



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-14661-TDI/1217

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DIRETA DE CAMADA CISALHANTE
COMPRESSÍVEL COM FONTE DE CALOR**

Sandro Fonseca Quirino

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Márcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 12 de dezembro de 2006.

INPE
São José dos Campos
2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Publicado por:

esta página é responsabilidade do SID

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Gabinete do Diretor – (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 – CEP 12.245-970

São José dos Campos – SP – Brasil

Tel.: (012) 3945-6911

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**Solicita-se intercâmbio
We ask for exchange**

Publicação Externa – É permitida sua reprodução para interessados.



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-14661-TDI/1217

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DIRETA DE CAMADA CISALHANTE
COMPRESSÍVEL COM FONTE DE CALOR**

Sandro Fonseca Quirino

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Combustão e Propulsão, orientada pelo Dr. Márcio Teixeira de Mendonça, aprovada em 12 de dezembro de 2006.

541.126

Quirino, S. F.

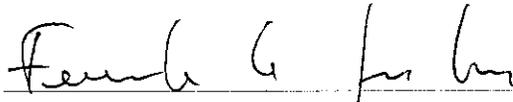
Simulação numérica direta de camada cisalhante compressível com fonte de calor / Sandro Fonseca Quirino. – São José dos Campos: INPE, 2006.
103p. ; (INPE-14661-TDI/1217)

1.Simulação numérica direta. 2.Estabilidade hidrodinâmica. 3.Camada cisalhante. 4.Métodos de alta ordem. 5.Escoamento compressível. I.Título.

Aprovado. (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de **Mestre** em

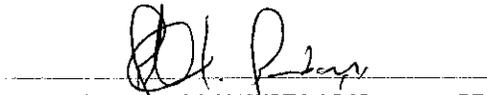
**Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Combustão e Propulsão**

Dr. Fernando de Souza Costa



Presidente / INPE / Cachoeira Paulista - SP

Dr. Marcio Teixeira de Mendonça



Orientador(a) / IAE/CTA / SJC Campos - SP

Dr. Leandro Franco de Souza



Convidado(a) / USP - São Carlos / São Carlos - SP

Aluno (a): **Sandro Fonseca Quirino**

São José dos Campos, 12 de Dezembro de 2006

Dedico este trabalho a meus familiares e amigos que durante o tempo de trabalho
sempre me apoiaram.

*A meus pais agradeço em especial por tudo que têm feito
por mim. Obrigado Pai e Mãe.*

AGRADECIMENTOS

Ao orientador pela paciência e colaboração.

À família pela atenção e apoio.

Aos amigos pela compreensão e apoio.

RESUMO

No presente trabalho é feita uma simulação numérica direta (SND) de camada de mistura em regime compressível com fonte de calor em seu interior, numa análise temporal bidimensional para um escoamento em regime subsônico. A fonte de calor apresenta-se como um modelo simplificado de um escoamento reativo. A simulação parte de um escoamento laminar acrescido de uma perturbação. A simulação calcula a evolução temporal das condições iniciais onde as perturbações são amplificadas, formando os vórtices característicos da instabilidade de Kelvin-Helmholtz. O escoamento instantâneo é periódico na direção longitudinal e na direção normal aplica-se condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Para pontos dentro do domínio, a discretização espacial é feita pelo método de diferenças finitas de 6ª ordem nas duas direções. Para pontos próximo da fronteira e na fronteira, na direção normal, usou-se extencil de diferenças finitas de 5ª ordem. A integração temporal foi feita usando um método de Runge-Kutta de 4ª ordem. A simulação numérica direta permite resolver as equações com todos os termos, convectivos e viscosos, sem qualquer simplificação das equações. Os métodos de alta ordem possibilitam trabalhar numa faixa de número de onda maior que os métodos de baixa ordem, com pouca dissipação e dispersão numérica. A fonte de calor é somada na equação da energia, representando o calor liberado por uma reação química de combustão. A camada cisalhante com fonte de calor permite estudar o efeito do calor na formação do vórtice de Kelvin-Helmholtz, permitindo ter informações a respeito do processo de transição à turbulência. Os resultados mostram que a combinação de geração de calor e compressibilidade reduz significativamente a taxa de amplificação da perturbação retardando o processo de transição à turbulência e conseqüentemente contribuindo negativamente para o processo de mistura dos fluidos que constituem a camada de mistura.

COMPRESSIBLE SHEAR LAYER DIRECT NUMERICAL SIMULATION

ABSTRACT

In this work a Direct Numerical Simulation of a compressible and subsonic mixing layer with heat source is performed in a two-dimensional temporal analysis. The heat source is a simplified model of a reacting flow. The simulation starts from a initial condition given by a disturbance superposed on a laminar flow. The simulation considers the temporal evolution of the given initial conditions, where the disturbances are amplified forming the characteristic vortices of a Kelvin-Helmholtz instability. The instantaneous flow is limited in the streamwise direction by periodic conditions and by Dirichlet and Neumann boundary conditions in the normal direction. For interior points the discretization is done using 6th finite differences. For points near the boundaries and on the boundaries 5th order finite differences are used. The temporal integration uses a 4th Runge-Kutta scheme. The Direct Numerical Simulation allows the solution of all terms in the Navier-Stokes equation, including convective and viscous terms, without any additional simplification. The high order methods allow the correct representation of a larger number of spatial scales with low dispersion and dissipation errors. The heat source is added to the energy equation and represents the heat released by a combustion chemical reaction. The shear layer with a heat source allows the study of heat addition to the Kelvin-Helmholtz vortices and the transition to turbulence. The results show that the combination of heat addition and compressibility reduces significantly the amplification of disturbances, delaying the transition to a turbulent regime and contributing negatively for the process of mixture of fluids in the mixing layer.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	25
1.1 - Relevância	25
1.2 - Estabilidade de Camada de Mistura	27
1.3 - Revisão Bibliográfica	32
1.4 - Descrição do Trabalho	36
1.5 - Objetivos e Resultados Esperados	36
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO	37
2.1 - Equações de Navier-Stokes	37
2.2 - Equações de Fechamento	38
2.3 - Adimensionalização	39
2.4 - Condições Iniciais e de Contorno	41
CAPÍTULO 3 - MÉTODO NUMÉRICO	45
3.1 - Discretização	47
3.2 - Integração temporal e discretização espacial	48
3.2.1 - Derivadas Temporais	49
3.2.2 - Derivadas Espaciais	50
3.2.3 - Condições Iniciais e de Contorno	55
3.3 - Estudo da Topologia da malha computacional	58
3.4 - Validação do Código	63
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS	67
4.1 - Camada cisalhante compressível sem fonte de calor	67
4.1.1 - Efeito da Compressibilidade	67
4.2 - Camada Cisalhante compressível com fonte de calor	75
4.2.1 - Natureza da Fonte de Calor	75

4.2.2 - Efeito de Compressibilidade e Calor	76
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO e SUGESTÕES	99
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Camada de mistura binária para escoamento incompressível.	27
1.2 Camada de mistura livre.	28
1.3 Evolução temporal da instabilidade de Kelvin-Helmholtz.	30
1.4 Camada de mistura binária para escoamento compressível.	34
3.1 Relação entre número de onda analítico e numérico.	47
3.2 Intervalos discretos de uma malha bidimensional.	48
3.3 Pontos discretos de variação temporal.	48
3.4 Aproximação por expansão em Taylor de uma função $f(x)$	51
3.5 Condição de contorno.	57
3.6 Domínio	59
3.7 $v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$ e $t = 0.0$	59
3.8 w versus t para $M = 0.4, \alpha = 0.8$	62
3.9 Taxa de amplificação em escoamento compressível sem fonte de calor	64
3.10 Evolução da perturbação em escoamento compressível sem fonte de calor. .	64
3.11 Linhas de Iso-Vorticidade em escoamento compressível sem fonte de calor, para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$	65
3.12 Linhas de Iso-Vorticidade em escoamento compressível sem fonte de calor, para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$	65
4.1 Taxa de amplificação em escoamento compressível sem fonte de calor. . . .	69
4.2 Evolução da Perturbação para $M = 0.4, 0.6$ e 0.8 com $\alpha = 0.8, 0.7$ e 0.5 . .	70

4.3	Perfil inicial da perturbação na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.	71
4.4	Perfil da perturbação na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.6$ em $t = 23.98$.	72
4.5	Perfil da perturbação na camada de mistura para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.6$ em $t = 25.33$.	72
4.6	Perfil da perturbação na camada de mistura para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 46.33$.	73
4.7	Representação das principais regiões do vórtice.	74
4.8	Perfil $v(y)$ em b para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.	74
4.9	Perfil $v(y)$; a para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.	75
4.10	Perfil $v(y)$ c para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.	76
4.11	Iso-linhas de vorticidade na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ para $t = 28.70$.	77
4.12	Iso-linhas de vorticidade na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ para $t = 31.80$.	78
4.13	Iso-linhas de vorticidade na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ para $t = 33.44$.	79
4.14	Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 35.27$.	79
4.15	Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.87$.	80
4.16	Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 42.30$.	80
4.17	Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 57.37$.	81
4.18	Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 62.48$.	81
4.19	Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 65.71$.	82
4.20	Distribuição $v(x,y)$ para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.	82
4.21	Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.	83

4.22	Distribuição de calor $Q(y)$ para c_1	83
4.23	Taxa de amplificação para $M = 0.4$ em camada cisalhante com fonte de calor.	84
4.24	Evolução da perturbação para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ em diferentes níveis de calor.	84
4.25	$v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $c = 0.003$ e $t = 23.68$	85
4.26	$v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $c = 0.005$ e $t = 22.74$	85
4.27	$v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $c = 0.007$ e $t = 23.58$	86
4.28	$v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $c = 0.009$ e $t = 22.88$	87
4.29	Iso-linhas vorticidade para $M = 0.4$; fonte de calor c_1 em $t = 28.0$	87
4.30	Iso-linhas vorticidade para $M = 0.4$; fonte de calor c_2 e $t = 28.0$	88
4.31	Iso-linhas vorticidade para $M = 0.4$; fonte de calor c_3 e $t = 28.0$	88
4.32	Iso-linhas vorticidade para $M = 0.4$; fonte de calor c_4 e $t = 28.0$	89
4.33	Taxa de amplificação para $M = 0.6$	90
4.34	Evolução da perturbação para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$	91
4.35	Iso-linhas vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.92$ para c_1	92
4.36	Iso-linhas vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.77$ para c_2	93
4.37	Iso-linhas vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.54$ para c_3	94
4.38	Iso-linhas vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.56$ para c_4	94
4.39	Taxa de Amplificação para $M = 0.8$	95
4.40	Evolução da perturbação para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$	95
4.41	$v(x,y)$ para $M = 0.8$, $\alpha = 0.5$, $c = 0.003$ e $t = 50.33$	96
4.42	$v(x,y)$ para $M = 0.8$, $\alpha = 0.5$, $c = 0.005$ e $t = 54.04$	96
4.43	$v(x,y)$ para $M = 0.8$, $\alpha = 0.5$, $c = 0.007$ e $t = 57.30$	97

4.44 $v(x,y)$ para $M = 0.8, \alpha = 0.5, c = 0.009$ e $t = 58.34$	97
---	----

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Classificação de instabilidades.	32
4.1 Variação da taxa de amplificação com o número de Mach.	68
4.2 Variação da taxa de amplificação com o número de Mach.	69
4.3 Amplitude máxima da fonte de calor.	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- INPE – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
LCP – Laboratório Associado de Combustão e Propulsão

LISTA DE SÍMBOLOS

a	–	Velocidade do som
c	–	Velocidade de fase
C	–	Número de Courant
c_p	–	Calor específico a pressão constante
c_v	–	Calor específico a volume constante
dt	–	Incremento de tempo
dx	–	Espessura da malha na direção x
dy	–	Espessura da malha na direção y
e	–	Energia interna por unidade de massa
E	–	Vetor da Equação de Navier-Stokes
E_t	–	Energia interna total
f	–	Variável dependente genérica
F	–	Vetor da Equação de Navier-Stokes
\hat{f}	–	Auto-função
L_x	–	Tamanho do domínio na direção longitudinal
L_y	–	Tamanho do domínio na direção normal
q	–	Fluxo de calor
Q	–	Termo fonte de geração de calor
i	–	Número imaginário $\sqrt{-1}$
M	–	Número de Mach
M_C	–	Número de Mach convectivo
p	–	pressão
Pr	–	Número de Prandtl
R	–	Constante universal dos gases
Re	–	Número de Reynolds
t	–	Tempo
u	–	Componente de velocidade na direção x
U	–	Vetor da Equação de Navier-Stokes
U	–	Parte laminar da componente de velocidade na direção x
U_1	–	Parte laminar da componente de velocidade do escoamento livre na direção x (camada superior)
U_2	–	Parte laminar da componente de velocidade do escoamento livre na direção x (camada inferior)
U_S	–	Parte laminar da componente de velocidade na direção x no ponto de inflexão
v	–	Componente de velocidade na direção y
w	–	Componente de velocidade na direção z
x	–	Direção longitudinal ao escoamento
y	–	Direção normal ao escoamento
z	–	Direção transversal ao escoamento
α	–	Número de onda complexo

α_i	– Taxa de amplificação espacial
α_r	– Número de onda na direção x
α_i^{max}	– Taxa de amplificação espacial máxima
β	– Número de onda na direção z
δ_ω	– Espessura de vorticidade
δ_m	– Espessura de quantidade de movimento
Δx	– Espessura da malha na direção x
Δy	– Espessura da malha na direção y
Δt	– Incremento de tempo
η	– Direção normal ao escoamento no espaço similar
γ	– Razão de calores específicos
λ	– Comprimento de onda na direção longitudinal ao escoamento
λ	– Condutividade térmica
λ_U	– Magnitude de diferença de velocidade
μ	– viscosidade dinâmica
μ_0	– viscosidade dinâmica de referência
ω	– Freqüência complexa
ω_i	– Taxa de amplificação temporal
ω_r	– Freqüência angular
π	– Número irracional igual a 3.14159...
ρ	– Densidade
σ	– Constante de controle
	– de espessura da camada cisalhante
τ	– Tensor de tensões viscosas
'	– Perturbação de variável dependente
^	– Autofunção de variável dependente
$()_a$	– Variável adimensional
$()_1$	– Propriedade da camada rápida
$()_2$	– Propriedade da camada lenta
$()_L$	– Variável do escoamento laminar
$()_\infty$	– Escoamento livre
$()_i$	– Parte imaginária
$()_r$	– Parte real
[]	– Dimensão de grandeza

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste trabalho é apresentado um estudo numérico de um escoamento modelo que permite extrair conclusões relativas à eficiência de mistura de um sistema oxidante-combustível para combustão em escoamentos compressíveis. O modelo consiste de uma camada cisalhante livre de escoamento em regime compressível com liberação de calor. A análise das características de estabilidade da camada cisalhante permite determinar em quais condições se teria uma aceleração do processo de transição para regime turbulento e portanto uma maior eficiência do processo de mistura de oxidante e combustível.

No presente capítulo, após uma breve descrição da relevância do problema, serão apresentadas as principais características de uma camada de mistura e de sua estabilidade e transição para regime turbulento. Em seguida será apresentada uma revisão bibliográfica dos trabalhos mais relevantes existentes na literatura. Finalmente serão apresentados os objetivos e escopo do trabalho.

1.1 Relevância

A eficiência de queima e a emissão de poluentes em câmaras de combustão de sistemas propulsivos estão diretamente relacionados à qualidade da mistura de oxidante e combustível. Em aplicações civis, tais como turbinas a gás e motores a pistão tanto a economia de combustível quanto a formação de poluentes são problemas críticos. Normas cada vez mais severas têm sido baixadas com relação à emissão de monóxidos de carbono, óxidos de nitrogênio, hidrocarbonetos e outros.

Os fatores que influenciam a formação de óxidos nítricos e dióxido de nitrogênio, NO_2 são: temperatura da reação, relação combustível-oxidante, pressão e qualidade do combustível. A combustão com excesso de oxidante resfria a temperatura da chama, e garante uma maior quantidade de oxigênio disponível nos produtos da combustão, permitindo uma redução na formação de NO . A redução de emissão de NO_x também é obtida com a redução da temperatura da chama.

Já em aplicações militares e em propulsão aeroespacial a preocupação principal está relacionada à eficiência dos motores. Uma combustão estável só é possível em uma faixa pequena de razão oxidante-combustível, próxima do valor estequiométrico. A qualidade da reação afeta diretamente a liberação de calor e o consumo de combustível.

Outra aplicação de grande importância onde a eficiência da reação de combustão, é em

veículos hipersônicos. Pode-se mostrar que o impulso específico de motores que utilizam combustão supersônica (scramjet, do inglês *supersonic combustion ramjet*) é superior ao impulso específico obtido com turbojatos ou motores foguete. Scramjets utilizam o efeito de compressibilidade da desaceleração de um escoamento supersônico como fonte de ar para o ciclo termodinâmico do motor. Devido ao aumento substancial de temperatura do ar na desaceleração em velocidades acima de Mach 6, ocorrem fenômenos de dissociação que prejudicam a eficiência do motor. A combustão supersônica reduz o problema de dissociação, permitindo uma maior eficiência do mesmo.

A dificuldade de se obter um motor que empregue combustão supersônica está na necessidade de se garantir a mistura de oxidante e combustível e a combustão em escoamentos supersônicos. Essa dificuldade está associada a inúmeros fatores, dentre eles o aquecimento dinâmico e perdas por choque nos injetores de combustível, a dificuldade de se obter boa penetração do combustível por injeção das paredes no fluxo de ar principal e a dificuldade de se obter uma mistura turbulenta uma vez que o escoamento supersônico é fortemente estabilizado.

Em combustores onde não se utiliza pré-mistura, a zona de reação está localizada na interface entre os fluxos de combustível e oxidante. Se o regime de escoamento é puramente laminar a queima depende unicamente da difusão laminar das duas espécies para que haja mistura. Esta configuração resultaria em uma câmara de combustão excessivamente longa, para que o tempo de residência das espécies e o tempo de difusão fossem compatíveis com o tempo de reação. Mas devido às restrições de espaço e peso, é necessário otimizar as dimensões da câmara acelerando-se o processo de mistura dos reagentes. A melhor forma de acelerar esse processo é tornar o escoamento turbulento, promovendo difusão turbulenta, uma vez que esta é muito mais rápida do que a difusão laminar.

Um modelo simplificado da interface entre o fluxo de oxidante e o fluxo de combustível é dado por uma camada cisalhante livre como mostrado na Figura 1.1. Na parte superior temos um escoamento com velocidade U_1 e na parte inferior temos um escoamento com velocidade U_2 . Devido à difusão de quantidade de movimento existe uma interface de espessura finita onde a velocidade varia continuamente entre U_1 e U_2 . O estudo das características de estabilidade e transição para turbulência da camada cisalhante permite uma avaliação da eficiência da mistura de oxidante e combustível. Em especial, a análise da estabilidade da camada cisalhante em escoamentos compressíveis com liberação de calor permite analisar a eficiência do processo de transição para regime turbulento visando aplicações direcionadas a motores que empregam combustão supersônica.

Em geral, deseja-se que a camada de mistura seja turbulenta a fim de maximizar a mistura de combustível e oxidante. O estudo da estabilidade da camada de mistura laminar se justifica neste caso pelo fato de as grandes estruturas turbulentas serem conseqüência direta das estruturas turbilhonares do processo de transição e persistirem no escoamento turbulento. Em certos regimes de operação não se obtém um escoamento turbulento plenamente desenvolvido, sendo o escoamento caracterizado pelas estruturas formadas pelo processo de instabilidade e transição.

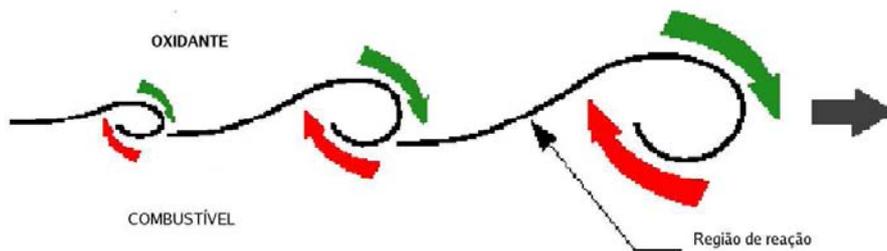


Figura 1.1 - Camada de mistura binária para escoamento incompressível.

1.2 Estabilidade de Camada de Mistura

A camada de mistura é um modelo de escoamento extremamente importante para a compreensão do desenvolvimento da turbulência em escoamentos nos sistemas propulsivos aeroespaciais. O modelo de camada de mistura, consiste em um escoamento formado por um ou mais fluidos que obrigatoriamente apresenta um ponto de inflexão em sua distribuição de velocidade. Esse modelo é útil para verificar como o fenômeno de transição à turbulência se processa no escoamento cisalhante através da amplificação de pequenas perturbações presentes no sistema. Como já discutido, o escoamento em regime turbulento permite uma maior eficiência na mistura de combustível e oxidante e, portanto, melhora na reação química de combustão.

A camada de mistura cisalhante é um escoamento do tipo camada limite onde se pode desprezar a difusão de quantidade de movimento na direção longitudinal e portanto simplificar as equações de balanço, obtendo-se um sistema de equações diferenciais parabólicas. Estas equações podem ser simplificadas considerando-se a existência de uma solução similar que reduz as equações parabólicas a um sistema de equações diferenciais ordinárias através de uma mudança de variáveis. A variável dependente $u(x, y)$ é substituída pela variável $f(\eta)$, onde η é uma combinação apropriada das variáveis (x, y) .

Aplicando-se a hipótese de camada limite e similaridade às equações de Navier-Stokes, obtém-se os perfis de velocidade, temperatura, pressão e densidade. Uma vez que o crescimento da espessura da camada cisalhante na direção do escoamento é lento, pode-se assumir ainda como aproximação que a camada cisalhante é paralela. Ou seja que na camada cisalhante laminar a velocidade longitudinal só depende da coordenada transversal e que a velocidade transversal é nula. A componente longitudinal da velocidade se aproxima com boa precisão de uma tangente hiperbólica como mostrado na figura 1.2.

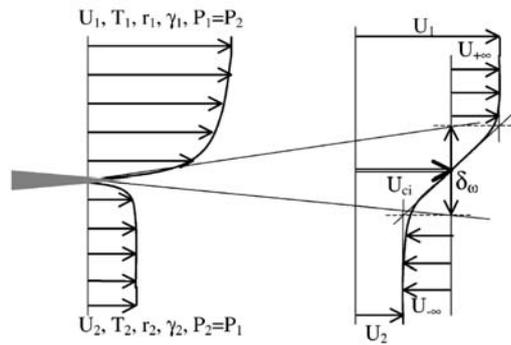


Figura 1.2 - Camada de mistura livre.

A figura 1.2 representa a camada de mistura numa análise espacial. A velocidade U_1 e U_2 representam as velocidades do escoamento laminar acima e abaixo da camada de mistura, U_{ci} a velocidade do escoamento na interface da camada de mistura e δ_w a expressão de vorticidade, como definido no capítulo 2, T_1 e T_2 representam a temperatura do escoamento laminar acima e abaixo da camada de mistura, $P_2 = P_1$ é a pressão no escoamento. A diferença de velocidade promove o surgimento de uma inflexão no perfil de velocidade localizada no ponto central do domínio entre os dois escoamentos uniformes.

Deseja-se, agora, estudar a estabilidade e a transição para regime turbulento da camada cisalhante laminar dada matematicamente pela solução descrita acima. Para tanto, a esta solução impõe-se uma pequena perturbação na forma de uma onda e acompanha-se a evolução da mesma a fim de se determinar seu decaimento ou crescimento, dependendo do escoamento ser estável ou instável. As variáveis do problema passam a ser a taxa de amplificação da onda, o comprimento de onda e a frequência.

A análise de estabilidade desse sistema irá fornecer informações de taxa de amplificação das perturbações para diferentes regimes de velocidade em termos de número de Mach

e diferentes condições de taxa de liberação de calor no caso de um sistema que contenha reação química de dois componentes, oxidante e combustível. Esse resultado de variação de taxa de amplificação com compressibilidade e taxa de liberação de calor irá dar as informações desejadas sobre a transição ao regime turbulento.

A estabilidade da camada cisalhante livre foi inicialmente investigada por Helmholtz em 1868 e uma análise matemática foi realizada por Kelvin em 1871. A instabilidade que aparece neste problema ficou conhecida como instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Esta instabilidade é uma consequência do desequilíbrio entre forças de inércia e de pressão. Sua análise independe de efeitos viscosos, os quais são importantes apenas a números de Reynolds muito baixos e que contribuem para a estabilização da camada cisalhante. Em seu estágio inicial de desenvolvimento a instabilidade de Kelvin-Helmholtz é de caráter bidimensional.

A partir desses estudos iniciais de Kelvin e Helmholtz, o estudo da transição à turbulência em camada de mistura incompressível tem constituído um dos principais temas de pesquisa em turbulência nos últimos trinta anos. O perfil de velocidade do tipo tangente hiperbólica possui um ponto de inflexão que é instável a perturbações infinitesimais de acordo com o teorema de Rayleigh (DRAZIN; REID, 1981). Como resultado da evolução da instabilidade de Kelvin-Helmholtz tem-se a formação de estruturas de vorticidade orientadas na direção transversal como mostrado na figura 1.3.

A figura 1.3 mostra o desenvolvimento da instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Esta instabilidade é classificada como convectiva, ou seja, as perturbações são produzidas à montante e crescem ou decrescem enquanto se propagam na direção do escoamento. O seu desenvolvimento resulta numa camada de vorticidade, de comprimento de onda λ , que se enrola formando as estruturas coerentes de Kelvin-Helmholtz. Este primeiro estágio do mecanismo de transição à turbulência é devido à natureza inflexional do perfil de velocidade como já mencionado.

A análise da estabilidade da camada de mistura pode ser feita a partir da teoria de estabilidade linear. O perfil laminar, ou perfil de base, da camada de mistura é uma função apenas da coordenada vertical e o escoamento é considerado localmente paralelo. Admite-se que o escoamento seja composto pela velocidade laminar mais uma perturbação:

$$f(x, y, t) = f_L(y) + f'(x, y, t). \quad (1.1)$$

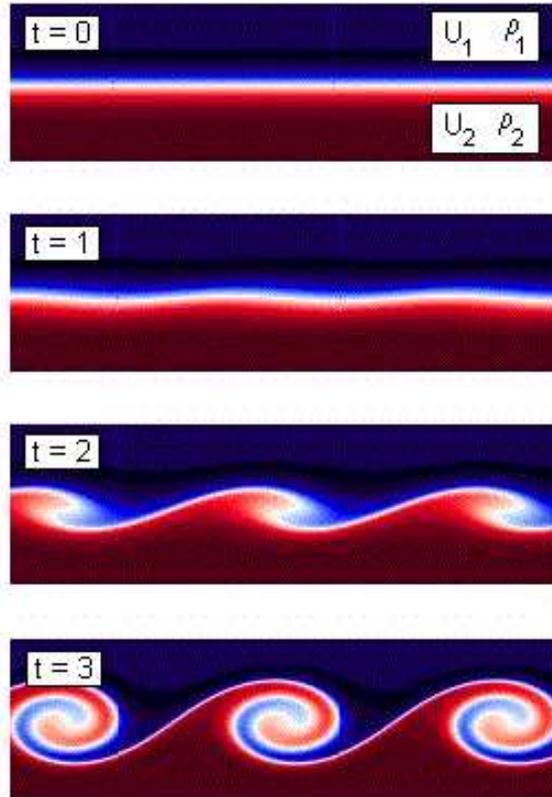


Figura 1.3 - Evolução temporal da instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

Considera-se também que a perturbação f' se propaga como uma onda, tal que:

$$f'(x, y, t) = \Re \left[\hat{f}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right], \quad (1.2)$$

onde $\hat{f}(y)$ é uma função de amplitude, $i = \sqrt{-1}$, α é o número de onda, ω a frequência e \Re corresponde à parte real do valor complexo dado pela expressão. A coordenada longitudinal é dada por x , e t é o tempo.

O desenvolvimento da camada de mistura na natureza é espacial, ou seja, a onda representada na equação 1.2 desloca-se uma distância longitudinal até que se tenha um vórtice.

De modo geral, pode-se ter α e ω complexos, tal que:

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i \quad , \quad \omega = \omega_r + i\omega_i. \quad (1.3)$$

Substituindo-se 1.3 na equação 1.2, obtemos:

$$f' = \Re \left[\hat{f}(y) e^{i[(\alpha_r + i\alpha_i)x - (\omega_r + i\omega_i)t]} \right]. \quad (1.4)$$

Fazendo a distributiva com relação a i e reagrupando os termos real e imaginário temos

$$f' = \underbrace{\hat{f}(y) e^{(\omega_i t - \alpha_i x)}}_a \cdot \underbrace{e^{i(\alpha_r x - \omega_r t)}}_b. \quad (1.5)$$

Na equação 1.5 o termo a representa a amplitude da onda e o termo b representa a parte oscilatória da onda. No termo b , α_r é o número do onda e ω_r a frequência da perturbação. No termo a , α_i é a taxa de amplificação espacial que indica o quão rápido a onda transforma-se no vórtice ou estingue-se no domínio. O termo α_i é calculado para um referencial fixo no domínio e a onda move-se com relação a este referencial, este tipo de análise é conhecido como análise espacial da instabilidade da camada de cisalhante ou simplesmente análise espacial. Para representar esta análise a partir da equação 1.5 impoe-se $\omega_i = 0$ na mesma, e desta forma tem-se:

$$f' = \Re \left[\underbrace{\hat{f}(y) e^{(-\alpha_i x)}}_a \cdot \underbrace{e^{i(\alpha_r x - \omega_r t)}}_b \right]. \quad (1.6)$$

O termo $\hat{f}(y)$ representa a auto-função associado aos auto-valores α , ω e α_i é a taxa de amplificação espacial.

Outra abordagem para a análise da instabilidade da camada de mistura é feita colocando o referencial na própria onda. Neste caso, o referencial desloca-se com a velocidade de convecção da perturbação. A coordenada longitudinal considera um comprimento de onda, que não se altera durante a simulação. Esta abordagem é conhecida como análise temporal da estabilidade da camada cisalhante ou simplesmente análise temporal. Para representar esta análise impoen-se $\alpha_i = 0$ na expressão 1.5, e desta forma

$$f' = \Re \left[\underbrace{\hat{f}(y) e^{(\omega_i t)}}_a \cdot \underbrace{e^{i(\alpha_r x - \omega_r t)}}_b \right]. \quad (1.7)$$

Tabela 1.1 - Classificação de instabilidades.

análise	estável	instável	neutra
temporal	$\omega_i < 0$	$\omega_i > 0$	$\omega_i = 0$
espacial	$\alpha_i > 0$	$\alpha_i < 0$	$\alpha_i = 0$

Neste caso ω_i é a taxa de amplificação temporal.

A tabela 1.1 mostra que numa análise temporal se $\omega_i = 0$ a perturbação não se altera com o passar do tempo, ao passo que se $\omega_i < 0$ a mesma perturbação decairá com o passar do tempo, e se $\omega_i > 0$ então a perturbação cresce. Numa análise espacial se $\alpha_i = 0$ a perturbação não se altera quando se desloca com o escoamento, para $\alpha_i > 0$ a perturbação decai a medida que ocorre o deslocamento e se $\alpha_i < 0$ a perturbação cresce. A relação entre a análise espacial e a temporal é dada pela transformação de Gaster (1962).

A instabilidade em desenvolvimento espacial é gerada entre dois escoamentos paralelos de velocidades U_1 e U_2 que se desenvolvem ao longo da direção x. A camada de mistura temporal, que é periódica na direção do escoamento e desenvolve-se no tempo, é uma aproximação da camada de mistura espacial, onde observa-se o escoamento em um sistema de referência movendo-se com velocidade $\frac{(U_1+U_2)}{2}$. A forma de empregar esta transformação para relacionar o problema espacial com o temporal é:

$$x = \frac{(U_1 + U_2)}{2} t \quad (1.8)$$

Esta transformação faz com que as velocidades superior e inferior da camada de mistura temporal sejam, respectivamente, iguais a:

$$U = U_1 - \frac{(U_1 + U_2)}{2} \quad (1.9)$$

$$-U = U_2 - \frac{(U_1 + U_2)}{2} \quad (1.10)$$

1.3 Revisão Bibliográfica

No modelo de camada cisalhante aplicado a sistemas reativos têm-se combustível na

corrente inferior e oxidante na superior. O mecanismo pela qual a mistura ocorre foi identificada por [Brown e Roshko \(1974\)](#). Estruturas turbilhonares de maior dimensão se desenvolvem a partir do mecanismo de instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Essas estruturas são formadas por vórtices transversais distribuídos ao longo da camada cisalhante entre as correntes de combustível e oxidante. Dois mecanismos podem ser identificados, o mecanismo de captura propiciado pelos vórtices e o emparelhamento de vórtices vizinhos. O segundo mecanismo é o mais importante dos dois uma vez que no primeiro mecanismo, fluido puro das duas correntes (oxidante e combustível) podem ser transportados pelas estruturas de maior escala sem que haja mistura.

A camada de mistura incompressível não reativa tem sido extensamente estudada. Uma revisão bastante completa de investigações experimentais e numéricas foi apresentada por [Ho e Huerre \(1984\)](#). Para escoamentos incompressíveis e moderadamente compressíveis uma única estrutura se forma centrada com a camada cisalhante. Com o aumento da compressibilidade do escoamento, a taxa de amplificação das estruturas turbilhonares é reduzida. Em outras palavras, a compressibilidade tem um efeito estabilizador ([BROWN; ROSHKO, 1974](#); [CHINZEI *et al.*, 1986](#); [PAPAMOSCHOU; ROSHKO, 1988](#)). O parâmetro de compressibilidade representativo é denominado número de Mach convectivo ([PAPAMOSCHOU; ROSHKO, 1988](#)), que é uma combinação dos números de Mach das duas correntes, ou seja o número de Mach em um sistema de coordenadas transportado com a velocidade de propagação dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz dominantes. [Papamoschou e Roshko \(1988\)](#) observaram experimentalmente que para Mach convectivo supersônico a taxa de amplificação pode ser reduzida a um valor da ordem de 25% da taxa de amplificação para o escoamento incompressível.

Um segundo efeito da compressibilidade é permitir o desenvolvimento de dois outros modos instáveis ([JACKSON; GROSCH, 1989](#)). Estes modos têm picos de amplitudes localizados fora da linha de centro da camada cisalhante. Uma representação gráfica da estrutura resultante é apresentada na figura 1.4. Estes modos são denominados modos externos, para distingui-los do modo incompressível, denominado modo central. A priori, os modos externos foram identificados em regime de escoamento altamente compressível e sua taxa de amplificação é menor do que a taxa de amplificação do modo central. Quando combustão é também considerada, os efeitos da compressibilidade e da liberação de calor se combinam resultando em modos externos que têm maior taxa de amplificação do que o modo central. Devido à formação de duas camadas sobrepostas, a mistura de combustível e oxidante se torna um processo de duas etapas, tendo um impacto adverso na eficiência do processo de mistura. Investigações em injetores de combustível supersônicos ([GASTON *et al.*, 1998](#)) revelaram que a redução na eficiência

de mistura pode ser da ordem de 40%. Desta forma, estudos de eficiência de mistura na ausência de combustão são de uso limitado na determinação de desempenho de sistemas de combustão.

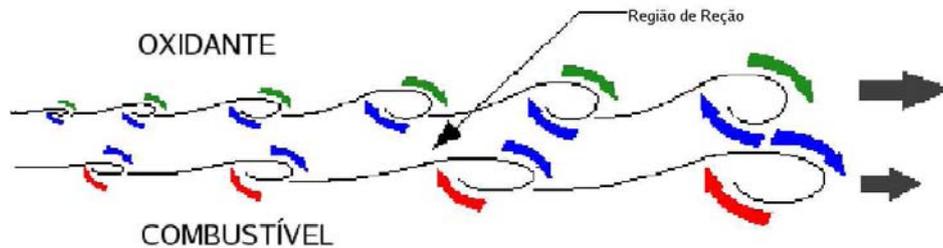


Figura 1.4 - Camada de mistura binária para escoamento compressível.

Estudos anteriores baseados em teoria de estabilidade linear (DUNN; LIN, 1955; LESSEN *et al.*, 1966; GROPPENGIESSER, 1970) permitiram a constatação do efeito estabilizador da compressibilidade. A caracterização dos modos externos para escoamentos sem combustão foi apresentada por Jackson e Grosch (1989). Eles observaram que, se a camada mais lenta é mais fria que a camada mais rápida, as taxas de amplificação são maiores. Em outro trabalho Jackson e Grosch (1990) apresentaram resultados de análise de estabilidade de camada de mistura com a liberação de calor e o efeito deste na taxa de amplificação dos modos externos. Observou-se um aumento significativo da taxa de amplificação do modo relacionado à corrente mais lenta. Estes estudos de Jackson e Grosch foram limitados a número de Prandtl igual a unidade com perfil de velocidades laminar dado por uma tangente hiperbólica e para reação química de velocidade infinita.

Modelos de camada de mistura com reação química foram apresentados também por Planché (1993), Shin e Ferziger (1991) e Shin e Ferziger (1993). Planché (1993) mostrou que o aquecimento favorece a amplificação dos modos externos. Esse trabalho foi o primeiro a identificar a mudança na topologia da camada cisalhante, com a formação de duas zonas de vorticidade sobrepostas. Esta nova topologia dificulta a mistura de combustível e oxidante uma vez que a mistura passa a se dar por um processo de dois passos, ocorrendo na zona central entre as duas camadas de vorticidade.

Numa primeira investigação, Shin e Ferziger (1991) utilizaram a teoria de estabilidade linear para obter as taxas de amplificação numa camada cisalhante incompressível com reação química. Eles observaram que os resultados têm uma forte dependência da distribuição de velocidade laminar utilizada como escoamento base, sendo necessário utilizar

a solução laminar mais exata possível na análise de estabilidade. Eles também observaram diferenças significativas utilizando-se propriedades (viscosidade, condutibilidade, etc.) constantes e propriedades variáveis com a temperatura. Mudanças significativas nas taxas de amplificação com a liberação de calor devido à reação química foram observadas. Os resultados obtidos também mostraram o aparecimento de modos externos, mesmo sendo o escoamento considerado incompressível. Estes modos externos tem taxa de amplificação maior do que o modo central e comprimentos de onda da ordem de um décimo do comprimento de onda do modo central. Com relação ao efeito de variação de densidade devido à combustão, eles observaram que a variação de densidade provoca a modificação no perfil laminar e que esta modificação é muito mais importante na análise de estabilidade do que o efeito da variação de densidade na análise de estabilidade linear. Finalmente, foi observado que a instabilidade que tem maior taxa de amplificação é bidimensional, mesmo com a forte liberação de calor devido a reação. Sabe-se que em escoamentos compressíveis a instabilidade predominante é tridimensional.

Num segundo trabalho [Shin e Ferziger \(1993\)](#) analisaram o efeito da transferência de calor e variação de parâmetros de transporte. Mas eles não apresentam um estudo do efeito de gradiente de temperaturas para diferentes níveis de compressibilidade e diferentes intensidades de liberação de calor.

Já o trabalho de [Day et al. \(1998\)](#) cobre uma maior faixa de parâmetros, incluindo efeitos de compressibilidade, liberação de calor e razão de densidades. Posteriormente, [Day et al. \(2001\)](#) complementaram seu estudo inicial utilizando um modelo não linear com o intuito de investigar os regimes mais avançados do processo de instabilidade em camadas cisalhantes reativas. [Sauvage e Kourta \(1999\)](#) apresentam uma investigação numérica da camada de mistura compressível não-reativa usando simulação numérica direta, apresentando a influência da fase na perturbação em duas e três dimensões. [Lesen et al. \(1965\)](#) apresentaram um estudo da estabilidade linear da camada de mistura laminar em regime compressível não-reativo, mostrando que o escoamento é instável com respeito à perturbação supersônica, ele é mais instável a baixo número de Mach, e o aumento no ângulo entre o vetor número de onda da perturbação e a direção principal do escoamento tende a aumentar a taxa de amplificação da instabilidade. [Germanos e Medeiros \(2005\)](#) desenvolveram um código para estudar a camada de mistura compressível. Foram feitas simulações numéricas com discretização espacial por diferenças finitas compactas de 6ª ordem, condição de contorno de periodicidade na direção do escoamento e escorregamento livre na direção perpendicular. Os resultados mostraram que o uso de diferenças compactas de alta ordem permitem boa descrição do fenômeno.

A presente investigação busca complementar os resultados apresentados em investigações anteriores. Para tanto será utilizada simulação numérica direta das equações de Navier-Stokes. Deseja-se determinar qual o efeito da geração de calor na estabilidade da camada cisalhante.

1.4 Descrição do Trabalho

O método de análise será a simulação numérica direta das equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis, incluindo o termo de alta taxa de geração de calor, que simula o efeito de uma reação de combustão. O método numérico a ser utilizado deve garantir boas propriedades de dissipação e dispersão a fim de minimizar a influência numérica no desenvolvimento das estruturas turbilhonares de Kelvin-Helmholtz. Métodos que propiciam estas características são aqueles de alta ordem.

Uma vez que se deseja estudar inicialmente as características da instabilidade da camada cisalhante, pode-se restringir a formulação ao escoamento bidimensional. O problema bidimensional revela todas as informações desejadas sobre as estruturas iniciais da instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

1.5 Objetivos e Resultados Esperados

No presente projeto deseja-se estudar o fenômeno de camada de mistura em escoamentos compressíveis na presença de fonte de calor e analisar as condições que permitam maximizar as taxas de amplificação da instabilidade de Kelvin-Helmholtz e, portanto, a eficiência da mistura. Espera-se verificar a variação da taxa de amplificação com a compressibilidade e geração de calor, bem como o efeito destas no campo de velocidade e vorticidade.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO

Nesta seção são apresentados o sistema de equações governantes usado no trabalho e as equações de fechamento. Em seguida, são apresentadas as relações de adimensionalização e o sistema adimensionalizado. Por fim o sistema de equações é apresentado na sua forma geral. São também apresentadas a topologia, as condições de contorno e as condições iniciais usadas no trabalho.

2.1 Equações de Navier-Stokes

No presente trabalho serão usadas as equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis com geração de calor, num sistema de coordenadas cartesianas na forma bidimensional, como segue abaixo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(E_t + p)u + q_x - u\tau_{xx} - v\tau_{xy}] + \frac{\partial}{\partial y}[(E_t + p)v + q_y - u\tau_{xy} - v\tau_{yy}] + Q = 0. \quad (2.4)$$

onde ρ é a densidade do fluido, u e v são as componentes longitudinal e normal da velocidade do escoamento, x e y as coordenadas longitudinal e normal ao mesmo, t é o tempo, p é a pressão, τ é o tensor de tensões viscosas, E_t a energia interna total, q_x e q_y representam, respectivamente, o fluxo de calor nas direções longitudinal e normal e Q uma fonte de calor espacial.

onde a energia total é dada por :

$$E_t = \rho \left[e_{int} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right]. \quad (2.5)$$

Para um gás perfeito a relação entre a energia interna e a temperatura é dada pelo calor específico a volume constante, tal que:

$$de = c_v dT. \quad (2.6)$$

Onde e representa todas as modalidades de energia interna presentes no sistema. Para fechar este sistema de equações serão usadas outras relações chamadas equações de fechamento ou auxiliares, bem como a consideração de se trabalhar com gás perfeito.

2.2 Equações de Fechamento

As equações de fechamento tem por objetivo completar o sistema acima para que todas as variáveis possam ser resolvidas.

As equações de relação tensão-deformação para fluidos Newtonianos são dadas por:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xx} = \frac{2\mu}{3} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2\mu}{3} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.7)$$

Os fluxos de calor, nas direções x e y , são governados pela lei de Fourier:

$$q_x = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.8)$$

onde λ é a condutividade térmica e T a temperatura.

A pressão, densidade e temperatura estão relacionadas pela lei dos gases perfeitos dada por:

$$P = \rho RT, \quad (2.9)$$

onde R é a contante universal dos gases.

A viscosidade está representada pela lei da potência:

$$\mu = \mu_o T^{0.65}. \quad (2.10)$$

2.3 Adimensionalização

A adimensionalização desta trabalho está baseada no trabalho de Sandham (1990) que tem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{tU_1}{\delta_{\omega_o}}, \quad x_a = \frac{x}{\delta_{\omega_o}}, \quad y_a = \frac{y}{\delta_{\omega_o}}, \quad u_a = \frac{u}{U_1}, \quad v_a = \frac{v}{U_1}, \\ p_a &= \frac{p}{\rho U_1^2}, \quad T_a = \frac{T}{T_1}, \quad \rho_a = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad e_a = \frac{e}{U_1^2}, \quad \mu_a = \frac{\mu}{\mu_1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sendo o índice a indicativo de variável adimensional e as variáveis de referência correspondem à camada rápida superior. O comprimento característico é dado pela espessura de vorticidade:

$$\delta_{\omega_o} = \frac{(U_1 - U_2)}{\left(\frac{dU_{ci}}{dy}\right)_{max}}, \quad (2.12)$$

sendo U_{ci} a velocidade do escoamento laminar no ponto de inflexão, que no presente caso tem a forma inicial de uma tangente hiperbólica. Essas expressões são substituídas nas equações de Navier-Stokes, para termos as mesmas na forma adimensional. Este procedimento reduz o número de parâmetro a serem controlados, tornando a análise do problema mais simples. O referido sistema toma então a forma adimensional abaixo, onde o índice a foi excluído para facilitar a leitura.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(E_t + p)u + q_x - u\tau_{xx} - v\tau_{xy}] + \frac{\partial}{\partial y}[(E_t + p)v + q_y - u\tau_{xy} - v\tau_{yy}] + Q = 0. \quad (2.16)$$

As equações de fechamento são adimensionalizadas para serem substituídas na expressão acima.

$$\tau_{xy} = \frac{T^{0.65}}{Re} \left(4 \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.17)$$

$$\tau_{xx} = \frac{T^{0.65}}{3Re} \left(4 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.18)$$

$$\tau_{yy} = \frac{T^{0.65}}{3Re} \left(4 \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2.19)$$

A lei de Fourier torna-se:

$$q_x = \frac{-T^{0.65}}{(\gamma - 1)M^2 Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = \frac{-T^{0.65}}{(\gamma - 1)M^2 Pr Re} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.20)$$

A lei do gás perfeito na sua forma adimensional é:

$$p = \rho(\gamma - 1)e. \quad (2.21)$$

De forma que:

$$M = \frac{U}{a}, \quad Pr = \frac{c_p \mu}{k}, \quad Re = \frac{\rho U \delta}{\mu}. \quad (2.22)$$

sendo M, Pr, Re o número de Mach, Prandtl e Reynolds, respectivamente.

As equações 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16 são escritas na forma vetorial:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p\tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E_t + p)u + q_x + -u\tau_{xx} - v\tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E_t + p)v + q_y + -u\tau_{xy} - v\tau_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

O vetor G representa o fonte de calor, que é contante, na camada de mistura. Desta forma, o sistema torna-se:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + G = 0. \quad (2.27)$$

O termo $\partial U/\partial t$ representa a variação temporal das propriedades, $\partial E/\partial x$ e $\partial F/\partial y$ representam os fluxos líquido nas direções longitudinal e normal ao escoamento e G representa a fonte de calor na camada de mistura.

2.4 Condições Iniciais e de Contorno

O presente trabalho parte inicialmente de um escoamento laminar acrescido de uma perturbação como mostra a equação 1.1, trabalho. De forma que:

$$u(x, y, 0) = u_L(y) + u'(x, y), \quad (2.28)$$

$$v(x, y, 0) = 0 + v'(x, y), \quad (2.29)$$

$$T(x, y, 0) = T_L(y) + T'(x, y), \quad (2.30)$$

$$P(x, y, 0) = 1 + P'(x, y), \quad (2.31)$$

$$\rho(x, y, 0) = \rho_L(y) + \rho'(x, y) \quad (2.32)$$

$$E_t(x, y, 0) = E_{tL}(y) + E'_t(x, y), \quad (2.33)$$

$$e(x, y, 0) = e_L(y) + e'(x, y) \quad (2.34)$$

onde o índice L representa as variáveis do escoamento laminar enquanto $()'$ repre-

sentam as variáveis do escoamento perturbado. Todas as variáveis a esquerda do sinal de igual representam as variáveis do escoamento instântaneo. As variáveis do escoamento laminar são dadas inicialmente por:

$$u_L(y) = \frac{(U_1 + U_2)}{2} + \frac{(U_1 - U_2)}{2} \tanh(\sigma y), \quad (2.35)$$

$$v_L(y) = 0, \quad (2.36)$$

$$T_L(y) = a + \frac{(1 - u_L(y))T_2}{(1 - U_2)} + \frac{u_L(y) - U_2}{(1 - U_2)}, \quad (2.37)$$

onde:

$$a = \frac{(M_1)^2(\gamma - 1)}{2} [u_L(y)(1 - U_2) - (u_L)^2 - U_2], \quad (2.38)$$

$$e_L(y) = \frac{T_L(y)\gamma(\gamma - 1)}{(M_1)^2}. \quad (2.39)$$

A equação 2.37 é conhecida como relação de Crocco-Busseman para a temperatura e é exata para número de Prandtl igual a 1.

A densidade foi calculada assumindo-se que fora da camada cisalhante o escoamento é laminar, portanto a densidade, ρ , é a densidade do escoamento laminar. A pressão é constante na direção normal. Usando estas características obtém-se,

$$P_L(y) = 1 \quad (2.40)$$

$$\rho_L = \frac{P_L(y)}{e_L(y)(\gamma - 1)}, \quad (2.41)$$

$$E_{tL} = \rho_L \left[e_L + \frac{(u_L(y)^2 + v_L(y)^2)}{2} \right]. \quad (2.42)$$

Para o escoamento perturbado foi usada uma variação trigonométrica na direção longitudinal e um decaimento exponencial na direção normal dado por uma gaussiana:

$$u' = 2\sigma y e^{-(\sigma y^2)} \left[\frac{A_1 \cos(\alpha_1 x)}{\alpha_1} + \frac{A_2 \cos(\alpha_2 x)}{\alpha_2} \right], \quad (2.43)$$

$$v' = e^{-(\sigma y^2)} [A_1 \sin(\alpha_1 x) + A_2 \sin(\alpha_2 x)], \quad (2.44)$$

onde σ representa a abertura da gaussiana, y e x a coordenada normal e longitudinal do domínio, A_1 e A_2 as amplitudes relacionadas aos números de onda α_1 e α_2 , u' a componente longitudinal da velocidade da perturbação, v' a componente normal da velocidade da perturbação. A forma da componente longitudinal da velocidade u' obedece a lei de conservação da massa para escoamento incompressível, ou seja:

$$\frac{-\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (2.45)$$

Fora da camada cisalhante o escoamento é laminar de forma que, na direção normal as condições de contorno para o escoamento instantâneo são:

$$u(y \rightarrow +\infty) = U_1, \quad u(y \rightarrow -\infty) = U_2 \quad (2.46)$$

$$v(y \rightarrow +\infty) = 0, \quad v(y \rightarrow -\infty) = 0 \quad (2.47)$$

$$T(y \rightarrow +\infty) = T_1, \quad T(y \rightarrow -\infty) = T_2 \quad (2.48)$$

$$P(y \rightarrow +\infty) = P_1, \quad P(y \rightarrow -\infty) = P_1 \quad (2.49)$$

$$\rho(y \rightarrow +\infty) = \rho_1, \quad \rho(y \rightarrow -\infty) = \rho_2 \quad (2.50)$$

$$E_t(y \rightarrow +\infty) = E_{t1}, \quad E_t(y \rightarrow -\infty) = E_{t2} \quad (2.51)$$

$$e(y \rightarrow +\infty) = e_1, \quad e(y \rightarrow -\infty) = e_2. \quad (2.52)$$

Na direção longitudinal, sendo a análise temporal, a onda está fixa e tem comprimento $L_x = \lambda$. Haja visto que a onda é periódica, usou-se essa característica para impor a condição de periodicidade para o escoamento instantâneo de forma que:

$$u(x, y) = u(x + L_x, y), \quad v(x, y) = v(x + L_x, y), \quad (2.53)$$

$$T(x, y) = T(x + L_x, y), \quad P(x, y) = P(x + L_x, y), \quad (2.54)$$

$$\rho(x, y) = \rho(x + L_x, y), \quad E_t(x, y) = E_t(x + L_x, y), \quad (2.55)$$

$$e(x, y) = e(x + L_x, y). \quad (2.56)$$

com período L_x .

CAPÍTULO 3

MÉTODO NUMÉRICO

As técnicas de solução das equações de Navier-Stokes mais utilizadas para a simulação de escoamentos turbulentos e de transição à turbulência são:

- Simulação considerando as equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds (ENSM -Equações de Navier-Stokes médias),
- Simulação Numérica Direta (SND),
- Simulação de Grandes Escalas (SGE).

A ENSM é uma técnica muito empregada na solução de problemas de interesse industrial é mais utilizada como ferramenta de cálculo de escoamentos turbulentos. A ENSM resolve os valores médios das equações e modela as flutuações usando modelos de fechamento. A SND soluciona diretamente as equações de Navier-Stokes geralmente empregando esquemas de diferenças finitas de alta ordem. Num procedimento com SND todas as escalas de escoamento são simuladas, das maiores e mais energéticas até as menores, sem precisar adicionar equações de fechamento. A principal restrição desta técnica está relacionada com o custo de cálculo computacional. Como na SND o número de graus de liberdade é função do número de Reynolds, altos números de Reynolds estão associados a altos números de graus de liberdade, exigindo uma malha mais refinada e conseqüentemente um maior esforço computacional. A SGE permite aumentar o número de Reynolds com relação à SND, através da introdução de um filtro que separa as grandes das pequenas escalas. A técnica SGE resolve as equações completas de Navier-Stokes somente para as maiores escalas e as menores são modeladas com a introdução de modelos de sub-malha. Nos dias atuais, a técnica de simulação numérica direta (SND) constitui uma excelente ferramenta de pesquisa, principalmente para investigar a transição à turbulência e a mesma propriamente dita.

Para usar SND utilizou-se um esquema de diferenças compactas que é implícito. Ele relaciona o valor da derivada em pontos vizinhos. O valor da derivada obtido por este método é muito próximo ao seu valor exato para uma banda de número de onda, α_i , maior que para métodos de baixa ordem, como mostra o figura 3.1. Esta figura, mostra a relação do número de onda analítico e o número de onda calculado por diferenças finitas ou simplesmente número de onda modificado. A linha contínua representa a condição ideal em que o número de onda analítico e o modificado são iguais. O número de onda modificado é obtido, para uma função periódica, da seguinte forma:

$$f = \hat{f} e^{i\alpha x} \quad (3.1)$$

cuja derivada é

$$df/dx = \hat{f} i \alpha e^{i\alpha x}. \quad (3.2)$$

A derivada também pode ser escrita como

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.3)$$

Substituindo a equação 3.1 na equação 3.3 e colocando a exponencial em evidência obtém-se;

$$\frac{df}{dx} = \frac{\hat{f} e^{i\alpha x}}{2\Delta x} (e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}). \quad (3.4)$$

A equação 3.4 é o valor aproximado de df/dx quando f tem a forma da equação 3.1 e a discretização é uma aproximação por diferença centrada de segunda ordem, portanto

$$\hat{f} i \alpha e^{i\alpha x} \approx \frac{\hat{f} e^{i\alpha x}}{2 \Delta x} (e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}), \quad (3.5)$$

e simplificando,

$$\alpha \approx \frac{-(e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x})}{2 \Delta x}. \quad (3.6)$$

O lado direito da equação 3.6 é o número de onda calculado por diferenças finitas, chamado número de onda modificado. Assim, define-se:

$$\alpha_{mod} = \frac{-(e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x})}{2 \Delta x}. \quad (3.7)$$

A equação 3.7 representa a curva α versus α_{mod} quando a derivada é uma aproximação de segunda ordem dada pela equação 3.3. Da figura 3.1 pode-se obter a faixa de comprimento de onda modificado que se aproxima do valor analítico. Para

discretização de 4ª ordem a banda é menor que para a discretização de 6ª ordem conforme [Santana e Souza \(2006\)](#). Isto motivou a discretização de 6ª ordem neste trabalho. Com isto consegue-se representar, por diferenças finitas, funções com baixo erro de dispersão, pois um maior espectro de números de onda é resolvido corretamente.

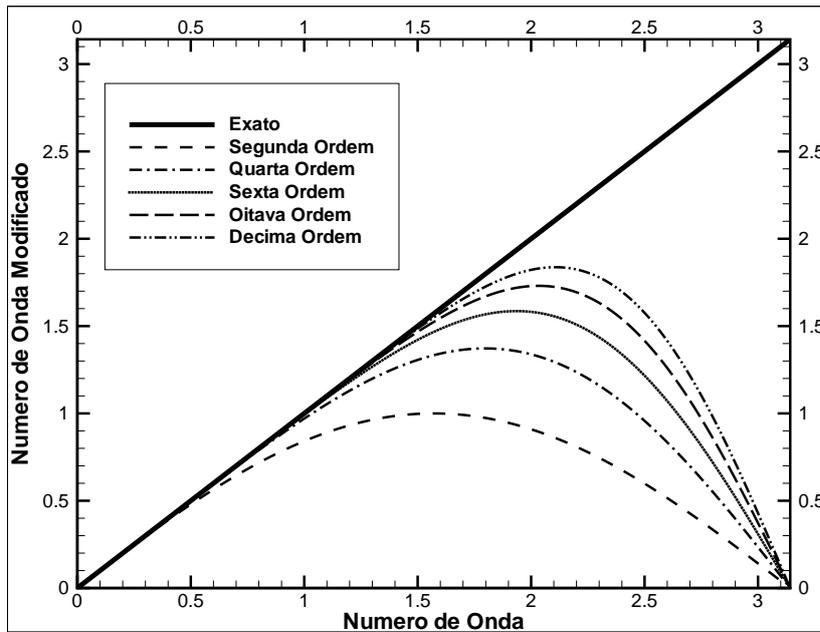


Figura 3.1 - Relação entre número de onda analítico e numérico.

3.1 Discretização

Soluções analíticas envolvem expressões tais que as variáveis dependentes são conhecidas em qualquer ponto do domínio. Soluções numéricas têm respostas somente em alguns pontos do domínio. Esse conjunto de pontos é conhecido como malha computacional. Por mais fina que uma malha seja, sempre será formada por uma diferença finita entre os pontos, diferentemente das soluções analíticas que são contínuas. A figura 3.2 representa uma malha no plano x-y.

Na direção x os pontos são representados pela letra i , portanto para uma solução x temos uma representação $x = x(i)$, na direção y tem-se $y = y(j)$ onde j representa os pontos nesta direção. Os elementos diferenciais são Δx que representa o valor $(x(i + 1) - x(i))$ e Δy que representa $(y(j + 1) - y(j))$. Para os índices (i, j) que representam um ponto P na malha, os pontos vizinhos são $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i, j - 1)$, $(i + 1, j + 1)$, $(i + 1, j - 1)$, $(i - 1, j + 1)$ e $(i - 1, j - 1)$ como mostra a figura 3.2.

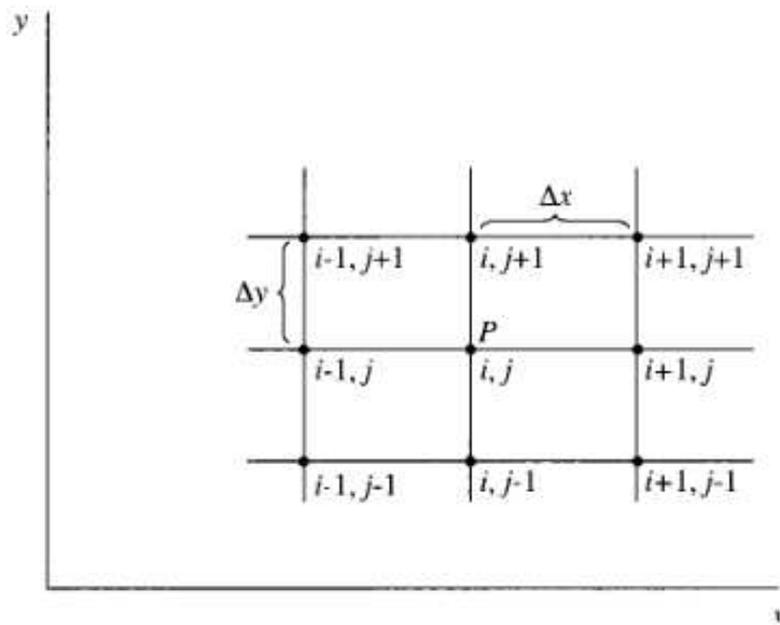


Figura 3.2 - Intervalos discretos de uma malha bidimensional.

Na discretização temporal, como mostra a figura 3.3, cada ponto na coordenada tempo está representado pela letra n e dt é o tempo entre os instantes n e $n + 1$.

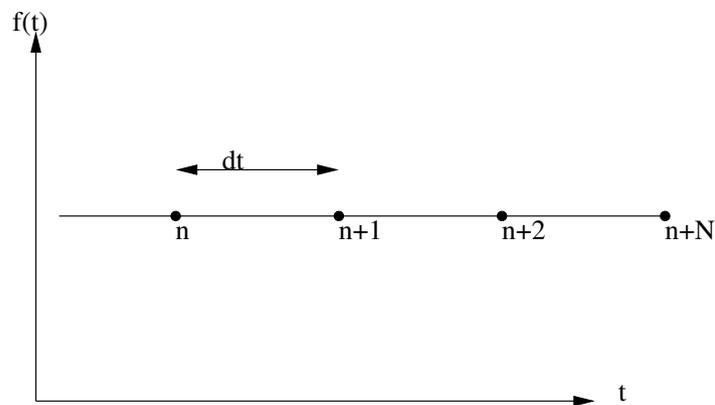


Figura 3.3 - Pontos discretos de variação temporal.

3.2 Integração temporal e discretização espacial

Os fenômenos associados aos problemas de instabilidade hidrodinâmica, transição e turbulência possuem um grande número de escalas no tempo e no espaço. O esquema numérico adotado para a solução das equações de conservação tem que representar todas as escalas relevantes apropriadamente. Para tanto, será adotado no presente

projeto uma discretização das equações por diferenças finitas compactas de alta ordem nas direções longitudinal e normal (LELE, 1992; MAHESH, 1998; SOUZA, 2003). Para os termos de derivada temporal, será adotado um método do tipo Runge-Kutta de 4ª ordem de precisão (FERZIGER; PERIC, 1997).

3.2.1 Derivadas Temporais

Neste estudo o interesse é captar os efeitos transientes e, para simular adequadamente estes fenômenos, é necessário empregar incrementos de tempo na simulação numérica necessários para que se satisfaçam os critérios de estabilidade. O critério de estabilidade é representado pelo número de Courant, C . No presente trabalho foi seguido o mesmo critério empregado por Sandham (1990), que se representa por:

$$dt = \frac{C}{A} \quad (3.8)$$

onde:

$$A = \pi \left[\frac{1}{M_1} \left(\frac{1}{dx} + \frac{1}{dy} \right) + \left(\frac{|u|}{dx} + \frac{|v|}{dy} \right) + \frac{T^{0.65}}{\rho(\gamma - 1)M_1^2 P_r R_e} \left(\frac{1}{dx} + \frac{1}{dy} \right) \right] \quad (3.9)$$

onde dt é o passo no tempo, M_1 é número de Mach do escoamento de referência, P_{r1} é número de Prandtl de referência, R_{e1} é número de Reynolds de referência, γ é a razão entre calores específicos, ρ a densidade, μ a viscosidade, u e v as componentes normal e longitudinal da velocidade da perturbação, dx e dy os espaçamentos nas direções longitudinal e normal ao escoamento, C é o numero de Courant. Este número representa a relação entre o domínio numérico e analítico. Neste trabalho foi usado $C = 1$ para todos os casos. Optou-se também por um método condicionalmente estável do tipo Runge-Kutta de 4ª ordem. As equações de transporte quando discretizadas são usadas para se determinar o valor das variáveis em cada ponto do domínio computacional no tempo $t = t_0 + dt$. O método aqui descrito funciona em 4 passos, conforme Ferziger e Peric (1997), de acordo com as equações abaixo:

$$f_{n+1/2}^* = f^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, f_n), \quad (3.10)$$

$$f_{n+1/2}^{**} = f^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n+1/2}, f_{n+1/2}^*), \quad (3.11)$$

$$f_{n+1}^* = f^n + \Delta t f(t_{k+1/2}, f_{k+1/2}^{**}), \quad (3.12)$$

$$f^{n+1} = f^n + \frac{\Delta t}{6} [f(t_n, f_n) + 2f(t_{n+\frac{1}{2}}, f_{n+1/2}^*) +$$

$$+ 2f(t_{n+1/2}, f_{n+1/2}^{**}) + f(t_{n+1}, f_{n+1}^*)].$$

As derivadas espaciais são aproximadas por diferenças finitas de 6ª ordem para que se obtenha no final um esquema de $O(\Delta t^4, \Delta x^6)$.

3.2.2 Derivadas Espaciais

3.2.2.1 Método de Diferenças Finitas

O método de discretização usado neste trabalho é o de diferenças finitas. Este método de discretização consiste em representar uma função como expansão em série de Taylor ao redor de um ponto. Na figura 3.4 a linha contínua representa uma solução analítica e os pontos 1 e 2 representam dois pontos desta função. Os pontos 3, 4 e 5 representam aproximações respectivamente de 1ª, 2ª e 3ª ordem de uma expansão em série de Taylor. Para o ponto 5 a expansão é:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{6}. \quad (3.14)$$

Portanto para um mesmo Δx , aumentando a ordem da expansão obtém-se valores cada vez mais próximos da solução analítica. O método de diferenças finitas baseia-se neste esquema para criar extênceis que avaliam o valor de uma determinada função no ponto em questão. De forma geral a série de Taylor gera um extencil da seguinte forma;

$$u(i+1, j) = u(i, j) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \cdot (\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (3.15)$$

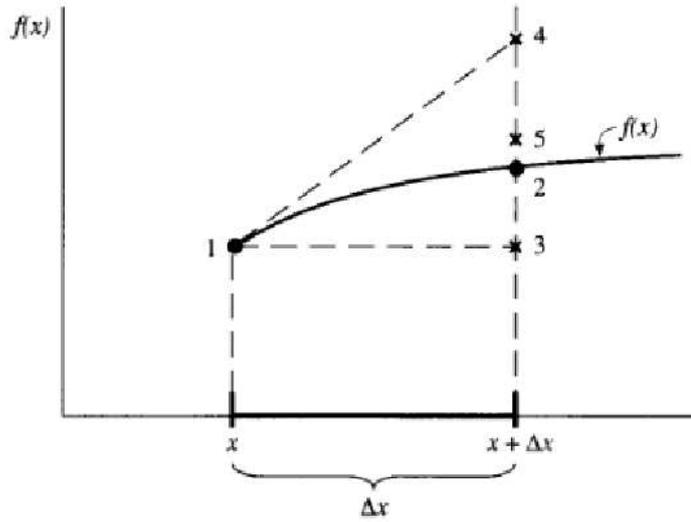


Figura 3.4 - Aproximação por expansão em Taylor de uma função $f(x)$.

Isolando a derivada 1ª e truncando a série nas ordens superiores, obtém-se um extencil de 1ª ordem, dado pela seguinte expressão:

$$u(i + 1, j) = u(i, j) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} (\Delta x) + O(\Delta x)^2, \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \left(\frac{u(i + 1, j) - u(i, j)}{\Delta x} \right) + O(\Delta x). \quad (3.17)$$

O lado direito da expressão acima é a representação em diferenças finitas para uma derivada $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ com aproximação de primeira ordem. Outros extênceis podem ser obtidos usando as expansões e suas combinações. Extênceis de 4ª ordem para as primeiras e segundas derivadas são:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \left[\frac{(u(i + 2, j) + 8u(i + 1, j) - 8u(i - 1, j) + u(i - 2, j)))}{12\Delta x} \right], \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \left[\frac{(-u(i + 2, j) + 16u(i + 1, j) - 30u(i, j) + 16u(i - 1, j) - u(i - 2, j)))}{12\Delta x^2} \right]. \quad (3.19)$$

Estes são métodos explícitos que usam 5 pontos de malha. Para aumentar a precisão deste método deve se aumentar o número de pontos tornando o cálculo lento. Outra forma de melhorar a ordem de precisão da aproximação, sem aumentar o número de pontos, é usar um esquema de diferenças finitas compactas, também chamado de diferença hermitianas. Este modelo está descrito por [Kopal \(1961\)](#). Um esquema apresentado por [Lele \(1992\)](#), que é baseado numa combinação dos coeficientes da série de Taylor permite aumentar a precisão da discretização. Ele resolve um sistema de equações que corresponde à discretização de 6ª ordem. Os esquemas de alta ordem compactos relacionam derivadas no ponto com as derivadas nos pontos vizinhos, como mostram as equações [3.20](#), [3.21](#) para primeira e segunda derivadas.

$$\alpha' f'_{i-1,j} + f'_{i,j} + \alpha' f'_{i+1,j} = a \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + b \frac{f_{i+2,j} - f_{i-2,j}}{4\Delta x}, \quad (3.20)$$

$$\alpha'' f''_{i-1,j} + f''_{i,j} + \alpha'' f''_{i+1,j} = c \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + d \frac{f_{i+2,j} - 2f_{i,j} + f_{i-2,j}}{4(\Delta x)^2}. \quad (3.21)$$

Estas equações são agrupadas num sistema de equações, que obedece certas condições para ser montado, como se segue. As derivadas primeira na direção do escoamento são calculadas usando um esquema compacto de 6ª ordem para todos os pontos como mostra a matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 3 & 1 & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & 1 & 3 & 1 \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 & 3 & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_0 \\ f'_1 \\ \cdot \\ f'_i \\ \cdot \\ f'_{jmax-1} \\ f'_{jmax} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{12dx} (f_{imax-1} + 28f_{imax} - 28f_1 - 28f_2) \\ \frac{1}{12dx} (f_{imax} + 28f_0 - 28f_2 - 28f_3) \\ \\ \frac{1}{12dx} (f_{i+2} + 28f_{i+1} - 28f_{i-1} - 28f_{i-2}) \\ \\ \frac{1}{12dx} (f_{imax-3} + 28f_{imax-2} - 28f_{imax} - 28f_0) \\ \frac{1}{12dx} (f_{imax-2} + 28f_{imax-1} - 28f_0 - 28f_1) \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Na direção perpendicular para pontos próximos da fronteira foi usado um extencil descentrado de 5ª ordem para $j=1$ e $j=jmax$ e de 6ª ordem para $j=2$ e $j=jmax-1$ como proposta por Souza (2003). Eles são respectivamente;

$$f'_1 + 4f'_2 = \frac{1}{24dx} (-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) + 0(dx)^5, \quad (3.24)$$

$$f'_1 + 6f'_2 + 2f'_3 = \frac{1}{120dx} (-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) + 0(dx)^6, \quad (3.25)$$

onde a derivada segunda é calculada por duas derivadas primeiras. Nesta mesma direção do escoamento temos dois tipos de derivação, pois impomos para v condição diferente das impostas para as outras variáveis. As derivadas em v obedecem ao seguinte extencil;

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & & & & & & & \\ & 1 & 6 & 2 & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & 1 & 3 & 1 & & \\ & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & 2 & 6 & 1 \\ & & & & & & & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_0 \\ f'_1 \\ \cdot \\ f'_i \\ \cdot \\ f'_{imax-1} \\ f'_{imax} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{24dx} (-74f_0 + 16f_1 + 72f_2 - 16f_3 + 2f_4) \\ \frac{1}{120dx} (-406f_0 - 300f_1 + 760f_2 - 80f_3 + 30f_4 - 4f_5) \\ \frac{1}{12dx} (f_{i+2} + 28f_{i+1} - 28f_{i-1} - 28f_{i-2}) \\ \frac{1}{12dx} (406f_{imax} + 300f_{imax-1} - 760f_{imax-2} - 80f_{imax-3} - 30f_{imax-4} + 4f_{imax-5}) \\ \frac{1}{24dx} (74f_{imax} - 16f_{imax-1} - 72f_{imax-2} + 16f_{imax-3} - 2f_{imax-4}) \end{bmatrix}$$

Para as demais variáveis temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ & \cdot \\ & 1 & 3 & 1 \\ & & \cdot \\ & & 2 & 6 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_0 \\ f'_1 \\ \cdot \\ f'_i \\ \cdot \\ f'_{imax-1} \\ f'_{imax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_2 \\ \cdot \\ r_i \\ \cdot \\ r_{imax-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$r_2 = \frac{1}{120dx} (-406f_0 - 300f_1 + 760f_2 - 80f_3 + 30f_4 - 4f_5), \quad (3.28)$$

$$r_i = \frac{1}{12dx} (f_{i+2} + 28f_{i+1} - 28f_{i-1} - 28f_{i-2}), \quad (3.29)$$

$$r_{imax-1} = \frac{1}{12dx} (406f_{imax} + 300f_{imax-1} - 760f_{imax-2} - 80f_{imax-3} - 30f_{imax-4} + 4f_{imax-5}). \quad (3.30)$$

Para o cálculo das derivadas de segunda ordem usamos, na direção longitudinal, onde tem-se a periodicidade:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & & & & & 2 \\ & 1 & 12 & 3 & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & 2 & 11 & 2 & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & 3 & 12 & 1 \\ 2 & & & & & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_0 \\ f''_1 \\ \cdot \\ f''_i \\ \cdot \\ f''_{imax-1} \\ f''_{imax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ r_i \\ \cdot \\ r_{imax-1} \\ r_{imax} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$r_1 = \frac{1}{120dx} (9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 36f_6), \quad (3.32)$$

$$r_2 = \frac{1}{360} (-4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 + 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7), \quad (3.33)$$

$$r_i = \frac{1}{4dx} (3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}), \quad (3.34)$$

$$r_{imax-1} = \frac{1}{360dx} (4834f_{imax} - 8424f_{imax-1} + 1890f_{imax-2} + 2320f_{imax-3} - 810f_{imax-4} + 216f_{imax-5} - 26f_{imax-6}), \quad (3.35)$$

$$r_{imax-2} = \frac{1}{120dx} (9775f_{imax} - 20285f_{imax-1} - 11170f_{imax-2} - 550f_{imax-3} - 145f_{imax-4} + 36f_{imax-5}). \quad (3.36)$$

3.2.3 Condições Iniciais e de Contorno

Como já foi escrito na seção 2.4, inicialmente temos um escoamento laminar acrescido de uma perturbação. A variável y passa a ser função da coordenada numérica j que representa os pontos da discretização na direção $y = y(j)$. Desta forma a condições iniciais para o escoamento laminar são:

$$u_L(j) = \frac{(U_1 + U_2)}{2} + \frac{(U_1 - U_2)}{2} \tanh(\sigma y(j)). \quad (3.37)$$

A temperatura é dada pelo relação de Crocco-Busemann, que é válida somente para $P_r = 1$.

$$T_L(j) = a + \frac{(1 - u_L(j))T_2}{(1 - U_2)} + \frac{u_L(j) - U_2}{(1 - U_2)}, \quad (3.38)$$

$$a = \frac{(M_1)^2(\gamma - 1)}{2} [u_L(j)(1 - U_2) - (u_L(j))^2 - U_2],$$

$$e_L(j) = \frac{(T_L(j))\gamma(\gamma - 1)}{(M_1)^2}, \quad (3.39)$$

$$\rho_L(j) = \frac{P_1}{e_L(j)(\gamma - 1)}, \quad (3.40)$$

$$E_{tL}(j) = \rho_L(j) \left[e_L(j) + \frac{(u_L(j))^2 + v_L(j)^2}{2} \right], \quad (3.41)$$

$$v_L(j) = 0. \quad (3.42)$$

As perturbações são dadas como segue abaixo:

$$v' = e^{-(i\sigma y(j)^2)} [A_1 \sin(\alpha_1 x(i)) + A_2 \sin(\alpha_2 x(i))], \quad (3.43)$$

$$u' = 2\sigma y e^{-(i\sigma y(j)^2)} \left[\left(\frac{A_1 \sin(\alpha_1 x(i))}{\alpha_1} \right) + \left(\frac{A_2 \sin(\alpha_2 x(i))}{\alpha_2} \right) \right]. \quad (3.44)$$

onde A_1 e A_2 são as amplitudes das perturbações, σ a abertura da gaussiana, j a coordenada numérica na direção normal, i a coordenada numérica na direção longitudinal, $y(j)$ a coordenada normal, $x(i)$ a coordenada longitudinal, α_1 é o número de onda especificado, α_2 o sub-harmônico de α_1 , $i = \sqrt{-1}$. As expressões para a perturbação obedecem a conservação da massa para escoamentos incompressíveis.

Fora da camada cisalhante o escoamento é laminar de forma que os gradientes são nulos. Usar esta condição implica em especificar as derivadas das grandezas na fronteira como sendo nulas, como mostrado na figura 3.5.

De forma que $df/dn = 0$, onde f é uma variável qualquer e n a direção normal a fronteira. Desta análise as condições tornam-se:

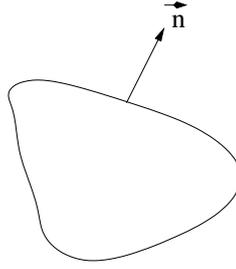


Figura 3.5 - Condição de contorno.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{jmax} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{jmin} = 0, \quad (3.45)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{jmax} = \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{jmin} = 0, \quad (3.46)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{jmax} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{jmin} = 0, \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{jmax} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{jmin} = 0, \quad (3.48)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial y}\right)_{jmax} = \left(\frac{\partial e}{\partial y}\right)_{jmin} = 0, \quad (3.49)$$

$$\left(\frac{\partial E_t}{\partial y}\right)_{jmax} = \left(\frac{\partial E_t}{\partial y}\right)_{jmin} = 0. \quad (3.50)$$

Para a variável v , adotou-se a condição de Dirichlet, que significa fazer a componente normal de f ser nula, de forma que na figura 3.5 faz-se $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, onde f sendo n a direção normal á fronteira. Desta análise a condição para v tornam-se,

$$v(jmin) = v(jmax) = 0 \quad (3.51)$$

Na direção longitudinal o escoamento é periódico, de forma que $f(1, j) = f(imax+1, j)$, onde $imax$ é o último ponto da coordenada longitudinal no domínio numérico e a periodicidade ocorre em $imax + 1$ que corresponde a um comprimento de onda.

$$u(1, j) = u(imax + 1, j), \quad v(1, j) = v(imax + 1, j), \quad (3.52)$$

$$T(1, j) = T(imax + 1, j), \quad P(1, j) = P(imax + 1, j), \quad (3.53)$$

$$\rho(1, j) = \rho(imax + 1, j), \quad e(1, j) = e(imax + 1, j), \quad (3.54)$$

$$E_t(1, j) = E_t(imax + 1, j). \quad (3.55)$$

3.3 Estudo da Topologia da malha computacional

O domínio está representado pela figura 3.6. O domínio bi-dimensional contém em seu interior uma camada cisalhante de espessura de vorticidade, δ_ω conforme definido na equação 2.12, com uma perturbação cuja distribuição de velocidade em $t = 0$ é dada pela figura 3.7.

Na camada cisalhante os gradientes na direção longitudinal são menores que na direção normal. Isto faz com que a malha na direção longitudinal não precise ser tão fina como na direção normal. Neste trabalho a malha é retangular onde o número de pontos em j é bem maior que em i . Embora o valor de i e j tenham se alterado a cada caso esta relação se mantém em torno de 10 a 18 vezes maior para j , ou seja, j é 10 a 18 vezes maior que i . A alteração na malha se fez necessária quando alterou-se o nível de compressibilidade

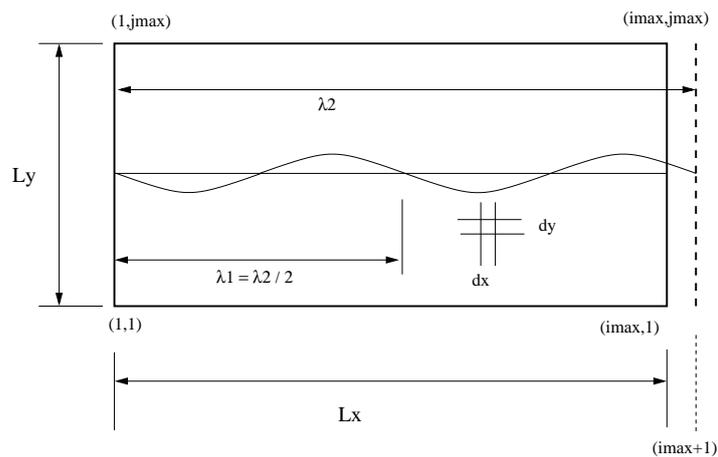


Figura 3.6 - Domínio

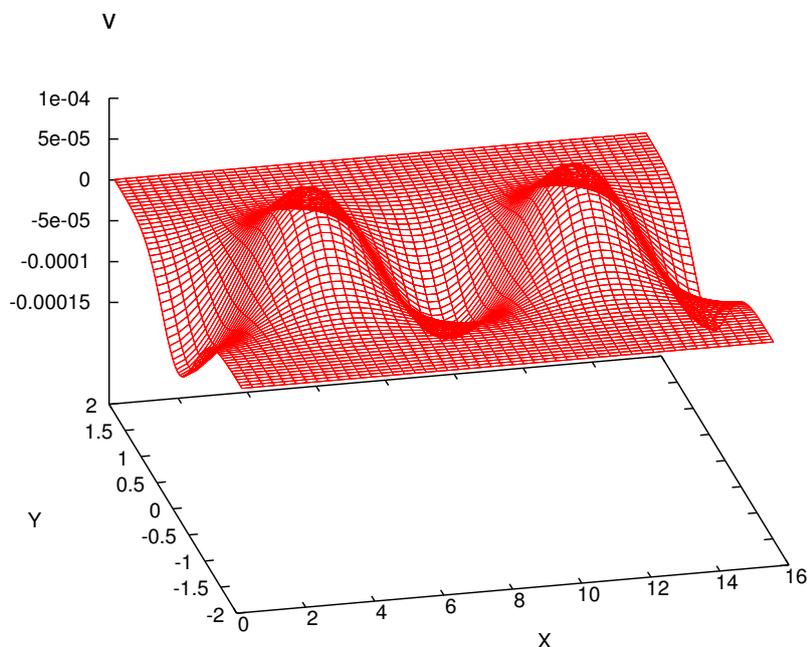


Figura 3.7 - $v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$ e $t = 0.0$

bem com a potência da fonte de calor. A variável L_x representa o comprimento da onda, portanto $L_x = \lambda$. Nesta direção tem-se duas onda de comprimento de onda λ_1 e uma sub-harmônica λ_2 . Com esta sub-harmônica é possível observar o processo de emparelhamento dos vórtices que formam-se a partir de cada onda. Os comprimentos de onda estão relacionados com os números de onda da seguinte forma,

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1}, \lambda_2 = \frac{2\pi}{\alpha_2}. \quad (3.56)$$

$L_x = \lambda_2$. Conhecendo L_x pode-se determinar o espaçamento na direção longitudinal,

$$dx = \frac{L_x}{(imax - 1)}, \quad (3.57)$$

onde $imax$ é o número de pontos na direção longitudinal.

Na direção normal tem-se a fronteira do domínio em $j = jmin$ e $j = jmax$, como mostra a figura 3.6. O processo de discretização gera erros inerentes da própria técnica e da aproximação na condição inicial. Esses erros foram chamados de ruídos. Através da variável taxa de amplificação do vórtice pode se observar a influência do ruído no vórtice. O gráfico 3.8 mostra a taxa de amplificação para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$ sem fonte de calor, ela é obtida a partir da seguinte expressão;

$$v(y, t) = \hat{v}(y)e^{i\omega t}, \quad (3.58)$$

derivando com relação ao tempo obtem-se

$$\frac{dv}{dt} = i\omega \hat{v}(y)e^{i\omega t}, \quad (3.59)$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{dv}{dt} = i\omega v(y, t), \quad (3.60)$$

aproximando a derivada para

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt}. \quad (3.61)$$

Substituindo a equação 3.61 na equação 3.60 podemos resolvê-la para a taxa de amplificação, obtendo-se:

$$\omega = \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt v(t)}, \quad (3.62)$$

onde $v(t)$ é o maior valor de $v(x, y)$ no tempo atual. Este ruído é expulso da camada de mistura atinge a fronteira é refletido por ela retornando a camada de mistura. Devido a reflexão pode-se dizer que o erro assume mais uma componente correspondente a reflexão pela fronteira, de forma que a influência no processo de formação do vórtice é grande. A figura 3.8 mostra a taxa de amplificação do vórtice em função do tempo. Nela a curva verde representa a situação em que $L_y = 20$, onde L_y está geometricamente definido na figura 3.6. Nesta curva o ruído promove uma variação na taxa de amplificação com o tempo durante toda a simulação, sendo mais acentuada no início até aproximadamente $t \approx 12.5$. A partir deste tempo os ruídos diminuem mas persistem. A curva vermelha mostra a taxa de amplificação versus tempo para $L_y = 60$. A curva mostra que a taxa de amplificação é constante na mesma região em que se observa oscilações para $L_y = 20$. A região entre $t \approx 8$ e $t \approx 25$ tempos adimensionais é bem menos oscilatória para $L_y = 60$ do que para $L_y = 20$. A diferença entre os casos é o valor de L_y , portanto evidenciando que as oscilações decorrem de um efeito de confinamento da fronteira sobre a camada de mistura. Para diminuir a influência desses ruídos colocou-se a fronteira longe da camada de mistura. Para manter o incremento dy pequeno define-se uma relação entre L_y e o número de pontos na direção normal ao escoamento, representado por $jmax$. A relação é:

$$a = \frac{L_y}{(jmax)}. \quad (3.63)$$

A constante a representa a relação entre a distância entre a fronteira e a camada de mistura. Inicialmente a é obtido de forma aleatória como sendo 1, portanto $L_y = jmax$. Alterando L_y mantendo $jmax$ fixo obtém-se a influência de L_y na formação do vórtice. Faz-se o mesmo para $jmax$ mantendo L_y fixo. Comparando os resultados desta análise pode atribuir um bom valor para a , que deixa de ser aleatório. A partir deste valor de a especifica-se um valor para L_y e obtém-se o número de pontos necessário para satisfazer a condição para a . Com esta nova etapa pode-se obter melhor distância entre camada de mistura e fronteira mantendo uma malha fina. Escolher L_y grande, colocando a fronteira longe da camada de mistura significa fazer com que o tempo para que o ruído retorne a camada de mistura seja maior que o tempo de formação do vórtice. Desta forma foi determinado $L_y = 100$ para o presente trabalho. Colocando a linha de centro da camada de mistura em $y = 0$ então L_y pode ser representado com segue abaixo:

$$L_y = y_{max} - y_{min}, \quad (3.64)$$

onde $y_{max} = 50$ e $y_{min} = -50$ totalizando 100. Assim o espaçamento na direção normal é,

$$dy = \frac{L_y}{(jmax - 1)}, \quad (3.65)$$

onde $jmax$ é o número de pontos na direção normal. Para melhorar a relação entre a fronteira e a camada de mistura deve se usar condição de contorno não-reflexivas. Uma maneira de tratar a fronteira com condições não-reflexivas é utilizar um termo de amortecimento adicional nas equações governantes do tipo

$$-\sigma(q - q_{ref})$$

onde σ é uma função de y que varia de zero no interior do domínio até valor positivo próximo da fronteira. Desta forma qualquer resíduo de onda refletida pela fronteira passa novamente pela região de amortecimento promovendo uma atenuação quase completa dos resíduos. Uma expressão proposta por [Bodony e Lele \(2005\)](#) é dada por:

$$\sigma(y) = A \left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right)^n. \quad (3.66)$$

Está condição permite diminuir L_y e também permite usar menos pontos nodais.

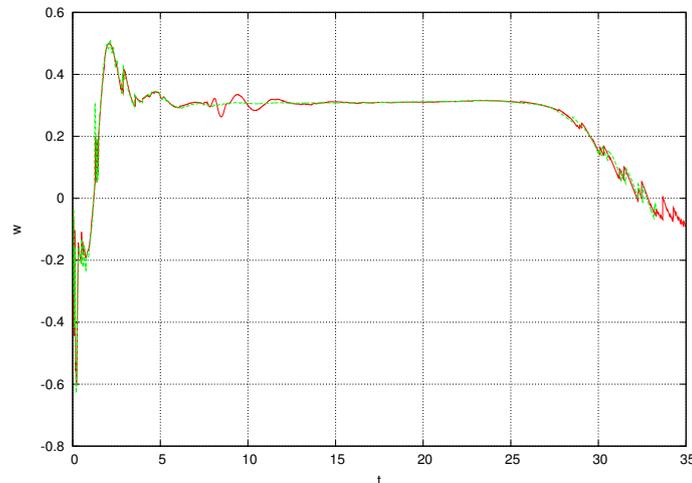


Figura 3.8 - w versus t para $M = 0.4, \alpha = 0.8$.

3.4 Validação do Código

A validação foi feita comparando-se os resultados obtidos quando este simula a formação de vórtices em uma camada de mistura em regime compressível sem fonte de calor com os resultados da teoria de estabilidade linear e outros trabalhos na literatura como [Germanos e Medeiros \(2005\)](#), [Sandham \(1990\)](#). O código reproduz resultados de taxa de amplificação versus números de onda.

Para número de onda fora da faixa apresentada nas curvas da figura [3.9](#) o código não funciona. A taxa de amplificação é correspondente a números de onda maiores que o especificado. Este problema é reflexo de condições iniciais inadequadas. Para resolver este problema deve se usar condições iniciais baseadas em teoria de estabilidade linear, como por exemplo resultados da solução do problema de Rayleigh. A figura [3.9](#) apresenta os resultados obtidos com o código desenvolvido neste trabalho, comparado com os resultados de [Sandham \(1990\)](#). A figura [3.9](#), apresenta a relação entre o número de onda e a taxa de amplificação, para os casos $M = 0.4$ $\alpha = 0.8$ e $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$. Os resultados mostram que o aumento da compressibilidade do escoamento diminui a taxa de amplificação das perturbações. Os valores de taxa de amplificação usados na figura [3.9](#) são obtidos através do procedimento descrito na seção [3.3](#) a partir da equação [3.58](#). A figura [3.10](#) mostra a evolução temporal da componente normal da perturbação para os dois níveis de compressibilidade, $M = 0.4$ e $M = 0.8$. As figuras [3.11](#) e [3.12](#) apresentam as linhas de iso-vorticidade para os níveis de compressibilidade $M = 0.4$ e $M = 0.8$, correspondente a região de crescimento exponencial das curvas da figura [3.10](#).

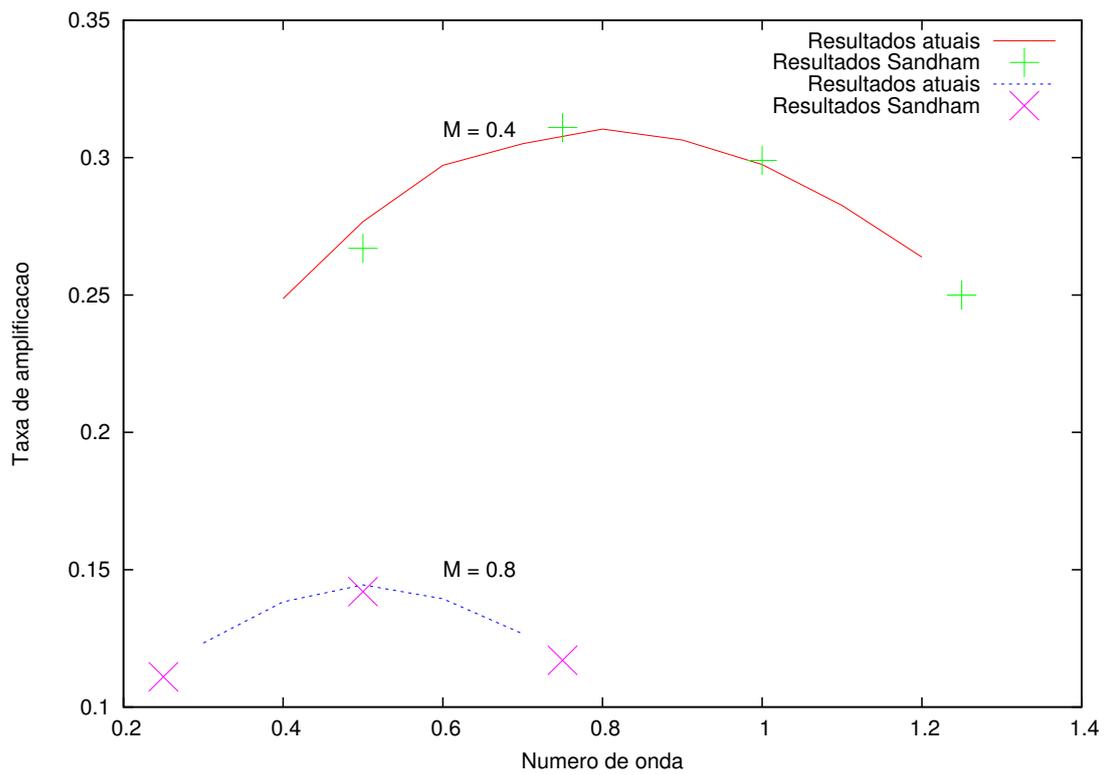


Figura 3.9 - Taxa de amplificação em escoamento compressível sem fonte de calor

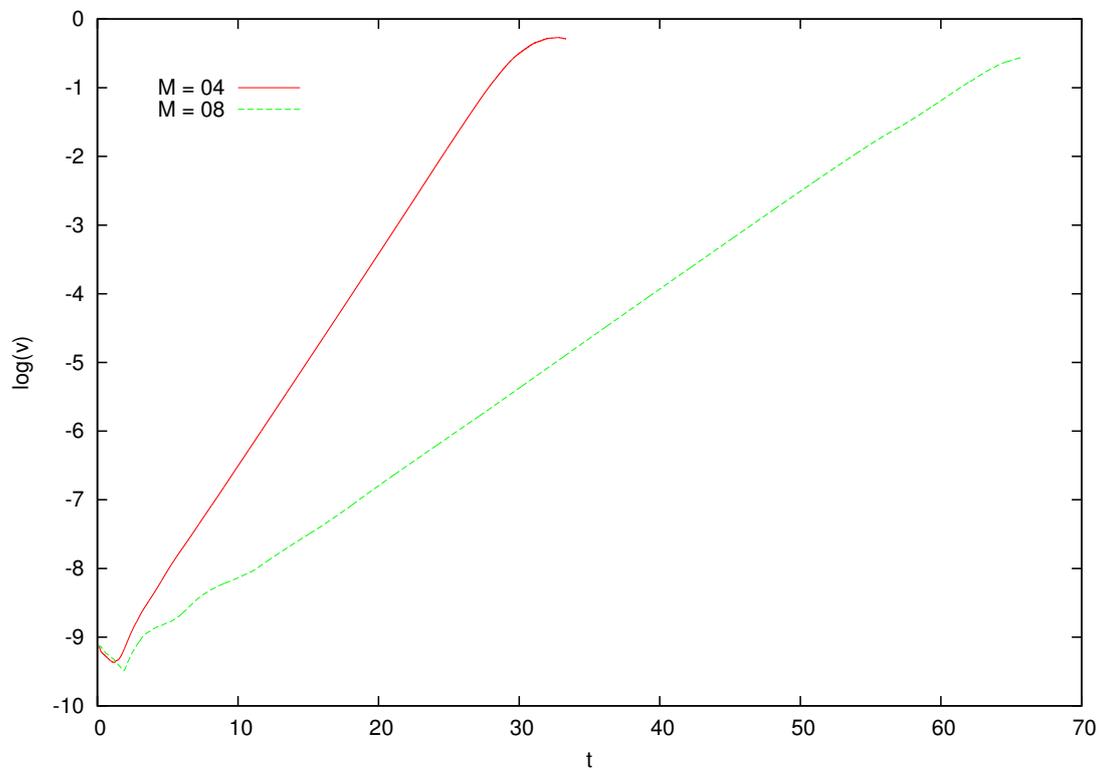


Figura 3.10 - Evolução da perturbação em escoamento compressível sem fonte de calor.

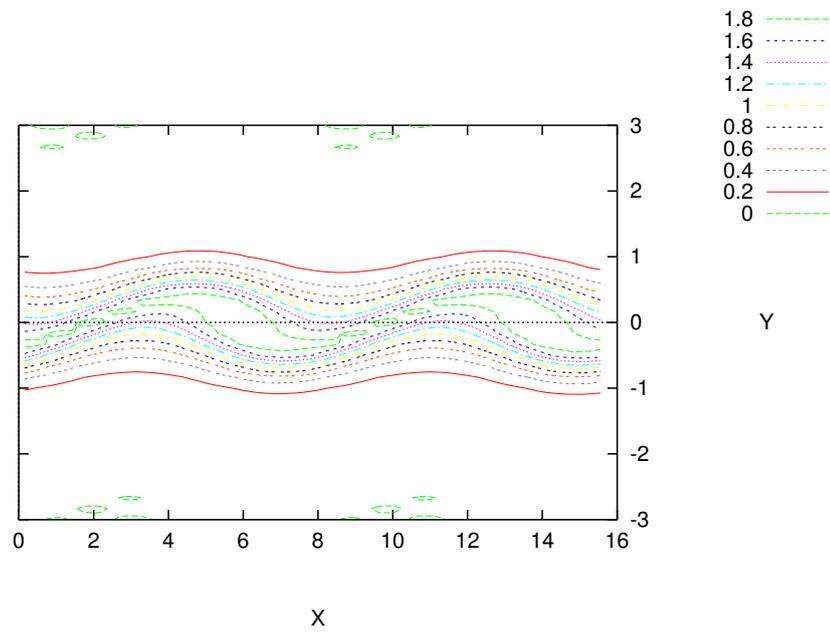


Figura 3.11 - Linhas de Iso-Vorticidade em escoamento compressível sem fonte de calor, para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.

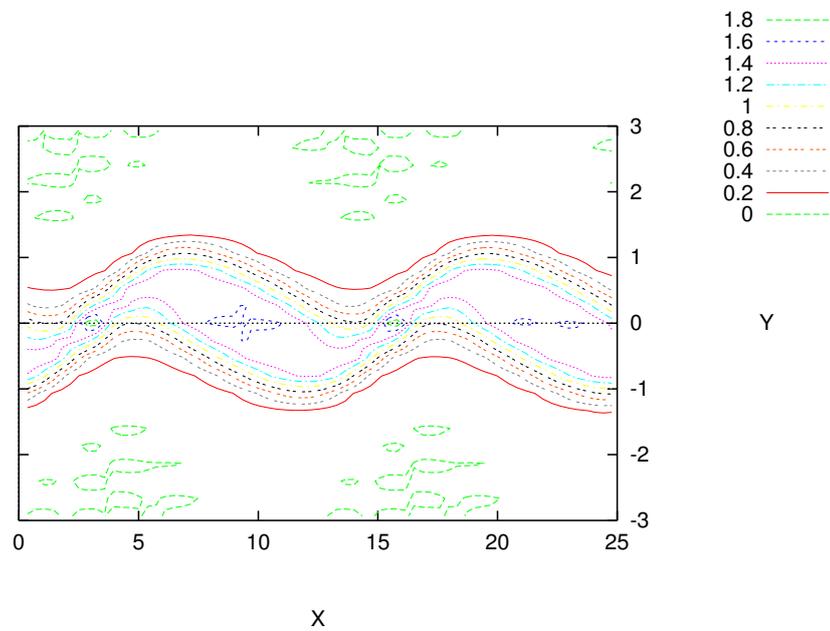


Figura 3.12 - Linhas de Iso-Vorticidade em escoamento compressível sem fonte de calor, para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

Neste capítulo é apresentada uma breve introdução sobre camada de mistura em regime compressível sem fonte de calor e da instabilidade que apresenta-se em seu interior, de interesse para este trabalho para camada de mistura com fonte de calor. Em seguida, são apresentados resultados obtidos neste trabalho, sempre fazendo uso da comparação entre as camadas de mistura com e sem fonte de calor.

4.1 Camada cisalhante compressível sem fonte de calor

A camada de mistura desenvolve-se devido a presença de diferença de velocidade num escoamento livre. Normalmente tem-se uma camada de mistura cisalhante que separa duas regiões do escoamento, uma de escoamento rápido e outra de escoamento lento, como mostrado na figura 1.3. Nela, na parte superior tem-se o escoamento rápido e na parte inferior o escoamento lento. A instabilidade que se desenvolve neste tipo de escoamento é resultado do processo de amplificação de perturbações injetadas no escoamento por alguma fonte externa. Desta forma, o processo de transição inicia-se na região entre dois escoamentos de velocidades uniformes U_1 e U_2 .

A figura 1.3 representa a manifestação de uma oscilação com comprimento de onda λ que se desenvolve com uma certa taxa de amplificação. Quando esta instabilidade se desenvolve observa-se a geração de cristas e vales, na camada cisalhante inicialmente uniforme. A instabilidade gerada e os turbilhões formados são, respectivamente, a instabilidade de Kelvin-Helmholtz e os turbilhões de Kelvin-Helmholtz. Desta reflexão pode-se dizer que os turbilhões transportam fluido rico em quantidade de movimento na região descendente e pobre em quantidade de movimento na região ascendente, para o interior da camada de mistura. Portanto a camada de mistura neste sistema físico é a região de encontro de fluidos pobre e rico em quantidades de movimento.

4.1.1 Efeito da Compressibilidade

Estudos que relacionam compressibilidade e taxa de amplificação foram feitos por [Clemens e Mungal \(1995\)](#) de forma experimental, pelo grupo de [Lessen *et al.* \(1966\)](#) e também por [Sandham e Reynolds \(1991\)](#), estes dois últimos numa análise numérica. Todos evidenciaram o efeito estabilizante da compressibilidade na formação dos turbilhões. Pode-se então dizer que a compressibilidade influencia fortemente o processo de mistura diminuindo a transferência de quantidade de movimento, da região rica para região pobre em quantidade de movimento.

Tabela 4.1 - Variação da taxa de amplificação com o número de Mach.

α	$M = 0.4$	$M = 0.6$	percentual
0.4	0.2487	0.1975	21.0
0.5	0.2773	0.2162	22.0
0.6	0.2972	0.2278	23.4
0.7	0.3060	0.2299	24.9

A figura 4.1 mostra a relação entre número de onda e taxa de amplificação da perturbação. O escoamento foi submetido a três níveis diferentes de compressibilidade, $M = 0.4$, $M = 0.6$ e $M = 0.8$. As faixas de comprimentos de onda calculadas pelo código são diferentes para cada caso. No caso $M = 0.4$ o intervalo foi de $\alpha = 0.4$ a 1.2, para $M = 0.6$ de 0.4 a 1.0 e para $M = 0.8$ de 0.3 a 0.7. Para valores fora dessas faixas, qualquer que seja o nível de compressibilidade, o código calcula uma taxa de amplificação correspondente a um número de onda maior que o especificado, como já foi descrito na seção 3.4, devida ao uso de condições iniciais inadequadas.

Da figura 4.1 facilmente se observa o caráter estabilizador da compressibilidade. O caso $M = 0.4$ apresenta taxa de amplificação máxima em $\alpha = 0.8$. O aumento da compressibilidade para $M = 0.8$ faz com que a taxa de amplificação máxima passe a corresponder a $\alpha = 0.5$, que equivale a comprimentos de onda cada vez maiores.

Uma observação importante é que a redução na taxa de amplificação é maior quanto maior é o número de onda, em cada nível de compressibilidade. Para $\alpha = 0.4$ a redução na taxa de amplificação quando se aumenta o número de Mach de $M = 0.4$ para $M = 0.6$ é de 21%, já para $\alpha = 0.7$ a redução é de 24,9%. Fazendo a mesma análise de $M = 0.6$ para $M = 0.8$ o mesmo $\alpha = 0.4$ tem sua taxa de amplificação reduzida em 30% e $\alpha = 0.7$ a redução é de 45.1%. Disto conclui-se que o aumento na compressibilidade do escoamento reduz a taxa de amplificação das perturbações associadas com maiores números de onda e nem tanto com os menores. Pode-se dizer que a compressibilidade além de diminuir a taxa de amplificação dos vórtices, restringe também os números de onda que serão amplificados. As tabelas 4.1 e 4.2 mostram estas relações, a coluna percentual indica percentual de redução da taxa de amplificação, α representa os números de onda tomados como exemplo, com níveis de compressibilidade $M = 0.4$, $M = 0.6$ e $M = 0.8$ para um escoamento sem fonte de calor.

A figura 4.2 apresenta a evolução temporal da componente normal da velocidade da perturbação. Esta velocidade permite avaliar a difusão de quantidade de movimento na direção normal. Matematicamente é dada pela equação 4.1 como condição inicial:

Tabela 4.2 - Variação da taxa de amplificação com o número de Mach.

α	M = 0.6	M = 0.8	percentual
0.4	0.1975	0.1383	30.0
0.5	0.2162	0.1445	33.2
0.6	0.2278	0.1394	38.8
0.7	0.2299	0.1262	45.1

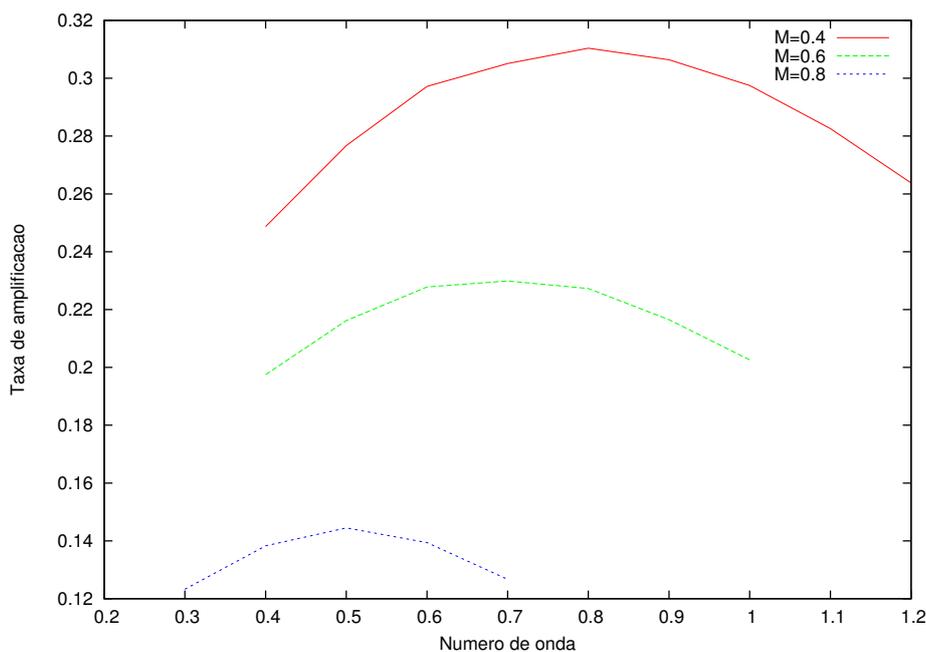


Figura 4.1 - Taxa de amplificação em escoamento compressível sem fonte de calor.

$$v(x, y) = e^{-i\sigma y^2} [(A_1 \sin(\alpha_1 x)) + (A_2 \sin(\alpha_2 x))] \quad (4.1)$$

onde A_1 e A_2 são as amplitudes de oscilação, α_1 é o número de onda, α_2 o sub-harmônico de α_1 , x a coordenada longitudinal e y a coordenada normal. A velocidade inicial normal ao escoamento é então uma superposição cossenoidal na direção longitudinal e uma gaussiana na direção normal. A figura 4.3 representa a distribuição espacial da equação 4.1.

As curvas $v_{max}(t)$ apresentadas na figura 4.2, em todos os níveis de compressibilidade apresentam uma região oscilatória, seguida de um crescimento exponencial e uma última região conhecida como região de saturação. As curvas iniciam-se com uma região de oscilação que corresponde ao tempo que o código necessita para corrigir a condição inicial, representada pela figura 3.7, que é aproximada. Depois desta região de oscilação,

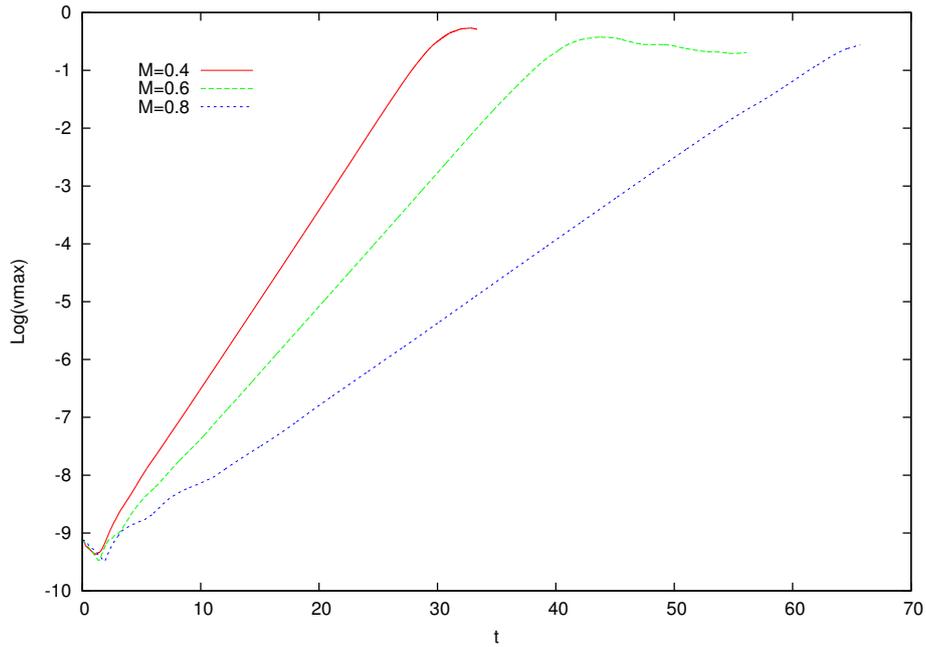


Figura 4.2 - Evolução da Perturbação para $M = 0.4, 0.6$ e 0.8 com $\alpha = 0.8, 0.7$ e 0.5 .

a curva apresenta uma região de crescimento exponencial que corresponde ao tempo de formação do vórtice. Esta região é caracterizada pela distribuição de velocidade normal v , dada pelas figuras 4.4, 4.5 e 4.6.

As figuras 4.4, 4.5 e 4.6 apresentam a distribuição de v para $M = 0.4$ com $\alpha = 0.8$ em $t = 10.21$; $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 11.84$ e $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 17.42$. Todas na região de crescimento exponencial, já após a região onde as condições iniciais foram filtradas. Essas distribuições correspondem às distribuições dos autovetores da solução do problema de instabilidade linear. Aumentando-se o número de Mach observa-se uma distribuição menos adensada na região cisalhante.

Estas figuras mostram a condição inicial mais adequada para a camada de mistura para os níveis de compressibilidade investigados neste trabalho quando não há fonte de calor na camada de mistura.

As figuras 4.8, 4.9 e 4.10 apresentam a distribuição espacial de velocidade, $v(y)$ para $M = 0.4, \alpha = 0.8$ nos pontos indicados pela figura 4.7. Esta figura representa um vórtice já estruturado. O desalinhamento do vórtice com relação ao sistema de coordenada ocorre devido a formação de dois pontos de máximo para a distribuição de velocidade, um residente no escoamento rápido para $y > 0$ e outro na camada lenta em $y < 0$, como mostram as figuras 4.4, 4.5 e 4.6. Na figura 4.8 os picos representam os máximos

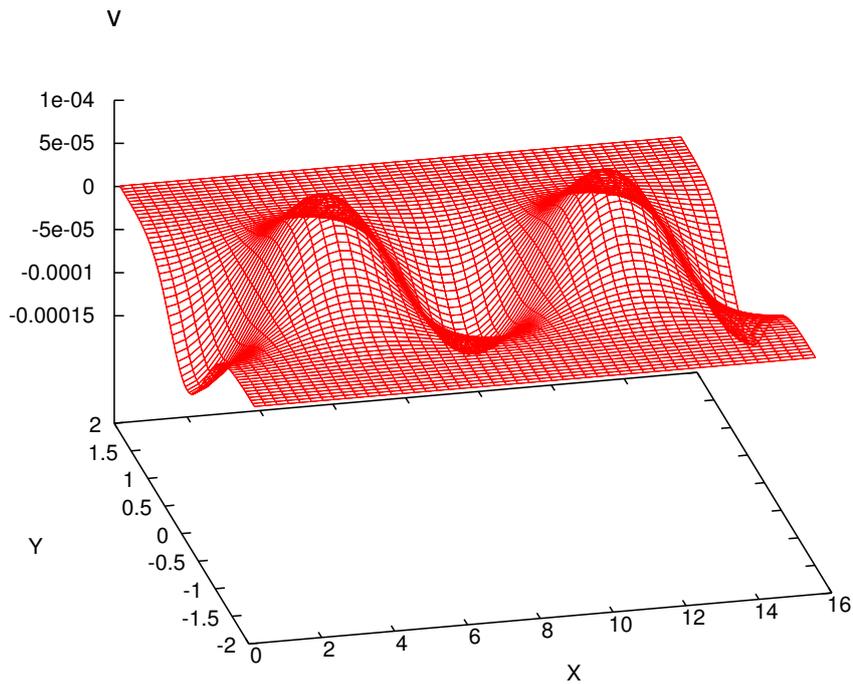


Figura 4.3 - Perfil inicial da perturbação na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.

da componente normal de velocidade de perturbação na direção normal. Este máximo está localizado no ponto b da figura 4.7 correspondente ao ponto $x = 7.5$ na figura 4.4.

A figura 4.9, apresenta a distribuição de velocidade, $v(y)$, no ponto a da figura 4.7 que representa o ponto $x = 3.0$ na figura 4.4. A figura 4.10 mostra a distribuição da velocidade normal no ponto c do vórtice, figura 4.7, correspondente ao ponto $x = 10.0$ na figura 4.4. Estas figuras permitem identificar a topologia do turbilhão de Kelvin-Helmholtz para escoamentos compressíveis. Vale a pena lembrar que a distribuição de velocidade, $v(y)$, permite ter uma idéia da distribuição de quantidade de movimento na direção normal. Como mostra as figuras 4.15 e 4.16 tem-se então dois pontos de máximo da distribuição de velocidade, um em cada região e em pontos x diferentes.

A última região das curvas da figura 4.2 é a região de saturação. Tomando a curva para $M = 0.6$ na figura 4.2, observa-se a partir de $t = 45.0$ uma região de velocidade levemente decrescente. A saturação é lenta e ocorre porque o escoamento considerado é bidimensional. Extendendo o código para um caso tridimensional no lugar da região de saturação observaria uma região de formação de estruturas de vorticidade tridimensional, portanto a saturação aparece devido ao fato da formulação ser bidimensional.

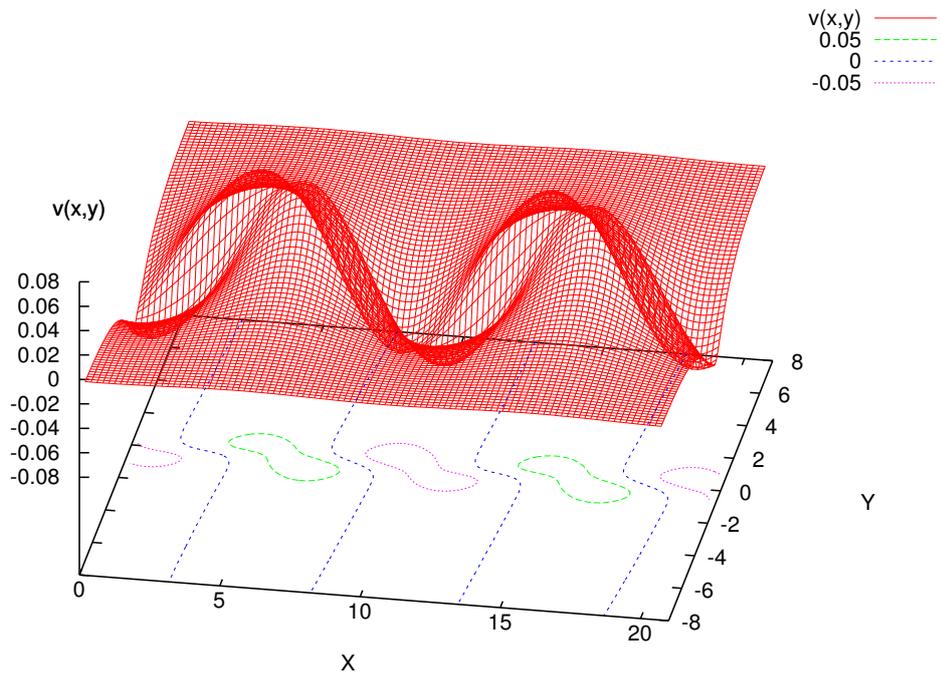


Figura 4.4 - Perfil da perturbação na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.6$ em $t = 23.98$.

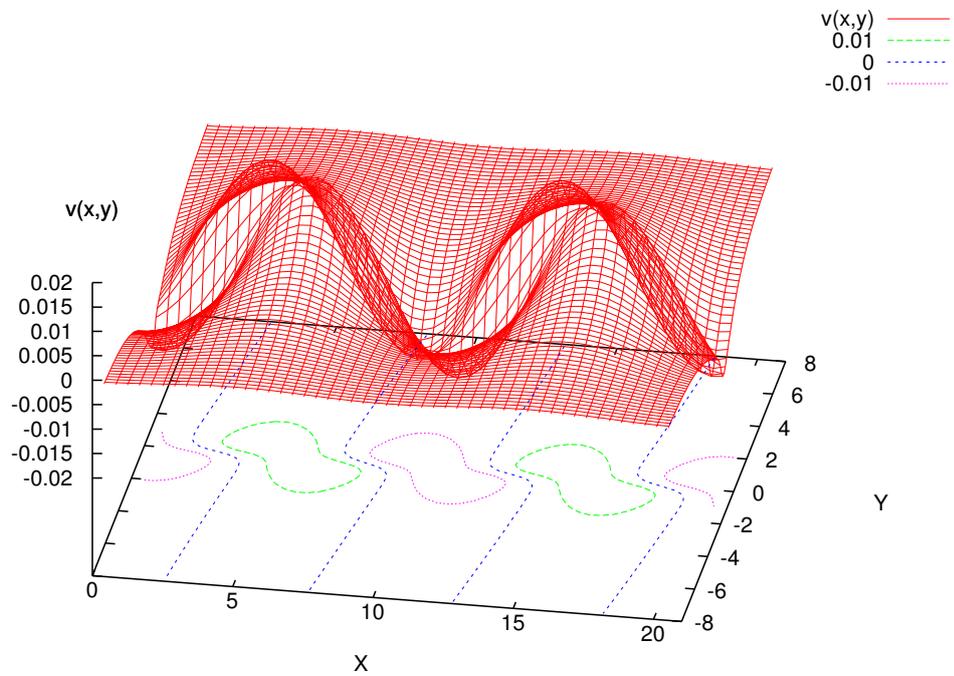


Figura 4.5 - Perfil da perturbação na camada de mistura para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.6$ em $t = 25.33$.

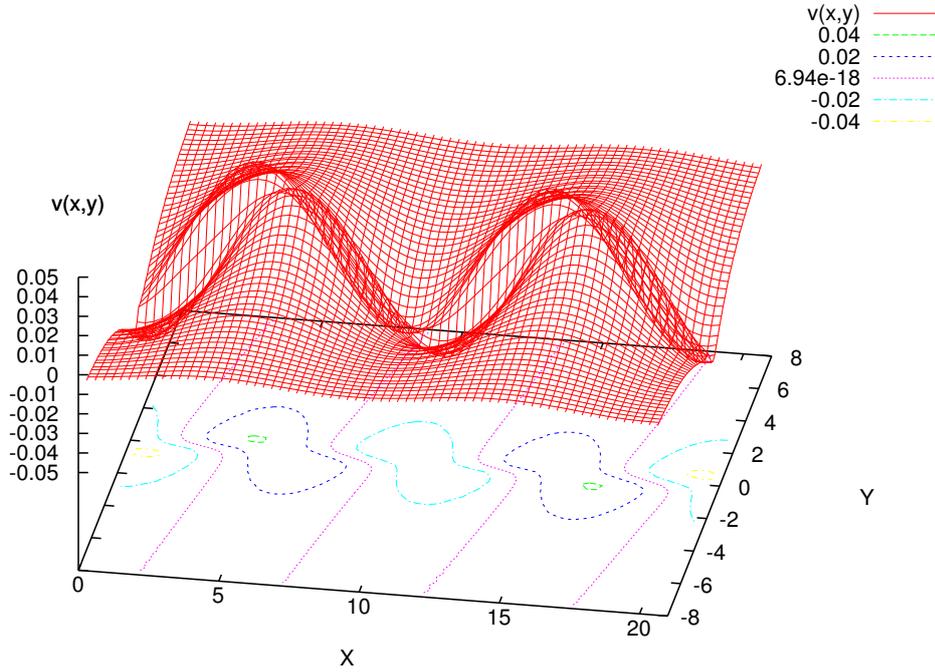


Figura 4.6 - Perfil da perturbação na camada de mistura para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 46.33$.

Caso tivéssemos optado por utilizar amplitudes iniciais maiores para o sub-harmônico, teríamos observado também que dois vórtices vizinhos se emparelhando nessa região de saturação.

As figuras 4.11, 4.12 e 4.13 apresentam linhas de iso-vorticidade correspondente ao caso $M = 0.4$. A figura 4.11 representa o final da região de crescimento exponencial no gráfico $v(t)$ em $t = 28.70$, enquanto a figura 4.12 corresponde ao início da região de saturação em $t = 31.80$ e a figura 4.13 representa o vórtice na região de saturação no gráfico $v(t)$ em $t = 33.44$. Das figuras 4.12 e 4.13 é válido observar que os ruídos presentes estão relacionadas a questão da condição de fronteira, que são inadequadas. Como já foi mencionado na seção 3.3, aumentando-se L_y ou usando condições de contorno não-reflexivas o problema é resolvido. Desta forma ruídos gerados na camada de mistura ao atingirem a fronteira não retornam para dentro do domínio.

Para o caso $M = 0.6$, $\alpha = 0.7$ os vórtices estão representados pelas figuras 4.14, 4.15 e 4.16 que correspondem, respectivamente, a $t = 35.27$, $t = 38.87$ e $t = 42.30$. Pode-se observar que os ruídos também estão presentes. Na região linear o vórtice está formado porém mais alongado que na mesma região para o caso $M = 0.4$. Este alongamento

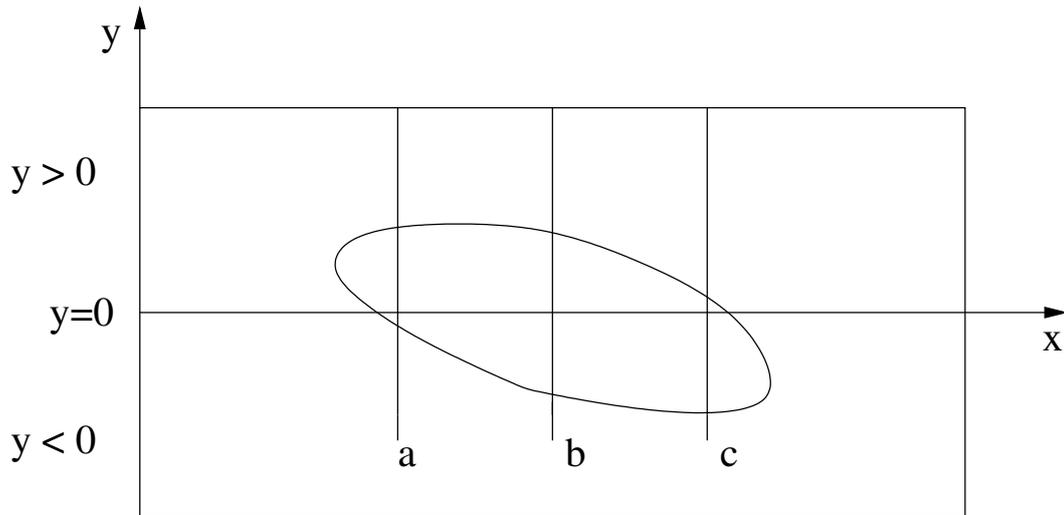


Figura 4.7 - Representação das principais regiões do vórtice.

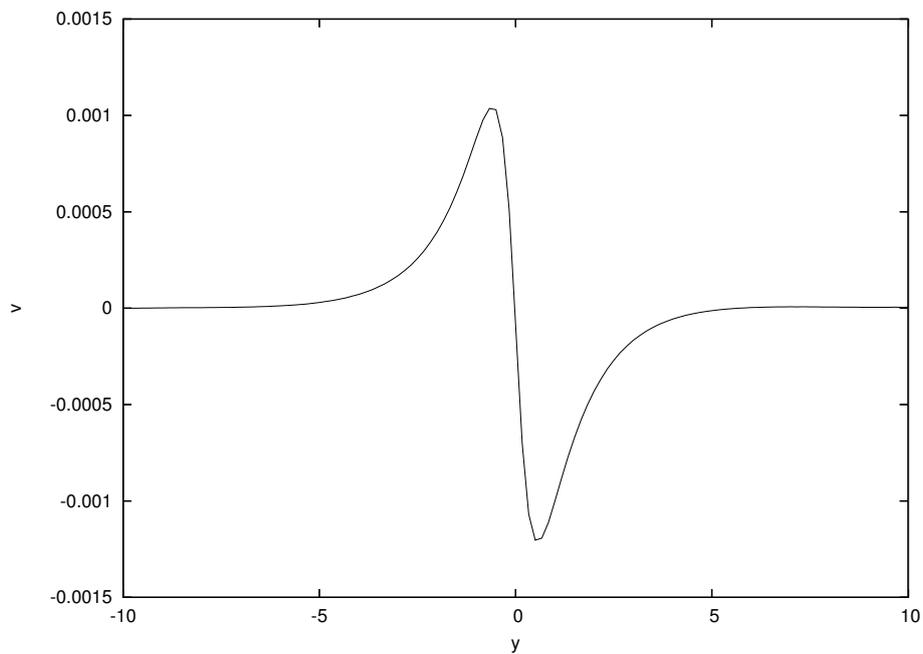


Figura 4.8 - Perfil $v(y)$ em b para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.

pode ser observado comparando-se a figura 4.15 com a figura 4.12.

No caso apresentado na figura 4.15 para $M = 0.6$ a região de ajuste da condição inicial foi maior que para o caso com $M = 0.4$. Haja vista que a única alteração na simulação para produção das figuras 4.15 e 4.12 é o número de Mach convectivo, então torna-se ele, M , o único responsável por esta variação.

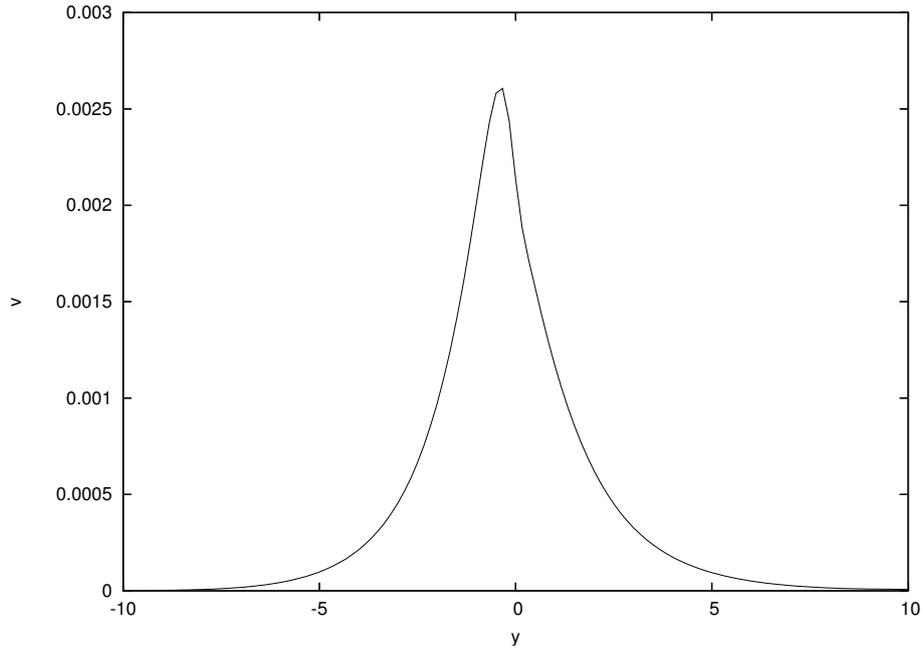


Figura 4.9 - Perfil $v(y)$; a para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.

Para o caso $M = 0.8$, $\alpha = 0.5$ os vórtices estão representados pelas figuras 4.17, 4.18 e 4.19, referentes a $t = 57.37$, $t = 62.48$ e $t = 65.71$, que correspondem a região final de crescimento exponencial, início da região de saturação e na própria região de saturação. Assim como para os outros casos, neste também a presença do ruído é evidente nas bordas da camada cisalhante e não no próprio vórtice como foi nos outros casos. É de se notar que o tempo para a formação dos vórtices é maior quanto maior é o nível de compressibilidade e que os vórtices resultantes são mais alongados.

4.2 Camada Cisalhante compressível com fonte de calor

Nesta seção serão apresentadas características do efeito da fonte de calor na instabilidade da camada cisalhante e na formação dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz. A camada cisalhante com fonte de calor é utilizada como modelo simplificado de uma camada cisalhante com reação química.

4.2.1 Natureza da Fonte de Calor

Na camada de mistura encontra-se uma fonte de calor como mostra a figura 4.22. A fonte de calor, assim como as perturbações iniciais, obedece uma função gaussiana cujo ponto de máximo coincide com a interface da camada de mistura. A equação 4.2 é a forma matemática de apresentar a distribuição de calor. No presente trabalho o escoamento foi submetido a 4 níveis diferentes de geração de calor para cada nível de

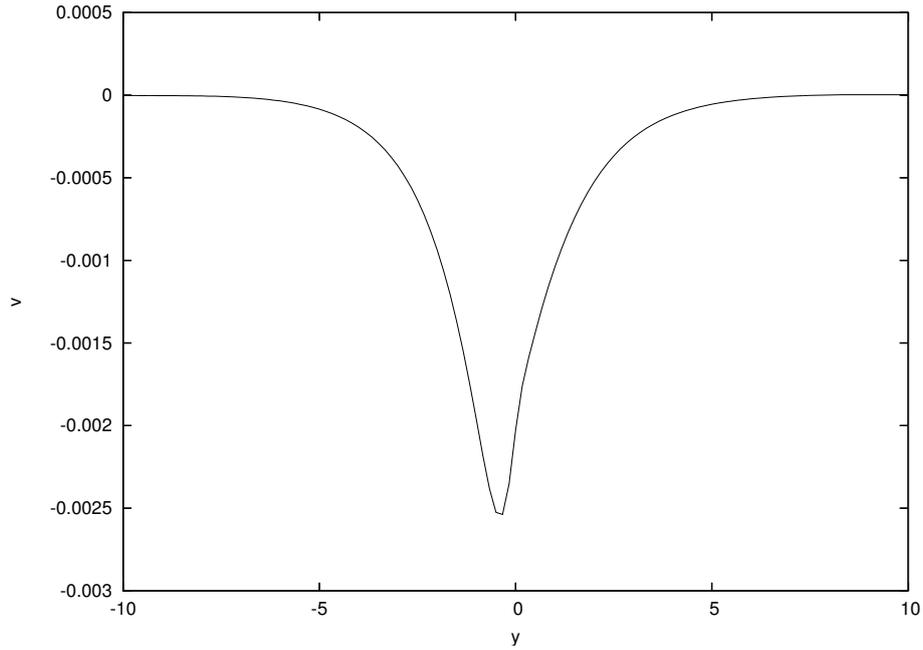


Figura 4.10 - Perfil $v(y)$ c para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.

Tabela 4.3 - Amplitude máxima da fonte de calor.

$c_1 = 3,0 \cdot 10^{-3}$	$c_2 = 5,0 \cdot 10^{-3}$	$c_3 = 7,0 \cdot 10^{-3}$	$c_4 = 9,0 \cdot 10^{-3}$
---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------

compressibilidade.

A fonte de calor é introduzida no sistema através da soma do termo de calor na equação da energia. Sendo c a amplitude máxima da fonte de calor, σ a abertura da gaussiana, y a coordenada normal ao escoamento.

$$Q(y) = c e^{-\sigma y^2} \quad (4.2)$$

4.2.2 Efeito de Compressibilidade e Calor

A figura 4.23 apresenta a relação entre a taxa de amplificação e os números de onda usados na simulação para $M = 0.4$. No presente caso, o escoamento foi submetido aos níveis de geração de calor com os máximos valores assinalados na tabela 4.3. Os resultados mostram que a taxa de amplificação da perturbação diminui com o aumento da fonte de calor. A primeira curva acima representa a evolução da perturbação sem calor adicionado ao sistema. As demais abaixo são para os níveis de calor com máximos c_1 , c_2 , c_3 e c_4 respectivamente. A redução na taxa de amplificação das perturbações

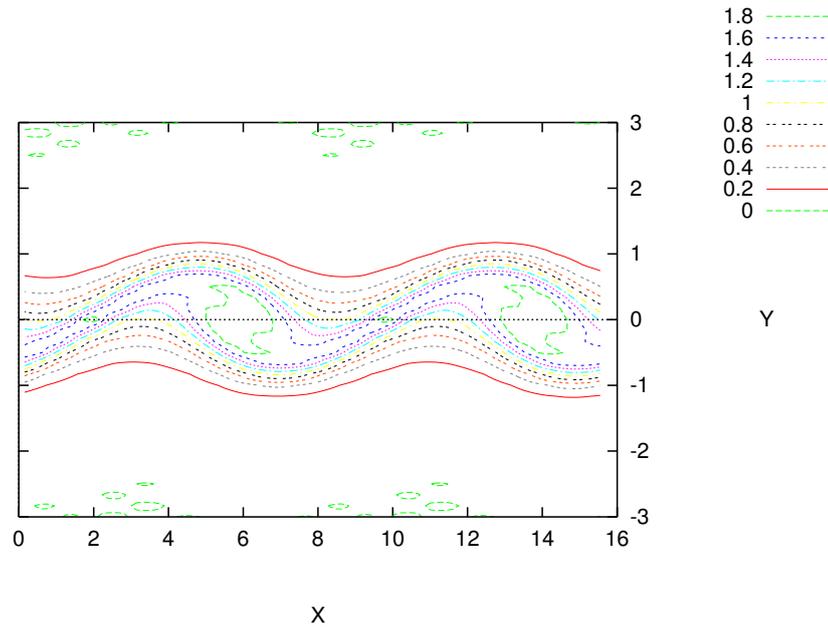


Figura 4.11 - Iso-linhas de vorticidade na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ para $t = 28.70$.

apresenta-se independente de α , ou seja, ocorre para todos de forma semelhante, não alterando o número de onda que corresponde à máxima taxa de amplificação. A fonte de calor inibi a formação dos vórtices, estabilizando o escoamento, comportamento que é semelhante ao da compressibilidade.

A figura 4.24 apresenta a evolução temporal da componente normal da perturbação, $v_{max}(t)$, para os casos de $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ para todos os níveis de geração de calor usados no trabalho. O gráfico mostra que inicialmente, $t = 0$, o calor alterou a magnitude de $v_{max}(t)$, pois sem calor a velocidade decaiu para aumentar e com calor ela aumentou para depois decrescer. Após a correção na condição inicial tem-se a região de crescimento exponencial. Nesta região é onde o vórtice forma-se. Nota-se que as curvas para diferentes níveis de geração de calor se cruzam em $t \approx 15$ indicando que as mesmas tem inclinação e portanto taxa de amplificação diferentes. A saturação do vórtice ocorre muito próxima para todos os casos mostrando a independência do tempo de saturação com o parâmetro c , pelo menos para os níveis de geração de calor utilizados neste trabalho.

A distribuição espacial da componente normal da velocidade da perturbação na região

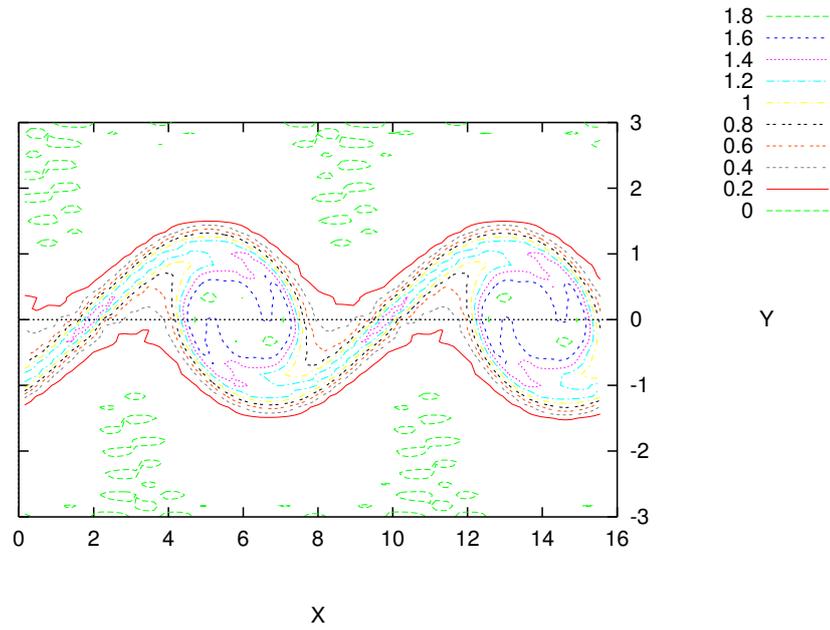


Figura 4.12 - Iso-linhas de vorticidade na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ para $t = 31.80$.

de crescimento exponencial da figura 4.24 está representada nas figuras 4.25, 4.26, 4.27 e 4.28. Estas figuras representam a distribuição $v(x, y)$, respectivamente para c_1 , c_2 , c_3 e c_4 .

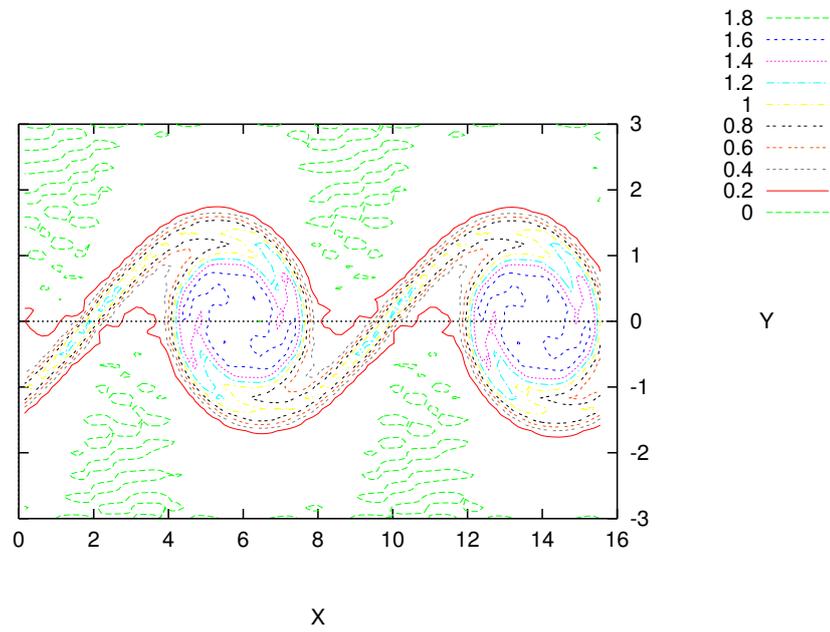


Figura 4.13 - Iso-linhas de vorticidade na camada de mistura para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ para $t = 33.44$.

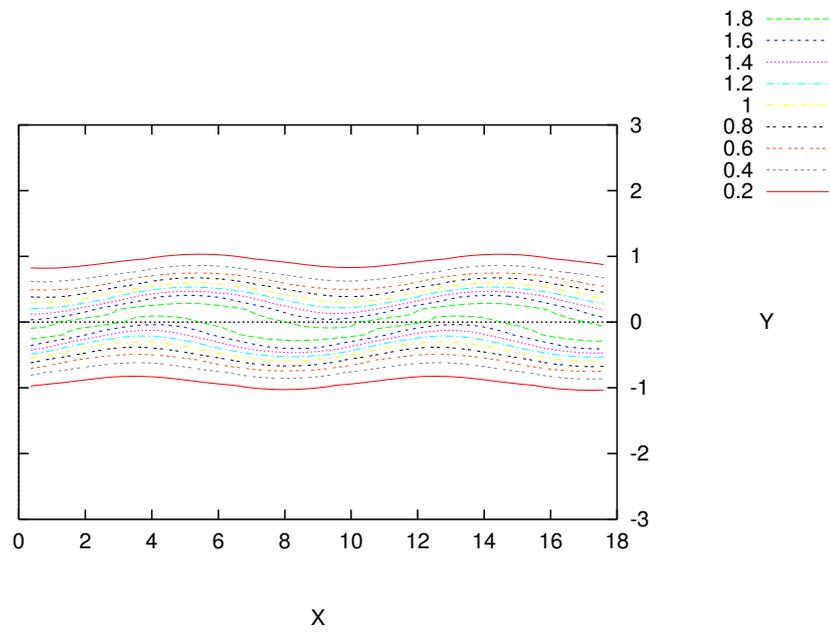


Figura 4.14 - Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 35.27$.

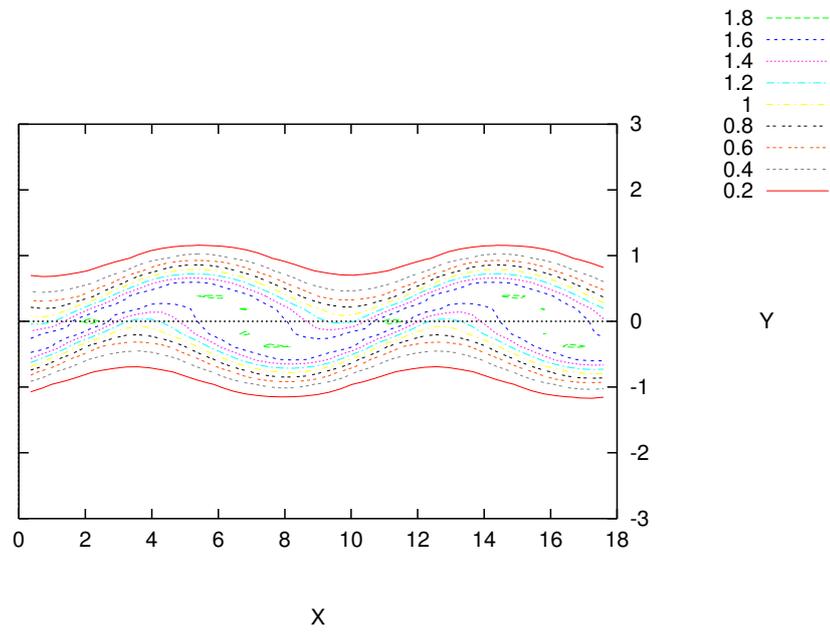


Figura 4.15 - Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.87$.

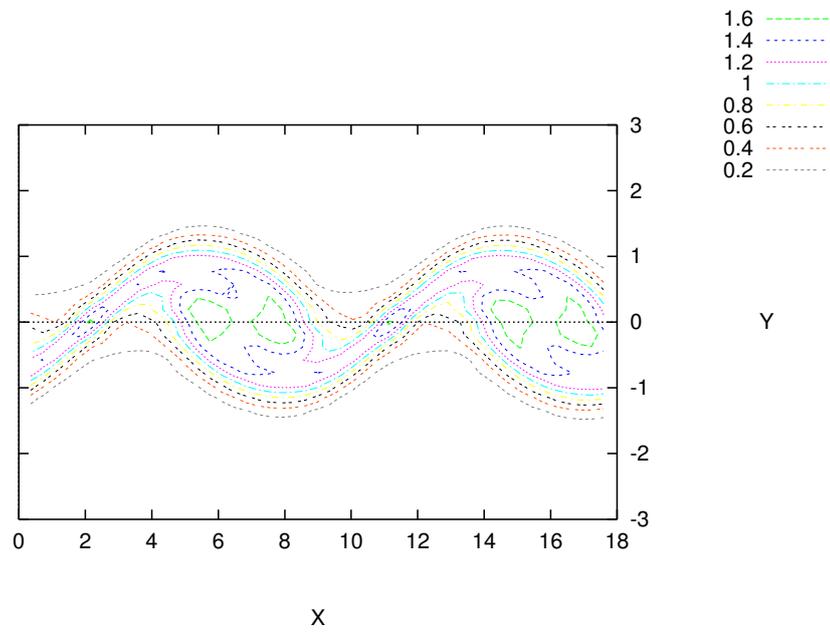


Figura 4.16 - Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 42.30$.

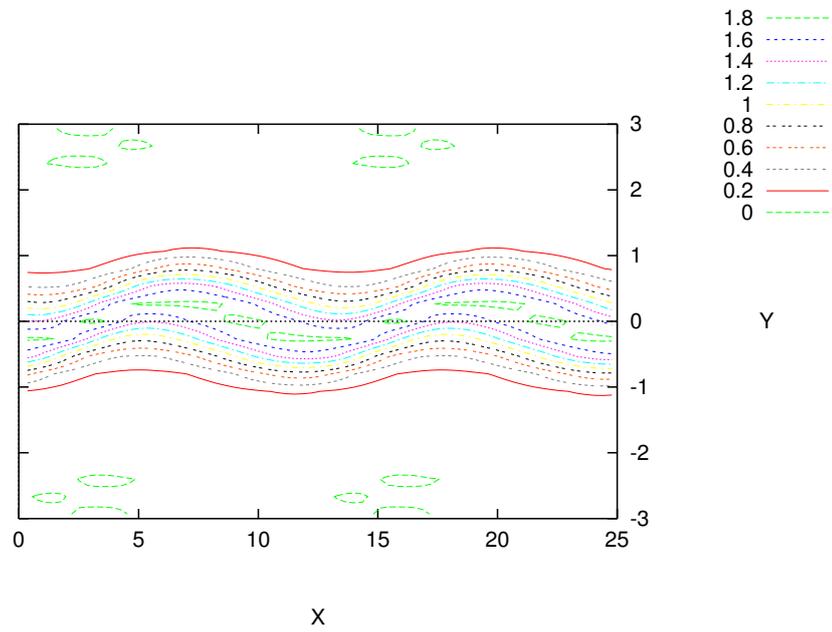


Figura 4.17 - Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 57.37$.

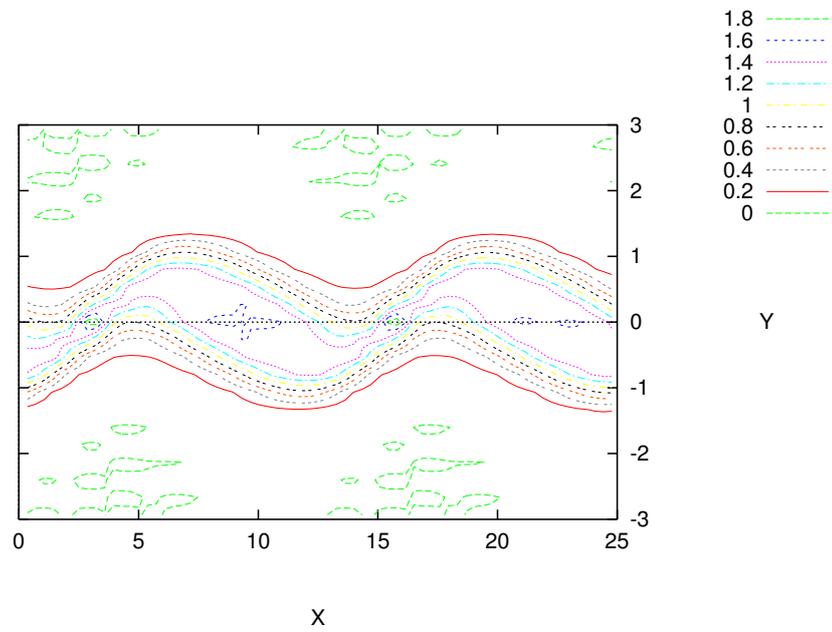


Figura 4.18 - Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 62.48$

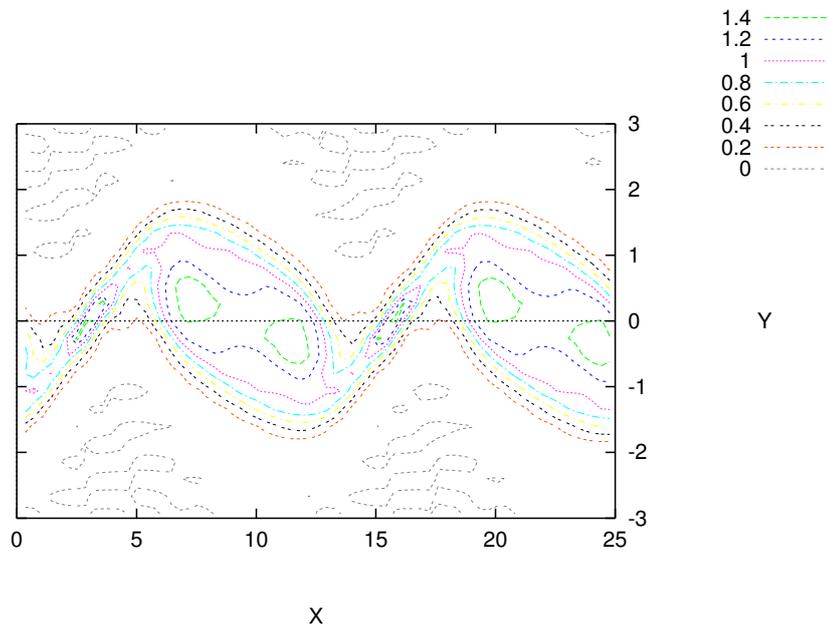


Figura 4.19 - Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ em $t = 65.71$

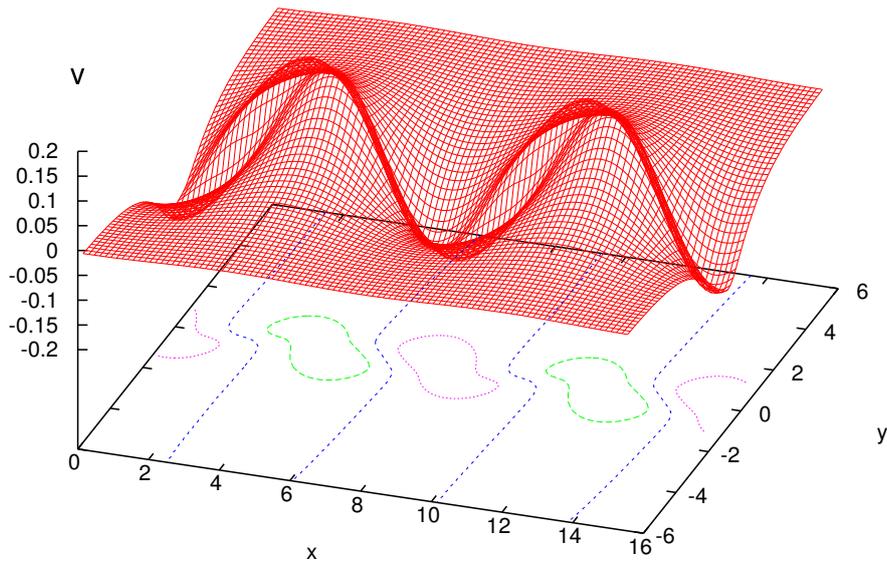


Figura 4.20 - Distribuição $v(x,y)$ para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.

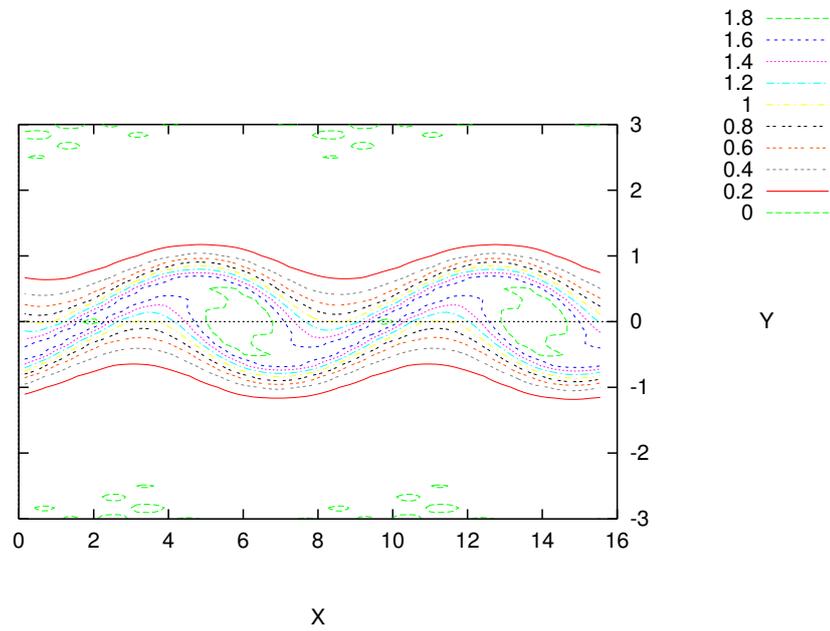


Figura 4.21 - Iso-linhas de vorticidade para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$.

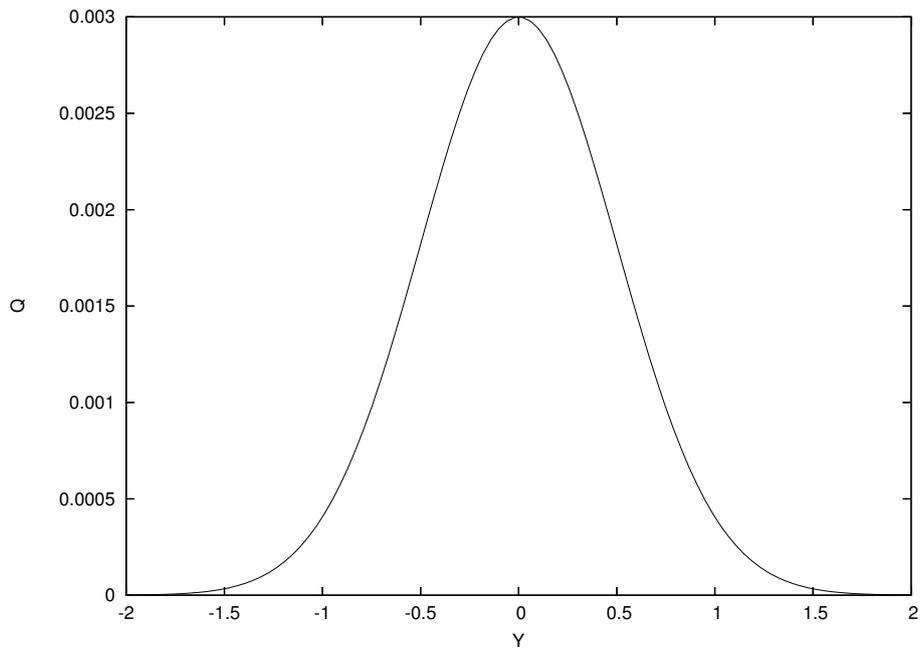


Figura 4.22 - Distribuição de calor $Q(y)$ para c_1 .

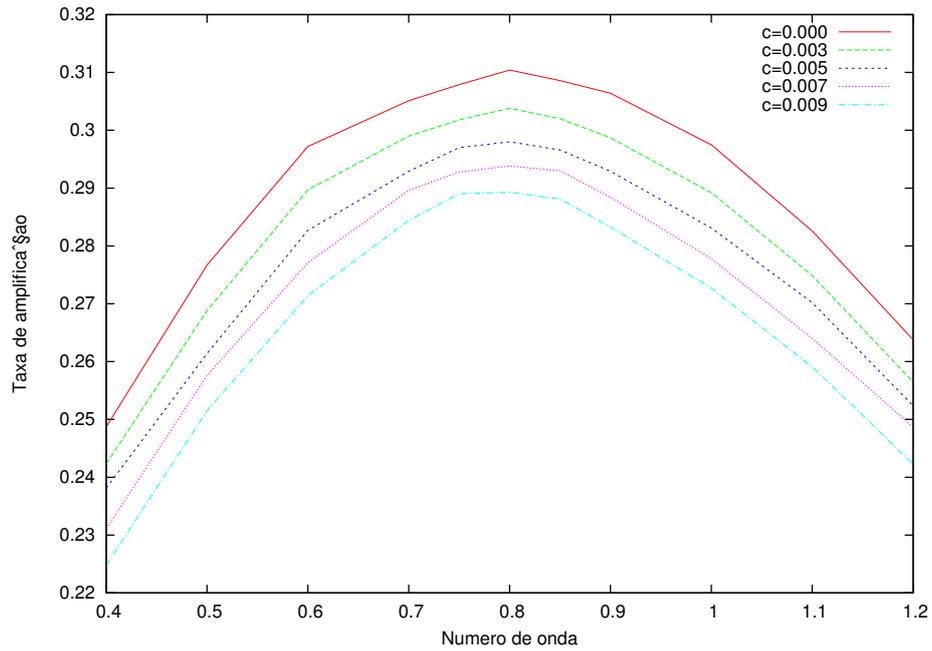


Figura 4.23 - Taxa de amplificação para $M = 0.4$ em camada cisalhante com fonte de calor.

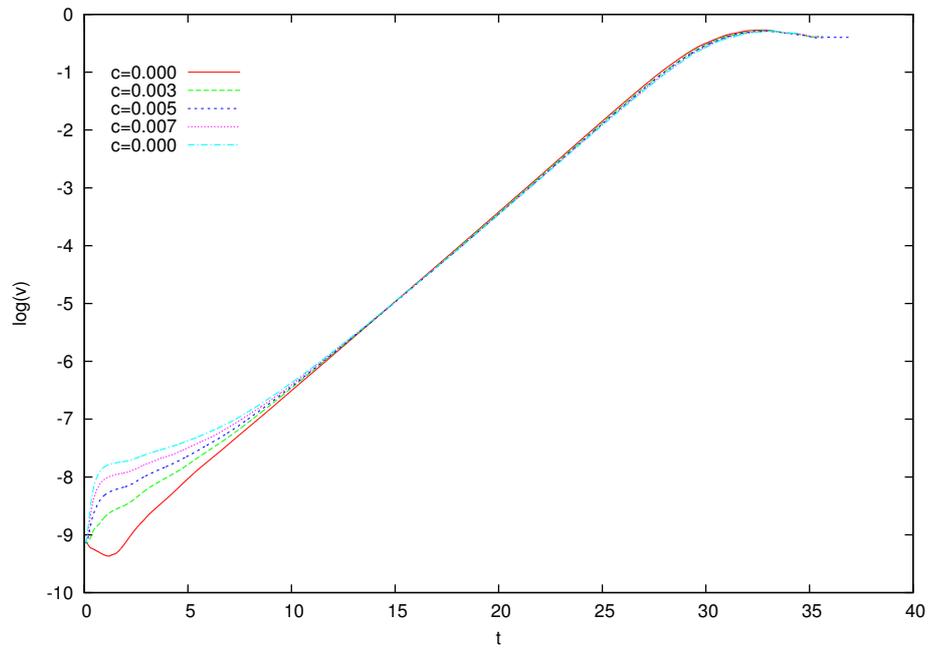


Figura 4.24 - Evolução da perturbação para $M = 0.4$ e $\alpha = 0.8$ em diferentes níveis de calor.

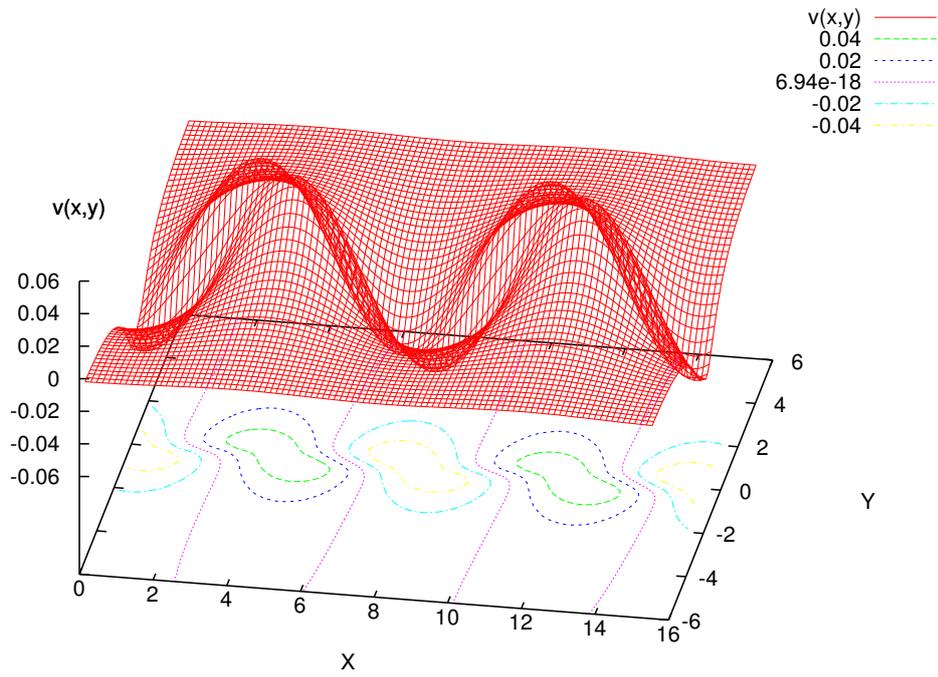


Figura 4.25 - $v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $c = 0.003$ e $t = 23.68$.

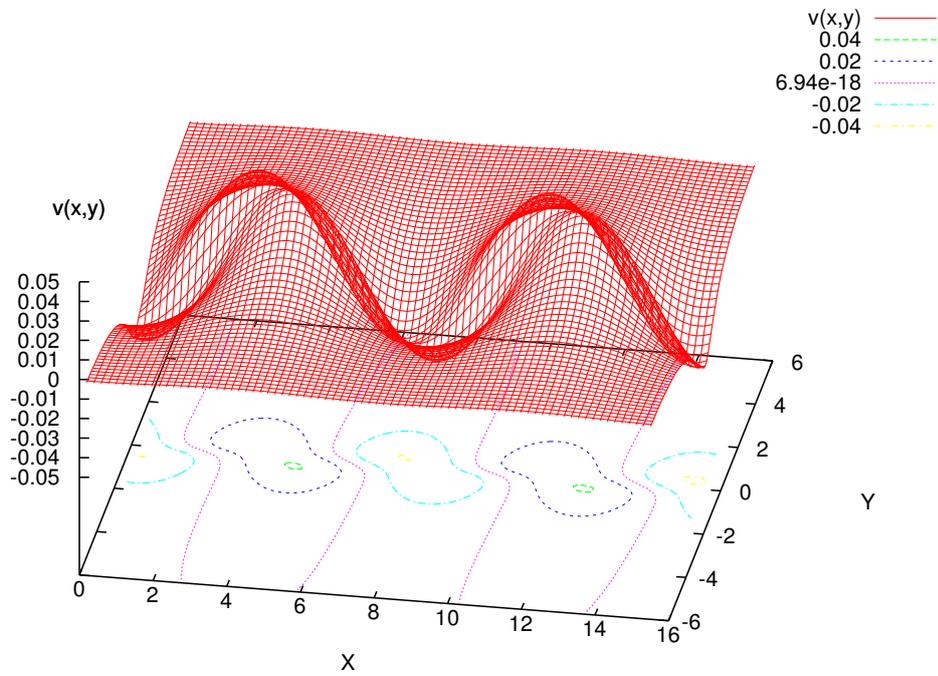


Figura 4.26 - $v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $c = 0.005$ e $t = 22.74$.

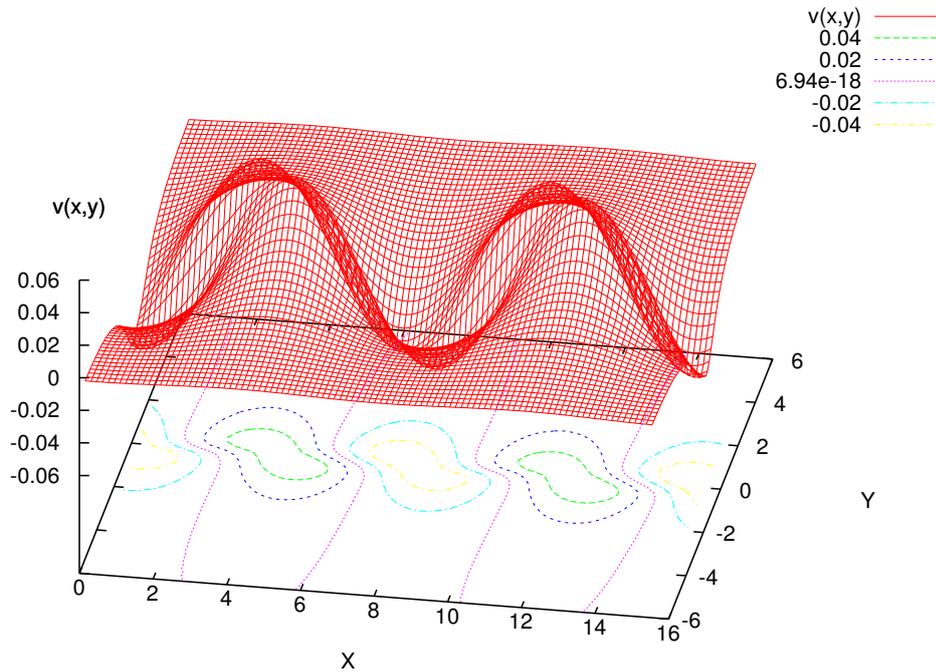


Figura 4.27 - $v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $c = 0.007$ e $t = 23.58$.

As figuras 4.29, 4.30, 4.31 e 4.32 mostram as linhas de vorticidade na região de $v_{max}(t)$ ligeiramente antes da saturação, em $t \approx 28.0$ tempos adimensionais. Comparando com a figura 4.12 vê-se que a camada de vorticidade apresenta espessura semelhante, portanto o calor não alterou significativamente a espessura da perturbação, para os níveis de calor trabalhados.

Para o caso $M = 0.6$ a geração de calor promoveu, um amortecimento na perturbação assim como no caso $M = 0.4$. A figura 4.33 apresenta a relação entre taxa de amplificação e o número de onda para a faixa de número de onda de cada caso. As curvas mostram que, para os valores usados no trabalho, a fonte de calor não alteram o número de onda que mais se amplifica. A figura 4.34 mostra que os níveis de geração de calor promovem uma maior redução na evolução da perturbação para $M = 0.6$ que para $M = 0.4$.

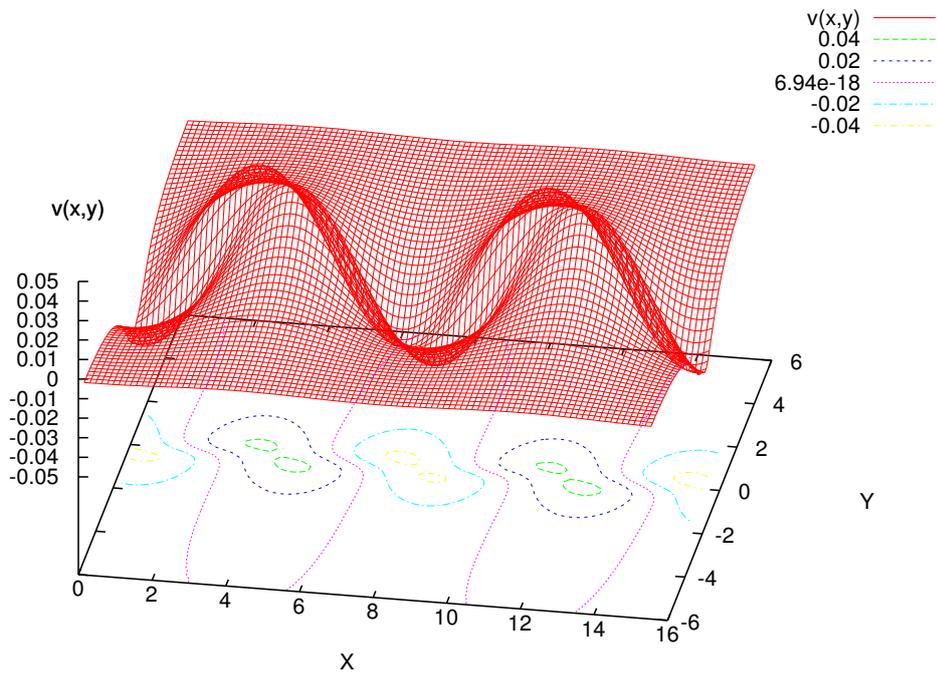


Figura 4.28 - $v(x,y)$ para $M = 0.4$, $\alpha = 0.8$, $c = 0.009$ e $t = 22.88$.

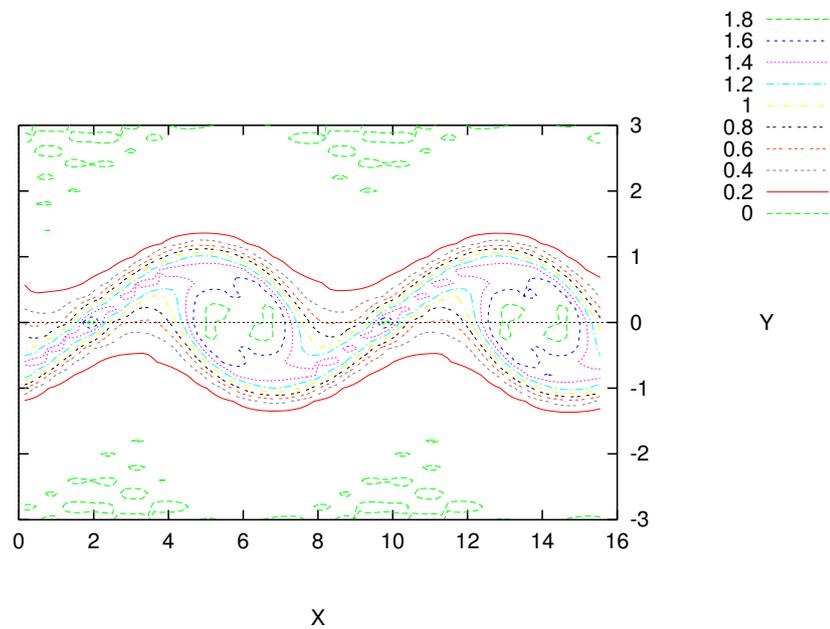


Figura 4.29 - Iso-linhas vorticidade para $M = 0.4$; fonte de calor c_1 em $t = 28.0$.

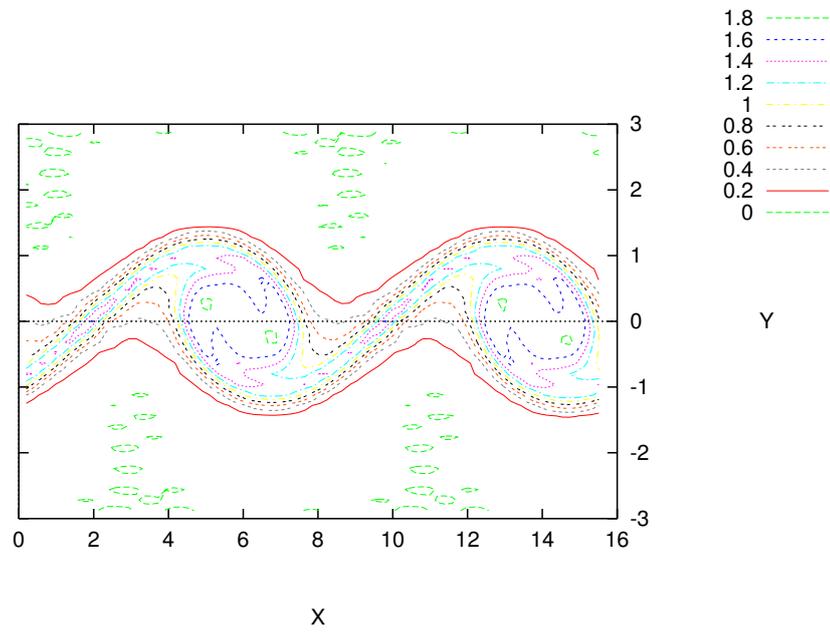


Figura 4.30 - Iso-linhas vorticidade para $M = 0.4$; fonte de calor c_2 e $t = 28.0$.

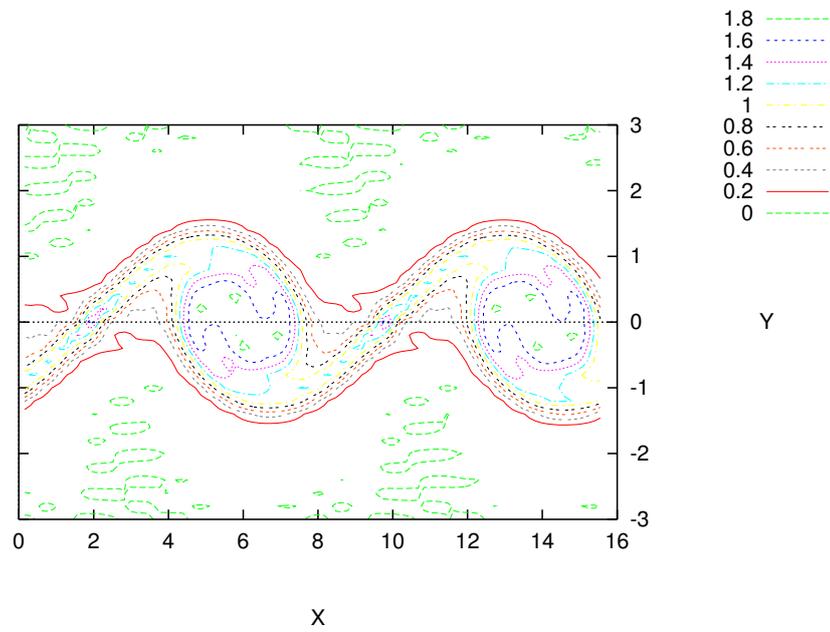


Figura 4.31 - Iso-linhas vorticidade para $M = 0.4$; fonte de calor c_3 e $t = 28.0$.

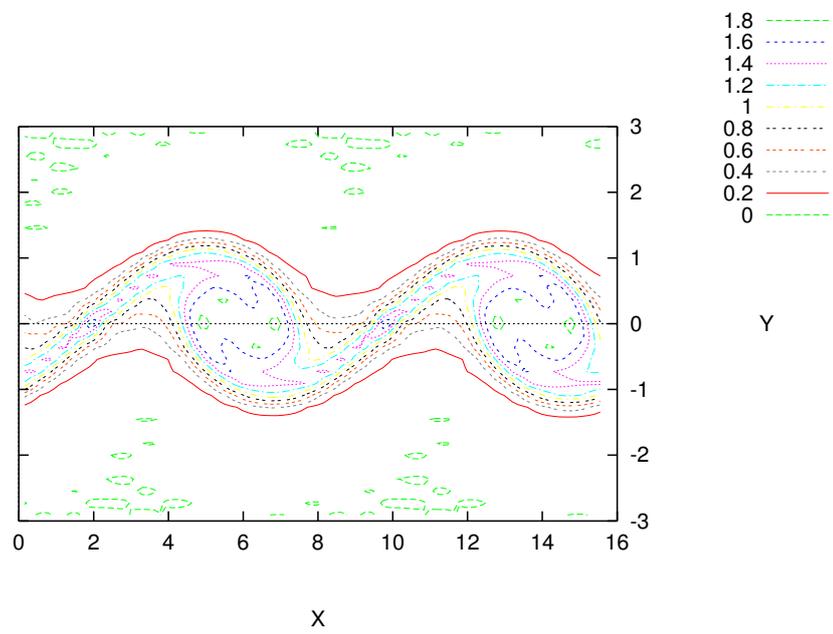


Figura 4.32 - Iso-linhas vorticidade para $M = 0.4$; fonte de calor c_4 e $t = 28.0$.

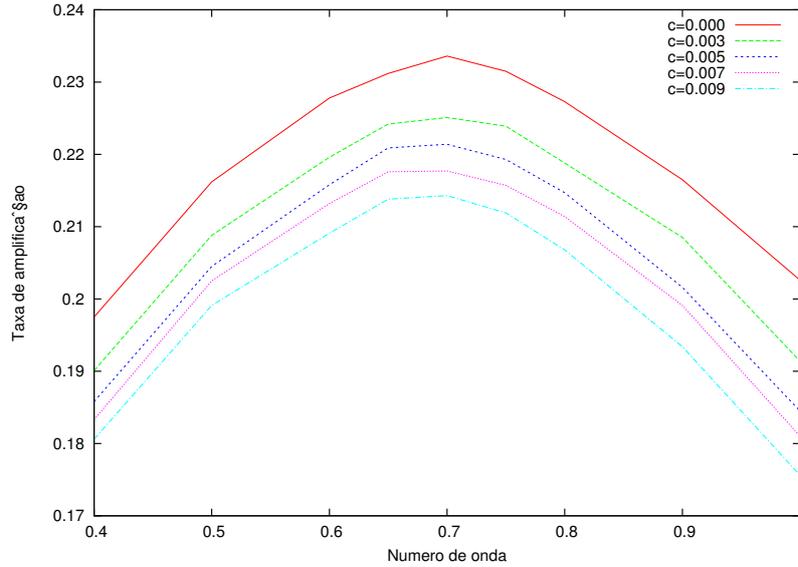


Figura 4.33 - Taxa de amplificação para $M = 0.6$.

A figura 4.34 apresenta a evolução temporal do valor máximo da componente normal da perturbação, $v(t)$, para os casos de $M = 0.6$ $\alpha = 0.7$ para todos os níveis de geração de calor usados no trabalho. A curva que começa inicialmente diminuindo representa o caso sem calor enquanto as demais são para o caso com geração de calor. O gráfico mostra que inicialmente, o calor alterou a magnitude de $v_{max}(t)$, sem calor a velocidade decaí para aumentar e com calor ela aumentou para depois decrescer. A geração de calor alterou significativamente o tempo de correção da condição inicial que, para escoamento sem geração de calor foi de 10 tempos adimensionais enquanto que para o caso com geração de calor ficou em torno de 15 tempos adimensionais. Após $t = 15$ as curvas entram na região exponencial. Em torno de $t = 22.0$ as curvas cruzam-se com aquela do escoamento sem fonte de calor. Nesta região é onde o vórtice forma-se. Após o ponto de cruzamento apresenta-se uma região um pouco mais espessa mostrando a tendência das curvas em se distanciarem da mesma sem fonte de calor. Neste caso a influência da fonte é um pouco mais evidente que para $M = 0.4$ mostrando que escoamento mais compressíveis são mais sensíveis a fontes de calor no sistema. A saturação do vórtice ocorre muito próxima para todos os casos assim como ocorrido para $M = 0.4$ devido a independência do ponto de saturação com o valor de c usados neste trabalho.

As figuras 4.35 a 4.38 apresentam as linhas de iso-vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$, todas no tempo adimensional de aproximadamente $t \approx 38.5$. Os níveis de calor vão de c_1 a c_4 na seqüência. Este tempo adimensional corresponde ao final da região de crescimento exponencial das perturbações.

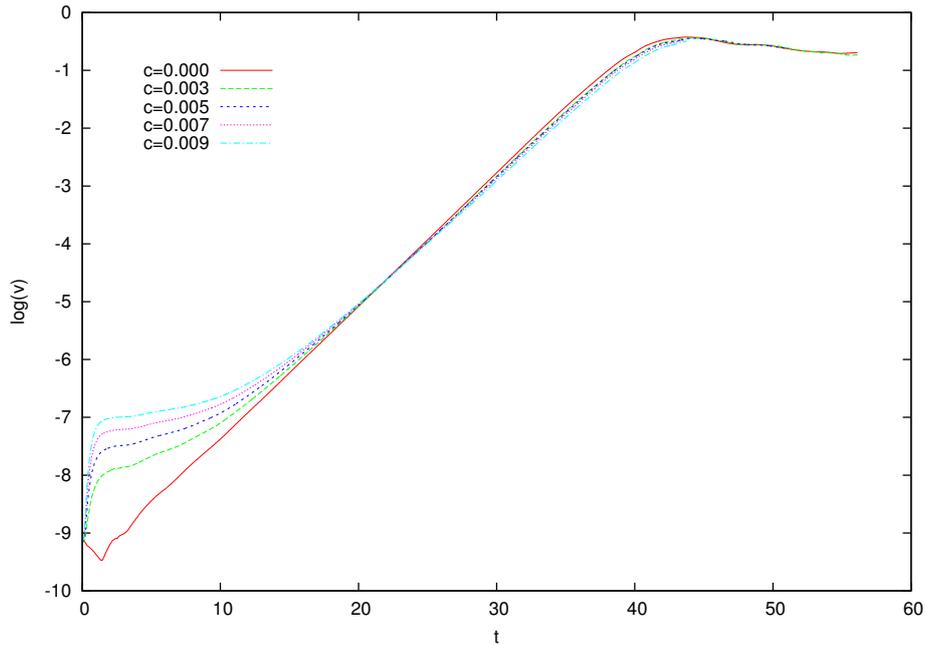


Figura 4.34 - Evolução da perturbação para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$.

A figura 4.39 apresenta a relação entre taxa de amplificação e o número de onda para a faixa de número de onda calculada pelo código, para $M = 0.8$. Para este caso a geração de calor promoveu, um amortecimento na perturbação assim como no caso $M = 0.4$ e $M = 0.6$. Como mostra a figura 4.39 este nível de compressibilidade é bem mais sensível aos efeitos da geração de calor que os outros níveis de compressibilidade. Dela observa-se que as ondas associadas com os números de onda a partir de $\alpha = 0.4$ decaem mais rapidamente quanto maior é a potência da fonte de calor, de forma que o α que gera a máxima taxa de amplificação altera-se a partir de c_4 . Isto pode ser observado comparando os pontos extremos de cada curva.

A figura 4.40 apresenta a evolução temporal do valor máximo da componente normal da perturbação, $v_{max}(t)$, para os casos de $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$ para todos os níveis de geração de calor usados no trabalho. A curva que começa inicialmente diminuindo representa o caso sem calor enquanto as demais são para o caso com geração de calor. O gráfico mostra que inicialmente, o calor alterou a distribuição inicial de $v_{max}(t)$, que corresponderia à solução do problema de estabilidade linear, pois sem calor a velocidade decaiu para aumentar e com calor ela aumentou para depois decrescer, como observado nos casos anteriores. A geração de calor alterou significativamente o tempo de correção da condição inicial com relação ao caso sem calor. A região de crescimento exponencial iniciou-se em $t \approx 15.0$ para o caso sem fonte de calor. Já para todos os casos com fonte de calor iniciou-se em $t \approx 25.0$ tempos adimensionais. Nota-se que as curvas tem taxa

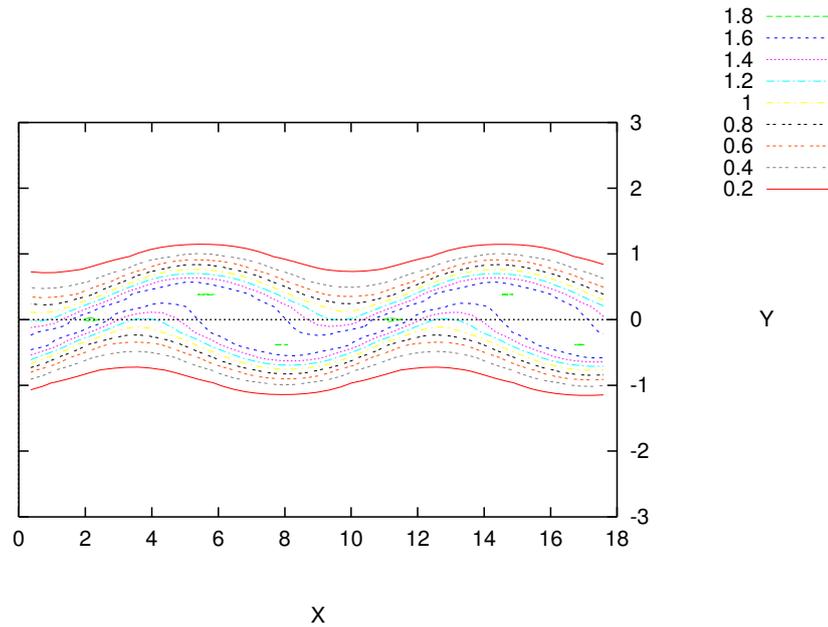


Figura 4.35 - Iso-linhas vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.92$ para c_1 .

de amplificação diferentes para cada nível de geração da calor, cruzando-se em $t \approx 32.0$ tempos adimensionais, indicando que as mesmas tem inclinações diferentes. Neste caso a influência da fonte é mais evidente que para $M = 0.4$ e $M = 0.6$ mostrando que escoamento mais compressíveis são mais sensíveis à fonte de calor. A saturação do vórtice ocorre para todos os casos em pontos diferentes.

A figura 4.41 apresenta a distribuição de velocidade no tempo $t = 50.33$ para $c = 0.003$, a figura 4.42 mostra a mesma propriedade para $c = 0.005$ para no tempo $t = 54.04$. A figura 4.43 apresenta a propriedade para o caso $c = 0.007$ com $t = 57.30$ e 4.44 é a distribuição de velocidade para $c = 0.009$ na tempo $t = 58.34$. Os gráficos mostram que aumentar o nível de geração de calor diminui a taxa de amplificação. Isto pode ser observado comparando o tempo para que cada configuração leva para atingir o nível de velocidade da ordem de 10^{-2} . Este tempo é maior quanto maior é a potência da fonte de calor.

A projeção em cada gráfico mostra que o máximo de velocidade está deslocado da linha de centro da camada cisalhante. Observando a projeção no plano xy pode-se concluir que os máximos de difusão de quantidade de movimento não estão alinhados em um

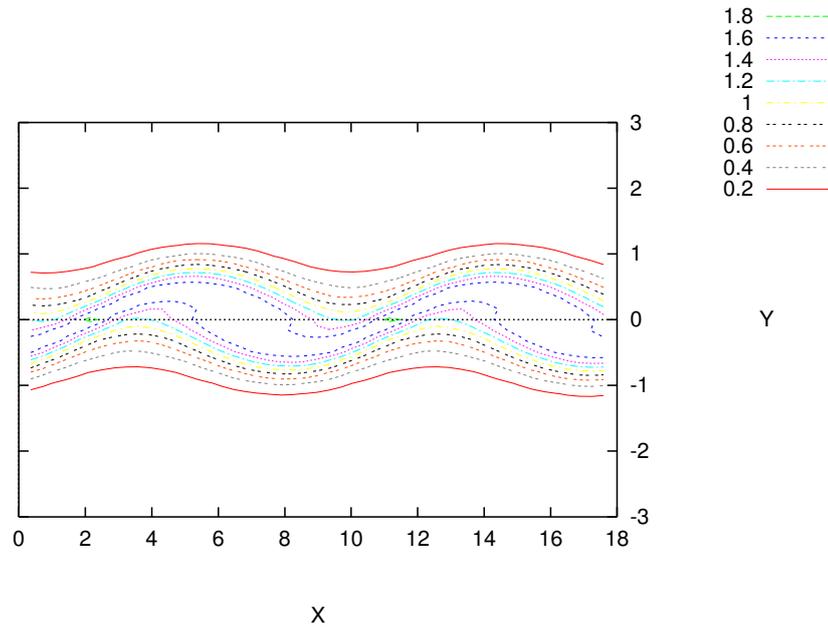


Figura 4.36 - Iso-linhas vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.77$ para c_2 .

único x mas sim em pontos diferentes na direção longitudinal. Isso possivelmente indica a tendência à formação dos modos externos observados por [Jackson e Grosch \(1989\)](#), [Jackson e Grosch \(1990\)](#), [Planché \(1993\)](#).

Comparando os três resultados podemos observar que a adição de calor na camada de mistura retarda o processo de amplificação das perturbações para qualquer nível de compressibilidade, porém quanto maior a compressibilidade do escoamento maior é o efeito estabilizador da calor. Estas características da adição de calor ao sistema mostram que tanto o calor transferido como o aumento da compressibilidade do escoamento não favorecem o processo de transição para regimes de escoamento turbulento já que ambos atuam como agentes estabilizadores no sistema.

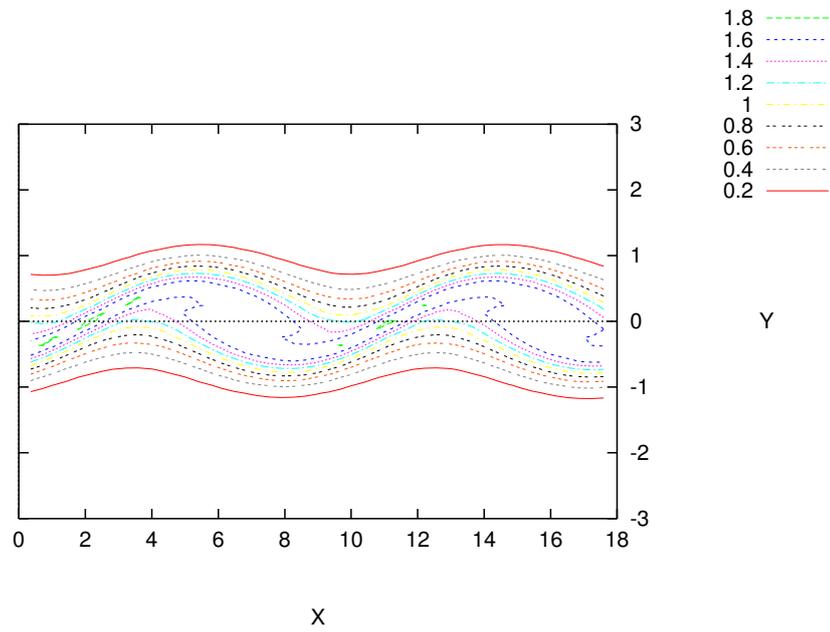


Figura 4.37 - Iso-linhas vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.54$ para c_3 .

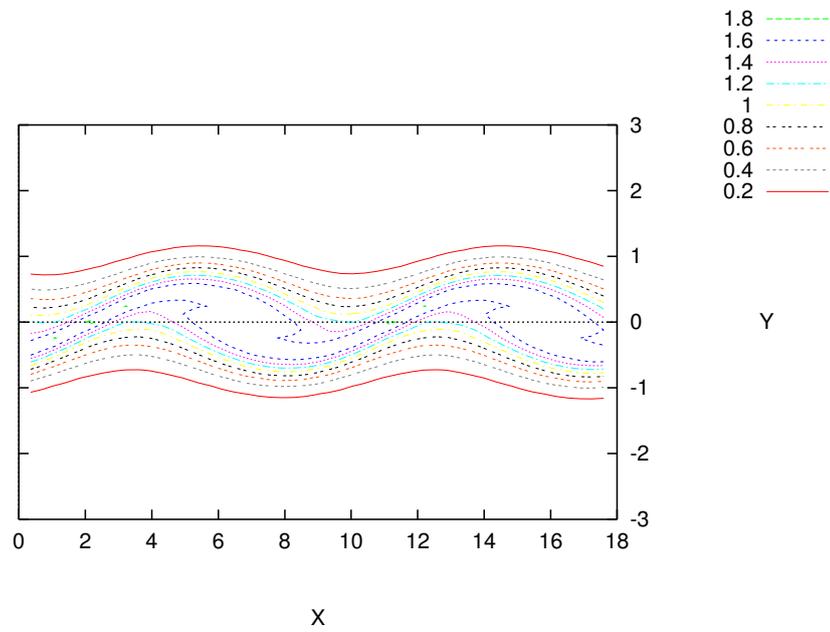


Figura 4.38 - Iso-linhas vorticidade para $M = 0.6$ e $\alpha = 0.7$ em $t = 38.56$ para c_4 .

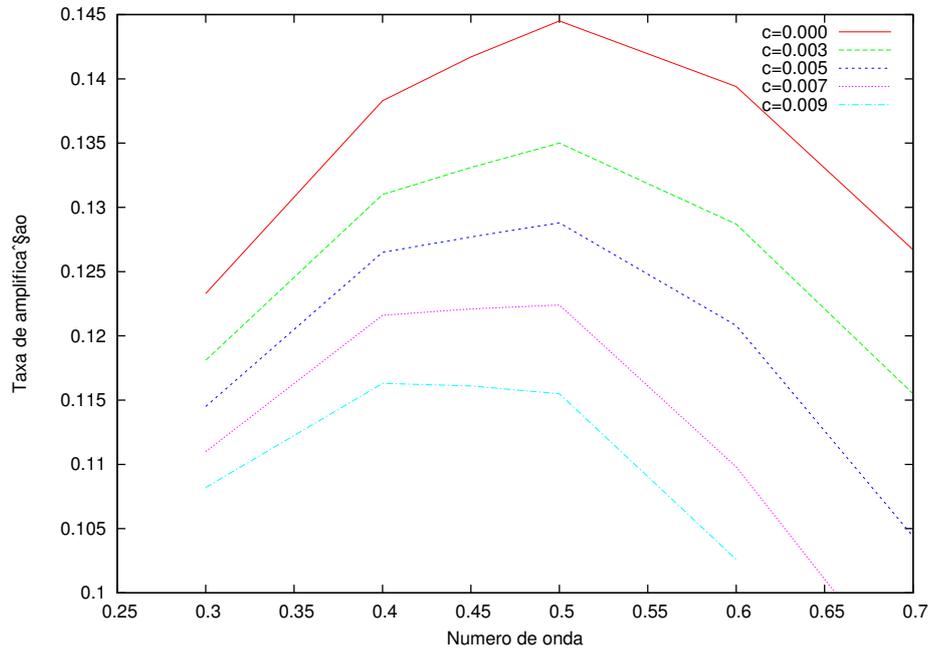


Figura 4.39 - Taxa de Amplificação para $M = 0.8$.

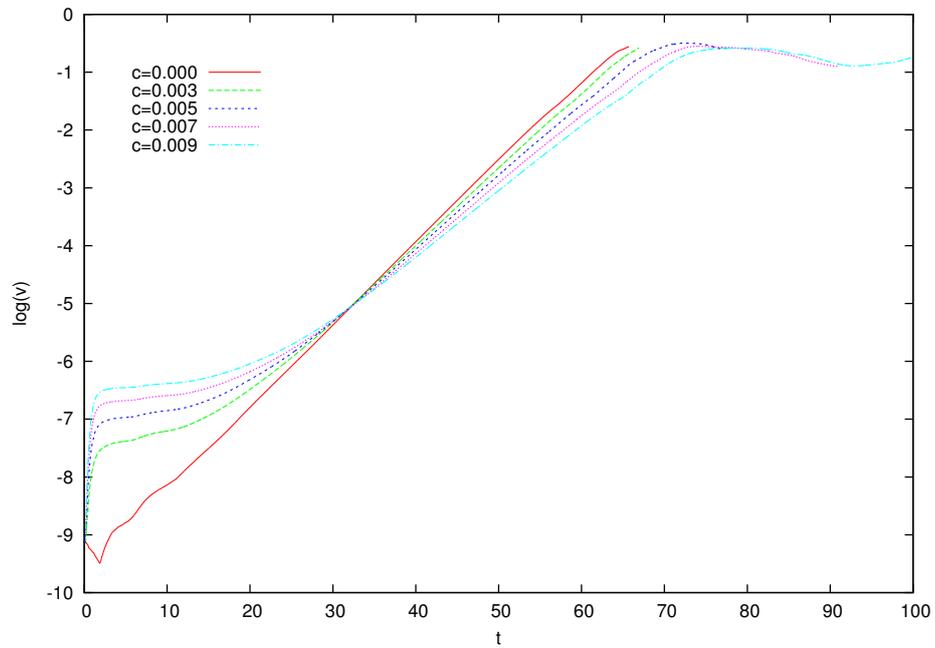


Figura 4.40 - Evolução da perturbação para $M = 0.8$ e $\alpha = 0.5$.

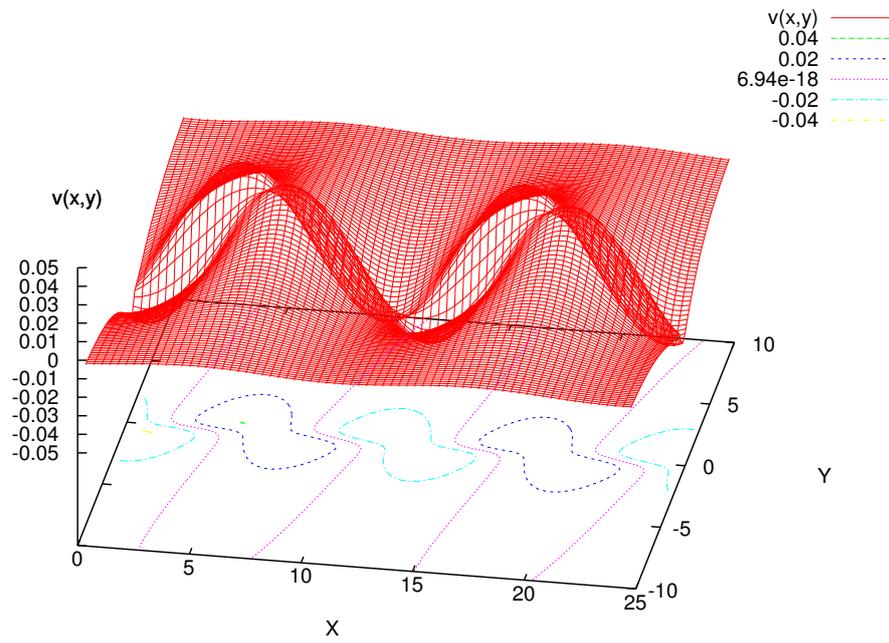


Figura 4.41 - $v(x,y)$ para $M = 0.8$, $\alpha = 0.5$, $c = 0.003$ e $t = 50.33$.

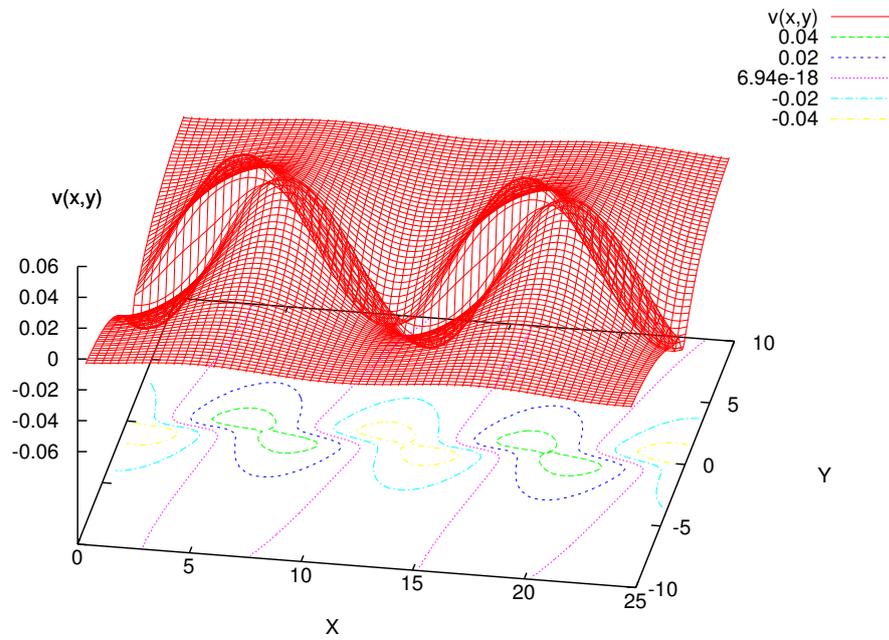


Figura 4.42 - $v(x,y)$ para $M = 0.8$, $\alpha = 0.5$, $c = 0.005$ e $t = 54.04$.

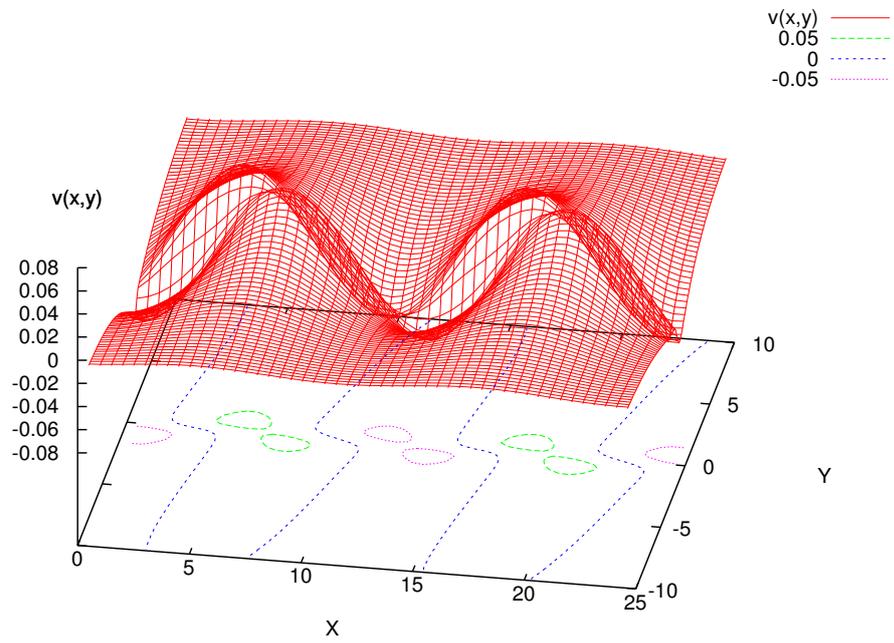


Figura 4.43 - $v(x,y)$ para $M = 0.8, \alpha = 0.5, c = 0.007$ e $t = 57.30$.

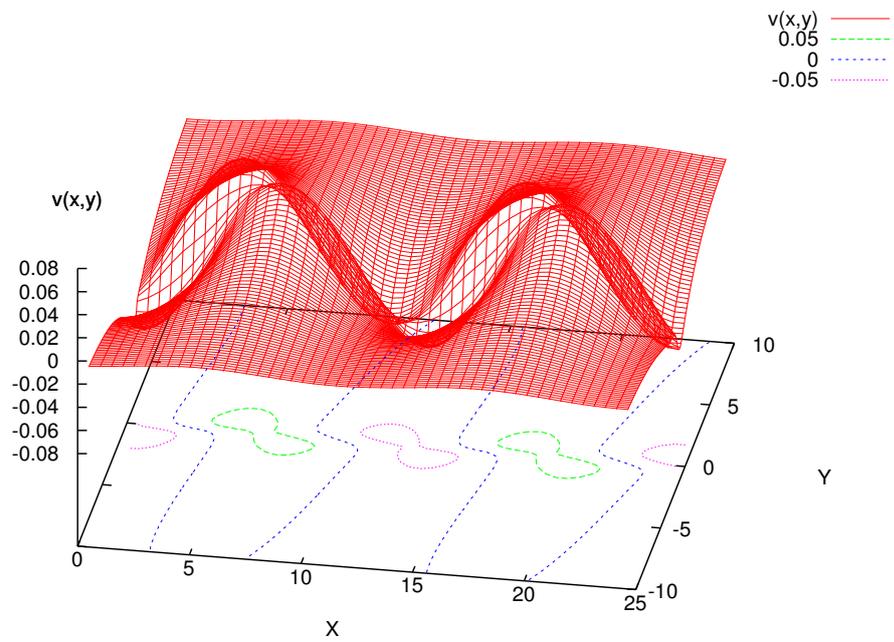


Figura 4.44 - $v(x,y)$ para $M = 0.8, \alpha = 0.5, c = 0.009$ e $t = 58.34$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO e SUGESTÕES

Neste trabalho foi desenvolvido e validado um código computacional de 5^a e 6^a ordem de resolução para derivadas espaciais e 4^a ordem para integração temporal, que permite analisar a evolução da perturbação em uma camada cisalhante.

Primeiramente estudou-se o efeito da variação do número de mach sem fonte de calor. Para um determinado nível de compressibilidade observou-se que a redução na taxa de amplificação é maior quanto maior é o número de onda associado com a perturbação. Observou-se também que esta redução é maior à medida que se aumenta a compressibilidade, e que a faixa de número de onda amplificado diminui. A distância entre as posições desses pontos é maior à medida que a compressibilidade aumenta. Os casos analisados sob influência da fonte de calor mostraram que a mesma atua como agente estabilizador das perturbações do escoamento, promovendo os mesmos efeitos atribuídos à compressibilidade. A combinação da compressibilidade com fonte de calor no interior da camada de mistura mostra que uma mesma faixa de geração de calor promove maior redução na taxa de amplificação das perturbações quanto maior for o nível de compressibilidade. De forma geral observou-se que a combinação de geração de calor e compressibilidade estabilizam significativamente as perturbações no interior da camada de mistura. Das análises feitas neste trabalho pode-se concluir que tanto a fonte de calor quanto a compressibilidade retardaram o processo de transição do escoamento laminar para o turbulento, haja vista que a turbulência favorece o processo de mistura, pode-se dizer que os efeitos da geração de calor e da compressibilidade não favorecem o processo de mistura, já que inibem a difusão da quantidade de movimento das regiões de fluido rico para regiões de fluido pobre em quantidade de movimento.

Recomendações para a continuidade deste trabalho:

- Especificações mais precisas de condições iniciais baseadas em teoria de estabilidade linear,
- Programação de condições de contorno não-reflexivas,
- Estudo de camada cisalhante binária,
- Estudo de camada cisalhante binária com combustão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BODONY, D. J.; LELE, S. K. On using large-eddy simulation for the prediction of noise from cold and heated turbulente jets. **Phys. Fluids**, v. **17**, n. 8, p. 483–512, 2005. [62](#)
- BROWN, G. L.; ROSHKO, A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. **Journal of Fluid Mechanics**, v. **64**, p. 775–781, 1974. [33](#)
- CHINZEI, N. G.; MASUYA, T.; KOMURO, T.; MURAKAMI, A.; KUDOU, K. Spreading of two-stream supersonic turbulent mixing layers. **Physics of Fluids**, v. **29**, n. 5, p. 1345–1347, 1986. [33](#)
- CLEMENS, N. T.; MUNGAL, M. G. Large-scale structure and entrainment in the supersonic mixing layer. **Journal of Fluid Mechanics**, v. **284**, p. 171–216, 1995. [67](#)
- DAY, M. J.; MANSOUR, N. N.; REYNOLDS, W. C. The structure of the compressible reacting mixing layer: Insights from linear stability analysis. **Physics of Fluids**, v. **10**, n. 4, p. 993–1007, 1998. [35](#)
- _____. Nonlinear stability and structure of compressible reacting mixing layers. **J. of Fluid Mechanics**, **446**, p. 375–408, 2001. [35](#)
- DRAZIN, P. G.; REID, W. H. **Hydrodynamic stability**. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. [29](#)
- DUNN, W. W.; LIN, C. C. On the stability of the laminar boundary in a compressible fluid. **J. Aero. Sci.**, v. **22**, p. 455–477, 1955. [34](#)
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. Berlin: Springer–Verlag, 1997. [49](#)
- GASTER, M. A note on the relation between temporally increasing and spatially increasing disturbances in hydrodynamic stability. **J. Fluid Mechanics**, v. **14**, p. 222–224, 1962. [32](#)
- GASTON, M. J.; MUDFORD, N. R.; HOUWING, F. Effect of heat release on hypermixing fuel injector performance in a supersonic combustor. In: AUSTRALASIAN FLUID MECHANICS CONFERENCE, 13., 1998, Melbourne, Australia. **Proceedings...** Melbourne: Monash University, 1998. [33](#)

GERMANOS, R. A. C.; MEDEIROS, M. A. F. Development of a code for a direct numerical simulation of compressible shear flow instability. In: CONGRESSO DE ENGENHARIA MECÂNICA-COBEM, 18., 2005, Ouro Preto, MG. **Anais...** Ouro Preto: Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas-ABCM, 2005. 35, 63

GROPPENGIESSER, H. **Study on the stability of boundary layers in compressible fluids**. Washington: NASA, 1970. 55 p. 34

HO, C. M.; HUERRE, P. Perturbed free shear layers. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 16, p. 365–424, 1984. 33

JACKSON, T. L.; GROSCH, C. E. Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 208, p. 609–637, 1989. 33, 34, 93

_____. Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer - part 2 - the flame sheet model. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 217, p. 391–420, 1990. 34, 93

KOPAL, Z. **Numerical analysis**. 2. ed. London: Chapman & Hall, 1961. 52

LELE, S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **J. Computational Physics**, v. 103, n. 1, p. 16–42, 1992. 49, 52

LESSEN, M.; FOX, J. A.; ZIEN, H. M. On the inviscid instability of the laminar mixing of two parallel streams of a compressible fluid. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 23, p. 355–367, 1965. 35

_____. Stability of the laminar mixing of two parallel streams with respect to supersonic disturbances. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 25, p. 737–742, 1966. 34, 67

MAHESH, K. A family of high order finite difference schemes with good spectral resolution. **J. Computational Physics**, v. 145, n. 1, p. 332–358, 1998. 49

PAPAMOSCHOU, D.; ROSHKO, A. The compressible turbulent shear layer: an experimental study. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 197, p. 453–477, 1988. 33

PLANCHÉ, O. H. R. **A numerical investigation of the compressible reacting mixing layer**. Tese (Doutorado) — Stanfor University, USA, 1993. 34, 93

SANDHAM, N. D. **A numerical investigation of the compressible mixing layer**. Tese (Doutorado) — Stanfor University, USA, 1990. 39, 49, 63

SANDHAM, N. D.; REYNOLDS, W. C. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer. **J. Fluid Mechanics**, v. **224**, p. 133–158, 1991. [67](#)

SANTANA, L. D. de; SOUZA, L. F. de. **Estudo numérico de propagação de ondas acústicas**: Relatório final de iniciação científica. São Carlos, SP: Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências, Matemáticas e Computação, 2006. 31 p. [47](#)

SAUVAGE, R.; KOURTA, A. Compressible effects on a temporal direct numerical simulation. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON VORTEX FLOWS AND RELATED NUMERICAL METHODS, 3., 1998, Toulouse. **Proceedings...** Toulouse, France: Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, 1999. (European Series in Applied and Industrial Mathematics–ESAIM, v. 7), p. 378–386. [35](#)

SHIN, D. S.; FERZIGER, J. H. Linear stability of the reacting mixing layer. **AIAA Journal**, v. **29**, n. 10, p. 1634–1642, 1991. [34](#)

_____. Linear stability of the compressible reacting mixing layer. **AIAA Journal**, v. **31**, n. 4, p. 677, 1993. [34](#), [35](#)

SOUZA, L. F. **Instabilidade centrífuga e transição para turbulência em escoamentos laminares sobre superfícies Côncavas**. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2003. [49](#), [53](#)

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)