alterarmos a excentricidade para 0.01, teremos a Figura 5-13 e a Figura 5-14

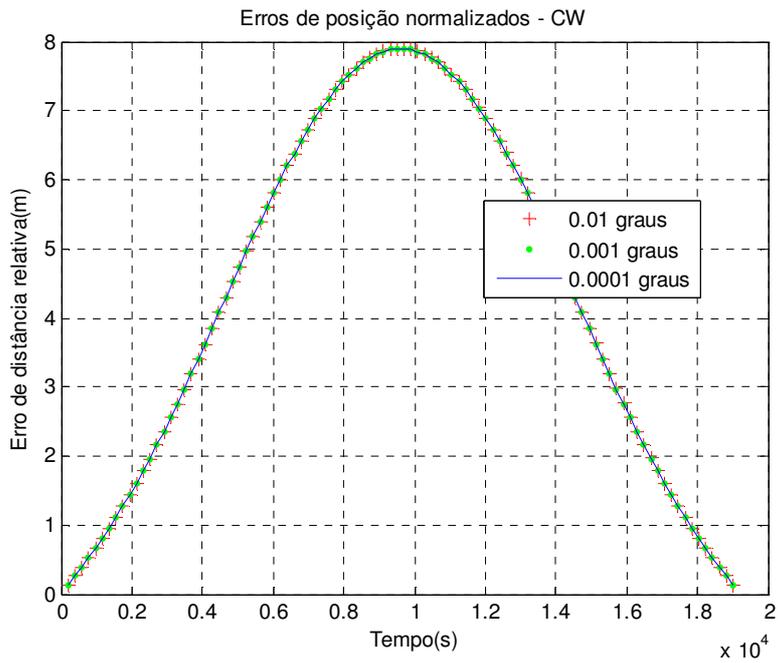


Figura 5-13: Curvas normalizadas pela distância relativa (e=0,01)

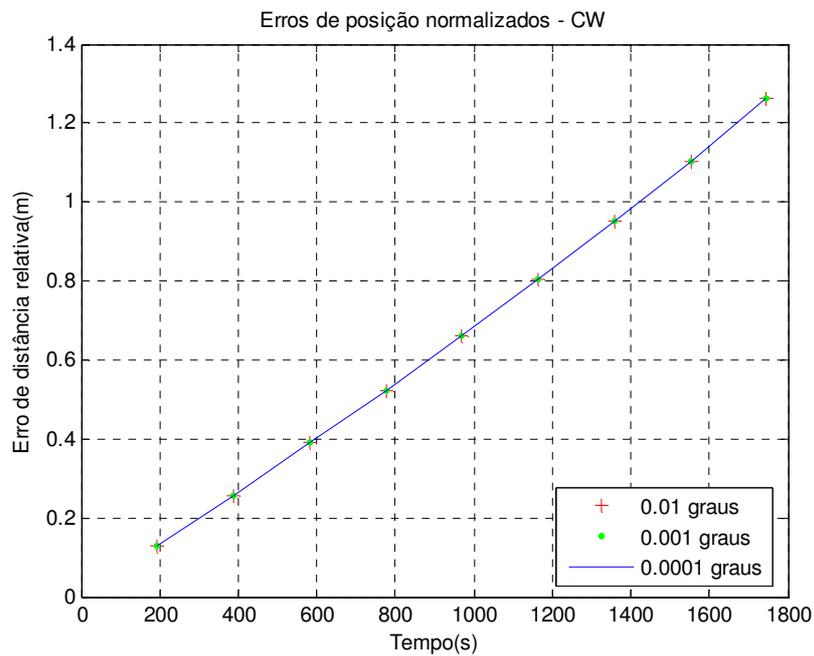


Figura 5-14: Curvas normalizadas (um décimo da órbita; e=0,01)

Não há diferença perceptível.

Teste 2: Verificar sensibilidade à distância de separação (ROEM)

O método ROEM pode ser utilizado com graus de simplificação diferentes, apresentados pelas equações 4.30, 4.31 e 4.33, sendo a primeira a mais complexa e mais geral e a última a mais simples, mas com maior número de restrições. Por enquanto, utilizaremos a mais simples.

Para a propagação usando o modelo dinâmico ROEM, obtiveram-se os seguintes resultados usando a função **calcula\_erro\_roem.m**:

O gráfico de posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 é apresentado na Figura 5-15.

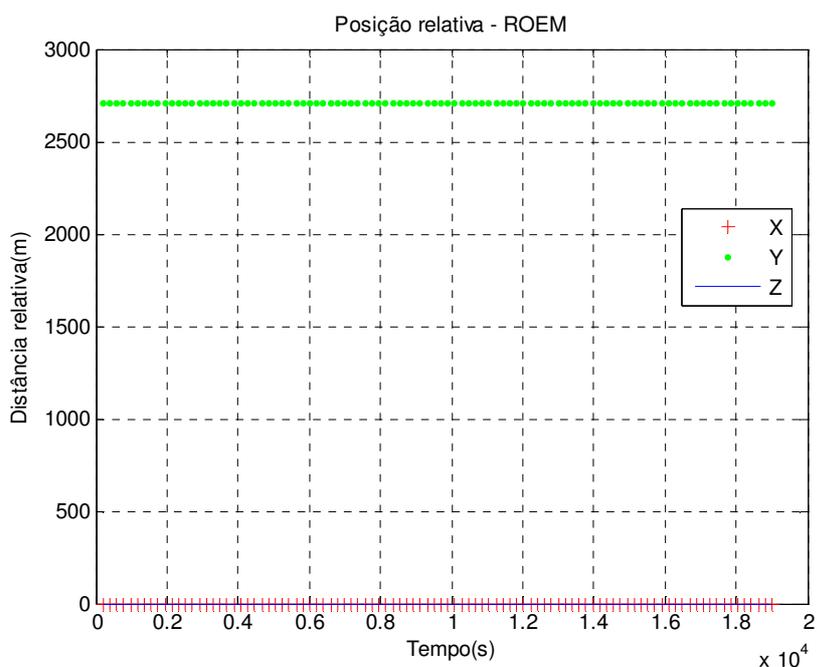


Figura 5-15: Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 pelo algoritmo ROEM

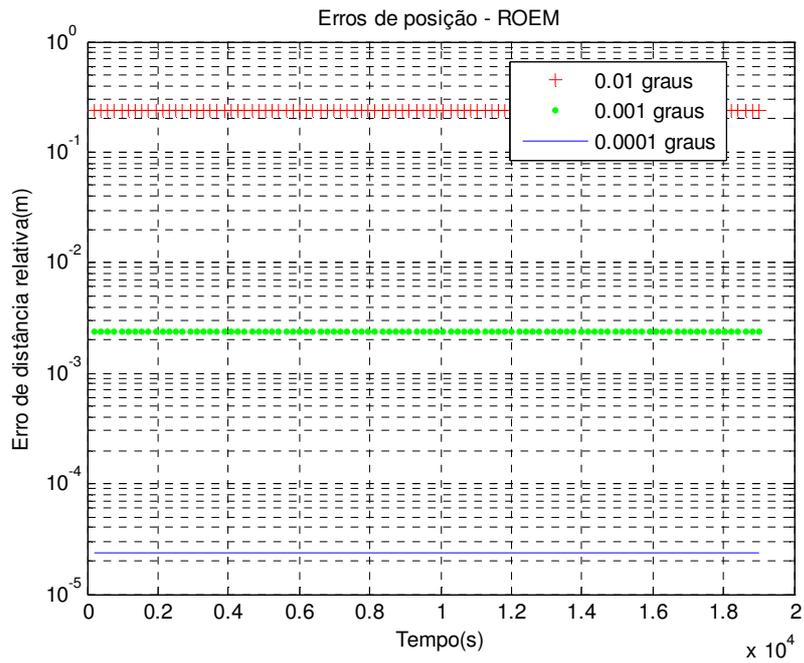


Figura 5-16: Sensibilidade das equações ROEM à distância relativa.

Normalizando os resultados apresentados na Figura 5-16 pela distância, obtemos a Figura 5-17.

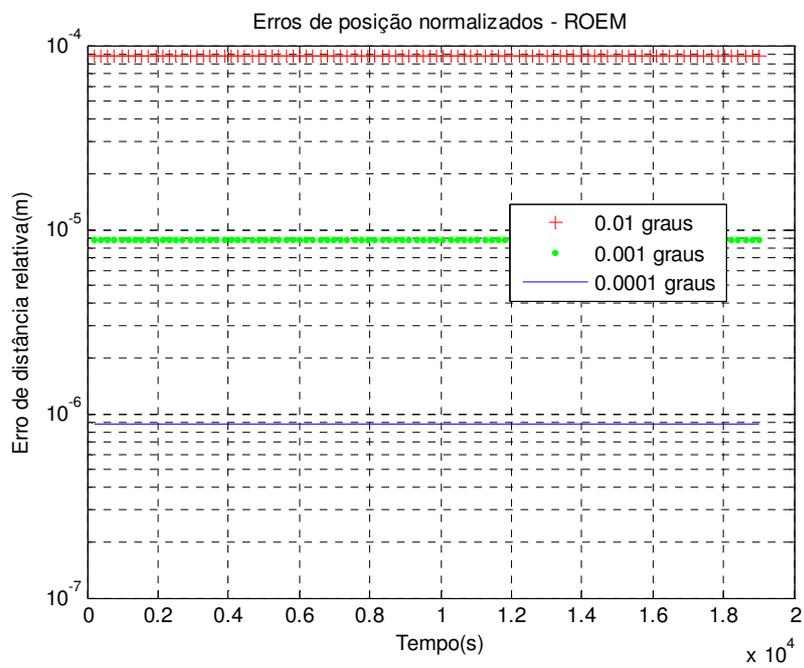


Figura 5-17: Erros ROEM normalizados pela distância relativa

Podemos observar que os erros são constantes, o que seria de se esperar, já que o cálculo depende da anomalia verdadeira do primeiro satélite, que, no caso de órbitas circulares, se confunde com a anomalia média. Além disso, os erros de posição relativa são muito menores que os do método de Hill. Em terceiro lugar, observando a Figura 5-17, observamos que, reduzir a distância entre os satélites faz com que a aproximação torne-se melhor, pois, mesmo normalizado, o erro diminui. Isso não ocorre com as equações de Hill, cujo erro normalizado cresce com a distância relativa.

### Teste 3: Sensibilidade à ecentricidade

Alterando a ecentricidade de ambos os satélites para 0.01, obtivemos o resultado da Figura 5-18, Figura 5-19 e Figura 5-20

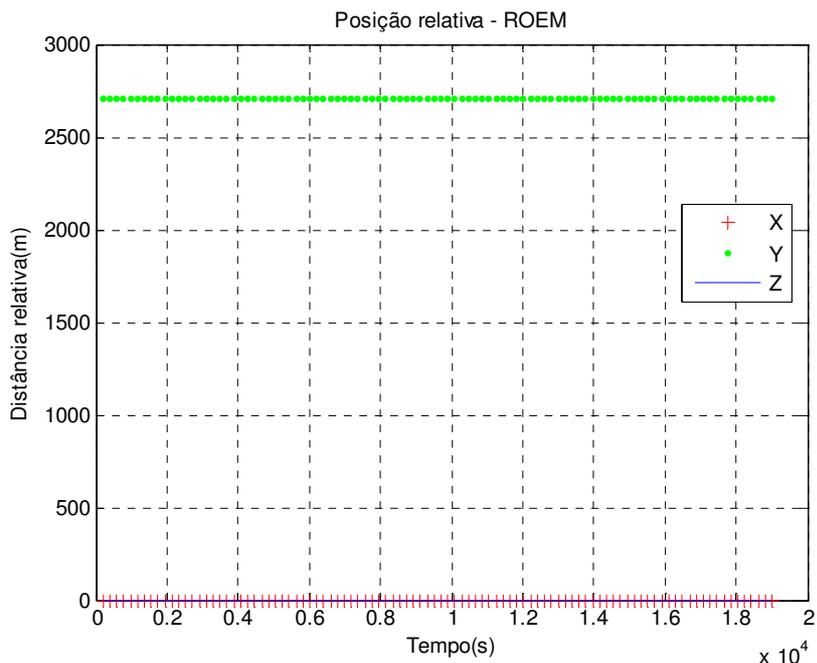


Figura 5-18: Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e = 0,01$ )

Apesar da grande diferença entre as figuras Figura 5-17 e Figura 5-20, observamos que a diferença entre a Figura 5-15 e a Figura 5-18 é imperceptível, devido ao fato de os erros normalizados serem pequenos.

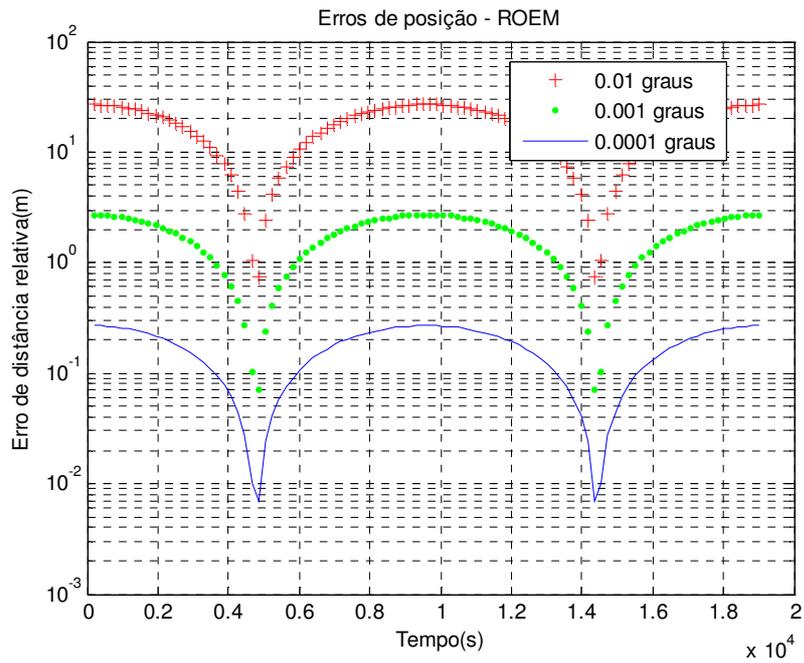


Figura 5-19: Sensibilidade das equações ROEM à distância relativa ( $e = 0,01$ )

Normalizando:

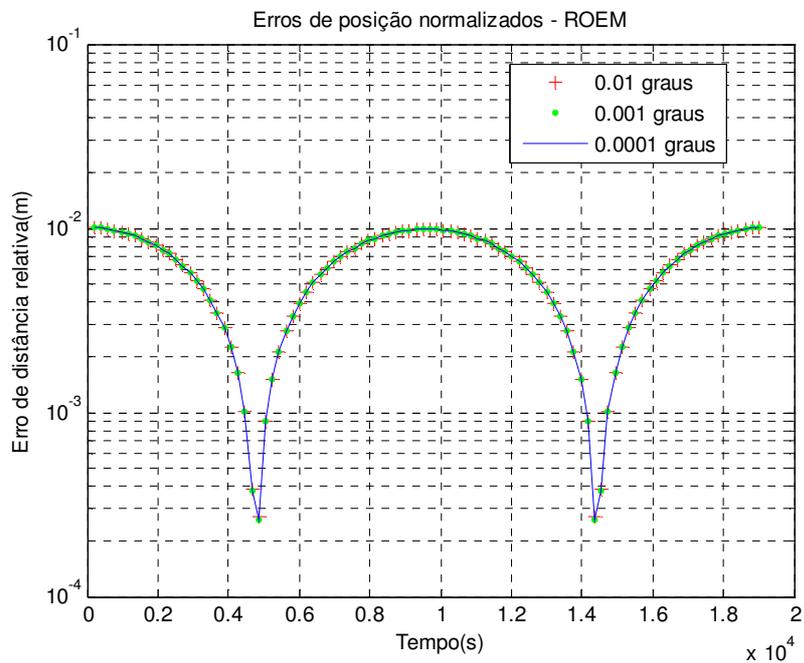


Figura 5-20: Erros ROEM normalizados pela distância relativa ( $e = 0,01$ )

Para ecentricidade  $e = 0,02$ , obtemos a Figura 5-21 e a Figura 5-22.

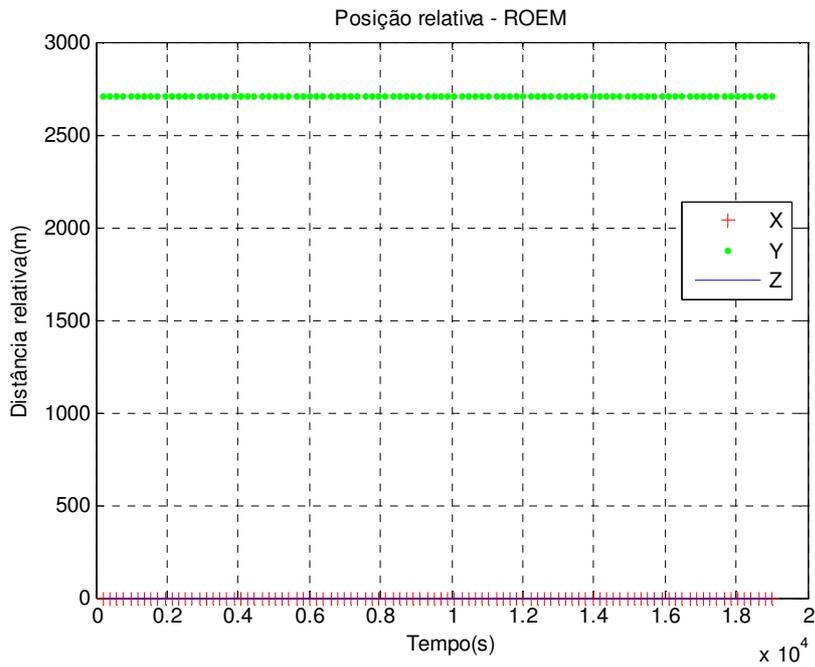


Figura 5-21: Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e = 0,02$ )

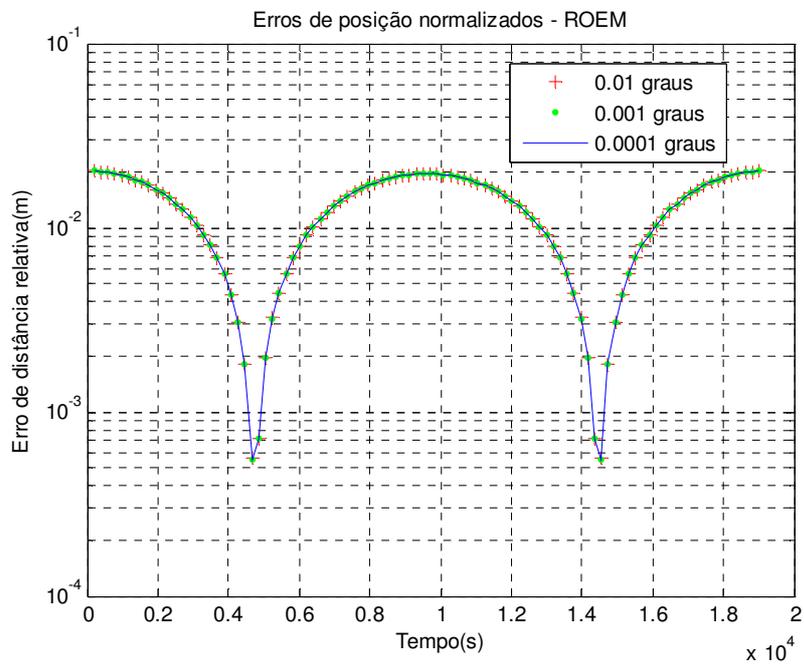


Figura 5-22: Erros ROEM normalizados pela distância relativa ( $e = 0,02$ )

Para ecentricidade  $e = 0,1$

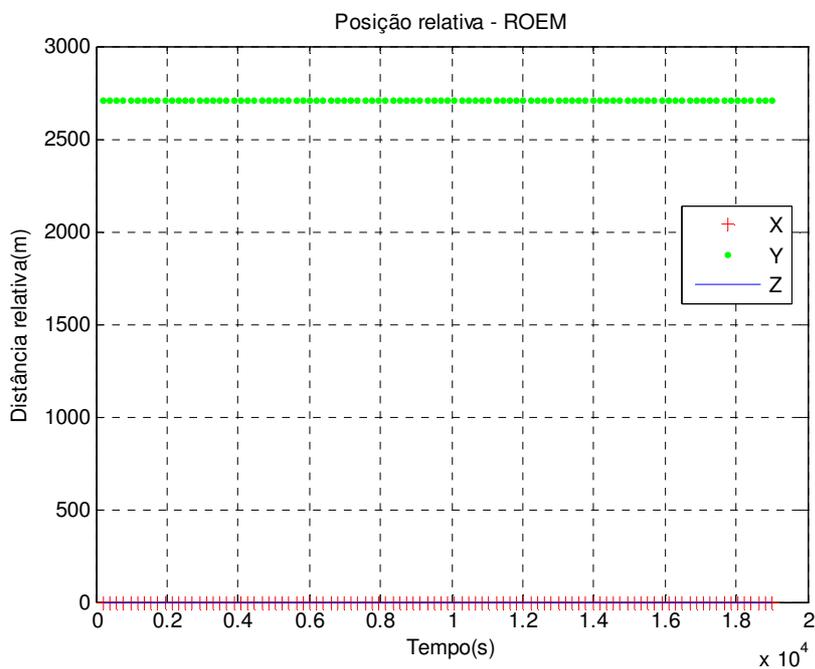


Figura 5-23: Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e = 0,1$ )

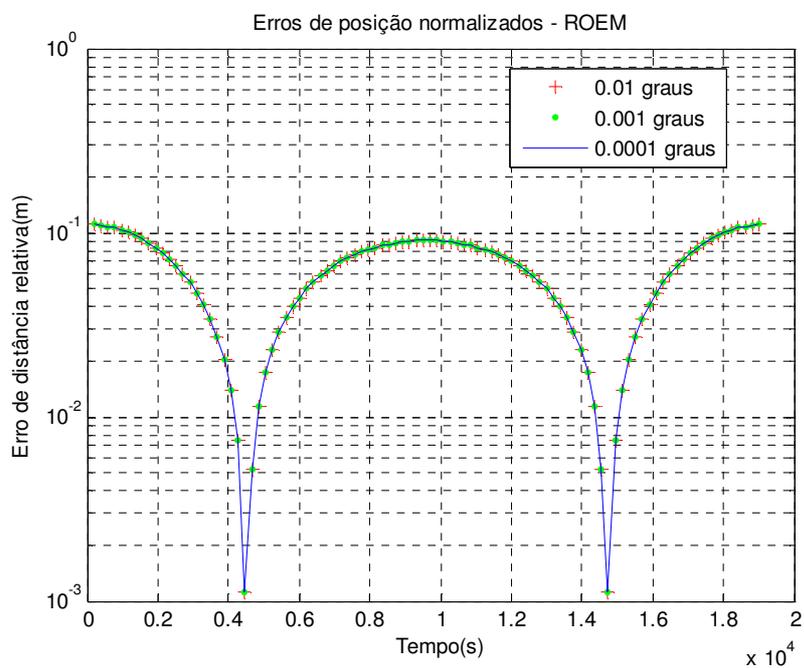


Figura 5-24: Erros ROEM normalizados pela distância relativa ( $e = 0,1$ )

Observamos que o erro introduzido pela excentricidade independe da distância entre os satélites. Ainda assim, para excentricidades pequenas, o erro normalizado é pequeno.

Verificaremos o resultado se os satélites tiverem excentricidades diferentes. O satélite principal terá excentricidade zero; os demais terão excentricidade 0.01, 0.02 e 0.03. Os afastamentos foram colocados bem pequenos (0,001 rad, 0.002 rad e 0.003 rad, respectivamente) para que o erro advindo do afastamento seja desprezível.

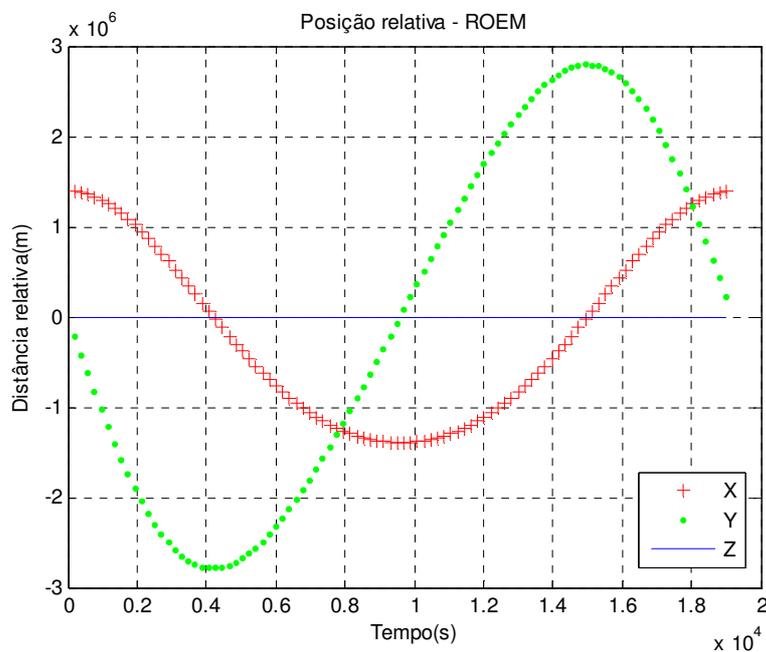


Figura 5-25: Posição relativa entre o satélite 1 e o satélite 2 ( $e_1 = 0$ ;  $e_2 = 0,01$ )

Colocando em um gráfico x-y, temos a figura Figura 5-26. A origem coincide com a posição do satélite 1.

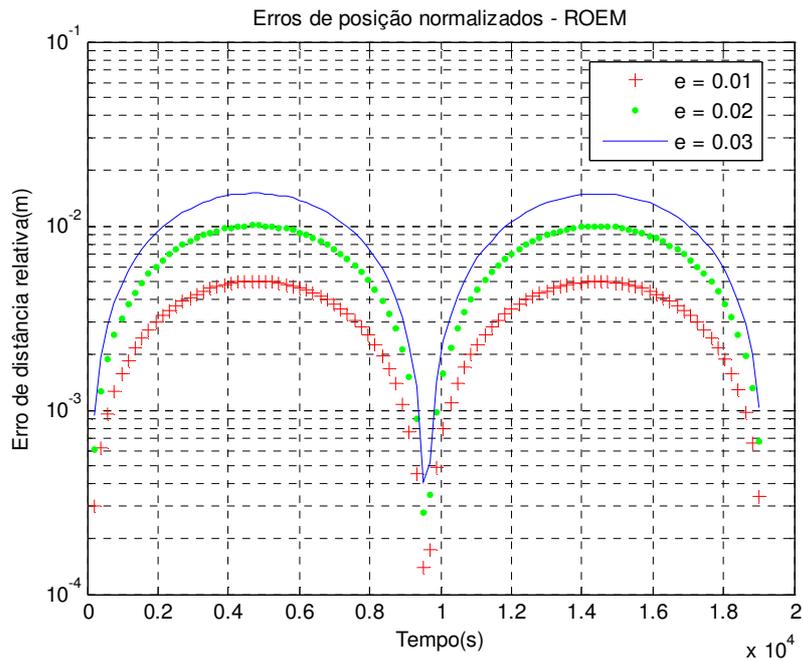


Figura 5-26: Posição relativa entre o satélite 1 e os demais ( $e_1 = 0$ ;  $e_2 = 0,01$ ;  $e_3 = 0,02$ ;  $e_4 = 0,03$ ) pelo método ROEM

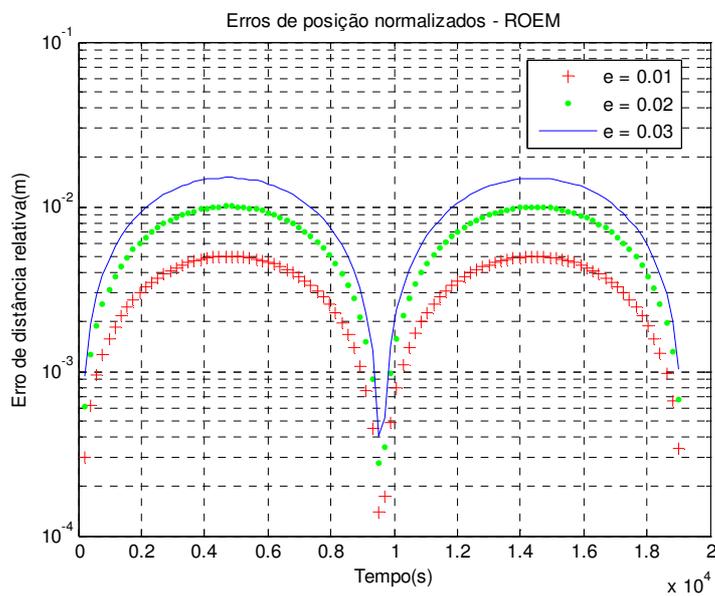


Figura 5-27: Erros ROEM normalizados ( $e_1 = 0$ ;  $e_2=0,01$ ;  $e_3=0,02$ ;  $e_4=0,03$ )

Colocando excentricidades de ordem de grandeza diferente para os satélites seguidores, obtemos a Figura 5-28 e a Figura 5-29.

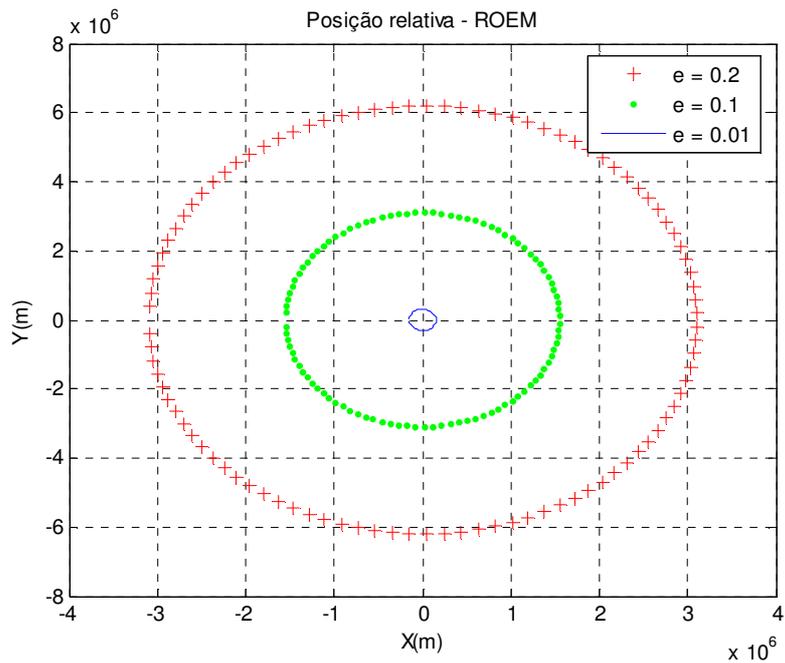


Figura 5-28: Posição relativa entre o satélite 1 e os demais ( $e_1 = 0$ ;  $e_2 = 0,2$ ;  $e_3 = 0,1$ ;  $e_4 = 0,01$ ) pelo método ROEM

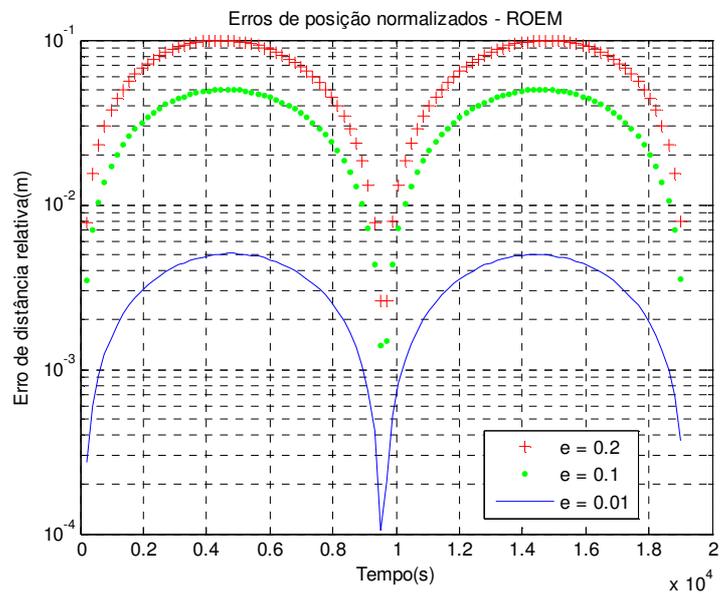


Figura 5-29: Erros ROEM normalizados ( $e_1 = 0$ ;  $e_2=0,2$ ;  $e_3=0,1$ ;  $e_4=0,01$ )

Observa-se que, mesmo para ecentricidades maiores, o erro não cresce muito, seu máximo permanecendo próximo a 10%.

Se o satélite principal tiver ecentricidade diferente de zero, teremos a Figura 5-30 e a Figura 5-31.

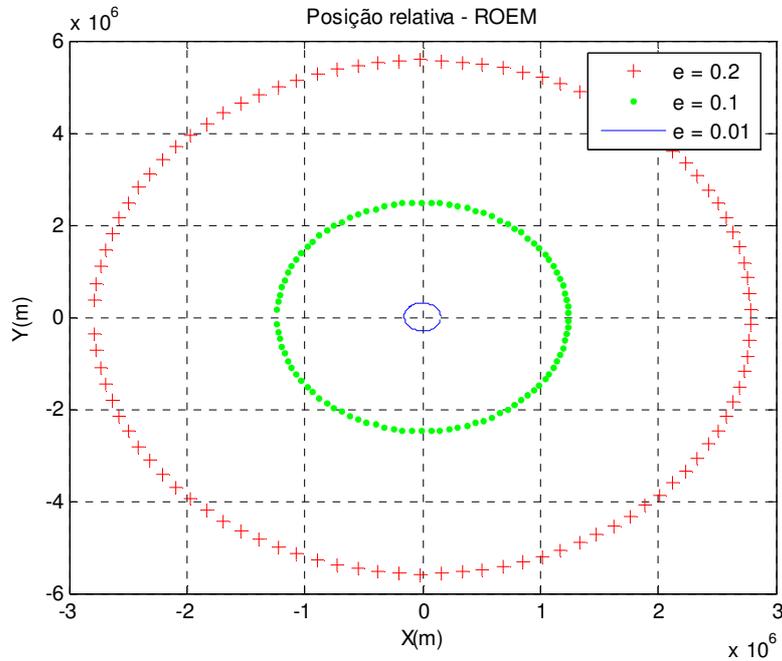


Figura 5-30: Posição relativa entre o satélite 1 e os demais ( $e_1 = 0.02$ ;  $e_2 = 0,2$ ;  $e_3 = 0,1$ ;  $e_4 = 0,01$ ) pelo método ROEM

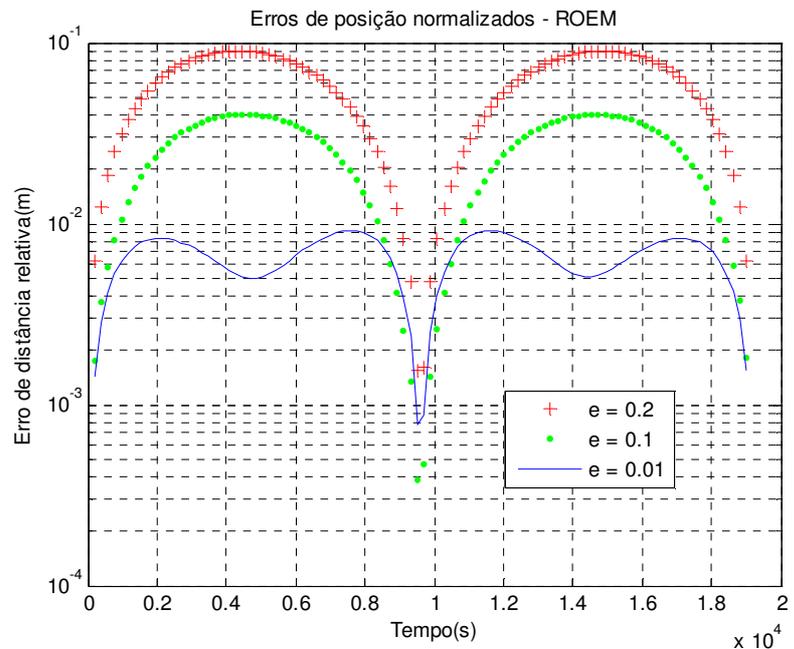


Figura 5-31: Erros ROEM normalizados ( $e_1 = 0.02$ ;  $e_2=0,2$ ;  $e_3=0,1$ ;  $e_4=0,01$ )

Os satélites com maior diferença de ecentricidade apresentam maiores erros. A deformação observada na curva de ecentricidade 0.01 não é relevante. Como os erros são menores, pequenas oscilações são mais visíveis nessa curva.

## 5.4 Estimativa do último ponto medido

Considerando os pontos simulados com ruído como as últimas medidas, fazemos a estimativa do último ponto por filtragem de Kalman.

### 5.4.1 Filtragem utilizando Kalman linearizado

Foi utilizada o programa `kalman_sat_linearizado.m`

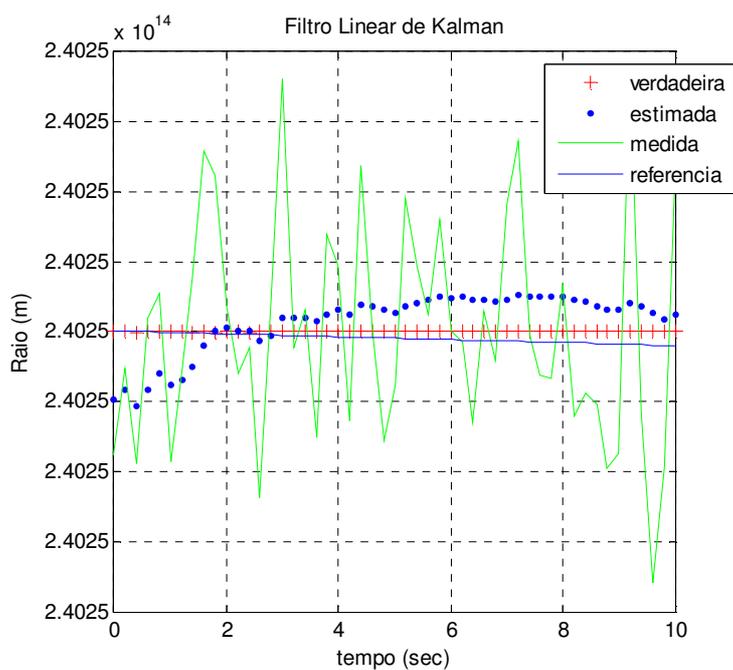


Figura 5-32: Resíduos da filtragem por Kalman linearizado.

### 5.4.2 Filtragem utilizando Kalman estendido

Foi utilizada o programa `kalman_estendido.m`

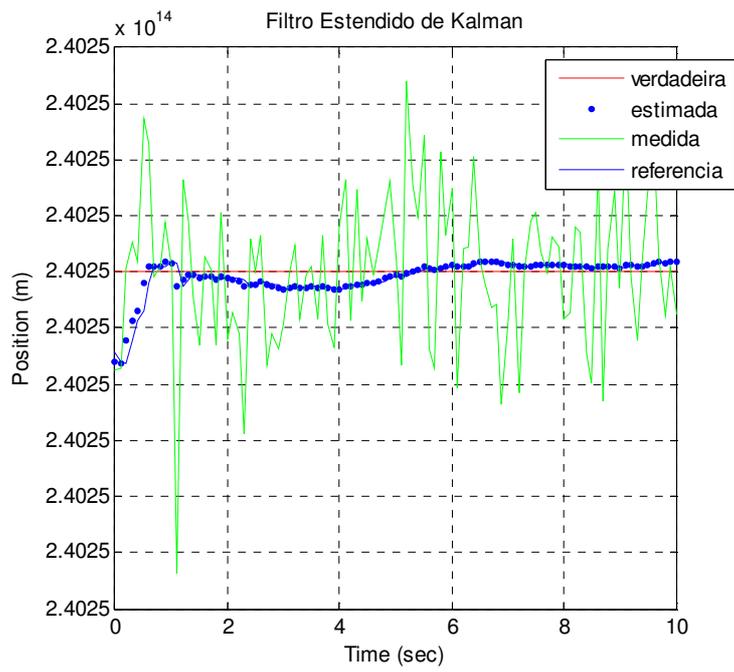


Figura 5-33: Resíduos da filtragem por Kalman estendido.

## 6 EXTENSÃO PARA O CASO AERONÁUTICO

Um dos objetivos desse trabalho é explorar a aplicabilidade das idéias estudadas ao contexto aeronáutico. Primeiramente, é bom observar que há grandes diferenças entre o contexto espacial e o contexto aeronáutico, entre os quais as seguintes:

- a) O movimento de um satélite é regido predominantemente pela força central, enquanto que o movimento de um avião ocorre sob contínua propulsão de um objeto imerso em um fluido.
- b) Para um satélite o arrasto é, usualmente, muito pequeno, sendo considerado apenas uma perturbação; para o avião, no entanto, o arrasto é uma das principais forças.
- c) O satélite normalmente se move sem interferência humana, tendo as perturbações como componentes aleatórias de sua dinâmica; o avião normalmente se move sob comando do piloto ou de um computador de bordo, sendo imprevisível a sua movimentação instantânea. O piloto, a cada instante, pode mudar direção e velocidade do movimento. Além disso, está sujeito à interferência de ventos, nuvens e outros fenômenos atmosféricos.
- d) A duração do movimento de um satélite é de vários anos; enquanto a do movimento de um avião é de algumas horas.
- e) O satélite mantém-se em sua órbita. O piloto, apesar de normalmente seguir a altitude de seu plano de vôo, pode alterar a altitude de vôo, especialmente se houver alterações climáticas.

Não obstante, há algumas semelhanças que podem ser exploradas:

- a) O satélite segue uma trajetória bem definida; e, em condições normais, um avião comercial segue uma rota bem definida.
- b) A velocidade de um satélite é estável, apesar de pequenas perturbações. A velocidade média esperada de cada modelo de avião comercial é previsível para cada fase de voo.
- c) Em ambos os casos, pode-se estimar a posição para cada nova posição medida.

Sendo assim, tanto no contexto espacial quanto no contexto aeronáutico, temos veículos deslocando-se em trajetórias conhecidas com certo grau de incerteza. Deseja-se prever trajetórias durante um período futuro para todos os veículos em questão e calcular se há risco de grande proximidade entre eles que possa ocasionar risco de colisão acima do aceitável.

## **6.1 Limites do Espaço Aéreo**

Uma rota aérea é definida como a projeção sobre a superfície terrestre da trajetória de uma aeronave cuja direção, em qualquer ponto, é expressa geralmente em graus a partir do Norte (verdadeiro ou magnético). A rota ATS é a rota especificada, de acordo com a necessidade, para proporcionar serviços de tráfego aéreo (COMAER, 2006).

Os limites das rotas no espaço aéreo brasileiro são definidos pelo Comando da Aeronáutica. A Figura 6-1 mostra a disposição atual das rotas brasileiras (DCEA, 2008), em vigor a partir de 13 de março de 2008.

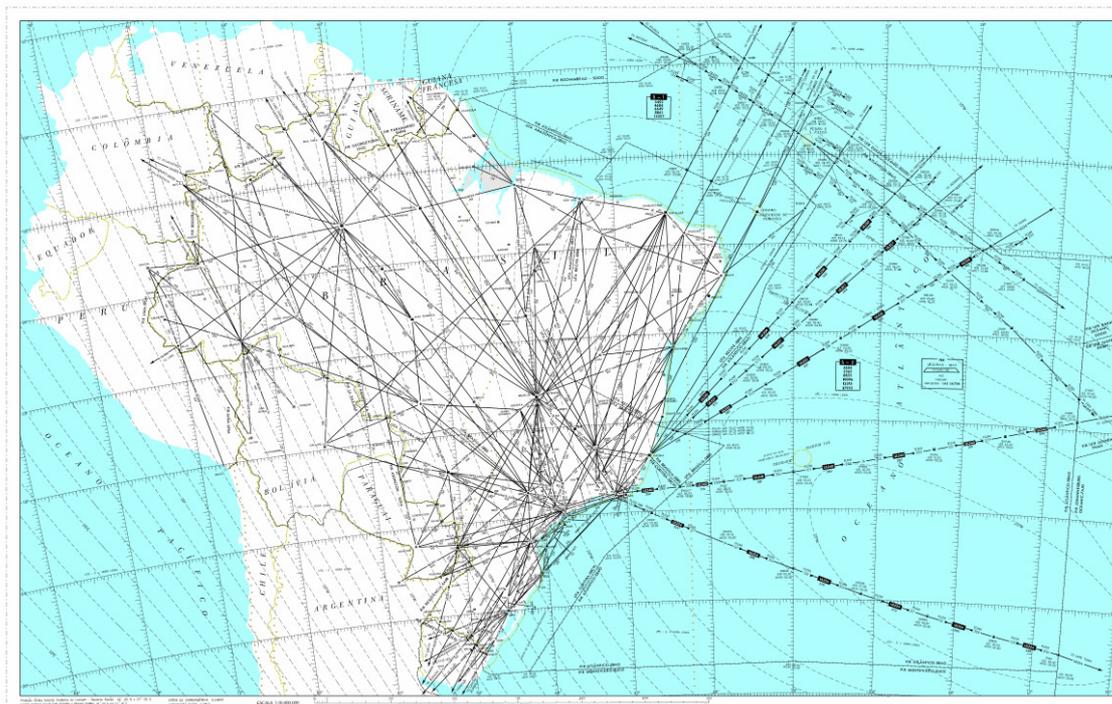


Figura 6-1: Disposição atual das rotas ATS brasileiras.  
 Fonte: DCEA (2008)

As rotas são percursos definidos em cartas de rota (ERC) com direção, ou rumo, expressa em graus, de 000° a 360° a partir do Norte (verdadeiro ou magnético), no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.

O espaço em torno da rota por onde o avião pode trafegar é chamado de aerovia. As aerovias são divididas em dois grupos: um superior e outro inferior: No Brasil, as aerovias inferiores ocupam até a altitude de 24.500 pés (Flight Level 245), inclusive; e as aerovias superiores estão acima dessa altitude.

Seguem abaixo as regras para as aerovias brasileiras dada por (COMAER, 2006):

#### AEROVIAS SUPERIORES

- a) limite vertical superior – ilimitado;
- b) limite vertical inferior – FL245 exclusive; e
- c) limites laterais – 80km (43NM) de largura, estreitando-se a partir de 400km (216NM), antes de um auxílio à navegação, atingindo sobre este a largura de 40km (21,5NM).

NOTA: As aerovias superiores entre dois auxílios à navegação, distantes entre si até 200km (108NM), terão a largura de 40km (21,5NM) em toda a sua extensão.

#### AEROVIAS INFERIORES

- a) limite vertical superior – FL245 inclusive;
- b) limite vertical inferior – 150m (500 pés) abaixo do FL mínimo indicado nas ERC; e
- c) limites laterais – 30km(16NM) de largura, estreitando-se a partir de 100km (54NM) antes de um auxílio à navegação, atingindo sobre este a largura de 15km (8NM).

NOTA: As aerovias inferiores entre dois auxílios à navegação, distantes entre si até 100km (54NM), terão a largura de 20km (11NM) em toda a sua extensão.

Aeronaves que voam por instrumentos (IFR) utilizam os níveis com números ímpares redondos (3.000, 5.000 etc) nos rumos entre zero (ou 360) e 179 graus magnéticos e níveis pares redondos (2.000, 4.000 etc) nos rumos entre 180 e 359 graus magnéticos. Um quadro sintético de segregação de alturas e direções é apresentado na Figura 6-2. A tabela de níveis de cruzeiro é apresentada no Apêndice C.

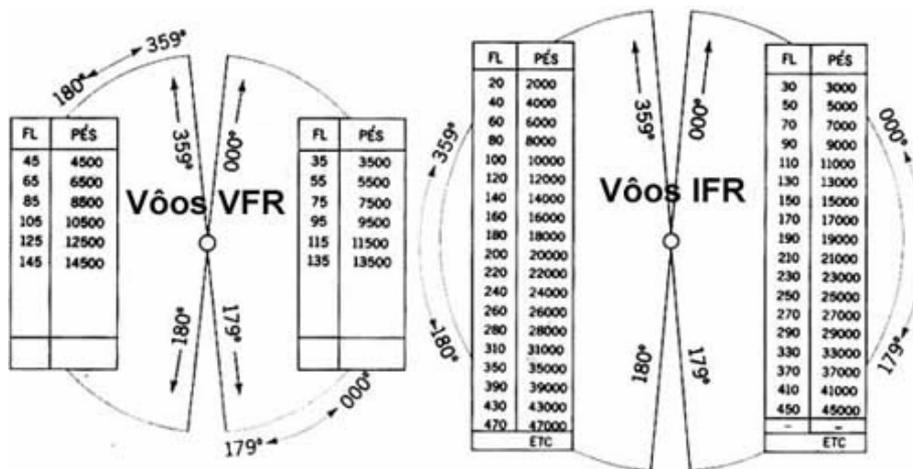


Figura 6-2: Direções e altitudes para rotas aeronáuticas.

Fonte: FLIGHTSIM (2008)

Algumas rotas, então, são para aeronaves que se deslocam para leste e outras para aeronaves que se deslocam para oeste

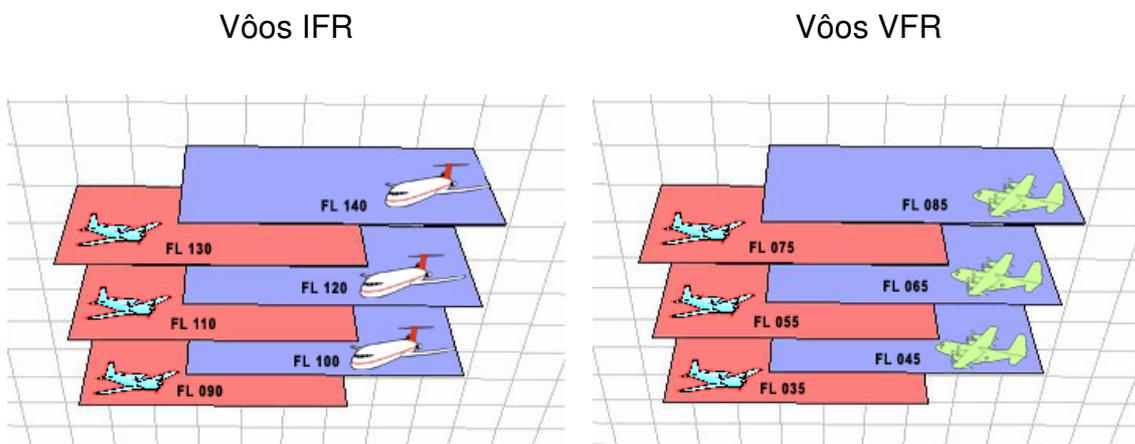


Figura 6-3: Segregação de rotas de acordo com o tipo e a direção vôo  
Fonte: TROPICAL (2007)

## 6.2 Perfil de vôo

Uma aeronave comercial deve seguir rotas ATS e perfis de vôo especificados.

Um perfil de vôo é o comportamento planejado de alturas e velocidades do aeronave (referência) durante as fases de vôo (Figura 6-4). Depende do tipo de aeronave e da distância entre os aeroportos.

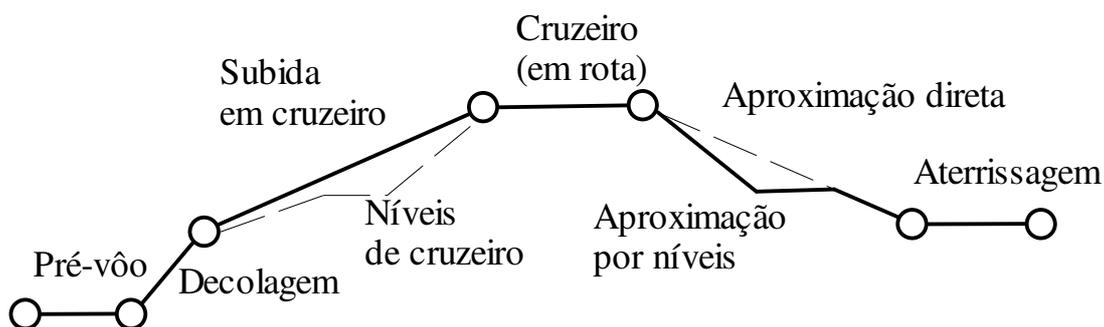


Figura 6-4: Fases típicas de vôo comercial.

Diferentemente do caso espacial, no cenário aeronáutico é necessário prever colisões entre objetos que, em geral, obedecem a regras de segregação impostas por regulamentos.

A Figura 6-5 apresenta uma estatística obtida na internet, segundo a qual o percentual de acidentes por colisões em vôo é da ordem de 1,5%, um dos menores do gráfico. Dada essa estatística, por que gastar energia atacando um dos menores problemas e não atacando aqueles que representam as maiores estatísticas?

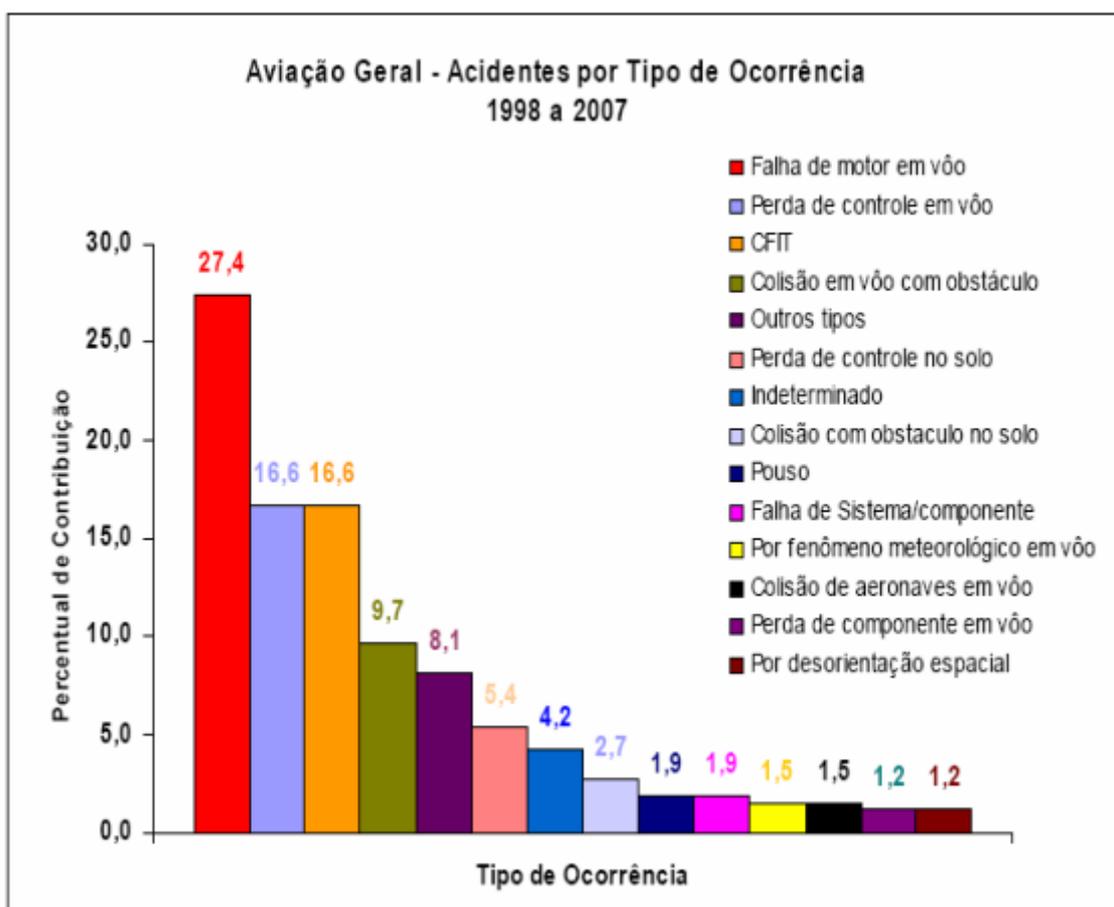


Figura 6-5: Estatísticas de acidentes aéreos por tipo de ocorrência.

Fonte: CENIPA (2007)

Em primeiro lugar porque são vidas que estão em jogo. Dificilmente alguém sairia vivo de um acidente em que duas aeronaves colidissem.

Em segundo lugar, devido ao crescimento do número de aeronaves, esse problema tende a se agravar, especialmente em situações de pouso e decolagem, quando a distância entre as aeronaves é menor.

Vale ainda comentar que uma situação de subida em cruzeiro ou descida em cruzeiro em uma área não coberta pelos sistemas de comunicação do Controle de Tráfego Aéreo (ATC) pode levar uma aeronave a cruzar a rota de uma outra aeronave, sem que seja alertada sobre o risco de colisão.

### **6.3 Aplicabilidade das idéias de cálculo de probabilidade de colisão**

Considerando a argumentação anterior, duas situações poderiam abordadas para a utilização das idéias abordadas por esse trabalho:

- a) Aeronave em situação de aproximação ou decolagem.

Nessa situação, o controlador de vôo pode ter sinais de várias aeronaves simultaneamente na tela (Figura 6-6), com seus identificadores, altitudes e velocidades. A segurança das aeronaves reside, nesse momento, no correto seguimento dos procedimentos e no treinamento do operador.

Uma melhoria ao sistema seria acrescentar um comportamento automático que prediga simultaneamente a trajetória das aeronaves alguns segundos à frente, calculando a distância entre elas e detectando riscos de colisão. Há o risco de o excesso de automatismo atrapalhar o operador. No entanto, poder-se-ia optar por uma filosofia de mínima intrusão com o acréscimo de alguma simbologia que alertasse o operador para o risco de colisão, como, por exemplo, sobrepor na tela, a trajetória de colisão em um tracejado ou cor diferentes, ou piscante.



Figura 6-6: Exemplo de tela de radar de controle de vôo  
 Fonte: NASA Air Traffic Control (2007)

- b) Aeronave em situação de subida em cruzeiro em área não atendida por ATC.

O plano de vôo do piloto é inserido no sistema ATC antes do início do vôo. O plano de vôo já indicaria se a aeronave iria ou não passar por região não atendida por ATC. Uma melhoria poderia ser acrescida ao sistema ATC para que, durante o vôo, fosse predito: 1) quando a aeronave entraria nessa região; 2) quanto tempo permaneceria nela; e 3) durante o tempo em que a aeronave estivesse na região sem comunicação, se outra aeronave estaria na mesma região, em outra rota.

Isso permitiria ao controlador recomendar aos pilotos de ambas as aeronaves que evitassem subida ou descida em cruzeiro durante a permanência naquela região.

Uma das idéias que é diretamente aplicável ao contexto aeronáutico é determinar uma seqüência de filtros que pudesse reduzir o escopo de comparações entre rotas de aeronaves, tais como:

Ao calcular a probabilidade de colisões para uma determinada aeronave, descartar:

a) Aeronaves em rotas que não cruzem a sua rota;

b) Aeronaves que estejam em rota de afastamento.

c) Aeronaves a uma distância tal que  $\frac{Dist}{V_1 + V_2} > T_{V_{oo}}$

d) Aeronaves que trafeguem nas aerovias superiores, quando a aeronave em questão trafega nas aerovias inferiores; e vice-versa.

A implantação dessas idéias para prevenção de colisões exigiria a evolução do sistema ATC, requerendo a integração ao sistema de bases de dados geográficos que contivessem a delimitação de todas as áreas não atendidas pelo sistema.

O desenvolvimento de uma investigação mais profunda nesse tema é um amplo espaço para trabalhos futuros.



## 7 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

### 7.1 Conclusões

O modelo de Hill não é adequado para predição de trajetória futura, não corrigida por amostras freqüentes, como foi visto no Teste 1. Podemos usá-lo para calcular o movimento relativo desde que a trajetória seja filtrada, usando uma trajetória de referência calculada pelo algoritmo de Goodyear ou de Shepperd.

Mesmo as equações mais simplificadas do método ROEM produziram um erro máximo normalizado bem inferior ao obtido com as equações de Hill para a maior parte da órbita.

No entanto, o erro inicial do método de Hill verificou-se menor que o erro da equação mais simplificada do método ROEM. Por exemplo, para o caso de termos satélites espaçados de 0.01 graus, todos com ecentricidade 0.01, conforme apresentado na Figura 5-20, o erro mínimo do método ROEM foi superior a  $10^{-4}$ , enquanto, como podemos ver na Figura 5-14, para tempos menores que 600s, o erro do modelo de Hill é menor que  $10^{-4}$ .

O resultado da filtragem obtida usando Kalman linearizado converge de forma a reduzir o erro na estimativa das medidas a serem utilizadas para a propagação. Comparando com a filtragem que utilizou Kalman estendido, observa-se que a última tem resultado superior, à custa de um custo computacional maior.

No entanto, apesar de o custo computacional do algoritmo de filtragem pelo método de Kalman estendido ser maior, o número de iterações do algoritmo é limitado, o que permite prever o tempo máximo de execução. Sendo assim, deve-se considerar a hipótese de utilizá-lo, mesmo em aplicações de tempo

real, desde que o poder computacional disponível seja suficiente para contrabalançar a carga maior de processamento.

## **7.2 Comentários**

Os comentários a seguir não são idéias originais, nem são conclusões do trabalho. São um extrato de alguns pontos observados na literatura aos quais foi dada importância no desenvolvimento do trabalho e para os quais desejamos chamar a atenção.

Em primeiro lugar, vale observar que a utilização de modelos linearizados como os utilizados nesse trabalho não é adequada para cálculo de probabilidade de colisão em manobras de configuração ou reconfiguração dada a natureza não linear de tais manobras. Sendo assim, as idéias desenvolvidas aqui são adequadas apenas para a situação de satélites em condições normais de operação.

A idéia de uma pré-seleção para descartar rapidamente colisões improváveis é importante quando a avaliação de probabilidade de colisão se dá em condições reais, em que é necessário avaliar probabilidade de colisão de satélites com os grande número de detritos catalogados e continuamente vigiados. Segundo (VALLADO & MCCLAIN, 2007 , p. 255), o US Space Surveillance Network (SSN), pertencente ao NAVSPACECOM já acompanhava quase 10.000 objetos no ano 2000.

É importante chamar atenção para a necessidade de se ter a melhor precisão possível nos dados coletados, devido a alta sensibilidade da probabilidade de colisão ao aumento de variância. Pequenos aumentos na covariância causam grandes aumentos na probabilidade de colisão.

Finalmente, a diluição da probabilidade quando a propagação das covariâncias torna-se muito grandes é um detalhe importante que deve ser levado em conta. Quando a covariância aumenta a ponto de fazer a probabilidade de colisão

chegar ao máximo e, aumentos posteriores fazem-na cair, deve-se tomar muito cuidado. Baixas probabilidades causadas por altos valores de covariância podem induzir a falsa sensação de segurança, levando a conclusão errada de que não há risco de colisão, quando o que se tem, na realidade, é baixa precisão nos dados. Nessa situação, o valor de probabilidade a ser usada deveria ser o valor máximo.

### **7.3 Trabalhos Futuros**

Apesar de não terem sido utilizados nesse trabalho, os cenários propostos por (CARPENTER, 2003) parecem adequados para teste de ambientes de simulação de dinâmica de formação de satélites. As idéias desenvolvidas por este trabalho poderiam ser utilizadas como ferramenta de medida dentro um sistema de simulação, o que seria uma possibilidade interessante de desenvolvimento futuro. Dessa forma, ao se projetar uma formação, e otimizarla no simulador, poderiam ser avaliadas condições em que houvesse risco de colisão. Isso permitiria que o projetista da formação pudesse escolher melhores condições iniciais.

Outro interessante desenvolvimento futuro seria a sofisticação dos modelos, utilizados, com inclusão de perturbações, em especial J2.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FLIGHTSIM – Portal brasileiro de simulação de vôo. **Aprendendo a voar VFR**. Disponível em < <http://www.flightsim.com.br/artigos.php?art=3>>. Acesso em: 21 set. 2008.

NASA Air Traffic Control. How Stuff Works. May 2007. Disponível em: <http://science.howstuffworks.com/air-traffic-control.htm>.> Acesso em 21 set. 2008. Vídeo digital.

TROPICAL Linhas Aéreas Virtuais. Nível de vôo ou altitude?. Tutoriais, 2007. Disponível em <[http://www.voetla.com/nivel\\_voo\\_altitude.php](http://www.voetla.com/nivel_voo_altitude.php)>. Acesso em 21 set. 2008.

ALARCÓN-RODRIGUEZ, J.R.; FADRIQUE, F. M. M.; KLINKRAD, H. Collision risk assessment with a smart sieve method. In: JOINT ESA-NASA SPACE-FLIGHT SAFETY CONFERENCE, ESTEC. Noordwijk (NL), Aug. 2002. **Proceedings...** Noordwijk: ESA, 2002 v. SP-486, p.159–164 (2002ESASP. 486..159A). Disponível em: < [http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-article\\_query?2002ESASP.486..159A&data\\_type=PDF\\_HIGH&whole\\_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf](http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-article_query?2002ESASP.486..159A&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf) >. Acesso em: 07 jul. 2008.

ALARCÓN-RODRIGUEZ, J.R. ;FADRIQUE, F. M. M.; KLINKRAD, H. Development of a collision risk assessment tool, **Advances in Space Research**, v. 34, n. 5, p.1120-1124, 2004.

ALFANO, S. Relating position uncertainty to maximum conjunction probability. In: AAS/AIAA ASTRODYNAMICS SPECIALISTS CONFERENCE, 2003, San Diego, CA. **Proceedings...** San Diego: AIAA, August, 2003. (AAS 03-548).

ALFANO, S. A Numerical implementation of spherical object collision probability, **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 53, n. 1, January-March 2005, pp. 103-109.

ALFRIEND K.T.; AKELLA M.R. Probability of collision between space objects, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 23, n. 5, pp. 769-772, 2000.

ALFRIEND K.T.; AKELLA M.R.; FRISBEE J.; FOSTER J.L.; LEE D-J.; WILKINS M. Probability of collision error analysis, **Space Debris**, v. 1, pp. 21-35(15), 1999.

ALFRIEND, K. T.; VADALI, S. R.; SCHAUB, H. Formation flying satellites: control by an astronynamicist, **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 81, 1-2, p. 57-62, 2001.

ALMEIDA, M. P. C. **Modelamento de efeitos de propagação em enlaces satélite de órbita baixa**. 141 p. (PUC-Rio – Certificação Digital N° 9916926/CA) Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2003. Disponível em <>. Acesso em < [http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/cgi-bin/db2www/PRG\\_0490.D2W/INPUT?CdLinPrg=pt](http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/cgi-bin/db2www/PRG_0490.D2W/INPUT?CdLinPrg=pt)> Acesso em: 01 set. 2008.

ATHÈNES, S.; AVERTY, P.; PUECHMOREL, S.; DELAHAYE, D.; COLLET, C. ATC complexity and controller workload: trying to bridge the gap. In: HCI-AERO 2002 INTERNATIONAL CONFERENCE ON HUMAN-COMPUTER INTERACTION IN AERONAUTICS, 2002, Cambridge, USA. **Proceedings...** Cambridge: AAI, 2002. v., p. 56-60.

BATE, R. R; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. **Fundamentals of astrodynamics**, New York: Dover Pub., 1971. 455 p.

CANIÇALI, R. **Análise e comparação de algoritmos de interceptação utilizando técnicas de navegação proporcional e de controle ótimo**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica e Computação) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2002.

CARPENTER, J. L. et al. Benchmark problems for spacecraft formation flying missions. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION, AND CONTROL CONFERENCE AND EXHIBIT, 2003, Austin. **Proceedings...** Austin, USA: AIAA, (AIAA-2003-5364).

MINISTÉRIO DA DEFESA. CENTRO DE INVESTIGAÇÃO E PREVENÇÃO DE ACIDENTES AERONÁUTICOS (CENIPA). **Aviação Geral – acidentes por tipo de ocorrência**. dez. 2007. Disponível em: <[http://www.cenipa.aer.mil.br/optimization/optimiz\\_geral.pdf](http://www.cenipa.aer.mil.br/optimization/optimiz_geral.pdf)>. Acesso em 21 set. 2008.

CLOHESSY, W.H.; WILTSHIRE, R.S. Terminal guidance for satellite rendezvous, **J. Aerospace Sciences**, v. 27, p. 653-674, 1960.

MINISTÉRIO DA DEFESA. COMANDO DA AERONÁUTICA. **Regras do ar e serviços de tráfego aéreo, ministério da defesa, comando da aeronáutica, departamento de controle do espaço aéreo**. 2006, ICA 100-12. Disponível em < [http://www.aisweb.aer.mil.br/aisweb\\_files/publicacoes/ica/ica\\_100-012\\_160206.pdf](http://www.aisweb.aer.mil.br/aisweb_files/publicacoes/ica/ica_100-012_160206.pdf)> Acesso em:21/09/2008.

DEPARTAMENTO DE CONTROLE DO ESPAÇO AÉREO-(DCEA). **Reestruturação da circulação aérea geral – fase três**. Departamento de Controle do Espaço Aéreo, mar, 2008. (Circular AIC N 14/08). Disponível em: <[http://www.aisweb.aer.mil.br/aisweb\\_files/publicacoes/aic\\_n/aic\\_2008\\_n14.pdf](http://www.aisweb.aer.mil.br/aisweb_files/publicacoes/aic_n/aic_2008_n14.pdf)> Acesso em: 20/09/2008.

GAO, Y.; BAOYIN, H.; LI, J. Comparison of two methods in satellite formation flying. **Applied Mathematics and Mechanics**, v. 24, n. 8, Aug. 2003.

GOODYEAR, W. H. **A general method for the computation of  $\square$ optimizat coordinates and partial derivatives**. Washington: NASA, 1966 (NASA CR-522).

GURFIL, P.; IDAN, M.; KASDIN, N. J. Adaptive neural control of deep-space formation flying, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.26 n.3, p. 491-501, 2003.

INGALLS, B. **Conflict resolution in air traffic management using the methods of optimal control theory**, Thesis (MsC in Mathematics). DALHOUSIE University, Halifax, Nova Scotia, Aug, 1997

KOON, W. S.; MARSDEN, J. E.; MURRAY R. M.; MASDEMONT, J J2 dynamics and formation flight. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE, 2001. Montreal. **Proceedings...** Montreal, Quebec, Canada: AIAA, 2001.

KUEN T; KOO, J.; MA, Y., PAPPAS, G.J.; TOMLIN, C. SmartATMS : a simulation for air traffic management systems. WINTER SIMULATION CONFERENCE (WSC'97), 1997, Atlanta. **Proceedings...** Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 1997. p. 1199-1205.

KUGA, H.K. **Noções práticas de técnicas de estimação**. ( Instituto Nacioanl de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos) 2005. Notas de Aula.

KUGA, H.K. **Matriz de transição do movimento kepleriano elíptico**. São José dos Campos: INPE, 1986. 20p. (INPE-3779-NTE/250).

KUGA, H. K.; OLIVEIRA, S. Posicionamento relativo em tempo real de formação de vôo orbital através do filtro de kalman. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 4., Bauru. **Anais...** Bauru: UNESP, 2005. p. 6-10 Jun 2005. Campus de Bauru.

KUGA, H. K.; RAO, K. R. **Introdução à mecânica orbital**. São José dos Campos: INPE, 1995, (INPE-5615-PUD/064).

LI, J.; MENG. X.; GAO, Y.; LI. X. Study on relative orbital configuration in satellite formation flying. **Acta Mech Sinica**, v.21, p. 87-94, 2005.

MATNEY, M.J.; ANZ-MEADOR, P.; FOSTER ,J.L. Covariance correlations in collision avoidance probability calculations. **Advances in Space Research**, v. 34, p.1109-1114, 2004.

MILAM, M. B.; PETIT, N.; MURRAY, R. M. Constrained trajectory generation for micro-satellite formation flying. In: AIAA GUIDANCE, AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE, 2001. Montreal. **Proceedings...** Montreal, Quebec, Canada: AIAA, 2001. p. 328-333.

NUSYIRWAN, I.; BIL, C. Stochastic trajectory optimization for aircraft in air combat. In: SIMTECT 2005 SIMULATION CONFERENCE AND EXHIBITION, 2005, Sydney. **Proceedings...** Sydney: Simtect, 2005.

PERNICKA, H.J.; CARLSON, B.A.; BALAKRISHNAN, S.N. Spacecraft formation flight about libration points using impulsive maneuvering. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 29, p. 1122-1130, 2006.

PILCHOWSKI, H. U. et al. **Introdução à mecânica celeste**. S.J.Campos, SP: INPE, 1981 (INPE-2126-RPE/350).

QUEIROZ, M. S.; KAPILA, V.; YAN, Q. Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 23, n. 3, p. 385-390, 2000.

SABOL, C. et al. Satellite formation flying design and evolution. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 38, n. 2, Mar.-Apr, 2001.

SLATER, G.L.; BYRAM, S. M.; WILLIAMS, T. W. Collision avoidance for satellites in formation flight, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 29, n. 5, Sept.–Oct., 2006.

STAATS, R. W. **An airspace planning and collaborative decision making model under safety, workload, and equity considerations**. Thesis (PhD in Industrial and Systems Engineering) – Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2003.

TAKAHASHI, Y.; RABINS, M. J.; AUSLANDER, D. M. **Control and dynamic systems**. Reading: Addison-Wesley, 1972.

VALLADO, D. A.; MCCLAIN, W. D. **Fundamentals of astrodynamics and applications** Hawthorn, CA: Microcosm Press; New York, NY: Springer, 2007.

WECK, O. L.; SCIALOM, U.; SIDDIQI, A. Optimal reconfiguration of satellite constellations with the auction algorithm. In: AIAA INTERNATIONAL COMMUNICATIONS SATELLITE SYSTEMS CONFERENCE & EXHIBIT, 2004, Monterrey. **Proceedings...** Monterrey, CA, AIAA, 2004.

## GLOSSÁRIO

**AFSPACECOM** (ou AFSPC) é o comando da Força Aérea Estadunidense que é um dos componentes do USSPACECOM.

AFSPC opera o Air Force Satellite Control Network (AFSCN) ao redor do mundo para constantemente monitorar a operação dos satélites em órbita.

AFSPC acompanha e cataloga mais de 8000 objetos artificiais em órbita da Terra. Esses objetos vão desde detritos do tamanho de uma bola de beisebol até grandes satélites. O AFSPC procura garantir que o Space Shuttle tenha caminho livre quando estiver orbitando a Terra.

Fonte: <http://www.fas.org/spp/military/program/nssrm/initiatives/arspacec.htm>

Data: 01/09/2008

**NAVSPACECOM** é o comando da Marinha estadunidense que é um dos componentes do USSPACECOM.

Suas responsabilidades incluem operar sistemas espaciais que lhe são atribuídos para prover vigilância e capacidade de alerta, assim como prover telemetria de espaçonaves e suporte de engenharia espacial.

Adicionalmente, o NAVSPACECOM coordena um centro de comando 24 horas por dia para funcionar como o centro de controle espacial alternativo ("Alternate Space Control Center - ASCC) para o centro principal do USSPACECOM, localizado em Cheyenne Mountain Air Force Base, Colorado.

As missões do ASCC incluem a direção operacional da SSN (Space Surveillance Network) em todo o mundo para a CINCSPACE.

A ASCC também detecta, acompanha, identifica e cataloga todos os objetos artificiais no espaço e provê efemérides destes objetos par cerca de 1000 clientes. Também monitora o

ambiente espacial e informa aos proprietários e operadores nos Estados Unidos e a sistemas espaciais aliados sobre riscos potenciais a seus patrimônios (satélites) através de canais de comunicação contínuos com os centros de operação.

Fonte: <http://www.fas.org/spp/military/program/nssrm/initiatives/navspace.htm>

Data: 01/09/2008

**Rota ATS** Aerovia. Rota controlada por Sistema de Tráfego Aéreo (Air Traffic System).

**USARSPACE** é o comando do Exército Estadunidense que é um dos componentes do USSPACECOM.

Fonte: <http://www.globalsecurity.org/space/library/report/1999/nssrm/initiatives/usarspac.htm>

Data: 01/09/2008

**USSPACECOM** é um departamento unificado do Departamento de Defesa (DoD) estadunidense que coordena o trabalho de três outros departamentos: AFSPACECOM (AFSPC), NAVSPACECOM e USARSPACE

É responsável por conduzir todas as operações integradas de operações espaciais, incluindo controle do espaço e de alerta a ataques. É responsável pela direção de atividades de suporte espaciais e pelo uso do recursos (patrimônio) espaciais para aumentar a efetividade da força de outros comandos militares.

O quartel general do USSPACECOM fica em Peterson AFB, Colorado Springs, CO. O comando opera o Space Defense Operations Center (SPADOC), o Space Surveillance Center (SSC), o Missile Warning Center (MWC), e o Joint Space Intelligence Center (JSIC)

Ele também dirige operações de suporte espacial para sistemas espaciais que lhe são atribuídos, incluindo os seguintes: Defense Support Program (DSP), Defense Satellite

Communications System (DSCS), Global Positioning System (GPS), Transit Maritime Navigation System (TRANSIT), Fleet Satellite Communications (FLTSATCOM), Air Force Satellite Communications (AFSATCOM) System payloads, e o Defense Meteorological Satellite Program (DMSP).

Fonte: <http://www.fas.org/spp/military/program/nssrm/initiatives/usspace.htm>

Data: 01/09/2008



## APÊNDICE A – CENÁRIOS PROPOSTOS POR CARPENTER

(CARPENTER, 2003) propõe os seguintes cenários a serem utilizados como padrão na comparação entre algoritmos e tecnologias quando são aplicados em missões envolvendo formação de satélites. São eles:

a) Primeiro cenário: LEO (“Low Earth Orbit”)

O cenário consiste de uma trajetória de referência aproximadamente circular, que segue uma órbita com sincronismo solar, com altitude nominal de 400 Km. O seguinte conjunto de elementos orbitais médios apresentado pela Tabela A.1 é utilizado:

Tabela A.1: Elementos Orbitais Médios para o cenário LEO

	<b>Descrição</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
	Época	5/out/2001 0h:0m:0s	UT0
Semi-eixo maior	<i>a</i>	6778	km
Ecentricidade	<i>e</i>	1000E-3	-
inclinação	<i>i</i>	97,03	deg
Ascensão reta do nodo ascendente	$\Omega$	13,71	deg
Argumento do perigeu	$\omega$	0	deg
Anomalia verdadeira	<i>f</i>	0	deg

Nesse cenário há 6 satélites, estabilizados nos 3 eixos. Nenhum deles está sobre a trajetória de referência. Três deles estão igualmente espaçados em uma de duas formações de projeção circular de 500 m de diâmetro, inclinadas em oposição.

Em suma, quando as trajetórias são projetadas no plano da órbita de referência (“along-track / cross track”), as trajetórias do movimento relativo em torno da referência são círculos na aproximação de movimento relativo linearizado (Equações de Hills). Esse movimento relativo pode ser obtido através de uma combinação de diferenças nos elementos orbitais a partir da trajetória de referência. Essas diferenças nos elementos orbitais são dependentes do diâmetro da formação e da fase do satélite dentro da formação. (SABOL et al, 2001, citado por CARPENTER, 2003) derivou as relações para inicializar formações com projeção circular e observou que os semi-eixos maiores deveriam ser idênticos para que as formações sejam estáveis em movimento kepleriano.

A duração nominal da missão seria de 2 anos.

b) Segundo cenário: HEO (“Highly Elliptic Orbit”)

O cenário consiste de uma trajetória de referência de órbita de 1,2 por 18 raios da Terra, aproximadamente 5 graus acima do eixo da eclíptica, onde a linha inicial de apsides é paralela à direção do Sol e o apogeu está em oposição ao Sol.

O conjunto de elementos orbitais médios apresentados pela Tabela A.2 é utilizado:

Tabela A.2: Elementos Orbitais Médios para o cenário HEO

<b>Descrição</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Época	21/jun/2009 0h:0m:0s	UT0
Referência	Equador Terrestre, MJ2000	
a	61277	km
e	0.,875	-
i	18,5	deg
$\Omega$	0	deg
$\omega$	90	deg
f	0	deg

Nesse cenário há 4 satélites estabilizados por rotação (“spin”) que, no apogeu, devem formar um tetraedro regular de 10km de aresta, com orientação arbitrária. A configuração de tetraedro não precisa ser mantida em qualquer outro ponto da órbita. O movimento relativo desejado pode ser obtido através de uma combinação de diferenças em um subconjunto de elementos orbitais a partir da trajetória de referência, com exceção dos semi-eixos maiores, os quais, assim como no caso LEO, devem ser idênticos.

A duração nominal da missão seria de dois anos.

c) Terceiro cenário: LP (“Libration Point”)

Nesse cenário, os satélites seguem uma órbita de referência de Lissajous em torno do ponto de libração conhecido como “L2”, que é o ponto de libração co-linear com o sistema Sol - Terra/Lua, com amplitude transversal (y-) de

aproximadamente 300.000 km e amplitude normal (z-) igual ou menor que a amplitude y.

Nesse cenário, há 20 satélites estabilizados nos 3 eixos distribuídos de forma arbitrária sobre uma superfície esférica de 250m de raio, cada um constituindo uma sub-abertura para compor a abertura de um telescópio esparso. Um outro satélite fica localizado a 100km de distância, no foco da linha de alvo, de forma que toda a configuração forme um interferômetro de Fizeau.

A duração nominal da missão seria de 12 anos.

## APÊNDICE B – DESCRIÇÃO DOS FILTROS PARA PRÉ-FILTRAGEM

A referência utilizada para esse tema é (ALARCON et al, 2002). Havendo outras referências, são indicadas de forma localizada.

Alguns filtros são descritos abaixo. Vale observar que eles são apresentados em ordem crescente de complexidade, a qual seria a ordem lógica de utilização, pois os pares de objetos descartados pelos primeiros filtros acarretariam um custo computacional menor.

### B. 1 FILTRO DA DISTÂNCIA APOGEU-PERIGEU

Este filtro é um filtro clássico que estabelece para dois satélites que, se a distância entre o maior perigeu e o menor apogeu for maior que uma tolerância definida, os dois satélites nunca se aproximarão e não há necessidade de testar a probabilidade de colisão.

Assim, temos:

$$r_{p_{\max}} - r_{a_{\min}} > Dist \quad (7.1)$$

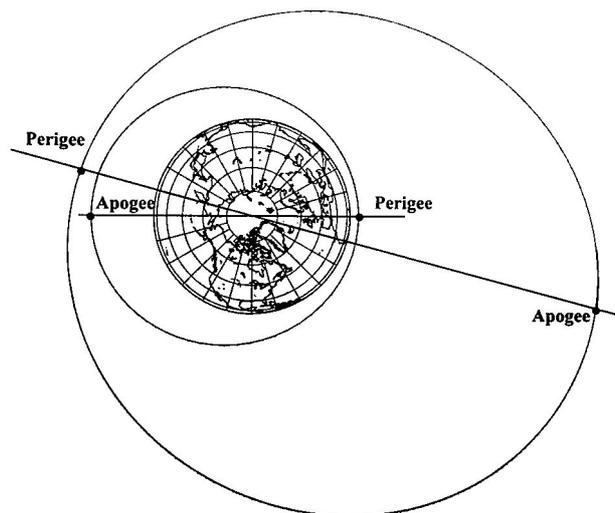


Figura B-1: Filtro da distância apogeu-perigeu

Fonte: VALLADO & MCCLAIN (2007, p. 911)

No exemplo da Figura B-1, temos duas órbitas, uma com  $e = 0,2$  e  $a = 8.637,459$  km e a outra com  $e = 0,35$  e  $a = 17.444,459$  km. O apogeu da menor órbita é de 10.364 km, enquanto o perigeu da órbita maior é de 11.339 km. Para qualquer  $Dist < 975$  km, esse par de satélites nunca chegará perto e não haverá necessidade de cálculos posteriores para determinação de colisão.

## B. 2 FILTRO X, Y, Z

Chamemos de distância crítica ao raio em torno de um satélite que corresponde ao menor risco de colisão aceitável. Qualquer distância menor acarretará um risco de colisão inaceitável. Chamemos de distância de segurança ( $R_{th}$ ) à distância tal que pode-se garantir que, na velocidade em que estão, os satélites não chegarão à distância crítica antes da próxima amostragem.

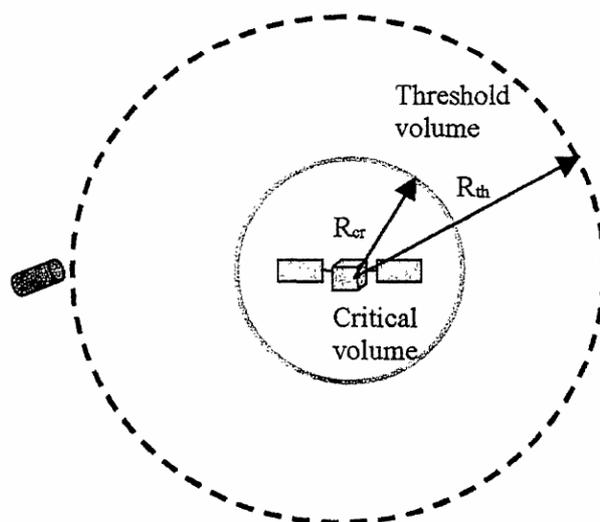


Figura B-2: Distância de Segurança (“*threshold*”)  
Fonte: ALARCON et al.(2002)

Se dois satélites estiverem separados de mais de  $R_{th}$  em qualquer direção coordenada, eles estarão a uma distância maior que  $R_{th}$  um do outro. Se  $\mathbf{r} = (r_x,$

$r_y, r_z$ ) for a o vetor posição relativa de um par de objetos em qualquer instante de amostragem, tem-se que se  $r_i > R_{th} \Rightarrow \mathbf{r} > R_{th}$  (para  $i = x, y, z$ ).

Esse filtro ainda pode receber uma melhoria para poupar tempo computacional. Se a distância entre os satélites for muito grande, em alguns ciclos de teste futuros, esse par de satélites pode ser “pulado” por um número de passos igual

$$N = \text{int}\left(\frac{r - R_{th}}{R_{th}}\right).$$

Para o cálculo da distância de segurança, considera-se que a velocidade relativa entre dois satélites não pode ultrapassar duas vezes a velocidade de escape  $v_{esc}$ . Se o tempo decorrido entre dois passos de amostragem for  $\Delta t$ , a distância relativa máxima percorrida por um objeto em velocidade relativa igual a  $v_{esc}$  será dada por  $d_{esc} = 2 \cdot v_{esc} \cdot \Delta t$ .

Sendo assim, a diferença entre a distância crítica e a distância de segurança não precisa ser maior que  $d_{esc}$ . O conceito está representado na Figura B-3.

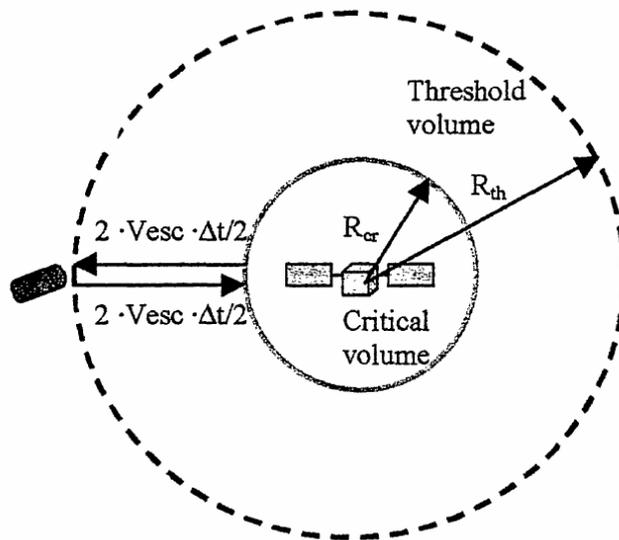


Figura B-3: Cálculo da Distância de Segurança  
Fonte: ALARCON et al.(2002)

A distância de segurança correspondente é dada por:

$$R_{th} = R_{cr} + \frac{1}{2} d_{esc} = R_{cr} + v_{esc} \Delta t \quad (7.2)$$

### B. 3 FILTRO $R^2$

Este filtro descarta pares de objetos para os quais  $r^2 > R_{th}^2$ .

### B. 4 FILTRO DA DISTÂNCIA MÍNIMA

Este filtro descarta objetos para os quais  $r_{min}^2 > R_{acc}^2$ , onde efeitos da aceleração são incluídos em  $R_{acc}$  e, conseqüentemente,  $r_{min}$  será calculado com a seguinte expressão:

$$r_{min}^2 = r_0^2 - \left( \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_{rel}}{v_{rel}} \right)^2 \quad (7.3)$$

onde o significado dos símbolos está apresentado na Figura B-4.

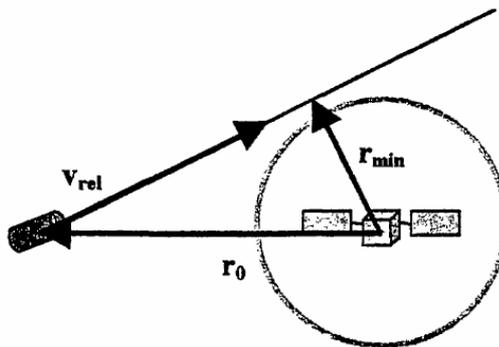


Figura B-4: Distância mínima desprezando aceleração  
Fonte: ALARCON et al.(2002)

### B. 5 FILTRO $R^2$ REFINADO

Um par de objetos pode estar mais próximo um do outro do que a distância de segurança, mas ainda longe o suficiente para entrar na distância crítica durante o tempo até o próximo passo de amostragem se a velocidade relativa real for considerada.

Este filtro é semelhante ao filtro  $R^2$ , mas usa a velocidade real  $v_{app}$  em lugar de  $2 \cdot v_{esc}$  e  $R_{acc}$  em lugar de  $R_{th}$ . Este filtro descarta objetos para os quais  $r^2 > R_{th, fine}^2$ , onde  $R_{th, fine}$  é dado por:

$$R_{th, fine} = R_{acc} + \frac{1}{2} v_{app} \Delta t = R_{acc} + \frac{1}{2} \left| \vec{r}_0 \frac{\vec{v}_{rel}}{v_{rel}} \right| \Delta t \quad (7.4)$$

O conceito é apresentado pela Figura B-5.

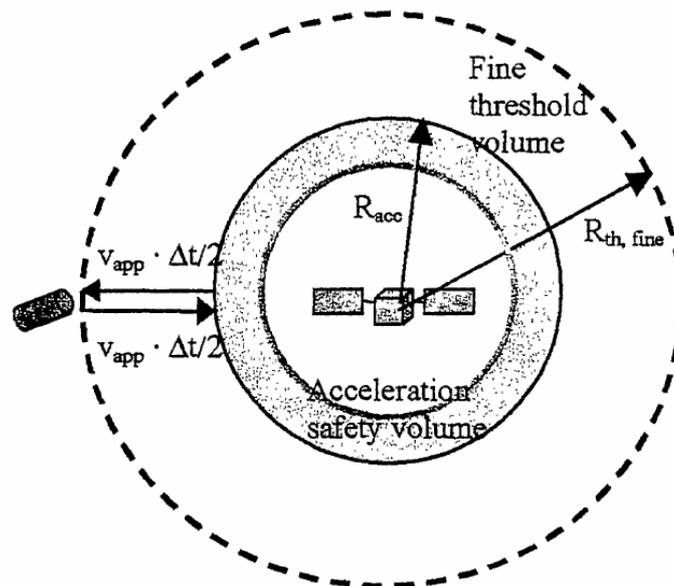


Figura B-5: Filtro  $R^2$  refinado  
 Fonte: ALARCON et al.(2002)



## APÊNDICE C – TABELA DE NÍVEIS DE CRUZEIRO (COMAER, 2006)

<b>RUMO MAGNÉTICO</b>											
<b>DE 000° a 179°</b>						<b>DE 180° a 359°</b>					
<b>FL</b>	<b>Vôos IFR</b>		<b>FL</b>	<b>Vôos VFR</b>		<b>FL</b>	<b>Vôos IFR</b>		<b>FL</b>	<b>Vôos VFR</b>	
	<b>Altitude</b>			<b>Altitude</b>			<b>Altitude</b>			<b>Altitude</b>	
	<b>m</b>	<b>pés</b>		<b>m</b>	<b>pés</b>		<b>m</b>	<b>pés</b>		<b>m</b>	<b>pés</b>
30	900	3000	35	1050	3500	20	600	2000			
50	1500	5000	55	1700	5500	40	1200	4000	45	1350	4500
70	2150	7000	75	2300	7500	60	1850	6000	65	2000	6500
90	2750	9000	95	2900	9500	80	2450	8000	85	2600	8500
110	3350	11000	115	3500	11500	100	3050	10000	105	3200	10500
130	3950	13000	135	4100	13500	120	3650	12000	125	3800	12500
150	4550	15000				140	4250	14000	145	4400	14500
170	5200	17000				160	4900	16000			
190	5800	19000				180	5500	18000			
210	6400	21000				200	6100	20000			
230	7000	23000				220	6700	22000			
250	7600	25000				240	7300	24000			
270	8250	27000				260	7900	26000			
290	8850	29000				280	8550	28000			
330	10050	33000				310	9450	31000			
370	11300	37000				350	10650	35000			
410	12500	41000				390	11900	39000			
450	13700	45000				430	13100	43000			
490	14950	49000				470	14350	47000			
etc.	etc.	etc.				510	15550	51000			
						etc.	etc.	etc.			



## **APÊNDICE D– GRÁFICOS DE ANÁLISE DE MÁXIMA PROBABILIDADE**

Os gráficos abaixo foram obtidos por (ALFANO 2003) e representam curvas de máxima probabilidade de colisão para casos de relação de aspecto dos desvios-padrão da matriz de covariância 1, 3, 5, 10 e 100.

# Maximum Probability Analysis (AR = 1)

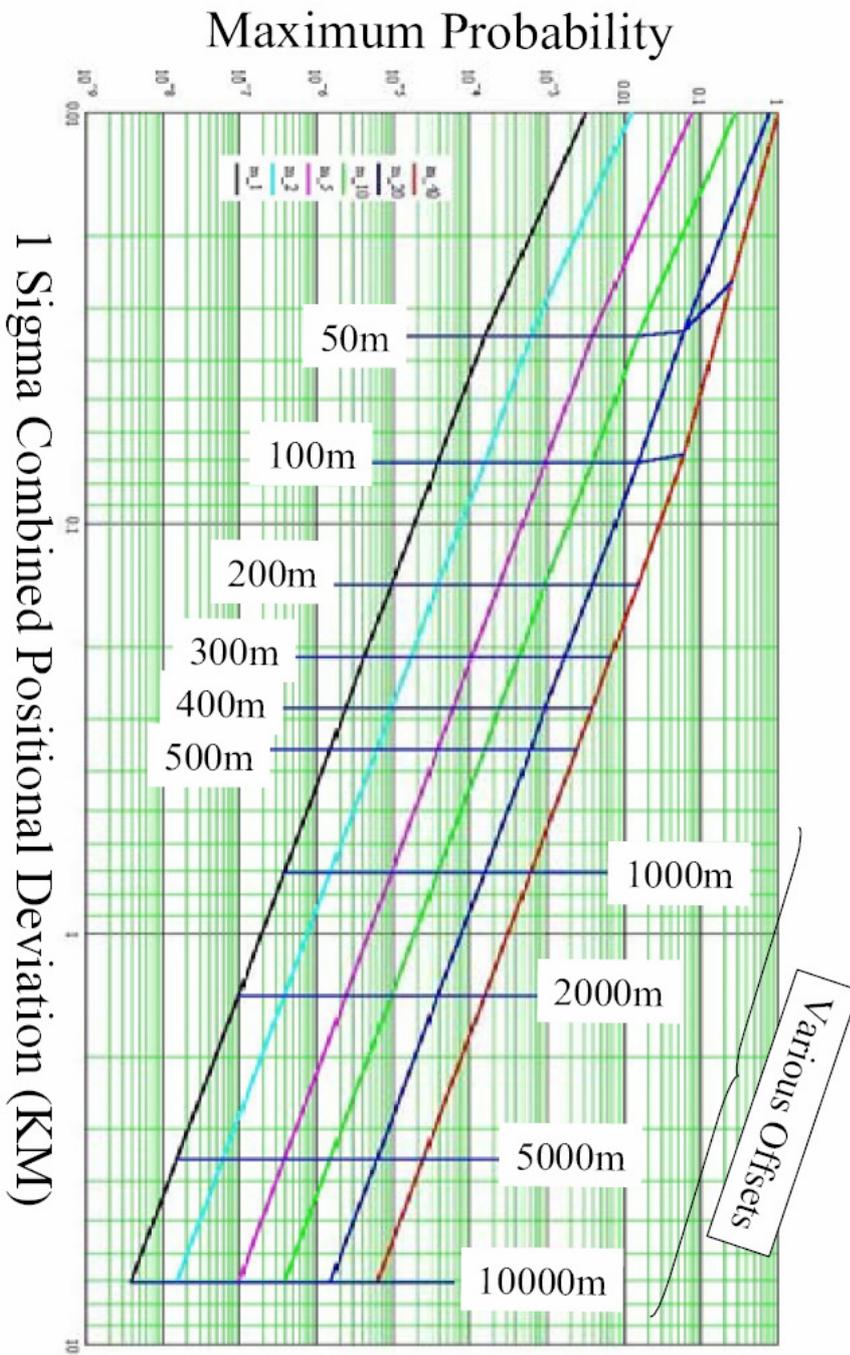


Figura D-1: Máxima Probabilidade para relação de aspecto 1  
 Fonte: ALFANO (2003)

# Maximum Probability Analysis (AR = 3)

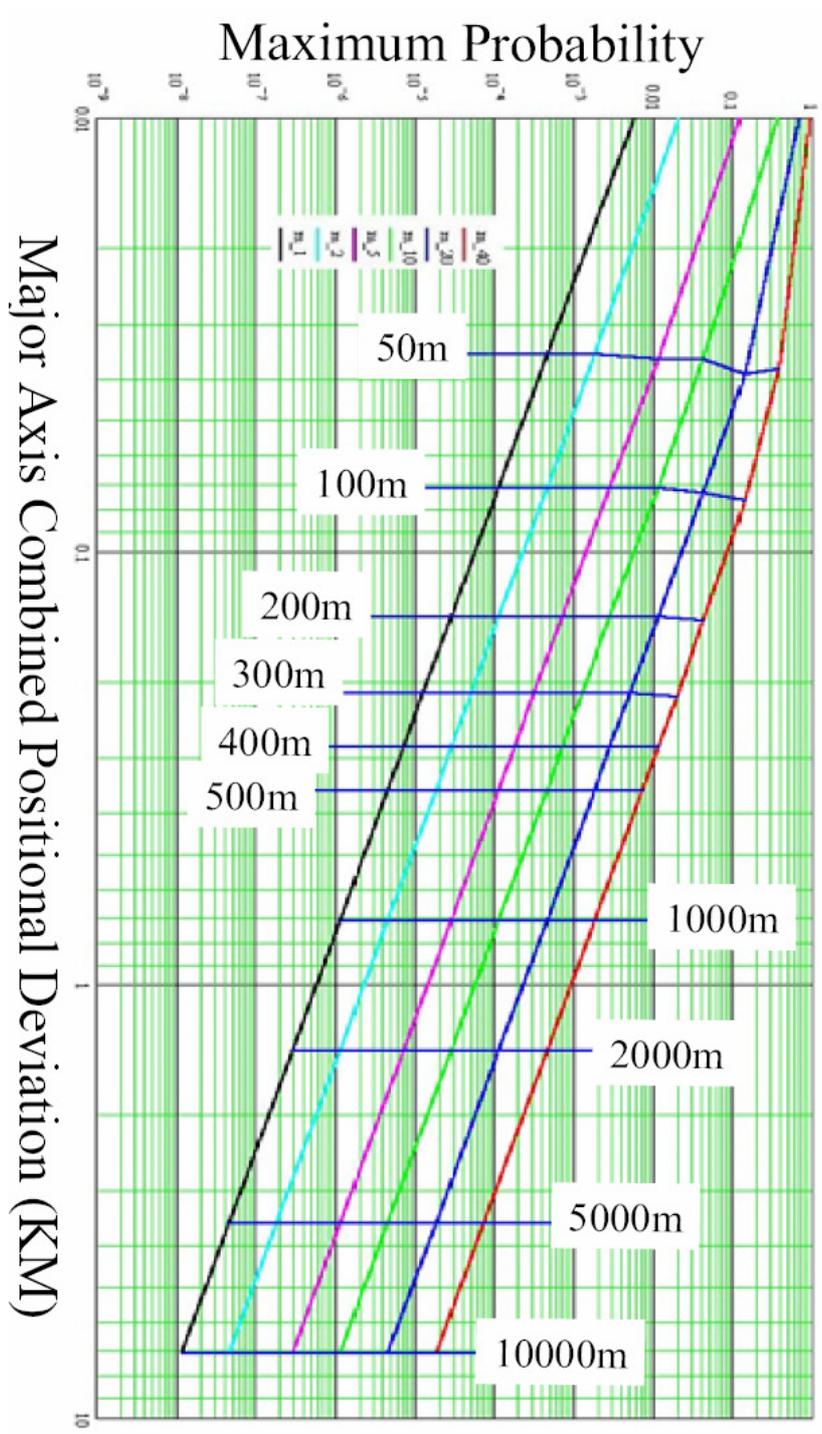


Figura D-2: Máxima Probabilidade para relação de aspecto 3  
 Fonte: ALFANO (2003)

# Maximum Probability Analysis (AR = 5)

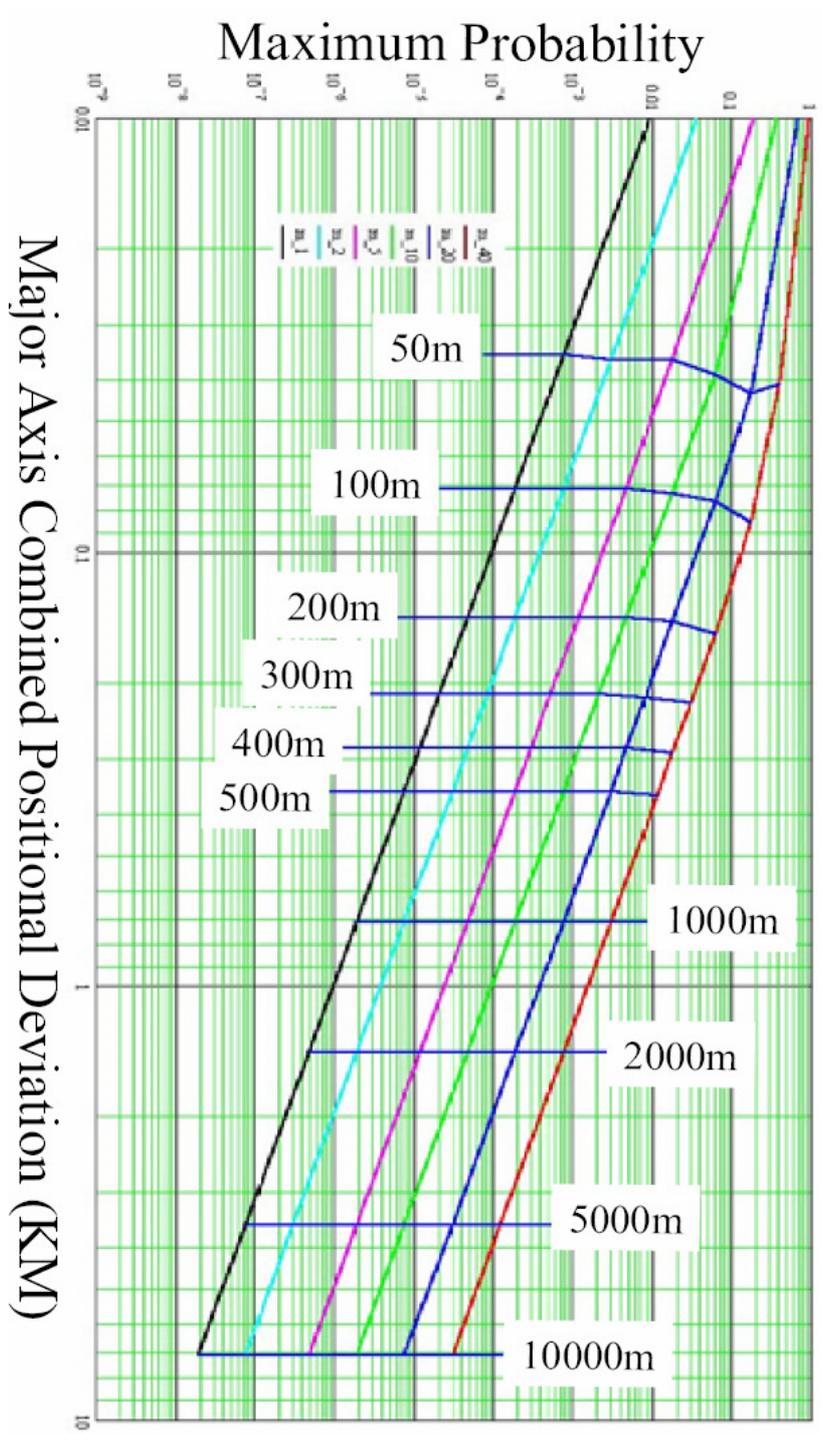


Figura D-3: Máxima Probabilidade para relação de aspecto 5  
 Fonte: ALFANO (2003)

# Maximum Probability Analysis (AR = 10)

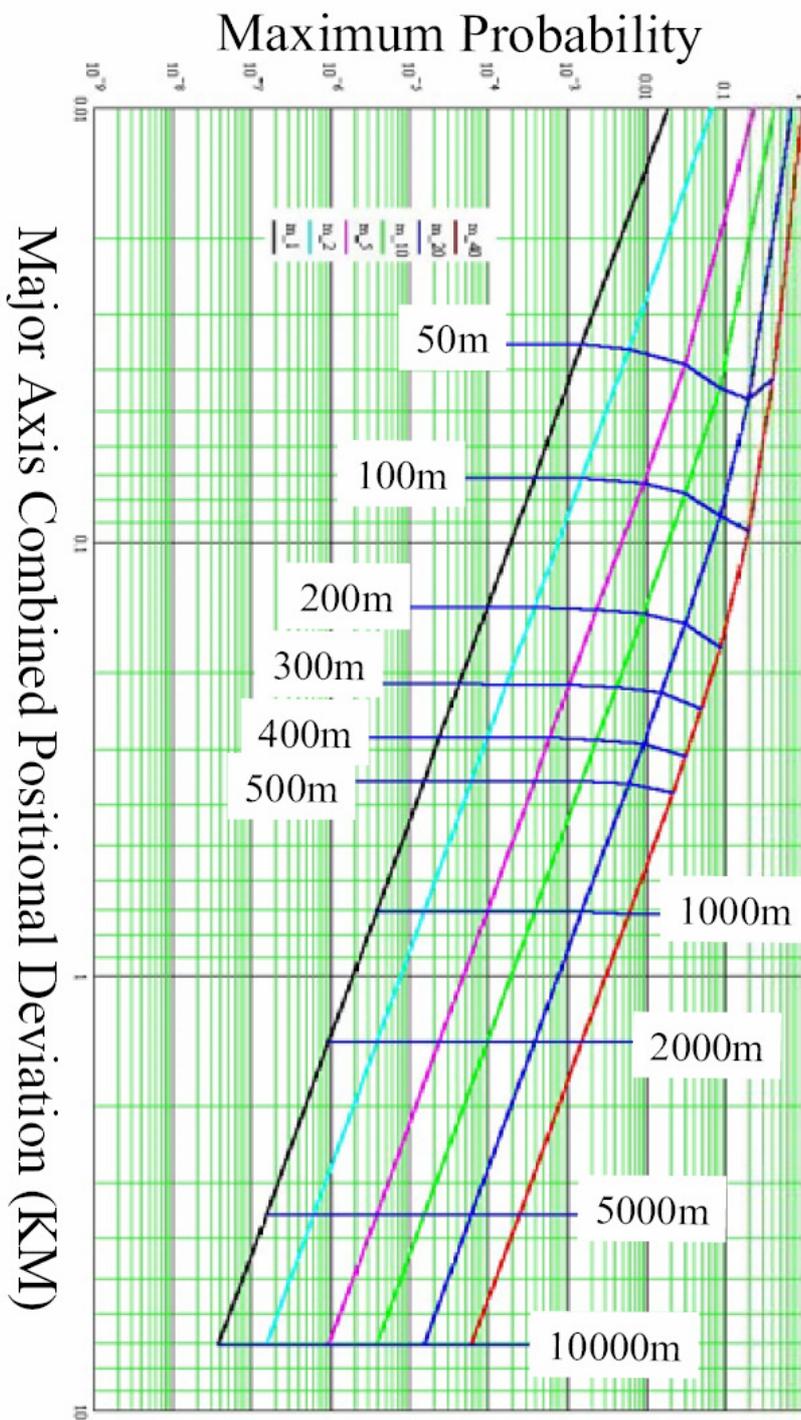


Figura D-4: Máxima Probabilidade para relação de aspecto 10  
Fonte: ALFANO (2003)

# Maximum Probability Analysis (AR = 100)

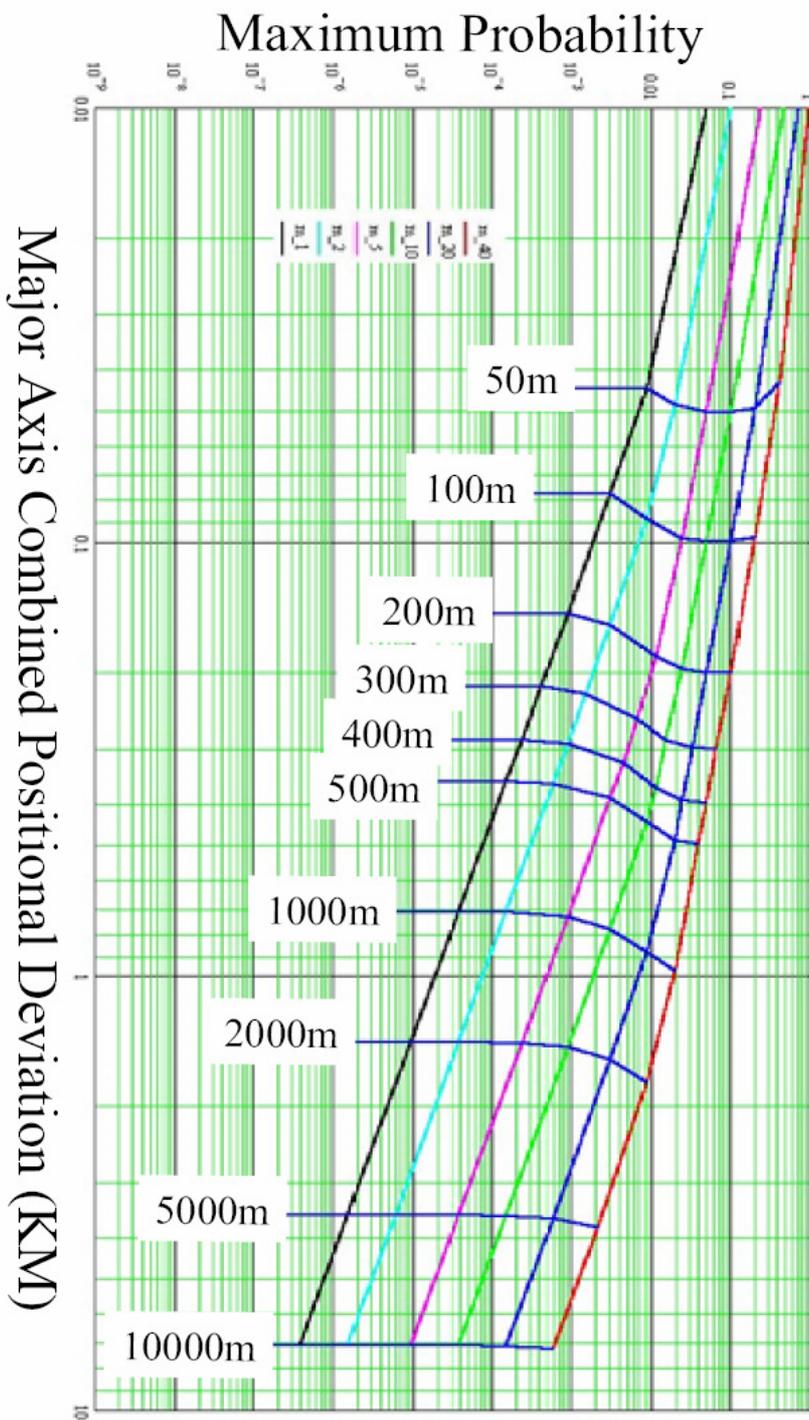


Figura D-5: Máxima Probabilidade para relação de aspecto 100  
 Fonte: ALFANO (2003)

## APÊNDICE E– CÓDIGO FONTE DOS PROGRAMAS UTILIZADOS

No presente trabalho, foi utilizado o ambiente de modelagem e simulação MATLAB® versão 6.5. Foram desenvolvidos programas na linguagem de *scripts* própria da ferramenta.

Foi feito o reuso de alguns programas de computador já pré-existentes. Alguns deles foram adaptados de FORTRAN para MATLAB. Outros programas foram obtidos a partir de alterações de programas existentes; e outros foram desenvolvidos. As autorias de cada código estão identificadas no cabeçalho de cada unidade de programa abaixo apresentadas.

Os seguintes programas foram utilizados:

Tres_satelites.m	Programa para simular as trajetórias dos três satélites propostos como cenário de testes.
simorb.m	Função para simular a órbita de 1 satélite.
sim_ruido.m	Programa para adicionar ruído branco gaussiano às trajetórias.
bfm.m	Função para calcular a matriz de rotação fixa no corpo.
bfdotm.m	Função para calcular a derivada da Matriz de rotação fixa no corpo.
bfpv.m	Função para transportar a posição e a velocidade relativas entre o satélite 1 e o satélite 2 para o sistema de coordenadas não inerciais do satélite 1.
cw_prop.m	Função para propagar a matriz de transição de estado das equações de Hill. Versão para propagação no plano.
cw_prop6.m	Função para propagar a matriz de transição de estado das equações de Hill. Versão para propagação no espaço.
kestv.m	Função para transformar os Elementos Keplerianos nos correspondentes vetores de estado no mesmo sistema de referência.
calcula_erro_cw.m	Programa para calcular o erro de distância das equações de Hill.
calcula_erro_roem.m	Programa para calcular o erro de distância para o modelo ROEM.
calç_mte.m	Função para calcular a matriz de transição de estados para órbitas keplerianas em torno da Terra, a partir de $x_0$ , propagado por um tempo $dt$ .
matriz_deriv_parc.m	Calcula a matriz de derivadas parciais, a qual é usada para obter a matriz de transição de estado de erro (para propagação da covariância)
kalman_sat_linearizado.m	Programa para estimativa de posição, velocidade e matriz

kalman\_sat\_estendido.m      de covariância por filtragem linearizada de Kalman.  
Programa para estimativa de posição, velocidade e matriz  
de covariância por filtragem estendida de Kalman.

## E. 1 TRES\_SATELITES.M

```
% Arquivo: Tres_satelites.m
% Programa para simular as trajetórias de três satélites
%
% Autor original: Hélio K. Kuga (em FORTRAN)
% Autor: Alvaro de A. Arraes (Adaptação para MATLAB e modificações)
%
% Elementos orbitais (EL) dos 3 satélites:
% EL1 --> Primeiro satélite (satélite principal)
% EL2 --> Segundo satélite
% EL3 --> Terceiro satélite
% onde:
% EL1 - Vetor contendo os elementos orbitais do primeiro satélite:
%   EL1(1) - Semi-eixo maior da órbita (em metros)
%   EL1(2) - Ecentricidade
%   EL1(3) - Inclinação (em radianos)
%   EL1(4) - Ascensão reta do nó ascendente (em radianos)
%   EL1(5) - Argumento do perigeu (em radianos)
%   EL1(6) - Anomalia média (em radianos)
% (analogamente para os outros satélites)
%
% x - Elementos de estado (mesmo sistema de coordenadas)
% x1 --> Primeiro satélite (satélite principal)
% x2 --> Segundo satélite
% x3 --> Terceiro satélite
% onde:
%   x1(1) - X do primeiro satélite
%   x1(2) - Y do primeiro satélite
%   x1(3) - Z do primeiro satélite
%   x1(4) - Vx do primeiro satélite
%   x1(5) - Vy do primeiro satélite
%   x1(6) - Vz do primeiro satélite
% (analogamente para os outros satélites)
%
% Rotinas chamadas:
%   consta.m
%   kestv.m
%   bfpv.m
%
%-----
```

```

% Inicializar as constantes

consta;
format long;

% Inicializar cenário
% Satélite mestre
EL1 = zeros(6,1);
EL1(1) = 15500000; % Raio de 15500 km
EL1(2) = 0;        % Ecentricidade 0 (mov. circular)
EL1(3) = 0;        % Inclinação 0 (rad)
EL1(4) = 0;        % Ascensão reta do nó ascendente (rad)
EL1(5) = 0;        % Argumento do perigeu (rad)
EL1(6) = 0;        % Anomalia média (rad)

an = sqrt(GM/EL1(1)^3); % velocidade angular an = (G.M/R^3)
per = PIV2 / an;        % Período anomalístico = 2*pi/an

% Veloc. ang. orbital
w(1) = 0; % Rad
w(2) = 0; % transv
w(3) = an; % normal

% Separacao entre sats
EL2 = EL1;
EL3 = EL1;
EL2(4) = 0.001*RAD; % Separação de um centésimo de grau em rel. ao sat 1
EL3(4) = 0.002*RAD; % Sep. de dois centésimos de grau em rel. ao sat 1
% Converter elementos keplerianos em vetores de estado
% no mesmo sistema de referência.
x1 = kestrv(EL1); %Satélite 1
x2 = kestrv(EL2); %Satélite 2
x3 = kestrv(EL3); %Satélite 3

% Será simulado um período inteiro, dividido em 100 partes.
N_ITER = 100; % Número de iterações
dt = per/(N_ITER-1);
tempo = zeros(1,N_ITER); %Inicialização
x_sat1 = zeros(size(x1,1),N_ITER);
x_sat2 = zeros(size(x1,1),N_ITER);
x_sat3 = zeros(size(x1,1),N_ITER);
%
% Erro em coordenadas terrestres
%
Dif_21 = zeros(size(x1,1),N_ITER);
Dif_31 = zeros(size(x1,1),N_ITER);
%
% Erro em coordenadas do satélite 1

```

```

%
% R21(1) = ERRO RADIAL (RADIAL) (M)
% R21(2) = ERRO TRANSVERSAL (ALONG) (M)
% R21(3) = ERRO NORMAL (CROSS) (M)
% R21(4) = ERRO RADIAL (RADIAL) (M/S)
% R21(5) = ERRO TRANSVERSAL (ALONG) (M/S)
% R21(6) = ERRO NORMAL (CROSS) (M/S)
% (Idem para R31)
R21 = zeros(size(x1,1),N_ITER); %Inicialização
R31 = zeros(size(x1,1),N_ITER);
%
% Calcular os erros de posição e velocidade
% dos satélites 2 e 3 em relação ao satélite 1
% Ref. e' o sat 1

R21(:,1) = bfpv(x1,w,x2); % Erro em coordenadas do sat 1
R31(:,1) = bfpv(x1,w,x3);

t = 0; % Ponto inicial
x_sat1(:,1) = x1;
x_sat2(:,1) = x2;
x_sat3(:,1) = x3;

for i=2:N_ITER
    t = t + dt;
    % Propagação
    x1f = fgprov (x1, t)';
    x2f = fgprov (x2, t)';
    x3f = fgprov (x3, t)';
    %
    % Ref. e' o sat 1
    % Calcular erro em relação ao sat 1 em coordenadas do sat 1
    R21(:,i) = bfpv(x1f, w, x2f);
    R31(:,i) = bfpv(x1f, w, x3f);
    % Armazenar valores
    tempo(i)=t;
    x_sat1(:,i)=x1f;
    x_sat2(:,i)=x2f;
    x_sat3(:,i)=x3f;
end;
% Calcular erro em relação ao sat 1 em coordenadas da Terra
Dif_21 = x_sat2 - x_sat1;
Dif_21_r = (Dif_21(1,:).^2 + Dif_21(2,:).^2).^0.5;
Dif_31 = x_sat3 - x_sat1;
Dif_31_r = (Dif_31(1,:).^2 + Dif_31(2,:).^2).^0.5;
%
% Para desenhar os graficos, substituir false por true na próxima linha
desenhar = true;

```

```

%
% Gráficos
if desenhar
    % Plotar graficos
    % -1-
    % Satélite 1: posição
    % x(t) y(t) z(t) vx(t) vy(t) vz(t)
    clf
    plot(tempo,x_sat1(1,:),tempo,x_sat1(2,:),tempo,x_sat1(3,:));
    legend('x(t)','y(t)','z(t)')
    title('Satélite 1: posição');
    pause
    %
    % -2-
    % Satélite 1: velocidade
    % vx(t) vy(t) vz(t)
    clf
    plot(tempo,x_sat1(4,:),tempo,x_sat1(5,:),tempo,x_sat1(6,:));
    legend('vx(t)','vy(t)','vz(t)')
    title('Satélite 1: velocidade ');
    pause
    %
    % -3-
    % Satélite 1: Orbita
    % x(t) x y(t)
    clf
    plot(x_sat1(1,:),x_sat1(2,:));
    set(gca,'DataAspectRatio',[1 1 1],'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1])
    title('Satélite 1: Órbita');
    xlabel('X')
    ylabel('Y')
    axis square
    grid
    pause
    %
    % -4-
    % Satélites 1,2,3: posição xy
    %
    clf
    plot(x_sat1(1,20:25),x_sat1(2,20:25),'r-',x_sat2(1,20:25),...
        x_sat2(2,20:25),'g.-',x_sat3(1,20:25),x_sat3(2,20:25),'b--')
    legend('sat1','sat2','sat3')
    title('Trajetória simulada (20 a 25)')
    xlabel('X')
    ylabel('Y')
    axis square
    grid

```

```

pause;
%
% -5-
%Diferença em posição X (coord terrestres)
clf
plot(tempo,Dif_21(1,:), 'r-', tempo, Dif_31(1,:), 'b--' );
title('Diferença no eixo X')
legend('Xdif sat2-sat1','Xdif sat3-sat1')
xlabel('t')
ylabel('Delta_x')
grid;
pause;
%
% -6-
%Diferença em posição Y (coord terrestres)
clf
plot(tempo,Dif_21(2,:), 'r-', tempo, Dif_31(2,:), 'b--' );
title('Diferença no eixo Y')
legend('Ydif sat2-sat1','Ydif sat3-sat1')
xlabel('t')
ylabel('Delta_y')
grid;
pause;
%
% -7-
%Diferença em posição Z (coord terrestres)
clf
plot(tempo,Dif_21(3,:), 'r-', tempo, Dif_31(3,:), 'b--' );
title('Diferença no eixo Z')
legend('Zdif sat2-sat1','Zdif sat3-sat1')
xlabel('t')
ylabel('Delta_z')
grid;
pause;
%
% -8-
% Posição de Sat2 em relação a Sat1 X-Y (coord terrestres)
clf
plot3(Dif_21(1,:),Dif_21(2,:),Dif_21(3,:));
title('Posição de Sat2 em relação a Sat1 - XYZ')
legend('Xdif sat2-sat1')
xlabel('Delta X')
ylabel('Delta_Y')
zlabel('Delta_Z')
grid;
pause;
%
% -9-

```

```

% Posição de Sat2 em relação a Sat1 RSW (coord do S1)
clf
plot(tempo, R21(1,:), 'r-', tempo, R21(2,:), 'b--', tempo, R21(3,:), 'g--');
title('Posição de Sat2 em relação a Sat1 - coord RSW')
legend('R21_r_a_d', 'R21_t_r_a_n_s', 'R21_n_o_r_m')
xlabel('t')
ylabel('Vetor de estado relativo a S1')
grid;
pause
%
% -10-
% Posição de Sat3 em relação a Sat1 RSW (coord do S1)
clf
plot(tempo, R31(1,:), 'r-', tempo, R31(2,:), 'b--', tempo, R31(3,:), 'g--');
title('Posição de Sat3 em relação a Sat1 - coord RSW')
legend('R31_r_a_d', 'R31_t_r_a_n_s', 'R31_n_o_r_m')
xlabel('t')
ylabel('Vetor de estado relativo a S1')
grid;
pause

% -11-
% Posição de Sat2 e Sat3 em relação a Sat1 (coord Terrestres)
clf
plot(tempo, Dif_21_r, 'r-', tempo, Dif_31_r, 'b--');
title('Posição de Sat2 e Sat3 em relação a Sat1 - coord ECI - Raio')
legend('R21_r', 'R31_r')
xlabel('t')
ylabel('Vetor de estado relativo a S1')
grid;
pause

% -12-
% Distancia de Sat2 em relação a Sat1 RSW (coord do S1)
plot(tempo, (R21(1,:).^2 + R21(2,:).^2 + R21(3,:).^2).^0.5);
title('Distancia de Sat2 em relação a Sat1 - coord RSW')
xlabel('t')
ylabel('Distancia de S2 a S1')
grid;
pause

end

```

## E.2 SIM\_RUIDO.M

```

% Programa sim_ruido.m
% Objetivo:

```

```

%           Adicionar ruído branco gaussiano às trajetórias simuladas
%           pelo programa simorb.m
%
% Autor: Alvaro de A Arraes
%
% Os seguintes dados são gerados por simorb.m:
%
%   Variáveis de estado:
%       x_sat1 - variáveis de estado do satélite 1
%       x_sat2 - variáveis de estado do satélite 2
%       x_sat3 - variáveis de estado do satélite 3
%           [x, y, z, vx, vy, vz]'
%
clc;
clear;
% Executar simulação de órbita real
simorb;
%
% Erros nas medidas - Erros compatíveis com GPS diferencial
SIGP = 10.0; % Erro GPS na posicao (10 m)
SIGV = 1.0; % Erro GPS na velocidade (1 m/s)
% Geração de variáveis aleatórias
[nlin,ncol]=size(x_sat1);
% Distribuições normais com média zero, desvio-padrão SIGP e SIGV
rn_pos = random('Normal',0,SIGP,3,ncol);
rn_vel = random('Normal',0,SIGV,3,ncol);
x_sat1_n = x_sat1 + [rn_pos ;rn_vel]; % posição do sat1 com ruído
rn_pos = random('Normal',0,SIGP,3,ncol);
rn_vel = random('Normal',0,SIGV,3,ncol);
x_sat2_n = x_sat2 + [rn_pos ;rn_vel]; % posição do sat1 com ruído

rn_pos = random('Normal',0,SIGP,3,ncol);
rn_vel = random('Normal',0,SIGV,3,ncol);
x_sat3_n = x_sat3 + [rn_pos ;rn_vel]; % posição do sat1 com ruído
%
% Para desenhar os graficos, substituir false por true na próxima linha
desenhar = true;
%
% Gráficos
if desenhar
% Plotar graficos
% -1-
% Satélite 1: posição
% x(t) y(t) z(t) vx(t) vy(t) vz(t)
clf
plot(tempo,x_sat1_n(1,:),tempo,x_sat1_n(2,:),tempo,x_sat1_n(3,:));
legend('x(t)','y(t)','z(t)')
title('Satélite 1: posição');

```

```

pause
%
clf
plot3(x_sat1_n(1,:),x_sat1_n(2,:),x_sat1_n(3,:));
legend('Sat1')
title('Satélite 1: posição');
pause
%
clf
plot3(x_sat1_n(1,:),x_sat1_n(2,:),x_sat1_n(3,:), 'r-',...
      x_sat2_n(1,:),x_sat2_n(2,:),x_sat2_n(3,:), 'g--',...
      x_sat3_n(1,:),x_sat3_n(2,:),x_sat3_n(3,:), 'b.-');
legend('Sat1','Sat2','Sat3')
title('Satélites 1,2 e 3');
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
pause
end

```

### E.3 CONSTA.M

```

% Arquivo: consta.m
% Programa para inicializar as constantes globais
%
% Autor original: Hélio K. Kuga (em FORTRAN)
% Adaptação para MATLAB: Alvaro de A. Arraes
%
%          PIV2  2 vezes pi
%          PID2  pi dividido por 2
%          RAD   fator multiplicativo para converter de graus para
%                radianos
%          DEG   fator multiplicativo para converter de radianos para
%                graus
%
%          Constantes Terrestres
%          RT   Raio da Terra (m)
%          FLAT Parâmetro de achatamento
%          GM   Constante gravitacional da Terra (m^3/s^2).
%          TETAP Taxa de rotação sideral da Terra (rad/s)
%
%          Constantes Temporais
%          ANOT Ano Tropical (dias)
%          ANOS Ano Sideral (dias)
%          RISI Dia Sideral (s)
%
%          Constantes de Perturbação
%          RJ2  2o Coeficiente Zonal da Terra

```

```

%           RJ3  3o Coeficiente Zonal da Terra
%           RJ4  4o Coeficiente Zonal da Terra
%           RJ5  5o Coeficiente Zonal da Terra
%           RJ6  6o Coeficiente Zonal da Terra
%
%           Constantes Solares
%           RSOL Raio do Sol (m)
%           UNA  Unidade Astronomica (m)
%           GMS  Constante Gravitacional do Sol (m^3/s^2)
%
%           Constantes Lunares
%           RLUA Raio da Lua (m)
%           GML  Constante Gravitacional da Lua (m^3/s^2)
%
global  PI  PIV2 PID2  RAD  DEG
global  RT  FLAT  GM  TETAP
global  ANOT ANOS RISI
global  RJ2  RJ3  RJ4  RJ5  RJ6
global  RSOL UNA GMS
global  RLUA GML
%
%           Constantes Matemáticas
%
PID4  = atan(1.0);
PID2  = PID4 + PID4;
PI    = PID2 + PID2;
PIV2  = PI + PI;
RAD   = PID4 / 45.0;
DEG   = 45.0 / PID4;
%
%           Constantes temporais
%
ANOT  - Ano Tropical (dias)
ANOS  - Ao Sideral (dias)
RISI  - Dia Sideral (segundos)
%
ANOT  = 365.24219879;
ANOS  = ANOT + 1.0;
RISI  = 86400.0*ANOT/ANOS;
%
%           Constantes terrestres dos modelos GEM 09 e 10
%
RT    - Raio da Terra em metros
FLAT  - Fator de achatamento
GM    - Constante Gravitacional da Terra (m^3/s^2)
TETAP - Velocidade de Rotação Sideral da Terra (rad/s)
%
% REF. LERCH,F.J. ET AL. "GRAVITY MODEL IMPROVEMENT USING

```

```

%      GEOS3 (GEM 9 AND 10), J. GEOPHYSICAL RESEARCH, 84(B8):
%      3897-3916, JULY 1979.
%
RT      = 6378139.0;
FLAT    = 1.0/298.257;
GM      = 3.9860064D+14;
TETAP   = (1D+1/ANOT) * PIV2 /86400;
%
%      Coeficientes zonais do modelo GEM10
%
RJ2     = 484.16555D-6 * sqrt(5.0);
RJ3     = -0.95848D-6 * sqrt(7.0);
RJ4     = -0.54154D-6 * 3.0;
RJ5     = -0.06844D-6 * sqrt(11.0);
RJ6     = 0.15121D-6 * sqrt(13.0);
%
%      Constantes Solares
%
RSOL    - Raio do Sol (m)
UNA     - Unidade Astronômica (m)
GMS     - Constante Gravitacional do Sol (M^3/S^2)
%
RSOL    = .6953D+09;
UNA     = 149.60D+09;
GMS     = 1.32712438D+20;
%
%      Constantes Lunares
%
RLUA    - Raio da Lua (m)
GML     - Constante Gravitacional da Lua (m^3/s^2)
%
RLUA    = 0.1738D+07;
GML     = 4.902794D+12;

```

## E.4 MATRIZ\_DERIV\_PARC.M

```

function [dF] = matriz_deriv_parc(rr)
% Função [dF] = matriz_deriv_parc(rr)
% Autor: Alvaro Arraes (2008)
%
% Objetivo:
%   Calcula a matriz de derivadas parciais F, a qual é usada para
%   obter a matriz de transição de estado de erro FI.
%
% Sistema não linear:
%   dX/dt      = f(X)
%   Y          = X + delta_X

```

```

%      dy/dt          = dX/dt + ddelta_X/dt
%      ddelta_X/dt   = F(t)*delta_X + u
%      delta_X       = FI(t,t0) * delta_X0
%      dFI(t,t0)/dt = F(t)*FI(t,t0)
%      FI(t0,t0)     = I
% Entrada
% rr=[x y z ]' --> vetor posição em coordenadas terrestres
% rv=[vx vy vz]' --> vetor velocidade não é usado
%
mu = 3.9860064D+14; % Constante gravitacional da Terra (m^3/s^2)
x=rr(1);
y=rr(2);
z=rr(3);
r = sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
r2 = r^2;
r3 = r^3;
r5 = r^5;
%
F1 = zeros(3,3);
F2 = eye(3,3);
%
%F3 = mu*[(-1/r3 + 3*x^2/r5)      3*x*y/r5      3*x*z/r5
%      3*x*y/r5      (-1/r3 + 3*y^2/r5)      3*y*z/r5
%      3*x*z/r5      3*y*z/r5      (-1/r3+3*z^2/r5)]
F3 = zeros(3,3);
F3(1,1) = mu*(-1/r3 + 3*x^2/r5);
F3(1,2) = 3*mu*x*y/r5;
F3(1,3) = 3*mu*x*z/r5;
F3(2,1) = F3(1,2);
F3(2,2) = mu*(-1/r3 + 3*y^2/r5);
F3(2,3) = 3*mu*y*z/r5;
F3(3,1) = F3(1,3);
F3(3,2) = F3(2,3);
F3(3,3) = mu*(-1/r3+3*z^2/r5);
F4 = zeros(3,3);
% Montando dF
dF = [ F1 F2
       F3 F4];

```

## E.5 CALC\_MTE.M

```

function fi = calc_mte(x0,dt)
% Função fi = calc_mte(x0,dt)
% Autor: Alvaro de A Arraes (2008)
%
% Objetivo:

```

```

%      Calcular a matriz de transição de estados para orbitas
%      keplerianas a partir de x0, propagado por um tempo dt
%      Considerado movimento em torno da Terra
%      (Para movimentos em torno de outros corpos, trocar o valor de mu)
%
%      Entrada:
%      x0 - vetor de estados do satellite (x,y,z,vx,vy,vz)
%      Saida:
%      fi - matriz de transição de estados para um satellite
%
%      Referência: SHEPPERD, S. W., "Universal Keplerian State Transition
%      Matrix", Celestial Mechanics 35 (1985) p. 129-144

mu = 3.9860064D+14; % Constante gravitacional da Terra (m^3/s^2)
global k l d n;

% Vetor posição e vetor velocidade
r0 = x0(1:3);
v0 = x0(4:6);

% Constantes
r0m = sqrt(sum(r0.^2)); % modulo do vetor r0
nu0 = dot(r0,v0); % x*vx + y*vy + z*vz
beta = 2*mu./r0m - dot(v0,v0);

% Inicialização
u = 0;

% Para orbitas elipticas, calcular efeitos periodicos
if beta > 0
    P = 2*pi*mu.*beta.^(-3/2);
    n = floor((dt + P/2 - 2*nu0./beta)./P);
    deltaU = 2*pi*n.*beta.^(-5/2);
else
    deltaU = 0;
end

% Constantes para as frações contínuas
a = 5;
b = 0;
c = 5/2;
k = 1 - 2*(a-b);
l = 2*(c-1);
d = 4*c*(c-1);
n = 4*b*(c-a);

% Solução para eq de Kepler
t = 0;

```

```

iter = 0;
%
while sum(abs((t-dt)/dt*100)) > 1e-3 && iter < 15;
    q = beta.*u.^2./(1+beta.*u.^2);
    U0w2 = 1 - 2*q;
    U1w2 = 2*(1-q).*u;
    U = 16/15*U1w2.^5 .* fracoes(q) + deltaU;
    U0 = 2*U0w2.^2-1;
    U1 = 2*U0w2.*U1w2;
    U2 = 2*U1w2.^2;
    U3 = beta.*U + U1.*U2/3;
    r = r0m.*U0 + nu0.*U1 + mu.*U2;
    t = r0m.*U1 + nu0.*U2 + mu.*U3;
    u = u - (t-dt)./(4*(1-q).*r);
    iter = iter+1;
end
if iter == 15
    disp('Kepler nao convergiu');
end

% Usar solucao para encontrar elementos orbitais
f = 1 - mu./r0m.*U2;
g = r0m.*U1 + nu0.*U2;
F = -mu.*U1./r./r0m;
G = 1 - mu./r.*U2;

%Construir matriz de transicao de estado
fi = zeros(6);
fi = [eye(3)*f(1) eye(3)*g;eye(3)*F(1) eye(3)*G(1)];

%calcular fracoes contínuas
function G = fracoes(x)
    global k l d n;

    A = 1;
    B = 1;
    G = 1;

    Gprev = 2;
    iter = 0;
    %
    while sum(abs((G-Gprev)./G*100)) > 1e-3 && iter < 15
        k = -k;
        l = l+2;
        d = d+4*l;
        n = n+(1+k)*l;
        A = d./(d - n*A.*x);
        B = (A-1).*B;
    end
end

```

```

        Gprev = G;
        G = G + B;
        iter = iter+1;
    end
    if iter == 1000
        disp('Frações nao convergiu');
    end
end
end
end

```

## E.6 CALCULA\_ERRO\_CW.M

```

function Calcula_erro_cw()
% function Calcula_erro_cw()
% Objetivo:
% Comparar erros de propagação das equações C-W para várias
% distancias relativas entre 2 satélites.
%
% Autor: Alvaro de A Arraes
%
clc;
clear;
consta;
%
% Inicializar cenário
% Satélitel (mestre)
EL1 = zeros(6,1);
EL1(1) = 15500000; % semi-eixo maior de 15500 km
EL1(2) = 0; % Ecentricidade 0 (mov. circular)
EL1(3) = 0; % Inclinação 0 (rad)
EL1(4) = 0; % Ascensão reta do nó ascendente (rad)
EL1(5) = 0; % Argumento do perigeu (rad)
EL1(6) = 0; % Anomalia média (rad)
%
% Satélites em vários angulos de afastamento para observar
% sensibilidade à distância
EL2 = EL1;
EL2(4) = 0.01*RAD; %Separação de um centésimo de grau em rel. ao sat 1
EL3 = EL1;
EL3(4) = 0.001*RAD; %Separação de um milésimo de grau em rel. ao sat 1
EL4 = EL1;
EL4(4) = 0.0001*RAD; %Separação de 10e-4 de grau em rel. ao sat 1
%
NPONTOS = 100;
[tempo,x1,w1] = simorb(EL1,NPONTOS);
[dummy,x2,w2] = simorb(EL2,NPONTOS);
[dummy,x3,w3] = simorb(EL3,NPONTOS);

```

```

[dummy,x4,w4] = simorb(EL4,NPONTOS);

R21 = Calcula_erro(x1,w1,x2,NPONTOS);
R31 = Calcula_erro(x1,w1,x3,NPONTOS);
R41 = Calcula_erro(x1,w1,x4,NPONTOS);

dt = tempo(2) - tempo(1);
W=norm(w1);

% Alterar a próxima linha de false para true para normalizar o resultado
normalizar = true;

[deltaR21 deltaV21]=Propaga_CW(W,R21,dt,NPONTOS,normalizar);
[deltaR31 deltaV31]=Propaga_CW(W,R31,dt,NPONTOS,normalizar);
[deltaR41 deltaV41]=Propaga_CW(W,R41,dt,NPONTOS,normalizar);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Para desenhar os graficos, substituir false por true na próxima linha
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
desenhar = true;
%
if desenhar
    if normalizar
        plot(tempo(2:NPONTOS-1),deltaR21(2:NPONTOS-1),'r+',...
            tempo(2:NPONTOS-1),deltaR31(2:NPONTOS-1),'g.',...
            tempo(2:NPONTOS-1),deltaR41(2:NPONTOS-1),'b-');
        title('Erros de posição normalizados - CW');
    else
        semilogy(tempo(2:NPONTOS-1),deltaR21(2:NPONTOS-1),'r+',...
            tempo(2:NPONTOS-1),deltaR31(2:NPONTOS-1),'g.',...
            tempo(2:NPONTOS-1),deltaR41(2:NPONTOS-1),'b-');

        title('Erros de posição - CW');
    end
    legend('0.01 graus','0.001 graus','0.0001 graus','Location','Best')
    xlabel('Tempo(s)');
    ylabel('Erro de distância relativa(m)');
    grid
    pause
    plot(tempo(2:10),deltaR21(2:10),'r+',...
        tempo(2:10),deltaR31(2:10),'g.',...
        tempo(2:10),deltaR41(2:10),'b-');
    if normalizar
        plot(tempo(2:10),deltaR21(2:10),'r+',...
            tempo(2:10),deltaR31(2:10),'g.',...
            tempo(2:10),deltaR41(2:10),'b-');
        title('Erros de posição normalizados - CW');
    else

```

```

        semilogy(tempo(2:10),deltaR21(2:10),'r+',...
                tempo(2:10),deltaR31(2:10),'g.',...
                tempo(2:10),deltaR41(2:10),'b-');
        title('Erros de posição - CW');
    end
    legend('0.01 graus','0.001 graus','0.0001 graus','Location','SouthEast')
    xlabel('Tempo(s)');
    ylabel('Erro de distância relativa(m)');
    grid
end
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Funções internas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
function [deltaR,deltaV]=Propaga_CW(W,R21,dt,NPONTOS,normalizar)
%   Propagation (sem ruído)
    R21CW = zeros(size(R21));
    R21CW(:,1) = R21(:,1); % Estado inicial do sat2 em relação ao sat1
    XH21 = R21(:,1);
    for i = 2:NPONTOS
        [F,XF] = cw_prop6(W, dt, XH21);
        R21CW(:,i) = XF;
        XH21 = XF;
    end
    Delta21CW = R21CW - R21;
    if normalizar
        % Com normalização
        R21_Norm = (R21(1,:).^2 + R21(2,:).^2 + R21(3,:).^2).^0.5;
        V21_Norm = (R21(4,:).^2 + R21(5,:).^2 + R21(6,:).^2).^0.5;
        deltaR = ((Delta21CW(1,:).^2 + Delta21CW(2,:).^2 + ...
                Delta21CW(3,:).^2).^0.5)./R21_Norm;
        deltaV = ((Delta21CW(4,:).^2 + Delta21CW(5,:).^2 + ...
                Delta21CW(6,:).^2).^0.5)./V21_Norm;
    else
        % Sem normalização
        deltaR = (Delta21CW(1,:).^2 + Delta21CW(2,:).^2 + ...
                Delta21CW(3,:).^2).^0.5;
        deltaV = (Delta21CW(4,:).^2 + Delta21CW(5,:).^2 + ...
                Delta21CW(6,:).^2).^0.5;
    end
end
end

function [R21] = Calcula_erro(x1,w1,x2,NPONTOS)
%
% Erro em coordenadas do satélite 1
%
```

```

% R21(1) = ERRO RADIAL (RADIAL) (M)
% R21(2) = ERRO TRANSVERSAL (ALONG) (M)
% R21(3) = ERRO NORMAL (CROSS) (M)
% R21(4) = ERRO RADIAL (RADIAL) (M/S)
% R21(5) = ERRO TRANSVERSAL (ALONG) (M/S)
% R21(6) = ERRO NORMAL (CROSS) (M/S)
%
    R21 = zeros(size(x1,1),NPONTOS);
    for i=1:NPONTOS
        R21(:,i) = bfpv(x1(:,i),w1,x2(:,i));
    end
end
end

```

## E.7 CALCULA\_ERRO\_ROEM.M

```

function calcula_erro_roem()
% function Calcula_erro_roem()
% Entrada:
%   EL_Sat - Vetor contendo os elementos orbitais do satélite:
%       EL_Sat(1) - Semi-eixo maior da órbita (em metros)
%       EL_Sat(2) - Ecentricidade
%       EL_Sat(3) - Inclinação (em radianos)
%       EL_Sat(4) - Ascensão reta do nó ascendente (em radianos)
%       EL_Sat(5) - Argumento do perigeu (em radianos)
%       EL_Sat(6) - Anomalia média (em radianos)
%
% Objetivo:
%   Comparar erros de propagação das equações ROEM para várias
%   distancias relativas entre 2 satélites.
%
% Autor: Alvaro de A Arraes
%       2008
clc;
clear;
consta;
%
% Inicializar cenário
% Satélite 1 (mestre)
EL1 = zeros(6,1);
EL1(1) = 15500000; % semi-eixo maior de 15500 km
EL1(2) = 0.01;     % Ecentricidade
EL1(3) = 0;       % Inclinação 0 (rad)
EL1(4) = 0;       % Ascensão reta do nó ascendente (rad)
EL1(5) = 0;       % Argumento do perigeu (rad)
EL1(6) = 0;       % Anomalia média (rad)

```

```

EL2 = EL1;
EL3 = EL1;
EL4 = EL1;
% Para testar com diferentes graus de afastamento --> true
teste_afastamento = true;
%teste_afastamento = false;
if teste_afastamento
%
% Satélites em vários angulos de afastamento para observar
% sensibilidade à distância
    EL2(4) = 0.01*RAD; %Separação de um centésimo de grau em rel. ao sat 1
    EL3(4) = 0.001*RAD; %Separação de um milésimo de grau em rel. ao sat 1
    EL4(4) = 0.0001*RAD; %Separação de 10e-4 de grau em rel. ao sat 1
end
%
%teste_eentricidade=true;
teste_eentricidade=false;
if teste_eentricidade
%
% Afastamento
    EL2(4) = 0.001*RAD; %Separação de 1 cent. de grau em rel. ao sat 1
    EL3(4) = 0.002*RAD; %Separação de 2 cent. de grau em rel. ao sat 1
    EL4(4) = 0.003*RAD; %Separação de 3 cent. de grau em rel. ao sat 1
% Satélites em várias eentricidades
    EL2(2) = 0.5;
    EL3(2) = 0.1;
    EL4(2) = 0.01;
end
%
NPONTOS = 100;
[tempo,x1,w1] = simorb(EL1,NPONTOS);
[dummy,x2,w2] = simorb(EL2,NPONTOS);
[dummy,x3,w3] = simorb(EL3,NPONTOS);
[dummy,x4,w4] = simorb(EL4,NPONTOS);

R21 = Calcula_erro(x1,w1,x2,NPONTOS);
R31 = Calcula_erro(x1,w1,x3,NPONTOS);
R41 = Calcula_erro(x1,w1,x4,NPONTOS);

dt = tempo(2) - tempo(1);
W=norm(w1);

% Alterar a próxima linha de false para true para normalizar o resultado
normalizar = true;
%normalizar = false;
[deltaR21 deltaV21 R21ROEM
]=Propaga_ROEM(W,EL1,EL2,R21,dt,NPONTOS,normalizar);

```

```

[deltaR31 deltaV31 R31ROEM
]=Propaga_ROEM(W,EL1,EL3,R31,dt,NPONTOS,normalizar);
[deltaR41 deltaV41 R41ROEM
]=Propaga_ROEM(W,EL1,EL4,R41,dt,NPONTOS,normalizar);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Para desenhar os graficos, substituir false por true na próxima linha
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
desenhar = true;
%
if desenhar
    plot(tempo(2:NPONTOS-1),R21ROEM(1,2:NPONTOS-1),'r+',...
         tempo(2:NPONTOS-1),R21ROEM(2,2:NPONTOS-1),'g.',...
         tempo(2:NPONTOS-1),R21ROEM(3,2:NPONTOS-1),'b-');
    legend('X','Y','Z','Location','Best')
    xlabel('Tempo(s)');
    ylabel('Distância relativa(m)');
    title('Posição relativa - ROEM');
    grid

    pause;
    semilogy(tempo(2:NPONTOS-1),deltaR21(2:NPONTOS-1),'r+',...
             tempo(2:NPONTOS-1),deltaR31(2:NPONTOS-1),'g.',...
             tempo(2:NPONTOS-1),deltaR41(2:NPONTOS-1),'b-');
    if teste_afastamento
        if normalizar
            title('Erros de posição normalizados - ROEM');
        else
            title('Erros de posição - ROEM');
        end
        legend('0.01rad','0.001rad','0.0001rad','Location','Best')
        xlabel('Tempo(s)');
        ylabel('Erro de distância relativa(m)');
        grid
    end
    if teste_eccentricidade
        if normalizar
            title('Erros de posição normalizados - ROEM');
        else
            title('Erros de posição - ROEM');
        end
        legend('e = 0.2','e = 0.1','e = 0.01','Location','Best')
        xlabel('Tempo(s)');
        ylabel('Erro de distância relativa(m)');
        grid
    end

end
end

```

```

end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Funções internas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
function [Delta] = calcula_delta(EL_Sat1,EL_Sat2)
a1      = EL_Sat1(1);
ecc1    = EL_Sat1(2);
i1      = EL_Sat1(3);
Omega1  = EL_Sat1(4);
w1      = EL_Sat1(5);
M1      = EL_Sat1(6);

a2      = EL_Sat2(1);
ecc2    = EL_Sat2(2);
i2      = EL_Sat2(3);
Omega2  = EL_Sat2(4);
w2      = EL_Sat2(5);
M2      = EL_Sat2(6);

Delta   = [ecc2-ecc1, i2-i1, Omega2-Omega1, w2-w1, M2-M1]';
end

function R21 = Calcula_erro(x1,w1,x2,NPONTOS)
%
% Erro em coordenadas do satélite 1
%
% R21(1) = ERRO RADIAL (RADIAL) (M)
% R21(2) = ERRO TRANSVERSAL (ALONG) (M)
% R21(3) = ERRO NORMAL (CROSS) (M)
% R21(4) = ERRO RADIAL (RADIAL) (M/S)
% R21(5) = ERRO TRANSVERSAL (ALONG) (M/S)
% R21(6) = ERRO NORMAL (CROSS) (M/S)
%
R21 = zeros(size(x1,1),NPONTOS);
for i=1:NPONTOS
    R21(:,i) = bfpv(x1(:,i),w1,x2(:,i));
end
end

function [deltaR deltaV
R21ROEM]=Propaga_ROEM(W,EL1,EL2,R21,dt,NPONTOS,normalizar)
% Propagation (sem ruído)
Delta = calcula_delta(EL1,EL2);
R21ROEM = zeros(size(R21));
R21ROEM(:,1) = R21(:,1); % Estado inicial do sat2 em relação ao sat1
XH21 = R21(:,1);

```

```

t=0;
for i = 2:NPONTOS
    t=t+dt;
    [XF] = ROEM_prop(W,EL1,EL2,Delta,t,dt);
    R21ROEM(:,i) = XF;
    XH21 = XF;
end
Delta21CW = R21ROEM - R21;
if normalizar
    % Com normalização
    R21_Norm = (R21(1,:).^2 + R21(2,:).^2 + R21(3,:).^2).^0.5;
    V21_Norm = (R21(1,:).^2 + R21(2,:).^2 + R21(3,:).^2).^0.5;
    deltaR = ((Delta21CW(1,:).^2 + Delta21CW(2,:).^2 + ...
        Delta21CW(3,:).^2).^0.5)./R21_Norm;
    deltaV = ((Delta21CW(4,:).^2 + Delta21CW(5,:).^2 + ...
        Delta21CW(6,:).^2).^0.5)./V21_Norm;
else
    % Sem normalização
    deltaR = (Delta21CW(1,:).^2 + Delta21CW(2,:).^2 + ...
        Delta21CW(3,:).^2).^0.5;
    deltaV = (Delta21CW(4,:).^2 + Delta21CW(5,:).^2 + ...
        Delta21CW(6,:).^2).^0.5;
end
end

function [XF] = ROEM_prop(W,EL1,EL2,Delta,t,dt)
decc = Delta(1);
di = Delta(2);
dOmega = Delta(3);
dw = Delta(4);
dM = Delta(5);
a1 = EL1(1);
ecc1 = EL1(2);
i1 = EL1(3);
Omega1 = EL1(4);
w1 = EL1(5);
M1 = EL1(6);

per = 2*pi / W;
t1=t+dt;
M1 = 2*pi/per*t1;
dtp = - dM*per/2/pi;
f1= M1 + 2* ecc1* sin(M1);
XF=zeros(6,1);
%XF(1)= -a1*decc*cos(M1); %GAO et alii, 2003
%XF(2)= a1*(dw-2*pi*dtp/per+dOmega*cos(i1)+2*decc*sin(M1));
%XF(3)= a1*(di*sin(w2+M2)+di*sin(w2+M2));
XH1 =-a1*decc*cos(f1); % LI et alii, 2005

```

```

XH2 = a1*(cos(i1)*dOmega + dw - W*ntp + 2*sin(f1)*decc);
XH3 = a1*(sin(w1+f1)*di - cos(w1+f1)*sin(i1)*dOmega);

M1 = 2*pi/per*t;
f1= M1 + 2* eccl* sin(M1);
XF(1)=-a1*decc*cos(f1);
XF(2)= a1*(cos(i1)*dOmega + dw - W*ntp + 2*sin(f1)*decc);
XF(3)= a1*(sin(w1+f1)*di - cos(w1+f1)*sin(i1)*dOmega);
%O trecho abaixo é uma aproximação grosseira para não ficar sem
%velocidade. Só nos interessa aqui o resultado de posição.
XF(4)= (XF(1)-XH1)/dt;
XF(5)= (XF(2)-XH2)/dt;
XF(6)= (XF(3)-XH3)/dt;
end

```

## E. 8 KALMAN\_SAT\_LINEARIZADO.M

```

function kalman_sat_linearizado()
% Objetivo:
% Filtragem por Kalman linearizado
%
% Autor: Alvaro de A Arraes
%      2008
clc
clear
consta;
duration = 100;
dt = 1;

x0 = [15500000, 0, 0, 0, 5071.111350, 0]'; % Estado inicial
x=x0;x_t=x0;
%F = matriz_deriv_parco(x);
%F = jacf(x); %Jacobiano de xp = f(x) + Gw

SIGP = 10.D0;      % Erro GPS na posicao
SIGV = 1.D0;      % Erro GPS na velocidade
measnoise = [SIGP SIGP SIGP SIGV SIGV SIGV]';
% R - Matriz de ruído de observação;
R = diag([SIGP*SIGP SIGP*SIGP SIGP*SIGP SIGV*SIGV SIGV*SIGV SIGV*SIGV]);
Q = diag(1e-2*[1 1 1 1 1 1]); % Covariancia de ruido de processo
P0 = diag([1.d6,1.d6,1.d6,1.d4,1.d4,1.d4]); % estimativa inicial da cov.
P=P0;

% Inicializar vetor de inovações
Inn = zeros(size(R));

pos = []; % posição verdadeira

```

```

poshat = []; % posições estimadas
posmeas = []; % posições medidas
posref = []; % trajetória de referencia
Covar = [size(0:dt:duration,2),6,6];

% Geração da trajetória de referencia
% Utilizar como primeiro ponto um ponto ruidoso
ProcessNoise = (diag(Q).^0.5).* randn(size(diag(Q)));
MeasNoise = measnoise .* randn(size(measnoise));
% Primeiro ponto da trajetória de referencia
xn_0 = x0 + ProcessNoise;
xn = xn_0;

H=jach(xn_0);
z = H * xn_0 + MeasNoise;
K = P0*H'*inv(H*P0*H'+R);
P_hat = (eye(size(P0))-K*H)*P0;
x_hat = xn_0 + K*(z - h(xn_0));

Counter = 0;
for t = 0 : dt: duration,
    Counter = Counter + 1;
    % Simulação do processo (1 satélite)
    ProcessNoise = (diag(Q).^0.5).*randn(size(diag(Q)));
    x_t = fgprov(x0,t)';
    x = x_t + ProcessNoise;

    % Simular a medida
    MeasNoise = measnoise .* randn(size(measnoise));
    z = H * x + MeasNoise;

    % Inovação
    F = jacf(xn);
    P_ = P_hat + ( F * P_hat + P_hat * F' + Q )*dt;
    dx = x_hat - xn; % delta x
    dx_ = (f(xn) + F*dx )*dt;
    x_ = x_hat + dx_ ;
    H=jach(xn);
    d_Inn = (z - h(xn)) - H*(x_ - xn);%Atenção que a inovação é no delta_x
    % Covariancia da inovação
    s = H * P_ * H' + R;
    % Ganho de Kalman
    K = P_ * H' * inv(s);
    % Estimativa do estado
    dx_hat = K * d_Inn; % Atualizado o delta_x estimado
    x_hat = x_ + dx_hat ; % Atualizado o x estimado
    % Correção da covariancia
    P_hat = (eye(size(P_))-K*H)*P_;

```

```

% Guardar os vetores de posição para plotar
pos = [pos, x_t];
posmeas = [posmeas, z];
poshat = [poshat, x_hat];
posref = [posref, xn];

sigx(Counter) = P_hat(1,1)^0.5;
sigy(Counter) = P_hat(2,2)^0.5;
sigz(Counter) = P_hat(3,3)^0.5;
sigvx(Counter) = P_hat(4,4)^0.5;
sigvy(Counter) = P_hat(5,5)^0.5;
sigvz(Counter) = P_hat(6,6)^0.5;

xn = fgprov(xn_0, t); % trajetória de referencia
end

% Plotar
t = 0 : dt : duration;

dist_pos = pos(1,:).^2 + pos(2,:).^2 + pos(3,:).^2;
dist_poshat = poshat(1,:).^2 + poshat(2,:).^2 + poshat(3,:).^2;
dist_posmeas = posmeas(1,:).^2 + posmeas(2,:).^2 + posmeas(3,:).^2;
dist_posref = posref(1,:).^2 + posref(2,:).^2 + posref(3,:).^2;
plot(t,dist_pos,'r',t,dist_poshat,'b.',t,dist_posmeas,'g',...
     t,dist_posref);
grid;
axis square;
legend('verdadeira','estimada','medida','referencia')
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Position (m)');
title('Filtro Linear de Kalman');
pause

plot(pos(1,:),pos(2,:))
axis square;
title('X x Y Verdadeiro');
pause

plot(posref(1,:),posref(2,:));
axis square;
title('Referencia');
pause
plot(poshat(1,:),poshat(2,:));
axis square;
title('Estimado');
pause

plot(t,sigx,'r-',t,sigy,'b.',t,sigz,'m+');

```

```

title('Desvios-padrão');
xlabel('tempo');
legend('sigmaX','sigmaY','sigmaZ');
ylabel('Desvio-padrão')
pause

plot(t,sigvx,'r-',t,sigvy,'b.',t,sigvz,'m+');
title('Desvios-padrão');
xlabel('tempo');
legend('sigmaVX','sigmaVY','sigmaVZ');
ylabel('Desvio-padrão')
pause

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Funções Internas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function xp=f(x) % Equação do movimento orbital (prob. 2 corpos)
    mu = 3.9860064D+14; % Constante gravitacional da Terra (m^3/s^2)
    r0=(x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2)^0.5;
    r3=r0^3;
    xp = zeros(6,1);
    xp(1) = x(4);
    xp(2) = x(5);
    xp(3) = x(6);
    xp(4) = -mu*x(1)/r3;
    xp(5) = -mu*x(2)/r3;
    xp(6) = -mu*x(3)/r3;
end

function y=h(x)
    y=x;
end

function [H] = jach(x) % Jacobiano da função y = h(x)
    H=eye(6);
end

function [F] = jacf(rr) % Jacobiano da função xp = f(x) + Gw
% Objetivo:
%     Calcula a matriz de derivadas parciais F (Jacobiana), a qual é
%     usada para obter a matriz de transição de estado de erro FI.
%
% Sistema não linear:
%     dX/dt          = f(X)

```

```

%      Y          = X + delta_X
%      dy/dt      = dX/dt + ddelta_X/dt
%      ddelta_X/dt = F(t)*delta_X + u
%      delta_X     = FI(t,t0) * delta_X0
%      dFI(t,t0)/dt = F(t)*FI(t,t0)
%      FI(t0,t0)   = I
% Entrada
% rr=[x y z ]' --> vetor posição em coordenadas terrestres
% rv=[vx vy vz]' --> vetor velocidade não é usado
%
% Autor: Alvaro Arraes (2008)
%
mu = 3.9860064D+14; % Constante gravitacional da Terra (m^3/s^2)
x=rr(1);
y=rr(2);
z=rr(3);
r = sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
r2 = r^2;
r3 = r^3;
r5 = r^5;
%
F1 = zeros(3,3);
F2 = eye(3,3);
%
%F3 = mu*[(-1/r3 + 3*x^2/r5)      3*x*y/r5      3*x*z/r5
%      3*x*y/r5      (-1/r3 + 3*y^2/r5)      3*y*z/r5
%      3*x*z/r5      3*y*z/r5      (-1/r3+3*z^2/r5)]
F3 = zeros(3,3);
F3(1,1) = mu*(-1/r3 + (3*x^2)/r5);
F3(1,2) = 3*mu*x*y/r5;
F3(1,3) = 3*mu*x*z/r5;
F3(2,1) = F3(1,2);
F3(2,2) = mu*(-1/r3 + 3*y^2/r5);
F3(2,3) = 3*mu*y*z/r5;
F3(3,1) = F3(1,3);
F3(3,2) = F3(2,3);
F3(3,3) = mu*(-1/r3+3*z^2/r5);
F4 = zeros(3,3);
% Montando F
F = [ F1 F2
      F3 F4];
end

```

## E.9 KALMAN\_SAT\_ESTENDIDO.M

```

function kalman_sat_estendido()
% Objetivo:

```

```

% Filtragem por Kalman estendido
%
% Autor: Alvaro de A Arraes
%      2008

clc
clear
consta;
duration = 10;
dt = 0.1;

x0 = [15500000, 0, 0, 0, 5071.111350, 0]'; % Estado inicial
x=x0;x_t=x0;
%F = matriz_deriv_parcc(x);
%F = jacf(x); %Jacobiano de xp = f(x) + Gw

SIGP = 10.D0;      % Erro GPS na posicao
SIGV = 1.D0;      % Erro GPS na velocidade
measnoise = [SIGP SIGP SIGP SIGV SIGV SIGV]';
% R - Matriz de ruído de observação;
R = diag([SIGP*SIGP SIGP*SIGP SIGP*SIGP SIGV*SIGV SIGV*SIGV SIGV*SIGV]);
Q = diag(1e-2*[1 1 1 1 1 1]); % Covariancia de ruido de processo
P0 = diag([1.d6,1.d6,1.d6,1.d4,1.d4,1.d4]); % estimativa inicial da cov.
P=P0;

% Inicializar vetor de inovações
Inn = zeros(size(R));

pos = []; % posição verdadeira
poshat = []; % posições estimadas
posmeas = []; % posições medidas
posref = []; % trajetória de referencia
Covar = [size(0:dt:duration,2),6,6];

% Geração da trajetória de referencia
% Utilizar como primeiro ponto um ponto ruidoso
ProcessNoise = (diag(Q).^0.5).* randn(size(diag(Q)));
MeasNoise = measnoise .* randn(size(measnoise));
% Primeiro ponto da trajetória de referencia

xn_0 = x0 + ProcessNoise; %Chute inicial

F = jacf(xn_0);
H=jach(xn_0);
z = H * xn_0 + MeasNoise; %Simulação de medida real
K = P0*H'*inv(H*P0*H'+R);
P_hat = (eye(size(P0))-K*H)*P0;
x_hat = xn_0 + K*(z - H*xn_0);

```

```

Counter = 0;
for t = 0 : dt: duration,
    Counter = Counter + 1;
    % Simulação do processo (1 satélite)
    ProcessNoise = (diag(Q).^0.5).*randn(size(diag(Q)));
    x_t = fgprov(x0,t)';
    x = x_t + ProcessNoise;
    % Simular a medida
    MeasNoise = measnoise .* randn(size(measnoise));
    z = H * x + MeasNoise;
    % Inovação
    F = jacf(x_hat);
    P_ = P_hat + ( F * P_hat + P_hat * F' + Q ) * dt;
    x_ = x_hat + f(x_hat) * dt;
    %Atualização da medida
    H = jach(x_);
    Inn = z - h(x_);
    % Covariancia da inovação
    s = H * P_ * H' + R;
    % Ganho de Kalman
    K = P_ * H' * inv(s);
    % Estimativa do estado
    % Correção da covariancia
    P_hat = (eye(size(P_))-K*H)*P_;
    x_hat = x_ + K * Inn;
    % Guardar os vetores de posição para plotar
    pos = [pos, x_t];
    posmeas = [posmeas, z];
    poshat = [poshat, x_hat];
    posref = [posref, x_];

    sigx(Counter) = P_hat(1,1)^0.5;
    sigy(Counter) = P_hat(2,2)^0.5;
    sigz(Counter) = P_hat(3,3)^0.5;
    sigvx(Counter) = P_hat(4,4)^0.5;
    sigvy(Counter) = P_hat(5,5)^0.5;
    sigvz(Counter) = P_hat(6,6)^0.5;
    xn = fgprov(xn_0, t)'; % trajetória de referencia
end

% Plotar
t = 0 : dt : duration;

dist_pos = pos(1,:).^2 + pos(2,:).^2 + pos(3,:).^2;
dist_poshat = poshat(1,:).^2 + poshat(2,:).^2 + poshat(3,:).^2;
dist_posmeas = posmeas(1,:).^2 + posmeas(2,:).^2 + posmeas(3,:).^2;
dist_posref = posref(1,:).^2 + posref(2,:).^2 + posref(3,:).^2;
plot(t,dist_pos,'r',t,dist_poshat,'b.',t,dist_posmeas,'g',...

```

```

    t,dist_posref);
grid;
axis square;
legend('verdadeira','estimada','medida','referencia')
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Position (m)');
title('Filtro Estendido de Kalman');
pause

plot(posref(1,:),posref(2,:));
axis square;
title('Referencia');
pause
plot(poshat(1,:),poshat(2,:));
axis square;
title('Estimado');
pause

plot(t,sigx,'r-',t,sigy,'b.',t,sigz,'m+');
title('Desvios-padrão');
xlabel('tempo');
legend('sigmaX','sigmaY','sigmaZ');
ylabel('Desvio-padrão')
pause

plot(t,sigvx,'r-',t,sigvy,'b.',t,sigvz,'m+');
title('Desvios-padrão');
xlabel('tempo');
legend('sigmaVX','sigmaVY','sigmaVZ');
ylabel('Desvio-padrão')
pause

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               Funções Internas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function xp=f(x) % Equação do movimento orbital (prob. 2 corpos)
    mu = 3.9860064D+14; % Constante gravitacional da Terra (m^3/s^2)
    r0=(x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2)^0.5;
    r3=r0^3;
    xp = zeros(6,1);
    xp(1) = x(4);
    xp(2) = x(5);
    xp(3) = x(6);
    xp(4) = -mu*x(1)/r3;

```

```

        xp(5) = -mu*x(2)/r3;
        xp(6) = -mu*x(3)/r3;
end

function y=h(x)
    y=x;
end

function [H] = jach(x) % Jacobiano da função y = h(x)
    H=eye(6);
end

function [F] = jacf(rr) % Jacobiano da função xp = f(x) + Gw
% Objetivo:
%     Calcula a matriz de derivadas parciais F (Jacobiana), a qual é
%     usada para obter a matriz de transição de estado de erro FI.
%
% Sistema não linear:
%     dX/dt      = f(X)
%     Y          = X + delta_X
%     dy/dt      = dX/dt + ddelta_X/dt
%     ddelta_X/dt = F(t)*delta_X + u
%     delta_X    = FI(t,t0) * delta_X0
%     dFI(t,t0)/dt = F(t)*FI(t,t0)
%     FI(t0,t0)  = I
% Entrada
% rr=[x y z ]' --> vetor posição em coordenadas terrestres
% rv=[vx vy vz]' --> vetor velocidade não é usado
%
% Autor: Alvaro Arraes (2008)
%
mu = 3.9860064D+14; % Constante gravitacional da Terra (m^3/s^2)
x=rr(1);
y=rr(2);
z=rr(3);
r = sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
r2 = r^2;
r3 = r^3;
r5 = r^5;
%
F1 = zeros(3,3);
F2 = eye(3,3);
%
%F3 = mu*[(-1/r3 + 3*x^2/r5)      3*x*y/r5      3*x*z/r5
%         3*x*y/r5              (-1/r3 + 3*y^2/r5)  3*y*z/r5
%         3*x*z/r5              3*y*z/r5          (-1/r3+3*z^2/r5) ]
F3 = zeros(3,3);
F3(1,1) = mu*(-1/r3 + (3*x^2)/r5);

```

```

F3(1,2) = 3*mu*x*y/r5;
F3(1,3) = 3*mu*x*z/r5;
F3(2,1) = F3(1,2);
F3(2,2) = mu*(-1/r3 + 3*y^2/r5);
F3(2,3) = 3*mu*y*z/r5;
F3(3,1) = F3(1,3);
F3(3,2) = F3(2,3);
F3(3,3) = mu*(-1/r3+3*z^2/r5);
F4 = zeros(3,3);
% Montando F
F = [ F1 F2
      F3 F4];
end

```

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)