



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-14200-TDI/1101

**MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DE VIGAS DE
ESPESSURA VARIÁVEL SUJEITAS A CARREGAMENTOS
INCERTOS**

Leandro Cardozo

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Alfredo Rocha de Faria e Ijar Milagre da Fonseca, aprovada em 29 de março de 2005.

INPE
São José dos Campos
2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

539.194

Cardozo, L.

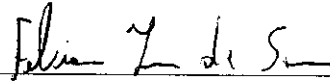
Minimização da Energia de Deformação de Vigas de Espessura Variável Sujeitas a Carregamentos Incertos / Leandro Cardozo. - São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2005.

141 p.; (INPE-14200-TDI/1101)

1.Análise Estrutural. 2.Otimização de Forma.
3.Técnica Minimax. 4.Flexibilidade. 5.Vigas de Euler-Bernoulli. I. Título.

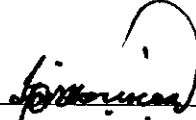
Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de Mestre em
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica
Espacial e Controle

Dr. Fabiano Luis de Sousa



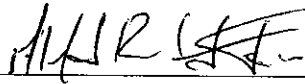
Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Ijar Milagre da Fonseca



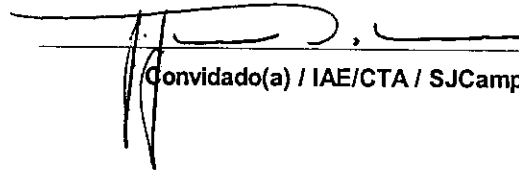
Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Alfredo Rocha de Faria



Orientador(a) / ITA / SJC Campos - SP

Dr. José Guido Damilano



Convidado(a) / IAE/CTA / SJC Campos - SP

Aluno (a): Leandro Cardozo

São José dos Campos, 29 de março de 2005

“Algo só é impossível até que alguém duvida disso e acaba provando o contrário”.

Albert Einstein

*A meus pais,
Esmeraldino João Cardozo e
Inês Luzia Novaski Cardozo.*

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Alfredo Rocha de Faria e ao prof. Ijar Milagre da Fonseca, pela dedicação e empenho na orientação deste trabalho.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), pela oportunidade de estudos e utilização de suas instalações.

Aos professores da DMC/INPE, pelo conhecimento compartilhado.

Aos membros da banca examinadora, pela disposição em analisar e discutir este trabalho.

Aos amigos de turma Alex, Bráulio, Carmen, Edmundo, Leandro, Vivian e Yasser que participaram comigo desta etapa tão importante da minha vida.

À Amabllin pelo carinho e compreensão, mesmo nos momentos mais difíceis.

A meus pais, por sempre acreditarem na importância do estudo.

RESUMO

Os métodos de otimização desempenham um importante papel em diversas áreas do setor aeroespacial, sobretudo quando aplicados a itens críticos de projeto como massa e rigidez de componentes estruturais. Nesse sentido, o presente trabalho trata da otimização da energia de deformação de estruturas submetidas a carregamentos incertos. O problema pode ser resolvido por meio da otimização multi-objetivo, onde os casos de carregamento estão associados a múltiplas funções objetivo. Trata-se da aplicação dos conceitos dos conjuntos de Pareto. Contudo, a implementação numérica desse método geralmente exige um grande esforço computacional. De maneira alternativa, o problema de otimização das múltiplas funções objetivo pode ser reformulado com a aplicação da estratégia minimax que não requer todos os casos de carga simultaneamente. Pelo contrário, essa formulação mostra que, para a solução de problemas envolvendo a energia de deformação, é suficiente considerar apenas aquelas cargas que definem o espaço convexo de carga considerado, isto é, aquelas cargas que efetivamente vão conduzir ao projeto ótimo. Dessa forma, ocorre uma grande redução do número de casos de carregamentos no problema considerado. Os projetos ótimos resultantes desse tipo de estratégia são capazes de suportar eficientemente não apenas alguns poucos casos de carregamentos, mas toda uma classe convexa deles. A eficiência da técnica proposta foi ilustrada através de exemplos de viga de Euler-Bernoulli. Foram investigados problemas de otimização da energia de deformação de vigas e arcos de espessura variável sujeitos a carregamentos incertos. Tecnicamente, a espessura de cada viga ou arco foi distribuída de modo a obter mais rigidez com mesma massa inicial, caracterizando uma otimização de forma.

COMPLIANCE OPTIMIZATION OF VARIABLE THICKNESS BEAMS SUBJECTED TO UNCERTAIN LOADING CONDITIONS

ABSTRACT

Optimization plays a very important role in space applications since mass and structural flexibility are critical requirements for space missions. Generally, it is desired that the structure be as lightweight and stiff as possible. As a contribution in this area this work investigates compliance optimization of a structure under multiple load cases. The problem can be solved through a multi-criterion optimization where the load cases associated with each and every loading configuration are treated as components of multi-objective function vector. This approach leads naturally to the concept of Pareto sets. However, numerical evaluation is not an easy task because sometimes it involves a very high computer effort. Alternatively, the multi-objective optimization problem can be re-formulated by using a min-max strategy that does not require simultaneous consideration of all the load cases as components of the multi-objective function vector. Instead, this formulation shows that, for compliance optimization purposes, it is sufficient to consider only those loads which define the convex hull of the applicable load set, i.e., the selected set of loads which will effectively lead to the optimum design. Thereby, the number of load cases involved in the design procedure is drastically reduced. The optimum designs provided by this method are able to sustain not only a few load cases but also an entire convex set of them. The efficiency of the proposed technique is illustrated through examples of Euler-Bernoulli beams. The problem of strain energy was investigated using a variable thickness beam subjected to uncertain loadings. Technically, the beam thickness was distributed in order to obtain a stiffer structure with the same initial mass, characterizing a shape optimization problem.

SUMÁRIO

	Página
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	23
CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E CONCEITOS DO MÉTODO MINIMAX	27
2.1 Conceitos Básicos e Lemas Associados ao Método Minimax.....	33
2.2 Método Minimax.....	36
2.3 Aplicação do Método Minimax na Minimização da Energia de Deformação.....	40
2.4 Otimização da Energia de Deformação.....	42
CAPÍTULO 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	45
3.1 Otimização de Vigas Utilizando o Método Minimax.....	47
CAPÍTULO 4 DISCRETIZAÇÃO DE VIGAS E ARCOS DE ESPESSURA VARIÁVEL	51
4.1 Método dos Elementos Finitos para Elementos de Viga.....	51
4.2 Obtenção dos Elementos da Matriz de Rigidez Devido ao Esforço de Cisalhamento e Flexão.....	55
4.3 Obtenção dos Elementos da Matriz de Rigidez Devido ao Esforço Axial.....	58
4.4 Matriz de Transformação de Coordenada.....	62
4.5 Vetor de Carregamentos.....	64
CAPÍTULO 5 PARÂMETROS UTILIZADOS NA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	67
5.1 Explicação Sobre o Programa Computacional.....	67
5.2 Cenário Utilizado para as Análises.....	69
5.3 Incerteza Sobre a Atuação do Carregamento Uniforme.....	71
5.4 Obtenção da Energia de Deformação Para Diferentes Cenários de Número de Nós e Casos de Carregamento.....	73
5.5 Determinação das Espessuras de Uma Viga Plana Quando se Introduz Uma Espessura Base Inicial.....	74
5.6 Otimização de Arcos de Diferentes Curvaturas Submetidos a Carregamentos Variáveis.....	77
5.7 Carregamentos Não Simétricos.....	79
5.8 Carregamentos Com Sinal Negativo.....	81
CAPÍTULO 6 DEMONSTRAÇÃO DA VULNERABILIDADE DE VIGAS E ARCOS DIMENSIONADOS COM CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORME	83
6.1 Viga de Seção Constante Dimensionada a Partir de Um Carregamento Uniforme.....	84
6.2 Viga Submetida a Um Carregamento Variável (100% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	86

6.3	Viga Submetida a Um Carregamento Variável (75% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	91
6.4	Viga Submetida a Um Carregamento Variável (50% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	94
6.5	Viga Submetida a Um Carregamento Variável (25% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	98
6.6	Viga Submetida a Um Carregamento Variável (0% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	102
6.7	Arco de Seção Constante Dimensionado a Partir de Um Carregamento Uniforme	106
6.8	Arco Submetido a Um Carregamento Variável (100% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	108
6.9	Arco Submetido a Um Carregamento Variável (75% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	115
6.10	Arco Submetido a Um Carregamento Variável (50% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	120
6.11	Arco Submetido a Um Carregamento Variável (25% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	124
6.12	Arco Submetido a Um Carregamento Variável (0% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme).....	129
CAPÍTULO 7 CONCLUSÕES		137
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		139

LISTA DE FIGURAS

	Página
2.1 - Funções convexa, côncava e nem convexa e nem côncava.	33
2.2 - Representação de conjuntos convexo (a) e não convexo (b).	34
2.4 - <i>Convex hull</i> de um polígono convexo.	34
2.5 - Representação de um ponto de cela.	39
2.6 - Superfície da energia de deformação e envoltória de cargas.	43
3.1 - Viga de espessura variável.	46
3.2 - Discretização da distribuição de carregamento.	48
4.1 - Esquema mostrando a igualdade dos módulos da energia de deformação e coenergia potencial.	52
4.2 - Elemento de viga, mostrando os deslocamentos e esforços internos.	53
4.3 - Elemento de altura variável.	54
4.4 - Coordenadas axiais em termos de x e z	59
4.5 - Transformação de coordenadas do sistema de eixos local para o global.	63
4.6 - Conversão do carregamento distribuído em carregamento nodal.	64
5.1 - Fluxograma representando os passos da otimização.	68
5.2 - Funções base e transformação do carregamento linearmente distribuído em carregamento equivalente nodal.	69
5.3 - Esquema mostrando a carga uniforme a partir das funções base.	71
5.4 - Indicação da carga uniforme e variável para cada função base.	72
5.5 - Representação da incerteza do carregamento uniforme.	72
5.6 - Gradação de diferentes alturas de arcos.	77
5.7 - Espessuras nodais ótimas para diferentes razões H/L (mm).	78
5.8 - Esquema mostrando a semelhança entre a aplicação de cargas positivas e negativas.	82
6.1 - Resultado qualitativo dos dimensionamentos de viga utilizando carga uniforme e carga variável.	84
6.2 - Viga de seção retangular constante com $h_{cte}=0.69$ mm e $b=1$ mm.	86
6.3 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	89
6.4 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	93
6.5 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	97
6.6 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	101
6.7 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	105
6.8 - Arco de seção retangular constante com $h_{cte}=0.14$ mm e $b=1$ mm.	108
6.9 - Deformações do arco para diversos casos de carga.	111
6.10 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	113

6.11 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	118
6.12 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	123
6.13 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	128
6.14 - Deformação devida à carga uniformemente distribuída.	131
6.15 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	133

LISTA DE TABELAS

	Página
5.1 - Carga equivalente nodal devido às funções base.	69
5.2 - Carga equivalente nodal devido ao carregamento uniforme.	70
5.3 - Valores da energia de deformação para diversos casos de número de nós e números de casos de carga (unidade: μJ).	73
5.4 - Distribuição de espessuras para diferentes razões h_{base}/\bar{h} (mm).	75
5.5 - Distribuição de espessuras para diferentes razões h_{base}/\bar{h} (mm).	76
5.6 - Verificação da resistência e correção do projeto para diferentes razões H/L	79
5.7 - Distribuição de espessuras para casos de carregamentos não simétricos.	81
6.1 - Espessuras da viga de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	87
6.2 - Momento e tensões para a viga de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	88
6.3 - Momento e tensões para a viga de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	90
6.4 - Espessuras da viga de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	91
6.5 - Momento e tensões para a viga de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	92
6.6 - Momento e tensões para a viga de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	94
6.7 - Espessuras da viga de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	95
6.8 - Momento e tensões para a viga de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	96
6.9 - Momento e tensões para a viga de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	98
6.10 - Espessuras da viga de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	99
6.11 - Momento e tensões para a viga de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	100
6.12 - Momento e tensões para a viga de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	102
6.13 - Espessuras da viga de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	103
6.14 - Momento e tensões para a viga de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	104
6.15 - Momento e tensões para a viga de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	106
6.16 - Espessuras do arco de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	109
6.17 - Esforços internos e tensões para o arco de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	110
6.18 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.	112
6.19 - Esforços internos e tensões para o arco de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	114
6.20 - Espessuras do arco de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	115
6.21 - Esforços internos e tensões para o arco de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	116

6.22 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.....	117
6.23 - Esforços internos e tensões para o arco de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.....	119
6.24 - Espessuras do arco de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	120
6.25 - Esforços internos e tensões para o arco de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.....	121
6.26 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.....	122
6.27 - Esforços internos e tensões para o arco de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.....	124
6.28 - Espessuras do arco de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	125
6.29 - Esforços internos e tensões para o arco de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.....	126
6.30 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.....	127
6.31 - Esforços internos e tensões para o arco de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.....	129
6.32 - Espessuras do arco de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.	130
6.33 - Esforços internos e tensões para o arco de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.....	131
6.34 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.....	132
6.35 - Espessuras nodais dos projetos ótimos para diversos casos de incerteza das cargas (mm).	134
6.36 - Espessuras nodais dos projetos ótimos para diversos casos de incerteza das cargas (mm).	135

LISTA DE SÍMBOLOS

A	-	Área da seção transversal
b	-	Largura da viga
\mathbf{B}	-	Matriz deformação-deslocamento
c	-	Distância da fibra mais externa em relação a linha neutra
C	-	Energia de deformação estrutural (<i>compliance</i>)
E	-	Módulo de elasticidade do material
\mathbf{f}	-	Vetor carregamento
f_i	-	Função base
\bar{f}_i	-	Função base normalizada
f_{nodal}	-	Força aplicada ao nó na direção vertical
f_{ty}	-	Tensão de escoamento do material
f_{tu}	-	Tensão de ruptura do material
F	-	Força resultante total
F_i	-	Força vertical aplicada ao nó i – carga aplicada
F_{axial}	-	Força axial atuante – esforço interno
$F_{axial\ max}$	-	Força axial máxima – esforço interno
\mathbf{F}	-	Espaço de carga
\mathbf{h}	-	Função espessura, variável em x
\bar{h}	-	Espessura disponível para distribuição
h_{base}	-	Espessura base da estrutura
h_{cte}	-	Espessura constante de uma estrutura

h_i	-	Espessura da seção transversal no nó i
h_i^*	-	Espessura ótima da seção transversal no nó i
H	-	Espaço de projeto
H	-	Projeção vertical da linha média
I	-	Momento de inércia da seção
K	-	Matriz de rigidez
L	-	Projeção horizontal da linha média
l_i	-	Comprimento do elemento binodal i
M_i	-	Momento fletor aplicado ao no nó i – carga aplicada
M_{max}	-	Momento fletor máximo – esforço interno
M_{nodal}	-	Momento aplicado ao nó
M_t	-	Matriz de transformação de coordenadas
N	-	Esforço axial - esforço interno
q	-	Vetor deslocamentos nodais
q	-	Intensidade da carga uniformemente distribuída
R_i	-	Parâmetro de proporcionalidade de cada função base i
U	-	Energia de deformação
u	-	Deslocamento axial
U_e	-	Energia elástica devido à rigidez axial
V	-	Coenergia potencial ou energia complementar do sistema
V_i	-	Força de cisalhamento no elemento no nó i
v	-	Volume da estrutura

- v^* - Volume ótimo da estrutura
- w_i - Deslocamento de translação do nó i
- W - Trabalho das forças externas
- R_i - Parcela de carga variável no carregamento aplicado
- e - Deformação axial
- q_i - Deslocamento de rotação do nó i
- λ - Fator de correção da espessura e do volume da viga ou do arco
- s_{max} - Tensão máxima
- O_{hull} - *Convex hull* ou envoltória de um dado conjunto O .

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A maioria das áreas da ciência aplica metodologias de otimização. No setor aeroespacial os processos de otimização estão presentes em diversos sistemas, como propulsão, suprimento de energia, telemetria, controle de atitude, mecânica orbital e projeto estrutural. Seguindo essa direção, o presente trabalho apresenta um estudo de otimização estrutural utilizando a estratégia minimax.

Um dos principais focos da otimização estrutural é minimizar a massa de componentes e maximizar seu desempenho. Normalmente a otimização tem como função objetivo a massa, a frequência natural, a carga de flambagem ou ainda a energia de deformação da estrutura. No processo de otimização podem também ser impostas restrições como volume constante, máxima tensão e frequência natural mínima, dentre outras.

Fuselagens e asas de aeronaves, painéis solares de satélites, pistões de motores e motores de foguetes a propelente sólido são alguns exemplos de componentes estruturais da área aeroespacial que podem ser considerados críticos por estarem submetidos a vários – centenas ou milhares – casos de carregamentos. Além disso, os carregamentos podem sofrer variações durante a operação do componente.

Outro fato que merece atenção é a suposição usual de que as cargas são uniformemente distribuídas ao longo do componente. No projeto e análise de peças estruturais aeronáuticas, como nervuras e chapas de fuselagem, geralmente são utilizadas tabelas e diagramas que consideram uma distribuição uniforme do carregamento (Bruhn, 1973). Tal consideração é encontrada na literatura, que provê ábacos e tabelas para o auxílio do projeto. Porém, por meio de verificações e testes práticos, algumas vezes não é verificada uma distribuição perfeitamente uniforme do carregamento.

Quando os métodos de otimização entram em cena, espera-se que sejam capazes de lidar com essa variabilidade de cargas. Entretanto, algumas ferramentas de otimização estrutural utilizam somente uma ou poucas cargas para a análise, abordando o problema

de forma determinística. Pode ser citado, como exemplo, o clássico problema de minimização de massa de barras com restrição de tensão admissível (Vanderplaats, 1984). O projeto ótimo resultante pode ser sensível e mesmo vulnerável à variação do carregamento.

Outra abordagem conhecida é a dos carregamentos incertos. Utiliza métodos probabilísticos e é mais refinada e conservativa do que as acima citadas. Porém a estrutura fica sujeita a cargas que inicialmente não estavam especificadas, aumentando assim o número de carregamentos considerados.

A metodologia utilizada neste trabalho é baseada na modelagem convexa. Todos os elementos do espaço de cargas têm igual probabilidade de ocorrência. A abordagem não depende da distribuição de probabilidade, mas das propriedades extremas do conjunto de carregamentos escolhido. O projeto ótimo refere-se à carga mais severa pertencente ao espaço de cargas admissíveis. Essa técnica, chamada de estratégia minimax, garante que o projeto ótimo resultante da carga escolhida é conservativo e também ótimo para as outras cargas, uma vez que são menos nocivas ao projeto ótimo (Cherkaev e Cherkaeva, 1999; de Faria, 2003).

A eficiência da técnica proposta é aqui ilustrada por meio de exemplos de viga de Euler-Bernoulli. Foram investigados problemas da otimização da energia de deformação de vigas e arcos de espessura variável sujeitos a carregamentos incertos. Tecnicamente, a espessura do componente foi redistribuída de modo a obter mais rigidez com mesma massa inicial, caracterizando-se uma otimização de forma. A otimalidade da massa também foi estudada por meio da verificação da resistência do material. Para o caso dos esforços internos estarem acima da resistência do material, foi elevada a massa inicial para que aumentasse a área da seção transversal do componente e diminuísse assim os esforços internos atuantes. A situação inversa também foi aplicada. Entende-se por resistência do material o nível de tensão no material que causa falha. Neste trabalho, a falha foi considerada como o escoamento ou ruptura do material. O carregamento incerto foi tratado como linear por partes e representado por meio de funções-base.

Este trabalho teve por resultados:

- Demonstrar que dimensionamentos por meio de carregamentos uniformes podem levar o componente estrutural à instabilidade para os casos em que há alguma incerteza envolvida nos carregamentos.
- Encontrar distribuições ótimas de espessura de vigas e arcos sujeitos a carregamentos incertos.
- Demonstrar que os projetos ótimos obtidos por meio do método minimax continuam ótimos ao se variar o carregamento dentro de seu espaço de carga.

Este trabalho foi dividido em mais seis capítulos, descritos a seguir:

- *Capítulo 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E CONCEITOS DO MÉTODO MINIMAX:* Neste Capítulo faz-se referência a alguns trabalhos ligados à otimização estrutural já publicados, que utilizam tanto as técnicas tradicionais quanto o método minimax. Também são aprofundados os conceitos de otimização e os fundamentos teóricos e algébricos da metodologia minimax utilizados neste trabalho.
- *Capítulo 3 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA:* É apresentada a formulação do problema de otimização, bem como a explicação dos exemplos de otimização de vigas e arcos para os quais o método foi aplicado.
- *Capítulo 4 – DISCRETIZAÇÃO DE VIGAS E ARCOS DE ESPESSURA VARIÁVEL:* Este Capítulo traz a descrição e a obtenção da matriz de rigidez utilizando-se elementos binodais de espessura variável, submetidos a esforços axiais, cisalhamento e flexão. Também apresenta o vetor de carregamentos e a matriz de transformação de coordenadas. A formulação é baseada no Método dos Elementos Finitos.
- *Capítulo 5 – PARÂMETROS UTILIZADOS NA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA:* Este Capítulo apresenta e discute os parâmetros utilizados pelo algoritmo baseado na estratégia minimax, como a porcentagem de incerteza do carregamento

uniforme, a altura do arco, o número de nós, o número de carregamentos e a razão do volume da viga base pelo volume de material a ser distribuído. Uma discussão para o caso das cargas não serem simétricas ou terem sentido oposto ao adotado, bem como o cenário utilizado no Capítulo 6 também são apresentados.

- *CAPÍTULO 6 – DEMONSTRAÇÃO DA VULNERABILIDADE DE VIGAS E ARCOS DIMENSIONADOS COM CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORME:* Apresentação e análise das simulações para o caso de viga e arco.
- *CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES:* Discussão dos resultados e perspectivas de trabalhos futuros sobre os métodos estudados.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E CONCEITOS DO MÉTODO MINIMAX

Otimização pode ser entendida como a obtenção do melhor resultado para um dado objetivo, satisfazendo certas restrições (Haftka, 1991). Esse processo é instintivo nas operações humanas, pois na maioria de suas tarefas ele busca economizar energia e/ou minimizar o desconforto. Para o caso da otimização estrutural, que remonta o século XVIII, este aspecto não poderia ser diferente. A importância da mínima massa de estruturas, por exemplo, foi primeiramente aplicada pela indústria aeroespacial. Nesse caso específico, o fator massa foi considerado mais importante do que outros fatores, tais como o custo, por exemplo. Já em outros setores da indústria, como o civil, o mecânico e o automotivo, os fatores custo e desempenho geralmente foram mais predominantes. Esses fatores-alvo algumas vezes são concorrentes entre si o que obriga avaliar a importância de cada item de projeto e as interdependências entre eles.

Quando se fala em otimização estrutural, geralmente se quer referir à minimização da massa ou do volume, ou ainda à otimização da forma dos elementos estruturais de modo a se obter melhor desempenho para a aplicação desejada. Pode-se otimizar uma estrutura em relação à massa, às frequências naturais de vibração, à máxima carga de flambagem ou em relação à energia de deformação.

Na literatura existe uma enorme gama de trabalhos que se referem especificamente à otimização estrutural. Breves resumos desses trabalhos são apresentados a seguir.

Khot et al (1979) apresentam uma comparação dos algoritmos que têm como critério de otimização a mínima massa de estruturas. Resume os diferentes métodos e descreve as relações que existem entre os diversos algoritmos. Mostra que eles diferem somente no grau de aproximação da formulação que modifica as variáveis de projeto, e que obtém os multiplicadores de Lagrange. Apresenta um novo método iterativo, similar ao Newton-Raphson, com equações que não necessitam de vetores iniciais de projeto para os multiplicadores de Lagrange desconhecidos. Mostra que com esse esquema, o projeto

de massa mínima pode ser obtido com menor número de análises do que com os métodos propostos até então.

Khot e Kamat (1985) fazem um estudo da minimização da massa de barras levando em conta, em sua formulação, o comportamento de não linearidade geométrica. O caso de carga crítica não linear é determinado para o caso de carga cujo Hessiano da energia potencial associado deixasse de ser positivo definido.

Yoshida e Vanderplaats (1988) investigam técnicas de otimização de vigas, utilizando elementos de viga pré-definidos a partir de um pacote baseado no Método dos Elementos Finitos, juntamente com conceitos de tensão equivalente e separação das variáveis de sensibilidade e variáveis de projeto. Também são investigados os efeitos da linearização das funções de restrição associadas ao problema.

Kamat (1993) apresenta uma ampla descrição das técnicas e métodos de otimização estrutural. Faz um relato da evolução histórica da otimização estrutural e ainda vislumbra perspectivas futuras sobre a mesma. Dentre os principais capítulos, pode-se citar: conceitos fundamentais de otimização, descrição detalhada sobre métodos de programação matemática para problemas com restrições, funções de aproximação, linearização seqüencial e métodos de dualidade. Traz ainda a descrição de diversos métodos de análise de sensibilidade e ainda um breve comentário sobre os atuais pacotes comerciais com módulos de otimização estrutural como o MSC.NASTRAN, ANSYS, GENESIS e COSMOS.

Vanderplaats (1984) e Haftka (1991) fazem um compêndio sobre os métodos numéricos de otimização. Apresentam a descrição dos conceitos básicos, das funções de uma variável, das funções de N variáveis com restrições e sem restrições, método de programação linear, técnicas do método seqüencial e do método direto, técnicas de aproximação e dualidade.

Wang e Shan (2004) propõem um método aproximado para identificar regiões ou subespaços de um espaço original de projeto para otimização multi-objetivo. Em regiões pequenas, os pontos por eles encontrados atendem de maneira satisfatória múltiplas

variáveis de projeto. As fronteiras de Pareto dessas regiões são idênticas com as obtidas para o espaço de projeto original. As limitações encontradas são o grande número de subespaços gerados e o fato do método não ser econômico para problemas de grandes dimensões.

Bathe (1976), Desai (1979) e Bismarck (1993) apresentam conceitos fundamentais sobre o Método dos Elementos Finitos, bem como sua aplicação em análise de estruturas.

Geralmente os problemas de otimização estrutural, como os descritos acima, são abordados por meio de uma metodologia tradicional onde a aleatoriedade das cargas não é levada em conta, ou ainda, por uma metodologia probabilística, onde o projeto ótimo é encontrado por meio de distribuições de probabilidade.

O método mais difundido de otimização probabilística, em que há aleatoriedade das cargas, admite a existência de uma função densidade de probabilidade que descreva de algum modo a distribuição das incertezas (Elishakoff, 1983). Porém, existem aplicações onde essa distribuição de probabilidade é desconhecida ou simplesmente não é bem definida. Uma hipótese muito comum é considerar que distribuições gaussianas descrevam precisamente a aleatoriedade dos carregamentos. Essa hipótese pode ser comprometedor se, na realidade, essa distribuição não for uma hipótese razoável (de Faria e Hansen, 2001).

Uma estratégia alternativa é fazer o tratamento das incertezas aplicando a modelagem convexa, que não requer as funções de densidade de probabilidade. Nesse caso as incertezas devem pertencer a um claro conjunto convexo. Essa abordagem permite utilizar um tratamento determinístico das incertezas e oferece ao projetista não os resultados ótimos baseados em médias ou desvios-padrão, mas os casos extremos do sistema modelado, de acordo com o conjunto convexo escolhido (de Faria e Hansen, 2001).

No caso do presente trabalho a função objetivo considerada é a energia de deformação C (do inglês, *compliance*). Existem vários autores que também utilizam a energia de

deformação como função objetivo no processo de otimização, e também aplicam uma metodologia de modelagem convexa (Pedersen, 1991; Lund, 1994; Hammer et al, 1997; Foldager, 1999; Cherkaev e Cherkaeva, 1999; Ganzerli e Pantelides, 2000; de Faria, 2001). Alguns trabalhos desses autores estão listados a seguir.

Pedersen (1991) emprega a espessura e a orientação de lâminas como parâmetros para placas de material ortotrópico, baseando-se no gradiente de segunda ordem da energia de deformação.

Lund (1994) estuda, entre outros assuntos, o problema da otimização estrutural que envolve múltiplos autovalores. Desenvolve condições de otimalidade e algoritmos de otimização aplicados à solução do problema.

Hammer et al (1997) trabalham com parâmetros de laminação de laminados compostos. Ele obtém a redução do número de variáveis, por meio de relações de derivadas dos parâmetros do material, ortotropia das lâminas e de parâmetros de laminação. Porém, existem relações não analíticas envolvendo os parâmetros de laminação, o que dificulta a sua utilização em problemas mais gerais onde ocorrem, simultaneamente, efeitos de membrana, flexão e acoplamento entre os dois.

Foldager (1999) minimiza a energia de deformação C com o objetivo de maximizar a rigidez de uma estrutura atuando no regime elástico. Em seu trabalho, desenvolve e implementa um método de análise e otimização de laminados de material composto.

Ganzerli e Pantelides (2000) empregam a modelagem convexa multidimensional para a obtenção do projeto ótimo de estruturas sujeitas a cargas incertas. A utilização da modelagem convexa não requer a expressão das restrições como funções explícitas das variáveis e parâmetros de projeto. Isso facilita a otimização de estruturas de grandes dimensões.

Cherkaev e Cherkaeva (1999) estudam a questão da sensibilidade de projetos ótimos obtidos pela minimização da energia de deformação mediante a variação da distribuição do carregamento aplicado. Eles propõem o método minimax, que permite encontrar uma

solução estável para tais problemas. Nessa proposta os carregamentos não são prescritos, mas pertencem a um conjunto convexo de carregamentos admissíveis. A solução ótima é formulada a partir da minimização da energia de deformação armazenada, proveniente do caso de carregamento mais desfavorável. A pior carga, advinda dos carregamentos admissíveis, é aquela que maximiza a energia armazenada. Matematicamente, essa técnica é chamada de solução baseada em estratégias mistas, ou otimização em dois níveis, isto é, uma primeira etapa para a maximização da função objetivo em relação a um parâmetro de projeto, e uma segunda etapa para a minimização da mesma função objetivo em relação a outro parâmetro de projeto.

Essa estratégia é aplicada por de Faria (2001, 2002) em casos de maximização de flambagem com carregamentos incertos, para placas e cascas cilíndricas de material composto. As variáveis de projeto são o ângulo das fibras e o vetor de carregamentos incertos. No caso de placas, são utilizadas componentes incertas de carga normal e de cisalhamento enquanto que no caso de cascas cilíndricas essas cargas podiam ser de compressão axial, pressão transversal ou torção.

de Faria (2003) compara projetos ótimos obtidos para carregamentos fixos e projetos ótimos baseados na estratégia minimax, para a flambagem de placas de espessura variável. Os resultados da carga máxima de flambagem apresentam uma grande variação quando ocorre uma variação na distribuição do carregamento, uma vez que o projeto ótimo é obtido para uma distribuição específica de carregamento. Vale ressaltar que somente a forma de distribuição da carga é que varia, uma vez que a norma e a direção da força resultante permanecem inalteradas. A comparação é feita da seguinte maneira: há cinco distribuições de carregamento e são obtidos cinco projetos ótimos, sendo que cada distribuição dá origem a um projeto. Depois, verifica-se em cada projeto a nova carga máxima de flambagem quando a placa é submetida às outras quatro distribuições de carregamento. O projeto obtido por minimax considera as mesmas distribuições de carregamentos aplicadas nos projetos com carga fixa, porém aplicadas todas simultaneamente. O método considera que as cargas formam um conjunto convexo de onde foi extraído o pior carregamento aplicado. O projeto ótimo obtido dessa forma considera, automaticamente, as outras cargas como não sendo críticas e

assim o presente projeto continua sendo ótimo para as mesmas. Para entender melhor como a comparação é feita deve-se considerar o seguinte:

- O projeto ótimo *minimax* elege uma carga crítica.
- Para efeito de comparação, é escolhido o projeto de carga fixa que utiliza a mesma carga que o projeto *minimax*.
- Verifica-se então que ao variar a distribuição dos carregamentos, os resultados de cargas máximas de flambagem oscilam menos no projeto *minimax* do que no projeto de carga fixa. Os projetos de carga fixa apresentam grande oscilação entre os valores máximos de flambagem, chegando em até 15 vezes quando comparados entre si.

Esses resultados são importantes pelo fato de que, no dimensionamento ótimo de peças estruturais, o projetista geralmente seleciona um caso de carga como sendo o mais crítico ou o mais comumente utilizado; e considera que os outros casos de carregamento não resultarão em falha da estrutura. Porém essa consideração pode não ser legítima. Pode-se ainda dizer que os métodos de otimização que consideram cargas fixas podem ser extremamente sensíveis a perturbações da configuração de carregamento (Cherkaev e Cherkaeva, 1999).

O presente trabalho utiliza uma técnica similar, uma vez que a distribuição de carregamento varia durante o processo de otimização e o resultado ótimo obtido corresponde à pior configuração de carregamento.

A distribuição linear do carregamento é representada por meio de uma série de funções lineares por partes definidas em pontos específicos ao longo da viga (de Faria, 2003). O refinamento da representação do carregamento é independente da malha de elementos finitos, porém é desejável alguma interdependência para tornar o procedimento numérico mais simplificado.

A seguir são apresentados os fundamentos teóricos e algébricos da metodologia minimax.

2.1 Conceitos Básicos e Lemas Associados ao Método Minimax

Os conceitos básicos sobre conjuntos convexos, espaço convexo ou “*convex hull*”, funções convexas e também dois lemas são descritos a seguir, para simplificar a compreensão da estratégia de otimização apresentada neste trabalho.

Considere um conjunto de elementos compostos pela coleção $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. O ponto $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i x_i$ é dito ser uma combinação convexa de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ quando $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ e $x_i \geq 0$ para todo $i \in [1, \dots, n]$ (Vanderplaats, 1984).

Uma função $f(\mathbf{x})$ é convexa quando $f((1-q)\mathbf{x}_1 + q\mathbf{x}_2) \leq (1-q)f(\mathbf{x}_1) + qf(\mathbf{x}_2)$ para $0 \leq q \leq 1$ e para qualquer \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . De forma similar, uma função é côncava quando $f((1-q)\mathbf{x}_1 + q\mathbf{x}_2) \geq (1-q)f(\mathbf{x}_1) + qf(\mathbf{x}_2)$ para $0 \leq q \leq 1$ (Vanderplaats, 1984) (Figura 2-1).

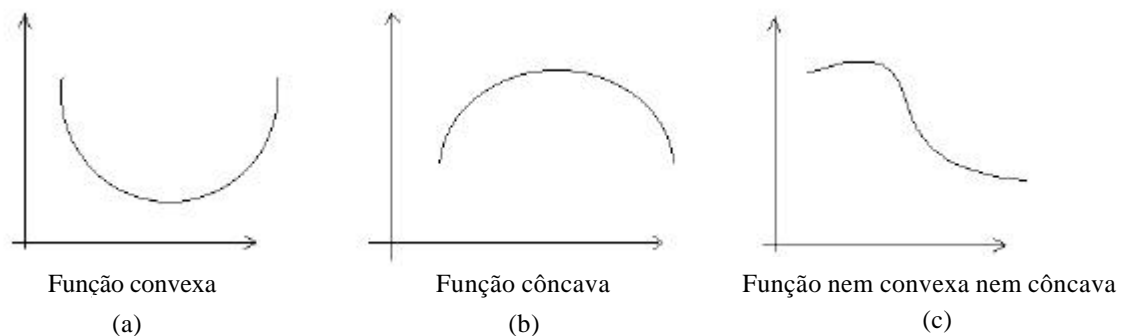


FIGURA 2-1 - Funções convexa, côncava e nem convexa e nem côncava.

Um conjunto é dito convexo quando, para qualquer elemento A e B pertencente a um conjunto, o elemento $P = (1-q)A + qB$ também pertence ao conjunto, onde $0 \leq q \leq 1$ (Vanderplaats, 1984) (Figura 2-2).

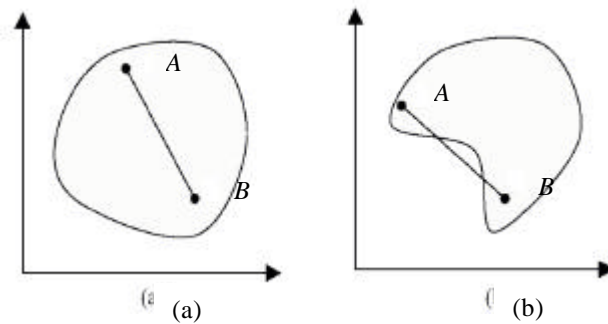


FIGURA 2-2 - Representação de conjuntos convexo (a) e não convexo (b).

O conjunto convexo pode ser graficamente representado pela Figura 2-2(a) e o conjunto não-convexo pela Figura 2-2(b). A linha conectando os pontos A e B deve estar inteiramente contida dentro do conjunto, caso o conjunto seja convexo.

Pode ser concluído por meio das definições apresentadas que qualquer ponto dentro do interior de um conjunto convexo pode ser escrito como uma combinação convexa dos pontos da sua borda.

A partir dessa definição pode-se concluir que o *convex hull* (O_{hull}) ou envoltória de um dado conjunto O é o menor subconjunto de O de tal maneira que cada e todo elemento pertencente a O pode ser escrito como uma combinação convexa dos elementos de O_{hull} .

Por meio dessa definição pode ser deduzido que o *convex hull* de qualquer poliedro é o conjunto de pontos formado por seus vértices. A Figura 2-3 realça os vértices de um polígono convexo para enfatizar que são esses pontos que formam seu convex hull.

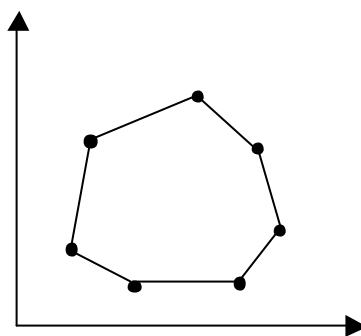


FIGURA 2-3 - *Convex hull* de um polígono convexo.

A seguir são apresentados dois lemas que servem de base para fundamentar o equacionamento algébrico do método minimax (de Faria, 2005).

Lema 1. Baseado nos princípios acima descritos, a forma quadrática de $C(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f}$ é convexa em \mathbf{f} , quando \mathbf{A} é uma matriz simétrica e positiva definida.

Considerando os pontos \mathbf{f}_i , $i \in [1, \dots, n]$, demonstra-se que C é convexo ao mostrar que $C' \leq C''$ onde

$$C' = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{f}_i^T \right) \mathbf{A} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \mathbf{f}_j \right) \quad (2-1)$$

e

$$C'' = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{A} \mathbf{f}_i \quad (2-2)$$

com $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \mathbf{1}$ e $\mathbf{x}_i \geq 0$ para todo $i \in [1, \dots, n]$.

Sendo a matriz \mathbf{A} positiva definida, então,

$$(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)^T \mathbf{A} (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \geq 0 \quad (2-3)$$

$$\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)^T \mathbf{A} (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \geq 0 \quad (2-4)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j)^T \mathbf{A} (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \geq 0 \quad (2-5)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j (\mathbf{f}_i^T \mathbf{A} \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^T \mathbf{A} \mathbf{f}_i) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j (\mathbf{f}_i^T \mathbf{A} \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j^T \mathbf{A} \mathbf{f}_j) \quad (2-6)$$

Considerando $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \mathbf{1}$ e \mathbf{A} uma matriz simétrica

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \mathbf{f}_i^T \mathbf{A} \mathbf{f}_j \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{A} \mathbf{f}_i \quad (2-7)$$

que prova que $C' \leq C''$.

Lema 2. Considerando n números reais a_1, a_2, \dots, a_n . O máximo valor de $f = \sum_{i=1}^n x_i a_i^2$, onde $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ e $x_i \geq 0$ para todo $i \in [1, \dots, n]$, é $f_M = a_M^2$, onde a_M^2 é o máximo de todos os a_i^2 para $i \in [1, \dots, n]$.

Considerando a_M^2 o máximo de todos os a_i^2 então

$$(a_M^2 - a_i^2) x_i \geq 0 \quad (2-8)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n a_M^2 x_i \geq \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i = f \quad (2-9)$$

$$a_M^2 \sum_{i=1}^n x_i = a_M^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i = f \quad (2-10)$$

Portanto, $f \leq a_M^2$. A igualdade $f = a_M^2$ se verifica somente quando $x_M = 1$ e $x_i = 0$ para $i \in [1, \dots, M-1, M+1, \dots, n]$.

Combinando os dois lemas pode ser concluído que dado l casos de carga $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_l$ e todos os outros casos de carga resultantes de suas combinações convexas, o máximo $C(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}$ (uma função convexa) está necessariamente associado com o caso de carga M que leva ao máximo $C(\mathbf{f}_M) = \mathbf{f}_M^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}_M$.

2.2 Método Minimax

Muitos problemas de otimização requerem várias funções objetivo. Isso se deve ao fato de cada função objetivo estar relacionada com uma variável diferente de projeto. Por exemplo, às vezes deseja-se diminuir a massa de painéis solares de satélites por razões de custo, mas isto tem como consequência tornar os painéis mais flexíveis, o que é um problema para sistemas de controle de satélites. Ao mesmo tempo deseja-se garantir que os mesmos terão resistência mecânica às cargas dinâmicas de vôo, operação e manuseio em terra.

Esse exemplo mostra que os componentes das múltiplas funções objetivo podem ser conflitantes entre si. É possível encontrar componentes que são minimizados em relação às mesmas variáveis que maximizam outros. Portanto a estratégia de otimização deve ser capaz de trabalhar com vários critérios e com a possível competição entre eles.

O problema geral da função multi-objetivo pode ser definido pela Equação (2-11).

$$\min_{\mathbf{x} \in G} \left\{ \begin{array}{c} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_{l-1}(\mathbf{x}) \\ f_l(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad (2-11)$$

Onde G é o espaço de projeto definido por restrições de igualdade e desigualdade.

Para os problemas práticos em geral não existe um projeto ótimo \mathbf{x}^* que minimiza simultaneamente todas as funções f_i . Entretanto é desejável encontrar um projeto particular $\bar{\mathbf{x}}$ que seja melhor que outro projeto $\bar{\mathbf{x}}$ (Das, 1999).

Essa idéia está ligada ao conceito de dominância e pode ser explicada considerando que o projeto $\hat{\mathbf{x}}$ domina sobre outro projeto $\bar{\mathbf{x}}$ quando $f_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}})$ para todo $i \in [1, 2, \dots, l]$ e $f_j(\hat{\mathbf{x}}) < f_j(\bar{\mathbf{x}})$ para algum $j \in [1, 2, \dots, l]$. O projeto $\hat{\mathbf{x}}$ é dito projeto de Pareto se e somente se não existe um projeto $\mathbf{x} \in G$ que domina sobre $\hat{\mathbf{x}}$ (Das, 1999).

Caso exista um projeto \mathbf{x}^* que minimize simultaneamente todas as funções f_i , então ele é o único projeto de Pareto que satisfaz todas as múltiplas funções objetivo. Como em geral não existe um único projeto \mathbf{x}^* , como já citado, é comum lançar-se mão de um conjunto de projetos de Pareto (Das, 1999).

Porém, os algoritmos disponíveis na literatura não são capazes de determinar precisamente todos os projetos do conjunto, mas somente um conjunto discreto (Das e Dennis, 1998). O projetista, por ele próprio, deve então eleger um deles para ser efetivamente o projeto ótimo.

Uma alternativa para a otimização multi-objetiva é a minimização do máximo $f_i(\mathbf{x})$ para todo $i \in [1, \dots, l]$. Essa abordagem alternativa simplifica o problema de otimização para somente um único projeto. O método minimax simultaneamente minimiza as funções $f_i(\mathbf{x})$ com relação a $\mathbf{x} \in G$ e maximiza-as em relação a $i \in [1, \dots, l]$.

A formulação minimax pode ser expressa pela Equação (2-12).

$$\min_{\mathbf{x} \in G} \max_{i \in [1, \dots, l]} f_i(\mathbf{x}) \quad (2-12)$$

Existem dois tipos de variáveis na Equação (2-12): a primeira é a variável contínua \mathbf{x} e a segunda é a variável discreta i . Outra maneira de expressar o problema de otimização minimax é apresentando a Equação (2-13).

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2-13)$$

Pode ser verificado que a igualdade

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y} \in Y} \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2-14)$$

é válida se certas condições forem atendidas. Se um ponto de sela $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ existe de tal maneira que

$$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \quad (2-15)$$

para todo $\mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$, então a Equação (2-14) é válida. Se o ponto de sela existe, então, de acordo com a Equação acima, $f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ é válida para qualquer $\mathbf{x} \in X$ e $\mathbf{y} \in Y$.

A Figura 2-4 abaixo, extraída de Vanderplaats (1984), ilustra graficamente um ponto de sela.

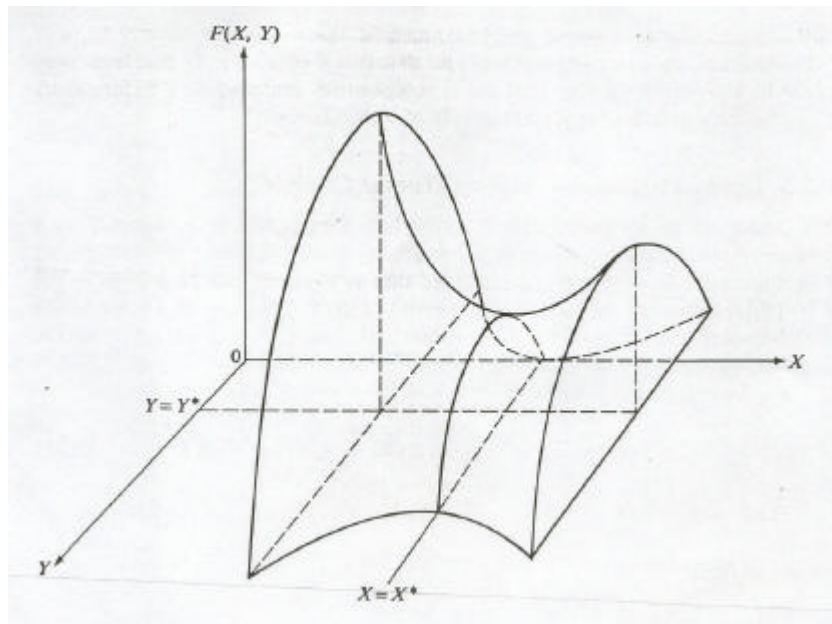


FIGURA 2-4 - Representação de um ponto de sela.

Particularmente pode ser escrito

$$\max_{y \in Y} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \quad (2-16)$$

e segue que

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \max_{\mathbf{y} \in Y} \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2-17)$$

Além disso, pode-se dizer que

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \leq f(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \leq \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \quad (2-18)$$

para qualquer $\mathbf{x}' \in X$ e $\mathbf{y}' \in Y$. Então \mathbf{x}' e \mathbf{y}' podem ser particularmente escritos

$$\max_{\mathbf{y} \in Y} \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2-19)$$

Quando as Equações (2-17) e (2-19) são combinadas pode-se concluir que

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y} \in Y} \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2-20)$$

Portanto, se a igualdade da Equação (2-20) é válida então o ponto de sela deve existir. É possível demonstrar isso definindo as equações f e y como sendo

$$f(\mathbf{x}) = \max_{y \in Y} f(\mathbf{x}, y) \quad (2-21)$$

$$y(\mathbf{y}) = \min_{x \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2-22)$$

Considerando agora os pontos \mathbf{x}^* e \mathbf{y}^* , tem-se

$$f(\mathbf{x}^*) = \min_{x \in X} f(\mathbf{x}) \quad (2-23)$$

$$y(\mathbf{y}^*) = \max_{y \in Y} y(\mathbf{y}) \quad (2-24)$$

O que faz com que a Equação (2-20) seja válida para $f(\mathbf{x}^*) = y(\mathbf{y}^*)$. A prova de que $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ seja um ponto de sela provém da conclusão,

$$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq \max_{y \in Y} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) = y(\mathbf{y}^*) = \min_{x \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad (2-25)$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geq \min_{x \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = y(\mathbf{y}^*) = f(\mathbf{x}^*) = \max_{y \in Y} f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad (2-26)$$

A combinação das duas Equações acima prova que \mathbf{x}^* e \mathbf{y}^* são pontos de sela.

2.3 Aplicação do Método Minimax na Minimização da Energia de Deformação

Essa Seção trata do problema linear de mínima energia de deformação armazenada numa dada estrutura sujeita a carregamentos incertos.

Cherkaev e Cherkaeva (1999) aplicaram a formulação minimax na otimização estrutural. Eles estudaram a sensibilidade de projetos ótimos quando submetidos a variações dos mesmos carregamentos utilizados na obtenção desses projetos. A estratégia deles consistia em minimizar a energia de deformação devida ao caso de carga mais severo proveniente de um conjunto de carregamentos.

A energia de deformação, também conhecida como “*compliance*”, é um indicativo da flexibilidade de uma estrutura. Dá ao projetista uma previsão de como uma estrutura se deformará, bem como os níveis de tensões e deformações, podendo ainda ser útil na

estimativa das frequências naturais de vibração por meio do método de Rayleigh's (Foldager, 1999; Hammer et al, 1997; Lund, 1994; Pedersen, 1991).

A estratégia minimax é empregada na abordagem que leva em conta a incerteza das cargas. Portanto, trata-se do problema de minimizar a energia de deformação de estruturas submetidas a carregamentos incertos.

Considera-se que os carregamentos incertos pertençam a um espaço de carga onde qualquer elemento pode ser identificado como \mathbf{f} . Quando \mathbf{f} é fixo, isto é, uma carga particular é selecionada, a energia de deformação pode ser apresentada por

$$\min_{\mathbf{h} \in \mathbf{H}} C(\mathbf{h}, \mathbf{f})$$

onde \mathbf{H} é o espaço de projeto onde todas as restrições são satisfeitas em \mathbf{h} . As variáveis de projeto \mathbf{h} podem referir-se à distribuição de espessura, à orientação angular de fibras e número de camadas de uma estrutura de material composto ou ao posicionamento de reforçadores, dentre outros.

Uma vez que \mathbf{f} indica uma carga incerta, não pode ser tratado como uma carga fixa. A abordagem aplicada a essa otimização com múltiplas funções objetivos será dada na Equação (2-27) onde existem l casos de carga, cada um correspondendo a um vetor componente da função multi-objetivo. Matematicamente:

$$\min_{\mathbf{h} \in \mathbf{H}} \left\{ \begin{array}{l} C_1(\mathbf{h}, \mathbf{f}_1) \\ C_2(\mathbf{h}, \mathbf{f}_2) \\ \dots \\ C_{l-1}(\mathbf{h}, \mathbf{f}_{l-1}) \\ C_l(\mathbf{h}, \mathbf{f}_l) \end{array} \right\} \quad (2-27)$$

O problema da Equação (2-27) pode ser resolvido utilizando-se uma abordagem multi-critério como já descrito. Contudo, o problema pode ser reformulado aplicando-se estratégia minimax, como segue,

$$\min_{\mathbf{h} \in \mathbf{H}} \max_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} C(\mathbf{h}, \mathbf{f})$$

onde F é o espaço de carga que contém todas as cargas f_1, f_2, \dots, f_i . Os operadores “min” e “max” podem ser invertidos entre si somente na existência de pontos de sela $(\mathbf{h}^*, \mathbf{f}^*)$ como discutido na Seção anterior. Porém a existência de pontos de sela não pode ser assumida de antemão e, portanto, a ordem dos operadores não pode ser mudada.

O problema apresentado acima é constituído de dois níveis. Ele identifica o pior caso de carga dado por \mathbf{f} e conduz ao projeto ótimo em termos de \mathbf{h} . É possível reescrevê-lo da seguinte maneira,

$$\min_{\mathbf{h} \in H} \max_{\mathbf{f} \in F} C(\mathbf{h}, \mathbf{f}) = \min_{\mathbf{h} \in H} \mathbf{f}(\mathbf{h}) \quad (2-28)$$

onde,

$$\mathbf{f}(\mathbf{h}) = \max_{\mathbf{f} \in F} C(\mathbf{h}, \mathbf{f}) \quad (2-29)$$

Na Equação (2-28) a função objetivo \mathbf{f} é maximizada em relação às cargas incertas \mathbf{f} , e depois, minimizada em relação a \mathbf{h} . Essa formulação garante que o projeto ótimo admite perturbações na carga, porque qualquer variação de \mathbf{f} dentro do espaço de cargas admissíveis F necessariamente conduz a uma energia de deformação menor e menos nociva. Isso é devido à parte “max” da otimização que identifica previamente a configuração de carga mais prejudicial.

2.4 Otimização da Energia de Deformação

O problema minimax apresentado na Equação (2-28) fornece um projeto ótimo de uma estrutura sujeita a qualquer carregamento que pertença a um espaço admissível de cargas. A maximização de C dada pela Equação (2-29) requer a solução de $\mathbf{f}(\mathbf{h})$ que aparentemente é uma tarefa trabalhosa. Porém para a análise estática linear de elementos finitos, a expressão da energia de deformação é simplesmente $C(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$, onde \mathbf{f} é o vetor carregamento e \mathbf{K} a matriz de rigidez (sempre simétrica e positiva definida). Também, os dois lemas apresentados garantem que não é necessário testar

todas as cargas possíveis do espaço de carga F , mas somente as que pertencem ao *convex hull*. Uma dessas cargas é que dará a máxima energia de deformação.

Em outras palavras, a Equação (2-29) não precisa ser tratada como um problema de otimização tradicional, pois levando-se em conta a convexidade de C e do espaço de carregamentos admissíveis, o problema pode ser resolvido de forma eficiente sem a necessidade de procedimentos de otimização. Também não é necessário processar todos os casos de carga, mas somente aqueles que pertencem aos vértices do conjunto convexo de carregamentos. Isso simplifica enormemente o processamento computacional.

A Figura abaixo apresenta graficamente essa explicação.

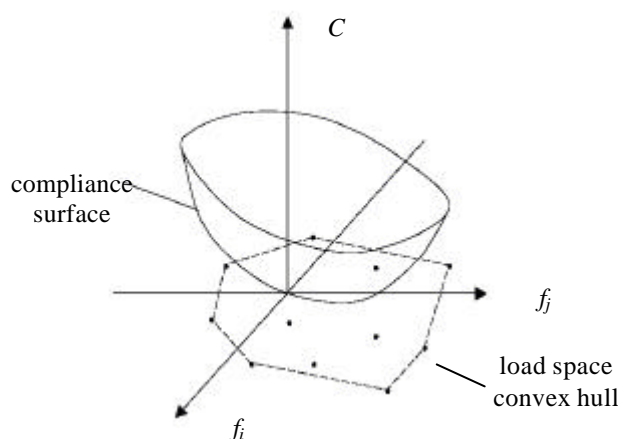


FIGURA 2-5 - Superfície da energia de deformação e envoltória de cargas.

A Figura 2-5 mostra um esquema onde a energia de deformação é obtida para todos os componentes de carga do plano f_i, f_j . Pode ser visto $C = 0$ ocorrendo somente quando $\mathbf{f} = 0$. A borda superior da superfície é obtida para as cargas que compõem o *convex hull* de carregamentos. Isso significa que a pior carga será proveniente do *convex hull* e conseqüentemente, as componentes de carga do interior do *convex hull* não representarão o pior caso de carga, pois são uma combinação do *convex hull*. A obtenção de \mathbf{f} é feita por inspeção em todos os pontos do *convex hull* e o ponto que retornar o maior valor de C corresponderá ao pior caso de carregamento.

A superfície da energia de deformação deve ser simétrica em relação aos planos $f_i C$ e $f_j C$, porém sua forma exata dependerá das variáveis de projeto \mathbf{h} . Embora o projeto ótimo seja obtido em relação a uma única carga, escolhida como o pior caso, o projeto continua viável para as outras cargas.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Este trabalho aplica um método de otimização em dois níveis, denominado minimax, cuja função objetivo é a energia de deformação C da estrutura. Deseja-se minimizar a energia de deformação de vigas e arcos de espessura variável sujeitos a carregamentos incertos. Neste trabalho o termo carregamentos incertos indica incerteza na forma de distribuição do carregamento, porém sua intensidade é considerada conhecida e não varia. As variáveis de projeto do problema são \mathbf{h} , que descreve a variação da espessura da viga, e \mathbf{f} , o vetor de carregamentos. O problema minimax é dado por:

$$\min_{\mathbf{h}} \max_{\mathbf{f}} C = \min_{\mathbf{h}} \mathbf{f} \quad (3-1)$$

onde,

$$\mathbf{f} = \max_{\mathbf{f}} C \quad (3-2)$$

O vetor \mathbf{h} é definido como $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ e corresponde à espessura da seção nos n nós utilizados na discretização da estrutura.

O problema de otimização pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\min_{\mathbf{h}} \max_{\mathbf{f}} C(\mathbf{h}, \mathbf{f}) \quad (3-3)$$

Sujeito a

$$\mathbf{f} \in \text{conjunto convexo} \quad (3-4)$$

$$\sum_i^n h_i = n(\bar{h} + h_{base}) \quad (3-5)$$

$$h_{base} \leq h_i \leq (n.\bar{h} + h_{base}) \quad (3-6)$$

Onde \bar{h} é a espessura da seção disponível para distribuição, h_{base} é a espessura da seção da viga base e h_i representa a espessura da seção de viga no nó i , após o processo de otimização (ver Figura 3-1).

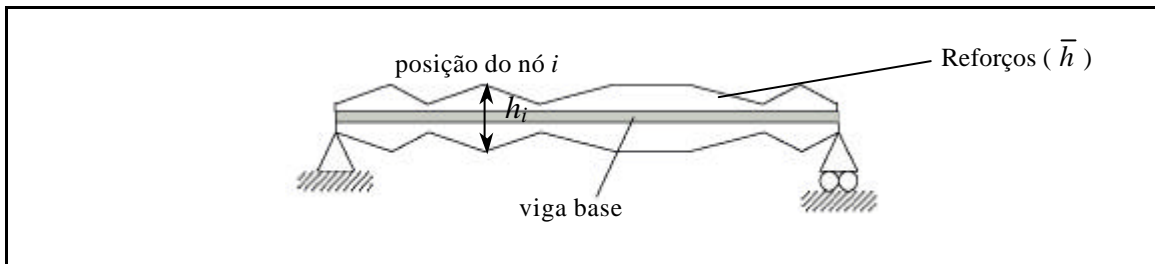


FIGURA 3-1 - Viga de espessura variável.

h_{base} representa uma espessura constante para a estrutura e garante, assim, uma espessura mínima maior que zero em todos os seus pontos. Isso evita indesejáveis espessuras próximas de zero durante o processo de otimização.

\bar{h} representa a espessura da seção a ser distribuída durante o processo de otimização e $n \cdot \bar{h}$ é a espessura total disponível para distribuição.

A expressão $n(\bar{h} + h_{base})$, da restrição Equação (3-5), é a soma total das espessuras antes de se iniciar o processo de otimização. Pelo fato da espessura continuar a mesma ao final da otimização, a somatória das espessuras h_i das seções referentes aos n nós deve ser igual a $n(\bar{h} + h_{base})$. Considera-se que a largura b e o comprimento total L da viga ou arco são constantes, bem como a densidade ρ do material.

A expressão $(n \cdot \bar{h} + h_{base})$, da restrição Equação (3-6), é a máxima espessura que um nó pode ter. Hipoteticamente, considera-se que um nó é capaz de receber toda a espessura disponível para distribuição, enquanto que os outros nós nada recebem, permanecendo com a espessura base.

A restrição da Equação (3-6) apresenta os limites superior e inferior para a espessura h_i . Assim, entende-se que a espessura de qualquer nó terá pelo menos a espessura mínima h_{base} , e será menor ou igual à espessura máxima $(n \cdot \bar{h} + h_{base})$.

O primeiro passo do problema de otimização da Equação (3-3), é maximizar a função objetivo C (energia de deformação) em relação ao conjunto de cargas incertas \mathbf{f} , e em seguida minimizar esta mesma função em termos da distribuição da espessura \mathbf{h} . Para

isso, o problema minimax identifica a pior configuração de carregamento \mathbf{f} , e a melhor distribuição de espessura \mathbf{h} para essa configuração de carregamento.

A Seção 5.1 apresenta alguns detalhes da implementação numérica desses dois níveis de otimização e o Capítulo 4 apresenta a discretização da viga ou arco baseado no Método dos Elementos Finitos.

3.1 Otimização de Vigas Utilizando o Método Minimax

Algumas vigas de Euler-Bernoulli foram otimizadas para a máxima energia de deformação sujeita a carregamentos incertos. As vigas possuem seção transversal retangular, espessura variável (altura da seção variável) e largura constante. Para evitar que o algoritmo forneça uma espessura irreal zero, devido a atuação de baixos esforços, é considerada uma viga base de espessura previamente determinada. Durante a otimização, espessuras extras são adicionadas às fibras superiores e inferiores da viga base, como se fossem reforços. A Figura 3-1 mostra o esquema de um exemplo explicativo que descreve a viga base e os reforços.

O modelo de viga foi obtido por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF). Cada elemento admitiu variação da espessura linear por partes.

O espaço de cargas admissíveis também foi linear por partes. Para isso, foram utilizadas algumas funções base em determinadas regiões ao longo da viga, como pode ser visto no exemplo explicativo da Figura 3-2.

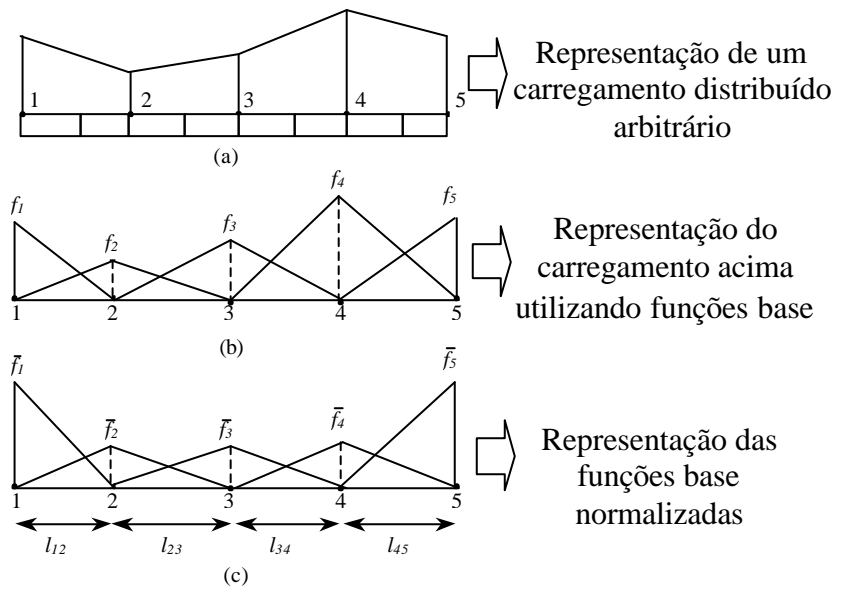


FIGURA 3-2 - Discretização da distribuição de carregamento.

A Figura 3-2 apresenta um carregamento arbitrário utilizando cinco casos de carga ou funções base (f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5). A Figura 3-2(a) apresenta uma distribuição arbitrária de cargas, que será utilizada no processo de otimização. Essa distribuição de carregamentos é convertida em uma distribuição aproximada e linear por partes, Figura 3-2(b), utilizando as funções base, Figura 3-2(c). Deseja-se que as amplitudes de f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 coincidam com a posição dos nós discretizados para simplificar o algoritmo.

A conversão do carregamento deve seguir a expressão,

$$f_i = R_i \bar{f}_i \quad (3-7)$$

onde \bar{f}_i é um fator de escala e $R_i \in [0,1]$ é um parâmetro de proporcionalidade que mede a contribuição de cada função base. \bar{f}_i considera que a área de todos os triângulos somadas terão o mesmo valor que $\bar{f}L$. \bar{f} é o carregamento uniforme equivalente cuja resultante tem a mesma magnitude da resultante do carregamento original, e L é o comprimento total da viga. As expressões de \bar{f}_i são dadas pela Equação (3-8).

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= \frac{2\bar{f}L}{l_{12}} \\ \bar{f}_i &= \frac{2\bar{f}L}{l_{i-1,i} + l_{i,i+1}} \quad \text{para } 1 < i < m \\ \bar{f}_m &= \frac{2\bar{f}L}{l_{m-1,m}}\end{aligned}\tag{3-8}$$

R_i define a contribuição de cada função base, mantendo a mesma carga resultante $\bar{f}L$. A somatória de todos R_i 's deve estar de acordo com a Equação (3-9),

$$\sum_{i=1}^n R_i = 1\tag{3-9}$$

Uma distribuição de cargas pode ser representada pelas funções base como uma combinação convexa, desde que respeite a Equação (3-9), ou uma única função pode ser aplicada individualmente. A Figura 3-2(b) mostra um caso onde há uma combinação de todos os carregamentos de maneira a respeitar a Equação (3-9). A força resultante da combinação das cargas é igual à resultante do carregamento original da Figura 3-2(a). O formato da distribuição do carregamento tem forma aproximada, isto é, a distribuição vista na Figura 3-2(b) tenta ser semelhante a da Figura 3-2(a).

Para uma distribuição i , a força resultante F_i é dada por:

$$F_i = R_i \bar{f}_i L\tag{3-10}$$

onde R_i é o parâmetro de proporcionalidade, já apresentado, que descreve a forma da distribuição do carregamento. A técnica minimax empregada fornece a pior configuração de carga em termos de R_i . Embora \bar{f} seja arbitrário, neste trabalho é igualado a $1/L$ para fins de simulação numérica, de modo que a força unitária resultante seja $\bar{f}L = 1$ N.

O parâmetro R_i pode variar livremente durante o processo de otimização. Atendendo a condição da Equação (3-9) e sendo positivo, os R_i 's compõem uma combinação convexa e levam à normalização do estado de referência. Isto é, por meio da Equação

(3-7) é possível obter a configuração de referência, apresentada na Figura 3-2(a), a partir da configuração normalizada, apresentada na Figura 3-2(c).

Considera-se uma outra restrição, além da declarada na Equação (3-9), relacionada com o volume da viga, que permanece constante durante o processo de otimização. A Equação (3-11) apresenta a segunda restrição em termos da espessura.

$$\frac{h_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} h_i + \frac{h_n}{2} = (n-1)h \quad (3-11)$$

onde n é o número de nós e h é uma espessura uniforme equivalente da viga, no caso da viga inteira ter espessura constante e elementos com mesmo comprimento.

As Equações (3-10) e (3-11) limitam o problema de otimização declarado na Equação (2-28).

Os exemplos, apresentados nos Capítulos 5 e 6, tratam de vigas e arcos com diferentes números de funções base, otimizados para a máxima energia de deformação. O material utilizado é o alumínio Al 7075 T651 (MIL HDBK 5H, Tabela 3.7.4.0_(b1), 1998) com módulo de elasticidade de 70 GPa, coeficiente de Poisson de 0.33 e densidade de 2.8 g/cm³. A viga ou arco são simplesmente apoiados em ambas extremidades.

CAPÍTULO 4

DISCRETIZAÇÃO DE VIGAS E ARCOS DE ESPESSURA VARIÁVEL

O presente Capítulo trata da obtenção de elementos binodais empregados na discretização de vigas e arcos de espessura variável e sujeitos a um carregamento linear por partes, por meio do Método dos Elementos Finitos. Especificamente são obtidos a matriz de rigidez e o vetor de carregamento equivalente nodal, considerando a atuação dos esforços normais, axiais e de flexão. Também é obtida uma matriz de transformação de coordenadas para o caso da discretização de arcos.

4.1 Método dos Elementos Finitos para Elementos de Viga

A equação de equilíbrio para o Método dos Elementos Finitos para o caso estático é expressa por (Bathe, 1976; Desai, 1979):

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{f} \quad (4-1)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{q} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{f} é o vetor de carregamentos.

No estado de equilíbrio da estrutura, pode-se definir C como o trabalho W realizado pelas forças externas (Bathe, 1976). Utilizando o Método dos Elementos Finitos, C pode ser representado pela Equação (4-2):

$$C = W = \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad (4-2)$$

A seguir, é apresentada uma breve discussão sobre os conceitos de energia envolvidos neste trabalho.

No contexto dos elementos finitos, a energia de deformação U pode ser calculada pela Equação (4-3) (Bathe, 1976),

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4-3)$$

Substituindo a Equação (4-1) na Equação (4-3) tem-se,

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad (4-4)$$

e logo,

$$U - W = -\frac{1}{2}W \Leftrightarrow W = 2U \quad (4-5)$$

A coenergia potencial V pode ser definida como a energia complementar do sistema e escrita em função dos carregamentos, sendo expressa pela Equação (4-6),

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (4-6)$$

Para o regime linear, a energia de deformação U é igual a coenergia potencial V , como pode ser visto na Figura 4-1.

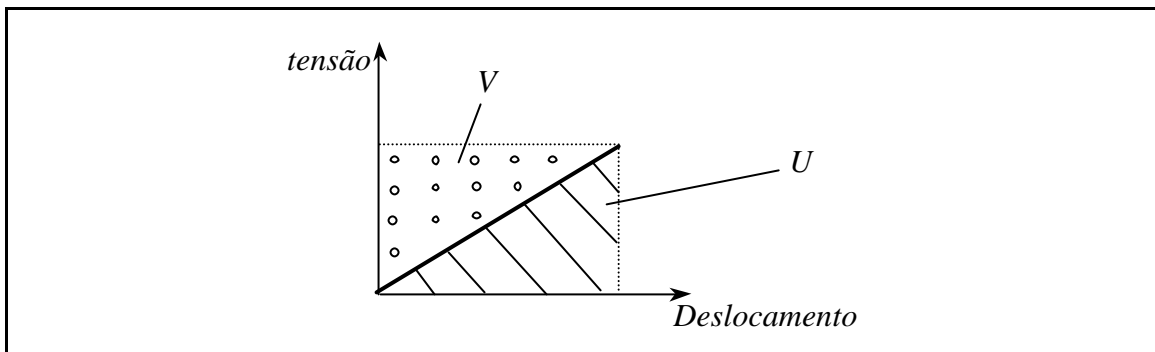


FIGURA 4-1- Esquema mostrando a igualdade dos módulos da energia de deformação e coenergia potencial.

A Figura 4-1 mostra o gráfico força-deslocamento de um sistema linear elástico, onde se pode notar que as energias U e V são iguais pelo fato das áreas serem iguais.

Uma vez que $U=V$, e utilizando as Equações (4-2) e (4-5), pode-se dizer que $C=2U=2V$.

C foi chamado de energia de deformação ao longo deste trabalho, para tornar mais simples a compreensão. Apesar dessa convenção, na realidade C é o dobro da energia de deformação ou coenergia potencial, como visto acima.

Para implementar o problema da maximização da energia de deformação (primeira parte da otimização) é necessário conhecer a matriz de rigidez \mathbf{K} da estrutura e o vetor de carregamentos \mathbf{f} . Para isso foi utilizado um elemento de viga baseado na teoria de Euler-Bernoulli, com aplicação de carga axial, de cisalhamento e momento fletor.

Foram considerados para cada nó três deslocamentos e seus respectivos esforços: deslocamento axial (u_i) e esforço axial (N_i), deslocamento de translação transversal (w_i) e esforço de cisalhamento (V_i), deslocamento de rotação (θ_i) e o momento fletor (M_i). A Figura 4-2 apresenta o elemento viga com os deslocamentos e esforços internos.

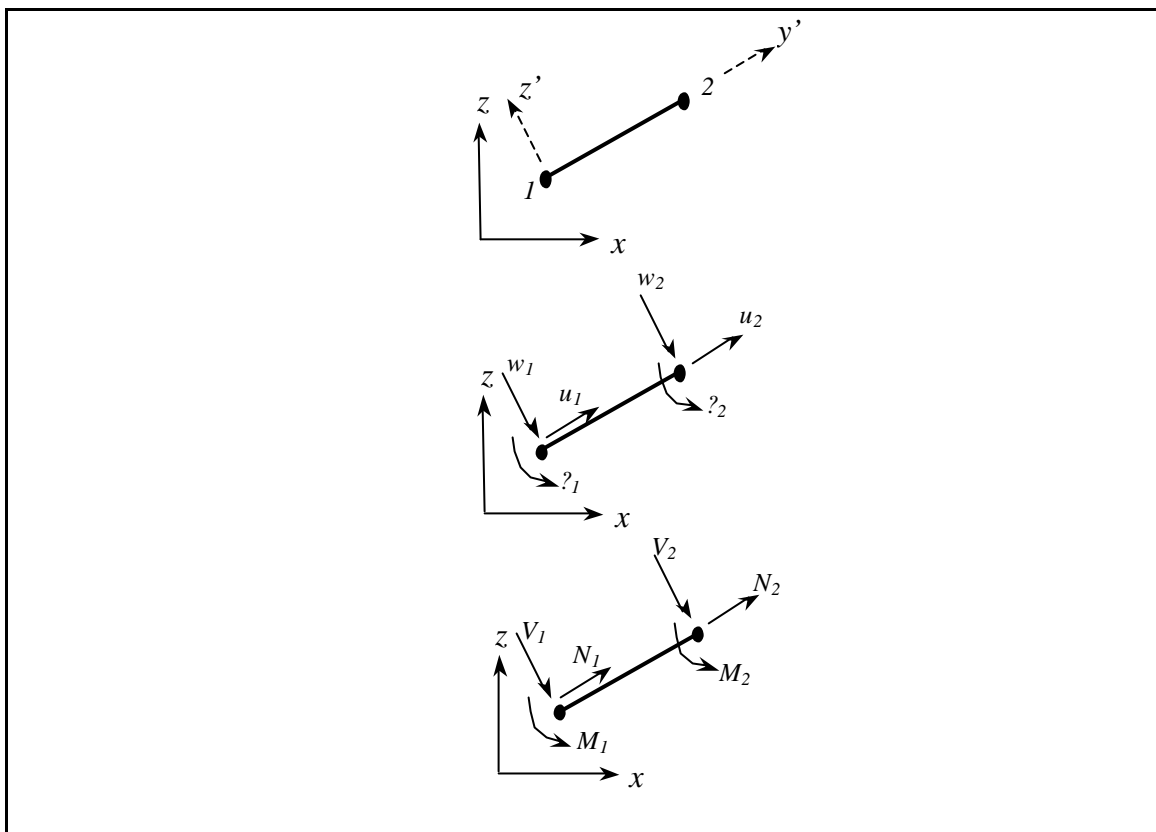


FIGURA 4-2 - Elemento de viga, mostrando os deslocamentos e esforços internos.

Na Figura acima vê-se um elemento de barra com dois nós e três graus de liberdade elásticos para cada nó. Também pode ser visto um sistema de eixos local ($x'-z'$) do elemento e um sistema de eixos global ($x-z$).

Uma vez que o elemento de barra tem espessura variável, a função $h(x)$ referente à variação da altura da seção transversal do elemento é mostrada pela Equação (4-7).

$$h(x) = \frac{x}{l}(h_2 - h_1) + h_1 \quad (4-7)$$

onde l é o comprimento do elemento e h_1 e h_2 as alturas do elemento (Figura 4-3).

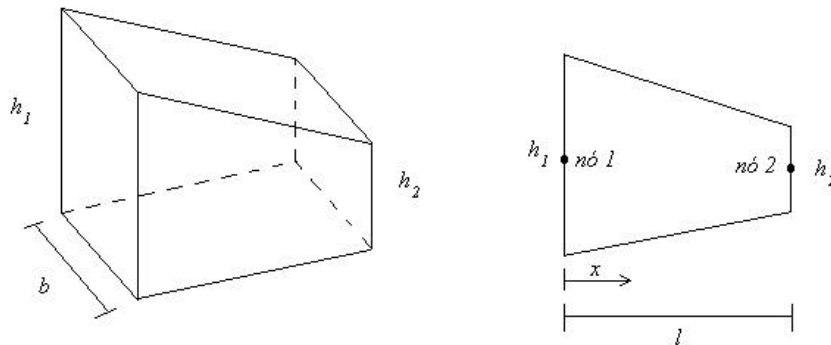


FIGURA 4-3 - Elemento de altura variável.

A inércia da seção transversal é expressa por:

$$I(x) = \frac{b[h(x)]^3}{12} \quad (4-8)$$

onde b é a largura da base do elemento.

O fato da viga ter espessura variável tornará diferente a matriz de rigidez que normalmente é encontrada na literatura. A matriz de rigidez do elemento será escrita em função de suas alturas variáveis.

Para efeito de simplificação, os elementos da matriz de rigidez são determinados separadamente. Na Seção 4.2, encontra-se a obtenção dos componentes associados ao esforço de cisalhamento e flexão, e na Seção 4.3, os elementos referentes ao esforço axial.

4.2 Obtenção dos Elementos da Matriz de Rigidez Devido ao Esforço de Cisalhamento e Flexão

Utilizando a hipótese de Navier para flexão de vigas (a seção plana continua plana, após a flexão) a energia potencial total \mathbf{p}_p é dada pela expressão (viga de Bernoulli):

$$\mathbf{p}_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - V_1 w_1 - V_2 w_2 - M_1 \mathbf{q}_1 - M_2 \mathbf{q}_2 \quad (4-9)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e $I(x)$ é o momento de inércia de área da viga.

As relações entre as rotações e as translações são dadas por:

$$\mathbf{q}_1 = - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} \quad (4-10)$$

$$\mathbf{q}_2 = - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} \quad (4-11)$$

O sinal negativo significa que uma rotação positiva \mathbf{q}_i causa uma deflexão negativa w_i .

O deslocamento elástico $w(x)$ pode ser escrito utilizando o polinômio Hermitiano (Bathe, 1976; Desai, 1979) que tem a forma:

$$w(x) = (1 - 3x^2 + 2x^3)w_1 + (3x^2 - 2x^3)w_2 - (x^3 - 2x^2 + x)l\mathbf{q}_1 - (x^3 - x^2)l\mathbf{q}_2 \quad (4-12)$$

ou,

$$w(x) = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 - 3x^2 + 2x^3 & -(x^3 - 2x^2 + x)l & 3x^2 - 2x^3 & -(x^3 - x^2)l \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{array} \right\} \quad (4-13)$$

onde

$$\mathbf{x} = \frac{x}{l} \quad (4-14)$$

Os dois vetores da Equação (4-13) podem ser denominados respectivamente por \mathbf{n}^T e \mathbf{q} , simplificando $w(x)$,

$$w(x) = \mathbf{n}^T \mathbf{q} \quad (4-15)$$

onde

$$\mathbf{n}^T = \left\{ 1 - 3x^2 + 2x^3 \quad -(x^3 - 2x^2 + x)l \quad 3x^2 - 2x^3 \quad -(x^3 - x^2)l \right\} \quad (4-16)$$

e

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4-17)$$

O uso do polinômio Hermitiano evita o manuseio com sistemas de equações diferenciais parciais. O deslocamento $w(x)$ é então escrita em termos de funções de forma \mathbf{n} e deslocamentos nodais \mathbf{q} , como mostrado na Equação (4-15).

Diferenciando-se $w(x)$ duas vezes em relação à x , tem-se:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \left[(12x - 6)w_1 + (6 - 12x)w_2 + (4 - 6x)l\mathbf{q}_1 + (2 - 6x)l\mathbf{q}_2 \right] \quad (4-18)$$

ou,

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \left\{ \begin{matrix} 12x - 6 & (4 - 6x)l \\ 6 - 12x & (2 - 6x)l \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 \mathbf{n}^T}{dx^2} \mathbf{q} \quad (4-19)$$

sendo,

$$\frac{d^2 \mathbf{n}^T}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \left\{ 12x - 6 \quad (4 - 6x)l \quad 6 - 12x \quad (2 - 6x)l \right\} \quad (4-20)$$

A energia potencial total \mathbf{p}_p dada pela Equação (4-9) ainda pode ser dada pela expressão:

$$\mathbf{p}_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 \mathbf{n}^T}{dx^2} \mathbf{q} \right)^2 dx - V_1 w_1 - V_2 w_2 - M_1 \mathbf{q}_1 - M_2 \mathbf{q}_2 \quad (4-21)$$

aplicando-se o conjugado transposto nos vetores elevados ao quadrado tem-se,

$$\mathbf{p}_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \mathbf{q}^T \left(\frac{d^2 \mathbf{n}^T}{dx^2} \right)^T \frac{d^2 \mathbf{n}}{dx^2} \mathbf{q} dx - V_1 w_1 - V_2 w_2 - M_1 \mathbf{q}_1 - M_2 \mathbf{q}_2 \quad (4-22)$$

Substituindo-se a Equação (4-20) em \mathbf{p}_p , Equação (4-22) e resolvendo-se a integral obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_p = \frac{Eb}{2} & \left(\frac{7bh_1^3 w_1^2}{20l^3} + \frac{3bh_1^2 h_2 w_1^2}{20l^3} + \frac{3bh_1 h_2^2 w_1^2}{20l^3} + \frac{7bh_2^3 w_1^2}{20l^3} - \frac{7bh_1^3 w_1 w_2}{10l^3} + \right. \\
& \frac{3bh_1^2 h_2 w_1 w_2}{10l^3} - \frac{3bh_1 h_2^2 w_1 w_2}{10l^3} - \frac{7bh_2^3 w_1 w_2}{10l^3} + \frac{7bh_1^3 w_2^2}{20l^3} + \frac{3bh_1^2 h_2 w_2^2}{20l^3} + \\
& \frac{3bh_1 h_2^2 w_2^2}{20l^3} + \frac{7bh_2^3 w_2^2}{20l^3} - \frac{bh_1^3 w_1 \mathbf{q}_1}{2l^2} - \frac{bh_1^2 h_2 w_1 \mathbf{q}_1}{5l^2} - \frac{bh_1 h_2^2 w_1 \mathbf{q}_1}{10l^2} - \frac{bh_2^3 w_1 \mathbf{q}_1}{5l^2} + \\
& \frac{bh_1^3 w_2 \mathbf{q}_1}{2l^2} + \frac{bh_1^2 h_2 w_2 \mathbf{q}_1}{5l^2} + \frac{bh_1 h_2^2 w_2 \mathbf{q}_1}{10l^2} + \frac{bh_2^3 w_2 \mathbf{q}_1}{5l^2} + \frac{11bh_1^3 \mathbf{q}_1}{60l} + \frac{bh_1^2 h_2 \mathbf{q}_1^2}{12l} + \\
& \frac{bh_1 h_2^2 \mathbf{q}_1^2}{30l} + \frac{bh_2^3 \mathbf{q}_1^2}{30l} - \frac{bh_1^3 w_1 \mathbf{q}_2}{5l^2} - \frac{bh_1^2 h_2 w_1 \mathbf{q}_2}{10l^2} - \frac{bh_1 h_2^2 w_1 \mathbf{q}_2}{5l^2} - \frac{bh_2^3 w_1 \mathbf{q}_2}{2l^2} + \\
& \frac{bh_1^3 w_2 \mathbf{q}_2}{5l^2} + \frac{bh_1^2 h_2 w_2 \mathbf{q}_2}{10l^2} + \frac{bh_1 h_2^2 w_2 \mathbf{q}_2}{5l^2} + \frac{bh_2^3 w_2 \mathbf{q}_2}{2l^2} + \frac{2bh_1^3 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{15l} + \\
& \frac{bh_1^2 h_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{30l} + \frac{bh_1 h_2^2 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{30l} + \frac{2bh_2^3 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{15l} + \frac{bh_1^3 \mathbf{q}_2^2}{30l} + \frac{bh_1^2 h_2 \mathbf{q}_2^2}{30l} + \\
& \left. \frac{bh_1 h_2^2 \mathbf{q}_2^2}{12l} + \frac{11bh_2^3 \mathbf{q}_2^2}{60l} \right) - V_1 w_1 - V_2 w_2 - M_1 \mathbf{q}_1 - M_2 \mathbf{q}_2 \quad (4-23)
\end{aligned}$$

Diferenciando-se a Equação acima parcialmente em relação aos deslocamentos e igualando a zero, obtém-se os elementos referentes à Equação abaixo:

$$\mathbf{Kq} - \mathbf{f} = 0 \quad (4-24)$$

ou,

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4-25)$$

Os elementos referentes à rigidez à flexão e ao cisalhamento são:

$$\mathbf{K}_{flex_cis} = \frac{Eb}{2l^3} \begin{bmatrix} \left(\frac{7h_1^3 + 3h_1^2h_2 + 3h_1h_2^2 + 7h_2^3}{10} \right) & -l \left(\frac{h_1^3}{2} + \frac{h_1^2h_2}{5} + \frac{h_1h_2^2}{10} + \frac{h_2^3}{5} \right) & - \left(\frac{7h_1^3 + 3h_1^2h_2 + 3h_1h_2^2 + 7h_2^3}{10} \right) & -l \left(\frac{h_1^3}{5} + \frac{h_1^2h_2}{10} + \frac{h_1h_2^2}{5} + \frac{h_2^3}{2} \right) \\ -l \left(\frac{h_1^3}{2} + \frac{h_1^2h_2}{5} + \frac{h_1h_2^2}{10} + \frac{h_2^3}{5} \right) & l^2 \left(\frac{11}{30}h_1^3 + \frac{h_1^2h_2}{6} + \frac{h_1h_2^2}{15} + \frac{h_2^3}{15} \right) & l \left(\frac{h_1^3}{2} + \frac{h_1^2h_2}{5} + \frac{h_1h_2^2}{10} + \frac{h_2^3}{5} \right) & l^2 \left(\frac{2}{15}h_1^3 + \frac{h_1^2h_2}{30} + \frac{h_1h_2^2}{30} + \frac{2}{15}h_2^3 \right) \\ - \left(\frac{7h_1^3 + 3h_1^2h_2 + 3h_1h_2^2 + 7h_2^3}{10} \right) & l \left(\frac{h_1^3}{2} + \frac{h_1^2h_2}{5} + \frac{h_1h_2^2}{10} + \frac{h_2^3}{5} \right) & \left(\frac{7h_1^3 + 3h_1^2h_2 + 3h_1h_2^2 + 7h_2^3}{10} \right) & l \left(\frac{h_1^3}{5} + \frac{h_1^2h_2}{10} + \frac{h_1h_2^2}{5} + \frac{h_2^3}{2} \right) \\ -l \left(\frac{h_1^3}{5} + \frac{h_1^2h_2}{10} + \frac{h_1h_2^2}{5} + \frac{h_2^3}{2} \right) & l^2 \left(\frac{2}{15}h_1^3 + \frac{h_1^2h_2}{30} + \frac{h_1h_2^2}{30} + \frac{2}{15}h_2^3 \right) & l \left(\frac{h_1^3}{5} + \frac{h_1^2h_2}{10} + \frac{h_1h_2^2}{5} + \frac{h_2^3}{2} \right) & l^2 \left(\frac{h_1^3}{15} + \frac{h_1^2h_2}{15} + \frac{h_1h_2^2}{6} + \frac{11}{30}h_2^3 \right) \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

Esquemáticamente, \mathbf{K}_{flex_cis} pode ser representada, no sistema de eixos locais, por:

$$\mathbf{K}_{flex_cis} = \begin{bmatrix} k_{fc11} & k_{fc12} & k_{fc13} & k_{fc14} \\ k_{fc21} & k_{fc22} & k_{fc23} & k_{fc24} \\ k_{fc31} & k_{fc32} & k_{fc33} & k_{fc34} \\ k_{fc41} & k_{fc42} & k_{fc43} & k_{fc44} \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

4.3 Obtenção dos elementos da matriz de rigidez devido ao esforço axial

A energia elástica U_e devido à rigidez axial pode ser dada pela expressão (Bathe, 1976).

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{s} \mathbf{e} dv \quad (4-30)$$

onde, s é tensão e e deformação, sendo que

$$\mathbf{s} = E\mathbf{e} \quad (4-31)$$

e logo,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v E\mathbf{e}^2 dv \quad (4-32)$$

Considerando que a deformação é devida ao deslocamento u em relação ao eixo axial tem-se:

$$\mathbf{e} = \frac{du}{dx} \quad (4-33)$$

e logo,

$$\mathbf{e} = \frac{du}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dx} \quad (4-34)$$

Substituindo a Equação (4-33) na Equação (4-32) tem-se,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v E \frac{du^2}{dx} dv \quad (4-35)$$

Considerando que a largura da base da seção da viga (b) é constante, será retirada da integral do volume,

$$U_e = \frac{1}{2} b \int_l \int_h E \frac{du^2}{dx} dz dx \quad (4-36)$$

Uma vez que $E \frac{du^2}{dx}$ não varia na dimensão da altura, será submetido somente à integral da dimensão do comprimento,

$$U_e = \frac{1}{2} b \int_l E \frac{du^2}{dx} \int_h dz dx \quad (4-37)$$

A integral $\int_h dz$ é a própria variação de altura $h(x)$ da Equação (4-7),

$$U_e = \frac{1}{2} b \int_l E \frac{du^2}{dx} \left(\frac{x}{l} (h_2 - h_1) + h_1 \right) dx \quad (4-38)$$

A Figura 4-4 mostra as coordenadas do elemento unidimensional em termos de x e $?$.

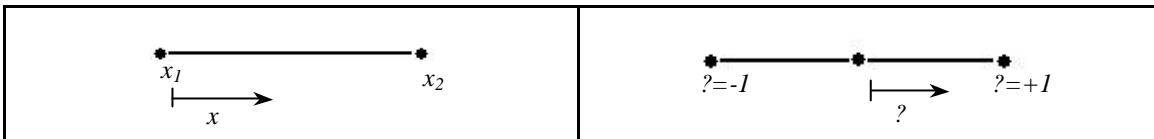


FIGURA 4-4 - Coordenadas axiais em termos de x e $?$.

A relação entre x e $?$ é:

$$\mathbf{x} = \frac{2}{x_2 - x_1} (x - x_1) - 1 \quad (4-39)$$

e logo,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1} \quad (4-40)$$

As funções de forma para a rigidez axial de elemento unidimensional são dadas por (Bathe, 1976):

$$N_1(\mathbf{x}) = \frac{1-\mathbf{x}}{2}, \quad N_2(\mathbf{x}) = \frac{1+\mathbf{x}}{2} \quad (4-41)$$

O deslocamento axial pode ser expresso por,

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 \quad (4-42)$$

ou,

$$u = \frac{1-\mathbf{x}}{2} q_1 + \frac{1+\mathbf{x}}{2} q_2 \quad (4-43)$$

derivando em relação a \mathbf{x} tem-se,

$$\frac{du}{d\mathbf{x}} = \frac{-q_1 + q_2}{2} \quad (4-44)$$

Substituindo as Equações (4-40) e (4-44) na Equação (4-34) tem-se,

$$\mathbf{e} = \frac{du}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dx} = \left(\frac{-q_1 + q_2}{2} \right) \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right) = \frac{-q_1 + q_2}{x_2 - x_1} = \frac{-q_1 + q_2}{l} \quad (4-45)$$

que pode ser expresso por.

$$\mathbf{e} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (4-46)$$

onde \mathbf{B} é a matriz deformação-deslocamento do elemento,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

e,

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4-48)$$

Substituindo a Equação (4-46) na Equação (4-38),

$$U_e = \frac{1}{2} b \int_l E (\mathbf{B} \mathbf{q})^2 \left(\frac{x}{l} (h_2 - h_1) + h_1 \right) dx \quad (4-49)$$

aplicando-se o conjugado transposto no produto elevado ao quadrado tem-se,

$$U_e = \frac{1}{2} b \int_l \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \mathbf{q} \left(\frac{x}{l} (h_2 - h_1) + h_1 \right) dx \quad (4-50)$$

Uma vez que $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x)$, não dependendo da posição, tem-se,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T b \int_l \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \left(\frac{x}{l} (h_2 - h_1) + h_1 \right) dx \cdot \mathbf{q} \quad (4-51)$$

Como \mathbf{B} é constante, pode ser retirado da integral,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T b \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \int_l \left(\frac{x}{l} (h_2 - h_1) + h_1 \right) dx \cdot \mathbf{q} \quad (4-52)$$

A integral da variação da altura ao longo do comprimento é,

$$\int_l \left(\frac{x}{l} (h_2 - h_1) + h_1 \right) dx = \frac{l}{2} (h_2 - h_1) + h_1 \cdot l \quad (4-53)$$

Substituindo as Equações (4-47) e (4-53) na Equação (4-50) tem-se,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T b \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{l}{2} (h_2 - h_1) + h_1 l \right) \mathbf{q} \quad (4-54)$$

e logo,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T b E \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{(h_2 - h_1)}{2} + h_1 \right) \mathbf{q} \quad (4-55)$$

que pode ser escrita na forma,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_{axial} \mathbf{q} \quad (4-56)$$

sendo que,

$$\mathbf{K}_{axial} = bE \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{(h_2 - h_1)}{2} + h_1 \right) \quad (4-57)$$

logo,

$$\mathbf{K}_{axial} = \begin{bmatrix} \frac{bE}{l} \left(\frac{h_2 - h_1}{2} + h_1 \right) & -\frac{bE}{l} \left(\frac{h_2 - h_1}{2} + h_1 \right) \\ -\frac{bE}{l} \left(\frac{h_2 - h_1}{2} + h_1 \right) & \frac{bE}{l} \left(\frac{h_2 - h_1}{2} + h_1 \right) \end{bmatrix} \quad (4-58)$$

Esquemáticamente \mathbf{K}_{flex_cis} pode ser representada, em sistema de eixos locais, por:

$$\mathbf{K}_{axial} = \begin{bmatrix} k_{a11} & k_{a12} \\ k_{a21} & k_{a22} \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

A matriz de rigidez do elemento de viga submetido à flexão, carga de cisalhamento e carga axial tem a seguinte forma no sistema local de coordenadas:

$$\mathbf{K}'_{elemento} = \begin{bmatrix} k_{a11} & 0 & 0 & k_{a12} & 0 & 0 \\ 0 & k_{fc11} & k_{fc12} & 0 & k_{fc13} & k_{fc14} \\ 0 & k_{fc21} & k_{fc22} & 0 & k_{fc23} & k_{fc24} \\ k_{a21} & 0 & 0 & k_{a22} & 0 & 0 \\ 0 & k_{fc31} & k_{fc32} & 0 & k_{fc33} & k_{fc34} \\ 0 & k_{fc41} & k_{fc42} & 0 & k_{fc43} & k_{fc44} \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

de forma a satisfazer a condição de simetria conforme abaixo,

$$\mathbf{K}'_{elemento} = \begin{bmatrix} k_{a11} & 0 & 0 & k_{a12} & 0 & 0 \\ & k_{fc11} & k_{fc12} & 0 & k_{fc13} & k_{fc14} \\ & & k_{fc22} & 0 & k_{fc23} & k_{fc24} \\ & & & k_{a22} & 0 & 0 \\ & & & & k_{fc33} & k_{fc34} \\ & & & & & k_{fc44} \end{bmatrix} \quad (4-61)$$

simétrica

4.4 Matriz de Transformação de Coordenada

Defini-se o plano $x-z$ como o sistema de coordenada global, e o plano $x'-z'$ como o sistema de coordenada local do elemento, conforme a Figura 4-5.

Para o caso da viga em arco faz-se necessário multiplicar a matriz de rigidez do elemento por uma matriz de transformação de coordenadas, passando dos eixos do sistema local para os eixos do sistema global.

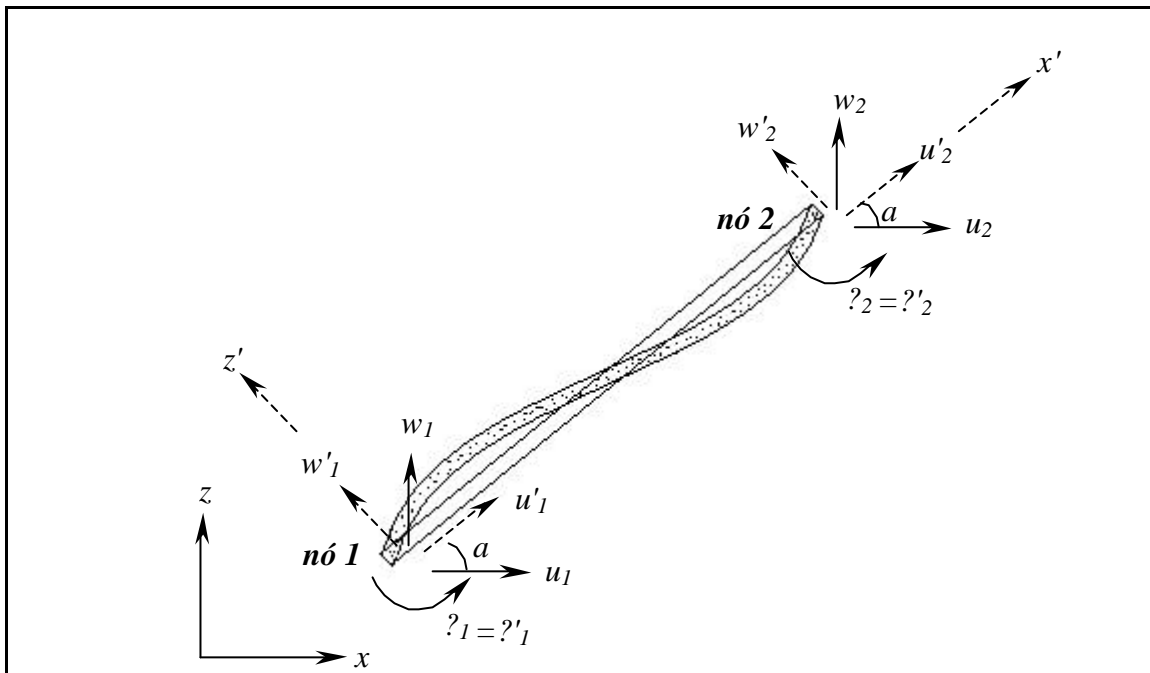


FIGURA 4-5 - Transformação de coordenadas do sistema de eixos local para o global.

A Figura 4-5 mostra o sistema de eixos local representado pelas setas tracejadas e os eixos do sistema global representado pelas setas cheias.

Considerando positiva a rotação indicada no sistema local $x'-z'$, os deslocamentos do nó 1 sistema local, escritos em coordenadas do sistema global são dados pela transformação de coordenadas:

$$u'_1 = u_1 \cos a + w_1 \operatorname{sen} a \quad (4-62)$$

$$w'_1 = -u_1 \operatorname{sen} a + w_1 \cos a \quad (4-63)$$

$$\theta'_1 = \theta_1 \quad (4-64)$$

Os deslocamentos locais do nó 2 são obtidos de modo similar.

Portanto a matriz de transformação \mathbf{M}_t de coordenadas terá a forma:

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-65)$$

de modo que os deslocamentos locais serão expressos por:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{L} \mathbf{q} \quad (4-66)$$

onde \mathbf{q}' representa os deslocamentos no sistema de coordenadas locais e \mathbf{q} os deslocamentos no sistema de coordenadas globais, ou seja, a transformação de coordenadas permite representar os deslocamentos no sistema local, escritos em coordenadas do sistema global.

A matriz de rigidez da Equação (4-60) terá a seguinte forma no sistema de coordenadas globais (Bathe, 1976),

$$\mathbf{K}_{elemento} = \mathbf{L}^T \mathbf{K}'_{elemento} \mathbf{L} \quad (4-67)$$

4.5 Vetor de Carregamentos

Para efeito de cálculo numérico, o carregamento foi considerado como linearmente distribuído ao longo do elemento, e convertido em carregamento nodal, composto de uma força e um momento aplicados em cada nó (Figura 4-6). O carregamento poderia ter uma variação quadrática, por exemplo, porém foi escolhida uma variação linear por partes pela facilidade de implementação e por representar de maneira satisfatória uma carga variável, para o caso do problema de otimização apresentado neste trabalho.

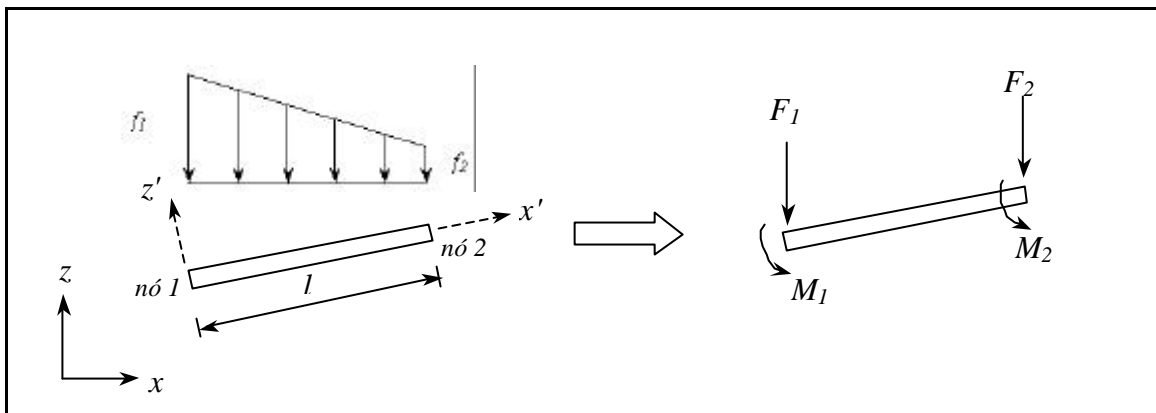


FIGURA 4-6 - Conversão do carregamento distribuído em carregamento nodal.

Na Figura 4-6 vê-se a transformação do carregamento linearmente distribuído em carregamentos equivalentes nodais. A Figura também mostra que os carregamentos aplicados coincidem com os eixos do sistema global $x-z$.

O vetor de carregamentos nodais \mathbf{f} foi obtido pela equação F (Equação 4-68), integrando-se ao longo do comprimento a função de carregamento distribuído linear por partes multiplicada pelo deslocamento elástico $w(x)$ da Equação (4-13).

$$F = \int_0^l f(x) w(x) dx \quad (4-68)$$

onde $f(x)$ é a função de carregamento distribuído linear por partes,

$$f(x) = f_1(1-x) + f_2x \quad (4-69)$$

e,

$$x = \frac{x}{l} \quad (4-70)$$

A Equação (4-68) pode ser expressa por:

$$F = \int_0^l (f_1(1-x) + f_2x) \left((1-3x^2 + 2x^3)w_1 + (3x^2 - 2x^3)w_2 - (x^3 - 2x^2 + x)lq_1 - (x^3 - x^2)lq_2 \right) dx \quad (4-71)$$

O resultado da integral é,

$$F = \frac{7f_1lw_1}{20} + \frac{3f_2lw_1}{20} + \frac{3f_1lw_2}{20} + \frac{7f_2lw_2}{20} - \frac{f_1l^2q_1}{20} - \frac{f_2l^2q_1}{30} + \frac{f_1l^2q_2}{30} + \frac{f_2l^2q_2}{20} \quad (4-72)$$

O vetor de carregamentos nodais \mathbf{f} foi obtido pela pelas derivadas parciais de F em relação aos deslocamentos nodais, como mostra a Equação(4-73):

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial w_1} \\ \frac{\partial F}{\partial q_1} \\ \frac{\partial F}{\partial w_2} \\ \frac{\partial F}{\partial q_2} \end{array} \right\} \quad (4-73)$$

Substituindo as derivadas parciais, obtém-se,

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{7f_1l}{20} + \frac{3f_2l}{20} \\ -l \left(\frac{f_1l}{20} + \frac{f_2l}{30} \right) \\ \frac{3f_1l}{20} + \frac{7f_2l}{20} \\ l \left(\frac{f_1l}{30} + \frac{f_2l}{20} \right) \end{array} \right\} \quad (4-74)$$

onde \mathbf{f} está representada no sistema global de coordenadas.

Como não há carregamento aplicado ao eixo x global, as componentes nessa direção serão zero de modo que o vetor de carregamento tem a forma,

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{7f_1l}{20} + \frac{3f_2l}{20} \\ -l \left(\frac{f_1l}{20} + \frac{f_2l}{30} \right) \\ 0 \\ \frac{3f_1l}{20} + \frac{7f_2l}{20} \\ l \left(\frac{f_1l}{30} + \frac{f_2l}{20} \right) \end{array} \right\} \quad (4-75)$$

O vetor de cargas \mathbf{f} da Equação (4-75) e a matriz de rigidez \mathbf{K} da Equação (4-67) foram utilizados na implementação numérica do método de otimização.

CAPÍTULO 5

PARÂMETROS UTILIZADOS NA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

O objetivo do presente Capítulo é discutir alguns parâmetros utilizados pelo algoritmo durante o processo de otimização.

É apresentado o parâmetro da incerteza de ocorrência do carregamento uniforme, bem como outros parâmetros como a altura do arco, o número de nós, o número de carregamentos e a razão do volume da viga base pelo volume de material a ser distribuído. Uma discussão para o caso das cargas não serem simétricas e a ocorrência de cargas com sentido contrário ao adotado também foi acrescentada.

O cenário utilizado no Capítulo 6 e uma explicação sobre o programa computacional também são apresentados.

5.1 Explicação Sobre o Programa Computacional

A solução do problema de otimização inicia com o acesso a 500 000 projetos aleatórios, ou seja, 500 000 distribuições de espessuras, de modo a reduzir o risco de convergência a pontos ótimos locais. Trata-se da parte “*max*” da otimização, isto é, obter f , Equação (5-1).

$$f = \max_{\mathbf{f}} C \quad (5-1)$$

Dentre as máximas energias de deformação dos 500 000 projetos, escolhe-se o projeto que tem a menor. Isto significa que o projeto escolhido atende o pior caso de carga e fornece a melhor distribuição de espessura.

Esse melhor projeto, ou ponto aleatório, é utilizado para iniciar a busca do ponto mínimo, por meio do método de Powell (Powell, 1964). Trata-se da parte “*min*” da otimização, Equação (5-2).

$$\min_{\mathbf{h}} f \quad (5-2)$$

O objetivo dessa segunda parte é encontrar a distribuição de espessuras que forneça a menor energia de deformação.

A vantagem do método de Powell é o baixo esforço computacional e a sua simplicidade quando comparado com outros métodos similares. Também sua convergência é confiável e rápida e não é necessário o cálculo de gradientes (Powell, 1964). A otimização termina quando a diferença relativa entre o valor prévio e o valor presente de f não excede 0.0001.

Como já citado, pelo fato do método de Powell convergir para mínimos locais, foi utilizado um grande número de projetos aleatórios iniciais para a escolha do melhor ponto de partida. Além disso, a rotina de busca foi executada várias vezes, para fins de checagem, e os resultados obtidos sempre foram muito similares.

O esquema abaixo mostra a seqüência da otimização adotada neste trabalho (Figura 5-1).

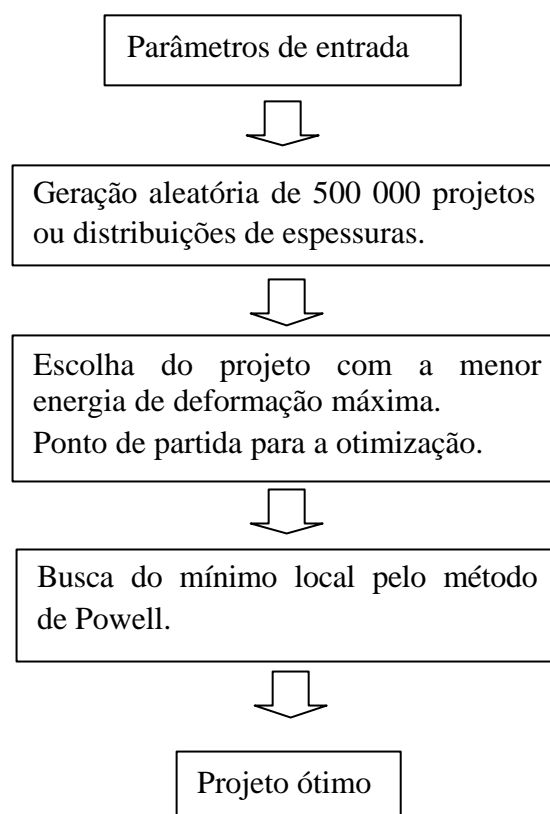


FIGURA 5-1 - Fluxograma representando os passos da otimização.

5.2 Cenário Utilizado Para as Análises

O Capítulo 6 utilizou, de maneira arbitrária, uma única configuração: 13 nós e 7 casos de carga (funções base). A carga resultante F de 1 N tem caráter somente de estudo. A escolha de cargas diferentes levará a esforços internos proporcionais e também a novas distribuições de espessuras.

A Figura 5-2 abaixo esquematiza o cenário das análises.

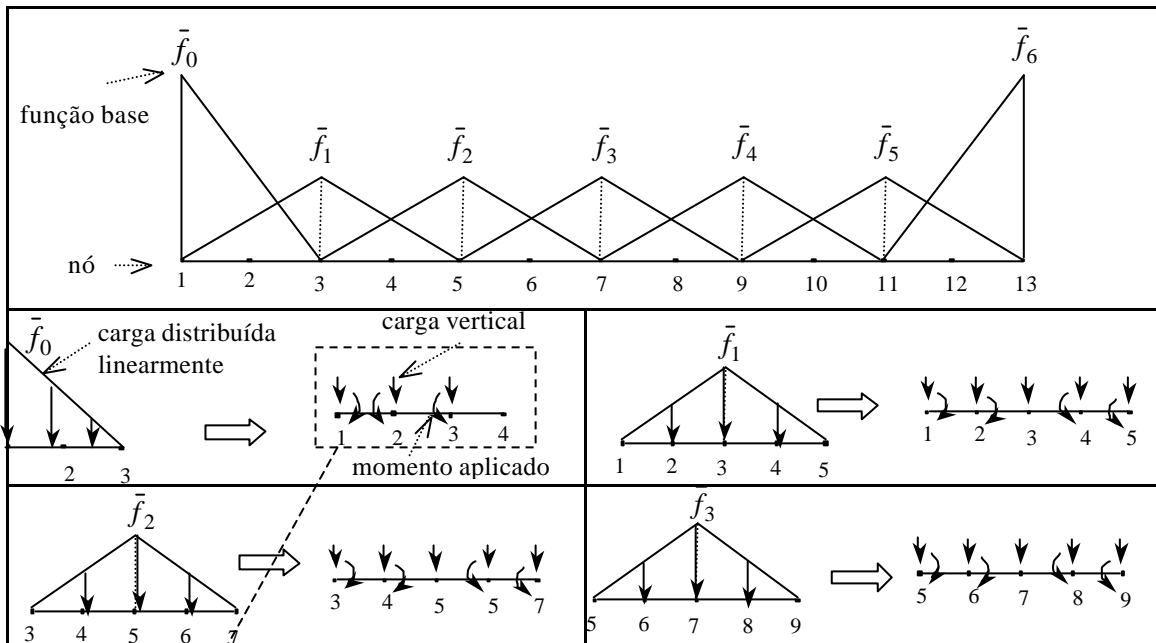


FIGURA 5-2 - Funções base e transformação do carregamento linearmente distribuído em carregamento equivalente nodal.

TABELA 5-1 - Carga equivalente nodal devido às funções base.

nó	\bar{f}_0		\bar{f}_1		\bar{f}_2		\bar{f}_3	
	f_{nodal} (N)	M_{nodal} (N.mm)	f_{nodal} (N)	M_{nodal} (N.mm)	f_{nodal} (N)	M_{nodal} (N.mm)	f_{nodal} (N)	M_{nodal} (N.mm)
1	0.425	-1.667	0.038	-0.208	0	0	0	0
2	0.500	0.833	0.250	-0.417	0	0	0	0
3	0.075	0.417	0.425	0	0.038	-0.208	0	0
4	0	0	0.250	0.417	0.250	-0.417	0	0
5	0	0	0.038	0.208	0.425	0	0.038	-0.208
6	0	0	0	0	0.250	0.417	0.250	-0.417
7	0	0	0	0	0.038	0.208	0.425	0
8	0	0	0	0	0	0	0.250	0.417
9	0	0	0	0	0	0	0.038	0.208
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0
soma	1.000	-0.417	1.000	0	1.000	0	1.000	0

Como descrito acima, a carga resultante F de cada função base é 1 N, e o processo de otimização minimax submete a estrutura a cada uma delas em separado. A Tabela 5-1 acima mostra a carga equivalente nodal proveniente de cada função base.

As funções base \bar{f}_4, \bar{f}_5 e \bar{f}_6 são simétricas às funções \bar{f}_2, \bar{f}_1 e \bar{f}_0 , respectivamente.

Foram considerados cinco casos de incerteza da atuação do carregamento uniforme: 100%, 75%, 50%, 25% e 0%, escolhidos arbitrariamente. No primeiro caso, por exemplo, não se conhece a distribuição de carregamento e portanto são aplicadas 100% das cargas incertas conforme a Tabela 5-1.

No último caso a distribuição é perfeitamente conhecida e não há nenhuma incerteza associada. Neste caso o carregamento é totalmente uniforme. A Tabela 5-2 abaixo mostra os carregamentos nodais equivalentes para a carga uniforme.

TABELA 5-2 - Carga equivalente nodal devido ao carregamento uniforme.

nó	Carregamento Uniforme	
	f_{nodal} (N)	M_{nodal} (N.mm)
1	0.042	-0.174
2	0.083	0
3	0.083	0
4	0.083	0
5	0.083	0
6	0.083	0
7	0.083	0
8	0.083	0
9	0.083	0
10	0.083	0
11	0.083	0
12	0.083	0
13	0.042	0.174
soma	1.000	0

Para os casos intermediários (75%, 50% e 25%) são feitas combinações das cargas variáveis com as cargas uniformes. É interessante verificar que quanto menor for a porcentagem de incerteza da distribuição de cargas, menor será o carregamento aplicado à estrutura, e portanto, menor será a energia de deformação.

5.3 Incerteza Sobre a Atuação do Carregamento Uniforme

O presente trabalho utiliza carregamentos incertos ou variáveis. Essa variação das cargas foi abordada como uma incerteza da atuação do carregamento uniforme, sendo possível compor o vetor de carga com parcelas de cargas variáveis e de cargas uniformes. Isso atenua a ação das cargas puramente variáveis, diminuindo consideravelmente os esforços internos da estrutura.

Matematicamente o nível de incerteza pode ser explicado utilizando o parâmetro R , que é um parâmetro de proporcionalidade que mede a contribuição de cada função base, como apresentado na Seção 3.1.

Para o caso da incerteza da carga uniforme ser de 75%, por exemplo, equivaleria dizer que $\frac{1}{4}$ da resultante da carga aplicada na estrutura terá distribuição uniforme e $\frac{3}{4}$ da resultante da carga terá distribuição variável.

Para o caso de se utilizar três funções base, ou três casos de carga, e pelo fato de $\sum R_i = 1$, a representação da carga uniforme a partir dessas funções base é dada por $R_1=0.25$, $R_2=0.5$ e $R_3=0.25$, como é visto na Figura 5-3.

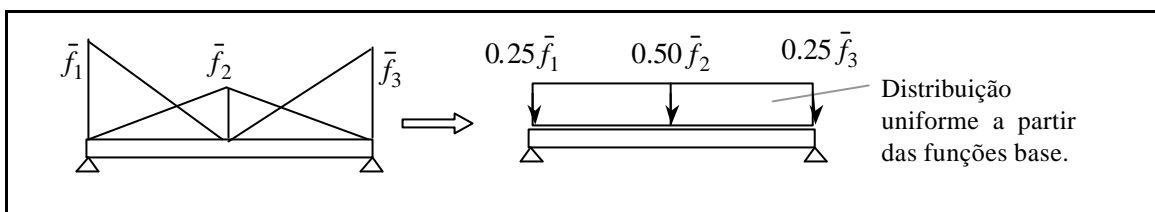


FIGURA 5-3 - Esquema mostrando a carga uniforme a partir das funções base.

Neste caso, em que a incerteza da carga uniforme é de 75% (o que equivale dizer que a certeza é de 25%) a implementação utilizará os seguintes parâmetros,

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 0.25 \times 0.25 + ?R_1 \\
 R_2 &= 0.50 \times 0.25 + ?R_2 \\
 R_3 &= 0.25 \times 0.25 + ?R_3
 \end{aligned}
 \tag{5-3}$$

Certeza da carga uniforme

Parâmetros para a carga uniforme

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0.25 + ?R_1 + ?R_2 + ?R_3$$

onde $?R_i$ é a parcela referente à carga variável.

Como $\sum R_i = 1$, então tem-se que $?R_1 + ?R_2 + ?R_3 = 0.75$, o que indica que a intensidade da força resultante referente à parcela dos carregamentos variáveis é 0.75 N, e que somado com 0.25 N referente à carga uniforme resulta em 1 N. A Figura 5-4 mostra a carga uniforme e a carga variável para cada função base.

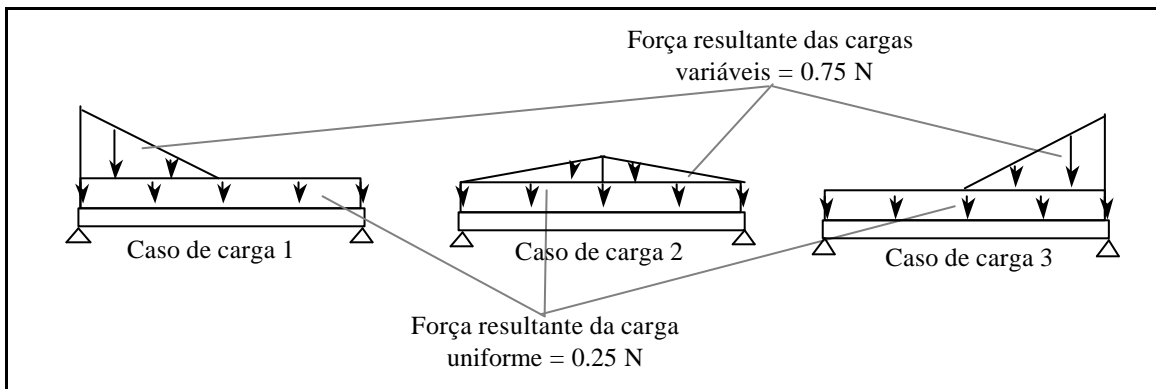


FIGURA 5-4 - Indicação da carga uniforme e variável para cada função base.

A Figura 5-5 abaixo mostra esquematicamente a atuação da carga uniforme e da carga variável para vários cenários, definidos arbitrariamente. No primeiro quadro, por exemplo, a incerteza de atuação da carga uniforme é 100%, o que significa que a carga é composta somente por cargas variáveis, e não há nenhuma parcela de carga uniforme. No segundo quadro vê-se que as cargas uniformes, representadas pelos triângulos, somam 75% da carga resultando. Os outros 25% são então completados pelo carregamento uniforme. Os outros quadros são similares, com exceção da intensidade da atuação dos carregamentos variável e uniforme.

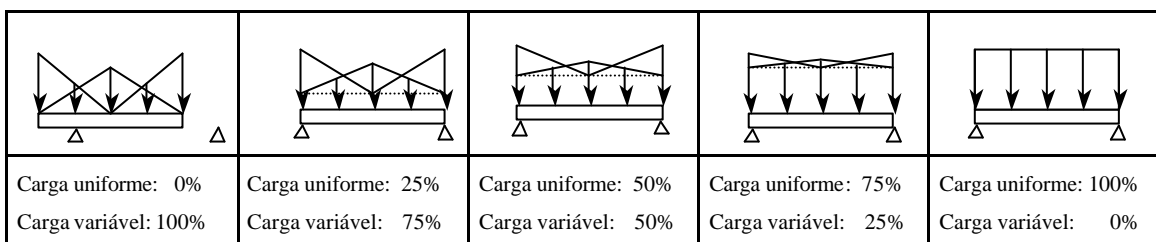


FIGURA 5-5 - Representação da incerteza do carregamento uniforme.

A carga nodal equivalente é facilmente obtida somando a parcela de carga uniforme com a parcela de carga variável.

5.4 Obtenção da Energia de Deformação Para Diferentes Cenários de Número de Nós e Casos de Carregamento

A variação do número de nós e do número de casos de carga conduz a diferentes valores de energia de deformação, como pode ser visto a seguir.

TABELA 5-3 - Valores da energia de deformação para diversos casos de número de nós e números de casos de carga (unidade: μJ).

número de nós	número de casos de carga								
	2	3	5	7	9	11	13	15	17
3	0.061362	0.090579	-	-	-	-	-	-	-
5	0.059405	0.087304	0.111440	-	-	-	-	-	-
7	0.058899	0.086741	-	0.115340	-	-	-	-	-
9	0.058808	0.086487	0.110570	-	0.116510	-	-	-	-
11	0.058801	0.086341	-	-	-	0.117070	-	-	-
13	0.058795	0.086295	0.110450	0.114860	-	-	0.117440	-	-
15	0.058794	0.086251	-	-	-	-	-	0.117640	-
17	0.058763	0.086194	0.110270	-	0.116210	-	-	-	0.117640

A análise utilizou os seguintes parâmetros:

- Comprimento da viga $L = 300 \text{ mm}$
- Altura disponível para distribuição $\bar{h} = 0.7855 \text{ mm}$
- Base da seção de viga $b = 1 \text{ mm}$
- Volume da viga $v = 235.66 \text{ mm}^3$
- Força resultante da combinação das funções base $F = 1 \text{ N}$

A Tabela 5-3 mostra que a medida em que se aumenta o número de nós, mantendo-se no mesmo caso de carga, a energia de deformação diminui. Isso é devido a uma melhor divisão da carga equivalente nodal, implicando numa menor energia de deformação. Também pode ser verificado que os casos com mais nós são subconjuntos dos casos com menos nós, o que equivale dizer que os casos com menor energia são subconjuntos dos casos com maior energia.

Porém, a energia de deformação se eleva quando se aumenta o número de casos de carga, pois crescem as chances de dano à estrutura (de Faria et al, 2004). Isso é decorrente do encurtamento da base do carregamento, concentrando as cargas em um menor número de nós.

5.5 Determinação das Espessuras de Uma Viga Plana Quando se Introduz Uma Espessura Base Inicial

Para evitar o aparecimento de espessuras muito finas em determinados nós, é possível especificar uma espessura para a viga base (h_{base}) antes do processo de otimização. As espessuras distribuídas pelo algoritmo servirão como reforços para os nós mais solicitados.

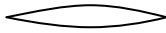




A análise utilizou os seguintes parâmetros:

- Número de nós = 25
- Número de casos de carga = 9
- Comprimento da viga $L = 300$ mm
- Altura disponível para distribuição $\bar{h} = 0.7855$ mm
- Base da seção de viga $b = 1$ mm
- Volume da viga $v = 235.66$ mm³
- Força resultante da combinação das funções base $F = 1$ N

Foram encontrados os projetos ótimos para as seguintes razões e volume da viga base h_{base} volume a ser distribuído \bar{h} : 0.0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.0, 4, 6, 8 e para a situação em que \bar{h} é zero. Esses valores foram escolhidos arbitrariamente.





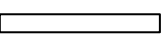
A Tabela a seguir mostra os resultados obtidos.

TABELA 5-4 - Distribuição de espessuras para diferentes razões h_{base} / \bar{h} (mm).

volume base volume a ser distribuído		$h_{base} = 0$ mm	$h_{base} = 0.1570$ mm	$h_{base} = 0.2618$ mm	$h_{base} = 0.3366$ mm	$h_{base} = 0.3927$ mm
		$\bar{h} = 0.7855$ mm	$\bar{h} = 0.6285$ mm	$\bar{h} = 0.5237$ mm	$\bar{h} = 0.4489$ mm	$\bar{h} = 0.3927$ mm
		$h_{base} / \bar{h} = 0$	$h_{base} / \bar{h} = 0.25$	$h_{base} / \bar{h} = 0.5$	$h_{base} / \bar{h} = 0.75$	$h_{base} / \bar{h} = 1$
						
nó	x (mm)	h^* (mm)	h^* (mm)	h^* (mm)	h^* (mm)	h^* (mm)
1	0.0	0.20	0.16	0.26	0.34	0.39
2	12.5	0.33	0.33	0.33	0.34	0.39
3	25.0	0.49	0.48	0.49	0.48	0.46
4	37.5	0.59	0.60	0.59	0.59	0.59
5	50.0	0.68	0.68	0.68	0.68	0.67
6	62.5	0.76	0.76	0.76	0.75	0.75
7	75.0	0.83	0.84	0.83	0.83	0.82
8	87.5	0.90	0.90	0.90	0.89	0.89
9	100.0	0.96	0.97	0.96	0.96	0.95
10	112.5	1.02	1.02	1.02	1.01	1.00
11	125.0	1.08	1.08	1.07	1.07	1.06
12	137.5	1.12	1.12	1.11	1.11	1.10
13	150.0	1.14	1.13	1.13	1.12	1.11
14	162.5	1.12	1.11	1.11	1.11	1.10
15	175.0	1.08	1.08	1.07	1.07	1.06
16	187.5	1.02	1.02	1.02	1.01	1.00
17	200.0	0.96	0.97	0.96	0.96	0.95
18	212.5	0.90	0.90	0.90	0.89	0.89
19	225.0	0.84	0.84	0.83	0.83	0.82
20	237.5	0.76	0.76	0.76	0.76	0.75
21	250.0	0.68	0.68	0.68	0.68	0.67
22	262.5	0.59	0.59	0.59	0.58	0.59
23	275.0	0.48	0.49	0.49	0.48	0.46
24	287.5	0.36	0.33	0.31	0.34	0.39
25	300.0	0.09	0.16	0.26	0.34	0.39

Na Tabela 5-4, pode-se verificar que os projetos $h_{base} / \bar{h} = 0.00, 0.25, 0.50, 0.75$ e 1.0 tiveram praticamente a mesma distribuição de espessura. Também são estruturalmente resistentes, uma vez que não ultrapassam a tensão de escoamento do material. A mudança mais significativa foi o aumento de espessura nos nós próximos dos apoios à medida em que a razão h_{base} / \bar{h} cresce.

TABELA 5-5 - Distribuição de espessuras para diferentes razões h_{base} / \bar{h} (mm).

volum base volum a ser distribuído		$h_{base} = 0.6284$ mm	$h_{base} = 0.6733$ mm	$h_{base} = 0.6982$ mm	$h_{base} = 0.7141$ mm	$h_{base} = 0.7855$ mm
		$\bar{h} = 0.1571$ mm	$\bar{h} = 0.1122$ mm	$\bar{h} = 0.0873$ mm	$\bar{h} = 0.0714$ mm	$\bar{h} = 0.0$ mm
		$h_{base} / \bar{h} = 4$	$h_{base} / \bar{h} = 6$	$h_{base} / \bar{h} = 8$	$h_{base} / \bar{h} = 10$	\bar{h} nulo
						
nó	x (mm)	h^* (mm)	h^* (mm)	h^* (mm)	h^* (mm)	h^* (mm)
1	0.0	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
2	12.5	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
3	25.0	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
4	37.5	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
5	50.0	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
6	62.5	0.69	0.67	0.70	0.71	0.79
7	75.0	0.76	0.74	0.71	0.71	0.79
8	87.5	0.82	0.80	0.78	0.76	0.79
9	100.0	0.88	0.85	0.83	0.82	0.79
10	112.5	0.93	0.90	0.88	0.87	0.79
11	125.0	0.98	0.95	0.93	0.91	0.79
12	137.5	1.02	0.99	0.96	0.95	0.79
13	150.0	1.03	1.00	0.98	0.96	0.79
14	162.5	1.02	0.99	0.96	0.95	0.79
15	175.0	0.98	0.95	0.93	0.91	0.79
16	187.5	0.93	0.90	0.88	0.87	0.79
17	200.0	0.88	0.85	0.83	0.82	0.79
18	212.5	0.82	0.80	0.78	0.76	0.79
19	225.0	0.76	0.74	0.71	0.71	0.79
20	237.5	0.69	0.67	0.70	0.71	0.79
21	250.0	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
22	262.5	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
23	275.0	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
24	287.5	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79
25	300.0	0.63	0.67	0.70	0.71	0.79

Nos projetos $h_{base} / \bar{h} = 4, 6, 8, \text{ e } 10$, da Tabela 5-5, houve uma mudança mais acentuada na distribuição das espessuras. O excessivo aumento de espessura dos nós mais próximos dos apoios fez decrescer as espessuras dos nós mais centrais, que tem maior solicitação estrutural. As tensões máximas ultrapassaram o limite de escoamento do material.

Já o projeto em que $\bar{h}=0$, que é o caso de uma viga de espessura constante, é o mais limitado de todos pelo fato de não oferecer nenhum volume a ser distribuído.

Pode-se notar que quanto maior o volume da viga base mais pobre e limitada será a distribuição variável das espessuras (de Faria et al, 2004).

5.6 Otimização de Arcos de Diferentes Curvaturas Submetidos a Carregamentos Variáveis

O objetivo da presente Seção é encontrar projetos ótimos para arcos com diferentes curvaturas e compará-los entre si.

Para todos os casos foram considerados os seguintes parâmetros:

- Número de nós = 13
- Número de casos de carga = 7
- Comprimento do arco (projeção horizontal da linha média) = 300 mm
- Altura da viga base = 0 mm
- Base da seção de viga = 1 mm
- Força resultante da combinação das funções base = 1 N

As relações de altura sobre comprimento, escolhidas arbitrariamente, são 0.0, 0.25, 0.50, 0.75 e 1.0, como mostrado esquematicamente na Figura 5-6.

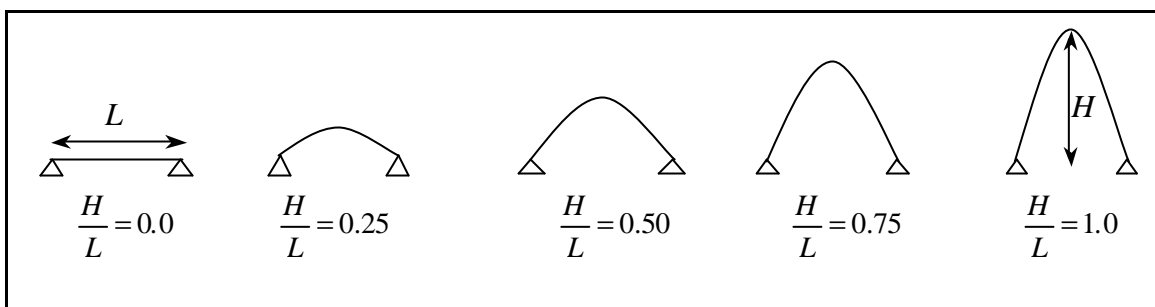


FIGURA 5-6 - Gradação de diferentes alturas de arcos.

É interessante ressaltar que a distribuição de espessuras é sempre perpendicular à linha média do arco ou viga.

As espessuras ótimas obtidas foram as seguintes:

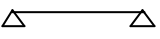


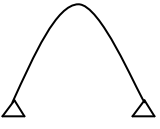
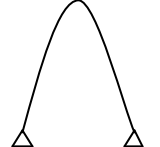
Razão H/L		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$H/L = 0.0$		0.11	0.53	0.68	0.84	0.97	1.08	1.12	1.08	0.97	0.84	0.68	0.51	0.13
$H/L = 0.25$		0.28	1.29	1.60	1.65	1.25	0.96	0.32	0.88	1.23	1.65	1.60	1.29	0.28
$H/L = 0.50$		0.35	1.03	1.32	1.17	0.99	0.73	0.33	0.73	0.99	1.17	1.32	1.03	0.35
$H/L = 0.75$		0.26	0.82	1.04	0.98	0.80	0.54	0.38	0.54	0.80	0.98	1.04	0.82	0.26
$H/L = 1.00$		0.16	0.63	0.74	0.70	0.55	0.42	0.33	0.42	0.55	0.70	0.74	0.63	0.16

FIGURA 5-7 - Espessuras nodais ótimas para diferentes razões H/L (mm).

No processo de obtenção dos projetos ótimos foi considerado um volume inicial v e obtida a distribuição de espessura h . O passo seguinte foi verificar a resistência mecânica de todas as espessuras, baseado na tensão de escoamento do material (Al 7075-T651, $f_y = 475$ MPa). Para o nó com maior tensão foi aplicado um fator γ que corrigiu todas as espessuras, aumentando-as ou diminuindo-as dependendo do caso. Esse procedimento de verificação da resistência mecânica do material é verificado na Tabela 5-6.

A Tabela 5-6 indica para cada caso H/L o nó com maior concentração de tensão, o caso de carga de origem e o fator γ , seguido da espessura corrigida h^* e do volume corrigido v^* .

TABELA 5-6 - Verificação da resistência e correção do projeto para diferentes razões

H/L .

Razão L/H	nó	x (mm)	h (mm)	v (mm ³)	Mmax (N.mm)	N max (N)	função base	s max (MPa)	?	$h^* = ? h$ (mm)	$v^* = ? v$ (mm ³)
$H/L = 0.0$	12	275	0.45	207.00	20.52	0.00	\bar{f}_5	615.64	1.138	0.51	235.66
$H/L = 0.25$	7	150	0.28	354.64	8.09	0.81	\bar{f}_3	610.22	1.134	0.32	402.09
$H/L = 0.50$	7	150	0.41	515.91	8.83	0.42	\bar{f}_3	312.99	0.811	0.33	418.66
$H/L = 0.75$	7	150	0.47	533.59	9.48	0.18	\bar{f}_3	254.30	0.732	0.35	390.33
$H/L = 1.00$	7	150	0.41	481.92	9.73	0.26	\bar{f}_3	354.28	0.864	0.35	416.15

Para o caso $H/L=0.0$, a maior tensão ocorreu no nó 12 e foi de 615.84 MPa, devido à função base \bar{f}_5 . A tensão de escoamento de 475 MPa foi ultrapassada e logo foi necessário aplicar um fator de aumento de volume ? para que a espessura aumentasse e a tensão diminuísse. O volume inicial $v = 207 \text{ mm}^3$ passou a ser $v^* = 235.66 \text{ mm}^3$.

Um processo semelhante ocorreu no caso $H/L=0.25$. Já para os casos $H/L=0.5$, $H/L=0.75$ e $H/L=1.0$ houve uma diminuição do volume final v^* em relação ao volume inicial v pelo fato das máximas tensões estarem abaixo do limite de escoamento do material.

5.7 Carregamentos Não Simétricos

Foram obtidos projetos ótimos de distribuição de espessura para o caso das cargas variáveis agirem isoladamente.

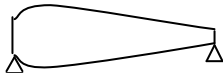
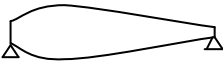


As análises consideraram a atuação exclusiva de uma única função base, desconsiderando a possibilidade da atuação de outra.

Foram utilizados os seguintes parâmetros:

- Número de nós = 13
- Número de casos de carga = 7
- Comprimento da viga $L = 300$ mm
- Altura da viga base $h_{base} = 0.0$ mm
- Altura disponível para distribuição $\bar{h} = 0.7855$ mm
- Base da seção de viga $b = 1$ mm
- Volume da viga $v = 235.66$ mm³
- Força resultante da combinação das funções base $F = 1$ N

Na Tabela 5-7 abaixo, são apresentados os projetos provenientes das funções base $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ e \bar{f}_3 . As funções base \bar{f}_4, \bar{f}_5 e \bar{f}_6 são simétricas a \bar{f}_2, \bar{f}_1 e \bar{f}_0 , respectivamente.

TABELA 5-7 - Distribuição de espessuras para casos de carregamentos não simétricos.

nó	\bar{f}_0	\bar{f}_1	\bar{f}_2	\bar{f}_3
				
	h* (mm)	h* (mm)	h* (mm)	h* (mm)
1	0.50	0.26	0.20	0.14
2	1.15	0.86	0.61	0.51
3	1.12	1.08	0.84	0.68
4	1.06	1.13	1.03	0.84
5	1.00	1.07	1.12	0.97
6	0.94	1.00	1.10	1.08
7	0.87	0.93	1.03	1.13
8	0.79	0.84	0.94	1.08
9	0.71	0.75	0.84	0.97
10	0.62	0.66	0.73	0.84
11	0.50	0.54	0.59	0.68
12	0.37	0.40	0.44	0.51
13	0.10	0.10	0.12	0.13

A atuação de um único carregamento prova a assimetria na distribuição das espessuras. Tais projetos, uma vez que foram obtidos para uma carga fixa, podem sofrer algum dano caso haja uma variação da carga.

5.8 Carregamentos com Sinal Negativo

Não haverá mudança física na distribuição ótima de espessuras para o caso das cargas aplicadas terem sentido apostado ao adotado no presente trabalho. Isto é explicado pelo fato de não haver mudança no valor da energia de deformação e por haver simetria da seção em relação ao eixo horizontal.

Para o caso de otimização de viga, somente haverá inversão de esforços, isto é, as fibras superiores comprimidas passam a ser tracionadas, e as fibras inferiores tracionadas passam a ser comprimidas.

Para o caso de otimização de arcos, as seções submetidas a esforços combinados de flexão e compressão, passam a ser submetidas a flexão e tração.

A Figura abaixo ilustra a semelhança do comportamento da viga quando submetida a cargas com sentido invertido entre si.

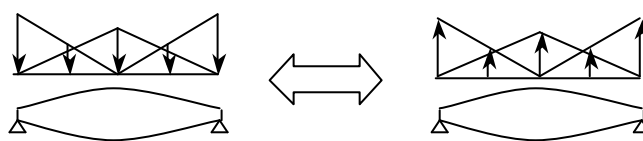


FIGURA 5-8 - Esquema mostrando a semelhança entre a aplicação de cargas positivas e negativas.

CAPÍTULO 6

DEMONSTRAÇÃO DA VULNERABILIDADE DE VIGAS E ARCOS

DIMENSIONADOS COM CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORME

Neste Capítulo são comparados os resultados provenientes da otimização minimax com dimensionamentos simples feitos com carregamento uniformemente distribuído.

Trata-se da otimização de cinco vigas planas e de cinco arcos para diferentes níveis de incerteza do carregamento uniforme.

Na seguinte comparação utilizaram-se três passos distintos:

- Foi dimensionada uma viga de seção transversal constante submetida a um carregamento uniformemente distribuído cuja resultante é igual a 1 N. A altura constante h_{cte} da seção foi obtida levando em consideração a máxima tensão que o material resiste, considerada como a tensão de escoamento. Para a obtenção de h_{cte} utilizou-se o cálculo clássico de tensões da seção transversal de vigas submetidas à flexão.
- Uma segunda viga foi dimensionada levando em conta a variação do carregamento, cuja resultante também é 1 N. Foi encontrada uma distribuição de espessura variável ao longo da viga, utilizando-se o algoritmo do método minimax. O volume inicial utilizado é o mesmo da viga de seção constante. Foi verificada a maior tensão interna do material. Para o caso das tensões máximas estarem acima ou abaixo da tensão de escoamento do material, uma nova distribuição de espessuras foi proposta de modo a otimizar o volume e garantir a resistência.
- Na terceira etapa, ambas as vigas foram submetidas a um carregamento variável com resultante igual a 1 N e também foi verificada a máxima tensão atuante. O objetivo da comparação foi evidenciar que a viga dimensionada a partir da carga

constante não é capaz de resistir à uma variação no carregamento enquanto que a viga utilizando carregamentos variáveis o é.

Esses passos foram aplicados de maneira idêntica para os arcos.

Esquemáticamente a comparação tem a forma.

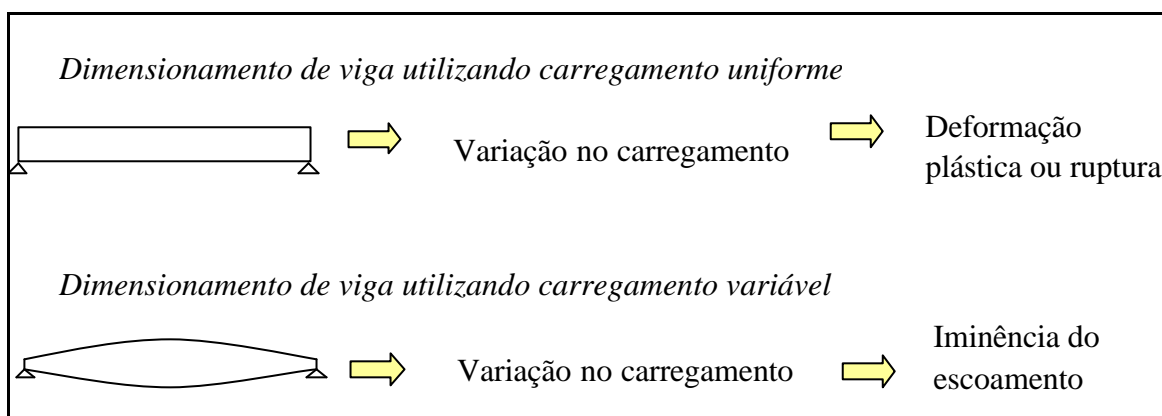


FIGURA 6-1 - Resultado qualitativo dos dimensionamentos de viga utilizando carga uniforme e carga variável.

Neste Capítulo, as figuras representando as vigas e arcos provenientes do método de otimização tem valor somente qualitativo. Isso se deve ao fato das espessuras utilizadas serem muito pequenas, impossibilitando a correta representação.

6.1 Viga de Seção Constante Dimensionada a Partir de Um Carregamento Uniforme

Segue abaixo o dimensionamento de uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído, por meio do cálculo clássico de tensões da seção transversal de vigas submetidas à flexão. Os outros parâmetros considerados foram os seguintes:

- Carga distribuída $q = 1/300$ (N/mm)
- Comprimento $L = 300$ mm
- Força resultante $F = 1$ N

- Momento fletor máximo $M_{max} = q L^2 / 8 = 37.5 \text{ N.mm}$

Considerando que a tensão máxima permitida seja igual à tensão de escoamento f_{ty} do alumínio Al 7075 T651, tem se:

$$f_{ty \text{ Al 7075 T651}} = 475 \text{ MPa (MIL HDBK 5H, Tabela 3.7.4.0}_{(b1)}, 1998)$$

A tensão devido ao momento fletor é dada por:

$$s = \frac{M}{I} c$$

onde,

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

M = momento fletor

c = distância da fibra mais distante da linha neutra = $h/2$.

I = inércia da seção retangular da viga

b = base da seção da viga = 1 mm

h = altura da seção da viga

Portanto a altura h da seção da viga é de:

$$s = \frac{M}{I} c$$

$$475 = \left(\frac{37.5}{\frac{h^3}{12}} \right) \frac{h}{2}$$

$$475 = \frac{225}{h^2}$$

$$h = 0.69 \text{ mm}$$

O volume da viga é $v = 207 \text{ mm}^3$.

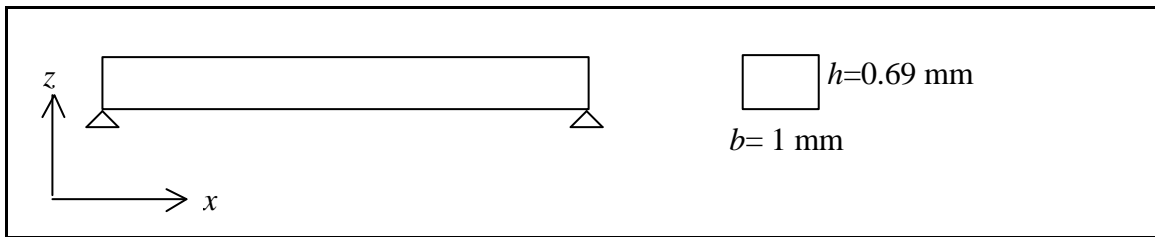


FIGURA 6-2 - Viga de seção retangular constante com $h_{cte}=0.69$ mm e $b=1$ mm.

A seguir tem-se o dimensionamento de vigas planas submetidas a cargas variáveis pelo método minimax. Trata-se de dimensionamentos resultantes do processo de otimização.

6.2 Viga Submetida a Um Carregamento Variável (100% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado é composto de 100% de cargas variáveis. Isso significa que toda a carga aplicada é proveniente das cargas variáveis. Não haverá atuação de carga uniforme (ver o primeiro quadro da Figura 5-5).

Inicialmente esta viga tem o mesmo volume que a viga dimensionada a partir de um carregamento uniforme (Seção 6.1). Os outros parâmetros considerados são os seguintes:

- Número de nós = 13
- Número de casos de carga = 7
- Comprimento da viga = 300 mm
- Altura disponível para distribuição = 0.69 mm
- Altura da viga base (altura inicial) = 0 mm
- Base da seção de viga = 1 mm
- Volume da viga = 207 mm³
- Força resultante da combinação das funções base = 1 N

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela abaixo.

TABELA 6-1 - Espessuras da viga de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)
1	0	0.10
2	25	0.46
3	50	0.60
4	75	0.74
5	100	0.85
6	125	0.95
7	150	0.99
8	175	0.95
9	200	0.85
10	225	0.74
11	250	0.60
12	275	0.45
13	300	0.12

Na Tabela 6-1, x é a indicação da posição do nó ao longo da viga.

A máxima energia de deformação foi de $0.16876 \mu\text{J}$, referente à função base \bar{f}_3 .

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões da seção transversal de vigas submetidas à flexão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN foram obtidos os máximos momentos fletores para as condições de carregamento (funções base). É interessante explicar que a viga modelada no MSC.NASTRAN não simula a viga de espessuras variáveis. Pelo contrário, foi utilizada uma viga de espessura constante, discretizada com elemento de barra e com parâmetros semelhantes aos desta análise. O objetivo foi apenas encontrar o momento interno M_{max} . A tensão s_{max} foi obtida por meio do cálculo clássico de tensões da seção transversal de vigas submetidas à flexão. Abaixo são listados seus valores e seus casos de carga para cada nó, bem como a tensão máxima.

TABELA 6-2 - Momento e tensões para a viga de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)	Mmax (N.mm)	função base	s max (MPa)
1	0	0.10	0.00	-	0.00
2	25	0.46	20.52	\bar{f}_1	578.83
3	50	0.60	34.17	\bar{f}_1	576.40
4	75	0.74	49.69	\bar{f}_2	542.10
5	100	0.85	59.16	\bar{f}_2	489.33
6	125	0.95	62.20	\bar{f}_3	415.62
7	150	0.99	67.50	\bar{f}_3	415.32
8	175	0.95	62.20	\bar{f}_3	415.53
9	200	0.85	59.16	\bar{f}_4	488.42
10	225	0.74	49.69	\bar{f}_4	545.18
11	250	0.60	34.17	\bar{f}_5	567.80
12	275	0.45	20.52	\bar{f}_5	615.64
13	300	0.12	0.00	-	0.00

Na Tabela 6-2, x é a indicação da posição do nó ao longo da viga.

Pelo fato da viga estar submetida a uma tensão maior que a de escoamento nas posições 25 mm e 275 mm (Tabela 6-2), onde as tensões foram máximas, todas as espessuras foram multiplicadas por um fator ?:

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2}$$

$$475 = \frac{6 * 20.52}{1 * (I * 0.4472)^2}$$

$$I = 1.1384545$$

O novo volume $v^* = 235.66 \text{ mm}^3$.

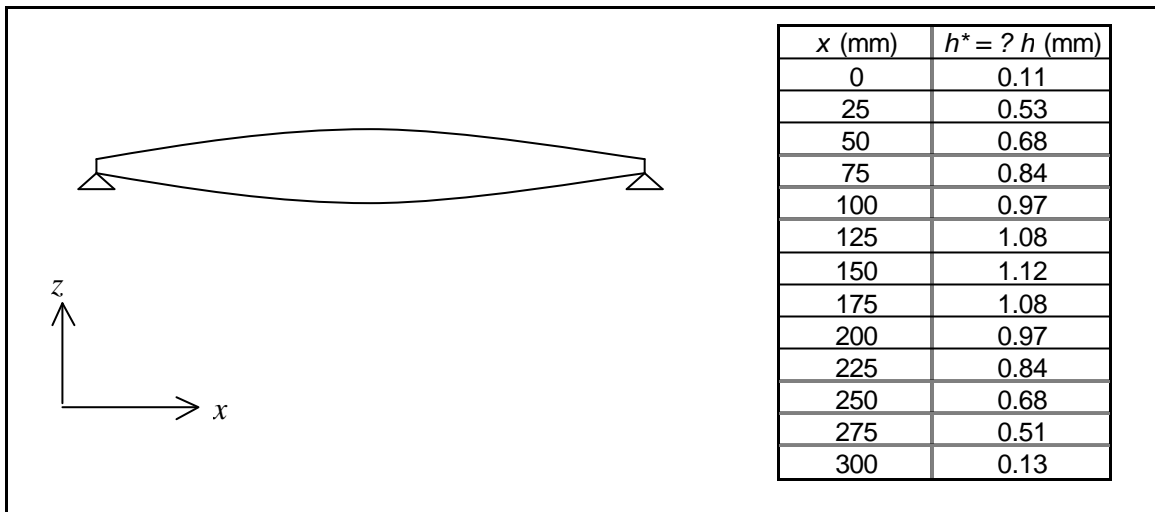


FIGURA 6-3 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, a viga dimensionada com carga uniforme e a viga dimensionada com carga variável foram submetidas a uma variação aleatória na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max} = 67.5$ N.mm, de acordo com a Tabela 6-2, na posição 150 mm.

Sendo assim a viga dimensionada com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 67.5}{1 * (0.69)^2}$$

$$s = 850 MPa$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para a viga de seção constante tem-se:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 67.5}{1 * (0.69 * 1.13845)^2}$$

$$s = 656 MPa$$

Portanto, na viga de seção constante o nível de tensão ultrapassa o limite de ruptura do material de 530 MPa (MIL HDBK 5H, Tabela 3.7.4.0_(b1), 1998).

O fator γ foi aplicado à viga de seção constante para aumentar a altura da seção e diminuir sua tensão, que passou de 850 MPa para 656 MPa. Isso deixa a comparação mais “justa”, uma vez que a viga de carregamento variável também teve suas espessuras multiplicadas por γ .

Já para a viga dimensionada com carga variável tem-se:

TABELA 6-3 - Momento e tensões para a viga de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h^* (mm)	M_{max} (N.mm)	função base	s_{max} (MPa)
1	0	0.11	0.00	-	0.00
2	25	0.53	20.52	\bar{f}_1	446.60
3	50	0.68	34.17	\bar{f}_1	444.72
4	75	0.84	49.69	\bar{f}_2	418.26
5	100	0.97	59.16	\bar{f}_2	377.55
6	125	1.08	62.20	\bar{f}_3	320.67
7	150	1.12	67.50	\bar{f}_3	320.44
8	175	1.08	62.20	\bar{f}_3	320.60
9	200	0.97	59.16	\bar{f}_4	376.84
10	225	0.84	49.69	\bar{f}_4	420.64
11	250	0.68	34.17	\bar{f}_5	438.09
12	275	0.51	20.52	\bar{f}_5	475.00
13	300	0.13	0.00	-	0.00

A máxima tensão é 475 MPa, referente ao nó 12 (Tabela 6-3). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

6.3 Viga Submetida a Um Carregamento Variável (75% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado foi composto de 75% de cargas variáveis e de 25% de cargas uniformes, ou seja, a resultante devido às cargas incertas foi de 0.75 N e a da carga uniforme de 0.25 N, com resultante final F de 1 N.

Os parâmetros geométricos da viga são os mesmos listados na Seção 6.2.

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-4 - Espessuras da viga de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)
1	0	0.13
2	25	0.46
3	50	0.61
4	75	0.74
5	100	0.85
6	125	0.93
7	150	0.97
8	175	0.93
9	200	0.85
10	225	0.74
11	250	0.61
12	275	0.46
13	300	0.12

A máxima energia de deformação foi de 0.14583 μJ , referente à função base \bar{f}_3 .

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões da seção transversal de vigas submetidas à flexão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN foram obtidos os máximos momentos fletores para as condições de carregamento. Abaixo são listados seus valores e seus casos de carga para cada nó, bem como a tensão máxima.

TABELA 6-5 - Momento e tensões para a viga de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)	M_{max} (N.mm)	função base	s_{max} (MPa)
1	0	0.13	0.00	-	0.00
2	25	0.46	18.29	\bar{f}_1	527.53
3	50	0.61	30.88	\bar{f}_1	497.08
4	75	0.74	44.34	\bar{f}_2	480.52
5	100	0.85	52.75	\bar{f}_2	440.71
6	125	0.93	55.80	\bar{f}_3	385.11
7	150	0.97	60.03	\bar{f}_3	382.93
8	175	0.93	55.80	\bar{f}_3	384.86
9	200	0.85	52.75	\bar{f}_4	441.34
10	225	0.74	44.34	\bar{f}_4	480.90
11	250	0.61	30.88	\bar{f}_5	495.94
12	275	0.46	18.29	\bar{f}_5	521.56
13	300	0.12	0.00	-	0.00

Pelo fato da viga estar submetida a uma tensão maior que a de escoamento nas posições 25 mm e 275 mm (Tabela 6-5), onde as tensões foram máximas, todas as espessuras foram multiplicadas por um fator ?:

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2}$$

$$475 = \frac{6 * 18.29}{1 * (I * 0.4561)^2}$$

$$I = 1.05384$$

O novo volume é $v^* = 218.15 \text{ mm}^3$.

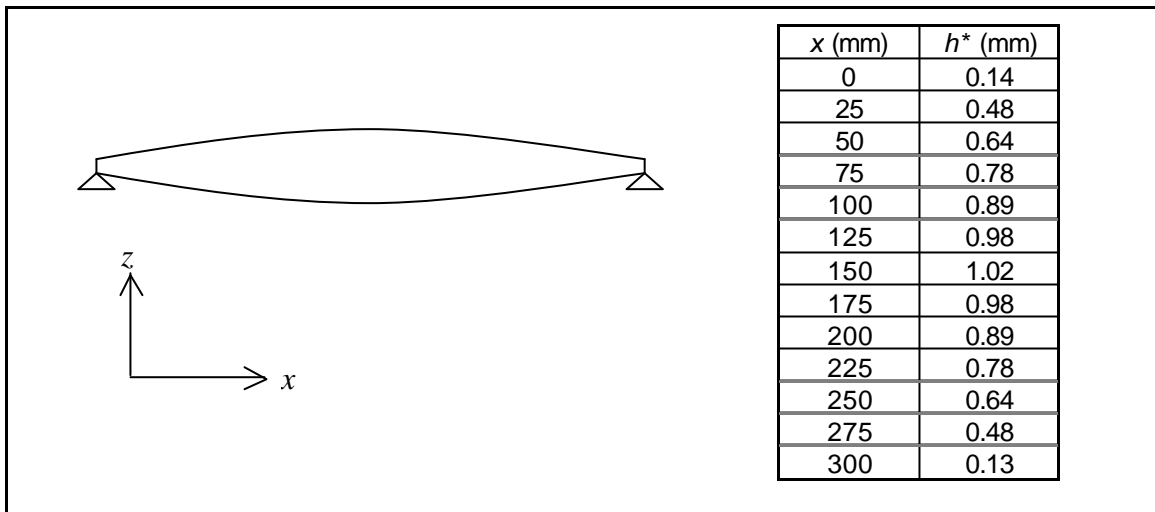


FIGURA 6-4 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, a viga dimensionada com carga uniforme e a viga dimensionada com carga variável foram submetidas a uma variação na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max} = 60.03$ N.mm, de acordo com a Tabela 6-5, na posição 150 mm.

Sendo assim a viga dimensionada com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 60.03}{1 * (0.69)^2}$$

$$s = 756.46 MPa$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para a viga de seção constante tem-se:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 67.5}{1 * (0.69 * 1.05384)^2}$$

$$s = 681.14 MPa$$

Portanto, na viga de seção constante o nível de tensão ultrapassa o limite de ruptura do material de 530 MPa (MIL HDBK 5H, Tabela 3.7.4.0_(b1), 1998).

Já para a viga dimensionada com carga variável tem-se:

TABELA 6-6 - Momento e tensões para a viga de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h* (mm)	Mmax (N.mm)	função base	s max (MPa)
1	0	0.14	0.00	-	0.00
2	25	0.48	18.29	\bar{f}_1	475.00
3	50	0.64	30.88	\bar{f}_1	447.58
4	75	0.78	44.34	\bar{f}_2	432.67
5	100	0.89	52.75	\bar{f}_2	396.83
6	125	0.98	55.80	\bar{f}_3	346.76
7	150	1.02	60.03	\bar{f}_3	344.80
8	175	0.98	55.80	\bar{f}_3	346.54
9	200	0.89	52.75	\bar{f}_4	397.39
10	225	0.78	44.34	\bar{f}_4	433.02
11	250	0.64	30.88	\bar{f}_5	446.56
12	275	0.48	18.29	\bar{f}_5	469.63
13	300	0.13	0.00	-	0.00

A máxima tensão é 475 MPa referente ao nó 2 (Tabela 6-6). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

6.4 Viga Submetida a Um Carregamento Variável (50% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado foi composto de 50% de cargas variáveis e de 50% de cargas uniformes, ou seja, a resultante devido às cargas incertas foi de 0.50 N e a da carga uniforme de 0.50 N, com resultante final de 1 N.

Os parâmetros geométricos da viga são os mesmos listados na Seção 6.2.

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-7 - Espessuras da viga de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)
1	0	0.12
2	25	0.48
3	50	0.62
4	75	0.75
5	100	0.84
6	125	0.92
7	150	0.94
8	175	0.91
9	200	0.84
10	225	0.75
11	250	0.62
12	275	0.47
13	300	0.13

A máxima energia de deformação foi de $0.12409 \mu\text{J}$, referente à função base \bar{f}_3 .

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões da seção transversal de vigas submetidas à flexão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN foram obtidos os máximos momentos fletores para as condições de carregamento. Abaixo são listados seus valores e seus casos de carga para cada nó, bem como a tensão máxima.

TABELA 6-8 - Momento e tensões para a viga de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)	Mmax (N.mm)	função base	s max (MPa)
1	0	0.12	0.00	-	0.00
2	25	0.48	16.06	\bar{f}_1	420.86
3	50	0.62	27.59	\bar{f}_1	428.08
4	75	0.75	39.00	\bar{f}_2	416.28
5	100	0.84	46.33	\bar{f}_2	392.65
6	125	0.92	49.40	\bar{f}_3	353.87
7	150	0.94	52.55	\bar{f}_3	353.74
8	175	0.91	49.40	\bar{f}_3	354.41
9	200	0.84	46.33	\bar{f}_4	391.81
10	225	0.75	39.00	\bar{f}_4	416.17
11	250	0.62	27.59	\bar{f}_5	427.12
12	275	0.47	16.06	\bar{f}_5	429.07
13	300	0.13	0.00	-	0.00

Pelo fato da viga estar submetida a uma tensão menor que a de escoamento nas posições 75 mm e 225 mm (Tabela 6-8), onde as tensões foram máximas, todas as espessuras foram multiplicadas por um fator ?:

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2}$$

$$475 = \frac{6 * 18.06}{1 * (I * 0.4739)^2}$$

$$I = 0.950418$$

O novo volume é $v^* = 196.73 \text{ mm}^3$.

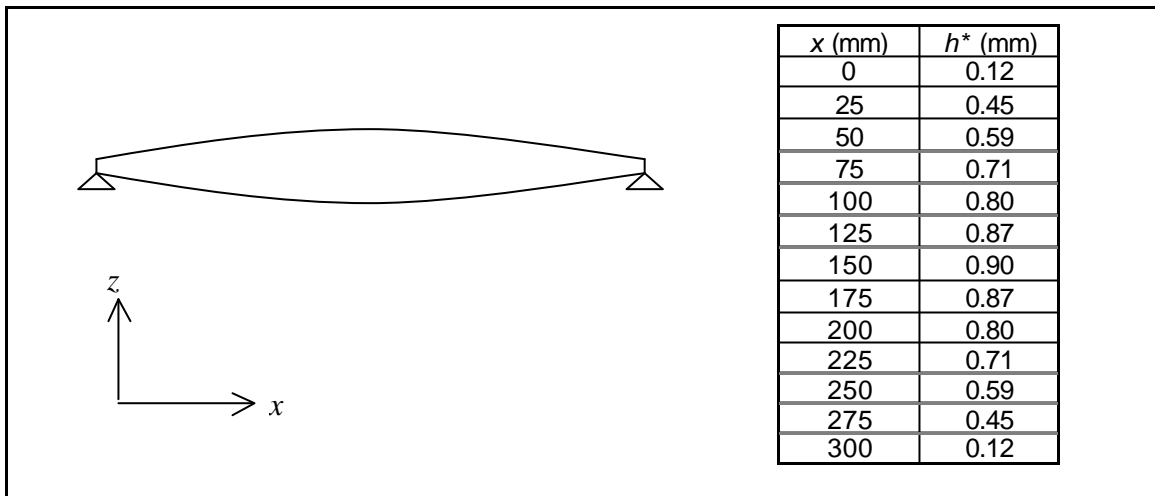


FIGURA 6-5 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, a viga dimensionada com carga uniforme e a viga dimensionada com carga variável foram submetidas a uma variação na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max} = 52.55$ N.mm, de acordo com a Tabela 6-8, posição 150 mm.

Sendo assim a viga dimensionada com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 52.55}{1 * (0.69)^2}$$

$$s = 662.25 MPa$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para a viga de seção constante tem-se:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 67.5}{1 * (0.69 * 0.950418)^2}$$

$$s = 733.16 MPa$$

Portanto, na viga de seção constante o nível de tensão ultrapassa o limite de ruptura do material de 530 MPa (MIL HDBK 5H, Tabela 3.7.4.0_(b1), 1998).

Já para a viga dimensionada com carga variável tem-se:

TABELA 6-9 - Momento e tensões para a viga de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h* (mm)	Mmax (N.mm)	função base	s max (MPa)
1	0	0.12	0.00	-	0.00
2	25	0.45	16.06	\bar{f}_1	465.91
3	50	0.59	27.59	\bar{f}_1	473.91
4	75	0.71	39.00	\bar{f}_2	460.85
5	100	0.80	46.33	\bar{f}_2	434.69
6	125	0.87	49.40	\bar{f}_3	391.76
7	150	0.90	52.55	\bar{f}_3	391.61
8	175	0.87	49.40	\bar{f}_3	392.36
9	200	0.80	46.33	\bar{f}_4	433.76
10	225	0.71	39.00	\bar{f}_4	460.72
11	250	0.59	27.59	\bar{f}_5	472.84
12	275	0.45	16.06	\bar{f}_5	475.00
13	300	0.12	0.00	-	0.00

A máxima tensão é 475 MPa, referente ao nó 12 (Tabela 6-9). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

6.5 Viga Submetida a Um Carregamento Variável (25% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado foi composto de 25% de cargas variáveis e de 75% de cargas uniformes, ou seja, a resultante devido às cargas incertas foi de 0.25 N e a da carga uniforme de 0.75 N, com resultante final de 1 N.

Os parâmetros geométricos da viga são os mesmos listados na Seção 6.2.

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-10 - Espessuras da viga de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)
1	0	0.14
2	25	0.49
3	50	0.64
4	75	0.76
5	100	0.84
6	125	0.89
7	150	0.92
8	175	0.89
9	200	0.84
10	225	0.75
11	250	0.64
12	275	0.49
13	300	0.14

A máxima energia de deformação foi de 0.10253 μ J referente à função base \bar{f}_3 .

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões da seção transversal de vigas submetidas à flexão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN foram obtidos os máximos momentos fletores para as condições de carregamento. Abaixo são listados seus valores e seus casos de carga para cada nó, bem como a tensão máxima.

TABELA 6-11 - Momento e tensões para a viga de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)	Mmax (N.mm)	função base	s max (MPa)
1	0	0.14	0.00	-	0.00
2	25	0.49	13.83	\bar{f}_1	342.66
3	50	0.64	24.29	\bar{f}_1	359.88
4	75	0.76	33.65	\bar{f}_2	353.42
5	100	0.84	39.92	\bar{f}_2	342.10
6	125	0.89	43.00	\bar{f}_3	323.46
7	150	0.92	45.08	\bar{f}_3	322.47
8	175	0.89	43.00	\bar{f}_3	323.03
9	200	0.84	39.92	\bar{f}_4	341.85
10	225	0.75	33.65	\bar{f}_4	354.92
11	250	0.64	24.29	\bar{f}_5	357.75
12	275	0.49	13.83	\bar{f}_5	347.02
13	300	0.14	0.00	-	0.00

Pelo fato da viga estar submetida a uma tensão menor que a de escoamento nas posições 50 mm e 250 mm (Tabela 6-11), onde as tensões foram máximas, todas as espessuras foram multiplicadas por um fator ?:

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2}$$

$$475 = \frac{6 * 24.69}{1 * (I * 0.6383)^2}$$

$$I = 0.867796$$

O novo volume é $v^* = 179.63 \text{ mm}^3$.

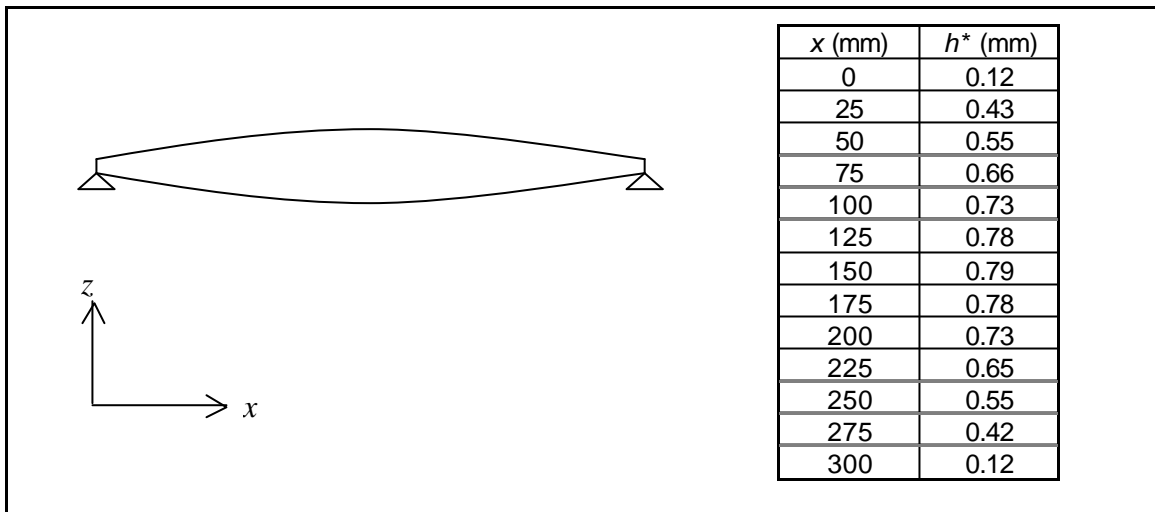


FIGURA 6-6 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, a viga dimensionada com carga uniforme e a viga dimensionada com carga variável foram submetidas a uma variação na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max} = 45.08$ N.mm, de acordo com a Tabela 6-11, posição 150 mm.

Sendo assim a viga dimensionada com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 45.08}{1 * (0.69)^2}$$

$$s = 567.67 MPa$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para a viga de seção constante tem-se:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 45.08}{1 * (0.69 * 0.867796)^2}$$

$$s = 754.31 MPa$$

Portanto, na viga de seção constante o nível de tensão ultrapassa o limite de ruptura do material de 530 MPa (MIL HDBK 5H, Tabela 3.7.4.0_(b1), 1998).

Já para a viga dimensionada com carga variável tem-se:

TABELA 6-12 - Momento e tensões para a viga de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h* (mm)	Mmax (N.mm)	função base	s max (MPa)
1	0	0.12	0.00	-	0.00
2	25	0.43	13.83	\bar{f}_1	455.02
3	50	0.55	24.29	\bar{f}_1	475.00
4	75	0.66	33.65	\bar{f}_2	469.30
5	100	0.73	39.92	\bar{f}_2	454.27
6	125	0.78	43.00	\bar{f}_3	429.52
7	150	0.79	45.08	\bar{f}_3	428.20
8	175	0.78	43.00	\bar{f}_3	428.94
9	200	0.73	39.92	\bar{f}_4	453.94
10	225	0.65	33.65	\bar{f}_4	471.30
11	250	0.55	24.29	\bar{f}_5	475.00
12	275	0.42	13.83	\bar{f}_5	460.81
13	300	0.12	0.00	-	0.00

A máxima tensão é 475 MPa, referente ao nó 2 (Tabela 6-12). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

6.6 Viga Submetida a Um Carregamento Variável (0% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado foi composto de 100% de cargas uniformemente distribuídas, ou seja, a carga é totalmente conhecida. Não foi utilizada nenhuma parcela do carregamento variável.

Os parâmetros geométricos da viga são os mesmos listados na Seção 6.2.

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-13 - Espessuras da viga de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)
1	0	0.16
2	25	0.50
3	50	0.66
4	75	0.76
5	100	0.83
6	125	0.87
7	150	0.88
8	175	0.87
9	200	0.83
10	225	0.76
11	250	0.66
12	275	0.51
13	300	0.15

A máxima energia de deformação foi de 0.08389 μ J, referente ao carregamento uniforme.

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões da seção transversal de vigas submetidas à flexão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN foram obtidos os máximos momentos fletores para as condições de carregamento. Abaixo são listados seus valores e seus casos de carga para cada nó, bem como a tensão máxima.

TABELA 6-14 - Momento e tensões para a viga de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h (mm)	Mmax (N.mm)	função base	s max (MPa)
1	0	0.16	0.00	-	0.00
2	25	0.50	11.60	\bar{f}_1	274.22
3	50	0.66	21.00	\bar{f}_1	292.79
4	75	0.76	28.30	\bar{f}_2	291.52
5	100	0.83	33.50	\bar{f}_2	292.83
6	125	0.87	36.60	\bar{f}_3	291.00
7	150	0.88	37.60	\bar{f}_3	290.00
8	175	0.87	36.60	\bar{f}_3	292.21
9	200	0.83	33.50	\bar{f}_4	293.46
10	225	0.76	28.30	\bar{f}_4	290.75
11	250	0.66	21.00	\bar{f}_5	292.79
12	275	0.51	11.60	\bar{f}_5	266.33
13	300	0.15	0.00	-	0.00

Pelo fato da viga estar submetida a uma tensão menor que a de escoamento nas posições 100 mm e 200 mm (Tabela 6-14), todas as espessuras foram multiplicadas pelo fator ?:

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2}$$

$$475 = \frac{6 * 33.5}{1 * (I * 0.8276)^2}$$

$$I = 0.786014$$

O novo volume é $v^* = 162.70 \text{ mm}^3$.

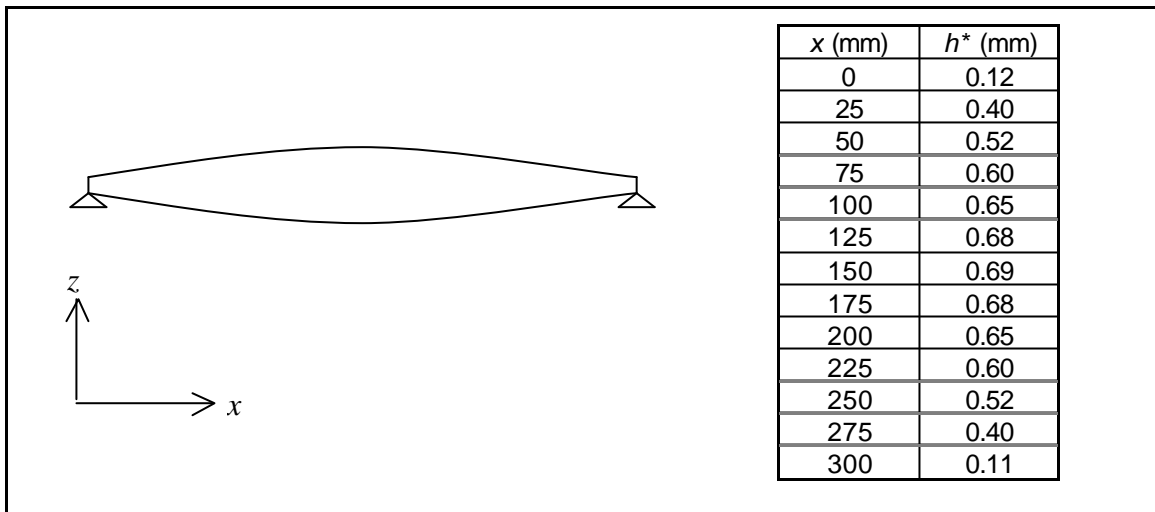


FIGURA 6-7 - Viga de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetida a um carregamento de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, a viga dimensionada com carga uniforme e a viga dimensionada com carga variável foram submetidas a uma variação na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max} = 37.5$ N.mm, de acordo com a Tabela 6-14, posição 150 mm.

Sendo assim a viga dimensionada com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 37.6}{1 * (0.69)^2}$$

$$s = 473.8 MPa$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para a viga de seção constante tem-se:

$$s = \frac{M}{I} c = \frac{6M}{bh^2}$$

$$s = \frac{6 * 37.5}{1 * (0.69 * 0.786014)^2}$$

$$s = 764.93 MPa$$

Portanto, na viga de seção constante o nível de tensão ultrapassa o limite de ruptura do material de 530 MPa somente caso seja aplicado o fator ?.

Já para a viga dimensionada com carga variável tem-se:

TABELA 6-15 - Momento e tensões para a viga de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	h* (mm)	Mmax (N.mm)	função base	s max (MPa)
1	0	0.12	0.00	-	0.00
2	25	0.40	11.60	\bar{f}_1	443.85
3	50	0.52	21.00	\bar{f}_1	473.92
4	75	0.60	28.30	\bar{f}_2	471.85
5	100	0.65	33.50	\bar{f}_2	473.97
6	125	0.68	36.60	\bar{f}_3	471.01
7	150	0.69	37.60	\bar{f}_3	469.40
8	175	0.68	36.60	\bar{f}_3	472.97
9	200	0.65	33.50	\bar{f}_4	475.00
10	225	0.60	28.30	\bar{f}_4	470.61
11	250	0.52	21.00	\bar{f}_5	473.92
12	275	0.40	11.60	\bar{f}_5	431.09
13	300	0.11	0.00	-	0.00

A máxima tensão é 475 MPa, referente ao nó 9 (Tabela 6-15). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

As seções que se seguem tratam do caso dos arcos, que é tratado de forma similar a das vigas.

6.7 Arco de Seção Constante Dimensionado a Partir de Um Carregamento Uniforme

Segue abaixo o dimensionamento de um arco submetido a um carregamento uniformemente distribuído, por meio do cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão.

O arco considerado nesse estudo tem 300 mm de projeção horizontal e 60 mm de projeção vertical (projeção da linha média do arco).

Foram considerados os seguintes parâmetros:

- carga distribuída $q = 1/300$ (N/mm)
- Projeção horizontal da linha média $L = 300$ mm
- Projeção vertical da linha média $H = 60$ mm
- Força resultante $F = 1$ N

Os esforços internos de momento e força axial foram obtidos utilizando o MSC.NASTRAN. A discretização utilizou 13 nós distribuídos de acordo com os parâmetros acima.

Os esforços internos foram os seguintes:

- Momento fletor máximo $M_{max} = 1.54$ N.mm
- Força axial máxima $F_{axial\ max} = 0.79$ N
- Posição = 25 mm (nó 2)

Considerando que a tensão máxima seja igual à tensão de escoamento f_{ty} do alumínio Al 7075 T651, tem se:

$$f_{ty\ Al\ 7075\ T651} = 475\ \text{MPa (MIL HDBK 5H (1998), Tabela 3.7.4.0}_{(b1)}, 1998)$$

A tensão é dada por:

$$s = \frac{M}{I}c + \frac{F_{axial}}{A}$$

onde

$$I = \frac{bh^3}{12} \text{ e } A = bh$$

sendo que A = área da seção da viga.

Portanto a altura da viga será:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh} \\
 475 &= \frac{6 \cdot 1.54}{1h^2} + \frac{0.79}{1h} \\
 h &= 0.14 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

O volume do arco será $v = 45.86 \text{ mm}^3$.

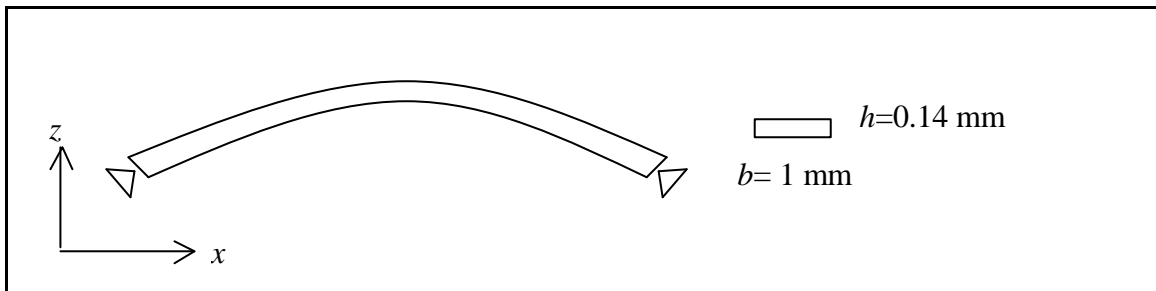


FIGURA 6-8 - Arco de seção retangular constante com $h_{cte}=0.14 \text{ mm}$ e $b=1 \text{ mm}$.

A seguir tem-se o dimensionamento de arcos submetidos a cargas variáveis pelo método minimax. Trata-se de dimensionamentos resultantes do processo de otimização.

6.8 Arco Submetido a Um Carregamento Variável (100% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

Inicialmente o arco submetido a carga variável terá o mesmo volume que o arco dimensionado a partir da carga uniforme. Para essa análise foram considerados os seguintes parâmetros:

- Número de nós = 13
- Número de casos de carga = 7
- Comprimento do arco (projeção horizontal da linha média) $L = 300 \text{ mm}$
- Altura do arco (projeção vertical da linha média) $H = 60 \text{ mm}$
- Espessura disponível para distribuição $\bar{h} = 0.14 \text{ mm}$
- Altura do arco base $h_{base} = 0 \text{ mm}$
- Base da seção do arco $b = 1 \text{ mm}$
- Volume do arco $v = 45.86 \text{ mm}^3$

- Força resultante da combinação das funções base $F = 1 \text{ N}$

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-16 - Espessuras do arco de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

x (mm)	z (mm)	h (mm)
0	0.00	0.04
25	15.53	0.15
50	30.00	0.20
75	42.43	0.18
100	51.96	0.16
125	57.96	0.10
150	60.00	0.04
175	57.96	0.10
200	51.96	0.16
225	42.43	0.18
250	30.00	0.20
275	15.53	0.15
300	0.00	0.04

Na Tabela 6-16, x significa a posição ao longo do comprimento do arco, e z a posição ao longo da altura. Essas posições referem-se aos nós ao longo da linha média do arco.

A máxima energia de deformação foi de $1.3292 \mu\text{J}$, referente à função base \bar{f}_1 .

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN obteve-se os máximos momentos fletores e forças axiais referentes aos diversos casos de carregamento (funções base). É interessante explicar que o arco modelado no MSC.NASTRAN não simula o arco de espessuras variáveis. Pelo contrário, foi utilizado um arco de espessura constante, discretizado com elemento de barra e com parâmetros semelhantes aos desta análise. O objetivo foi apenas encontrar o momento interno M_{max} e a força axial F_{axial} . Como citado acima, a tensão s_{max} foi obtida por meio do cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal

de vigas submetidas à flexão e compressão. Abaixo seguem os esforços internos e tensões de cada nó.

TABELA 6-17 - Esforços internos e tensões para o arco de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	z (mm)	h (mm)	M_{max} (N.mm)	F_{axial} (N)	função base	s max (MPa)
1	0	0.00	0.04	0.20	0.85	\bar{f}_1	873.59
2	25	15.53	0.15	12.73	0.85	\bar{f}_1	3418.50
3	50	30.00	0.20	19.11	0.71	\bar{f}_1	2816.30
4	75	42.43	0.18	19.11	0.50	\bar{f}_1	3721.31
5	100	51.96	0.16	15.47	0.45	\bar{f}_1	3474.96
6	125	57.96	0.10	7.25	0.49	\bar{f}_2	4011.06
7	150	60.00	0.04	8.25	0.51	\bar{f}_1	26027.39
8	175	57.96	0.10	7.25	0.49	\bar{f}_5	4026.49
9	200	51.96	0.16	15.47	0.45	\bar{f}_5	3479.21
10	225	42.43	0.18	19.11	0.50	\bar{f}_5	3721.31
11	250	30.00	0.20	19.11	0.71	\bar{f}_5	2816.30
12	275	15.53	0.15	12.73	0.85	\bar{f}_5	3418.50
13	300	0.00	0.04	0.20	0.85	\bar{f}_5	873.59
tensão média (com exceção do valor discrepante)							3054.26

A Tabela 6-17 mostra que a máxima tensão foi de 26027.39 MPa, referente ao nó 7 (150 mm) e devido à função base \bar{f}_1 . Essa tensão é tida como discrepante pois está muita acima da média das outras tensões. Foi causada não pelo fato dos esforços internos serem grandes (M_{max} e F_{axial}), mas pela pequena espessura atribuída pelo algoritmo. Isso decorre de uma pequena energia de deformação do nó, que é o produto força deslocamento.

As Figuras abaixo mostram de maneira aproximada o pequeno deslocamento do nó 7 devido às cargas $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ e \bar{f}_3 . Os deslocamentos devidos às cargas \bar{f}_4, \bar{f}_5 e \bar{f}_6 são simétricos aos das cargas \bar{f}_2, \bar{f}_1 e \bar{f}_0 , respectivamente.

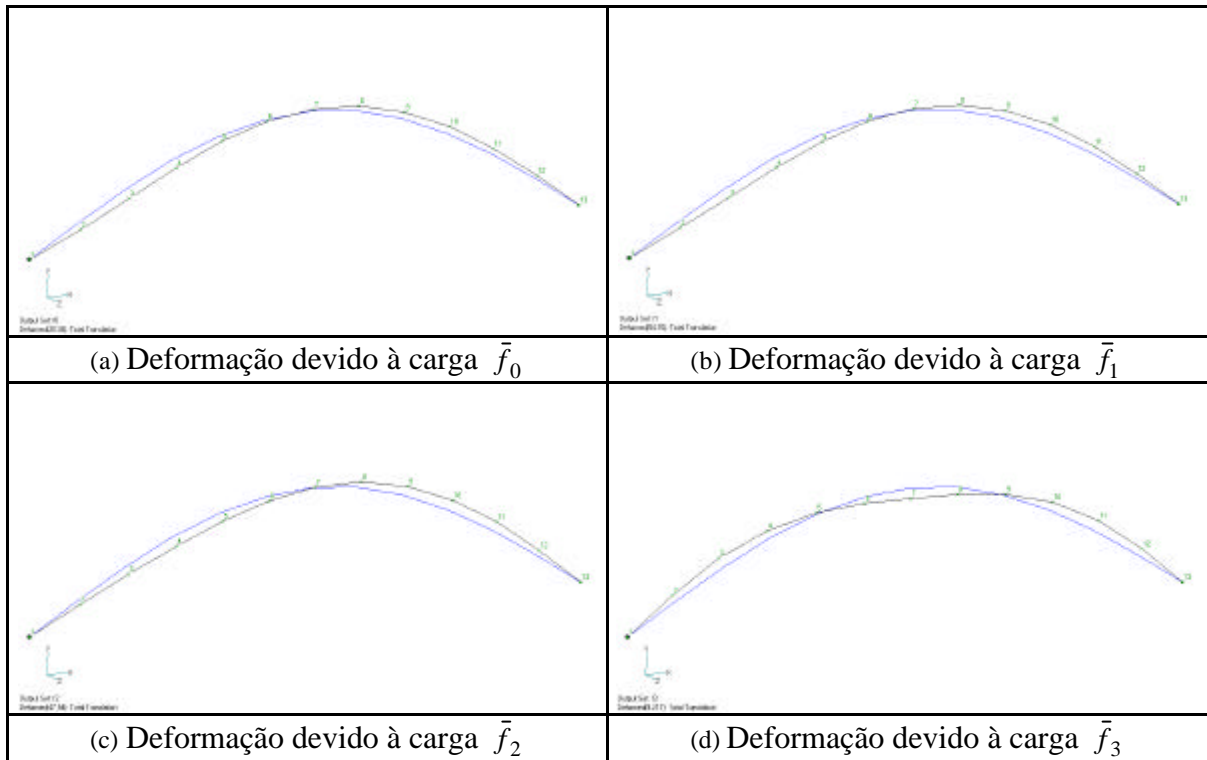


FIGURA 6-9 - Deformações do arco para diversos casos de carga.

Uma forma de diminuir o efeito da baixa energia de deformação e evitar espessuras indesejavelmente pequenas, é atribuir uma espessura base h_{base} constante para todo o arco. A distribuição de espessuras feita pelo algoritmo funciona como reforços adicionados sobre o arco base.

Para a escolha do correto h_{base} foi obtida a média das tensões atuantes (Tabela-7-2), com exceção da tensão discrepante, e calculada a espessura adequada para baixar a tensão discrepante para o nível da tensão média. O cálculo é mostrado a seguir.

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$3054.26 = \frac{6 * 8.25}{1 * h_{base}^2} + \frac{0.514}{1 * h_{base}}$$

$$h_{base} = 0.127 mm$$

O h_{base} de 0.127 mm foi utilizado como ponto de partida para novas simulações. O objetivo foi encontrar a melhor configuração de h_{base} (arco base) e de \bar{h} (espessura a ser distribuída) que retornasse a menor tensão máxima.

A soma $h_{base} + \bar{h} = 0.14$ é proveniente da viga de seção constante, obtida na Seção 6.7.

Abaixo são apresentados os resultados das simulações.

TABELA 6-18 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.

nó	$h_{base}=0.12$ mm		$h_{base}=0.11$ mm		$h_{base}=0.10$ mm	
	$\bar{h}=0.02$ mm	s_{max} (MPa)	$\bar{h}=0.03$ mm	s_{max} (MPa)	$\bar{h}=0.04$ mm	s_{max} (MPa)
	h^* (mm)		h^* (mm)		h^* (mm)	
1	0.12	90.37	0.11	106.70	0.10	128.35
2	0.13	4786.34	0.14	3988.49	0.14	4095.34
3	0.18	3516.99	0.18	3612.68	0.18	3568.93
4	0.16	4545.42	0.16	4369.93	0.17	3858.44
5	0.13	5361.35	0.14	4920.62	0.14	4666.67
6	0.12	3024.23	0.11	3597.64	0.11	3827.85
7	0.12	3440.26	0.11	4094.10	0.10	4948.34
8	0.12	3024.24	0.11	3597.72	0.11	3827.85
9	0.13	5380.13	0.14	4914.90	0.14	4666.67
10	0.16	4543.14	0.16	4371.01	0.17	3858.44
11	0.18	3516.99	0.18	3613.09	0.18	3568.93
12	0.13	4786.12	0.14	3987.34	0.14	4095.34
13	0.12	90.38	0.11	106.70	0.10	128.35
	tensão máxima:	5380.13	tensão máxima:	4920.62	tensão máxima:	4948.34

A Tabela 6-18 apresenta a menor tensão máxima para o $h_{base} = 0.11$ mm e $\bar{h} = 0.03$ mm.

Uma vez descoberta a melhor configuração h_{base}/\bar{h} , foi necessário aumentar as espessuras, uma vez que a tensão média ultrapassou a tensão de ruptura do material ($f_{tu}=530$ MPa), utilizando o cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão. Para atender o requisito de resistência do material (tensão de escoamento), todas as espessuras foram multiplicadas por um fator ?:

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$475 = \frac{6 * 15.47}{1 * (I * 0.13739)^2} + \frac{0.449}{1 * (I * 0.13739)}$$

$$I = 3.2209$$

O novo volume é $v^*=147.71$ mm³.

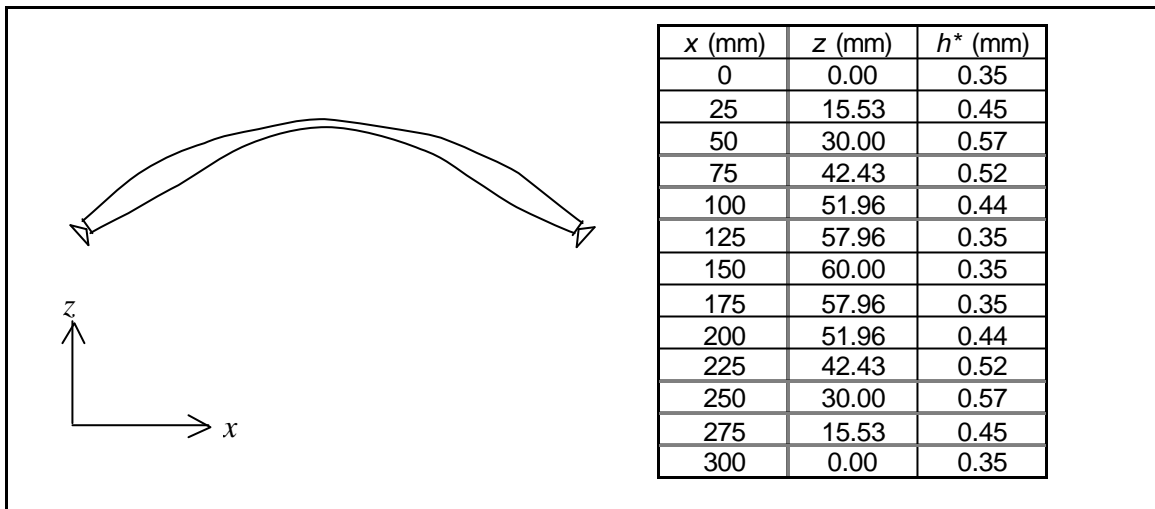


FIGURA 6-10 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, o arco dimensionado com carga uniforme e o arco dimensionado com carga variável foram submetidos a uma variação na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max}= 19.11$ N.mm e $F_{axial}= 0.71$ N, de acordo com a Tabela 6-17, posição 50 mm e 250 mm.

Sendo assim, o arco dimensionado com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh} \\
 \mathbf{s} &= \frac{6 * 19.11}{1(0.14)^2} + \frac{0.71}{1 * 0.14} \\
 \mathbf{s} &= 5855.07 MPa
 \end{aligned}$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para o arco de seção constante tem-se:

$$s = \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh}$$

$$s = \frac{6 * 19.11}{1(0.14 * 3.2209)^2} + \frac{0.71}{1 * (0.14 * 3.2209)}$$

$$s = 565.46 MPa$$

A tensão do arco de seção constante ultrapassa a tensão de ruptura do material ($f_{tu}=530$ MPa), mesmo se aplicado o fator ? à sua altura h_{cte} .

O fator ? foi aplicado ao arco de seção constante para aumentar a altura da seção e diminuir sua tensão, que passou de 5855 MPa para 565 MPa. Isso deixa a comparação mais “justa”, uma vez que o arco de carregamento variável também teve suas espessuras multiplicadas por ?.

Já para o arco dimensionado com carga variável tem-se:

TABELA 6-19 - Esforços internos e tensões para o arco de 100% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	z (mm)	h^* (mm)	M_{max} (N.mm)	F_{axial} (N)	função base	s max (MPa)
1	0	0.00	0.35	0.20	0.85	f_1	11.93
2	25	15.53	0.45	12.73	0.85	f_1	385.76
3	50	30.00	0.57	19.11	0.71	f_1	349.08
4	75	42.43	0.52	19.11	0.50	f_1	421.88
5	100	51.96	0.44	15.47	0.45	f_1	475.00
6	125	57.96	0.35	7.25	0.49	f_2	347.72
7	150	60.00	0.35	8.25	0.51	f_1	395.62
8	175	57.96	0.35	7.25	0.49	f_5	347.73
9	200	51.96	0.44	15.47	0.45	f_5	474.45
10	225	42.43	0.52	19.11	0.50	f_5	421.98
11	250	30.00	0.57	19.11	0.71	f_5	349.12
12	275	15.53	0.45	12.73	0.85	f_5	385.65
13	300	0.00	0.35	0.20	0.85	f_5	11.93

A máxima tensão é 475 MPa, referente ao nó 5 na posição 100 mm (Tabela 6-19). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

6.9 Arco Submetido a Um Carregamento Variável (75% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado foi composto de 75% de cargas variáveis e de 25% de cargas uniformes, ou seja, a resultante devido às cargas incertas foi de 0.75 N e a da carga uniforme de 0.25 N, com resultante final de 1 N.

Os parâmetros geométricos do arco são os mesmos listados na Seção 6.8.

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-20 - Espessuras do arco de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

x (mm)	z (mm)	h (mm)
0	0.00	0.04
25	15.53	0.17
50	30.00	0.19
75	42.43	0.18
100	51.96	0.15
125	57.96	0.12
150	60.00	0.03
175	57.96	0.12
200	51.96	0.15
225	42.43	0.18
250	30.00	0.19
275	15.53	0.17
300	0.00	0.04

A máxima energia de deformação foi de 0.7367 μ J, referente à função base \bar{f}_2 .

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN obteve-se os máximos momentos fletores e forças axiais referentes aos diversos casos de carregamento. Abaixo seguem os esforços internos e tensões de cada nó.

TABELA 6-21 - Esforços internos e tensões para o arco de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	z (mm)	h (mm)	M max (N.mm)	F axial (N)	s max (MPa)
1	0	0.00	0.04	0.19	0.83	699.48
2	25	15.53	0.17	9.93	0.83	2194.09
3	50	30.00	0.19	14.72	0.72	2531.83
4	75	42.43	0.18	14.71	0.55	2682.34
5	100	51.96	0.15	11.79	0.51	3266.83
6	125	57.96	0.12	5.69	0.53	2495.99
7	150	60.00	0.03	6.52	0.55	39287.92
8	175	57.96	0.12	5.69	0.53	2479.04
9	200	51.96	0.15	11.79	0.51	3262.40
10	225	42.43	0.18	14.71	0.55	2682.34
11	250	30.00	0.19	14.72	0.72	2531.83
12	275	15.53	0.17	9.93	0.83	2194.09
13	300	0.00	0.04	0.19	0.83	699.48
tensão média (com exceção do valor discrepante):						2309.98

A Tabela 6-21 mostra que a máxima tensão foi de 39287.92 MPa, referente ao nó 7 (150 mm). Essa tensão é tida como discrepante pois está muita acima da média das outras tensões, causada por uma pequena energia de deformação do nó, como detalhado na Seção 6.8.

Uma abordagem para tal situação é aplicar uma espessura base ao arco. Para a escolha do correto h_{base} foi obtida a média das tensões atuantes, com exceção da tensão discrepante, e calculada a espessura adequada para baixar a tensão discrepante para o nível da tensão média. O cálculo é mostrado a seguir.

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$3054.26 = \frac{6 * 8.25}{1 * h_{base}^2} + \frac{0.514}{1 * h_{base}}$$

$$h_{base} = 0.127mm$$

O h_{base} de 0.127 mm foi utilizado como ponto de partida para novas simulações. O objetivo foi encontrar a melhor configuração de h_{base} (viga base) e de \bar{h} (espessura a ser distribuída) que retornasse a menor tensão máxima.

A soma $h_{base} + \bar{h} = 0.14$ é proveniente da viga de seção constante, obtida na Seção 6.7.

Abaixo são apresentados os resultados das simulações.

TABELA 6-22 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.

nó	$h_{base}=0.11$ mm	s_{max} (MPa)	$h_{base}=0.10$ mm	s_{max} (MPa)	$h_{base}=0.09$ mm	s_{max} (MPa)
	$\bar{h}=0.03$ mm		$\bar{h}=0.04$ mm		$\bar{h}=0.05$ mm	
	h^* (mm)		h^* (mm)		h^* (mm)	
1	0.11	103.31	0.10	124.14	0.09	152.21
2	0.14	2952.73	0.14	2893.48	0.14	3257.39
3	0.18	2678.70	0.17	2960.50	0.18	2804.03
4	0.16	3571.53	0.17	2931.55	0.18	2586.34
5	0.13	3912.53	0.14	3532.18	0.14	3534.68
6	0.11	2826.54	0.10	3156.52	0.11	2988.97
7	0.11	3234.24	0.10	3912.43	0.09	4829.72
8	0.11	2826.57	0.10	3156.46	0.11	2988.97
9	0.13	3909.04	0.14	3529.19	0.14	3532.68
10	0.16	3571.99	0.17	2931.55	0.18	2585.78
11	0.18	2678.70	0.17	2960.50	0.18	2804.66
12	0.14	2952.73	0.14	2894.29	0.14	3257.87
13	0.11	103.31	0.10	124.14	0.09	152.21
	tensão máxima:	3912.53	tensão máxima:	3912.43	tensão máxima:	4829.72

A Tabela 6-22 apresenta a menor tensão máxima para o $h_{base} = 0.10$ mm e $\bar{h} = 0.04$ mm.

Uma vez descoberta a melhor configuração h_{base}/\bar{h} , foi necessário aumentar as espessuras, uma vez que a tensão média ultrapassa a tensão de ruptura do material ($f_{tu}=530$ MPa), utilizando o cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão. O fator γ que multiplica as espessuras foi obtido a seguir.

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$475 = \frac{6 * 6.515}{1 * (I * 0.10)^2} + \frac{0.5482}{1 * (I * 0.10)}$$

$$I = 2.873729$$

O novo volume é $v^* = 131.79$ mm³.

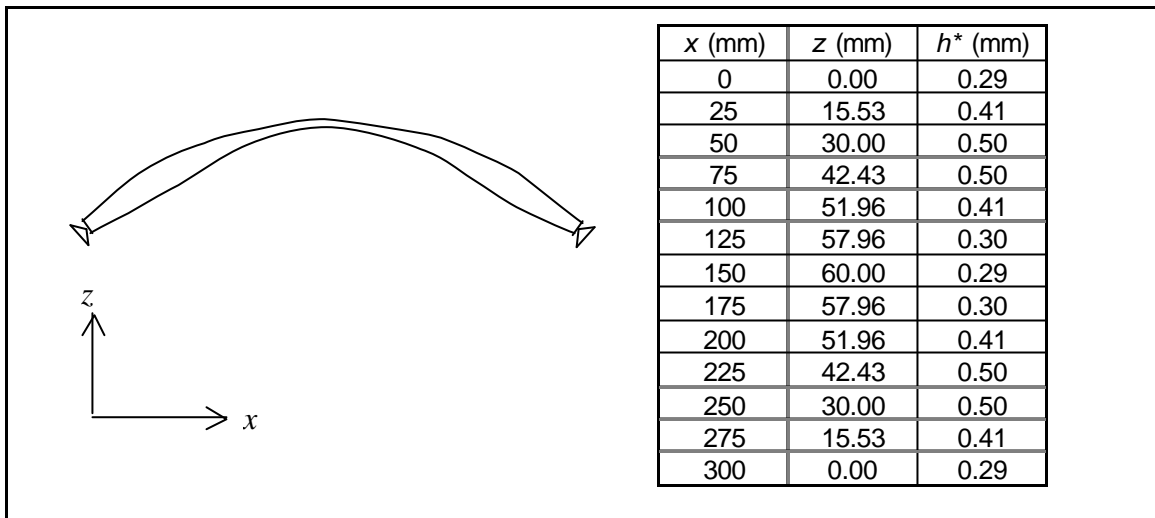


FIGURA 6-11 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, o arco dimensionado com carga uniforme e o arco dimensionado com carga variável foram submetidos a uma variação na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max}= 14.72$ N.mm e $F_{axial}= 0.72$ N, de acordo com a Tabela 6-21, posição 50 mm e 250 mm.

Sendo assim o arco dimensionado com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh} \\
 \mathbf{s} &= \frac{6 * 14.72}{1(0.14)^2} + \frac{0.72}{1 * 0.14} \\
 \mathbf{s} &= 4511.26MPa
 \end{aligned}$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para o arco de seção constante tem-se:

$$s = \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh}$$

$$s = \frac{6 * 14.72}{1 * (0.14 * 2.8737)^2} + \frac{0.72}{1 * (0.14 * 2.8737)}$$

$$s = 547.44 MPa$$

A tensão do arco de seção constante ultrapassou a tensão de ruptura do material ($f_{tu}=530MPa$), mesmo se aplicado o fator ? à sua altura h_{cte} .

Já para o arco dimensionado com carga variável tem-se:

TABELA 6-23 - Esforços internos e tensões para o arco de 75% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	z (mm)	h^* (mm)	M_{max} (N.mm)	F_{axial} (N)	s_{max} (MPa)
1	0	0.00	0.29	0.19	0.83	16.92
2	25	15.53	0.41	9.93	0.83	351.69
3	50	30.00	0.50	14.72	0.72	359.43
4	75	42.43	0.50	14.71	0.55	355.70
5	100	51.96	0.41	11.79	0.51	428.52
6	125	57.96	0.30	5.69	0.53	383.38
7	150	60.00	0.29	6.52	0.55	475.00
8	175	57.96	0.30	5.69	0.53	383.37
9	200	51.96	0.41	11.79	0.51	428.16
10	225	42.43	0.50	14.71	0.55	355.70
11	250	30.00	0.50	14.72	0.72	359.43
12	275	15.53	0.41	9.93	0.83	351.79
13	300	0.00	0.29	0.19	0.83	16.92

A máxima tensão é 475 MPa, referente ao nó 7 na posição 150 mm (Tabela 6-23). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

6.10 Arco Submetido a Um Carregamento Variável (50% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado foi composto de 50% de cargas variáveis e de 50% de cargas uniformes, ou seja, a resultante devido às cargas incertas foi de 0.50 N e a da carga uniforme de 0.50 N, com resultante final de 1 N.

Os parâmetros geométricos do arco são os mesmos listados na Seção 6.8.

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-24 - Espessuras do arco de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

x (mm)	z (mm)	h (mm)
0	0.00	0.04
25	15.53	0.17
50	30.00	0.19
75	42.43	0.18
100	51.96	0.14
125	57.96	0.11
150	60.00	0.04
175	57.96	0.11
200	51.96	0.14
225	42.43	0.18
250	30.00	0.19
275	15.53	0.17
300	0.00	0.04

A máxima energia de deformação foi de 0.37367 μJ , referente à função base \bar{f}_2 .

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN obteve-se os máximos momentos fletores e forças axiais referentes aos diversos casos de carregamento. Abaixo seguem os esforços internos e tensões de cada nó.

TABELA 6-25 - Esforços internos e tensões para o arco de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	<i>x</i> (mm)	<i>z</i> (mm)	<i>h</i> (mm)	<i>M max</i> (N.mm)	<i>F axial</i> (N)	<i>s max</i> (MPa)
1	0	0.00	0.04	0.19	0.82	690.05
2	25	15.53	0.17	7.14	0.82	1448.58
3	50	30.00	0.19	10.33	0.73	1732.72
4	75	42.43	0.18	10.31	0.61	1842.55
5	100	51.96	0.14	8.10	0.57	2512.28
6	125	57.96	0.11	4.14	0.57	2064.60
7	150	60.00	0.04	4.78	0.58	17551.46
8	175	57.96	0.11	4.14	0.57	2157.79
9	200	51.96	0.14	8.10	0.57	2505.08
10	225	42.43	0.18	10.31	0.61	1842.55
11	250	30.00	0.19	10.33	0.73	1740.06
12	275	15.53	0.17	7.14	0.82	1448.58
13	300	0.00	0.04	0.19	0.82	690.72
tensão média (com exceção do valor discrepante):						1722.96

A Tabela 6-25 mostra que a máxima tensão foi de 17551.46 MPa, referente ao nó 7 (150 mm). Essa tensão é tida como discrepante pois está muita acima da média das outras tensões, causada por uma pequena energia de deformação do nó, como detalhado na Seção 6.8.

Uma abordagem para tal situação é aplicar uma espessura base à viga. Para a escolha do correto h_{base} foi obtida a média das tensões atuantes, com exceção da tensão discrepante, e calculada a espessura adequada para baixar a tensão discrepante para o nível da tensão média. O cálculo é mostrado a seguir.

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$1722.96 = \frac{6 * 4.78}{1 * h_{base}^2} + \frac{0.58235}{1 * h_{base}}$$

$$h_{base} = 0.129mm$$

O h_{base} de 0.129 mm foi utilizado como ponto de partida para novas simulações. O objetivo foi encontrar a melhor configuração de h_{base} (viga base) e de \bar{h} (espessura a ser distribuída) que retornasse a menor tensão máxima.

A soma $h_{base} + \bar{h} = 0.14$ é proveniente da viga de seção constante, obtida na Seção 6.7.

Abaixo são apresentados os resultados das simulações.

TABELA 6-26 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.

nó	$h_{base}=0.12$ mm	s_{max} (MPa)	$h_{base}=0.11$ mm	s_{max} (MPa)	$h_{base}=0.10$ mm	s_{max} (MPa)
	$\bar{h}=0.02$ mm		$\bar{h}=0.03$ mm		$\bar{h}=0.04$ mm	
	h^* (mm)		h^* (mm)		h^* (mm)	
1	0.12	84.60	0.11	100.06	0.10	120.01
2	0.14	2265.86	0.13	2560.05	0.14	2078.44
3	0.17	2176.04	0.18	1997.83	0.18	1869.83
4	0.17	2242.47	0.18	1959.24	0.17	2134.40
5	0.12	3160.39	0.13	2775.49	0.14	2554.65
6	0.12	1728.46	0.11	2026.40	0.10	2454.83
7	0.12	1996.21	0.11	2374.66	0.10	2871.32
8	0.12	1728.47	0.11	2028.27	0.10	2454.83
9	0.12	3160.39	0.13	2779.68	0.14	2554.65
10	0.17	2242.47	0.18	1959.24	0.17	2134.40
11	0.17	2176.04	0.18	1997.15	0.18	1870.03
12	0.14	2265.86	0.13	2561.24	0.14	2078.15
13	0.12	84.60	0.11	100.06	0.10	120.02
	tensão máxima:	3160.39	tensão máxima:	2779.68	tensão máxima:	2871.32

A Tabela 6-26 apresenta a menor tensão máxima para o $h_{base} = 0.11$ mm e $\bar{h} = 0.03$ mm.

Uma vez descoberta a melhor configuração h_{base}/\bar{h} , foi necessário aumentar as espessuras, uma vez que a tensão média ultrapassa a tensão de ruptura do material ($f_{tu}=530$ MPa), utilizando o cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão. O fator γ que multiplica as espessuras foi obtido a seguir.

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$475 = \frac{6 * 8.10}{1 * (I * 0.1323)^2} + \frac{0.565}{1 * (I * 0.1312)}$$

$$I = 2.4217233$$

O novo volume é $v^* = 111.06$ mm³.

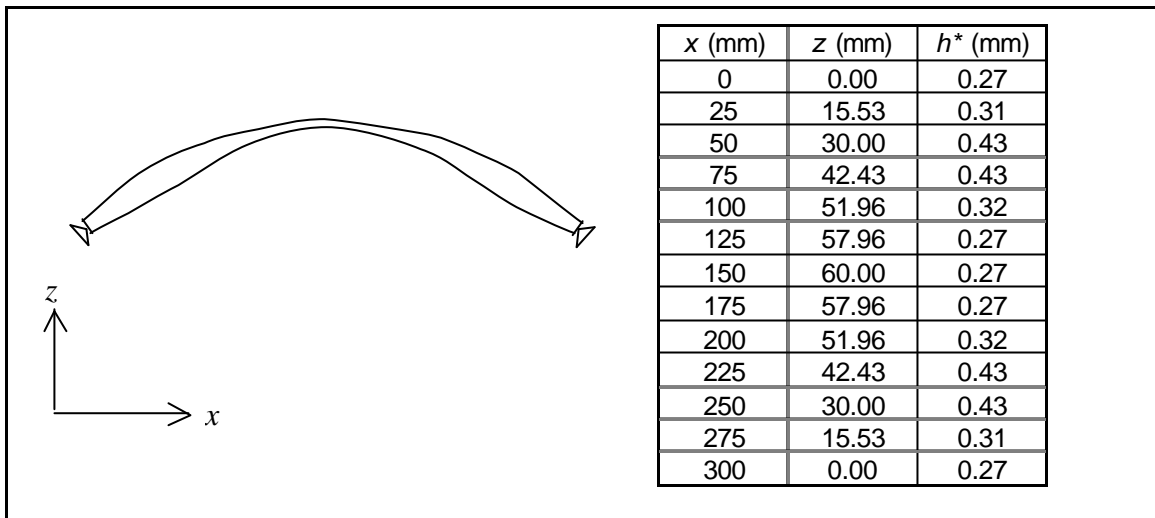


FIGURA 6-12 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, o arco dimensionado com carga uniforme e o arco dimensionado com carga variável foram submetidos a uma variação na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max}= 10.33$ N.mm e $F_{axial}= 0.73$ N, de acordo com a Tabela 6-25, posição 50 mm e 250 mm.

Sendo assim o arco dimensionado com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$s = \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh}$$

$$s = \frac{6 * 10.33}{1(0.14)^2} + \frac{0.73}{1 * 0.14}$$

$$s = 3167.46MPa$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para o arco de seção constante tem-se:

$$s = \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh}$$

$$s = \frac{6 * 10.33}{1 * (0.14 * 2.4217)^2} + \frac{0.73}{1 * (0.14 * 2.4217)}$$

$$s = 541.35MPa$$

A tensão do arco de seção constante ultrapassa a tensão de ruptura do material ($f_{tu}=530\text{MPa}$), mesmo se aplicado o fator γ à sua altura h_{cte} .

Já para o arco dimensionado com carga variável tem-se:

TABELA 6-27 - Esforços internos e tensões para o arco de 50% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	z (mm)	h^* (mm)	M_{max} (N.mm)	F_{axial} (N)	s_{max} (MPa)
1	0	0.00	0.27	0.19	0.82	18.87
2	25	15.53	0.31	7.14	0.82	438.05
3	50	30.00	0.43	10.33	0.73	341.65
4	75	42.43	0.43	10.31	0.61	334.90
5	100	51.96	0.32	8.10	0.57	474.28
6	125	57.96	0.27	4.14	0.57	346.78
7	150	60.00	0.27	4.78	0.58	406.19
8	175	57.96	0.27	4.14	0.57	347.10
9	200	51.96	0.32	8.10	0.57	475.00
10	225	42.43	0.43	10.31	0.61	334.90
11	250	30.00	0.43	10.33	0.73	341.54
12	275	15.53	0.31	7.14	0.82	438.25
13	300	0.00	0.27	0.19	0.82	18.87

A máxima tensão é 475 MPa, referente ao nó 9 na posição 200 mm (Tabela 6-27). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

6.11 Arco Submetido a Um Carregamento Variável (25% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado foi composto de 25% de cargas variáveis e de 75% de cargas uniformes, ou seja, a resultante devido às cargas incertas foi de 0.25 N e a da carga uniforme de 0.75 N, com resultante final de 1 N.

Os parâmetros geométricos do arco são os mesmos listados na Seção 6.8.

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-28 - Espessuras do arco de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

x (mm)	z (mm)	h (mm)
0	0.00	0.08
25	15.53	0.16
50	30.00	0.20
75	42.43	0.17
100	51.96	0.14
125	57.96	0.08
150	60.00	0.07
175	57.96	0.08
200	51.96	0.14
225	42.43	0.17
250	30.00	0.20
275	15.53	0.16
300	0.00	0.08

A máxima energia de deformação foi de 0.1282 μJ , referente à função base \bar{f}_2 .

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN obteve-se os máximos momentos fletores e forças axiais referentes aos diversos casos de carregamento. Abaixo seguem os esforços internos e tensões de cada nó.

TABELA 6-29 - Esforços internos e tensões para o arco de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	z (mm)	h (mm)	M max (N.mm)	F axial (N)	s max (MPa)
1	0	0.00	0.08	0.18	0.81	201.34
2	25	15.53	0.16	4.34	0.81	975.09
3	50	30.00	0.20	5.93	0.74	922.93
4	75	42.43	0.17	5.91	0.66	1216.75
5	100	51.96	0.14	4.42	0.62	1266.03
6	125	57.96	0.08	2.58	0.62	2333.05
7	150	60.00	0.07	3.05	0.62	3511.40
8	175	57.96	0.08	2.58	0.62	2333.05
9	200	51.96	0.14	4.42	0.62	1266.03
10	225	42.43	0.17	5.91	0.66	1216.75
11	250	30.00	0.20	5.93	0.74	922.93
12	275	15.53	0.16	4.34	0.81	975.09
13	300	0.00	0.08	0.18	0.81	201.34
tensão média (com exceção do valor discrepante):						1152.53

A Tabela 6-29 mostra que a máxima tensão foi de 3511.40 MPa, referente ao nó 7 (150 mm). Essa tensão é tida como discrepante pois está acima da média das outras tensões, causada por uma pequena energia de deformação do nó, como detalhado na Seção 6.8.

Uma abordagem para tal situação é aplicar uma espessura base à viga. Para a escolha do correto h_{base} foi obtida a média das tensões atuantes, com exceção da tensão discrepante, e calculada a espessura adequada para baixar a tensão discrepante para o nível da tensão média. O cálculo é mostrado a seguir.

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$1152.53 = \frac{6 * 3.045}{1 * h_{base}^2} + \frac{0.616525}{1 * h_{base}}$$

$$h_{base} = 0.126mm$$

O h_{base} de 0.126 mm foi utilizado como ponto de partida para novas simulações. O objetivo foi encontrar a melhor configuração de h_{base} (viga base) e de \bar{h} (espessura a ser distribuída) que retornasse a menor tensão máxima.

A soma $h_{base} + \bar{h} = 0.14$ é proveniente da viga de seção constante, obtida na Seção 6.7.

Abaixo são apresentados os resultados das simulações.

TABELA 6-30 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.

nó	$h_{base}=0.14$ mm	s_{max} (MPa)	$h_{base}=0.13$ mm	s_{max} (MPa)	$h_{base}=0.12$ mm	s_{max} (MPa)
	$\bar{h}=0.00$ mm		$\bar{h}=0.01$ mm		$\bar{h}=0.02$ mm	
	h^* (mm)		h^* (mm)		h^* (mm)	
1	0.14	60.92	0.13	70.16	0.12	81.74
2	0.14	1333.82	0.13	1538.67	0.14	1359.67
3	0.14	1821.60	0.17	1276.94	0.17	1247.88
4	0.14	1814.21	0.15	1563.14	0.17	1249.95
5	0.14	1356.05	0.13	1572.27	0.12	1843.90
6	0.14	794.81	0.13	921.42	0.12	1080.80
7	0.14	936.55	0.13	1085.52	0.12	1273.36
8	0.14	794.81	0.13	921.43	0.12	1080.81
9	0.14	1356.05	0.13	1572.28	0.12	1843.94
10	0.14	1814.21	0.15	1563.14	0.17	1249.80
11	0.14	1821.60	0.17	1276.94	0.17	1247.73
12	0.14	1333.82	0.13	1538.66	0.14	1360.06
13	0.14	60.92	0.13	70.17	0.12	81.74
	tensão máxima:	1821.60	tensão máxima:	1572.28	tensão máxima:	1843.94

A Tabela 6-30 apresenta a menor tensão máxima para o $h_{base} = 0.13$ mm e $\bar{h} = 0.01$ mm.

Uma vez descoberta a melhor configuração h_{base}/\bar{h} , foi necessário aumentar as espessuras, uma vez que a tensão média ultrapassa a tensão de ruptura do material ($f_{tu}=530$ MPa), utilizando o cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão. O fator γ que multiplica as espessuras foi obtido a seguir.

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$475 = \frac{6 * 4.415}{1 * (I * 0.13)^2} + \frac{0.623}{1 * (I * 0.13)}$$

$$I = 1.821636$$

O novo volume é $v^* = 83.54$ mm³.

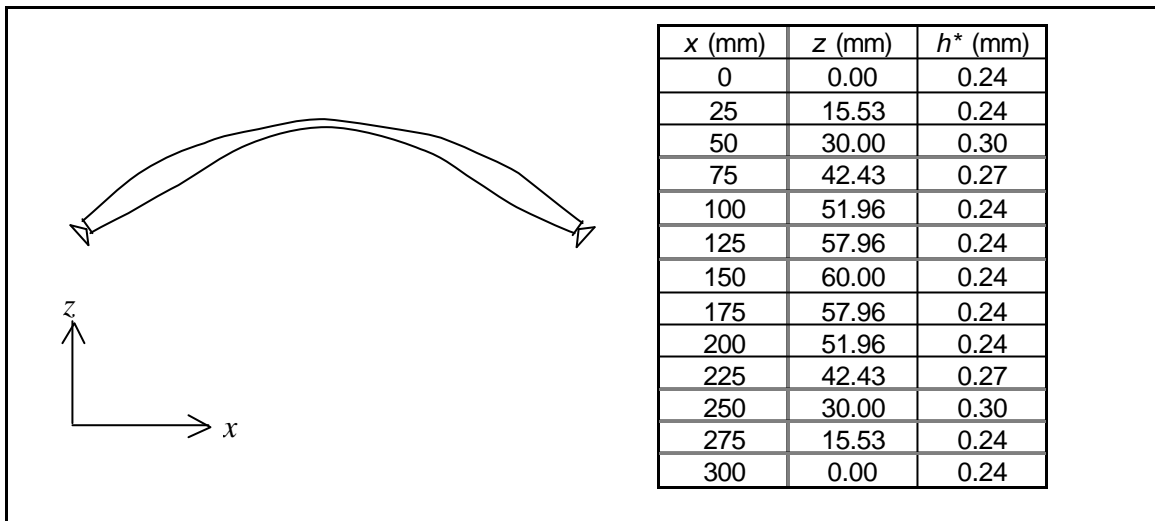


FIGURA 6-13 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

A seguir, o arco dimensionado com carga uniforme e o arco dimensionado com carga variável foram submetidos a uma variação na forma do carregamento.

Para o caso do carregamento variável, com força resultante igual a 1 N, o máximo momento fletor é $M_{max}= 5.93$ N.mm e $F_{axial}= 0.74$ N, de acordo com a Tabela 6-29, posição 50 mm e 250 mm.

Sendo assim o arco dimensionado com carga uniforme terá a seguinte tensão:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh} \\
 \mathbf{s} &= \frac{6*5.93}{1(0.14)^2} + \frac{0.74}{1*0.14} \\
 \mathbf{s} &= 1820.60MPa
 \end{aligned}$$

Aplicando-se o mesmo fator ? para o arco de seção constante tem-se:

$$s = \frac{6M}{bh^2} + \frac{F_{axial}}{bh}$$

$$s = \frac{6 * 5.93}{1(0.14 * 1.8216)^2} + \frac{0.74}{1 * (0.14 * 1.8216)}$$

$$s = 549.95 MPa$$

A tensão do arco de seção constante ultrapassou a tensão de ruptura do material ($f_{tu}=530MPa$), mesmo se aplicado o fator ? à sua altura h_{cte} .

Já para o arco dimensionado com carga variável tem-se:

TABELA 6-31 - Esforços internos e tensões para o arco de 25% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	z (mm)	h* (mm)	M max (N.mm)	N max (N)	s max (MPa)
1	0	0.00	0.24	0.18	0.81	22.68
2	25	15.53	0.24	4.34	0.81	465.22
3	50	30.00	0.30	5.93	0.74	385.91
4	75	42.43	0.27	5.91	0.66	472.14
5	100	51.96	0.24	4.42	0.62	475.00
6	125	57.96	0.24	2.58	0.62	278.85
7	150	60.00	0.24	3.05	0.62	328.30
8	175	57.96	0.24	2.58	0.62	278.85
9	200	51.96	0.24	4.42	0.62	475.00
10	225	42.43	0.27	5.91	0.66	472.14
11	250	30.00	0.30	5.93	0.74	385.91
12	275	15.53	0.24	4.34	0.81	465.21
13	300	0.00	0.24	0.18	0.81	22.68

A máxima tensão é 475 MPa referente ao nó 7, posição 150 mm (Tabela 6-31). O material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

6.12 Arco Submetido a Um Carregamento Variável (0% de Incerteza de Ocorrência da Carga Uniforme)

O carregamento utilizado foi composto de 100% de carga uniformemente distribuída, ou seja, a carga é totalmente conhecida.

Os parâmetros geométricos do arco são os mesmos listados na Seção 6.8.

As espessuras provenientes do algoritmo são apresentadas na Tabela seguinte.

TABELA 6-32 - Espessuras do arco de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

x (mm)	z (mm)	h (mm)
0	0.00	0.08
25	15.53	0.20
50	30.00	0.19
75	42.43	0.17
100	51.96	0.04
125	57.96	0.12
150	60.00	0.15
175	57.96	0.12
200	51.96	0.04
225	42.43	0.17
250	30.00	0.19
275	15.53	0.20
300	0.00	0.08

A máxima energia de deformação foi de 0.014825 μJ , referente ao carregamento uniforme.

Essa distribuição de espessura foi submetida a um cálculo clássico de tensões combinadas da seção transversal de vigas submetidas à flexão e compressão para verificar se os esforços internos referentes ao pior caso de carregamento estavam acima ou abaixo da resistência do material.

Por meio do MSC.NASTRAN obteve-se os máximos momentos fletores e forças axiais referentes aos diversos casos de carregamento. Abaixo seguem os esforços internos e tensões de cada nó.

TABELA 6-33 - Esforços internos e tensões para o arco de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.

nó	x (mm)	z (mm)	h (mm)	M max (N.mm)	F axial (N)	s max (MPa)
1	0	0.00	0.08	0.17	0.79	190.38
2	25	15.53	0.20	1.54	0.79	233.28
3	50	30.00	0.19	1.54	0.75	254.47
4	75	42.43	0.17	1.51	0.71	327.47
5	100	51.96	0.04	0.73	0.68	3403.71
6	125	57.96	0.12	1.03	0.66	408.30
7	150	60.00	0.15	1.31	0.65	367.67
8	175	57.96	0.12	1.03	0.66	409.62
9	200	51.96	0.04	0.73	0.68	3334.96
10	225	42.43	0.17	1.51	0.71	330.21
11	250	30.00	0.19	1.54	0.75	252.64
12	275	15.53	0.20	1.54	0.79	236.54
13	300	0.00	0.08	0.17	0.79	181.51
tensão média (com exceção dos valores discrepantes):						290.19

A Tabela 6-33 mostra que as máximas tensões foram de 3403.71 MPa e 3334.96 MPa, referentes aos nós 5 (100 mm) e 9 (200 mm). Essas tensões são tidas como discrepantes pois estão muita acima da média das outras tensões. Foram originadas por uma pequena energia de deformação do nó, que é o produto força deslocamento.

A Figura abaixo mostra de maneira aproximada o pequeno deslocamento dos nós 5 e 9 devido à carga uniformemente distribuída.

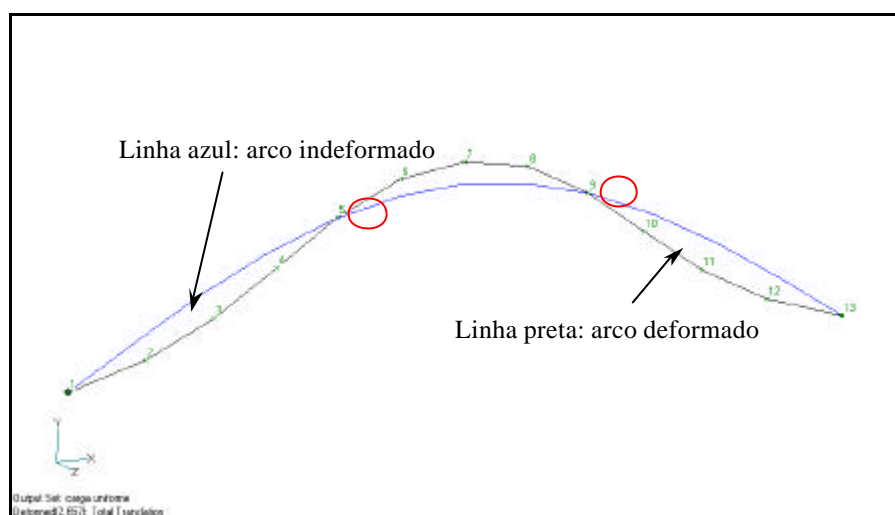


FIGURA 6-14 - Deformação devida à carga uniformemente distribuída.

Para minimizar o efeito da baixa energia de deformação foi utilizado um h_{base} conveniente.

Para a escolha do correto h_{base} foi obtida a média das tensões atuantes, com exceção das tensões discrepantes, e calculada as espessuras adequadas para baixar a tensões discrepantes para o nível da tensão média. O cálculo é mostrado a seguir.

$$s = \frac{6M}{b(Ih)^2} + \frac{F_{axial}}{b(Ih)}$$

$$290.19 = \frac{6 * 0.73}{1 * h_{base}^2} + \frac{0.68}{1 * h_{base}}$$

$$h_{base} = 0.124mm$$

O h_{base} de 0.124 mm foi utilizado como ponto de partida para novas simulações. O objetivo foi encontrar a melhor configuração de h_{base} (viga base) e de \bar{h} (espessura a ser distribuída) que retornasse a menor tensão máxima.

A soma $h_{base} + \bar{h} = 0.14$ é proveniente da viga de seção constante, obtida na Seção 6.7. Abaixo são apresentados os resultados das simulações.

TABELA 6-34 - Configurações h_{base}/\bar{h} e tensões máximas.

nó	$h_{base}=0.14$ mm	s_{max} (MPa)	$h_{base}=0.13$ mm	s_{max} (MPa)	$h_{base}=0.12$ mm	s_{max} (MPa)
	$\bar{h}=0.00$ mm		$\bar{h}=0.01$ mm		$\bar{h}=0.02$ mm	
	h^* (mm)		h^* (mm)		h^* (mm)	
1	0.14	58.52	0.13	67.72	0.12	78.90
2	0.14	475.00	0.15	406.23	0.16	353.23
3	0.14	474.69	0.16	344.47	0.18	287.30
4	0.14	465.37	0.13	542.05	0.12	635.63
5	0.14	227.27	0.13	264.46	0.12	309.92
6	0.14	317.18	0.13	369.26	0.12	432.81
7	0.14	403.60	0.13	466.35	0.14	384.90
8	0.14	317.18	0.13	369.26	0.12	432.81
9	0.14	227.27	0.13	264.46	0.12	309.92
10	0.14	465.37	0.13	542.06	0.12	635.64
11	0.14	474.69	0.16	344.51	0.18	287.33
12	0.14	475.00	0.15	405.86	0.16	353.10
13	0.14	58.52	0.13	67.71	0.12	78.90
	tensão máxima:	475.00	tensão máxima:	542.06	tensão máxima:	635.64

A Tabela 6-34 acima mostra que a melhor configuração de h_{base} é o caso em que ele é máximo e \bar{h} nulo.

Diante disso não foi necessária nenhuma correção de espessura, pois o material está na iminência do escoamento, não ocorrendo falha.

Logo o arco submetido a carga variável tornou-se igual ao arco obtido para a carga uniforme.

O volume do arco é $v^*=45.86$.

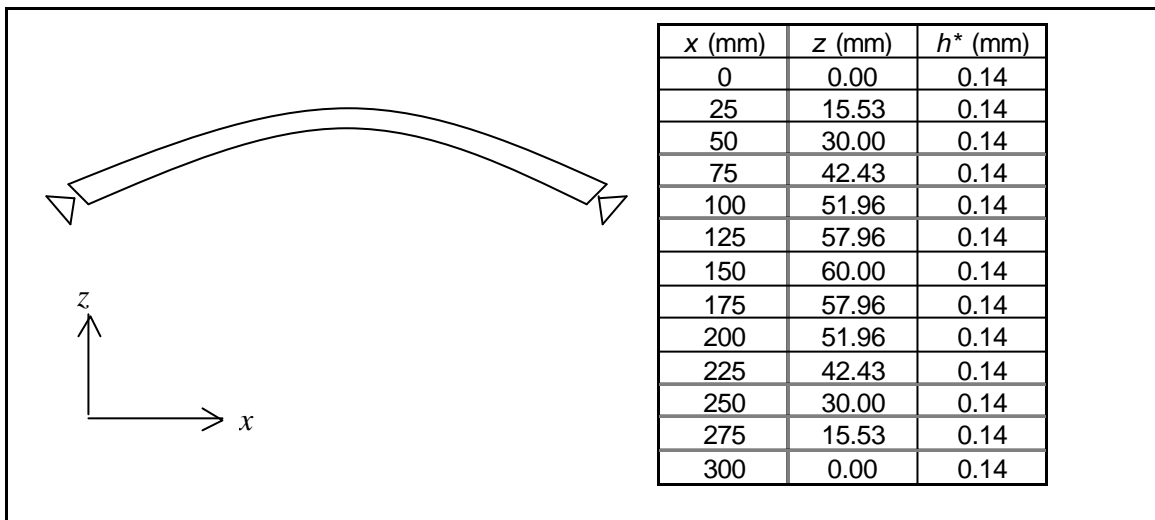
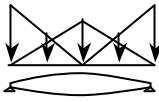
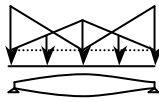
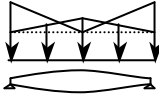
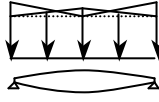
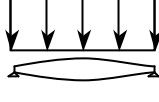
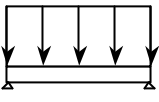


FIGURA 6-15 - Arco de seção retangular com espessura variável h^* e $b=1$ mm submetido a um carregamento de 0% de incerteza de ocorrência da carga uniforme.


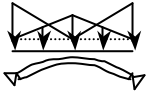
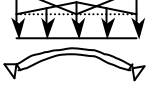
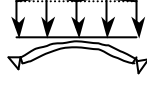
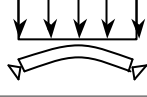
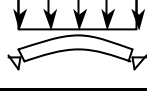
Abaixo, a Tabela 6-35 apresenta um quadro resumindo os projetos ótimos h^* acima descritos para os casos em que o nível de incerteza sobre a atuação do carregamento incerto é 100%, 75%, 50%, 25% e 0%.

TABELA 6-35 - Espessuras nodais dos projetos ótimos para diversos casos de incerteza das cargas (mm).

Incerteza sobre a atuação do carregamento uniforme		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	v^* (mm ³)	C (μ J)
100%		0.11	0.53	0.68	0.84	0.97	1.08	1.12	1.08	0.97	0.84	0.68	0.51	0.13	235.66	0.169
75%		0.14	0.48	0.64	0.78	0.89	0.98	1.02	0.98	0.89	0.78	0.64	0.48	0.13	218.15	0.146
50%		0.12	0.45	0.59	0.71	0.80	0.87	0.90	0.87	0.80	0.71	0.59	0.45	0.12	196.73	0.124
25%		0.12	0.43	0.55	0.66	0.73	0.78	0.79	0.78	0.73	0.65	0.55	0.42	0.12	179.63	0.103
0%		0.12	0.40	0.52	0.60	0.65	0.68	0.69	0.68	0.65	0.60	0.52	0.40	0.11	162.70	0.084
Viga de seção constante		0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	207.00	-

Abaixo, a Tabela 6-36 apresenta um quadro resumindo os projetos ótimos h^* acima descritos para os casos em que o nível de incerteza sobre a atuação do carregamento incerto é 100%, 75%, 50%, 25% e 0%.

TABELA 6-36 - Espessuras nodais dos projetos ótimos para diversos casos de incerteza das cargas (mm).

Incerteza sobre a atuação do carregamento uniforme		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	v^* (mm ³)	C (μ J)
100%		0.35	0.45	0.57	0.52	0.44	0.35	0.35	0.35	0.44	0.52	0.57	0.45	0.35	147.71	1.329
75%		0.29	0.41	0.50	0.50	0.41	0.30	0.29	0.30	0.41	0.50	0.50	0.41	0.29	131.79	0.737
50%		0.27	0.31	0.43	0.43	0.32	0.27	0.27	0.27	0.32	0.43	0.43	0.31	0.27	111.06	0.374
25%		0.24	0.24	0.30	0.27	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.27	0.30	0.24	0.24	83.54	0.128
0%		0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	45.86	0.015
Arco de seção constante		0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	45.86	-

Parece razoável entender que a massa de uma viga resistente à variação de cargas seja maior que a de uma viga dimensionada para uma carga fixa. Isso ocorreu principalmente para os maiores níveis de incerteza da carga uniforme (100% e 75%). O volume inicial de 207 mm³ passou para 235 mm³ na viga com incerteza de 100% e para 218 mm³ na viga com incerteza de 75% (ver Tabela 6-35). Já para os menores níveis de incerteza (50%, 25% e 0%) foi possível diminuir a massa inicialmente proposta. O volume inicial de 207 mm³ passou para 196 mm³ na viga com incerteza de 50%, 179 mm³ na viga com incerteza de 25% e para 162 mm³ na viga com incerteza de 0% (ver Tabela 6-35).

Já para os arcos, pôde-se ver que todos os projetos obtidos por minimax tiveram suas massas originais aumentadas. Esse aumento de massa foi aplicado para que o nível de tensão não ultrapassasse o limite de escoamento do material (ver Tabela 6-36).

A energia de deformação C diminuiu à medida que o nível de incerteza da carga uniforme também diminuiu (ver Tabela 6-35 e Tabela 6-36). Isso se deve à progressiva redução da severidade do carregamento.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

A técnica minimax foi aplicada à minimização da energia de deformação de vigas e arcos sujeitos a carregamentos variáveis como uma técnica alternativa para tais problemas.

Em aplicações reais é usual existir estruturas que experimentam vários casos de carga durante sua operação. Em particular, elementos estruturais para aplicações aeroespaciais devem suportar cargas severas enquanto operam em condições ambientais hostis. A maioria dos componentes estruturais aeronáuticos está sujeita a mais de 100 importantes casos de carga, incluindo manobras, rajadas e pouso. Quando esses componentes estruturais são otimizados para a massa mínima, é freqüente imporem-se restrições de máxima deformação ou mínima carga de flambagem, tais como perfis reforçadores de painéis enrijecidos. Portanto minimizar a energia de deformação é um importante fator para obter-se um projeto eficiente.

Baseando-se nos resultados obtidos, foi possível verificar a vulnerabilidade do dimensionamento de vigas e arcos sujeitos a carga fixas, como é o caso do carregamento uniformemente distribuído. Ao submeter estas estruturas a uma variação na distribuição da carga, surgiram tensões acima da tensão de escoamento do material.

Para os projetos de vigas e arcos obtidos pelo método minimax, demonstrou-se a capacidade de resistirem à variação do carregamento. Um aspecto interessante foi a utilização de fatores de correção da massa. Depois que uma distribuição era encontrada pelo método minimax, realizava-se uma verificação da resistência do material. No caso das tensões estarem acima da tensão de escoamento, a massa era aumentada para diminuir o nível de tensões. A situação oposta também foi aplicada.

Talvez a maior contribuição que se deriva dos resultados apresentados seja a demonstração da vulnerabilidade do uso de cargas uniformemente distribuídas no dimensionamento de estruturas. Pôde-se ter uma idéia de como é seu comportamento e

seus possíveis danos. Isso justifica, como forma de minimizar tais erros nos projetos práticos, o uso de fatores de segurança ou margens de segurança mínimas dependendo do componente estrutural.

Como proposta de trabalho futuro, pode-se incorporar um vínculo de volume como restrição ao problema de otimização e também pode-se aplicar o método em outras estruturas, como painéis enrijecidos com perfis dobrados ou extrudados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bathe, K.J.; Wilson, E.L. **Numerical methods in finite element analysis**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

Bruhn, E.F. **Analysis and design of flight vehicle structures**. Cincinnati, OH: Tri-State Offset, 1973.

Chandrupatla, T.; Belegundu, A. **Introduction to finite elements in engineering**. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

Cherkaev, A.; Cherkaeva, E. **Stable optimal design for uncertain loading conditions**. Singapore: Homogenization, World Scientific, 1999. p.193-213. (Berdichevsky, 5.)

Das, I. A preference ordering among various Pareto optimal alternatives. **Structural Optimization**, n. 18, p. 30-35, 1999.

Das, I.; Dennis, J.E. Normal-boundary intersection: a new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. **SIAM Journal of Optimization**, n. 8, p. 631-657, 1998.

de Faria, A.R.; Hansen, J.S. On buckling optimization under uncertain loading combinations. **Struct Multidisc Optim**, n. 21, p. 272-282, 2001.

de Faria, A.R. Buckling optimization and antioptimization of composite plates: uncertain loading combinations. **International Journal for numerical methods in engineering**, n 53, p.719-732, 2002.

de Faria, A.R.; de Almeida, S.F.M. Buckling optimization of plates with variable thickness subjected to nonuniform uncertain loads. **International Journal of Solids and Structures**, n. 40, p. 3955-3966, 2003.

de Faria, A.R.; Cardozo, L.; Fonseca, I.M. **On the structural optimization for space applications using the min-max technique**. Vancouver: International Congress of Astronautics, 2004.

de Faria, A.R. Compliance and buckling optimization of structures under multiple load cases. In: Nedjah, N.; Mourelle, L. (eds.). **Real-world multi-objective system engineering**. Hauppauge, NY: Nova Publishers, 2005. cap. 5.

Desai, C.S. **Elementary finite element method**. New Jersey: Prentice-Hall, 1979.

Elishakoff, I. **Probabilistic methods in the theory of structures**. New York: Wiley-Interscience, 1983.

Foldager, J.P. **Design of composite structures**. 1999. Dissertation (PhD in Mechanical Engineering) - Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, 1999.

Ganzerli, S.; Pantelides, C.P. Optimum structural design via convex model superposition. **Computers and Structures Journal**, v.74, p.639-647, 2000.

Haftka, R.; Gurdal, Z. **Elements of structural optimization**. 3.ed. [S.l.]: Kluwer Academic, 1991.

Hammer, V.B.; Bense, M.P.; Lipton, R.; Pedersen, P. Parametrization in laminate design for optimal compliance. **International Journal of Solids and Structures**, v.34, n.4, p.415-434, 1997.

Kamat, M.P. **Structural optimization: status and promise**. Washington, DC: Progress in Astronautics and Aeronautics, 1993.

Khot, N.S.; Berke, L.; Venkayya, V.B. Comparison of optimality criteria algorithms for minimum weight design of structures. **AAIA Journal**, v.17, n.2, p.182-190, 1979.

Khot, N.S.; Kamat, M.P. Minimum weight design of truss structures with geometric nonlinear behavior. **AAIA Journal**, v.23, n.1, p.139-144, 1985.

Lund, E. **Finite element based design sensitivity analysis and optimization**. 1994. Dissertation (PhD in Mechanical Engineering) - Aalborg University, 1994.

MIL-HDBK-5H. **Military Handbook**: metallic materials and elements for aerospace vehicle structures. Washington: Department of Defense of United States of America, 1998.

Pedersen, P. On thickness and orientational design with orthotropic materials. **Structural and Multidisciplinary Optimization Journal**, v.3, p.69-78, 1991.

Powell, M.J.D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. **Computers Journal**, v.7, p.155-162, 1964.

Vanderplaats, G.N. **Numerical optimization techniques for engineering design**: with applications. New York: McGraw-Hill, 1984.

Wang, G.; Shan, S. Design space reduction for multi-objective optimization and robust design optimization problems. **SAE Journal**, p.01-0240, 2004.

Yoshida, N.; Vanderplaats, G.N. Structural optimization using beam elements. **AIAA Journal**, v.26, n.4, p.454-462, 1988.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)