

**Aspectos da não linearidade em fenômenos de ressurgimento por uma  
técnica não perturbativa**

André Gontijo Campos

Julho de 2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Aspectos da não linearidade em fenômenos de ressurgimento por uma técnica não perturbativa

André Gontijo Campos

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Prof. Carlos Henrique Costa Moreira

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Física.

Julho de 2009

*Dedico este trabalho aos meus sobrinhos, Victor e Luiza, aos meus pais e meus irmãos*

# Agradecimentos

Agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Agradeço também a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

# Resumo

No presente trabalho aplicamos uma técnica semi-clássica não perturbativa para estudar tempos de ressurgimentos em modelos de relevância física. Primeiramente utilizamos um modelo esquemático que é usado frequentemente para simular a interação interatômica em condensados de Bose-Einstein. O modelo é analiticamente solúvel e nos permite compreender a técnica matemática e suas limitações num contexto físico. Em seguida investigamos o perfil da não linearidade de ordem mais alta nos tempos de ressurgimento. Este problema, tecnicamente bastante complicado pôde ser resolvido com uma técnica algébrica desenvolvida por Carlos Heitor D'Ávila Fonseca do departamento de física da UFMG, mostramos que existe uma dramática mudança qualitativa nos tempos de ressurgimento. Por fim, estudamos um outro modelo bastante usado na literatura para explorar dois condensados interagentes. Investigamos seus tempos de ressurgimento e a limitação da técnica em todos os casos.

# Abstract

In the present work we apply a semi-classical non-perturbative technique to study revival times in relevant models. First we use a schematic model that is commonly used to simulate the interatomic interaction in Bose-Einstein condensates (BEC). The model has an exact solution and allows us understand the mathematical technique used in this work and its limitations in a physical context. Next we investigate the role of non-linearity in higher orders in the revival times. This problem, technically very complicated could be solved with an algebraic technique developed by Carlos Heitor D'Ávila Fonseca, from the physics department of UFMG. We showed that there is a dramatic qualitative change in the revival times. Next we study another model widely used in the literature to explore two BEC with mutual interaction. We investigate the revival times and the limitations of the techniques in all cases.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Condensados de Bose-Einstein</b>	<b>11</b>
2.1	A idéia dos condensados de Bose-Einstein . . . . .	11
2.1.1	A fórmula de Planck segundo Bose . . . . .	12
2.1.2	Diferenças entre fótons e átomos . . . . .	15
2.1.3	Condensação de N átomos confinados em uma armadilha harmônica. . . . .	17
2.2	Descrição e papel das interações entre bosons . . . . .	20
2.2.1	Interação efetiva . . . . .	21
2.2.2	Papel da interação entre bosons no condensado . . . . .	23
2.2.3	Aproximação de campo médio gaussiana . . . . .	24
2.3	Alguns resultados experimentais . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Diagramas para operadores bosônicos</b>	<b>32</b>
3.1	Introdução . . . . .	32
3.2	Os diagramas . . . . .	33
3.2.1	Aplicação a um estado de Fock . . . . .	35
3.2.2	Grau de degenerescência . . . . .	36
3.3	O polinômio funcional . . . . .	38
3.4	Ordenamento dos operadores . . . . .	42
3.4.1	Ordenamento normal . . . . .	43
3.4.2	Ordenamento antinormal . . . . .	43
3.4.3	Ordenamento natural . . . . .	44

<b>4</b>	<b>Dinâmica exata do operador aniquilação sobre a evolução temporal de operadores de dois ou mais corpos.</b>	<b>46</b>
4.1	Hamiltoniano . . . . .	46
4.2	Dinâmica do operador $a(t)$ . . . . .	47
4.3	Estados coerentes . . . . .	48
4.3.1	Estados coerentes como autoestados do operador destruição . . . . .	49
4.4	Atuação de $a(t)$ sobre estados coerentes . . . . .	50
4.5	Ordenamento normal de $(a^\dagger a)^n$ . . . . .	51
4.6	Ordenamento normal de $a(t)$ . . . . .	51
4.7	Valor esperado $\langle \alpha   a(t)   \alpha \rangle$ . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Aproximação assintótica: cálculo de tempos de ressurgimento e o papel da não linearidade</b>	<b>55</b>
5.1	Caso Geral . . . . .	55
5.2	Caso $\gamma = 2$ . . . . .	59
5.2.1	Resultados . . . . .	62
5.3	Caso $\gamma = 3$ . . . . .	63
5.3.1	Resultados . . . . .	64
5.4	Estimativa dos termos de erro . . . . .	65
5.5	Aplicação da aproximação assintótica para o caso de dois condensados interagentes . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Fórmula da soma de Poisson</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Aproximação Gaussiana</b>	<b>76</b>
<b>C</b>	<b>Método <i>Steepest Descents</i></b>	<b>78</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Quando se resfria uma coleção de átomos com spin inteiro a temperaturas menores do que um micro-kelvin, observa-se o fenômeno de condensação de Bose-Einstein. O primeiro grupo a observar o fenômeno, foi o grupo de Cornell em 1995 [1,2]. A condensação resulta numa situação muito inusitada em que o sistema apresenta admiráveis propriedades de coerência. A natureza do sistema depende crucialmente da interação de dois corpos (se é atrativa ou repulsiva) além de provocar efeitos quânticos macroscópicos, como o que vamos estudar, de colapsos e ressurgimentos, tão conhecidos da óptica quântica.

De fato, quem primeiro mostrou teoricamente colapsos e ressurgimentos em condensados atômicos de Bose-Einstein foi D.F. Walls et. al. [3]. Nesse trabalho, Walls mostra que a função de onda macroscópica do condensado exibe colapsos e ressurgimentos periódicos que, a medida que o valor médio de átomos no condensado aumenta, tende a uma coleção de picos igualmente espaçados semelhantes a funções delta.

Tendo em vista esse trabalho e a forma pouco rigorosa, apesar de bastante física, com que os tempos de ressurgimento foram obtidos e pensando ainda em outros possíveis experimentos com mais espécies de átomos, desenvolvemos no presente trabalho uma técnica sofisticada que nos permite obter tempos de ressurgimento e calcular o erro na previsão feita para uma gama ampla de modelos. Outro exemplo de aplicação da fórmula em outros temas que não condensados seria modelos tipo Jaynes-Cummings para o qual também existe uma dedução bastante física mas pouco rigorosa [4,5].

No que se refere ao aprendizado, isto é, a preparação para desenvolvimento do

trabalho, estudei com o Prof. Carlos Moreira do departamento de matemática da UFMG uma aproximação assintótica que constituiu a base de nossas estimativas em vários modelos. Com o prof. Carlos Heitor do departamento de física da UFMG, aprendi uma técnica diagramática que nos permitiu analisar interações altamente não lineares.

Dado isso, fizemos três estudos de caso, todos exibindo ressurgimentos: o modelo altamente esquemático para um condensado auto-interagente, um modelo do mesmo tipo porém com interações não-lineares de ordem mais alta e um modelo de dois condensados mutuamente interagentes. Aprendemos com isso que a não-linearidade modifica drasticamente os ressurgimentos e complica tremendamente os cálculos.

Finalmente usamos um modelo da literatura que trata de dois condensados não apenas auto-interagentes mas também com uma interação de Josephson (que permite a troca de espécies) [18]. Esse modelo é solúvel e portanto podemos comparar os resultados de nossa técnica com um modelo realístico de BEC descrito na referência [18]. Em cada caso obtivemos os tempos de ressurgimentos, suas correções e limitações do modelo. Esperamos que após este "ensaio" de sucesso possamos abordar problemas desse tipo em várias áreas da Física.

# Capítulo 2

## Condensados de Bose-Einstein

Vou seguir os passos de A.F.R. de Toledo Piza [6].

### 2.1 A idéia dos condensados de Bose-Einstein

O trabalho que lançou a idéia do que veio a ser chamado de "condensação de Bose-Einstein", foi publicada em 1924 ( a referência completa é *Zeitschrift für Physik* **26**, 178 (1924)), ou seja, anterior ao trabalho de 1925 de Heisenberg onde pela primeira vez a teoria quântica aparece separada da cinemática clássica de trajetórias que ainda prevalece na velha teoria quântica de Bohr, por exemplo. O trabalho é de autoria de Bose, da Universidade de Dacca, Índia. Ele foi escrito em inglês mas publicado em alemão numa tradução de A. Einstein, com uma nota do tradutor, onde ele afirma se tratar de uma "contribuição de peso". O título do trabalho de Bose era "A fórmula de Planck e a hipótese dos quanta de luz". O assunto é, portanto, a radiação de corpo negro. O trabalho foi enviado a Einstein por conter uma crítica ao uso de um ingrediente clássico, a lei de deslocamento de Wien, e de um outro que valoriza a concordância da teoria quântica com a teoria clássica, o princípio de correspondência de Bohr, no trabalho de 1917 em que Einstein, por sua vez, obtém a fórmula de Planck utilizando a idéia do quanta de luz. O que Bose faz, essencialmente, é usar idéias da mecânica estatística aplicadas diretamente aos quanta de luz e o que Einstein fez em seguida foi estender o tratamento a um sistema de partículas livres, mostrando que em temperaturas suficientemente baixas

ocorre o empilhamento de uma fração finita de partículas no estado de menor energia. É a esse empilhamento que se chamou condensação de Bose-Einstein.

### 2.1.1 A fórmula de Planck segundo Bose

Bose chegou à fórmula de Planck usando a idéia de que a luz de frequência  $\nu$  é formada de "quanta" cuja energia é  $h\nu$  e cujo momento é um vetor de módulo  $p = h\nu/c$  na direção de propagação do quantum (ou fóton) sendo  $h$  a constante de Planck. Para poder escrever a energia total de um sistema contendo muitos fótons de diversas frequências em um volume  $V$ , é conveniente em primeiro lugar dividir a escala de frequências em um grande número de pequenos intervalos  $d\nu$ . Chamando  $\bar{n}_i$  o número de fótons com frequência dentro do pequeno intervalo cuja frequência média é  $\nu_i$ , a energia total  $E$  pode ser escrita como

$$E = \sum_i \bar{n}_i h\nu_i. \quad (2.1)$$

O problema então é determinar os valores dos  $\bar{n}_i$  que correspondem ao estado de equilíbrio termodinâmico do conjunto de fótons no volume  $V$ . Isso foi feito por Bose escolhendo a distribuição macroscópica que é compatível com o número máximo de realizações microscópicas.

Para caracterizar uma distribuição microscópica do conjunto de fótons, Bose dividiu o espaço de fase dos fótons em pequenas "células", cada uma das quais com volume  $h^3$ . Essas células são, então, todas numeradas, e uma distribuição microscópica é caracterizada em termos de "números de ocupação"  $n_i$  que especificam quantos fótons se encontram na célula  $i$  do espaço de fases.

As células de volume  $h^3$  são agrupadas em "pacotes" de  $g \gg 1$  células, sendo numerados cada um com seu próprio rótulo  $j$  e são contados todos os fótons  $N_j$  que estão contidos em cada um dos pacotes. A distribuição macroscópica é caracterizada então pelo conjunto dos  $N_j$ . A distribuição é arranjada de forma que o número de pacotes também seja muito grande, embora cada um deles contenha, como foi dito, um número muito grande  $g$  de células.

A questão que se coloca é quantas distribuições microscópicas correspondem a

uma dada distribuição macroscópica. A resposta a essa questão<sup>1</sup> é dada pelo número de maneiras de redistribuir os  $N_j$  fótons do  $j$  – ésimo pacote entre as suas  $g$  células constituintes. Para ver qual é a solução, é conveniente representar cada um dos pacotes de  $N_j$  fótons por um símbolo  $\bullet$  e representar a parte da distribuição microscópica que corresponde às  $g$  células do  $j$  – ésimo pacote por uma seqüência do tipo

$$1 \bullet 23 \bullet \bullet \bullet 4 \bullet 567 \bullet \bullet 89 \bullet \dots g \bullet \bullet$$

significando que na célula 1 há um fóton, nenhum na 2, 2 na 3, etc. A quantidade de  $\bullet$  depois de cada número representa os fótons que estão na célula do pacote considerado que tem esse número, de modo que o número total de  $\bullet$  na seqüência é  $N_j$ . Com esse estratagema é fácil ver que o número de distribuições microscópicas distintas dentro do  $j$ -ésimo pacote, que é chamado "o peso estatístico" do pacote,  $P_j$ , é

$$P_j = \frac{(g + N_j - 1)!g}{g!N_j!}.$$

De fato, cada seqüência deve começar por um número entre 1 e  $g$ ; o número de permutações dos demais é então  $(g + N_j - 1)!$ , mas se o primeiro puder ser qualquer um dos números entre 1 e  $g$ , é preciso ainda multiplicar esse número por  $g$ . O resultado inclui agora permutações tanto dos fótons quanto das células. A permutação dos números é redundante, porque qualquer distribuição microscópica pode ser representada escrevendo os números de 1 a  $g$  na sua ordem natural e essa redundância é corrigida por  $g!$ . O outro fator no denominador,  $N_j!$ , é incluído a pretexto do fato de que os *fótons são indistinguíveis* portanto a contagem de suas permutações também é redundante. Esse procedimento pode ser usado para cada um dos pacotes independentemente, de modo que o peso estatístico total  $P_{tot}$  de uma dada distribuição macroscópica, caracterizada por um conjunto de números  $N_j$  é dada por

$$P_{tot} = \prod_j P_j = \prod_j \frac{(g + N_j - 1)!g}{g!N_j!}.$$

---

<sup>1</sup>O cálculo a seguir constitui na realidade uma variante daquele que foi utilizado por Bose. Ele reproduz o que se encontra na referência [29].

O problema seguinte é determinar qual é a distribuição de  $N_j$ 's, com energia total  $E$  dada, para qual  $P_{tot}$  é máximo. É mais conveniente buscar o máximo do logaritmo de  $P_{tot}$ , pois o logaritmo é uma função que cresce monotonicamente. Supondo que  $g$  e  $N_j$  são números suficientemente grandes para que os logaritmos dos fatoriais possam ser aproximados pela fórmula de Stirling

$$\ln N! \simeq N \ln N - N,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \ln P_{tot} &\simeq \sum_j [\ln g + (g + N_j - 1) \ln(g + N_j - 1) - (g + N_j - 1) - g \ln g + g - N_j \ln N_j + N_j] \\ &\simeq \sum_j [(g + N_j) \ln(g + N_j) - g \ln g - N_j \ln N_j]. \end{aligned}$$

A simplificação conseguida na última linha resultou de desprezar 1 e  $\ln g$  em comparação com  $g$ ,  $N_j$  e  $g + N_j$ . Definindo a *ocupação média* de cada uma das células do  $j$  – ésimo pacote,  $\bar{n}_j \equiv N_j/g$ , se obtém

$$\ln P_{tot} \simeq \sum_j g[(\bar{n}_j + 1) \ln(\bar{n}_j + 1) - \bar{n}_j \ln \bar{n}_j] = \sum_i [(\bar{n}_i + 1) \ln(\bar{n}_i + 1) - \bar{n}_i \ln \bar{n}_i], \quad (2.2)$$

onde o fator  $g$  foi absorvido substituindo a soma sobre pacotes  $j$  pelo soma sobre células  $i$  (todas as células de cada pacote tendo a mesma ocupação média). O máximo de  $\ln P_{tot}$  deve ser agora calculado variando as ocupações médias  $\bar{n}_i$  das células com a condição que a energia total tenha o valor prescrito  $E$ . Supondo que as células tenham sido escolhidas de forma que cada uma delas corresponda a fótons de energia dada  $h\nu_i$ . Essa condição pode ser levada em conta através de um multiplicador de Lagrange  $\beta$ , calculando o extremo não apenas de  $\ln P_{tot}$  mas de  $\ln P_{tot} - \beta E$ , isto é, obtendo os  $\bar{n}_i$  que tornam nula a variação dessa quantidade,  $\delta(\ln P_{tot} - \beta E) = 0$ . Em termos dos  $\bar{n}_i$ ,

$$\delta \sum_i [(\bar{n}_i + 1) \ln(\bar{n}_i + 1) - \bar{n}_i \ln \bar{n}_i - \beta \bar{n}_i h\nu_i] = 0, \quad (2.3)$$

ou seja

$$\sum_i \delta \bar{n}_i (\ln(\bar{n}_i + 1) - \ln \bar{n}_i - \beta h\nu_i) = 0.$$

Como o anulamento deve valer para variações  $\delta\bar{n}_i$  arbitrárias, resulta que

$$\ln\left(\frac{\bar{n}_i + 1}{\bar{n}_i}\right) = \beta h\nu_i, \text{ ou seja } \bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta h\nu_i} - 1}.$$

Esse resultado é uma função do multiplicador de Lagrange  $\beta$ , que deve ser determinado através da condição (2.1). O significado de  $\beta$  pode ser obtido a partir da expressão de Boltzmann para a entropia

$$S = k_B \ln P_{tot},$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann, e da relação entre a entropia e a energia  $\partial S/\partial E = 1/T$ , sendo  $T$  a temperatura. Isso dá  $\beta = 1/k_B T$ . A distribuição de equilíbrio resultante

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{h\nu_i}{k_B T}} - 1},$$

é uma *distribuição de Bose-Einstein*. Ela conduz diretamente à fórmula de Planck. Como as ocupações médias  $\bar{n}_i$  dependem apenas da energia dos fótons, que dependem apenas do módulo do momento, o volume do espaço de fases que corresponde a um pequeno intervalo de energia  $d\nu$  tomado em torno de frequência média  $\nu$  será,

$$V \times 4\pi p^2 dp = V \times 4\pi \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu,$$

de modo que o número de células com volume  $h^3$  será  $V \times 4\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$ . A rigor, esse número deve ser multiplicado por 2 para acomodar os dois estados possíveis de polarização dos fótons, o que leva o número de células a  $V \times 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$ . Usando esse resultado na expressão para a energia (2.1), a contribuição  $dE$  dos fótons que se encontram nessas células será

$$dE = V \times 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \times \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \text{ ou } \frac{1}{V} \frac{dE}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1},$$

que é a fórmula de Planck.

### 2.1.2 Diferenças entre fótons e átomos

O tratamento dado por Bose aos "quanta de luz" torna muito semelhantes a partículas. Em particular, o espaço de fase clássico usado serve também para partículas com massa como, por exemplo, átomos. Existe, no entanto, uma diferença importante: ao

interagir com a matéria, fótons podem ser absorvidos, podendo ocorrer também a emissão de novos fótons pela matéria. Assim, mesmo a energia total sendo fixa, o número total de fótons não precisa obedecer qualquer prescrição. No caso de partículas (átomos), esse número total também é prescrito e isso implica que o cálculo do extremo de  $\ln P_{tot}$  feito na seção anterior deve ser modificado de modo a levar em conta esse prescrição adicional. Se o número total de átomos é  $N$ , a nova prescrição pode ser escrita em termos das ocupações médias  $\bar{n}_i$  das células como

$$N = \sum_i \bar{n}_i, \quad (2.4)$$

que pode ser incluída em (2.3) por meio de um segundo multiplicador de Lagrange  $\alpha$ , de modo que a condição de extremo passa a ser

$$\delta \sum_i [(\bar{n}_i + 1) \ln(\bar{n}_i + 1) - \bar{n}_i \ln \bar{n}_i - \beta \bar{n}_i h\nu_i - \alpha \bar{n}_i] = 0. \quad (2.5)$$

Um cálculo semelhante ao feito para os fótons nos leva à seguinte equação

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta e_i + \alpha} - 1}$$

Note que a expressão  $h\nu_i$  para a energia dos fótons foi substituída por  $e_i$ , que deve ser entendida como a energia associada aos átomos da célula  $i$ . Determina-se o valor de  $\alpha$  por (2.4) da mesma forma que o de  $\beta$  é determinado por (2.1). Se  $\beta$  é expresso em termos da temperatura, a prescrição sobre o número total de átomos é levada em conta escolhendo  $\alpha$  de modo a satisfazer a relação

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\frac{e_i}{k_B T} + \alpha} - 1}. \quad (2.6)$$

Do mesmo modo que, dada a relação entre  $\ln P_{tot}$  e a entropia  $S$ , relações termodinâmicas gerais foram usadas para relacionar  $\beta$  com a temperatura, é possível relacionar também  $\alpha$  com variáveis termodinâmicas. Para isolar a variável relevante,  $\alpha$  deve ser escrito em termos de uma nova quantidade  $\mu$  como  $\alpha = -\mu/k_B T$ . A quantidade  $\mu$  corresponde então ao que se chama *potencial químico*. Assim

$$e^\alpha = e^{-\frac{\mu}{k_B T}} \equiv \frac{1}{z} \text{ portanto } z \equiv e^{\frac{\mu}{k_B T}} = e^{-\alpha}.$$

A quantidade  $z$  é conhecida como *fugacidade*. A determinação de  $\alpha$  através de (2.6) determina uma outra quantidade termodinâmica, o potencial químico  $\mu$ , ou, de maneira

equivalente, a fugacidade  $z$ . A ocupação média das células do espaço de fase,  $\bar{n}_i$ , pode ser escrita em termos do potencial químico como

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{e_i - \mu}{k_B T}} - 1}.$$

Esta última expressão revela uma limitação importante sobre o potencial químico  $\mu$ : como  $\bar{n}_i$  não pode ser negativo, é preciso que  $e^{\frac{e_i - \mu}{k_B T}} > 1$ , o que por sua vez implica que se deve ter  $e_i > \mu$ , para todos  $e_i$ . Assim,  $\mu$  deve ser menor do que o menor dos  $e_i$ . Quanto mais ele tiver que se aproximar do menor dos  $e_i$  na tentativa de satisfazer a condição (2.6), mais a ocupação média das células correspondentes será favorecida em relação as demais. O mecanismo numérico por trás da condensação de Bose-Einstein é, a partir deste ponto de vista, o favorecimento extraordinário da ocupação média das células de menor energia quando, para acomodar o número prescrito  $N$  de bósons, é preciso que  $\mu$  se aproxime drasticamente desse limite superior.

### 2.1.3 Condensação de $N$ átomos confinados em uma armadilha harmônica.

A continuação natural do que foi dito até aqui consiste em usar energias de partículas livres de massa  $M$ ,  $e_i = p_i^2/2M$  para com elas calcular uma distribuição  $\bar{n}_i$ , tomando o "limite termodinâmico" que consiste em pensar em um número muito grande de átomos em um volume também muito grande, de modo que a densidade tenha um valor dado. O fato de que a alguns anos atrás [1] a condensação de Bose-Einstein em um gás rarefeito de Rubídio foi pela primeira vez produzida e observada num laboratório, estando o gás confinado em uma armadilha magnética, reorientou o interesse para uma situação física diferente: de um vasto gás no sentido termodinâmico usual para um conjunto finito de  $N$  átomos presos em uma armadilha. Em 1996, Ketterle e van Druten [30] estudaram a relação (2.6) para um sistema formado por  $N$  bosons submetidos a um potencial externo de oscilador harmônico, que representa a armadilha experimental. Esse potencial é

$$V(x, y, z) = \frac{K_x}{2}x^2 + \frac{K_y}{2}y^2 + \frac{K_z}{2}z^2,$$

não sendo necessariamente isotrópico, de modo que as superfícies equipotenciais são em geral elipsóides mais ou menos alongados ou achatados, dependendo dos valores adotados para as constantes elásticas  $K_x$ ,  $K_y$  e  $K_z$ . A idéia era verificar o acúmulo de bosons no estado de menor energia dependente da forma do potencial confinante, particularmente em casos em que as equipotenciais são muito achatadas (configurações bidimensionais) ou muito finas e compridas (configurações unidimensionais). Aqui nos restringiremos ao caso em que as três constantes elásticas são iguais a  $K$ , que corresponde a equipotenciais esféricas. As energias  $e_i$  que entram no cálculo de (2.6) são agora os níveis quânticos de energia de um boson de massa  $M$  nesse potencial de oscilador que, definindo a energia do menor estado como sendo zero, são dados pela expressão

$$e_i \longrightarrow e_{n_i^x n_i^y n_i^z} = (n_i^x + n_i^y + n_i^z) \hbar\omega, \quad (2.7)$$

onde  $n_i^x$ ,  $n_i^y$  e  $n_i^z$  são inteiros não negativos  $0, 1, 2, \dots$  e  $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ . A condição (2.6) assume a forma mais conveniente reescrevendo as ocupações médias  $\bar{n}_i$  como

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{e_i - \mu}{k_B T}} - 1} = \frac{e^{-\frac{e_i - \mu}{k_B T}}}{1 - e^{\frac{e_i - \mu}{k_B T}}} = \frac{ze^{-\frac{e_i}{k_B T}}}{1 - ze^{-\frac{e_i}{k_B T}}}, \quad (2.8)$$

onde  $z = e^{\frac{\mu}{k_B T}}$  é a fugacidade. Como a escala de energia foi escolhida de modo que a menor energia é zero, resulta que a ocupação do estado de menor energia  $\bar{n}_0$  se exprime em termos da fugacidade como

$$\bar{n}_0 = \frac{z}{1 - z}. \quad (2.9)$$

A expressão (2.8) pode ainda ser escrita como a soma de uma série infinita usando a expressão para soma de uma série geométrica

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1 - x},$$

onde  $x < 1$ . Que dá, usada em (2.8),

$$\bar{n}_i = ze^{-\frac{e_i}{k_B T}} \sum_{j=0}^{\infty} \left( ze^{-\frac{e_i}{k_B T}} \right)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \left( ze^{-\frac{e_i}{k_B T}} \right)^j = \sum_{j=1}^{\infty} z^j e^{-j \frac{e_i}{k_B T}}.$$

Levando em conta a condição (2.6), usando a forma explicita (2.7) para as energias  $e_i$ , ficamos com

$$N = \sum_i \bar{n}_i = \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jn \frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right)^3 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{\left( 1 - e^{-j \frac{\hbar\omega}{k_B T}} \right)^3}.$$

O resultado do trabalho feito é então ter a condição (2.6) posta, no caso da armadilha harmônica, sob a forma

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{\left(1 - e^{-j \frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)^3}. \quad (2.10)$$

Uma vez fixados  $N$  e o potencial da armadilha, esse último através da frequência  $\omega$  do oscilador, e para um dado valor da temperatura  $T$ , essa relação pode ser vista como uma equação para determinar a fugacidade  $z$  ou de forma equivalente, o potencial químico  $\mu$ . Como a equação acima não pode ser resolvida analiticamente, devemos usar métodos numéricos para avaliar as grandezas de interesse. Resultados numéricos para fugacidade  $z$  e para a fração do número  $N$  de bosons que ocupam o estado de menor energia  $\bar{n}_0/N$ , são mostrados como função da temperatura no gráfico da figura 2.1. A relação entre  $\bar{n}_0/N$  é dada pela relação (2.9). A temperatura está representada em unidades de uma temperatura de referência  $T_c^0$ , definida como

$$T_c^0 \equiv \left(\frac{N}{1.202}\right)^{1/3} \frac{\hbar\omega}{k}. \quad (2.11)$$

O número 1.202... é o resultado da série  $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^3$ , incluído na definição de  $T_c^0$  para que o valor de  $T/T_c^0$  abaixo do qual o empilhamento de bosons no estado de menor energia ocorre se aproxime de 1 quando  $N$  se torne muito grande. Como mostrado na figura 2.1, a fração  $N_0/N$  dos bosons que se empilham no estado de menor energia, dado em termos da fugacidade pela equação (2.9) cresce rapidamente quando  $T/T_0$  cai abaixo de 1, especialmente nos casos em que o número de partículas é maior. Portanto, a temperatura  $T_0$  desempenha o papel de uma temperatura de transição para o empilhamento. O valor da temperatura de transição é

$$T_0 = T_c^0 \equiv \left(\frac{N}{1.202}\right)^{1/3} 4.8 \times 10^{-11} \times \nu(\text{Hz})K,$$

onde  $\nu$  é a frequência da armadilha em Hertz. Para um valor típico  $\nu = 200\text{Hz}$ ,  $T_0$  é da ordem de 40 nano-Kelvin para  $N = 100$ , 200 nano-Kelvin para  $N = 10000$  e 400 nano-Kelvin para  $N = 100000$  partículas.

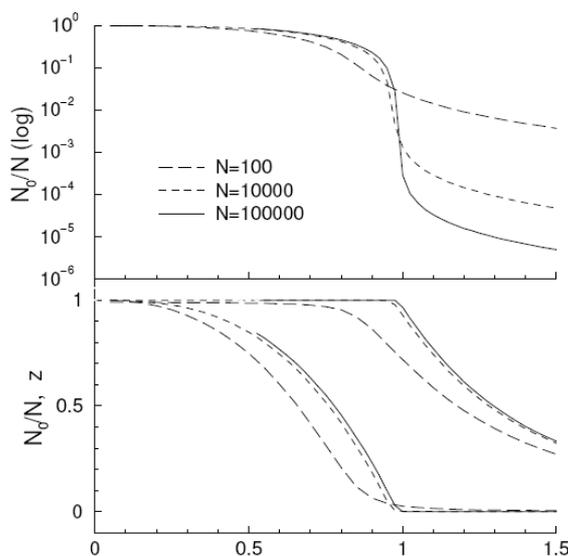


Figura 2.1: Ocupação do estado de menor energia,  $N_0/N$ , e fugacidade,  $z$ , (apenas no gráfico inferior) como função de  $T/T_0$ , para os valores indicados do número total de partículas  $N$ . Note que o eixo das abcissas no gráfico superior é logarítmico para mostrar mais claramente o comportamento de  $N_0/N$  na região de transição. O eixo horizontal se refer a  $T/T_0$ . A figura foi tirada de [6]

## 2.2 Descrição e papel das interações entre bosons

Os bosons tratados até aqui não interagem entre si. Na realidade as interações existem, e o propósito do que segue é indicar modos de lidar com seus efeitos no contexto dos condensados de Bose-Einstein. Graças as interações, o que existem não são gases atômicos ideais, assim, diferentes átomos, possivelmente um número enorme deles estão de certa forma correlacionados entre si. Os estados de tal sistema não são bem descritos por energias de átomos individuais, e é preciso criar esquemas mais adaptados a essas complicações. Tudo isso é de certa forma verdade, mas não é toda a verdade, pois o Rubídio a temperaturas próximas ao zero absoluto é um sólido, quando, por outro lado, um gás rarefeito de Rubídio mostra condensação de Bose-Einstein em laboratório a essas *mesmas* temperaturas. As interações aqui tiveram seus efeitos, mas elas não tem muito a ver com as que dominam a cena no caso do sólido. Procurando entender os efeitos das

interações no gás rarefeito e frio vamos ter mais elementos para fazer uma idéia mais clara do que pode separar tão bem esses dois cenários.

### 2.2.1 Interação efetiva

Os condensados de Bose-Einstein produzidos em laboratório não são apenas muito frios, mas também muito rarefeitos; com densidades típicas de  $10^{15}$  ou  $10^{14}$  átomos por centímetro cúbico. Isso faz com que a distância média entre átomos seja suficientemente grande para que, quando dois deles interagem, a probabilidade de que um terceiro átomo esteja perto o suficiente para interagir com os dois seja muito pequena. Como átomos no condensado são extraordinariamente frios, a interação de dois deles é essencialmente elástica. Os processos elásticos conservam energia e momento, e uma combinação dessas duas circunstâncias ( espalhamento elástico e quase sempre espalhamento elástico de dois átomos) é o que dá ao condensado sua relativa estabilidade. Como a ligação entre dois átomos requer que eles percam energia, e como esse processo de perda de energia se dá com a participação de um terceiro átomo que carrega a energia sobressalente com ele, a baixa densidade dos condensados conferem-lhe uma vida longa, de até vários segundos. Na medida em que mecanismos de colapso do tipo recombinação de três corpos possam ser ignorados, o que há a considerar é portanto a interação de um par de átomos quase livres, que antes de iniciar a interação dispõe para isso muito pouca energia cinética. Nessas condições, o processo de colisão é extremamente insensível às particularidades da interação, e pode ser muito bem caracterizado através de um único parâmetro diretamente relacionado com a seção de choque de espalhamento elástico dos dois átomos. Em geral, para um dado valor da energia envolvida na colisão, a seção de choque elástica  $d\sigma/d\Omega$  é uma função possivelmente complicada do ângulo de espalhamento, e portanto exige vários parâmetros para sua caracterização. No entanto, se a energia de interação for muito baixa, no sentido de que o comprimento de onda de de Broglie  $\lambda = h/p$  é muito maior que o alcance da interação entre os átomos, a seção de choque se torna independente do ângulo de espalhamento. Como ele tem dimensões de área, pode ser escrita como  $d\sigma/d\Omega = a^2$ , onde  $a$  tem dimensões de comprimento. Devido a isso, a seção de choque total é dada por  $\sigma = 4\pi a^2$ . Assim, qualquer modificação nas condições que preservem o valor de  $a$  se

tornam irrelevantes. Isso permite que a interação real entre as partículas possa ser substituída por qualquer outra que leve o mesmo valor de  $a$ , que pode ainda variar ligeiramente com a energia disponível para a colisão, e o limite desse valor quando a energia disponível é extrapolada para zero é chamado *comprimento de espalhamento*. No regime de temperaturas extremamente baixas dos condensados de Bose-Einstein é possível ignorar também a dependência da seção de choque com a energia, restando apenas o comprimento de espalhamento para caracterizá-la.

Porém existe um problema grave com essa identificação do comprimento de espalhamento. Como a seção de choque é real,  $a$  também é real, mas permanece uma ambiguidade de sinal de  $a$ , pois como a seção de choque é dada por  $a^2$ ,  $\pm a$  levam ao mesmo resultado. Esse sinal na verdade tem a ver com o caráter repulsivo da interação, embora não seja completamente determinado por ele. A *interação efetiva* que determina as propriedades do condensado real de Bose-Einstein depende apenas do comprimento de espalhamento, e é atrativa ou repulsiva quando ele é negativo ou positivo, respectivamente. E *qualquer* interação que corresponda ao mesmo comprimento de espalhamento será igualmente boa. Uma classe de potenciais que satisfazem a esses requisitos pode ser representada por

$$v(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \left[ \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} e^{-\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}{b^2}} \right].$$

A intensidade do potencial é dada pelo primeiro fator, onde  $a$  é o comprimento de espalhamento. A expressão entre colchetes é a *forma* escolhida arbitrariamente como sendo uma gaussiana cuja integral é 1, com uma largura (que corresponde ao alcance)  $b$ , muito menor que os comprimentos de onda de de Broglie envolvidos. O que se usa, na realidade, é o limite dessa classe de potenciais que  $b \rightarrow 0$ , isto é, quando a gaussiana se torna uma função delta. Nesse caso os bosons (que são tratados como partículas puntiformes) interagem apenas quando estão no mesmo ponto, e o potencial é chamada um *potencial de contato*. A interação entre bosons do condensado é portanto usualmente escrita em termos do potencial efetivo

$$v(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (2.12)$$

que é repulsivo se  $a > 0$  e atrativo se  $a < 0$ .

## 2.2.2 Papel da interação entre bosons no condensado

A existência de interações entre os bosons faz com que ele se torne tão intratável quanto qualquer outro sistema correlacionado de muitos corpos. A interação entre bosons faz com que a dinâmica de cada um deles não seja independente da dinâmica dos outros. Em outras palavras, o sistema se "correlaciona" dinamicamente, e o tratamento dessas correlações dinâmicas<sup>2</sup> é sempre uma tarefa complicada, mesmo quando encarada de forma apenas aproximada. Quando o sistema é bastante rarefeito, como acontece nos condensados atômicos de Bose-Einstein, existe um tipo de aproximação a qual, sem ignorar completamente a interação entre partículas, ignora efeitos de correlação devidos a essa interação. Esse tipo de tratamento consiste em tratar a dinâmica de uma partícula tendo em conta apenas o efeito "médio" de sua interação com as outras, que se traduz num potencial adicional, ao qual cada uma das partículas está sujeita, o qual depende no entanto do estado das demais. Como o estado de cada partícula que contribui para esse potencial adicional depende, por sua vez, dele, a linearidade característica das equações da mecânica quântica se perde: o potencial que define a dinâmica das partículas depende, ele mesmo, dessa dinâmica. Aproximações desse tipo são conhecidas como *aproximações de campo médio*. Como estas aproximações são cegas às dinâmicas entre partículas, a utilidade destas aproximações se restringe a aspectos ou propriedades do sistema que não dependam de modo essencial dessas correlações. A modificação do mecanismo de condensação devido as interações entre bosons *não pode* ser tratada em termos tão simples. A existência de correlações faz com que a imagem simples de muitos bosons se empilhando no estado de menor energia tenha que ser modificada na medida em que os estados de cada boson não possa ser mais pensado como sendo definido independentemente dos demais. O efeito da correlação entre bosons em quantidades definidas macroscopicamente, como a temperatura que demarca a transição para o regime condensado, é ainda um problema em aberto. No entanto, esse efeito é *empiricamente* pequeno no caso dos condensados

---

<sup>2</sup>A insistência em fazer acompanhar 'correlações' do adjetivo 'dinâmicas' se deve ao fato de que em sistemas de partículas idênticas há outro tipo de correlações a ter em conta, às quais estará reservado o adjetivo 'cinemáticas', por não terem elas nada a ver com a interação entre partículas, mas apenas com o fato de elas serem idênticas.

atômicos rarefeitos, pois as temperaturas de transição observadas são, dentro da precisão disponível, compatíveis com os valores calculados para o gás ideal.

### 2.2.3 Aproximação de campo médio gaussianiana

Vamos montar um tipo particularmente simples de aproximação de campo médio para o estado de um conjunto rarefeito de  $N$  bosons com uma interação efetiva descrita pelo potencial (2.12) à temperatura zero. Ao invés de fazer os cálculos com a temperatura e depois fazê-la tender a zero, vamos procurar diretamente o estado de menor energia do sistema. Vamos considerar especificamente a energia total e a distribuição espacial do sistema. Dessa forma, podemos aproximar pelo menos algumas propriedades de condensados reais. Supondo que o estado de cada um dos  $N$  bosons seja descrito por uma função de onda  $\phi(\vec{r})$ , de modo que  $|\phi(\vec{r})|^2$  represente a distribuição espacial desses bosons. Com isso, impomos a condição de normalização

$$\int |\phi(\vec{r})|^2 d^3r = 1. \quad (2.13)$$

Assim, todos os bosons do sistema terão, no estado de energia mínima, a mesma função de onda. Lembrando do cálculo para o gás ideal, devemos observar que todos os bosons terão a função de onda correspondente ao estado fundamental da armadilha que pode ser aproximada por um potencial do oscilador harmônico. Considerando o potencial médio devido aos outros bosons, a função de onda sofrerá modificações. A energia total do gás será escrita como a soma de três contribuições: a energia cinética  $K$  dos bosons, a energia potencial  $V_{arm}$  dos bosons na armadilha, e a energia potencial média de interação  $V_{int}$  devida à interação (2.12) entre os bosons.

$$E = K + V_{arm} + V_{int}. \quad (2.14)$$

Escrevendo cada uma das três contribuições em termos de  $\phi(\vec{r})$ , temos

$$\begin{aligned}
K &= \frac{N}{2M} \int d^3r \phi^*(\vec{r}) \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \right)^2 \phi(\vec{r}) \\
V_{arm} &= N \int d^3r \phi^*(\vec{r}) V_0(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \\
V_{int} &= \frac{N}{2} \int d^3r \phi^*(\vec{r}) \left[ (N-1) \int d^3r' \phi^*(\vec{r}') v(\vec{r}, \vec{r}') \phi(\vec{r}') \right] \phi(\vec{r}),
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

onde  $V_0(\vec{r})$  representa o potencial que constitui a armadilha. Colocamos o fator  $N$  pois as duas primeiras equações acima descrevem as energias cinética e potencial de cada boson. A estrutura de  $V_{int}$  pode ser entendida tendo em vista a forma de  $V_{arm}$  e a idéia de potencial médio que faz parte da interação. O termo entre colchetes é uma função de  $\vec{r}$  que tem um papel semelhante ao que é desempenhado por  $V_0(\vec{r})$  em  $V_{arm}$ ; e a estrutura do que está dentro dos colchetes mostra que essa função representa um potencial adicional agindo sobre cada um dos bosons e devido à sua interação com os  $N-1$  demais. Como cada um dos demais bosons, por sua vez estão associados também à função de onda  $\phi(\vec{r})$ , esse potencial adicional tem a forma de uma média em  $\vec{r}'$  do potencial de interação  $v(\vec{r}, \vec{r}')$ , tomada com a distribuição espacial de cada um dos  $N-1$  demais bosons. Finalmente, o fator global  $1/2$  em  $V_{int}$  evita a contagem dupla da interação entre pares de bosons. O problema de obter uma aproximação para o estado de menor energia desse sistema se reduz ao de achar a função  $\phi(\vec{r})$  que minimiza  $E$ . Uma forma de resolver esse problema seria resolver uma equação diferencial usando técnicas de cálculo variacional, mas vamos usar uma estratégia mais simples que acaba dando uma boa aproximação de campo médio. Vamos impor que a função de onda  $\phi(\vec{r})$  seja uma gaussiana com largura  $\beta$  a ser determinada.

$$\phi(\vec{r}) \longrightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta} \right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{r^2}{2\beta^2}},$$

onde o primeiro fator normaliza  $\phi(\vec{r})$  para qualquer valor de  $\beta$ . Uma vez feita a escolha de  $V_0(\vec{r})$ , podemos escrever a energia total  $E$  como função de  $\beta$ . O passo final será determinar o valor de  $\beta$  que minimiza  $E(\beta)$ . Isto é o que se chama a *aproximação gaussiana* ao

problema variacional. Vamos manter para  $V_0(\vec{r})$  a escolha feita na seção (2.1.3), isto é, um potencial de oscilador harmônico de frequência  $\omega$

$$V_0(\vec{r}) \longrightarrow \frac{M\omega^2}{2}r^2, \quad (2.16)$$

com o qual o cálculo da energia total se reduz a algumas integrais gaussianas. Assim, temos:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{N}{2M}\hbar^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\beta}\right)^3 \int r^2 \sin(\theta) dr d\phi d\theta e^{-\frac{r^2}{2\beta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d(e^{-\frac{r^2}{2\beta^2}})}{dr} \right) \\ &= \frac{3N\hbar^2}{4M} \frac{1}{\beta^2} \\ V_{arm} &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\beta}\right)^3 \frac{M\omega^2}{2} \int r^2 \sin(\theta) dr d\phi d\theta r^2 e^{-\frac{r^2}{\beta^2}} \\ &= \frac{3}{4} M\omega^2 \beta^2 \\ V_{int} &= \frac{N}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\beta}\right)^6 \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} \int d^3 r e^{-\frac{r^2}{2\beta^2}} \left[ (N-1) \int d^3 r' \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{-\frac{r'^2}{2\beta^2}} \right] e^{-\frac{r^2}{2\beta^2}} \\ &= \frac{N(N-1)}{M} \frac{\hbar^2 a}{\sqrt{2\pi}\beta}. \end{aligned}$$

Logo, a energia em função de  $\beta$  será:

$$E(\beta) = N\hbar\omega \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) + \frac{(N-1)a}{\sqrt{2\pi}\alpha} \frac{\alpha^3}{\beta^3} \right],$$

onde  $\alpha = \sqrt{\hbar/M\omega}$  e  $a$  é o comprimento de espalhamento proveniente de (2.12). O objeto em colchetes é adimensional e representa a energia por partícula em unidades de energia do oscilador harmônico,  $\hbar\omega$ . O mínimo da energia total corresponde ao mínimo da energia por partícula, quando variamos  $\beta$  mantendo todos os outros parâmetros constantes. Vamos usar apenas variáveis adimensionais para identificar o mínimo

$$x = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \gamma \equiv \frac{(N-1)a}{\sqrt{2\pi}\alpha} \quad \text{e} \quad \epsilon(x) = \frac{E(\beta)}{N\hbar\omega}.$$

Ficamos com a seguinte equação para analisar os zeros

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\epsilon(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{1}{x^2} + x^2 \right) + \frac{\gamma}{x^3} \right] = -\frac{3}{4} \left( \frac{1}{x^3} - x \right) - \frac{3\gamma}{x^4} \\ &= \frac{1}{2x^3} + \frac{\gamma}{x^4} = \frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad x + 2\gamma = x^5 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ao multiplicarmos a última linha por  $x^4$ , introduzimos uma solução espúria em  $x = 0$  quando  $\gamma = 0$ . O gráfico dessa equação está representado na figura 2.2. O lado direito é uma parábola de grau 5, representada pela curva cheia, enquanto o seu lado esquerdo é uma reta que encontra o eixo  $x = 0$  no ponto  $2\gamma$ , representada na figura por vários valores de  $\gamma$ . Quando a interação entre bosons é efetivamente repulsiva ( $a > 0$ ) existe uma única interseção das duas curvas em um valor  $x > 1$  que corresponde a um mínimo de  $\epsilon(x)$ , pois  $\epsilon(x > 0)$  é sempre positiva e se torna muito grande quando  $x \rightarrow 0$  e quando  $x \rightarrow \infty$ . Como o mínimo corresponde a um valor  $x > 1$ , isto implica que  $\beta > \alpha$ , ou seja, a função de onda gaussiana que minimiza a energia é *mais larga* que a que representa o estado fundamental da armadilha. Quando a interação entre os bosons é efetivamente atrativa

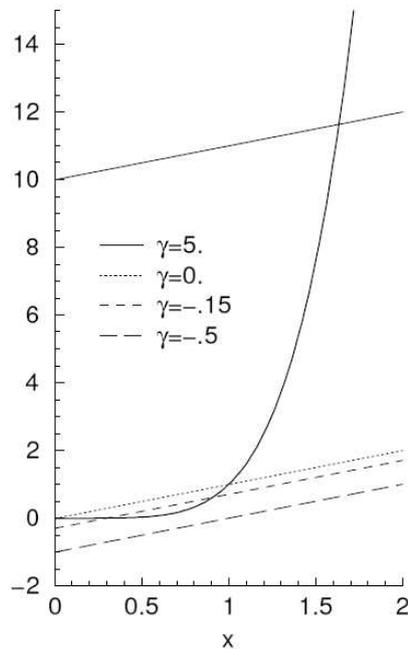


Figura 2.2: Solução gráfica da equação (2.17). Dos dois casos representados com valores de  $\gamma$  negativos, o que corresponde a  $\gamma = -0.15$  mostra a existência de dois extremos, ao passo que o que corresponde a  $\gamma = -0.5$  já não dá nenhuma solução (real). O caso  $\gamma = 0$  corresponde ao gás ideal, e neste caso a solução  $x = 1$  corresponde ao estado fundamental do oscilador que representa a armadilha, enquanto a solução  $x = 0$  é espúria, resultando da multiplicação por  $x^4$  feita para chegar na equação.

( $a < 0$  e  $\gamma < 0$ ), o eixo  $x = 0$  é interceptado pela reta que representa o lado esquerdo da equação em um ponto de ordenada também negativa, o que leva inicialmente a duas soluções, ambas com  $x$  compreendido entre 0 e 1, para a condição de derivada nula. À medida que  $\gamma$  se torna mais negativo, as duas soluções se aproximam uma da outra, se juntam para um determinado valor de  $\gamma$  e em seguida desaparecem. Quando  $\gamma < 0$  a energia por partícula  $\epsilon(x > 0)$  cresce para  $x \rightarrow \infty$  mas decresce para  $-\infty$  quando  $x \rightarrow 0$ . Isso permite concluir que a menor das raízes corresponde a um máximo, ao passo que a maior é um mínimo. À medida que  $\gamma$  se torna mais negativo, o máximo e o mínimo se aproximam até que ambos desapareçam, e  $\epsilon(x > 0)$  passe a ter um comportamento monotonicamente crescente.

A interpretação desses resultados em termos das propriedades dos condensados é a de que condensado de átomos que interagem entre si de forma efetivamente repulsiva são estáveis e adquirem dimensões espaciais *maiores* que a que corresponde ao estado fundamental da armadilha. Já quando a interação entre os átomos é efetivamente atrativa, a energia por partícula  $\epsilon(x)$  *sempre* se aproxima de  $-\infty$  quando  $x \rightarrow 0$ . Isso significa que a energia diminui à medida que o sistema se torna mais e mais denso. Em outras palavras, o sistema sofre colapso atrativo quando a densidade é suficientemente grande. No entanto, para valores não muito negativos de  $\eta$ ,  $\epsilon(x)$  tem um mínimo com  $x < 1$ , e portanto com  $\beta < \alpha$ , a gaussiana associada ao estado correspondente do condensado sendo mais estreita que o estado fundamental da armadilha. Esse mínimo é separado da região de colapso por uma barreira, o que garante uma situação de *metaestabilidade* para o sistema de bosons. À medida que  $N$  aumenta,  $\eta$  se torna mais negativo, o efeito protetor da barreira diminui levando finalmente ao colapso do sistema. Quando os valores de  $\eta$  realizáveis no caso de interações efetivamente repulsivas ficam aprecialmente maiores que 1, o que facilmente acontece, o termo de energia total (2.14) que representa a energia cinética se torna pequeno em comparação a soma dos outros dois termos, e em vez de simplificarmos o problema variacional impondo uma forma gaussiana à função de onda  $\phi(\vec{r})$ , pode-se recorrer à aproximação alternativa de ignorar o termo referente à energia cinética na expressão para a energia total e os resultados dessa aproximação alternativa

são tão melhores quanto melhor estiver satisfeita a condição

$$K \ll V_{arm} + V_{int}.$$

Situações desse tipo pertencem ao que é chamado o *limite de Thomas-Fermi*, e a função

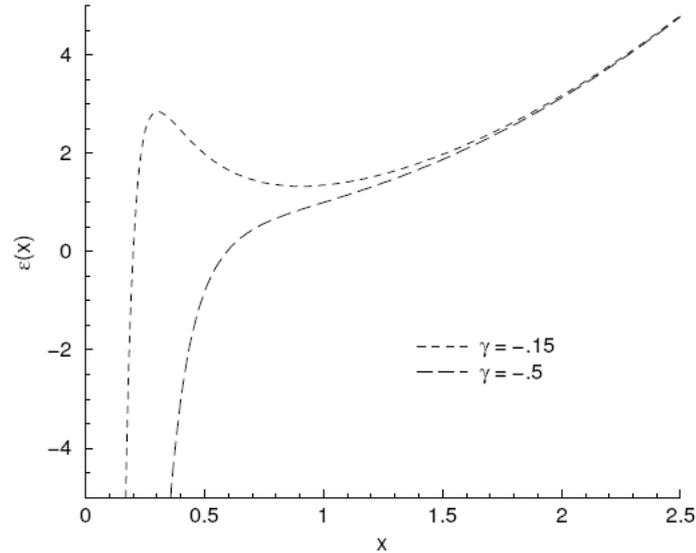


Figura 2.3: Energia adimensional por partícula  $\epsilon(x)$  para os dois valores negativos de  $\gamma$  incluídos na figura. O mínimo metaestável aparece no caso em que  $\gamma = -0.15$ , enquanto no caso  $\gamma = -0.5$  já não há barreira para inibir o colapso atrativo.

normalizada segundo a condição (2.13), que minimiza a energia aproximada corresponde à chamada *aproximação de Thomas-Fermi* para o estado de menor energia do sistema de muitos bosons. Não tratarei deste assunto aqui mas quem tiver interesse em saber mais, [6] fornece uma descrição clara e simples dessa aproximação.

## 2.3 Alguns resultados experimentais

Os resultados experimentais relativos a fenômenos de interferência em condensados atômicos de Bose-Einstein são muito numerosos e ainda em processo de crescimento,

sobretudo a partir do fato de que tais fenômenos estão fortemente ligados a duas utopias técnicas: o *laser de átomos* e o *computador quântico*. Como não cabe aqui mencioná-los todos, o que segue é apenas uma pequena seleção de casos para os quais as idéias discutidas até aqui parecem ser relevantes. Em cada caso, o texto é apenas um guia para interpretar o conteúdo dos trabalhos citados, e referências são feitas a figuras e equações que aparecem neles.

1. Referência [31] O primeiro desses dois trabalhos tem o caráter de certa forma instrumental para o segundo. A figura 1 deste trabalho é útil para esclarecer o que é chamado interferência de Bragg de ordem  $n$ : existem dois lasers estimuladores, com frequências  $\omega$  e  $\omega' < \omega$  respectivamente, e  $\delta \equiv \omega - \omega'$ . Os feixes fazem entre si um ângulo  $\theta$ , próximo de  $180^\circ$ , como mostrado na figura 1(a). Quando um foton de frequência  $\omega$  é absorvido e em seguida é emitido um foton de frequência  $\omega'$ , o sistema que faz isso ganha energia  $\hbar\delta$  e momento  $(\hbar/c)(\omega + \omega') \sin \theta/2 \simeq 2(\hbar/c)\delta \sin \theta/2$ . A *condição de Bragg de ordem  $n$*  está satisfeita quando a energia recebida coincide com a energia cinética do átomo associada ao momento recebido, isto é

$$n\hbar\delta = \frac{P_n^2}{2M} \text{ com } P_n = 2n\frac{\hbar}{c}\delta \sin \theta/2.$$

Nessas condições, tudo se passa como se o estado inicial de momento do átomo estivesse acoplado com o estado cujo momento coincide com a da condição de Bragg que esteja satisfeita. Esse acoplamento faz com que o estado inicial se transforme gradualmente no outro de acordo com as equações de movimento quânticas efetivas

$$i\hbar\dot{a}(t) = G_nb(t) \text{ com } i\hbar\dot{b}(t) = G_na(t), \quad (2.18)$$

onde  $G_n$  é um acoplamento efetivo entre os dois estados e onde o estado do átomo dependente do tempo foi tomado como tendo sido representado como

$$\phi(t) = a(t)\phi_0 + b(t)\phi_{P_n}, \text{ com } a(0) = 1, b(0) = 0.$$

A solução das equações (2.17) com a condição inicial dada é

$$a(t) = \cos\left(\frac{G_nt}{\hbar}\right), \quad b(t) = -i \sin\left(\frac{G_nt}{\hbar}\right),$$

de modo que o estado de momento zero e o de momento  $P_n$  ficam se transformando um no outro enquanto os lasers estimuladores estiverem ativos. Interrompendo a sua atividade em um tempo  $t_n$  tal que  $G_n t_n / \hbar = \pi/4$  o estado resultante do átomo será

$$\phi(t_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_0 - i\phi_{P_n}).$$

Para se decidir se o que se consegue dessa forma corresponde a interferência de um corpo, ou a algo parecido com a interferência devido a correlações cinemáticas é preciso decidir se, nas condições experimentais, esse tipo de transformação afeta o estado de *todos* os bosons simultaneamente ou se afeta apenas uma parte deles. Outros trabalhos relacionados com estes estão na referência [32].

## 2. Referência [33]

Este é um trabalho muito famoso no qual figuras de interferência entre as duas partes de um condensado, depois de ele ter sido cortado em duas partes por uma *faca ótica*, que consistem em *partir* o potencial da armadilha ao meio utilizando lasers, e de as duas partes terem se expandido até que se superpussem novamente. Provavelmente o caso mais claro de interferência de muitos corpos. Na região de superposição em que é observada a interferência os átomos de cada uma das partes em que o condensado foi cortado se expandem a partir de centros diferentes, e portanto adquirem momentos quase opostos. Mas é preciso pensar em cada átomo como estando em uma ou outra das duas metades. Interferência de um corpo corresponderia a todos os átomos estarem completamente deslocalizados na extensão total das duas partes. Para entender isso melhor podemos fazer uma analogia com a experiência de fenda dupla. Se jogarmos dois laser, um em cada fenda, veremos se formar na tela dois pontos com um pequeno padrão de interferência entre eles devido a decoerência dos laser. Agora quando iluminamos a fenda com apenas um laser, notamos claramente o padrão de interferência. Isto se dá porque quando temos dois laser é como se os fótons estivessem mais localizados, dando origem a um padrão cospuscular, enquanto que com um laser apenas, não podemos mais dizer que o foton passou por uma fenda ou por outra. É nesse sentido que fenômenos de interferência entre condensados só são observados quando os átomos estão totalmente deslocalizados.

# Capítulo 3

## Diagramas para operadores bosônicos

Este capítulo se baseia no artigo publicado pelo Professor Carlos Heitor d'Ávila Fonseca, do departamento de física da UFMG [7]. Todas as figuras foram retiradas do artigo [7].

### 3.1 Introdução

Vamos apresentar uma técnica que pode ser muito útil em cálculos envolvendo funções de operadores bosônicos. Qualquer uma dessas funções podem ser escritas como séries de potências inteiras não-negativas do operador criação ( $a^\dagger$ ) e do operador destruição ( $a$ ) escritos numa ordem arbitrária. Os diagramas propostos aqui fornecem uma forma simples de visualizar o produto de operadores e de obter propriedades úteis a eles relacionados. Exemplos do uso da técnica aqui descrita é a aplicação de funções de operadores bosônicos no estado de Fock ou no ordenamento normal ou antinormal das funções de operadores bosônicos. Além disso, os diagramas mostram claramente algumas simetrias na permutação de pares de operadores sem que isso altere o resultado. Tais operações mostram que certos produtos diferentes de operadores bosônicos são equivalentes em muitas situações. A idéia de usar diagramas para representar o resultado da aplicação de um produto de operadores bosônicos nos estados de Fock foi desenvolvida

por Ferrell[22]. Neste capítulo usamos diagramas similares aos de Ferrell para representar os operadores bosônicos. Então construímos um novo tipo de diagrama [23] que pode ser mapeado por um polinômio.

### 3.2 Os diagramas

A correspondência entre operadores e diagramas é a seguinte

Operadores	diagrama tipo I'	diagrama tipo I
$a$	$\searrow$	$\downarrow$
$a^\dagger$	$\nearrow$	$\uparrow$

sendo o diagrama tipo I' o diagrama de Ferrell. Vamos considerar o seguinte produto de operadores

$$aa^\dagger aa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger$$

Para construirmos o diagrama tipo I' (ou de Ferrell) para esse produto, vamos começar representando o primeiro operador a atuar, isto é, o operador  $a^\dagger$  a direita da expressão e então desenhar os outros operadores de modo que a ponta de uma seta esteja em contato com a base da vizinha, formando assim, um caminho *contínuo*:

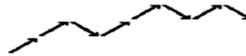


Figura 3.1: Produto  $aa^\dagger aa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger$  e diagrama tipo I' equivalente.

De modo análogo representamos o mesmo operador usando o diagrama tipo I:

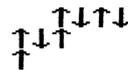


Figura 3.2: Produto  $aa^\dagger aa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger$  e diagrama tipo I equivalente.



ser indicados. Nesse tipo de diagrama, a ordem dos símbolos numa mesma linha é irrelevante. Isso implica que existe uma operação de simetria que consiste em permutar, numa mesma linha, flechas desemparelhadas,  $\uparrow$  ou  $\downarrow$  e barras. Assim, a posição de uma barra numa linha em relação a outras barras nas linhas de cima ou debaixo não é importante. A passagem de um diagrama do tipo I para um diagrama do tipo II não é uma relação um-a-um, visto que, independentemente da ordem de duas flechas adjacentes numa mesma linha, sempre associamos uma barra. Estretanto, se quisermos ir do diagrama tipo II para o diagrama tipo I, o resultado não será afetado, contanto que o caminho construído pelas flechas seja contínuo e que o número de flechas numa mesma linha não seja modificado. Nesse caso, embora tenhamos vários tipos de diagramas tipo I correspondentes a um diagrama tipo II, todos esses eles serão equivalentes.

### 3.2.1 Aplicação a um estado de Fock

O resultado da aplicação do produto de operadores no estado de Fock (que será definido, juntamente com os operadores criação e destruição no capítulo 4)  $|n\rangle$ , pode ser facilmente obtido a partir do diagrama tipo II do produto de operadores em questão. Associamos o nível  $|n\rangle$ , na escala vertical do diagrama, com a base da primeira flecha, visto que ela representa o primeiro operador a ser aplicado. Para o nível seguinte associamos  $|n+1\rangle$ , e assim sucessivamente na direção vertical. Em seguida associamos o fator  $(m+1) = (m+1)!/m!$  a cada barra, onde  $m$  é o nível inferior da barra e  $m+1$  o nível superior. Nesse caso, temos uma sequência contínua de barras, contendo uma por linha; se essa sequência tiver a primeira barra sobre o  $j$ -ésimo nível e a última barra terminando no nível  $k$ , associamos o fator  $k!/j!$ . Devemos então multiplicar os vários fatores relacionados as várias barras. De uma maneira similar a qual foi usada para as barras, associamos o fator  $\sqrt{k!/j!}$  às flechas desemparelhadas, onde  $k$  é o nível mais alto ocupado pela flecha e  $j$  o mais baixo. No caso de flechas apontando para cima, o nível mais baixo será o estado de Fock  $|n\rangle$ , isto é,  $j = n$ . No caso de flechas apontando para baixo, o estado inicial é o mais alto, isto é,  $k = n$ . Em ambos os casos, o número de flechas é  $k - j$ . Se chamarmos de  $m(m = k - j)$  o número de flechas desemparelhadas, o novo estado de Fock se torna o autoestado  $|n \pm m\rangle$  onde o sinal de  $m$  depende do número de flechas apontando para

cima (+) ou para baixo (-). Como exemplo temos o estado  $aa^\dagger aa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger |n\rangle$ :

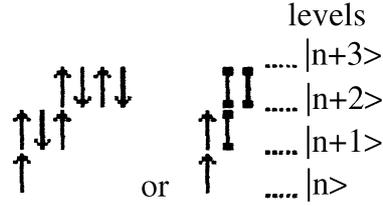


Figura 3.5: Diagrama e estados de Fock.

Do diagrama tipo II podemos escrever

$$aa^\dagger aa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger |n\rangle = \frac{(n+3)!(n+3)!}{(n+1)!(n+2)!} a^\dagger a^\dagger |n\rangle = (n+3)^2(n+2) a^\dagger a^\dagger |n\rangle$$

ou

$$\begin{aligned} aa^\dagger aa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger |n\rangle &= (n+3)^2(n+2) \sqrt{\frac{(n+2)!}{n!}} |n+2\rangle \\ &= (n+3)^2(n+2) \sqrt{(n+2)(n+1)} |n+2\rangle \end{aligned}$$

Note que qualquer uma das expressões acima poderiam ter sido deduzidas diretamente do diagrama.

### 3.2.2 Grau de degenerescência

Devido ao fato que permutando barras na mesma linha não afeta o resultado, pode-se dizer que permutar barras numa mesma linha constitui uma operação de simetria. O número total de permutações que podem ser feitas num diagrama do tipo II fornecerá o número de diagramas do tipo I (ou tipo I') que correspondam ao mesmo diagrama do tipo II. Podemos chamar esse número de diagramas equivalentes de *grau de degenerescência* associado com essa classe de produtos de operadores bosônicos. Voltando ao produto de operadores bosônicos correspondentes aos diagramas do exemplo acima, podemos dizer

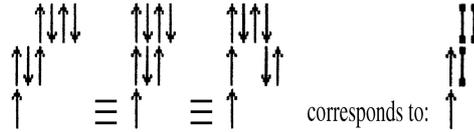


Figura 3.6: 3 diagramas degenerados do tipo I.

que o seguinte produto de operadores são indistinguíveis, ou seja, seu efeito será o mesmo em qualquer aplicação

$$aa^\dagger aa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger = aa^\dagger a^\dagger aaa^\dagger a^\dagger a^\dagger = a^\dagger aaa^\dagger aa^\dagger a^\dagger a^\dagger.$$

O grau de degenerescência do produto acima é 3. Considerando todas as possíveis permutações na ordem das barras em cada nível, considerando apenas três barras, sendo duas no nível mais acima e uma no nível logo abaixo, temos

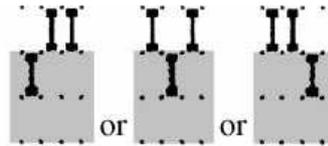
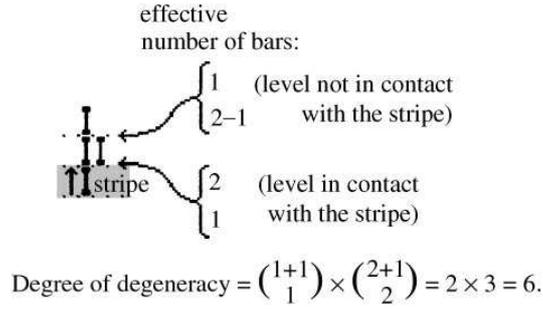


Figura 3.7: As  $\binom{2+1}{2} = 3$  possibilidades equivalentes.

Esse tipo de raciocínio funciona se o *nível* envolvido *pertencer ao stripe* de flechas desemparelhadas<sup>1</sup>. Se o nível não pertencer ao stripe, deve-se subtrair *um* do número de barras da linha *mais próxima do stripe*. No caso em que o nível não pertencer ao stripe, existe 1 barra na linha de cima e 2 na linha de baixo, a qual é a mais próxima do stripe. Quando calculamos as permutações nesse nível, consideramos apenas  $(2 - 1) = 1$  barras na linha mais próxima do stripe. Assim, o fator resultante associado com o nível é  $\binom{1+(2-1)}{1} = 2$ , ao invés de  $\binom{1+2}{1} = 6$ . A razão para isso é que, se pensarmos em termos dos diagramas tipo I ou tipo I', vamos "gastar" uma flecha de um par para chegar ao nível em questão. Assim, para calcularmos a degenerescência, devemos considerar a permutação das barras que comecem com a primeira barra na linha mais próxima ao stripe. Como exemplo temos: Na figura acima, o número de barras a serem contabilizadas no cálculo

<sup>1</sup>ou seja, o nível está em contato com o stripe ou, como na figura (3.7), ele toca a parte de cor cinza



do grau de degenerescência aparece em colchetes. O colchete inferior está associado ao nível que pertence ao stripe. Esse nível separa duas barras em uma linha e uma barra na outra linha, contribuindo com o fator 3 para a degenerescência. O colchetes superior está associado com um nível que não toca no stripe, assim o nível contribui com o fator 2 para o grau de degenerescência. Assim, temos seis diagramas correspondentes a seis produtos de operadores degenerados. Os seis produtos equivalentes de operadores bosônicos são:

$$\begin{aligned} aaa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger aa^\dagger &= aa^\dagger aaa^\dagger a^\dagger a^\dagger aa^\dagger = aaa^\dagger a^\dagger a^\dagger aaa^\dagger a^\dagger \\ &= a^\dagger aaaa^\dagger a^\dagger aa^\dagger a^\dagger = aa^\dagger a^\dagger aaaa^\dagger a^\dagger a^\dagger = a^\dagger aaa^\dagger aaa^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger \end{aligned}$$

Os seis diagramas tipo I degenerados e sua classe equivalente (diagrama reduzido ou tipo II):

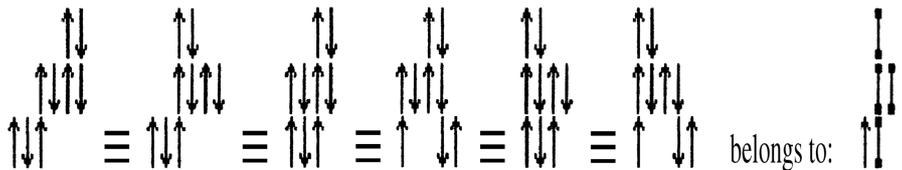


Figura 3.8: Degenerescência do diagrama do tipo I.

### 3.3 O polinômio funcional

O produto dos operadores bosônicos  $a$  e  $a^\dagger$ , quando representados pelo diagrama reduzido (tipo II), é constituído de duas partes distintas: uma formada por *flechas de-*

*semparelhadas* e a outra formada por *barras*. As barras estão associadas com pares de flechas emparelhadas. Essa decomposição tem um sentido intrínseco e aparece em todas as manipulações algébricas envolvendo o produto dos operadores. Quando o produto de operadores é aplicado em estados de Fock,  $|n\rangle$ , o estado final será determinado pelas *flechas desemparelhadas*. Nesse caso o outro fator, o relacionado pelas *barras*, vai gerar os coeficientes numéricos. Entretanto, todas as complicações que aparecem nos cálculos algébricos envolvendo operadores bosônicos se devem principalmente a aparente aleatoriedade das flechas, isto é, o caminho do estado inicial para o final. Tal informação aparece nas barras do diagrama reduzido (tipo II). Podemos traduzir essa informação em linguagem algébrica associando um polinômio  $\varphi(n)$  com a forma particular do caminho em questão. Vamos chamar esse polinômio de *polinômio funcional*. O polinômio funcional,  $\varphi(n)$ , é um polinômio de grau  $N$ , o número de barras. Suas raízes são inteiros e  $n$  é um inteiro associado ao estado de Fock  $|n\rangle$ . Como exemplo, vamos analisar o seguinte produto de operadores  $A = a^\dagger a a a^\dagger a^\dagger a a^\dagger a^\dagger$  e os diagramas correspondentes:

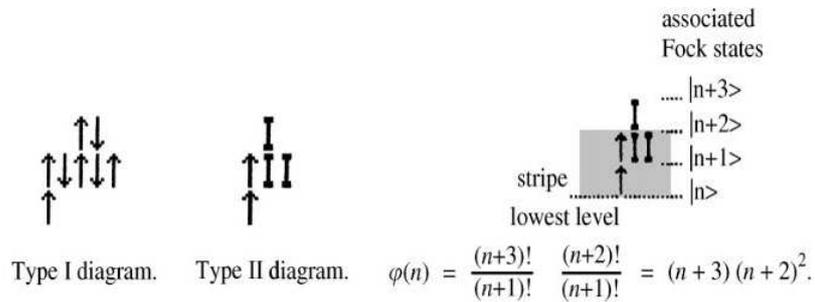


Figura 3.9: Construindo o polinômio funcional.

No polinômio funcional associamos o parâmetro  $n$  com o nível mais baixo do stripe. O diagrama acima tem três barras, as quais correspondem ao grau do polinômio  $\varphi(n)$ . A informação do diagrama do tipo II que fornece o polinômio funcional aparece codificada na forma como escrevemos o polinômio. Nesse caso, essa forma aparece na expressão  $(n+3)(n+2)^2$ , que difere, por exemplo, da forma  $n^3 + 7n^2 + 16n + 12$ , que também é válida. Essas várias maneiras de escrever  $\varphi(n)$ , como vamos ver, estão associadas com as maneiras possíveis de ordenação dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ . No exemplo acima, o segundo modo de escrever  $\varphi(n)$  está associada com a ordenação em potências de  $(a^\dagger a)$ , como

veremos a seguir. No caso geral, se um produto possui  $N$  barras, o polinômio funcional associado será um polinômio do tipo  $\varphi(n) = \prod_{k=1}^N (n - \nu_k)$ , onde  $n$  é um número inteiro positivo e  $\nu_k$ , uma raiz do polinômio, deve ser um número inteiro. Qualquer tipo de ordem (normal, antinormal, etc) dos operadores de um dado produto vai preservar o número de flechas desemparelhadas. Assim, num diagrama reduzido, a parte associada com as flechas desemparelhadas vai permanecer constante. Por outro lado, a parte associada com as barras vai sofrer modificações que em geral tomam a forma de uma soma de termos, onde o número de barras em cada termo varia entre zero e  $N$ . Um resultado interessante desse formalismo é que uma forma arbitrária de escrever o produto de operadores bosônicos, isto é, em um ordenamento arbitrário dos operadores, o polinômio funcional,  $\varphi(n)$ , é preservado. As várias maneiras de escrever o produto dos operadores bosônicos estão associadas as diferentes maneiras de escrever o mesmo polinômio. A relação não é unívoca. Existem mais maneiras de escrever os polinômios do que escrever o produto de operadores. A razão é que a representação do produto de operadores pelos diagramas deve ser contínua. É então possível fazer um mapeamento entre as várias ordenações de um dado produto e as maneiras distintas de escrever  $\varphi(n)$ . A razão pela qual esse mapeamento funciona pode ser entendida aplicando essas regras ao comutador  $[a, a^\dagger] = 1$ , ou a equação equivalente,  $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$ . O polinômio funcional  $\varphi_E(n)$  do lado esquerdo da equação coincide com o

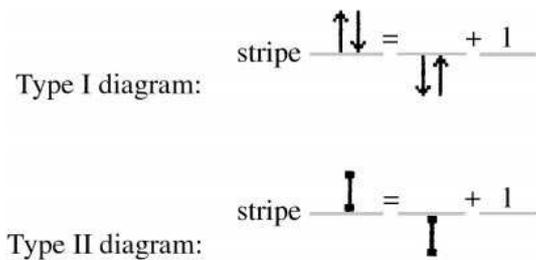


Figura 3.10: Diagramas da equação:  $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$ .

polinômio funcional  $\varphi_D(n)$  do lado direito da equação:

$$\varphi_E(n) = \frac{(n+1)!}{n!}, \quad \text{ou} \quad \varphi_D(n) = \frac{n!}{(n-1)!} + 1 \Rightarrow \varphi_E(n) = \varphi_D(n).$$

O exemplo acima também mostra como fazer manipulações algébricas com os diagramas.

Podemos passar para linha logo abaixo uma barra desde que a gente reescreva a linha abaixo com a barra mais 1. Podemos também passar a barra para o linha logo acima desde que a gente reescreva a linha com a barra menos 1. Com essa sequência de operações em um diagrama podemos fazer a ordenação que quisermos, desde que tomemos o cuidado de manter a natureza contínua do diagrama. Essas propriedades algébricas serão usadas para escrevermos expressões gerais para o ordenamento do produto de operadores bosônicos mais adiante neste capítulo. Para ilustrarmos a correspondência entre as diferentes maneiras de escrever o polinômio funcional e as várias ordenações possíveis dos operadores vamos tomar o seguinte caso como exemplo:  $A = a^\dagger a a^\dagger a a a a^\dagger$ . Desenhando os diagramas, temos

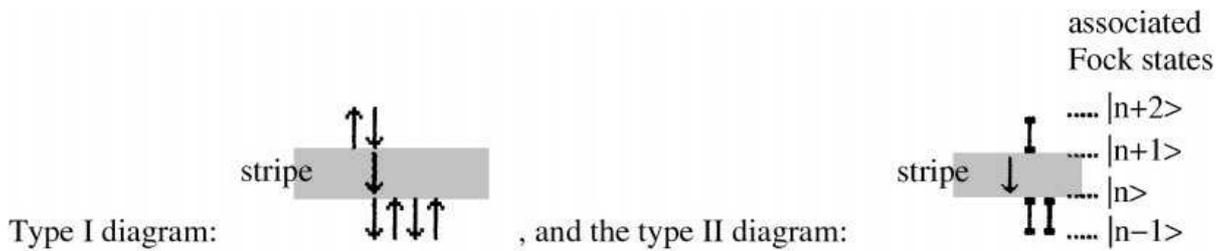


Figura 3.11: Diagramas de  $A = a^\dagger a a^\dagger a a a a^\dagger$ .

O polinômio funcional será

$$\varphi(n) = \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \left( \frac{n!}{(n-1)!} \right)^2 = (n+2)n^2.$$

É fácil notar que o polinômio acima pode ser escrito numa das formas abaixo:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= (n+2)n^2 = n^3 + 2n^2 = (n+2)^3 - 4(n+2)^2 + 4(n+2) \\ &= n(n-1)(n-2) + 5n(n-1) + 3n \\ &= (n+4)(n+3)(n+2) - 7(n+3)(n+2) + 9(n+2). \end{aligned}$$

Podemos associar cada uma dessas maneiras de escrever  $\varphi(n)$  com os seguintes ordenamentos nos diagramas

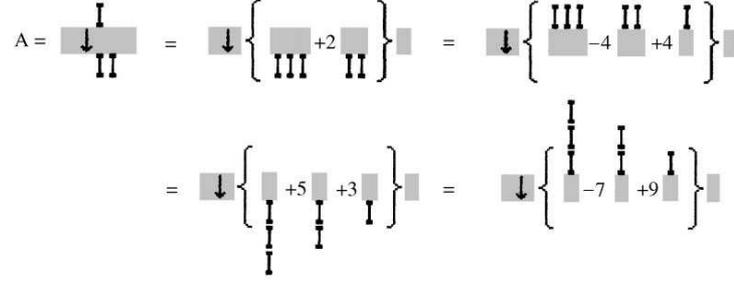


Figura 3.12: Maneiras diferentes de ordenamento de  $a^\dagger a a^\dagger a a a a^\dagger$ .

Em termos dos operadores, temos

$$\begin{aligned}
 A &= a^\dagger a a^\dagger a a a a^\dagger \\
 &= \{(a^\dagger a)^3 + 2(a^\dagger a)^2\} = a\{(a^\dagger a)^3 - 4(aa^\dagger)^2 + 4(aa^\dagger)\} \\
 &= \{a^{\dagger 3} a^3 + 5a^{\dagger 2} a^2 + 3a^\dagger a\}a = a\{a^3 a^{\dagger 3} - 7a^2 a^{\dagger 2} + 9aa^\dagger\}.
 \end{aligned}$$

Nesse exemplo, temos  $N = 3$  flechas emparelhadas e uma flecha desemparelhada,  $M = 1$ . O número total de operadores é então  $M + 2N = 7$ . Outra propriedade que se pode ver sob esse ponto de vista dos diagramas é o conjugado hermitiano do produto de operadores bosonicos. Após essa transformação, as flechas desemparelhadas mudam de sentido mas as barras e suas posições relativas em relação ao stripe em um diagrama tipo II permanecem inalteradas. Assim o polinômio funcional não irá mudar quando tomamos o conjugado hermitiano do produto de operadores bosônicos. Isso justifica nossa escolha de associar o parâmetro  $n$  com o nível mais baixo do stripe em vez de ser a base (ou ponta) das flechas desemparelhadas.

### 3.4 Ordenamento dos operadores

Todas as informações relevantes sobre um dado produto de operadores bosônicos está contida nos digramas reduzidos (tipo II). A informação necessária para o ordenamento desse produto está contido nas posições das barras, as quais podem ser mapeadas na forma polinomial,  $\varphi(n)$ . Assim, se quisermos escrever uma expressão algébrica para os

coeficientes para um tipo de ordenamento (normal, antinormal, etc), podemos esperar que será função do polinômio  $\varphi(n)$ . Para encontrar tais expressões podemos usar as propriedades algébricas de abaixamento e levantamento das barras no diagrama reduzido e indução matemática. Vamos escrever equações para alguns tipos especiais de ordenamento de operadores bosônicos.

### 3.4.1 Ordenamento normal

Seja  $A$  um produto de operadores bosônicos com  $N$  pares de operadores  $a$  e  $a^\dagger$  e com excesso  $M$  de operadores  $a^\dagger$  (poderia ser de  $a$  também sem perda de generalidade). O ordenamento normal tem a forma  $A = a^{\dagger M} \sum_{k=0}^n C_k a^{\dagger k} a^k$  onde, por indução matemática [23], chegamos na seguinte relação

$$C_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{k!} \binom{k}{j} \varphi(j). \quad (3.1)$$

No caso onde tivéssemos um excesso  $M$  de operadores  $a$ , a expressão acima seria  $A' = \sum_{k=0}^N C_k a^{\dagger k} a^k a^M$  e os coeficientes  $C_k$  seriam os mesmos. Como dissemos antes, a informação relacionada as várias maneiras possíveis de ordenamento do produto de operadores está contido apenas nas barras dos diagramas reduzidos, isto é, no polinômio  $\varphi(n)$ .

### 3.4.2 Ordenamento antinormal

Nesse caso, temos o produto de  $N + M$  de operadores  $a^\dagger$  e de  $N$  operadores  $a$ . O ordenamento antinormal toma a forma  $A = \sum_{k=0}^N \bar{C}_k a^k a^{\dagger k} a^{\dagger M}$ , onde os coeficientes  $\bar{C}_k$  são dados pela expressão

$$\bar{C}_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{k!} \binom{k}{j} \varphi(-j - M - 1). \quad (3.2)$$

Vale a pena notar que as expressões para  $C_k$  e  $\bar{C}_k$  continuam válidas se tivermos  $k > N$ . Nas expressões acima, não é necessário dizer que  $k \leq N$ , visto que temos  $C_k = 0$  (ou  $\bar{C}_k = 0$ ) para todo  $k > N$ . Apesar dos fatores multiplicando  $\varphi(j)$  ( ou  $\varphi(-j - M - 1)$ ) crescerem em valores absolutos, o fator  $(-1)^j$  garante que as somas se cancelam para  $k > N$ .

### 3.4.3 Ordenamento natural

Uma forma diferente de ordenamento que é de interesse é uma função do operador número  $(a^\dagger a)$ , que chamamos de *ordenamento natural*. Vamos discutir algumas possibilidades

- Se tivermos  $M + N$  operadores  $a^\dagger$  e  $N$  operadores  $a$  o produto deles no ordenamento natural será

$$A = a^{\dagger M} \sum_{k=0}^N N_k (a^\dagger a)^k.$$

- Se tivermos  $M + N$  operadores  $a$  e  $N$  operadores  $a^\dagger$  o produto deles no ordenamento natural será

$$A = \sum_{k=0}^N N_k (a^\dagger a)^k a^M$$

Em ambos os casos temos a expressão para os coeficientes  $N_k$  em termos dos *números de Stirling de primeira ordem*,  $S_{m+j}^{(k)}$  [24]:

$$N_k = \sum_{j=0}^N s(N-j, k, j) \varphi(j) - \sum_{j=0}^{k-1} s(k-1-j, k, j) \varphi(j),$$

onde

$$s(l, k, j) = \sum_{m=0}^l \frac{(-1)^m}{m! j!} S_{m+j}^{(k)}. \quad (3.3)$$

Nesse tipo de ordenamento, os coeficientes  $N_k$  podem ser calculados usando as expressões acima como funções do polinômio funcional  $\varphi(n)$ , ou então expandindo os polinômios em potências de  $n$ . Os coeficientes das potências de  $n$  no polinômio  $\varphi(n)$  são os mesmos coeficientes das potências de  $(a^\dagger a)$  no ordenamento natural do produto de operadores bosônicos. Isto é,  $\varphi(n) = \sum_{k=0}^N N_k n^k$ . De maneira similar, podemos definir o *ordenamento antinatural*, no qual o produto de operadores bosônicos é escrito em potências de  $(aa^\dagger)$ . Nesse caso, é fácil mostrar que os novos coeficientes são dados pela expressão

$$\bar{N}_k = \sum_{j=0}^N (-1)^k s(N-j, k, j) \varphi(-j-M-1) - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^k s(k-1-j, k, j) \varphi(-j-M-1). \quad (3.4)$$

Um ponto interessante é que o insight geométrico dado pelos diagramas pode ser usado para calcular o resultado do produto da atuação dos operadores. Como um exemplo,

podemos escrever as expressões para  $\overline{N}_k$  e  $\overline{C}_k$  diretamente das expressões correspondentes para  $N_k$  e  $C_k$ . "Antiordenar" significa que tomamos o diagrama reduzido ordenado e fazemos uma operação especular no nível mais baixo do stripe ( $|n\rangle$ ) virando o diagrama de ponta-cabeça. Então fazemos uma translação para abaixar todo o diagrama acima do stripe. Essa operação de simetria pode ser mapeada no polinômio funcional usando as seguintes transformações:  $n \rightarrow -n \rightarrow -(n + M + 1)$ . Mas notemos que o polinômio resultante se torna uma função do parâmetro  $(-n)$ , assim devemos trocar o sinal de cada  $n$ , o que pode ser feito multiplicando cada termo por  $(-1)^k$ , onde  $k$  é o número de barras. A expressão resultante fica de acordo com nossa escolha, que denomina  $|n\rangle$  o nível mais baixo do stripe. Outro ponto a notar é que, em todo tipo de ordenamento descrito acima, as expressões resultantes são não degeneradas.

# Capítulo 4

## Dinâmica exata do operador aniquilação sobre a evolução temporal de operadores de dois ou mais corpos.

Este capítulo é dedicado a explicitar o uso da técnica diagramática definida no capítulo anterior aos problemas de interesse, isto é, aplicado a interações entre dois ou mais corpos. É neste capítulo que vamos chegar na expressão geral do valor esperado do operador destruição, equação (4.22), que vai ser utilizada no próximo capítulo para testarmos a validade da aproximação assintótica que utilizamos neste trabalho.

### 4.1 Hamiltoniano

Vamos trabalhar com hamiltonianos em função do operador número escritos em função de operadores de criação e aniquilação usados no capítulo anterior. Vamos tratar aqui o caso mais simples, que é dado por

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a) + \hbar g(a^\dagger a)^\gamma, \quad (4.1)$$

onde  $g$  é uma constante de acoplamento real,  $a$  e  $a^\dagger$  são, respectivamente, os operadores destruição e criação de bosons respectivamente e obedecem, como sempre,  $[a, a^\dagger] = 1$ ,  $\gamma$  é um número inteiro que nos casos de interesse é maior do que 1. Vamos escolher potências de  $a^\dagger a$  porque esse é o ordenamento natural descrito no capítulo anterior e é potências desse tipo que aparecem na literatura [18,19].

## 4.2 Dinâmica do operador $a(t)$

A evolução temporal do operador destruição na formulação de Heisenberg será dada por [27]:

$$a(t) = e^{iHt/\hbar} a e^{-iHt/\hbar} = e^{i\zeta t} a, \quad (4.2)$$

onde  $\zeta$  é o super-operador definido por  $\zeta \cdot \equiv \frac{1}{\hbar}[H, \cdot]$ . Vale lembrar que o termo super-operador é usado para descrever objetos que atuam em operadores de um dado espaço de Hilbert, levando-os a outros operadores no mesmo espaço. Esse termo foi empregado para diferenciá-lo de operadores normais que atuam em vetores. Na segunda igualdade na equação (4.2), usamos tempos bem pequenos para que pudéssemos expandir as duas exponências até segunda ordem. Com a finalidade de demonstrar um resultado importante no que se refere a não linearidades, procedemos da seguinte maneira. Para  $\gamma = 2, 3, \dots$  temos a partir do comutador de  $a$  e  $a^\dagger$  que

$$a(a^\dagger a)^\gamma = (a^\dagger a + 1)^\gamma a \Rightarrow [(a^\dagger a)^\gamma, a] = ((a^\dagger a)^\gamma - (a^\dagger a + 1)^\gamma)a.$$

Como o hamiltoniano comuta com o operador número, segue que

$$\zeta(a^\dagger a) = 0.$$

No entanto a ação do operador  $\zeta$  sobre o operador de aniquilação  $a$  fica

$$\zeta(a) = -\{\omega + g[(a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma]\}a.$$

Vemos que a atuação de  $\zeta$  sobre  $a$  equivale a aplicação de um operador linear dependente somente de  $a^\dagger a$ , que comuta com  $H$ . A partir daí mostra-se por indução que

$$\zeta^m(a) = [-\{\omega + g((a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma)\}]^m a.$$

Assim ficamos com

$$a(t) = \exp[-i(\omega + g((a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma))t]a, \quad (4.3)$$

ou, usando o binômio de Newton

$$a(t) = \exp\left(\left[-i\left(\omega + g\sum_{k=0}^{\gamma-1}\binom{\gamma}{k}(a^\dagger a)^k\right)t\right]\right)a. \quad (4.4)$$

Esta expressão constitui um dos resultados importantes deste trabalho. Note que a mesma nos fornece o valor esperado de  $a(t)$  para qualquer não linearidade  $\gamma = 2, 3, \dots$ , o que, após exaustivas buscas, notamos que não é parte da literatura vigente.

### 4.3 Estados coerentes

Os estados de Fock, autoestados da hamiltoniana do oscilador harmônico unidimensional, possuem um número definido de bosons. Entretanto, para descrição de feixes de luz (compostos de fótons que são bosons e, em sendo campos livres, podem ser representados em termos dos operadores criação e aniquilação definidos ao longo desse trabalho) normalmente são utilizados em óptica, temos que lidar com estados cujo número de fótons é intrinsecamente incerto e os estados de Fock não são os mais adequados para isso. Ao discutir as propriedades de correlação e coerência do campo, um conjunto diferente de estados surge naturalmente. Estes estados, os estados coerentes, são os que mais se aproximam dos estados clássicos. Mesmo não sendo ortogonais, eles formam um conjunto supercompleto [28] e qualquer estado puro do campo pode ser representado em termos desses estados. Em 1926, Schrödinger [8] definiu os estados coerentes como sendo os estados de incerteza mínima do oscilador harmônico. Mas foi só em 1963, com os trabalhos de Glauber [9-11], que os estados coerentes foram reconhecidos como fundamentais no tratamento quântico da óptica. É tomando como base o trabalho de Glauber [10] que vamos definir os estados coerentes. Aproveitando o formalismo do campo eletromagnético, vamos desenvolvê-lo aqui pois o resultados pode ser aplicado no caso mais geral de um campo de bosons que podem ser fótons ou até mesmo átomos.

### 4.3.1 Estados coerentes como autoestados do operador destruição

Queremos encontrar o estado  $|\alpha\rangle$  que é o autoestado do operador destruição

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (4.5)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Como sabemos, todos estados puros de um campo eletromagnético monomodo podem ser escritos em termos dos estados de Fock

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (4.6)$$

onde  $c_n \in \mathbb{C}$ . Substituindo (4.6) em (4.5) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle. \quad (4.7)$$

Levando em consideração a ortogonalidade dos estados de Fock, obtemos a seguinte relação de recorrência para os coeficientes  $c_n$

$$c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0, \quad (4.8)$$

e assim

$$|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.9)$$

O coeficiente  $c_0$  é determinado pela condição de normalização de  $|\alpha\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle = 1 &= |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n} \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | m \rangle \\ &= |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ &= |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dessa forma, chegamos à conclusão que os estados coerentes podem ser escritos da seguinte maneira

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4.11)$$

e, conseqüentemente,

$$\langle \alpha | = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n|. \quad (4.12)$$

É interessante notar que para todo número complexo  $\alpha \neq 0$  o estado coerente  $|\alpha\rangle$  tem uma projeção não nula em cada estado de Fock:

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (4.13)$$

Para  $\alpha = 0$ , o estado coerente é igual ao estado de Fock para  $n = 0$ , ou seja, é o estado de vácuo. O quadrado do módulo da projeção de  $|\alpha\rangle$  em  $|n\rangle$  dá a probabilidade  $p(n)$  de  $n$  fótons serem encontrados no estado coerente  $|\alpha\rangle$ :

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (4.14)$$

que é a distribuição de Poisson em  $n$  com parâmetro  $|\alpha|^2$ . O número médio de fótons presentes quando o estado é o estado coerente é dado por

$$\langle \alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} np(n) = |\alpha|^2. \quad (4.15)$$

Podemos então concluir que não importa quão pequeno seja  $|\alpha|$ , existe sempre uma probabilidade  $p(n)$  diferente de zero de que qualquer número de fótons  $n$ , independente de quão grande seja  $n$ , esteja presente no campo. Com base no que foi dito, temos

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 4.4 Atuação de $a(t)$ sobre estados coerentes

Como primeiro passo estudaremos a ação de  $a(t)$  no estado  $|\alpha\rangle$ :

$$\begin{aligned} a(t)|\alpha\rangle &= \exp[-i(\omega + g((a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma))t] a|\alpha\rangle \\ &= e^{-i\omega t} \exp[-igt\{(a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma\}] a|\alpha\rangle \\ &= e^{-i\omega t} \exp[-igt\{(a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma\}] a e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \alpha e^{-i\omega t} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp[-igt\{(a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma\}] |n\rangle \\ &= \alpha e^{-i\omega t} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp[-igt\{(n+1)^\gamma - n^\gamma\}] |n\rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Note que, se fizermos  $\gamma = 2$  na equação (4.17), temos

$$a(t)|\alpha\rangle = e^{-i(\omega+g)t}\alpha|\alpha e^{-2igt}\rangle, \quad (4.18)$$

que é uma expressão simples e analítica obtida em vários trabalhos na literatura no contexto do cálculo de tempos de Eherenfest [19].

## 4.5 Ordenamento normal de $(a^\dagger a)^n$

Para obter tempos de ressurgimento característicos, é fundamental escrever o ordenamento normal do operador  $(a^\dagger a)^n$ , com todos os  $a^\dagger$  a esquerda e todos os  $a$  a direita. Fazendo o ordenamento normal da  $n$ -ésima potência do operador número com o auxílio dos diagramas para operadores bosônicos descrito no capítulo 3, temos

$$(a^\dagger a)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^{\dagger k} a^k,$$

onde

$$C_k^n = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{k!} \binom{k}{j} \varphi_n(j). \quad (4.19)$$

No caso de  $(a^\dagger a)^n$  temos que  $\varphi_n(j) = j^n$ . Os coeficientes  $C_k^n$  se tornam nulos sempre que  $k$  ultrapassa o grau  $n$  do polinômio  $\varphi_n(j)$ , qualquer que seja esse polinômio [23]. Assim, temos

$$(a^\dagger a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^n a^{\dagger k} a^k \quad (4.20)$$

## 4.6 Ordenamento normal de $a(t)$

A função exponencial que descreve  $a(t)$  como operador equação (4.4) possui no expoente termos que comutam, podendo assim ser fatorada. Este passo técnico é fundamental para a dedução do valor esperado de  $a(t)$ , como esperamos que fique claro ao

longo do texto. Logo, temos

$$\begin{aligned}
a(t) &= \exp[-i(\omega + g((a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma))t]a \\
&= e^{-i\omega t} \exp[-igt\{(a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma\}]a \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-igt)^m}{m!} [(a^\dagger a + 1)^\gamma - (a^\dagger a)^\gamma]^m a \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-igt)^m}{m!} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^{m-n} (a^\dagger a)^{\gamma(m-n)} (a^\dagger a + 1)^{\gamma n} a \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-igt)^m}{m!} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-1)^{m-n} (a^\dagger a)^{\gamma(m-n)} \sum_{s=0}^{\gamma n} \binom{\gamma n}{s} (a^\dagger a)^s a \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-igt)^m}{m!} \sum_{n=0}^m \sum_{s=0}^{\gamma n} \binom{m}{n} \binom{\gamma n}{s} (-1)^{m-n} (a^\dagger a)^{\gamma(m-n)+s} a \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-igt)^m}{m!} \sum_{n=0}^m \sum_{s=0}^{\gamma n} \binom{m}{n} \binom{\gamma n}{s} (-1)^{m-n} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\gamma(m-n)+s} a^{\dagger k} a^{k+1},
\end{aligned}$$

onde, na última passagem foi utilizado a equação (4.20). Utilizando a expressão (4.19) obtemos

$$\begin{aligned}
a(t) &= e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{s=0}^{\gamma n} \frac{(-1)^{m-n} (-1)^{k-j} \binom{m}{n} \binom{\gamma n}{s} \binom{k}{j} j^{\gamma(m-n)+s} (-igt)^m a^{\dagger k} a^{k+1}}{m!k!} \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \sum_{s=0}^{\gamma n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{m-n+k-j} (\gamma n)!}{n!(m-n)!s!(\gamma n-s)!j!(k-j)!} j^{\gamma(m-n)+s} (-igt)^m a^{\dagger k} a^{k+1} \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{\gamma n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{m-n+k-j} (\gamma n)!}{n!(m-n)!s!(\gamma n-s)!j!(k-j)!} j^{\gamma(m-n)+s} (-igt)^m a^{\dagger k} a^{k+1} \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\gamma n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{p+k-j} (\gamma n)!}{n!p!s!(\gamma n-s)!j!(k-j)!} j^{\gamma p+s} (-igt)^{p+n} a^{\dagger k} a^{k+1} \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\gamma n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} (\gamma n)!}{n!s!(\gamma n-s)!j!(k-j)!} j^s (-igt)^n a^{\dagger k} a^k a \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (igt j^{\gamma})^p \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\gamma n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j} (\gamma n)!}{n!s!(\gamma n-s)!j!(k-j)!} j^s e^{igt j^{\gamma}} (-igt)^n a^{\dagger k} a^{k+1} \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{n!j!(k-j)!} e^{igt j^{\gamma}} (-igt)^n a^{\dagger k} a^{k+1} \sum_{s=0}^{\gamma n} \binom{\gamma n}{s} j^s \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{n!j!(k-j)!} e^{igt j^{\gamma}} (-igt)^n a^{\dagger k} a^{k+1} (j+1)^{\gamma n} \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!} e^{igt j^{\gamma}} a^{\dagger k} a^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(-igt)(j+1)^{\gamma}]^n \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!} e^{igt j^{\gamma}} a^{\dagger k} a^{k+1} e^{-igt(j+1)^{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos a seguinte expressão para o ordenamento normal de  $a(t)$

$$a(t) = e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!} e^{-igt[(j+1)^{\gamma}-j^{\gamma}]} a^{\dagger k} a^{k+1}. \quad (4.21)$$

Note que agora o operador  $a(t)$  está expresso em função de polinômios com ordenamento normal de  $a$  e  $a^{\dagger}$ , facilitando enormemente o cálculo do valor esperado  $\langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle$ .

## 4.7 Valor esperado $\langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle$

Vamos agora obter a equação que será estudada no capítulo 5, ou seja, o valor esperado do operador destruição no estado coerente.

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle &= e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!} e^{-igt[(j+1)^\gamma - j^\gamma]} \alpha^{*k} \alpha^{k+1} \\
 &= \alpha e^{-i\omega t} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!} e^{-igt[(j+1)^\gamma - j^\gamma]} \alpha^{*k} \alpha^k \\
 &= \alpha e^{-i\omega t} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{j!p!} e^{-igt[(j+1)^\gamma - j^\gamma]} \alpha^{*p+j} \alpha^{p+j} \\
 &= \alpha e^{-i\omega t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} e^{-igt[(j+1)^\gamma - j^\gamma]} |\alpha|^{2j} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} |\alpha|^{2p}.
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte expressão

$$\langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle = \alpha e^{-i\omega t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|^2}}{j!} |\alpha|^{2j} e^{-igt[(j+1)^\gamma - j^\gamma]}. \quad (4.22)$$

Esta expressão também é obtida aqui pela primeira vez e representa um caminho para o cálculo exato e aproximado de não linearidades  $\gamma = 2, 3, \dots$

# Capítulo 5

## Aproximação assintótica: cálculo de tempos de ressurgimento e o papel da não linearidade

### 5.1 Caso Geral

Seguindo notas do Professor Carlos Henrique Costa Moreira do Departamento de Matemática da UFMG [34].

Para não obscurecer os pontos mais relevantes tanto da técnica como da física envolvida no texto, deixamos os detalhes da aproximação assintótica, bem como os do uso da soma de Poisson e da aproximação gaussiana para os apêndices. Os cálculos que representam parte essencial da expressão analítica para os tempos de ressurgimento estão aqui delineados e o resultado principal e sua discussão está na expressão (5.16). Vamos estudar a seguinte equação encontrada no capítulo 4 :

$$\langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle = \alpha e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} e^{-igt[(n+1)^\gamma - n^\gamma]}. \quad (5.1)$$

A parte real do observável acima é o valor esperado da posição do centro de massa do sistema, enquanto que a parte imaginária é o momento. Podemos reescrever o termo  $g_n = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}$  da seguinte forma usando a aproximação gaussiana descrita no apêndice B

:

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-2(\sqrt{n}-|\alpha|^2)^2} [1 + O(|\alpha|^{-1})], \quad (5.2)$$

onde  $|\alpha|^2 = m$  é o número médio de bosons no condensado ou ftons no campo. Assim ficamos com :

$$\langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle \cong \frac{\alpha e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi m}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad (5.3)$$

onde

$$f_n = e^{-2m(\sqrt{\frac{n}{m}}-1)^2} e^{-igt[(n+1)^\gamma - n^\gamma]}$$

admite uma extensão  $f(n)$  para  $n \in \mathbb{R}$  dada pela mesma expressão. Usando a fórmula da soma de Poisson descrita no apêndice A ficamos com a seguinte equação :

$$\langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle \cong \frac{\alpha e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi m}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-2m(\sqrt{\frac{n}{m}}-1)^2} e^{2i\pi\nu n - itg[(n+1)^\gamma - n^\gamma]} dn + \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi m}} e^{-2m - it(w+g)}. \quad (5.4)$$

Então ficamos com

$$\langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu(t) + \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi m}} e^{-2m - it(w+g)}, \quad (5.5)$$

onde

$$c_\nu(t) = \frac{\alpha e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi m}} \int_0^{\infty} e^{-2m(\sqrt{\frac{n}{m}}-1)^2} e^{i(2\pi\nu n - gt[(n+1)^\gamma - n^\gamma])} dn, \quad (5.6)$$

com  $\nu$ , como veremos mais adiante, rotulando cada ressurgimento se  $\nu \geq 1$ . Queremos estimar o valor de  $c_\nu(t)$ . Fazendo a mudança de variável  $n = mx^2 - \frac{1}{2}$ , ficamos com  $dn = 2mxdx$  e  $c_\nu(t)$  fica da forma :

$$c_\nu(t) = \alpha e^{-i(\omega t - \pi\nu)} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \int_a^{\infty} x e^{-2m(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1)^2} e^{i(2\pi\nu mx^2 - gt[(mx^2 + \frac{1}{2})^\gamma - (mx^2 - \frac{1}{2})^\gamma])} dx, \quad (5.7)$$

onde  $a = \sqrt{\frac{1}{2m}}$ . Denotando a parte imaginária do expoente

$$\psi(x) = i(2\pi\nu mx^2 - gtm^\gamma [(x^2 + \frac{1}{2m})^\gamma - (x^2 - \frac{1}{2m})^\gamma]), \quad (5.8)$$

vamos encontrar o ponto de fase estacionária. Mas antes note que

$$\begin{aligned} (x^2 + \frac{1}{2m})^\gamma &= \sum_{k=0}^{\gamma} \frac{\gamma! x^{2\gamma-2k}}{k!(\gamma-k)!} \left(\frac{1}{2m}\right)^k \\ (x^2 - \frac{1}{2m})^\gamma &= \sum_{k=0}^{\gamma} \frac{\gamma! x^{2\gamma-2k}}{k!(\gamma-k)!} (-1)^k \left(\frac{1}{2m}\right)^k. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\left(x^2 + \frac{1}{2m}\right)^\gamma - \left(x^2 - \frac{1}{2m}\right)^\gamma = 2 \sum_{k \text{ ímpar}}^{\gamma} \frac{\gamma! x^{2\gamma-2k}}{k!(\gamma-k)!} \left(\frac{1}{2m}\right)^k. \quad (5.9)$$

Como os casos de interesse são  $\gamma = 2$  e  $3$  vemos que, para  $\gamma = 2$ , apenas o primeiro termo da soma (5.9) irá existir e para  $\gamma = 3$  apenas o primeiro e o segundo termo da soma (5.9) irão existir. Portanto, para  $\gamma = 2$  temos

$$\psi(x) = 2\pi\nu im \left[ x^2 - \frac{gtx^2}{\pi\nu} \right],$$

e, para  $\gamma = 3$  temos

$$\psi(x) = 2\pi\nu im \left[ x^2 - \frac{3gtmx^4}{2\pi\nu} - \frac{gt}{8\pi\nu m} \right]$$

Definindo  $f_\gamma(t)$ , onde

$$f_2(t) = \pi\nu + \omega t,$$

e

$$f_3(t) = \pi\nu + \omega t + \frac{gt}{4} \quad (5.10)$$

De forma que obtemos a seguinte expressão

$$c_\nu(t) = \alpha e^{-if_\gamma(t)} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \int_a^\infty x e^{-2m(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1)^2} e^{2im\pi\nu(x^2 - \frac{gtm\gamma-2x^{2\gamma-2}}{2\pi\nu})} dx. \quad (5.11)$$

O termo em função de  $\gamma$  na equação (5.11) vale para  $\gamma = 2$  e  $3$ . A principal contribuição para a integral fica em torno de  $x = 1$  devido ao decaimento do termo gaussiano. Logo separamos a parte principal do termo de integração de modo que

$$\begin{aligned} c_\nu(t) &= \alpha e^{-if_\gamma(t)} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} x e^{-2m(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1)^2} e^{2im\pi\nu(x^2 - \frac{gtm\gamma-2x^{2\gamma-2}}{2\pi\nu})} dx \\ &+ E_\nu^1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Onde  $E_\nu^1$  é um termo de erro dado por :

$$E_\nu^1 = \alpha e^{-if_\gamma(t)} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \left( \int_a^{1-\varepsilon} x e^{-2m(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1)^2} e^{2im\pi\nu(x^2 - \frac{gtm^{\gamma-2}x^{2\gamma-2}}{2\pi\nu})} dx \right. \\ \left. + \int_{1+\varepsilon}^\infty x e^{-2m(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1)^2} e^{2im\pi\nu(x^2 - \frac{gtm^{\gamma-2}x^{2\gamma-2}}{2\pi\nu})} dx \right). \quad (5.13)$$

O termo de erro acima será estimado posteriormente.

Oscilações rápidas causadas pela fase na equação (5.11) também reduzem o domínio que contribui significativamente para  $c_\nu(t)$  [20]. Os domínios de maior contribuição estarão próximos dos pontos onde a fase é estacionária, ou seja  $\psi'(x) = 0$ .

$$\psi'(x) = 2\pi\nu im \left( 2x - \frac{2\gamma(\gamma-1)gtm^{\gamma-2}x^{2\gamma-3}}{2\pi\nu} \right). \quad (5.14)$$

Haverá um único ponto de fase estacionária dado por

$$x_0^{2\gamma-4} = \frac{2\pi\nu}{\gamma(\gamma-1)gtm^{\gamma-2}}. \quad (5.15)$$

Definindo o novo parâmetro temporal  $\tau = \frac{\gamma(\gamma-1)gtm^{\gamma-2}}{2\pi\nu} = \frac{t}{t_\nu}$  ( o caso com  $\nu = 0$  será tratado posteriormente ), onde

$$t_\nu = \frac{2\pi\nu}{\gamma(\gamma-1)gtm^{\gamma-2}}. \quad (5.16)$$

De onde obtemos

$$c_\nu(t) \sim \alpha e^{f_\gamma(t)} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} x e^{-2m(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1)^2} e^{2im\pi\nu(x^2 - \frac{\tau x^{2\gamma-2}}{\gamma-1})} dx.$$

Mais tarde veremos que a equação (5.16) é definida como sendo os tempos característicos para um  $\gamma$  qualquer. De fato, pelo método da fase estacionária vemos que a parte imaginária da exponencial terá um valor apreciável para  $x \sim x_0$ , enquanto que a expressão gaussiana dará sua maior contribuição quando  $x \sim 1$ . Concluimos disso que a principal contribuição de  $c_\nu$  será quando  $x \sim x_0 \sim 1$ , o que implica  $t = t_\nu$ .

Olhando para o expoente da gaussiana, temos:

$$\begin{aligned} -2m \left( \sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1 \right)^2 &= -2m \left( x^2 - \frac{1}{2m} + 1 - 2\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} \right) \\ &= -2m \left[ (x-1)^2 - \frac{1}{2m} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) - 2 \left( \frac{1}{4m} - x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} \right) \right] \\ &= -2m(x-1)^2 + \left( 1 - \frac{1}{x} \right) + 4m \left( \frac{1}{4mx} - x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} \right). \end{aligned}$$

Assim, ficamos com:

$$c_\nu(t) = \alpha e^{-if_\gamma(t)} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} x e^{-2m(x-1)^2} e^{2\pi\nu mi(x^2 - \frac{\tau x^{2\gamma-2}}{\gamma-1})} dx + E_\nu^1 + E_\nu^2. \quad (5.17)$$

Onde  $E_\nu^2$  é um termo de erro dado por:

$$E_\nu^2 = \alpha e^{-if_\gamma(t)} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} x e^{-2m(x-1)^2} e^{2\pi\nu mi(x^2 - \frac{\tau x^{2\gamma-2}}{\gamma-1})} \left[ e^{(1-\frac{1}{x}) + 4m(\frac{1}{4mx} - x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}})} - 1 \right] dx, \quad (5.18)$$

que será estimado mais adiante. Finalmente chegamos numa expressão adequada para  $c_\nu(t)$  para que possa ser aplicada a aproximação assintótica descrita no apêndice C. Assim, ficamos com:

$$c_\nu(t) = \alpha \sqrt{\frac{2m}{\pi}} e^{-if_\gamma(t)} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} x e^{mh(x)} dx + E_\nu^1 + E_\nu^2. \quad (5.19)$$

Onde  $h(x) = -2(x-1)^2 + 2im\pi\nu(x^2 - \frac{\tau x^{2\gamma-2}}{\gamma-1})$ . Podemos expandir os limites de integração.

O erro dessa aproximação é:

$$E_\nu^3 = \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \alpha e^{-if_\gamma(t)} \int_{|x-1| \geq \varepsilon} x e^{-2m(x-1)^2 + 2i\pi\nu(x^2 - \frac{\tau x^{2\gamma-2}}{\gamma-1})} dx. \quad (5.20)$$

E assim ficamos com:

$$c_\nu(t) = \alpha \sqrt{\frac{2m}{\pi}} e^{if_\gamma(t)} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{mh(x)} dx + E_\nu^1 + E_\nu^2 + E_\nu^3. \quad (5.21)$$

Definindo o caminho  $C = \{z = x + i0, x \in \mathbb{R}\}$ , ficamos com a forma adequada para aplicarmos o método *steepest descents* descrito no apêndice C necessário porque a função que multiplica  $m$  (parâmetro grande) tem tanto uma parte real quanto uma parte imaginária.

$$c_\nu(t) \sim \alpha \sqrt{\frac{2m}{\pi}} e^{-if_\gamma(t)} \int_C z e^{mh(z)} dz. \quad (5.22)$$

Vamos agora encontrar o caminho de *steepest descents*. Vamos olhar dois casos, o primeiro com  $\gamma = 2$  e o segundo com  $\gamma = 3$ .

## 5.2 Caso $\gamma = 2$

Este é o termo geral do hamiltoniano que descreve a interação entre os bosons no condensado, que pode ser tanto um único condensado quanto dois condensados parcial-

mente superpostos. Temos:

$$h(z) = -2(z-1)^2 + 2i\pi\nu(z^2 - \tau z^2). \quad (5.23)$$

Vamos agora encontrar o ponto de sela, ou seja, vamos encontrar  $z_0$  tal que  $h'(z_0) = 0$ .

$$h'(z_0) = 0 \implies -4(z_0 - 1) + 4i\pi\nu z_0(1 - \tau) = 0.$$

Assim, temos:

$$z_0 = \frac{1 + i\pi\nu(1 - \tau)}{1 + [\pi\nu(1 - \tau)]^2}. \quad (5.24)$$

Portanto, podemos calcular  $h(z_0)$  e  $h''(z_0)$ .

$$h(z_0) = \frac{-2\pi^2\nu^2(1 - \tau)^2}{1 + \pi^2\nu^2(1 - \tau)^2} + \frac{2i\pi\nu(1 - \tau)}{1 + \pi^2\nu^2(1 - \tau)^2} \quad (5.25)$$

$$h''(z_0) = -4 + 4i\pi\nu(1 - \tau). \quad (5.26)$$

Com base no que foi feito anteriormente, concluímos que a raiz apropriada para  $\{-1/h''(z_0)\}$  é :

$$\left\{ \frac{-1}{h''(z_0)} \right\}^{1/2} = \frac{e^{\frac{i}{2}(\pi - \arctan[\pi\nu(1 - \tau)])}}{2(1 + \pi^2\nu^2(1 - \tau)^2)^{1/4}}. \quad (5.27)$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} |h(z_0)| &= \sqrt{16 + 16\pi^2\nu^2(1 - \tau)^2} \\ |h(z_0)|^{-1/2} &= \frac{1}{2[1 + \pi^2\nu^2(1 - \tau)^2]^{1/4}}. \end{aligned}$$

Finalmente chegamos na aproximação para (5.22). Logo, ficamos com:

$$c_\nu(t) \sim \alpha e^{-if_2(t)} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} |h(z_0)|^{-1/2} g(z_0) e^{mh(z_0) + \frac{i}{2}(\pi - \eta)} \quad (5.28)$$

$$c_\nu(t) \sim \alpha e^{(f_2(t) + i\frac{\pi}{2} - i\eta)} \frac{(1 + i\pi\nu(1 - \tau)) e^{-\frac{2\pi^2\nu^2 m(1 - \tau)^2}{1 + \pi^2\nu^2(1 - \tau)^2}} e^{\frac{2im\pi\nu(1 - \tau)}{1 + \pi^2\nu^2(1 - \tau)^2}}}{[1 + \pi^2\nu^2(1 - \tau)^2]^{5/4}}. \quad (5.29)$$

Mas, temos as seguintes relações,  $\tau = \frac{gt}{\pi\nu}$  e  $t_\nu = \frac{\pi\nu}{g}$  para  $\gamma = 2$ . Substituindo na equação (5.28), ficamos com:

$$c_\nu(t) \sim \alpha e^{(-if_2(t) + i\frac{\pi}{2} - i\eta)} \frac{(1 + ig(t_\nu - t)) e^{-\frac{2g^2 m(t_\nu - t)^2}{1 + g^2(t_\nu - t)^2}} e^{\frac{2img(t_\nu - t)}{1 + g^2(t_\nu - t)^2}}}{[1 + g^2(t_\nu - t)^2]^{5/4}}, \quad (5.30)$$

onde  $\eta = \arctan[g(t_\nu - t)]$ . Agora vamos calcular o termo de ordem zero, ou seja, o termo com  $\nu = 0$ . Para tanto, precisamos de um novo parâmetro temporal. Temos a seguinte fase

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -2igtmx^2 \\ \psi'(x) &= -4igtmx.\end{aligned}$$

Assim, o novo parâmetro temporal será  $\theta = 4gt$ . Todas as aproximações que foram feitas para o caso  $\nu \neq 0$  são validas aqui. Assim, temos

$$\begin{aligned}c_0(t) &= \alpha e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2m(x-1)^2 - \frac{i\theta m x^2}{2}} dx + E_\nu^1 + E_\nu^2 + E_\nu^3 \\ c_0(t) &\sim e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \int_C z e^{mh(z)} dz.\end{aligned}\tag{5.31}$$

Onde, novamente, usamos as definições usadas anteriormente para  $z$  e para o caminho  $C$ . Temos

$$\begin{aligned}h(z) &= -2(z-1)^2 - \frac{i\theta z^2}{2} \\ h'(z) &= -4(z-1) - i\theta z.\end{aligned}\tag{5.32}$$

O ponto de sela  $z_0$  de  $h(z)$  será

$$h'(z_0) = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{4}{4 + i\theta}.\tag{5.33}$$

Assim, temos que

$$h(z_0) = -\frac{2\theta^2}{16 + \theta^2} - \frac{8i\theta}{16 + \theta^2}.\tag{5.34}$$

Temos também que  $h''(z) = -4 - i\theta$ . Portanto, a raiz apropriada para  $\{-1/h''(z_0)\}$  será

$$\left\{ \frac{-1}{h''(z_0)} \right\}^{1/2} = \frac{e^{(i/2)(\pi-\eta)}}{(16 + \theta^2)^{1/4}}.\tag{5.35}$$

Logo, ficamos com a expressão final da aproximação assintótica

$$c_0(t) \sim 8\alpha e^{-i\omega t} \frac{e^{(i/2)(\pi-\eta)} (16 - 4i\theta) e^{-\frac{2\theta^2 m}{16+\theta^2}} e^{-\frac{8mi\theta}{16+\theta^2}}}{(16 + \theta^2)^{5/4}}.\tag{5.36}$$

Onde  $\eta = \arctan(\frac{\theta}{4})$ . Mas  $\theta = 4gt$ . Assim, temos

$$c_0(t) \sim \alpha e^{-i\omega t} \frac{e^{(i/2)(\pi-\eta)} (1 - i g t) e^{-\frac{2g^2 t^2 m}{1+t^2 g^2}} e^{-\frac{2m i g t}{1+g^2 t^2}}}{(1 + g^2 t^2)^{5/4}}. \quad (5.37)$$

### 5.2.1 Resultados

A equação (5.1) que está sendo aproximada possui uma solução exata bastante simples para o caso  $\gamma = 2$ . O propósito da aproximação, neste caso, é apenas para ilustrar as técnicas matemáticas empregadas para encontrarmos os tempos de ressurgimento. Observando que, para  $\gamma = 2$  na equação (5.1), podemos notar que a soma nada mais é que a expansão em série da função exponencial. Assim, após alguns cálculos simples, chegamos na seguinte expressão para a equação (5.1).

$$\begin{aligned} \langle \alpha | a(t) | \alpha \rangle = \alpha e^{-|\alpha|^2(1-\cos(2gt))} \{ \cos [(\omega + g)t + |\alpha|^2 \sin(2gt)] - \\ - i \sin [(\omega + g)t + |\alpha|^2 \sin(2gt)] \}. \end{aligned}$$

Na figura 5.1 temos a comparação entre a solução exata (a esquerda) e a solução aproximada (a direita) para alguns valores de  $\alpha$ .

Foi plotado o valor esperado do primeiro ressurgimento da posição para um estado inicial coerente. Assim, vemos que a aproximação melhora quanto maior for o valor de  $\alpha$ , o que era de se esperar. Digno de nota ainda é o fato de que para valores de  $\alpha$  razoavelmente pequenos, da ordem de 3, a aproximação já fornece resultados qualitativamente razoáveis. Para  $\gamma = 2$  os tempos de ressurgimento são independentes de  $\alpha$ .

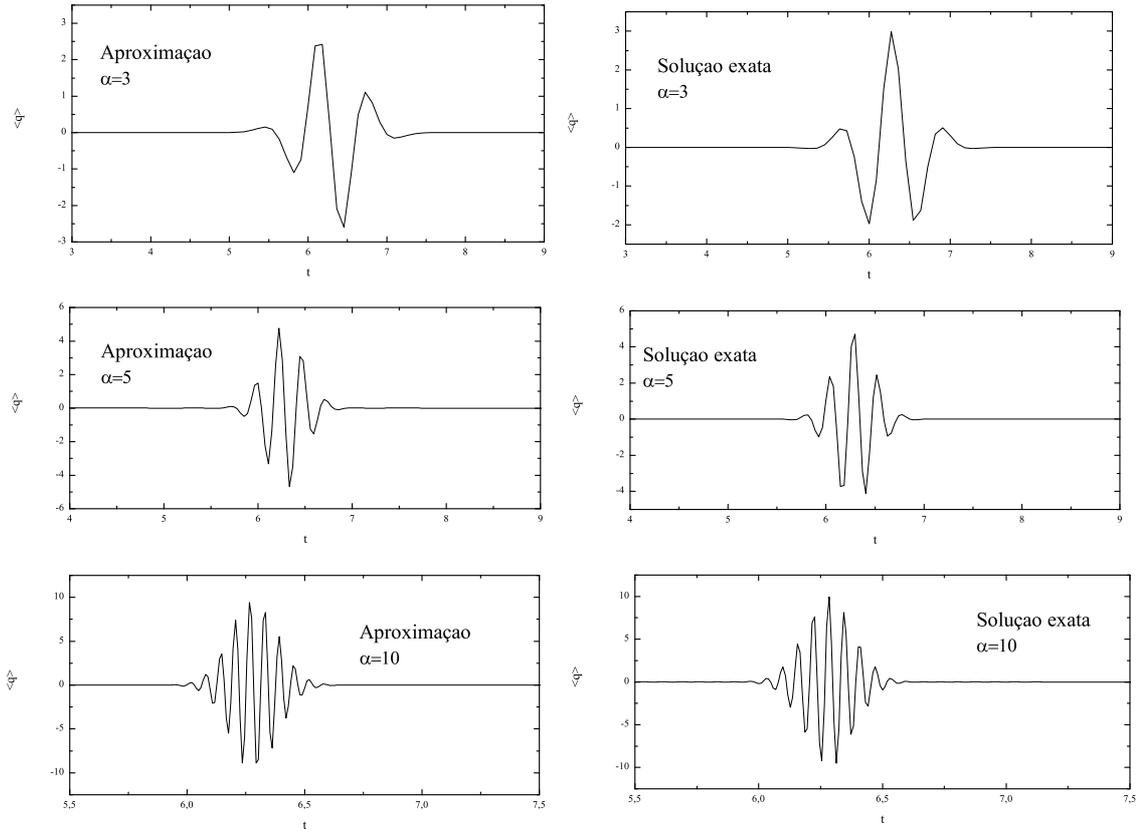


Figura 5.1: Comparação entre as soluções exata, equação (5.1), (a direita) e aproximada, equação (5.30), (a esquerda) no caso  $\gamma = 2$  para  $g = 0.5$  e  $\omega = 1$ . O eixo horizontal é o tempo e o eixo vertical é o valor esperado da posição.

### 5.3 Caso $\gamma = 3$

Para o caso  $\nu \neq 0$ , ficamos com

$$h(z) = -2(z-1)^2 + 2i\pi\nu \left( z^2 - \frac{\tau z^4}{2} \right), \quad (5.38)$$

onde  $\tau = \frac{3gtm}{\pi\nu}$ . O ponto de sela  $z_0$  é dado por

$$h'(z_0) = -4(z_0 - 1) + 4i\pi\nu (z_0 - \tau z_0^3) = 0.$$

Como as soluções da equação cúbica acima são muito complicadas, vou apenas analisar numericamente a equação (5.1) para  $\gamma = 3$ , com o intuito de ilustrar a mudança qualitativa na natureza do fenômeno.

### 5.3.1 Resultados

Os gráficos foram colocados para ilustrar a mudança radical de comportamento ao introduzirmos uma não linearidade maior no hamiltoniano. Na figura 5.2 vemos gráficos para três valores de  $\alpha$  diferentes. Note que, neste caso, os tempos de ressurgimento são inversamente proporcionais a  $\alpha^2$ , o que indica, de fato, uma grande diferença com o caso  $\gamma = 2$ .

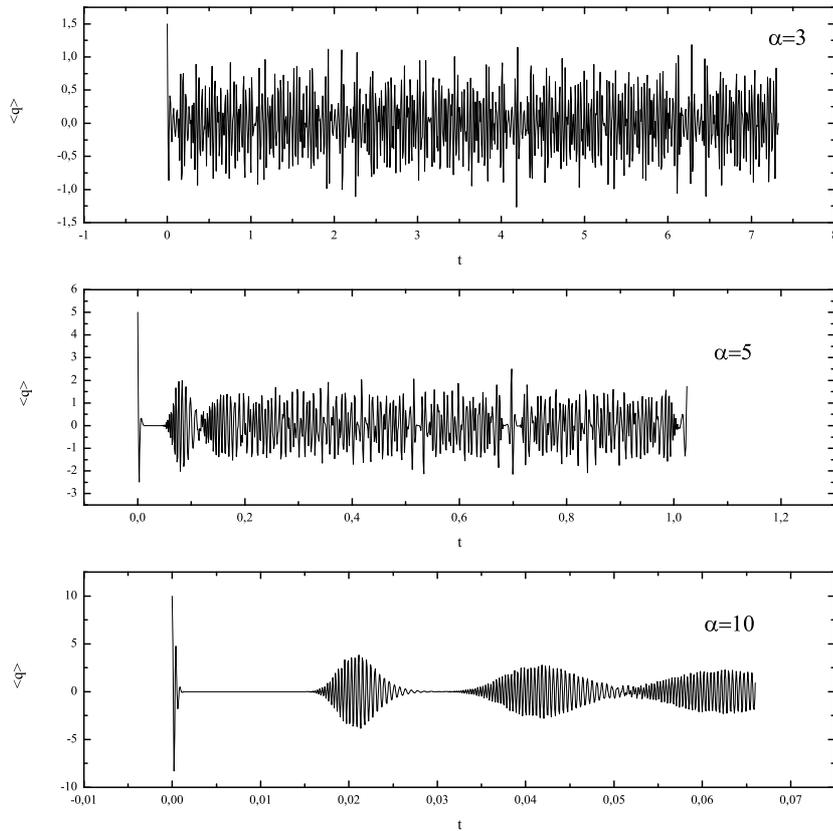


Figura 5.2: Solução exata, equação (5.1), com  $\gamma = 3$  para  $\alpha = 3$  primeiro gráfico de cima para baixo,  $\alpha = 5$  gráfico do meio,  $\alpha = 10$ , último gráfico de cima para baixo,  $g = 0.5$  e  $\omega = 1$ . O eixo vertical é o valor esperado da posição e o eixo horizontal é o tempo.

## 5.4 Estimativa dos termos de erro

Agora vamos estimar o valor dos termos de erro. Para tanto vamos usar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} |ReZ| &\leq |Z| \\ |e^{i\theta}| &= 1 \\ \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| dx \\ |a + b| &\leq |a| + |b|. \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$|E_\nu^1| \leq m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\sqrt{1/2m}}^{1-\varepsilon} e^{-2m(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1)^2} dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} x e^{-2m(\sqrt{x^2 - \frac{1}{2m}} - 1)^2} dx, \quad (5.39)$$

onde  $1 - \varepsilon > \sqrt{\frac{1}{2m}} \implies \varepsilon < 1 - \sqrt{\frac{1}{2m}}$ . Onde usamos que na primeira integral  $|x| < 1$ . Vamos usar  $\varepsilon = \sqrt{\frac{\ln m}{2m}}$ . Após longos cálculos levando em consideração que podemos expandir os limites de integração na primeira integral e que a segunda pode ser resolvida exatamente, temos :

$$|E_\nu^1| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e \left[ 2\sqrt{\frac{\ln m}{m}} + \frac{1}{2m} \right]. \quad (5.40)$$

O termo de erro  $E_\nu^2$  Pode ser estimado levando em consideração que  $x$  está próximo de 1 e  $m$  é grande e portanto o termo entre colchetes de (5.18) é pequeno. Assim, podemos estimar que:

$$|E_\nu^2| \leq O\left(\sqrt{2 \ln m}\right). \quad (5.41)$$

Assim, o termo que estamos considerando como sendo de erro está divergindo com uma cota superior que diverge lentamente quando  $m \rightarrow \infty$ . Podemos ver que o que está sendo aproximado é  $c_\nu(t_\nu) = \sqrt{m}$  e é apenas os tempos de ressurgimento que nos interessam. De fato, pode-se ver que existe um parâmetro global  $\alpha$  que multiplica todos os termos da aproximação. Se fatorarmos esse parâmetro, veremos que vamos ter uma soma de um termo da ordem de 1 com os termos de erro inversamente proporcionais a  $\alpha$ , o que garante

que a cota superior é realmente o que está sendo aproximado. Para estimar o termo de erro  $E_\nu^3$  note que

$$\begin{aligned} E_\nu^3 &= \sqrt{\frac{2m}{\pi}} \alpha e^{-if(t)} \int_{|y| \geq \varepsilon} (y+1) e^{-2my^2 + 2i\pi\nu((y+1)^2 - \frac{\tau(y+1)^{2\gamma-2}}{\gamma-1})} dy \\ \left| \int_{|y| \geq \varepsilon} (y+1) e^{-2my^2 + 2i\pi\nu(\dots)} dy \right| &\leq \int_{|y| \geq \varepsilon} |y| e^{-2my^2} dy = 2 \int_\varepsilon^\infty y e^{-2my^2} dy \\ &= 2 \left[ -\frac{1}{4m} e^{-2my^2} \right]_\varepsilon^\infty = \frac{1}{2m} e^{-2m\varepsilon^2} = \frac{1}{2m^2}. \end{aligned}$$

Assim, a aproximação para a equação (5.21) é

$$\begin{aligned} c_\nu(t) &= \alpha e^{-i(\pi\nu + \omega t - \frac{\pi}{2} + \arctan(g(t_\nu - t)))} \frac{(1 + ig(t_\nu - t)) e^{-\frac{2g^2 m (t_\nu - t)^2}{1 + g^2 (t_\nu - t)^2}} e^{\frac{2img(t_\nu - t)}{1 + g^2 (t_\nu - t)^2}}}{[1 + g^2 (t_\nu - t)^2]^{5/4}} \\ &+ O\left(\sqrt{2 \ln m}\right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

e a aproximação para a equação (5.32) é

$$\begin{aligned} c_0(t) &= \alpha e^{-i\omega t} \frac{e^{(i/2)(\pi - \arctan(gt))} (1 - igt) e^{-\frac{2g^2 t^2 m}{1 + t^2 g^2}} e^{-\frac{2migt}{1 + g^2 t^2}}}{(1 + g^2 t^2)^{5/4}} \\ &+ O\left(\sqrt{2 \ln m}\right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

## 5.5 Aplicação da aproximação assintótica para o caso de dois condensados interagentes

Recentemente, os físicos foram capazes de aprisionar condensados de Bose-Einstein parcialmente sobrepostos de átomos em estados diferentes [12,13]. Por outro lado, esquemas de dois ftons que induzem transições entre estados atômicos fornecem acesso irrestrito a riqueza de graus de liberdade internos [14,15]. O mecanismo de dois ftons que converte átomos de um estado interno a outro pode ser coerente, resultando em um acoplamento do tipo Rabi dos estados internos. A descrição de campos mutuamente coerentes se assemelha a uma junção de Josephson<sup>1</sup> e o acoplamento entre os condensados é

---

<sup>1</sup>O efeito Josephson é um efeito físico que se manifesta pela aparição de uma corrente eléctrica que flui através de dois supercondutores fracamente interligados, separados apenas por uma barreira isolante

chamado de "interação de Josephson interna". Juntamente com a técnica para aprisionar condensados de Bose-Einstein parcialmente sobrepostos, as ferramentas dessa tecnologia emergente tem sido usadas para medir diretamente excitações elementares.

Na técnica de espalhamento de Bragg desenvolvida por Ketterle e co-autores [16], é possível medir a taxa com a qual uma perturbação de onda plana excita um condensado de um gás de átomos diluídos com apenas um grau de liberdade. As medidas estão em excelente acordo com a intensidade da excitação de uma coleção de excitações homogêneas, que segue diretamente da transformação de Bogoliubov (uma transformação canônica que diagonaliza o hamiltoniano de condensados com dois graus de liberdade) [17]. Essa mesma medida em condensados com mais de um grau de liberdade pode fornecer informações sobre sua estrutura interna de muitos corpos [18].

Tendo como modelo o trabalho [19], usado para tratar dois condensados mutuamente interagentes, temos que um hamiltoniano esquemático para o mesmo é

$$H = \hbar\tilde{\omega}(a^\dagger a + b^\dagger b) + \lambda\hbar^2(a^\dagger a + b^\dagger b)^2 + \mu\hbar(a^\dagger b + ab^\dagger). \quad (5.44)$$

onde  $a$  representa um dos tipos de condensado e  $b$  o outro. O primeiro termo descreve as auto-interações, o segundo descreve as interações cruzadas e o último termo é do tipo Josephson.

Consideramos um estado inicial coerente bidimensional  $|\alpha_0, \beta_0\rangle$  e aplicamos o operador evolução

$$U(t) = \exp\{-it\tilde{\omega}(a^\dagger a + b^\dagger b)\} \exp\{\lambda\hbar^2(a^\dagger a + b^\dagger b)^2\} \exp\{\mu\hbar(a^\dagger b + ab^\dagger)\}$$

para obter a função de onda

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|\hat{\beta}_t|^2/2} e^{-|\hat{\alpha}_t|^2/2} \sum_{n,m} e^{-it\lambda\hbar(n+m)^2} \frac{\hat{\beta}_t^m}{\sqrt{m!}} \frac{\hat{\alpha}_t^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle|m\rangle, \quad (5.45)$$

onde

$$\hat{\alpha}_t = [\alpha_0 \cos(\mu t) - i\beta_0 \sin(\mu t)] e^{-i\tilde{\omega}t}$$

---

muito fina. Esta disposição é conhecida como uma Junção Josephson e a corrente que atravessa a barreira é chamada de Corrente Josephson. Esse formalismo se mostrou muito útil na descrição de campos coerentes fracamente interagentes como o que vamos tratar agora.

e

$$\hat{\beta}_t = [-i\alpha_0 \sin(\mu t) + \beta_0 \cos(\mu t)]e^{-i\tilde{\omega}t}.$$

Sabemos que  $q_a = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$  é o operador posição em relação ao primeiro condensado e  $q_b = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(b + b^\dagger)$  é o operador posição em relação ao segundo condensado, com  $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$ .

Denotando  $\langle \psi(t) | q_a | \psi(t) \rangle$  por  $\langle q_a \rangle$ , o valor esperado da posição,  $q$ , para o primeiro condensado é

$$\langle q_a \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} e^{-|\hat{\alpha}_t|^2} e^{-|\hat{\beta}_t|^2} \sum_{m,n} \frac{|\hat{\alpha}_t|^{2n}}{n!} \frac{|\hat{\beta}_t|^{2m}}{m!} [\hat{\alpha}_t e^{-it\lambda\hbar(2m+2n+1)} + \hat{\alpha}_t^* e^{it\lambda\hbar(2n+2m+1)}]. \quad (5.46)$$

Vamos primeiro obter a solução exata. Fica fácil ver que as somas acima vão se tornar exponenciais e, após longos e tediosos cálculos, chegamos na seguinte expressão

$$\langle q_a \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} e^{\sigma(\cos(2t\lambda\hbar)-1)} \{ \cos(\gamma + \tilde{\omega}t) [\Re(\alpha_0) \cos(\mu t) - \Im(\beta_0) \sin(\mu t)] - \sin(\gamma + \tilde{\omega}t) [\Re(\beta_0) \sin(\mu t) - \Im(\alpha_0) \cos(\mu t)] \}, \quad (5.47)$$

onde  $\sigma = |\alpha_0|^2 + |\beta_0|^2$  e  $\gamma = \sigma \sin(2t\lambda\hbar) + t\lambda\hbar$  e  $\tilde{\omega} = \omega + \lambda\hbar$ .

Assim, chegamos na aproximação final de onde será possível obter os tempos de ressurgimento.

$$\begin{aligned} \langle q_a \rangle \approx & \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left\{ \left( \frac{e^{-\frac{2\lambda^2\hbar^2 t^2(\bar{n}+\bar{m})}{1+\lambda^2\hbar^2 t^2}}}{(1+\lambda^2\hbar^2 t^2)^{5/2}} [(1-\lambda^2\hbar^2 t^2) \cos(x_0 + \tilde{\omega}t) [\Re(\alpha_0) \cos(\mu t) - \Im(\beta_0) \sin(\mu t)] - \right. \right. \\ & - 2\lambda\hbar t \cos(x_0 + \tilde{\omega}t) [\Re(\beta_0) \sin(\mu t) - \Im(\alpha_0) \cos(\mu t)] - \\ & - (1-\lambda^2\hbar^2 t^2) \sin(x_0 + \tilde{\omega}t) [\Re(\beta_0) \sin(\mu t) + \\ & + \Im(\alpha_0) \cos(\mu t)] - 2\lambda\hbar t \sin(x_0 + \tilde{\omega}t) [\Re(\alpha_0) \cos(\mu t) + \Im(\beta_0) \sin(\mu t)] \Big) + \\ & + \sum_{\nu, u \neq 0} \frac{e^{-2\lambda^2\hbar^2 \left( \frac{\bar{n}(t_\nu-t)^2}{1+\lambda^2\hbar^2(t_\nu-t)^2} + \frac{\bar{m}(t_u-t)^2}{1+\lambda^2\hbar^2(t_u-t)^2} \right)}}{(1+\lambda^2\hbar^2[(t_\nu-t)^2 + (t_u-t)^2 + \lambda^2\hbar^2(t_\nu-t)^2(t_u-t)^2])^{5/4}} \times \\ & \times ([1-\lambda^2\hbar^2(t_\nu-t)(t_u-t)] \cos(x-\tilde{\omega}t) [\Re(\alpha_0) \cos(\mu t) + \Im(\beta_0) \sin(\mu t)] + \\ & + \lambda\hbar(t_\nu+t_u-2t) \cos(x-\tilde{\omega}t) [\Im(\alpha_0) \cos(\mu t) + \Re(\beta_0) \sin(\mu t)] + \\ & + (1-\lambda^2\hbar^2(t_\nu-t)(t_u-t)) \sin(x-\tilde{\omega}t) [\Re(\beta_0) \sin(\mu t) - \Im(\alpha_0) \cos(\mu t)] - \\ & - \lambda\hbar(t_\nu+t_u-2t) \sin(x-\tilde{\omega}t) [\Re(\alpha_0) \cos(\mu t) - \Im(\beta_0) \sin(\mu t)] \Big) \Big\}, \quad (5.48) \end{aligned}$$

onde

$$x_0 = \frac{2\lambda\hbar t(\bar{n} + \bar{m})}{1 + \lambda^2\hbar^2 t} + \lambda\hbar t - \pi - \arctan(\lambda\hbar t)$$

e

$$x = \frac{2\lambda\hbar\bar{n}(t_\nu - t)}{1 + \lambda^2\hbar^2(t_\nu - t)^2} + \frac{2\lambda\hbar\bar{m}(t_u - t)}{1 + \lambda^2\hbar^2(t_u - t)^2} - \lambda\hbar t + \pi + \frac{\arctan(\lambda\hbar(t_\nu - t))}{2} + \frac{\arctan(\lambda\hbar(t_u - t))}{2}.$$

Assim como  $\bar{n} = |\hat{\alpha}_t|^2$  e  $\bar{m} = |\hat{\beta}_t|^2$ . Temos também

$$t_\nu = \frac{\pi\nu}{\lambda\hbar}$$

e

$$t_u = \frac{\pi u}{\lambda\hbar}.$$

Na somatória acima, vemos que os termos com maior contribuição serão para  $\nu = u$ , e esses serão significativos somente para  $t \approx t_\nu$ , sendo esses portanto os tempos de ressurgimento.

A margem de erro é apenas a da aproximação assintótica, visto que não foi preciso fazer mais nenhuma aproximação para aplicarmos a técnica.

Na figura 5.3 vemos a comparação dos gráficos para a solução exata, equação (5.47), (à direita) e a aproximação, equação (5.48), (à esquerda) para alguns valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ . Notamos nestes gráficos que os resultados aproximados são muito bons sempre que o parâmetro do estado coerente inicial de um dos condensados for muito maior que 1, mesmo que o outro seja da ordem de 2 (ver segundo gráfico com  $\alpha_0 = 10$  e  $\beta_0 = 2$ ).

Notamos ainda que no caso de dois graus de liberdade, os modelos usuais (solúveis) para condensados têm previsto periodicidade nos ressurgimentos [3]. Podemos imaginar que um comportamento de outro tipo por exemplo, no qual os tempos de ressurgimentos dependam de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , pode indicar a presença de efeitos não lineares que não aparecem aqui. Experimentos nessa direção poderiam ser muito úteis na investigação da interação efetiva destes estados da matéria macroscopicamente mais robustos.

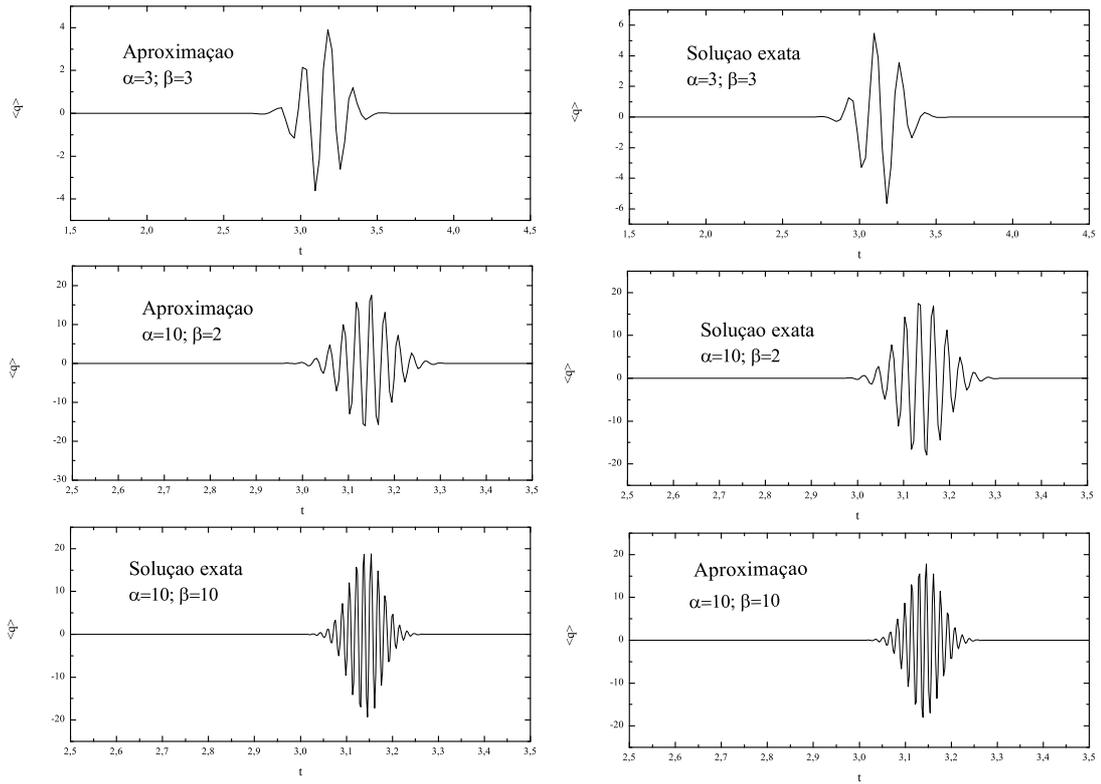


Figura 5.3: No primeiro gráfico de cima para baixo temos  $\alpha_0 = 3$  e  $\beta_0 = 3$ . No segundo temos  $\alpha_0 = 10$  e  $\beta_0 = 2$  e no último temos  $\alpha_0 = 10$  e  $\beta_0 = 10$ . Temos também que  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1.5$ , e  $\nu = 0.5$ . O eixo vertical é o valor esperado da posição e o eixo horizontal é o tempo.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho usamos uma aproximação semi-clássica não-perturbativa para calcular tempos de ressurgimento em modelos de relevância física. Primeiramente aplicamos a técnica num modelo simples que descreve condensados auto-interagentes. Na referência [3] foi mostrado que a função de onda macroscópica de um condensado auto-interagente mostra colapsos e ressurgimentos periódicos, e isso serviu de motivação para que estudássemos o fenômeno mais a fundo. Vimos nesse caso que para  $\alpha > 3$  a aproximação já dá bons resultados. Notamos que quando aumentamos a não-linearidade ( $\gamma = 3$ ) o fenômeno muda radicalmente e o cálculo da aproximação não fornece uma fórmula fechada. Mesmo assim fomos capazes de encontrar uma expressão geral para os tempos de ressurgimento para qualquer  $\gamma > 1$ .

Depois aplicamos a técnica no modelo de dois condensados interagentes com interações internas tipo Josephson e notamos que basta ter um dos parâmetros do estado coerente bidimensional, tomado como estado inicial, maior do que 3 para que possamos ter uma boa aproximação. Nesses dois casos vimos que os tempos de ressurgimento encontrados estão em excelente acordo com o resultado exato. O interesse em vários condensados mutuamente interagentes presos via armadilhas magneto-ópticas tem crescido consideravelmente desde quando os físicos experimentais conseguiram prender pela primeira vez mais de um condensado parcialmente interagente de átomos em estados diferentes que são (i) *hyperfine split* [25] ou (ii) estados quase degenerados correspondentes a diferentes orientações do spin  $F$  [26]. O estudo desses modelos tem revelado informações importantes

sobre a estrutura de sistemas de muitos corpos.

Dado os resultados deste trabalho, seria interessante investigar experimentalmente o fenômeno de ressurgimentos no valor esperado da posição em um sistema com dois condensados. Os resultados, se coincidirem com nossas previsões, irão mostrar que o modelo atualmente utilizado para descrevê-los é bastante completo. Caso os ressurgimentos medidos sejam não periódicos, isso pode indicar que uma não linearidade maior deve ser acrescida ao hamiltoniano.

Nossa meta agora é aplicar esse método em outros problemas, uma vez que ele se mostrou bastante eficiente nos casos simples estudados.

# Apêndice A

## Fórmula da soma de Poisson

Seja  $\{f_n\}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) uma sequência que admite uma interpolação  $f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) como mostra a figura A.1, tal que  $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f(n) = f_n$  para  $n \in \mathbb{N}$  ou  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum_n f(n + \tau)$  e  $\sum_n f'(n + \tau)$  convergem absolutamente e uniformemente para todo  $\tau \in [0, 1)$ . Queremos representar as séries  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  de forma mais conveniente. Para começar,

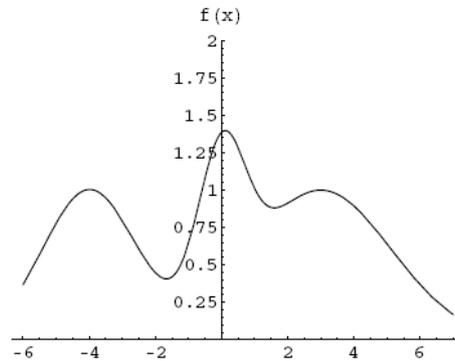


Figura A.1: Uma interpolação para  $f_n$

vamos expressar  $f(x)$  no intervalo  $[n, n + 1)$  através de sua série de Fourier gerada por  $\tilde{f}(x)$  é

$$F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{-i2\pi\nu x} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$c_\nu = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{f}(x) e^{i2\pi\nu x} d\tau = \int_0^1 f(n + \tau) e^{i2\pi\nu x} \quad (\text{A.2})$$

A continuidade de  $f(x)$  e  $\tilde{f}(x)$  garante a convergência da série ainda que

$$F(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{onde } \tilde{f} \text{ é contínua} \\ \frac{\tilde{f}_+ + \tilde{f}_-}{2} & \text{onde } \tilde{f} \text{ é descontínua} \end{cases}$$

A extensão  $\tilde{f}(x)$  é contínua e coincide com  $f(x)$  para  $x \in (n, n+1)$ . Porém, para  $x = n$

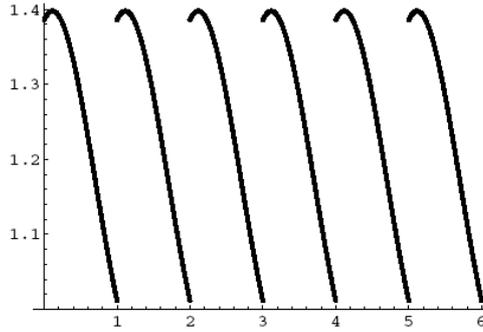


Figura A.2:  $\tilde{f}(x) \rightarrow$  extensão periódica de período  $2l = 1$  para  $f(x)$

podemos ter uma descontinuidade, com  $\tilde{f}_+(n) = f(n) = f_n$  e  $f(n+1) = f_{n+1}$ . Portanto

$$F(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & x \in (n, n+1) \\ \frac{\tilde{f}_+ + \tilde{f}_-}{2} & x = n \end{cases}$$

e então, usando a convergência absoluta das séries, obtemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) + \frac{1}{2}f_0 \quad (\text{A.4})$$

onde

$$F(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(n+\tau) e^{2i\pi\nu\tau} d\tau, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.5})$$

Se  $\sum_n f(n + \tau)$  e  $\sum_n f'(n + \tau)$  convergirem absolutamente e uniformemente para todo  $\tau \in [0, 1)$ , podemos fazer as seguintes mudanças de ordem de soma e integração:

$$\begin{aligned}
\sum_n f_n &= \sum_n \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(n + \tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_n \int_0^1 f(n + \tau) e^{i2\pi\nu\tau} d\tau \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_n \int_n^{n+1} f(n + \tau) e^{i2\pi\nu(n+\tau)} d(n + \tau) \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_n \int_n^{n+1} f(x) e^{i2\pi\nu x} dx \\
&= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \begin{cases} \int_0^{\infty} f(x) e^{i2\pi\nu x} dx & \text{para soma em } n \in \mathbb{N} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i2\pi\nu x} dx & \text{para soma em } n \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos a fórmula da soma de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2i\pi\nu x} dx \tag{A.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \frac{1}{2} f_0 + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x) e^{2i\pi\nu x} dx \tag{A.8}$$

É importante notar que os resultados obtidos não dependem da interpolação  $f(x)$  ( $x \notin \mathbb{Z}$ ) usada para o cálculo, desde que ela obedeça às condições impostas.

# Apêndice B

## Aproximação Gaussiana

Vamos estimar, para  $|\alpha| > 0$  grande, a função discreta

$$g_n = \frac{1}{n!} |\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2} \quad (\text{B.1})$$

onde  $n$  é um número natural. Usando a fórmula de Stirling, temos:

$$\ln n! = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + E(n) \quad (\text{B.2})$$

onde  $|E(n)| < \frac{1}{12n}$ , assim, temos:

$$\ln g_n = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + 2n \ln |\alpha| - |\alpha|^2 - E(n) \quad (\text{B.3})$$

Definindo a seguinte função

$$h(x) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \ln x^2 + x^2 + 2x^2 \ln |\alpha| - |\alpha|^2 \quad (\text{B.4})$$

ficamos com

$$\ln g_n = h(\sqrt{n}) - E(n) \quad (\text{B.5})$$

Expandindo  $h(x)$  em sua série de Taylor para  $x \approx |\alpha|$ , ficamos com

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln |\alpha| - \frac{1}{|\alpha|} (x - |\alpha|) + \frac{1}{2} \left(-4 + \frac{1}{|\alpha|^2}\right) \\ &+ 4 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)(k-2)} |\alpha|^{2-k} (x - |\alpha|)^k + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} |\alpha|^{-k} (x - |\alpha|)^k \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Substituindo (B.6) em (B.5), ficamos com

$$\ln g_n = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln |\alpha| - 2(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 + Q(n) - E(n) \quad (\text{B.7})$$

onde

$$\begin{aligned}
Q(n) &= -\frac{1}{|\alpha|}(\sqrt{n} - |\alpha|) + \frac{1}{2|\alpha|^2}(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 + 4 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)(k-2)} |\alpha|^{2-k} (x - |\alpha|)^k \\
&+ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} |\alpha|^{-k} (x - |\alpha|)^k
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Podemos escrever  $Q(n)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
Q(n) &= -\frac{1}{|\alpha|}(\sqrt{n} - |\alpha|) + \frac{1}{2|\alpha|^2}(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 - \frac{2}{3|\alpha|}(\sqrt{n} - |\alpha|)^3 \\
&+ \frac{1}{6|\alpha|^2}(\sqrt{n} - |\alpha|)^4 + O(|\alpha|^{-3})
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Para  $\sqrt{n} \approx |\alpha|$ , temos  $n \approx |\alpha|^2$  e  $E(n)$  e  $Q(n)$  serão  $O(|\alpha|^{-2})$  e  $O(|\alpha|^{-1})$  respectivamente.

Assim, temos:

$$\ln g_n = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln |\alpha| - 2(\sqrt{n} - |\alpha|)^2 + O(|\alpha|^{-1}) \tag{B.10}$$

A aproximação gaussiana de  $g_n$  será:

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-2(\sqrt{n}-|\alpha|)^2} [1 + O(|\alpha|^{-1})] \tag{B.11}$$

visto que  $e^\epsilon = 1 + O(\epsilon)$  para  $\epsilon$  pequeno.

# Apêndice C

## Método *Steepest Descents*

Vamos obter uma aproximação assintótica, ou seja, para  $\beta$  grande, usando o método *Steepest Descents* para

$$f(\beta) = \int_C g(z)e^{\beta h(z)} dz \quad (\text{C.1})$$

onde  $C$  é um caminho no plano complexo,  $g(z)$  e  $h(z)$  são funções analíticas de  $z$  no domínio do plano complexo que contém  $C$  e  $\beta$  é um número real positivo. Na aproximação vamos supor que  $g(z)$  e  $h(z)$  são independentes de  $\beta$ . Vamos seguir os passos de Murray[20]. Vamos introduzir as seguintes funções:

$$\phi = \text{Re}h(z) \quad (\text{C.2})$$

$$\psi = \text{Im}h(z) \quad (\text{C.3})$$

Assim, podemos escrever

$$h(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (\text{C.4})$$

onde  $z = x + iy$ . O método *steepest descents* consiste em deformar o caminho  $C$  de tal forma que ele passe pelo ponto  $z = z_0$  no qual  $\phi$  atinge um máximo e que decaia o mais rápido possível e que  $\psi$  seja constante para que não haja oscilações provenientes da exponencial complexa perto do ponto máximo  $e^{\beta\phi}$ , ou seja, vamos deformar o caminho  $C$  de forma que grande parte da contribuição da integral se concentre numa pequena região em torno de  $z = z_0$  onde  $\phi$  atinge um máximo. O teorema de Cauchy-Goursat nos permite deformar o caminho  $C$  no caminho de *steepest descents*. O teorema é o seguinte [21]:

**Teorema C.0.1.** *Se uma função  $f$  é analítica em todos os pontos interiores e sobre um caminho fechado  $D$ , então*

$$\oint_D f(z) dz = 0 \quad (\text{C.5})$$

Como  $g(z)$  e  $h(z)$  são analíticas,  $g(z)e^{\beta h(z)}$  também será analítica. Seja  $C_{sd}$  o caminho de *steepest descents*, então  $C \cup -C_{sd}$  forma um caminho fechado, logo

$$\begin{aligned} \oint_{C \cup -C_{sd}} g(z)e^{\beta h(z)} dz &= 0 \\ \int_C g(z)e^{\beta h(z)} dz - \int_{C_{sd}} g(z)e^{\beta h(z)} dz &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Logo,

$$\int_C g(z)e^{\beta h(z)} dz = \int_{C_{sd}} g(z)e^{\beta h(z)} dz \quad (\text{C.7})$$

ou seja, podemos deformar o caminho  $C$  no caminho de *steepest descents* pois este forma um caminho fechado com  $C$  e  $g(z)e^{\beta h(z)}$  é analítica dentro e sobre ele. Como  $h(z)$  é uma função analítica de  $z$ , as funções  $\phi$  e  $\psi$  devem satisfazer as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{C.9})$$

e satisfazem também a seguinte relação

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0 \quad (\text{C.10})$$

ou seja, são funções harmônicas. Pelo teorema do módulo máximo para funções harmônicas,  $\psi$  e  $\phi$  não podem ter máximos ou mínimos no domínio de analiticidade de  $h(z)$ . Logo, sendo  $z_0 = x_0 + iy_0$  uma solução da equação

$$\nabla \phi = 0 \quad (\text{C.11})$$

e devido às equações (C.8) e (C.9) também será solução da equação

$$\nabla \psi = 0 \quad (\text{C.12})$$

e ele será o ponto de sela de  $\psi$ ,  $\phi$  e  $h$ . Vamos considerar apenas os pontos de sela de ordem 1, ou seja,

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= 0 \\ h''(z_0) &\neq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

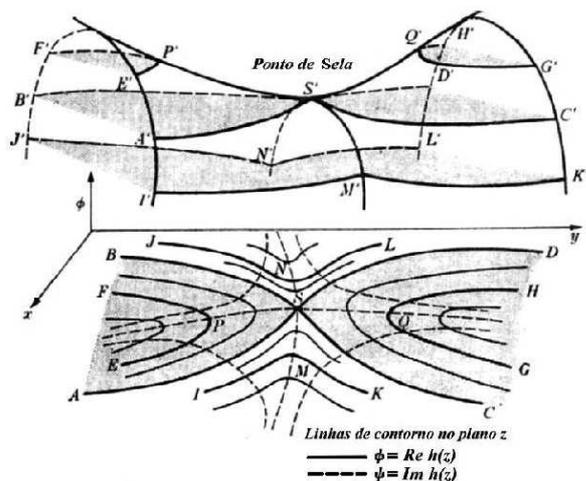


Figura C.1: Figura tirada do Murray

Podemos estender o método usando pontos de sela de ordens superiores. Considerando a superfície  $\phi = \phi(x, y)$ , a figura C.1 mostra situação típica de um ponto de sela  $S'$  que corresponde ao ponto  $S$  no plano  $z$ . A parte inferior da figura ilustra as linhas de caminho, ou seja, as projeções no plano  $z$  da interseção dos planos  $\phi = \text{constante}$  e a superfície tridimensional  $\phi = \phi(x, y)$ . Os pontos com "'' na parte superior do gráfico correspondem aos pontos sem "'' na parte inferior. Por exemplo, a curva  $E'P'F'$  corresponde a linha  $EPF$ . Vamos deformar o caminho  $C$ , ou seja, escolher um caminho alternativo de integração passando por  $z_0$  e tal que a contribuição principal para a integral quando  $\beta$  for grande venha de uma região próxima a  $z_0$ . Assim, queremos que ao longo do novo caminho,  $\phi$  tenha um máximo em  $z_0$  e decaia rapidamente quando se afasta de  $z_0$ . Felizmente, as condições de Cauchy-Riemann implicam em  $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$ , ou seja, os gradientes de  $\psi$  e  $\phi$  são ortogonais. Disso segue que a direção de  $\nabla\phi$  (direção de *steepest descents*) também orienta um caminho sobre o qual  $\psi = \text{constante}$ . Isso por um lado é bom para evitar cancelamentos devido às contribuições provenientes do termo  $e^{i\beta\psi}$  que poderiam diluir a contribuição da região próxima de  $z_0$ , e por outro lado é utilizado na prática para a determinação do caminho de *steepest descents*. Mas, como mostra a figura C.1 existem duas linhas  $\psi = \text{constante}$  que passam pelo ponto de sela  $z_0$ , que corresponde ao ponto  $S$  no gráfico, e ao longo do qual  $\psi$  varia o mais rápido possível. Entretanto, a linha

pontilhada  $PSQ$  que está na região sombreada de montanha no plano  $z$ , corresponde a um caminho de *steepest descents* já que ao longo dela  $\phi(x, y) < \phi(x_0, y_0)$  exceto no ponto  $z = z_0$ . Logo, a integral para  $f(\beta)$  em (C.1) não deve ser deformada nesse caminho ou em qualquer outro que esteja na região sombreada da montanha. Agora, se considerarmos a linha  $MSN$  veremos que  $\phi(x, y) < \phi(x_0, y_0)$  exceto no ponto  $z = z_0$ , assim essa é a linha de *steepest descents* que estávamos procurando. Voltando ao cálculo da aproximação assintótica, perto do ponto de sela  $z_0$ , podemos expandir  $h(z)$  em sua série de Taylor:

$$h(z) = h(z_0) + \frac{1}{2}h''(z_0)(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3) \quad (\text{C.14})$$

Definindo

$$h''(z_0) = ae^{i\eta} \quad (\text{C.15})$$

$$z - z_0 = re^{i\theta} \quad (\text{C.16})$$

onde  $a > 0$  e  $r > 0$ , e utilizando (C.2) e (C.3), podemos reescrever (C.14) da seguinte maneira:

$$\phi(x, y) + i\psi(x, y) = \phi_0 + i\psi_0 + \frac{1}{2}ar^2e^{i(2\theta+\eta)} + O(r^3) \quad (\text{C.17})$$

onde  $\phi_0 = \phi(x_0, y_0)$  e  $\psi_0 = \psi(x_0, y_0)$ . Regiões de montanha, onde  $\phi(x, y) > \phi_0$  e de vale,  $\phi(x, y) < \phi_0$ , são delimitadas pelas duas linhas de contorno  $\phi(x, y) = \phi_0$ . Da parte real de (C.17)

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{2}ar^2 \cos(2\theta + \eta) + O(r^3) \quad (\text{C.18})$$

vemos que na vizinhança de  $z_0$  ( $r$  pequeno) essas linhas tangenciam e são bem aproximadas pelas retas que são soluções de  $\cos(2\theta + \eta) = 0$ . Essas retas são

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \eta \right) \text{ e sua continuação } \theta = \pi + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \eta \right) \quad (\text{C.19})$$

$$\theta = \frac{1}{2} \left( -\frac{\pi}{2} - \eta \right) \text{ e sua continuação } \theta = \pi + \frac{1}{2} \left( -\frac{\pi}{2} - \eta \right) \quad (\text{C.20})$$

representadas na figura C.2. Existem duas regiões de vale nas quais  $\phi < \phi_0$ . Como mostrar a equação (C.18), essas regiões são, próximo a  $z_0$ :

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\eta}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4} - \frac{\eta}{2} \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{\eta}{2} < \theta < \frac{7\pi}{4} - \frac{\eta}{2} \quad (\text{C.22})$$

e correspondem às regiões não sombreadas mostradas nas figuras C.1 e C.2. Da mesma forma, existem duas regiões de montanha nas quais  $\phi > \phi_0$ . Elas correspondem às regiões sombreadas mostradas nas figuras C.1 e C.2. Da mesma forma, da parte imaginária de (C.17)

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{2}ar^2 \sin(2\theta + \eta) + O(r^3) \quad (\text{C.23})$$

vemos que existem duas linhas de contorno  $\psi = \psi_0$  que, quando  $r$  é pequeno, tangenciam

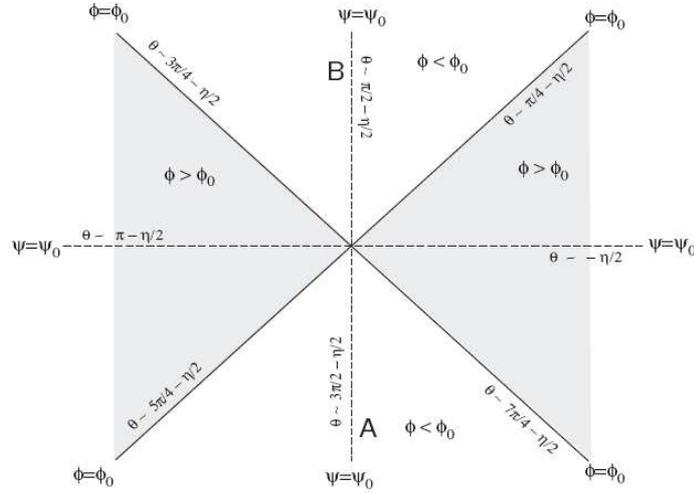


Figura C.2: Figura retirada do Murray

e são bem aproximadas pelas retas que são soluções de  $\frac{1}{2}ar^2 \sin(2\theta + \eta) = 0$ . Essas linhas são

$$\theta = -\frac{\eta}{2} \text{ e sua continuação } \theta = \pi - \frac{\eta}{2} \quad (\text{C.24})$$

e

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2} \text{ e sua continuação } \theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\eta}{2} \quad (\text{C.25})$$

As linhas  $\psi = \psi_0$  estão mostradas na figura C.2 e correspondem às linhas pontilhadas. A linha  $\theta = -\frac{\eta}{2}$  e sua continuação correspondem ao caminho de *steepest ascents*, e a linha  $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$  e sua continuação correspondem ao caminho de *steepest descents*. Vamos agora deformar o caminho  $C$  para que passe pelo caminho de *steepest descents*. Nesse caminho,  $\psi = \psi_0$  e

$$h(z) - h(z_0) = \phi - \phi_0 < 0 \quad (\text{C.26})$$

Próximo de  $z_0$  temos

$$h(z) - h(z_0) \approx \frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) \quad (\text{C.27})$$

De onde segue que

$$\frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) < 0 \quad (\text{C.28})$$

Assim, podemos introduzir uma nova variável real  $\tau$ :

$$h(z) - h(z_0) = -\tau^2 \quad (\text{C.29})$$

A equação (C.29) determina  $z$  em função de  $\tau$ ,  $z(\tau)$ . Dessa forma, a integral (C.1) pode ser reescrita da forma:

$$f(\beta) = e^{\beta f h(z_0)} \int_{-\tau_A}^{\tau_B} e^{-\beta \tau^2} g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} d\tau \quad (\text{C.30})$$

onde  $\tau_A > 0$ ,  $\tau_B > 0$  correspondem aos pontos finais do caminho  $C$ . Pode ser mostrado [20] que a contribuição principal para  $\beta \rightarrow \infty$  vem da integração sobre a região pequena na vizinhança do máximo da exponencial. Portanto não introduziremos um erro significativo ao estender o limite de integração da integral acima. Assim, temos

$$f(\beta) \sim e^{\beta f h(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \tau^2} g(z(\tau)) \frac{dz}{d\tau} d\tau \quad (\text{C.31})$$

Para obter  $z$  em função de  $\tau$ , basta expandir  $h(z)$  em série de Taylor em torno de  $z_0$  na equação (C.29). Assim, ficamos com:

$$\frac{1}{2}(z - z_0)^2 h''(z_0) + O((z - z_0)^3) = -\tau^2 \quad (\text{C.32})$$

Assim, temos

$$z - z_0 = \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{\frac{1}{2}} \tau + O(\tau^2) \quad (\text{C.33})$$

Devemos escolher a raiz apropriada de  $h''(z_0) \in \mathbb{C}$  para que  $z_0$  percorra o caminho de *steepest descents* na direção escolhida. Por exemplo, suponha que deformamos o caminho  $C$  se forma que ele passe pelo caminho de *steepest descents*  $\psi = \psi_0$  integrado de um ponto qualquer na região de vale inferior A até outro ponto qualquer na região de vale superior B como mostrado na figura C.2. Na região A,  $\arg(z - z_0) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$  e em B,  $\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$ . A escolha apropriada para a raiz de  $h''(z_0)$  será aquela cujo

$\arg\{-1/h''(z_0)\}^{1/2}$  resulta em  $\tau > 0$  quando  $z$  está na região de vale superior B, ou seja, quando  $z \approx z_0$  e  $\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$ , então pela equação (C.33),  $\tau > 0$  quando  $\arg(z - z_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$  se  $\arg\{-1/h''(z_0)\}^{1/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$ . Nesse caso, a equação (C.33) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \left\{ \frac{2}{|h''(z_0)|} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{i(\pi/2 - \eta/2)\tau} + O(\tau^2) \\ &= i\sqrt{2}\{h''(z_0)\}^{-1/2}\tau + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

onde  $\{h''(z_0)\}^{1/2} = |h''(z_0)|^{-1/2}e^{-i\frac{\eta}{2}}$ . Quando  $z$  está na região de vale inferior A, ou seja,  $\arg(z - z_0) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$ , a equação (C.34) nos fornece  $\tau < 0$ . Para completar a aproximação assintótica, vamos expandir  $g(z(\tau))$  em sua série de potências

$$\begin{aligned} g(z(\tau)) &= g(z_0) + (z - z_0)g'(z_0) + \dots \\ &= g(z_0) + g'(z_0)\{h''(z_0)\}^{-1/2}\tau + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Substituindo (C.33) e (C.35) em (C.31) obtemos:

$$f(\beta) = e^{\beta h(z_0)} g(z_0) \left\{ \frac{-2}{h''(z_0)} \right\}^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\tau^2} d\tau + \dots \quad (\text{C.36})$$

logo,

$$f(\beta) = e^{\beta h(z_0)} g(z_0) \left\{ \frac{-2\pi}{\beta h''(z_0)} \right\}^{-1/2} + O\left(\frac{e^{\beta h(z_0)}}{\beta}\right) \quad (\text{C.37})$$

De acordo com a discussão acima, devemos escolher a raiz de  $\{\frac{-1}{h''(z_0)}\}^{1/2}$  consistente com a direção na qual passamos pelo ponto de sela. Para o exemplo acima, a integração de A para B, a raiz apropriada nos fornece a seguinte expressão para a equação (C.37):

$$f(\beta) \sim \left\{ \frac{2\pi}{\beta} \right\}^{1/2} |h''(z_0)|^{-1/2} g(z_0) e^{\beta h(z_0) + (i/2)(\pi - \eta)} \quad (\text{C.38})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] M.H Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995); C.C. Bradley et al., *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 1687 (1995).
- [2] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, M.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [3] E.M. Wright, T. Wong, M.J. Collet, S.M. Tan, and D.F. Walls *Phys. Rev. A* **56**, 591 (1997).
- [4] Jaynes E.T., Cummings F.W., *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [5] Clarissa V.S.L., Nemes, M.C., Moreira, C.H.C., *Dissertação de mestrado*
- [6] A.F.R. de Toledo Piza, *Condensados atômicos de Bose-Einstein* , curso de verão IFUSP- 28-30 de janeiro de 2002.
- [7] C. H. d'Ávila Fonseca, *Physica A*, **286**, 211 (2000).
- [8] Schroedinger, E; *Naturwissenschaften*, **14**, 664 (1926).
- [9] Glauber, R.J; *Phys. Rev.*, **130**, 2529 (1963).
- [10] Glauber, R.J.; *Phys. Rev.*, **131**, 2766 (1963).
- [11] Glauber, R.J.; *phys. Rev. Lett.*, **10**, 84 (1963).
- [12] C.J. Myatt et al., *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 586 (1997).
- [13] D.M. Stamper-Kurn et al., *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2027 (1998).

- [14] M.R. Matthews et al. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 243 (1998).
- [15] J. Stenger et al., *Nature* **396**, 345 (1998).
- [16] A. Leggett, *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 331 (1975).
- [17] D.M. Stamper-Kurn, A.P. Chikkatur, A. Gorlitz, S. Inouye, S. Gupta, D.E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett*, **83**, 2876 (1999).
- [18] A.F.R. de Toledo Piza et al. *Phys. Rev. A*, **67**, 023606 (2003).
- [19] Adélcio C. Oliveira, and M.C. Nemes, *Phys. Rev. E*, **68**, 036214 (2003).
- [20] Murray, J.D., *Asymptotic Analysis*, Springer-Verlag New York Inc., New York (1984).
- [21] Churchill, R.V., *Variáveis complexas e suas aplicações*, Ed. McGraw- Hill do Brasil, São Paulo, (1975).
- [22] T.I. Ferrell, *Am. J. Phys.*, **48**, 728 (1980).
- [23] C.H. d'Ávila Fonseca, *Fluorescência ressonante e operadores*, Tese de doutorado, UFMG, Brasil (1994).
- [24] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Wiley, New York, (1973), cap 3.
- [25] K.B. Davis et al., *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3969 (1995).
- [26] C.J. Myatt et al., *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 586 (1997).
- [27] SAKURAI, J. J. (Juan John). *Modern quantum mechanics*. rev. ed. Reading: 1994.
- [28] SCULLY, Marlan O; ZUBAIRY, Muhammad Suhail. *Quantum optics*. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1997.
- [29] W.P. Allis e M.A. Herlin, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*; McGraw-Hill 1952.
- [30] W. Ketterle, N.J. van Druten, *Phys. Rev.* **A54** 656, (1996).

- [31] M. Kozuma et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999); J. E. Simsarian et. al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2040 (2000).
- [32] J. Denschlag et al, *Science* **287**, 97 (2000); M. Kozuma et al., *Science* **286**, 2309 (1999).
- [33] M. R. Andrews et al., *Science* **275**, 637 (1997).
- [34] C.H.C. Moreira, *Notas não publicadas*

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)