



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14050-TDI/1065**

## **TRAJETÓRIAS ALTERNATIVAS NO SISTEMA TERRA-LUA**

Cristiano Fiorilo de Melo

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Othon Cabo Winter, aprovada em 8 de dezembro de 2005.

INPE  
São José dos Campos  
2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

521.3:629.7.076.6

Melo, C. F.

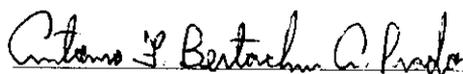
Trajétórias Alternativas no Sistema Terra-Lua / Cristiano Fiorilo de Melo. – São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2005.

259 p.; (INPE-14050-TDI/1065)

1.Mecânica Celeste. 2.Astrodinâmica. 3.Problema de Três Corpos. 4.Problema de Quatro Corpos. 5.Trajétórias Terra-Lua. 6.Órbitas Lunares. 7.Trajétórias de Transferências. I. Título.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Doutor(a) em  
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Othon Cabo Winter



Orientador(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau



Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dra. Teresinha de Jesus Stuchi



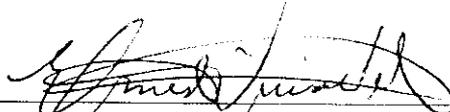
Convidado(a) / UFRJ / Rio de Janeiro - RJ

Dr. Roberto Vieira Martins



Convidado(a) / ON / Rio de Janeiro - RJ

Dr. Ernesto Vieira Neto



Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Aluno (a): Cristiano Fiorilo de Melo

São José dos Campos, 08 de dezembro de 2005



*“A Natureza nunca quebra suas próprias regras”.*

Leonardo da Vinci.



*A memória de  
Roger A. Broucke.*



## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, Doutor Othon Cabo Winter, por todo apoio necessário à confecção deste trabalho e pela experiência e conhecimentos transmitidos.

A minha mãe, Terezinha Fiorilo, e a minha irmã, Teresa Cristina, pelo apoio e exemplos de trabalho e dedicação aos nossos ideais.

A minha esposa, Cristiane, pelo amor e dedicação ao longo destes anos.

Ao Doutor Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, pela constante disposição em ajudar os alunos no desenvolvimento dos trabalhos.

Ao Átila e ao Roberto pela amizade que facilitou minha permanência em São José dos Campos.

Aos membros da banca pelas contribuições feitas ao trabalho.

Ao INPE pelo apoio e infra-estrutura.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.



## **RESUMO**

O Problema Restrito de Três Corpos prevê a existência de várias famílias de órbitas periódicas no Sistema Terra-Lua. Neste trabalho, estudamos duas delas – a Família G de órbitas periódicas diretas ao redor de L1 e a Família H2 de órbitas periódicas diretas ao redor da Lua. Nossas investigações consideraram, além do Problema Restrito de Três Corpos, o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-sonda acrescido das perturbações devidas ao achatamento terrestre e à pressão de radiação solar. Então, a partir das órbitas da Família G, definimos dois conjuntos de trajetórias que formam elos entre a Terra e a Lua, cujas características permitem transferências entre órbitas terrestres e lunares de baixa altitude e grandes inclinações, e uma rota de escape do Sistema Terra-Lua. Já a partir das órbitas da Família H2, definimos um conjunto de trajetórias estáveis ao redor da Lua e outro que forma rotas de escape e captura da Lua através de L1 e L2.



## **ALTERNATIVE PATHS IN THE EARTH-MOON SYSTEM**

### **ABSTRACT**

The Restricted Three Body Problem predicts the existence of the several families of periodic orbits in the Earth-Moon System. In this work, we studied two of them – the Family G of direct periodic orbits around the L1 and the Family H2 of direct periodic orbits around the Moon. Our investigations considered, besides the Restricted Three body Problem, the Four Body Problem Sun-Earth-Moon-probe added of the due disturbances to the terrestrial oblateness and the pressure of solar radiation. Then, from the Family G's orbits, we defined two groups of paths that form links among the Earth and the Moon, whose characteristics allow transfers among terrestrial and lunar orbits of low altitude and large inclinations, and a route of escape of the System Earth-Moon. Already starting from Family H2's orbits, we defined a group of stable paths around of the Moon and another that forms routes of escape and capture of the Moon through L1 e L2.



## SUMÁRIO

Pág.

### LISTA DE FIGURAS

### LISTA DE TABELAS

<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b>	<b>25</b>
1.1 Retrospectiva Histórica.....	25
1.2 Motivação .....	27
1.3 Objetivos.....	28
1.4 Organização .....	29
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>31</b>
2.1 Introdução.....	31
2.2 Sistemas Dinâmicos.....	31
2.3 Órbitas Periódicas e Quase-periódicas .....	33
2.4 Captura Gravitacional.....	36
<b>CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução.....	39
3.2 Problema de $N$ -corpos.....	39
3.3 Problema de Quatro Corpos Sol-Terra-Lua-sonda .....	43
3.4 Problema Circular, Planar, Restrito de Três Corpos (PR3C).....	46
3.4.1 Equações de Movimento do PR3C.....	47
3.4.2 Integral de Jacobi.....	52
3.4.3 Pontos de Equilíbrio Lagrangianos.....	54
3.4.4 Órbitas Periódicas no PR3C .....	57
3.5 Achatamento Terrestre.....	58
3.5.1 Descrição do Fenômeno .....	58
3.5.2 Descrição Matemática do Achatamento .....	59
3.6 Pressão de Radiação Solar .....	63
3.6.1 Descrição do Fenômeno .....	63

3.6.2	Descrição Matemática de um Modelo para Pressão de Radiação .....	64
3.7	Equações de Movimento do Problema de Quatro Corpos Completo (P4C) .....	67
<b>CAPÍTULO 4 - TRAJETÓRIAS DE LIGAÇÃO TERRA-LUA</b>		<b>69</b>
4.1	Introdução .....	69
4.2	Família G e suas Características .....	70
4.3	Objetivos e Metodologia .....	76
4.3.1	Objetivos .....	76
4.3.2	Metodologia .....	76
4.4	Definição do Conjunto de Trajetórias G .....	79
4.5	Elos entre a Terra, a Lua e o Espaço Exterior .....	83
4.6	Conclusões sobre o Capítulo .....	97
<b>CAPÍTULO 5 - TRAJETÓRIAS G E O PROBLEMA DE QUATRO CORPOS</b>		<b>101</b>
5.1	Introdução .....	101
5.2	Metodologia .....	101
5.3	Trajetórias G para o Problema de Quatro Corpos (P4C) .....	103
5.4	Elos entre a Terra, a Lua e o Espaço Exterior para o P4C .....	106
5.5	Efeitos da Pressão de Radiação Solar .....	113
5.6	Conclusões sobre o Capítulo .....	114
<b>CAPÍTULO 6 - TRANSFERÊNCIAS TERRA-LUA</b>		<b>117</b>
6.1	Introdução .....	117
6.2	Transferência Direta .....	117
6.3	Transferência Direcionada .....	121
6.3.1	Metodologia da Transferência Direcionada .....	122
6.3.2	Transferência Direcionada para $H_T = 240\text{km}$ .....	125
6.4	Conclusões sobre o Capítulo .....	129
<b>CAPÍTULO 7 - TRANSFERÊNCIAS TERRA-TERRA</b>		<b>135</b>
7.1	Introdução .....	135
7.2	Metodologia .....	136
7.3	Direcionamento para a Terra .....	139
7.3.1	Direcionamento a partir do Primeiro Apogeu .....	139

7.3.2 Direcionamento a partir do Segundo Apogeu.....	142
7.4 Comparação com o Método de Hohmann.....	144
7.5 Conclusões sobre o Capítulo .....	147
<b>CAPÍTULO 8 - TRAJETÓRIAS ESTÁVEIS AO REDOR DA LUA</b>	<b>149</b>
8.1 Introdução.....	149
8.2 Famílias H1 e H2 e suas Principais Propriedades .....	150
8.3 Metodologia e Critério de Estabilidade .....	155
8.4 Evolução da Região de Estabilidade.....	159
8.4.1 Efeitos da Excentricidade da Órbita da Terra .....	159
8.4.2 Efeitos da Excentricidade da Órbita Lua .....	160
8.4.3 Efeitos da Inclinação da Órbita Lua .....	161
8.4.4 Problema de Quatro Corpos Completo (P4C sem Pressão de Radiação).....	163
8.4.5 Problema de Quatro Corpos Completo (P4C com Pressão de Radiação).....	164
8.5 Evolução das Trajetórias.....	166
8.6 Conclusões sobre o Capítulo .....	169
<b>CAPÍTULO 9 - TRAJETÓRIAS ESTÁVEIS AO REDOR DA LUA II</b>	<b>173</b>
9.1 Introdução.....	173
9.2 Metodologia.....	173
9.3 Evolução da Região de Estabilidade.....	174
9.4 Evolução das Trajetórias.....	179
9.5 Conclusões sobre o Capítulo .....	184
<b>CAPÍTULO 10 - ROTAS DE ESCAPE E CAPTURA ATRAVÉS DE L1 E L2</b>	<b>185</b>
10.1 Introdução.....	185
10.2 Metodologia.....	185
10.3 Definição das Rotas .....	187
10.3.1 Rotas de Escape e Captura Através de L1 .....	187
10.3.2 Rotas de Escape e Captura Através de L2 .....	191
10.4 Discução sobre Aquisição das Rotas .....	191
10.5 Conclusões sobre o Capítulo .....	193

<b>CAPÍTULO 11 - CONCLUSÕES FINAIS</b>	<b>197</b>
11.1 Introdução .....	197
11.2 Conclusões Finais sobre a Primeira Parte (Trajetórias G).....	197
11.3 Conclusões Finais sobre a Segunda Parte (Órbitas Estáveis ao Redor da Lua) ....	198
11.4 Trabalhos Futuros .....	199
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>201</b>
<b>APÊNDICE A - SISTEMA TERRA-LUA</b>	<b>207</b>
A.1 Definição do Sistema Terra-Lua .....	207
A.2 Descrição das Principais Características do Sistema Terra-Lua .....	210
<b>APÊNDICE B - SISTEMAS DE COORDENADAS</b>	<b>215</b>
B.1 Introdução .....	215
B.2 Sistema de Coordenadas Cartesianas Heliocêntricas .....	215
B.3 Sistema de Coordenadas Cartesianas Geocêntricas Equatoriais .....	217
B.4 Sistema de Coordenadas Cartesianas Lunicêntricas ou Selenocêntricas .....	218
B.5 Equações de Transformação entre os Sistemas de Coordenadas .....	220
<b>APÊNDICE C - TRANSFERÊNCIAS TERRA-LUA CONVENCIONAIS</b>	<b>225</b>
C.1 Introdução .....	225
C.2 Transferência de Hohmann .....	226
C.3 Transferência Via Elipse de Energia Mínima .....	229
C.4 Método <i>Patched-conics</i> .....	238
C.5 Manobras para Mudança de Plano .....	252
C.5.1 Mudança de Plano Simples .....	252
C.5.2 Mudança de Plano via Hohmann .....	254

## LISTA DE FIGURAS

3.1 – Sistema de coordenadas baricêntricas inercial, ou sideral.....	47
3.2 – Sistema de coordenadas baricêntricas girante, ou sinódico.....	49
3.3 – Curvas de velocidade zero para o PR3C.....	54
3.4 – Pontos de equilíbrio Lagrangianos para o PR3C Terra-Lua-partícula .....	56
3.5 – Sistema de coordenadas planetocêntricas Cartesianas .....	60
3.6 – Sistema de coordenadas planetocêntrica esféricas .....	61
3.7 – Vetores posição do Sol e veículo .....	65
4.1 – Exemplos de órbitas periódicas da Família G .....	72
4.2 – Trajetória instável associadas à Família G.....	75
4.3 – Ilustração das quantidades envolvidas na transferência Terra-Lua.....	77
4.4 – Diagrama Velocidade de injeção, $V_I$ , versus altitude da órbita terrestre, $H_T$ , para 160 = $H_T$ = 60000km .....	80
4.5 – Diagrama $V_I \times H_T$ , para 160 = $H_T$ = 700km.....	80
4.6 – Diagrama $V_I \times H_T$ , para 160 = $H_T$ = 245km.....	82
4.7 – Trajetória G típica.....	85
4.8 – Elos de ligação entre a Terra e a Lua .....	88
4.9 – Trajetória de escape partindo de $H_T$ = 160km.....	90
4.10 – Trajetória de escape partindo de $H_T$ = 60000km.....	92
4.11 – Trajetória fora da rota de escape.....	93
4.12 – Rota de escape do Sistema Terra-Lua .....	94
4.13 – Distância Terra-sonda em função tempo .....	95
4.14 – Manobra de <i>Swing-by</i> e algumas de suas quantidades .....	96
4.15 – Energia Terra-sonda em função do tempo para trajetória da Fig. 4.6 .....	98
4.16 – Energia Terra-sonda em função do tempo para trajetória da Fig. 4.7.b .....	98
4.17 – Energia Terra-sonda em função do tempo para trajetória da Fig. 4.8 e 4.9.....	99
5.1 – Diagrama Velocidade de injeção, $V_I$ , versus altitude da órbita terrestre, $H_T$ , para 160 = $H_T$ = 60000km, para o P4C.....	104

5.2 – Diagrama $V_I \times H_T$ , para $240 = H_T = 245\text{km}$ , para o P4C.....	105
5.3 – Trajetória típica encontrada para o P4C .....	107
5.4 – Inclinação da órbita osculadora lunar e acelerações sobre a sonda feitas pelo Sol, a Terra e a Lua em função do tempo .....	108
5.5 – Elos Terra-Lua-Terra para o P4C .....	110
5.6 – Rota de escape para o P4C .....	111
5.7 – Energia Terra-sonda em função do tempo.....	112
5.8 – Distância Terra-sonda em função do tempo .....	113
6.1 – Geometria ilustrativa da transferência direcionada .....	124
6.2 – $V_{\text{Total}}$ versus $i, \Sigma, H_L, V_{\text{Diretor}}$ e $V_2$ , para $20 = H_L = 10000\text{km}$ .....	130
6.3 – $V_{\text{Total}}$ versus $i, \Sigma, H_L, V_{\text{Diretor}}$ e $V_2$ , para $20 = H_L = 120\text{km}$ .....	131
7.1 – Trajetória típica encontrada para o P4C .....	136
7.2 – Inclinação e Distância Terra-sonda em função do tempo.....	137
7.3 – Magnitude da velocidade em função do tempo .....	138
7.4 – $V_{\text{Total}}$ versus $i, \Sigma, H_L, V_{\text{Diretor}}$ e $V_2$ para direcionamento no 1º apogeu.....	143
7.5 – $V_{\text{Total}}$ versus $i, \Sigma, H_L, V_{\text{Diretor}}$ e $V_2$ para direcionamento no 2º apogeu.....	145
8.1 – Curvas de velocidade zero p/ $C_j(L1) = 3,1883$ ; $C_j = 3,1883$ e $C_j(L2) = 3,1712$ ..	151
8.2 – Órbitas periódicas das Famílias H1 e H2 .....	152
8.3 – Órbitas periódicas da Família H1 .....	154
8.4 – Órbitas periódicas da Família H2 .....	154
8.5 – Diagrama <i>exa</i> para região de estabilidade associada à Família H1 .....	156
8.6 – Diagrama <i>exa</i> para região de estabilidade associada à Família H2 .....	156
8.7 – Diagrama <i>exa</i> para região de estabilidade associada à Família H2 ampliada .....	158
8.8 – Diagrama <i>exa</i> para região de estabilidade para P4C caso plano e circular .....	158
8.9 – Diagrama <i>exa</i> para região de estabilidade para P4C e a excentricidade da Terra	160
8.10 – Diagrama <i>exa</i> para região de estabilidade para P4C e a excentricidade da Lua	162
8.11 – Diagrama <i>exa</i> para região de estabilidade para P4C e a inclinação da Lua .....	162
8.12 – Diagrama <i>exa</i> para região de estabilidade para P4C completo .....	163

8.13 – Diagrama $e \times a$ para região de estabilidade para P4C e P4C c/ pressão radiação	165
8.14 – Trajetória estável para o PR3C.....	167
8.15 – Trajetória estável para o P4C.....	167
8.16 – Elementos orbitas das trajetórias estáveis para o PR3C e P4C .....	171
9.1 – Posicionamento relativo entre a Terra, a Lua e a sonda e o seus planos orbitais.	174
9.2 – Diagrama $e \times a$ para $i = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ e $50^\circ$ .....	178
9.3 – Trajetória para $i = 20^\circ$ .....	180
9.4 – Evolução no tempo dos elementos orbitais da Trajetória com $i = 20^\circ$ .....	181
9.5 – Trajetória para $i = 40^\circ$ .....	182
9.6 – Evolução no tempo dos elementos orbitais da Trajetória com $i = 40^\circ$ .....	183
10.1 – Diagrama $e \times a$ em termos do tempo de captura .....	186
10.2 – Trajetória de escape através de L1.....	188
10.3 – Trajetória de escape através de L1 e L2. ....	189
10.4 – Rotas de escape e captura através de L1.....	190
10.5 – Superposição de canais de captura e escape através de L1 e L2 dentro da esfera de influência da Lua.....	192
10.6 – $V_1$ , Velocidade no apogeu e tempo de vôo em função da distância Terra-sonda .....	194
10.7 – Possibilidades de aquisição para trajetórias de escape através de L2.....	195
A.1 – Sistema Binário Terra-Lua.....	210
A.2 – Aceleração perturbadora $s/$ a Lua causada pelo deslocamento da maré oceânica.	211
A.3 – Elementos orbitais da Lua no sistema de coordenadas geocêntricas .....	212
B.1 – Sistema de coordenadas Cartesianas Heliocêntricas .....	216
B.2 – Sistema de coordenadas Cartesianas Geocêntricas.....	218
B.3 – Sistema de coordenadas Cartesianas Lunicêntricas ou Selenocêntricas.....	219
C.1 – Geometria básica da transferência de Hohmann.....	226
C.2 – $\Delta V_{Total} \times H_2$ e $T_{vôo} \times H_2$ para transferência de Hohmann.....	230

C.3 – Geometria básica da transferência Terra-Lua via elipse de energia mínima .....	232
C.4 – $\Delta V_{Total} \times H_2$ e $T_{v\hat{o}o} \times H_2$ p/ transferência Terra-Lua via elipse de energia mínima	236
C.5 – Trajetória com condições iniciais para transferência Terra-Lua via elipse de energia mínima e distância Terra-Lua em função do tempo .....	237
C.6 – Geometria básica da transferência Terra-Lua <i>Patched-conics</i> .....	239
C.7 – Geometria da transferência entre a trajetória selenocêntrica e a órbita lunar final .....	246
C.8 – $\Delta V_{Total} \times H_1$ para transferência <i>Patched-conics</i> .....	249
C.9 – Trajetória com condições iniciais para transferência Terra-Lua <i>Patched-conics</i> e distância Terra-Lua em função do tempo .....	251
C.10 – Geometria da mudança de plano simples.....	253
C.11 – Diagrama $\Delta V_{Total} \times \mathbf{q}$ .....	253
C.12 – Geometria da transferência de Hohmann com mudança de plano .....	255
C.13 – Triângulo de velocidades da transferência de Hohmann com mudança de plano .....	255
C.14 – $\Delta V_{Total} \times H_2$ e (b) $T_v \times H_2$ para $\mathbf{q} = 60^\circ$ .....	257
C.15 – $\Delta V_{Total} \times H_2$ e (b) $T_v \times H_2$ para $\mathbf{q} = 90^\circ$ .....	258

## LISTA DE TABELAS

3.1 – Coordenadas dos pontos de equilíbrio Lagrangianos do Sistema Terra-Lua.....	56
4.1 – Relação entre $*$ e $H_L$ para periluna entre L1 e a Lua .....	82
4.2 – Relação entre $*$ e $H_L$ para periluna entre após a Lua.....	82
4.3 – Principais propriedades das trajetórias G para PR3C.....	83
5.1 – Principais propriedades das trajetórias G para P4C.....	105
6.1 – Altitudes, $\Delta V$ 's e para Trajetórias G, Hohmann e Patched- <i>conics</i> para o PR3C..	
.....	121
6.2 – Altitudes, $\Delta V$ 's e para Trajetórias G, Hohmann e Patched- <i>conics</i> para o P4C....	121
7.1 – $\Delta V$ 's, altitudes e tempos de vôo para transferência direcionada e Hohmann com	
mudança de plano .....	146
10.1 – Principais propriedades das trajetórias das rotas de escape e captura da Lua ....	191
C.1 – ) $V$ 's e tempos de vôo para transferências Terra-Lua via Hohmann.....	229
C.2 – ) $V$ 's necessários para uma rotação de $60^\circ$ .....	252
C.3 – ) $V$ 's, tempos de vôo e $\forall_1$ ótimo para transferência via Hohmann para $60^\circ$ .....	256
C.4 – ) $V$ 's, tempos de vôo e $\forall_1$ ótimo para transferência via Hohmann para $90^\circ$ .....	256



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Retrospectiva Histórica

O fascínio de homem pela Lua remonta a pré-história. Por milênios, ela orientou os camponeses nos plantios e colheitas, serviu – e ainda serve em algumas culturas – como calendário, guiou nômades e navegantes, inspirou poetas e fomentou nosso imaginário personificando deuses e mitos populares. Tamanho é este fascínio, que menos de 1 ano após o lançamento do primeiro satélite artificial, o Sputnik, em 4 de outubro de 1957 pela antiga União Soviética, foi lançada a primeira sonda com destino à Lua, a Able 1, em agosto de 1958 pelos Estados Unidos. Tal engenho sofreu pane ao atingir 77km da superfície terrestre. No entanto, em 04 de janeiro de 1959, a sonda Soviética Luna 1 passou a 5.955km da superfície da Lua e, em 13 de setembro deste ano, a também Soviética Luna 2 tornou-se o primeiro objeto construído pelo homem a atingir a superfície lunar. Apesar de fatores políticos terem sido preponderantes nos primeiros anos da era espacial, não podemos negar que este fascínio também norteou as cabeças da época, pois nos dois primeiros anos da exploração espacial foram executadas 9 missões com destino ao nosso satélite (Mourão, 1995). O interesse pela Lua continuou grande e até meados da década de setenta foram executadas 75 missões de sondas automáticas com o objetivo de estudá-la. Além dessas, também foram executadas 17 missões do projeto *Apollo*, das quais 6 alunissaram levando tripulações humanas que de lá trouxeram 386,7kg de rochas.

Após a década de setenta, o interesse pela Lua diminuiu e entre 1977 e 1990 nenhuma missão tripulada ou automática retornou aos seus domínios, pelo menos, diretamente para estudá-la. Entretanto, em 1994, num feliz acaso, a sonda Norte Americana *Clementine* (Jeffrey, 2003; Monserrat, 2002; Regeon, 2002 e Feldman *et al*, 1998), destinada a pesquisas de caráter militar, reverteu esta situação. Ao orbitar a Lua por 71 dias, a *Clementine* mapeou 38.000.000km<sup>2</sup> de sua superfície em 11 comprimentos de ondas diferentes e, através de um experimento improvisado de radar, descobriu

indícios de gelo em regiões do pólo Sul lunar permanentemente sombreadas. A missão também constatou que as regiões próximas aos pólos possuem ambientes mais amenos para a instalação de futuras bases lunares. Com o objetivo de confirmar as detecções da *Clementine*, foi enviada em janeiro de 1998, pela Agência Espacial dos Estados Unidos - *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), a sonda *Lunar Prospector* que mapeou a superfície a Lua por um ano em órbitas baixas, cerca de 100km de altitude. Ela levou a bordo, entre outros equipamentos, um espectrômetro de Nêutrons capaz de detectar hidrogênio e, portanto, água indiretamente. Os dados colhidos pela missão reforçaram os indícios de gelo na Lua. Em outras frentes de pesquisa, a *Lunar Prospector* estudou o campo magnético, a crosta e as atividades tectônicas lunares.

Além da *Clementine* e da *Lunar Prospector*, em 1990, a sonda *Galileo* (NASA), a caminho de Júpiter, passou pela Lua e forneceu importantes informações sobre o hemisfério Sul de sua face oculta revelando indícios da presença de Ferro em alguns *maria*. Em 1991, a *Hiten*, primeira sonda japonesa entrou em órbita da Lua depois de uma manobra envolvendo o fenômeno de captura gravitacional (Belbruno e Miller, 1990a). Em agosto de 2003, foi lançada a SMART 1, primeira sonda lunar da Agência Espacial Européia - *European Space Agency* (ESA). A SMART 1 chegou à Lua em novembro de 2004 com objetivo de investigar com suas câmaras e espectrômetros os recursos minerais lunares e as crateras escuras à procura de gelo. A Agência Espacial Chinesa - *China National Space Agency* (CNSA), tem planos de lançar em dezembro 2006 sua primeira sonda lunar, a *Chang'e 1*, e entre 2010 e 2012, uma missão automática dotada de um veículo para explorar o solo e o subsolo da Lua. Para 2015, a China também tem planos de enviar uma outra missão automática para coletar e trazer à Terra amostras do solo e de rochas lunares. Está previsto para 2008 o lançamento da sonda Norte Americana *Reconnaissance* com a missão de procurar gelo e locais para mineração. Também em 2008, a Agência Espacial Indiana - *Indian Space Research Organization* (ISRO), pretende enviar sua primeira sonda à Lua, a *Chandrayaan-1*, que ficará em órbita polar por dois anos. Até 2020, outras missões lunares estão sendo planejadas pela NASA, ESA, CNSA, ISRO, Agência Espacial Russa - *Russian Space*

Agency (RKA) e a Agência Espacial Japonesa - *National Development Space Agency* (NASDA).

## **1.2 Motivação**

Os fortes indícios da presença de gelo nas crateras do pólo Sul lunar detectadas pela *Clementine* e *Lunar Prospector* reacenderam, sem dúvidas, o interesse pela exploração da Lua. Contudo, são necessárias mais investigações para levantar informações verdadeiramente conclusivas sobre esta descoberta, o que poderá ser feito pelas missões previstas para o futuro, tal como descrito na Seção anterior. Ainda sobre este fato, há estimativas de 11 a 300 milhões de toneladas de gelo a cerca de meio metro da superfície lunar (Monserrat, 2002 e Feldman *et al.*, 1998). Este não é um gelo comum, mas sim, uma porção de gelo com idade que pode chegar a 4 bilhões de anos, e ainda está misturado ao solo, portanto, de qualquer forma, sua utilização demanda muitos estudos. Todavia, ele poderá prover as futuras bases lunares com a água essencial à vida, e através de seu fracionamento em oxigênio e hidrogênio. Fornecer ar puro e combustível para foguetes.

Por outro lado, o interesse pela Lua não deve estar calcado somente na presença de água em suas crateras, mas também em outros benefícios que sua exploração poderá gerar. Por exemplo, apesar ser o corpo celeste mais conhecido pelo homem, ela ainda guarda inúmeros segredos sobre sua origem e estrutura interna. Sua superfície, praticamente intacta durante os últimos 4 bilhões de anos, pode conter as informações que precisamos para entender a evolução do Sistema Solar, principalmente dos planetas rochosos internos (Mercúrio, Vênus, Terra e Marte). A Lua é um ponto de observação privilegiado, sem atmosfera. Telescópios nela instalados poderão vasculhar a imensidão do Universo sem as interferências comuns do ambiente terrestre. Sua superfície também é rica em hélio-3 e em hidrogênio pesado (deutério) trazidos pelo vento solar; tais elementos poderão alimentar os futuros reatores de fusão nuclear. Seu subsolo pode conter reservas de minerais essenciais ao nosso futuro. As tripulações das futuras bases lunares poderão realizar estudos que nos ensinaram a viver e a trabalhar no espaço, sintetizar novos compostos destinados às indústrias farmacêutica, aeroespacial, eletroeletrônica, entre outras. E, é claro, tais bases também poderão alojar e treinar as

tripulações dos futuros e longos vôos interplanetários com destino à Marte e aos outros rincões do nosso Sistema Solar.

Como podemos ver, a exploração da Lua oferece, além de desafios à ciência, grandes oportunidades de desenvolvimento tecnológico para diversas áreas das atividades humanas. Mas, após o esvaziamento dos interesses estratégicos da geopolítica das décadas de 60 e 70, quando os governos arcavam sozinhos com os custos altíssimos dos programas espaciais, ainda estamos esperando uma nova onda de motivação para voltarmos à Lua. Quem sabe, desta vez, a motivação seja de ordem econômica e bastante forte para mobilizar não só os governos, mas também os investidores privados essenciais para os próximos capítulos da exploração espacial.

### **1.3 Objetivos**

Levando em conta que venha a se estabelecer em um futuro próximo uma exploração contínua de cunho científico e comercial do Sistema Solar, caberá à Lua, pelos diversos aspectos discutidos nas seções anteriores, um papel de extrema relevância neste empreendimento. Por outro lado, os futuros vôos espaciais com destino à Lua dependem do desenvolvimento de procedimentos que reduzam o consumo de combustível para torná-los economicamente viáveis sem, no entanto, serem muito longos.

Com isto em mente, nós desenvolvemos este trabalho com objetivo de estudar trajetórias alternativas de baixo custo no Sistema Terra-Lua. Basicamente, investigamos os parâmetros de utilização de dois conjuntos de trajetórias bem definidas no Sistema Terra-Lua (Broucke, 1968) capazes de: 1.) Efetuar transferências diretas e/ou direcionadas entre órbitas de estacionamentos terrestres e lunares de baixas altitudes, inclusive órbitas lunares de grandes inclinações, com tempo de vôo entre 13 e 16 dias. Este conjunto de trajetórias deriva da Família G de órbitas periódicas diretas ao redor do ponto de equilíbrio Lagrangeano L1 (A definição dos pontos de equilíbrio Lagrangeano está presente no Capítulo 3). 2.) Manter em órbita da Lua por um período de tempo igual ou superior a 1000 dias, com baixos custos de manutenção, veículos espaciais destinados a realizar um grande número de missões em prol das futuras bases lunares. Estes veículos poderão ser satélites de comunicações, sensoriamento remoto, sondas em missões de logística e em espera para manobras de *rendezvous*. Este conjunto, por sua

vez, deriva da Família H2 de órbitas periódicas diretas ao redor da Lua. Estes dois conjuntos de trajetórias são preditos pelo problema restrito de três corpos Terra-Lua-partícula (Broucke, 1968; Winter e Vieira Neto, 2002). Contudo, nós também os estudamos empreendendo extensivas investigações numéricas considerando um sistema dinâmico mais complexo e realista, o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-partícula que leva em conta a excentricidade da órbita da Terra e a excentricidade e inclinação da órbita da Lua, o achatamento terrestre e a pressão de radiação solar sobre o veículo.

#### **1.4 Organização**

Este trabalho está organizado em 11 capítulos e três apêndices. Neste primeiro Capítulo dissertamos sobre o alvo de nosso estudo e sobre nossas motivações e objetivos. No segundo Capítulo, fazemos uma revisão bibliográfica dos principais conceitos e trabalhos científicos que relacionados a nossas pesquisas. O terceiro Capítulo contém o desenvolvimento dos fundamentos físicos e matemáticos que dão embasamento às nossas investigações numéricas. No quarto, quinto, sexto e sétimo Capítulos, descrêveremos as investigações sobre o primeiro conjunto de trajetórias capazes de efetuar transferências no Sistema Terra-Lua a baixo custo. No oitavo, nono e décimo Capítulos, apresentaremos as investigações sobre uma região de órbitas estáveis ao redor da Lua, a qual corresponde ao segundo conjunto de trajetórias abordado. O décimo primeiro Capítulo traz as conclusões gerais sobre o trabalho. Nos Apêndices A, B e C, desenvolvemos de forma rápida e objetiva tópicos sobre Mecânica Orbital relevantes ao desenvolvimento desta tese.



## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 Introdução

O objetivo deste Capítulo é fazer uma revisão sucinta dos principais trabalhos existentes na literatura relacionados aos temas aqui desenvolvidos. Estes trabalhos serviram de motivação, fundamentação, enriquecimento e consulta.

Sendo esta uma tese desenvolvida sob o escopo da Mecânica Celeste, trabalhos de várias de suas subáreas serviram de norte aos nossos propósitos, mas podemos considerar seu desenvolvimento atrelado a duas delas principalmente:

- 1.) Órbitas Periódicas e Quase-periódicas;
- 2.) Manobras orbitais e captura gravitacional.

Com efeito, este Capítulo tem a seguinte organização: na próxima Seção, apontaremos os sistemas dinâmicos que fundamentam este trabalho, entretanto, o aprofundamento em seus modelos matemáticos é feito no próximo Capítulo. Nas Seções seguintes, apresentaremos os conceitos e discutiremos os principais trabalhos de referência das subáreas acima.

#### 2.2 Sistemas Dinâmicos

Três sistemas dinâmicos foram utilizados neste trabalho. Aqui, descreveremos suas principais características qualitativamente, deixando para o próximo Capítulo uma descrição matemática mais detalhada.

**Problema de dois corpos:** É amplamente conhecido e o único que possui solução analítica, podendo assim, ser considerado para obtenção de soluções aproximadas em várias partes da Mecânica Celeste. Porém as aplicações atuais exigem sistemas dinâmicos mais complexos como os problemas restritos de três e o de quatro corpos, por

exemplo. Neste trabalho, o problema de dois corpos foi utilizado para obter os elementos orbitais osculadores de trajetórias encontradas para os problemas de três e quatro corpos. Por ser bem conhecido, o problema de dois corpos não é discutido no terceiro Capítulo, mas boas descrições sobre ele podem ser encontradas em Bate *et al* (1971) e Murray e Dermott (1999).

**Problema restrito de três corpos (PR3C):** É um caso particular do problema geral de três corpos, como descreveremos no próximo Capítulo. Neste caso, a palavra restrito determina que o terceiro corpo seja uma partícula de massa negligenciável, portanto, não influenciando o movimento dos outros dois corpos que possuem massas muito maiores. Estes dois corpos são chamados de primários. O problema restrito de três corpos se divide em quatro categorias de acordo com o movimento relativo dos primários. São elas:

- 1.) Hiperbólico;
- 2.) Parabólico;
- 3.) Elíptico;
- 4.) Circular.

O último destes casos é de especial interesse em Mecânica Celeste e, em particular, neste trabalho. Nele, os dois primários movem-se em órbitas co-planares em torno do centro de massa comum a ambos. O terceiro corpo tem seu movimento restrito ao mesmo plano das órbitas dos primários. Assim, este sistema dinâmico recebe o nome de problema circular, planar, restrito de três corpos. As Equações de movimento deste sistema não podem ser encontradas analiticamente, mas apenas por cálculos numéricos. Contudo, o problema possui uma integral de movimento denominada integral de Jacobi, e cinco pontos de equilíbrio, chamados de pontos de equilíbrio Lagrangianos, propriedades que o torna muito rico em informações do ponto de vista matemático e físico. Por esse motivo, e também devido à atual hierarquia de massas do Sistema Solar (Sol, Planetas, Luas, Asteróides, Cometas e etc.), o problema restrito de três corpos fornece aproximações muito boas para os movimentos de grande número de corpos

celestes, mesmo que os movimentos destes corpos não sejam circulares e co-planares. Neste trabalho, nós aplicamos o problema restrito de três corpos e suas propriedades ao Sistema Terra-Lua-partícula (sonda), cuja razão de massa  $M_{Lua}/M_{Terra} \cong 1/(82,3)$ . Broucke (1968), Murray e Dermott (1999) e Winter e Murray (1994a e 1994b) apresentam excelentes descrições sobre o PR3C.

**Problema de quatro corpos:** Neste sistema dinâmico, as interações entre os quatro corpos devido à terceira lei de Newton, são consideradas. Suas Equações de movimento só possuem solução numérica, e ele não apresenta a riqueza de informações matemáticas do problema restrito de três corpos. Contudo, em alguns casos, ele fornece soluções mais precisas e realistas que os problemas de dois e três corpos. Nós aplicamos o problema de quatro corpos ao Sistema Sol-Terra-Lua-partícula (sonda) para estudarmos com maior precisão trajetórias de veículos espaciais no Sistema Terra-Lua.

A fim de simularmos trajetórias de veículos espaciais de forma mais próxima possível do ambiente real, nós agregamos as suas Equações de movimento as acelerações perturbadoras devido ao achatamento terrestre e à pressão de radiação solar sobre a sonda. Além disso, nós também levamos em conta em nosso modelo matemático a excentricidade da órbita da Terra, a excentricidade e a inclinação da órbita da Lua, as quais foram introduzidas ao sistema via condição iniciais.

### 2.3 Órbitas Periódicas e Quase-periódicas

De maneira geral, podemos definir uma órbita periódica da seguinte maneira: seja a equação de movimento de um corpo celeste, de massa negligenciável ou não, dada por:

$$\ddot{\mathbf{r}} = f(r, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{m}, t) \quad (2.1)$$

Onde  $r$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  e  $\ddot{\mathbf{r}}$  são as magnitudes da posição, velocidade e aceleração,  $\mathbf{m}$  é um parâmetro de massa e  $t$  é o tempo. Então, a solução,  $s$ , desta Equação, corresponderá a uma órbita periódica se  $s = s(r, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{m}, t) = s(r, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{m}, t + nT)$ , com  $n$  sendo um inteiro e  $T$  um intervalo de tempo fixo, denominado período. Logo, também é possível definirmos uma frequência fundamental para esta órbita dada por:

$$n = 2p/T \quad (2.2)$$

**Órbitas Quase-periódicas:** Uma órbita quase-periódica pode ser definida como uma soma de órbitas periódicas de frequências fundamentais diferentes. Assim, seja a equação de movimento de um corpo celeste  $\mathbf{\ddot{x}} = f(r, \mathbf{x}, \mathbf{m}, t)$ , a solução,  $u$ , desta Equação corresponderá a uma órbita quase-periódica se  $u$  puder ser expressa em termos de uma função  $U$  de  $N$  variáveis independentes  $t_i$ , com  $N = 2$ , isto é,

$$u(r, \mathbf{x}, \mathbf{m}, t) = U(r, \mathbf{x}, \mathbf{m}, t_1 + T_1, \dots, t_i + T_i, \dots, t_N + T_N) \quad (2.3)$$

Isto significa que  $U$  é periódica em cada uma das  $N$  variáveis independentes  $t_i$ , com cada uma destas variáveis possuindo um período  $T_i$ , e, conseqüentemente, uma frequência  $\nu_i = 2p / T_i$  incomensurável. As  $N$  frequências  $\nu_i$  definem, portanto, um conjunto linearmente independente, ou seja, nenhuma frequência  $\nu_i$  pode ser expressa como uma combinação linear das outras  $N - 1$  frequências usando coeficientes racionais, exceto para o caso particular  $c_1 \nu_1 + c_2 \nu_2 + \dots + c_N \nu_N = 0$ , com  $c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$ . Para mais detalhes sobre órbitas periódicas e quase-periódicas veja, por exemplo, Ott (1993).

Os conceitos de órbitas periódicas e quase-periódicas estão difundidos por todo este trabalho, por exemplo, no quarto Capítulo, em que definimos um conjunto de trajetórias capazes de efetuar transferências Terra-Lua-Terra a partir de órbitas periódicas e quase-periódicas em torno do ponto de equilíbrio Lagrangeano L1 (Família G, - Broucke, 1968). Ou no oitavo Capítulo, no qual investigamos um conjunto de órbitas lunares estáveis derivadas das órbitas periódicas diretas em torno da Lua (Família H2, - Broucke, 1968) e das órbitas quase-periódicas que oscilam em torno delas.

**Estudo em formação planetária e Astrometria:** Órbitas periódicas preditas pelo problema restrito de três corpos e regiões de órbitas estáveis associadas a elas e às órbitas quase-periódicas que oscilam em torno delas, têm sido estudadas por vários pesquisadores desde o início do século XX, como exemplo, podemos citar os trabalhos de E. Strömberg e J. P. Möller, ambos do Observatório de Copenhague, Dinamarca,

publicados entre 1913 e 1935 (*Publications of the Observatory of the Copenhagen*, No. 14, 47, 60, 64, 67, 99 e 100). Infelizmente, não foi possível estudar estes trabalhos. Contudo, a partir da década de 60 do século passado, surgiram importantes trabalhos teóricos e investigações numéricas a respeito de órbitas periódicas. Dentre eles destacamos Broucke (1962, 1968 e 2002), Hénon (1969, 1970, 1973, 1974, 1976 e 1997), Benest (1974, 1975, 1976a e 1876b), Winter e Murray (1994a e 1994b). Alguns autores têm considerado regiões de órbitas periódicas retrógradas para explicar a origem de satélites planetários irregulares de Júpiter, Saturno e Urano, por exemplo, Winter e Vieira Neto (2001), Vieira Neto e Winter (2001), Huang e Innanen (1983) e Zhang e Innanen (1988), Brunini (1996) e Murison (1989). Por outro lado, considerando o problema restrito de três corpos, tanto regiões de órbitas periódicas retrógradas ou diretas podem ser úteis para manter em órbita de um dos primários, ou de ambos, requerendo baixos custos de manutenção, por exemplo, Winter (2000), Winter e Vieira Neto (2002). Recentemente, sistemas dinâmicos mais complexos com os problemas de quatro e cinco corpos têm sido considerados para estudar novos tipos de órbitas periódicas, por exemplo, Broucke (2004) e Vanderbei (2004). Seguindo esta tendência, nós investigamos numericamente regiões de órbitas estáveis ao redor da Lua considerando o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-partícula (sonda) acrescido das propriedades das órbitas da Terra e da Lua e da pressão de radiação solar sobre a sonda.

Dentre os trabalhos listados acima, três merecem comentários mais detalhados:

1.) **Broucke, R. A., 1968:** Neste trabalho, intitulado *Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem with Earth-Moon Masses (Technical Report JPL 32-11668)*, o autor investigou numericamente 1811 órbitas periódicas considerando o problema restrito de três corpos Terra-Lua-partícula e as classificou em 10 famílias. Basicamente, as órbitas foram classificadas de acordo com seus centros: a Terra, a Lua, a Terra e a Lua e os pontos de equilíbrio Lagrangianos. Destas 10 famílias, 3 foram objetos de estudo deste trabalho:

- Família G de órbitas periódicas diretas em torno do ponto de equilíbrio Lagrangeano L1;

- Famílias H1 e H2 de órbitas periódicas diretas ao redor da Lua.

2.) **Winter, O. C., 2000:** Neste trabalho intitulado *The stability evolution of a family of simply periodic lunar orbits*, Winter estudou a evolução da estabilidade da Família C de órbitas periódicas retrógradas ao redor da Lua e das órbitas quase-periódicas que oscilam em torno delas, medindo a amplitude destas oscilações utilizando o problema restrito de três corpos e técnicas de seção de Poincaré.

3.) **Winter, O. C. e Vieira Neto, E., 2002:** No trabalho *Distant Sable Direct Orbits around the Moon*, Winter e Vieira Neto investigaram, considerando os problemas restritos de três e quatro corpos, a evolução do tamanho de uma região de órbitas estáveis associadas à Família H2 de órbitas periódicas diretas ao redor da Lua e às órbitas quase-periódicas que oscilam em torno delas.

## 2.4 Captura Gravitacional

É o mecanismo pelo qual um objeto, sob ação apenas da força gravitacional, cuja trajetória se aproxima de um corpo celeste com velocidade relativa a este corpo baixa, de tal forma que o objeto pode ser capturado e, então, passa a orbitar o corpo celeste. Este fenômeno tem sido considerado por vários pesquisadores para explicar a origem de satélites planetários, como Brunini (1996), Murison (1989) e Cordeiro, Martins e Leonel (1999).

No contexto geral do problema de três corpos, o termo captura refere-se ao fenômeno no qual os três corpos, inicialmente afastados por uma grande distância, aproximam-se um do outro de maneira que após esta aproximação a distância entre dois deles permanece limitada por algum tempo, o que caracteriza um fenômeno temporário. Para o caso da transição do movimento hiperbólico para o hiperbólico-elíptico, a captura permanente é possível. No caso hiperbólico os três corpos se aproximam a partir de distâncias infinitas um do outro. No caso hiperbólico-elíptico, a distância entre dois deles é finita, enquanto as distâncias iniciais entre o terceiro e os outros dois são infinitas. Tais fatos foram demonstrados por Y. Schimidt, G. A. Merman, K. A. Sitnokov, G. Khil'mi, V. M. Alekseev e Chan-Ho Sung, como descrito em Yamakawa (1992).

Para o problema restrito de três corpos, o terceiro corpo (partícula) se aproxima de um dos primários de uma distância finita ou infinita. Considera-se que a distância entre os dois primários seja finita. Após a aproximação, a distância entre a partícula e um dos primários varia entre valores bem determinados, e a energia orbital primário-partícula permanece negativa. Sivoza (1952) provou que para o problema hiperbólico restrito a captura permanente é possível, mas para o caso parabólico restrito, Merman (1954) demonstrou que não. Para os casos elíptico e circular, o fenômeno também é possível, mas a captura é temporária, isto é, a partícula permanece ao redor de um dos primários com energia de dois corpos primário-partícula negativa por um tempo finito. Para que a captura se torne permanente, é preciso que uma força dissipativa como o arrasto atmosférico, por exemplo, aja sobre o objeto, tal como demonstrou Hopf (1930).

**Aplicações em Astronáutica:** O mecanismo de captura gravitacional pode ser convenientemente explorado para colocar espaçonaves em órbitas de corpos celestes como uma técnica para reduzir o consumo de combustível. Entre os primeiros trabalhos sobre este tema estão Belbruno (1987, 1990, 1992a, 1992b, 1994 e 2000), Belbruno e Miller (1990a, 1990b e 1993), Belbruno e Carrico (2000), Miller e Belbruno (1991) e Krish, Belbruno e Hollister (1992). Outros trabalhos de importância sobre este tema são Yamakawa (1992) e Koon et al (2001a). Dentre os pesquisadores brasileiros que atuam nesta área, destacamos Prado (2000), Prado e Felipe (1996), Prado e Vieira Neto (2000), Prado, Vieira Neto e Ferreira (1997), Vieira Neto (1998), Vieira Neto e Prado (1996) e Winter, Vieira Neto e Prado (2003); todos estes aplicando o mecanismo para estudar a inserção de veículos espaciais em órbitas lunares. Também existem na literatura trabalhos relacionados à captura gravitacional aplicados às transferências interplanetárias com destino às luas de Júpiter, Saturno e Urano, por exemplo, Koon et al (2001b) e Lo e Ross (1998).

Uma aplicação real no mecanismo de captura gravitacional foi realizada em 1991, para inserir a sonda japonesa *Hiten* em órbita da Lua (Belbruno e Miller, 1992a).

O fenômeno de captura gravitacional e suas aplicações em Astronáutica e Astronomia estão entre as vertentes mais estudadas em Mecânica Celeste nas últimas duas décadas. Por isso, muitos de seus conceitos serviram de norte as nossas hipóteses; bem

como vários resultados relatados nas referências consultadas serviram de comparação aos nossos, em especial nos Capítulos 6 e 10.

## CAPÍTULO 3

### FUNDAMENTOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS

#### 3.1 Introdução

Neste Capítulo, estaremos apresentando os principais fundamentos Físicos e Matemáticos que dão base ao desenvolvimento deste trabalho, como os modelos matemáticos dos sistemas dinâmicos utilizados, do achatamento terrestre e da pressão de radiação solar. A apresentação destes tópicos tem a seguinte ordem: nas Seções 3.2, 3.3 e 3.4, descreveremos os problemas de  $N$ -corpos, quatro corpos Sol-Terra-Lua-partícula (uma sonda) e restrito de três corpos Terra-Lua-partícula, respectivamente. Na Seção 3.5, desenvolveremos as expressões matemáticas para a perturbação devido ao achatamento terrestre, e na Seção 3.6, para a perturbação devido à pressão de radiação solar sobre a sonda. Na última Seção, a 3.7, escreveremos as Equações de movimento do problema de quatro corpos levando em conta as perturbações devidas ao achatamento terrestre e à pressão de radiação solar.

#### 3.2 Problema de $N$ -Corpos

A meta desta Seção é obter as Equações gerais do movimento de um corpo de massa  $m$  sujeito às interações gravitacionais de outro  $N - 1$  corpos,  $N = 2$ , seja este corpo um planeta em torno de uma estrela, de uma lua em torno de um planeta ou de uma espaçonave em movimento no Sistema Solar. Consideremos um conjunto de corpos com massas  $m_i$ ,  $m_i > 0$ , e  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , todos com distribuição de massa esférica, tal que possamos considerá-los como partículas. Agora, vamos assumir que um destes corpos de massa  $m_i$  se mova no espaço tridimensional ao qual associaremos um sistema de coordenadas Cartesianas retangulares  $(x_1, x_2, x_3)$ , sob ação das forças de atração gravitacional dos outros  $N - 1$ , dadas pela Lei da Gravitação Universal de Newton. Então, seja  $\mathbf{r}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) \in \mathfrak{R}^3$  ( $\mathfrak{R} \equiv$  conjunto dos números reais) o vetor posição do

corpo de massa  $m_i$ , as Equações diferenciais que descrevem seu movimento são dadas por:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_j m_i}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (3.1)$$

Onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2\text{kg}$ ,  $m_j$  é a massa do  $j$ -ésimo corpo,  $r_{ij}$ , é a magnitude do vetor  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ , ou seja:

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = \left[ \sum_{k=1}^3 (x_{jk} - x_{ik})^2 \right]^{1/2}, \quad (j \neq i) \quad (3.2)$$

onde  $k = 1, 2$  e  $3$  denota as três coordenadas do sistema Cartesiano fixo  $(x_1, x_2, x_3)$ , com:

$$\mathbf{r}_i = x_{i1} \hat{\mathbf{i}} + x_{i2} \hat{\mathbf{j}} + x_{i3} \hat{\mathbf{k}} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{r}_j = x_{j1} \hat{\mathbf{i}} + x_{j2} \hat{\mathbf{j}} + x_{j3} \hat{\mathbf{k}} \quad (3.4)$$

A Equação (3.1) representa  $3N$  Equações diferenciais de segunda ordem e expressam o fato de que a aceleração sobre um dos  $N$  corpos resulta da soma das forças exercidas pelos outros  $N - 1$  corpos, além de levar em conta as interações mútuas entre todos eles. A solução deste problema consiste em encontrar a posição e a velocidade de cada um dos  $N$  corpos em função do tempo quando suas posições e velocidades são conhecidas em um dado tempo inicial. Contudo, para  $N > 2$ , as Equações de movimento (3.1) não podem ser encontradas analiticamente, e o problema, portanto, só admite solução por integração numérica.

A Equação (3.1) ainda pode ser colocada em uma forma mais simples, bastando dividir os seus dois membros por  $m_i$ , e considerar  $Gm_j = \mu_j$  como o parâmetro de massa do  $j$ -ésimo corpo. Este procedimento nos leva à seguinte expressão:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\mu_j}{r_{ji}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (3.5)$$

Agora, considerando a origem do sistema de coordenadas Cartesianas coincidindo com o centro de massa do corpo de massa  $m_1$ , então, podemos escrever:

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{j=2}^N \frac{m_j}{r_{j1}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_1) \quad (3.6)$$

Subtraindo da Equação (3.5) a (3.6), vem que:

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_j}{r_{ji}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) - \sum_{j=2}^N \frac{m_j}{r_{j1}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_1) \quad (3.7)$$

Lembrando que:

$$\mathbf{F}_{1i} = -\mathbf{F}_{i1} \quad (3.8)$$

e

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_j - \mathbf{F}_i - (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_j) = \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{ji} \quad (3.9)$$

Podemos reescrever a Equação (3.7) na forma:

$$\mathbf{F}_{1i} = -\frac{m_1}{r_{1i}^3} \mathbf{r}_{1i} + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N m_j \left( \frac{\mathbf{r}_{1j} - \mathbf{r}_{1i}}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_{1j}}{r_{1j}^3} \right) \quad (3.10)$$

Finalmente, retirando-se o índice 1 da Equação anterior, obtemos:

$$\mathbf{F}_i = -\frac{m}{r_i^3} \mathbf{r}_i + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^N m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (3.11)$$

Esta é a Equação diferencial do movimento relativo de um corpo de massa  $m_i$  sujeito à interação gravitacional das outras  $N - 1$  massas em relação a um referencial inercial fixo em um ponto qualquer do espaço.

Algumas considerações podem ser feitas sobre esta última Equação. Por exemplo:

- 1.) Se as massas  $m_j = 0$ , o problema de  $N$  corpos se reduz ao problema restrito de dois corpos;
- 2.) O termo  $[(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) / r_{ij}^3]$  são as acelerações sobre  $m_i$  devido às massas  $m_j, j \neq i$  (termo direto);
- 3.) O termo  $-\mathbf{r}_j / r_j^3$  é a aceleração sobre  $m_i$  devido à atração gravitacional dos corpos de massa  $m_j$  sobre o corpo de massa  $m_1$  (termo indireto).

A expressão da força gravitacional (inversamente proporcional ao quadrado da distância) torna possível escrevê-la a partir do gradiente de uma função escalar denominada função potencial,  $U$  dada por:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla U \quad (3.12)$$

Onde a função  $U$  é dada por:

$$U = -\frac{\mathbf{m}}{r_i} + \sum_{j=2}^N m_j \left( \frac{1}{r_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) = -\frac{\mathbf{m}}{r_i} + \sum_{j=2}^N m_j \left( \frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_{ij}} \right) \quad (3.13)$$

Com mais um pequeno ajuste, ainda podemos escrever:

$$U = U_0 + U_P \quad (3.14)$$

Onde  $U_0 = -\mu / r_{ij}$  é a função energia potencial gravitacional do problema de dois corpos entre o corpo de massa  $m_i$  e o corpo central de massa  $m_1$ , e  $U_P$  é a função energia potencial devido à atração gravitacional dos outros  $N - 2$  corpos e igual à segunda parcela do segundo membro da Equação (3.13).

A Equação (3.14) foi obtida considerando que todos os  $N$  corpos têm distribuição de massa esférica e que nenhuma outra interação, a não ser a atração gravitacional, exista entre eles. Mas isto não é verdade, pelo menos, para um grande número de corpos em movimento no Sistema Solar como cometas, asteróides e espaçonaves. Muitas vezes,

outras interações devem ser consideradas, por exemplo, a pressão de radiação solar, o achatamento dos planetas, entre outras. Seguindo este raciocínio, sempre que as expressões matemáticas das leis de força possam ser escritas a partir do gradiente de uma função escalar, ou seja, a partir do gradiente de uma função potencial é possível, quando necessário, acrescentar um terceiro termo à Equação (3.14) representando a função energia potencial,  $U_C$ , como o achatamento terrestre, por exemplo. Isto é:

$$U = U_0 + U_P + U_C \quad (3.15)$$

Por outro lado, não podemos fazer o mesmo para algumas outras interações, como a pressão de radiação solar, por exemplo. Nestes casos, a lei de força correspondente deve ser obtida de maneira analítica ou empírica, e, então, ser somada ao segundo termo da Equação (3.11).

Este é o problema de  $N$ -corpos que interagem mutuamente devido à atração entre suas massas, prescrita pela Lei da Gravitação Universal de Newton, mas que também pode ser complementado levando em conta outras interações que não sejam de origem gravitacional puramente, como veremos nas Seções finais.

### 3.3 Problema de Quatro Corpos Sol-Terra-Lua-sonda

Vamos considerar, a princípio, um sistema de coordenadas Cartesianas retangulares inercial com origem em um ponto qualquer do Sistema Solar, e associaremos os índices 1 ao Sol, 2 à Terra, 3 à Lua e 4 à sonda. Assim, para  $N = 4$  na Equação (3.5), obtém-se:

$$\mathbf{F}_1 = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 1}}^4 \frac{m_j}{r_{j1}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_1) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{F}_2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^4 \frac{m_j}{r_{j2}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_2) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{F}_3 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^4 \frac{m_j}{r_{j3}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_3) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{a}_4 = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{m}_j}{r_{j4}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_4) \quad (3.19)$$

Escrevendo em termos das componentes, temos:

- Para o Sol,

$$a_{11} = m_2 \frac{x_{21} - x_{11}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_{31} - x_{11}}{r_{13}^3} + m_4 \frac{x_{41} - x_{11}}{r_{14}^3} \quad (3.20)$$

$$a_{12} = m_2 \frac{x_{22} - x_{12}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_{32} - x_{12}}{r_{13}^3} + m_4 \frac{x_{42} - x_{12}}{r_{14}^3} \quad (3.21)$$

$$a_{13} = m_2 \frac{x_{23} - x_{13}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_{33} - x_{13}}{r_{13}^3} + m_4 \frac{x_{43} - x_{13}}{r_{14}^3} \quad (3.22)$$

- Para a Terra,

$$a_{21} = m_1 \frac{x_{11} - x_{21}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_{31} - x_{21}}{r_{23}^3} + m_4 \frac{x_{41} - x_{21}}{r_{24}^3} \quad (3.23)$$

$$a_{22} = m_1 \frac{x_{12} - x_{22}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_{32} - x_{22}}{r_{23}^3} + m_4 \frac{x_{42} - x_{22}}{r_{24}^3} \quad (3.24)$$

$$a_{23} = m_2 \frac{x_{13} - x_{23}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{x_{32} - x_{23}}{r_{23}^3} + m_4 \frac{x_{43} - x_{23}}{r_{24}^3} \quad (3.25)$$

- Para a Lua,

$$a_{31} = m_1 \frac{x_{31} - x_{11}}{r_{13}^3} + m_2 \frac{x_{31} - x_{21}}{r_{23}^3} + m_4 \frac{x_{41} - x_{31}}{r_{34}^3} \quad (3.26)$$

$$a_{32} = m_1 \frac{x_{32} - x_{12}}{r_{13}^3} + m_2 \frac{x_{32} - x_{22}}{r_{23}^3} + m_4 \frac{x_{42} - x_{32}}{r_{34}^3} \quad (3.27)$$

$$a_{33} = m_1 \frac{x_{33} - x_{13}}{r_{13}^3} + m_2 \frac{x_{33} - x_{23}}{r_{23}^3} + m_4 \frac{x_{43} - x_{33}}{r_{34}^3} \quad (3.28)$$

- Para a sonda,

$$\ddot{x}_{41} = m_1 \frac{x_{41} - x_{11}}{r_{14}^3} + m_2 \frac{x_{41} - x_{21}}{r_{24}^3} + m_3 \frac{x_{41} - x_{31}}{r_{34}^3} \quad (3.29)$$

$$\ddot{x}_{42} = m_1 \frac{x_{42} - x_{12}}{r_{14}^3} + m_2 \frac{x_{42} - x_{22}}{r_{24}^3} + m_3 \frac{x_{42} - x_{32}}{r_{34}^3} \quad (3.30)$$

$$\ddot{x}_{43} = m_1 \frac{x_{43} - x_{13}}{r_{14}^3} + m_2 \frac{x_{43} - x_{23}}{r_{24}^3} + m_3 \frac{x_{43} - x_{33}}{r_{34}^3} \quad (3.31)$$

Onde:

$$r_{12}^2 = (x_{21} - x_{11})^2 + (x_{22} - x_{12})^2 + (x_{23} - x_{13})^2 \quad (3.32)$$

$$r_{13}^2 = (x_{31} - x_{11})^2 + (x_{32} - x_{12})^2 + (x_{33} - x_{13})^2 \quad (3.33)$$

$$r_{14}^2 = (x_{41} - x_{11})^2 + (x_{42} - x_{12})^2 + (x_{43} - x_{13})^2 \quad (3.34)$$

$$r_{23}^2 = (x_{31} - x_{21})^2 + (x_{32} - x_{22})^2 + (x_{33} - x_{23})^2 \quad (3.35)$$

$$r_{24}^2 = (x_{41} - x_{21})^2 + (x_{42} - x_{22})^2 + (x_{43} - x_{23})^2 \quad (3.36)$$

$$r_{34}^2 = (x_{41} - x_{31})^2 + (x_{42} - x_{32})^2 + (x_{43} - x_{33})^2 \quad (3.37)$$

e

- Massa do Sol,  $m_1 = 1,98911 \times 10^{30} \text{kg} \Rightarrow \mu_1 = Gm_1 = 1,32673637 \times 10^{20} \text{m}^3/\text{s}^2 \text{kg}$ ;

- Massa da Terra,  $m_2 = 5,97420 \times 10^{24} \text{kg} \Rightarrow \mu_2 = Gm_2 = 3,98479140 \times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2 \text{kg}$ ;

- Massa da Lua,  $m_3 = 7,34830 \times 10^{22} \text{kg} \Rightarrow \mu_3 = Gm_3 = 4,90131610 \times 10^{12} \text{m}^3/\text{s}^2 \text{kg}$ ;

- Em relação à massa da sonda, consideramos em parte de nossas simulações,  $m_4 = 307 \text{kg}$ , a mesma da sonda lunar européia SMART 1, lançada em agosto de 2003 pela ESA. Desta forma,  $\mu_4 = Gm_4 = 2,04769000 \times 10^{-8} \text{m}^3/\text{s}^2 \text{kg}$ . Como podemos ver, mesmo que as Equações (3.5) e da (3.20) até a (3.28) levem em conta as interações mútuas entre os quatro corpos, fica claro que os termos destas Equações que contém  $\mu_4$  não influenciarão o movimento dos outros corpos. Portanto, os termos destas Equações que contém  $\mu_4$  podem ser negligenciados sem perda de generalidade, e, assim, podemos nos referir a este sistema dinâmico como problema restrito de quatro corpos. Na próxima

Seção, introduziremos uma normalização baseada no Sistema Terra-Lua, que tornará este fato ainda mais evidente, e também permitirá expressar  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  e  $\mu_4$  por valores adimensionais bem menores que os expressos aqui.

A fim de conseguirmos um sistema dinâmico mais próximo do real, acrescentamos às Equações de movimento da sonda, (3.29) à (3.31), as perturbações devidas ao achatamento terrestre e à pressão de radiação solar. As expressões matemáticas associadas aos modelos que descrevem estas perturbações serão descritas nas Seções 3.5 e 3.6. Também levamos em conta a excentricidade da órbita da Terra ( $e_2 = 0,0167$ ), a excentricidade ( $e_3 = 0,0549$ ) e a inclinação ( $i_3 = 5,1454^\circ$ ) da órbita da Lua em relação à eclíptica, introduzidas ao sistema via condições iniciais.

### **3.4 Problema Circular, Planar, Restrito de Três Corpos (PR3C)**

O problema circular, planar, restrito de três corpos é um caso particular do problema geral de três corpos. O problema geral é definido como um sistema dinâmico constituído univocamente por três corpos de  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , sujeitos apenas às interações gravitacionais mútuas. Em suma, significa, dentro do discutido na Seção anterior, fazer  $N = 3$  na Equação (3.5). A solução deste problema consiste em determinar as posições e as velocidades dos três corpos em função do tempo quando suas posições e velocidades são conhecidas em um tempo inicial, isto por integração numérica.

Por sua vez, o problema circular, planar, restrito de três corpos, ao qual doravante iremos nos referir apenas por PR3C, corresponde à situação em que um dos corpos, por exemplo,  $m_3$ , possui massa negligenciável quando comparado com  $m_1$  e  $m_2$ , os quais são, como já vimos, chamados de primários. Também se considera que  $m_1$  e  $m_2$  estão em órbitas circulares diretas (sentido anti-horário) e co-planares, ambas possuindo a mesma velocidade angular em torno do centro de massa comum.  $m_3$  tem seu movimento determinado pela atração gravitacional de  $m_1$  e  $m_2$  e no mesmo plano que as contém, sem, no entanto, interferir no movimento delas.

As órbitas de objetos no Sistema Solar não estão em um mesmo plano e nem são circulares, entretanto, segundo Murray e Dermott (1999), dada a hierarquia atual de massas existente (Sol, Planetas, luas, Asteróides, anéis, espaçonaves e partículas em

geral), o PR3C é capaz de descrever com boa aproximação o movimento destes corpos de forma relativamente simples. Por esses motivos, ele é extremamente útil em Mecânica Celeste e suas propriedades, como veremos adiante, são essenciais para existência e determinação dos conjuntos de trajetórias considerados neste trabalho.

### 3.4.1 Equações de Movimento do PR3C

Para escrevermos as Equações de movimento do PR3C, vamos considerar um sistema de coordenadas Cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  fixo ao centro de massa comum aos primários  $m_1$  e  $m_2$ , tal que no instante  $t = 0$ , o eixo- $x_1$  coincida com a reta que une os centros dos primários. O eixo- $x_2$  é perpendicular ao eixo- $x_1$  e, juntos, definem o plano de movimento dos três corpos. O eixo- $x_3$  é perpendicular ao plano  $x_1x_2$  e tem a mesma direção do vetor momento angular do conjunto  $m_1$  e  $m_2$ . Esse sistema de coordenadas recebe o nome de baricêntrico inercial, ou sideral, e está ilustrado na Figura 3.1.

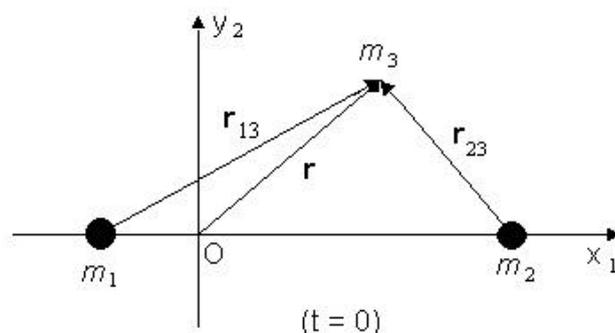


FIGURA 3.1 – Sistema de coordenadas baricêntricas inercial, ou sideral,  $(x_1, x_2, x_3)$  associado ao PR3C.

As Equações de movimento dos três corpos no sistema de coordenadas sideral podem ser obtidas diretamente da Equação (3.5). Porém, de acordo com as hipóteses assumidas, os movimentos de  $m_1$  e  $m_2$  são circulares em torno do centro de massa. Desta forma, vamos mostrar apenas as Equações de movimento do corpo de massa negligenciável  $m_3$ . Então, da Equação (3.5), temos:

$$\mathbf{g}_3 = -\frac{m_1}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} - \frac{m_2}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad (3.38)$$

Em componentes,

$$g_{13} = -m_1 \frac{x_{13} - x_{11}}{r_{13}^3} - m_2 \frac{x_{13} - x_{12}}{r_{23}^3} \quad (3.39)$$

$$g_{23} = -m_1 \frac{x_{23} - x_{21}}{r_{13}^3} - m_2 \frac{x_{23} - x_{22}}{r_{23}^3} \quad (3.40)$$

$$g_{33} = -m_1 \frac{x_{23} - x_{31}}{r_{13}^3} - m_2 \frac{x_{33} - x_{32}}{r_{23}^3} \quad (3.41)$$

com

$$r_{13}^2 = (x_{31} - x_{11})^2 + (x_{32} - x_{12})^2 + (x_{33} - x_{13})^2 \quad (3.42)$$

$$r_{23}^2 = (x_{31} - x_{21})^2 + (x_{32} - x_{22})^2 + (x_{33} - x_{23})^2 \quad (3.43)$$

Lembrando que aqui, diferente da Seção anterior, o índice 3 está associado ao corpo de massa negligenciável  $m_3$  (uma sonda, por exemplo), e os índices 1 e 2 à Terra e à Lua, respectivamente.

Embora estejamos falando do problema planar, estamos considerando a terceira dimensão ao escrevermos as Equações de movimento a fim de garantir generalidade. De qualquer maneira, basta tomar  $x_{33} = 0$  no conjunto de Equações acima, ou, simplesmente desprezar a Equação (3.41). Por outro lado, as peculiaridades do PR3C permitem que o sistema seja normalizado, o que, aliás, torna o trabalho de integração numérica das Equações de movimento mais simples sem que haja perda de generalidade. Nesta normalização, considera-se que a massa reduzida do sistema,  $\mu$ , é tal que,  $\mu = \mu_1 + \mu_2 = G(m_1 + m_2) = 1$ . A unidade de comprimento é tomada para ser igual à distância fixa entre  $m_1$  e  $m_2$ , ou seja,  $r_{12} = 1$ . Por sua vez, a unidade de tempo é definida considerando os períodos orbitais de  $m_1$  e  $m_2$  em torno do centro de massa comum sejam ambos iguais a  $2p$ ; assim, os movimentos médios  $n_1 = 2p / T_1$  e  $n_2 = 2p /$

$T_2$  de  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, serão iguais a 1, bem como também serão iguais a 1 as velocidades angulares destes dois corpos em relação ao centro de massa comum.

As massas  $m_1$  e  $m_2$  mantêm distância fixa uma da outra e possuem a mesma velocidade angular em relação ao centro de massa comum. Devido a estas características, é útil introduzir um novo sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  cuja origem também é fixa ao centro de massa comum aos primários, e com os eixos  $x$  e  $y$  girando com a mesma velocidade angular de  $m_1$  e  $m_2$  com relação à origem. Este sistema é chamado de baricêntrico girante, ou sinódico. Nele, os corpos  $m_1$  e  $m_2$  permanecem fixos sobre o eixo- $x$  e suas coordenadas são  $(-\mu_2, 0, 0)$  e  $(\mu_1, 0, 0)$ , respectivamente, tal como ilustra a Figura 3.2.

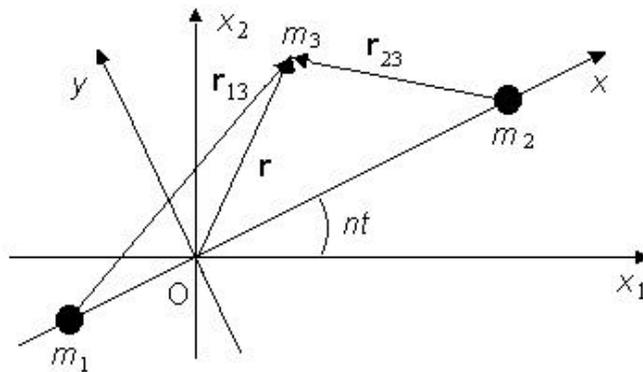


FIGURA 3.2 – Sistema de coordenadas baricêntricas girante  $(x, y, z)$ , ou sistema sinódico, associado ao PR3C.

As distâncias  $r_{13}$ ,  $r_{23}$  e  $r$  das Equações (3.39) à (3.41) e representadas na Figuras 3.2 são:

- Distância entre as massas  $m_1$  e  $m_3$ ,

$$r_{13}^2 = (x + \mathbf{m}_2)^2 + y^2 + z^2 \quad (3.44)$$

- Distância entre as massas  $m_2$  e  $m_3$ ,

$$r_{23}^2 = (x - \mathbf{m}_1)^2 + y^2 + z^2 \quad (3.45)$$

- Distância entre a origem do sistema e a massa  $m_3$ ,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.46)$$

Os sistemas baricêntricos inercial e girante obedecem às seguintes Equações de transformação:

$$\begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) & 0 \\ \sin(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Substituindo as relações (3.46) e (3.47) nas Equações (3.39), (3.40) e (3.41), obtemos as Equações de movimento de  $m_3$  no sistema sinódico:

$$\ddot{x} = -2\dot{y} \left[ m_1 \frac{(x + m_2)}{r_{13}^3} + m_2 \frac{(x - m_1)}{r_{23}^3} \right] \quad (3.48)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} \left[ \frac{m_1}{r_{13}^3} + \frac{m_2}{r_{23}^3} \right] y \quad (3.49)$$

$$\ddot{z} = - \left[ \frac{m_1}{r_{13}^3} + \frac{m_2}{r_{23}^3} \right] z \quad (3.50)$$

Notemos que no sistema de coordenadas sinódico, como  $m_1$  e  $m_2$  são fixos, somente as Equações de movimento de  $m_3$  precisam ser integradas.

As Equações de movimento do PR3C não são simples, na verdade, são fortemente não lineares. Além disso, apresentam singularidades para  $r_{ij} = 0$ . Suas soluções não podem ser obtidas analiticamente, independente do sistema de coordenadas em que estejam escritas. No entanto, cálculos numéricos podem apresentar soluções muito próximas das reais.

Uma das mais importantes características do PR3C é a chamada massa crítica que pode ser expressa pelo valor de  $\mu_2 = 0,0385$ . Este valor é a separação entre a estabilidade e instabilidade para os pontos de equilíbrio Lagrangianos (veja Subseção

3.4.3). Mas as soluções das Equações (3.48), (3.49) e (3.50) para  $\mu_2$  acima ou abaixo deste valor diferem apenas nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio, afetando pouco as soluções gerais do sistema. Para qualquer aplicação do PR3C no Sistema Solar, no entanto,  $\mu_2 < 0,0385$ .

As Equações de movimento do corpo de massa  $m_3$  escritas nos sistemas de coordenadas baricêntricas inercial e girante podem ser reescritas a partir da definição de funções escalares denominadas, cada uma, função potencial. A função potencial definida no sistema de coordenadas baricentricas inercial tem a forma:

$$V = -\frac{m_1}{r_{13}} - \frac{m_2}{r_{23}} \quad (3.51)$$

E as Equações de movimento (3.39) à (3.41) podem ser reescritas como:

$$\ddot{x}_{13} = -\frac{\partial V}{\partial x_{13}} \quad (3.52)$$

$$\ddot{x}_{23} = -\frac{\partial V}{\partial x_{23}} \quad (3.53)$$

$$\ddot{x}_{33} = -\frac{\partial V}{\partial x_{23}} \quad (3.54)$$

A função potencial definida para o sistema sinódico tem a forma:

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \quad (3.55)$$

Permitindo, assim, reescrever as Equações (3.48) à (3.50) como:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.56)$$

$$\dot{x} = -2\lambda \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.57)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (3.58)$$

Vamos encerrar esta Seção aplicando a normalização adotada para PR3C ao Sistema Terra-Lua.

- Unidade de comprimento (distância média Terra-Lua) = 384400km;
- Unidade de massa,  $\mu = \mu_{\text{Terra}} + \mu_{\text{Lua}} = 6,047683 \times 10^{24} \text{m}^3/\text{s}^2 \text{kg} \Rightarrow \mu_{\text{Terra}} = 0,98784936$  e  $\mu_{\text{Lua}} = 0,01215066$ ;
- Unidade de tempo = 4,348113045 dias;
- Fator de conversão de velocidades entre o sistema normalizado e o SI = 1,02321950km/s (“1 unidade de velocidade = 1,02321950km/s”).

### 3.4.2 Integral de Jacobi

No PR3C, a energia e o momento angular de  $m_3$  (partícula) não se conservam, porém o problema possui uma integral de movimento denominada integral de Jacobi, ou, simplesmente, constante de Jacobi, simbolizada por  $C_j$ . Para obtê-la, multiplica-se as Equações (3.56), (3,57) e (3.58) por  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$ , respectivamente, o que nos dá:

$$(\dot{x} - 2\lambda)\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} \quad (3.59)$$

$$(\dot{y} + 2\lambda)\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} \quad (3.60)$$

$$(\dot{z})\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} \quad (3.61)$$

Somando estas três Equações, vem que:

$$\dot{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{dt} \quad (3.62)$$

como  $\dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k}$ , vem que:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dU}{dt}, \quad (3.63)$$

que ao ser integrada, fornece:

$$U = \frac{v^2}{2} + C \quad (3.64)$$

Onde  $C$  é uma constante de integração.

$$C_j = 2C = 2U - v^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 \quad (3.65)$$

A constante de Jacobi é apenas uma integral de movimento do PR3C, na verdade ela é a única, mesmo assim, ela não pode ser considerada para se obter uma solução exata do problema. Contudo, ela pode ser utilizada para determinar regiões do sistema onde o corpo de massa negligenciável  $m_3$  não pode alcançar, ou seja, regiões proibidas à  $m_3$ . Estas regiões são obtidas fazendo  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$  na Equação (3.65), o que nos dá:

$$C_j = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) \quad (3.66)$$

Para um dado valor de  $C_j$  a Equação (3.66) define superfícies conhecidas como superfícies de velocidade zero. A interseção destas superfícies com o plano  $xy$ , por sua vez, definem as chamadas curvas de velocidade zero, podendo ser interpretadas como fronteiras que delimitam as regiões deste plano livres e proibidas à  $m_3$ . Para visualizarmos estas curvas de velocidade zero, vamos reproduzir dois exemplos que

estão em Murray e Dermott (1999), para  $C_j = 3,7000$  e  $C_j = 3,9000$  com  $\mu_1 = 0,8$  e  $\mu_2 = 0,2$ . Para o caso em que  $C_j = 3,700$ ; uma partícula em órbita de  $\mu_1$  poderá eventualmente orbitar  $\mu_2$  e vice-versa, mas ela nunca poderá escapar da área branca da Figura 3.3.a. Para  $C_j = 3,9000$ ; uma partícula em órbita de  $\mu_1$  não poderá nunca orbitar  $\mu_2$  e nem escapar da área branca ao redor de  $\mu_1$ , e vice-versa. As aplicações desta propriedade são conhecidas como conceito de estabilidade de Hill.

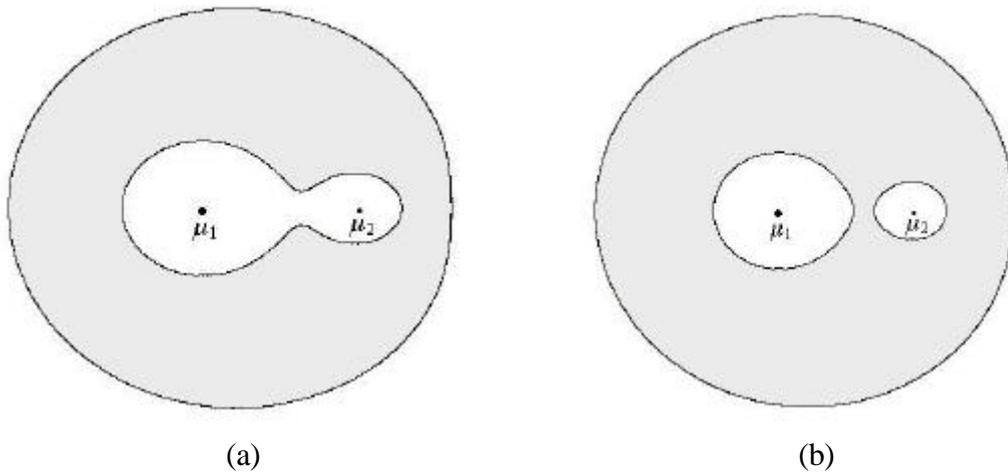


FIGURA 3.3 – Curvas de velocidade zero, regiões livres (áreas brancas) e proibidas (áreas cinzas) ao movimento de  $m_3$  no sistema de coordenadas sinódico com  $\mu_1 = 0,8$  e  $\mu_2 = 0,2$  para: (a)  $C_j = 3,700$  e (b)  $C_j = 3,9000$ .

FONTE: Adaptada de Murray e Dermott (1999, p. 70).

### 3.4.3 Pontos de equilíbrio Lagrangianos

A Equação (3.55) que fornece a energia potencia,  $U$ , no sistema de coordenadas sinódico, pode ser colocada de uma forma diferente. Para isto, consideremos as definições de  $r_{12}$  e  $r_{23}$  dadas pelas Equações (3.44) e (3.45), temos, considerando  $z = 0$ :

$$m_1 r_{13} + m_2 r_{23} = x^2 + y^2 + m_1 m_2 \quad (3.67)$$

Assim,  $U$  assume a forma:

$$U = m_1 \left( \frac{1}{r_{13}} + \frac{r_{13}^2}{2} \right) + m_2 \left( \frac{1}{r_{23}} + \frac{r_{23}^2}{2} \right) - \frac{1}{2} m_1 m_2 \quad (3.68)$$

Ao escrevermos a função potencial  $U$  na forma dada pela Equação (3.68) removemos a dependência explícita em  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e a deixamos como uma função apenas de  $r_{13}$  e  $r_{23}$ , quantidades que são sempre positivas.

Agora, imaginemos que existam sobre o plano  $xy$  do sistema de coordenadas sinodico pontos peculiares nos quais uma partícula possa ser colocada com velocidade nula com relação à origem do sistema e, neles, permanecer indefinidamente em repouso, isto é,  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Estes pontos existem e são chamados de pontos de equilíbrio Lagrangianos e são simbolizados pela letra L. Eles existem para qualquer razão de massa, isto é, para qualquer valor de  $\mu_2$ , entretanto, eles só são estáveis para os sistemas em que  $\mu_2 < 0,0385$  (Broucke, 1968). Para encontrar a localização destes pontos, nós devemos resolver simultaneamente as seguintes Equações obtidas a partir das expressões (3.59) e (3.60),

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_{13}} \frac{\partial r_{13}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_{23}} \frac{\partial r_{23}}{\partial x} = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_{13}} \frac{\partial r_{13}}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_{23}} \frac{\partial r_{23}}{\partial y} = 0 \quad (3.70)$$

Com  $U$  dada pela (3.68). A solução das Equações acima fornece novas Equações que servirão para localizar os pontos de equilíbrio Lagrangianos. São elas;

$$m_1 \left( -\frac{1}{r_{13}^2} + r_{13} \right) \frac{x + m_2}{r_{13}} + m_2 \left( -\frac{1}{r_{23}^2} + r_{23} \right) \frac{x + m_1}{r_{23}} = 0 \quad (3.71)$$

$$m_1 \left( -\frac{1}{r_{13}^2} + r_{13} \right) \frac{y}{r_{13}} + m_2 \left( -\frac{1}{r_{23}^2} + r_{23} \right) \frac{y}{r_{23}} = 0 \quad (3.72)$$

As soluções destas Equações levam às coordenadas dos cinco pontos de equilíbrio Lagrangianos. Obviamente, as coordenadas destes pontos dependerão dos valores de  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , por isso, a título de exemplo, vamos mostrá-las para o problema circular, planar, restrito de três corpos Terra-Lua-partícula ( $\mu_1 = \mu_{\text{Terra}} = 0,98784396$  e  $\mu_2 = \mu_{\text{Terra}} = 0,01215064$ ), cujos valores estão listados na Tabela 3.1 e suas localizações mostradas na Figura 3.4.

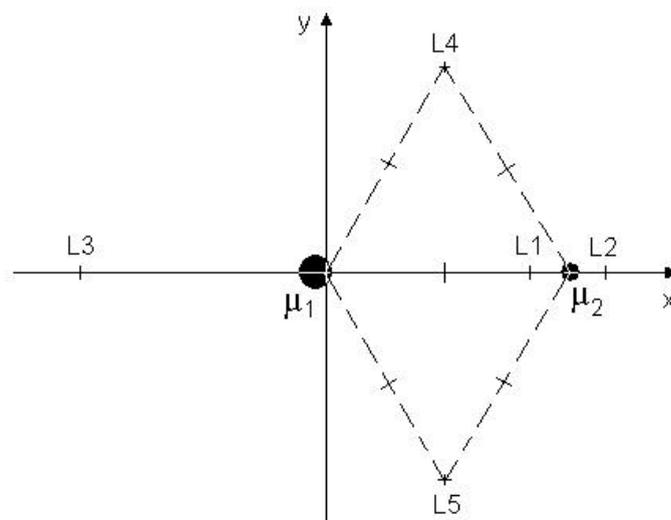


FIGURA 3.4 – Pontos de equilíbrio Lagrangianos para o PR3C Terra-Lua-partícula, no qual  $\mu_1 = \mu_{\text{Terra}} = 0,98784396$  e  $\mu_2 = \mu_{\text{Terra}} = 0,01215064$ .

TABELA 3.1 – Coordenadas dos pontos de equilíbrio Lagrangianos para o PR3C Terra-Lua-partícula.

Ponto	$x$	$y$
L1	0,836893	0
L2	1,155699	0
L3	-1,005064	0
L4	0,487845	0,866025
L5	0,487845	-0,866025

Podemos verificar a partir da Tabela 3.1 e também da Figura 3.4 que os pontos L4 e L5 definem juntamente com a Terra e a Lua triângulos equiláteros e, em virtude deste fato, são chamados de pontos de equilíbrio triangulares.

### 3.4.4 Órbitas Periódicas no PR3C

As Equações de movimento do PR3C escritas no sistema sinódico, (3.48) e (3.49), apresentam condições suficientes para existência de órbitas periódicas diretas e retrógradas. Para verificar esta afirmação, vamos introduzir três novas funções  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tal como em Broucke (1968), definidas por:

$$a = c = 1 - \left( \frac{m_1}{r_{13}^2} + \frac{m_2}{r_{23}^2} \right) \quad (3.73)$$

$$b = m_1 m_2 \left( \frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right) \quad (3.74)$$

$a$ ,  $b$  e  $c$  não são funções explícitas de  $x$  e  $y$ , mas de  $r_{13}$  e  $r_{23}$ , porém, elas possuem simetria com relação ao eixo- $y$ , mas não com relação ao eixo- $x$ . Assim, para quaisquer razões de massas  $\mu_1 / \mu_2$ , temos que:

$$a(y) = a(-y) \quad (3.75)$$

$$b(y) = b(-y) \quad (3.76)$$

$$c(y) = c(-y) \quad (3.77)$$

Agora, considerando  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tal como definidas acima, podemos reescrever as equações (3.48) e (3.49) com:

$$\ddot{x} = -2\gamma + a(x, y^2)x + b(x, y^2) \quad (3.78)$$

$$\ddot{y} = -2\gamma + c(x, y^2)y \quad (3.79)$$

Como resultado das simetrias das funções  $a$ ,  $b$  e  $c$ , verifica-se, que:

$$x(t) = x(-t) \quad (3.80)$$

$$y(t) = -y(-t) \quad (3.81)$$

$$\dot{x}(t) = -\dot{x}(-t) \quad (3.82)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(-t) \quad (3.83)$$

Estas propriedades garantem a existência de órbitas periódicas, para quaisquer razões de massas  $\mu_1 / \mu_2$ . Em particular, quando as condições iniciais são da forma:

$$(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x_0, 0, 0, \pm \dot{y}_0) \quad (3.84)$$

As órbitas possuem simetria em relação ao eixo- $x$  e, como veremos no próximo Capítulo, estas são exatamente as condições iniciais dos conjuntos de órbitas periódicas que serviram com ponto de partida para o desenvolvimento deste trabalho. Para mais detalhes, vejam Broucke (1968).

### 3.5 Achatamento Terrestre

#### 3.5.1 Descrição do Fenômeno

A Terra possui um movimento de rotação em torno do seu eixo Sul-Norte no sentido anti-horário. Este movimento além de ser responsável pelo dia e a noite, também influencia em sua forma. Na ausência de rotação, os planetas seriam esféricos, entretanto, as forças centrífugas produzidas pela rotação levam ao achatamento dos pólos e ao alargamento do equador, levando o planeta a desenvolver uma forma de esferóide oblato. Newton calculou o efeito de rotação da Terra sobre sua forma e, segundo seus cálculos, o diâmetro polar da Terra está para o diâmetro equatorial como 229/230, definindo uma elipticidade de 1/230. As determinações experimentais mais recentes dão uma elipticidade de 1/227.

### 3.5.2 Descrição Matemática do Achatamento

A partir da descrição da Seção anterior, podemos deduzir que a deformação do planeta constitui uma perturbação ao movimento de veículos espaciais nas proximidades da Terra. Por outro lado, por ser este um fenômeno geral que ocorre com qualquer planeta dotado de movimento de rotação, vamos adotar uma linha genérica para sua descrição matemática. No final, introduziremos os valores numéricos relativos à Terra para interpretar seu efeito sobre um veículo espacial no Sistema Terra-Lua.

Para escrevermos a fórmula do potencial exterior de uma esfera de massa  $M$  e raio  $R_p$ , levaremos em conta o fato de que é possível escrever para força gravitacional:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad (3.85)$$

Onde  $\nabla$  é o operador Nabla e  $U$  é o potencial gravitacional gerado pelo corpo de massa  $M$  no ponto ocupado pelo corpo de massa  $m$  que está a uma distância  $r$  de  $M$ . Considerando agora um sistema constituído além do planeta de massa  $M$  e de um segundo corpo de massa  $m$ , com  $M \gg m$ , e que a única interação existente entre eles seja a gravitacional. Podemos aplicar a definição anterior e escrever a seguinte expressão para força sobre  $m$ :

$$-\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\nabla U \quad (3.86)$$

Onde  $r$ , como dissemos acima, é a distância entre os centros de massa de  $M$  e  $m$ ,  $G$  é a constante de gravitação universal e  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário da direção  $r$ . A Figura 3.5 ilustra o sistema formado pelo planeta de massa  $M$  e o corpo de massa  $m$ . Note que, a princípio, não estamos considerando o planeta como perfeitamente esférico.

Agora, tomando o divergente nos dois lados da Equação (3.86), obtemos:

$$\nabla \cdot \left( -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) = \nabla \cdot (-\nabla U) = 0 \quad (3.87)$$

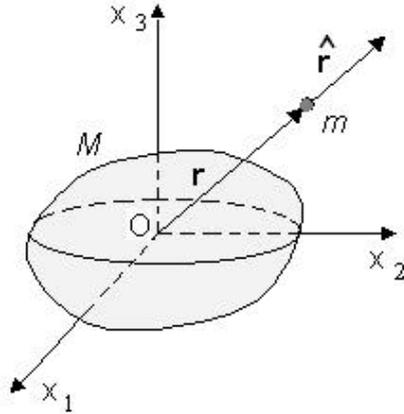


FIGURA 3.5 – Planeta de massa  $M$  e corpo de massa  $m$ , vistos em um sistema de coordenadas Cartesianas com origem no centro de massa de  $M$ .

ou ainda,

$$\nabla^2 U = 0 \quad (3.88)$$

que é conhecida como Equação de Laplace. Esta Equação pode ser resolvida por separação de variáveis que, para um sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  como o da Figura 3.6, levam a uma solução para  $U$  da forma:

$$U(r) = \frac{GMm}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_P}{r} \right)^n P_n(\text{sen} \theta) \right] \quad (3.89)$$

ou

$$U(r) = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_P}{r} \right)^n P_n(\text{sen} \theta) \quad (3.90)$$

A Equação (3.89) tem simetria em relação ao eixo- $z$  e em relação ao plano  $xy$ . Na Equação (3.90), o primeiro termo corresponde ao potencial gravitacional do planeta caso ele fosse perfeitamente esférico, a somatória do segundo termo desta Equação corresponde à função que descreve o potencial das forças perturbadoras sobre o corpo de massa  $m$  devido à forma não esférica do planeta. As variáveis  $J_n$  que aparecem no segundo termo são chamadas de coeficientes harmônicos zonais e  $P_n$  são os polinômios

de Legendre de grau  $n$  e ordem  $q = 0$ , e  $R_p$  é o raio médio do planeta. Para maiores detalhes, sobre o desenvolvimento matemático que permite chegar à Equação (3.90) veja, por exemplo, Roy (1988), Chobotv (1991) e Wertz (1978).

O primeiro termo da Equação (3.90) está incluso nas Equações de movimento dos problemas de quatro e três corpos discutidos nas Seções 3.3 e 3.4. O que vamos fazer agora é obter a expressão matemática para a perturbação experimentada pelo corpo de massa  $m$  devido ao achatamento terrestre descrito pelo coeficiente harmônico zonal  $J_2$ . Começamos esta tarefa denominando:

$$U_0 = \frac{GMm}{r} \quad (3.91)$$

e

$$R_n = -\frac{GMm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_p}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (3.92)$$

Onde  $R_n$  representa agora o potencial das perturbações devidas à forma irregular do planeta. É de nosso interesse  $R_2$ , ou seja, a perturbação devido a  $J_2$ :

$$R_2 = -\frac{GMm}{r} J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) \quad (3.93)$$

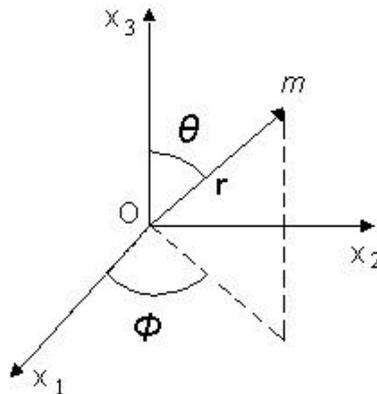


FIGURA 3.6 – Sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  e o sistema de coordenadas Cartesianas ambos com origem no centro de massa do planeta.

Cujas formas em coordenadas esféricas e Cartesianas, substituindo  $P_2$ , são, respectivamente:

$$R_2 = -\frac{GMm}{r} J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \mathbf{q} - 1 \right) \quad (3.94)$$

e

$$R_2 = -\frac{GMm}{r} J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{x_3}{r} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.95)$$

Com

$$r = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2} \quad (3.96)$$

Voltando à Equação (3.85), temos:

$$\mathbf{F} = -\nabla U_0 + \nabla R_2 \quad (3.97)$$

Da qual, a parte que nos interessa para obter a aceleração perturbadora devido ao achatamento terrestre é  $\Lambda R_2$ , e as componentes desta aceleração para um sistema de coordenadas Cartesianas planetocêntricas são dadas por:

$$A_{x1} = \frac{3GM}{2r} J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 \left[ 1 - 5 \left( \frac{x_3}{r} \right)^2 \right] x_1 \quad (3.98)$$

$$A_{x2} = \frac{3GM}{2r} J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 \left[ 1 - 5 \left( \frac{x_3}{r} \right)^2 \right] x_2 \quad (3.99)$$

$$A_{x3} = \frac{3GM}{2r} J_2 \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 \left[ 1 - 5 \left( \frac{x_3}{r} \right)^2 \right] x_3 \quad (3.100)$$

Para o caso particular da Terra,  $J_2 = 1,08263 \times 10^{-3}$ ,  $GM = \mu_{\text{Terra}} = 3,9847914 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2\text{kg}$ . E ele é responsável por perturbações seculares no argumento do perigeu ( $T$ ) e na longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ) de veículos em órbita terrestre, provocando o

movimento de leste para oeste (sentido horário) do plano orbital. Segundo Chobotov (1991), este movimento ocorre porque uma atração adicional do bojo equatorial da terra introduz uma componente de força na direção do equador do planeta. A aceleração devido a esta força faz com que o veículo atinja o plano do equador, nodo ascendente, antes do que ocorreria se a Terra fosse uma esfera perfeita. Assim, a órbita regressa de um  $\Delta\Omega$  a cada revolução. E o movimento secular do argumento do perigeu,  $T$ , ocorre porque a força não é mais inversamente proporcional ao quadrado da distância, logo, e conseqüentemente, a órbita deixa de ser uma elipse fechada.

### **3.6 Pressão de Radiação Solar**

#### **3.6.1 Descrição do Fenômeno**

De maneira geral, toda radiação eletromagnética ao incidir sobre um corpo, que a absorve e/ou reflete, exerce uma pressão sobre a superfície deste corpo. Este fenômeno previsto por James Clerck Maxwell (1831-1879) somente foi observado em 1899 pelo Físico Russo Nikolaievitch Lebedev (1866-1912). Os fótons de uma onda eletromagnética possuem cada um uma quantidade de movimento,  $p = (h\nu / c)$ , onde  $h = 6,626 \times 10^{-34}$  J/s é a constante de Plank,  $\nu$  é a frequência da onda e  $c \cong 3 \times 10^8$  m/s é a velocidade da luz. Quando uma onda incide sobre um corpo, ela transfere uma determinada quantidade de movimento para este. Nesta transferência, a superfície é submetida a uma força de pressão, isto é, à pressão de radiação; que pode ser entendida com sem os aspectos particulares da radiação eletromagnética. O campo elétrico da onda incidente sobre o corpo provoca seu deslocamento no mesmo sentido das partículas carregadas que encontram um obstáculo a sua frente. Com efeito, podemos definir a pressão de radiação como sendo o resultado da transferência de quantidade de movimento (ou momento linear) entre os fótons provenientes da radiação eletromagnética de uma estrela que incidem sobre a superfície do corpo.

A pressão de radiação solar desempenha um importante papel na Astrofísica, explicando, entre outras coisas, o equilíbrio global das estrelas e a formação das caudas de cometas. Em Astronáutica, a pressão de radiação causa variações senoidais de longo

período nos elementos orbitais de um veículo espacial. A magnitude desta variação depende da razão entre a área do veículo exposta à radiação solar e a sua massa. Para um satélite em órbita geossíncrona, por exemplo, a excentricidade pode variar entre 0,001 e 0,004 em um período de seis meses (Chobotov, 1991).

### 3.6.2 Descrição Matemática de um Modelo para Pressão de Radiação

Como vimos, a pressão de radiação solar tem origem na colisão de fótons provenientes do Sol com a superfície de um corpo (que consideraremos como sendo uma sonda). A força média sobre o veículo durante um tempo,  $\Delta t$ , de exposição é proporcional à quantidade de movimento transferido, ou seja:

$$\mathbf{F}_{med} \propto \frac{\Delta p}{\Delta t} \hat{\mathbf{r}}_{14} \quad (3.101)$$

Onde  $\Delta p$  é a variação da quantidade de movimento do veículo durante o tempo de exposição  $\Delta t$  à radiação e  $\hat{\mathbf{r}}_{14}$  é o vetor unitário da direção Sol-veículo, veja Figura 3.7. Estamos adotando a mesma convenção e simbologia da Seção 3.3, logo:

$$r_{14}^2 = (x_{14} - x_{11})^2 + (x_{24} - x_{21})^2 + (x_{34} - x_{31})^2 \quad (3.102)$$

Para uma radiação de frequência  $\nu$ , a energia de um fóton é  $E = h\nu$ , assim, a energia total incidente sobre o veículo é:

$$E_{Total} = nh\nu \quad (3.103)$$

Onde  $n$  é o número de fótons incidentes. Por outro lado, a quantidade de movimento total pode ser calculada da relação geral entre a energia relativística total,  $E_T$ , o momento total,  $\Delta p_T$ , e a massa de repouso do fóton,  $m_0$ , por:

$$E_T^2 = c^2 \Delta p_T^2 + (nm_0)^2 \quad (3.104)$$

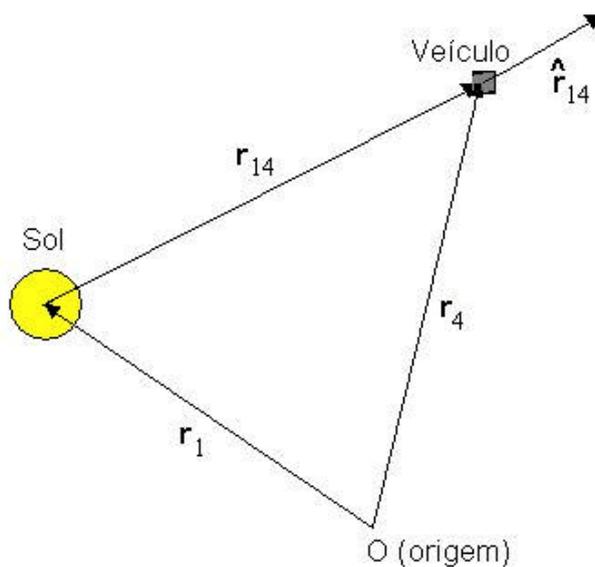


FIGURA 3.7 – Vetores posição do Sol, do veículo e Sol-veículo em relação a um sistema de coordenada fixo.

Admitindo que a massa de repouso do fóton é zero:

$$\Delta p_T = \frac{E_T}{c} \quad (3.105)$$

Logo:

$$\mathbf{F}_{med} \propto \frac{E_T}{c\Delta t} \hat{\mathbf{r}}_{14} \quad (3.106)$$

A razão  $E_T / \Delta t$  corresponde à taxa de energia transferida para o veículo por unidade de tempo, a potência. Esta, por sua vez, pode ser obtida a partir da intensidade de energia transferida,  $I_0$ , que vale, aproximadamente,  $1350\text{W/m}^2$  (Wertz, 1978) a uma unidade astronômica. Este valor pode variar em até 1% para mais ou para menos dependendo da atividade solar. Assim, a potência dissipada  $E_T / \Delta t$  sobre a área efetivamente exposta à radiação,  $A_{efe}$ , de um veículo é dada por:

$$\frac{E_T}{\Delta t} = I_0 A \quad (3.107)$$

Portanto,

$$\mathbf{F}_{med} \propto \frac{I_0 A}{c} \hat{\mathbf{r}}_{14} \quad (3.108)$$

Com  $I_0 / c = 4,5 \times 10^{-6} \text{N/m}^2 = P_0$ , sendo a pressão de radiação solar a uma unidade astronômica. Agora, introduzindo uma constante (ou uma função) de proporcionalidade,  $K$ , podemos escrever:

$$\mathbf{F}_{med} = KP_0 A \hat{\mathbf{r}}_{14} \quad (3.109)$$

A constante (ou função)  $K$  está relacionada com algumas características do veículo e de seu movimento, por exemplo, ao incidir sobre ele, a radiação eletromagnética pode ser refletida ou absorvida, total ou parcialmente, ou então, atravessar o veículo sem exercer nenhuma força sobre ele. Além disso, quando o veículo penetra na sombra do planeta, ele deixa de receber a radiação solar o que também anula a força. Também se deve levar em conta que a variação da distância Sol-planeta causa pequenas oscilações na intensidade da energia incidente sobre o veículo. Com base nestas ponderações e hipóteses, é possível atribuir ao valor de  $K$  o produto  $E\mathcal{S}(a_p/r_p)^2$ , onde  $E$  é chamado de coeficiente de eclipse e está relacionado com a posição relativa entre o Sol, o planeta e o veículo. Seu valor é 0 ou 1. Se  $E = 0$ , significa que o veículo está na sombra do planeta e não recebe radiação e, portanto, a força sobre ele é nula. Se  $E = 1$ , o veículo está iluminado recebendo diretamente a radiação solar e a força sobre ele é diferente de zero.  $\mathcal{S}$  é o coeficiente de reflexibilidade do material que reveste o veículo externamente. Este fator exprime a capacidade do material em refletir, absorver ou de ser transparente à radiação solar. Seus valores podem variar de maneira contínua entre 0 e 2. A título de exemplo, para  $\mathcal{S} = 0$ , o veículo é transparente à radiação, neste caso, a força sobre ele é nula. Para  $\mathcal{S} = 1$ , ocorre absorção total da radiação incidente, e, para  $\mathcal{S} = 2$ , o material reflete totalmente a radiação e a aceleração total é o dobro da experimentada para a absorção total (conservação do momento linear). Por fim, a razão  $(a_p/r_p)$  entre o semi-eixo maior da órbita do planeta e a distância radial Sol-planeta é responsável pelo balanceamento das oscilações da energia incidente sobre o veículo. Considerando o Sol

e a Terra, esta razão varia entre 0,967 e 1,034. Assim, a aceleração sobre o veículo devido à pressão de radiação solar pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{A}_p = P_0 E \mathbf{b} \left( \frac{A}{m} \left( \frac{a_p}{r_p} \right)^2 \right) \hat{\mathbf{r}}_{14} \quad (3.110)$$

Este modelo é padrão e pode ser aplicado em quaisquer investigações de trajetórias de espaçonaves no Sistema Terra-Lua, e até mesmo em outros sistemas. Para encerrar esta Seção, vamos expressar as componentes da aceleração em um sistema de coordenadas Cartesianas inerciais,

$$A_{px1} = P_0 E \mathbf{b} \left( \frac{A}{m} \left( \frac{a_p}{r_p} \right)^2 \right) \frac{x_{14} - x_{11}}{r_{14}} \quad (3.111)$$

$$A_{px2} = P_0 E \mathbf{b} \left( \frac{A}{m} \left( \frac{a_p}{r_p} \right)^2 \right) \frac{x_{24} - x_{21}}{r_{14}} \quad (3.112)$$

$$A_{px3} = P_0 E \mathbf{b} \left( \frac{A}{m} \left( \frac{a_p}{r_p} \right)^2 \right) \frac{x_{34} - x_{31}}{r_{14}} \quad (3.113)$$

### 3.7 Equações de Movimento do Problema de Quatro Corpos Completo (P4C)

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, foram considerados basicamente dois sistemas dinâmicos na maioria das simulações numéricas. O primeiro deles foi o problema circular, planar, restrito de três corpos Terra-Lua-sonda (PR3C) cujas Equações de movimento integradas foram as (3.48), (3.49) e (3.50). O segundo sistema dinâmico considerado foi o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-sonda tridimensional ao qual adicionamos às Equações de movimento da sonda as perturbações devidas ao achatamento terrestre e à pressão de radiação solar. Com efeito, as Equações de movimento deste sistema dinâmico para um sistema de coordenadas Cartesianas inercial, o qual em  $t = 0$  coincide com o centro de massa do Sol, são:

- Para o Sol, as Equações (3.20), (3.21) e (3.22);

- Para a Terra, as Equações (3.23), (3.24) e (3.25);

- Para a Lua, as Equações (3.26), (3.27) e (3.28);

- Para a sonda, devemos somar às Equações (3.29), (3.30) e (3.31), as acelerações devidas às perturbações do achatamento terrestre, dadas pelas Equações (3.98), (3.99) e (3.100), e da pressão de radiação solar, dadas pelas Equações (3.111), (3.112) e (3.113), isto é:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{41} = \mathbf{m}_1 \frac{x_{41} - x_{11}}{r_{14}^3} + \mathbf{m}_2 \frac{x_{41} - x_{21}}{r_{24}^3} + \mathbf{m}_3 \frac{x_{31} - x_{41}}{r_{34}^3} + A_{x1} + A_{px1} \quad (3.114)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{42} = \mathbf{m}_1 \frac{x_{42} - x_{12}}{r_{14}^3} + \mathbf{m}_2 \frac{x_{42} - x_{22}}{r_{24}^3} + \mathbf{m}_3 \frac{x_{32} - x_{42}}{r_{34}^3} + A_{x2} + A_{px2} \quad (3.115)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{43} = \mathbf{m}_1 \frac{x_{43} - x_{13}}{r_{14}^3} + \mathbf{m}_2 \frac{x_{43} - x_{23}}{r_{24}^3} + \mathbf{m}_3 \frac{x_{33} - x_{43}}{r_{34}^3} + A_{x3} + A_{px3} \quad (3.116)$$

Onde as distâncias  $r_{12}$ ,  $r_{13}$ ,  $r_{14}$ ,  $r_{23}$ ,  $r_{24}$  e  $r_{34}$  são dadas pelas Equações (3.32) à (3.37). A fim de tornarmos este sistema dinâmico mais próximo do real, também levamos em conta a excentricidade da órbita da Terra,  $e_{Terra} = 0,0167$ ; a excentricidade e inclinação da órbita da Lua,  $e_{Lua} = 0,0549$  e  $i_{Lua} = 5,1454^\circ$  (em relação à eclíptica). Estas propriedades das órbitas da Terra e da Lua foram adicionadas ao sistema via condições iniciais. Obviamente, as considerações destas propriedades tornam muito grande o número de configurações iniciais, ou do posicionamento relativo entre os quatro corpos envolvidos no início da integração. Para contornar este problema e dar caráter geral aos nossos resultados, testamos diversas configurações iniciais com objetivo explícito de assegurar que os conjuntos de trajetórias estudados neste trabalho não existam apenas para uma configuração particular. Nos Capítulos seguintes, descreveremos, quando necessário, os procedimentos para garantir a generalidade dos resultados.

## CAPÍTULO 4

### TRAJETÓRIAS DE LIGAÇÃO TERRA-LUA

#### 4.1 Introdução

No segundo Capítulo, destacamos o trabalho *Periodic Orbits in the Restricted Three-body Problem with Earth-Moon Masses* de R. A. Broucke, publicado em 1968. Neste, 1811 órbitas foram investigadas numericamente e divididas em 10 famílias e 6 classes de acordo com seus centros; Terra, Lua, Terra e Lua e pontos de equilíbrio Lagrangianos. Este Capítulo explora algumas propriedades de uma destas famílias, a Família G, de órbitas periódicas diretas ao redor de L1. Em geral, as órbitas quase-periódicas associadas às órbitas da Família G são instáveis, isto é, o alcance e a forma são sensíveis a pequenas variações nas condições iniciais, em especial da velocidade. Todavia, algumas delas passam a poucas centenas de quilômetros da superfície Terra e, entre 13 e 16 dias depois, a algumas dezenas de quilômetros da superfície da Lua. Nossa meta é estabelecer um conjunto bem definido de trajetórias derivadas das órbitas periódicas da Família G e das quase-periódicas que oscilam em torno delas a partir desta característica em especial. Tal conjunto será interpretado como um elo entre a Terra e a Lua e também o espaço exterior<sup>†</sup>. Ele ainda poderá ser útil em missões de transferência entre órbitas terrestres e lunares, ambas com baixas altitudes. Para atingir este objetivo, trabalhamos inicialmente com o problema circular, planar, restrito de três corpos (PR3C). No próximo Capítulo, estudaremos o comportamento destas trajetórias considerando um sistema dinâmico mais complexo e realista, o problema de quatro corpos completo (P4C).

O Capítulo está organizado da seguinte maneira: na próxima Seção, veremos as principais propriedades das órbitas da Família G, ressaltando aquelas que são de maior interesse às nossas investigações. Na Seção 4.3, descrevemos a metodologia empregada para obter o conjunto de trajetórias que ligam a Terra à Lua. A Seção 4.4 traz os resulta-

---

<sup>†</sup> Chamamos de espaço exterior à porção do Sistema Solar fora da esfera de influência da Terra como definida no Apêndice A.

dos numéricos e a definição do conjunto encontrado considerando o PR3C Terra-Lua-sonda. Na Seção 4.5, são discutidos e interpretados os resultados da Seção 4.4. A última Seção traz as conclusões sobre o Capítulo.

## 4.2 Família G e suas Características

A origem da Família G está, provavelmente, relacionada com uma bem conhecida família de órbitas elípticas infinitesimais em torno de L1 (Broucke, 1968). A Figura 4.1 mostra três órbitas típicas da Família G. As órbitas quase periódicas que oscilam em torno das órbitas periódicas desta família são muito instáveis, contudo, elas possuem algumas características interessantes. Para entendê-las melhor, dividiremos suas órbitas em três tipos. O primeiro tipo corresponde a órbitas de pequeno alcance em torno de L1. O segundo reúne órbitas de maior alcance com algumas passando próximas da Terra e da Lua. O terceiro tipo, também são de grande alcance, mas apresentam um *loop*. Considerando o PR3C Terra-Lua-sonda, as condições iniciais no sistema sinódico dos dois primeiros tipos têm a forma:

$$(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x_0, 0, 0, \dot{y}_0), \quad (4.1)$$

enquanto as do terceiro tipo são dadas por:

$$(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x_0, 0, 0, -\dot{y}_0) \quad (4.2)$$

De acordo com estas condições, para qualquer órbita da Família G, tem  $t = 0$ , a Terra, a sonda e a Lua estão alinhadas nesta ordem, ou seja, em conjunção inferior. A Figura 4.1 exhibe um exemplo de cada tipo, e como pode ser observado a partir das Figuras 4.1.a e 4.1.b, para os dois primeiros tipos de órbitas,  $x_0$  está entre a Terra e L1, e o ponto  $x_1$ , que corresponde à primeira passagem da sonda pelo eixo- $x$ , fica entre L1 e a Lua. Para o terceiro tipo,  $x_0$  também fica entre a Terra e L1, mas  $x_1$  fica à esquerda da Terra entre ela e L3.

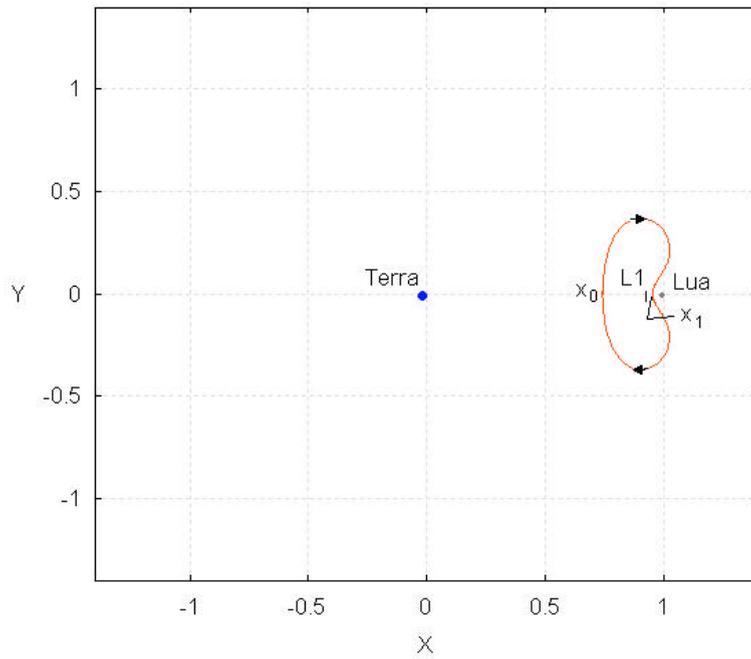


FIGURA 4.1.(a)

FIGURA 4.1 – Órbitas periódicas da Família G vistas no sistema de coordenadas sinódico: (a) Pequeno alcance com  $(x_0; 0; 0; \mathcal{E}) = (0, 741686; 0; 0; 0,1959410)$ , (b) grande alcance com  $(x_0; 0; 0; \mathcal{E}) = (0,299999; 0; 0; 1959410)$  e (c) grande alcance com *loop* e com  $(x_0; 0; 0; \mathcal{E}) = (0,399997; 0; 0; -2,271238)$ .

(continua)

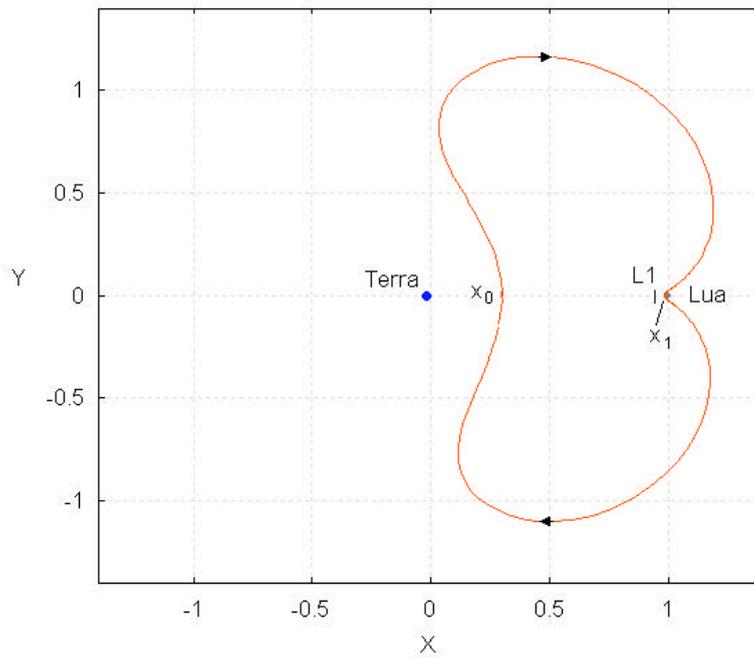


FIGURA 4.1.(b)

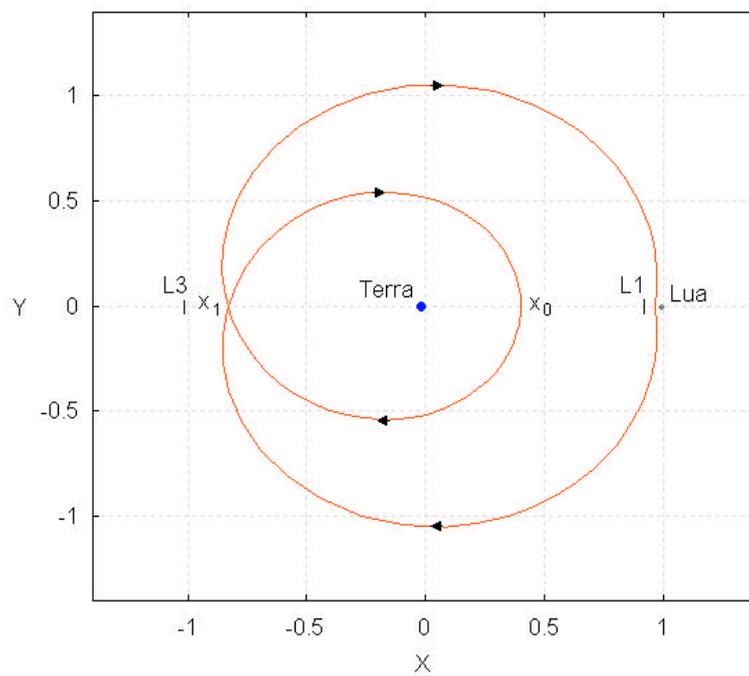


FIGURA 4.1.(c)

FIGURA 4.1 – Conclusão.

A divisão das órbitas da Família G em três diferentes tipos feitas aqui é meramente um procedimento para facilitar nossas investigações numéricas. Por isso, não nos preocupamos em estabelecer limites bem definidos entre o que chamamos de órbitas de pequeno e grande alcance em torno de L1, por exemplo. Tal divisão está atrelada apenas às aplicações almejadas. Com efeito, o que chamamos de órbitas de grande alcance, sem *loop*, possuem a interessante característica de passar a algumas centenas de quilômetro da superfície da Terra e, entre 13 e 16 dias depois, a poucas dezenas de quilômetros da superfície da Lua. Neste Capítulo, estaremos explorando esta característica para definir um conjunto de trajetórias derivadas destas órbitas capazes de efetuar uma transferência entre uma órbita de estacionamento terrestre e outra lunar, ambas de baixas altitudes. As órbitas que denominamos de pequeno alcance, por permanecerem sempre próximas de L1 e também da Lua, podem ser exploradas para manter junto à Lua constelações de veículos espaciais em vários tipos de missões. Com relação às órbitas periódicas que classificamos como sendo do terceiro tipo, por possuírem um *loop*, as quase-periódicas que oscilam em torno delas estão entre as mais instáveis. Não obstante, um limite entre elas e os outros dois tipos surge naturalmente e pode ser observado nas expressões (4.1) e (4.2) através da inversão do sinal de  $\mathcal{E}_0$ ;  $\mathcal{E}_0 > 0$  pra os dois primeiros tipos e  $\mathcal{E}_0 < 0$  para o terceiro. O *loop* surge uma vez que a órbita é direta em torno de L1.

A figura 4.2 mostra trajetória instável derivada de uma órbita periódica da Família G do segundo tipo, e que ilustra a característica que possibilita efetuar transferências entre a Terra e Lua e vice-versa. Sua condições iniciais no sistema sinódico são  $(x_0; 0; 0; \mathcal{E}_0) = (0,10000; 0; 0; 3,92978)$ . Isto significa que o ponto de partida está localizado entre a Terra e L1 a 43.110,7km do centro da Terra, e sua velocidade inicial, também em relação à Terra, é de 4,042km/s. A Figura 4.2.a mostra a evolução da trajetória no sistema sinódico, as Figuras 4.2.b, 4.2.c e 4.2.d mostram a evolução da trajetória, juntamente com a órbita da Lua, no sistema geocêntrico. A Figura 4.2.c destaca com a trajetória em questão envolve a órbita da Lua durante a passagem por ela. A Figura 4.2.d é uma ampliação ilustrando as posições relativas entre a Lua e a sonda no instante de máxima aproximação, isto é, quando a sonda atinge seu periluna (ou periselênio).

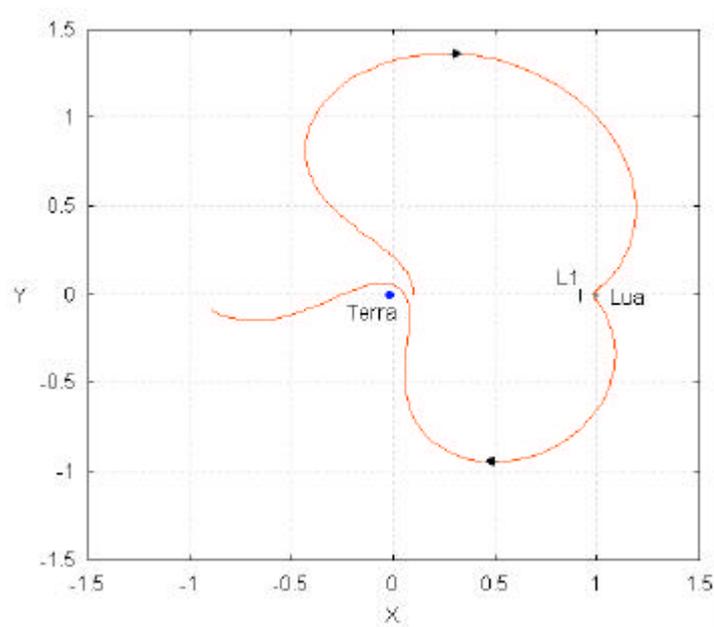


FIGURA 4.2.(a)

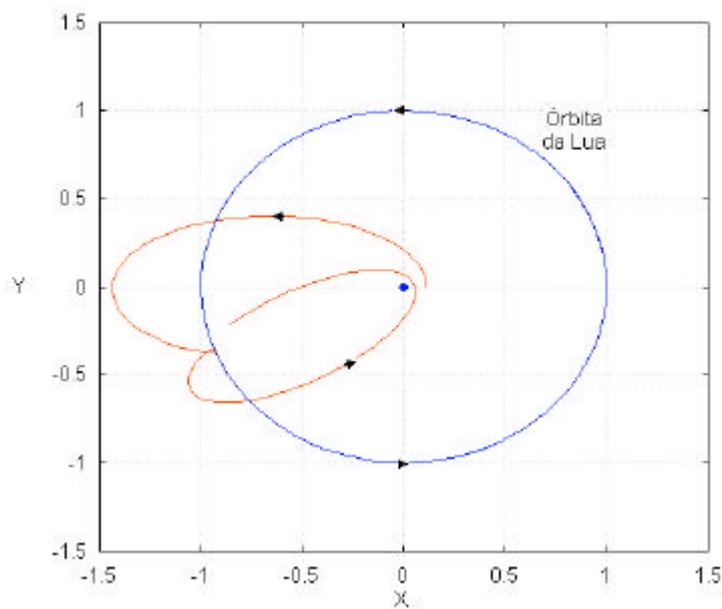


FIGURA 4.2.(b)

FIGURA 4.2 – Trajetória instável derivada de uma órbita periódica da Família G cujas condições iniciais no sistema sinódico são  $(x_0; 0; 0; \dot{y}_0) = (0,10000; 0; 0; 3,92978)$ , e em relação à Terra,  $(43.110,7\text{km}; 0; 0; 4,020\text{km/s})$ . (a) Sistema sinódico, (b) Sistema geocêntrico, juntamente com a órbita da Lua. (c) Ampliação mostrando como a trajetória envolve a órbita da Lua, (d) Sonda em seu periluna (Figura ilustrativa e fora de escala).

(continua)

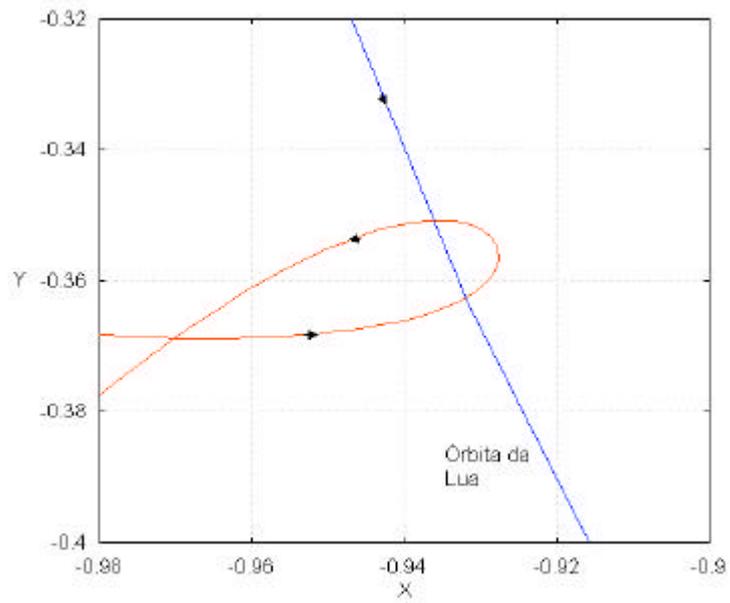


FIGURA 4.2.(c)

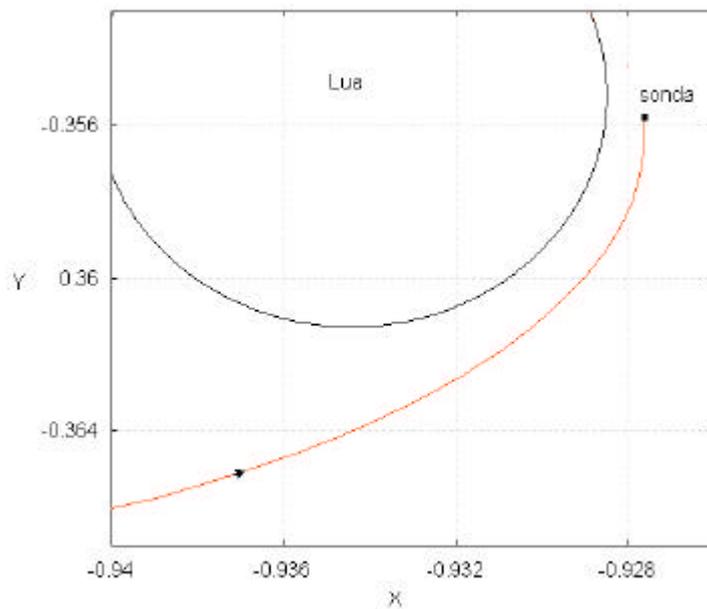


FIGURA 4.2.(d)

FIGURA 4.2 – Conclusão.

Para encerrarmos esta Seção, pensando em termos práticos, o impulso de injeção para aquisição da trajetória de transferência deve ser aplicado à sonda, em órbita terrestre, quando a Terra, a sonda e a Lua estiverem alinhadas nesta ordem. Por exemplo, para uma órbita de estacionamento terrestre circular de altitude 200km, ter-se-á uma janela de lançamento aberta a cada 1,47h aproximadamente, valor que corresponde ao próprio período da órbita, tempo que não chega a ser restritivo para manobras de transferência entre a Terra e a Lua.

### **4.3 Objetivos e Metodologia**

#### **4.3.1 Objetivos**

Nosso objetivo é selecionar numericamente um conjunto de trajetórias derivadas das órbitas da Família G e, então definir este conjunto através de uma expressão matemática empírica. Tal expressão relacionará as condições iniciais inerentes às órbitas de estacionamento terrestre e a posição na passagem pela Lua. A princípio, estaremos investigando aquelas órbitas que definimos na Seção anterior como de grande alcance com  $x_0$  entre a Terra e L1 e  $x_1$  entre L1 e a Lua.

#### **4.3.2 Metodologia**

O problema abordado considera uma sonda em órbitas circular em torno da Terra. A esta sonda, aplica-se um impulso que a colocará em uma trajetória que a levará às proximidades da Lua em condições de ser inserida em uma órbita de estacionamento lunar também circular.

Para realizar esta tarefa, consideramos órbitas de estacionamento terrestres circulares diretas cujas altitudes,  $H_T$ , variaram entre 160 e 60000km. A escolha do limite inferior de 160km para  $H_T$  seguiu o observado para a grande maioria das missões lunares já realizadas. O limite superior de 60000km foi feita respeitando os objetivos gerais do trabalho. Então, procuramos pela velocidade que a sonda deve atingir, a partir da órbita terrestre, para fazer a aquisição da trajetória que a levará às proximidades da Lua.

Denominamos esta quantidade de velocidade de injeção,  $V_I$ , e ela deve ser atingida quando a Terra, a sonda e a Lua estiverem alinhadas nesta ordem. A trajetória de interesse deverá passar sobre a superfície da Lua com uma altitude,  $H_L$ , igual ou inferior a um valor pré-determinado, inclusive, poderá ser uma trajetória de colisão<sup>†</sup> com a Lua a princípio.  $H_L$  corresponderá sempre ao periluna da trajetória de transferência. Aqui,  $H_T$  e  $V_I$  são medidos no sistema geocêntrico enquanto  $H_L$  é medido no sistema selenocêntrico. Ao estabelecermos estes critérios para seleção das trajetórias de nosso interesse, fixamos condições iniciais da forma da Equação (4.1), o que caracteriza o vínculo direto entre elas e as órbitas da Família G. A Figura 4.3 abaixo ilustra as quantidades envolvidas no problema considerado.

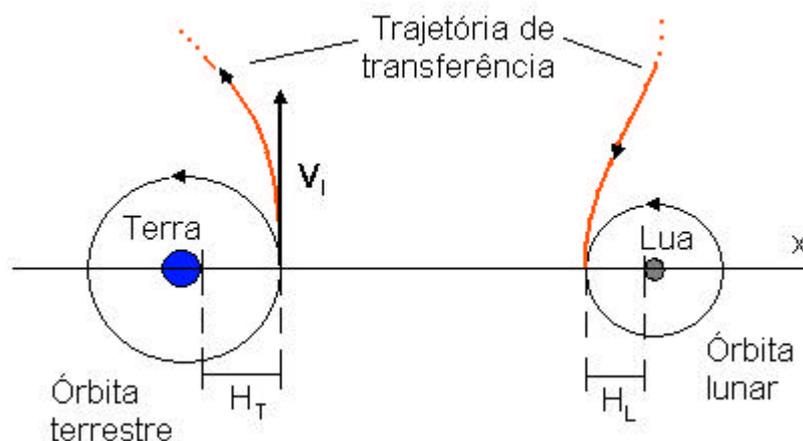


FIGURA 4.3 – Ilustração das quantidades envolvidas na transferência Terra-Lua a partir de uma trajetória derivada de uma órbita da Família G.

Em termos práticos computacionais, define-se um intervalo de variação de  $H_T$ , como vimos  $160 = H_T = 60000\text{km}$ , outro para  $V_I$ , que adotamos  $3,000 = V_I = 11,000\text{km/s}$ , e um para  $H_L$ , o qual fixamos entre 10 e 100km. Os limites inferior e superior de  $V_I$  acima são os verificados para a Família G (Broucke, 1968), e os valores estipulados para  $H_L$  se baseiam, mais uma vez, no observado para as diversas missões lunares já realizadas e em nossa intenção de investigar transferências entre órbitas terrestres e lunares de baixas

<sup>†</sup> Consideramos como trajetória de colisão toda aquela para a qual a distância Lua-sonda atinja o valor menor igual ao raio médio da Lua, 1738km, durante a integração.

altitudes. Em nossas simulações, o intervalo definido para  $H_T$  foi varrido em passos de 10km ( $\Delta H_T = 10\text{km}$ ) e o intervalo definido para  $V_I$  em passos de  $5 \times 10^{-5} \text{km/s}$  ( $V_I = 5 \times 10^{-5} \text{km/s}$ )<sup>†</sup>. Desta maneira, foram integradas  $5,04 \times 10^6$  trajetórias, cujas condições iniciais no sistema sinódico são da forma da Equação (4.1), com:

$$x_0 = R_T + H_T - \mathbf{m}_{Lua} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{v}_0 = V_I - x_0 = (V_{CT} + \Delta V) - x_0 \quad (4.4)$$

Onde  $R_T = 6370\text{km}$  (ou 0,016571279; considerando a normalização descrita na Seção 3.4) é o raio médio da Terra,  $\mu_{Lua} = 0,01215064$  (ou  $\mu_2$  também considerando a normalização da Seção 3.4) é o parâmetro de massa da Lua, e  $V_{CT}$  é a velocidade da órbita de estacionamento terrestre da sonda, dada por:

$$V_{CT} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_{Terra}}{R_T + H_T}} \quad (4.5)$$

Sendo  $\mu_{Terra} = 0,98784396$  (ou  $\mu_1$  considerando a normalização da Seção 3.4) o parâmetro de massa da Terra. Então, com estas definições, constrói-se um algoritmo que calcule todas as  $5,04 \times 10^6$  trajetórias e que selecione aquelas que passam nas proximidades da Lua com altitude  $H_L$  pertencente ao intervalo pré-estabelecido e também as trajetórias de colisão.

Embora estejamos estabelecendo condições apenas na partida, quando a sonda está em seu perigeu, e na passagem pela Lua, quando ela está no periluna, a simetria associada á periodicidade das órbitas da Família G garante que as trajetórias selecionadas, com exceção daquelas que colidem com a Lua, possuam uma “perna” de retorno à Terra, mesmo sendo instáveis. Portanto, tais trajetórias também podem ser úteis em transferência entre a Lua e a Terra.

---

<sup>†</sup> Mais tarde, veremos que  $V_I$  tão pequeno revelará uma importante característica deste conjunto.

#### 4. 4 Definição do Conjunto de Trajetórias G

As Equações de movimento integradas foram as (3.48), (3.49) e (3.50) do Capítulo 3. Aplicando a metodologia descrita na Seção anterior, encontramos um conjunto de trajetórias que pode ser visualizado a partir do gráfico da Figura 4.4 em termos da velocidade de injeção,  $V_I$ , versus a altitude da órbita de estacionamento terrestre,  $H_T$ , para  $H_L = 100\text{km}$ . Os pontos da curva que expressa a relação entre  $V_I$  e  $H_T$  definem o conjunto de trajetórias que tangenciam as órbitas de estacionamento terrestres e lunares de acordo com os critérios estabelecidos na Seção 4.3. Cada um destes pontos representa uma condição inicial de uma trajetória que, partindo de uma órbita terrestre com  $160 = H_T = 60000\text{km}$ , alcança a Lua com altitude  $H_L = 100\text{km}$ . O valor da velocidade da sonda ao atingir o periluna da trajetória, a qual chamaremos de  $V_L$ , é calculada numericamente. Ou seja, o algoritmo encontra o periluna e ainda a velocidade neste ponto (magnitude e componentes).

Uma expressão matemática empírica que relacione  $V_I$  e  $H_T$  para o intervalo entre  $160 = H_T = 60000\text{km}$  é possível, no entanto, conteria um número muito grande de termos. Mas se restringirmos a análise a um intervalo menor, com  $160 = H_T = 700\text{km}$  isto se torna fácil (estes novos limites foram escolhidos levando em conta a capacidade dos atuais lançadores). A Figura 4.5 mostra uma ampliação da Figura 4.4 exatamente para o intervalo  $160 = H_T = 700\text{km}$ .

O resultado numérico da Figura 4.5 nos permite representar, em uma primeira análise, a relação existente entre  $V_I$  e  $H_T$ , para  $160 = H_T = 700\text{km}$  e  $H_L = 100\text{km}$  (incluindo trajetória de colisão) através de uma expressão matemática empírica dada por:

$$V_I = -8,3265 \times 10^{-4} H_T + 11,105500 \quad (4.6)$$

Onde  $V_I$  é dada em  $\text{km/s}$  e  $H_T$  em  $\text{km}$ . Ao conjunto definido pelo gráfico da Figura 4.4 e pela expressão (4.6), chamaremos de Trajetórias G doravante.

Agora, em uma segunda análise, mostraremos como as Trajetórias G são muito sensíveis a pequenas variações nas condições iniciais, especialmente em  $V_I$ . Para tal, adotamos a mesma metodologia descrita na Seção 4.3 que gerou os diagramas das

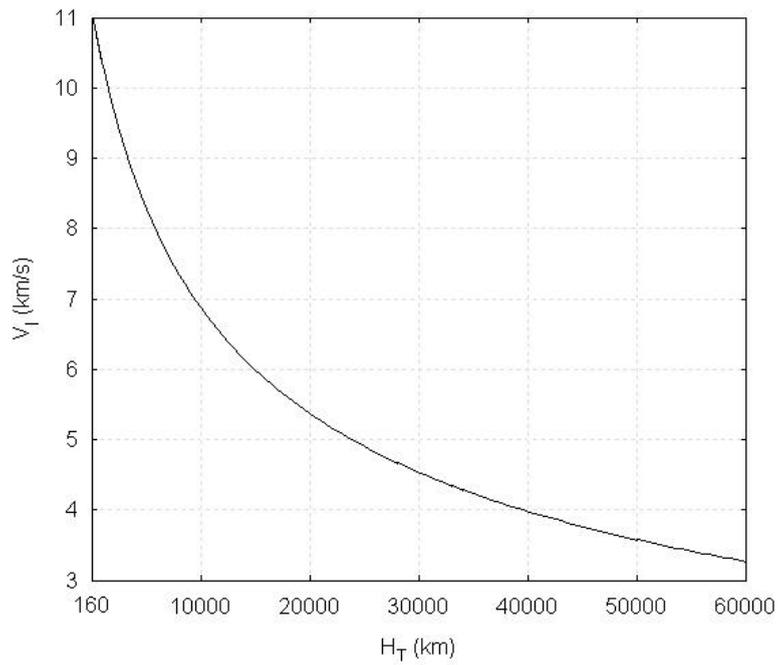


FIGURA 4.4 – Gráfico da velocidade de injeção,  $V_I$  versus a altitude da órbita de estacionamento terrestre,  $H_T$ , para altitude do periluna,  $H_L = 100\text{km}$ .

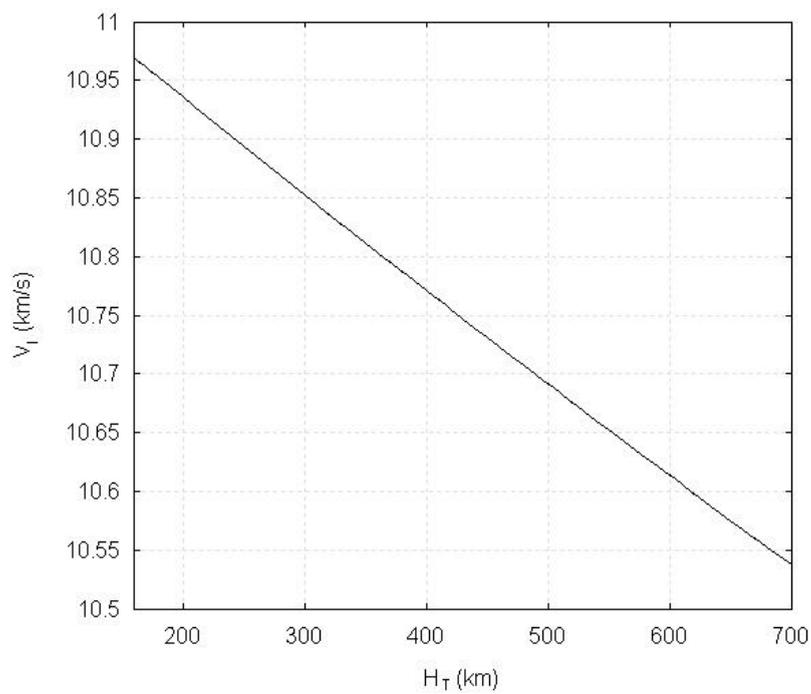


FIGURA 4.5 – Gráfico  $V_I \times H_T$ , para  $160 = H_T = 700\text{km}$  e  $H_L = 100\text{km}$ .

Figuras 4.4 e 4.5, porém selecionamos as trajetórias que atingem seus perilunas com  $H_L = 20000\text{km}$ , divididas nos seguintes intervalos:  $0 < H_L = 100\text{km}$ ,  $100 < H_L = 5000\text{km}$ ,  $5000 < H_L = 10000\text{km}$  e  $10000 < H_L = 20000\text{km}$ . Além disso, também selecionamos as trajetórias de colisão com a Lua. A Figura 4.6 mostra o resultado desta investigação em termos de  $V_I \times H_T$ , para  $240 = H_L = 245\text{km}$ . Nela, há uma distribuição de pontos na qual observamos uma faixa cinza que corresponde às trajetórias de colisão com a Lua. Delimitando esta faixa, temos duas linhas pretas que correspondem às trajetórias que possuem  $H_L = 100\text{km}$ . As demais cores correspondem aos outros intervalos de variação de  $H_L$ , sendo:  $100 < H_L = 5000\text{km}$  representado pela cor amarela,  $5000 < H_L = 10000\text{km}$  pela cor vermelha e  $10000 < H_L = 20000\text{km}$  pelo azul. As trajetórias de colisão são um limite entre aquelas que atingem o periluna entre L1 e a Lua, ou cruzam o eixo- $x$  do sistema sinódico também entre L1 e a Lua no sentido descendente, e aquelas que tem periluna após a Lua em relação a um eixo perpendicular ao eixo- $x$  que passa pelo centro de massa da Lua (veja Figura 4.12.b). Assim, as trajetórias cujos valores de  $V_I$  e  $H_T$  correspondem a um ponto acima da faixa cinza alcançam seus perilunas após a Lua; enquanto aquelas para as quais  $V_I$  e  $H_T$  correspondem a um ponto abaixo da faixa cinza atingem seus perilunas entre a L1 e a Lua. Notemos que a diferença no valor de  $V_I$  entre uma trajetória que tem periluna variando entre 10000 e 20000km entre L1 e a Lua, ou após a Lua é da ordem de 1m/s, e de  $H_L = 100\text{km}$  de 0,3m/s sem colisão.

Este resultado mostra a sensibilidade de  $H_L$  em função de  $V_I$ . Para melhor interpretá-lo, introduzimos um termo,  $d$ , na Equação (4.6). Isto é,

$$V_I = -8,326500 \times 10^{-4} H_T + 11,105500 + d \quad (4.7)$$

O valor de  $d$  determinará o valor da altitude do periluna da Trajetória G e, conseqüentemente, se o periluna ocorrerá entre a L1 e a Lua, ou após a Lua. As Tabelas 4.1 e 4.2 contêm os valores de  $d$  para os dois casos.

Variações em  $V_I$  a partir da 5ª casa decimal acarretam mudanças no valor  $H_L$  dentro dos limites estabelecidos para cada um dos intervalos das Tabelas 4.1 e 4.2.

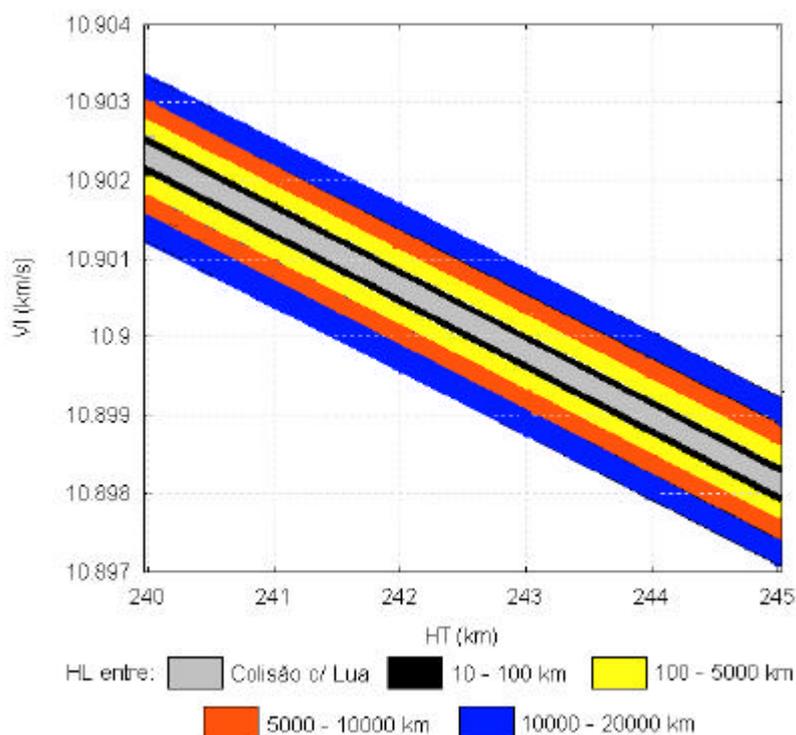


FIGURA 4.6 – Gráfico  $V_I \times H_T$ , para  $240 = H_T = 240\text{km}$  e várias altitudes do periluna,  $H_L$ , indicadas pelo código de cores.

TABELA 4.1 – Relação entre  $d$  e  $H_L$  para periluna entre L1 e a Lua.

$d$ em km/s	$H_L$ em km
$-1,45 \times 10^{-4} = d = 1,45 \times 10^{-4}$ $d = -1,46 \times 10^{-4}$	colisão com a Lua 0 e 100
$-4,86 \times 10^{-4} = d = -1,47 \times 10^{-4}$	100 e 5000
$-7,28 \times 10^{-4} = d = -4,86 \times 10^{-4}$	5000 e 10000
$-1,10 \times 10^{-3} = d = -7,28 \times 10^{-4}$	10000 e 20000

TABELA 4.2 – Relação entre  $d$  e  $H_L$  para periluna após a Lua.

$d$ em km/s	$H_L$ em km
$d = 1,46 \times 10^{-4}$	0 e 100
$1,47 \times 10^{-4} = d = 4,86 \times 10^{-4}$	100 e 5000
$4,86 \times 10^{-4} = d = 7,28 \times 10^{-4}$	5000 e 10000
$7,28 \times 10^{-4} = d = 1,10 \times 10^{-3}$	10000 e 20000

A Tabela 4.3 lista algumas propriedades de 10 órbitas do conjunto definido pelo gráfico da Figura 4.4 e pela expressão (4.7). São elas:  $H_T$ , a velocidade da órbita de

estacionamento terrestre circular,  $V_{CT}$ ,  $V_I$ ,  $C_J$ ,  $H_L$ ,  $V_L$ , a velocidade da órbita de estacionamento lunar circular de altitude  $H_L$ ,  $V_{CL}$ , e o tempo de vôo entre o apogeu e o periluna da trajetória,  $T_v$ .

TABELA 4.3 – Principais propriedades de 10 trajetórias definidas pela Figura 4.4 e Equação (4.7)

$C_J$	$H_T$ (km)	$V_{CT}$ (km/s)	$V_I$ (km/s)	$H_L$ (km)	$V_{CL}$ (km/s)	$V_L$ (km/s)	$T_v$ (dias)
1,7474	160	7,81200	10,96951	100	1,63300	2,56980	14,272
1,7483	200	7,78800	10,93567	43,0	1,65800	2,59986	14,274
1,7475	240	7,76400	10,90215	14,1	1,67300	2,61978	14,276
1,7511	320	7,71700	10,83599	67,7	1,64700	2,58886	14,276
1,7590	700	7,50700	10,53720	42,0	1,65900	2,60000	14,297
1,7660	1000	7,35300	10,31776	34,6	1,63400	2,60409	14,312
1,8473	5000	5,92000	8,27755	91,6	1,63800	2,47595	14,474
1,9272	10000	4,93400	6,86830	44,4	1,65750	2,56505	14,639
2,2040	36000	3,06600	4,17425	98,4	1,63300	2,47600	15,235
2,3704	60000	2,45000	3,26783	88,7	1,63800	2,44609	15,605

Para encerrarmos esta Seção, mostraremos na Figura 4.7 uma típica Trajetória G definida pela Equação (4.7) para  $H_T = 240\text{km}$  e  $V_I = 10,90215\text{km/s}$  e  $d = -1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ , com  $H_L = 14\text{km}$  e velocidade da sonda no periluna da trajetória,  $V_L = 2,61978\text{km/s}$ .

#### 4.5 Elos entre a Terra e a Lua e o Espaço Externo

Nesta Seção, discutiremos algumas características das Trajetórias G definidas anteriormente. A Primeira delas está associada àquelas que são encontradas para  $-1,10 \times 10^{-3} = d = -1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ , ou seja, aquelas com periluna entre a L1 e a Lua. Estas trajetórias guardam simetria apesar da sensibilidade que a altitude do periluna tem em função de  $V_I$ . Assim, após passarem pela Lua, elas retornam à Terra. Para entendermos esta propriedade, consideraremos duas trajetórias listadas na Tabela 4.3, com:  $H_T = 160\text{km}$ ,  $V_I = 10,95950\text{km/s}$ ,  $H_L = 13\text{km}$ ,  $V_L = 2,56980\text{km/s}$  e  $C_J = 1,7474$ , e  $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I = 3,26783\text{km/s}$ ,  $H_L = 88,7\text{km}$ ,  $V_L = 2,44609\text{km/s}$  e  $C_J = 2,3704$ .

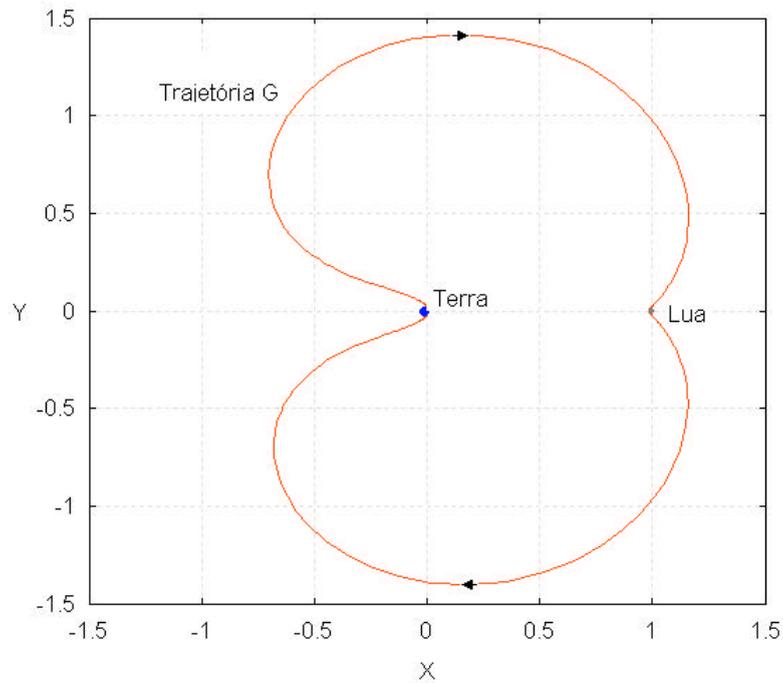


FIGURA 4.7.(a)

FIGURA 4.7 – Trajetória G típica definida pela Equação (4.7) e pelo gráfico da Figura 4.4 cujas condições iniciais são:  $H_T = 240\text{km}$  e  $V_T = 10,90215\text{km/s}$  e  $d = -1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ , com  $H_L = 14\text{km}$  e velocidade da sonda no periluna da trajetória,  $V_L = 2,61978\text{km/s}$ . (a) Sistema sinódico, (b) sistema geocêntrico juntamente com a órbita da Lua e (c) ampliação mostrando o *loop* com o qual a trajetória de transferência envolve a órbita da Lua durante a passagem por ela.

(continua)

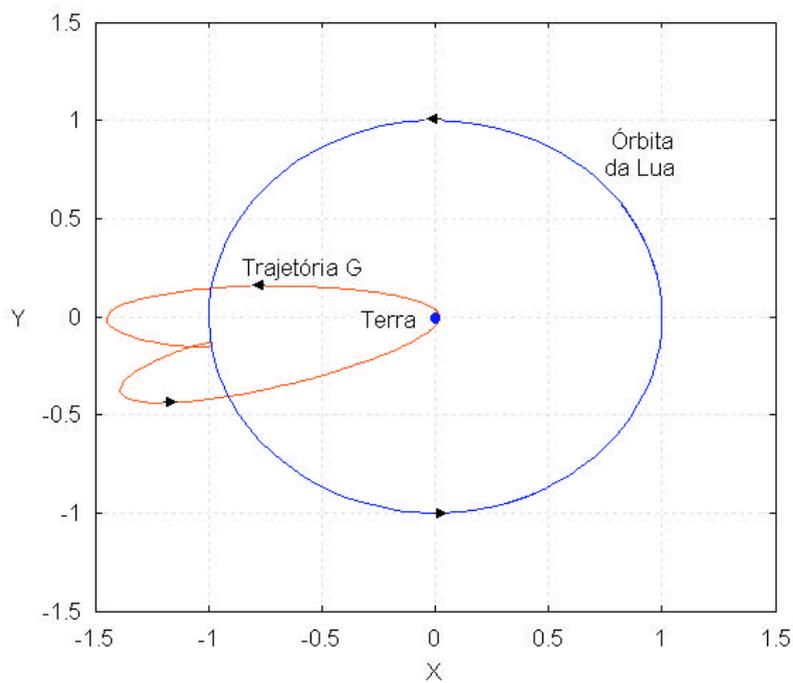


FIGURA 4.7.(b)

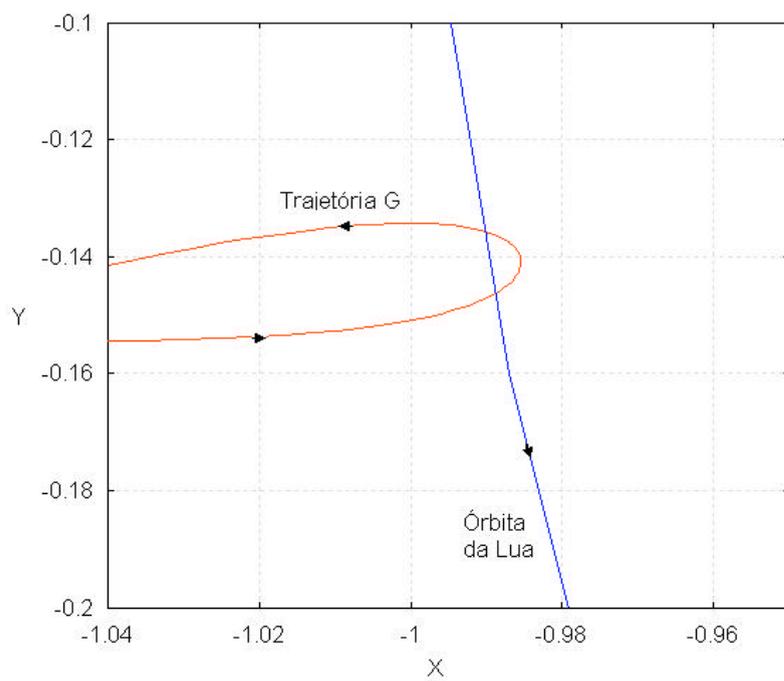


FIGURA 4.7.(c)

FIGURA 4.7 - Conclusão

Estas duas trajetórias correspondem aos limites considerados para  $H_T$  e  $H_L$ , e a partir delas, é possível definir o que chamamos de elos entre a Terra e a Lua que podem ser

visualizados no sistema de coordenadas sinódico. A Figura 4.8.a mostra estes elos e, como podemos ver, existe um elo Terra-Lua e outro Lua-Terra, praticamente simétrico. O limite interno do elo Lua-Terra pode ser ampliado se considerarmos trajetórias com  $100 = H_L = 20000\text{km}$  como as que estão definidas na Figura 4.6. Em geral, isto ocorre porque as trajetórias com  $H_L \geq 5000\text{km}$  atingem o periluna acima do eixo- $x$  do sistema sinódico, caracterizando um *Swing-by* com decréscimo de energia. Ao final da Seção, discutiremos melhor esta característica a partir da análise deste fenômeno. Desta forma, praticamente toda região abaixo do eixo- $x$  do sistema sinódico delimitada pela trajetória com  $H_T = 160\text{km}$  e  $H_L = 13\text{km}$  pode ser considerada como elo de volta entre a Terra e a Lua, tal como mostra a Figura 4.7.b, para a qual a trajetória que define a fronteira interna dos dois elos possui  $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I = 3,26100\text{km/s}$ ,  $H_L = 20000\text{km}$ ,  $V_L = 2,24809\text{km/s}$  e  $C_J = 2,3794$ .

A existência destes elos é interessante e compensa a sensibilidade inerente às trajetórias. Pensando em termos práticos, não é preciso acertar o valor exato de  $V_I$  que conduzirá à altitude do periluna desejada. Basta colocar a sonda em uma trajetória pertencente ao elo, pois a própria sensibilidade permite saltar de uma para outra, mais conveniente, a baixo custo. Nos Capítulos 6 e 7 exploraremos estas possibilidades.

A segunda característica está associada às trajetórias que possuem periluna após a Lua. Isto é, aquelas que são obtidas pela Equação (4.7) para  $d \geq 1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ . Algumas delas, após a passagem pelo periluna, descrevem um laço ao redor da Lua, no sistema sinódico, caracterizando um *Swing-by*. Durante a evolução deste laço, a trajetória cruza o eixo- $x$  do sistema sinódico no sentido ascendente entre a Lua e L1. O ganho de energia envolvido neste movimento é suficiente para transformar a trajetória em uma espiral aberta para fora do Sistema Terra Lua.

A Figura 4.9 mostra as trajetórias para os sistemas sinódico, letras (a) e (c), e geocêntrico, letra (b) e (d), cujas condições iniciais são:  $H_T = 160\text{km}$ ,  $V_I = 10,96983\text{km/s}$  (determinada pela Equação (4.7) para  $d = 1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ ),  $H_L = 15\text{km}$ ,  $V_L = 2,61200\text{km/s}$  e  $C_J = 1,7400$  (tempo entre o perigeu e o periluna de 14,321 dias). Os tempos de integração são de 17 dias para as letras (a) e (b) e de 1000 dias para as letras (c) e (d). A Figura 4.10 mostra, nos mesmos moldes, a trajetória encontrada para  $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I = 3,26990\text{km/s}$ ,  $H_L = 9857\text{km}$ ,  $V_L = 1,24400\text{km/s}$  e  $C_J = 2,3580$  (tempo

entre o perigeu e o periluna de 15,771 dias). Estas duas trajetórias representam os limites para escape do Sistema Terra-Lua. Ou seja, para  $H_T = 160\text{km}$  e  $V_I = 10,96983\text{km/s}$ , têm-se trajetórias de colisão com a Lua ou pertencentes ao elo Terra-Lua-Terra. Mas se  $160 = H_T = 60000\text{km}$  e  $1,46 \times 10^{-4} = d = 7,28 \times 10^{-4}\text{km/s}$  a Equação (4.7) fornece trajetórias que após a passagem pela Lua cruzam o eixo- $x$  do sistema sinódico no sentido ascendente, entre a Lua e L1, e escapam do Sistema Terra-Lua. Agora, se  $160 = H_T = 60000\text{km}$  e  $d \geq 7,28 \times 10^{-4}\text{km/s}$  a Equação (4.7) fornece trajetórias que possuem periluna com altitude,  $H_L$ , entre 10000 e 20000km após a Lua e não ganham energia suficiente para escaparem do Sistema Terra-Lua, tal como mostra a Figura 4.11. De acordo com o que vimos ao longo desta Seção e da anterior, verificamos que as trajetórias que têm periluna entre L1 e a Lua, envolvem a Lua com um laço no sistema geocêntrico. Já aquelas que possuem periluna após a Lua, envolvem-na com um laço no sistema sinódico. Compare as Figuras 4.2 e 4.7 com as 4.9 e 4.10.

Dado o exposto, é possível considerar as trajetórias das Figuras 4.9 e 4.10 como os limites de uma rota de escape do sistema Terra-Lua. Isto está ilustrado na Figura 4.12.a, em que vemos a rota de escape juntamente com o elo Terra-Lua em segundo plano. Esta ilustração mostra que a diferença entre o elo Terra-Lua e a rota de escape surge a partir do apogeu de suas trajetórias. Já a Figura 4.12.b mostra como as duas trajetórias que definem a rota de escape cruzam o eixo- $x$  no sentido ascendente entre a Lua e L1 antes de escaparem, enquanto as trajetórias que alcançam o periluna após a Lua e não escapam, cruzam o eixo- $x$  à esquerda da trajetória da Figura 4.10 e entre L1 e a Terra. Por fim, a Figura 4.13 mostra o crescimento da distância radial em função do tempo, ao longo de 1000 dias, para as duas trajetórias que definem a rota de escape. Podemos observar, que a maior taxa de afastamento,  $3,1 \times 10^7\text{km/ano}$ , é da trajetória mais interna ( $H_T = 160\text{km}$ ,  $V_I = 10,96983\text{km/s}$  e  $C_J = 1,7400$ ). Esta trajetória poderia alcançar a órbita de Marte em 2,4 anos, embora isto dependa de um direcionamento.

Assim, podemos definir parcialmente o elo Terra-Lua-Terra para quaisquer valores de  $H_T$  entre 160 e 60000km, com  $V_I$  obtido pelos gráficos das Figuras 4.4 e 4.5 ou pela Equação (4.7), com  $-1,10 \times 10^{-3} = d = -1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ . A rota de escape, por sua vez, fica definida para quaisquer valores de  $H_T$  entre 160 e 60000km, com  $V_I$  obtido pelos

gráficos das Figuras 4.4 e 4.5 ou pela Equação (4.7), com  $1,46 \times 10^{-4} = d = 7,28 \times 10^{-4} \text{ km/s}$ .

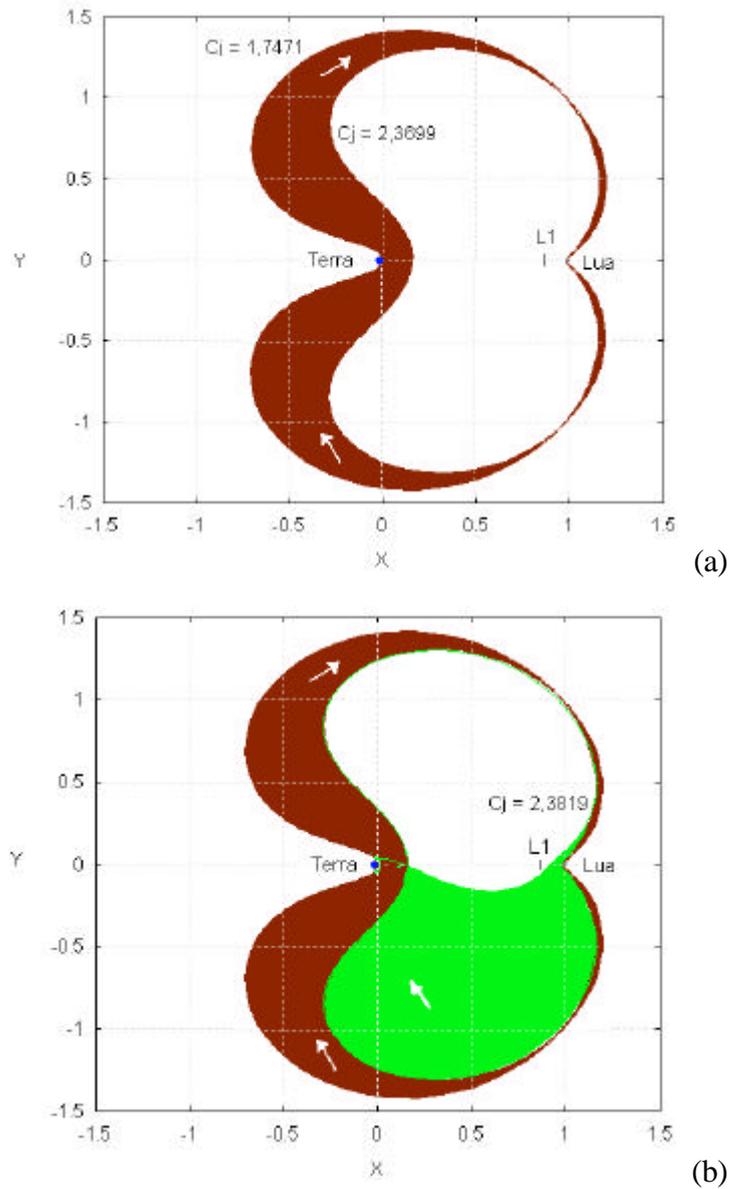


FIGURA 4.8 – (a) Elos entre a Terra e a Lua para o PR3C definidos pelas trajetórias com  $H_T = 160 \text{ km}$ ,  $V_I = 10,95950 \text{ km/s}$ ,  $H_L = 13 \text{ km}$ ,  $V_L = 2,56980 \text{ km/s}$  e  $C_J = 1,7474$ , e  $H_T = 60000 \text{ km}$ ,  $V_I = 3,26783 \text{ km/s}$ ,  $H_L = 88,7 \text{ km}$ ,  $V_L = 2,44609 \text{ km/s}$  e  $C_J = 2,3704$ , e (b) idem, porém considerando a trajetória com  $H_T = 60000 \text{ km}$ ,  $V_I = 3,26100 \text{ km/s}$ ,  $H_L = 20000 \text{ km}$ ,  $V_L = 2,24809 \text{ km/s}$  e  $C_J = 2,3794$ , ampliando o limite do elo de volta.

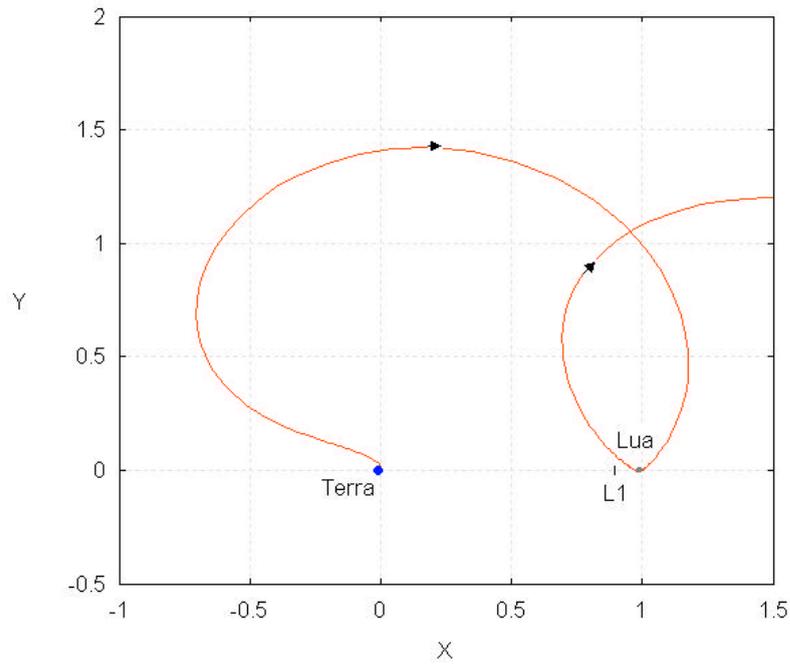


FIGURA 4.9.(a)

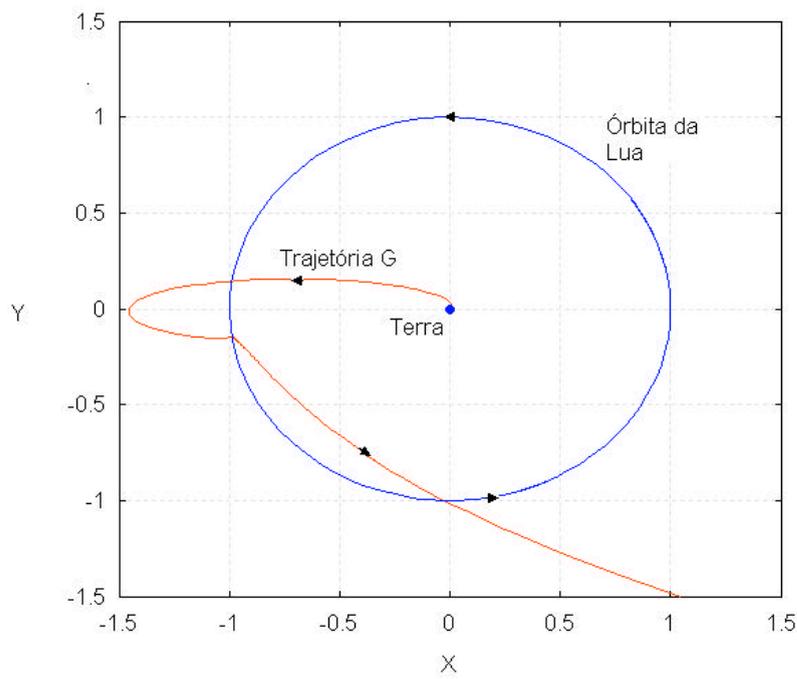


FIGURA 4.9.(b)

FIGURA 4.9 – Trajetória  $H_T = 160\text{km}$ ,  $V_I = 10,96983\text{km/s}$   $H_L = 15\text{km}$ ,  $V_L = 2,61200\text{km/s}$  e  $C_J = 1,7400$ , vista no sistema sinódico para: (a) 17 dias, (b) 1000 dias. E no sistema geocêntrico para: (c) 17 dias e (d) 1000 dias.

(continua)

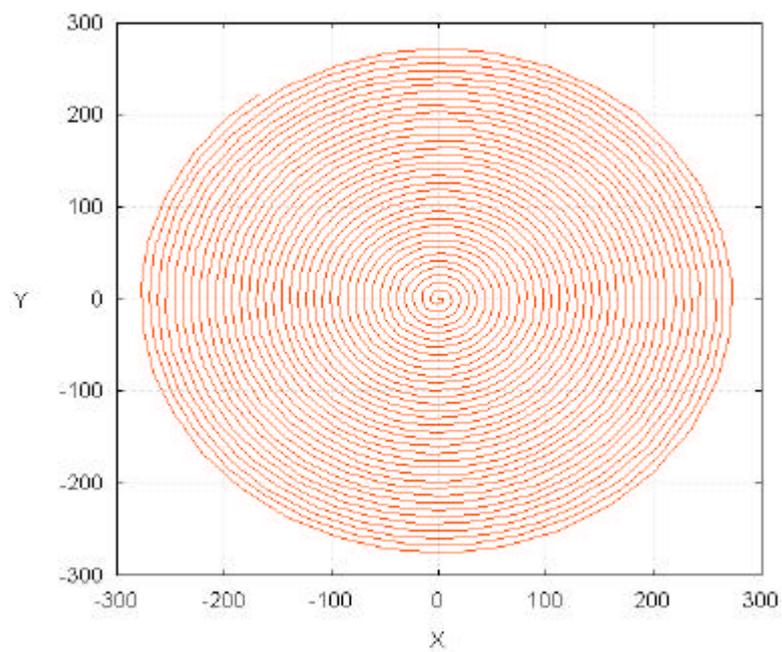


FIGURA 4.9.(c)

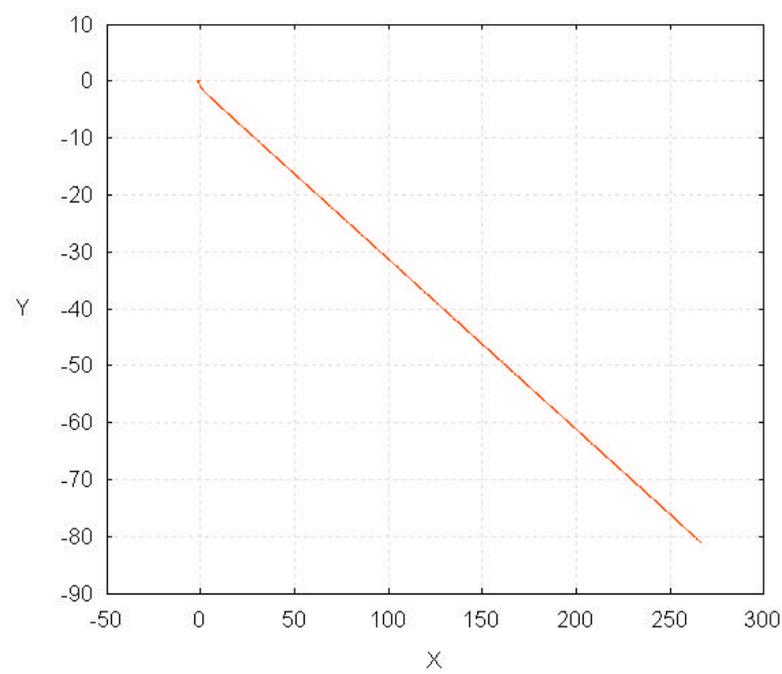


FIGURA 4.9.(d)

FIGURA 4.9 – Conclusão.

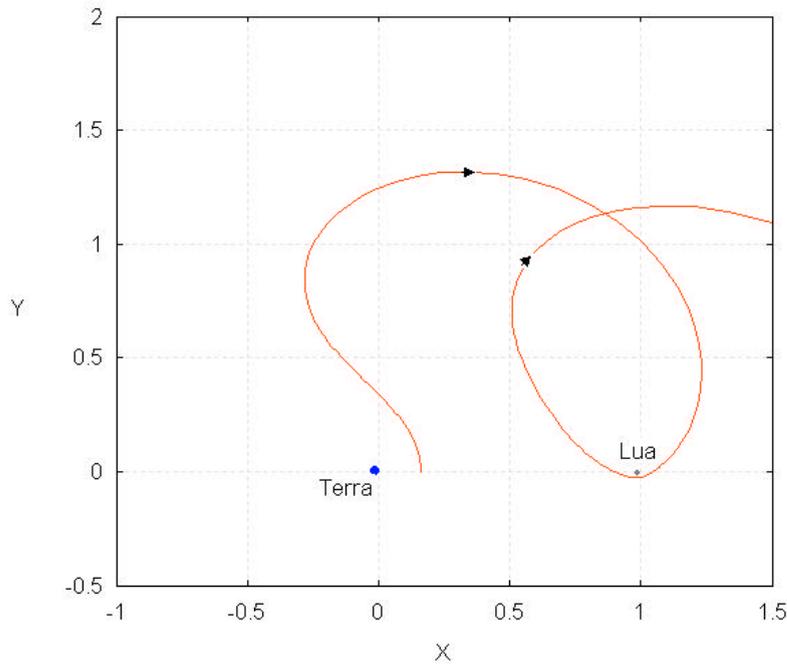


FIGURA 4.10.(a)

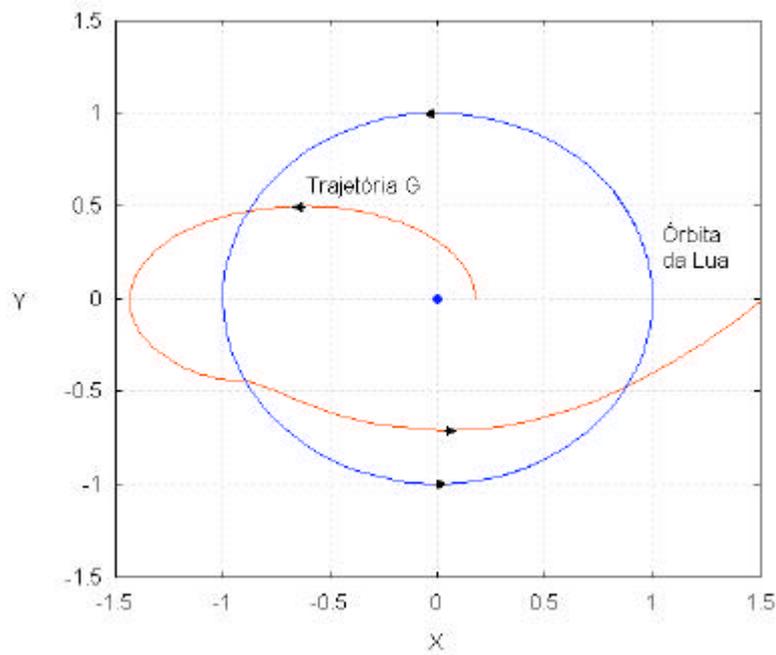


FIGURA 4.10.(b)

FIGURA 4.10 – Trajetória  $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_T = 3,2699\text{km/s}$   $H_L = 9857\text{km}$ ,  $V_L = 1,24400\text{km/s}$  e  $C_J = 2,3580$ , vista no sistema sinódico para: (a) 17 dias, (b) 1000 dias. E no sistema geocêntrico para: (c) 17 dias e (d) 1000 dias.

(continua)

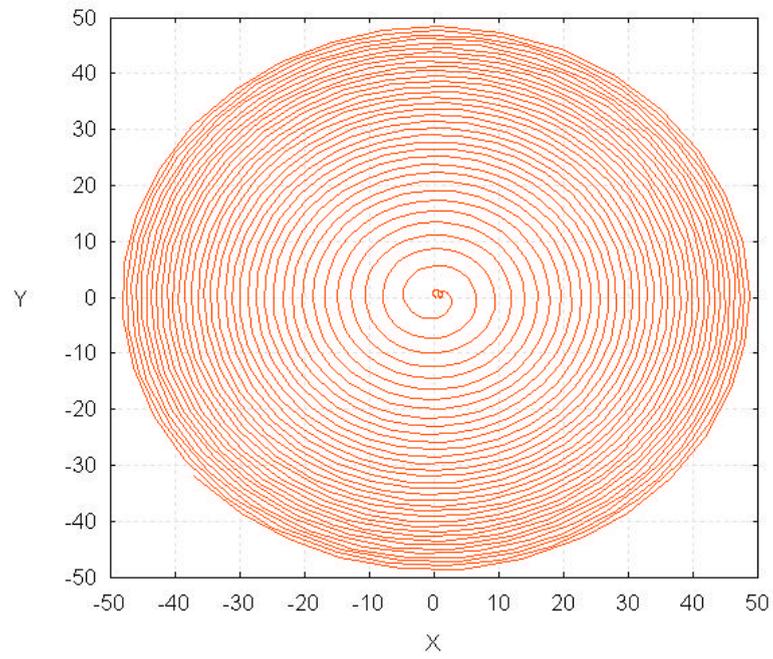


FIGURA 4.10.(c)

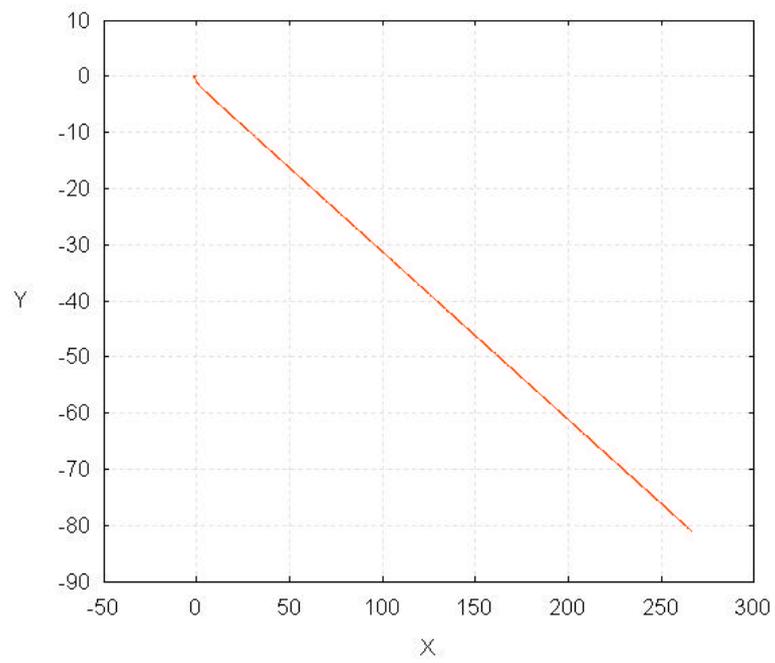


FIGURA 4.10.(d)

FIGURA 4.10 – Conclusão.

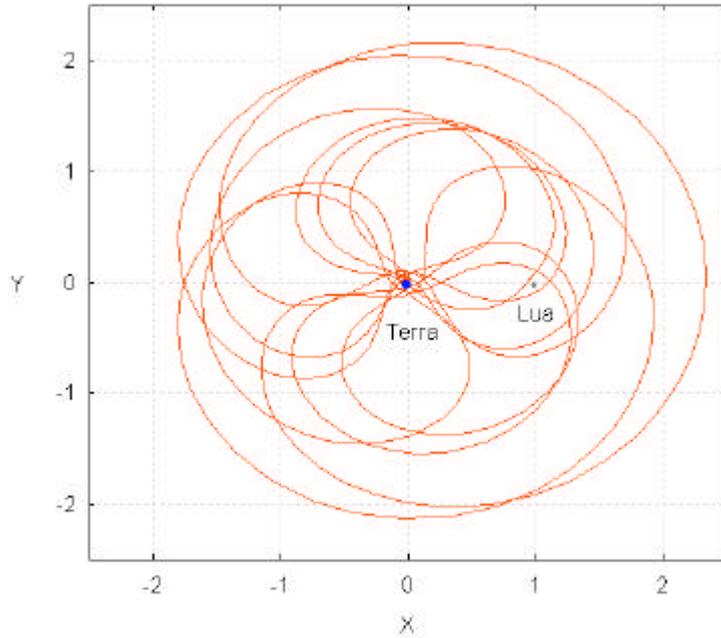


FIGURA 4.11 – Trajetória  $H_T = 160\text{km}$ ,  $V_I = 10,9700\text{km/s}$ ,  $H_L = 20000\text{km}$  e  $C_J = 2,315$ , vista no sistema sinódico.

A definição anterior pode ser complementada a partir da variação da energia,  $\Delta E$ , das trajetórias em relação à Terra após a passagem pela Lua. Podemos considerar que durante esta passagem pela Lua ocorre um *Swing-by*. Para entendermos melhor esta afirmação, consideremos a definição geral de *Swing-by* dada por Prado (2001b). Seja um sistema de três corpos  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ ; sendo  $m_1$  um corpo massivo fixo à origem de um sistema de coordenadas Cartesianas;  $m_2$  um corpo de massa menor que  $m_1$ , um planeta ou um satélite em órbita Kepleriana de  $m_1$ , e  $m_3$  uma partícula de massa negligenciável que se move em uma órbita genérica de  $m_1$ . Então,  $m_3$  realiza um encontro com  $m_2$  e altera sua órbita em relação à  $m_1$  em virtude de um ganho ou de uma perda de energia (entende-se por encontro quando  $m_3$  cruza a órbita de  $m_2$  em relação à  $m_1$  com uma distância em relação à  $m_2$  tal que este domina o movimento e  $m_3$  por certo tempo). De acordo com estas hipóteses, as órbitas de  $m_1$  e  $m_2$  não se alteram durante o fenômeno. A Figura 4.14 ilustra este encontro mostrando algumas das quantidades envolvidas. Ela é

uma reprodução na íntegra da Figura 4.6 de Prado (2001b). As quantidades ilustradas nas Figura 4.14 são:

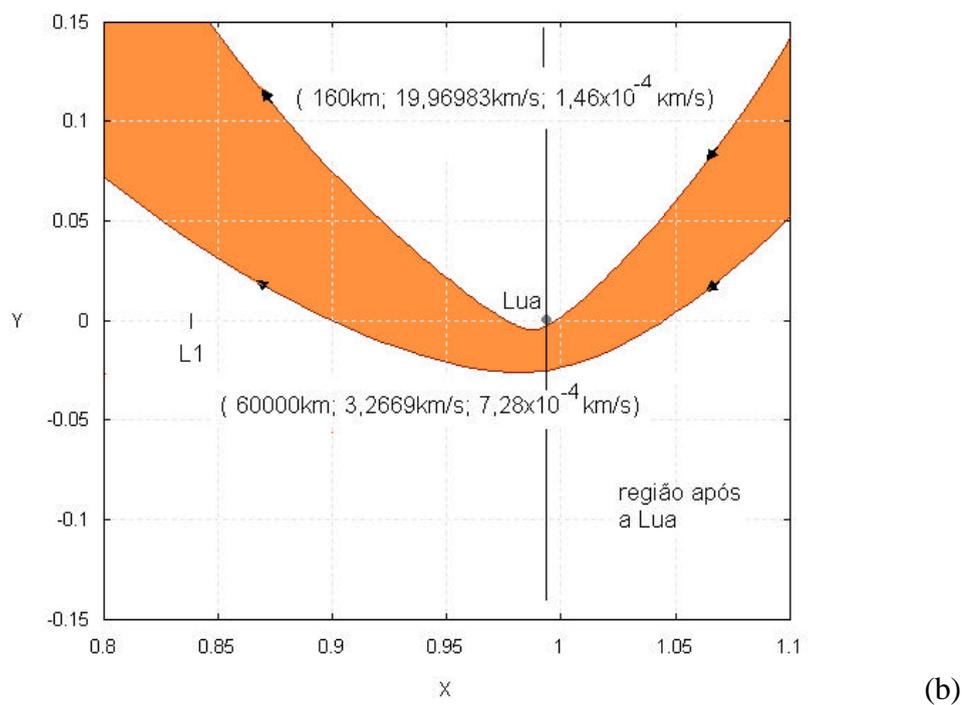
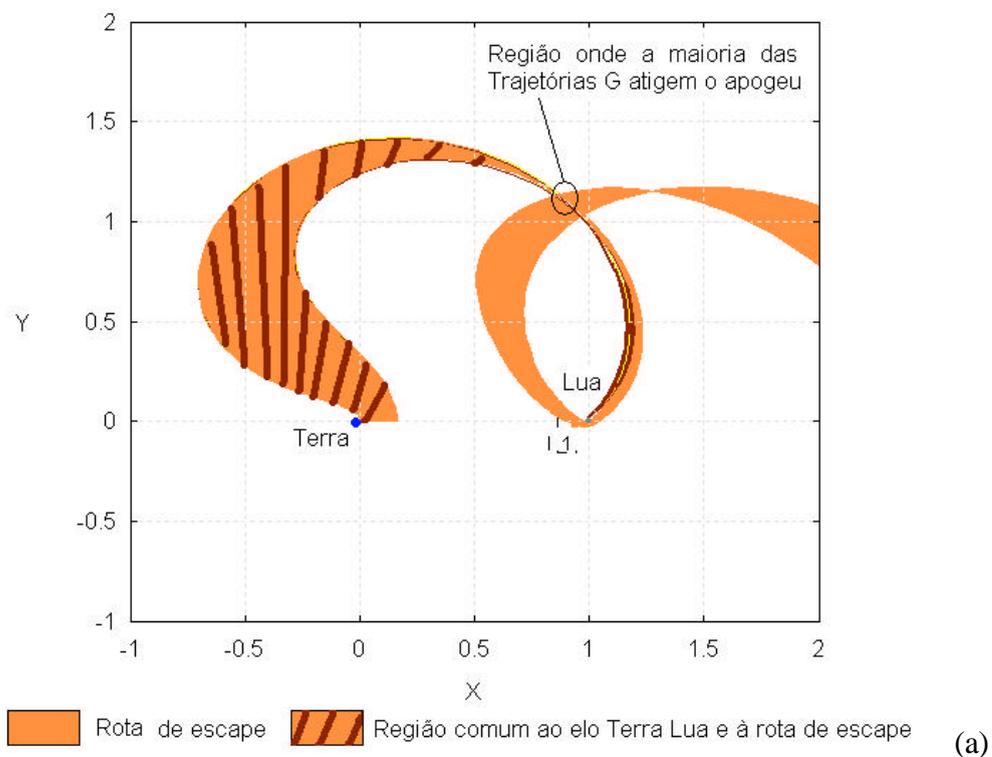


FIGURA 4.12 – (a) Rota de escape do Sistema Terra-Lua, superposta ao elo Terra-Lua.

(b) Trajetórias limites da rota de escape cruzando o eixo- $x$  do sistema sinódico no sentido ascendente entre a Lua e L1.

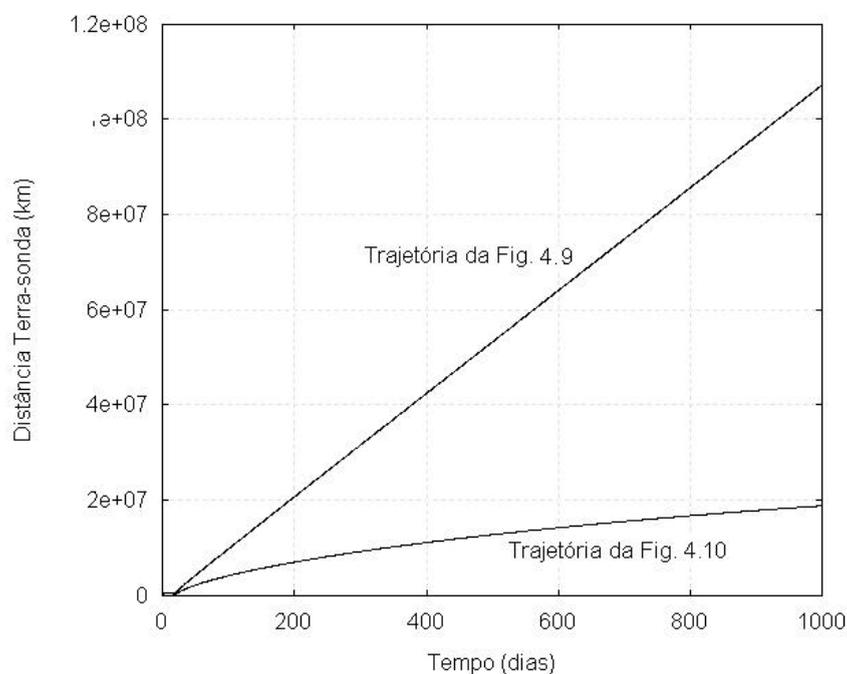


FIGURA 4.13 – Distância Terra-sonda em função do tempo.

- $V_2 =$  velocidade de  $m_2$  em relação a  $m_1$ ;
- $V_\infty^-$  e  $V_\infty^+ =$  velocidades de  $m_3$  em relação a  $m_2$  antes e depois do encontro respectivamente;
- $d =$  metade do ângulo de curvatura, ângulo entre  $V_\infty^-$  e  $V_\infty^+$ ;
- $r_p =$  distância entre  $m_2$  e  $m_3$  no instante de máxima aproximação entre eles;
- $\Psi =$  Ângulo entre a direção do periapse e a direção que une  $m_2$  e  $m_3$ .

Em nosso caso, o corpo  $m_1$  é a Terra,  $m_2$  é a Lua e  $m_3$  a sonda. O ganho de energia da sonda em relação à Terra após a passagem pela Lua pode ser dado por (Broucke, 1988):

$$\Delta E = -2V_{Lua}V_\infty \text{sen}(d)\text{sen}(\Psi) \quad (4.8)$$

De acordo com esta Equação, podemos concluir, de maneira geral, que:

- Se o encontro ocorrer para  $0 < \Psi < 180^\circ$ , então  $\text{sen}(\Psi) > 0$  e  $\Delta E < 0$  ( $\Delta E$  é mínimo para  $\Psi = 90^\circ$ );
- Se o encontro ocorrer para  $180^\circ < \Psi < 360^\circ$ , então  $\text{sen}(\Psi) < 0$  e  $\Delta E > 0$  ( $\Delta E$  é máximo para  $\Psi = 270^\circ$ );
- Se o encontro ocorrer para  $\Psi = 0^\circ$ , então  $\text{sen}(\Psi) = 0$  e  $\Delta E = 0$  e não há alteração na energia.

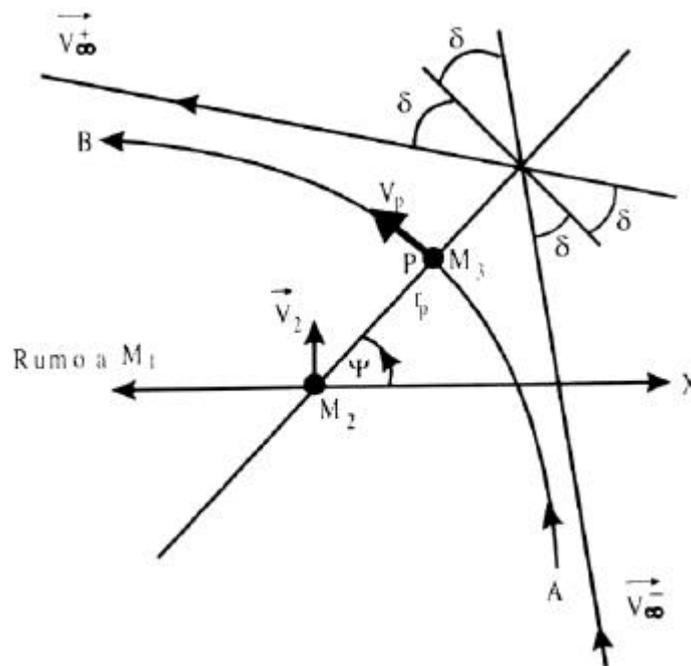


FIGURA 4.14 – Manobra de *Swing-by* e algumas de suas quantidades.

FONTE: Prado (2001a, p. 82).

As trajetórias que definem o elo Terra-Lua-Terra que possuem  $H_L = 5000\text{km}$  têm, em geral, encontro com a Lua com  $\Psi \cong 180^\circ$ , ou seja, entre L1 e a Lua, portanto,  $\Delta E \cong 0$ , e a trajetória fica praticamente inalterada em relação à Terra (mantém a simetria). Por exemplo, veja a Figura 4.15 que mostra a energia em relação à Terra da Trajetória G da Figura 4.7. Mas há também aquelas trajetórias pertencentes ao elo Terra-Lua-Terra que atingem o periluna em ponto acima do eixo- $x$  do sistema sinódico ( $H_L > 5000\text{km}$ ), com  $90^\circ < \Psi < 180^\circ$ , portanto, perdem energia e têm suas formas alteradas. São estas trajetórias que definem a fronteira interna do elo na região abaixo do eixo- $x$  (Figura

4.8.b). A Figura 4.16 mostra a energia em relação à Terra da trajetória que define o limite interno do elo da Figura 4.8.b, cujas condições iniciais são:  $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I = 3,26610\text{km/s}$  e  $H_L = 20000\text{km}$ . A Figura 4.17 mostra a energia em relação à Terra em função do tempo das trajetórias das Figuras 4.9 e 4.10, isto é, dos limites da rota de escape. Podemos observar que suas energias se tornam positivas e praticamente constantes. Após o *Swing-by*, a trajetória da Figura 4.9 adquire energia da ordem de 0,75 (adimensional). Trajetórias que atingem o periluna após a Lua com energia maior que 0,75 se dirigem para as proximidades da Terra onde ocorre um novo *Swing-by* que, desta vez, imprimem um  $\Delta E < 0$ , impedindo que escapem do Sistema Terra-Lua (como exemplo, podemos considerar a trajetória da Figura 4.11). Por esse motivo, a trajetória da Figura 4.9. foi tomada como limite interno da rota de escape. A energia da trajetória da Figura 4.10 oscila em torno de zero, justificando porque a consideramos como limite externo da rota de escape.

Assim, Fechamos a definição do elo Terra-Lua-Terra, a partir um vetor de estado inicial em relação a um sistema de coordenadas geocêntrico da forma  $(x_0; y_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0) = (R_T + H_T; 0; 0; V_I)$ , onde  $160 = H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I$  é dada pela Equação (4.7), ou pelas Figuras 4.4 e 4.5, com  $d$  dado pela Tabela 4.1, e  $\Delta E$  (em relação à Terra) = 0 após o *Swing-by* com a Lua. A rota de escape fica definida por  $(x_0; y_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0) = (R_T + H_T; 0; 0; V_I)$ , onde  $160 = H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I$  é dada pela Equação (4.7), ou pelas Figuras 4.4 e 4.5, com  $d$  dado pela Tabela 4.2, mas menor que  $7,28 \times 10^{-4}\text{km/s}$ , e  $\Delta E$  (em relação à Terra)  $> 0$  após o *Swing-by* com a Lua. Para encerrar a definição, lembremo-nos de que no instante inicial, a Terra, a sonda e a Lua estão em conjunção inferior, ou seja, alinhadas nesta ordem.

## 4.6 Conclusões

Ao longo do Capítulo, apresentamos os resultados de investigações numéricas considerando o PR3C que exploram características peculiares de um grupo de trajetórias pertencentes à Família G de órbitas periódicas diretas ao redor de L1 (Broucke, 1968). Tais trajetórias passam a poucas centenas de quilômetros da superfície da Terra e a poucas dezenas de quilômetros da superfície da Lua. Os resultados das investigações

nos permitiram estabelecer relações entre a velocidade de injeção necessária para aquisição destas trajetórias,  $V_I$ , a partir da altitude da órbita de estacionamento terrestre,

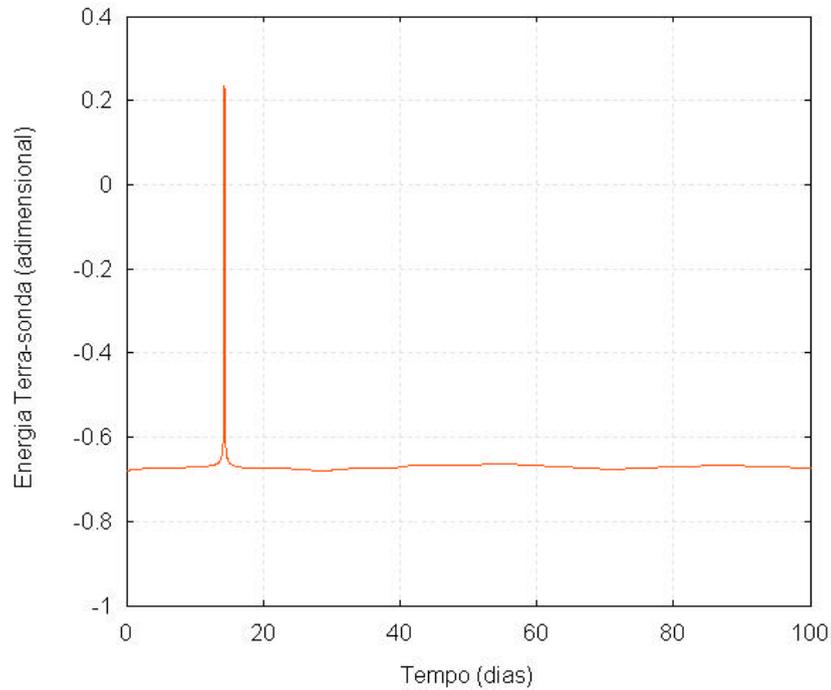


FIGURA 4.15 – Variação da energia Terra-sonda em função do tempo para a trajetória da Figura 4.7. O comportamento é o mesmo para 1000 dias.

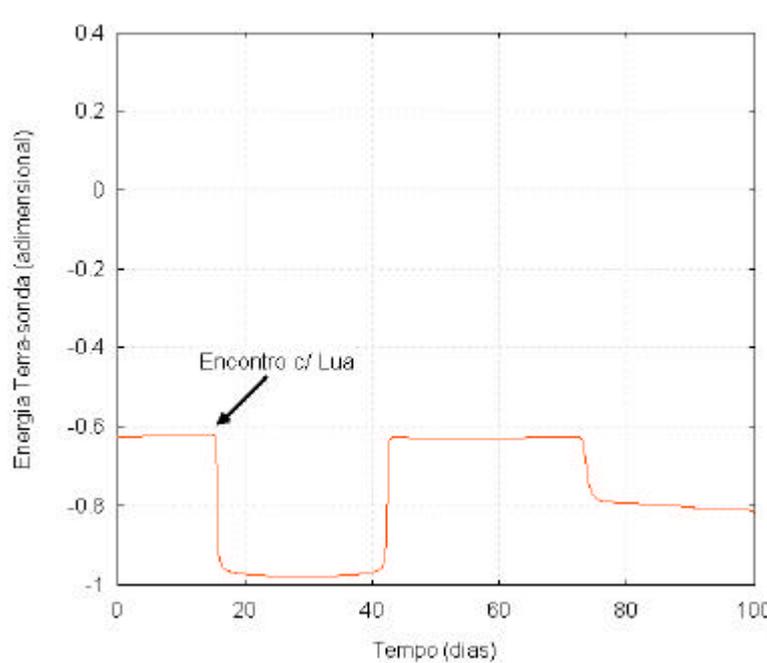


FIGURA 4.16 – Variação da energia Terra-sonda em função do tempo para as traje-

tórias que define o limite interno do elo Terra-Lua-Terra da Figura 4.8.b.

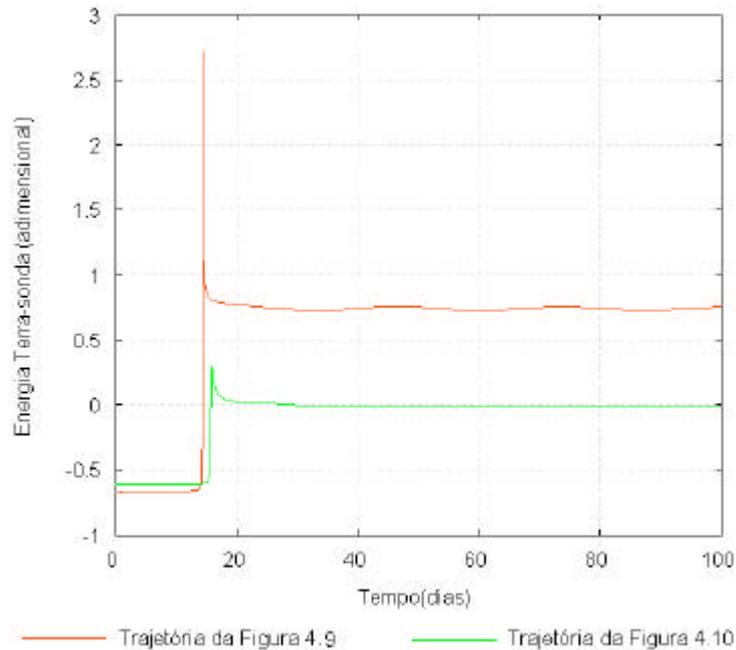


FIGURA 4.17 – Variação da Energia Terra-sonda em função do tempo para as trajetórias das Figuras 4.9 e 4.10 – os limites da rota de escape.

$H_T$ , para altitudes do periluna,  $H_L$ , variando entre 0 e 20000km. Estas relações correspondem aos gráficos das Figuras 4.4 e 4.5, à expressão (4.7) e às Tabelas 4.1 e 4.2.

Um estudo mais detalhado destas quantidades,  $(H_T, V_I, H_L)$  revelou que o valor de  $H_L$  é sensível a pequenas variações em  $V_I$ . Mudanças da ordem de 1m/s podem aumentar  $H_L$  de algumas dezenas de quilômetros. Mais do que isto, variações da mesma ordem determinam a existência de um elo Terra-Lua-Terra e uma rota de escape do Sistema Terra-Lua. As trajetórias que definem o elo Terra-Lua-Terra têm perilunas situados entre a L1 e a Lua, ou acima deste eixo- $x$  do sistema sinódico, mas ainda entre L1 e a Lua; enquanto os perilunas daquelas que formam a rota de escape estão situados após a Lua. O campo gravitacional da Lua atua sobre estas últimas de tal forma que, após a passagem pelo periluna, elas cruzam o eixo- $x$  entre a Lua e L1 no sentido ascendente antes de escaparem do Sistema Terra-Lua em típico *Swing-by*. Por outro lado, estes

resultados mostram como é complexa a dinâmica de trajetórias que atravessam a esfera de influência da Lua.

## CAPÍTULO 5

### TRAJETÓRIAS G E O PROBLEMA DE QUATRO CORPOS

#### 5.1 Introdução

O PR3C nos permitiu encontrar e investigar algumas características associadas ao conjunto de trajetórias que denominamos por Trajetórias G. Além disso, ele também nos permitiu definir elos entre a Terra e a Lua que podem viabilizar transferências entre elas. Entretanto, se desejarmos ampliar o conhecimento sobre a dinâmica das trajetórias G dentro do Sistema Terra Lua, e ainda estudar os parâmetros para utilizá-las em missões reais, faz-se necessária a adoção de um sistema dinâmico mais complexo e realista. Este sistema deve levar em conta os campos gravitacionais do Sol, da Terra e da Lua, as interações mútuas entre eles, as perturbações devidas ao achatamento terrestre e à pressão de radiação Solar, além das características das órbitas da Terra e da Lua (excentricidades e inclinação). Por isso, a meta deste Capítulo é investigar as Trajetórias G considerando o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-sonda descrito no Capítulo 3.

O Capítulo está organizado da seguinte forma: na próxima Seção, descreveremos a metodologia empregada. Na Seção 5.3, definiremos o conjunto de trajetórias para o P4C. A Seção 5.4 traz uma discussão mais detalhada sobre as novas características encontradas para as Trajetórias G. Na Seção 5.5, investigamos os efeitos da pressão de radiação solar sobre a sonda. A Seção 5.6 encerra o Capítulo com as conclusões.

#### 5.2 Metodologia

A metodologia adota aqui, é a mesma utilizada no Capítulo anterior. Isto é, a seleção numérica das trajetórias foi feita, em primeira análise, a partir da altitude do periluna,  $H_L$ . As trajetórias de colisão também foram selecionadas uma vez que elas representam um limite entre aquelas que escapam do Sistema Terra-Lua e as que definem o elo Terra-Lua-Terra.

As Equações de movimento integradas foram: para o Sol (3.20), (3.21) e (3.22), para a Terra (3.23), (3.24 e (3.25), para a Lua (3.26), (3.27) e (3.28), e para a sonda as (3.114), (3.115) e (3.116), sem a aceleração devida à pressão de radiação solar, a qual foi investigada separadamente na Seção 5.5. As condições iniciais da sonda em relação à Terra são):

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (x_0, 0, z_0, 0, \dot{x}_0, 0) \quad (5.1)$$

Com,

$$x_0 = (R_T + H_T) \cos(\mathbf{q}) \quad (5.2)$$

$$z_0 = (R_T + H_T) \text{sen}(\mathbf{q}) \quad (5.3)$$

$$\dot{x}_0 = V_I \quad (5.4)$$

Onde  $R_T = 6370\text{km}$  é o raio médio da Terra e  $\mathbf{q}$  é o ângulo entre o plano da órbita da Lua e da eclíptica.

Quando a excentricidade da órbita da Terra e a excentricidade e inclinação da órbita da Lua são consideradas o número de condições iniciais que alimentam as simulações numéricas tornam-se muito grandes. Primeiramente, isto ocorre porque quando a Terra, a sonda e a Lua estiverem alinhadas em conjunção inferior, como é necessário, a distância Terra-Sol pode variar entre  $1,47 \times 10^8 \text{km}$  e  $1,52 \times 10^8 \text{km}$ , e a distância Terra-Lua entre  $362227 \text{km}$  e  $404310 \text{km}$ , dependendo da posição que elas estiverem ocupando em suas respectivas órbitas neste instante. Por outro lado, como descrito no Apêndice A, Seção A.2, a órbita da Lua possui uma inclinação de  $5.1454^\circ$  em relação à eclíptica. E a alinha dos nodos, que é a interseção entre o plano da órbita da Lua e a eclíptica, possui um movimento de rotação no sentido anti-horário com período de 18,6 anos. Este fato, associado a outro, que é a inclinação de  $23,5^\circ$  do equador terrestre em relação à eclíptica, faz com que o ângulo entre a órbita da Lua e o equador terrestre varie entre  $18,36^\circ$  e  $28,64^\circ$  com período de 18,6 anos. Um outro fato que contribui para esta grande quantidade de condições iniciais, também descrito na Seção A.2, é o movimento no

sentido anti-horário da linha dos apsides dá órbita da Lua. O período deste movimento é da ordem de 8,9 anos.

Para considerar todas as características das órbitas da Terra e da Lua e mensurar seus efeitos sobre as Trajetórias G, variamos a distância Sol-Terra, a inclinação da Lua entre  $18,36^\circ$  e  $28,64^\circ$  em passos de  $2^\circ$ , e o argumento do perigeu e a longitude do nodo ascendente entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$  em passos de  $30^\circ$  (o que também leva em conta a variação da distância Terra-Lua). Ao todo, foram feitas simulações com 64 diferentes condições iniciais para a Terra e a Lua. Os resultados encontrados foram praticamente os mesmos para todas elas, as diferenças nos valores de  $V_I$  que definem  $H_L$  surgem na terceira casa decimal, considerando km/s. Por isto, vamos apresentar apenas os resultados para o conjunto de condições iniciais que considera para a Lua  $i_{Lua} = 28,64^\circ$ , em relação ao equador,  $\Omega_{Lua} = 270^\circ$  e  $T = 90^\circ$ .

### 5.3 Trajetórias G para o Problema de Quatro Corpos (P4C)

A Figura 5.1 apresenta o conjunto de Trajetórias G para o P4C. A princípio, o gráfico  $V_I \times H_T$  para  $H_L = 100\text{km}$  é quase idêntico ao da Figura 4.4. Mas existem diferenças entre eles que não podem ser visualizadas nestes gráficos  $V_I \times H_T$  para o intervalo considerado nas Figuras 4.4 e 5.1. Estas diferenças serão discutidas na próxima Seção. Por ora, vamos nos concentrar apenas em definir o conjunto através do gráfico da Figuras 5.1 e de uma expressão matemática empírica que fornece o valor de  $V_I$  em função de  $H_T$  e  $d$  para  $160 = H_T = 700\text{km}$  de maneira análoga ao Capítulo anterior.

Assim, a partir da Figuras 5.2, que mostra a sensibilidade de  $H_L$  em termos de  $V_I$  e  $H_T$  para o intervalo de  $240 = H_T = 245\text{km}$ , e levando em conta que a estrutura observada na Figuras 5.2 é praticamente a mesma por todo o intervalo considerado, ( $160 = H_T = 60000\text{ km}$ ), foi possível escrever a seguinte expressão:

$$V_I = -8,326500 \times 10^{-4} H_T + 11,10100 + d \quad (5.5)$$

Como pode ser observado na Figuras 5.2, os valores de  $d$  na Equação acima são os mesmos do PR3C listados nas Tabelas 4.1 e 4.2 para trajetórias com periluna entre a

Lua e L1 e após a Lua. Por outro lado, também se observa na Figura 5.2 que os valores de  $V_I$  são ligeiramente menores do que os encontrados para o PR3C, justificando assim a seme-lhança entre os diagramas das Figuras 4.4 e 5.1. Isto também significa que a considera-ção de um sistema dinâmico mais complexo não altera uma das características do conjunto de Trajetórias G, ou seja, os valores de  $H_L$  continuam guardando a mesma sensibilidade com relação a  $V_I$ .

Para terminarmos esta Seção, exibimos na Tabela 5.1 as propriedades de 10 trajetórias encontradas para o P4C nos mesmos moldes da Tabela 4.3 (Ela também traz os valores da inclinação, da longitude do nodo ascendente da órbita osculadora lunar que contém o periluna e da altitude atingida considerando a pressão de radiação solar. Tais quantidades serão introduzidas nas próximas Seções).

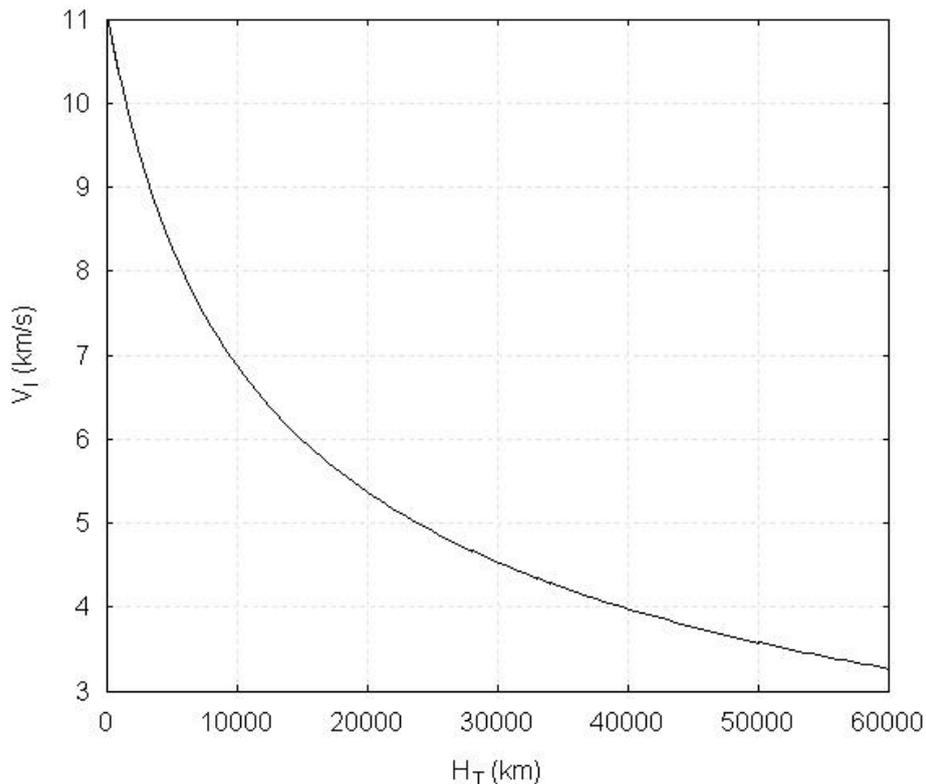


FIGURA 5.1 –  $V_I \times H_T$ , para  $160 = H_T = 60000\text{km}$  e  $H_L = 100\text{km}$  para o P4C.

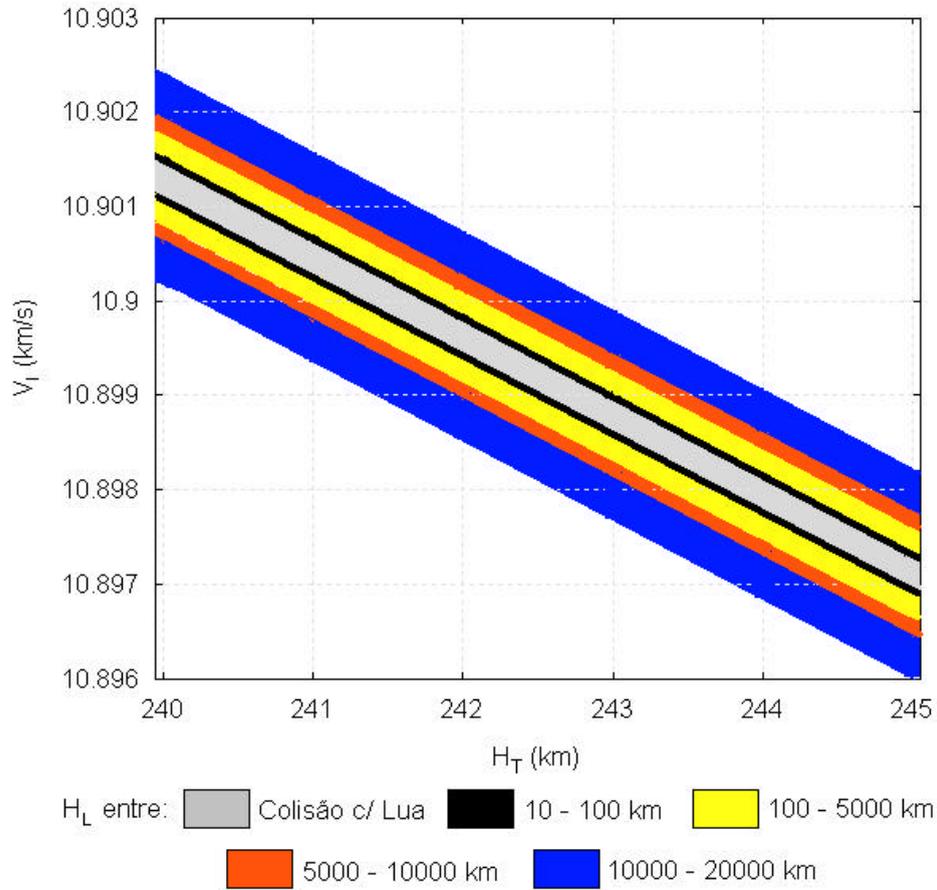


FIGURA 5.2 –  $V_I \times H_T$ , para  $240 = H_T = 245$  km e  $H_L = 20000$  km de acordo com o código de cores, para o P4C.

TABELA 5.1 – Principais propriedades de algumas das trajetórias definidas pela Figura 5.1.

$H_T$ (km)	$V_{CT}$ (km/s)	$V_I$ (km/s)	$H_L$ (km)	$V_{CL}$ (km/s)	$V_L$ (km/s)	$T_v$ (dias)	$i$ (°)	$\Sigma$ (°)	$H_L^P$ (km)
160	7,8120	10,96858	100	1,6330	2,5520	13,908	41,1	116,9	82
200	7,7880	10,93471	47,4	1,6580	2,5890	13,910	41,6	117,0	40
240	7,7640	10,90115	38,6	1,6730	2,6050	13,912	41,7	117,0	25
320	7,7170	10,83450	84,7	1,6400	2,5700	13,915	41,5	117,0	82
700	7,5070	10,53590	30,9	1,6470	2,5840	13,935	41,6	116,9	25
1000	7,3530	10,31632	51,3	1,6590	2,5850	13,950	40,2	116,7	35
5000	5,9200	8,27482	62	1,6340	2,5380	14,122	38,9	115,8	53
10000	4,9340	6,86485	94,5	1,6350	2,5500	14,299	38,9	114,8	87
36000	3,0660	4,16901	70,3	1,6530	2,4600	14,936	33,4	110,9	64
60000	2,4500	3,26201	79,8	1,6380	2,4320	15,334	29,0	108,0	70

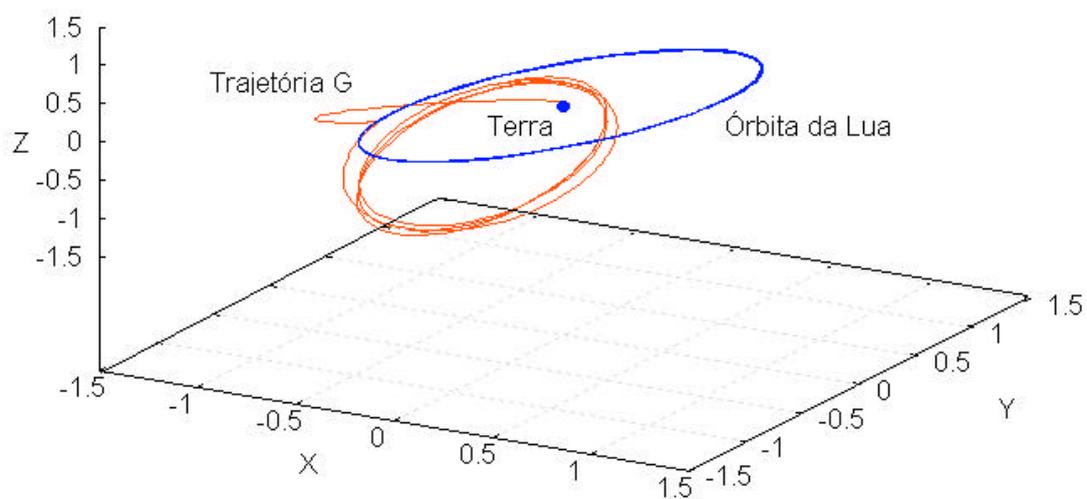
#### 5.4 Elo Terra-Lua-Terra para o P4C

Apesar da grande semelhança entre os diagramas  $V_I$  versus  $H_T$  encontrados para o PR3C e o P4C, a evolução das trajetórias é bem diferente para os dois sistemas dinâmicos durante e após a passagem pela Lua. Esta diferença pode ser notada através da Figura 5.3 que mostra uma trajetória típica do conjunto definido pela Figura 5.1 e Equação (5.5). Como podemos observar, esta trajetória deixa o plano da órbita da Lua durante a passagem por ela, assim, como todas as outras encontradas para o P4C. Isto significa que o plano da órbita osculadora lunar que contém o periluna da Trajetória G, possui uma inclinação,  $i$ , em relação ao plano da órbita da Lua, e longitude do nodo ascendente,  $\Omega$ , diferentes de zero. Como estamos considerando a hipótese de inserção da sonda em uma órbita lunar circular, o argumento do periluna é indefinido. Para a órbita da Figura 5.3,  $i = 42,24^\circ$  e  $\Omega = 116,84^\circ$ .

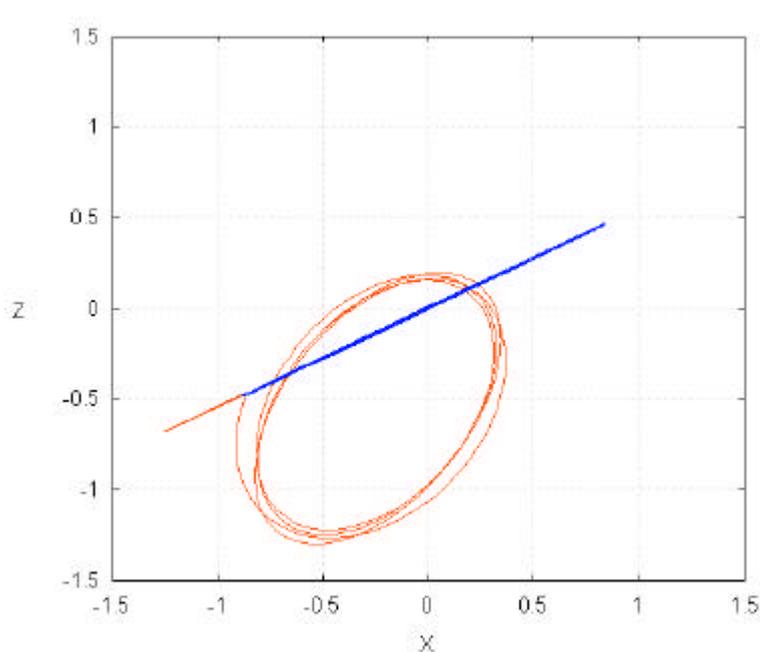
Da Tabela 5.1, verificamos que para  $160 = H_T = 5000\text{km}$  a inclinação da órbita osculadora que contém o periluna varia entre  $41^\circ$  e  $42^\circ$  e a longitude do nodo ascendente entre  $116^\circ$  e  $117^\circ$ . Para  $5000 < H_T = 60000\text{km}$  a inclinação decresce suavemente até  $29^\circ$  e o mesmo ocorre com a longitude do nodo ascendente que cai até  $108^\circ$ . Os valores da inclinação que estão na Tabela 5.1 não levam em conta que o plano do equador da Lua possui uma inclinação de  $6,5^\circ$  em relação ao plano de sua órbita.

A instabilidade inerente ao conjunto de trajetórias abre a possibilidade de inserção de sondas em órbitas lunares com inclinações superiores  $42^\circ$  ou inferiores à  $29^\circ$ , a partir da aplicação de um impulso diretor de meio caminho como veremos no próximo Capítulo.

Este ganho na inclinação das Trajetórias G pode ser entendido levando em conta que, devido à inclinação da órbita da Lua ( $5,1454^\circ$  em relação à eclíptica), a força de atração do Sol sobre a sonda apontará para fora deste plano, exceto nos instantes em que a Trajetória G cruza a eclíptica. Conseqüentemente, a resultante das forças sobre a sonda também estará direcionada para fora do plano da órbita da Lua. A Figura 5.4 mostra a evolução no tempo da inclinação da órbita osculadora lunar da sonda e as magnitudes das acelerações devidas às forças de atração do Sol, da Terra, e da Lua. Nela, podemos observar que a inclinação da órbita osculadora apresenta um forte crescimento à medida



(a)



(b)

FIGURA 5.3 – Trajetória G típica encontrada para o P4C, com  $H_T = 240\text{km}$ ,  $V_I = 10,9015\text{km/s}$ ,  $H_L = 38,6\text{km}$ ,  $V_L = 2,589\text{km/s}$ ,  $i = 41,66^\circ$ ,  $\Omega = 117^\circ$  e  $T_v = 13,913$  dias vista em sistema de coordenadas geocêntricas. (a) vista espacial e (b) vista no plano  $xz$ .

que se aproxima da Lua. Após a passagem pela esfera de influência da Lua, no intervalo considerado, a inclinação diminui suavemente. Se compararmos o exposto na Figura 5.4 com os resultados discutidos ao longo deste Capítulo e o do anterior, podemos concluir que a interação com o Sol é responsável por retirar a sonda do plano da órbita da Lua inicialmente, mas é a interação com o campo gravitacional da Lua que causa o ganho de inclinação antes do encontro (quando a sonda atinge seu periluna) e, também, a estabilização de seu valor, tal como observado pela Figura 5.4.

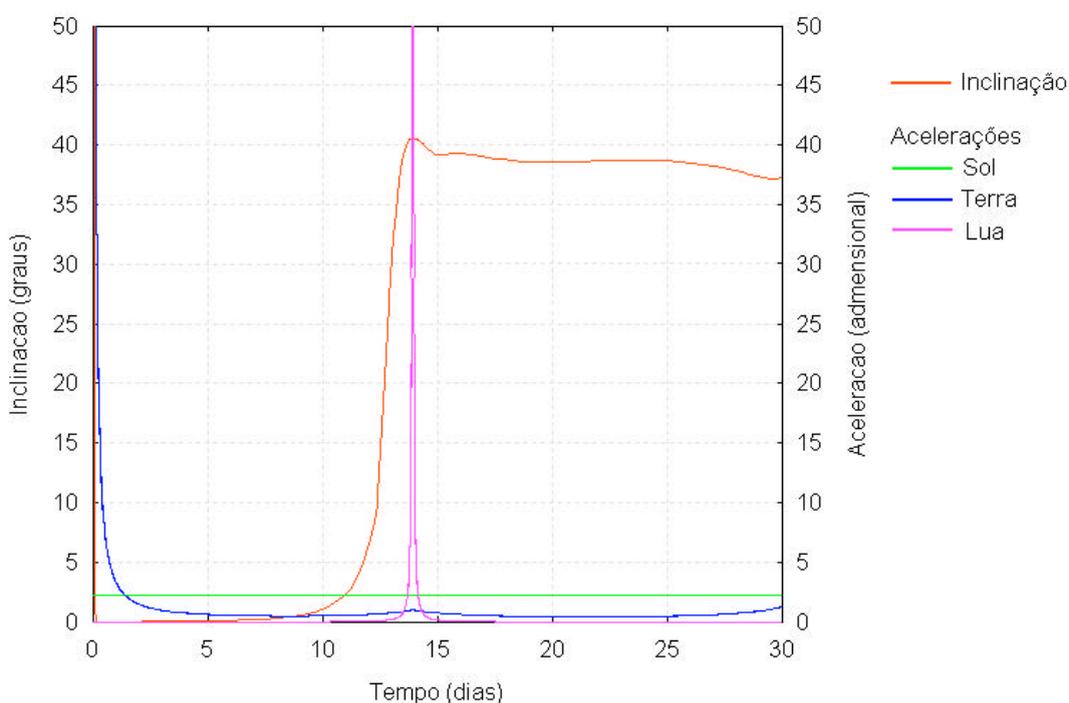


FIGURA 5.4 – Inclinação da órbita osculadora lunar da sonda e magnitudes das acelerações devidas às interações do Sol, da Terra e da Lua, para a trajetória da Figura 5.3 para um intervalo de 30 dias.

Para encerrarmos esta Seção, resta-nos verificar se os elos entre a Terra e a Lua continuam existindo. Para isso, vamos considerar duas trajetórias cujas condições são  $H_T = 160\text{km}$ ,  $V_T = 10,96859\text{km/s}$ ,  $H_L = 8\text{km}$ ,  $V_L = 2,608\text{km/s}$ ,  $T_v = 13,908$  dias,  $i = 41,1^\circ$ ,  $\Omega = 116,9^\circ$  e  $d = -1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ , e  $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_T = 3,26194\text{km/s}$ ,  $H_L = 102\text{km}$ ,  $V_L = 2,419\text{km/s}$ ,  $T_v = 15,607$  dias,  $i = 28,6^\circ$ ,  $\Omega = 108^\circ$  e  $d = -1,10 \times 10^{-3}\text{km/s}$ . Da mesma forma

que no Capítulo anterior, aqui também foi possível identificar um elo Terra-Lua-Terra cujos limites externo e interno são definidos por estas duas trajetórias respectivamente. A Figura 5.5.a mostra este elo, no qual podemos observar que a perna Terra-Lua esta praticamente toda contida no plano da órbita da Lua, com exceção da parte que está dentro da esfera da influência lunar, e que a perna Lua-Terra, agora, está fora deste plano, delimitando assim uma região do espaço cuja forma lembra a de uma fatia de queijo cortada radialmente. A Figura 5.5.b mostra o mesmo elo, porem com o limite interno ampliado e definido pela trajetória de condições iniciais:  $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I = 3,2599\text{km/s}$ ,  $H_L = 20000\text{km}$ ,  $V_L = 2,608\text{km/s}$ ,  $T_v = 1,069$  dias,  $i = 29,9^\circ$ ,  $\Omega = 106,5^\circ$  e  $d = -1,16 \times 10^{-3}\text{km/s}$ .

Analogamente ao verificado para o PR3C, também foi possível encontrar os limites de uma rota de escape. Duas condições iniciais definem esta rota, são elas:  $H_T = 160\text{km}$ ,  $V_I = 10,968887\text{km/s}$ ,  $H_L = 10\text{km}$ ,  $V_L = 2,561\text{km/s}$ ,  $T_v = 13,908$  dias,  $i = 41,2^\circ$ ,  $\Omega = 116,9^\circ$  e  $d = -1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ , e  $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I = 3,26450\text{km/s}$ ,  $H_L = 14233\text{km}$ ,  $V_L = 1,079\text{km/s}$ ,  $T_v = 13,908$  dias,  $i = 28,4^\circ$ ,  $\Omega = 108,1^\circ$  e  $d = -1,10 \times 10^{-3}\text{km/s}$ . A Figura 5.6.a mostra esta rota superposta ao elo Terra-Lua da Figura 5.5.a; e a Figura 5.6.b é uma ampliação mostrando os limites da rota de escape, projetados no plano  $xy$ , estão compreendidos entre L1 e a Lua, cruzando o plano  $xy$  do sistema sinódico no sentido ascendente.

Considerando a dinâmica do *Swing-by* para o Problema de Quatro Corpos, não temos mais o caso  $\Psi = 180^\circ$ , já que as trajetórias deixam o plano da órbita da Lua. Porém, continuamos a ter  $90^\circ = \Psi = 180^\circ$ . No caso tridimensional,  $\Psi$  continua a ser o ângulo entre a direção do periapse e o eixo- $x$  do sistema sinódico, o qual está inteiramente no plano da órbita da Lua, contudo a direção do periapse não pertence mais a este plano, portanto,  $\Psi$  não pode mais ser igual a  $180^\circ$ . Desta forma, toda trajetória do elo Terra-Lua-Terra têm um  $\Delta E < 0$ , o que justifica a perda de simetria das trajetórias encontradas para o P4C. As trajetórias com periluna após a Lua continuam possuindo  $180^\circ < \Psi < 360^\circ$  e, portanto,  $\Delta E > 0$ . Os limites mínimo e máximo da energia para as órbitas que escapam após o *Swing-by* podem ser vistos na Figura 5.7 que mostra a energia Terra-sonda em função do tempo para as trajetórias que delimitam o a rota de escape (suas

condições iniciais estão no parágrafo anterior). Estes valores são aproximadamente 0 e 0,60. Verificamos uma diferença no comportamento da energia comparada como o observado para o PR3C. Como mostra a Figura 5.7.b, elas não permanecem constantes, pelo contrário, crescem após 200 dias. Conseqüentemente, as velocidades com as quais as trajetórias se afastam da Terra, cerca de  $5,84 \times 10^4 \text{ km/s}$ , é maior que a encontrada para o PR3C. Esta velocidade pode ser estimada a partir da Figura 5.8 que mostra a variação da distância Terra-sonda em função do tempo.

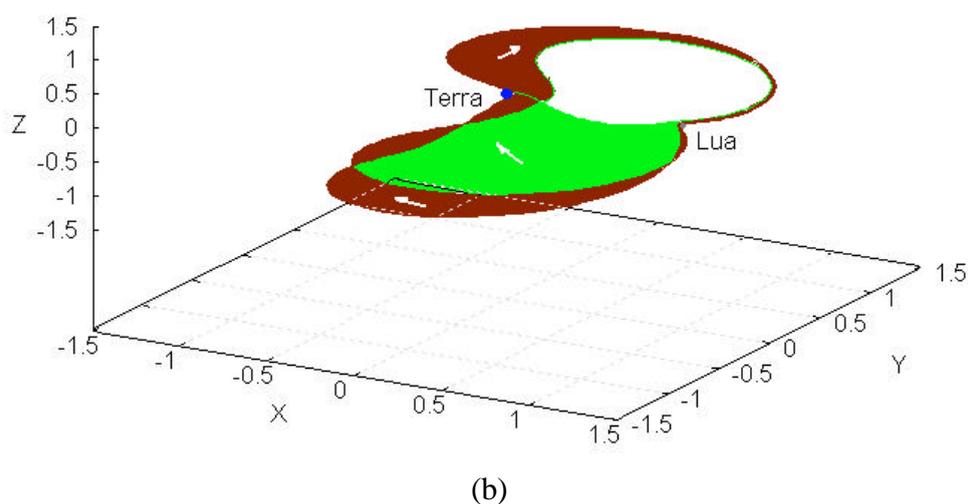
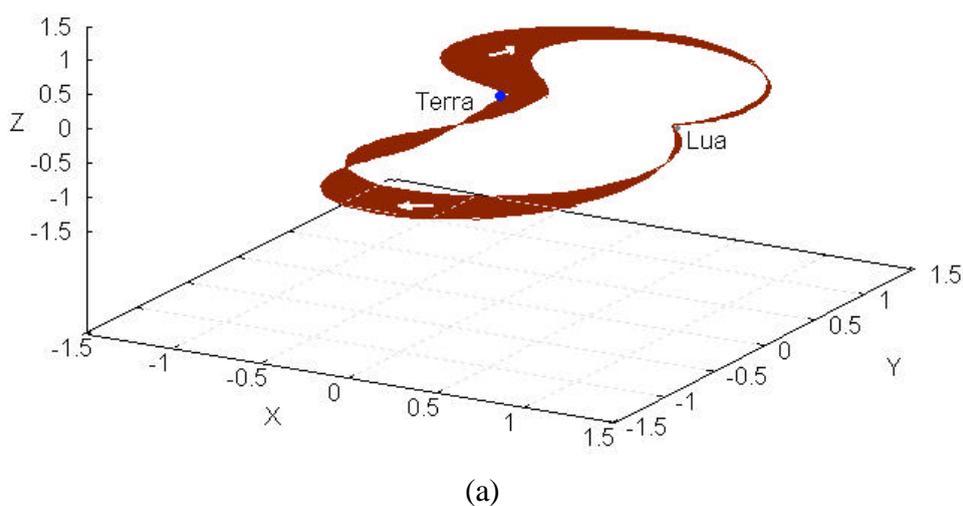
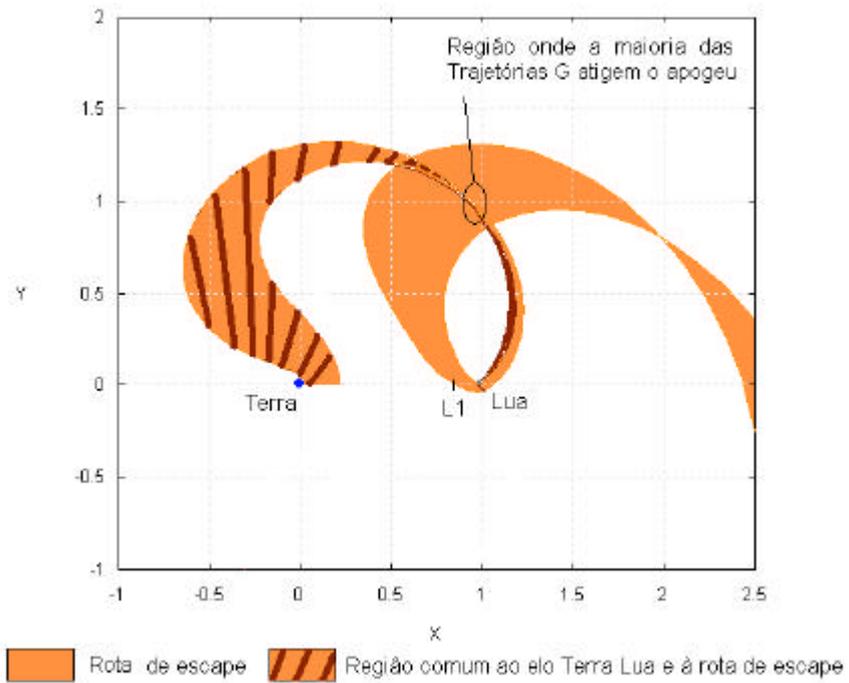
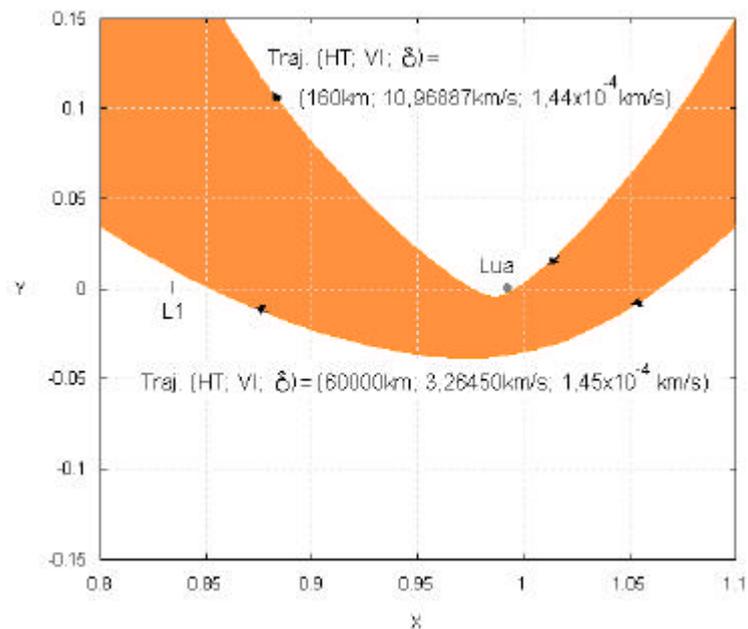


FIGURA 5.5 – Elos Terra-Lua-Terra vistos no sistema sinódico para Problema de Quatro Corpos. (a) apenas para trajetórias com  $0 < H_L = 100 \text{ km}$  e (b) estendido, considerando  $H_L = 20000 \text{ km}$ .

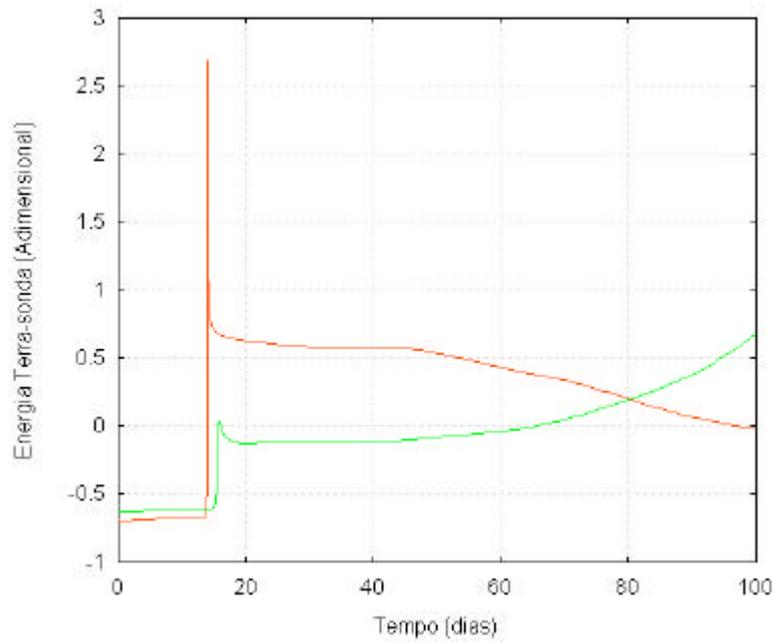


(a)

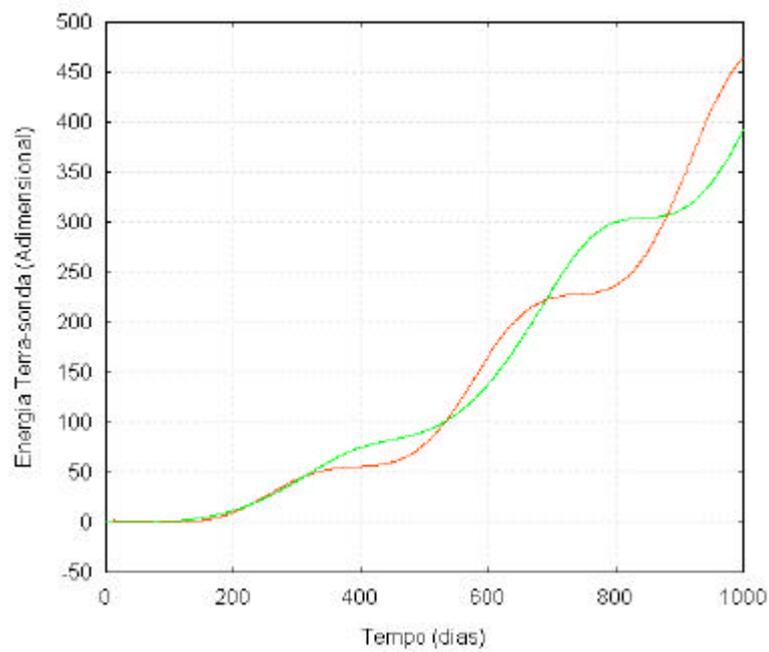


(b)

FIGURA 5.6 – Projeções no plano  $xy$  do sistema sinódico: (a) rota de escape do Sistema Terra-Lua superposta ao elo Terra-Lua e (b) ampliação mostrando a região entre L1 e a Lua com as trajetórias cruzando o plano  $xy$  no sentido ascendente.



(a)



(b)

FIGURA 5.7 – Variação da energia Terra-sonda em função do tempo para as trajetórias que definem os limites da rota de escape: (a) para 100 dias e (b) para 1000 dias. Linha vermelha ( $H_T = 160\text{km}$ ,  $V_I = 10,968887\text{km/s}$ ) e linha verde ( $H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I = 3,2450\text{km/s}$ ).

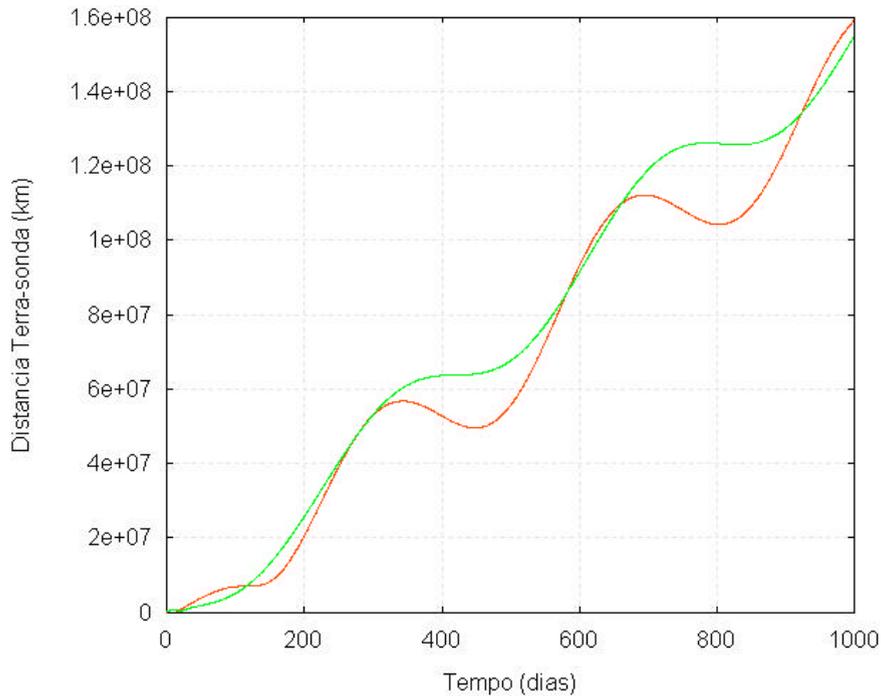


FIGURA 5.8 – Distância Terra-sonda em função do tempo para as trajetórias que definem os limites da rota de escape:  $H_T = 160\text{km}$  para linha vermelha e  $H_T = 60000\text{km}$  para linha verde.

O elo Terra-Lua para o P4C fica então definido a partir de um vetor de estado inicial da forma  $(x_0; y_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0) = (R_T + H_T; 0; 0; V_I)$ , onde  $160 = H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I$  é dada pela Equação (5.7), ou Figura 5.1, com  $d$  dado pela Tabela 4.1, e  $\Delta E < 0$  após o *Swing-by* com a Lua. E a rota de escape por  $(x_0; y_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0) = (R_T + H_T; 0; 0; V_I)$ , onde  $160 = H_T = 60000\text{km}$ ,  $V_I$  é dada pela Equação (5.5), ou Figura 5.1, com  $d$  dado pela Tabela 4.2, e energia da sonda em relação à Terra após o *Swing-by* entre 0 e 0,60 (adimensional).

### 5.5 Efeitos da Pressão de Radiação Solar

Na Seção 3.7 do Capítulo 3, descrevemos a origem da pressão de radiação solar e vimos que ela exerce uma aceleração perturbadora sobre os veículos espaciais a uma unidade astronômica, dada por:

$$\mathbf{A}_p = P_0 EB \left( \frac{A_{efe}}{M} \right) \left( \frac{a_{Terra}}{r_{Terra}} \right)^2 \hat{\mathbf{r}}_{14} \quad (5.6)$$

Os valores de  $P_0$ ,  $E$  e  $B$  e da razão  $A_{efe}/M$  e o que cada um deles representa também estão descritos na Seção 3.7.

De acordo com este modelo, um veículo espacial em movimento no sistema Terra-Lua está sujeito a uma aceleração devida à pressão de radiação solar que depende basicamente do coeficiente de reflexibilidade,  $B$  e da razão  $A_{efe}/M$ , ou do produto  $B(A_{efe}/M)$ , já que  $P_0$  é constante e  $E$  pode ser considerado como constante. Assim, investigamos os efeitos da pressão de radiação sobre as trajetórias do conjunto definido na Seção 5.3. Os resultados indicaram, de maneira geral, que valores de  $B(A_{efe}/M) = 0,02\text{m}^2\text{kg}^{-1}$  a ela não afeta as Trajetórias G. Ou melhor, as Trajetórias G sujeitas à pressão de radiação solar com  $B(A_{efe}/M) = 0,02\text{m}^2\text{kg}^{-1}$  continuam possuindo altitude do periluna  $H_L = 100\text{km}$ . Para valores superiores a  $0,02\text{m}^2\text{kg}^{-1}$  ocorrem colisões com a Lua. A última coluna da Tabela 5.1 mostra a altitude do periluna,  $H_L^p$ , das 10 trajetórias listadas para  $B(A_{efe}/M) = 0,02\text{m}^2\text{kg}^{-1}$ .

Em termos práticos, o produto  $B(A_{efe}/M) = 0,02\text{m}^2\text{kg}^{-1}$  leva a uma aceleração perturbadora de  $9,4 \times 10^{-9}\text{m/s}^2$ , agindo sobre a sonda ao longo de 13 a 16 dias, gerando assim, um impulso  $I = 0,0113\text{kgms}^3$ . Este resultado mostra que apenas acelerações perturbadoras superiores a  $10^{-8}\text{m/s}^2$  atuando sobre a sonda ao longo de duas semanas a levaria a uma colisão com a Lua. Isto era esperado, uma vez que se trata de um conjunto de trajetórias sensíveis a pequenas variações na velocidade.

Na prática, se considerarmos, por exemplo,  $B = 2$ , nós teremos  $A_{efe}/M = 0,02\text{m}^2/\text{kg}$ , o que corresponde a uma área efetivamente exposta à radiação solar de  $10\text{m}^2$  para cada 1ton de massa, e ainda, refletindo toda a radiação incidente. Por outro lado, é claro que esta proporção pode ser aumentada se o revestimento externo da área exposta à radiação solar for capaz de absorver uma parte da radiação para gerar energia, por exemplo.

## 5.6 Conclusões sobre o Capítulo

Os resultados expostos ao longo do Capítulo nos permitem concluir que o P4C não destrói os elos entre a Terra e a Lua e o espaço exterior. Entretanto, as considerações do

campo gravitacional do Sol e da inclinação da órbita da Lua determinam uma resultante de forças sobre a sonda direcionada para fora deste plano independente da posição relativa entre a Terra e a Lua. Desta maneira, as Trajetórias G passam a ter uma evolução espacial diferente durante e após a passagem pela Lua devido ao ganho de inclinação. Conseqüentemente, a forma do elo Lua-Terra também muda. Assim, como as trajetórias pertencentes à rota de escape do Sistema Terra-Lua terão evolução no espaço tridimensional. Esta nova característica observada para o P4C, que é bem próximo do ambiente real, juntamente com a sensibilidade inerente às trajetórias abre caminho para utilizá-las na inserção de sondas em órbitas lunares de grande inclinação. O sexto Capítulo discute esta possibilidade.

Com relação à pressão de radiação solar, vimos que ela influencia a evolução da trajetória, mas não é um fator decisivo e capaz de inviabilizar uma possível missão de transferência via Trajetórias G.

Para encerrarmos este Capítulo, precisamos discutir sobre a grande quantidade de configurações iniciais, isto é, ao posicionamento relativo da Terra e da Lua em relação ao Sol devido às considerações das excentricidades de suas órbitas. A configuração inicial adotada em nossas investigações numéricas com o P4C, considera, em  $t = 0$ , o Sol, a Terra, a sonda e a Lua alinhados nesta ordem, e com a Terra e a Lua ocupando os pericentros de suas órbitas. Para garantir que as características das trajetórias reportadas neste Capítulo não são exclusivas desta configuração, simulamos outras 64 configurações iniciais. Em todas elas, observamos ganho de inclinação durante a passagem pela Lua e subsequente formação do elo Terra-Lua-Terra e da rota de escape, praticamente com a mesma forma e tamanho dos mostrados na Seção 5.4. Contudo, foi verificado que para aquelas configurações em que o Sol, a Terra, a sonda e a Lua se encontram sobre a eclíptica em  $t = 0$ , o ganho de inclinação durante a passagem pela Lua é de aproximadamente  $10^\circ$ , mas, mesmo assim, os elos e a rota de escape não deixam de existir. Nas demais configurações, o ganho de inclinação fica entre  $29$  e  $42^\circ$ , tal como a considerada neste Capítulo.

Também observamos que as várias configurações iniciais simuladas requerem velocidades de aquisição para as Trajetórias G,  $V_I$ , diferentes. Mas diferenças, em km/s, aparecem apenas na terceira ou quarta casas decimais, o que garante, para quaisquer

configurações a definição de trajetórias idênticas ao conjunto definido na Seção 5.3. Este fato era esperado de certa forma, pois, se confrontarmos os conjuntos de trajetórias definidos nas Seções 4.4, para o PR3C, e 5.3, para o P4C, fica claro que a posição da Lua em relação à Terra, quando sua excentricidade é considerada, gera apenas pequenas diferenças na velocidade de injeção,  $V_I$ ; apesar disto, as relações gráficas e as expressões matemáticas que define os dois conjuntos são quase idênticas. Ou seja, a excentricidade da órbita da Lua não destrói o conjunto de Trajetórias G, nem os elos entre a Terra e a Lua e a rota de escape para o espaço exterior. Em virtude disto, os elos Terra-Lua-Terra encontrados para as 64 simulações realizadas são similares em forma e tamanho. Desta maneira, eventuais erros no lançamento de uma sonda a partir de uma órbita terrestre poderão ser corrigidos a meio caminho. De maneira geral, quanto mais afastada da Terra, menor é o  $\Delta V_{Corretor}$  para redirecionar as Trajetórias G até a órbita lunar final desejada.

## CAPÍTULO 6

### TRANSFERÊNCIAS TERRA-LUA

#### 6.1 Introdução

Nos Capítulos anteriores, apresentamos um conjunto de trajetórias que definem elos entre a Terra e a Lua. Agora, exploraremos duas possibilidades de transferências entre órbitas de estacionamento terrestres e lunares que podem ser levadas a cabo pelas Trajetórias G. Também iremos comparar os custos destas manobras com os obtidos para efetuar as mesmas manobras pelos métodos convencionais de Hohmann e *Patched-conics* descritos no Apêndice C. O primeiro tipo de manobra que iremos estudar corresponde a uma transferência direta entre uma órbita de estacionamento terrestre e outra lunar, ambas de baixas altitudes com aplicação de dois impulsos. O segundo tipo corresponde a uma transferência direcionada em que um  $\Delta V$  diretor de meio caminho é aplicado à sonda direcionando-a para inserção em órbitas lunares de grandes inclinações e também de baixas altitudes.

Este Capítulo tem a seguinte organização: na próxima Seção, abordaremos o primeiro tipo de manobra, a transferência direta, descrevendo a metodologia empregada e os resultados encontrados. Na Seção 6.3, apresentaremos a transferência direcionada descrevendo o método empregado e os resultados de sua aplicação para uma das órbitas da Tabela 5.1. A Seção 6.4 é dedicada às discussões e conclusões sobre o Capítulo.

#### 6.2 Transferência Direta

Nesta manobra, o objetivo é transferir uma sonda de uma órbita terrestre para uma órbita lunar com aplicação de apenas dois impulsos. Para análise desta transferência adotamos como sistemas dinâmicos o PR3C e o P4C. Nossa primeira hipótese consiste em considerar que as órbitas de estacionamento terrestres e lunares sejam circulares. Então, as magnitudes dos  $\Delta V$ 's requeridos para a manobra são obtidos de acordo com os seguintes passos:

- 1.) Dada a altitude da órbita terrestre da sonda, calcula-se a velocidade da órbita,  $V_{CT}$ , por:

$$V_{CT} = \sqrt{\frac{\mu_{Terra}}{H_T + R_T}} \quad (6.1)$$

Onde  $\mu_{Terra}$  ( $\mu_1$  para o PR3C ou  $\mu_2$  para o P4C) =  $GM_{Terra}$  é o parâmetro de massa da Terra e  $R_T$  o seu raio médio.

- 2.) Com o valor de  $H_T$  na expressão (4.7) para o PR3C e (5.5) para o P4C, calcula-se o valor da magnitude da velocidade de injeção para aquisição da trajetória,  $V_I$ . Aqui, estaremos considerando apenas trajetórias que possuam  $H_L = 100\text{km}$ .
- 3.) Com o valor de  $V_I$ , calcula-se a magnitude do  $\Delta V_1$  requerido para o primeiro impulso, o impulso de injeção que colocará a sonda na Trajetória G de transferência, por:

$$\Delta V_1 = V_I - V_{CT} \quad (6.2)$$

**Nota:** O primeiro impulso deve ser aplicado com a Terra, a sonda e a Lua alinhadas nesta ordem (conjunção inferior). Isto significa que o intervalo de tempo,  $\Delta T$ , para aplicação do primeiro impulso ocorre a cada período da órbita de estacionamento terrestre acrescido de um intervalo,  $\Delta t$ , correspondente ao deslocamento da Lua durante o período da órbita de estacionamento. Ou seja, enquanto a sonda descreve um período orbital completo,  $T_S$ , a Lua percorre um arco  $L$  sobre sua órbita que equivale a um deslocamento angular  $\Delta?$ , em relação a sua posição inicial, com  $\Delta? = \mathbf{T}_{Lua}T_S$ , e supondo a Lua em órbita circular, com  $\mathbf{T}_{Lua} = 2,66 \times 10^{-6} \text{rad}^{-1}$ . Daí, o intervalo de tempo  $\Delta t$  pode ser estimado por:

$$\Delta t = \frac{1}{2p} \mathbf{w}_{Lua} T_S^2 \quad (6.3)$$

Sendo,

$$T_S = 2\mathbf{p} \sqrt{\frac{(R_T + H_T)^3}{\mathbf{m}_{Terra}}} \quad (6.4)$$

Temos, portanto:

$$\Delta T = 2\mathbf{p} \sqrt{\frac{(R_T + H_T)^3}{\mathbf{m}_{Terra}}} + 2\mathbf{w}_{Lua} \frac{(R_T + H_T)^3}{\mathbf{m}_{Terra}} \quad (6.5)$$

4.) Velocidade da órbita de estacionamento circular lunar;

$$V_{CL} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_{Lua}}{R_L + H_L}} \quad (6.6)$$

Onde  $\mu_{Lua}$  ( $\mu_2$  para o PR3C ou  $\mu_3$  para o P4C) =  $GM_{Lua}$  é o parâmetro de massa da Lua e  $R_L = 1738\text{km}$  o seu raio médio.

5.) Quando a sonda atingir seu periluna, com altitude  $H_L$  e velocidade  $V_L$ , calcula-se o valor da magnitude do  $\Delta V_2$  requerido para inserir a sonda em órbita lunar. Como  $V_I$  foi obtida pelas Equações (4.7) ou (5.5), com  $d = 1,46 \times 10^{-4} \text{km/s}$ ,  $0 < H_L = 100\text{km}$ , necessariamente, mas seu valor, bem como o de  $V_L$ , são obtidos numericamente. As Tabelas 4.3 e 5.1 mostram alguns valores de  $H_L$  e  $V_L$  para algumas trajetórias encontradas para o PR3C e o P4C, respectivamente. Então, de posse destes valores, e de  $V_{CL}$ , temos:

$$\Delta V_2 = V_L - V_{CL} \quad (6.7)$$

Ao atingir o periluna, a sonda estará entre a Lua e L1, sobre o eixo- $x$  do sistema de coordenadas sinódico e  $V_L$  é perpendicular à direção do vetor posição Lua-sonda.

6.) Finalmente, a magnitude do  $\Delta V_{Total}$  é:

$$\Delta V_{Total} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (6.8)$$

A Tabela 6.1 lista os  $\Delta V$ 's requeridos para a transferência direta via Trajetórias G considerando o PR3C e os  $\Delta V$ 's para realizar as manobras equivalentes pelos métodos de Hohmann ( $\Delta V_H$ ) e *Patched-conics* ( $\Delta V_{PC}$ ), para as 10 trajetórias da Tabela 4.3. Analogamente, a Tabela 6.2 lista os  $\Delta V$ 's requeridos para a transferência via Trajetórias G, listadas na Tabela 5.1, para o P4C e os respectivos  $\Delta V$ 's via Hohmann e *Patched-conics*. Porém, para o P4C, a órbita lunar final possuirá uma inclinação entre 29° e 42°.

De acordo com os dados das Tabelas 6.1 e 6.2, para  $H_T = 1000\text{km}$ , os  $\Delta V_{Total}$ 's requeridos pelas Trajetórias G são cerca de 3% maiores que os  $\Delta V_{Total}$  via Hohmann e cerca de 2% menores que  $\Delta V_{Total}$  via *Patched-conics*. Mas como vimos no Apêndice C, os  $\Delta V_{Total}$  via Hohmann e *Patched-conics* são calculados a partir da dinâmica de dois corpos e, por esse motivo, requerem  $\Delta V$ 's adicionais para concluir a manobra e que podem encarecê-la em até 10% (Prado, 2001a). Destes, 5% são para compensar os erros dos propulsores no lançamento. Os outros 5% são para compensar as perturbações dos campos gravitacionais do Sol, Terra e da Lua durante a manobra. Para as Trajetórias G, isto não seria necessário, já que os  $\Delta V$ 's encontrados foram calculados considerando sistemas dinâmicos mais complexos baseados nos PR3C e P4C que levam em conta os campos gravitacionais da terrestre, lunar e do Sol durante toda a transferência, além das características das órbitas da Terra e da Lua. Desta forma, podemos concluir que as Trajetórias G representam uma boa alternativa e podem oferecer uma economia entre 3% e 7% em relação aos métodos convencionais. E, apesar de possuírem um tempo de vôo entre 8 e 9 dias maior do que os destes métodos, elas podem ser úteis em um grande número de missões de sondas automáticas e, até mesmo, em algumas missões tripuladas face à economia oferecida.

Os valores dos  $\Delta V$ 's para transferências via Trajetórias G da Tabela 6.2 foram encontrados para a mesma configuração inicial adotada no Capítulo 5. Estando o Sol, a Terra, a sonda e a Lua alinhados nesta ordem, com a Terra e a Lua ocupando os

pericentros de suas órbitas. Porém, como as diferenças entre os valores de  $V_I$  para todas as configurações possíveis ocorrem apenas nas terceira ou quarta casas decimais, considerando km/s, as diferenças nos valores dos  $\Delta V$ 's também estarão nestas casas.

TABELA 6.1 – Altitudes das órbitas de estacionamento terrestres e lunares, e os  $\Delta V$ 's via Trajetórias G, Hohmann e *Patched-conics*, respectivamente, para o PR3C.

$H_T$ (km)	$H_L$ (km)	$\Delta V_1$ (km/s)	$\Delta V_2$ (km/s)	$\Delta V_{Total}$ (km/s)	$\Delta V_H$ (km/s)	$\Delta V_{PC}$ (km/s)
160	100	3,157	0,917	4,074	3,940	4,156
200	43,0	3,147	0,932	4,079	3,956	4,170
240	14,1	3,138	0,947	4,085	3,960	4,166
320	67,7	3,119	0,911	4,040	3,916	4,137
700	41,9	3,030	0,920	3,950	3,844	4,297
1000	34,3	2,964	0,921	3,885	3,786	4,452
5000	91,6	2,357	0,891	3,248	3,190	5,863
10000	44,4	1,934	0,917	2,851	2,827	6,830
36000	98,8	1,107	0,828	1,935	2,115	6,838
60000	88,7	0,818	0,803	1,621	1,919	9,250

TABELA 6.2 – Altitudes das órbitas de estacionamento terrestres e lunares, e os  $\Delta V$ 's via Trajetórias G, Hohmann e *Patched-conics*, respectivamente, para o P4C.

$H_T$ (km)	$H_L$ (km)	$\Delta V_1$ (km/s)	$\Delta V_2$ (km/s)	$\Delta V_{Total}$ (km/s)	$\Delta V_H$ (km/s)	$\Delta V_{PC}$ (km/s)
160	100	3,156	0,919	4,075	3,940	4,156
200	43,0	3,146	0,931	4,077	3,956	4,170
240	14,1	3,137	0,945	4,083	3,960	4,166
320	67,7	3,117	0,920	4,038	3,916	4,137
700	41,9	3,029	0,925	3,954	3,844	4,297
1000	34,3	2,963	0,921	3,884	3,786	4,452
5000	91,6	2,355	0,888	3,243	3,190	5,863
10000	44,4	1,931	0,915	2,846	2,827	6,830
36000	98,8	1,103	0,825	1,928	2,115	6,838
60000	88,7	0,811	0,794	1,605	1,919	9,250

### 6.3 Transferência Direcionada

Nesta Seção, consideraremos uma transferência via Trajetórias G em que um  $\Delta V$  de meio caminho é aplicado à sonda a fim de direcioná-la para inserção em órbitas lunares

com inclinações maiores que  $42^\circ$  ou menores que  $29^\circ$ , mas ainda com baixas altitudes. Isto será feito explorando a sensibilidade inerente as Trajetórias G e o ganho de inclinação que ocorre durante a passagem pela Lua. Por isso, só faz sentido considerarmos aqui o P4C Sol-Terra-Lua-sonda como sistema dinâmico e as trajetórias da Tabela 5.1. Nas Subseções a seguir, descreveremos a metodologia empregada para construir uma transferência direcionada a partir de das Trajetórias G, e aplicação do método e os seus respectivos resultados para uma das órbitas da Tabela 5.1. Contudo, o método é geral e pode ser aplicado a qualquer trajetória cujas condições iniciais satisfaçam a expressão (5.5) ou a relação gráfica da Figura 5.1.

### 6.3.1 Metodologia da Transferência Direcionada

A idéia básica explorada é: dada uma Trajetória G cujas condições iniciais no sistema de coordenadas Cartesianas geocêntricas sejam:

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (x_0, 0, z_0, 0, V_I, 0) \quad (6.9)$$

Onde,

$$x_0 = (R_T + H_T)\cos(i_{Lua}) \quad (6.10)$$

$$z_0 = (R_T + H_T)\text{sen}(i_{Lua}) \quad (6.11)$$

com  $H_T$  e  $V_I$  satisfazendo a Equação (5.5) e  $18,36^\circ = i_{Lua} = 28,64^\circ$  em relação ao equador terrestre. A partir destas condições iniciais, um algoritmo busca por um ponto, entre o perigeu e o periluna da Trajetória G, mais adequado para aplicação de um  $\Delta V$  que irá direcionar a sonda para a órbita lunar desejada, com  $i \geq 42^\circ$  ou  $i = 29^\circ$ . Estamos considerando, por ora, que o ponto mais adequado é aquele que exigirá o menor  $\Delta V$  diretor. Nossos experimentos numéricos mostram que este ponto corresponde ao apogeu da Trajetória G, o que se justifica pelo fato de nele a sonda possuir a menor velocidade da perna Terra-Lua.

Uma vez determinado o ponto de aplicação do  $\Delta V$  diretor, ao qual doravante chamaremos de  $\Delta V_{diretor}$ , o algoritmo aplicará um número  $N$  de  $\Delta V_{diretor}$ 's à sonda e integrará a trajetória para cada um deles até que ela atinja o periluna. Nele, o algoritmo calculará os elementos orbitais osculadores da órbita lunar circular, e os custos de inserção. Estes dados, juntamente com os  $N$   $\Delta V_{diretor}$ 's e suas componentes são armazenados. Desta maneira, seremos capazes de determinar o  $\Delta V_{diretor}$  que conduzirá a sonda até a órbita lunar desejada. Os  $N$   $\Delta V_{diretor}$ 's são obtidos definindo-se, computacionalmente, três intervalos de variação, um para cada componente do  $\Delta V_{diretor}$ . Isto é, para um sistema de coordenadas Cartesianas geocêntricas, temos:

$$\Delta \mathbf{V}_{diretor} = \Delta V_x \hat{\mathbf{i}} + \Delta V_y \hat{\mathbf{j}} + \Delta V_z \hat{\mathbf{k}} \quad (6.12)$$

Então, definem-se limites de variação para as componentes  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$  e  $\Delta V_z$ ,

$$\Delta V_{xMIN} = \Delta V_x = \Delta V_{xMAX} \quad (6.13)$$

$$\Delta V_{yMIN} = \Delta V_y = \Delta V_{yMAX} \quad (6.14)$$

$$\Delta V_{zMIN} = \Delta V_z = \Delta V_{zMAX} \quad (6.15)$$

Em seguida, define-se um passo de varredura para cada um destes intervalos, os quais nós denotaremos por  $P\Delta V_x$ ,  $P\Delta V_y$  e  $P\Delta V_z$ . Assim, também se pode definir o número de componentes  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  de cada um dos intervalos dados pelas Equações (6.13) à (6.15), respectivamente, por:

$$n_x = \left\lceil \frac{\Delta V_{xMAX} - \Delta V_{xMIN}}{P\Delta V_x} \right\rceil \quad (6.16)$$

$$n_y = \left\lceil \frac{\Delta V_{yMAX} - \Delta V_{yMIN}}{P\Delta V_y} \right\rceil \quad (6.17)$$

$$n_z = \left| \frac{\Delta V_{zMAX} - \Delta V_{zMIN}}{P\Delta V_z} \right| \quad (6.18)$$

Finalmente, o número  $N$  de  $\Delta V_{diretor}$ 's aplicado e, conseqüentemente, o número de trajetórias integradas é dado por:

$$N = n_x n_y n_z \quad (6.19)$$

Com este procedimento, o algoritmo é capaz de fornecer  $N$  possíveis órbitas lunares com inclinação entre 0 e 180°, longitude do nodo ascendente entre 0 e 360° e um número variado de altitudes. Mas é possível selecionar os valores de  $i$ ,  $\Omega$  e  $H_L$  de acordo com a missão. A Figura 6.1 ilustra o procedimento descrito, mostrando a trajetória de transferência antes e depois da aplicação do  $\Delta V_{diretor}$ .

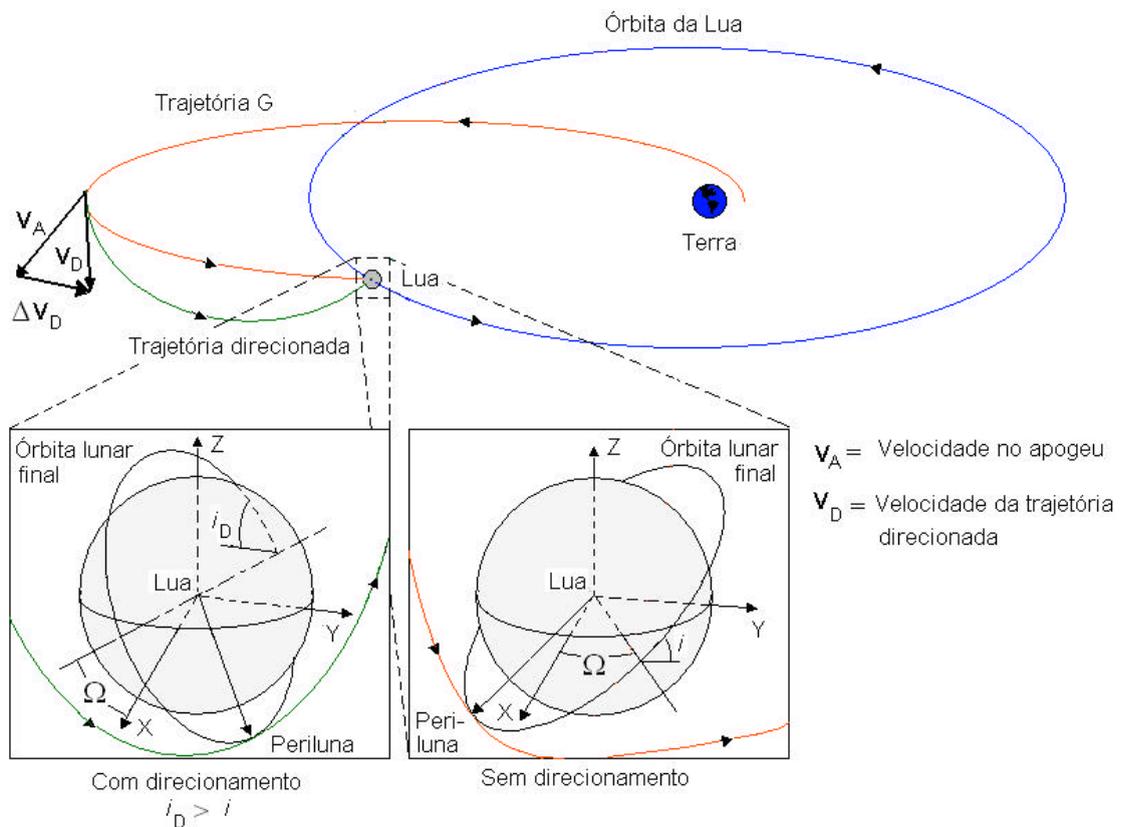


FIGURA 6.1 – Geometria básica da transferência direcionada via Trajetórias G (Figura ilustrativa e fora de escala).

Nas Subseções a seguir, vamos descrever a aplicação deste método a uma das trajetórias listadas na Tabela 5.1.

### 6.3.2 Transferência Direcionada para $H_T = 240\text{km}$

Seguindo a abordagem da Seção anterior, e considerando a órbita de estacionamento terrestre circular de altitude  $H_T = 240\text{km}$  e  $d = 1,46 \times 10^{-4}\text{km/s}$ , obtemos pela Equação (5.5),  $V_I = 10,90115\text{km/s}$ . Estes valores substituídos nas expressões (6.9), (6.10) e (6.11), fornecem a condição inicial da Trajetória G capaz de levar a sonda diretamente a uma órbita lunar de altitude  $H_L = 10\text{km}$ ,  $i = 41,1^\circ$  e  $\Omega = 116,9^\circ$ , requerendo dois impulsos e um  $\Delta V_{Total} = 4,070\text{km/s}$ .

Uma vez alimentado com as condições iniciais desta trajetória, o algoritmo encontra seu apogeu, onde o raio  $R_A$  e suas componentes, suas velocidade  $V_A$  e componente, e o tempo de passagem por este ponto,  $T_A$ , são:

$$R_A = 546306,8\text{km} \quad (6.20)$$

$$x_A = - 479700,0\text{km} \quad (6.21)$$

$$y_A = - 10987,0\text{km} \quad (6.22)$$

$$z_A = - 261186,5\text{km} \quad (6.23)$$

$$V_A = 0,151\text{km/s} \quad (6.24)$$

$$V_{xA} = 0,013\text{km/s} \quad (6.25)$$

$$V_{yA} = - 0,150\text{km/s} \quad (6.26)$$

$$V_{zA} = 0,010\text{km/s} \quad (6.27)$$

As Figuras 6.2 e 6.3 mostram os resultados de dois experimentos numéricos realizados considerando esta trajetória. No primeiro deles, Figura 6.2, as componentes do  $\Delta \mathbf{V}_{diretor}$  variaram entre  $-0,200\text{km/s}$  e  $+0,200\text{km/s}$  em passos de  $0,004\text{km/s}$ . Ou seja, a partir do apogeu da Trajetória G foram integradas outra  $10^6$  trajetórias, das quais selecionamos aquelas com  $20 = H_L = 10000\text{km}$ . Os limites de variação das componentes foram estabelecidos empiricamente da seguinte maneira: realizamos experimentos anteriores a este e consideramos intervalos de variação das componentes bem maiores, mas selecionando também, apenas trajetórias com  $20 = H_L = 10000\text{km}$ . Os resultados foram os mesmos, e todos mostraram, como pode ser visto na Figura 6.2.a, que para este intervalo de  $H_L$ , a variação do  $\Delta V_{Total}$  é da ordem de  $0,340\text{km/s}$ . Este é aproximadamente igual à magnitude máxima do  $\Delta \mathbf{V}_{diretor}$  para suas três componentes variando entre  $-0,200\text{km/s}$  e  $+0,200\text{km/s}$ . Ou seja:

$$(\Delta V_{diretor})_{MAX} = [ (\forall 0,200)^2 + (\forall 0,200)^2 + (\forall 0,200)^2 ]^{1/2} \cong 0,340\text{km/s} \quad (6.29)$$

Isto significa que qualquer valor para as componentes que levem a um  $\Delta V_{diretor}$  maior que  $0,340\text{km/s}$ , conduzirá a sonda a altitudes maiores que  $10000\text{km}$ .

No segundo experimento, as componentes do  $\Delta \mathbf{V}_{diretor}$  variaram entre  $-0,060\text{km/s}$  e  $+0,060\text{km/s}$  e  $20 = H_L = 120\text{km}$ . Ele foi realizado, para que pudéssemos verificar com maior precisão quais os menores valores para magnitude do  $\Delta \mathbf{V}_{diretor}$  fornecidos pelo método para órbitas lunares de baixas altitudes e grandes inclinações.

Agora, passemos à análise da Figura 6.2. Ela contém 2 diagramas que mostram a variação da magnitude do  $\Delta \mathbf{V}_{Total}$  da manobra em função de  $H_L$  e  $i$ . As seguintes observações podem ser feitas com relação a estes diagramas:

- 1.) No diagrama  $\Delta V_{diretor} \times H_L$  da Figura 6.2.a, podemos verificar quais são os valores dos  $\Delta V_{Total}$  mínimo e máximo para cada valor de  $H_L$ . A diferença entre eles corresponde à largura vertical da distribuição de pontos do diagrama para um dado  $H_L$ , e é aproximadamente igual a magnitude máxima de  $\Delta \mathbf{V}_{diretor}$  que conduzirá a trajetória àquele valor de  $H_L$  em seu periluna com inclinação da

órbita lunar osculadora variando entre 0 e 180°, exceto para  $84,86^\circ = i = 95,14^\circ$ , como discutiremos a seguir. Isto pode ser entendido levando em conta que o  $\Delta V_{Total}$  corresponde à soma:

$$\Delta V_{Total} = \Delta V_1 + \Delta V_{diretor} + \Delta V_2 \quad (6.30)$$

ou, como  $\Delta V_1 = 3,138\text{km/s}$  e  $\Delta V_2$  é dado em função de  $V_L$  (calculada numericamente), temos:

$$\Delta V_{Total} = 3,128 + \Delta V_{diretor} + \left( V_L + \sqrt{\frac{m_{Lua}}{R_L + H_L}} \right) \quad (6.31)$$

Assim, para um  $H_L$  fixo,  $\Delta V_{Total}$  irá variar em função apenas do  $\Delta V_{diretor}$ , já que  $V_L$  é inerente à trajetória, embora também dependa de  $H_L$ .

2.) A princípio, poderíamos pensar que um  $\Delta V_{diretor} = 0$  corresponderia ao menor  $\Delta V_{Total}$ . Mas a Figura 6.2.b, na qual temos  $\Delta V_{Total} \times i$ , mostra que com o  $\Delta V_{Total}$  mínimo é possível atingir qualquer inclinação entre 0 e 180°, exceto para  $84,86^\circ = i = 95,14^\circ$ . Isto quer dizer que um  $\Delta V_{diretor} \neq 0$  é capaz de redirecionar a trajetória e ainda diminuir a sua velocidade na aproximação com a Lua.

Com relação à descontinuidade observada na distribuição de pontos deste diagrama, nota-se que sua largura é igual ao dobro da inclinação do plano da órbita da Lua em relação à eclíptica. No próximo Capítulo, veremos um resultado que nos permitirá interpretar este fato como algo além de uma coincidência. Mas por ora, podemos entendê-lo levando em conta que as Trajetórias G têm origem nas órbitas periódicas da Família G e das quase-periódicas que oscilam em torno delas. Isto quer dizer que elas derivam de um conjunto de trajetórias cuja simetria impõe limites à inclinação da trajetória em relação ao plano da órbita da Lua. Em outras palavras, uma vez que a inclinação

da órbita osculadora que contém o periluna da trajetória de transferência dada por:

$$i = \cos^{-1}\left(\frac{h_z}{h}\right) \quad (6.32)$$

com,

$$h_z = x\dot{y} - y\dot{x} \quad (6.33)$$

$$h = r_p v_p \sin(\mathbf{g}) = (R_L + H_L) V_L \sin(\mathbf{g}) \quad (6.34)$$

Onde  $h$  é o momento angular específico da trajetória,  $h_z$  é a sua componente na direção  $z$ ,  $r_p$  e  $v_p$  as magnitudes dos vetores posição e da velocidade da sonda no periluna, e  $\mathbf{g}$  é o ângulo entre suas direções. Para que tenha  $i$  em torno de  $90^\circ$ ,  $h_z$  na Equação (5.30), deve ser aproximadamente zero, isto é:

$$h_z = x\dot{y} - y\dot{x} \approx 0 \quad (6.34)$$

Mas, isto não ocorre para o conjunto de trajetórias definidas nos Capítulos 4 e 5, pois no instante em que a sonda atinge seu periluna, ela deve estar entre a Terra e Lua, ou entre L1 e a Lua, mesmo que fora do plano da órbita da Lua (no caso do P4C), uma vez que são derivadas das órbitas da Família G. Para o PR3C, o periluna pode ser atingido no terceiro e quarto quadrantes do sistema de coordenadas Cartesianas geocêntricas. Para o P4C isto ocorre no terceiro ou sétimo octantes, mas em qualquer um destes casos, o produto  $x\dot{y} - y\dot{x}$  é sempre diferente de zero, mesmo que o periluna fosse alcançado em um ponto cujo vetor de estado seja do tipo  $(x, 0, z, 0, \dot{x}, 0)$ . Portanto, não é possível para este conjunto de trajetórias uma inclinação em torno de  $90^\circ$ . Entretanto, levando em conta a inclinação de  $6,5^\circ$  entre o equador da Lua e o plano de sua órbita, verificamos que uma inclinação de  $96,5^\circ$ , em relação à órbita da Lua, que é perfeitamente possível, corresponde a uma inclinação de  $90^\circ$  em relação ao equador lunar, portanto, a uma órbita polar.

Da Figura 6.2.b, verificamos que qualquer inclinação entre 0 e 180° pode ser alcançada, exceto  $84,86^\circ = i = 95,14^\circ$  com  $\Delta V_{Total} \cong 4,065\text{km/s}$ . Portanto, o que determinará a inclinação da órbita osculadora serão as componentes do  $\Delta V_{diretor}$ . As simulações também mostraram não haver restrições ao valor de  $\Omega$  da órbita lunar osculadora que contém o periluna.

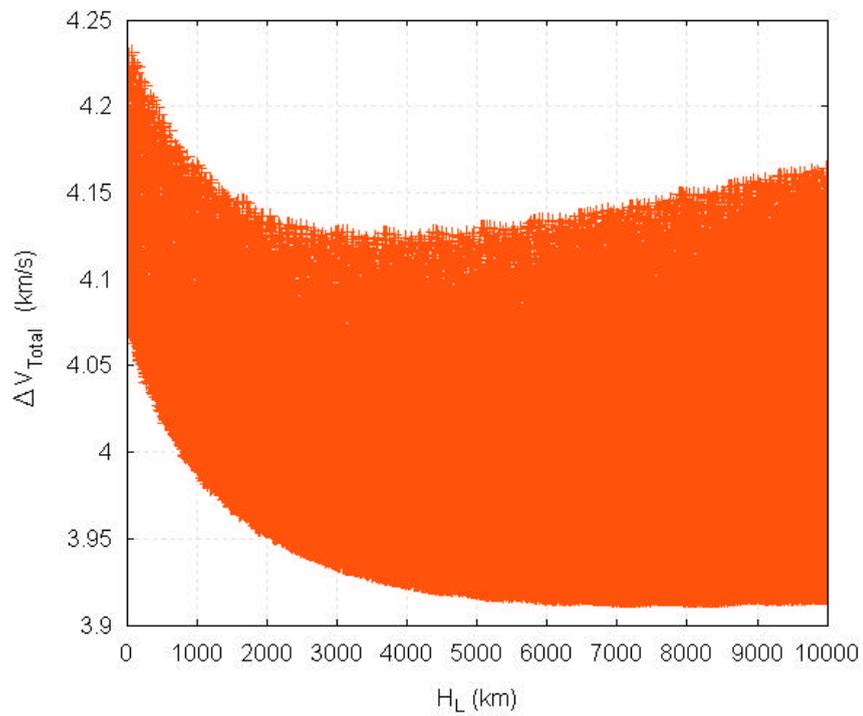
- 3.) A forma e a densidade da distribuição de pontos dos diagramas dependem do intervalo de variação das componentes do  $\Delta V_{diretor}$ , do passo de varredura do seu intervalo de variação, dos valores de  $H_L$  selecionados e da Trajetória G considerada no experimento. Isto pode ser observado comparando letra por letra os diagramas das Figuras 6.2 e 6.3.

Com relação ao diagramas da Figura 6.3, têm-se a mesma análise que acabamos de fazer, no entanto, ele fornece com maior precisão o  $\Delta V_{Total}$  para  $20 = H_L = 120\text{km}$ . Através destes diagramas, é possível determinar qual as magnitudes do  $\Delta V_{Total}$  de uma eventual manobra por completo. Por exemplo, se escolhermos uma transferência para uma órbita lunar de inclinação igual a  $95,14^\circ$ , deixando em aberto o valor de  $\Omega$  e de  $H_L$  ( $20 = H_L = 120\text{km}$ ), o menor  $\Delta V_{Total}$  é da ordem de  $4,068\text{km/s}$ .

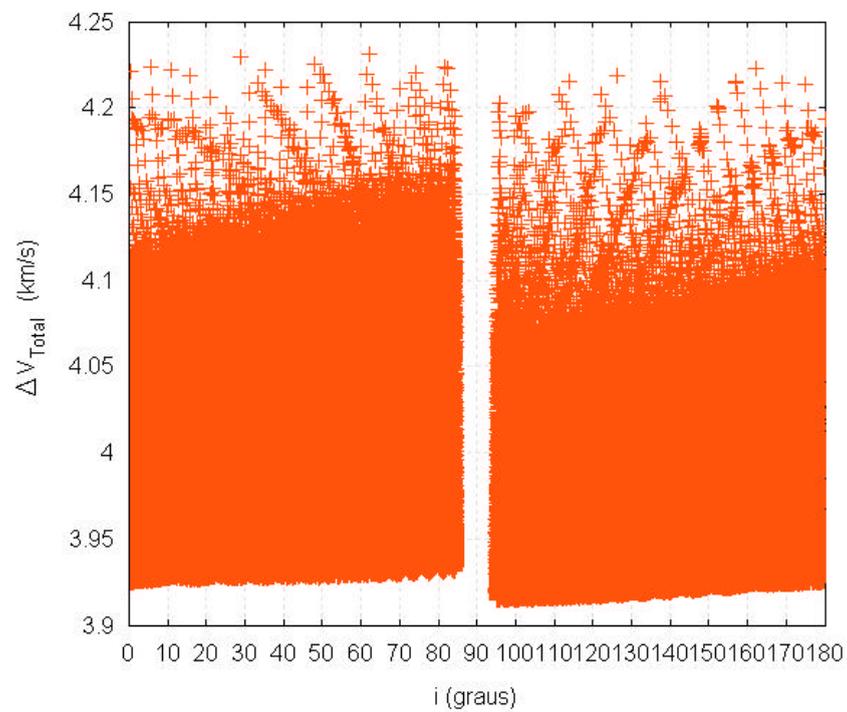
#### **6.4 Conclusões sobre o Capítulo**

O objetivo deste Capítulo foi mostrar como as trajetórias definidas nos Capítulos 4 e 5 podem ser utilizadas em transferência entre as órbitas de estacionamento terrestres e lunares, ambas de baixas altitudes, inclusive, permitindo a inserção de sondas em órbitas com grandes inclinações.

Na Seção 5.2, abordamos uma manobra de transferência direta entre órbitas terrestres e lunares, com aplicação de apenas dois impulsos; o primeiro aplicado à sonda ainda na órbita terrestre, quando ela se encontra entre a Terra e a Lua, para injetá-la na Trajetória G. O segundo impulso é aplicado quando a sonda alcança seu periluna, neste ponto, ela também se encontra entre a Lua e a Terra, mais precisamente, entre a Lua e L1. Nossos

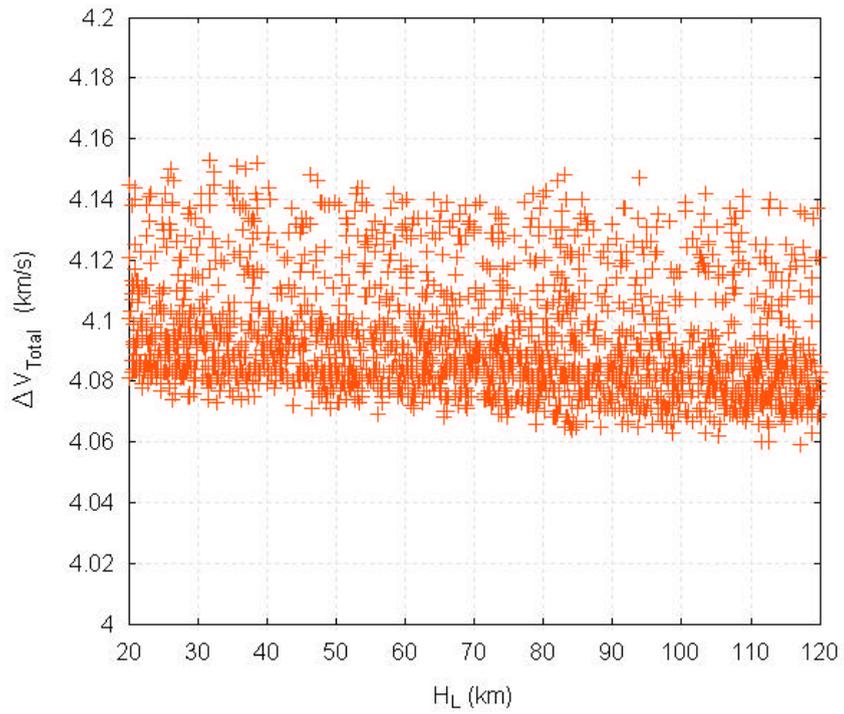


(a)

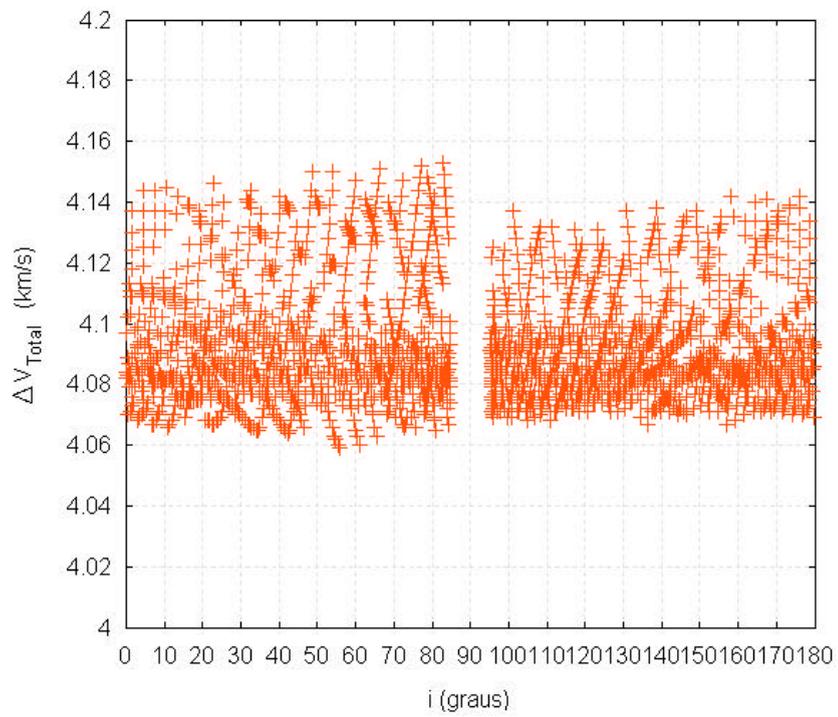


(b)

FIGURA 6.2 – Diagramas: (a)  $\Delta V_{Total} \times H_L$  e (b)  $\Delta V_{Total} \times i$ , para  $20 = H_L = 10000\text{km}$ .



(a)



(b)

FIGURA 6.3 – Diagramas: (a)  $\Delta V_{Total} \times H_L$  e (b)  $\Delta V_{Total} \times i$ , para  $20 = H_L = 120$ km.

resultados mostram que o custo total da manobra é cerca de 3% maior que a manobra equivalente do tipo Hohmann, e cerca de 2% menor do que a equivalente *Patched-conics*. Desta comparação, duas diferenças devem ser salientadas. A primeira delas diz respeito ao sistema dinâmico considerado pelas transferências tipo Hohmann e *Patched-conics*, o problema de dois corpos Terra-sonda e Lua-sonda (veja Apêndice C), e o sistema por nós considerados, o PR3C e o P4C Sol-Terra-Lua-sonda, este último, muito próximo do real. Levando em conta simulações numéricas de transferências preditas pelos métodos de Hohmann e *Patched-conics*, as perturbações dos campos gravitacionais do Sol, da Terra e da Lua, quando consideradas ao longo de toda a manobra, provocam desvios nestas trajetórias superiores a 30000km durante a aproximação com a Lua, o que, com certeza, irá requerer impulsos adicionais para concluir a manobra, podendo encarecê-las em 5% ou mais. Impulsos adicionais não seriam necessários para corrigir estas perturbações para as Trajetórias G. A segunda diferença diz respeito ao ganho de inclinação durante a passagem pela Lua na transferência via Trajetória G, quando o P4C é considerado, permitindo, na transferência direta, inserir sondas em órbitas lunares com inclinações entre 29° e 42°. As transferências tipo Hohmann e *Patched-conics* não apresentam ganho de inclinação, na verdade, são apenas métodos que permitem uma estimativa prima dos custos da manobra, embora isto não reduza a importância de cada uma delas quando se trata do planejamento de uma missão de transferência Terra-Lua.

A instabilidade e o ganho de inclinação inerente às Trajetórias G foram explorados na Seção 6.3 no que denominamos por transferência direcionada, na qual um  $\Delta V_{diretor}$  é aplicado à sonda quando ela atinge o apogeu da trajetória direcionando-a de maneira que a órbita osculadora lunar que contém o seu periluna possua uma inclinação inferior a 29°, ou superior a 42°, inclusive órbitas com inclinações próximas a 90° em relação ao plano da órbita da Lua. Os resultados da Seção 5.3 mostram que o  $\Delta V_{diretor}$  mínimo para o experimento é o mesmo para qualquer inclinação em relação ao plano da órbita da Lua. A possibilidade de inserção em uma órbita lunar de grande inclinação, superior a 75°, com  $\Delta V_{Total}$  abaixo de 4,100km/s elimina a necessidade de manobras de transferências de plano, que são caras, como pode ser visto no Apêndice C.

Um último ponto de comparação entre as transferências via Trajetórias G e os métodos convencionais (tipo Hohmann e *Patched-conics*) é com relação ao tempo de vôo. Para as Trajetórias G, ele fica entre 13 e 16 dias, de 8 a 10 dias a mais do que o tempo de vôo para dos métodos convencionais. Mas frente a uma possível redução entre 5 a 10% na magnitude do  $\Delta V_{Total}$ , as Trajetórias G representam uma alternativa viável para transferências entre a Terra e a Lua. Por outro lado, se compararmos os tempos de vôo e os custos das transferências via Trajetórias G com os daquelas que se baseiam no fenômeno de captura gravitacional verificamos que tais transferências, investigadas na grande maioria dos trabalhos constantes na literatura com o PR3C, requerem  $\Delta V_{Total}$  cerca de 5% menores que os dos métodos convencionais, mas tempos de vôo da ordem de meses, reforçando, assim, o caráter alternativo das Trajetórias G, para missões no Sistema Terra-Lua.



## CAPÍTULO 7

### TRANSFERÊNCIAS DIRECIONADAS TERRA-TERRA

#### 7.1 Introdução

Nos Capítulos 4 e 5, verificamos a existência de três características muito interessantes do conjunto de Trajetórias G – sensibilidade a pequenas variações na velocidade, ganho de inclinação durante a passagem pela Lua e formação de elos entre a Terra e a Lua. Nosso objetivo neste novo Capítulo é explorar estas três propriedades em manobras de transferências entre duas órbitas terrestres de diferentes altitudes e inclinações. Todavia, os resultados mostrados e discutidos aqui têm a finalidade apenas de exemplificar como um veículo espacial pode utilizar os elos Terra-Lua-Terra para este tipo de missão, reforçando, assim, o caráter alternativo das Trajetórias G. Por todo este Capítulo, estaremos considerando o P4C Sol-Terra-Lua-sonda como sistema dinâmico.

A fim de nos certificarmos que esta manobra pode ser levada a cabo pelas Trajetórias G, consideraremos uma delas, cujas condições iniciais têm  $H_T = 240\text{km}$  e  $V_I = 10,90115\text{km/s}$  (a mesma dos experimentos do Capítulo anterior). A evolução desta trajetória no sistema de coordenadas Cartesianas geocêntricas para 60 dias pode ser vista na Figura 7.1. A Figura 7.2, por sua vez, mostra a variação da inclinação da trajetória em relação ao equador terrestre e da distância Terra-sonda. Observando estas Figuras, notamos que após a passagem pela Lua, o veículo permanece em uma órbita terrestre com inclinação da ordem de  $58^\circ$  (a inclinação inicial era de  $28,45^\circ$ ) e período de aproximadamente 19 dias. Contudo, o perigeu desta órbita fica em torno de  $70000\text{km}$ . Estas características não são exclusivas da trajetória mostrada na Figura 7.1, pelo contrário, características semelhantes estão presentes em todas as Trajetórias G. A idéia básica a ser desenvolvida é muito parecida com a descrita no Capítulo anterior para a transferência direcionada Terra-Lua. Ou seja, buscaremos pelo(s) ponto(s) da trajetória mais adequado(s) para aplicação de um  $\Delta V_{diretor}$  que conduzirá o veículo ou satélite a uma órbita mais próxima da Terra e com inclinação diferente de  $58^\circ$ .

Um estudo semelhante a este foi feito por Torres (2004), mas com o objetivo de desenvolver um veículo à Terra, após a passagem pela Lua, para uma órbita de mesma altitude da inicial, porém com inclinação diferente, e usando a dinâmica da manobra *Patched-conics*.

O desenvolvimento deste Capítulo tem a seguinte ordem: na Seção 7.2, descreveremos a metodologia empregada. Na Seção 7.3, mostramos e discutimos os resultados da utilização dos elos definidos pelas Trajetórias G para uma transferência entre duas órbitas terrestres de diferentes altitudes e inclinações. Na Seção 7.4, vamos comparar os resultados da Seção 7.3 com o método de Hohmann para mudança de plano descrito no Apêndice C. Na Seção 7.5, encerramos com as conclusões sobre o Capítulo.

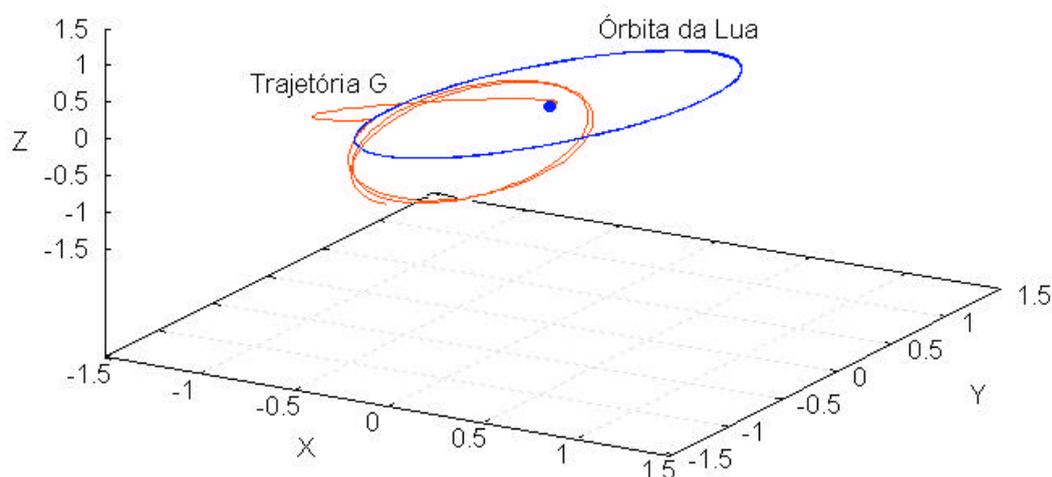
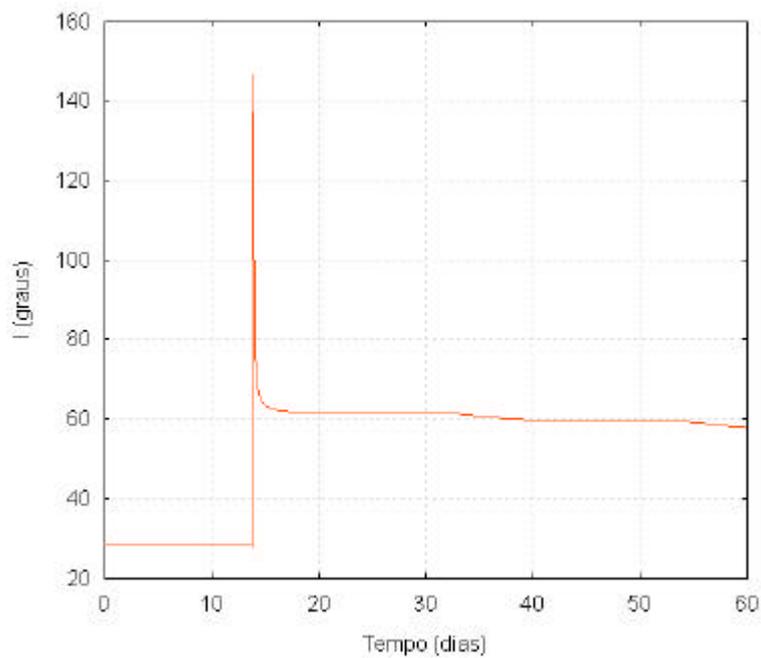


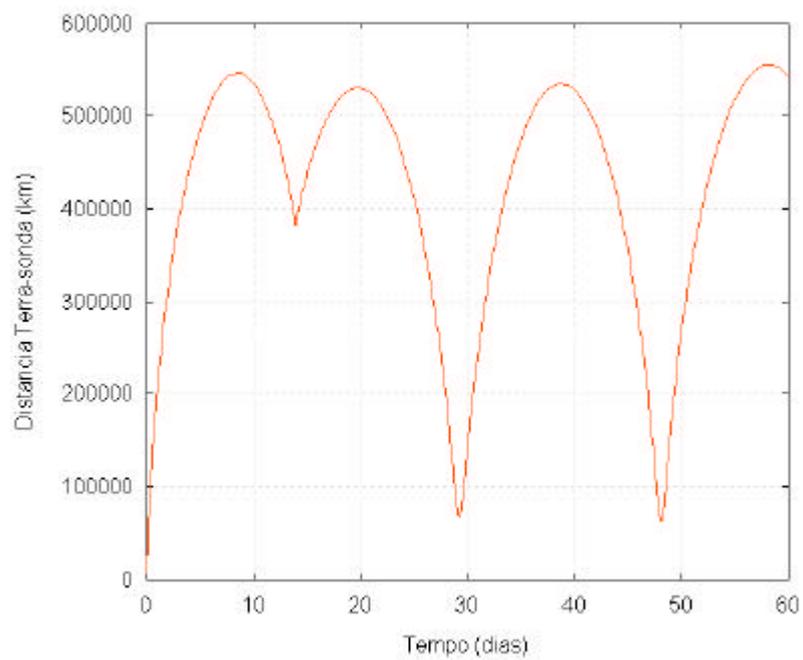
FIGURA 7.1 – Trajetória G para  $H_T = 240\text{km}$  e  $V_I = 10,90115\text{km/s}$  ao longo de 60 dias.

## 7.2 Metodologia

A metodologia que vamos empregar neste Capítulo é semelhante àquela discutida no Capítulo anterior, e consistem em encontrar um ou mais pontos da Trajetória G em que um pequeno  $\Delta V_{diretor}$  aplicado ao veículo o conduzirá até à órbita desejada. A experiência acumulada no Capítulo anterior mostra que um destes pontos é o apogeu da trajetória, o qual ocorre quando a distância Terra-veículo é da ordem de 540000km e com tempo de vôo entre 8 e 10 dias. Contudo, após a passagem pela Lua e ganho de in-



(a)



(b)

FIGURA 7.2 – (a) Inclinação da trajetória em relação ao equador terrestre em função do tempo, (b) distância radial Terra-veículo em função do tempo.

clinação um “segundo” apogeu em torno de 590000km da Terra ocorre para um tempo de vôo entre 20 e 22 dias. Veja, por exemplo, as Figuras 7.1 e 7.2.b. São nestes pontos que o veículo possui as menores velocidades em relação à Terra, antes e depois da passagem pela Lua, respectivamente, tal como mostra a Figura 7.3.

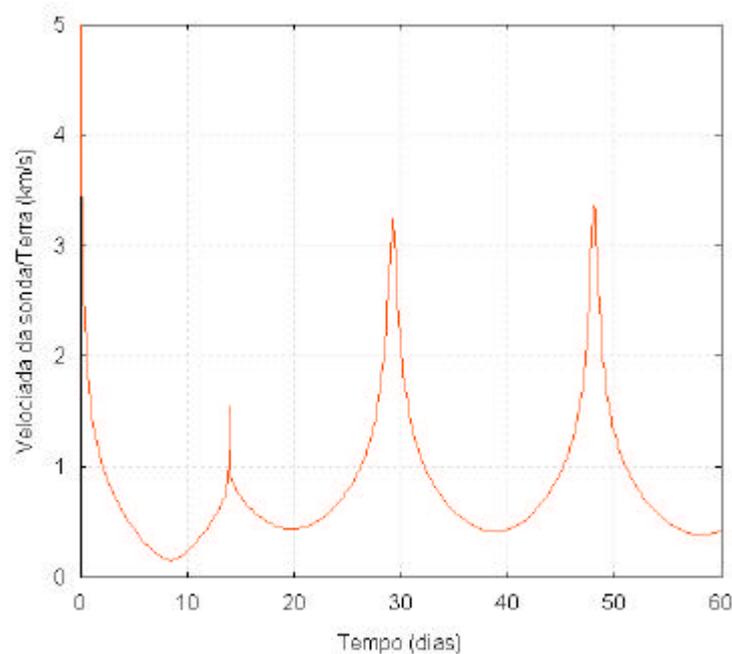


FIGURA 7.3 – Variação da magnitude da velocidade em função do tempo em relação à Terra para trajetória da Figura 7.1.

Em termos práticos computacionais, os pontos em questão são identificados por um algoritmo construído especialmente para esta tarefa. Uma vez identificados, o algoritmo aplicará um número  $N$  de  $\Delta V_{diretor}$ 's ao veículo ou satélite e integrará cada uma das  $N$  trajetórias até que elas atinjam o primeiro perigeu após a aplicação do  $\Delta V_{diretor}$ . Neste ponto, o algoritmo ainda calculará todos os elementos orbitais da órbita osculadora terrestre circular que contém o perigeu da trajetória de transferência e os custos de inserção. Todos estes dados juntamente com os  $N$   $\Delta V_{diretor}$ 's e suas componentes são armazenados e, assim, teremos condições de determinar qual  $\Delta V_{diretor}$  conduzirá o veículo à órbita desejada. A maneira com a qual foram definidos o  $\Delta V_{diretor}$  e suas

componentes são as mesmas descritas na Seção 6.3.1 e ela pode fornecer um número  $N$  de possíveis órbitas terrestres com inclinação entre  $0$  e  $180^\circ$  e longitude do nodo ascendente entre  $0$  e  $360^\circ$ , para diversas altitudes. Mas é possível selecionar aquelas de interesse, de acordo com a missão.

Nas Seções a seguir, vamos descrever a aplicação desta metodologia para mesma trajetória da Figura 7.1, ou seja, consideraremos o problema de transferir um veículo de uma órbita terrestre circular de baixa altitude (LEO – *Low Earth Orbit*),  $H_T = 240\text{km}$  e inclinação inicial, em relação ao equador da Terra,  $i_0 = 28,45^\circ$  para uma órbita final de altitude,  $H$ , com  $240\text{km} = H = 66370\text{km}$ , e inclinação final,  $i$ , tal que  $0 = i = 180^\circ$ .

### 7.3 Direcionamento para Terra

Nas duas próximas Subseções, descreveremos dois experimentos numéricos com a intenção de exemplificar a metodologia apresentada na Seção anterior como uma Possibilidade de utilização do elo Terra-Lua-Terra. Embora estejamos mostrando a aplicação dos procedimentos para uma única trajetória, eles são perfeitamente aplicáveis à qualquer Trajetória  $G$  definida pela Equação (5.5) ou pelo gráfico da Figura 5.1. Por outro lado, a posição relativa inicial entre o Sol e a Terra não impede a aplicação do procedimento, porém a Terra, o veículo e a Lua devem estar alinhadas nesta ordem no instante de aquisição da Trajetória  $G$  pelo veículo.

#### 7.3.1 Direcionamento a partir do Primeiro Apogeu

O procedimento é semelhante aos das Subseções 6.3.1 e 6.3.2, ou seja, a partir de uma condição inicial um algoritmo de busca irá procurar pelo apogeu da trajetória de transferência anterior à passagem pela Lua e, nele, aplicar  $N \Delta V_{diretor}$ 's para direcionar a veículo para uma órbita terrestre com inclinação e altitude diferentes da inicial. Esta condição inicial, no sistema de coordenadas Cartesianas geocêntricas, tem a forma:

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (x_0, 0, z_0, 0, \dot{x}_0, 0) \quad (7.1)$$

com

$$x_0 = (R_T + H_T)\cos(i_{Lua}) = 5811,7\text{km} \quad (7.2)$$

$$z_0 = (R_T + H_T)\text{sen}(i_{Lua}) = 3148,9\text{km} \quad (7.3)$$

$$v_0 = V_l = 10,90115\text{km/s} \quad (7.4)$$

Onde  $H_T = 240\text{km}$  e  $i_{Lua} = 28,45^\circ$  é a inclinação da órbita da Lua em relação ao equador terrestre. Estes valores já garantem o retorno do veículo à Terra. Mais uma vez, estaremos apresentando os resultados para uma configuração particular, em que o sol, a Terra e a Lua estão alinhados, com a Terra e a Lua ocupando os pericentros de suas órbitas. Mas nós realizamos outras 18 simulações variando as posições da Terra em relação ao Sol e da Lua em relação à Terra para nos certificarmos de que os resultados apresentados possuem caráter geral. Assim, após encontrar o apogeu antes da passagem do veículo pela Lua, o algoritmo aplicara  $N \Delta V_{diretor}$ 's, dados por:

$$\Delta \mathbf{V}_{diretor} = \Delta V_x \hat{\mathbf{i}} + \Delta V_y \hat{\mathbf{j}} + \Delta V_z \hat{\mathbf{k}} \quad (7.5)$$

A magnitude da posição e da velocidade do primeiro apogeu, e suas respectivas componentes são as mesmas das Equações (6.20) à (6.28) da Subseção 6.3.1. Aqui terminam as semelhanças e começam as diferenças em relação à Seção 6.3, pois nosso objetivo agora consiste em inserir o veículo não em uma órbita lunar, mas sim, direcioná-la de volta à Terra com altitude e inclinação da órbita osculadora terrestre que contém seu perigeu diferente da que ela teria caso o  $\Delta V_{diretor}$  não fosse aplicado. Os intervalos escolhidos foram:

$$-0,200\text{km/s} = \Delta V_x = +0,200\text{km/s} \quad (7.6)$$

$$-0,200\text{km/s} = \Delta V_y = +0,200\text{km/s} \quad (7.7)$$

$$-0,200\text{km/s} = \Delta V_z = +0,200\text{km/s} \quad (7.8)$$

Os passos de varredura escolhidos para cobrir estes intervalos foram  $P\Delta V_x = P\Delta V_y = P\Delta V_z = 0,005\text{km/s}$ . Logo,  $n_x = n_y = n_z = 80$ , e o número de  $\Delta V_{diretor}$ 's e, conseqüentemente, de trajetórias integradas a partir do primeiro apogeu é  $N = n_x n_y n_z = 512000$ . Na seqüência, o algoritmo continua seu trabalho calculando para cada uma das  $N$  trajetórias todos os elementos orbitais osculadores da órbita terrestre circular final, que contém o primeiro perigeu, os custos de inserção, as magnitudes dos  $\Delta V_{diretor}$ 's e suas componentes, e, é claro, a velocidade da Trajetória G, direcionada, ao atingir seu perigeu  $V_T$ . O tempo desta transferência é da ordem de 35 dias, como pode ser observado na Figura 7.2.b.

A Figura 7.4 exhibe os resultados deste experimento numérico nos mesmos moldes dos experimentos mostrados no Capítulo anterior. Na Seção 7.4, confrontaremos estes resultados com os da manobra de mudança de plano e altitude de Hohmann, apresentada no Apêndice C.

A análise dos diagramas da Figura 7.4 segue as mesmas diretrizes da Figura 6.2 do Capítulo anterior. Isto é:

- 1.) Na Figura 7.4.a, determina-se quais os valores de  $\Delta V_{Total}$  mínimo e máximo a partir da largura vertical da distribuição de pontos para um dado valor da órbita osculadora terrestre final  $H$ .
- 2.) Na Figura 7.4.b, verificamos novamente uma descontinuidade na distribuição de pontos que exclui órbitas com inclinação entre  $70$  e  $117^\circ$ . Ou seja, há um *gap* cuja largura corresponde ao dobro da inclinação do plano do equador da Terra em relação à eclíptica. Assim, levando em conta que isto também foi observado para as transferências direcionadas Terra-Lua e para vários outros experimentos, podemos concluir:
  - ? A partir de uma Trajetória G não é possível atingir inclinações em torno da Terra maiores que  $90 + e$  e menores que  $90 - e$ , onde  $e = 23,5^\circ$  é a inclinação entre o equador terrestre em relação à eclíptica.

- ? Não é possível atingir, a partir de uma Trajetória G, inclinações em torno da Lua maiores que  $90 + i_{Lua}$  e menores que  $90 - i_{Lua}$ , onde  $i_{Lua} = 5,1454^\circ$  é a inclinação do plano da órbita da Lua em relação à eclíptica.

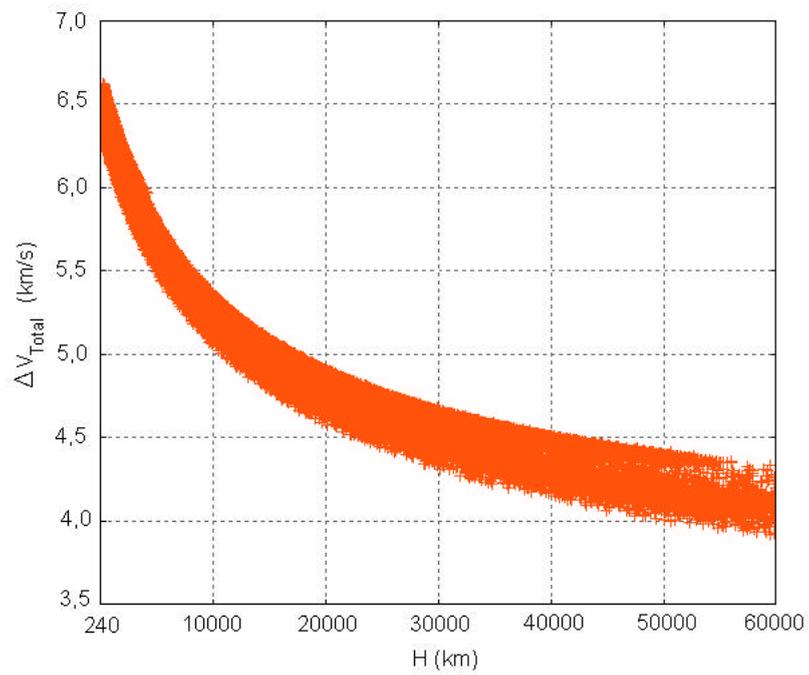
Analogamente às simulações do Capítulo anterior, não há restrições para a longitude do nodo ascendente em relação à Terra. Assim como a forma e a densidade de distribuição de pontos dos diagramas dependem dos intervalos escolhidos para a variação das componentes dos  $\Delta V_{diretor}$ 's, dos passos de varredura, do intervalo considerado para  $H$  e da Trajetória G considerada no experimento.

### 7.3.2 Direcionamento a partir do Segundo Apogeu

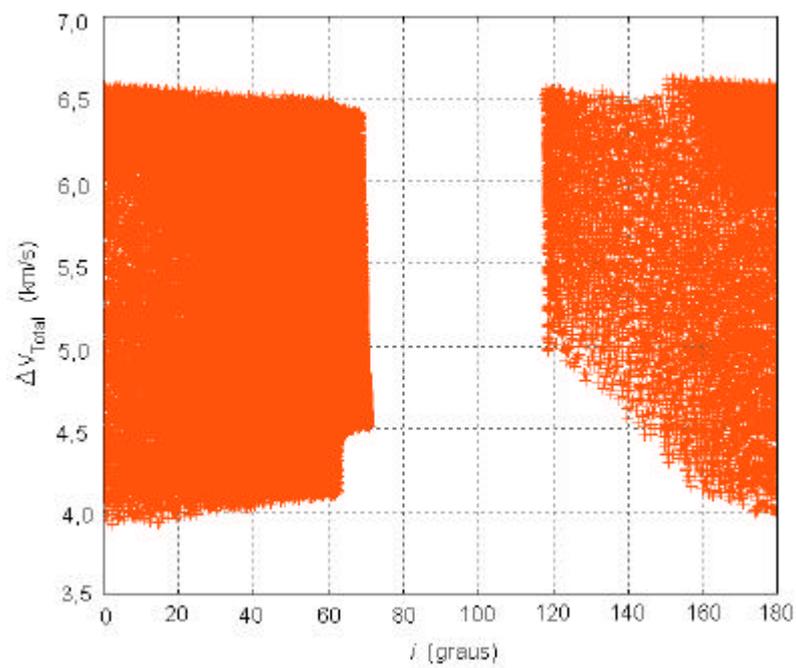
Observando a Figura 7.1, podemos verificar que após a passagem pela Lua a trajetória cujas condições iniciais são dadas pelas Equações (7.1) à (7.4), permanece em uma órbita ao redor da Terra com inclinação da ordem de  $58^\circ$ . Em suma, isto significa que haverá um novo apogeu para esta trajetória, entre 20 e 22 dias, ao qual chamaremos como segundo apogeu.

A nossa meta agora é mostrar os resultados de um experimento numérico similar ao da Subseção anterior, mas aplicando o  $\Delta V_{diretor}$  no segundo apogeu da trajetória para conduzi-la a uma órbita terrestre de altitude  $240 = H = 66370\text{km}$  e inclinação  $0 = i = 180^\circ$ . O procedimento adotado aqui difere daquele que está na Subseção anterior apenas na busca do segundo apogeu feita pelo algoritmo. Uma vez encontrado, a seqüência de passos é a mesma, ou sejam, aplicam-se  $N \Delta V_{diretor}$ 's, cujas componentes variam entre  $-0,200\text{km/s}$  e  $+0,200\text{km/s}$ , e este intervalo é varrido, para as três componentes, em passos  $P\Delta V_x = P\Delta V_y = P\Delta V_z = 0,005\text{km/s}$ . Portanto, o experimento consiste na integração de 512000 trajetórias. Os valores das magnitudes da posição e da velocidade do 2º apogeu e de suas respectivas componentes são:

$$R_A = 488187,8\text{km} \quad (7.9)$$



(a)



(b)

FIGURA 7.4 – Diagramas (a)  $\Delta V_{Total} \times H$  e (b)  $\Delta V_{Total} \times i$ , para  $\Delta V_{diretor}$  aplicado no primeiro apogeu da Trajetória G.

$$x_A = - 231641,6\text{km} \quad (7.10)$$

$$y_A = - 251312,8\text{km} \quad (7.11)$$

$$z_A = - 478657,7\text{km} \quad (7.12)$$

$$V_A = 0,435\text{km/s} \quad (7.13)$$

$$V_{xA} = 0,389\text{km/s} \quad (7.14)$$

$$V_{yA} = - 0,153\text{km/s} \quad (7.15)$$

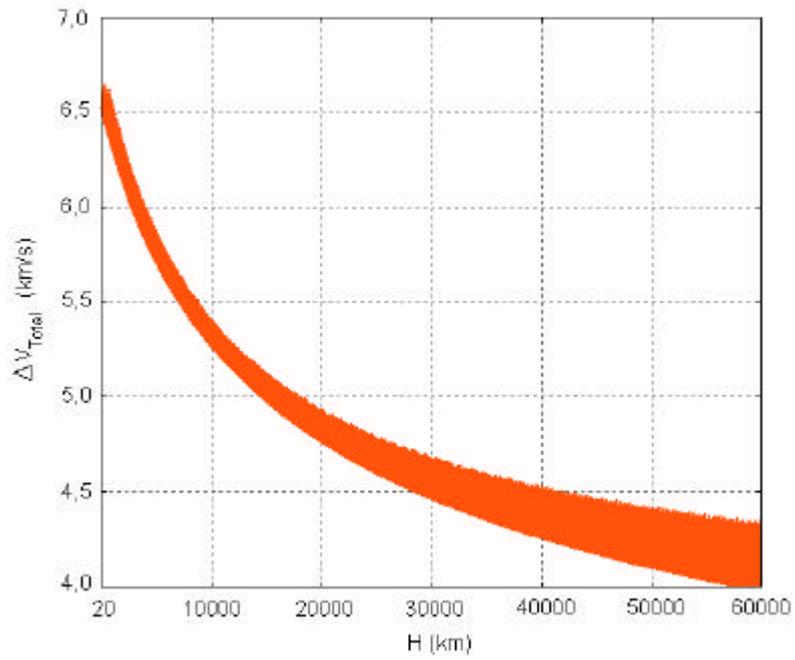
$$V_{zA} = -0,119\text{km/s} \quad (7.16)$$

A Figura 7.5 exibe os resultados deste experimento numérico nos mesmos moldes da Subseção anterior. Isto é, ela mostra os diagramas  $\Delta V_{Total} \times H$  e  $\Delta V_{Total} \times i$ . Na próxima Seção, vamos comparar estes resultados com os do método convencional de Hohmann para transferência entre duas órbitas circulares de diferentes altitudes e inclinações. A análise dos diagramas da Figura 7.5 é análoga às dos anteriores.

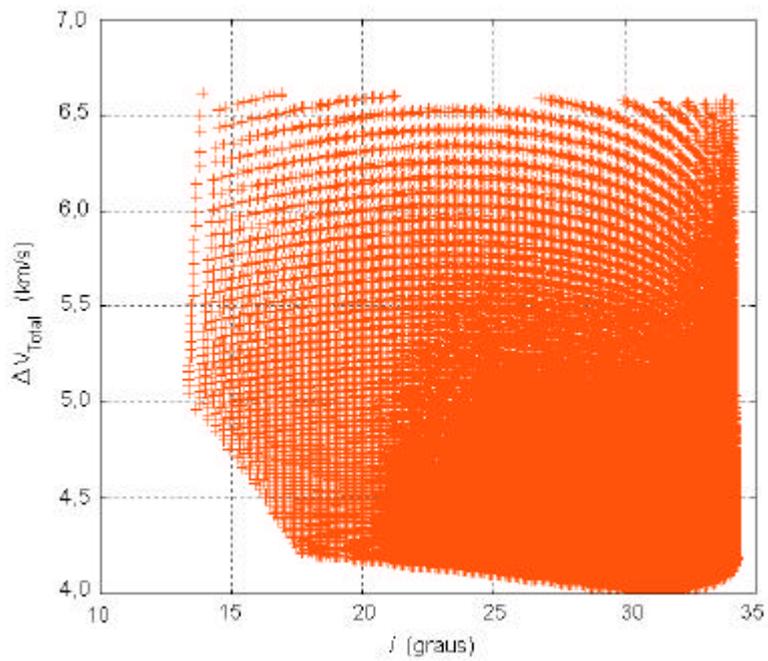
#### 7.4 Comparação com o Método de Hohmann

No Apêndice C, descrevemos um método de transferência entre duas órbitas terrestres circulares de diferentes inclinações e altitudes derivado da transferência de Hohmann. A finalidade desta Seção é comparar os custos da transferência realizada por este método com os da transferência direcionada Terra-Terra via Trajetória G, dentro do escopo geral deste Capítulo que consiste em mostrar que os elos Terra-Lua-Terra representam uma alternativa também para este tipo de manobra.

Começamos então o trabalho de comparação contemplando os resultados da transferência direcionada com aplicação do  $\Delta V_{diretor}$  no primeiro apogeu. De acordo com os diagramas  $\Delta V_{Total} \times i$  da Figura 7.4.b, podemos observar que é possível atingir por meio



(a)



(b)

FIGURA 7.5 – Diagramas (a)  $\Delta V_{Total} \times H$  e (b)  $\Delta V_{Total} \times i$ , para  $\Delta V_{diretor}$  aplicado no segundo apogeu da Trajetória G.

de uma Trajetória G, com  $\Delta V_{Total} = 4,100\text{km/s}$ , uma órbita de inclinação  $63,5^\circ$  em relação ao equador terrestre. Por outro lado, analisando o diagrama da Figura 7.4.a, verificamos que com um  $\Delta V_{Total} = 4,100\text{km/s}$  a altitude da órbita terrestre final pode variar entre 45000 e 60000km. Assim, em suma, podemos concluir que partindo de uma órbita circular inicial de altitude 240km e com inclinação em relação ao equador terrestre de  $28,45^\circ$  é possível atingir uma órbita circular com altitudes entre 45000 e 60000km e inclinação de  $63,5^\circ$  ( $\Delta i = 35^\circ$ ). Altitude final dependerá dos valores das componentes do  $\Delta V_{diretor}$ .

A título de exemplo, para concluirmos esta primeira análise comparativa, colocamos na Tabela 7.1 os  $\Delta V$ 's requeridos para efetuar duas manobras via método de Hohmann para mudança de plano, partindo de uma órbita inicial de altitude 240km e chegando a órbitas finais, também circulares, com altitudes de 45000 e 60000km e inclinações finais de  $63,5^\circ$  ( $\Delta i = 35^\circ$ ).

TABELA 7.1 –  $\Delta V$ 's, tempo de vôo e ângulo de partida ótimo para transferência via Hohmann para mudança de plano.

$H_T$ (km)	$H$ (km)	$\Delta V_1$ (km/s)	$\Delta V_2$ (km/s)	$\Delta V_{Total}$ (km/s)	$T_v$ (h)	$a_1$ (graus)
240	45000	2,591	1,829	4,419	6,820	2,050
240	60000	2,718	1,680	4,400	9,630	1,600

A princípio, o  $\Delta V_{Total}$  via Trajetória G é 8% menor que o  $\Delta V_{Total}$  via Hohmann; requerendo um  $\Delta V_1 = 3,138\text{km/s}$ , 20% maior, e  $\Delta V_{diretor} + \Delta V_2$  (0,969km/s), 60% menor. Considerando que a massa de combustível gasta em uma manobra é dada por:

$$m = m_0 \exp\left(\frac{\Delta V_{Total}}{I g}\right) \quad (7.17)$$

Onde  $m$  é a massa de combustível queimado,  $m_0$  a massa inicial do veículo (estrutura mais combustível),  $I$  é a razão de queima e  $g$  a aceleração local da gravidade. A massa de combustível necessário para a manobra via Trajetória G é 5% menor.

Agora, passemos à análise dos resultados da transferência direcionada a partir do 2º apogeu. No diagrama  $\Delta V_{Total} \times i$  da Figura 7.5.b verificamos que a inclinação máxima da órbita final é de 34º em relação ao equador terrestre, o que corresponde a um ganho de inclinação de apenas 5.5º, em comparação com a órbita inicial de 28,45º. O  $\Delta V_{Total}$  mínimo para esta manobra é de 4.100km/s e as altitudes das órbitas finais alcançam valores entre 50000 e 60000km. O método de Hohmann para mudança de plano fornece  $\Delta V_{Total}$  da mesma ordem, assim, podemos concluir que a transferência via Trajetória G com  $\Delta V_{diretor}$  aplicado ao 2º apogeu não oferece vantagens sobre a transferência convencional a princípio. Isto pode ser entendido a partir da Figura 7.3 na qual observamos que a velocidade do veículo no segundo apogeu é maior que do primeiro, portanto, os  $\Delta V_{diretor}$ 's requeridos para direcioná-la serão bem maiores.

## 7.5 Conclusões sobre o Capítulo

Os resultados numéricos descritos neste Capítulo mostram que as Trajetórias G podem ser utilizadas para transferência entre duas órbitas terrestres de diferentes inclinações e altitudes. Dos dois procedimentos adotados, o primeiro, que consiste em direcionar a Trajetória G aplicando um  $\Delta V_{diretor}$  no apogeu anterior à passagem pela Lua apresentou uma economia da ordem de 5% da massa de combustível em relação ao método de Hohmann para mudança de plano, embora a transferência demore em torno de 35 dias. Já o segundo procedimento adotado que direciona o veículo a partir do 2º apogeu, alcançado após a passagem pela Lua, não apresentou nenhuma economia aparente, uma vez que os  $\Delta V_{Total}$  encontrados são da mesma ordem dos obtidos pelo método de Hohmann.

Assim, podemos concluir que estes resultados, principalmente os da Seção 7.3.1, corroboram com o caráter alternativo do conjunto de trajetórias definido no Capítulo 5 no que diz respeito a transferências no Sistema Terra-Lua.



## CAPÍTULO 8

### ÓRBITAS ESTÁVEIS AO REDOR DA LUA

#### 8.1 Introdução

Winter e Vieira Neto (2002) investigaram um conjunto de trajetórias estáveis diretas ao redor da Lua cuja estabilidade está relacionada com a Família H2 de órbitas periódicas diretas ao redor da Lua (Broucke, 1968) e às órbitas quase-periódicas que oscilam em torno delas. Os sistemas dinâmicos considerados por eles foram o PR3C e o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-partícula, caso plano, com a Terra em órbita circular em torno do Sol com raio de  $1,5 \times 10^8$  km, e a Lua em órbita circular em torno da Terra com 384400 km. Eles determinaram numericamente a localização e o tamanho de uma região de estabilidade ao redor da Lua. O critério adotado para definir esta região considera como estável toda trajetória que permanece em órbita da Lua com energia de dois corpos Lua-partícula negativa durante todo o período de integração, neste caso, 1000 dias. Estas trajetórias podem ser úteis para manter em órbita da Lua, a baixo custo, espaçonaves em diversos tipos de missões em prol das futuras bases lunares como, por exemplo, satélites de comunicações, sondas de exploração do solo e subsolo lunar, naves em missões de logística e, ainda, como órbitas de estacionamento a espera por manobras de alunissagem e *rendezvous*.

De maneira geral, considerando o PR3C, a curva de velocidade zero associada ao ponto de equilíbrio lagrangeano L1 define uma espécie de fronteira para uma região em torno da Lua. Esta região representa um limite para órbitas diretas ao redor da Lua. Tal limite, também pode ser definido em termos da constante de Jacobi para L1,  $C_J(L1) = 3,18834$  para o Sistema Terra-Lua. A Figura 8.1 exibe a curva de velocidade para  $C_J = C_J(L1)$ , e também para  $C_J = 3,18000 < C_J(L1)$  e  $C_J = 3,17116 = C_J(L2)$ . Escape da região ao redor da Lua ou captura por outras regiões não é possível para trajetórias com  $C_J > C_J(L1)$ , uma vez que elas estão confinadas à pequena região “branca” em torno da Lua, delimita pela curva de velocidade zero, tal como mostra a Figura 8.1.a. Já as trajetórias com  $C_J < C_J(L1)$  podem escapar da região que envolve a Lua através de L1,

orbitar a Terra por algum tempo e, então, voltar à esfera de influência da Lua através de L1 novamente, pois a curva de velocidade zero para  $C_j(L2) < C_j < C_j(L1)$  possuem uma abertura que liga a pequena região ao redor da Lua à região maior em torno da Terra, como mostra a Figura 8.1.b. Para aquelas trajetórias com  $C_j = C_j(L2)$ , Figura 8.1.c, o escape da pequena região que envolve a Lua é possível tanto através de L1 quanto através de L2. As trajetórias encontradas por Winter e Vieira Neto (2002) têm  $C_j < C_j(L1)$ , mesmo assim, elas permanecem ao redor da Lua por períodos superiores há  $10^4$  sem escapar.

Os resultados apresentados neste Capítulo correspondem a uma continuação do trabalho de Winter e Vieira Neto (2002) considerando um sistema dinâmico mais complexo e realista baseado problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-sonda, o P4C. Em suma, é o mesmo sistema dinâmico descrito na Seção 3.8 do Capítulo 3 e considerado nos três últimos Capítulos. A excentricidade da órbita da Terra, a excentricidade e a inclinação da órbita da Lua foram introduzidas ao sistema através das condições iniciais. Inclusive, verificamos os efeitos de cada uma destas características separadamente e em um conjunto sobre o tamanho e a localização da região de estabilidade encontrada por Winter e Vieira Neto para o PR3C e o problema de quatro corpos caso plano e circular.

Este Capítulo está organizado da seguinte maneira: na próxima Seção, descreveremos algumas das principais propriedades das órbitas da Família H2. Na Seção 8.3, descreveremos a metodologia aplicada, bem como, o critério de estabilidade adotado em nosso estudo. Na Seção 8.4, mostraremos os efeitos sobre o tamanho e a localização da região de estabilidade devido à excentricidade da Terra, a excentricidade e inclinação da órbita da Lua e da pressão de radiação solar sobre a sonda. Já na Seção 8.5, analisamos as propriedades das trajetórias pertencentes à região encontrada considerando o sistema dinâmico mais complexo e realista. A Seção 8.6 traz as conclusões sobre o Capítulo.

## **8.2 Famílias H1 e H2 e suas Principais Propriedades**

O PR3C associado ao Sistema Terra-Lua prevê a existência de dois tipos de órbitas periódicas diretas ao redor da Lua. Estas órbitas foram descritas por Broucke (1968) e

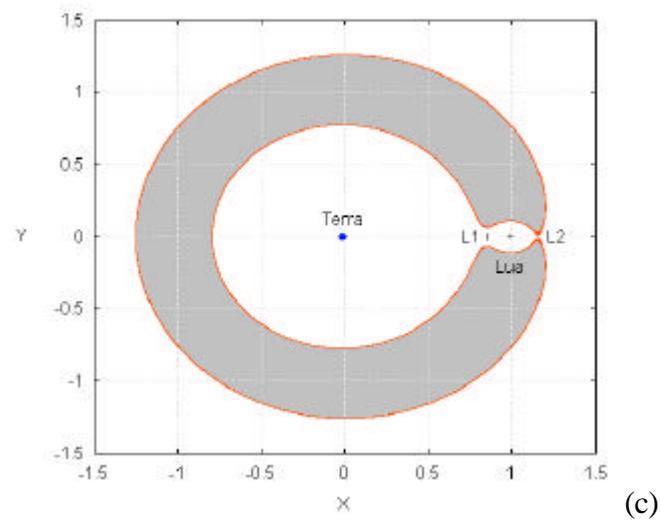
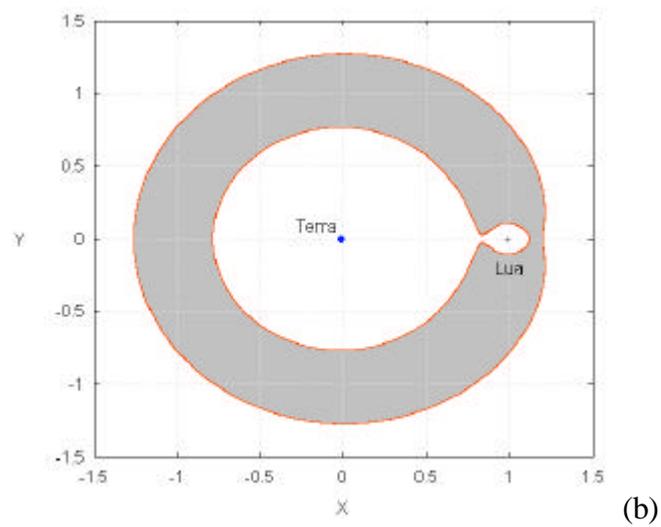
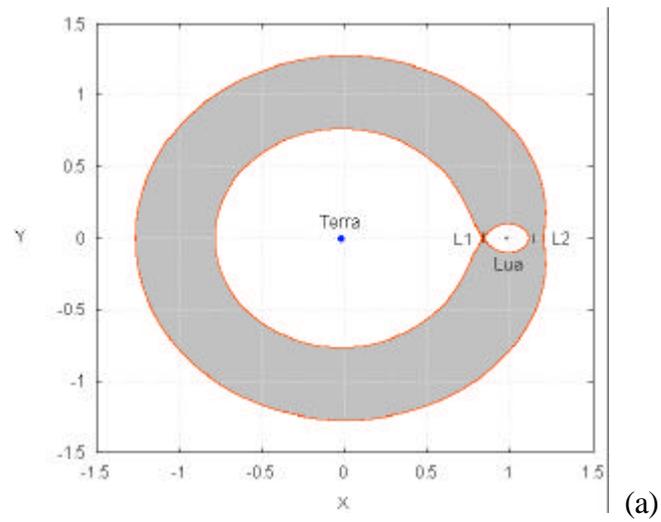


FIGURA 8.1 – Curvas de velocidade zero: (a)  $C_j = C_j(L1) = 3,1884$ , (b)  $C_j = 3,1880$  e  $C_j = C_j(L2) = 3,17116$ .

chamadas de Famílias H1 e H2. As órbitas destas duas famílias são muito similares e apresentam claramente, em alguns casos, simetrias entre suas órbitas em relação a um eixo- $y'$  perpendicular ao eixo- $x$  do sistema sinódico que passa pelo centro de massa da Lua. Esta característica pode ser vista na Figura 8.2 que mostra duas órbitas, uma de cada família, e a simetria que existe entre elas em relação ao eixo- $y'$ .

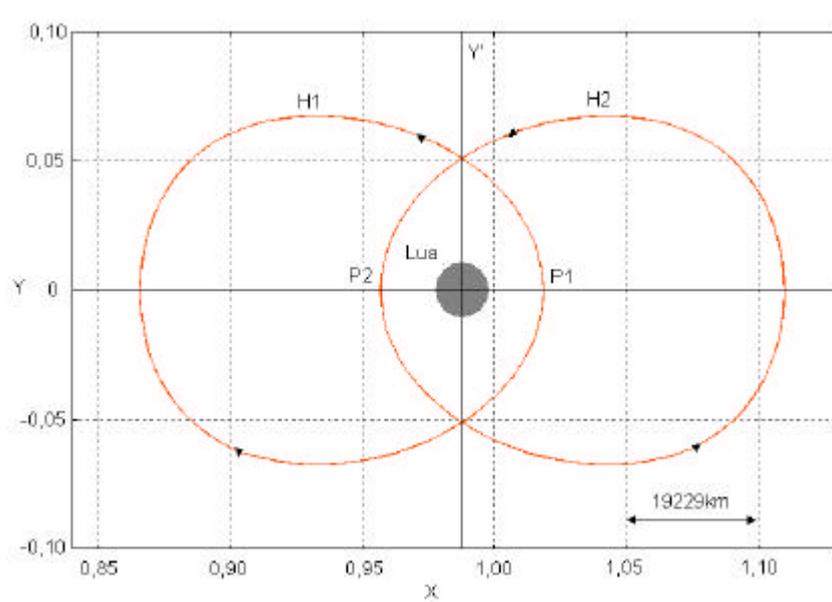


FIGURA 8.2 – Órbitas periódicas das Famílias H1 e H2 vistas no sistema de coordenadas sinódico.

De acordo com Broucke (1968), há um limite natural bem definido para o início da Família H1, mas o mesmo não ocorre em relação ao seu fim. E no que diz respeito à Família H2, não há limites bem definidos para seu início e fim. No entanto, E. Strongren em seu trabalho *Connaissance actuelle des Orbites dans Le Problème des Trois Corps (Publications and Minor Communications of Copenhagen, publication 100, Copenhagen University, Astronomical Observatory, 1935)*, a classe g, assim chamada por ele, contém estas duas famílias, mesmo possuindo evoluções diferentes.

Ainda segundo Broucke (1968), de maneira geral, estas duas famílias têm origem em pequenas órbitas circulares ao redor da Lua. À medida que a distância Lua-partícula aumenta, as formas destas órbitas assumem uma complicada evolução e se tornam

instáveis. Exemplos da evolução espacial de outras órbitas das Famílias H1 e H2 podem ser vistos nas Figuras 8.3 e 8.4, respectivamente.

Aqui, vamos propor uma divisão entre as Famílias H1 e H2 baseada nas condições iniciais de suas órbitas e em nossa pretensão de investigar a região de trajetórias estáveis associadas a elas em termos da excentricidade e do semi-eixo maior das órbitas osculadoras lunares iniciais, tal como fizeram Winter e Vieira Neto (2002), considerando como trajetória estável toda aquela que permanece ao redor da Lua por um período mínimo de 1000 dias com energia de dois corpos Lua-sonda negativa<sup>†</sup>. Contudo, este critério é, de certa forma, restritivo, pois ele não é capaz de selecionar, por exemplo, órbitas periódicas como as que estão nas Figuras. 8.3 e 8.4, uma vez que as energias de suas órbitas osculadoras tornam-se positivas a medida que a distância radial Lua-sonda aumenta. Porém, ele é capaz de mostrar a região de estabilidade de nosso interesse.

Em termos práticos, esta divisão consiste em considerar dois pontos, P1 e P2, sobre o eixo- $x$  do sistema sinódico. P1 é um ponto qualquer entre a Lua e L2, e P2 um ponto qualquer entre L1 e a Lua. De acordo com as órbitas periódicas da Família H1 listadas por Broucke (1968), P1 corresponde ao periluna destas órbitas, enquanto P2 ao periluna das órbitas da Família H2. Desta forma, considerando o PR3C, as órbitas da Família H1 têm condições iniciais do tipo:

$$(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x_0, 0, 0, \dot{y}_0) \quad (8.1)$$

com  $x_0$  entre a Lua e L2. Já as condições iniciais da Família H2 são da forma:

$$(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x_0, 0, 0, -\dot{y}_0) \quad (8.2)$$

com  $x_0$  entre a Lua e L1.

Assim, considerando tal divisão, o critério de estabilidade descrito anteriormente e o PR3C, as regiões de estabilidade associadas às órbitas periódicas das Famílias H1 e H2, e as órbitas quase-periódicas que oscilam em torno delas podem ser vistas nos diagramas das Figuras 8.5 e 8.6, respectivamente, em termos da excentricidade versus o semi-

---

<sup>†</sup>Este critério será definido detalhadamente na próxima Seção.

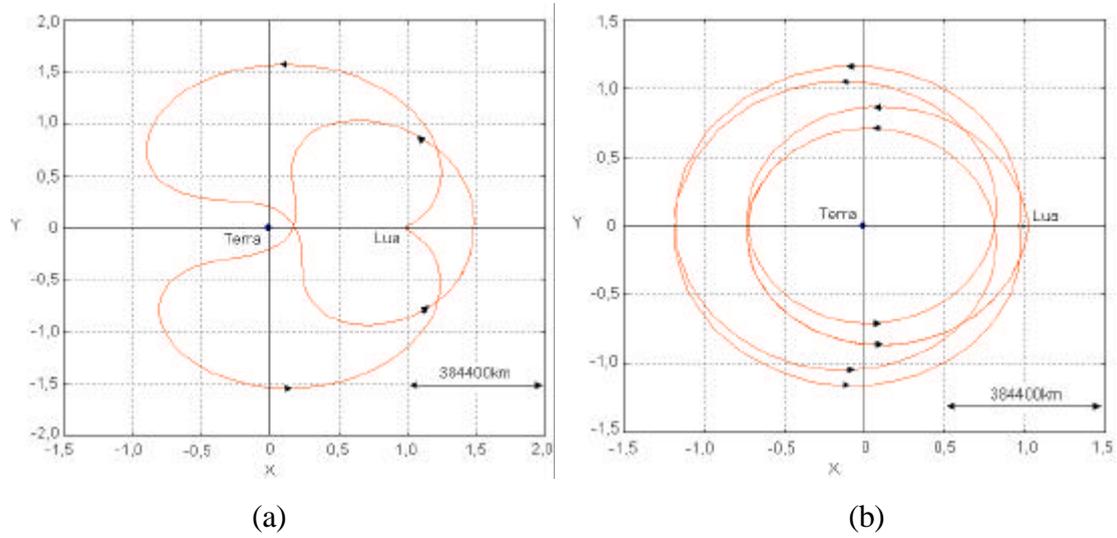


FIGURA 8.3 – Órbitas periódicas da Família H1: (a)  $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = (1,5000; 0; 0; -1,1566)$  e (b)  $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = (1,0205; 0; 0; -2,1067)$ .

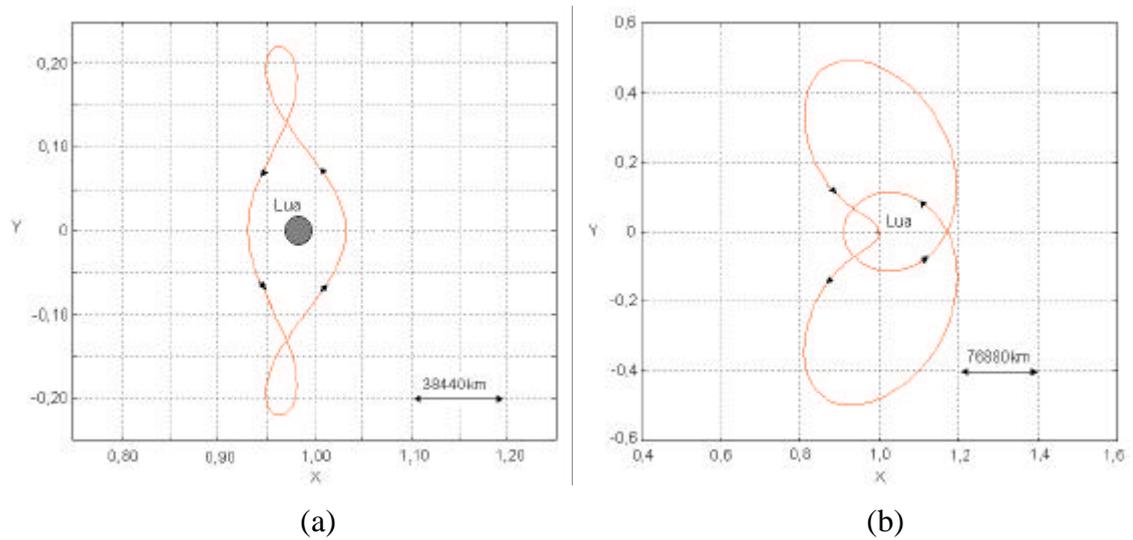


FIGURA 8.4 – Órbitas periódicas da Família H2: (a)  $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = (1,0326; 0; 0; 0,6646)$  e (b)  $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = (0,9996; 0; 0; 1,4371)$ .

eixo maior da órbita osculadora lunar inicial e do tempo de captura que corresponde exatamente ao período que a sonda permanece ao redor da Lua com energia de dois corpos Lua-sonda negativa. Cada diagrama foi obtido a partir de uma grade de  $10^4$  condições iniciais, o que corresponde a  $\Delta e = 0,01$  e  $\Delta a = 100\text{km}$ . Os demais elementos orbitais das órbitas osculadores iniciais são: para a Família H1,  $i = 0^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 270^\circ$  e  $J(\text{tempo da primeira passagem pelo periluna}) = 0$  e para a Família H2,  $i = 0^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ . O código de cores mostrado na Figura 8.5 serve para todos os diagramas *e x a* deste Capítulo.

Cada ponto dos diagramas corresponde a uma condição da órbita osculadora lunar inicial. A cor associada a cada ponto revela o tempo de captura da trajetória estável ou se ela colidirá com a Lua. Os intervalos escolhidos para expressar este tempo foram de 0 à 10 dias, 10 à 100 dias, de 100 à 500 dias e de 500 até 1000 dias. As áreas brancas dentro das regiões coloridas são as condições iniciais que permanecem capturadas por, no mínimo, 1000 dias de integração. Uma grande área branca aparece do lado esquerdo de cada um dos diagramas; os pontos destas regiões também correspondem a órbitas estáveis, de acordo com o critério adotado, mas não estão associadas às Famílias H1 e H2. As trajetórias desta região possuem  $C_j > C_j(L1)$ .

Como podemos observar, a região de estabilidade associada à Família H1 (Figura 8.5) é menor que a encontrada para região associada à Família H2. (Figura 8.6). Por este motivo, vamos concentrar nossas investigações sobre a região mostrada na Figura 8.6.

### 8.3 Metodologia e Critério de Estabilidade

Como dissemos, o passo inicial deste trabalho foi dado por Winter e Vieira Neto (2002) localizando a região de órbitas estáveis para o PR3C e problema de quatro corpos, caso plano e circular. Nossa meta aqui é investigar numericamente as evoluções do tamanho e da localização da região quando a excentricidade da órbita da Terra, a excentricidade e inclinação da órbita da Lua e a pressão de radiação solar sobre a sonda são consideradas. Investigamos os efeitos de cada uma delas separadamente e em conjunto. As Equações de movimento integradas foram da (3.20) à (3.28) para o Sol, a Terra, a Lua e (3.114) à (3.116) para a sonda.

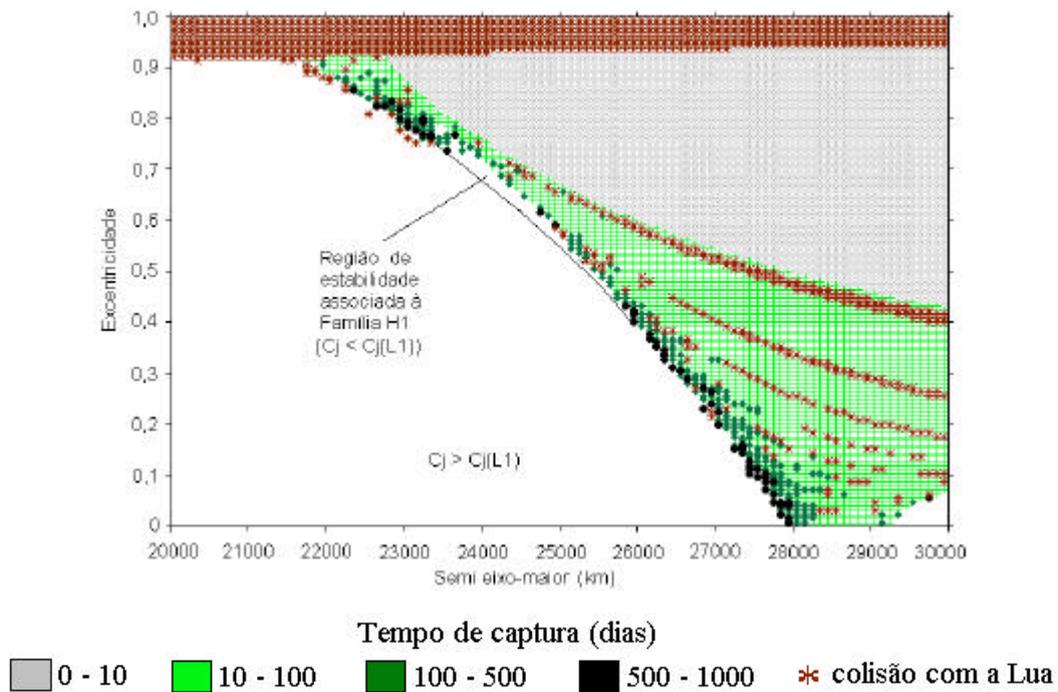


FIGURA 8.5 – Diagrama  $e \times a$ , da órbita osculadora lunar inicial em termos do tempo de captura indicado pelo código de cores. A área branca dentro da região colorida corresponde às condições iniciais das trajetórias que permanecem capturadas por 1000 dias e definem a região de estabilidade associada à Família H1.

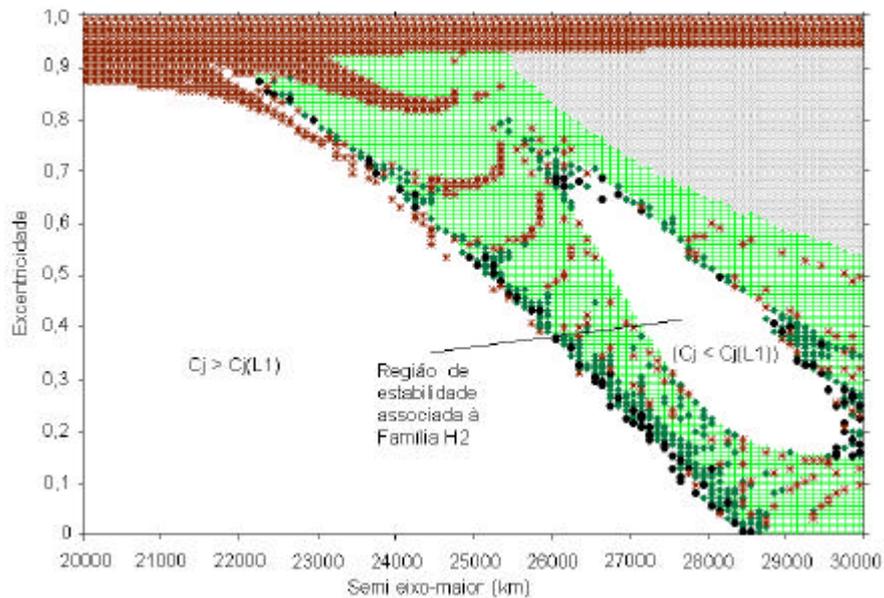


FIGURA 8.6 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura, indicado pelo código de cores, definindo a região de órbitas estáveis associada à Família H2.

Tal como nos Capítulos anteriores, aqui também há um número muito grande de configurações iniciais diferentes. Por este motivo, nós simulamos 32 configurações iniciais para cada um dos experimentos numéricos relatados na próxima Seção, mas todas apresentaram praticamente os mesmos resultados.

Para classificarmos uma órbita como estável, adotamos o mesmo procedimento que Vieira Neto e Winter (2001), que consiste em monitorar a energia orbital de dois corpos Lua-sonda, isto é, da órbita osculadora lunar da sonda, durante toda a integração. De modo geral, a energia orbital de dois corpos é definida por:

$$E = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (8.3)$$

Onde  $V$  é a magnitude da velocidade e  $r$  é a distância radial do corpo central à sonda, ambas medidas em um sistema de coordenadas fixo no centro de massa do corpo central, e  $\mu$  é o parâmetro de massa deste corpo. Nos sistemas dinâmicos considerados, essa energia não permanece constante devido às interações com os campos gravitacionais da Terra e do Sol. Entretanto, através do seu monitoramento, é possível ter uma idéia clara da influência do campo gravitacional da Lua sobre a trajetória. Uma mudança no sinal da energia Lua-sonda, de negativo para positivo, pode indicar, por exemplo, que a órbita osculadora da sonda mudou de uma órbita fechada para uma aberta em relação à Lua. Neste Capítulo, e também no próximo, consideraremos com estável toda órbita que permanece ao redor da Lua com energia Lua-sonda negativa por um período de integração de 1000 dias, tempo que nos parece adequado para fins práticos.

A técnica utilizada por Winter e Vieira Neto (2002) para encontrar as regiões de estabilidade associadas à Família H2 considerando o PR3C e o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-partícula, caso plano e circular, foi a que acabamos de descrever. Esta mesma técnica foi utilizada para obter os diagramas das Figuras. 8.5 e 8.6 e os demais diagramas deste tipo que apresentaremos na seqüência deste Capítulo.

Nas Figuras 8.7 e 8.8, mostramos as reproduções dos diagramas  $e \times a$  de Winter e Vieira Neto (2002) para o PR3C e problema de quatro corpos, respectivamente. O dia-

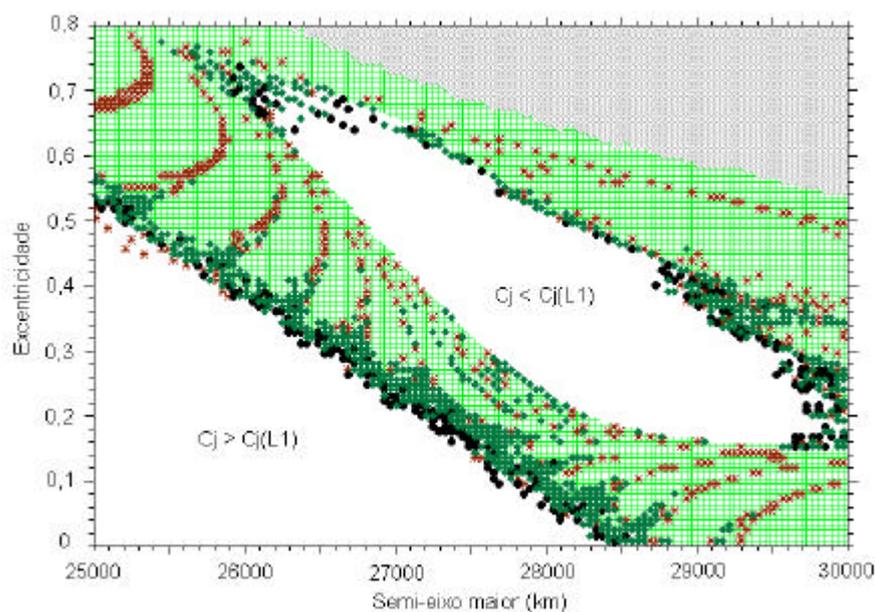


FIGURA 8.7 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura indicado pelo código de cores, encontrado para o PR3C.  $\Delta a = 50\text{km}$  e  $\Delta e = 0,08$ .  
 FONTE: Adaptada de Winter e Vieira Neto (2002, p. 668).

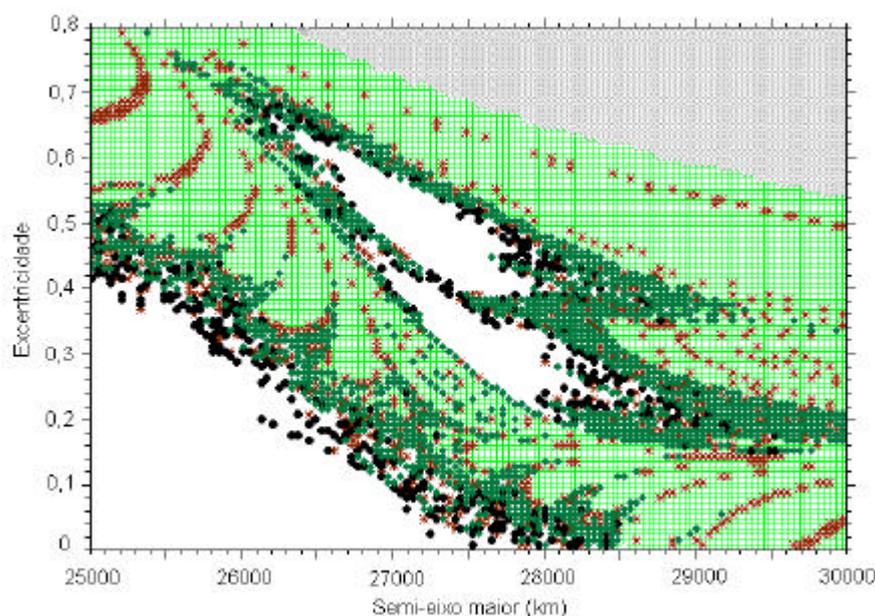


FIGURA 8.8 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura encontrado para o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-partícula, caso plano e circular.  $\Delta a = 50\text{km}$  e  $\Delta e = 0,08$ .  
 FONTE: Adaptada de Winter e Vieira Neto (2002, p. 668).

grama da Figura 8.7 é o mesmo do mostrado na Figura 8.6, porém ampliado, portanto, possui as mesmas propriedades já descritas. Notemos, no entanto, que o diagrama da Figura 8.8, obtido para um sistema dinâmico mais complexo que leva em conta o campo gravitacional do Sol e as interações mútuas entre ele a Terra e a Lua, apresenta uma redução de 1/3 no tamanho da região de estabilidade encontrada para o PR3C, além disso, a região é dividida em duas partes de, praticamente, mesmo tamanho.

Antes de encerrarmos esta Seção, gostaríamos de chamar a atenção para as distribuições de pontos dos diagramas das Figuras 8.7 e 8.8. Elas são frutos do critério de estabilidade e do intervalo de classificação do tempo de captura das trajetórias adotados. Mas elas também trazem outras informações tão interessantes quanto a existência da região de estabilidade. No Capítulo 10, vamos investigar estas informações sob outro ponto de vista.

## **8.4 Evolução da Região de Estabilidade**

Nesta Seção, estudaremos a evolução das regiões definidas pelas Figuras 8.7 e 8.8 quando as características das órbitas da Terra e da Lua são introduzidas ao problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-sonda. Assim, nas próximas Seções, investigaremos os efeitos da excentricidade da órbita da Terra, da excentricidade e inclinação da órbita da Lua, separadamente, e em conjunto, e ainda, os efeitos da pressão de radiação solar sobre a sonda.

### **8.4.1 Efeitos da Excentricidade da Órbita da Terra**

Neste caso, a excentricidade da órbita da Terra,  $e_{Terra} = e_2 = 0,0167$ , foi introduzida no problema de quatro corpos via condição inicial. A Lua foi mantida em órbita circular da Terra, com raio de 384400km e inclinação em relação à eclíptica igual a zero. A distância Sol-Terra varia, portanto, entre  $1,44 \times 10^8$  e  $1,44 \times 10^8$ km e devido a este fato, simulamos 32 configurações iniciais diferentes entre o Sol e a Terra para nos certificarmos que os resultados aqui apresentados não correspondem a um caso particular. Os diagramas encontrados para todas estas simulações são muito semelhantes

contendo apenas algumas pequenas diferenças pontuais. Por isso, vamos mostrar aqui apenas o diagrama encontrado quando a Terra ocupa o pericentro de sua órbita e com o Sol a Terra, a sonda e a Lua alinhados nesta ordem em  $t = 0$ . Tal diagrama é mostrado na Figura 8.9, e ao compará-lo com o da Figura 8.8, obtido para o problema de quatro corpos caso plano e circular, percebemos que eles também são muito semelhantes, possuindo apenas diferenças pontuais. Isto nos permite concluir que a excentricidade da Terra não provoca modificações significativas no tamanho e na localização da região de estabilidade.

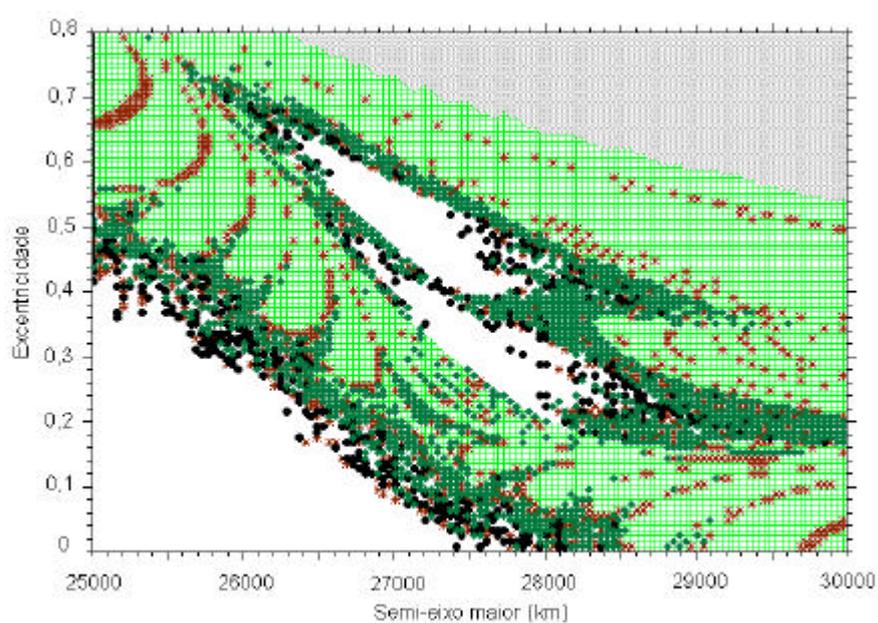


FIGURA 8.9 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura encontrado para o P4C levando em conta a excentricidade da órbita da Terra, com a Lua em órbita circular.  $\Delta a = 50\text{km}$  e  $\Delta e = 0,08$ .

#### 8.4.2 Efeitos da Excentricidade da Órbita da Lua

A excentricidade da órbita da Lua,  $e_{Lua} = e_3 = 0,0547$ , também foi introduzida via condições iniciais ao Problema de quatro corpos. A Terra foi mantida em órbita circular em torno do Sol. Neste caso, a distância Terra-Lua varia entre 362204,6 e 404233,1km.

Mais uma vez, efetuamos 32 simulações considerando posições iniciais relativas entre a Terra e Lua diferentes para nos certificarmos que os resultados que iremos apresentar não correspondem a uma situação particular. Os diagramas encontrados para cada uma das simulações são muito semelhantes contendo apenas pequenas diferenças pontuais. Isto ocorre porque durante os 1000 dias de integração a Lua descreve 45 períodos orbitais. Desta forma, os feitos da excentricidade acabam sendo os mesmos para quaisquer configurações iniciais. Por isso, apresentaremos na Figura 8.10 apenas o diagrama encontrado quando a Lua ocupa o perigeu de sua órbita. Em comparação com os casos já discutidos, notamos que a excentricidade da órbita da Lua exerce influência sobre o tamanho da região de estabilidade, reduzindo a pouco mais da metade o tamanho da área encontrada para o problema de quatro corpos, caso plano e circular, e com a excentricidade da Terra, mostrados nas Figuras 8.8 e 8.9, respectivamente. A estrutura geral da distribuição de pontos, isto é, das condições da órbita osculadora inicial também sofre modificações: reduzindo o tamanho da área branca situada à esquerda do diagrama e aumentando o número de trajetórias que escapam da Lua para todos os intervalos considerados. A localização da região permanece inalterada.

#### **8.4.3 Efeitos da Inclinação da Órbita da Lua**

Para este caso, a Terra foi mantida em órbita circular em torno do Sol, e a Lua em órbita circular em torno da Terra, mas com inclinação de  $5.1454^\circ$  em relação à eclíptica. Simulamos 32 configurações iniciais diferentes para garantir a generalidade do resultado apresentado. Os diagramas encontrados nestas simulações também são muito semelhantes. A Figura 8.11 mostra o diagrama encontrado para a configuração inicial em que a Lua ocupa o ponto mais afastado do plano da eclíptica. Comparando com os resultados anteriores, podemos verificar que a inclinação a Lua não altera a forma e o tamanho de região de estabilidade encontrada para os problemas de quatro corpos caso e circular, e com a Terra em órbita excêntrica.

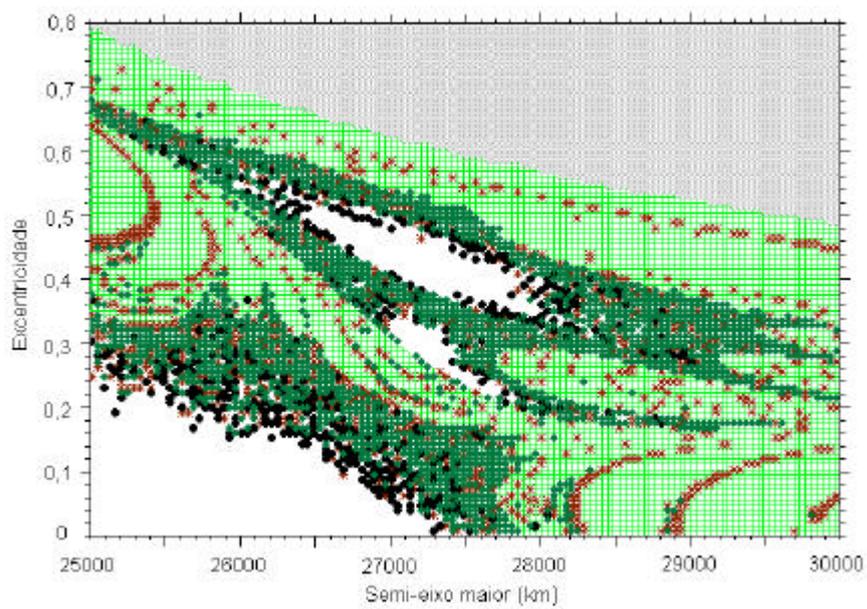


FIGURA 8.10 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura encontrado para o P4C levando em conta a excentricidade da órbita da Lua, com a Terra em órbita circular.  $\Delta a = 50\text{km}$  e  $\Delta e = 0,08$ .

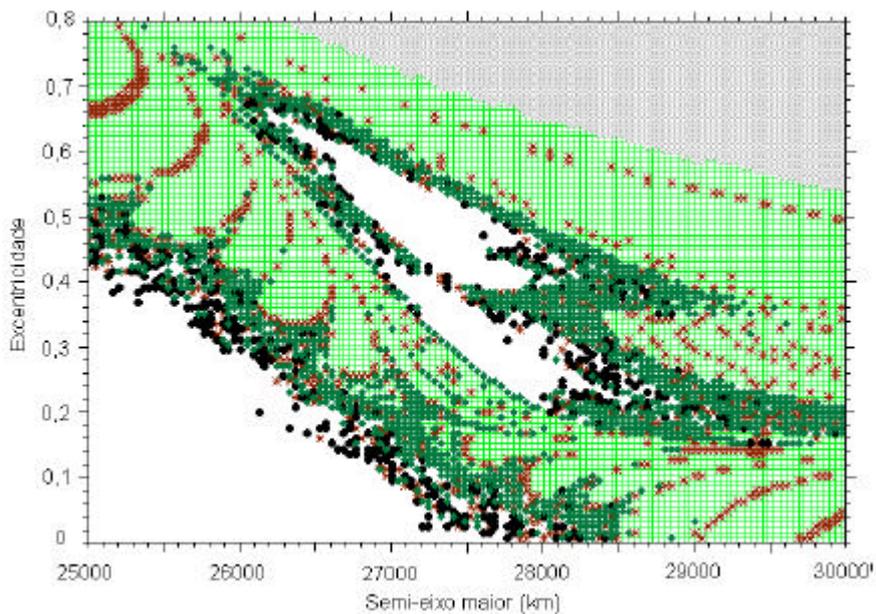


FIGURA 8.11 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura encontrado para o P4C levando em conta a inclinação da órbita da Lua, com a Terra e a Lua em órbitas circulares.  $\Delta a = 50\text{km}$  e  $\Delta e = 0,08$ .

#### 8.4.4 Problema de Quatro Corpos Completo (P4C sem a pressão de Radiação Solar)

Agora, acrescentamos ao problema de quatro corpos a excentricidade da órbita da Terra e a excentricidade e inclinação da órbita da Lua com objetivo de investigar os efeitos causados por todas elas juntas sobre o tamanho e a localização da região de estabilidade. Novamente, a fim de garantirmos a generalidade dos resultados, simulamos 32 configurações iniciais com posicionamentos relativos entre o Sol, a Terra e a Lua diferentes. Mais uma vez, todas as simulações apresentaram resultados muito semelhantes. A Figura 8.2 mostra o diagrama encontrado para a configuração inicial em que a Terra e a Lua ocupam os pericentros de suas órbitas. Como podemos verificar, este diagrama apresenta uma estrutura de distribuição de pontos muito parecida com a encontrada para o problema de quatro corpos quando apenas a excentricidade da órbita da Lua foi considerada. Então, se compararmos este resultado e os das Figuras 8.8 a 8.11, com o obtido para o PR3C, Figura 8.7, podemos concluir que o campo gravitacional do Sol e a excentricidade da órbita da Lua são os fatores preponderantes na redução do tamanho da região de estabilidade.

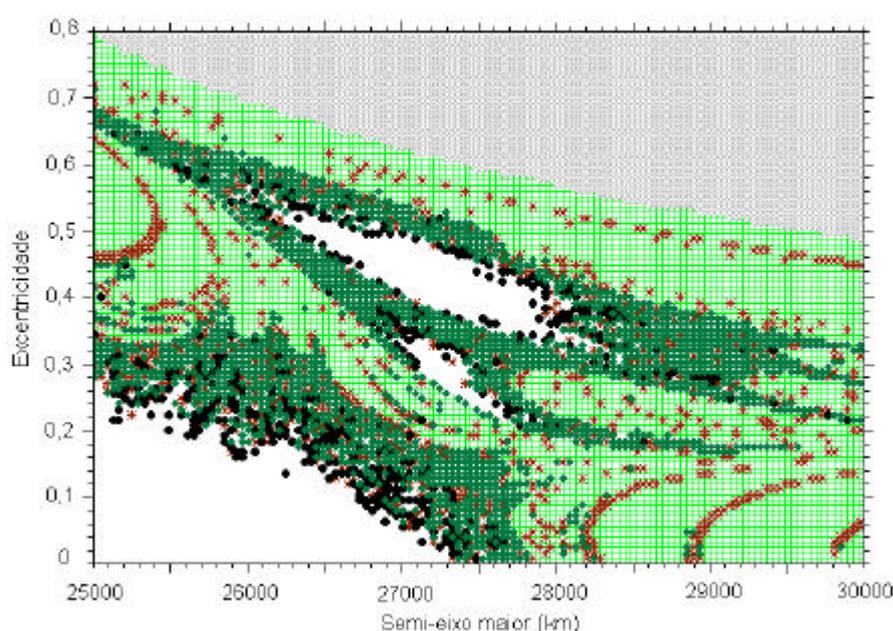


FIGURA 8.12 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura encontrado para o P4C. (completo)  $\Delta a = 50\text{km}$  e  $\Delta e = 0,08$ .

### 8.4.5 Problema de Quatro Corpos Completo (P4C com a pressão de Radiação Solar)

Para estudarmos os efeitos da pressão de radiação solar sobre a sonda, adotamos o modelo descrito no Capítulo 3 e integramos, para a sonda, as Equações de movimento (3.114), (3.115) e (3.116). As propriedades das órbitas da Terra e da Lua também foram consideradas, portanto, nosso ponto de partida é o resultado mostrado na Figura 8.12. O modelo adotado cuja aceleração perturbadora é dada por:

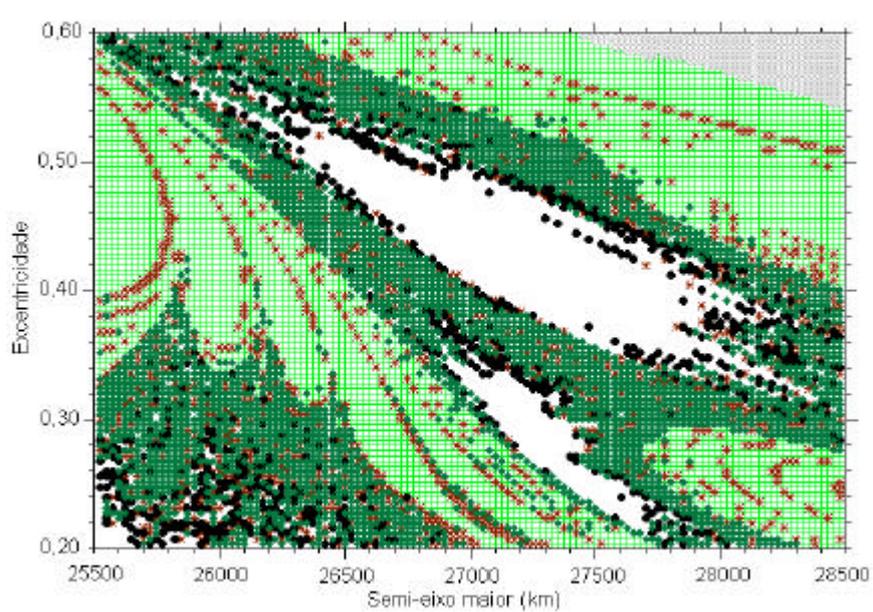
$$\mathbf{A}_p = P_0 E \mathbf{b} \left( \frac{A_{efe}}{M} \right) \left( \frac{a_{Terra}}{r_{Terra}} \right)^2 \hat{\mathbf{r}}_{14} \quad (8.4)$$

Este modelo exige um valor diferente de zero para massa da sonda,  $M_4$ . Os demais parâmetros desta Equação são: a pressão de radiação solar a uma unidade astronômica,  $P_0 = 4,6 \times 10^{-6} \text{N/m}^2$ , o coeficiente de eclipse,  $E = 0$  ou  $1$ , o coeficiente de reflexibilidade,  $0 = B = 2$ . Adotamos os mesmos valores considerados na Seção 5.5, ou seja,  $E = 1$ ,  $B = 2$ ,  $A_{efe} = 14 \text{m}^2$  e  $M_4 = 307 \text{kg}$ . Estes valores fornecem uma aceleração perturbadora da ordem de  $4,2 \times 10^{-7} \text{m/s}^2$ .

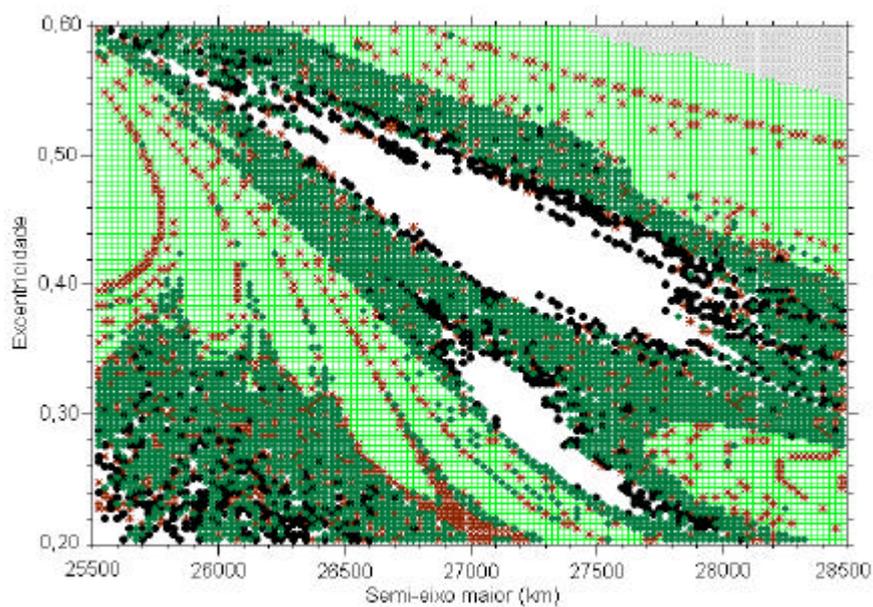
Para melhor visualizarmos os efeitos da pressão de radiação solar sobre a sonda, vamos mostrar na Figura 7.13, a região de estabilidade encontrada para o P4C sem a pressão de radiação solar, discutido na Subseção anterior, e a região encontrada para o P4C com a pressão de radiação, ampliadas. Assim como os demais, estes diagramas também foram obtidos integrando uma grade de  $10^4$  condições iniciais, sendo  $25500 = a = 28500 \text{km}$  e  $0,20 = e = 0,60$ , com  $\Delta a = 30 \text{km}$  e  $\Delta e = 0,04$  e  $i = 0$ ,  $T = 90^\circ$  e  $\Omega = 90^\circ$ .

Em virtude do valor adotado para  $B$ , a magnitude da aceleração perturbadora pode ser considerada superestimada, mesmo assim, ela não foi capaz de afetar significativamente o tamanho da região de estabilidade. Estes dois diagramas são muito similares e a redução do tamanho da região de estabilidade é muito pequena. Ainda é possível observar, especialmente na fronteira da região que a pressão de radiação solar reduz o tempo de permanência de algumas trajetórias e provoca a colisão com a Lua em outras. Para as trajetórias que permanecem estáveis por um período maior que 1000 dias, a

pressão de radiação provoca variações na excentricidade e no período da órbita lunar da sonda.



(a)



(b)

FIGURA 8.13 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura encontrado para o P4C:  
(a) sem a pressão de radiação solar e (b) com a pressão de radiação.  
 $\Delta a = 30\text{km}$  e  $\Delta e = 0,04$ .

## 8.5 Evolução das Trajetórias

Para mostrarmos a evolução das trajetórias estáveis estudadas, nós escolhemos como exemplo uma que permanece estável em todos os sistemas dinâmicos considerados. As condições iniciais da órbita osculadora lunar da trajetória escolhida são:  $a = 27300\text{km}$ ,  $e = 0,4200$ ,  $i = 0^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ . As Figuras 8.14 e 8.15 mostram a evolução desta trajetória por 1000 dias no sistema sinódico, para o PR3C e o P4C, respectivamente. A principal diferença observada entre as trajetórias destas Figuras é o aumento na amplitude de oscilação da distância radial Lua-sonda verificado para o P4C; fato que acarreta em um aumento do período orbital da órbita osculadora e é devido à perturbação do campo gravitacional do Sol.

Como vimos na Seção anterior, a pressão de radiação solar provoca uma pequena redução no tamanho da região de estabilidade. A fim de visualizar os efeitos da pressão de radiação sobre as órbitas que permanecem estáveis, integramos pares de trajetórias com a mesma condição inicial, uma sob ação da pressão de radiação e outra sem. Durante estes experimentos, monitoramos a evolução no tempo dos elementos orbitais da órbita osculadora lunar das duas trajetórias. Os principais efeitos observados forma pequenas variações na excentricidade e no período orbital. Entretanto, em termos práticos, a estabilidade não foi afetada e os limites de variações da distância Lua-sonda são os mesmos para as duas trajetórias. Assim, podemos concluir que, embora provoque redução no tamanho da região de estabilidade das trajetórias, a aceleração devido à pressão de radiação solar não compromete a estabilidade das trajetórias, mesmo quando consideramos um valor superestimado para ela.

Agora, vamos analisar as evoluções temporal de três elementos orbitais osculadores das trajetórias das Figuras 8.14 e 8.15. São eles: semi-eixo maior, excentricidade e inclinação. A Figura 8.16 mostra além da evolução no tempo destas três quantidades, a evolução da distância radial Lua-sonda. As variações do semi-eixo, da distância Lua-sonda e da excentricidade nos permitem ter idéia de como variam o tamanho e a forma destas trajetórias. Já a variação da inclinação nos permite medir o quanto as trajetórias se afastam ou oscilam em torno do plano da órbita da Lua. Com relação aos outros ele-

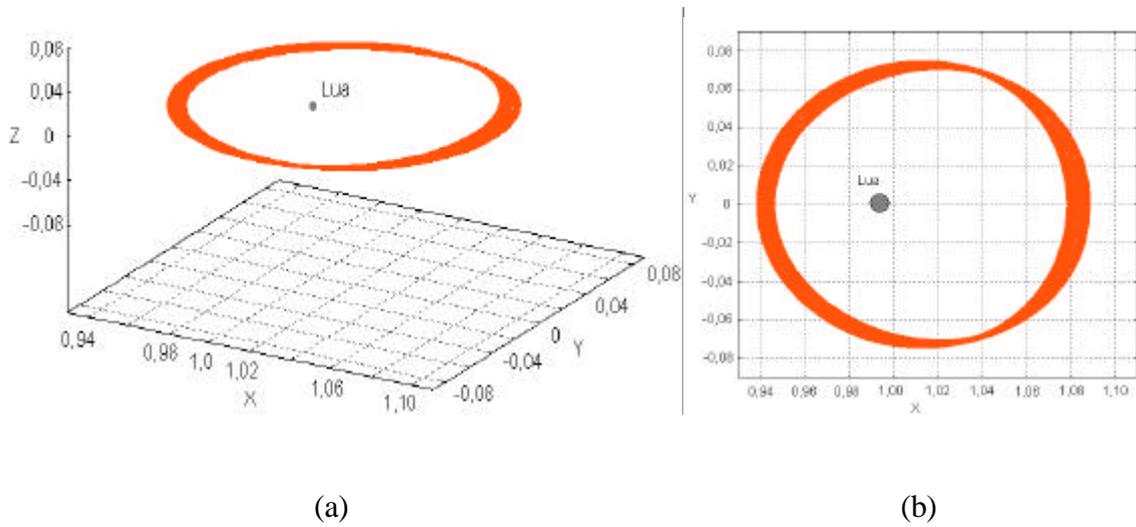


FIGURA 8.14 – Trajetória estável para o PR3C cujas condições iniciais são:  $a = 27300$  km,  $e = 0,4200$ ,  $i = 0^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ .

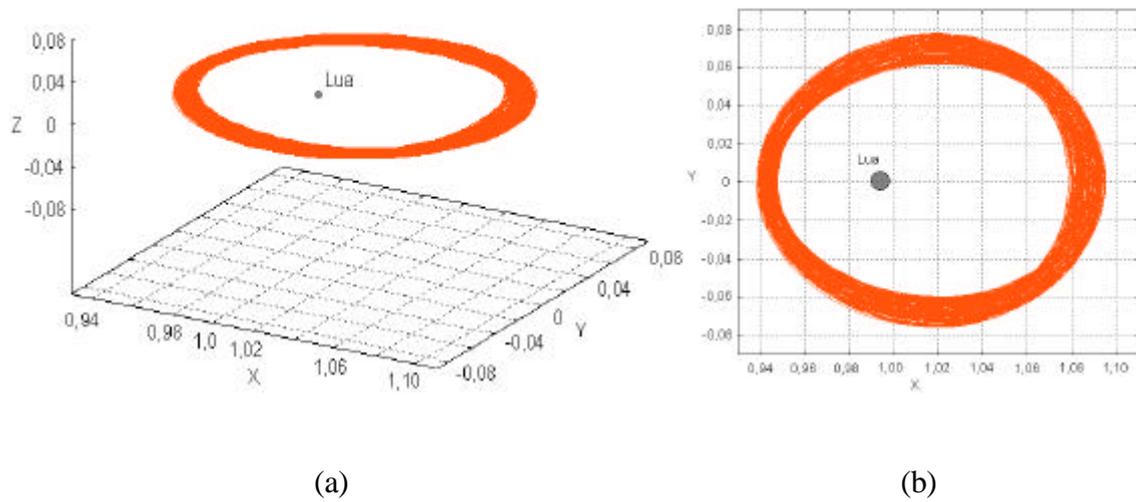


FIGURA 8.15 – Trajetória estável para o P4C cujas condições iniciais são:  $a = 27300$  km,  $e = 0,4200$ ,  $i = 0^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ .

mentos orbitais osculadores ( $T$  e  $\Omega$ ), não faz muito sentido analisar suas evoluções no tempo a priori, uma vez que as trajetórias não são Keplerianas. Na Figura 8.16, os quadros da coluna da esquerda são os elementos orbitais encontrados para o PR3C, e os da coluna da direita são para o P4C. Como podemos observar, há um claro aumento na amplitude de oscilação e na complexidade da evolução destas quantidades face às variações que ocorrem no período orbital para o P4C, introduzindo, desta forma, mais frequências ao movimento. Este aumento no período orbital é claramente observado na evolução do semi-eixo maior, da excentricidade e da distância radial Lua-sonda. Os gráficos das duas primeiras linhas e da última exibem a variação no tempo destas três quantidades para 100 dias, mas o comportamento é o mesmo para os 1000 de integração. Dando seqüência à análise dos gráficos da Figura 8.16, temos a evolução da inclinação osculadora por 1000 dias. Obviamente, para o PR3C, ela permanece igual a zero, mas para o P4C ela apresenta uma variação muito pequena, abaixo de  $1^\circ$ . Isto ocorre porque a inclinação osculadora é dada por:

$$\cos(i) = \frac{h_z}{h} \quad (8.5)$$

Onde  $h$  é o momento angular específico e  $h_x$ ,  $h_y$  e  $h_z$  são suas componentes, dadas por:

$$h_x = y\dot{z} - z\dot{y} \quad (8.6)$$

$$h_y = x\dot{z} - z\dot{x} \quad (8.7)$$

$$h_z = x\dot{y} - y\dot{x} \quad (8.8)$$

e

$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \quad (8.9)$$

Assim, como a força de atração do Sol sobre a sonda é bem menor que a da Lua, dentro de sua esfera de influência (veja Figura 5.4), os valores de  $z$  e  $\dot{z}$  são aproximadamente zero (lembrando que eles são medidos em relação a um sistema de coordenadas lunicêntricas cuja plano fundamental,  $xy$ , coincide com o plano da órbita da Lua).

Portando,  $h_x \cong 0$  e  $h_y \cong 0$ , logo,  $h \cong h_z$ , mas ligeiramente maior. Conseqüentemente,  $\cos(i) \cong 1$ , porém, pouco menor, assim,  $i \cong 0$ , mas não nula e nem negativa ao longo dos 1000 dias, como mostra o gráfico da coluna da direita da 3ª linha, página 181.

## 8.6 Conclusões sobre o Capítulo

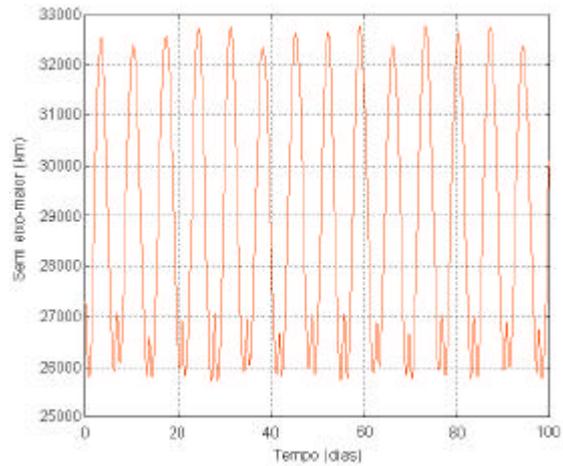
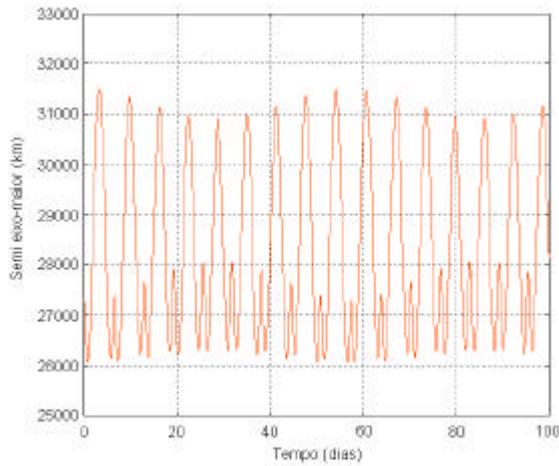
Os resultados descritos neste Capítulo podem ser colocados na seguinte ordem: 1.) Existência de uma região de trajetórias estáveis ao redor da Lua associada às órbitas periódicas da Família H2 e às órbitas quase-periódicas que oscilam em torno delas, preditas pelo PR3C e o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-sonda caso plano e circular. 2.) O tamanho da região diminui a 1/5 do encontrado para o PR3C quando é considerado um sistema dinâmico mais complexo e próximo do real, o P4C que leva em consideração as características das órbitas da Terra e da Lua. Sendo o campo gravitacional do Sol e a excentricidade da órbita da Lua os principais responsáveis por esta redução. 3.) A pressão de radiação solar sobre a sonda provoca uma pequena diminuição no tamanho de região de estabilidade, causando redução no tempo de captura das trajetórias cujas condições iniciais correspondem a pontos da fronteira da região. Contudo, embora provoque variações na excentricidade e no período orbital das trajetórias estáveis, a pressão de radiação não chega a afetar significativamente a estabilidade de tais trajetórias. 4.) No que diz respeito à evolução espacial das trajetórias estáveis, verifica-se um aumento nas amplitudes de oscilação dos elementos orbitais e, conseqüente aumento na complexidade do movimento quando um sistema dinâmico mais complexo é considerado. Porém, constata-se a partir dos resultados da Figura 8.16 que as trajetórias cujas condições iniciais permanecem dentro da região de estabilidade encontrada para o P4C são muito estáveis.

Em suma, podemos então dizer que a pesar da diminuição no tamanho da região de órbitas estáveis para o P4C, ela mantém sua localização e ainda continua com um tamanho significativo oferecendo um conjunto bem definido de trajetórias estáveis ao redor da Lua com distância média Lua-sonda variando entre 13000 e 45000km, e que reúnem condições necessárias para manter ao redor da Lua por períodos de 1000 dias ou

PR3C

P4C

1ª linha



2ª linha

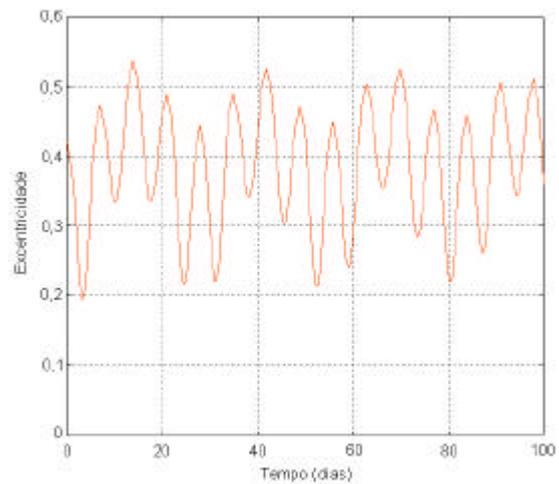
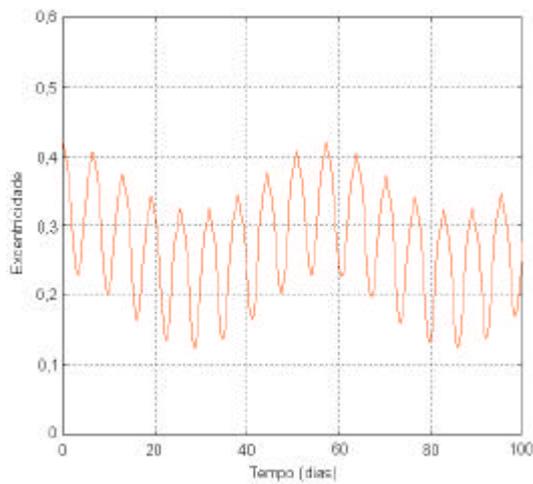


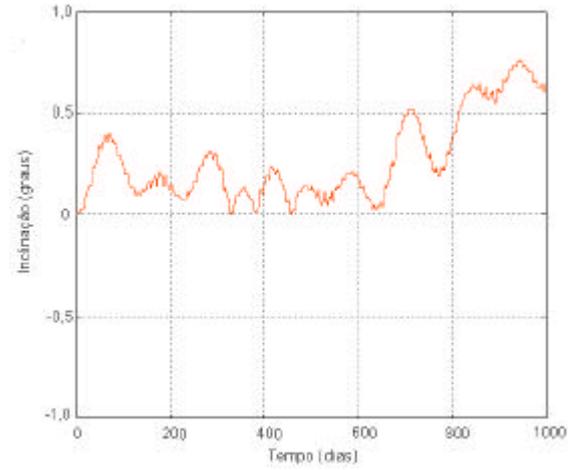
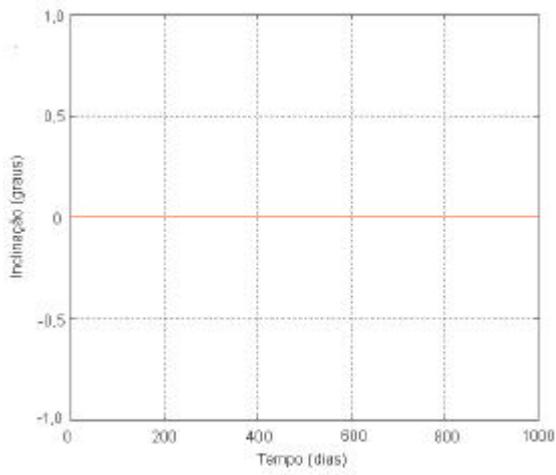
FIGURA 8.16 – 1ª linha: semi-eixo maior (página anterior); 2ª linha: excentricidade (página anterior); 3ª linha: inclinação; 4ª linha: distância radial Lua-sonda. Para trajetória cujas condições iniciais são:  $a = 27300\text{km}$ ,  $e = 0,4200$ ,  $i = 0^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ .

(continua)

PR3C

P4C

3ª. linha



4ª. linha

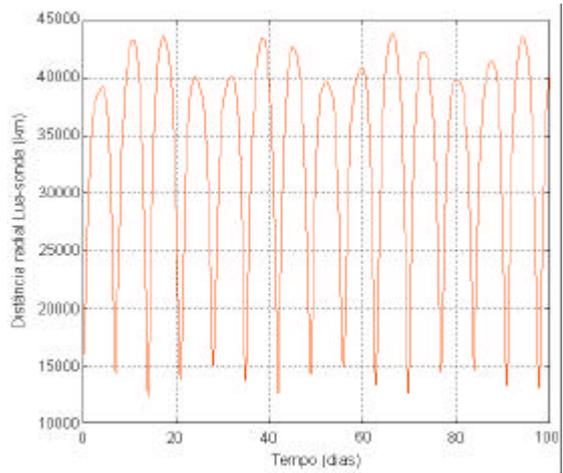
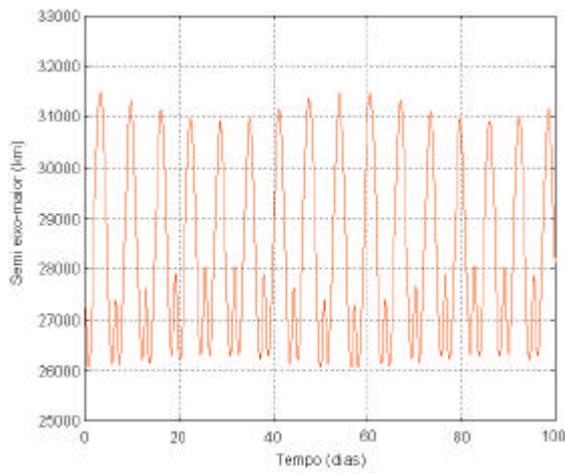


FIGURA 8.16 – Conclusão.

mais, veículos espaciais destinados a um grande número de missões em prol das futuras bases lunares.

Mais uma vez, os resultados deixam claro que o PR3C é essencial para determinar propriedades intrínsecas do Sistema Terra-Lua, porém, ele não é ideal para descrever o movimento de espaçonaves dentro da esfera de influência lunar, principalmente, devido à interação com o campo gravitacional do Sol e da Terra. Este fato demonstra a importância de estudos mais detalhados sobre a dinâmica das órbitas lunares.

## CAPÍTULO 9

### ÓRBITAS ESTÁVEIS AO REDOR DA LUA II

#### 9.1 Introdução

As trajetórias derivadas das órbitas periódicas da Família H2 e das quase-periódicas que oscilam em torno delas, e que definem a região de estabilidade, possuem inclinações de iniciais iguais a zero. Isto é, suas órbitas osculadoras lunares iniciais têm inclinações iguais a zero em relação ao plano da órbita da Lua. Neste Capítulo, vamos investigar a evolução do tamanho e da localização desta região para inclinações diferentes de zero.

O Capítulo tem a seguinte organização: a próxima Seção descreve a metodologia aplicada, a Seção 9.3 traz os resultados da evolução do tamanho e da localização da região de estabilidade para a inclinação inicial da sonda variando entre 0 e 50°. Na Seção 9.4, mostramos algumas trajetórias e discutimos suas características. A Seção 9.5 apresenta as conclusões sobre o Capítulo.

#### 9.2 Metodologia

Os elementos orbitais da órbita osculadora lunar inicial das trajetórias pertencentes à região de estabilidade estudada no Capítulo anterior são:  $i = 0^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ ,  $0,2600 = a = 28500\text{km}$  e  $0,3500 = e = 0,4500$ . Manteremos constantes os valores de  $T$ ,  $\Omega$  e  $J$  e variaremos  $i$  entre 0 e 180°, em passos de 5°, em relação ao plano fundamental,  $xy$ , que coincide com o plano da órbita da Lua e cuja origem está em seu centro de massa. Este plano, por sua vez, tem uma inclinação praticamente constante de 5,1454° em relação à eclíptica. A Figura 9.1 ilustra as posições relativas entre a eclíptica, o plano da órbita da Lua e o plano da órbita osculadora lunar inicial da sonda.

O sistema dinâmico considerado neste Capítulo foi o problema de quatro corpos Sol-Terra-Lua-sonda completo, o P4C. Isto significa que o nosso ponto de partida são os diagramas das Figuras 8.12 ou 8.13.a. Portanto, o procedimento para representar a região de estabilidade é o mesmo descrito na Seção anterior. A única diferença está na

introdução,  $i \neq 0$ , nas condições iniciais da sonda. Em suma, estaremos acompanhando a evolução do tamanho e na localização da região de estabilidade através de diagramas do tipo excentricidade versus semi-eixo maior da órbita osculadora inicial lunar da sonda, exatamente com fizemos no Capítulo anterior.

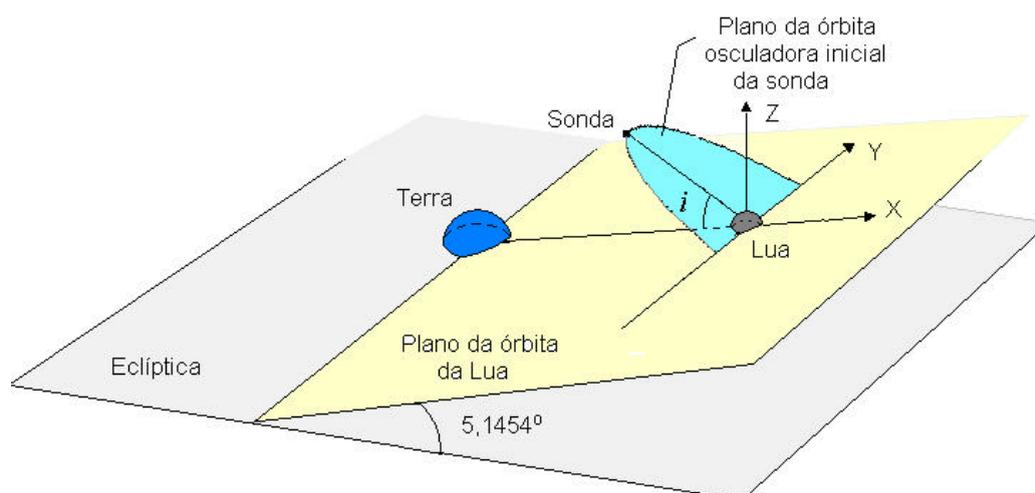


FIGURA 9.1 – Posicionamento relativo entre a eclíptica, o plano da órbita da Lua e o plano da órbita osculadora lunar inicial da sonda (de uma trajetória da região de estabilidade). Figura ilustrativa e fora de escala.

### 9.3 Evolução da Região de Estabilidade

A Figura 9.2 mostra em diagramas esta evolução para  $i = 10^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ$  e  $50^\circ$ ; cada um deles com  $10^4$  condições iniciais. Esta seqüência de diagramas, distribuída ao longo das páginas 185 à 188, mostra que a região de estabilidade reduz de tamanho paulatinamente à medida que  $i$  aumenta até  $30^\circ$ . Para  $i = 35^\circ$ , uma nova região de estabilidade surge e sobrevive até  $i = 40^\circ$ . Notemos também que para  $i = 20^\circ$ , a região se desloca para a direita e para baixo, ou seja, as trajetórias se afastam da Lua e as órbitas osculadora iniciais têm menor excentricidade.

De acordo com a evolução da distribuição de pontos dos diagramas para  $i = 25^\circ$ , podemos constatar que a região encontrada para  $35^\circ = i = 40^\circ$  não é um legado apenas da região original. Ela se forma a partir da união entre a pequena área branca situada no

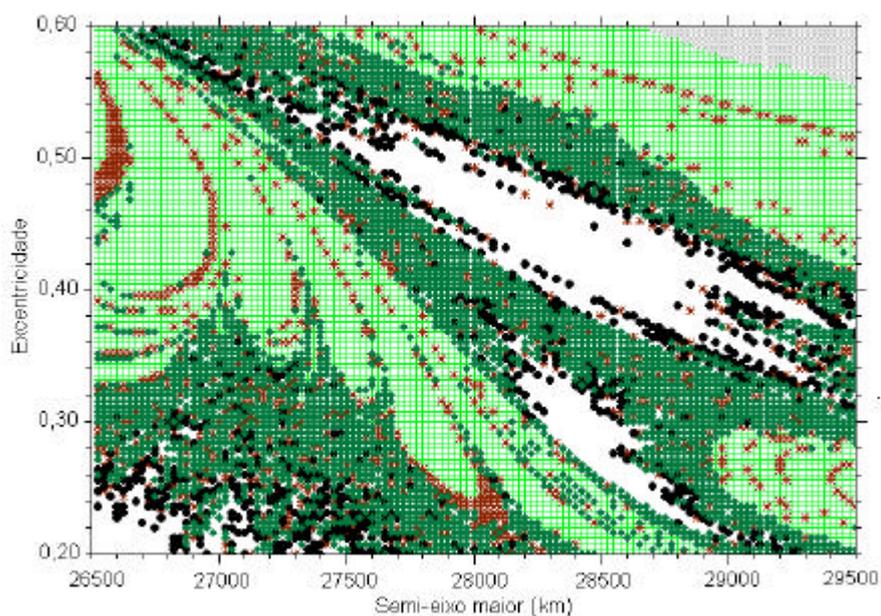


FIGURA 9.2.(a),  $i = 10^\circ$ .

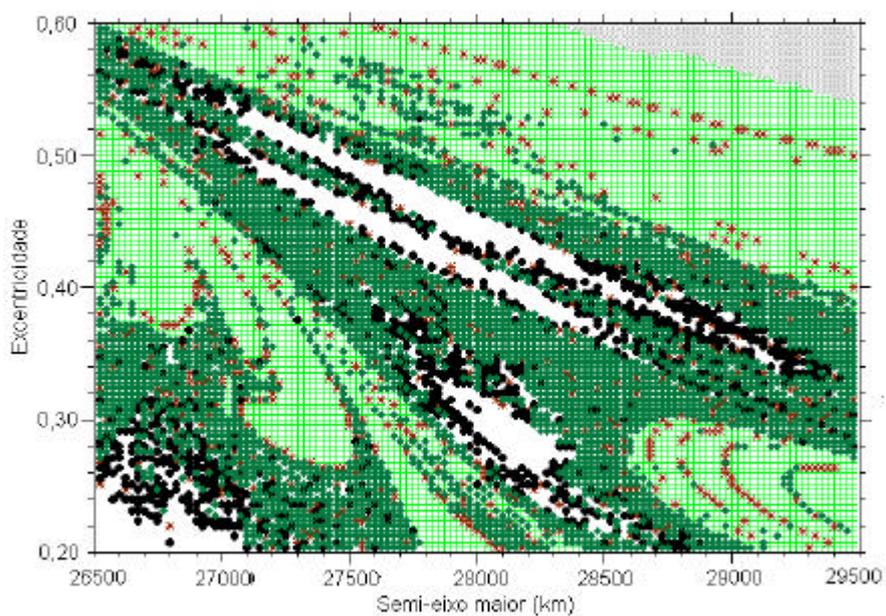


FIGURA 9.2.(b),  $i = 20^\circ$ .

FIGURA 9.2 – Diagramas  $e \times a$  em termos do tempo de captura para: (a)  $i = 10^\circ$ , (b)  $i = 20^\circ$ , (c)  $i = 25^\circ$ , (d)  $i = 30^\circ$ , (e)  $i = 35^\circ$ , (f)  $i = 40^\circ$ , (g)  $i = 45^\circ$  e (h)  $i = 50^\circ$ . Considere o mesmo código de cores da Figura 8.5.

(conclusão)

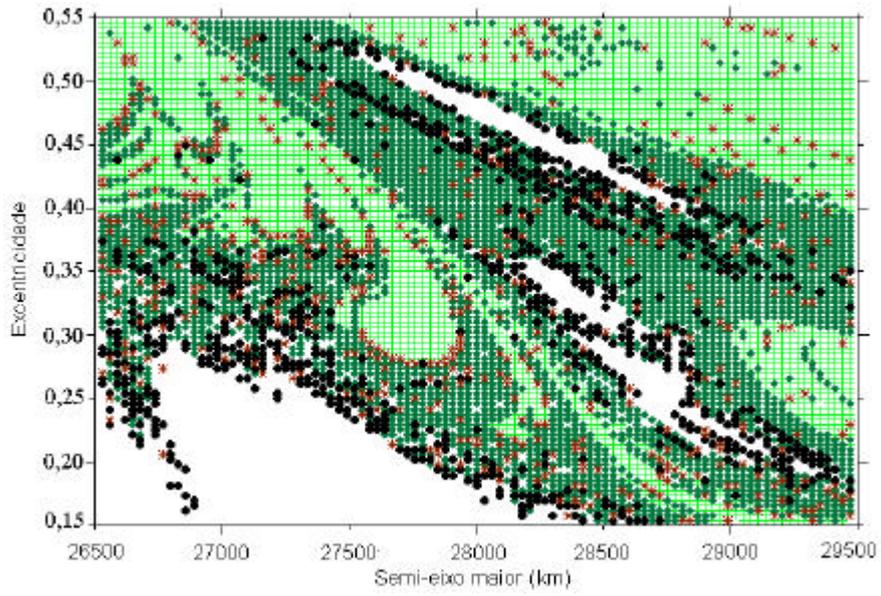


FIGURA 9.2.(c),  $i = 25^\circ$ .

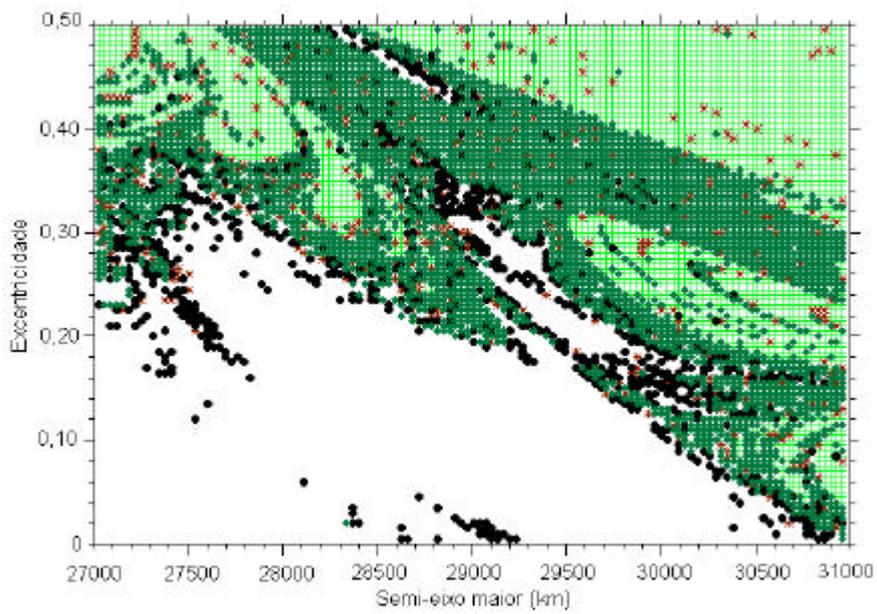


FIGURA 9.2.(d),  $i = 30^\circ$ .

(conclusão)

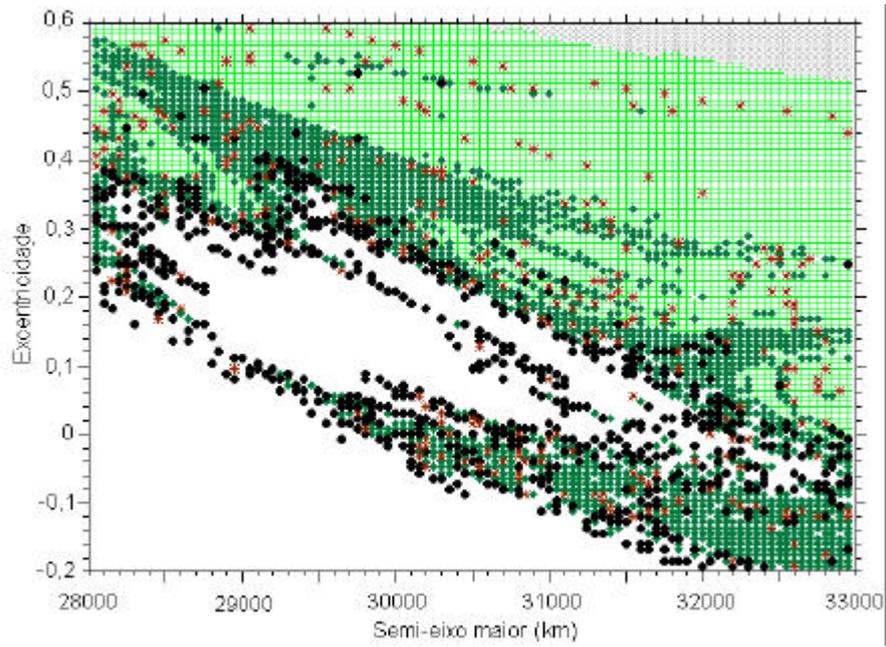


FIGURA 9.2.(e),  $i = 35^\circ$ .

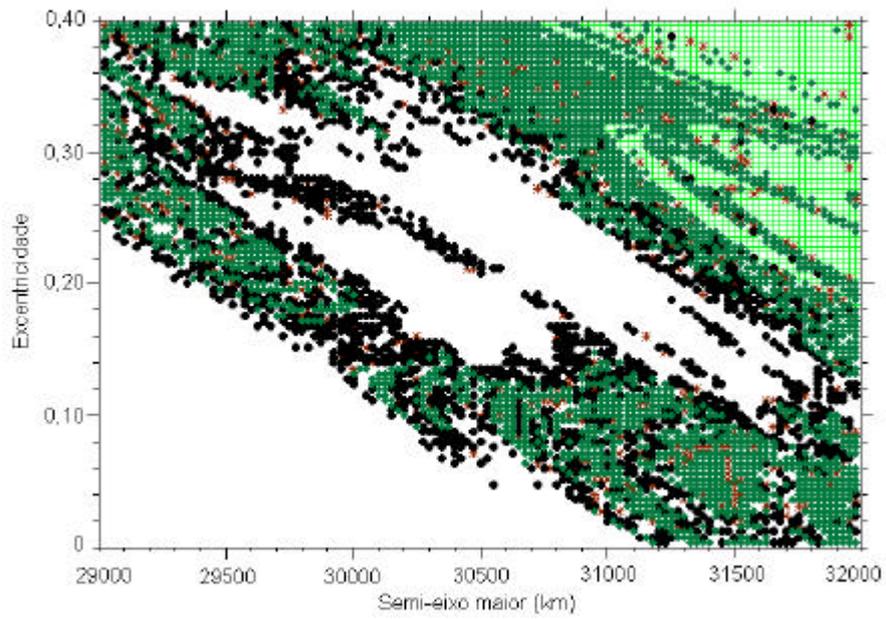


FIGURA 9.2.(f),  $i = 40^\circ$ .

(conclusão)

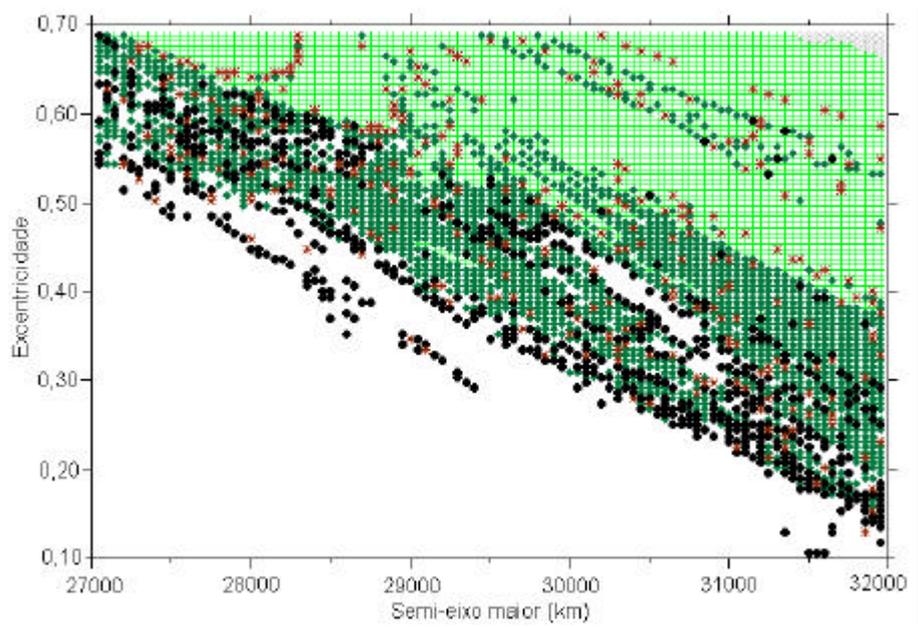


FIGURA 9.2.(g),  $i = 45^\circ$ .

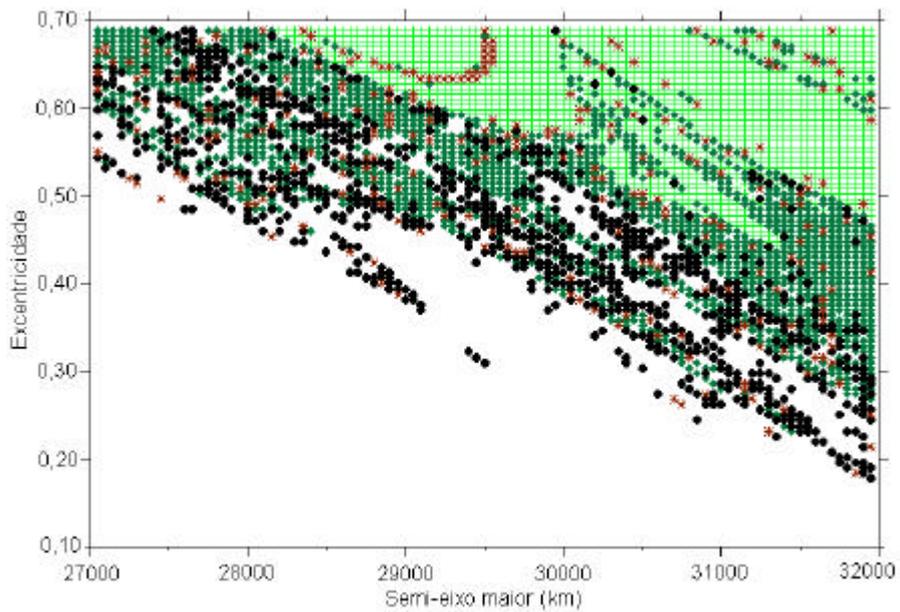


FIGURA 9.2.(h),  $i = 50^\circ$ .

FIGURA 9.2 – Conclusão

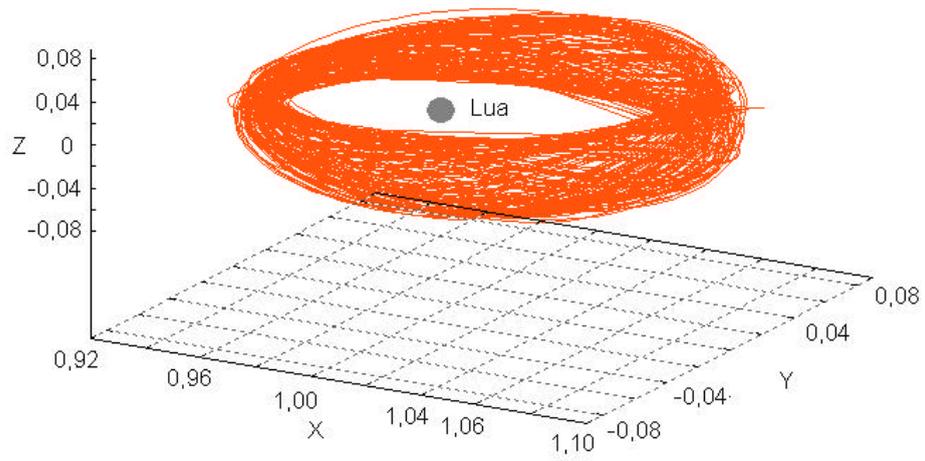
centro dos diagramas encontrados para  $i = 25^\circ$  com trajetórias estáveis localizadas na fronteira da grande área branca situada do lado esquerdo dos diagramas. Como veremos na próxima Seção, as trajetórias desta nova região possuem evoluções espaciais diferentes das pertencentes àquelas em que  $i = 25^\circ$ .

Para  $i > 45^\circ$ , a região de estabilidade desaparece completamente e a estrutura da distribuição de pontos muda à medida que a inclinação aumenta. Para  $110 = i = 180^\circ$ , uma região de órbitas estáveis retrógradas surgiu do lado esquerdo superior do diagrama, mas não a investigamos.

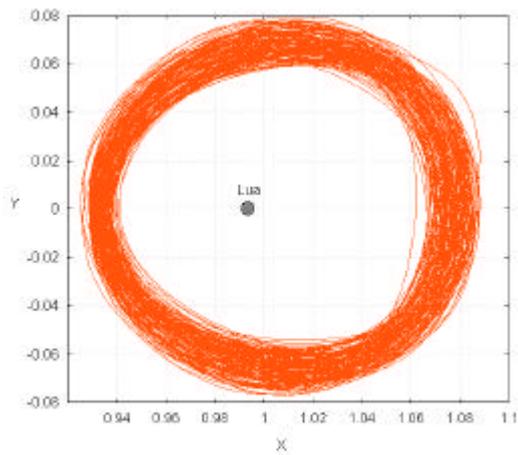
#### 9.4 Evolução das Trajetórias

Para entendermos a evolução das trajetórias com inclinação da órbita osculadora lunar inicial maior que zero vamos considerar duas delas para as quais  $i = 20^\circ$  e  $40^\circ$ . Começamos pela primeira, cujas condições iniciais são:  $a = 28000\text{km}$ ,  $e = 0,4400$ ,  $i = 20^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ . A evolução desta trajetória para 1000 dias no sistema sinódico é mostrada na Figura 9.3, enquanto as variações no tempo de seus elementos orbitais osculadores para o sistema selenocêntrico estão na Figura 9.4. A segunda trajetória tem as seguintes condições iniciais:  $a = 30500\text{km}$ ,  $e = 0,1800$ ,  $i = 40^\circ$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ . Sua evolução espacial para 1000 dias no sistema sinódico e a evolução no tempo de seus elementos orbitais no sistema selenocêntrico estão nas Figuras 9.5 e 9.6, respectivamente. Obviamente, estas condições iniciais correspondem a pontos dentro das áreas brancas que definem as regiões de estabilidade para  $i = 20^\circ$  e  $i = 40^\circ$ .

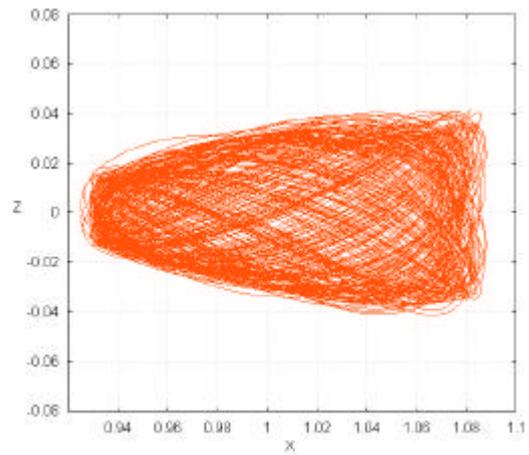
Analisando primeiramente as Figuras. 9.3 e 9.4, verificamos que a trajetória com  $i = 20^\circ$ , no que diz respeito à evolução espacial, é mais espessa (“grossa”) que as encontradas para  $i = 0^\circ$ . Este fato era espera, pois quanto maior a inclinação do plano da órbita osculadora inicial lunar da sonda, mais inclinada em relação ao plano da órbita da Lua estará a força de atração do Sol e conseqüentemente, a resultante das forças sobre a sonda. Portanto, maiores serão os valores de oscilação de  $z$  e  $\dot{z}$ . Assim, teremos a inclinação osculadora com maior amplitude. As variações no tempo do semi-eixo maior e da distância radial Lua-sonda, são semelhantes às das trajetórias cujas inclinações iniciais são iguais a zero



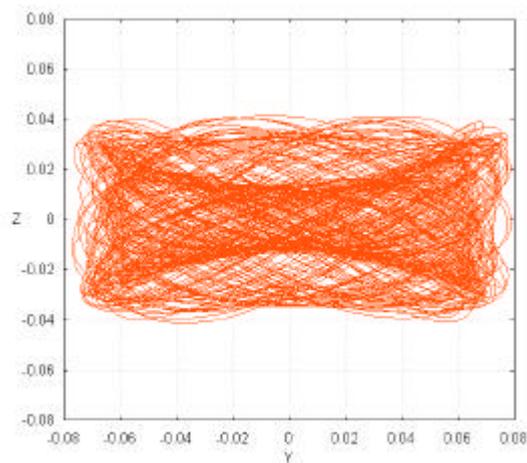
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 9.3 – Evolução por 1000 dias da trajetória estável de condições iniciais  $i = 20^\circ$

$a = 28000\text{km}$ ,  $e = 0,4400$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ .

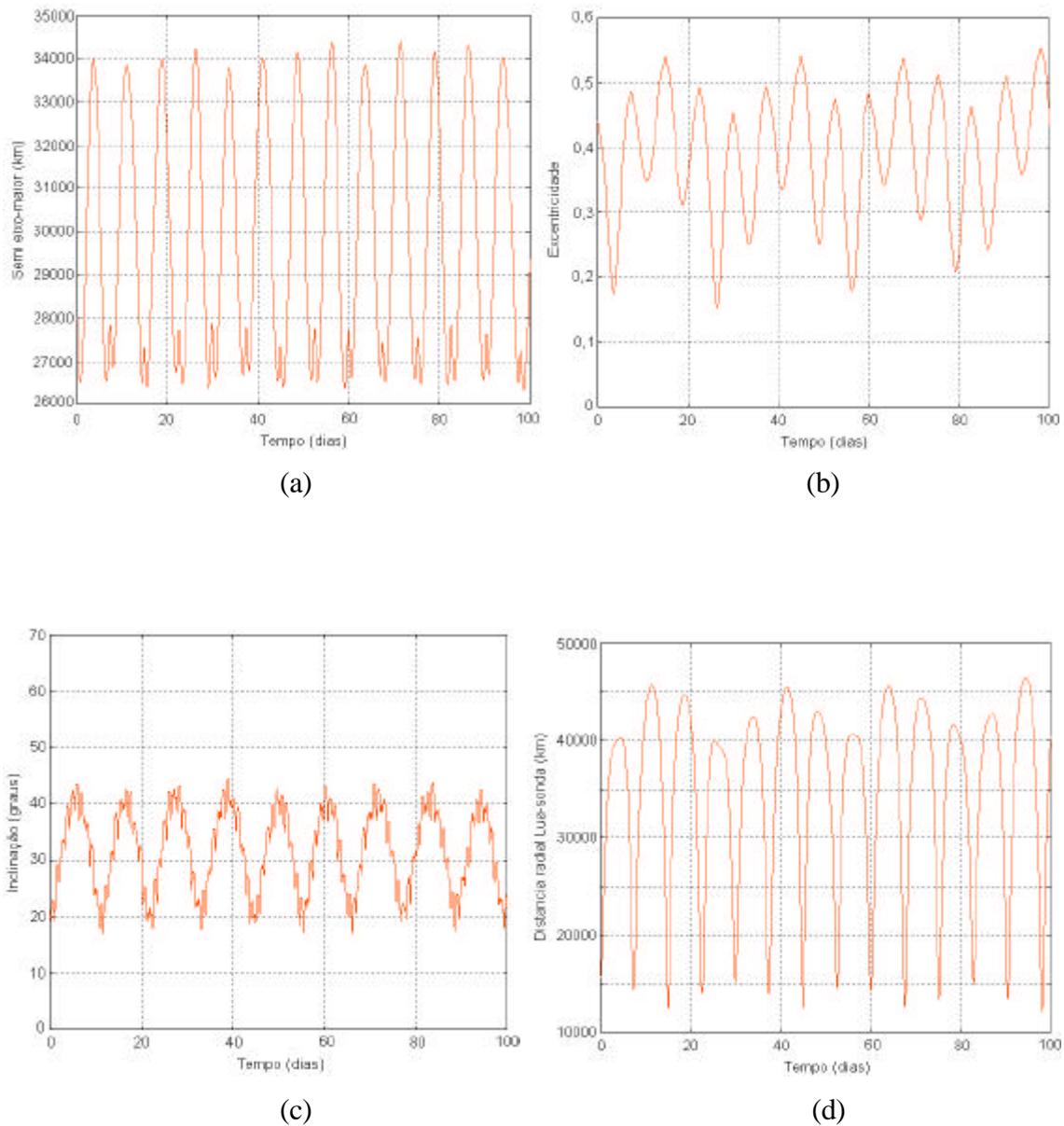
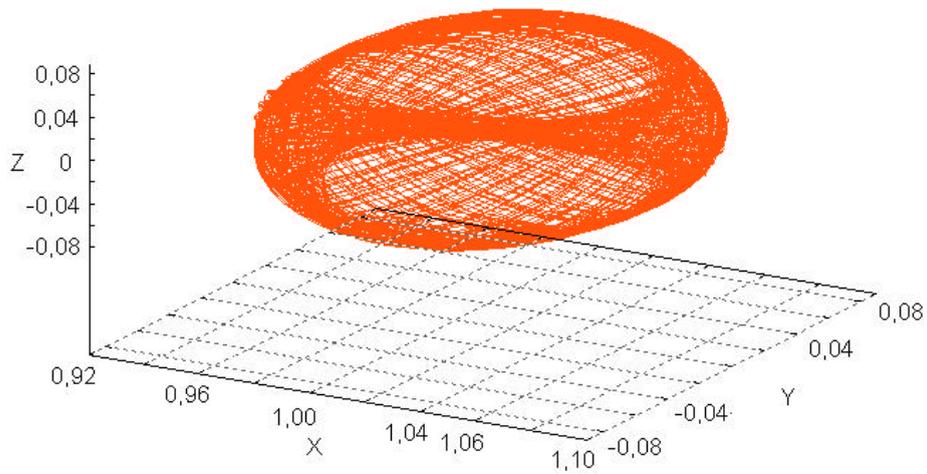
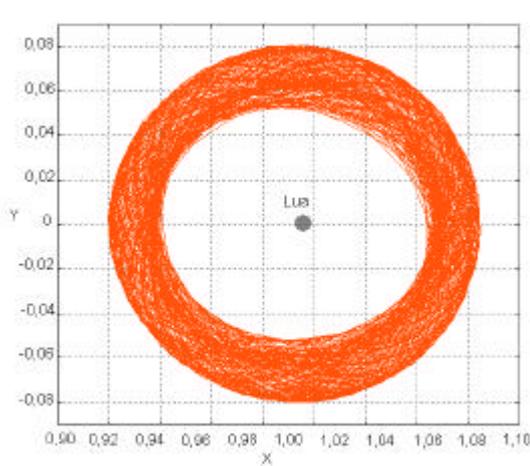


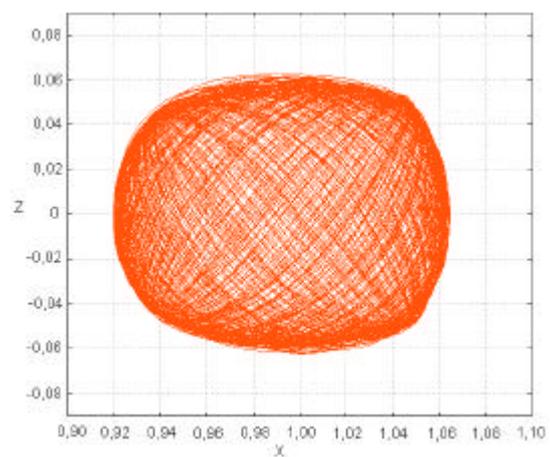
FIGURA 9.4 – Evolução no tempo dos elementos da órbita osculadora lunar da sonda com  $i = 20^\circ$ : (a) Semi-eixo maior, (b) excentricidade, (c) inclinação, (d) longitude do nodo ascendente, (e) argumento do periluna e (f) distância radial Lua-sonda para a mesma trajetória da Figura 9.3



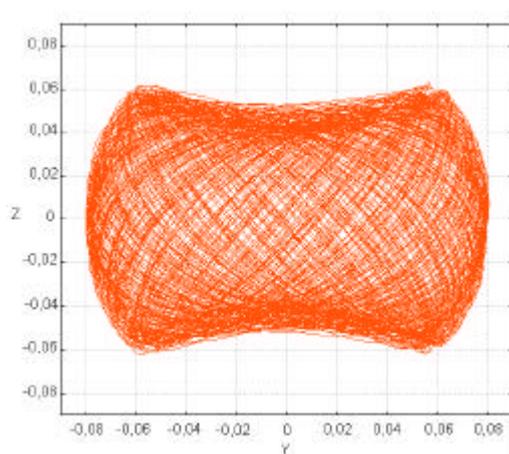
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 9.5 – Evolução por 1000 dias da trajetória estável de condições iniciais  $i = 40^\circ$   
 $a = 30500\text{km}$ ,  $e = 0,1800$ ,  $T = 90^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $J = 0$ .

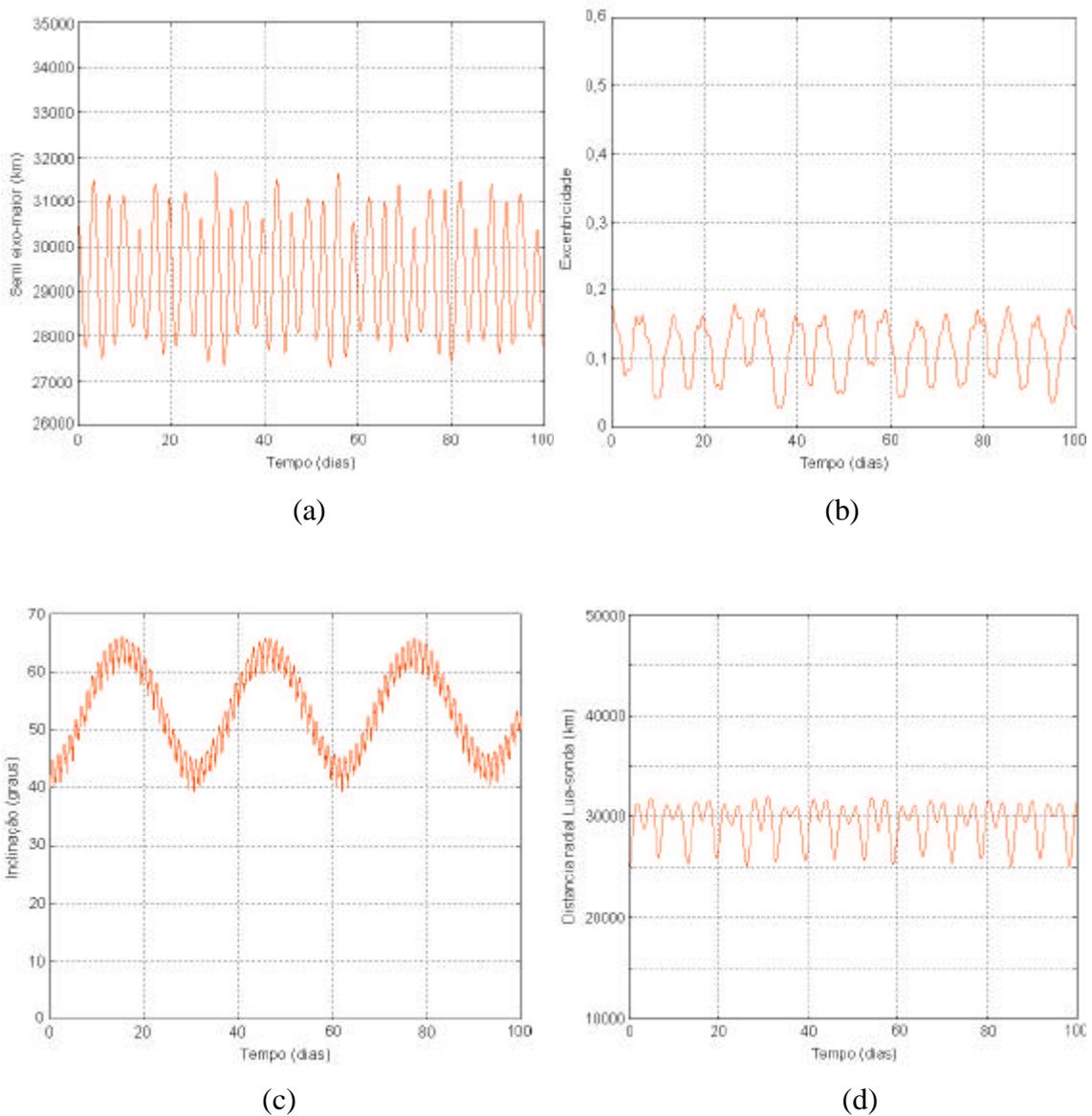


FIGURA 9.6 – Evolução no tempo dos elementos da órbita osculadora lunar da sonda com  $i = 40^\circ$ : (a) Semi-eixo maior, (b) excentricidade, (c) inclinação, (d) longitude do nodo ascendente, (e) argumento do periluna e (f) distância radial Lua-sonda para a mesma trajetória da Figura 9.5

Agora, analisando as Figuras 9.5 e 9.6, constatamos que a trajetória com inclinação osculadora inicial de  $40^\circ$  apresenta uma evolução espacial na qual os valores de  $z$  e  $\dot{z}$  oscilam com maior amplitude. Além disso, as Figuras 9.2.e e 9.2.f mostram que as regiões de estabilidade encontradas para inclinações iniciais maiores que  $30^\circ$  reúnem trajetórias com menores excentricidades e maiores semi-eixos. A combinação destas mudanças acarreta evoluções no tempo deferentes para estas duas quantidades e também para a distância Lua-sonda, quando comparadas com aquelas verificadas para inclinações menores que  $30^\circ$ . Estas evoluções podem ser vistas na Figura 9.6, a qual também mostra uma redução no período orbital osculador.

Chegamos então ao final da Seção, em que verificamos que inclinações iniciais osculadoras diferentes de zero alteram as evoluções no tempo dos elementos orbitais osculadores e da distância radial Lua-sonda. No entanto, para inclinações iniciais de até  $40^\circ$ , temos regiões de trajetórias estáveis bem definidas e que podem ser utilizadas por uma vasta gama de missões em prol da exploração lunar. Fica claro também, a partir dos resultados discutidos nesta Seção, bem como ao longo de todo o Capítulo, e ainda do anterior, que a dinâmica das trajetórias dentro da esfera de influência da Lua é bastante complexa.

## **9.5 Conclusões sobre o Capítulo**

As investigações relatadas ao longo deste Capítulo mostram que a região de trajetórias estáveis estudadas sobrevive para sistemas dinâmicos mais complexos e com inclinações osculadoras iniciais de até  $40^\circ$ , aproximadamente. Apesar das trajetórias com inclinações iniciais maiores que  $30^\circ$  apresentarem evolução espacial e no tempo de seus elementos orbitais diferentes daquelas com  $i < 30^\circ$ , elas continuam estáveis, corroborando com o caráter alternativo destas trajetórias que podem manter em órbita da Lua veículos espaciais por período de 1000 dias ou mais.

## CAPÍTULO 10

### ROTAS DE ESCAPE E CAPTURA ATRAVÉS DE L1 E L2

#### 10.1 Introdução

A meta deste Capítulo é levantar a existência de outros elos entre a Terra, a Lua e o espaço exterior a partir de trajetórias que envolvem a região de estabilidade estudada no Capítulo 8.

Os diagramas excentricidade versus semi-eixo maior apresentados nas Seções 8.3 e 8.4, não definem apenas regiões de trajetórias estáveis ao redor da Lua: eles também guardam outras informações de interesse. Por exemplo, se acompanharmos a evolução espacial das trajetórias com tempo de captura entre 10 e 500 dias nós podemos verificar a existência de rotas de escape e captura pela Lua através de L1 e L2.

Os resultados que apresentaremos aqui têm caráter geral e de busca pelas propriedades destas rotas. Por isso, estaremos considerando apenas o PR3C para descrevê-las. A investigação de suas propriedades com sistemas dinâmicos mais complexos terá continuidade em um próximo trabalho.

O Capítulo tem a seguinte ordem de apresentação: a Seção 10.2 apresenta a metodologia empregada. A Seção 10.3 descreve a forma com a qual as rotas foram definidas. Na Seção 10.4, é feita uma análise do custo de aquisição destas rotas, e a Seção 10.5 traz as conclusões sobre o Capítulo.

#### 10.2 Metodologia

A seqüência de passos adotados nesta investigação foi empírica, sendo que o primeiro deles constituiu em observar a evolução espacial de trajetórias cujas condições iniciais corresponde a pontos no diagrama da Figura 8.7 com tempo de captura entre 10 e 500 dias. Em seguida, dividimos estas trajetórias a partir dos valores de suas constantes de Jacobi. De acordo com os fatos observados:

1.) Considerando o diagrama da Figura 10.1, temos três linhas simbolizando curvas de velocidade zero para  $C_j = C_j(L1) = 3,18834$  (linha amarela),  $C_j = 3,18665$  (linha vermelha) e  $C_j = 3,17116$  (linha azul). As trajetórias cujas condições iniciais  $(a, e)$  correspondem a pontos entre as linhas amarela e vermelha podem escapar por L1, mas não por L2. Contudo, não observamos para nenhuma delas, captura pela após o escape durante os 1000 dias de integração considerados. A Figura 10.2 mostra a evolução espacial e a distância Lua-sonda em função do tempo para uma trajetória em que os valores de  $a = 286000\text{km}$ ,  $e = 0,2400$  e  $C_j = 3,18545$  correspondem a um ponto exatamente entre as linhas amarela e vermelha.

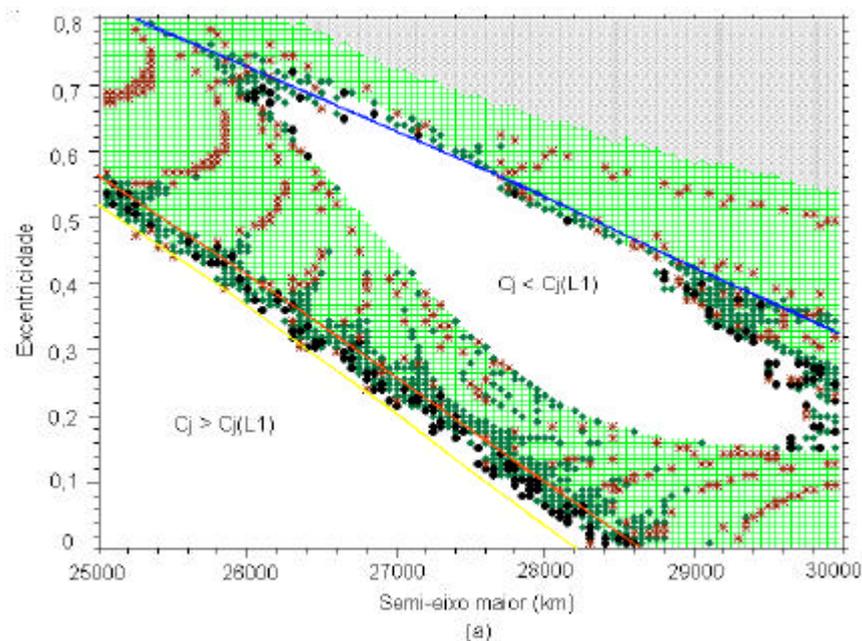


FIGURA 10.1 – Diagrama  $e \times a$  em termos do tempo de captura. Considere o código de cores da Figura 8.5

2.) As trajetórias com  $(a, e)$  acima da linha vermelha, mas fora da região de estabilidade, também possuem  $C_j < C_j(L1)$ , logo elas podem escapar por L1, porém, diferentemente daquelas que com  $(a, e)$  abaixo da linha vermelha, elas voltam à esfera de influência da lunar, através de L1, onde são recapturadas pela

Lua. Além disso, se  $C_j$  for inferior a 3,17116, elas podem escapar por L1 e L2. A Figura 10.3 mostra uma das trajetórias para a qual  $(a, e)$  está acima da linha vermelha e cujos valores são:  $a = 26170\text{km}$ ,  $e = 0,7222$  e  $C_j = 3,1705$ .

A partir destas observações, demos início às investigações de algumas das propriedades destas trajetórias.

### 10.3 Definição das Rotas

#### 10.3.1 Rotas de Escape e Captura Através de L1

Dentro do conjunto de trajetórias com  $(a, e)$  entre as linhas vermelha e azul, temos  $25500 = a = 30000\text{km}$  e  $0,1200 = e = 0,8000$ . Então selecionamos 15 trajetórias ao longo deste intervalo e acompanhamos a evolução de cada uma delas por 1000 dias. A título de exemplo, consideremos a trajetória da Figura 10.3 para qual  $a = 26170\text{km}$ ,  $e = 0,7222$ ,  $i = 0^\circ$ ,  $T = \Omega = 90^\circ$  e  $C_j = 3,1705$ . Esta trajetória escapa da Lua aos 92 dias, ficando ao redor da Terra limitada pela curva de velocidade zero dada pelo seu valor de  $C_j$ . Aos 346 dias ela volta à esfera de influência da lunar, onde é captura por 22 dias. Durante este período, ela chega a atingir 4451km acima da superfície da Lua. O segundo escape ocorre aos 368 dias através de L2. A evolução espacial de uma parte das trajetórias do conjunto definido pelos pontos acima da linha vermelha do diagrama da Figura 10.1 é semelhante à que acabamos de descrever, diferindo nos dias que ocorrem o escape e a captura pela Lua. Isto significa que praticamente todas elas após escaparem da Lua são recapturadas por ela em algum tempo posterior.

Na Tabela 10.1, temos as principais propriedades das 15 trajetórias escolhidas ao longo do intervalo descrito no parágrafo anterior. Integramos cada delas por 5 dias após o primeiro escape e por 10 dias antes da primeira captura, veja Figura 10.4. Claramente, podemos identificar duas rotas, uma de escape (Figura 10.4.a) e outra de captura (Figura 10.4.b). A rota de captura pode conduzir uma sonda até uma órbita lunar de baixa altitude sem a necessidade da aplicação de nenhum impulso.

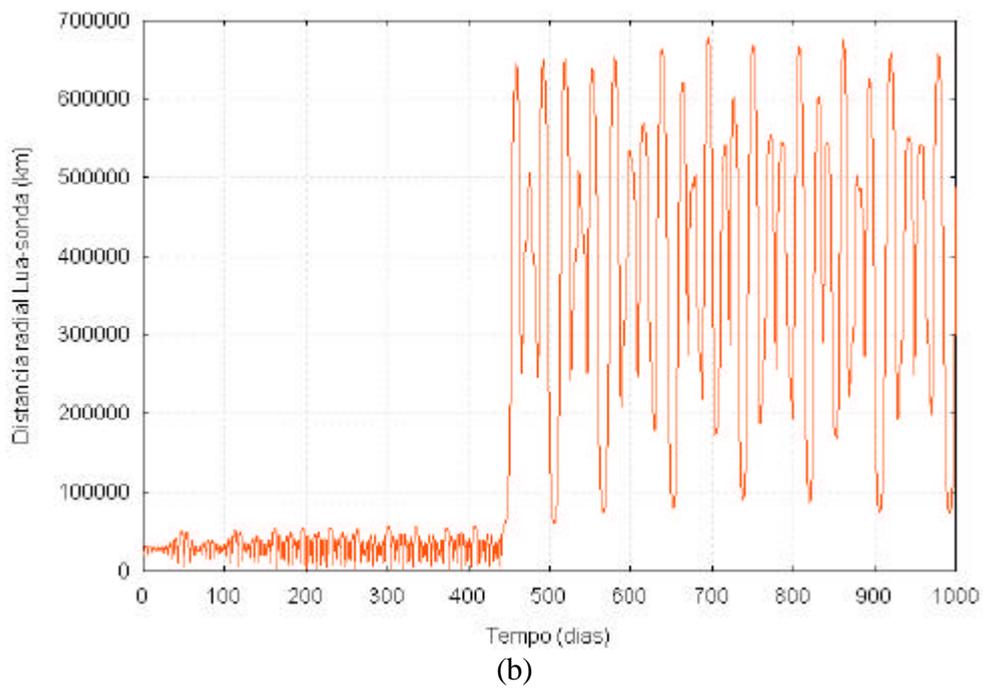
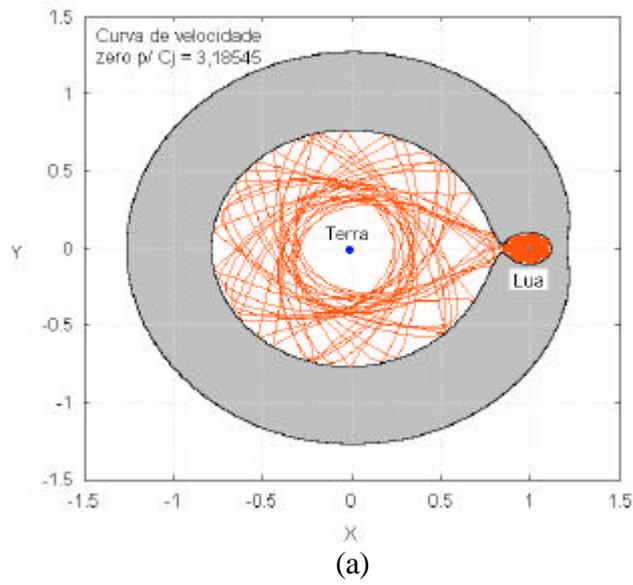
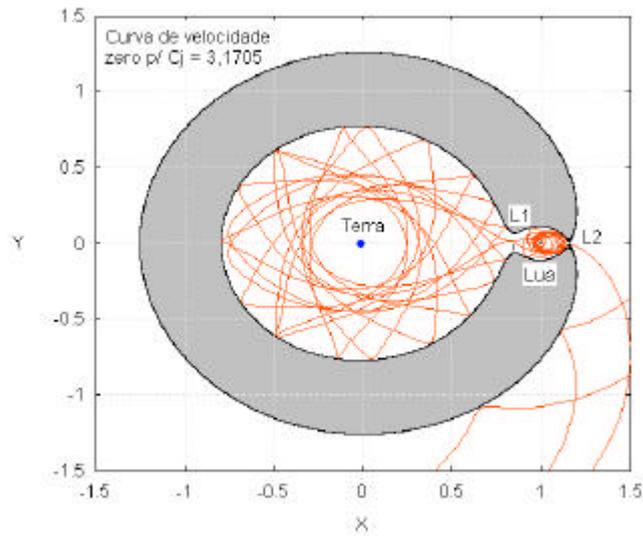
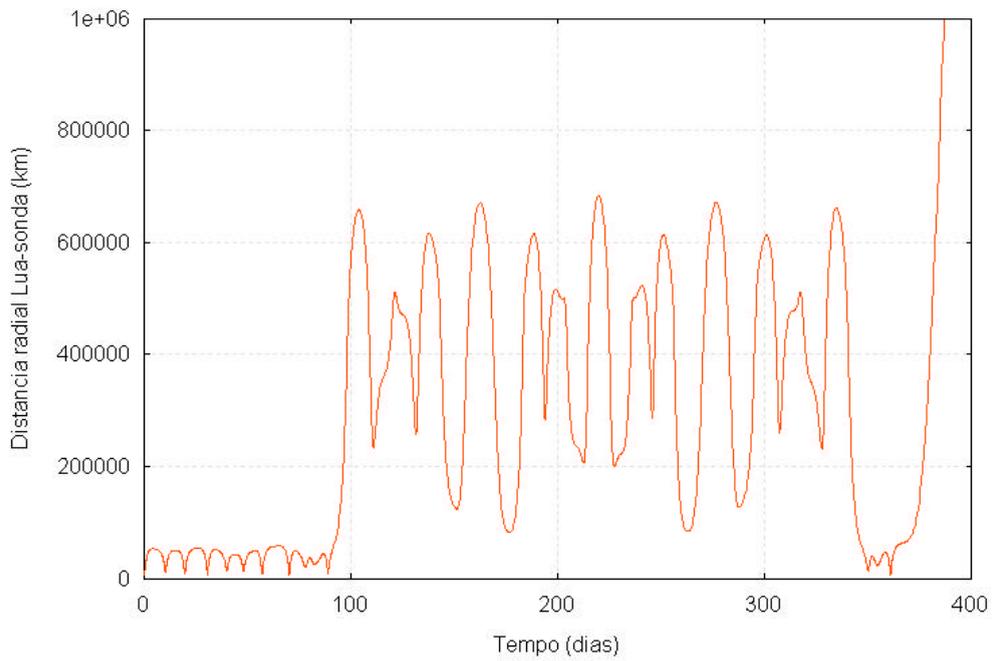


FIGURA 10.2 – (a) Trajetória encontrada para  $a = 26000\text{km}$ ,  $e = 0,2400$  e  $C_j = 3,1845$  vista no sistema de coordenadas sinódico e (b) Distância radial Lua-sonda em função do tempo.

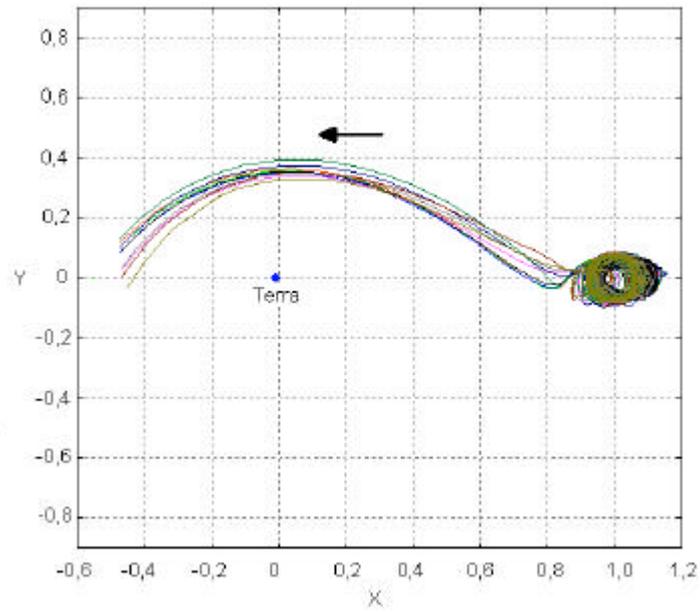


(a)

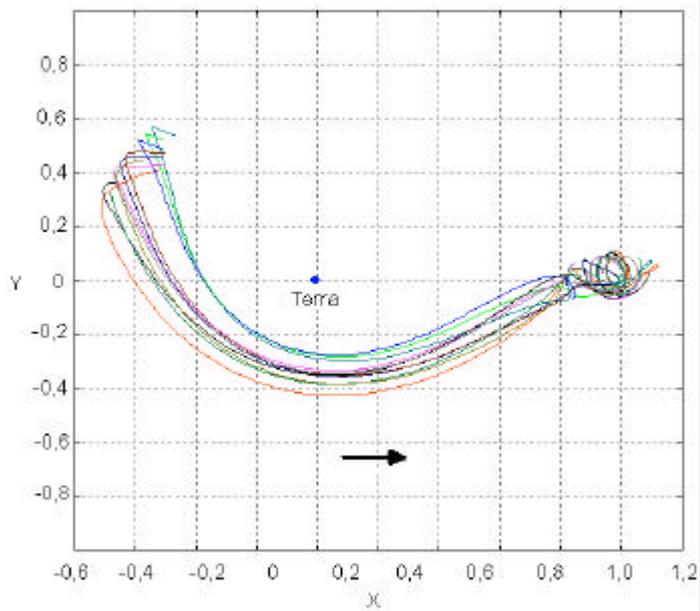


(b)

FIGURA 10.3 – (a) Trajetória encontrada para  $a = 26170\text{km}$ ,  $e = 0,2222$  e  $C_j = 3,1705$  vista no sistema de coordenadas sinódico e (b) Distância radial Lua-sonda em função do tempo.



(a)



(b)

FIGURA 10.4 – (a) Rota de escape obtida integrando por 5 dias após o 1º escape cada uma das 15 trajetórias da Tabela 10.1 e (b) rota de captura encontrada integrando as mesmas 15 trajetórias por 10 dias antes da 1ª captura.

TABELA 10.1 – Principais propriedades de algumas trajetórias definidas pela Figura 10.1.

Trajetoária	$a$ (km)	$e$	Escape (dias)	Captura (dias)	$C_j$
1	25450	0,5540	160 e 625	580	3,17131
2	25505	0,7710	108,4	480	3,17130
3	26170	0,7222	92 e 368*	346	3,17050
4	26820	0,3750	90	160	3,18360
5	27290	0,6240	100 e 200*	180	3,17004
6	27450	0,6000	210 e 540	530 e 720	3,17049
7	27885	0,2530	148	1090	3,18262
8	28000	0,2300	100 e 790	760 e 858	3,18360
9	28005	0,5260	190 e 640	510	3,17128
10	28480	0,4770	103	1342	3,17137
11	29005	0,4140	298,6	620	3,17174
2	29005	0,3720	157,8	330	3,17140
13	29740	0,1550	161 e 1600	1545, 1660 e 1838	3,17821
14	29800	0,2000	250, 340, 630 e 810	320, 600, 640 e 820	3,17652
15	29985	0,3440	250 e 980*	910	3,17058

\* Ocorre colisão com a Lua.

### 10.3.2 Rotas de Escape e Captura através de L2

Qualquer trajetória com  $C_j = 3,17116$  pode escapar através de L1 e L2. Então, este valor pode ser considerado para distinguir aquelas que escapam por L2. Algumas delas, em geral, localizadas na fronteira com a região de estabilidade também poderão pertencer às rotas de escape através de L1. Este é o caso da trajetória da Figura 10.3.

Dentro da esfera de influência da Lua, as trajetórias que são capturadas por L1 e aquelas que escapam através de L2 formam “canais” que superpõe possibilitando, desta forma, saltar de um para o outro exigindo pequenos  $\Delta V$ 's. A Figura 10.5 ilustra este fato.

### 10.4 Discussão sobre a Aquisição das Rotas

Uma vez na rota de captura interna, Figura 10.4.a, definida dentro da região delimitada pela curva de velocidade zero, uma sonda é conduzida até a esfera de influência lunar através de L1. Então ela é capturada e permanece ao redor da Lua por algum tempo, já que este processo é temporário, como vimos no Capítulo 2. Para que a captura se torne per-

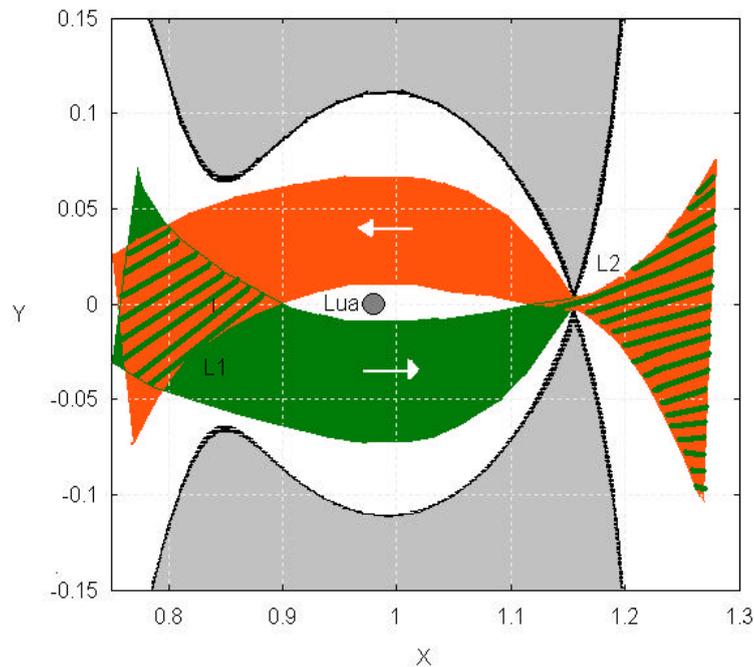


FIGURA 10.5 – Superposição dos “canais” de captura através de L1 (cor verde) e de escape através de L2 (cor vermelha), dentro da esfera de influência da Lua.

manente, um pequeno  $\Delta V$  deve ser aplicado à sonda. Em nossas simulações considerando as 15 trajetórias da Tabela 10.1 os valores das magnitudes destes  $\Delta V$ 's não ultrapassam 0,100km/s. Também efetuamos simulações com o objetivo de estimar o custo de aquisição destas rotas de forma convencional. Ou seja, utilizando uma elipse de transferência entre uma órbita de estacionamento terrestre e a rota de captura em vários pontos dentro da região delimitada pela curvas de velocidades zero. Os  $\Delta V_{Total}$ 's encontrados para as diversas situações simuladas foram maiores que os requeridos para uma transferência via Hohmann. Entretanto, isto não quer dizer que a utilização destas rotas esteja descartada, porém, ela depende da investigação de métodos não convencionais mais econômicos.

Por outro lado, há uma possibilidade para utilização da rota de escape (que se transformará em rota de captura) através de L2 cujo princípio básico já foi descrito em vários trabalhos da literatura (Belbruno, 1987, 1990, 1994; Belbruno e Carrico 2000; Belbruno e Miller 1990<sup>a</sup>, 1990b, 1993; Miller e Belbruno, 1991; Krish e Belbruno 1992;

Yamakawa, 1992; Koon et al, 2000 e 2001a e 2001b e Masdemont, 2004). A idéia básica é enviar uma sonda para regiões distantes da Terra por meio de uma elipse onde as velocidades do apogeu são baixas. Nestas regiões, é possível redirecionar a sonda aplicando um pequeno  $\Delta V$  para trajetórias bem conhecidas que a levarão até a Lua. Estas trajetórias são aquelas que escapam por L2 integradas para trás no tempo. A Figura 10.6 mostra o  $\Delta V_1$  aplicado à sonda em uma órbita de estacionamento terrestre de altitude 240km necessário para injeção na elipse e a velocidade do apogeu, ambas em função da distância Terra-sonda, e o tempo de vôo até o apogeu. Notemos que os  $\Delta V_1$ 's requeridos para enviar a sonda para grandes distâncias são praticamente constantes e da ordem de 3,200km/s. Comportamentos semelhantes têm as velocidades no apogeu que ficam abaixo de 0,050km/s.

A Figura 10.7 exhibe alguns exemplos deste tipo de manobra em que a aquisição da trajetória final que conduzirá a sonda até a captura pela Lua é feita após uma manobra de redirecionamento a partir do apogeu. Os tempos de manobra como estas são longos, no entanto, técnicas de *targeting* e otimização de trajetórias podem reduzi-los, e ainda proporcionar transferências mais econômicas. Por isso, é nossa intenção dar seqüência a este trabalho considerando tais técnicas.

## 10.5 Conclusões sobre o Capítulo

A meta deste Capítulo foi mostrar a existência de rotas de escape e captura para a Lua sem, no entanto, nos preocupamos em explicar a dinâmica de cada um delas detalhadamente. As rotas foram definidas a partir das trajetórias que envolvem a região de estabilidade encontrada para o PR3C e associada às órbitas da Família H2. Pudemos identificar dentro da região interna às curvas de velocidade zero uma rota de escape e outra de captura através de L1. Nossas simulações mostraram que a rota de captura pode levar uma sonda até a esfera de influência lunar onde ela é capturada pela Lua por algum tempo sem a necessidade de impulsos de inserção. A captura pode se tornar permanente com aplicação de  $\Delta V$ 's inferiores a 0,100km/s. Porém, os custos de aquisição destas rotas internas por métodos convencionais são altos.

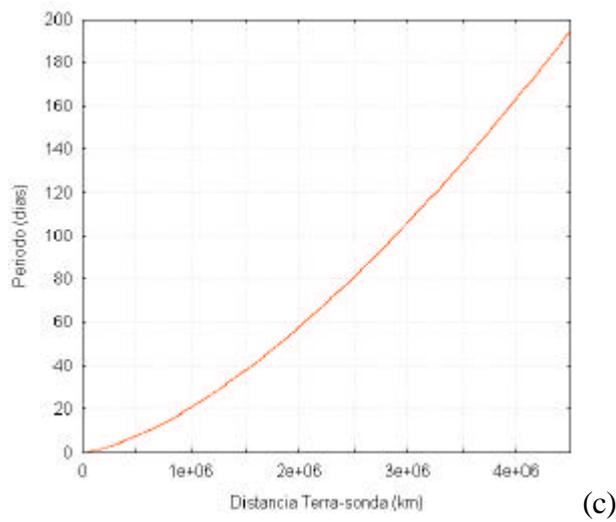
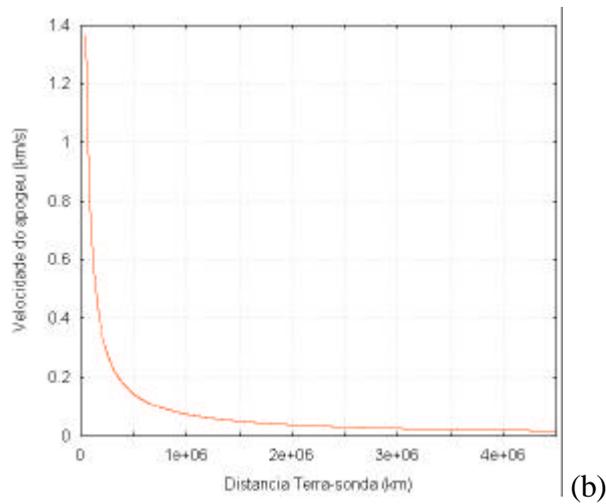
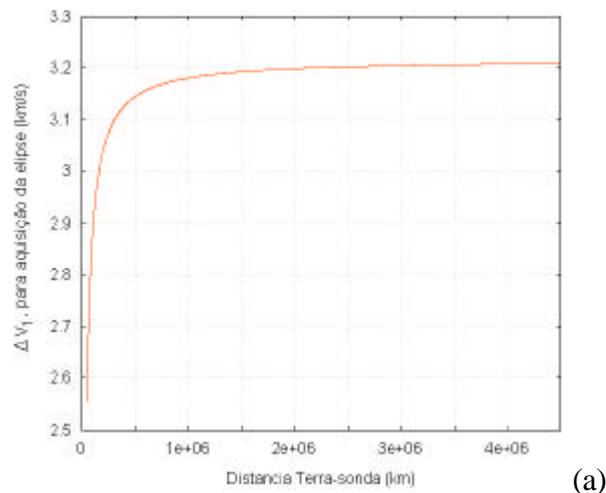
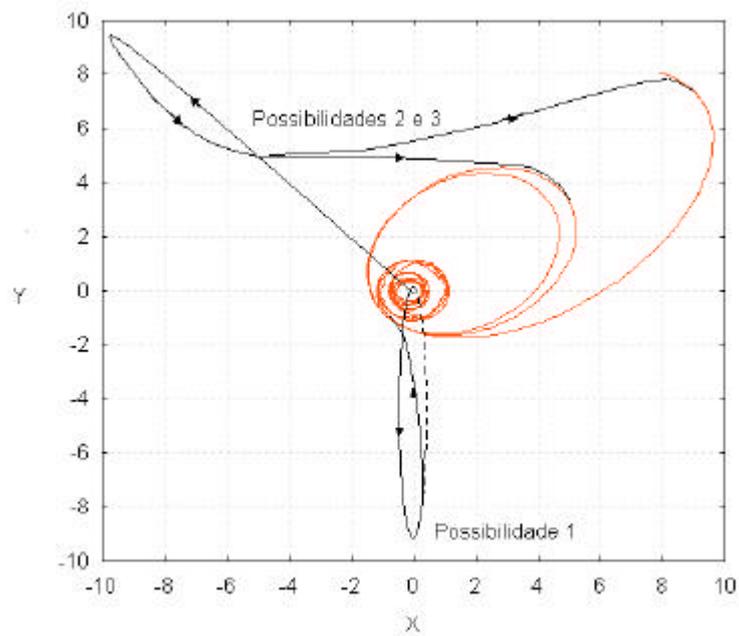
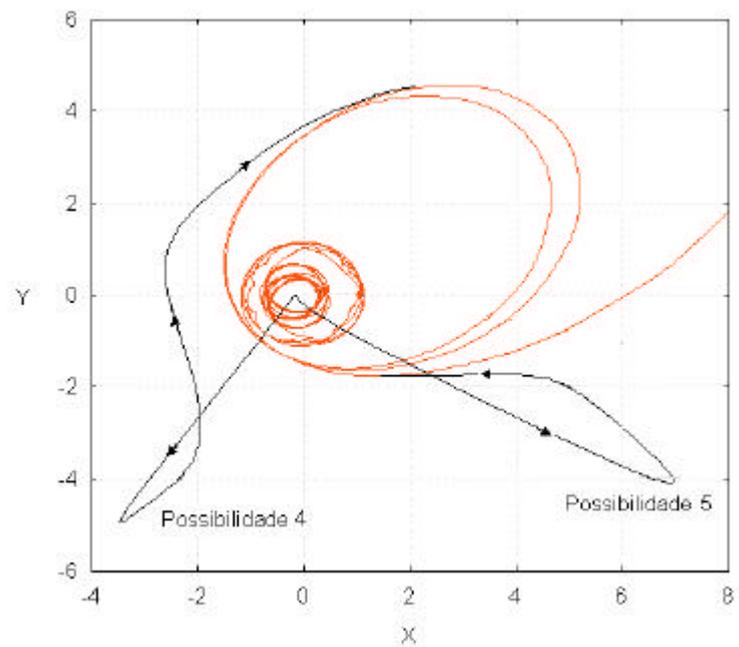


FIGURA 10.6 – Variação em função da distância Terra-sonda: (a)  $\Delta V_1$  para injeção na elipse, (b) velocidade no apogeu e (d) tempo de vôo até o apogeu.



(a)



(b)

FIGURA 10.7 – Cinco possibilidades para aquisição de uma trajetória da rota de escape por L2 vistas no sistema geocêntrico (Figuras fora de escala): (a) 3 possibilidades e (b) 2 possibilidades.

O diagrama  $e \times a$ , da Figura 10.1, também contém trajetórias que escapam através de L2. A aquisição destas trajetórias a grandes distâncias da Terra representa uma opção para reduzir custos viabilizando uma transferência entre a Terra e a Lua.

Os resultados aqui apresentados são o início de uma pesquisa que merece continuidade para melhor explorar as propriedades destas rotas com sistemas dinâmicos mais complexos e técnicas de *targeting* e otimização de trajetórias. Além disso, fica claro que pelo mostrado ao longo deste Capítulo a importância destas trajetórias através dos pontos L1 e L2 e dentro da esfera de influência da Lua.

## **CAPÍTULO 11**

### **CONCLUSÕES FINAIS**

#### **11.1 introdução**

O objetivo deste trabalho foi investigar duas famílias de órbitas periódicas no Sistema Terra-Lua preditas pelo PR3C e, então, buscar por conjuntos de trajetórias alternativas, derivadas das órbitas destas famílias, capazes de realizar missões de transferência entre órbitas terrestres e lunares, e manter ao redor da Lua, a baixo custo, espaçonaves por longos períodos em um grande número de missões. Com efeito, o trabalho pode ser dividido em duas partes, sendo que a primeira foi desenvolvida ao longo dos Capítulos 4, 5, 6 e 7 e voltada ao estudo do conjunto de trajetórias derivadas da Família G de órbitas periódicas diretas ao redor de L1. A segunda parte foi desenvolvida ao longo dos Capítulos 8, 9 e 10 e dedicada ao conjunto das trajetórias derivadas da Família H2 de órbitas periódicas diretas ao redor da Lua.

Ao final dos Capítulos 4 a 10, colocamos as conclusões sobre cada um deles. Neste último Capítulo, vamos recapitular as principais conclusões de forma sucinta, mas ressaltando-as como contribuições deste trabalho.

#### **11.2 Conclusões Gerais sobre a Primeira Parte (Trajetórias G)**

Podemos colocar as principais conclusões e contribuições sobre a primeira parte deste trabalho na seguinte ordem:

- 1.) Obtenção e descrição das principais propriedades de elos ligando a Terra à Lua, e ambas ao espaço exterior para o PR3C e o P4C (Capítulos 4 e 5). Ao considerarmos o P4C como sistema dinâmico nos deparamos com uma quantidade muito grande de configurações iniciais para alimentar nossas simulações numéricas. Não obstante, simulações numéricas considerando diversas configurações mostraram que os elos continuam existindo. O trabalho

com 4 ou mais corpos em Mecânica Celeste é recente e ainda pouco divulgado na literatura. Assim, podemos destacar as investigações numéricas com o P4C como uma contribuição deste trabalho.

- 2.) Uma vez definidos os elos Terra-Lua-Terra, desenvolvemos estudos sobre a utilização de suas trajetórias em transferências diretas entre órbitas terrestres e lunares e também transferências direcionadas visando a colocação de sondas em órbitas lunares de baixas altitudes e grandes inclinações. De maneira geral, os custos das manobras consideradas são ligeiramente maiores, cerca de 3%, que o método convencional via elipse de energia mínima (tipo Hohmann), e cerca de 2% menores que o método *Patched-conics*. Todavia, os custos das Trajetórias G levam em conta sistemas dinâmicos mais complexos e realistas que os considerados nas transferências tipo Hohmann e *Patched-conics*, as quais se utilizam da dinâmica de dois corpos. Desta forma, as transferências via Trajetórias G dispensam correções devido as perturbações dos campos gravitacionais do Sol, da Terra e da Lua. Assim, uma transferência via Trajetória G pode apresentar custos entre 5 e 7% menores que os métodos convencionais. Por outro lado, elas ainda oferecem a possibilidade de inserção em órbitas lunares de grandes inclinações e baixas altitudes evitando manobras de transferência de plano convencionais demasiadamente caras.

### **11.3 Conclusões Gerais sobre a Segunda Parte (Órbitas Estáveis ao Redor da Lua)**

As conclusões e contribuições da segunda parte têm a seguinte ordem:

- 1.) Estudos de regiões de órbitas estáveis ao redor da Lua para o P4C identificando quais os fatores que determinam a evolução no tamanho e na localização da região de estabilidade (Capítulo 8).
- 2.) Estudo da evolução da região de estabilidade considerando inclinações diferentes de zero em relação ao plano da órbita da Lua (Capítulo 9). Tal estudo

mostrou que até inclinações da ordem de  $40^\circ$  existe uma região de órbitas estáveis ao redor da Lua. Tanto este estudo quanto o do item anterior mostraram um conjunto de trajetórias capazes de manter veículos espaciais em grande número de missões ao redor da Lua a baixos custos.

- 3.) Por fim, iniciamos um trabalho de busca por rotas de escape e captura da Lua, através de L1 e L2, a partir de trajetórias cujo tempo de permanência ao redor da Lua com energia de dois corpos negativa gira entre 10 e 500 dias. Embora incipiente, este trabalho mostrou claramente a possibilidade de se conduzir sondas a órbitas lunares sem a necessidade da aplicação de impulsos de inserção, aproveitando o fenômeno de captura gravitacional.

#### **11.4 Trabalhos Futuros**

Os resultados ao longo desta tese mostraram a existência de rotas entre a Terra e a Lua e entre elas e o espaço exterior. Algumas propriedades inerentes aos diversos tipos de trajetórias estudadas podem viabilizar um grande número de missões de transferências entre a Terra e a Lua e, até mesmo, interplanetárias, embora esta última opção não tenha sido objeto de nossas pesquisas diretas.

Temos em mente que uma das principais preocupações da Astronáutica dos nossos dias e dos vindouros é a redução dos custos das viagens através do espaço. Assim, dadas as peculiaridades dos conjuntos de trajetórias aqui estudadas, como sensibilidade a pequenas variações na velocidade, achamos que o emprego de técnicas de *targeting* e de otimização de trajetórias podem ampliar as possibilidades de utilização destas trajetórias.

Por outro lado, ao longo de toda esta tese, nos deparamos com a dinâmica complexa das trajetórias estudadas quando em trânsito pela esfera de influência da Lua. Por exemplo, o fato de uma trajetória passar entre L1 e a Lua no sentido ascendente ou descendente determinar uma evolução espacial, a partir deste ponto, bem diferente uma da outra, tal como discutido nos Capítulos 4, 5 e 10. Estes fatos apontam para a neces-

cidade de um estudo mais detalhado sobre a dinâmica dentro da esfera de influência lunar. Por isso, nossa meta é dar continuidade a estas investigações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bate, R.R.; Mueller, D.D.; White, J.E. **Fundamentals of Astrodynamics**. USA: Dover Publications Inc., 1971. 455p.

Belbruno E.A. Lunar Capture Orbits, a Method of Constructing Earth Moon Trajectories and the Lunar Gas Mission. In: AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference 19., Colorado, 11–13, May 1987, **Proceedings of AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference 19**. Colorado: AIAA, 1987.

Belbruno, E.A. Examples of the Nonlinear Dynamics of Ballistic Capture and Escape in Earth Moon System. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Portland, 20-22, Aug. 1990. **Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Conference**. Oregon: AIAA 1990.

Belbruno E.A. Through the Fuzzy Boundary: A New Route to the Moon. **Planetary Report**, v. 7, n. 3, p. 8-10, May/Jun. 1992.

Belbruno, E.A. Ballistic Lunar Capture Transfer using the Fuzzy Boundary and Solar Perturbations: a survey. **British Interplanetary Society Journal**, v. 47, n. 2, p. 73-80, 1994.

Belbruno E.A. The Dynamical Mechanism of Ballistic Capture Transfer in Four-Body Problem from the Perspective of Invariant Manifolds and Hill's Region. Institut D'Estudis Catalans. **CRM Research Report**, n. 270, Nov. 1994.

Belbruno E.A. Low Energy Trajectories for Space Travel and Stability Transitions Regions. **Proceedings of IFAC Workshop on Lagrangian and Hamilton Methods for Nonlinear Control**. IFAC Publ. Elsevier Science Ltd., Oxford, UK, Mar. 2000, p. 7-12.

Belbruno, E.A.; Miller, J.K. **A Ballistic Lunar Capture Trajectory for Japanese Spacecraft Hiten**. Pasadena, CA, USA: JPL, 1990a (JPL IOM-90.4-1731).

Belbruno E.A.; Miller J.K. **A Ballistic Lunar Capture Trajectory for Lunar Observe Mission**. Pasadena, CA, USA: JPL, 1990b (JPL IOM-90.4-1752).

Belbruno E.A.; Miller, J.K. Sun Perturbed Earth-to-Moon Transfer with Ballistic Capture. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 16, n. 4, p. 770-775, July/Aug. 1993.

Belbruno E.A.; Carrico, J.P. Calculation of Weak Stability Boundary Ballistic Lunar Transfer Trajectories. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference, Denver, 14-17, Aug. 2000. **Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference**. Colorado: AIAA, 2000.

- Benest, D. Effects of the Mass Ratio on the existence of Retrograde Satellites in Circular Plane Restricted Problem. **Astronomy & Astrophysics**, v. 32, n.1, p. 39-46, Mar. 1974.
- Benest, D. Effects of the Mass Ratio on the existence of Retrograde Satellites in Circular Plane Restricted Problem II. **Astronomy & Astrophysics**, v. 45, n. 2, p. 353-363, Dec. 1975.
- Benest, D. Effects of the Mass Ratio on the existence of Retrograde Satellites in Circular Plane Restricted Problem III. **Astronomy & Astrophysics**, v. 53, n.2, p. 231-236, Dec. 1976.
- Benest, D. Effects of the Mass Ratio on the existence of Retrograde Satellites in Circular Plane Restricted Problem IV Three-dimensional Stability of Plane Periodic Orbits. **Astronomy & Astrophysics**, v. 54, n. 2, p. 563-568, Jan. 1977.
- Broucke, R.A. **Recherches d'orbites périodiques dans le problème restreint plan**. Dissertation, Univ. of Louvain, Belgium, 1962.
- Broucke, R.A. **Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem with Earth-Moon Masses**. EUA: Jet Propulsion Laboratory – California Institute of Technology, TR: 32-1168, 1968. 92p.
- Broucke, R.A. Traveling Between the Lagrange Points and the Moon. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 2, n. 4, p. 257-263, July/Aug. 1979.
- Broucke, R.A. The Celestial Mechanics of Gravity Assist. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, 15-17, Aug. 1988. **Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Conference**, Minneapolis: AIAA, 1988.
- Broucke, R.A.; Elise A.; Riagas, A. On Figure-8 Periodic Solutions in the 3-body Problem. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Monterey, 2-5, Aug. 2002. **Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference**. California: AIAA, 2002.
- Broucke, R.A. Long Term Third-Body Effects via Double Averaging. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 26, n. 1, p 27-32, Jan./Feb. 2003.
- Broucke, R.A. Classification of Periodic Orbits in the Four- and Five-bodies Problems. **New York Academy Science**, v. 1017, n. 1, p. 408-421, 2004.
- Brunini, A. On the Stability Capture Problem - Capture and Stability Regions for Planetary Satellites. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 64, n. 1/2, p. 79-92, 1996.

Chobotov, V.A. **Orbital Mechanics**. USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Inc., education series, 1991, 361p.

Cordeiro, R.; Martins, R.V.; Leonel, X. Complexity of Capture Phenomena in the Conservative and the Dissipative Restricted Three-Body Problem. **The Astronomical Journal**, v. 3, n. 117, p. 1634-1642, 1999.

de Melo, C.F.; Winter, O.C.; Vieira Neto, E. Numerical study of low-cost alternative orbits around the Moon. **Advances in Space Research**, v. 36, n. 3, p. 552-560, 2005.

de Melo, C.F.; Winter, O.C. Alternative Paths for Transfers in Earth-Moon System, **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2006, p. 1-20, 2006.

Feldman, W.C.; Barraclough, B.L.; Maurice, S.; Elphic, R.C.; Lawrence, D.J.; Thomsen, D.R.; Binder, A.B. Major compositional Units of the Moon: Lunar Prospector Thermal and Fast Neutrons. **Science**, v. 281, n. 5382, p. 1496-1504, 1998.

Hénon, M. Numerical Exploration of the Restricted Problem. V. Hill's case: Periodic Orbits and their Stability. **Astronomy & Astrophysics**, v. 1, p. 223-238, 1969.

Hénon, M. Numerical Exploration of the Restricted Problem. VI. Hill's case: Non Periodic Orbits. **Astronomy & Astrophysics**, v. 9, p. 24-36, 1970.

Hénon, M. Vertical Stability Periodic Orbits in the Restricted Problem. I. Equal masses. **Astronomy & Astrophysics**, v. 28, p. 415-426, 1973.

Hénon, M. Families of Periodic Orbits in the Three-body problem. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 10, p. 375-388, 1974.

Hénon, M. Families of Periodic Orbits in the Three-body problem, and their Stability. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 13, p. 267-285, 1976.

Hénon, M. Generating Families in the Three-body problem. **Lectures in Physics, Springer-Verlag**, Berlin, p. 135-147, 1997.

Henrard, J.; Navarro, F.J. Spiral Structures and Chaotic Scattering of Coorbital Satellites. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 79, p. 297-314, 2001.

Hopf, E. Zwei Satze den Wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen Dynamischer Systeme. **Mathematische Annalen**, v. 103, p. 710-719, 1930.

Huang, T.-Y.; Innanen, K.A. The gravitational Escape/Capture of Planetary Satellites. **The Astronomical Journal**, v. 88, n. 10, p. 1537-1547, 1983.

- Koon, W.S.; Lo, M.W.; Marsden, J.E.; Ross, S.D. Heterocyclic Connection Between Periodic Orbits and Resonance Transition in Celestial Mechanics. **Chaos**, v. 10, n. 2, p. 427-469, 2000.
- Koon, W.S.; Lo, M.W.; Marsden, J.E.; Ross, S.D. Low Energy Transfer to the Moon. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 81, p. 63-73, 2001.
- Koon, W.S.; Lo, M.W.; Marsden, J.E.; Ross, S.D. Construing a Low Energy Transfer to Between Jovian Moons. **Contemporary Mathematics, American Mathematical Society**, v. 292, p. 129-145, 2002.
- Krish, V.; Belbruno, E.A.; Hollister, W.M. An Investigation Into Critical Aspects of a New Form of Low Energy Lunar Transfer, The Belbruno-Miller Trajectories. In: AIAA Astrodynamics Conference, Washington, 10-12, Aug. 1992. **Proceedings of AIAA Astrodynamics Conference**. Washington: AIAA, 1992.
- Masdemont, J.J. **Fundamentals of Dynamics and Applications of Libration Points Orbits**. Publicación del Institut d'Estudis Espacials de Catalunya & Departament de Matemàtica Aplicada, I. Universitat Politècnica da Catalunya, España, Dec. 2004.
- Merman, G.A. On Sufficient Conditions of Capture in the Restricted Hyperbolic Problem of Three Bodies with Close Binary Approaches. **Bull. Inst. Teor. Astro.**, v. 5, n. 9, p. 606-616, 1954.
- Miller, J.K.; Belbruno, E.A. A Method for Construction of a Lunar Transfer Trajectory Using Ballistic Capture. In: AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Houston, 11-13, Feb. 1991, **Proceedings of AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting**. Texas: AAS/AIAA, 1993.
- Monserrat Filho, J. Ocupação e o Uso da Lua como Problemas Jurídicos Internacionais. **Revista Brasileira de Direito Aeroespacial**, v. 75, p. 1-27, 1998.
- Mourão, R.R.F. **Dicionário Enciclopédico de Astronomia e Astronáutica, 2 ed.**, Brasil: Nova Fronteira Ltda., 1995. 961p.
- Murison, M.A. The Fractal Dynamics and of Satellite Capture in the Restricted Three-body Problem. **The Astronomical Journal**, v. 6, n. 98, p. 2346-2359, Dec. 1989.
- Murray C.D.; Dermott, S.F. **Solar System Dynamics**. UK: Cambridge University Press, 1999. 399p.
- Ott, E. **Chaos in Dynamical Systems**. UK: Cambridge University Press, 1993. 385p.

- Prado, A.F.B.A.A. Semi-Analytical Study of the Gravitational Capture. In: XV International Symposium Space Dynamics, Biarritz, 26-30, Jun. 2000. **Proceedings of XV International Symposium Space Dynamics**. France: 2000, p. 299-308.
- Prado, A.F.B.A. Minimum Fuel Trajectories For Lunar Polar Orbiter. **SBA Controle & Automação**, v. 12, n. 2, Maio/Ago. 2001a.
- Prado, A.F.B.A. **Trajatórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade**. Brasil, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), CDD 531-5, 2001b. 172p.
- Prado, A.F.B.A.; Felipe, G. Effects of the Third Dimension in a Close Approach Maneuver. In: 47th International Astronautical Congress, Beijing, 07-11, Oct. 1996. **Proceedings of 47th International Astronautical Congress**. China: 1996. (INPE-6727-PRE/2749).
- Prado, A.F.B.A.; Vieira Neto, E.; Ferreira, L.O. A Study of the Gravitational Capture Using Average Methods. In: 48th International Astronautical Congress, Turin, 04-10, Oct. 1997, **Proceedings of 48th International Astronautical Congress**. Italy: 1997. p. 17. (IAF-97-A.4.05), (INPE-6725-PRE/2747).
- Regeon, P.A.; Lynn, P.R.; Johnson, M.; Chapman, R.J. The Clementine Lunar Orbiter, In: 20th International Symposium on Space Technology and Science, Gifu, 19-25, May 1996. **Proceedings of 20th International Symposium on Space Technology and Science**. Japan: 1996, p. 96.
- Roy, A.E. **Orbital Motion, 3 ed. - Student text**. USA: Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1988. 532p.
- Sizova. O.A. The Possibility of Capture in the Restricted Problem of Three-body. **Doklady Akademii NauK SSSR**, v. 86, n. 3, p. 485-488, 1952.
- Torres, K.S. **Controle Orbital de Satélites Artificiais com Propulsão de Uso de Gravidade Lunar**, 2004, 205p. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP, 2004.
- Vanderbey, R.J. New Orbits for N-Body Problem, **New York Academy Science**. V. 1017 n. 1, p. 422-433, 2004.
- Vieira Neto, E. **Estudo da Captura Gravitacional Temporária Utilizando o Problema Restrito de Três Corpos**. 1998, 224p. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologias Espaciais) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1998.
- Vieira Neto, E.; Winter, O.C. Time Analysis for Temporary Gravitational Capture: Satellites of Uranus. **The Astronomical Journal**, v. 122, p. 440-448, July, 2001.

Wertz, J.R. **Spacecraft Attitude Determination and Control**. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1978. 858p.

Winter, O.C.; The stability evolution of a family of simply periodic lunar orbits. **Planetary and Space Science**, v. 48, p. 23-28, 2000.

Winter, O.C.; Murray, C.D. **Atlas of the Planar, Circular, Restricted Three-body Problem I. Internal Orbits**. UK: WMW Maths Notes, n. 16, Queen Mary and Westfield College, London, 1994a, 205p.

Winter, O.C.; Murray, C.D. **Atlas of the Planar, Circular, Restricted Three-body Problem II. External Orbits**. UK: WMW Maths Notes, n. 26, Queen Mary and Westfield College, London, 1994b, 208p.

Winter, O.C.; Vieira Neto, E. Time Analysis for Temporary Gravitational Capture Stable Orbits. **Astronomy & Astrophysics**, v. 377, p. 1119-1127, 2001.

Winter, O.C.; Vieira Neto, E. Distant Stable Direct Orbits around the Moon. **Astronomy & Astrophysics**, v. 393, pp 661-671, 2002.

Winter, O.C.; Vieira Neto, E.; Prado, A. F. B. A. Orbital Maneuvers Using Gravitational Capture Times. **Advances in Space Research**, v. 31, n. 8, p. 2005-2010, 2003.

Wisdom, J. Urey Prize Lecture: Chaotic Dynamics in Solar System. **Icarus**, v. 29, p. 241-275, 1987.

Yamakawa, H. **On Earth-Moon Transfer Trajectory with Gravitational Capture**. 1992, 223p. Thesis (Doctorate in Aeronautics Engineering) - University of Tokyo, Japan, 1992.

## APÊNDICE A

### SISTEMA TERRA-LUA

Neste Apêndice, iremos definir o Sistema Terra-Lua e algumas de suas principais características.

#### A.1 Sistema Terra-Lua

Estaremos chamando de Sistema Terra-Lua a região delimitada pela esfera de influência da Terra. Esta é a região do espaço que concentramos nossas pesquisas. Formalmente, define-se como esfera de influência, gravitosfera, esfera de atividade ou esfera de ação ao espaço compreendido por uma superfície quase esférica centrada no planeta dentro da qual a torção de atração gravitacional do planeta se impõe sobre a dos corpos celestes vizinhos. Dentro da esfera de influência é, por muitas vezes, conveniente e possível considerar a trajetória de uma partícula como planetocêntrica e as interações com os outros corpos como perturbações. Todavia, esta hipótese não pode ser assumida irrestritamente quando se trata do movimento de veículos espaciais no Sistema Terra-Lua, tal como mostram os resultados dos Capítulos 5 e 9, principalmente. Um desenvolvimento matemático mais extenso para definir a esfera de influência pode ser encontrado em Roy (1988), por ora, vamos adotar a expressão para determinar o raio da esfera de influência demonstrada por Tisserand para definirmos a gravitosfera da Terra. Mas, que fique claro, adotaremos esta definição apenas para fixar a porção do espaço que chamamos de Sistema Terra-Lua ao longo deste trabalho.

Partindo de um caso geral, consideremos um planeta de massa,  $M_P$ , e uma estrela de massa,  $M_S$ , a expressão de Tisserand nos dá que o raio da esfera de influência do planeta,  $R_E$ , vale:

$$R_E = \left( \frac{M_P}{M_S} \right)^{2/5} r_P \quad (\text{A.1})$$

Onde  $r_p$  é o raio médio da órbita do planeta. Agora, admitindo que o planeta seja a Terra e a estrela o Sol, temos:  $M_P = M_{Terra} = 5,9742 \times 10^{24} \text{kg}$  e  $M_S = M_{Sol} = 1,98911 \times 10^{30} \text{kg}$  e  $r_p \approx 1,5 \times 10^8 \text{km}$ . Assim, encontramos para o raio da esfera de influência da Terra:

$$R_E = 927128 \text{km} \quad (\text{A.2})$$

De ora em diante, sempre que nos referirmos ao Sistema Terra-Lua estaremos considerando uma esfera de raio 927128km com centro na Terra.

De maneira alternativa, porém não usual, poderíamos ter considerado  $M_P$  igual à soma das massas da Terra e da Lua ( $6,047683 \times 10^{24}$ ) e, então, definiríamos uma esfera de influência para o Sistema Terra-Lua. Neste caso, encontraríamos  $R_E = 931672,6 \text{km}$ , e o centro da esfera de influência seria o centro de massa comum do sistema binário Terra-Lua, situado a 4670km do centro da Terra sobre a reta que as une. Como podemos observar, na prática, definir a região que investigamos a partir da esfera de influência da Terra ou do conjunto Terra-Lua acarreta em uma diferença pouco relevante, pelo menos para os nossos propósitos.

Por outro lado, é importante termos em mente que, assim como foi possível definir a esfera de influência da Terra, cujo raio é de 927128km, também é possível definir uma esfera de influência da Lua a partir da Equação (A.1). Para isso, consideramos  $M_P = M_{Lua} = 7,3483 \times 10^{22} \text{kg}$  e  $M_S = M_{Terra} = 5,9742 \times 10^{24} \text{kg}$  e  $r_p \approx 384400 \text{km}$  o raio médio da órbita da Lua, e encontramos para o raio de sua esfera de influência:

$$R_{ELua} = 66183 \text{km} \quad (\text{A.3})$$

Como podemos verificar pelo valor do raio médio da órbita da Lua e de  $R_{ELua}$ , a esfera de influência da Lua está totalmente dentro da esfera de influência da Terra.

Tal com dito anteriormente, dentro da esfera de influência da Lua seu campo gravitacional deveria ser preponderante sobre uma partícula ou veículo espacial e as interações com os demais corpos Celestes, principalmente o Sol e a Terra, serem consideradas como perturbações. Entretanto, devido à razão entre as massas da Terra e da Lua,  $\approx 81,3$ ; e as distâncias deste dois corpos ao Sol, as perturbações devidas aos

campos gravitacionais do Sol e da Terra não podem e não devem ser negligenciadas quando se trata do movimento de um veículo espacial nas proximidades da Lua (veja Capítulos 5 e 9), assim como podem, muitas vezes, serem negligenciados os campos gravitacionais do Sol e da Lua quando se estuda o movimento de um veículo espacial em órbita da Terra. No Apêndice C, apresentaremos os métodos de transferência Terra-Lua de Hohmann e *Patched-conics*, e, este fato, será essencial para entendermos porque são necessários  $\Delta V$  corretores para concluir estas manobras.

Segundo Roy (1988), podemos classificar as trajetórias de veículos espaciais no Sistema Terra-Lua, a grosso modo, por:

- Órbitas terrestres;
- Órbitas lunares (perturbadas);
- Transferências entre órbitas terrestres e lunares e vice-versa;
- Aterrissagens e Alunissagens;
- Trajetórias de sondas planetárias que buscam ganhar energia realizando *Swing-by* com a Terra e/ou a Lua.

Um bom exemplo da combinação dos quatro primeiros tipos de trajetórias foram as missões do projeto Apollo, desenvolvidas pela NASA, e as missões do projeto Luna da antiga União Soviética. Por outro lado, as principais forças que atuam sobre veículos espaciais no Sistema Terra-Lua são:

- Aos propulsores do próprio veículo;
- Campo gravitacional terrestre;
- Arrasto atmosférico;
- Campo gravitacional da Lua;
- Campo gravitacional do Sol;
- Pressão de radiação solar.

A ordem acima parece indicar uma escala decrescente de influência sobre o veículo espacial, mas, na verdade, é difícil expressar a importância relativa de cada uma delas,

mesmo porque, isto dependeria da missão do veículo. No entanto, dado o interesse de nosso trabalho, nós consideraremos apenas as interações do veículo com os campos gravitacionais da Terra, da Lua e do Sol, e em alguns casos, com a pressão de radiação solar e com as forças devidas aos seus propulsores.

## A.2 Descrição das Principais Características do Sistema Terra-Lua

O Sistema Terra-Lua possui muitas outras características intrínsecas relativas ao movimento da Terra e da Lua. Algumas destas propriedades foram consideradas em nosso trabalho, outras puderam ser negligenciadas pelo fato de estarmos estudando trajetórias por um tempo curto. Discutiremos algumas destas propriedades nesta Seção.

Uma análise mais detalhada dos movimentos da Terra e da Lua mostra que elas se movem no sentido anti-horário em torno do centro de massa comum. A distância média entre a Terra e a Lua é da ordem de 384400km e a massa da Lua é aproximadamente 1/83,3 da massa da Terra, o que deixa o centro de massa a cerca de 4670km do centro da Terra, caracterizando um sistema binário (quase um sistema de “duplo-planetás”). O centro de massa do Sistema Terra-Lua, por sua vez, move-se em torno do Sol com período de um ano (365,24219 dias). A Figura A.1 ilustra o Sistema binário Terra-Lua.

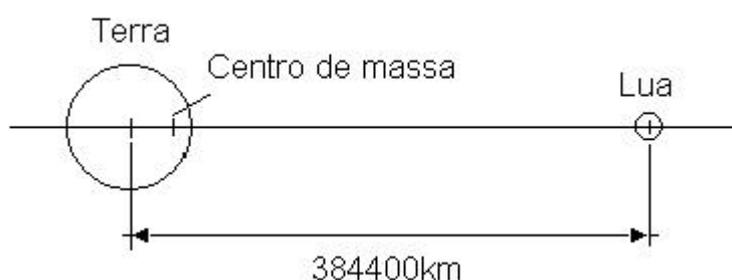


FIGURA A.1 – Sistema binário Terra-Lua (Figura fora de escala).

O período de rotação da Terra e da Lua em torno do centro de massa comum é, na atualidade, de aproximadamente 27,32 dias. Como resultado, a longitude de um corpo celeste como o Sol ou um planeta próximo exibe flutuações também de período 27,32 dias pelo fato de nós os observarmos da Terra e não do centro de massa do Sistema Terra-Lua. Estas flutuações correspondem à maneira mais precisa de se calcular a massa destes corpos. Contudo, o período da órbita da Lua não é constante, ele aumenta à medida que a Lua se afasta da Terra. De acordo com a teoria de G. H. Darwin, a Lua esteve muito próxima da Terra em eras passadas, e este afastamento pode ser explicado pelo fato do bulbo (preponderância) da maré oceânica gerada pela Lua ser arrastada para leste (sentido anti-horário) devido à rotação da Terra. Isto muda o centro de gravidade do Sistema de posição, imprimindo assim uma aceleração à Lua na direção de seu movimento orbital causando um aumento na sua velocidade. Conseqüentemente, a trajetória da Lua é, na verdade, uma espiral para fora muito suave. A Figura A.2 ilustra a aceleração perturbadora sobre a Lua devido à maré oceânica.

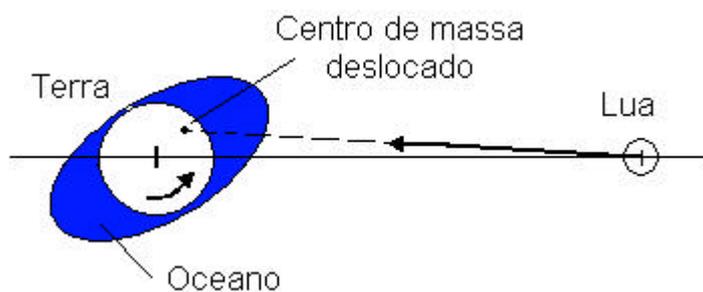


FIGURA A.2 – Aceleração perturbadora sobre a Lua causada pelo deslocamento da maré oceânica. Figura fora de escala.

Um fato interessante relacionado ao movimento da Lua é que a força de atração do Sol sobre ela é cerca de duas vezes maior que a da Terra, logo, o centro de forças sobre a Lua aponta para as proximidades do centro de massa do Sol, e, desta forma, há mais uma importante perturbação sobre seu movimento ao redor da Terra.

Agora, considerando um sistema de coordenadas Cartesianas geocêntricas ( $x_1, x_2, x_3$ ) como mostra a Figura A.3, o movimento da Lua pode ser descrito pelos seus elementos orbitais (dados obtidos junto ao *site* <http://sse.jpl.nasa.gov/planets/moon>):

- 1.) Semi-eixo maior,  $a_{Lua} = 383268,368\text{km}$ ;
- 2.) Excentricidade,  $e_{Lua} = 0,0549$ ;
- 3.) Inclinação em relação à eclíptica (plano da órbita da Terra),  $i_{Lua} = 5,1454^\circ$ ;
- 4.) Longitude do nodo ascendente,  $\Omega_{Lua}$ , é variável;
- 5.) Argumento do periápsis,  $T_{Lua}$ , variável;
- 6.) Ascensão reta da época,  $\alpha_{Lua}$ , variável, é o ângulo entre o eixo- $x_1$  e a projeção do raio vetor da Lua, em um tempo qualquer, sobre o plano  $x_1x_2$  do sistema de coordenadas geocêntricas.

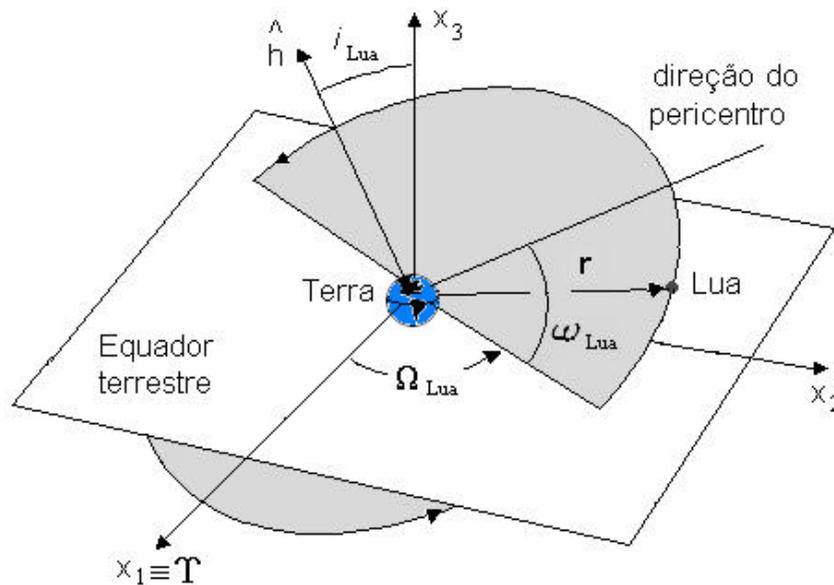


FIGURA A.3 – Elementos orbitais da Lua no sistema de coordenadas Cartesianas geocêntricas (Figura fora de escala).

Os valores de  $\Omega_{Lua}$ ,  $T_{Lua}$  e  $\alpha_{Lua}$  não permanecem constantes ao longo do tempo principalmente devido aos efeitos do campo gravitacional do Sol. A linha dos nodos, a

interseção entre os planos das órbitas da Lua e da Terra, move-se no sentido anti-horário, fazendo uma revolução completa a cada 18,6 anos. Por sua vez, o ângulo entre o equador terrestre e a eclíptica é praticamente constante e igual a  $23,5^\circ$ ; exceto por uma variação muito pequena devido ao movimento de precessão do eixo de rotação da Terra, de período 26000 anos. Assim, devido ao movimento de rotação da linha dos nodos da órbita da Lua sobre a eclíptica, a inclinação do plano de sua órbita varia em relação ao equador terrestre entre  $18,36^\circ$  e  $28,64^\circ$  com período de 18,6 anos, aproximadamente. Por outro lado, a direção dos apsis da Lua, isto é, o segmento de reta que une o apogeu e o perigeu de sua órbita também possui um movimento de rotação no sentido horário com período de 8,9 anos aproximadamente. Outro exemplo de efeito devido ao campo gravitacional do sol está no período necessário para que a Lua dê uma volta completa ao redor da Terra, este é de 27,32 dias em relação às estrelas fixas, mas devido à perturbação do Sol, ele pode variar em até  $\pm 7$ h. Isto altera o movimento médio da Lua. Também devido ao Sol, a excentricidade da Lua, cujo valor médio é de 0,0549; sofre pequenas variações de período igual a 31,8 dias. Este efeito é chamado eveccção, e foi descoberto por Hiparco há mais de 2000 anos atrás.

Um outro aspecto interessante do movimento da Lua é a chamada libração lunar. O período de revolução da Lua em torno da Terra é igual ao período de rotação em torno do próprio eixo, por isso, ela mantém sempre a mesma face voltada para Terra. Se o eixo Sul-Norte da Lua fosse perpendicular ao plano de sua órbita, veríamos a metade de sua superfície exatamente, contudo, nós vemos, a todo tempo, cerca de 59% de sua face voltada para a Terra por causa da libração lunar, devido, principalmente, a duas coisas:

- 1.) Libração geométrica na latitude; ocorre porque o equador lunar está inclinado de  $6,5^\circ$  em relação ao plano de sua órbita. Na primeira metade do mês, o pólo Norte da Lua está inclinado em direção a Terra, e na outra metade do mês é o pólo Sul que se inclina em nossa direção. Isto nos permite ver um pouco mais além de cada pólo a cada período lunar.
  
- 2.) Vibração geométrica na latitude da órbita; é devida à excentricidade da órbita da Lua. A rotação em torno do seu próprio eixo é uniforme, mas sua velocidade

angular ao centro da órbita não, já que ela se move mais rápido próximo do perigeu e mais lentamente no apogeu. Isto nos permite ver em torno de  $7,75^\circ$  em volta de cada um dos lados da Lua.

Serviram como referências para o desenvolvimento desta Seção: Jeffrey (2000), Bate *et al* (1971) e Roy (1988).

## APÊNDICE B

### SISTEMAS DE COORDENADAS

#### B.1 Introdução

Nosso trabalho requer a investigação de trajetórias e de seus elementos orbitais em relação à Terra, à Lua e ao Sol. Também se fez necessário estudar trajetórias e algumas de suas propriedades no sistema de coordenadas baricêntricas girante, ou sistema sinódico, Terra-Lua, definido no terceiro Capítulo. Por outro lado, as Equações de movimento dos corpos celestes e sondas envolvidas em nossa pesquisa foram escritas no sistema de coordenadas heliocêntricas. Por isso, nas três primeiras seções deste Apêndice, definiremos os sistemas de coordenadas com origens fixas no Sol (heliocêntrico), na Terra (geocêntrico) e Lua (lunicêntrico ou selenocêntrico). Na Seção A.4, descreveremos as relações matemáticas de transformação entre as coordenadas destes três sistemas e o sinódico.

#### B.2 Sistema de Coordenadas Cartesianas Heliocêntricas ( $x_{1P}, y_{1P}, z_{1P}$ )

Este sistema tem origem fixa no centro de massa do Sol. Os eixos  $x_{1P}$  e  $y_{1P}$  definem o plano fundamental do sistema que também coincide com o plano da órbita da Terra, chamado de plano da eclíptica ou, simplesmente, eclíptica. A Figura B.1 ilustra o sistema de coordenadas heliocêntricas. A interseção entre os planos da órbita da Terra (eclíptica) e do equador terrestre define, no primeiro dia de primavera no hemisfério Sul, a direção positiva do eixo- $x_{1P}$  (como veremos na próxima Seção, o plano do equador terrestre está inclinado de  $23,5^\circ$  em relação à eclíptica). Esta é conhecida como direção do equinócio vernal e aponta para constelação de *Aries*, simbolizada pela letra grega,  $\Upsilon$ , sendo comum encontrar em muitas literaturas,  $x_{1P} \equiv \Upsilon$ . No primeiro dia de primavera no hemisfério Sul (outono no hemisfério Norte), em todos os pontos sobre a Terra, o dia e a noite têm a mesma duração. Entretanto, o eixo de rotação da Terra oscila

levemente, mudando de direção ao longo dos anos devido ao movimento de precessão da Terra (eixo Sul-Norte) de período 26000 anos aproximadamente. Devido a ele, o sistema de coordenadas heliocêntricas não pode ser considerado como perfeitamente inercial para um observador da Terra, sendo, em alguns casos, necessário especificar a posição de um corpo baseado na direção do equinócio vernal da época. Apesar disto, vamos admiti-lo como inercial nos intervalos de tempo considerados neste trabalho, pois estes são muito menores que o período do movimento de precessão.

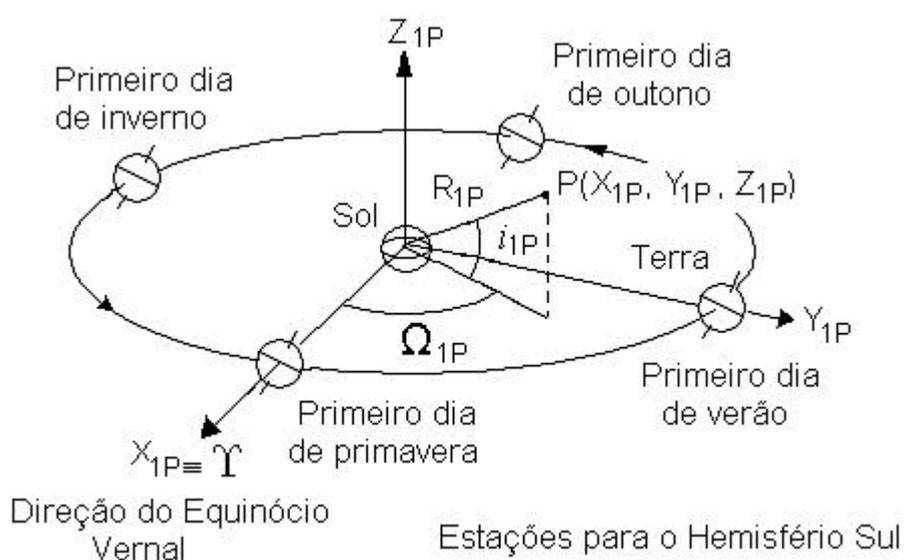


FIGURA B.1 – Sistema de coordenadas Cartesianas heliocêntricas e as estações do ano para o hemisfério Sul (Figura fora de escala).

A posição de um corpo neste sistema fica bem definida quando se conhece suas coordenadas  $x_{1P}$ ,  $y_{1P}$  e  $z_{1P}$ , mas também pode ser facilmente definida a partir de uma distância medida sobre a direção radial Sol-corpo e dois ângulos (Figura B.1). Por ora, chamaremos estes ângulos de ascensão reta,  $\Omega_{1P}$ , medido a partir do eixo- $x_1$  no sentido anti-horário, variando entre 0 e 360°, e inclinação,  $i_{1P}$ , medida a partir do plano fundamental  $x_{1P}x_{2P}$ , também no sentido anti-horário variando entre 0 e 180°. À distância radial chamaremos de  $R_{1P}$ . Na verdade, ao considerarmos estas coordenadas estamos associando um sistema de coordenadas esféricas ao sistema heliocêntrico (exceto pela

variação de  $i_{1P}$ , que em um sistema de coordenadas esféricas convencional varia entre  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ ). As relações matemáticas entre as coordenadas  $(x_{1P}, y_{1P}, z_{1P})$  e  $(R_{1P}, i_{1P}, \Omega_{1P})$  são:

$$x_{1P} = R_{1P} \cos(i_{1P}) \cos(\Omega_{1P}) \quad (\text{B.1})$$

$$y_{1P} = R_{1P} \cos(i_{1P}) \sin(\Omega_{1P}) \quad (\text{B.2})$$

$$z_{1P} = R_{1P} \sin(i_{1P}) \quad (\text{B.3})$$

$$R_{1P}^2 = x_{1P}^2 + y_{1P}^2 + z_{1P}^2 \quad (\text{B.4})$$

Com  $0 = R_{1P} = 4$ ,  $0 = i_{1P} = 180^\circ$  e  $0 = \Omega_{1P} = 360^\circ$ .

### B.3 Sistema de Coordenadas Cartesianas Geocêntricas Equatoriais $(x_{2P}, y_{2P}, z_{2P})$

Este sistema de coordenadas tem sua origem no centro de massa da Terra. O eixo- $x_{2P}$  aponta para direção do equinócio vernal  $\Upsilon$ , e, juntamente com o eixo- $y_{2P}$ , definem o plano do equador terrestre. Este plano, por sua vez, possui uma inclinação,  $e = 23,5^\circ$ , praticamente constante em relação à eclíptica, fato que determina a existência das quatro estações do ano (veja Figura B.1). O eixo- $z_{2P}$  é perpendicular ao plano  $x_1 x_2$  e aponta para o pólo Norte celestial coincidindo com o eixo de rotação da Terra. Entretanto, o sistema geocêntrico equatorial não gira junto com a Terra, ou seja, ele é estático em relação às estrelas fixas. (exceto pela precessão dos equinócios). A Figura B.2 mostra este sistema de coordenadas.

A posição de um corpo no sistema de coordenadas Cartesianas geocêntricas equatorial fica bem definida conhecendo-se os valores de suas coordenadas  $(x_{2P}, y_{2P}, z_{2P})$ , ou, tal como no sistema heliocêntrico, associando um sistema de coordenadas esféricas  $(R_{2P}, i_{2P}, \Omega_{2P})$ . As relações matemáticas entre estas coordenadas são:

$$x_{2P} = R_{2P} \cos(i_{2P}) \cos(\Omega_{2P}) \quad (\text{B.5})$$

$$y_{2P} = R_{2P} \cos(i_{2P}) \text{sen}(\Omega_{2P}) \quad (\text{B.6})$$

$$z_{2P} = R_{2P} \text{sen}(i_{2P}) \quad (\text{B.7})$$

$$R_{2P}^2 = x_{2P}^2 + y_{2P}^2 + z_{2P}^2 \quad (\text{B.8})$$

Com  $0 = R_{2P} = 4$ ,  $0 = i_{2P} = 180^\circ$  e  $0 = \Omega_{2P} = 360^\circ$ .

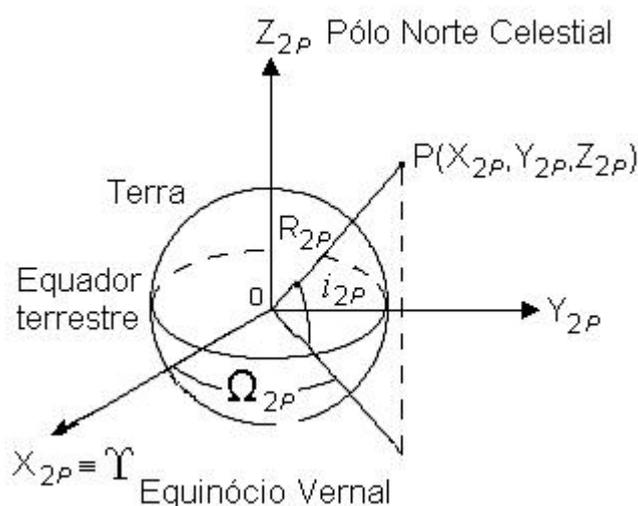


FIGURA B.2 – Sistema de coordenadas Cartesianas Geocêntricas equatoriais.

#### B.4 Sistema de Coordenadas Cartesianas Lunicêntricas ou Selenocêntricas ( $x_{3P}$ , $y_{3P}$ , $z_{3P}$ )

A origem deste sistema é fixa no centro de massa da Lua e o eixo- $x_{3P}$  também coincide com a direção vernal  $\Upsilon$ . Os eixos  $x_{3P}$  e  $y_{3P}$  definem o plano fundamental do sistema e também do equador lunar. O eixo- $z_{3P}$  é perpendicular a este plano coincidindo com o eixo de rotação da Lua. A Figura B.3 ilustra este sistema. O plano de equador da Lua possui uma inclinação de  $6,5^\circ$  em relação ao plano de sua órbita, e este por sua vez tem

uma inclinação constante de  $i_{Lua} = 5,1454^\circ$  em relação à eclíptica. Isto deve ser levado em conta quando se deseja simular trajetórias reais.

Analogamente aos demais sistemas, a posição de um corpo no sistema luncêntrico fica bem definida conhecendo-se os valores de suas coordenadas  $(x_{3P}, y_{3P}, z_{3P})$  ou  $(R_{3P}, i_{3P}, \Omega_{3P})$ . As relações matemáticas entre elas são:

$$x_{3P} = R_{3P} \cos(i_{3P}) \cos(\Omega_{3P}) \quad (\text{B.9})$$

$$y_{3P} = R_{3P} \cos(i_{3P}) \text{sen}(\Omega_{3P}) \quad (\text{B.10})$$

$$z_{3P} = R_{3P} \text{sen}(i_{3P}) \quad (\text{B.11})$$

$$R_{3P}^2 = x_{3P}^2 + y_{3P}^2 + z_{3P}^2 \quad (\text{B.12})$$

Com  $0 = R_{3P} = 4$ ,  $0 = i_{3P} = 180^\circ$  e  $0 = \Omega_{3P} = 360^\circ$ .

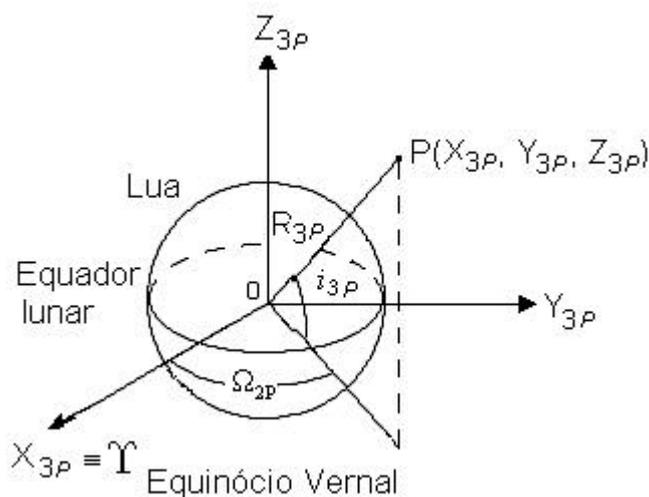


FIGURA B.3 – Sistema de coordenadas Cartesianas luncêntricas equatorial ou Selenocêntricas.

## B.5 Equações de Transformação entre os Sistemas de Coordenadas

Em nossas investigações numéricas, trabalhamos com dois sistemas dinâmicos: os problemas restritos de três corpos Terra-Lua-sonda, PR3C, e problema de quatro corpos completo, P4C. Em alguns casos, foram consideradas as inclinações dos planos equatoriais da Terra e da Lua. Para estabelecer as relações matemáticas do nosso interesse, precisamos levar em conta que as Equações de movimento para qualquer um dos dois sistemas dinâmicos considerados forma escritas no sistema de coordenadas heliocêntricas. Desta forma, as coordenadas da Terra, da Lua e da sonda são fornecidas pelos algoritmos, para um tempo qualquer, no sistema heliocêntrico. Assim, sejam as coordenadas da Terra  $(x_{12}, y_{12}, z_{12})$ , as da Lua  $(x_{13}, y_{13}, z_{13})$  e da sonda  $(x_{14}, y_{14}, z_{14})$  neste sistema, temos:

1.) As coordenadas da Lua no sistema geocêntrico  $(x_{23}, y_{23}, z_{23})$ :

a) Caso plano: considera o PR3C e problema de quatro corpos sem levar em conta a inclinação do equador terrestre,  $e = 23,5^\circ$ , e do plano da órbita da Lua,  $i_{Lua} = 5,1454^\circ$ , ambas em relação à eclíptica,

$$x_{23} = x_{13} - x_{12} \quad (\text{B.13})$$

$$y_{23} = y_{13} - y_{12} \quad (\text{B.14})$$

$$z_{23} = z_{13} - z_{12} \quad (\text{B.15})$$

$$R_{23}^2 = z_{23}^2 + y_{23}^2 + x_{23}^2 \quad (\text{B.16})$$

b) Caso tridimensional: a inclinação da Lua,  $i_{Lua} = 5,1454^\circ$  e  $e = 23,5^\circ$ , ambas em relação à eclíptica, são consideradas. No entanto, as linhas dos periápsis e a nodal da órbita da Lua têm movimentos de rotação com períodos de 5,6 e 18.6

anos, respectivamente (veja Apêndice A). Estes dois movimentos causam variações na inclinação da órbita da Lua em relação ao equador terrestre,  $i_{23}$ , tal que:  $18,36^\circ = i_{23} = 28,64^\circ$ . Este fato, não chega a influenciar nossas investigações, pois consideramos tempos bem menores que os períodos destes movimentos. As Equações de transformação para o sistema geocêntrico são,

$$x_{23} = x_{13} - x_{12} \quad (\text{B.17})$$

$$y_{23} = (y_{13} - y_{12}) \cos(i_{23}) - (z_{13} - z_{12}) \sin(i_{23}) \quad (\text{B.18})$$

$$z_{23} = (y_{13} - y_{12}) \sin(i_{23}) + (z_{13} - z_{12}) \cos(i_{23}) \quad (\text{B.19})$$

2.) Coordenadas da sonda no sistema geocêntrico ( $x_{24}, y_{24}, z_{24}$ ):

a) Caso plano, considera as órbitas da Terra e da Lua co-planares,

$$x_{24} = x_{14} - x_{12} \quad (\text{B.20})$$

$$y_{24} = y_{14} - y_{12} \quad (\text{B.21})$$

$$z_{24} = z_{14} - z_{12} \quad (\text{B.22})$$

$$R_{24}^2 = z_{24}^2 + y_{24}^2 + x_{24}^2 \quad (\text{B.23})$$

Obs.: Aqui,  $z_{24}$  não tem necessariamente que ser zero.

b) Caso tridimensional, considera a inclinação do equador terrestre em relação à eclíptica,  $\mathbf{e} = 23,5^\circ$ ,

$$x_{24} = x_{14} - x_{12} \quad (\text{B.24})$$

$$y_{24} = (y_{14} - y_{12})\cos(\mathbf{e}) - (z_{14} - z_{12})\text{sen}(\mathbf{e}) \quad (\text{B.25})$$

$$z_{24} = (y_{14} - y_{12})\text{sen}(\mathbf{e}) + (z_{14} - z_{12})\cos(\mathbf{e}) \quad (\text{B.26})$$

3.) As coordenadas da sonda no sistema lunecêntrico ou selenocêntrico ( $x_{34}$ ,  $y_{34}$ ,  $z_{34}$ ):

a) Caso plano:

$$x_{34} = x_{14} - x_{13} \quad (\text{B.27})$$

$$y_{34} = y_{14} - y_{13} \quad (\text{B.28})$$

$$z_{34} = z_{14} - z_{13} \quad (\text{B.29})$$

$$R_{34}^2 = z_{34}^2 + y_{34}^2 + x_{34}^2 \quad (\text{B.30})$$

b) Caso tridimensional, a inclinação da Lua em relação à eclíptica e a inclinação de  $6,5^\circ$  do equador lunar em relação ao plano da sua órbita são levadas em conta,

$$x_{34} = x_{14} - x_{13} \quad (\text{B.31})$$

$$y_{34} = (y_{14} - y_{13})\cos(i_{Lua} + 6,5^\circ) - (z_{14} - z_{13})\text{sen}(i_{Lua} + 6,5^\circ) \quad (\text{B.32})$$

$$z_{34} = (y_{14} - y_{13})\text{sen}(i_{Lua} + 6,5^\circ) + (z_{14} - z_{13})\cos(i_{Lua} + 6,5^\circ) \quad (\text{B.33})$$

Se desconsiderarmos a inclinação do equador lunar, basta retirar dos argumentos das funções seno e co-seno o termo  $6,5^\circ$  das Equações acima.

4.) Coordenadas da sonda no sistema baricêntrico girante ou sinódico  $(x_{b4}, y_{b4}, z_{b4})$ :

a) Caso plano,

A partir das coordenadas da sonda em relação à Terra,

$$x_{b4} = (x_{24} + \mathbf{m}_{Lua}) \cos(nt) + y_{24} \text{sen}(nt) \quad (\text{B.34})$$

$$y_{b4} = (x_{24} + \mathbf{m}_{Lua}) \text{sen}(nt) - y_{24} \cos(nt) \quad (\text{B.35})$$

$$z_{b4} = z_{24} = 0 \quad (\text{B.36})$$

$$R_{b4} = x_{b4}^2 + y_{b4}^2 \quad (\text{B.37})$$

A partir das coordenadas da sonda em relação à Lua:

$$x_{b4} = x_{34} \cos(nt) + y_{34} \text{sen}(nt) + \mathbf{m}_{Terra} \quad (\text{B.38})$$

$$y_{b4} = x_{34} \text{sen}(nt) - y_{34} \cos(nt) \quad (\text{B.39})$$

$$z_{b4} = z_{34} = 0 \quad (\text{B.40})$$

b) Caso tridimensional,

A partir das coordenadas da sonda em relação à Terra,

$$x_{b4} = [(x_{24} + \mathbf{m}_{Lua}) \cos(nt) + y_{24} \text{sen}(nt)] \cos(\mathbf{a}) + z_{24} \text{sen}(\mathbf{a}) \quad (\text{B.41})$$

$$y_{b4} = [(x_{24} + \mathbf{m}_{Lua}) \text{sen}(nt) - y_{24} \cos(nt)] \cos(\mathbf{b}) - z_{24} \text{sen}(\mathbf{b}) \quad (\text{B.42})$$

$$z_{b4} = -x_{24} \text{sen}(i_{Lua} - 6,5^\circ) + z_{24} \text{sen}(i_{Lua} - 6,5^\circ) \quad (\text{B.43})$$

$$R_{b4} = x_{b4}^2 + y_{b4}^2 + z_{b4}^2 \quad (\text{B.44})$$

A partir das coordenadas da sonda em relação à Lua,

$$x_{b4} = [x_{34} \cos(nt) + y_{34} \text{sen}(nt)] \cos(\mathbf{a}) + z_{234} \text{sen}(\mathbf{a}) + \mathbf{m}_{Terra} \quad (\text{B.45})$$

$$y_{b4} = [-x_{34} \text{sen}(nt) + y_{24} \cos(nt)] \cos(\mathbf{b}) + z_{34} \text{sen}(\mathbf{b}) \quad (\text{B.46})$$

$$z_{b4} = -x_{34} \text{sen}(i_{Lua} - 6,5^\circ) + z_{34} \text{sen}(i_{Lua} - 6,5^\circ) \quad (\text{B.47})$$

Com  $\alpha = i_{Lua} \cos(nt)$ ,  $\mathbf{b} = i_{Lua} \text{sen}(nt)$ ,  $n$  é o movimento médio da órbita da Lua, definido por  $n = T_{Lua} / 2\pi$  e  $t$  é o tempo e  $T_{Lua}$  é o período da Lua. Estes ângulos representam as variações das inclinações dos eixos  $x_b$  e  $y_b$  do sistema sinódico em relação à eclíptica.

As velocidades da sonda nos sistemas geocêntrico, lunicêntrico e sinódico, podem ser facilmente obtidas derivando as expressões anteriores.

## APÊNDICE C

### TRANSFERÊNCIAS TERRA-LUA CONVENCIONAIS

#### C.1 Introdução

A meta deste Apêndice é mostrar dois métodos para transferências Terra-Lua e dois métodos envolvendo mudanças de inclinação convencionais, todos baseados na dinâmica do problema de dois corpos. Estes métodos servirão como base de comparação ao longo de todo este trabalho, o que justifica a discussão que ora começamos. No que diz respeito às transferências Terra-Lua, o primeiro método chamamos de transferência via elipse de energia mínima. Este método deriva de uma manobra de transferência entre duas órbitas circulares concêntricas e co-planares conhecida como transferência de Hohmann. O segundo método, chamado de *Patched-conics* (“remendo de cônicas”), consiste em lançar um veículo em uma cônica geocêntrica de transferência que tangencia a esfera de influência da Lua. A partir daí, o veículo passa a se movimentar em uma cônica selenocêntrica sob ação “exclusiva” do campo gravitacional da Lua, até ser inserido em órbita lunar. Com respeito aos métodos de transferências entre órbitas de diferentes inclinações, um deles envolve mudança direta, enquanto o outro, mais econômico, também deriva da transferência de Hohmann.

Este Apêndice está organizado da seguinte maneira: na Seção C.2, descrevemos a manobra de transferência de Hohmann geral, pois ela é fundamental para entendermos dois dos quatro métodos abordados ao longo deste Apêndice. Na Seção C.3, discutiremos a transferência Terra-Lua via elipse de energia mínima. Na Seção C.4, mostraremos o método *Patched-conics* e alguns resultados numéricos para encontrar trajetórias ótimas entre a Terra e a Lua. Já na Seção C.5, estaremos mostrando a manobra que envolve transferências entre órbitas de diferentes altitudes e inclinações.

## C.2 Transferência de Hohmann

Consiste em uma manobra para efetuar uma transferência de um veículo espacial entre duas órbitas circulares, concêntricas e co-planares através de uma elipse de transferência que tangencia estas duas órbitas. A elipse tangencia a órbita de menor raio (órbita inicial) externamente, e a órbita de maior raio (órbita final) internamente. Com esta manobra, totalmente baseada na dinâmica do problema de dois corpos, é possível transferir, por exemplo, um satélite posto em uma órbita de estacionamento de baixa altitude por um veículo lançador para uma órbita de grande altitude na qual em deverá executar sua missão.

Esta manobra foi concebida pelo engenheiro alemão Walter Hohmann (1880-1945), em 1925, na obra *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*, em que tratou do problema de vôos interplanetários lançando os conceitos básicos da Astronáutica do século XX (Mourão, 1995). Por isso, ela é conhecida como transferência de Hohmann.

Para calcular o  $\Delta V_{Total}$  requerido para uma transferência de Hohmann geral, consideremos duas órbitas circulares de raios  $R_1$  e  $R_2$ , com  $R_2 > R_1$  e uma elipse de transferência tangenciando a órbita de raio  $R_1$  externamente, e a órbita de raio  $R_2$  internamente, como mostra a Figura C.1.

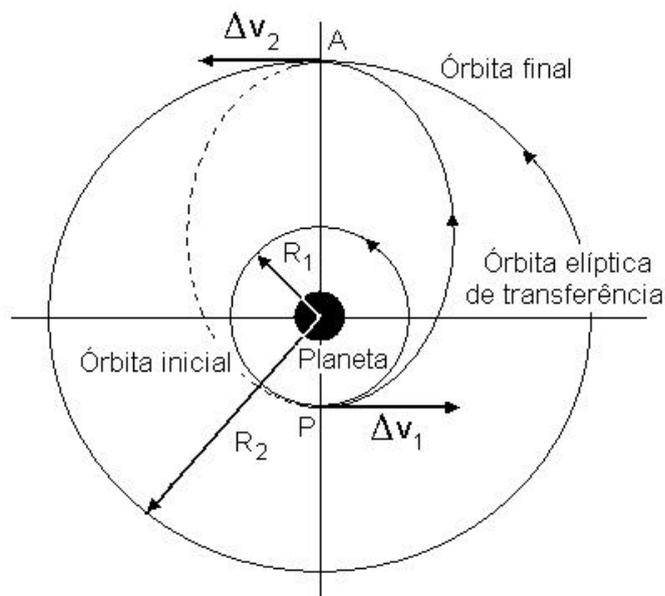


FIGURA C.1 – Geometria básica da transferência de Hohmann.

A velocidade do veículo na órbita circular de raio  $R_1$  é dada por:

$$V_{C1} = \sqrt{\frac{GM_{Terra}}{R_1}} \quad (C.1)$$

Onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2$  é a constante de gravitação universal,  $M_{Terra}$  é a massa da Terra. A velocidade do veículo quando estiver na órbita circular de raio  $R_2$  é:

$$V_{C2} = \sqrt{\frac{GM_{Terra}}{R_2}} \quad (C.2)$$

A elipse de transferência tem semi-eixo maior,  $a_T$ , dado por:

$$a_T = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (C.3)$$

A energia por unidade de massa desta elipse, por sua vez, vale:

$$\mathbf{x} = -\frac{GM_{Terra}}{2a_T} = -\frac{GM_{Terra}}{R_1 + R_2} \quad (C.4)$$

De acordo com a Figura C.1, a elipse de transferência tem seu pericentro no ponto 1, e apocentro no ponto 2. As velocidades de um veículo nestes pontos, quando na elipse de transferência podem ser obtidas a partir da Equação vis-viva. Assim, para o pericentro, temos:

$$V_{E1} = \sqrt{2 \left( \frac{GM_{Terra}}{R_1} + \mathbf{x} \right)}, \quad (C.5)$$

e para o apocentro:

$$V_{E2} = \sqrt{2 \left( \frac{GM_{Terra}}{R_2} + \mathbf{x} \right)} \quad (C.6)$$

Se o objetivo for transferir o veículo da órbita inicial de raio  $R_1$  para a órbita final de raio  $R_2$ , então, a manobra tem início quando um  $\Delta V_1$  é aplicado sobre um veículo que esteja na órbita interna, exatamente quando ele atinge o ponto 1 da Figura C.1, que corresponde ao pericentro da elipse (como a órbita inicial é circular, o ponto 1 pode ser qualquer um sobre a trajetória), a fim de aumentar a sua velocidade colocando-o na elipse de transferência. Para isto, a magnitude do  $\Delta V_1$  associado primeiro impulso aplicado ao veículo no mesmo sentido de seu movimento é:

$$\Delta V_1 = V_{E1} - V_{C1} \quad (C.7)$$

Para completar a manobra, no ponto 2, Figura C.1, que corresponde ao apocentro da elipse de transferência, aplica-se ao veículo um  $\Delta V_2$  a fim de aumentar sua velocidade e colocá-lo na órbita circular final de raio  $R_2$ . Note que o ponto 1 escolhido para o perigeu pode ser qualquer um sobre a órbita inicial, mas uma vez escolhido, o ponto 2 fica determinado automaticamente. A magnitude do  $\Delta V_2$  associado ao segundo impulso aplicado ao veículo, também no mesmo sentido de seu movimento, é:

$$\Delta V_2 = V_{C2} - V_{E2} \quad (C.8)$$

$\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  são suficientes para realizar completamente a manobra. Assim, o  $\Delta V_{Total}$  requerido para a transferência vale:

$$\Delta V_{Total} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (C.9)$$

Se o objetivo, no entanto, for transferir o veículo da órbita de raio  $R_2$  para a órbita de raio  $R_1$  as magnitudes dos  $\Delta V$ 's requeridos são as mesmas, isto é, a manobra de ida tem o mesmo custo da manobra de volta, contudo, na volta,  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  devem ser aplicados no sentido oposto ao do movimento do veículo.

O tempo de voo da transferência entre os pontos 1 e 2, ou 2 e 1 é simplesmente a metade do período orbital da elipse de transferência.

$$T_v = P \sqrt{\frac{a_T^3}{GM_{Terra}}} \quad (C.10)$$

Enquanto a transferência de Hohmann apresenta o menor  $\Delta V_{Total}$ , ela possui o maior tempo de vôo que qualquer outra manobra de transferência possível entre duas órbitas circulares, co-planares e concêntricas.

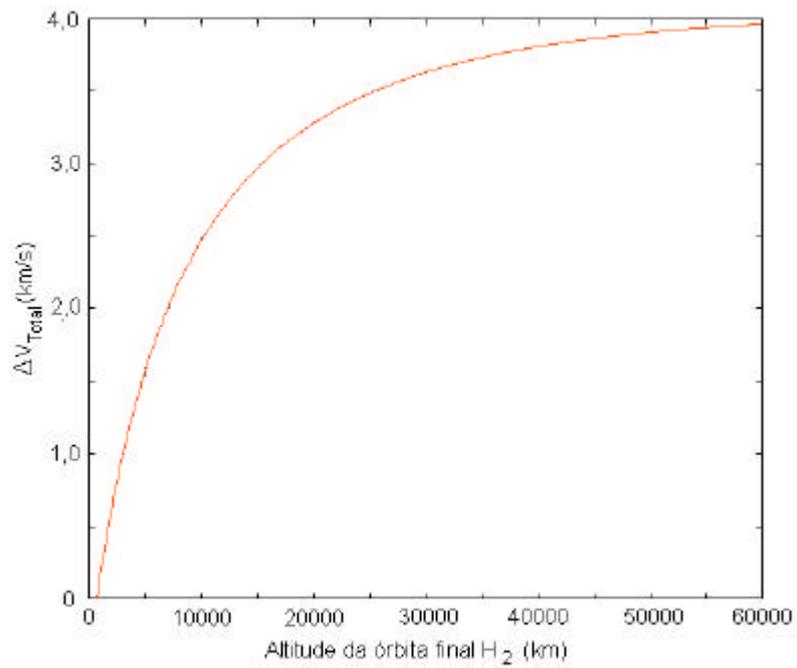
A seguir, vamos mostrar através de dois gráficos e uma Tabela os  $\Delta V$ 's e o tempo de vôo para uma transferência de Hohmann cuja órbita inicial tem altitude  $H_1 = 240\text{km}$  ( $R_1 = 6610\text{km}$ ) e com a altitude da órbita final,  $H_2$ , variando entre 300 e 60000km ( $6670 = R_2 = 72370\text{km}$ ). É interessante notar que o  $\Delta V_{Total}$  para uma transferência via Hohmann até uma órbita geossíncrona,  $H_2 = 35866,8\text{km}$  ( $R_2 = 42236\text{km}$ ) é da mesma ordem do  $\Delta V_{Total}$  requerido para uma transferência Terra-Lua, como pode ser observado comparando a Tabela C.1 com as Tabelas C.2 e C.3 das Seções C.3 e C.4 respectivamente.

TABELA C.1 -  $\Delta V$ 's e o tempo de vôo para algumas transferências via Hohmann partindo de uma órbita circular inicial de  $H_1 = 240\text{km}$ .

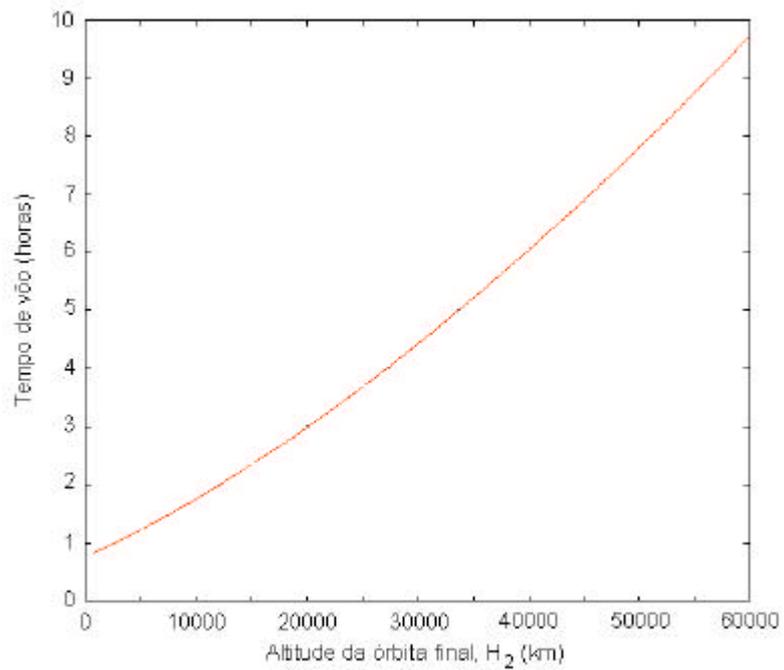
$H_2$ (km)	$\Delta V_1$ (km/s)	$\Delta V_2$ (km/s)	$\Delta V_{Total}$ (km/s)	$T_v$ (h)
700	0,129	0,127	0,257	0,728
1000	0,208	0,203	0,411	0,808
5000	0,967	0,844	1,811	1,178
18000	1,974	1,302	3,377	2,665
35866	2,446	1,474	3,920	5,277
60000	2,707	1,407	4,414	9,636

### C.3 Transferência Via Elipse de Energia Mínima

Esta manobra é derivada da transferência de Hohmann descrita na Seção anterior. Ela se divide em duas partes, na primeira, o campo gravitacional da Lua é simplesmente negligenciado, e, na segunda, o campo gravitacional da Terra é negligenciado. Desta forma, é possível estabelecer uma elipse de energia mínima que tangencia uma órbita de



(a)



(b)

FIGURA C.2 – (a)  $\Delta V_{Total} \times H_2$  e (b)  $T_v \times H_2$ . Ambas para uma transferência de Hohmann cuja órbita inicial tem altitude  $H_1 = 240\text{km}$ .

estacionamento terrestre de raio  $R_{C1}$  e outra lunar de raio  $R_{C2}$ . A Figura C.3 mostra esta elipse, e como pode ser observado nesta Figura, seu semi-eixo maior vale:

$$a_{\min} = \frac{R_{C1} + (D - R_{C2})}{2} \quad (\text{C.11})$$

Logo, a energia por unidade de massa da trajetória, é:

$$\mathbf{x} = -\frac{GM_{Terra}}{R_{C1} + (D - R_{C2})} \quad (\text{C.12})$$

Onde  $D = 384400\text{km}$ , é a distância média entre a Terra e a Lua.

A manobra tem início quando um  $\Delta V_1$  é aplicado ao veículo no ponto 1 (Figura C.3) para inseri-lo na elipse de transferência de energia mínima,  $\Delta V_1$  é calculado da mesma forma que na transferência de Hohmann convencional, isto é, primeiro calcula-se a velocidade da órbita de estacionamento circular terrestre,  $V_{C1}$ , por:

$$V_{C1} = \sqrt{\frac{GM_{Terra}}{R_{C1}}} \quad (\text{C.13})$$

Em seguida, as velocidades no pericentro,  $V_{E1}$ , por:

$$V_{E1} = \sqrt{2\left(\frac{GM_{Terra}}{R_{C1}} + \mathbf{x}\right)}, \quad (\text{C.14})$$

assim, podemos calcular  $\Delta V_1$ , por:

$$\Delta V_1 = V_{E1} - V_{C1} \quad (\text{C.15})$$

A transferência é concluída com a aplicação de um  $\Delta V_2$  no ponto 2 (Figura C.3) que corresponde ao apocentro da elipse de transferência. Para calcular o  $\Delta V_2$  devemos levar

em conta que nosso objetivo é colocar o veículo em órbita da Lua, e não em órbita da Terra com Raio  $D - R_{C2}$ . Esta é a principal diferença entre a transferência via elipse de energia mínima e a manobra de Hohmann. O primeiro passo deste cálculo consiste em encontrar a velocidade do veículo no apocentro da elipse de transferência,  $V_{E2}$  (Figura C.3), através da expressão:

$$V_{E2} = \sqrt{2 \left[ \frac{GM_{Terra}}{R_{C1} + (D - R_{C2})} \right] + \mathbf{x}} \quad (C.16)$$

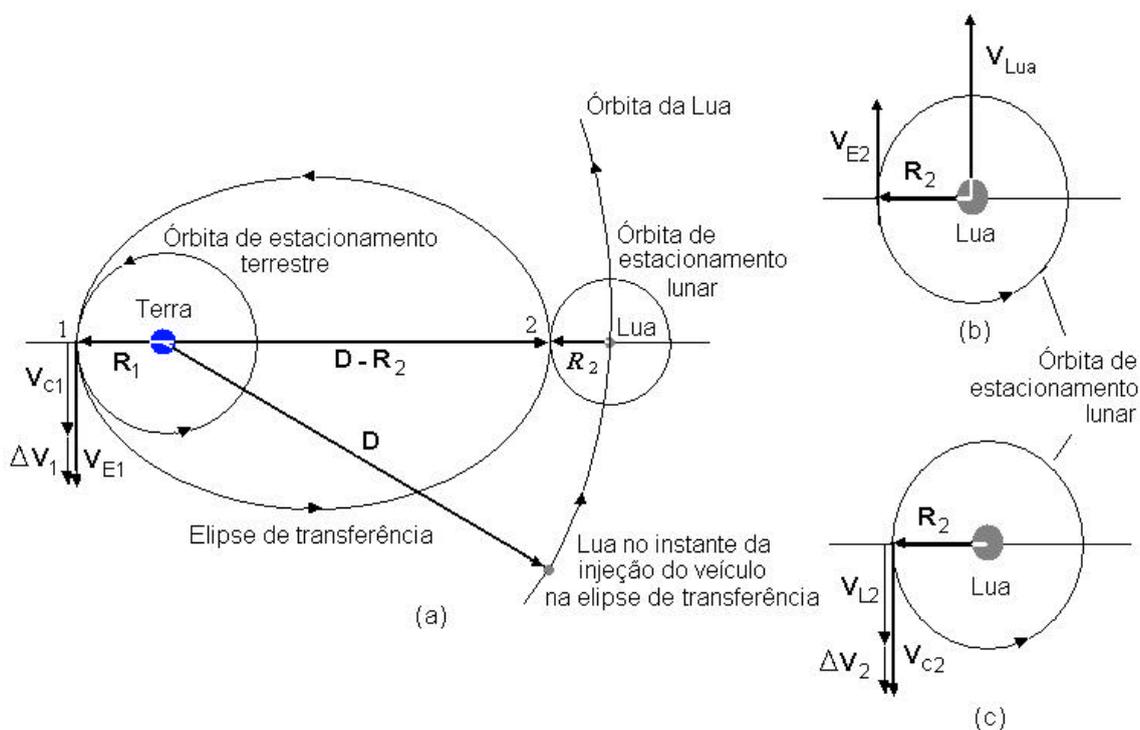


FIGURA C.3 – (a) Geometria básica da transferência Terra-Lua via elipse de energia mínima e as respectivas posições da Lua quando  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  são aplicados. (b) velocidade do veículo no apocentro,  $V_{E2}$ , e da Lua,  $V_L$ , ambas em relação à Terra e (c) velocidade do veículo no apocentro,  $V_{L2}$ , e  $\Delta V_2$ , ambos em relação à Lua.

Notemos que  $V_{E2}$  é medida em relação à Terra. Se quisermos seu valor em relação à Lua devemos subtrair de  $V_{E2}$  a velocidade da Lua em relação à Terra,  $V_{Lua}$ , ou seja, a velocidade do veículo em relação à Lua,  $V_{L2}$  (Figura C.3), em módulo, vale:

$$V_{L2} = |V_{E2} - V_{Lua}| \quad (C.17)$$

Onde  $V_{Lua} = 1,023\text{km/s}$  é a velocidade da Lua em torno da Terra (supondo que ela esteja em órbita circular). Aqui, encerra-se a primeira parte da manobra na qual o campo gravitacional da Lua foi negligenciado. Para concluirmos o cálculo, precisamos encontrar a velocidade da órbita circular lunar de raio  $R_{C2}$ , dada por:

$$V_{C2} = \sqrt{\frac{GM_{Lua}}{R_{C2}}} \quad (C.18)$$

Onde  $M_{Lua} = 7,3483 \times 10^{22}\text{kg}$  é a massa da Lua. Assim, temos:

$$\Delta V_2 = |V_{L2} - V_{C2}| \quad (C.19)$$

Contudo,  $\Delta V_2$ , em relação à Terra, deve ser aplicado no sentido oposto ao movimento do veículo para freá-lo e, então, inseri-lo em órbita ao redor da Lua, em outras palavras,  $\Delta V_2$  deverá ser aplicado no mesmo sentido de sua velocidade em relação à Lua,  $V_{L2}$ , quando atingir o apocentro da elipse de transferência (Figura C.3). A magnitude do  $\Delta V_{Total}$  é, mais uma vez:

$$\Delta V_{Total} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (C.20)$$

O tempo de vôo,  $T_v$ , entre os pontos 1 e 2 (Figura C.3) corresponde a meio período orbital da elipse de transferência, isto é:

$$T_v = \mathbf{p} \sqrt{\frac{a_{\min}^3}{GM_{Terra}}} \quad (C.21)$$

Embora tenhamos descrito a transferência entre os pontos 1 e 2, ou seja, da Terra para a Lua, a transferência Lua-Terra é calculada da mesma forma, e os  $\Delta V$ 's têm os mesmos valores. Porém, tal como na manobra de Hohmann, os sentidos de  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  para a transferência Lua-Terra devem ser opostos aos aplicados na transferência Terra-Lua.

Nesta manobra, é importante encontrar o deslocamento angular da Lua,  $f_{Lua}$ , durante a transferência entre os pontos 1 e 2. O valor de  $f_{Lua}$  permite determinar qual a posição inicial da Lua no instante em que  $\Delta V_1$  for aplicado. Este deslocamento é dado por:

$$f_{Lua} = \frac{T_v V_{Lua}}{D} \quad (C.22)$$

A Figura C.4.a mostra o diagrama  $\Delta V_{Total}$  versus a altitude da órbita de estacionamento terrestre circular,  $H_1$ , para  $240 = H_1 = 60000\text{km}$  para altitude da órbita de estacionamento terrestre,  $H_2$  fixo e igual a  $100\text{km}$ . A Figura C.4.b mostra o tempo de vôo,  $T_v$ , versus  $H_1$  para o mesmo intervalo.

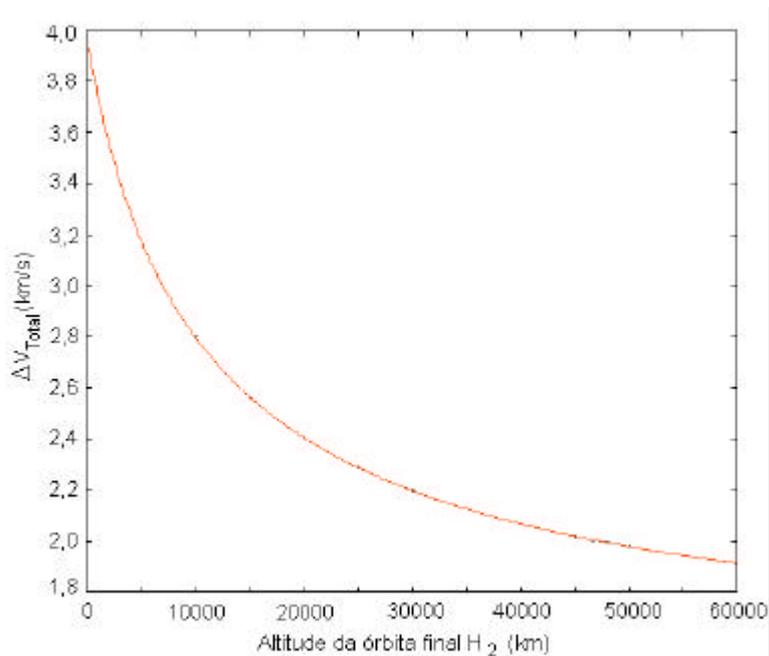
Como podemos ver, todos os cálculos efetuados para obter o  $\Delta V_{Total}$  requerido para a transferência via elipse de energia mínima entre a Terra e a Lua levaram em conta a dinâmica de dois corpos Terra-veículo e Lua-veículo. Mas em uma missão real, necessariamente, devem ser considerados os campos gravitacionais da Terra, da Lua e do Sol, além de perturbações como o achatamento terrestre e a pressão de radiação solar sobre o veículo durante toda a manobra. Por isso, uma missão de transferência Terra-Lua só pode ser calculada através de integração numérica das Equações de movimento que levem em conta todos estes fatores. Em adição, dado a complexidade do movimento da Lua (veja Apêndice A), uma missão real deve ser calculada dia a dia, hora a hora. Baseados nestes fatos, podemos concluir sem muitos esforços que os valores de  $\Delta V_2$  e  $\Delta V_{Total}$  são apenas estimativas. Vejamos então, quão boas são estas estimativas.

Para fazer esta averiguação, consideremos a transferência entre uma órbita de estacionamento terrestre circular de altitude  $H_1 = H_T = 240\text{km}$ , e uma órbita de estácio-

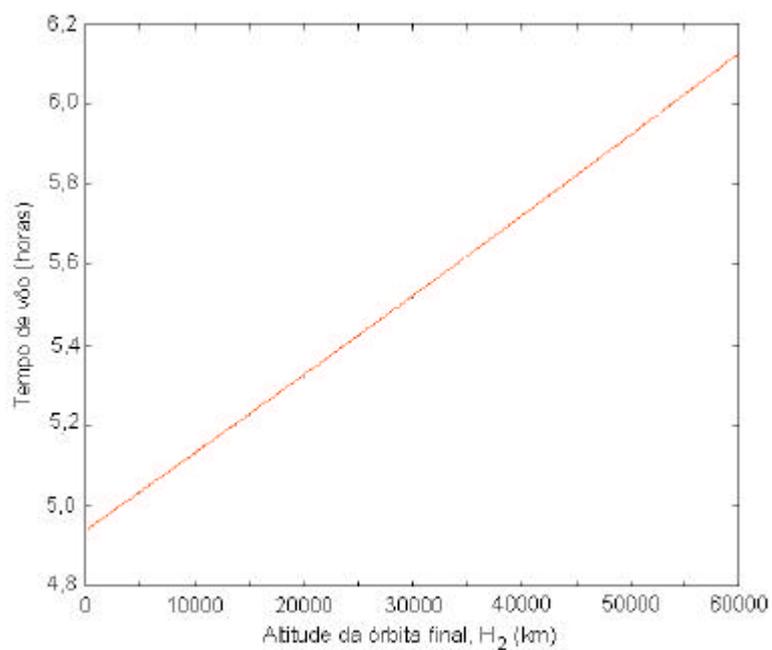
namento lunar, também circular de altitude  $H_2 = H_L = 42,5\text{km}$  (estes valores de  $H_T$  e  $H_L$  são os mesmos da terceira órbita das Tabelas 4.3 e 5.1 dos capítulos 4 e 5 respectivamente). O procedimento descrito nesta Seção leva-nos aos seguintes valores:

- 1.)  $V_{C1} = 7,764\text{km/s}$ ;
- 2.)  $a_{\min} = 195483,75\text{km}$ ;
- 3.)  $\mathbf{x} = -1019212,95\text{J/kg}$ ;
- 4.)  $V_{E1} = 10,887\text{km/s}$ ;
- 5.)  $\Delta V_1 = 3,123\text{km/s}$ ;
- 6.) Velocidade no apocentro em relação à Terra:  $V_{E2} = 0,185\text{km/s}$ ;
- 7.) Velocidade no apocentro em relação à Lua:  $V_{L2} = 0,835\text{km/s}$ ;
- 8.) Velocidade da órbita circular lunar:  $V_{C2} = 1,660\text{km/s}$ ;
- 9.)  $\Delta V_2 = 0,826\text{km/s}$ ;
- 10.)  $\Delta V_{Total} = 3,123\text{km/s}$ ;
- 11.) Tempo de vôo:  $T_v = 4,95$  dias;
- 12.) Deslocamento angular da Lua:  $f_{Lua} = 65,16^\circ$ .

Agora, precisamos verificar se os valores dos  $\Delta V$ 's calculados são suficientes para executar a manobra quando sistemas dinâmicos mais complexos e realistas que o problema de dois corpos são considerados, como o PR3C, por exemplo. Para tal, vamos efetuar um experimento numérico considerando este sistema dinâmico. Os resultados são mostrados nas Figuras C.5. Na Figura C.5.a, temos a trajetória do veículo e da Lua vistas no sistema geocêntrico para 10 dias e na Figura C.5.b, temos a variação da distância radial Lua-veículo. Como podemos observar, os  $\Delta V$ 's calculados para a transferência via elipse de energia mínima não são suficientes para concluir a manobra proposta, uma vez que a trajetória do veículo passa a mais de 30000km da órbita lunar desejada quando consideramos um sistema dinâmico mais complexo. A correção desde desvio, pode aumentar o custo da manobra entre 5 e 10% (Prado 2001).

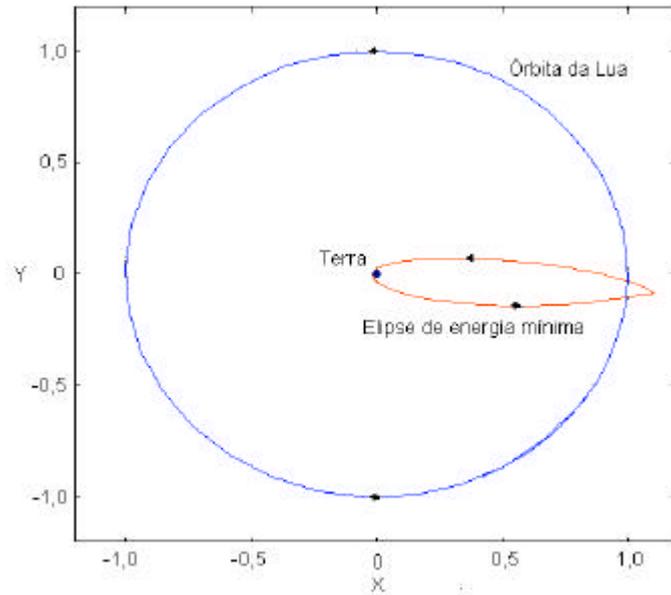


(a)

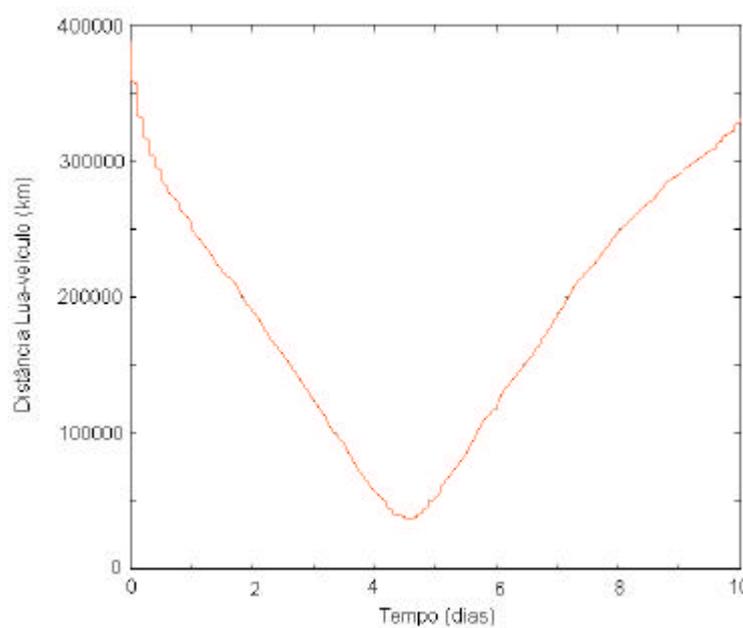


(b)

FIGURA C.4 – (a)  $\Delta V_{Total} \times H_2$  e (b)  $T_v \times H_2$ , para uma transferência via elipse de energia mínima, partindo de uma órbita de estacionamento terrestre de altitude  $H_1 = 240$ km.



(a)



(b)

FIGURA C.5 – (a) Trajetória obtida para o problema de três corpos a partir das condições iniciais calculadas para uma transferência via elipse de energia mínima partindo de uma órbita terrestre com altitude  $H_1 = 240\text{km}$  e chegando a uma órbita lunar de altitude  $H_2 = 100\text{km}$ , vista no sistema geocêntrico. (b) variação da distância Lua-veículo ao longo de 10,2 dias, quando a trajetória colide com a Terra.

#### C.4 Método Patched-conics

Tal como na transferência via elipse de energia mínima, o método de *Patched-conics* divide-se em duas partes e é totalmente descrito pela dinâmica de dois corpos. Na primeira, chamada de parte geocêntrica, considera-se o problema Terra-veículo, e na segunda parte, chamada de selenocêntrica, o problema Lua-veículo. A idéia básica consiste em considerar o veículo sob ação apenas da gravidade terrestre do momento em que ele é lançado na trajetória de transferência, uma cônica, até o momento em que ele alcança a esfera de influência da Lua, cujo raio é da ordem de 66000km. A partir deste instante, considera-se que o veículo está apenas sob a ação do campo gravitacional da Lua. A transição do movimento geocêntrico para o selenocêntrico ocorre naturalmente ao longo de um fino arco da trajetória do veículo quando ele está na região onde os campos gravitacionais da Terra e da Lua se anulam. Isto ocorre quando a trajetória do veículo tangencia ou intercepta a esfera de influência lunar. A Figura C.6 mostra a geometria básica da transferência *Patched-conics*. Nesta Figura, podemos observar a cônica geocêntrica de transferência, uma elipse, tangente à órbita de estacionamento terrestre e à esfera de influência lunar. A princípio, a cônica geocêntrica de transferência pode ser uma hipérbole ou uma parábola, mas geralmente, elipses requerem menores  $\Delta V$ 's para a manobra. Também podemos observar na Figura C.6, a parte selenocêntrica da manobra, com o veículo se movendo dentro da esfera de influência da Lua.

A transferência tem início quando no ponto P (Figura C.6) aplica-se ao veículo um  $\Delta V_1$  para injetá-lo na cônica geocêntrica. A partir do ponto em que esta cônica toca ou intercepta a esfera de influência lunar, ponto I, admite-se que o veículo passe a se movimentar apenas sob a influência da gravidade lunar. Quando ele atinge o periselênio/periluna da trajetória selenocêntrica, ponto M, um  $\Delta V_2$  deve ser aplicado para concluir a manobra. Se a altitude do periselênio da trajetória selenocêntrica for igual à altitude da órbita final desejada, então,  $\Delta V_2$  deverá ser calculado para inserir a sonda em órbita circular ou elíptica. Neste último caso, o ponto M poderá ser o pericentro ou apocentro da órbita lunar final. Porém se a altitude do periselênio for maior do que a da órbita lunar desejada,  $\Delta V_2$  poderá corresponde ao primeiro impulso de uma manobra de transferência entre a trajetória selenocêntrica e a órbita lunar final. Tal manobra irá

requer pelo menos mais um impulso e obedecer às regras da transferência de Hohmann. Contudo, esta é apenas uma alternativa, pois o método *Patched-conics* consiste em um procedimento iterativo que procura as condições iniciais adequadas que levam o veículo a atingir o periselênio da trajetória selenocêntrica igual à altitude da órbita lunar desejada, como veremos a seguir.

O algoritmo que calcula os  $\Delta V$ 's necessários para a manobra e o tempo de vôo que mostraremos aqui segue o descrito por Bate *et al* (1971).

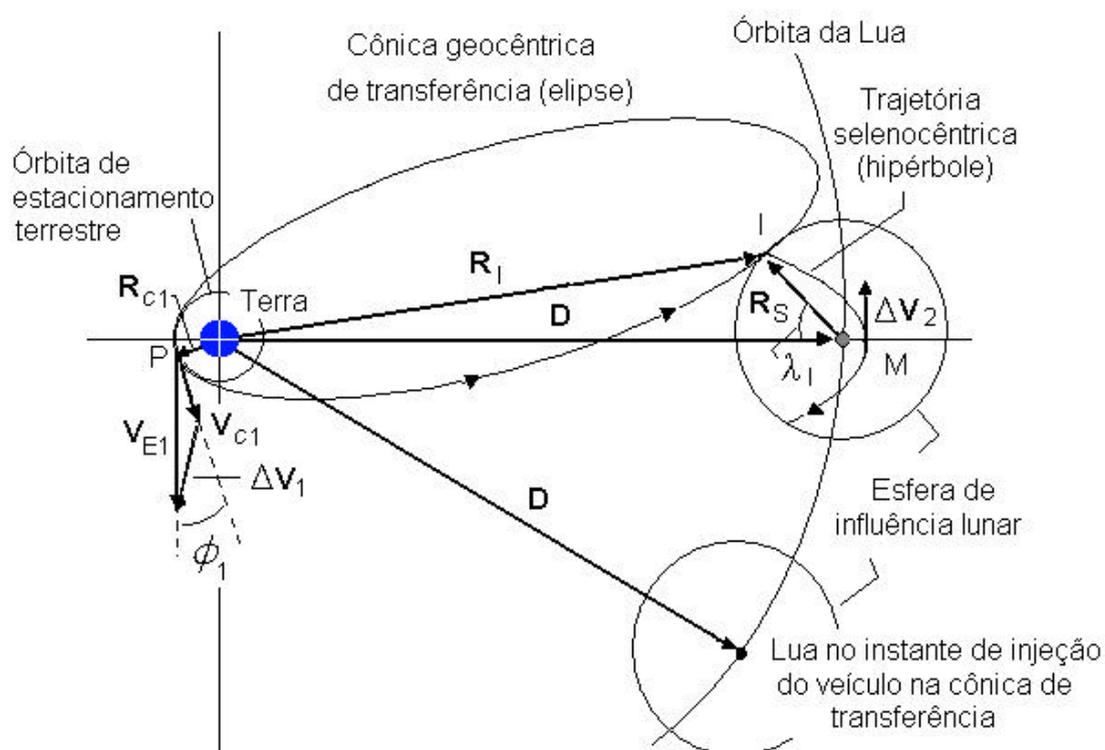


FIGURA C.6 – Geometria básica da transferência Terra-Lua pelo método *Patched-conics*, mostrando as partes geocêntrica e selenocêntrica.

**Parte geométrica:**

A órbita de estacionamento terrestre, por hipótese circular, define duas quantidades: o seu raio  $R_{C1}$ , e sua velocidade,  $V_{C1}$ , dados por:

$$R_{C1} = R_{Terra} + H_1 \tag{C.23}$$

$$V_{C1} = \sqrt{\frac{GM_{Terra}}{R_{C1}}} \quad (C.24)$$

Onde  $R_{Terra} = 6370\text{km}$  é o raio médio da Terra e  $H_1$  a altitude da órbita terrestre de estacionamento, a órbita de partida. Sobre esta se escolhe um ponto, P, onde  $\Delta V_1$  será aplicado, definindo-se assim mais duas quantidades,  $f_1$  e  $\gamma_1$ ; sendo  $f_1$  o ângulo entre a direção do vetor posição do veículo no ponto P,  $R_{C1}$ , e a direção perpendicular a ele neste ponto.  $\gamma_1$  é o ângulo entre  $R_{C1}$  em P e a direção radial Terra-Lua no instante de aplicação de  $\Delta V_1$ , é chamado de ângulo de partida.

Há uma grande dificuldade em selecionar estas quatro quantidades iniciais de maneira que elas sejam completamente independentes, pois mesmo as conhecendo, a determinação do ponto em que a trajetória geocêntrica intercepta a esfera de influência lunar envolve um procedimento iterativo no qual o tempo de vôo é calculado a cada passo da iteração. Esta dificuldade pode ser contornada selecionando três das condições iniciais, por exemplo,  $R_{C1}$ ,  $V_{E1}$  e  $f_1$  e uma de chegada ( $V_{E1}$  é a velocidade do perigeu da elipse geocêntrica, ponto P da Figura C.6). Particularmente, uma boa escolha, para estas quatro quantidades é:  $R_{C1}$ ,  $V_{E1}$ ,  $f_1$  e  $I_I$ , onde  $I_I$  é o ângulo que especifica o ponto em que a cônica geocêntrica atinge a esfera de influência lunar. Todas estas quantidades estão representadas na Figura C.6. A partir destas quatro quantidades é possível determinar as demais quantidades envolvidas na manobra.

Como uma última hipótese, admitiremos que a cônica geocêntrica é direta e intercepta a esfera de influência antes de seu apogeu. Daí, calculam-se as demais quantidades necessárias para se encontrar os  $\Delta V$ 's requeridos para a manobra, seguindo os passos:

**Passo 1:** Energia da cônica geocêntrica,

$$\mathbf{x}_1 = \frac{V_{E1}^2}{2} - \frac{GM_{Terra}}{R_{C1}} \quad (C.25)$$

De acordo com a idéia geral do método, logo no primeiro passo já estamos em condições de verificar se a energia fornecida pelos valores de  $R_{C1}$  e  $V_{E1}$  é suficiente para levar o veículo à esfera de influência da Lua. Isto, porque é fácil observar graficamente que a cônica de energia mínima capaz de executar esta tarefa é uma elipse de semi-eixo maior:

$$a_{\min} = \frac{R_{C1} + (D - R_S)}{2} \quad (\text{C.26})$$

Onde  $R_S = 66300\text{km}$  é o raio da esfera de influência da Lua. Logo, a energia mínima necessária é:

$$\mathbf{x}_{\min} = -\frac{GM_{Terra}}{2a_{\min}} = -\frac{GM_{Terra}}{R_{C1} + (D - R_S)} \quad (\text{C.27})$$

Assim, se  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{\min}$ , segue-se adiante.

**Passo 2:** Momento angular da cônica geocêntrica,

$$h_1 = R_{C1} V_{E1} \sin(\mathbf{p}/2 - \mathbf{f}_1) = R_{C1} V_{E1} \cos(\mathbf{f}_1) \quad (\text{C.28})$$

**Passo 3:** Magnitude do vetor posição Terra-veículo no ponto em que a cônica geocêntrica intercepta a esfera de influência lunar, ponto I (Figura C.6),

$$R_I = \sqrt{D^2 + R^2 - 2DR_S \cos(I_1)} \quad (\text{C.29})$$

**Passo 4:** Velocidade em I,

$$V_I = \sqrt{2 \left( \frac{GM_{Terra}}{R_I} + \mathbf{x}_1 \right)} \quad (\text{C.30})$$

**Passo 5:** Ângulo entre  $V_I$  e a direção perpendicular a de  $R_1$ ,

$$f_1 = \cos^{-1}\left(\frac{h_1}{R_I V_I}\right) \quad (C.31)$$

**Passo 6:** Cálculo do ângulo entre as direções estabelecidas por  $D$  e  $R_S$ , no instante em que a cônica intercepta a esfera de influência lunar,

$$g_1 = \sin^{-1}\left[\frac{R_S \sin(I_1)}{R_{C1}}\right] \quad (C.32)$$

A partir daqui, o objetivo passa a ser o cálculo do tempo de vôo entre os pontos P e I.

**Passo 7:** Semi-latus rectum da cônica geocêntrica,

$$p_1 = \frac{h_1^2}{GM_{Terra}} \quad (C.33)$$

**Passo 8:** Semi-eixo maior da cônica,

$$a_1 = -\frac{GM_{Terra}}{2x_1} \quad (C.34)$$

**Passo 9:** Excentricidade,

$$e_1 = \sqrt{1 - \frac{p_1}{a_1}} \quad (C.35)$$

**Passo 10:** Anomalia verdadeira da cônica no ponto P,

$$\mathbf{n}_1 = \cos^{-1}\left(\frac{p_1 - R_{C1}}{R_{C1} h_1}\right) \quad (\text{C.36})$$

**Passo 11:** Anomalia verdadeira da cônica no ponto I,

$$\mathbf{n}_I = \cos^{-1}\left(\frac{p_1 - R_I}{R_I h_1}\right) \quad (\text{C.37})$$

**Passo 12:** Anomalia excêntrica da cônica no ponto P,

$$E_1 = \cos^{-1}\left[\frac{e_1 - \cos(\mathbf{n}_1)}{1 + e_1 \cos(\mathbf{n}_1)}\right] \quad (\text{C.38})$$

**Passo 13:** Anomalia excêntrica da cônica no ponto I,

$$E_I = \cos^{-1}\left[\frac{e_1 - \cos(\mathbf{n}_I)}{1 + e_1 \cos(\mathbf{n}_I)}\right] \quad (\text{C.39})$$

**Passo 14:** Tempo de vôo,  $T_v$ , entre os pontos P e I,

$$T_v = \sqrt{\frac{a_1^3}{GM_{Terra}}} \{[E_I - e_1 \sin(E_I)] - [E_1 - e_1 \sin(E_1)]\} \quad (\text{C.40})$$

**Passo 15:** Cálculo do ângulo de partida,  $\gamma_0$ , ângulo entre a direção de  $\mathbf{R}_{C1}$  e  $\mathbf{D}$ , em  $t = 0$ . De acordo com a Figura C.6,  $\mathbf{g}_0$  é dado por:

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{n}_I - \mathbf{n}_1 - \mathbf{g}_1 - \mathbf{w}_{Lua} \quad (\text{C.41})$$

Onde  $\omega_{Lua} = 2,66 \times 10^{-6}$  rad/s é a velocidade angular da Lua.

$\gamma_0$  e  $T_v$  só podem ser calculados após a verificação numérica dos valores de  $R_{C1}$ ,  $V_{E1}$ ,  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{I}_1$ . Se a trajetória selenocêntrica não for satisfatória para este conjunto de condições iniciais, isto é, se o periselênio desta trajetória não for igual ao da órbita lunar final, então, outros valores destas quantidades devem ser encontrados.

É importante notarmos que a energia da trajetória geocêntrica é inteiramente determinada por  $R_{C1}$  e  $V_{E1}$ , e que  $R_I$  é determinado apenas por  $\mathbf{I}_I$ , assim, se por ventura,  $\mathbf{x}_1$ , não for suficiente para alcançar a esfera de influência da Lua, a quantidade sob o radical da Equação (C.29) será negativa, então, o processo falha.

### Parte selenocêntrica:

Agora, vamos calcular a trajetória do veículo dentro da esfera de influência da Lua. Para isso, admitiremos que a partir do ponto I, Figura C.6, o veículo estará apenas sob ação do campo gravitacional lunar.

**Passo 16:** Posição do veículo em relação à Lua no ponto I,

$$\mathbf{R}_{L2} = \mathbf{R}_S \quad (\text{C.42})$$

**Passo 17:** Velocidade do veículo em relação à Lua no ponto I,

$$\mathbf{V}_{L2} = \mathbf{V}_I - \mathbf{V}_{Luu} \quad (\text{C.43})$$

Aplicando a lei dos co-senos, a magnitude de  $V_{L2}$  é dada por:

$$V_{L2} = \sqrt{V_I^2 + V_{Luu}^2 - 3V_I V_{Luu} \cos(\mathbf{f}_1 - \mathbf{g}_1)} \quad (\text{C.44})$$

**Passo 18:** Ângulo que define a direção inicial da velocidade do veículo em relação à Lua em  $t = T_v$ . De acordo com a Figura C.6,

$$\mathbf{e}_2 = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{V_{Luu}}{V_{L2}} \cos(\mathbf{I}_1) - \frac{V_I}{V_{C2}} \cos(\mathbf{I}_I + \mathbf{g}_1 - \mathbf{f}_1) \right] \quad (\text{C.45})$$

Esta expressão nos permite concluir que para trajetórias de colisão com a Lua  $\mathbf{e}_2 = 0$ . As quantidades  $R_{C2}$  e  $V_{L2}$  e  $\mathbf{e}_2$  definem as condições iniciais da trajetória selenocêntrica e, a partir delas, podemos encontrar os demais elementos orbitais desta trajetória. Três situações são possíveis, a escolha por uma delas determinará o direcionamento das iterações numéricas. Estas situações são:

- 1.) Impacto com a Lua, como vimos,  $\mathbf{e}_2 = 0$ , e teremos o raio do periselênio da trajetória selenocêntrica,  $R_{P2} = R_{Lua}$  (= 1738km);
- 2.) Inserção em órbita lunar; neste caso,  $R_{P2} > R_{Lua}$ , e, se  $R_{P2}$  for igual ao raio da órbita final lunar desejada, então, um  $\Delta V_2$  deve ser aplicado ao veículo para colocá-lo em órbita da Lua e concluir a transferência. Esta órbita poderá ser circular ou elíptica. No caso circular,  $R_{P2} = R_{C2}$  e no caso elíptico,  $R_{P2}$  poderá ter quaisquer valores entre as distâncias do pericentro e apocentro. Contudo, se  $R_{P2}$  for maior que o raio da órbita lunar desejada, então, o processo exigirá uma nova escolha. Uma opção prática para concluir a manobra é efetuar uma transferência entre a trajetória selenocêntrica, a partir de seu pericelênio, e a órbita lunar desejada via Hohmann, por exemplo. A Figura C.7 mostra um esquema desta manobra que requer a aplicação de um  $\Delta V_2$  no periselênio da trajetória selenocêntrica, ponto M da Figura, no sentido oposto ao movimento do veículo, a fim de colocá-lo em uma elipse de transferência que o levará até a órbita lunar final. Esta escolha poderá encarecer a manobra em até 20%. A segunda opção consiste em procurar por um novo conjunto de condições iniciais  $R_{C1}$ ,  $V_{E1}$ ,  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{I}_1$ , que fornecerá uma trajetória selenocêntrica cujo periselênio seja igual ao raio da órbita lunar final desejada.
- 3.) Vôo lunar; neste caso, exige-se apenas que  $R_{P2}$  seja maior que  $R_{Lua}$ , isto é, maior que 1738km.

Na seqüência, mostraremos os passos que considera a situação 2:

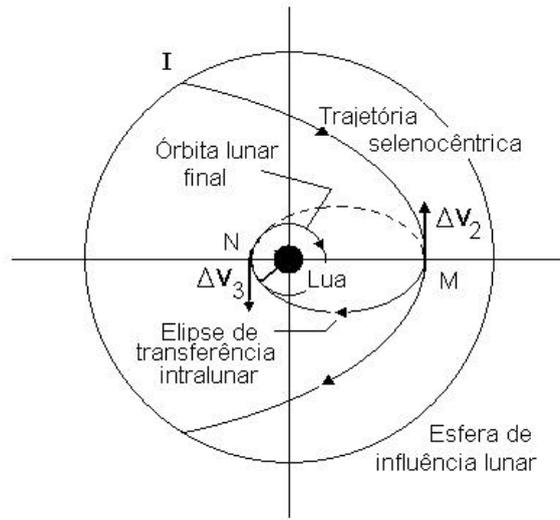


FIGURA C.7 – Geometria da transferência entre a trajetória selenocêntrica e a órbita lunar final via Hohmann.

**Passo 19:** Energia da órbita selenocêntrica,

$$\mathbf{x}_2 = \frac{V_{L2}^2}{2} - \frac{GM_{Lua}}{R_S} \quad (C.46)$$

**Passo 20:** Momento angular da trajetória selenocêntrica,

$$h_2 = R_{L2} + V_{L2} \text{sen}(\mathbf{e}_2) \quad (C.47)$$

**Passo 21:** Semi-lactus rectum,

$$p_2 = \frac{h_2}{GM_{Lua}} \quad (C.48)$$

**Passo 22:** Excentricidade,

$$e_2 = \sqrt{1 + \frac{2\mathbf{x}_2 h_2}{(GM_{Lua})^2}} \quad (C.49)$$

**Passo 23:** Raio do periselênio da trajetória selenocêntrica,

$$R_{P2} = \frac{p_2}{1 + e_2} \quad (\text{C.50})$$

**Passo 24:** Velocidade no periselênio,

$$V_{P2} = \sqrt{2 \left( \frac{GM_{Lua}}{R_{P2}} + \mathbf{x}_2 \right)} \quad (\text{C.51})$$

Se ao final deste passo,  $R_{P2}$  for igual ao raio da órbita lunar desejada, estaremos aptos a calcular os  $\Delta V$ 's necessários para a conclusão da manobra, caso contrário, outro conjunto de condições iniciais  $R_{C1}$ ,  $V_{E1}$ ,  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{I}_I$  deve ser selecionado e o processo iterativo reiniciado.

Admitindo que tudo tenha dado certo, seguimos em frente calculando.

**Passo 25:** Magnitude de  $\Delta V_1$ ,

$$\Delta V_1 = \sqrt{V_{E1}^2 + V_{C1}^2 - 2V_{E1}V_{C1} \cos(\mathbf{f}_1)} \quad (\text{C.52})$$

**Passo 26:** Magnitude de  $\Delta V_2$ ,

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_{P2}^2 + V_{C2}^2 - 2V_{P2}V_{C2} \cos(\mathbf{f}_2)} \quad (\text{C.53})$$

Onde  $\mathbf{f}_2$  é o ângulo entre as direções de  $\mathbf{V}_{P2}$  e  $\mathbf{V}_{C2}$ , sendo esta última a velocidade da órbita circular lunar final, dada por,

$$V_{C2} = \sqrt{\frac{GM_{Lua}}{R_{C2}}} \quad (\text{C.54})$$

**Passo 27:**  $\Delta V_{Total}$ ,

$$\Delta V_{Total} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (C.55)$$

O tempo de vôo entre os pontos I e M da trajetória selenocêntrica é calculado numericamente e deve ser somado ao tempo de vôo entre os pontos P e I para obtermos o tempo total da transferência que é da ordem de 5.1 dias

A Figura C.8 mostra um diagrama  $\Delta V_{Total}$  versus a altitude da órbita terrestre de partida,  $H_1$ , variando entre 160 e 40000km. Verifica-se que para altitudes da órbita de partida, superiores a 500km, o custo da manobra via *Patched-conics* é excessivamente alto. Todavia, para  $H_1 < 500$ km, o método fornece uma estimativa para os  $\Delta V$ 's requeridos para a uma manobra de transferência Terra-Lua melhores que o método de Hohmann. O projeto Apollo se valeu deste método para o planejamento de suas missões.

Embora nossa opção tenha sido descrever os passos para realizar a transferência a partir de um conjunto de condições iniciais que levem a um periselênio da trajetória selenocêntrica igual ao raio da órbita lunar final, vamos passar rapidamente os passos para o cálculo dos parâmetros da transferência via Hohmann entre a trajetória selenocêntrica e a órbita lunar final, caso se escolha este procedimento ilustrado pela Figura C.7.

**Passo 28:** Cálculo do semi-eixo maior da elipse de transferência,

$$a_T = \frac{R_{C2} + R_{P2}}{2} \quad (C.56)$$

**Passo 29:** Energia da elipse,

$$\mathbf{x}_T = -\frac{GM_{Lua}}{2a_T} = -\frac{GM_{Lua}}{R_{C2} + R_{P2}} \quad (C.57)$$

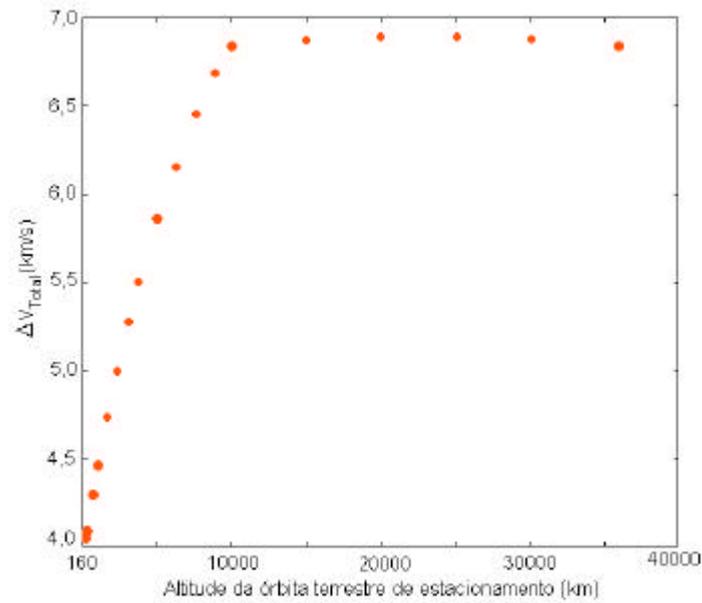


FIGURA C.8 -  $\Delta V_{Total} \times H_1$  para transferência *Patched-conics*.

**Passo 30:** Velocidade no apocentro da elipse,

$$V_{AT} = \sqrt{2 \left( \frac{GM_{Lua}}{R_{P2}} + \mathbf{x}_T \right)} \quad (C.58)$$

**Passo 31:** Velocidade de pericentro,

$$V_{PT} = \sqrt{2 \left( \frac{GM_{Lua}}{R_{C2}} + \mathbf{x}_T \right)} \quad (C.59)$$

**Passo 32:**  $\Delta V_2$  para o segundo impulso,

$$\Delta V_2 = V_{P2} - V_{AT} \quad (C.60)$$

**Passo 33:**  $\Delta V_3$  para o terceiro impulso,

$$\Delta V_3 = V_{PT} - V_{C2} \quad (C.61)$$

**Passo 34:**  $\Delta V_{Total}$ ,

$$\Delta V_{Total} = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \quad (C.62)$$

Com  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  dados pelas Equações (C.52) e (C.53), respectivamente.

Para encerrarmos a Seção, vamos apresentar os resultados de um experimento numérico obtido com um algoritmo que busca pelas condições iniciais  $R_{C1}$ ,  $V_{E1}$ ,  $f_1$  e  $I_1$ , que levam a um periselênio da trajetória selenocêntrica igual ao raio da órbita lunar final, seguindo os passos de 1 a 26. Neste experimento, consideramos que a órbita de partida é circular de altitude  $H_1 = 240\text{km}$  e que a órbita final ao redor da Lua tem altitude  $H_2 = 42,5\text{km}$ , assim, das quatro quantidades iniciais necessárias,  $R_{C1}$  é fixo e  $R_{P2}$  deve ser igual  $R_{C2}$ . Então, o algoritmo busca dentro de intervalos estabelecidos para as demais quantidades, os valores de  $V_{E1}$ ,  $f_1$  e  $I_1$ , que satisfaçam a condição  $R_{P2} = R_{C2}$ . Os valores encontrados para estas quantidades são:

- $V_{E1} = 10,980\text{km/s}$ ;
- $f_1 = 0^\circ$ ;
- $\lambda_I = 52^\circ$ ;
- $\Delta V_1 = 3,250\text{km/s}$ ;
- $\Delta V_2 = 0,900\text{km/s}$ ;
- $\Delta V_{Total} = 4,150\text{km/s}$ .

Para estes valores, o ângulo de partida, isto é, o ângulo entre a direção de  $R_{C1}$  e a direção Terra-Lua,  $g_0$ , é igual a  $127^\circ$ , supondo que a Lua esteja em órbita circular. Para verificarmos a eficiência deste método, baseado na dinâmica do problema de dois corpos, em prever os  $\Delta V$ 's requeridos para uma transferência Terra-Lua, vamos simular a órbita correspondente às condições acima considerando o PR3C, tal como foi feito para a transferência via elipse de energia mínima. A Figura C.9. a mostra a órbita no sistema de coordenadas geocêntricas e a Figura C.9.b a variação da distância Lua-veículo no tempo. Como pode ser observado, a trajetória alcança a esfera de influência

da Lua, mas não consegue um periselênio inferior a 50000km. Mais uma vez, a correção deste “desvio” pode elevar o custo final da manobra em até 10%.

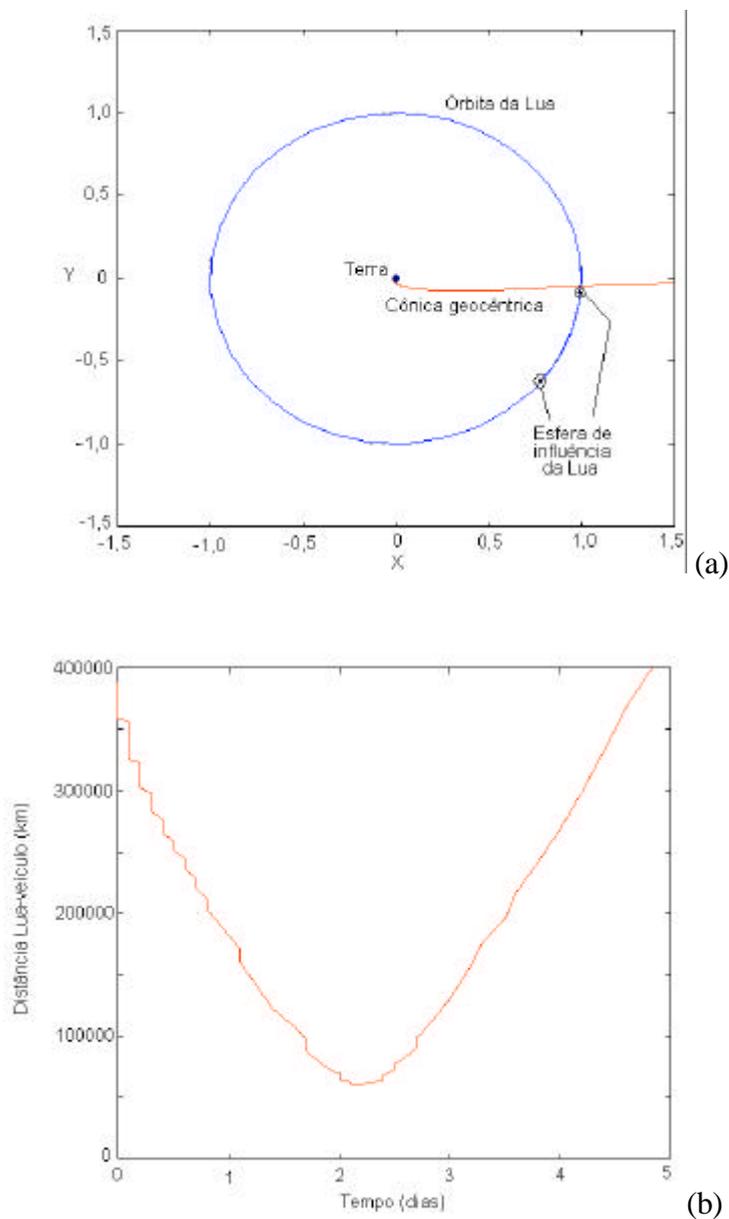


FIGURA C.9 – (a) Trajetória cujas condições iniciais correspondem à cônica geocêntrica encontrada para a transferência *Patched-conics* entre as órbitas de estacionamento terrestre, com  $H_1 = 240\text{km}$  e lunar, com  $H_2 = 42,5\text{km}$ , simulada para o PR3C. (b) Distância Lua veículo em função do tempo.

## C.5 Manobras para Mudança de Plano

### C.5.1 Mudança de Plano Simples

O objetivo desta manobra é girar o plano da órbita no espaço inercial sem alterar seu tamanho e sua forma. A Figura C.10 mostra a geometria básica desta manobra para duas órbitas de mesmo raio,  $R$ , cujos planos estão rotacionados por um ângulo  $q$ . Neste caso, as velocidades das órbitas são:

$$V_{c1} = V_{c2} = V_c = \sqrt{\frac{GM_{Terra}}{R}} \quad (C.63)$$

O  $\Delta V$  necessário para o impulso que realizará a manobra é dado por:

$$\Delta V = 2V_c \sin\left(\frac{q}{2}\right) \quad (C.64)$$

Se  $q = 60^\circ$ , temos  $\Delta V = V_c$  e a Tabela C.2 mostra os  $\Delta V$ 's para rotação entre duas órbitas circulares com  $H_1$  igual a 160, 700, 5000, 15000 e 36000km. E a Figura C.11 exibe um diagrama  $\Delta V$  versus o ângulo de rotação  $q$ , variando entre 0 e  $360^\circ$ .

TABELA C.2 -  $\Delta V$ 's necessários para rotação de  $60^\circ$  alguns valores de  $H_1$ .

$H_1$ (km)	$\Delta V$ (km/s)
160	7,811
700	7,507
5000	5,920
15000	4,933
36000	3,067

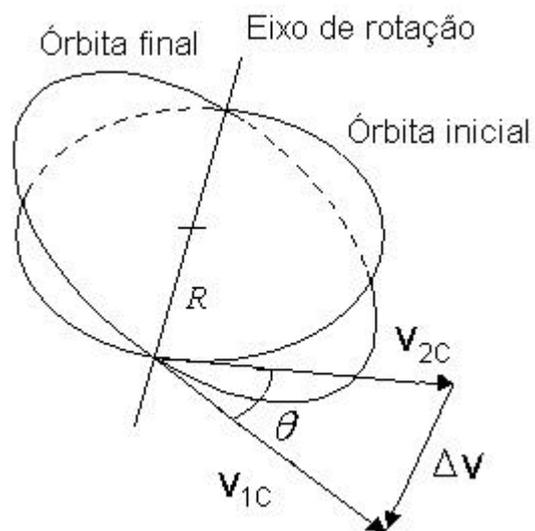


FIGURA C. 10 -  $\Delta V$ 's necessários para uma rotação de  $60^\circ$ .

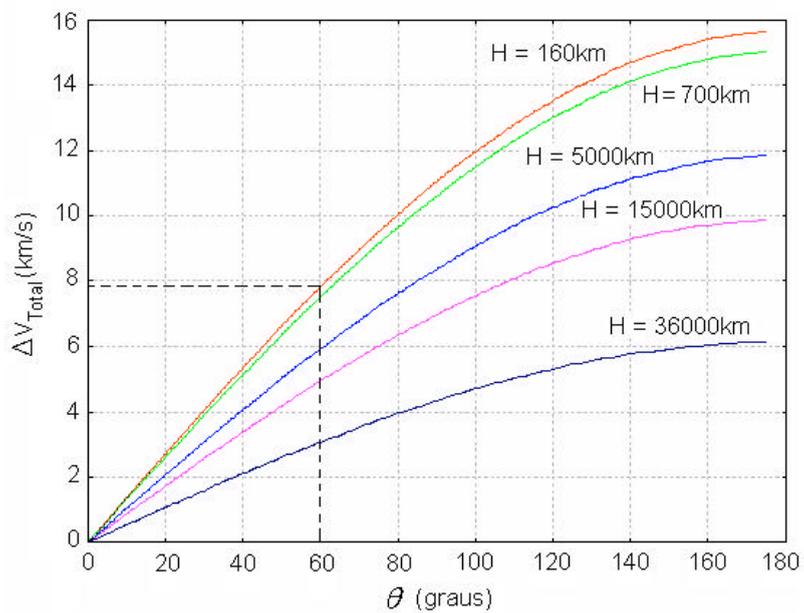


FIGURA C.11 – Diagrama  $\Delta V_{Total} \times \theta$ , com  $0 = \theta = 180^\circ$  e  $H_1 = 160, 700, 5000, 15000$  e  $36000\text{km}$ .

### C.5.2 Mudança de Plano via Hohmann

Uma importante prática de transferência entre órbitas circulares requer uma mudança de plano e também de raio. A transferência ótima por duplo impulso que satisfaz estes requerimentos é a transferência de Hohmann com mudança de plano cuja geometria básica é mostrada na Figura C.12. A aplicação de um  $\Delta V_1$  no ponto P da Figura C.12 produz uma elipse de transferência cujo raio do apocentro é igual ao raio da órbita circular final e também provoca uma rotação no plano da órbita de transferência de um ângulo  $\mathbf{a}_1$  em relação ao plano da órbita inicial. No apocentro, o ponto A da Figura C.12, um  $\Delta V_2$  é aplicado para circularizar a órbita e rotacioná-la de um ângulo  $\mathbf{a}_2$ , tal que:

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{a}_1 \quad (\text{C.65})$$

Com  $\mathbf{q}$  sendo o ângulo entre os planos das órbitas circulares inicial e final. A Figura C.13 mostra os triângulos de velocidade contendo as velocidades das órbitas circulares inicial e final, e os  $\Delta V$ 's e as velocidades no pericentro, ponto P da Figura C.13.a,  $V_P$ , e apocentro, ponto A da Figura C.13.b,  $V_A$ , da órbita de transferência. As magnitudes dos  $\Delta V$ 's são dadas a seguir:

$$\Delta V_1 = \sqrt{V_P^2 + V_{C1}^2 - 2V_P V_{C1} \cos(\mathbf{a}_1)} \quad (\text{C.66})$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_A^2 + V_{C2}^2 - 2V_A V_{C2} \cos(\mathbf{a}_2)} \quad (\text{C.67})$$

$$V_P = \sqrt{2GM_{Terra} \left( \frac{1}{R_{C1}} + \frac{2}{R_{C1} + R_{C2}} \right)} \quad (\text{C.68})$$

$$V_A = \sqrt{2GM_{Terra} \left( \frac{1}{R_{C2}} + \frac{2}{R_{C1} + R_{C2}} \right)} \quad (\text{C.69})$$

$$\Delta V_{Total} = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (C.70)$$

Para minimizar o valor de  $\Delta V_{Total}$ , resolve-se a seguinte Equação:

$$\frac{\partial V_{Total}}{\partial \mathbf{a}_1} = \frac{V_P V_{C1} \text{sen}(\mathbf{a}_1)}{\Delta V_1} - \frac{V_A V_{C2} \text{sen}(\mathbf{q} - \mathbf{a}_1)}{\Delta V_2} \quad (C.71)$$

Os resultados desta última operação deverá ser encontrado numericamente para se obter os valores ótimos de  $\mathbf{a}_1$ .

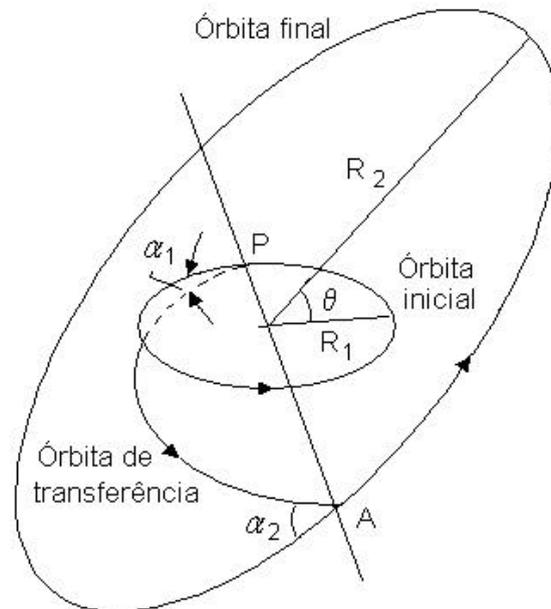


FIGURA C.12 – Geometria da transferência de Hohmann com mudança de plano.

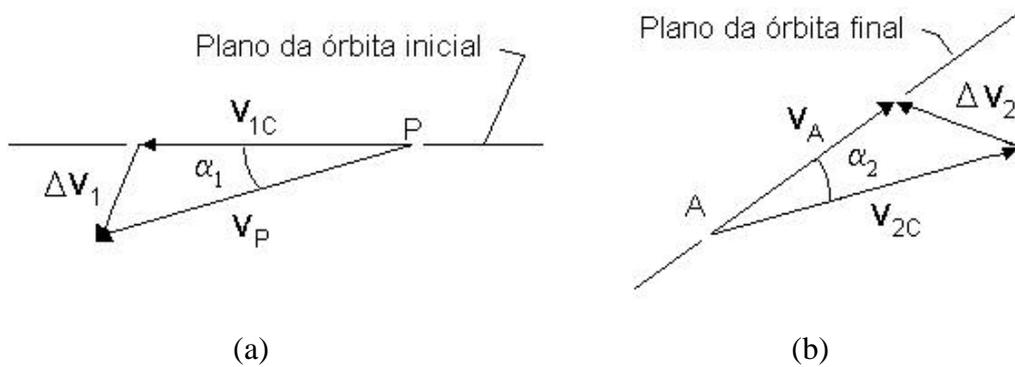


FIGURA C.13 – Triângulo de velocidades da transferência de Hohmann com mudança

de plano.

A Figura C.14.a mostra um diagrama para  $\Delta V_{Total}$  versus  $H_2$  para uma rotação em relação ao plano da órbita inicial,  $q = 60^\circ$ , para  $H_1 = 240\text{km}$  e  $H_2$  variando entre 300 e 60000km. Este diagrama foi construído levando em conta os valores ótimos de  $\alpha_1$  para cada valor de  $H_2$ . A Figura C.14.b mostra o tempo de vôo versus  $H_2$  para as mesmas transferências da Figura C.14.a. As Figuras C.15.a e C.15.b mostram  $\Delta V_{Total}$  versus  $H_2$  também para  $H_1 = 240\text{km}$  e  $H_2$  variando entre 300 e 60000km, mas para uma rotação no plano da órbita de  $90^\circ$ .

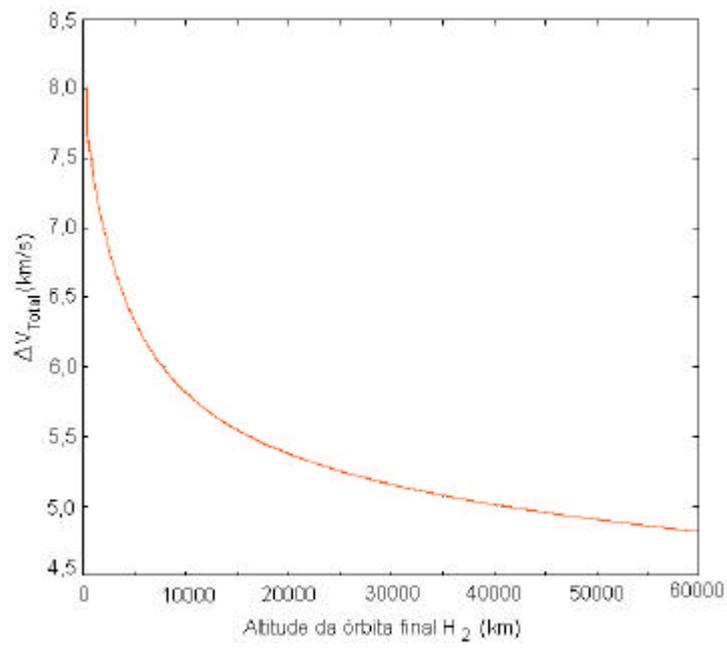
As Tabelas C.3 e C.4 encerram este Apêndice mostrando os  $\Delta V$ 's, tempos de vôo e os  $\alpha_1$ 's ótimos para seis transferências todas partindo de uma órbita inicial de altitude 240km, para  $q = 60^\circ$  e  $90^\circ$ .

TABELA C.3 –  $\Delta V$ 's,  $T_v$  e  $\alpha_1$ 's ótimos para  $H_1 = 240\text{km}$  e  $q = 60^\circ$ .

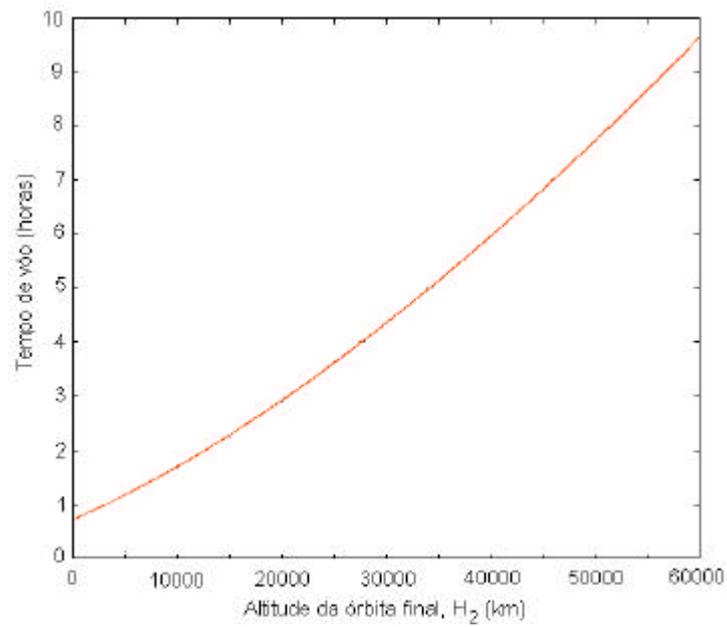
$H_2$ (km)	$\Delta V_1$ (km/s)	$\Delta V_2$ (km/s)	$\Delta V_{Total}$ (km/s)	$T_v$ (h)	$\alpha_1$ ( $^\circ$ ) *
700	0,330	7,551	7,517	0,780	1,400
1000	0,351	7,027	7,378	0,810	2,050
5000	1,190	5,147	6,333	1,180	4,820
18000	2,071	3,369	5,439	2,660	4,110
35866	2,487	2,580	5,071	5,277	2,870
60000	2,725	2,094	4,820	9,636	1,970

TABELA C.4 –  $\Delta V$ 's,  $T_v$  e  $\alpha_1$ 's ótimos para  $H_1 = 240\text{km}$  e  $q = 90^\circ$ .

$H_2$ (km)	$\Delta V_1$ (km/s)	$\Delta V_2$ (km/s)	$\Delta V_{Total}$ (km/s)	$T_v$ (h)	$\alpha_1$ ( $^\circ$ ) *
700	0,176	10,447	10,623	0,782	0,870
1000	0,277	10,137	10,413	0,807	1,330
5000	1,105	7,545	8,649	1,178	3,710
18000	2,045	4,693	6,738	2,665	3,510
35866	2,465	3,439	5,876	5,270	2,570
60000	2,723	2,632	5,355	9,630	1,849

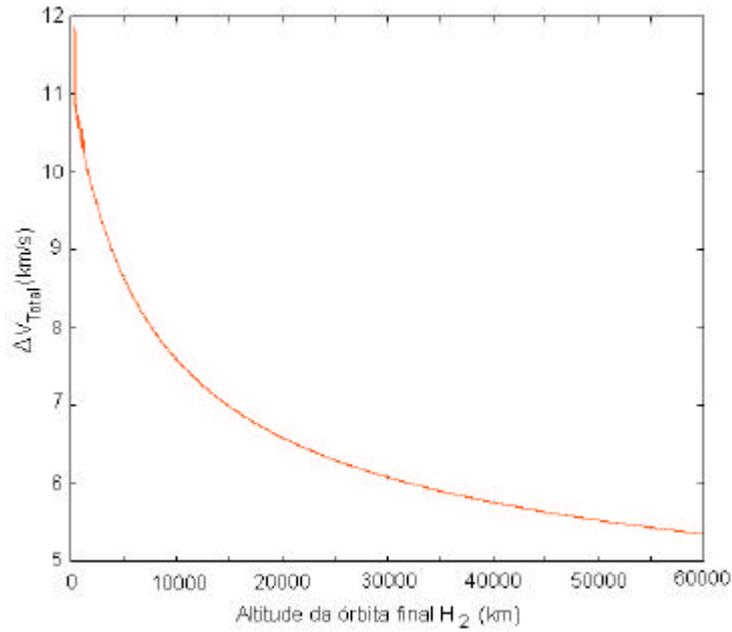


(a)

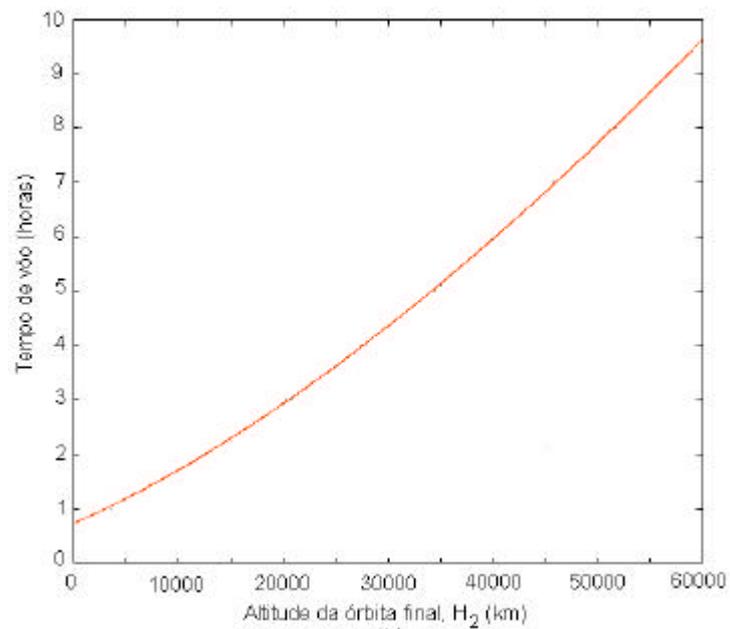


(b)

FIGURA C.14 – (a)  $\Delta V_{Total} \times H_2$  e (b)  $T_v \times H_2$ , para uma órbita de partida circular de altitude  $H_1 = 240\text{km}$  e uma rotação em relação ao plano da órbita inicial de  $q = 60$ .



(a)



(b)

FIGURA C.15 – (a)  $\Delta V_{Total} \times H_2$  e (b)  $T_v \times H_2$ , para uma órbita de partida circular de altitude  $H_1 = 240\text{km}$  e uma rotação em relação ao plano da órbita inicial de  $q = 90$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)