



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14490-TDI/1171**

**NAVEGAÇÃO ATRAVÉS DE UM SISTEMA INTEGRADO GPS-  
INS BASEADO EM IMU NÃO-GIROSCÓPICA**

Edmundo Alberto Marques Filho

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Hélio Koiti Kuga e Atair Rios Neto, aprovada em 15 de abril de 2005.

INPE  
São José dos Campos  
2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Publicado por:

**esta página é responsabilidade do SID**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Gabinete do Diretor – (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 – CEP 12.245-970

São José dos Campos – SP – Brasil

Tel.: (012) 3945-6911

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**Solicita-se intercâmbio  
We ask for exchange**

**Publicação Externa – É permitida sua reprodução para interessados.**



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14490-TDI/1171**

**NAVEGAÇÃO ATRAVÉS DE UM SISTEMA INTEGRADO GPS-  
INS BASEADO EM IMU NÃO-GIROSCÓPICA**

Edmundo Alberto Marques Filho

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Hélio Koiti Kuga e Atair Rios Neto, aprovada em 15 de abril de 2005.

INPE  
São José dos Campos  
2007

531.768:528.711.7

Marques Filho, E. A.

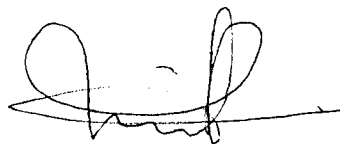
Navegação através de um sistema integrado GPS-INS baseado em IMU não-giroscópica. / Edmundo Alberto Marques Filho. – São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2005.

128 p.; (INPE-14490-TDI/1171)

1.Acelerômetros. 2.Giroscópios. 3.Sistema de Posicionamento Global. 4.Navegação inercial. 5.Unidade de medida inercial. 6. Filtros de Kaman. I. Título

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Mestre em  
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

Dr. Paulo Giácomo Milani



Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. Atair Rios Neto



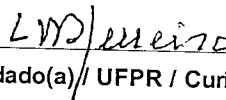
Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Hélio Koiti Kuga



Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira



Convidado(a) / UFPR / Curitiba - PR

Aluno (a): Edmundo Alberto Marques Filho

São José dos Campos, 15 de abril de 2005



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos Funcionários e Professores da Divisão de Mecânica Espacial e Controle (DMC) do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por disponibilizarem as condições necessárias para a realização deste trabalho de Dissertação. Agradeço aos colegas de turma, pela cooperação e incentivo ao longo do curso, em especial na fase de conclusão. Aos membros da Banca Examinadora por terem aceitado o convite para apreciação do trabalho, sua avaliação e contribuições, também o meu agradecimento.

Agradecimentos especiais aos orientadores, Professores Atair Rios Neto e Hélio Koiti Kuga, pela orientação acadêmica, disponibilidade de tempo e paciência para comigo, sem os quais não seria possível finalizar o trabalho.

Agradecimentos mais que especiais à minha família, Mônica e Ana Luiza, pelo incentivo, compreensão e por tolerarem um Marido e Pai teimoso.





## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar o desempenho de um sistema de navegação inercial de baixo custo, tipo strapdown, baseado numa unidade de medida inercial não-giroscópica que utiliza somente múltiplos acelerômetros e é auxiliado por um receptor GPS. A disponibilidade de acelerômetros de baixo custo, dimensões e peso, com média performance e maior robustez, quando comparados a unidades giroscópicas, é a principal motivação do trabalho. A unidade de medida inercial é composta de um arranjo específico dos acelerômetros de tal forma que se possa medir acelerações lineares e velocidades angulares. Como tais medidas se degradam rapidamente ao longo do tempo, são utilizadas as informações de uma fonte externa, o receptor GPS, como forma de compensar os erros de navegação em aplicações de maior duração. A integração das informações da unidade de medidas não-giroscópica com as de um receptor GPS é implementada, neste trabalho, numa arquitetura fracamente acoplada, através de um filtro de Kalman. Um modelo de erros é derivado para a unidade de medida inercial e utilizado nas equações do filtro de Kalman para estimar e compensar os erros de navegação. O desempenho do sistema integrado é avaliado através de simulação de trajetórias de um veículo de baixa performance.



# **INTEGRATED GPS/INS NAVIGATION SYSTEM BASED ON GYROSCOPE FREE IMU**

## **ABSTRACT**

The present work has the objective of analyzing the performance of a low cost strapdown inertial navigation system (INS), based on a gyroscope free inertial measurement unit (IMU) that only uses multiples accelerometers and is aided by a GPS receptor data. The availability of low cost, size and weight accelerometers with medium performance and more robustness when compared to gyroscopes of the same technology is the main motivation. The inertial measurement unit is composed by an specific array of accelerometers in such way that linear and angular accelerations can be computed. Since measurements degrades rapidly with time an external source of information, the GPS receptor data, are used to bound the growing errors in navigation long range applications. The GPS/INS loosely integration approach is implemented by a Kalman filter. A model of errors for the accelerometer based IMU and INS are derived and used by the Kalman filter to estimate and compensate the navigation errors. The performance of the integrated system is assessed by using computer simulation of a simple trajectory vehicle.



## SUMÁRIO

Pág.

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

### LISTA DE SÍMBOLOS

<b>CAPÍTULO 1-INTRODUÇÃO.....</b>	<b>21</b>
1.1 Navegação Inercial.....	21
1.2 Sensores Inerciais de Tecnologia Mems.....	21
1.3 Integração Ins-Gps.....	22
1.4 Objetivo do Trabalho.....	22
1.5 Revisão Bibliográfica.....	23
1.6 Organização da Dissertação.....	25
<b>CAPÍTULO 2-CONFIGURAÇÃO DE UMA IMU NÃO-GIROSCÓPICA.....</b>	<b>27</b>
2.1 Descrição Sumária de um Acelerômetro.....	27
2.2 Configuração Geométrica de uma Imu Não Giroscópica.....	28
2.3 Modelos de Erros para Acelerômetros.....	35
<b>CAPÍTULO 3-SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL.....</b>	<b>39</b>
3.1 Princípios de Navegação Inercial.....	39
3.2 Sistemas de Coordenadas.....	41
3.3 Transformação de Coordenadas.....	44
3.4 Equações de Navegação Inercial.....	51
3.5 Sistemas de Navegação Inercial Tipo <i>Strapdown</i> .....	57
3.6 Análise de Erros.....	58
3.7 Erro Devido aos Acelerômetros.....	66
<b>CAPÍTULO 4-INTEGRAÇÃO INS-GPS.....</b>	<b>73</b>
4.1 Descrição Básica do Gps.....	73
4.2 Tipos de Acoplamento.....	73
4.3 Filtro de Kalman.....	75
<b>CAPÍTULO 5-PROCEDIMENTOS DE SIMULAÇÃO.....</b>	<b>81</b>
5.1 Geração da Trajetória e da Atitude.....	81
5.2 Simulação da Imu.....	88
5.3 Simulação da Plataforma <i>Strapdown</i> .....	92
5.4 Simulação do Sistema Integrado Imu-Ins-Gps.....	93
5.5 Valores para Simulação.....	94
5.6 Resultados Obtidos.....	95
<b>CAPÍTULO 6-CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>121</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>125</b>



## LISTA DE FIGURAS

2.1: Sistema de Coordenadas. ....	29
2.2: IMU Configurada com Nove Acelerômetros. ....	30
2.3: Outra Configuração de IMU com Nove Acelerômetros. ....	31
2.4: IMU Configurada com Seis Acelerômetros na Forma de um Cubo. ....	33
3.1: Plataforma Inercial Tipo <i>Strapdown</i> Convencional. ....	41
3.2: Sistema de Coordenadas ECI E ECEF. ....	43
3.3: Sistema de Coordenadas LTP – ENU. ....	43
3.4: Sistema de Coordenadas do Veículo. ....	43
3.5: Sistema de Coordenadas Geográficas. ....	47
3.6: Plataforma <i>Strapdown</i> no Sistema de Navegação LTP. ....	58
4.1: Sistema Fortemente Acoplado. ....	74
4.2: Sistema Fracamente Acoplado. ....	75
5.1: Aceleração Nominal Descrita no Sistema de Navegação (LTP). ....	82
5.2: Velocidade Nominal Descrita no Sistema de Navegação (LTP). ....	82
5.3: Deslocamento Nominal Descrito no Sistema de Navegação (LTP). ....	83
5.4: Deslocamento em Latitude e Longitude. ....	83
5.5: Força Específica no Sistema do Veículo. ....	84
5.6: Atitude do Veículo (Ângulos De Euler). ....	87
5.7: Aceleração Angular Expressa no Sistema do Veículo. ....	87
5.8: Velocidade Angular Expressa no Sistema do Veículo. ....	88
5.9: Saída dos Acelerômetros na IMU Não Giroscópica. ....	90
5.10: Saída Ideal dos Acelerômetros (Sem Adição de Erros). ....	91
5.11: Esquema de Simulação da IMU. ....	92
5.12: Esquema de Simulação do Sistema Integrado IMU-INS-GPS. ....	94
5.13: Curvas de Desempenho para Latitude (IMU Automotiva). ....	96
5.14: Curvas de Desempenho para Longitude (IMU Automotiva). ....	97
5.15: Curvas de Desempenho para Altitude (IMU Automotiva). ....	97
5.16: Curvas de Altitude: Simulada, Nominal E GPS (IMU Automotiva). ....	98
5.17: Curvas de Desempenho para Latitude (IMU Tática). ....	99
5.18: Curvas de Desempenho para Longitude (IMU Tática). ....	99
5.19: Curvas de Desempenho para Longitude (IMU Tática). ....	100
5.20: Curvas de Altitude: Simulada, Nominal e GPS (IMU Tática). ....	100
5.21: Curvas de Desempenho para Latitude (IMU Navegação). ....	101
5.22: Curvas de Desempenho para Longitude (IMU Navegação). ....	101
5.23: Curvas de Desempenho para Altitude (IMU Navegação). ....	102
5.24: Curvas de Altitude Simulada, Nominal e GPS (IMU Navegação). ....	102
5.25: Erros dos Bias Estimados (IMU Automotiva). ....	105
5.26: Erros dos Bias Estimados (IMU Automotiva). ....	105
5.27: Histograma dos Resíduos (IMU Automotiva). ....	106
5.28: Erros dos Bias Estimados (IMU Tática). ....	106
5.29: Erros dos Bias Estimados (IMU Tática). ....	107
5.30: Histograma dos Resíduos (IMU Tática). ....	107



5.31: Erros dos Bias Estimados (IMU Navegação).....	108
5.32: Erros dos Bias Estimados (IMU Navegação).....	108
5.33: Histograma dos Resíduos (IMU Navegação).....	109
5.34: Erro de Altitude na Fase de Propagação (IMU Automotiva).....	110
5.35: Erro de Longitude na Fase de Propagação (IMU Automotiva). ....	111
5.36: Erro de Latitude na Fase de Propagação (IMU Automotiva). ....	111
5.37: Erro de Altitude na Fase de Propagação (IMU Tática). ....	112
5.38: Erro de Longitude na Fase de Propagação (IMU Tática). ....	112
5.39: Erro de Latitude na Fase de Propagação (IMU Tática).....	113
5.40: Erro de Altitude na Fase de Propagação (IMU Navegação). ....	113
5.41: Erro de Longitude na Fase de Propagação (IMU Navegação).....	114
5.42: Erro de Latitude na Fase de Propagação (IMU Navegação).....	114
5.43: Erro de Altitude na Fase de Propagação (Taxa De Atualização De 0,2 Hz). ....	116
5.44: Erro de Longitude na Fase de Propagação (Taxa De Atualização De 0,2 Hz). ...	116
5.45: Erro de Latitude na Fase de Propagação (Taxa De Atualização De 0,2 Hz). ....	117
5.46: Curvas de Altitude Simulada, Nominal (Verdadeira) e GPS (Taxa De Amostragem De 0,2 Hz).....	117
5.47: Curvas de Desempenho para Altitude (Taxa de Amostragem de 0,2 Hz). ....	118
5.48: Curvas de Desempenho para Longitude (Taxa de Amostragem de 0,2 Hz).....	118
5.49: Curvas de Desempenho para Latitude (Taxa de Amostragem de 0,2 Hz). ....	119

## LISTA DE TABELAS

5.1: Classificação das IMU.....	95
5.2: Erros do Filtro de Kalman.....	104
5.3: Resíduos do Filtro de Kalman.....	104
5.4: Erros do Filtro de Kalman Projetados na Superfície Terrestre.....	104
5.5: Erros do Filtro de Kalman (Taxa de 0,2 Hz).....	119
5.6: Resíduos do Filtro de Kalman (Taxa de 0,2 Hz).....	119
5.7: Erros do Filtro de Kalman Projetados na Superfície Terrestre.....	120

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Latinos

$a$	- Semi-eixo maior
$a(s)$	- Aceleração
$A_j$	- Saída do acelerômetro $j$
$\hat{A}_j$	- Saída computada (compensada) do acelerômetro $j$
$\tilde{A}_j$	- Saída contaminada do acelerômetro $j$
$\mathbf{A}$	- Medida de aceleração linear
$\hat{\mathbf{A}}$	- Saída computada (compensada) dos acelerômetros
$\mathbf{A}_p$	- Aceleração de um ponto $P$
$A_{v_{ij}}$	- Saídas acelerométricas
$A_{x0}, \dots, A_{z2}$	- Saídas acelerométricas
$A_1, \dots, A_2$	- Saídas acelerométricas
$b$	- Semi-eixo menor
$b_j$	- Bias relativo ao acelerômetro $j$
$\hat{b}_j$	- Bias estimado <i>a priori</i>
$\mathbf{b}$	- Bias (offset)
$C$	- Valor de erros fornecido pelo fabricante de acelerômetros
$\mathbf{C}_v^n, \mathbf{C}_e^n, \mathbf{C}_v^i, \mathbf{C}_i^n$	- Matrizes de transformação
$d$	- Fator de amortecimento
$e$	- Excentricidade

$\mathbf{E}^n$	- Forma anti-simétrica dos erros de atitude
$f$	- Achatamento da elipse
$\mathbf{f}, \mathbf{f}^v, \mathbf{f}^n$	- Força específica
$\hat{\mathbf{f}}^v$	- Forma computada de $\mathbf{f}^v$
$\mathbf{F}$	- Matriz dinâmica do sistema
$\mathbf{F}_g$	- Componente gravitacional
$\mathbf{F}_i$	- Força aplica à massa $m$
$\mathbf{F}_{ng}$	- Componente não-gravitacional
$\mathbf{F}_{er}, \mathbf{F}_{ev}$	- Matrizes de erros de atitude
$\mathbf{F}_{rr}, \mathbf{F}_{rv}$	- Matrizes de erros de posição
$\mathbf{F}_{vr}, \mathbf{F}_{vv}$	- Matrizes de erros de velocidade
$g_0$	- Gravidade para $h = 0$
$\mathbf{g}^n$	- Aceleração da gravidade local no sistema de navegação
$\mathbf{G}$	- Matriz de adição de ruídos
$\mathbf{G}_i = \{G_x, G_y, G_z\}$	- Aceleração gravitacional
$h$	- Altitude do C.G. do veículo
$\mathbf{H}$	- Matriz que relaciona as observações dos estados
$\{\hat{\mathbf{i}} \ \hat{\mathbf{j}} \ \hat{\mathbf{k}}\}$	- Vetor direção unitária
$\mathbf{I}$	- Matriz identidade
$\mathbf{J}$	- Matriz associada a orientação e posição dos acelerômetros na IMU
$\mathbf{J}_1$	- Matriz relacionada com posição e orientação dos acelerômetros na IMU
$\mathbf{J}_2$	- Matriz relacionada com a orientação dos acelerômetros na IMU

$k$	- Rigidez do sistema (constante de mola)
$k_j$	- Elementos associados à computação das saídas acelerométricas $A_j$
$\mathbf{K}$	- Ganho de Kalman
$l_a$	- Medida de aceleração linear
$L_a, \dots, L_h$	- Distâncias (braços)
$m$	- Massa de prova
$N$	- Não ortogonalidade dos eixos
$\mathbf{P}$	- Matriz de covariância das estimativas
$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	- Vetor dos parâmetros simétricos de Euler ou quatérnios
$\mathbf{r}_j$	- Localização dos acelerômetros na IMU
$\mathbf{Q}$	- Matriz de covariância do ruído dinâmico
$\mathbf{r}_v$	- Vetor posição de um ponto
$\mathbf{r}^n = \{\Phi, \lambda, h\}$	- Solução de navegação: latitude, longitude e altitude
$\hat{\mathbf{r}}^n$	- Forma computada de $\mathbf{r}^n$
$R_M$	- Raio de curvatura meridional
$R_N$	- Raio de curvatura transversal
$R_x(\phi), R_y(\theta), R_z(\psi)$	- Rotações ortogonais
$\mathbf{R}$	- Matriz de covariância dos erros de observação
$\mathbf{R}^{\otimes}$	- Aceleração linear de um ponto
$s_j$	- Erro de fator de escala associado ao acelerômetro $j$
$\hat{s}_j$	- Erro do fator de escala estimado <i>a priori</i>
$\mathbf{S}_1$	- Matriz dos erros lineares de fator de escala

$S_2$	- Matriz dos erros não lineares de fator de escala
$v$	- Vetor de ruídos brancos das medidas
$v^n = \{V_N, V_E, V_D\}$	- Componentes de velocidades norte, leste para baixo (NED)
$\hat{v}^n$	- Forma computada de $v^n$
$x$	- Vetor de estado do sistema
$z$	- Vetor de ruídos brancos das medidas
$w_{a_j}$	Ruído branco no acelerômetro j
$w$	- Incerteza randômica do acelerômetro
$w$	- Vetor de ruídos dos sistema
$w_b$	- Ruído branco associado aos bias
$W_v$	- Matriz de componentes de velocidade angular
$x(s)$	- Deslocamento da massa de prova

### **Gregos**

$\gamma$	- Gravidade normal
$\hat{\gamma}$	- Forma computada de $g^n$
$\varphi$	- Matriz de transição de estados
$\lambda$	- Longitude
$\delta b_j$	- Resíduo não compensado do erro de fator de escala
$\delta r_j$	- Erro residual do acelerômetro j
$\delta s_j$	- Resíduo não compensado de bias
$\delta A$	- Erro dos acelerômetros
$\delta f^v$	- Erro de força específica expressa no sistema do veículo

$\delta \mathbf{g}^n$	- Perturbação (erro) de $\mathbf{g}^n$
$\delta \mathbf{r}^n$	- Perturbação (erro) de $\mathbf{r}^n$
$\delta \mathbf{v}^n$	- Perturbação (erro) de $\mathbf{v}^n$
$\delta \mathbf{g}$	- Distúrbios da gravidade
$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_N, \varepsilon_E, \varepsilon_D\}$	- Vetor de erros de atitude
$\boldsymbol{\varepsilon}_f$	- Ruído de observação dos acelerômetros
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_j$	- Direção do eixo sensível dos acelerômetros na IMU
$\{\phi \quad \theta \quad \psi\}$	- Ângulos de Euler
$\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$	- Distâncias (braços)
$\boldsymbol{\omega}$	- Velocidade angular
$\omega_e$	- Velocidade angular da Terra
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	- Componentes de velocidade angular
$\omega_{v1}, \omega_{v2}, \omega_{v3}$	- Componentes de velocidade angular
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	- Componentes de velocidade angular
$\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$	- Velocidade angular do veículo, em relação ao sistema inercial, expressa no sistema do veículo
$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$	- Velocidade angular do veículo, em relação ao sistema de navegação, expressa no sistema do veículo
$\boldsymbol{\omega}_{en}^n$	- Velocidade angular do sistema de navegação, em relação à Terra, expressa no sistema de navegação
$\Phi$	- Latitude geodésica
$\boldsymbol{\Omega}$	- Matriz anti-simétrica de velocidades angulares

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 Navegação Inercial

Navegação inercial pode ser definida como sendo o processo de estimar o posicionamento, velocidade e atitude, ao longo do tempo, de um corpo móvel com relação a um sistema de referência, através de medições feitas por uma unidade de medida inercial ou *Inertial Measurement Unit* (IMU). Unidades de medida inerciais convencionais utilizam acelerômetros, para medir as acelerações lineares, e giroscópios para medir as velocidades angulares do corpo em questão.

Sistemas de navegação inercial ou *Inertial Navigation Systems* (INS) são largamente utilizados em diversas aplicações, militares e civis, destacando-se o uso nas seguintes áreas: espacial, aeronáutica em geral, automotiva, navegação marítima e aplicações geodésicas, dentre outras.

#### 1.2 Sensores Inerciais de Tecnologia MEMS

O desenvolvimento recente na tecnologia de sistemas Micro-Eleto-Mecânicos ou *Micro-Electro-Mechanical Systems* (MEMS), produzindo sensores inerciais em larga escala, representa uma alternativa na redução de custos de IMUs (El-Sheimy, 2000; Lima et alii, 2001 e Lima et alii, 2002). A relação custo *versus* acurácia e perspectiva de desenvolvimento de acelerômetros num futuro próximo é, atualmente, mais favorável que a de giroscópios (Yazdi et alii, 1998; Kraft, 2000; Schwarz e El-Sheimy, 1999), motivando a investigação de IMUs que fazem uso unicamente de acelerômetros.

Estimativas de posição e velocidade de IMUs não-giroscópicas, são obtidas por integração de dados acelerométricos. Erros gerados e acumulados neste processo devem ser estimados e corrigidos periodicamente com o uso de uma referência externa.



### **1.3 Integração INS-GPS**

O Sistema de Posicionamento Global NAVSTAR GPS possui características que complementam uma IMU. Suas observações (parâmetros de navegação e posicionamento) permanecem estáveis por longos períodos, enquanto o sinal de recepção não é interrompido e a geometria dos satélites está dentro de limites aceitáveis, podendo ser então integrado ao sistema de navegação inercial (INS). As posições e velocidades derivadas do sistema GPS são medidas externas que podem atualizar o INS melhorando sua estabilidade de longo termo. Em cenários onde possa haver interrupção de sinal do GPS, como centros urbanos ou florestas densas, o INS pode fornecer informações para reaquisição de sinal. A combinação das características individuais do GPS e INS pode produzir um sistema com desempenho superior ao dessas mesmas unidades atuando individualmente.

Técnicas estocásticas serão utilizadas para estimar, compensar e limitar os erros dos acelerômetros e para integrar o sistema GPS/INS, sendo o filtro de Kalman o método utilizado na integração entre GPS, sensores inerciais da IMU e o INS.

### **1.4 Objetivo do Trabalho**

Este trabalho propõe a utilização de uma IMU de baixo custo não-giroscópica, ou puramente acelerométrica, tipo *strapdown*, auxiliada por fonte não inercial de navegação externa. Num sistema tipo *strapdown* os sensores inerciais são rigidamente montados na estrutura do corpo móvel com computação e eletrônica simulando a presença de uma plataforma inercial servo estabilizada (Lawrence, 1993), eliminando mecanismos complexos e de alto custo de aquisição e manutenção (King, 1998). O interesse em medições baseadas em acelerômetros ou a redução de custo de IMUs, através da substituição dos giroscópios, existe há várias décadas e mantém-se atual com a utilização de sensores MEMS e a possibilidade de novas aplicações para sistemas de navegação inercial de baixo custo (Padgaonkar et alii, 1975; Merhav, 1982; Trabasso, 1986; Chen et alii, 1994; Mostov et alii, 1998; Park e Tan, 2002).

Portanto, o objetivo deste trabalho é demonstrar a possibilidade da utilização de uma IMU puramente acelerométrica, onde as acelerações angulares e lineares são obtidas pela combinação de medidas provenientes de acelerômetros de baixo custo e integradas às informações de um receptor GPS da maneira mais simples possível, para utilização em sistemas de navegação que demandem um nível de acurácia não elevado e simplicidade.

## **1.5 Revisão Bibliográfica**

### **1.5.1 Tecnologia MEMS**

A tecnologia MEMS, também conhecida como *Micro System Technology* (MST), é empregada na fabricação de diversos tipos de sensores comerciais cuja principal característica é a dimensão reduzida, quando comparados aos convencionais. Os sensores inerciais MEMS, giroscópios e acelerômetros, apresentam vantagens em relação ao peso, resistência ao impacto, consumo de energia e custo reduzido, pois podem ser fabricados em grande escala.

Uma introdução à tecnologia de sistemas Micro-Eleto-Mecânicos (MEMS), suas aplicações em sensores inerciais, acelerômetros e giroscópios, seu desenvolvimento e impacto futuro na navegação podem ser encontrados em El-Sheimy (2000), Yazdi et alii (1998), Kraft (2000), Schwarz e El-Sheimy (1999), Allen et alii (1998), Lima et alii (2001) e Lima et alii (2002).

### **1.5.2 IMU Baseada em Acelerômetros**

Plataforma, ou central, inercial de navegação tipo *strapdown* possui os sensores inerciais, giroscópios e acelerômetros, solidários à estrutura do veículo. O arranjo dos sensores chamado de unidade de medida inercial (IMU) fornece as medidas para a determinação da atitude, velocidade e posição do veículo. A idéia de fazer uma IMU baseada somente em acelerômetros não é nova, pois giroscópios sempre foram componentes de tecnologia restrita a poucos fornecedores e com custo elevado.

Unidades de Medidas Inerciais (IMU) não giroscópica ou puramente acelerométricas são descritas em Pandgaonkar et alii (1975), Merhav (1982), Trabasso (1986) e Chen et alii (1994). Plataformas tipo *strapdown* utilizando IMUs não giroscópica integrada com GPS são apresentadas em Mostov et alii (1998) e Park e Tan (2002). Uma análise de erros e aspectos de caracterização de acelerômetros de tecnologia MEMS, para navegação em veículos terrestres, é encontrada em Park e Gao (2002).

### **1.5.3 Navegação Inercial**

A partir das medidas inerciais fornecidas por uma IMU, força específica e velocidade angular, a determinação de atitude, velocidade e posição de um veículo é obtida pela execução de algoritmos que também devem compensar os erros dos sensores. As informações resultantes são utilizadas para navegação e controle do veículo.

King (1998) revisa os aspectos básicos (e históricos) de navegação inercial. Schmidt (1978), VanBronkhorst (1978), Ferro et alii (1995) e Cardenuto (1984) apresentam esquemas e algoritmos de mecanização de plataformas tipo *strapdown*. Titterton e Weston (1997) abordam detalhadamente a tecnologia de plataformas tipo *strapdown*.

### **1.5.4 Integração GPS/INS**

O sistema de Posicionamento Global NAVSTAR GPS, ou simplesmente GPS, é baseado na transmissão de sinais por satélites que podem ser processados num receptor para fins de navegação, entre outros. Estes sinais podem sofrer perturbações e interrupções que afetam a precisão das medidas. Um sistema de navegação inercial, por sua vez, utiliza-se de medidas que não dependem de fonte externa para determinação de trajetórias. Porém, devido aos sensores inerciais, existe acúmulo de erros durante a integração numérica das acelerações lineares e velocidades angulares necessárias no processamento das informações. A utilização simultânea dos dois sistemas, GPS e INS, que possuem características complementares, e aumenta o desempenho final do resultado da navegação. A integração das informações do GPS e INS, pode ser obtida pela utilização do filtro de Kalman.

Greenspan (1996), Kaplan (1996), Lima et alii (2001) e Lima et alii (2002) apresentam uma introdução à integração GPS/INS; Brown e Hwang (1997) e Gelb (1974) apresentam teoria do filtro de Kalman, incluindo aspectos de integração GPS/INS. Farrel e Barth (1998) e Grewal et alii (2001) cobrem os aspectos de navegação inercial, GPS e integração.

### **1.5.5 Referências Básicas**

Capítulos isolados ou apêndices dos livros, descritos a seguir, foram consultados em assuntos específicos. Greenspan (1996), Kaplan (1996) e Monico (2000): descrição e funcionamento do GPS; Ferraresi (1986), Regan (1984) e Wertz (1978): atitude de um corpo rígido, quatérnios e matriz de transformação; Lawrence (1993): sensores inerciais e navegação; Pitman (1962): aspectos básicos de aceleração e gravitação em navegação inercial; Thomson (1986): equações cinemáticas.

### **1.6 Organização da Dissertação**

O Capítulo 2 apresenta a descrição genérica de um acelerômetro e suas fontes de erro. Analisa propostas de IMUs acelerométricas e apresenta a IMU tipo cubo, com seis acelerômetros, a ser utilizada no trabalho. O Capítulo 3 resume os sistemas de coordenadas utilizados na navegação inercial, apresenta métodos para cálculo e propagação de matrizes de transformação, descreve as equações de navegação no sistema latitude-longitude-altitude e deriva seus erros. Também propõe a forma dos erros devidos aos acelerômetros, formando assim o vetor de estado de erros a ser estimado. O Capítulo 4 trata das abordagens de integração INS-GPS e define as etapas de predição e atualização do filtro de Kalman. O Capítulo 5 apresenta os procedimentos de simulação de trajetórias nominais, da IMU, do INS e GPS e mostra os resultados obtidos. O Capítulo 6 apresenta as conclusões e possíveis desdobramentos para trabalhos futuros.



## CAPÍTULO 2

### CONFIGURAÇÃO DE UMA IMU NÃO-GIROSCÓPICA

#### 2.1 Descrição Sumária de um Acelerômetro

Acelerômetros operam medindo a força de inércia gerada quando uma massa está sujeita à aceleração. Um acelerômetro de eixo único é um dispositivo com uma entrada (excitação) e uma saída (resposta) que mede sua aceleração ao longo de um eixo sensível específico. A projeção do vetor de aceleração é uma variável cujo valor absoluto depende da orientação e dinâmica do acelerômetro. Além da medida da taxa de variação de velocidades, o acelerômetro também mede a projeção da aceleração da gravidade no seu eixo sensível. Assim em qualquer instante a saída de um acelerômetro é a soma da projeção da gravidade e da aceleração específica induzida por mudanças na trajetória, velocidade ou aceleração de um corpo.

Acelerômetros são constituídos basicamente dos seguintes elementos (Lawrence, 1993):

- Uma massa, normalmente chamada de “massa de prova”,
- Uma suspensão, que posiciona a massa,
- Um transdutor (*pick-off*) que emite um sinal relacionado com a aceleração.
- Um torqueador, que mantém a massa de prova em equilíbrio.

Um acelerômetro pode ser modelado por um sistema massa-mola-amortecedor, de parâmetros concentrados, cuja função de transferência de segunda ordem é descrita por (Yazdi et alii, 1998):

$$H(s) = \frac{x(s)}{a(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (2.1)$$

onde  $a$  é a aceleração externa,  $x$  o deslocamento da massa de prova,  $d$  o fator de amortecimento e  $k$  o fator de rigidez do sistema.

Acelerômetros de tecnologia MEMS podem ser classificados em três categorias (Park e Gao, 2002) de acordo com: o tipo de detecção da posição da massa de prova, o modo de operação e o processo de fabricação dos elementos sensores.

- Tipo de detecção da massa de prova: transdutores (*pick-off*) de sinal piezoresistivo, transdutores (*pick-off*) de sinal capacitivo, sensores com elementos piezoelétricos, sensores com elementos ressonantes.
- Modos de operação: operação em malha aberta, operação em malha fechada.
- Processo de fabricação dos elementos sensores: microusinagem de superfície (*surface micromachining*), microusinagem em volume (*bulk micromachining*), processo LIGA (processos litográficos).

## 2.2 Configuração Geométrica de uma IMU não Giroscópica

Teoricamente é necessário um número mínimo de seis acelerômetros para que se possa descrever completamente o movimento de um corpo rígido (Padgaonkar et alii, 1974; Chen et alii, 1994). A escolha adequada da localização dos acelerômetros determina a computação dos movimentos lineares e angulares em equações desacopladas e evita-se problemas de ambigüidade de sinais que possam aparecer a partir de termos quadráticos.

Considere o sistema de coordenada inercial ( $X, Y, Z$ ) e veicular ( $x, y, z$ ), mostrado na Figura 2.1:

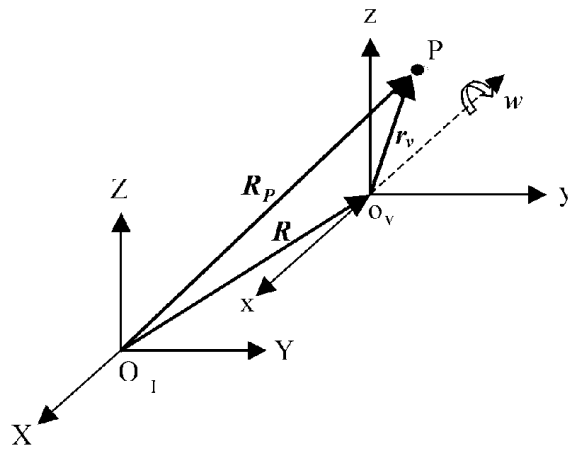


FIGURA 2.1: Sistema de coordenadas.

A aceleração inercial de um ponto P, num corpo rígido,  $A_P$ , é dada por (Greenwood, 1962):

$$A_P = \ddot{R} + [\ddot{\phi}] + 2 \cdot \omega \times [\dot{\phi}] + \omega \times (\omega \times r_v) + \dot{\omega} \times r_v \quad (2.2)$$

onde:

$\ddot{R}$  = aceleração linear da origem  $O_v$  do sistema veicular, com relação ao sistema inercial.

$r_v$  = vetor posição do ponto P em relação à  $O_v$  (x, y, z).

$\omega$  = velocidade angular absoluta do sistema de coordenadas do veículo.

$\omega \times (\omega \times r_v)$  = aceleração centrípeta ou normal devida ao ângulo entre  $\omega$  e  $r_v$ .

$\dot{\omega} \times r_v$  = aceleração do ponto P devido à variações em  $\omega$ .

$2 \cdot \omega \times \dot{\phi}$  = aceleração de Coriolis, devida ao movimento do ponto P em (x, y, z).

Se o ponto P é rigidamente fixado ao sistema veicular então as suas componentes em relação a este sistema não variam e:  $\dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$ . Logo:



$$\mathbf{A}_p = \mathbf{\ddot{R}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_v) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_v \quad (2.3)$$

Uma IMU com configuração de nove acelerômetros proposta por Padgaonkar et alii (1975) é mostrada na Figura 2.2:

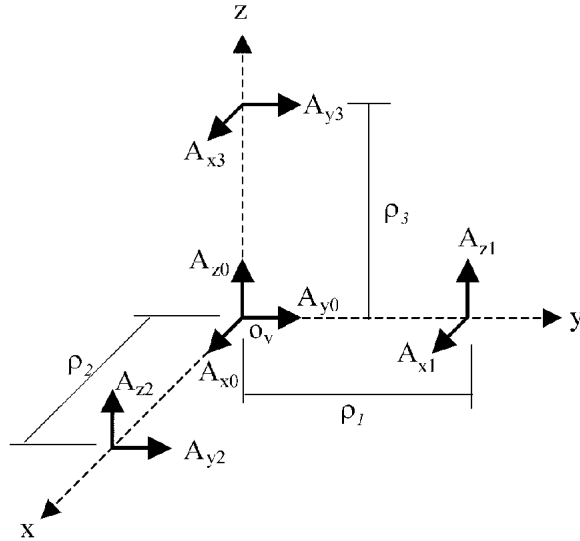


FIGURA 2.2: IMU configurada com nove acelerômetros.

Nesta configuração o conjunto de três acelerômetros, com eixos sensíveis ortogonais, está localizado na origem  $O_v$ . Portanto a aceleração linear do veículo é dada por:

$$\mathbf{\ddot{R}} = A_{x0} \hat{\mathbf{i}} + A_{y0} \hat{\mathbf{j}} + A_{z0} \hat{\mathbf{k}} \quad (2.4)$$

O arranjo dos outros acelerômetros, montados conforme mostrado na Figura 2.2, utilizando as localizações  $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \text{ e } \boldsymbol{\rho}_3$ , será suficiente para a determinação da aceleração angular do veículo. As localizações são dadas por:

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\rho}_1 = \rho_{y1} \hat{\mathbf{j}}, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \rho_{x2} \hat{\mathbf{i}}, \quad \boldsymbol{\rho}_3 = \rho_{x3} \hat{\mathbf{k}} \quad (2.5)$$

Para esta configuração em particular, as equações para aceleração angular tomam a seguinte forma, onde  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular do veículo (Padgaonkar et alii, 1975):

$$\boldsymbol{\omega} = \{ \omega_x, \omega_y, \omega_z \} \quad (2.6)$$

$$\alpha_x = (A_{z1} - A_{z0})/2\rho_{y1} - (A_{y3} - A_{y0})/2\rho_{z3} \quad (2.7)$$

$$\alpha_y = (A_{x3} - A_{x0})/2\rho_{z3} - (A_{z2} - A_{z0})/2\rho_{x2} \quad (2.8)$$

$$\alpha_z = (A_{y2} - A_{y0})/2\rho_{x2} - (A_{x1} - A_{x0})/2\rho_{y1} \quad (2.9)$$

As componentes de velocidade angular podem ser obtidas por meio de integração das Equações (2.7) até (2.9).

Outra configuração de uma IMU não acelerométrica, com nove acelerômetros, foi proposta por Trabasso (1986), conforme Figura 2.3:

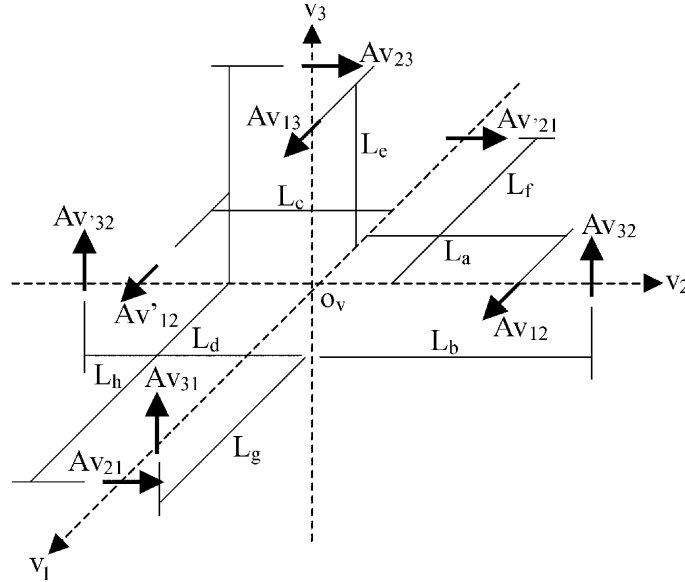


FIGURA 2.3: Outra configuração de IMU com nove acelerômetros.

Neste caso  $Av_{ij}$  indica o valor de saída de um acelerômetro, onde  $i$  é a direção do eixo sensível e  $j$  o eixo sobre o qual se localiza o acelerômetro, e  $L_a, \dots, L_h$  denotam as distâncias (braços) que posicionam os acelerômetros ao longo dos eixos a partir da origem  $O_v$ . As saídas dos nove acelerômetros são dadas por:

$$Av_{12} = Av_1 - (\alpha_{v3} - \omega_{v1}\omega_{v2})L_a \quad (2.10)$$

$$Av'_{12} = Av_1 + (\alpha_{v3} - \omega_{v1}\omega_{v2})L_c \quad (2.11)$$

$$Av_{21} = Av_2 + (\alpha_{v3} + \omega_{v1}\omega_{v2})L_h \quad (2.12)$$

$$Av'_{21} = Av_2 - (\alpha_{v3} + \omega_{v1}\omega_{v2})L_l \quad (2.13)$$

$$Av_{32} = Av_3 + (\alpha_{v1} + \omega_{v2}\omega_{v3})L_b \quad (2.14)$$

$$Av'_{32} = Av_3 - (\alpha_{v1} + \omega_{v2}\omega_{v3})L_d \quad (2.15)$$

$$Av_{13} = Av_1 + (\alpha_{v2} + \omega_{v1}\omega_{v3})L_e \quad (2.16)$$

$$Av_{23} = Av_2 - (\alpha_{v1} - \omega_{v2}\omega_{v3})L_f \quad (2.17)$$

$$Av_{31} = Av_3 - (\alpha_{v2} - \omega_{v1}\omega_{v3})L_g \quad (2.18)$$

As equações para aceleração angular são:

$$\begin{aligned} \alpha_{v1} = & \frac{1}{2(L_b + L_d)} Av_{32} - \frac{1}{2(L_b + L_d)} Av'_{32} - \frac{1}{2(L_f)} Av_{32} + \\ & \frac{L_l}{2L_f(L_h + L_l)} Av_{21} + \frac{L_h}{2L_f(L_h + L_l)} Av'_{21} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{v2} = & \frac{1}{2(L_e)} Av_{13} - \frac{L_c}{2L_e(L_a + L_c)} Av_{12} - \frac{L_a}{2L_e(L_a + L_c)} Av'_{12} - \\ & \frac{1}{2(L_g)} Av_{31} + \frac{L_d}{2L_g(L_b + L_d)} Av'_{32} + \frac{L_b}{2L_g(L_b + L_d)} Av'_{32} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{v3} = & \frac{1}{2(L_h + L_l)} Av_{21} - \frac{1}{2(L_h + L_l)} Av'_{21} - \frac{1}{2(L_a + L_c)} Av_{12} + \\ & \frac{1}{2(L_a + L_c)} Av'_{12} \end{aligned} \quad (2.21)$$

As equações para aceleração linear da origem do sistema do veiculo tomam a forma:

$$Av_1 = \frac{Av_{12}L_c + Av'_{12}L_c}{L_c + L_a} \quad (2.22)$$

$$A_{V_2} = \frac{A_{V_{21}} L_1 + A_{V'_{12}} L_a}{L_c + L_a} \quad (2.23)$$

$$A_{V_3} = \frac{A_{V_{32}} L_d + A_{V'_{32}} L_b}{L_d + L_b} \quad (2.24)$$

Uma última configuração, a ser apresentada, é proposta por Chen et alii (1994), com seis acelerômetros, cada um montado no centro de cada face de um cubo e com seu eixo sensível alinhado com a diagonal da face, de modo que as diagonais formem um tetraedro regular. O centro do cubo está, idealmente, localizado na origem do sistema de coordenadas do veículo ( $O_v, x, y, z$ ). A Figura 2.4 ilustra o arranjo com seis acelerômetros num cubo de aresta  $2L$ :

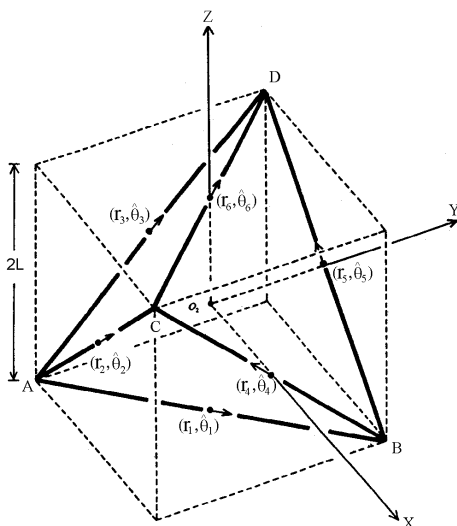


FIGURA 2.4: IMU configurada com seis acelerômetros na forma de um cubo.

Se cada acelerômetro é montado rigidamente numa localização  $r_j$ , com sua direção sensível  $\hat{\theta}_j$ , então de acordo com a Equação 2.3 a saída  $A_j$  do  $j$ -ésimo acelerômetro pode ser dada por:

$$A_j = \left[ \mathbb{R} + \mathbb{Q}r_j + \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}r_j \right] \cdot \hat{\theta}_j \quad (2.25)$$

onde:

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{\omega}_{iv}^v \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{r}_j = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6] = L \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_j = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5, \hat{\theta}_6] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Substituindo as Equações 2.26, 2.27 e 2.28 na Equação 2.25 se obtém:

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{r}_j, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j) = \left[ (\mathbf{r}_j \times \hat{\boldsymbol{\theta}}_j)^T \quad (\hat{\boldsymbol{\theta}}_j)^T \right] \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{iv}^v \\ \mathbf{f}^v \end{bmatrix} + (\hat{\boldsymbol{\theta}}_j)^T \cdot [\boldsymbol{\omega}_{iv}^v \times]^2 \cdot \mathbf{r}_j \quad (2.29)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$  denota a velocidade angular do veículo em relação ao sistema inercial e expressa no sistema de coordenadas do veículo.

As equações de aceleração angular e linear são desacopladas e obtidas a partir da Equação (2.29), possuindo a seguinte forma (Chen et alii, 1994):

$$\boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2L\sqrt{2}} \cdot \mathbf{J}_1 \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \int \boldsymbol{\omega}_{iv}^v \quad (2.30)$$

$$\mathbf{f}^v = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \mathbf{J}_2 \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} + \mathbf{L} \begin{bmatrix} \omega_y \cdot \omega_z \\ \omega_z \cdot \omega_x \\ \omega_x \cdot \omega_y \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

onde:

$A_1, \dots, A_6$  = são as saídas dos acelerômetros da IMU.

$\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$  = vetor aceleração angular do veículo.

$\mathbf{f}^v$  = vetor força específica do veículo.

$$\mathbf{J}_1 = (\mathbf{r}_j \times \hat{\theta}_j) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, j=1, \dots, 6$$

$$\mathbf{J}_2 = (\hat{\theta}_j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, j=1, \dots, 6$$

$\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$  são matrizes associadas à posição e orientação dos acelerômetros na superfície da IMU tipo cubo.

### 2.3 Modelos de Erros para Acelerômetros

Erros na solução do sistema de navegação são devidos a diversos fatores, podendo-se destacar: conhecimento imperfeito das condições iniciais, erros numéricos e de modelagem dos algoritmos do INS e erros devidos aos sensores inerciais. Acelerômetros, em particular, apresentam duas fontes principais de erros: erros de desalinhamento (posicionamento e orientação) e erros do próprio sensor tais como fator de escala, *bias* (ou offset), erros devido à variação de temperatura, sensibilidade transversal e ruídos aleatórios (Maybeck, 1979; Lawrence, 1993).

O fator de escala é a razão entre o sinal de entrada e o sinal de saída, definido como a melhor reta ajustada pelo método dos mínimos quadrados, para dados obtidos variando-se a entrada numa faixa de valores especificada. *Bias* é o valor da saída do sensor quando não há sinal de entrada. Esse erro é causado, entre outras causas, por imperfeições de manufatura e/ou hardware eletrônico (Lawrence, 1993).

A saída de cada acelerômetro da IMU, contaminada por erros, pode ser modelada pela seguinte equação (Schwarz e El-Sheimy, 2000):

$$\mathbf{A} = \mathbf{f} + \mathbf{b} + (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{f})\mathbf{f} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\gamma} + \delta \mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (2.32)$$

onde:

$\mathbf{A}$  = medida de aceleração linear;

$\mathbf{f}$  = força específica;

$\mathbf{b}$  = *bias* (ou *offset*);

$\mathbf{S}_1$  = matriz representando os erros lineares de fator de escala;

$\mathbf{S}_2$  = matriz representado os erros não-lineares de fator de escala;

$\mathbf{N}$  = matriz para os erros devidos à não ortogonalidade dos eixos;

$\boldsymbol{\gamma}$  = gravidade normal;

$\delta \mathbf{g}$  = distúrbio da gravidade;

$\boldsymbol{\varepsilon}_f$  = ruídos de observação dos acelerômetros.

Um outro modelo mais simplificado para uma IMU convencional, com três acelerômetros e três giroscópios, é dado por Briting (1971):

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{b} + \mathbf{w} \quad (2.33)$$

onde:

$$\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\} = \text{bias do acelerômetro};$$

$$\mathbf{w} = \{w_x, w_y, w_z\} = \text{incerteza randômica do acelerômetro};$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1+s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1+s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1+s_z \end{bmatrix} = \text{matriz de erros de fator de escala do acelerômetro.}$$

Neste trabalho será considerada a IMU tipo cubo com seis acelerômetros. No Capítulo 3 um modelo de erro semelhante ao descrito pela Eq. 2.33 será proposto para cada um dos acelerômetros  $A_j$ ,  $\{j = 1, \dots, 6\}$ .





## CAPÍTULO 3

### SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

#### 3.1 Princípios de Navegação Inercial

Navegação compreende os métodos e tecnologias para determinar a posição e atitude, variantes no tempo, de um objeto móvel, através de medidas. Posição, velocidade e atitude, como variáveis em função do tempo, são chamadas de estados de navegação, pois contém todas as informações necessárias para geo-referenciar o objeto móvel em função do tempo. Quando somente a posição do objeto móvel é necessária, o termo posicionamento (cinemático) é utilizado.

Sensores de navegação inercial medem quantidades relacionadas com um ou mais elementos do estado de navegação. A combinação adequada de sensores, que determina todos os estados, forma um sistema de navegação. Tecnologias que são utilizadas na manufatura de sensores que permitem a estimativa dos estados de navegação são chamadas de tecnologias de navegação.

Existem duas metodologias de navegação, nas quais medidas de diferentes sensores de navegação podem ser combinadas: *dead reckoning* e *positioning fixing*. *Dead reckoning* é um método relativo de posicionamento onde a determinação da posição atual do corpo móvel é obtida com o conhecimento da posição prévia, da medida da direção do movimento e da distância viajada. *Positioning fixing* é um método absoluto de posicionamento onde a determinação da posição atual do corpo móvel é obtida a partir de medidas de pontos de referência conhecidos, mas sem referência à sua trajetória prévia, como, por exemplo, o GPS. *Dead reckoning* e *positioning fixing* são métodos essencialmente complementares e sistemas que combinam os dois métodos são chamados de sistemas integrados.

A navegação inercial é baseada nas Leis do Movimento de Newton. Medindo a aceleração de um corpo num sistema inercial de referência e integrando-a com relação

ao tempo e transformando-a para o referenciado sistema de navegação, velocidade, atitude e diferenças de posição podem ser obtidas. Nesse modo de operação, um INS pode ser considerado como um sofisticado sistema de *dead reckoning*. Convencionalmente, sensores utilizados para implementar tal sistema são acelerômetros para medidas de força específica e giroscópios para implementação de um sistema inercial de referência. Como as medidas de força específica contêm o efeito da gravidade, um modelo de gravidade é necessário para extrair a aceleração do veículo das medições. Um INS convencional emprega três sensores translacionais e três rotacionais, podendo ser usado tanto para posicionamento como para atitude. Nos sistemas tipo *strapdown* os sensores inerciais são montados rigidamente no veículo, formando um triedro ortogonal, preferencialmente alinhado com os eixos principais do veículo (Titterton e Weston, 1997; Cardenuto, 1984).

Sistemas do tipo *strapdown* vêm, nos últimos dez anos, substituindo os sistemas baseados em plataformas estáveis (King, 1998; Schwarz e El-Sheimy, 1999). A razão para o rápido avanço dos sistemas tipo *strapdown* para navegação em geral está nas suas vantagens em confiabilidade, consumo, peso, custo e flexibilidade. A transição a partir das plataformas estáveis foi possível com o desenvolvimento da tecnologia de processadores e dos giroscópios óticos, que substituíram os mecânicos. Este desenvolvimento culminou, juntamente com a tecnologia MEMS, com a miniaturização dos sistemas inerciais levando à idéia de *IMU-on-a-chip* (Schwarz e El-Sheimy, 1999; Allen et alii, 1998).

As saídas dos sensores inerciais, de um sistema tipo *strapdown*, representam força específica e velocidade angular, descritos no sistema de referência do veículo, devendo portanto, ser utilizado um algoritmo de transformação entre os sistemas de coordenadas do veículo e do sistema de navegação inercial. A Figura (3.1) descreve, de forma simplificada, uma plataforma *strapdown* convencional cuja saída está referenciada a um sistema inercial (Schmidt, 1978).

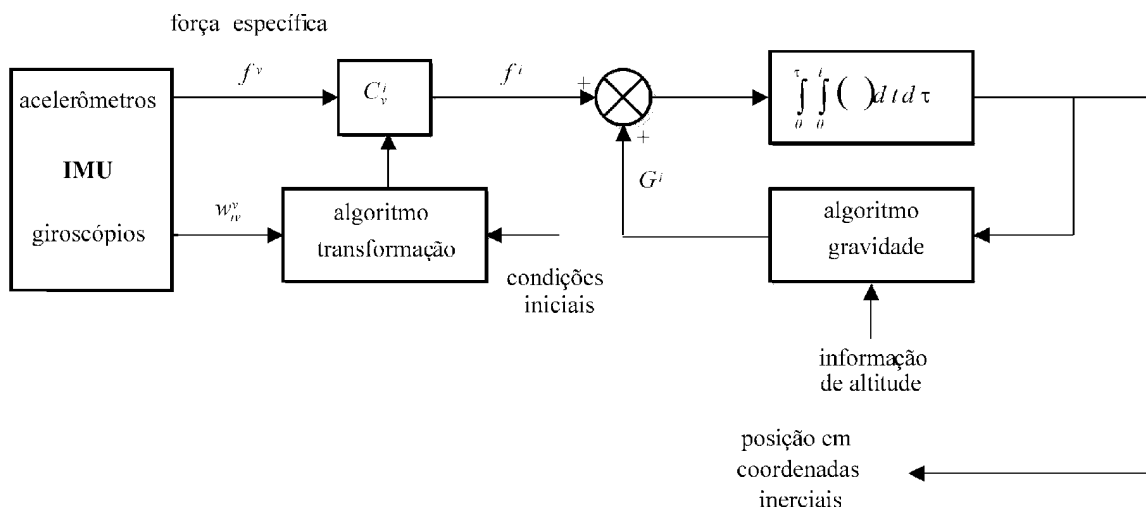


FIGURA 3.1: Plataforma inercial tipo *strapdown* convencional.

### 3.2 Sistemas de Coordenadas

Os diferentes sistemas de coordenadas utilizados neste trabalho, serão definidos a seguir.

#### 3.2.1 Sistema Inercial (i)

- Também chamado de *Earth-Centered Inertial* (ECI), possui as seguintes características:
- Origem no centro de massa da Terra;
- Eixo  $z$  é paralelo ao eixo de rotação da Terra e aponta para o norte geográfico;
- Eixo  $x$  aponta para o equinócio vernal;
- Eixo  $y$  completa um sistema ortogonal dextrógiro.

#### 3.2.2 Sistema Terra (e)

Também chamado de *Earth-Centered, Earth-Fixed* (ECEF), possui as seguintes características:

- Origem no centro de massa da Terra;

- Eixo  $z$  é paralelo ao eixo de rotação da Terra e aponta para o norte geográfico;
- Eixo  $x$  aponta para a intersecção entre o Equador da Terra e o meridiano de Greenwich;
- Eixo  $y$  completa um sistema ortogonal dextrógiro.

Ou seja, possui a mesma origem que o sistema ECI, mas gira com a Terra.

### 3.2.3 Sistema de Navegação (n)

Também chamado de *Local Tangent Plane* (LTP), possui as seguintes características:

- Origem no C.G. do veículo;
- Eixo  $z$  aponta para baixo, perpendicularmente ao plano local tangente;
- Eixo  $x$  aponta para o norte geográfico;
- Eixo  $y$  aponta para o leste geográfico.

Com essas características, o sistema LTP, também é chamado de coordenadas *North-East-Down* (NED), de acordo com Grewall et alli (2001). Caso o eixo  $z$  apontasse para cima seria chamado de coordenadas *East-North-Up* (ENU). As Figuras (3.2), (3.3) e (3.4) ilustram os sistemas descritos anteriormente:

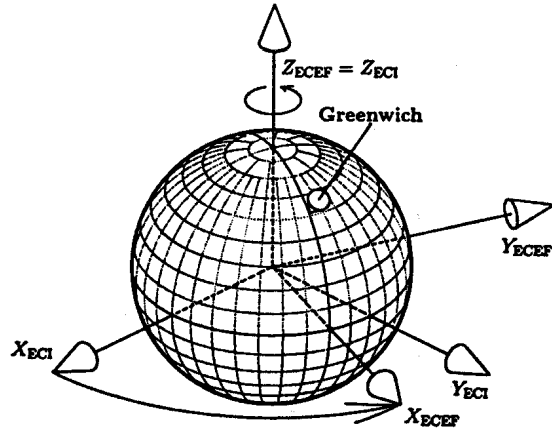


FIGURA 3.2: Sistema de coordenadas ECI e ECEF.  
 FONTE: Adaptada de Grewall et alii (2001).

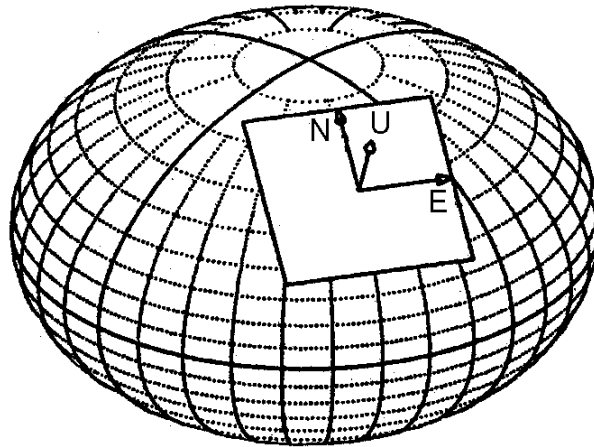


FIGURA 3.3: Sistema de coordenadas LTP – ENU.  
 FONTE: Adaptada de Grewall et alii (2001).

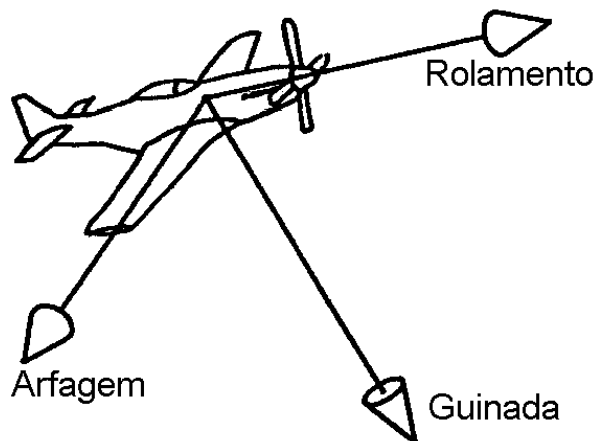


FIGURA 3.4: Sistema de coordenadas do veículo.  
 FONTE: adaptada de Grewal et alii (2001).

### 3.3 Transformação de Coordenadas

#### 3.3.1 Introdução

Existem vários métodos que representam e implementam transformações de coordenadas, tais como os ângulos de Euler, Matrizes de Cossenos Diretores (DCM) e Quatérnios (Regan, 1994), sendo este último método o favorito para transformação de coordenadas em sistemas tipo “*strapdown*” (Grewal et alli, 2001).

#### 3.3.2 Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler relacionam medidas em dois sistemas de coordenadas através de uma série de três rotações ortogonais entre os eixos dos sistemas. A forma analítica final da matriz de transformação entre os dois sistemas depende da ordem com as quais as rotações são tomadas. Para aeronaves é comum tomar as rotações na seguinte ordem (Regan, 1994):

- Rotacionar , positivamente, o eixo de referência z, de uma rotação finita  $R(\psi)$ , com um ângulo  $\psi$ .
- Rotacionar o eixo resultante  $y'$  de uma rotação finita,  $R(\theta)$ , com um ângulo  $\theta$ .
- Rotacionar o eixo resultante  $x''$  de uma rotação finita,  $R(\phi)$ , com um ângulo  $\phi$ .

#### 3.3.3 Transformação entre os Sistemas do Veículo (v) e o Sistema de Navegação (n)

Essa transformação é dada pelas seguintes rotações em relação ao sistema de referência (n):

$C_n^v = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$ . Logo,

$$C_n^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{C}_n^v = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & c\theta \cdot s\psi & -s\theta \\ s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi - s\psi \cdot c\phi & s\psi \cdot s\theta \cdot s\phi + c\psi \cdot c\phi & s\phi \cdot c\theta \\ c\psi \cdot c\phi \cdot s\theta + s\psi \cdot s\phi & s\psi \cdot c\phi \cdot s\theta - c\psi \cdot s\phi & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde  $s\phi$ ,  $s\theta$  e  $s\psi$  representam, respectivamente,  $\text{sen}\phi$ ,  $\text{sen}\theta$  e  $\text{sen}\psi$ ; e também  $c\phi$ ,  $c\theta$  e  $c\psi$  representam, respectivamente,  $\text{cos}\phi$ ,  $\text{cos}\theta$  e  $\text{cos}\psi$ .

Como a matriz  $\mathbf{C}_n^v$  é ortogonal, a seguinte relação também é válida:

$\mathbf{C}_v^n = (\mathbf{C}_n^v)^T = \mathbf{R}_z(-\psi)\mathbf{R}_y(-\theta)\mathbf{R}_x(-\phi)$ , ou seja:

$$\mathbf{C}_v^n = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\psi & -c\phi \cdot s\psi + s\phi \cdot s\theta \cdot c\psi & s\phi \cdot s\psi + c\phi \cdot s\theta \cdot c\psi \\ c\theta \cdot s\psi & c\phi \cdot c\psi + s\phi \cdot s\theta \cdot s\psi & -s\phi \cdot c\psi + c\phi \cdot s\theta \cdot s\psi \\ -s\theta & s\phi \cdot c\theta & c\phi \cdot c\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$ , que denota a velocidade angular do veículo em relação ao sistema de navegação, expressa no sistema do veículo, é dada por (Titterton e Weston, 1997):

$$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v = \begin{Bmatrix} \phi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{R}_x(\phi) \cdot \begin{Bmatrix} \theta \\ \psi \\ 0 \end{Bmatrix} + \mathbf{R}_x(\phi) \cdot \mathbf{R}_y(\theta) \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi - \psi \cdot s\theta \\ \theta \cdot c\phi + \psi \cdot s\phi \cdot c\theta \\ \psi \cdot c\phi \cdot c\theta - \theta \cdot s\phi \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.3.4 Transformação entre os Sistemas de Navegação (n) e da Terra (e)

Essa transformação é dada por (Fitzgibbon, 1983 e Britting, 1971):

$$\mathbf{C}_e^n = \mathbf{R}_y(-\Phi - \pi/2)\mathbf{R}_z(\lambda)$$

onde os ângulos de Euler são definidos como:



$\theta = -\Phi - \pi/2$ , e  $\Phi$  = latitude geodésica do veículo;

$\psi = \lambda$ , e  $\lambda$  = longitude do veículo;

$\phi = 0$ .

A substituição dos ângulos  $(\theta, \psi, \phi)$ , acima definidos, nas Equações (3.2) e (3.5) resulta em:

$$\mathbf{C}_e^n = \begin{bmatrix} -s\Phi \cdot c\lambda & -s\Phi \cdot s\lambda & c\Phi \\ -s\lambda & c\lambda & 0 \\ -c\Phi \cdot c\lambda & -c\Phi \cdot s\lambda & -s\Phi \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{Bmatrix} \omega_N \\ \omega_E \\ \omega_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathcal{R} s(-\Phi - \pi/2) \\ \frac{d}{dt}(-\Phi - \pi/2) \\ \mathcal{R} c(-\Phi - \pi/2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R} c\Phi \\ -\dot{\Phi} \\ \mathcal{R} s\Phi \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $\mathcal{R}$  é dada pela Equação (3.14).

O vetor de velocidades angulares  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^e$  é dado por:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \{0, 0, \omega_e\} \quad (3.8)$$

onde  $\omega_e = 7,2921158e-5$  rad/s é a magnitude da rotação da Terra. Logo  $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$  é obtido da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \mathbf{C}_e^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{Bmatrix} \omega_e \cdot c\Phi \\ 0 \\ -\omega_e \cdot s\Phi \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.3.5 Transformação entre os Sistemas da Terra (e) e Inercial (i)

Uma aproximação da matriz completa de transformação  $\mathbf{C}_e^i$  é dada por (Britting, 1971):

$$C_e^i = \begin{bmatrix} c(\omega_e \cdot t) & -s(\omega_e \cdot t) & 0 \\ s(\omega_e \cdot t) & c(\omega_e \cdot t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.3.6 Coordenadas Geográficas: Latitude, Longitude e Altitude

É comum, em sistemas de navegação, apresentar a posição do veículo em coordenadas geográficas, latitude e longitude, juntamente com a altitude. A representação pode ser obtida considerando a Terra como sendo um elipsóide de revolução, ou modelo de terceira ordem (Grewal et alli, 2001), com os raios menores nos polos e os maiores no equador. Considere a Figura (3.5):

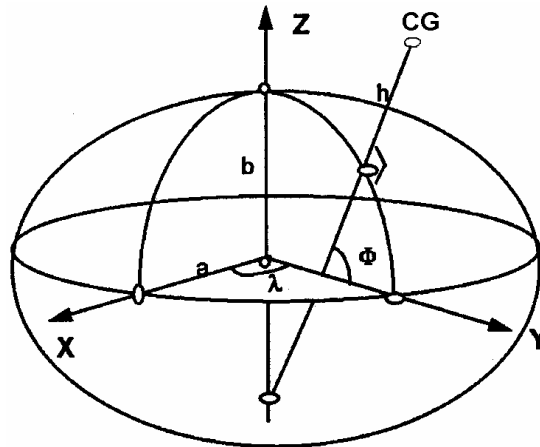


FIGURA 3.5: Sistema de coordenadas geográficas.  
FONTE: Monico (2000).

Onde:

$a = r_e =$  semi-eixo maior ou raio equatorial;

$b =$  semi-eixo menor ou raio polar;

$f = (a - b) / a =$  achatamento da elipse;

$e = (a^2 - b^2)^{1/2} / a = (2f - f^2)^{1/2} =$  excentricidade;

$\Phi =$  latitude geodésica;

$h$  = altitude do C.G. do veículo em relação à superfície do elipsóide.

Considerando a relação genérica  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  (Greenwood, 1962), e que o raio utilizado para longitudes é o chamado raio de curvatura transversal,  $R_N$ , e que para mudanças de latitudes o raio utilizado é o chamado raio de curvatura meridional,  $R_M$ , (Grewal et alii, 2001), então as componentes do vetor  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$  podem ser expressas como:

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{Bmatrix} \omega_N \\ \omega_E \\ \omega_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_E / (R_N + h) \\ -v_N / (R_M + h) \\ -v_E \cdot \tan \Phi / (R_M + h) \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

onde, de acordo com Grewal et alii (2001):

$$R_N = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi)^{1/2}} \quad (3.12)$$

$$R_M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi)^{3/2}} \quad (3.13)$$

e  $v_E$ ,  $v_N$  são velocidades nas direções leste e norte respectivamente. Comparando as Equações (3.11) e (3.7), obtém-se as seguintes expressões:

$$\lambda^{\&} = \frac{v_E}{(R_N + h)} \cdot \sec \Phi \quad (3.14)$$

$$\Phi^{\&} = \frac{v_N}{(R_M + h)} \quad (3.15)$$

Com a integração das Equações (3.14) e (3.15) obtém-se a posição do veículo expressa em longitude e latitude. Devido ao termo  $\sec \Phi$ , imprecisões numéricas podem ser introduzidas para latitudes próximas aos polos, requerendo assim análise específica para contornar o problema de vôos polares (Fitzgibbon, 1983).

A equação para  $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$  pode ser obtida somando-se as Equações (3.9) e (3.11):

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n$$

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \left\{ \begin{array}{c} \omega_e \cos \Phi + v_E / (R_N + h) \\ -v_N / (R_M + h) \\ -\omega_e \cdot \sin \Phi - v_E \cdot \tan \Phi / (R_N + h) \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

que representa a velocidade angular do sistema de navegação em relação ao inercial, e expressa no sistema de navegação

### 3.3.7 Cálculo e Propagação de Matrizes de Transformação

Quatérnios, ou parâmetros simétricos de Euler, representam métodos para descrever uma matriz de transformação e sua propagação, juntamente com os cossenos diretores e ângulos de Euler. O método dos quatérnios apresenta algumas vantagens computacionais, não causa singularidades, não trabalham com funções trigonométricas na solução das suas equações diferenciais e proporcionam facilidade para computar sucessivas rotações (Regan, 1994; Wertz, 1978; Titterton e Weston, 1997). Considere a equação diferencial, que propaga o quatérnio  $\mathbf{q}$ :

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{nv}^v \quad (3.17)$$

onde:

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}^T \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{nv}^v = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & \omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

sendo  $\mathbf{q}$  o vetor formado pelos parâmetros simétricos de Euler, ou quatérnios, e  $\boldsymbol{\Omega}_{nv}^v$  é a matriz formada pelas componentes de velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$  do veículo em relação ao sistema de navegação, representadas no sistema de coordenadas do veículo. A equação

para propagação do quatérnio pode ser implementada através das seguintes Equações (Titterton e Weston, 1997):

$$\dot{q}_1 = -1/2(q_2 \cdot \omega_x + q_3 \cdot \omega_y + q_4 \cdot \omega_z) \quad (3.20)$$

$$\dot{q}_2 = 1/2(q_1 \cdot \omega_x - q_4 \cdot \omega_y + q_3 \cdot \omega_z) \quad (3.21)$$

$$\dot{q}_3 = 1/2(q_4 \cdot \omega_x + q_1 \cdot \omega_y - q_2 \cdot \omega_z) \quad (3.22)$$

$$\dot{q}_4 = -1/2(q_3 \cdot \omega_x - q_2 \cdot \omega_y - q_1 \cdot \omega_z) \quad (3.23)$$

A relação entre os quatérnios e a matriz de transformação  $C_v^n$ , dada pela Equação (3.3), é dada por (Regan, 1984; Titterton e Weston, 1997):

$$q_1^2 = \frac{1}{4}(1 + c_{11} - c_{22} - c_{33}) \quad (3.24)$$

$$q_2^2 = \frac{1}{4}(1 + c_{22} - c_{11} - c_{33}) \quad (3.25)$$

$$q_3^2 = \frac{1}{4}(1 + c_{33} - c_{11} - c_{22}) \quad (3.26)$$

$$q_4^2 = \frac{1}{4}(1 + c_{11} - c_{22} - c_{33}) \quad (3.27)$$

onde  $c_{ij}$ ,  $i, j = \{1,2,3\}$ , são elementos da matriz  $C_v^n$ .

Por questão de simplicidade de implementação e devido ao fato que os valores dos ângulos de Euler, da trajetória nominal simulada, não causarão singularidades, será utilizada a matriz de cossenos  $C_v^n$  para a transformação de coordenadas, conforme as Equações (3.2) e (3.3).

### 3.4 Equações de Navegação Inercial

#### 3.4.1 Aceleração e Gravitação

A equação básica de navegação inercial pode ser obtida pela aplicação da segunda Lei de Newton à massa de prova de um acelerômetro. A força aplicada ao acelerômetro é composta por uma componente não gravitacional, que é medida pelo acelerômetro, e pela componente gravitacional que deve ser estimada (Pitman, 1962). Seja,

$$\mathbf{F}^i = m\mathbf{a}^i \quad (3.28)$$

onde:

$i$  = denota referência inercial

$m$  = massa de prova do acelerômetro

$\mathbf{F}^i$  = força aplicada à massa  $m$

$\mathbf{a}^i$  = aceleração inercial da massa  $m$

se:

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{F}_{ng} + \mathbf{F}_g \quad (3.29)$$

onde:

$\mathbf{F}_{ng}$  = componente não gravitacional

$\mathbf{F}_g$  = componente gravitacional

logo:

$$\mathbf{a}^i = \frac{\mathbf{F}_{ng}}{m} + \frac{\mathbf{F}_g}{m}$$

ou

$$\mathbf{f}^i = \mathbf{a} - \mathbf{G}^i \quad (3.30)$$

onde:

$\mathbf{f}^i$  = força não gravitacional por unidade de massa ou força específica do veículo

$\mathbf{G}^i$  = aceleração gravitacional

$$\mathbf{f}^i = \{f_x, f_y, f_z\},$$

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

$$\mathbf{G}^i = \{G_x, G_y, G_z\}$$

O vetor força específica  $\mathbf{f}^i$  pode ser obtido a partir das medidas inerciais no referencial do veículo  $\mathbf{f}^v$ :

$$\mathbf{f}^i = \mathbf{C}_v^i \cdot \mathbf{f}^v \quad (3.31)$$

onde  $\mathbf{C}_v^i$  é a matriz de transformação do referencial do veículo para o inercial. A equação diferencial para  $\mathbf{C}_v^i$  é dada por (Britting, 1971):

$$\dot{\mathbf{C}}_v^i = \mathbf{C}_v^i \cdot \mathbf{\Omega}_{iv}^v \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{\Omega}_{iv}^v$  é a forma anti-simétrica de  $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$ ,

$$\mathbf{\Omega}_{iv}^v = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

e  $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ , onde  $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$  é o vetor de velocidade angular inercial do veículo expresso em coordenadas do veículo e é medido pelo arranjo acelerométrico da IMU.

A expressão da força específica expressa no sistema de navegação é dada por:

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{C}_i^n \cdot \dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{G}^n \quad (3.34)$$

É conveniente expressar a Equação (3.34) em termos da velocidade  $\mathbf{v}^n$  :

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{C}_e^n \cdot \dot{\mathbf{r}}^e \quad (3.35)$$

onde  $\mathbf{v}^n = \{v_N, v_E, v_D\}$ .

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{C}_i^e \cdot \mathbf{r}^i \quad (3.36)$$

derivando a Equação (3.36):

$$\dot{\mathbf{r}}^e = \dot{\mathbf{C}}_i^e \cdot \mathbf{r}^i + \mathbf{C}_i^e \cdot \dot{\mathbf{r}}^i \quad (3.37)$$

mas,

$$\dot{\mathbf{C}}_e^i = \mathbf{C}_e^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \quad (3.38)$$

logo  $\dot{\mathbf{C}}_i^e = [\mathbf{C}_e^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e]^T = (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e)^T (\mathbf{C}_e^i)^T$ , como  $(\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e)^T = -\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e$ , então,

$$\dot{\mathbf{C}}_i^e = -\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \mathbf{C}_i^e \quad (3.39)$$

substituindo a Equação (3.39) na Equação (3.37), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{r}}^e = \mathbf{C}_i^e \cdot (\dot{\mathbf{r}}^i - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \cdot \mathbf{r}^i) \quad (3.40)$$

que é uma forma matricial do Teorema da Coriolis (Britting, 1971).

Substituindo a Equação (3.40) na Equação (3.35), obtem-se  $\mathbf{v}^n = \mathbf{C}_i^n \cdot (\dot{\mathbf{r}}^i - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^i \cdot \mathbf{r}^i)$ , que derivando resulta em:

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \dot{\mathbf{C}}_i^n \cdot (\dot{\mathbf{r}}^i - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^i \cdot \mathbf{r}^i) + \mathbf{C}_i^n \cdot (\ddot{\mathbf{r}}^i - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^i \cdot \mathbf{r}^i) \quad (3.41)$$

se  $\mathbf{r}^i = \mathbf{C}_e^i \cdot \mathbf{r}^e$ , então:



$$\mathbf{a} = \mathbf{C}_e^i \cdot \mathbf{r}^e + \mathbf{C}_e^i \cdot \mathbf{a} \quad (3.42)$$

Substituindo as Equações (3.42) e (3.38) na Equação (3.41) e rearranjando seus termos, obtém-se:

$$\mathbf{v}^n = \mathbf{C}_i^n \cdot \left[ \mathbf{a} - (\boldsymbol{\Omega}_{en}^i + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^i) \mathbf{C}_n^i \cdot \mathbf{v}^n - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^i \boldsymbol{\Omega}_{ie}^i \mathbf{r}^i \right] \text{ ou,}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} - (\boldsymbol{\Omega}_{en}^i + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^i) \cdot \mathbf{v}^n - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^i \cdot \mathbf{r}^i \quad (3.43)$$

Da Equação (3.34),

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}^n + \mathbf{G}^n \quad (3.44)$$

então,

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}^n + \mathbf{G}^n - (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \cdot \mathbf{v}^n - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n \cdot \mathbf{r}^e$$

se o vetor de gravidade local é definido por  $\mathbf{g}^n = \mathbf{G}^n - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ie}^n \cdot \mathbf{r}^e$ , logo:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}^n - (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \cdot \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (3.45)$$

ou,

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{a} + (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \cdot \mathbf{v}^n - \mathbf{g}^n \quad (3.46)$$

onde:

$$\mathbf{f}^n = \mathbf{C}_v^n \cdot \mathbf{f}^v,$$

$$\mathbf{f}^n = \{f_N, f_E, f_D\},$$

$$\mathbf{g}^n = \{G_N, G_E, G_D\}.$$

Como o eixo D (*down*) é orientado ao longo da vertical local pode-se aproximar as componentes de  $\mathbf{g}^n$  para (Farrel e Barth, 1998):

$$G_N = G_E \cong 0$$

$$G_D(\Phi, h) = G_D(\Phi) - \frac{2 \cdot \gamma_a}{a} \cdot \left[ 1 + f + m + \left( -3f + \frac{5}{2} m \right) \cdot \text{sen}^2(\Phi) \right] \cdot h + \frac{3\gamma_a}{a^2} \cdot h^2 \quad (3.47)$$

onde, de acordo com o WGS-84 (Farrel e Barth, 1998):

$$a = r_e = 6378137,0 \text{ m}$$

$$f = \frac{1}{298,257}$$

$$\gamma_a = 9,780327 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{\omega_e^2 \cdot a}{\gamma_a} = m + \frac{3}{2} m^2, \text{ e}$$

$$\omega_e = 7,2921158 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Assim, a Equação (3.48) toma a seguinte forma:

$$G_D(\Phi, h) = g_0(\Phi) - \left[ 3,0877 \cdot 10^{-6} - 0,0044 \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen}^2(\Phi) \right] \cdot h + 0,072 \cdot 10^{-12} \cdot h^2 \quad (3.48)$$

onde:

$\Phi$  = latitude geodésica, obtida conforme Equação (3.15) e repetida a seguir:

$$\Phi = \frac{V_N}{(R_N + h)} \quad (3.49)$$

$g_0(\Phi)$  = gravidade para  $h = 0$ , em relação ao elipsóide

$$g_0(\Phi) = 9,780327 \cdot \left[ 1 + 0,0053024 \cdot \text{sen}^2(\Phi) - 0,0000058 \cdot \text{sen}^2(2\Phi) \right] \quad (3.50)$$

$h$  = altitude do veículo acima do elipsóide.

Logo,  $\mathbf{g}^n$  é expresso por:

$$\mathbf{g}^n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_D(\Phi, h) \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Equações no Sistema de Navegação (n)

Como mencionado anteriormente é conveniente expressar a solução de navegação em coordenadas de latitude, longitude e altitude:

$$\mathbf{r}^n = \{\Phi, \lambda, h\} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{v}^n = \{\dot{\Phi}, \dot{\lambda}, \dot{h}\} \quad (3.53)$$

De acordo com as Equações (3.14) e (3.15), a Equação (3.53) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{v}^n = \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(R_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & \sec \Phi / (R_N + h) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_N \\ v_E \\ v_D \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{C}_v^n$  da Equação (3.46) é obtida pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{\mathbf{C}}_v^n = \mathbf{C}_v^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{nv}^v \quad (3.55)$$

onde  $\boldsymbol{\Omega}_{nv}^v$  é a matriz semi-simétrica de  $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$ , mas

$$\boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \boldsymbol{\omega}_{in}^v + \boldsymbol{\omega}_{nv}^v \text{ ou,}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v = \boldsymbol{\omega}_{iv}^v - \boldsymbol{\omega}_{in}^v \quad (3.56)$$

logo  $\boldsymbol{\Omega}_{nv}^v = \boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \boldsymbol{\Omega}_{in}^v$ , e

$$\dot{\mathbf{C}}_v^n = \mathbf{C}_v^n \cdot (\boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \boldsymbol{\Omega}_{in}^v) \quad (3.57)$$

As Equações (3.45), (3.54) e (3.57) descrevem a solução de navegação inercial no sistema de coordenadas de navegação (n) expressa em  $(\Phi, \lambda, h)$ .

### **3.5 Sistemas de Navegação Inercial tipo *Strapdown***

Sistemas de navegação inercial tipo *strapdown*, ou *strapdown inertial navigation system* (SINS), convencionais utilizam tríades ortogonais de acelerômetros e giroscópios fixados nos eixos dos veículos, também são chamados de solidários. A Figura (3.6) ilustra uma plataforma *strapdown* convencional.

As informações de atitude e posicionamento são integradas a partir da medida da velocidade angular e força específica. Essa integração, também chamada de mecanização das medidas inerciais, pode ser feita em diferentes sistemas de coordenadas. A mecanização no sistema LTP é frequentemente utilizada para propósitos de navegação, pois sua saída pode ser dada nas coordenadas geográficas latitude, longitude e altitude (Schmidt, 1978). A IMU e os algoritmos de mecanização formam um INS.

No presente trabalho as grandezas de velocidade angular e força específica são obtidas a partir das combinações de leituras acelerométricas da IMU não-giroscópica, conforme descrito no Capítulo 2.

A mecanização onde a solução de navegação está no LTP é a implementação das equações obtidas nas seções anteriores e que foram resumidas nas Equações (3.45), (3.54) e (3.57). A Figura (3.6) mostra uma mecanização típica de um SINS no sistema LTP:

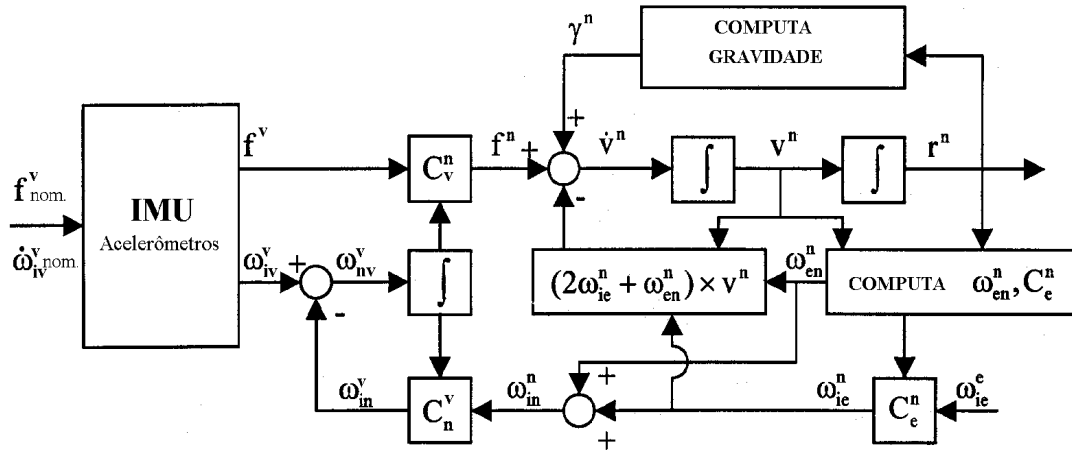


FIGURA 3.6: Plataforma *strapdown* no sistema de navegação LTP.

Os erros dos acelerômetros devem ser compensados antes que as medidas sejam enviadas para o algoritmo de mecanização e a solução de navegação ser obtida.

As equações de navegação, na forma que foram apresentadas, não fornecem informações sobre os erros do sistema. A próxima seção analisa esses erros, a serem compensados, como forma de melhorar o desempenho do sistema.

### 3.6 Análise de Erros

#### 3.6.1 Introdução

A análise de erros, neste trabalho, utiliza métodos de perturbação para linearizar sistemas de equações diferenciais não lineares. A perturbação das equações de navegação pode ser expressa da seguinte forma (Britting, 1971):

$$\hat{\mathbf{r}}^n = \mathbf{r}^n + \delta \mathbf{r}^n \quad (3.58)$$

$$\hat{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n \quad (3.59)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_v^n = (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \cdot \mathbf{C}_v^n \quad (3.60)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{g}^n + \delta \mathbf{g}^n \quad (3.61)$$

onde:

$(\hat{\cdot})$  = denota forma computada,

$\gamma$  = componente normal do vetor de gravidade,

$\mathbf{E}^n$  = a forma anti-simétrica do vetor de erros de atitude  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_N, \varepsilon_E, \varepsilon_D\}$ ,  
(Britting, 1971).

$$\mathbf{E}^n = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_D & \varepsilon_E \\ \varepsilon_D & 0 & -\varepsilon_N \\ -\varepsilon_E & \varepsilon_N & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

As Equações (3.60) e (3.62) são obtidas perturbando-se  $\mathbf{C}_v^n$ , onde a transformação entre os sistemas de coordenadas (ortogonais) é computada com base na velocidade angular relativa entre os sistemas (Britting, 1971).

### 3.6.2 Erros de Posição

Erros dinâmicos de posição são obtidos perturbando-se a Equação (3.54), onde:

$$\mathbf{R} = f(\mathbf{r}^n, \mathbf{v}^n),$$

$$\mathbf{r}^n = \{\Phi, \lambda, h\},$$

$$\mathbf{v}^n = \{v_N, v_E, v_D\} \mathbf{e},$$

então,

$$\delta \mathbf{R} = \frac{\partial f(\mathbf{r}^n, \mathbf{v}^n)}{\partial \mathbf{r}^n} \cdot \delta \mathbf{r}^n + \frac{\partial f(\mathbf{r}^n, \mathbf{v}^n)}{\partial \mathbf{v}^n} \cdot \delta \mathbf{v}^n \quad (3.63)$$

ou,

$$\delta \mathbf{R} = \mathbf{F}_r \cdot \delta \mathbf{r}^n + \mathbf{F}_v \cdot \delta \mathbf{v}^n \quad (3.64)$$

onde:

$$\mathbf{F}_{tr} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi} & \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} & \frac{\partial \Phi}{\partial h} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \Phi} & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \lambda}{\partial h} \\ \frac{\partial h}{\partial \Phi} & \frac{\partial h}{\partial \lambda} & \frac{\partial h}{\partial h} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{tr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-v_N}{(R_M + h)^2} \\ \frac{v_E \cdot \sin \Phi}{(R_N + h) \cdot \cos^2 \Phi} & 0 & \frac{-v_E}{(R_N + h)^2 \cdot \cos \Phi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{F}_{rv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v_N} & \frac{\partial \Phi}{\partial v_E} & \frac{\partial \Phi}{\partial v_D} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v_N} & \frac{\partial \lambda}{\partial v_E} & \frac{\partial \lambda}{\partial v_D} \\ \frac{\partial h}{\partial v_N} & \frac{\partial h}{\partial v_E} & \frac{\partial h}{\partial v_D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{rv} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_M + h)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_N + h) \cdot \cos \Phi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

onde  $R_M$  e  $R_N$  são os raios de curvatura meridional e raio de curvatura transversal principal, definidos nas Equações (3.12) e (3.13).

### 3.6.3 Erros de Velocidade

Considere a Equação (3.45) reescrita na seguinte forma:

$$\mathbf{w}^n = \mathbf{C}_v^n \cdot \mathbf{f}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (3.67)$$

cuja perturbação resulta em:

$$\delta \mathbf{w}^n + \mathbf{w}^n = (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \cdot \mathbf{C}_v^n \cdot (\mathbf{f}^v + \delta \mathbf{f}^v) - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times (\mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n) + \mathbf{g}^n + \delta \mathbf{g}^n$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^n + \delta\mathcal{W}^n = & (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \cdot (\mathbf{f}^n + \mathbf{C}_v^n \delta\mathbf{f}^v) - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + 2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \times (\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n) \\ & - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times (\mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n) + \mathbf{g}^n + \delta\mathbf{g}^n \end{aligned} \quad (3.68)$$

Os termos de primeira ordem da Equação (3.68) podem ser agrupados:

$$\delta\mathcal{W}^n = -(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta\mathbf{v}^n - (2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{g}^n + \mathbf{C}_v^n \cdot \delta\mathbf{f}^v - \mathbf{E}^n \cdot \mathbf{f}^n \quad (3.69)$$

onde  $\mathbf{E}^n$  está descrita na Equação (3.62).

Rearranjando a Equação (3.69):

$$\delta\mathcal{W}^n = \mathbf{v}^n \times (2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) + \delta\mathbf{g}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta\mathbf{v}^n + \mathbf{f}^n \mathbf{E}^n + \mathbf{C}_v^n \delta\mathbf{f}^v \quad (3.70)$$

mas, da Equação (3.16):

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left\{ \begin{array}{l} \omega_e \cdot \cos \Phi + v_E / (R_N + h) \\ -v_N / (R_M + h) \\ -\omega_e \cdot \sin \Phi - v_E \cdot \tan \Phi / (R_N + h) \end{array} \right\}$$

então,

$$2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left\{ \begin{array}{l} 2\omega_e \cdot \cos \Phi + v_E / (R_N + h) \\ -v_N / (R_M + h) \\ -\omega_e \cdot \sin \Phi - v_E \cdot \tan \Phi / (R_N + h) \end{array} \right\} \quad (3.71)$$

Utilizando o mesmo procedimento da Seção (3.6.2):

$$2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n = f(\mathbf{r}^n, \mathbf{v}^n) = \{f_1, f_2, f_3\}$$

$$2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n = f(\delta\mathbf{r}^n, \delta\mathbf{v}^n)$$

então,

$$2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \delta\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}^n + \delta\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}^n \quad (3.72)$$

onde,



$$\delta\Omega_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial\Phi & \partial f_1/\partial\lambda & \partial f_1/\partial h \\ \partial f_2/\partial\Phi & \partial f_2/\partial\lambda & \partial f_2/\partial h \\ \partial f_3/\partial\Phi & \partial f_3/\partial\lambda & \partial f_3/\partial h \end{bmatrix}$$

$$\delta\Omega_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -2\omega_e \cdot \text{sen}\Phi & 0 & -v_E / (\mathbf{R}_N + h)^2 \\ 0 & 0 & -v_N / (\mathbf{R}_M + h)^2 \\ -2\omega_e \cdot \text{cos}\Phi - v_E / [(\mathbf{R}_N + h) \cdot \text{cos}^2\Phi] & 0 & v_E \cdot \text{tan}\Phi / (\mathbf{R}_N + h)^2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\delta\Omega_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial v_N & \partial f_1/\partial v_E & \partial f_1/\partial v_D \\ \partial f_2/\partial v_N & \partial f_2/\partial v_E & \partial f_2/\partial v_D \\ \partial f_3/\partial v_N & \partial f_3/\partial v_E & \partial f_3/\partial v_D \end{bmatrix}$$

$$\delta\Omega_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(\mathbf{R}_N + h) & 0 \\ -1/(\mathbf{R}_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & -\text{tan}\Phi / (\mathbf{R}_N + h) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Pré multiplicando a Equação (3.72) por  $(\mathbf{v}^n \times)$ , onde  $\mathbf{v}^n$  é dada pela Equação (3.54):

$$\mathbf{v}^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) = (\mathbf{v}^n \times) (\delta\Omega_{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}^n + \delta\Omega_{\mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{v}^n)$$

$$\mathbf{v}^n \times (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) = (\mathbf{v}^n \times) \delta\Omega_{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r}^n + (\mathbf{v}^n \times) \delta\Omega_{\mathbf{v}} \cdot \delta\mathbf{v}^n$$

onde:

$$(\mathbf{v}^n \times) \delta\Omega_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -2v_E \omega_e \cdot \text{cos}\Phi - v_E^2 / [(\mathbf{R}_N + h) \cdot \text{cos}^2\Phi] & 0 \\ 2\omega_e (v_N \text{cos}\Phi - v_D \text{sen}\Phi) + v_E v_N / [(\mathbf{R}_N + h) \text{cos}^2\Phi] & 0 \\ 2v_E \omega_e \cdot \text{sen}\Phi & 0 \\ -v_N v_D (\mathbf{R}_M + h)^2 + v_E^2 \text{tan}\Phi (\mathbf{R}_N + h)^2 & \\ -v_E v_D (\mathbf{R}_N + h)^2 - v_N v_E \text{tan}\Phi (\mathbf{R}_N + h)^2 & \\ v_E^2 / (\mathbf{R}_N + h)^2 + v_N^2 / (\mathbf{R}_M + h)^2 & \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$(\mathbf{v}^n \times) \delta \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_D / (R_M + h) & -v_E \cdot \tan \Phi / (R_N + h) & 0 \\ 0 & (v_D + v_N \cdot \tan \Phi) / (R_N + h) & 0 \\ -v_N / (R_M + h) & -v_E / (R_N + h) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Por uma questão de simplicidade o erro  $\delta \mathbf{g}^n$  será aproximado para um modelo onde a gravidade varia somente com a altura. No sistema de coordenadas de navegação a componente normal de gravidade pode ser dada pela Equação (3.48).  $\delta \mathbf{g}^n$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$\delta \mathbf{g}^n \cong \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta G_D \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

A Equação (3.48) perturbada leva à:

$$\delta \mathbf{g}^n = -2 \left( \frac{\gamma_a}{a} \right) \cdot \delta h \quad (3.78)$$

Finalmente a Equação (3.70) pode ser reescrita como:

$$\delta \dot{\mathbf{e}}^n = \mathbf{F}_{vI} \cdot \delta \mathbf{r}^n + \mathbf{F}_{vV} \cdot \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{E}^n + \mathbf{C}_v^n \cdot \delta \mathbf{f}^v \quad (3.79)$$

onde:

$$\mathbf{F}_{vI} = \begin{bmatrix} -2v_E \omega_e \cdot \cos \Phi - v_E^2 / [(R_N + h) \cdot \cos^2 \Phi] & 0 \\ 2\omega_e (v_N \cos \Phi - v_D \sin \Phi) + v_E v_N / [(R_N + h) \cos^2 \Phi] & 0 \\ 2v_E \omega_e \cdot \sin \Phi & 0 \\ -v_N v_D / (R_M + h)^2 + v_E^2 \tan \Phi / (R_N + h)^2 & \\ -v_E v_D / (R_N + h)^2 - v_N v_E \tan \Phi / (R_N + h)^2 & \\ v_E^2 / (R_N + h)^2 + v_N^2 / (R_M + h)^2 - \delta \mathbf{g}^n & \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{F}_{vv} = \begin{bmatrix} v_D / (R_M + h) & -2\omega_e \cdot \text{sen}\Phi - 2v_E \cdot \text{tan}\Phi / (R_N + h) \\ 2\omega_e \cdot \text{sen}\Phi + v_E \cdot \text{tan}\Phi / (R_N + h) & (v_D + v_N \cdot \text{tan}\Phi) / (R_N + h) \\ -2v_N / (R_M + h) & (-2\omega_e \cdot \text{cos}\Phi) - 2v_E / (R_N + h) \\ v_N / (R_M + h) & \\ 2\omega_e \cdot \text{cos}\Phi + v_E / (R_N + h) & \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

### 3.6.4 Erros de Atitude

Considere a Equação (3.57), na forma compactada, e a forma perturbada da matriz de transformação  $\mathbf{C}_v^n$ , abaixo apresentadas:

$$\dot{\mathbf{C}}_v^n = \hat{\mathbf{C}}_v^n (\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{iv}^v - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{in}^v) \quad (3.82)$$

onde

$$\hat{\mathbf{C}}_v^n = (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \cdot \mathbf{C}_v^n.$$

Mas,

$$\dot{\mathbf{C}}_v^n = -\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{C}_v^n + (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \dot{\mathbf{C}}_v^n$$

então,

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{C}_v^n + (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \dot{\mathbf{C}}_v^n &= (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \mathbf{C}_v^n (\boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \boldsymbol{\Omega}_{in}^v + \delta\boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^v) = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \mathbf{C}_v^n (\boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \boldsymbol{\Omega}_{in}^v) + (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \mathbf{C}_v^n (\delta\boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^v) \end{aligned}$$

se  $\boldsymbol{\Omega}_{nv}^v = \boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \boldsymbol{\Omega}_{in}^v$ , então:

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{C}_v^n + (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \dot{\mathbf{C}}_v^n &= (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \mathbf{C}_v^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{nv}^v + (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \mathbf{C}_v^n (\delta\boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^v), \text{ ou} \\ -\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{C}_v^n &= (\mathbf{I} - \mathbf{E}^n) \mathbf{C}_v^n (\delta\boldsymbol{\Omega}_{iv}^v - \delta\boldsymbol{\Omega}_{in}^v) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Os termos de primeira ordem da Equação (3.83) podem ser reagrupados:

$$-\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{C}_v^n = \mathbf{C}_v^n \cdot (\delta\mathbf{\Omega}_{iv}^v - \delta\mathbf{\Omega}_{in}^v), \text{ ou}$$

$$\mathbf{E}^n = -\mathbf{C}_v^n \cdot (\delta\mathbf{\Omega}_{iv}^v - \delta\mathbf{\Omega}_{in}^v) \cdot \mathbf{C}_n^v \quad (3.84)$$

A Equação (3.84) pode ser reescrita na forma vetorial:

$$\mathbf{\mathcal{E}}^n = -\mathbf{C}_v^n \cdot (\delta\mathbf{\omega}_{iv}^v - \delta\mathbf{\omega}_{in}^v) \quad (3.85)$$

onde  $\mathbf{E}^n$  é a forma anti-simétrica de  $\boldsymbol{\varepsilon}^n$  e  $\mathbf{\Omega}$  a forma anti-simétrica de  $\boldsymbol{\omega}$ .

Se  $\boldsymbol{\omega}_{in}^v = \mathbf{C}_n^v \cdot \boldsymbol{\omega}_{in}^n$  então,

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^v + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^v = \mathbf{C}_n^v \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{E}^n) (\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n) \quad (3.86)$$

Os termos de primeira ordem da Equação (3.86) podem ser reagrupados:

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^v = \mathbf{C}_n^v (\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \mathbf{E}^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{in}^n) = \mathbf{C}_n^v \cdot [\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + (\boldsymbol{\varepsilon}^n \times) \boldsymbol{\omega}_{in}^n] \quad (3.87)$$

Substituindo a Equação (3.87) na Equação (3.85) obtém-se:

$$\mathbf{\mathcal{E}}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n + (\boldsymbol{\varepsilon}^n \times) \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \mathbf{C}_v^n \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{iv}^v, \text{ ou}$$

$$\mathbf{\mathcal{E}}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^n - \mathbf{C}_v^n \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{iv}^v \quad (3.88)$$

Lembrando da Equação (3.16) que  $\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n$  e comparando com a Equação (3.72), então

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n = \delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \frac{1}{2} \cdot \delta\mathbf{\Omega}\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}^n + \delta\mathbf{\Omega}\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}^n$$

Assim a Equação (3.88) pode ser expandida na seguinte forma:

$$\mathbf{\mathcal{E}}^n = \mathbf{F}_{er} \cdot \delta\mathbf{r}^n + \mathbf{F}_{ev} \cdot \delta\mathbf{v}^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \boldsymbol{\varepsilon}^n - \mathbf{C}_v^n \cdot \delta\boldsymbol{\omega}_{iv}^v \quad (3.89)$$

onde:

$$\mathbf{F}_{er} = \begin{bmatrix} -\omega_e \cdot \text{sen}\Phi & 0 & -v_E / (R_N + h)^2 \\ 0 & 0 & v_N / (R_M + h)^2 \\ -\omega_e \cdot \text{cos}\Phi - v_E / [(R_n + h)\text{cos}^2\Phi] & 0 & v_E \cdot \text{tan}\Phi / (R_N + h)^2 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{F}_{ev} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(R_N + h) & 0 \\ -1/(R_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & -\text{tan}\Phi / (R_N + h) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

### 3.7 Erro devido aos Acelerômetros

Numa plataforma inercial convencional tipo “*strapdown*”, o erro  $\delta\omega_{iv}^v$  de velocidade angular e o erro  $\delta\mathbf{f}^v$  de força específica são independentes, pois são gerados em função das características dos giroscópios e acelerômetros respectivamente (VanBronkhorst, 1978).

No caso da IMU não-giroscópica,  $\omega_{iv}^v$  e  $\mathbf{f}^v$  são obtidos pela combinação das medidas realizadas unicamente por um arranjo de acelerômetros, possuindo então a mesma fonte de erros, assim  $\delta\omega_{iv}^v$  e  $\delta\mathbf{f}^v$  são correlacionados, conforme pode ser observado nas Equações (2.28) e (2.29).

Como mencionado no Capítulo 2, os erros de medidas dos acelerômetros podem ser modelados levando-se em conta principalmente, entre outros, os seguintes fatores: fator de escala, polarização ou *bias*, sensibilidade à variação de temperatura e ruídos aleatórios. Se os erros de fator de escala e *bias* podem ser estimados então pode-se aplicar um compensador para cada acelerômetro da IMU. Considere a equação simplificada, sem os efeitos da temperatura, a seguir:

$$\tilde{A}_j = (1 + s_j) \cdot A_j + b_j + w_{a_j} \quad (3.92)$$

onde:

$\tilde{A}_j$  = saída do acelerômetro  $j$ , contaminada por erros;

$A_j$  = aceleração aplicada no acelerômetro  $j$ ;

$s_j$  = erro de fator de escala;

$b_j$  = *bias*;

$wa_j$  = ruído branco no acelerômetro  $j$ .

A saída compensada para cada acelerômetro, desprezando termos de ordem superior, pode ser dada por:

$$\hat{A}_j = (1 + s_j - \hat{s}_j) \cdot A_j + b_j - \hat{b}_j + wa_j \quad (3.93)$$

onde:

$\hat{A}_j$  = saída computada (compensada) do acelerômetro  $j$ ;

$\hat{s}_j$  = erro de fator de escala estimado *a priori*;

$\hat{b}_j$  = *bias* estimado *a priori*;

Como mostrado na Equação (3.92), os erros de fator de escala,  $s_j$ , e do *bias*,  $b_j$ , representam o foco principal na calibração do sensor, podendo os valores de  $\hat{s}_j$  e  $\hat{b}_j$  serem estimados em laboratório, como proposto por Park e Gao (2002).

A Equação (3.93) pode ser reescrita para:

$$\hat{A}_j = (1 + \delta s_j) A_j + \delta b_j + wa_j \quad (3.94)$$

onde:

$\delta s_j$  = resíduo não compensado do erro de fator de escala;

$\delta b_j$  = resíduo não compensado do erro de *bias*;

De acordo com Maybeck (1979), INS auxiliados por filtros de Kalman podem ter os erros de acelerômetros modelados por um único estado de *bias* com a adição de ruído branco. Então, a Equação (3.94) pode tomar a seguinte forma simplificada:

$$\hat{A}_j = A_j + \delta b_j + w_{a_j} \quad (3.95)$$

onde  $\delta b_j$  (*bias*) pode ser modelado por um processo tipo caminhada aleatória (*random walk*) e  $w_{a_j}$  é um ruído branco, indicando, respectivamente, os efeitos dos erros dos acelerômetros e uma incerteza adicional devida às simplificações assumidas pelos estados retirados no modelo adotado (Maybeck, 1979). O resíduo  $\delta b_j$  deve então ser estimado e compensado durante o processo de integração GPS-INS. No presente trabalho é assumido que os acelerômetros tenham sido testados *a priori* e o valor  $\hat{b}_j$  conhecido.

Com referência à IMU tipo cubo, conforme descrito no capítulo 2, pode-se afirmar que se,

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \delta \mathbf{b} + \mathbf{w}_a \quad (3.96)$$

então,

$$\delta \mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A} = \delta \mathbf{b} + \mathbf{w}_a \quad (3.97)$$

onde:

$\hat{\mathbf{A}} = \{\hat{A}_1 \quad \Lambda \quad \hat{A}_6\}$  representa a saída computada (compensada) dos acelerômetros;

$\mathbf{A} = \{A_1 \quad \Lambda \quad A_6\}$  representa a aceleração aplicada aos acelerômetros.

então, de acordo com as Equações (2. 28) e (2. 29):

$$\hat{\omega}_{iv}^y = g_1(\hat{\mathbf{A}})$$

e

$$\hat{\mathbf{f}}^v = g_2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\omega}_{iv}^v)$$

ou seja, as acelerações inerciais do veículo, medidas no mesmo, são dadas por:

$$\hat{\omega}_{iv}^y = \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot L} \cdot \mathbf{J}_1 \cdot \hat{\mathbf{A}} \quad (3.98)$$

onde:

$2L$  = aresta (lado) do cubo e,

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\delta \hat{\omega}_{iv}^y = \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot L} \cdot \mathbf{J}_1 \cdot \delta \mathbf{A} = \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot L} \cdot \mathbf{J}_1 \cdot (\delta \mathbf{b} + \mathbf{w}_a) \quad (3.99)$$

e  $\delta \hat{\omega}_{iv}^y = \mathbf{w}_b$ ,  $\mathbf{w}_b$  é modelado como ruído branco.

Analogamente,

$$\hat{\mathbf{f}}^v = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{J}_2 \cdot \hat{\mathbf{A}} + L \cdot \begin{bmatrix} \hat{\omega}_y \cdot \hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_x \cdot \hat{\omega}_z \\ \hat{\omega}_x \cdot \hat{\omega}_y \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

onde:



$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iv}^v = \{\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z\}.$$

então:

$$\delta \mathbf{f}^v = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \mathbf{J}_2 (\delta \mathbf{b} + \mathbf{w} \mathbf{a}) + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_{iv}^v \quad (3.101)$$

e

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}_z & \hat{\omega}_y \\ \hat{\omega}_z & 0 & \hat{\omega}_x \\ \hat{\omega}_y & \hat{\omega}_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta \mathbf{b} = \mathbf{w} \mathbf{b}.$$

### 3.7.1 Resumo das Equações

As Equações (3.64), (3.79), (3.89), (3.99) e (3.101) podem ser agrupadas na seguinte equação de estados do sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{w} \quad (3.102)$$

onde:

$$\mathbf{x} = \{\delta \mathbf{r}^n, \delta \mathbf{v}^n, \boldsymbol{\varepsilon}^n, \delta \boldsymbol{\omega}_{iv}^v, \delta \mathbf{b}\} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{rr} & \mathbf{F}_{rv} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{vr} & \mathbf{F}_{vv} & (\mathbf{f}^n \times) & \mathbf{C}_v^n \mathbf{L} \boldsymbol{\Omega} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \mathbf{C}_v^n \cdot \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{F}_{er} & \mathbf{F}_{ev} & -(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) & -\mathbf{C}_v^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{2\sqrt{2} \cdot L} \cdot \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \mathbf{C}_v^n \cdot \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_a \\ \mathbf{w}_b \end{bmatrix} \quad (3.106)$$



## **CAPÍTULO 4**

### **INTEGRAÇÃO INS-GPS**

#### **4.1 Descrição Básica do GPS**

O GPS, ou NAVSTAR GPS (NAVigation Satellite with Time And Ranging), é um sistema de radio navegação desenvolvido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América – Department of Defense (DoD), com o objetivo de ser seu principal sistema de navegação. O GPS é um sistema de abrangência global e sua concepção permite que um usuário, em qualquer local da superfície terrestre, ou próximo a ela, tenha à sua disposição no mínimo quatro satélites para serem rastreados, permitindo que se realize um posicionamento em tempo real. O princípio básico de navegação pelo GPS consiste na medida de distâncias entre o usuário (antena e receptor) e quatro satélites. Se as coordenadas dos satélites são conhecidas, num sistema de referência adequado, é possível calcular as coordenadas da antena do usuário no mesmo sistema de referência dos satélites (Monico, 2000).

#### **4.2 Tipos de Acoplamento**

A diferença entre as estratégias para a integração de dados entre GPS e INS num único sistema, reside no tipo de informação que é dividida entre as unidades individuais. Os tipos mais comuns de estratégia para acoplamento, encontradas na literatura, são chamados de fracamente acoplada e fortemente acoplada (Grewal et alli, 2001; Farrel e Barth, 1998).

##### **4.2.1 Fortemente Acoplada**

Na estratégia fortemente acoplada, ao contrário da fracamente acoplada, os filtros de Kalman individuais do receptor GPS e INS são combinados num único filtro integrado que aceita resíduos das pseudomedidas e medidas Doppler do GPS. O estado de erros

inclui os erros do INS (posição, velocidade, atitude e erros dos acelerômetros) bem como novos estados representando erros do relógio do receptor GPS.

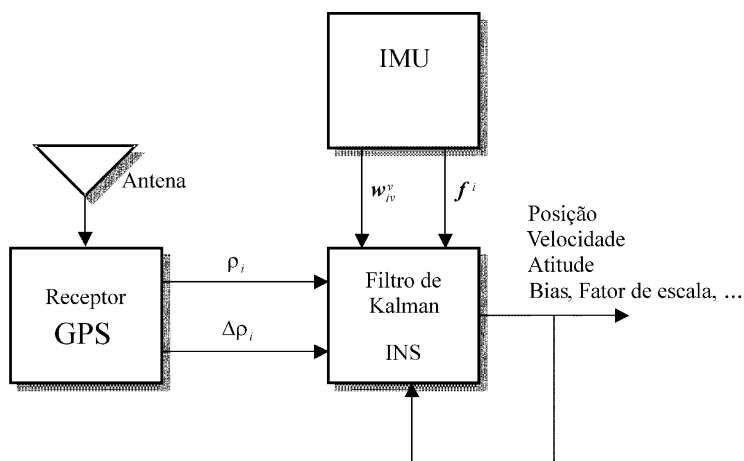


FIGURA 4.1: Sistema fortemente acoplado.

#### 4.2.2 Fracamente Acoplada

Num sistema fracamente acoplado, o GPS possui seu próprio filtro de Kalman para processar as medidas que são utilizadas para calcular posições e velocidades, que são então combinadas com as posições obtidas pelo INS para formar um vetor de resíduos. Os resíduos obtidos são filtrados por um outro filtro de Kalman, que corrige o INS e IMU de um modo realimentado, de forma que os erros de navegação causados por bias e fator de escala dos acelerômetros são diminuídos.

A estratégia fracamente acoplada será aqui adotada, pois espera que se possa utilizar, na hipótese de implementação, hardware e software facilmente disponíveis e que possam ser montados num sistema sem maiores demandas de integração.

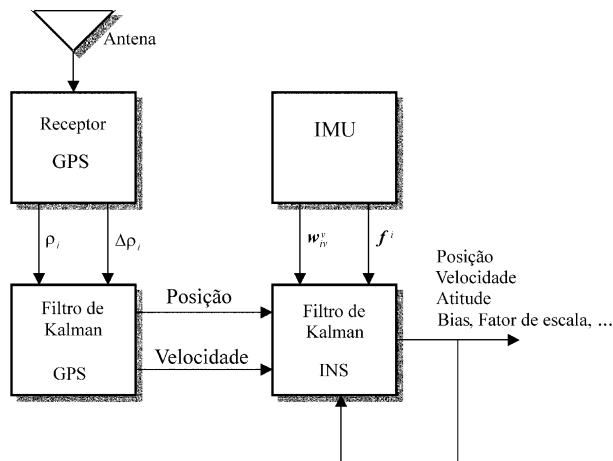


FIGURA 4.2: Sistema fracamente acoplado.

### 4.3 Filtro de Kalman

A dinâmica de um sistema linear pode ser representada pelas seguintes equações (Brown e Hwang, 1997):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{w} \quad (4.1)$$

onde:

$\mathbf{x}$  = vetor de estado do sistema ( $n \times 1$ )

$\mathbf{F}$  = matriz dinâmica do sistema ( $n \times n$ )

$\mathbf{w}$  = vetor de ruídos ( $n \times m$ ) do sistema. É modelado por processo branco.

$\mathbf{G}$  = matriz ( $n \times m$ ) de adição de ruídos

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (4.2)$$

onde:

$\mathbf{z}$  = vetor de observações ( $m \times 1$ )

$\mathbf{H}$  = matriz ( $m \times n$ ) que relaciona as observações dos estados

$\mathbf{v}$  = vetor ( $m \times 1$ ) de ruídos brancos das medidas

A forma discreta das Equações (4.1) e (4.2) é dada por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1,k} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.3)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (4.4)$$

onde:

$k$  = denota o instante  $t_k$

$\boldsymbol{\Phi}$  = matriz ( $n \times n$ ) de transição de estados

$\mathbf{x}_k$  = vetor de estados no instante  $t_k$

$\mathbf{z}_k$  = vetor de observações no instante  $t_k$

$\mathbf{w}_k$  = vetor de ruídos do sistema no instante  $t_k$

Os vetores  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{z}_k$  possuem características de ruído branco com as seguintes propriedades:

$$E[\mathbf{w}_k] = 0$$

$$E[\mathbf{v}_k] = 0$$

$$E[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q} \cdot \delta_{ij}$$

$$E[\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R} \cdot \delta_{ij}$$

$$E[\mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T] = 0$$

$E(\cdot)$  = denota o operador esperança

$\delta_{ij}$  = denota o delta de Kronecker

$\mathbf{R}$  = matriz ( $m \times m$ ) de covariância dos erros de observação

$\mathbf{Q}$  = matriz (p x p) de covariância do ruído dinâmico

O sistema de Equações de estado para o INS proposto é dado pelas Equações (3.102) até (3.106). A posição e velocidade dados pelo GPS são considerados como medidas, então a Equação (4.2) toma a seguinte forma:

$$\mathbf{z}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{INS}^n & - & \mathbf{r}_{GPS}^n \\ \text{---} & & \text{---} \\ \mathbf{v}_{INS}^n & - & \mathbf{v}_{GPS}^n \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 12)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{I}_{(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 12)} \end{bmatrix}_{(6 \times 18)} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{R}_k = \text{diag}(\sigma_\phi^2 \quad \sigma_\lambda^2 \quad \sigma_h^2 \quad \sigma_{v_N}^2 \quad \sigma_{v_E}^2 \quad \sigma_{v_D}^2) \quad (4.7)$$

onde as grandezas  $\mathbf{r}_{INS}^n$  e  $\mathbf{v}_{INS}^n$  na Equação (4.5) foram definidas pelas Equações (3.52) e (3.53) respectivamente; e os valores  $\mathbf{r}_{GPS}^n$  e  $\mathbf{v}_{GPS}^n$  serão adotados como sendo  $\mathbf{r}_{GPS}^n = \mathbf{r}_{nom}^n \pm \sigma \mathbf{r}_{GPS}^n$  e  $\mathbf{v}_{GPS}^n = \mathbf{v}_{nom}^n \pm \sigma \mathbf{v}_{GPS}^n$ . Os valores de  $\mathbf{R}_k$  podem ser obtidos a partir do processamento dos sinais do receptor do GPS.

O filtro de Kalman é um algoritmo computacional que processa medidas (entradas) estimando estados (saídas) com erros de mínima variância e consiste de duas etapas (Brown e Hwang, 1997):

#### 4.3.1 Propagação ou Predição (*Time Update*)

A etapa de propagação, propaga o estado e a covariância do instante  $t_{k-1}$  para o instante  $t_k$ :

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (4.8)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k-1} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_k \quad (4.9)$$



onde  $\bar{\mathbf{x}}_k$  e  $\bar{\mathbf{P}}_k$  denotam, respectivamente, o estado e a covariância propagados para o instante  $t_k$ .

Se a matriz  $\mathbf{F}$  é constante no intervalo de interesse  $(t_{k-1}, t_k)$ , então a matriz  $\boldsymbol{\phi}_k$  de transição de estados pode ser aproximada numericamente por (Brown e Hwang, 1997):

$$\boldsymbol{\phi}_k = e^{\mathbf{F} \cdot \Delta t} \cong \mathbf{I} + \mathbf{F} \cdot \Delta t + \frac{(\mathbf{F} \cdot \Delta t)^2}{2!} + \Lambda \quad (4.10)$$

Para intervalos de tempo  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  pequenos, a matriz  $\mathbf{Q}_k$  pode ser aproximada para (Gelb, 1974):

$$\mathbf{Q}_k \cong \mathbf{G} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \Delta t \quad (4.11)$$

#### 4.3.2 Atualização ou Correção (*Measurement Update*)

A etapa de atualização corrige o estado e a covariância para o instante  $t_k$  devido à medida  $z_k$ :

$$\mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{P}}_k \cdot \mathbf{H}_k^T \cdot (\mathbf{H}_k \cdot \bar{\mathbf{P}}_k \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (4.12)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \cdot \mathbf{H}_k) \cdot \bar{\mathbf{P}}_k \quad (4.13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k \cdot (z_k - \mathbf{H}_k \cdot \bar{\mathbf{x}}_k) \quad (4.14)$$

onde  $\mathbf{K}_k$  denota o ganho de Kalman,  $\hat{\mathbf{x}}_k$  e  $\hat{\mathbf{P}}_k$  denotam, respectivamente, o estado e a covariância atualizados para instante  $t_k$ . Observar que  $z_k$ , o vetor de medidas dado pela Equação (4.5), depende de informações do GPS. Portanto a taxa da etapa de atualização é a mesma de coleta de dados do GPS.

A operação de inversão de matriz, exigida na Equação (4.12), pode ser substituída por um processamento seriado de um componente vetorial por vez, se a matriz  $\mathbf{R}$  for diagonal (ou seja, com ruídos não correlacionados), melhorando a robustez da operação. O procedimento abaixo ilustra a operação (Grewal et alii, 2000):

```

x =  $\bar{\mathbf{x}}_k$ 
P =  $\bar{\mathbf{P}}_k$ 
for j = 1 : m,
    z =  $\mathbf{z}_k(j)$ 
    H =  $\mathbf{H}_k(j,:)$ 
    R =  $\mathbf{R}_k(j,j)$ 
    K =  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{H}' / (\mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}' + \mathbf{R})$ 
    x =  $\mathbf{K} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x})$ 
    P =  $\mathbf{P} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}$ 
end
 $\hat{\mathbf{x}}$  = x
 $\hat{\mathbf{P}}$  =  $(\mathbf{P} + \mathbf{P}') / 2$ 

```

onde  $\mathbf{P}'$  denota a transposta de  $\mathbf{P}$ .

Métodos adaptativos podem ser aplicados para a sintonia da matriz  $\mathbf{Q}_k$ , com o objetivo de se evitar divergências nas estimativas (Rios Neto e Kuga, 1982).



## CAPÍTULO 5

### PROCEDIMENTOS DE SIMULAÇÃO

#### 5.1 Geração da Trajetória e da Atitude

Numa plataforma tipo *strapdown* convencional as medidas detectadas pelos acelerômetros e giroscópios são, respectivamente,  $\mathbf{f}^v$  e  $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$ , onde  $\mathbf{f}^v$  é o vetor força específica do sistema do veículo em relação ao sistema inercial e  $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$  é o vetor velocidade angular do sistema do veículo em relação ao sistema inercial, ambos expressos no sistema do veículo.

Numa plataforma tipo *strapdown* com uma IMU puramente acelerométrica as medidas detectadas são  $\mathbf{f}^v$  e  $\boldsymbol{\alpha}_{iv}^v$ , onde  $\boldsymbol{\alpha}_{iv}^v = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{iv}^v$  é o vetor aceleração angular do sistema do veículo em relação ao sistema inercial, expresso no sistema do veículo.

##### 5.1.1 Simulação da Trajetória (Força Específica)

A geração da trajetória, a ser detectada pela IMU, é obtida pela simulação de  $\mathbf{f}^v$ , de acordo com as Equações (3.46), assumindo que a IMU está localizada no C.G. do veículo, ou seja:

$$\mathbf{f}^n = \boldsymbol{\mathcal{W}} + (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \cdot \mathbf{v}^n - \mathbf{g}^n$$

onde:

$$\mathbf{f}^v = \mathbf{C}_n^v \cdot \mathbf{f}^n$$

$\boldsymbol{\mathcal{W}}^n$  = aceleração que define a trajetória, no sistema de navegação.

$\mathbf{g}^n = \{G_N, G_E, G_D\}$  = vetor de gravidade, dado pela Equação (3.51).

$\boldsymbol{\Omega}_{en}^n$  = é a forma anti-simétrica de  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$  dada pela Equação (3.11).

$\Omega_{ie}^n$  = é a forma anti-simétrica de  $\omega_{ie}^n$  dada pela Equação (3.9).

Assumindo, por questão de simplicidade, a hipótese de que atitude e trajetória do veículo estão desacopladas, é proposto o seguinte conjunto de curvas com relação ao C.G. do veículo, e geradas a partir de polinômios, e que serão utilizadas para testar o sistema GPS-INS:

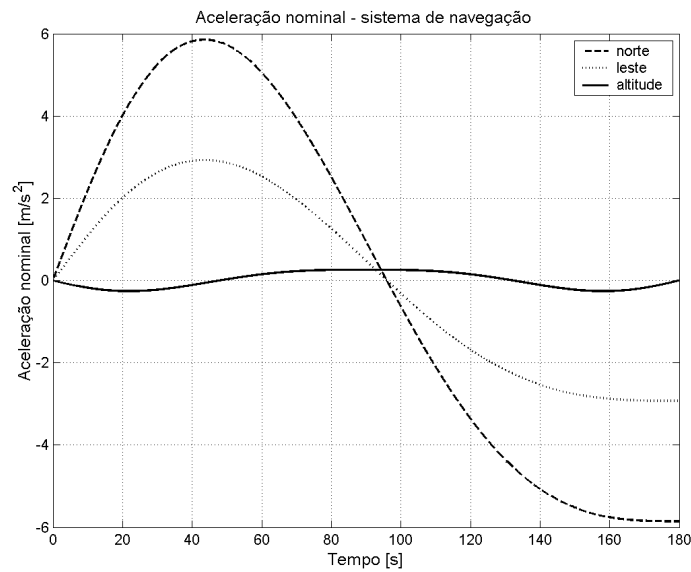


FIGURA 5.1: Aceleração nominal descrita no sistema de navegação (LTP).

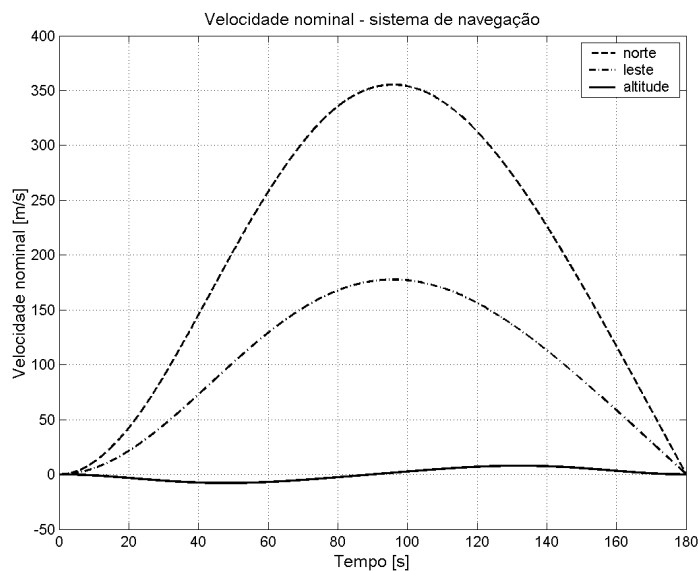


FIGURA 5.2: Velocidade nominal descrita no sistema de navegação (LTP).

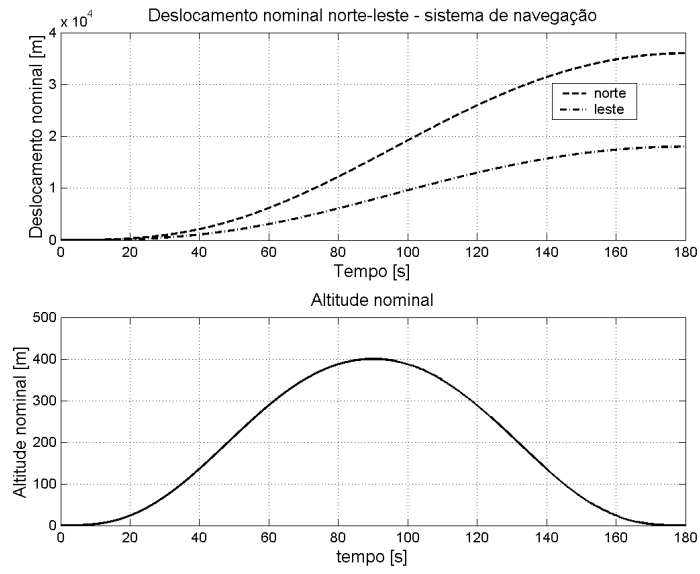


FIGURA 5.3: Deslocamento nominal descrito no sistema de navegação (LTP).

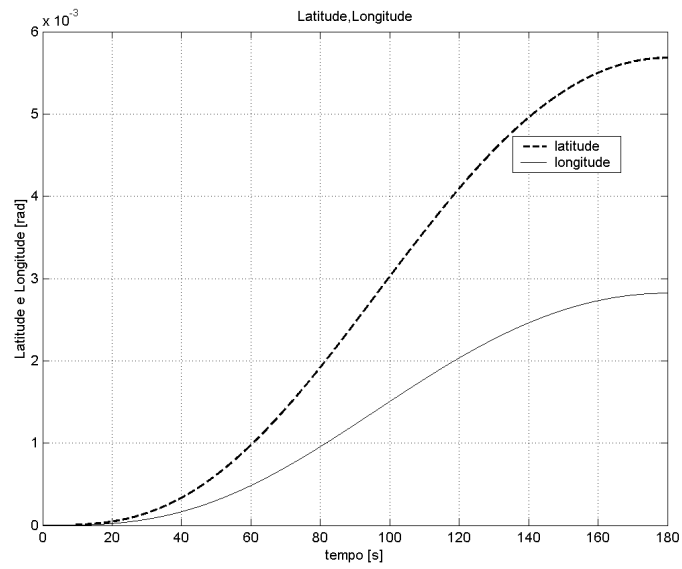


FIGURA 5.4: Deslocamento em latitude e longitude.

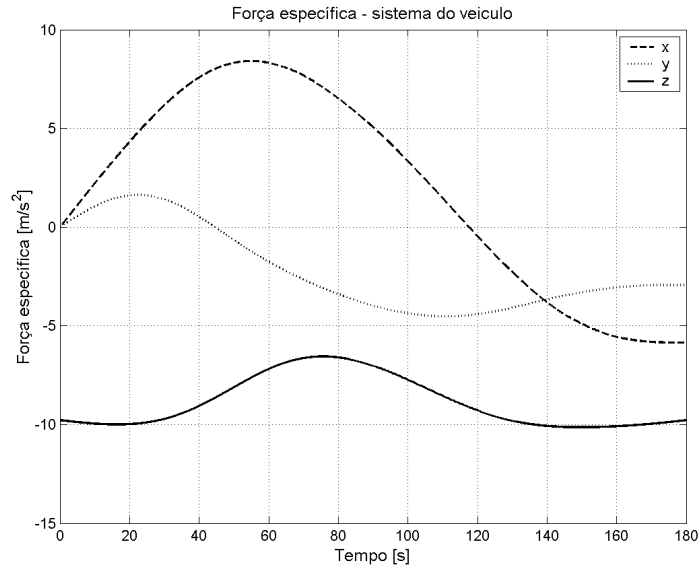


FIGURA 5.5: Força específica no sistema do veículo.

### 5.1.2 Simulação da Atitude (Aceleração Angular)

A simulação da atitude nominal, a ser detectada pela IMU, é obtida pela simulação de  $\alpha_{IV}^V$ , obtida a partir da Equação (3.56):

$$\omega_{iv}^V = \omega_{in}^V + \omega_{nv}^V = \omega_{nv}^V + C_n^V \cdot \omega_{in}^n \quad (5.1)$$

$$\omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n \quad (5.2)$$

onde,

$$\omega_{nv}^V = \begin{Bmatrix} \phi \\ c\phi + \psi \cdot s\phi \cdot c\theta \\ \psi \cdot c\phi \cdot c\theta - \phi \cdot s\phi \end{Bmatrix}, \text{ e } \{\phi, \theta, \psi\} \text{ são os ângulos de Euler.}$$

$$\omega_{ie}^n = \begin{Bmatrix} \omega_e \cdot \cos \Phi \\ 0 \\ -\omega_e \cdot \sin \Phi \end{Bmatrix}, \text{ } \omega_e \text{ é a rotação da Terra e } \Phi \text{ é a latitude.}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{Bmatrix} \omega_N \\ \omega_E \\ \omega_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_E / (R_N + h) \\ -v_N / (R_M + h) \\ -v_E \cdot \tan \Phi / (R_N + h) \end{Bmatrix}.$$

Logo,

$$\boldsymbol{\alpha}_{iv}^v = \boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \boldsymbol{\omega}_{nv}^v + \mathbf{C}_n^v \cdot \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\mathcal{E}}_n^v \cdot \boldsymbol{\omega}_{in}^n \quad (5.3)$$

mas  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_n^v = \mathbf{C}_n^v \cdot \boldsymbol{\Omega}_{vn}^n$ , então,

$$\boldsymbol{\alpha}_{iv}^v = \boldsymbol{\omega}_{nv}^v + \mathbf{C}_n^v \cdot [\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\Omega}_{vn}^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{in}^n] \quad (5.4)$$

onde, de acordo com Britting (1971):

$$\boldsymbol{\Omega}_{vn}^n = -\mathbf{C}_v^n \cdot \boldsymbol{\Omega}_{vn}^v \cdot \mathbf{C}_n^v,$$

$\boldsymbol{\Omega}_{vn}^v = -\boldsymbol{\Omega}_{nv}^v$ , e  $\boldsymbol{\Omega}_{nv}^v$  a forma anti-simétrica de  $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$ . Finalmente:

$$\boldsymbol{\alpha}_{iv}^v = \boldsymbol{\omega}_{nv}^v - \boldsymbol{\Omega}_{nv}^v \cdot \mathbf{C}_n^v \cdot \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \mathbf{C}_n^v \cdot \boldsymbol{\omega}_{in}^n \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \cos \theta - \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\omega} \cos \theta \\ \dot{\phi} \sin \theta + \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\omega} \sin \theta - \dot{\omega} \phi \cdot \sin \theta \\ \dot{\psi} \sin \theta - \dot{\omega} \phi \cdot \cos \theta - \dot{\omega} \psi \cdot \sin \theta - \dot{\omega} \phi \cdot \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

e  $\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix}$  representa as acelerações angulares nominais que definirão a atitude do veículo.

$$\boldsymbol{\omega}_{ic}^n = \begin{Bmatrix} -\omega_e \cdot \Phi \cdot \sin \Phi \\ 0 \\ -\omega_e \cdot \Phi \cdot \cos \Phi \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

e  $\Phi$  é obtida pela Equação (3.15) onde  $\Phi = v_N / (R_M + h)$ .



Considerando a mesma relação genérica  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  utilizada na obtenção de  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ , conforme Equação (3.11), pode-se afirmar que a aceleração no mesmo ponto é dada por (Greenwood, 1962):

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \quad (5.8)$$

Então, cada componente de  $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{en}^n = \{\alpha_N, \alpha_E, \alpha_D\}$  pode ter seu módulo descrito por uma relação conforme a Equação (5.9)

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{r}\right)^2 - \omega^4} \quad (5.9)$$

Assim, a partir de  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ , as componentes de aceleração são:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{en}^n = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\left(\frac{A_E}{(R_N + h)}\right)^2 - \omega_N^4} \\ -\sqrt{\left(\frac{A_N}{(R_M + h)}\right)^2 - \omega_E^4} \\ -v_E \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot (1 + \tan^2 \Phi) / (R_N + h) - \tan \Phi \cdot \sqrt{\left(\frac{A_E}{(R_N + h)}\right)^2 - \omega_N^4} \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

A simulação de atitude, entre o sistema de navegação e o sistema do veículo também foi gerada a partir de polinômios com os seguintes resultados:

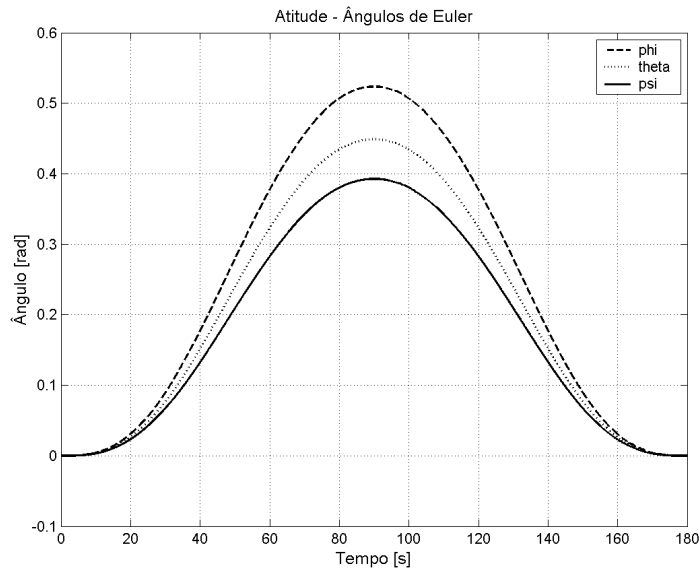


FIGURA 5.6: Atitude do veículo (ângulos de Euler).

A Figura 5.6 mostra a atitude resultante expressa pelos ângulos de Euler, a Figura 5.7 mostra a aceleração angular  $\alpha_{iv}^v$ , que excitará a IMU juntamente com  $f^v$ , e a Figura 5.8  $\omega_{iv}^v$  (ideal) que seria medida pela IMU caso os acelerômetros não apresentassem erros.

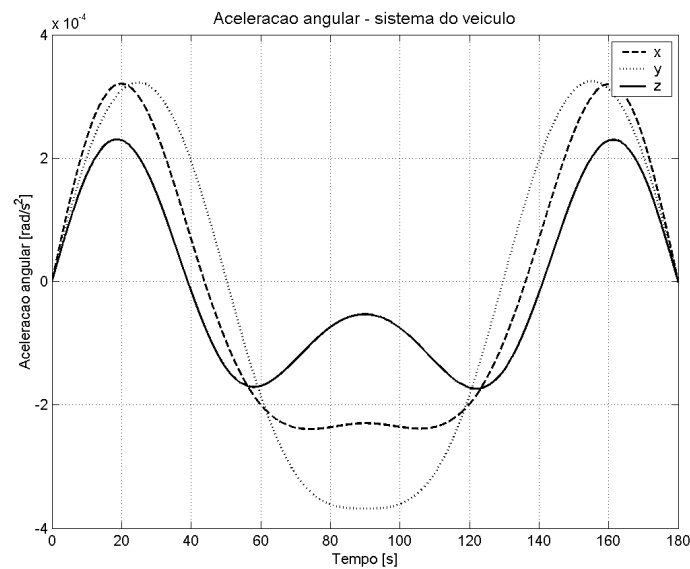


FIGURA 5.7: Aceleração angular expressa no sistema do veículo.

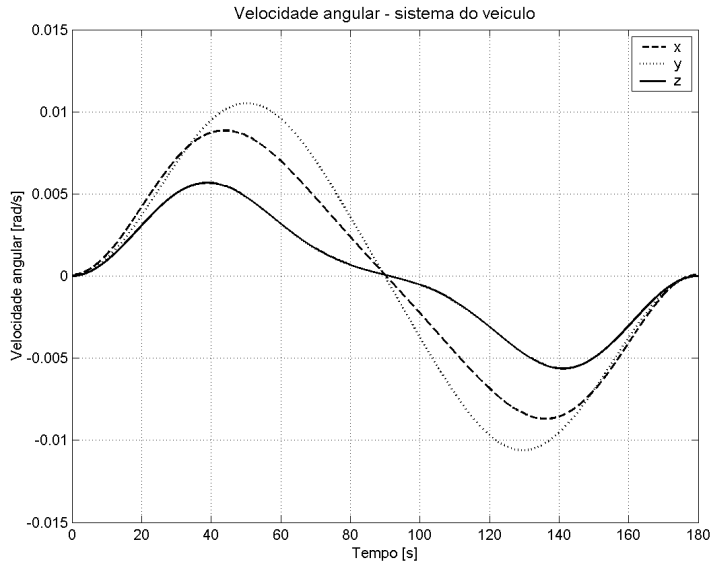


FIGURA 5.8: Velocidade angular expressa no sistema do veículo.

## 5.2 Simulação da IMU

A simulação da IMU consiste na excitação dos acelerômetros através dos valores de  $\mathbf{f}^v$  e  $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$  verdadeiros com relação ao C.G. do veículo, obtidas da seção anterior, e da contaminação das respectivas saídas com erros característicos.

A IMU tipo cubo de aresta  $2L$ , discutida no Capítulo 2, é modelada pelas seguintes equações:

$$\boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{f}^v = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} + L \cdot \begin{cases} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \end{cases} \quad (5.12)$$

onde,

$$\mathbf{A} = \{A_1 \quad \Lambda \quad A_6\},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \{p, q, r\},$$

$$\mathbf{f}^v = \{f_1, f_2, f_3\}.$$

As duas equações podem ser reagrupadas na seguinte forma:

$$\mathbf{k}_j = \left\{ \begin{array}{c} 2\sqrt{2} \cdot L \cdot \boldsymbol{\omega}_{iv}^v \\ \hline 2\sqrt{2} \cdot \left\{ \mathbf{f}^v - L \cdot \begin{array}{l} q \cdot r \\ r \cdot p \\ p \cdot q \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad j = 1, \Lambda, 6 \quad (5.13)$$

$$\text{onde } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então a saída de cada acelerômetro é dada por:

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{k}_j \quad (5.14)$$

com os seguintes resultados:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2} \cdot (k_1 - k_2 + k_4 + k_5),$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{4} \cdot (-k_1 + k_3 + k_4 + k_6),$$

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{4} \cdot (k_1 - k_3 + k_4 + 2k_5 + k_6),$$

$$A_4 = \frac{1}{4} \cdot (-k_1 - k_3 - k_4 - 2k_5 + k_6),$$

$$A_5 = \frac{1}{4} \cdot (k_1 + k_3 - k_4 + k_6),$$

$$A_6 = \frac{1}{2} \cdot (-k_2 + k_5),$$

e  $k_j$  é dado pela Equação (5.13).

A Figura (5.9) mostra as saídas  $A_j$ 's dos acelerômetros sendo combinadas através das Equações (5.11) e (5.12) e a integração adicional que esta IMU necessita, por não possuir giroscópios, na obtenção de  $\omega_{iv}^v$ .

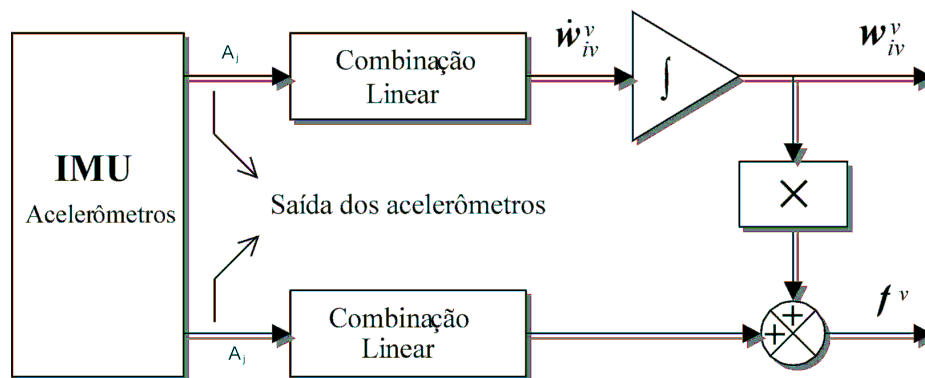


FIGURA 5.9: Saída dos acelerômetros na IMU não giroscópica.

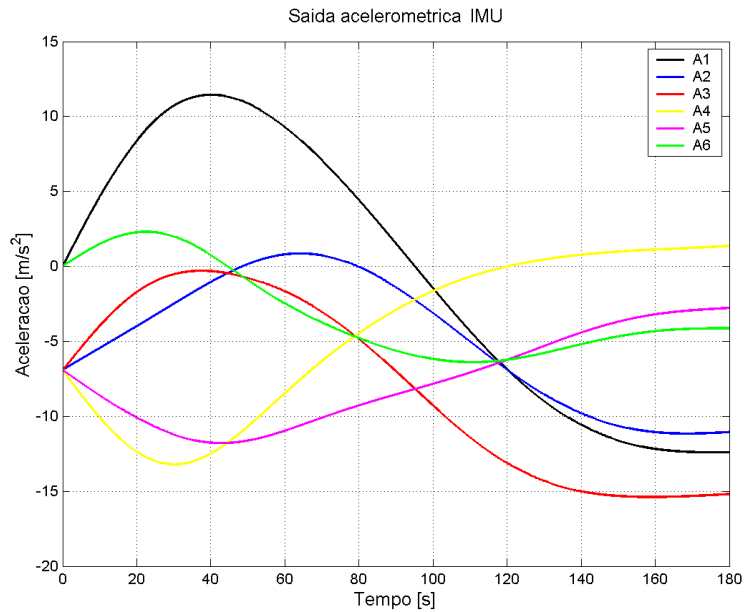


FIGURA 5.10: Saída ideal dos acelerômetros (sem adição de erros).

As saídas dos acelerômetros, como citado no Capítulo 3, podem ser submetidas à uma fase de calibração, com a compensação (parcial) dos seus erros principais: fator de escala e *bias*. Será adotado o procedimento proposto por Trabasso (1986), onde supõe-se que a calibração resulte numa redução de 90% dos erros de medidas dos acelerômetros e considera-se aleatório o valor residual  $\delta r_j$  de 10%, a ser estimado e compensado durante o procedimento de integração INS-GPS. Assim, a saída compensada, porém contaminada por erros residuais,  $\hat{A}_j$  de cada acelerômetro terá a seguinte forma:

$$\hat{A}_j = A_j + \delta r_j \quad (5.15)$$

$$\delta r_j = \delta s r_j \cdot A_j + \delta b r_j + w a r_j \quad (5.16)$$

onde  $\delta s r_j$ ,  $\delta b r_j$ ,  $w a r_j$  são os valores residuais dos coeficientes dos erros de fator de escala, *bias*, e ruído, respectivamente, do acelerômetro  $j$ , modelados com as seguintes estatísticas (Trabasso, 1986):

$$E[\delta C r] = 0$$

$$\text{Var}[\delta Cr] = (0,1 \cdot C)^2$$

sendo  $C$  o coeficiente dos erros, fornecido pelo fabricante ou estimado experimentalmente, e  $\delta Cr$  seu valor residual aleatório. A Figura 5.11 mostra o esquema de simulação da IMU:

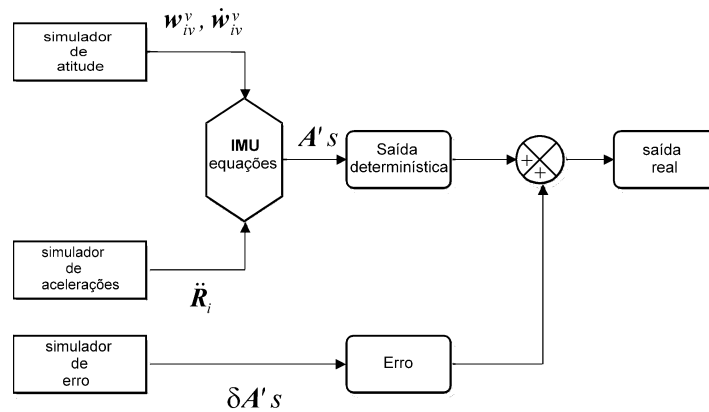


FIGURA 5.11: Esquema de simulação da IMU.

### 5.3 Simulação da Plataforma *Strapdown*

A solução de navegação, num sistema tipo *strapdown*, é dada pelo seguinte conjunto de equações diferenciais (Titterton e Weston, 1997):

$$\dot{\mathcal{E}}^n = \mathbf{v}^n \quad (5.17)$$

$$\dot{\mathcal{W}}^n = \mathbf{C}_v^n \cdot \mathbf{f}^v - (2\mathbf{\Omega}_{ie}^n + \mathbf{\Omega}_{en}^n) \cdot \mathbf{v}^n + \mathbf{g}^n \quad (5.18)$$

$$\dot{\mathcal{C}}_v^n = \mathbf{C}_v^n \cdot \mathbf{\Omega}_{nv}^v \quad (5.19)$$

onde  $\mathbf{\Omega}_{nv}^v$  é a forma anti-simétrica de  $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$ .

Os algoritmos de um INS são as definições matemáticas dos processos que convertem as medidas dos sensores inerciais, fixos no corpo do veículo, para quantidades que são utilizadas na solução de navegação. Os processos básicos do sistema podem ser descritos pelas seguintes etapas (VanBronkhorst, 1978):

- Início e auto-teste;

- Inicialização e alinhamento;
- Fase de atualização de atitude;
- Fase de navegação;
- Utilização da solução: guiagem e controle.

Neste trabalho é assumida a hipótese de que o sistema está alinhado e que as condições iniciais da trajetória simulada são conhecidas, portanto somente as fases de cálculo de atitude e navegação serão simuladas correspondendo, respectivamente, ao cálculo de atualização de  $C_v^n$  e de  $\mathbf{r}^n$ .

#### 5.4 Simulação do Sistema Integrado IMU-INS-GPS

Como descrito no Capítulo 4 a estratégia adotada para a integração das unidades individuais IMU, INS e GPS é a chamada fracamente acoplada. Aqui o filtro de Kalman estima o vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}_k = \{\delta\mathbf{r}^n \quad \delta\mathbf{v}^n \quad \boldsymbol{\varepsilon}^n \quad \delta\boldsymbol{\omega}_{iv}^v \quad \delta\mathbf{b}\}$  que é realimentado nas unidades da IMU e INS. Após cada etapa de atualização, depois que as equações do INS e a IMU tiverem sido corrigidas com as estimativas obtidas para posição, velocidade, atitude e bias dos acelerômetros, o vetor de estado torna-se igual à zero (Titterton e Weston, 1997). A Figura 5.12 resume o esquema descrito anteriormente, onde a IMU-INS é simulada numa taxa de 100 Hz e corrigida em 1 Hz, juntamente com a atualização provida pelo GPS.



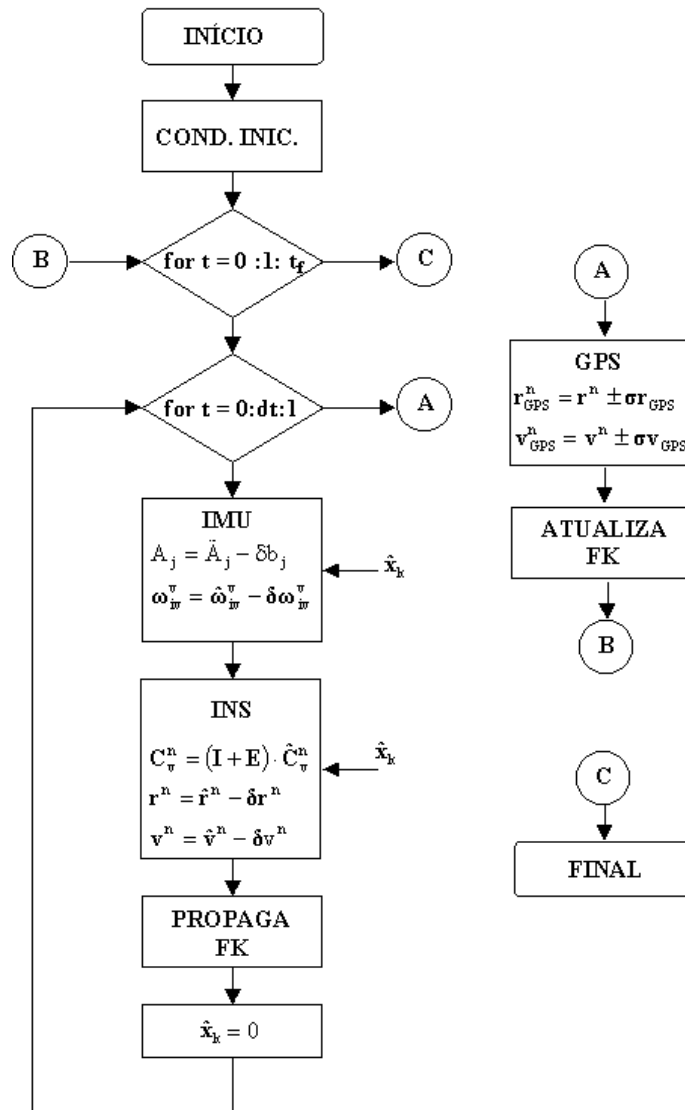


FIGURA 5.12: Esquema de simulação do sistema integrado IMU-INS-GPS.

### 5.5 Valores para Simulação

Para efeito de análise o sistema IMU-INS-GPS será simulado com diferentes classes de acelerômetros. A Tabela 5.1 resume características de três classes de sistemas inerciais (Yazdi et alii, 1998; Greenspan, 1995; Schwarz e El-Sheimy, 1999 e Gebre, Powel e Enge, 2001): classe de navegação, de alto desempenho para utilização em sistemas de navegação inercial; classe tática, de desempenho médio para utilização em sistemas de armas com curta duração de trajetória; e uma classe de baixo custo e desempenho, aqui chamada de automotiva com acelerômetros de tecnologia MEMs (www.xbow.com,

www.analog.com, Park e Gao, 2002) . Outra possibilidade de classificação pode ser dada pelo custo/desempenho dos sistemas inerciais (Crammer, 1997): alto desempenho (>US\$750.000), médio desempenho (~US\$ 100.000) e baixo desempenho (> US\$ 10.000).

TABELA 5.1: Classificação das IMU.

CLASSIFICAÇÃO		Navegação	Tática	Automotiva <sup>1</sup>
ERRO DE POSIÇÃO		1,9km em 1h	29km em 1h	2km em 1min
GIROSCÓPIO	Bias (grau/h)	0,003	1	
	fator esc. (ppm)	1	150	
	ruído(grau/Hz <sup>1/2</sup> )	0,002	0,2	
ACELERÔMETRO	Bias (µg)	250	1000	20.10 <sup>3</sup>
	fator esc. (ppm)	50	300	2000
	ruído (µg/ Hz <sup>1/2</sup> )	5	200	325

## 5.6 Resultados Obtidos

Os resultados, relativos à navegação (latitude e longitude em graus, altitude em m) são apresentados a seguir, por classe de IMU. As curvas de erro (valor nominal – valor filtrado) estão traçadas junto com os desvio-padrão (diagonal da matriz de covariância dos erros no estado) dos erros estimados pelo filtro, por  $\pm\sqrt{\hat{P}(j,j)}$ ,  $j = 1, 2$  e  $3$  correspondendo aos valores relativos à navegação. As curvas de resíduo ( $y_k - H_k \cdot \bar{x}_k$ ), fornecido pela etapa de atualização do filtro de Kalman (Equação 4.14), são traçadas em conjunto com  $\pm\sigma_{GPS}$ , o respectivo desvio padrão das medidas fornecidas pelo GPS. Foram adotados os seguintes valores:  $\pm 30$  m para altitude,  $\pm 5 \cdot 10^{-6}$  rad para latitude e

longitude. Por fim, a curva de altitude compara o resultado filtrado com o nominal e as medidas do GPS.

### 5.6.1 IMU Classe Automotiva

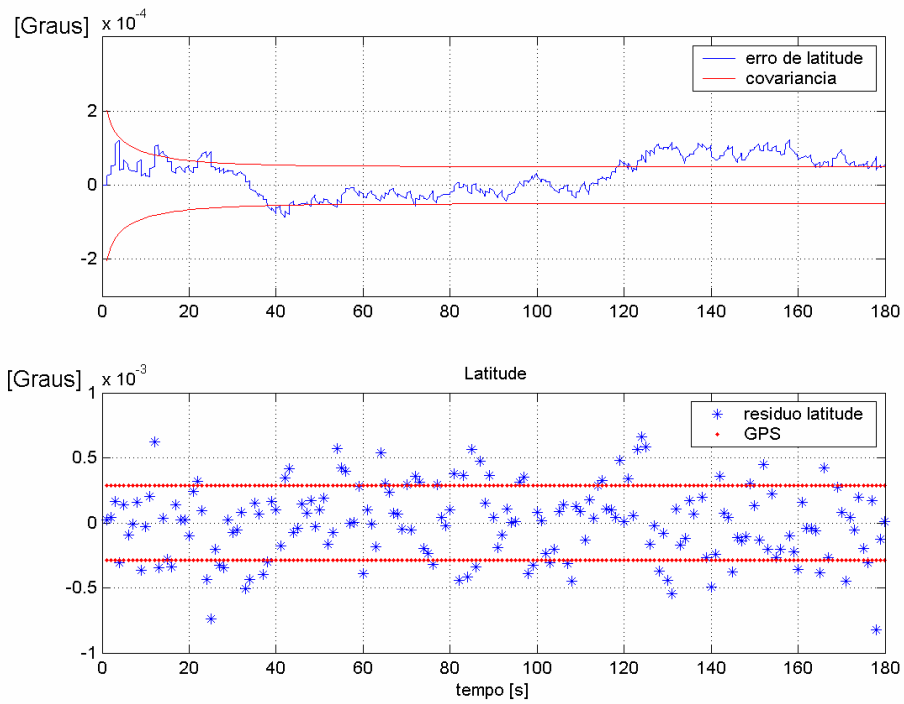


FIGURA 5.13: Curvas de desempenho para latitude (IMU automotiva).

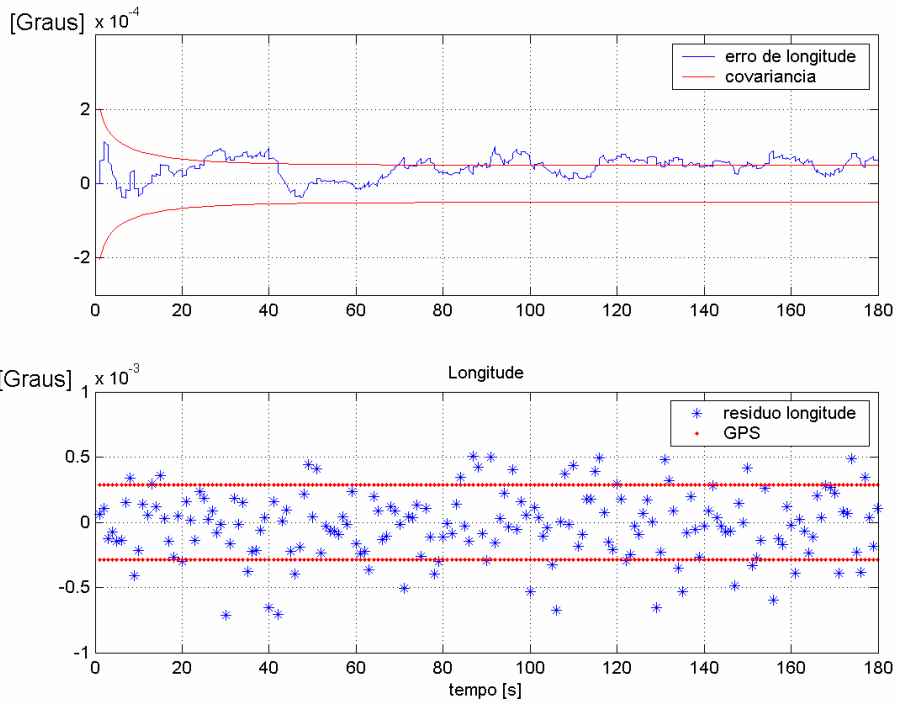


FIGURA 5.14: Curvas de desempenho para longitude (IMU automotiva).

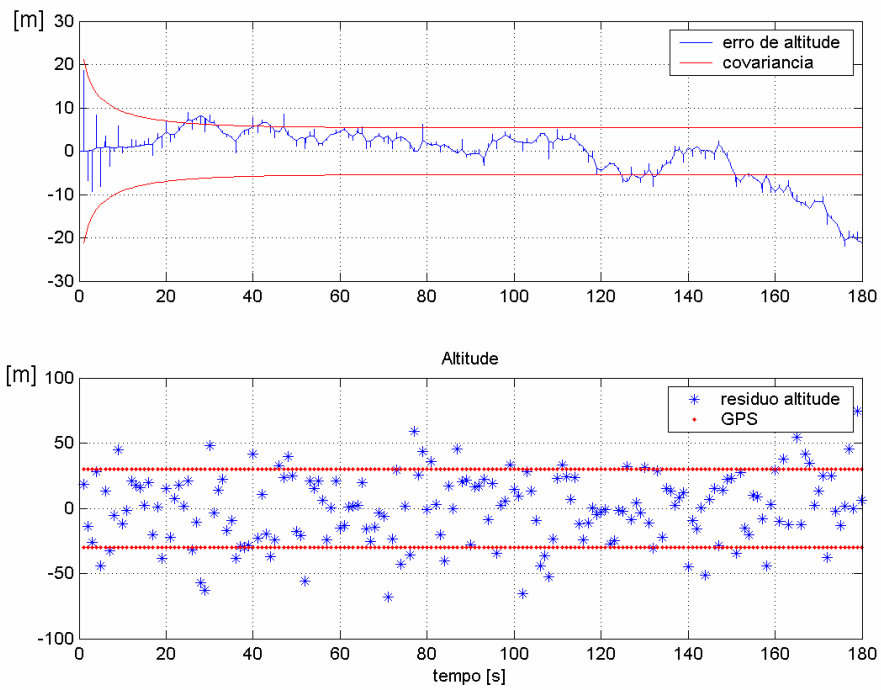


FIGURA 5.15: Curvas de desempenho para altitude (IMU automotiva).

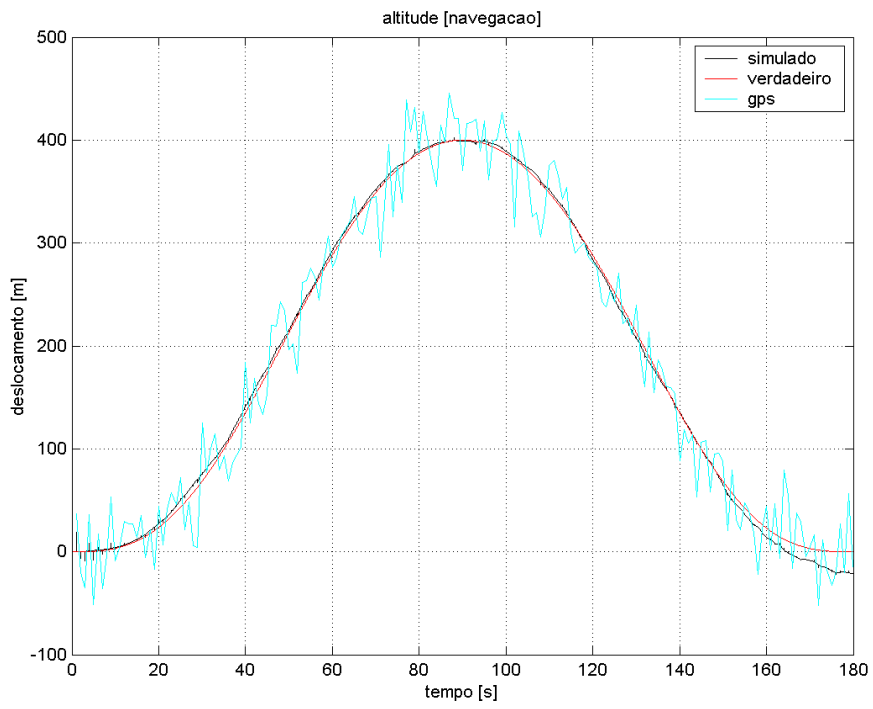


FIGURA 5.16: Curvas de altitude: simulada, nominal e GPS (IMU automotiva).

### 5.6.2 IMU Classe Tática

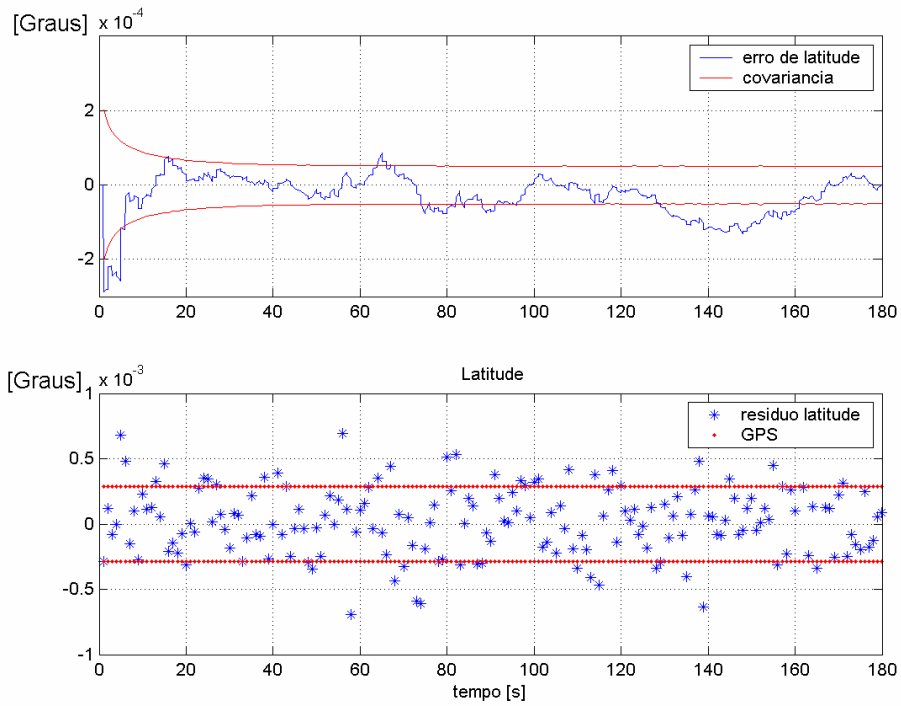


FIGURA 5.17: Curvas de desempenho para latitude (IMU tática).

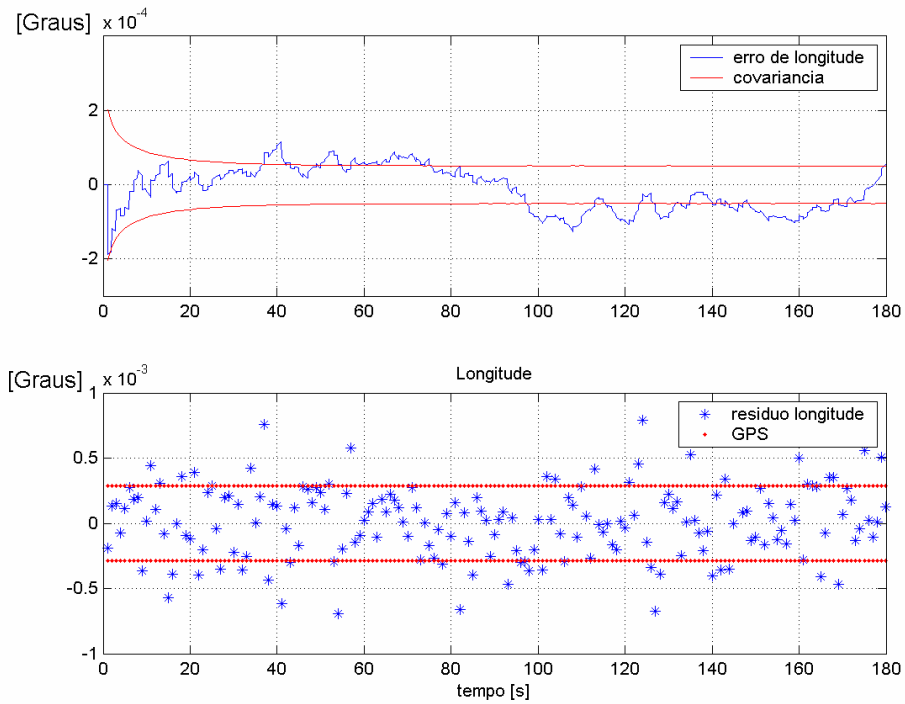


FIGURA 5.18: Curvas de desempenho para longitude (IMU tática).

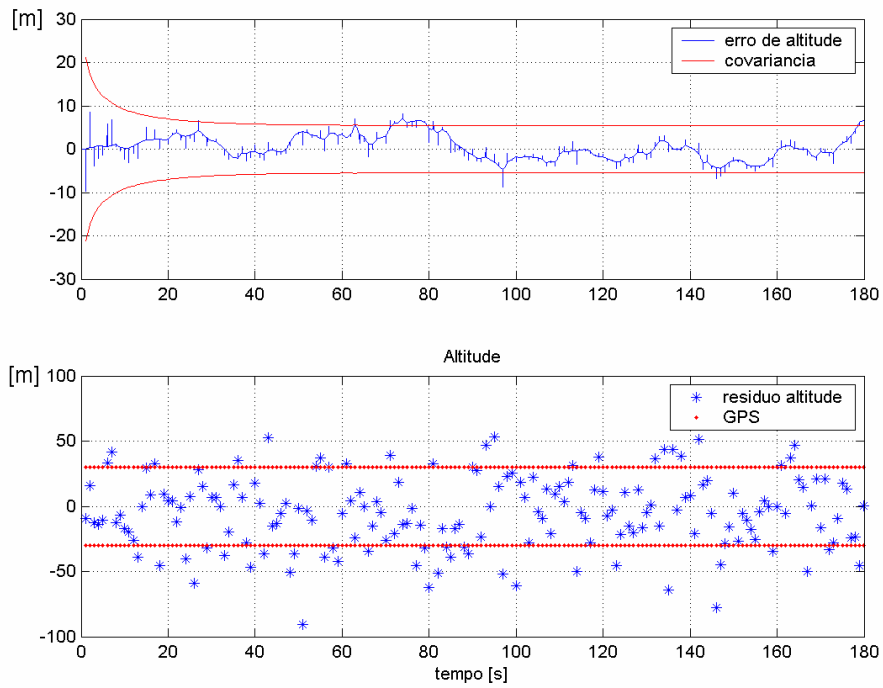


FIGURA 5.19: Curvas de desempenho para longitude (IMU táctica).

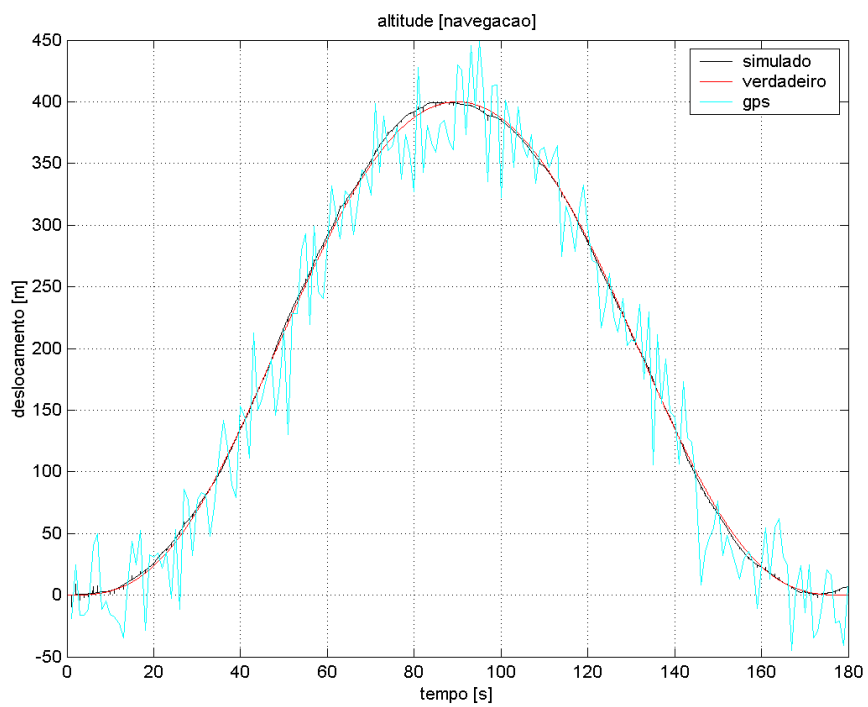


FIGURA 5.20: Curvas de altitude: simulada, nominal e GPS (IMU táctica).

### 5.6.3 IMU Classe Navegação

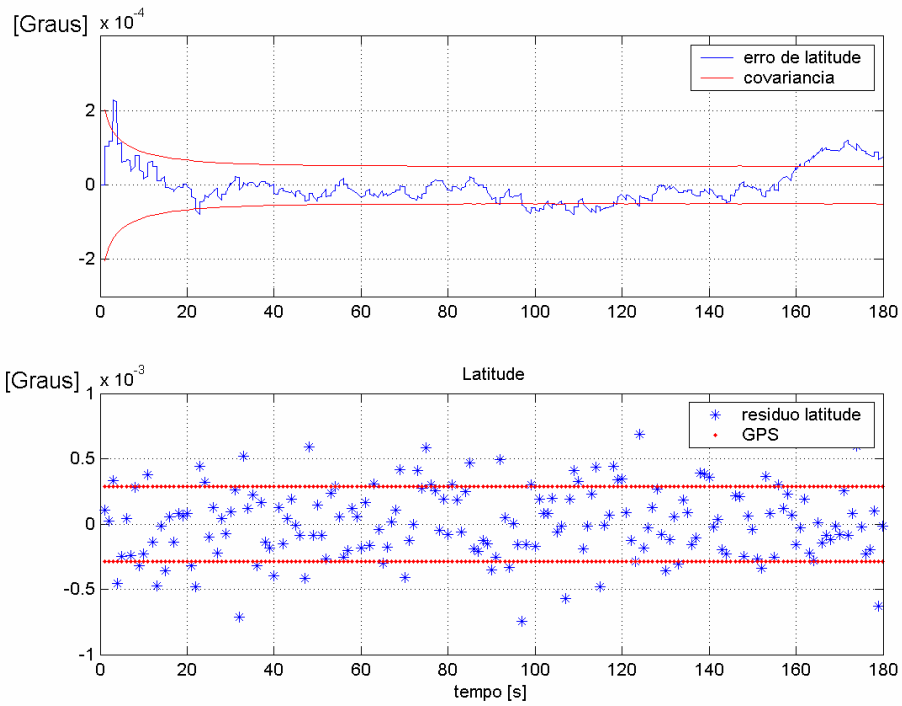


FIGURA 5.21: Curvas de desempenho para latitude (IMU navegação).

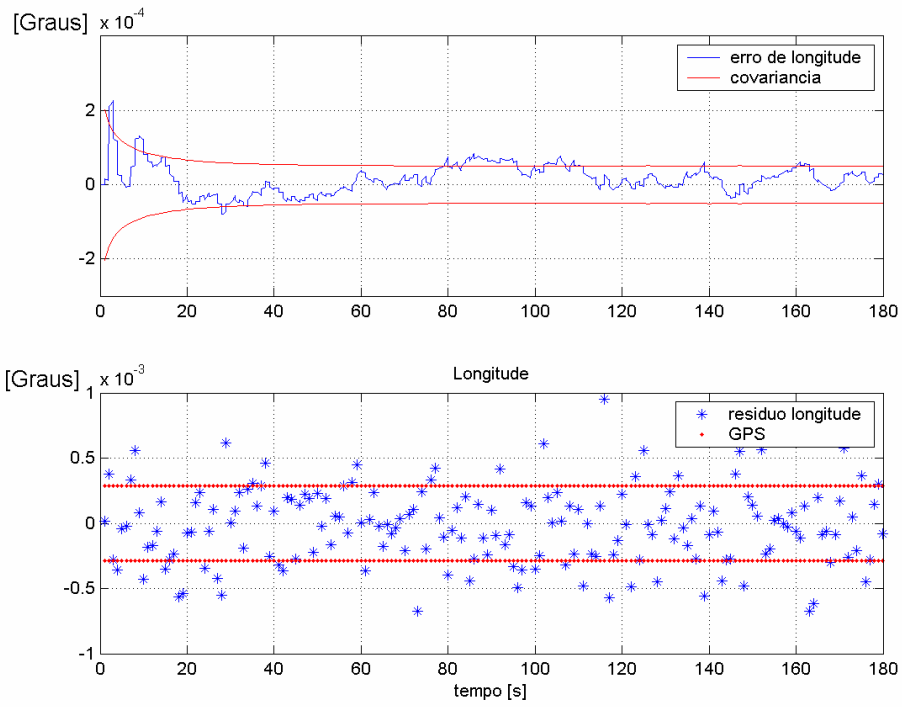


FIGURA 5.22: Curvas de desempenho para longitude (IMU navegação).



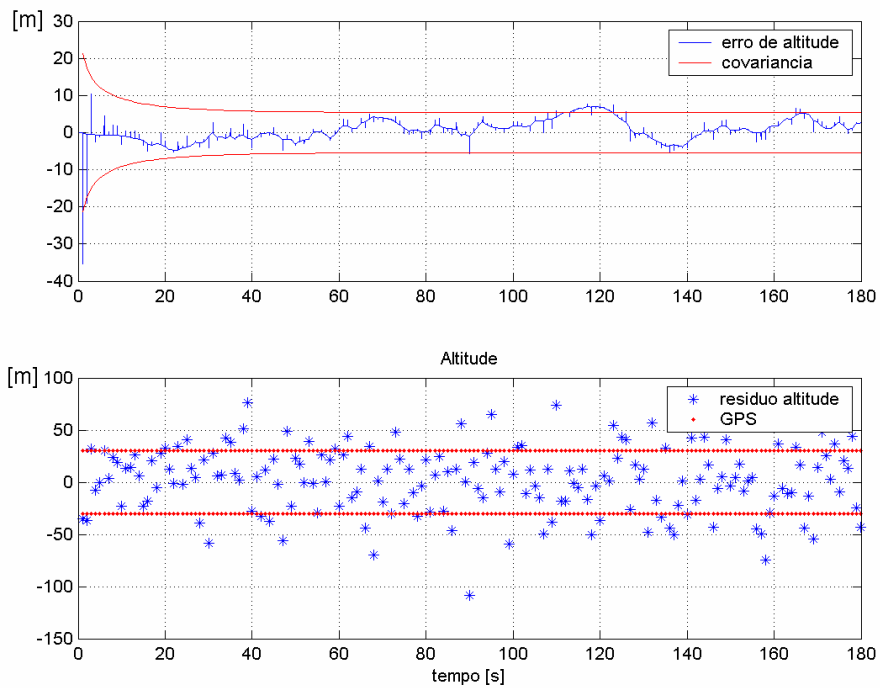


FIGURA 5.23: Curvas de desempenho para altitude (IMU navegação).

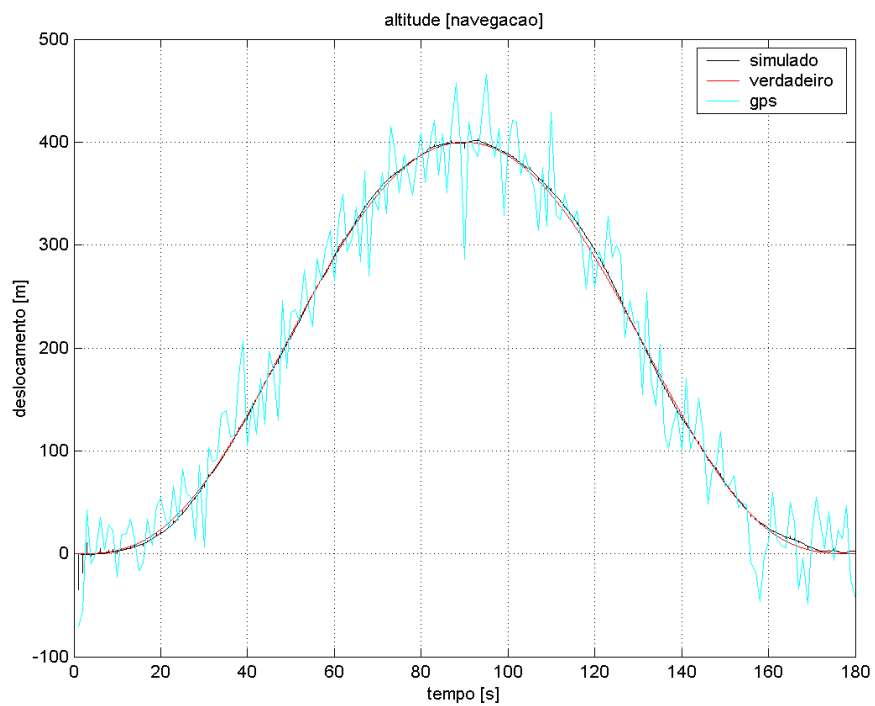


FIGURA 5.24: Curvas de altitude simulada, nominal e GPS (IMU navegação).

Após um transiente inicial, nota-se que para as três classes de IMU's simuladas, o erro cometido pelo filtro fica contido em torno de  $\pm 1\sigma$ , fornecido pela covariância, mostrando a consistência estatística do procedimento. Os resíduos ficaram também distribuídos com média em torno de zero e na maior parte confinados entre  $\pm 1\sigma$  da precisão do GPS. Numa distribuição gaussiana espera-se que pelo menos 67% dos resíduos esteja na faixa de  $\pm 1\sigma$ , que parece ser o caso quando se observa as Figuras 5.27, 5.30 e 5.33.

Nota-se ainda pelas Figuras 5.16, 5.20, 5.24, que o canal vertical é ruidoso. Em geral, em INS convencionais, o canal vertical é normalmente a componente mais problemática, somado ao fato de ser a componente menos observável quando se usa o sistema GPS. Mostra-se, portanto, que a IMU puramente acelerométrica também não foge a essa regra.

As Tabelas 5.2 e 5.3 mostram, respectivamente, as médias e desvios padrão dos erros e resíduos do filtro de Kalman, também considerados após o transiente inicial, a partir do instante  $t = 20$  segundos, aproximadamente. Observa-se que os valores médios de latitude e longitude são aproximadamente nulos, enquanto que os desvios padrão são da ordem de  $4,9 \cdot 10^{-6}$  rad, compatíveis com os valores adotados para gerar as medidas do GPS, em latitude e longitude, e que foram  $\pm 5,6 \cdot 10^{-6}$  rad para ambas as coordenadas. A qualidade da IMU influenciou no resultado com a menor média coincidindo com a classe navegação, a qual possui os menores erros sistemáticos e menor ruído. O resultado se repete para a altitude onde os desvios padrão são da ordem de 30m, valor também compatível com o adotado para a geração de medidas verticais do GPS.

Para efeito comparativo com o canal vertical pode-se projetar os valores dos erros de latitude e longitude no raio da Terra, obtendo-se então um valor aproximado de erro métrico. A Tabela 5.4 resume os valores de erro em metros, de onde se observa que os desvios padrão são da ordem de 30 m, que não difere muito dos valores adotados de 20 m para gerar os dados do GPS, convertidos em latitude e longitude. Os valores médios de erros e resíduos diminuem conforme o nível de ruído dos acelerômetros, ou seja, de acordo com a qualidade da IMU.

TABELA 5.2: Erros do filtro de Kalman.

Classificação	LATITUDE [graus]	LONGITUDE [graus]	ALTITUDE [m]
<b>Automotiva</b>	$2,1309 \cdot 10^{-5} \pm 2,936 \cdot 10^{-4}$	$-3,1488 \cdot 10^{-5} \pm 3,1320 \cdot 10^{-4}$	$7,0582 \pm 31,4248$
<b>Tática</b>	$1,8425 \cdot 10^{-5} \pm 2,773 \cdot 10^{-4}$	$3,2552 \cdot 10^{-5} \pm 2,6268 \cdot 10^{-4}$	$2,8537 \pm 26,3484$
<b>Navegação</b>	$8,4761 \cdot 10^{-6} \pm 2,772 \cdot 10^{-4}$	$-1,2786 \cdot 10^{-5} \pm 2,9173 \cdot 10^{-4}$	$0,1259 \pm 26,2851$

TABELA 5.3: Resíduos do filtro de Kalman.

Classificação	LATITUDE [graus]	LONGITUDE [graus]	ALTITUDE [m]
<b>Automotiva</b>	$1,8658 \cdot 10^{-5} \pm 2,915 \cdot 10^{-4}$	$-2,9242 \cdot 10^{-5} \pm 3,1176 \cdot 10^{-4}$	$7,1288 \pm 31,4115$
<b>Tática</b>	$1,9211 \cdot 10^{-5} \pm 2,771 \cdot 10^{-4}$	$3,2039 \cdot 10^{-5} \pm 2,6260 \cdot 10^{-4}$	$2,9147 \pm 26,3365$
<b>Navegação</b>	$6,0412 \cdot 10^{-6} \pm 2,753 \cdot 10^{-4}$	$-1,0467 \cdot 10^{-5} \pm 2,9008 \cdot 10^{-4}$	$0,9550 \pm 26,2827$

TABELA 5.4: Erros do filtro de Kalman projetados na superfície terrestre.

Classificação	Latitude projetada [m]	Longitude projetada [m]	ALTITUDE [m]
<b>Automotiva</b>	$2,37 \pm 30$	$-3,05 \pm 34$	$7,0582 \pm 31,4248$
<b>Tática</b>	$2,04 \pm 30$	$3,61 \pm 29$	$2,8537 \pm 26,3484$
<b>Navegação</b>	$0,95 \pm 30$	$-1,42 \pm 30$	$0,1259 \pm 26,2851$

As Figuras 5.25, 5.26, 5.28, 5.29, 5.31 e 5.32 descrevem o comportamento dos erros dos biases estimados pelo filtro e que são realimentados nas saídas acelerométricas da IMU. Deve-se lembrar que, ao contrário de uma IMU tradicional com giroscópios, a fonte de erro na IMU acelerométrica é única, com os erros dos acelerômetros propagados também para as medidas de velocidade angular.

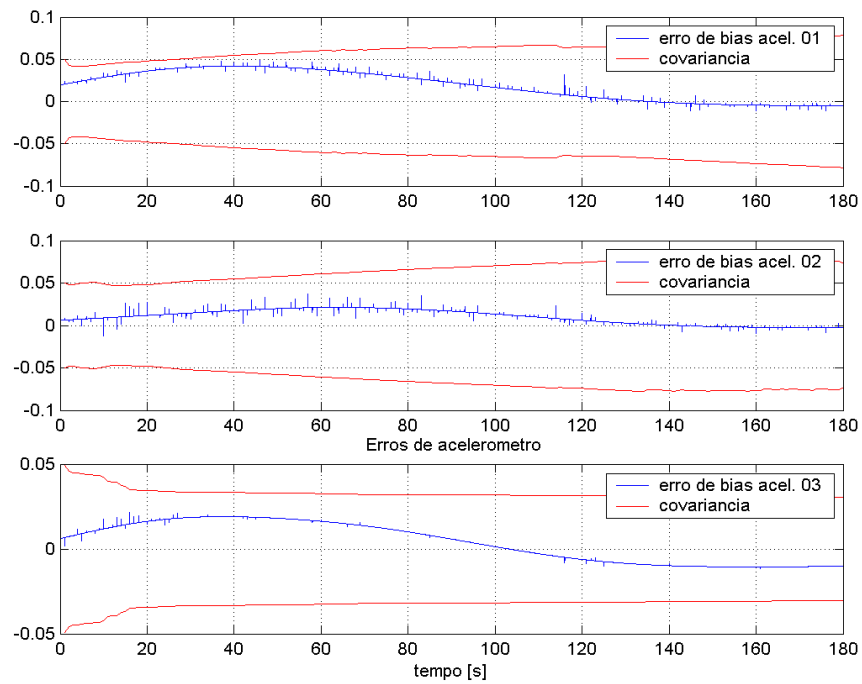


FIGURA 5.25: Erros dos bias estimados (IMU automotiva).

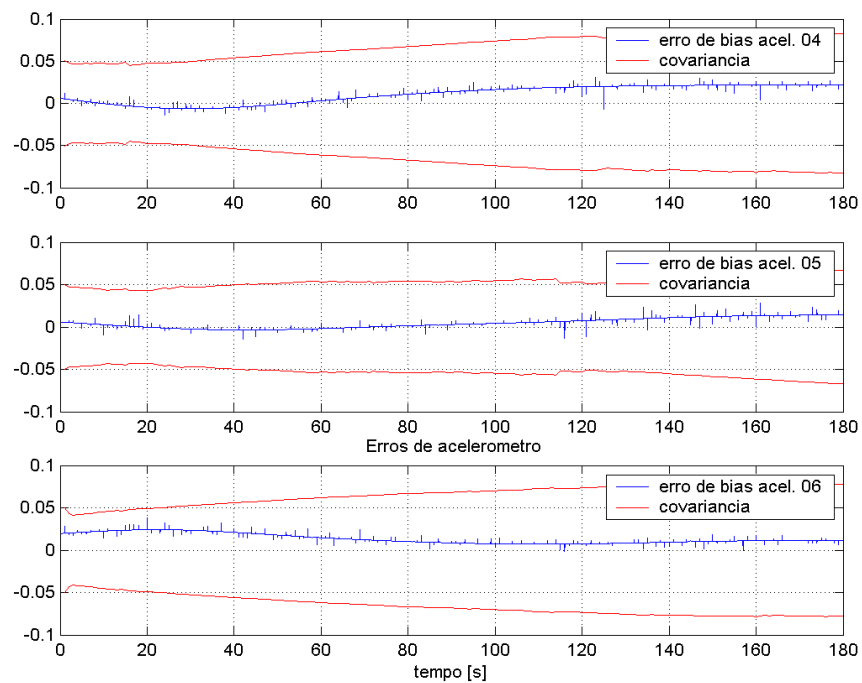


FIGURA 5.26: Erros dos bias estimados (IMU automotiva).

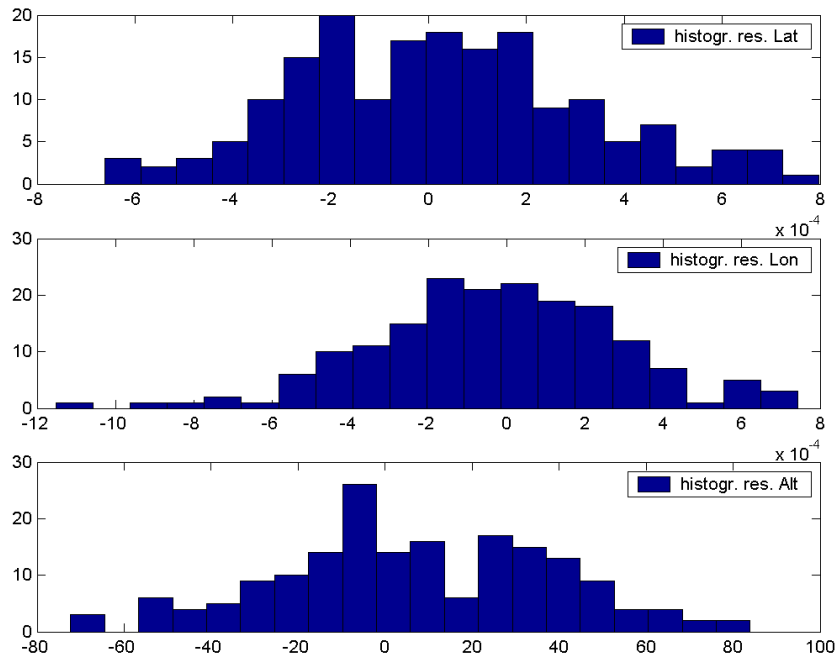


FIGURA 5.27: Histograma dos resíduos (IMU automotiva).

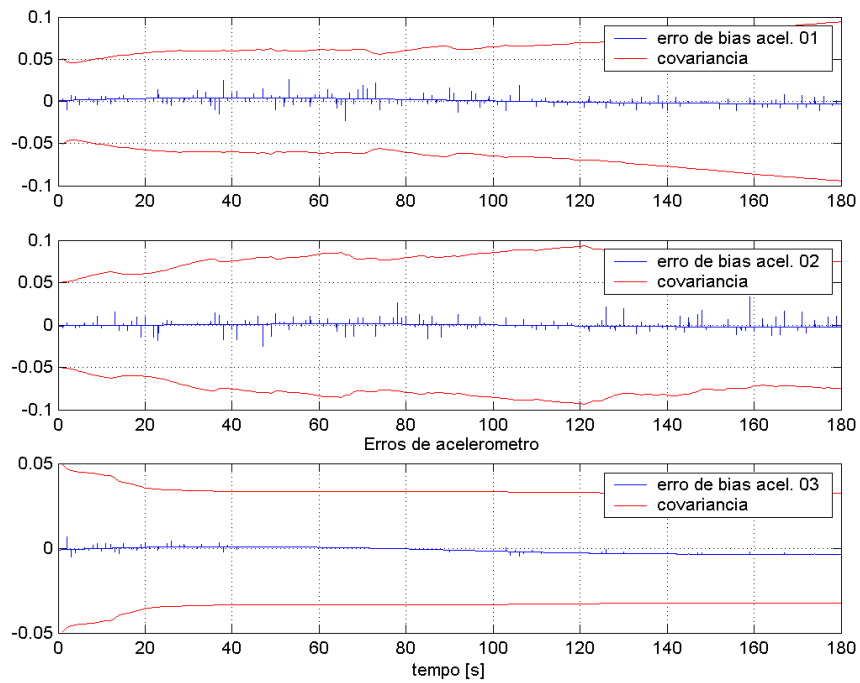


FIGURA 5.28: Erros dos bias estimados (IMU tática).

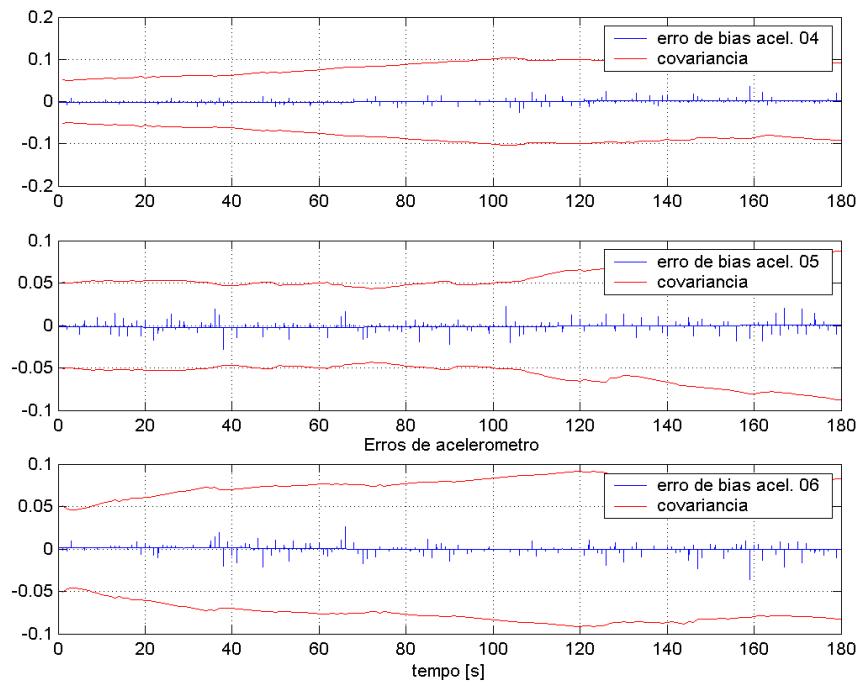


FIGURA 5.29: Erros dos bias estimados (IMU tática).

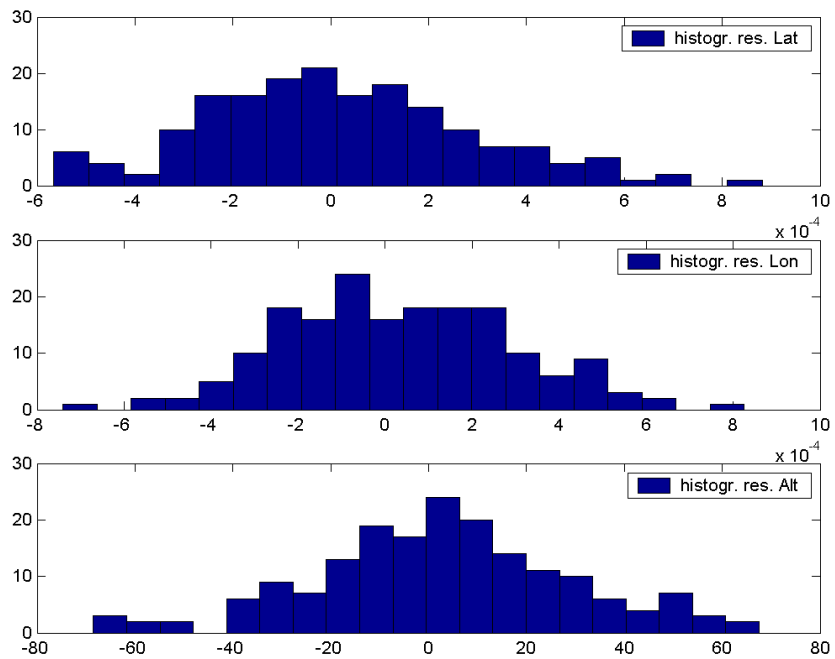


FIGURA 5.30: Histograma dos resíduos (IMU tática).

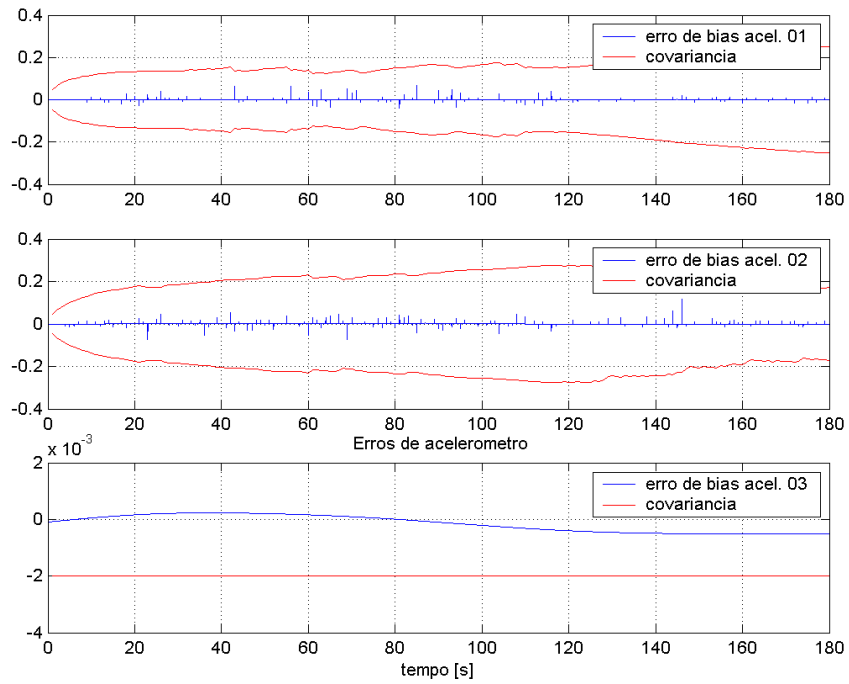


FIGURA 5.31: Erros dos bias estimados (IMU navegação).

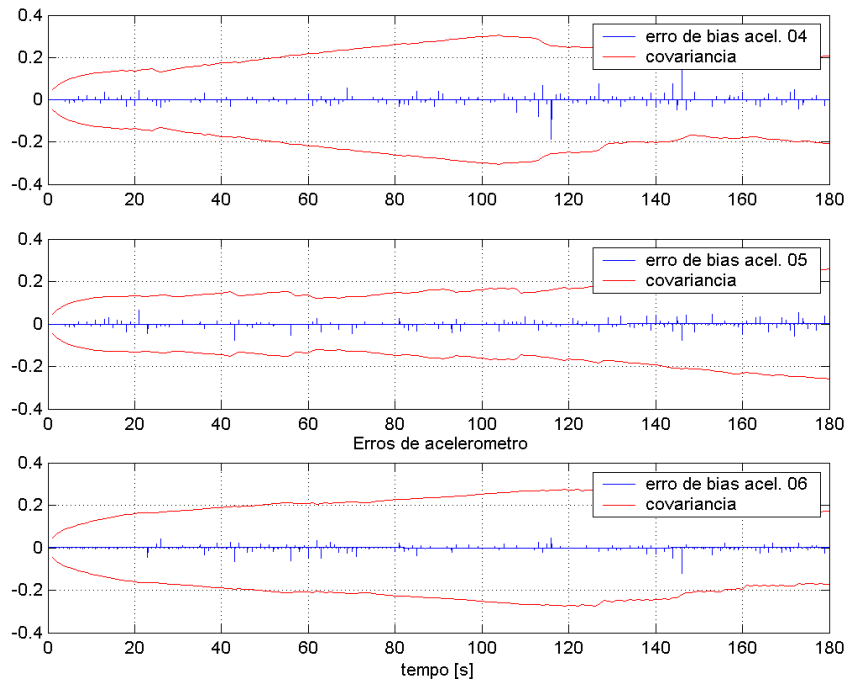


FIGURA 5.32: Erros dos bias estimados (IMU navegação).

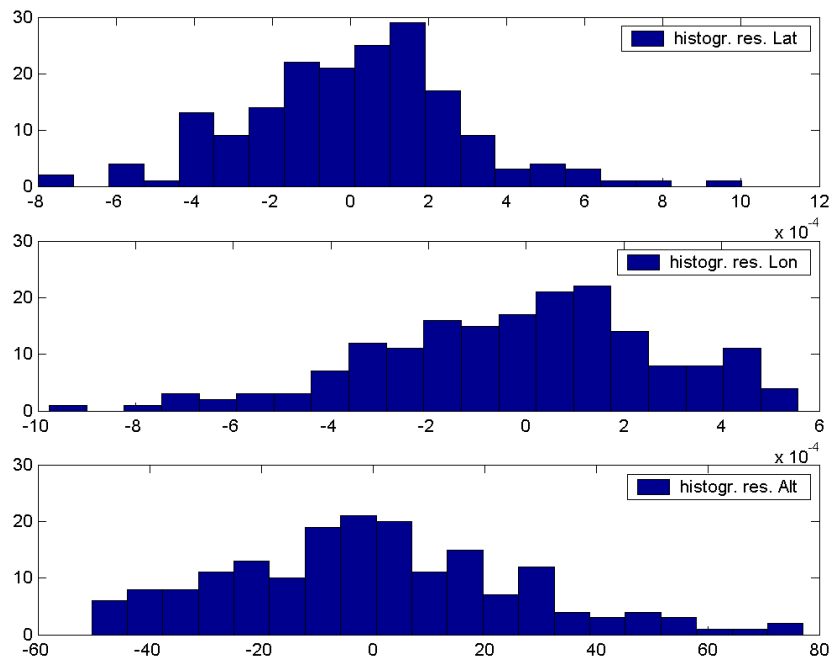


FIGURA 5.33: Histograma dos resíduos (IMU navegação).

#### 5.6.4 Erros na fase de propagação

Esta seção mostra os erros que podem ser acumulados durante a fase de propagação do filtro de Kalman, onde as equações de mecanização da IMU são integradas utilizando somente os dados dos acelerômetros. A seguir são traçadas, por classe de IMU, curvas de erros (valor nominal – valor filtrado) acumulados durante esta fase de propagação via modelo dinâmico adotado para a IMU. Observa-se nas curvas de erros de altitude, dados pelas Figuras (5.34), (5.37) e (5.40), como a qualidade dos acelerômetros afeta o desempenho do sistema de navegação, com erros acumulados máximos da ordem de 25 m, durante a fase de propagação, para a IMU classe automotiva; 15 m para a classe tática e 8 m para a classe navegação.

Observa-se também nas curvas de erros de longitude dados pelas Figuras (5.35), (5.38) e (5.41) e nas curvas de erros de latitude dados pelas Figuras (5.36), (5.39) e (5.42) que os erros são da ordem de grandeza de  $10^{-4}$  graus, que equivalem, num erro métrico, à aproximadamente 20 m, quando projetados no raio da Terra. O filtro de Kalman traz



redução de uma ordem de grandeza após a atualização, como pode ser visto pelos valores médios mostrados na Tabela (5.4). Fica novamente evidenciado que o canal vertical, ao contrário das coordenadas de latitude e longitude é o mais influenciado pela qualidade das IMUs.

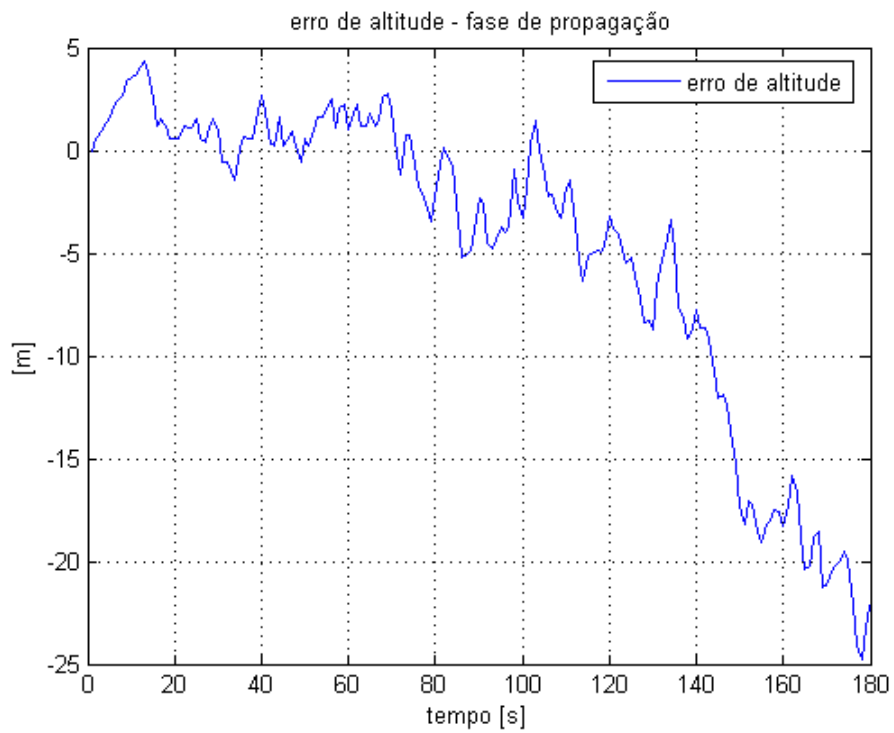


FIGURA 5.34: Erro de altitude na fase de propagação (IMU automotiva).

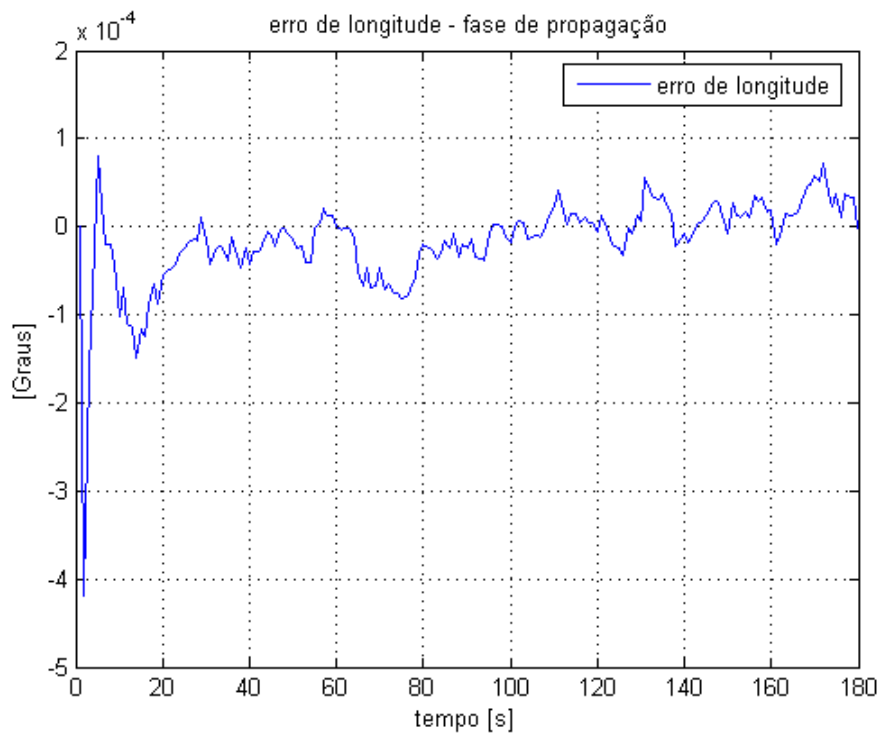


FIGURA 5.35: Erro de longitude na fase de propagação (IMU automotiva).

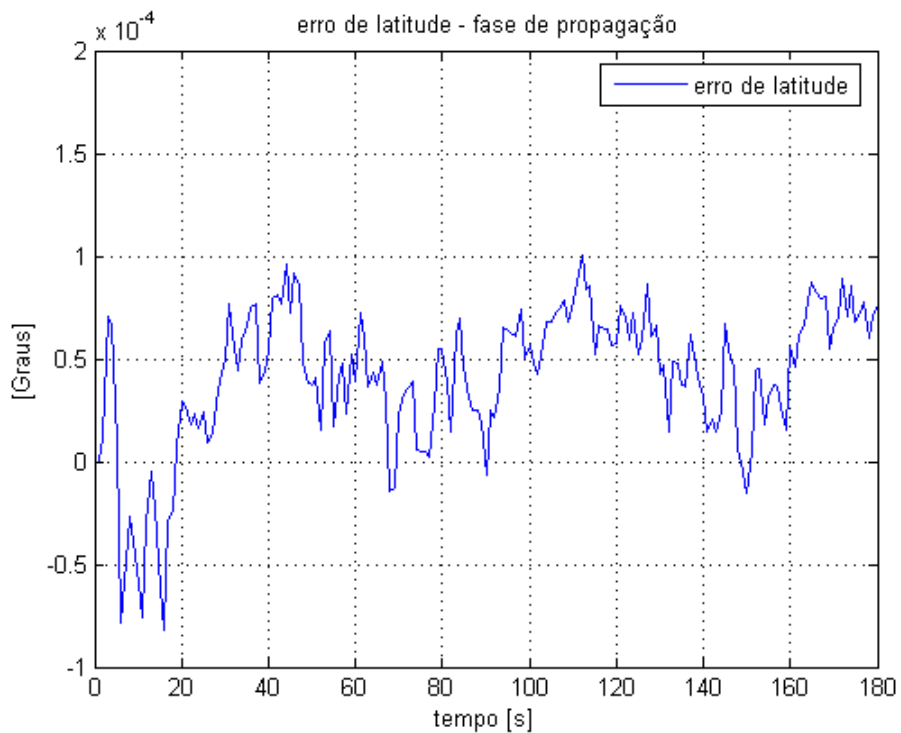


FIGURA 5.36: Erro de latitude na fase de propagação (IMU automotiva).

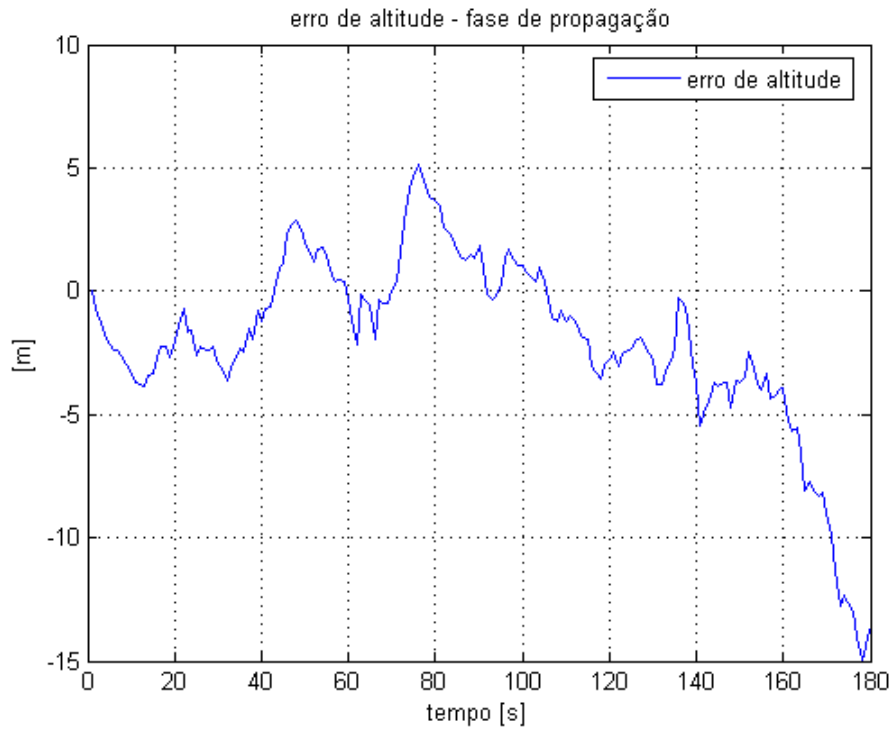


FIGURA 5.37: Erro de altitude na fase de propagação (IMU tática).

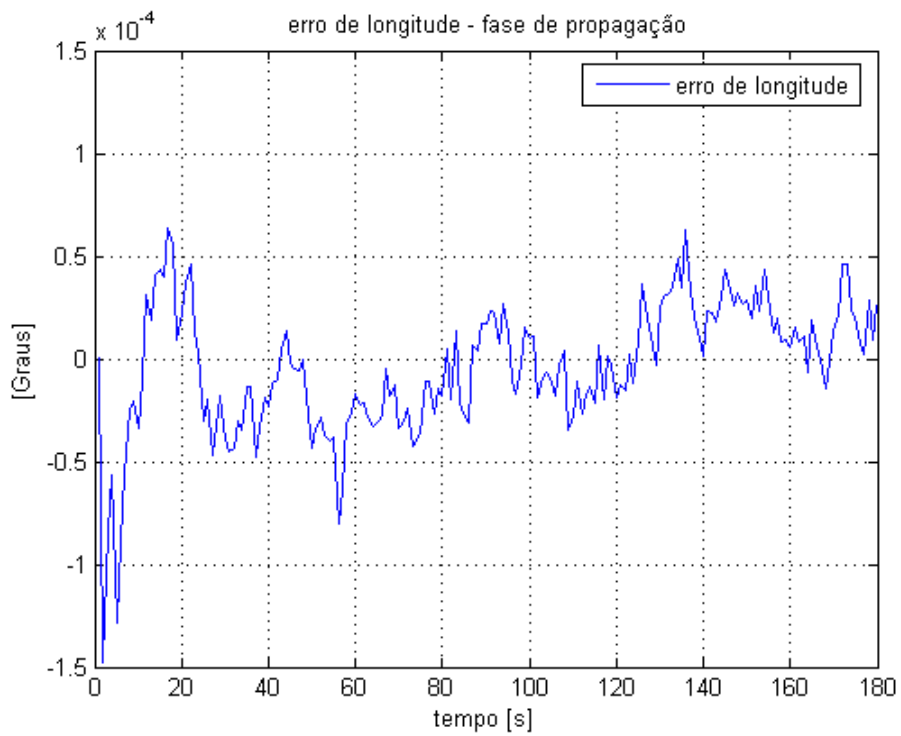


FIGURA 5.38: Erro de longitude na fase de propagação (IMU tática).

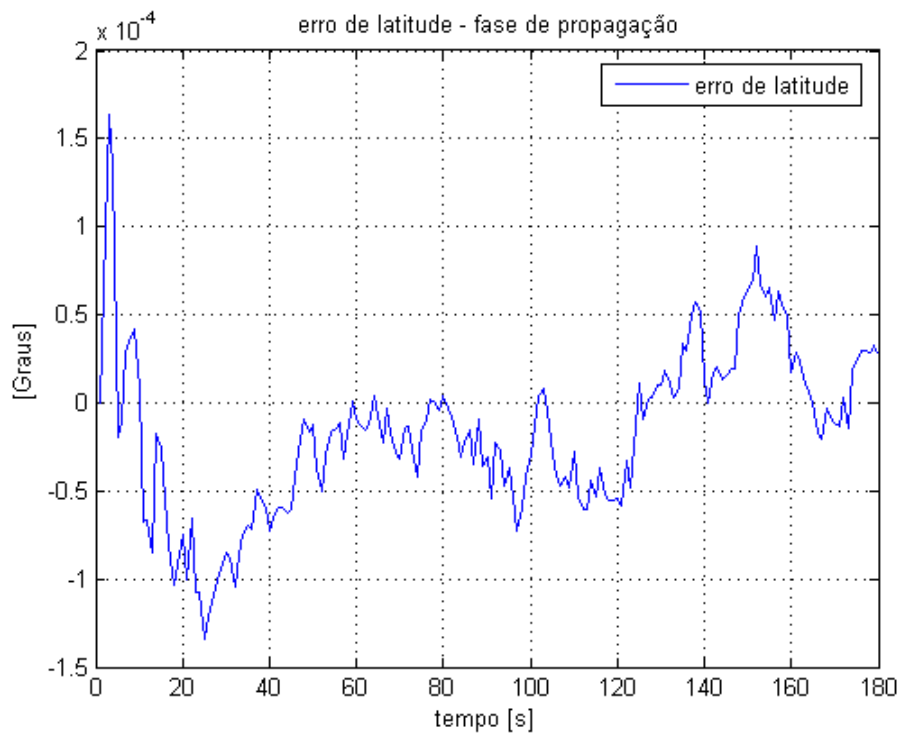


FIGURA 5.39: Erro de latitude na fase de propagação (IMU tática).

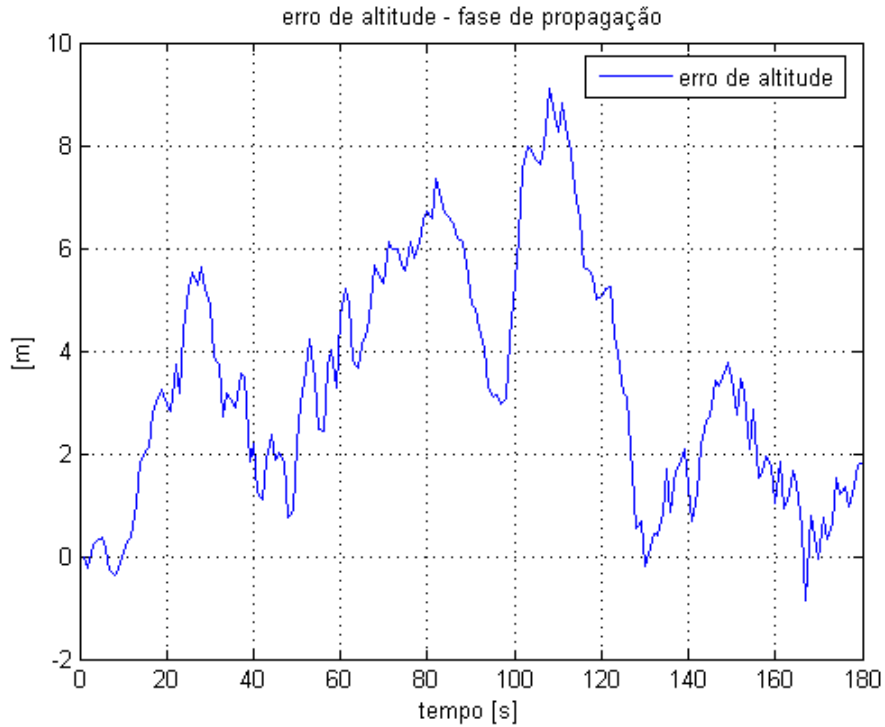


FIGURA 5.40: Erro de altitude na fase de propagação (IMU navegação).

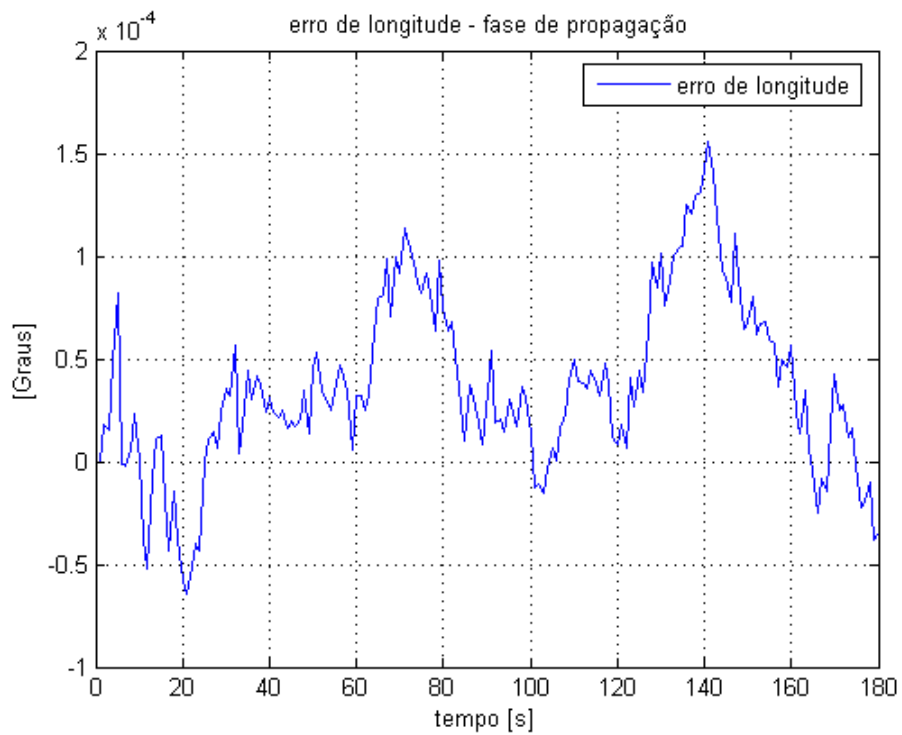


FIGURA 5.41: Erro de longitude na fase de propagação (IMU navegação).

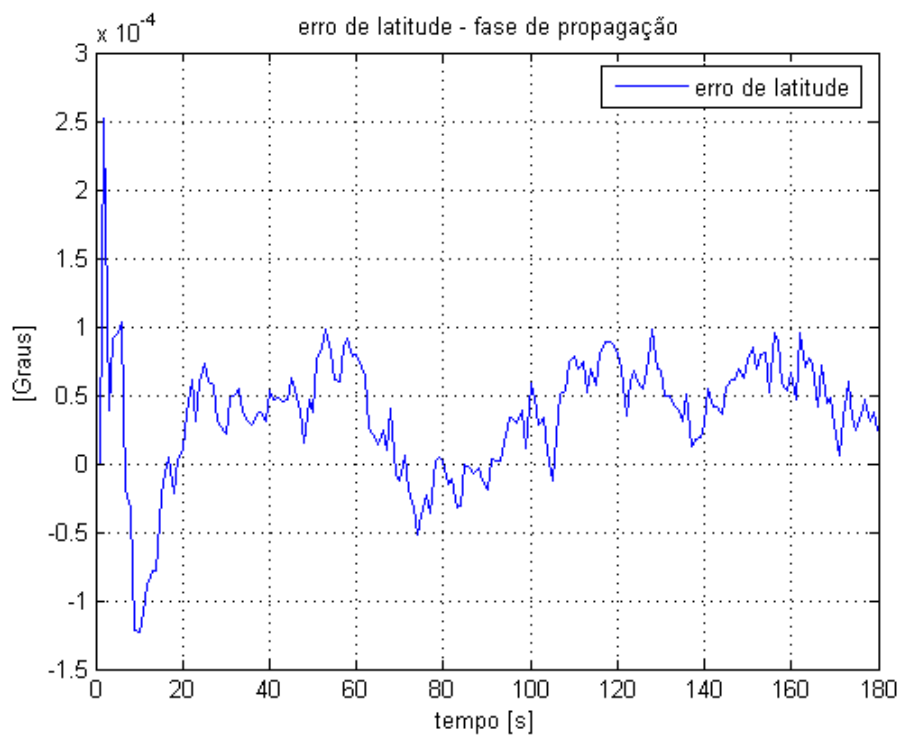


FIGURA 5.42: Erro de latitude na fase de propagação (IMU navegação).

### 5.6.5 Efeito da taxa de atualização

Com o objetivo de observar a influência da fase de atualização do filtro de Kalman, na precisão da navegação, foi degradada a taxa de correção (atualização) do sistema IMU-INS pelas informações do GPS de 1 Hz para 0,2 Hz, ou seja, os dados GPS somente estão disponíveis para processamento a cada 5 segundos. Foi tomada como exemplo uma IMU classe automotiva e os resultados estão mostrados nas Figuras (5.43) até (5.49).

Observa-se nas Figuras (5.43), (5.44) e (5.45), que os erros máximos durante a fase de propagação na taxa de 0,2 Hz são da ordem de 65m para altitude,  $5 \cdot 10^{-4}$  graus para longitude e  $6 \cdot 10^{-4}$  graus para latitude, portanto maiores que os erros máximos obtidos na taxa de 1 Hz, como descrito na secção anterior (5.6.4). A curva de navegação para altitude simulada mostrada na Figura (5.46) mostra que na taxa de 0,2 Hz o filtro não foi capaz de trazer a altitude para dentro de uma faixa de  $\pm 1\sigma$  da precisão do GPS, na fase final da trajetória, após um tempo de aproximadamente 140 segundos. Os erros de latitude e longitude também não ficaram confinados na faixa de  $\pm 1\sigma$  da covariância.

Novamente, para efeito comparativo com a altitude, os valores médios dos erros de latitude e longitude, em graus, podem ser projetados no raio da Terra, obtendo-se então um valor aproximado de erro métrico, como pode ser visto nas Tabelas (5.5), (5.6) e (5.7). Observa-se que, com uma taxa de atualização de 0,2 Hz, o filtro de Kalman não repete o mesmo desempenho anterior com a taxa de 1 Hz, conforme comparação com as Tabelas (5.2), (5.3) e (5.4), e apresentando valores médios bem maiores de altitude, longitude e latitude.

Em resumo, taxas de atualização inferiores (piores que 1Hz) podem degradar o sistema integrado GPS-INS devido a maior acumulação de erros durante a fase de propagação do filtro. Atualmente esta não parece ser uma limitação, pois taxas de amostragem de 1Hz para os dados GPS estão disponíveis em receptores padrão, e alguns fabricantes estão até mesmo oferecendo receptores GPS trabalhando a 10 Hz ([www.javad.com](http://www.javad.com)).

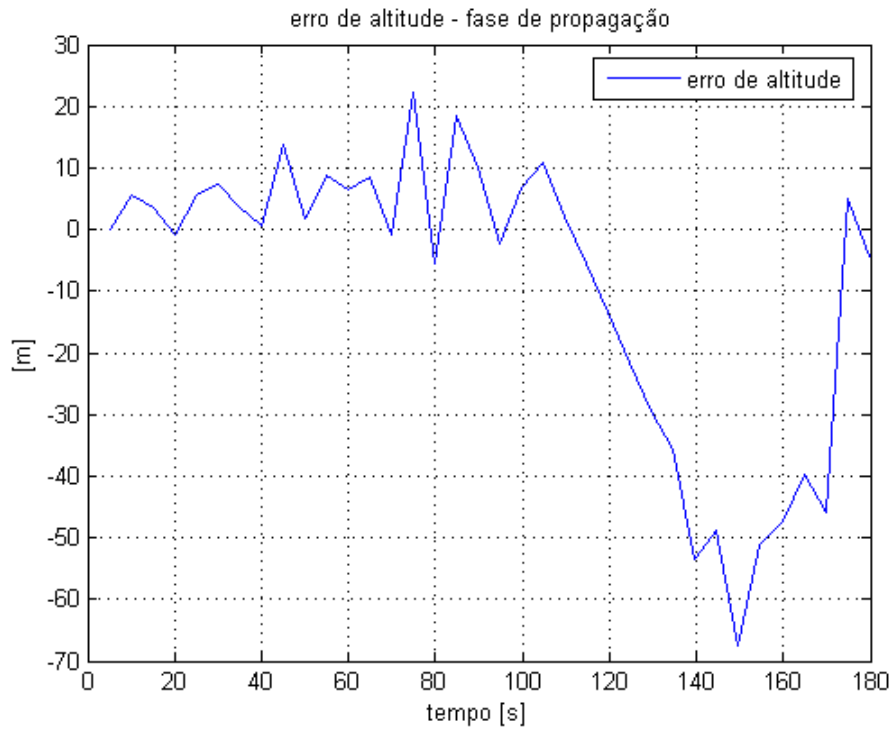


FIGURA 5.43: Erro de altitude na fase de propagação (taxa de atualização de 0,2 Hz).

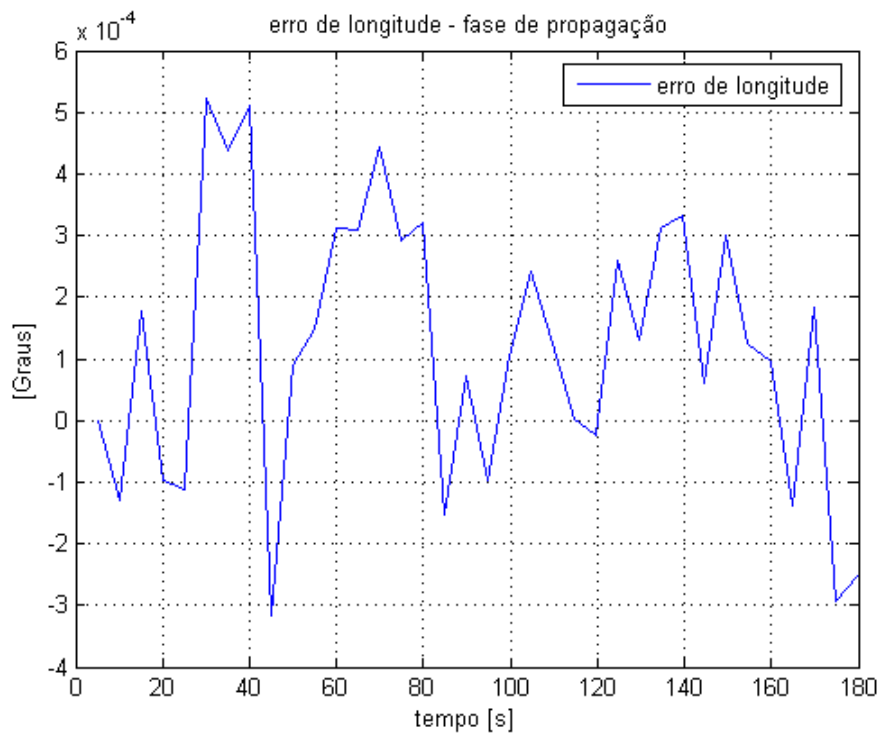


FIGURA 5.44: Erro de longitude na fase de propagação (taxa de atualização de 0,2 Hz).

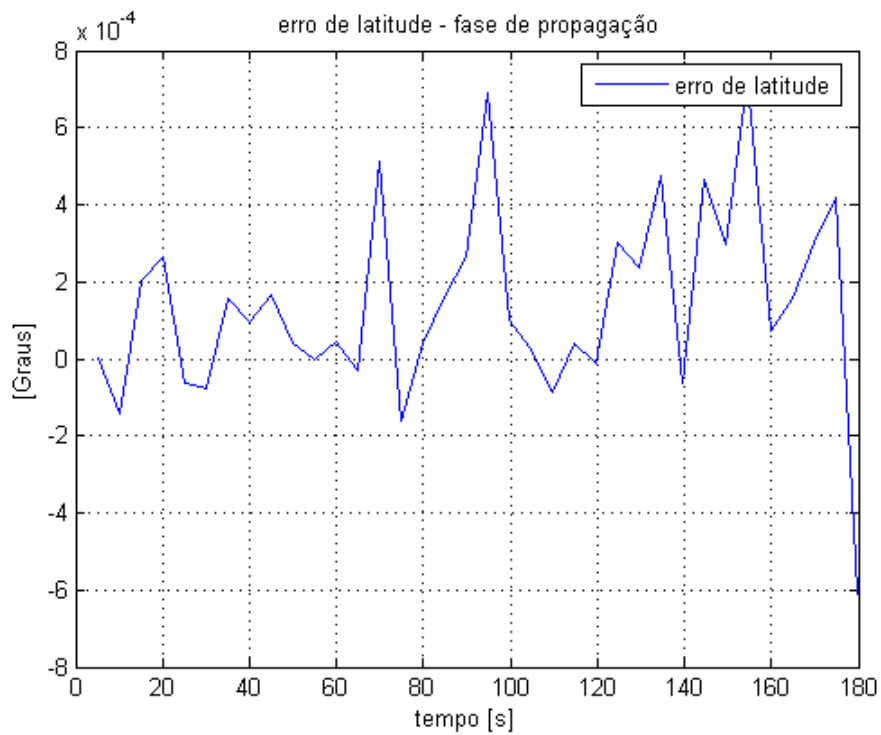


FIGURA 5.45: Erro de latitude na fase de propagação (taxa de atualização de 0,2 Hz).

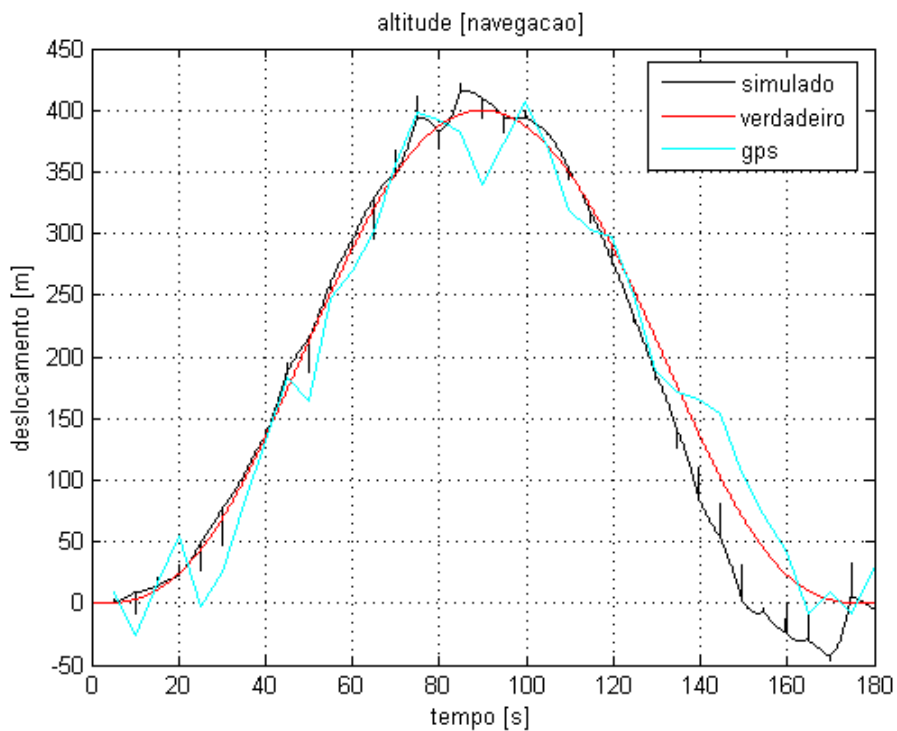


FIGURA 5.46: Curvas de altitude simulada, nominal (verdadeira) e GPS (taxa de amostragem de 0,2 Hz).



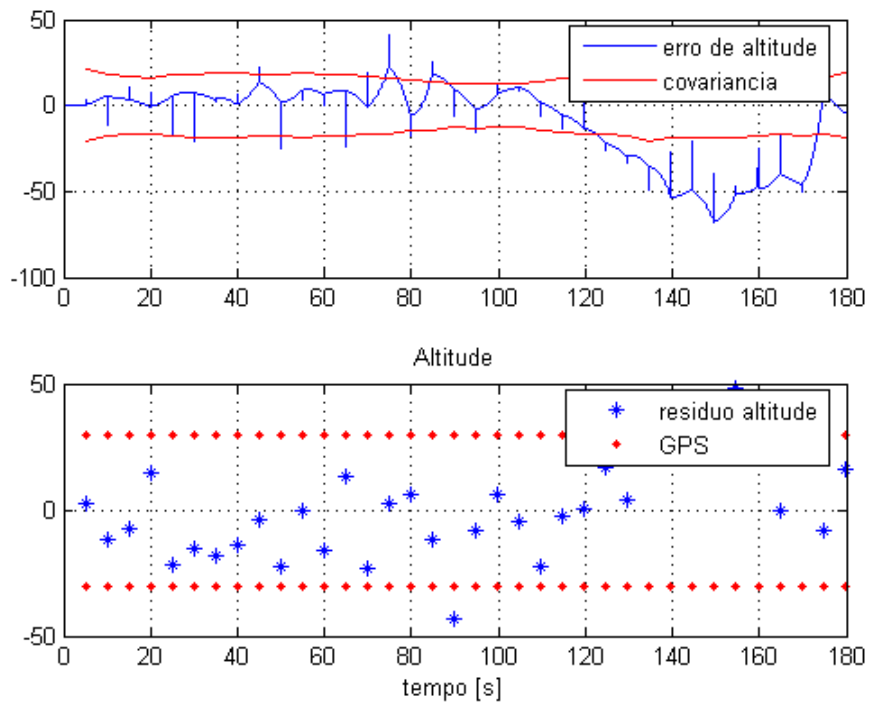


FIGURA 5.47: Curvas de desempenho para altitude (taxa de amostragem de 0,2 Hz).

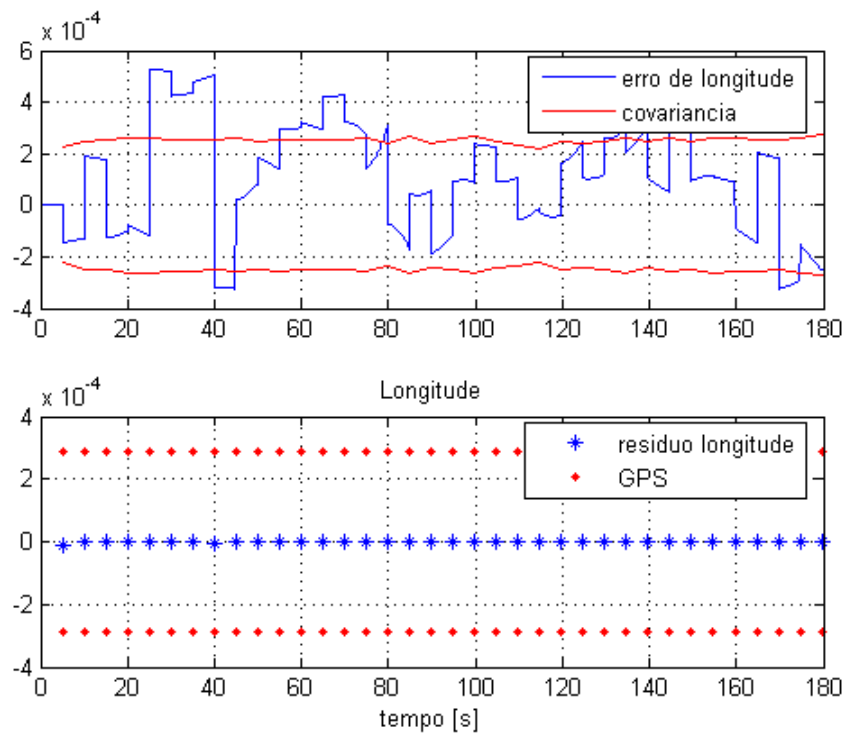


FIGURA 5.48: Curvas de desempenho para longitude (taxa de amostragem de 0,2 Hz).

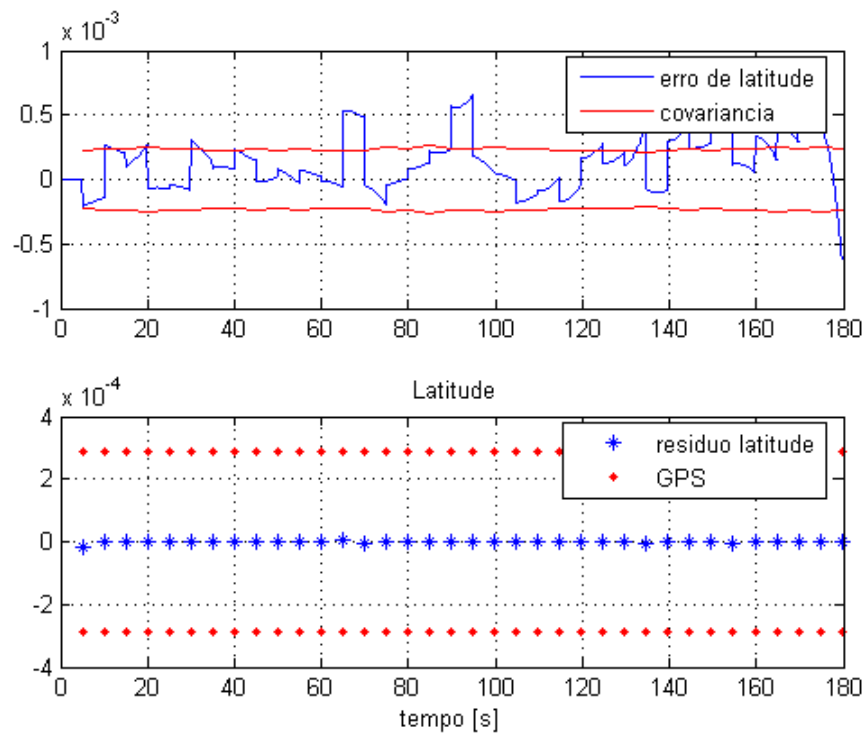


FIGURA 5.49: Curvas de desempenho para latitude (taxa de amostragem de 0,2 Hz).

TABELA 5.5: Erros do filtro de Kalman (taxa de 0,2 Hz).

Classificação	LATITUDE [graus]	LONGITUDE [graus]	ALTITUDE [m]
<b>Automotiva</b>	$3,78 \cdot 10^{-4} \pm 2,47 \cdot 10^{-4}$	$2,34 \cdot 10^{-4} \pm 3,25 \cdot 10^{-4}$	$-27,30 \pm 29,18$
<b>Tática</b>	$3,18 \cdot 10^{-4} \pm 2,11 \cdot 10^{-4}$	$-1,78 \cdot 10^{-4} \pm 4,58 \cdot 10^{-4}$	$-10,99 \pm 25,18$
<b>Navegação</b>	$1,43 \cdot 10^{-4} \pm 2,97 \cdot 10^{-4}$	$1,11 \cdot 10^{-4} \pm 5,02 \cdot 10^{-4}$	$7,75 \pm 26,21$

TABELA 5.6: Resíduos do filtro de Kalman (taxa de 0,2 Hz)

Classificação	LATITUDE [graus]	LONGITUDE [graus]	ALTITUDE [m]
<b>Automotiva</b>	$-1,60 \cdot 10^{-5} \pm 1,7 \cdot 10^{-5}$	$4,23 \cdot 10^{-5} \pm 1,07 \cdot 10^{-5}$	$-13,00 \pm 26,2$
<b>Tática</b>	$0,98 \cdot 10^{-5} \pm 4,6 \cdot 10^{-5}$	$-1,68 \cdot 10^{-5} \pm 1,23 \cdot 10^{-5}$	$-7,89 \pm 18,32$
<b>Navegação</b>	$2,25 \cdot 10^{-6} \pm 1,64 \cdot 10^{-6}$	$2,27 \cdot 10^{-5} \pm 1,19 \cdot 10^{-6}$	$3,49 \pm 25,2$

TABELA 5.7: Erros do filtro de Kalman projetados na superfície terrestre

(taxa de 0,2 Hz).

Classificação	Latitude projetada [m]	Longitude projetada [m]	ALTITUDE [m]
<b>Automotiva</b>	42,07 ± 27,5	26,05 ± 36,18	-27,30 ± 29,18
<b>Tática</b>	35,40 ± 23,5	19,82 ± 50,98	-10,99 ± 25,18
<b>Navegação</b>	15,92 ± 33,06	12,36 ± 55,88	7,75 ± 26,21

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O objetivo deste trabalho foi analisar o desempenho de uma unidade de medida inercial (IMU) de baixo custo, tipo *strapdown*, puramente acelerométrica, também chamada de não-giroscópica, num sistema de navegação inercial (INS) auxiliado pelo GPS.

Para tanto foram apresentadas IMUs com diferentes configurações, ou arranjos geométricos, onde os acelerômetros possuem localizações e orientações definidas com o objetivo de fornecer leituras que resultem na computação de velocidades angulares e acelerações lineares, relativas ao C.G. da IMU. Foi adotada a configuração tipo cubo, proposta por Chen et alii (1994), com seis acelerômetros localizados e orientados a partir do centro da diagonal da cada face. Os acelerômetros tiveram seus erros reduzidos num único parâmetro modelado como ruído branco.

As equações do sistema inercial de navegação foram definidas no sistema de coordenadas geográficas (latitude, longitude e altitude) e seus erros lineares foram obtidos por métodos de perturbação das equações não lineares de navegação.

Foi adotada a estratégia fracamente acoplada para integrar os dados do INS e do GPS, onde as informações obtidas do receptor GPS são tratadas como sendo de um sensor externo e um filtro de Kalman as utiliza para corrigir os erros de navegação causados pelo bias e fator de escala dos acelerômetros.

Para testar o sistema integrado de navegação foram propostas trajetórias nominais (verdadeiras) na forma de aceleração angular e força específica, as quais excitam a IMU. Para tanto as equações propostas por Chen et alii (1994) foram modificadas e escritas numa forma inversa de modo que cada acelerômetro fosse excitado pela trajetória nominal e também recebesse erros de bias e fator de escala. Foram testadas, para efeito comparativo, três classes de IMUs, de acordo com o desempenho dos acelerômetros. Aqui foram denominadas: classe automotiva para os acelerômetros de

baixo custo e desempenho, classe tática para os acelerômetros de médio desempenho e custo e classe navegação para os acelerômetros de alto desempenho e custo.

Ao final do trabalho foi possível demonstrar que com um arranjo de seis acelerômetros devidamente orientados e posicionados no espaço, no caso a configuração em cubo, é possível obter acelerações lineares e angulares desacopladas, como uma combinação linear das saídas acelerométricas.

Também se conclui que os erros dos acelerômetros, tais como bias, fator de escala, podem ser concentrados num único parâmetro modelado como um ruído branco e agregados aos erros lineares das equações de navegação que foram usados no estado estimado pelo filtro de Kalman. O erro concentrado dos acelerômetros reduz a ordem do filtro (18 estados).

A estratégia de integração fracamente acoplada foi suficiente para manter a navegação filtrada dentro de um desvio padrão das medidas geradas pelo GPS, como mostra o resultado das simulações. O resultado de navegação, latitude, longitude e altitude, obtidos pelo sistema integrado IMU-INS-GPS, é melhor que as soluções individuais da IMU-INS, que diverge rapidamente, e do GPS, como pode ser observado nas Figuras 5.16, 5.20 e 5.24, onde a curva filtrada se aproxima mais da trajetória nominal (verdadeira) do que a do GPS.

A continuidade do presente trabalho poderia ser realizada a partir das seguintes sugestões:

- Comparar o desempenho de IMUs com outras configurações acelerométricas, por exemplo com nove ou doze acelerômetros.
- Investigar métodos de estimação de atitude com auxílio do GPS, por exemplo com o uso de mais de uma antena, e sua incorporação no sistema integrado de navegação.
- Investigar métodos de alinhamento e calibração para IMUs de baixo custo e sua incorporação no sistema integrado de navegação.

- Implementar método adaptativo para estimação do ruído no estado, para sintonia da matriz  $\mathbf{Q}$  e prevenir possíveis divergências das estimativas.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, J. J.; Kinney, J. S.; Daily, M. R.; Ellis, J. R.; Smith J. H.; Montagne, S.; Howe, R. T.; Boser, B. E.; Horowitz, R.; Pisano, A. P.; Lemkin, M. A.; Clark, W. A.; Juneau, T. Integrated micro-electro-mechanical sensor development for inertial applications. **IEEE AES Systems Magazine**, v. 13, p. 36-40, Nov. 1998.

Britting, K. R. **Inertial navigation systems analysis**. Massachusetts: John Wiley & Sons, 1971. 249 p.

Brown, R. G.; Hwang, P. Y. C. **Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises and solutions**. New York, NY: John Wiley and Sons, 1997. 484 p.

Cardenuto, N. C. **Análise e simulação de um sistema inercial (strapdown) de determinação de atitude auxiliado por estimação adaptativa da deriva**. 1984. 138p. (INPE-3257-TDL/177).Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1984.

Chen, J. H.; Lee, S. C.; Debra, D. B. Gyroscope free strapdown inertial measurement unit by six linear accelerometers. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 17, n. 2, p. 286-290, Mar. 1994.

Crammer, M.. GPS/INS integration. **Photogrammetric week 97, Wichmann Verlag, Heidelberg**, p. 3-12, 1997. Disponível em: <[www.ifp.uni-stuttgart.de/publications/1997/](http://www.ifp.uni-stuttgart.de/publications/1997/)>. Acesso em: 15 jul. 2003.

El-Sheimy, N. Integrated systems and their impact on the future of positioning, navigation and mapping applications. **FIG working week 2000, Prague**. 2000 Disponível em: <[www.ddl.org/figtree/pub/proceedings/prague-final-papers/Papers-acrobats/el-sheimy-fin.pdf](http://www.ddl.org/figtree/pub/proceedings/prague-final-papers/Papers-acrobats/el-sheimy-fin.pdf)>. Acesso em: 13 jan. 2003.

Farrel, J. A.; Barth M. **The global positioning system and inertial navigation**. New York, NY: McGraw-Hill, 1998. 340 p.

Ferraresi, V. A. **Utilização conjunta de sensores inerciais e não-inerciais em determinação de atitude de satélites via filtro de Karman**. 1986. 134p. (INPE-4313-TDL/280).Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1986.

Ferro, V. C.; Costa e Silva, E. C.; Schelim, C. A. Descrição das etapas de desenvolvimento dos algoritmos e do software de uma central inercial de navegação tipo strapdown. Simpósio Brasileiro de Navegação Inercial, 1., p. TR25.1–9,1995. **Anais do I Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial –SBEIN, São Paulo**.1995.



- Fitzgibbon, K. T. **Simulação de sistemas de navegação inercial solidários**. 1983. 168p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) -Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos,1983.
- Gebre-Egziabher, D.; Powel J. D.; Enge, P. K. Design and performance analysis of a low-cost aided reckoning navigation system. **International Conference on Integrated Navigation Systems 2001 Proceedings** , 2001. Disponível em: <[waas.stanford.edu/~www/gebrel/papers/drsystem/drsystem.pdf](http://waas.stanford.edu/~www/gebrel/papers/drsystem/drsystem.pdf)>. Acesso em: 21 out. 2004.
- Gelb E. (editor). **Applied optimal estimation**. Massachusetts: The MIT press, 1974. 174 p.
- Greenspan, R. L. Inertial navigation technology from 1970-1995. **Navigation: Journal of the Institute of Navigation**, v. 42, n. 01, p 165-185, special issue, 1995.
- Greenspan, R. L. GPS and inertial navigation. In: Parkinson, B. W.; Spilker J. J. **Global positioning system: theory and applications**. Washington, DC: AIAA, 1996. v. II, C, p. 187-220.
- Greenwood, D. T. **Principles of Dynamics**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1962.
- Grewal M. S.; Weill L. R.; Andrews A. P. **Global positioning systems, inertial navigation and integration**. New York, NY: John Wiley and Sons, 2001. 392 p.
- Kraft, M. Micromachined inertial sensors: The state of the art and a look into future. **IMC Measurement and Control**. v. 33, n.6, p. 164-168, 2000. Disponível em <[www.ecs.soton.ac.uk/~mk1/](http://www.ecs.soton.ac.uk/~mk1/)>. Acesso em: 25 jan. 2003.
- Kaplan, E. D. **Understanding GPS**. Norwood, MA: Artech House, 1996. 554 p.
- King A. D. Inertial navigation: forty years of evolution. **GEC review**. v. 33, n. 6, p. 164-168, 1998. Disponível em: <[www.marconi.com/media/gecjournal/gecreview/v13n3/p140.pdf](http://www.marconi.com/media/gecjournal/gecreview/v13n3/p140.pdf)>. Acesso em: 13 jan. 2003.
- Lawrence, A. **Modern inertial technology: navigation, guidance and control**. New York, NY: Springer-Verlag, 1993. 268 p.
- Lima, S. R. S. de; Freitas S. R. C. de; Krueger C. P. Estimativa de desempenho da integração GPS/INS na execução de levantamentos geodésicos utilizando plataforma de baixo custo. In: II Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas. p. 1-6, 2001. **Anais do II Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas**. Curitiba PR: Centro Politécnico UFPR, 2001. Disponível em: <[http://geodesia.ufsc.br/Geodesia-online/arquivo/GeoColoq\\_2001/autores.htm](http://geodesia.ufsc.br/Geodesia-online/arquivo/GeoColoq_2001/autores.htm)>. Acesso em 25 jan. 2003.
- Lima, S. R. S. de; Freitas S. R. de; Krueger C. P. **Perspectivas de utilização de sistemas microeletromecânicos (MEMS) visando a integração GPS/INS de baixo custo**. p. 082-087, 2002. Anais do Simpósio Brasileiro de Geomática.
- Maybeck, P. S. **Stochastic models, estimation and control**. New York, NY : Academic Press, 1979. 423 p.

- Merhav, S. J. A non-gyroscopic inertial measurement unit. **Journal of Guidance and Control**, v. 5, n. 3, p. 227-235, 1982.
- Monico, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS**. São Paulo: UNESP, maio 2000. 287 p.
- Mostov, K. S.; Soloniev, A. N.; Soloniev A. A. Accelerometer-based gyro-free multi-sensor INS. p. 245-254, 1998. **Proceedings of the ION 54th Annual Meeting, Denver, USA**. Institute of Navigation, 1998.
- Padgaonkar, A. J.; Krieger, K. W.; King, A. I. Measurement of angular acceleration of a rigid body using linear accelerometers. **Journal of Applied Mechanics, Transaction of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 42, p. 552-556, Sept. 1975.
- Park, M.; Gao, Y. Error analysis of low-cost MEMS-based accelerometers for land vehicle navigation. p. 1162-1170, 2002. **Proceedings of the ION GPS 2002, Portland, USA**. Institute of Navigation, 2002
- Park, S.; Tan, C. W. GPS-aided gyroscope-free inertial navigation systems. **California PATH research report**. 2002. Disponível em: <[www.path.berkeley.edu/PATH/research](http://www.path.berkeley.edu/PATH/research)>. Acesso em: 13 jan. 2003.
- Pitman Jr, G. R. **Inertial guidance**. New York, NY: John Wiley and Sons, 1962. 481 p.
- Regan, F. J. **Re-entry vehicle dynamics**. AIAA education series. New York, N.Y.: AIAA, 1984. 414 p.
- Rios Neto, A.; Kuga, H. K. **Estimação adaptativa do ruído no estado para o filtro de Kalman**. São José dos Campos S. P.: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1982. (INPE-2240-PRE/141)
- Schmidt, G. T. Strapdown inertial systems - theory and applications: introduction and overview. **AGARD lecture series**, n. 95, p. 1.1-1.10, 1978.
- Schwarz, K. P.; El-Sheimy, N. **Future positioning and navigation technologies**. Study performed under the Scientific Services Agreement with Batelle, Columbus Division and Topographic Engineering Center, Fort Belvoir, V. A., USA. 1999. Disponível em: <[www.geomatics.ucalgary.ca/~nel-shei/Future\\_POS/nav.htm](http://www.geomatics.ucalgary.ca/~nel-shei/Future_POS/nav.htm)>. Acesso em 7 fev. 2003.
- Schwarz, K. P.; El-Sheimy, N. **Kingspad Users Manual 3.0**, 2000 Disponível em: <[www.uti.ca/kingspad](http://www.uti.ca/kingspad)>. Acesso em fevereiro de 2003.
- Thonsom, W. T. **Introduction to space dynamics**. New York: Dover Publications, 1986. 311 p.
- Titterton, D. H.; Weston, J. L. **Strapdown inertial navigation technology**. London: Peter Peregrinus, 1997. 455 p.
- Trabasso, L. G. **Anteprojeto de uma unidade de medida inercial não giroscópica**. 1985. 112p. (INPE-3887-TDL/220). Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1986.
- VanBrokhorst, A. Strapdown System Algorithms. **AGARD lecture series**, n. 95, p. 3.1-3.22, 1978.

Wertz, J. R. **Spacecraft attitude determination and control**. London: D. Reidel, 1978.

Yazdi, N; Ayazi, F.; Najafi, K. Micromachined inertial sensors. **Proceedings of the IEEE**, v. 86, n. 8, p. 1640-1659, Aug. 1998.

## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)