



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14463-TDI/1144**

## **ESTUDO DA DINÂMICA DE PEQUENOS DETRITOS ESPACIAIS E METEORÓIDES**

Cláudia Celeste Celestino de Paula Santos

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Othon Cabo Winter e Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 12 de julho de 2005.

INPE  
São José dos Campos  
2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Publicado por:

**esta página é responsabilidade do SID**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Gabinete do Diretor – (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 – CEP 12.245-970

São José dos Campos – SP – Brasil

Tel.: (012) 3945-6911

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**Solicita-se intercâmbio  
We ask for exchange**

**Publicação Externa – É permitida sua reprodução para interessados.**



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14463-TDI/1144**

## **ESTUDO DA DINÂMICA DE PEQUENOS DETRITOS ESPACIAIS E METEORÓIDES**

Cláudia Celeste Celestino de Paula Santos

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Othon Cabo Winter e Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 12 de julho de 2005.

INPE  
São José dos Campos  
2007

629.786

Santos, C. C. C. P.

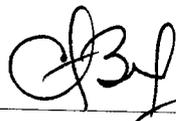
Estudo da dinâmica de pequenos detritos espaciais e Meteoróides / Cláudia Celeste Celestino de Paula Santos. – São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 2005.

263p.; (INPE-14463-TDI/1144)

1. Detritos espaciais. 2. Meteoróides. 3. Satélites. 4. Evolução orbital. 5. Nuvem de partículas. 6. Perturbações.  
I. Título.

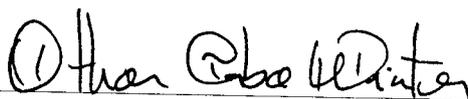
Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de Doutor(a) em  
Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle

Dr. Cristian Beaugé



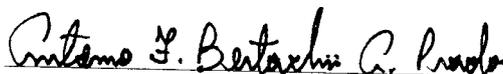
Presidente / UNCOR / Cordoba - AR

Dr. Othon Cabo Winter



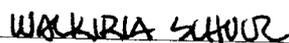
Orientador(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



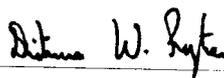
Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dra. Walkiria Schulz



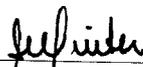
Convidado(a) / CONAE / Cordoba - AR

Dr. Dietmar Foryta



Convidado(a) / UFPR / Curitiba - PR

Dra. Sílvia Maria Giuliatti Winter



Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Tadashi Yokoyama



Convidado(a) / UNESP/RC / Rio Claro - SP

Aluno (a): Cláudia Celeste Celestino de Paula Santos

São José dos Campos, 12 de julho de 2005

*“ Na medida em que aprendemos de nossos erros, nosso conhecimento aumenta , mesmo que jamais possamos alcançar a certeza do saber. ”*

(Karl Popper, filósofo)



Ao meu esposo Flávio que o amor, a compreensão, a cumplicidade e a ajuda "sempre" estiveram presentes em minha vida.

Aos meus filhos Mariana e Tiago Henrique cujo o amor foi essencial para o final desta.

A minha mãe e meu pai cujos ensinamentos foram muito bem aplicados nesta fase de minha vida.

Aos meus irmãos, em especial Paulo Riccardo e Marcia, aos meus sogros e cunhada que foram nestes dois meses meu ponto de apoio.



## AGRADECIMENTOS

Precisaria de muitas páginas para agradecer a todas as pessoas que auxiliaram-me neste trabalho; no entanto, sendo bastante breve, gostaria de agradecer

- ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) que possibilitou a realização deste trabalho, através da Divisão de Mecânica Espacial e Controle;
- à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 00/06629-8, pelo suporte financeiro, sem o qual seria impraticável a realização deste trabalho;
- aos membros da Banca Examinadora pelas sugestões apresentadas nesta tese;
- ao Prof. Dr. Othon Cabo Winter e ao Prof. Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado, meus orientadores, pelos ensinamentos essenciais para o desenvolvimento desta tese;
- ao Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes e ao Prof. Dr. Tadashi Yokoyama, pelo auxílio, em especial na parte analítica;
- ao Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto, pela ajuda na parte computacional deste trabalho e aos colegas da pós-graduação, em especial, Décio, Marcos Allan e Cristiano, pela troca de experiência na execução das rotinas computacionais;
- a todos funcionários e professores da UNESP, campus de Guaratinguetá, e do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, pela ajuda direta ou indireta no desenvolvimento deste trabalho;
- a razão de tudo neste mundo, “Deus”.



## RESUMO

A exploração e a utilização do ambiente de satélites em órbitas ao redor da Terra tornou-se relevante para o avanço tecnológico nas últimas décadas, mostrando-se de suma importância o conhecimento do fluxo e da dinâmica de partículas de meteoróides e detritos espaciais que possam afetar o desempenho adequado de missões espaciais. O objetivo deste trabalho foi obter a evolução orbital de uma nuvem de partículas que orbitam ao redor da Terra, sujeita às diversas perturbações. Pretendeu-se realizar um estudo global das diversas perturbações aplicadas ao problema de nuvens de detritos espaciais/meteoróides de modo que se possa obter um mapeamento de densidades/fluxo de partículas em função da altitude e do tamanho das partículas. Foi considerado um cinturão hipotético de matéria ao redor da Terra composto de uma variedade de tamanhos de partículas, que sofrem diferentes perturbações de forma mais ou menos intensa, dependendo da altitude e do tamanho da partícula. Isto pode produzir, para um dado tamanho de partícula, regiões com alta densidade de partículas e outras praticamente sem partículas. Estas estruturas serão sempre temporais, existindo um tempo de vida para suas existências. A obtenção destas estruturas e tempo de duração das mesmas é extremamente útil no planejamento de missões espaciais.



# **STUDY OF THE DYNAMICS OF SMALL SPACE DEBRIS AND METEORIODS**

## **ABSTRACT**

In the last decades, the exploration and the utilization of the satellites environment in orbits around the Earth become relevant to the technological progress. The knowledge of the flow and the dynamics of meteoroid particles as well as space debris that can affect the performance of space missions is highly important. The goal of this work was to obtain the orbital evolution of a particles cloud, orbiting around the Earth, which is under the effect of several perturbations. It was aimed to develop a global study of the several perturbations applied to the space debris problem as well as meteoroids clouds so that a density / flow map of particles could be obtained, taking into account the altitude and particle's size. It was considered a hypothetical belt of material around the Earth. This belt was composed of particles of different sizes and it was subjected to different perturbations of high or low intensity. The intensities depend on the altitude as well as on the size of the particles. Thus, for a specific particle size, these perturbations can produce regions with high density of particles and others, practically, without particles. These structures will always depend on the time and there is a lifetime for their existence. The knowledge of these structures and their lifetime are extremely useful in the planning of space missions.



## SUMÁRIO

Pág.

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	
<b>LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS</b> .....	
<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b> .....	41
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	49
2.1 – Aspectos Gerais.....	49
2.2– Principais Grupos de Pesquisa em Detritos Espaciais e Meteoróides.....	70
<b>CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b> .....	79
3.1 - Força de Pressão de Radiação Solar e de Poynting - Robertson.....	79
3.1.1 – Conseqüências Dinâmicas Considerando o Sistema de Referência Órbitas Heliocêntricas.....	85
3.1.2 – Conseqüências Dinâmicas Considerando o Sistema de Referência Órbitas Planetocêntricas.....	87
3.1.3 - As Equações de Movimento para o Sistema Planetocêntrico Considerando a Perturbação do Arrasto de Poynting-Robertson.....	90
3.1.4 - Força de Pressão de Radiação Solar - Caso Tridimensional.....	92
3.2 - Potencial Terrestre.....	93

3.2.1 - As Equações de Movimento Considerando a Perturbação do Potencial Terrestre.....	93
3.3 - Perturbações Luni-Solares.....	97
3.3.1 – As Equações de Movimento para o Problema de Quatro Corpos.....	97
3.3.2 - Sistema de Coordenadas.....	98
3.4 - A Pressão de Radiação Solar e o Achatamento Terrestre.....	101
3.4.1 - Variação dos Elementos Orbitais.....	102
<b>CAPÍTULO 4 – RESULTADOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>109</b>
4.1 – A Força de Arrasto de Poynting-Robertson.....	109
4.1.1 – Comparação Entre os Resultados Analíticos e Numéricos.....	113
4.2 – Pressão de Radiação Solar e o Achatamento Terrestre.....	114
4.2.1 – Pressão de Radiação Solar.....	116
4.2.2 – Efeito Combinado: Pressão de Radiação Solar e Achatamento Terrestre.....	139
4.3 – Evolução Orbital de 1.000 Partículas na Região Geoestacionária.....	152
4.4 – Evolução Orbital de um Anel de Partículas.....	158
4.4.1 – Partículas na Região Entre 20.000 e 25.000 km.....	159
4.4.2 – Partículas na Região Entre 40.000 e 45.000 km.....	166
4.4.3 – Partículas na Região Entre 10.000 e 15.000 km.....	171
4.5- A Densidade da Evolução Orbital de um Anel de Detritos Espaciais.....	174
4.5.1 - Região Entre 40.000 e 45.000 km – Órbita Alta.....	174
4.5.1.1 - Distribuição Radial.....	180
4.5.1.2 - Distribuição Azimutal.....	189
4.5.2 – Região Entre 20.000 e 25.000 km – Órbita Média.....	192
4.5.2.1 - Distribuição Radial.....	192
4.5.2.2 - Distribuição Azimutal.....	195
4.5.3 - Região Entre 10.000 e 20.000 km – Órbita Baixa.....	197
4.5.3.1 - Distribuição Radial.....	197
4.5.3.2 - Distribuição Azimutal.....	198

4.6 - Evolução da Densidade de um Anel de Pequenas Partículas Sujeito as Perturbações Luni-Solares, Geopotencial e Pressão de Radiação Solar.....	200
4.6.1 - Densidade de Partículas.....	200
4.7 - A Densidade da Evolução de uma Nuvem de Detritos Espaciais Provenientes de uma Explosão na Região de GPS.....	205
4.7.1 - Modelo de Fragmentação e Distribuição das Partículas.....	205
4.7.2 - Distribuição Temporal de Partículas.....	207
<b>CAPÍTULO 5 - ESTUDO ANALÍTICO</b> .....	211
5.1- Perturbação da Pressão de Radiação e do Achatamento.....	211
<b>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b> .....	217
6.1- Conclusões.....	217
6.2- Sugestões Futuras.....	219
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	221
<b>APÊNDICE A - O ARRASTO DE POYNTING-ROBERTSON</b> .....	235
A.1 – Conseqüências Dinâmicas do arrasto de Poynting-Robertson.....	235
A.1.1 – Sistema de Referência: Órbitas Heliocêntricas .....	235
A.1.2 – Sistema de Referência: Órbitas Planetocêntricas .....	240
A.2 - Definição de $\beta$ .....	246
<b>APÊNDICE B - ACHATAMENTO TERRESTRE</b> .....	249
B.1 – Achatamento Terrestre.....	249
B.2 - Força do Achatamento Terrestre em Coordenadas Retangulares a Partir do Gradiente do Potencial.....	259
B.2.1 - Coeficiente Zonal $J_2$ .....	

B.2.2 - Coeficiente Tesseral $J_{22}$ .....	259
	260

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 – Ilustração de objetos observados em 1989.....	43
1.2 - Magnitude das 10 maiores nuvens de restos em órbita até maio de 2001. Neste gráfico apresenta-se a estimativa do número de restos orbitais por ano.....	44
3.1 – Esquema da idéia básica do efeito dinâmico para uma partícula com diferente velocidade em relação ao Sol. a) $v = 0$ e b) $v \neq 0$ . ....	81
3.2 – Esquema ilustrativo para uma partícula que espalha isotropicamente. $p$ é o momentum da partícula.....	83
3.3 – Esquema ilustrativo para uma partícula que espalha na mesma direção e sentido do fluxo de radiação. ....	84
3.4 – Esquema ilustrativo para uma partícula que espalha na mesma direção e sentido contrário ao fluxo de radiação.....	84
3.5 – Esquema ilustrativo para partículas que espalham a energia absorvida.....	84
3.6 – Esquema ilustrativo da velocidade relativa instantânea de partículas em órbitas ao redor do Sol.....	86
3.7 – Esquema ilustrativo para partículas em órbitas circulares ao redor do planeta sujeitas ao fluxo solar.....	88

3.8 – Esquema ilustrativo das velocidades da partícula ao redor do planeta e do planeta ao redor do Sol.....	89
3.9 - Sistema de eixos com origem no centro de massa da Terra, com $O_z$ apontando para o pólo Norte, $O_x$ e $O_y$ dois eixos retangulares de direções fixas situados no plano do equador. $p'$ é a projeção de $p$ no plano $xy$ .....	95
3.10 – Órbita da partícula no espaço.....	99
3.11 – Sistema heliocêntrico de coordenadas $(x, y, z)$ e o sistema intermediário de coordenadas $(X', Y', Z')$ .....	101
4.1 – Simulação da órbita da partícula em termos das componentes $(x, y)$ . A partícula está sujeita ao arrasto de Poynting-Robertson. O semi-eixo maior inicial considerado foi: a) 25.000 km; b) 42.164 km. Observa-se que, em algumas regiões, ocorre a sobreposição na órbita da partícula. Então, ao considerar uma nuvem de partículas nota-se que existem regiões com maior ou menor densidade de partículas, em um dado instante.....	110
4.2 – Variação do semi-eixo maior ao longo do tempo para uma partícula de semi- eixo maior orbital inicial: a) 25.000 km; b) 42.164 km. Nesta figura é possível observar que a evolução do semi-eixo maior pode ser dividida em três componentes: I) linha em azul que é a variação secular, II) a variação que acompanha o movimento médio do Sol ao redor da Terra e III) a variação que ocorre ao longo do período orbital da partícula .....	111

4.3 - Variação do semi-eixo maior ao longo do tempo. O semi-eixo maior inicial considerado foi: a) 25.000 ; b) 42.164 km . A variação secular do semi-eixo maior, considerando o valor inicial do semi-eixo de 25.000 km , é de, aproximadamente, 17,5 km/ano , enquanto que para o semi-eixo maior inicial de 42.164 km é de, aproximadamente, 30 km/ano .....	112
4.4 – Esquema ilustrativo para a posição inicial do sistema Sol-Terra-partícula.....	113
4.5 – Ampliação da Figura 4.3b. O semi-eixo maior inicial considerado foi de 42.164 km . Nesta figura é possível observar os efeitos oscilatório para a variação do semi-eixo maior.....	113
4.6 – Comparação dos resultados analítico e numérico para o decaimento orbital em função do raio da partícula, considerando o semi-eixo maior inicial de 8.000 km .....	114
4.7 – Continuação da comparação dos resultados analítico e numérico para o decaimento orbital em função do raio da partícula, considerando o semi-eixo maior inicial: a) 25.000 km; b) 42.164 km . Observa-se que os resultados numéricos e analíticos divergem para valores menores que 1 $\mu$ m. Este comportamento ocorre pelo fato que no modelo analítico adotado o semi-eixo maior é considerado constante enquanto nas integrações numéricas este varia com o tempo.....	115
4.8 – Posições de hipotéticos veículos espaciais em órbitas circulares ao redor da Terra e uma partícula cruzando as órbitas destes veículos espaciais.....	116

- 4.9 - Simulação numérica para a evolução orbital de uma partícula de 6  $\mu\text{m}$  em órbita inicialmente circular geoestacionária. A curva em preto (linha grossa) representa a órbita da partícula sem a perturbação. Observe que existe uma assimetria na órbita perturbada em relação a posição da Terra. Este efeito é devido a variação da excentricidade da partícula..... 118
- 4.10 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para uma partícula de 3  $\mu\text{m}$ , em órbita inicialmente circular geoestacionária. A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A partícula entra na região onde o efeito predominante é o arrasto atmosférico em um período de integração de aproximadamente 74 dias. A altitude em que se considerou esta perturbação foi de 7.000 km..... 119
- 4.11 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de 6  $\mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A partícula apresenta uma grande variação na sua excentricidade, na sua velocidade e no seu raio orbital. Esta variação não conduz a partícula a entrar na região onde o efeito predominante é o arrasto atmosférico (altitude inferior a 7.000 km). Esta partícula possui alta velocidade relativa máxima o que poderia significar perigo ao colidir com algum equipamento espacial em órbita ao redor da Terra..... 120

- 4.12 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de 10  $\mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A partícula apresenta uma pequena variação na sua excentricidade, na sua velocidade e no seu raio orbital comparando com partículas menores. A variação do raio orbital é máxima para o período de integração inferior a 200 dias. Esta partícula pode se encontrar na região orbital de aproximadamente 25.000 a 65.000 km considerando o período de integração de 200 dias..... 121
- 4.13 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de 20  $\mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. Esta partícula pode se encontrar na região orbital de aproximadamente 30.000 a 50.000 km considerando o período de integração de 200 dias. A velocidade relativa máxima é muito menor comparada a aquelas de partículas menores..... 122
- 4.14 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de 50  $\mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A princípio esta partícula pode representar um perigo menor a algum equipamento espacial em órbita ao redor da Terra em comparação com partículas menores observando simplesmente sua velocidade relativa máxima..... 123

4.15 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de 100 $\mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A princípio esta partícula pode representar um perigo menor a algum equipamento espacial em órbita ao redor da Terra em comparação com partículas menores observando simplesmente sua velocidade relativa máxima.....	124
4.16 - Comportamento da velocidade relativa em relação ao raio orbital para uma partícula originalmente geoestacionária de a) 6 $\mu\text{m}$ e b) 100 $\mu\text{m}$ . Para a partícula de 6 $\mu\text{m}$ a velocidade relativa máxima ocorre em órbita baixa enquanto para partícula de 100 $\mu\text{m}$ a velocidade máxima ocorre na órbita de onde a partícula foi originada.....	126
4.17 - Excentricidade máxima para partículas de raio 1 a 100 $\mu\text{m}$ . Para uma partícula de 5 $\mu\text{m}$ a excentricidade máxima é de aproximadamente 0,85 enquanto para uma partícula de 100 $\mu\text{m}$ é de aproximadamente 0,05.....	130
4.18 - Velocidade relativa máxima para partículas de raio 1 a 100 $\mu\text{m}$ . Observe que a velocidade relativa máxima aumenta conforme o tamanho de partícula diminui.....	131
4.19 - Energia cinética máxima para partículas de raio 1 a 100 $\mu\text{m}$ . A diferença das massas é de seis ordens de grandeza contra uma ordem de grandeza para a diferença de velocidades.....	132

4.20 - Momento linear máximo para partículas de raio 1 a 100 $\mu\text{m}$ . A partícula de raio de 100 $\mu\text{m}$ apresenta momento linear máximo da ordem de $10^{-6}$ kg m/s enquanto partículas menores que 20 $\mu\text{m}$ apresentam momento linear, pelo menos, duas ordens de grandeza menores.....	132
4.21 - a) energia cinética máxima e b) momento linear máximo para partículas de raio de 1 a 100 $\mu\text{m}$ . A figura é apresentada em escala logarítmica. É possível observar que ambas grandezas possuem dois tipos de comportamento. Partículas menores que 5 $\mu\text{m}$ apresenta comportamento linear enquanto, partículas maiores, o comportamento quadrático.....	134
4.22 - Excentricidade máxima <i>versus</i> tamanho de partícula em órbitas alta, média e baixa ao redor da Terra.....	134
4.23 – Velocidade máxima <i>versus</i> tamanho de partícula em órbitas alta, média e baixa ao redor da Terra. Observe que para partículas maiores ou igual a 20 $\mu\text{m}$ , a velocidade máxima relativa praticamente independe da região orbital inicial desta partícula.....	135
4.24 - a) Energia cinética e b) Momento linear para partículas de raio menor ou igual a 10 $\mu\text{m}$ . Observe que partículas nas regiões de órbitas alta e média ao redor da Terra apresentam, aproximadamente, a mesma intensidade de energia cinética e de momento linear.....	136
4.25 - Tempo para que a partícula entre na região onde a perturbação predominante é o arrasto atmosférico <i>versus</i> tamanho da partícula em órbitas alta, média e baixa ao redor da Terra.....	137

4.26 – Variação da excentricidade para partículas de 1 a 6 $\mu\text{m}$ em órbita, inicialmente, geoestacionária. A curva em vermelho representa PR, em azul $J_2 + \text{PR}$ e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.....	138
4.27 - Comportamento da excentricidade para partícula de 20 $\mu\text{m}$ em diferentes regiões orbitais no intervalo entre 44.000 a 32.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul $J_2 + \text{PR}$ , em amarelo representa $J_2$ e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.....	139
4.28a-f – Comportamento da excentricidade para partícula de 20 $\mu\text{m}$ para as regiões orbitais entre 15.000 e 12.000 km. A curva em vermelho representa PR, 4.27e-j – Comportamento da excentricidade para partícula de 20 $\mu\text{m}$ para as regiões orbitais entre 28.000 a 16.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul $J_2 + \text{PR}$ , em amarelo representa $J_2$ e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.....	140
4.28g-h – Comportamento da excentricidade para partícula de 20 $\mu\text{m}$ para as regiões orbitais 9.000 e 8.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul $J_2 + \text{PR}$ , em amarelo representa $J_2$ e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.....	141
4.29a-d - Mudança na concavidade apresentada no comportamento da excentricidade em função do tamanho e da região orbital da partícula. Observe que partículas maiores que 20 $\mu\text{m}$ esta mudança na concavidade apresentada no comportamento da excentricidade ocorre para distância radial bem próximas.....	143

4.29e-j – Comportamento da excentricidade para partícula de 20 $\mu\text{m}$ para as regiões orbitais entre 28.000 a 16.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul $J_2 + \text{PR}$ , em amarelo representa $J_2$ e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.....	144
4.30a-f - Excentricidade máxima para uma partícula de 20 $\mu\text{m}$ sujeita ao efeito da pressão de radiação(preto) e ao efeito combinado de PR e $J_2$ (vermelho), em diferentes regiões orbitais.....	147
4.30g-h – Comportamento da excentricidade para partícula de 20 $\mu\text{m}$ para as regiões orbitais 9.000 e 8.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul $J_2 + \text{PR}$ , em amarelo representa $J_2$ e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.....	148
4.31 - Comportamento do semi-eixo maior para partícula de 20 $\mu\text{m}$ em diferentes regiões orbitais sujeitas ao efeito combinado de PR e $J_2$ . a) $a_0 = 15.000\text{km}$ ; b) $a_0 = 14.880\text{km}$ ; c) $a_0 = 14.000\text{km}$ ; d) $a_0 = 12.000\text{km}$ .....	149
4.32 - Evolução orbital para uma nuvem de partículas de raio 20 $\mu\text{m}$ , para os instantes $t = 0$ e $t = 1$ dia. Observe que em apenas 1 dia as partículas se dispersam numa região maior que a inicial. Uma ampliação é mostrada em destaque.....	150
4.33 - Evolução orbital para uma nuvem de partículas de 20 $\mu\text{m}$ , para os instantes $2 \leq t \leq 7$ dias. Uma ampliação é mostrada em destaque.....	151

4.34 – Evolução orbital para uma nuvem de partículas de 20 $\mu\text{m}$ , para os instantes $8 \leq t \leq 100$ dias. Observa-se que, para $t \geq 9$ dias, ocorre o comportamento conhecido como “Keplerian Shear”.....	153
4.35 – Evolução orbital para uma nuvem de partículas de 20 $\mu\text{m}$ , para os instantes $150 \leq t \leq 300$ dias. Observe que para $t = 250$ dias apresenta assimetria na distribuição da dispersão destas partículas e para $t = 300$ dias esta assimetria é menor.....	154
4.36 - Evolução orbital para uma nuvem constituída de partículas de 20 $\mu\text{m}$ e 6 $\mu\text{m}$ para os instantes $t = 10$ dias, $t = 50$ dias, $t = 200$ dias e $t = 300$ dias.....	155
4.37 – Evolução orbital, em função das coordenadas $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho 20 $\mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 200, 300 e 360 dias.. .....	156
4.38 – Evolução orbital, em função das coordenadas $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho 20 $\mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes 400, 430, 460, 490, 520 e 550 dias.....	157
4.39 – Evolução orbital, em função das coordenadas $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho 20 $\mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes 1.100, 1.200, 1.300, 1.400, 1.500 e 1.600 dias.....	159
4.40 - Evolução orbital, em função das coordenadas $(x, y)$ , de um anel de partículas de 6 $\mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias.....	161

4.41 - Evolução orbital, em função das coordenadas $(x, y)$ , de um anel de partículas de 6 $\mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800 e 850 dias.....	162
4.42 - Comparação da evolução orbital de um anel constituído de partículas de 6 $\mu\text{m}$ ao redor da Terra para o instante 250 dias, a) considerando e b) não considerando a colisão das partículas com a Terra.....	164
4.43 – Evolução orbital, em função das coordenadas $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho 6 $\mu\text{m}$ , na região entre 40.000 e 45.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 200, 300 e 360 dias. O Objetivo principal desta figura é observar a amplitude na variação da região orbital deste anel de partículas.....	165
4.44 – Evolução orbital, em função das coordenadas $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho 6 $\mu\text{m}$ , na região entre 40.000 e 45.000 km, para os instantes 720, 730, 740, 750, 760 e 770 dias. O Objetivo principal desta figura é observar a amplitude na variação da região orbital deste anel de partículas.....	166
4.45 - Evolução orbital, em função das coordenadas $(x, y)$ , de um anel de partículas de 6 $\mu\text{m}$ , na região entre 40.000 e 45.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias.....	167
4.46 – Evolução orbital, em função das coordenadas $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho 100 $\mu\text{m}$ , na região entre 10.000 e 15.000 km, para os instantes 400, 600, 800, 1.000, 1.200 e 1.400 dias.....	169

4.47 - Evolução orbital de um anel constituído de partículas de 100 $\mu\text{m}$ , na região entre 10.000 e 15.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias.....	170
4.48 - Evolução orbital da densidade de um anel de partículas de 6 $\mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, em função das coordenadas raio orbital ( $r$ ) e longitude ( $\theta$ ), para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.....	172
4.49 - Evolução orbital da densidade de um anel de partículas de 20 $\mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, em função das coordenadas raio orbital ( $r$ ) e longitude ( $\theta$ ), para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.....	173
4.50 - Evolução orbital da densidade de um anel de partículas de 50 $\mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, em função das coordenadas raio orbital ( $r$ ) e longitude ( $\theta$ ), para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.....	175
4.51 - Evolução orbital da densidade de um anel de partículas de 100 $\mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, em função das coordenadas raio orbital ( $r$ ) e longitude ( $\theta$ ), para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.....	177
4.52 - Evolução temporal da densidade radial de um anel de partículas de 6 $\mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.....	178

4.53 - Evolução da densidade radial máxima e mínima de um anel de partículas de 6 $\mu\text{m}$ . Os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima.....	179
4.54 - Evolução da densidade radial máxima e mínima de um anel de partículas de 20 $\mu\text{m}$ . Os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima.....	181
4.55 - Evolução da densidade radial máxima e mínima de um anel de partículas de 50 $\mu\text{m}$ . Os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima.....	184
4.56 - Evolução da densidade radial máxima e mínima de um anel de partículas de 100 $\mu\text{m}$ . Os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima.....	185
4.57 - a) Evolução temporal da região de espalhamento radial para partículas de 6 (pontos), 20 (triângulos), 50 (triângulos em cinza) e 100 $\mu\text{m}$ (quadrados) e b) Região orbital de espalhamento máximo em função do tamanho de partículas.....	186
4.58 - Evolução da densidade azimutal de um anel de partículas de 6 $\mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, para os instantes 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 330 e 360 dias. Esta evolução obedece a uma distribuição gaussiana (linha em verde).....	187
4.59 - Comportamento dos parâmetros $A, B, \tilde{\theta}$ e $\rho_{\theta_0}$ da distribuição gaussiana para o período de 200 dias.....	189

4.60 - Distribuição temporal da densidade radial de um anel de partículas de 6 $\mu\text{m}$ , na região de órbita média ao redor da Terra para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.....	190
4.61 - a) Evolução da região de espalhamento para partículas de 6, 20, 50 e 100 $\mu\text{m}$ e b) Região máxima de espalhamento em função do tamanho de partículas.....	192
4.62 - Comportamento dos parâmetros $A, B, \tilde{\theta}$ e $\rho_{\theta_0}$ da distribuição gaussiana para o período de 200 dias.....	194
4.63 - Distribuição temporal da densidade radial, da região de órbita baixa ao redor da Terra de um anel de partículas de 100 $\mu\text{m}$ , para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias.....	195
4.64 - Comportamento dos parâmetros $A, B, \tilde{\theta}$ e $\rho_{\theta_0}$ da distribuição gaussiana para o período de 200 dias (quadrados). Observa-se que os parâmetros apresentam um ajuste de curva até o instante de 130 dias (linha tracejada).....	196
4.65 - Comparação da evolução da densidade em função do raio orbital( $r$ ) e da longitude( $\theta$ ) de um anel de partículas na região de órbita média para os instantes de 50 e 100 dias.....	198
4.66 - Comparação da evolução da densidade em função do raio orbital( $r$ ) e da longitude( $\theta$ ) de um anel de partículas na região de órbita média para os instantes de 150 e 200 dias.....	199

4.67 - Comparação da evolução da densidade em função do raio orbital ( $r$ ) e da longitude ( $\theta$ ) de um anel de partículas na região de órbita média para os instantes de 250, 300 e 360 dias.....	201
4.68 - Evolução da densidade em função do raio orbital ( $r$ ) e da longitude ( $\theta$ ) de um anel de partículas na região de órbita média para o instante 100 dias.....	202
4.69 - Condições iniciais da nuvem de detritos espaciais proveniente da fragmentação de um satélite da constelação de GPS.....	203
4.70 - Evolução do raio orbital ( $r$ ) em função da longitude ( $\theta$ ) de nuvem de partículas provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para o instante de 130 dias.....	204
4.71 - Quantidade de partículas de uma nuvem provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para os instantes 40, 80, 130 e 180 dias...	206
4.72 - Quantidade de partículas de uma nuvem de provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para os instantes 210, 260, 320 e 360 dias.....	207
4.73 - Quantidade de partículas de uma nuvem provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para o instante de 210 dias em função da razão de massa distribuída por caixa .....	208
4.74 - Quantidade de partículas de uma nuvem de provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para os instantes 210, 260, 320 e 360 dias.....	209

4.75 - Quantidade de partículas de uma nuvem provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para o instante de 210 dias em função da razão de massa distribuída por caixa .....	210
5.1 - Ilustração do ângulo entre a direção do Sol e a direção do pericentro da partícula.....	213
5.2 - Espaço de fase obtido do hamiltoniano (equação (5.7)) para uma partícula de 20 $\mu\text{m}$ sujeita à pressão de radiação e ao achatamento terrestre.....	215
A.1 - Círculo centrado no planeta $P$ , mostrando o plano da órbita da partícula com inclinação $i$ , relativa ao plano orbital do planeta. $\Omega$ é a longitude do nodo ascendente medida em relação à direção de referência $\gamma$ .....	242
A.2 - Gráfico di-log da Força relativa de $\beta$ , $\beta = F_{rad}/F_{Gr}$ em função de partículas de diferentes tamanhos, para três materiais cósmicos significativos (grafite, ferro e basalto) e um material ideal.....	248
B.1 – Representação do potencial gravitacional num ponto $P$ de coordenadas $(X, Y, Z)$ , devido à ação do elemento de massa $dM$ de coordenadas $(x', y', z')$ em um sistema de coordenadas paralelo ao sistema anterior.....	251
B.2 – Projeção da distância $r'$ no eixos $x'$ e $y'$ .....	255

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 – Principais modelos numéricos existentes para descrever a evolução orbital de detritos espaciais.....	75
2.2 – Características de alguns impactos ocorridos no período de 24 de fevereiro de 1999 a 08 de junho de 2000. ....	76
4.1 – Sumário dos resultados das figuras 4.14 – 4.19.....	125
4.2 - Valores dos parâmetros do ajuste de curva para a densidade azimutal - órbita alta .....	191
4.3 - Valores dos parâmetros do ajuste de curva para a densidade azimutal - órbita média.....	197



## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$  - parâmetro da distribuição gaussiana

$\bar{A}$  - momento de inércia

$a$  - semi-eixo maior

$B$  - parâmetro da distribuição gaussiana

$\bar{B}$  - momento de inércia

$\bar{C}$  - momento de inércia

$c$  - velocidade da luz no vácuo

$D$  - produto de inércia

$E$  - produto de inércia

$E_{cmáx}$  - energia cinética máxima

$\mathcal{E}$  - taxa de energia total

$e$  - excentricidade

$F$  - força de pressão de radiação total (soma das parcelas da pressão de radiação solar, do efeito Doppler e do arrasto de Pynting-Robertson)

$F_{Gr}$  - força gravitacional da Terra

$F_{P-R}$  - força de Poynting-Robertson

$F_{rad}$  - força de pressão de radiação solar

$\bar{F}$  - produto de inércia

$f$  - anomalia verdadeira

$G$  - constante gravitacional universal

$H$  - área da seção de choque

$\bar{H}$  - Hamiltoniano

$h$  - momento angular

$\bar{h}$  - variável não singular

$i$  - inclinação orbital com respeito ao plano equatorial

$J_n, J_{nm}$  - são coeficientes numéricos do potencial terrestre

$J_2$  - coeficiente de achatamento terrestre  
 $\bar{k}$  - variável não singular  
 $M$  - anomalia média  
 $M_{Sol}$  - massa do Sol  
 $M_{\oplus}$  - massa da Terra  
 $M_{\bullet}$  - massa do corpo perturbador  
 $m$  - massa da partícula  
 $n$  - movimento médio da partícula  
 $n_{Sol}$  - movimento médio do Sol  
 $p$  - momentum da partícula  
 $pr$  - pressão estática  
 $p_{máx}$  - momento linear máximo  
 $P_{nm}$  - polinômios associados de Legendre  
 $pot$  - potência  
 $Q_{Abs}, Q_{Esp}$  - quantidade de radiação da luz absorvida e espalhada  
 $Q_{PR}$  - coeficiente da pressão de radiação  
 $R$  - distância Terra-Sol  
 $R'$  - distância heliocêntrica em U.A.  
 $R_{\oplus}$  - raio equatorial da Terra  
 $R_{\bullet}$  - raio equatorial do corpo perturbador  
 $r$  - raio orbital  
 $r_a$  - raio orbital do apogeu  
 $r_{máx}$  - raio orbital máximo  
 $r_{mín}$  - raio orbital mínimo  
 $r_p$  - raio orbital do perigeu  
 $r_{\rho_{máx}}$  - raio orbital mais denso  
 $r_{\rho_{mín}}$  - raio orbital menos denso

$\mathfrak{R}$  - função perturbadora

$\mathfrak{V}$  - velocidade da partícula ao redor do planeta

$S$  - intensidade do fluxo de radiação solar

$\hat{S}$  - vetor unitário radial à fonte de radiação

$S_0$  - constante de radiação solar

$s$  - tamanho de partículas

$T$  - período orbital da Terra em torno do Sol

$t$  - tempo

$v$  - velocidade relativa

$v_{máx}$  - velocidade máxima

$\mathfrak{V}_{\oplus}$  - velocidade do planeta ao redor do Sol

$\mathfrak{v}$  - velocidade da partícula

$\wp$  - matriz rotação

$\alpha$  - ângulo entre a direção do Sol e a direção do pericentro da partícula.

$\bar{\alpha}$  - cosseno diretor

$\beta$  - parâmetro que depende da densidade e do raio da partícula

$\bar{\beta}$  - cosseno diretor

$\mathfrak{a}, \frac{da}{dt}$  - variação do semi-eixo maior orbital

$\frac{de}{dt}$  - variação da excentricidade orbital

$\Delta r_{\max}$  - espalhamento máximo

$\varepsilon$  - obliquidade da eclíptica

$\phi$  - latitude

$\gamma$  - movimento de rotação da Terra

$\bar{\gamma}$  - cosseno diretor

$\lambda$  - longitude

$\lambda_0$  - comprimento de onda

$\lambda_{Sol}$  - longitude do Sol, medida no plano orbital da Terra

$\lambda_{22}$  - coeficiente numérico do potencial terrestre

$\mu$  - constante dada pelo produto da constante gravitacional universal e a massa do corpo perturbador

$\omega$  - argumento do pericentro da partícula

$\Omega$  - longitude do nodo

$\sigma$  - parâmetro razão entre a força de pressão de radiação solar e a força gravitacional da Terra

$\psi$  - anomalia excêntrica

$\rho$  - densidade de partículas

$\rho_d$  - densidade

$\rho_p$  - densidade da partícula

$\rho_r$  - densidade radial de partículas

$\rho_{r_{max}}$  - densidade radial máxima

$\rho_{r_{min}}$  - densidade radial mínima

$\rho_\theta$  - densidade azimutal de partículas

$\rho_{\theta_0}$  - parâmetro da distribuição gaussiana

$\tau_{P-R}$  - tempo de colapso da partícula para o sistema heliocêntrico e planetocêntrico

$\theta$  - longitude verdadeira

$\tilde{\theta}$  - parâmetro da distribuição gaussiana

$g/cm^3$  - grama por centímetros cúbicos

kg - quilograma

km – quilômetro

km/s - quilômetros por segundo

m/s - metros por segundo

$\mu m$  – micrometro

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ARGOS	- Advanced Research and Global Observation Satellite
CNR	- Consiglio Nazionale delle Ricerche
CPS	- Centre for Programme Studies
DAMAGE	- Debris Analysis and Monitoring Architecture for the GEO
DERA	- Defence Evaluation and Research Agency
DSMC	- Direct Simulation Monte Carlo
ESA	- European Space Agency
EURECA	- European Retrievable Carrier
GEO	- Geostationary Earth Orbit
GORID	- Geostationary Orbit Impact Detector
GTO	- Geosynchronous Transfer Orbit
HAX	- Haystack Auxiliary Radar
HST-SA	- Hubble Space Telescope
IDES	- Integrated Debris Evolution Suite
LDEF	- Long Duration Exposure Facility
LEGEND	- LEO-to-GEO Environment Debris Model
LEO	- Low Earth Orbit
LMT	- Liquid Mirror Telescopes
MASTER	- Meteoroid and Space Debris Terrestrial Reference
MEO	- Media Earth Orbit
MULPEX	- Multi-Layer Polymer Experiment
NES	- Near Earth Space
NORAD	- North American Aerospace Defense
ORDEM	- Orbital Debris Engineering Model
PR	- Pressão de Radiação
PR + J <sub>2</sub>	- efeito combinado do achatamento com a pressão de radiação
RSA	- Russian Space Agency

SIMPLE	- Stochastic Impressionistic Low Earth
SIMPLE	- Stochastic Impressionistic Low Earth
SSN	- U. S. Space Surveillance Network
U.A	- Unidade Astronômica

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Durante as últimas quatro décadas de exploração e utilização do ambiente de satélites em órbitas ao redor da Terra, constatou-se a importância de se ter o conhecimento do fluxo e da dinâmica de partículas de meteoróides e detritos espaciais que possam afetar o desempenho adequado de missões espaciais (satélites, sondas, ônibus espacial, etc.).

Partículas de meteoróides caracterizam-se como sendo partículas naturais, observadas ao redor do Sol, em órbitas próximas da Terra, e que podem ser provenientes de cometas, impactos entre asteróides, poeira cósmica, etc. Seu tamanho é consideravelmente menor do que de um asteróide. Os meteoróides, geralmente, não são localizados e catalogados individualmente (NASA, 1996). Observações feitas há 10 anos atrás sugeriam que aproximadamente 200 quilogramas de meteoróides se encontravam a uma altitude de 2.000 quilômetros (NASA, 1995).

Os detritos espaciais são materiais provenientes de objetos artificiais como, por exemplo, a explosão de um satélite, os detritos de uma missão espacial, a colisão entre corpos artificiais que estão orbitando ao redor da Terra, etc. A estimativa, há aproximadamente 1 ano atrás, era de que existiam mais de 9.064 detritos espaciais maiores que 10 centímetros orbitando ao redor da Terra (NASA, 2004).

Segundo o relatório NASA (1995), os detritos espaciais são classificados em três grupos:

- a) objetos maiores que 10,0 centímetros em diâmetro, os quais são geralmente referidos como *objetos grandes*. Estes podem ser habitualmente detectados, localizados e catalogados;

- b) objetos com diâmetro entre 1,0 e 10,0 centímetros, os quais são geralmente referidos como *objetos de risco*. Estes não podem, atualmente, ser localizados e catalogados. Dependendo da sua velocidade de impacto, podem causar danos catastróficos às missões espaciais;
- c) objetos menores que 1,0 centímetro em diâmetro, os quais são mais freqüentemente chamados de *restos menores* ou *micro restos*.

Em mais de 40 anos de atividades espaciais aproximadamente 38% dos detritos espaciais maiores que 10 centímetros catalogados são produzidos pela fragmentação de satélites. Estudos da população de satélites da Terra sugerem que mais de 95% de objetos menores que 1 centímetro em diâmetro são originários da fragmentação de satélites. Este número é de aproximadamente 100.000 detritos espaciais (NASA, 2002). Na Figura 1.1 é apresentada uma ilustração da população de detritos que orbitava a Terra em 1989 (ESA, 1999).

O mais significativo evento de produção de detritos espaciais, num período de quase quatro anos, ocorreu em 11 de março de 2000 (NASA, 2000) quando o estágio superior do propulsor chinês Longa Marcha 4, há quase 5 meses em órbita, desintegrou-se em mais de 300 fragmentos, grandes o suficiente para serem localizados pela U. S. Space Surveillance Network (SSN).

Destes eventos de fragmentação de satélites e de restos de estágios superiores, sugere-se que apenas uma ou duas destas explosões são responsáveis, a princípio, pela população na faixa de 70.000 a 120.000 objetos maiores que 1,0 centímetro. A primeira fragmentação de um satélite ocorreu em junho de 1961 (ESA, 1999) e, instantaneamente, a população de detritos espaciais sofreu um aumento de mais de 400%.

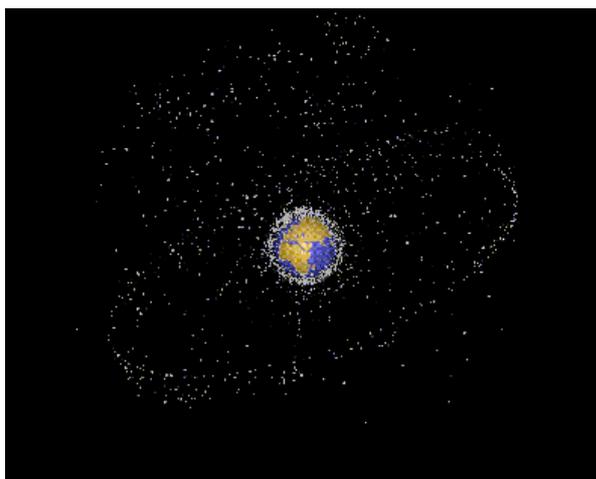


FIGURA 1.1 – Ilustração de objetos catalogados em 1989.

FONTE: ESA (1999).

O aumento de fragmentos de satélites ocorrido nas décadas de setenta e oitenta contribuiu para ampliar a pesquisa internacional sobre as características e conseqüências de tais eventos. Na Figura 1.2, apresenta-se a magnitude das 10 maiores nuvens de restos orbitais até maio de 2001 (Anz-Meador et al., 2001).

Outra fonte de detritos espaciais pode ser atribuída a satélites artificiais onde ocorre a degradação do material devido ao oxigênio atômico, ao aquecimento solar e à radiação solar. Essa degradação pode resultar na produção de partículas tais como flocos da pintura e pedaços do isolante em multicamadas que se desprendem dos objetos maiores. Além disso, os motores contínuos de foguetes, que são utilizados no satélite, produzem vários resíduos, incluindo embalagens do motor, partículas da exaustão do óxido de alumínio, resíduos do forro do motor, fragmentos do combustível e pedaços do cone de exaustão, resultantes da erosão durante a queima, que são ejetados e podem permanecer em órbita. E, finalmente, um fator muito importante para geração dos meteoróides e detritos espaciais é a ruptura de objetos, sendo causada, geralmente, por explosões e colisões.

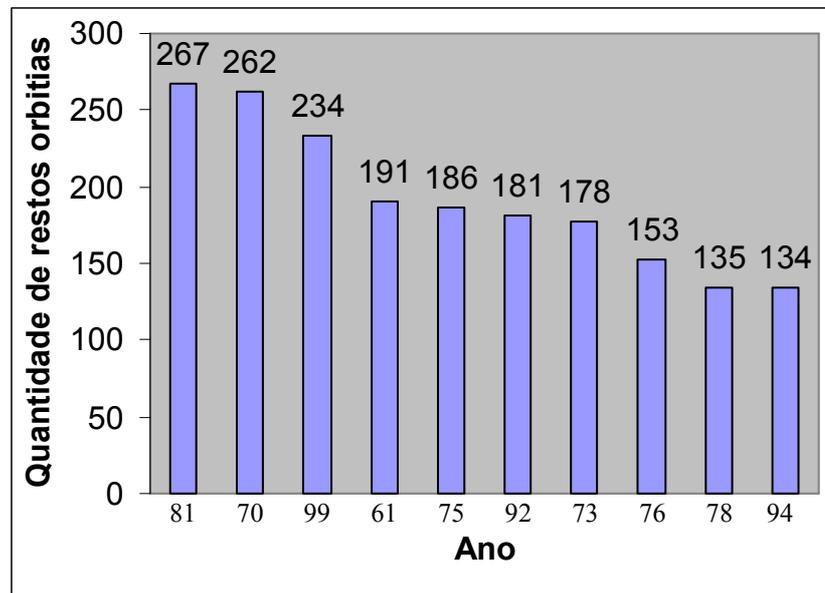


FIGURA 1.2 - Magnitude das 10 maiores nuvens de restos em órbita até maio de 2001. Neste gráfico apresenta-se a estimativa do número de restos orbitais por ano.

FONTE: Adaptada de Anz-Meador et al. (2001).

Quando ocorre uma concentração de partículas ou de fragmentos de detritos em uma região bem definida do espaço, constitui-se uma *nuvem de detritos*. Tais nuvens são formadas sempre que os detritos são criados por uma única fonte, como ocorre, por exemplo, quando os estágios superiores rejeitados são cercados por uma nuvem de partículas. Estas partículas são liberadas com o tempo pela degradação de vários materiais, tais como a pintura e o isolamento.

Sempre que uma separação orbital ocorre, uma nuvem de detritos é formada imediatamente. Estas formam, primeiramente, um elipsóide tridimensional em expansão. O centro da nuvem de detritos move-se ao longo de uma órbita bem definida, que pode ser idêntica à órbita do objeto original. No transcorrer do tempo, a nuvem de

detritos pode ocupar, eventualmente, a órbita inteira e atingir todos os outros satélites próximos.

Devido às leis do movimento orbital e aos processos físicos envolvidos em uma explosão ou em uma colisão, os fragmentos não são espalhados uniformemente na nuvem de detritos. Em alguns locais, a densidade espacial dos fragmentos pode ser muito maior do que em outras. Quando a densidade espacial dos fragmentos é elevada, o risco de uma colisão com os satélites que passam através da nuvem é aumentado. Como as velocidades dos detritos fragmentados são diferentes, os fragmentos podem formar uma nuvem toroidal que, eventualmente, evolui até limites máximos de inclinação e de altitude. Determinadas regiões da nuvem de detritos podem ser constringidas a quase uma ou duas dimensões.

A quantidade de detritos em órbita depende da taxa de criação e da taxa de remoção destes. Atualmente, um dos principais mecanismos naturais de remoção é a deterioração orbital com o arrasto atmosférico, que conduz finalmente à reentrada na atmosfera terrestre. Isto é eficaz somente em uma escala restrita de órbitas baixas da Terra (altitudes abaixo de 200km). Em órbitas mais elevadas, os objetos levam de centenas a milhares de anos para reentrar e, assim, não há nenhum mecanismo eficaz de remoção. Historicamente, a taxa de criação dos detritos tem superado a taxa de remoção, conduzindo a um crescimento líquido na população dos detritos em órbita baixa da Terra de aproximadamente 5% por ano (CETS,1995).

Neste trabalho está sendo considerado um cinturão hipotético de matéria ao redor da Terra que pode estar em órbita baixa, média ou alta. Este cinturão seria composto de uma variedade de tamanhos de partículas, da ordem de micrometros até centímetros. Sabe-se que as diferentes perturbações afetam uma partícula, de forma mais ou menos intensa, dependendo da altitude e do tamanho desta. Assim, isto pode produzir, para um dado instante, regiões com alta densidade de partículas e outras praticamente sem partículas. Isto sugere que deve haver um tempo de vida médio destas estruturas que

possam aparecer no cinturão de partículas ao redor da Terra. A obtenção destas estruturas e tempo de duração das mesmas é extremamente útil no planejamento de missões espaciais. Particularmente, pode-se ainda considerar casos como o da explosão de um satélite geostacionário gerando uma nuvem de partículas, com uma dada distribuição de tamanhos, e, então, obter as estruturas geradas a partir desta nuvem, a sua evolução temporal e as suas possíveis conseqüências, como a probabilidade de colisão de um satélite com partículas desta nuvem.

Portanto, o objetivo desse trabalho é obter um estudo global das diversas perturbações existentes aplicadas ao problema de nuvens de detritos espaciais, de modo que se possa obter um mapeamento de densidade/fluxo de partículas em função do tempo, da região orbital e do raio das partículas. Com isso, pode-se descrever o comportamento orbital de uma grande quantidade de partículas que tenham surgido a partir da explosão de um satélite ou de outra fonte. Com esse conhecimento, pode-se mapear, em função do tempo, os locais mais críticos do espaço, isto é, com maior densidade de partículas.

A metodologia utilizada neste trabalho foi:

a) Estudo da teoria envolvida em cada uma das perturbações a ser considerada

Partículas que orbitam ao redor da Terra estão sujeitas a diversas perturbações tais como arrasto atmosférico, pressão de radiação solar, arrasto de Poynting-Robertson, achatamento terrestre, força eletromagnética, re-emissão térmica, etc. A intensidade destas perturbações depende da altitude e/ou tamanho das partículas entre outras coisas. Então, o estudo preliminar teve como objetivo definir as perturbações que seriam consideradas para cada condição inicial escolhida;

b) Simulações numéricas determinísticas das equações do movimento obtidas do estudo anterior

Nesta fase foram feitas simulações numéricas das equações do movimento, considerando o sistema dinâmico planar Terra – partícula, e cada uma das

perturbações isoladamente. Estas simulações foram feitas para diferentes altitudes e tamanhos de partículas. As integrações numéricas foram feitas utilizando o integrador numérico Gauss-Radau (Everhart, 1985);

c) Comparação dos resultados numéricos com os modelos analíticos conhecidos

Os resultados obtidos das simulações numéricas foram comparados com modelos analíticos previamente estudados na primeira etapa deste trabalho. Esta foi uma ferramenta utilizada para analisar os resultados e explicar as situações onde estes podiam convergir ou divergir;

d) Análise dos resultados das simulações numéricas para o caso de nuvens

Nesta etapa, as análises e os estudos feitos para uma partícula foram exploradas e expandidas para o caso de uma nuvem de partículas, com o objetivo ter uma noção de conjunto e não de partículas individuais. O resultado esperado para o efeito provocado neste conjunto de partículas sujeito apenas a uma perturbação apresentou regiões onde a densidade de partículas variam com a altitude ao longo do tempo;

e) Composição de mais de uma perturbação

Nesta fase foram feitas simulações numéricas para partículas considerando perturbações atuando em conjunto, isto é, as partículas estavam sujeitas a mais de uma perturbação simultaneamente;

f) Estudo analítico da composição das perturbações

O estudo analítico feito na primeira etapa serviu como base para esta fase. Este estudo analítico foi feito utilizando as equações de Gauss para obter a variação dos elementos orbitais e;

g) Composição de um mapeamento global do problema

Obteve-se um mapeamento temporal de densidades de nuvem de detritos espaciais, altitudes e tamanhos de partículas.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 – Aspectos Gerais

A recuperação de várias astronaves na última década, principalmente a do satélite Long Duration Exposure Facility (LDEF), que ficou exposto em uma atitude não rotacional estabilizada por gradiente de gravidade, de abril de 1984 até janeiro de 1990, forneceu informações sobre a direção dos fluxos de detritos espaciais e meteoróides em órbita baixa da Terra (LEO). Aproximadamente 70.000 objetos, com diâmetro da ordem de 2,0 centímetros, foram estimados entre 850 e 1.000 quilômetros de altitude. Abaixo de 2.000 quilômetros, aceita-se, geralmente, que a população dos detritos espaciais predomina sobre a população natural de meteoróides, para objetos de diâmetro maiores que 1,0 milímetro. Os dados obtidos da recuperação do satélite LDEF estimularam o desenvolvimento de modelos numéricos para caracterizar o ambiente orbital de partículas nesta região e, desta forma, prever os riscos de impactos contra as astronaves e, conseqüentemente, proteger os satélites. Dentre os trabalhos com este tipo de modelamento pode-se citar:

- ◆ Kessler et al. (1989), que fizeram ajustes numéricos nas curvas obtidas com os dados do LDEF, considerando objetos grandes, isto é, maiores que 10 cm;
- ◆ Flury et al. (1992), Kessler (1990), McDonnell e Ratcliff (1992), que demonstraram que os micro detritos predominam em órbitas de alta excentricidade;
- ◆ Green et al. (1993) e Green e McDonnell (1992), que determinaram o fluxo dos detritos espaciais onde a população foi representada pelas órbitas de 6.600 detritos catalogados, utilizando os dados de Kessler et al. (1989);

- ◆ McBride et al. (1999), que apresentaram os dados do fluxo de partículas que atingiram o satélite LDEF e desenvolveram um modelo para prever os danos a este satélite.

No caso do estudo de meteoróides, que são partículas heliocêntricas cujas informações detalhadas sobre sua população e distribuição de seus elementos orbitais não estão completas, a aplicação dos modelos de Staubach et al. (1997) e Berthoud e Mandeville (1997) mostrou-se pouco consistente quando comparados com os valores observados. Nesse caso, o fluxo de meteoróides era maior do que o fluxo total na face leste do LDEF, para partículas de raio da ordem de 6,0  $\mu\text{m}$  (Staubach et al., 1997). Os modelos do fluxo de partículas dependem da razão da frequência de colisões por unidade de área e, diretamente, da velocidade de colisão das partículas.

Uma outra fonte de dados para o desenvolvimento de modelos numéricos foi a recuperação das superfícies do satélite artificial “Solar Maximum Mission”, que apresentavam um grande número de crateras devido a impactos a altas velocidades. Esta recuperação foi feita em abril de 1984 pelos tripulantes do ônibus espacial do vôo 41-C. A partir destes dados, supondo o satélite orbitando a uma altitude de 500 a 570 quilômetros, Laurance e Brownlee (1986) analisaram o fluxo de meteoróides e de detritos espaciais. Eles concluíram que para partículas de raio da ordem de 1,0  $\mu\text{m}$ , o fluxo de detritos espaciais excede o fluxo de meteoróides em duas ordens de magnitude. Entretanto, ao se considerar partículas de raio da ordem de 10  $\mu\text{m}$ , os dois fluxos são similares. Estes autores sugerem que a discrepância entre estas duas medidas seria uma indicação de que os fluxos variam sensivelmente com o tempo ou em função da altitude.

Considerando os dados obtidos e/ou observados de outros equipamentos espaciais, que ficaram expostos em inúmeras faixas de altitudes, e equipamentos que foram desenvolvidos para a detecção destas partículas, pode-se citar várias pesquisas desenvolvidas, dentre elas:

- ◆ Grün et al. (1985), que basearam seus estudos em dados observacionais e de penetração de meteoróides no satélite PEGASUS, para obter um novo modelo analítico do fluxo de meteoróides, originários da Lua ou interplanetários. Este novo modelo re-avalia o tamanho da distribuição heliocêntrica de meteoróides e analisa a provável natureza e origem da matéria de meteoróides. O raio considerado situava-se entre 50 e 100  $\mu\text{m}$  e as perturbações deveram-se a colisões mútuas, pressão de radiação e arrasto de Poynting-Robertson. Concluíram que pequenas partículas (raio da ordem de 4,0  $\mu\text{m}$ ) são eficientemente removidas da órbita pela pressão de radiação;
  
- ◆ Stansbery et al. (1995), que basearam seus estudos em dados obtidos através do sistema de radares Haystack. Os dados revelaram uma população grande de detritos entre 850 – 1.000 km de altitude e que o tamanho da maioria destes é menor que 3,0 cm de diâmetro, sendo estes possivelmente esféricos;
  
- ◆ Grün et al. (1997) desenvolveram um modelo, utilizando os dados “in situ” das sondas Galileu e Ulisses, para obter informações do tipo de fluxo de partículas a distâncias heliocêntricas de 0,7 até 5,4 U.A. Para analisar e comparar os resultados da Galileu e Ulisses, foi desenvolvido um modelo baseado no modelo de Divine (1993). No modelo destes foram consideradas as medidas de velocidade e o efeito da pressão de radiação em pequenas partículas. Eles descobriram que micro meteoróides interplanetários, com raio da ordem de 0,02 a 50  $\mu\text{m}$ , são encontrados principalmente em torno de 3 U.A. Partículas inter-estelares, com raio da ordem de 0,09 a 0,4  $\mu\text{m}$ , foram identificadas além de 3 U.A., perto do plano eclíptico, e além de 1,8 U.A., para altas latitudes eclípticas ( $>50^\circ$ );
  
- ◆ McDonnell et al. (1997), que estudaram dados obtidos a partir de experimentos de impactos em satélites (TiCCE/Eureca), visando determinar o fluxo de partículas de dimensões milimétricas a baixas altitudes orbitais. Diante de seus resultados

puderam estimar que a população de detritos espaciais não é tão dominante quanto se previa. Nestes estudos foi considerado o efeito do arrasto atmosférico no espalhamento dos detritos espaciais;

- ◆ Blagun et al. (1999), que descreveram algumas atividades da Agência Espacial Russa como o monitoramento do ambiente Near Earth Space (NES), incluindo o cinturão geoestacionário, a criação de um sistema de informação unificado para coletar e armazenar informações sobre eventos perigosos como colisões ou re-entrada não controlada de objetos espaciais, o desenvolvimento de proteção de espaçonaves contra impactos de partículas à hipervelocidade e de medidas para reduzir o crescimento destas em NES e o desenvolvimento de estratégias e medidas de prevenção contra explosões durante o lançamento e de redução do tempo orbital de lançamento;
  
- ◆ Flury et al. (2000), que verificaram, através das lentes de um telescópio modelo Zeiss, a situação de pequenos detritos no anel de órbita geoestacionária da Terra. Cerca de 800 satélites e estágios de foguetes foram inseridos no anel geoestacionário, ou próximo dele, ao longo dos anos, mas aproximadamente 270 destes ainda estão em operação. Este fato torna essa uma região de grande risco de colisões uma vez que não existem mecanismos efetivos de remoção. As observações levaram à conclusão de que a população de detritos neste anel está crescendo e descrevendo complicados padrões de movimento, com periodicidade entre um dia e 53 anos. As primeiras observações mostraram uma população de detritos de tamanho entre 10 a 100 cm nesta região;

- ◆ Anz-Meador (2002), que apresentou resultados para tentar validar modelos de fragmentações dos detritos espaciais para tamanhos de partículas maiores que 1,0 mm, EVOLVE e LEGEND, utilizando os dados obtidos de U. S. Space Surveillance Network (SSN) e dos radares Haystack , Haystack Auxiliary Radar (HAX) e Goldstone;
- ◆ Bendisich et al. (2002), sabendo que a utilização do modelo Meteoroid and Space Debris Terrestrial Reference (MASTER) está ligada ao estudo das distribuições de velocidade e de densidade espacial de partículas, descreveram e apresentaram os resultados da versão MASTER2001. Esta nova versão do modelo prevê a caracterização da população de detritos espaciais passada, atual e futura, através de um novo modelo de fragmentação;
- ◆ Landgraf et al. (2002), que utilizaram o modelo Meteoroid and Space Debris Terrestrial Reference (MASTER)/ESA para determinar as características de pequenos detritos espaciais em órbita baixa da Terra e compararam os resultados obtidos destas simulações com os dados observacionais obtidos pelo radar EISCAT;
- ◆ McDonnell (2002), que desenvolveu um processo de detecção que fornece uma gama de possibilidades de estudo dos processos de impacto de objetos, como micro detritos espaciais e meteoróides, devido às diferentes velocidades de tais partículas. Tal processo possui uma qualidade nos dados obtidos que permite desenvolver métodos para reduzir os danos causados por estas partículas. Dessa forma, a eficiência na detecção e a confiabilidade nos dados, associada com a acuracidade na dedução dos parâmetros de impacto, permite o estudo de seus parâmetros podendo tornar viável uma melhor caracterização da população dessas partículas em laboratório. Para tal estudo, foram colhidos dados das sondas Ulysses, Galileu, GORID, Hiten e Debie 1, ainda em operação;

- ◆ Worms et al. (2002), que utilizaram o conceito de detecção LIBRIS para medir parâmetros como velocidade e tamanho de detritos espaciais, que possam vir a danificar espaçonaves e outros tipos de objetos de uso humano, que encontram-se em órbita. Existe, pois, uma população desses detritos em órbita terrestre baixa, cuja caracterização é deficiente por meios ópticos, na faixa de 100,0 micrometros a 1 mm, e por radares terrestres, em torno de 10,0 centímetros de diâmetro. Outro fator relevante sobre tais detritos é que partículas maiores que 100,0 micrometros são raramente rastreadas por detectores de impacto cuja superfície de detecção é muito pequena, prejudicando mais ainda a caracterização desta população;
  
- ◆ Howard et al. (2003), que verificaram a existência de uma nova família de anéis de detritos carregados em torno de Marte e transversos ao plano eclíptico. Tais órbitas são estáveis com relação à perturbação causada pelo achatamento do planeta e pelo vento solar. O tempo de vida das órbitas individuais dos detritos é limitado pela força de Lorentz e pelo arrasto de Poynting-Robertson, podendo exceder 1000 anos. Os detritos podem ter sido originados por colisões de micrometeoróides com uma das luas de Marte. Algumas destas pequenas partículas (menores ou iguais a 1,0  $\mu\text{m}$ ) podem ser observadas pelo detector de detritos a bordo da espaçonave NOZOMI;
  
- ◆ Christiansen et al. (2004), que fizeram observações e análises dos danos devidos ao impacto de detritos e micrometeoróides na Space Shuttle Orbiter, utilizando recursos visuais e análise por dispersão de raios-X. Os dados obtidos foram analisados utilizando o modelo ORDEM 2000;
  
- ◆ Johnson (2004a) verificou que, mais de 40% das missões espaciais ocorrerem na região GEO no período de 2000 a 2003, há uma tendência de acúmulo de objetos em Órbitas de Transferência Geosíncrona (GTO). O tempo de estadia de detritos em órbitas do tipo GTO pode ser influenciado pelos valores iniciais do perigeu e da inclinação, variando de 1 mês a mais de 100 anos;

- ◆ Johnson (2004b), que estudou a variação da quantidade de detritos grandes (maiores que 10 cm) gerados pela fragmentação de espaçonaves e partes de foguetes, além de pequenas partes de satélites que se desprendem devido à mudança de órbita ou quando da impulsão destes. Tais detritos desprendem-se à baixa velocidade do satélite e suas dimensões estão relacionadas com a razão da área pela massa destes detritos;
  
- ◆ Kearsley et al. (2004), que estudaram resíduos de impactos de pequenas partículas a hipervelocidade, em LEO, utilizando o Multi-Layer Polymer Experiment (MULPEX). Este equipamento consiste de lâminas finas (espessura de 8 a 40  $\mu\text{m}$ ), sobre as quais incidem as partículas. O impacto é facilmente reconhecido por meio de dispersão de raios-X, podendo causar derretimento ou ruptura da base. Verificaram, também, que alguns resíduos ainda permaneciam intactos e aderidos à estrutura do material da base.

Existem, ainda, estudos numéricos com o objetivo de explicar a dinâmica de pequenas partículas ao redor de corpos celestes, a priori, sem se basear em observações ou dados obtidos de algum experimento. Com este tipo de abordagem, pode-se citar os seguintes trabalhos:

- ◆ Ananthasayanam et al. (2002), que criaram o modelo Stochastic Impressionistic Low Earth (SIMPLE), aplicável a objetos a uma altitude de 2000 km e excentricidade menor que 0,2, englobando 75% dos grandes objetos catalogados pelo North American Aerospace Defense (NORAD). Este modelo utiliza um modelo matemático simples, um menor número possível de parâmetros e uma estimativa das probabilidades de colisão no decorrer do tempo. Este modelo é similar ao ORDEM96, tendo, entretanto, um número de parâmetros menor que este,

para a descrição das distribuições da altitude. O SIMPLE pode ser usado para estimar a densidade espacial de detritos e seu fluxo em função da altitude;

- ◆ Mukai et al. (1974), que estudaram um modelo de nuvem de poeira circunsolar, considerando as propriedades ópticas e termodinâmicas do material e da dinâmica das partículas. Verificaram que existem nuvens heliocêntricas de partículas de grafite, a uma distância próxima a 4 raios solares, e de silicato, próxima a 9 raios solares. Tais concentrações espaciais de partículas são causadas por estabilização de suas órbitas por sublimação. Outros materiais como gelo também foram observados nesse estudo;
  
- ◆ Canup et al. (1993), que verificaram a distribuição, por tamanho, de detritos nas proximidades de satélites naturais que agem como fonte e sorvedouro para partículas formadas basicamente pelo bombardeamento de micrometeoróides e pelo impacto dos detritos com o satélite. O movimento orbital destas é modificado pela pressão de radiação e pelo achatamento planetário que produzem perturbações periódicas na excentricidade. Simulações numéricas mostraram que as perturbações podem levar a uma distribuição por tamanho de detritos determinada pela intensidade da perturbação e pelas dimensões e raio orbital do satélite. Neste estudo foram negligenciados a ação de forças eletromagnéticas e os efeitos do arrasto atmosférico e consideradas somente partículas de dimensões maiores ou iguais a  $10\mu\text{m}$ ;
  
- ◆ Hamilton et al. (1996), que investigaram as trajetórias de partículas-detritos sub-micrométricas produzidas por colisões de asteróides e nuvens de partículas que são ejetadas do sistema solar por forças eletromagnéticas. As partículas de menor tamanho partiram de órbitas circulares não inclinadas com a nuvem, alcançando grandes altitudes eclípticas durante a ação de campos magnéticos, em especial o solar. Quando este campo é revertido, as partículas são confinadas ao plano eclíptico e escapam menos do sistema solar. Tais partículas tendem a permanecer em

latitudes acima de  $70^\circ$  a distâncias entre 2,0 e 5,0 U.A., devido à ação da força eletromagnética. As conclusões foram obtidas a partir da integração das equações de movimento por um modelo numérico, observando partículas de  $1,0 \mu\text{m}$  e menores;

- ◆ Nazzario e Hyde (1997), que utilizaram técnicas de integração numérica para verificar a possibilidade de formação de partículas de poeira, com raios maiores que  $20 \mu\text{m}$ , sob a forma de um toróide, em torno de Marte. Os elementos orbitais, as posições e as velocidades são influenciados pela gravidade de Marte (incluindo o termo  $J_2$ ) e pela pressão de radiação. As simulações empregaram um sistema de coordenadas inerciais no plano orbital de Marte e centrado no planeta. Os resultados mostraram que a excentricidade varia proporcionalmente com a rotação de Marte em torno do Sol;
  
- ◆ Krivov e Hamilton (1997), que apresentaram um novo modelo de cinturões de poeira que existiriam próximos às órbitas das luas de Marte – Phobos e Deimos. Foram utilizados resultados obtidos com modelos de impacto contemporâneos e empregado um novo código numérico para construir e visualizar a estrutura tridimensional, variável no tempo e dependente do tamanho do detrito. O modelo foi dividido em duas etapas: a primeira sendo a construção de uma distribuição de densidade relativa e a segunda, a densidade de partículas em função do tamanho e da localização do detrito. A primeira etapa foi solucionada com bastante precisão enquanto que na segunda, surgiram muitas variáveis e incertezas. Estas incertezas surgiram do fato de que as propriedades estruturais dos satélites marcianos e os processos de impacto por hipervelocidade ainda estão pouco caracterizados. A detecção dos anéis marcianos, mesmo com medidas locais ou imagens obtidas de espaçonaves, reduziriam estas incertezas;
  
- ◆ Il'in e Voshchinnikov (1998), que calcularam a força de pressão de radiação em partículas não esféricas ao redor de uma gigante vermelha. Neste trabalho foram consideradas partículas de diferentes tamanhos, razões de aspecto e composições

químicas. Eles descobriram que a força de pressão de radiação é, normalmente, maior para uma partícula não esférica de raio menor ou igual a 1,0 micrometro do que para uma partícula esférica de raio semelhante;

- ◆ Dikarev e Krivov (1998), que investigaram analítica e numericamente a dinâmica das partículas do anel E de Saturno, sujeitas às perturbações causadas pela pressão de radiação solar, achatamento planetário, força de Lorentz e arrasto devido ao plasma. Este último influencia diretamente na dinâmica dos grãos de poeira e na geometria do anel. O modelo desenvolvido por Dikarev e Krivov explica o tamanho radial do anel por um aumento secular no semi-eixo maior da órbita do grão de poeira. Entretanto, a eficiência do modelo é comprometida devido aos mecanismos de ejeção de partículas. Dikarev e Krivov verificaram que o satélite Enceladus é uma fonte de poeira para o anel E de Saturno possivelmente devido à presença de vulcões e geiseres em sua superfície. Compararam seus resultados às imagens obtidas pela Voyager1 e Voyager2;
  
- ◆ Krivov et al. (1998), que criaram um modelo da dinâmica e da evolução física da região mais interior da nuvem zodiacal. Neste modelo numérico foram consideradas partículas esféricas de diversos tamanhos e compostas por dois tipos de materiais (silício e carbono), sujeitas às perturbações da gravidade solar, da pressão de radiação, do arrasto de Poynting-Robertson, da sublimação e da força de Lorentz. Eles concluíram que a diminuição do tamanho das partículas e a dinâmica destas no plano orbital pode ser bem descrita, levando em conta a gravidade solar e a força de pressão de radiação, juntamente com o processo de sublimação. No entanto, mostraram-se insensíveis à força eletromagnética. As partículas de silício desapareceram devido ao efeito da sublimação, para distâncias de 2 até 3 raios solares e as de carbono desaparecem próximo de 4 raios solares;
  
- ◆ Pardini e Anselmo (1999), que estimaram a evolução orbital de uma nuvem de detritos na região GEO, simulando a explosão de um satélite, e utilizando o modelo

orbital do instituto CNUCE - CNR (Pardini et al., 1998). Como a maioria dos fragmentos eram superiores a 1 cm, em termos de curto período, as explosões em GEO são mais danosas para o ambiente do anel, produzindo picos de densidade maiores ou comparáveis aos existentes anteriormente por vários meses. O risco de colisões no anel GEO é uma função do fluxo de detritos, que é proporcional à densidade e velocidade relativa destes. O valor médio desta, com respeito aos satélites em GEO, pode aumentar em menos que uma ordem de magnitude, devido às perturbações;

- ◆ Sasaki (1999), que estudou as partículas de poeira em torno de Marte. Os satélites de Marte - Phobos e Deimos - podem ser fontes de poeira, sendo as órbitas destas partículas controladas por pressão de radiação solar e pelo achatamento do planeta. As excentricidades e inclinações podem ser ampliadas por ressonância orbital, formando um anel em torno de Marte, no caso de partículas vindas de Phobos, ou sob a forma de um toróide, quando estas provêm de Deimos. As partículas de dimensão sub-micrométrica sujeitas à força de Lorentz são capturadas em algumas dezenas de dias. Caso o diâmetro seja maior  $1,0 \mu\text{m}$ , tais partículas são influenciadas por pressão de radiação solar. As perturbações devido ao achatamento de Marte (termo  $J_2$ ) causam variações seculares de excentricidade e de inclinação orbital. A densidade destas partículas é mantida por um mecanismo auto-sustentado, baseado em colisões entre estas e Deimos e Phobos;
- ◆ Dikarev e Krivov (2000), que mostraram que a velocidade de micro meteoróides em relação a um satélite é de aproximadamente  $10 \text{ km/s}$ . Esta hiper-velocidade de impacto causa micro-explosões e ejeções de material da superfície do satélite. Eles estudaram numericamente partículas do anel E de Saturno mostrando que seus resultados preliminares estavam coerentes;

- ◆ Bendisch et al. (2000), que estudaram as características do fluxo dos objetos devido aos vários tipos de fontes dos detritos, utilizando o modelo ESA MASTER e considerando partículas até 1,0 micrometro na região de órbita alta.;
- ◆ Krivov et al. (2000), que estudaram analítica e numericamente a distribuição de tamanhos de partículas nos discos circunstelares de detritos através de modelos de evolução dinâmica de poeira cósmica e as colisões que podem ocorrer nesses discos. Os discos foram divididos em duas populações: grandes grãos movimentando-se em órbitas limítrofes ( $\alpha$ -meteoróides) e pequenos grãos, sujeitos à pressão de radiação ( $\beta$ -meteoróides). Embora estes últimos possam escapar dos discos segundo trajetórias hiperbólicas, sua população é continuamente refeita devido às colisões tal que em qualquer instante o disco contenha uma população substancial de pequenas partículas. Em função disto, a fragmentação de  $\alpha$ -meteoróides não ocorre somente por colisões mútuas mas também por impacto com  $\beta$ -meteoróides. Este fato proporciona uma distribuição maior de  $\alpha$ -meteoróides com tamanhos maiores que 10 micrometros;
- ◆ Brown e Cooke (2001), que desenvolveram um modelo numérico para prever o fluxo de Leonids em 2001;
- ◆ Jackson (2001), que estudou numericamente o caso de partículas sujeitas somente ao arrasto de Poynting-Robertson, com periélio próximo do Sol. Verificou, também, que o arrasto clássico leva à captura de uma série de grãos interestelares que movem-se em órbitas hiperbólicas através do sistema solar. Se as forças de Lorentz e a evaporação puderem ser ignoradas, pode existir um “cone de grãos” capturados, sendo uma característica do sistema solar;
- ◆ Kalvouridis (2001), que estudou a dinâmica de partículas sujeitas às perturbações das forças gravitacional e de pressão de radiação, utilizando um modelo numérico

fotogravitacional para  $N + 1$  corpos. Ele investigou, por mapeamento, os pontos de equilíbrio e as órbitas periódicas das partículas para uma faixa de valores de parâmetros de radiação e verificou que a pressão de radiação afetava quantitativamente as características do sistema e não afetava a estabilidade do movimento periódico da partícula;

- ◆ Miao e Stark (2001), que usaram o modelo de simulação direta Monte Carlo (DSMC) para descrever o fluxo de impacto de meteoróides e detritos espaciais sobre uma superfície orientada. Neste novo modelo, eles usaram a distribuição modificada de população de meteoróides de Divine (1993) e a distribuição de velocidade de meteoróides interplanetários de Taylor (1996) para incluir os efeitos do ambiente dos meteoróides;
  
- ◆ Krivov et al. (2002a), que estudaram analítica, semi-analítica e numericamente o ambiente da poeira cósmica entre as órbitas das luas galileanas de Júpiter. Descobertas recentes de nuvens de poeira em torno dos satélites galileanos formadas pela ejeção devido ao impacto a hipervelocidade de micrometeoróides interplanetários sugerem que uma parte das partículas ejetadas pode escapar dos satélites-fontes seguindo órbitas circulares jovianas. Consideraram a ação gravitacional, a pressão de radiação e forças eletromagnéticas e verificaram que grãos com raio maior que dezenas de micrometros permanecem em órbitas em torno de Júpiter por dezenas ou centenas de anos até que ocorram colisões com os satélites ou com Júpiter ou ejeções para o espaço sideral. Detritos menores formam um anel de poeira cósmica entre as órbitas de Europa e Calisto;
  
- ◆ Krivov et al. (2002b), que estudaram analítica e numericamente a região externa ao sistema joviano, situada entre 50 e 300 raios jovianos a partir do planeta. Compararam seus resultados com os dados da sonda Galileu. Através da velocidade das partículas e das direções dos impactos da população de poeira cósmica medido

pelo detector de poeira da Galileu, encontraram aproximadamente 200 eventos plenamente compatíveis com o impacto das partículas movendo-se em torno de Júpiter. A densidade radial varia entre 50 e 300 raios jovianos. Identificaram outras fontes de produção de partículas, devido ao bombardeamento por micrometeoróides. O impacto a hipervelocidade produz ejeções que, embora sujeitas às perturbações como gravidade solar e pressão de radiação, ainda permanecem em órbita por centenas ou milhares de anos;

- ◆ Thiessenhusen et al. (2002), que estudaram numericamente os impactos de micrometeoróides de objetos provindos do cinturão de Kuiper, que formam uma nuvem de poeira em torno de Plutão e Caronte. Os movimentos destas partículas são dominados pela gravidade desses corpos. Negligenciando a atmosfera de Plutão, o número de corpos ejetados e que podem escapar de Plutão e Caronte tem a mesma magnitude. A densidade do anel de partículas é proporcional ao fluxo de objetos que se chocam com as superfícies de Plutão e Caronte;
  
- ◆ Graps et al. (2004), que estudaram os efeitos da presença de poeira cósmica e de detritos espaciais na magnetosfera terrestre. Verificaram que na região de altitude aproximadamente acima a 600 km existem poucas informações sobre a presença destes objetos. Utilizaram os dados do GORID para verificar o fluxo de impacto de partículas e para distinguir a poeira dos detritos;
  
- ◆ Grigoriev (2004), estudando o anel de partículas em órbita geostacionária, propôs um modelo de fragmentação, associado à mudança dos parâmetros orbitais, para investigar a evolução do movimento dos fragmentos e para determinar os locais de máxima densidade de partículas;
  
- ◆ Pardini e Anselmo (2004), que fizeram simulações de explosões de espaçonaves em órbitas GEO, verificando as velocidades de ejeção dos fragmentos em função do seu

tamanho. Observaram que a nuvem de detritos formada orbitava durante várias décadas;

- ◆ Sochilina et al. (2004), que consideraram um modelo dinâmico de explosão para observar objetos em órbita geoestacionária, assumindo que as direções das velocidades dos fragmentos teriam uma distribuição esférica simétrica. Mostraram que estes fragmentos podem ainda ser encontrados entre 11 e 26 anos após a explosão do satélite.

Ao considerar trabalhos desenvolvidos analiticamente, existem estudos sobre a dinâmica de pequenas partículas ao redor de corpos celestes, sendo eles:

- ◆ Burns et al. (1979), que encontraram uma expressão analítica para a força de pressão de radiação e o arrasto de Poynting-Robertson, para pequenas partículas esféricas compostas por certos tipos de materiais. Eles mostraram as conseqüências orbitais devido à perturbação do arrasto de Poynting-Robertson e da pressão de radiação solar, considerando os sistemas planetocêntrico e heliocêntrico. Estas conseqüências incluem possível perda pelo colapso orbital ou ejeção destas partículas devido às mudanças seculares no semi-eixo maior e na excentricidade no caso da partícula heliocêntrica, enquanto a partícula planetocêntrica apresenta variação secular somente para o semi-eixo maior;
- ◆ Mignard (1982), que desenvolveu um formalismo hamiltoniano para a dinâmica de partículas orbitando um planeta, adicionando a pressão de radiação ao campo central gravitacional do planeta, para partículas que se mantêm no plano orbital deste. Estudou numericamente o caso inclinado e incluiu aos seus estudos o arrasto de Poynting-Robertson. Ele encontrou uma solução analítica para a variação do semi-eixo maior e excentricidade sujeita ao arrasto de Poynting-Robertson considerando o caso excêntrico e inclinado;

- ◆ Schaffer e Burns (1992), que estudaram partículas de poeira orbitando os planetas gigantes de fora do sistema solar sendo que estas possuíam carga elétrica pequena mas constante. As inclinações e as excentricidades de tais partículas podem ser modificadas significativamente devido à interação com o campo magnético do planeta. Como partículas em órbita, quanto ao seu raio orbital, dependem da estrutura do campo magnético e, portanto, as ressonâncias devido às forças de Lorentz ocorrem em um determinado raio orbital. Foi utilizada uma combinação de técnicas numéricas e analíticas a fim de se entender a natureza de tais ressonâncias. O uso da teoria de perturbações, nesse caso, compreende correções na relação carga-massa para os períodos de movimento no plano e fora dele, para determinar a localização dessas ressonâncias. Tal análise indicou que dois módulos de oscilação estão fracamente acoplados e que o raio orbital suporta uma pequena, mas significativa, ação ressonante, resultando em variações que alteram a linearidade da ressonância. A energia orbital da partícula para pequenos valores de excentricidade e inclinação pode ser decomposta em três parcelas. No sistema de referência corotacional com o planeta onde o campo elétrico não está presente, a força de Lorentz não produz trabalho mas pode exercer torque e pode transferir energia entre as citadas. Integrações numéricas nos locais de ressonâncias confirmam a existência de uma pequena faixa de relações carga-massa em que as ressonâncias se sobrepõem, produzindo um movimento aparentemente caótico. Foi também observado que os elementos orbitais  $a$ ,  $e$  e  $i$  sofrem grandes variações, sendo funções das relações carga-massa e do arrasto, e como a longitude dos nodos estariam distribuídas ao longo da ressonância;
  
- ◆ Ashenberg e Broucke (1992), que estudaram analiticamente as perturbações atmosféricas em pequenas partículas devido à sustentação aerodinâmica e à força ortogonal. Estas perturbações foram incluídas na forma de Gauss das equações variacionais. Os resultados indicaram que, embora o arrasto seja a força dominante, as forças não dissipativas adicionais não podem ser negligenciadas;

- ◆ Hamilton e Burns (1992), que estudaram analítica e numericamente a zona de estabilidade orbital ao redor dos asteróides, considerando excentricidade heliocêntrica não nula do asteróide e radiação solar. Em seus estudos, eles consideraram pequenos mecanismos que operam por grande escala de tempo tais como o efeito de longo período da gravitação de Júpiter e de outros planetas, bem como a aproximação de outros asteróides que possam romper o par binário. Eles mostraram que estes efeitos são responsáveis pelas partículas estarem dentro da zona de estabilidade e acima da de escape e determinaram que a pressão de radiação é o mais eficiente mecanismo para remover partículas relativamente pequenas da região dos asteróides. Eles sugeriram que a pressão de radiação, atuando em uma partícula, pode causar grandes oscilações na excentricidade orbital desta partícula à qual pode ser conduzida a escapar do sistema solar ou colidir com os asteróides;
  
- ◆ Hamilton (1993), que aplicou a teoria de perturbação para o movimento planetário de partículas de micrometros do anel E de Saturno, sujeitas às forças gravitacional, eletromagnética e de pressão de radiação. Ele obteve novas equações para a força de Lorentz proveniente do alinhamento das componentes do campo magnético planetário quadripolar e dipolar;
  
- ◆ Weidenschilling e Jackson (1993), que examinaram analiticamente as condições para que uma partícula seja capturada em ressonância, utilizando o problema circular, restrito de três corpos, para partículas decaindo devido ao efeito de Poynting-Robertson. Eles propuseram critérios para que esta partícula seja capturada em ressonância, em termos do fator de pressão de radiação, da massa do planeta, da localização da ressonância e da excentricidade orbital da partícula;
  
- ◆ Hamilton e Krivov (1996), que elaboraram um modelo analítico simples da dinâmica de partículas ao redor de planetas perturbados, simultaneamente, pela

gravidade solar, pela pressão de radiação, pelo achatamento planetário e pelas forças eletromagnéticas. Eles também fizeram um estudo analítico, reescrevendo as equações médias das órbitas, sujeitas à soma destas quatro perturbações, para um sistema semi-canônico. Estas equações foram obtidas considerando o problema planar;

- ◆ Ishimoto (1996), que propôs a explicação para a formação dos anéis de poeira de Phobos e de Deimos. Em seus estudos, para explicar o comportamento de pequenas partículas ejetadas dos satélites marcianos, ele considerou a razão massa-velocidade, medidas estimadas em laboratório e vários tipos de forças perturbativas. Sugeriu que a combinação entre o efeito dinâmico do achatamento de Marte e a pressão de radiação tem um importante papel na formação dos anéis de poeira ao redor de Marte. A massa estimada para as partículas do anel de Phobos é, aproximadamente,  $10^{-7}$  gramas e de Deimos,  $10^{-8}$  gramas;
  
- ◆ Liou e Zook (1997), que desenvolveram uma expressão analítica que descreve a evolução orbital de partículas em ressonância de movimento médio com um planeta, considerando o problema restrito de três corpos. As perturbações incluídas foram força gravitacional, pressão de radiação e arrasto de Poynting-Robertson;
  
- ◆ Bunte et al. (2000), que aplicaram a aproximação analítica proposta por Divine (1993) para o cálculo do fluxo de meteoróides e desenvolveram um método de implementação, utilizando-se dos resultados propostos pela aproximação analítica de Divine, pelo modelo Orbital Debris Engineering Model (ORDEM 96) e pelos modelos determinísticos de Meteoroid and Space Debris Terrestrial Environment Reference (MASTER). Este modelo combina aproximações determinísticas com aproximações analíticas;

- ◆ Sremcevic et al. (2003), que desenvolveram um modelo analítico para uma nuvem de partículas, em regime estacionário, esfericamente distribuída em torno de um satélite planetário sem atmosfera e estudaram os efeitos assimétricos que resultam do movimento do corpo principal. Nesse caso, somente a força gravitacional do satélite é considerada. O modelo estudado pode estimar o campo de densidade e o fluxo de partículas que atingem os sensores de partículas a bordo de missões espaciais, como *Galileo* e *Cassini*.

Ainda na abordagem analítica, pode-se encontrar alguns trabalhos referentes ao problema dos detritos espaciais especificamente, como:

- ◆ Ashenberg (1992), que apresentou um método estatístico e algumas características considerando termos de curto período para expansão dos detritos espaciais. Seu trabalho foi concentrado numa explosão isotrópica (típica de colapso) e as perturbações consideradas foram o achatamento e o arrasto atmosférico. Desenvolveu também uma formulação analítica da matriz de transição para o movimento ao longo de órbitas elípticas;
- ◆ Wnuk (2001), que criou um modelo analítico para a evolução orbital dos detritos espaciais. Este modelo pode ser aplicado na propagação de termos de longo e curto período. As perturbações consideradas foram harmônicos tesserais e zonais, arrasto atmosférico e atração luni-solar.

Alguns trabalhos que não são referentes ao problema de detritos espaciais ou de pequenas partículas mas que poderão ser utilizados no desenvolvimento deste trabalho são apresentados a seguir:

- ◆ Du Toit et al. (1996) estudaram numericamente o arrasto aerodinâmico para controle de constelações de satélites LEO. A força aerodinâmica que age sobre o satélite

pode ser controlada pela simples modificação na estabilidade tridimensional dos satélites por métodos convencionais como o torque magnético e o momento angular. Sabe-se, porém, que certos parâmetros críticos, como as propriedades físicas do satélite, sua configuração orbital e o estado da atmosfera, influenciam no controle do movimento do sistema. Partindo dessa premissa, foi necessário desenvolver um sistema de controle por simulações numéricas que incluem a influência de forças perturbadoras da órbita como o achatamento terrestre, a pressão de radiação solar e a atração luni-solar, além da utilização do arrasto aerodinâmico, um fenômeno natural que é normalmente não desejado, especialmente em órbitas LEO;

- ◆ Roy (1969) estudou analiticamente os efeitos das perturbações luni-solares em satélites em órbita da Terra, descrevendo-os com uma precisão de alta ordem de forma a utilizar os resultados para satélites distantes. Verificou as alterações nos elementos orbitais do satélite devido a estas perturbações;
  
- ◆ Rubincam (1982) verificou os mecanismos de decréscimo secular do semi-eixo maior da órbita do satélite LAGEO, à taxa de 1,1 mm/dia. Observou que a ação gravitacional e a transferência de momento angular de rotação para momento angular orbital são muito pequenas para causar este efeito. A pressão de radiação terrestre não causa o decaimento da órbita e sim um comportamento oscilatório. O arrasto devido às partículas neutras representa somente 1% do decaimento orbital observado. No caso de partículas carregadas, este índice sobe a 6%, podendo ser comparado ao arrasto atmosférico mas ainda muito pequeno para explicar todo o decaimento secular observado;
  
- ◆ Delhaise e Henrard (1993) verificaram o problema de um satélite geoestacionário orbitando próximo à inclinação crítica, onde o efeito secular de  $J_2$  no argumento do perigeu é zero. Isto permite estabilizar a órbita, melhorando a cobertura das regiões em questão. Além disso, tal inclinação aumenta o perigo de colisão com detritos espaciais e espaçonaves desativadas que existem no anel geoestacionário.

Desenvolveram, pois, um método semi-numérico que descreve as perturbações de sistemas não triviais. A principal diferença entre o método numérico baseado na integração hamiltoniana completa do sistema e este semi-numérico está no valor de equilíbrio da inclinação que pode ser pouco menor ou maior que a inclinação crítica, dependendo do valor da energia considerada;

- ◆ Delhaise e Morbidelli (1993) estudaram o problema de um satélite artificial geostacionário orbitando próximo à inclinação crítica. Como em outros trabalhos, somente os efeitos da não homogeneidade do geopotencial haviam sido considerados, isto é, o problema tinha somente dois graus de liberdade, houve a necessidade de incluir outros efeitos significativos como o gravitacional luni-solar. Utilizaram para o modelamento os harmônicos formados pela combinação da longitude do nodo ascendente do satélite e da longitude da Lua. Os resultados mostraram que a topologia induzida por estes harmônicos não apresenta o fenômeno da ressonância;
- ◆ Radwan (2002) observou problemas de ressonância que usualmente se manifestam pelo aparecimento de pequenos divisores quando se integram as equações de movimento. Órbitas ressonantes inclinadas e excêntricas são importantes em navegação de satélites, em sistemas de comunicação em latitudes altas, em regiões de alta densidade de objetos em órbita, etc. Utilizou vetores ressonantes que são reduzidos pela introdução de uma anomalia de Delaunay e de uma técnica de perturbação baseada na de Bohlin de expansão em potências fracionárias de pequeno parâmetro e na transformada de Lie-Deprit-Kamel modificada para adequar em expoentes de  $J_2$ ;

## 2.2 – Principais Grupos de Pesquisa em Detritos Espaciais e Meteoróides

Em termos de estudo da dinâmica envolvendo detritos espaciais (e em alguns casos também meteoróides) existem, atualmente, alguns grupos de pesquisa espalhados nos grandes centros mundiais e relacionados às atividades espaciais. Em particular, pode-se citar dois dos grupos mais atuantes:

- ◆ grupo da Seção de Análise de Missões do European Space Operations Centre – European Space Agency (ESOC-ESA), que desenvolveu e vem continuamente atualizando o software Meteoroid and Space Debris Terrestrial Environment Reference (MASTER) — que utiliza técnicas quasi-determinísticas para determinar o fluxo a partir da população de detritos, derivados de eventos de fragmentação;
- ◆ grupo do Johnson Space Center – NASA, que desenvolveu em 1996 o primeiro modelo de engenharia de detritos espaciais baseado em computador, ORDEM96 – Orbital Debris Engineering Model. Este modelo foi recentemente aprimorado com o ORDEM2000 - Orbital Debris Engineering Model - (Liou et al., 2000), que se baseia nas fontes de dados que incluem: catálogo U. S. Space Surveillance Network (SSN), dados Haystack, Haystack Auxiliary Radar (HAX), e Liquid Mirror Telescopes (LMT), medidas do Long Duration Exposure Facility (DEF), European Retrievable Carrier (Eureca), Hubble Space Telescope (HST-SA), e Space Flyer Unit, o radar Goldstone e dados da estação espacial MIR. Estes dados, bem como o modelo, cobrem o intervalo de tamanho de detritos entre 10,0 micrometros e 10,0 metros. Este mesmo grupo desenvolveu o programa EVOLVE (Krisiko, 2000), válido para órbitas do tipo Low Earth Orbits (LEO), que envolve a modelagem da fragmentação e a distribuição do campo de velocidades gerando as probabilidades de colisão com objetos a uma dada altitude (Matney, 2000). Numa adaptação deste programa para o caso de órbitas do tipo Geosynchronous Earth Orbit (GEO), foi desenvolvido o programa GEO\_EVOLVE (Anz-Meador et al., 2000).

Os *softwares* desenvolvidos para estudo e análise sobre detritos espaciais são atualmente relacionados com a modelagem e a evolução do espalhamento de uma nuvem de detritos resultantes da explosão do último estágio do foguete lançador ou da colisão com satélites e com a modelagem e a evolução do fluxo de detritos orbitais a partir de catálogos de dados obtidos em terra ou através de satélites/sondas. As medidas dos restos orbitais são divididas, geralmente, em duas categorias: medidas de radar e medidas ópticas.

Normalmente, as medidas de radar são usadas para restos orbitais em órbita baixa da Terra (LEO), enquanto que as medidas ópticas são usadas para órbitas altas da Terra (GEO). Basicamente, dois tipos de radares são usados para medidas destes objetos. a) radares com feixe direcionador controlado mecanicamente, usando antenas refletoras parabólicas e b) radares com feixe direcionador eletronicamente usando antenas em fase.

As principais características de um objeto espacial que podem ser obtidas, principalmente por radar, são: os elementos orbitais, a altitude, o coeficiente balístico, a massa e as propriedades do material que é constituído o objeto.

Restos orbitais podem ser detectados por telescópio quando o objeto está iluminado pelo Sol e enquanto o *céu de fundo* está escuro. Para objetos em LEO, este período é limitado em 1 ou 2 horas, imediatamente após o pôr do Sol ou antes do amanhecer, enquanto para objetos em GEO as observações podem ser feitas, freqüentemente, a noite inteira.

Os modelos de detritos espaciais provêm de uma descrição matemática da distribuição de objetos no espaço, do movimento e fluxo dos objetos e das características físicas dos objetos como por exemplo tamanho, massa, densidade, propriedades de reflexão e movimento intrínseco. Estes modelos podem ser *determinísticos*, em que cada objeto é descrito individualmente através de seus parâmetros orbitais e características físicas,

*estatístico*, em que a caracterização de um conjunto é feita através de um número de amostra de objetos, ou uma combinação, *híbrido*.

Estes modelos são limitados pela quantia escassa de dados disponíveis para validar as relações derivadas. Tais modelos baseiam-se em registros históricos das características do satélite, da atividade de lançamento e das separações ocorridas em órbita; além disso, os dados limitam-se às respostas do material da astronave impactada e exposta ao ambiente orbital. Além disso, devem ser feitas suposições aplicadas a estes modelos para prever o ambiente futuro. Os modelos de detritos espaciais devem ser continuamente atualizados e revalidados para refletir melhorias nos detalhes e quantidades de dados observacionais e experimentais.

Tais modelos podem ser considerados de curto prazo, período de até 10 anos, ou de longo prazo, período de mais de 10 anos. Na preparação de todos estes modelos, a população inicial de detritos é representada em uma época particular e é propagada em função do tempo, levando em conta fonte, mecanismo de penetração e perturbações orbitais pertinentes. Os modelos de curto prazo e longo prazo não descrevem a concentração periódica de detritos que existe horas a meses que seguem uma separação. Na Tabela 2.1 são apresentados os principais modelos para descrever a evolução orbital de detritos espaciais.

Algumas informações sobre estes modelos estão apresentadas a seguir:

- ◆ EVOLVE é um modelo quasi-determinístico, baseado em técnicas de propagação da população dos detritos. Foi desenvolvido pelo Johnson Space Center - NASA para fornecer previsões de curto e longo prazos do ambiente de LEO. Este modelo considera as perturbações gravitacionais  $J_2$ , luni-solar e arrasto aerodinâmico;

- ◆ MASTER – Meteoroid and Space Debris Terrestrial Environment Reference – é um modelo semi-determinístico, baseado na discretização tridimensional de densidades espaciais e velocidades transientes. O modelo é aplicado em altitudes de LEO até GEO, fornecendo as estimativas do ambiente dos detritos a curto prazo;
  
- ◆ ORDEM96 - Orbital Debris Engineering Model - é um modelo semi-empírico desenvolvido pelo Johnson Space Center - NASA. Este modelo é baseado em observações “in situ” e distantes e é usado para dar apoio aos ônibus espaciais americanos e à estação espacial internacional em projetos e operações;
  
- ◆ IDES é um modelo semi-determinístico que usa modelos de evolução orbital passados e futuros. O modelo é aplicado para prever, em curto e longo prazo, o ambiente de detritos espaciais e o fluxo de colisão que apresenta um satélite específico. Foi desenvolvido pela Defence Evaluation and Research Agency (DERA);
  
- ◆ Nazarenko é um modelo estocástico semi-analítico para prever a curto e longo prazo o ambiente dos detritos em LEO em termos da densidade, distribuição de velocidade e fluxos das partículas. Foi desenvolvido pelo Centre for Programme Studies (CPS) da RSA (Russian Space Agency). A principal perturbação considerada neste modelo foi o arrasto atmosférico;
  
- ◆ SDM é um modelo semi-determinístico para prever a curto e longo prazo o ambiente dos detritos espaciais. Desenvolvido pelo instituto italiano CNUCE - European Space Agency (ESA) , faz uso de um modelo de evolução orbital, inclusive constelações de satélites, e vários modelos de simulações de explosões e colisões de satélites;

- ◆ CHAIN foi desenvolvido pela Technical University of Braunschweig. CHAINEE é uma extensão europeia do CHAIN, sendo usado pela ESA. Estes são modelos analíticos que descrevem a população dos fragmentos de colisão, em uma altitude de 2.000 km;
- ◆ LUCA é um modelo semi-determinístico utilizado para analisar o cenário futuro do ambiente dos detritos, especialmente se uma alta definição da altitude orbital e da declinação é requerida. Foi desenvolvido pela Technical University of Braunschweig especialmente para prever os grandes riscos de colisão para declinações mais altas, como, por exemplo, perto das regiões polares.

Um outro fator que pode comprovar tal preocupação é o lançamento do satélite Advanced Research and Global Observation Satellite (ARGOS) que tem, também, como objetivo estudar o fluxo dos restos orbitais/meteoróides utilizando-se de um experimento denominado SPADUS, desenvolvido pela Universidade de Chicago. ARGOS foi lançado a uma altitude de 850 km em uma órbita Sol-síncrona (98,7° de inclinação) no dia 23 de fevereiro de 1999. Em 24 de fevereiro de 1999 foi detectado o primeiro impacto ocorrido no SPADUS. Os primeiros resultados obtidos do SPADUS referem-se ao período de 24 de fevereiro de 1999 a 08 de junho de 2000. Estes resultados mostram que foram detectados 258 impactos de partículas neste período de aproximadamente 470 dias (Tuzzolino et al., 2001). Destes, cerca de 24 impactos foram identificados como sendo: 11 de origem de restos orbitais, 7 de impactos interplanetários (meteoróides) e 6 podendo ser tanto de restos orbitais como meteoróides. Na Tabela 2.2 são apresentados alguns dados dos impactos ocorridos de 24 de fevereiro de 1999 a 08 de junho de 2000, em termos da massa e diâmetro. Estes dados foram extraídos de Tuzzolino et al. (2001).

TABELA 2.1 – Principais modelos numéricos existentes para descrever a evolução orbital de detritos espaciais.

Nome do Modelo	Fonte	Período Evolutivo	Tamanho Mínimo	Modelo Orbital
CHAIN	NASA	Longo	1 cm	LEO
CHAINEE	ESA	Longo	1 cm	LEO
EVOLVE	NASA	Curto e	1 mm	LEO
GEO_EVOLVE		Longo		GEO
IDES	DERA	Curto e	0,01 mm	LEO
		Longo		
LUCA	TUBS	Longo	1 mm	LEO/GEO
MASTER	ESA	Curto	0,1 mm	LEO/GEO
Nazarenko	RSA	Curto e	0,6 mm	LEO
		Longo		
ORDEM96	NASA	Curto	1 $\mu$ m	LEO
ORDEM 2000				
SDM/STAT	ESA/ CNUCE	Curto e Longo		LEO/GEO

FONTE: United Nations (1999).

TABELA 2.2 – Características de alguns impactos ocorridos no período de 24 de fevereiro de 1999 a 08 de junho de 2000.

Dia-Mês-Ano	Massa (g)	Diâmetro ( $\mu\text{m}$ )
24/02/99	$2,6 \times 10^{-10}$	5,8
<b>11/04/99</b>	<b><math>4,2 \times 10^{-8}</math></b>	<b>32,0</b>
<b>08/05/99</b>	<b><math>1,26 \times 10^{-8}</math></b>	<b>21,5</b>
05/06/99	$9,0 \times 10^{-11}$	4,1
05/06/99	$1,3 \times 10^{-10}$	4,5
<b>06/08/99</b>	<b><math>1,9 \times 10^{-9}</math></b>	<b>11,5</b>
17/09/99	$7,6 \times 10^{-11}$	3,9
<b>06/11/99</b>	<b><math>3,9 \times 10^{-9}</math></b>	<b>14,4</b>
26/06/2000	$4,3 \times 10^{-11}$	3,2
<b>02/06/2000</b>	<b><math>2,8 \times 10^{-10}</math></b>	<b>6,0</b>

Origem dos objetos \* meteoróides; \* restos orbitais; \* não identificados. Dados obtidos a partir do equipamento SPADUS.

FONTE: Tuzzolino et al. ( 2001).

Os detritos espaciais movem-se geralmente com velocidades muito elevadas em relação aos satélites operacionais. Em órbita LEO, a velocidade relativa média de impacto é 10,0 km/s. Nesta velocidade, mesmo as partículas consideradas pequenas (da ordem de micrometros), contém quantidades significativas de energia e de momento cinéticos.

Pelo levantamento bibliográfico realizado, verifica-se que a vasta maioria dos projetos de observação e acompanhamento da distribuição de detritos espaciais e meteoróides considera objetos com tamanho superior à 10 cm. Por outro lado, trabalhos recentes demonstram um intenso empenho na construção de detectores capazes de obter informações “in situ” de pequenas partículas da ordem de micrometros. Apesar de menos relevantes que os objetos maiores, estas partículas podem causar danos significativos a certas missões espaciais. Portanto, o objetivo nesse trabalho é obter a evolução orbital de uma nuvem de detritos espaciais de partículas da ordem de micrometros diante de um estudo acadêmico global das diversas perturbações existentes aplicadas ao caso em questão, de modo que se possa obter um mapeamento de densidade/fluxo de partículas em função do tempo, da região orbital e do raio destas. Desta forma, explicar a evolução orbital desta nuvem de acordo com as perturbações envolvidas.

## CAPÍTULO 3

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nesta Subseção são apresentadas a força de pressão de radiação e o arrasto de Poynting-Robertson, descrevendo as suas componentes e considerando o sistema dinâmico circular, planar de dois corpos, Terra - partícula. O estudo feito neste Capítulo foi baseado nos trabalhos de Burns et al. (1979) e Mignard (1984, 1991). No Apêndice A, é mostrado o desenvolvimento mais detalhado das equações aqui descritas.

#### 3.1. - Força de Pressão de Radiação Solar e de Arrasto de Poynting - Robertson

No Sistema Solar existem muitas partículas de poeira, minúsculas, em órbita ao redor de corpos celestes. Como se sabe as ondas eletromagnéticas originárias do Sol transportam energia, transferindo momento linear a estas partículas. Este fato faz com que a órbita destas partículas seja alterada. Portanto, uma partícula que orbita no Sistema Solar sofre, além da ação gravitacional dos corpos próximos, uma força devido à pressão de radiação solar.

Partículas atingidas por feixes de radiação solar, absorvem energia, sendo transferido momento linear do fóton para a partícula. Com isso, a partícula está sujeita a um conjunto de forças devido a esta transferência de momento. A intensidade do fluxo de radiação solar  $S$  é proporcional à razão da taxa de energia total  $\dot{E}$  pela área da seção de choque  $H$  da partícula atingida pelo fluxo, ou seja,

$$S = \frac{\dot{E}}{H} \quad (3.1)$$

A equação acima é válida para uma partícula em repouso e que absorve toda a energia incidente.

A expressão para pressão estática  $P_r$ , exercida sobre esta partícula, é dada por

$$P_r = \frac{F}{H} \quad (3.2)$$

em que  $F$  é o módulo da força exercida sobre a partícula. Pressão é definida como uma grandeza escalar por não possuir propriedades direcionais (Halliday e Resnick, 1991).

Multiplicando e dividindo a Equação (3.2) pela velocidade da luz  $c$  obtêm-se:

$$P_r = \frac{pot}{H c} \quad (3.3)$$

sendo potência,  $pot = F \cdot c$ . Potência também pode ser definida como a taxa de energia,  $\frac{E}{t}$ . Logo, a expressão da força sobre uma partícula em repouso denominada *força de pressão de radiação*, é

$$\vec{F}_{rad} = \frac{S H}{c} \hat{S} \quad (3.4)$$

em que  $\hat{S}$  é o vetor unitário radial à fonte de radiação.

Contudo, a partícula move-se com velocidade  $v$ , em relação ao Sol, diferente de zero. Logo, o novo fluxo, considerando que o comprimento de onda  $\lambda_0$  dos fótons não é constante e que a partícula move-se em relação à fonte de radiação, é dado por

$$S' = S \left( 1 - \frac{v_r}{c} \right) \quad (3.5)$$

em que  $v_r = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{S}}$  é a componente radial da velocidade da partícula e o fator entre parênteses é devido ao efeito Doppler. Este efeito é uma correção pois os corpos, Sol e partícula, estão em movimento um em relação ao outro.

Até o momento o espalhamento desta partícula que absorve toda a energia incidente não foi tratado. Desta forma, considerando que o fluxo de energia absorvido,  $S'H$ , é continuamente espalhado em todas as direções e que a partícula possui  $v \neq 0$ , observa-se que este espalhamento deverá produzir uma força contrária ao movimento desta partícula. A este arrasto denomina-se *arrasto de Poynting-Robertson*. Este arrasto tangencial foi sugerido pela primeira vez por Poynting em 1920 e em 1937 Robertson retornou a idéia dando a este arrasto um caráter relativístico. Esta perturbação atua em grande proporção em pequenas partículas e em grande escala de tempo (veja item 4.1). Na Figura 3.1 é apresentado a idéia básica do efeito dinâmico devido ao espalhamento da energia absorvida considerando dois casos: o da partícula em repouso e o da partícula com velocidade  $v$  diferente de zero. O Sol está em repouso, isto é  $v_{Sol} = 0$  e a partícula é considerada um corpo esférico.

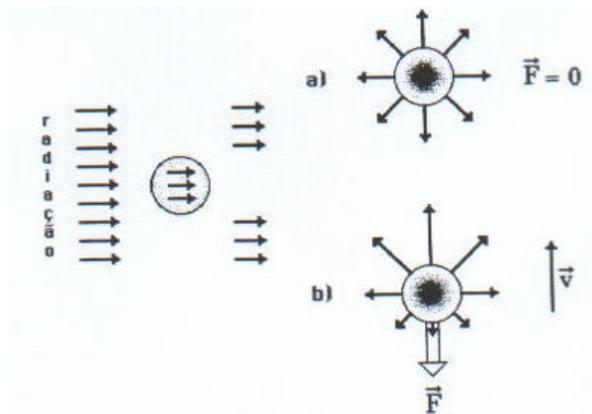


FIGURA 3.1 – Esquema da idéia básica do efeito dinâmico para uma partícula com diferente velocidade em relação ao Sol. a)  $v = 0$  e b).  $v \neq 0$   
 FONTE: Duha (2000).

Segundo Burns et al. (1979) esta força de Poynting-Robertson é dada por

$$\vec{F}_{P-R} = -\left(\frac{S'H}{c^2}\right)\vec{p} \quad (3.6)$$

Da Equação (3.6) é possível observar que há uma perda de momento linear atribuído ao movimento da partícula, visto que a massa da partícula é considerada constante. Portanto, o efeito desta força é dissipativo, pois o seu sentido (sinal negativo) é sempre contrário ao da velocidade orbital da partícula.

Logo, o conjunto de forças que atua em partículas que absorvem e espalham toda a energia incidente, sujeitas a perder momento linear mas tendo sua massa conservada, é dado por (Burns et al., 1979)

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{S'H}{c}\hat{S} - \frac{S'H}{c^2}\vec{p} \\ \vec{F} &\cong \frac{SH}{c}\left[\left(1 - \frac{v}{c}\right)\hat{S} - \frac{\vec{p}}{c}\right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

O termo  $(1 - \frac{v}{c})$  deve-se ao impulso exercido pelos raios incidentes (fótons) e o termo  $\vec{p}/c$  deve-se ao espalhamento da energia incidente que foi absorvida.

Como foi visto anteriormente, o movimento da partícula depende do espalhamento da energia absorvida. Existem três casos de espalhamento de energia da partícula e a direção de seu movimento. Estes casos são ilustrados nas Figuras 3.2 a 3.4. Os coeficientes  $Q_{Abs}$ ,  $Q_{Esp}$  representam a quantidade de radiação da luz que é absorvida e espalhada, respectivamente.

Nestas figuras é possível observar que o espalhamento que ocorrer no sentido do movimento da partícula irá sofrer um acréscimo em seu momentum,  $p$ , enquanto que o

espalhamento ocorrido no sentido contrário ao movimento da partícula irá sofrer um decréscimo no momentum,  $p$  (Mignard, 1991).

De uma maneira geral, o coeficiente de pressão de radiação é dado por (Burns et al., 1979)

$$Q_{pr} = Q_{abs} + Q_{esp}(1 - \langle \cos \alpha \rangle) \quad (3.8)$$

em que  $\langle \cos \alpha \rangle$  é o fator de assimetria. A Figura 3.5 apresenta um esquema ilustrativo para partículas que espalham a energia absorvida.

A expressão geral para a força de pressão de radiação para partículas que absorvem e espalham a luz pode ser dada por (Burns et al., 1979)

$$\vec{F} \cong \left( \frac{S H}{c} \right) Q_{pr} \left[ \left( 1 - \frac{p}{c} \right) \hat{S} - \frac{p}{c} \right] \quad (3.9)$$

### Casos Limites

a) Espalhamento isotrópico

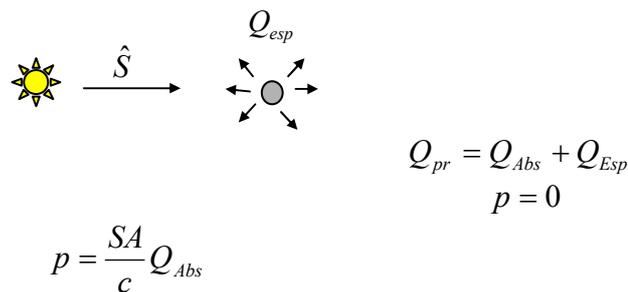


FIGURA 3.2 – Esquema ilustrativo para uma partícula que espalha isotropicamente.  $p$  é o momentum da partícula.

FONTE: Adaptada de Mignard (1991).

b) Espalhamento na mesma direção e sentido do fluxo de radiação

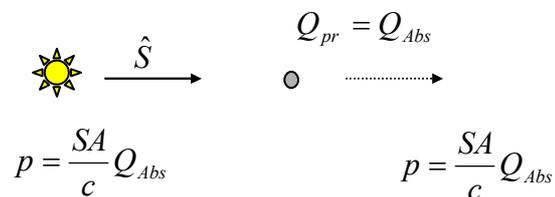


FIGURA 3.3 – Esquema ilustrativo para uma partícula que espalha na mesma direção e sentido do fluxo de radiação.

FONTE: Adaptada de Mignard, (1991).

c) Espalhamento na mesma direção e sentido oposto ao fluxo de radiação

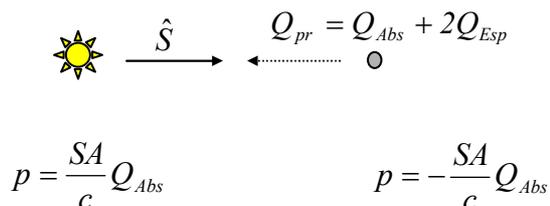


FIGURA 3.4 – Esquema ilustrativo para uma partícula que espalha na mesma direção e sentido contrário ao fluxo de radiação.

FONTE: Adaptada de Mignard, (1991).

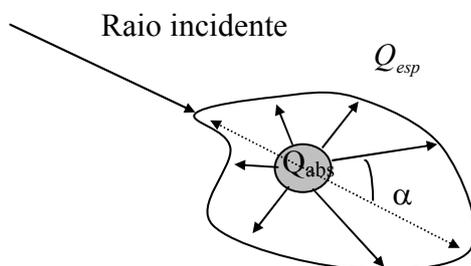


FIGURA 3.5 – Esquema ilustrativo para partículas que espalham a energia absorvida.

FONTE: Adaptada de Burns et al. (1979)

O termo  $v/c$ , apresentado na Equação (3.9), provoca o decaimento orbital da partícula. As conseqüências deste podem ser obtidas a partir do estudo da força aplicada ao sistema de referência da partícula, visto que a expressão da força apresentada na Equação (3.9) tem uma dependência com a velocidade da partícula e esta depende do sistema de referência adotado.

### 3.1.1 – Conseqüências Dinâmicas Considerando o Sistema de Referência Órbitas Heliocêntricas

Neste item, considera-se a dinâmica de partículas em órbitas ao redor do Sol. Na Figura 3.6 é apresentado um esquema para as velocidades relativas instantâneas das partículas. Algumas posições das partículas são representadas pelos pontos A, B, C e D. Nestas posições as partículas são “empurradas para fora” de suas órbitas devido à força de pressão de radiação solar.

O valor médio da perturbação secular considerando o arrasto de Poynting-Robetson para a variação do semi-eixo maior de uma partícula esférica é dado por (Burns et al., 1979), ver Apêndice A.1.1:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{\eta}{a} \frac{Q_{pr}}{(1-e^2)^{3/2}} [3e^2 + 2] \quad (3.10)$$

em que  $a$  é o semi-eixo maior,  $e$  é a excentricidade da partícula,  $\eta = \frac{AS_0 r_0^2}{mc^2}$ ;  $S_0$  é a constante de radiação solar;  $m$  é massa da partícula e  $r_0 = 1$  U.A. para o caso heliocêntrico.

O valor médio da perturbação secular considerando somente o arrasto de Poynting-Robertson para a variação da excentricidade é (Burns et al., 1979)

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{5\eta}{2a^2} Q_{pr} \frac{e}{(1-e^2)^{1/2}} \quad (3.11)$$

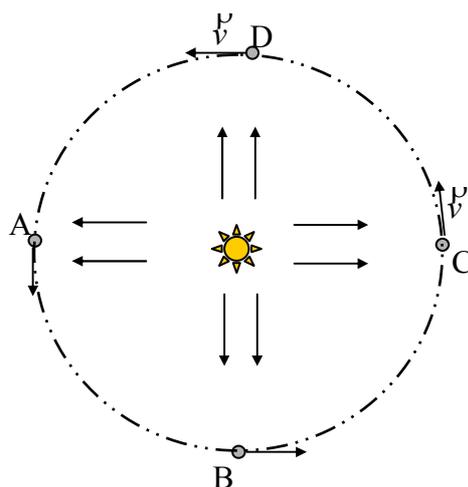


FIGURA 3.6 – Esquema ilustrativo da velocidade relativa instantânea de partículas e órbitas ao redor do Sol.

O efeito dinâmico devido ao arrasto de Poynting-Robertson, considerando o sistema de referência heliocêntrico, provoca variações no semi-eixo maior e na excentricidade da órbita da partícula. A consequência destas variações é o decaimento da partícula. A Equação (3.10) é inversamente proporcional ao semi-eixo maior; então, quanto maior seu semi-eixo, menor a variação do mesmo. Esta equação apresenta uma dependência com a excentricidade tal que, para órbitas excêntricas o decaimento orbital da partícula é mais rápido do que para órbitas circulares. A variação da excentricidade, Equação (3.11), apresenta uma dependência em excentricidade tal que, ao considerar partículas em órbitas circulares, a variação da excentricidade é nula.

Integrando a Equação (3.10) e considerando  $e = 0$ , obtém-se o tempo de decaimento da partícula em direção ao Sol, dependendo somente das propriedades da partícula, como sendo

$$\tau_{P-R} = \frac{a^2}{4\eta Q_{pr}} \quad (3.12)$$

A Equação (3.12) pode ser re-escrita em função da densidade e do tamanho da partícula da seguinte maneira:

$$\tau_{P-R} = 7,0 \times 10^6 \frac{s \rho_p R'^2}{Q_{pr}} \quad (3.13)$$

sendo  $s$  o raio da partícula, em  $\mu\text{m}$ ,  $\rho_p$  a densidade da partícula, em  $\text{g}/\text{cm}^3$ , e  $a = R'$  a distância heliocêntrica, em  $U.A.$ .

### 3.1.2 - Conseqüências Dinâmicas Considerando o Sistema de Referência Órbitas Planetocêntricas

Neste item considerou-se a dinâmica de partículas em órbitas ao redor de um planeta, sendo aqui representado pela Terra, e sujeitas ao fluxo solar. Na Figura 3.7 é apresentado um esquema para as velocidades relativas instantâneas das partículas. Algumas posições das partículas são representadas pelos pontos A, B, C e D. No ponto B, a partícula possui velocidade na mesma direção e no mesmo sentido do fluxo solar. Então, para partículas nesta posição e sujeitas a esta perturbação, a transferência de momento linear deve ser mínima. Em contrapartida, uma partícula no ponto D possui velocidade na mesma direção e sentido contrário ao fluxo solar. Portanto, para partículas nesta posição e sujeitas a esta perturbação, a transferência de momento linear deve ser máxima. Partículas no ponto A são "empurradas" na direção do planeta e partículas no ponto C são "empurradas" para longe do planeta devido à força de pressão de radiação solar.

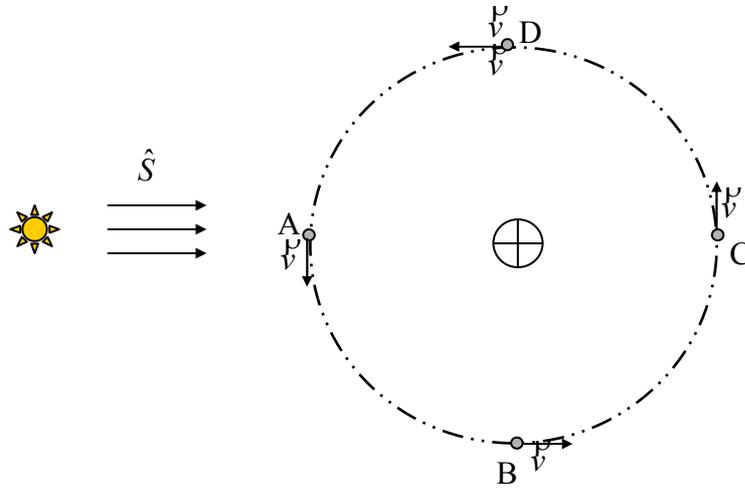


FIGURA. 3.7 – Esquema ilustrativo para partículas em órbitas circulares ao redor do planeta sujeitas ao fluxo solar.

Ao considerar partículas no sistema planetocêntrico, a força que atua na partícula devido ao arrasto de Poynting-Robertson depende da velocidade desta partícula, que orbita ao redor do planeta, e da velocidade do planeta ao redor do Sol, como é apresentado na Figura 3.8. Como  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula em relação à fonte de radiação, então, para o caso planetocêntrico, esta velocidade vai depender da velocidade da partícula ao redor do planeta e da velocidade do planeta ao redor do Sol, ou seja,  $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_\oplus$  em que  $\vec{v}_p$  é a velocidade da partícula ao redor do planeta e  $\vec{v}_\oplus$  é a velocidade do planeta ao redor do Sol. O módulo da velocidade radial da partícula,  $v_r$ , para o caso planetocêntrico, é dado por  $v_r = \hat{S} \cdot (\vec{v}_p + \vec{v}_\oplus)$ .

Substituindo as relações acima de  $\vec{v}$  e  $v_r$  na Equação (3.9) e considerando somente os termos de Poynting-Robertson a equação da força devido ao arrasto de Poynting-Robertson pode ser dada por (Burns et al., 1979)

$$\vec{F}_{P-R} = -\left(\frac{SH}{c^2}\right) Q_{pr} \left[ (\hat{S}(\vec{v}_p + \vec{v}_\oplus))\hat{S} + \vec{v}_p + \vec{v}_\oplus \right] \quad (3.14)$$

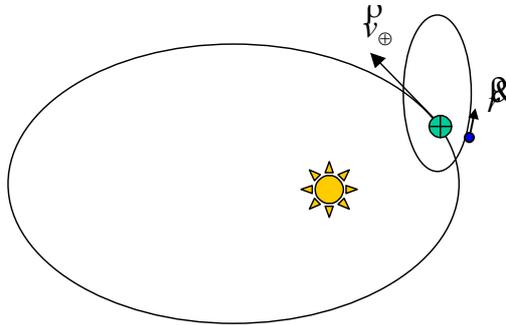


FIGURA. 3.8 – Esquema ilustrativo das velocidades da partícula ao redor do planeta e do planeta ao redor do Sol.

A variação do semi-eixo maior da partícula em torno do planeta é dada por (Burns et al., 1979), ver Apêndice A.1.2:

$$\dot{a} = -\frac{S H a}{2 c^2 m} Q_{pr} (5 + \cos^2 i) \quad (3.15)$$

em que  $i$  é a inclinação orbital da partícula.

Admitindo  $i = 0$  e integrando a Equação (3.15), o tempo de decaimento da partícula devido à variação secular do semi-eixo maior, em termos das propriedades da partícula, para uma partícula esférica, é dado por (Burns et al., 1979)

$$\tau_{P-R} = 9,3 \times 10^6 \frac{s \rho_p R'^2}{Q_{pr}} \quad (3.16)$$

sendo  $s$  o raio da partícula, em  $\mu\text{m}$ ,  $\rho_p$  a densidade da partícula, em  $\text{g}/\text{cm}^3$ , e  $R'$  a distância heliocêntrica, em  $U.A.$ .

O tempo de colapso orbital devido ao arrasto de Poynting-Robertson é aproximadamente o tempo que uma partícula leva para absorver em radiação o equivalente à sua própria massa. A equação para o tempo de decaimento em relação à órbita planetocêntrica é essencialmente a mesma apresentada para o decaimento em relação à órbita heliocêntrica. Fundamentalmente, esta semelhança, entre os tempos característicos de decaimento, ocorre porque o arrasto de Poynting-Robertson depende somente da absorção e do espalhamento de energia.

Como foi visto anteriormente, o tempo de decaimento de uma partícula pode ser dado em termos das propriedades da partícula, isto é, do raio  $s$  e da densidade  $\rho_p$ . Com isso, do ponto de vista dinâmico, pode-se definir um parâmetro que dependa destas propriedades. Este parâmetro, definido como  $\beta$ , é dado por (Burns et al., 1979), ver Apêndice A.2:

$$\beta = 0,57 \frac{Q_{pr}}{\rho_p s} \quad (3.17)$$

### **3.1.3 - As Equações de Movimento para o Sistema Planetocêntrico Considerando a Perturbação do Arrasto de Poynting-Robertson**

Nesta Seção são apresentadas as componentes da força para uma partícula, sujeita à perturbação do arrasto de Poynting-Robertson, que foram utilizadas na realização das simulações numéricas em função do parâmetro  $\beta$ . O sistema dinâmico adotado foi o problema plano-circular de dois corpos partícula-Terra. Nesta Seção não se considera a perturbação gravitacional do Sol mas, somente, a direção do fluxo solar. O sistema de referência está centrado no planeta Terra e o movimento médio do sistema é o movimento médio do Sol ao redor da Terra.

Utilizando a Equação (3.14), observa-se que, para obter a força devido à perturbação do arrasto de Poynting-Robertson, é necessário obter a velocidade do planeta e da partícula ao redor do Sol e o vetor radial unitário na direção do Sol.

Desta forma, definindo o vetor  $\overset{p}{R}$  como sendo a distância Terra-Sol de componentes

$$\overset{p}{R} = \begin{cases} x_{Sol} = -R \cos(n_{Sol}t) \\ y_{Sol} = -R \sin(n_{Sol}t) \end{cases} \quad (3.18)$$

sendo  $n_{Sol} = \sqrt{GM_{Sol}/R^3}$  e  $M_{Sol}$  a massa do Sol.

Logo, o vetor unitário na direção do Sol

$$\hat{S} = \frac{\overset{p}{R}}{R} = (-\cos(n_{Sol}t), -\sin(n_{Sol}t)) \quad (3.19)$$

As componentes da velocidade do planeta  $\overset{p}{v}_{\oplus}$  podem ser dadas por

$$\overset{p}{v}_{\oplus} = \begin{cases} \dot{x}_{Sol} = n_{Sol} R \sin(n_{Sol}t) \\ \dot{y}_{Sol} = -n_{Sol} R \cos(n_{Sol}t) \end{cases} \quad (3.20)$$

As componentes da velocidade da partícula são obtidas do problema de dois corpos (Murray e Dermott, 1999)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \sin f \\ \dot{y} &= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} (1 + \cos f) \end{aligned} \quad (3.21)$$

sendo  $n$  o movimento médio e  $f$  a anomalia verdadeira da partícula.

Portanto, as componentes do arrasto de Poynting-Robertson são dadas por

$$F_x = -\beta F_{grSol} \left\{ \frac{1}{c} \left[ x \cos^2(n_{Sol}t) + y \sin(n_{Sol}t) \cos(n_{Sol}t) + (x_{Sol} + x) \right] \right\} \quad (3.22)$$

$$F_y = -\beta F_{grSol} \left\{ \frac{1}{c} \left[ x \sin(n_{Sol}t) \cos(n_{Sol}t) + y \sin^2(n_{Sol}t) + (y_{Sol} + y) \right] \right\} \quad (3.23)$$

sendo

$$\frac{SHQ_{pr}}{c} = \beta F_{grSol} \quad (3.24)$$

e  $F_{grSol}$ , a força gravitacional do Sol.

### 3.1.4 - Força de Pressão de Radiação Solar - Caso Tridimensional

Nesta Seção foi apresentada a equação da força devido à perturbação da pressão de radiação desconsiderando o arrasto de Poynting-Robertson para o caso tridimensional. Esta força foi utilizada nas integrações numéricas.

A força de pressão de radiação solar é definida como sendo

$$\vec{F}_{rad} = \frac{S H}{c} \hat{S} \quad (3.25)$$

Utilizando o trabalho de Krivov et al. (1996), obtem-se as componentes do vetor unitário para o caso tridimensional, ou seja,

$$\begin{aligned} S_x &= -\cos \lambda_{Sol} \\ S_y &= -\cos \varepsilon \sin \lambda_{Sol} \\ S_z &= -\sin \varepsilon \sin \lambda_{Sol} \end{aligned} \quad (3.26)$$

em que  $\varepsilon$  é o ângulo entre o plano orbital do planeta (eclíptica) e o equador e  $\lambda_{Sol}$  é a longitude do Sol, que é dada por  $\lambda_{Sol} = \lambda_{Sol_0} + n_{Sol}t$ .  $\lambda_{Sol_0}$  é a longitude inicial do Sol.

### **3.2 - Potencial Terrestre**

A lei da atração gravitacional de Newton é válida para corpos tratados como massas de simetria esférica. Desta forma, quando se trata de uma distribuição arbitrária de massa atraindo um corpo deve-se considerar a atração que cada elemento de massa exerce sobre este corpo. Então, para um modelo ser mais realista, é necessário considerar as dimensões do corpo e sua distribuição de massa. A importância do estudo da atração gravitacional de corpos de dimensões finitas e com distribuição de massa arbitrária vem do fato de que estes podem produzir alterações na órbita de corpos que se posicionem ao redor deles, dependendo do grau da perturbação que estes possam sofrer. Para o caso em questão, foi considerado o sistema Terra - partícula, ou seja, a Terra com dimensões finitas atraindo gravitacionalmente uma partícula.

#### **3.2.1 - As Equações de Movimento Considerando a Perturbação do Potencial Terrestre**

Nesta Subseção foi definido o potencial considerando os coeficientes zonal  $J_2$  e tesseral  $J_{22}$  admitindo simetria equatorial da Terra, pequenas inclinações e não considerando inclinação crítica (Yokoyama, 1974). Foram obtidas as componentes da força utilizadas nas integrações numéricas a partir desse potencial. O estudo feito nesta Subseção foi baseado nos trabalhos de Yokoyama (1974 / 2002) e Roy (1988). Uma descrição mais detalhada das equações aqui utilizadas pode ser vista no Apêndice B.

A expressão geral do potencial terrestre é dada por

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{nm} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n \cos m(\lambda - \lambda_{22}) P_{nm}(\sin \phi) \right\} \quad (3.27)$$

em que  $R_{\oplus}$  e  $M_{\oplus}$  são o raio equatorial e a massa da Terra, respectivamente,  $G$  é a constante de gravitação universal,  $r$  é o raio posição da partícula,  $J_n, J_{nm}, \lambda_{22}$  são coeficientes numéricos,  $\phi$  é a latitude,  $\lambda$  é a longitude e  $P_{nm}$  são os polinômios associados de Legendre, que são dados por

$$P_{nm}(\chi) = (1 - \chi^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{d\chi^{n+m}} (\chi^2 - 1)^n \quad (3.28)$$

Utilizando Figura 3.9, definindo o sistema inercial de coordenadas  $(x, y, z)$  e o sistema girante de coordenadas  $(x', y', z')$ , obtém-se as relações (Yokoyama, 1974)

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \lambda_s \\ y = r \cos \phi \sin \lambda_s \\ z = r \sin \phi \\ \lambda_s = \lambda + \lambda_t \\ \lambda_t = \gamma(t - t_0) \end{cases} \quad (3.29)$$

em que  $\lambda_s$  é a longitude da partícula no sistema inercial,  $\lambda$  é a longitude do satélite no sistema girante e  $r$  é o raio vetor do centro da Terra à partícula  $p$ . O sistema acompanha o movimento de rotação da Terra ( $\gamma$ ).

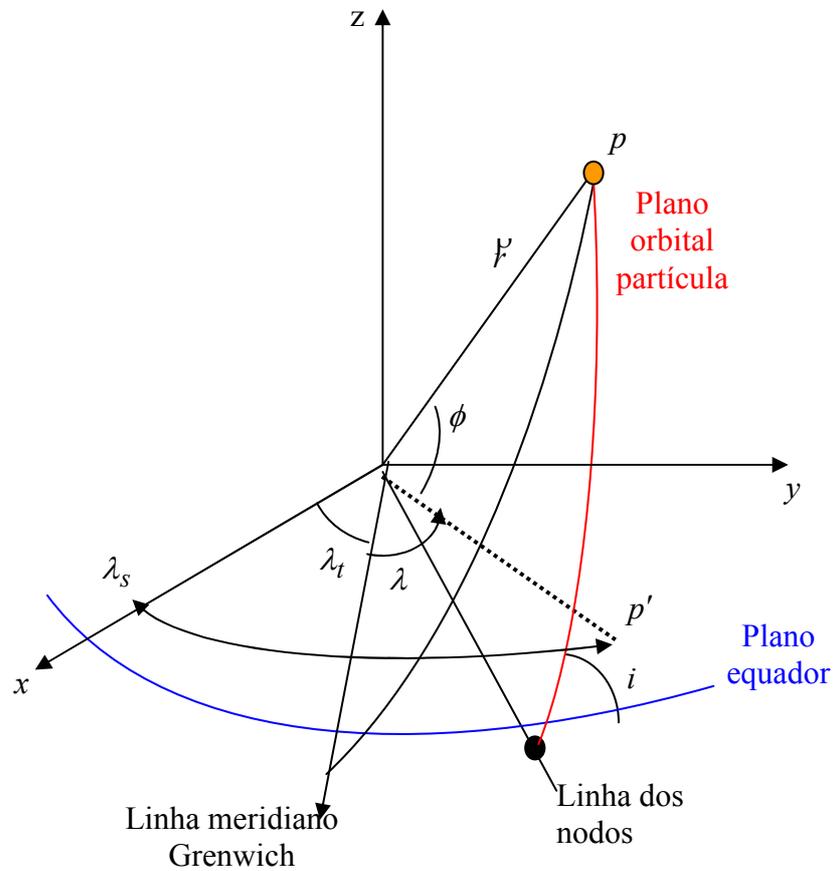


FIGURA 3.9 - Sistema de eixos com origem no centro de massa da Terra, com  $Oz$  apontando para o pólo Norte,  $Ox$  e  $Oy$  dois eixos retangulares de direções fixas situados no plano do equador.  $p'$  é a projeção de  $p$  no plano  $xy$ .

FONTE: Yokoyama (1974).

Existem inúmeros coeficientes do achatamento terrestre. Neste trabalho, admitindo simetria equatorial da Terra, foram considerados os coeficientes  $J_2$  (zonal) e  $J_{22}$  (tesseral). Este último manifesta-se predominantemente para partículas com período

orbital de 24 horas (Yokoyama, 1974). Desta forma, calculando os polinômios  $P_2$  e  $P_{22}$ , o potencial é dado por

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ 1 - J_2 \left( \frac{3 \operatorname{sen}^2 \phi - 1}{2} \right) + J_{22} \cos 2(\lambda - \lambda_{22}) \operatorname{sen}^2 \phi \right\} \quad (3.30)$$

O potencial devido a  $J_2$  e  $J_{22}$  pode ser escrito, em coordenadas retangulares, como (Yokoyama, 1974 / 2002)

$$U = -GM_{\oplus} R_{\oplus}^2 \left\{ \frac{J_2}{2} \left( 3 \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - 1 \right) - 3J_{22} \left[ (2xy \operatorname{sen} 2\lambda_t + (x^2 - y^2) \cos 2\lambda_t) \cos 2\lambda_{22} + \right. \right. \\ \left. \left. + (2xy \cos 2\lambda_t - (x^2 - y^2) \operatorname{sen} 2\lambda_t) \right] \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\} \quad (3.31)$$

A equação do movimento da partícula é dada por

$$\vec{F} = -\nabla U = \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad (3.32)$$

ou ainda,

$$F_x = \frac{3}{2} J_2 \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 \right) \frac{x}{r^3} \right\} + \\ - 15 J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{2xy \operatorname{sen} 2\lambda_t + (x^2 - y^2) \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \cos 2\lambda_{22} + \right. \\ \left. + \left( \frac{2xy \cos 2\lambda_t + (-x^2 + y^2) \operatorname{sen} 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_{22} \right\} \frac{x}{r^3} + \\ + \frac{3}{2} J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{-2x \operatorname{sen} 2\lambda_t + 2y \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_{22} + \right. \\ \left. + \frac{(2x \cos 2\lambda_t + 2y \operatorname{sen} 2\lambda_t) \cos 2\lambda_{22}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right\} \frac{1}{r} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
F_y = & \frac{3}{2} J_2 \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 \right) \frac{y}{r^3} \right\} + \\
& -15 J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{2xy \operatorname{sen} 2\lambda_t + (x^2 - y^2) \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \cos 2\lambda_{22} + \right. \\
& \left. + \left( \frac{2xy \cos 2\lambda_t + (-x^2 + y^2) \operatorname{sen} 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_{22} \right\} \frac{y}{r^3} + \\
& + \frac{3}{2} J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{2x \operatorname{sen} 2\lambda_t - 2y \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \cos 2\lambda_{22} + \right. \\
& \left. + \frac{(2x \cos 2\lambda_t + 2y \operatorname{sen} 2\lambda_t) \operatorname{sen} 2\lambda_{22}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right\} \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
F_z = & \frac{3}{2} J_2 \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 3 \right) \frac{z}{r^3} \right\} + \\
& -15 J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{2xy \operatorname{sen} 2\lambda_t + (x^2 - y^2) \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \cos 2\lambda_{22} + \right. \\
& \left. + \left( \frac{2xy \cos 2\lambda_t + (-x^2 + y^2) \operatorname{sen} 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_{22} \right\} \frac{z}{r^3}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

### 3.3 - Perturbações Luni-Solares

#### 3.3.1 – As Equações de Movimento para o Problema de Quatro Corpos

Considerando o problema geral de quatro corpos as equações de movimento são dadas por (Roy, 1988)

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \sum_{j=1}^4 \frac{\mu_j}{\rho_{ij}^3} \mathbf{F}_{ij} \quad (j \neq i, \quad i = 1, \dots, 4) \tag{3.36}$$

em que

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i \tag{3.37}$$

$$e \quad \mu_i = Gm_i m_j \quad (3.38)$$

Com isso, o conjunto de forças, que a partícula está sujeita, devido às perturbações gravitacionais do Sol, da Terra e da Lua, é dado por

$$\vec{F}_p = \frac{\mu_S}{r_{p-S}^3} (\vec{R}_S - \vec{R}_p) + \frac{\mu_T}{r_{p-T}^3} (\vec{R}_T - \vec{R}_p) + \frac{\mu_L}{r_{p-L}^3} (\vec{R}_L - \vec{R}_p) \quad (3.39)$$

em que o índice  $S$  representa o Sol,  $T$ , a Terra,  $L$ , a Lua,  $p$ , a partícula e  $r_{p-S}$ ,  $r_{p-T}$  e  $r_{p-L}$  são os vetores-posição do Sol, da Terra e da Lua em relação à partícula, respectivamente.

Como a partícula tem massa desprezível, esta é perturbada pela força gravitacional do Sol, da Terra e da Lua mas não perturba o movimento destes.

### 3.3.2 - Sistema de Coordenadas

Nesta Subseção é tratado o problema inclinado, excêntrico e de quatro corpos, Sol-Terra-Lua-partícula, considerando o sistema heliocêntrico.

#### Terra

Considere o sistema de coordenadas retangulares  $(x, y, z)$  centrado no Sol e o plano orbital da Terra  $\equiv Oxy$  as coordenadas da Terra são dadas por

$$\begin{aligned} x_T &= r_{S-T} \cos f_T \\ y_T &= r_{S-T} \sin f_T \\ z_T &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

em que  $f_T$  é a anomalia verdadeira da Terra e  $r_{S-T}$  é o raio vetor Terra-Sol.

## Partícula e Lua

Considere o plano orbital da partícula de coordenadas  $(x', y')$  em que  $x'$  está na direção do pericentro da partícula e o eixo  $z'$  é perpendicular aos eixos  $x'$  e  $y'$  e o sistema de coordenadas do equador da Terra  $(X, Y, Z)$ , como é apresentado na Figura 3.10. Nesta, o plano orbital da partícula está inclinado  $i_p$  em relação ao plano do equador da Terra. O ângulo entre a linha de referência (direção do Equinócio Vernal) e a linha dos nodos é  $\Omega_p$  e o ângulo entre a linha dos nodos e o pericentro da órbita é  $\omega_p$ . Logo, pode-se expressar as coordenadas da partícula no sistema do equador da Terra por

$$\begin{aligned} X_p &= r_{T-p} (\cos \Omega_p \cos(\omega_p + f_p) - \sin \Omega_p \sin(\omega_p + f_p) \cos i_p) \\ Y_p &= r_{T-p} (\sin \Omega_p \cos(\omega_p + f_p) + \cos \Omega_p \sin(\omega_p + f_p) \cos i_p) \\ Z_p &= r_{T-p} (\sin(\omega_p + f_p) \sin i_p) \end{aligned} \quad (3.41)$$

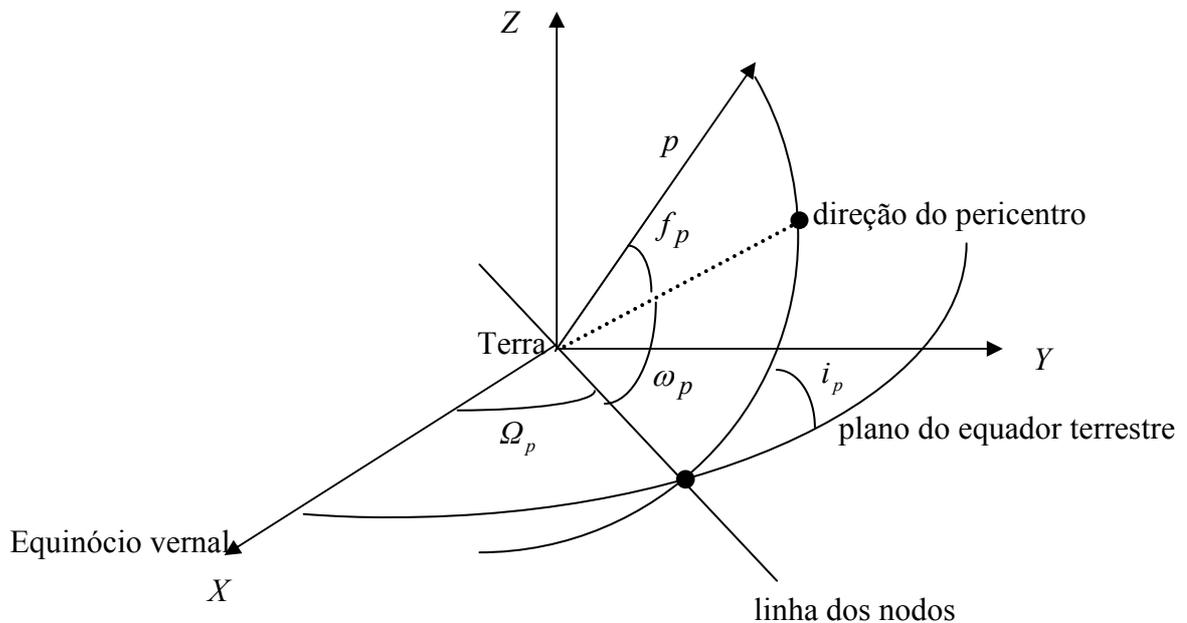


FIGURA 3.10 – Órbita da partícula no espaço.

Para expressar as coordenadas da partícula  $(X_p, Y_p, Z_p)$  no sistema de referência do plano orbital da Terra define-se um sistema intermediário de coordenadas  $(X', Y', Z')$  em que  $Y = Y'$ . Para que os demais eixos coincidam basta rotacionar o eixo  $Y$  de um ângulo  $\varepsilon$  (ângulo da eclíptica). A matriz de rotação  $\wp$  é dada por

$$\wp = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & -\text{sen } \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

então,

$$\begin{pmatrix} X'_p \\ Y'_p \\ Z'_p \end{pmatrix} = \wp' \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Contudo, o sistema adotado está centrado no Sol, então é necessário transladar o sistema para o Sol, como é apresentado na Figura 3.11. Desta forma, as coordenadas da partícula no sistema heliocêntrico serão dadas por

$$\begin{aligned} x_p &= X_p \cos \varepsilon + Z_p \text{sen } \varepsilon + x_T \\ y_p &= Y_p + y_T \\ z_p &= -X_p \text{sen } \varepsilon + Z_p \cos \varepsilon + z_T \end{aligned} \quad (3.44)$$

Analogamente ao que foi feito para a partícula, as coordenadas da Lua são obtidas bastando substituir o índice  $p$  pelo índice  $L$ .

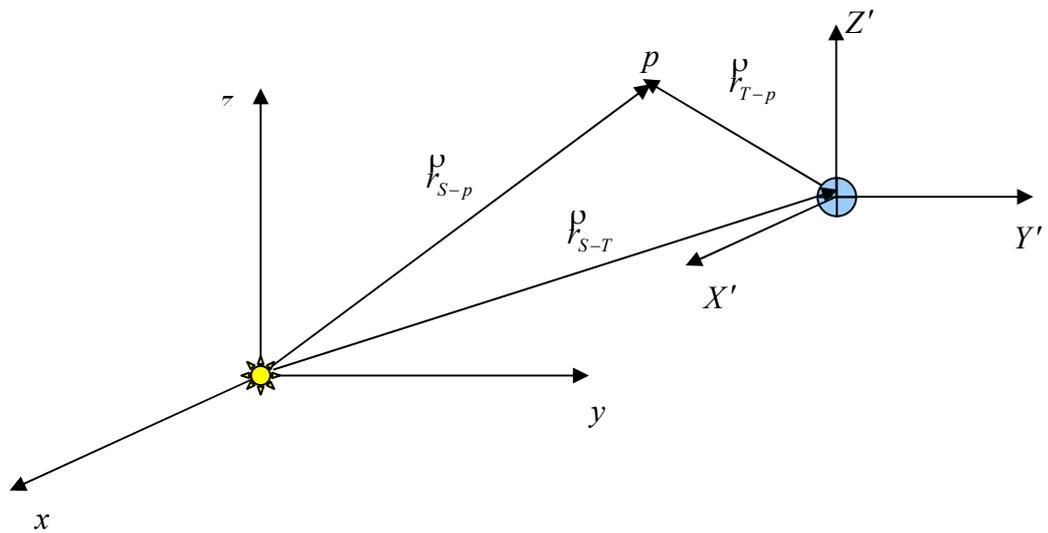


FIGURA 3.11 – Sistema heliocêntrico de coordenadas e o sistema intermediário de coordenadas.

### 3.4 - A Pressão de Radiação Solar e o Achatamento Terrestre

Nesta Seção estudou-se analiticamente a consequência dinâmica na órbita de uma partícula considerando as perturbações da pressão de radiação solar e do achatamento terrestre simultaneamente. Este estudo baseou-se nos trabalhos de Krivov et al. (1996) e Hamilton e Krivov (1996).

Primeiramente, foi definida a função perturbadora da pressão de radiação e do achatamento terrestre. A variação dos elementos orbitais de uma partícula é apresentada utilizando as equações de Lagrange.

### 3.4.1 - Variação dos Elementos Orbitais

Considerando partículas esféricas, pode-se definir o parâmetro  $\sigma$  como sendo a razão entre a força de pressão de radiação  $F$  e a força gravitacional da Terra  $F_{Gr}$ , ou seja,

$$\sigma = \frac{F_{rad}}{F_{Gr}} = \frac{3 Q_{PR} S a^2}{4 G M_{\oplus} c \rho_p s} \quad (3.45)$$

sendo  $Q_{PR}$  o coeficiente da pressão de radiação,  $S$  o fluxo solar,  $a$  o semi-eixo maior da órbita da partícula,  $G$  a constante de gravitação universal,  $M_{\oplus}$  a massa da Terra,  $c$  a velocidade da luz,  $\rho_p$  a densidade da partícula e  $s$  o raio da partícula.

O parâmetro  $\beta$  (Burns et al., 1979) é geralmente definido como sendo a razão entre a força de pressão de radiação e a força gravitacional do Sol; portanto, o parâmetro  $\sigma$  é diferente do parâmetro  $\beta$ .

Utilizando a Equação (3.45), a força de pressão de radiação pode ser dada por

$$\overset{p}{F}_{rad} = \sigma F_{Gr} \hat{S} = \sigma \frac{GM_{\oplus}}{a^2} \hat{S} = \sigma n^2 a \hat{S} \quad (3.46)$$

em que  $\hat{S}$  é o vetor unitário radial do Sol ao centro da Terra e  $n$  é o movimento médio da partícula.

Introduzindo o sistema de coordenadas planetocêntrico equatorial equinocial em que o eixo X é o equinócio vernal, o eixo Y está ao longo do plano equatorial do planeta, ortogonalmente ao eixo X, e o eixo Z está direcionado ao pólo norte do planeta, as componentes de  $\hat{S}$  nesse sistema serão dadas por

$$\hat{S} = -(\cos \lambda_{Sol}, \cos \varepsilon \sin \lambda_{Sol}, \sin \varepsilon \sin \lambda_{Sol}) \quad (3.47)$$

em que  $\varepsilon$  é o ângulo entre o plano orbital do planeta e o equador, conhecido como *obliquidade da eclíptica*, e  $\lambda_{Sol}$  é a longitude do Sol, medida no plano orbital da Terra a partir do eixo X.

A função perturbadora para a pressão de radiação é dada por (Krivov et al., 1996)

$$\mathfrak{R}_{PR} = -\sigma n^2 a (x \cos \lambda_{Sol} + y \cos \varepsilon \sin \lambda_{Sol} + z \sin \varepsilon \sin \lambda_{Sol}) \quad (3.48)$$

As coordenadas  $x, y, z$  são relacionados com os elementos orbitais por

$$\begin{aligned} x &= r(\cos \theta \cos \Omega - \sin \theta \sin \Omega \cos i) \\ y &= r(\cos \theta \sin \Omega + \sin \theta \cos \Omega \cos i) \\ z &= r \sin \theta \sin i \end{aligned} \quad (3.49)$$

em que  $r$  é a distância planetocêntrica,  $\Omega$  é a longitude do nodo,  $i$  é a inclinação orbital com respeito ao plano equatorial e  $\theta = \omega + f$ , sendo  $\omega$  o argumento do pericentro e  $f$  a anomalia verdadeira. Com isso,

$$x = r\{(\cos \omega \cos f - \sin \omega \sin f)\cos \Omega - (\sin \omega \cos f + \sin f \cos \omega)\sin \Omega \cos i\} \quad (3.50)$$

$$y = r\{(\cos \omega \sin f + \sin \omega \cos f)\sin \Omega + (\sin \omega \cos f + \sin f \cos \omega)\cos \Omega \cos i\} \quad (3.51)$$

$$z = r\{\sin \omega \sin f - \sin f \cos \omega\}\sin i \quad (3.52)$$

Para obter a perturbação de longo período, deve-se determinar o valor médio da função perturbadora com respeito à anomalia média  $M$  utilizando (Roy, 1988)

$$\bar{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q dM \quad (3.53)$$

em que  $M$  está relacionada com a anomalia verdadeira  $f$  por

$$\frac{df}{dM} = \frac{a^2}{r^2} (1-e^2)^{1/2} \quad (3.54)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \quad (3.55)$$

Logo, o valor médio da coordenada  $x$  é dado por

$$\begin{aligned} \langle x \rangle = a \left[ \cos \Omega \left\{ \frac{1}{2\pi} \cos \omega \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos f)^3} \cos f df - \sin \omega \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos f)^3} \sin f df \right\} + \right. \\ \left. - \sin \Omega \cos i \left\{ \frac{1}{2\pi} \sin \omega \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos f)^3} \cos f df + \right. \right. \\ \left. \left. \cos \omega \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos f)^3} \sin f df \right\} \right] \quad (3.56) \end{aligned}$$

Expandindo em série de potências, utilizando

$$(1-e^2)^{5/2} \approx 1 - \frac{5}{2}e^2 + \mathcal{O}(e^3) \quad (3.57)$$

$$(1+e \cos f)^3 \approx 1 - 3e \cos f + \mathcal{O}(e^2) \quad (3.58)$$

obtem-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos f)^3} \cos f df = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) (1 - 3e \cos f) \cos f df \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) (1 - 3e \cos f) \cos f \, df = \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - 3e \cos f - \frac{5}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^3 \cos f\right) \cos f \, df \end{aligned} \quad (3.60)$$

e

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos f)^3} \sin f \, df = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) (1 - 3e \cos f) \sin f \, df \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) (1 - 3e \cos f) \sin f \, df = \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - 3e \cos f - \frac{5}{2}e^2 + \frac{15}{2}e^3 \cos f\right) \sin f \, df \end{aligned} \quad (3.62)$$

Considerando termos até a segunda ordem e integrando, tem-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) \cos f \, df = \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos f \, df = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-3e \cos f) \cos f \, df = -3e \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 f \, df = -\frac{3}{2}e \quad (3.64)$$

e

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) \sin f \, df = \left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin f \, df = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-3e \cos f) \sin f \, df = -3e \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos f \sin f \, df = 0 \quad (3.66)$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos f)^3} \cos f \, df = -\frac{3}{2}e \quad (3.67)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e^2)^{5/2}}{(1+e \cos f)^3} \sin f \, df = 0 \quad (3.68)$$

e

$$\langle x \rangle = \frac{3}{2} e a [-\cos \Omega \cos \omega + \sin \Omega \cos i \sin \omega] \quad (3.69)$$

Analogamente,

$$\langle y \rangle = \frac{3}{2} e a [-\sin \Omega \cos \omega - \cos \Omega \cos i \sin \omega] \quad (3.70)$$

e

$$\langle z \rangle = -\frac{3}{2} e a \sin \omega \sin i \quad (3.71)$$

Substituindo as Equações (3.69), (3.70) e (3.71) na Equação (3.48), obtém-se o valor médio da função perturbadora para a pressão de radiação, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{R} \rangle = & \frac{3}{2} \sigma n^2 a^2 e [\cos \omega (\cos \Omega \cos \lambda_{sol} + \sin \Omega \sin \lambda_{sol} \cos \varepsilon) + \\ & \sin \omega (-\sin \Omega \cos i \cos \lambda_{sol} + \cos \Omega \cos i \sin \lambda_{sol} \cos \varepsilon + \sin i \sin \lambda_{sol} \sin \varepsilon)] \quad (3.72) \end{aligned}$$

A função perturbadora para o achatamento terrestre, até a segunda ordem, é dada por (Roy, 1988)

$$\mathfrak{R}_{J_2} = \mu \left\{ \frac{3}{2} \frac{J_2 R_{\oplus}^2}{a^3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right] \right\} \quad (3.73)$$

em que  $J_2$  é o coeficiente de achatamento terrestre e  $R_{\oplus}$  é o raio equatorial da Terra.

Utilizando as Equações (3.53), (3.54) e (3.55), pode-se obter o valor médio de

$$\left(\overline{\frac{a}{r}}\right)^3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1-e^2)^{-3/2} (1+e \cos f) df = \frac{1}{2\pi} (1-e^2)^{-3/2} [f + e \operatorname{sen} f]_0^{2\pi} = (1-e^2)^{-3/2} \quad (3.74)$$

Substituindo a Equação (3.74) na Equação (3.73), obtém-se o valor médio da função perturbadora para o achatamento:

$$\langle \mathfrak{R}_{J_2} \rangle = \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{R^2}{a^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) (1-e^2)^{-3/2} \quad (3.75)$$

Logo, a função perturbadora considerando  $i = \varepsilon = \Omega = 0$  é dada por

$$\langle \mathfrak{R} \rangle = \frac{3}{2} \sigma n^2 a^2 e [\cos \lambda_{Sol} \cos \omega + \operatorname{sen} \lambda_{Sol} \operatorname{sen} \omega] + \frac{1}{2} n^2 a^2 J_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (3.76)$$

As equações de Lagrange são dadas por

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e n a^2} \frac{\partial \langle \mathfrak{R} \rangle}{\partial \omega} \\ \mathfrak{L} &= \frac{\cot i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \langle \mathfrak{R} \rangle}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{csc} i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \langle \mathfrak{R} \rangle}{\partial \Omega} \\ \mathfrak{L} &= \frac{\operatorname{csc} i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \langle \mathfrak{R} \rangle}{\partial i} \\ \mathfrak{L} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e n a^2} \frac{\partial \langle \mathfrak{R} \rangle}{\partial e} - \frac{\cot i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \langle \mathfrak{R} \rangle}{\partial i} \end{aligned} \quad (3.77)$$

em que  $\mathfrak{L} = 0$ , admitindo o efeito combinado da pressão de radiação e do achatamento.

Considerando o problema planar, tem-se  $i = \Omega = \varepsilon = 0$ , a variação dos elementos orbitais pode ser dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e n a^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \omega} \\ \dot{\mathcal{A}} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e n a^2} \frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial e}\end{aligned}\quad (3.78)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}} &= \langle \dot{\mathcal{E}} \rangle \\ \dot{\mathcal{A}} &= \langle \dot{\mathcal{A}} \rangle + \langle \dot{\mathcal{A}} \rangle_{J_2}\end{aligned}\quad (3.79)$$

em que

$$\begin{aligned}\langle \dot{\mathcal{E}} \rangle &= \frac{3}{2} \sigma n \sqrt{1-e^2} \sin[\omega - \lambda_{Sol}] \\ \langle \dot{\mathcal{A}} \rangle &= \frac{3}{2} \sigma \frac{n}{e} \sqrt{1-e^2} \cos[\omega - \lambda_{Sol}] \\ \langle \dot{\mathcal{A}} \rangle_{J_2} &= \frac{3}{2} J_2 n \left( \frac{R}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2}\end{aligned}\quad (3.80)$$

Observa-se que a variação na excentricidade é devido a perturbação da pressão de radiação solar, contudo, segundo Greenberg (1981), o achatamento não provoca variação nos elementos osculadores excentricidade e semi eixo maior da partícula; porém, na órbita real da partícula, existe uma variação que é dada por

$$\begin{aligned}e_0 &= \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 \\ a_0 &\sim a \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 \right)\end{aligned}\quad (3.81)$$

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos foram obtidos utilizando o integrador numérico GAUSS-RADAU (Everhart, 1985). As equações adotadas para as integrações numéricas foram apresentadas e indicadas no Capítulo 3.

#### 4.1 – A Força de Arrasto de Poynting-Robertson

È conhecido que a perturbação do arrasto de Poynting-Robertson atua em grande proporção em pequenas partículas e em grande escala de tempo. Então, uma avaliação da ordem do tamanho da partícula e da escala de tempo para o sistema dinâmico considerado fez-se necessário. Neste item, as integrações numéricas foram obtidas considerando o problema planar, circular de dois corpos, os tamanhos de partícula, na faixa de 0,1 a 10  $\mu\text{m}$  e semi-eixo maior inicial, na faixa de 8.000 a 42.164 km .

Com o objetivo de facilitar a visualização da estrutura da evolução orbital para partículas sujeitas ao arrasto de Poynting-Robertson é apresentada a Figura 4.1a-b Nesta figura foi considerada uma partícula de raio 0,1  $\mu\text{m}$  onde o efeito do arrasto de Poynting-Robertson ocorre em uma escala de tempo menor. Para a partícula com semi-eixo maior inicial de 25.000 km, Figura 4.1a , o tempo de integração foi de 1 ano e para a partícula inicialmente geoestacionária, isto é, partícula com semi-eixo maior de 42.164 km, Figura 4.1b, o tempo de integração foi de 5 anos. Esta figura é apresentada em termos das componentes  $(x, y)$ . É possível observar que ocorre o decaimento orbital da partícula como já era previsto na literatura. Nota-se que, em algumas regiões, ocorre a sobreposição na órbita da partícula, ou seja, a partícula passa por estas regiões um número maior de vezes. Esta sobreposição na órbita da partícula se deve a variação secular da excentricidade como mostrado no Capítulo 3 Item (3.1.1). Este

comportamento é similar para todos os casos que foram considerados neste trabalho. No caso de uma nuvem de partículas, devido ao efeito de Poynting-Robertson, existem regiões com maior ou menor densidade de partículas, em um dado instante. Com isso, o arrasto de Poynting-Robertson define estruturas na evolução orbital.

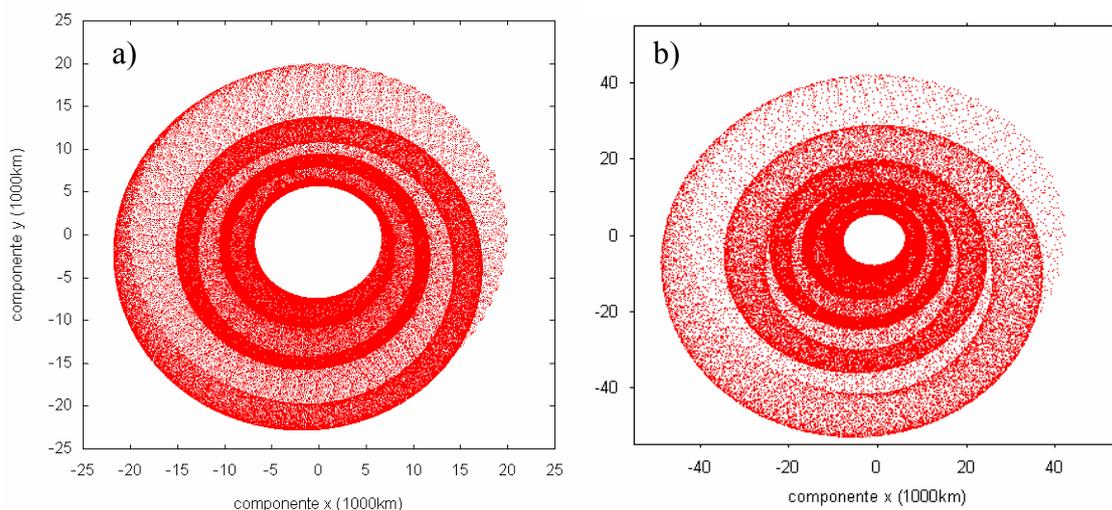


FIGURA 4.1 – Simulação da órbita da partícula em termos das componentes  $(x, y)$ . A partícula está sujeita ao arrasto de Poynting-Robertson. O semi-eixo maior inicial considerado foi: a) 25.000 km; b) 42.164 km. Observa-se que, em algumas regiões, ocorre a sobreposição na órbita da partícula. Então, ao considerar uma nuvem de partículas nota-se que existem regiões com maior ou menor densidade de partículas, em um dado instante.

Para analisar o comportamento da variação do semi-eixo maior ao longo do tempo, é apresentada a Figura 4.2a-b. Nesta figura foram considerados os semi-eixos iniciais de 25.000 e 42.164 km, respectivamente, uma partícula de raio de  $0,5 \mu\text{m}$  e o tempo de integração numérica de cinco anos. Observa-se que o ponto onde a amplitude na variação do semi-eixo maior é praticamente nula ocorre no período próximo ao período orbital da Terra que, neste caso, é o mesmo do Sol pois o sistema em questão está sendo considerado geocêntrico. Portanto, esta figura apresenta cinco ciclos orbitais do Sol.

A evolução do semi-eixo maior pode ser dividida em três componentes: a variação secular que provoca o decaimento da partícula (linha em azul), a variação que acompanha o movimento médio do Sol ao redor da Terra (aproximadamente 365,25 dias) e a variação que ocorre ao longo do período orbital da partícula (comportamento oscilatório para a variação do semi-eixo maior).

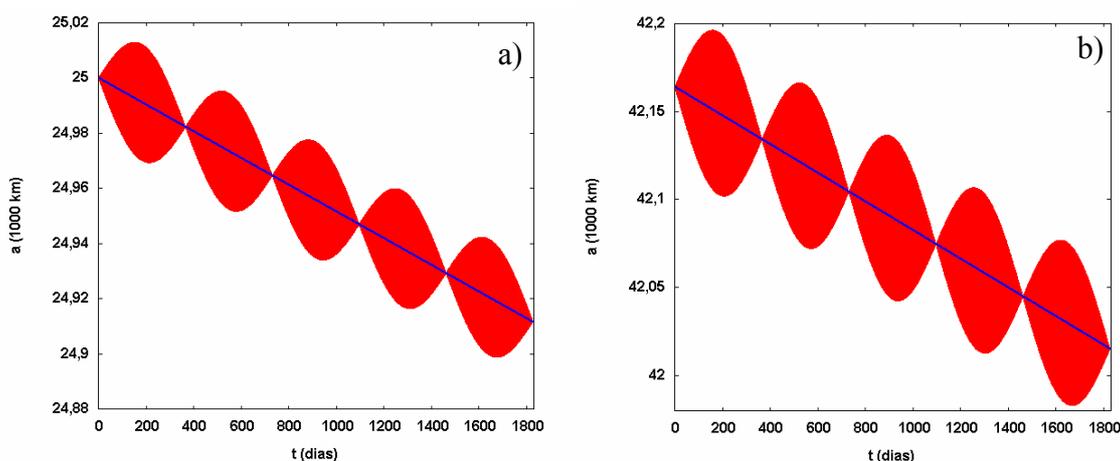


FIGURA 4.2 – Variação do semi-eixo maior ao longo do tempo para uma partícula de semi- eixo maior orbital inicial: a) 25.000 km; b) 42.164 km. Nesta figura é possível observar que a evolução do semi-eixo maior pode ser dividida em três componentes: I) linha em azul que é a variação secular, II) a variação que acompanha o movimento médio do Sol ao redor da Terra e III) a variação que ocorre ao longo do período orbital da partícula .

Na Figura 4.3a-b a variação secular do semi-eixo maior, considerando o valor inicial do semi-eixo de 25.000 km, é de, aproximadamente, 17,5 km/ano, enquanto que para o semi-eixo maior inicial de 42.164 km é de, aproximadamente, 30 km/ano. Observando esta figura, verifica-se que a variação para que a partícula retorna à configuração inicial,

está associada ao período orbital do Sol. A configuração inicial adotada é apresentada na Figura 4.4.

Para visualizar os efeitos de curto período, que estão associados ao comportamento oscilatório na variação do semi-eixo maior para um período orbital da partícula, foi feita uma ampliação da Figura 4.3b. Esta ampliação está apresentada na Figura 4.5 para 10 dias de integração numérica. Observa-se que, quando a partícula espalha a energia incidente, em média, na mesma direção mas em sentido contrário ao do fluxo solar, esta sofre um arrasto máximo. Portanto, nesta figura, existem pontos de máximo e mínimo para a amplitude da variação do semi-eixo maior devido à ação desse arrasto.

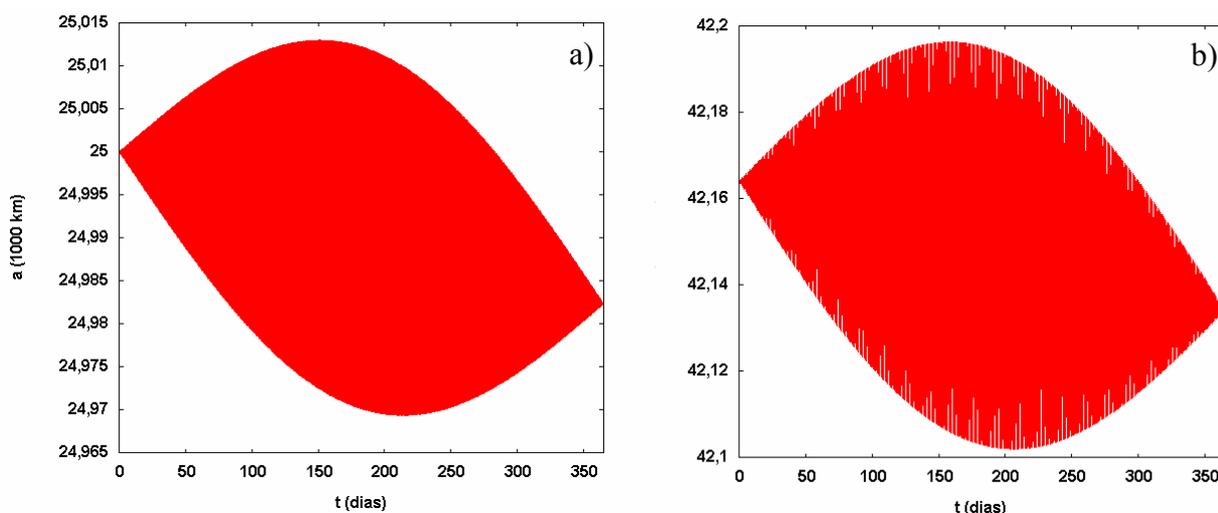


FIGURA 4.3 – Variação do semi-eixo maior ao longo do tempo. O semi-eixo maior inicial considerado foi: a) 25.000 ; b) 42.164 km . A variação secular do semi-eixo maior, considerando o valor inicial do semi-eixo de 25.000 km , é de, aproximadamente, 17,5 km/ano , enquanto que para o semi-eixo maior inicial de 42.164 km é de, aproximadamente, 30 km/ano .



FIGURA 4.4 – Esquema ilustrativo para a posição inicial do sistema Sol-Terra-Partícula.

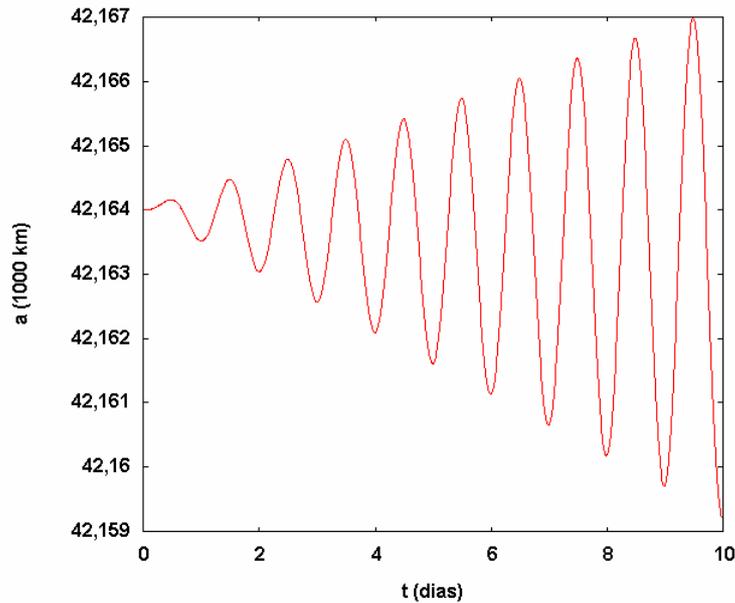


FIGURA 4.5 – Ampliação da Figura 4.3b. O semi-eixo maior inicial considerado foi de 42.164 km. Nesta figura é possível observar os efeitos oscilatórios para a variação do semi-eixo maior.

#### 4.1.1 – Comparação Entre os Resultados Analíticos e Numéricos

Nesta Subsecção é apresentada a comparação entre os resultados numéricos e os analíticos para diferentes semi-eixos iniciais da partícula em órbitas circulares. A comparação entre estes resultados é feita em termos da variação do semi-eixo orbital para diferentes tamanhos da partícula. É possível obter a variação do semi-eixo maior orbital da partícula, analiticamente, para diferentes raios de partículas utilizando as equações (3.14.) e (3.15) dadas no Capítulo 3. Nas Figuras 4.6, 4.7a-b são apresentadas

as comparações entre os resultados analíticos e os numéricos. Nestas figuras, a partícula tem o semi-eixo maior inicial de 8.000, 20.000 e 42.164 km, respectivamente. A cor vermelha, nestas figuras, representa o resultado numérico, enquanto a cor preta representa o resultado analítico. Observa-se que, em todos os casos, os resultados numéricos e analíticos apresentam valores próximos ao considerar tamanhos de partículas na faixa de 1 a 10  $\mu\text{m}$ , só divergindo para valores menores que 1  $\mu\text{m}$ . Estes resultados são consistentes visto que, no modelo analítico adotado o semi-eixo maior é considerado constante enquanto nas integrações numéricas este varia com o tempo.

#### 4.2 – Pressão de Radiação e Achatamento Terrestre

Nesta Subseção, primeiramente, considerou-se o caso de partículas isoladas e, posteriormente, uma nuvem e um anel de partículas. As condições iniciais foram: densidade das partículas de  $3,0 \text{ g/cm}^3$ , raio das partículas entre 1  $\mu\text{m}$  e 1 mm, o que corresponde, aproximadamente, ao valor de massa entre  $10^{-15}$  e  $10^{-6}$  kg, e raio orbital entre 8.000 e 44.000 km. Para o caso de nuvem e de anel de partículas não foi considerada a interação entre estas.

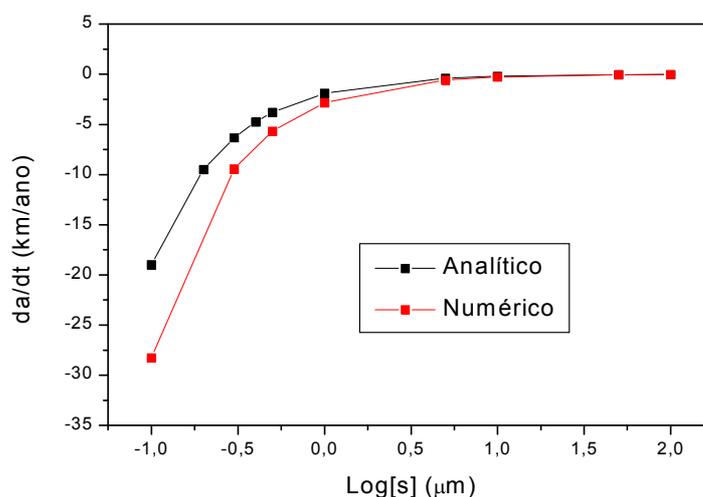


FIGURA 4.6 – Comparação dos resultados analítico e numérico para o decaimento orbital em função do raio da partícula, considerando o semi-eixo maior inicial de 8.000 km.

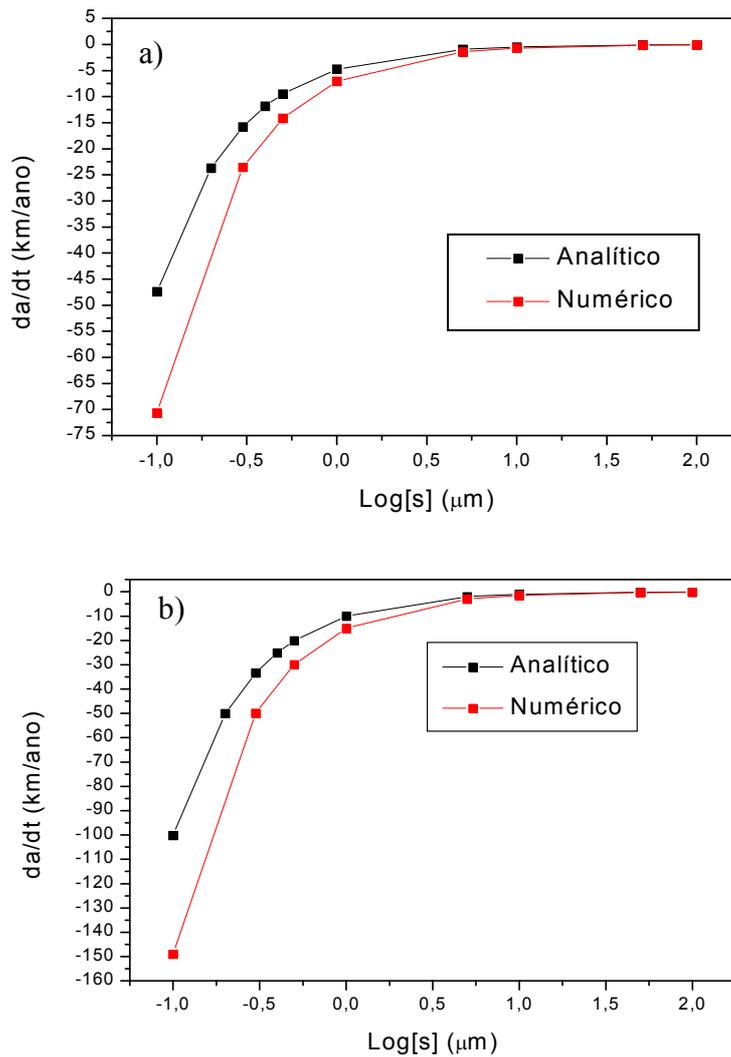


FIGURA 4.7 – Continuação da comparação dos resultados analítico e numérico para o decaimento orbital em função do raio da partícula, considerando o semi-eixo maior inicial: a) 25.000 km; b) 42.164 km. Observa-se que os resultados numéricos e analíticos divergem para valores menores que 1  $\mu\text{m}$ . Este comportamento ocorre pelo fato que no modelo analítico adotado o semi-eixo maior é considerado constante enquanto nas integrações numéricas este varia com o tempo.

#### 4.2.1 – Pressão de Radiação

O efeito da pressão de radiação provoca variação na excentricidade da partícula (Krivov et al., 1996). Então, uma partícula, inicialmente em órbita circular, evoluiria para uma órbita excêntrica. Esta variação na excentricidade provocaria uma mudança na velocidade da partícula. Desta forma, se esta partícula viesse a colidir com um objeto em uma órbita hipotética ao redor da Terra, a velocidade relativa teria diferentes intensidade de acordo com a órbita descrita pela partícula. Neste item é apresentada a evolução da velocidade relativa dessa partícula quando sua órbita cruza a órbita circular de outros satélites que orbitam ao redor da Terra. A ilustração das posições de hipotéticos satélites em órbitas circulares ao redor da Terra e uma partícula cruzando a órbita destes satélites é apresentada na Figura 4.8.

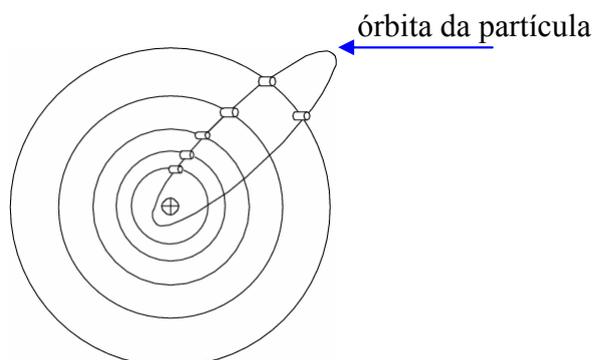


FIGURA 4.8 - Posições de hipotéticos veículos espaciais em órbitas circulares ao redor da Terra e uma partícula cruzando as órbitas destes veículos espaciais.

Na Figura 4.9 é apresentada, numericamente, a evolução orbital de uma partícula de raio  $6 \mu\text{m}$ , em órbita inicialmente circular e geoestacionária, para exemplificar o efeito provocado por esta perturbação. Nesta figura a curva em preto (linha grossa) representa a órbita da partícula sem a perturbação.

Observando a Figura 4.9, nota-se que o efeito da pressão de radiação é relevante para a dinâmica orbital de uma partícula tão pequena. Apesar da pressão de radiação solar ter efeito periódico a órbita descrita inicialmente não é repetida. Existe uma assimetria na órbita perturbada em relação a posição da Terra.. Esta diferença ocorre devido a variação na excentricidade. A partícula apresenta uma grande variação na sua excentricidade  $e$ , por conseqüência, no seu raio orbital. O efeito da pressão radiação solar será diferenciado de acordo com a órbita descrita pela partícula, ou seja, quando esta voltar a sua configuração inicial (excentricidade nula) o efeito provocado pela pressão de radiação solar não será o mesmo, caracterizando a assimetria observada na figura. Esta variação conduz a partícula a entrar na região onde o efeito predominante é o arrasto atmosférico, em um período de integração de aproximadamente 74 dias. Quando a partícula entra nessa região, neste trabalho considerou-se que a perturbação do arrasto atmosférico é predominante quando o raio orbital é de 7.000 km, a integração numérica é interrompida. Porém, apesar de seu tempo de permanência em órbita ser pequeno, ela possui alta velocidade relativa máxima,  $v \approx 5 \text{ km/s}$ , o que aumentaria o possível dano de colisão a algum equipamento espacial em órbita. Assim, esta partícula apresenta um tempo pequeno de permanência em órbita, mas durante este intervalo de tempo, apresenta risco aos equipamentos espaciais.

Para o caso em que a pressão de radiação é menos importante, isto é, para partículas maiores, o período para que repita a configuração inicial da excentricidade, ou seja, excentricidade nula, é aproximadamente igual ao período orbital da Terra, enquanto, para partículas menores é menor do que um período orbital da Terra.

Este comportamento pode ser observado na seqüência das Figuras 4.10 – 4.15. Estes resultados estão de acordo aos resultados apresentados por Hamilton e Krivov (1996), Krivov et al. (1996) e Juhász e Horányi (1995) considerando o caso de cinturões de poeira de partículas ejetadas pelos satélites de Marte, Phobos e Deimos. Os resultados das simulações numéricas mostraram que a redução deste período orbital aparece para partículas menores que 20  $\mu\text{m}$  considerando o sistema dinâmico Terra - partícula.

Para simplificar a exposição dos resultados das Figuras 4.10 - 4.15, é apresentada a Tabela 4.1. Nesta tabela T representa período orbital da Terra em torno do Sol.

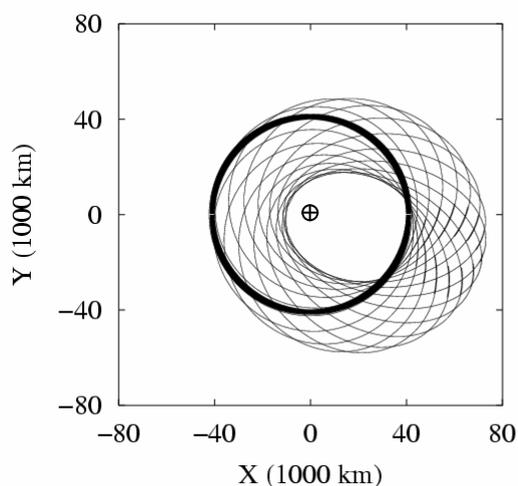


FIGURA 4.9 - Simulação numérica para a evolução orbital de uma partícula de  $6 \mu\text{m}$  em órbita inicialmente circular geostacionária. A curva em preto (linha grossa) representa a órbita da partícula sem a perturbação. Observe que existe uma assimetria na órbita perturbada em relação a posição da Terra. Este efeito é devido a variação da excentricidade da partícula.

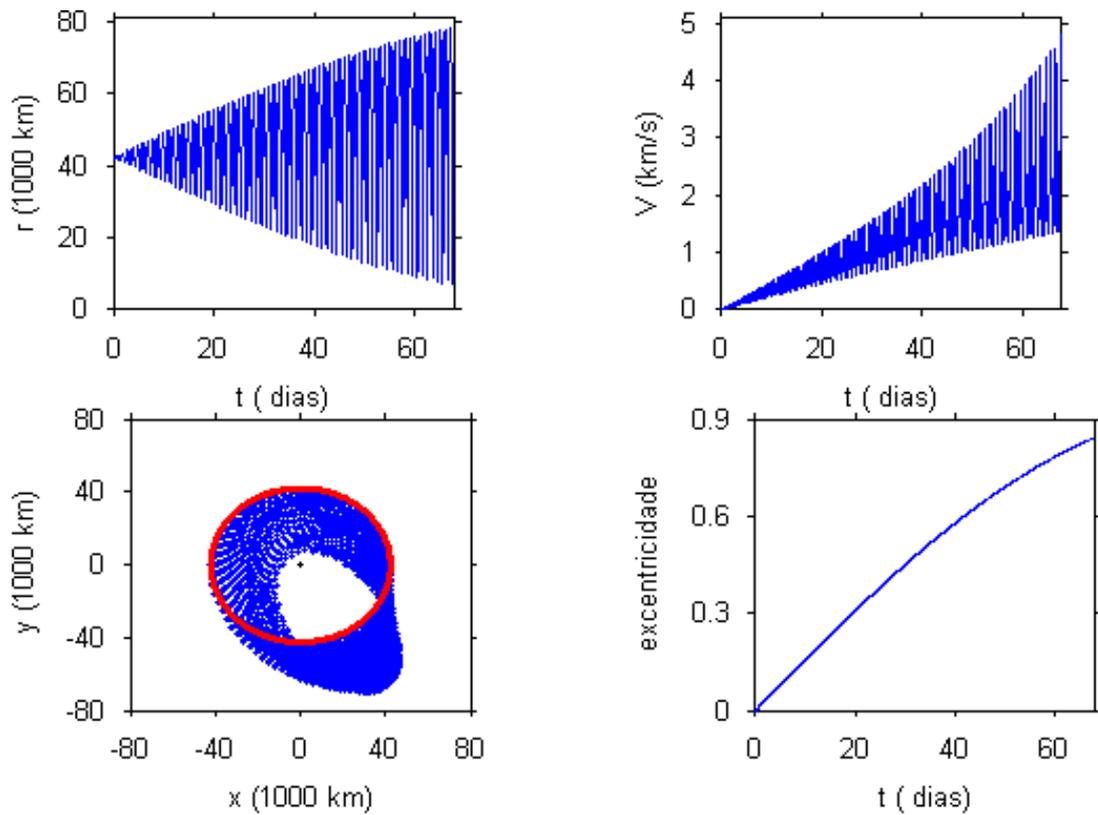


FIGURA 4.10 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para uma partícula de  $3 \mu\text{m}$ , em órbita inicialmente circular geoestacionária. A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A partícula entra na região onde o efeito predominante é o arrasto atmosférico,  $r = 7.000 \text{ km}$ , em um período de integração de aproximadamente 74 dias. A partir deste raio orbital a integração numérica é interrompida pois esta perturbação não foi considerada.

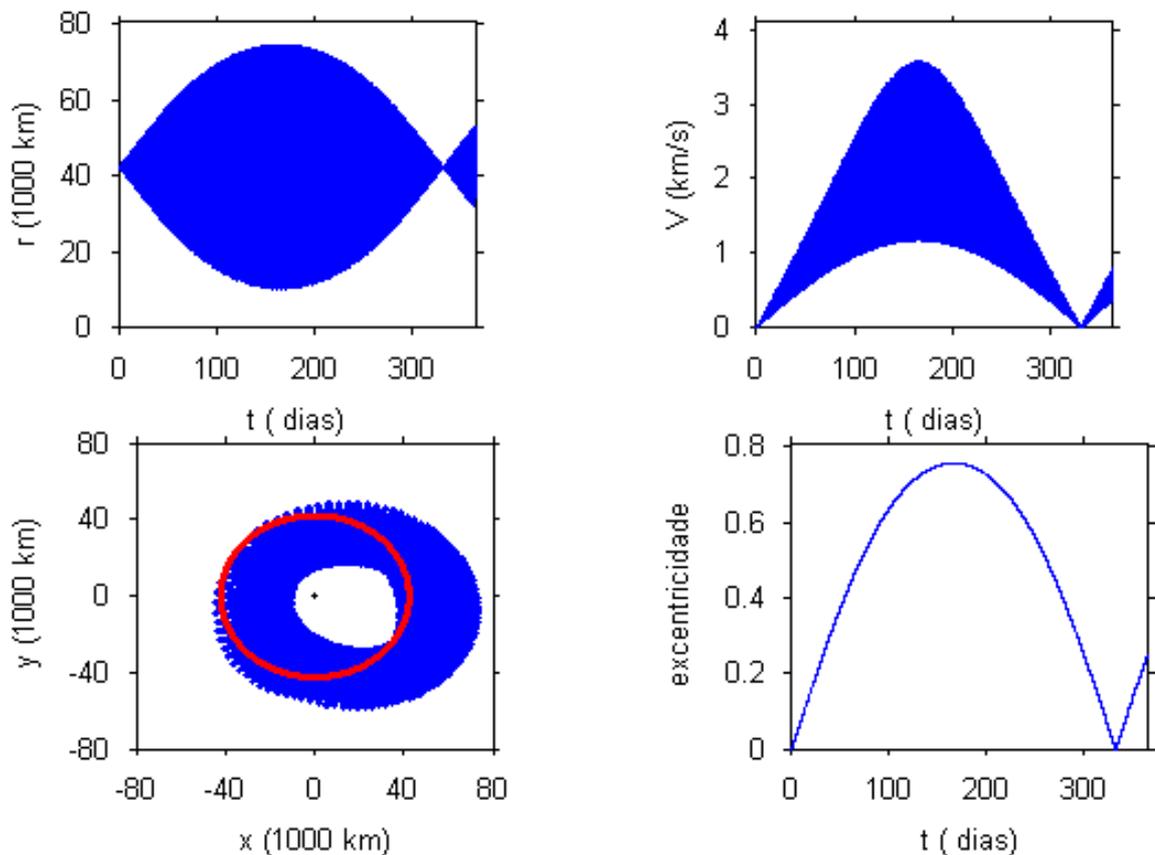


FIGURA 4.11 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de 6  $\mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A partícula apresenta uma grande variação na sua excentricidade, na sua velocidade e no seu raio orbital. Esta variação não conduz a partícula a entrar na região onde o efeito predominante é o arrasto atmosférico,  $r = 7.000$  km. Esta partícula possui alta velocidade relativa máxima o que poderia significar perigo ao colidir com algum equipamento espacial em órbita ao redor da Terra.

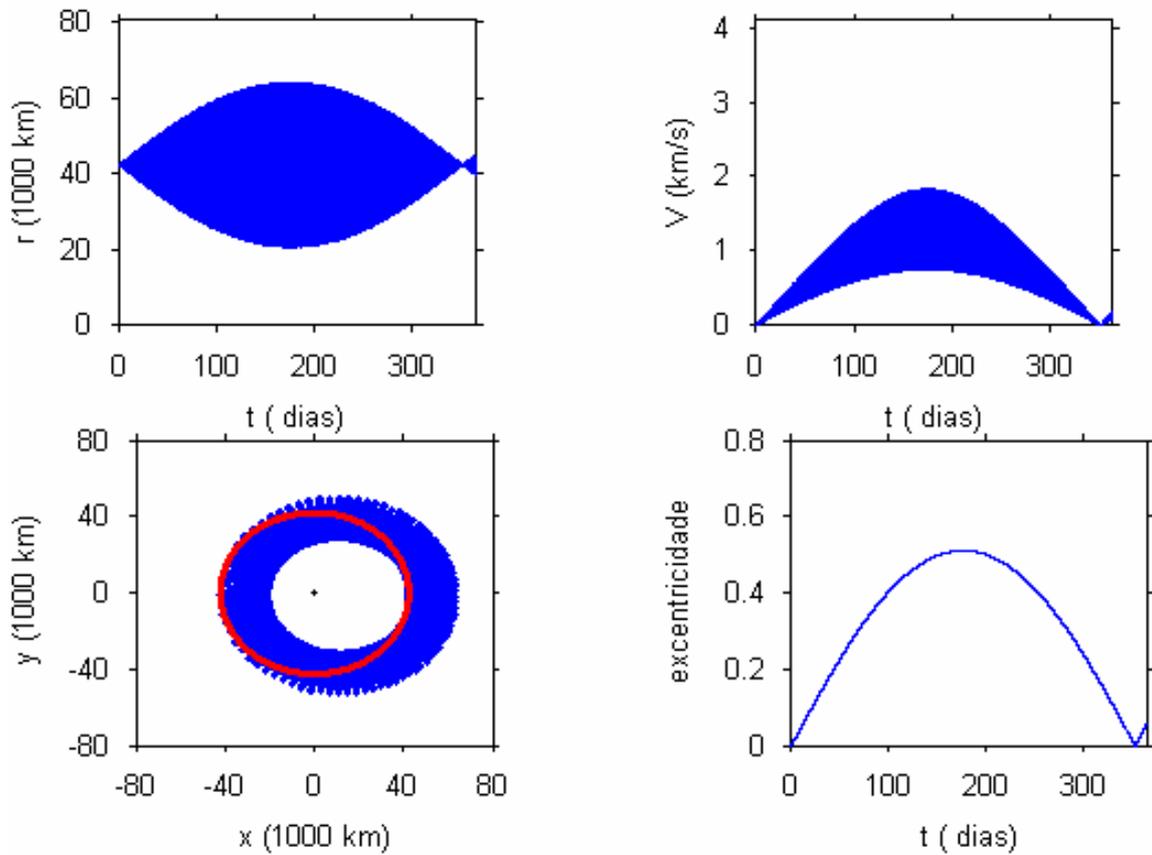


FIGURA 4.12 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de  $10 \mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A partícula apresenta uma pequena variação na sua excentricidade, na sua velocidade e no seu raio orbital comparando com partículas menores. A variação do raio orbital é máxima para o período de integração inferior a 200 dias. Esta partícula pode se encontrar na região orbital de aproximadamente 25.000 a 65.000 km considerando o período de integração de 200 dias.

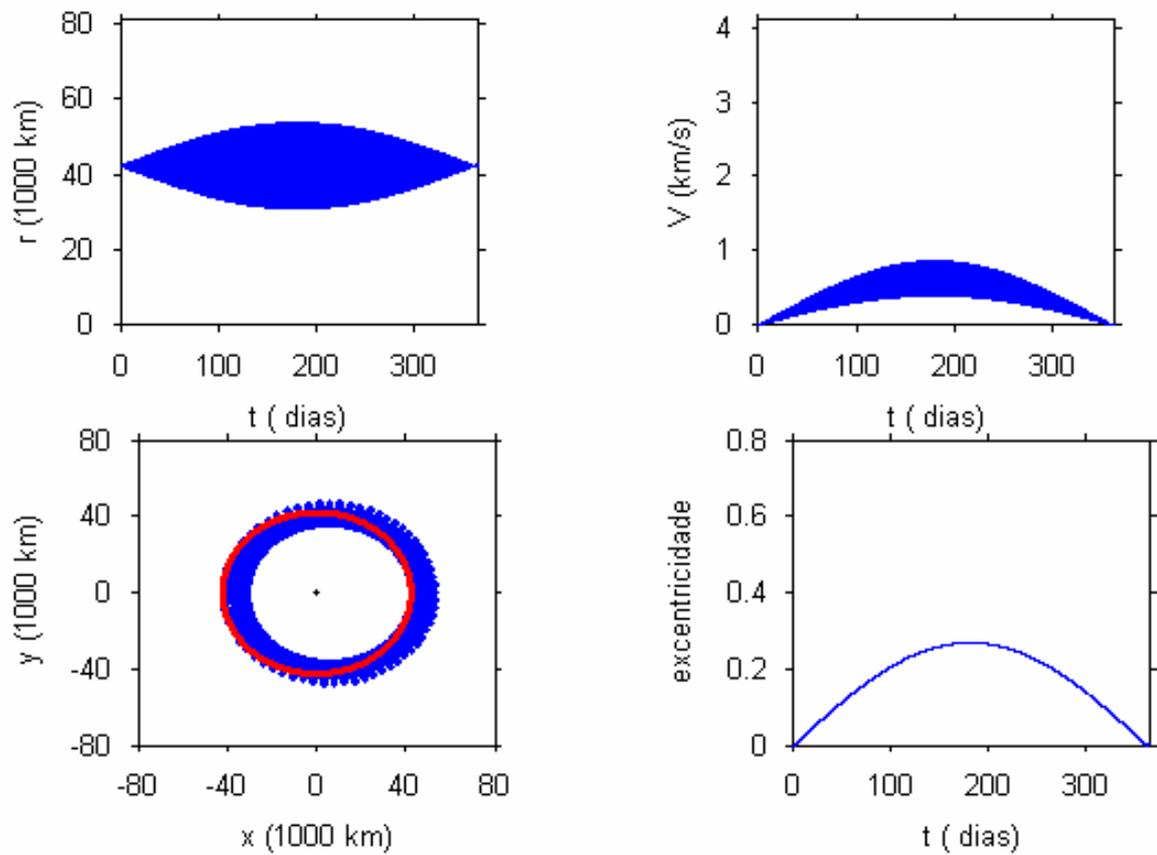


FIGURA 4.13 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de 20  $\mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. Esta partícula pode se encontrar na região orbital de aproximadamente 30.000 a 50.000 km considerando o período de integração de 200 dias. A velocidade relativa máxima é muito menor comparada a aquelas de partículas menores.

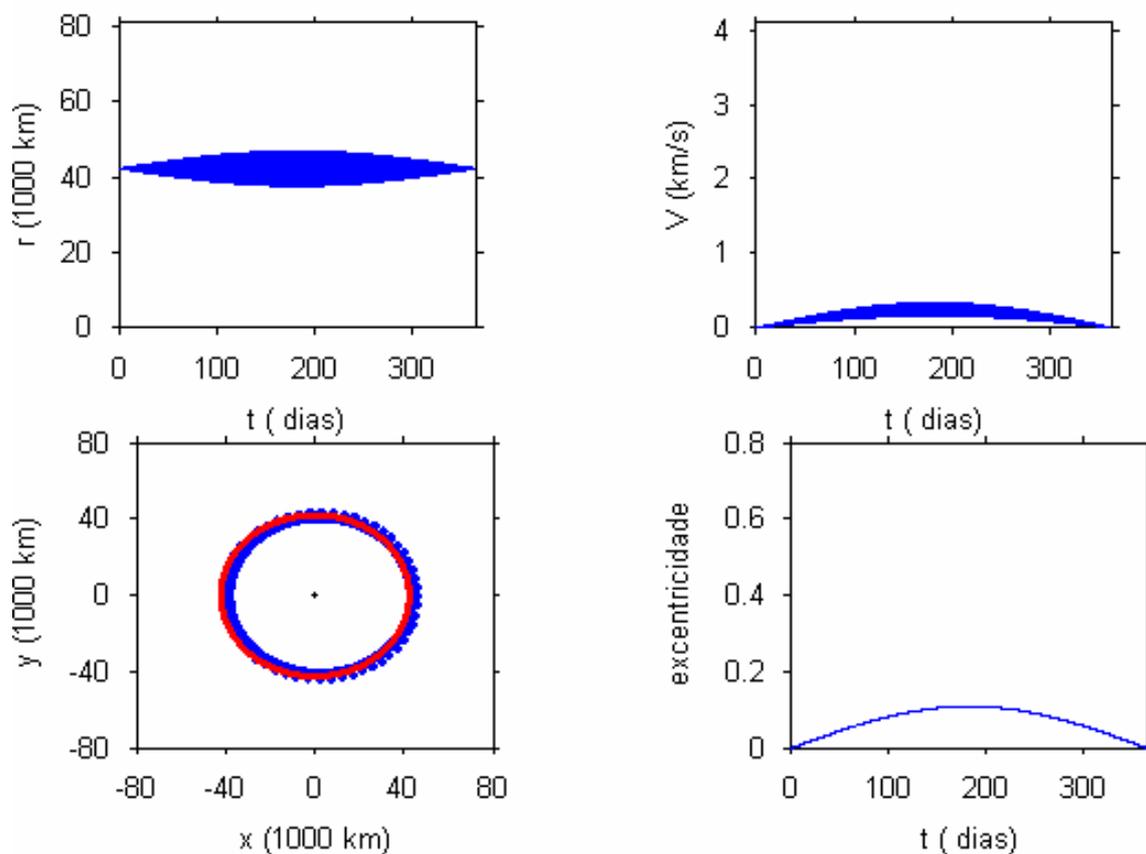


FIGURA 4.14 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de 50  $\mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A princípio esta partícula pode representar um perigo menor a algum equipamento espacial em órbita ao redor da Terra em comparação com partículas menores observando simplesmente sua velocidade relativa máxima.

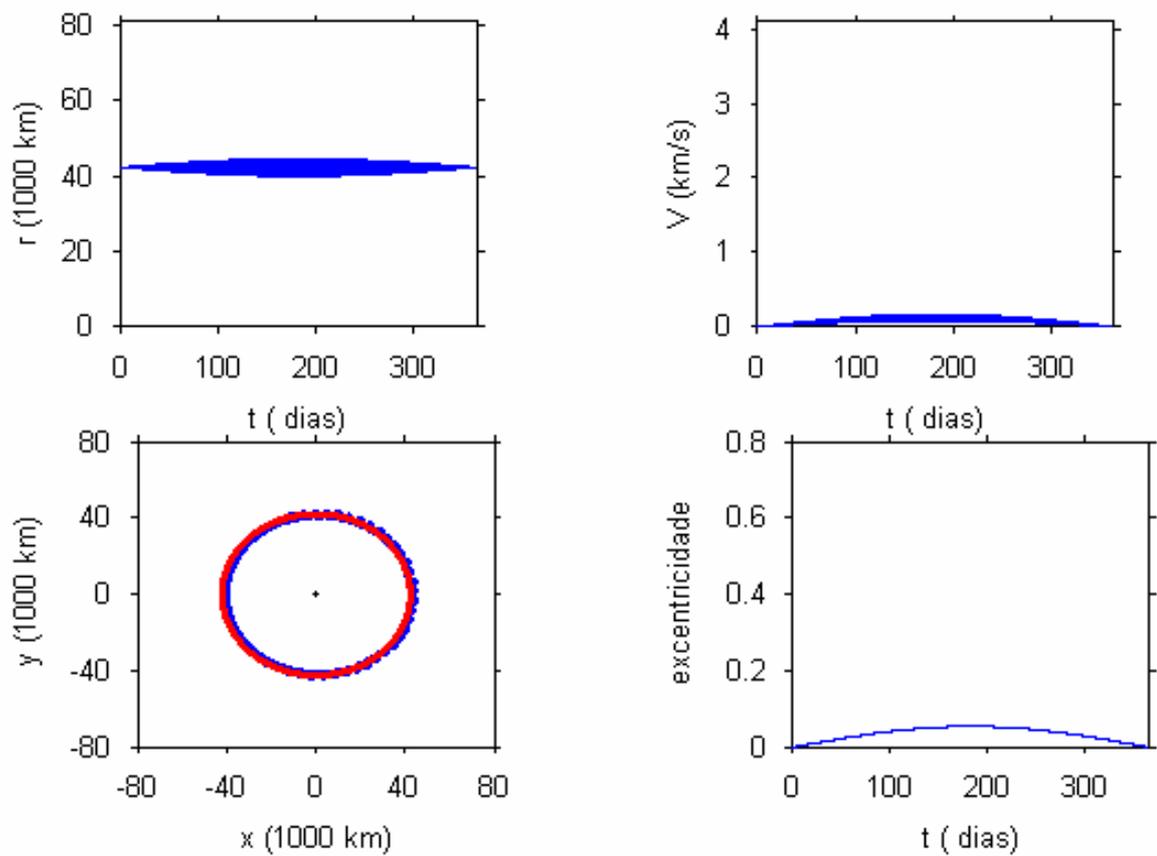


FIGURA 4.15 - Comportamento do raio orbital, da velocidade relativa, da evolução orbital e da excentricidade para partícula de  $100 \mu\text{m}$ . A órbita em vermelho representa a órbita desta partícula sem perturbação. A princípio esta partícula pode representar um perigo menor a algum equipamento espacial em órbita ao redor da Terra em comparação com partículas menores observando simplesmente sua velocidade relativa máxima.

TABELA 4.1 – Sumário dos resultados das Figuras 4.10 - 4.15.

Tamanho ( $\mu\text{m}$ )	Período de integração (dias)	Velocidade relativa ( $\text{km/s}$ )	Período para se repetir o valor de excentricidade nula	Região orbital (km)
3	74	5,00	Não completou um ciclo	
6	T	3,80	< T	10.000 – 75.000
10	T	2,00	< T	25.000 – 65.000
20	T	0,85	$\approx$ T	30.000 – 50.000
50	T	0,34	$\approx$ T	39.000 – 47.000
100	T	0,17	$\approx$ T	40.000 – 43.000

T – período orbital da Terra em torno do Sol

Considerando uma partícula de 100  $\mu\text{m}$ , nota-se que o efeito da pressão de radiação não é relevante sobre a dinâmica orbital desta partícula pois a variação apresentada para a excentricidade, a velocidade relativa, o raio orbital e a evolução orbital é pequena em comparação com os outros tamanhos de partículas. Este valor de velocidade máxima pode sugerir que esta partícula ofereça um perigo menor ao colidir com algum equipamento espacial em órbita do que comparado com o valor de velocidade máxima de uma partícula de 3  $\mu\text{m}$ . Contudo, apesar de sua velocidade ser menor, seu tempo de permanência em órbita é grande visto que a partícula não entra na região onde a perturbação predominante é o arrasto atmosférico. Portanto, tal partícula poderia significar, também, um perigo constante aos equipamentos espaciais.

A evolução da velocidade relativa, com respeito a órbitas circulares que a partícula atravessa, sugere uma faixa de possíveis valores (intensidade) como uma função da posição radial do equipamento espacial, como é apresentado na Figura 4.16a-b. Na Figura 4.16a é possível observar que uma partícula de 6  $\mu\text{m}$  pode chegar a uma velocidade relativa de aproximadamente 3,5 km/s, em órbita média da Terra, e de aproximadamente 2,5 km/s, na região de órbita geostacionária, de onde a partícula foi originada. Pode-se ainda observar o comportamento de assimetria da velocidade relativa como função da posição radial, como foi verificado no comportamento da evolução orbital.

Esta assimetria não pode ser observada quando se consideram partículas maiores, como é apresentado na Figura 4.16b. Nesta figura, observa-se a velocidade relativa em função do raio orbital para uma partícula de 100  $\mu\text{m}$ . É possível verificar que, além da simetria, a velocidade máxima ocorre exatamente na órbita inicial da partícula.

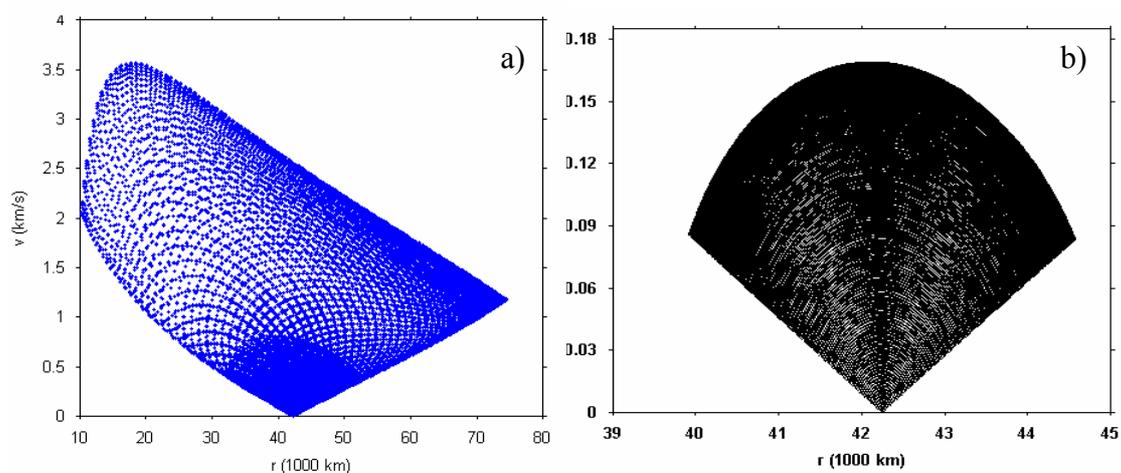


FIGURA 4.16 - Comportamento da velocidade relativa versus raio orbital para uma partícula originalmente geostacionária de a) 6  $\mu\text{m}$  e b) 100  $\mu\text{m}$ . Para a partícula de 6  $\mu\text{m}$  a velocidade relativa máxima ocorre em órbita baixa enquanto para partícula de 100  $\mu\text{m}$  a velocidade máxima ocorre na órbita de onde a partícula foi originada.

A explicação para este comportamento pode ser obtida utilizando a expressão da velocidade relativa em coordenadas polares  $(r, \theta)$  como sendo

$$\Delta v^D = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta - v_c \hat{\theta} \quad (4.1)$$

em que os dois primeiros termos são referentes às componentes da velocidade da partícula e o último termo a componente da velocidade se esta partícula estivesse em órbita circular ao redor da Terra.

Considerando o semi-eixo maior e a excentricidade fixos ao longo de um período orbital tem-se que a velocidade relativa depende somente do ângulo  $\theta$ . Analisando os possíveis valores deste ângulo pode-se obter o raio orbital em que a partícula pode se encontrar utilizando as relações

$$\begin{aligned} \dot{r} &= e \sin \theta \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \\ r \dot{\theta} &= \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} (1 + e \cos \theta) \\ v_c &= \sqrt{\frac{\mu}{r}} \\ r &= \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Utilizando as equações (4.1) e (4.2) foi obtida a Figura 4.17a. Nesta figura é apresentado o comportamento da velocidade relativa em função do ângulo  $\theta$ . A reprodução do comportamento da variação da velocidade relativa considerando apenas o valor de excentricidade máxima em função do raio é mostrada na Figura 4.17b. O perigeu ( $r_p$ ), o apogeu ( $r_a$ ), o semi latus rectum ( $p$ ) da órbita e a variação da velocidade máxima são indicados nesta figura.

Os dados iniciais utilizados na obtenção da Figura 4.17 foram semi-eixo maior inicial de 42.164 km, o tamanho de partícula de 100  $\mu\text{m}$  e a excentricidade máxima de 0,05. A

curva em vermelho representa os valores da velocidade relativa para a excentricidade máxima constante de 0,05.

Observe que, na Figura 4.17a, para um mesmo valor de excentricidade a variação da velocidade relativa apresenta valor mínimo em  $0^\circ$  e  $180^\circ$  caracterizando o perigeu e o apogeu da órbita, respectivamente. Enquanto o máximo ocorre para  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 270^\circ$  que representa a posição quando  $r = p$ , o semi latus rectum,  $p = a(1 - e^2)$ . Observe que para estes valores de  $\theta$  e excentricidade de 0,05 o raio orbital é de 42.058,6 km. Então, a velocidade relativa máxima ocorrerá neste raio orbital, explicando o comportamento da velocidade relativa em função do raio orbital de uma partícula de  $100 \mu\text{m}$ .

Para a partícula de  $6 \mu\text{m}$  a variação da excentricidade ocorre de maneira muito rápida quando comparada a variação da excentricidade de uma partícula de  $100 \mu\text{m}$ , veja Figura 4.11. Observe que a excentricidade máxima é de aproximadamente 0,75 em apenas 100 dias. Considerando um tempo menor de integração numérica, por exemplo 10 dias, a velocidade relativa máxima ocorre sempre deslocada para mais próximo ao perigeu da órbita. Na Figura 4.18a é apresentado este comportamento. Nesta figura tem-se a variação da excentricidade versus raio orbital da partícula para o período de integração de apenas 10 dias para uma partícula de  $6 \mu\text{m}$ . Considerando apenas este período de integração tem-se que a variação da excentricidade da partícula evolui até o valor superior a 0,2.

Das relações do raio do perigeu,  $r_p = a(1 - e)$ , do apogeu,  $r_a = a(1 + e)$  e do semi latus rectum,  $p = a(1 - e^2)$  tem-se que  $r_p < p < r_a$  e  $p < (r_a + r_p)/2$ , desta forma o máximo fica mais próximo de  $r_p$  do que de  $r_a$ .

Para confirmar estas discussões tem-se que analiticamente pode-se obter os pontos máximos derivando o módulo da velocidade relativa,  $|\Delta v^{\overline{\theta}}|$  em relação a anomalia verdadeira ( $\theta$ ) e igualando à zero. Assim,

$$\frac{d\Delta v}{d\theta} = \frac{2e^2\xi^2 \cos\theta \operatorname{Sen}\theta + 2(-\xi\sqrt{1+e\cos\theta} + \xi(1+e\cos\theta)) \left( -e\xi \operatorname{Sen}\theta + \frac{e\xi \operatorname{Sen}\theta}{2\sqrt{1+e\cos\theta}} \right)}{2\sqrt{(-\xi\sqrt{1+e\cos\theta} + \xi(1+e\cos\theta))^2 + e^2\xi^2 \operatorname{Sen}\theta^2}} \quad (4.3)$$

em que

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}. \quad (4.4)$$

Com isso, os pontos de máximos são dados por  $\theta = 0$ ,  $\theta = \frac{-\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ou seja,  $90^\circ$  ou  $270^\circ$ . Confirmando assim o comportamento deslocado do máximo para mais próximo do perigeu, ou seja, o máximo ocorre quando o raio orbital é igual ao semi latus rectum. Para observar este deslocamento do máximo em função da excentricidade da partícula foi obtida a comparação radial entre o perigeu, apogeu e o semi latus rectum da órbita da partícula considerando o problema de dois corpos. Na Figura 4.18b é dado o comportamento do raio orbital em função da excentricidade. Nesta figura a curva em verde representa o apogeu, em vermelho o perigeu e em azul o semi latus rectum da órbita da partícula. Observe que para qualquer excentricidade o máximo ocorre mais próximo do perigeu. Considerando uma partícula de  $6 \mu\text{m}$  tem-se que o máximo da velocidade relativa ocorrerá para o raio orbital de 18.446,8 km. Como a variação da excentricidade para uma partícula de  $6 \mu\text{m}$  é muito maior quando comparada a uma partícula de  $100 \mu\text{m}$  tem-se o comportamento diferenciado observado na Figura 4.16 na realidade é simplesmente devido ao problema de escala.

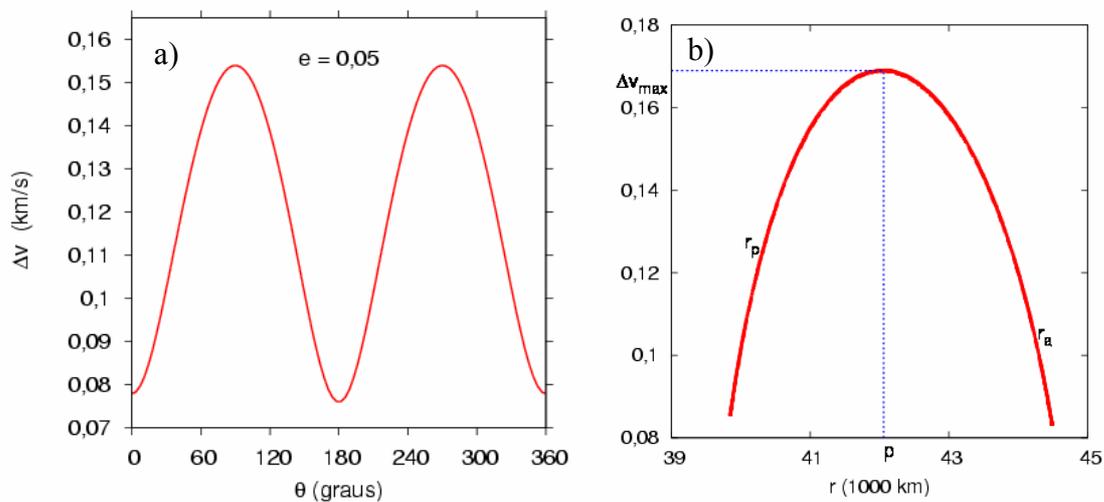


FIGURA 4.17 - a) Comportamento da variação da velocidade relativa versus longitude verdadeira para uma partícula de 100  $\mu\text{m}$  originalmente geostacionária e excentricidade de 0,05 e b) Reprodução da variação da velocidade em função do raio orbital indicando o perigeu ( $r_p$ ), apogeu ( $r_a$ ) e o semi latus rectum ( $p$ ) da órbita. A curva em vermelho na Figura 4.17b representa a variação da velocidade relativa considerando a mesma excentricidade, neste caso,  $e_{\text{max}} = 0,05$ . Observe que para um mesmo valor de excentricidade a variação da velocidade apresenta valor mínimo em  $0^\circ$  e  $180^\circ$  caracterizando o perigeu e o apogeu da órbita, respectivamente. Enquanto o máximo ocorre para  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 270^\circ$  que corresponde ao raio orbital igual ao semi latus rectum da órbita.

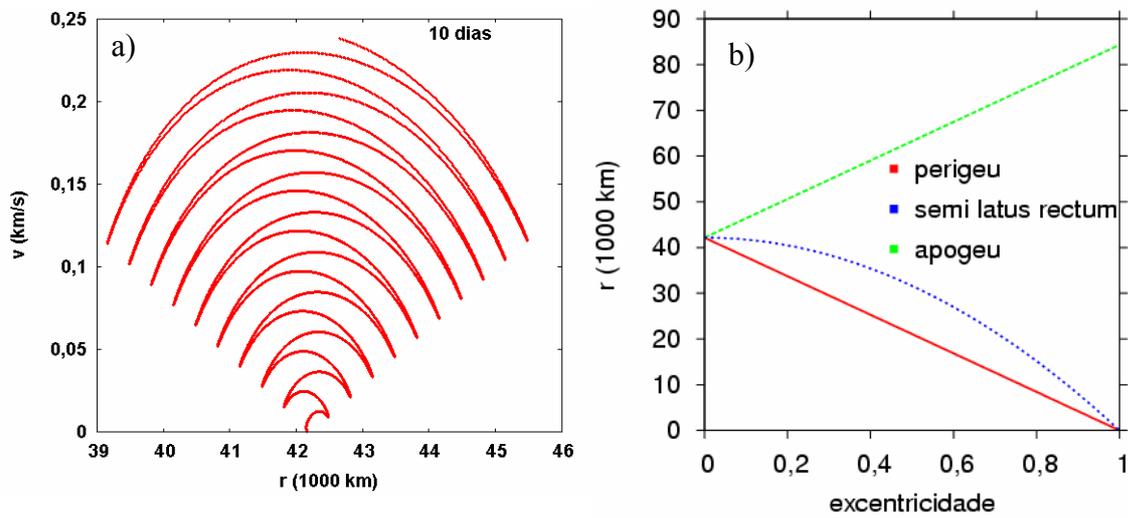


FIGURA 4.18 - a) Variação da velocidade relativa em função do raio orbital para o período de integração de apenas 10 dias considerando uma partícula de  $100 \mu\text{m}$ , órbita inicial geostacionária e a perturbação da pressão de radiação solar. A velocidade relativa máxima ocorre sempre deslocada para mais próximo ao perigeu da órbita. b) Comportamento do raio orbital em função da excentricidade para o problema de dois corpos. Nesta figura a curva em verde representa o apogeu, em vermelho o perigeu e em azul o semi latus rectum da órbita da partícula. Observe que para qualquer excentricidade o semi latus rectum está mais próximo ao perigeu da órbita.

Considerando uma partícula de  $6 \mu\text{m}$  tem-se que o máximo da velocidade relativa ocorrerá para o raio orbital de  $18.446,8 \text{ km}$ . Como a variação da excentricidade para uma partícula de  $6 \mu\text{m}$  é muito maior quando comparada a uma partícula de  $100 \mu\text{m}$  tem-se o comportamento diferenciado observado na Figura 4.16 na realidade é simplesmente devido ao problema de escala.

A partir dos resultados apresentados, nota-se que a velocidade relativa máxima e a excentricidade máxima diminuem conforme o tamanho da partícula aumenta (Figuras 4.19 e 4.20). Observa-se, ainda, que o efeito da pressão de radiação provoca variação significativa na velocidade de partículas menores que 5  $\mu\text{m}$ .

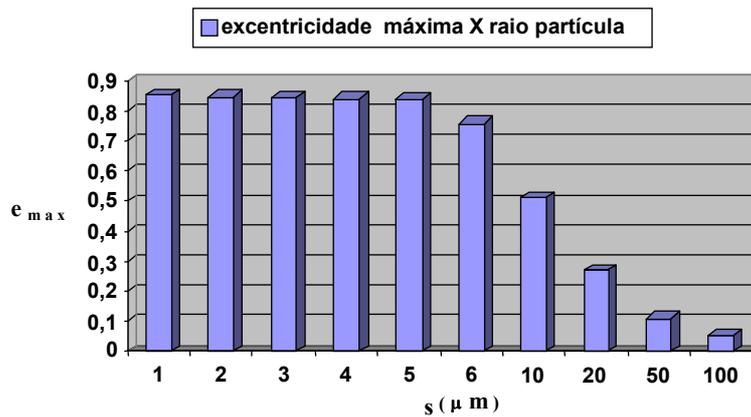


FIGURA 4.19 - Excentricidade máxima para partículas de raio 1 a 100  $\mu\text{m}$ . Para uma partícula de 5  $\mu\text{m}$  a excentricidade máxima é de aproximadamente 0,85 enquanto para uma partícula de 100  $\mu\text{m}$  é de aproximadamente 0,05.

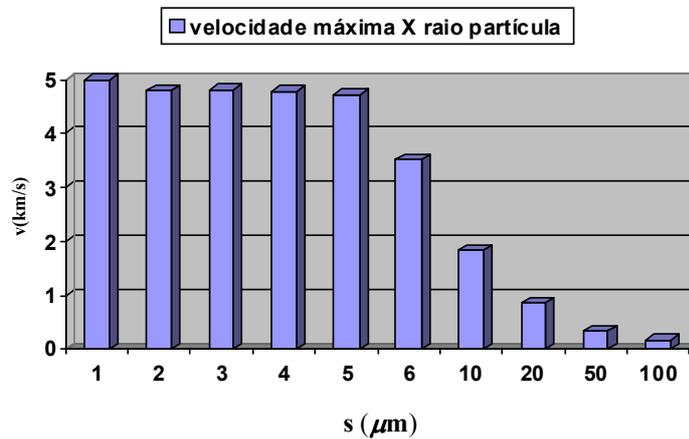


FIGURA 4.20 - Velocidade relativa máxima para partículas de raio 1 a 100  $\mu\text{m}$ . Observe que a velocidade relativa máxima aumenta conforme o tamanho de partícula diminui.

Porém, as grandezas utilizadas para medir os possíveis danos a algum equipamento espacial são a energia cinética e o momento linear da partícula. No instante do choque, a energia cinética será convertida em momento linear e a deformação (dano) ocorre em função deste momento transferido. O comportamento da energia cinética,  $E_{c_{máx}} = (1/2)mv_{máx}^2$ , e do momento linear máximo,  $p_{máx} = mv_{máx}$ , destas partículas é apresentado nas Figuras 4.21 e 4.22, respectivamente. A energia cinética e o momento linear apresentam um valor maior ao considerar partículas maiores. Isto se deve ao fato que a massa aumenta com o cubo do raio, já que a densidade foi mantida constante ( $3,0 \text{ g/cm}^3$ ). Portanto, para uma partícula de  $1 \text{ }\mu\text{m}$ , a sua massa é da ordem de  $10^{-15} \text{ kg}$  e para uma partícula de  $100 \text{ }\mu\text{m}$ , a sua massa é da ordem de  $10^{-9} \text{ kg}$ . Dessa forma, a diferença das massas é de seis ordens de grandeza contra uma ordem de grandeza para a diferença de velocidades.

Assim, partículas maiores devem apresentar energia cinética e momento linear significativamente maiores. A diferença na ordem de grandeza do momento linear para partículas maiores pode ser observada na Figura 4.22. Nessa figura verifica-se que uma partícula de raio de  $100 \text{ }\mu\text{m}$  apresenta momento linear máximo da ordem de  $10^{-6} \text{ kg m/s}$  enquanto partículas menores que  $20 \text{ }\mu\text{m}$  apresentam momento linear, pelo menos, duas ordens de grandeza menores.

A energia cinética e o momento linear máximo apresentam dois tipos de comportamento em função do tamanho das partículas. Partículas menores que  $5 \text{ }\mu\text{m}$  apresentam um comportamento linear e partículas maiores apresentam um comportamento não linear (quadrático). Nas Figuras 4.23a e 4.23b são apresentados ajustes de curva onde estes tipos de comportamento podem ser observados. Nestas figuras, a escala utilizada foi a logarítmica. Este comportamento diferenciado é devido ao fato de que partículas menores que  $5 \text{ }\mu\text{m}$  entram na região em que a perturbação predominante é o arrasto atmosférico e, por esta razão, a integração numérica é interrompida.

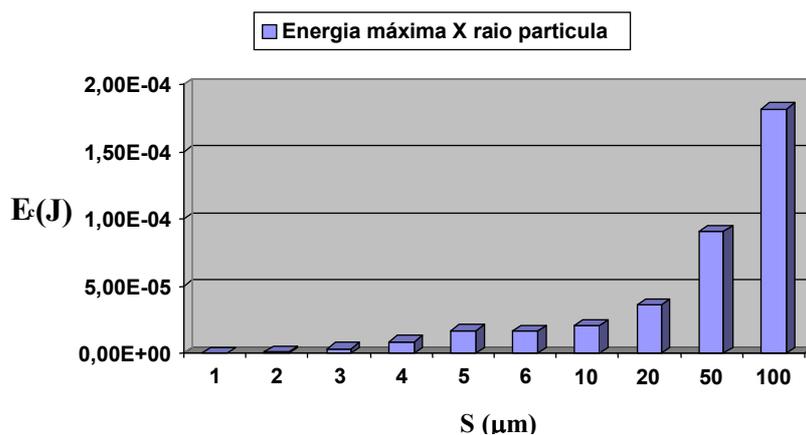


FIGURA 4.21 - Energia cinética máxima para partículas de raio 1 a 100 μm. A diferença das massas é de seis ordens de grandeza contra uma ordem de grandeza para a diferença de velocidades.

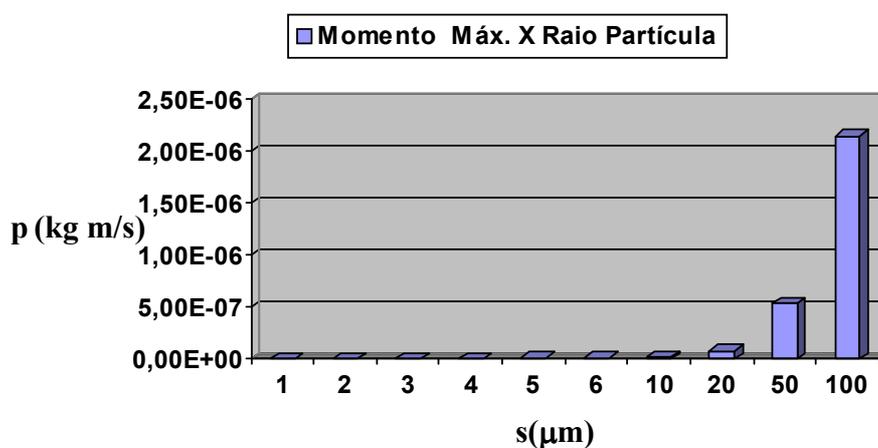


FIGURA 4.22 - Momento linear máximo para partículas de raio 1 a 100 μm. A partícula de raio de 100 μm apresenta momento linear máximo da ordem de  $10^{-6}$  kg m/s enquanto partículas menores que 20 μm apresentam momento linear, pelo menos, duas ordens de grandeza menores.

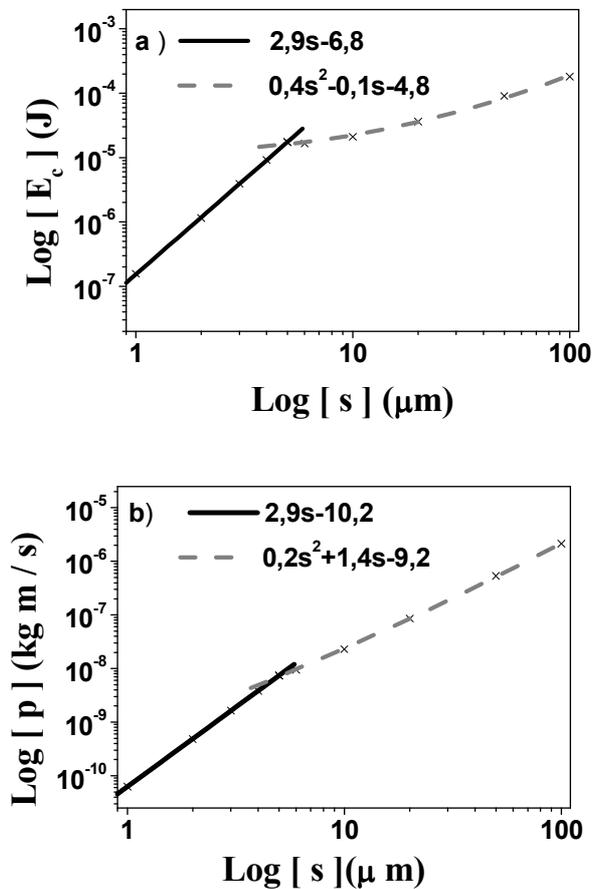


FIGURA 4.23 – a) energia cinética máxima e b) momento linear máximo para partículas de raio de 1 a 100  $\mu\text{m}$ . A figura é apresentada em escala logarítmica. É possível observar que ambas grandezas possuem dois tipos de comportamento. Partículas menores que 5  $\mu\text{m}$  apresentam comportamento linear enquanto, partículas maiores, comportamento quadrático.

Contudo, até o momento, a região orbital considerada foi a região geostacionária, sendo que a região de exploração ao redor da Terra é dividida em três regiões: GEO, MEO e LEO. Desta forma, faz-se necessário a expansão destes resultados considerando os raios orbitais: GEO = 42.164 km, MEO = 25.000 km e LEO = 8.000 km.

Na Figura 4.24 é apresentado o valor da excentricidade máxima para partículas de raio de 1 a 100  $\mu\text{m}$  nas regiões alta, média e baixa. Nesta figura pode-se observar que o tamanho da partícula e a região orbital em que esta se encontra produzem diferentes valores máximos para a variação da excentricidade. Para a região orbital de 42.164 km, a partícula tem o valor máximo de excentricidade de, aproximadamente, 0,9 e, para a região orbital de 25.000 km, o valor máximo de excentricidade é de, aproximadamente, 0,7. Estes valores são, aproximadamente, constantes para partículas de tamanhos menores que 6  $\mu\text{m}$ . Partículas na região orbital baixa, ao redor da Terra, apresentam valores de excentricidade máxima de, aproximadamente, 0,1, para tamanhos menores ou igual a 20  $\mu\text{m}$ . Isto ocorre porque o perigeu da órbita de partícula destes tamanhos são menores que 7.000 km. E este valor de raio orbital é o limitante nas integrações numéricas (perturbação do arrasto atmosférico).

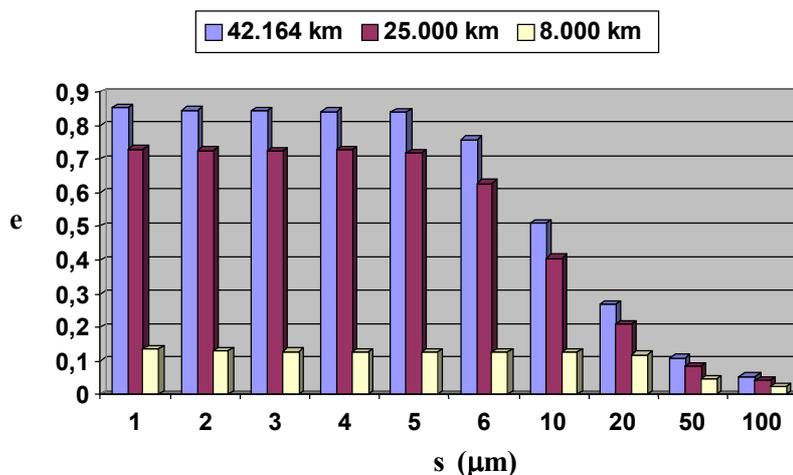


FIGURA 4.24 - Excentricidade máxima *versus* tamanho de partícula em órbitas alta, média e baixa ao redor da Terra.

O valor da velocidade máxima, em função da região orbital e do tamanho da partícula, é apresentado na Figura 4.25. O comportamento da velocidade máxima apresentou um fato que merece atenção. Pode-se observar que para partículas maiores ou igual a 20

$\mu\text{m}$ , a velocidade máxima relativa praticamente independe da região orbital inicial desta partícula.

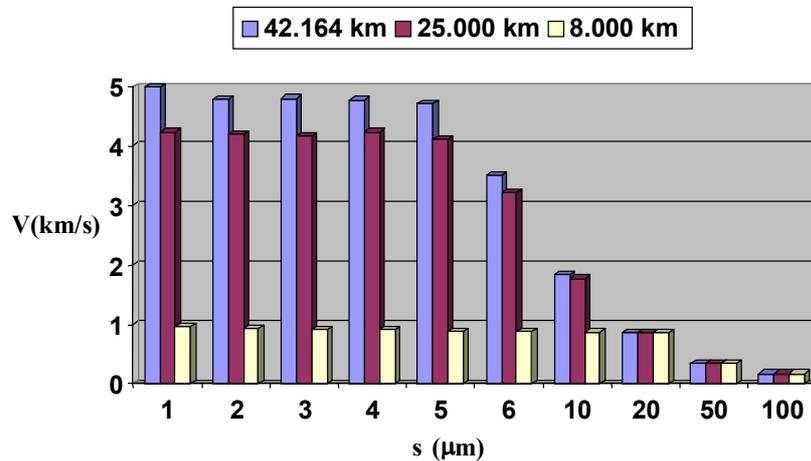


FIGURA 4.25 - Velocidade máxima *versus* tamanho de partícula em órbitas alta, média e baixa ao redor da Terra. Observe que para partículas maiores ou igual a 20  $\mu\text{m}$ , a velocidade máxima relativa praticamente independe da região orbital inicial desta partícula.

Nas Figuras 4.26a e 4.26b são apresentados os valores da energia cinética e momento linear somente para partículas menores ou igual a 10  $\mu\text{m}$ , visto que para partículas maiores que este valor a energia cinética e momento linear são quase independentes da região orbital em que a partícula se encontra. Nesta figura, a escala utilizada para a energia cinética e para o momento linear foi logarítmica, para melhor visualizar o comportamento destes.

Observa-se que, fixado o tamanho das partículas, as regiões de órbitas alta e média ao redor da Terra apresentam, aproximadamente, a mesma energia cinética e mesmo momento linear. Estes valores diferem, em comparação com a região orbital baixa.

A amplitude de oscilação da excentricidade e do raio orbital faz com que a partícula entre na região onde a perturbação predominante é o arrasto atmosférico, raio orbital inferior a 7.000 km, com diferentes períodos de integração, de acordo com o tamanho da partícula e com sua região orbital inicial. Nesse caso, a integração numérica é interrompida visto que o efeito provocado por esta perturbação é de espiralar a órbita do corpo, neste caso da partícula, de encontro à Terra em uma pequena escala de tempo.

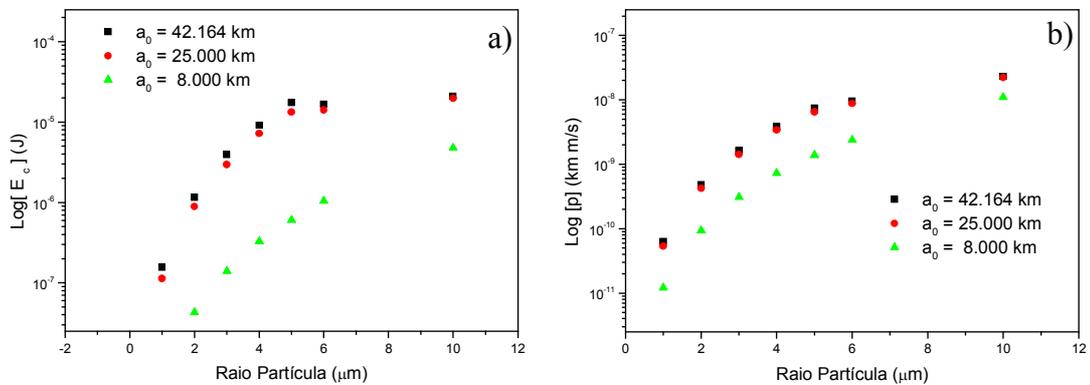


FIGURA 4.26 – a) Energia cinética e b) Momento linear para partículas de raio menor ou igual a 10  $\mu\text{m}$ . Observe que partículas nas regiões de órbitas alta e média ao redor da Terra apresentam, aproximadamente, a mesma intensidade de energia cinética e de momento linear.

Na Figura 4.27 é apresentado o tempo de integração para que a partícula entre na região onde a perturbação predominante é o arrasto atmosférico, em função do tamanho da partícula e sua região orbital inicial. Observe que somente na região de órbita média ao redor da Terra partículas maiores ou igual a 5  $\mu\text{m}$  não entram na região de arrasto atmosférico. Este comportamento é devido a variação no raio orbital que não é suficiente para colocar a partícula na região menor que 7.000 km. Esta combinação é dada pelo problema de dois corpos em que o raio orbital do perigeu é  $r_p = a(1 - e)$  e do apogeu,  $r_a = a(1 + e)$ .

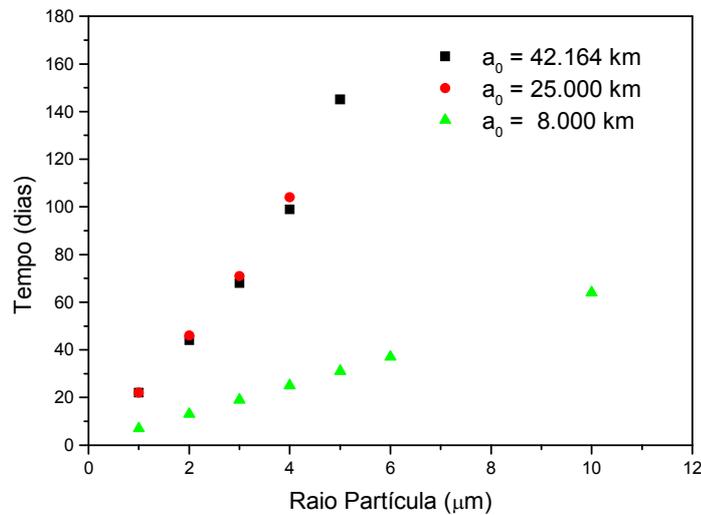


FIGURA 4.27 - Tempo para que a partícula entre na região onde a perturbação predominante é o arrasto atmosférico *versus* tamanho da partícula em órbitas alta, média e baixa ao redor da Terra.

#### 4.2.2 – Efeito Combinado: Pressão de Radiação e Achatamento Terrestre

Uma outra perturbação que pode afetar a excentricidade da partícula é a perturbação gravitacional do achatamento terrestre. Neste item analisa-se o efeito do achatamento quando considerado simultaneamente com a pressão de radiação.

Nas Figuras 4.28a–j são apresentadas as variações da excentricidade para diferentes raios de partícula no intervalo de 1 a 100  $\mu\text{m}$ , na região geoestacionária (42.164 km). A curva em vermelho representa o efeito da pressão de radiação (PR) e a curva em azul o efeito combinado do achatamento e da pressão de radiação ( $J_2 + \text{PR}$ ). A linha em verde delimita a região onde, acima desta, a perturbação predominante é o arrasto atmosférico. O período de integração foi de três períodos orbitais da Terra.

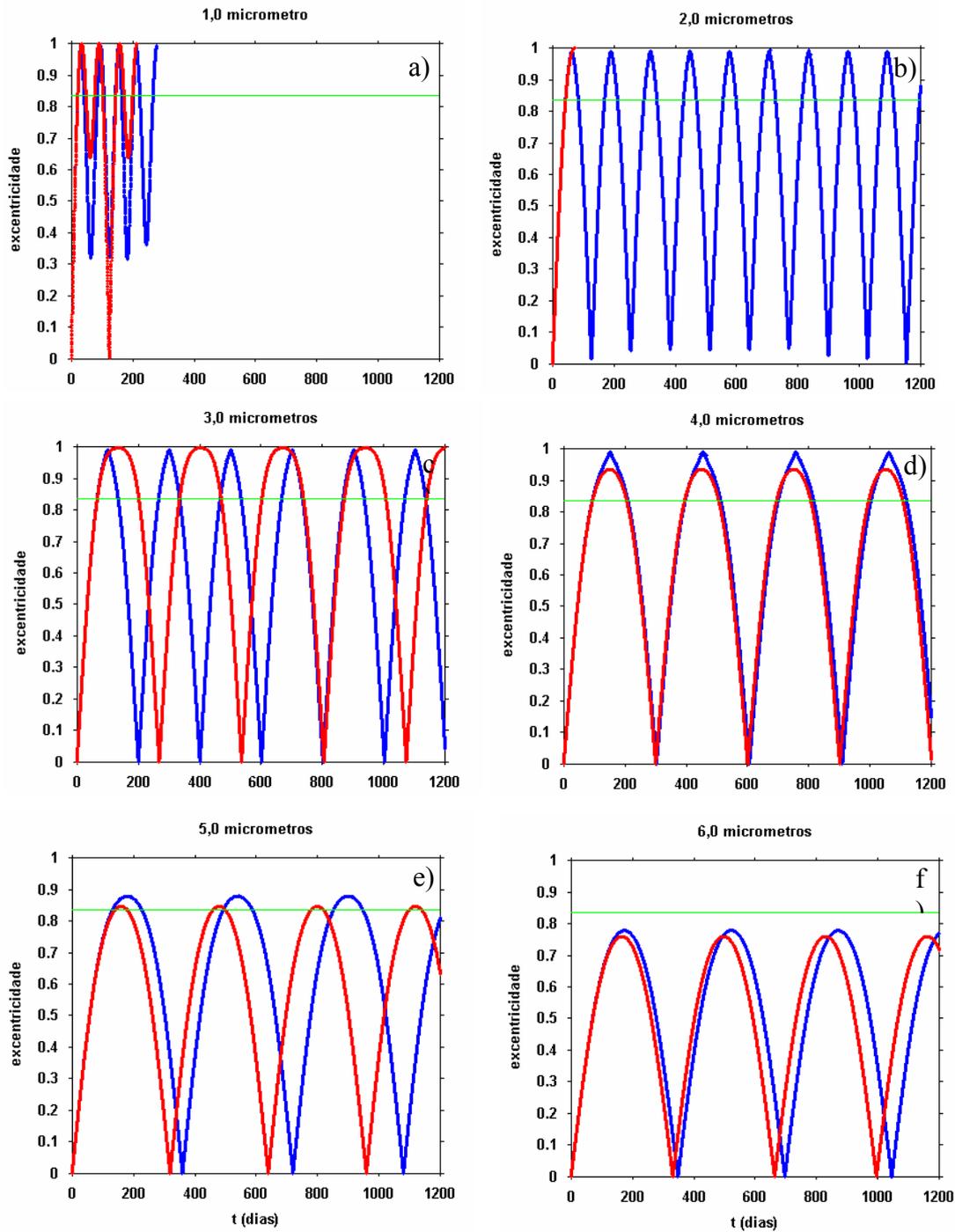


FIGURA 4.28a-f – Variação da excentricidade para partículas de 1 a 6  $\mu\text{m}$  em órbita, inicialmente, geoestacionária. A curva em vermelho representa PR, em azul  $J_2 + \text{PR}$  e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.

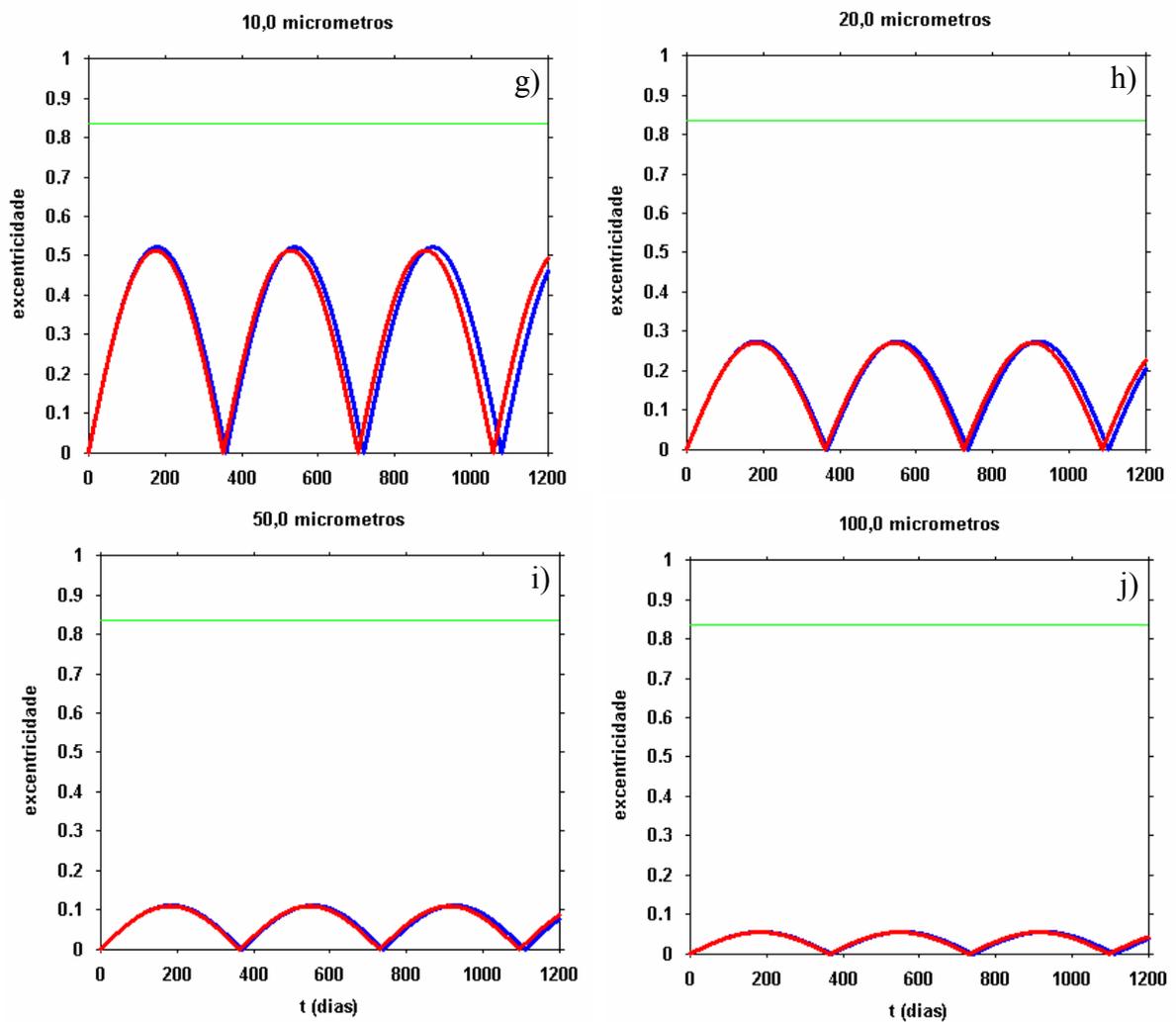


FIGURA 4.28g-j – Variação da excentricidade para partículas de 10 a 100  $\mu\text{m}$  em órbita, inicialmente, geostacionária. A curva em vermelho representa PR em azul  $J_2 + \text{PR}$  e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.

Pode-se observar que o efeito do achatamento combinado com a pressão de radiação, para tamanhos de partícula maiores que 6  $\mu\text{m}$ , não provoca diferença no valor máximo da excentricidade, quando comparado ao produzido somente pela pressão de radiação. O valor máximo da excentricidade praticamente é o mesmo nas duas situações. A variação na excentricidade para partículas menores ou igual a 5  $\mu\text{m}$  (Figuras 4.28a-e),

considerando o mesmo raio de partícula, capaz de colocá-las na região onde a perturbação predominante é o arrasto atmosférico (região acima da linha em verde), continua ocorrendo aproximadamente com o mesmo período para os dois casos (com e sem achatamento). Para partículas maiores que 5  $\mu\text{m}$  (Figuras 4.28g-j), nota-se que o período para que a excentricidade volte a ser nula é maior para o caso da perturbação simultânea da pressão de radiação e do achatamento terrestre.

As variações das excentricidades para partícula de 20  $\mu\text{m}$ , em diferentes regiões orbitais, no intervalo entre 9.000 e 44.000 km, sujeitas à perturbação simultânea da pressão de radiação e do achatamento, são apresentadas nas Figuras 4.29a-j e 4.30a-h. A curva em vermelho representa o efeito da pressão de radiação (PR), a curva em azul, o efeito combinado do achatamento com a pressão de radiação (PR +  $J_2$ ), a curva em amarelo, o efeito do achatamento terrestre e a linha em verde delimita a região em que o efeito predominante é o arrasto atmosférico. Esta região é definida como sendo a região acima da linha verde.

Nas Figuras 4.29a-d observa-se que, ao considerar a região orbital na faixa compreendida entre 44.000 e 32.000 km, o valor máximo da excentricidade, para uma mesma região orbital, apresenta valores próximos para os casos com e sem a perturbação do achatamento. Estes valores estão compreendidos, para região orbital de 44.000 km, entre 0,276, considerando a perturbação da pressão de radiação, e 0,280, considerando o efeito combinado de PR e  $J_2$ . Nestas figuras é possível observar que a configuração inicial não se repete para o mesmo período, considerando a pressão de radiação isoladamente e a perturbação simultânea com o achatamento terrestre. Para o caso do efeito combinado, nota-se que o período aumentou. Então, tal fato provoca um efeito na excentricidade da partícula que possa estar orbitando ao redor da Terra.

Considerando a região orbital compreendida entre 28.000 e 16.000 km, Figuras 4.29e-j, observa-se que a excentricidade, além da variação no período para repetir a sua configuração inicial, apresenta valores máximos de excentricidades diferentes. Por

exemplo, na região orbital de 18.000 km, Figura 4.28h, observa-se que a excentricidade máxima vale, aproximadamente, 0,18, considerando somente PR, enquanto para o caso de PR e  $J_2$ , vale 0,25.

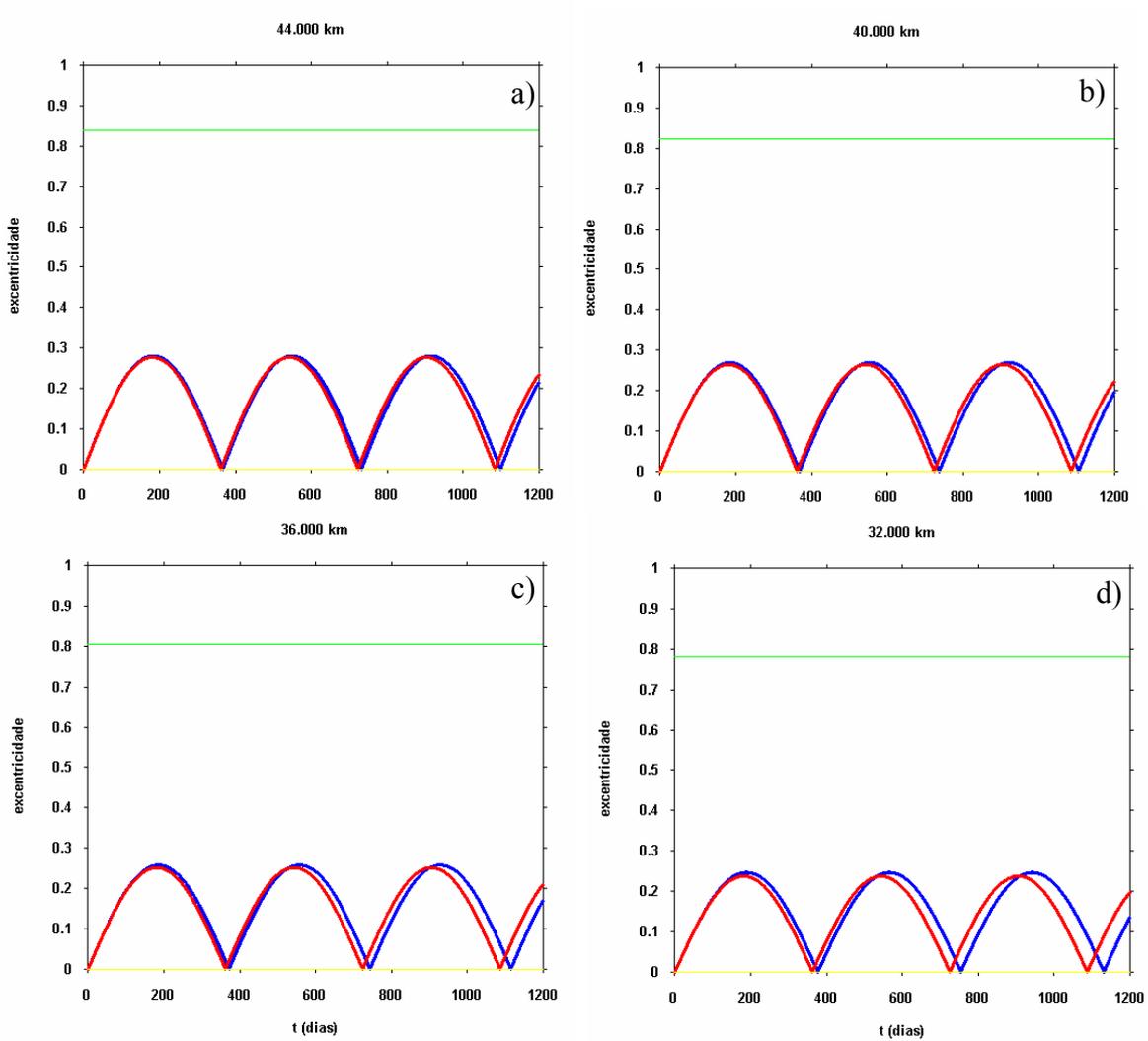


FIGURA 4.29a-d - Comportamento da excentricidade para partícula de 20  $\mu\text{m}$  em diferentes regiões orbitais no intervalo entre 44.000 a 32.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul  $J_2 + PR$ , em amarelo representa  $J_2$  e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.

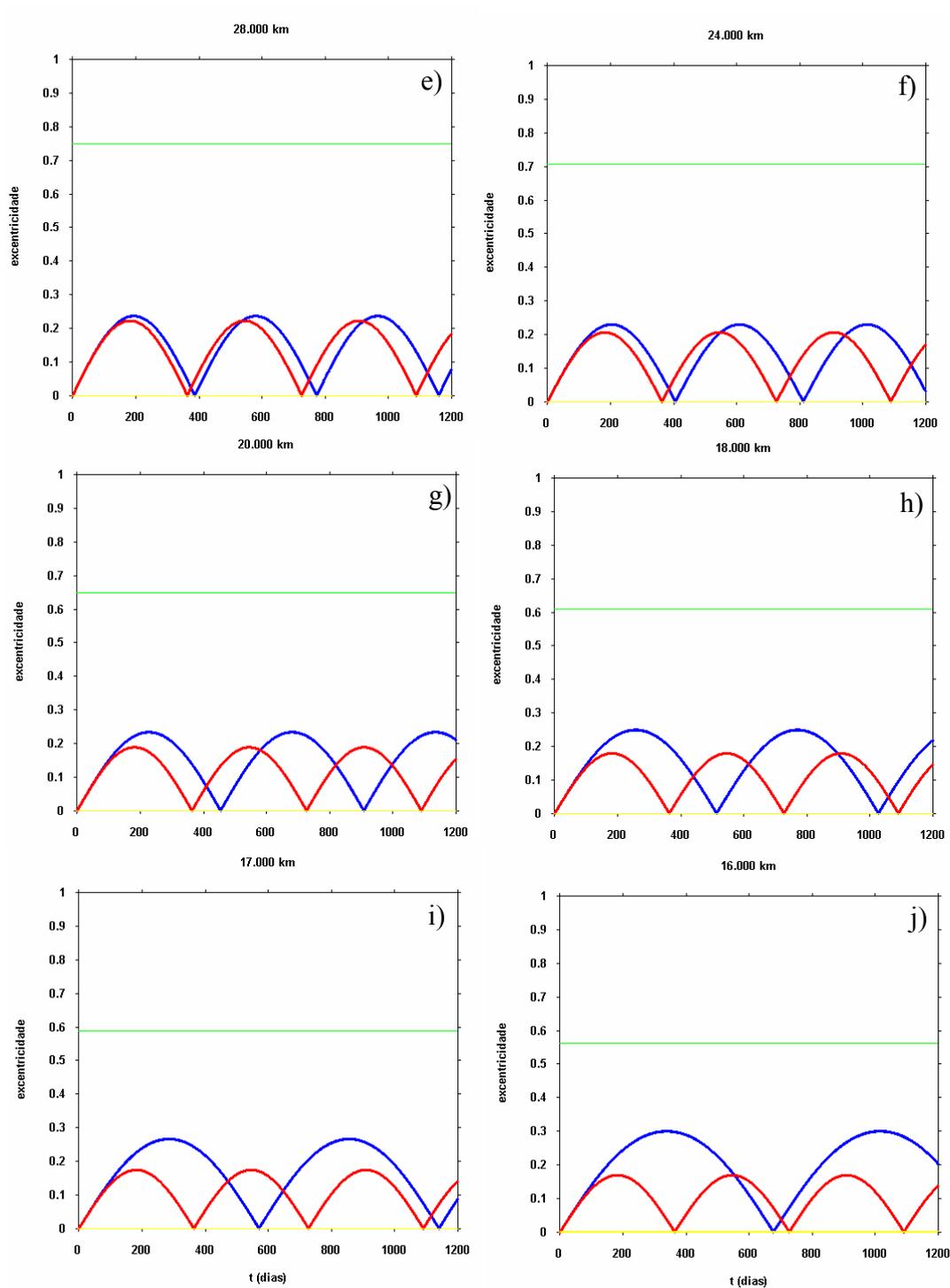


FIGURA 4.29e-j – Comportamento da excentricidade para partícula de 20  $\mu\text{m}$  para as regiões orbitais entre 28.000 a 16.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul  $J_2 + PR$ , em amarelo representa  $J_2$  e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.

Para determinadas regiões orbitais entre 15.000 e 12.000 km, Figuras 4.30a-f, observa-se que a variação na excentricidade da partícula é suficiente para colocá-la na região onde o efeito predominante é o arrasto atmosférico. Este comportamento é devido, a variação do perigeu da órbita que é suficiente para colocar a partícula na região menor que 7.000 km de raio orbital. Para este valor de raio orbital a integração numérica é interrompida visto que a perturbação do arrasto atmosférico não foi considerada. Então, para estas regiões orbitais e tamanho de partículas de 20  $\mu\text{m}$ , o efeito combinado de PR e  $J_2$  pode ser considerado um mecanismo natural de remoção. Observa-se ainda que, na região orbital entre 14.880 e 14.000 km, existe uma mudança na concavidade apresentada no comportamento da variação da excentricidade. Isto se deve a um efeito ressonante que será explicado no Capítulo 5.

Nas Figuras 4.30g-h, na região orbital compreendida entre 10.000 e 9.000 km, nota-se que o efeito combinado de PR e  $J_2$  diminui o valor máximo da excentricidade de maneira que a excentricidade máxima adquirida não é o suficiente para colocar a partícula na região onde a perturbação predominante é o arrasto atmosférico. Além disso, o período para que a excentricidade volte a ser nula diminui conforme verificado por Krivov e t al., 1996. Então, partículas nestas regiões orbitais apresentam um comportamento contrário para a evolução da excentricidade em comparação com as demais regiões orbitais consideradas neste trabalho.

Analicamente, a variação na excentricidade da partícula depende somente da perturbação da pressão de radiação solar (Krivov et al., 1996). Mas, segundo Greenberg (1981), o achatamento não provoca variação no elemento osculador da excentricidade da partícula; porém, na órbita real da partícula existe uma correção. O efeito combinado destas perturbações é responsável pelo resultado diferenciado na variação da excentricidade quando considerado separadamente.

As equações da variação da excentricidade, apresentadas no Capítulo 3, mostram que dependem do semi eixo maior da partícula, ou seja, a variação da excentricidade depende do raio orbital da partícula. O valor máximo na variação da excentricidade

devido à perturbação do achatamento ocorre quando a partícula está muito próxima da Terra, isto é, quando  $\left(\frac{R_{\oplus}}{a}\right) \rightarrow 1$ . O valor mínimo da excentricidade ocorre quando a partícula está muito distante da Terra, isto é,  $\left(\frac{R_{\oplus}}{a}\right) \rightarrow 0$ . Então, para região mais baixa, esta parcela pode ser somada à parcela da pressão de radiação solar.

A partir dos resultados das Figuras (4.28a-j), (4.29a-j) e (4.30a-h), constatou-se que uma partícula apresenta dois tipos de comportamento para o valor máximo de excentricidade (crescente e decrescente). O comportamento da excentricidade tem uma dependência, com o tamanho da partícula, como demonstrado por Krivov et al. (1996) e Hamilton e Krivov (1996), e com o raio orbital em que esta se encontra. A dependência da evolução da excentricidade da partícula em relação ao seu tamanho e a sua região orbital considerando uma abordagem analítica, será mostrado no Capítulo 5.

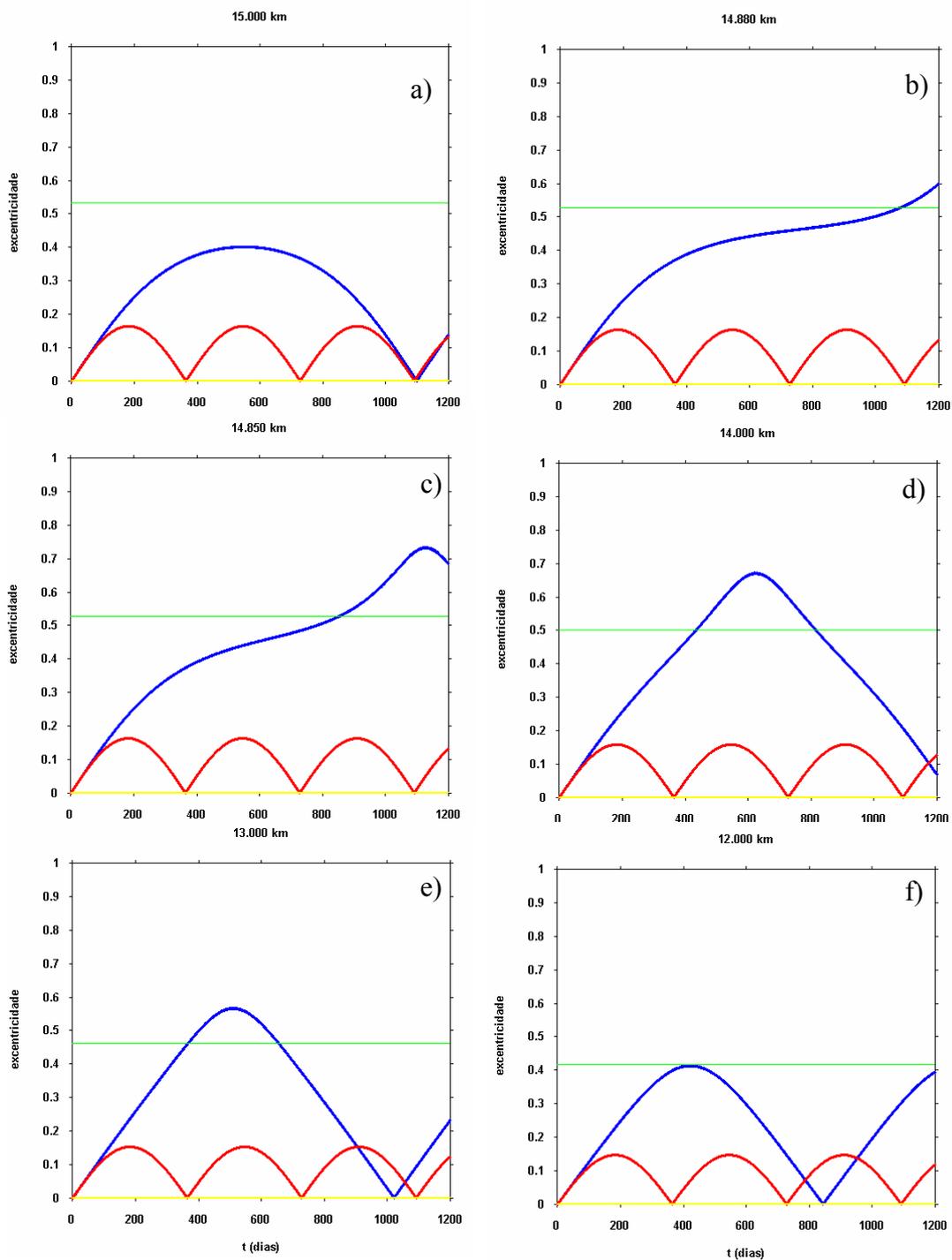


FIGURA 4.30a-f – Comportamento da excentricidade para partícula de 20  $\mu\text{m}$  para as regiões orbitais entre 15.000 e 12.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul  $J_2 + \text{PR}$ , em amarelo representa  $J_2$  e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.

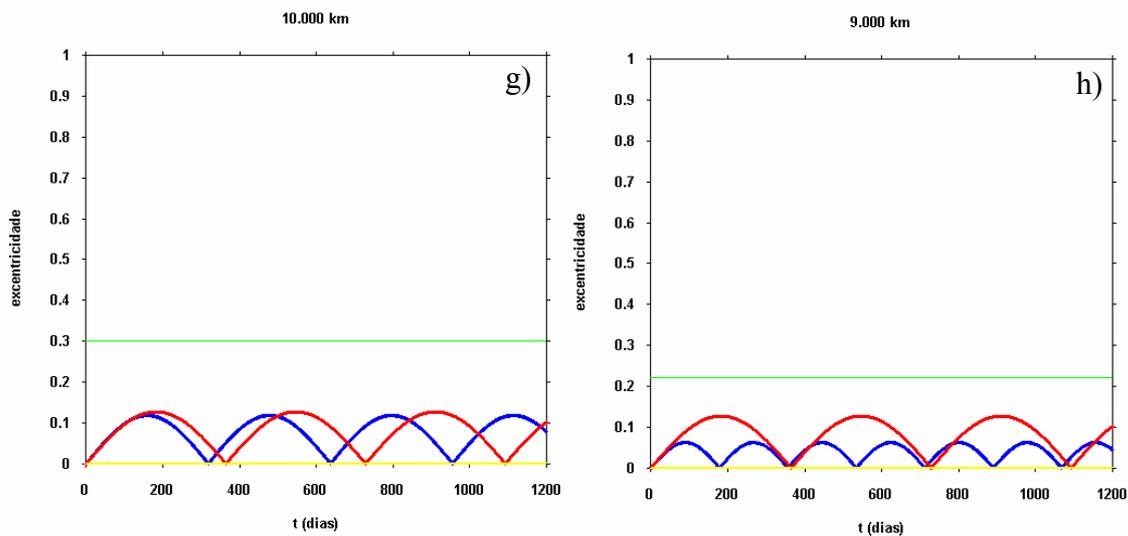


FIGURA 4.30g-h – Comportamento da excentricidade para partícula de 20  $\mu\text{m}$  para as regiões orbitais 9.000 e 8.000 km. A curva em vermelho representa PR, em azul  $J_2 + \text{PR}$ , em amarelo representa  $J_2$  e em verde a região em que acima desta a perturbação predominante é o arrasto atmosférico.

Na Figura 4.31, é apresentado o comportamento da mudança na concavidade da excentricidade em função do tamanho ( $s$ ) e da região orbital ( $r$ ) que esta se encontra. Esta curva foi obtida empiricamente e obedece uma função exponencial (curva em vermelho) dada por  $r = 1,35 \times 10^4 + 5,60 \times 10^3 \text{Exp}(- (1 + \frac{s}{8}))$ .

Quanto ao fato do comportamento da variação da excentricidade apresentar diferentes períodos para repetir a sua configuração inicial ( $e = 0$ ), tem-se que o período de oscilação para partículas sujeitas a perturbação da pressão de radiação solar dependerá do tamanho da partícula (Krivov et al., 1996). E partículas sujeitas a perturbação do achatamento terrestre apresentam uma diferença no movimento médio real da partícula (Greenberg, 1981) em função do seu semi eixo maior. Ambas perturbações dependem

do semi eixo maior da partícula; então, esta variação no período de oscilação depende também da região em que esta se encontre além de seu tamanho.

Nota-se, ainda, que em todas as regiões orbitais, Figuras 4.29a-j e 4.30a-h, o efeito isolado do achatamento (representado pela curva em amarelo) parece não provocar variação no valor inicial da excentricidade ( $e = 0$ ). Isto se deve simplesmente a escala utilizada nesta figura pois existe uma variação na excentricidade da órbita real da partícula (Greenberg, 1981).

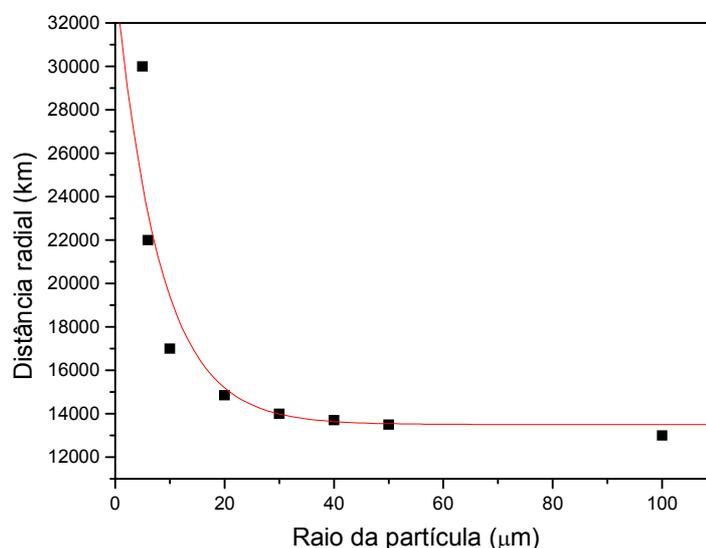


FIGURA 4.31 - Mudança na concavidade apresentada no comportamento da excentricidade em função do tamanho e da região orbital da partícula. Observe que partículas maiores que 20  $\mu\text{m}$  esta mudança na concavidade apresentada no comportamento da excentricidade ocorre para distância radial bem próximas.

Na Figura 4.32, é apresentado o comportamento da excentricidade máxima para uma partícula de 20  $\mu\text{m}$  sujeita ao efeito da pressão de radiação e ao efeito combinado de PR e  $J_2$ , a diferentes raios orbitais. Nesta figura, os pontos em preto representam o comportamento da excentricidade da partícula sujeita apenas à pressão de radiação e os pontos em vermelho, ao efeito simultâneo da pressão de radiação e do achatamento

terrestre. O caso em que somente a pressão de radiação foi considerada, apresenta um ajuste por curva polinomial de 2º grau, para a excentricidade máxima. Este ajuste é dado por  $e_{máx} = 7 \times 10^{-2} r^2 + 7 \times 10^{-3} r - 5 \times 10^{-3}$  em que  $r$  é dado em milhares de km. Já no caso em que as perturbações do achatamento e da pressão de radiação foram consideradas simultaneamente, nota-se dois tipos de comportamento: um comportamento crescente até a região orbital de, aproximadamente, 14.900km e um comportamento exponencial decrescente até o raio orbital de, aproximadamente, 27.500km. Considerando regiões orbitais superiores a 27.500 km, o comportamento da excentricidade é novamente crescente. Isto se deve a um efeito ressonante que será abordado no Capítulo 5.

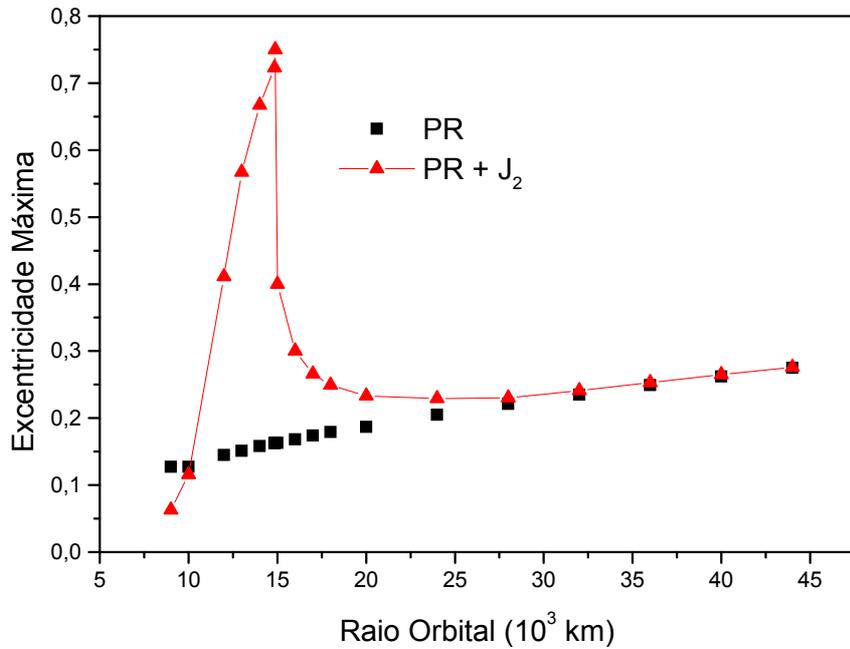


FIGURA 4.32 - Excentricidade máxima para uma partícula de 20 µm sujeita ao efeito da pressão de radiação (preto) e ao efeito combinado de PR e  $J_2$  (vermelho), em diferentes regiões orbitais.

Como foi exposto até o momento, o efeito combinado de PR e  $J_2$  provoca variação no período para que a excentricidade repita sua configuração inicial ( $e = 0$ ), por conseqüência, no raio orbital. Porém, o semi-eixo maior pode ser relacionado com estas duas grandezas. Então, na Figura 4.33, é apresentado o comportamento do semi-eixo maior para diferentes regiões orbitais.

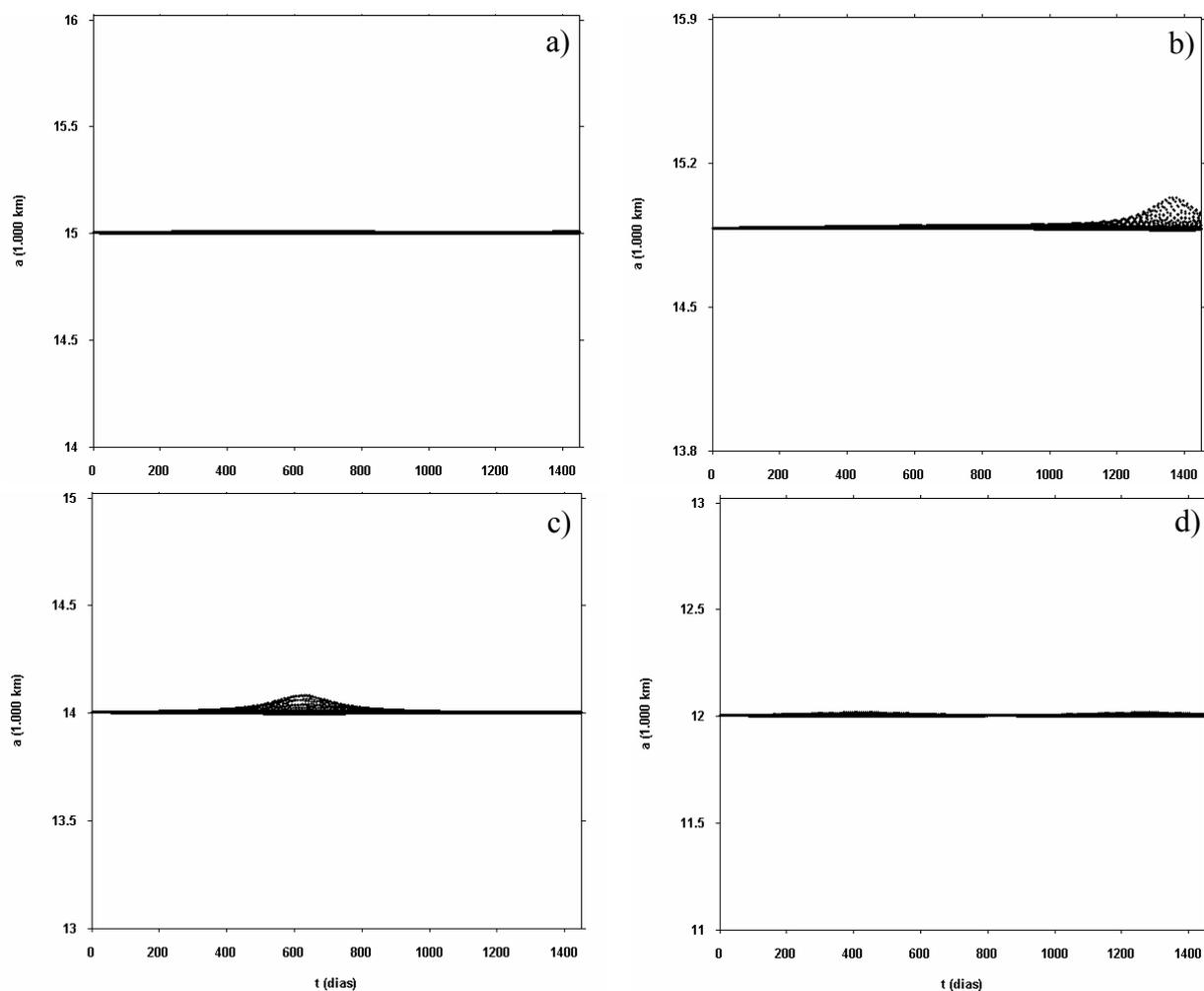


FIGURA 4.33 - Comportamento do semi-eixo maior para partícula de  $20 \mu\text{m}$  em diferentes regiões orbitais sujeitas ao efeito combinado de PR e  $J_2$ . a)  $a_0 = 15.000\text{km}$ ; b)  $a_0 = 14.880\text{km}$ ; c)  $a_0 = 14.000\text{km}$ ; d)  $a_0 = 12.000\text{km}$ .

Observando estas figuras, nota-se que a mudança na concavidade apresentada no comportamento da variação da excentricidade para o caso da região orbital de 14.880 km (Figura 4.30b) é responsável pela variação do semi eixo maior para esta mesma região orbital.

### **4.3 – Evolução Orbital de 1.000 Partículas na Região Geoestacionária**

Nesta Subseção é apresentada a evolução orbital de duas nuvens de, aproximadamente, 1.000 partículas cada uma, sujeita as perturbações da pressão de radiação solar e do achatamento terrestre, originadas de detritos espaciais ao redor da Terra. As partículas foram distribuídas uniformemente na região orbital entre 42.000 e 42.100 km, em intervalos de 1,0 km, e anomalia verdadeira entre  $0^\circ$  e  $1^\circ$ , em intervalos de  $0,1^\circ$ . Uma nuvem foi constituída de partículas de raio de 20  $\mu\text{m}$  e a outra de partículas de raio de 6  $\mu\text{m}$ .

Na Figura 4.34 é apresentada a evolução orbital para uma nuvem de partículas de raio 20  $\mu\text{m}$ , para o instante inicial e para  $t = 1$  dia. Nesta figura é possível observar que, em apenas 1 dia, existe uma pequena dispersão das partículas, quando comparada com o instante inicial.

A evolução orbital para os demais instantes é apresentada nas Figuras 4.35, 4.36 e 4.37. Nestas figuras, as partículas são espalhadas em função do tempo. Na Figura 4.35, considerou-se os instantes entre 2 e 7 dias; já nas Figuras 4.36 e 4.37, considerou-se instantes maiores ou igual a 8 dias. Para o instante  $t \geq 9$  dias, a dispersão destas partículas apresenta-se em onze grupos, devido à distribuição inicial destas. Como o tempo de integração foi por um período pequeno, ocorreu um efeito conhecido como “Keplerian Shear”, ou seja, é um efeito devido somente às diferentes velocidades das partículas. Nota-se que este comportamento acentua-se para os demais instantes. A

dispersão destas partículas ocorre em regiões específicas do espaço físico, delimitando regiões bem definidas para o seu movimento orbital.

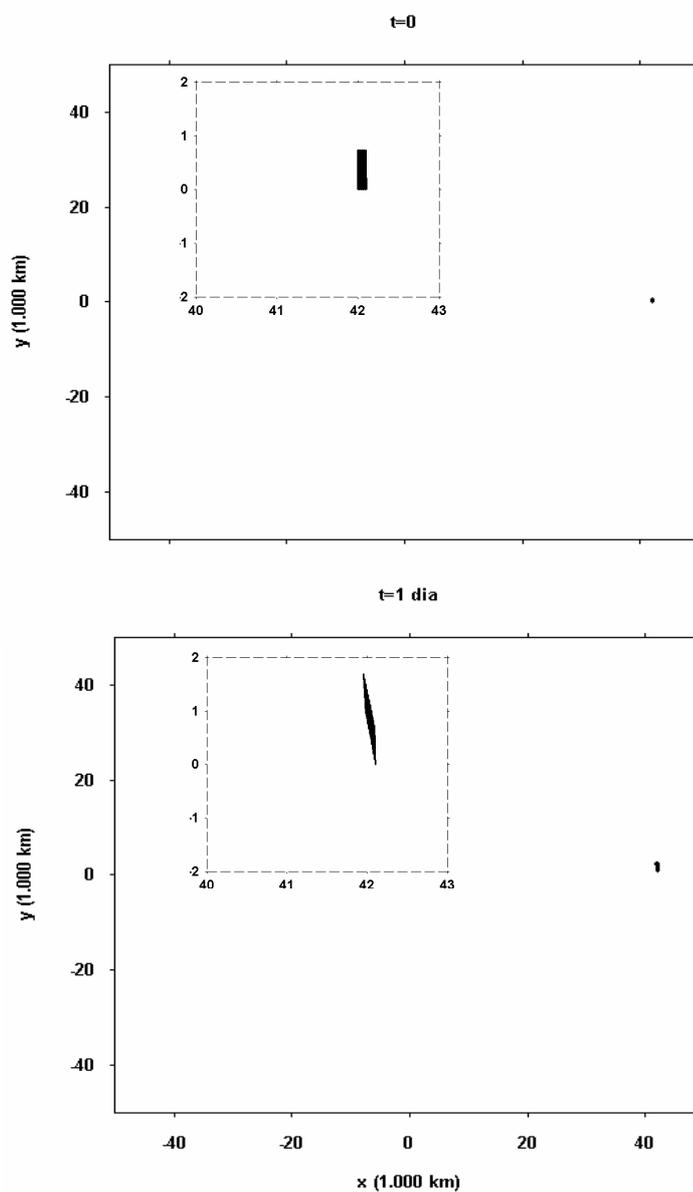


FIGURA 4.34 - Evolução orbital para uma nuvem de partículas de raio  $20\ \mu\text{m}$ , para os instantes  $t = 0$  e  $t = 1$  dia. Observe que em apenas 1 dia as partículas se dispersam numa região maior que a inicial. Uma ampliação é mostrada em destaque.

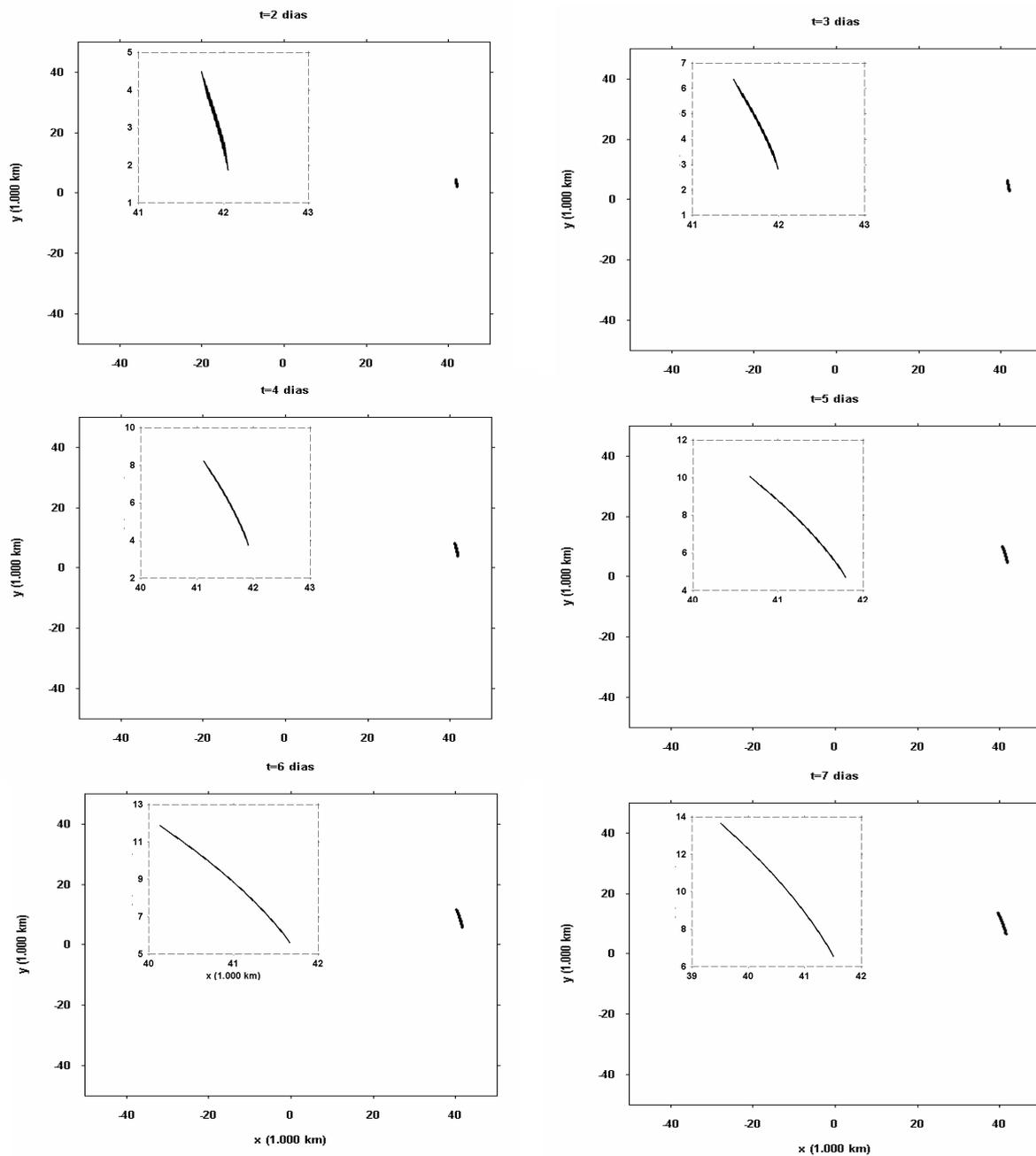


FIGURA 4.35 - Evolução orbital para uma nuvem de partículas de 20 μm, para os instantes  $2 \leq t \leq 7$  dias. Uma ampliação é mostrada em destaque.

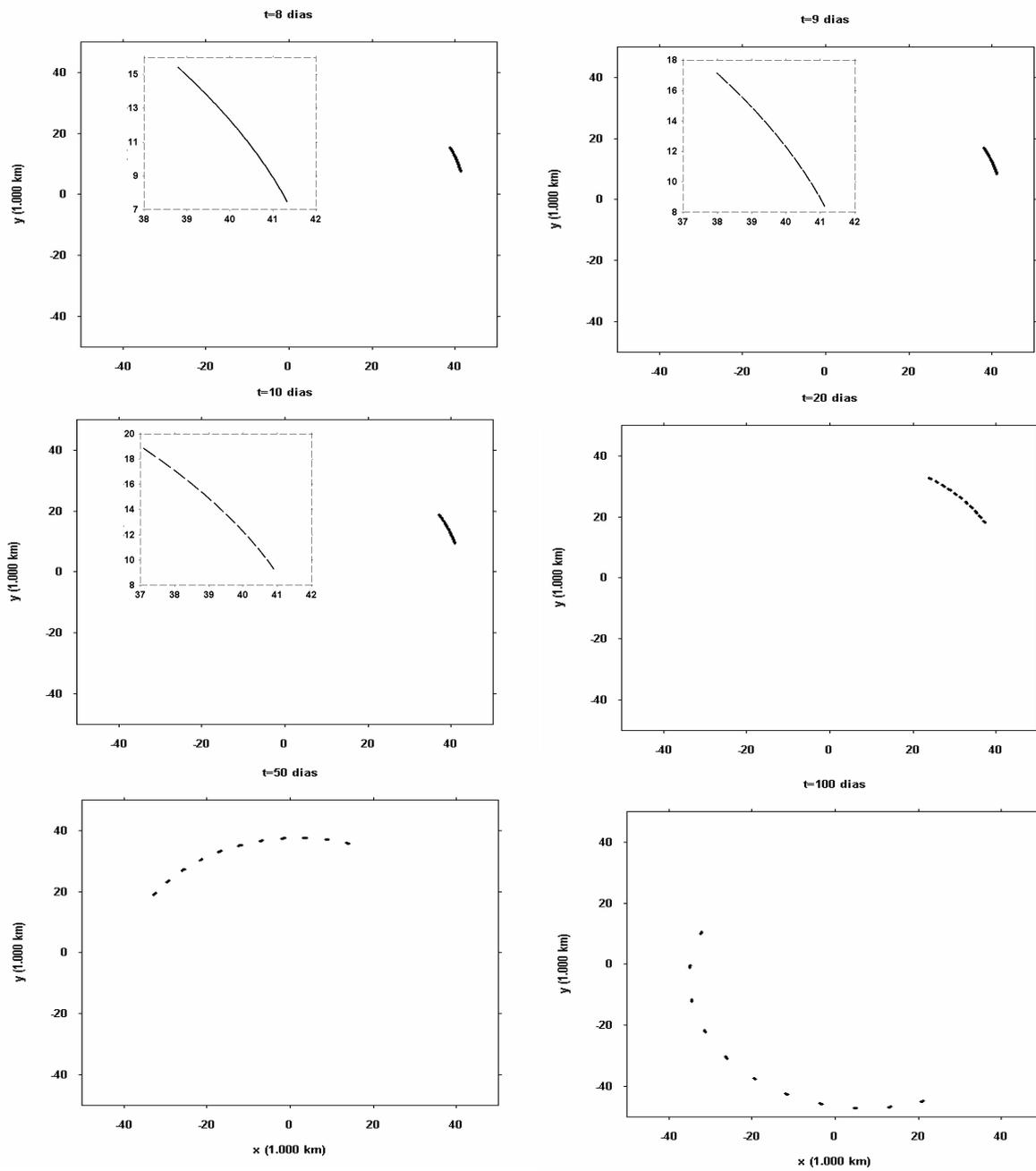


FIGURA 4.36 – Evolução orbital para uma nuvem de partículas de  $20 \mu\text{m}$ , para os instantes  $8 \leq t \leq 100$  dias. Observa-se que, para  $t \geq 9$  dias, ocorre o comportamento conhecido como “Keplerian Shear”.

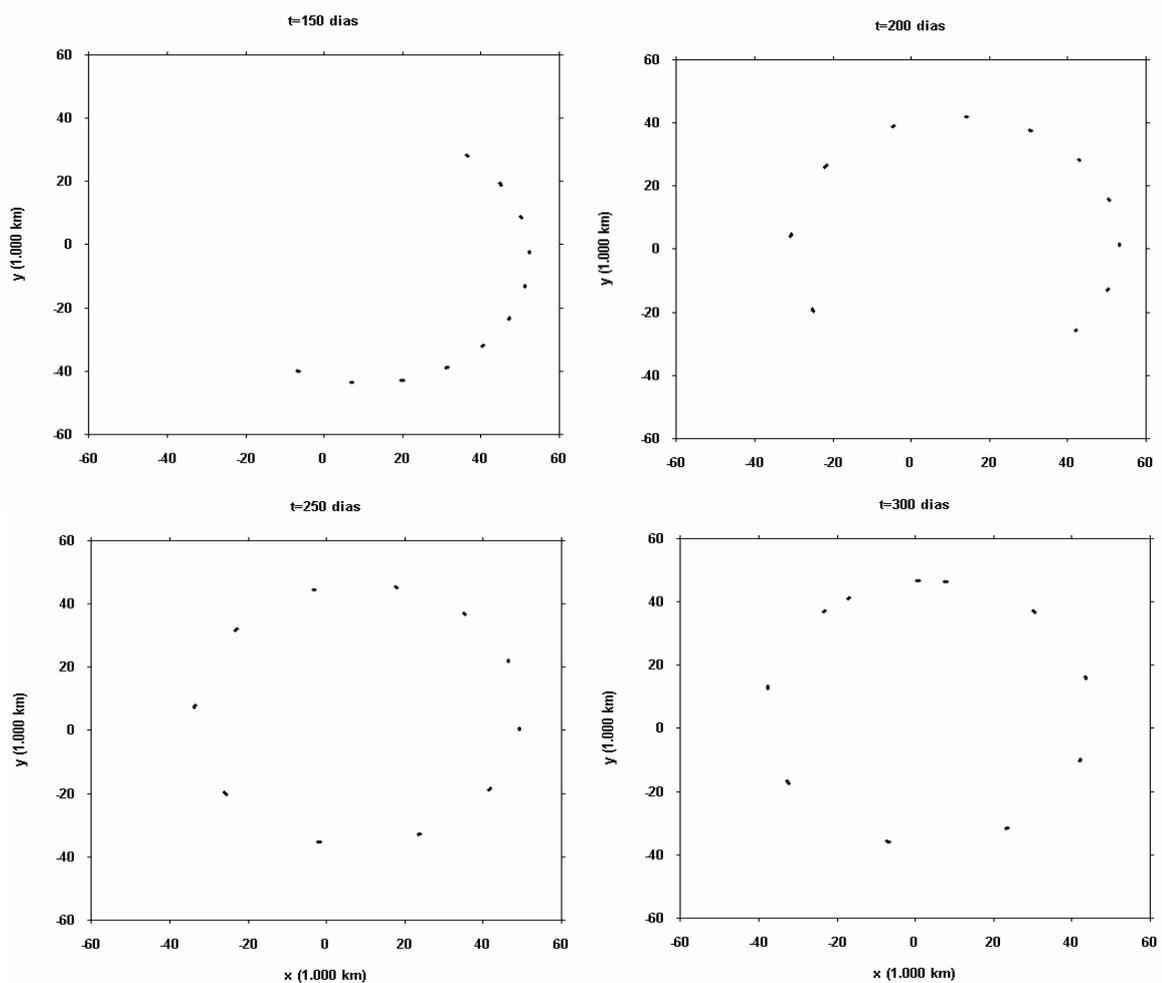


FIGURA 4.37 – Evolução orbital para uma nuvem de partículas de  $20 \mu\text{m}$ , para os instantes  $150 \leq t \leq 300$  dias. Observe que para  $t = 250$  dias apresenta assimetria na distribuição da dispersão destas partículas e para  $t = 300$  dias esta assimetria é menor.

Observa-se que, em relação à Terra (localizada na origem), existe uma assimetria da distribuição destas partículas para o instante  $t = 250$  dias, sendo que esta assimetria apresenta-se bem menor quando se considera o instante  $t = 300$  dias. Esta assimetria pode ser devido à posição do Sol, visto que o sistema planeta-partícula acompanha o movimento do Sol. Como o movimento médio do Sol está próximo a 365 dias, esta assimetria diminui para um período orbital do Sol. Além disso, um outro fator que pode ter contribuído para esta assimetria é o fato de que a perturbação da pressão de radiação

e do achatamento pode modificar o período em que a partícula retorna às condições iniciais. Este efeito predomina em partículas menores que 20  $\mu\text{m}$ .

Na Figura 4.38 é apresentada a evolução orbital para uma nuvem constituída de partículas de 6 e 20  $\mu\text{m}$ , para os instantes  $t = 10$  dias,  $t = 50$  dias,  $t = 200$  dias e  $t = 300$  dias. Nesta figura, a curva em vermelho representa o grupo de partículas de 20  $\mu\text{m}$  e a em azul representa o grupo de partículas de 6  $\mu\text{m}$ .

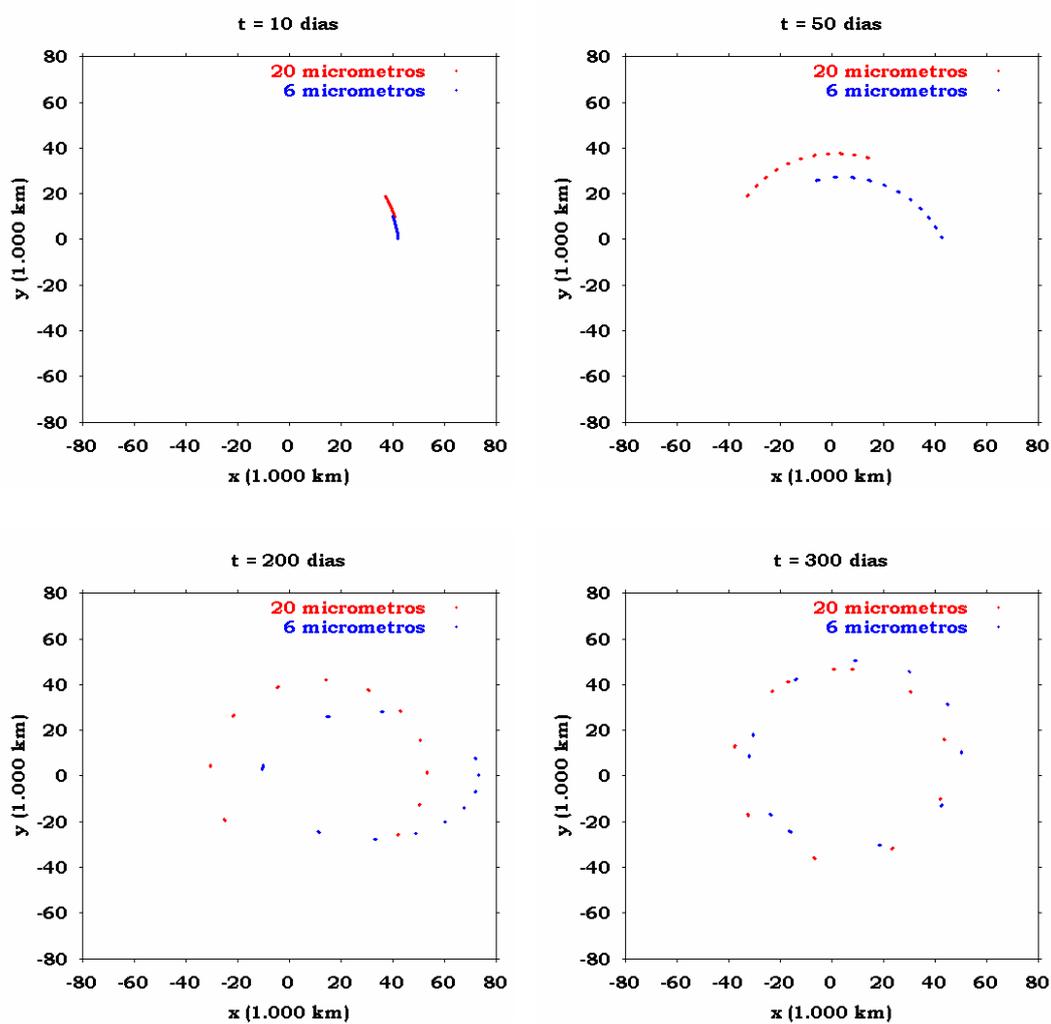


FIGURA 4.38 - Evolução orbital para uma nuvem constituída de partículas de 20  $\mu\text{m}$  e 6  $\mu\text{m}$  para os instantes  $t = 10$  dias,  $t = 50$  dias,  $t = 200$  dias e  $t = 300$  dias.

Observa-se que, no decorrer do tempo, estes grupos de partículas de tamanhos diferentes não ocupam o mesmo espaço físico, ou seja, considerando outros tamanhos de partículas, esta nuvem pode delimitar uma região grande para o seu movimento orbital.

#### 4.4 – Evolução Orbital de um Anel de Partículas

Considere anéis de detritos espaciais com 18.050 partículas sujeitos as perturbações da pressão de radiação solar e do achatamento terrestre em três órbitas distintas: alta (raio orbital entre 40.000 e 44.000 km), média (raio orbital entre 20.000 e 25.000 km) e baixa (raio orbital entre 8.000 e 10.000 km) ao redor da Terra. Nesta Subseção é apresentada a evolução da dinâmica destes anéis em termos das coordenadas polares  $(r, \theta)$ , em que  $r$  é o raio orbital e  $\theta$  é a longitude da partícula, e das coordenadas retangulares  $(x, y)$ . Para a análise da evolução em função de  $(r, \theta)$ , estes anéis foram divididos em seis grupos. Os grupos foram escolhidos da seguinte maneira: 1º grupo -  $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ , 2º grupo -  $61^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ , ..., 6º grupo -  $301^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ . O tempo de integração foi de 1.600 dias, com intervalos de saída de 10 em 10 dias. Os pontos em vermelho, verde, azul, rosa, amarelo e preto representam o primeiro, o segundo, o terceiro, etc. grupos, respectivamente. As partículas, inicialmente, foram distribuídas uniformemente, com intervalos do raio orbital de 0,01 km, e com intervalos de longitude de  $1^\circ$ , entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$  e para cada região orbital foram feitas simulações de anéis com distintos tamanhos de partículas sendo: a) para região entre 20.000 e 25.000 km dois anéis de partículas de tamanhos de 6 e 20  $\mu\text{m}$ , respectivamente, b) para região entre 10.000 e 15.000 km um anel de partículas de tamanho de 100  $\mu\text{m}$  e c) b) para região entre 40.000 e 45.000 km um anel de partículas de tamanho de 6  $\mu\text{m}$ .

#### 4.4.1 – Partículas na Região Entre 20.000 e 25.000 km

Na Figura. 4.39, é apresentada a evolução orbital de um anel de partículas de tamanho  $20 \mu\text{m}$ , para os instantes inicial, 50, 100, 200, 300 e 360 dias. Nota-se que, em 50 dias de integração numérica, o anel de partículas apresenta um comportamento semelhante ao ondulatório, descaracterizando a distribuição inicial uniforme. Nesse instante, a variação do raio orbital se mantém aproximadamente constante, em torno de  $5.000 \text{ km}$ .

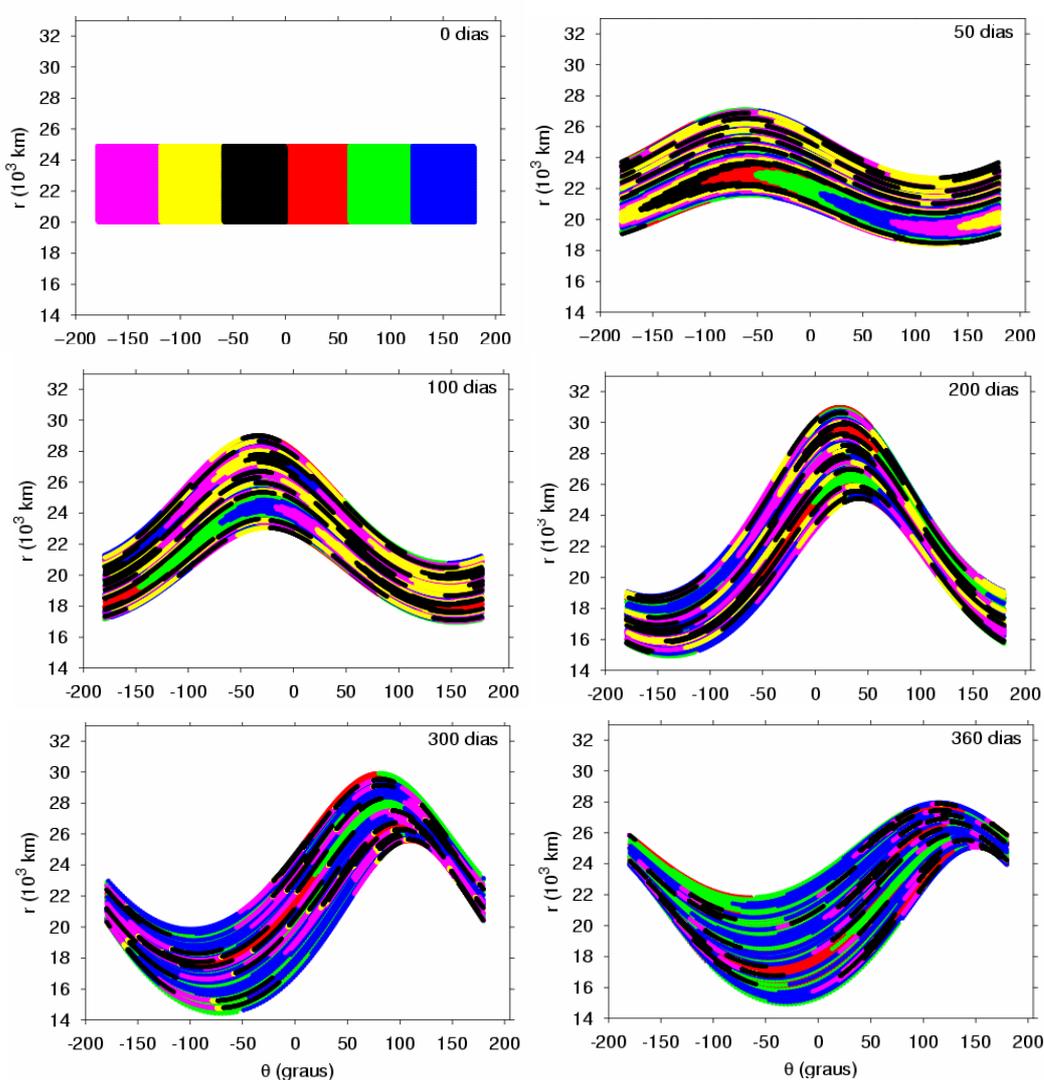


FIGURA 4.39 – Evolução orbital, em função das coordenadas  $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho  $20 \mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 200, 300 e 360 dias.

No entanto, a região em que a partícula pode ser encontrada é modificada. Esta região está entre 19.000 e 27.000 km. Esta mudança no caráter inicial já havia sido vista para o caso de partículas isoladas sujeitas ao efeito combinado da pressão de radiação e do achatamento terrestre. Uma partícula com raio orbital maior apresenta excentricidade máxima mais elevada e, desta forma, órbitas mais excêntricas. Este fato pode ser a causa da variação na região orbital inicial deste anel de partículas. Após o instante de 200 dias o grupo das amarelas parece desaparecer mas na realidade é sobreposto pelos demais grupos. Este comportamento sugere que existam regiões de maior ou menor densidade

A evolução de  $\theta$  ocorre no sentido anti-horário, ocorrendo uma defasagem angular em relação aos raios orbitais máximo  $r_{m\acute{a}x}$  e mínimo  $r_{m\acute{i}n}$ . Na Figura 4.39, para o instante  $t = 50$  dias,  $r_{m\acute{a}x}$  ocorre no intervalo de  $-100^\circ \leq \theta \leq -50^\circ$  e  $r_{m\acute{i}n}$ , no intervalo de  $100^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ . Para o instante  $t = 100$  dias,  $r_{m\acute{a}x}$  ocorre no intervalo de  $-150^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$  e  $r_{m\acute{i}n}$ , no intervalo de  $150^\circ \leq \theta \leq 200^\circ$ .

Após 400 dias de integração numérica, o comportamento ondulatório evolui para um "bojo". Na Figura 4.40 é apresentada a evolução deste "bojo" para os instantes de 400, 430, 460, 490, 520 e 550 dias. Nesta figura nota-se, ainda, um comportamento semelhante a uma torção, dando a impressão de existir uma terceira dimensão. Com isso, as partículas parecem estar se sobrepondo umas às outras, em um mesmo instante. Este comportamento foi observado em todo o período de integração numérica.

Na Figura 4.41 fica mais evidente o comportamento semelhante a um comportamento de torção, o que, também pode sugerir, que existe uma região orbital em que a densidade de partículas é superior ao ser comparada a uma outra região orbital, para um mesmo instante. Nesta figura é apresentada a evolução do raio orbital em função da longitude, considerando os instantes 1.100, 1.200, 1.300, 1.400, 1.500 e 1.600 dias.

Parece existir uma região de sobreposição de regiões em que existem lacunas ou ausência de partículas.

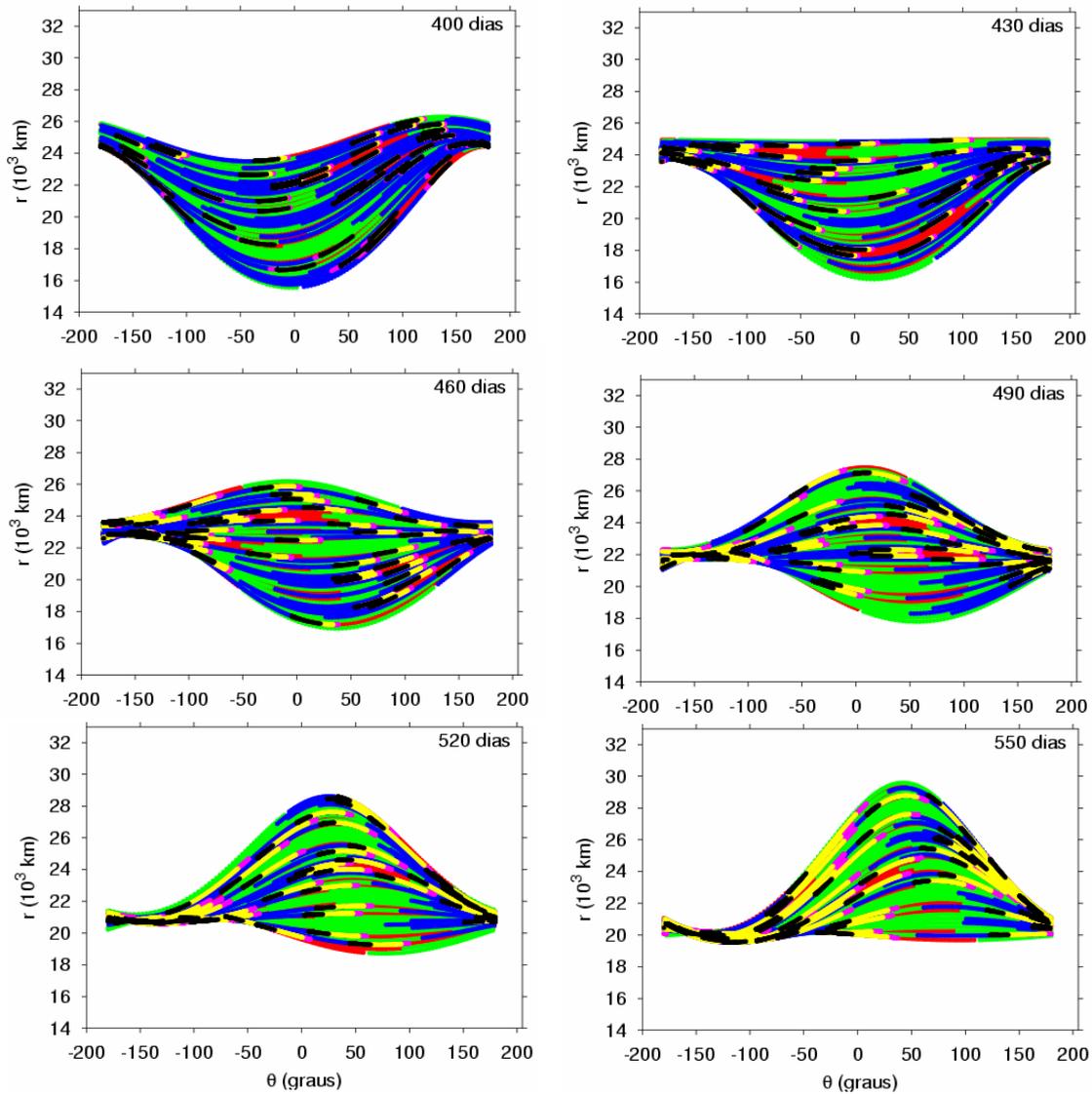


FIGURA 4.40 – Evolução orbital, em função das coordenadas  $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho  $20 \mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes 400, 430, 460, 490, 520 e 550 dias.

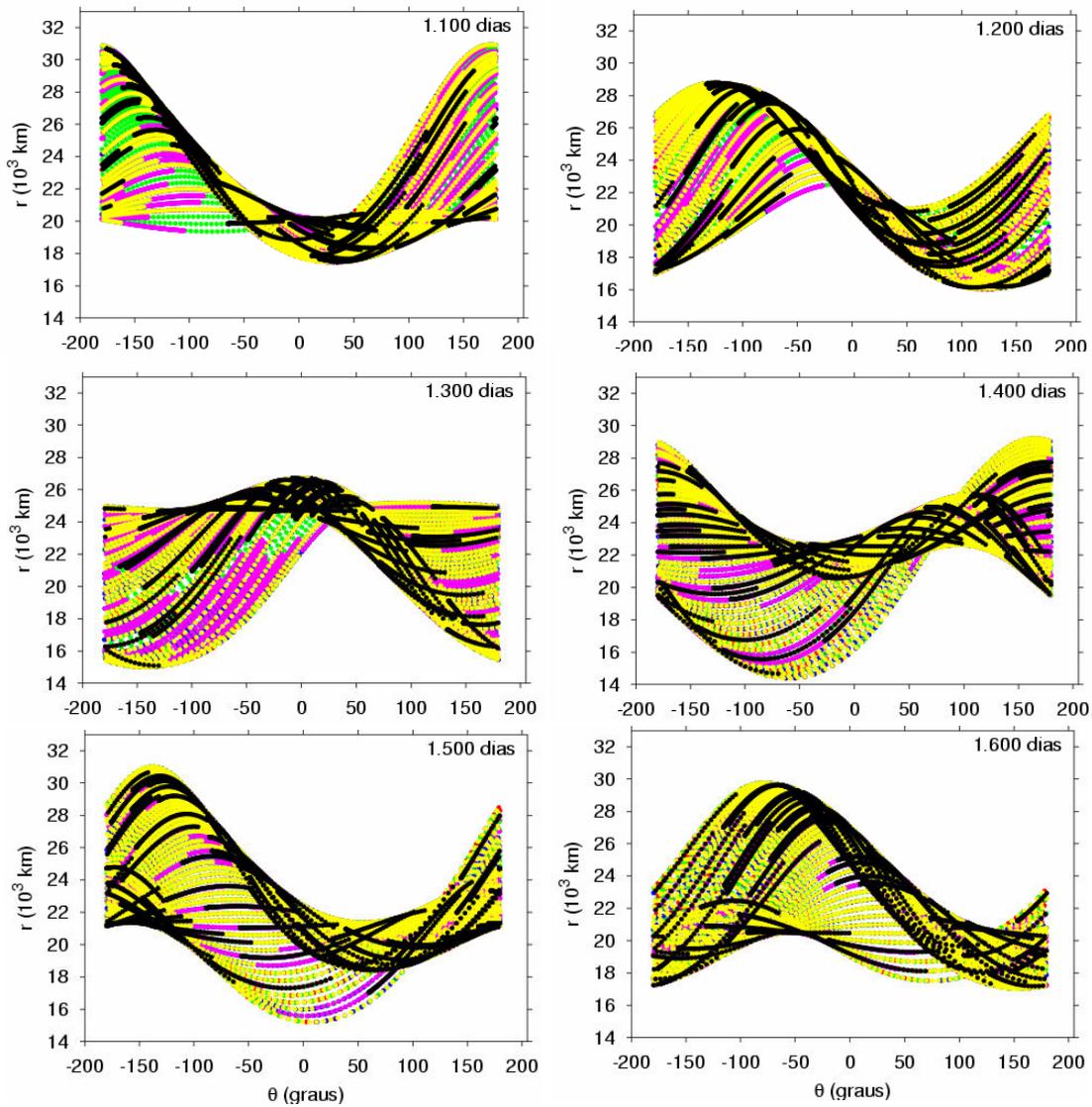


FIGURA 4.41 – Evolução orbital, em função das coordenadas  $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho  $20 \mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes 1.100, 1.200, 1.300, 1.400, 1.500 e 1.600 dias.

Considerando a simulação numérica como um todo, verifica-se que as partículas são espalhadas em uma região orbital bem definida, sendo que esta região de

"espalhamento" ocorre entre 14.000 km e 32.000 km. No caso de partículas de tamanho 6  $\mu\text{m}$ , a região de "espalhamento" ocorre entre 5.000 km e 50.000 km e, para partículas de 50  $\mu\text{m}$ , a região máxima de "espalhamento" ocorre entre 18.000 e 28.000 km. Este resultado está de acordo com os apresentados para partícula isolada em que a mudança na excentricidade da partícula dependia da região orbital e do tamanho da partícula. Partículas menores apresentavam maiores valores da excentricidade. Comparando os três anéis, observa-se que não apresentam um período em que uma configuração seja repetida. Uma abordagem mais completa, contendo todos os instantes considerados, está representada no CD anexo a este trabalho.

A evolução orbital em função das coordenadas  $(x, y)$  do anel de partículas de 6  $\mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800 e 850 dias, é apresentada nas Figuras 4.42 e 4.43. Nestas figuras indica-se a direção em que o Sol se encontra no instante considerado, para se ter uma noção do efeito da pressão de radiação. Logo nos primeiros 150 dias de integração numérica, nota-se que ocorre uma deformação no anel, tornando-o excêntrico e com diferentes larguras radiais. Esta deformação do anel gera um "bojo" que aparece alguns graus à frente da direção do Sol. Observa-se que, para o instante de 200 dias, algumas partículas se aproximam da Terra e pode-se perceber o efeito de precessão do anel devido ao achatamento terrestre.

Considerando o instante 250 dias, observa-se que existe colisão com a Terra, ou seja, as partículas possuem, nesse instante, raios orbitais menores ou iguais ao raio da Terra. Estas partículas não foram removidas nesta figura com a finalidade de melhor visualizar o efeito destas perturbações atuando neste anel de partículas.

Para  $t = 400$  dias, parece que o anel retorna a uma configuração quase circular, mas não volta às mesmas condições iniciais, isto é, uma distribuição uniforme das partículas. Este efeito é devido à pressão de radiação. Este anel, a princípio, parece ter uma periodicidade de 400 dias. Contudo, a partir da análise deste conjunto de figuras, nota-se

que o anel volta à configuração próxima a circular para  $t = 400$  dias e  $t = 850$  dias. Este comportamento é observado para todo o período de integração, ou seja, para o período de 1.600 dias.

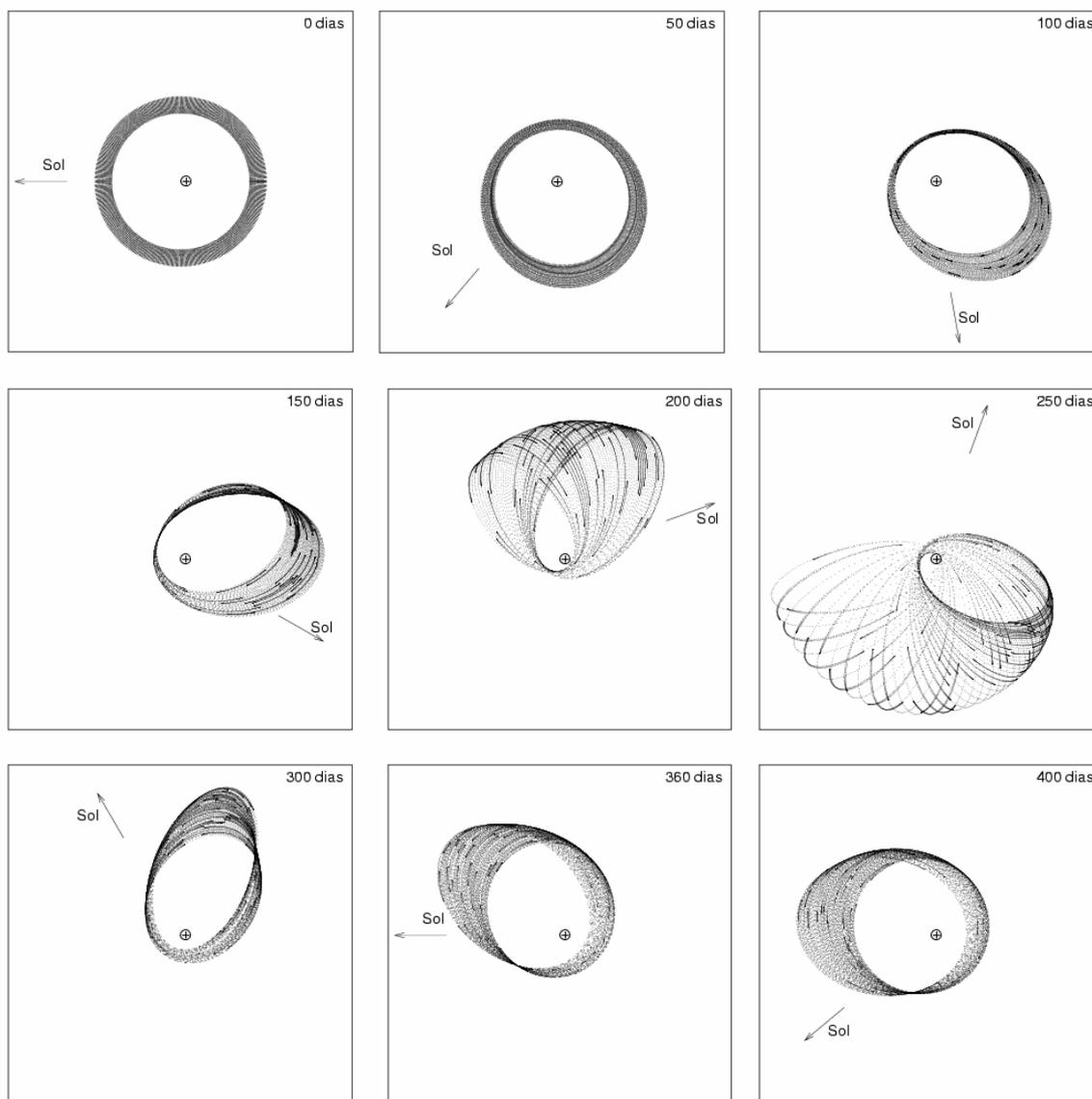


FIGURA 4.42 - Evolução orbital, em função das coordenadas  $(x, y)$ , de um anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias.

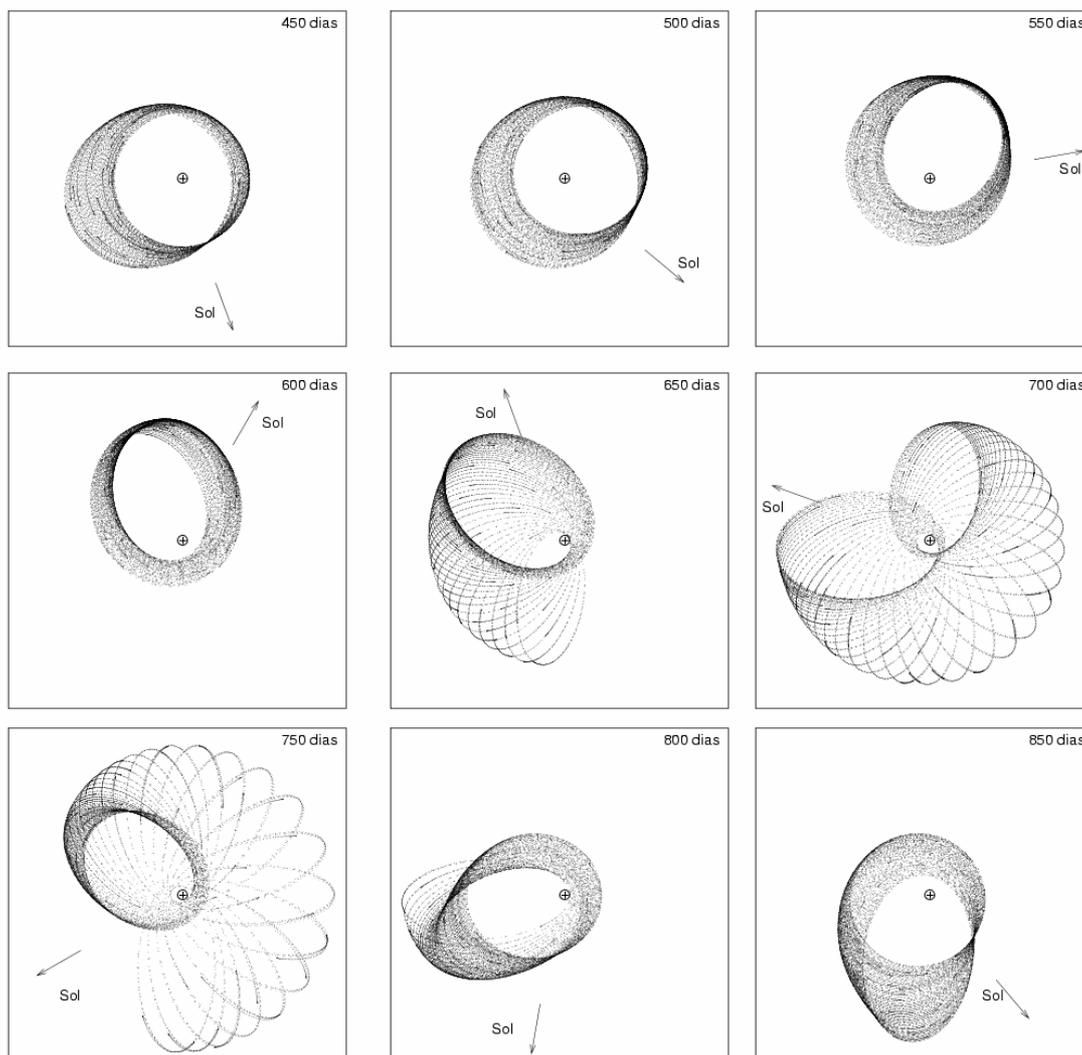


FIGURA 4.43 - Evolução orbital, em função das coordenadas  $(x, y)$ , de um anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$ , na região entre 20.000 e 25.000 km, para os instantes 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800 e 850 dias.

Na Figura 4.44, é apresentada a comparação entre a evolução orbital do anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$  ao redor da Terra, para o instante 250 dias, considerando e não considerando a colisão das partículas com a Terra (partículas com raios orbitais menor ou igual a 6.378,12 km são removidas). Observa-se que o efeito combinado da pressão de radiação e do achatamento terrestre é um mecanismo natural de remoção.

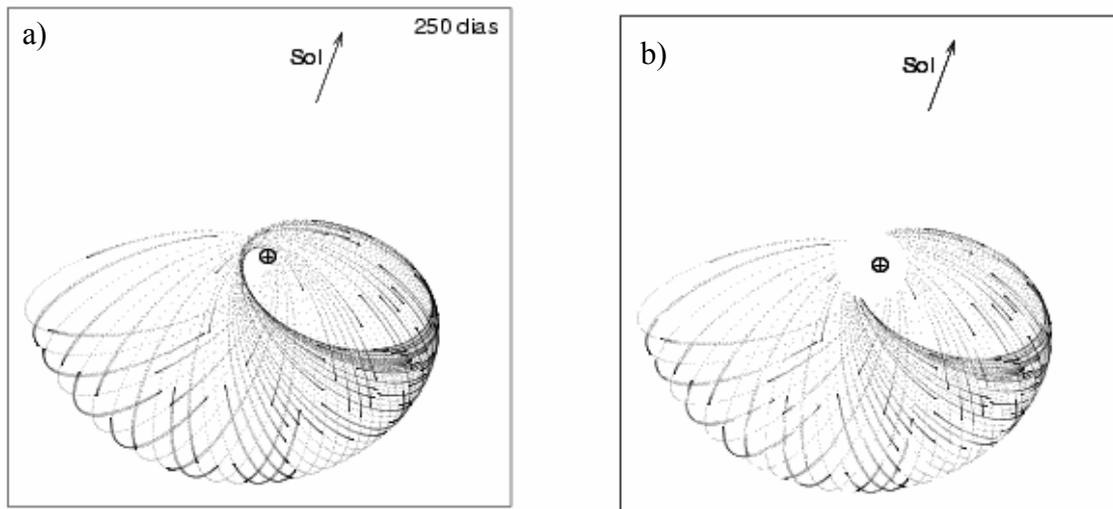


FIGURA 4.44 - Comparação da evolução orbital de um anel constituído de partículas de 6  $\mu\text{m}$  ao redor da Terra para o instante 250 dias, a) considerando e b) não considerando a colisão das partículas com a Terra.

#### 4.4.2 – Partículas na Região Entre 40.000 e 45.000 km

Neste item a evolução orbital do anel de partículas é considerada para um tamanho de partículas de 6  $\mu\text{m}$ . O comportamento da evolução orbital em função das coordenadas  $(r, \theta)$  para este anel de partículas é semelhante ao apresentado no Item 4.4.1.

Na Figura 4.45 é apresentada a evolução orbital de um anel de partículas de 6  $\mu\text{m}$ , em função do raio orbital e da longitude da partícula, para os instantes inicial, 50, 100, 200, 300 e 360 dias. A escala da região orbital da Figura 4.45 comparada a das Figuras 4.39, 4.40 e 4.41 é cinco vezes maior então não é possível observar a mesma estrutura na evolução orbital encontrada anteriormente pois os demais grupos de cores estão sobrepostos ao grupo preto de partículas. O Objetivo principal desta figura é observar a amplitude na variação da região orbital deste anel de partículas.

A partir desta figura, observa-se que o raio mínimo  $r_{min}$  retorna ao valor inicial de 40.000 km, sugerindo uma periodicidade.

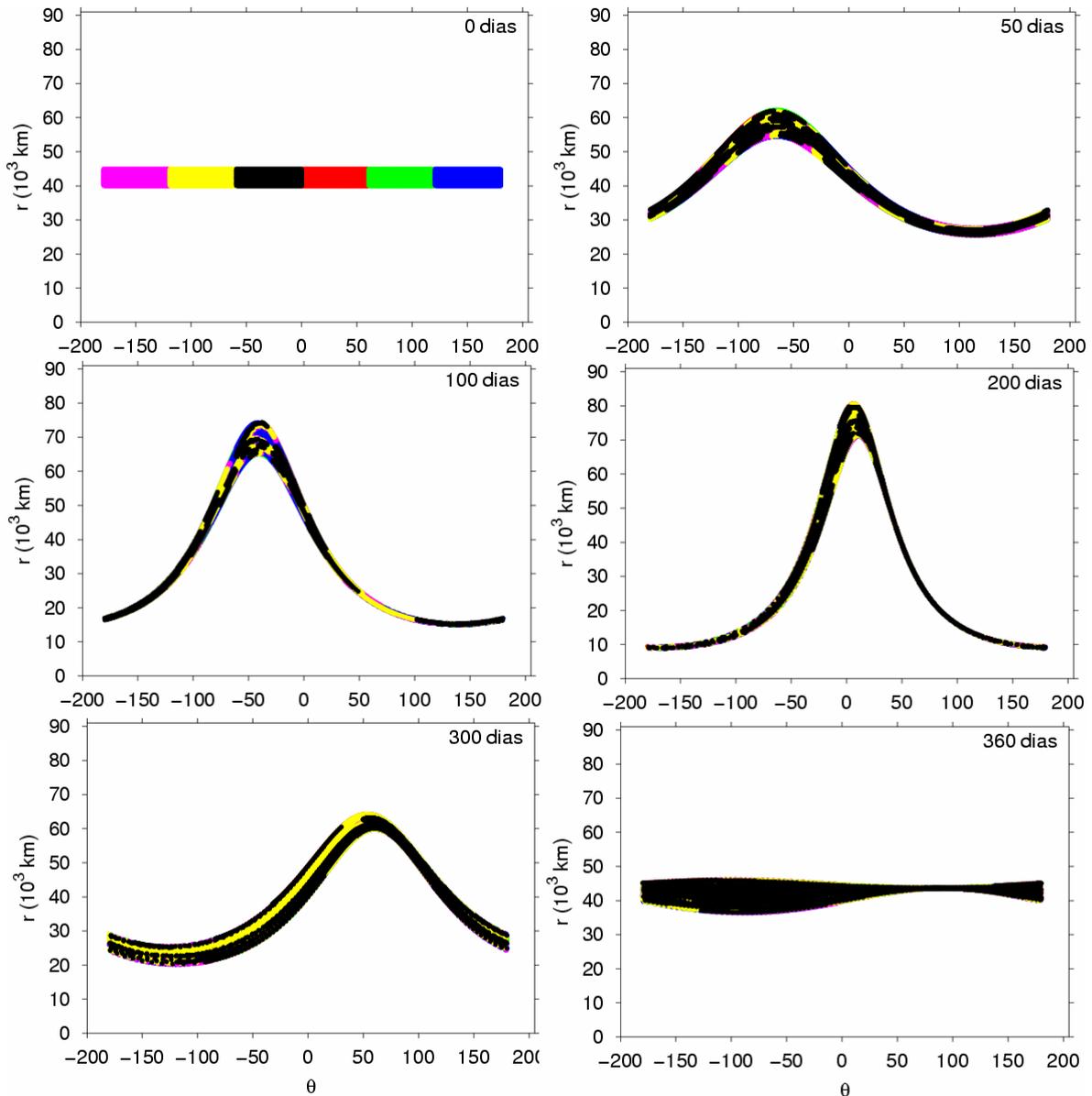


FIGURA 4.45 – Evolução orbital, em função das coordenadas  $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho  $6 \mu\text{m}$ , na região entre 40.000 e 45.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 200, 300 e 360 dias. O Objetivo principal desta figura é observar a amplitude na variação da região orbital deste anel de partículas.

Na Figura 4.46 é apresentada a evolução orbital deste anel para os instantes 720, 730, 740, 750, 760 e 770 dias. A estrutura apresenta dois “bojos”, semelhante ao movimento harmônico com diferentes amplitudes. Estes "bojos" evoluem para a estrutura semelhante ao comportamento ondulatório assimétrico. Considerando ainda este instante, observa-se que o valor de raio mínimo  $r_{min}$  retorna próximo ao inicial, ou seja, 40.000 km.

Considerando a simulação numérica como um todo, este anel de partículas apresenta uma periodicidade no seu comportamento de, aproximadamente, um período orbital do Sol, ou seja, 360 dias e a região máxima de "espalhamento" da partícula está compreendida entre 85.000 km e 8.000 km. Então, o movimento do anel de partículas está confinado numa região bem maior que a sua região orbital inicial.

A evolução orbital em função das coordenadas  $(x, y)$  deste anel para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias é apresentada na Figura 4.47. A partir desta figura, nota-se que para  $t = 50$  dias existe uma assimetria radial na distribuição destas partículas. A evolução desta assimetria radial gera um "bojo". Este bojo apresenta a evolução orbital no sentido anti-horário até 200 dias. Após este instante a evolução orbital deste bojo tem sentido horário (veja CD em anexo). Este comportamento está associado ao movimento médio do Sol, visto que, após seis meses, a posição do Sol será ao lado oposto da posição inicial, revertendo, desta forma, o efeito inicial.

Uma possível explicação para a mudança no caráter circular inicial deste anel está no fato que, para as altitudes envolvidas, a intensidade da perturbação da pressão de radiação é maior que a intensidade do achatamento terrestre. A variação periódica da excentricidade devido ao efeito da pressão de radiação pode ser explicada pelo acréscimo e decréscimo de velocidades. Portanto, considerando o instante, ou seja, partículas inicialmente em órbitas circulares com movimento anti-horário e o Sol na posição indicada, estas teriam um acréscimo de velocidade; considerando as partículas

com movimento no sentido contrário à posição do Sol, e um decréscimo de velocidade se as partículas estivessem se movimentando no mesmo sentido da posição do Sol.

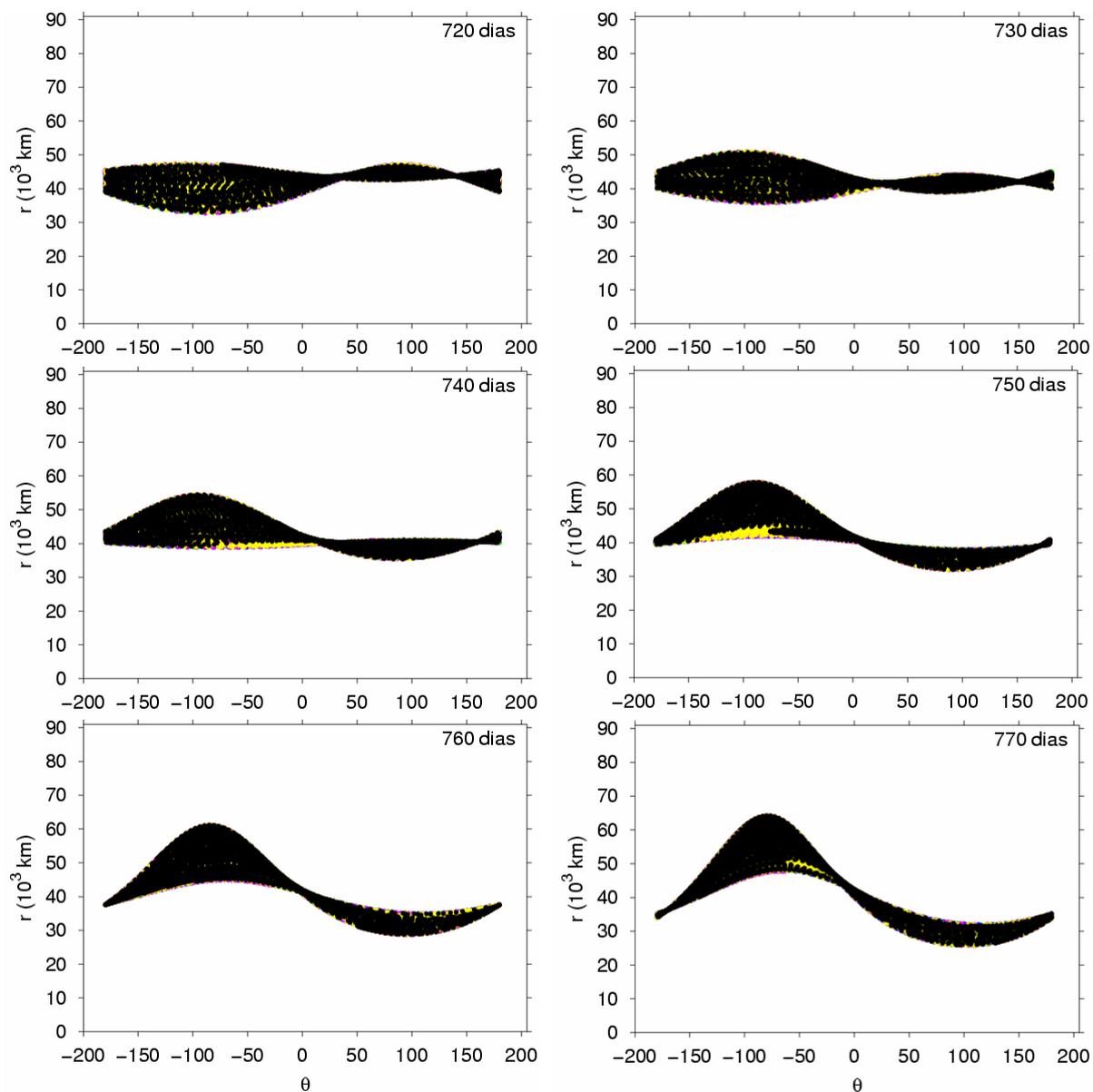


FIGURA 4.46 – Evolução orbital, em função das coordenadas  $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho  $6 \mu\text{m}$ , na região entre 40.000 e 45.000 km, para os instantes 720, 730, 740, 750, 760 e 770 dias. O Objetivo principal desta figura é observar a amplitude na variação da região orbital deste anel de partículas.

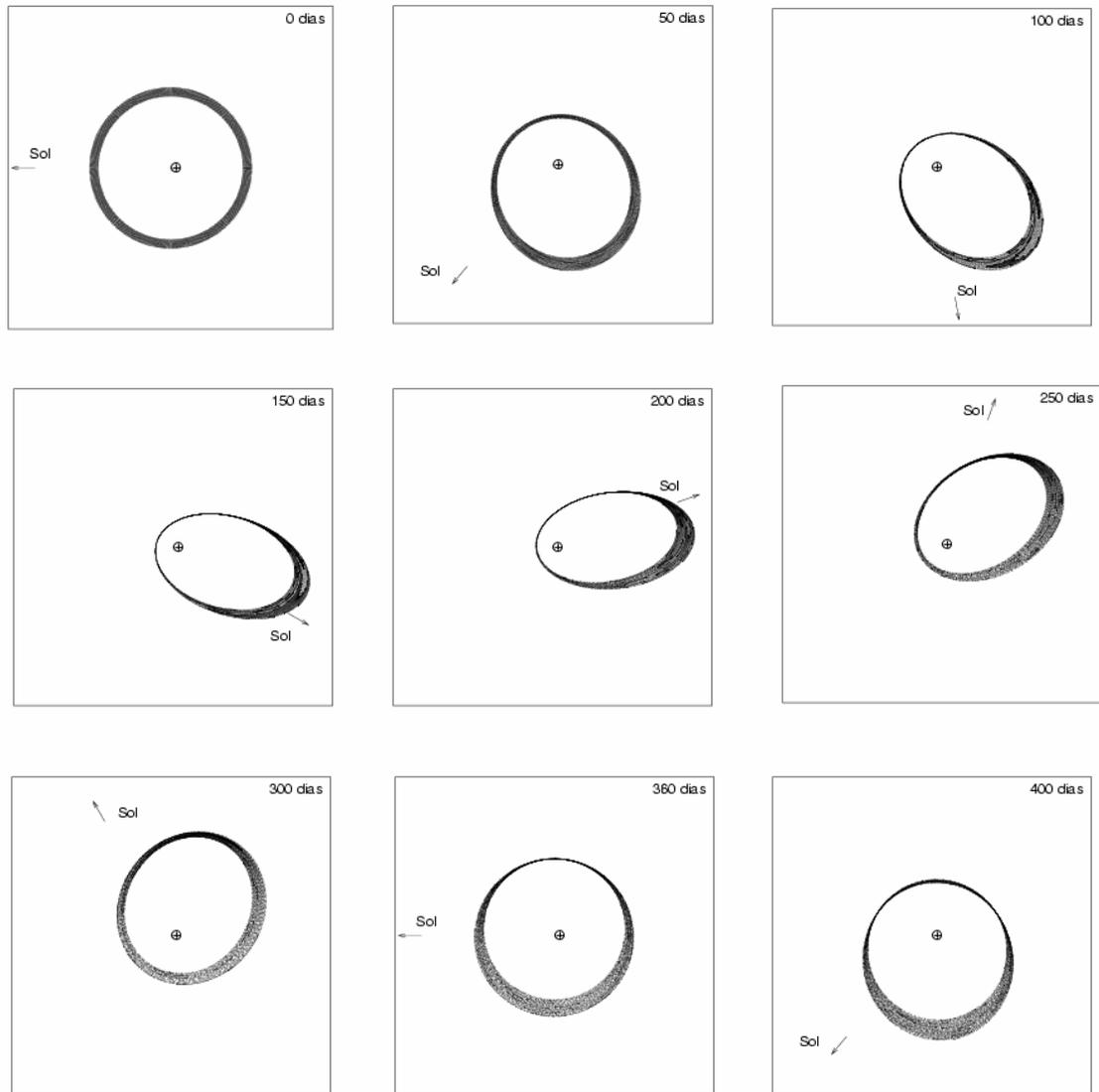


FIGURA 4.47 - Evolução orbital, em função das coordenadas  $(x, y)$ , de um anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$ , na região entre  $40.000$  e  $45.000$  km, para os instantes inicial,  $50$ ,  $100$ ,  $150$ ,  $200$ ,  $250$ ,  $300$ ,  $360$  e  $400$  dias.

Como consequência, a órbita gradualmente se transforma em uma órbita elíptica. Após 6 meses o Sol estaria na posição oposta à inicial e, desta forma, partículas antes aceleradas seriam, agora, desaceleradas e vice-versa. Consequentemente, o anel torna-se quase circular após o período de 360 dias, porém com efeito diferente ao inicial. No instante da inversão do sentido do Sol (aproximadamente 180 dias), as partículas apresentam excentricidades, ( $e$ ), diferentes das iniciais ( $e = 0$ ), e, portanto, produzindo efeito diferente ao inicial. Observe, ainda, que o bojo sempre ocorre no apocentro deste anel, em relação à Terra.

#### **4.4.3 – Partículas na Região Entre 10.000 e 15.000 km**

Neste item a evolução orbital do anel de partículas foi considerada para tamanho de partículas de 100  $\mu\text{m}$ . Os principais pontos observados foram que a evolução do raio orbital em função da longitude manteve-se regular até o instante de 400 dias. Após este instante, existe uma região regular e uma outra em que ocorreu o espalhamento de partículas. Este comportamento pode ser observado na Figura 4.48. Nesta figura, os instantes considerados foram 400, 600, 800, 1.000, 1.200 e 1.400 dias.

A região máxima de "espalhamento" está compreendida entre 8.000 e 22.000 km. Este anel de partículas parece que não apresentou uma periodicidade na evolução do raio orbital em função da anomalia verdadeira.

Na Figura 4.49 é apresentada a evolução orbital, em função das coordenadas  $(x, y)$ , deste anel para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias. Para este tamanho de partícula e esta região orbital, nota-se que existe uma pequena assimetria radial após 100 dias. Desta forma, fica evidente que a perturbação da pressão de radiação, mesmo a esta altitude e considerando este tamanho de partícula, provoca uma pequena alteração na órbita inicial deste anel. Após 200 dias, observa-se que existe

uma região em que parece ocorrer a sobreposição de partículas, ou seja, parece que esta região é mais densa ao comparada às demais.

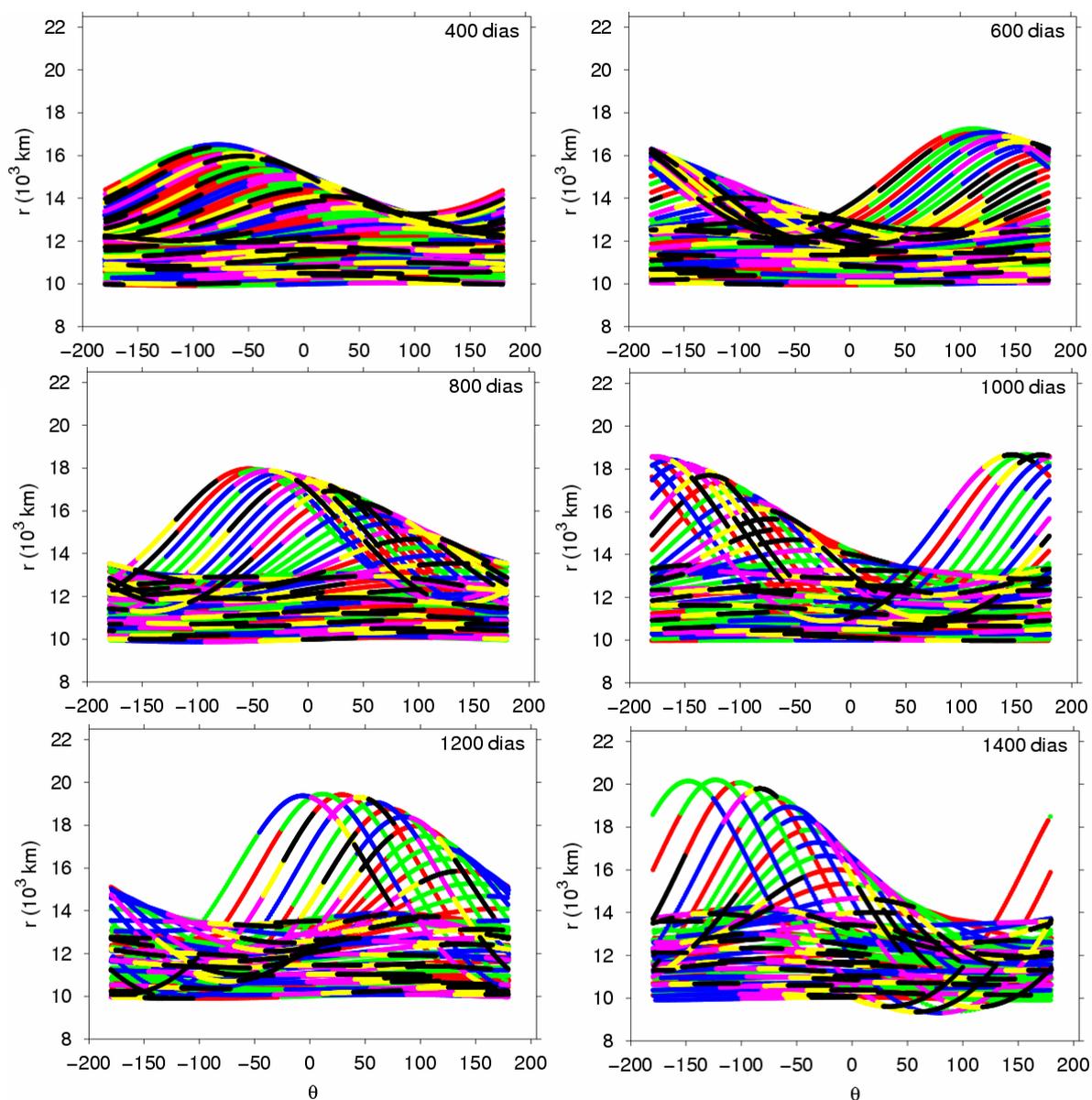


FIGURA 4.48 – Evolução orbital, em função das coordenadas  $(r, \theta)$ , de um anel de 18.050 partículas de tamanho  $100 \mu\text{m}$ , na região entre 10.000 e 15.000 km, para os instantes 400, 600, 800, 1.000, 1.200 e 1.400 dias.

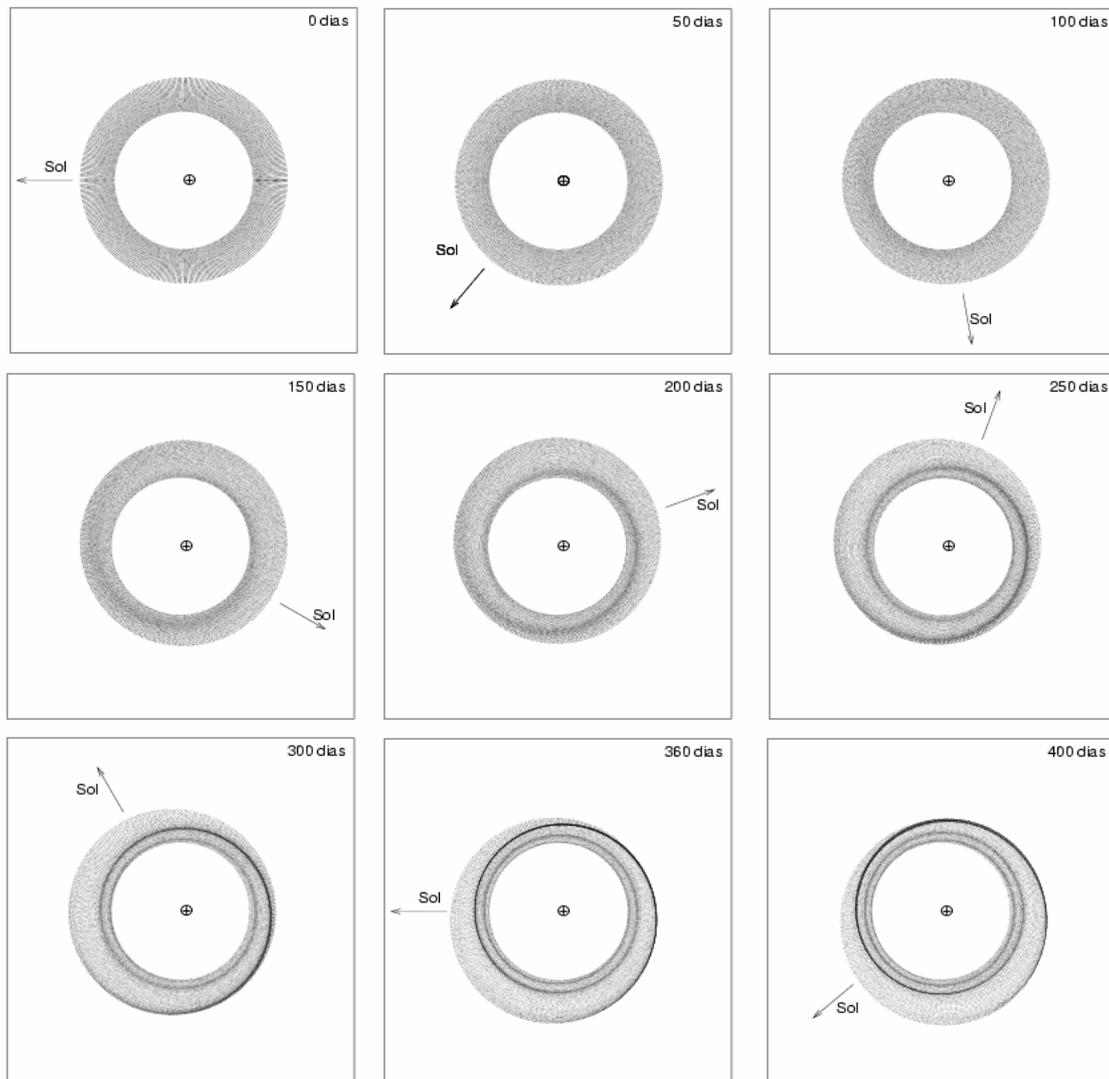


FIGURA 4.49 - Evolução orbital de um anel constituído de partículas de 100  $\mu\text{m}$ , na região entre 10.000 e 15.000 km, para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias.

## 4.5- A Densidade da Evolução Orbital de m Anel de Detritos Espaciais

Nesta Subsecção é apresentada a evolução da densidade de um anel de detritos espaciais nas regiões entre 10.000 e 15.000 km – órbita baixa, 20.000 e 25.000 km – órbita média e 40.000 a 45.000km – órbita alta.

### 4.5.1 - Região Entre 40.000 e 45.000 km – Órbita Alta

Para melhor visualizar as regiões de maior densidade em função do tempo, neste item é apresentada, primeiramente, a evolução da densidade de partículas  $\rho$ , em função da longitude  $\theta$  e do raio orbital  $r$ . Os resultados anteriores foram divididos em “caixas” cujas dimensões eram de 1 km, para o raio orbital, e  $5^\circ$ , para a longitude, ou seja, computando a quantidade de partículas contida nesta “caixa”. Posteriormente, considerando a quantidade de partículas para uma mesma faixa de  $r$ , em intervalos de 1 km, é apresentada a evolução da densidade radial  $\rho_r$  e, analogamente, considerando a quantidade de partículas para uma mesma faixa de  $\theta$ , em intervalos de  $5^\circ$ , é apresentada a densidade azimutal  $\rho_\theta$ .

Na Figura 4.50 é apresentada a evolução de  $\rho$  para um anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$  em função da longitude  $\theta$  e do raio orbital  $r$ , para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias. Observa-se que, inicialmente, a quantidade de partículas contida em cada caixa é uma unidade de densidade. Em 50 dias de integração numérica, a densidade de partículas inicial é modificada, porém ainda é pequena se comparada a todo o período de integração numérica (1.600 dias). Considerando esse período de simulação numérica, a densidade de partículas máxima é superior a seis vezes a densidade inicial.

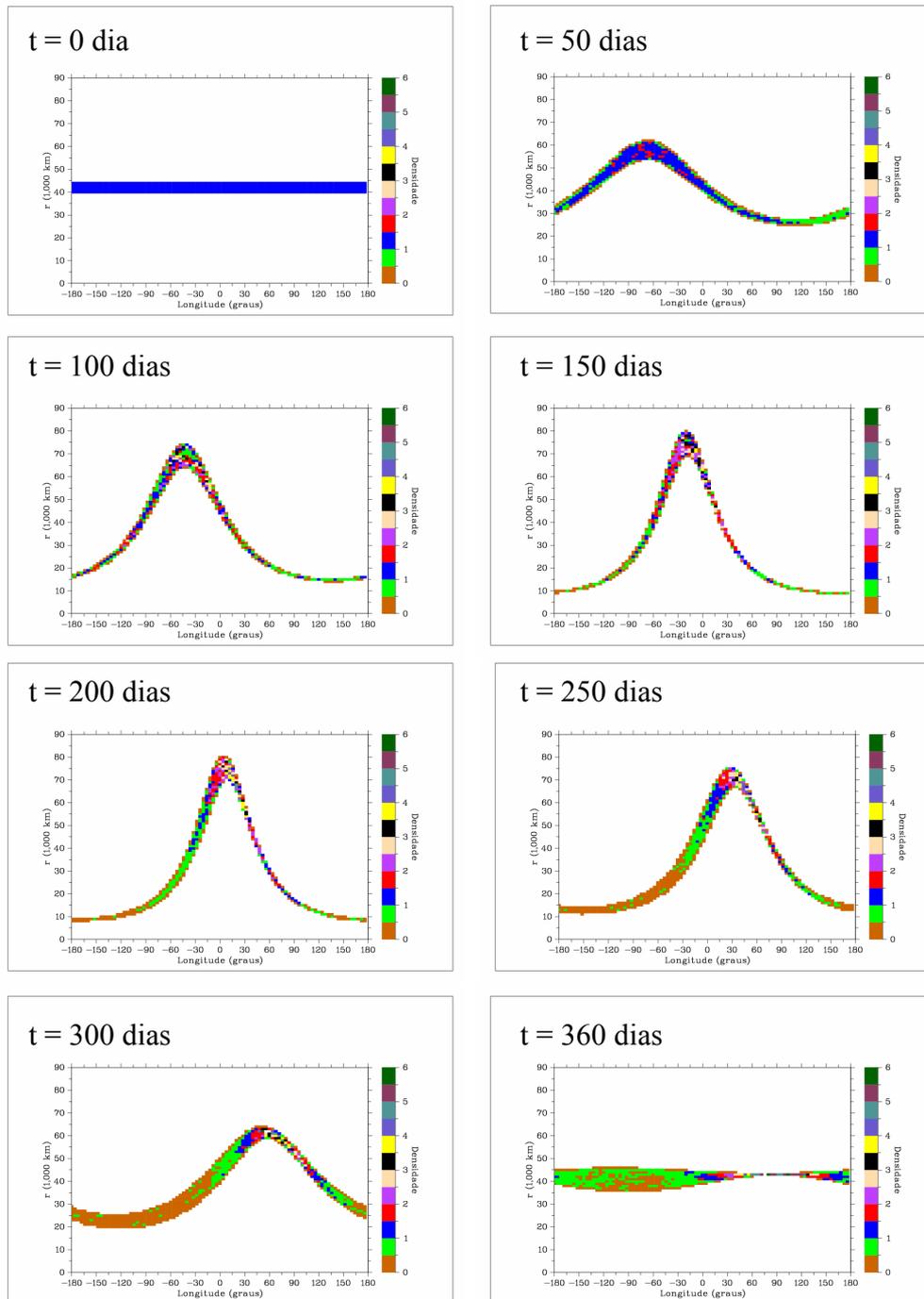


FIGURA 4.50 - Evolução orbital da densidade de um anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, em função das coordenadas raio orbital ( $r$ ) e longitude ( $\theta$ ), para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.

Nesta figura, a maior densidade de partículas ocorre para valores superiores ao valor inicial do raio orbital (entre 40.000 e 45.000 km), exceto nos instantes próximos ao período do Sol. Para estes instantes, a densidade máxima ocorre com raio orbital  $r$  de, aproximadamente, 43.000 km e intervalos distintos de  $\theta$ . Por exemplo, considerando  $t = 360$  dias, a densidade máxima ocorre para  $r \sim 43.000$  km e para  $\theta$  entre  $60^\circ$  e  $120^\circ$ . Após o instante  $t = 150$  dias, ocorre uma assimetria na distribuição inicial destas partículas. Esta assimetria está associada à posição do Sol. Neste período o Sol está do lado oposto à posição inicial e o efeito inicial sobre as partículas é revertido. Observa-se que, mesmo no instante de um período orbital (360 dias), esta distribuição não é mais uniforme, ou seja, a perturbação da pressão de radiação e do achatamento provoca um efeito periódico no movimento deste anel de partículas mas com características diferentes da inicial. Este comportamento se repete para todo o período de integração (1.600 dias). Esta mudança no comportamento inicial está associada à variação na excentricidade inicial da partícula devido à perturbação da pressão de radiação.

Para observar a densidade de partículas em função da dependência do tamanho destas, nas Figuras 4.51, 4.52 e 4.53 é apresentada a evolução da densidade para os tamanhos de partículas 20, 50 e 100  $\mu\text{m}$ , para o período de 365 dias. Comparando estes resultados, observa-se que os anéis constituídos de partículas maiores ou igual a 20  $\mu\text{m}$  apresentam uniformidade na distribuição das partículas enquanto no de 6  $\mu\text{m}$  apresenta regiões bem definidas de maior e menor densidade. Para evidenciar este fato, observe que, para partículas maiores ou igual a 20  $\mu\text{m}$ , a densidade de partículas é representada praticamente pelas cores verde (0,5 até 1 unidade da densidade inicial) e azul (1 até 1,5 unidade da densidade inicial) enquanto para partículas de 6  $\mu\text{m}$ , a densidade de partículas é menor ou igual a 0,5 unidade da densidade inicial, até o instante 150 dias. O anel constituído de partículas de 20  $\mu\text{m}$  apresenta regiões bem definidas de baixa densidade (maior ou igual a 0,5 unidade da densidade inicial).

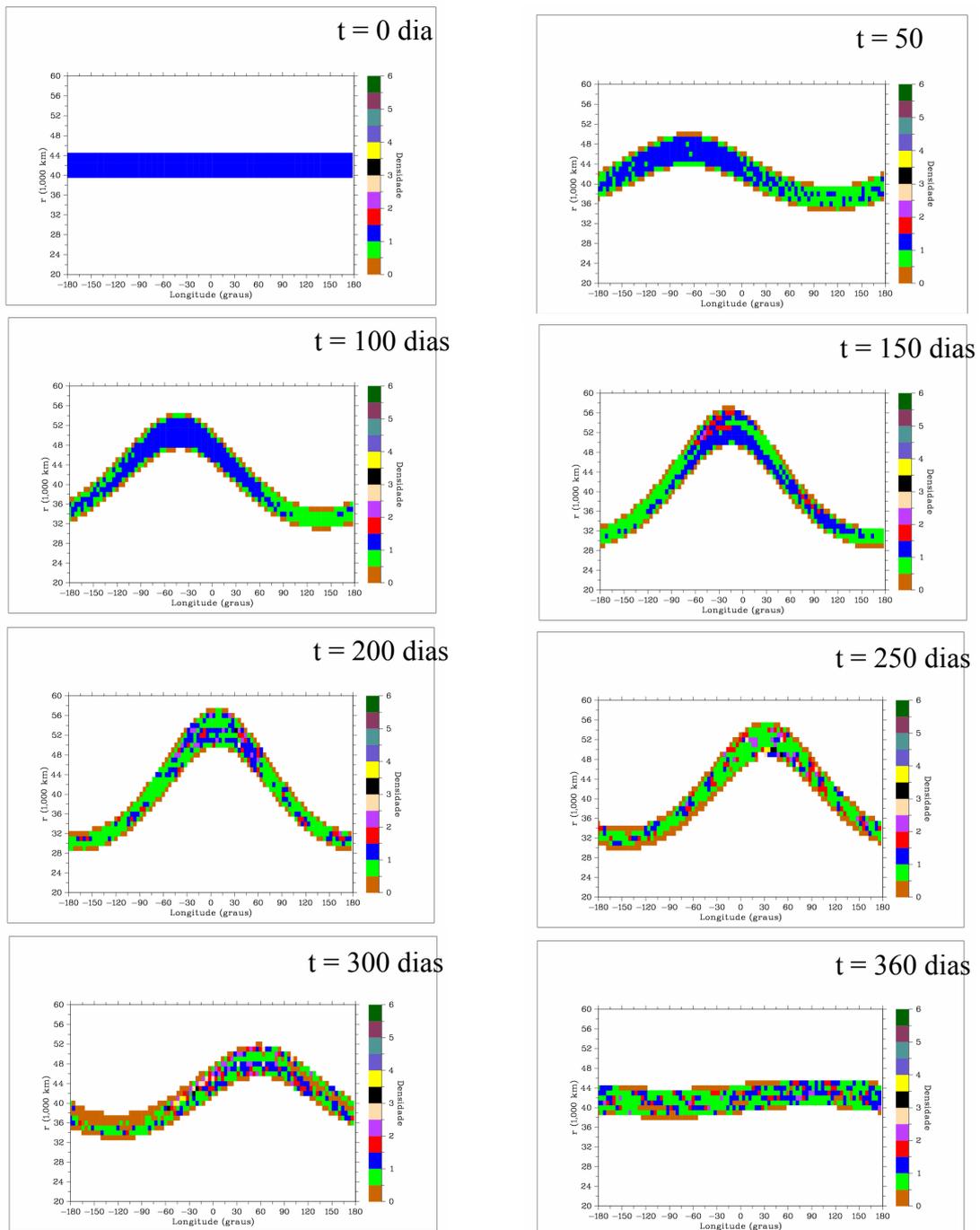


FIGURA 4.51 - Evolução orbital da densidade de um anel de partículas de  $20 \mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, em função das coordenadas raio orbital ( $r$ ) e longitude ( $\theta$ ), para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.

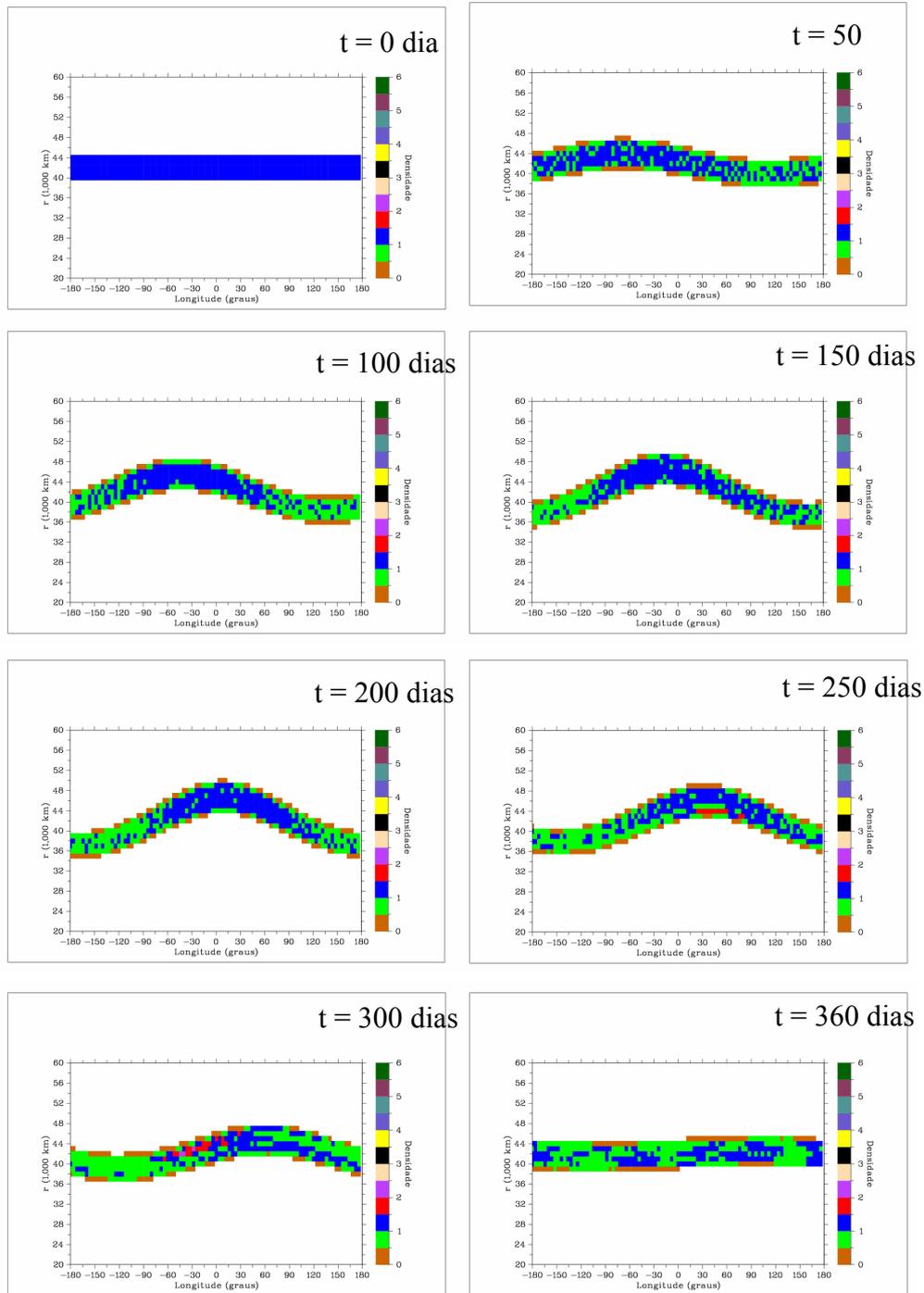


FIGURA 4.52 - Evolução orbital da densidade de um anel de partículas de 50  $\mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, em função das coordenadas raio orbital ( $r$ ) e longitude ( $\theta$ ), para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.

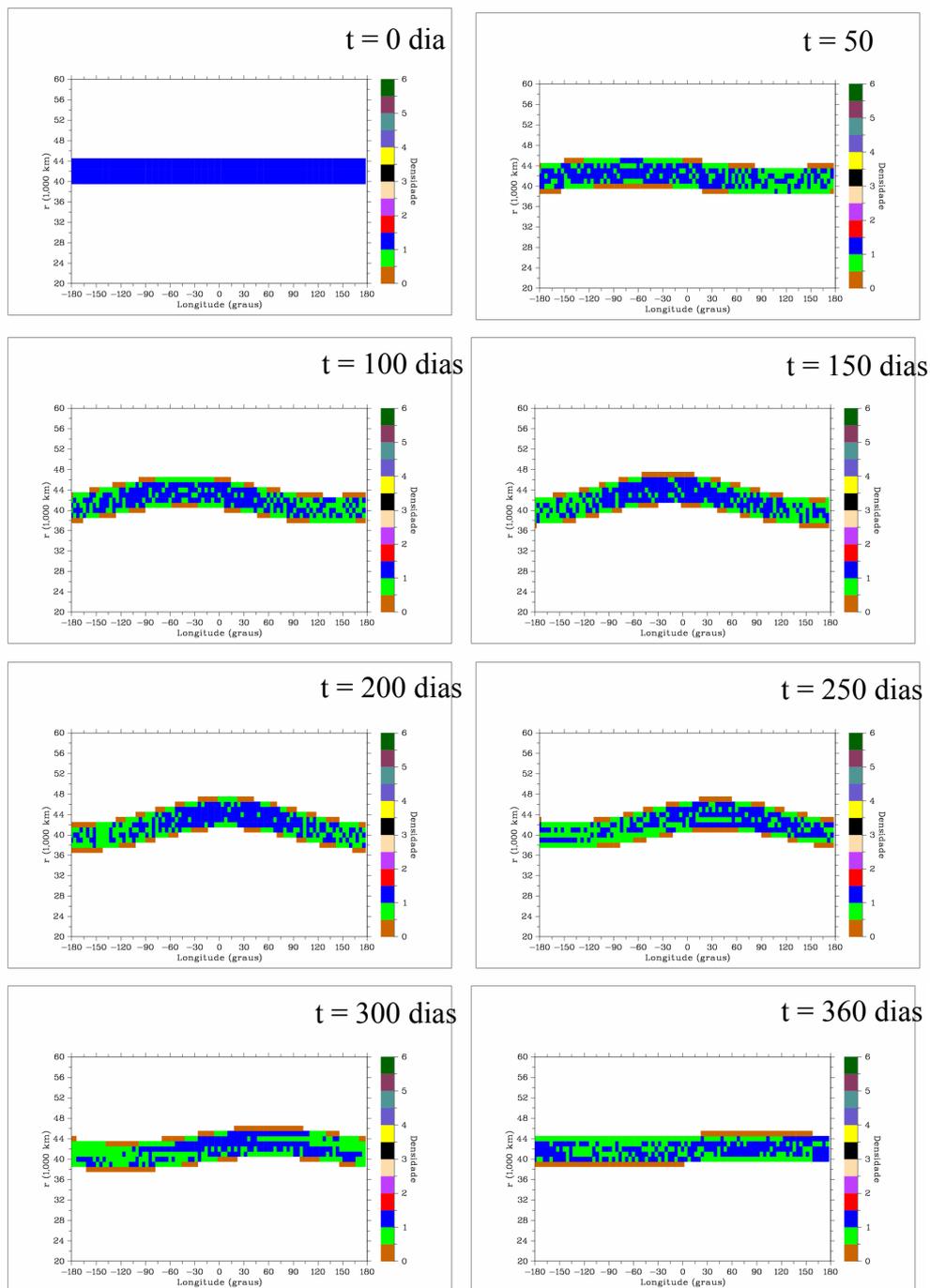


FIGURA 4.53 - Evolução orbital da densidade de um anel de partículas de  $100 \mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, em função das coordenadas raio orbital ( $r$ ) e longitude ( $\theta$ ), para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.

#### 4.5.1.1 - Distribuição Radial

Como foi visto anteriormente, a densidade de partículas apresenta dependência temporal em função da longitude ( $\theta$ ), do raio orbital ( $r$ ) e do raio da partícula ( $s$ ). A evolução temporal da densidade radial de partículas ( $\rho_r$ ), em função do raio orbital ( $r$ ), para um anel de partículas de 6  $\mu\text{m}$ , é apresentada a Figura 4.54.

O maior número de partículas ocorre próximo ao primeiro período orbital. Este valor é aproximadamente o dobro do valor inicial. O máximo de partículas sempre ocorre para o raio orbital de aproximadamente 43.000 km, ou seja, as partículas se distribuem de maneira que o máximo sempre se encontre na média dos valores iniciais do raio orbital.

Em contrapartida, em apenas 50 dias, a densidade máxima de partículas diminui para menos da metade da densidade inicial. Esta tendência se mantém até o instante de 300 dias, com densidade inferior à metade da inicial mas com uma região de espalhamento radial máxima de aproximadamente 70.000 km. Após este instante, a região de espalhamento diminui e a densidade aumenta.

Observa-se que esta evolução da concentração de partículas é muito rápida. Por exemplo, para o instante 350 dias, a região de espalhamento ocorria em 8.000 e 70.000 km e em somente 10 dias esta região de espalhamento passa a ocorrer em 35.000 e 45.000 km. Consequentemente, ocorre um aumento repentino na densidade de partículas.

A partir dos resultados das simulações numéricas para o período de 1.600 dias, verifica-se que existe uma periodicidade de aproximadamente 360 dias entre os picos dos valores máximos do número de partículas. Estes picos máximos ocorrem isoladamente.

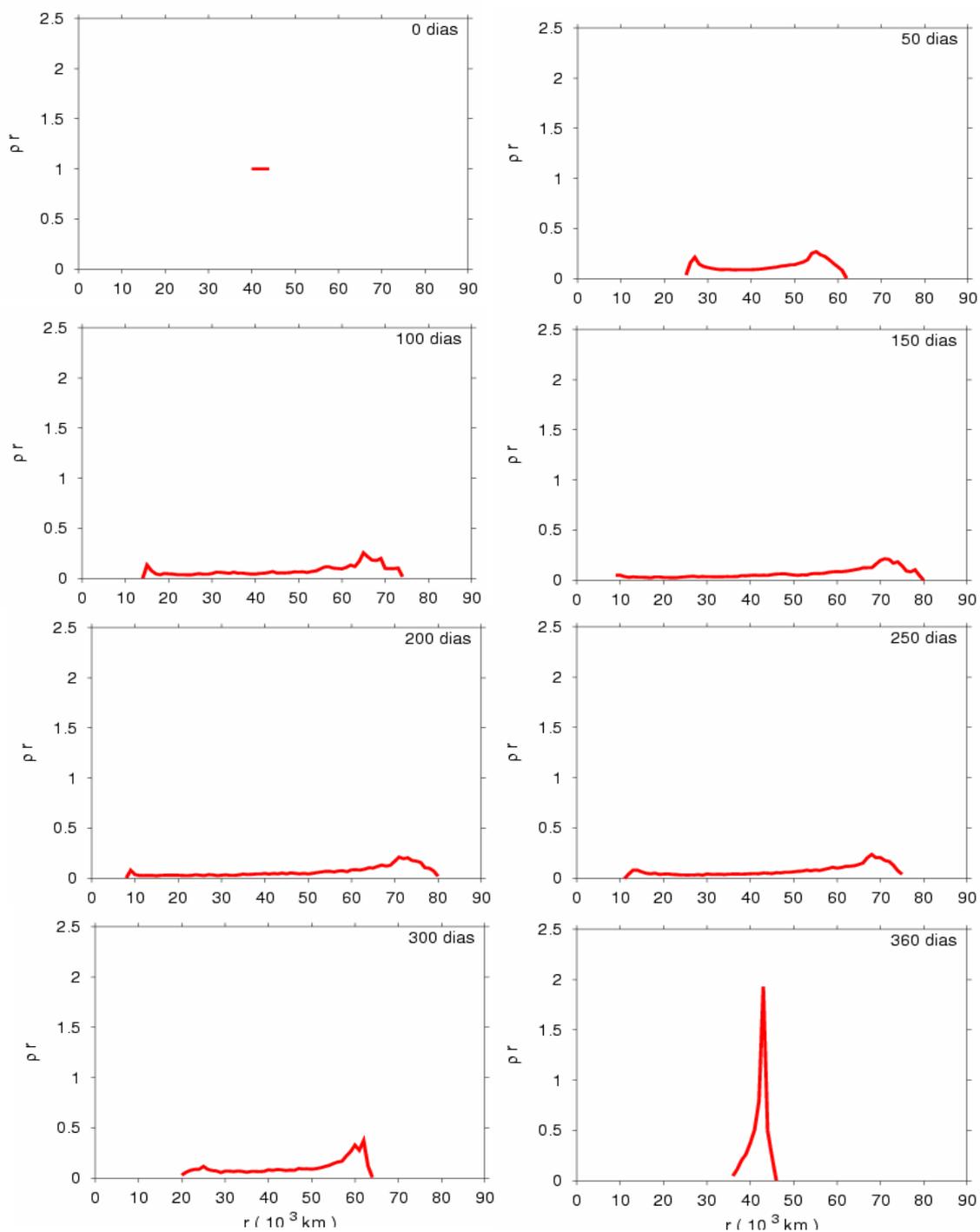


FIGURA 4.54 - Evolução temporal da densidade radial de um anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.

Nas Figuras 4.55, 4.56, 4.57 e 4.58 são apresentados os comportamentos do máximo e do mínimo da densidade radial em função do tempo, ou seja, são considerados os máximos e mínimos a cada intervalo de 10 dias, considerando os tamanhos de partículas de 6, 20, 50 e 100  $\mu\text{m}$ . Nestas figuras, os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima. Os gráficos na primeira linha representam a densidade radial máxima ( $\rho_{r_{\max}}$ ) e mínima ( $\rho_{r_{\min}}$ ) em função do raio orbital ( $r$ ), na segunda, a evolução do raio orbital mais denso ( $r_{\rho_{\max}}$ ) e menos denso ( $r_{\rho_{\min}}$ ) em função do tempo, e, na linha seguinte, a densidade radial máxima ( $\rho_{r_{\max}}$ ) e mínima ( $\rho_{r_{\min}}$ ) de partículas em função do tempo.

Nas Figuras 4.55a, 4.56a, 4.57a e 4.58a são apresentadas a evolução da densidade radial máxima em função do raio orbital em que este máximo ocorre. Observa-se que os máximos sempre ocorrem próximo ao raio orbital inicial, independente do tamanho de partícula. Em contrapartida, os mínimos sempre ocorrem nos extremos, como é mostrado nas Figuras 4.55b, 4.56b, 4.57b e 4.58b.

A evolução do raio orbital mais denso ( $r_{\rho_{\max}}$ ) em função do tempo, Figuras 4.55c, 4.56c, 4.57c e 4.58c, não apresenta máximos distintos e os mínimos têm comportamento diferente para o caso do anel de partículas de 6  $\mu\text{m}$ .

A evolução radial mínima, Figuras 4.55d, 4.56d, 4.57d e 4.58d, apresenta simetria na distribuição para todos os tamanhos de partículas, alterando, somente, a amplitude de oscilação, semelhante ao comportamento ondulatório, e apresentando diferentes valores de raio máximo  $r_{\max}$  e raio mínimo  $r_{\min}$ .

Na Figura 4.55e, os picos no gráfico da evolução temporal máxima da densidade radial permitiu um ajuste de curva a partir de uma função exponencial para o tamanho de

partícula de 6  $\mu\text{m}$ . Este ajuste de curva é dado pela equação  $\rho_{r_{\max}} = 1,4 + 5,6 e^{-(t-360)/792}$ . A linha tracejada indica este ajuste.

Para os tamanhos de partículas de 20, 50 e 100  $\mu\text{m}$ , Figuras 4.56e, 4.57e, 4.58e, respectivamente, este comportamento não ocorre. Nota-se, ainda, que a densidade de partículas se mantém inferior à densidade inicial, exceto para os dois primeiros períodos, para o anel constituído de partículas de 6  $\mu\text{m}$  e para os instantes próximos ao período 360 dias, em que a densidade máxima é a inicial. Os mínimos absolutos apresentam valores que aumentam conforme o tamanho de partícula aumenta.

Para partículas de 6 e 20  $\mu\text{m}$  este mínimo estava próximo de 0,5 e, para partículas de 100  $\mu\text{m}$ , este mínimo é superior a 0,75 da densidade inicial. Com isso, partículas maiores não apresentam grandes oscilações na densidade inicial.

Nas Figuras 4.55f, 4.56f, 4.57f, 4.58f, observa-se que a concentração de partículas da densidade mínima é 10 vezes menor que a densidade inicial, para partículas menores ou igual a 50  $\mu\text{m}$  enquanto para partículas de 100  $\mu\text{m}$ , a densidade mínima é menor ou igual a 0,3 da densidade inicial.

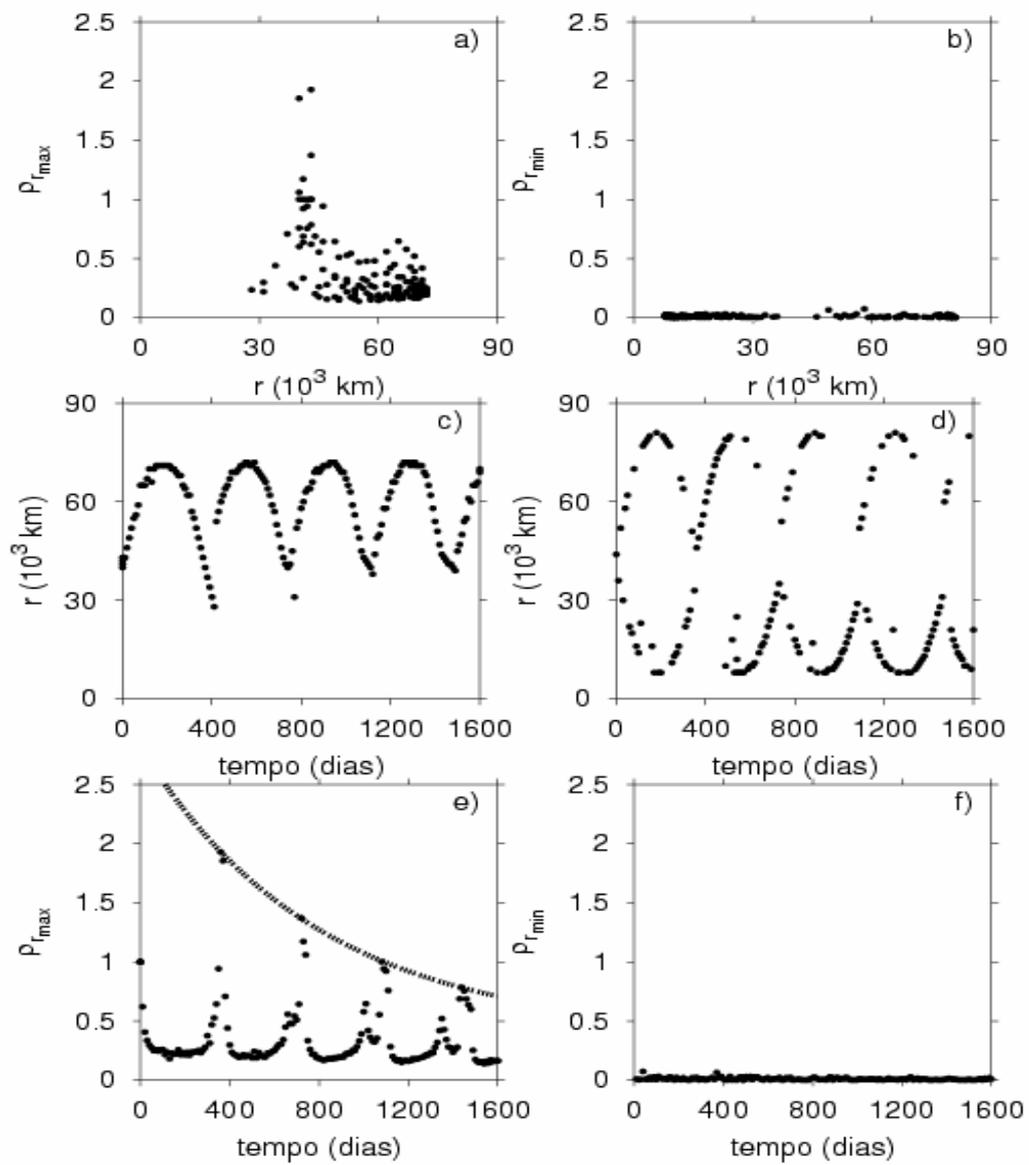


FIGURA 4.55 - Evolução da densidade radial máxima e mínima de um anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$ . Os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima.

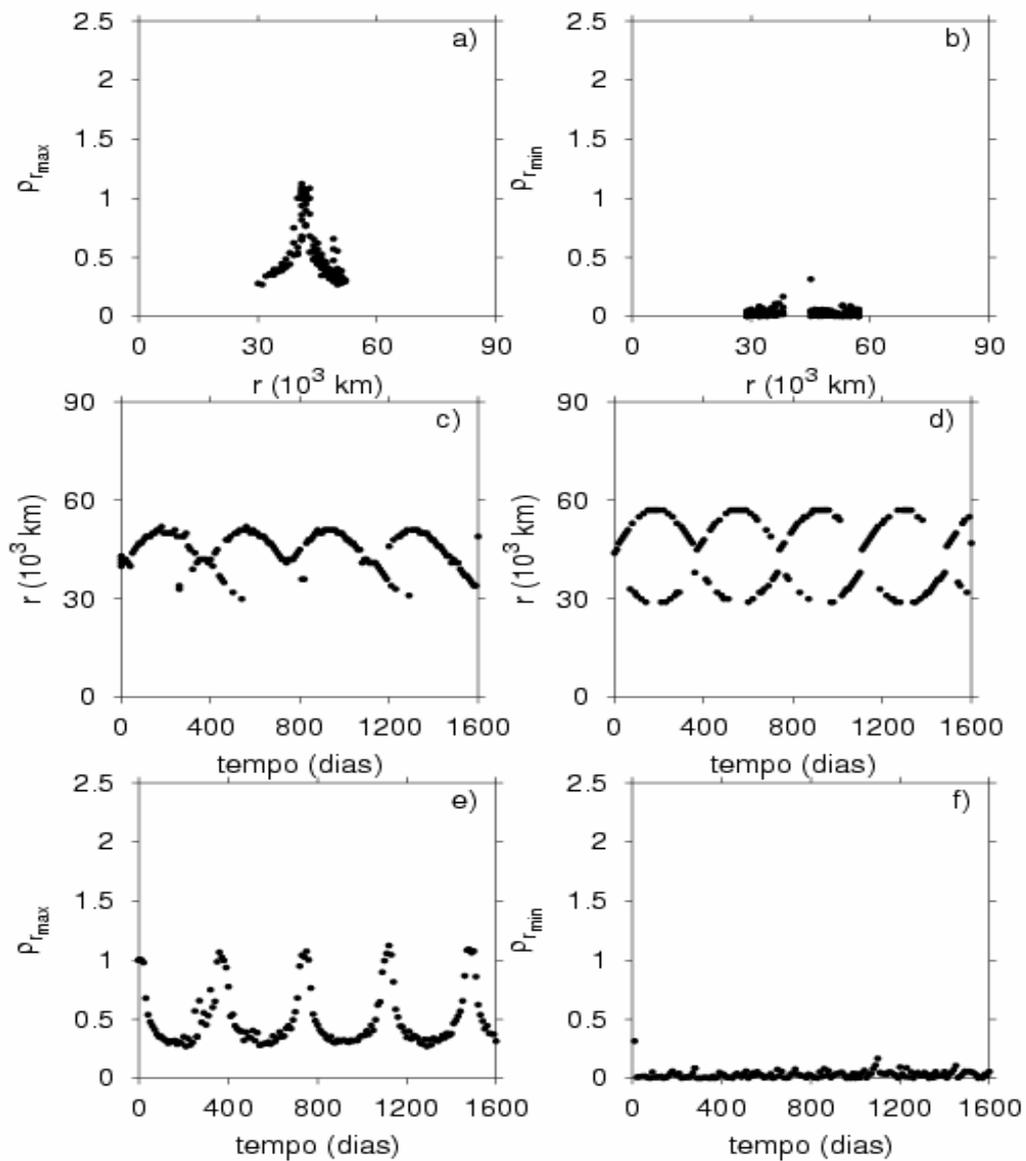


FIGURA 4.56 - Evolução da densidade radial máxima e mínima de um anel de partículas de  $20 \mu\text{m}$ . Os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima.

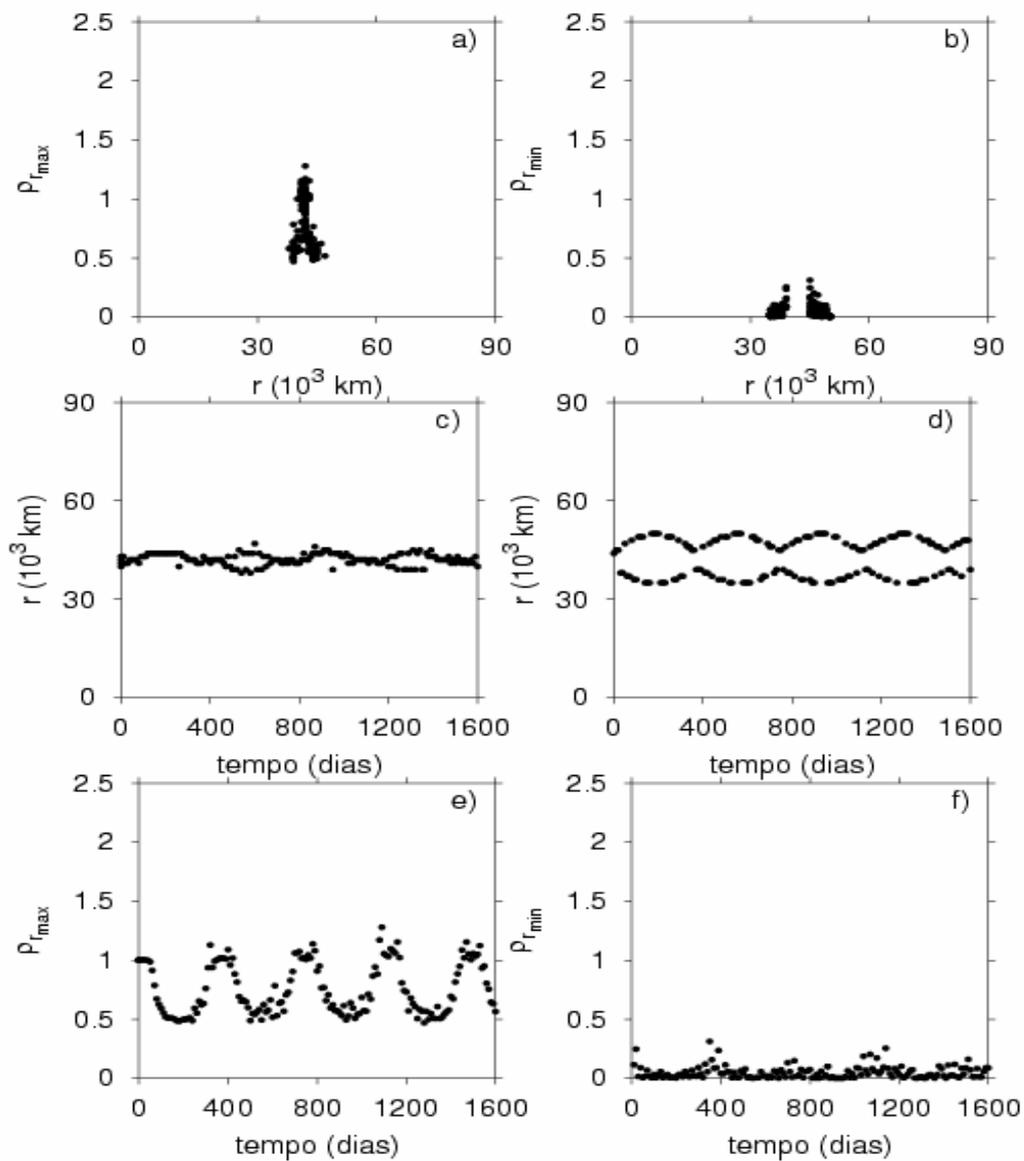


FIGURA 4.57 - Evolução da densidade radial máxima e mínima de um anel de partículas de  $50 \mu\text{m}$ . Os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima.

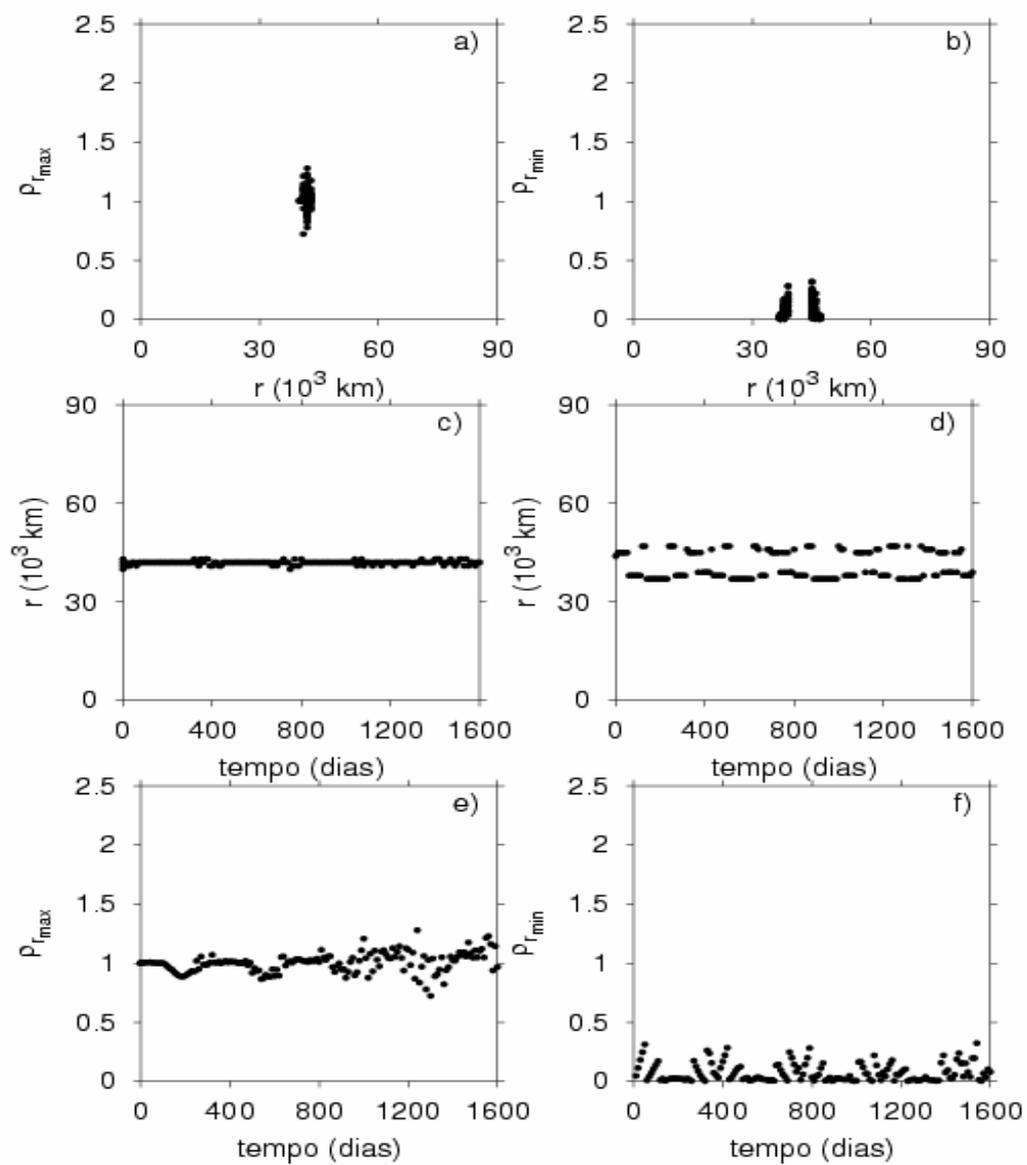


FIGURA 4.58 - Evolução da densidade radial máxima e mínima de um anel de partículas de  $100 \mu\text{m}$ . Os gráficos à direita representam a evolução da densidade radial mínima e à esquerda, a máxima.

A evolução temporal da região de espalhamento e o comportamento da região de espalhamento ( $\Delta r_{\max}$ ) em função do tamanho de partículas ( $s$ ) são apresentadas nas Figuras 4.59a e 4.59b, respectivamente. Nestas figuras foram considerados os tamanhos de partículas 6, 20, 50 e 100  $\mu\text{m}$ , em que os pontos representam a evolução temporal para partículas de 6  $\mu\text{m}$ , os triângulos, partículas de 20  $\mu\text{m}$ , os triângulos em cinza, partículas de 50  $\mu\text{m}$  e os quadrados, partículas de 100  $\mu\text{m}$ . Observa-se que a variação temporal da região de espalhamento apresenta características de periodicidade em sua evolução, valores constantes para o máximo enquanto que para o mínimo, os valores vão diminuindo.

Na Figura 4.59b, a região de espalhamento máxima em função do tamanho de partículas é representada pelos triângulos e o ajuste de curva destes pontos é dado pela linha tracejada. Este ajuste da curva obedece à função exponencial dada por  $\Delta r_{\max} = 11,8 + 61,1 e^{-(s-6)/10,7}$ . Este comportamento da região de espalhamento já havia sido observado para o caso de partículas isoladas no Item 4.2.2 em que a região de espalhamento depende da excentricidade e que por sua vez depende do tamanho da partícula. Para efeito de simples comparação de resultados, os pontos em azul representam a região de espalhamento máxima para o caso de uma partícula isolada. Observando esta figura, as partículas menores apresentam maiores regiões de espalhamento. Considerando partículas maiores ou igual a 40  $\mu\text{m}$ , esta variação na região de espalhamento é praticamente constante em comparação com as partículas menores.

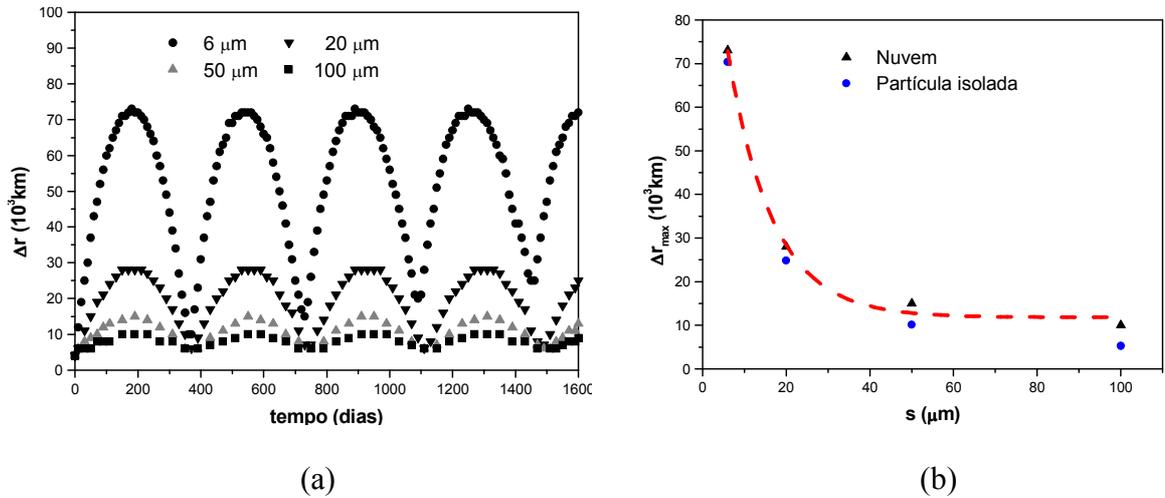


FIGURA 4.59 - a) Evolução temporal da região de espalhamento radial para partículas de 6 (pontos), 20 (triângulos), 50 (triângulos em cinza) e 100  $\mu\text{m}$  (quadrados) e b) Região orbital de espalhamento máximo em função do tamanho de partículas.

#### 4.5.1.2 - Distribuição Azimutal

Analogamente ao que foi feito para a distribuição radial, neste item é apresentada a evolução temporal da densidade azimutal de partículas ( $\rho_\theta$ ) em função da longitude ( $\theta$ ), para um anel de partículas de 6  $\mu\text{m}$ . Para este tamanho de partícula, tem-se uma distribuição da densidade de partícula obedece a uma distribuição gaussiana para todo o período de integração numérica (1.600 dias). Esta evolução azimutal, considerando o período de 360 dias, é apresentada na Figura 4.60. O máximo da densidade azimutal ocorre na metade do período orbital do Sol, ou seja, 180, 540, ... dias. Este máximo é aproximadamente 6 vezes o valor inicial. A equação utilizada para o ajuste de curva

para a distribuição gaussiana é  $\rho_\theta = \rho_{\theta_0} + \frac{A}{B\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\theta-\tilde{\theta})^2}{2B^2}}$ . Os valores médios dos

parâmetros, em função do tempo, para partículas de 6  $\mu\text{m}$  e considerando o tempo de 1.600 dias são:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\theta_0}(t) &= 3,9 \times 10^{-3} t^2 - 1,5t + 161,9, & \bar{B}(t) &= 1,4 \times 10^{-3} t^2 - 5,3 \times 10^{-1} t + 75,5, \\ \bar{A}(t) &= t^2 + 369t + 9674, & \bar{\theta}(t) &= 5 \times 10^{-1} t - 99. \end{aligned}$$

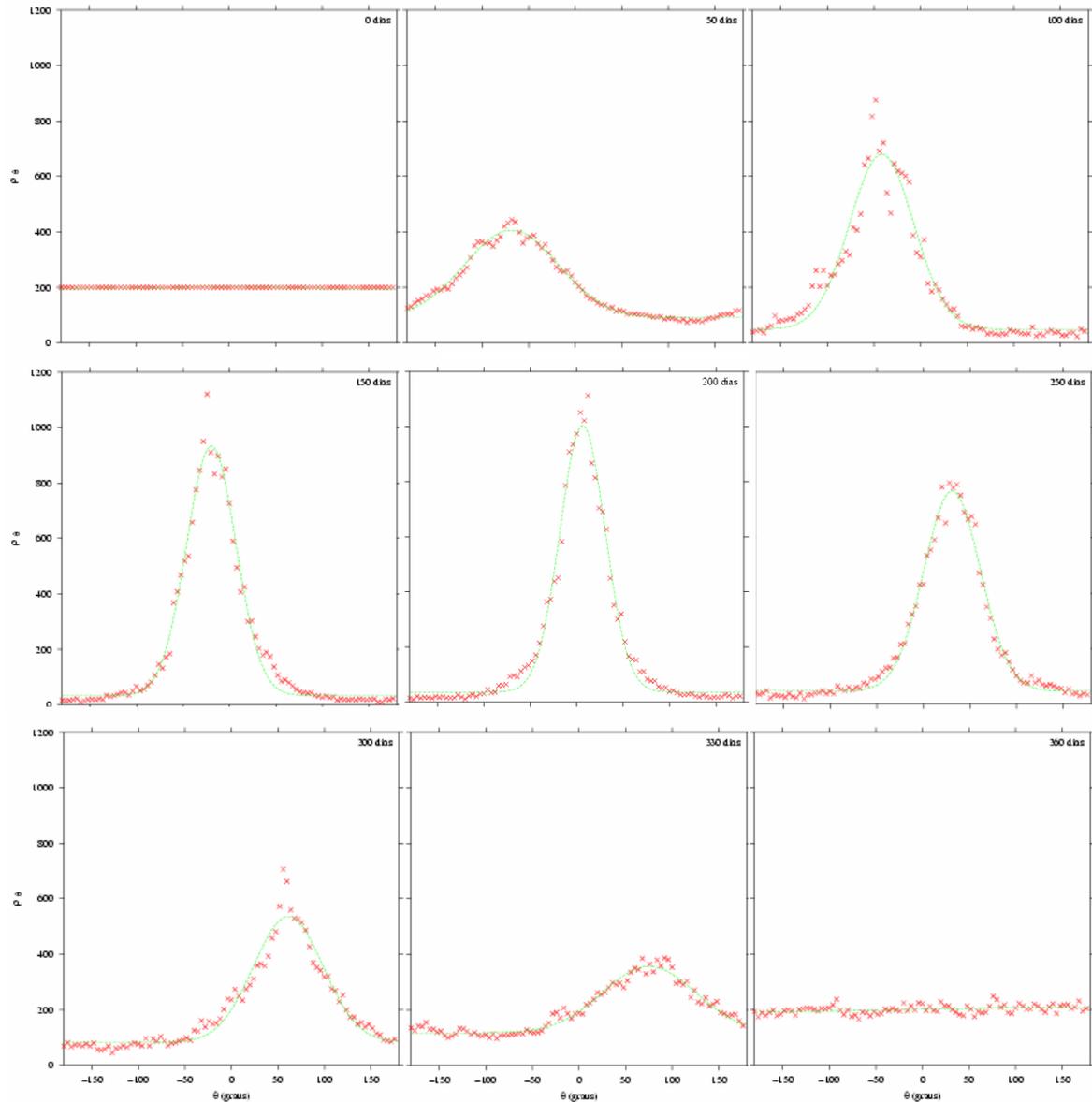


FIGURA. 4.60 - Evolução da densidade azimutal de um anel de partículas de  $6 \mu\text{m}$ , na região de órbita alta ao redor da Terra, para os instantes 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 330 e 360 dias. Esta evolução obedece a uma distribuição gaussiana (linha em verde).

Para os demais tamanhos de partículas, o ajuste de curva obedece a uma distribuição gaussiana para o período de 200 dias. Na Figura 4.61 é apresentado o comportamento dos parâmetros  $A, B, \tilde{\theta}$  e  $\rho_{\theta_0}$  para este período. Nesta figura os triângulos em azul representam as partículas de 6  $\mu\text{m}$ , os triângulos em verde, as de 20  $\mu\text{m}$ , os pontos em vermelho, as de 50  $\mu\text{m}$  e os quadrados em preto, as de 100  $\mu\text{m}$ . Observa-se que o parâmetro  $\tilde{\theta}$  apresenta o mesmo comportamento para todos os tamanhos de partículas para o período de 200 dias enquanto os demais parâmetros apresentam um comportamento sem descontinuidade até o instante 130 dias. Os valores destes parâmetros, válidos para o período de 130 dias, são apresentados na Tabela 4.2. Uma abordagem mais completa, contendo todos os ajustes considerados, está representada no CD anexo a este trabalho.

TABELA 4.2 - Valores dos parâmetros do ajuste de curva para a densidade azimutal - órbita alta.

Parâmetro	6 $\mu\text{m}$	20 $\mu\text{m}$
$\rho_{\theta_0}$	$9,2 \times 10^{-3} t^2 - 2,4t + 186,2$	$1,3 \times 10^{-3} t^2 - 8,9 \times 10^{-1} t + 203,4$
A	$-7,1 \times 10^{-1} t^2 + 187,4t - 1,8 \times 10^3$	$-4,4 \times 10^{-2} t^2 + 52,2 - 292,3$
B	$53,2e^{-(t-10)/58,4} + 23,7$	$5,0 \times 10^{-4} t^2 - 8,5 \times 10^{-2} t + 65,9$
$\tilde{\theta}$	$4,8 \times 10^{-1} t - 91,2$	$-5,2 \times 10^{-1} t - 93,8$
Parâmetro	50 $\mu\text{m}$	100 $\mu\text{m}$
$\rho_{\theta_0}$	$2,9 \times 10^{-4} t^2 - 3,7t + 202,2$	$1,4 \times 10^{-4} t^2 - 1,9 \times 10^{-1} t + 65,9$
A	$-2,3t^2 + 595,4t + 3,7$	$-3,7 \times 10^{-1} t^2 + 232,6t - 596,5$
B	$1,7 \times 10^{-5} t^2 + 5,7 \times 10^{-2} t + 63,9$	$4,2 \times 10^{-4} t^2 + 1,2 \times 10^{-2} t + 66,5$
$\tilde{\theta}$	$5,3 \times 10^{-1} t - 95,2$	$-5,4 \times 10^{-1} t - 96,1$

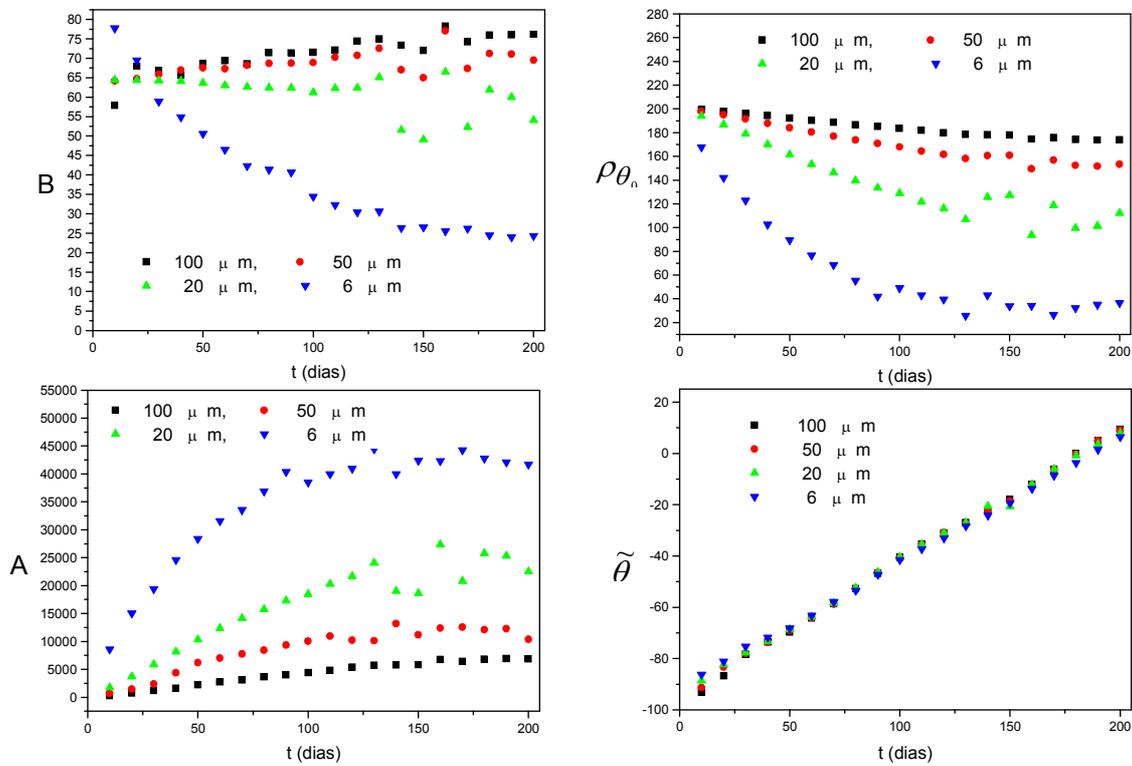


FIGURA 4.61 - Comportamento dos parâmetros  $A, B, \tilde{\theta}$  e  $\rho_{\theta_0}$  da distribuição gaussiana para o período de 200 dias.

## 4.5.2 – Região Entre 20.000 e 25.000 km – Órbita Média

### 4.5.2.1 - Distribuição Radial

Analogamente ao que foi feito na Figura 4.62, tem-se a evolução temporal da densidade radial de partículas ( $\rho_r$ ) em função do raio orbital ( $r$ ) para um anel de partículas de 6  $\mu\text{m}$ . Comparando estes resultados aos obtidos para a região em órbita alta, a região de órbita média não apresenta a mesma periodicidade de aproximadamente 360 dias para o valor máximo do número de partículas. Este valor máximo ocorre no instante 500 dias;

contudo, este período não é constante. Por exemplo, o segundo valor máximo ocorre após  $t = 910$  dias e antes de  $t = 1.000$  dias. Este valor máximo é aproximadamente 1,25 do valor inicial. A região de espalhamento máxima é de aproximadamente 45.000 km.

O comportamento do máximo e do mínimo da densidade radial em função do tempo, considerando os tamanhos de partículas de 6, 20, 50 e 100  $\mu\text{m}$ , é análogo ao caso de órbita alta. Os máximos ocorrem próximo ao raio orbital inicial. Partículas maiores apresentam menores regiões de espalhamento. Os mínimos sempre ocorrem nos extremos. Os picos da evolução temporal máxima da densidade radial apresentam um ajuste de curva de uma função exponencial para o tamanho de partícula 6  $\mu\text{m}$ , dada por

$$\rho_{r_{\max}} = 1,8 + 3,5 e^{-(t-470)/495}.$$

A densidade de partículas para o anel constituído de partículas de 6  $\mu\text{m}$  se mantém inferior à densidade inicial, exceto para  $t = 500$  dias, enquanto para os tamanhos de partículas de 20 e 50  $\mu\text{m}$  estes máximos são superiores a uma unidade de densidade, para todo o período de integração. Para partículas de 100  $\mu\text{m}$ , a densidade se mantém aproximadamente constante em relação à densidade inicial. Partículas de 100  $\mu\text{m}$  não apresentam grandes oscilações na densidade inicial. Este comportamento é diferente ao apresentado para a região de órbita alta em que partículas maiores ou igual a 20  $\mu\text{m}$  não apresentavam grandes oscilações na densidade inicial.

Nas Figuras 4.63a e 4.63b são mostradas a evolução temporal da região de espalhamento e o comportamento da região de espalhamento máxima ( $\Delta r_{\max}$ ) em função do tamanho de partículas ( $s$ ), respectivamente. Nestas figuras foram considerados os tamanhos de partículas 6, 20, 50 e 100  $\mu\text{m}$ . Observa-se que a variação temporal da região de espalhamento apresenta características de periodicidade mas com um período que vai aumentando. Sua evolução temporal apresenta valores constantes para o seu máximo enquanto seu mínimo assume valores menores, analogamente ao apresentado para o caso de órbita alta. Na Figura 4.63b, a região de espalhamento

máxima em função do tamanho de partículas é representado pelos triângulos e o ajuste de curva destes pontos é dado pela linha tracejada. Este ajuste de curva obedece à função exponencial dada por  $\Delta r_{max} = 8,7 + 31,3 e^{-(s-6)/10,7}$ . Observando esta figura, para partículas maiores ou igual a 40  $\mu\text{m}$ , a variação na região de espalhamento é praticamente constante, ou seja, aproximadamente 10.000 km, semelhante ao caso de órbita alta.

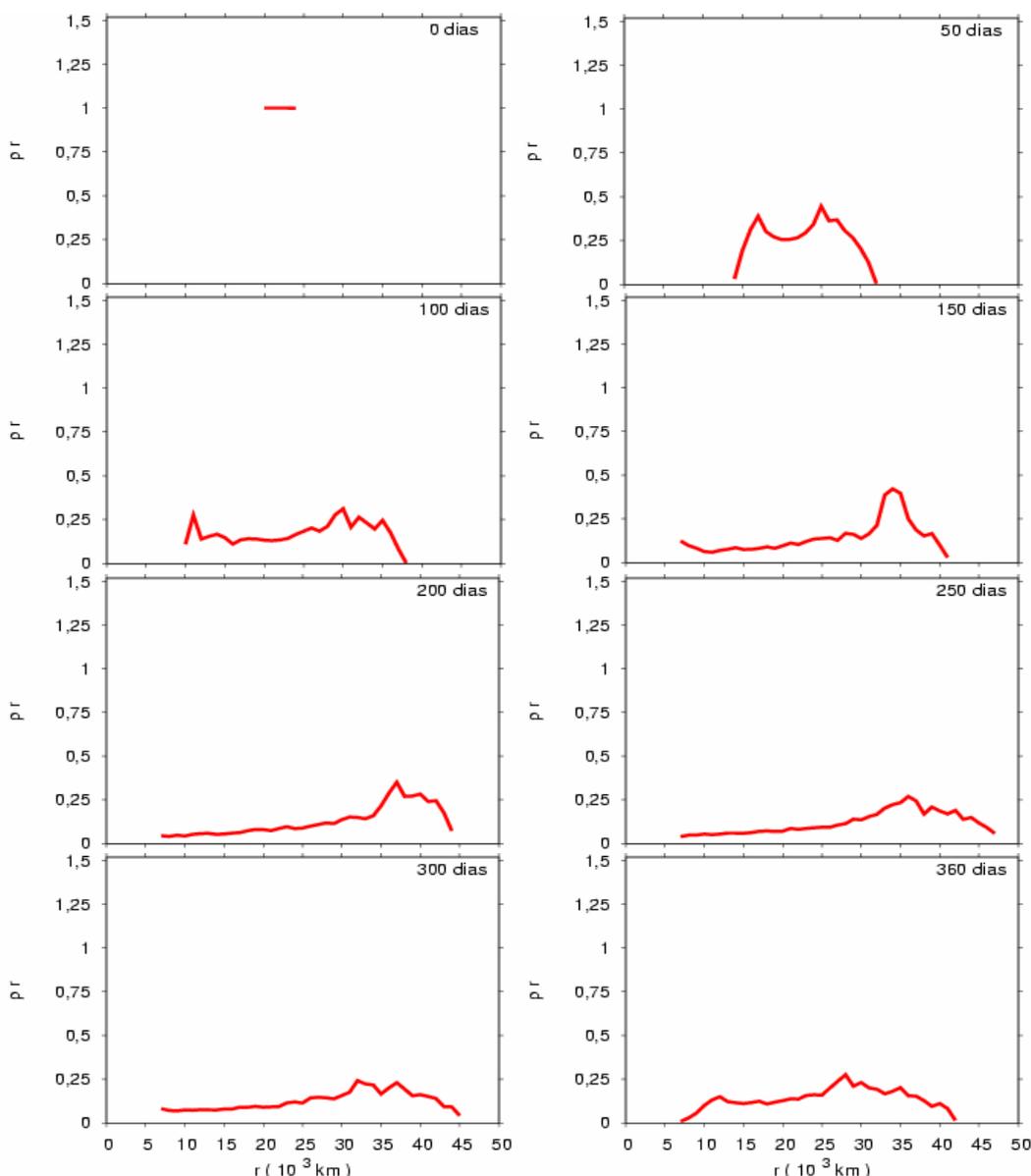


FIGURA 4.62 - Distribuição temporal da densidade radial de um anel de partículas de 6  $\mu\text{m}$ , na região de órbita média ao redor da Terra para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias.

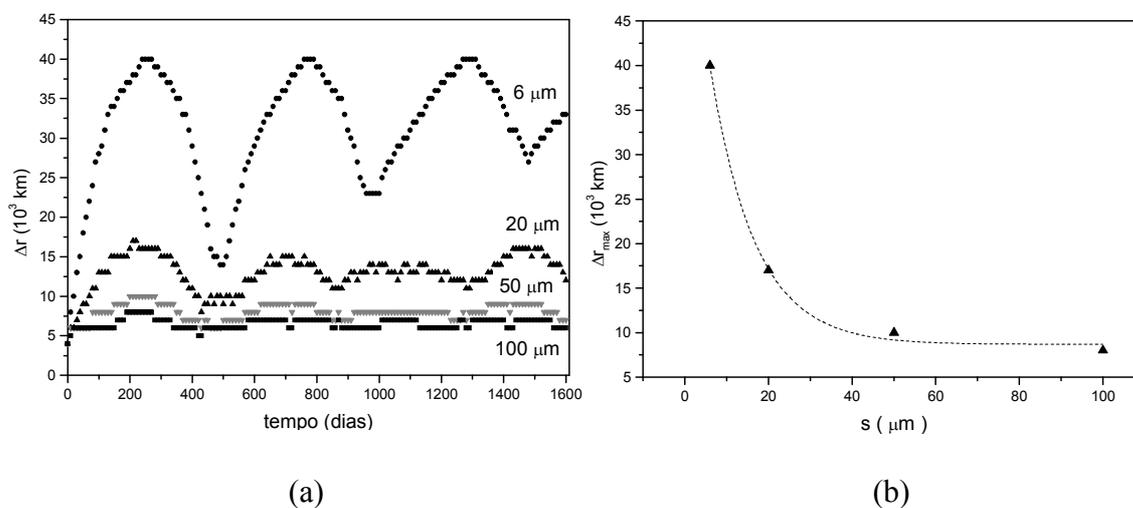


FIGURA 4.63 - a) Evolução da região de espalhamento para partículas de 6, 20, 50 e 100  $\mu\text{m}$  e b) Região máxima de espalhamento em função do tamanho de partículas.

#### 4.5.2.2 - Distribuição Azimutal

Neste item é apresentada a evolução temporal da densidade azimutal de partículas ( $\rho_\theta$ ) em função da longitude ( $\theta$ ) considerando os tamanhos de partículas de 6, 20, 50 e 100  $\mu\text{m}$ . Analogamente ao que foi feito para o caso de órbita alta, o ajuste de curva obedece a uma distribuição gaussiana para o período de 200 dias, considerando partículas de 6  $\mu\text{m}$ , 310 dias para 20  $\mu\text{m}$ , 360 dias para 50  $\mu\text{m}$  e 650 dias para 100  $\mu\text{m}$ . Na Figura 4.64 é mostrado o comportamento dos parâmetros  $A, B, \tilde{\theta}$  e  $\rho_{\theta_0}$  até o período de 200 dias. Os valores destes parâmetros válidos para o período de 200 dias são dados na Tabela 4.3. Uma abordagem mais completa, contendo todos os ajustes considerados, está representada no CD anexo a este trabalho.

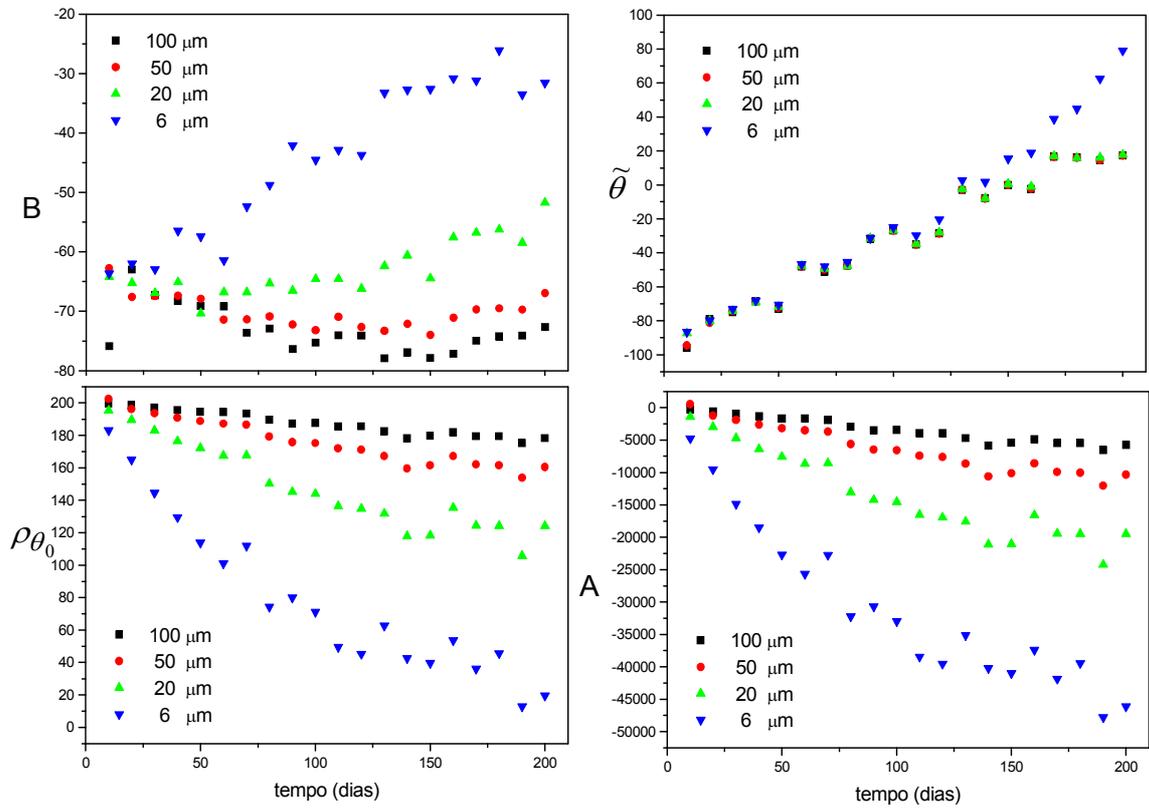


FIGURA 4.64 - Comportamento dos parâmetros  $A, B, \tilde{\theta}$  e  $\rho_{\theta_0}$  da distribuição gaussiana para o período de 200 dias.

TABELA 4.3 - Valores dos parâmetros do ajuste de curva para a densidade azimutal - órbita média.

Parâmetro	6 $\mu\text{m}$	20 $\mu\text{m}$
$\rho_{\theta_0}$	$4,1 \times 10^{-3} t^2 - 1,6t + 191,8$	$1,9 \times 10^{-3} t^2 - 8,2 \times 10^{-1} t + 206,5$
A	$1,0 t^2 - 408,2t - 2,9 \times 10^3$	$4,9 \times 10^{-1} t^2 - 210,3 + 1,3 \times 10^3$
B	$-5,4 \times 10^{-4} t^2 + 3,2 \times 10^{-1} t - 70,3$	$6,9 \times 10^{-4} t^2 - 8,3 \times 10^{-2} t - 64,3$
$\tilde{\theta}$	$8,2 \times 10^{-1} t - 104,1$	$5,9 \times 10^{-1} t - 91,4$
Parâmetro	50 $\mu\text{m}$	100 $\mu\text{m}$
$\rho_{\theta_0}$	$7,1 \times 10^{-4} t^2 - 3,8t + 205,5$	$2,5 \times 10^{-4} t^2 - 1,8 \times 10^{-1} t + 202,4$
A	$1,9 \times 10^{-1} t^2 - 99,5t + 1,2 \times 10^3$	$6,7 \times 10^{-2} t^2 - 46,7t + 439,5$
B	$7,6 \times 10^{-4} t^2 - 1,8 \times 10^{-1} t - 62,3$	$4,7 \times 10^{-4} t^2 - 1,4 \times 10^{-1} t - 65,5$
$\tilde{\theta}$	$5,9 \times 10^{-1} t - 93,0$	$5,9 \times 10^{-1} t - 93,2$

#### 4.5.3 - Região Entre 10.000 e 20.000 km – Órbita Baixa

##### 4.5.3.1 - Distribuição Radial

Utilizando o procedimento análogo ao que foi feito nas Subseções 4.5.1 e 4.5.2, neste item é apresentada a evolução da densidade radial  $\rho_r$  para um anel de partículas de 100  $\mu\text{m}$  ao redor da Terra para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias. Na Figura 4.65, observa-se que não ocorrem picos na densidade radial, ou seja, a região de espalhamento é praticamente semelhante à inicial. Isto evidencia que a perturbação da pressão de radiação é menos significativa que o achatamento nesta região, uma vez que é a pressão de radiação a responsável pela mudança na excentricidade da partícula. Contudo, observando todo o período de integração, existe

um único pico na densidade radial máxima para aproximadamente 500 dias. Esta densidade máxima é 1,5 da densidade inicial.

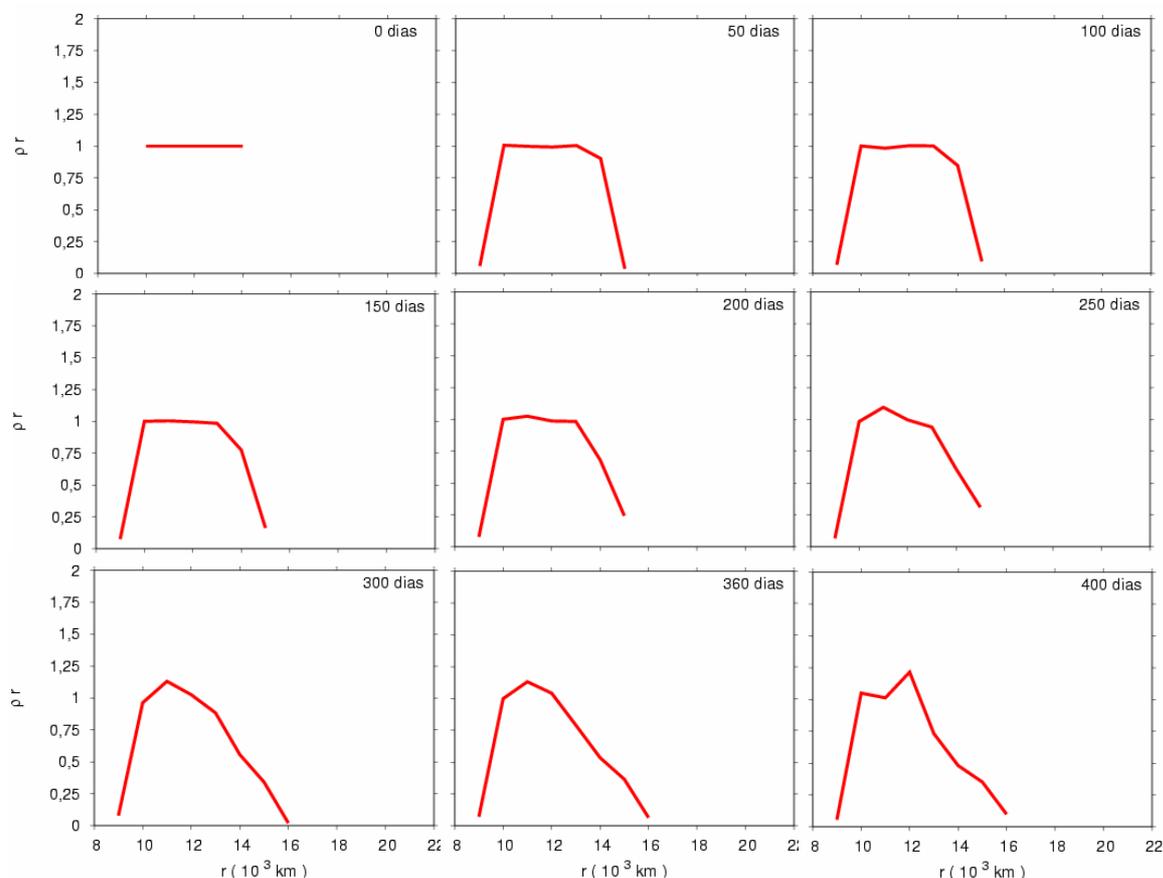


FIGURA 4.65 - Distribuição temporal da densidade radial, da região de órbita baixa ao redor da Terra de um anel de partículas de  $100 \mu\text{m}$ , para os instantes inicial, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 360 e 400 dias.

#### 4.5.3.2 - Distribuição Azimutal

Neste item é apresentada a evolução temporal da densidade azimutal de partículas ( $\rho_\theta$ ) em função da longitude ( $\theta$ ), considerando o tamanho de partícula de  $100 \mu\text{m}$ . Analogamente ao que foi feito para nos itens 4.5.1.2 e 4.5.2.2, o ajuste de curva obedece a uma distribuição gaussiana para o período de 200 dias e os valores médios dos parâmetros em função do tempo são:

$$\bar{\rho}_{\theta_0}(t) = 1,5 \times 10^{-3} t^2 - 2,7 \times 10^{-1} t + 204,0,$$

$$\bar{B}(t) = 66,7 - \left(930,7 / 42,5 \sqrt{\pi}\right) e^{-((t-71,6)^2 / (42,2)^2)},$$

$$\bar{A}(t) = 3,8 \times 10^{-1} t^2 - 6,9,8t + 878,5 \text{ e } \bar{\tilde{\theta}}(t) = 1,3t - 93,9.$$

Estes parâmetros apresentam um ajuste de curva até o período de 130 dias. Na Figura 4.66 é apresentado o comportamento dos parâmetros da distribuição gaussiana,  $A, B, \tilde{\theta}$  e  $\rho_{\theta_0}$ , para o período de 200 dias (quadrados) e o ajuste de curva até o período de 130 dias (linha tracejada).

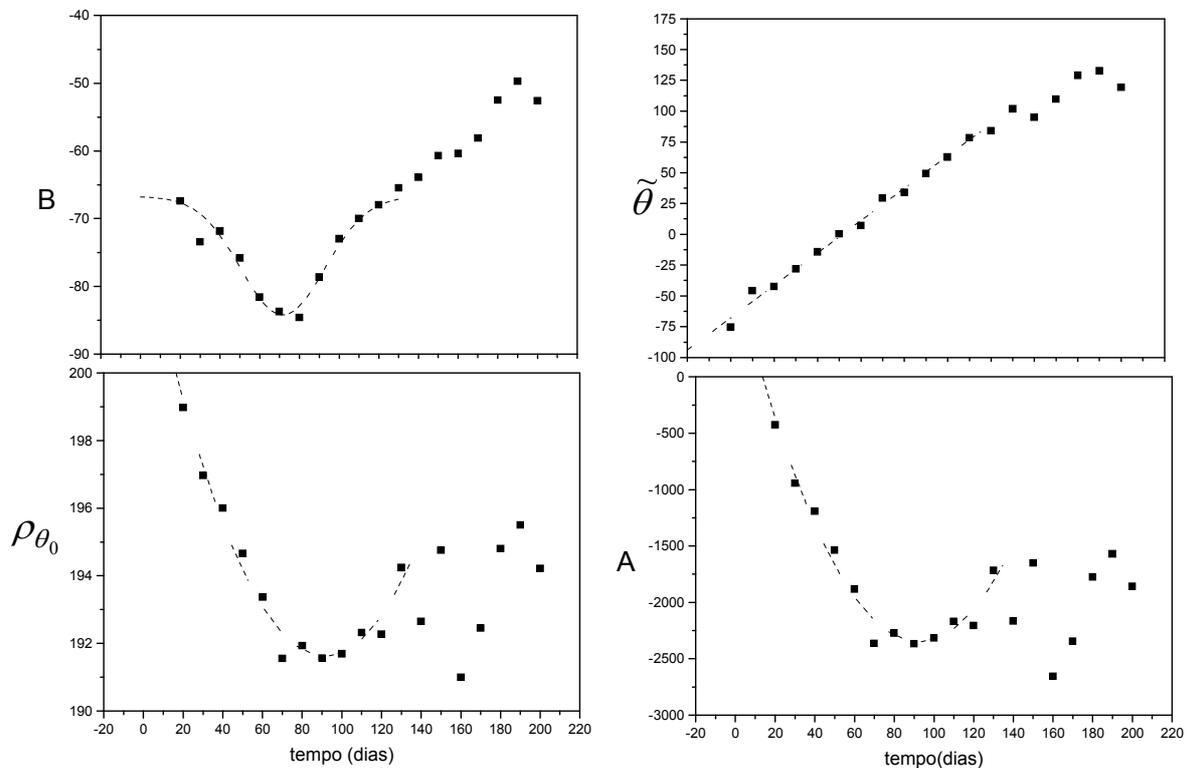


FIGURA 4.66 - Comportamento dos parâmetros  $A, B, \tilde{\theta}$  e  $\rho_{\theta_0}$  da distribuição gaussiana para o período de 200 dias (quadrados). Observa-se que os parâmetros apresentam um ajuste de curva até o instante de 130 dias (linha tracejada).

## **4.6 - Evolução da Densidade de um Anel de Pequenas Partículas Sujeitoas Perturbações Luni-Solares, Geopotencial e Pressão de Radiação Solar**

Nesta Seção é apresentada a evolução da densidade de um anel de pequenas partículas na região de órbita média ao redor da Terra sujeito às perturbações luni-solares, pressão de radiação solar e geopotencial incluindo os coeficientes, primeiramente, zonal  $J_2$  e, na seqüência, o tesseral  $J_{22}$ . O método adotado para a obtenção dos resultados é análogo ao que foi feito na Seção 4.5.

### **4.6.1 - Densidade de Partículas**

Nas Figuras 4.67 , 4.68 e 4.69 são apresentadas a evolução da densidade de um anel de partículas, em órbita média ao redor da Terra, para os instantes 50, 100, 150, 200, 250, 300 e 360 dias. Nestas figuras são mostradas as comparações entre a evolução da densidade considerando as perturbações luni-solares, o achatamento terrestre e a pressão de radiação solar (Figuras 4.67a, 4.67c, 4.68a, 4.68c, 4.69a, 4.69c e 4.69e), e, considerando somente as perturbações do achatamento e da pressão de radiação solar (Figuras 4.67b, 4.67d, 4.68b, 4.68d, 4.69b, 4.69d e 4.69f.).

Observa-se que o comportamento da densidade de partículas considerando as perturbações do Sol, da Lua, do achatamento e da pressão de radiação solar é análogo ao caso apresentado no Item 4.5, ou seja, a evolução da densidade em função de  $(r)$  e  $(\theta)$  apresenta um comportamento semelhante ao comportamento ondulatório.

Nota-se ainda que a densidade apresenta uma pequena diferença na distribuição das partículas, mas que para a análise da densidade de partículas de um anel não altera como um todo o resultado.

Na Figura 4.70 é apresentada a evolução da densidade de um anel de partículas, em órbita média ao redor da Terra, para o instante 100 dias adicionando o coeficiente  $J_{22}$  no potencial terrestre às demais perturbações.

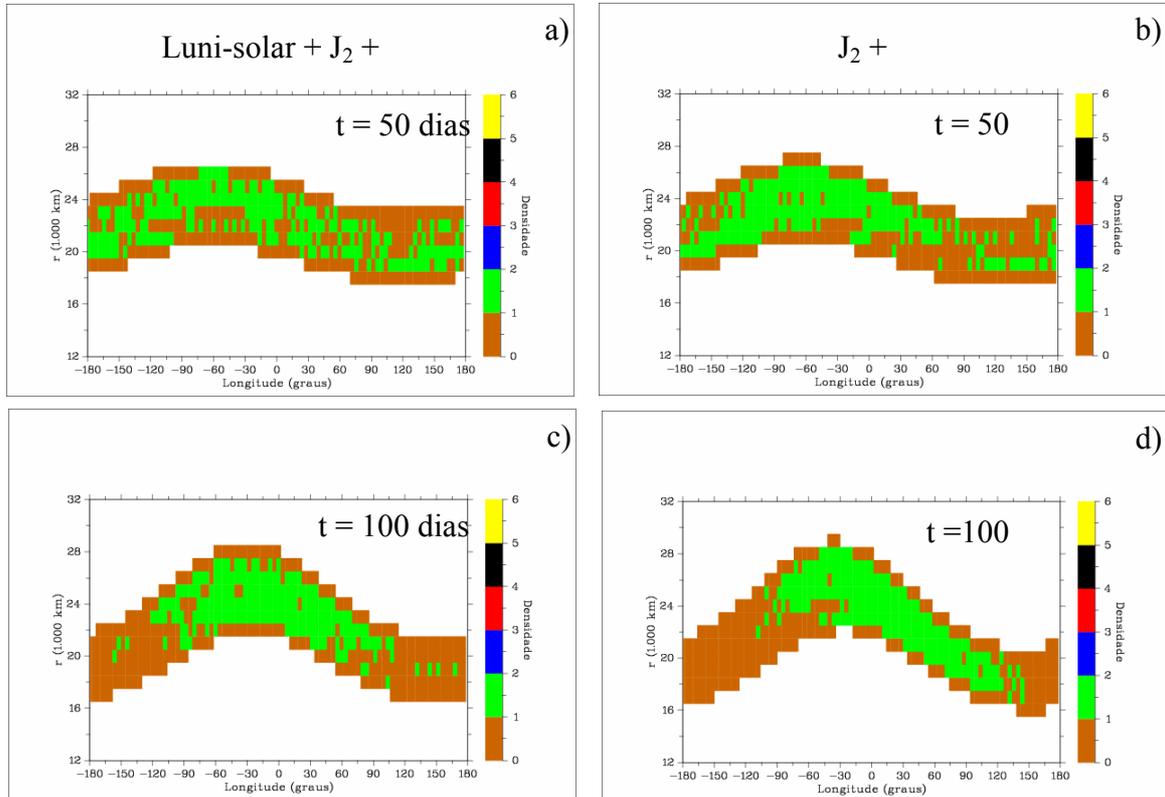


FIGURA 4.67 - Comparação da evolução da densidade em função do raio orbital ( $r$ ) e da longitude ( $\theta$ ) de um anel de partículas na região de órbita média para os instantes de 50 e 100 dias.

Nas Figuras 4.70 e 4.67c nota-se que a contribuição do efeito do coeficiente  $J_{22}$  não foi significativa à evolução da densidade de um anel de partículas. Em Vilhena de Moraes et al. (1995) e Silva Neto et al. (2005) foi apresentado que a variação do semi-eixo maior considerando esta contribuição para um satélite na região de GPS era da ordem de dezenas de quilômetros.

Nos resultados aqui apresentados observa-se, sendo a escala utilizada de milhares de quilômetros, que a variação do semi-eixo maior devido ao coeficiente  $J_{22}$  não é relevante.

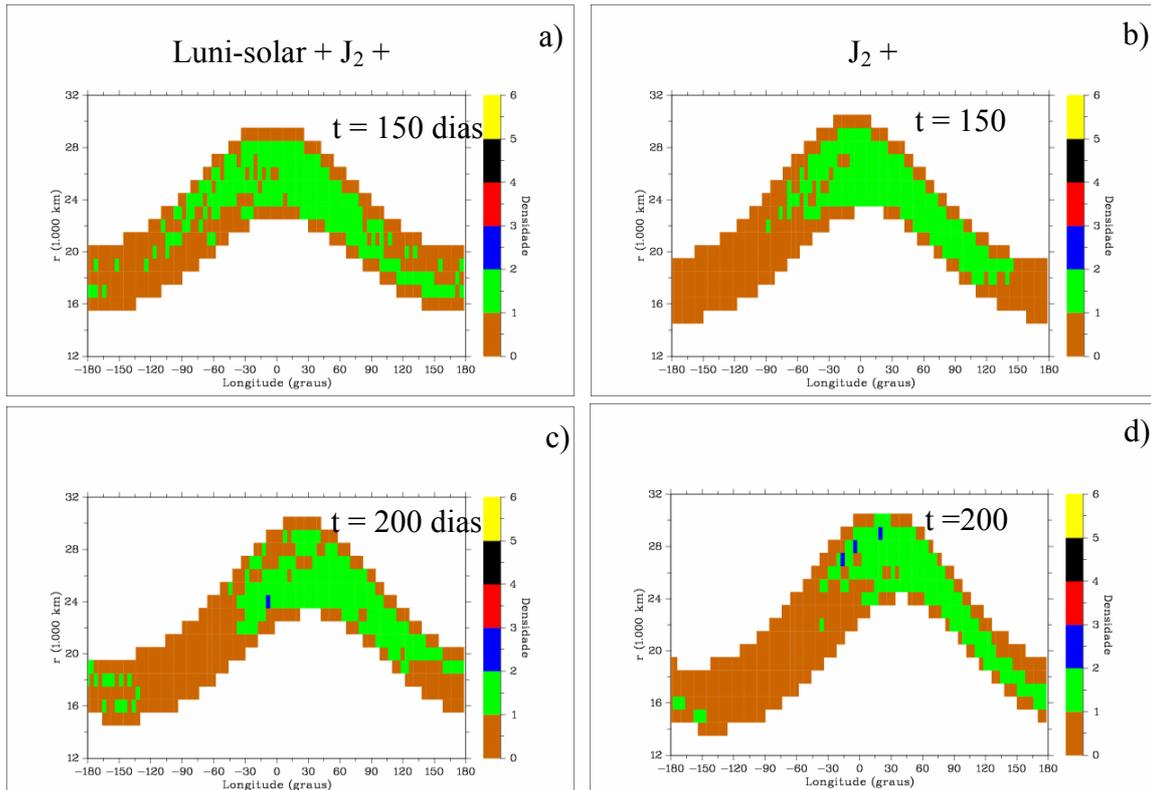


FIGURA 4.68 - Comparação da evolução da densidade em função do raio orbital ( $r$ ) e da longitude ( $\theta$ ) de um anel de partículas na região de órbita média para os instantes de 150 e 200 dias.

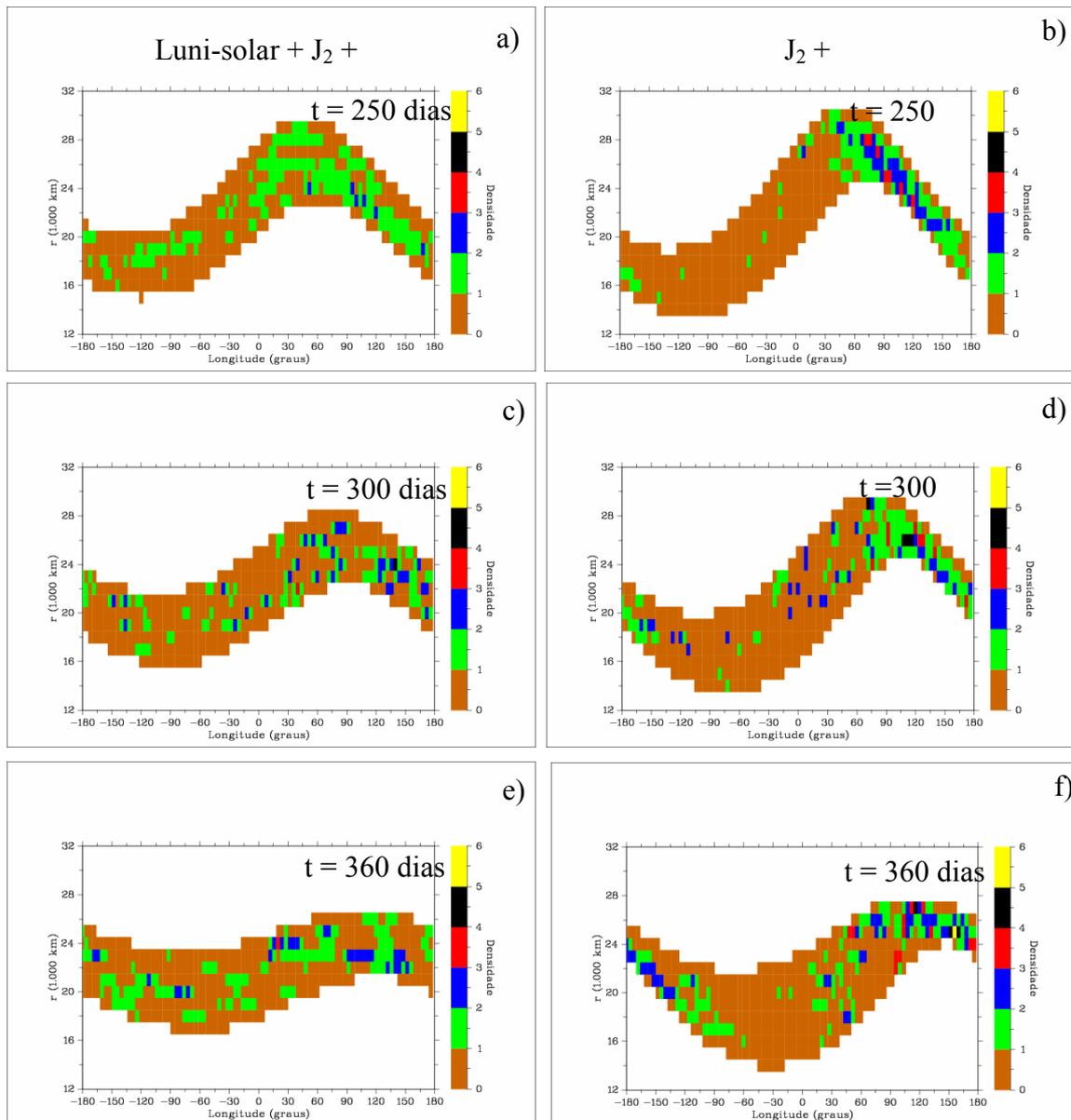


FIGURA 4.69 - Comparação da evolução da densidade em função do raio orbital ( $r$ ) e da longitude ( $\theta$ ) de um anel de partículas na região de órbita média para os instantes de 250, 300 e 360 dias.

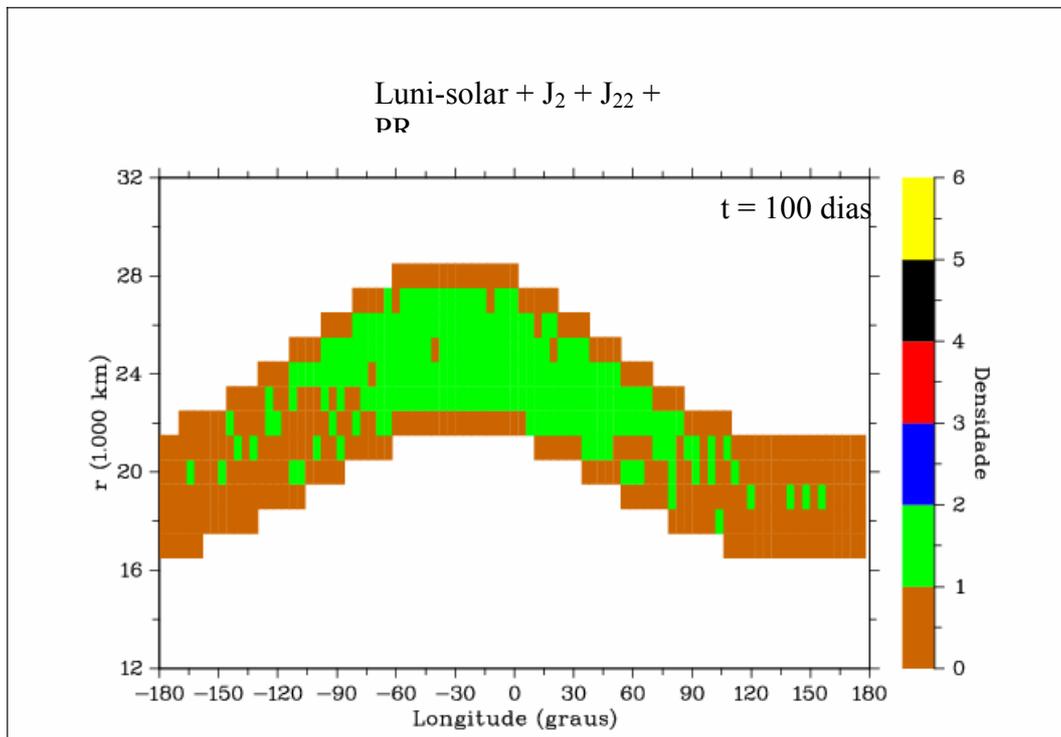


FIGURA 4.70 - Evolução da densidade em função do raio orbital ( $r$ ) e da longitude ( $\theta$ ) de um anel de partículas na região de órbita média para o instante 100 dias.

#### **4.7 - A Densidade da Evolução de uma Nuvem de Detritos Espaciais Provenientes de uma Explosão na Região de GPS.**

Nesta Seção é apresentada a evolução da densidade de uma nuvem de detritos espaciais provenientes da fragmentação ou explosão de um satélite de uma constelação de satélites na região de GPS. Os dados do satélite fonte são dados por  $a = 26.564 \text{ km}$ ,  $e = 0,01$  e  $i = 55^\circ$ . A nuvem de poeira gerada pela fragmentação deste satélite está sujeita as perturbações gravitacionais do Sol, da Terra, incluindo os coeficientes zonal  $J_2$  e tesseral  $J_{22}$ , e da Lua e da perturbação não gravitacional da pressão de radiação solar. Não existe interação entre as partículas. A nuvem de poeira é constituída de 28.041 partículas com tamanhos entre 10 e 1.000  $\mu\text{m}$  e densidade de  $3.000 \text{ kg/m}^3$ .

##### **4.7.1 - Modelo de Fragmentação e Distribuição Inicial das Partículas**

O modelo de fragmentação adotado apresenta uma distribuição isotrópica de campos de velocidades e uma distribuição aleatória de massas de maneira que as menores massas tenham maiores velocidades e vice-versa. O modelo de fragmentação para a distribuição das velocidades foi desenvolvido por Roig (2004), o qual segue o trabalho de Benz & Asphaug (1999), Petit & Farinella (1993) e Farinella et al. (1993). A distribuição de massas obedece uma função exponencial decrescente dada por  $NFrag = 3,98 \times 10^8 m^{-0.44}$ , em que  $NFrag$  é o número de fragmentos e  $m$ , a massa da partícula. Na Figura 4.71a é apresentada a distribuição do raio ( $s$ ) em função do número de partículas ( $Npart$ ). Observa-se que existem aproximadamente 20.000 partículas com raio inferior a 100 micrometros e 5.000 partículas com raio entre 100 e 300 micrometros, restando apenas 3.041 partículas para serem distribuídas entre 300 e 1.000 micrometros. As demais condições iniciais das partículas são apresentadas nas Figuras 4.71b, 4.71c e 4.71d. Na Figura 4.71b apresenta-se a distribuição da velocidade ( $V$ ) em função do raio da partícula. Note que as velocidade são distribuídas entre 3,902 e 3,912

$km/s$ . A variação da inclinação ( $i$ ) em função do raio de partícula é apresentada na Figura 4.71c. Observa-se que a maior variação da inclinação é dada para partículas menores. A variação máxima da nuvem é inferior a 0,1 grau. Na Figura 4.71d a distribuição radial ( $r$ ) em função do raio da partícula apresenta-se aproximadamente constante no valor de  $26.298,35 km$ . Partículas menores apresentam maiores variações no raio orbital da partícula.

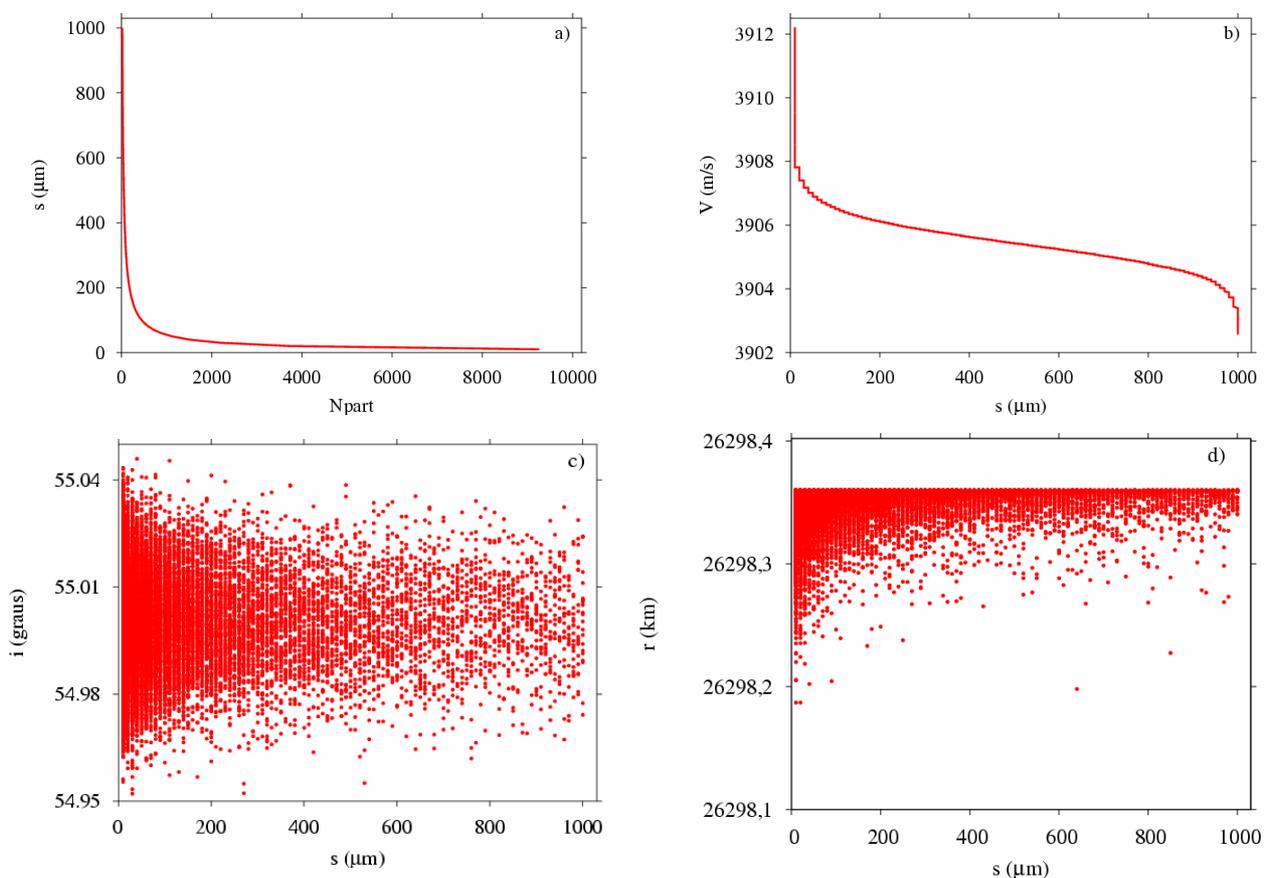


FIGURA 4.71 - Condições iniciais da nuvem de detritos espaciais proveniente da fragmentação de um satélite da constelação de GPS.

#### 4.7.2 – Distribuição Temporal de Partículas

Na Figura 4.72 é apresentada a evolução do raio orbital ( $r$ ) em função da longitude ( $\theta$ ) de nuvem de partículas provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para o instante de 130 dias. Observe que partículas menores que  $50 \mu\text{m}$  apresentam maiores variações em sua distribuição inicial. Este comportamento já havia sido observado para o caso de partículas isoladas sujeitas a força de pressão de radiação e do achatamento terrestre (Item 4.2.2). Note, ainda, que o comportamento desta evolução é análogo ao caso apresentado no Item 4.4, ou seja, a evolução de ( $r$ ) em função de ( $\theta$ ) apresenta um comportamento semelhante ao comportamento ondulatório.

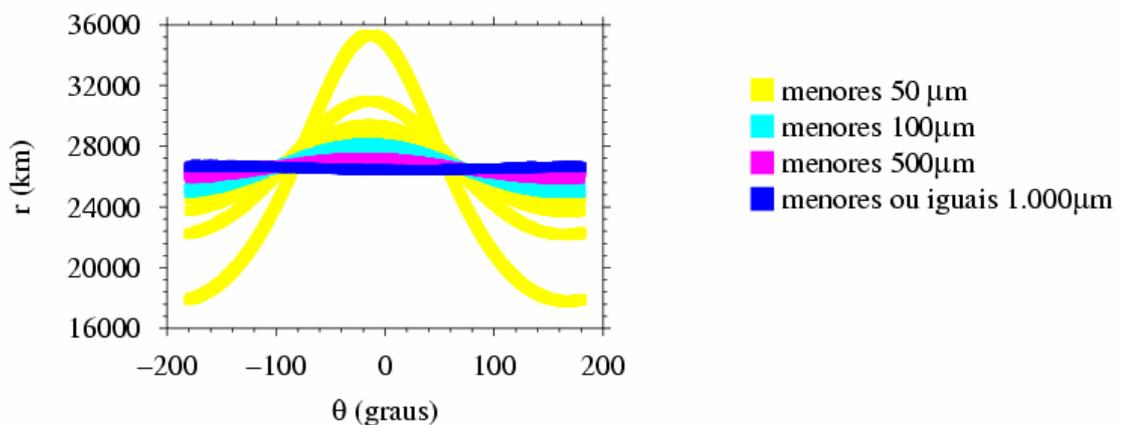


FIGURA 4.72 - Evolução do raio orbital ( $r$ ) em função da longitude ( $\theta$ ) de nuvem de partículas provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para o instante de 130 dias.

Nas Figuras 4.73 e 4.74 são apresentadas a quantidade de partículas de nuvem provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para os instantes 40, 80, 130, 180, 210, 260, 320 e 360 dias considerando partículas entre  $10$  e  $40 \mu\text{m}$ . Observe que o efeito produzido, considerando o caso em questão, parece provocar o mesmo

efeito quando comparado ao caso de um anel de partículas sujeito somente a perturbações do achatamento terrestre e da pressão de radiação (Item 4.5).

Na Figura 4.75 é apresentada a quantidade de partículas em função da distribuição da massa contida na caixa para o instante de 210 dias. Observe que a distribuição de massa por caixa mantém a mesma ordem de grandeza. Desta forma, a análise da densidade pode ser feita considerando apenas a contagem destas partículas por caixa.

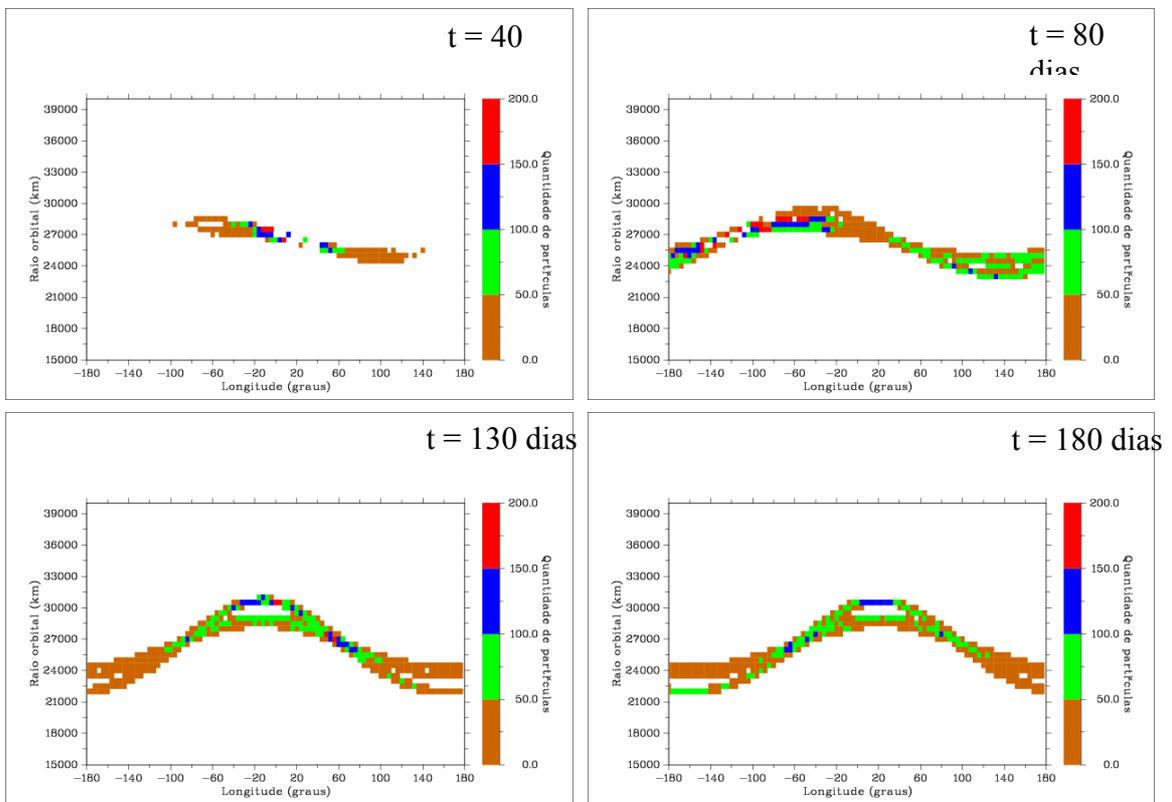


FIGURA 4.73 - Quantidade de partículas de uma nuvem provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para os instantes 40, 80, 130 e 180 dias.

Após estas análises de densidade a partir da quantidade de partículas e da distribuição de massa existente por caixa é possível concluir que o comportamento da densidade para uma nuvem de pequenas partículas provenientes de uma explosão de um satélite na região de GPS considerando as perturbações do Sol, da Lua, dos coeficientes  $J_2$  e  $J_{22}$  da Terra e a pressão de radiação solar é similar ao caso apresentado no Item 4.5.

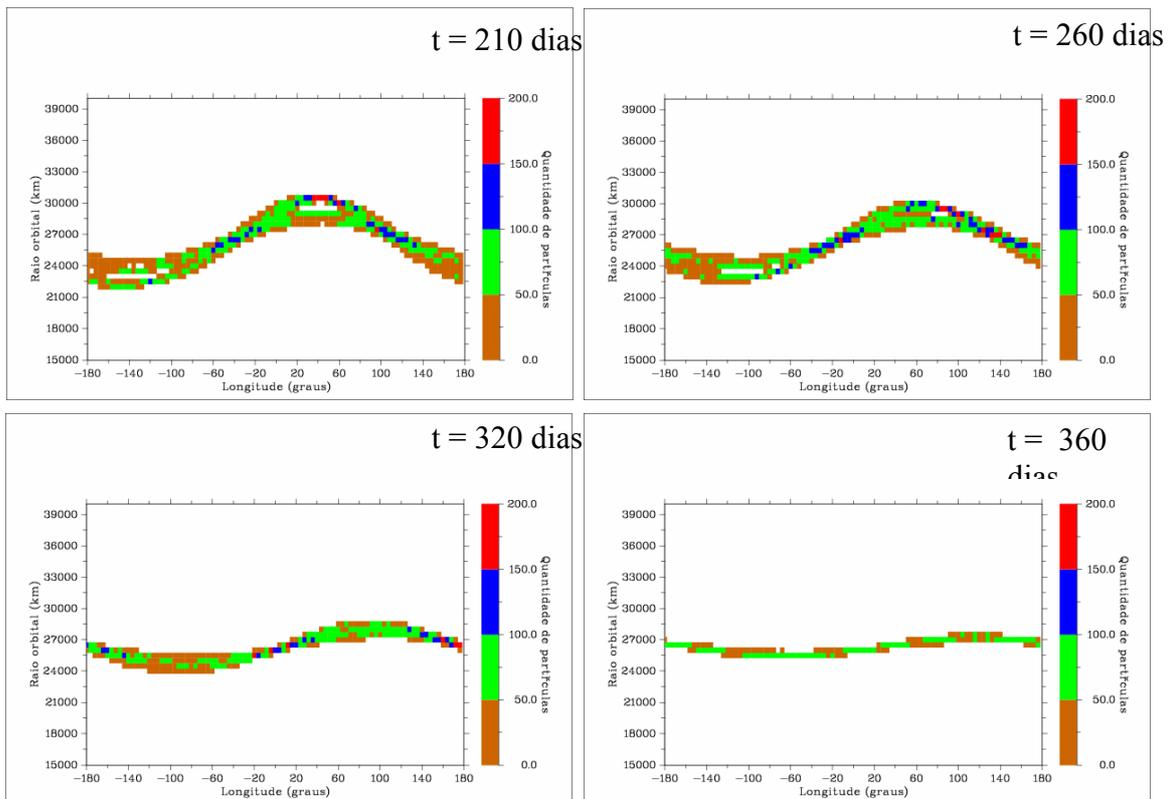


FIGURA 4.74 - Quantidade de partículas de uma nuvem de provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para os instantes 210, 260, 320 e 360 dias.

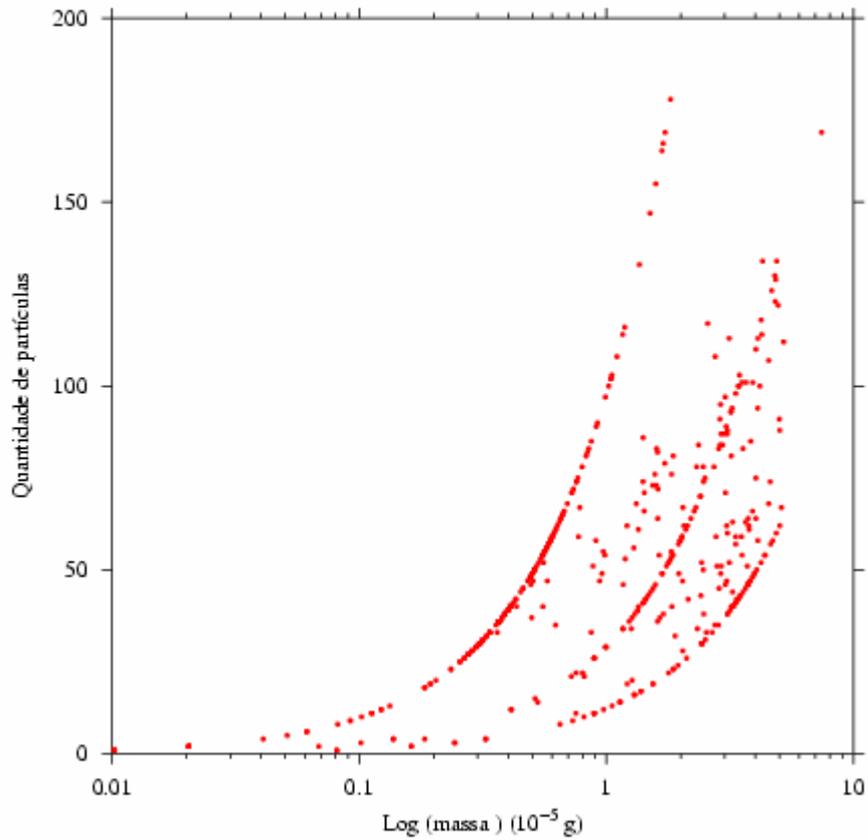


FIGURA 4.75 - Quantidade de partículas de uma nuvem provenientes de uma explosão de um satélite na região GPS para o instante de 210 dias em função da razão de massa distribuída por caixa .

## CAPÍTULO 5

### ESTUDO ANALÍTICO

Neste capítulo estudou-se analiticamente a mudança na concavidade apresentada no comportamento da excentricidade para o caso planetocêntrico, considerando as perturbações da pressão de radiação e do achatamento terrestre. Este estudo baseou-se nos trabalhos de Krivov et al. (1996) e Hamilton e Krivov (1996). Estes autores estudaram a esta mudança na concavidade no comportamento da excentricidade em função do tamanho da partícula para o caso das partículas ejetadas das luas de Marte. O objetivo deste capítulo é mostrar que uma partícula ao redor da Terra apresenta mudança no comportamento da excentricidade dependente do tamanho da partícula e, também, da região orbital onde esta partícula se encontra. Para tanto, primeiramente, foi obtida a função perturbadora em termos dos elementos não singulares e, em seguida, apresenta-se o hamiltoniano do sistema.

#### 5.1- Perturbação da Pressão de Radiação e do Achatamento Terrestre

A função perturbadora para uma partícula sujeita as perturbações da pressão de radiação solar e do achatamento considerando  $i = \varepsilon = \Omega = 0$  é dada pela Equação (3.76) como sendo

$$\langle \mathfrak{R} \rangle = \frac{3}{2} \sigma n^2 a^2 e [\cos \lambda_{Sol} \cos \omega + \sin \lambda_{Sol} \sin \omega] + \frac{1}{2} n^2 a^2 J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (5.1)$$

Considerando os seguintes elementos não singulares

$$\begin{aligned}
\bar{h} &= e \cos \omega \\
\bar{k} &= e \sin \omega \\
\bar{h}^2 + \bar{k}^2 &= e^2
\end{aligned} \tag{5.2}$$

a função perturbadora é modificada para

$$\langle \mathfrak{R} \rangle = \frac{3}{2} \sigma \frac{\mu e}{a} [\bar{h} \cos \lambda_{Sol} + \bar{k} \sin \lambda_{Sol}] + \frac{1}{2} n^2 a^2 J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \frac{1}{(1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2)^{3/2}} \tag{5.3}$$

Como  $\bar{h}$  e  $\bar{k}$  são funções de duas variáveis, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{h}}{dt} &= \frac{\partial \bar{h}}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt} \\
\frac{d\bar{k}}{dt} &= \frac{\partial \bar{k}}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial \bar{k}}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dt}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Com isso, a equação do movimento em função da longitude do Sol é

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{h}}{d\lambda_{Sol}} &= -\frac{3}{2} \frac{n}{n_{Sol}} \left[ \frac{\bar{k}}{(1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2)} J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 + \sigma \sqrt{1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2} \sin \lambda_{Sol} \right] \\
\frac{d\bar{k}}{d\lambda_{Sol}} &= \frac{3}{2} \frac{n}{n_{Sol}} \left[ \frac{\bar{h}}{(1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2)} J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 + \sigma \sqrt{1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2} \cos \lambda_{Sol} \right]
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Escrevendo a Equação (5.5) nas variáveis  $e$  (excentricidade) e  $\alpha = \omega - \lambda_{Sol}$  (ângulo entre a direção do Sol e a direção do pericentro da partícula, Figura 5.1), obtêm-se o sistema (Krivov et al., 1996)

$$\frac{de}{d\lambda_{Sol}} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha}, \quad \frac{d\alpha}{d\lambda_{Sol}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial \bar{H}}{\partial e} \tag{5.6}$$

com o hamiltoniano

$$\bar{H}(e, \alpha) = \frac{\bar{w}}{3} (1 - e^2)^{-3/2} + \sqrt{1 - e^2} + C e \cos \alpha \quad (5.7)$$

em que

$$C = \frac{3n}{2n_{Sol}} \sigma \quad (5.8)$$

$$\bar{w} = \frac{3n}{2n_{Sol}} J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2$$

ou ainda,

$$\bar{H}(x, y) = \frac{\bar{w}}{3} (1 - x^2 - y^2)^{-3/2} + \sqrt{1 - x^2 - y^2} + C x \quad (5.9)$$

sendo

$$\begin{aligned} x &= e \cos \alpha \\ y &= e \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.10)$$

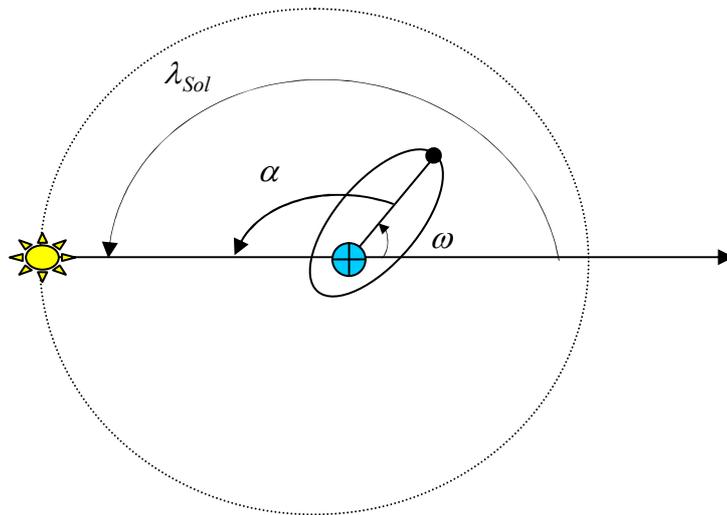


FIGURA 5.1. Ilustração do ângulo entre a direção do Sol e a direção do pericentro da partícula.

Na Figura 5.2 é apresentado o comportamento deste hamiltoniano, para uma partícula de  $20\mu\text{m}$ , sujeita à perturbação da pressão de radiação e do achatamento terrestre.

Comparando os resultados numérico e analítico, observa-se que existe um peculiar comportamento da excentricidade em função da região orbital. A excentricidade apresenta dois tipos de comportamentos. Analiticamente, nota-se uma bifurcação da solução para raio orbital próximo de  $14.900\text{ km}$ . Isto explica os resultados das simulações numéricas em que, para regiões orbitais entre  $44.000\text{ km}$  e  $14.900\text{ km}$ , a variação da amplitude da excentricidade é crescente enquanto para regiões orbitais abaixo de  $14.900\text{ km}$ , a variação da amplitude da excentricidade é decrescente.

Analiticamente, para a região orbital de superior a  $14.900\text{ km}$ , tem-se um comportamento de circulação e após esta região o comportamento do sistema é de libração. Com isso, o comportamento apresentado pelos resultados das simulações numéricas está coerente com os apresentados analiticamente, ou seja, existe a mudança na concavidade no comportamento da excentricidade em função do raio orbital em que a partícula se encontra.

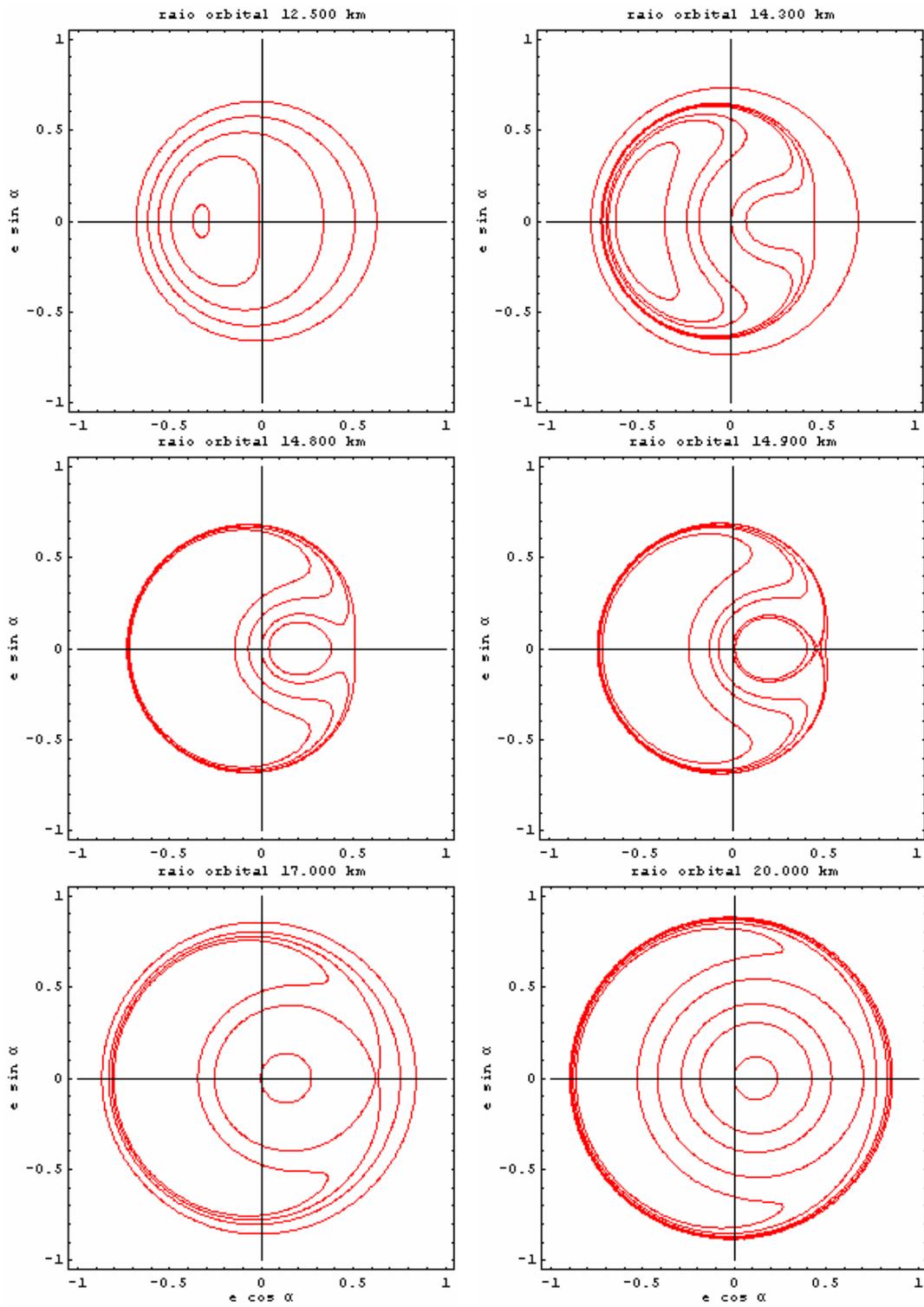


FIGURA 5.2 - Espaço de fase obtido do hamiltoniano (Equação (5.7)) para uma partícula de 20  $\mu\text{m}$  sujeita à pressão de radiação e ao achatamento terrestre.

Como foi mostrado no Capítulo 3, Seção 3.4, somente a perturbação da pressão de radiação provoca variação na excentricidade. Contudo, os resultados das simulações numéricas mostram que o efeito combinado destas perturbações provoca uma diferença no comportamento da excentricidade quando comparada somente ao efeito da pressão de radiação. Uma possível explicação para este comportamento é que o achatamento provoca uma variação na velocidade da partícula e como a pressão de radiação depende desta velocidade isto pode produzir um comportamento diferente na intensidade da perturbação da pressão de radiação. Além disso, segundo Greenberg (1981), o achatamento não provoca variação nos elementos osculadores excentricidade e semi eixo maior da partícula; porém, na órbita real da partícula, existe uma variação.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 6.1 - Conclusões

O foco deste trabalho foi o estudo da dinâmica de pequenas partículas ao redor da Terra sujeitas a diversas perturbações. As discussões dos resultados considerados relevantes são descritas abaixo.

O arrasto de Poynting-Robertson pode definir estruturas na evolução orbital de uma nuvem de partículas considerando uma escala de tempo grande (centenas de anos). A comparação entre os resultados numérico e analítico mostra que apresentam valores próximos para tamanhos de partículas na faixa de 1,0 a 10,0  $\mu\text{m}$ , divergindo para outros tamanhos de partículas devido à limitação da escolha do valor do parâmetro  $\beta$ .

A pressão de radiação solar considerando as regiões baixa, média e alta e partículas de raio menor ou igual a 5,0  $\mu\text{m}$  pode ser considerada um mecanismo natural de remoção pois provoca, em poucos dias, a entrada destas partículas na região onde a perturbação predominante é o arrasto atmosférico. Considerando partículas cruzando a órbita de outros objetos espaciais tem-se que partículas menores apresentam maiores valores de velocidades relativas e partículas maiores apresentam maiores valores de momento linear.

O efeito combinado da pressão de radiação solar e do achatamento terrestre produz a mudança na concavidade da evolução temporal da excentricidade em função do tamanho e da região orbital da partícula considerando os resultados numéricos e analíticos devido ao um efeito ressonante.

A evolução de uma nuvem constituída de 1.000 partículas de mesmo tamanho apresenta-se em grupos. Este comportamento é consequência da 3ª lei de Kepler (“Keplerian Shear”). Considerando uma nuvem constituída por partículas de tamanhos diferentes, ocorre um efeito de estratificação, ou seja, estas partículas podem ocupar um espaço físico maior.

O anel de partículas na região entre 40.000 e 45.000 km (órbita alta) apresenta uma periodicidade de aproximadamente 360 dias. Para as demais regiões, entre 20.000 e 25.000 km (órbita média) e entre 10.000 e 15.000 km (órbita baixa), não existe esta periodicidade com um período bem definido. Este comportamento pode estar relacionado ao efeito do achatamento terrestre pois esta perturbação provoca uma variação na velocidade da partícula e, por consequência, intensifica a perturbação da pressão de radiação.

A densidade radial máxima destes anéis ocorre próxima ao valor médio da faixa do raio orbital inicial das partículas. A densidade radial máxima se mantém igual ou inferior à densidade radial inicial exceto nos dois primeiros períodos de 360 dias para o caso de partículas de 6  $\mu\text{m}$  e região alta.

A densidade azimutal apresenta uma distribuição gaussiana para o período de 1600 dias, considerando o tamanho de partículas de 6  $\mu\text{m}$  e região de órbita alta. Para os demais tamanhos de partículas esta distribuição apresenta-se para o período de aproximadamente 200 dias.

No caso da região média, a densidade azimutal apresenta uma distribuição gaussiana para períodos que aumentam conforme o tamanho de partícula aumenta. Por exemplo, partículas de 6  $\mu\text{m}$  apresentam tal comportamento para um período de 200 dias enquanto que partículas de 100  $\mu\text{m}$ , para um período de aproximadamente 500 dias.

Para a região de órbita baixa, a densidade azimutal apresenta uma distribuição gaussiana para um período de 200 dias, considerando um tamanho de partícula de 100  $\mu\text{m}$ .

A densidade de um anel de partículas sujeito às perturbações do Sol, da Lua, da pressão de radiação solar e da não esfericidade da Terra, representada pelos coeficientes  $J_2$  e  $J_{22}$  do potencial, não apresenta diferenças relevantes na região de GPS quando comparada a densidade de um anel considerando somente as perturbações do achatamento terrestre e da pressão de radiação solar.

A densidade de uma nuvem de partículas provenientes da explosão de um satélite na região de GPS sujeita às perturbações do Sol, da Lua, da pressão de radiação solar e da não esfericidade da Terra representada pelos coeficientes  $J_2$  e  $J_{22}$  do potencial apresenta características similares ao caso de um anel de partículas sujeito apenas às perturbações da pressão de radiação solar e do achatamento terrestre.

## **6.2 - Sugestões Futuras**

Algumas sugestões para futuras extensões deste trabalho, dentre outras, são apresentadas à seguir:

- a) Acrescentar outras perturbações que podem afetar esta nuvem em função da altitude que ainda não foram incluídas e
  
- b) O estudo analítico acrescentando às perturbações do Sol e da Lua.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ananthasayanam, M.R.; Anilkumar, A.K.; Subba Rao, P.V. A new stochastic impressionistic low Earth (SIMPLE) engineering model of the space debris scenario. In: Committee on Space Research - COSPAR, 34., Houston, TX, USA, 2002. **Proceedings...**, USA, 2002. 1 CD-ROM.

Anz-Meador, P. Validation of the NASA explosion fragmentation model to 1mm characteristic sizes. In: Committee on Space Research - COSPAR, 34., Houston, TX, USA, 2002. **Proceedings...** USA, 2002. 1 CD-ROM.

Anz-Meador, P.; Liou, J.C.; Johnson, N.L. History of on-orbit satellite fragmentations **Johnson Space Center - JSC 29517**. Washington: NASA, 2001.

Anz-Meador, P.; Krisko, P.; Matney, M. GEO\_EVOLVE 1.0: A long-term debris evolution model for the geosynchronous belt. **Orbital Debris Quarterly News**, v. 5, n. 4, 2000.

Ashenberg, J. On the short-term spread of space debris. In: Colloquium on the Law of Outer Space - American Institute of Aeronautics and Astronautics - AIAA, 35., Washington, 1992. **Proceedings...** Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics; International Institute of Space Law of the International Astronautical Federation, 1992. v. 4441, p. 157-164.

Ashenberg, J.; Broucke, R. The effects of general atmospheric perturbations on small debris particle orbits. In: Colloquium on the Law of Outer Space - American Institute of Aeronautics and Astronautics - AIAA, 35., Washington, 1992. **Proceedings...** Washington, Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics;

International Institute of Space Law of the International Astronautical Federation, 1992.  
v. 4362, p. 14-20.

Bendisch, J.; Bunte, K.D.; Klinkrad, H.; Krag, H.; Martin, C.; Sdunnus, H.; Walker, R.;  
Wegener, P.; Wiedemann, C. The master-2001 model. In: Committee on Space  
Research – COSPAR, 34., Houston, TX, USA, 2002. **Proceedings...** USA, 2002. 1 CD-  
ROM.

Bendisch, J.; H. Klinkrad; H. Krag; D. Rex; P. Wegener; Wiedemann, C. Object flux  
characteristics due to various types of debris sources. In: International Astronautical  
Congress - IAA, 51., Rio de Janeiro, Brazil, 2000. **Proceedings...** [S.l.]: International  
Astronautical Federation, 2000.

Benz, W.; Asphaug, E. Catastrophic disruptions revisited. **Icarus**, v. 142, p. 5-20,  
1999.

Berthoud, L.; Mandeville, J.C. Low-Earth-orbit micrometeoroid and debris  
investigations. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 34, n.1, p. 125-132, 1997.

Blagun, V.P.; Kulik, S.V.; Lukyashchenko, V.I. Russian Space Agency activities on the  
problem of technogenic space debris. **Advances in Space Research**, v. 23, n. 1, p. 271-  
274, 1999.

Brown, P.; Cooke, B. Model predictions for the 2001 Leonids and implications for  
Earth-orbiting satellites. **Monthly Notices Royal Astronomical Society**, v. 326, p.  
L19-L22, 2001.

Bunte, K.D.; Sdunnus, H.; Wegener, P. Application of the Divine approach to determine flux and spatial density resulting from space debris. In: International Astronautical Congress - IAA, 51., Rio de Janeiro, Brazil, 2000. **Proceedings...** [S.l.]: International Astronautical Federation, 2000.

Burns, J.A.; Lamy, P.L.; Soter, S. Radiation forces on small particles in the Solar System. **Icarus**, v. 40, p. 1- 48, 1979.

Canup, R.M.; Colwell, J.E.; Horanyi, M. Size distributions of satellite dust ejecta: effects of radiation pressure and planetary oblateness. **Icarus**, v. 105, p. 363-369, 1993.

CETS - Commission on Engineering and Technical Systems. **Orbital Debris: A Technical Assessment**. [S.l.]: Openbook, National Academy Press, 1995.

Christiansen, E.L.; Hyde, J.L.; Bernhard, R.P. Space shuttle debris and meteoroid impacts. **Advances in Space Research**, in press, 2004.

Delhaise, F.; Henrard, J. The problem of critical inclination combined with a resonance in mean motion in artificial satellite theory. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 56, p. 285-286, 1993.

Delhaise, F.; Morbidelli, A. Luni-solar effects of geosynchronous orbits at the critical inclinations. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 57, p. 155-173, 1993.

Dikarev, V.V.; Krivov, A.V. Dynamics and spatial distributions of particles in Saturn's E ring. **Solar System Research**, v. 32, n. 2, p. 128-143, 1998.

Dikarev, V.; Krivov, A. Circumplanetary dust grains: from birth to death. 2000.  
Disponível em: <http://www.astro.spbu.ru/staff/dikarev/valery/ering.html>. Acesso em: 13 maio 2003.

Divine, N. Five populations of interplanetary meteoroids. **Journal of Geophysical Research**, v. 98, n.E9, p. 17029 – 17048, 1993.

Duha, J. **Modelagem dos efeitos de re-emissão térmica em satélites artificiais**, 2000. 144p. Tese (Doutorado em Ciências Geodésias) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.

Du Toit, D.N.J.; Du Plessis, J.J.; Steyn, W.H. Using atmospheric drag for constellation control of low Earth . In: Conference on Small Satellites - American Institute of Aeronautics and Astronautics – AIAA/USU, 10., Logan, UT, USA, 1992. **Proceedings...** [S.l.]: AIAA, 1996. p. 1-13.

ESA – **European Space Agency Space Debris Activities at ESOC** , 1999.

Everhart, E. An efficient integrator that uses gauss radau spacings. In: Carusi, V. (ed). **Dynamics of comets: their origin and evolution**. Rome, Italy: D. Reidel Publishing Company, 1985. p. 185-202.

Flury, W.; Massart, A.; Schildknecht, T.; Hugentobler, U.; Kuusela, J.; Sodnik, Z. Searching for small debris in the geostationary ring. **ESA Bulletin**, v.104, 2000.

Flury, W.; Janin, G.; Jehn, R.; Klinkrad, H. Space debris in elliptical orbits. In: International Symposium on Space Technology and Science, 18., 1992, Kagoshima, Japan. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1992. p. 2353-2361.

Graps, A.L.; Green, S.F.; McBride, N.M., McDonnell, J.A.M.; Drolshagen, G.; Svedhen, H.; Bunte, K.D. GEO debris and interplanetary dust: fluxes and charging behavior. In: Committee on Space Research – COSPAR, 35., Paris, France, 2004. **Proceedings...** France, 2004. 1 CD-ROM.

Green, S.F.; Deshpande, S.P.; Mackay, N.G. A 3-D Numerical model for space debris and interplanetary dust fluxes incident on LDEF. **Advances in Space Research**. v. 13, n.8, p. 107-110, 1993.

Green, S.F.; McDonnell, J.A.M. A numerical model for characterization of the orbital debris environment. In: McDonnell, J.A.M. (ed). **Hypervelocity impacts in space**. University of Kent at Canterbury, 1992. p. 251-256.

Greenberg, R. Apsidal precession of orbits about an oblate planet. **The Astronomical Journal**, 86, n. 6, p. 912-914, 1981.

Grigoriev, K. Method for experimental observations of space debris connected with fragmentation in the geostationary ring. In: Committee on Space Research – COSPAR, 35., Paris, France, 2004. **Proceedings...** France, 2004. 1 CD-ROM.

Grün, E.; Zook, H.A.; Fechtig, H.; Giese, H. Collisional Balance of the Meteoritic Complex. **Icarus**, v.62, p. 244-272, 1985.

Grün, E.; Staubach, P.; Baguhl, M.; Hamilton, D.P.; Zook, H.A.; Dermott, S.; Fechtig, H.; Gustafson, B.A.; Hanner, M.S.; Horanyi, M.; Kissel, J.; Lindblad, B.A.; Linkert, D.; Linkert, G.; Mann, I.; McDonnell, J.A.M.; Morfill, G.E.; Polanskey, C.; Schwehm, G.; Srama, R. South-north and radial traverses through the interplanetary dust cloud. **Journal Exozodiacal Dust Workshop**, p. 270, 1997.

Halliday, D.; Resnick, R. **Fundamentos de física 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1991.

Hamilton, D.P.; Krivov, A.V. Circumplanetary dust dynamics: effects of solar gravity, radiation pressure, planetary oblateness and electromagnetic. **Icarus**, v. 123, p. 503-523, 1996.

Hamilton, D.P.; Grun, E.; Baguhl, M. electromagnetic escape of dust from the solar system. **Chemistry Physics and Dynamics of Interplanetary Dust**. APS Conference Series. v. 104, p. 31-34, 1996.

Hamilton, D.P. Motion of dust in a planetary magnetosphere: orbit-averaged equations for oblateness, electromagnetic and radiation force with application to Saturn's e ring. **Icarus**, v. 101, p. 244-264, 1993.

Hamilton, D.P.; Burns, J.A. Orbital stability zones about asteroids – II. The destabilizing effects of eccentric orbits and of solar radiation. **Icarus**, v. 96, p. 43-64, 1992.

Howard, J.E.; Krivov, A.V.; Spahn, F. Transverse halo orbits about Mars?. **Geophysical Research Letters**, v. 30, n.13, p.1680, 2003.

Il'in, V.B; Voshchinnikov, N.V. radiation pressure on non-spherical dust grains in envelopes of late-type giants. **A & A Supplement series**, v. 128, p. 187-196, 1998.

Ishimoto, H. formation of Phobos/Deimos dust rings. **Icarus**, v. 122, p. 153-165, 1996.

Jackson, A.A. The capture of interstellar dust: the pure Poynting-Robertson case. **Planetary and Space Science**, v.49, p. 417-424, 2001.

Johnson, N.L. Space debris mitigation strategies and practices in geosynchronous transfer orbits. In: Committee on Space Research – COSPAR, 35., Paris, France, 2004. **Proceedings...** France, 2004a. 1 CD-ROM.

Johnson, N.L. Environmentally-induced debris sources. **Advances in Space Research**, in press, 2004b.

Juhász, A.; Horányi, M. Dust torus around Mars. **Journal of Geophysical Research**, v.100, n.E2, p. 3277-3284, 1995.

Kalvouridis, T.J. The effect of radiation pressure on the particle dynamics in ring-type n-body configurations. **Earth, Moon and Planets**, v. 87, p. 87-102, 2001.

Kearsley, A.T.; Graham, G.A.; Burchell, M.J.; Taylor, E.A.; Drolshagen, G.; Chater, R.J.; McPhail, D. Mulpex: a compact multi-layered polymer foil collector for micrometeoroids and orbital debris. In: Committee on Space Research – COSPAR, 35., Paris, France, 2004. **Proceedings...** France, 2004. 1 CD-ROM.

Kessler, D.J. Collision probability at low altitudes resulting from elliptical orbits. **Advances in Space Research**, v. 10, n.3/4, p. 393-396, 1990.

Kessler, D.J.; Reynolds, R.C.; Anz-Meador, P.D. orbital debris environment for spacecraft designed to operate in low Earth orbit. **NASA TM - 100471**, 1989.

Krisko, P. A decade of growth. **Orbital Debris Quarterly News**, v.5, n. 4, 2000.

Krivov, A.V.; Krüger, H.; Grün, E.; Thiessenhusen, K.U.; Hamilton, D.P. A tenuous dust ring of Jupiter formed by escaping ejecta from the Galilean satellites. **Journal of Geophysical Research**, 107, e1, 5002.10.1029/2000JE001434, 2002a.

Krivov, A.V.; Wardinski, I.; Spahn, F.; Krüger, H.; Grün, E. Dust on the outskirts of the Jovian system. **Icarus**, v.157, p. 436-455, 2002b.

Krivov, A.V.; Mann, I.; Krivova, N.A. Size distributions of dust in circumstellar debris disks. **Astronomy and Astrophysics**, v. 362, p. 1127-1137, 2000.

Krivov, A.; Kimura, H.; Mann, I. Dynamics of dust near the Sun. **Icarus**, v.134, p. 311-327, 1998.

Krivov, A.V.; Hamilton, D.P. Martian dust belts: waiting for discovery. **Icarus**, v. 128, p. 335-353, 1997.

Krivov, A.V.; Sokolov, L.L.; Dikarev, V.V. Dynamics of Mars-orbiting dust: effects of light pressure and planetary oblateness. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v.63, p. 313-339, 1996.

Landgraf, M.; Jehn, R.; Flury, W. Comparison of EISCAT radar data on space debris with model predictions by the MASTER model of ESA. In: Committee on Space Research – COSPAR, 34., Houston, TX, USA, 2002. **Proceedings...** USA, 2002. 1 CD-ROM.

Laurance, M.R; Brownlee, D.E. The flux of meteoroids and orbital space debris striking satellites in low Earth orbit. **Nature**, v.323, p. 136-138, 1986.

Liou, J-C.; Anz-Meador, P.; Matney, M.; Kessler, D.; Theall, J.; Johnson, N. The new NASA orbital debris engineering model OREM2000. **Orbital Debris Quarterly News**, v. 5, n. 4, NASA, 2000.

Liou, J-C.; Zook, A.H. evolution for interplanetary dust particles in mean motion resonances with planets. **Icarus**, v. 128, p. 354-367, 1997.

Matney, M. A new approach to applying interplanetary meteoroid flux models to spacecraft in gravitational fields. **Orbital Debris Quarterly News - JSC-77058**, v. 4, NASA, 2000.

McBride, N.; Green, S.F.; McDonnell, J.A.M. Meteoroid and small sized debris in low Earth orbit and at 1 A.U.: Results of Recent Modelling. **Advances in Space Research**, v. 23, p. 73-82, 1999.

McDonnell, J. A. M. Status of in-situ micro-debris and meteoroid detectors. In: Committee on Space Research – COSPAR, 34., Houston, TX, USA, 2002. **Proceedings...** USA, 2002. 1 CD-ROM.

McDonnell, J.A.M.; Ratcliff, P.R.; Green, S.F.; McBride. Microparticle populations at LEO altitudes: recent spacecraft measurements. **Icarus**, v. 127, n. 1, p. 55 - 64, 1997.

McDonnell, J.A.M.; Ratcliff, P.R. The geocentric particulate distribution: cometary, asteroidal or space debris? i asteroids, comets, meteors'91. In: Harris, A; Bowell, E (eds). **Lunar and planetary Institute, Houston**. TX, 1992. p. 407– 411.

Miao, J.; Stark, J.P.W. Direct simulation of meteoroids and space debris flux on LDEF spacecraft surfaces. **Planetary and Space Science**, v. 49, p. 927-935, 2001.

Mignard, F. On the radiation forces. In: Benst, D.; Froeschlè, C. (eds). **Interrelations between physics and dynamics for minor bodies in the solar system**. Goutelas 91, Editions Frontières, 1991. p. 419 – 451.

Mignard, F. Effects of radiation forces on dust particles in planetary rings. In: Greenberg, R.J.; Brahic, A. (eds). **Planetary rings**. Tucson: University of Arizona Press, 1984. p. 333 – 366.

Mignard, F. Radiation pressure and dust particle dynamics. **Icarus** , v. 49, p. 347-366, 1982.

Mukai, T.; Yamamoto, T.; Hasegawa, H.; Fujiwara, A.; Koike, C. On the circumsolar grain materials. **Publications of the Astronomical Society of Japan - PASJ**, v. 25, p. 445-458, 1974.

Murray, C.; Dermott, S. **Solar system dynamics**. Cambridge University Press, 1999.

NASA - History of on-orbit satellite fragmentations 13<sup>th</sup> edition. **Lyndon B.Johnson Space Center - JSC-62530**, 2004.

NASA - Satellite breakups remain a problem after 40 years. **Orbital Debris Quarterly News - JSC-77058**, v. 7, 2002.

NASA - The first satellite breakup of 2000. **Orbital Debris Quarterly News - JSC-77058**, v. 5, 2000.

NASA – Space environments and effects meteoroid and orbital debris working group technical background, **Working Group Technical - TWG**, 1996.

NASA – The national science and technology council committee on transportation research and development. interagency report on orbital debris. **Library of Congress Catalog Card Number: 95-72164**, 1995.

Nazzario, R.C.; Hyde, T.W. The dust bands of the planet Mars. **Advances in Space Research**, v. 20, n. 8, p. 1535-1538, 1997.

Pardini, C.; Anselmo, L. Dynamical evolution of debris clouds in geosynchronous orbit. In: Committee on Space Research – COSPAR, 35., Paris, France, 2004. **Proceedings...** France, 2004. 1 CD-ROM.

Pardini, C.; Anselmo, L. The effectiveness of end-of-life re-orbiting for debris mitigation in geostationary orbit. **Space Debris**, v. 1, n. 3, p. 173-194, 1999.

Pardini, C.; Anselmo, L.; Rossi, A.; Cordelli, A.; Farinella, P. A new orbital debris reference model. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 46, p. 249-265, 1998.

Radwan, M. Resonance caused by the luni-solar attractions on a satellite of the oblate Earth. **Astrophysics and Space Science**, v. 282, n.3, p. 551-562, 2002.

Roig, F. *Conversa particular*, 2004.

Roy, A.E. **Orbital motion**. 3.ed. Bristol, England, UK: Adam Hilger, 1988.

Roy, A.E. Luni-solar perturbations of an Earth satellite. **Astrophysics and Space Science**, v. 4, p.375, 1969.

Rubincam, D.P. On the secular decrease in the semi-major axis of LAGEO's orbit. **Celestial Mechanics**, v. 26, p. 361-382, 1982.

Sasaki, S. Dust ring / torus around Mars, waiting for detection by Nozomi. **Advances in Space Research**, v. 23, n. 11, p 1907-1910, 1999.

Schaffer, L.; Burns, J.A. Lorentz resonances and vertical structure of dusty rings: analytical and numerical results. **Icarus**, v. 96, p.65-84, 1992.

Silva Neto, A. G.; Fernandes, S. S; Terra, M. O. Estudo numérico de órbitas ressonantes no movimento de satélites artificiais. In: Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações – Dincon, 4., 2005, Bauru, SP. **Anais...** 2005. p. 494-503. 1 CD-ROM.

Sochilina, A.; Kiladze, R.; Grigoriev, K.; Molotov, I.; Vershkov, A. On the orbital evolution of explosion fragments. **Advances in Space Research**, in press, 2004.

Spiegel, M.R. **Formules et tables de mathématique**. Paris: McGraw-Hill, 1974.

Sremcevic, M.; Krivov, A.V.; Spahn, F. Impact-generated dust clouds around planetary satellites: asymmetry effects. **Planetary and Space Science**, v.51, p. 455-471, 2003.

Stansbery, E.G.; Seteceri, T.J.; Matney, M.J.; Zhang, J.C. Haystack radar measurements of the orbital debris environment, 1990-1994. **JSC-27436**, NASA, 1995.

Staubach, P.; Grün, E.; Jehn, R. The meteoroid environment near Earth. **Advances in Space Research**, v. 19, n.2, p. 301-308, 1997.

Taylor, A.D. Earth encounter velocities for interplanetary meteoroids. **Advances in Space Research**, v. 17, n.12, p. 205-209, 1996.

Thiessenhusen, K.U.; Krivov, A.V.; Krüger, H.; Grün, E. A dust cloud around Pluto and Charon. **Planetary and Space Science**, v.50, p. 79-87, 2002.

Tuzzolino, A.J.; McKibben, R.B.; Simpson, J.A.; BenZvi, S.; Voss, H.D.; Gursky, H. The space dust (SPADUS) instrument aboard the Earth-orbiting ARGOS spacecraft: II- results from the first 16 months of flight. **Planetary and Space Science**, v. 49, p. 705-729, 2001.

United Nations. **Technical report on space debris**. New York: [S.n.], 1999.

Vilhena de Moraes, R; Fitzgibbon, K.T.; Konemba, M. Influence of the 2:1 resonance in the orbits of GPS satellites. **Advances in Space Research**, v. 16, n. 12, p. 37-40, 1995.

Yokoyama, T. Possible effects of secular resonances in Phobos and Triton. **Planetary and Space Science**, v.50, p. 63-77, 2002.

Yokoyama, T. **Satélites síncronos e inclinação crítica**. 1974. Dissertação (Mestrado em Astronomia) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Brasil, São Paulo, São José dos Campos, 1974.

Weidenschilling, S.J.; Jackson, A.A. Orbital resonances and Poynting-Robertson Drag. **Icarus**, v. 104, p. 244-254, 1993.

Wnuk, E. Orbital evolution of space debris. **Advances in Space Research**, v. 28, n. 9, p. 1397-1402, 2001.

Worms, J.-C. ; Girard, O.; Mercier-Ythier, R.; Muinonen, K.; Zarnecki, J.C. Bridging the 100 micron-10 cm data gap for space debris: the LIBRIS detection concept. In: Committee on Space Research – COSPAR, 34., Houston, TX, USA, 2002. **Proceedings...** USA, 2002. 1 CD-ROM.

## APÊNDICE A – O ARRASTO DE POYNTIG-ROBERTSON

### A.1 - Conseqüências dinâmicas do arrasto de Poynting-Robertson

#### A.1.1 – Sistema de Referência: Órbitas Heliocêntricas

A velocidade relativa de uma partícula em órbita circular ao redor do Sol é dada por

$$\vec{v} = v \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (A1)$$

em que  $\hat{r} = \hat{S}$  e  $r$  é o módulo do raio vetor da partícula.

Substituindo a Equação (A1) na equação geral da pressão de radiação

$$\vec{F} \cong \left( \frac{S H}{c} \right) Q_{pr} \left[ \left( 1 - \frac{2\beta}{c} \right) \hat{S} - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (A2)$$

obtém-se (Burns et al., 1979)

$$\vec{F} \cong \left( \frac{S H}{c} \right) Q_{pr} \left[ \left( 1 - \frac{2\beta}{c} \right) \hat{r} - \left( \frac{r \dot{\theta}}{c} \right) \hat{\theta} \right] \quad (A3)$$

Na Equação (A3), o *termo constante radial está associado à pressão de radiação e os termos dependentes no tempo* estão associados ao arrasto de Poynting-Robertson. Com isso, as componentes da força radial e transversal do arrasto de Poynting-Robertson são dadas por

$$F_r = \frac{-2 S H}{c^2} Q_{pr} \beta \quad (A4)$$

$$F_{\theta} = \frac{-S H}{c^2} Q_{pr} r \dot{\theta} \quad (\text{A5})$$

Utilizando as equações de Gauss, as variações dos elementos orbitais semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$ , inclinação  $i$  e argumento do perigeu  $\omega$ , segundo Burns et al. (1979), em termos das componentes da força, são dadas por

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^{3/2}}{m[\mu(1-e^2)]^{1/2}} [F_r e \sin f + F_T (1 + e \cos f)] \quad (\text{A6.a})$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{[a\mu(1-e^2)]^{1/2}}{m\mu} [F_r \sin f + F_T (\cos f + \cos \psi)] \quad (\text{A6.b})$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{m[a\mu(1-e^2)]^{1/2}} [F_N \cos \theta] \quad (\text{A6.c})$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \cos i \left( \frac{d\Omega}{dt} \right) = \frac{[a\mu(1-e^2)]^{1/2}}{m\mu e} \left[ -F_r \cos f + F_T \sin f \left( \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) \right] \quad (\text{A6.d})$$

sendo  $f$  a anomalia verdadeira,  $\psi$  a anomalia excêntrica,  $\Omega$  a longitude do nodo ascendente,  $\mu$  a constante gravitacional e  $\theta$  a longitude verdadeira da partícula, dada por  $\theta = \omega + f$ .

Utilizando as expressões para as variações dos elementos orbitais apresentadas nas Equações (A6.a-d) é possível notar que não existe variação na inclinação pois não existe a componente normal da força do arrasto de Poynting-Robertson.

Substituindo as componentes da força, Equações (A4) e (A5), na Equação (A6.a) da variação do elemento orbital semi-eixo maior, obtém-se

$$\frac{da}{dt} = \frac{-2a^2 SH Q_{pr}}{mc^2 [a\mu(1-e^2)]^{1/2}} [2e \sin f + r \dot{\theta} (1 + e \cos f)] \quad (\text{A7})$$

Mas, para o problema de dois corpos, o raio  $r$  é dado por

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (\text{A8})$$

Derivando a Equação (A8) em função do tempo  $t$ , obtém-se

$$\dot{r} = -a(1 - e^2)(1 + e \cos f)^{-2}(e \sin f) \dot{f} \quad (\text{A9})$$

Ao derivar a Equação (A8) para obter a Equação (A9), deve-se lembrar que os elementos orbitais permanecem constantes no problema de dois corpos, exceto a anomalia verdadeira  $f$ , que varia com o tempo.

O momento angular  $h$  pode ser expresso, no problema de dois corpos, em função da longitude verdadeira da partícula, como sendo

$$h = r^2 \dot{\theta} \quad (\text{A10})$$

Mas,

$$\begin{aligned} \theta &= f + \omega \\ \dot{\theta} &= \dot{f} \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

sendo  $\omega$  constante no problema de dois corpos. Logo,

$$\dot{f} = \frac{h}{r^2} \quad (\text{A12})$$

Porém, a equação do momento angular  $h$  por unidade de massa pode ser dado por

$$h = [a\mu(1 - e^2)]^{1/2} \quad (\text{A13})$$

Com isso, substituindo a Equação (A13) na Equação (A12) e o resultado, substituindo na Equação (A9), obtém-se

$$\dot{\theta} = e \sin f \frac{na}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (\text{A14})$$

Utilizando a relação  $na = \sqrt{\mu/a}$ , a Equação (A14) pode ser reescrita como

$$\dot{\theta} = e \sin f \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} \quad (\text{A15})$$

De maneira análoga,

$$r\dot{\theta} = r_f \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1 - e^2)}} (1 + e \cos f) \quad (\text{A16})$$

Substituindo as Equações (A14) e (A15) na Equação (A7), obtém-se

$$\frac{da}{dt} = \frac{-2r_0^2 HQ_{pr}}{mc^2 a(1 - e^2)} S_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 [2e^2 \sin^2 f + (1 + e \cos f)^2] \quad (\text{A17})$$

em que o fluxo solar é dado por

$$S = \frac{S_0 r_0^2}{r^2} \quad (\text{A18})$$

sendo  $S_0$  a constante de radiação solar,  $r$  a distância Sol-partícula, considerando o caso heliocêntrico, e  $r_0$  igual a 1  $U.A.$

Definindo

$$\eta = \frac{HS_0 r_0^2}{mc^2} \quad (\text{A19})$$

a Equação (A17) pode ser reescrita como

$$\frac{da}{dt} = \frac{-2\eta}{a(1-e^2)} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[2e^2 \sin^2 f + (1 + e \cos f)^2\right] \quad (\text{A20})$$

Para obter o valor médio da perturbação secular no elemento orbital semi-eixo maior,  $\langle da/dt \rangle$ , é necessário calcular o valor médio de

$$\overline{\frac{a^2}{r^2} \sin^2 f}, \quad \overline{\frac{a^2}{r^2} \cos^2 f}, \quad \overline{\frac{a^2}{r^2}}, \quad \overline{\frac{a^2}{r^2} \cos f}$$

O valor médio pode ser obtido utilizando a equação geral (Roy, 1988)

$$\bar{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q dM \quad (\text{A21})$$

e

$$dM = \frac{r^2}{a^2(1-e^2)^{3/2}} df \quad (\text{A22})$$

Portanto,

$$\overline{\frac{a^2}{r^2} \sin^2 f} = \frac{1}{(1-e^2)^{1/2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 f \, df = \frac{1}{2(1-e^2)^{1/2}} \quad (\text{A23})$$

$$\overline{\frac{a^2}{r^2} \cos^2 f} = \frac{1}{(1-e^2)^{1/2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 f \, df = \frac{1}{2(1-e^2)^{1/2}} \quad (\text{A24})$$

$$\overline{\frac{a^2}{r^2} \cos f} = \frac{1}{(1-e^2)^{1/2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos f \, df = 0 \quad (\text{A25})$$

$$\overline{\frac{a^2}{r^2}} = \frac{1}{(1-e^2)^{1/2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} df = \frac{1}{(1-e^2)^{1/2}} \quad (\text{A26})$$

Substituindo as Equações (A23) - (A26) na Equação (A20), o valor médio da perturbação secular devido somente ao arrasto de Poynting-Robertson para a variação do semi-eixo maior é dado por (Burns et al., 1979)

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{\eta}{a} \frac{Q_{pr}}{(1-e^2)^{3/2}} [3e^2 + 2] \quad (\text{A27})$$

Analogamente ao que foi feito para se obter  $\langle da/dt \rangle$ , é possível obter o valor médio da perturbação secular devido somente ao arrasto de Poynting-Robertson para a variação da excentricidade, como sendo

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{5\eta}{2a^2} Q_{pr} \frac{e}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (\text{A28})$$

### A.1.2 – Sistema de Referência: Órbitas Planetocêntricas

A velocidade da partícula ao redor do planeta é dada por

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\psi} \mathbf{e}_\psi = \dot{r} \left( -\frac{p}{a} \sin \psi + \frac{p}{b} \cos \psi \right) \mathbf{e}_t \quad (\text{A29})$$

sendo  $\dot{\psi}$  a derivada temporal da anomalia excêntrica e os vetores  $\overset{P}{a}$  e  $\overset{P}{b}$  são apresentados na Figura A.1.

Pode-se relacionar o plano da órbita da partícula com o plano orbital do planeta utilizando os elementos orbitais  $i, \omega, \Omega$  e  $f$ . Estas relações foram obtidas a partir da Figura A.1 (adaptada de Burns et al., 1979). Nesta figura, observa-se um círculo centrado no planeta  $P$ , mostrando o plano da órbita da partícula com inclinação  $i$ , relativa ao plano orbital do planeta. A longitude do nodo ascendente é medida a partir da direção de referência  $\gamma$  até a linha de intersecção dos planos. Os vetores  $\hat{e}_R, \hat{e}_T$  e  $\hat{e}_N$  são os vetores unitários radial, transversal e normal, respectivamente, centrados na partícula.  $\hat{a}$  é o vetor unitário direcionado do planeta ao perigeo da partícula,  $\hat{b}$  é perpendicular a  $\hat{a}$  e o vetor  $\hat{c} = \hat{a} \times \hat{b}$  é paralelo ao vetor  $\hat{e}_N$ . O ângulo entre a direção do fluxo solar e a linha dos nodos é dado por  $\Omega'$ .

Utilizando a Figura A.1 e as relações da elipse

$$e = \frac{c}{a} \quad (\text{A30})$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{A31})$$

$$b = a(1 - e^2) \quad (\text{A32})$$

pode-se obter a expressão dos vetores  $\overset{P}{a}$  e  $\overset{P}{b}$  como

$$\overset{P}{a} = a\hat{a} \quad (\text{A33})$$

e

$$\overset{P}{b} = b\hat{b} = a(1 - e^2)^{1/2}\hat{b} \quad (\text{A34})$$

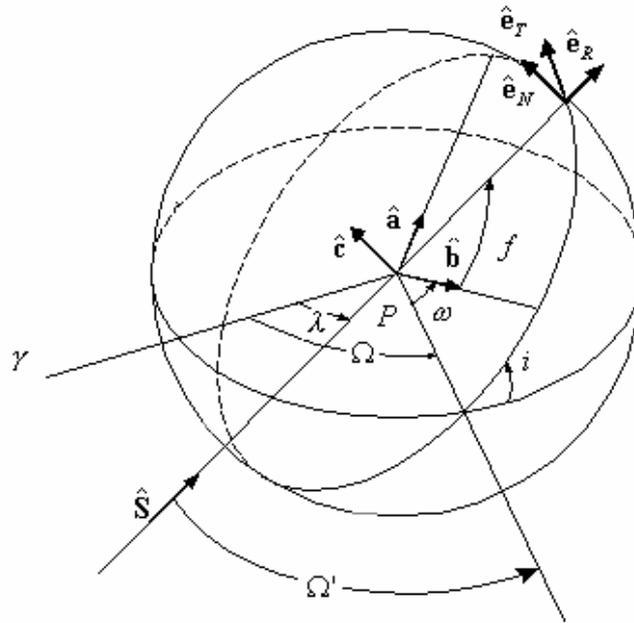


FIGURA A.1 - Círculo centrado no planeta  $P$ , mostrando o plano da órbita da partícula com inclinação  $i$ , relativa ao plano orbital do planeta.  $\Omega$  é a longitude do nodo ascendente medida em relação à direção de referência  $\gamma$ .  
 FONTE: Adaptada de Burns et al. (1979).

A equação da força devido ao arrasto de Poynting-Robertson é dada por (Burns et al., 1979)

$$\vec{F}_{P-R}^p = -\left(\frac{SH}{c^2}\right) Q_{pr} \left[ \left( \frac{p}{v_{\oplus}} + \beta \right) \hat{S} \hat{S} + \beta \frac{p}{v_{\oplus}} \right] \quad (A35)$$

Calculando o produto escalar de  $\beta$  na Equação (A35) pode-se obter a variação da energia da partícula (Burns et al., 1979)

$$\beta \cdot \vec{F}_{P-R}^p \cdot \beta = -\left(\frac{SH}{c^2}\right) Q_{pr} \left[ (\beta \hat{S})^2 + \beta \frac{p}{v_{\oplus}} \cdot \beta \right] \quad (A36)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = -\left(\frac{SH}{c^2}\right) \mathcal{Q}_{pr} \left[ \left(\hat{a} \cdot \hat{S}\right)^2 \sin^2 \psi + \left(\hat{b} \cdot \hat{S}\right)^2 \cos^2 \psi - 2\left(\hat{a} \cdot \hat{S}\right)\left(\hat{b} \cdot \hat{S}\right) \sin \psi \cos \psi + \right. \\ \left. + a^2(1 - e^2 \cos^2 \psi) + \hat{v}_{\oplus} \cdot \left(\hat{b} \cos \psi - \hat{a} \sin \psi\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A37})$$

Para obter o valor médio da variação da energia é necessário que seja feita a média sobre a anomalia excêntrica  $\psi$ , sobre seu avanço do pericentro  $\omega$  e assumir que o movimento do planeta seja circular. A dependência de  $\omega$  e  $\Omega'$  é dada por  $\left(\hat{a} \cdot \hat{S}\right)$  e  $\left(\hat{b} \cdot \hat{S}\right)$  e suas expressões podem ser obtidas, utilizando (Burns et al., 1979)

$$\begin{aligned} \hat{a} \cdot \hat{S} &= -\cos \Omega' \cos \omega + \sin \Omega' \sin \omega \cos i \\ \hat{b} \cdot \hat{S} &= \cos \Omega' \sin \omega + \sin \Omega' \cos \omega \cos i \\ \hat{c} \cdot \hat{S} &= -\sin \Omega' \sin i \end{aligned} \quad (\text{A38})$$

Com isso, o valor de  $\left\langle \left(\hat{a} \cdot \hat{S}\right)^2 \right\rangle$  é dado por

$$\left\langle \left(\hat{a} \cdot \hat{S}\right)^2 \right\rangle = \left\langle \cos^2 \Omega' \cos^2 \omega + \sin^2 \Omega' \sin^2 \omega \cos^2 i - 2 \cos \Omega' \cos \omega \sin \Omega' \sin \omega \cos i \right\rangle \quad (\text{A39})$$

Assumindo que os dois movimentos de precessão são independentes pode-se fazer primeiro, por exemplo, a média em  $\Omega'$ , ou seja,

$$\left\langle \cos \Omega' \sin \Omega' \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \Omega' \sin \Omega') d\Omega' = 0 \quad (\text{A40.a})$$

$$\left\langle \cos^2 \Omega' \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \Omega') d\Omega' = \frac{1}{2} \quad (\text{A40.b})$$

$$\left\langle \sin^2 \Omega' \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \Omega') d\Omega' = \frac{1}{2} \quad (\text{A40.c})$$

A média em  $\omega$  é dada por

$$\langle \cos^2 \omega \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \omega) d\omega = \frac{1}{2} \quad (\text{A41.a})$$

$$\langle \sin^2 \omega \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \omega) d\omega = \frac{1}{2} \quad (\text{A41.b})$$

Logo, o valor médio de  $\langle (\hat{a} \cdot \hat{S})^2 \rangle$  é

$$\langle (\hat{a} \cdot \hat{S})^2 \rangle = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 i) \quad (\text{A42})$$

Analogamente,

$$\langle (\hat{b} \cdot \hat{S})^2 \rangle = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 i) \quad (\text{A43})$$

$$\langle (\hat{a} \cdot \hat{S})(\hat{b} \cdot \hat{S}) \rangle = 0 \quad (\text{A44})$$

Substituindo os valores médios obtidos das Equações (A42 - A44) na equação da energia, dada pela Equação (A37), obtém-se

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{SH}{c^2} Q_{pr} (\nu \hat{a})^2 \left[ \frac{1}{4} (1 + \cos^2 i) [\sin^2 \psi + (1 - e^2) \cos^2 \psi] + (1 - e^2 \cos^2 \psi) \right] \\ &= -\frac{SH}{c^2} Q_{pr} (\nu \hat{a})^2 \left[ \frac{1}{4} (1 + \cos^2 i) [\sin^2 \psi + \cos^2 \psi] - \frac{e^2}{4} (1 + \cos^2 i) \cos^2 \psi + (1 - e^2 \cos^2 \psi) \right] \\ &= -\frac{SH}{c^2} Q_{pr} (\nu \hat{a})^2 \left[ \frac{1}{4} (1 + \cos^2 i) (1 - e^2 \cos^2 \psi) + (1 - e^2 \cos^2 \psi) \right] \\ &= -\frac{SH}{c^2} Q_{pr} (\nu \hat{a})^2 \left[ \left( \frac{1}{4} (1 + \cos^2 i) + 1 \right) (1 - e^2 \cos^2 \psi) \right] \end{aligned}$$

$$\langle E \rangle = -\frac{SH}{4c^2} Q_{pr} (\mu a)^2 \left[ (5 + \cos^2 i) (1 - e^2 \cos^2 \psi) \right] \quad (\text{A45})$$

Calculando a média de  $\mu a$  e  $\mu a \cos \psi$  e utilizando as relações (Burns et al., 1979)

$$dM = \frac{r}{a} d\psi = (1 - e \cos \psi) d\psi$$

$$\mu a = \frac{na}{r}$$

$$\cos \psi dM = (\cos \psi - e) d\psi$$

em que  $r$  é a distância Terra-partícula para o caso planetocêntrico, obtém-se (Burns et al, 1979)

$$\langle \mu a \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu a dM \quad (\text{A46})$$

$$\langle \mu a \rangle = n$$

e

$$\langle \mu a \cos \psi \rangle = 0 \quad (\text{A47})$$

Substituindo os valores médios de  $\mu a$  e  $\mu a \cos \psi$  dados pelas Equações (A46) e (A47), respectivamente, na Equação (A45) obtém-se a energia média como sendo

$$\langle E \rangle = -\frac{SH\mu}{4c^2 a} Q_{pr} (5 + \cos^2 i) \quad (\text{A48})$$

A variação do semi-eixo maior pode ser obtida utilizando a equação da energia do problema de dois corpos  $E = -\mu m/2a$  (Burns et al., 1979), isto é,

$$\langle \dot{a} \rangle = \frac{2a^2 \langle \dot{E} \rangle}{\mu m} \quad (\text{A49})$$

Substituindo a Equação (A48) na Equação (A49), integrando para  $i = 0$  e considerando uma partícula esférica, o tempo de decaimento da partícula, devido à variação secular do semi-eixo maior, em termos das propriedades da partícula, é dado por (Burns et al., 1979)

$$\tau_{P-R} = 9,3 \times 10^6 \frac{s \rho_p R'^2}{Q_{pr}} \quad (\text{A50})$$

sendo  $s$  o raio da partícula, em  $\mu\text{m}$ ,  $\rho_p$  a densidade da partícula, em  $\text{g}/\text{cm}^3$ , e  $R'$  a distância heliocêntrica, em  $U.A.$ .

## A.2 - Definição de $\beta$

Para o sistema dinâmico de dois corpos, Sol-partícula, a força de radiação é dada por

$$\vec{F}_{rad} = \frac{S \cdot H}{c} Q_{pr} \hat{S} \quad (\text{A51})$$

e a força gravitacional solar é dada por

$$\vec{F}_{Gr} = \frac{GM_{Sol}m}{r^2} \hat{S} \quad (\text{A52})$$

sendo  $M_{Sol}$  a massa do Sol,  $m$  a massa da partícula e  $r$  a distância Sol-partícula.

Considerando uma partícula esférica, de raio  $s$  e densidade  $\rho_p$ , pode-se obter o módulo das forças gravitacional e de pressão de radiação como sendo

$$F_{Gr} = \frac{GM_{Sol} \frac{4}{3}s^3 \rho_p \pi}{r^2}$$

$$F_{rad} = \frac{S\pi s^2}{c} Q_{pr} = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\pi \cdot s^2}{c} Q_{pr} \quad (A53)$$

sendo  $L$  a luminosidade solar.

Observa-se na Equação (A53) que ambas as forças dependem do inverso do quadrado da distância Sol-partícula e a razão entre as forças de pressão de radiação e gravitacional solar vai depender somente das propriedades da partícula. Então, é possível definir um parâmetro que dependa somente das propriedades da partícula. Este parâmetro, definido desta maneira, pode ser usado ao considerar a força gravitacional de outros corpos e é dado por

$$\beta = \frac{F_{rad}}{F_{Gr}} = \frac{3L}{16\pi GM_{sol}c} \frac{Q_{pr}}{\rho_p s}$$

$$\beta = 0,57 \frac{Q_{pr}}{\rho_p s} \quad (A54)$$

O gráfico apresentado na Figura A.2 foi extraído de Burns et al. (1979). Ele permite obter o valor de  $\beta$  para partículas com raio entre 0,1 e 10,0  $\mu\text{m}$  de quatro diferentes materiais, sendo eles: grafite, ferro, basalto e material ideal. Este gráfico é apresentado em escala logarítmica, mostrando a força relativa de  $\beta$  em função de partículas de diferentes tamanhos.

O coeficiente  $Q_{pr}$  é essencialmente constante, independe do tamanho da partícula. A diferença nos valores para os vários materiais consiste nas variações da densidade da partícula e de seu albedo, isto é, na capacidade de reflexão de sua superfície.

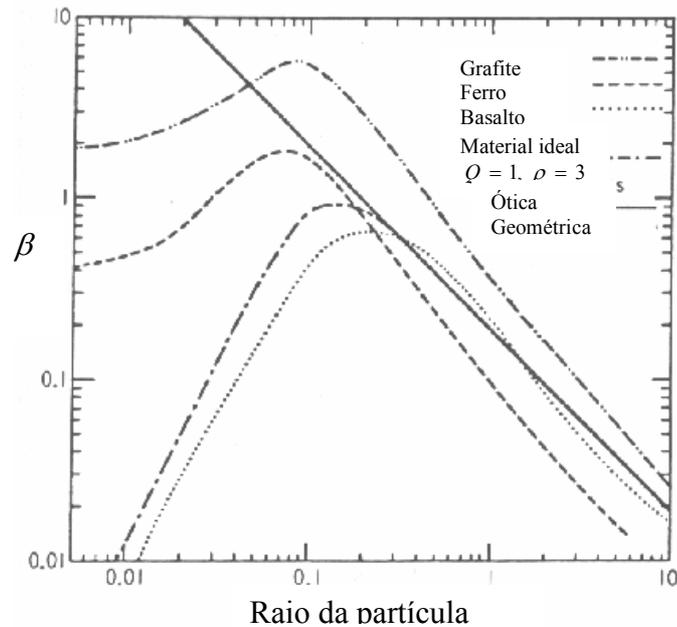


FIGURA A.2 - Gráfico di-log da Força relativa de  $\beta$ ,  $\beta = F_{rad}/F_{Gr}$  em função de partículas de diferentes tamanhos, para três materiais cósmicos significativos (grafite, ferro e basalto) e um material ideal.  
 FONTE: Burns et al. (1979).

## APÊNDICE B – ACHATAMENTO TERRESTRE

### B.1 - Achatamento Terrestre

Segundo a lei da gravitação de Newton, há uma força de atração mútua entre dois corpos de massas e esta força está dirigida para o centro de massa dos corpos. Considerando que um corpo de massa pontual  $m$  é atraído pela massa  $M$ , separados por uma distância  $r$ , a força de atração entre estes é dada por

$$\vec{F}(r) = \frac{GMm}{r^3} \hat{r} \quad (\text{B1})$$

em que  $G$  é a constante gravitacional universal.

A força gravitacional pode ser expressa em termos do gradiente do potencial, ou seja,

$$\vec{F} = m \nabla U \quad (\text{B2})$$

em que  $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$  e  $U$  é o potencial dado por

$$U = \frac{GM}{r} \quad (\text{B3})$$

Porém, quando uma distribuição arbitrária de massa  $M$  atrai uma partícula teste  $P$ , de massa  $m$ , deve-se considerar a atração que cada elemento de massa  $dM$  exerce sobre a massa da partícula, como é apresentado na Figura B.1. Nesta figura, tem-se a representação da força  $d\vec{F}$  atuando em uma partícula  $P$  de massa  $m$ , devido à atração gravitacional do elemento de massa  $dM$  de um corpo de massa  $M$ . O ponto  $P$  tem coordenadas  $(X, Y, Z)$ , o elemento de massa  $dM$  tem coordenadas  $(x', y', z')$  considerando um sistema de coordenadas paralelo ao sistema anterior  $(X, Y, Z)$ , o

centro de massa  $CM$  tem coordenadas  $(X_0, Y_0, Z_0)$  e  $(x, y, z)$  são as coordenadas de da massa  $m$  em relação ao centro de massa  $CM$ . Portanto,

$$\begin{cases} x = X - X_0 \\ y = Y - Y_0 \\ z = Z - Z_0 \end{cases} \quad (\text{B4})$$

O vetor  $\vec{r}'(x', y', z')$  indica a posição de cada elemento de massa  $dM$  em relação ao centro de massa e o vetor  $\vec{r}(x, y, z)$  indica a posição do ponto  $P$  em relação ao mesmo centro de massa. Então, o potencial total para uma distribuição arbitrária de massa atraindo uma partícula teste é dado por

$$U = G \iiint_V \frac{\rho_d dV}{\Delta} = G \int \frac{dM}{\Delta} \quad (\text{B5})$$

em que  $dM = \rho_d dV$  e  $\rho_d$ ,  $\Delta$  e  $dV$  são a densidade, a distância entre o ponto  $P$  e o elemento de massa  $dM$  e o diferencial do volume do elemento de massa  $dM$ , respectivamente.  $\rho_d$  e  $dV$  devem ser escritos em função das coordenadas  $(x', y', z')$ . A integral deve ser calculada sobre todo o volume do corpo de massa  $M$ .

A distância entre a partícula  $P$  e cada elemento de massa  $dM$  é dada por

$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (\text{B6})$$

ou ainda,

$$\Delta = \sqrt{r^2 - 2(xx' + yy' + zz') + r'^2} \quad (\text{B7})$$

sendo

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (\text{B8})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{B9})$$

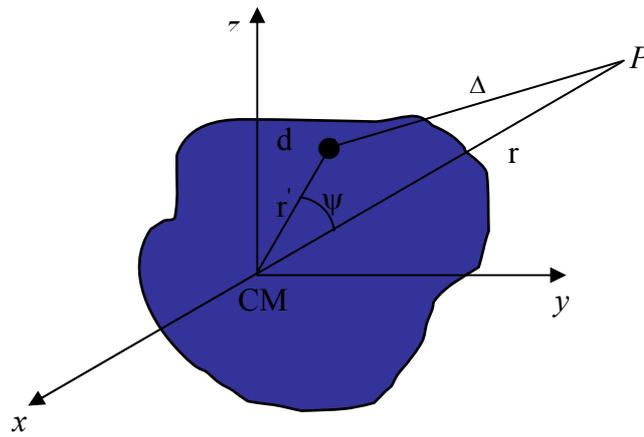


FIGURA B.1 – Representação do potencial gravitacional num ponto  $P$  de coordenadas  $(X, Y, Z)$ , devido à ação do elemento de massa  $dM$  de coordenadas  $(x', y', z')$  em um sistema de coordenadas paralelo ao sistema anterior.

Assumindo que  $\frac{r'}{r} < 1$ , a Equação (B9) pode ser re-escrita como

$$\Delta = \sqrt{r^2 \left[ 1 - \frac{2(xx' + yy' + zz')}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right]} \quad (\text{B10})$$

Definindo o produto escalar entre os vetores

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = |\vec{r}| |\vec{r}'| \cos \psi \quad (\text{B11})$$

em que  $\psi$  é o ângulo entre os vetores. A Equação (B10) pode ser escrita como

$$\Delta = r \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} \quad (\text{B12})$$

A equação acima pode ser desenvolvida em série de potências em relação a  $\alpha = r'/r$  com o auxílio do polinômio de Legendre em que a função geradora é dada por (Spiegel, 1974)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \alpha^n \quad (\text{B13})$$

em que  $P_n(x)$  são os polinômios associados de Legendre.

Portanto, substituindo esta expressão na Equação (B5), obtém-se

$$U = G \int \frac{dM}{r \sqrt{1 - 2q\alpha + \alpha^2}} \quad (\text{B14})$$

em que  $q = \cos \psi$ .

Em termos dos polinômios de Legendre de grau zero, um e dois, a Equação (B14) pode ser escrita como

$$U = \frac{G}{r} \left( \int P_0(q) dM + \int P_1(q) \alpha dM + \dots + \int P_n(q) \alpha^n dM \right) \quad (\text{B15})$$

em que

$$P_0(q) = 1, \quad P_1(q) = q \quad P_2(q) = \frac{1}{2}(3q^2 - 1) \quad (\text{B16})$$

Logo, o potencial  $U$  pode ser escrito na forma de uma soma

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (\text{B17})$$

ou seja, as partes individuais do potencial podem ser obtidas integrando cada parcela em termos das coordenadas  $(x', y', z')$ .

Com isso, integrando  $U_0$  tem-se

$$U_0 = \frac{G}{r} \int P_0(q) dM = \frac{GM}{r} \quad (\text{B18})$$

sendo  $P_0(q)$  dado pela Equação (B16).

Este resultado representa o potencial do corpo central que gera o movimento Kepleriano sem perturbação, ou seja, toda massa do corpo  $M$  está colocada em seu centro de massa.

Calculando  $U_1$ ,

$$U_1 = \frac{G}{r} \int P_1(q) \alpha dM = \frac{G}{r} \int P_1(q) \frac{r'}{r} dM \quad (\text{B19})$$

Substituindo o valor de  $P_1(q)$  dado pela Equação (B16) e utilizando a Equação (B11), tem-se

$$U_1 = \frac{G}{r} \int \cos \psi \frac{r'}{r} dM = \frac{G}{r^2} \left\{ \frac{x}{r} \int x' dM + \frac{y}{r} \int y' dM + \frac{z}{r} \int z' dM \right\} \quad (\text{B20})$$

Como a origem do sistema está no centro de massa  $CM$ , pode-se escrever que

$$\int x' dM = \int y' dM = \int z' dM = 0 \quad (\text{B21.a})$$

Portanto,

$$U_1 = 0 \quad (\text{B21.b})$$

De forma análoga, calcula-se  $U_2$  como

$$U_2 = \frac{G}{r} \int P_2(q) \alpha^2 dM = \frac{G}{r} \int P_2(q) \left( \frac{r'}{r} \right)^2 dM \quad (\text{B22})$$

Substituindo o valor de  $P_2(q)$  dado pela Equação (B16) e utilizando a Equação (B11), tem-se

$$U_2 = \frac{G}{r^3} \left\{ \int \left[ \frac{3x^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right] x'^2 dM + \int \left[ \frac{3y^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right] y'^2 dM + \int \left[ \frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right] z'^2 dM + \right. \\ \left. + \frac{3xy}{r^2} \int x'y' dM + \frac{3xz}{r^2} \int x'z' dM + \frac{3yz}{r^2} \int y'z' dM \right\} \quad (\text{B23})$$

Verifica-se que as três primeiras integrais da Equação (B23) representam os momentos de inércia do corpo  $M$ , visto que o momento de inércia de um corpo sobre o eixo que passa pelo centro de massa  $CM$  é definido como sendo  $I = \int r'^2 dM$ .  $(\alpha, \beta, \gamma)$  são os cossenos diretores desse eixo e  $\theta$  é o ângulo entre esse eixo e a linha, conectando a um elemento de massa  $dM$  com coordenadas  $(x', y', z')$ . As últimas três integrais que

envolvem produto de coordenadas são chamadas de produto de inércia do corpo  $M$  em relação aos eixos  $x'y', x'z'$  e  $y'z'$ .

O momento de inércia do corpo  $M$  em relação a um eixo coordenado pode ser expresso em termos das coordenadas  $(x', y', z')$  do elemento de massa  $dM$ , conforme é apresentado na Figura B.2. Nesta figura é possível observar que o quadrado da distância  $r'$  do elemento de massa  $dM$  em relação ao eixo  $z'$  é  $(x'^2 + y'^2)$ ; então, exprimindo o momento de inércia do corpo  $M$  em relação ao eixo  $z'$ , tem-se

$$I_{z'} = \int r'^2 dM = \int (x'^2 + y'^2) dM \quad (\text{B24})$$

Analogamente,

$$I_{y'} = \int (z'^2 + x'^2) dM, \quad I_{x'} = \int (y'^2 + z'^2) dM \quad (\text{B25})$$

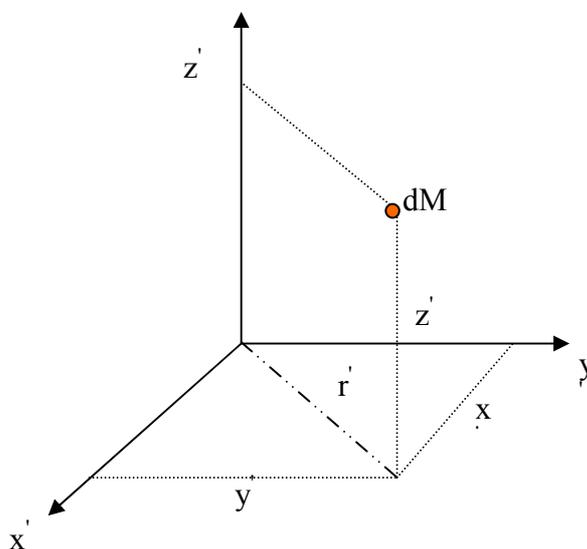


FIGURA B.2 – Projeção da distância  $r'$  no eixos  $x'$  e  $y'$ .

Definindo os momentos de inércia  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  sobre os eixos  $(X, Y, Z)$ , respectivamente, e os produtos de inércia  $D, E, \bar{F}$  pelas integrais

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \int (y'^2 + z'^2) dM, & \bar{B} &= \int (z'^2 + x'^2) dM, & \bar{C} &= \int (x'^2 + y'^2) dM \\ D &= \int y'z' dM, & E &= \int z'x' dM, & \bar{F} &= \int x'y' dM\end{aligned}\quad (\text{B26})$$

pode-se escrever o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa com os cossenos diretores  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  como sendo

$$I = \bar{A}\bar{\alpha}^2 + \bar{B}\bar{\beta}^2 + \bar{C}\bar{\gamma}^2 - 2D\bar{\beta}\bar{\gamma} - 2E\bar{\gamma}\bar{\alpha} - 2\bar{F}\bar{\alpha}\bar{\beta}\quad (\text{B27})$$

A equação de uma quádrlica com origem no centro é definida como

$$\bar{A}X^2 + \bar{B}Y^2 + \bar{C}Z^2 - 2DYZ - 2EZX - 2\bar{F}XY = 1\quad (\text{B28})$$

A Equação (B.28) é a equação de um elipsóide, uma vez que o momento de inércia  $I$  é diferente de zero para os eixos  $(X, Y, Z)$ . Este elipsóide, que define o momento de inércia do corpo em relação a qualquer eixo que passe pelo centro ( $O$ ), é conhecido como *elipsóide de inércia* do corpo em  $O$ . Comparando as Equações (B27) e (B28), verifica-se que

$$X = \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{I}}, \quad Y = \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{I}}, \quad Z = \frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{I}}\quad (\text{B29})$$

Escolhendo para eixos coordenados os eixos principais do elipsóide de inércia, a equação deste elipsóide é dada por

$$\bar{A}X^2 + \bar{B}Y^2 + \bar{C}Z^2 = 1 \quad (\text{B30})$$

sendo  $D = E = \bar{F} = 0$ .

Com isso, a Equação (B23) se reduz a:

$$U_2 = \frac{G}{r^3} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) - \frac{3}{2} \frac{(\bar{A}x^2 + \bar{B}y^2 + \bar{C}z^2)}{r^2} \right\} \quad (\text{B31})$$

em que

$$\int (x'^2 + y'^2 + z'^2) dM = \frac{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}{2} \quad (\text{B32})$$

e

$$\begin{aligned} \int x'^2 dM &= \frac{\bar{B} + \bar{C} - \bar{A}}{2} \\ \int y'^2 dM &= \frac{\bar{C} + \bar{A} - \bar{B}}{2} \\ \int z'^2 dM &= \frac{\bar{A} + \bar{B} - \bar{C}}{2} \end{aligned} \quad (\text{B33})$$

Sendo  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$  os cossenos diretores da linha que une o ponto  $x, y, z$  à origem, tem-se que

$$\frac{\bar{A}x^2 + \bar{B}y^2 + \bar{C}z^2}{r^2} = \bar{A}\bar{\alpha}^2 + \bar{B}\bar{\beta}^2 + \bar{C}\bar{\gamma}^2 \quad (\text{B34})$$

Esta equação representa o momento de inércia do corpo sob a linha que une o  $CM$  ao ponto  $x, y, z$ . Então, pode-se escrever  $U_2$  como

$$U_2 = \frac{G}{r^3} \left[ \frac{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} - 3I}{2} \right] \quad (\text{B35})$$

Para simplificar a equação para o potencial  $U_2$ , introduzem-se as coordenadas polares  $r, \lambda, \phi$ , de forma que

$$\begin{cases} x = r \cos \lambda \cos \phi \\ y = r \sin \lambda \cos \phi \\ z = r \sin \phi \end{cases} \quad (\text{B36})$$

em que  $\lambda$  e  $\phi$  são a longitude e a latitude, respectivamente e  $r$ , já definido anteriormente, como sendo a distância do ponto  $P$  ao  $CM$ .

Supondo que o corpo  $M$  é rotacionalmente simétrico ao eixo  $Z$ , então,  $\bar{A} = \bar{B}$ . Utilizando coordenadas polares, a equação para  $U_2$  torna-se

$$U_2 = \frac{G}{r^3} (\bar{C} - \bar{A}) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) \quad (\text{B37})$$

O caso mais geral é de um esferóide, onde, além de ser rotacionalmente simétrico ao eixo  $Z$ , é também simétrico em relação ao plano equatorial que é perpendicular a esse eixo. Integrando o potencial de um esferóide para toda a distribuição de massa, obtém-se

$$U_2 = -\frac{GM_{\bullet}}{r} \left\{ J_2 \left( \frac{R_{\bullet}}{r} \right)^2 \left( \frac{3 \sin^2 \phi - 1}{2} \right) \right\} \quad (\text{B38})$$

em que

$$-\frac{\bar{C}-\bar{A}}{M} = -\frac{1}{M} \int \left\{ \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) - z'^2 \right\} dM \quad (\text{B39})$$

o  $R_{\bullet}$  e  $M_{\bullet}$  são o raio equatorial e a massa do corpo perturbador, respectivamente, e  $J_2$  é o coeficiente zonal do achatamento.

## B.2 - Força do Achatamento Terrestre em Coordenadas Retangulares a Partir do Gradiente do Potencial

### B.2.1 - Coeficiente zonal $J_2$

A expressão potencial terrestre em coordenadas esféricas é dado por

$$U = -J_2 \frac{GM_{\oplus}}{r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left( \frac{3 \text{sen}^2 \phi - 1}{2} \right) \quad (\text{B40})$$

em que  $R_{\oplus}$  e  $M_{\oplus}$  são o raio equatorial e a massa da Terra, respectivamente,  $G$  é a constante gravitacional,  $r$  o raio posição da partícula,  $J_2$  é o coeficiente zonal do achatamento e  $\phi$  é a latitude.

Utilizando a relação das coordenadas retangulares  $x, y, z$  em elementos orbitais

$$\begin{aligned} x &= r(\cos \Omega \cos(\omega + f) - \text{sen} \Omega \text{sen}(\omega + f) \cos i) \\ y &= r(\text{sen} \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \text{sen}(\omega + f) \cos i) \\ z &= r(\text{sen}(\omega + f) \text{sen} i) \end{aligned} \quad (\text{B41})$$

e

$$\text{sen} \phi = \text{sen} i \text{sen}(f + \omega) \quad (\text{B42})$$

sendo  $\Omega$  o nodo ascendente,  $\omega$  o argumento do perigeu,  $f$  a anomalia verdadeira e  $i$  a inclinação da órbita.

Mas,

$$\text{sen } \phi = \frac{z}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{B43})$$

Logo,

$$U = -GM_{\oplus} R_{\oplus}^2 \left\{ \frac{J_2}{2} \left( \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - 1 \right) \right\} \quad (\text{B44})$$

A força  $\vec{F}$  é definida por

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{B45})$$

e, portanto, suas componentes são dadas por

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{3}{2} J_2 \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 \right) \frac{x}{r^3} \right\} \\ F_y &= \frac{3}{2} J_2 \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 \right) \frac{y}{r^3} \right\} \\ F_z &= \frac{3}{2} J_2 \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 3 \right) \frac{z}{r^3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B46})$$

### B.2.2 - Coeficiente tesseral $J_{22}$

A expressão potencial terrestre em coordenadas esféricas é dada por (Yokoyama , 1974 )

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 J_{22} \cos 2(\lambda - \lambda_{22}) 3 \cos^2 \phi \quad (\text{B47})$$

sendo  $J_{22}, \lambda_{22}$ , os coeficientes numéricos e  $\lambda$ , a longitude.

Da Equação (B43), tem-se que

$$\cos^2 \phi = \frac{x^2 + y^2}{r^2} \quad (\text{B48})$$

Utilizando as relações (Yokoyama, 1974)

$$x = r \cos \phi \cos \lambda_s, \quad y = r \cos \phi \sin \lambda_s, \quad z = r \sin \phi$$

$$\sin \lambda_s = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \lambda_s = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (\text{B49})$$

$$\lambda_s = \lambda + \lambda_t, \quad \lambda_t = \gamma(t - t_0)$$

e

$$\sin 2\lambda_s = \sin(\lambda_s + \lambda_s) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (\text{B50})$$

$$\cos 2\lambda_s = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (\text{B51})$$

$$\begin{aligned} \cos 2\lambda_s &= \cos 2\lambda \cos 2\lambda_t - \sin 2\lambda \sin 2\lambda_t \\ \sin 2\lambda_s &= \sin 2\lambda \cos 2\lambda_t + \cos 2\lambda \sin 2\lambda_t \end{aligned} \quad (\text{B52})$$

em que  $\lambda_s$  é a longitude da partícula no sistema inercial,  $\lambda$  é a longitude do satélite no sistema girante e  $\vec{r}$  é o raio vetor do centro da Terra à partícula  $p$ . O sistema acompanha o movimento de rotação da Terra ( $\gamma$ ).

Substituindo as Equações (B50), (B51) e (B52) na Equação (B49) e resolvendo o sistema de equações, obtém-se

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2\lambda &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} \cos 2\lambda_t - \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_t \\ \cos 2\lambda &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} \operatorname{sen} 2\lambda_t + \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \cos 2\lambda_t\end{aligned}\quad (\text{B53})$$

Desta forma, substituindo as Equações (B48) e (B53) na Equação (B47), obtém-se o potencial em coordenadas retangulares, que é dado por

$$\begin{aligned}U = -GM_{\oplus}R_{\oplus}^2 \left\{ -3J_{22} \left[ \left( 2xy \operatorname{sen} 2\lambda_t + (x^2 - y^2) \cos 2\lambda_t \right) \cos 2\lambda_{22} \right. \right. \\ \left. \left. - \left( 2xy \cos 2\lambda_t - (x^2 - y^2) \operatorname{sen} 2\lambda_t \right) \right] \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\}\end{aligned}\quad (\text{B54})$$

Calculando o gradiente do potencial, as componentes da força são dadas por

$$\begin{aligned}F_x = \frac{3}{2} J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 \right) \frac{x}{r^3} \right\} + \\ -15 J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{2xy \operatorname{sen} 2\lambda_t + (x^2 - y^2) \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \cos 2\lambda_{22} + \right. \\ \left. + \left( \frac{2xy \cos 2\lambda_t + (-x^2 + y^2) \operatorname{sen} 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_{22} \right\} \frac{x}{r^3} + \\ + \frac{3}{2} J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{-2x \operatorname{sen} 2\lambda_t + 2y \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_{22} + \right. \\ \left. + \frac{(2x \cos 2\lambda_t + 2y \operatorname{sen} 2\lambda_t) \cos 2\lambda_{22}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right\} \frac{1}{r}\end{aligned}\quad (\text{B55})$$

$$\begin{aligned}
F_y = & \frac{3}{2} J_2 \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 \right) \frac{y}{r^3} \right\} + \\
& -15 J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{2xy \operatorname{sen} 2\lambda_t + (x^2 - y^2) \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \cos 2\lambda_{22} + \right. \\
& \left. + \left( \frac{2xy \cos 2\lambda_t + (-x^2 + y^2) \operatorname{sen} 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_{22} \right\} \frac{y}{r^3} + \\
& + \frac{3}{2} J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{2x \operatorname{sen} 2\lambda_t - 2y \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \cos 2\lambda_{22} + \right. \\
& \left. + \frac{(2x \cos 2\lambda_t + 2y \operatorname{sen} 2\lambda_t) \operatorname{sen} 2\lambda_{22}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right\} \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{B56}$$

$$\begin{aligned}
F_z = & \frac{3}{2} J_2 \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{5z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - 3 \right) \frac{z}{r^3} \right\} + \\
& -15 J_{22} \mu \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ \left( \frac{2xy \operatorname{sen} 2\lambda_t + (x^2 - y^2) \cos 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \cos 2\lambda_{22} + \right. \\
& \left. + \left( \frac{2xy \cos 2\lambda_t + (-x^2 + y^2) \operatorname{sen} 2\lambda_t}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \operatorname{sen} 2\lambda_{22} \right\} \frac{z}{r^3}
\end{aligned} \tag{B57}$$

## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)