



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-16077-TDI/1535

## ESTUDO DE TRAJETÓRIA PARA VEÍCULOS ESPACIAIS UTILIZANDO CAPTURA GRAVITACIONAL

Alexandre Lacerda Machuy Francisco

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Terezinha de Jesus Stuchi, aprovada em 27 de abril de 2009.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/07.30.14.13>>

INPE  
São José dos Campos  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## **PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

## **CONSELHO DE EDITORAÇÃO:**

### **Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

### **Membros:**

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

## **BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Ancelmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

## **EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Viveca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
Ciência e Tecnologia



INPE-16077-TDI/1535

## ESTUDO DE TRAJETÓRIA PARA VEÍCULOS ESPACIAIS UTILIZANDO CAPTURA GRAVITACIONAL

Alexandre Lacerda Machuy Francisco

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Terezinha de Jesus Stuchi, aprovada em 27 de abril de 2009.

Registro do documento original:

<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m18@80/2009/07.30.14.13>>

INPE  
São José dos Campos  
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Francisco, Alexandre Lacerda Machuy.

F847Es Estudo de trajetória para veículos espaciais utilizando captura gravitacional / Alexandre Lacerda Machuy Francisco. – São José dos Campos : INPE, 2009.

268p. ; (INPE-16077-TDI/1535)

Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009.

Orientadores : Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Terezinha de Jesus Stuchi.

1. Mecânica celeste. 2. Captura gravitacional. 3. Problema de três corpos. 4. Problema de quatro corpos. I.Título.

CDU 521.182

---

Copyright © 2009 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita da Editora, com exceção de qualquer material fornecido especificamente no propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2009 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming or otherwise, without written permission from the Publisher, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

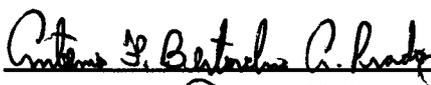
Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Doutor(a) em  
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



Presidente / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado



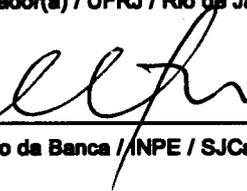
Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dra. Teresinha de Jesus Stuchi



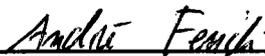
Orientador(a) / UFRJ / Rio de Janeiro - RJ

Dr. Mario Cesar Ricci



Membro da Banca / INPE / SJCampos - SP

Dr. André Fenili



Convidado(a) / UFABC / Santo André - SP

Dr. Carlos Renato Solorzano



Convidado(a) / FAPESP / São Paulo - SP

Aluno (a): Alexandre Lacerda Machuy Francisco

São José dos Campos, 27 de abril de 2009

# Dedicatória

Ao meu anjo da Guarda,

A todas as entidades espirituais da Tenda de Umbanda Mãe Maria, salve a vossa força e salve a vossa luz.

Cada um desses professores me ajudaram muito com sua participação na minha formação acadêmica.

Teresinha de Jesus Stuchi,

Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado,

Airton Van Sohsten de Medeiros.



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a DEUS por ter me fornecido saúde e força para vencer mais essa etapa.

A minha família meu eterno agradecimento pela força espiritual em todos os momentos e por entender a minha ausência para poder me dedicar aos estudos. Mãe, esposa e filha.

Sou muito grato aos meus orientadores Teresinha de Jesus Stuchi e Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado pela dedicação, paciência, oportunidades, profissionalismo, confiança, mas principalmente pelo incansável estímulo para o crescimento do meu conhecimento.

Agradeço aos professores:

Martha Alvarez da Universidade autônoma do México por importantes discussões para o exame de qualificação.

Gerard Gómes da Universidade de Barcelona por comentários e sugestões sobre o problema de Captura gravitacional.

Rodolpho Vilhena de Moraes pelas sugestões e observações na minha tese de doutorado.

Mario Cesar Ricci pelas sugestões e observações na minha tese de doutorado.

André Fenili pelas sugestões e observações na minha tese de doutorado.

Carlos Renato Solorzano pelas sugestões e observações na minha tese de doutorado.

A todos os colegas de doutorado e mestrado do curso de Engenharia e tecnologia espacial pela amizade durante esses anos.

À CAPES pela bolsa de pesquisa.

Agradeço a todos os funcionários da biblioteca do INPE.

Agradeço aos funcionários da secretaria do DMC.

Queila Moreira Emerich, Márcia Alvarenga, Natalia Ferreira Silva, Flávia de Luiz Nunes, Thelma Beatriz Emerich e Michele Christina Marques.

A todos os amigos espirituais que me sustentaram psicologicamente neste período.



## **RESUMO**

Vindo de fora da esfera de influência gravitacional de um corpo celeste, um veículo espacial pode ter sua velocidade relativa a esse corpo reduzida ao ponto de fazer com que esse veículo permaneça por algum tempo em órbita em torno desse corpo celeste. Este mecanismo é conhecido como captura gravitacional temporária. Neste trabalho foi feito o estudo numérico de captura gravitacional, usando como modelos matemáticos o problema de três corpos restrito circular e o problema bi circular de quatro corpos. Sempre comparamos os resultados obtidos nos dois modelos. Captura gravitacional tem várias aplicações práticas em uma missão espacial, como, por exemplo, a análise do consumo mínimo de combustível de uma transferência Terra-Lua.



# **STUDIES OF PATHS FOR SPACE VEHICLES USING GRAVITATIONAL CAPTURE**

## **ABSTRACT**

Coming from outside the sphere of influence of a celestial body, a space vehicle can have its relative velocity with respect to that body reduced to the point where that vehicle stays for some time in orbit around that body. This mechanism is known as temporary gravitational capture. In this work, a numerical study of gravitational capture was performed, using as mathematical models the circular restricted problem of three bodies and the bicircular problem of four bodies. We always compared the results obtained in the two models. The gravitational capture has several practical applications in space missions. An example would be the analysis of the minimum consumption of fuel for an Earth-Moon transfer.



## SUMÁRIO

	Pág.
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	
<b>LISTA DE TABELAS</b>	
<b>LISTA DE SIMBOLOS</b>	
<b>1 – INTRODUÇÃO.....</b>	<b>27</b>
1.1. Definição do problema.....	27
1.2. Aplicações de captura gravitacional temporária.....	27
1.3. Contribuição deste trabalho.....	28
1.4. Organização deste trabalho.....	29
<b>2 - PROBLEMA DE TRÊS CORPOS RESTRITO CIRCULAR.....</b>	<b>31</b>
2.1 Introdução.....	31
2.2. Problema de três corpos.....	31
2.3. O problema de três corpos restrito circular.....	33
2.4. Equações de movimento no sistema de coordenadas fixas.....	34
2.5 Hamiltoniana e lagrangiana no sistema fixo.....	35
2.6. Sistema girante.....	36
2.7. Hamiltoniana e lagrangiana no sistema girante.....	37
2.8 Equações de movimento para o problema espacial no sistema fixo.....	40
2.9 Hamiltoniana e lagrangiana no sistema fixo no espaço.....	40
2.10. Equações de movimento para o problema espacial no sistema girante.....	41
2.11 Hamiltoniana e lagrangiana no sistema girante no espaço.....	42
<b>3 - O PROBLEMA BI-CIRCULAR.....</b>	<b>45</b>
3.1. Introdução.....	45
3.2. O problema de quatro corpos.....	45
3.3. O problema bi-circular.....	46
3.4. Equações de movimento do problema bi circular no plano.....	47
3.4.1 Sistema fixo ou inercial.....	47
3.5. Hamiltoniana e lagrangiana do problema bi-circular no sistema de coordenadas fixo ou inercial.....	50
3.6. Problema bicircular no sistema girante ou sinódico.....	51
3.7. Hamiltoniana e lagrangiana do problema bi-circular no plano com sistema de coordenadas girante.....	53
3.8. Equações de movimento para o problema espacial no sistema fixo.....	54
3.9. Hamiltoniana e lagrangiana no sistema fixo no espaço.....	54
3.10 Equações de movimento para o problema espacial no sistema girante.....	55
3.11. Hamiltoniana e lagrangiana do problema bi-circular espacial no sistema de coordenadas girante.....	56
<b>4 - ESTUDO NUMÉRICO DA CAPTURA GRAVITACIONAL NO PLANO.....</b>	<b>57</b>
4.1 Introdução.....	57

4.2 O problema de dois corpos.....	57
4.3 Captura gravitacional.....	58
4.4. Alguns resultados para o problema de três corpos restrito circular.....	61
4.5 Variações das condições iniciais.....	65
4.5.1 Variação da energia.....	65
4.5.2 Variação do ângulo $\alpha$ .....	69
4.6 Resultados preliminares para o problema bi-circular.....	72
4.7 Variações das condições iniciais.....	75
4.7.1 Variações da energia $C_3$ .....	75
4.7.2. Variação do ângulo $\psi$ .....	78
4.7.3. Variação do ângulo $\alpha$ .....	80
4.8. Comparando os dois modelos.....	83
4.8.1 Órbitas de captura nos dois modelos matemáticos.....	83
4.8.2. Órbitas de diferentes qualidades nos modelos.....	87
4.9. Conclusão.....	88
<b>5 - VALOR MÍNIMO DE <math>C_3</math>.....</b>	<b>89</b>
5.1. Introdução.....	89
5.2. Estudo do valor mínimo da energia inicial.....	90
5.3. Estudo do valor mínimo da energia inicial para termos captura gravitacional no problema de três corpos restrito circular.....	90
5.4. Estudo da influência da distância do veículo espacial à superfície da Lua.....	91
5.4.1 Órbitas diretas. Distância da Lua ao veículo espacial maior que 100 km.....	91
5.4.2 Órbitas diretas. Distância da Lua ao veículo espacial menor que 100 km.....	95
5.4.3 Órbitas retrógradas. Distância da Lua ao veículo espacial maior que 100 km.....	96
5.4.4 Órbitas retrógradas. Distância da Lua ao veículo espacial menor que 100 km.....	99
5.5. Estudo do valor mínimo de $C_3$ inicial para termos captura gravitacional no problema bi-circular de quatro corpos.....	101
5.5.1 Órbitas diretas.....	102
5.5.2 Órbitas retrógradas.....	112
5.6. Estudo da influência de valores de $r_p$ no problema bi-circular.....	123
5.7 Conclusão.....	134
<b>6 - ANÁLISE DO TEMPO DE CAPTURA GRAVITACIONAL.....</b>	<b>137</b>
6.1 Introdução.....	137
6.2. Análise do tempo de captura gravitacional para o problema de três corpos restrito circular.....	138
6.2.1. Movimento direto.....	138
6.2.2. Movimento retrógrado.....	145
6.3. Análise do tempo de captura gravitacional no problema bi-circular de quatro corpos.....	154
6.3.1. Movimento direto.....	155
6.3.1.1 Ângulo do Sol igual $0^0$ .....	155
6.3.1.2 Ângulo do Sol igual $90^0$ .....	162
6.3.2. Movimento retrógrado.....	172
6.3.2.1 Ângulo do Sol igual $0^0$ e $C_3 = -0.1$ .....	172

6.3.2.2 Ângulo do Sol igual $90^0$ .....	182
6.4 Conclusão.....	190
<b>7 - ANÁLISE DO TEMPO DE CAPTURA PARA <math>r_p</math> E <math>C_3</math> FIXOS.....</b>	<b>193</b>
7.1. Introdução.....	193
7.2 Resultados numéricos do problema de três corpos restrito circular.....	193
7.2.1 Movimento direto e distância inicial Lua veículo espacial 100 km.....	194
7.2.2 Movimento retrógrado distância inicial Lua veículo espacial 100 km.....	201
7.2.3. Distância inicial Lua veículo espacial diferente de 100 km.....	207
7.3. Resultados numéricos problema bi-circular de quatro corpos.....	210
7.3.1 Movimento direto distância inicial Lua veículo espacial 100 km.....	210
7.3.1.1 Nos gráficos abaixo temos $\psi = 0^0$ .....	210
7.3.1.2 Nos gráficos abaixo temos $\psi = 90^0$ .....	214
7.3.2 Movimento retrógrado distância inicial Lua veículo espacial 100 km.....	218
7.3.2.1 Nos gráficos abaixo temos $\psi = 0^0$ .....	218
7.3.2.2 Nos gráficos abaixo temos $\psi = 90^0$ .....	223
7.3.3 Comparando os dois modelos.....	227
7.3.3.1 Movimento direto.....	227
7.3.3.2 Movimento retrógrado.....	230
7.4. Conclusão.....	233
<b>8 - SISTEMA NETUNO TRITÃO.....</b>	<b>235</b>
8.1. Introdução.....	235
8.2. O problema de três corpos restrito circular. Primários Netuno e Tritão.....	235
8.3. Captura gravitacional Sistema Netuno--Tritão.....	237
8.4. Estudo do valor mínimo da energia inicial para termos captura gravitacional no problema de três corpos restrito circular. Sistema Netuno Tritão.....	238
8.5. Análise do tempo de captura gravitacional.....	240
8.6 Conclusões.....	241
<b>9 - CAPTURA GRAVITACIONAL NO ESPAÇO.....</b>	<b>243</b>
9.1. Introdução.....	243
9.2. Captura gravitacional.....	243
9.3 Órbitas de captura.....	245
9.4. Resultados numéricos para o problema de três corpos restrito.....	245
9.4.1 Órbitas de captura gravitacional.....	246
9.4.2. Movimento no plano xy.....	247
9.4.3 Órbitas limitadas.....	251
9.5. Variação da energia.....	254
9.6. Variação de ângulos.....	258
9.6.1 Variando o ângulo $\beta$ .....	258
9.7 Conclusão.....	261
<b>10 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.....</b>	<b>263</b>
10.1 Introdução.....	263
10.2 Conclusões.....	263

10.2.1 Órbitas.....	263
10.2.2. Mínimo da energia do veículo espacial com relação à Lua.....	263
10.2.3 Tempo de captura gravitacional.....	263
10.2.4. Sistema Netuno-Tritão.....	264
10.3 Trabalhos futuros.....	264
10.3.1. Variedades invariantes.....	264
10.3.2 Sistemas diferentes do sistema Terra-Lua.....	264
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>267</b>

## LISTA DE FIGURAS

	Pág
2.1. Problema de três corpos.....	32
2.2. Movimento dos corpos primários.....	33
2.3. Sistema girante.....	37
3.1. Movimento dos primários.....	47
3.2. Primários Terra, Lua e Sol, no problema bi-circular.....	50
4.1. Condições iniciais.....	60
4.2. Órbita de captura direta. $\alpha = 60^0$ e $C_3 = -0.10$ .....	61
4.3. $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 60^0$ e $C_3 = -0.10$ .....	62
4.4. Distância em função do tempo. $\alpha = 60^0$ e $C_3 = -0.10$ .....	62
4.5. Órbita de captura retrógrada $\alpha = 60^0$ e $C_3 = -0.10$ .....	63
4.6 $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 60^0$ e $C_3 = -0.10$ .....	63
4.7. Distância em função do tempo. $\alpha = 60^0$ e $C_3 = -0.10$ .....	63
4.8. Órbita limitada retrógrada. $\alpha = 90^0$ e $C_3 = -0.20$ .....	64
4.9. $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 90^0$ e $C_3 = -0.20$ .....	64
4.10. Distância em função do tempo. $\alpha = 90^0$ e $C_3 = -0.20$ .....	65
4.11. Órbitas de captura diretas para $\alpha = 30^0$ e $C_3 = -0.1, -0.15 e - 0.18$ .....	66
4.12 $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 30^0$ e $C_3 = -0.1, -0.15 e - 0.18$ .....	66
4.13. Distância em função do tempo. $\alpha = 30^0$ e $C_3 = -0.1, -0.15 e - 0.18$ .....	67
4.14. Órbitas de captura retrógradas $\alpha = 30^0$ e $C_3 = -0.1, -0.15 e - 0.18$ .....	68
4.15. Distância em função do tempo. $\alpha = 30^0$ e $C_3 = -0.1, -0.13 e - 0.15$ .....	68
4.16. Órbitas de captura diretas $\alpha = 0^0, 30^0$ e $60^0$ e $C_3 = -0.1$ .....	69
4.17 $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 0^0, 30^0$ e $60^0$ e $C_3 = -0.1$ .....	70
4.18. Distância em função do tempo. $\alpha = 0^0, 30^0$ e $60^0$ e $C_3 = -0.1$ .....	70
4.19. Órbitas de captura retrógradas $\alpha = 0^0, 30^0$ e $60^0$ e $C_3 = -0.1$ .....	70
4.20 $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 0^0, 30^0$ e $60^0$ e $C_3 = -0.1$ .....	71
4.21. Distância em função do tempo. $\alpha = 0^0, 30^0$ e $60^0$ e $C_3 = -0.1$ .....	71
4.22. Órbita direta. $\alpha = 180^0, \psi = 0^0$ e $C_3 = -0.6$ .....	72
4.23 $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi = 0^0$ e $C_3 = -0.6$ .....	73
4.24 $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi = 0^0$ e $C_3 = -0.6$ .....	73
4.25. Distância em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6$ .....	73
4.26. Órbita retrógrada. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6$ .....	74
4.27 $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6$ .....	74
4.28. Distância em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6$ .....	74
4.29. Órbitas de captura diretas. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$ .....	75
4.30. $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$ .....	76
4.31. Distância em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$ .....	76
4.32 Órbitas retrógradas. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$ .....	77
4.33 $C_3$ em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$ .....	77
4.34. Distância em função do tempo. $\alpha = 180^0, \psi_0 = 0^0$ e $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$ .....	77
4.35 Órbitas diretas. $C_3 = -0.15, \alpha = 120^0$ e $\psi_0 = 0^0, 90^0, 180^0$ e $270^0$ .....	78

4.36. $C_3$ em função do tempo. $C_3 = -0.15$ , $\alpha = 120^\circ$ e $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	78
4.37. Distância função do tempo $C_3 = -0.15$ , $\alpha = 120^\circ$ e $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ..	79
4.38. Órbitas retrógradas. $C_3 = -0.15$ , $\alpha = 120^\circ$ e $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	80
4.39. $C_3$ em função do tempo. $C_3 = -0.15$ , $\alpha = 120^\circ$ e $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	80
4.40. Distância função do tempo $C_3 = -0.15$ , $\alpha = 120^\circ$ e $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ ..	81
4.41. Órbitas diretas. $C_3 = -0.2$ , $\psi = 0^\circ$ e $\psi_0 = 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	81
4.42. $C_3$ em função do tempo $C_3 = -0.2$ , $\psi_0 = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	81
4.43. Distância em função do tempo $C_3 = -0.2$ , $\psi_0 = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	81
4.44. Órbitas retrógradas. $C_3 = -0.2$ , $\psi_0 = 0^\circ$ e $\psi = 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	82
4.45. $C_3$ em função do tempo $C_3 = -0.2$ , $\psi_0 = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	82
4.46. Distância em função do tempo $C_3 = -0.2$ , $\psi_0 = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$ e $270^\circ$ .....	83
4.47. Órbitas diretas $C_3 = -0.10$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\psi = 0^\circ$ .....	84
4.48. Órbitas diretas $C_3 = -0.10$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\psi = 30^\circ$ .....	84
4.49. Órbitas diretas $C_3 = -0.10$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\psi = 45^\circ$ .....	84
4.50. Órbitas diretas $C_3 = -0.10$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\psi = 90^\circ$ .....	85
4.51. Órbitas retrógradas $C_3 = -0.10$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\psi_0 = 0^\circ$ .....	86
4.52. Órbitas retrógradas $C_3 = -0.10$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\psi = 30^\circ$ .....	86
4.53. Órbitas retrógradas $C_3 = -0.10$ , $\alpha = 60^\circ$ e $\psi_0 = 90^\circ$ .....	86
4.54. Condições iniciais $C_3 = -0.2$ , $\alpha = 90^\circ$ e $\psi_0 = 35^\circ$ .....	87
4.55. Condições iniciais $C_3 = -0.2$ , $\alpha = 90^\circ$ e $\psi_0 = 40^\circ$ .....	87
4.56. Condições iniciais $C_3 = -0.2$ , $\alpha = 90^\circ$ e $\psi_0 = 42^\circ$ .....	88
5.1. Três corpos restrito circular com órbitas diretas .....	91
5.2. Três corpos restrito circular com órbitas retrógradas .....	91
5.3. Três corpos restrito circular. $r_p = 1838$ km e $r_p = 2238$ km .....	93
5.4. Três corpos restrito circular. $r_p = 1838$ km e $r_p = 2738$ km .....	93
5.5. Três corpos restrito circular, com $r_p = 1838$ km e $r_p = 11738$ km .....	94
5.6. Três corpos restrito circular, com $r_p = 1838$ km e $r_p = 21738$ km .....	94
5.7. Três corpos restrito circular, para $r_p = 1838$ km e $r_p = 1788$ km .....	95
5.8. Três corpos restrito circular, para $r_p = 1838$ km e $r_p = 1739$ km .....	96
5.9. Três corpos restrito circular, para $r_p = 1838$ km e $r_p = 2738$ km .....	97
5.10. Três corpos restrito circular, para $r_p = 1838$ km e $r_p = 1739$ km .....	97
5.11. Três corpos restrito circular, com $r_p = 1838$ km e $r_p = 11738$ km .....	98
5.12. Três corpos restrito circular, com $r_p = 1838$ km e $r_p = 21738$ km .....	99
5.13. Três corpos restrito circular, com $r_p = 1838$ km e $r_p = 1788$ km .....	100
5.14. Três corpos restrito circular, com $r_p = 1838$ km e $r_p = 1739$ km .....	100
5.15. Bi-circular $\psi_0 = 0^\circ$ .....	102
5.16. Bi-circular $\psi_0 = 30^\circ$ .....	103
5.17. Bi-circular $\psi_0 = 45^\circ$ .....	103
5.18. Bi-circular $\psi_0 = 60^\circ$ .....	104
5.19. Bi-circular $\psi_0 = 90^\circ$ .....	105
5.20. Bi-circular $\psi_0 = 120^\circ$ .....	105
5.21. Bi-circular $\psi_0 = 135^\circ$ .....	106
5.22. Bi-circular $\psi_0 = 150^\circ$ .....	107
5.23. Bi-circular $\psi_0 = 180^\circ$ .....	107

5.24 Bi-circular $\psi_0 = 210^0$ .....	108
5.25 Bi-circular $\psi_0 = 225^0$ .....	109
5.26 Bi-circular $\psi_0 = 240^0$ .....	109
5.27 Bi-circular $\psi_0 = 270^0$ .....	110
5.28 Bi-circular $\psi_0 = 300^0$ .....	111
5.29 Bi-circular $\psi_0 = 315^0$ .....	111
5.30 Bi-circular $\psi_0 = 330^0$ .....	112
5.31 Bi-circular $\psi_0 = 0^0$ .....	113
5.32 Bi-circular $\psi_0 = 30^0$ .....	113
5.33 Bi-circular $\psi_0 = 45^0$ .....	114
5.34 Bi-circular $\psi_0 = 60^0$ .....	114
5.35 Bi-circular $\psi_0 = 90^0$ .....	115
5.36 Bi-circular $\psi_0 = 120^0$ .....	116
5.37 Bi-circular $\psi_0 = 135^0$ .....	117
5.38 Bi-circular $\psi_0 = 150^0$ .....	117
5.39 Bi-circular $\psi_0 = 180^0$ .....	118
5.40 Bi-circular $\psi_0 = 210^0$ .....	119
5.41 Bi-circular $\psi_0 = 225^0$ .....	119
5.42 Bi-circular $\psi_0 = 240^0$ .....	120
5.43 Bi-circular $\psi_0 = 270^0$ .....	121
5.44 Bi-circular $\psi_0 = 300^0$ .....	121
5.45 Bi-circular $\psi_0 = 315^0$ .....	122
5.46 Bi-circular $\psi_0 = 330^0$ .....	123
5.47 Bi-circular $\psi_0 = 0^0, r_p = 1738$ e $r_p = 1788$ .....	124
5.48 Bi-circular $\psi = 0^0, r_p = 1738$ e $r_p = 11738$ .....	124
5.49 Bi-circular $\psi_0 = 90^0, r_p = 1738$ e $r_p = 1788$ .....	125
5.50 Bi-circular $\psi_0 = 90^0, r_p = 1738$ e $r_p = 11738$ .....	125
5.51 Bi-circular $\psi_0 = 180^0, r_p = 1738$ e $r_p = 1788$ .....	126
5.52 Bi-circular $\psi_0 = 180^0, r_p = 1738$ e $r_p = 11738$ .....	127
5.53 Bi-circular $\psi = 270^0, r_p = 1738$ e $r_p = 1788$ .....	128
5.54 Bi-circular $\psi_0 = 270^0, r_p = 1738$ e $r_p = 11738$ .....	128
5.55 Bi-circular $\psi_0 = 0^0, r_p = 1738$ e $r_p = 1788$ .....	129
5.56 Bi-circular $\psi_0 = 0^0, r_p = 1738$ e $r_p = 11738$ .....	130
5.57 Bi-circular $\psi_0 = 90^0, r_p = 1738$ e $r_p = 1788$ .....	131
5.58 Bi-circular $\psi_0 = 90^0, r_p = 1738$ e $r_p = 11738$ .....	131
5.59 Bi-circular $\psi_0 = 180^0, r_p = 1738$ e $r_p = 1788$ .....	132
5.60 Bi-circular $\psi_0 = 180^0, r_p = 1738$ e $r_p = 11738$ .....	132
5.61 Bi-circular $\psi_0 = 270^0, r_p = 1738$ e $r_p = 1788$ .....	133
5.62 Bi-circular $\psi_0 = 270^0, r_p = 1738$ e $r_p = 11738$ .....	134
6.1. $C_3$ em função do tempo $\alpha = 0^0 r_p = 1838, 2238$ e $11738 km$ .....	137
6.2. $C_3$ em função do tempo $\alpha = 30^0 r_p = 1838, 2238$ e $11738 km$ .....	138
6.3. $C_3$ em função do tempo $\alpha = 60^0 r_p = 1838, 2238$ e $11738 km$ .....	138
6.4 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 90^0 r_p = 1838, 2238$ e $11738 km$ .....	139

6.5 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 120^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	139
6.6. $C_3$ em função do tempo $\alpha = 135^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	140
6.7. $C_3$ em função do tempo, $\alpha = 150^0$ , $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	140
6.8 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 180^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	141
6.9 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 210^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	141
6.10 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 225^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	142
6.11 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 270^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	142
6.12 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 300^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	143
6.13 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 315^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	143
6.14 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 330^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	144
6.15. $C_3$ em função do tempo $\alpha = 0^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	145
6.16 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 30^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	146
6.17 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 45^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	146
6.18 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 60^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	147
6.19 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 90^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	147
6.20 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 120^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	148
6.21 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 135^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	148
6.22 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 150^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	149
6.23 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 180^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	149
6.24 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 210^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	150
6.25 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 225^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	150
6.26 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 240^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	151
6.27 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 270^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	151
6.28 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 300^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	152
6.29 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 315^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	152
6.29 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 315^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	152
6.30 $C_3$ em função do tempo $\alpha = 330^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	153
6.31 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 330^0$ e $r_p = 11738$ km.....	155
6.32 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 30^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	155
6.33 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 45^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	156
6.34 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 60^0$ $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	156
6.35 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 90^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	158
6.36 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 120^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	158
6.37 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 135^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	159
6.38 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 150^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	159
6.39 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 180^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	160
6.40 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 210^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	160
6.41 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 225^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	161
6.42 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 240^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	161
6.43 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 270^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	162
6.44 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 300^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	162

6.45	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 315^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	163
6.46	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 330^0$ . $r_p = 1838$ e $2238$ km.....	163
6.47	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 0^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	164
6.48	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 30^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	164
6.49	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 45^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	165
6.50	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 60^0$ . $r_p = 1838$ km e $2238$ km.....	165
6.51	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 90^0$ . $r_p = 11738$ km .....	166
6.52	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 120^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	166
6.53	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 135^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	167
6.54	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 150^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	167
6.55	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 180^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	168
6.56	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 210^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	168
6.57	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 225^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	169
6.58	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 240^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	169
6.59	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 270^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	170
6.60	$C_3$ em função do tempo $\psi = 90^0$ , $\alpha = 300^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	170
6.61	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 315^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	171
6.62	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 330^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	171
6.63	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 0^0$ . $r_p = 11738$ km.....	173
6.64	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 30^0$ . $r_p = 1838$ km e $2238$ km.....	173
6.65	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 45^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	174
6.66	$C_3$ em função do tempo $\psi = 0^0$ , $\alpha = 60^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	174
6.67	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 90^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	175
6.68	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 120^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	175
6.69	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 135^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	176
6.70	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 150^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	176
6.71	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 180^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	177
6.72	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 210^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	177
6.73	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 225^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	178
6.74	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 240^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	178
6.75	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 270^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	179
6.76	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 300^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	179
6.77	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 315^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	180
6.78	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 0^0$ , $\alpha = 330^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	180
6.79	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 0^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	182
6.80	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 30^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	182
6.81	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 45^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	183
6.82	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 60^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	183
6.83	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 90^0$ . $r_p = 11738$ km.....	184
6.84	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 120^0$ . $r_p = 1838$ e $2238$ km.....	184
6.85	$C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 135^0$ . $r_p = 1838, 2238$ e $11738$ km.....	185

6.86 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 150^0$ . $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km....	185
6.87 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 180^0$ . $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.....	186
6.88 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 210^0$ . $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.....	186
6.89 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 225^0$ . $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.....	187
6.90 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 240^0$ . $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.....	187
6.91 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 270^0$ . $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.....	188
6.92 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 300^0$ . $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km....	188
6.93 $C_3$ em função do tempo $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 315^0$ . $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.....	189
6.94. $C_3$ em função do tempo. $\psi_0 = 90^0$ , $\alpha = 330^0$ $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km....	189
7.1. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.01$ , $-0.02$ e $-0.03$ .....	194
7.2. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.04$ , $-0.05$ e $-0.06$ .....	195
7.3. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.07$ , $-0.08$ e $-0.09$ .....	196
7.4. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.10$ , $-0.11$ e $-0.12$ .....	197
7.5. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.13$ , $-0.14$ e $-0.15$ .....	198
7.6. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.16$ , $-0.17$ e $-0.18$ .....	199
7.7. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.19$ , $-0.20$ e $-0.21$ .....	200
7.7. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.01$ , $-0.02$ e $-0.03$ .....	201
7.8. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.04$ , $-0.05$ e $-0.06$ .....	202
7.9. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.07$ , $-0.08$ e $-0.09$ .....	203
7.11. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.10$ , $-0.11$ e $-0.12$ .....	204
7.12. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.13$ , $-0.14$ e $-0.15$ .....	205
7.13. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.16$ , $-0.17$ e $-0.18$ .....	206
7.14. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.19$ .....	206
7.15. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.10$ . Movimento direto.....	208
7.16. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.10$ . Movimento retrógrado.....	209
7.17. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.1$ e $\psi = 0^0$ .....	210
7.18. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.2$ e $\psi = 0^0$ .....	211
7.19. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.3$ e $\psi = 0^0$ .....	211
7.20. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.4$ e $\psi = 0^0$ .....	212
7.21. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.5$ e $\psi = 0^0$ .....	213
7.22. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.6$ e $\psi = 0^0$ .....	213
7.23. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.1$ e $\psi = 90^0$ .....	214
7.24. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.2$ e $\psi = 90^0$ .....	215
7.25. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.3$ e $\psi = 90^0$ .....	216
7.26. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.4$ e $\psi = 90^0$ .....	216
7.27. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.5$ e $\psi = 90^0$ .....	217
7.28. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.6$ e $\psi = 90^0$ .....	217
7.29. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.1$ e $\psi = 0^0$ .....	218
7.30. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.2$ e $\psi = 0^0$ .....	219
7.31. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.3$ e $\psi = 0^0$ .....	220
7.32. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.4$ e $\psi = 0^0$ .....	220
7.33. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.5$ e $\psi = 0^0$ .....	221
7.34. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.6$ e $\psi = 0^0$ .....	222
7.35. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.1$ e $\psi = 90^0$ .....	223

7.36. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.2$ e $\psi = 90^0$ .....	223
7.37. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.3$ e $\psi = 90^0$ .....	224
7.38. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.4$ e $\psi = 90^0$ .....	225
7.39. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.5$ e $\psi = 90^0$ .....	225
7.40. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.6$ e $\psi = 90^0$ .....	226
7.41. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.05$ , movimento direto.....	227
7.42. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.10$ , movimento direto.....	228
7.43. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.15$ , movimento direto.....	229
7.44. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.05$ , movimento retrógrado.....	230
7.45. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.10$ , movimento retrógrado.....	231
7.46. Ângulo em função do tempo $C_3 = -0.15$ , movimento retrógrado.....	232
8.1. Três corpos restrito circular órbitas diretas, $C_3$ mínimo.....	238
8.2. Três corpos restrito circular órbitas retrógradas, $C_3$ mínimo.....	239
8.3. Movimento direto, tempo de captura gravitacional.....	240
8.4. Movimento retrógrado, tempo de captura gravitacional.....	241
9 1. Condição inicial.....	245
9.2. Órbita de captura do problema de três corpos restrito circular.....	246
9 3. $C_3$ em função do tempo de captura gravitacional.....	247
9 4. Distância em função do tempo.....	247
9 5. Órbita de captura gravitacional no plano $XY$ .....	248
9.6. $C_3$ em função do tempo.....	249
9.7. Distância em função do tempo.....	249
9.8. Órbita de captura gravitacional no plano $XY$ .....	250
9.9. $C_3$ em função do tempo.....	250
9.10. Distância em função do tempo.....	251
9.11. Órbita limitada no espaço.....	252
9.12. Órbita limitada restrita ao plano $XY$ .....	252
9.13 $C_3$ em função do tempo para o espaço.....	253
9.14 $C_3$ em função do tempo para o plano.....	253
9.15. Órbita de captura $\alpha = \beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.18$ .....	254
9.16. Órbita de captura $\alpha = \beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.10$ .....	255
9.17 $C_3$ em função do tempo $\alpha = \beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.18$ .....	255
9.18 $C_3$ em função do tempo $\alpha = \beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.10$ .....	256
9.19. Órbita limitada $\alpha = \beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.30$ .....	256
9.20. Órbita limitada $\alpha = \beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.20$ .....	257
9.21 $C_3$ em função do tempo $\alpha = \beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.30$ .....	257
9.22. $C_3$ em função do tempo $\alpha = \beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.20$ .....	258
9.23. Órbita limitada $\alpha = \gamma = 30^0$ e $\beta = 45^0$ . $C_3 = -0.18$ .....	259
9.24. $C_3$ em função do tempo. $\alpha = \gamma = 30^0$ e $\beta = 45^0$ . $C_3 = -0.18$ .....	259
9.25. Órbita de colisão $\alpha = 34^0$ , $\beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.18$ .....	260
9.26 $C_3$ em função da distância $\alpha = 34^0$ , $\beta = \gamma = 30^0$ e $C_3 = -0.18$ .....	261



## LISTA DE TABELAS

	<b>Pág.</b>
5.1. Variação da energia inicial.....	90
6.1. Movimento direto.....	146
6.2. Movimento retrógrado.....	155
6.3. Movimento direto $\psi = 0^0$ .....	164
6.4. Movimento direto $\psi = 90^0$ .....	173
6.5. Movimento retrógrado $\psi = 0^0$ .....	182
6.6. Movimento retrógrado $\psi = 90^0$ .....	191
7.1. Movimento direto.....	200
7.2. Movimento retrógrado.....	207
7.3. Bi circular movimento direto $\psi = 0^0$ .....	214
7.4 Bi circular movimento direto $\psi = 90^0$ .....	218
7.5. Bi circular movimento retrógrado $\psi = 0^0$ .....	222
7.6 Bi circular movimento retrógrado $\psi = 0^0$ .....	226
7.7. Tabela de comparação.....	231
8.1 Comparação.....	240



# **1 INTRODUÇÃO**

## **1.1. Definição do problema**

Uma captura gravitacional temporária acontece quando uma astronave (ou qualquer partícula com massa desprezível) muda de uma órbita hiperbólica ao redor de um corpo celeste para uma órbita elíptica sem o uso de qualquer força propulsora no sistema. A força responsável para esta mudança na órbita da astronave é a força gravitacional.

Neste trabalho foi feito um estudo numérico de captura gravitacional. Os modelos matemáticos utilizados para analisar o fenômeno de captura gravitacional são o problema de três corpos restrito circular e o problema bi-circular de quatro corpos.

Calculamos órbitas de captura gravitacional para estes modelos, analisamos o tempo de captura gravitacional e encontramos regiões favoráveis para o valor mínimo da energia do veículo espacial com relação à Lua.

Nesta tese usamos o critério de captura gravitacional utilizada por Vieira Neto (1999) e Yamakawa (1992): calculamos utilizando a energia de dois corpos para verificar se uma órbita é ou não de captura gravitacional.

## **1.2 Aplicações de captura gravitacional temporária**

Um caso interessante da aplicação de captura gravitacional é o salvamento da missão espacial japonesa à Lua por Belbruno e Moleiro em junho de 1990.

Em janeiro de 1990 o instituto japonês ISAS lançou duas astronaves em órbitas elípticas em torno da Terra. A menor MUSES-B deveria através de uma transferência de Hohmann ficar em órbita ao redor da Lua.

A comunicação com a MUSES-B foi perdida e sua missão não foi cumprida e a astronave maior MUSES-A ainda estava em órbita ao redor da Terra.

Foi desejado então pelo Instituto ISAS que MUSES-A substitui-se MUSES-B, porém MUSES-A tinha uma variação de velocidade muito pequena aproximadamente 100 metros por segundo, longe do que é necessário para ser colocada em órbita Lunar usando uma transferência Hohmann, isto, porque nunca foi projetada para ir a Lua. Usando captura gravitacional foi salva a missão.

Uma missão espacial que também vai utilizar captura gravitacional é BEPI COLOMBO, esta missão partirá em 2013 em uma viagem que dura aproximadamente

seis anos. Quando chegar a mercúrio em agosto de 2019 suportara temperaturas na ordem de 350 C durante um ano de missão.

### 1.3. Contribuição deste trabalho

Esse trabalho tem algumas contribuições:

**Primeira.** Captura gravitacional para o problema bi-circular de quatro corpos no plano.

**Segunda.** Comparação de captura gravitacional para os problemas bi circular de quatro corpos e o problema de três corpos restrito circular no plano.

**Terceira.** Captura gravitacional no sistema Netuno-Tritão.

**Quarta.** Captura gravitacional para o problema de três corpos restrito circular espacial.

### 1.4. Organização deste trabalho.

Será feito abaixo um resumo do que foi tratado em cada capítulo e indicada as principais referencias bibliográficas para cada um destes capítulos.

No Capítulo dois estudamos o problema de três corpos restrito circular. O problema de três corpos com as duas hipóteses abaixo é chamado de problema de três corpos restrito circular.

Primeira hipótese: Sejam  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  três corpos com massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , respectivamente e supomos que  $m_3$  é muito menor que  $m_1$  e  $m_2$

Segunda hipótese: Admite-se ainda que os corpos  $P_1$  e  $P_2$  se movem em órbitas circulares, e que o corpo  $P_3$  se move no potencial gerado por  $P_1$  e  $P_2$ .

Para este problema escrevemos as equações de movimento nos sistemas fixo e girante assim como a hamiltoniana do sistema. Os dois excelentes textos clássicos onde encontramos esse assunto estão em Szebehely (1967) e Broucke (1968).

No Capítulo três estudamos o problema bi-circular de quatro corpos. Dois corpos massivos se movimentam em órbitas circulares em torno do centro de massa comum. Esses corpos massivos são chamados de primários. Um terceiro corpo massivo se movimenta em órbita circular sobre o centro de massa dos dois primários. Nós estudamos o movimento de um quarto corpo de massa desprezível que se move devido às atrações gravitacionais destes três corpos massivos.

Escrevemos as equações de movimento nos sistemas fixo e girante assim como a hamiltoniana do sistema. Os artigos de Simó, Gómez e Masdemonte (2003), e Castella e Jorba (1999) constituem as referências básicas para este capítulo.

No Capítulo quatro estudamos as órbitas de captura gravitacional no plano. Apresentamos as análises utilizando o problema restrito circular dos três corpos e o problema bi-circular de quatro corpos. Esse capítulo teve como principais referencias as teses de doutoramento de Vieira Neto (1999), o artigo de Machuy, Prado e Stchui (2006) e também a tese de doutoramento de Yamakawa (1998).

No Capítulo cinco estudamos o valor mínimo da energia do veículo espacial com respeito à Lua; esse valor mínimo pode influenciar no consumo mínimo de combustível de uma transferência Terra-Lua. Os dois objetivos deste capítulo são: obter informações que possibilitem o menor consumo de combustível para o veículo espacial numa transferência Terra- Lua e encontrar regiões favoráveis para captura gravitacional para cada um dos modelos matemáticos estudados. A principal fonte de consulta para esse capítulo é o artigo de Machuy, Prado e Stchui (2006).

Nos Capítulos seis e sete estudamos o tempo de captura gravitacional. Definimos como tempo de captura gravitacional o tempo gasto para termos a troca do sinal do valor da energia de dois corpos do veículo espacial com relação à Lua.

Numa missão com o objetivo de transportar seres humanos, medicamentos ou alimentos a uma base Lunar, a análise do tempo mínimo gasto de captura gravitacional pela Lua para executarmos tais missões é relevante.

No Capítulo oito temos uma análise para captura gravitacional do sistema Netuno e Tritão. Neste caso foi feito o cálculo do valor mínimo da energia para o veículo espacial com relação a Tritão e a análise tempo de captura gravitacional para o sistema Netuno – Tritão. Este capítulo é baseado no artigo de Stchui, Solorzano, Prado e Correa (2008).

No Capítulo nove é feita captura gravitacional para o problema de três corpos espacial, a idéia é a mesma utilizada no plano considerando-se agora que o movimento do veículo espacial esta no espaço.



## 2 PROBLEMA DE TRÊS CORPOS RESTRITO CIRCULAR

### 2.1 Introdução

O problema de três corpos restrito é um caso particular do problema de três corpos geral. No problema de três corpos geral há três massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  que atraem uma à outra de acordo com a lei de atração gravitacional de Newton. O problema consiste em determinar o movimento das três massas, como uma função do tempo  $t$ , quando as posições e velocidades iniciais são dadas.

No problema de três corpos restrito uma das massas, digamos  $m_3$ , é infinitamente pequena comparada com as outras duas massas. Com essa hipótese,  $m_3$  move-se no potencial de  $m_1$  e  $m_2$ , mas não perturba o movimento dos dois corpos massivos. No problema restrito, o movimento de  $m_1$  e  $m_2$  ao redor do centro de massa é conhecido e o movimento de  $m_3$  têm que ser determinado como função das condições iniciais.

Os dois excelentes textos clássicos onde encontramos esse assunto são Szebehely (1967) e Broucke (1968).

### 2.2. Problema de três corpos

Consideramos o movimento de três pontos materiais  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . Supondo que os pontos estejam no espaço euclidiano tridimensional, representaremos por  $(x_k, y_k, z_k)$  as coordenadas do ponto  $P_k$ , onde  $1 \leq k \leq 3$ . Definiremos como distância  $r_{k,l}$  entre  $P_k$  e  $P_l$ .

$$r_{k,l}^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2 \quad (2.1)$$

Por conveniência de notação, utilizaremos  $q_k$  para representar  $x_k$ ,  $y_k$  e  $z_k$  quando nos referimos à projeção num dado eixo coordenado. A variável  $q$  descreve uma das nove possíveis coordenadas  $q_k$ , além disso, designaremos por  $m_k$  a massa do ponto descrito por  $q$ .

A função potencial devido à lei de atração Gravitacional de Newton é dada abaixo:

$$U = G \sum \frac{m_k m_l}{r_{k,l}}, k < l \quad (2.2)$$

As equações de movimento do problema de três corpos podem ser escritas na forma abreviada.

$$m\ddot{q} = -U_q \quad (2.3)$$

onde  $U_q$  representa a derivada parcial de  $U$  em relação à  $q$ . As equações de movimento podem também ser escritas como um sistema de seis equações diferenciais de primeira ordem.

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -m^{-1}U_q \end{cases} \quad (2.4)$$

A solução do problema de três corpos consiste na descrição do comportamento global do movimento para condições iniciais arbitrariamente preestabelecidas.

A Figura 2.1 mostra o movimento dos três corpos.

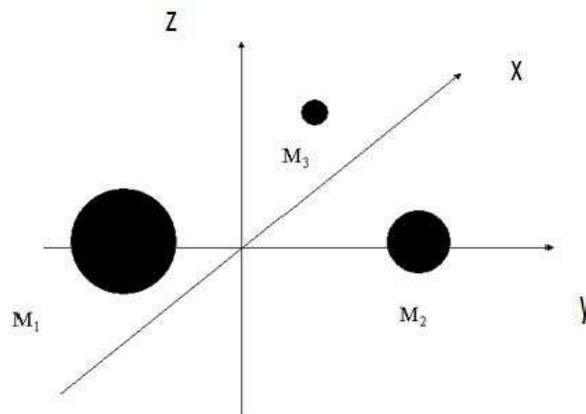


Figura 2.1 Problema de três corpos.

### 2.3. O problema de três corpos restrito circular

O problema de três corpos com as duas hipóteses abaixo é chamado de problema de três corpos restrito circular.

**Primeira hipótese:** Sejam  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  três corpos com massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , respectivamente e supomos que  $m_3$  é muito menor que  $m_1$  e  $m_2$

**Segunda hipótese:** Admite-se ainda que os corpos  $P_1$  e  $P_2$  se movem em órbitas circulares, e que o corpo  $P_3$  se move no potencial gerado por  $P_1$  e  $P_2$ .

**Observação:** Os corpos  $P_1$  e  $P_2$  são chamados primários.

Na Figura 2.2 temos o movimento dos dois primários.

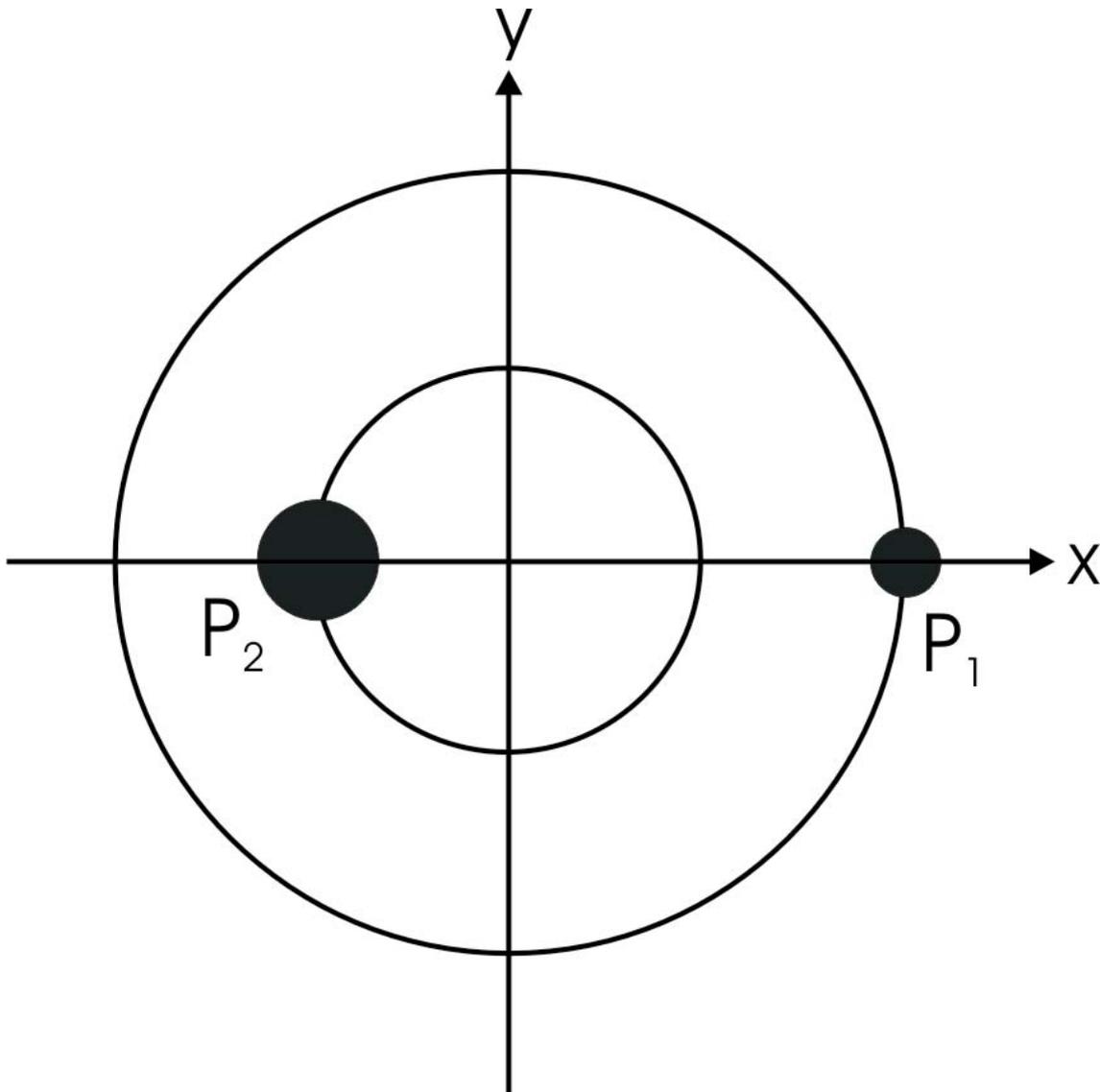


Figura 2.2-Movimento dos corpos primários.

## 2.4. Equações de movimento no sistema de coordenadas fixas

Nesse texto os primários serão a Terra e a Lua. Tornaremos o sistema adimensional, dividindo todas as distâncias pela distância entre os dois primários e as massas serão divididas pela massa total dos dois primários. Além disto, será definido que a velocidade angular do sistema é unitária.

Fornecemos abaixo as massas e distâncias da Terra a Lua.

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg} \quad \text{Massa da Terra.}$$

$$M_L = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg} \quad \text{Massa da Lua.}$$

$$d = 3.844 \times 10^5 \text{ km} \quad \text{Distância Terra-Lua.}$$

Com os dados escritos acima as massas da Terra e Lua no sistema adimensional são dadas por:

Massa da Terra.

$$\mu_E = \frac{M_T}{M_L + M_T} = 0.9878715 \quad (2.5)$$

Massa da Lua.

$$\mu_M = \frac{M_L}{M_L + M_T} = 0.0121506683 \quad (2.6)$$

As circunferências descritas pela Lua e Terra têm raios  $\mu_E$  e  $\mu_M$ , respectivamente.

Sejam  $(\xi, \eta)$   $(\xi_E, \eta_E)$  e  $(\xi_M, \eta_M)$  as coordenadas do veículo espacial, da Terra e da Lua respectivamente. Nestas coordenadas as equações de movimento da Terra e da Lua são:

$$\begin{aligned} \xi_E &= -\mu_M \cos(t) & \xi_M &= \mu_E \cos(t) \\ \eta_E &= -\mu_M \sin(t) & \eta_M &= \mu_E \sin(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Quando substituirmos  $t = 0$ , as posições da Lua e da Terra são respectivamente  $(\mu_E, 0)$  e  $(-\mu_M, 0)$ .

As distâncias do veículo espacial à Lua e à Terra são:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (\xi - \xi_M)^2 + (\eta - \eta_M)^2 \\ r_2^2 &= (\xi - \xi_E)^2 + (\eta - \eta_E)^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

As equações de movimento do veículo espacial no sistema fixo são:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\mu_M \frac{(\xi - \xi_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\xi - \xi_E)}{r_2^3} = -\frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\mu_M \frac{(\eta - \eta_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\eta - \eta_E)}{r_2^3} = -\frac{\partial V}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde a energia potencial é  $V = -\frac{\mu_M}{r_1} - \frac{\mu_E}{r_2}$ .

## 2.5 Hamiltoniana e lagrangiana no sistema fixo

Faremos o cálculo das equações do hamiltoniano no sistema fixo.

**Definição** Seja  $H : K^n \times K^n \rightarrow K$  uma função diferenciável nas variáveis  $(p, q) \in K^n \times K^n$  ( $K$  corpos dos números reais ou complexos). O sistema correspondente é dado pelas  $2n$  equações:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (2.10)$$

onde  $1 \leq i \leq n$ , é chamado de um sistema de equações de Hamilton ou simplesmente equações hamiltonianas, associados à função  $H$  que é denominada a hamiltoniana do sistema. As variáveis  $p$  e  $q$  são chamadas coordenadas canonicamente conjugadas,  $n$  é o número de graus de liberdade do sistema. Podemos escrever as equações de um sistema hamiltoniano na forma compacta:

$$Z = J\dot{V}H(Z) \quad (2.11)$$

onde  $Z = (p, q)$  e  $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ , sendo  $I$  a matriz identidade de ordem  $n$  e  $0$  a matriz nula de ordem  $n$ .

As energias cinética e potencial do veículo espacial no sistema fixo são:

$$E_c = \frac{1}{2}[\xi'^2 + \eta'^2] \quad (2.12)$$

$$-V = +\frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \quad (2.13)$$

A lagrangiana é a diferença entre as energias cinética e potencial do sistema:

$$L = E_c - V = \frac{1}{2}[\xi'^2 + \eta'^2] + \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \quad (2.14)$$

A hamiltoniana é obtida da lagrangiana a partir de uma transformação de Legendre e neste caso é simplesmente a soma das energias cinética e potencial:

$$H = E_c + V = \frac{1}{2}[\xi'^2 + \eta'^2] - \left[\frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2}\right] \quad (2.15)$$

Definimos os momentos canônicos como  $(p_\xi, p_\eta)$ , onde  $p_\xi = \xi'$  e  $p_\eta = \eta'$ . Temos a hamiltoniana escrita em variáveis canonicamente conjugadas.

$$H = E_c + V = \frac{1}{2}[p_\xi^2 + p_\eta^2] - \left[\frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2}\right] \quad (2.16)$$

O sistema Hamiltoniano associado é:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{p}_\xi \\ \dot{p}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \\ -\mu_M \frac{(\xi - \xi_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\xi - \xi_E)}{r_2^3} \\ -\mu_M \frac{(\eta - \eta_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\eta - \eta_E)}{r_2^3} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

## 2.6. Sistema girante

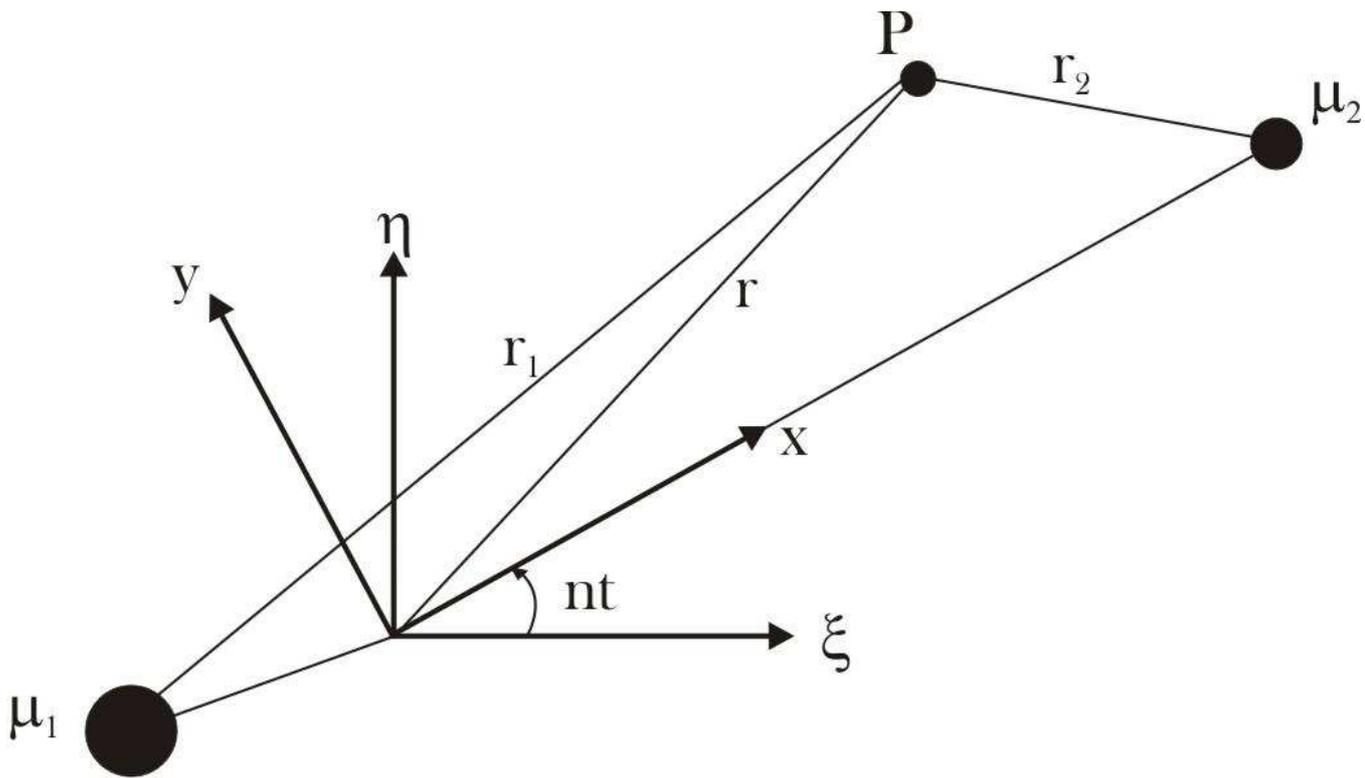


Figura. 2.3 Sistema girante.

Introduzimos agora um sistema de coordenadas girantes (veja Figura 2.3) com origem no centro de massa dos primários com a mesma velocidade angular dos corpos massivos. Sejam  $(x, y)$  as coordenadas do veículo espacial neste sistema dito sinódico.

As equações que convertem as coordenadas do sistema fixo para o girante são:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

**Definição:** As coordenadas  $(x, y)$  são chamadas sinódicas e as coordenadas  $(\xi, \eta)$  são chamadas siderais.

A transformação linear  $T$  é ortogonal,  $T: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$  sendo

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

A transformação inversa é  $T^{-1}: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ , é dada por:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Para o cálculo das equações de movimento do veículo espacial necessitaremos das segundas derivadas das transformações  $T$  e  $T^{-1}$ . A primeira e segunda derivada das transformações  $T$  e  $T^{-1}$  são fornecidas abaixo.

As derivadas da transformação  $T$  são:

$$T' = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{y} \\ x + \dot{y} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$T'' = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} - \dot{x} \\ \dot{y} + 2\dot{x} - y \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

As derivadas da transformação  $T^{-1}$  são:

$$T^{-1}' = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} + \dot{y} \\ -x + \dot{y} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$T^{-1}'' = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} - \dot{x} \\ \dot{y} + 2\dot{x} - y \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

As coordenadas da Lua e da Terra no novo sistema são dadas por  $x_M = \mu_E$ ,  $y_M = 0$ ,  $x_E = -\mu_M$  e  $y_E = 0$ .

As distâncias do veículo espacial a Terra  $r_1$  e a Lua  $r_2$  no novo sistema são:

$$r_1^2 = (x - x_E)^2 + y^2 \quad (2.25)$$

$$r_2^2 = (x - x_M)^2 + y^2 \quad (2.26)$$

As equações de movimento do veículo espacial no sistema sinódico são:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = x - \mu_M \frac{x-x_M}{r_1^3} - \mu_E \frac{x-x_E}{r_2^3} = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = y - \mu_M \frac{y}{r_1^3} - \mu_E \frac{y}{r_2^3} = -\frac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \quad (2.27)$$

O potencial no sistema sinódico é:  $-V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2}$ . O primeiro termo é denominado potencial centrífugo.

## 2.7. Hamiltoniana e lagrangiana no sistema girante.

As energias cinética e potencial do veículo espacial no sistema girante escrevem-se:

$$E_C = \frac{1}{2}[p_x^2 + p_y^2] \quad (2.28)$$

$$-V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \quad (2.29)$$

Sendo  $p_x = \dot{x} - y$  e  $p_y = \dot{y} + x$ . No sistema de coordenadas girantes, a lagrangiana e a hamiltoniana são, respectivamente:

$$L = \frac{1}{2}[(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2] + \left(\frac{1}{2}\right)[x^2 + y^2] + \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \quad (2.30)$$

$$H_{TCRC} = \frac{1}{2}[p_x^2 + p_y^2] - [xp_y - yp_x] - \left[\frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2}\right] \quad (2.31)$$

O sistema hamiltoniano associado é:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{TCRC}}{\partial p_x} \\ \frac{\partial H_{TCRC}}{\partial p_y} \\ -\frac{\partial H_{TCRC}}{\partial x} \\ -\frac{\partial H_{TCRC}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + y \\ p_y - x \\ p_y - \mu_M \frac{(x-x_M)}{r_1^{3/2}} - \mu_E \frac{(y-y_E)}{r_2^{3/2}} \\ -p_x - \mu_M \frac{y}{r_1^{3/2}} - \mu_E \frac{y}{r_2^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

## 2.8 Equações de movimento para o problema espacial no sistema fixo

As circunferências descritas pela Lua e pela Terra tem raios  $\mu_E$  e  $\mu_M$ , respectivamente. Sejam  $(\xi, \eta, \psi)$ ,  $(\xi_E, \eta_E, \psi_E)$  e  $(\xi_M, \eta_M, \psi_M)$  as coordenadas do veículo espacial, Terra e Lua, respectivamente.

Abaixo fornecemos as equações de movimento da Terra e Lua:

$$\begin{aligned} \xi_E &= -\mu_M \cos(t) & \eta_E &= -\mu_E \sin(t) & \psi_E &= 0 \\ \xi_M &= \mu_E \cos(t) & \eta_M &= \mu_E \sin(t) & \psi_M &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

As equações de movimento do veículo espacial no sistema sideral são:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\frac{\mu_M}{r_1^3} (\xi - \xi_M) - \frac{\mu_E}{r_2^3} (\xi - \xi_E) \\ \ddot{\eta} &= -\frac{\mu_M}{r_1^3} (\eta - \eta_M) - \frac{\mu_E}{r_2^3} (\eta - \eta_E) \\ \ddot{\psi} &= -\frac{\mu_M}{r_1^3} \psi - \frac{\mu_E}{r_2^3} \psi \end{aligned} \quad (2.34)$$

Onde  $r_1$  e  $r_2$  são as distâncias do veículo espacial à Lua e à Terra, respectivamente:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (\xi - \xi_M)^2 + (\eta - \eta_M)^2 + \psi^2 \\ r_2^2 &= (\xi - \xi_E)^2 + (\eta - \eta_E)^2 + \psi^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.9 Hamiltoniana e lagrangiana no sistema fixo no espaço

Abaixo são fornecidas, respectivamente, a lagrangiana e a hamiltoniana no sistema de coordenadas fixo para o problema de três corpos restrito circular espacial.

$$L = E_c - V = \frac{1}{2} [\dot{\xi}'^2 + \dot{\eta}'^2 + \dot{\psi}'^2] + \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \quad (2.36)$$

$$H = E_c + V = \frac{1}{2} [\dot{\xi}'^2 + \dot{\eta}'^2 + \dot{\psi}'^2] - \left[ \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \right] \quad (2.37)$$

Definimos os momentos canônicos como  $(p_\xi, p_\eta, p_\psi)$ , onde  $p_\xi = \dot{\xi}'$ ,  $p_\eta = \dot{\eta}'$  e  $p_\psi = \dot{\psi}'$ . Temos a Hamiltoniana:

$$H = E_c + V = \frac{1}{2}[p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\psi^2] - \left[\frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2}\right] \quad (2.38)$$

O sistema Hamiltoniano associado é:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p}_\xi \\ \dot{p}_\eta \\ \dot{p}_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \\ p_\psi \\ -\mu_M \frac{(\xi - \xi_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\xi - \xi_E)}{r_2^3} \\ -\mu_M \frac{(\eta - \eta_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\eta - \eta_E)}{r_2^3} \\ -\mu_M \frac{(\psi - \psi_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\psi - \psi_E)}{r_2^3} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

## 2.10. Equações de movimento para o problema espacial no sistema girante

Chamaremos de  $(x_g, y_g, z_g)$  as coordenadas do veículo espacial no sistema sinódico. As equações que convertem as coordenadas do sistema fixo para o girante são:

$$\begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

As coordenadas para a Terra e a Lua no sistema sinódico são dadas abaixo:

$$\begin{aligned} x_E &= -\mu_M & y_E &= 0 & z_E &= 0 \\ x_M &= \mu_E & y_M &= 0 & z_M &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

As distâncias  $r_1$  e  $r_2$  do veículo espacial à Lua e à Terra no novo sistema de coordenadas são:

$$r_1^2 = (x - x_M)^2 + y^2 + z^2 \quad (2.42)$$

$$r_2^2 = (x - x_E)^2 + y^2 + z^2 \quad (2.43)$$

A seguir, é feito o cálculo da primeira e da segunda derivada da transformação de coordenadas do sistema fixo para o girante. Objetivamos obter as equações de movimento do veículo espacial.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_g - y_g \\ x_g + \dot{y}_g \\ \dot{z}_g \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_f \\ \ddot{y}_f \\ \ddot{z}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_g - 2\dot{y}_g - x_g \\ \ddot{y}_g + 2\dot{x}_g - y_g \\ \ddot{z}_g \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Com esta transformação de variáveis as equações de movimento do veículo espacial no sistema girante passam a ser:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}(x - x_M) - \frac{\mu_E}{r_2^3}(x - x_E) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}y - \frac{\mu_E}{r_2^3}y \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}z - \frac{\mu_E}{r_2^3}z \end{aligned} \quad (2.46)$$

## 2.11 Hamiltoniana e lagrangiana no sistema girante no espaço

As energias cinética e potencial do veículo espacial no sistema girante são, respectivamente:

$$E_C = \frac{1}{2}[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] \quad (2.47)$$

$$-V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \quad (2.48)$$

Sendo  $\dot{x} - y = p_x$ ,  $\dot{y} + x = p_y$  e  $\dot{z} = p_z$ . No sistema de coordenadas girantes, a lagrangiana e a hamiltoniana são, respectivamente:

$$L = \frac{1}{2}[(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2] + \left(\frac{1}{2}\right)[x^2 + y^2] + \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \quad (2.49)$$

$$H = \frac{1}{2}[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] - [xp_y - yp_x] - \left[\frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2}\right] \quad (2.50)$$

O sistema hamiltoniano associado é:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \frac{\partial H}{\partial p_z} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \\ -\frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + y \\ p_y - x \\ p_z \\ p_y - \mu_M \frac{(x-x_M)}{r_1^{3/2}} - \mu_E \frac{(y-y_E)}{r_2^{3/2}} \\ -p_x - \mu_M \frac{y}{r_1^{3/2}} - \mu_E \frac{y}{r_2^{3/2}} \\ -\mu_M \frac{z}{r_1^{3/2}} - \mu_E \frac{z}{r_2^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$



### 3 O PROBLEMA BI-CIRCULAR

#### 3.1. Introdução

Neste Capítulo estudaremos um caso particular do problema de quatro corpos, que pode ser considerado como uma perturbação do problema de três corpos restrito circular. Dois corpos massivos se movimentam em órbitas circulares em torno do centro de massa comum. Esses corpos massivos são chamados de primários. Um terceiro corpo massivo se movimenta em órbita circular em torno do centro de massa dos dois primários. Nós estudamos o movimento de um quarto corpo de massa desprezível que se move devido às atrações gravitacionais destes três corpos massivos. Este problema é um modelo do movimento de uma partícula ou veículo espacial no sistema Sol - Terra - Lua.

O artigo “The Bicircular model near the triangular libration points of the RTBP” escrito por Simó, Gomez e Masdemonte, (1995) e o artigo “On the vertical families of two-dimensional tori near the triangular points of bicircular problem” escrito por Castella e Jorba (1999) contituem as referências para este capítulo.

#### 3.2. O problema de quatro corpos

Consideremos o movimento de quatro pontos materiais  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ . Supondo que os pontos estejam no espaço Euclidiano tridimensional, representaremos por  $(x_k, y_k, z_k)$  as coordenadas dos pontos. Definiremos como  $r_{k,l}$  a distância entre  $P_k$  e  $P_l$ .

$$r_{k,l}^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2 \quad (3.1)$$

Por conveniência de notação, utilizaremos  $q_k$  para representar  $x_k, y_k$  e  $z_k$  quando nos referimos à projeção num dado eixo coordenado. O  $q$  descreve uma das doze possíveis coordenadas  $q_k$ . Além disso, designaremos por  $m_k$  a massa do ponto descrito por  $q$ .

A função potencial pela lei de atração gravitacional de Newton é dada abaixo:

$$U = G \sum \frac{m_k m_l}{r_{k,l}}, k < l \quad (3.2)$$

As equações de movimento do problema de quatro corpos podem ser escritas na forma abreviada:

$$m\ddot{q} = -U_q \quad (3.3)$$

Onde  $U_q$  representa a derivada parcial de  $U$  em relação à  $q$ . As equações de movimento podem também ser escritas como um sistema de oito equações diferenciais de primeira ordem.

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -m^{-1}U_q \end{cases} \quad (3.4)$$

A solução do problema de quatro corpos consiste na descrição do comportamento global do movimento para condições iniciais arbitrariamente preestabelecidas.

### 3.3. O problema bi-circular

O problema de quatro corpos com as duas hipóteses abaixo é chamado de problema **bi-circular**.

**Primeira hipótese:** Sejam  $P_1$  e  $P_2$  os dois primários, ambos em órbitas circulares em torno do centro de massa comum;

**Segunda hipótese:** O terceiro primário está em órbita circular em torno do centro de massa do sistema formado pelos dois primários  $P_1$  e  $P_2$ .

O quarto corpo tem massa muito menor que os outros corpos e pode ser um satélite, um veículo espacial ou uma partícula. A Figura 3.1 mostra o movimento dos três corpos primários, considerando estes corpos em um sistema no plano. Na figura 3.1 o ângulo  $\psi$  determina a posição inicial do terceiro primário. Consideramos os outros dois primários no mesmo eixo.

Neste trabalho os dois primeiros primários serão Terra e Lua e o terceiro o Sol. Observamos pela definição acima que o Sol influencia o movimento do corpo de massa desprezível, mas não perturba o movimento dos corpos primários, isto é, não afeta o movimento da Terra e da Lua.

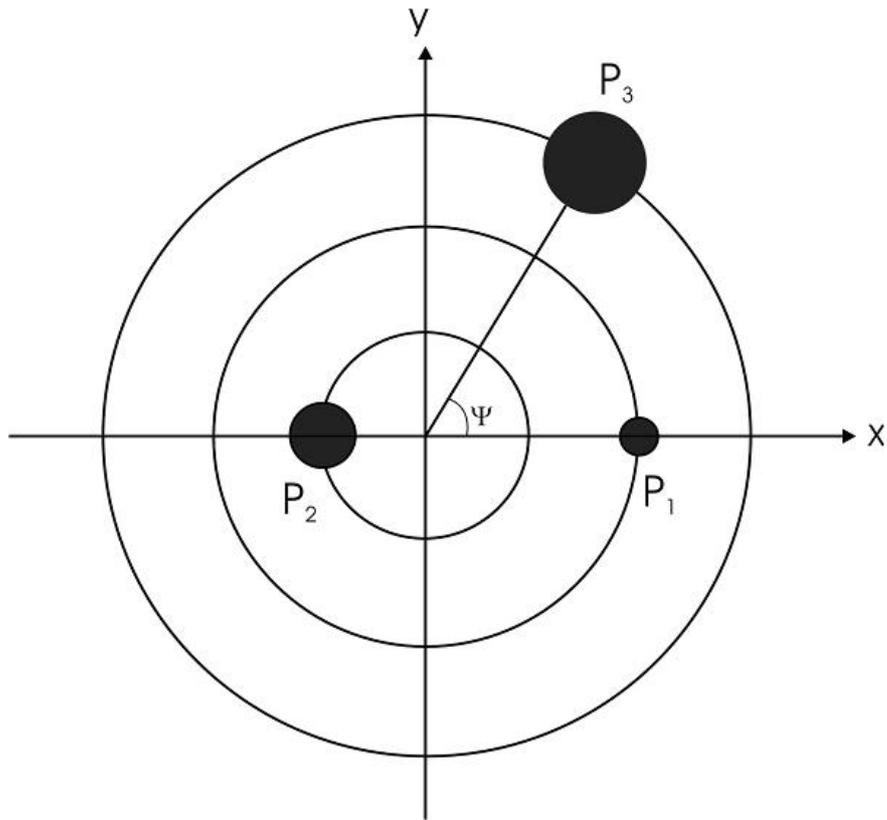


Figura 3.1. Movimento dos primários.

### 3.4. Equações de movimento do problema bi circular no plano

Nas equações de movimento, tornaremos o sistema adimensional, como foi feito no capítulo 2, isto é, dividindo todas as distâncias pela distância entre os dois primeiros primários e as massas serão divididas pela soma das massas dos dois primeiros primários. Além disto, será definido que a velocidade angular do sistema é unitária. Abaixo calcularemos as equações de movimento no sistema fixo e no sistema girante.

#### 3.4.1 Sistema fixo ou inercial.

Fornecemos abaixo a massa do Sol e sua distância à Terra.

$$M_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Massa do Sol.

$$d = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$$

Distância Terra - Sol.

Com os dados escritos acima as massas da Terra, Lua e Sol no sistema adimensional são dadas por:

$$\text{Massa da Terra } \mu_E = \frac{M_T}{M_L + M_T} = 0.9878715 \quad (3.5)$$

$$\text{Massa da Lua } \mu_M = \frac{M_L}{M_L + M_T} = 0.0121506683 \quad (3.6)$$

$$\text{Massa do Sol } \mu_S = \frac{M_S}{M_T + M_L} = 328900.48 \quad (3.7)$$

As circunferências descritas pela Lua e pela Terra têm raios  $\mu_E$  e  $\mu_M$ , respectivamente. Sejam  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi_E, \eta_E)$ ,  $(\xi_M, \eta_M)$  e  $(\xi_S, \eta_S)$  as coordenadas da partícula, Terra, Lua e Sol, respectivamente. Abaixo fornecemos as equações de movimento da Terra, Lua e Sol:

$$\begin{aligned} \xi_E &= -\mu_M \cos(t) & \eta_E &= -\mu_M \sin(t) \\ \xi_M &= \mu_E \cos(t) & \eta_M &= \mu_E \sin(t) \\ \xi_S &= R_S \cos(\psi) & \eta_S &= R_S \sin(\psi) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\psi = \psi_0 + \omega_S t \quad (3.9)$$

Onde  $R_S = 389.1723985$  e  $\omega_S = 0.07480133$  são, respectivamente, o raio do círculo descrito pelo Sol e a velocidade angular do Sol. E para esse problema bi-circular que estudaremos captura gravitacional temporária.

Para obter o valor de  $R_S$  é necessário calcular a distância do Sol a baricentro do sistema Terra-Lua;  $\omega_S$  é obtido pela fórmula  $R_S^3 \omega_S^2 = 1 + M_S$ .

Observamos que quando  $t = 0$ , as posições da Terra, Lua e Sol são:  $(\mu_M, 0)$ ,  $(-\mu_E, 0)$  e  $(R_S \cos(\psi_0), R_S \sin(\psi_0))$ . (Veja figura 3.2).

As equações 3.10, 3.11 e 3.12 fornecem a distância da partícula aos três primários.

Distância da partícula à Lua

$$r_1^2 = (\xi - \xi_M)^2 + (\eta - \eta_M)^2 \quad (3.10)$$

Distância da partícula à Terra

$$r_2^2 = (\xi - \xi_E)^2 + (\eta - \eta_E)^2 \quad (3.11)$$

Distância da partícula ao Sol:

$$r_3^2 = (\xi - \xi_S)^2 + (\eta - \eta_S)^2 \quad (3.12)$$

Temos então as equações de movimento da partícula no sistema inercial:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\mu_M \frac{(\xi - \xi_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\xi - \xi_E)}{r_2^3} - \mu_S \frac{(\xi - \xi_S)}{r_3^3} \\ \ddot{\eta} &= -\mu_M \frac{(\eta - \eta_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\eta - \eta_E)}{r_2^3} - \mu_S \frac{(\eta - \eta_S)}{r_3^3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

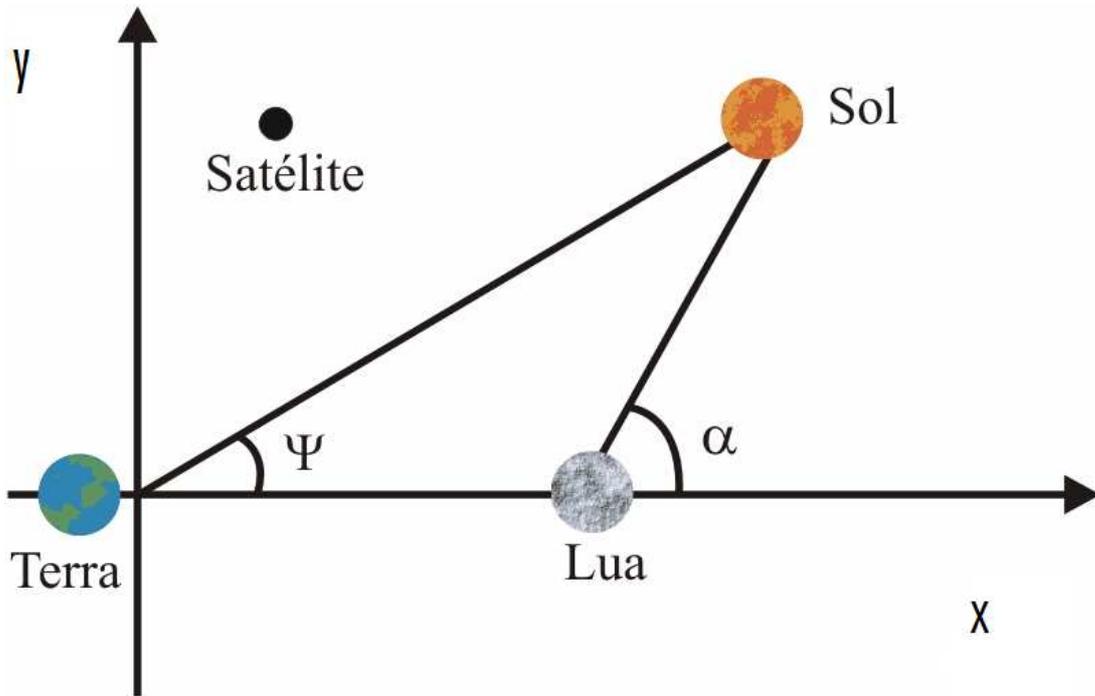


Figura 3.2. Primários Terra, Lua e Sol, no problema bi-circular.

### 3.5. Hamiltoniana e lagrangiana do problema bi-circular no sistema de coordenadas fixo ou inercial

As energias cinética e potencial do veículo espacial no sistema inercial são, respectivamente:

$$E_C = \frac{1}{2}[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2] \quad (3.14)$$

$$V = -\frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} \quad (3.15)$$

A lagrangiana é dada pela diferença entre as energias cinética e potencial, isto é,

$$L = E_C - V = \frac{1}{2}[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2] + \frac{\mu_E}{r_1} + \frac{\mu_M}{r_2} + \frac{\mu_S}{r_3} \quad (3.16)$$

A hamiltoniana do sistema como já mencionamos antes é para este sistema a soma entre as energias cinética e potencial.

$$H = E_C + V = \frac{1}{2}[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2] - \frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} \quad (3.17)$$

Fazendo a troca de variáveis  $\dot{\xi} = p_\xi$  e  $\dot{\eta} = p_\eta$ , a Hamiltoniana passa a ser:

$$H = E_C + V = \frac{1}{2}[p_\xi^2 + p_\eta^2] - \frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} \quad (3.18)$$

O sistema hamiltoniano associado à hamiltoniana acima é:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{p}_\xi \\ \dot{p}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_\xi} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\eta} \\ -\frac{\partial H}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial H}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \\ -\frac{\partial V}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial V}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

### 3.6. Problema bicircular no sistema girante ou sinódico

Introduziremos um sistema de coordenadas girantes sobre o centro de massa do sistema Terra-Lua com a mesma velocidade angular dos primários. Sejam  $(x, y)$  as coordenadas do veículo espacial neste sistema sinódico.

Analogamente ao que foi feito no capítulo 2, a transformação linear  $T, T: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$  que leva do sistema girante para o fixo é

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

A transformação inversa é  $T^{-1}: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ , que leva as coordenadas do sistema fixo para o girante, é dada por:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

As coordenadas dos quatro corpos, isto é, Terra, Lua, Sol e veículo espacial são fornecidas abaixo:

Terra,  $(x_E, y_E) = (-\mu_M, 0)$ .

Lua,  $(x_M, y_M) = (\mu_E, 0)$ .

Sol,  $(x_S, y_S) = (R_S[\cos((1 - \omega_S)t - \psi_0)], -R_S[\sin((1 - \omega_S)t - \psi_0)])$ .

Veículo espacial,  $(x, y)$ .

Observamos que  $1 - \omega_S$  é a velocidade angular do Sol no sistema sinódico.

As três distâncias no sistema sinódico passam a ser:

Distância do veículo espacial a Terra:

$$r_1^2 = (x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 \quad (3.22)$$

Distância do veículo espacial à Lua:

$$r_2^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 \quad (3.23)$$

Distância do veículo espacial ao Sol.

$$r_3^2 = (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 \quad (3.24)$$

Procedendo como no capítulo dois, as equações de movimento do veículo espacial no sistema sinódico são:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\mu_E \frac{(x-x_E)}{r_1^3} - \mu_M \frac{(x-x_M)}{r_2^3} - \mu_S \frac{(x-x_S)}{r_3^3} - \frac{\cos((1-\omega_S)t-\psi_0)}{R_S^2} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\mu_E \frac{(y-y_E)}{r_1^3} - \mu_M \frac{(y-y_M)}{r_2^3} - \mu_S \frac{(y-y_S)}{r_3^3} - \frac{\sin((1-\omega_S)t-\psi_0)}{R_S^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comparando as equações de movimento do veículo espacial do problema bi-circular no sistema girante com as equações do problema de três corpos restrito circular é fácil ver que estas são uma perturbação das equações do capítulo dois.

### 3.7. Hamiltoniana e lagrangiana do problema bi-circular no plano com sistema de coordenadas girante

As energias cinética e potencial do veículo espacial no sistema girante são, respectivamente:

$$E_C = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] + \frac{1}{2}[x^2 + y^2] + y\dot{x} - x\dot{y} \quad (3.26)$$

$$V = -\frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} - \frac{\mu_S}{R_S^2} [y \sin((1 - \omega_S)t - \psi_0) - x \cos((1 - \omega_S)t - \psi_0)] \quad (3.27)$$

A lagrangiana é dada pela diferença entre as energias cinética e potencial, isto é,

$$L = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] + \frac{1}{2}[x^2 + y^2] + y\dot{x} - xy + \frac{\mu_E}{r_1} + \frac{\mu_M}{r_2} + \frac{\mu_S}{r_3} + \frac{\mu_S}{R_S^2} [y \sin((1 - \omega_S)t - \psi_0) - x \cos((1 - \omega_S)t - \psi_0)] \quad (3.28)$$

A Hamiltoniana correspondente é:

$$H_{BC} = \frac{1}{2}[p_x^2 + p_y^2] + \frac{1}{2}[x^2 + y^2] + yp_x - xp_y - \frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} - \frac{\mu_S}{r_3} - \frac{\mu_S}{R_S^2} [y \sin((1 - \omega_S)t - \psi_0) - x \cos((1 - \omega_S)t - \psi_0)] \quad (3.29)$$

Como anteriormente  $p_x = \dot{x} - y$  e  $p_y = \dot{y} + x$ .

O sistema hamiltoniano gerado é:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_{BC}}{\partial p_x} \\ \frac{\partial H_{BC}}{\partial p_y} \\ -\frac{\partial H_{BC}}{\partial x} \\ -\frac{\partial H_{BC}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + y \\ p_y - x \\ -x + p_y + \frac{\partial V}{\partial x} \\ -y - p_x + \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

### 3.8. Equações de movimento para o problema espacial no sistema fixo

As circunferências descritas pela Lua Terra e Sol têm raios  $\mu_E$ ,  $\mu_M$  e  $R_S$ , respectivamente. Sejam  $(\xi, \eta, \psi)$   $(\xi_E, \eta_E, \psi_E)$  e  $(\xi_M, \eta_M, \psi_M)$  as coordenadas do veículo espacial, Terra e Lua, respectivamente.

As equações de movimento da Terra, da Lua, e do Sol são:

$$\begin{aligned}\xi_E &= -\mu_M \cos(t) & \eta_E &= -\mu_E \sin(t) & \psi_E &= 0 \\ \xi_M &= \mu_E \cos(t) & \eta_M &= \mu_E \sin(t) & \psi_M &= 0 \\ \xi_S &= R_S \cos(\psi) & \eta_S &= R_S \sin(\psi) & \psi_S &= 0\end{aligned}\tag{3.31}$$

As equações de movimento do veículo espacial no sistema sideral são:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}(\xi - \xi_M) - \frac{\mu_E}{r_2^3}(\xi - \xi_E) - \frac{\mu_S}{r_3^3}(\xi - \xi_S) \\ \ddot{\eta} &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}(\eta - \eta_M) - \frac{\mu_E}{r_2^3}(\eta - \eta_E) - \frac{\mu_S}{r_3^3}(\eta - \eta_S) \\ \ddot{\psi} &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}\psi - \frac{\mu_E}{r_2^3}\psi - \frac{\mu_S}{r_3^3}(\psi - \psi_S) \\ \psi &= \psi_0 + \omega_S t\end{aligned}\tag{3.32}$$

Onde  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são as distâncias do veículo espacial à Lua, à Terra e ao Sol, respectivamente:

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (\xi - \xi_M)^2 + (\eta - \eta_M)^2 + \psi^2 \\ r_2^2 &= (\xi - \xi_E)^2 + (\eta - \eta_E)^2 + \psi^2 \\ r_3^2 &= (\xi - \xi_S)^2 + (\eta - \eta_S)^2 + \psi^2\end{aligned}\tag{3.33}$$

### 3.9. Hamiltoniana e lagrangiana no sistema fixo no espaço

Abaixo são fornecidas a lagrangiana e a hamiltoniana no sistema de coordenadas fixo para o problema de três corpos restrito circular espacial.

$$\begin{aligned}
L &= E_c - V = \frac{1}{2}[\xi'^2 + \eta'^2 + \psi'^2] + \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} + \frac{\mu_S}{r_3} \\
H &= E_c + V = \frac{1}{2}[\xi'^2 + \eta'^2 + \psi'^2] - \left[ \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} + \frac{\mu_S}{r_3} \right]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Definindo os momentos canônicos como  $(p_\xi, p_\eta, p_\psi)$ , onde  $\xi' = p_\xi$ ,  $\eta' = p_\eta$  e  $p_\psi = \psi'$  temos a hamiltoniana:

$$H = E_c + V = \frac{1}{2}[p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\psi^2] - \left[ \frac{\mu_M}{r_1} + \frac{\mu_E}{r_2} \right] \tag{3.35}$$

Então o sistema hamiltoniano associado é:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p}_\xi \\ \dot{p}_\eta \\ \dot{p}_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \\ p_\psi \\ -\mu_M \frac{(\xi - \xi_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\xi - \xi_E)}{r_2^3} \\ -\mu_M \frac{(\eta - \eta_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\eta - \eta_E)}{r_2^3} \\ -\mu_M \frac{(\psi - \psi_M)}{r_1^3} - \mu_E \frac{(\psi - \psi_E)}{r_2^3} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

### 3.10 Equações de movimento para o problema espacial no sistema girante

Chamaremos de  $(x_g, y_g, z_g)$  as coordenadas do veículo espacial no sistema sinódico. As equações que convertem as coordenadas do sistema fixo para o girante são:

$$\begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

As coordenadas para a Terra, para a Lua e para o Sol no sistema sinódico são dadas abaixo:

$$\begin{aligned}
x_E &= -\mu_M & y_E &= 0 & z_E &= 0 \\
x_M &= \mu_E & y_M &= 0 & z_M &= 0 \\
x_S &= R_S[\cos((1 - \omega_S)t - \psi_0)] & y_S &= R_S[\sin((1 - \omega_S)t - \psi_0)] & z_S &= 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

As distâncias  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  do veículo espacial a Lua, a Terra e ao Sol no novo sistema de coordenadas são:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x - x_M)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 &= (x - x_E)^2 + y^2 + z^2 \\ r_3^2 &= (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + z^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Tomando-se como antes a derivada e a segunda derivada da transformação 3.38, as equações de movimento do veículo espacial no sistema girante.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}(x - x_M) - \frac{\mu_E}{r_2^3}(x - x_E) - \mu_S \frac{(x - x_S)}{r_3^2} - \frac{\cos((1 - \omega_S)t - \psi_0)}{R_S^2} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}y - \frac{\mu_E}{r_2^3}y - \mu_S \frac{(y - y_S)}{r_3^3} - \mu_S \frac{(y - y_S)}{r_3^3} - \frac{\sin((1 - \omega_S)t - \psi_0)}{R_S^2} \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu_M}{r_1^3}z - \frac{\mu_E}{r_2^3}z - \frac{\mu_S}{r_3^2}z \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.11. Hamiltoniana e lagrangiana do problema bi-circular espacial no sistema de coordenadas girante

A lagrangeana é:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] + \frac{1}{2}[x^2 + y^2] + y\dot{x} - x\dot{y} + \frac{\mu_E}{r_1} + \frac{\mu_M}{r_2} + \frac{\mu_S}{r_3} \\ &+ \frac{\mu_S}{R_S^2}[y\sin((1 - \omega_S)t - \psi_0) - x\cos((1 - \omega_S)t - \psi_0)] \end{aligned} \quad (3.41)$$

A Hamiltoniana correspondente é:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] + \frac{1}{2}[x^2 + y^2] + yp_x - xp_y - \frac{\mu_E}{r_1} - \frac{\mu_M}{r_2} - \frac{\mu_S}{r_3} \\ &- \frac{\mu_S}{r_3} - \frac{\mu_S}{R_S^2}[y\sin((1 - \omega_S)t - \psi_0) - x\cos((1 - \omega_S)t - \psi_0)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Como anteriormente  $p_x = \dot{x} - y$ ,  $p_y = \dot{y} + x$  e  $p_z = \dot{z}$

## 4. ESTUDO NUMÉRICO DA CAPTURA GRAVITACIONAL NO PLANO

### 4.1 Introdução

O objetivo desse Capítulo é um estudo numérico da captura gravitacional temporária no plano. Usaremos como modelos matemáticos os problemas de três corpos restrito circular e o bi-circular de quatro corpos planos. Consideraremos como corpos primários a Terra e a Lua, no caso do problema de três corpos restrito circular e a Terra, a Lua e o Sol no caso do problema bi-circular de quatro corpos.

A primeira parte deste capítulo é utilizada para a obtenção de órbitas de captura gravitacional temporária para estes dois modelos matemáticos. Na segunda parte deste Capítulo obtemos resultados numéricos, calculando órbitas diretas, retrógradas, limitadas, etc. Na terceira parte é feita uma comparação entre os dois modelos matemáticos estudados. Sendo assim, o estudo desse modelo equivale a fazer uma análise do efeito do Sol nas trajetórias dos veículos espaciais.

### 4.2 O problema de dois corpos

Para estudar órbitas de captura gravitacional é necessário usar alguns conceitos básicos do problema de dois corpos que descreveremos em seguida.

Chamaremos de  $C_3$  o dobro da soma das energias cinética e potencial do problema de dois corpos entre o veículo espacial e a Lua, isto é:

$$C_3 = V^2 - 2 \frac{\mu_M}{r} \quad (4.1)$$

onde  $r$  e  $V$  são, respectivamente, a distância e a velocidade do veículo espacial em relação à Lua, e  $\mu_M$  é a massa adimensional da Lua.

Se considerarmos apenas dois corpos (Lua e veículo espacial),  $C_3$  é constante se a única força for a atração gravitacional dos dois corpos envolvidos e se eles forem tratados como pontos de massa. Descrevemos as órbitas do veículo espacial para valores de  $C_3$ , conforme a classificação:

- i) Caso  $C_3 > 0$  as órbitas são hiperbólicas,
- ii) Caso  $C_3 = 0$  as órbitas são parabólicas,
- iii) Caso  $C_3 < 0$  as órbitas são elípticas.

### 4.3. Captura gravitacional

Como já vimos,  $C_3$  é o dobro da energia de dois corpos do sistema Lua-veículo espacial. Ao contrário do que ocorre no problema de dois corpos,  $C_3$  não é constante nos problemas de três corpos restrito circular e bi-circular de quatro corpos. Então, para algumas condições iniciais, o veículo espacial pode alterar o sinal de sua energia de positivo para negativo ou de negativo para positivo. Quando a variação é de positivo para negativo, chamamos de órbita de captura gravitacional. A situação oposta, quando a energia muda de negativo para positivo, é chamada de “fuga” gravitacional ou escape. Para estudar esse problema, o integrador numérico utilizado foi um Runge-Kutta de quarta ordem de passo fixo para estudos preliminares. Os resultados aqui apresentados são obtidos com um Runge-Kutta 7-8 de passo variável. Observamos que os resultados obtidos nos dois integradores coincidem, sendo a diferença a velocidade de execução: a Runge-Kutta 7-8 desenvolvido por Charles Simó é otimizado e muito mais veloz. Ambos os integradores foram implementados na linguagem computacional Fortran.

Integramos as equações de movimento do veículo espacial no sistema sideral para cada um dos modelos. Em seguida aplicamos uma rotação e obtemos o movimento do veículo espacial no sistema sinódico (veja Capítulos 2 e 3).

Explicaremos abaixo como são escolhidas as condições iniciais para a integração, isto é, a posição e a velocidade inicial do veículo espacial.

#### **Posição inicial**

O ponto de partida de cada trajetória do veículo espacial fica a uma distância de 100 km da superfície da Lua ( $r_p = 1838 \text{ km}$ , a partir do centro da Lua), e está situada no periluna. Para especificar completamente a posição inicial é necessário conhecer o valor de mais uma variável. A variável usada é o ângulo  $\alpha$ , sendo esta a posição do periluna. Este ângulo é medido a partir da linha Terra-Lua, no sentido anti-horário, a partir do lado oposto a terra.

#### **Velocidade inicial**

A magnitude da velocidade inicial  $V$  é calculada a partir do valor de  $C_3 = V^2 - 2 \frac{\mu_M}{r}$ . A direção do vetor velocidade do veículo é escolhida como sendo perpendicular à linha que une o veículo espacial ao centro da Lua, apontando na direção anti-horária para as órbitas diretas e na direção horária para as órbitas retrógradas. Esta convenção será usada ao longo de todo esse trabalho.

A Figura 4.1 mostra o ponto P, onde o veículo espacial escapa da esfera de influência. O ângulo que define este ponto é chamado de ângulo da posição de entrada e é descrito pela letra grega  $\beta$ .

Observa-se que, na integração numérica, o passo de tempo é negativo, portanto as condições iniciais são na realidade as condições finais da órbita após a captura. O vetor posição é perpendicular ao vetor velocidade.

### Coordenadas do veículo espacial nos sistemas fixo e girante

Coordenadas do veículo espacial com respeito ao centro de massa dos dois primários, para as órbitas diretas, vetor posição  $P = (x, y)$  vetor velocidade  $V = (v_x, v_y)$  onde:

$$\begin{aligned} x &= r_p \cos(\alpha) + \mu_E \\ y &= r_p \sin(\alpha) \\ v_x &= -V \sin(\alpha) \\ v_y &= V \cos(\alpha) + \mu_E \end{aligned} \quad \text{Sistema sideral} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} x &= r_p \cos(\alpha) + \mu_E \\ y &= r_p \sin(\alpha) \\ v_x &= (-V + r_p) \sin(\alpha) \\ v_y &= (V - r_p) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad \text{Sistema sinódico} \quad (4.3)$$

Coordenadas do veículo espacial com respeito ao centro de massa dos dois primários, para as órbitas retrógradas, vetor posição  $P = (x, y)$ , vetor velocidade  $V = (v_x, v_y)$  onde:

$$\begin{aligned} x &= r_p \cos(\alpha) + \mu_E \\ y &= r_p \sin(\alpha) \\ v_x &= V \sin(\alpha) \\ v_y &= -V \cos(\alpha) + \mu_E \end{aligned} \quad \text{Sistema sideral} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} x &= r_p \cos(\alpha) + \mu_E \\ y &= r_p \sin(\alpha) \\ v_x &= (V - r_p) \sin(\alpha) \\ v_y &= -(V + r_p) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad \text{Sistema sinódico} \quad (4.5)$$

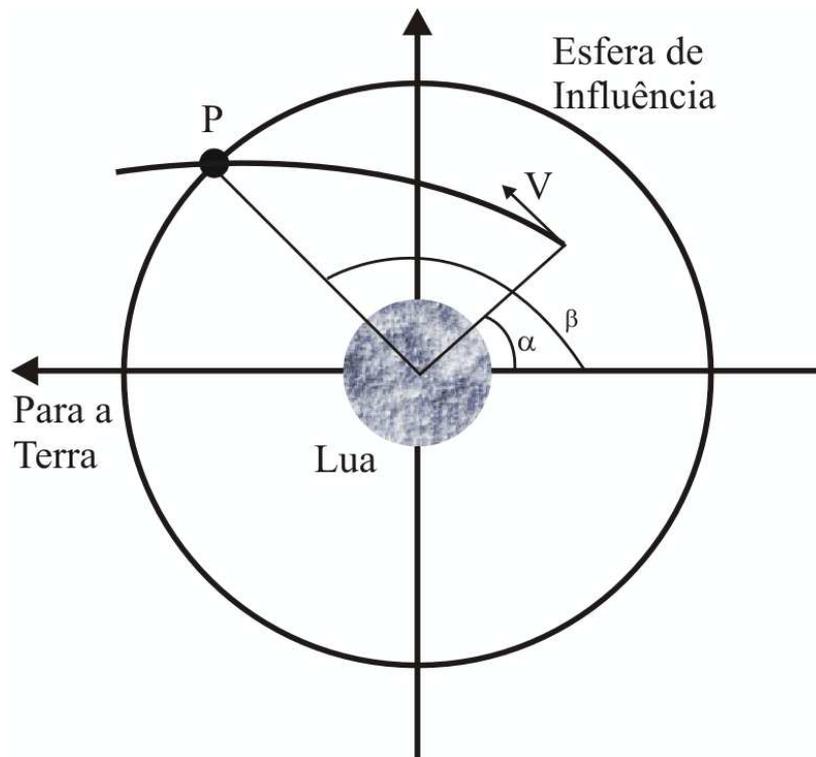


Figura 4.1 Condições iniciais.

### **Captura gravitacional**

Utilizamos dois testes numéricos para podermos classificar uma órbita do veículo espacial como sendo de captura gravitacional temporária ou não.

#### **A) Primeiro teste numérico**

A esfera com raio 100000 km. na Figura 4.1 é chamada esfera de influência.

A órbita é considerada de captura gravitacional temporária quando o veículo espacial alcança a distância de 100000 km (0.26 unidades adimensionais), isto é, cruza a esfera de influência num tempo inferior a 50 dias (aproximadamente 12 unidades canônicas). Esta distância 100000 km é medida a partir do centro da Lua,

#### **B) Segundo teste numérico**

Uma órbita de captura gravitacional temporária ocorre quando existe a mudança do sinal da energia do veículo espacial com relação à Lua, isto é, a energia passa de positiva para negativa. Em termos de tipos de órbitas, saímos de uma órbita hiperbólica e passamos para uma órbita elíptica. A situação oposta, quando a energia muda de negativo para positivo, é chamada de “fuga” gravitacional ou escape.

#### 4.4. Alguns resultados para o problema de três corpos restrito circular

Calcularemos uma órbita de captura direta e outra retrógrada e uma órbita limitada para o problema de três corpos restrito circular (o gráfico da órbita é feito no sistema sinódico). Chamaremos uma órbita de limitada quando o valor de  $C_3$  fica negativo durante toda a integração.

Na Figura 4.2 temos uma órbita de captura direta para o problema de três corpos restrito circular no plano. As condições iniciais são dadas por  $\alpha = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.10$ .

Definimos como tempo de captura gravitacional para o primeiro teste, o tempo gasto entre o momento da entrada do veículo espacial na esfera de influência gravitacional até o momento que o veículo espacial chega na posição escolhida para a periluna.

Para o segundo teste o tempo de captura é determinado quando existe a troca do sinal do valor da energia.

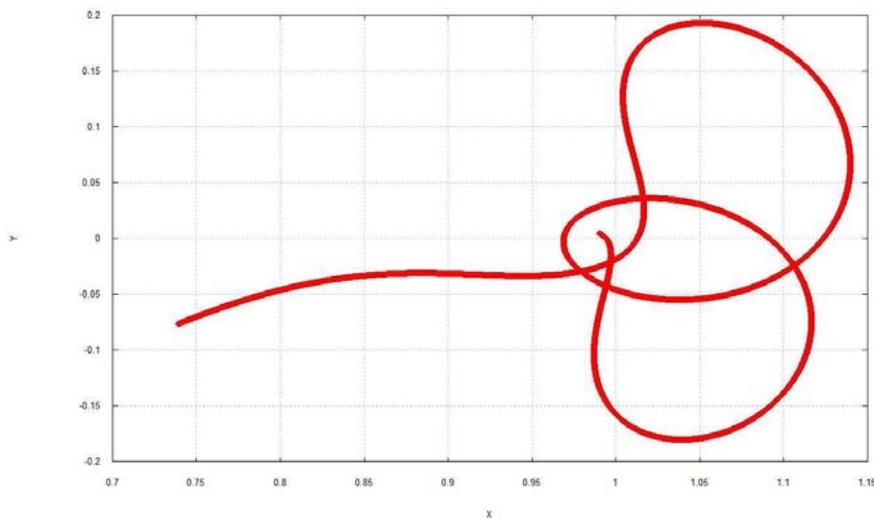


Figura 4.2 Órbita de captura direta.  $\alpha = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.10$ .

Observamos na Figuras 4.3 que o valor de  $C_3$  troca de sinal negativo para positivo, caracterizando uma captura gravitacional. Nesta Figura,  $C_3$  é fornecido em unidades adimensionais e o tempo é fornecido em dias. Adotaremos essas unidades de tempo e  $C_3$  em todos os gráficos. O gráfico da Figura 4.4 mostra que a órbita fica presa na esfera de influência aproximadamente dezenove dias. A distância entre o veículo espacial e a Lua é fornecida em km em todos os gráficos desse capítulo.

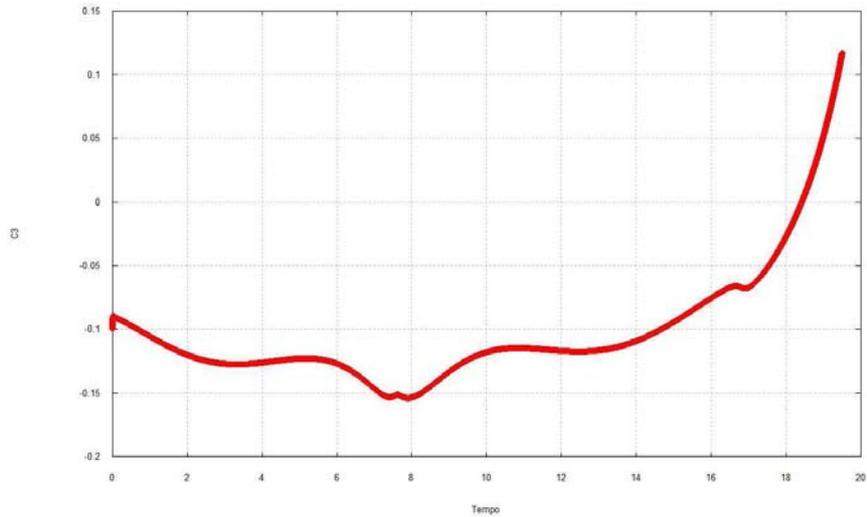


Figura 4.3  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.10$ .

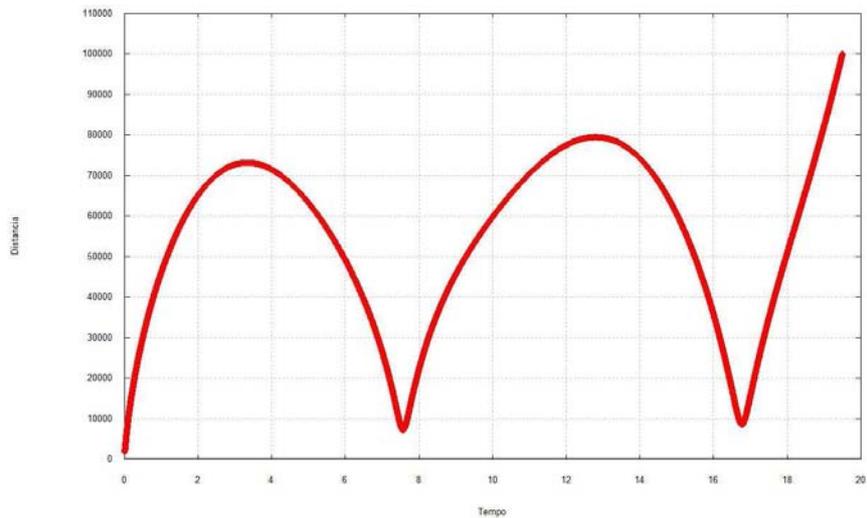


Figura 4.4 Distância em função do tempo.  $\alpha = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.10$ .

Na Figura 4.5 temos uma órbita de captura retrógrada para o problema de três corpos restrito circular no plano. As condições iniciais são dadas por  $\alpha = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.10$ .

Na Figura 4.6 temos  $C_3$  em função do tempo. A energia troca de sinal em aproximadamente 19 dias. A órbita fica dentro da esfera de influência aproximadamente quatorze dias como pode ser observado na Figura 4.7.

Observamos que os dois testes numéricos fornecem o mesmo tipo de órbita, isto é, ambos os teste verificam que a órbita é de captura gravitacional temporária. Notamos que o tempo de captura gravitacional é diferente nos dois testes.

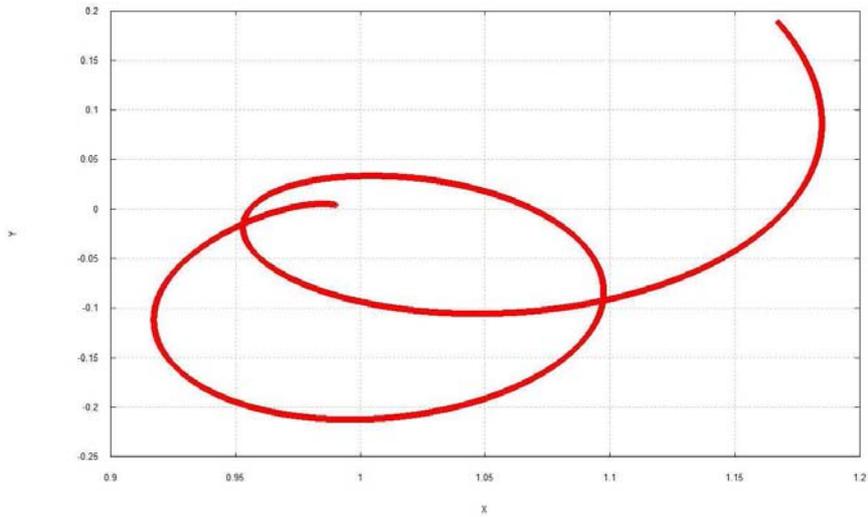


Figura 4.5 Órbita de captura retrógrada  $\alpha = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.10$ .

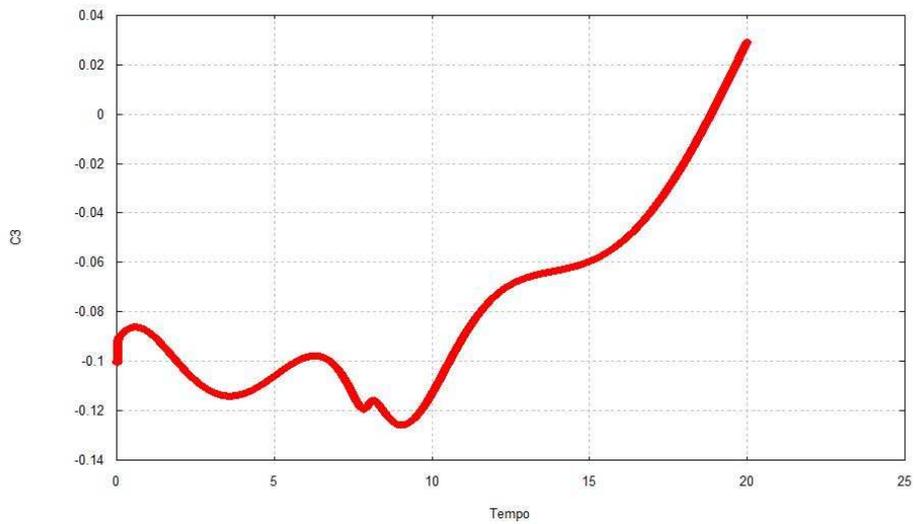


Figura 4.6  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.10$ .

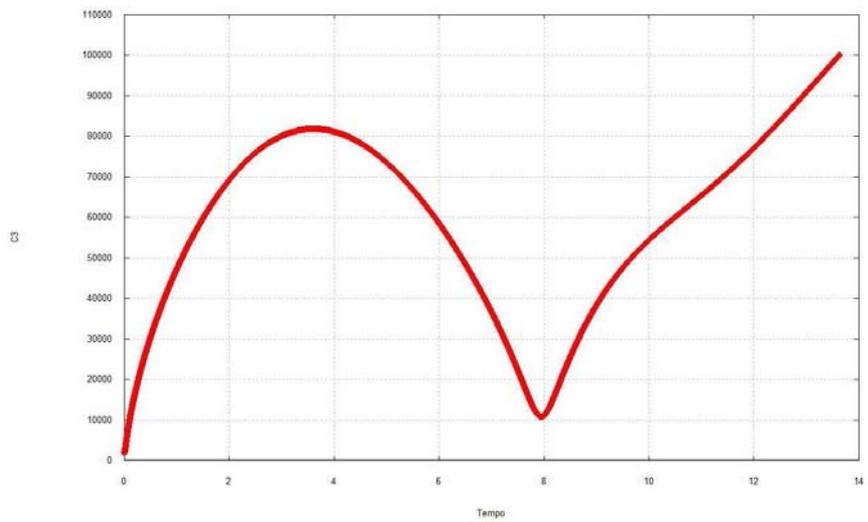


Figura 4.7 Distância em função do tempo.  $\alpha = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.10$ .

A Figura 4.8 é uma órbita limitada para o problema de três corpos restrito circular. As condições iniciais são  $\alpha = 90^0$  e  $C_3 = -0.20$ . Na Figura 4.9 temos  $C_3$  em função do tempo. Observamos que não existe troca de sinal de  $C_3$ . Essa órbita é uma órbita retrógrada. No caso da órbita direta com as mesmas condições iniciais ocorre colisão do veículo espacial com a Lua.

Observamos no gráfico da Figura 4.10 que o veículo espacial **não** sai da esfera de influência durante os 50 dias de integração.

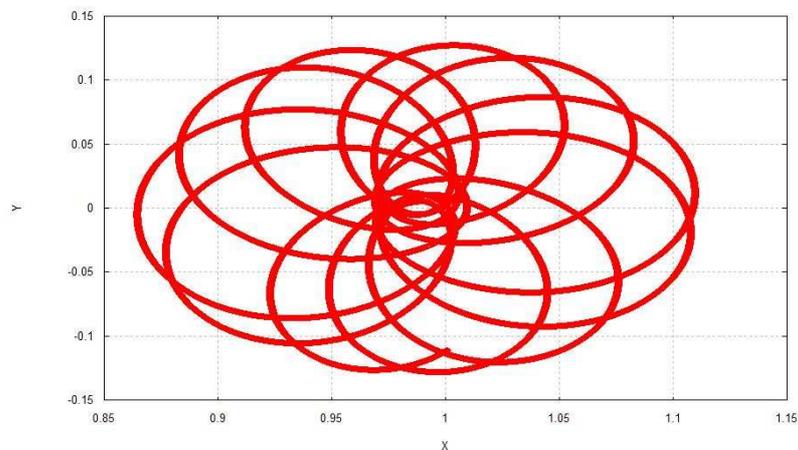


Figura 4.8 Órbita limitada retrógrada.  $\alpha = 90^0$  e  $C_3 = -0.20$ .

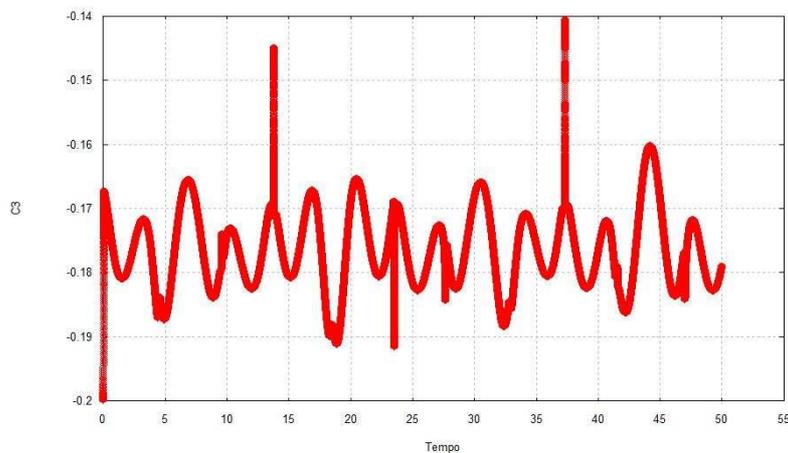


Figura 4.9  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 90^0$  e  $C_3 = -0.20$ .

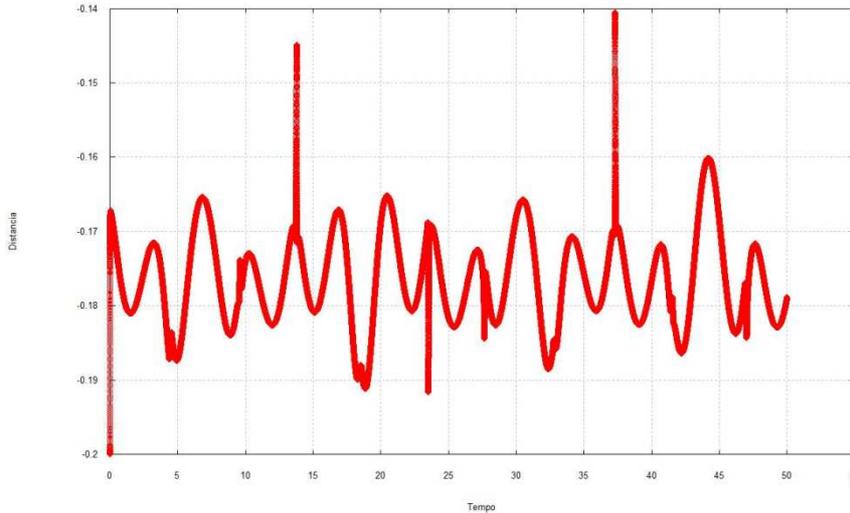


Figura 4.10 Distância em função do tempo.  $\alpha = 90^0$  e  $C_3 = -0.20$ .

#### 4.5 Variações das condições iniciais

As equações (4.4) e (4.5) que fornecem as condições iniciais do veículo espacial estão em função do ângulo  $\alpha$  inicial e de  $C_3$  inicial. Variações do ângulo ou da energia inicial modificam completamente a órbita do veículo espacial. Os próximos gráficos mostram a dependência das condições iniciais.

Na primeira parte desta seção faremos variações da energia inicial  $C_3$  e na segunda do ângulo  $\alpha$ .

##### 4.5.1 Variação da energia

##### Órbitas de captura gravitacional diretas no problema de três corpos restrito circular

Nos três gráficos da Figura 4.11,  $C_3$  inicial assume como valores  $-0.1$ ,  $-0.15$  e  $-0.18$ . Tomamos como condição inicial  $\alpha = 30^0$ . Na Figura 4.11 temos órbitas de captura gravitacional diretas, na Figura 4.12 temos a energia em função do tempo e na Figura 4.13 a distância em função do tempo. Todas as órbitas são de captura gravitacional e a integração é feita por vinte e cinco dias e os dois testes numéricos foram satisfeitos.

Na Figura 4.11 a órbita em vermelho é para  $C_3 = -0.1$ , em verde para  $C_3 = -0.15$  e em azul para  $C_3 = -0.18$ .

No gráfico da Figura 4.11 as três órbitas têm um comportamento bastante diferente. Uma mudança na segunda casa decimal da energia proporciona trajetórias bem diferentes do veículo espacial.

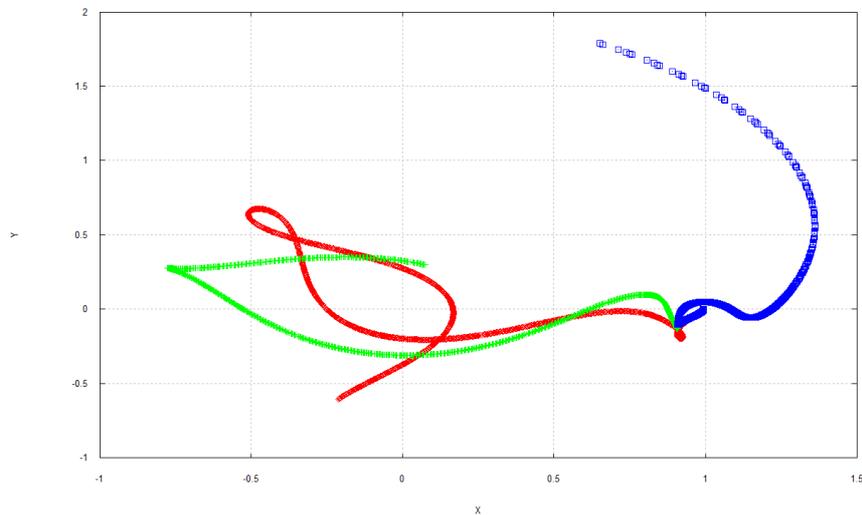


Figura 4.11. Órbitas de captura diretas para  $\alpha = 30^0$  e  $C_3 = -0.1, -0.15 e - 0.18$ .

Na Figura 4.12 variação da energia em vermelho é para  $C_3 = -0.1$ , em verde para  $C_3 = -0.15$  e em azul para  $C_3 = -0.18$ .

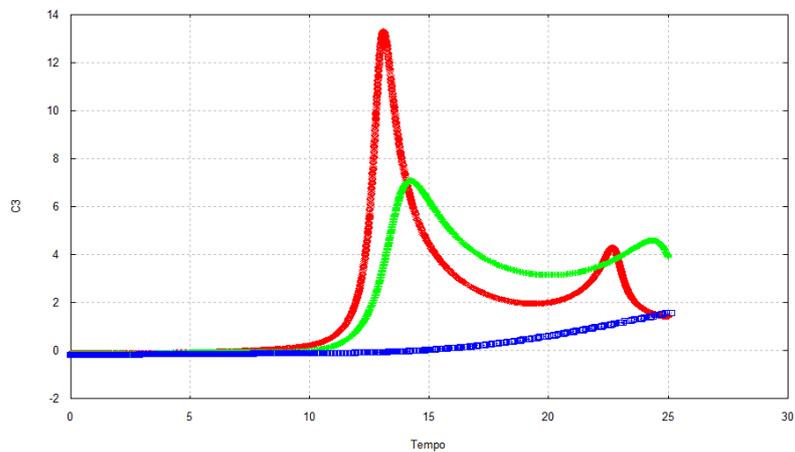


Figura 4.12  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 30^0$  e  $C_3 = -0.1, -0.15 e - 0.18$ .

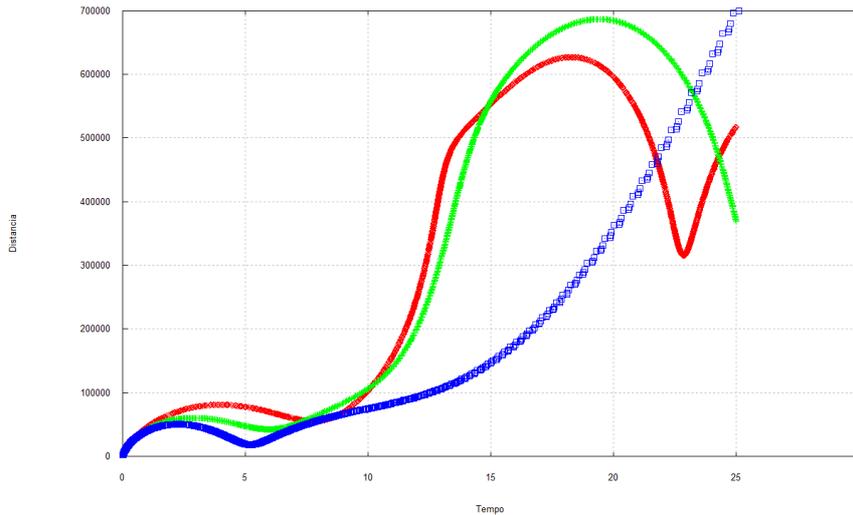


Figura 4.13 Distância em função do tempo.  $\alpha = 30^0$  E  $C_3 = -0.1, -0.15 e -0.18$ .

### Órbitas de captura gravitacional retrógradas no problema de três corpos restrito circular

Nos três gráficos da Figura 4.14,  $C_3$  inicial assume como valores  $-0.1, -0.13$  e  $-0.15$ . Tomamos como condição inicial  $\alpha = 30^0$ . Na Figura 4.14 temos órbitas de captura gravitacional retrógradas, na Figura 4.15 temos a energia em função do tempo e na Figura 4.16 à distância em função do tempo. Todas as órbitas são de captura gravitacional e a integração foi feita por quinze dias. Os dois testes numéricos foram satisfeitos, isto é, as órbitas atendem às condições dos dois testes para serem órbitas de captura gravitacional.

A órbita em vermelho para  $C_3 = -0.1$ , em verde para  $C_3 = -0.13$  e em azul para  $C_3 = -0.15$ .

No gráfico da Figura 4.14 as três órbitas têm um comportamento bastante diferente. Uma mudança na segunda casa decimal da energia proporciona essa mudança na trajetória do veículo espacial.

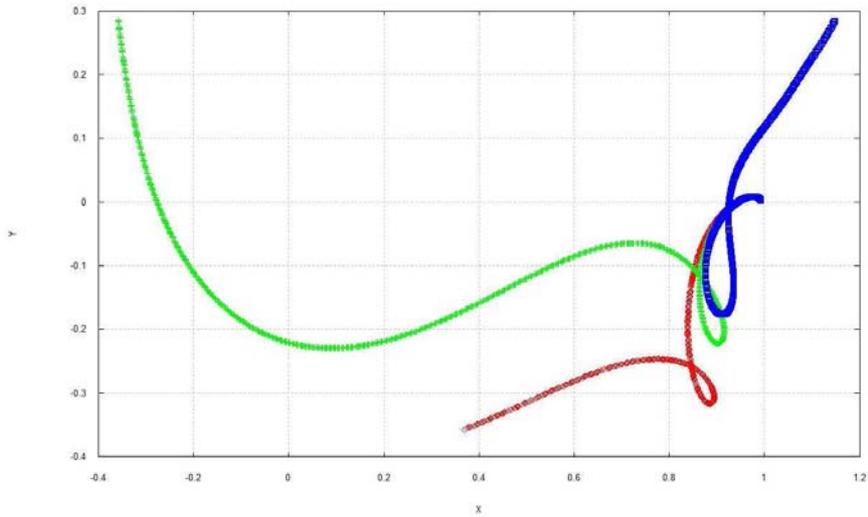


Figura 4.14. Órbitas de captura retrógradas  $\alpha = 30^0$  e  $C_3 = -0.1, -0.15 e - 0.18$ .

A variação da energia em vermelho é para  $C_3 = -0.1$ , em verde para  $C_3 = -0.13$  e em azul para  $C_3 = -0.15$ .

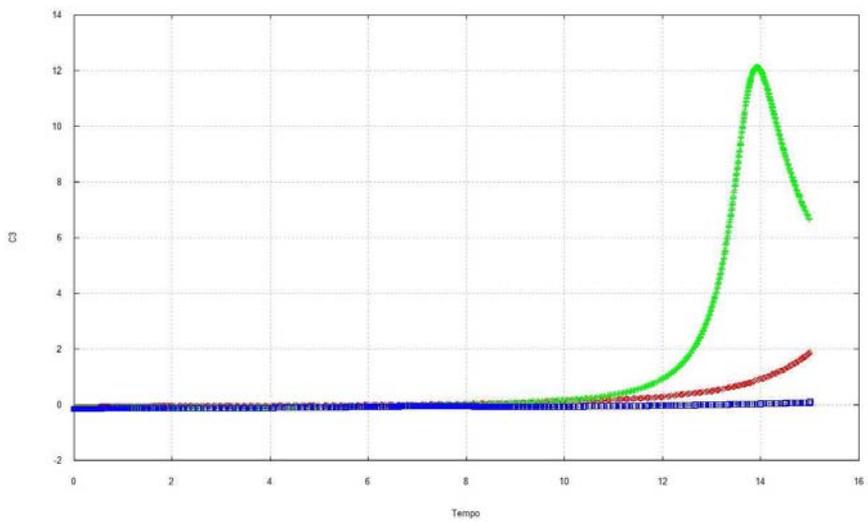


Figura 4.15  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 30^0$  e  $C_3 = -0.1, -0.13 e - 0.15$ .

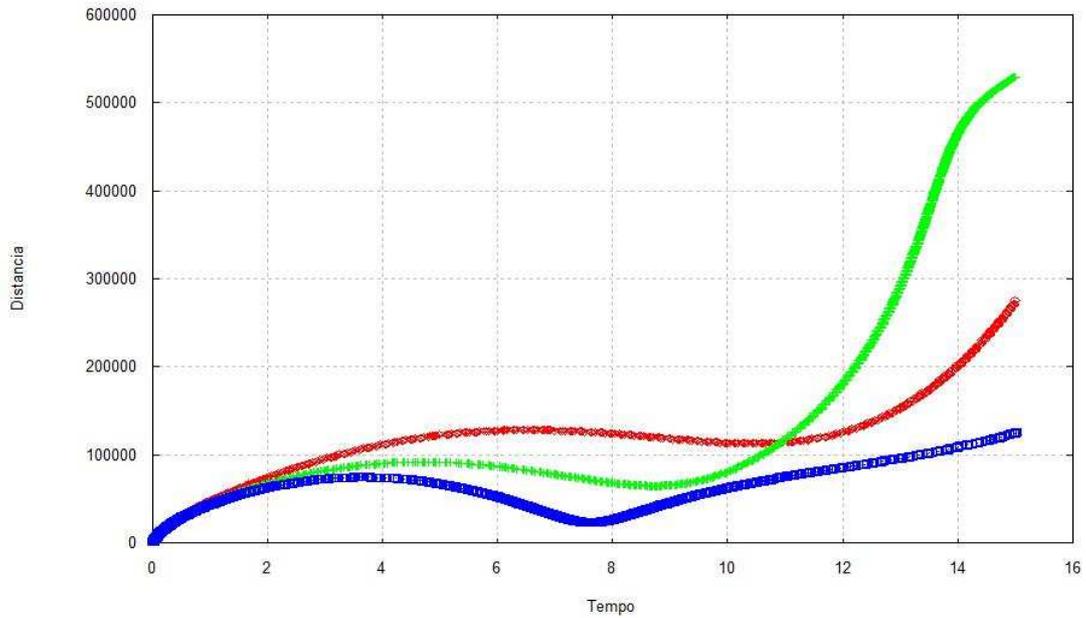


Figura 4.16 Distância em função do tempo.  $\alpha = 30^{\circ}$  e  $C_3 = -0.1, -0.13$  e  $-0.15$ .

#### 4.5.2 Variação do ângulo $\alpha$ .

##### Órbitas de captura gravitacional diretas no problema de três corpos restrito circular

Nos três gráficos da Figura 4.17, o ângulo  $\alpha$  inicial assume como valores  $0^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$  e  $60^{\circ}$  enquanto a energia inicial é fixa,  $C_3 = -0.1$ . Na Figura 4.17 temos órbitas de captura gravitacional diretas, na Figura 4.18 temos a energia em função do tempo e na Figura 4.19 a distância em função do tempo. Todas as órbitas são de captura gravitacional, a integração foi feita em vinte e cinco dias e os dois testes numéricos foram satisfeitos. Mudando o valor do ângulo de  $30^{\circ}$  temos trajetórias bem diferentes. Na Figura 4.17 temos em vermelho ( $\alpha = 0^{\circ}$ ), em verde ( $\alpha = 30^{\circ}$ ) em azul ( $\alpha = 60^{\circ}$ ).

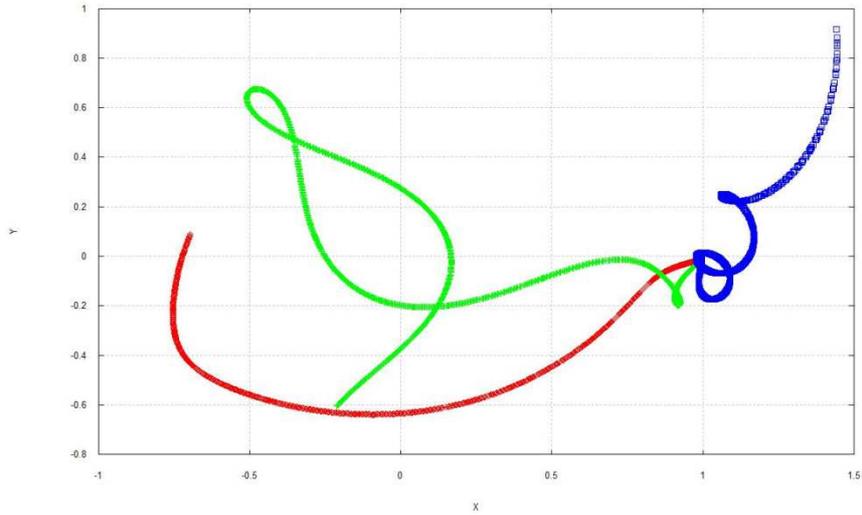


Figura 4.17. Órbitas de captura diretas  $\alpha = 0^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$  e  $60^{\circ}$  e  $C_3 = -0.1$ .

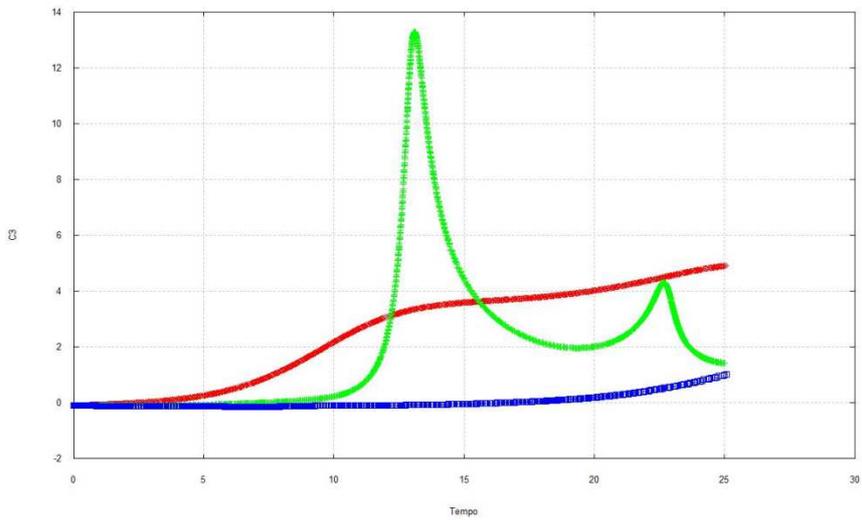


Figura 4.18  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 0^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$  e  $60^{\circ}$  e  $C_3 = -0.1$

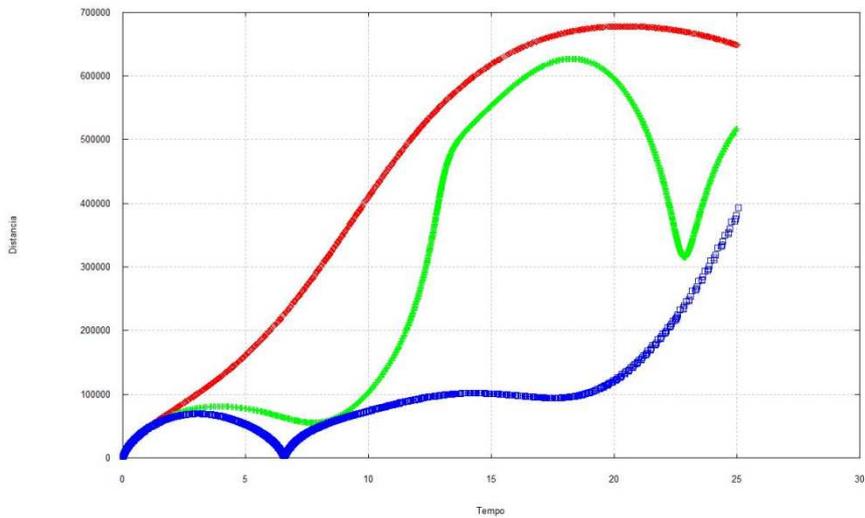


Figura 4.19 Distância em função do tempo.  $\alpha = 0^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$  e  $60^{\circ}$  e  $C_3 = -0.1$

## Órbitas de captura gravitacional retrógradas no problema de três corpos restrito circular

Nos três gráficos da Figura 4.20, o ângulo  $\alpha$  inicial assume como valores  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , enquanto a energia inicial é fixa,  $C_3 = -0.1$ . Na Figura 4.20 temos órbitas de captura gravitacional retrógradas, na figura 4.21 temos a energia em função do tempo e na Figura 4.22 a distância em função do tempo. Todas as órbitas são de captura gravitacional, a integração por vinte e cinco dias e os dois testes numéricos foram satisfeitos. Mudando o valor do ângulo de  $30^\circ$  temos trajetórias bem diferentes. Na Figura 4.20 em vermelho ( $\alpha = 0^\circ$ ), em verde ( $\alpha = 30^\circ$ ) em azul ( $\alpha = 60^\circ$ ).

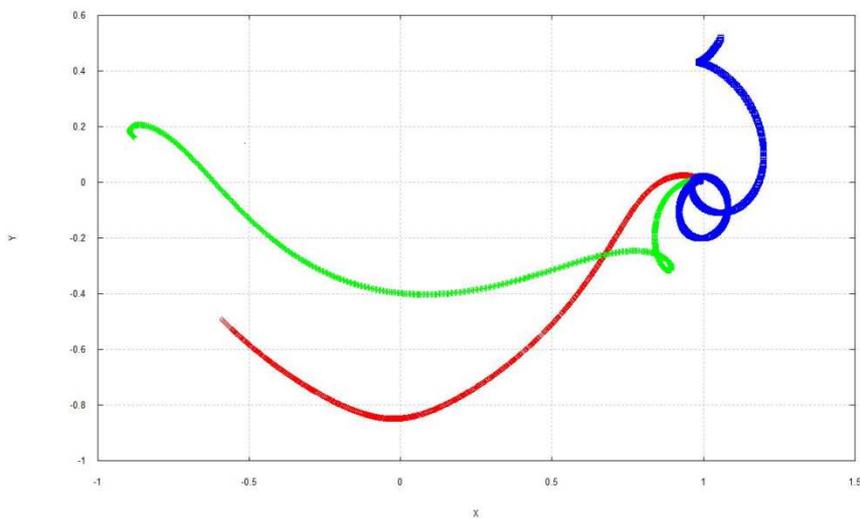


Figura 4.20. Órbitas de captura retrógradas  $\alpha = 0^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $60^\circ$  e  $C_3 = -0.1$ .

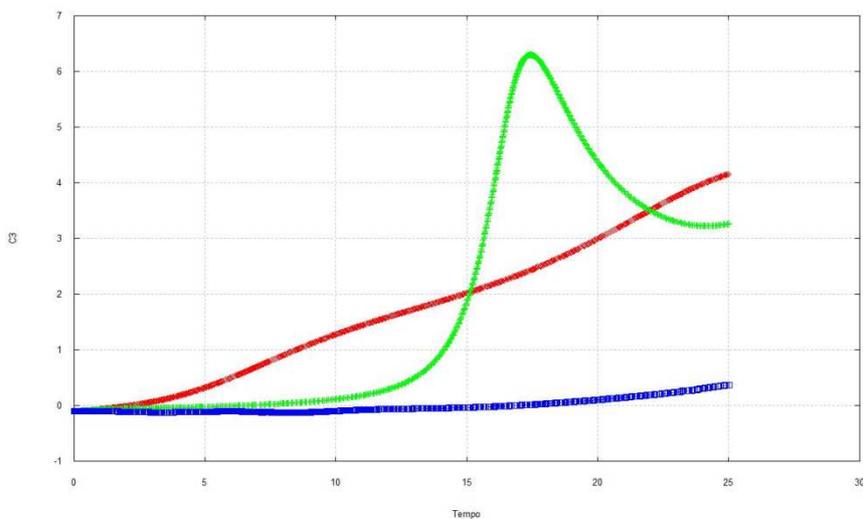


Figura 4.21  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 0^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $60^\circ$  e  $C_3 = -0.1$

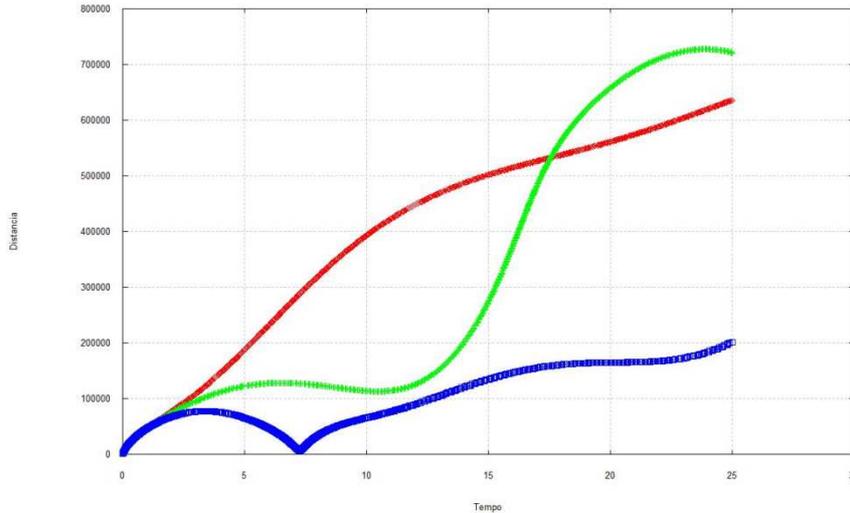


Figura 4.22 Distância em função do tempo. .  $\alpha = 0^0, 30^0 e 60^0$  E  $C_3 = -0.1$

#### 4.6 Resultados preliminares para o problema bi-circular.

Calcularemos uma órbita direta e outra retrógrada para o problema bi-circular.

Enquanto as condições iniciais do veículo espacial estão em função do ângulo  $\alpha$  inicial e de  $C_3$  inicial no problema de três corpos restrito circular, para o problema bi-circular acrescentamos o ângulo  $\psi$  que determina a posição inicial do Sol.

Na Figura 4.23 temos uma órbita direta e na Figura 4.26 uma órbita retrógrada. Os ângulos iniciais são:  $\alpha = 180^0$  e  $\psi = 0^0$  e a energia inicial é  $C_3 = -0.6$  nas Figuras 4.23 a 4.28.

Analisamos agora o caso direto: Vemos no gráfico da Figura 4.24 que  $C_3$  muda de sinal em um tempo inferior a dois dias, e na Figura 4.25 que o veículo espacial fica dentro da esfera de influência aproximadamente dois dias e meio.

Analisando o caso retrógrado. Na Figura 4.27  $C_3$  muda de sinal perto de dois dias, Na Figura 4.28 vemos que o veículo espacial fica dentro da esfera de influência aproximadamente três dias. Em ambos os casos direto e retrógrado o tempo de integração foi de cinco dias.

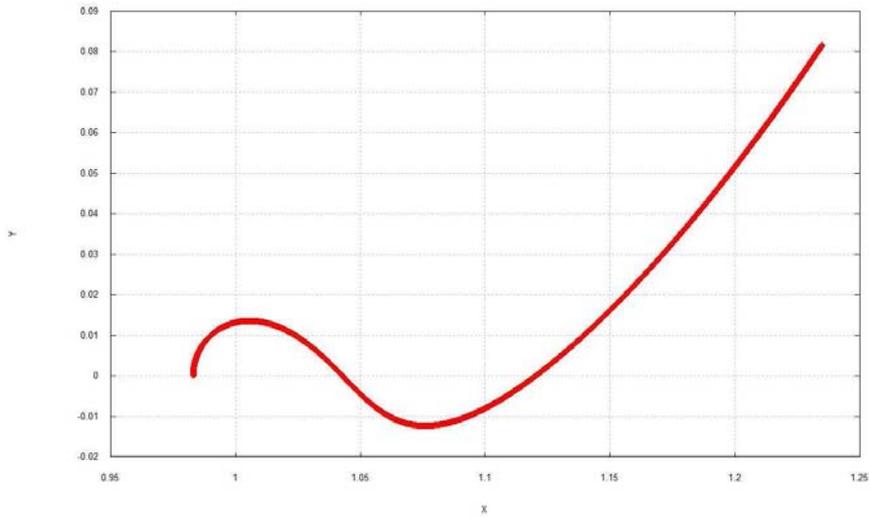


Figura 4.23 Órbita direta.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi = 0^0$  e  $C_3 = -0.6$ .

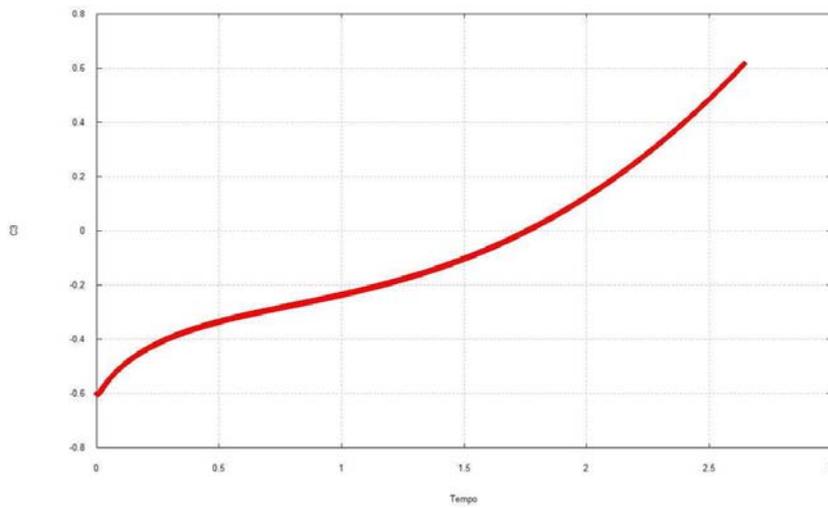


Figura 4.24  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi = 0^0$  e  $C_3 = -0.6$ .

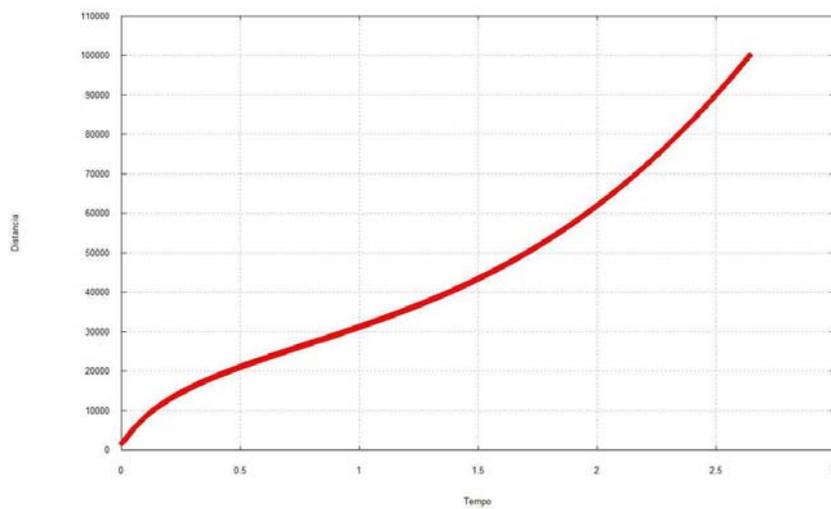


Figura 4.25 Distância em função do tempo.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi_0 = 0^0$  e  $C_3 = -0.6$ .

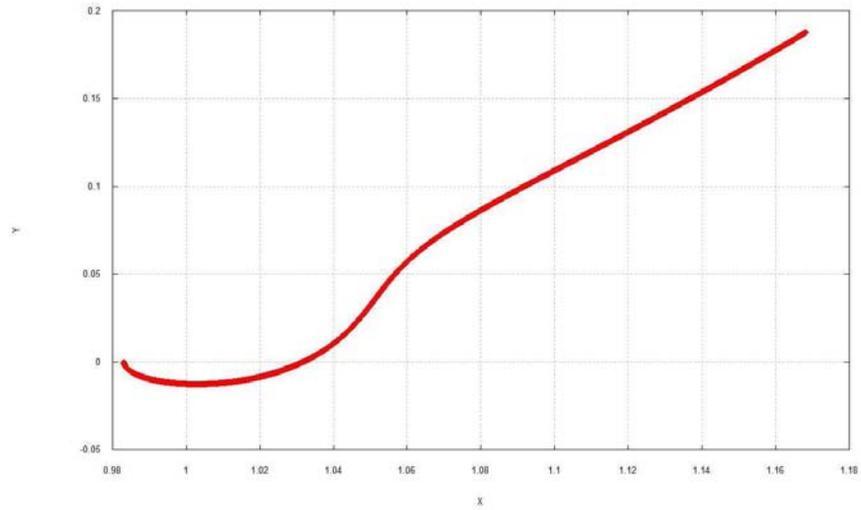


Figura 4.26 Órbita retrógrada.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi_0 = 0^0$  e  $C_3 = -0.6$ .

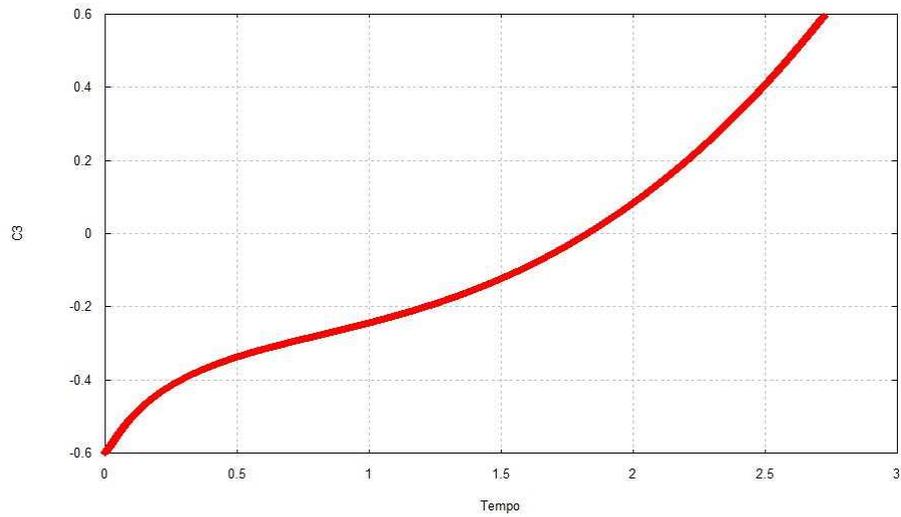


Figura 4.27  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi_0 = 0^0$  e  $C_3 = -0.6$ .

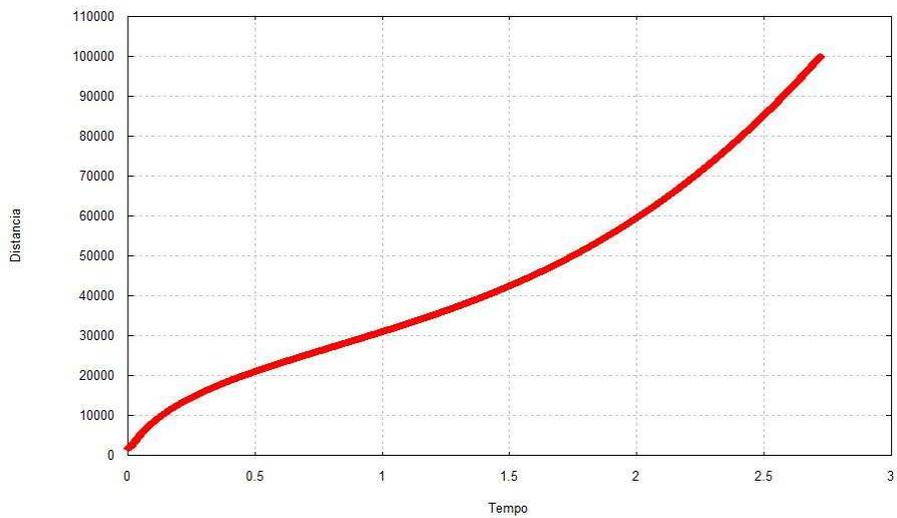


Figura 4.28 Distância em função do tempo.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi_0 = 0^0$  e  $C_3 = -0.6$ .

## 4.7 Variações das condições iniciais

As condições iniciais do veículo espacial estão em função dos ângulos iniciais  $\alpha$  e  $\psi$  e da energia inicial  $C_3$ . Variações dos ângulos ou da energia inicial modificam completamente a órbita do veículo espacial. Os próximos gráficos mostram a grande dependência das condições iniciais.

Na primeira parte desta seção faremos a variação da energia inicial e na segunda a variação do ângulo  $\alpha$  e na terceira do ângulo  $\psi$ .

### 4.7.1 Variações da energia $C_3$

Faremos agora a energia inicial  $C_3$  variar. Tornaremos os ângulos fixos,  $\alpha = 180^\circ$  e  $\psi = 0^\circ$ , tanto no caso de órbitas diretas quanto no caso de órbitas retrógradas. Os valores assumidos pela energia inicial  $C_3$  serão -0.6, -0.4 e -0.2.

### Órbitas de captura gravitacional diretas no problema bi-circular

Para as órbitas da Figura 4.29 temos em vermelho  $C_3 = -0.6$ , para a órbita em verde  $C_3 = -0.4$  e em azul  $C_3 = -0.2$ . Na Figura 4.30 temos a energia em função do tempo e na Figura 4.31 temos a distância em função do tempo. O tempo de integração foi de três dias e meio.

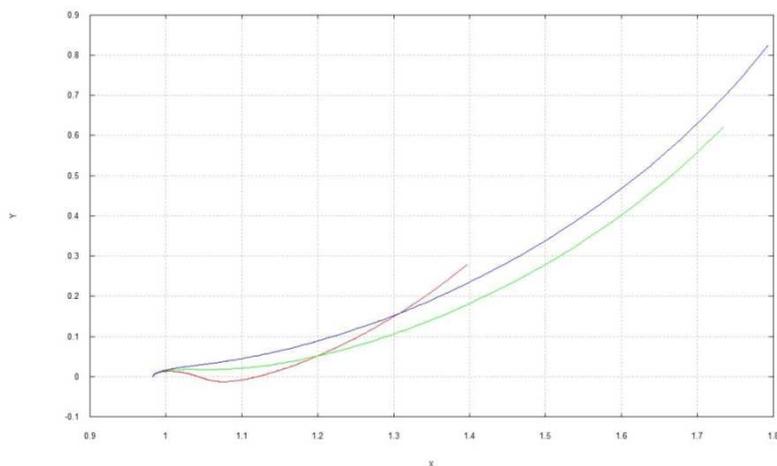


Figura 4.29 Órbitas de captura diretas.  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$   $C_3 = -0.6, -0.4$  e  $-0.2$ .

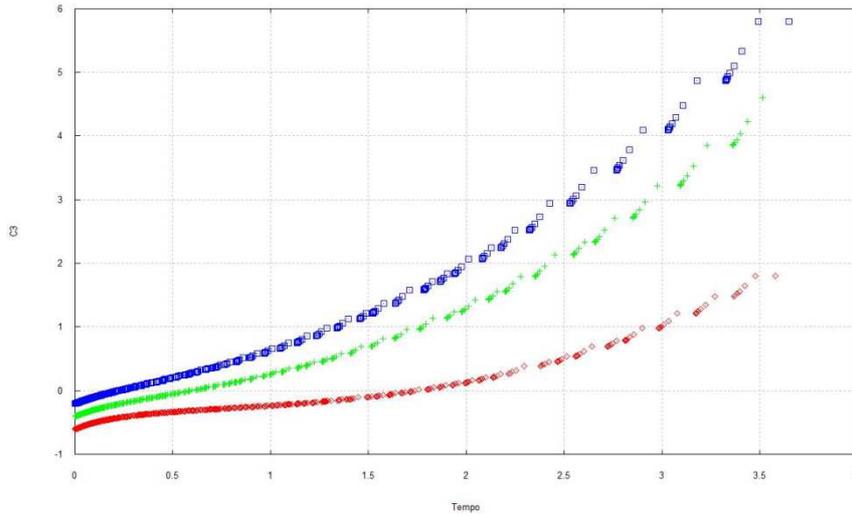


Figura 4.30  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$   $C_3 = -0.6, -0.4 e -0.2$ .

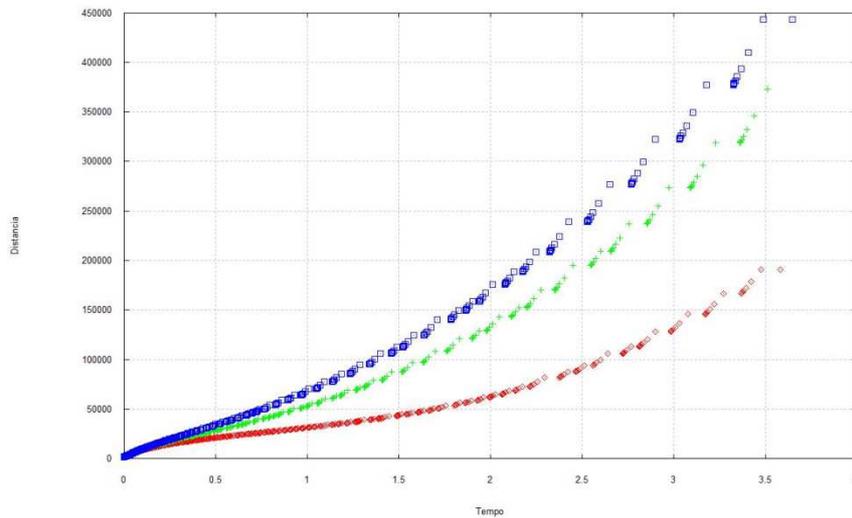


Figura 4.31 Distância em função do tempo.  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$   $C_3 = -0.6, -0.4 e -0.2$ .

### Órbitas de captura gravitacional retrógradas no problema bi-circular

Para as órbitas da Figura 4.32 temos em vermelho  $C_3 = -0.6$ , para a órbita em verde  $C_3 = -0.4$  e em azul  $C_3 = -0.2$ . Na Figura 4.33 temos a energia em função do tempo e na Figura 4.34 temos a distância em função do tempo. O tempo de integração foi de três dias e meio.

Vamos observar que nas Figuras 4.33 e 4.34, para o caso retrógrado o tempo de captura gravitacional do veículo espacial é inferior ao caso direto para as mesmas condições iniciais testadas.

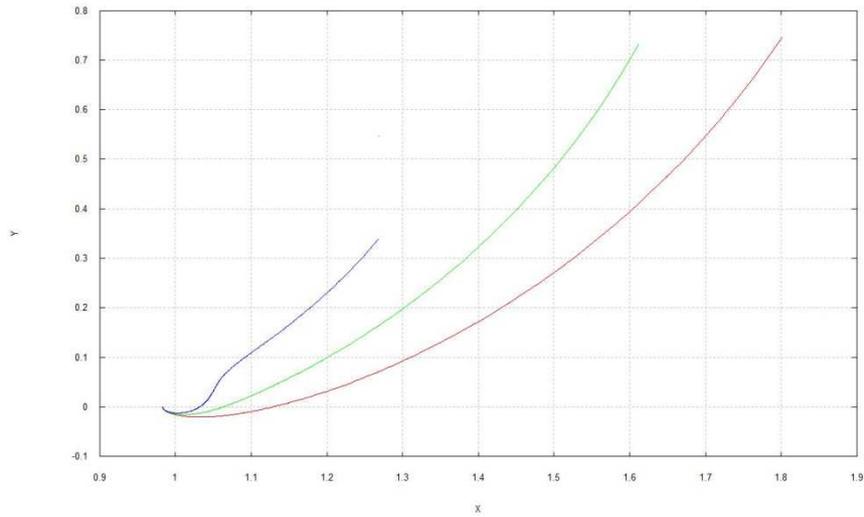


Figura 4.32 Órbitas retrógradas.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi_0 = 0^0$ ,  $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$ .

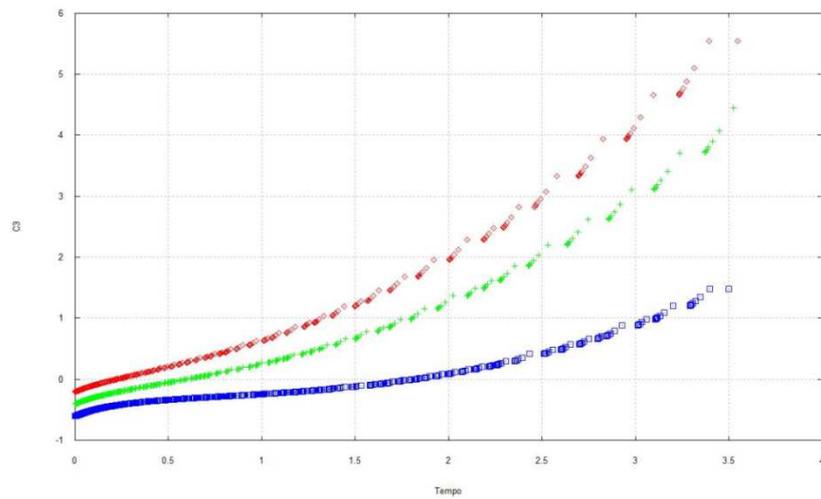


Figura 4.33  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi_0 = 0^0$ ,  $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$ .

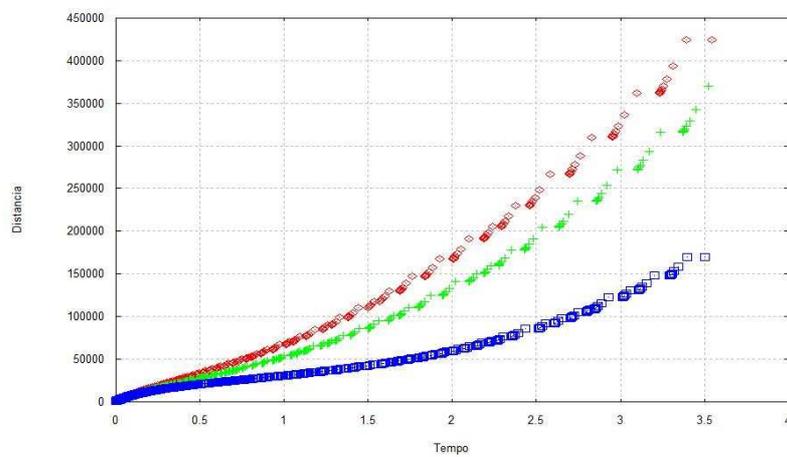


Figura 4.34 Distância em função do tempo.  $\alpha = 180^0$ ,  $\psi_0 = 0^0$ ,  $C_3 = -0.6, -0.4 e - 0.2$

### 4.7.2. Variação do ângulo $\psi$

Agora faremos fixos a energia inicial  $C_3 = -0.15$  e o ângulo inicial  $\alpha = 120^\circ$ . Quem varia agora é o ângulo  $\psi$ , ângulo do Sol. O gráfico em vermelho tem  $\psi = 0^\circ$ , em verde  $\psi = 90^\circ$ , em azul  $\psi = 180^\circ$ , em rosa  $\psi = 270^\circ$ .

### Órbitas de captura gravitacional diretas para o problema bi-circular

Na Figura 4.35 temos as órbitas. É fácil observar que a posição do Sol é quem determina o movimento do veículo espacial. Na Figura 4.36 temos a energia em função do tempo e na Figura 4.37 temos a distância em função do tempo.

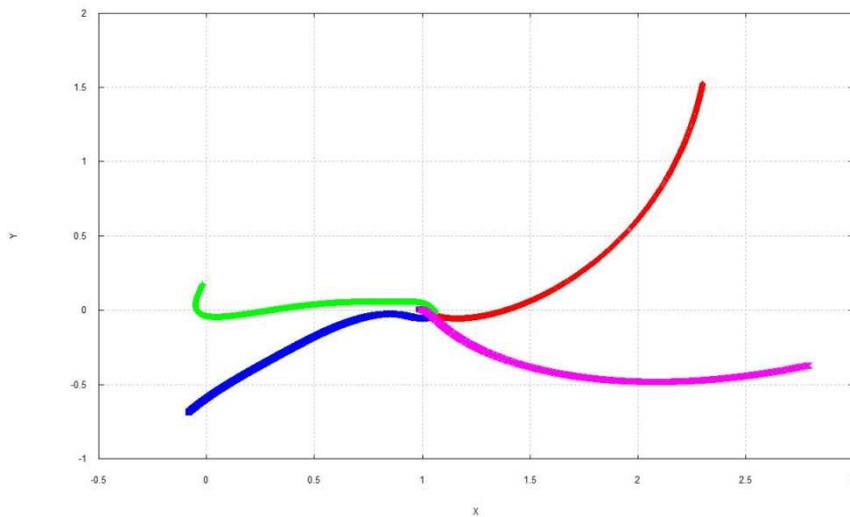


Figura 4.35 Órbitas diretas.  $C_3 = -0.15$ ,  $\alpha = 120^\circ$  e  $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

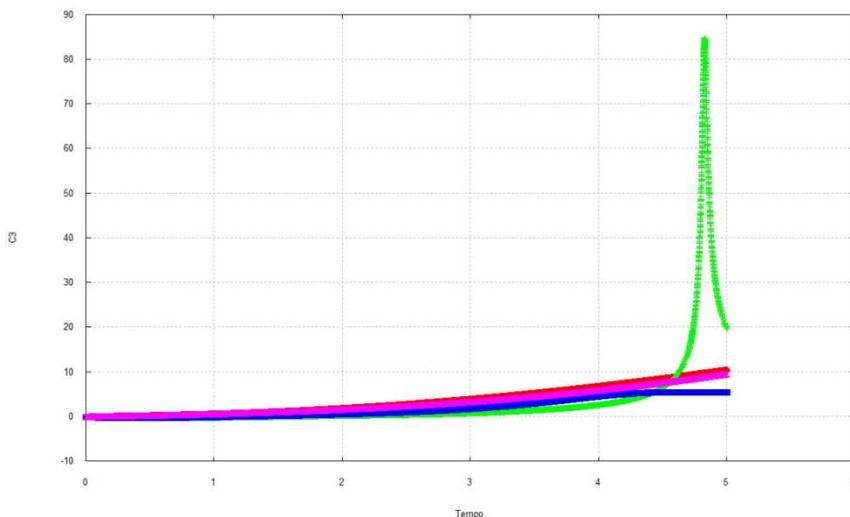


Figura 4.36.  $C_3$  em função do tempo.  $C_3 = -0.15$ ,  $\alpha = 120^\circ$  e  $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

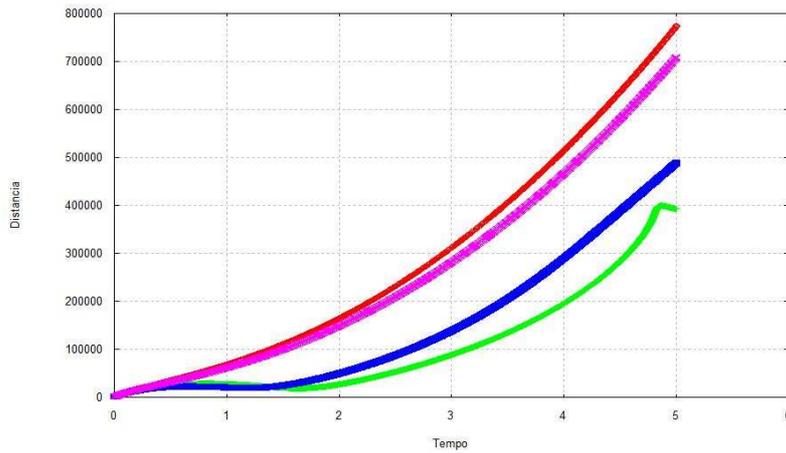


Figura 4.37 Distância função do tempo.  $C_3 = -0.15$ ,  $\alpha = 120^\circ$  e  $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ .

### Órbitas de captura gravitacional retrógradas para o problema bi-circular

Na Figura 4.38 temos as órbitas de captura gravitacional retrógradas. É fácil observar que a posição do Sol é quem determina o movimento do veículo espacial. Na Figura 4.39 temos a energia em função do tempo e na Figura 4.40 temos a distância em função do tempo.

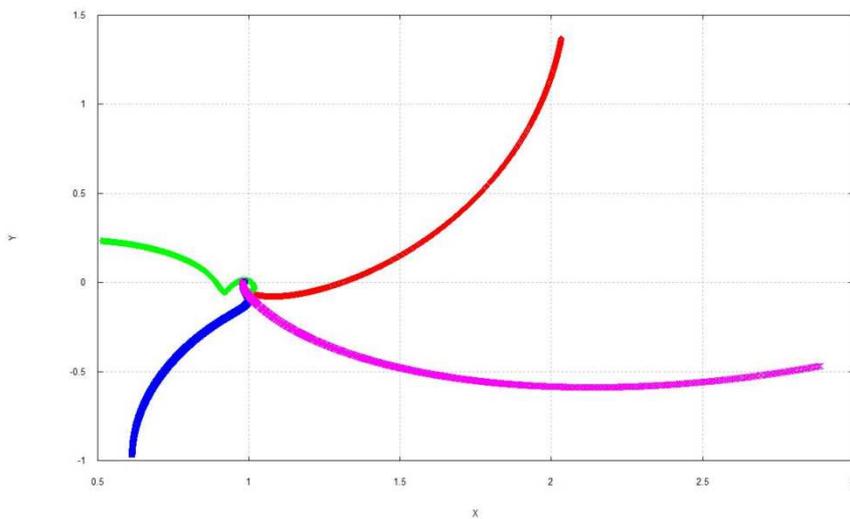


Figura 4.38 Órbitas retrógradas.  $C_3 = -0.15$ ,  $\alpha = 120^\circ$  e  $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

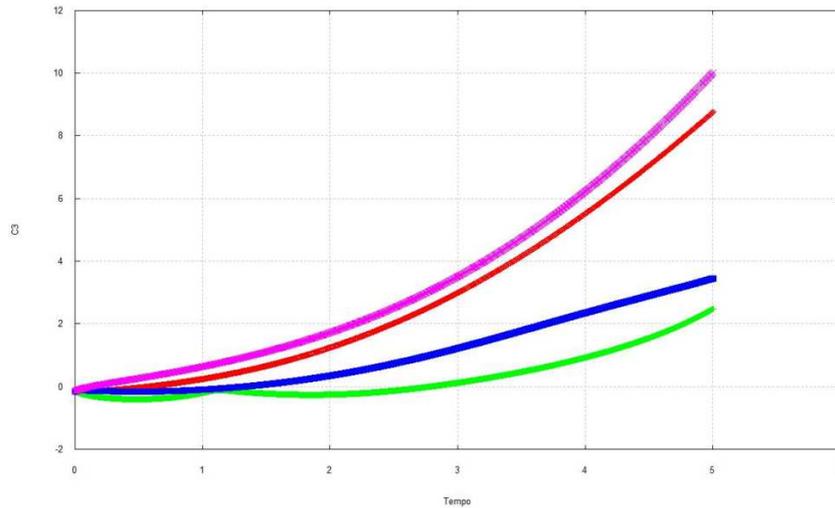


Figura 4.39.  $C_3$  em função do tempo.  $C_3 = -0.15$ ,  $\alpha = 120^\circ$  e  $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

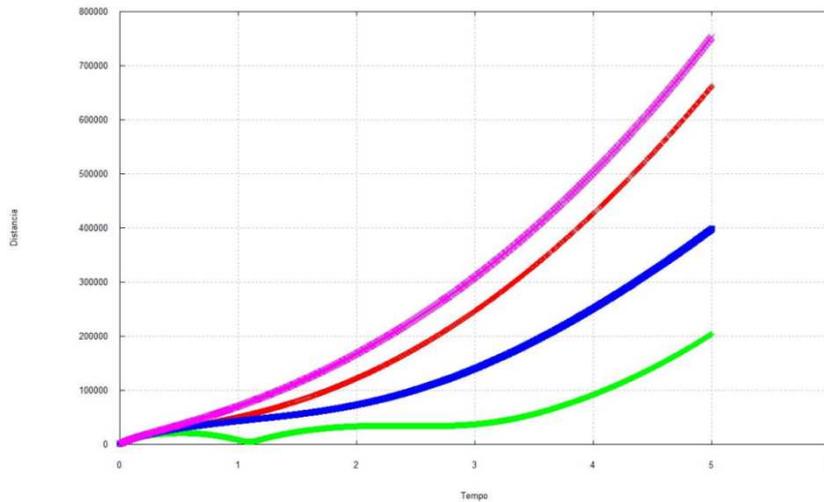


Figura 4.40. Distância função do tempo.  $C_3 = -0.15$ ,  $\alpha = 120^\circ$  e  $\psi_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

### 4.7.3. Variação do ângulo $\alpha$

Agora faremos fixos a energia inicial  $C_3 = -0.2$  e o ângulo inicial do Sol  $\psi = 0^\circ$ . Quem varia é o ângulo  $\alpha$ . O ângulo  $\alpha$  vai assumir os valores  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

### Órbitas de captura gravitacional diretas no problema bi-circular

Nas Figuras 4.41 temos órbitas de captura diretas, na Figura 4.42 a energia em função do tempo e na Figura 4.43 a distância em função do tempo. Nos gráficos da Figura 4.40  $\alpha = 90^\circ$  (vermelho),  $\alpha = 180^\circ$  (verde) e  $\alpha = 270^\circ$  (azul). Quando  $\alpha = 0^\circ$  existe uma colisão entre o veículo espacial e a Lua.

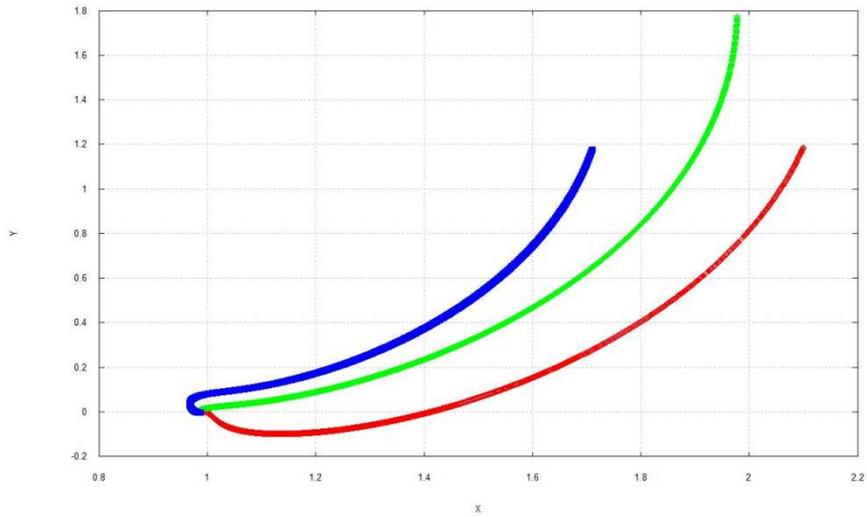


Figura 4.41. Órbitas diretas.  $C_3 = -0.2$ ,  $\psi = 0^\circ$  e  $\psi_0 = 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

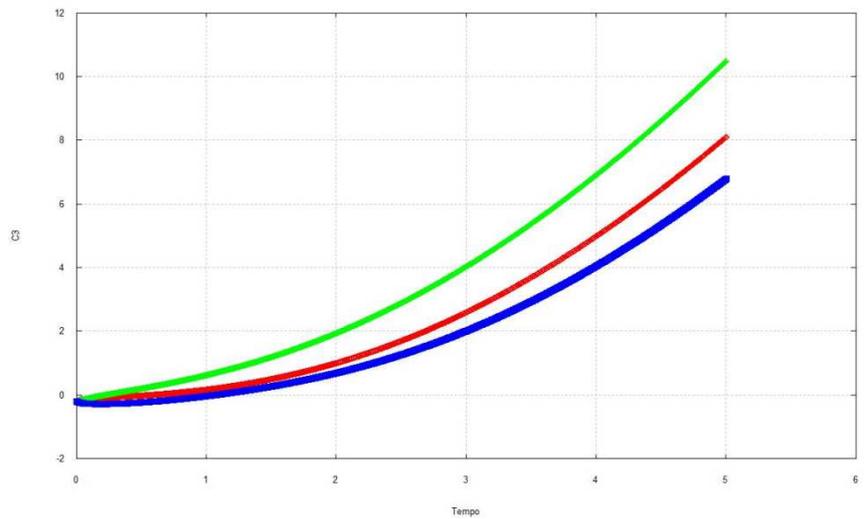


Figura 4.42.  $C_3$  em função do tempo  $C_3 = -0.2$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

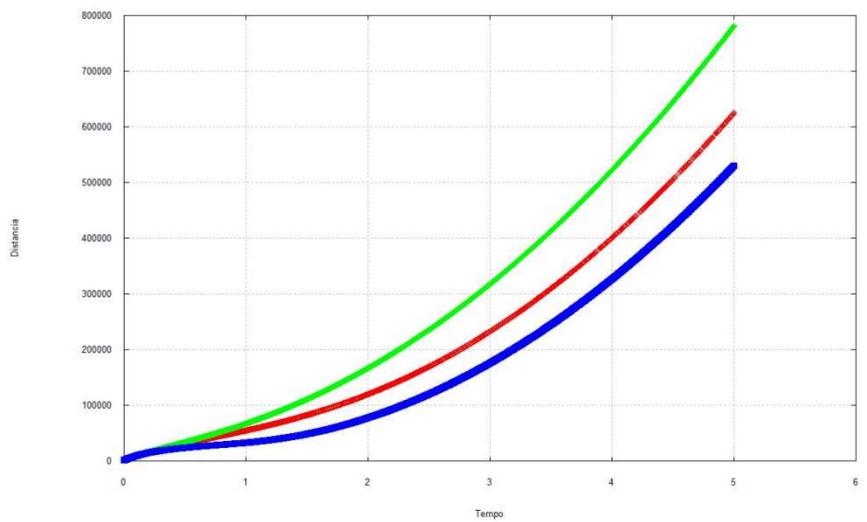


Figura 4.43. Distância em função do tempo  $C_3 = -0.2$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

### Órbitas de captura gravitacional retrógradas no problema bi-circular

Nas Figuras 4.44 temos órbitas de captura retrógradas. Na Figura 4.45 a energia em função do tempo e na Figura 4.46 a distância em função do tempo. Nos gráficos da Figura 4.44  $\alpha = 90^\circ$  (vermelho),  $\alpha = 180^\circ$  (verde) e  $\alpha = 270^\circ$  (azul). Quando  $\alpha = 0^\circ$  existe uma colisão entre o veículo espacial e a Lua.

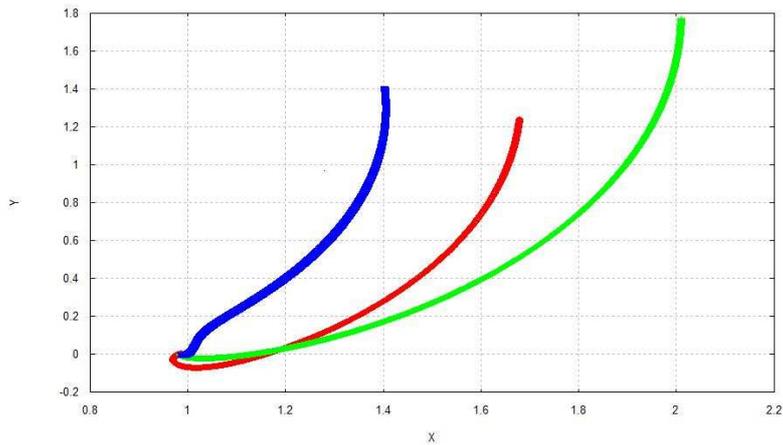


Figura 4.44. Órbitas retrógradas.  $C_3 = -0.2$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$  e  $\psi = 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

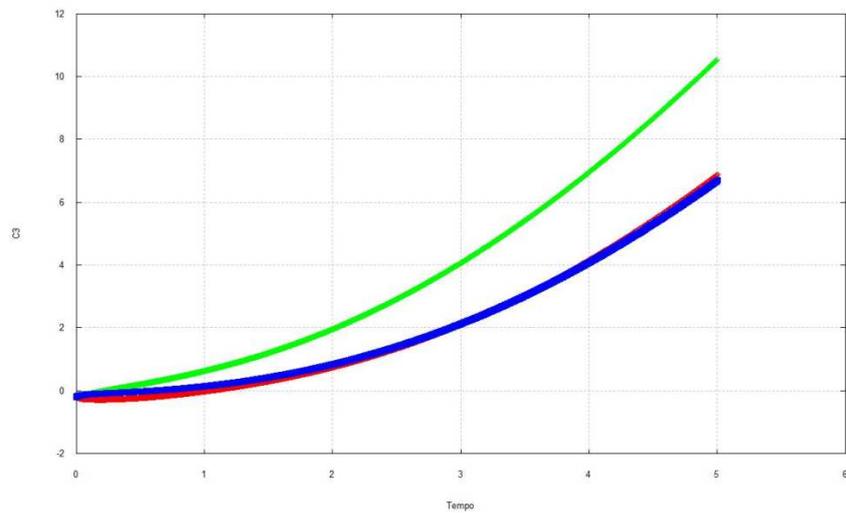


Figura 4.45.  $C_3$  em função do tempo  $C_3 = -0.2$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

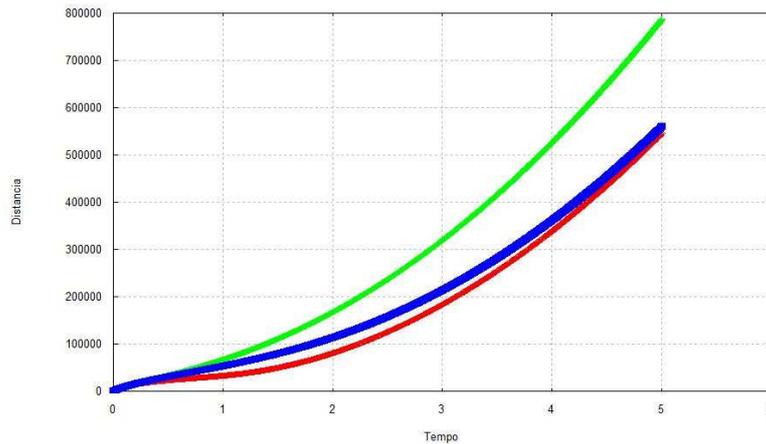


Figura 4.46. Distância em função do tempo  $C_3 = -0.2$ ,  $\psi_0 = 0^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$ .

#### 4.8. Comparando os dois modelos.

A seguir será feita uma comparação entre as órbitas dos modelos bi-circular de quatro corpos e de três corpos restrito circular.

Esta comparação é feita da seguinte forma: fixamos uma órbita no problema de três corpos restrito, isto é, fornecemos a energia inicial do veículo espacial  $C_3$  e o ângulo inicial  $\alpha$ . As órbitas do problema bi-circular possuem o mesmo  $C_3$  e o mesmo ângulo  $\alpha$  do modelo anterior e variamos o ângulo inicial do Sol  $\psi_0$ .

No primeiro conjunto de gráficos obtemos órbitas de captura gravitacional em ambos os modelos, tanto no caso de órbitas retrógradas como no caso de órbitas diretas.

No segundo conjunto de órbitas temos uma órbita limitada retrógrada no problema de três corpos restrito e todas as órbitas do problema bi-circular para a variação de  $\psi$  dada são órbitas de captura gravitacional retrógradas. Neste caso ocorre uma modificação da “qualidade” do tipo de órbita quando perturbamos o sistema Terra-Lua-veículo espacial pelo acréscimo do Sol.

##### 4.8.1 Órbitas de captura nos dois modelos matemáticos

###### Conjunto de órbitas diretas

As condições iniciais das órbitas de captura gravitacional diretas são dadas pela energia inicial  $C_3 = -0.10$  e o ângulo inicial  $\alpha = 60^\circ$  para o problema de três corpos restrito circular. No problema bi-circular temos  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e a variação do ângulo do sol  $\psi$  para os seguintes valores:  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  e  $90^\circ$  para condição inicial.

Todas as órbitas são de captura gravitacional diretas. Nos gráficos abaixo (Figuras 4.47 a 4.50), a órbita em linha vermelha é obtida no problema de três corpos restrito e se repete em todas as Figuras e a de linha verde é do problema bi-circular. O tempo de integração foi de cinco dias para obtermos os gráficos dessas figuras.

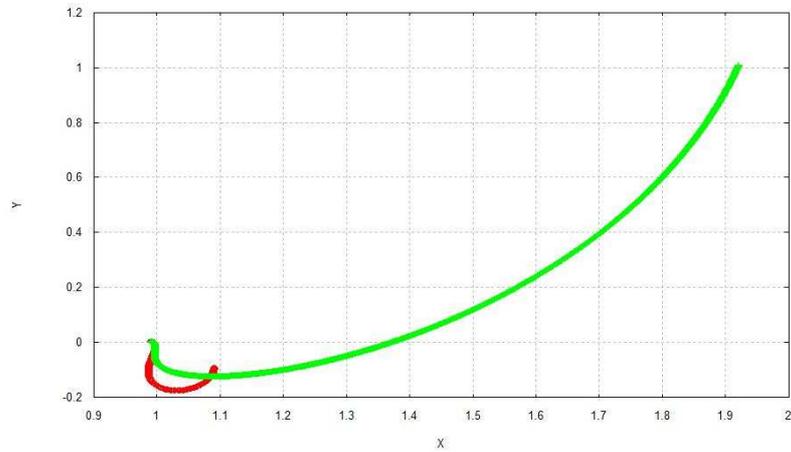


Figura 4.47. Órbitas diretas  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\psi = 0^\circ$ .

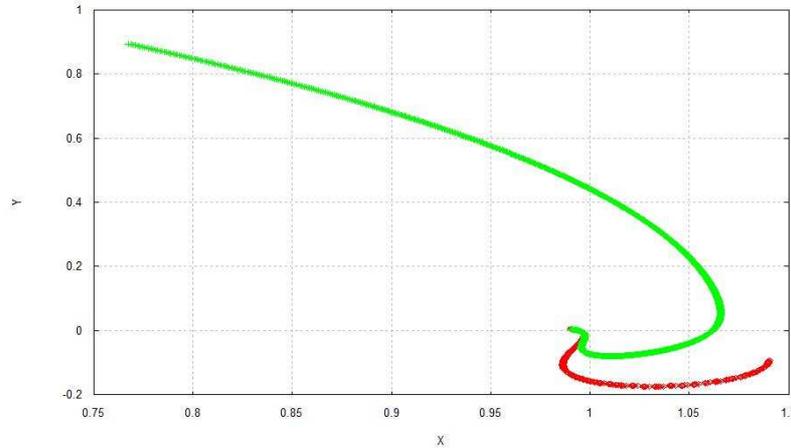


Figura 4.48. Órbitas diretas  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\psi = 30^\circ$ .

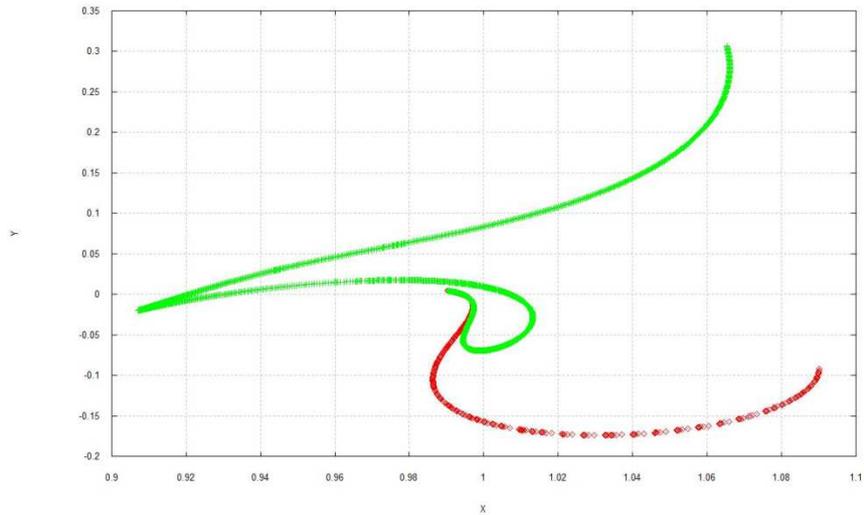


Figura 4.49. Órbitas diretas  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\psi = 45^\circ$ .

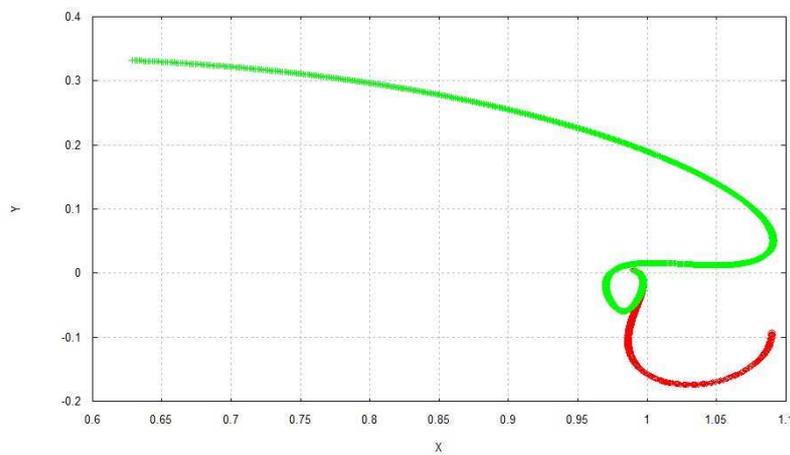


Figura 4.50. Órbitas diretas  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\psi = 90^\circ$ .

**Conjunto de órbitas retrógradas.**

As condições iniciais das órbitas de captura gravitacional retrógradas são dadas pela energia inicial  $C_3 = -0.10$  e ângulo inicial  $\alpha = 60^\circ$  para o problema de três corpos restrito circular. No problema bi-circular temos  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e a variação do ângulo do sol  $\psi$  para os seguintes valores,  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $90^\circ$  para condição inicial.

Todas as órbitas são de captura gravitacional retrógradas nos gráficos abaixo, a órbita em linha vermelha é obtida no problema de três corpos restrito e se repete em todas as Figuras (4.51 a 4.53) e a de linha verde no problema bi-circular. O tempo de integração foi de cinco dias para obtermos os gráficos dessas figuras. Quando  $\psi = 45^\circ$ , ocorre colisão do veículo espacial com a Lua.

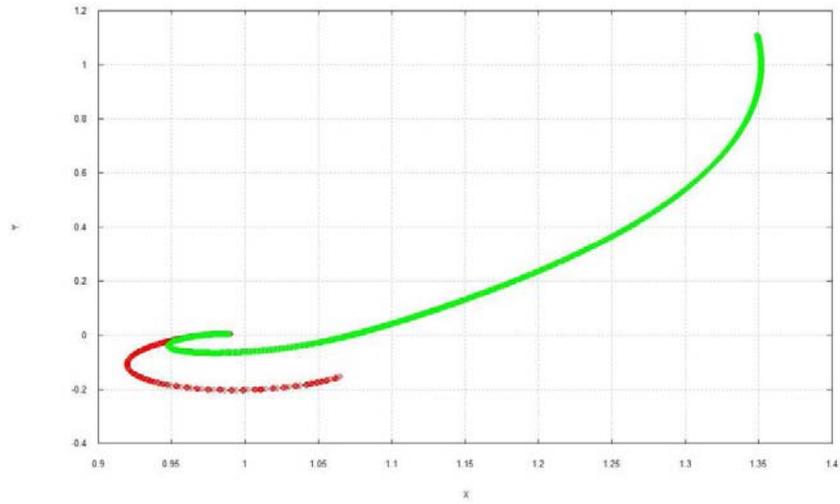


Figura 4.51. Órbitas retrógradas  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\psi_0 = 0^\circ$ .

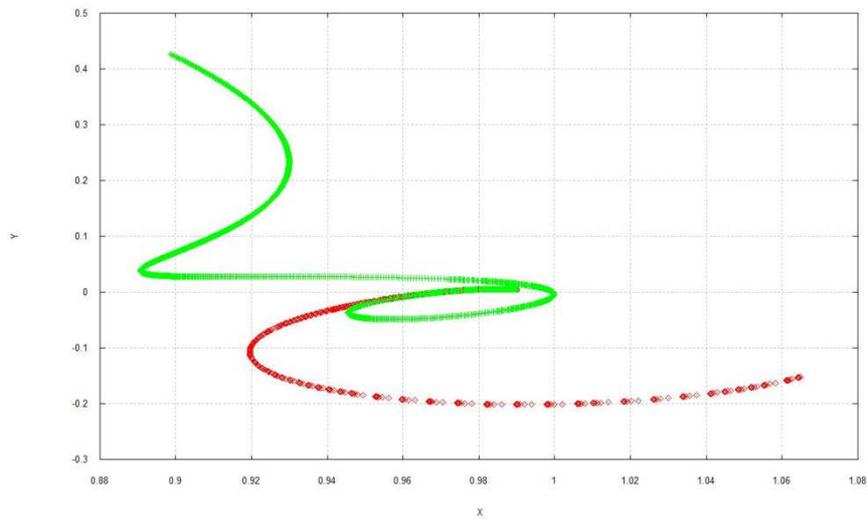


Figura 4.52. Órbitas retrógradas  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\psi = 30^\circ$ .

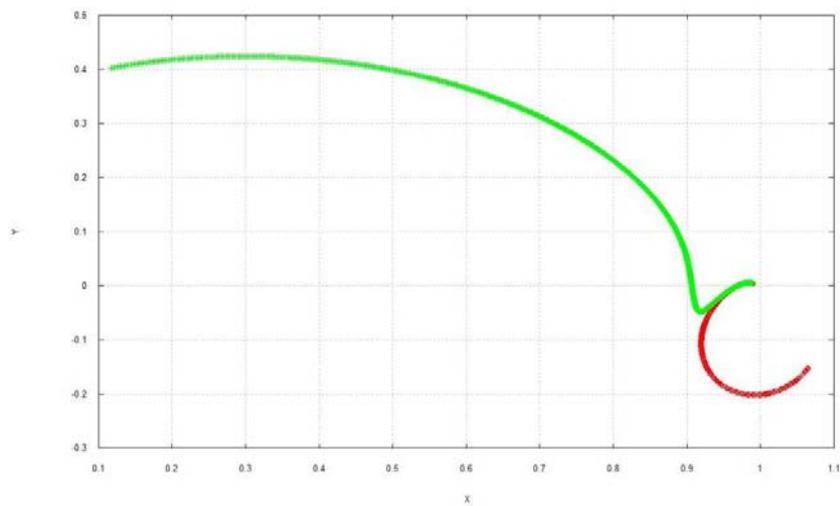


Figura 4.53. Órbitas retrógradas  $C_3 = -0.10$ ,  $\alpha = 60^\circ$  e  $\psi_0 = 90^\circ$ .

#### 4.8.2. Órbitas de diferentes qualidades nos modelos

As condições iniciais para a órbita limitada abaixo são dadas por  $C_3 = -0.2$  e  $\alpha = 90^\circ$  no problema de três corpos restrito circular.

No problema bi-circular temos o mesmo valor de  $C_3$  e do ângulo  $\alpha$  e o ângulo  $\psi$  toma os valores  $35^\circ, 40^\circ$  e  $42^\circ$ . Obtemos órbitas de captura gravitacional retrógrada para todas as variações do ângulo  $\psi$ .

Em vermelho temos a órbita do problema de três corpos restrito e em verde a órbita do problema bi-circular. O tempo de integração foi de quinze dias, para todas as órbitas.

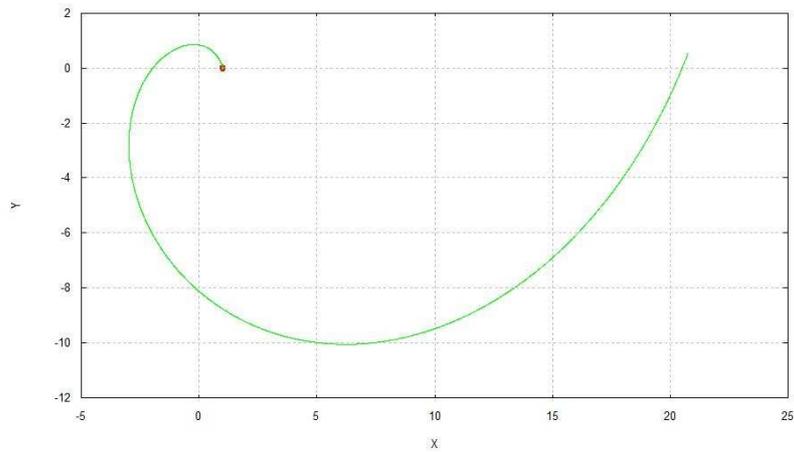


Figura 4.54 Condições iniciais  $C_3 = -0.2$ ,  $\alpha = 90^\circ$  e  $\psi_0 = 35^\circ$ .

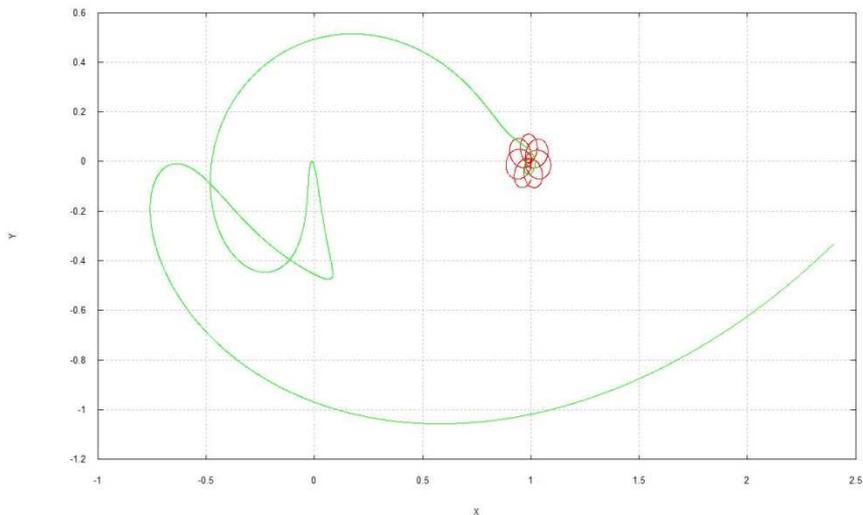


Figura 4.55 Condições iniciais  $C_3 = -0.2$ ,  $\alpha = 90^\circ$  e  $\psi_0 = 40^\circ$ .

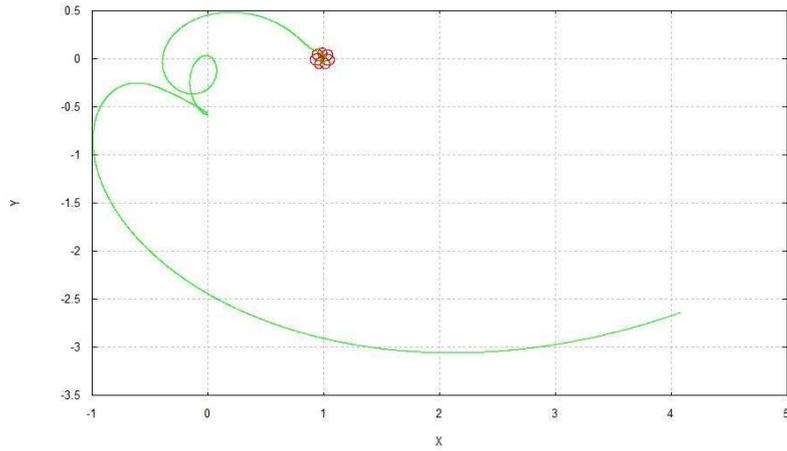


Figura 4.56 Condições iniciais  $C_3 = -0.2$ ,  $\alpha = 90^\circ$  e  $\psi_0 = 42^\circ$ .

#### 4.9. Conclusão

Um grande número de resultados numéricos permite afirmar que existe uma grande dependência das condições iniciais para obtermos órbitas de captura. Uma variação de  $C_3$  inicial ou do ângulo  $\alpha$  pode transformar uma órbita de captura gravitacional em uma órbita limitada ou ainda ocorrer uma colisão do veículo espacial com a Lua no problema de três corpos restrito.

No problema bi-circular existe a mesma dependência das condições iniciais para sabermos se uma órbita é de captura gravitacional ou não.

Os efeitos do terceiro corpo primário, isto é, do Sol ficaram evidentes nos últimos exemplos acima, onde tínhamos uma órbita limitada no problema de três corpos restrito e passamos a uma órbita de captura ou colisão no problema bi-circular.

Na secção 4.1 definimos dois testes que definiam captura gravitacional. Observamos nos experimentos aqui apresentados que ambos os testes dão o mesmo tipo de órbita, isto é, se o primeiro teste for órbita de captura gravitacional o segundo também o será e o mesmo é verdade para os demais tipos de órbitas, sejam elas de colisão, escape ou limitada. Pode acontecer que a captura gravitacional ocorra em tempos distintos para cada um dos testes, mas com diferença de tempo não significativa.

## 5 VALOR MÍNIMO DE $C_3$

### 5.1. Introdução

Neste Capítulo será calculado o valor mínimo da energia inicial do veículo espacial com respeito à Lua, esse valor mínimo pode influenciar no menor consumo de combustível numa transferência Terra Lua. Por esta razão a busca dos valores mínimos de  $C_3$  inicial para captura gravitacional é de grande importância.

Chamamos de regiões mais favoráveis para captura gravitacional, regiões em que a energia mínima inicial  $C_3$  é menor do que o valor desta mesma grandeza comparadas com outras regiões.

Os dois objetivos deste capítulo são: obter o menor valor da energia do veículo espacial com relação à Lua e encontrar regiões favoráveis para captura gravitacional para cada um dos modelos matemáticos estudados.

Na primeira parte deste Capítulo é feita uma análise do valor mínimo da energia do veículo espacial com relação à Lua para o problema de três corpos restrito circular. Também encontramos as regiões favoráveis para captura gravitacional tanto para órbitas diretas como para retrógradas.

No Capítulo 4 fornecemos as condições iniciais do veículo espacial, tínhamos que sua distância inicial em relação à Lua é de 100 km nos dois modelos matemáticos, tanto no movimento direto quanto no movimento retrógrado. Na segunda parte deste Capítulo testaremos valores diferentes de 100 km para a distância do veículo espacial à Lua no problema de três corpos restrito circular, isto é,  $r_p \neq 18730km$ . O que desejamos saber é se essa mudança da distância do veículo espacial à Lua vai alterar o valor mínimo da energia do veículo espacial com relação à Lua. Continuaremos tendo regiões favoráveis para captura gravitacional?

Na terceira parte desse Capítulo é feita uma análise para o problema bi-circular de quatro corpos das regiões favoráveis para o mínimo valor da energia do veículo espacial com relação à Lua.

Na quarta etapa testamos valores diferentes de 100 km para o veículo espacial e Lua no problema bi-circular. Na última etapa fazemos uma comparação dos resultados obtidos nos dois modelos matemáticos estudados. As principais fontes de consulta para esse Capítulo é o artigo de Machuy, Prado e Stchui (2006) e Viera Neto (1999).

## 5.2. Estudo do valor mínimo da energia inicial.

**Problema:** Dada uma posição inicial do veículo espacial no problema de três corpos restrito circular queremos saber qual o menor valor de  $C_3$  que fornece uma órbita de captura gravitacional.

Exemplificaremos o problema acima fixando uma posição inicial do veículo espacial no problema de três corpos restrito com movimento direto.

Como foi visto no capítulo quatro temos a posição inicial apenas em função do ângulo  $\alpha$ , isto é,

$$\begin{aligned}x &= r_p \cos(\alpha) + \mu_E \\y &= r_p \sin(\alpha)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Agora faremos o ângulo  $\alpha = 30^\circ$ , o que determina a posição inicial do veículo espacial no problema de três corpos restrito circular. Testamos algumas energias iniciais,  $C_3 = -0.5, -0.6, -0.8, -1.0, -1.2, -1.4, -1.6 e -2.0$ .

A Tabela 5.1 fornece como valor mínimo de  $C_3$  inicial -0.16 para as órbitas de captura gravitacional.

**Tabela 5.1 variação da energia inicial.**

Ângulo	$C_3$	Tipo de órbita
$\alpha = 30^\circ$	-0.05	Colisão.
$\alpha = 30^\circ$	-0.06	Captura direta
$\alpha = 30^\circ$	-0.08	Captura direta
$\alpha = 30^\circ$	-0.10	Captura direta
$\alpha = 30^\circ$	-0.12	Captura direta
$\alpha = 30^\circ$	-0.14	Captura direta
$\alpha = 30^\circ$	-0.16	Captura direta
$\alpha = 30^\circ$	-0.2	Colisão.

## 5.3. Estudo do valor mínimo da energia inicial para termos captura gravitacional no problema de três corpos restrito circular

Nos dois gráficos abaixo fornecemos na vertical o valor da energia inicial do veículo espacial  $C_3$  em unidade adimensionais e na horizontal o valor do ângulo inicial do

veículo espacial  $\alpha$  em graus. O valor de  $C_3$  fornecido nestes gráficos é o menor valor que proporciona captura gravitacional para um ângulo  $\alpha$  dado. Variamos o ângulo  $\alpha$  de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  com passo de  $1^\circ$  e o valor de  $C_3$  varia de  $-0.01$  até  $-0.3$ , com passo de  $-0.01$ .

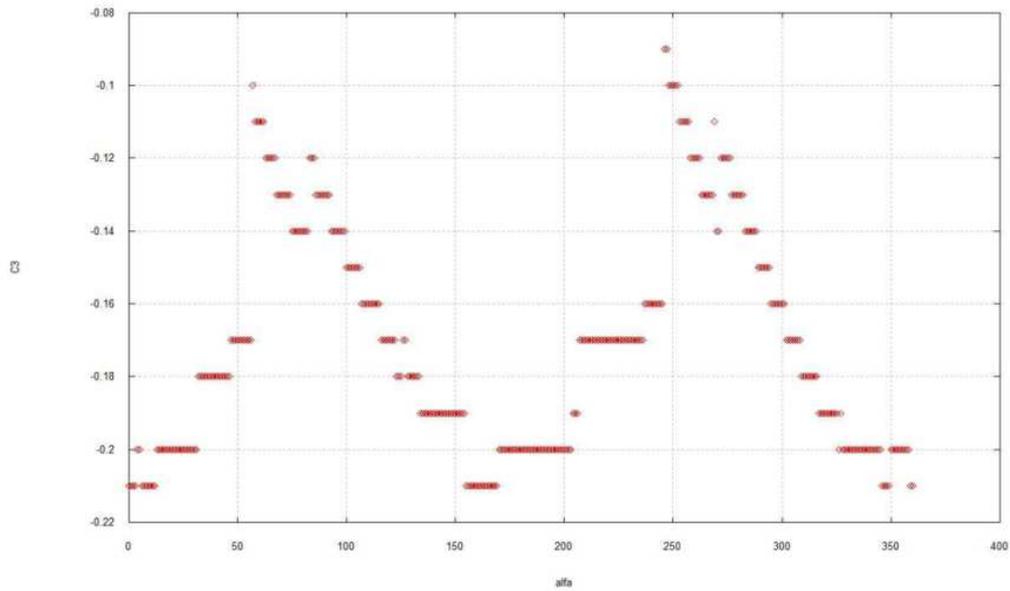


Figura 5.1. Três corpos restrito circular com órbitas diretas.

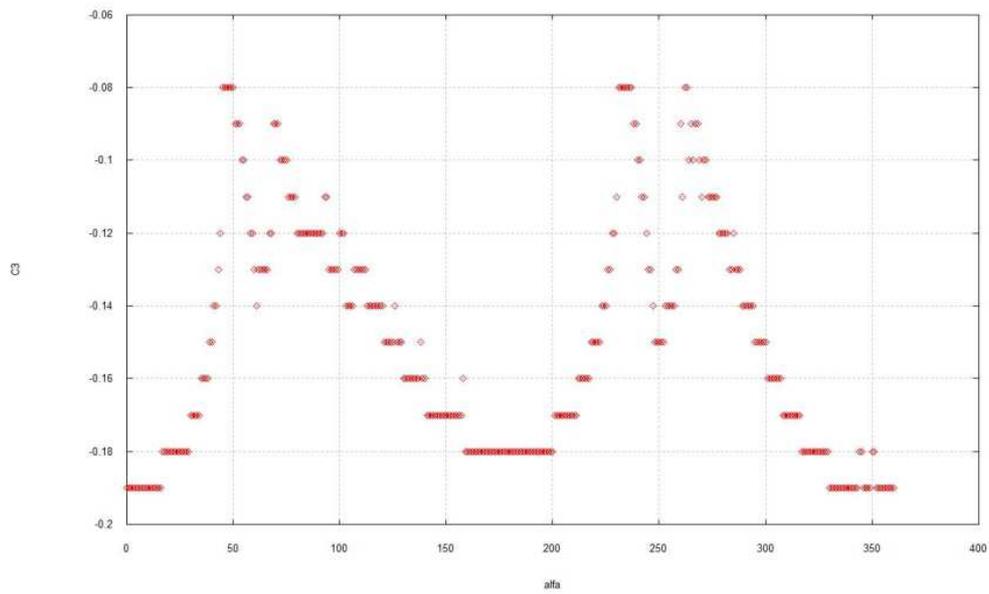


Figura 5.2. Três corpos restrito circular com órbitas retrógradas.

Pelos gráficos das Figuras 5.1 e 5.2 notamos que a captura retrógrada, de forma geral, proporciona valores mínimos de  $C_3$  maiores do que os valores obtidos na captura direta, embora as diferenças não sejam grandes.

Os valores mínimos de  $C_3$  inicial encontrados para captura direta são -0.22 (em unidades adimensionais), e -0.19 para captura retrógrada (em unidades adimensionais).

Pelo gráfico vemos que há duas regiões favoráveis para captura gravitacional no caso de órbitas diretas, que são  $155^\circ \leq \alpha \leq 169^\circ$  e  $6^\circ \leq \alpha \leq 12^\circ$  e também temos duas regiões favoráveis para captura gravitacional no caso de órbitas retrógradas que são,  $0^\circ \leq \alpha \leq 16^\circ$  e  $346^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ .

#### **5.4. Estudo da influência da distância do veículo espacial à superfície da Lua**

Consideramos o ponto de partida de cada trajetória do veículo espacial fica a uma distância de 100 km da superfície da Lua, isto é,  $r_p = 1838 \text{ km}$ . Caso o veículo espacial estivesse com uma distância inicial maior ou menor do que 100 km da Lua isto poderia influenciar no valor mínimo de  $C_3$  inicial? Existem regiões favoráveis de captura gravitacional quando modificamos o valor de  $r_p$ ? Nesta secção faremos testes para valores diferentes de  $r_p$ .

##### **5.4.1 Órbitas diretas. Distância da Lua ao veículo espacial maior que 100 km**

Na Figura 5.3 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 2238 \text{ km}$ . Na figura 5.4 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 2738 \text{ km}$ . Comparando os dois gráficos vemos que não existe uma mudança significativa nas respostas às perguntas feitas acima, isto é, para esses dois valores de  $r_p$  testados não houve alteração para o valor mínimo de  $C_3$  inicial, continuou valendo -0.22 unidades canônicas.

Em resumo não existem mudanças expressivas nas regiões favoráveis de captura gravitacional para os valores de  $r_p$  testados. Veja que os gráficos das Figuras 5.3 e 5.4 estão muito parecidos, praticamente um sobrepõe o outro, ou seja, a curva vermelha esta praticamente em cima da curva verde.

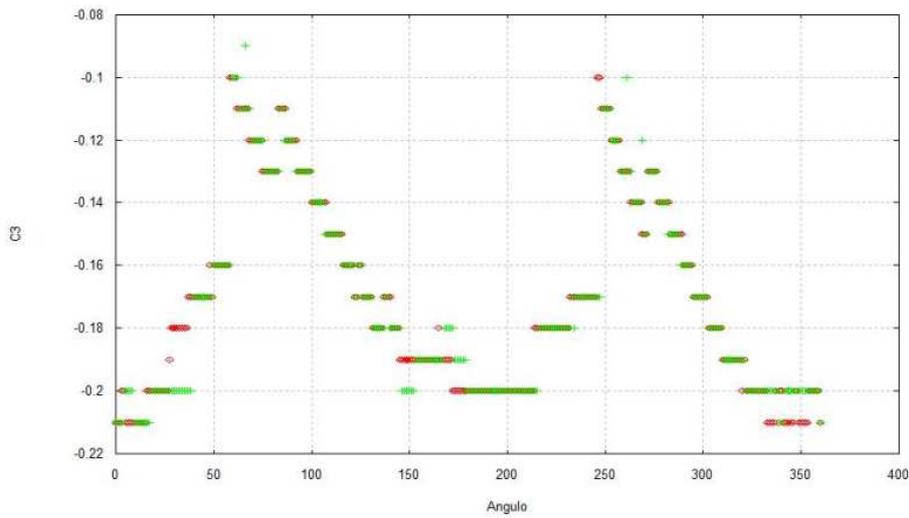


Figura 5.3. Três corpos restrito circular.  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 2238 \text{ km}$

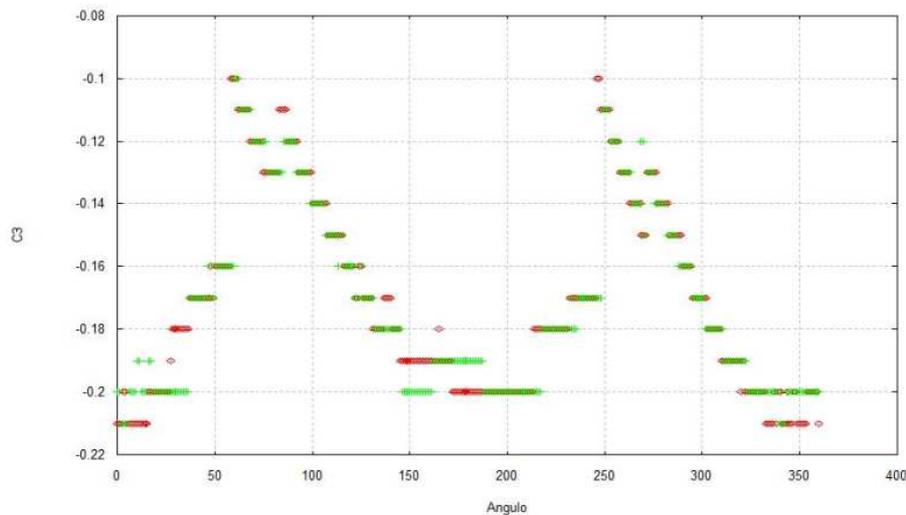


Figura 5.4. Três corpos restrito circular.  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 2738 \text{ km}$

Todos os valores da distância inicial do veículo espacial a Lua entre 100 km e 1000 km testados não fornecem mudanças expressivas no valor mínimo da energia inicial do veículo espacial nem nas regiões favoráveis para captura.

E se aumentássemos “muito” a distância entre a lua e o veículo espacial? Quais seriam as conseqüências de tal aumento? A resposta a essa pergunta é dada pelos dois gráficos

abaixo, onde temos a comparação da distância entre o veículo espacial e a Lua sendo da ordem de 100 km e 10000 km na figura 5.5 e 100 km e 20000 km na Figura 5.6.

Na Figura 5.5 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 11738 \text{ km}$ . Na Figura 5.6 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$ , e em verde  $r_p = 21738 \text{ km}$ . A diferença básica é que o valor de  $C_3$  inicial mínimo muda de  $-0.21$  para  $-0.18$  nos dois gráficos. Outro fato notável é que embora o valor mínimo seja mais alto é que a região favorável para captura gravitacional fica bastante ampliada na Figura 5.5.

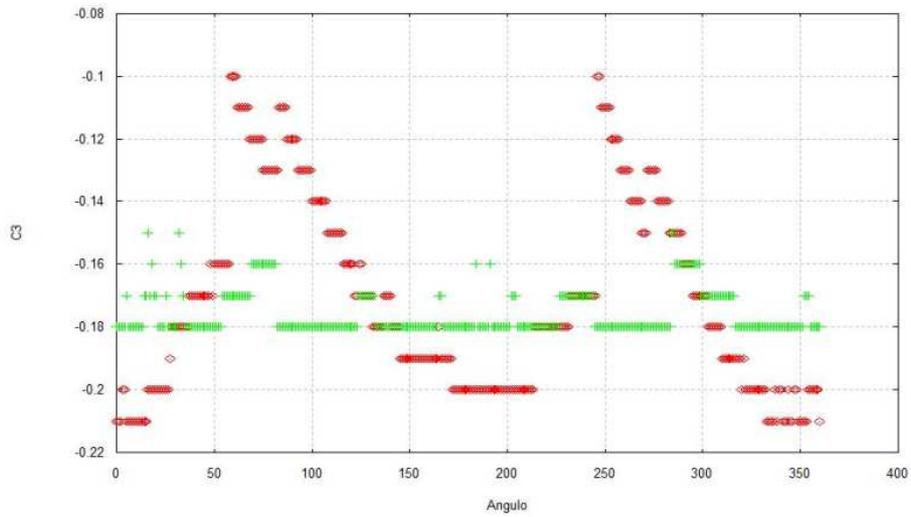


Figura 5.5. Três corpos restrito circular, com  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 11738 \text{ km}$

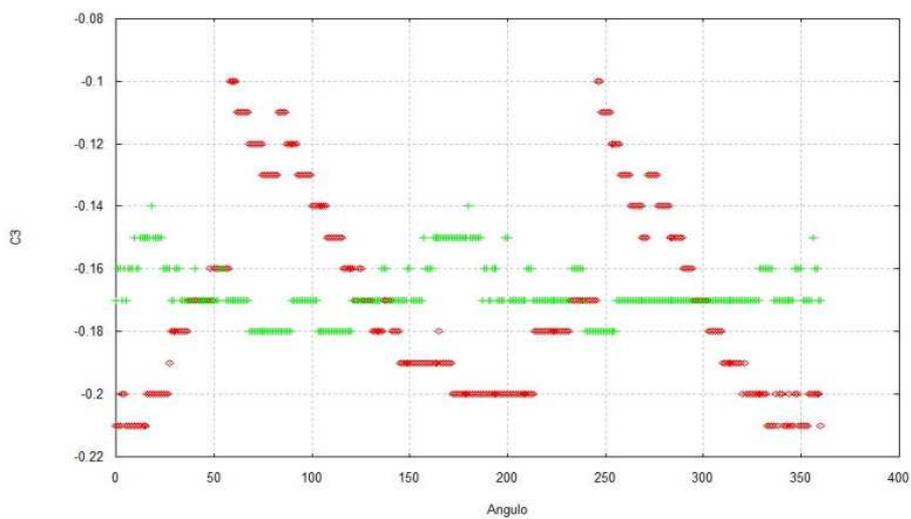


Figura 5.6. Três corpos restrito circular, com  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 21738 \text{ km}$

#### 5.4.2 Órbitas diretas. Distância da Lua ao veículo espacial menor que 100 km

Na Figura 5.7 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 1758 \text{ km}$ . Na Figura 5.8 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 1839 \text{ km}$ . Comparando os dois gráficos não existe uma mudança significativa nas perguntas feitas no início desta secção, isto é, para esses dois valores de  $r_p$  testados não houve alteração para o valor mínimo de  $C_3$  inicial, continua  $-0.22$  unidades adimensionais.

Não existem mudanças expressivas nas regiões favoráveis de captura gravitacional para estes valores de  $r_p$  testados. Veja que os gráficos das Figuras 5.5 e 5.6 estão muito parecidos, praticamente um sobrepõe o outro, ou seja, a curva vermelha esta praticamente em cima da curva verde.

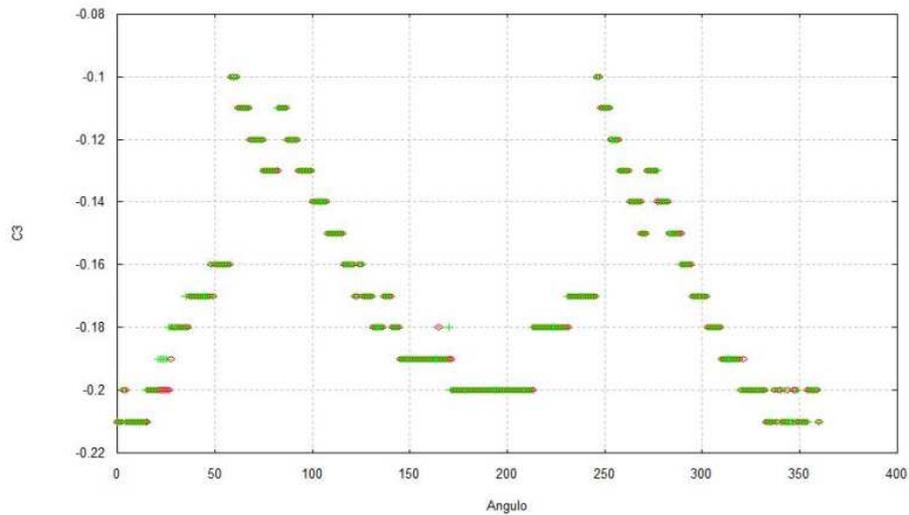


Figura 5.7. Três corpos restrito circular, para  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 1788 \text{ km}$ .

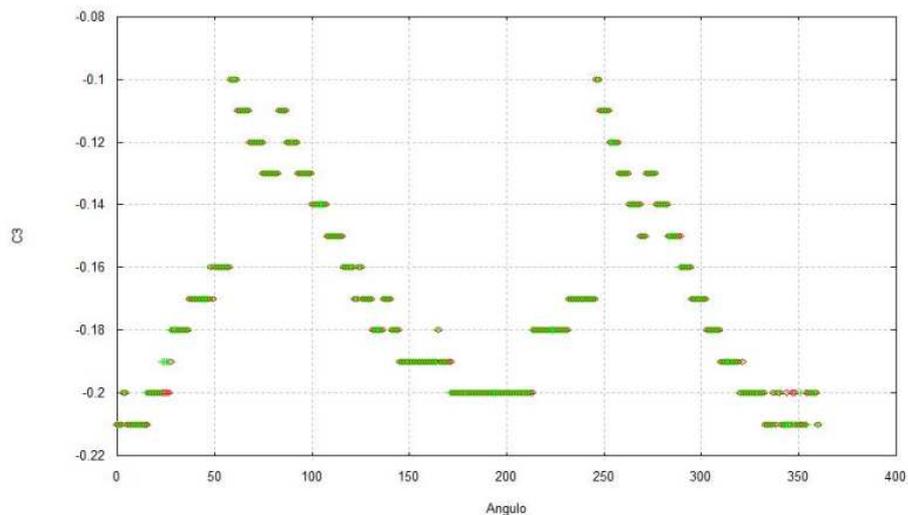


Figura 5.8. Três corpos restrito circular, para  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 1739 \text{ km}$

Todos os valores da distância inicial do veículo espacial a Lua entre 1 km e 100 km testados não fornecem mudanças significativas no valor mínimo da energia inicial do veículo espacial nem para regiões favoráveis para captura.

Concluimos que no caso de órbitas diretas no problema de três corpos restrito circular aumentar ou diminuir a distância inicial do veículo espacial à Lua de 100 km não modifica muito o valor da energia mínima de captura gravitacional.

#### 5.4.3 Órbitas retrógradas. Distância da Lua ao veículo espacial maior que 100 km

Na Figura 5.9 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 2238 \text{ km}$ . Na Figura 5.10 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 2738 \text{ km}$ . Comparando os dois gráficos não existe uma mudança significativa nas respostas às perguntas feitas no início desta secção, isto é, para esses dois valores de  $r_p$  testados não houve alteração para o valor mínimo de  $C_3$  inicial, segue valendo -0.19 unidades adimensionais.

Também não existem mudanças expressivas nas regiões favoráveis de captura gravitacional para estes valores de  $r_p$  testados. Veja que os gráficos das Figuras 5.9 e 5.10 estão muito parecidos, praticamente uma se sobrepõe a outra, ou seja, a curva vermelha esta praticamente em cima da curva verde.

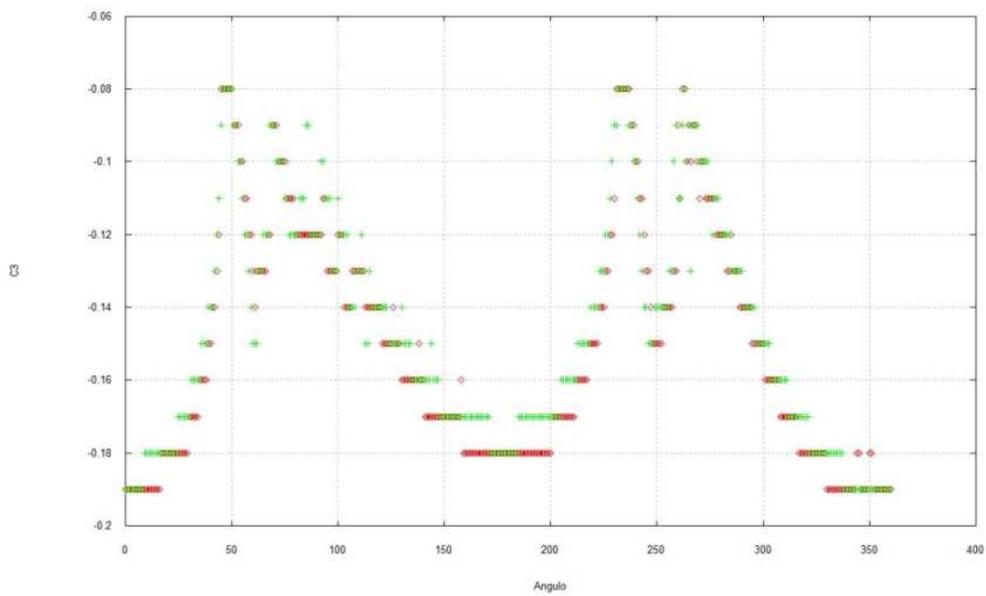


Figura 5.9. Três corpos restrito circular, para  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 2738 \text{ km}$

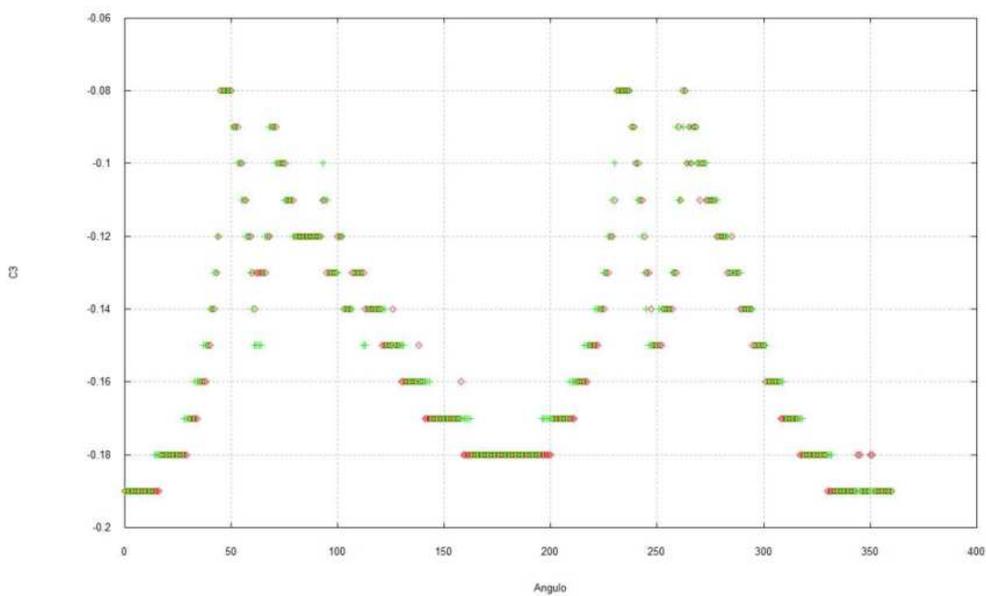


Figura 5.10. Três corpos restrito circular, para  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 1739 \text{ km}$

Todos os valores da distância do veículo espacial à Lua entre 100 km e 1000 km testados não fornecem mudanças significativas no valor mínimo da energia do veículo espacial nem para regiões favoráveis para captura.

A seguir testamos valores maiores para a distância entre a Lua e o veículo espacial. Os dois gráficos abaixo mostram o resultado, onde temos a comparação da distância entre o veículo espacial e a Lua sendo 100 km e 10000 km na figura 5.11 e 100 km e 20000 km na figura 5.12.

Na Figura 5.11 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 11738 \text{ km}$ . Na Figura 5.12 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 2178 \text{ km}$ . A diferença básica é que o valor de  $C_3$  inicial mínimo muda de -0.19 para -0.12 quando efetuamos a mudança de 100 km para 20000 km do veículo espacial à Lua, vide figura 5.12. Quando efetuamos a troca de 100 km para 10000 km da distância do veículo espacial à Lua o valor mínimo de  $C_3$  inicial muda de -0.19 para -0.15. Outro fator é que a região favorável para captura gravitacional fica bastante ampliada na Figura 5.12.

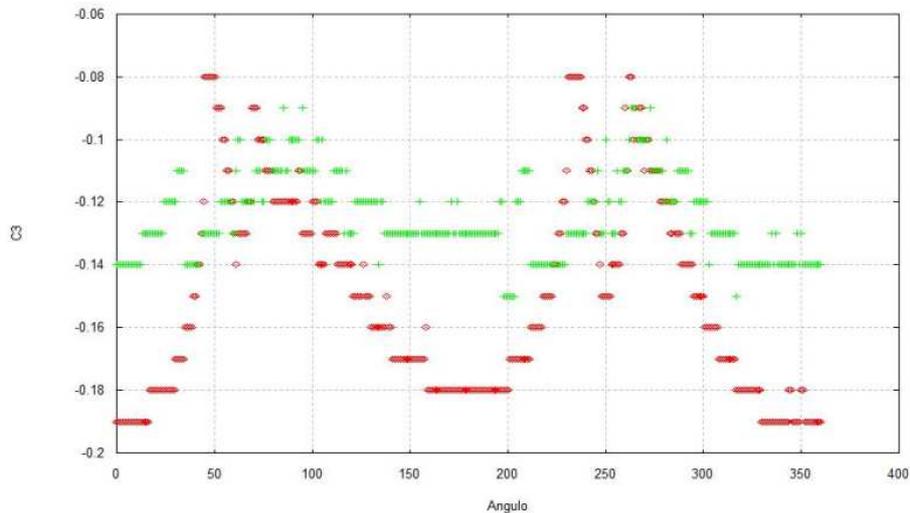


Figura 5.11. Três corpos restrito circular, com  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 11738 \text{ km}$

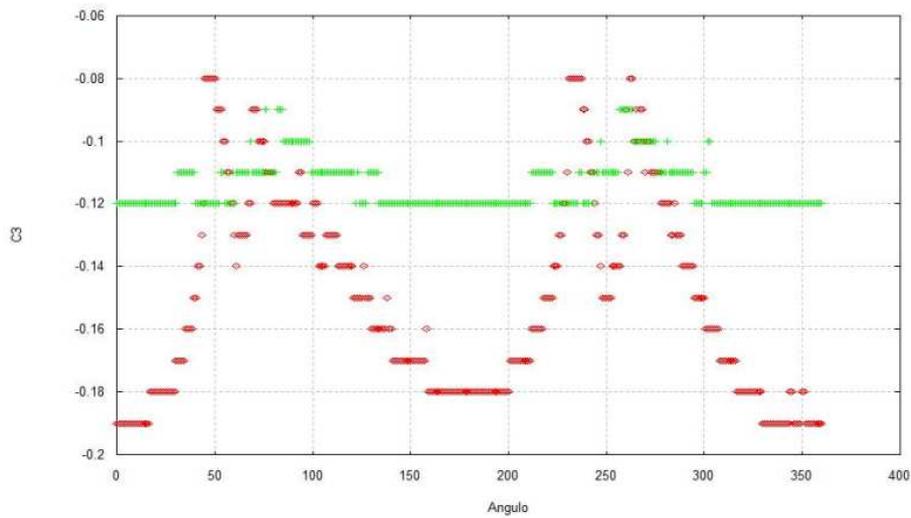


Figura 5.12. Três corpos restrito circular, com  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 21738 \text{ km}$

#### 5.4.4 Órbitas retrógradas. Distância da Lua ao veículo espacial menor que 100 km.

Na Figura 5.13 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 1758 \text{ km}$ . Na Figura 5.14 temos em vermelho  $r_p = 1838 \text{ km}$  e em verde  $r_p = 1839 \text{ km}$ . Comparando os dois gráficos não existe uma mudança significativa, isto é, para esses dois valores de  $r_p$  testados não houve alteração para o valor mínimo de  $C_3$  inicial, continuou valendo  $-0.19$  unidades canônicas.

Não existem mudanças nas regiões favoráveis de captura gravitacional para estes valores de  $r_p$  testados, veja que os gráficos das Figuras 5.9 e 5.10 estão muito parecidos praticamente um sobrepõe o outro, ou seja, a curva vermelha esta praticamente em cima da curva verde.

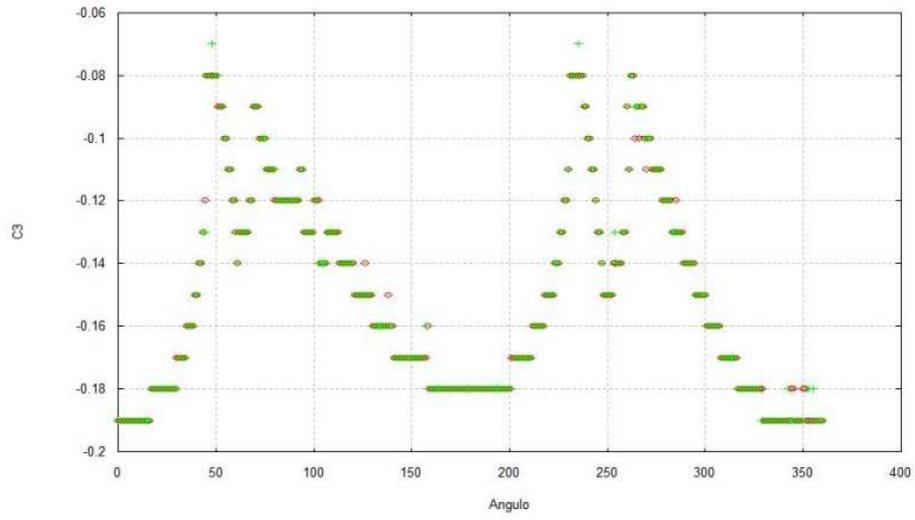


Figura 5.13. Três corpos restrito circular, com  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 1788 \text{ km}$

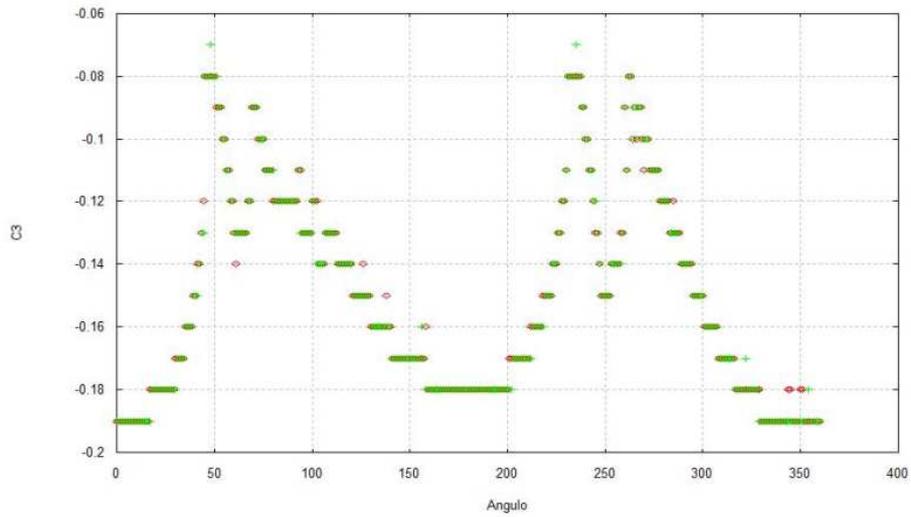


Figura 5.14. Três corpos restrito circular, com  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $r_p = 1739 \text{ km}$

Todos os valores da distância veículo espacial à Lua entre 1 km e 100 km testados não forneceram mudanças significativas no valor mínimo da energia do veículo espacial, nem para regiões favoráveis para captura.

Concluimos que, no caso de órbitas retrógradas no problema de três corpos restrito circular, aumentar ou diminuir a distância inicial do veículo espacial à Lua dos 100 km utilizados inicialmente não modifica muito o valor da energia mínima de captura gravitacional.

### **5.5. Estudo do valor mínimo de $C_3$ inicial para termos captura gravitacional no problema bi-circular de quatro corpos.**

Nesta secção faremos o cálculo de  $C_3$  inicial mínimo para o problema bi-circular de quatro corpos de maneira que tenhamos órbitas de captura gravitacional. Também calcularemos regiões favoráveis de captura gravitacional para o problema bi-circular.

Abaixo temos dois conjuntos de gráficos para o problema bi-circular de quatro corpos, o primeiro conjunto é para órbitas diretas e o segundo para órbitas retrógradas. Analogamente ao problema de três corpos restrito, o valor de  $C_3$  fornecido nestes gráficos é o menor valor que proporciona captura gravitacional para um ângulo  $\alpha$  dado.

O ângulo  $\alpha$  varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , com passo de  $1^\circ$ . O valor de  $C_3$  varia de -0.01 até -0.65, com passo de -0.01. Para o ângulo do Sol  $\psi_0$ , escolhemos os valores:

$0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ$  e  $330^\circ$

Para cada um destes valores de  $\psi_0$  temos um gráfico, mostrado abaixo, que fornece o valor do mínimo  $C_3$  inicial para termos órbita de captura gravitacional.

### 5.5.1 Órbitas diretas.

Na Figura 5.15 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 0^\circ$ . Os valores mínimos de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 0^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.15 fornece a região favorável para captura gravitacional  $161^\circ \leq \alpha \leq 199^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $342^\circ \leq \alpha \leq 359^\circ$ .

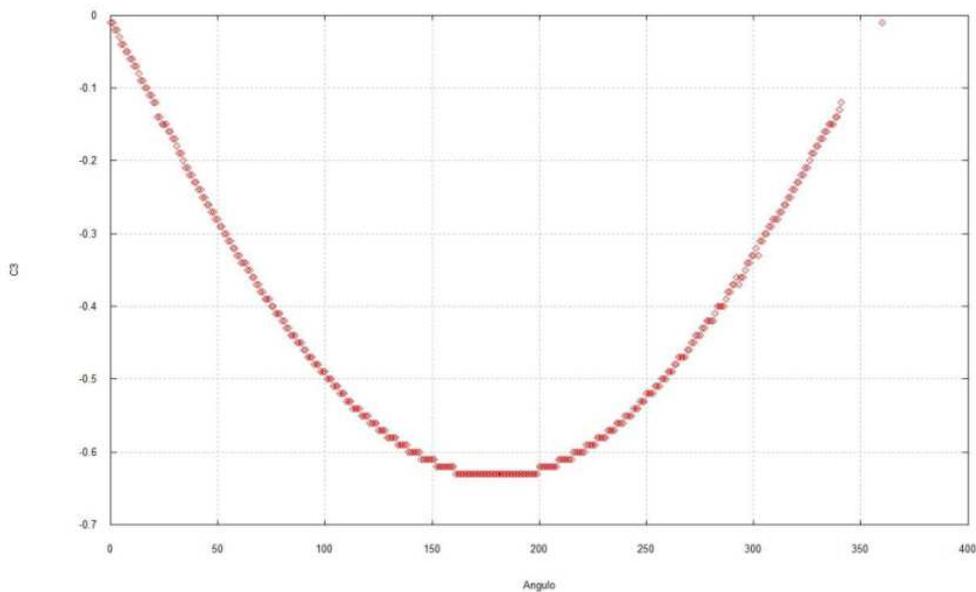


Figura 5.15 Bi-circular  $\psi_0 = 0^\circ$ .

Na Figura 5.16 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 30^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 30^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.16 fornece a região favorável para captura gravitacional  $193^\circ \leq \alpha \leq 224^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $13^\circ \leq \alpha \leq 29^\circ$ .

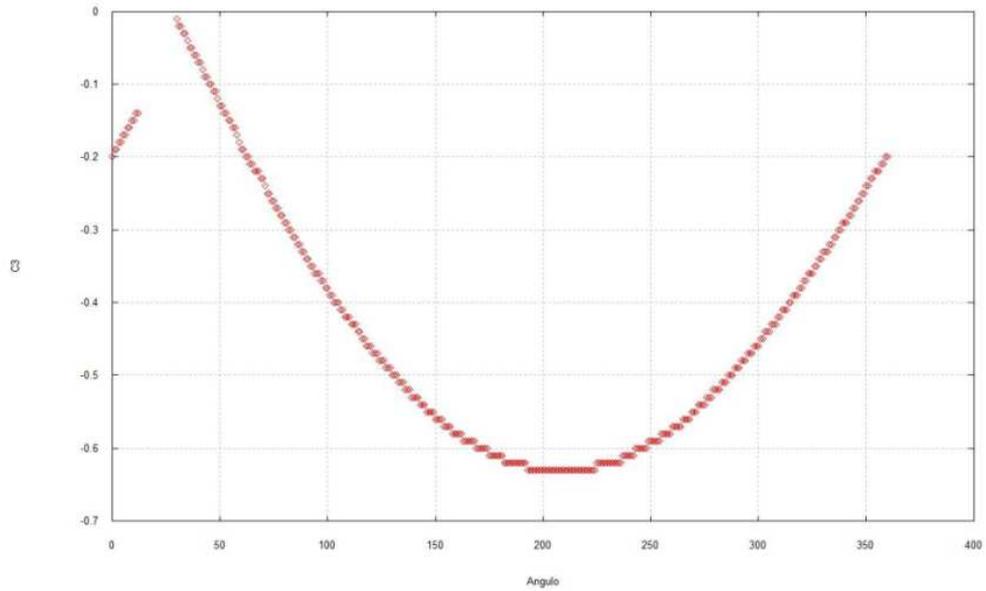


Figura 5.16 Bi-circular  $\psi_0 = 30^\circ$ .

Na Figura 5.17 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 45^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 45^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.17 fornece a região favorável para captura gravitacional  $213^\circ \leq \alpha \leq 234^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $28^\circ \leq \alpha \leq 44^\circ$ .

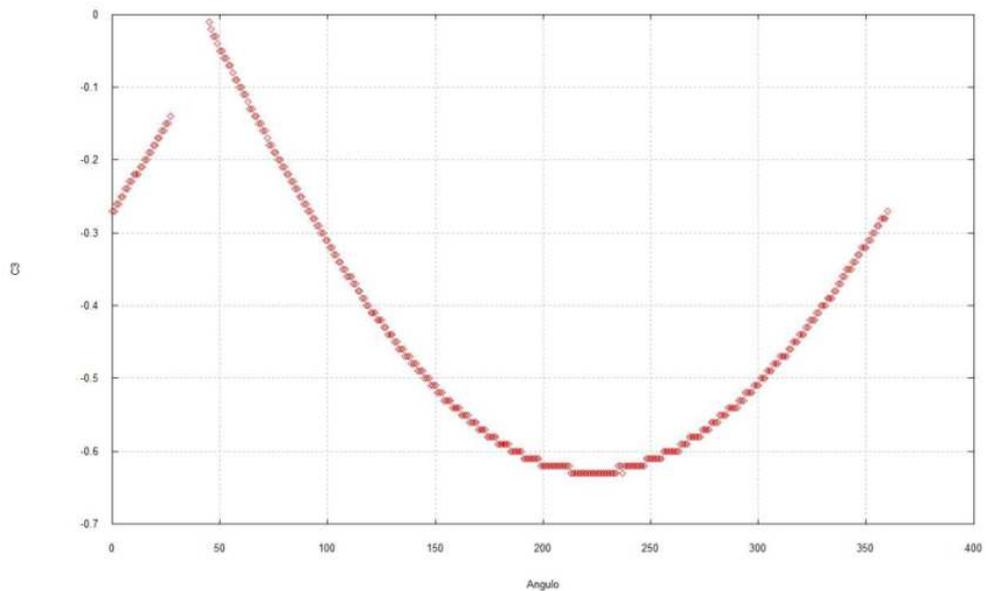


Figura 5.17 Bi-circular  $\psi_0 = 45^\circ$ .

Na Figura 5.18 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 60^\circ$ . Os valores mínimos de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 60^\circ$  é -0.62. O gráfico da Figura 5.18 fornece a região favorável para captura gravitacional  $218^\circ \leq \alpha \leq 261^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $42^\circ \leq \alpha \leq 58^\circ$ .

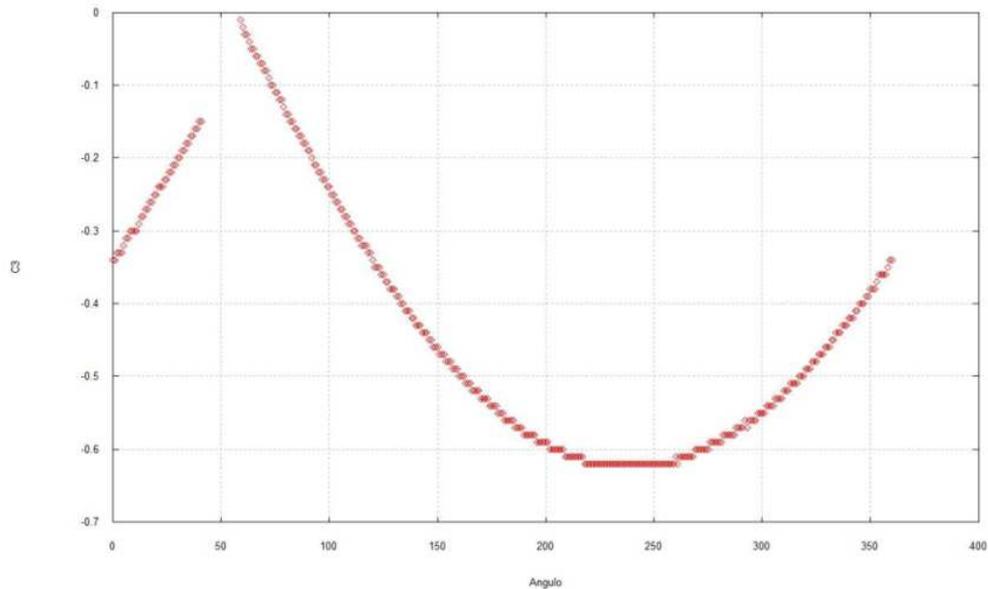


Figura 5.18 Bi-circular  $\psi_0 = 60^\circ$ .

Na Figura 5.19 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 90^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 90^\circ$  é -0.62. O gráfico da Figura 5.19 fornece a região favorável para captura gravitacional  $218^\circ \leq \alpha \leq 261^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $248^\circ \leq \alpha \leq 299^\circ$ .

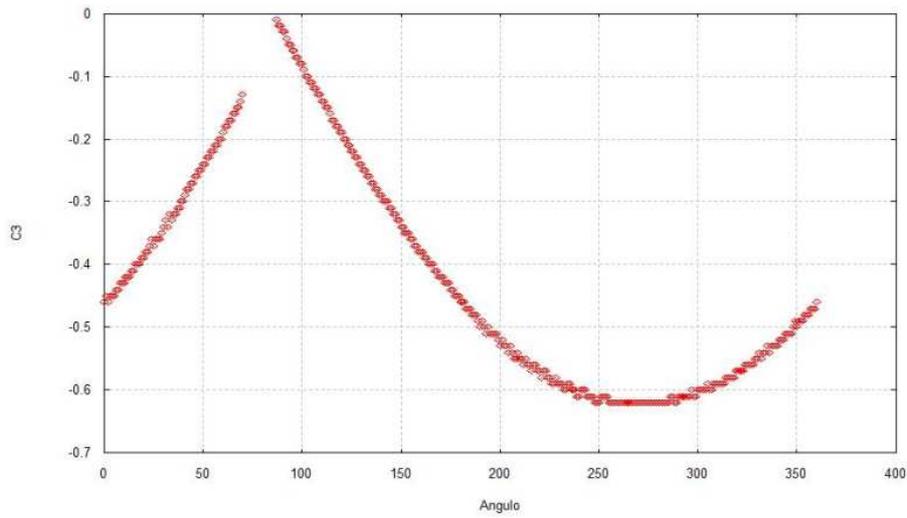


Figura 5.19 Bi-circular  $\psi_0 = 90^\circ$ .

Na Figura 5.20 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 120^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 120^\circ$  é -0.62. O gráfico da Figura 5.20 fornece a região favorável para captura gravitacional  $278^\circ \leq \alpha \leq 323^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $99^\circ \leq \alpha \leq 116^\circ$ .

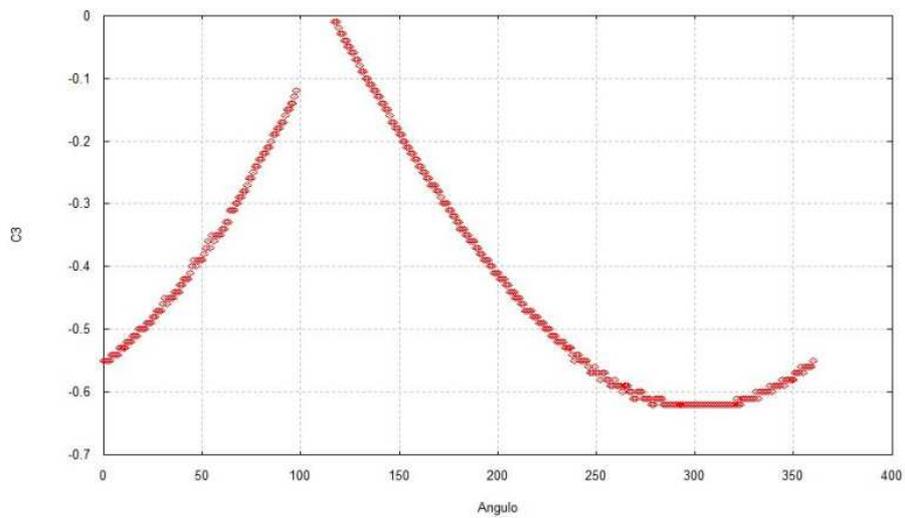


Figura 5.20 Bi-circular  $\psi_0 = 120^\circ$ .

Na Figura 5.21 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 135^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 135^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.21 fornece a região favorável para captura gravitacional  $314^\circ \leq \alpha \leq 320^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $114^\circ \leq \alpha \leq 132^\circ$ .

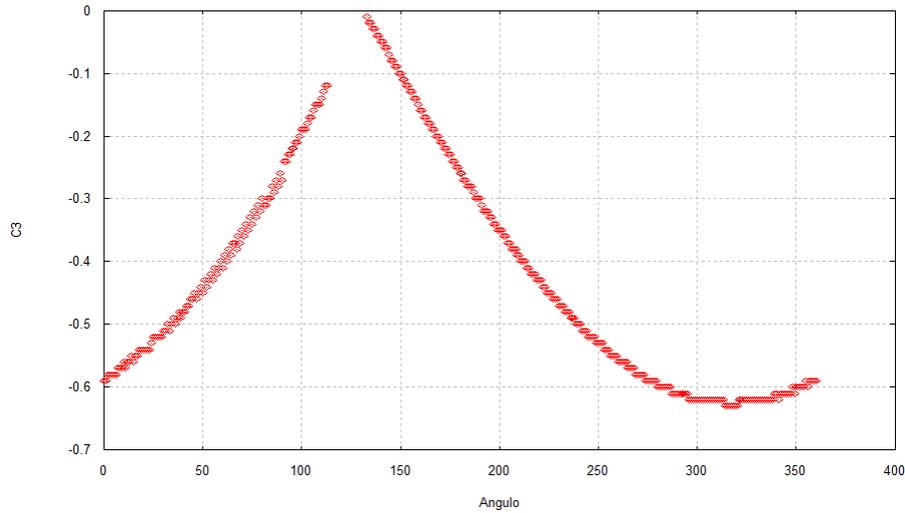


Figura 5.21 Bi-circular  $\psi_0 = 135^\circ$ .

Na Figura 5.22 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 150^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 150^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.22 fornece a região favorável para captura gravitacional  $320^\circ \leq \alpha \leq 344^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $130^\circ \leq \alpha \leq 148^\circ$ .

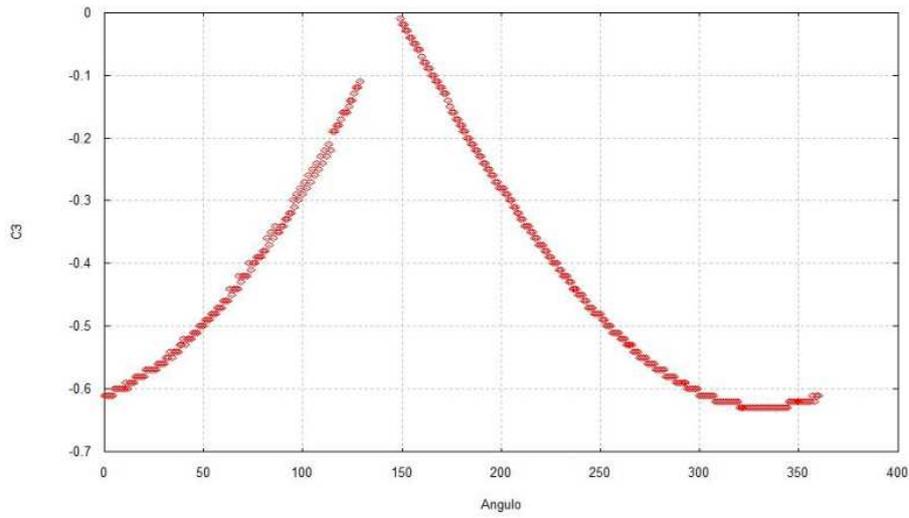


Figura 5.22 Bi-circular  $\psi_0 = 150^\circ$ .

Na Figura 5.23 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 180^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 180^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.23 fornece as regiões favoráveis para captura gravitacional  $343^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$  e  $0^\circ \leq \alpha \leq 17^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $162^\circ \leq \alpha \leq 179^\circ$ .

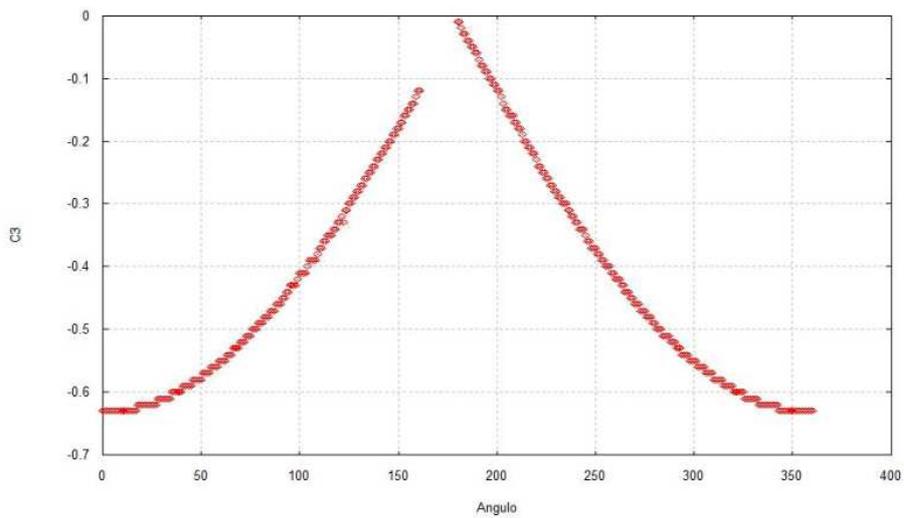


Figura 5.23 Bi-circular  $\psi_0 = 180^\circ$ .

Na Figura 5.24 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 210^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 210^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.24 fornece a região favorável para captura gravitacional  $15^\circ \leq \alpha \leq 41^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $193^\circ \leq \alpha \leq 211^\circ$ .

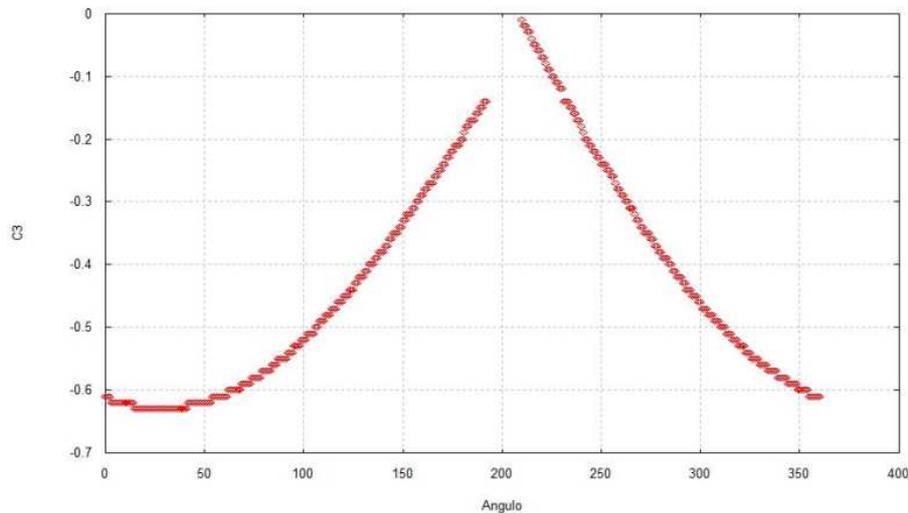


Figura 5.24 Bi-circular  $\psi_0 = 210^\circ$ .

Na Figura 5.25 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 225^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 225^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.25 fornece a região favorável para captura gravitacional  $37^\circ \leq \alpha \leq 48^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $208^\circ \leq \alpha \leq 223^\circ$ .

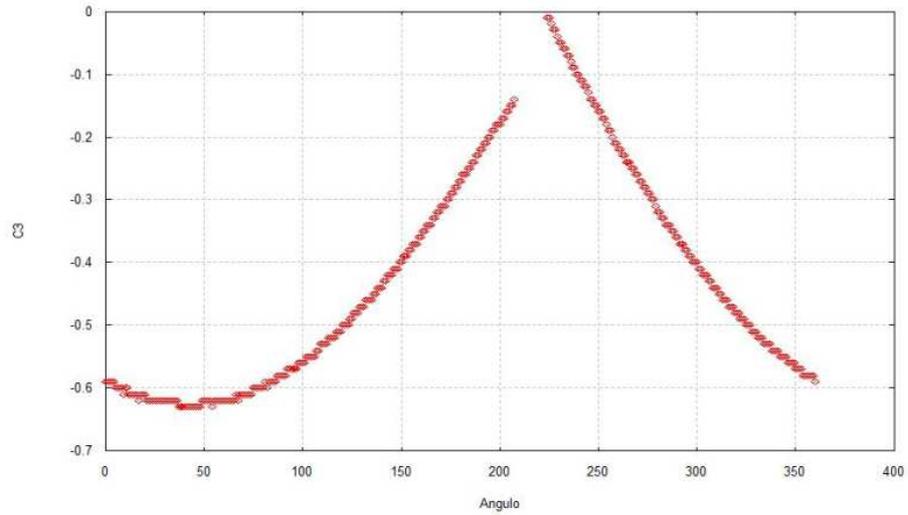


Figura 5.25 Bi-circular  $\psi_0 = 225^\circ$ .

Na Figura 5.26 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 240^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 240^\circ$  é  $-0.62$ . O gráfico da Figura 5.26 fornece a região favorável para captura gravitacional  $39^\circ \leq \alpha \leq 77^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $222^\circ \leq \alpha \leq 238^\circ$ .

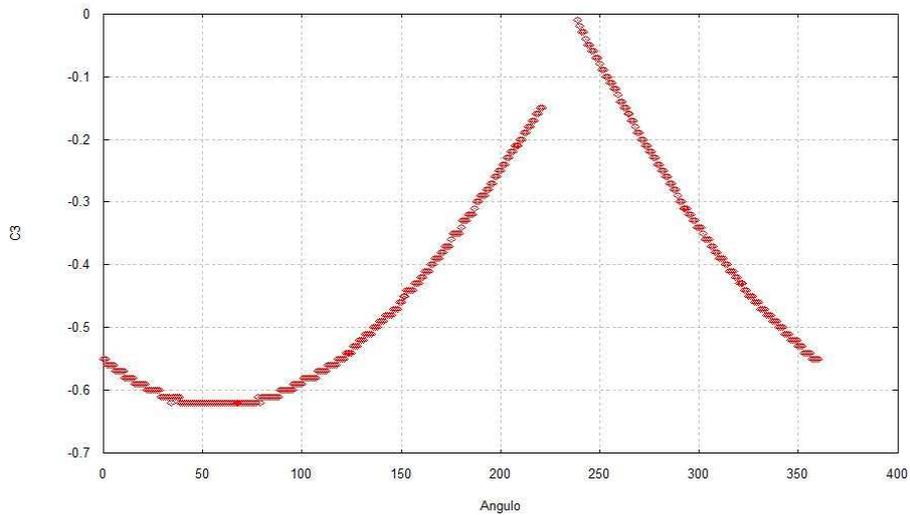


Figura 5.26 Bi-circular  $\psi_0 = 240^\circ$ .

Na Figura 5.27 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 270^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 270^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.27 fornece a região favorável para captura gravitacional  $68^\circ \leq \alpha \leq 109^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $251^\circ \leq \alpha \leq 266^\circ$ .

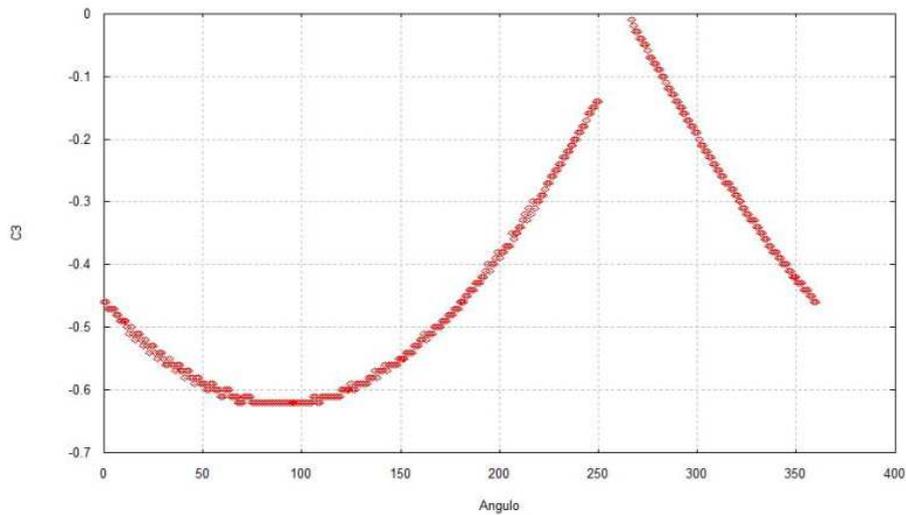


Figura 5.27 Bi-circular  $\psi_0 = 270^\circ$ .

Na Figura 5.28 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 300^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 300^\circ$  é -0.62. O gráfico da Figura 5.28 fornece a região favorável para captura gravitacional  $101^\circ \leq \alpha \leq 144^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $279^\circ \leq \alpha \leq 295^\circ$ .

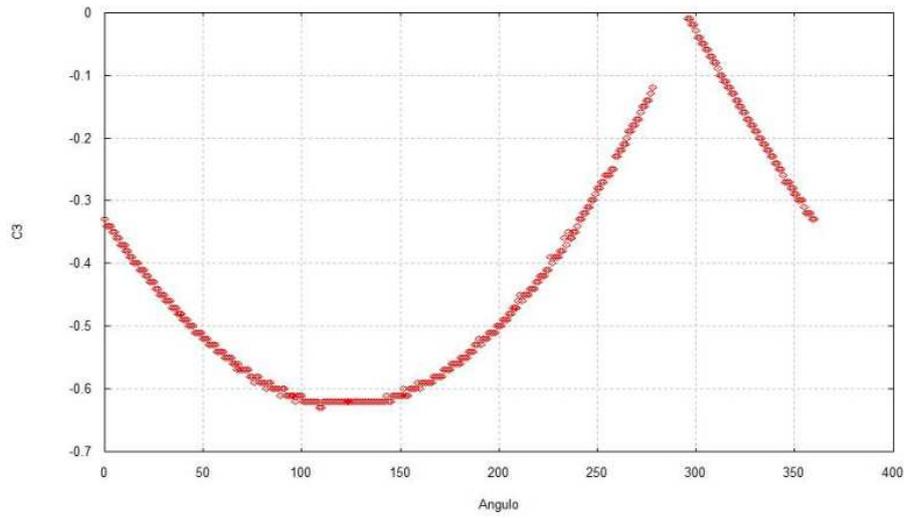


Figura 5.28 Bi-circular  $\psi_0 = 300^\circ$ .

Na Figura 5.29 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 315^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 315^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.29 fornece a região favorável para captura gravitacional  $126^\circ \leq \alpha \leq 147^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $294^\circ \leq \alpha \leq 311^\circ$ .

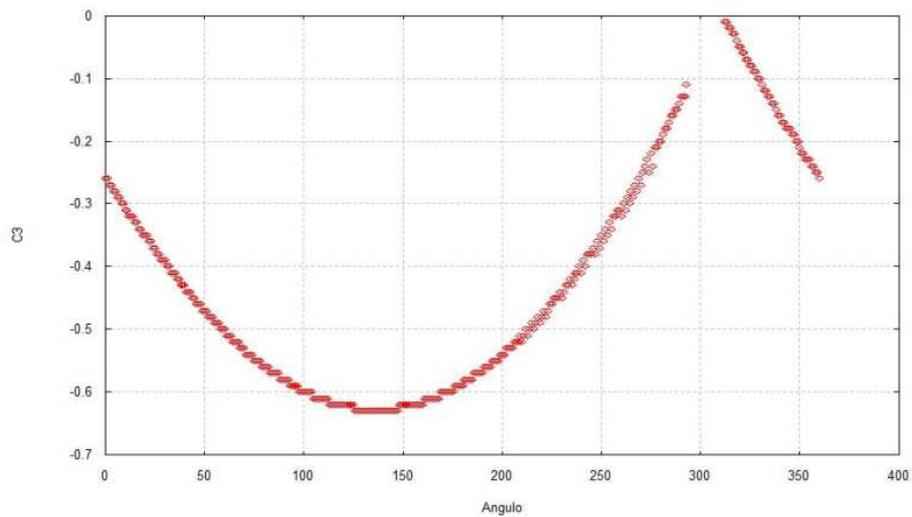


Figura 5.29 Bi-circular  $\psi_0 = 315^\circ$ .

Na Figura 5.30 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 330^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 330^0$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.30 fornece a região favorável para captura gravitacional  $137^0 \leq \alpha \leq 167^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $309^0 \leq \alpha \leq 328^0$ .

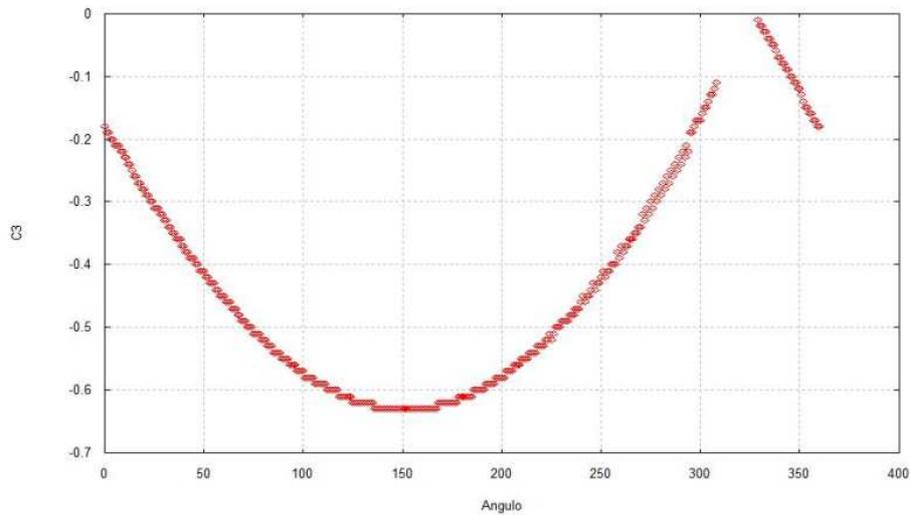


Figura 5.30 Bi-circular  $\psi_0 = 330^0$ .

### 5.5.2 Órbitas retrógradas.

Na Figura 5.31 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 0^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 0^0$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.31 fornece a região favorável para captura gravitacional  $164^0 \leq \alpha \leq 196^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $1^0 \leq \alpha \leq 19^0$ .

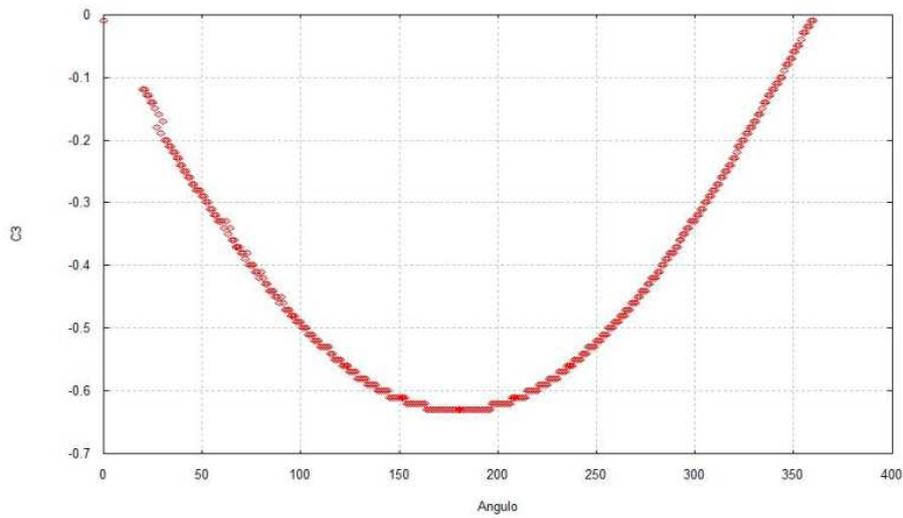


Figura 5.31 Bi-circular  $\psi_0 = 0^0$ .

Na Figura 5.32 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 30^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 30^0$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.32 fornece a região favorável para captura gravitacional  $193^0 \leq \alpha \leq 224^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $201^0 \leq \alpha \leq 216^0$ .

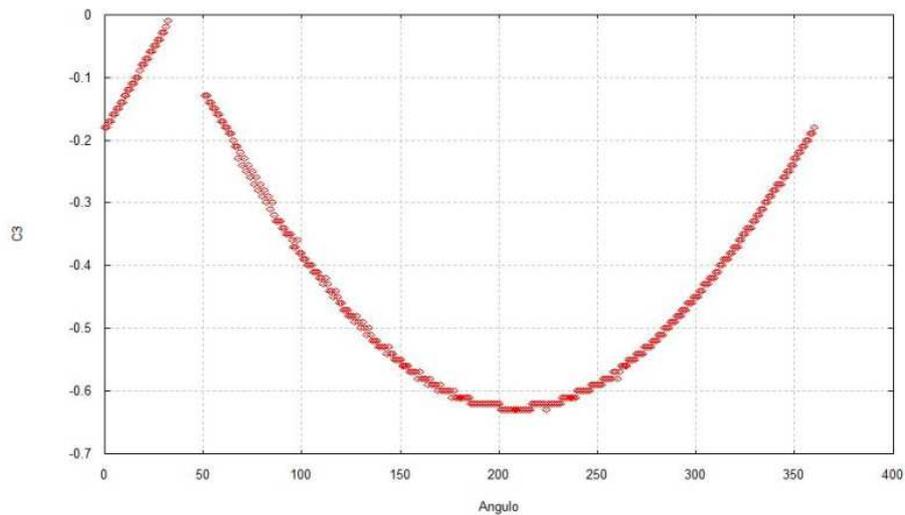


Figura 5.32 Bi-circular  $\psi_0 = 30^0$ .

Na Figura 5.33 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 45^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 45^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.33 fornece duas regiões favoráveis para captura gravitacional  $215^\circ \leq \alpha \leq 217^\circ$  e  $230^\circ \leq \alpha \leq 233^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $49^\circ \leq \alpha \leq 65^\circ$ .

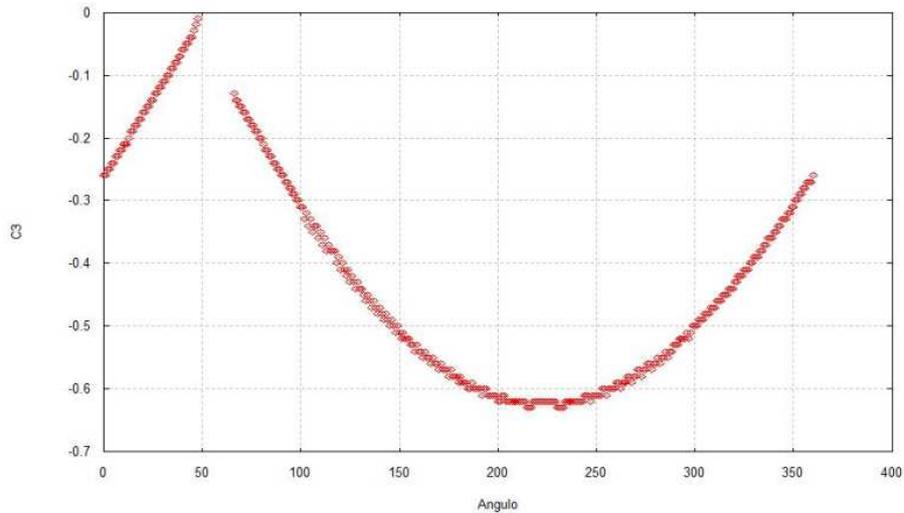


Figura 5.33 Bi-circular  $\psi_0 = 45^\circ$ .

Na Figura 5.34 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 60^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 60^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.34 fornece a região favorável para captura gravitacional  $222^\circ \leq \alpha \leq 261^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $64^\circ \leq \alpha \leq 79^\circ$ .

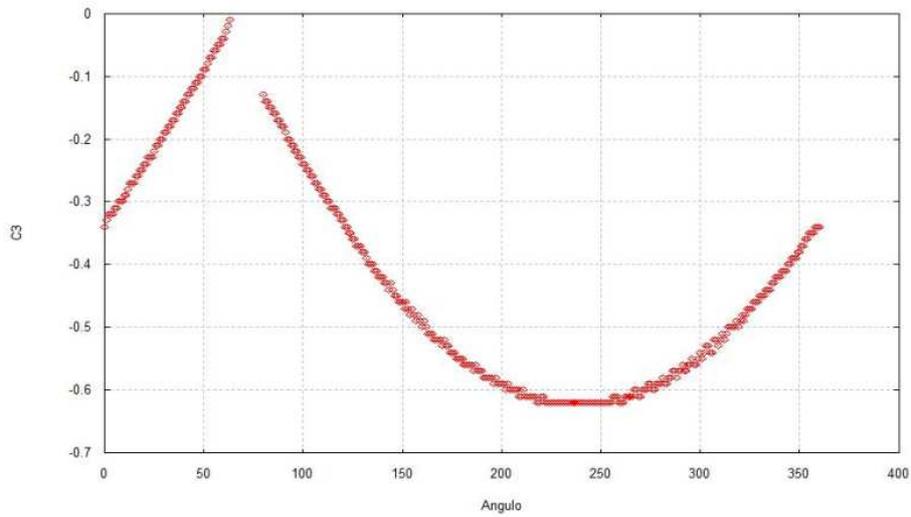


Figura 5.34 Bi-circular  $\psi_0 = 60^\circ$ .

Na Figura 5.35 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 90^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 90^\circ$  é -0.62. O gráfico da Figura 5.35 fornece a região favorável para captura gravitacional  $251^\circ \leq \alpha \leq 286^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $92^\circ \leq \alpha \leq 108^\circ$ .

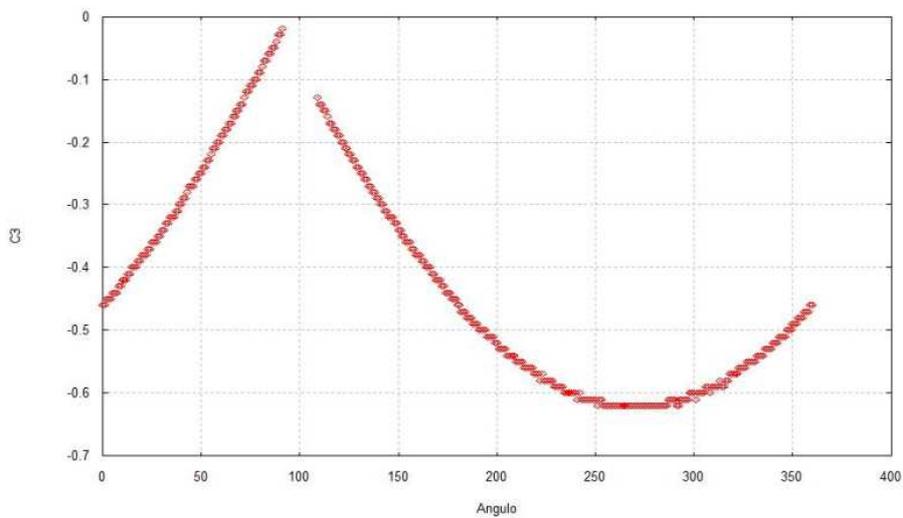


Figura 5.35 Bi-circular  $\psi_0 = 90^\circ$ .

Na Figura 5.36 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 120^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 120^0$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.36 fornece a região favorável para captura gravitacional  $298^0 \leq \alpha \leq 306^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $120^0 \leq \alpha \leq 137^0$ .

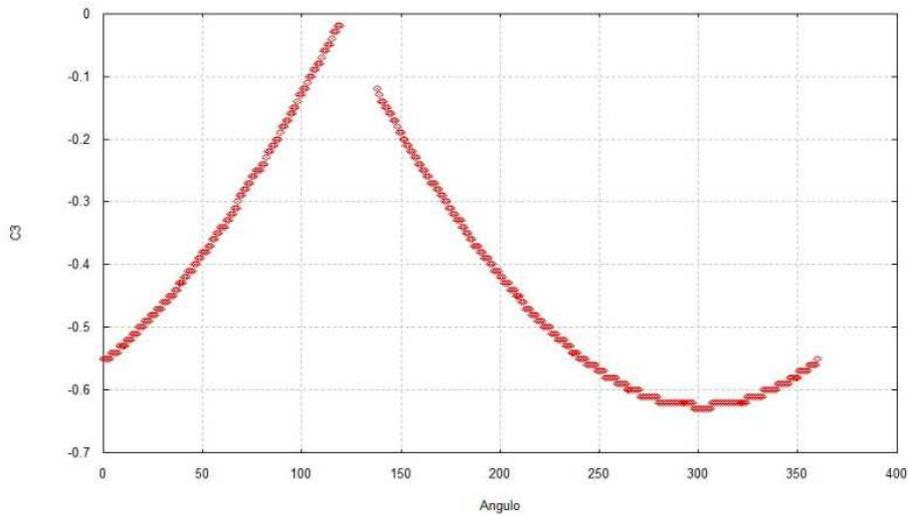


Figura 5.36 Bi-circular  $\psi_0 = 120^0$ .

Na Figura 5.37 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 135^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 135^0$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.37 fornece a região favorável para captura gravitacional  $306^0 \leq \alpha \leq 328^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $135^0 \leq \alpha \leq 152^0$ .

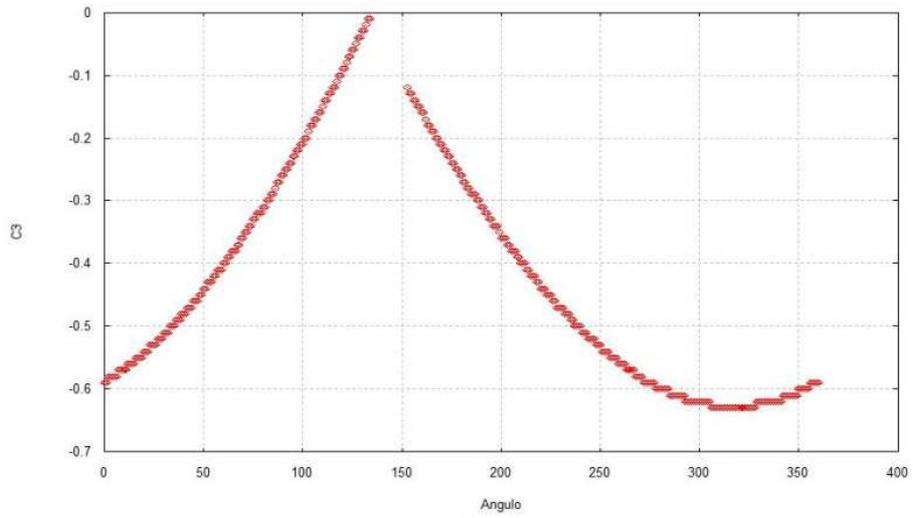


Figura 5.37 Bi-circular  $\psi_0 = 135^\circ$ .

Na Figura 5.38 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 150^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 150^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.38 fornece a região favorável para captura gravitacional  $318^\circ \leq \alpha \leq 345^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $150^\circ \leq \alpha \leq 167^\circ$ .

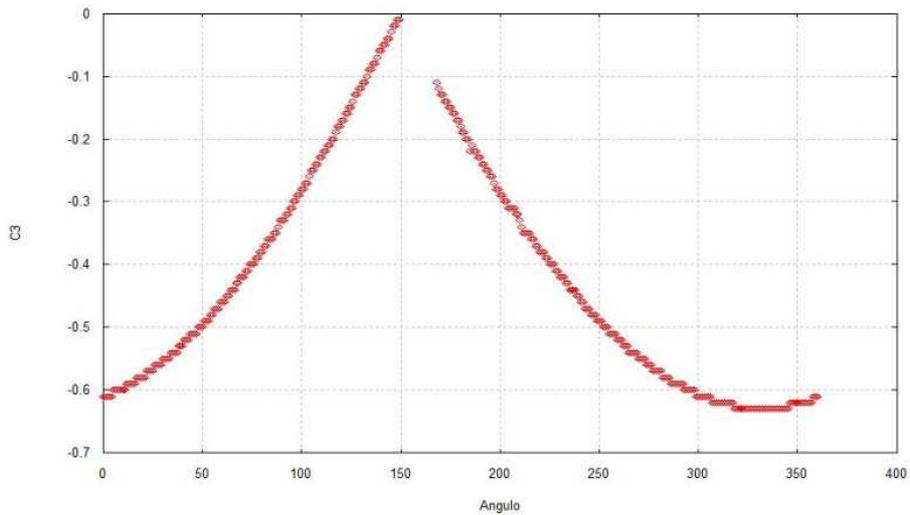


Figura 5.38 Bi-circular  $\psi_0 = 150^\circ$ .

Na Figura 5.39 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 180^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 180^\circ$  é -0.63. O gráfico da figura 5.39 fornece duas regiões favoráveis para captura gravitacional  $0^\circ \leq \alpha \leq 12^\circ$   $348^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $181^\circ \leq \alpha \leq 198^\circ$ .

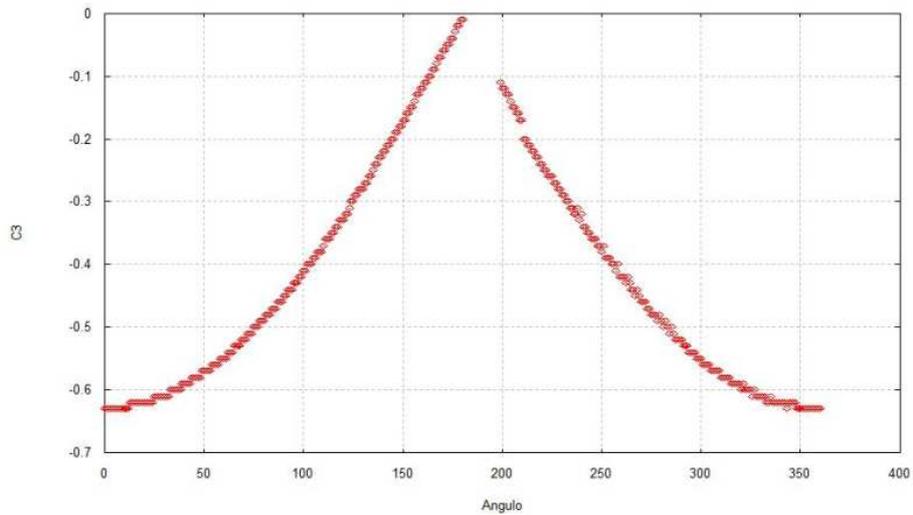


Figura 5.39 Bi-circular  $\psi_0 = 180^\circ$ .

Na Figura 5.40 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 210^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 210^\circ$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.40 fornece a região favorável para captura gravitacional  $9^\circ \leq \alpha \leq 47^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $213^\circ \leq \alpha \leq 229^\circ$ .

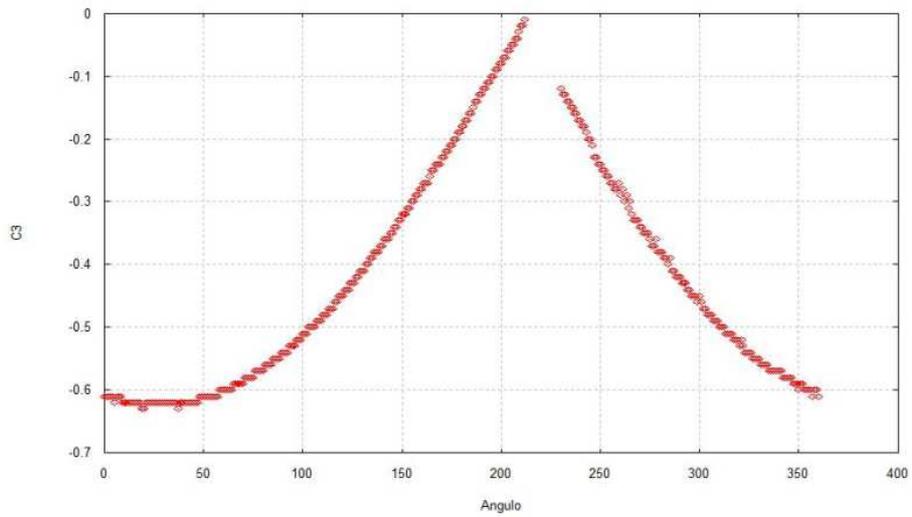


Figura 5.40 Bi-circular  $\psi_0 = 210^\circ$ .

Na Figura 5.41 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 225^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 225^\circ$  é  $-0.62$ . O gráfico da Figura 5.41 fornece a região favorável para captura gravitacional  $22^\circ \leq \alpha \leq 59^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $228^\circ \leq \alpha \leq 245^\circ$ .

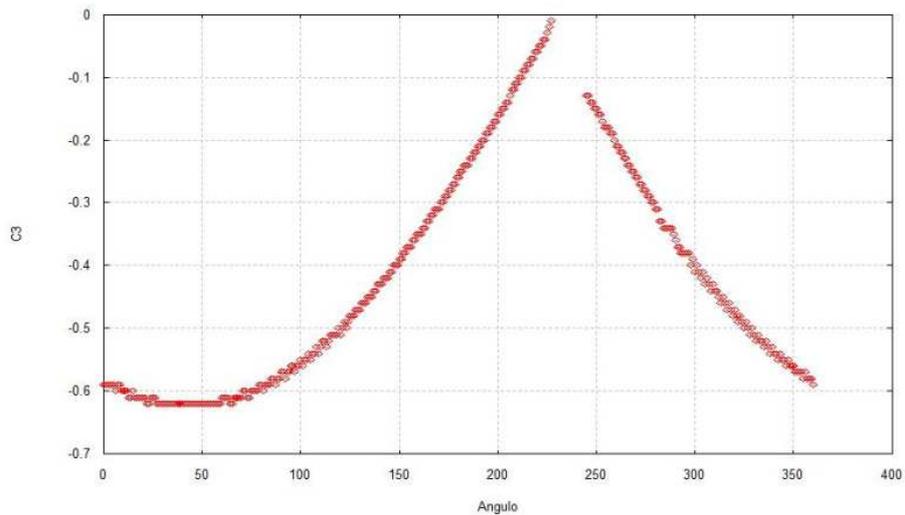


Figura 5.41 Bi-circular  $\psi_0 = 225^\circ$ .

Na Figura 5.42 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 240^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 240^0$  é -0.62. O gráfico da Figura 5.42 fornece a região favorável para captura gravitacional  $39^0 \leq \alpha \leq 73^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $243^0 \leq \alpha \leq 259^0$ .

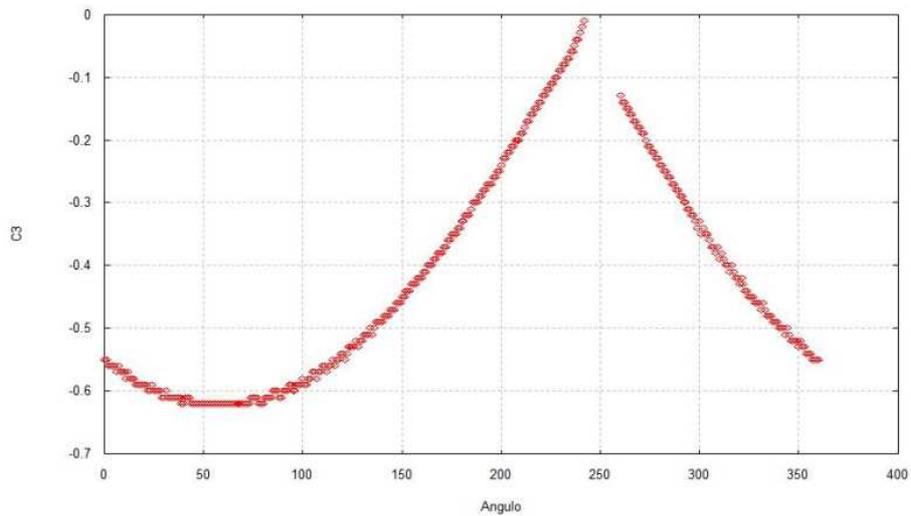


Figura 5.42 Bi-circular  $\psi_0 = 240^0$ .

Na Figura 5.43 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 270^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 270^0$  é -0.62. O gráfico da Figura 5.43 fornece a região favorável para captura gravitacional  $70^0 \leq \alpha \leq 107^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $272^0 \leq \alpha \leq 288^0$ .

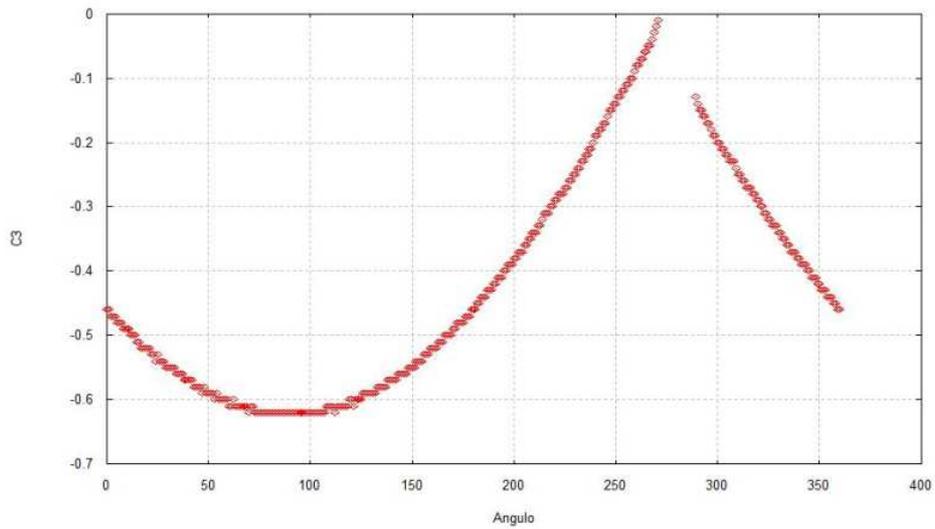


Figura 5.43 Bi-circular  $\psi_0 = 270^\circ$ .

Na Figura 5.44 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 300^\circ$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 300^\circ$  é  $-0.63$ . O gráfico da Figura 5.44 fornece a região favorável para captura gravitacional  $113^\circ \leq \alpha \leq 130^\circ$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $300^\circ \leq \alpha \leq 317^\circ$ .

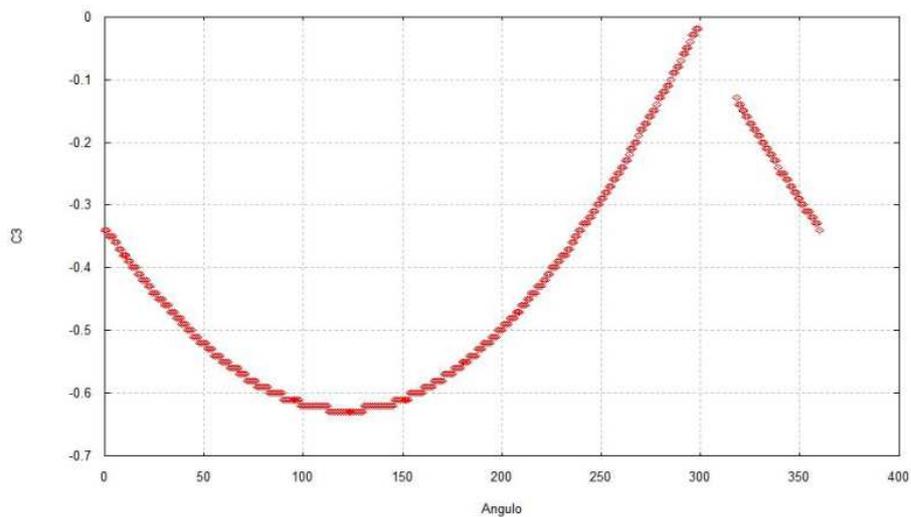


Figura 5.44 Bi-circular  $\psi_0 = 300^\circ$ .

Na Figura 5.45 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 315^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 315^0$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.45 fornece a região favorável para captura gravitacional  $123^0 \leq \alpha \leq 150^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $315^0 \leq \alpha \leq 331^0$ .

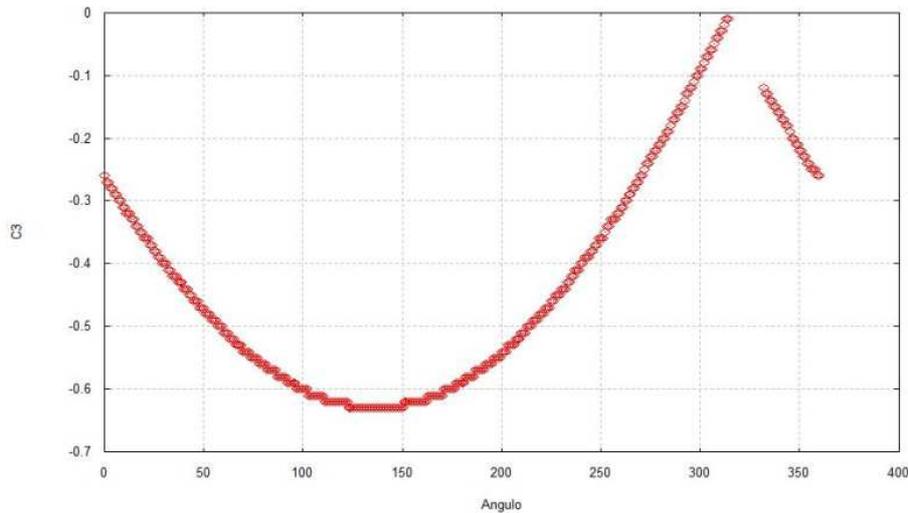


Figura 5.45 Bi-circular  $\psi_0 = 315^0$ .

Na Figura 5.46 temos o valor do ângulo do sol  $\psi_0 = 330^0$ . O valor mínimo de  $C_3$  inicial encontrado para captura quando  $\psi_0 = 330^0$  é -0.63. O gráfico da Figura 5.46 fornece a região favorável para captura gravitacional  $135^0 \leq \alpha \leq 168^0$ . Existe uma região de colisão do veículo espacial com a Lua quando  $329^0 \leq \alpha \leq 347^0$ .

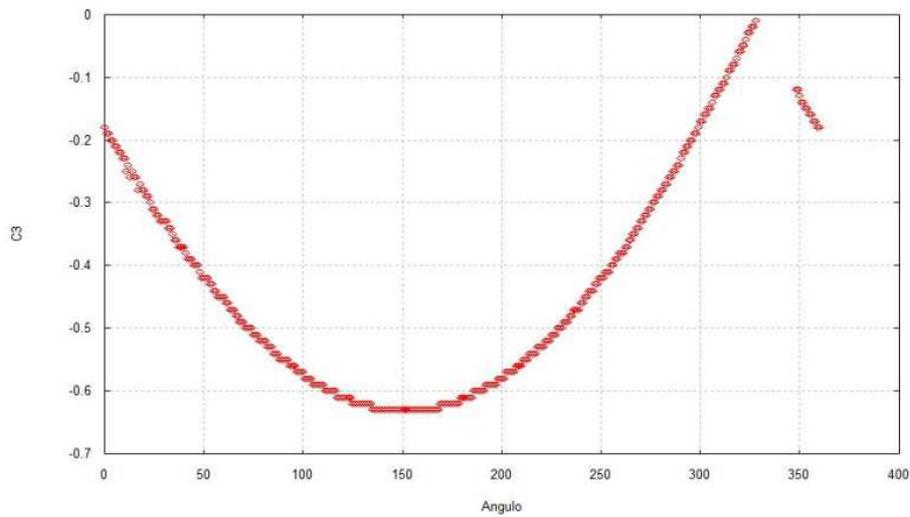


Figura 5.46 Bi-circular  $\psi_0 = 330^\circ$ .

## 5.6. Estudo da influência de valores de $r_p$ no problema bi-circular.

### Órbitas diretas.

Nas Figuras 5.47 e 5.48 temos  $\psi_0 = 0^\circ$ . Na Figura 5.47 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 1788$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua não altera o mínimo de energia, já que os gráficos estão um sobre o outro. Na Figura 5.48 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 11738$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua modifica o valor de  $C_3$  inicial mínimo.

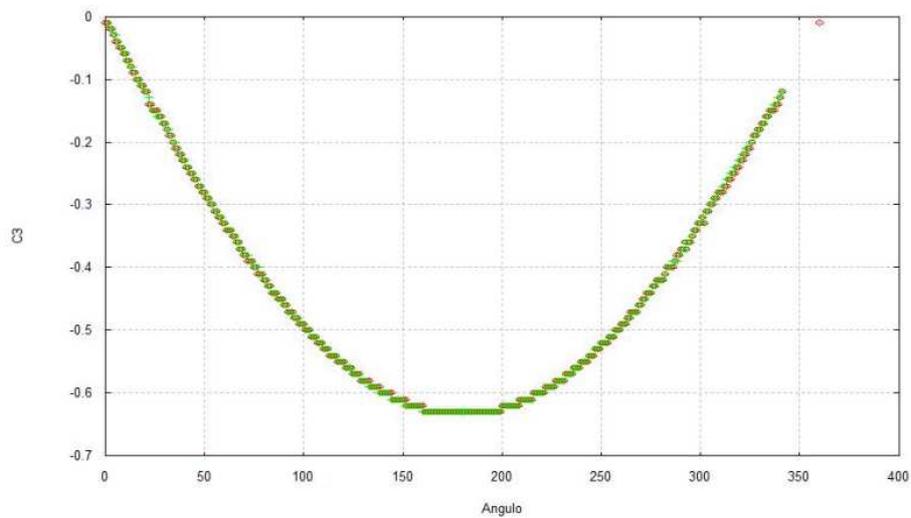


Figura 5.47 Bi-circular  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 1788$ .

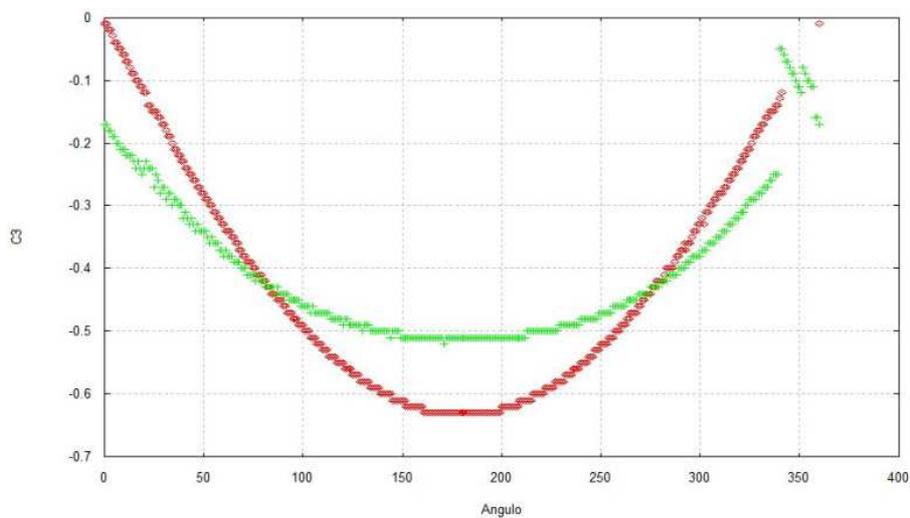


Figura 5.48 Bi-circular  $\psi = 0^\circ$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 11738$ .

Nas Figuras 5.49 e 5.50 temos  $\psi_0 = 90^\circ$ . Na figura 5.49 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 1788$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua não altera o mínimo de energia, já que os gráficos estão um sobre o outro. Na Figura 5.50 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para

$r_p = 11738$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial e a Lua modifica o valor da  $C_3$  inicial mínimo.

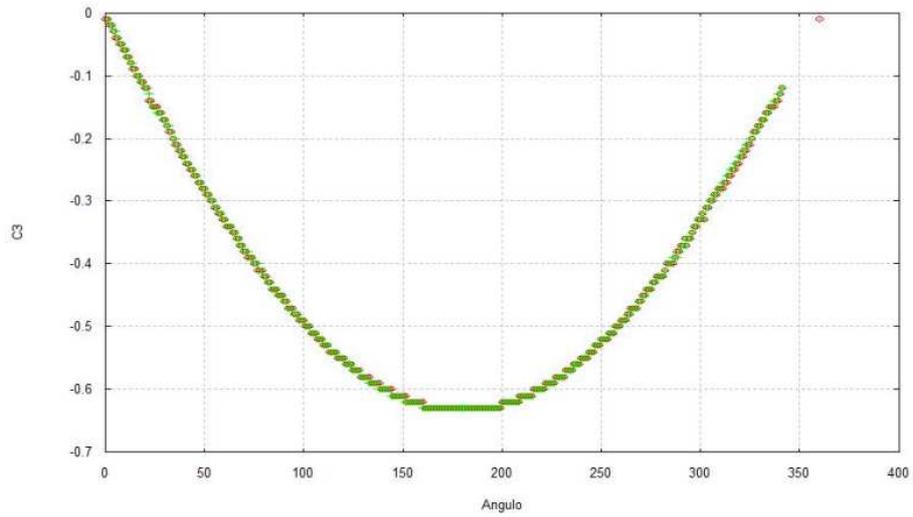


Figura 5.49 Bi-circular  $\psi_0 = 90^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 1788$ .

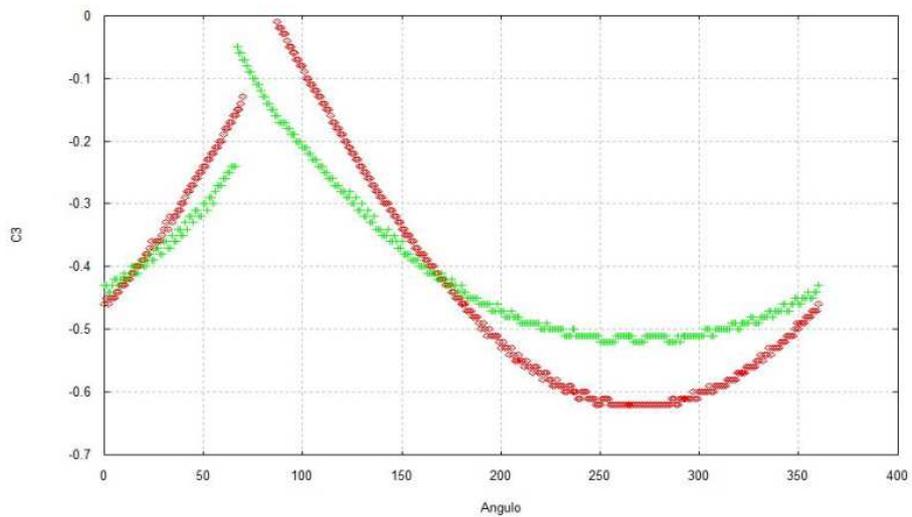


Figura 5.50 Bi-circular  $\psi_0 = 90^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 11738$ .

Nas Figuras 5.51 e 5.52 temos  $\psi_0 = 180^0$ . Na Figura 5.51 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 1788$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua não altera o mínimo de energia, já que os gráficos estão um sobre o outro. Na Figura 5.52 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 11738$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua modifica o valor de  $C_3$  inicial mínimo.

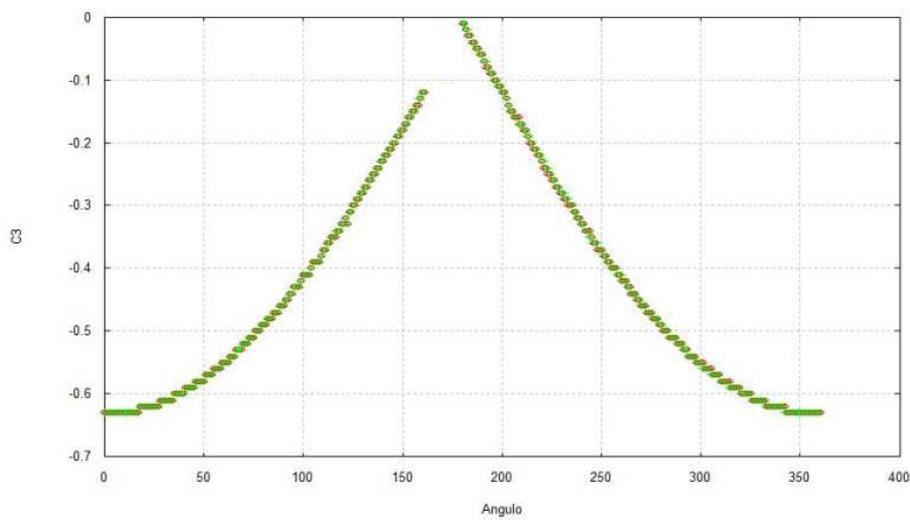


Figura 5.51 Bi-circular  $\psi_0 = 180^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 1788$ .

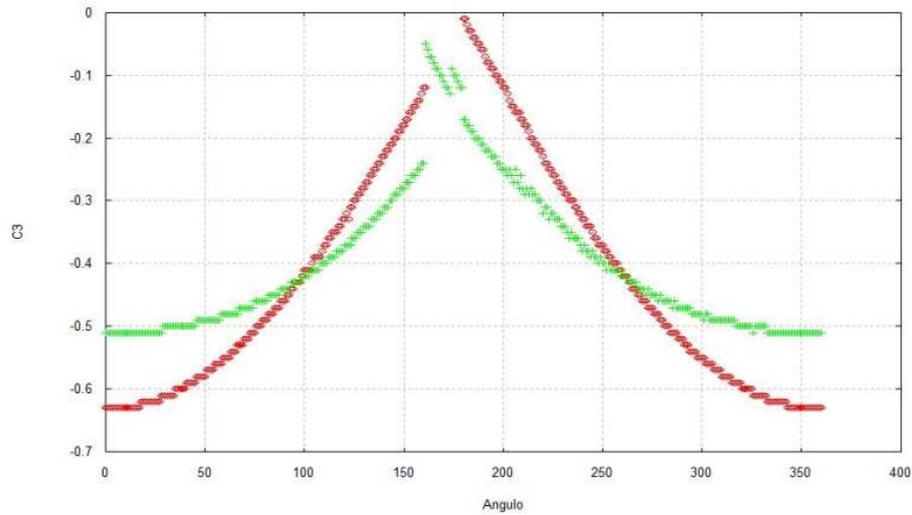


Figura 5.52 Bi-circular  $\psi_0 = 180^\circ$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 11738$ .

Nas Figuras 5.53 e 5.54 temos  $\psi_0 = 270^\circ$ . Na Figura 5.53 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 1788$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua não altera o mínimo de energia, já que os gráficos estão um sobre o outro. Na Figura 5.54 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 11738$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua modifica o valor de  $C_3$  inicial mínimo.

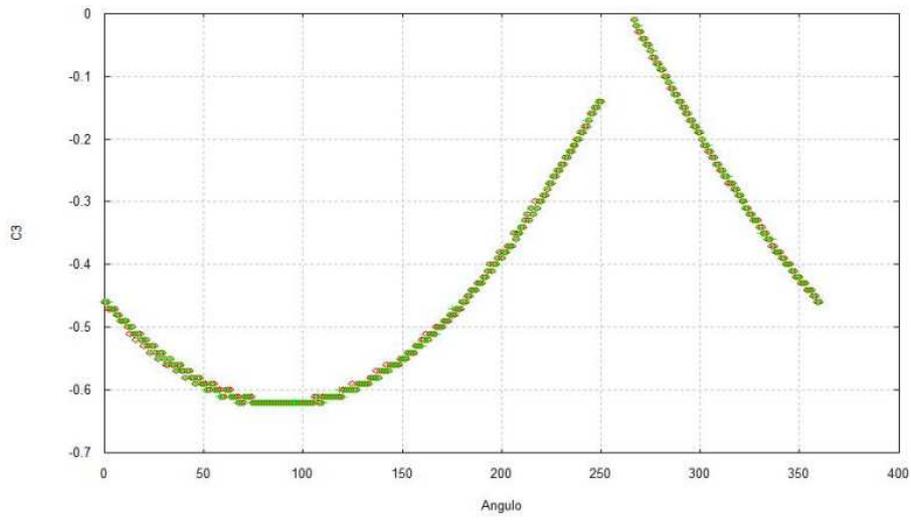


Figura 5.53 Bi-circular  $\psi = 270^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 1788$ .

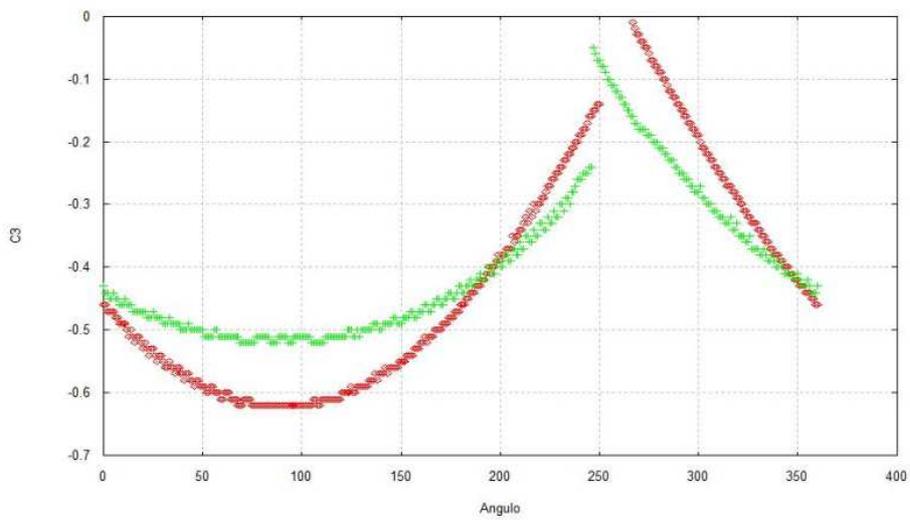


Figura 5.54 Bi-circular  $\psi_0 = 270^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 11738$ .

### Órbitas retrógradas.

Nas Figuras 5.55 e 5.56 temos  $\psi_0 = 0^0$ . Na Figura 5.55 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 1788$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua não altera o mínimo de energia, já que os gráficos estão um sobre o outro. Na Figura 5.56 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 11738$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua modifica o valor de  $C_3$  inicial mínimo.

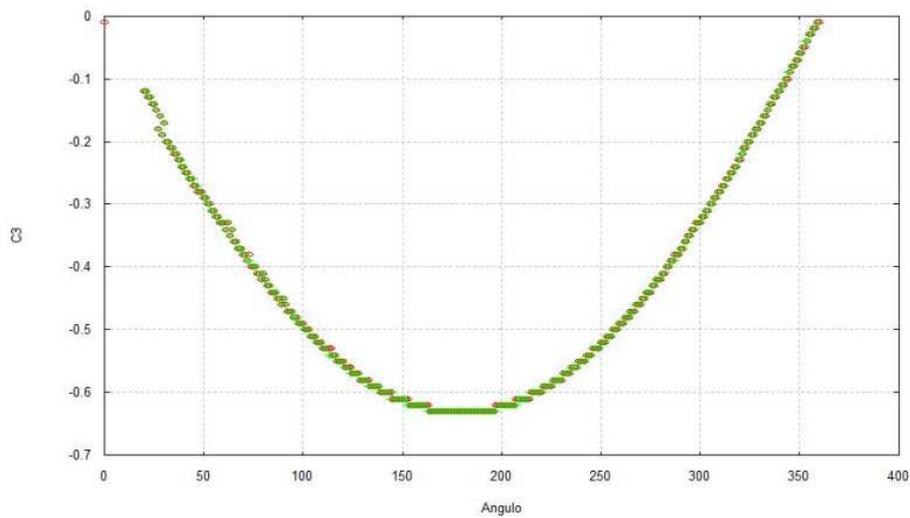


Figura 5.55 Bi-circular  $\psi_0 = 0^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 1788$ .

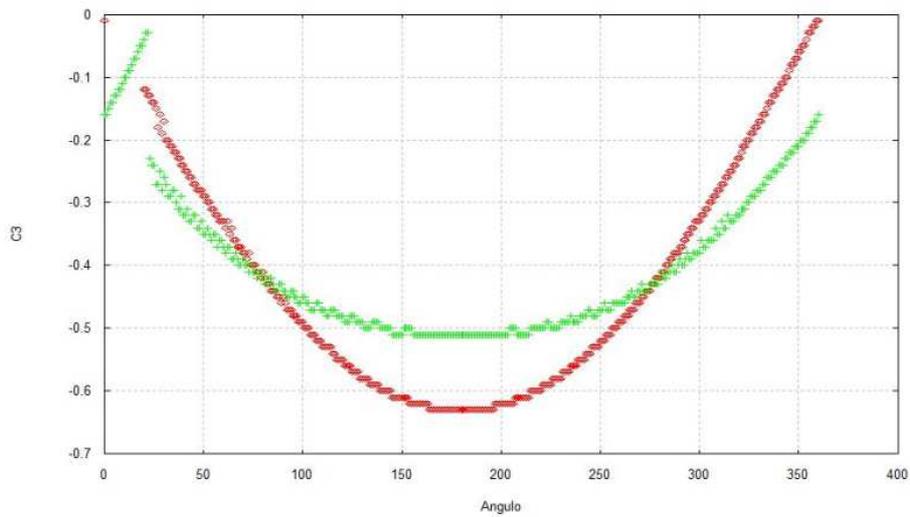


Figura 5.56 Bi-circular  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 11738$ .

Nas Figuras 5.57 e 5.58 temos  $\psi_0 = 90^\circ$ . Na Figura 5.57 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 1788$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua não altera o mínimo de energia, já que os gráficos estão um sobre o outro. Na Figura 5.58 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 11738$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua modifica o valor de  $C_3$  inicial mínimo.

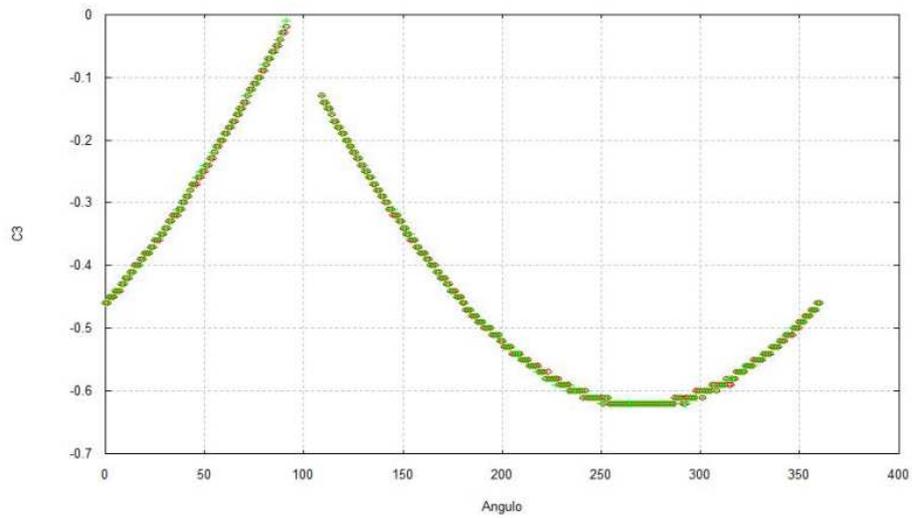


Figura 5.57 Bi-circular  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 1788$ .

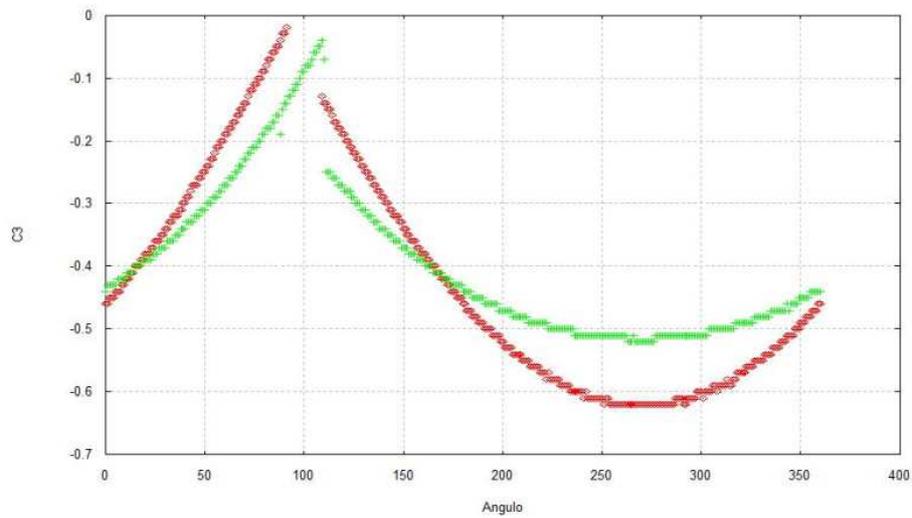


Figura 5.58 Bi-circular  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 11738$ .

Nas Figuras 5.59 e 5.60 temos  $\psi_0 = 180^\circ$ . Na Figura 5.59 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 1788$ . Veja que essa mudança da distância do

veículo espacial da Lua não altera o mínimo de energia, já que os gráficos estão um sobre o outro. Na Figura 5.60 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 11738$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua modifica o valor de  $C_3$  inicial mínimo.

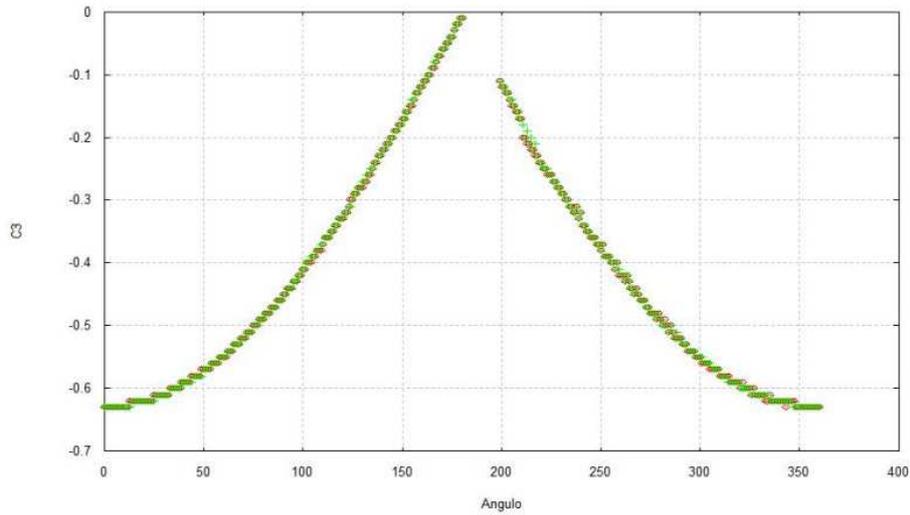


Figura 5.59 Bi-circular  $\psi_0 = 180^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 1788$ .

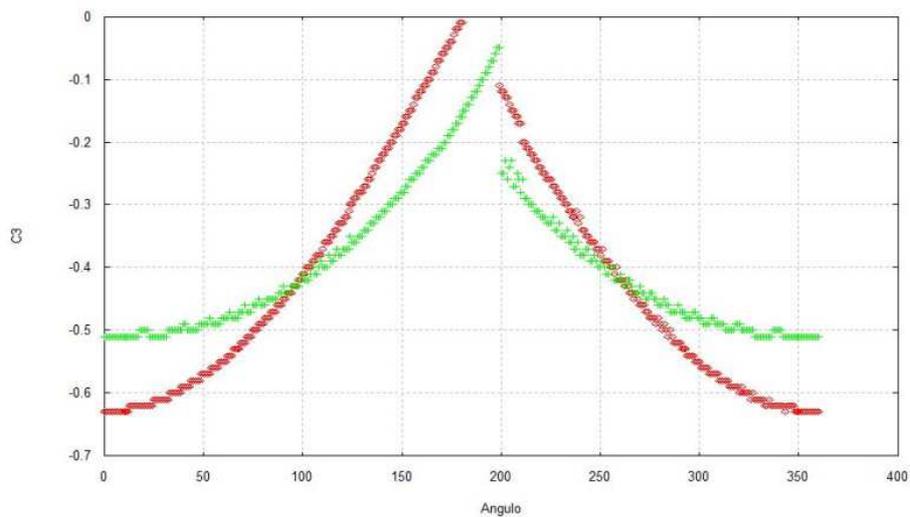


Figura 5.60 Bi-circular  $\psi_0 = 180^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 11738$ .

Nas Figuras 5.61 e 5.62 temos  $\psi_0 = 270^0$ . Na Figura 5.61 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 1788$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua não altera o mínimo de energia, já que os gráficos estão um sobre o outro. Na Figura 5.62 o gráfico em vermelho é para  $r_p = 1738$  e em verde para  $r_p = 11738$ . Veja que essa mudança da distância do veículo espacial da Lua modifica o valor de  $C_3$  inicial mínimo.

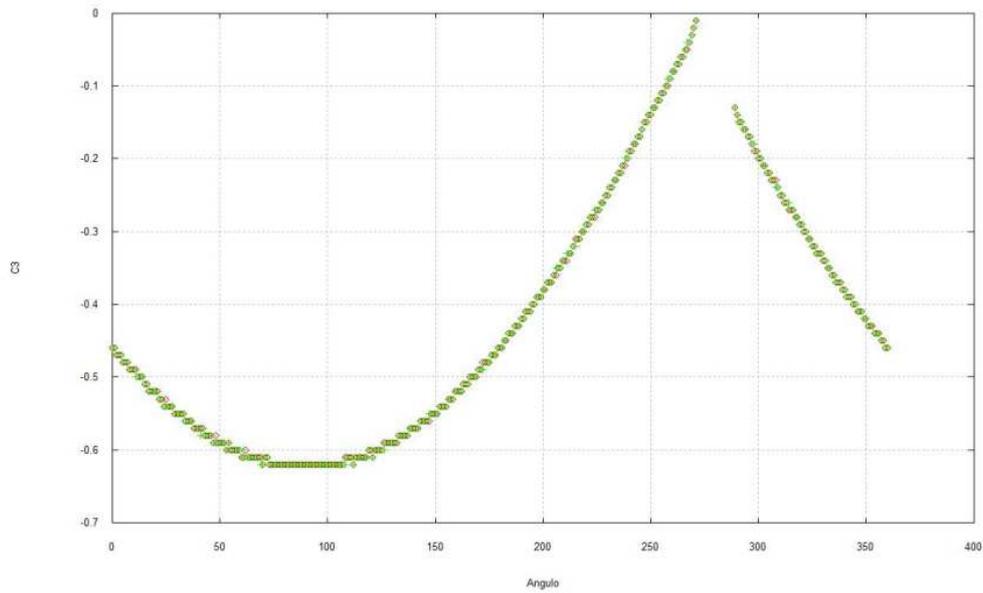


Figura 5.61 Bi-circular  $\psi_0 = 270^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 1788$ .

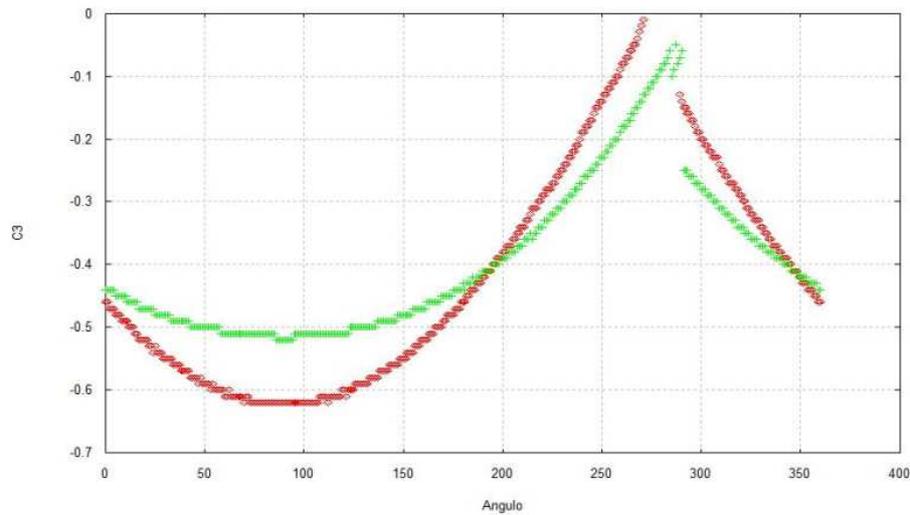


Figura 5.62 Bi-circular  $\psi_0 = 270^0$ ,  $r_p = 1738$  e  $r_p = 11738$ .

### 5.7 Conclusão.

O resultado mais importante desse capítulo é o fato de terem sido encontradas regiões em que a captura gravitacional ocorre com um valor de  $C_3$  inicial menor do que em outras regiões do plano. Esse resultado acontece nos dois modelos matemáticos estudados.

No problema de três corpos restrito notamos que a captura gravitacional retrógrada, de forma geral, proporciona valores mínimos de  $C_3$  inicial maiores do que os valores obtidos na captura gravitacional direta, embora as diferenças não sejam grandes. No problema bi-circular isto não acontece, os valores para captura gravitacional direta e retrógrada não são diferentes.

Um fenômeno que acontece no problema bi-circular e não ocorre no problema três corpos restrito circular é termos regiões de colisões onde obviamente não acontece captura gravitacional.

Comparando os valores mínimos de  $C_3$  inicial nos dois modelos matemáticos estudados, vemos que são bem menores para o problema bi-circular do que para o problema de três corpos restrito circular tanto no caso de movimento direto como no retrógrado.

No estudo feito com diferentes valores de  $r_p$  é possível concluir que não existem grandes variações nos níveis de energia mínima na captura gravitacional no problema de três corpos restrito circular. Isto acarreta podermos utilizar uma grande variedade de distâncias entre o veículo espacial e a Lua sem perder muito no valor mínimo da energia do veículo espacial. Já no problema bi-circular temos que ser mais criteriosos, pois existe uma diferença maior da energia quando modificamos a distância do veículo espacial Lua.



## 6 ANÁLISE DO TEMPO DE CAPTURA GRAVITACIONAL

### 6.1 Introdução

No Capítulo 5 foi analisado o valor mínimo de  $C_3$  inicial que resultava no consumo mínimo de combustível para o veículo espacial. Neste Capítulo faremos o cálculo do tempo mínimo para obtermos captura gravitacional.

O interesse prático de tais cálculos pode ser justificado pelos seguintes problemas: assumamos uma missão com o objetivo de transportar seres humanos, medicamentos ou alimentos a uma base Lunar. É bastante relevante neste caso a análise do tempo mínimo de captura gravitacional pela Lua gasto para executarmos tais missões.

Definimos como tempo de captura gravitacional o tempo gasto para termos a troca do sinal do valor da energia do veículo espacial com relação à Lua, ou seja, quando  $C_3$  torna-se positivo.

O objetivo dos Capítulos 6 e 7 é uma análise do tempo de captura gravitacional. Os parâmetros para análise do tempo de captura são:  $C_3$  (o dobro da energia do veículo espacial e a Lua),  $\alpha$ , o ângulo da posição do periluna e  $r_p$ , a distância do veículo espacial até o centro da Lua no periluna.

Para ser feita uma análise do tempo de captura, será assumido que dois dos parâmetros  $\alpha$ ,  $r_p$  e  $C_3$  sejam fixados e o terceiro parâmetro variado.

Em todos os casos faremos a análise para os dois modelos estudados nos primeiros capítulos desta tese, isto é, o problema de três corpos restrito circular e o problema bi-circular de quatro corpos planos.

Basicamente queremos responder a três perguntas nos dois capítulos relativos à análise numérica do tempo de captura gravitacional.

Primeira: “Se modificarmos o valor da distância inicial do veículo espacial a Lua o quanto isto interfere no tempo de captura gravitacional?”

Segunda: “Qual a posição que fornece o tempo mínimo para termos uma órbita de captura gravitacional nos modelos matemáticos estudados?”

Terceira: “O quanto a perturbação do Sol interfere no tempo de captura gravitacional?”, esta última pergunta é, na realidade, uma comparação entre os dois modelos matemáticos estudados.

## 6.2. Análise do tempo de captura gravitacional para o problema de três corpos restrito circular

Nesta Secção a análise do tempo de captura gravitacional será feita no problema de três corpos restrito circular. Faremos fixos os parâmetros  $\alpha$  e  $C_3$  e variamos  $r_p$ , isto é, a distância inicial da Lua ao veículo espacial. A unidade de tempo das figuras abaixo é em dias, a unidade de distância em km e  $C_3$  em unidades canônicas.

Em todos os gráficos abaixo é feita uma comparação do tempo de captura gravitacional para três valores da distância do veículo espacial a Lua. Essa distância assumirá os valores 100 km, 500 km e 10000 km, isto é, temos respectivamente para  $r_p$ : 1838 km (em vermelho), 2238 km (em verde) e 11738 km (em azul).

Temos dois conjuntos de gráficos. O primeiro para movimento direto e o segundo para movimento retrógrado. Em ambos o valor inicial da energia é dado por  $C_3 = -0.1$ .

Os valores do ângulo  $\alpha$  escolhido são  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $315^\circ$  e  $330^\circ$ .

### 6.2.1. Movimento direto

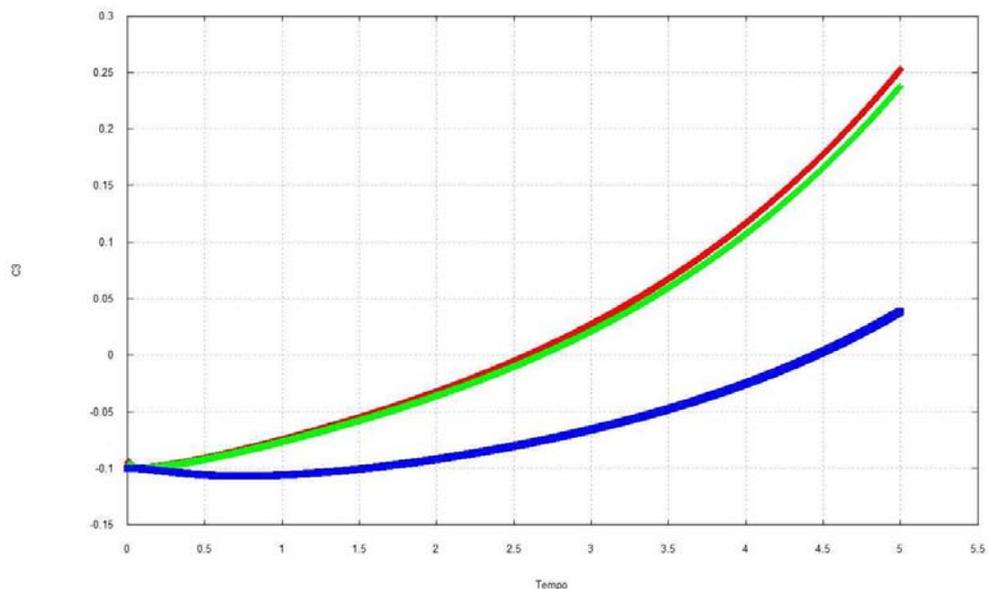


Figura 6.1.  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 0^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

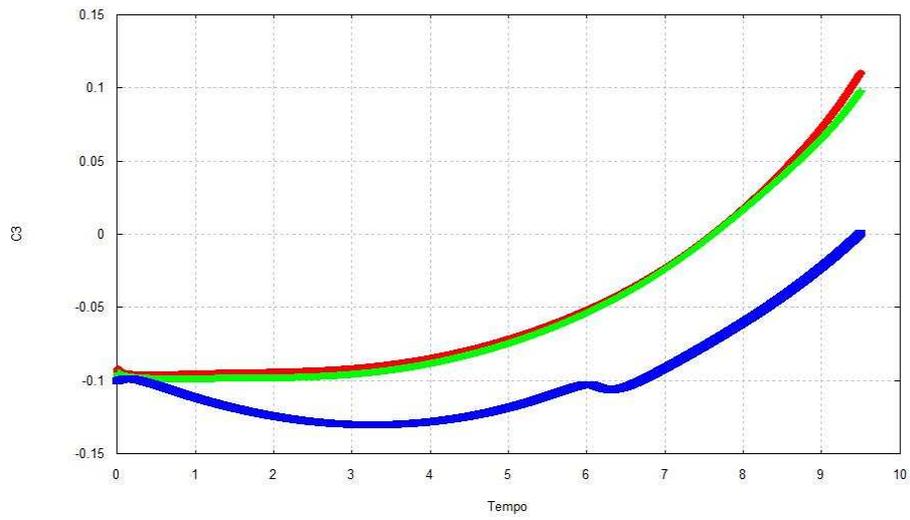


Figura 6.2.  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 30^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

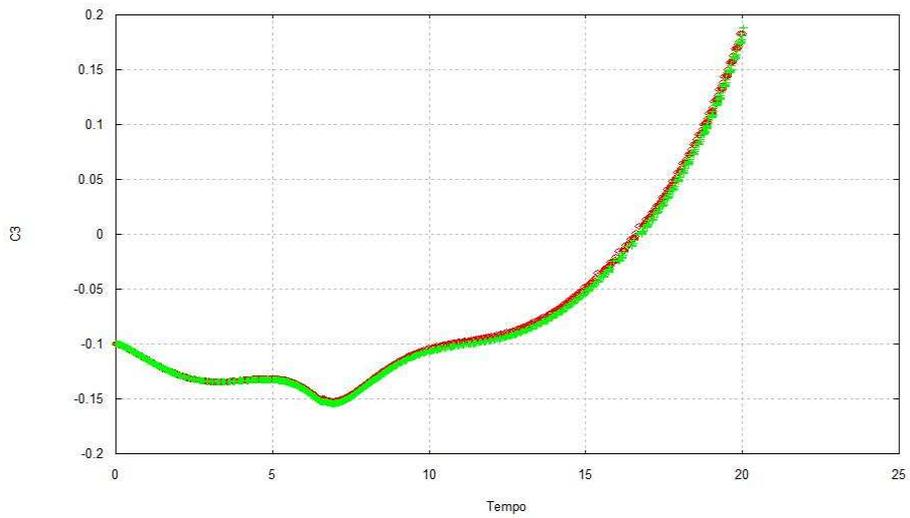


Figura 6.3.  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 60^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

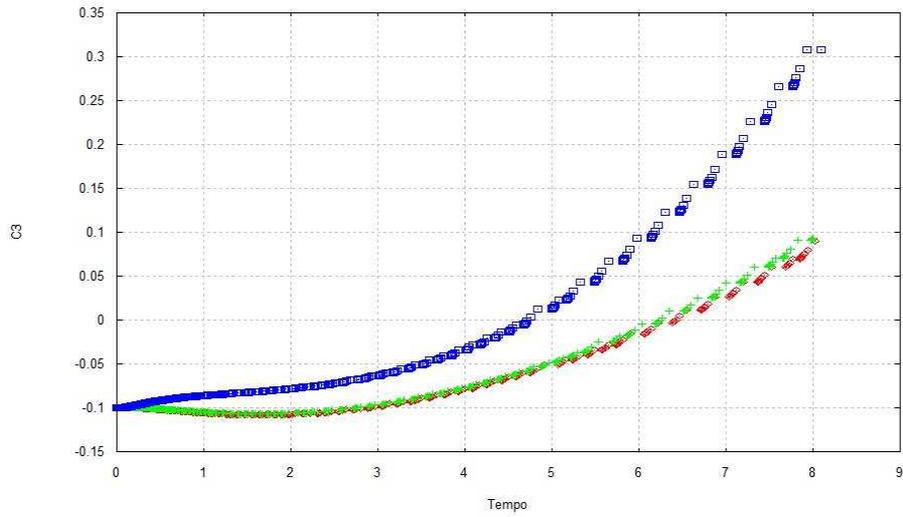


Figura 6.4  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 90^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

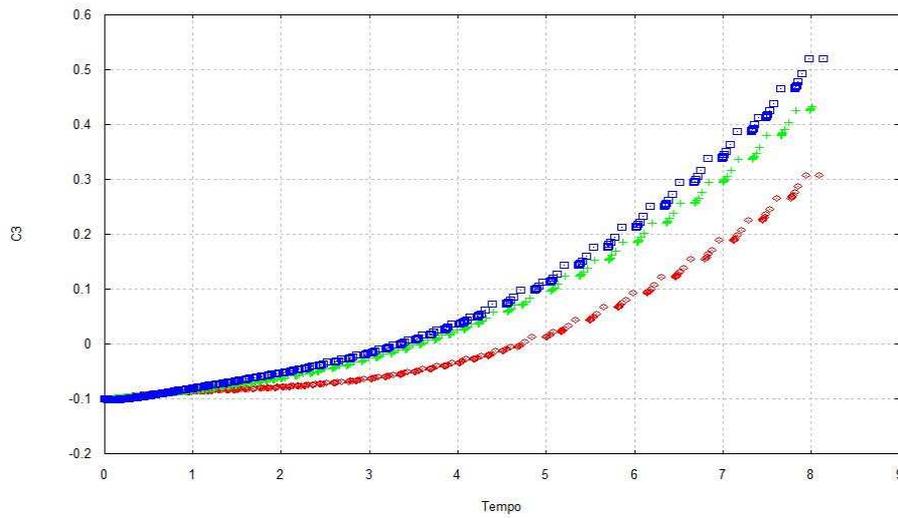


Figura 6.5  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 120^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

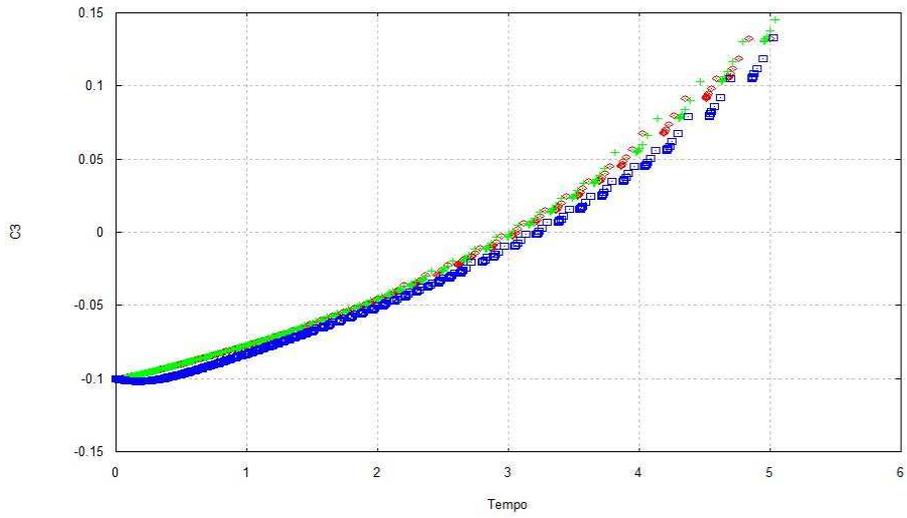


Figura 6.6.  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 135^\circ$ ,  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

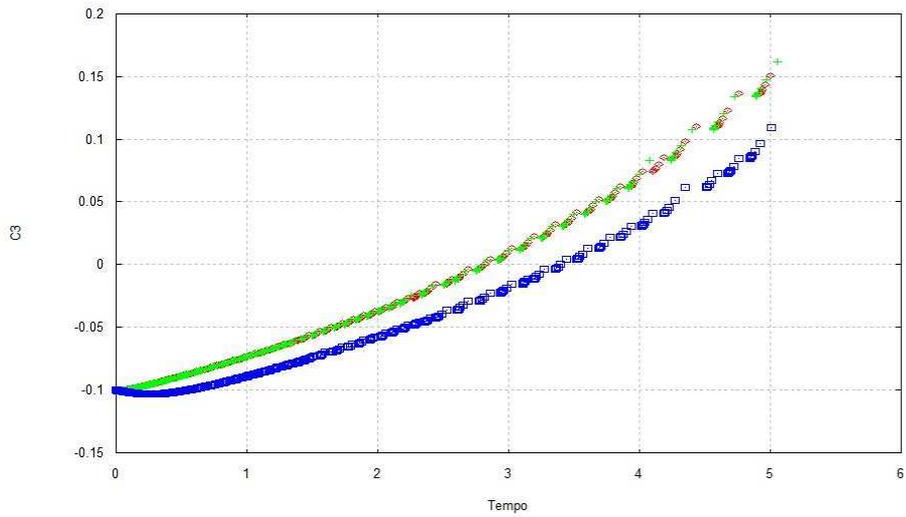


Figura 6.7.  $C_3$  em função do tempo,  $\alpha = 150^\circ$ ,  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

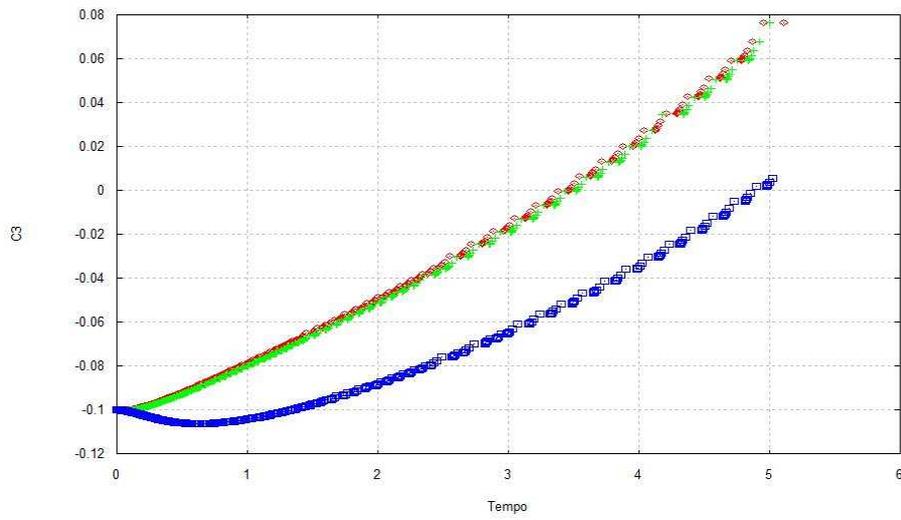


Figura 6.8  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 180^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

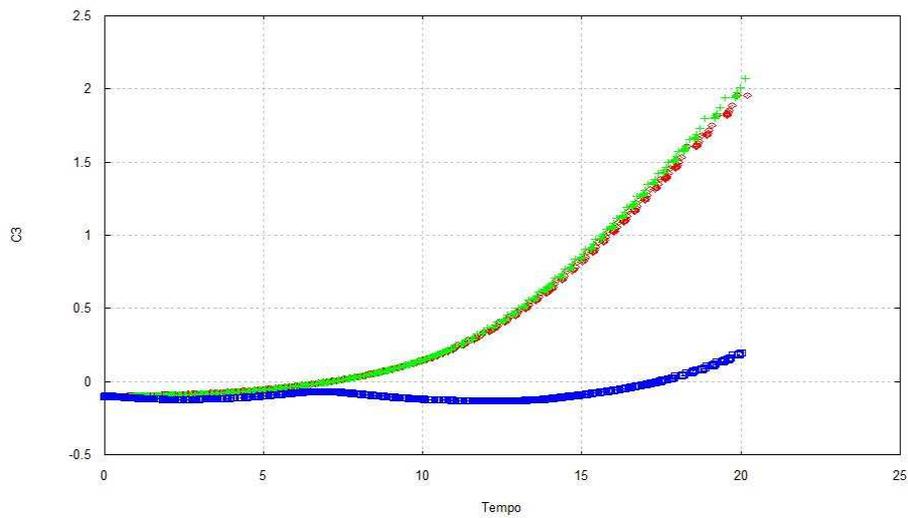


Figura 6.9  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 210^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

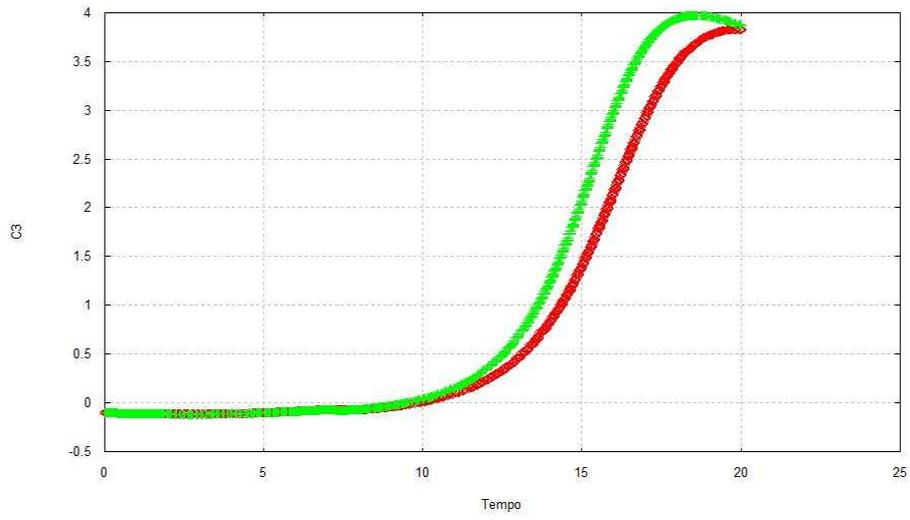


Figura 6.10  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 225^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

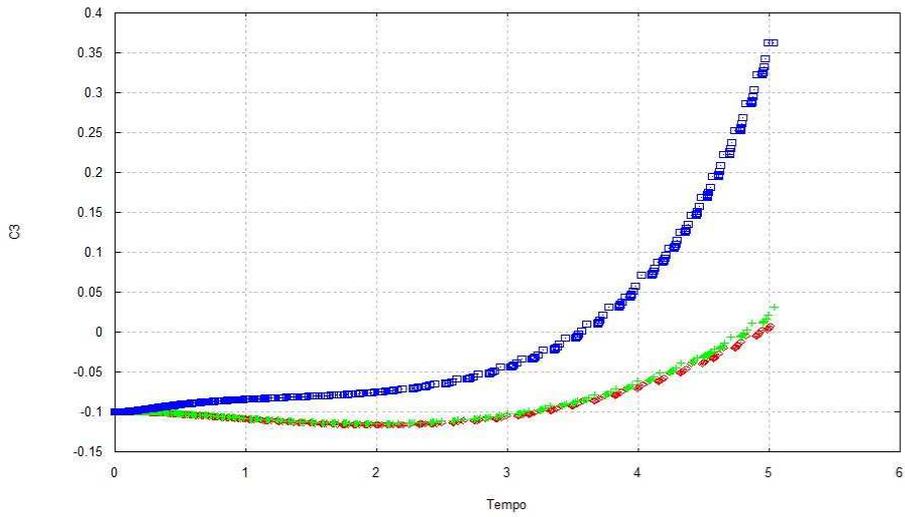


Figura 6.11  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 270^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

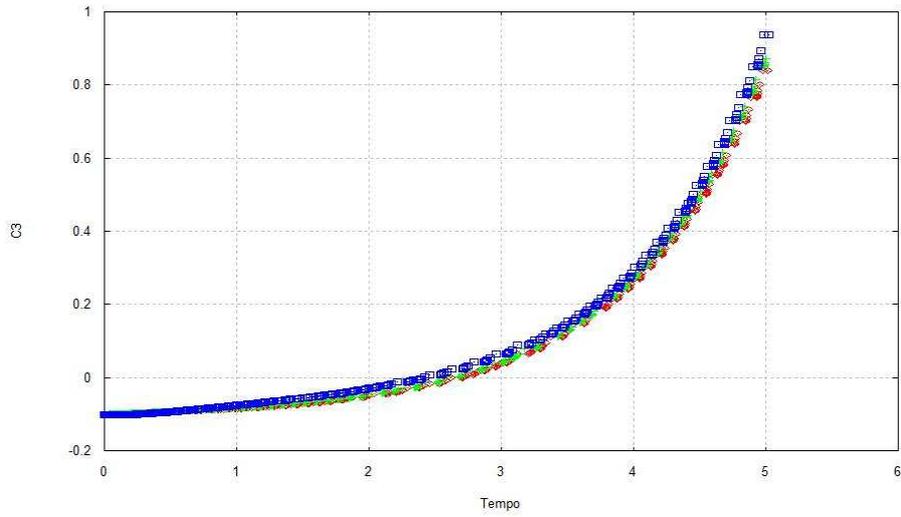


Figura 6.12  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 300^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

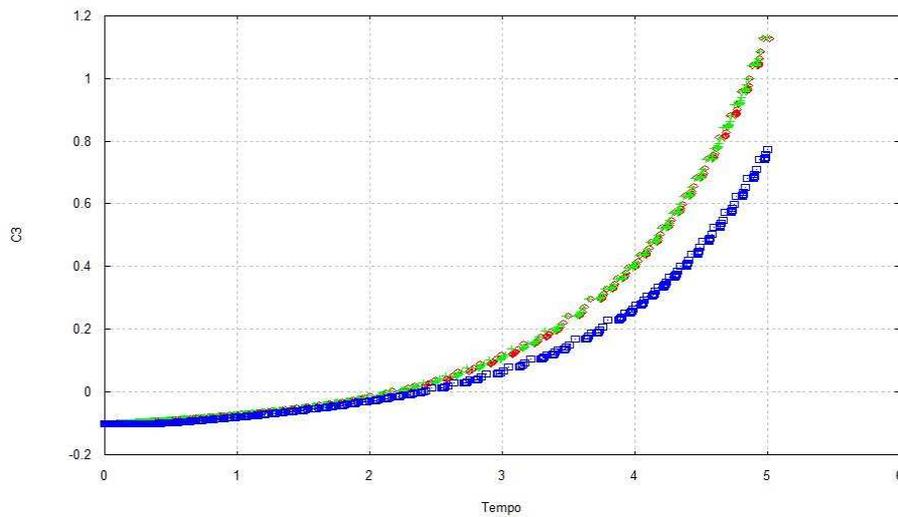


Figura 6.13  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 315^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

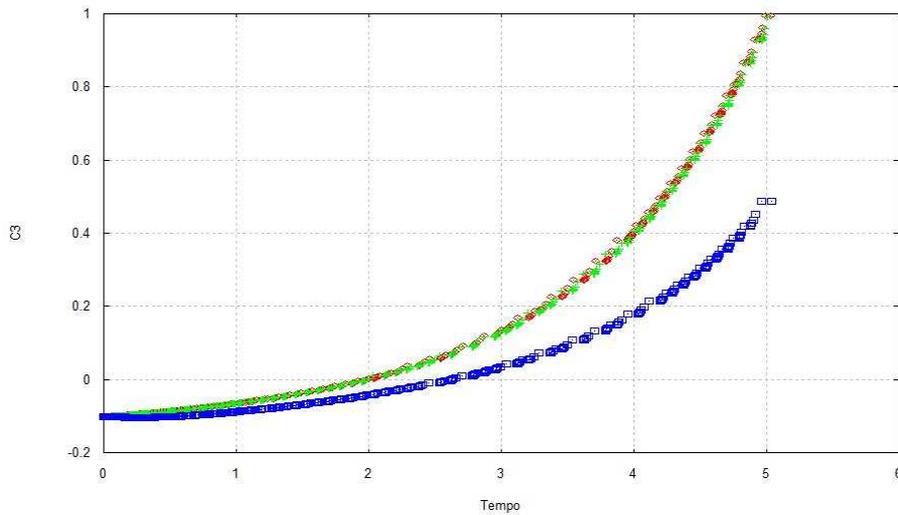


Figura 6.14  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 330^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

Nas Figuras acima ocorre captura gravitacional para os três valores de  $r_p$  quando o ângulo  $\alpha$  é igual a  $0^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ$  e  $330^\circ$ .

Quando o ângulo  $\alpha$  é igual a  $45^\circ$  e  $240^\circ$  existe colisão do veículo espacial com a Lua para os três valores de  $r_p$ .

A colisão do veículo espacial com a Lua ocorre somente para  $r_p = 11738$  km quando o ângulo  $\alpha$  é igual a  $60^\circ$  e  $225^\circ$ .

Quando ocorre captura gravitacional para os dois valores de  $r_p$  ( $1838$  km e  $2238$  km) de um ângulo  $\alpha$  fixo, a diferença do tempo de captura gravitacional não excede há um dia.

Fizemos vários testes numéricos e concluímos que a distância entre o veículo espacial e a Lua variando entre 100 km e 500 km não acarreta uma diferença significativa do tempo de captura gravitacional, para um ângulo  $\alpha$  fixo. (apesar de neste texto termos fixado apenas 100 km e 500 km para essa distância).

Já quando tomamos a distância entre o veículo espacial e a Lua igual a 10000 km, ou seja,  $r_p = 11738$  km existe alguma mudança do tempo de captura gravitacional comparado a  $r_p = 1838$  km e  $r_p = 2238$  km, para um ângulo  $\alpha$  fixo.

A Tabela 6.1 resume um pouco esses dados. Na Tabela abaixo na primeira coluna temos o ângulo  $\alpha$ , na segunda, terceira e quarta coluna o tempo de captura gravitacional para  $r_p$  igual a  $1738$  km,  $2238$  km e  $11738$  km, respectivamente.

**Tabela 6.1 Movimento direto.**

Ângulo $\alpha$	$r_p = 1838 \text{ km}$	$r_p = 2238 \text{ km}$	$r_p = 11738 \text{ km}$
$0^\circ$	2.58 dias	2.67 dias	4.45 dias
$30^\circ$	7.61 dias	7.61 dias	9.48 dias
$45^\circ$	Colisão	Colisão	Colisão
$60^\circ$	16.61 dias	16.62 dias	Colisão
$90^\circ$	6.42 dias	6.27 dias	4.75 dias
$120^\circ$	7.75 dias	3.59 dias	3.35 dias
$135^\circ$	3.07 dias	3.03 dias	3.23 dias
$150^\circ$	2.81 dias	2.83 dias	3.39 dias
$180^\circ$	3.46 dias	3.52 dias	4.89 dias
$210^\circ$	7.04 dias	7.06 dias	17.38 dias
$225^\circ$	9.78 dias	9.43 dias	Colisão
$240^\circ$	Colisão	Colisão	Colisão
$270^\circ$	4.94 dias	4.82 dias	3.56 dias
$300^\circ$	2.70 dias	2.59 dias	2.42 dias
$315^\circ$	2.16 dias	2.15 dias	2.40 dias
$330^\circ$	1.99 dias	1.99 dias	2.63 dias

### 6.2.2. Movimento retrógrado

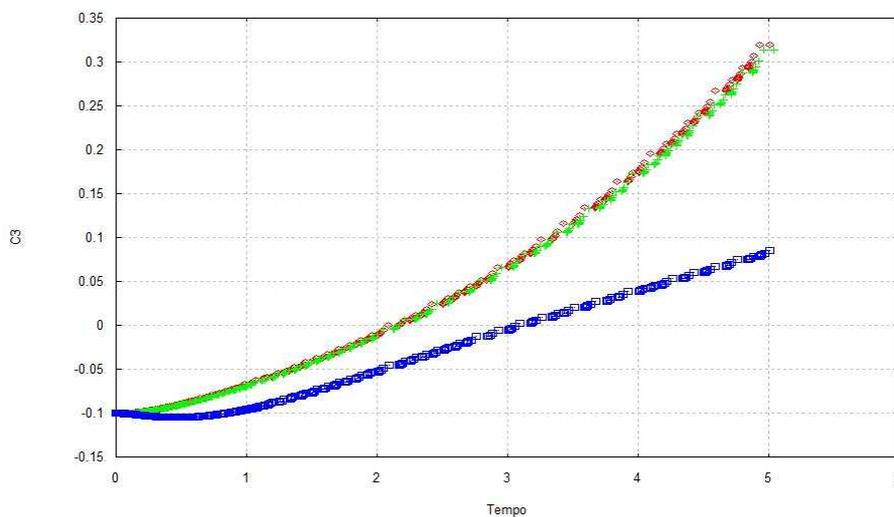


Figura 6.15.  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 0^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738 \text{ km}$ .

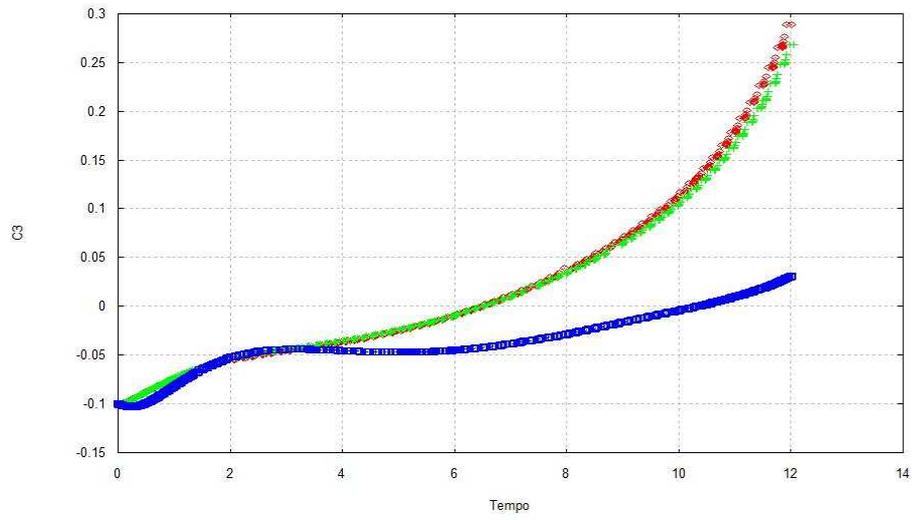


Figura 6.16  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 30^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

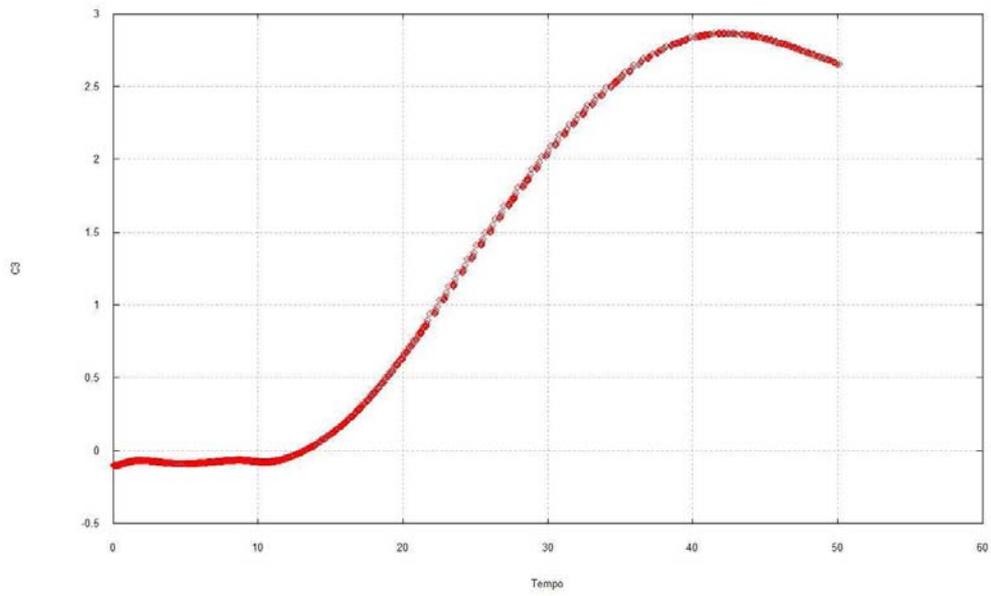


Figura 6.17  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 45^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

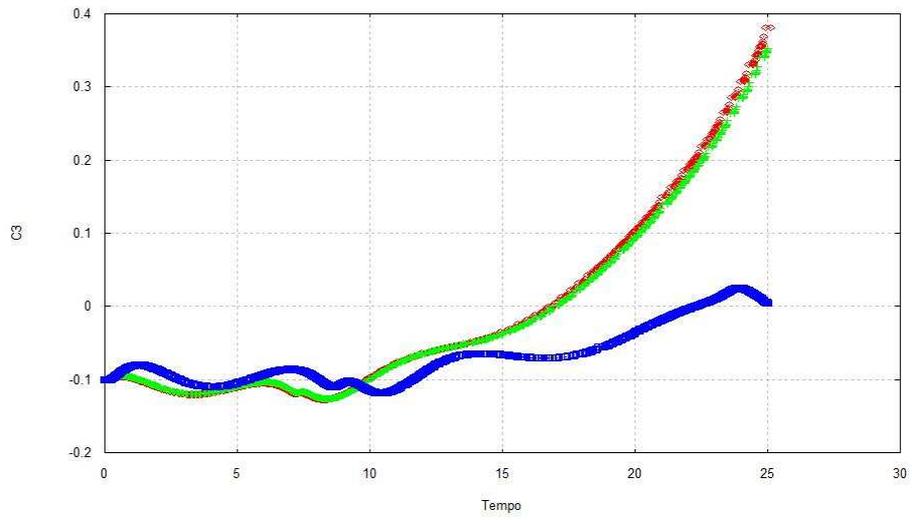


Figura 6.18  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 60^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

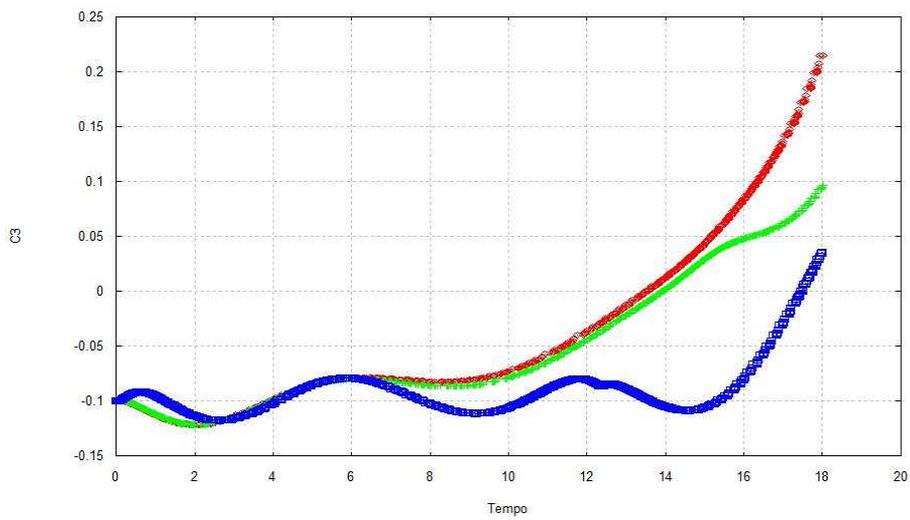


Figura 6.19  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 90^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

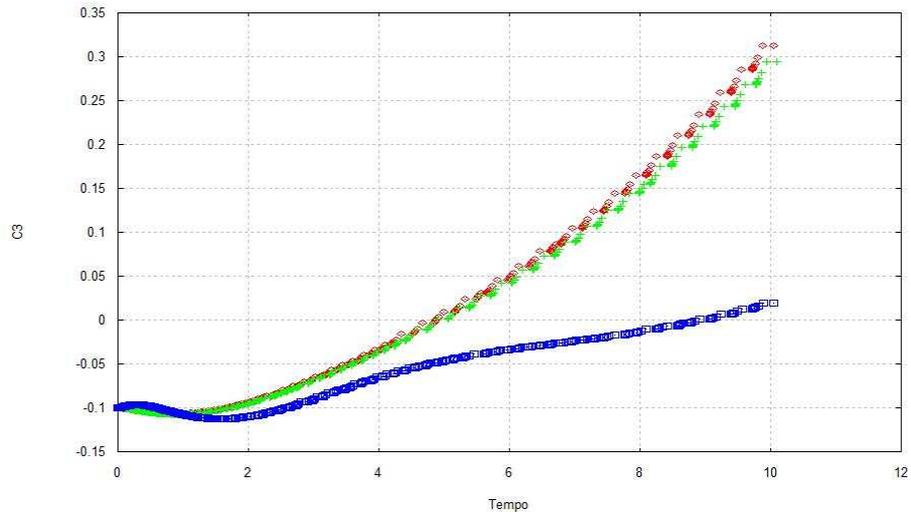


Figura 6.20  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 120^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

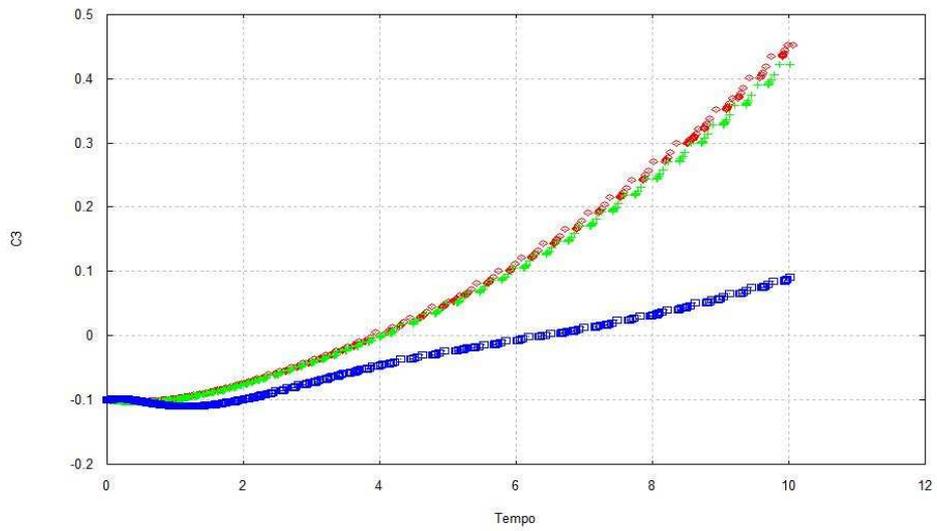


Figura 6.21  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 135^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

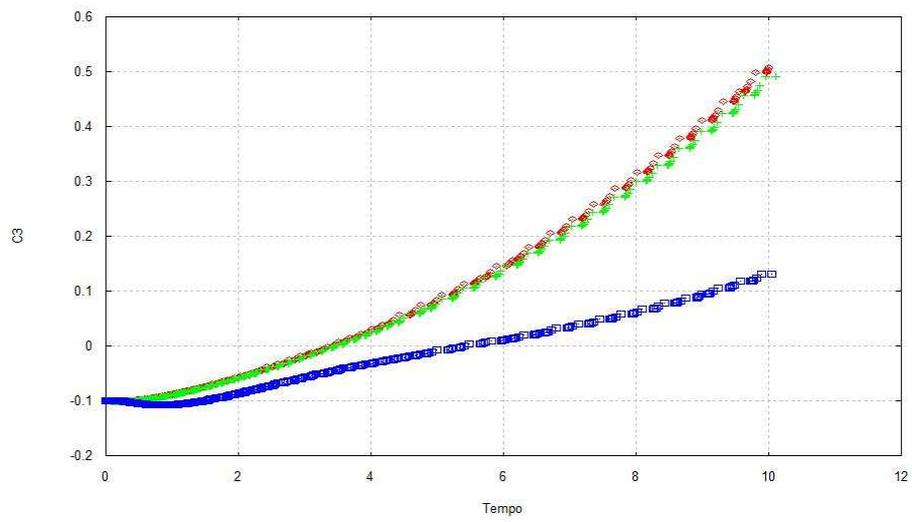


Figura 6.22  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 150^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

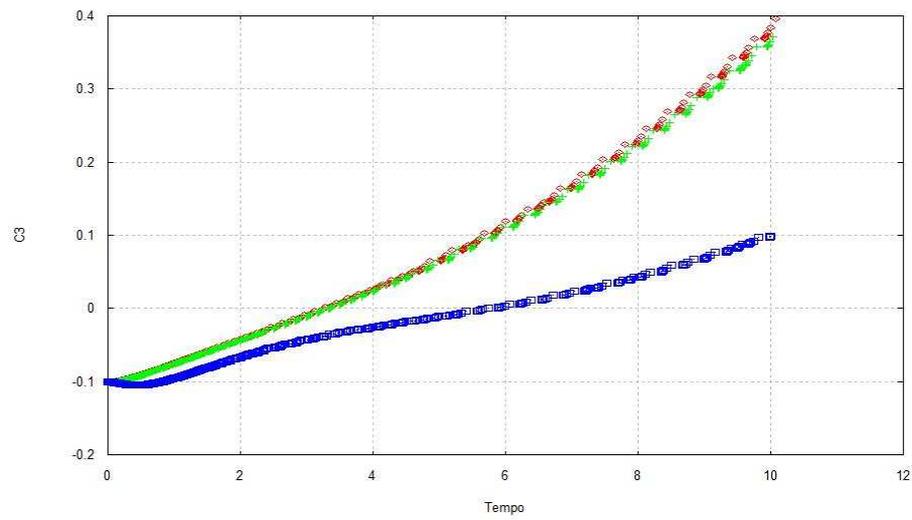


Figura 6.23  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 180^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

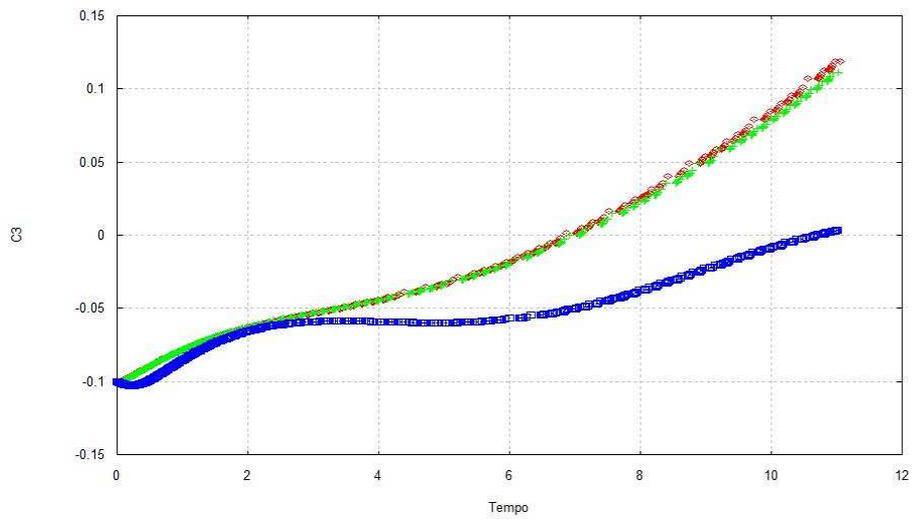


Figura 6.24  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 210^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

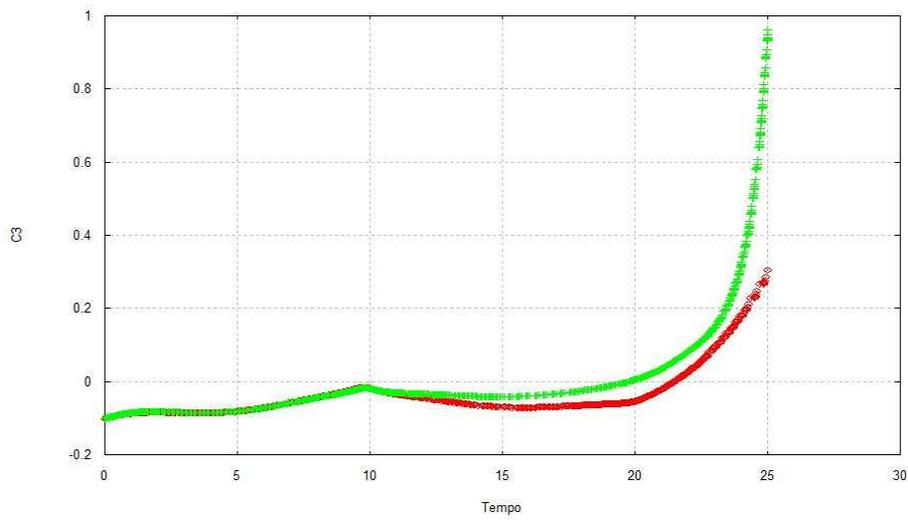


Figura 6.25  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 225^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

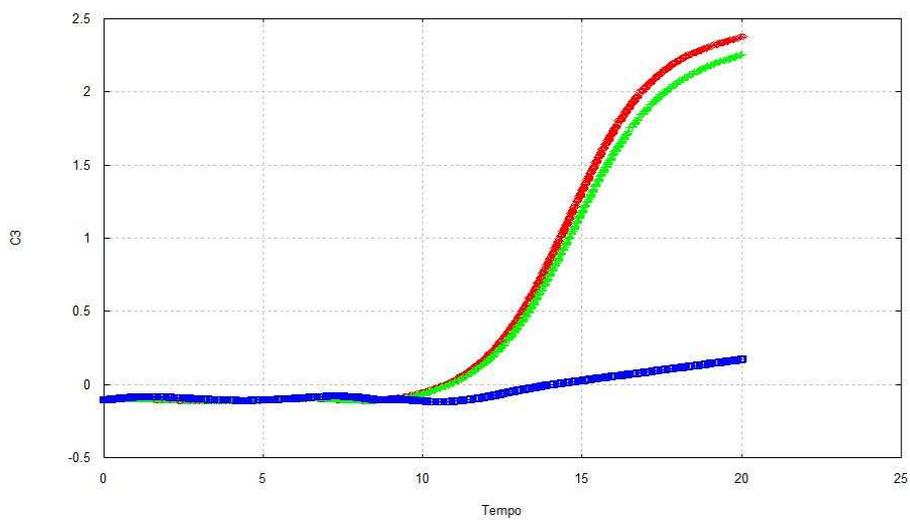


Figura 6.26  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 240^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

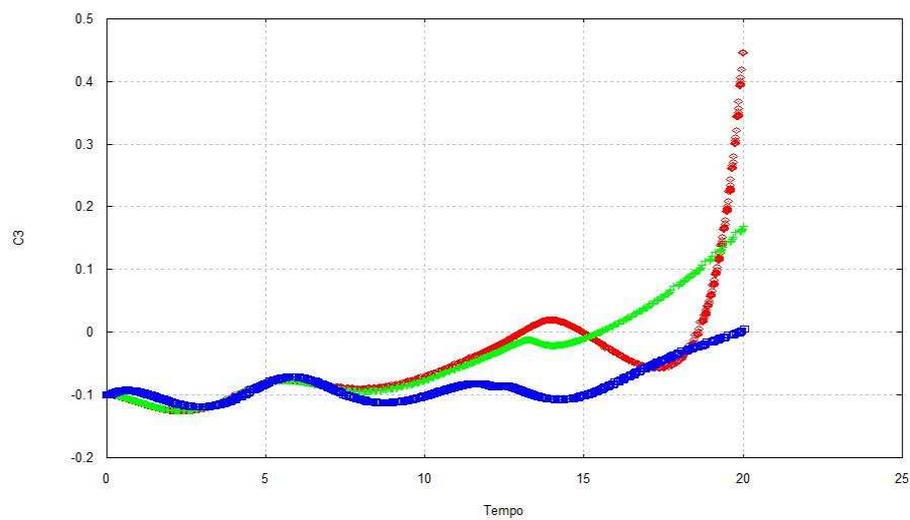


Figura 6.27  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 270^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

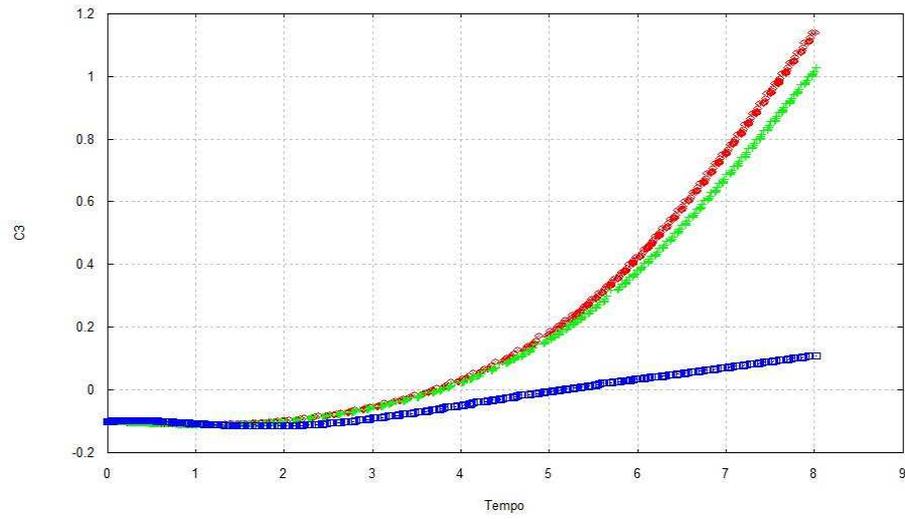


Figura 6.28  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 300^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

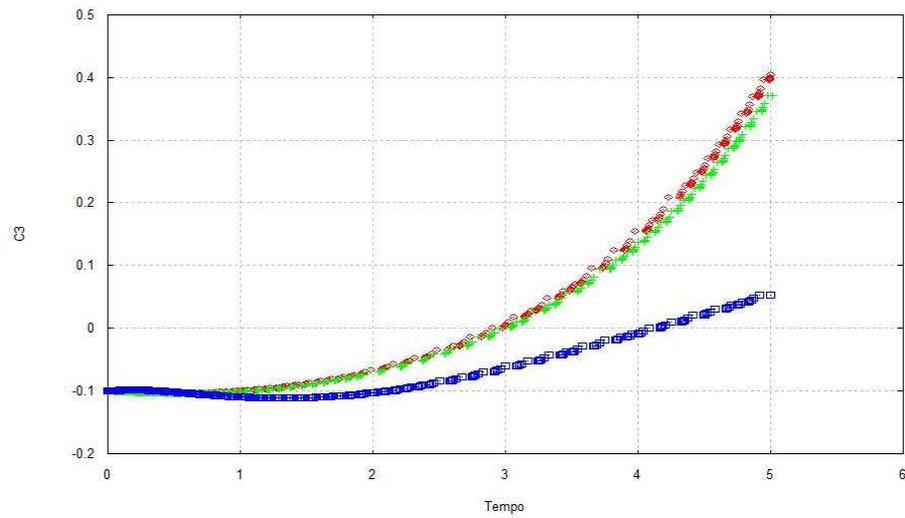


Figura 6.29  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 315^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

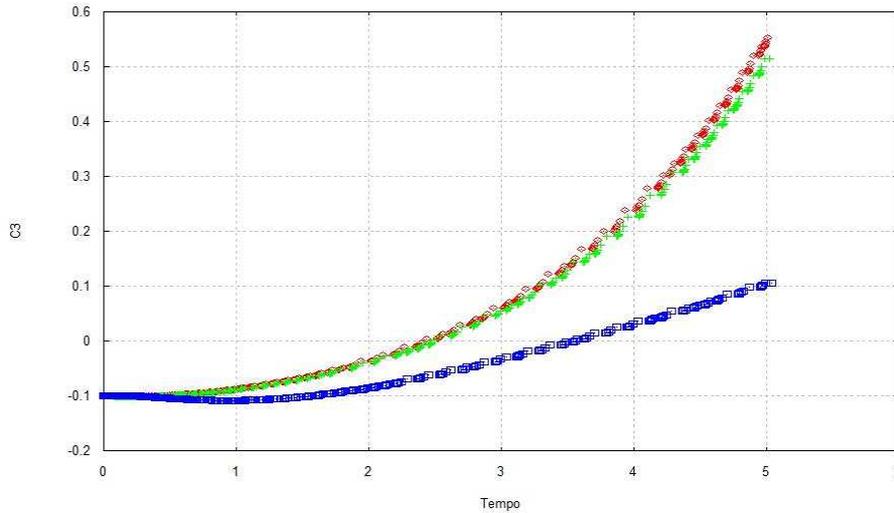


Figura 6.30  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = 330^\circ$   $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

Vemos nas Figuras acima (6.15 a 6.29) que ocorre captura gravitacional para os três valores de  $r_p$  quando o ângulo  $\alpha$  é igual a  $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ$  e  $330^\circ$ . Quando o ângulo  $\alpha$  é igual a  $45^\circ$  existe colisão do veículo espacial com a Lua para os valores de  $r_p$  iguais a  $1838$  km e  $2238$  km. A colisão do veículo espacial com a Lua ocorre somente para  $r_p = 11738$  km quando o ângulo  $\alpha$  é igual a  $225^\circ$ . Quando ocorre captura gravitacional para os dois valores de  $r_p$  ( $1838$  km e  $2238$  km) de um ângulo  $\alpha$  fixo, a diferença do tempo de captura gravitacional não excede há um dia.

Fizemos vários testes numéricos e concluímos que distância entre o veículo espacial e a Lua variando entre 100 km e 500 km não mostra uma diferença significativa do tempo de captura gravitacional, para um ângulo  $\alpha$  fixo. Neste texto fixamos apenas 100 km e 500 km para essa distância. Já quando tomamos a distância entre o veículo espacial e a Lua igual a 10000 km, ou seja,  $r_p = 11738$  km, existe alguma mudança do tempo de captura gravitacional comparado a  $r_p = 1838$  km e  $r_p = 2238$  km, para um ângulo  $\alpha$  fixo. A Tabela 6.2 resume um pouco essas informações.

Na Tabela 6.2, na primeira coluna temos o ângulo  $\alpha$ , na segunda, terceira e quarta coluna o tempo de captura gravitacional para  $r_p$  igual a  $1738$  km,  $2238$  km e  $11738$  km, respectivamente.

**Tabela 6.2 Movimento retrógrado.**

Ângulo $\alpha$	100 km	500 km	10000 km
$0^{\circ}$	2.16 dias	2.16 dias	3.09 dias
$30^{\circ}$	6.49 dias	6.52 dias	10.30 dias
$45^{\circ}$	Colisão	Colisão	13.19 dias
$60^{\circ}$	16.89 dias	16.92 dias	22.27 dias
$90^{\circ}$	13.48 dias	13.91 dias	17.44 dias
$120^{\circ}$	4.91 dias	4.89 dias	8.91 dias
$135^{\circ}$	3.94 dias	4.03 dias	6.42 dias
$150^{\circ}$	3.43 dias	3.49 dias	5.49 dias
$180^{\circ}$	3.28 dias	3.35 dias	5.73 dias
$210^{\circ}$	6.86 dias	6.91 dias	10.71 dias
$225^{\circ}$	21.48 dias	19.78 dias	Colisão
$240^{\circ}$	10.73 dias	10.86 dias	14.05 dias
$270^{\circ}$	13.04 dias	15.49 dias	19.90 dias
$300^{\circ}$	3.67 dias	3.77 dias	5.12 dias
$315^{\circ}$	2.89 dias	2.95 dias	4.08 dias
$330^{\circ}$	2.43 dias	2.49 dias	3.55 dias

### 6.3. Análise do tempo de captura gravitacional no problema bi-circular de quatro corpos.

Nesta parte do trabalho é feita uma comparação do tempo de captura gravitacional no modelo bi-circular de quatro corpos.

De forma análoga ao que foi feito no problema de três corpos restrito circular, a unidade de tempo das figuras abaixo é em dias, a unidade de distância em km e  $C_3$  em unidades canônicas. Para esta comparação são usados três valores diferentes para a distância da Lua ao veículo espacial: 100 km, 500 km e 10000 km.

Os valores do ângulo  $\alpha$  escolhido são  $0^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$ ,  $90^{\circ}$ ,  $120^{\circ}$ ,  $135^{\circ}$ ,  $150^{\circ}$ ,  $180^{\circ}$ ,  $210^{\circ}$ ,  $225^{\circ}$ ,  $240^{\circ}$ ,  $270^{\circ}$ ,  $300^{\circ}$ ,  $315^{\circ}$  e  $330^{\circ}$ .

Lembramos que, para este modelo, teremos mais um parâmetro para analisar, que é o ângulo  $\psi$ . Trabalharemos com dois valores para esse ângulo,  $0^{\circ}$  e  $90^{\circ}$ .

Temos dois conjuntos de gráficos, o primeiro para o movimento direto e o segundo para movimento retrógrado sendo em ambos o valor inicial da energia dado por  $C_3 = -0.1$ .

Em todas as Figuras abaixo (6.31 a 6.46) a linha vermelha é para  $r_p = 1878 \text{ km}$ , linha verde para  $r_p = 2278 \text{ km}$  e em linha azul  $r_p = 11738 \text{ km}$ .

### 6.3.1. Movimento direto.

#### 6.3.1.1 Ângulo do Sol igual $0^{\circ}$ .

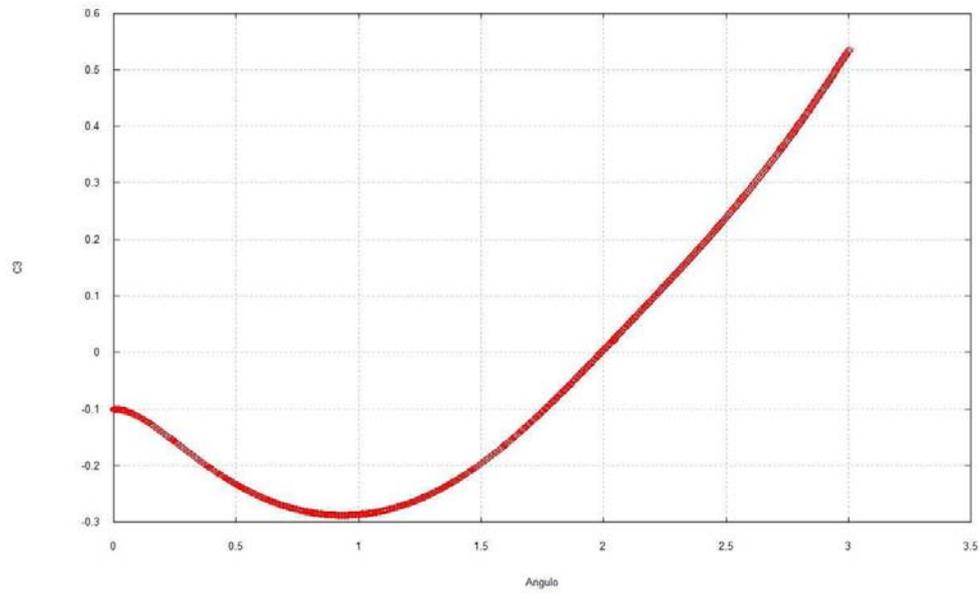


Figura 6.31  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^{\circ}$ ,  $\alpha = 330^{\circ}$  e  $r_p = 11738 \text{ km}$

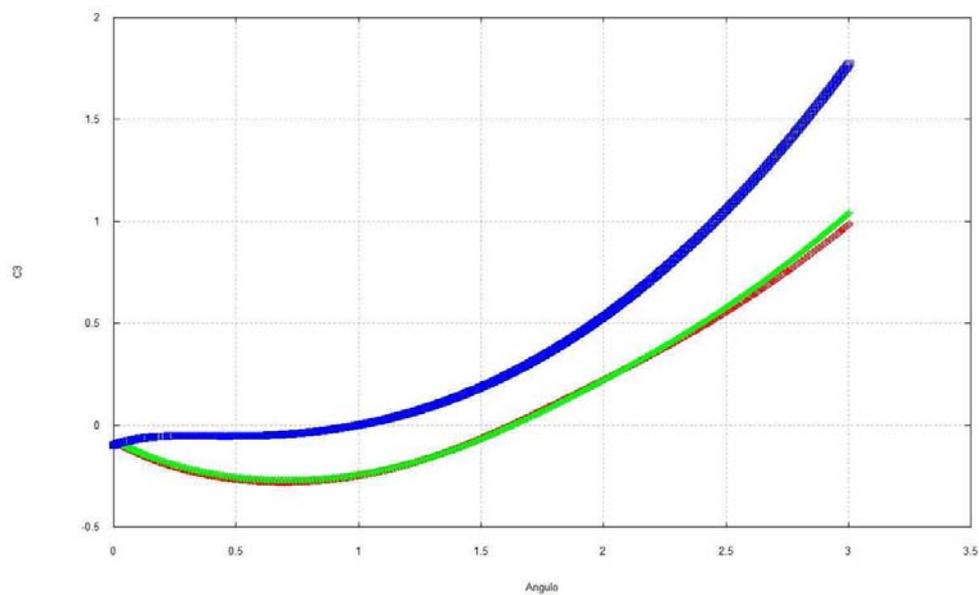


Figura 6.32  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^{\circ}$ ,  $\alpha = 30^{\circ}$ .  $r_p = 1838, 2238 \text{ e } 11738 \text{ km}$ .

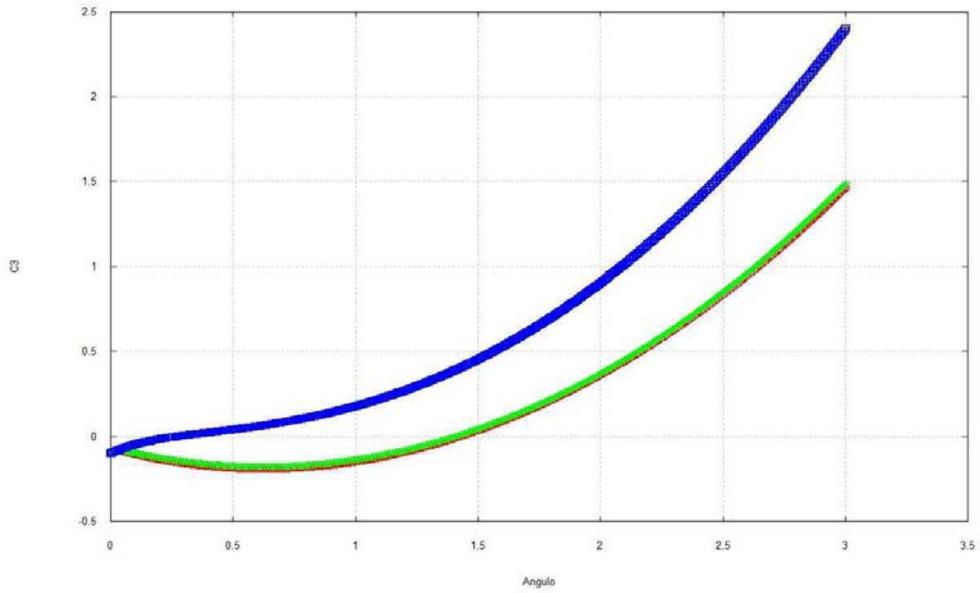


Figura 6.33  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 45^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

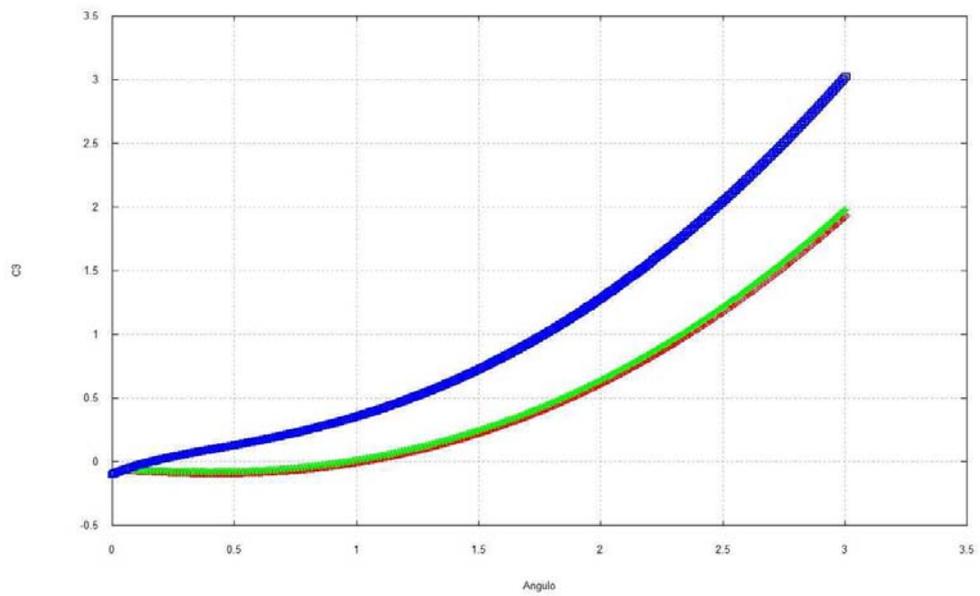


Figura 6.34  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 60^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

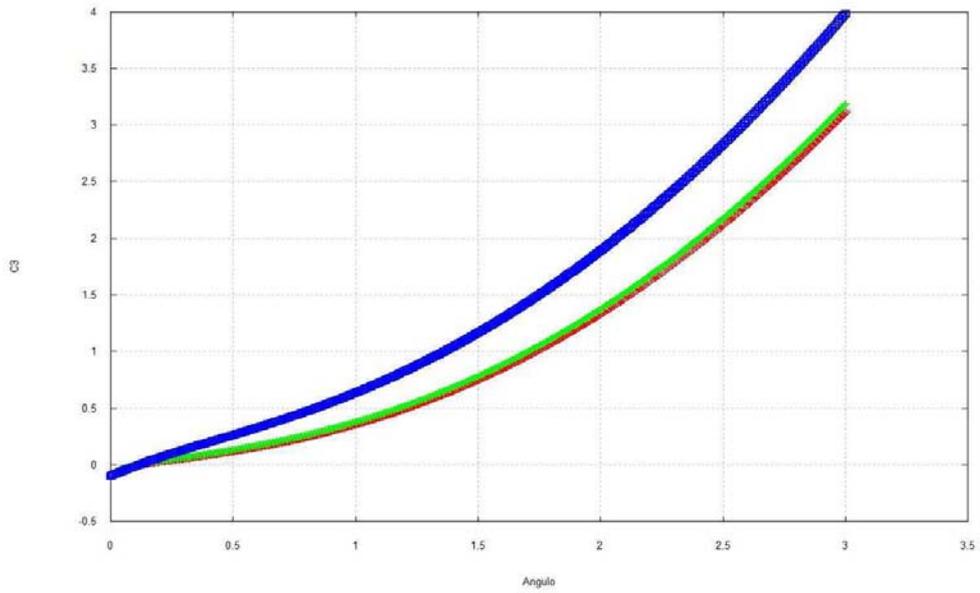


Figura 6.35  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 90^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

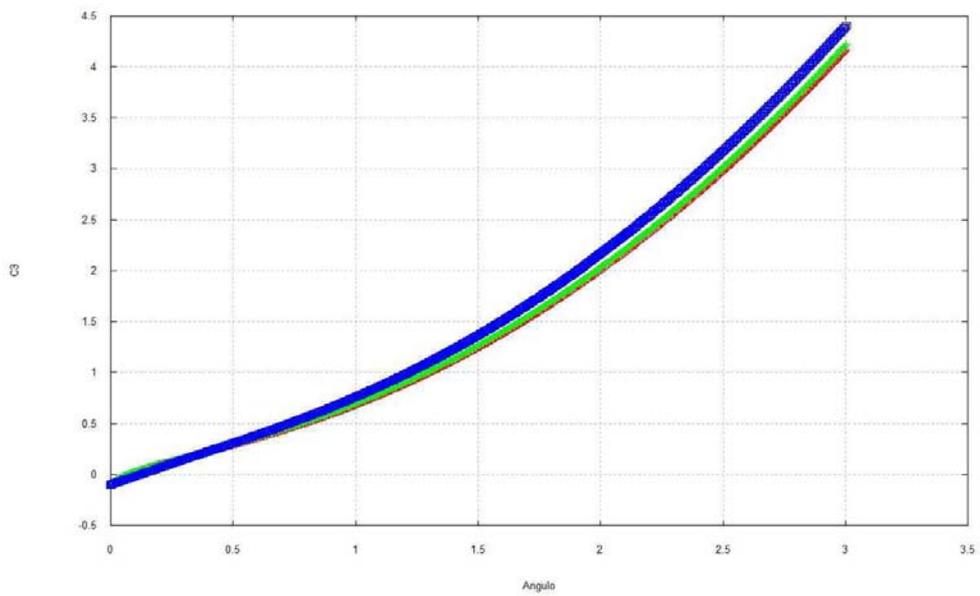


Figura 6.36  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 120^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

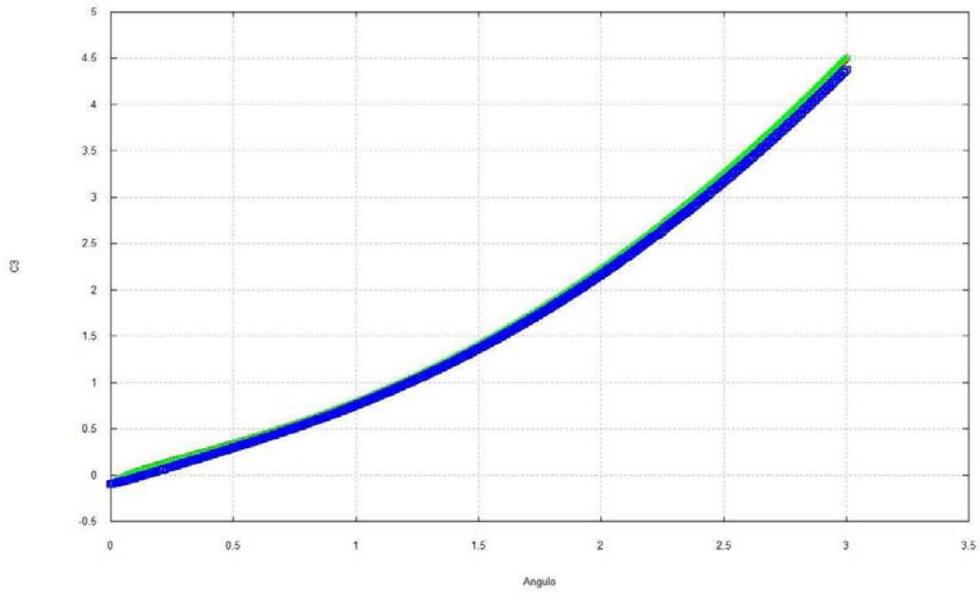


Figura 6.37  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 135^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

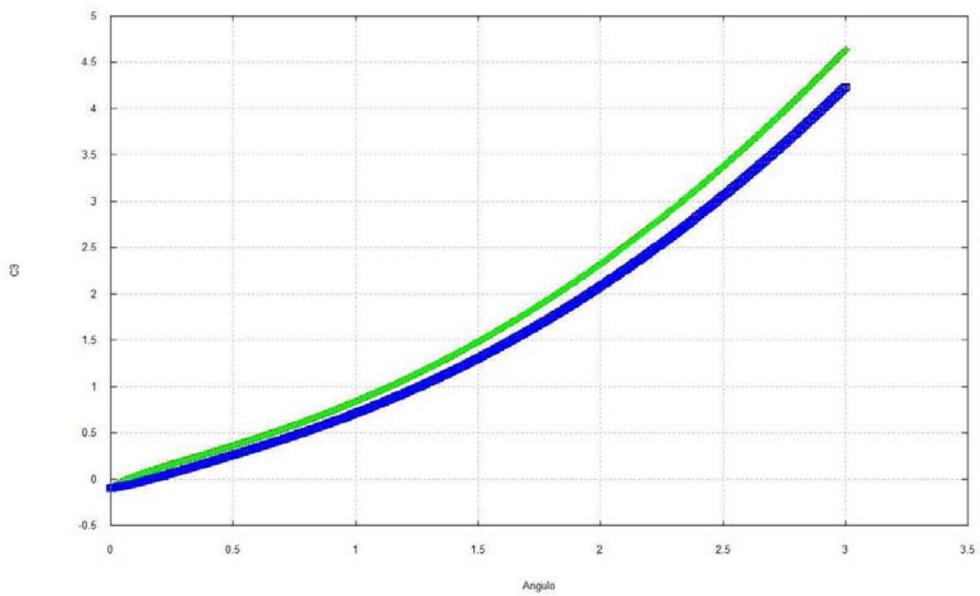


Figura 6.38  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 150^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

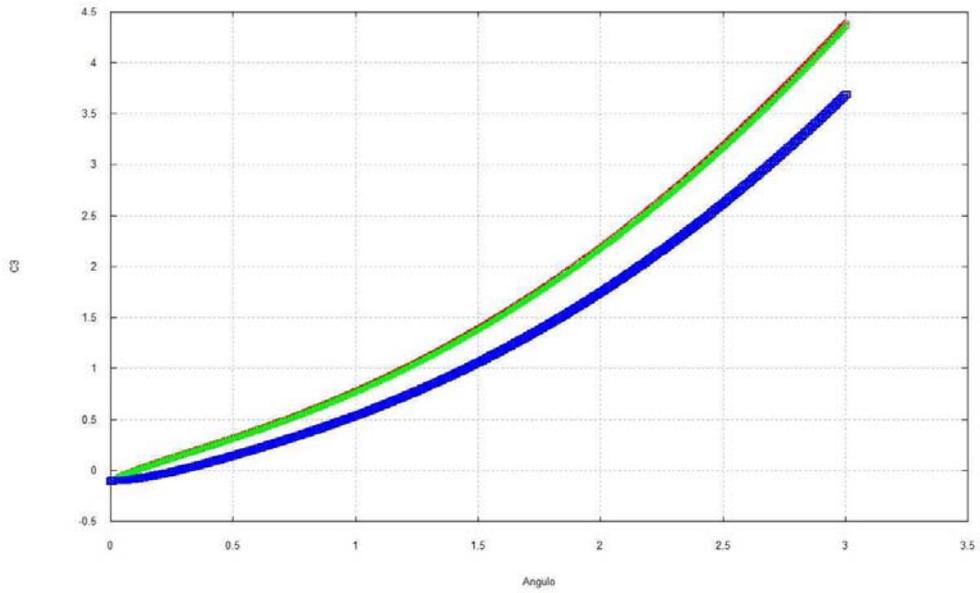


Figura 6.39  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 180^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

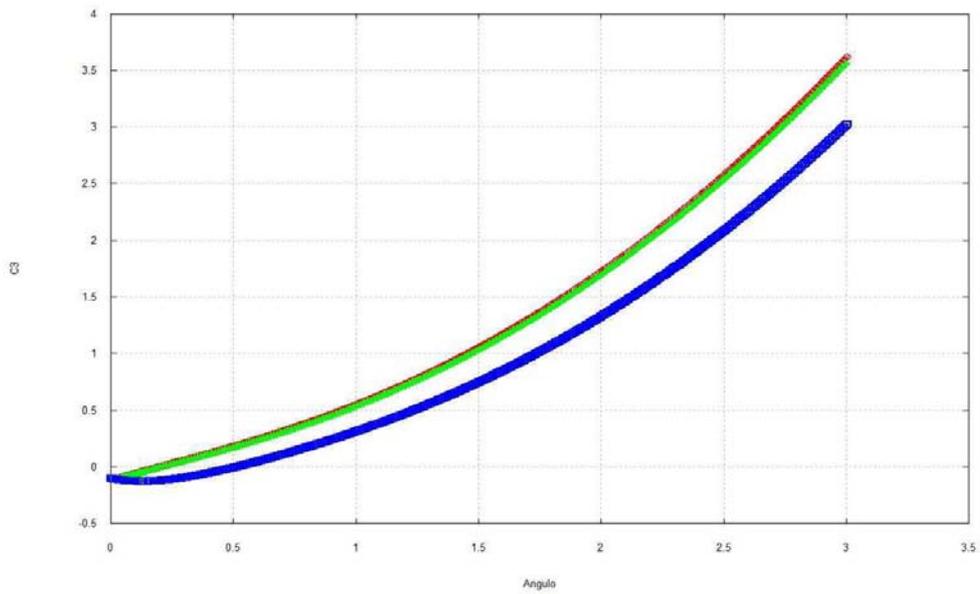


Figura 6.40  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 210^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

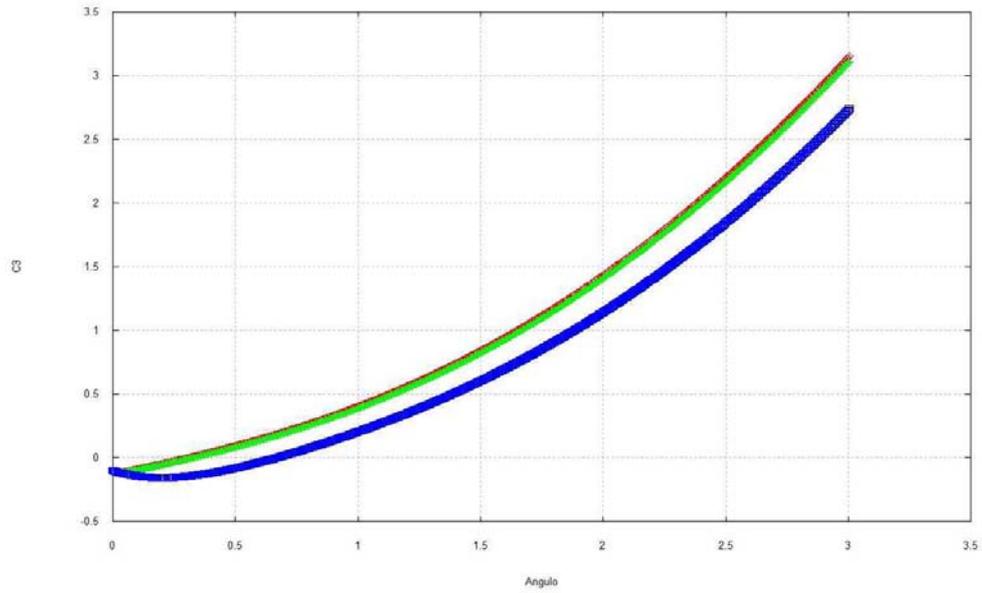


Figura 6.41  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 225^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

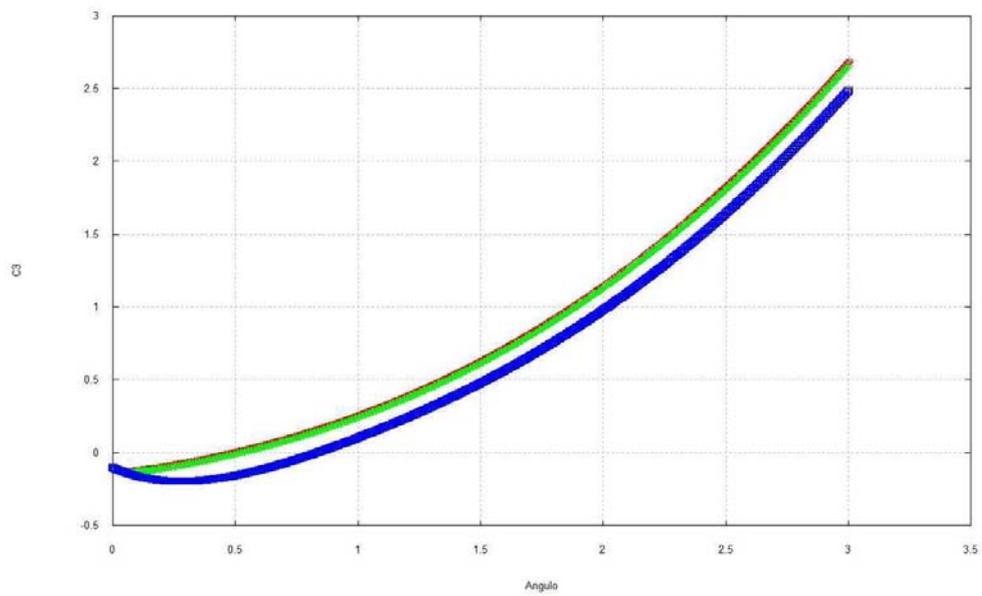


Figura 6.42  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 240^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

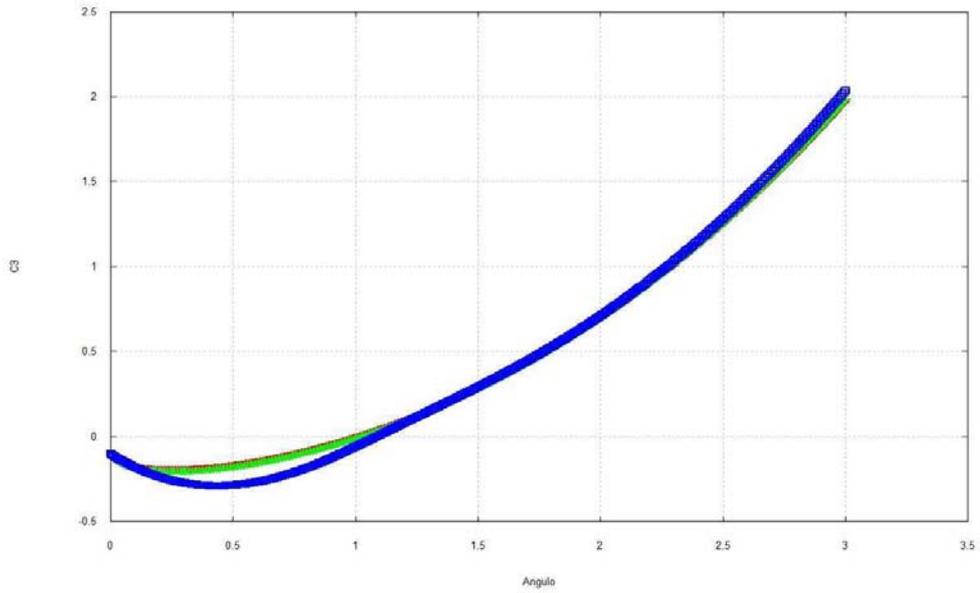


Figura 6.43  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 270^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

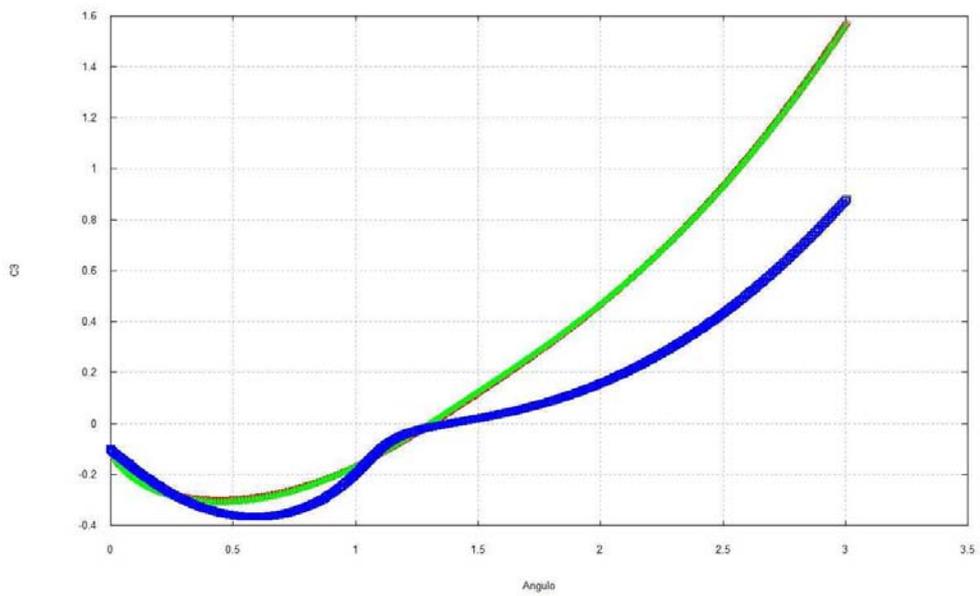


Figura 6.44  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 300^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

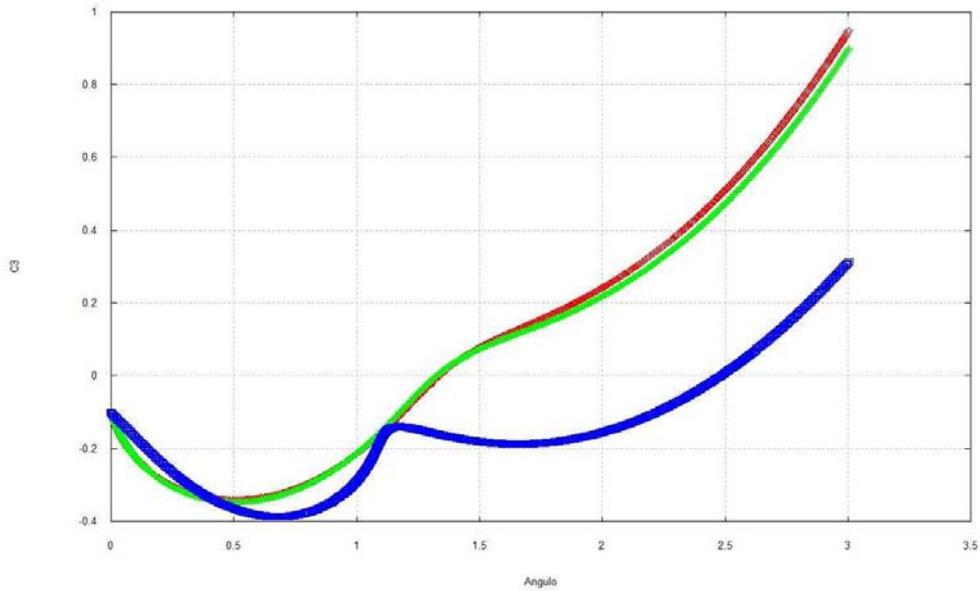


Figura 6.45  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 315^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

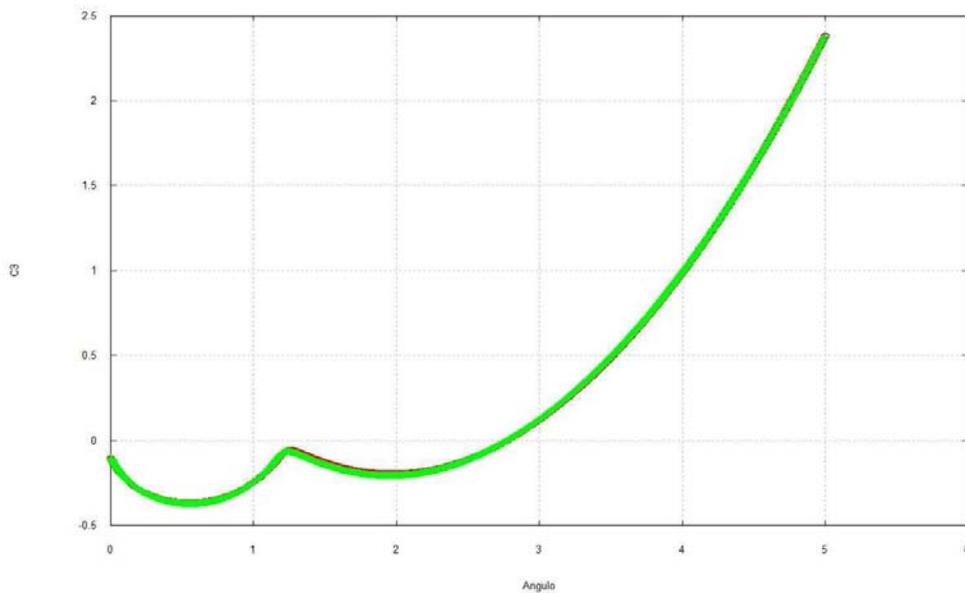


Figura 6.46  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 330^\circ$ .  $r_p = 1838$  e  $2238$  km.

Nas Figuras 6.31 a 6.46 usamos  $\psi = 0^\circ$  e  $C_3 = -0.1$

Para o ângulo  $\alpha$  valendo  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ$ , e  $315^\circ$  temos captura gravitacional para os três valores de  $r_p$ .

Quando  $\alpha = 0^\circ$  temos colisão do veículo espacial com a Lua para  $r_p = 1838$  km e  $2238$  km. Já para  $\alpha = 330^\circ$  temos colisão do veículo espacial com a Lua para  $r_p$  igual  $11738$  km.

O fato mais interessante no problema bi-circular é a pequena diferença entre os três gráficos em todas as figuras, isto significa que o tempo de captura gravitacional é praticamente idêntico nos três valores de  $r_p$ . Quando  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $2238 \text{ km}$ , os dois gráficos ficam praticamente sobrepostos (linha verde sobre linha vermelha).

Na maior parte das Figuras é fácil constatar que o tempo de captura gravitacional para o problema bi-circular é menor que para o problema de três corpos restrito circular, ou seja, a perturbação do Sol acelera o tempo de captura gravitacional. Observando cada gráfico nos dois modelos ou então comparando as Tabela 6.1 com a Tabela 6.3 concluímos que a presença o Sol acelera o tempo de captura gravitacional.

Na Tabela 6.3 na primeira coluna temos o ângulo  $\alpha$ , na segunda, terceira e quarta coluna o tempo de captura gravitacional para  $r_p$  igual a  $1738 \text{ km}$ ,  $2238 \text{ km}$  e  $11738 \text{ km}$ , respectivamente.

**Tabela 6.3 Movimento direto  $\psi = 0^\circ$ .**

Ângulo $\alpha$	100 km	500 km	10000 km
$0^\circ$	Colisão	Colisão	1.99 dias
$30^\circ$	1.62 dias	1.63 dias	1.00 dias
$45^\circ$	1.43 dias	1.41 dias	2.70 dias
$60^\circ$	1.02 dias	0.96 dias	0.15 dias
$90^\circ$	0.13 dias	0.12 dias	0.17 dias
$120^\circ$	0.06 dias	0.07 dias	0.12 dias
$135^\circ$	0.06 dias	0.06 dias	0.14 dias
$150^\circ$	0.07 dias	0.07 dias	0.16 dias
$180^\circ$	0.10 dias	0.10 dias	0.27 dias
$210^\circ$	0.19 dias	0.21 dias	0.51 dias
$225^\circ$	0.30 dias	0.33 dias	0.66 dias
$240^\circ$	0.49 dias	0.53 dias	0.83 dias
$270^\circ$	1.01 dias	1.02 dias	1.08 dias
$300^\circ$	1.31 dias	1.30 dias	1.38 dias
$315^\circ$	1.33 dias	1.32 dias	2.48 dias
$330^\circ$	2.78 dias	2.78 dias	Colisão

### 6.3.1.2 Ângulo do Sol igual $90^{\circ}$

Nas figuras de 6.47 a 6.62 usamos  $\psi = 90^{\circ}$  e  $C_3 = -0.1$

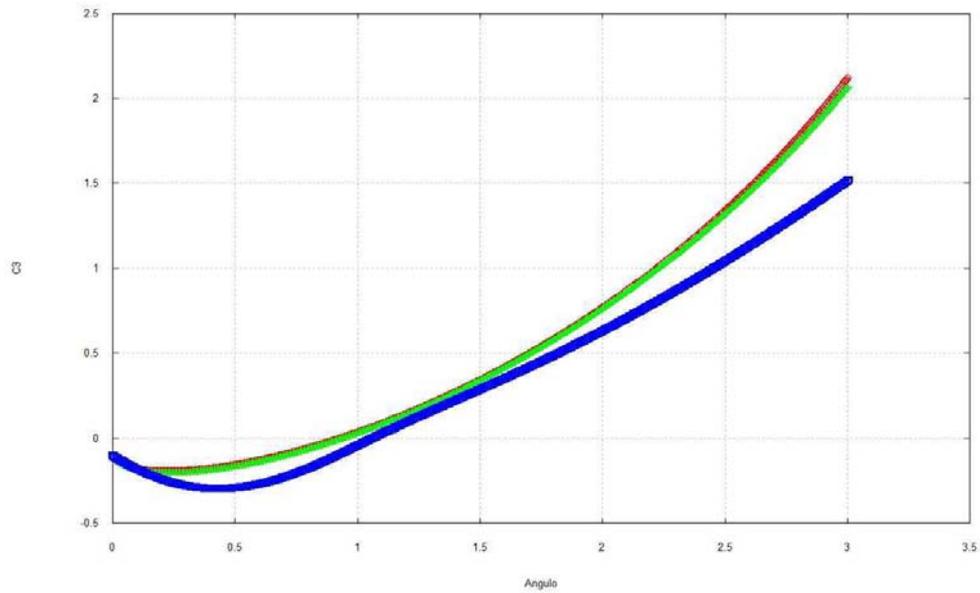


Figura 6.47  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^{\circ}$ ,  $\alpha = 0^{\circ}$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

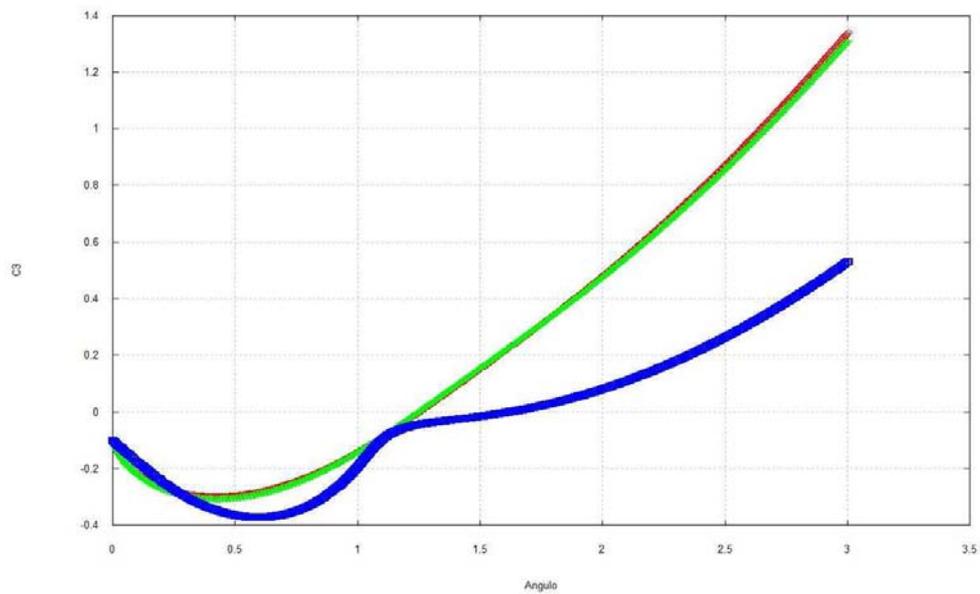


Figura 6.48  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^{\circ}$ ,  $\alpha = 30^{\circ}$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

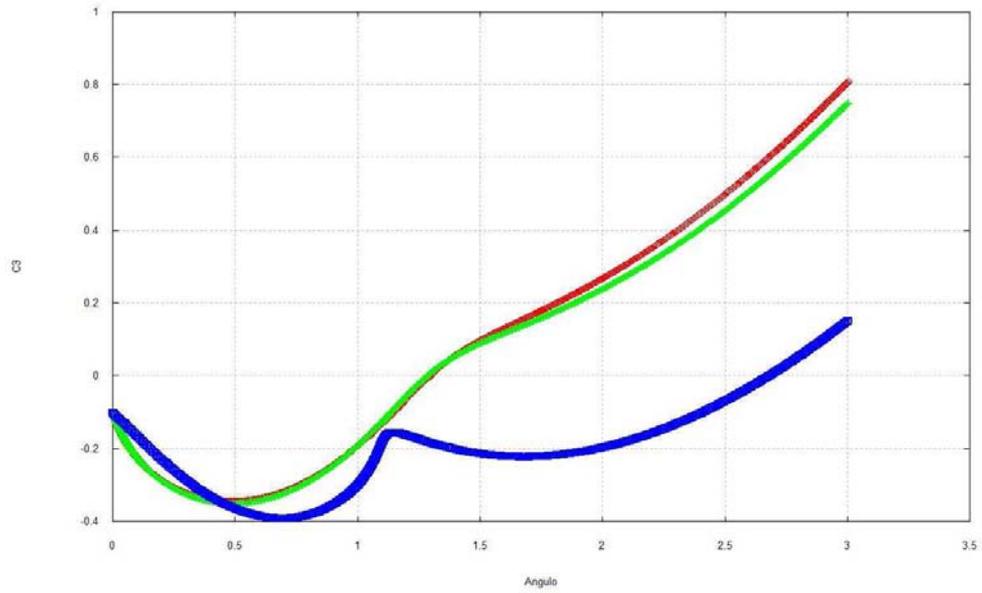


Figura 6.49  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 45^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

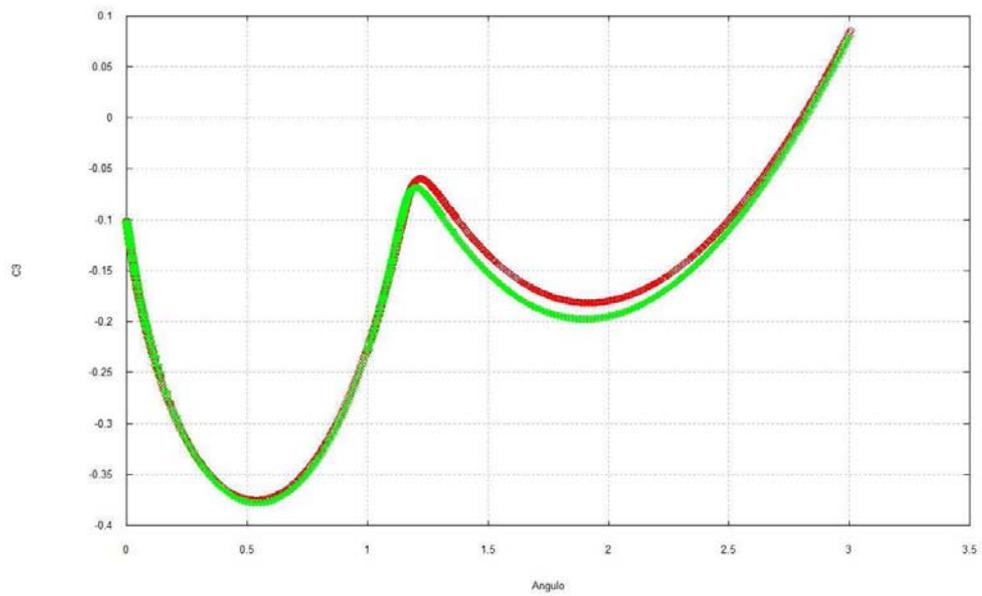


Figura 6.50  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 60^0$ .  $r_p = 1838$  km e  $2238$  km.

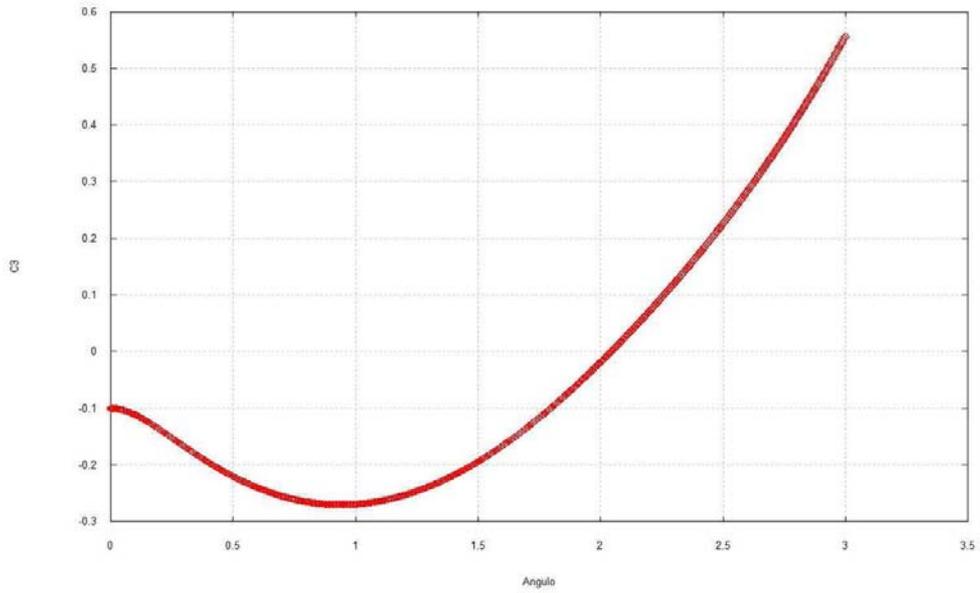


Figura 6.51  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ .  $r_p = 11738 \text{ km}$ .

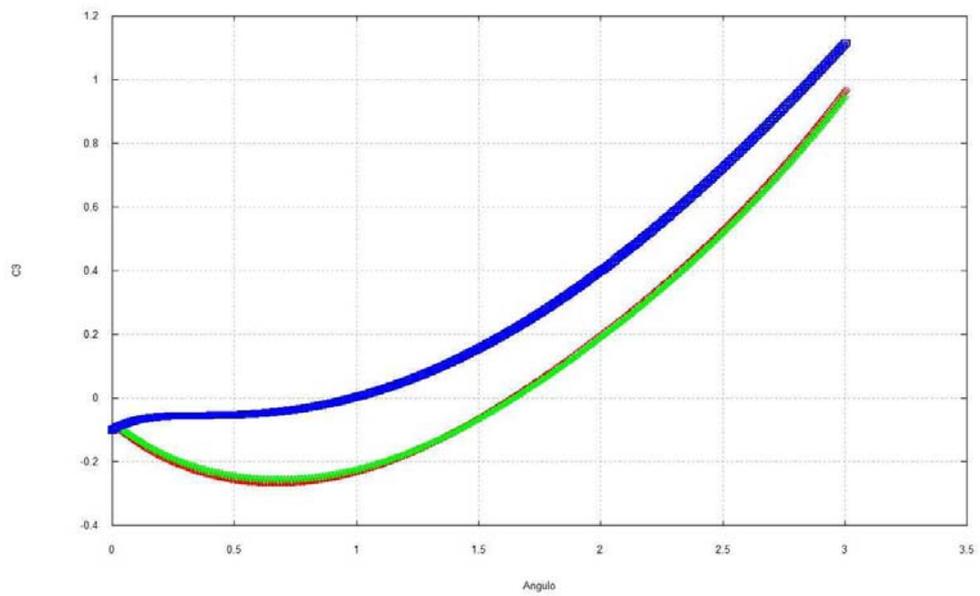


Figura 6.52  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 120^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738 \text{ km}$ .

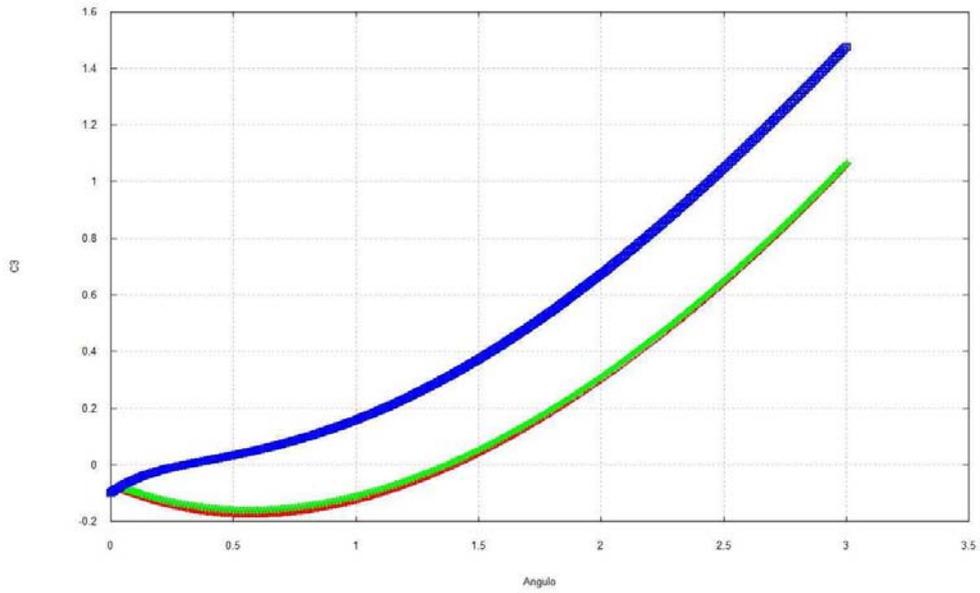


Figura 6.53  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 135^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

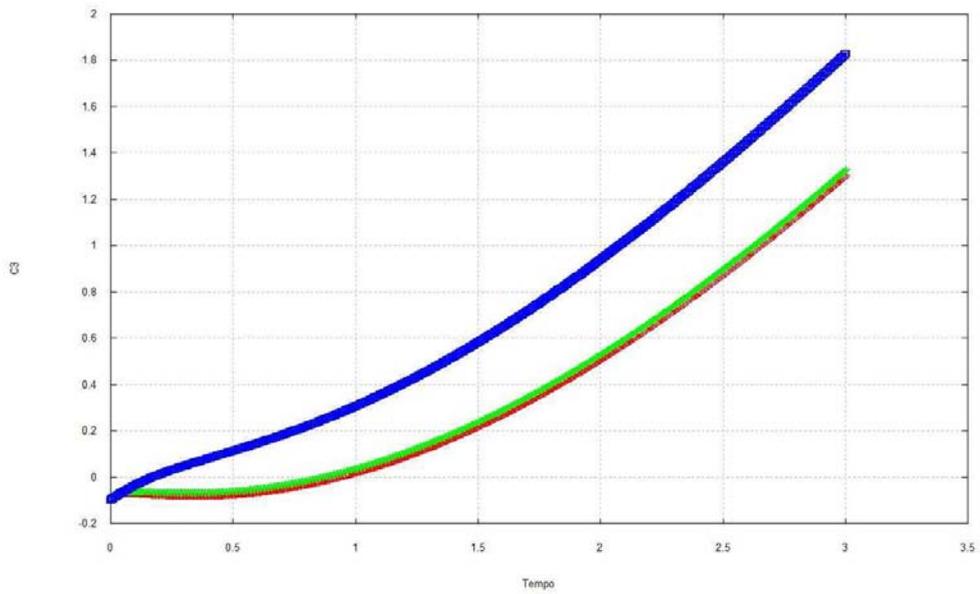


Figura 6.54  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 150^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

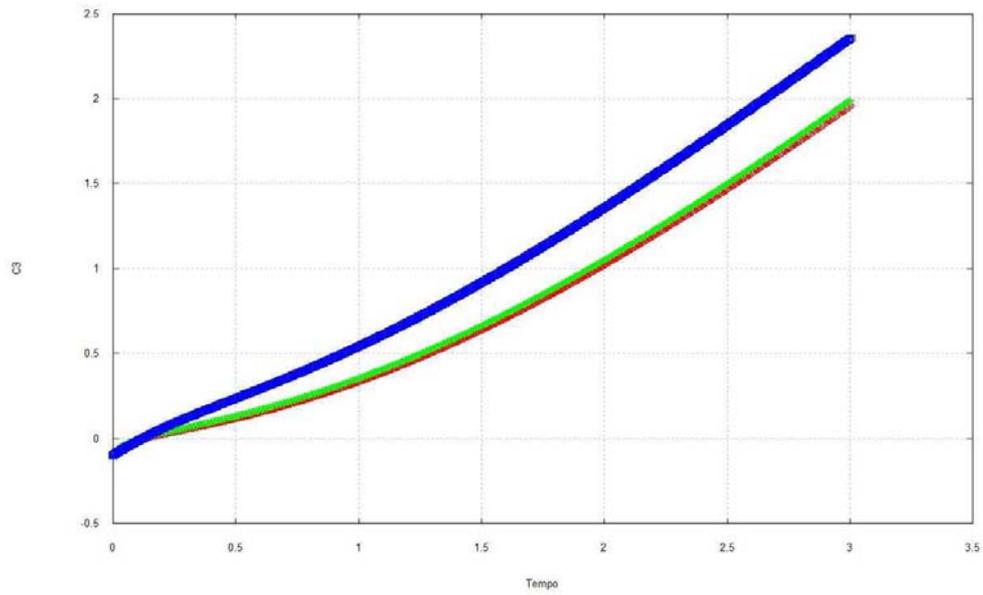


Figura 6.55  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 180^\circ$ .  $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.

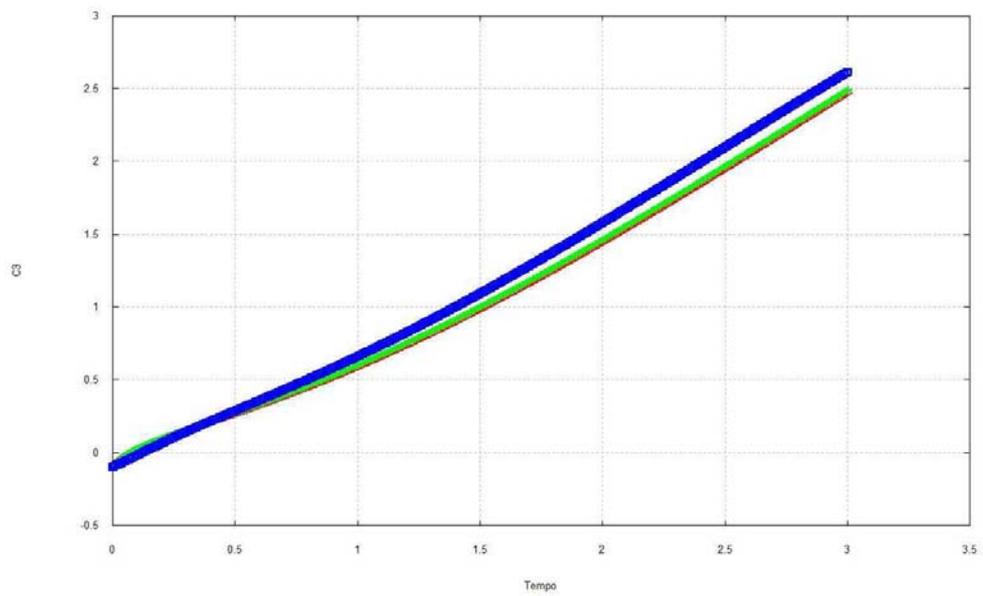


Figura 6.56  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 210^\circ$ .  $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.

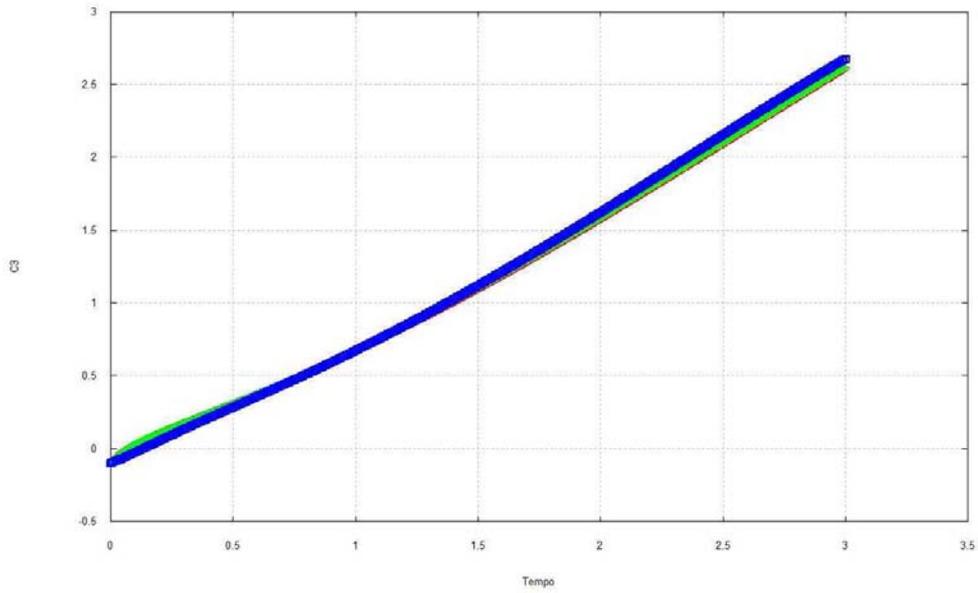


Figura 6.57  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 225^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

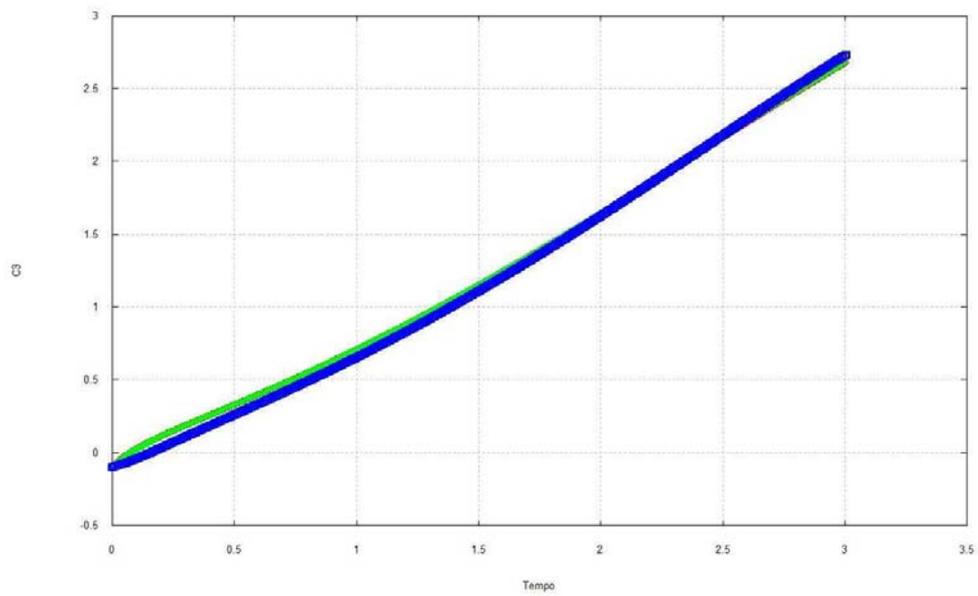


Figura 6.58  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 240^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

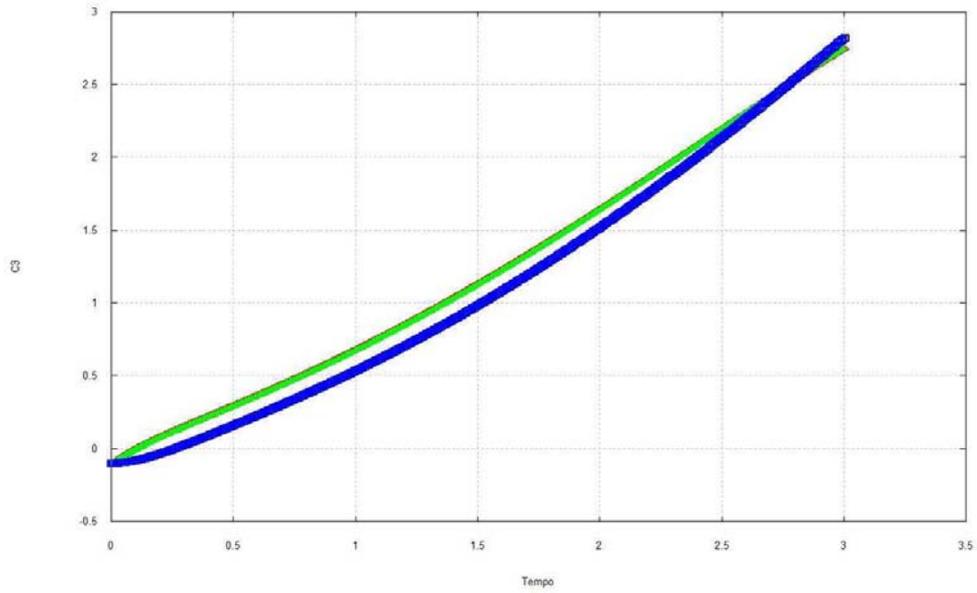


Figura 6.59  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 270^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

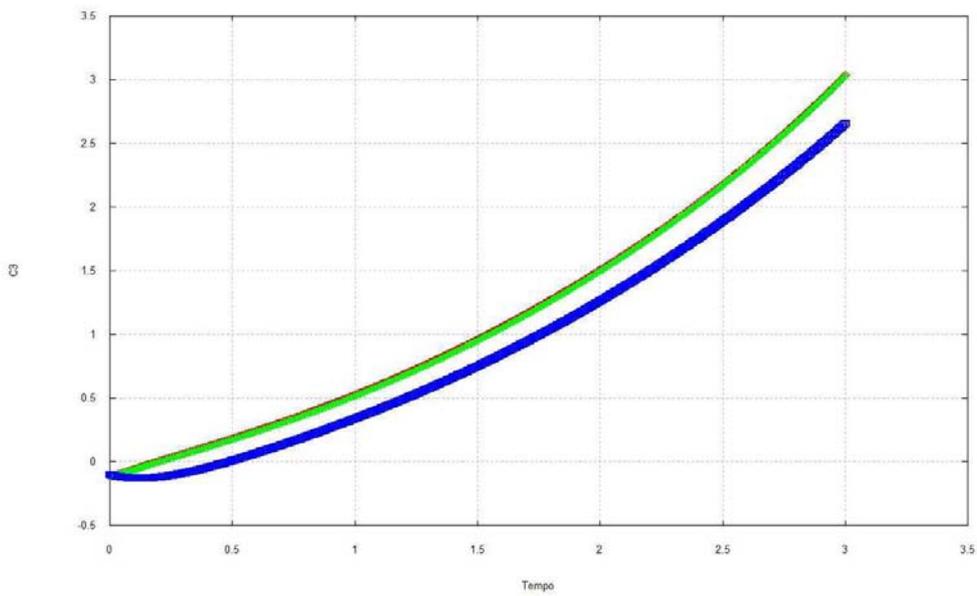


Figura 6.60  $C_3$  em função do tempo  $\psi = 90^0$ ,  $\alpha = 300^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

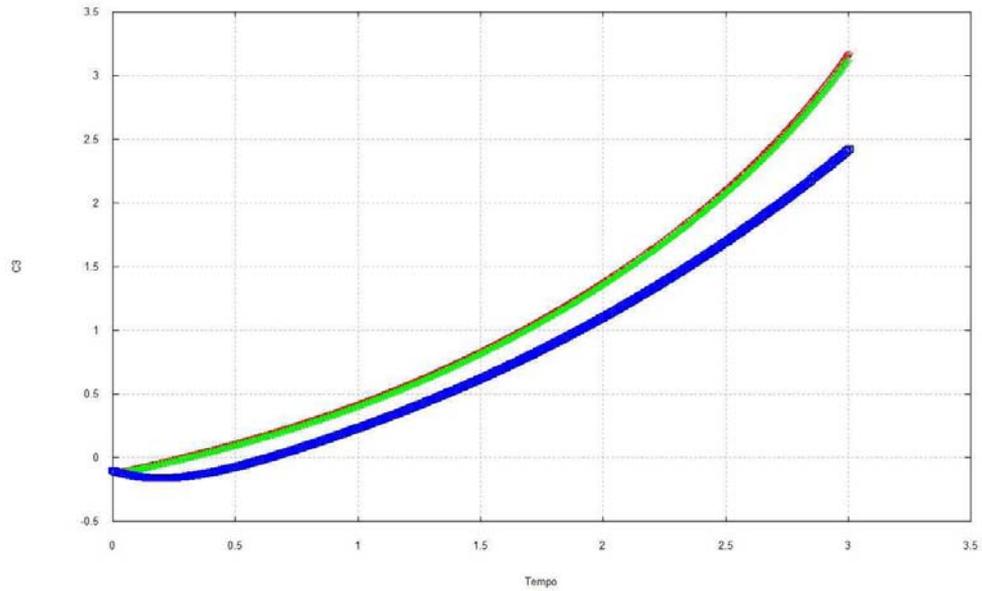


Figura 6.61  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 315^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

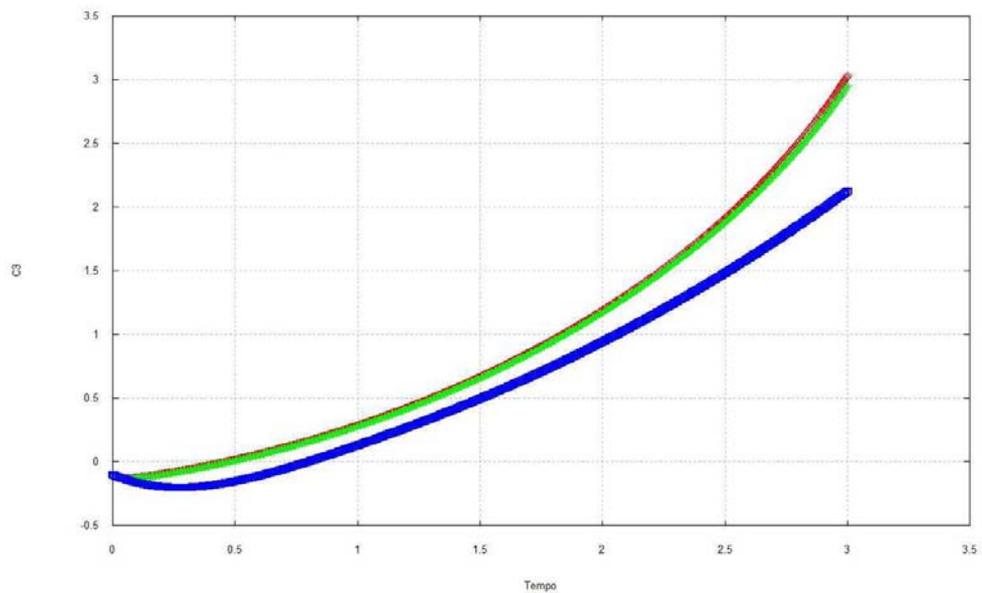


Figura 6.62  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 330^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

Para o ângulo  $\alpha$  valendo  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ$  e  $330^\circ$  temos captura gravitacional para os três valores de  $r_p$ .

Quando temos  $\alpha = 60^\circ$  temos colisão do veículo espacial com a Lua para  $r_p = 11738$  km.

Quando temos  $\alpha = 90^\circ$  temos colisão do veículo espacial com a Lua para  $r_p = 1838$  km e  $2238$  km.

A posição do ângulo do Sol igual a  $90^0$  não modifica muito o tempo de captura gravitacional comparado ao ângulo do Sol igual a  $0^0$ . Comparando as Tabelas 6.3 e 6.4, podemos concluir isto.

Na Tabela 6.4 na primeira coluna temos o ângulo  $\alpha$ , na segunda, terceira e quarta coluna o tempo de captura gravitacional para  $r_p$  igual a  $1838 \text{ km}$ ,  $2238 \text{ km}$  e  $11738 \text{ km}$  respectivamente.

**Tabela 6.4 Movimento direto  $\psi = 90^0$ .**

Ângulo $\alpha$	100 km	500 km	10000 km
$0^0$	0.92 dias	0.94 dias	1.06 dias
$30^0$	1.25 dias	1.25 dias	1.62 dias
$45^0$	1.29 dias	1.28 dias	2.67 dias
$60^0$	2.80 dias	2.82 dias	Colisão
$90^0$	Colisão	Colisão	2.04 dias
$120^0$	1.63 dias	1.64 dias	0.98 dias
$135^0$	1.40 dias	1.37 dias	0.30 dias
$150^0$	0.94 dias	0.87 dias	1.72 dias
$180^0$	1.32 dias	1.16 dias	1.22 dias
$210^0$	0.07 dias	0.07 dias	0.11 dias
$225^0$	0.06 dias	0.07 dias	0.13 dias
$240^0$	0.07 dias	0.07 dias	0.15 dias
$270^0$	1.01 dias	1.09 dias	0.26 dias
$300^0$	0.18 dias	0.20 dias	0.48 dias
$315^0$	0.29 dias	0.31 dias	0.63 dias
$330^0$	0.79 dias	0.48 dias	0.45 dias

### 6.3.2. Movimento retrógrado

#### 6.3.2.1 Ângulo do Sol igual $0^0$ e $C_3 = -0.1$

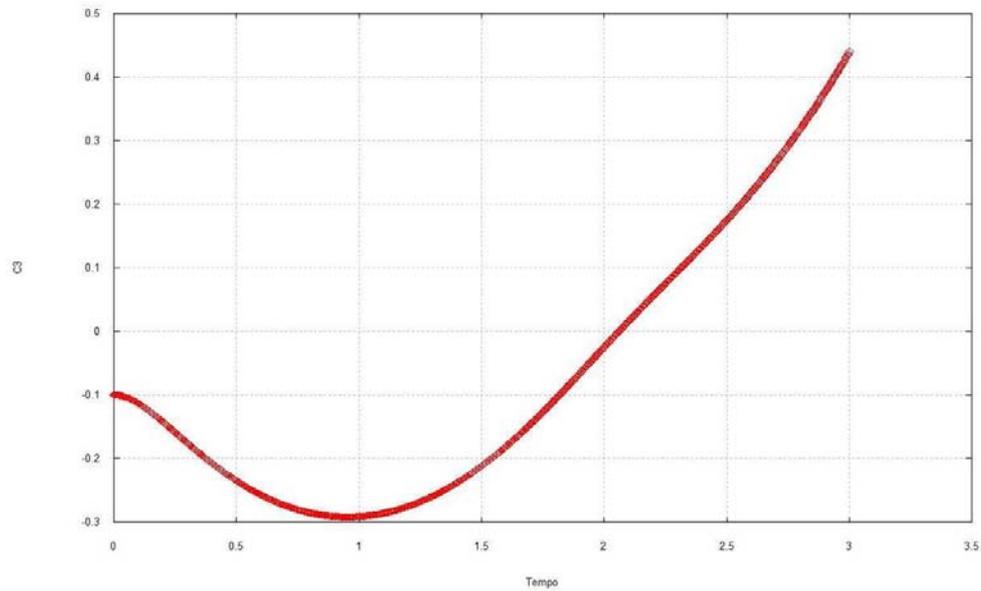


Figura 6.63  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 0^0$ .  $r_p = 11738 \text{ km}$ .

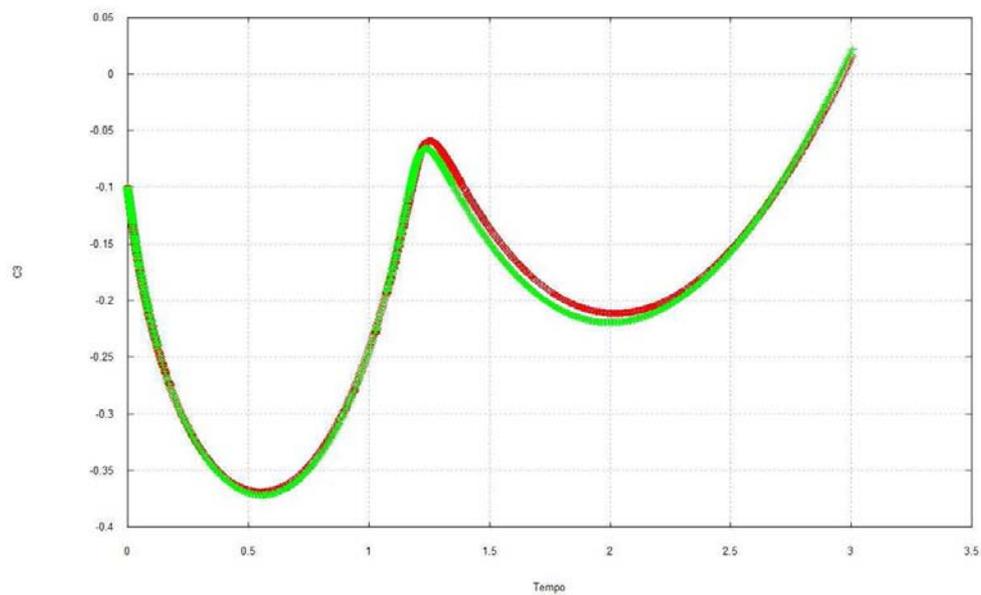


Figura 6.64  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 30^0$ .  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $2238 \text{ km}$ .

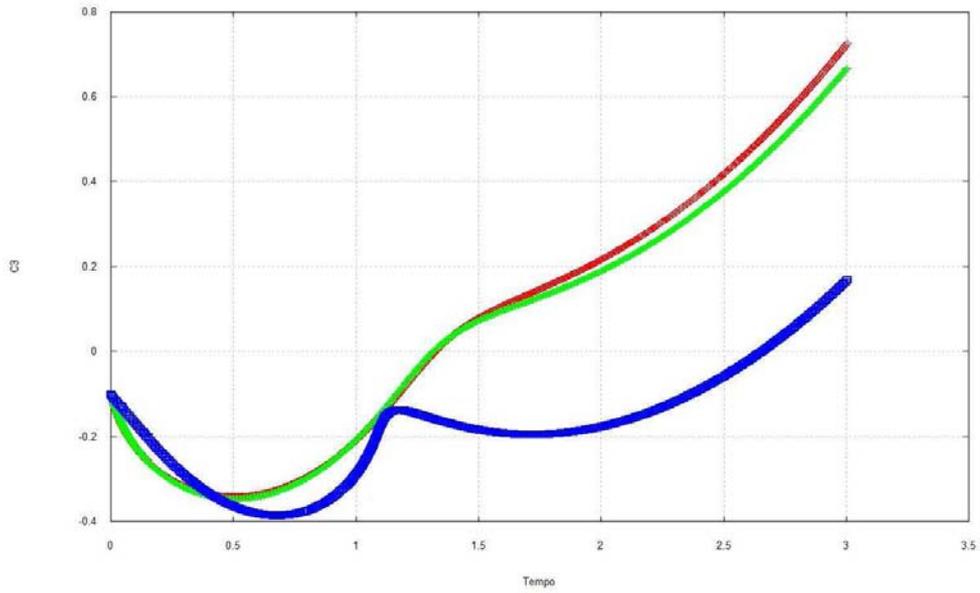


Figura 6.65  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 45^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

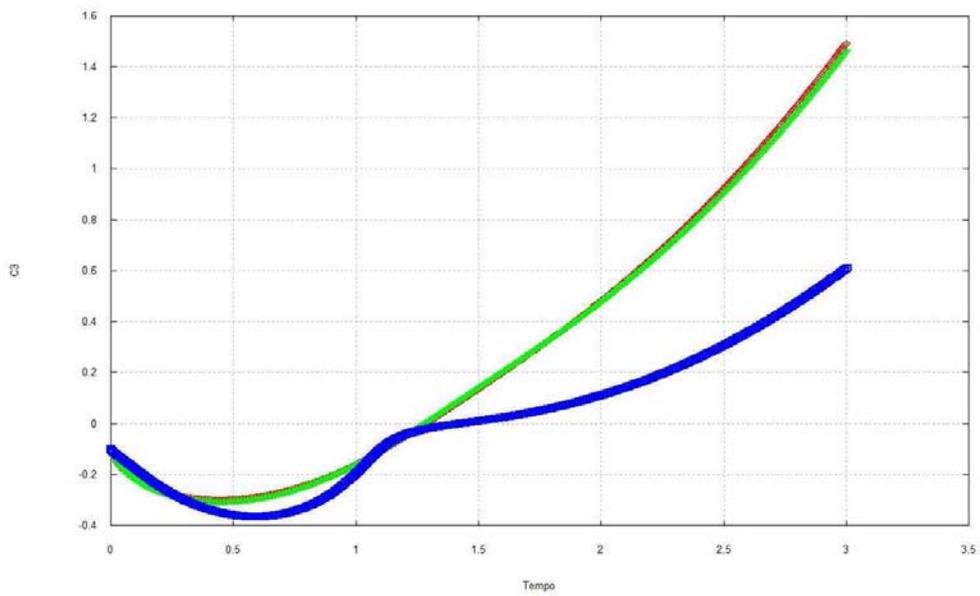


Figura 6.66  $C_3$  em função do tempo  $\psi = 0^0$ ,  $\alpha = 60^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

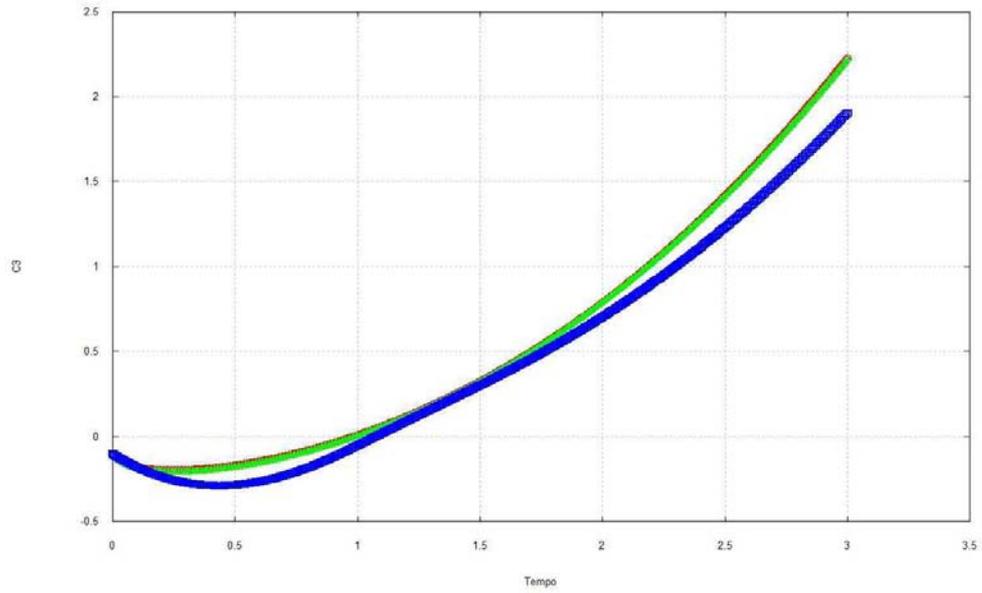


Figura 6.67  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 90^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

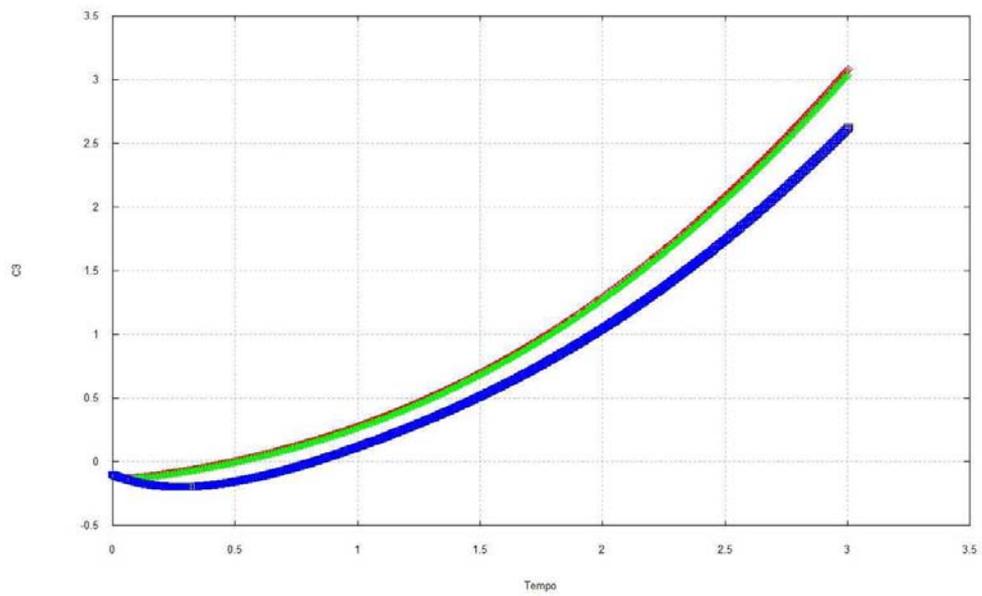


Figura 6.68  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 120^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

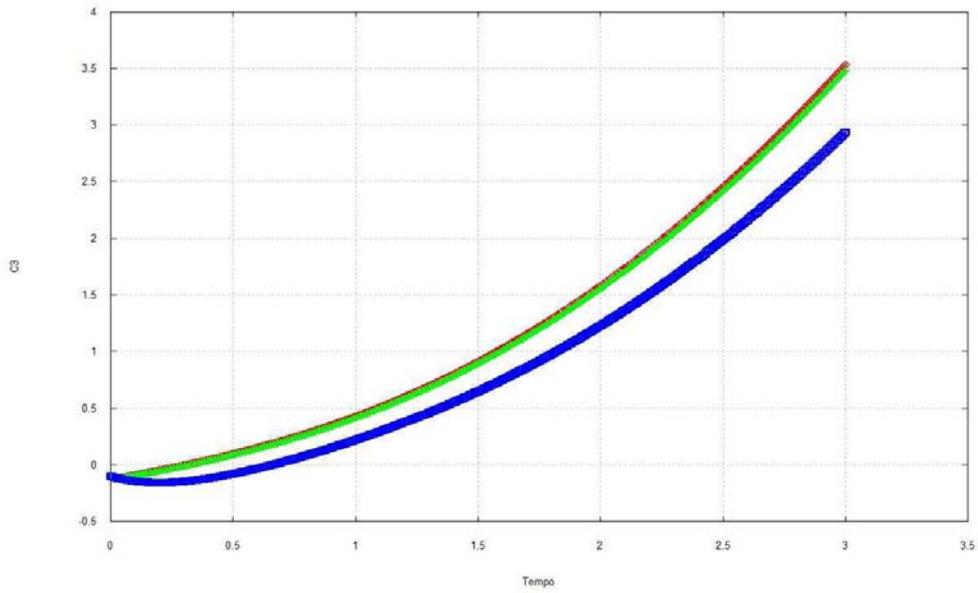


Figura 6.69  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 135^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

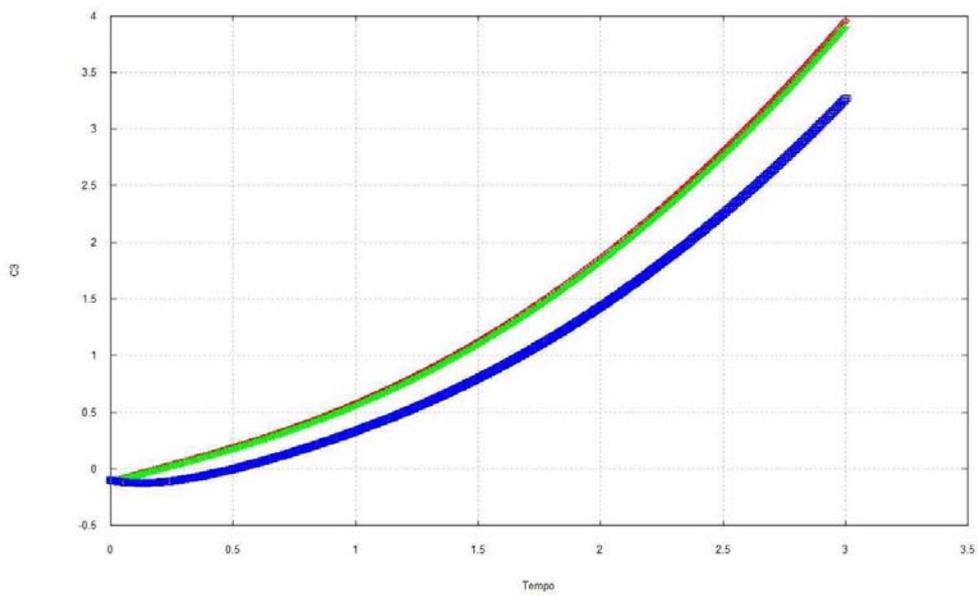


Figura 6.70  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 150^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

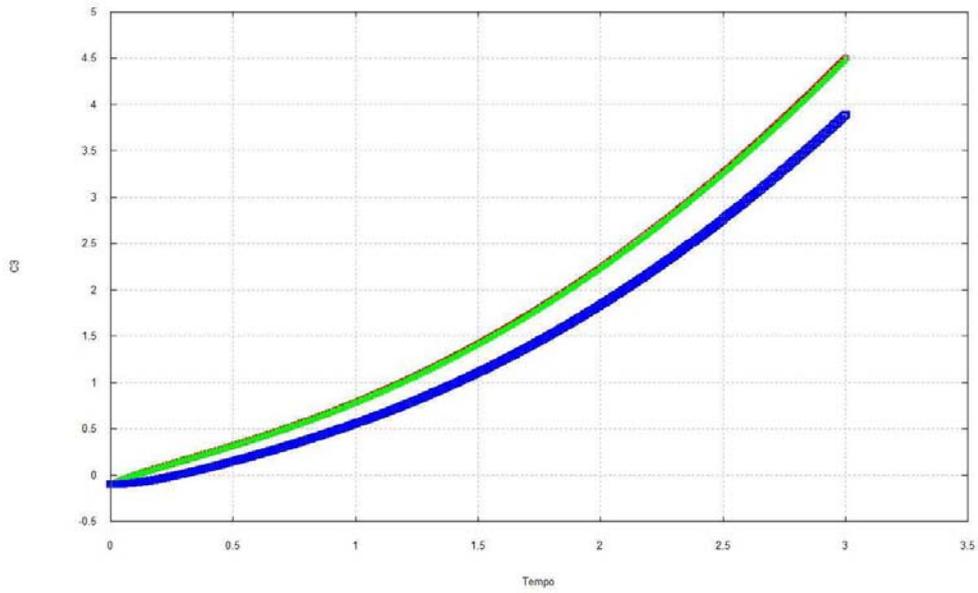


Figura 6.71  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 180^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

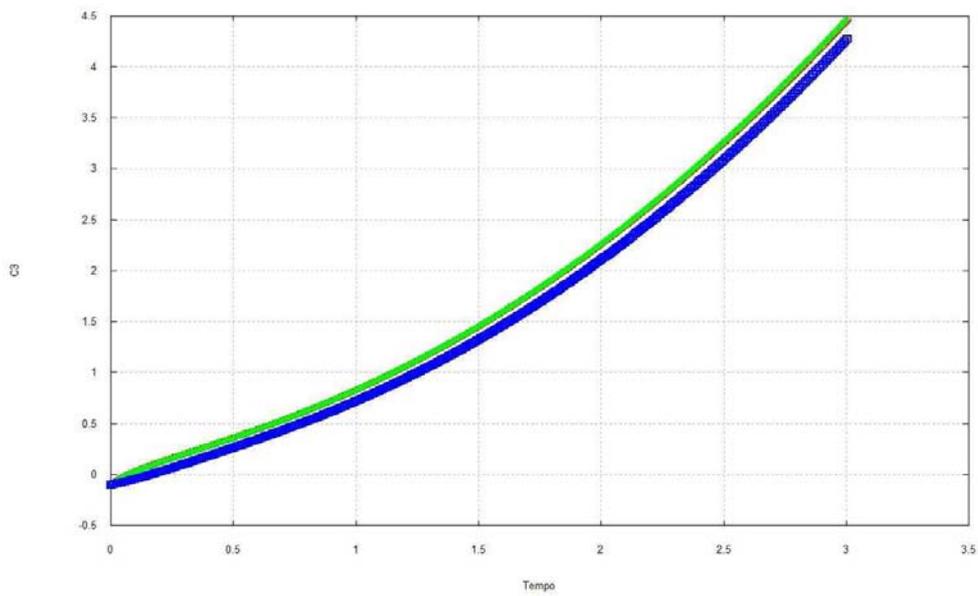


Figura 6.72  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 210^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

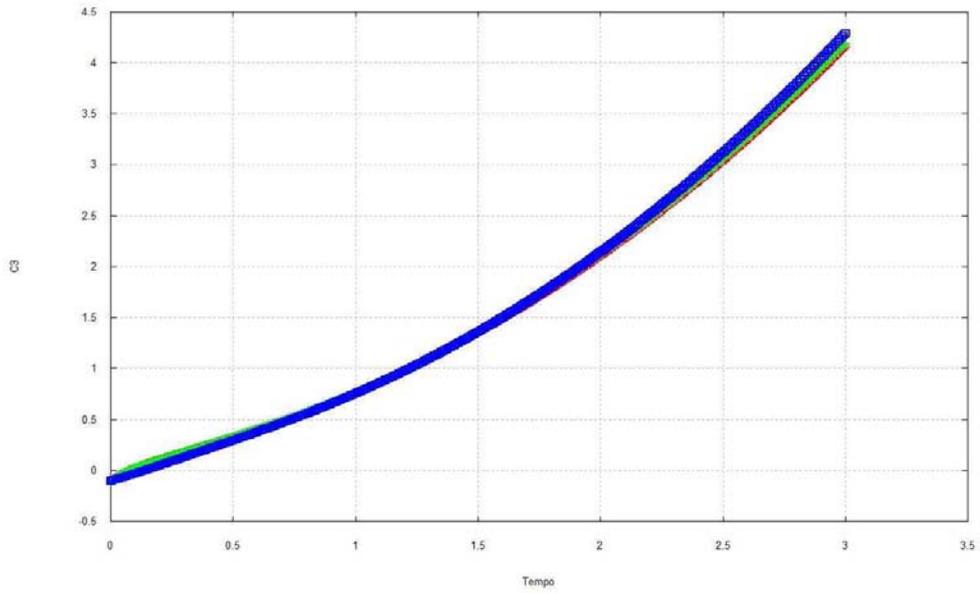


Figura 6.73  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 225^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

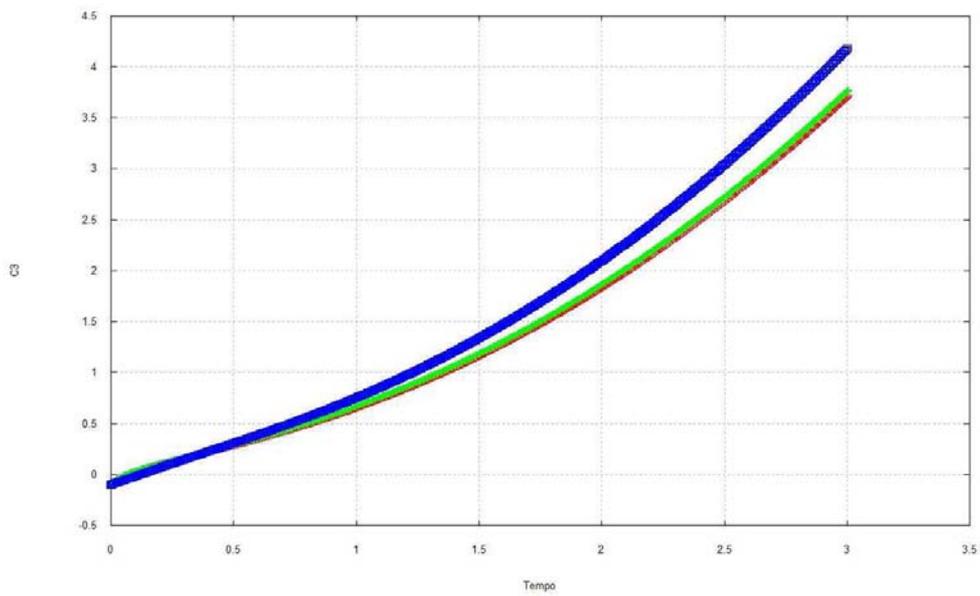


Figura 6.74  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 240^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

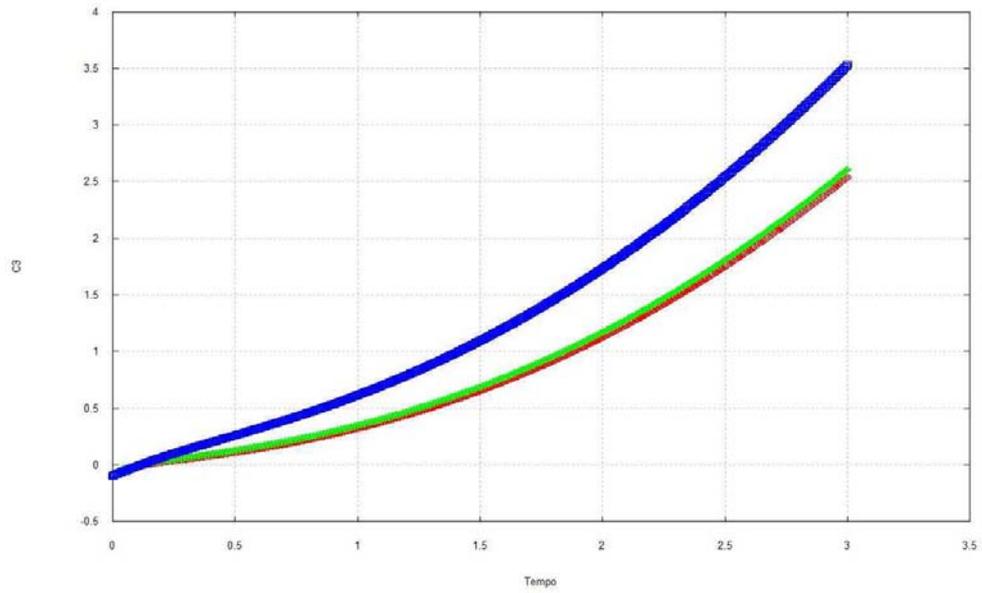


Figura 6.75  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 270^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

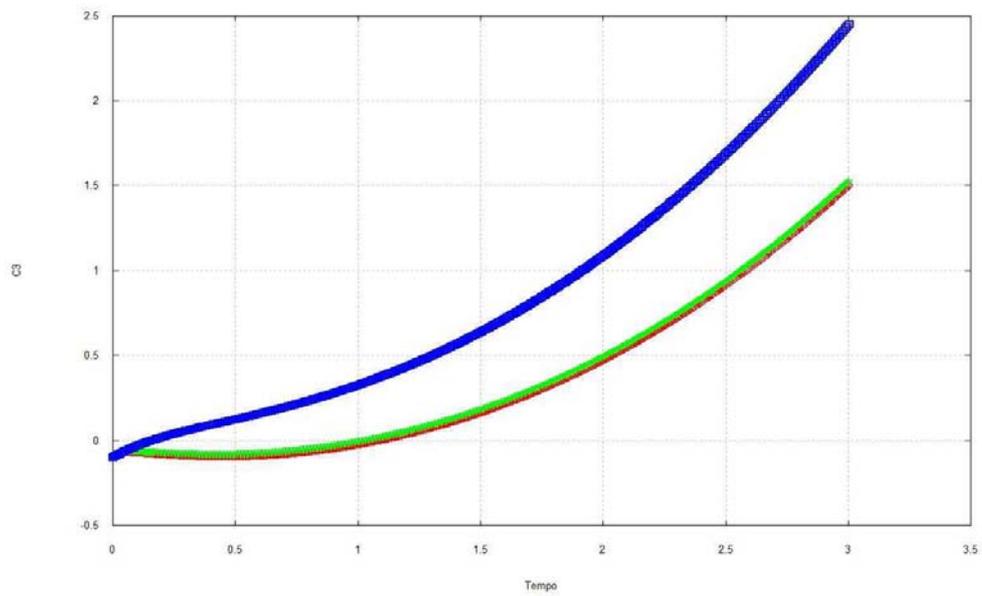


Figura 6.76  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $\alpha = 300^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

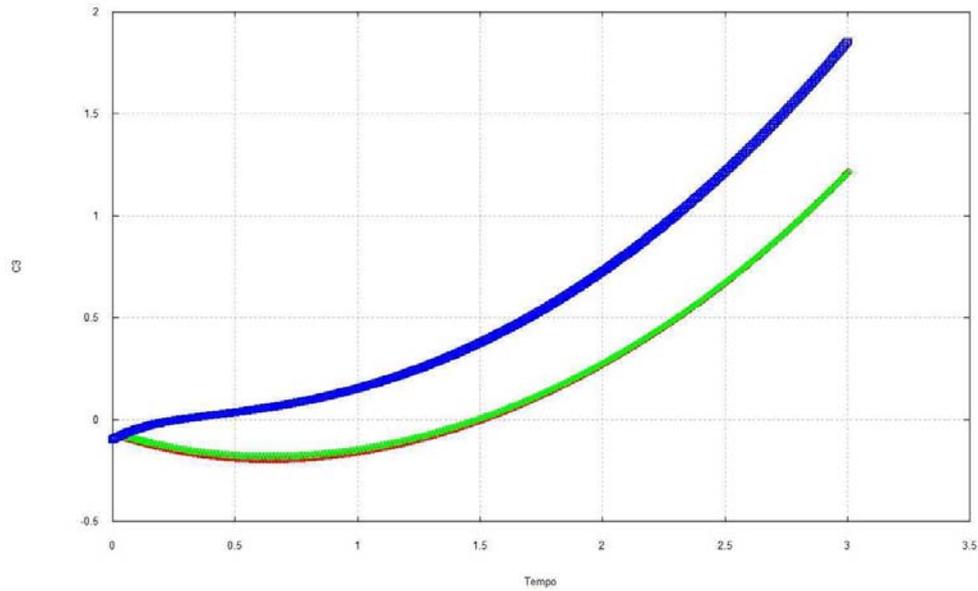


Figura 6.77  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 315^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

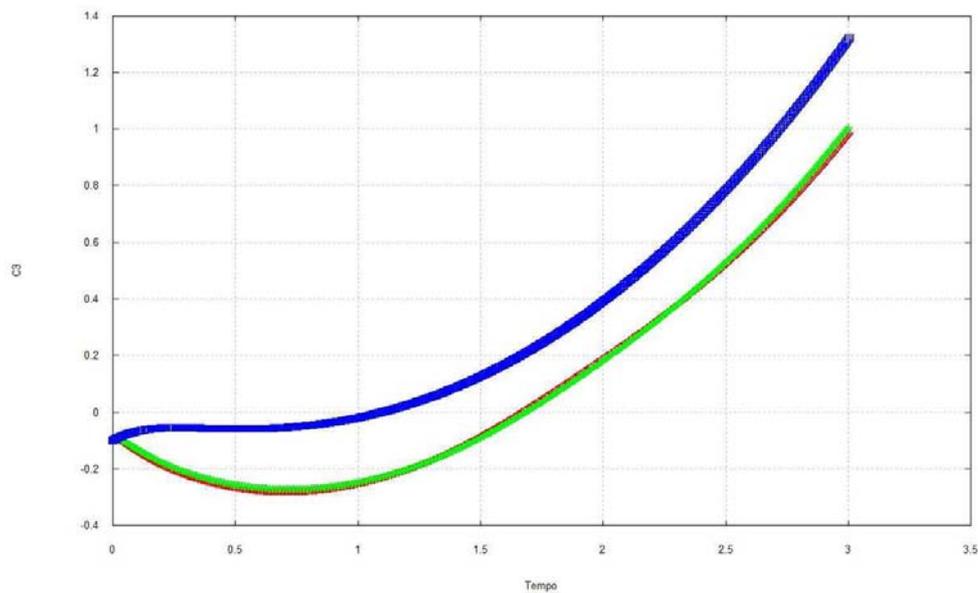


Figura 6.78  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 0^0$ ,  $\alpha = 330^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

Para o ângulo  $\alpha$  valendo  $45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0, 150^0, 180^0, 210^0, 225^0, 240^0, 270^0, 300^0, 315^0$  e  $330^0$  temos captura gravitacional para os três valores de  $r_p$ .

Para  $\alpha = 30^0$  temos colisão do veículo espacial com a Lua para  $r_p = 11738$  km.

Se  $\alpha = 0^0$  temos colisão do veículo espacial com a Lua para  $r_p = 1838$  km e  $2238$  km.

A posição do ângulo do Sol igual a  $0^{\circ}$  no movimento retrógrado não modifica muito o tempo de captura gravitacional comparado ao ângulo do Sol igual a  $0^{\circ}$  e a  $90^{\circ}$  no movimento direto, como pode ser observado nas tabelas.

Note também que quando o perilinua é 100 km ou 500 km não existe praticamente diferença no tempo de captura gravitacional. Veja que os gráficos em vermelho e verde quase sempre estão um sobre o outro.

Na Tabela 6.5, na primeira coluna temos o ângulo  $\alpha$ , na segunda, terceira e quarta coluna o tempo de captura gravitacional para  $r_p$  igual a 1838 km, 2238 km e 11738 km, respectivamente.

**Tabela 6.5 Movimento retrógrado  $\psi = 0^{\circ}$ .**

Ângulo $\alpha$	100 km	500 km	10000 km
$0^{\circ}$	Colisão	Colisão	2.06 dias
$30^{\circ}$	2.96 dias	2.96 dias	Colisão
$45^{\circ}$	1.32 dias	1.31 dias	2.65 dias
$60^{\circ}$	1.29 dias	1.28 dias	1.42 dias
$90^{\circ}$	0.97 dias	0.99 dias	1.07 dias
$120^{\circ}$	0.48 dias	0.51 dias	0.82 dias
$135^{\circ}$	0.30 dias	0.33 dias	0.66 dias
$150^{\circ}$	0.19 dias	0.21 dias	0.50 dias
$180^{\circ}$	0.10 dias	0.01 dias	0.27 dias
$210^{\circ}$	0.07 dias	0.07 dias	0.16 dias
$225^{\circ}$	0.06 dias	0.06 dias	0.13 dias
$240^{\circ}$	0.07 dias	0.07 dias	0.12 dias
$270^{\circ}$	0.13 dias	0.11 dias	0.11 dias
$300^{\circ}$	1.09 dias	1.02 dias	0.15 dias
$315^{\circ}$	1.51 dias	1.49 dias	0.27 dias
$330^{\circ}$	1.66 dias	1.68 dias	1.09 dias

### 6.3.2.2 Ângulo do Sol igual $90^{\circ}$

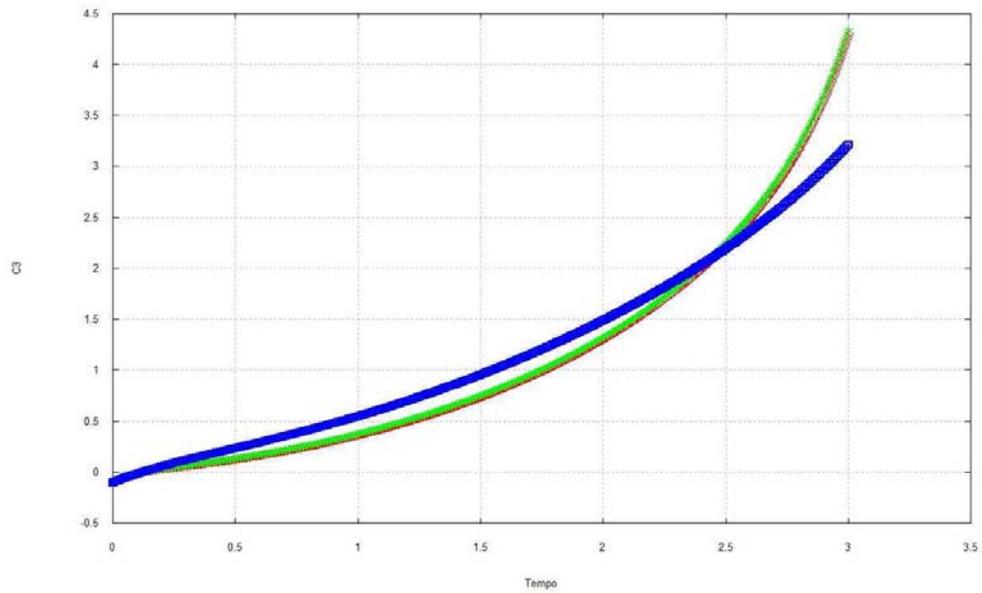


Figura 6.79  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^{\circ}$ ,  $\alpha = 0^{\circ}$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

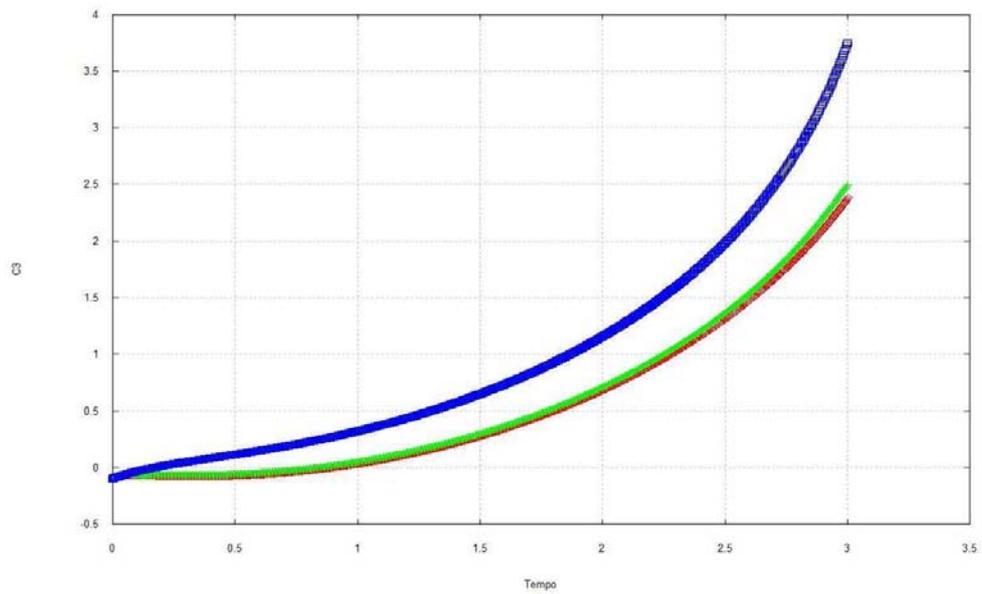


Figura 6.80  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^{\circ}$ ,  $\alpha = 30^{\circ}$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

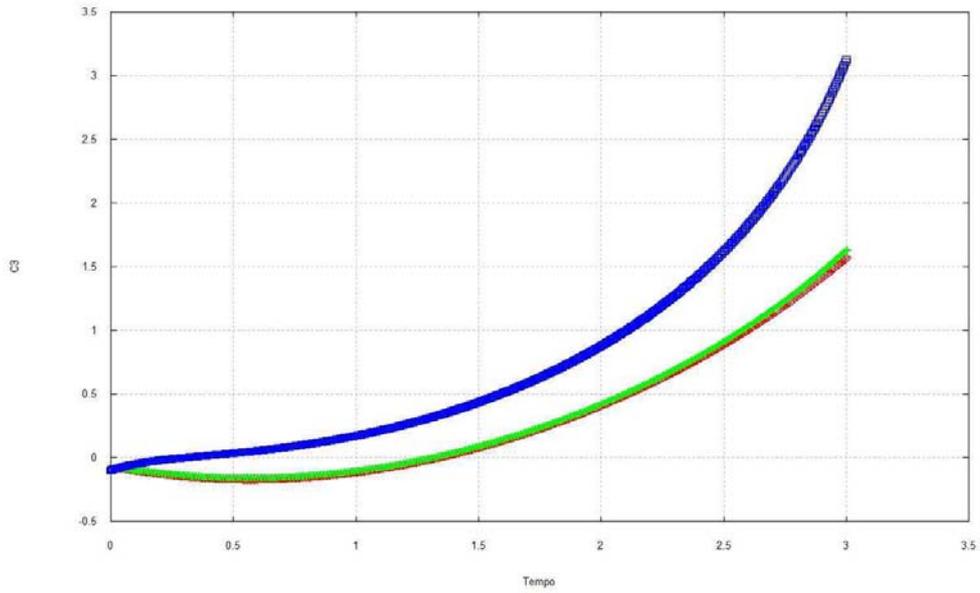


Figura 6.81  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 45^0$ .  $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.

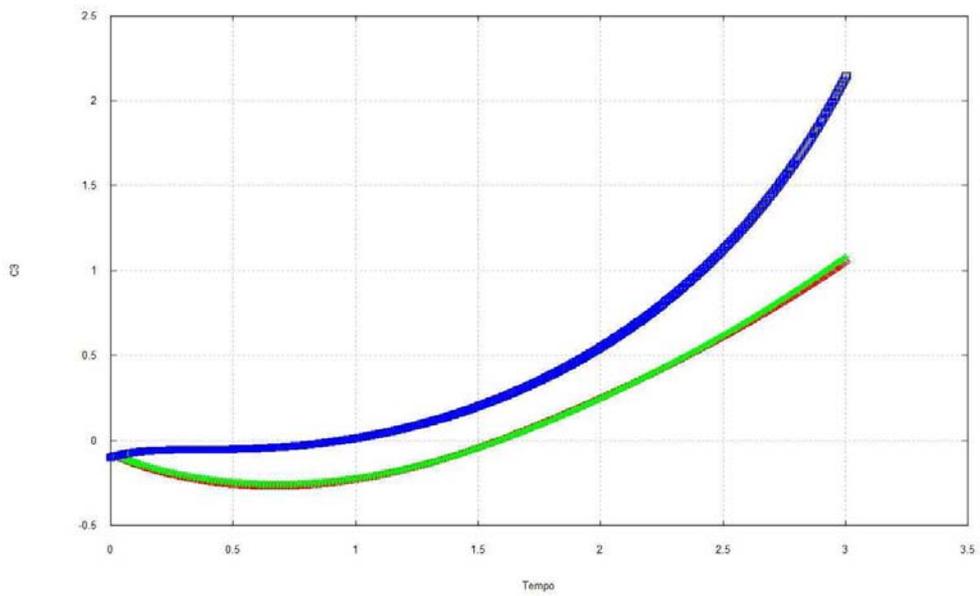


Figura 6.82  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 60^0$ .  $r_p = 1838$ , 2238 e 11738 km.

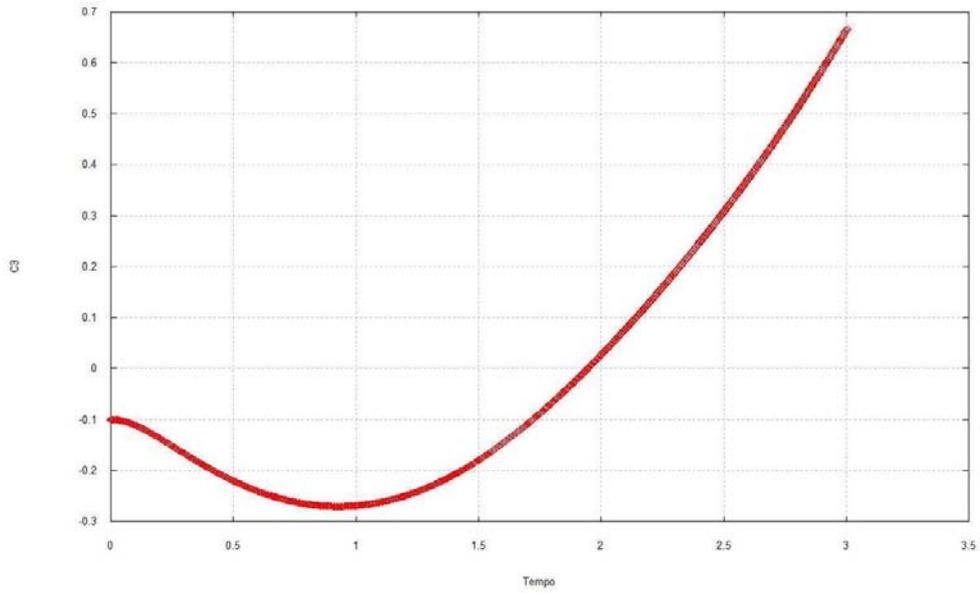


Figura 6.83  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ .  $r_p = 11738$  km.

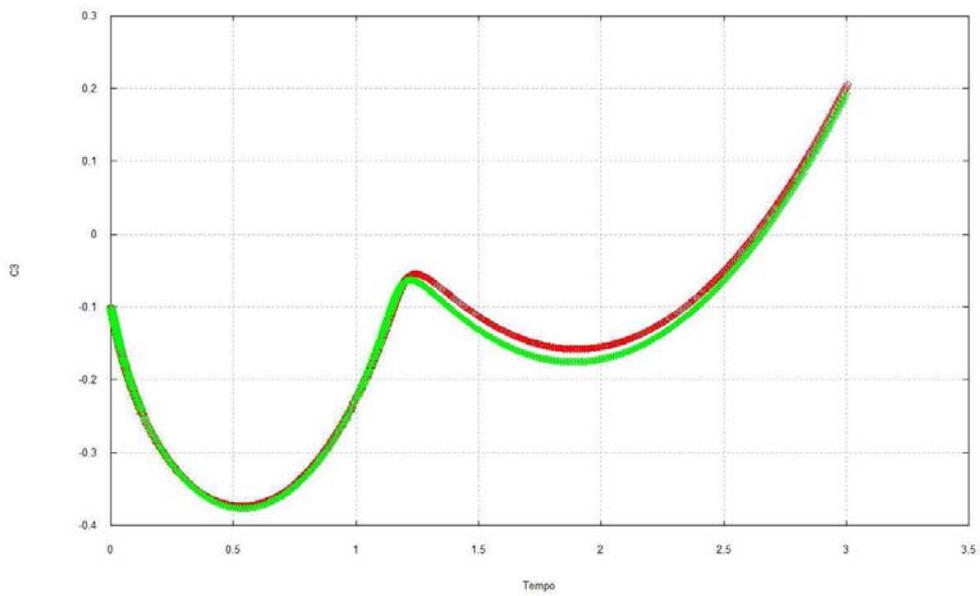


Figura 6.84  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 120^\circ$ .  $r_p = 1838$  e  $2238$  km.

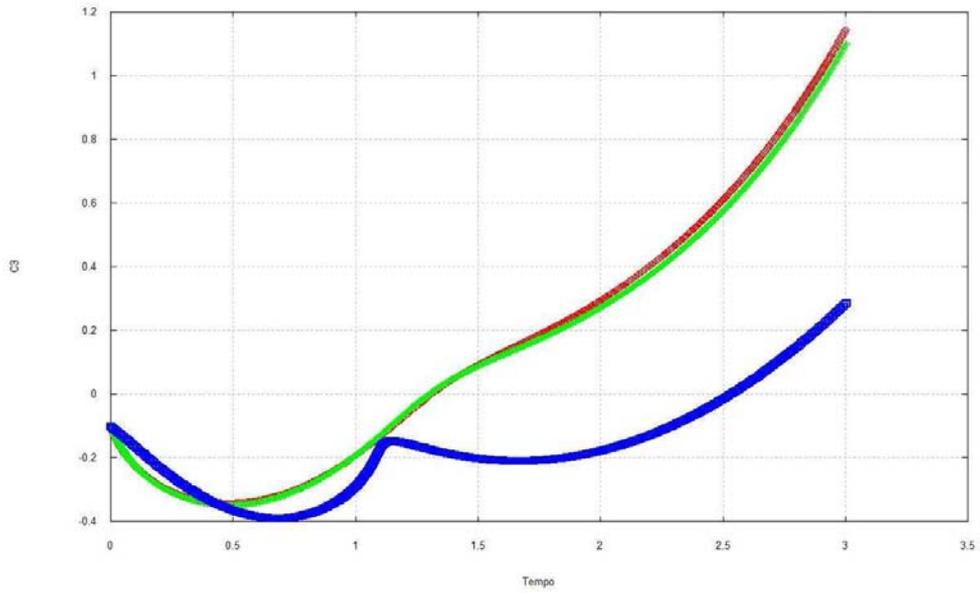


Figura 6.85  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 135^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

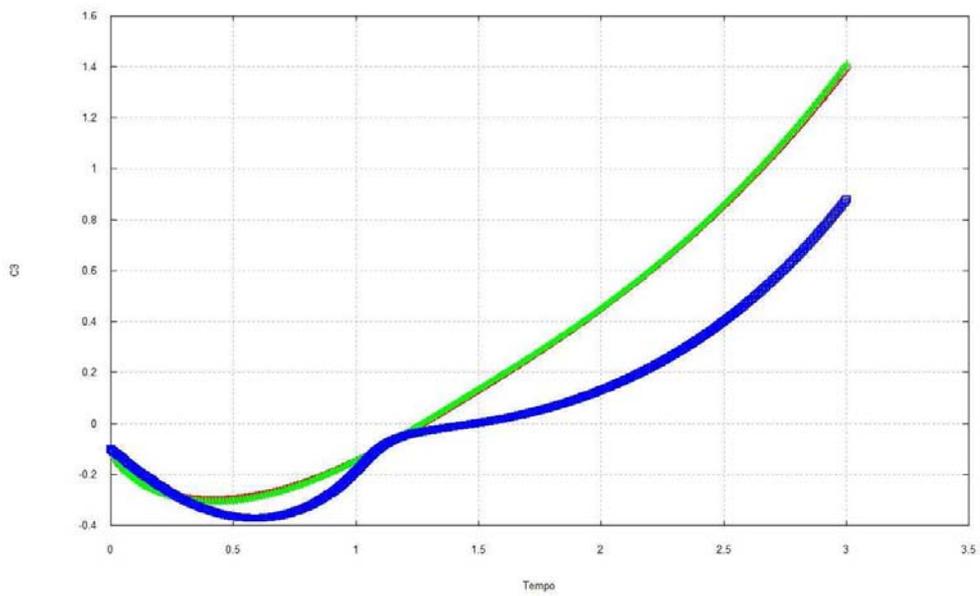


Figura 6.86  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 150^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

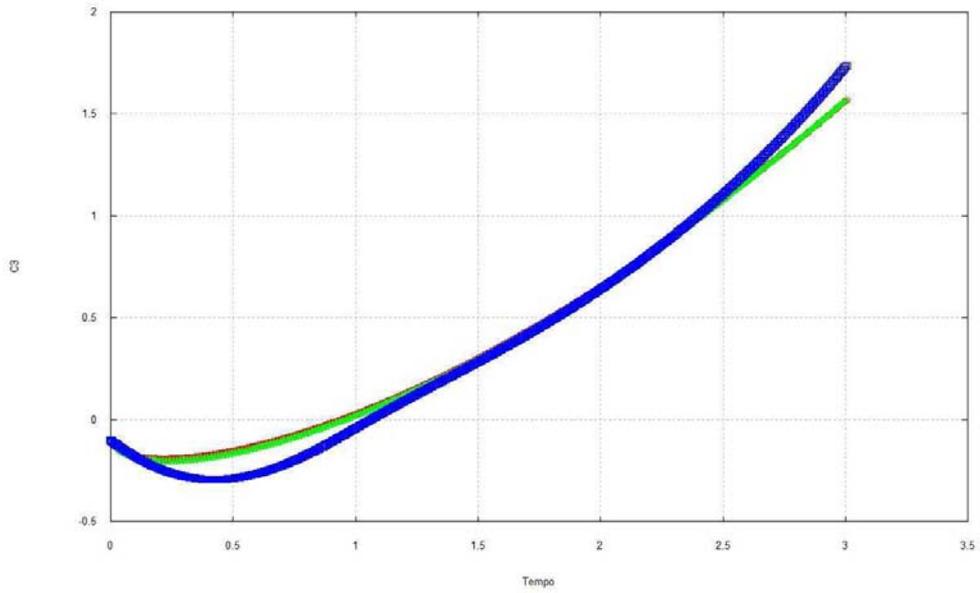


Figura 6.87  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 180^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

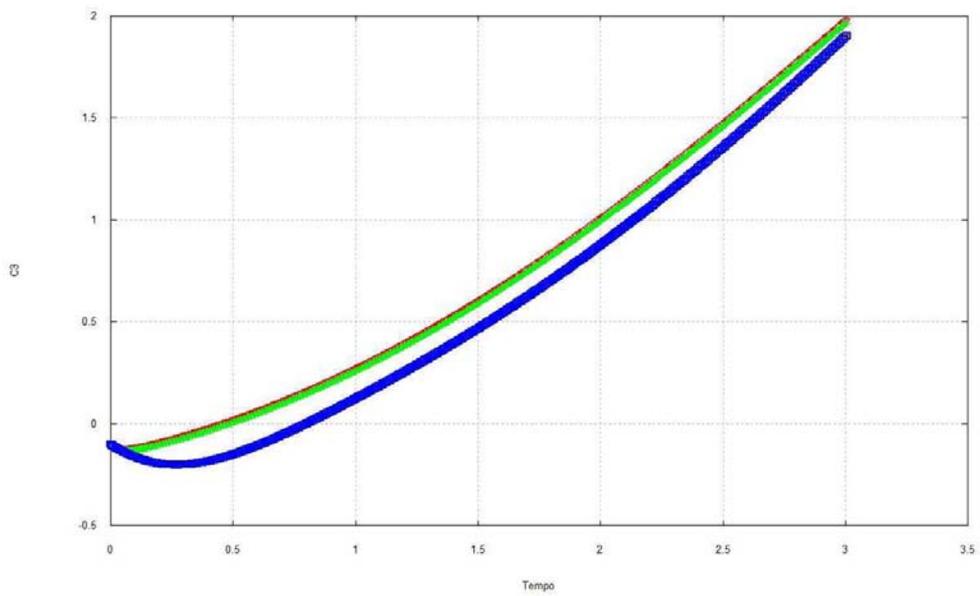


Figura 6.88  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 210^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

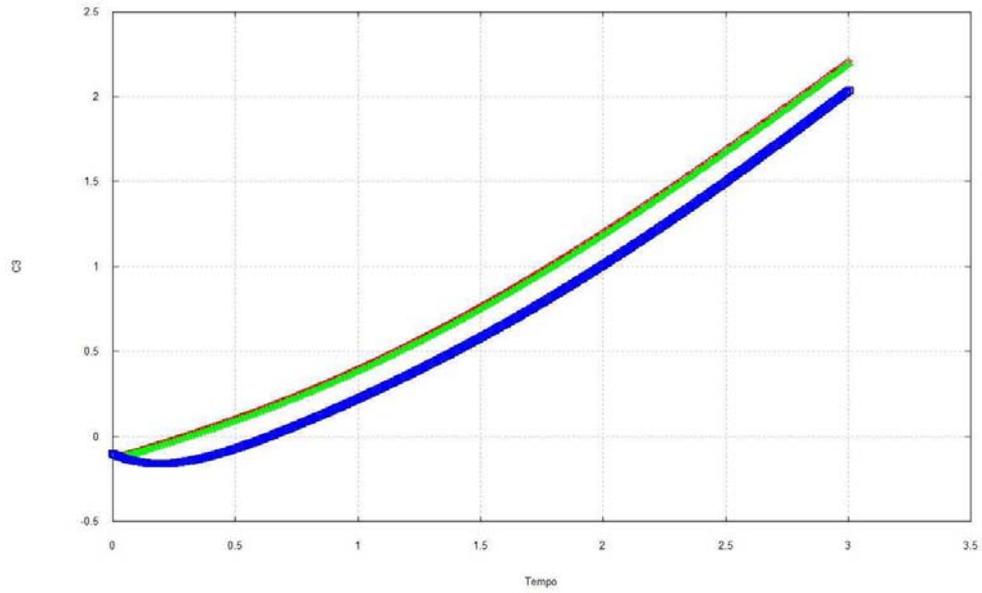


Figura 6.89  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 225^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

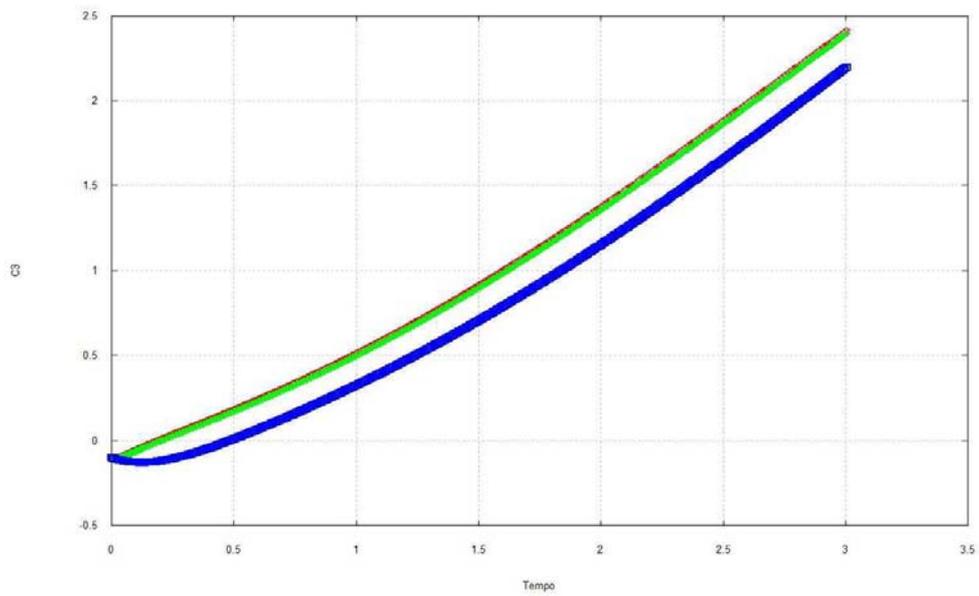


Figura 6.90  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 240^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

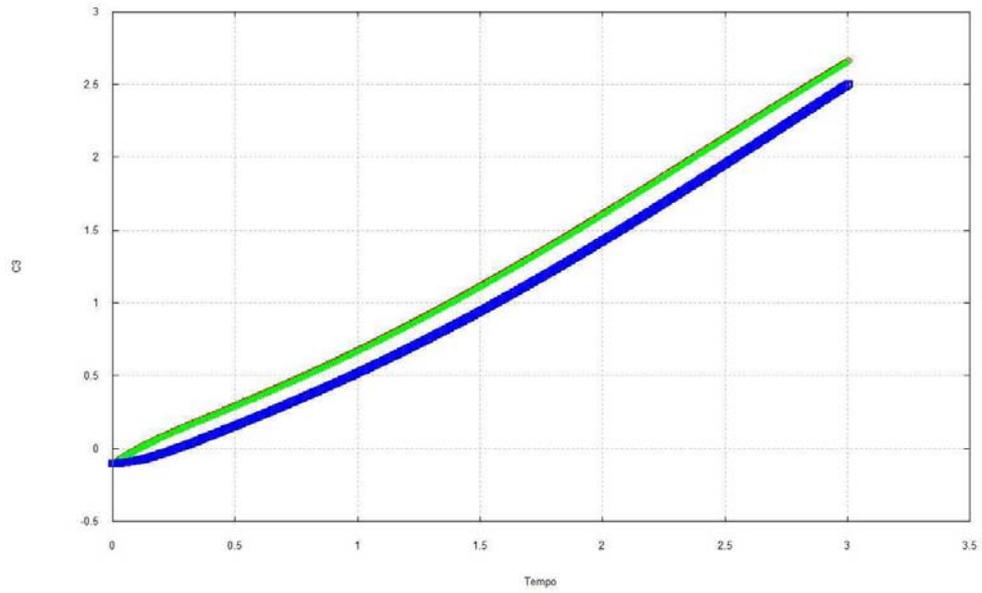


Figura 6.91  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 270^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

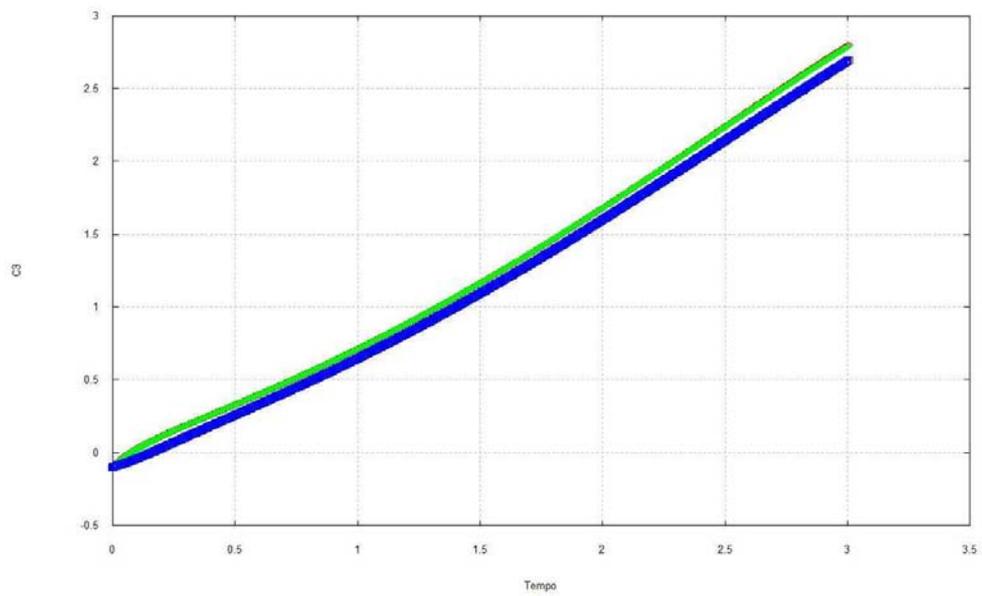


Figura 6.92  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^0$ ,  $\alpha = 300^0$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

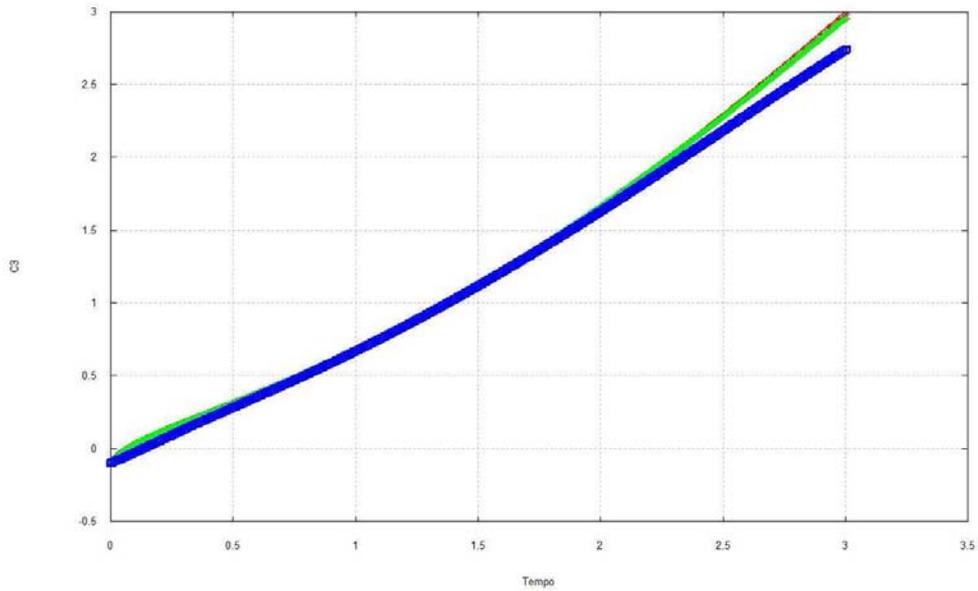


Figura 6.93  $C_3$  em função do tempo  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 315^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

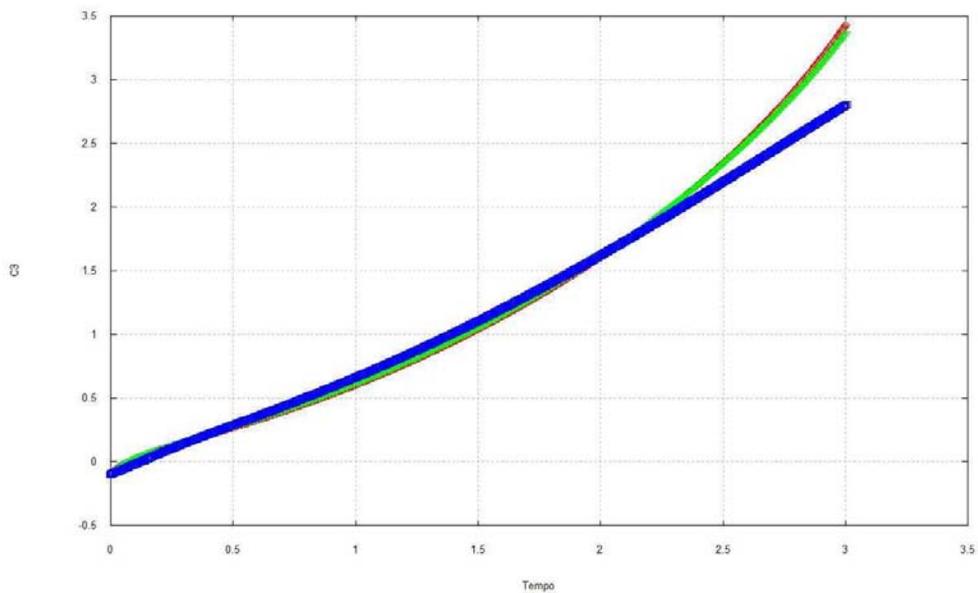


Figura 6.94.  $C_3$  em função do tempo.  $\psi_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha = 330^\circ$ .  $r_p = 1838, 2238$  e  $11738$  km.

Nas Figuras 6.80 a 6.94 acima  $\psi = 90^\circ$  e  $C_3 = -0.1$ .

Para o ângulo  $\alpha$  valendo  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ$  e  $330^\circ$  temos captura gravitacional para os três valores de  $r_p$ .

Quando temos  $\alpha = 120^\circ$  temos colisão do veículo espacial com a Lua para  $r_p = 11738$  km.

Quando temos  $\alpha = 90^\circ$  temos colisão do veículo espacial com a Lua para  $r_p = 1838 \text{ km}$  e  $2238 \text{ km}$ .

A posição do ângulo do Sol igual a  $90^\circ$  no movimento retrógrado não modifica muito o tempo de captura gravitacional comparado ao ângulo do Sol igual a  $0^\circ$  e a  $90^\circ$  no movimento direto e ao movimento retrógrado quando o ângulo do Sol é igual a  $0^\circ$ . Compare as tabelas.

Note também que quando a periluna é  $100 \text{ km}$  ou  $500 \text{ km}$  não existe praticamente diferença no tempo de captura gravitacional. Veja que os gráficos em vermelho e verde quase sempre estão um sobre o outro.

Na Tabela 6.6, na primeira coluna temos o ângulo  $\alpha$ , na segunda, terceira e quarta coluna o tempo de captura gravitacional para  $r_p$  igual a  $1838 \text{ km}$ ,  $2238 \text{ km}$  e  $11738 \text{ km}$  respectivamente.

**Tabela 6.6 Movimento retrógrado  $\psi = 90^\circ$ .**

Ângulo $\alpha$	$100 \text{ km}$	$500 \text{ km}$	$10000 \text{ km}$
$0^\circ$	0.13 dias	0.11 dias	0.12 dias
$30^\circ$	0.90 dias	0.83 dias	0.17 dias
$45^\circ$	1.34 dias	1.31 dias	0.29 dias
$60^\circ$	1.58 dias	1.59 dias	0.94 dias
$90^\circ$	Colisão	Colisão	1.94 dias
$120^\circ$	2.63 dias	2.65 dias	Colisão
$135^\circ$	1.31 dias	1.30 dias	2.53 dias
$150^\circ$	1.28 dias	1.27 dias	1.48 dias
$180^\circ$	0.94 dias	0.96 dias	1.06 dias
$210^\circ$	0.46 dias	0.49 dias	0.79 dias
$225^\circ$	0.29 dias	0.31 dias	0.63 dias
$240^\circ$	0.19 dias	0.20 dias	0.48 dias
$270^\circ$	0.10 dias	0.10 dias	0.26 dias
$300^\circ$	0.07 dias	0.07 dias	0.15 dias
$315^\circ$	0.06 dias	0.07 dias	0.13 dias
$330^\circ$	0.07 dias	0.07 dias	0.12 dias

#### 6.4 Conclusão.

Pelos dados fornecidos nas tabelas e figuras, podemos notar que a presença do Sol acelera o tempo de captura, isto é, no problema bi-circular de quatro corpos o veículo espacial é capturado mais rapidamente que no problema de três corpos restrito circular.

Quanto ao fato do movimento ser direto ou retrógrado, não temos uma diferença de tempo grande para a captura gravitacional em ambos os modelos matemáticos.

Um fato bastante relevante é que a variação da distância do veículo espacial à Lua de 500 km ou 100 km não modifica significativamente o tempo de captura gravitacional para os dois modelos matemáticos que trabalhamos. Testamos vários valores entre 100 km e 500 km para a distância entre o veículo espacial e a Lua e observamos que esses valores não fornecem mudanças significativas no tempo de captura gravitacional.

Este é um fato curioso que carece de alguma explicação mais teórica, relevando que o fenômeno de captura gravitacional não é bem compreendido.

## 7 ANÁLISE DO TEMPO DE CAPTURA PARA $r_p$ E $C_3$ FIXOS

### 7.1. Introdução

Neste Capítulo será feita a análise do tempo de captura gravitacional tendo valores de  $r_p$  e  $C_3$  iniciais fixos. O parâmetro que variamos é o ângulo  $\alpha$  e o ângulo do Sol.

Definimos como tempo de captura gravitacional, o tempo gasto entre o momento da entrada do veículo espacial na esfera de influência gravitacional até o momento que o veículo espacial chega na posição escolhida para o periluna.

Na primeira parte deste Capítulo é feito um conjunto de gráficos que mostram o ângulo  $\alpha$  em função do tempo. O modelo matemático desta primeira parte é o problema de três corpos restrito circular. Na segunda parte deste Capítulo estudamos a análise do tempo de captura gravitacional para o modelo bi-circular de quatro corpos.

Na última parte deste Capítulo é feita uma comparação entre os problemas de três corpos restrito circular e bi-circular de quatro corpos, que permite observar a diferença de tempo de captura gravitacional mínimo para ambos os modelos matemáticos.

Em todos os gráficos deste capítulo o ângulo  $\alpha$  está em graus e a unidade de tempo está em dias (o tempo está em valor absoluto). O objetivo deste capítulo é encontrar condições iniciais que forneçam o tempo mínimo para captura gravitacional, tanto para órbitas diretas como para retrógradas nos dois modelos matemáticos estudados.

### 7.2 Resultados numéricos do problema de três corpos restrito circular

Em todos os gráficos abaixo o eixo horizontal fornece o tempo mínimo de captura gravitacional e o eixo vertical fornece o ângulo em que isto acontece. O ângulo  $\alpha$  varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , com passo de  $1^\circ$ .

O primeiro conjunto de gráficos é para o movimento direto o segundo para o movimento retrógrado. Isto está feito nas secções 7.2.1 e 7.2.2, respectivamente.

Nas Secções 7.2.1 e 7.2.2 temos os conjunto de gráficos para o valor fixo de  $r_p = 1838 \text{ km}$ . Na Secção 7.2.3 testamos outros valores para a distância inicial entre o veículo espacial e a Lua.

### 7.2.1 Movimento direto e distância inicial Lua veículo espacial 100 km

Na Figura 7.1 a linha vermelha corresponde  $C_3$  inicial igual a  $-0.01$ , em linha verde igual a  $-0.02$  e em linha azul temos  $-0.03$ .

Observamos que existem duas regiões favoráveis para captura gravitacional, isto é, temos duas regiões onde encontramos o tempo mínimo para captura gravitacional para cada um dos três gráficos da Figura 7.1. Também é fácil notar que temos uma região, quando  $C_3 = -0.03$ , onde o tempo de captura gravitacional aumenta, chegando a oito dias.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de dois dias nos três gráficos da Figura 7.1 e listamos abaixo os valores.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.01$  o tempo de captura gravitacional é 2.058 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 333^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.02$  o tempo de captura gravitacional é 2.089 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 329^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.03$  o tempo de captura gravitacional é 2.144 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 334^\circ$ .

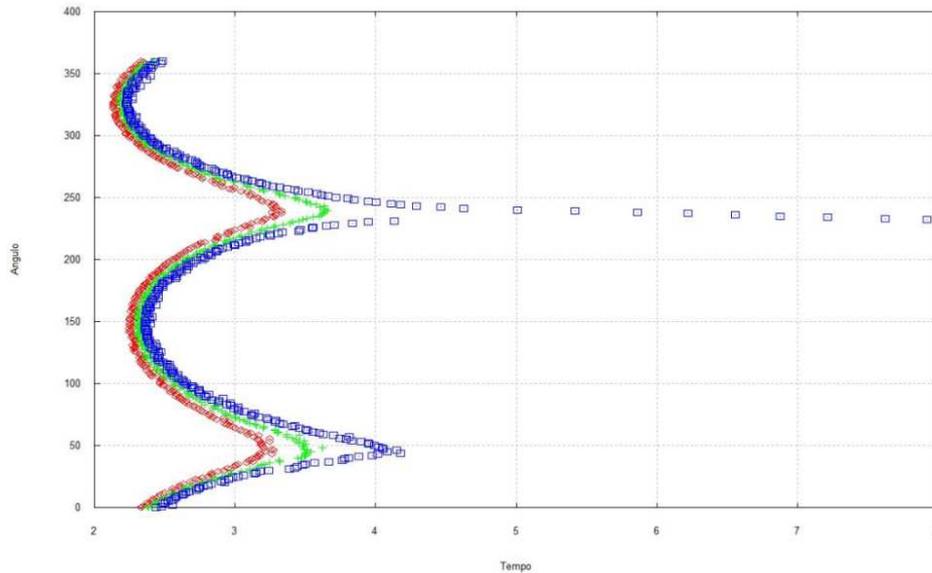


Figura 7.1 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.01, -0.02$  e  $-0.03$

Na Figura 7.2 mostramos em linha vermelha  $C_3$  inicial igual a  $-0.04$ , em linha verde igual a  $-0.05$  e em linha azul temos  $-0.06$ .

Observamos na Figura 7.2 que existem duas regiões favoráveis para captura gravitacional, isto é, temos duas regiões onde encontramos o tempo mínimo para captura gravitacional em cada um dos três gráficos. Também é fácil notar que temos duas regiões em que o tempo de captura gravitacional aumenta chegando a mais de vinte dias.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de dois dias nos três gráficos da Figura 7.2.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.04$  o tempo de captura gravitacional é 2.234 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 332^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.05$  o tempo de captura gravitacional é 2.242 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 325^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.06$  o tempo de captura gravitacional é 2.298 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 329^\circ$ .

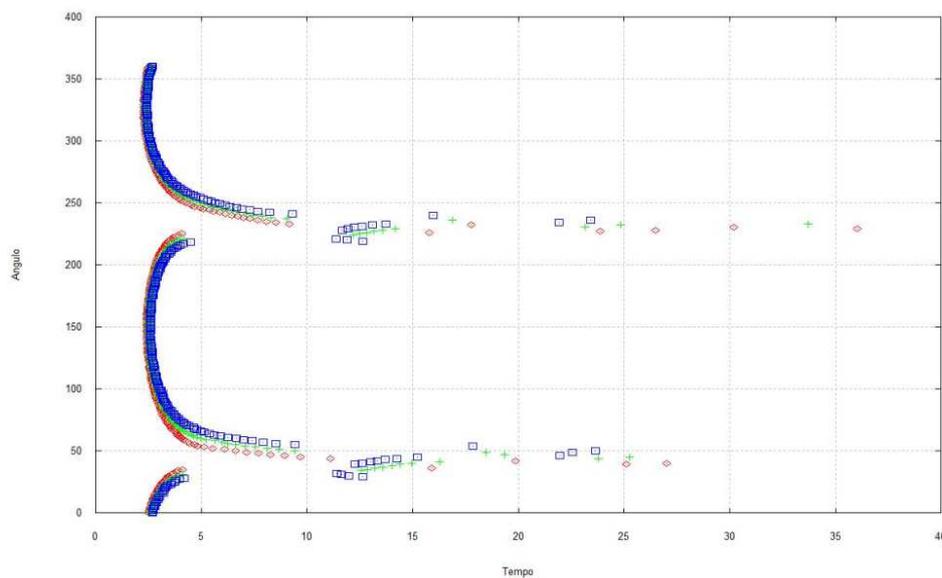


Figura 7.2 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.04, -0.05$  e  $-0.06$

Na Figura 7.3 em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.07$ , em linha verde igual a  $-0.08$  e em linha azul temos  $-0.09$ .

Observamos que existem duas regiões favoráveis para captura gravitacional, isto é, temos duas regiões onde encontramos o tempo mínimo para captura gravitacional em cada um dos

três gráficos da Figura 7.3. Também é fácil notar que temos regiões em que o tempo de captura gravitacional aumenta chegando a mais de quarenta dias.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de dois dias e meio nos três gráficos da Figura 7.3.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.07$  o tempo de captura gravitacional é 2.394 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 320^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.08$  o tempo de captura gravitacional é 2.445 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 331^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.09$  o tempo de captura gravitacional é 2.564 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 326^\circ$ .

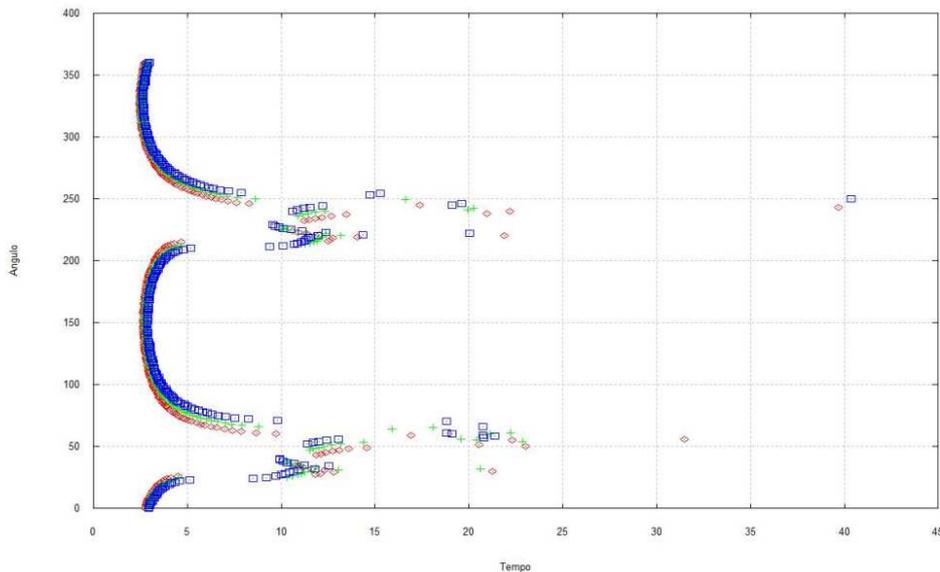


Figura 7.3 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.07, -0.08$  e  $-0.09$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.10$ , em linha verde igual a  $-0.11$  e em linha azul temos  $-0.12$ . Isto na figura 7.4.

É fácil notar que temos regiões em que o tempo de captura gravitacional aumenta chegando próximo a vinte dias.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de dois dias e meio nos três gráficos da Figura 7.4.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.07$  o tempo de captura gravitacional é 2.664 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 334^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.11$  o tempo de captura gravitacional é 2.760 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 334^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.12$  o tempo de captura gravitacional é 2.872 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 332^\circ$ .

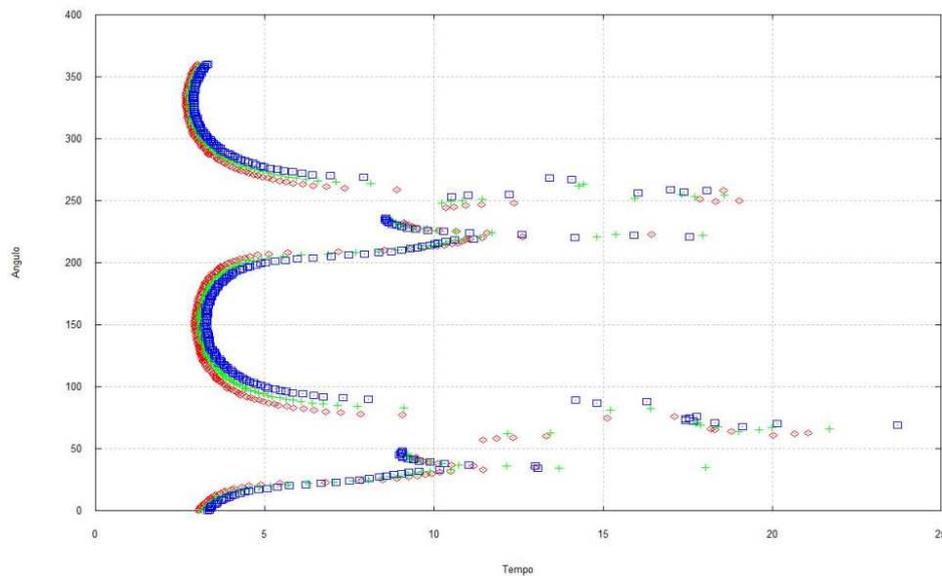


Figura 7.4 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.10, -0.11$  e  $-0.12$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.13$ , em linha verde igual a  $-0.14$  e em linha azul temos  $-0.15$ . Conforme pode ser visto na Figura 7.5.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de três dias nos três gráficos da Figura 7.5.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.13$  o tempo de captura gravitacional é 2.962 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 330^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.14$  o tempo de captura gravitacional é 3.163 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 337^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.15$  o tempo de captura gravitacional é 3.351 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 335^\circ$ .

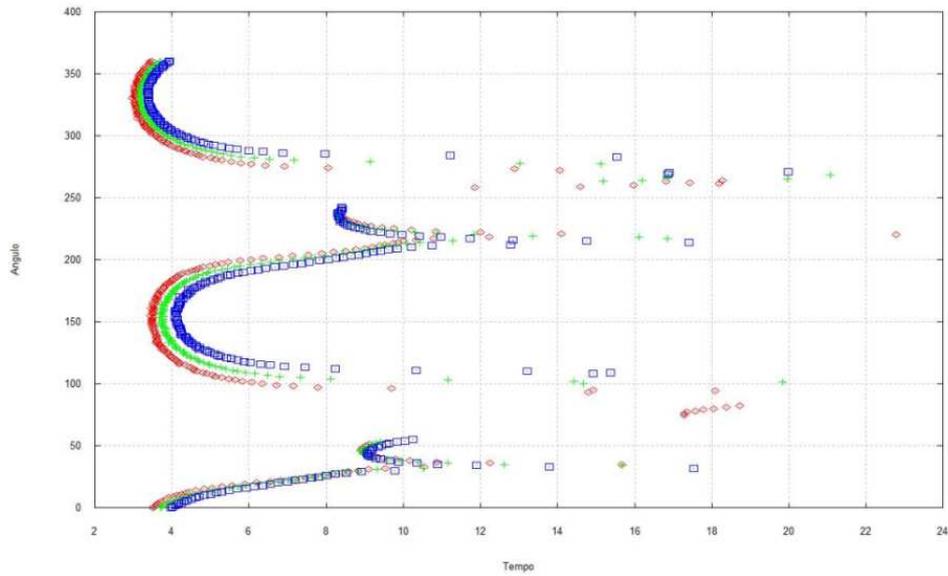


Figura 7.5 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.13, -0.14$  e  $-0.15$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.16$ , em linha verde igual a  $-0.17$  e em linha azul temos  $-0.18$ . Isto na Figura 7.6.

Na Figura 7.6 já encontramos algumas regiões onde não acontecem captura. Este fato pode ser explicado por existirem órbitas de colisão do veículo espacial com a Lua ou por termos órbitas limitadas (vide capítulo 3).

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de quatro dias nos três gráficos da Figura 7.6.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.15$  o tempo de captura gravitacional é 3.351 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 335^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.16$  o tempo de captura gravitacional é 3.551 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 337^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.17$  o tempo de captura gravitacional é 3.880 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 335^\circ$ .

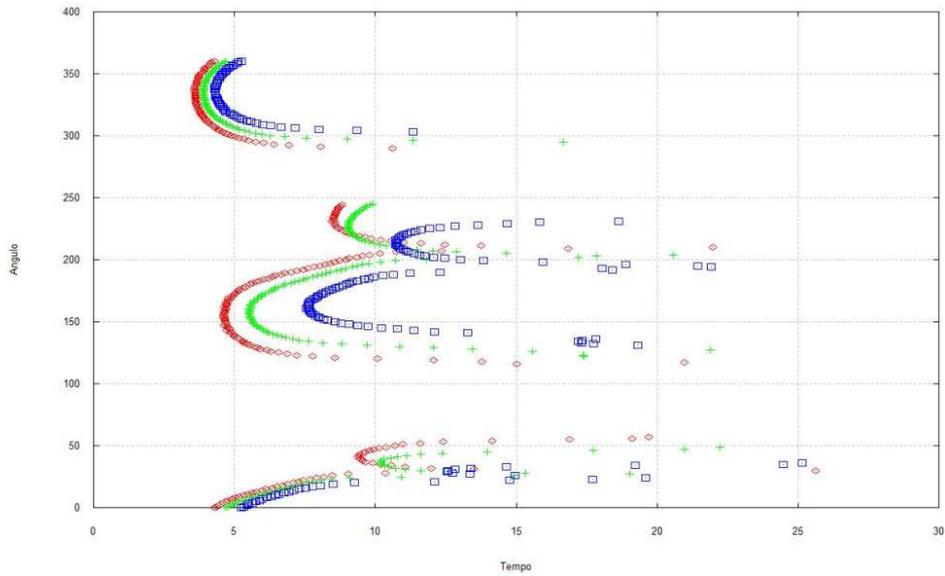


Figura 7.6 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.16, -0.17$  e  $-0.18$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.19$ , em linha verde igual a  $-0.20$  e em linha azul temos  $-0.21$ . Isto na Figura 7.7.

Na Figura 7.7 já encontramos uma grande número de regiões onde não acontecem captura gravitacional.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.19$  o tempo de captura gravitacional é 4.915 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 340^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.20$  o tempo de captura gravitacional é 6.096 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 341^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.21$  o tempo de captura gravitacional é 14.457 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 345^\circ$ .

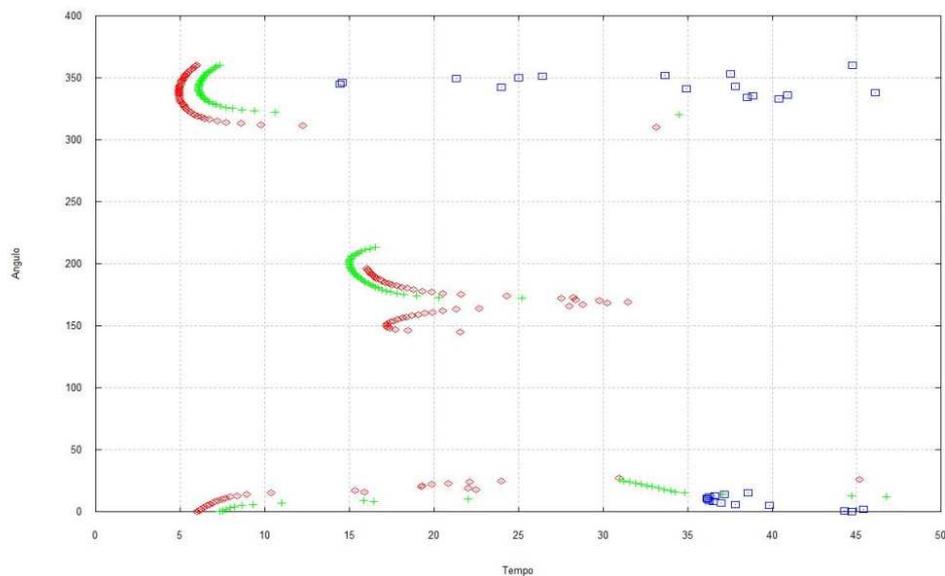


Figura 7.7 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.19, -0.20$  e  $-0.21$

A Tabela 7.1 fornece um resumo de todos os resultados numéricos encontrados nesta secção. Fornece o tempo de captura gravitacional mínimo e o ângulo correspondente.

**Tabela 7.1. Movimento direto**

$C_3$	Ângulo $\alpha$	Tempo de captura em dias
-0.01	$333^0$	2.058
-0.02	$329^0$	2.089
-0.03	$334^0$	2.144
-0.04	$332^0$	2.234
-0.05	$325^0$	2.242
-0.06	$329^0$	2.298
-0.07	$320^0$	2.394
-0.08	$331^0$	2.445
-0.09	$326^0$	2.564
-0.10	$334^0$	2.664
-0.11	$334^0$	2.760
-0.12	$332^0$	2.872
-0.13	$330^0$	2.962
-0.14	$337^0$	3.163
-0.15	$335^0$	3.51
-0.16	$337^0$	3.551
-0.17	$335^0$	3.880
-0.18	$339^0$	4.299
-0.19	$340^0$	4.915
-0.20	$341^0$	6.096
-0.21	$345^0$	14.457

Na Tabela 7.1, na primeira coluna informamos  $C_3$  inicial, na segunda coluna o ângulo em que encontramos o tempo mínimo de captura gravitacional e na terceira coluna o tempo mínimo de captura gravitacional.

### 7.2.2 Movimento retrógrado distância inicial Lua veículo espacial 100 km

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.01$ , em linha verde igual a  $-0.02$  e em linha azul temos  $-0.03$ . Isto na Figura 7.7.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de dois dias nos três gráficos da Figura 7.7.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.01$  o tempo de captura gravitacional é 2.076 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 354^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.02$  o tempo de captura gravitacional é 2.103 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 9^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.03$  o tempo de captura gravitacional é 2.160 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 8^\circ$ .

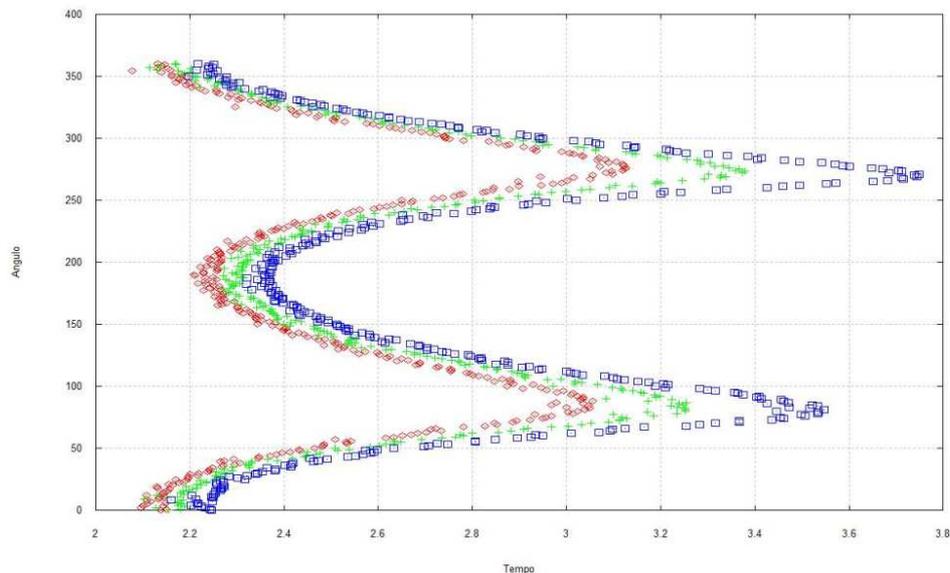


Figura 7.7 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.01, -0.02$  e  $-0.03$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.04$ , em linha verde igual a  $-0.05$  e em linha azul temos  $-0.06$ . Isto na Figura 7.8.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de dois dias nos três gráficos da Figura 7.8.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.04$  o tempo de captura gravitacional é 2.206 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 354^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.05$  o tempo de captura gravitacional é 2.321 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 5^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.06$  o tempo de captura gravitacional é 2.382 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 357^\circ$ .

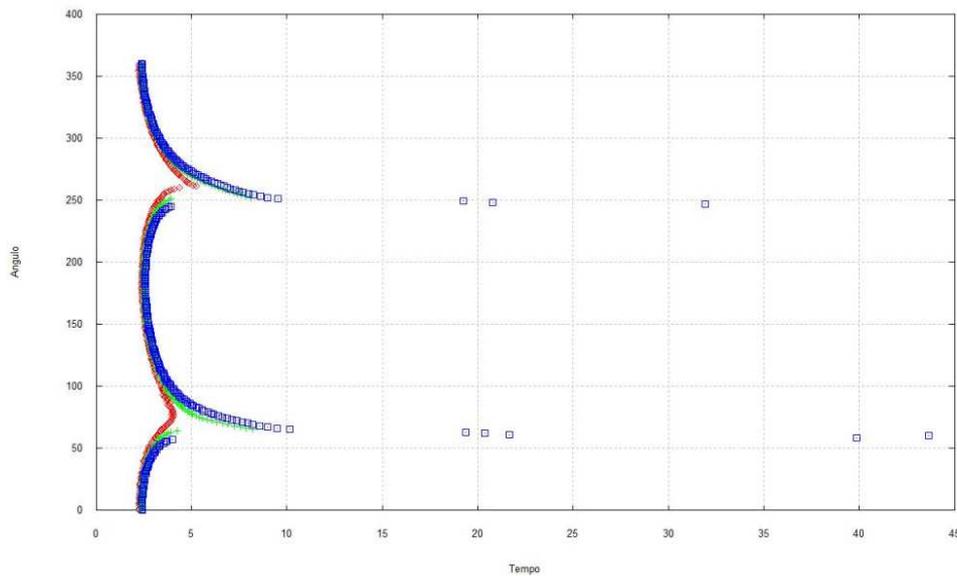


Figura 7.8 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.04, -0.05$  e  $-0.06$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.07$ , em linha verde igual a  $-0.08$  e em linha azul temos  $-0.09$ . Isto na Figura 7.9.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de dois dias e meio nos três gráficos da Figura 7.9.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.07$  o tempo de captura gravitacional é 2.454 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 358^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.08$  o tempo de captura gravitacional é 2.528 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 359^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.09$  o tempo de captura gravitacional é 2.622 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 4^\circ$ .

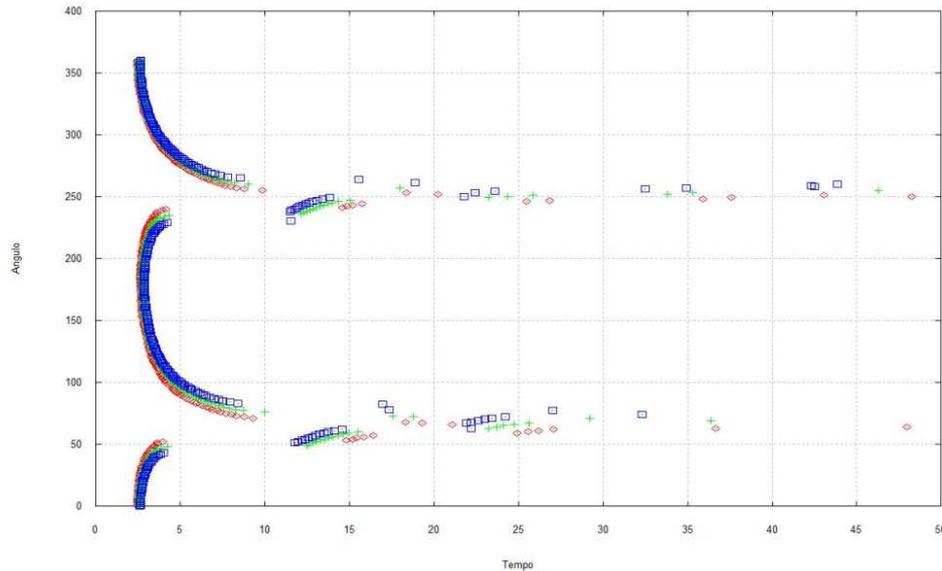


Figura 7.9 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.07, -0.08$  e  $-0.09$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.10$ , em linha verde igual a  $-0.11$  e em linha azul temos  $-0.12$ . Isto na figura 7.10.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de três nos três gráficos da Figura 7.10. Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.10$  o tempo de captura gravitacional é 2.718 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 353^\circ$ . Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.11$  o tempo de captura gravitacional é 2.836 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 359^\circ$ . Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.12$  o tempo de captura gravitacional é 2.971 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 346^\circ$ .

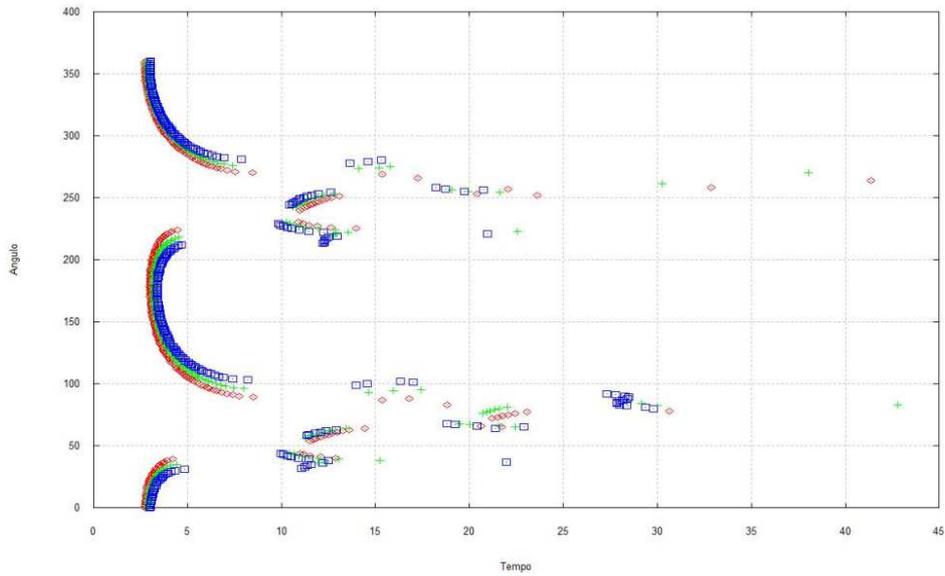


Figura 7.11 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.10, -0.11$  e  $-0.12$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.13$ , em linha verde igual a  $-0.14$  e em linha azul temos  $-0.15$ . Isto na Figura 7.12.

O tempo mínimo para captura gravitacional é próximo de três dias e meio nos três gráficos da Figura 7.12.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.13$  o tempo de captura gravitacional é 3.137 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 356^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.14$  o tempo de captura gravitacional é 3.322 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 351^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.15$  o tempo de captura gravitacional é 3.594 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 345^\circ$ .

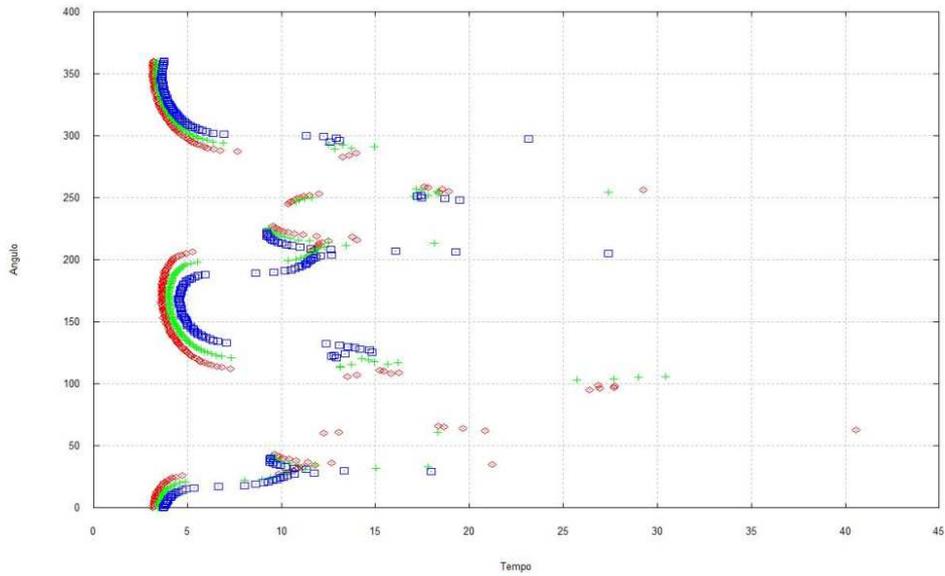


Figura 7.12 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.13, -0.14$  e  $-0.15$

Em linha vermelha temos  $C_3$  inicial igual a  $-0.16$ , em linha verde igual a  $-0.17$  e em linha azul temos  $-0.18$ . Isto na Figura 7.13.

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.16$  o tempo de captura gravitacional é 4.010 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 347^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.17$  o tempo de captura gravitacional é 4.643 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 345^\circ$ .

Para  $C_3$  inicial igual a  $-0.18$  o tempo de captura gravitacional é 7.328 dias e é encontrado para o ângulo  $\alpha = 342^\circ$ .

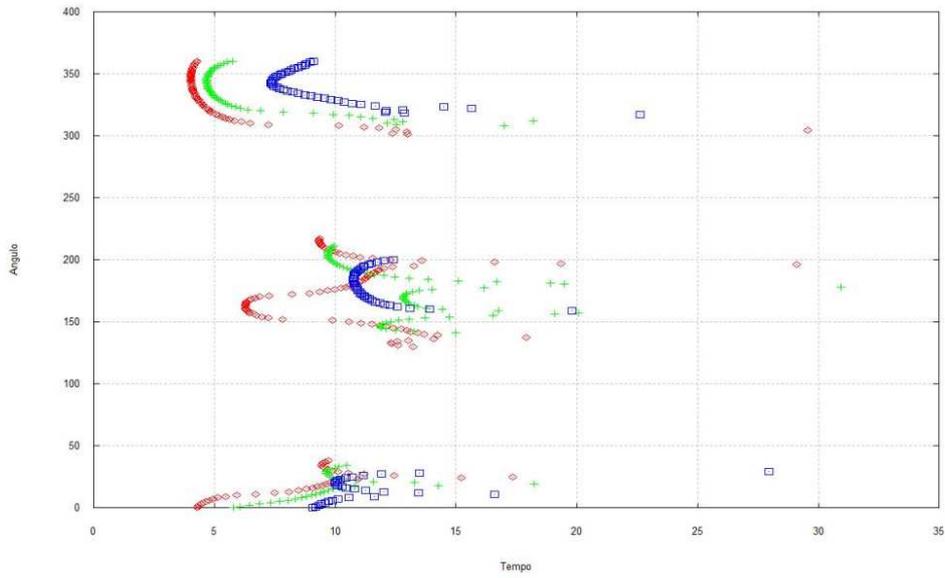


Figura 7.13 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.16, -0.17$  e  $-0.18$

No último gráfico desta secção temos  $C_3 = -0.19$  em linha vermelha, o tempo mínimo de captura encontrado é 10.646, sendo o ângulo  $\alpha = 8^\circ$ .

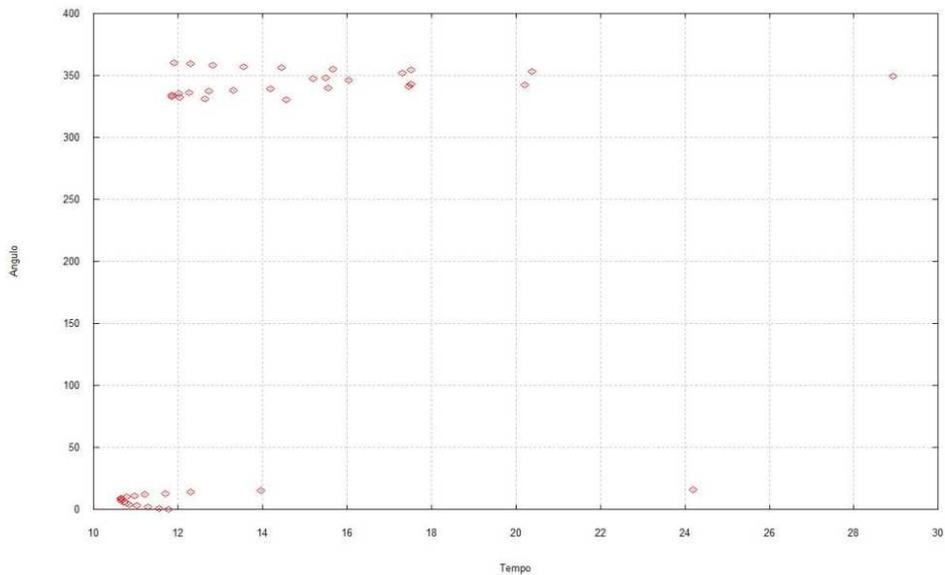


Figura 7.14 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.19$ .

Observamos que nas três últimas figuras temos uma grande região onde não existe captura gravitacional. Na Figura 7.14 são bem grandes as regiões sem captura gravitacional.

A Tabela 7.2 fornece um resumo de todos os resultados numéricos encontrados nesta secção. Fornece o tempo de captura gravitacional mínimo e o ângulo correspondente.

Na Tabela 7.2 na primeira coluna informamos  $C_3$  inicial, na segunda coluna o ângulo em que encontramos o tempo mínimo de captura gravitacional e na terceira coluna o tempo mínimo de captura gravitacional.

**Tabela 7.2. Movimento retrógrado.**

$C_3$ inicial.	Ângulo $\alpha$	Tempo de captura em dias
-0.01	$354^0$	2.076
-0.02	$9^0$	2.103
-0.03	$8^0$	2.160
-0.04	$354^0$	2.206
-0.05	$5^0$	2.321
-0.06	$357^0$	2.382
-0.07	$358^0$	2.454
-0.08	$359^0$	2.528
-0.09	$4^0$	2.622
-0.10	$353^0$	2.718
-0.11	$359^0$	2.836
-0.12	$346^0$	2.971
-0.13	$356^0$	3.137
-0.14	$351^0$	3.322
-0.15	$345^0$	3.594
-0.16	$347^0$	4.010
-0.17	$340^0$	4.643
-0.18	$342^0$	7.328
-0.19	$8^0$	10.646

### 7.2.3. Distância inicial Lua veículo espacial diferente de 100 km

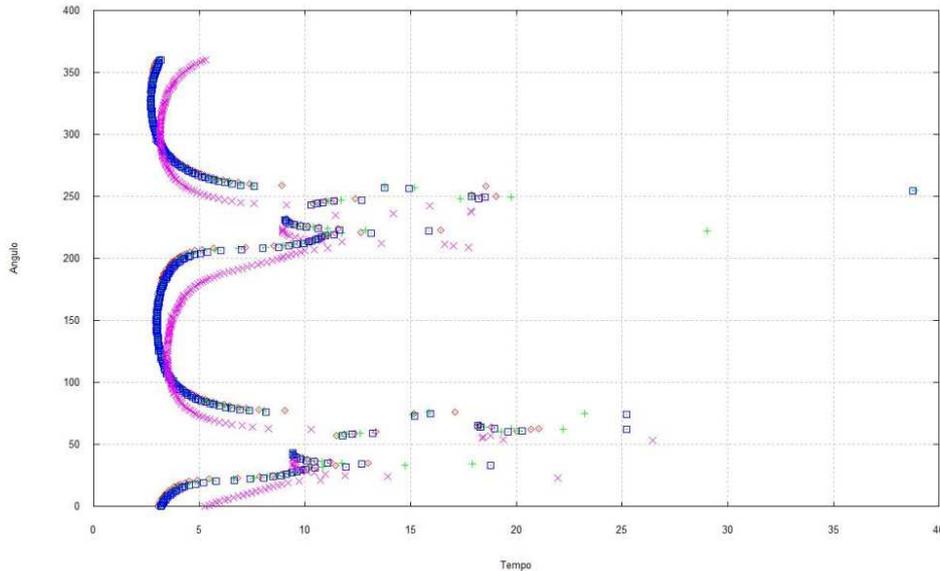


Figura 7.15 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.10$ . Movimento direto.

Na Figura 7.15, em vermelho a distância Lua veículo espacial é igual a 100 km, em verde 500 km, em azul 1000 km e em rosa 10000 km. O movimento é direto para os gráficos da Figura 7.15.

O tempo mínimo de captura gravitacional quando a distância é 100 km é de 2.664 dias encontrado quando  $\alpha = 334^\circ$ .

O tempo mínimo de captura gravitacional quando a distância é 500 km é de 2.667 dias encontrado quando  $\alpha = 331^\circ$ .

O tempo mínimo de captura gravitacional quando a distância é 1000 km é de 2.697 dias encontrado quando  $\alpha = 322^\circ$ .

O tempo mínimo de captura gravitacional quando a distância é 10000 km é de 3.135 dias encontrado quando  $\alpha = 295^\circ$ .

Observamos que os gráficos em vermelho, verde e azul estão praticamente sobre postos, em rosa é o único gráfico dos quatro da Figura 7.15 que vemos alguma diferença. Estes resultados são coerentes com os do capítulo anterior.

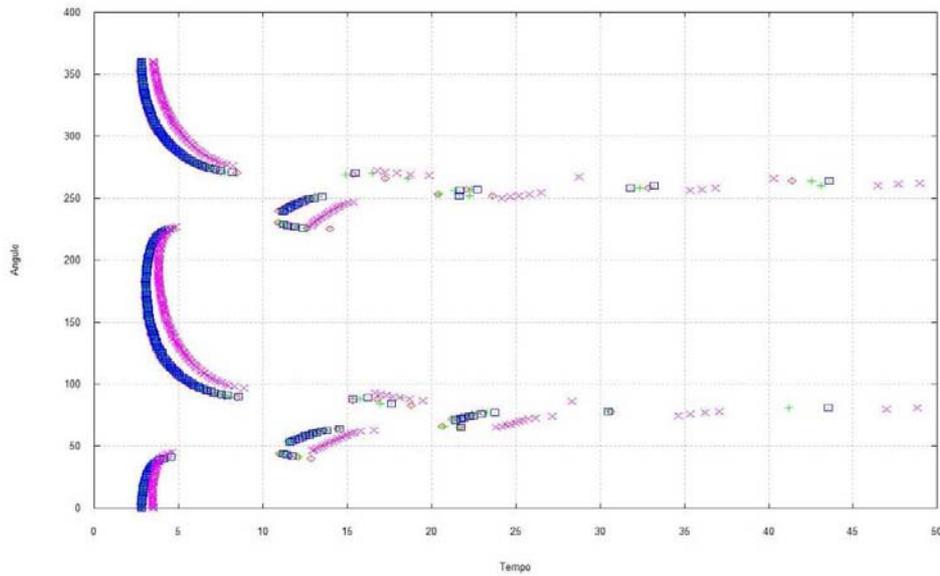


Figura 7.16 Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.10$ . Movimento retrógrado.

Na Figura 7.16, em vermelho distância Lua veículo espacial igual a 100 km, em verde 500 km, em azul 1000 km e em rosa 10000 km. O movimento é retrógrado para os gráficos da Figura 7.16.

O tempo mínimo de captura gravitacional quando a distância é 100 km é de 2.718 dias encontrado quando  $\alpha = 353^\circ$ .

O tempo mínimo de captura gravitacional quando a distância é 500 km é de 2.761 dias encontrado quando  $\alpha = 355^\circ$ .

O tempo mínimo de captura gravitacional quando a distância é 1000 km é de 2.785 dias encontrado quando  $\alpha = 4^\circ$ .

O tempo mínimo de captura gravitacional quando a distância é 10000 km é de 3.392 dias encontrado quando  $\alpha = 15^\circ$ .

Observamos que os gráficos em vermelho, verde e azul estão praticamente sobre postos, em rosa é o único gráfico dos quatro da Figura 7.16 que vemos uma diferença. Estes resultados estão de acordo com o capítulo anterior.

### 7.3. Resultados numéricos problema bi-circular de quatro corpos

Em todos os gráficos abaixo o eixo horizontal fornece o tempo mínimo de captura gravitacional e o eixo vertical fornece o ângulo em que isto acontece. O ângulo  $\alpha$  varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , com passo de  $1^\circ$ .

O primeiro conjunto de gráficos é para o movimento direto o segundo para o movimento retrógrado, e são discutidos nas Secções 7.3.1 e 7.3.2 respectivamente.

Nas Secções 7.3.1 e 7.3.2 temos os conjunto de gráficos para o valor fixo de  $r_p = 1838 \text{ km}$ .

#### 7.3.1 Movimento direto distância inicial Lua veículo espacial 100 km

##### 7.3.1.1 Nos gráficos abaixo temos $\psi = 0^\circ$ .

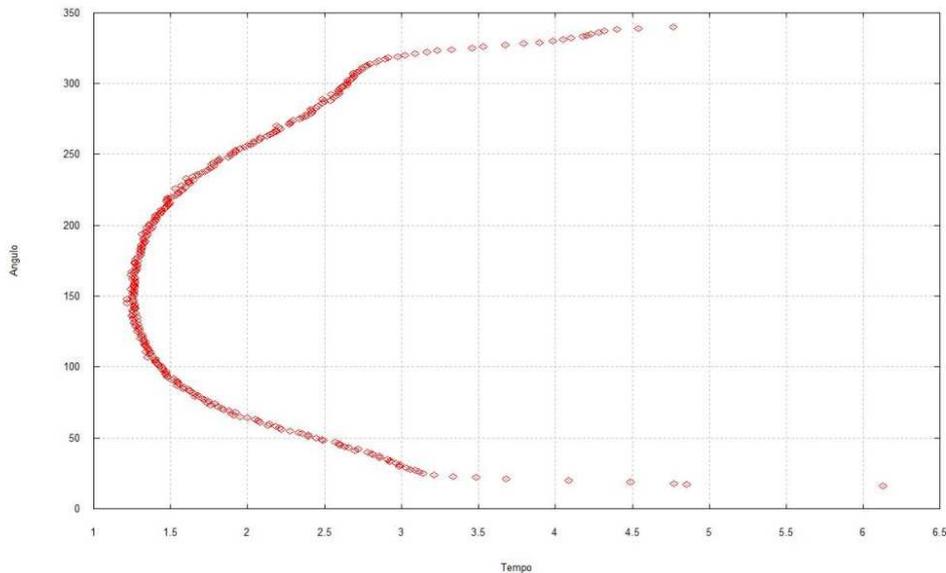


Figura 7.17. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.1$  e  $\psi = 0^\circ$

Na Figura 7.17 temos  $C_3 = -0.1$  e  $\psi = 0^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.213 dias e é encontrado quando  $\alpha = 145^\circ$ .

Temos como regiões de colisão  $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$  e  $341^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ .

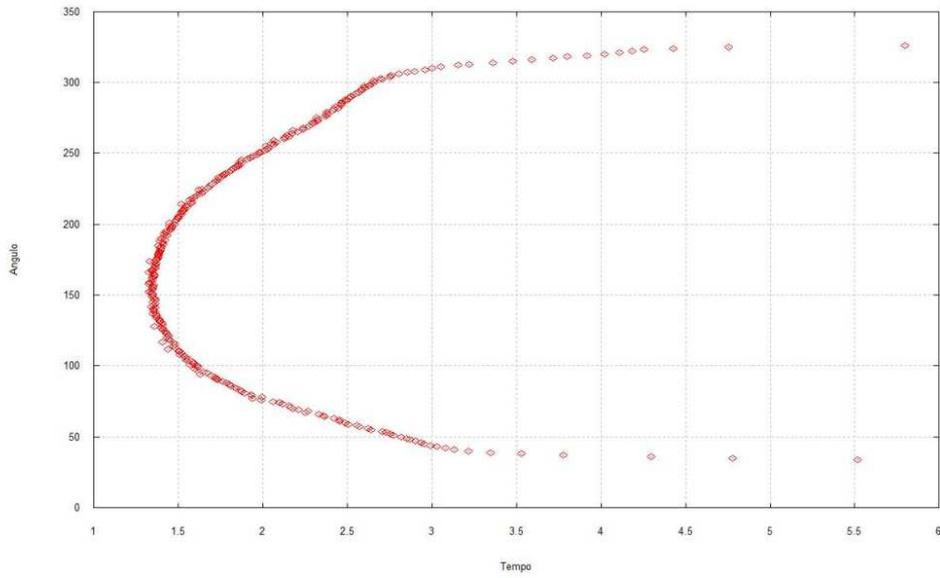


Figura 7.18. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.2$  e  $\psi = 0^0$ .

Na Figura 7.18 temos  $C_3 = -0.2$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.326 dias e é encontrado quando  $\alpha = 166^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 33^0$  e  $327^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

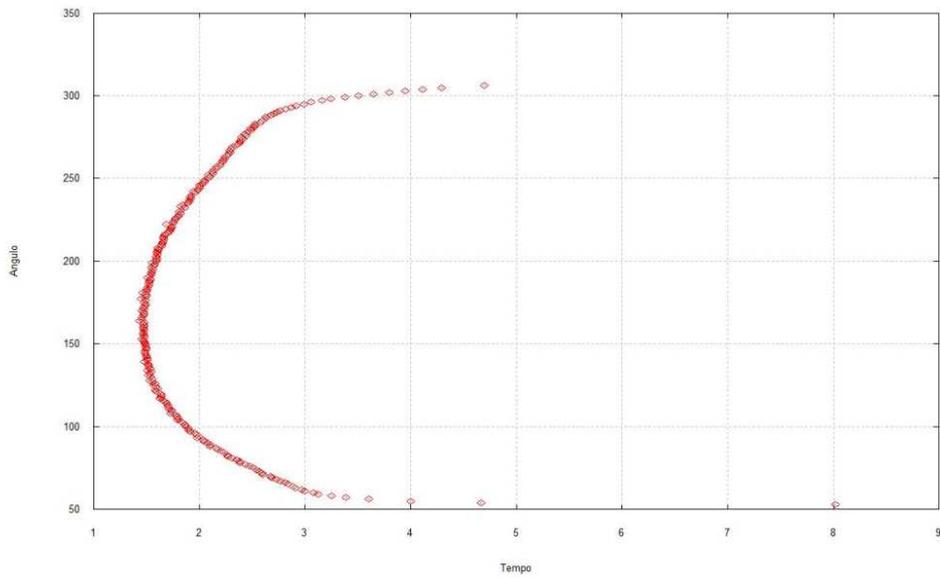


Figura 7.19. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.3$  e  $\psi = 0^0$ .

Na Figura 7.19 temos  $C_3 = -0.3$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.434 dias e é encontrado quando  $\alpha = 164^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 52^0$  e  $307^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

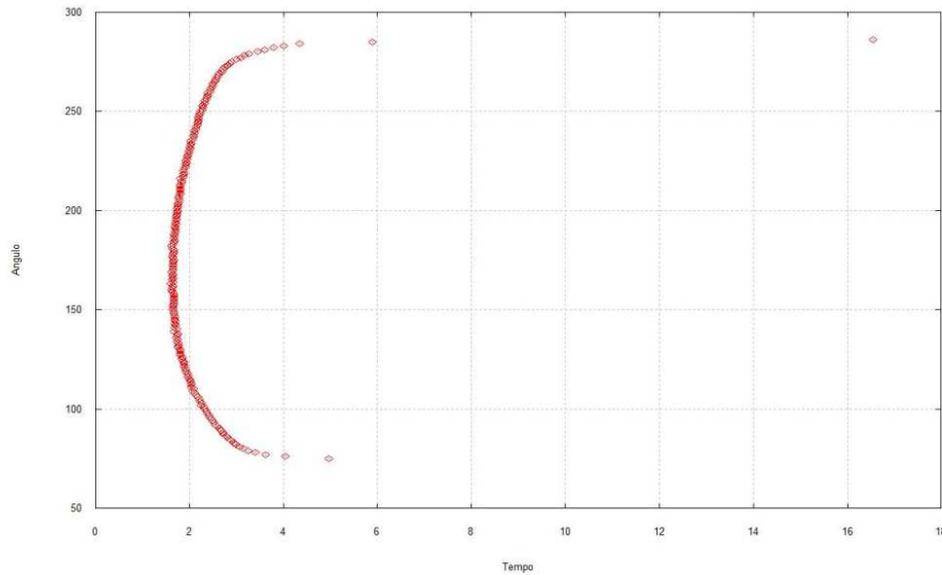


Figura 7.20. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.4$  e  $\psi = 0^0$ .

Na Figura 7.20 temos  $C_3 = -0.4$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.599 dias e é encontrado quando  $\alpha = 163^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 74^0$  e  $287^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

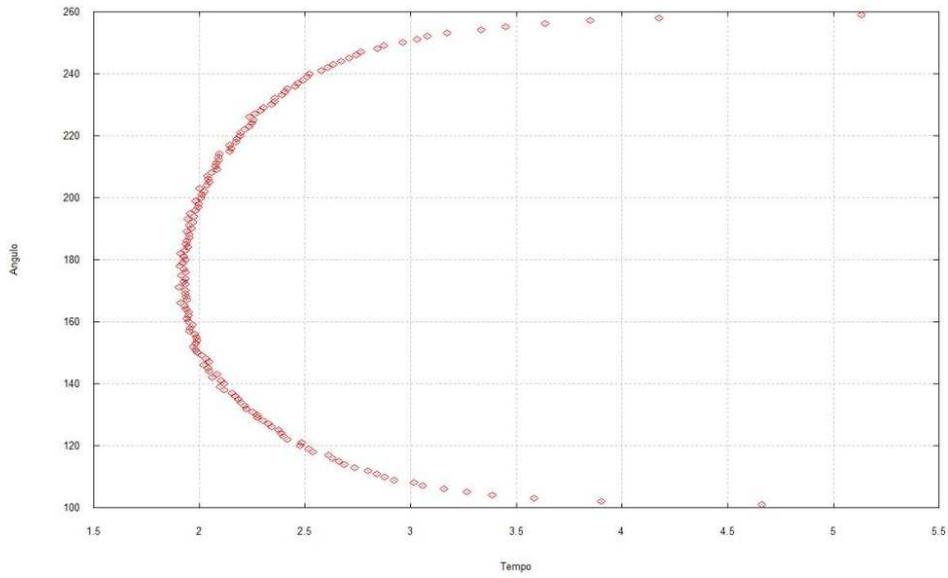


Figura 7.21. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.5$  e  $\psi = 0^\circ$ .

Na Figura 7.21 temos  $C_3 = -0.5$  e  $\psi = 0^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 5.131 dias e é encontrado quando  $\alpha = 259^\circ$ .

Temos como regiões de colisão  $0^\circ \leq \alpha \leq 100^\circ$  e  $260^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ .

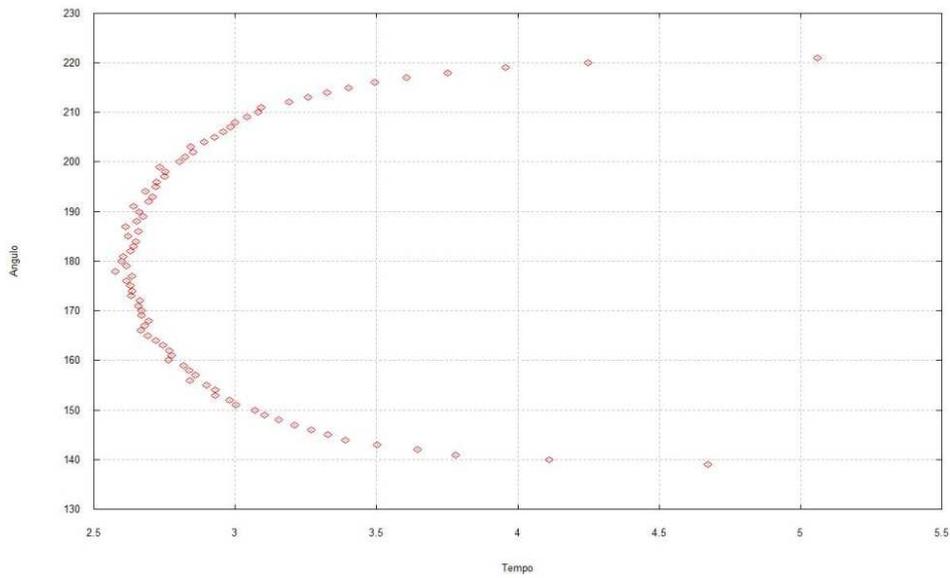


Figura 7.22. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.6$  e  $\psi = 0^\circ$ .

Na Figura 7.22 temos  $C_3 = -0.6$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 2.575 dias e é encontrado quando  $\alpha = 178^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 138^0$  e  $222^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

Quando diminuimos o valor de  $C_3$  inicial o número de regiões de captura gravitacional diminui (fica claro nas últimas três Figuras), aumentando as regiões de colisão entre o veículo espacial e a Lua.

Um resumo das informações fornecidas pelas Figuras desta secção é fornecido na tabela 7.3. Na Tabela 7.3 na primeira coluna fornecemos o valor de  $C_3$  inicial em unidades adimensionais, na segunda coluna o tempo mínimo de captura gravitacional em dias, na terceira coluna o ângulo  $\alpha$  em que ocorre o tempo mínimo de captura gravitacional e na quarta e última coluna o ângulo  $\psi$ .

**Tabela 7.3 Bi circular movimento direto  $\psi = 0^0$**

$C_3$	Tempo (dias)	$\alpha$	$\psi$
-0.1	1.213	$145^0$	$0^0$
-0.2	1.326	$166^0$	$0^0$
-0.3	1.434	$164^0$	$0^0$
-0.4	1.599	$163^0$	$0^0$
-0.5	5.131	$259^0$	$0^0$
-0.6	2.575	$178^0$	$0^0$

### 7.3.1.2 Nos gráficos abaixo temos $\psi = 90^0$

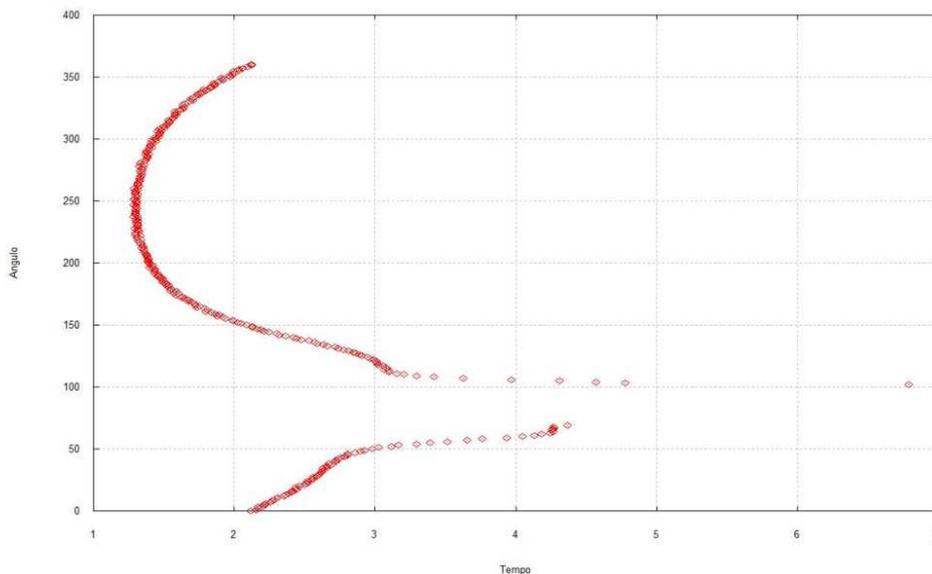


Figura 7.23. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.1$  e  $\psi = 90^0$ .

Na Figura 7.23 temos  $C_3 = -0.1$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.284 dias e é encontrado quando  $\alpha = 259^\circ$ .

Temos como região de colisão  $70^\circ \leq \alpha \leq 101^\circ$ .

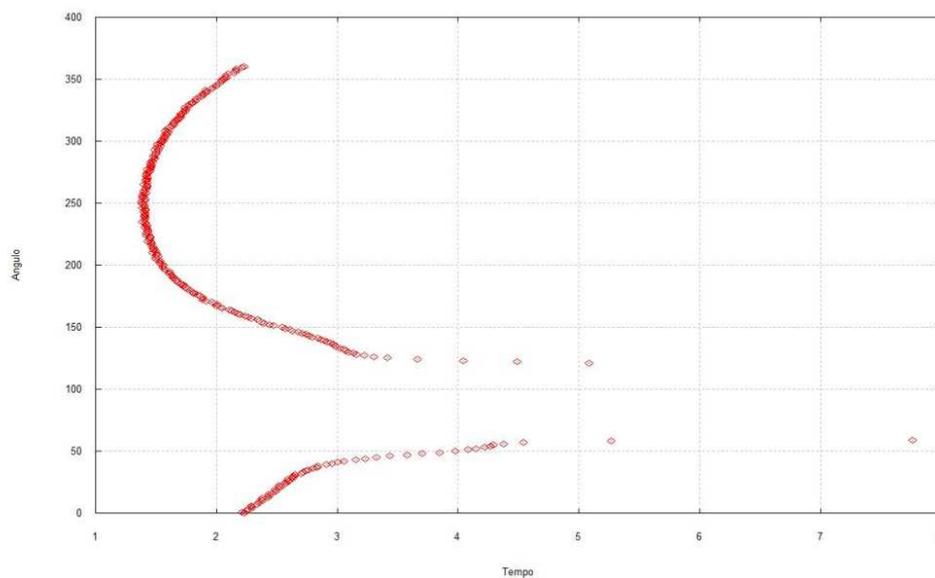


Figura 7.24. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.2$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.24 temos  $C_3 = -0.2$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.380 dias e é encontrado quando  $\alpha = 251^\circ$ .

Temos como região de colisão  $60^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$ .

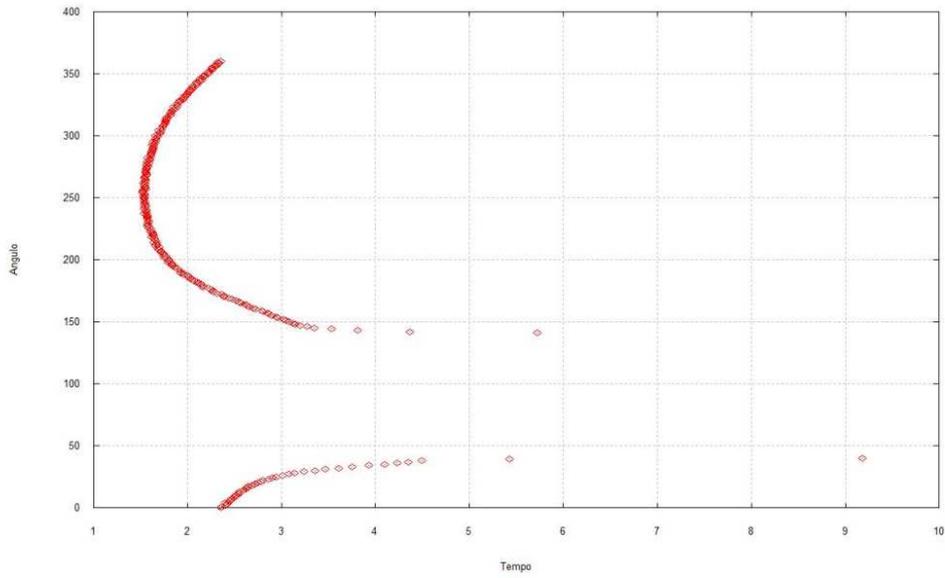


Figura 7.25. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.3$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.25 temos  $C_3 = -0.3$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.517 dias e é encontrado quando  $\alpha = 254^\circ$ .

Temos como região de colisão  $41^\circ \leq \alpha \leq 140^\circ$ .

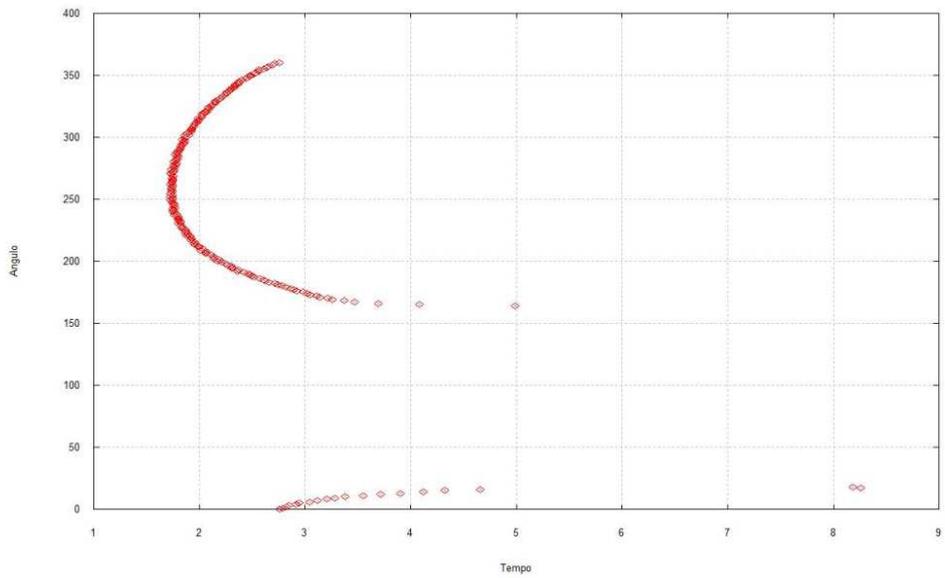


Figura 7.26. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.4$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.26 temos  $C_3 = -0.4$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.517 dias e é encontrado quando  $\alpha = 254^\circ$ .

Temos como região de colisão  $19^\circ \leq \alpha \leq 165^\circ$ .

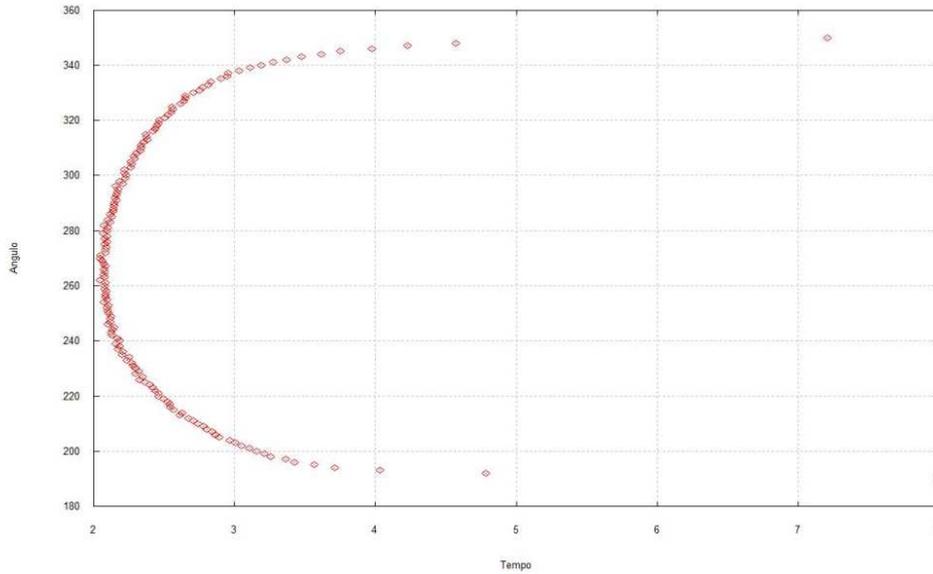


Figura 7.27. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.5$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.27 temos  $C_3 = -0.5$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 2.046 dias e é encontrado quando  $\alpha = 262^\circ$ .

Temos como regiões de colisão  $19^\circ \leq \alpha \leq 165^\circ$  e  $349^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ .

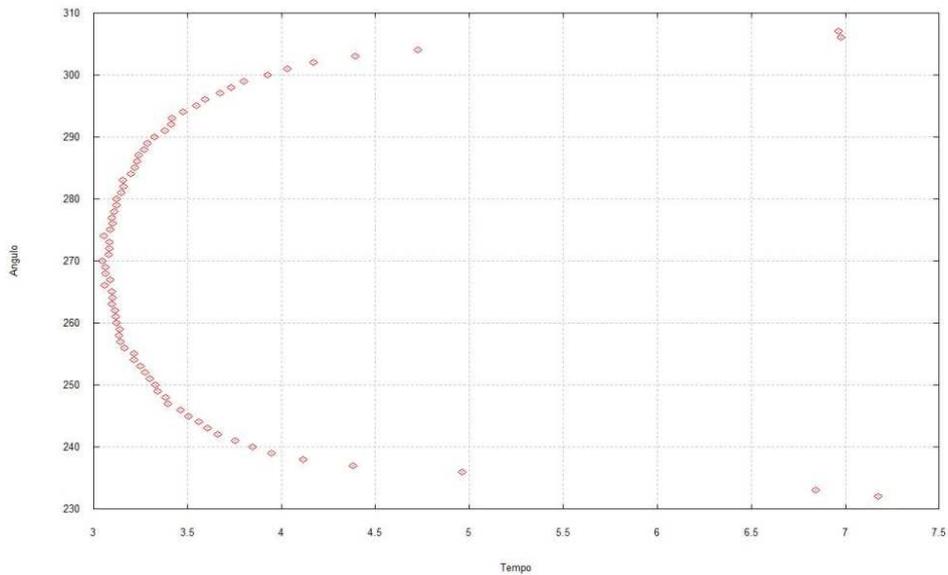


Figura 7.28. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.6$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.28 temos  $C_3 = -0.6$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 3.045 dias e é encontrado quando  $\alpha = 270^\circ$ .

Temos como regiões de colisão  $0^\circ \leq \alpha \leq 235^\circ$  e  $309^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ .

Um resumo das informações fornecidas pelas Figuras desta Secção é fornecido na Tabela 7.4. Na tabela 7.4 na primeira coluna fornecemos o valor de  $C_3$  inicial em unidades adimensionais, na segunda coluna o tempo mínimo de captura gravitacional em dias, na terceira coluna o ângulo  $\alpha$  em que ocorre o tempo mínimo de captura gravitacional e na quarta e última coluna o ângulo  $\psi$ .

**Tabela 7.4 Bi circular movimento direto  $\psi = 90^\circ$**

$C_3$	Tempo (dias)	$\alpha$	$\psi$
-0.1	1.284	$251^\circ$	$90^\circ$
-0.2	1.380	$251^\circ$	$90^\circ$
-0.3	1.517	$254^\circ$	$90^\circ$
-0.4	1.722	$254^\circ$	$90^\circ$
-0.5	2.046	$262^\circ$	$90^\circ$
-0.6	3.045	$270^\circ$	$90^\circ$

### 7.3.2 Movimento retrógrado distância inicial Lua veículo espacial 100 km

#### 7.3.2.1 Nos gráficos abaixo temos $\psi = 0^\circ$ .

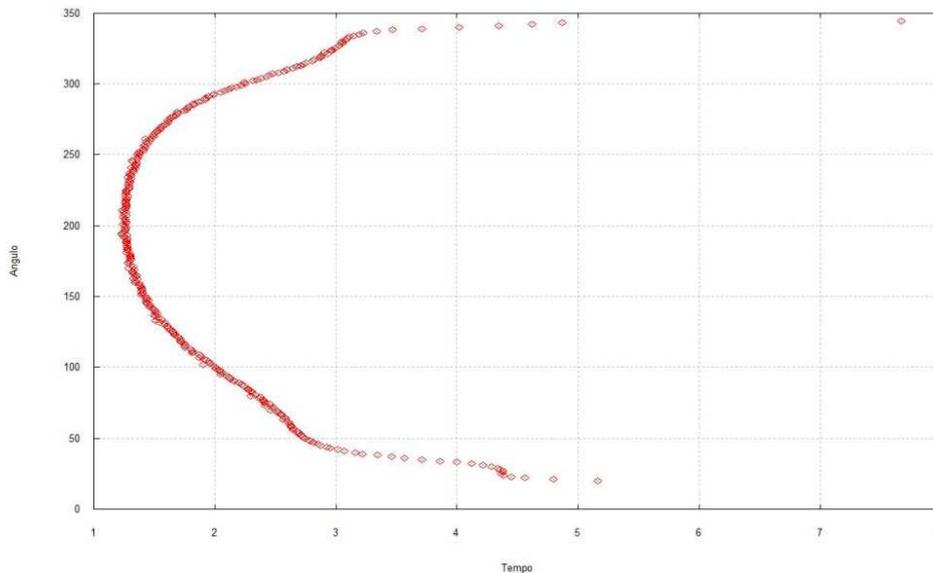


Figura 7.29. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.1$  e  $\psi = 0^\circ$ .

Na Figura 7.29 temos  $C_3 = -0.1$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.227 dias e é encontrado quando  $\alpha = 194^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 19^0$  e  $345^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

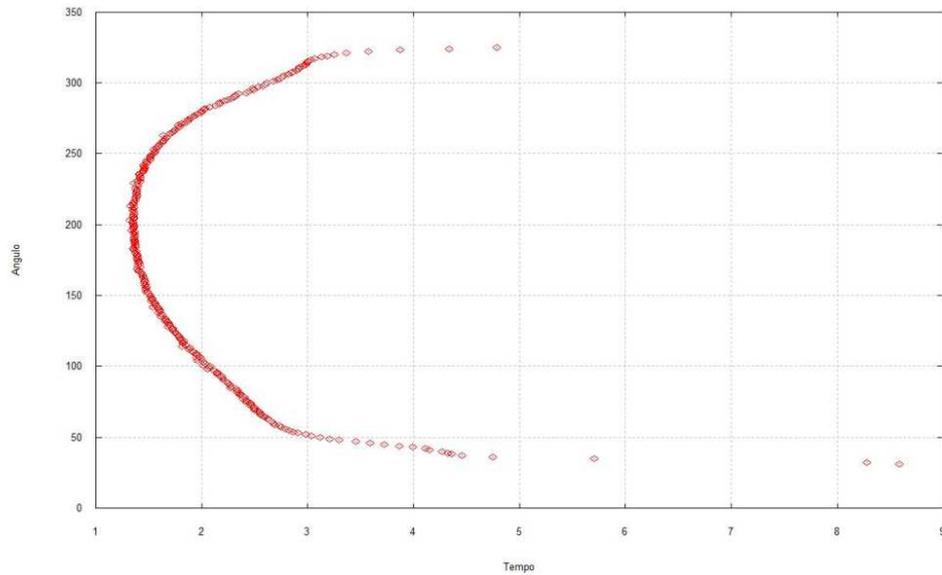


Figura 7.30. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.2$  e  $\psi = 0^0$ .

Na Figura 7.30 temos  $C_3 = -0.2$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.323 dias e é encontrado quando  $\alpha = 203^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 34^0$  e  $326^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

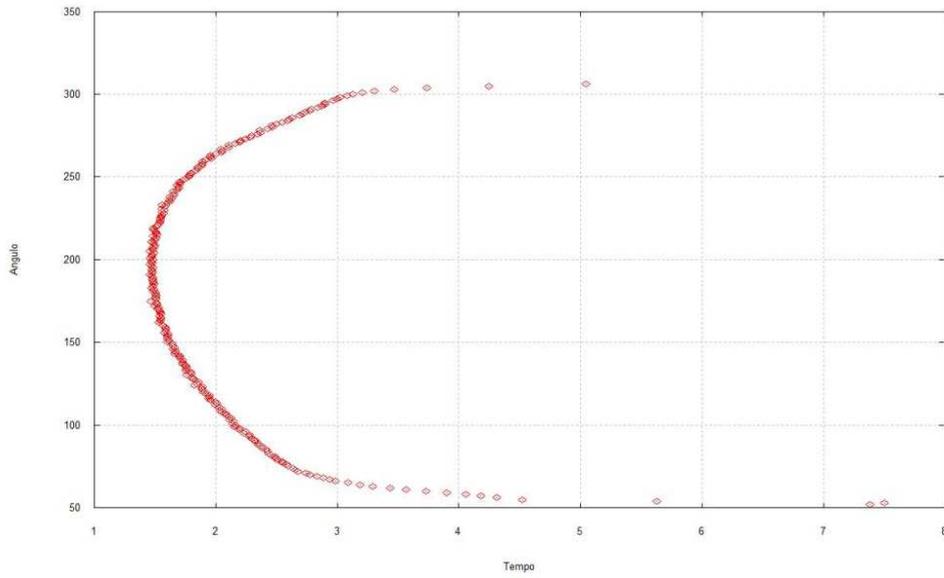


Figura 7.31. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.3$  e  $\psi = 0^0$ .

Na Figura 7.31 temos  $C_3 = -0.3$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.457 dias e é encontrado quando  $\alpha = 191^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 51^0$  e  $307^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

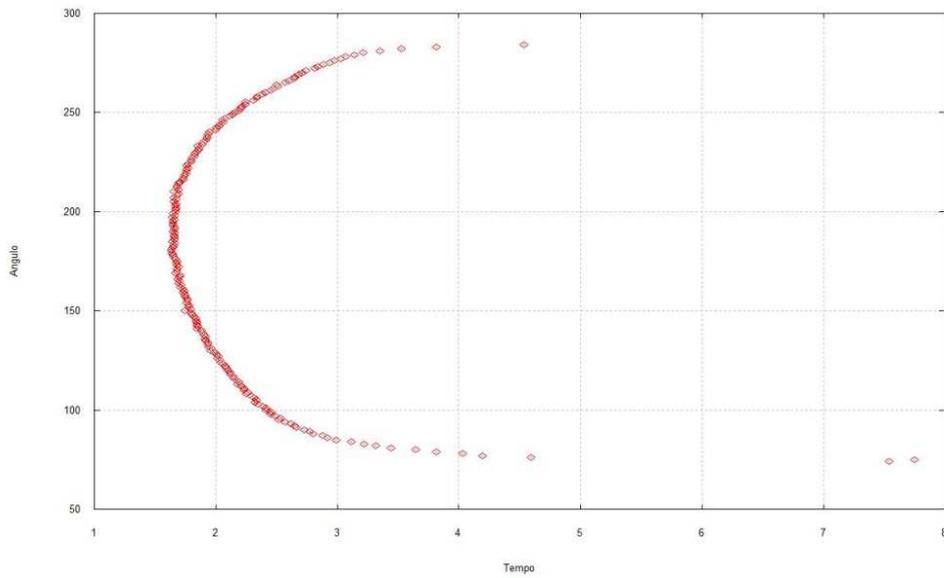


Figura 7.32. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.4$  e  $\psi = 0^0$ .

Na Figura 7.32 temos  $C_3 = -0.4$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.636 dias e é encontrado quando  $\alpha = 180^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 73^0$  e  $285^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

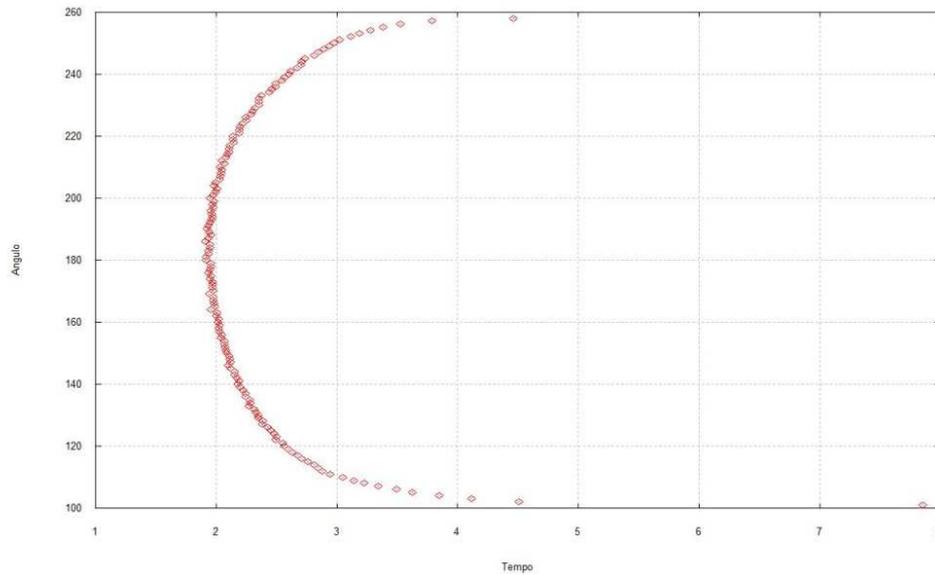


Figura 7.33. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.5$  e  $\psi = 0^0$ .

Na Figura 7.33 temos  $C_3 = -0.5$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.910 dias e é encontrado quando  $\alpha = 186^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 100^0$  e  $259^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

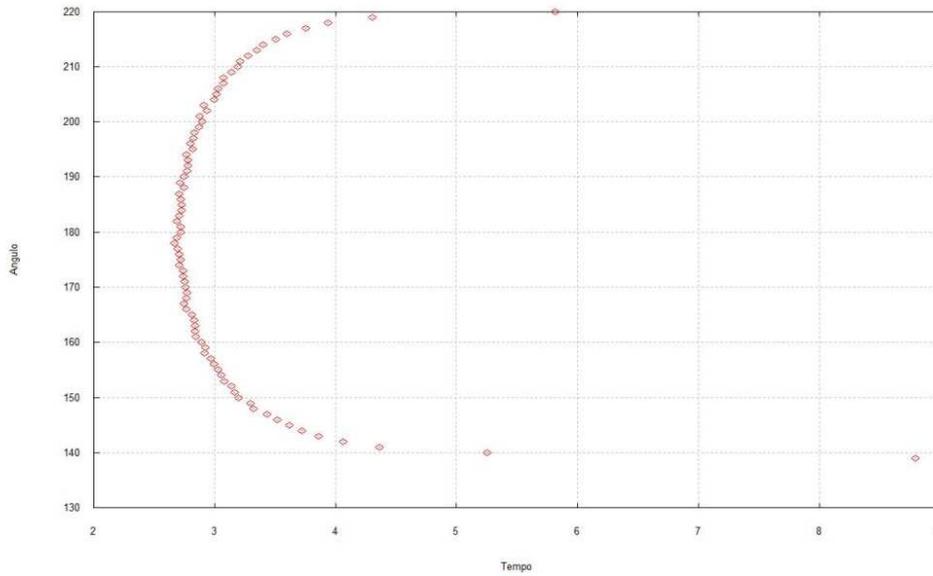


Figura 7.34. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.6$  e  $\psi = 0^0$ .

Na Figura 7.34 temos  $C_3 = -0.6$  e  $\psi = 0^0$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 2.668 dias e é encontrado quando  $\alpha = 178^0$ .

Temos como regiões de colisão  $0^0 \leq \alpha \leq 138^0$  e  $221^0 \leq \alpha \leq 360^0$ .

Um resumo das informações fornecidas pelas figuras desta secção é fornecida na tabela 7.5. Na Tabela 7.5 na primeira coluna fornecemos o valor de  $C_3$  inicial em unidades adimensionais, na segunda coluna o tempo mínimo de captura gravitacional em dias, na terceira coluna o ângulo  $\alpha$  em que ocorre o tempo mínimo de captura gravitacional e na quarta e última coluna o ângulo  $\psi$ .

**Tabela 7.5. Bi circular movimento retrógrado  $\psi = 0^0$**

$C_3$	Tempo (dias)	$\alpha$	$\psi$
-0.1	1.227	$194^0$	$0^0$
-0.2	1.323	$203^0$	$0^0$
-0.3	1.457	$191^0$	$0^0$
-0.4	1.636	$180^0$	$0^0$
-0.5	1.910	$186^0$	$0^0$
-0.6	2.668	$178^0$	$0^0$

### 7.3.2.2 Nos gráficos abaixo temos $\psi = 90^\circ$ .

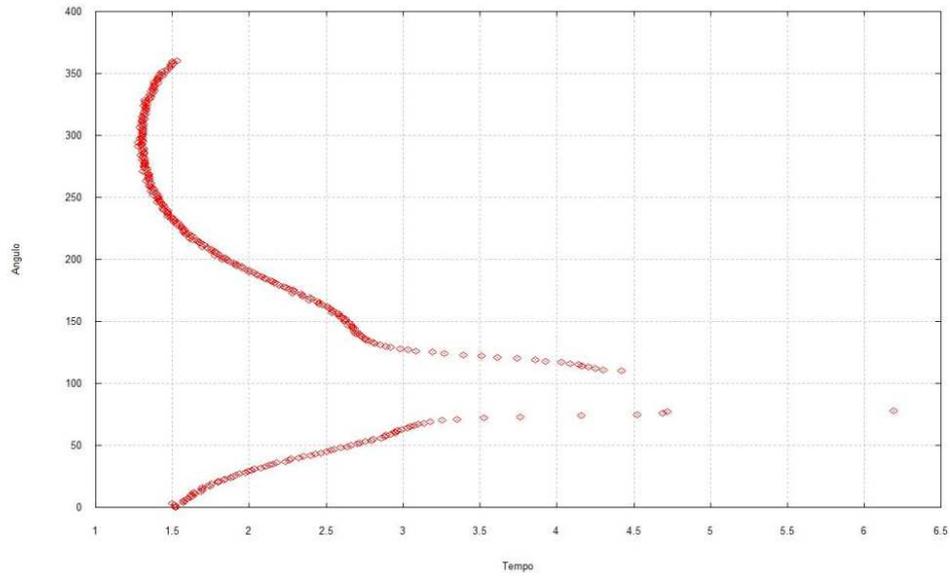


Figura 7.35. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.1$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.35 temos  $C_3 = -0.1$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.276 dias e é encontrado quando  $\alpha = 291^\circ$ .

Temos como região de colisão  $79^\circ \leq \alpha \leq 109^\circ$ .

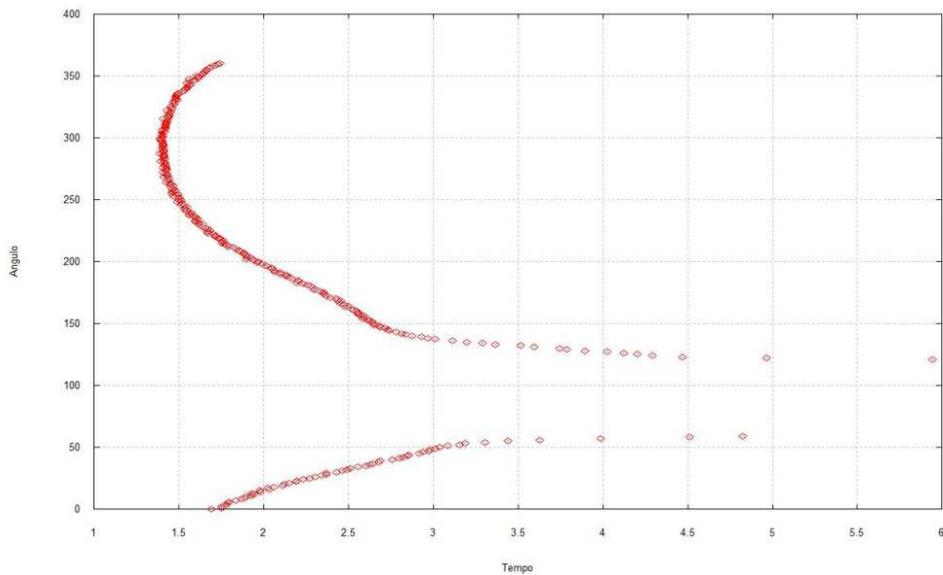


Figura 7.36. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.2$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.36 temos  $C_3 = -0.2$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.385 dias e é encontrado quando  $\alpha = 287^\circ$ .

Temos como região de colisão  $60^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$ .

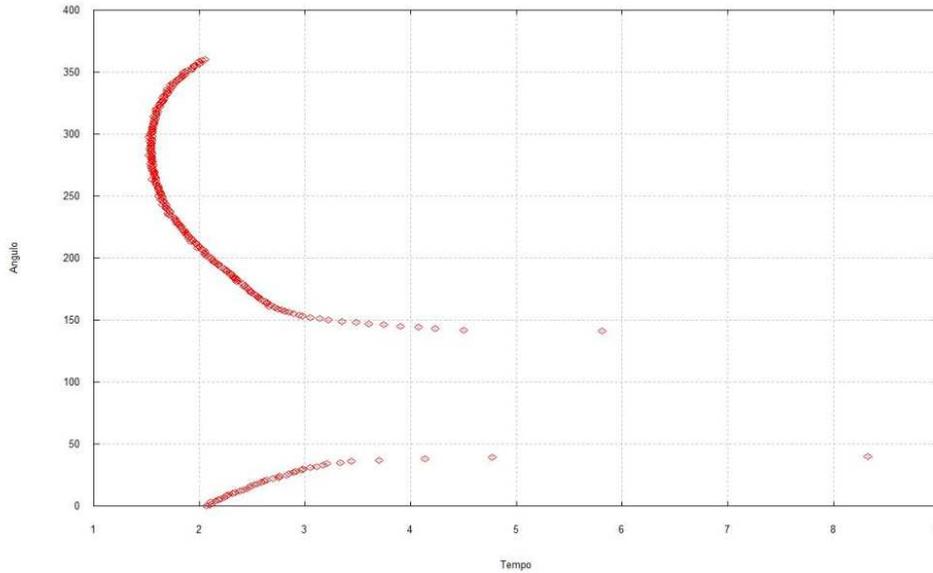


Figura 7.37. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.3$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.37 temos  $C_3 = -0.3$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.521 dias e é encontrado quando  $\alpha = 283^\circ$ .

Temos como região de colisão  $41^\circ \leq \alpha \leq 140^\circ$ .

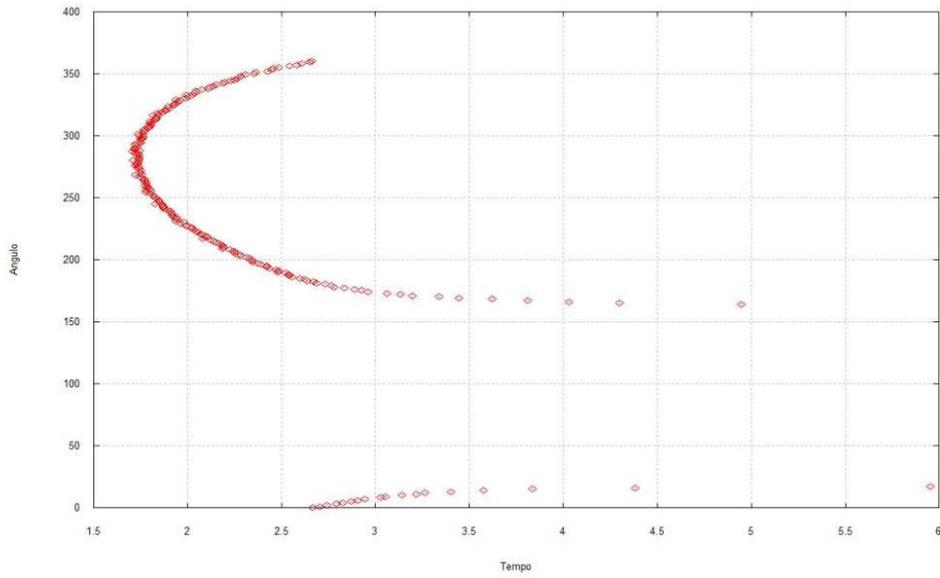


Figura 7.38. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.4$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.38 temos  $C_3 = -0.4$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 1.707 dias e é encontrado quando  $\alpha = 287^\circ$ .

Temos como região de colisão  $18^\circ \leq \alpha \leq 163^\circ$ .

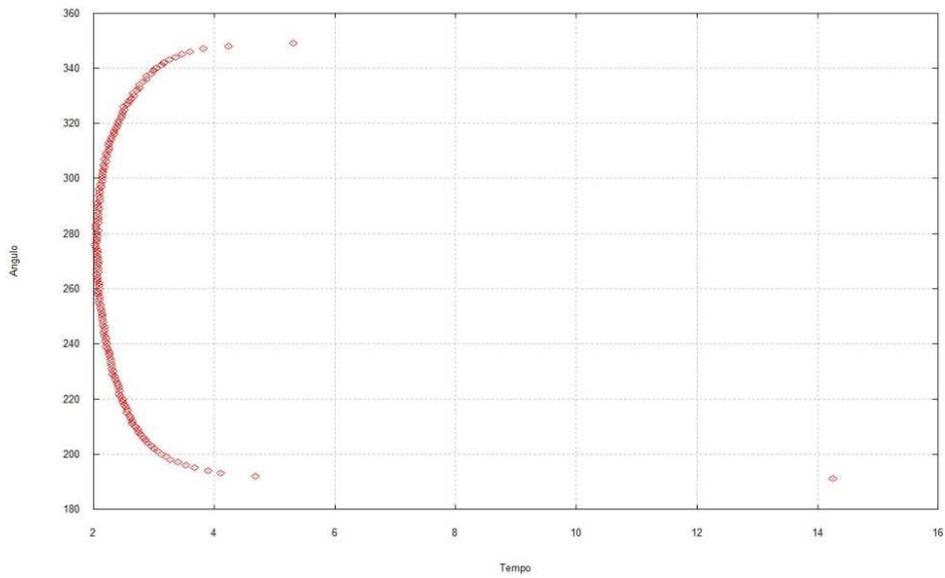


Figura 7.39. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.5$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.39 temos  $C_3 = -0.5$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 2.024 dias e é encontrado quando  $\alpha = 276^\circ$ .

Temos como regiões de colisão  $0^\circ \leq \alpha \leq 190^\circ$  e  $350^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

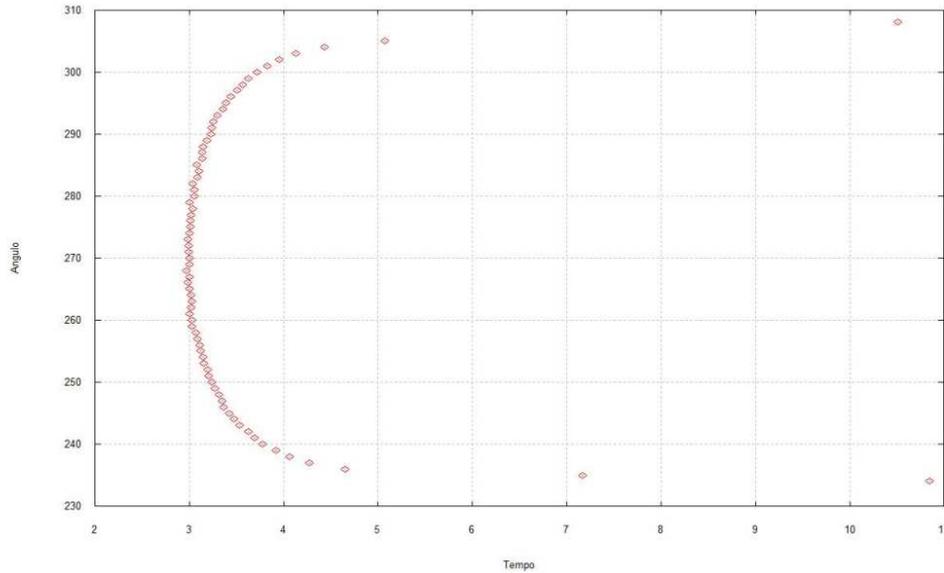


Figura 7.40. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.6$  e  $\psi = 90^\circ$ .

Na Figura 7.40 temos  $C_3 = -0.6$  e  $\psi = 90^\circ$ . O tempo mínimo de captura gravitacional é 2.965 dias e é encontrado quando  $\alpha = 268^\circ$ .

Temos como regiões de colisão  $0^\circ \leq \alpha \leq 233^\circ$  e  $306^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

Um resumo das informações fornecidas pelas figuras desta Secção é fornecido na Tabela 7.5. Na Tabela 7.6 na primeira coluna fornecemos o valor de  $C_3$  inicial em unidades adimensionais, na segunda coluna o tempo mínimo de captura gravitacional em dias, na terceira coluna o ângulo  $\alpha$  em que ocorre o tempo mínimo de captura gravitacional e na quarta e última coluna o ângulo  $\psi$ .

**Tabela 7.6 Bi circular movimento retrógrado  $\psi = 0^\circ$**

$C_3$	Tempo (dias)	$\alpha$	$\psi$
-0.1	1.276	$291^\circ$	$90^\circ$
-0.2	1.385	$287^\circ$	$90^\circ$
-0.3	1.521	$283^\circ$	$90^\circ$
-0.4	1.707	$287^\circ$	$90^\circ$
-0.5	2.024	$276^\circ$	$90^\circ$
-0.6	2.965	$268^\circ$	$90^\circ$

### 7.3.3 Comparando os dois modelos.

#### 7.3.3.1 Movimento direto.

Na Figura 7.41 temos  $C_3$  inicial igual  $-0.05$ , em vermelho o gráfico para o problema restrito de três corpos, em verde para o problema bi-circular tomando  $\psi = 0^\circ$  e em azul para o problema bi-circular tomando  $\psi = 90^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em vermelho é de 2.242 dias, encontrado quando  $\alpha = 325^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em verde é de 1.272 dias, encontrado quando  $\alpha = 156^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em azul é de 1.238 dias, encontrado quando  $\alpha = 255^\circ$ .

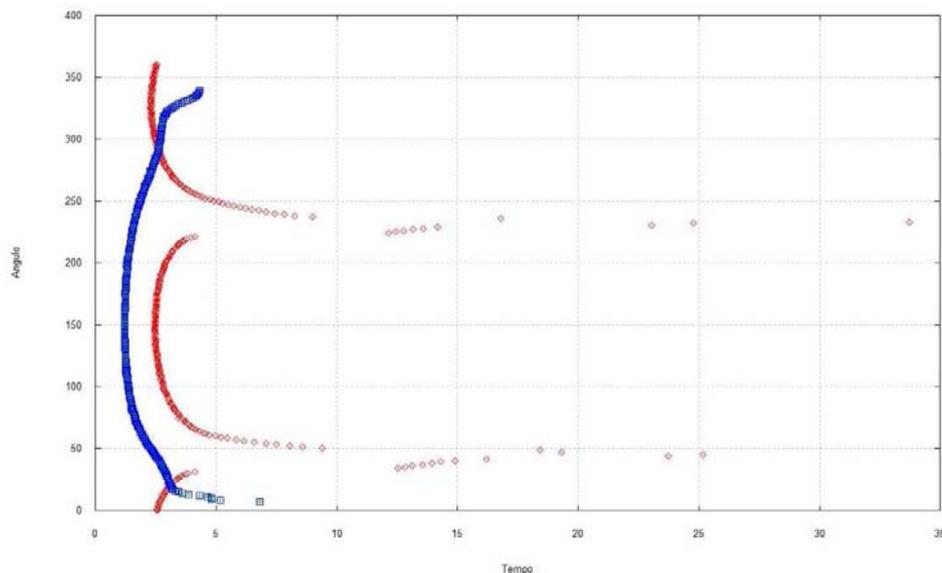


Figura 7.41. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.05$ , movimento direto.

Na Figura 7.42 temos  $C_3$  inicial igual  $-0.10$ , em vermelho o gráfico para o problema restrito de três corpos, em verde para o problema bi-circular tomando  $\psi = 0^\circ$  e em azul para o problema bi-circular tomando  $\psi = 90^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em vermelho é de 2.664 dias, encontrado quando  $\alpha = 334^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em verde é de 1.213 dias, encontrado quando  $\alpha = 145^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em azul é de 1.284 dias, encontrado quando  $\alpha = 251^\circ$ .

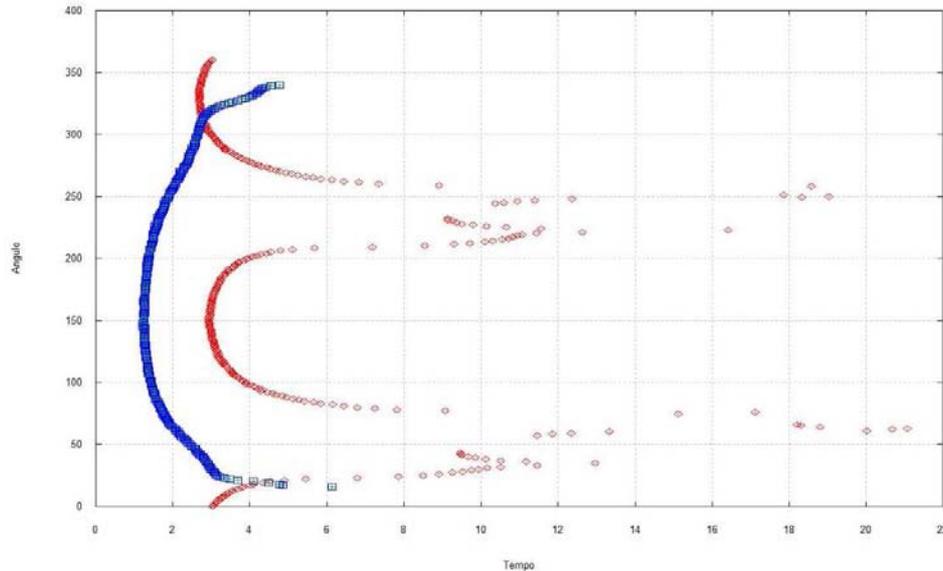


Figura 7.42. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.10$ , movimento direto.

Na Figura 7.43 temos  $C_3$  inicial igual -0.15, em vermelho o gráfico para o problema restrito de três corpos, em verde para o problema bi-circular tomando  $\psi = 0^\circ$  e em azul para o problema bi-circular tomando  $\psi = 90^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em vermelho é de 3.351 dias, encontrado quando  $\alpha = 355^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em verde é de 1.202 dias, encontrado quando  $\alpha = 140^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em azul é de 1.330 dias, encontrado quando  $\alpha = 235^\circ$ .

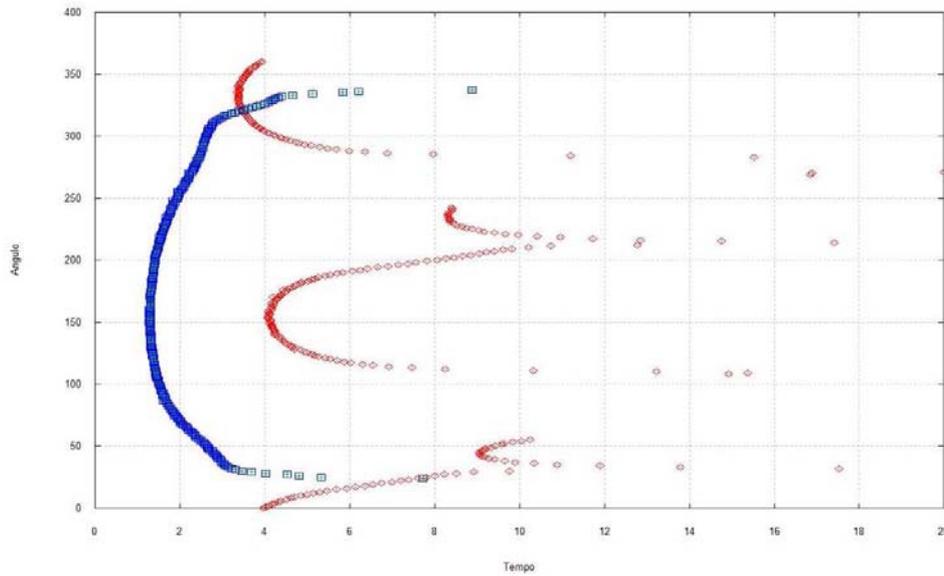


Figura 7.43. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.15$ , movimento direto.

É fácil ver pelos gráficos acima que o efeito do Sol no problema de três corpos restrito acelera o tempo de captura gravitacional, isto é, no problema bi circular o tempo de captura gravitacional é menor do que no problema de três corpos restrito.

### 7.3.3.2 Movimento retrógrado.

Na Figura 7.44 temos  $C_3$  inicial igual -0.05, em vermelho o gráfico para o problema restrito de três corpos, em verde para o problema bi-circular tomando  $\psi = 0^\circ$  e em azul para o problema bi-circular tomando  $\psi = 90^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em vermelho é de 2.321 dias, encontrado quando  $\alpha = 5^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em verde é de 1.183 dias, encontrado quando  $\alpha = 197^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em azul é de 1.232 dias, encontrado quando  $\alpha = 306^\circ$ .

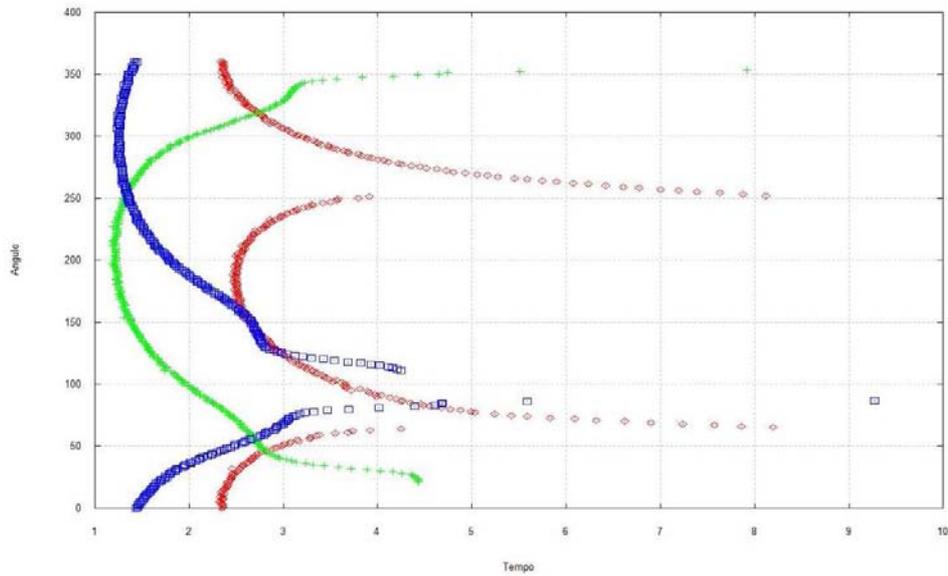


Figura 7.44. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.05$ , movimento retrógrado.

Na Figura 7.45 temos  $C_3$  inicial igual  $-0.10$ , em vermelho o gráfico para o problema restrito de três corpos, em verde para o problema bi-circular tomando  $\psi = 0^\circ$  e em azul para o problema bi-circular tomando  $\psi = 90^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em vermelho é de 2.718 dias, encontrado quando  $\alpha = 353^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em verde é de 1.227 dias, encontrado quando  $\alpha = 194^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em azul é de 1.276 dias, encontrado quando  $\alpha = 291^\circ$ .

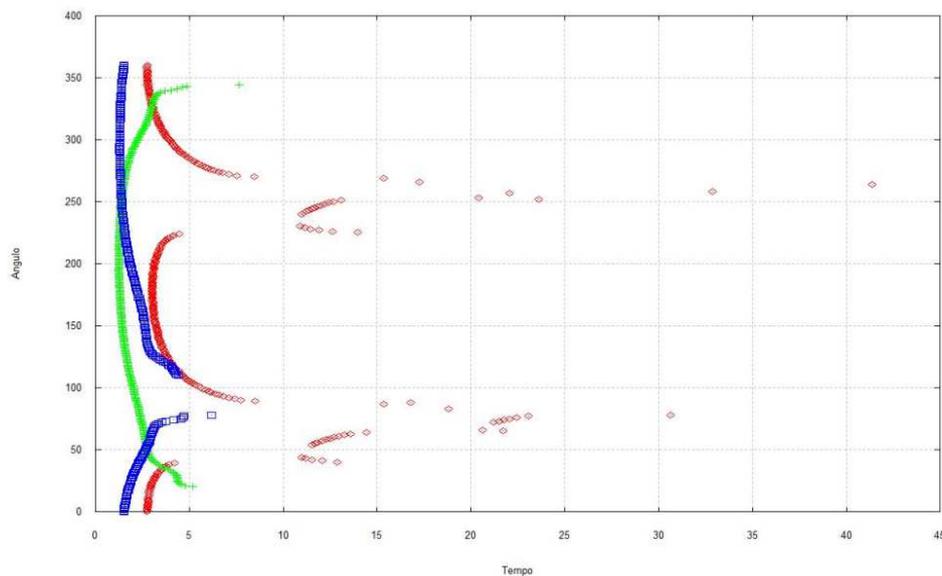


Figura 7.45. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.10$ , movimento retrógrado.

Na Figura 7.46 temos  $C_3$  inicial igual  $-0.15$ , em vermelho o gráfico para o problema restrito de três corpos, em verde para o problema bi-circular tomando  $\psi = 0^\circ$  e em azul para o problema bi-circular tomando  $\psi = 90^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em vermelho é de 3.594 dias, encontrado quando  $\alpha = 345^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em verde é de 1.263 dias, encontrado quando  $\alpha = 204^\circ$ .

O tempo mínimo para captura gravitacional no gráfico em azul é de 1.329 dias, encontrado quando  $\alpha = 305^\circ$ .

Analogamente ao movimento direto, no movimento retrógrado é fácil ver pelos gráficos acima que o efeito do Sol no problema de três corpos restrito acelera o tempo de captura gravitacional, isto é, no problema bi circular o tempo de captura gravitacional é menor do que no problema de três corpos restrito.

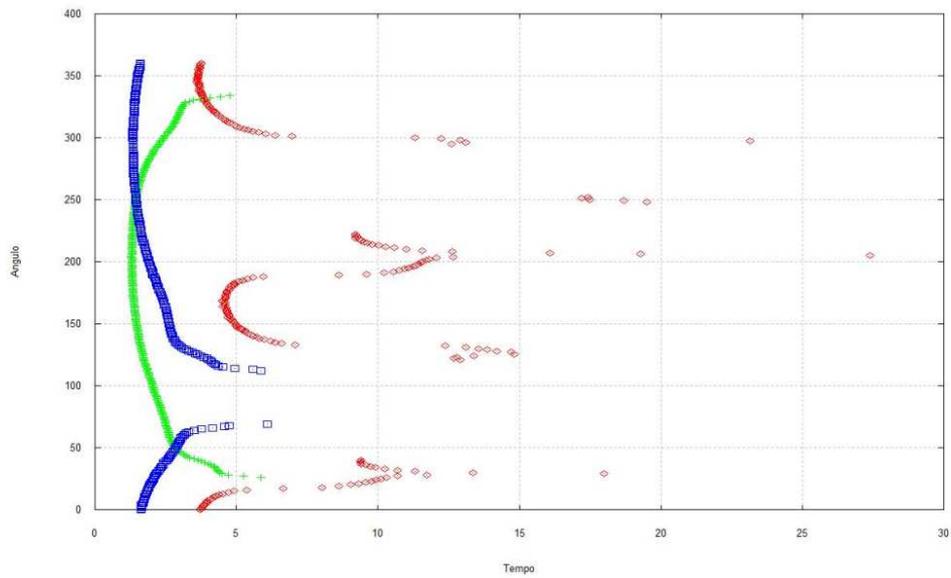


Figura 7.46. Ângulo em função do tempo  $C_3 = -0.15$ , movimento retrógrado.

#### 7.4. Conclusão

No problema de três corpos restrito circular observamos que no movimento direto a captura gravitacional ocorre em tempo menor do que no movimento retrógrado na maioria das vezes. Na Tabela 7.7 fornecemos na primeira coluna  $C_3$  inicial (em unidades adimensionais), na segunda coluna o tempo de captura para o movimento direto (em dias), na terceira o tempo de captura para o movimento retrógrado (em dias) e na quarta coluna a diferença de tempo entre os dois movimentos.

**Tabela 7.7 Tabela de comparação**

$C_3$ inicial.	Direto	Retrógrado	Diferença
-0.01	2.058	2.076	0.018
-0.02	2.089	2.103	0.014
-0.03	2.144	2.160	0.016
-0.04	2.234	2.206	-0.028
-0.05	2.242	2.321	0.079
-0.06	2.298	2.382	0.084
-0.07	2.394	2.454	0.060
-0.08	2.445	2.528	0.083
-0.09	2.564	2.622	0.058
-0.10	2.664	2.718	0.054
-0.11	2.760	2.836	0.076
-0.12	2.872	2.971	0.099
-0.13	2.962	3.137	0.175
-0.14	3.163	3.322	0.159
-0.15	3.51	3.594	0.084
-0.16	3.551	4.010	0.469
-0.17	3.880	4.643	0.763
-0.18	4.299	7.328	3.029
-0.19	4.915	10.646	5.731

Tanto no movimento direto quanto no movimento retrógrado é fácil ver pelos gráficos deste capítulo que o efeito do Sol no problema de três corpos restrito circular acelera o tempo de captura gravitacional, isto é, no problema bi circular o tempo de captura gravitacional é menor do que no problema de três corpos restrito circular.



## 8 SISTEMA NETUNO TRITÃO

### 8.1. Introdução

Netuno é o oitavo planeta do sistema solar desde a reclassificação de Plutão para a categoria de planeta anão, tornou-se o último, em ordem de afastamento a partir do Sol.

Netuno tem 13 luas conhecidas, a maior delas é Tritão. Estudaremos captura gravitacional para o sistema Netuno-Tritão.

Netuno é o quarto maior planeta em diâmetro, e o terceiro maior em massa. Netuno tem 17 vezes a massa da Terra. Massa de Netuno é  $1.024 \times 10^{26} kg$ , a massa de Tritão é  $2.14 \times 10^{22} kg$ . A distância entre Netuno e Tritão é 354.760 km e o período orbital de Tritão ao redor de Netuno é 5.87685 dias.

Não existe razão especial para termos escolhido o sistema Netuno-Tritão para estudarmos captura gravitacional, por exemplo, poderíamos ter escolhido Júpiter-Europa, nosso único objetivo é estudar um sistema diferente do sistema Terra-Lua.

### 8.2. O problema de três corpos restrito circular. Primários Netuno e Tritão

Abaixo fornecemos as equações de movimento para o problema de três corpos restrito sendo os primários Netuno e Tritão.

Tornaremos o sistema adimensional, dividindo todas as distâncias pela distância entre os dois primários e as massas serão divididas pela massa total dos dois primários.

Fornecemos abaixo as massas e distâncias de Netuno e Tritão.

$$M_N = 1.024 \times 10^{26} kg \quad \text{Massa de Netuno.}$$

$$M_T = 2.14 \times 10^{22} kg \quad \text{Massa de Tritão.}$$

$$d = 354.760 \text{ km} \quad \text{Distância Netuno Tritão.}$$

Com os dados escritos acima as massas de Netuno e Tritão no sistema adimensional são dadas por:

Massa de Netuno.

$$\mu_N = \frac{M_N}{M_N + M_T} = 0.9997910593 \quad (8.1)$$

Massa de Tritão.

$$\mu_T = \frac{M_T}{M_N + M_T} = 0.0002089407097 \quad (8.2)$$

As circunferências descritas por Netuno e Tritão tem raios  $\mu_T$  e  $\mu_N$  respectivamente.

Sejam  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi_N, \eta_N)$  e  $(\xi_T, \eta_T)$  as coordenadas do veículo espacial, Netuno e Tritão respectivamente.

Abaixo fornecemos as equações de movimento de Netuno e Tritão:

$$\begin{aligned} \xi_N &= -\mu_T \cos(t) & \xi_T &= \mu_N \cos(t) \\ \eta_N &= -\mu_T \sin(t) & \eta_T &= \mu_N \sin(t) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Quando substituimos  $t = 0$ , as posições da Tritão e de Netuno são respectivamente  $(\mu_N, 0)$  e  $(-\mu_T, 0)$ .

As distâncias do veículo espacial a Tritão e a Netuno estão fornecidas abaixo:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (\xi - \xi_T)^2 + (\eta - \eta_T)^2 \\ r_2^2 &= (\xi - \xi_N)^2 + (\eta - \eta_N)^2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

As equações de movimento do veículo espacial no sistema fixo são:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -\mu_T \frac{(\xi - \xi_T)}{r_1^3} - \mu_N \frac{(\xi - \xi_N)}{r_2^3} = -\frac{\partial V}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= -\mu_T \frac{(\eta - \eta_T)}{r_1^3} - \mu_N \frac{(\eta - \eta_N)}{r_2^3} = -\frac{\partial V}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Onde a energia potencial é  $V = -\frac{\mu_T}{r_1} - \frac{\mu_N}{r_2}$ .

### 8.3. captura gravitacional Sistema Netuno--Tritão.

Analogamente ao que foi definido no capítulo 4 a órbita é considerada de captura gravitacional temporária quando o veículo espacial alcança a distância de 100000 km (0.26 unidades adimensionais), medidos a partir do centro de Tritão, num tempo inferior a 50 dias (aproximadamente 12 unidades adimensionais). Alternativamente, dizemos que uma órbita de captura gravitacional temporária ocorre quando existe a mudança do sinal da energia do veículo espacial com relação a Tritão, isto é, a energia passa de positiva para negativa.

Chamaremos de  $C_3$  o dobro da soma das energias cinética e potencial do problema de dois corpos entre o veículo espacial e Tritão, isto é:

$$C_3 = V^2 - 2 \frac{\mu_T}{r} \quad (8.6)$$

onde  $r$  e  $V$  são, respectivamente, a distância e a velocidade do veículo espacial em relação a Tritão, e  $\mu_T$  é a massa adimensional de Tritão.

As coordenadas do veículo espacial com respeito ao centro de massa dos dois primários, para as órbitas diretas são, vetor posição  $P = (x, y)$  vetor velocidade  $V = (v_x, v_y)$ , onde:

$$\begin{aligned} x &= r_p \cos(\alpha) + \mu_N \\ y &= r_p \sin(\alpha) \\ v_x &= -V \sin(\alpha) \\ v_y &= V \cos(\alpha) + \mu_N \end{aligned} \quad \text{.Sistema fixo} \quad (8.7)$$

Enquanto as coordenadas do veículo espacial com respeito ao centro de massa dos dois primários, para as órbitas retrógradas são vetor posição  $P = (x, y)$  vetor velocidade  $V = (v_x, v_y)$ , onde:

$$\begin{aligned}
 x &= r_p \cos(\alpha) + \mu_N \\
 y &= r_p \sin(\alpha) \\
 v_x &= V \sin(\alpha) \\
 v_y &= -V \cos(\alpha) + \mu_N
 \end{aligned}
 \quad \text{.Sistema fixo} \tag{8.8}$$

#### 8.4. Estudo do valor mínimo da energia inicial para termos captura gravitacional no problema de três corpos restrito circular. Sistema Netuno Tritão

Nos dois gráficos das figuras 8.1 e 8.2 fornecemos na vertical o valor da energia inicial do veículo espacial  $C_3$  em unidades adimensionais e na horizontal o valor do ângulo inicial do veículo espacial  $\alpha$  em graus.

O valor de  $C_3$  fornecido nestes gráficos é o menor valor que proporciona captura gravitacional para um ângulo  $\alpha$  dado.

O ângulo  $\alpha$  varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  com passo de  $1^\circ$ . O valor de  $C_3$  varia de  $-0.0001$  até  $-0.09$ , com passo de  $-0.001$ .

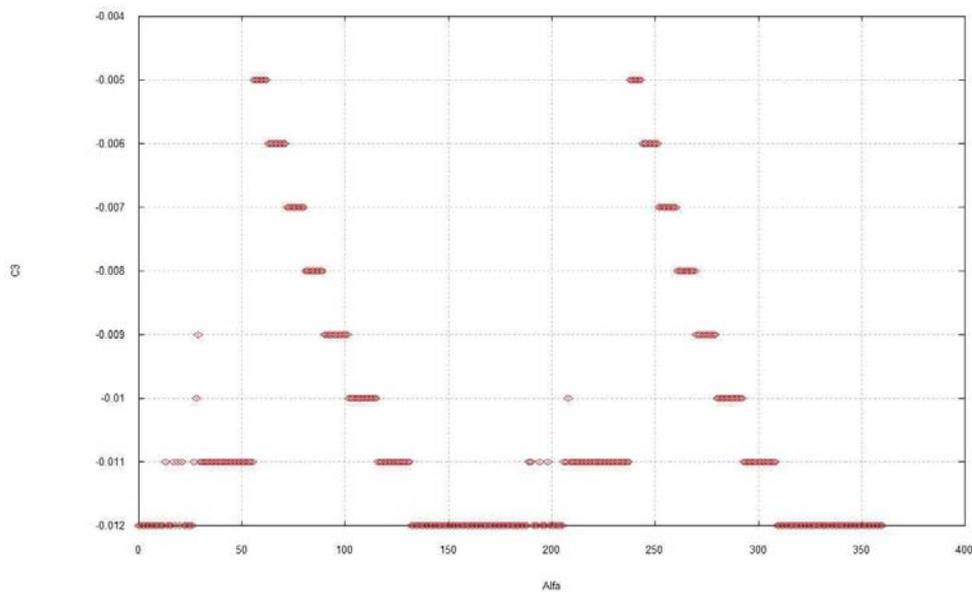


Figura 8.1. Três corpos restrito circular órbitas diretas,  $C_3$  mínimo.

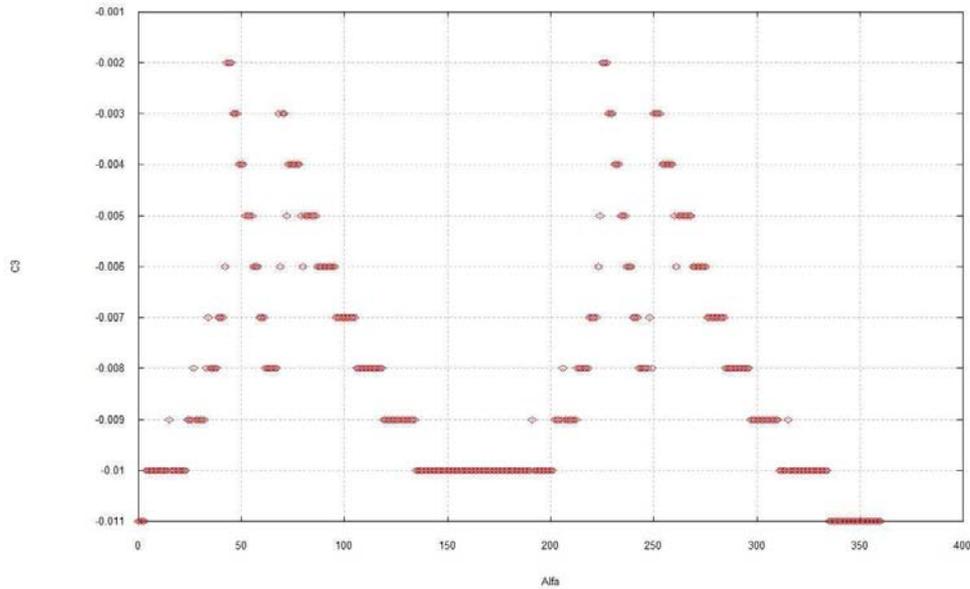


Figura 8.2. Três corpos restrito circular órbitas retrógradadas,  $C_3$  mínimo.

Pelos gráficos das figuras 8.1 e 8.2 notamos que a captura retrógrada, de forma geral, proporciona valores mínimos de  $C_3$  praticamente iguais aos valores obtidos na captura direta.

Os valores mínimos de  $C_3$  inicial encontrados para captura direta é -0.012 (em unidades adimensionais), e para captura retrógrada é -0.011 (em unidades adimensionais).

Chamamos de regiões mais favoráveis para captura gravitacional, regiões em que a energia inicial mínima  $C_3$  é menor do que o valor dessa mesma grandeza comparadas com outras regiões.

O gráfico da figura 8.1 fornece três regiões favoráveis para captura gravitacional no caso de órbitas diretas que são,  $0^\circ \leq \alpha \leq 26^\circ$ ,  $116^\circ \leq \alpha \leq 205^\circ$  e  $309^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

O gráfico fornece duas regiões favoráveis para captura gravitacional no caso de órbitas retrógradadas que são,  $0^\circ \leq \alpha \leq 4^\circ$  e  $335^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ .

Comparando o sistema Netuno-Triton com o sistema Terra-Lua, existe um maior gasto de energia no sistema Lua-Terra para podermos capturar um veículo espacial. Isto pode ser apreciado na tabela 8.1.

**Tabela 8.1 Comparação**

Tipo de movimento	Terra Lua	Netuno Triton
Direto	$C_3 = -0.22$	$C_3 = -0.012$
Retrógrado	$C_3 = -0.19$	$C_3 = -0.011$

### 8.5. Análise do tempo de captura gravitacional

Será feita a análise do tempo de captura gravitacional tendo valores de  $r_p = 1450 \text{ km}$  (100 km do centro de Tritão) e  $C_3 = -0.05$  iniciais fixos. O parâmetro que variamos é o ângulo  $\alpha$ . Definimos como tempo de captura gravitacional, o tempo gasto entre o momento da entrada do veículo espacial na esfera de influência gravitacional até o momento que o veículo espacial chega na posição escolhida para o “pericêntrico” do sistema Netuno Tritão. Nos gráficos das figuras 8.3 e 8.4 o eixo horizontal fornece o tempo mínimo de captura gravitacional e o eixo vertical fornece o ângulo em que isto acontece. O ângulo  $\alpha$  varia de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , com passo de  $1^\circ$ .

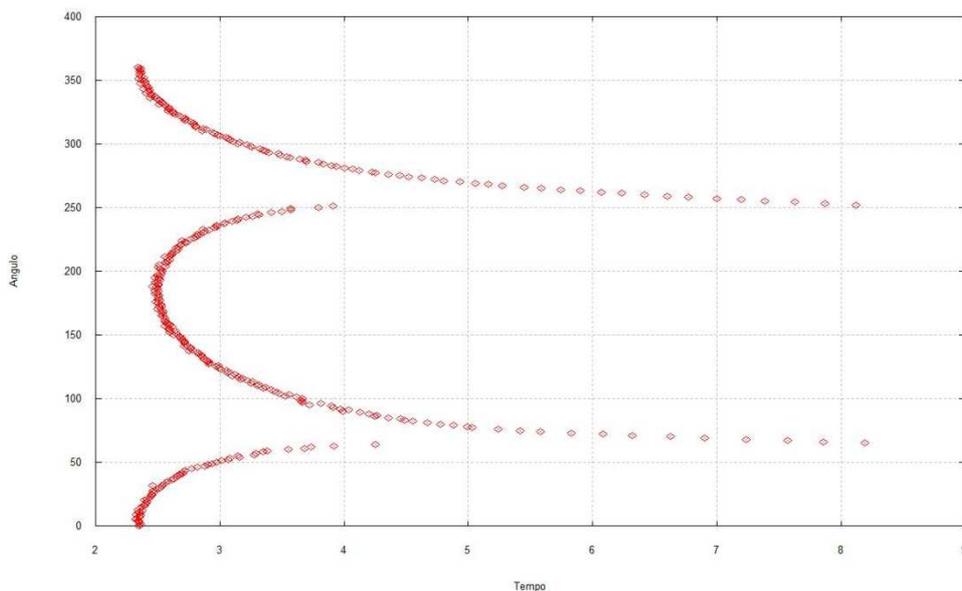


Figura 8.3 Movimento direto, tempo de captura gravitacional.

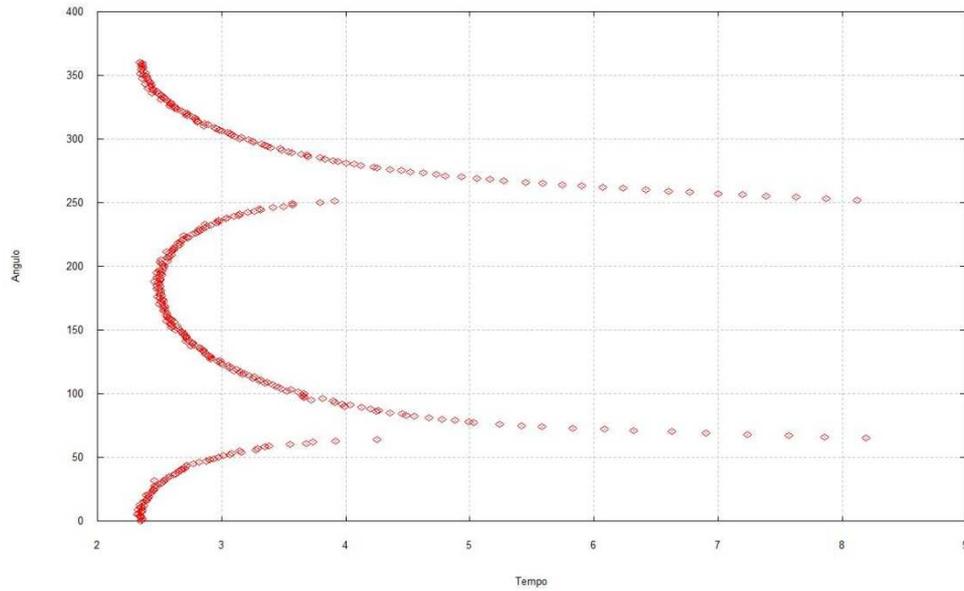


Figura 8.4 Movimento retrógrado, tempo de captura gravitacional.

O tempo mínimo para captura gravitacional é de aproximadamente 2 dias e não há muita diferença do sistema Netuno Tritão para o sistema Terra Lua.

### 8.6 Conclusões

O valor mínimo da energia inicial do veículo espacial com relação à Lua é maior que o valor mínimo da energia do veículo espacial com relação a Tritão. Porém nos dois sistemas, isto é, Terra-Lua e Netuno-Tritão, encontramos regiões favoráveis para captura gravitacional. Já a análise feita do tempo de captura gravitacional não mostra muita diferença entre os dois sistemas.



## 9 CAPTURA GRAVITACIONAL NO ESPAÇO

### 9.1. Introdução

O objetivo desse Capítulo é um estudo numérico introdutório sobre captura gravitacional temporária no espaço. Usaremos como modelo matemático o problema de três corpos restrito circular espacial. Consideraremos como corpos primários a Terra e a Lua, para o problema de três corpos restrito circular. Analogamente ao que ocorre no plano, uma captura gravitacional temporária acontece no espaço para o problema que estudamos quando existe a mudança do sinal da energia do veículo espacial com relação à Lua, isto é, a energia passa de positiva para negativa. Em termos de órbitas, saímos de uma órbita hiperbólica e passamos para uma órbita elíptica.

Grande parte deste Capítulo é destinada ao cálculo de resultados numéricos para este modelo matemático estudado. Os resultados numéricos serão focados em órbitas que chamaremos de limitadas, captura gravitacional e limitada restrita ao plano  $XY$ .

### 9.2. Captura gravitacional

Definimos  $C_3$  como sendo o dobro da energia do sistema Lua-veículo espacial. Contrário ao que ocorre no problema de dois corpos,  $C_3$  não é constante nos problemas três corpos restrito circular. Então, para algumas condições iniciais, o veículo espacial pode alterar o sinal de sua energia de positivo para negativo ou de negativo para positivo. Quando a variação é de positivo para negativo chamamos de órbita de captura gravitacional. A situação oposta, quando a energia muda de negativo para positivo, é chamada de “fuga” gravitacional ou escape. Descreveremos abaixo a metodologia numérica.

1-O integrador utilizado foi um Runge-Kutta de quarta ordem, implementado na linguagem computacional Fortran.

2-Integramos as equações de movimento do veículo espacial no sistema sideral, aplicamos uma rotação e obtemos o movimento do veículo espacial no sistema sinódico.

3-Explicaremos abaixo como são escolhidas as condições iniciais para a integração, isto é, a posição e velocidade inicial do veículo espacial (Veja Figura 9.1).

#### 3.1-Posição inicial.

O ponto de partida de cada trajetória do veículo espacial fica a uma distância de 100 km da superfície da Lua ( $r_p = 1838 \text{ km}$  a partir do centro da Lua), que chamaremos de periluna. As coordenadas do vetor posição inicial  $P = (x_p, y_p, z_p)$  do veículo espacial são:

$$\begin{aligned}
x_p &= r_p \cos(\beta) \cos(\alpha) \\
y_p &= r_p \cos(\beta) \sin(\alpha) \\
z_p &= r_p \sin(\beta)
\end{aligned}
\tag{9.1}$$

Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são como mostrados na Figura 9.1. Um cálculo elementar mostra que a norma do vetor posição é  $1838 \text{ km}$ , isto é,  $\|P\| = r_p$ .

### 3.2-Velocidade inicial.

A magnitude da velocidade inicial  $V$  é calculada a partir do valor de  $C_3 = V^2 - \frac{\mu_M}{r}$ . A direção do vetor velocidade do veículo espacial é escolhida como sendo perpendicular à linha que une o veículo espacial ao centro da Lua.

O vetor velocidade inicial do veículo espacial será denotado por  $V_p = (V_x, V_y, V_z)$ . As coordenadas do vetor velocidade inicial do veículo espacial são fornecidas abaixo:

$$\begin{aligned}
V_x &= -V \sin(\gamma) \sin(\beta) \cos(\alpha) - V \cos(\gamma) \sin(\alpha) \\
V_y &= -V \sin(\gamma) \sin(\beta) + V \cos(\gamma) \cos(\alpha) \\
V_z &= V \cos(\beta) \sin(\gamma)
\end{aligned}
\tag{9.2}$$

Onde  $\gamma$  é como na indicado na Figura 9.1.

É fácil ver que o produto escalar entre os vetores posição e velocidade é nulo. Isto mostra o fato da perpendicularidade entre os vetores posição e velocidade. Também temos  $\|V_p\| = V$ .

### 4-Captura gravitacional.

A órbita é considerada de captura, quando o veículo espacial alcança a distância de  $100000 \text{ km}$  ( $0.26$  unidades canônicas), a partir do centro da Lua, num tempo inferior a  $50$  dias (aproximadamente  $12$  unidades canônicas). A esfera com o raio acima centrada na Lua é definida como esfera de influência da Lua. Na integração numérica o passo de tempo é negativo, portanto as condições iniciais são na realidade as condições finais da órbita após a captura.

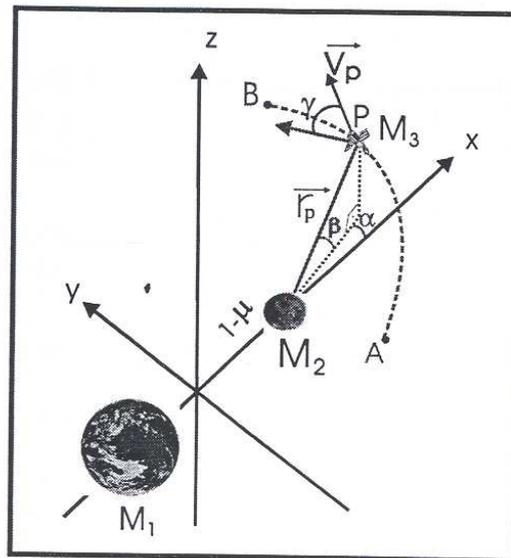


Figura 9 1 condição inicial.

### 9.3 Órbitas de captura

Existem dois testes numéricos para verificarmos se uma órbita é de captura.

**Primeiro teste.** Quando o veículo espacial alcança a distância de 100000 km (0.26 unidades canônicas), a partir do centro da Lua, num tempo menor que 50 dias (aproximadamente 12 unidades canônicas de tempo) a órbita é considerada de captura. Esse teste é feito para cada passo de integração.

**Segundo teste.** No periluna  $C_3$  é negativo. Caso, durante a integração numérica, em algum instante o valor de  $C_3$  mude para positivo (estamos integrando com passo negativo), temos uma órbita de captura. Em termos de órbita é sair de uma órbita hiperbólica e passar para uma órbita elíptica.

### 9.4. Resultados numéricos para o problema de três corpos restrito

Serão obtidos nesta seção os resultados numéricos preliminares como órbitas de captura, limitadas, de captura restrita ao plano  $XY$  e limitadas restrita ao plano  $XY$ . Para todos os gráficos desta seção  $C_3$  varia em unidades canônicas, o tempo em dias e as distâncias em km.

### 9.4.1 Órbitas de captura gravitacional

Na Figura 9.2 temos uma órbita de captura gravitacional temporária para o problema de três corpos restrito circular. As condições iniciais da órbita são:  $C_3 = -0.05$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$ .

Na Figura 9.3 temos  $C_3$  em função do tempo. O gráfico mostra  $C_3$  inicial negativo e, com a evolução do tempo, existe uma mudança do sinal de  $C_3$  para positivo, caracterizando uma captura gravitacional. O tempo de captura gravitacional é de aproximadamente treze dias. Na Figura 9.4 é feito o gráfico da distância em função do tempo, novamente comprovando captura gravitacional já que o veículo espacial alcança a distância de 100000 km antes dos 50 dias.

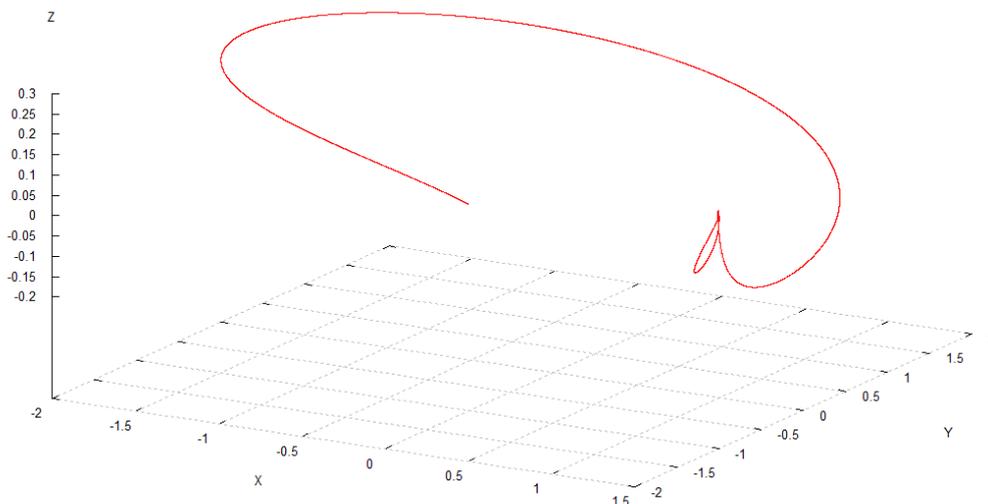


Figura 9 2 órbita de captura do problema de três corpos restrito circular

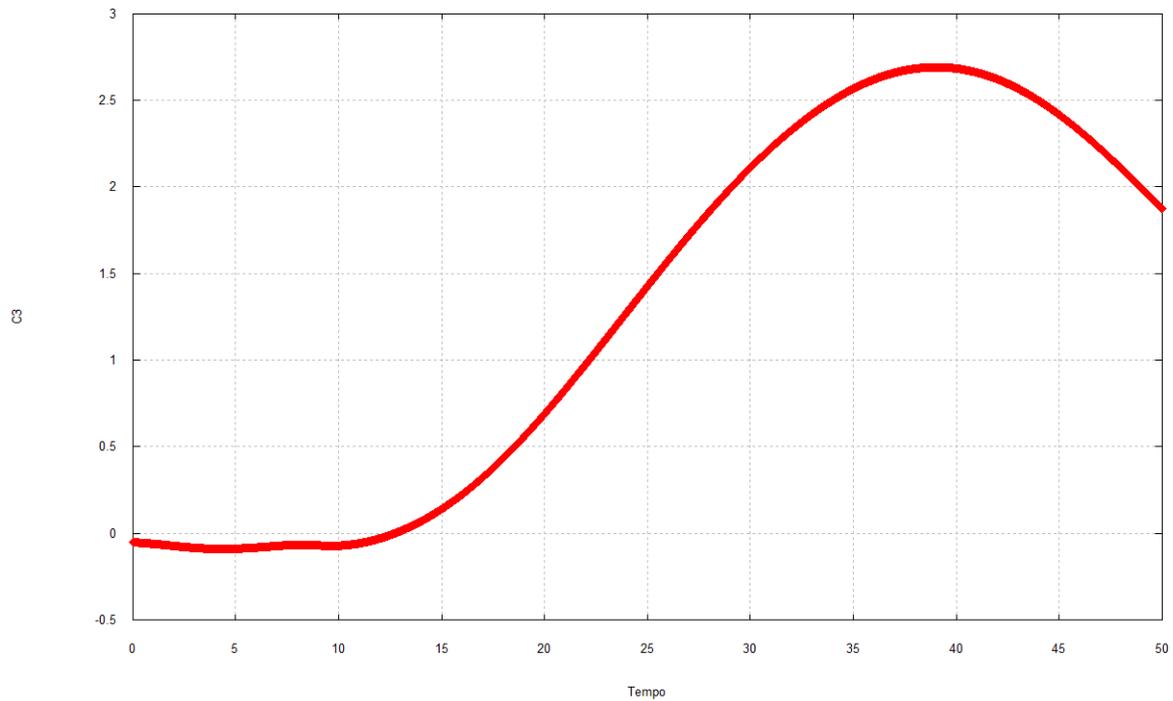


Figura9 3  $C_3$  em função do tempo de captura gravitacional.

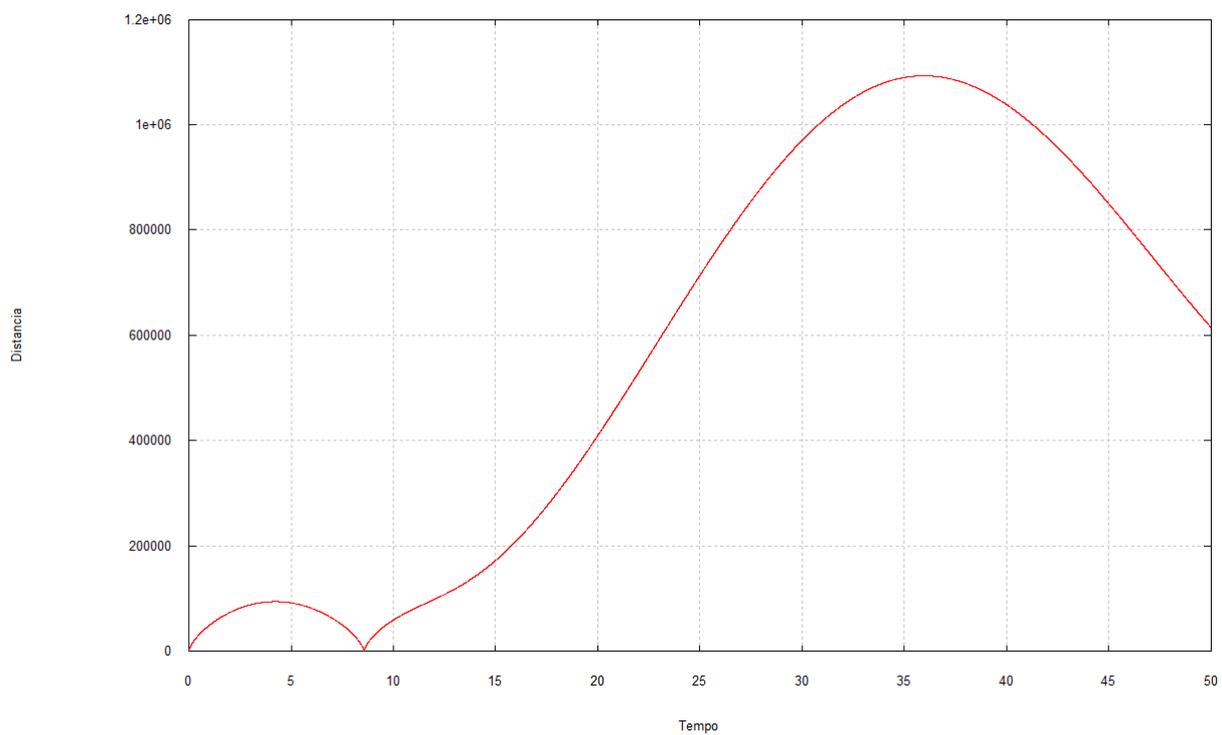


Figura 9 4 Distância em função do tempo

#### 9.4.2. Movimento no plano xy

As equações de movimento do veículo espacial estão no espaço, mas com algumas condições iniciais o movimento fica restrito ao plano  $XY$ . Isto ocorre quando temos  $Z_p = 0$  e  $V_Z = 0$ . Essas condições acontecem quando combinamos os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  com valores de  $0^\circ$  e  $180^\circ$  graus. Na

Figura 9.5 temos  $\alpha = \beta = \gamma = 0^0$  e  $C_3 = -0.2$ , que corresponde a uma órbita de captura gravitacional onde o movimento do veículo espacial esta restrito ao plano  $XY$ . Na Figura 9.6 temos  $C_3$  em função do tempo. É fácil ver que ocorre uma captura gravitacional, pois existe a mudança de sinal de  $C_3$ , de negativo para positivo. O tempo de captura gravitacional é aproximadamente cinco dias. Na Figura 9.7 temos a distância em função do tempo.

Temos na Figura 9.8 uma órbita de captura gravitacional restrita ao plano  $XY$ , com  $C_3 = -0.1$ ,  $\alpha = \beta = 0^0$  e  $\gamma = 180^0$ . O gráfico de  $C_3$  em função do tempo esta na Figura 9.9 e o gráfico da distância em função do tempo na Figura 9.10. O tempo de captura gravitacional é de aproximadamente dois dias.

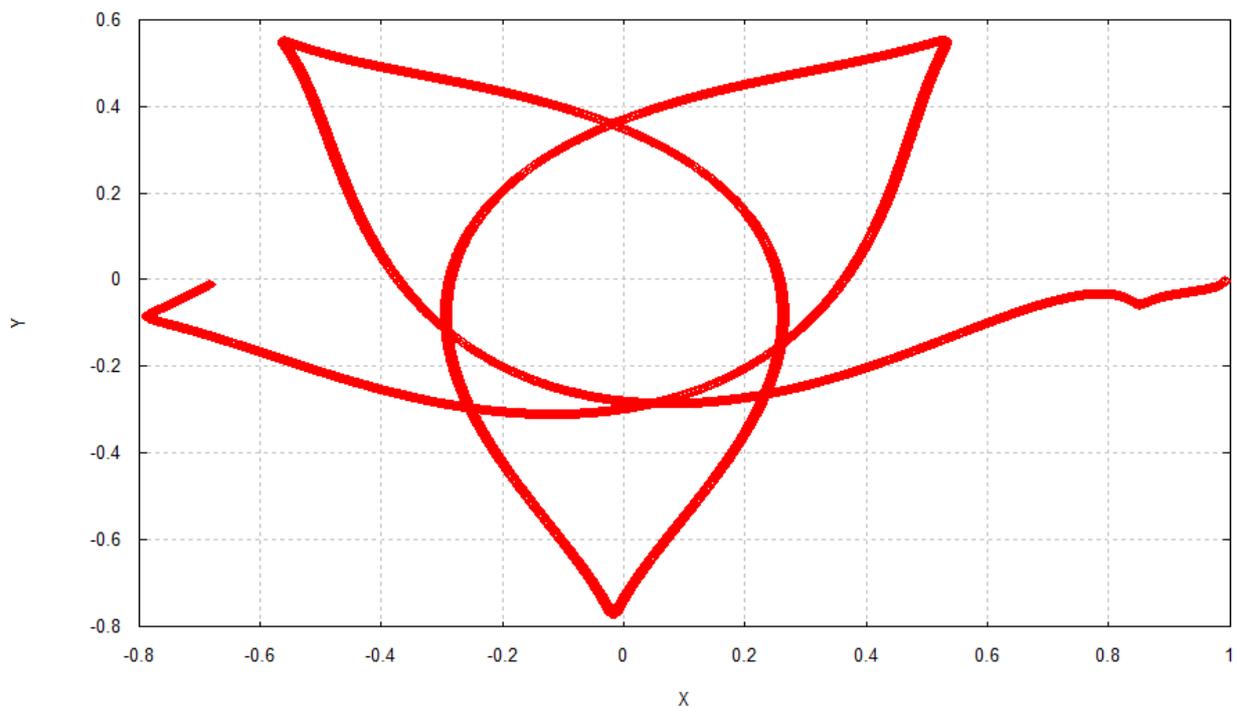


Figura 9 5 órbita de captura gravitacional no plano  $XY$

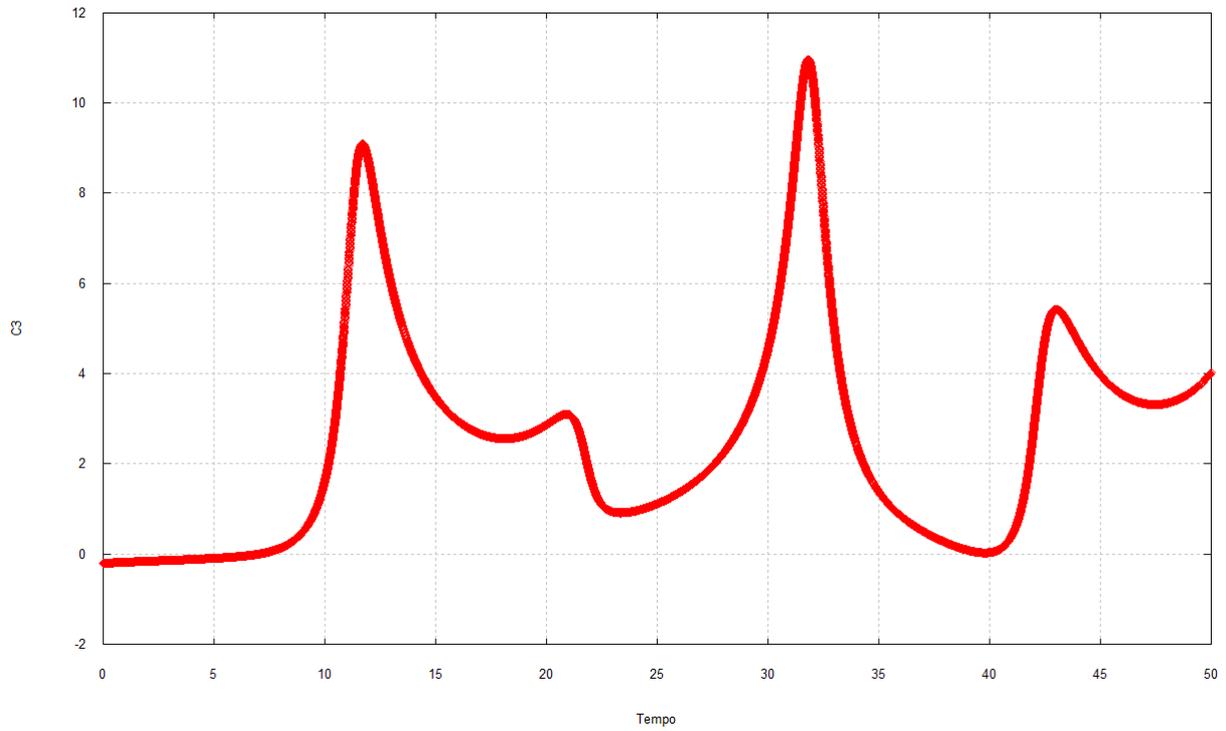


Figura 9.6  $C_3$  em função do tempo

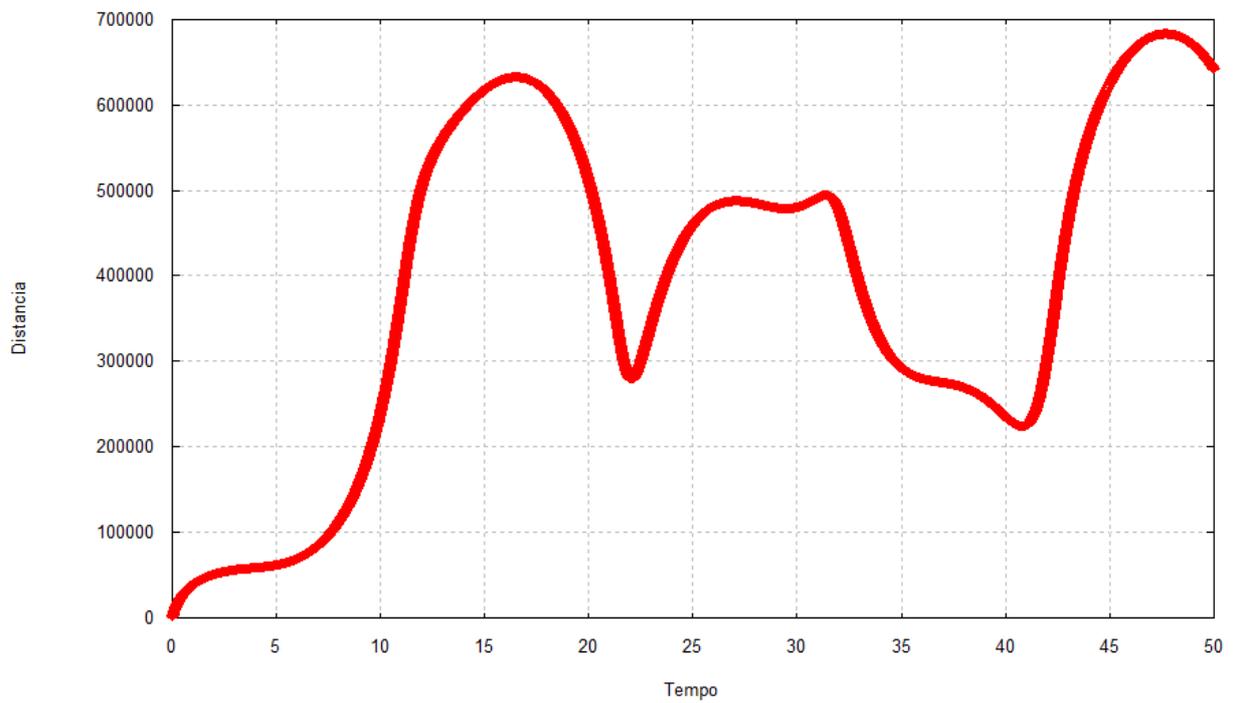


Figura 7 Distância em função do tempo.

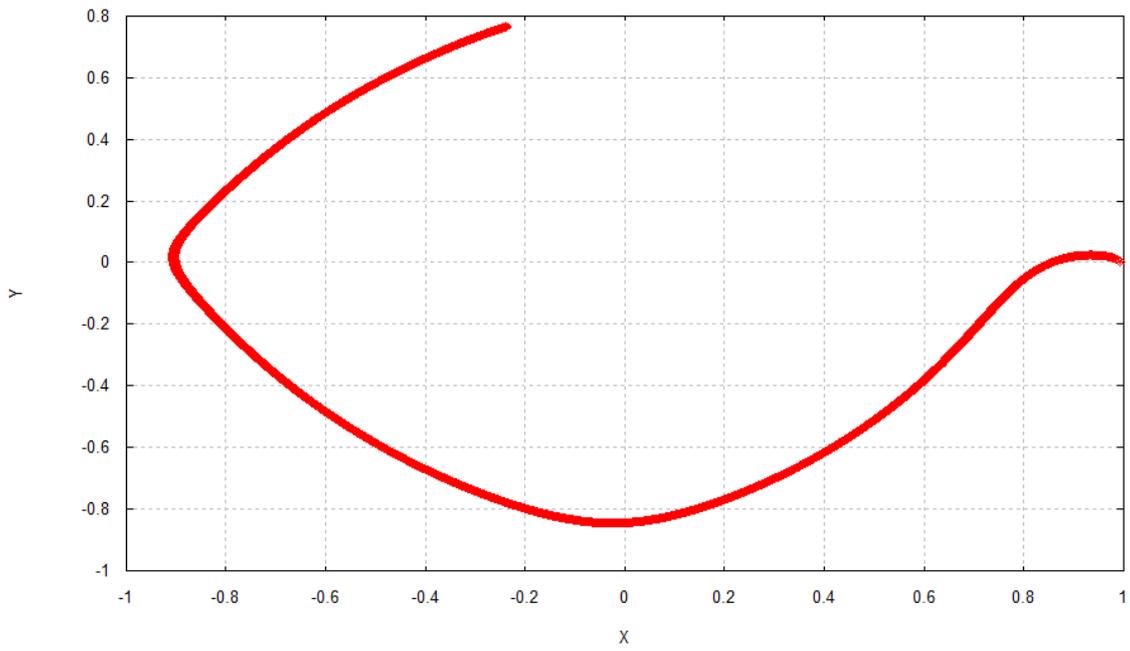


Figura 8 órbita de captura gravitacional no plano XY.

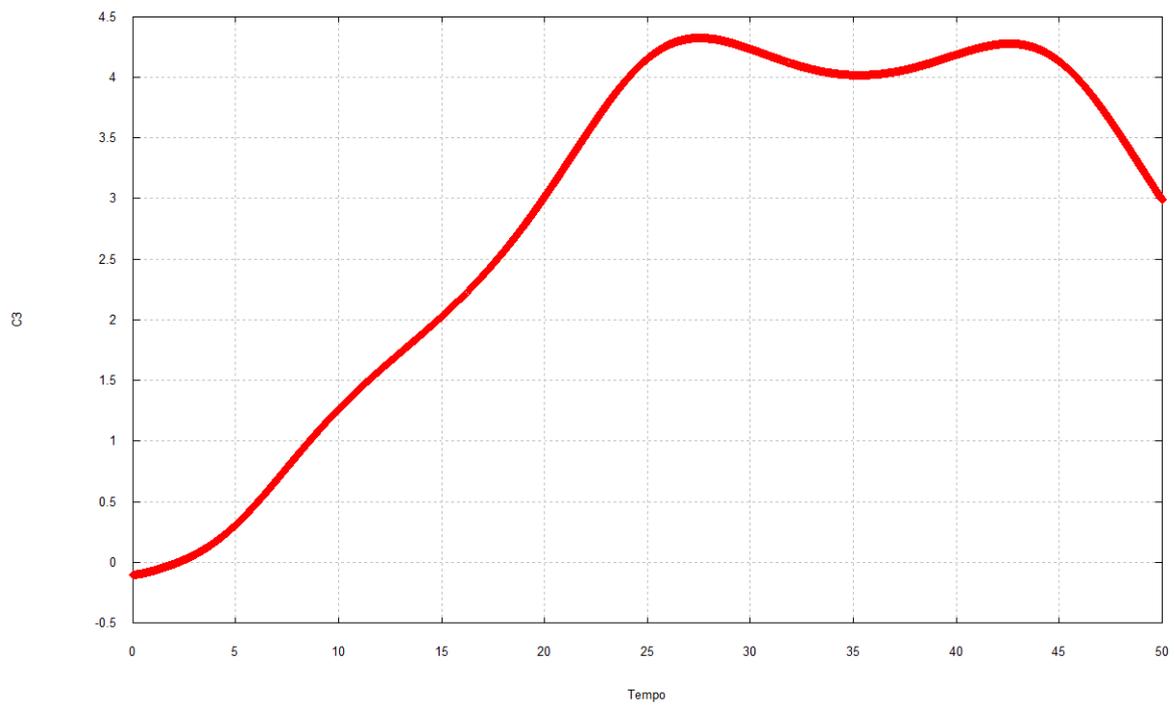


Figura 9.9  $C_3$  em função do tempo.

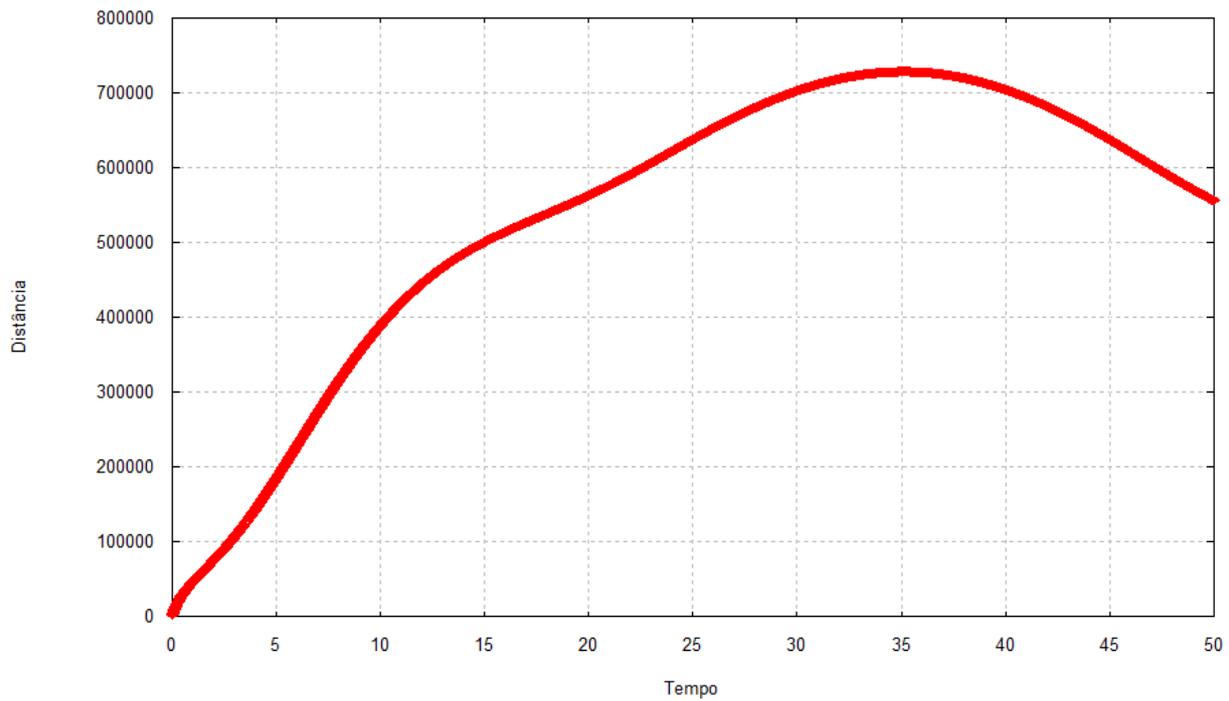


Figura 10 Distância em função do tempo.

### 9.4.3 Órbitas limitadas

No perigluna a energia ( $C_3 = 2$  vezes a energia) entre o veículo espacial e a Lua é negativa. Caso, durante todo tempo de integração (50 dias), a energia conserve o sinal negativo a órbita é chamada de limitada.

Na Figura 9.11 temos uma órbita limitada. Os dados iniciais são  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$  e  $C_3 = -0.2$

Na Figura 9.12 temos uma órbita limitada restrita ao plano  $XY$ , sendo  $\alpha = \beta = \gamma = 0^\circ$  e  $C_3 = -0.4$ .

Os gráficos da energia em função do tempo das duas órbitas limitadas estão nas Figuras 9.13 e 9.14, respectivamente. Observamos que as duas órbitas ficam dentro da esfera de influência todo o tempo de integração (50 dias) e não existe mudança no sinal de  $C_3$  (permanece negativo todo tempo de integração).

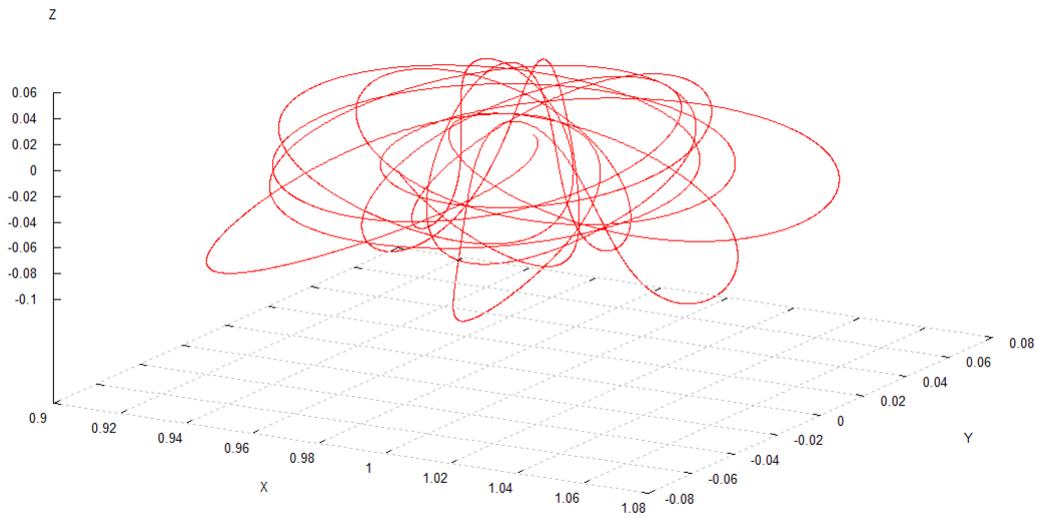


Figura 9.11 Órbita limitada no espaço

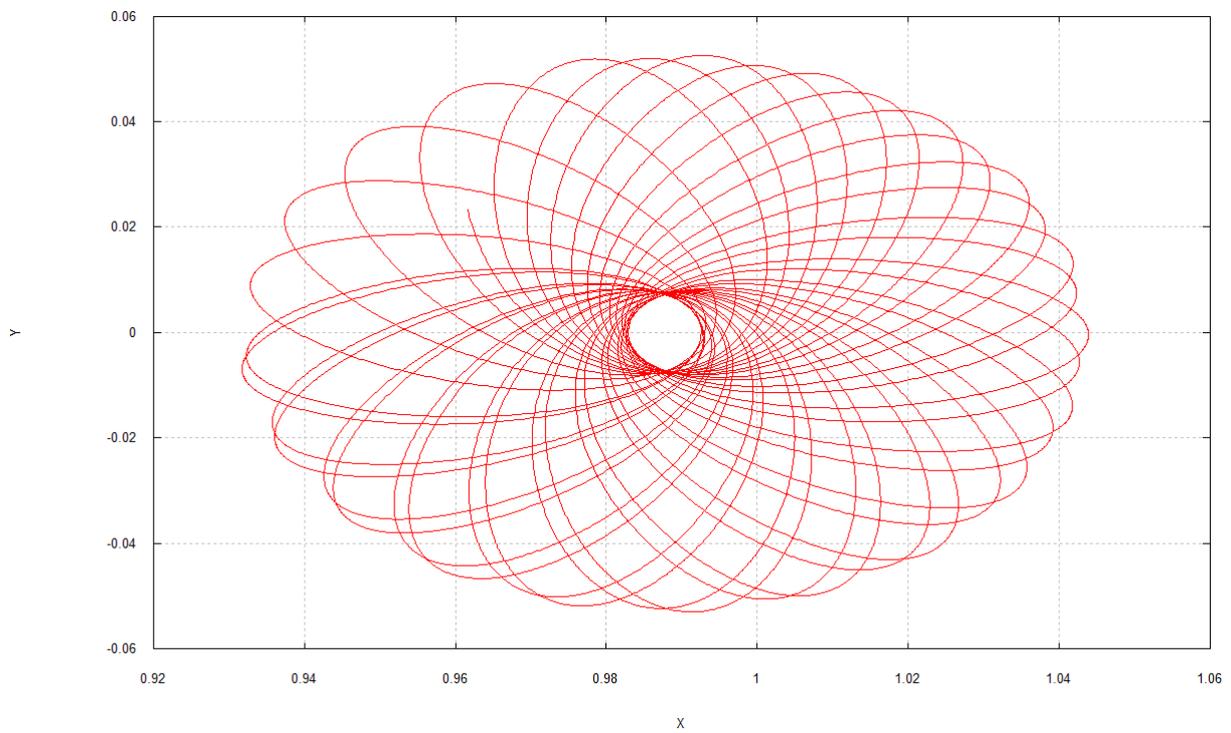


Figura 9.12 Órbita limitada restrita ao plano XY.

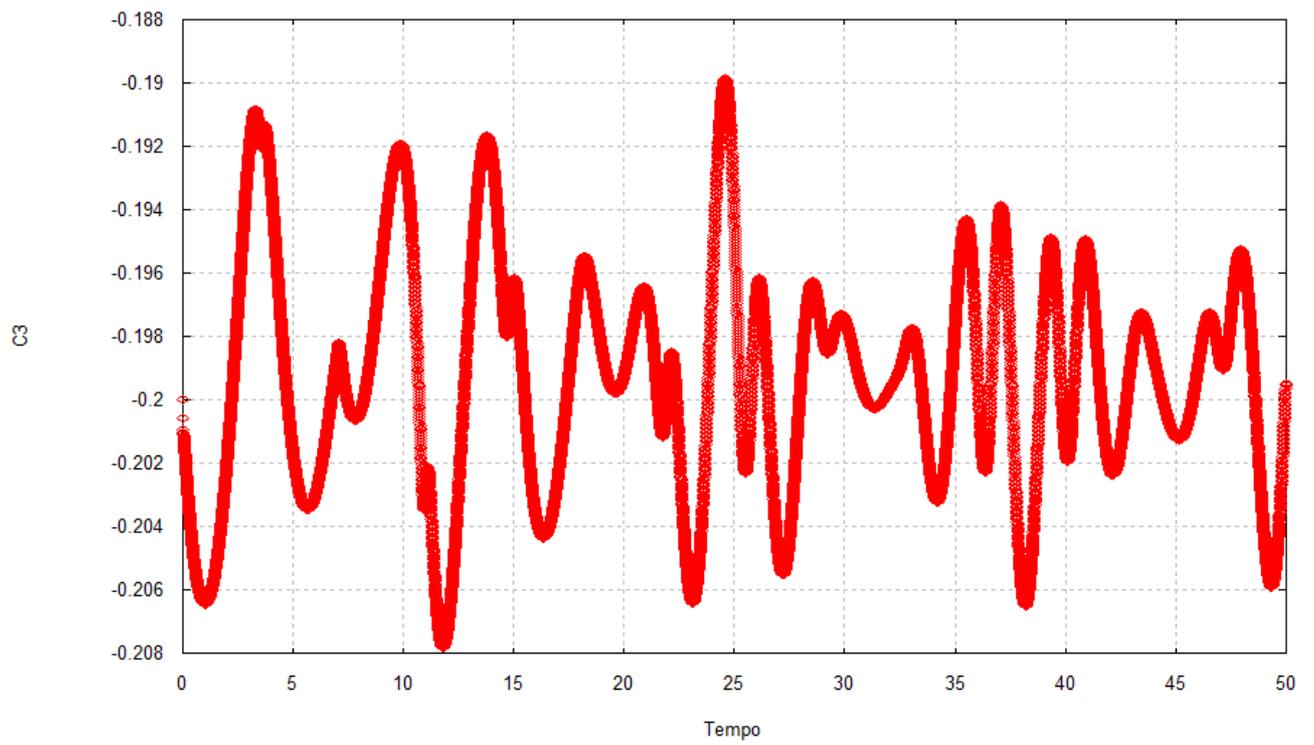


Figura 9.13  $C_3$  em função do tempo para o espaço

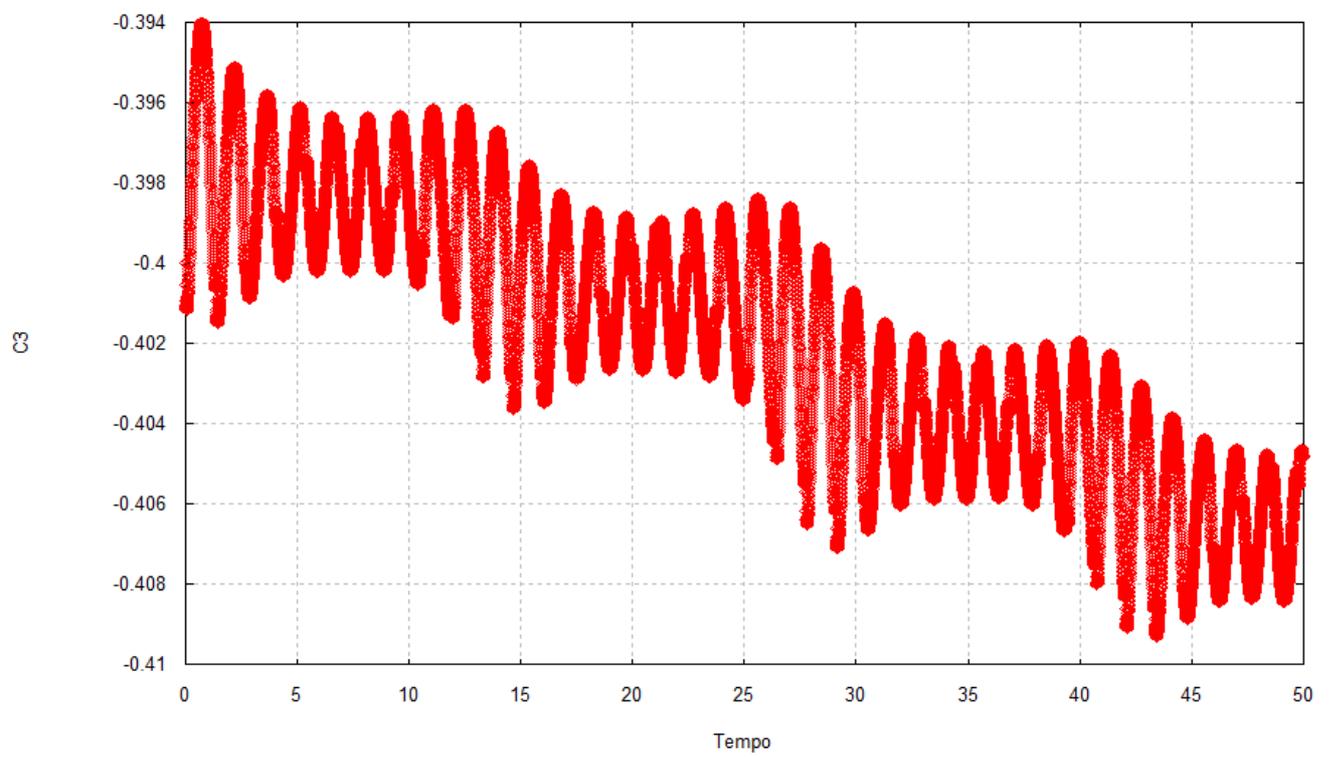


Figura 9.14  $C_3$  em função do tempo para o plano

## 9.5. Variação da energia

Nas Figuras 9.15 e 9.16 temos órbitas de captura gravitacional. As condições iniciais são  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.18$  na figura 9.15, e  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.10$  na Figura 9.16. Nesses dois gráficos temos órbitas de captura, pois existe uma mudança do sinal  $C_3$  de negativo para positivo. Isto pode ser averiguado pelas Figuras 9.17 e 9.18, que são os gráficos de  $C_3$  em função do tempo.

Nas Figuras 9.19 e 9.20 temos gráficos de órbitas limitadas. As condições iniciais são  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$ , e  $C_3 = -0.3$  na Figura 9.19 e  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.2$  na figura 9.20.

Nas Figuras 9.21 e 9.22 que são os gráficos de  $C_3$  em função do tempo e observamos que o sinal de  $C_3$  fica negativo em todo tempo de integração

Dos gráficos abaixo podemos concluir que existe uma grande dependência as condições iniciais. Uma mudança da condição inicial  $C_3$  de -0.18 para -0.2 transforma as órbitas de captura gravitacional em limitadas. Analisaremos, na próxima seção, se a mudança de um dos ângulos também implica essa sensibilidade.

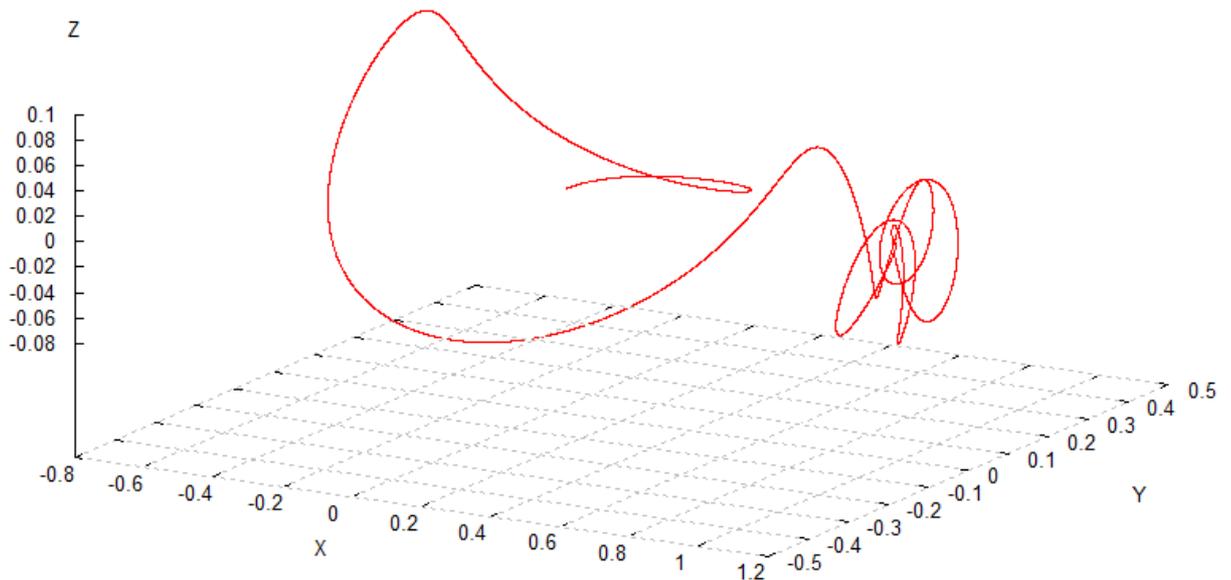


Figura 9.15 Órbita de captura  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.18$ .

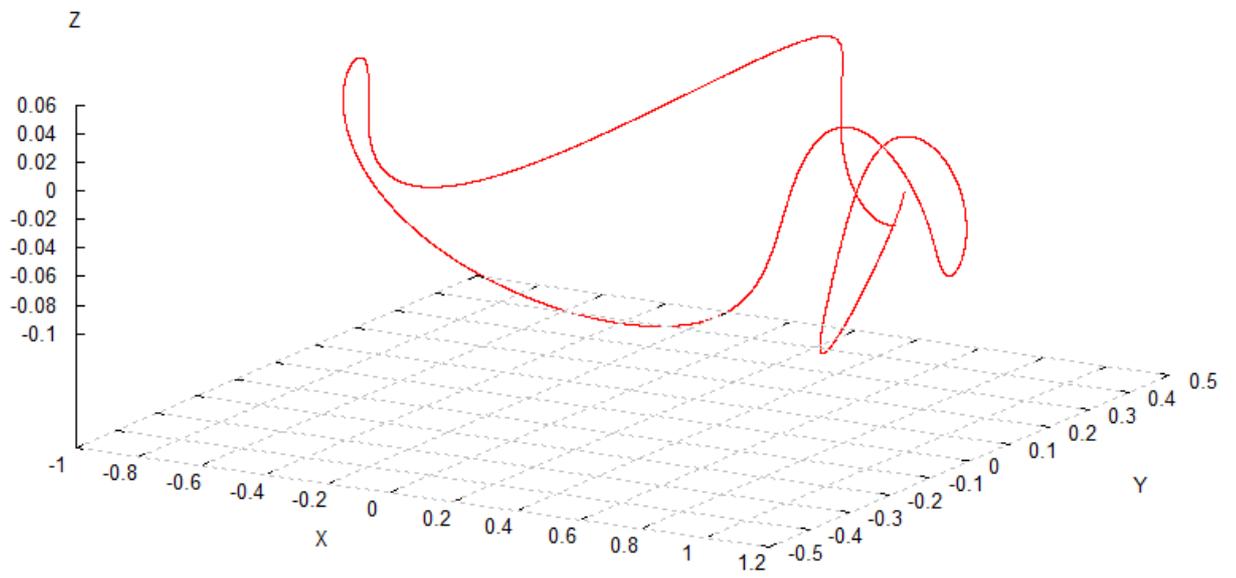


Figura 9.16 Órbita de captura  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.10$

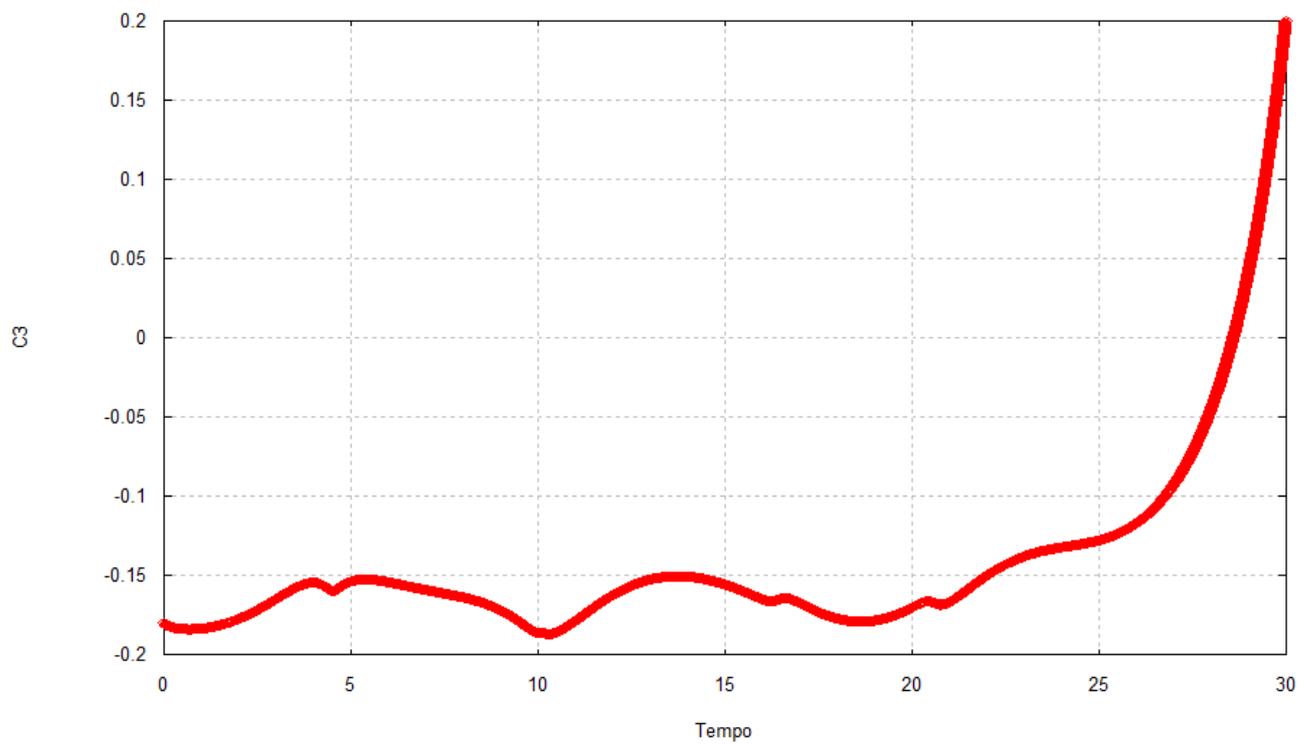


Figura 9.17  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.18$

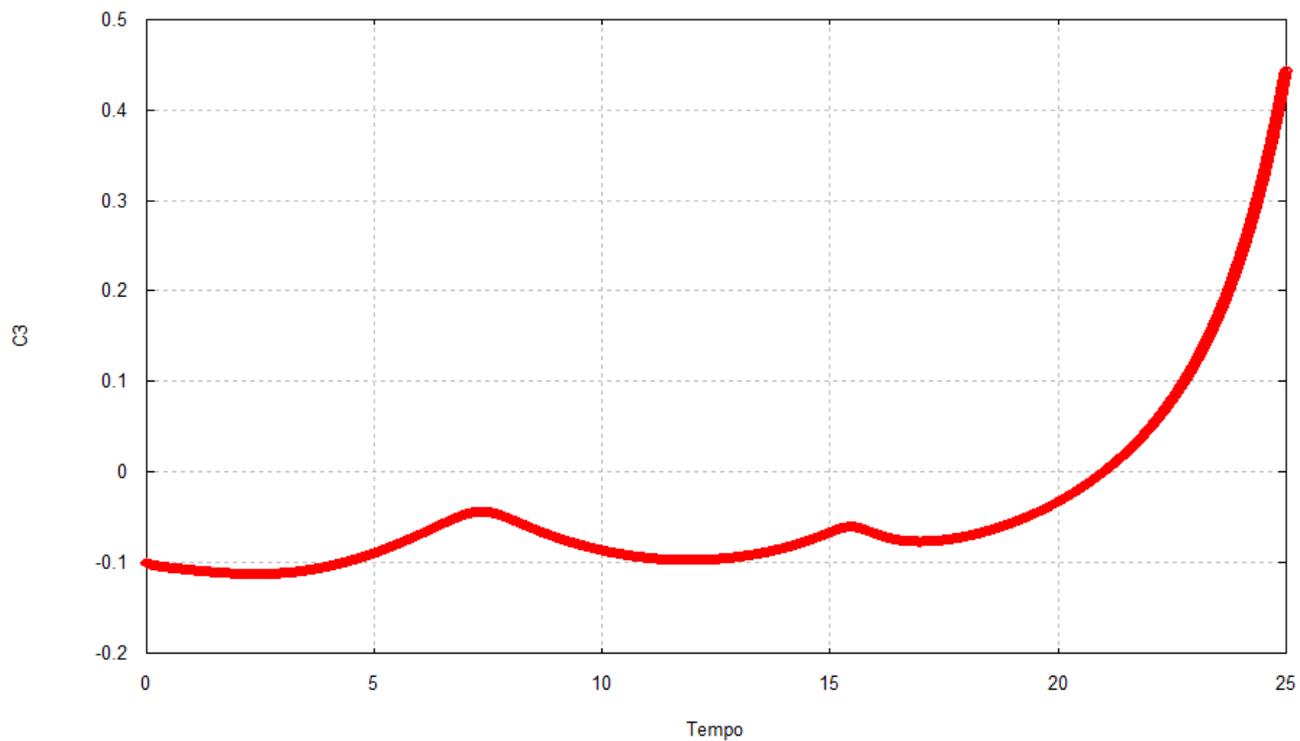


Figura 9.18  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.10$

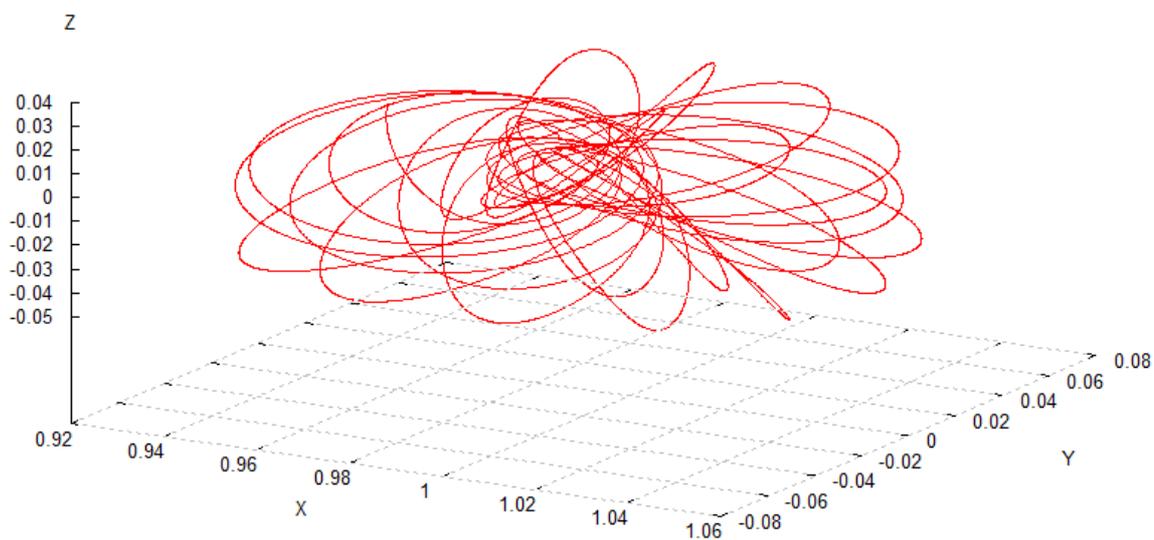


Figura 9.19 Órbita limitada  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.30$

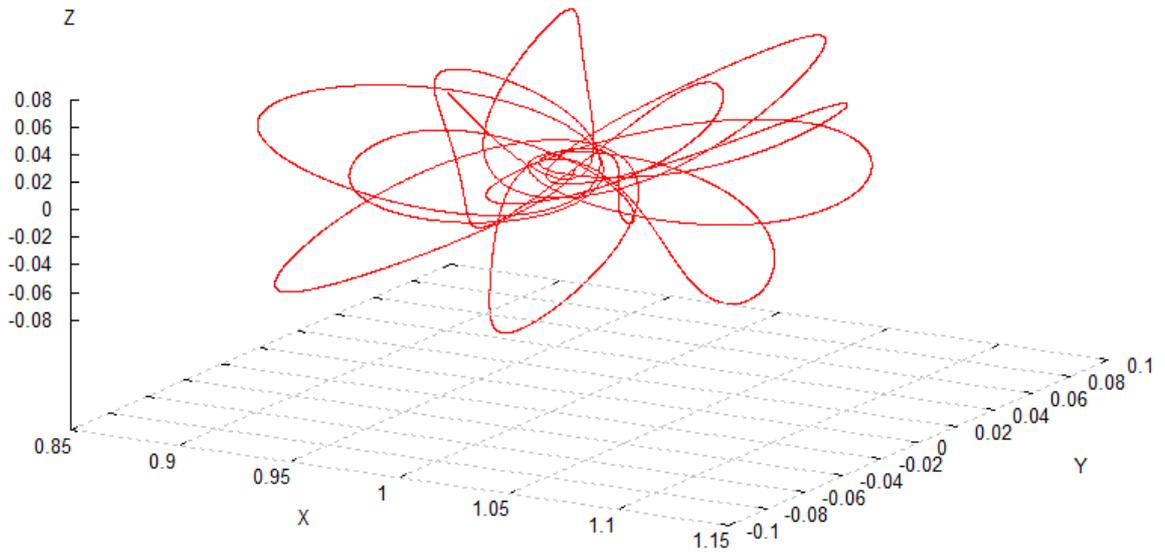


Figura 9.20 Órbita limitada  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.20$ .

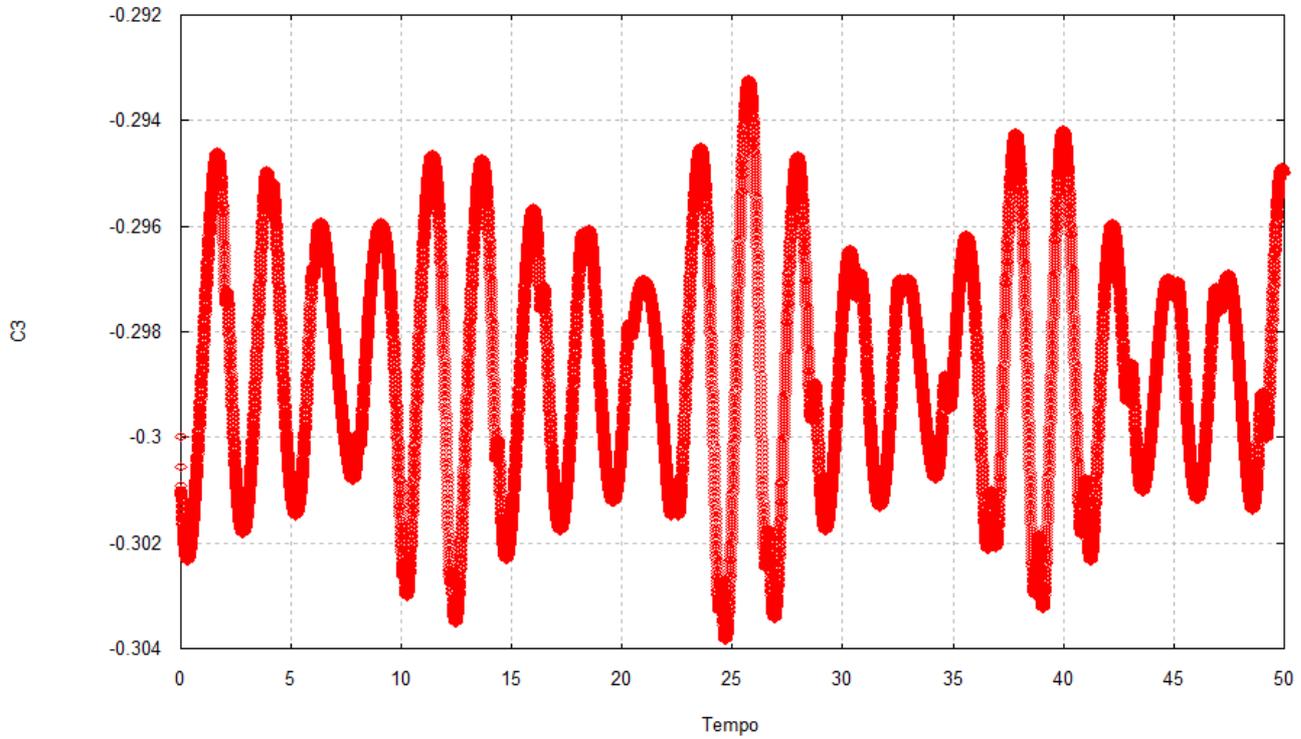


Figura 9.21  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.30$ .

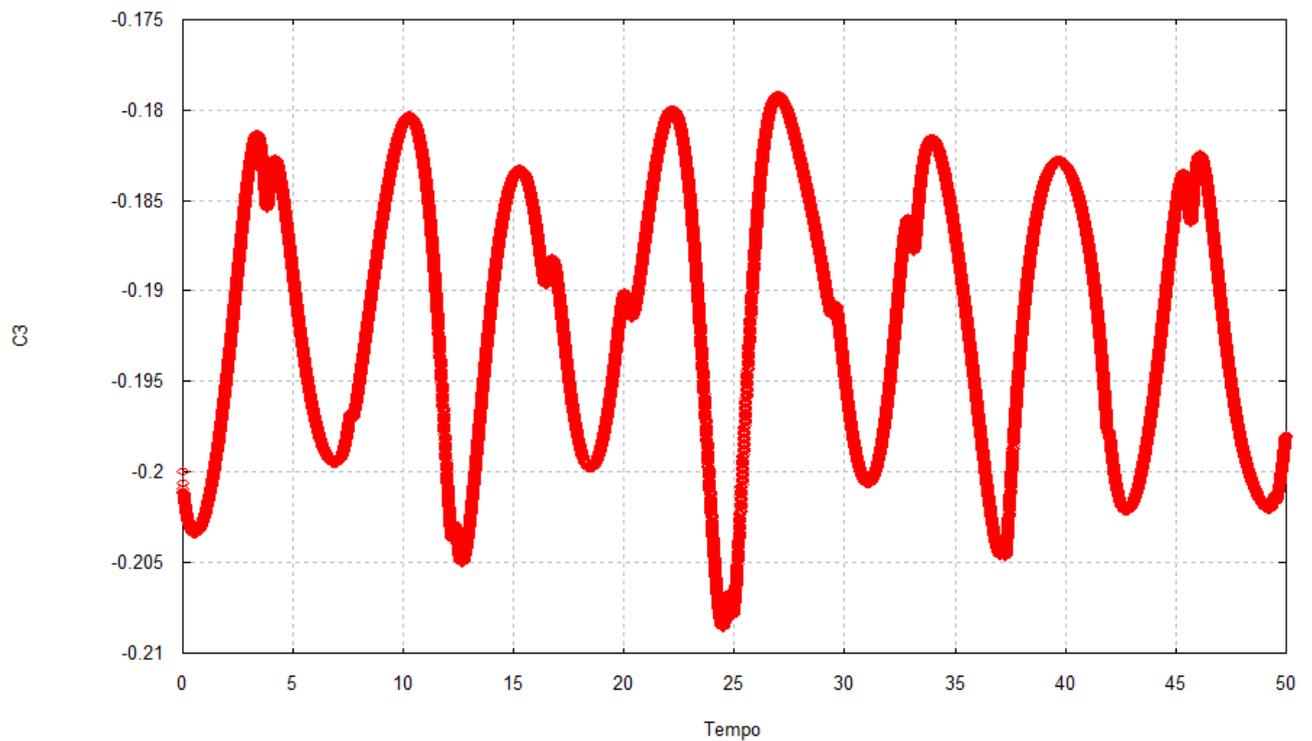


Figura 9.22  $C_3$  em função do tempo  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.20$ .

## 9.6. Variação de ângulos

Na seção anterior deixamos fixos os valores dos ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  e variamos o valor de  $C_3$ , com os valores assumidos na variação de  $C_3$  obtemos diferentes tipos de órbitas diferentes. Faremos agora  $C_3$  fixo modificações nos valores dos ângulos.

### 6.1 Variando o ângulo $\beta$ .

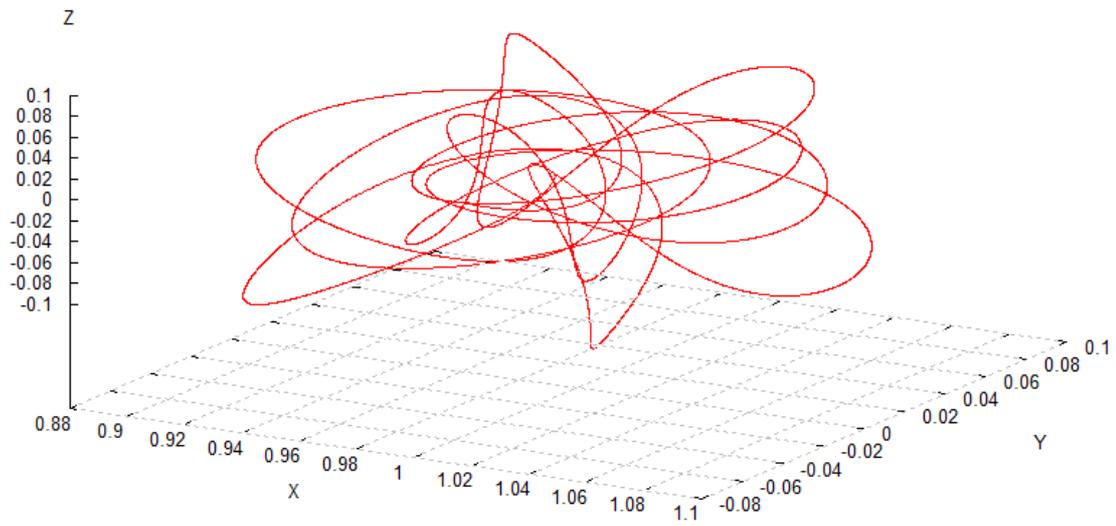


Figura 9.23 Órbita limitada  $\alpha = \gamma = 30^\circ$  e  $\beta = 45^\circ$ .  $C_3 = -0.18$

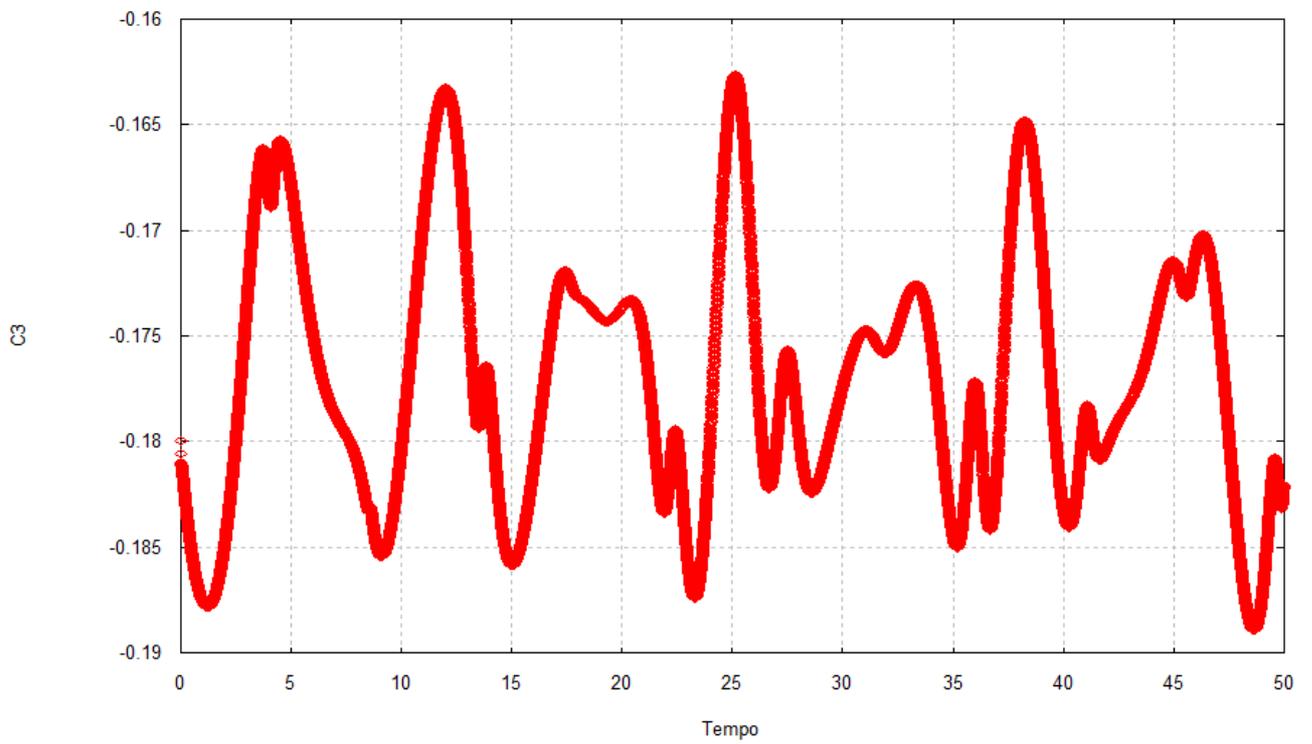


Figura 9.24.  $C_3$  em função do tempo.  $\alpha = \gamma = 30^\circ$  e  $\beta = 45^\circ$ .  $C_3 = -0.18$

Na Figura 9.23 temos uma órbita limitada. As condições iniciais são  $\alpha = \gamma = 30^\circ$  e  $\beta = 45^\circ$  e  $C_3 = -0.1$ . A Figura 9.24 mostra o gráfico de  $C_3$  em função do tempo e pode-se notar que não muda o sinal da energia ficando negativa os 50 dias, caracterizando assim uma órbita limitada. Variando o ângulo  $\beta$  de  $15^\circ$  há uma troca na qualidade das órbitas. Compare as Figuras 9.17 e 9.24.

### 9.6.2 Variando o ângulo $\alpha$ .

Na Figura 9.17 temos uma órbita de captura gravitacional com condições iniciais,  $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.18$ . Mudando o ângulo  $\alpha$  de quatro graus, saímos de uma órbita de captura gravitacional para uma órbita de colisão, isto é, o veículo espacial colide com a Lua. Na Figura 9.25 temos uma órbita de colisão, as condições iniciais são  $\alpha = 34^\circ$ ,  $\beta = \gamma = 30^\circ$ , e  $C_3 = -0.18$ . Na Figura 9.26 temos o gráfico da distância em função do tempo.

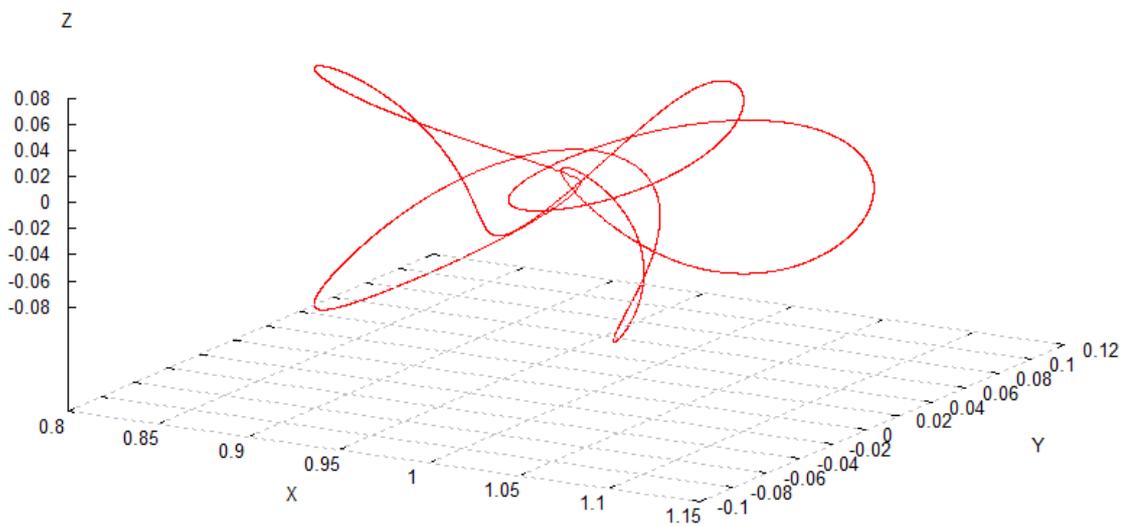


Figura 9.25 Órbita de colisão  $\alpha = 34^\circ$ ,  $\beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_3 = -0.18$ .

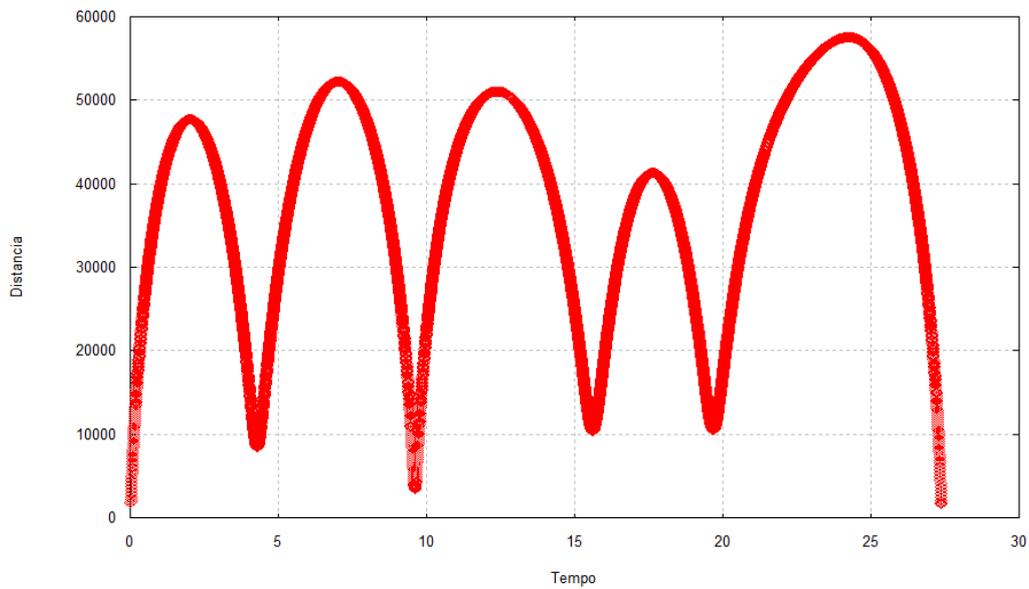


Figura 9.26  $C_3$  em função da distância  $\alpha = 34^\circ$ ,  $\beta = \gamma = 30^\circ$  e  $C_8 = -0.18$ .

### 9.7 Conclusão

Analogamente ao que aconteceu com captura gravitacional no plano, um grande número de resultados numéricos permite afirmar que existe uma grande dependência das condições iniciais para obtermos órbitas de captura. Uma variação de  $C_3$  inicial ou do ângulo  $\alpha$  pode transformar uma órbita de captura gravitacional em uma órbita limitada ou ainda ocorrer uma colisão do veículo espacial com a Lua no problema de três corpos restrito.



## **10 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS**

### **10.1 Introdução**

Neste capítulo fazemos alguns comentários a respeito do trabalho aqui apresentado. Discutimos alguns dos principais pontos e propomos alguns itens de interesse para trabalhos futuros.

### **10.2 Conclusões**

#### **10.2.1 Órbitas**

Um grande número de resultados numéricos calculados no capítulo 4 permite afirmar que existe uma grande dependência das condições iniciais para obtermos órbitas de captura. Uma variação de  $C_3$  inicial ou do ângulo  $\alpha$  pode transformar uma órbita de captura gravitacional em uma órbita limitada ou ainda ocorrer uma colisão do veículo espacial com a Lua no problema de três corpos restrito. No problema bi-circular existe a mesma dependência das condições iniciais para sabermos se uma órbita é de captura gravitacional ou não, neste modelo ainda existe a dependência do ângulo  $\psi_0$ , ângulo inicial do Sol. Essa dependência das condições iniciais é válida para o movimento do veículo espacial para captura gravitacional no plano quanto no espaço.

#### **10.2.2. Mínimo da energia do veículo espacial com relação à Lua.**

Certamente os resultados tratados no capítulo 5 são os de maior interesse prático, pois pode estar ligado ao gasto de combustível do veículo espacial em uma missão espacial. O resultado mais importante da análise da energia do veículo espacial com relação à Lua é o fato de terem sido encontradas regiões em que a captura gravitacional ocorre com um valor de  $C_3$  inicial menor do que em outras regiões do plano. Esse resultado aparece nos dois modelos matemáticos estudados.

#### **10.2.3 Tempo de captura gravitacional**

Nos capítulos 6 e 7 é feita a análise do tempo de captura gravitacional no problema de três corpos restrito circular. Para fazer essa análise fixamos dois dos parâmetros e variamos o terceiro parâmetro, onde os parâmetros são:  $C_3$  (o dobro da energia do veículo espacial e a

Lua),  $\alpha$ , o ângulo da posição da periluna e  $r_p$ , a distância do veículo espacial até o centro da Lua na periluna. No problema bi-circular existe um quarto parâmetro o ângulo  $\psi_0$ , ângulo inicial do Sol.

Um dos resultados obtidos é que a presença do Sol acelera o tempo de captura, isto é, no problema bi-circular de quatro corpos o veículo espacial é capturado mais rapidamente que no problema de três corpos restrito circular.

#### **10.2.4. Sistema Netuno-Tritão**

No capítulo 8 estudamos o sistema Netuno-Tritão e o resultado mais interessante é que o valor mínimo da energia inicial do veículo espacial com relação à Lua é maior que o valor mínimo da energia do veículo espacial com relação à Tritão. Nos dois sistemas, isto é, Terra-Lua e Netuno-Tritão, encontramos regiões favoráveis para captura gravitacional.

### **10.3 Trabalhos futuros**

#### **10.3.1. Variedades invariantes**

Variedades invariantes de um sistema dinâmico são superfícies no espaço de fase que possuem a propriedade de que órbitas que nela iniciem, aí permaneçam com a evolução do sistema. Desta forma, uma variedade invariante  $M$  é uma coleção de órbitas que formam esta superfície.

Pretendo em um estudo futuro fazer o cálculo das variedades invariantes estáveis e instáveis de captura gravitacional dos pontos lagrangianos para examinar qual o papel das mesmas nos transporte de corpos para vizinhança de um primário ao outro ou mesmo escape. Certamente a captura gravitacional e a esfera de influência estão intimamente conectadas a essas variedades.

#### **10.3.2 Sistemas diferentes do sistema Terra-Lua**

Completar o estudo de captura gravitacional que foi introduzido no capítulo oito, com mais resultados numéricos para o sistema Netuno-Tritão.

Júpiter é o maior planeta do sistema solar o quinto a partir do Sol, tem 2,5 vezes mais massa do que todos os outros planetas tomados em conjunto. Júpiter tem 318 vezes mais massa do

que a Terra, um diâmetro 11 vezes superior ao terrestre e um volume 1300 vezes maior que o da Terra. Júpiter tem 63 satélites conhecidos sendo um deles Europa.

Fazer o estudo de captura gravitacional para o sistema Júpiter-Europa, usando como modelos matemáticos os problemas de três corpos restrito circular e bi circular de quatro corpos.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELBRUNO, E. A. Examples of the nonlinear dynamics of ballistic capture and escape in the Earth-Moon system. In: ANNUAL AIAA ASTRODYNAMICS CONFERENCE, August 1990, Oregon, EE.UU. **Proceedings...**Oregon: AIAA, 1990. p. 179-184. (AIAA Paper 90-2896).

BELBRUNO, E. A. **Capture dynamics and chaotic motions in celestial mechanics**. Princeton: Book published by Princeton University Press, 2004. 211p.

BROUCKE, R. A. **Periodic orbits in the restricted three-body problem with Earth-Moon masses**. Pasadena: Jet Propulsion Laboratory, 1968. 92 p. (NASA-Technical Report 32-1168)

CASTELLA, E.; JORBA, A. On the vertical families of two-dimensional tori near the triangular points of the bi-circular problem. **Cel. Mec. Dyn. Astr.** V.76, n. 1, p. 35–54, 2000.

MACHUY, A.L.F., **Cálculo efetivo da forma normal parcial para o problema de Hill**. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2001.

MACHUY, A.L.F.; PRADO A.F.B.A.; STUCHI, T. Numerical study of the time required for the gravitational capture in the bi-circular four-body problem. *Advances in Space Research*. V. 40, p. 118-124, 2007

MILLER, J. K.; BELBRUNO, E. A. A method for the construction of a Lunar transfer trajectory using ballistic capture. In AAS/AIAA Annual Spaceflight Mechanics Meeting 1. , Feb 1991, Houston, EE.UU. **Proceedings...** Houston: Spaceflight mechanics, 1991. p. 97-109. (AAS Paper 91-100)

Murray, C. D.; Dermott, S. F. **Solar system dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 591p.

PRADO, A.F.B.A. Numerical study and analytical estimation of forces acting in ballistic gravitational capture. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 25, n. 2, p. 368-375, 2002.

SIMO, C. et al. The bi-circular model near the triangular libration points of the RTBP, In: Roy, A.E., Steves, B.A. (Eds.). **From Newton to chaos**. New York, Plenum Press, p. 370–3453, 1995.

SZEBEHELY, V. **Theory of orbits: the restricted problem of three bodies.** New York: Academic Press Inc., 1967. 667p.

VIEIRA NETO, E. **Estudo numérico da captura gravitacional temporária utilizando o problema restrito dos três corpos.** 1999. 224p. (INPE-7033-TDI/663). Teses (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espacial) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 1999.

VIEIRA NETO, E; WINTER O.C. Time Analysis for Temporary Gravitational Capture: Satellites of Uranus. **Astronomical Journal**, v. 122, n. 1, p. 440-448, 2001.

WINTER O.C; MURRAY, C.D. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem. I. Internal orbits.** London: Queen Mary and Westfield College, 1994a. 8p. (QMW Math Notes N16).

YAMAKAWA, H. **On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture.** 1992. 223p. Ph.D. dissertation - Dept. of Aeronautics, Univ. of Tokyo, Tokyo. 1992.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)