



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14654-TDI/1212-**

## **EVOLUÇÃO ORBITAL E MANOBRAS EM TORNO DE CORPOS NÃO-ESFÉRICOS**

Áurea Aparecida da Silva

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Othon Cabo Winter, aprovada em 23 de outubro de 2006.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Publicado por:

**esta página é responsabilidade do SID**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

Gabinete do Diretor – (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 – CEP 12.245-970

São José dos Campos – SP – Brasil

Tel.: (012) 3945-6911

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**Solicita-se intercâmbio  
We ask for exchange**

**Publicação Externa – É permitida sua reprodução para interessados.**



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

**INPE-14654-TDI/1212-**

## **EVOLUÇÃO ORBITAL E MANOBRAS EM TORNO DE CORPOS NÃO-ESFÉRICOS**

Áurea Aparecida da Silva

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Othon Cabo Winter, aprovada em 23 de outubro de 2006.

629.7.062.2

Silva, A. A.

Evolução orbital e manobras em torno de corpos não-esféricos / Áurea Aparecida da Silva. – São José dos Campos: INPE, 2006.

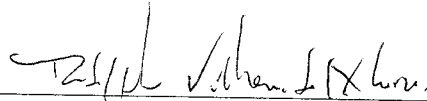
190p. ; (INPE-14654-TDI/1212)

1.Potência. 2.Poliedros. 3.Elipsóides. 4.Análise de trajetória.  
4.Órbitas de transferência. I.Título.

Aprovado (a) pela Banca Examinadora  
em cumprimento ao requisito exigido para  
obtenção do Título de **Doutor(a)** em

**Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica  
Espacial e Controle**

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



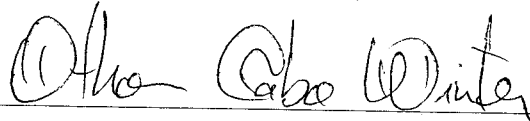
Presidente / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Antonio Fernando Bertachini de  
Almeida Prado



Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Othon Cabo Winter



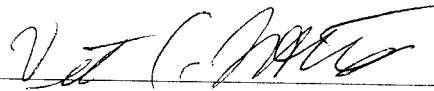
Orientador(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Dr. Tadashi Yokoyama



Convidado(a) / UNESP/RC / Rio Claro - SP

Dr. Décio Cardozo Mourão



Convidado(a) / UNESP/GUARA / Guaratinguetá - SP

Aluno (a): **Aurea Aparecida da Silva**

São José dos Campos, 23 de outubro de 2006



*“Você cria através dos seus pensamentos e emoções a vida que tem no momento. Se deseja mudá-la, precisará aprender a renovar suas atitudes, pois seu futuro depende da sua coragem em mudar!”*

*(Autor desconhecido)*





A minha mãe Odete Ferraz Pinto por todo amor e incentivo dedicados a mim,  
principalmente na fase final deste trabalho.  
E ao meu eterno amor Henrique Pereira Júnior por ter acreditado neste trabalho.



## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, fonte da vida e da graça.

Aos meus orientadores Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Dr. Othon Cabo Winter que me despertaram para o tema deste trabalho e me deram as diretrizes de como conduzi-lo.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e à Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá (FEG) que possibilitaram a realização deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 01/00080-7, pelo suporte financeiro.

Aos membros da Banca Examinadora pela predisposição em analisar este trabalho e pelas relevantes contribuições recebidas.

Ao Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes pela contribuição prestada e pelo constante incentivo.

Ao Prof. Walter Kenkiti Takahashi pela ajuda com o software FEMAP na geração de dados, o que se tornou imprescindível para a realização deste trabalho.

Aos colegas do INPE e da FEG pelo carinho, apoio e incentivo e aos colegas Décio Mourão, Cláudia Celeste, Luciana Rossato e Carlos Renato pela ajuda prestada principalmente na fase final deste trabalho.

À minha família pelo amor, apoio e pela grande torcida.

A todos os funcionários e professores da UNESP, campus de Guaratinguetá, e do INPE, São José dos Campos, que se fizeram presentes.



## RESUMO

Nos últimos anos vários asteróides tiveram sua forma identificada, através de imagens de sondas espaciais ou pela determinação indireta de dados de radar. De um modo geral, estes asteróides se mostraram com formas bastante distintas da esférica. A representação do potencial gravitacional de corpos não esféricos através de harmônicos esféricos convencionais requer expansões de alto grau e ordem, as quais são numericamente difíceis de obter. O método de poliedros é bem aceito para avaliar o campo gravitacional de um corpo com formas irregulares tais como asteróides, núcleo cometário e pequenos satélites planetários. O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo analítico para o potencial de alguns corpos homogêneos com formas geométricas simples, bem definidas e irregulares; obter a descrição de possíveis evoluções orbitais de um veículo espacial (ou partícula) que viaja ao redor de tais corpos; e, finalmente, encontrar soluções para o problema de manobras orbitais com o mínimo consumo de combustível. Apresenta-se um conjunto de equações analíticas que representam o potencial devido a diferentes formas geométricas bidimensionais. No conjunto de corpos bidimensionais inclui-se o estudo do espaço de fase das trajetórias para verificar as regiões de estabilidade ou instabilidade e as regiões de colisão. Esse estudo é feito através da superfície de secção de Poincaré. Utiliza-se também o método poliedral para o estudo do potencial gravitacional de corpos tridimensionais esféricos e não esféricos (uma esfera de raio unitário e alguns elipsóides prolatos e oblatos de diferentes valores de semi-eixo) e, então, é estudada a dinâmica da órbita de uma partícula teste ao redor de tais corpos. De um modo geral, quando a partícula se encontra distante a esfera, sua posição retorna ao ponto inicial após um período orbital kepleriano. Por outro lado, quando a partícula se aproxima de sua superfície, o efeito de sua forma poliedral faz com que os elementos orbitais tenham variações de curto período no semi-eixo maior e na excentricidade da órbita. Os resultados mostram que as órbitas próximas aos elipsóides prolatos e oblatos tornam-se excêntricas e precessionam, devido ao efeito do campo gravitacional. Com esses resultados pode-se verificar que a forma poliedral do objeto é bem representada, gerando conhecimento teórico fundamental que pode ser aplicado em corpos irregulares com formas mais complexas, tais como os asteróides.

# **ORBITAL EVOLUTION AND MANEUVERS AROUND NON-SPHERICAL BODIES**

## **ABSTRACT**

In the last years several asteroids had their shapes identified using images from space probes or through the indirect radar data determination. In a general way, these asteroids have forms quite different from spherical. Conventional spherical harmonic representations of the gravitational potential of such bodies require expansions of high degree and order, which are numerically difficult to obtain. The polyhedral method is well suited to evaluate the gravitational field of an irregularly shaped body such as asteroids, comet nucleus and small planetary satellites. If complete coverage of the surface can be obtained, a polyhedral model of the body can be constructed. The purpose of the present work is to determine an analytical form to represent the potential around an irregular shaped body; to obtain a description of the possible orbital evolutions of a space vehicle that travels around a celestial body with those characteristics; and, finally, to find solutions for the problem of orbital maneuvers with minimum consumption of fuel. The results consist of sets of analytical expressions that give the potential due to different two-dimensional geometric forms that were implemented and tested. In the group of two-dimensional bodies it is included a study of the space of phase of the orbit in order to verify the stability or instability areas and the collision areas. This study is made through Poincaré surface of section technique. It is also used the polyhedral method to study the gravitational potential of a spherical and non spherical three-dimensional bodies (a unity radius sphere, a prolate and an oblate ellipsoids with different values of semi axis). The dynamics of the orbit of a test particle around of such bodies is studied. In general, when the particle is far from the sphere, its position returns to the initial point after a keplerian orbital period. On the other hand, when the particle gets close to its surface, the effect of its polyhedral form shows short-periodic variations in the semimajor axis and eccentricity of the orbit. The results showed that the orbits close to the ellipsoids become eccentric and precess due the effects of its potential. With these results it can be verified that the polyhedral form of the object does work very well and this method is efficient for the trajectory study. The work generates fundamental theoretical knowledge that it can be applied in irregular bodies with more complex forms, such as the asteroids.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	17
<b>LISTA DE TABELAS</b>	21
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	23
<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b> .....	<b>25</b>
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>33</b>
<b>CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b> .....	<b>47</b>
3.1 - Potencial Gravitacional de Formas Geométricas Bidimensionais.....	47
3.1.1 - Introdução.....	47
3.1.2 - A Atração de um Segmento de Reta.....	48
3.1.3 - A Atração de uma Placa Retangular Geral.....	50
3.1.4 - A Atração de uma Placa Triangular.....	53
3.1.5 - Tabela de Integrais.....	58
3.2 - Potencial Gravitacional de Formas Geométricas Tridimensionais.....	59
3.2.1 - Introdução.....	59
3.2.2 - Descrição de um Poliedro.....	60
3.2.3 - Representação Matemática e Cálculo do Potencial Gravitacional.....	62
3.2.4 - Cálculo do Potencial Gravitacional de um Poliedro .....	64
3.2.4.1 - Potencial do Volume como uma Integral de Superfície.....	65
3.2.4.2 - Integral de Superfície Potencial de um Poliedro.....	66
3.2.4.3 - Potencial de uma Região Plana.....	66
3.2.4.4 - Potencial de um Polígono.....	67
3.2.4.5 - Potencial de um Fio.....	69
3.2.4.6 - Potencial do Poliedro.....	70
3.2.5 - Derivadas Primeira e Segunda.....	72
3.2.5.1 - Força Gravitacional do Polígono.....	73
3.2.5.2 - Força Gravitacional do Poliedro.....	75
3.2.5.3 - Matriz Gradiente de Gravidade do Poliedro.....	76
3.2.5.4 - Potencial Laplaciano do Poliedro.....	77
3.2.6 - Área de uma Esfera Unitária.....	78
3.2.6.1 - Área de um Polígono Esférico $ \omega_f $ .....	78
3.2.6.2 - Ângulos de Vértices do Polígono Esférico $S_j$ .....	79
<b>CAPÍTULO 4 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA FORMAS GEOMÉTRICAS BIDIMENSIONAIS</b> .....	<b>83</b>
4.1 - Introdução.....	83
4.2 - Estudo do Potencial Gravitacional de Placas Geométricas Planas.....	84
4.3 - Superfície de Secções de Poincaré – Estudo do Espaço de Fase ao Redor do	



Retângulo e do Triângulo.....	87
4.3.1 - Condições Iniciais do Problema.....	91
4.3.2 - Implementação Computacional.....	92
4.3.3 - Secções de Poincaré – Regiões Estáveis e Regiões de Colisão.....	92
4.3.4 - Secções de Poincaré – Conjunto de Ilhas Gerado a Partir de uma Única Condição Inicial.....	108
4.3.5 - Trajetórias ao Redor das Placas Triangular e Quadrada.....	117
4.3.6 - Estudo do Comportamento da Órbita nas Proximidades dos Vértices da Placa Triangular.....	120
<b>CAPÍTULO 5 – RESULTADOS NUMÉRICOS PARA FORMAS GEOMÉTRICAS TRIDIMENSIONAIS.....</b>	<b>129</b>
5.1 - Introdução.....	129
5.2 - Expressões Analíticas do Potencial Gravitacional de Poliedros.....	129
5.2.1 - Cálculo das Normais.....	130
5.2.2 - Cálculo das Funções F's e E's Referentes às Normais.....	132
5.2.3 - Cálculo das Funções Logarítmicas L's.....	133
5.2.4 - Cálculo das Funções Arco tangentes $\omega$ 's.....	134
5.3 - Estudo do Erro Numérico Utilizando Diferentes Números de Tetraedros.....	136
5.4 - Conjunto de Trajetória ao Redor de Sólidos Tridimensionais.....	140
5.5 - Comentários Gerais.....	163
5.6 - Manobras Orbitais.....	170
<b>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>181</b>
6.1 - Conclusões.....	181
6.2 - Sugestões Futuras.....	184
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>185</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Imagem do asteroide 951 Gaspra.....	26
1.2 - Imagem do asteroide 243 Ida.....	26
1.3 - Imagem do asteroide 433 Eros.....	27
1.4 - Conjunto de seis imagens do asteroide 433 Eros.....	27
1.5 - Conjunto de quatro imagens do asteroide 216 Kleopatra.....	28
1.6 - Impressão artística da sonda NEAR-Shoemaker aproximando-se de Eros.....	28
3.1 - Segmento de reta ao longo do eixo x.....	49
3.2 - Placa retangular.....	51
3.3 - Placa triangular.....	54
3.4 - Placa triangular $\overline{P_1P_2P_3}$ .....	56
3.5 - Sólidos Platônicos.....	61
3.6 - Sistema de Coordenadas Cartesianas do ponto de prova.....	64
3.7 - Distância s ao longo da borda 'b' medida a partir de um ponto arbitrário.....	68
3.8 - $L_b^f$ depende somente do tamanho e posição aparentes da borda.....	70
3.9 - Borda comum às faces A e B.....	72
3.10 - Elemento de área planar $dS$ é projetada em uma esfera unitária.....	79
3.11 - Dados três vértices consecutivos $P_i, P_j, P_k$ , o seno e o cosseno de $S_j$ podem ser calculados construindo-se os vetores $s_{ji}$ e $s_{jk}$ .....	80
4.1 - Potencial do Retângulo – P (0, 0, Z) com Z variando de 0 a 200.....	86
4.2 - Potencial do Triângulo – P (0, 0, Z) com Z variando de 0 a 200.....	86
4.3 - Representação do espaço de fase quadridimensional, tridimensional e bidimensional.....	88
4.4 - Exemplo de superfície de secção de Poincaré para um movimento regular e caótico.....	89
4.5 - Trajetórias correspondentes às secções de Poincaré para o movimento regular e caótico.....	90
4.6 - Representação das condições iniciais do problema.....	91
4.7 - Secção de Poincaré – Energia = -0,01.....	95
4.8 - Secção de Poincaré – Energia = -0,03.....	95
4.9 - Secção de Poincaré – Energia = -0,05.....	96
4.10 - Secção de Poincaré – Energia = -0,07.....	96
4.11 - Secção de Poincaré – Energia = -0,09.....	97
4.12 - Secção de Poincaré – Energia = -0,11.....	97
4.13 - Secção de Poincaré – Energia = -0,13.....	98
4.14 - Secção de Poincaré – Energia = -0,15.....	98
4.15 - Secção de Poincaré – Energia = -0,17.....	99
4.16 - Secção de Poincaré – Energia = -0,19.....	99
4.17 - Secção de Poincaré – Energia = -0,21.....	100
4.18 - Secção de Poincaré – Energia = -0,23.....	100

4.19 - Secção de Poincaré – Energia = -0,25.....	101
4.20 - Secção de Poincaré – Energia = -0,27.....	101
4.21 - Secção de Poincaré – Energia = -0,29.....	102
4.22 - Secção de Poincaré – Energia = -0,31.....	102
4.23 - Secção de Poincaré – Energia = -0,33.....	103
4.24 - Secção de Poincaré – Energia = -0,35.....	103
4.25 - Secção de Poincaré – Energia = -0,37.....	104
4.26 - Secção de Poincaré – Energia = -0,39.....	104
4.27 - Secção de Poincaré – Energia = -0,41.....	105
4.28 - Secção de Poincaré – Energia = -0,43.....	105
4.29 - Secção de Poincaré – Energia = -0,45.....	106
4.30 - Secção de Poincaré – Energia = -0,47.....	106
4.31 - Estudo do espaço de fase ao redor da placa triangular.....	107
4.32 - Ampliação da Figura 31.....	107
4.33 - Estudo do espaço de fase ao redor da placa quadrada.....	108
4.34 - Ampliação das ilhas marcadas na secção de Poincaré com energia $E = -0,1..$	110
4.35 - Ampliação das ilhas marcadas na secção de Poincaré com energia $E = -0,3..$	111
4.36 - Ampliação das ilhas marcadas na secção de Poincaré com energia $E = -0,37$	112
4.37 - Ampliação das ilhas marcadas na secção de Poincaré com energia $E = -0,4..$	113
4.38 - Secção de Poincaré com Energia = -0,41.....	114
4.39 - Secção de Poincaré com Energia = -0,42.....	114
4.40 - Secção de Poincaré com Energia = -0,43.....	115
4.41 - Secção de Poincaré com Energia = -0,44.....	115
4.42 - Secção de Poincaré com Energia = -0,45.....	116
4.43 - Secção de Poincaré com Energia = -0,46.....	116
4.44 - Trajetória ao redor da placa triangular: órbita quasi-periódica.....	118
4.45 - Trajetória ao redor da placa triangular: órbita quasi-periódica.....	118
4.46 - Trajetória ao redor da placa triangular: órbita caótica.....	119
4.47 - Trajetória ao redor da placa triangular: órbita de colisão.....	119
4.48 - Trajetória ao redor da placa quadrada: órbita quasi-periódica.....	120
4.49 - Semi-eixo maior da órbita.....	122
4.50 - Trajetória da partícula ao redor da placa triangular.....	122
4.51 - Ampliação da Figura 4.49. Picos de semi-eixo maior em seis períodos orbitais.....	123
4.52 - Excentricidade da órbita.....	124
4.53 - Semi-eixo maior da órbita.....	124
4.54 - Excentricidade da órbita.....	125
4.55 - Trajetória da partícula ao redor da placa triangular.....	125
4.56 - Superfície de secção de Poincaré.....	126
4.57 - Evolução da anomalia verdadeira no tempo.....	126
4.58 - Evolução do argumento do pericentro no tempo.....	127

5.1 - Trajetórias ao redor da esfera de raio unitário formada por diferentes números de tetraedros.....	138
5.2 - Conjunto de trajetórias ao redor da Esfera – Plano XZ.....	143
5.3 - Semi-eixo maior vs – tempo para o caso teste da partícula em órbita circular ao redor da Esfera.....	145
5.4 - Excentricidade vs – tempo para o caso teste da partícula em órbita circular ao redor da Esfera.....	145
5.5 - Conjunto de trajetórias ao redor do Prolato 3 – Plano XZ.....	147
5.6 - Semi-eixo maior vs – tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Prolato 3.....	149
5.7 - Excentricidade vs – tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Prolato 3.....	149
5.8 - Conjunto de trajetórias ao redor do Prolato 3 – Plano YZ.....	150
5.9 - Conjunto de trajetórias ao redor do Prolato 12 – Plano XZ.....	152
5.10 - Semi-eixo maior vs – tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Prolato 12.....	154
5.11 - Excentricidade vs – tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Prolato 12.....	154
5.12 - Conjunto de trajetórias ao redor do Oblato 2 – Plano XZ.....	156
5.13 - Semi-eixo maior vs – tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Oblato 2.....	158
5.14 - Excentricidade vs – tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Oblato 2.....	158
5.15 - Conjunto de trajetórias ao redor do Oblato 4 – Plano XZ.....	160
5.16 - Semi-eixo maior vs – tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Oblato 4.....	162
5.17 - Excentricidade vs – tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Oblato 4.....	162
5.18 - Posição da partícula ao longo do tempo para o Prolato 3.....	165
5.19 - Posição da partícula ao longo do tempo para o Prolato 12.....	165
5.20 - Posição da partícula ao longo do tempo para o Oblato 2.....	166
5.21 - Posição da partícula ao longo do tempo para o Oblato 4.....	166
5.22 - Transferência orbital.....	173
5.23 - Mínimo valor de $\Delta V$ .....	175
5.24 – Manobras orbitais ao redor do corpo central formado por dois tetraedros.....	176
5.25 - Manobra orbital ao redor do Oblato 2.....	179



## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Número de vértices, faces e bordas para os cinco sólidos platônicos.....	62
4.1 - Conjunto de ilhas de ressonância para diferentes valores de energia.....	93
4.2 - Valores de energia e posição inicial da partícula.....	117
5.1 - Conjunto de tetraedros que formam a esfera de raio unitário.....	139
5.2 - Conjunto de tetraedros que formam os sólidos tridimensionais.....	140
5.3 - Classificação dos sólidos tridimensionais.....	141
5.4 - Valores do coeficiente $J_2$ .....	167
5.5 - Semi-eixo maior da órbita osculadora.....	169
5.6 - Excentricidade da órbita osculadora.....	170
5.7 - Mínimo de $\Delta V$ para cada conjunto de pontos das órbitas discretizadas. O corpo primário considerado é o conjunto de dois tetraedros.....	175
5.8 - Mínimo de $\Delta V$ para cada conjunto de pontos das órbitas discretizadas. O corpo primário é formado pela Esfera.....	178
5.9 - Mínimo de $\Delta V$ para cada conjunto de pontos das órbitas discretizadas. O corpo primário considerado é o Oblato 2.....	178



## LISTA DE SÍMBOLOS

$A, B, C, D$	vértices de uma placa retangular
$b$	bordas
$C_{nm}, S_{nm}$	coeficientes adimensionais
$C_{ij}$	produto vetorial pelos vetores $r_i$ e $r_j$
$D_{ij}$	produto escalar pelos vetores $r_i$ e $r_j$
$d_i$	distâncias dos vértices ao ponto $P$
$dS$	elemento diferencial de área planar
$d\omega$	diferencial esférico
$E$	energia total do sistema
$\mathbf{E}_b$	matriz 3x3 em função de duas faces e os vetores normais à borda
$\mathbf{F}_f$	matriz 3x3 definida pela normal à cada face
$F$	faces
$F_x, F_y, F_z$	componentes da força de atração gravitacional
$G$	constante gravitacional de Newton
$L_{ij}$	termos logaritmos
$L_b^f$	potencial de um fio reto ou de cada borda (termo logaritmo)
$\ell$	lado da placa retangular
$m_1$	massa do primeiro corpo
$m_2$	massa do segundo corpo
$M$	massa total do corpo
$n$	número de vértices
n-tetra	número de tetraedros que formam um corpo sólido
$\mathbf{n}$	vetor normal à superfície
$\mathbf{n}_f$	vetor normal à face
$\mathbf{n}_b$	vetor normal à borda
$P(X, Y, Z)$	posição arbitrária de uma partícula
$P_{nm}$	polinômio de Legendre
$r_{ij}$	distância entre $P_i$ e $P_j$
$r_i$	distância do vértice $P_i$ ao ponto de prova
$r_k$	distância da partícula ao ponto $Q_k$
$\mathbf{r}_b^f$	vetor do ponto de prova para um ponto fixo sobre a borda $b$ da face $f$
$r_b$	distância do ponto de prova à borda
$r_f$	distância do ponto de prova à face
$(r, \phi, \lambda)$	raio, latitude e longitude do ponto de prova no espaço livre
$\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0$	vetores posição e velocidade da órbita inicial para a realização de uma manobra orbital
$\mathbf{R}_f, \mathbf{V}_f$	vetores posição e velocidade da órbita final após a manobra
$S_z$	sinal da variável $Z$
$S_i$	medidas dos ângulos de vértices esféricos



$T_0$ e $T_f$	períodos da órbita inicial e final no problema de manobra orbital
$U$	potencial gravitacional
$V$	vértices
$(X, Y, Z)$	coordenadas do ponto de prova ou partícula
$(x_k, y_k, z_k)$	coordenadas da placa
$\omega_f$	área de uma esfera unitária (arco tangente)
$\gamma$	constante de proporcionalidade
$\sigma$	densidade do material
$\alpha_{ij}$	ângulo do triângulo à origem $O$
$\Delta S_k$	elemento de superfície
$\Delta x$	variação da posição da partícula
$\nabla U$	força gravitacional do poliedro
$\nabla(\nabla U)$	matriz gradiente de gravidade
$\nabla^2 U$	Laplaciano
$\Delta V$	acrécimo de velocidade necessário para a manobra

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Nos últimos anos vários asteróides tiveram sua forma identificada. Alguns por meio de imagens de sondas espaciais (a sonda NEAR-Shoemaker, por exemplo), outros por meio da determinação indireta de dados de radar. De um modo geral estes asteróides se mostraram com formas bastante distintas da esférica. Nas Figuras de 1.1 a 1.6 são reproduzidas algumas imagens de asteróides que exemplificam muito bem a variedade de formas obtidas.

Depois de uma passagem pelo asteróide 253 Mathilde, do cinturão principal, em 1997, a sonda Near-Shoemaker tornou-se a primeira a orbitar um asteróide. Embora não tenha sido projetada para pousar em Eros, depois de um ano, a sonda iniciou sua descida no asteróide, retransmitindo à Terra uma seqüência de imagens (Figura 1.6). As transmissões terminaram quando a sonda colidiu com a superfície do asteróide, mas a espectroscopia de raios gama continuou por vários dias a coleta de dados da composição de Eros. Assim terminou a primeira investigação detalhada de um objeto próximo da Terra – uma categoria que inclui a arriscada possibilidade da órbita do asteróide coincidir com a órbita da Terra. O interesse por esses objetos vai além de puramente científico e inclui a investigação das direções com que os asteróides possam ser desviados de uma colisão com a Terra.

Eros foi originado no cinturão principal de asteróides, além da órbita de Marte. Esse asteróide tem cerca de  $34 \times 13 \times 13$  km de dimensão e é o segundo maior objeto conhecido próximo da Terra. O maior objeto é 1036 Ganymed, o qual tem cerca de 40 km de diâmetro. Eros tem resistido a grandes impactos em seus quatro bilhões de anos no cinturão de asteróides e tem perdido muito de sua massa original (e de sua forma) apresentando um grande número de crateras (Asphaug, 2001).



Figura 1.1 – Imagem do asteroide 951 Gaspra obtida pela sonda Galileo em seu caminho a Júpiter. As dimensões aproximadas deste asteroide são de 19x12x11 km.

Fonte: JPL/NASA (1991)



Figura 1.2 – Imagem do asteroide 243 Ida obtida pela sonda Galileo. Esta imagem também mostra Dactyl (pequeno ponto à direita), primeiro satélite de asteroide descoberto. Ida tem dimensões aproximadas de 60x25x18 km, enquanto que Dactyl tem diâmetro aproximado de 1,5 km.

Fonte: JPL/NASA (1993)

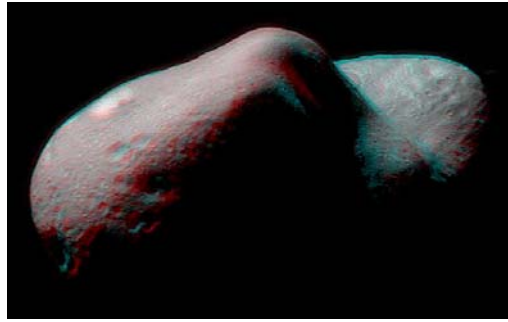


Figura 1.3 – Imagem do asteroide 433 Eros obtida pela sonda NEAR-Shoemaker. Esta imagem mostra uma grande depressão encontrada na superfície do asteroide cujas dimensões são de aproximadamente 34 km de comprimento por 12 km de largura.

Fonte: JHU/APL (2000?)



Figura 1.4 – Conjunto de seis imagens do asteroide 433 Eros obtidas pela sonda NEAR-Shoemaker.

Fonte: JHU/APL (2000?)

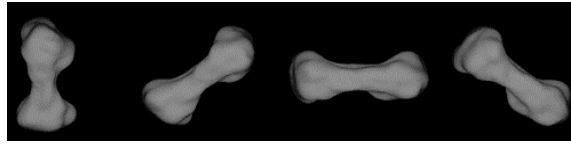


Figura 1.5 – Conjunto de quatro imagens do asteroide 216 Kleopatra. Estas imagens mostram diferentes vistas do asteroide que foram geradas a partir de modelo computacional baseado em dados obtidos pelo radar do telescópio do observatório de Arecibo. Este asteroide possui dimensões da ordem de 217 km de comprimento e 94 km de largura (em média).  
Fonte: JHU/APL (2000?)



Figura 1.6 – Impressão artística da sonda NEAR-Shoemaker aproximando-se de Eros.  
Fonte: Nasa (Sept. 2001)

Uma vez que diversas missões espaciais visando orbitar estes tipos de corpos (asteróides ou cometas), ou até pousar neles, têm sido propostas e implementadas, torna-se de extrema importância o conhecimento do potencial gravitacional definido por corpos de formas irregulares. Ainda mais importante é a determinação das regiões de estabilidade e instabilidade de trajetórias ao redor de tais corpos.

A representação do potencial gravitacional de corpos não esféricos através de harmônicos esféricos convencionais requer expansões de alto grau e ordem, as quais são numericamente difíceis de obter. O método poliedral é bem aceito para avaliar o campo gravitacional de um corpo com formas irregulares tais como asteróides, núcleo cometário e pequenos satélites planetários.

O método poliedral consiste na representação geométrica de um corpo tridimensional regular ou irregular como um poliedro com um número variável de faces triangulares. O potencial gravitacional do corpo pode ser calculado através da soma do potencial de cada uma de suas faces. Com um pequeno esforço esse modelo pode incorporar importantes características da superfície, tais como crateras e elevações.

Esse método torna-se uma importante ferramenta para prever e controlar a navegação e a evolução dinâmica de um veículo espacial ao redor de um corpo bastante irregular em seu complexo campo gravitacional.

Determinar a evolução orbital e executar manobras em satélites que orbitam a Terra ou outros corpos celestes são hoje objetivos importantes das atividades espaciais. Existem muitos estudos disponíveis na literatura a este respeito e muitas alternativas para resolver estas questões, porém todos apresentam modelagens específicas para cada tipo de problema. O problema de determinar a evolução orbital de um veículo espacial consiste em obter uma descrição de seu estado (posição e velocidade) como uma função do tempo. De uma forma abrangente, a transferência orbital pode ser definida como sendo o problema de mudança do estado inicial de um veículo espacial (posição, velocidade e massa) de  $r_0$ ,  $v_0$  e  $m_0$  no instante  $t_0$  para  $r_f$ ,  $v_f$  e  $m_f$  no instante  $t_f$  ( $t_f \geq t_0$ ) com o menor consumo de combustível ( $m_f - m_0$ ) possível. Para obter esse resultado deve-se escolher o módulo, a direção e o sentido do empuxo a ser aplicado ao veículo (controle disponível). O problema de manobra orbital consiste em determinar o comportamento orbital e transferir um veículo espacial entre duas órbitas dadas. Em uma transferência desse tipo existem diversos fatores importantes como, por exemplo, controle do tempo gasto com a transferência, economia no consumo de combustível, limites nos atuadores e/ou estado do veículo, etc.

Assim sendo, os objetivos principais deste trabalho são: determinar uma forma analítica para representar o potencial gravitacional em torno de um corpo de forma geométrica simples, porém não-esférica; obter uma descrição das possíveis evoluções orbitais de um veículo espacial que viaja em torno de um corpo com essas características; e,

finalmente, encontrar soluções para o problema de manobras orbitais, com mínimo consumo de combustível, entre órbitas em torno desse corpo.

Este é um caso particular que foi pouco explorado pela literatura. Será assumido que uma partícula se encontra em órbita em torno de um corpo que possua uma forma geométrica conhecida. O potencial gravitacional desse corpo será desenvolvido e descrito em uma forma analítica fechada. Com isso, será possível representar de forma aproximada um corpo de forma geométrica genérica como sendo uma soma de formas geométricas conhecidas. Assim sendo, pode-se obter o potencial desse corpo como uma soma de equações analíticas que expressam o potencial dos sólidos que formam o corpo. A partir daí, pode-se calcular propagações de órbita e manobras orbitais dentro desse potencial conhecido.

A principal meta que este trabalho de pesquisa pretende atingir é gerar conhecimento teórico e aplicado, através do desenvolvimento de aplicativos computacionais, sobre esse importante e atual assunto. O presente trabalho tem como foco o estudo de formas geométricas simples (bi e tridimensionais), porém não esféricas. Aplicar o método de poliedros em formas simples, cujos potenciais já sejam conhecidos através da literatura, traz informações úteis que podem ser aplicadas em objetos com formas mais complexas. Neste trabalho, toda a implementação computacional feita para formas simples pode ser aplicada diretamente para quaisquer outros corpos irregulares, tais como os asteróides, desde que a forma e o modelo poliedral desses corpos sejam conhecidos.

A metodologia deste trabalho constou das seguintes etapas:

- 1) Uma revisão da modelagem analítica do potencial gravitacional de algumas formas geométricas planas, com o propósito de entender o comportamento do potencial em regiões próximas aos vértices dessas placas. Essa etapa consiste de um estudo detalhado do trabalho já desenvolvido por Kellogg (1929) e Broucke (1995). O estudo do potencial de corpos tridimensionais, através do método de poliedros, também se dá nessa fase do trabalho e conta com importantes trabalhos de Werner (1996). Assim, tem-se a reprodução das expressões analíticas para o potencial. Conhecidas as expressões analíticas do potencial de diferentes corpos, escolhem-se diferentes objetos

com formas irregulares e bem definidas e calcula-se numericamente o seu potencial gravitacional.

2) Com o potencial determinado, faz-se um estudo da topologia do espaço de fase do problema de dois corpos (asteróide-veículo espacial). São estudadas as regiões de estabilidade/instabilidade (órbitas periódicas, quase-periódicas e caóticas) e as regiões de colisão ao redor de formas geométricas planas. Esse estudo é feito através da técnica de superfície de secção de Poincaré. Para objetos tridimensionais são estudadas as dinâmicas da órbita de uma partícula teste ao seu redor. Inicialmente utiliza-se como corpo central, cujo potencial será determinado, uma esfera de raio unitário e, posteriormente, alguns elipsóides prolatos e oblatos de diferentes valores de semi-eixo.

3) Ao final da etapa anterior, o último estudo será a simulação de missões espaciais com o estudo de possíveis manobras orbitais. Um método para resolver problemas de trajetórias ótimas e que foi aplicado neste trabalho é o *Two-Point Boundary Value Problem* (TPBVP), em que as condições necessárias para a otimização são encontradas usando técnicas de cálculo variacional.

A síntese do trabalho é dada por:

No Capítulo 1 apresenta-se a introdução do trabalho, a motivação e o seu principal objetivo.

No Capítulo 2 apresenta-se a revisão bibliográfica da literatura, dando ênfase aos vários métodos desenvolvidos para o cálculo do potencial gravitacional de vários corpos com formas geométricas planas simples e formas tridimensionais irregulares. Consta ainda da apresentação de alguns trabalhos que descrevem a forma de importantes objetos celestes, tais como os asteróides. Ainda nessa revisão encontram-se alguns trabalhos que apresentam a dinâmica da órbita de uma partícula ou veículo espacial ao redor de corpos tridimensionais.

No Capítulo 3 tem-se o estudo analítico do potencial gravitacional para diferentes formas geométricas simples, tais como: o segmento de reta, o retângulo e o triângulo.



Neste capítulo encontra-se a descrição do potencial gravitacional de poliedros (3D), transformando-os em polígonos (2D) e, posteriormente, em segmentos de reta (1D). São apresentadas também as expressões analíticas da força gravitacional, matriz gradiente de gravidade e Laplaciano para esses corpos tridimensionais.

No Capítulo 4 têm-se os primeiros resultados do estudo de trajetórias ao redor de corpos com formas geométricas planas. São apresentadas algumas trajetórias ao redor de placas retangulares e triangulares. Ainda neste capítulo apresenta-se uma descrição da técnica de superfície de secção de Poincaré como ferramenta para o estudo da região de estabilidade e instabilidade ao redor de corpos cujos potenciais são estudados. Tem-se um conjunto de superfícies de secções de Poincaré para as trajetórias ao redor de tais placas, além de um estudo global das regiões de estabilidade e colisão ao redor do retângulo e do triângulo. Apresenta-se também uma breve análise do semi-eixo maior, excentricidade, argumento do pericentro e anomalia verdadeira dessas órbitas, destacando-se o efeito do potencial nas proximidades dos vértices dessas placas.

O Capítulo 5 apresenta os resultados mais relevantes para alguns corpos tridimensionais, tais como a esfera e alguns elipsóides prolatos e oblatos de diferentes valores de semi-eixo. Esses resultados consistem de trajetórias que validam o cálculo do potencial gravitacional através do método de poliedros, destacando-se o efeito da atração gravitacional desses corpos através do estudo do semi-eixo maior e excentricidade das órbitas de uma partícula teste ao redor desses corpos. Ainda neste capítulo tem-se a descrição do método para resolver problemas de trajetórias ótimas utilizando o *Two-Point Boundary Value Problem* (TPBVP), apresentando-se a aplicação do método com o desenvolvimento numérico de uma manobra orbital ao redor de um corpo celeste tridimensional.

O Capítulo 6 descreve as conclusões extraídas deste trabalho e os comentários finais para extensões futuras do mesmo.

O trabalho é então finalizado com a bibliografia consultada e necessária para sua realização.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O problema de obter uma representação do potencial em torno de um corpo não-esférico apresenta diversos trabalhos publicados na literatura.

A maioria dos artigos sobre potencial gravitacional de poliedros aparece na literatura de geofísica. Muitos artigos avaliam a gravitação do poliedro de forma fechada, embora alguns realizem somente duas integrações analíticas e a terceira via quadratura. Funções elementares (arco tangente, logaritmo ou arco tangente hiperbólico) aparecem nas expressões finais. Alguns artigos de geofísica derivam somente a atração ou somente a componente vertical.

Os poliedros podem ser classificados de uma forma simples até uma forma complexa: (1) paralelepípedo, (2) prisma e (3) poliedro de modo geral.

A derivação do potencial gravitacional do paralelepípedo não é difícil e já era conhecida desde o início do século XIX, como por exemplo, através de Everest (1830). O interesse da geofísica moderna em gravitação de paralelepípedo parece ter começado com Nagy (1966) e foi estendido através de Bannerjee e Gupta (1977) e Montana et al. (1992). Waldvogel (1976) aparece na literatura de física matemática.

Trabalhos descrevendo a gravitação de um prisma podem ser encontrados nos artigos de Plouff (1976), Cady (1980) e Telford et al. (1976).

A gravitação do poliedro foi inicialmente derivada em meados do século XIX. Strakhov e Lapina (1990) declaram que problemas de gravimetria direta e magnetometria para poliedros homogêneos são clássicos. Eles foram primeiro estudados no século XIX; porém, somente em 1960 – 1980 uma atenção especial foi dedicada a esse tópico. O trabalho de Malovichko (1963), citado em Golizdra (1981) tem o título: “Aniversário de cem anos do trabalho de F. A. Sludskiy sobre a atração de poliedros homogêneos”.

Artigos mais atuais incluem Barnett (1976), Okabe (1979), Waldvogel (1979), Pohánka (1988), Kwok (1991) e Werner (1994).

O potencial gravitacional de um objeto irregular pode ser facilmente calculado a partir da soma do potencial de vários poliedros, desde que a forma do corpo celeste a ser estudado seja bem conhecida. Antes de apresentar um estudo bibliográfico que trata da representação do potencial de corpos irregulares, serão apresentados alguns trabalhos que descrevem as formas de vários corpos celestes: asteróides, satélites naturais e cometas; além de alguns detalhes relevantes sobre suas formas, composições de solo, densidades e algumas das mais importantes crateras.

Turner (1978) propõe determinar a forma do satélite marciano Fobos utilizando as características reveladas por imagens de televisão da espaçonave Mariner 9. As características foram posicionadas precisamente sobre o modelo através da interação de mais de uma imagem. O principal objetivo de seu trabalho foi desenvolver um modelo que pudesse corresponder bem com todas as imagens e, assim, fazer o primeiro mapa detalhado. O autor obteve medidas de diâmetros das crateras, localizações de latitude e longitude dos centros, e as formas das crateras, que estão catalogadas em 260 depressões. Entre outras, a cratera Stickney foi interpretada com um diâmetro médio de 11,1 km, seu mínimo de 9,6 km e a cratera Hall com um diâmetro de 5,9 km. Um raio médio de 11,0 km resulta dos comprimentos dos vetores para os 146 vértices de um poliedro. Foi também verificado um volume de  $5620 \text{ km}^3$  para Fobos.

Thomas (1988) estuda os raios, as formas e a topografia local dos cinco maiores satélites de Urano utilizando coordenadas da borda. A técnica fornece uma medida direta das formas elipsoidais dos satélites e fixa a precisão do raio por sub-pixel. Os satélites Umbriel, Titânia e Oberon são melhores representados por esferas. Miranda e Ariel são elipsóides cujos bojos equatoriais são consistentes com as densidades médias publicadas. Topografia das bordas de Miranda mostra deformação substancial tanto dos terrenos mais velhos cheios de crateras, quanto das coroas mais novas e de complexas falhas e elevações às margens das coroas. A deformação máxima é cerca de 10 km. A

borda de Umbriel mostra uma base de origem indeterminada de aproximadamente 500 km de largura e 6 km de profundidade.

Duxbury (1989) estuda a figura de Fobos. O autor utiliza expansões de harmônicos esféricos de grau e ordem 6 para produzir um modelo usual da figura de Fobos. A precisão do modelo é suficiente para produzir mapas digitais e fotográficos da superfície, assim como em estudos fotométricos. O modelo preenche a superfície inteira com uma precisão de poucas centenas de metros, exceto na região em torno da grande cratera Stickney. Uma amplitude de libração forçada de  $0,81 \pm 0,5$  ( $\sigma$ ) graus foi confirmada, combinando com o valor observado de 0,79 graus, considerando que Fobos tem uma distribuição de densidade uniforme dentro da incerteza da predição.

Thomas (1989) apresenta um estudo quantitativo das formas irregulares de pequenos satélites de Marte, Júpiter, Saturno e Urano, baseado primeiramente em medidas de coordenadas da borda de satélites usando imagens de espaçonaves. Esses satélites possuem seus raios médios menores que 150 km. As técnicas de medidas são brevemente descritas, e depois, uma comparação é feita dos tamanhos e formas de Fobos e Deimos obtidas por duas diferentes técnicas: coordenadas da borda e medidas estereocópicas. Modelos elipsoidais podem medir volumes de objetos irregulares com grande precisão. Essas aproximações elipsoidais, entretanto, são descrições incompletas das formas de pequenos satélites em que os resíduos médios são maiores que os erros medidos. A diferença entre objetos elipsoidais e irregulares é definida quantitativamente através de testes de vários mecanismos, usando medidas da forma e dados da borda dos satélites. Finalmente esses resultados são comparados com dados de asteróides.

Thomas et al. (1994) estudam a forma de Gaspra. As imagens de Gaspra obtidas durante a passagem da sonda Galileo em outubro de 1991 foram utilizadas para derivar um modelo da forma do asteróide. Gaspra é um objeto altamente irregular com diâmetros principais de 18,2 x 10,5 x 8,9 km e um raio médio de 6,1 km. Assumindo-se distribuição de massa homogênea, o eixo de rotação é alinhado com o máximo momento de inércia dando as incertezas estimadas no modelo. Os autores concluem que o asteróide é moderadamente mais irregular que os pequenos satélites cujas formas são

conhecidas. Concluem também que Gaspra é um objeto derivado de um corpo substancialmente grande que sofreu fragmentações colisionais.

Thomas et al. (1995) estudam imagens da Voyager 2 usadas para medir o estado de rotação instantâneo do satélite Hipérion durante o período de passagem da espaçonave por Saturno, em 1981, a fim de definir a forma do satélite e o mapa de características geológicas. Uma forma elipsoidal para modelar Hipérion apresenta os eixos principais de 164 x 130 x 107 km. A forma do satélite é modelada através das imagens e a modelagem de sua dinâmica sobre vários períodos inconstantes sugere um interior relativamente homogêneo. Os autores sugerem que Hipérion foi derivado pela ruptura catastrófica de um objeto de 2 a 5 vezes seu volume.

Thomas et al. (1996) estudam a forma de Ida e verificam que sua forma é mais irregular do que qualquer outro objeto do sistema solar encontrado por espaçonave. Cerca de 95% da superfície de Ida foi fotografada pela Galileo, seu volume é de  $16100 \pm 1900 \text{ km}^3$  (raio médio de  $15,7 \pm 0,6 \text{ km}$ ) e a área da superfície é de  $3900 \pm 300 \text{ km}^2$ . As dimensões máxima e mínima são 55,8 e 14,8 km. Os autores apresentam várias imagens de Ida de diferentes longitudes com os correspondentes modelos de suas formas.

Thomas et al. (1997) estudam imagens obtidas pelo telescópio espacial Hubble (HST) para determinar o pólo de spin, o tamanho e a forma de Vesta. Sua forma pode ser representada por um elipsóide de raio 280 x 272 x 227 ( $\pm 12$ ) km. A densidade média de Vesta é de  $3,8 \pm 0,6 \text{ g/cm}^3$ . Os autores afirmam que Vesta, o terceiro maior asteróide, tem uma superfície distinta, composta por material basáltico.

Muinonen e Lagerros (1998) determinam a inversão da forma estatística de pequenos corpos do sistema solar. As formas irregulares desses corpos são modeladas por estatística lognormal, isto é, assumindo que as formas são esferas aleatórias Gaussianas, que são descritas pelos raios médios e pela função de covariância dos raios logarítmicos. A forma estocástica é então dada pela função de covariância, ou os espectros discretos de seus coeficientes de Legendre. Os autores sugerem que as formas de pequenos corpos no sistema solar são difíceis de investigar, portanto, existem imagens de poucos

objetos através de missões espaciais. Alguns asteróides próximos da Terra foram mapeados por técnicas de radar.

Hudson et al. (2000) relatam as observações de radar do asteróide que cruza a órbita da Terra, o Golevka 6489, obtidas entre 3 e 15 de Junho de 1995 através de antenas de radio. Espectros Doppler unidimensional são usados para estimar a casca convexa do objeto, refinar as efemérides e ainda as quatro possíveis direções do pólo. Uma modelagem tridimensional, usando imagens atrasadas em Doppler bidimensionais e curvas de luz obtidas na literatura, define o pólo e revela uma extraordinária forma angular com lados planos, bordas e ângulos bem definidos e concavidades peculiares.

Ostro et al. (2000) fazem um estudo através de observações de radar do cinturão principal e verificam que o asteróide da classe M, 216 Kleopatra, revela-se como um objeto com formato de halteres com dimensões globais de  $217 \times 94 \times 81$  km ( $\pm 25\%$ ). As propriedades da superfície do asteróide são compatíveis com um regolito, tendo uma composição metálica e uma porosidade comparável com o solo lunar. Os autores verificam que a forma de Kleopatra é provavelmente o resultado de uma seqüência de eventos colisionais e muito de seu interior deve ter a estrutura de um amontoado de escombros não consolidados. Curvas de luz óptica com grandes amplitudes e cronometragem de ocultação estelar sugerem uma forma alongada; observações de radar Doppler e imagens ópticas adaptativas sugerem algum tipo de bifurcação na forma.

Ostro et al. (2001) estudam imagens atrasadas Doppler dos radares de Goldstone e Arecibo do asteróide 1998 ML14 obtidas logo depois de sua descoberta. As imagens revelam um asteróide de 1 km de diâmetro com topografia proeminente de um lado, e de outro, uma topografia deficiente. As propriedades ópticas e de radar do objeto são típicas de asteróides próximos da Terra de classe S. Um modelo derivado das imagens e assumindo que a densidade seja uniforme erra em mais que  $30^\circ$  em apenas 4% da superfície. Se a distribuição da densidade do asteróide é uniforme, então sua região orbital é similar a um corpo planetário com um campo gravitacional esferoidal e é relativamente estável. Uma integração de órbita refinada a partir de dados de radar mostra que na aparição de 1998 o asteróide teve sua aproximação máxima da Terra

entre no mínimo 1100 e até 2283, quando ele se aproxima a 2.4 distâncias lunares. Fora desse intervalo as observações não são suficientes para previsões confiáveis.

Veverka et al. (2001) discutem as imagens obtidas durante o pouso da sonda Near-Shoemaker no asteroide 433 Eros, no dia 12 de Fevereiro de 2001, em que foram obtidas cerca de 70 imagens. A área de pouso é marcada por um conjunto de pequenas crateras e um grande número de partículas ejetadas. As últimas seqüências de imagens revelam uma transição da superfície rochosa para uma área lisa, as quais os autores interpretam como um 'lago'. Imagens fechadas, de uma altitude de 1129 m, apresentam o interior de uma cratera de 100 metros de diâmetro com resolução de 1 cm.

A partir das formas definidas, vários métodos são apresentados para determinar o potencial gravitacional de corpos celestes irregulares, alguns autores utilizam integrações simples (Broucke, 1995), outros utilizam o método de poliedros (Werner, 1994) e, ainda, o método de concentração de massas - MASCON (Werner e Scheeres, 1996), entre outros. Alguns dos trabalhos revisados descrevem o potencial gravitacional de importantes corpos celestes e outros descrevem um estudo completo de trajetórias ou pouso de espaçonaves em cometas, asteroides ou satélites naturais (Scheeres et al., 1996; Romain et al., 2001).

Barnett (1976) desenvolve um método analítico para os campos gravitacional e magnético de um corpo tridimensional de forma irregular. Nesse método, o corpo modelado é representado por um poliedro composto por faces triangulares. Como a solução é analítica, as faces do poliedro podem ter qualquer tamanho e o número de pontos de entrada depende somente do número de ápices requerido para o contorno do corpo. Dois exemplos foram apresentados para ilustrar a flexibilidade do método. O autor mostra que o método pode ser usado tanto para calcular correções terrenas quanto para calcular os campos de qualquer estrutura uniforme representado por uma superfície poliedral.

Plouff (1976) calcula os campos magnético e gravitacional de prismas poligonais e apresenta a aplicação para as correções magnéticas terrenas. A fórmula para o efeito da gravidade de um prisma retangular foi desenvolvida pelo autor para comparar com

fórmulas de correções terrenas. Sua expressão é similar a de Kellogg (1929) e proporciona um valor do campo gravitacional para qualquer ponto fora ou dentro do prisma.

Banerjee e Gupta (1977) apresentam os cálculos da atração gravitacional de um paralelepípedo retangular e citam o trabalho de Nagy (1966) que considerou a atração gravitacional de um prisma retangular reto. Eles mostram a analogia dos dois trabalhos e listam uma série de limitações que as expressões de Nagy apresentam.

Okabe (1979) apresenta as expressões analíticas para anomalias gravitacionais devido a corpos poliedrais homogêneos e as translações para anomalias magnéticas. O autor desenvolve expressões analíticas completas da derivada primeira e segunda do potencial gravitacional com direções arbitrárias devido a um corpo poliedral homogêneo de faces poligonais, aplicando o teorema da divergência. O trabalho trata não só de prismas retangulares finitos, mas também infinitos. As anomalias da gravidade devido a um polígono uniforme são descritas em duas dimensões. O potencial magnético devido a um corpo uniformemente magnetizado é diretamente obtido pela derivada primeira do potencial gravitacional em uma dada direção. A regra para transladar a derivada segunda do potencial gravitacional em uma componente do campo magnético também é descrita pelo autor.

Cady (1980) calcula as anomalias gravitacional e magnética de prismas poligonais retos de comprimentos finitos. Nesse trabalho, uma equação é derivada para o campo gravitacional vertical devido a um corpo homogêneo. A equação pode ser separada em termos bidimensionais e termos exatos para as contribuições dos extremos do prisma. As intensidades magnéticas são expressas como um vetor soma, da qual a formulação do produto escalar pode ser obtida pela expansão binomial.

Golizdra (1981) calcula o campo gravitacional de um poliedro. Na solução de problemas diretos de gravimetria muita atenção é dada aos poliedros, desde os mais simples (tais como cubos, pirâmides triangulares, prismas triangulares, etc.) até os poliedros com N faces planas orientadas arbitrariamente. Poliedros são usados como modelos aproximados para o cálculo do campo de massas tridimensionais. O autor



mostra que o campo gravitacional total é igual a soma dos campos de cada poliedro individual.

Pohánka (1988) apresenta uma expressão ótima para o cálculo do campo gravitacional de um corpo poliedral homogêneo. Sua fórmula é derivada e transformada de modo que os cálculos numéricos do campo gravitacional sejam tão simples e velozes quanto possíveis, e que todas as operações numéricas sejam bem definidas para todos os valores dos parâmetros de entrada. O autor mostra que a expressão derivada é válida não somente para pontos externos ao corpo, mas também para pontos internos e sobre sua superfície.

Werner (1994) modela objetos irregularmente formados, tais como asteróides, núcleos cometários e pequenos satélites planetários utilizando poliedros. Com o mínimo esforço esse modelo pode incorporar importantes características da superfície, tais como grandes crateras. O autor desenvolve expressões de forma fechada para o potencial gravitacional exterior e as componentes da aceleração de poliedros com densidades constantes. Demonstra a utilidade da técnica ilustrando a superfície equipotencial do satélite marciano Pobos. A grande cratera Stickney é apresentada no modelo da superfície física e seu efeito é percebido na superfície equipotencial. As expressões para os poliedros são aproximações da realidade, visto que corpos celestes reais não são poliedros e contêm densidades irregulares. Assim, as expressões parecem desapropriadas para estudos analíticos, sendo que não se separam os termos keplerianos das funções perturbativas, mas podem ser certamente usadas para estudar órbitas ao redor de poliedros simples como os sólidos Platônicos.

Broucke (1995) faz derivações elementares do potencial gravitacional Newtoniano criado pelas diferentes distribuições de massa. Ele começa com vários objetos bidimensionais, tais como, retângulos, triângulos e polígonos. Enfatiza a presença de dois tipos de termos: logaritmo e arco tangente. Ele também fornece alguns teoremas que permitem reduzir vários potenciais para casos mais simples, mas com distribuição de massa equivalente. Usou esta propriedade para derivar expressões de forma fechada para o potencial criado por um poliedro para pontos tanto internos quanto externos.

Scheeres et al. (1996) utilizam um modelo físico do asteroide 4769 Castalia para investigar a dinâmica de órbitas fechadas ao seu redor. O método de análise proporciona uma base para estudos sistemáticos da dinâmica fechada de partículas girando uniformemente ao redor do asteroide. Os autores estabelecem que a integral de Jacobi existe para partículas orbitando esse asteroide, examinam a superfície de velocidade-zero, encontrando famílias de órbitas periódicas, e determinando suas estabilidades. Verificam que todas as órbitas síncronas e órbitas diretas dentro de aproximadamente três raios médios de Castalia são instáveis e são sujeitas a impactos ou escapes do asteroide. Órbitas retrógradas são principalmente estáveis e permitem que partículas tenham órbitas fechadas para a superfície do asteroide. Derivam um modelo que permite prever as condições de escape de uma partícula em órbita ao redor de Castalia, bem como as condições de captura (temporária) para um corpo exterior com órbita hiperbólica. Órbitas dentro de 1,5 km de Castalia são sujeitas a ejeção imediata do sistema. Órbitas hiperbólicas com uma  $V_{\infty} < 0,4 \text{ m/s}$  podem potencialmente ser capturadas por Castalia se o seu raio do periapsis estiver dentro de aproximadamente 2 km. Para Castalia essa região de captura é pequena, mas os resultados também aplicam-se para asteroides maiores cujas regiões de captura devem também ser maiores. Eles determinam o limite na velocidade de ejeção pela qual assegura um escape ou sofra um re-impacto como funções da posição sobre a superfície de Castalia. Desenvolveram um simples critério que permite estabelecer se uma partícula poderia ter sido ejetada do asteroide no passado e se irá colidir com a superfície no futuro.

Werner (1996) apresenta a derivação do potencial gravitacional do poliedro com densidade constante; seu potencial, força gravitacional, matriz gradiente de gravidade

das derivadas parciais de segunda ordem e potencial do Laplaciano. A derivação é analítica em todas as partes, não há quadraturas. Os resultados são de forma fechada em vez de uma expansão de séries infinitas e envolve somente funções elementares (arco tangente e logaritmo).

Werner e Scheeres (1996) determinam o potencial gravitacional de um poliedro de densidade constante envolvendo termo logaritmo por borda e termo arco tangente por face. O Laplaciano é utilizado para determinar se um ponto de prova está dentro ou fora de um corpo de forma irregular. Determinada a expressão para o potencial, esta é comparada com harmônicos convencionais e representações gravitacionais Mascon (concentração de massa) do asteroide 4769 Castalia.

Rossi et al. (1999) desenvolvem dois códigos independentes que podem integrar numericamente a órbita de uma partícula teste ao redor de corpos primários formados irregularmente. O primeiro código modela o corpo central como um poliedro com um número variável de faces triangulares enquanto que o segundo código é baseado na representação do corpo central em termos de ‘mascons’ (concentração de pontos de massas). Para checar a validade dos dois códigos, os autores calcularam o potencial gravitacional de uma esfera modelada por poliedros e pela aproximação mascon e propagaram a órbita de uma partícula em diferentes posições. Seus resultados mostraram que a modelagem de uma esfera foi bem representada tanto para o método de poliedros quanto para a aproximação mascon, com um erro menor que  $10^{-6}$ . Ainda nesse trabalho, Rossi et al. propagam a órbita de uma partícula ao redor de um elipsóide e apresentaram os principais elementos orbitais, fazendo uma comparação do período orbital para ambos os códigos.

Scheeres, Khushalani e Werner (2000) apresentam uma aproximação de mínimos quadrados para estimar a distribuição de densidade interna de um asteroide e aplicam o método para um asteroide com uma simples forma de poliedro. O método assume que o campo gravitacional do asteroide é medido para um grau e ordem específico e que um modelo poliedral do asteroide é disponível e tem sido discretizado em um número finito de poliedros com densidade constante. A aproximação é derivada usando-se várias

propriedades básicas das expansões gravitacionais nos harmônicos esféricos e pode conciliar explicitamente uma matriz de covariância completamente correlacionada para o campo gravitacional estimado. Para um asteróide discretizado em  $M$  poliedros de densidade constante e uma medida do campo gravitacional para grau e ordem  $N$ , o problema de mínimos quadrados é sub-determinado se  $M > (N+1)^2$  e é super-determinado se  $M < (N+1)^2$ . Para ambos os casos uma decomposição de valor singular aproximada produzirá soluções. Os autores aplicam a aproximação para um número de situações de testes ideais usando a forma do asteróide consistindo de 508 tetraedros. Apresentam ainda que o caso sub-determinado é sensível para distribuições de densidade não-uniformes. O caso sobre-determinado apresenta um bom desempenho, independente da distribuição de densidade inicial.

Scheeres et al. (2000) demonstram nesse trabalho que as interações gravitacionais mútuas entre um asteróide e um planeta ou um outro asteróide podem desempenhar uma importante função na modelagem do estado de spin do asteróide. Eles focalizam duas situações que o asteróide deve encontrar durante o tempo de vida. O primeiro é a região depois da criação de um asteróide primordial que sofreu uma ruptura gerando outros, quando deveriam ser muitos fragmentos de asteróides interagindo gravitacionalmente um com o outro antes de seu mútuo escape. O outro é a interação entre um asteróide e um planeta durante uma passagem hiperbólica. Em cada caso a interação gravitacional mútua pode alterar o estado de spin do asteróide. Os autores derivam classes analíticas dos efeitos e realizam simulações numéricas para explorar as interações e para dar exemplos. O efeito de muitas interações pequenas, tomadas de forma isolada, causa o aumento na velocidade de rotação do asteróide, embora isso deva ser balanceado em oposição a todos os outros efeitos que influenciam a velocidade de rotação. Inversamente, o efeito de uma simples e forte interação pode fundamentalmente mudar o estado de spin de um asteróide, causando a queda, e significativamente o aumento ou a diminuição global de seu momento angular. Os autores simulam interações de uma esfera de massa arbitrária com Toutatis e verificam que esses tipos de interações gravitacionais podem proporcionar explicações parciais para o corrente estado rotacional de Toutatis.

Romain et al. (2001) apresentam expansões em harmônicos elipsoidais do potencial gravitacional, tendo em vista que pequenos corpos do sistema solar são alvos da exploração espacial. Muitos desses corpos tem formas não-esféricas e as expansões em harmônicos esféricos usuais de seu campo gravitacional não são bem apropriadas para a modelagem de espaçonaves que orbitam ao redor desses corpos. A melhor solução para tal é o uso de expansões em harmônicos elipsoidais, ao invés da esférica usual. Os autores apresentam uma teoria matemática bem como uma aplicação real: a simulação de pouso sobre a superfície de um cometa de 1 km de dimensão. Eles mostram que através de expansões em harmônicos elipsoidais abaixo de grau 5 o erro de posição do pouso é da ordem de metros, enquanto que o erro correspondente para as expansões em harmônicos esféricos pode alcançar dezenas de metro.

O estudo de corpos celestes com formas irregulares, por exemplo, asteróides e cometas, têm sido destacados por sua grande importância nas atividades espaciais. Alguns trabalhos recentes que envolvem a exploração de corpos irregulares foram apresentados no 35<sup>th</sup> COSPAR SCIENTIFIC ASSEMBLY, realizado em Paris - França, em julho de 2004 e podem ser encontrados no CD de resumos ou no site do evento. Alguns trabalhos de principal interesse tratam da exploração de pequenos corpos. Citam-se:

1 – Várias missões espaciais para objetos próximos da Terra foram planejadas, como por exemplo: HAYABUSA (MUSES-C) é uma missão de retorno da espaçonave, projetada pelo Japão, para exploração do asteróide 25143 Itokawa; DAWN é uma missão de descoberta da NASA para exploração de dois asteróides: Vesta (julho de 2010 a julho de 2011) e Ceres (agosto de 2014 a julho de 2015); a missão ROSETTA lançada em fevereiro de 2004 irá explorar o núcleo do cometa 67/P Churyumov-Gerasimenko. (Barucci, M.A., 2004)

2 – A exploração do interior de um núcleo cometário (cometa 9P/Tempel 1) pela missão DEEP IMPACT. Os resultados do impacto com o cometa serão observados da Terra e proporcionarão informações únicas das propriedades físicas do núcleo cometário. (A'Hearn, M., 2004; Belton, M.J.S., 2004; Meech, K.J., 2004; Johnson, E., 2004 e Burchell, M.J., 2004)

## CAPÍTULO 3

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 3.1. Potencial Gravitacional de Formas Geométricas Bidimensionais

##### 3.1.1. Introdução

Nesse item são apresentadas as derivações elementares do potencial gravitacional Newtoniano criado por diferentes distribuições de massa. Alguns objetos unidimensionais e bidimensionais são apresentados, tais como, o segmento de reta, o retângulo e o triângulo. Todos esses potenciais são expressos na forma fechada e dois termos aparecem nessas expressões: logaritmo e arco tangente.

O objetivo desse estudo é explorar a praticidade de utilizar expressões de forma fechada para o potencial de alguns corpos homogêneos com formas bem definidas. Conhecido o potencial, determinam-se as componentes da aceleração a fim de estudar as possíveis órbitas de um veículo espacial em torno desses corpos.

Esse item trata-se de uma revisão detalhada do trabalho desenvolvido por Kellogg (1929) e Broucke (1995) e começa com o potencial do segmento de reta, principalmente porque aparecem expressões logarítmicas bem conhecidas e permitem uma relação entre corpos bi e tridimensionais. Os demais serão corpos bidimensionais (placas).

A aproximação será manter os cálculos tão elementares quanto possíveis, assim, não serão utilizados o Teorema da Divergência de Gauss ou o Teorema de Green. Todas as derivações são baseadas em tabelas de integrais elementares.

Segundo a lei da Gravitação Universal de Newton, a magnitude da força entre duas partículas, uma de massa  $m_1$ , situada num ponto P, e outra de massa  $m_2$ , situada num ponto Q, é dada como:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

em que  $r$  é a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$ ;  $\gamma$  é a constante de proporcionalidade que depende das unidades usadas.

Por definição chamamos o corpo no ponto  $P$  como sendo a partícula atraída, então, as componentes da força serão determinadas no ponto  $Q$ .

### 3.1.2. A Atração de um Segmento de Reta

Seja um segmento de reta (vara), com densidade linear  $\sigma$ , estendido no espaço do ponto  $P_1 (0, 0, 0)$  ao ponto  $P_2 (\ell, 0, 0)$ . No primeiro caso, a partícula atraída encontra-se alinhada com a vara, no ponto  $P (x, 0, 0)$ ,  $x > \ell$  (Figura 3.1). Considere que a vara seja dividida em intervalos pelos pontos  $\xi_0 = 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = \ell$ ; então, o intervalo  $(\xi_k, \xi_{k+1})$  carrega uma massa  $\sigma \Delta \xi_k$  que, segundo as leis físicas, é considerado como concentrado em algum ponto  $\xi'_k$  do intervalo. Assim, as forças devido à partícula ao longo do eixo  $x$ , para o ponto considerado, são (Kellogg, 1929):

$$F_{X_k} = -\frac{G\sigma\Delta\xi_k}{|x - \xi'_k|^2}; \quad F_{Y_k} = F_{Z_k} = 0 \quad (3.2)$$

em que  $G$  é a constante gravitacional de Newton.

A força devido a todo segmento de reta será o limite da soma das forças devido ao sistema de partículas, ou:

$$F_x = -G\sigma \int_0^\ell \frac{d\xi}{(x - \xi)^2} \rightarrow F_x = -\frac{G\sigma \ell}{x(x - \ell)} \quad (3.3)$$

$$F_y = F_z = 0$$

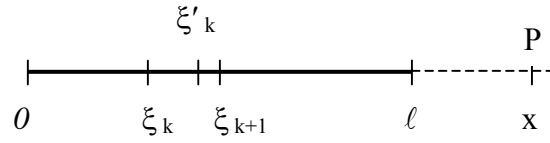


Figura 3.1 – Segmento de reta ao longo do eixo x

Consideremos agora uma segunda posição para a partícula atraída, no ponto  $P \left( \frac{\ell}{2}, y, 0 \right)$ , a distância  $r_k$  da partícula a um ponto  $Q_k \left( \xi'_k, 0, 0 \right)$  do intervalo  $(\xi_k, \xi_{k+1})$  é dada por

$$r_k = \overline{PQ_k} \rightarrow r_k^2 = \left( \xi'_k - \frac{\ell}{2} \right)^2 + y^2 \quad (3.4)$$

e a magnitude da força no ponto P é

$$\begin{aligned} F_{X_k} &= -\frac{G\sigma\Delta\xi_k}{r_k^2} \cdot \frac{\left( \xi'_k - \frac{\ell}{2} \right)}{r_k}; \\ F_{Y_k} &= -\frac{G\sigma\Delta\xi_k}{r_k^2} \cdot \left( -\frac{y}{r_k} \right); \\ F_{Z_k} &= -\frac{G\sigma\Delta\xi_k}{r_k^2} \cdot 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Os limites das somas dessas componentes dão as componentes da atração do segmento:

$$\begin{aligned} F_x &= -G\sigma \int_0^{\ell} \frac{\left( \xi - \frac{\ell}{2} \right)}{\left[ \left( \xi - \frac{\ell}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi; \\ F_y &= -yG\sigma \int_0^{\ell} \frac{d\xi}{\left[ \left( \xi - \frac{\ell}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{\frac{3}{2}}}; \\ F_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$



A primeira integral desaparece devido ao limite de integração (veja integrais 1 e 2 do item 3.1.5), logo:

$$F_x = F_z = 0; \quad F_y = -\frac{G\sigma\ell}{y\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2}} \quad (3.7)$$

### 3.1.3. A Atração de uma Placa Retangular Geral

Considere agora uma lâmina retangular homogênea e uma partícula localizada num ponto P qualquer fora do retângulo (Figura 3.2). Tomando os eixos (x, y) paralelos aos lados do retângulo, e seus vértices com relação a esses eixos são A(b, c), B(b', c), C(b', c'), e D(b, c') e as distâncias dos vértices ao ponto P(0, 0, Z) são:

$$\begin{aligned} d_1^2 &= b^2 + c^2 + Z^2 \\ d_2^2 &= b'^2 + c^2 + Z^2 \\ d_3^2 &= b'^2 + c'^2 + Z^2 \\ d_4^2 &= b^2 + c'^2 + Z^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Seja  $\Delta S_k$  um elemento de superfície, contendo o ponto  $Q_k$  localizado na placa retangular com coordenadas  $(x_k, y_k)$ . A distância  $r_k$  da partícula ao ponto  $Q_k$  é dada por:

$$r_k = \overline{PQ_k} \rightarrow r_k = \sqrt{(X - x_k)^2 + (Y - y_k)^2 + (Z - z_k)^2}$$

mas,  $z_k = 0$  e  $X = Y = 0$ ; então:

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + Z^2} \quad (3.9)$$

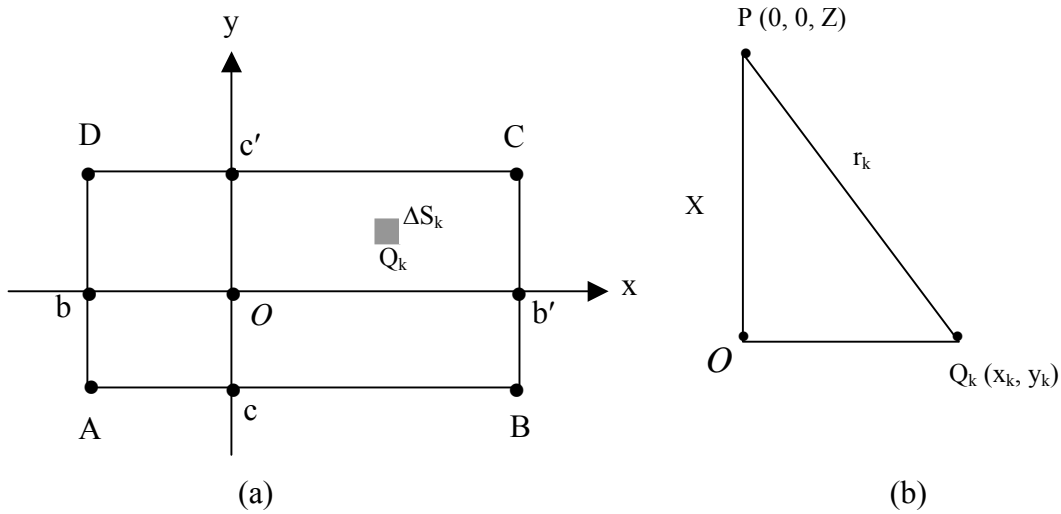


Figura 3.2 – Placa retangular: (a) a placa retangular encontra-se no plano (x, y); (b) têm-se as distâncias do elemento de área, que contém o ponto  $Q_k$ , ao ponto de prova P.

O potencial da placa retangular pode ser dado pela expressão:

$$U_k = \frac{G\sigma\Delta S_k}{r_k} \quad (3.10)$$

ou, utilizando a integral 3, tem-se:

$$U = G\sigma \int_c^{c'} \int_b^{b'} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}} = G\sigma \left\{ \int_c^{c'} \ln(b' + \sqrt{b'^2 + y^2 + Z^2}) dy - \int_c^{c'} \ln(b + \sqrt{b^2 + y^2 + Z^2}) dy \right\}$$

Resolvendo a integral acima (integral 4), encontramos:

$$U = G\sigma \left[ b' \ln \frac{(c' + d_3)}{(c + d_2)} + b \ln \frac{(c + d_1)}{(c' + d_4)} + c' \ln \frac{(b' + d_3)}{(b + d_4)} + c \ln \frac{(b + d_1)}{(b' + d_2)} \right. \\ \left. + Z \tan^{-1} \frac{b \cdot c'}{Z \cdot d_4} - Z \tan^{-1} \frac{b' \cdot c'}{Z \cdot d_3} + Z \tan^{-1} \frac{b' \cdot c}{Z \cdot d_2} - Z \tan^{-1} \frac{b \cdot c}{Z \cdot d_1} \right] \quad (3.11)$$

e a magnitude da força no ponto P (0, 0, Z) é

$$F_k = \frac{G\sigma\Delta S_k}{r_k^2} \quad (3.12)$$

Essa força tem os cossenos diretores

$$\frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}; \quad \frac{y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}; \quad -\frac{Z}{r_k}$$

As componentes da força são então, dadas por

$$F_x = G\sigma \int_c^{c'} \int_b^{b'} \frac{x_k dx_k dy_k}{(x_k^2 + y_k^2 + Z^2)\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}$$

$$F_y = G\sigma \int_c^{c'} \int_b^{b'} \frac{y_k dx_k dy_k}{(x_k^2 + y_k^2 + Z^2)\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}$$

$$F_z = G\sigma Z \int_c^{c'} \int_b^{b'} \frac{dx_k dy_k}{[x_k^2 + y_k^2 + Z^2]^{3/2}}$$

Resolvendo-se as integrais acima (integrais 3, 4 e 5), encontra-se:

$$F_x = G\sigma \ln \left[ \frac{d_2 + c}{d_1 + c} \cdot \frac{d_4 + c'}{d_3 + c'} \right]$$

$$F_y = G\sigma \ln \left[ \frac{d_4 + b}{d_1 + b} \cdot \frac{d_2 + b'}{d_3 + b'} \right] \quad (3.13)$$

$$F_z = G\sigma \left[ \tan^{-1} \frac{b \cdot c'}{Z \cdot d_4} - \tan^{-1} \frac{b' \cdot c'}{Z \cdot d_3} + \tan^{-1} \frac{b' \cdot c}{Z \cdot d_2} - \tan^{-1} \frac{b \cdot c}{Z \cdot d_1} \right]$$

Uma generalização dessas equações pode ser feita, no caso em que o ponto P tem coordenadas arbitrárias (X, Y, Z), ao invés de ser somente no eixo Z. Essa tarefa é simples porque os vértices A, B, C, D do retângulo têm localizações completamente arbitrárias (Broucke, 1995). Para obter um resultado mais geral, é suficiente substituir na equação do potencial (3.11), (b, b', c, c') respectivamente por (b - X, b' - X, c - Y, c' - Y). Isso dá uma nova expressão do potencial U como função das três variáveis (X, Y, Z). Como consequência, torna-se possível calcular as componentes da aceleração como o gradiente do potencial, ou seja:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial X}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial Y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial Z}. \quad (3.14)$$

Porém, é importante notar que nas derivadas parciais de U (X, Y, Z), os argumentos dos logaritmos e arco tangentes devem ser tratados como constantes (Broucke, 1995). Isso simplifica consideravelmente o trabalho.

As expressões gerais da aceleração possibilitam estudar as propriedades das órbitas ao redor de uma placa retangular.

#### 3.1.4. A Atração de uma Placa Triangular

Nesta seção será apresentado o potencial de um ponto P(0,0,Z) no eixo z criado por uma placa triangular especial, conforme a Figura 3.3, que está situado no eixo xy. O lado  $\overline{P_1P_2}$  é paralelo ao eixo x. As coordenadas de P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> são  $\vec{r}_1(x_1, y_1)$  e  $\vec{r}_2(x_2, y_2)$ , mas tem-se que  $y_1 = y_2$  e  $x_1 > x_2 > 0$ . As distâncias são dadas por:

$$d_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + Z^2; \quad d_2^2 = x_2^2 + y_1^2 + Z^2 \quad (3.15)$$

em que: d<sub>1</sub> é a distância de P (0, 0, Z) ao vértice (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) do triângulo no ponto P<sub>1</sub>;  
d<sub>2</sub> é a distância de P (0, 0, Z) ao vértice (x<sub>2</sub>, y<sub>1</sub>) do triângulo no ponto P<sub>2</sub>.

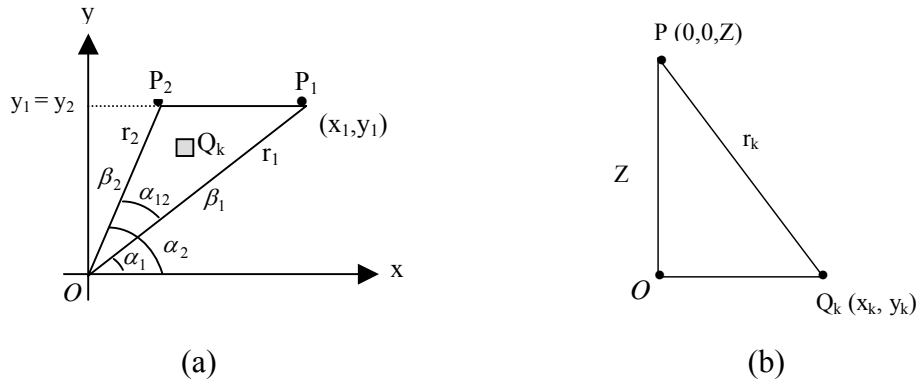


Figura 3.3 – Placa triangular: (a) triângulo  $\overline{OP_1P_2}$  localizado no plano  $(x, y)$ ; (b) distância entre o elemento de superfície, contendo um ponto  $Q_k$ , e o ponto P.

A distância  $r_k$  entre a partícula e o ponto  $Q_k$  é determinado por:

$$r_k = \overline{PQ_k} \rightarrow r_k = \sqrt{(X - x_k)^2 + (Y - y_k)^2 + (Z - z_k)^2}$$

mas, no ponto P  $(0, 0, Z)$ , a distância  $r_k$  torna-se:  $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + Z^2$  (3.16)

Usando a definição do potencial gravitacional, tem-se que o potencial no ponto P pode ser obtido por uma integração dupla em x e y:

$$U = G\sigma \int_0^{y_1} \int_{\beta_2 y}^{\beta_1 y} \frac{dx dy}{r_k} = G\sigma \int_0^{y_1} \ln(\beta_1 y + \sqrt{(\beta_1^2 + 1)y^2 + Z^2}) dy - G\sigma \int_0^{y_1} \ln(\beta_2 y + \sqrt{(\beta_2^2 + 1)y^2 + Z^2}) dy \quad (3.17)$$

Usando-se a integral 3 em x e a integral 6 em y da Tabela de Integrais (seção 3.1.5) e

sendo que  $\beta_1 = \frac{x_1}{y_1}$  e  $\beta_2 = \frac{x_2}{y_2}$ ; finalmente, o resultado é:

$$U = G\sigma \left\{ y_1 \ln \left[ \frac{x_1 + d_1}{x_2 + d_2} \right] + Z \tan^{-1} \left( \frac{\beta_1 Z}{d_1} \right) - Z \tan^{-1} \left( \frac{\beta_2 Z}{d_2} \right) - |Z| \alpha_{12} \right\} \quad (3.18)$$

em que  $\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$  representa o ângulo do triângulo à origem O que é mostrado na Figura 3.3.

O potencial deste triângulo no ponto P (0, 0, Z) sobre o eixo z deve ser invariante sob uma rotação arbitrária do triângulo ao redor do mesmo eixo z. Portanto, a Equação (3.18) também deve ser invariante sob esta rotação e seus quatro termos são individualmente invariantes. Esses termos podem ser expressos em função de quantidades invariantes, tais como os lados e os ângulos do triângulo. Então, a nova fórmula para o potencial é:

$$U = G\sigma \{ L_{12} + Z(S_1 + S_2) - |Z| \alpha_{12} \} \quad (3.19)$$

em que o termo logaritmo da Eq. (3.18) é determinado por:

$$L_{12} = \frac{C_{12}}{r_{12}} \ln \left[ \frac{d_1 + d_2 + r_{12}}{d_1 + d_2 - r_{12}} \right], \quad (3.20)$$

e os dois ângulos são da forma:

$$S_1 = \tan^{-1} \left( \frac{-S_z C_{12} d_1}{|Z| (r_1^2 - D_{12})} \right) ; S_2 = \tan^{-1} \left( \frac{-S_z C_{12} d_2}{|Z| (r_2^2 - D_{12})} \right) \quad (3.21)$$

Algumas expressões nas Equações (3.20) e (3.21) estão definidas como o produto escalar  $D_{12} = r_1 r_2 \cos \alpha_{12}$  e o produto vetorial  $C_{12} = r_1 r_2 \sin \alpha_{12}$  pelos vetores  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ . O símbolo  $S_z$  é o sinal da variável Z, e  $r_{12}$  é a distância entre  $P_1$  e  $P_2$  (Broucke, 1995).

O potencial de uma placa triangular arbitrária  $P_1P_2P_3$  pode ser obtido pela soma de três triângulos especiais da forma utilizada nesta seção (Figura 3.4). O potencial num ponto  $P(0, 0, Z)$  sobre o eixo  $Z$  é obtido através da soma de três expressões do tipo da Eq. (3.19). O resultado terá três termos logaritmos e seis termos arco tangentes.

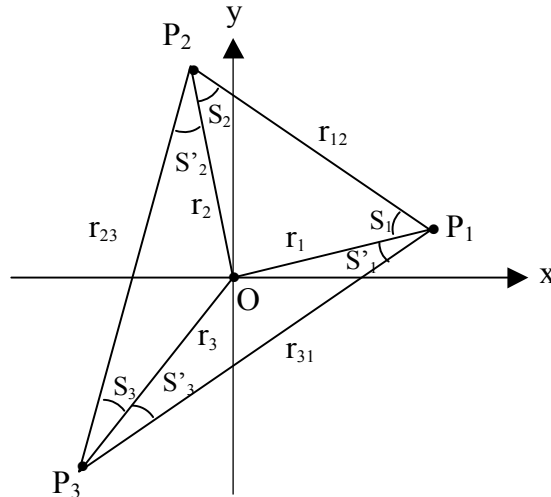


Figura 3.4 – Placa triangular  $\overline{P_1P_2P_3}$

Os termos logaritmos são:

$$\begin{aligned} L_{12} &= \ln[(d_1 + d_2 + r_{12})/(d_1 + d_2 - r_{12})]; \\ L_{23} &= \ln[(d_2 + d_3 + r_{23})/(d_2 + d_3 - r_{23})]; \\ L_{31} &= \ln[(d_3 + d_1 + r_{31})/(d_3 + d_1 - r_{31})]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Os seis termos arco tangente podem ser combinados em pares de três novos termos. Primeiramente calcula-se um numerador:

$$N = -Z(C_{12} + C_{23} + C_{31}) \quad (3.23)$$

e os denominadores:

$$\begin{aligned}
D_1 &= Z^2(r_1^2 + D_{23} - D_{31} - D_{12}) - C_{12}C_{31} ; \\
D_2 &= Z^2(r_2^2 + D_{31} - D_{12} - D_{23}) - C_{23}C_{12} ; \\
D_3 &= Z^2(r_3^2 + D_{12} - D_{23} - D_{31}) - C_{31}C_{23} .
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim, a soma dos ângulos é dada por:

$$\Sigma = \tan^{-1}\left(\frac{Nd_1}{D_1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{Nd_2}{D_2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{Nd_3}{D_3}\right) + S_z\pi \tag{3.25}$$

A função potencial é determinada por:

$$U = G\sigma \left\{ \frac{C_{12}}{r_{12}} L_{12} + \frac{C_{23}}{r_{23}} L_{23} + \frac{C_{31}}{r_{31}} L_{31} + Z\Sigma \right\} \tag{3.26}$$

Este resultado é invariante com respeito a uma rotação arbitrária ao redor do eixo z. Para obter o potencial num ponto P(x,Y,Z), é suficiente substituir todas as coordenadas dos vértices  $(x_i, y_i)$  por  $(x_i - X, y_i - Y)$  na Equação (3.26). Isso dá uma expressão mais geral do potencial U como função das três variáveis  $(X, Y, Z)$ . Como consequência é possível calcular as componentes da aceleração como o gradiente de U. É importante notar que, tomando as derivadas parciais de  $U(X, Y, Z)$ , os argumentos dos termos logaritmo e arco tangente foram tratados como constantes. Assim, as componentes da aceleração são determinadas por:

$$\begin{aligned}
F_x &= -G\sigma \left[ (y_2 - y_1)L_{12} / r_{12} + (y_3 - y_2)L_{23} / r_{23} + (y_1 - y_3)L_{31} / r_{31} \right] \\
F_y &= G\sigma \left[ (x_2 - x_1)L_{12} / r_{12} + (x_3 - x_2)L_{23} / r_{23} + (x_1 - x_3)L_{31} / r_{31} \right] \\
F_z &= G\sigma\Sigma
\end{aligned} \tag{3.27}$$



O estudo do potencial de formas simples, bem como as possíveis órbitas em torno de tais corpos, torna-se importante para obter conhecimento necessário ao estudo de sólidos tridimensionais, como poliedros.

### 3.1.5. Tabela de Integrais

Para o cálculo do potencial e das componentes da aceleração, algumas integrais indefinidas foram usadas. Algumas delas foram obtidas através de tabelas (Spiegel, 1981) ou pelo software Mathematica, outras no livro de Kellogg (Kellogg, 1929) e outras foram facilmente calculadas, por simples substituição. A seguir, listam-se as integrais utilizadas. Nas integrais 1 e 2 considere a abreviação:  $Y = \left(\xi - \frac{\ell}{2}\right)^2 + y^2$ , sendo que  $dY = 2\left(\xi - \frac{\ell}{2}\right) d\xi$ .

$$1) \int \frac{dY}{Y^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{Y}}$$

$$2) \int \frac{d\xi}{Y^{3/2}} = \frac{\xi}{y^2 \sqrt{Y}}$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

$$4) \int \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) dy = y \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) + x \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

$$- y + z \tan^{-1} \frac{y}{z} - z \tan^{-1} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$5) \int \frac{y dy}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{1}{x} \tan^{-1} \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{x}}$$

$$6) \int \ln(Ax + \sqrt{Cx^2 + z^2}) dx = x \ln(Ax + \sqrt{Cx^2 + z^2}) - x + z \tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right) + z \tan^{-1}\left(\frac{Az}{\sqrt{Cx^2 + z^2}}\right)$$

As constantes na integral 6, usadas para obter o potencial do triângulo, são:  $A = \beta_i$  and  $C = \beta_i^2 + 1$ , para  $i = 1$  e  $2$ .

Obs.: Note que na integral de Kellogg (Kellogg, 1929 - página 57) tem um erro de impressão no último dos cinco termos, verificado em cálculos e observado por Broucke (Broucke, 1995): o 'x' no numerador deve ser trocado por um  $\xi$ .

## 3.2. Potencial Gravitacional de Formas Geométricas Tridimensionais

### 3.2.1. Introdução

Nosso planeta – a Terra, embora não seja, é considerado um corpo esférico. Levando-se em conta seu achatamento, a Terra tem um potencial gravitacional muito bem determinado; o que é de extrema importância para missões espaciais, pois seu potencial pode influenciar muito no comportamento de um satélite artificial que orbita ao seu redor.

O problema de obter uma representação do potencial em torno de um corpo de forma irregular será abordado neste trabalho. Esses corpos podem ser, por exemplo, um asteróide, o núcleo de um cometa ou pequenos satélites planetários.

O poliedro pode ser definido como um corpo sólido tridimensional cuja superfície consiste de faces planares reunidas ao longo de bordas retas que terminam em pontos chamados vértices. Exatamente duas faces se encontram em cada borda. Três ou mais bordas e um número igual de faces se encontram em um vértice qualquer (Werner, 1996).

Para modelar asteróides, as faces dos poliedros podem ser largas e pequenas e podem representar importantes características da superfície, tais como topos e crateras. Porém,

não é de extrema necessidade a inclusão de detalhes topológicos nesse modelo, isto é, o corpo inteiro não precisa ser modelado com uma resolução altamente uniforme. De outra maneira, faz-se necessário que o estudo seja o mais geral possível. As expressões dadas por Werner (1996) admitem um poliedro não convexo com depressões em sua superfície, crateras, entre outros. Para o cálculo do potencial gravitacional de um asteróide, duas suposições não realistas devem ser feitas: (1) o asteróide é um poliedro e, (2) a densidade do poliedro é constante.

### **3.2.2. Descrição de um Poliedro**

O poliedro não é necessariamente simétrico ou regular. Em particular, diferentes faces podem ter diferentes números de bordas, diferentes comprimentos de borda e áreas.

O ângulo interior à borda é chamado de ângulo diedro. Por exemplo, os ângulos diedros de um cubo são todos de  $90^\circ$ .

Os cinco poliedros mais simples são denominados *sólidos Platônicos*. São eles: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Se os ângulos e o comprimento das bordas são iguais, o sólido Platônico é chamado regular (Figura 3. 5).

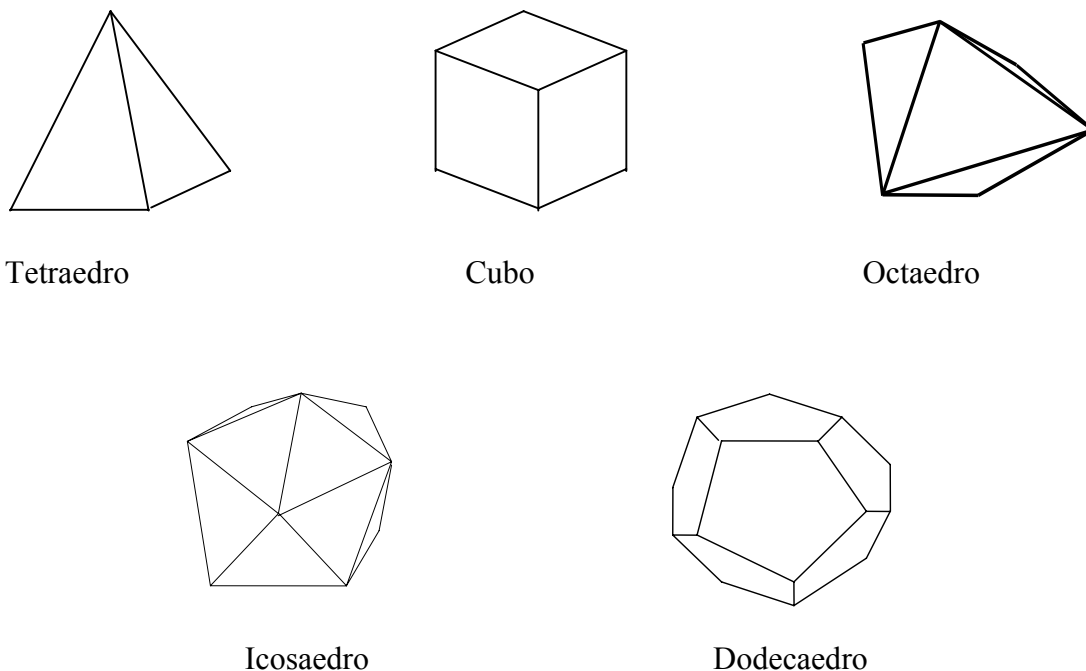


Figura 3.5 – Sólidos Platônicos.

O tetraedro é o poliedro mais simples, que consiste de quatro triângulos equiláteros formando a base de uma pirâmide triangular. Um cubo (também chamado de hexaedro) tem seis faces quadradas; considerando que os comprimentos de suas bordas sejam iguais, tem-se o chamado paralelepípedo retangular reto. O octaedro tem oito faces, novamente triângulos equiláteros. A superfície do icosaedro tem vinte triângulos equiláteros e, finalmente, a superfície do dodecaedro consiste de doze pentágonos. Todos esses corpos são convexos, porém os dois últimos não são muito conhecidos.

Para qualquer poliedro sem buracos, os números de vértices ( $V$ ), faces ( $F$ ) e bordas ( $B$ ) são relacionados pela expressão  $V + F - B = 2$ , um resultado atribuído a Euler. A tabela a seguir mostra o número de vértices, faces e bordas para os cinco sólidos Platônicos.

Tabela 3.1 – Número de vértices, faces e bordas para os cinco sólidos Platônicos.

	V	F	B
<b>Tetraedro</b>	4	4	6
<b>Cubo</b>	8	6	12
<b>Octaedro</b>	6	8	12
<b>Icosaedro</b>	12	20	30
<b>Dodecaedro</b>	20	12	30

Se todas as faces são triangulares, então  $B = \frac{3}{2}F$  (cada face tem três bordas, mas cada borda é formada por duas faces) e resulta nas expressões  $F = 2V - 4$  e  $B = 3V - 6$ .

Embora seja possível triangularizar as faces de um cubo ou de um dodecaedro com bordas diagonais, isso raramente é feito. Os três sólidos Platônicos com faces triangulares (tetraedro, octaedro, icosaedro) dão uma ampla flexibilidade, especialmente quando as faces são subdivididas para aumentar o número de vértices.

### 3.2.3. Representação Matemática e Cálculo do Potencial Gravitacional

O potencial gravitacional exterior  $U$  de um corpo tridimensional pode ser calculado através da expansão em séries infinitas em harmônicos esféricos, ou pelo cálculo da integral  $U = \int r^{-1} dm$ . A representação das séries infinitas é

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (3.28)$$

em que

U	é o potencial gravitacional;
G	é a constante gravitacional;
M	é a massa total do corpo;
R	é a distância de referência conveniente;
$(r, \phi, \lambda)$	são (raio, latitude, longitude) do ponto de prova no espaço livre;
$P_{nm}$	é o polinômio de Legendre;
$C_{nm}$ e $S_{nm}$	são coeficientes adimensionais determinados pelo cálculo da integral ou, no caso dos planetas, pela técnica linear de estimação (Kaula, 1966).

O termo isolado  $\frac{GM}{r}$  é chamado de parte Kepleriana e corresponde a  $n=0$ . Os termos  $n=1$  desaparecem quando a origem encontra-se no centro de massa.

Os harmônicos esféricos são uma boa aproximação para o cálculo do potencial de corpos esféricos, tal como a Terra. Porém, a velocidade de convergência das séries diminui quando o ponto de prova se aproxima do corpo. Além disso, as séries divergem quando o ponto de prova está dentro da esfera. Claramente, a aproximação dos harmônicos esféricos sofre com a tentativa de se expressar a gravitação próxima a um corpo não-esférico.

Uma outra maneira de se expressar o potencial é através do cálculo da integral  $U = \int r^{-1} dm = \int \sigma r^{-1} dq$ . Para que essa aproximação seja tratável, a densidade  $\sigma$  deve ser uma simples função de coordenadas  $q$ . Em muitos casos assume-se que a densidade é constante.

Para se calcular essa integral alguns caminhos são necessários para expressar os limites de integração. Corpos com descrições analíticas incluem o fio reto unidimensional e arco circular (1D), o retângulo bidimensional e disco circular (2D), a esfera, elipsóide tridimensional e o paralelepípedo retangular reto (3D).

O trabalho envolve o cálculo do potencial gravitacional exterior de um poliedro arbitrário – dado um poliedro, calculam-se as medidas gravitacionais no espaço ao seu redor. A integral de volume aproxima-se para uma solução de forma fechada.

### 3.2.4. Cálculo do Potencial Gravitacional de um Poliedro

Os principais resultados são obtidos com expressões intrínsecas, de forma fechada, para o potencial gravitacional exterior de diversos poliedros, incluindo força gravitacional, matriz gradiente de gravidade e potencial Laplaciano.

Para se calcular o potencial de um poliedro 3D, primeiramente obtém-se sub-expressões equivalentes para o potencial de um polígono 2D e para um fio reto 1D, os quais contêm sub-expressões envolvendo um logaritmo e um ângulo sólido.

Para tanto, faz-se necessária a definição do sistema de coordenadas, dando lugar a origem para o ponto de prova em que o campo gravitacional está sendo calculado, conforme a Figura 3.6.

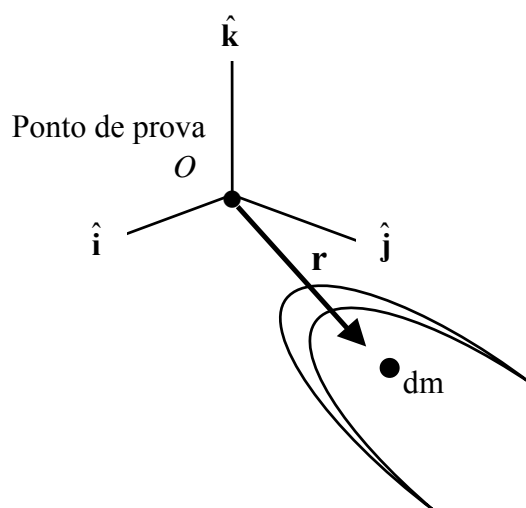


Figura 3.6 – Sistema de Coordenadas Cartesianas do ponto de prova.

Na Figura 3.6 tem-se que o vetor  $\mathbf{r} \equiv x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$  situa o elemento diferencial com relação ao ponto de prova e  $r$  é o seu comprimento.

### 3.2.4.1. Potencial do Volume como uma Integral de Superfície

A divergência do campo vetorial  $\frac{1}{2}\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/2r$  com relação às coordenadas do elemento diferencial é  $1/r$ . Essa identidade permite converter a definição de integral de volume do potencial  $U$  para uma integral de superfície via *Teorema da Divergência de Gauss*, com a condição de que a densidade  $\sigma$  seja constante:

$$\begin{aligned} U &\equiv G \iiint_M \frac{1}{r} dm = G\sigma \iiint_V \frac{1}{r} dv = \frac{1}{2} G\sigma \iiint_V \operatorname{div} \hat{\mathbf{r}} dV \\ &= \frac{1}{2} G\sigma \iint_S \hat{\mathbf{n}}^T \hat{\mathbf{r}} dS \end{aligned} \tag{3.29}$$

em que  $\hat{\mathbf{n}}$  denota o vetor normal a superfície. Esse resultado geral é válido para qualquer corpo tridimensional com densidade constante, o qual satisfaz as condições do Teorema da Divergência, que diz: o volume  $V$  deve ser limitado, sua superfície  $S$  deve ser contínua por partes e orientável, e as componentes do campo vetorial e suas derivadas primeiras devem existir e ser contínua em todo o volume e sobre sua superfície (Greenberg, 1978).

Segundo a expressão de Gauss a equação (3.29) pode ser escrita como uma derivada normal  $\frac{1}{2} \iint \frac{\partial r}{\partial n} dS$ .



### 3.2.4.2. Integral de Superfície Potencial de um Poliedro

Cada face  $f$  de um poliedro 3D, isto é, um polígono, dá seu próprio sistema de coordenadas Cartesianas pela regra da mão direita com a origem no ponto de prova. O versor  $\hat{\mathbf{k}}$  está alinhado com  $\hat{\mathbf{n}}_f$ , o vetor normal à superfície da face  $f$ . As componentes de  $\mathbf{r}$ , ou seja,  $(x, y, z)$  são expressas nesse sistema de coordenadas. A componente  $z$  não é somente uma constante, pois o plano da face deve estar acima ou abaixo do plano  $\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}$ . Isto é,  $z$  é uma coordenada e não uma distância.

Primeiramente separa-se a integral de superfície (Eq. (3.29)) em uma soma de integrais, uma por face:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \left( \iint_S \hat{\mathbf{n}}_f^T \hat{\mathbf{r}} dS \right) \\ &= \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \iint_S \hat{\mathbf{n}}_f^T \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) dS \\ &= \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \iint_S \frac{1}{r} dS \end{aligned} \quad (3.30)$$

Desde que todos os vetores  $\mathbf{r}$  terminem no plano da face, então a quantidade  $z = \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}$  é constante. Trazendo-se o vetor fora da integral, substitui-se  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_f$ , um vetor do ponto de prova para algum campo fixo no plano da superfície. Isso é usado somente para o cálculo de  $z$ .

### 3.2.4.3. Potencial de uma Região Plana

A integral  $\iint dS/r$  na Equação (3.30) expressa o potencial de uma região planar bidimensional  $S$ . Embora  $S$  seja a face de um poliedro (isto é, um polígono),

inicialmente é possível proceder como se fosse uma simples região planar 2D. Um termo conveniente é adicionado e subtraído e o Teorema de Green é utilizado. Uma integral  $\iint (z/r^3) dS$  aparece e é definida como  $\omega_f$ . Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{r} dS &= \iint_S \left( \frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right) dS - \iint_S \frac{z^2}{r^3} dS \\
&= \iint_S \left( \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} \right) dS - z \cdot \iint_S \frac{z}{r^3} dS \\
&= \iint_S \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r} \right) dS - z \cdot \omega_f \\
\iint_S \frac{1}{r} dS &= \oint_C \frac{1}{r} (x dy - y dx) - \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \tag{3.31}
\end{aligned}$$

em que  $C$  é o limite da região, no sentido anti-horário, de acordo com a regra da mão direita e  $\hat{\mathbf{n}}_f$  é o vetor normal a face. O potencial da região planar pode ser calculado como uma integral de linha em torno do limite e um outro termo envolve a região inteira.

#### 3.2.4.4. Potencial de um Polígono

A equação (3.31) apresenta o potencial de uma região planar 2D simples, que será especificada como sendo um polígono, ou seja, a face de um poliedro. A integral da Eq. (3.31) pode ser reescrita como a soma sobre todas as bordas  $b$ , ou seja:

$$\iint_{\text{polígono}} \frac{1}{r} dS = \sum_{b \in \text{bordas } b} \int_C \frac{1}{r} (x dy - y dx) - \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \tag{3.32}$$

A Figura 3.7 apresenta a distância  $s$  ao longo de uma borda típica ‘b’, medida a partir de um ponto arbitrário  $(x_b, y_b)$  sobre a borda. O vetor normal à borda,  $\hat{\mathbf{n}}_b^f$  permite o cálculo intrínseco do seno e do co-seno do ângulo  $\alpha_b$ , entre a borda e o eixo  $\hat{\mathbf{i}}$ . Cada borda tem um vetor normal  $\hat{\mathbf{n}}_b^f$ . Este vetor se encontra na face plana e é ortogonal a ambos os vetores da borda e normal à face. Define-se o ângulo  $\alpha_b$  em função do vetor normal à borda como:  $\cos \alpha_b = -(\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \hat{\mathbf{j}}$  e  $\sin \alpha_b = +(\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \hat{\mathbf{i}}$ .

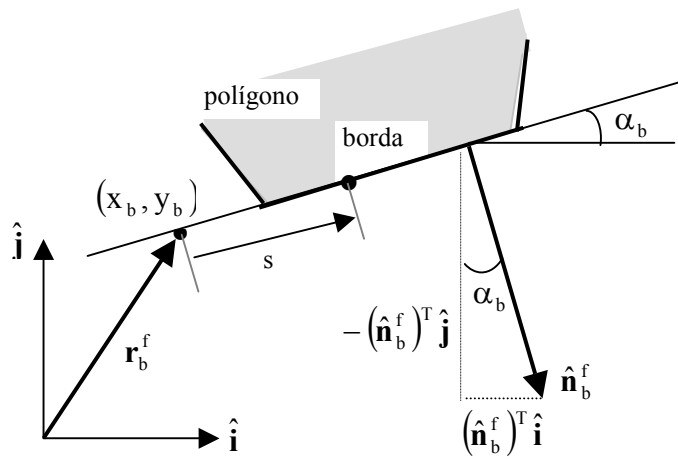


Figura 3.7 – Distância  $s$  ao longo da borda ‘b’ medida a partir de um ponto arbitrário.

Com essas definições é possível calcular a integral (Eq. (3.32)) para um típico polígono de borda  $b$ . Seja ‘ $s$ ’ a distância parametrizada ao longo da borda de algum ponto fixo  $(x_b, y_b)$  sobre a borda ou sua extensão infinita. As coordenadas 2D  $(x, y)$  de um ponto genérico ao longo da borda são:

$$\begin{aligned} x &= x_b + s \cos \alpha_b \\ y &= y_b + s \sin \alpha_b \end{aligned} \quad (3.33)$$

ou seja, a projeção da borda do polígono no sistema  $\hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{j}}$ .

Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
 \int_b \frac{1}{r} (x dy - y dx) &= \int_b \frac{1}{r} \left[ (x_b + s \cos \alpha_b) (\sin \alpha_b ds) \right. \\
 &\quad \left. - (y_b + s \sin \alpha_b) (\cos \alpha_b ds) \right] \\
 &= (x_b \sin \alpha_b - y_b \cos \alpha_b) \int_b \frac{1}{r} dS \\
 &= \left[ (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \hat{\mathbf{i}}_{x_b} + (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \hat{\mathbf{j}}_{y_b} \right] \int_b \frac{1}{r} dS \\
 &= (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f \int_b \frac{1}{r} dS \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{r}_b^f \equiv \hat{\mathbf{i}}_{x_b} + \hat{\mathbf{j}}_{y_b} + \hat{\mathbf{k}}_{z_b}$  é um vetor do ponto de prova para o ponto fixo sobre a borda  $b$  da face  $f$ . Desde que  $(\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \hat{\mathbf{k}} = 0$ ,  $\mathbf{r}_b^f$  não se encontra necessariamente no plano da face.

### 3.2.4.5. Potencial de um Fio

Pode-se considerar a integral da Equação (3.34) como o potencial de um fio reto 1D.

Adota-se o símbolo  $L_b^f \equiv \int_b \frac{1}{r} ds$  para uma borda geral  $b$  da face  $f$ . Werner (1994) mostra

que a integral definida pode ser expressa intrinsecamente em função das distâncias  $P_i$  e  $P_j$  do ponto de prova com relação aos dois extremos do comprimento da borda, o qual resulta em:

$$L_b^f \equiv \int_b \frac{1}{r} ds = \ln \frac{r_i + r_j + r_{ij}}{r_i + r_j - r_{ij}} \tag{3.35}$$

em que  $r_i$  e  $r_j$  são as distâncias do ponto de prova aos vértices  $P_i$  e  $P_j$ , respectivamente e  $r_{ij}$  é o comprimento da borda (Figura 3.8).

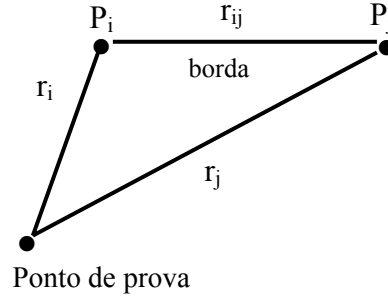


Figura 3.8 –  $L_b^f$  depende somente do tamanho e posição aparentes da borda.

### 3.2.4.6. Potencial do Poliedro

Dada a definição de  $L_b^f$ , a Equação (3.34) pode ser reescrita simplesmente como  $(\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f L_b^f$ . Por sua vez, o potencial de um polígono 2D (Eq. (3.32)) é dado por:

$$\iint_{\text{polígono}} \frac{1}{r} dS = \sum_{b \in \text{bordas do polígono}} (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f \cdot L_b^f - \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \quad (3.36)$$

Substituindo-se a Equação (3.36) na expressão do poliedro 3D (Eq. (3.30)), encontra-se:

$$U = \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \iint_S \frac{1}{r} dS$$

$$= \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f^T \hat{\mathbf{n}}_f \left[ \left( \sum_{b \in \text{bordas da face}} (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f \cdot L_b^f \right) - \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \right]$$

$$= \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \left( \sum_{\substack{b \in \text{bordas} \\ \text{da face}}} \mathbf{r}_f^T \hat{\mathbf{n}}_f (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f \cdot \mathbf{L}_b^f \right) - \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f^T \hat{\mathbf{n}}_f \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \quad (3.37)$$

A Equação (3.37) pode ser simplificada substituindo-se, primeiramente,  $\mathbf{r}_f \rightarrow \mathbf{r}_b^f$  pois  $\mathbf{r}_f^T \hat{\mathbf{n}}_f = z = \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_b^f$  para todo  $\mathbf{r}_b^f$  das bordas da face. Usando como exemplo uma borda típica,  $\overline{P_1 P_2}$  em comum com as faces A e B (Figura 3.9). Exatamente dois termos do duplo somatório são envolvidos com essa borda, um da face A e outro da face B. Pode-se escolher o mesmo vetor  $\mathbf{r}_b^f$  para ambas as faces, isto é,  $\mathbf{r}_{12}^A = \mathbf{r}_{21}^B = \mathbf{r}_{12}$ . Da mesma maneira, as integrais  $L_{12}^A = L_{21}^B = L_{12}$  são as mesmas para ambas as faces A e B, desde que dependam somente do comprimento da borda e da distância do ponto de prova até os dois pontos finais. O duplo somatório torna-se uma simples soma sobre as bordas do poliedro:

$$\begin{aligned} & \sum_{f \in \text{faces}} \left( \sum_{\substack{b \in \text{bordas} \\ \text{da face}}} (\mathbf{r}_b^f)^T \hat{\mathbf{n}}_f (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f \cdot \mathbf{L}_b^f \right) \\ &= \dots + (\mathbf{r}_{12}^A)^T \hat{\mathbf{n}}_A (\hat{\mathbf{n}}_{12}^A)^T \mathbf{r}_{12}^A \cdot \mathbf{L}_{12}^A + \dots + (\mathbf{r}_{21}^B)^T \hat{\mathbf{n}}_B (\hat{\mathbf{n}}_{21}^B)^T \mathbf{r}_{21}^B \cdot \mathbf{L}_{21}^B + \dots \\ &= \dots + \mathbf{r}_{12}^T \left[ \hat{\mathbf{n}}_A (\hat{\mathbf{n}}_{12}^A)^T + \hat{\mathbf{n}}_B (\hat{\mathbf{n}}_{21}^B)^T \right] \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{L}_{12} + \dots \\ &= \dots + \mathbf{r}_{12}^T \mathbf{E}_{12} \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{L}_{12} + \dots = \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{r}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot \mathbf{L}_b \end{aligned}$$

Em que  $\mathbf{r}_b$  é um vetor do ponto de prova para um ponto qualquer sobre a borda b ou sua extensão infinita (neste caso foi dispensado o uso do sobrescrito f).

Define-se uma matriz  $3 \times 3$  dada por  $\mathbf{E}_{12} \equiv \hat{\mathbf{n}}_A (\hat{\mathbf{n}}_{12}^A)^T + \hat{\mathbf{n}}_B (\hat{\mathbf{n}}_{21}^B)^T$  em função de duas faces e os vetores normais à borda associados com a borda  $\overline{P_1 P_2}$ . Cada borda do poliedro tem sua própria matriz do tipo  $\mathbf{E}_b$ .

Retornando para a Equação (3.37), é conveniente definir uma outra matriz  $\mathbf{F}_f \equiv \hat{\mathbf{n}}_f \hat{\mathbf{n}}_f^T$ , uma para cada face.

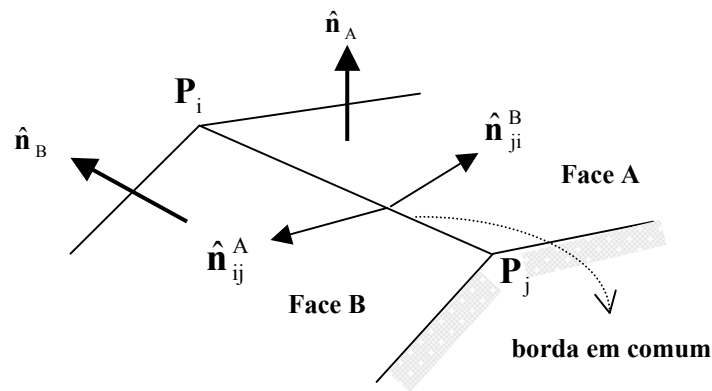


Figura 3.9 – Borda comum às faces A e B

Com os termos em comum para cada borda fatorados juntos e com as novas matrizes definidas, tem-se o primeiro resultado significativo a partir da Equação (3.37) – o *potencial de um poliedro com densidade constante*:

$$U = \frac{1}{2} G \sigma \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{r}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot L_b - \frac{1}{2} G \sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f^T \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \quad (3.38)$$

### 3.2.5. Derivadas Primeira e Segunda

Antes de derivar a expressão (3.38) para calcular a força gravitacional do poliedro 3D, deriva-se a força gravitacional de um polígono por dois caminhos diferentes. Termos

extras aparecem no segundo caminho, mas devem desaparecer, pois são ausentes no primeiro. Fazendo desaparecer os termos 2D, a expressão 3D é simplificada.

### 3.2.5.1. Força Gravitacional do Polígono

Derivando a integral definida do potencial de uma simples região planar, novamente é utilizado o teorema de Green:

$$\begin{aligned}
 \nabla \iint_S \frac{1}{r} dS &= -\left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}\right) \iint_S \frac{1}{r} dS \\
 &= -\hat{\mathbf{i}} \iint_S \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} dS - \hat{\mathbf{j}} \iint_S \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} dS - \hat{\mathbf{k}} \iint_S \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} dS \\
 &= -\hat{\mathbf{i}} \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y} (0) \right] dS - \hat{\mathbf{j}} \iint_S \left[ \frac{\partial}{\partial x} (0) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r}\right) \right] dS + \hat{\mathbf{k}} \iint_S \frac{z}{r^3} dS \\
 &= -\hat{\mathbf{i}} \oint_C \frac{1}{r} dy + \hat{\mathbf{j}} \oint_C \frac{1}{r} dx + \hat{\mathbf{k}} \omega_r
 \end{aligned}$$

em que o operador nabla  $\nabla$  significa  $-\left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}\right)$ , usado para calcular derivadas parciais com relação as coordenadas do ponto de prova.

Restringindo a região planar S como sendo um polígono, os limites da integral tornam-se a soma das integrais de linha ao longo do comprimento das bordas:

$$\nabla \iint_{\text{polígono}} \frac{1}{r} dS = \sum_{b \in \text{bordas}} \left[ -\hat{\mathbf{i}} \int_b \frac{1}{r} dy + \hat{\mathbf{j}} \int_b \frac{1}{r} dx \right] + \hat{\mathbf{k}} \omega_r$$



Derivando a Equação (3.32), utilizando a definição de  $L_b^f$  e de seno e cosseno do ângulo  $\alpha_b$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}\nabla \iint_{\text{poligono}} \frac{1}{r} dS &= \sum_{b \in \text{bordas}} \left[ -\hat{\mathbf{i}} \sin \alpha_b \int_b \frac{1}{r} ds + \hat{\mathbf{j}} \cos \alpha_b \int_b \frac{1}{r} ds \right] + \hat{\mathbf{k}} \omega_f \\ &= \sum_{b \in \text{bordas}} \left[ -\hat{\mathbf{i}} (\hat{\mathbf{i}}^T \hat{\mathbf{n}}_b^f) \cdot L_b^f - \hat{\mathbf{j}} (\hat{\mathbf{j}}^T \hat{\mathbf{n}}_b^f) \cdot L_b^f \right] + \hat{\mathbf{n}}_f \omega_f \\ \nabla \iint_{\text{poligono}} \frac{1}{r} dS &= - \sum_{b \in \text{bordas}} \hat{\mathbf{n}}_b^f L_b^f + \hat{\mathbf{n}}_f \omega_f\end{aligned}\quad (3.39)$$

Novamente, tem-se que  $\hat{\mathbf{k}}^T \hat{\mathbf{n}}_b^f = 0$ . A equação (3.39) expressa a força gravitacional de um polígono 2D.

Para revelar os termos que desaparecem, deriva-se mais uma vez a força gravitacional do polígono 2D através do potencial de um polígono (Eq. (3.36)). Tem-se ainda que  $\nabla \mathbf{r} = \nabla (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = -\mathbf{I}$ , como uma matriz identidade  $3 \times 3$  negativa. Então:

$$\begin{aligned}\nabla \left[ \sum_{b \in \text{bordas}} (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f \cdot L_b^f - \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \right] \\ = \sum_{b \in \text{bordas}} \left[ (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \nabla \mathbf{r}_b^f \cdot L_b^f + (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f \cdot \nabla L_b^f \right] - \hat{\mathbf{n}}_f^T \nabla \mathbf{r}_f \cdot \omega_f - \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \nabla \omega_f \\ = \left[ - \sum_{b \in \text{bordas}} \hat{\mathbf{n}}_b^f \cdot L_b^f + \hat{\mathbf{n}}_f \cdot \omega_f \right] + \left\{ \sum_{b \in \text{bordas}} (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b^f \cdot \nabla L_b^f - \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \nabla \omega_f \right\}\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos (em colchetes) são a Equação (3.39), ou seja, a própria força gravitacional do polígono. Assim, os dois últimos termos (em chaves) devem desaparecer e, para isso, tem-se que:

$$\sum_{b \in \text{bordas}} (\hat{\mathbf{n}}_b^f)^T \mathbf{r}_b \cdot \nabla L_b^f = \hat{\mathbf{n}}_f^T \mathbf{r}_f \cdot \nabla \omega_f \quad (3.40)$$

Pode-se notar que tais termos desaparecem quando se calcula o potencial de qualquer objeto 3D com densidade constante. Ou seja, as funções transcendentais são constantes com respeito ao operador gradiente. Entretanto tal fato foi apresentado para o polígono 2D.

Para o poliedro 3D, multiplica-se a Equação (3.40) por  $\mathbf{r}_f^T \hat{\mathbf{n}}_f$  sobre todas as faces do poliedro, expandindo o duplo somatório e reunindo os termos das bordas em comum. Tem-se como resultado:

$$\sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{r}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot \nabla L_b = \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f^T \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \nabla \omega_f \quad (3.41)$$

Multiplicando-se a Equação (3.40) somente pelo vetor normal a face,  $\hat{\mathbf{n}}_f$  pode-se encontrar:

$$\sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot \nabla L_b = \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \nabla \omega_f \quad (3.42)$$

### 3.2.5.2. Força Gravitacional do Poliedro

Para calcular a força gravitacional de um poliedro 3D, formalmente deriva-se o potencial resultante dado pela Equação (3.38):

$$\begin{aligned}
\nabla U &= \frac{1}{2} G \sigma \nabla \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{r}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot L_b - \frac{1}{2} G \sigma \nabla \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f^T \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \\
&= G \sigma \left[ - \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot L_b + \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} G \sigma \left\{ \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{r}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot \nabla L_b - \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f^T \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \nabla \omega_f \right\}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Os termos em chaves desaparecem devido a Equação (3.41) e a Equação (3.43) torna-se:

$$\nabla U = -G \sigma \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot L_b + G \sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \tag{3.44}$$

Esse é o segundo maior resultado: a força gravitacional de um poliedro com densidade constante.

### 3.2.5.3. Matriz Gradiente de Gravidade do Poliedro

Para calcular a matriz (Hessiana) gradiente de gravidade simétrica de derivadas parciais de segunda ordem, formalmente deriva-se a expressão da força gravitacional (Equação (3.44)):

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla U) &= -G \sigma \left( \nabla \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot L_b \right) + G \sigma \left( \nabla \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \right) \\
&= -G \sigma \left[ \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{E}_b \cdot L_b - \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \cdot \omega_f \right] \\
&\quad - G \sigma \left\{ \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot \nabla L_b - \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \nabla \omega_f \right\}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Os termos em chaves desaparecem devido a Equação (3.42) e a Equação (3.45) torna-se:

$$\nabla(\nabla U) = G\sigma \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{L}_b - G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \cdot \omega_f \quad (3.46)$$

Esse é o terceiro resultado.

### 3.2.5.4. Potencial Laplaciano do Poliedro

Embora o Laplaciano  $\nabla^2 U$  possa ser calculado como o traço da matriz gradiente de gravidade (Eq. (3.46)), uma derivação formal da equação que descreve a integral de superfície via Gauss, dada por  $\frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \left( \iint_S \hat{\mathbf{n}}_f^T \hat{\mathbf{r}} dS \right)$ , conduz a um simples resultado

como:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \nabla^2 \iint_f \hat{\mathbf{n}}_f^T \hat{\mathbf{r}} dS \\ &= \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \nabla^2 \iint_f \hat{\mathbf{k}}^T \left[ \hat{\mathbf{i}} \frac{x}{r} + \hat{\mathbf{j}} \frac{y}{r} + \hat{\mathbf{k}} \frac{z}{r} \right] dS \\ &= \frac{1}{2} G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \iint_f \nabla^2 \frac{z}{r} dS = G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \iint_f \frac{-z}{r^3} dS \\ \nabla^2 U &= -G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \iint_f d\omega = -G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \omega_f \end{aligned} \quad (3.47)$$

Esse é o último grande resultado. A soma  $-\sum \omega_f$  desaparece onde o ponto de prova está fora do poliedro (equação de Laplace), e é igual a  $-4\pi$  dentro (equação de Poisson).

O Laplaciano pode ser calculado sem a necessidade de que o potencial, a força gravitacional ou a matriz gradiente de gravidade sejam calculados, desde que todos os valores de  $\omega_f$  sejam obtidos. Um programa de computador pode usar o Laplaciano para determinar se um ponto de prova está fora ou dentro.

Isso conclui o estudo do potencial gravitacional.

### 3.2.6. Área de uma Esfera Unitária

Dois escalares adimensionais,  $L_b$  e  $\omega_f$ , aparecem nas expressões da gravitação do poliedro. A expressão logarítmica  $L_b$  é associada com cada borda e o ângulo sólido  $\omega_f = \iint (\Delta z / r^3)$  é associado com cada face. A Equação (3.35) indica como calcular  $L_b$  e o ângulo sólido  $\omega_f$  será calculado através de interpretação geométrica (área de um polígono esférico) a fim de evitar a integração (Werner, 1996).

#### 3.2.6.1. Área de um Polígono Esférico $|\omega_f|$

Um elemento diferencial de área planar  $dS$  é projetado em uma esfera unitária resultando em um elemento diferencial esférico  $d\omega$  que tem o mesmo sinal de  $z$ . Quando a região planar  $S$  é um polígono (isto é, a face de um poliedro), a imagem projetada sobre uma esfera unitária é um polígono esférico cujas bordas são grandes arcos circulares.

A área de um polígono esférico é:

$$|\omega_f| = \sum_{j=1}^n S_j - (n - 2)\pi, \quad (3.48)$$

em que  $n$  é o número de vértices e  $S_j$  são as medidas dos ângulos de vértices esféricos.

Essa expressão evita o cálculo da integral, ao invés disso, calcula-se os ângulos dos vértices de um polígono esférico,  $S_j$ .

### 3.2.6.2. Ângulos de Vértices do Polígono Esférico $S_j$

São calculados o seno e o cosseno de um ângulo de vértice individual  $S_1, S_2, \dots$  de um polígono esférico correspondendo ao polígono planar. Qualquer um desses vértices pode ser convexo ( $<180^\circ$ ) ou côncavo ( $>180^\circ$ ) – conforme a Figura 3.10; e o plano pode encontrar-se acima da origem ( $z > 0$ ) ou abaixo ( $z < 0$ ). Nos quatro casos, o vetor normal à face tem a mesma direção. Para calcular os ângulos,  $S_j$ , três vértices planares consecutivos são projetados em uma esfera unitária centrada no ponto de prova.

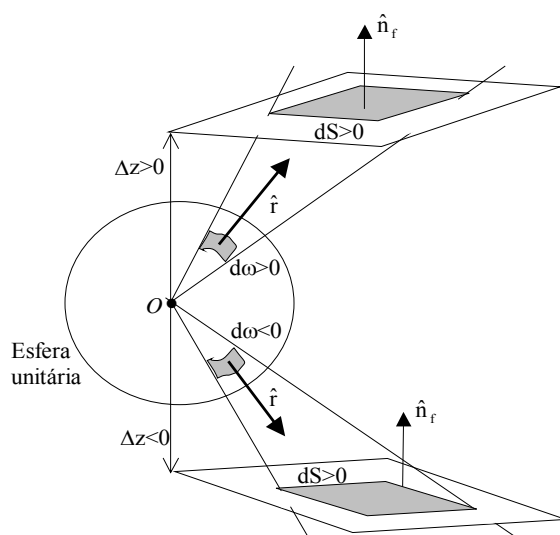


Figura 3.10 – Elemento de área planar  $dS$  é projetada em uma esfera unitária centrada no ponto de prova  $O$ . A área esférica resultante  $d\omega$  tem o mesmo sinal de  $\Delta z$ . Sejam  $r_i, r_j, r_k$  vetores do centro da esfera  $O$  para três vértices consecutivos  $P_i, P_j, P_k$  do polígono planar. Para calcular  $\text{sen} S_j$  e  $\text{cos} S_j$  são criados novos vetores  $s_{ji}$  e  $s_{jk}$  tangentes a esfera, encontrando-se nos planos  $O - P_i - P_j$  e  $O - P_j - P_k$ . Esses vetores são representados na Figura 3.11.

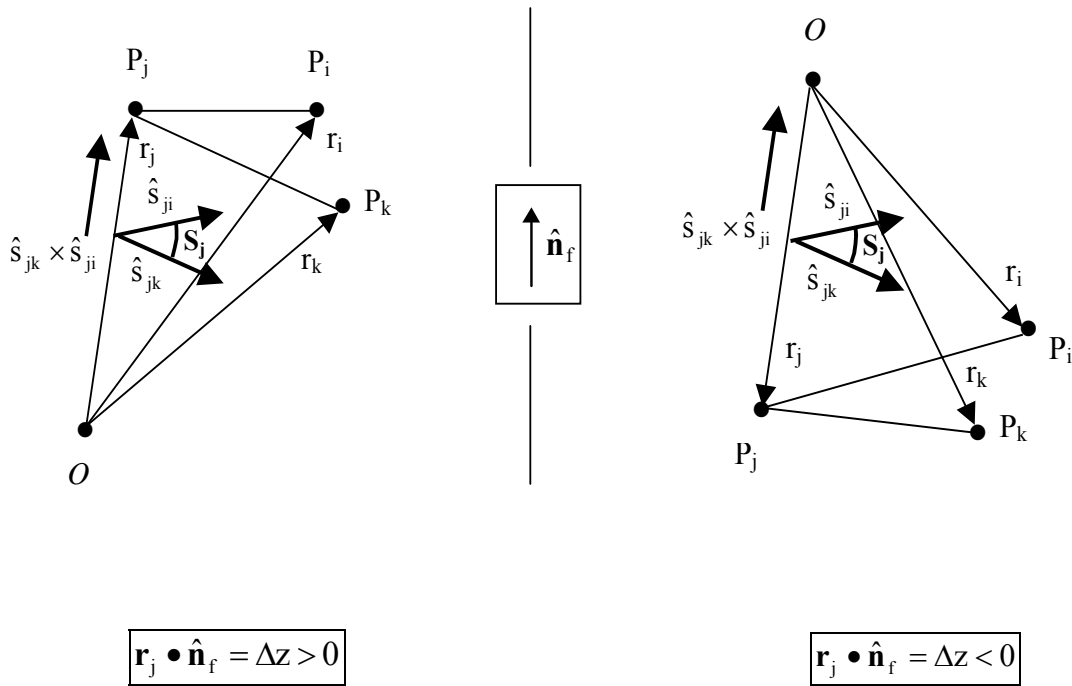


Figura 3.11 – Dados três vértices consecutivos  $P_i, P_j, P_k$ , o seno e o cosseno de  $S_j$  podem ser calculados construindo-se os vetores  $s_{ji}$  e  $s_{jk}$ .

Tem-se, então (Werner e Scheeres, 1997):

$$\cos S_j = \hat{s}_{ji}^T \hat{s}_{jk} = \frac{c_{ik} - c_{ij}c_{jk}}{\sqrt{1 - c_{ij}^2} \sqrt{1 - c_{jk}^2}}; \quad c_{ij} = \hat{r}_i^T \cdot \hat{r}_j \quad (3.49)$$

$$\sin S_j = \text{sinal}(z) \hat{r}_j \cdot (\hat{s}_{jk} \times \hat{s}_{ji}) = \text{sinal}(z) \frac{\hat{r}_i \cdot \hat{r}_j \times \hat{r}_k}{\sqrt{1 - c_{jk}^2} \sqrt{1 - c_{ij}^2}}$$

Tendo calculado os seno e cosseno, pode-se calcular cada  $S_j$  com o arco-tangente e soma-se para calcular  $|\omega_f|$ , ou seja:

$$\begin{aligned} |\omega_f| &= [S_1 + S_2 + \dots + S_n - (n - 2)\pi] \\ &= [\tan^{-1}(\dots) + \tan^{-1}(\dots) + \dots - (n - 2)\pi] \end{aligned} \quad (3.50)$$

e

$$\omega_f = \text{sinal}(z) \cdot |\omega_f| \quad (3.51)$$

Essa aproximação requer  $n$  termos arco tangentes calculados por polígono. Entretanto, uma outra aproximação é considerar  $|\omega_f|$  como uma seqüência de rotações planas, primeiro por  $S_1$ , então por  $S_2$  e assim por diante.



3 – A sonda HAYABUSA (MUSES–C), lançada em maio de 2003, para exploração do asteroide (25143) ITOKAWA. Esse asteroide é um NEA (Near-Earth Asteroid) e sua órbita cruza as órbitas da Terra e de Marte. Seu movimento é caótico e suas dimensões são 1x1x1 m. Essa será a primeira missão do Japão que retorna à Terra. (Yoshikawa, M., 2004; Demura, H. et al., 2004)

4 – Em janeiro de 2004 a sonda STARDUST encontrou o cometa Wild 2, proporcionando medidas quantitativas do fluxo de partículas de poeira e da distribuição de massa das partículas durante o encontro. Durante o encontro, material da coma foi coletado e armazenado em um recipiente esférico dentro da cápsula de retorno da espaçonave. (Economou, T.E. et al., 2004)

5 – A missão DAWN DISCOVERY está sendo desenvolvida pela NASA para exploração de Vesta e Ceres. A chegada à Vesta está prevista para outubro de 2011, fica operando por sete meses e depois segue para Ceres, chegando em agosto de 2015 onde obterá cinco meses de dados. (Russell, C.T., 2004)

6 – O programa da NASA, NEW HORIZONS será a primeira missão de reconhecimento científico do sistema Plutão-Caronte. Os principais objetivos científicos da missão serão: a caracterização da geologia global e morfológica de Plutão e Caronte e o mapeamento da composição da superfície de Plutão e Caronte, entre outros. (Weaver, H.A. et al., 2004)

7 – A missão DEEP SPACE 1 encontrou o cometa 19P/Borrelly em setembro de 2001. Seu encontro foi observado da Terra, retornando um conjunto de imagens e dados que são utilizados para o estudo da coma. (Boice, D.C., 2004; Ho, T.M. et al., 2004)

8 – A espaçonave ROSETTA, originalmente programada para ser lançada em janeiro de 2003 para o cometa Wirtanen, foi lançada em fevereiro de 2004 com um novo alvo, o cometa 67/P Churyumov-Gerasimenko, para a exploração de sua superfície. A missão será nominalmente terminada em dezembro de 2015, quando o

cometa terá alcançado aproximadamente 2 a.u. em sua trajetória de saída. (Ulamec, S. et al., 2004; Wirth, K.R., 2004)

Além desses trabalhos que representam a importância das missões espaciais para o estudo de corpos irregulares, um dos trabalhos vistos no evento teve uma atenção especial por se tratar do estudo do potencial gravitacional de uma das luas de Júpiter, Amalthea, e suas implicações sobre a trajetória de uma espaçonave. Nesse trabalho, a modelagem do corpo é baseada na integração numérica de elementos de volume infinitesimais, utilizando coordenadas elípticas. Os coeficientes do potencial gravitacional são derivados com o segundo método de Neumann até grau e ordem 6 para os casos homogêneo e heterogêneo. Baseados nos dados de trajetória da sonda Galileo, fornecidos pelo Jet Propulsion Laboratory (JPL), os autores estudam o impacto da trajetória da Galileo devido ao campo gravitacional (Weinwurm, G. and Weber, R.).

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS NUMÉRICOS PARA FORMAS GEOMÉTRICAS BIDIMENSIONAIS

#### 4.1. Introdução

Esse capítulo trata dos resultados numéricos obtidos para corpos bidimensionais (placa triangular e retangular). Inicialmente, tem-se o estudo do potencial gravitacional e das trajetórias ao redor das placas geométricas. Com o potencial determinado, faz-se um estudo da topologia do espaço de fase do problema de dois corpos (placa-partícula). São estudadas as regiões de estabilidade e instabilidade (órbitas periódicas, quase-periódicas e caóticas) e as regiões de colisão. O método utilizado para esse estudo é o método de superfície de secção de Poincaré. Neste capítulo encontra-se uma breve descrição do método e um estudo global do espaço de fase ao redor de tais placas. Os resultados são apresentados em secções de Poincaré  $(x, \dot{x})$ , de modo que se pode identificar a natureza das trajetórias, identificando-se as regiões de colisão e algumas ressonâncias.

Antes de iniciar o estudo de órbitas ao redor de corpos tridimensionais, considerou-se de grande importância o estudo do comportamento de uma partícula ao redor de uma placa geométrica simples, principalmente nas proximidades de seus vértices. Com isso, o estudo da órbita ao redor de tais placas também levou em conta o comportamento da partícula teste quando esta se encontra muito próxima de um de seus vértices, analisando-se o comportamento do semi-eixo da órbita, da excentricidade, da anomalia verdadeira e do argumento do pericentro ao longo do tempo. Nessa análise se faz uma previsão do comportamento da partícula que orbita ao redor de sólidos tridimensionais cujas formas são aproximadas por um conjunto de tetraedros contendo um número finito de vértices.

## 4.2. Estudo do Potencial Gravitacional de Placas Geométricas Planas

O desenvolvimento analítico de expressões para o potencial e componentes da aceleração de algumas formas geométricas é feito nesse trabalho com o objetivo principal de obter conhecimento prático e teórico para que se possa aplicar posteriormente em formas irregulares mais complexas, como o poliedro. Além disso, as expressões da aceleração permitem fazer um estudo dos possíveis tipos de órbita em torno desses sólidos. As expressões analíticas do potencial e da atração gravitacional encontram-se no Capítulo 3 desse trabalho.

Este capítulo apresenta os primeiros testes do potencial gravitacional de corpos bidimensionais antes de iniciar o estudo de trajetórias. Descreve também o estudo do espaço de fase de trajetórias ao redor de alguns corpos homogêneos com formas geométricas bem definidas. Expressões de forma fechada, derivadas do potencial gravitacional das placas retangular e triangular, entre outras, foram obtidas por Kellogg (1929) e Broucke (1995) e envolvem somente funções elementares (arco tangente e logaritmo). Com essas expressões estudou-se o espaço de fase de trajetórias de uma partícula ao redor de dois corpos diferentes: a placa retangular e a placa triangular. Esse estudo fez uso da técnica de superfície de secção de Poincaré que permite determinar a localização e o tamanho das regiões estáveis e caóticas no espaço de fase (Winter, 2000).

A placa retangular utilizada tem dimensões arbitrárias e seus lados são dados por  $\ell = 2$ . Utilizou-se também um triângulo retângulo, cujos vértices arbitrários foram escolhidos de forma que sua área e massa sejam unitárias ( $GM = 1$ ). Tanto o triângulo quanto o retângulo estão no plano  $XY$ , com os seus centros de massa na origem do sistema.

Alguns testes simples verificaram a coerência das equações analíticas, como por exemplo, o fato do potencial gravitacional obtido para tais corpos decrescer com a distância.

Uma importante generalização das Equações 3.11 e 3.26 pode ser feita, no caso em que o ponto P tem coordenadas arbitrárias (X, Y, Z), ao invés de ser somente no eixo Z. Para o retângulo, essa tarefa é bastante simples porque seus vértices A, B, C e D têm localizações completamente arbitrárias. Dessa forma, substitui-se (b, b', c, c') respectivamente por (b - X, b' - X, c - Y, c' - Y) na equação do potencial (3.11). Para o triângulo, é suficiente substituir todas as coordenadas dos vértices  $(x_i, y_i)$  por  $(x_i - X, y_i - Y)$  na Eq. (3.26). Essas generalizações dão expressões para o potencial U do retângulo e do triângulo como uma função das variáveis (X, Y, Z). Então, torna-se possível calcular as componentes da aceleração como o gradiente do potencial. É importante notar que, tomando as derivadas parciais de U(X, Y, Z), os argumentos dos logaritmos e arco tangentes foram tratados como constantes por Broucke (1995). Essa aproximação foi citada no livro de MacMillan (1958, páginas 79-81).

Neste trabalho é possível verificar a validade de tal aproximação feita nas derivadas parciais de U(X, Y, Z). Foram obtidas as expressões para a aceleração através da derivada do potencial, considerando os termos logaritmo e arco tangente como constantes, e no segundo caso levando-se em conta os argumentos logaritmo e arco tangente. Comparando-se as expressões nos dois casos, verifica-se que, para o retângulo, o erro é da ordem de  $10^{-16}$  e para o triângulo observa-se um erro da ordem de  $10^{-14}$ . Isso mostra a validade de tal aproximação, o que simplifica o trabalho consideravelmente.

**Retângulo:** As coordenadas que descrevem os vértices do retângulo são definidas por:  $b' = c' = 1$  e  $b = c = -1$ , ou seja,  $\ell = 2$ . As coordenadas da partícula, ou ponto de prova, são definidas por: P (0, 0, Z), com Z variando de 1 a 200. As constantes usadas são a constante gravitacional de Newton e a densidade do material e são dadas por  $G = \rho = 1$ .

A Figura 4.1 representa o potencial da placa retangular em função da distância da partícula localizada no eixo z.

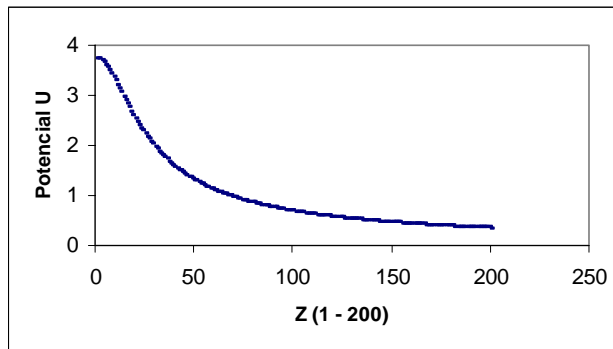


Figura 4.1 – Potencial da placa retangular –  $P(0, 0, Z)$  com  $Z$  variando de 0 a 200.

**Triângulo:** As coordenadas do triângulo foram escolhidas de forma que o triângulo seja equilátero, com área unitária e que seja centrado na origem do sistema. As coordenadas são dadas por:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -0.438691337650831; & x_2 &= -0.438691337650831; & x_3 &= 0.877382675301662; \\
 y_1 &= 0.759835685651593; & y_2 &= -0.759835685651593; & y_3 &= 0.0000000000000000.
 \end{aligned}$$

As coordenadas do ponto de prova são:  $P(X, Y, Z) = P(0, 0, Z)$ , com  $Z$  variando de 1 a 200. As constantes são:  $G = \rho = 1$ .

A Figura 4.2 representa o potencial para a placa triangular em função da distância da partícula localizada no eixo  $z$ .

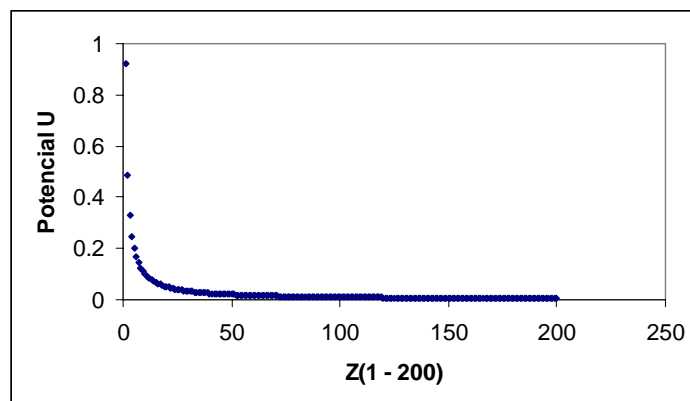


Figura 4.2 – Potencial da placa triangular –  $P(0, 0, Z)$  com  $Z$  variando de 0 a 200.

### **4.3. Superfície de Secções de Poincaré – Estudo do Espaço de Fase ao Redor do Retângulo e do Triângulo**

O mapeamento do espaço de fase de trajetórias ao redor de figuras geométricas planas mostrou-se muito interessante, com a classificação da localização e tamanho das regiões regulares e de colisão ao redor de tais placas. O método de secções de Poincaré é uma ferramenta muito útil para o estudo do espaço de fase, sendo assim, alguns trabalhos tiveram grande importância para o seu entendimento e implementação, tais como: Winter e Murray (1994) e Murray e Dermott (1999). Destaca-se o trabalho de Winter (2000) que apresenta uma família de órbitas periódicas ao redor da Lua em um sistema girante Terra-Lua-partícula. Tomando o problema planar e restrito de três corpos, o autor mostra a evolução dessa família de órbitas periódicas, usando a técnica de superfície de secção de Poincaré. A amplitude máxima de oscilação da órbita periódica é determinada e pode ser usada como um parâmetro de medida do grau de estabilidade no espaço de fase para tais órbitas. O trabalho de Winter e Vieira Neto (2002) explora regiões de órbitas estáveis ao redor da Lua, descreve numericamente a localização e o tamanho aparente das regiões estáveis, adotando a aproximação do tempo de captura temporária. Usando superfície de secção de Poincaré, os autores determinam as regiões do espaço de condição inicial cujas trajetórias são estáveis, considerando o critério de que as trajetórias não escapam da Lua durante um período de integração de  $10^4$  dias.

Para determinar os elementos orbitais de um veículo espacial (ou partícula teste) num instante qualquer é necessário conhecer sua posição  $(x, y)$  e sua velocidade  $(\dot{x}, \dot{y})$ . Isso corresponde a um ponto no espaço de fase de quatro dimensões. Calculando-se a energia total do sistema tem-se uma superfície tridimensional neste espaço de fase. Para um valor fixo da energia total somente três das quatro quantidades são necessárias, por exemplo,  $x, y$  e  $\dot{x}$ , sendo que  $\dot{y}$  será determinado pela energia total do sistema.

Definindo-se um plano, por exemplo,  $y = 0$  no espaço tridimensional resultante, os valores de  $x$  e  $\dot{x}$  podem ser marcados toda vez que a partícula tem  $y = 0$  (Figura 4.3). A ambigüidade no sinal de  $\dot{y}$  é removida por considerar somente aqueles cruzamentos

com um sinal fixo de  $\dot{y}$ . Este é o método da superfície de secção de Poincaré. A secção é obtida fixando-se o plano no espaço de fase e marcando os pontos quando a trajetória intercepta esse plano em uma direção particular (Winter e Murray, 1994).

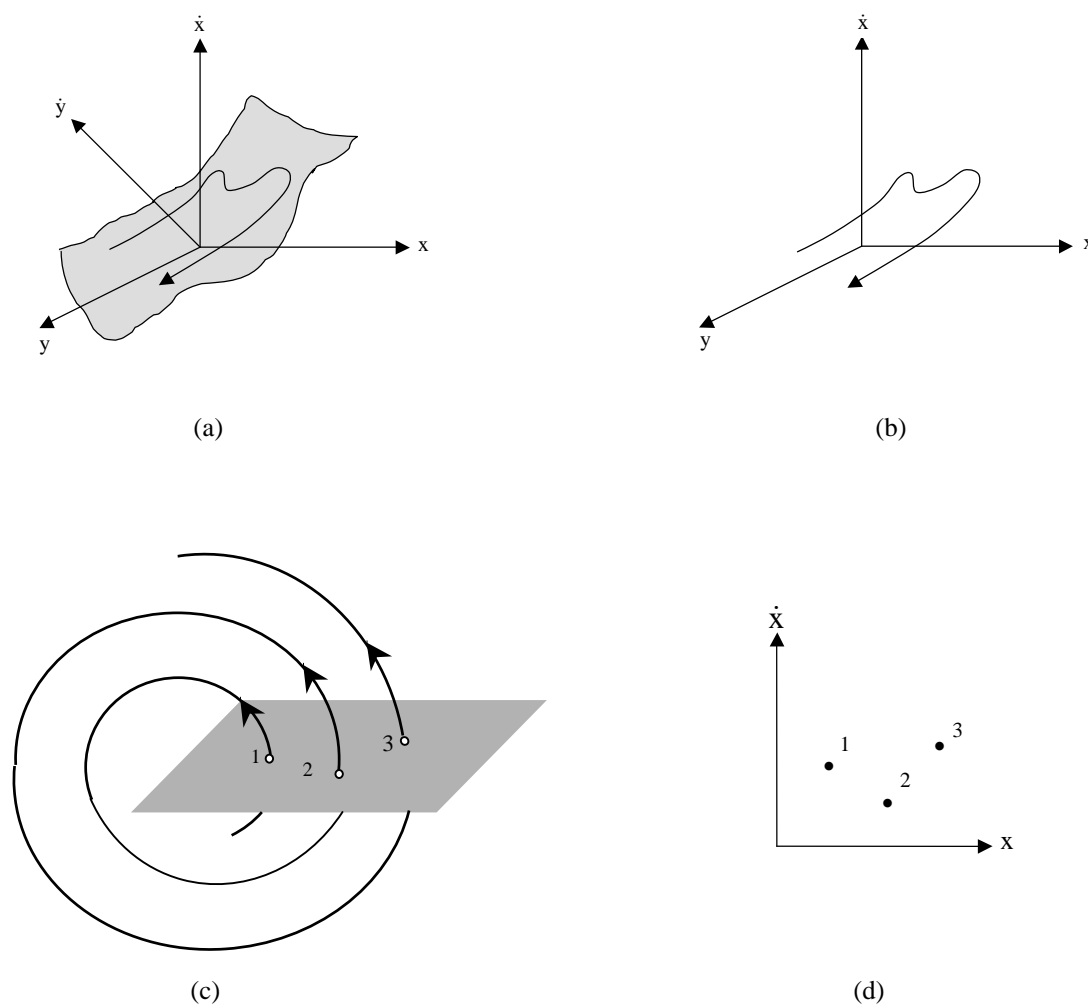


Figura 4.3 – (a) espaço de fase quadridimensional  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$  – considerando um sistema com dois graus de liberdade; (b) espaço de fase tridimensional  $(x, \dot{x}, y)$ , utilizando a constante de energia  $E$ ; (c) interseções da trajetória com uma superfície de referência; (d) espaço de fase bidimensional  $(x, \dot{x})$  – considerando, por exemplo,  $y = 0$ .



A técnica de superfície de secção de Poincaré é adequada para determinar a natureza regular ou caótica das trajetórias. Se existirem curvas fechadas (ilhas) bem definidas, então a trajetória é regular; caso contrário, se houver um espalhamento de pontos, a trajetória é caótica. Na Figura 4.4, tem-se os exemplos de secções de Poincaré de uma trajetória regular e outra caótica. Na trajetória regular a partícula intercepta o plano  $y = 0$ , descrevendo quatro regiões bem definidas. Essas ilhas irão delimitar o espaço de fase em termos da amplitude de libração ao redor de uma órbita periódica.

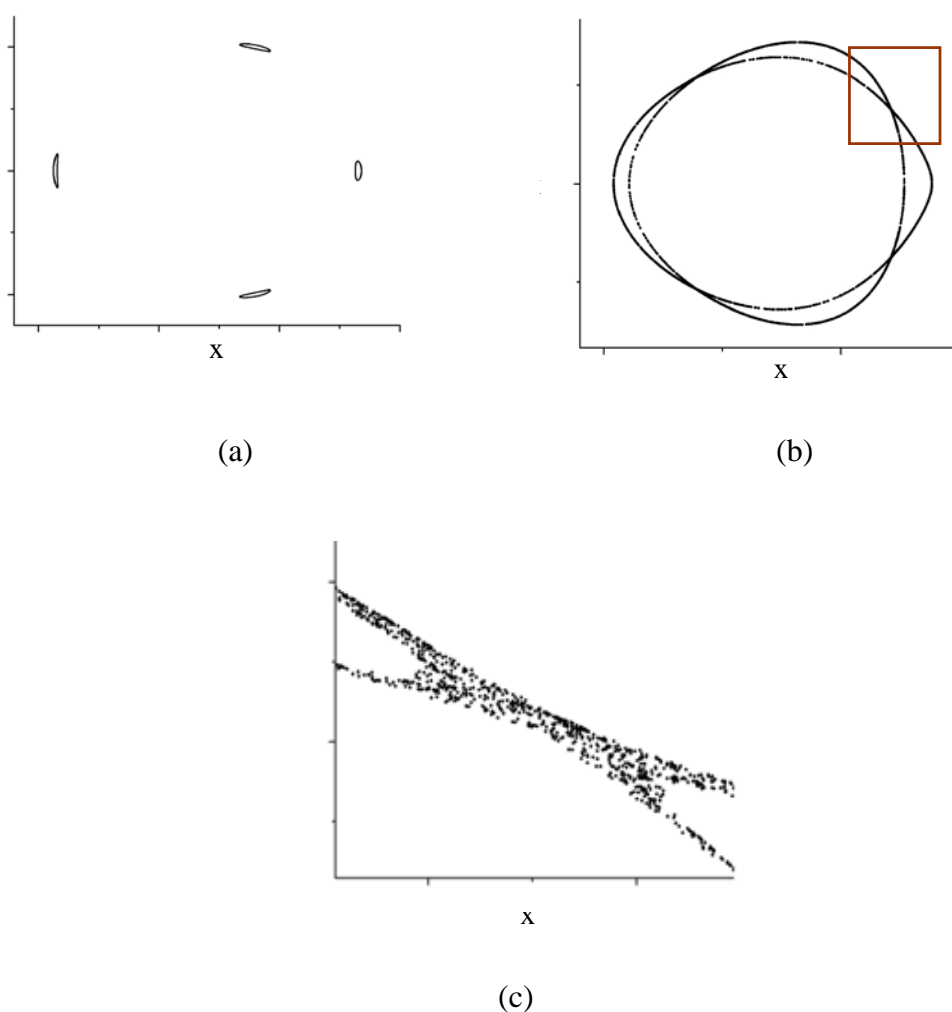


Figura 4.4 – Exemplo de superfície de secção de Poincaré para um movimento: (a) regular; (b) caótico e (c) ampliação da região caótica marcada na figura 4.4b.

A Figura 4.4a mostra uma superfície de secção de uma trajetória obtida com os valores de  $x$  e  $\dot{x}$  sempre que  $y = 0$  e  $\dot{y} < 0$ . A figura mostra quatro “ilhas” distintas. O fato de apresentar ilhas é uma característica do movimento de ressonância quando representado como uma superfície de secção. Se escolhermos um valor de  $x_0$  no centro da ilha, com  $\dot{x} = 0$ , então a trajetória será uma sucessão de quatro pontos. Esses pontos são ditos pontos periódicos do mapa de Poincaré, pois o sistema retorna para os mesmos pontos todas as quatro vezes que a trajetória cruza a seção.

A Figura 4.4b mostra que, ao invés de pontos que representam curvas bem definidas (caso regular), tem-se um espalhamento de pontos registrados aleatoriamente dentro de uma região confinada. Esses pontos começam a preencher certa área do espaço de fase. Órbitas caóticas têm a característica de serem sensíveis às condições iniciais. A Figura 4.4c mostra uma ampliação da região marcada na Figura 4.4b, assim pode-se verificar o espalhamento de pontos.

As Figuras 4.5a e 4.5b representam as trajetórias correspondentes às seções de Poincaré das Figuras 4.4a e 4.4b, respectivamente.

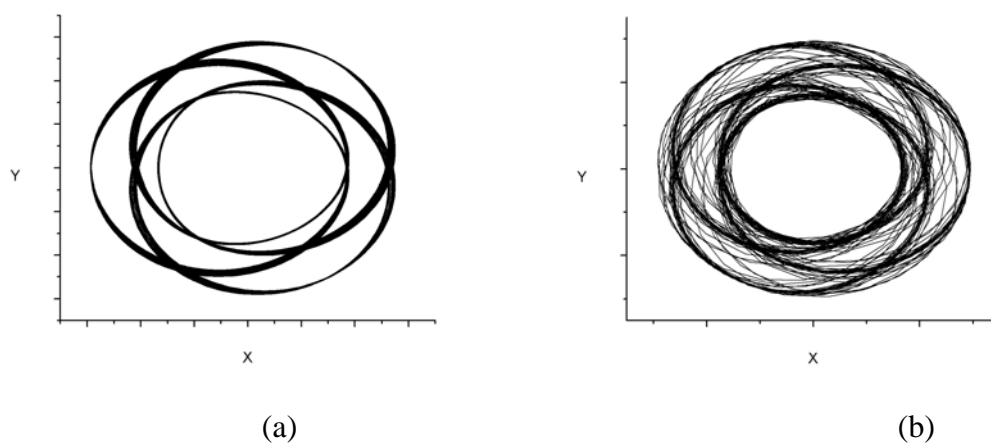


Figura 4.5 – Trajetórias correspondentes às seções de Poincaré (Figura 4.4) para o movimento (a) regular e (b) caótico.

### 4.3.1 Condições Iniciais do Problema

Para estudar as regiões ao redor das placas triangular e retangular, tem-se as seguintes condições iniciais:

- Considera-se o sistema baricêntrico, ou seja, as placas estão centradas na origem do sistema.
- Para o quadrado, tem-se o caso particular de que todos os lados são iguais a 2, ou seja,  $\ell = 2$ .
- Para o triângulo, os vértices são escolhidos de modo que seja um triângulo eqüilátero com área  $A = 1$  e um dos lados do triângulo é paralelo ao eixo  $y$ .
- As constantes utilizadas são: *constante gravitacional* e *densidade do material*, respectivamente,  $G = \rho = 1$ .
- A posição inicial da partícula teste é escolhida arbitrariamente de modo que se encontre ao lado direito da placa quadrada e no sentido anti-horário e para a placa triangular encontra-se ao lado esquerdo e no sentido anti-horário.

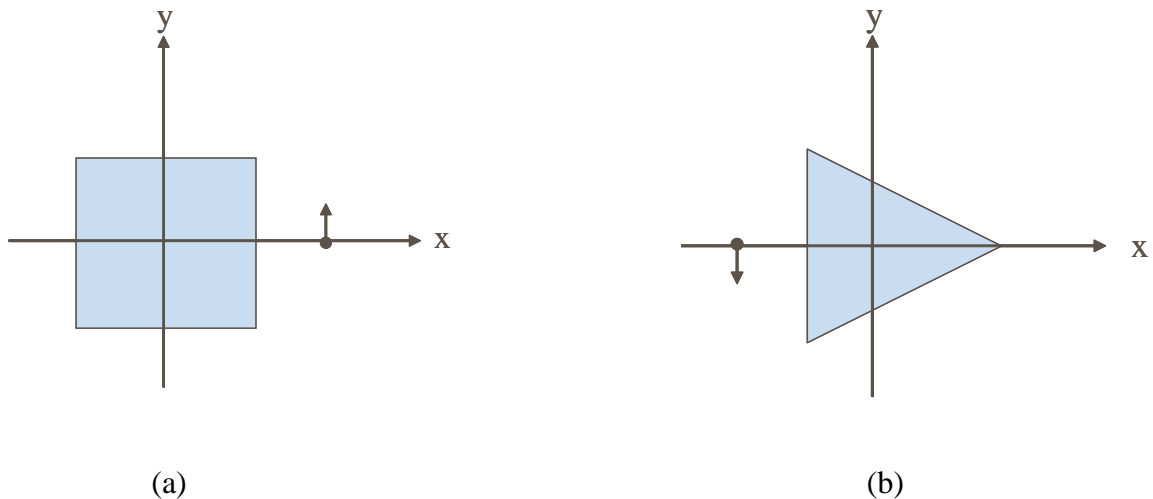


Figura 4.6 – Representação das condições iniciais do problema: (a) placa quadrada com a posição inicial da partícula ao lado direito; (b) placa triangular com a posição inicial da partícula ao lado esquerdo.

### 4.3.2 Implementação Computacional

As secções de Poincaré apresentadas nesse trabalho descrevem uma região do espaço de fase para o problema de dois corpos (placa-partícula). O estudo numérico feito utiliza o método de integração de Burlisch-Stoer com uma precisão da ordem de  $\mathcal{O}(10^{-12})$ . Para determinar quando a trajetória cruza o plano  $y = 0$  foi utilizado o método de Newton-Raphson com uma precisão da ordem de  $\mathcal{O}(10^{-11})$ .

Para a placa triangular, as superfícies de secção são plotadas com um intervalo de 0,02 para a constante de energia (E), variando de -0,01 a -0,47. Para a placa quadrada, a variação da energia é de -0,13 a -1,09 com um intervalo de 0,02.

### 4.3.3 Secções de Poincaré – Regiões Estáveis e Regiões de Colisão

Neste item, as Figuras 4.7 a 4.30 representam um conjunto de superfícies de secção de Poincaré ao redor da placa triangular com valores de energia (E) variando de -0,01 a -0,47, com intervalo de 0,02. Foram utilizadas cerca de 70 condições iniciais para cada secção, sendo que a maior parte dessas condições gera apenas um ponto de secção cada um, significando que a partícula logo colide com a placa.

As Figuras 4.7 a 4.30 mostram regiões onde as condições iniciais geraram curvas bem definidas. Essas secções representam trajetórias quasi-periódicas ao redor da placa triangular. O centro das ilhas para cada secção de superfície corresponde a uma órbita periódica de primeiro tipo (órbita circular). Na Figura 4.27, por exemplo, observa-se um conjunto de quatro ilhas que corresponde a uma trajetória simples com as condições iniciais dadas por:  $E = -0,41$  e  $x_0 = -0,8422$ . O centro de cada uma dessas ilhas corresponde a uma órbita periódica de segundo tipo (órbita ressonante). Na mesma Figura há uma separatriz que representa a trajetória com  $E = -0,41$  e  $x_0 = -0,83176$  onde a partícula tem um movimento caótico confinado em uma pequena região. A região de pontos simples fora das ilhas corresponde à região onde as partículas colidem com a placa. A Tabela 4.1 mostra o número de ilhas de ressonância encontradas para cada valor de energia e quais das figuras citadas representam essas ilhas.

Uma estrutura similar do espaço de fase foi encontrada para a placa quadrada ao analisar sua superfície de secção de Poincaré.

Tabela 4.1 – Conjunto de ilhas de ressonância para diferentes valores de energia.

<b>Figuras</b>	<b>Valores de Energia (E)</b>	<b>Número de ilhas</b>
4.11 a 4.15	-0,09 a -0,17	10
4.23	-0,33	26
4.24 a 4.28	-0,35 a -0,43	4
4.29	-0,45	5

As Figuras 4.31 e 4.33 apresentam uma visão global da localização e tamanho das regiões estáveis e de colisão no espaço de fase ao redor das placas triangular e retangular, via mapa de Poincaré. Os valores de  $x$ , quando  $\dot{x} = 0$ , são medidos com as maiores ilhas de estabilidade (órbitas quasi-periódicas) para cada valor de energia (Winter, 2000). Com os diagramas (Figuras 4.31 e 4.33) pode-se verificar a evolução da estabilidade para a família de órbitas periódicas para diferentes valores de  $E$ .

As superfícies de seção são plotadas em intervalos de 0,02 para a constante de energia ( $E$ ). Para a placa triangular, a energia varia de -0,01 até -0,49; e, para a placa quadrada, de -0,13 a -1,09. Os valores de energia ( $E = -0,49$ ) para o triângulo e ( $E = -1,09$ ) para o quadrado representam a região que não há ilhas de estabilidade dentro da precisão adotada. Estas são regiões de colisão.

A Figura 4.31 representa as regiões estáveis e de colisão no espaço de fase ao redor da placa triangular. A cor amarela representa a região considerada estável, negligenciando as pequenas regiões caóticas que aparecem somente nas separatrizes. A região representada pela cor azul indica que a partícula colide com a placa devido à atração gravitacional exercida. A cor cinza corresponde a uma região “proibida”, onde não existem condições iniciais para aqueles valores de energia. A placa triangular está localizada à direita do limite da borda de colisão. A Figura 4.32 corresponde a uma ampliação da figura anterior para melhor visualização das regiões.

A Figura 4. 33 sumariza o estudo do espaço de fase ao redor da placa quadrada e o código de cores representa as mesmas regiões, conforme mencionado no estudo da placa triangular. A placa quadrada está localizada no lado esquerdo do limite da borda de colisão.

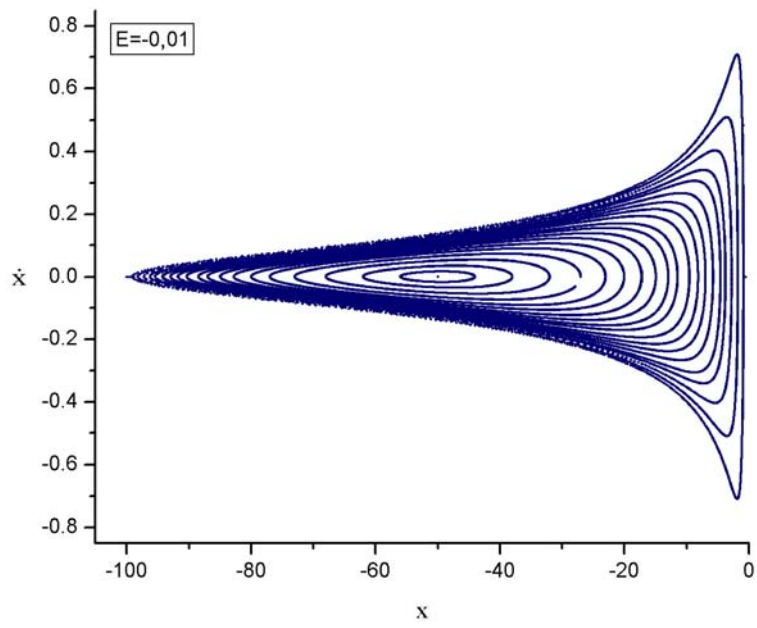


Figura 4.7 – Secção de Poincaré – Energia = -0,01.

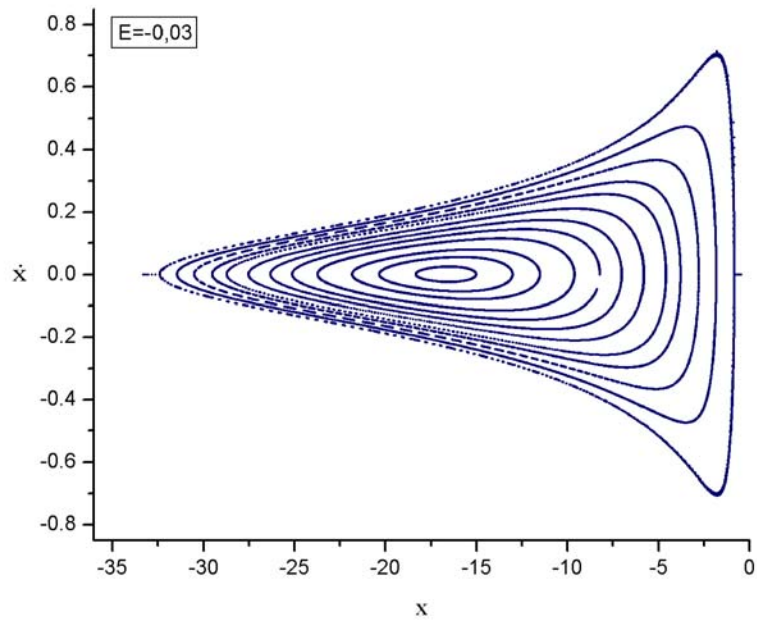


Figura 4.8 – Secção de Poincaré – Energia = -0,03.

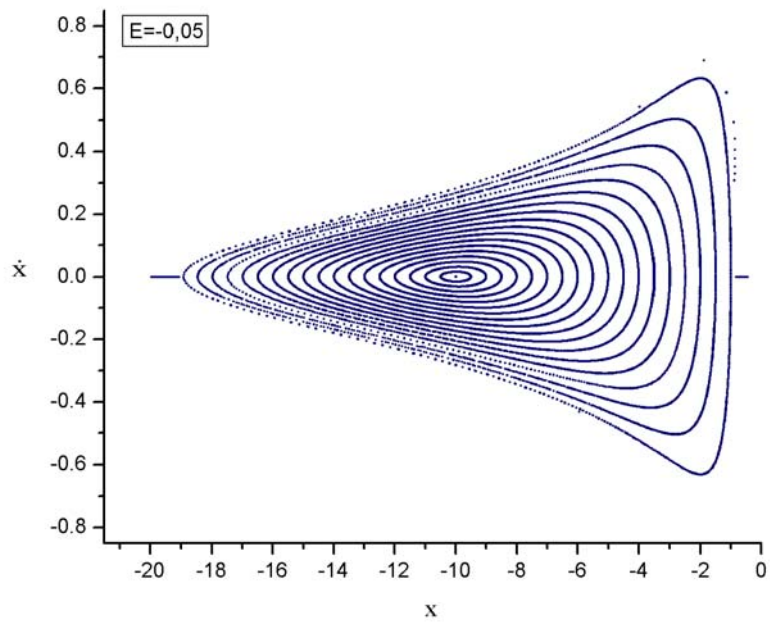


Figura 4.9 – Secção de Poincaré – Energia = -0,05.

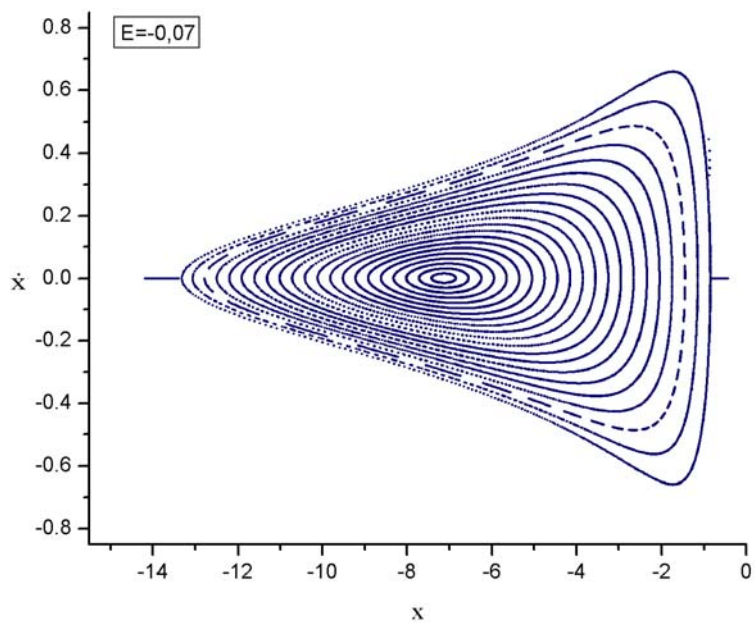


Figura 4.10 – Secção de Poincaré – Energia = -0,07.



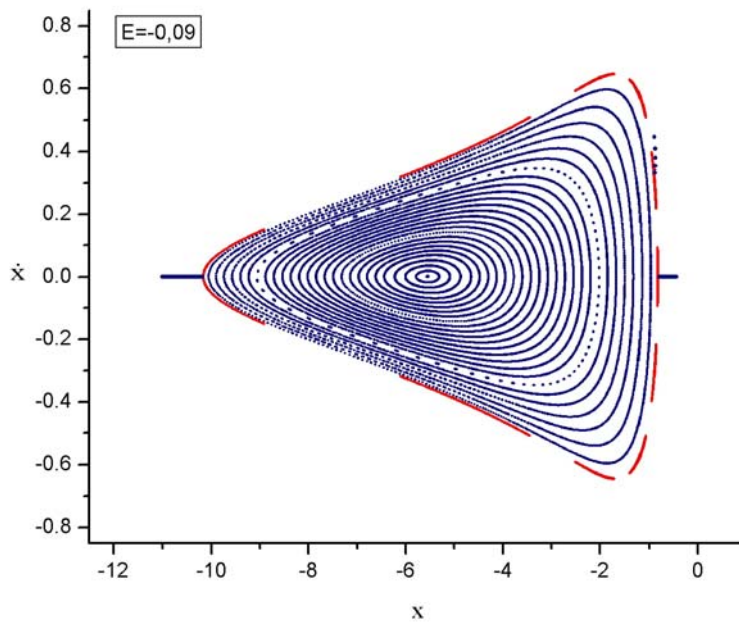


Figura 4.11 – Secção de Poincaré – Energia = -0,09.

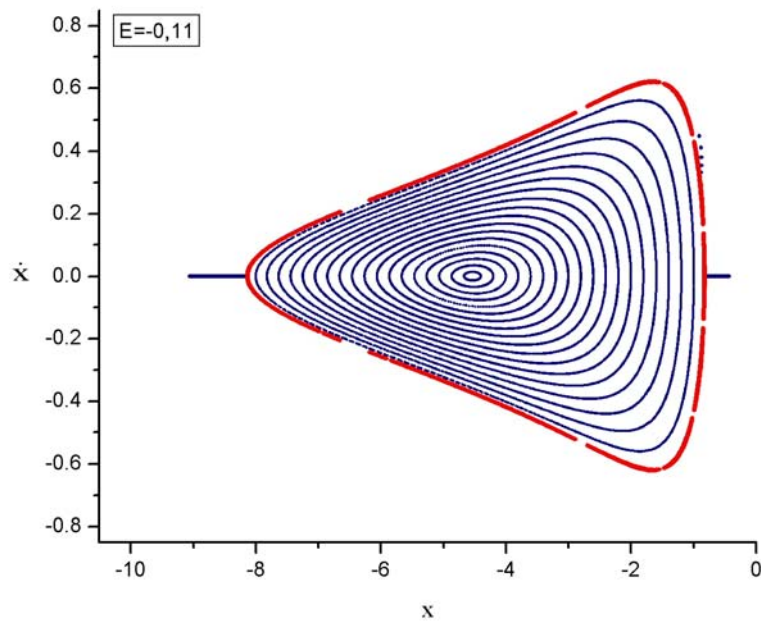


Figura 4.12 – Secção de Poincaré – Energia = -0,11.

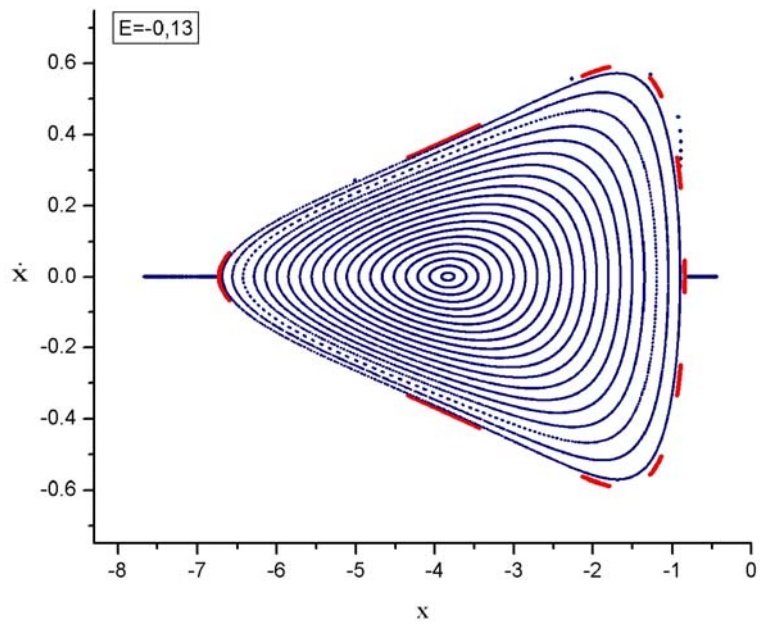


Figura 4.13 – Secção de Poincaré – Energia = -0,13.

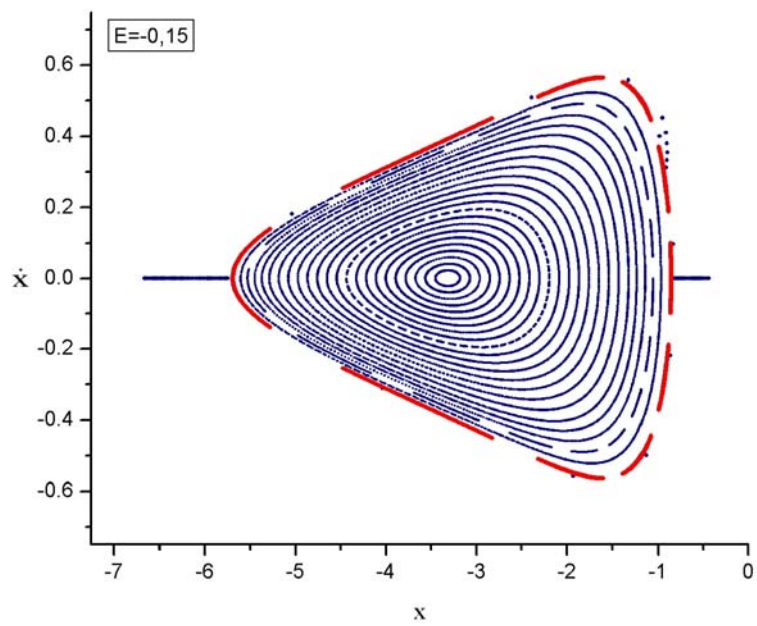


Figura 4.14 – Secção de Poincaré – Energia = -0,15.

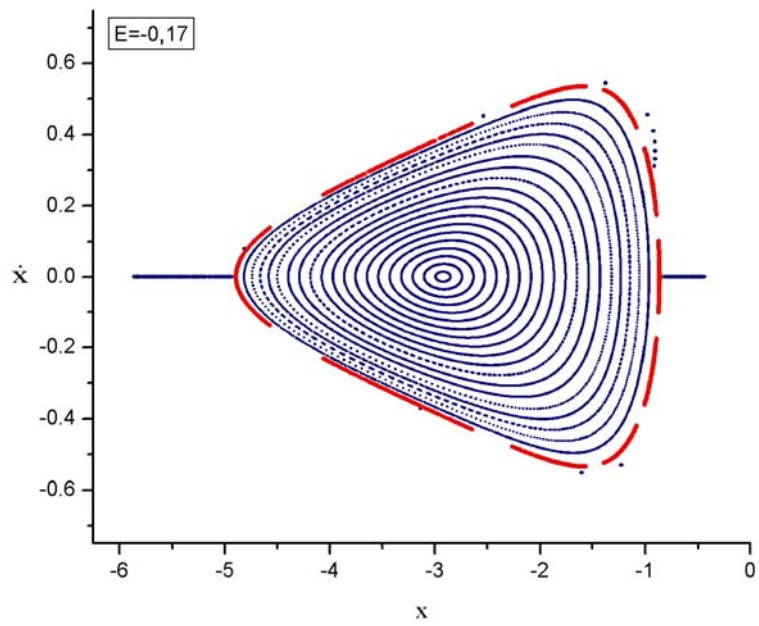


Figura 4.15 – Secção de Poincaré – Energia = -0,17.

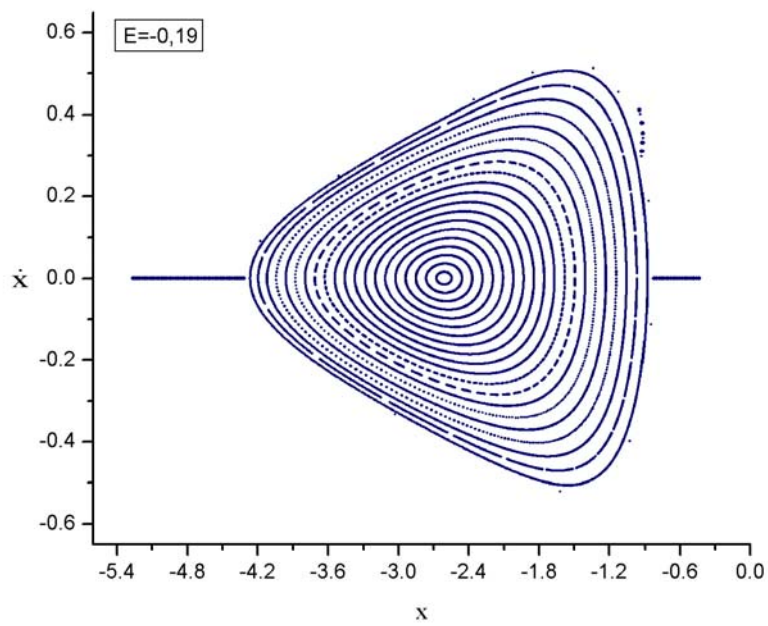


Figura 4.16 – Secção de Poincaré – Energia = -0,19.

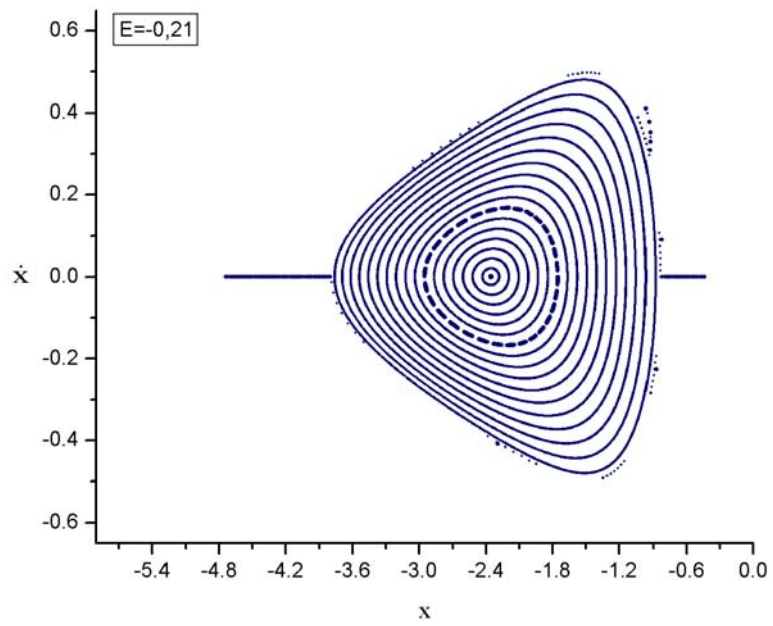


Figura 4.17 – Secção de Poincaré – Energia = -0,21.

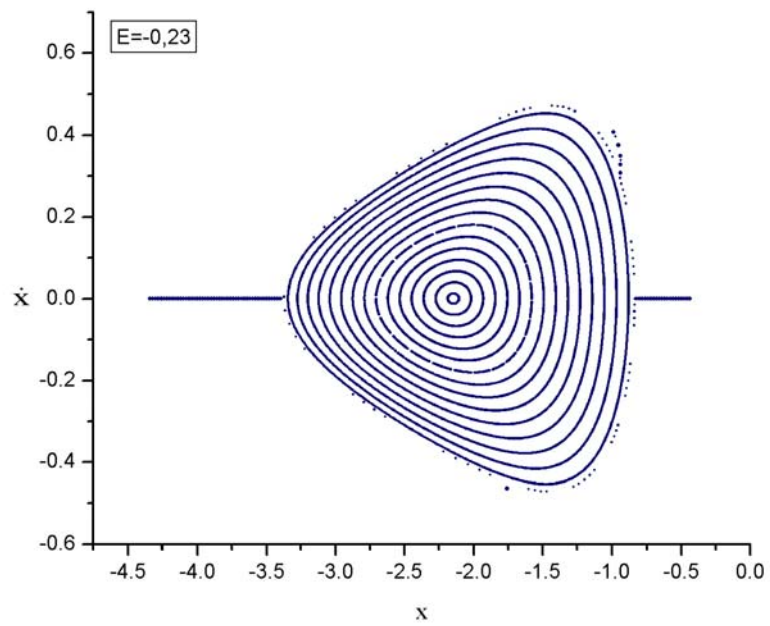


Figura 4.18 – Secção de Poincaré – Energia = -0,23.

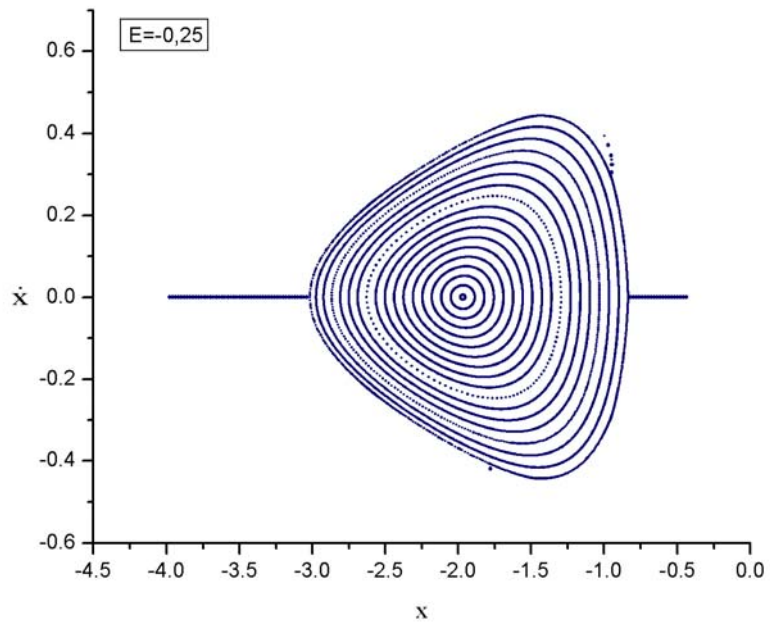


Figura 4.19 – Secção de Poincaré – Energia = -0,25.

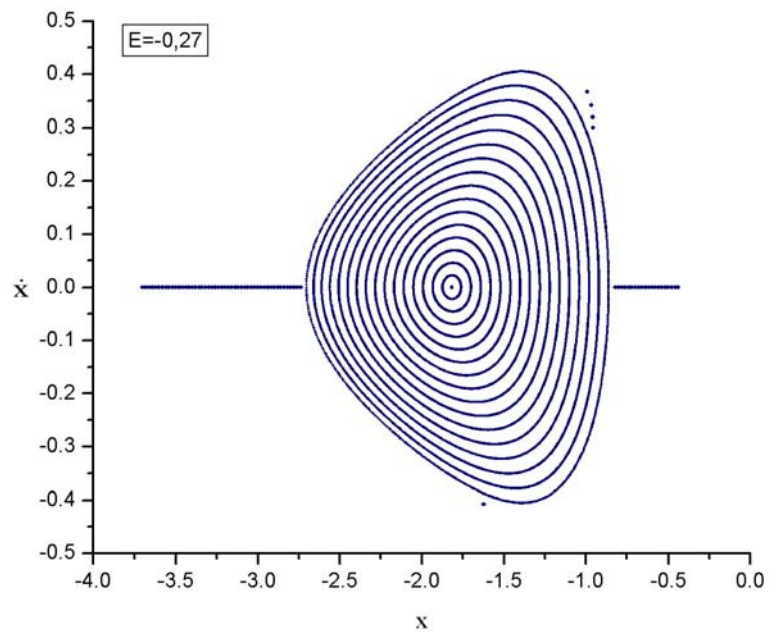


Figura 4.20 – Secção de Poincaré – Energia = -0,27.

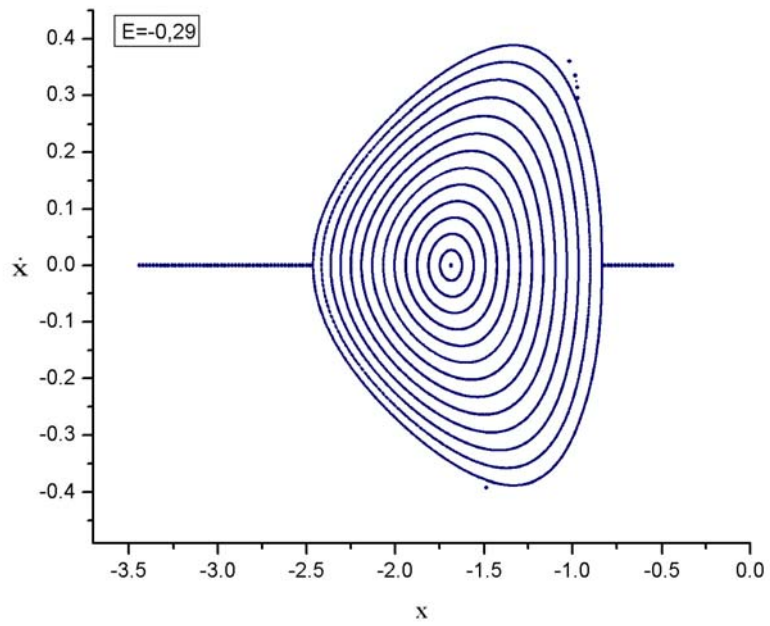


Figura 4.21 – Secção de Poincaré – Energia = -0,29.

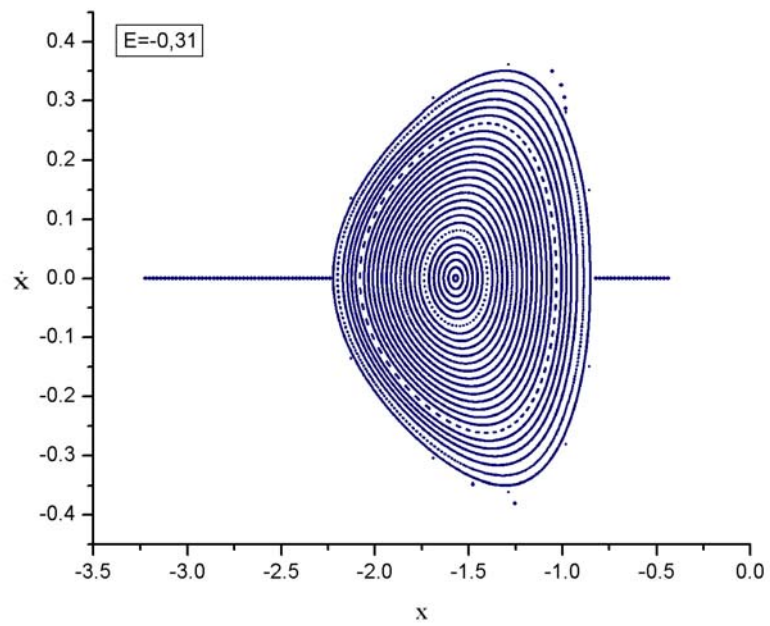


Figura 4.22 – Secção de Poincaré – Energia = -0,31.

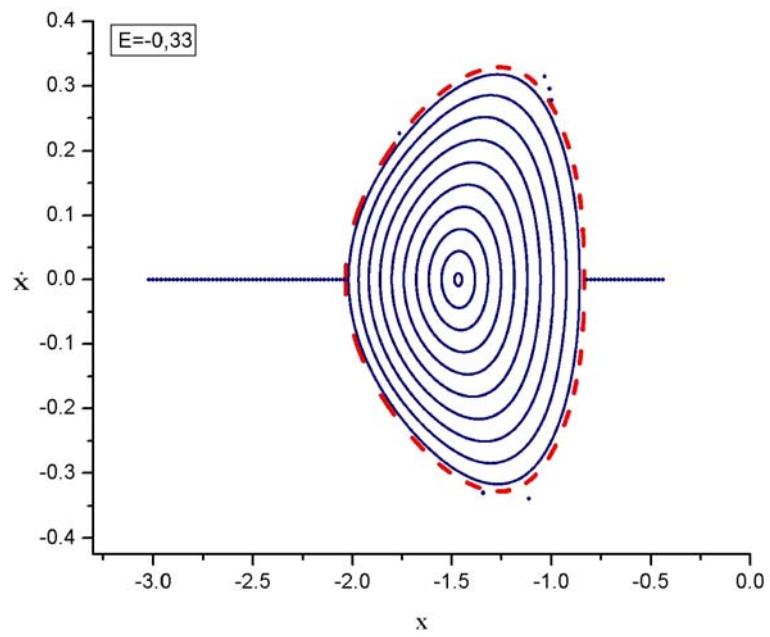


Figura 4.23 – Secção de Poincaré – Energia = -0,33.

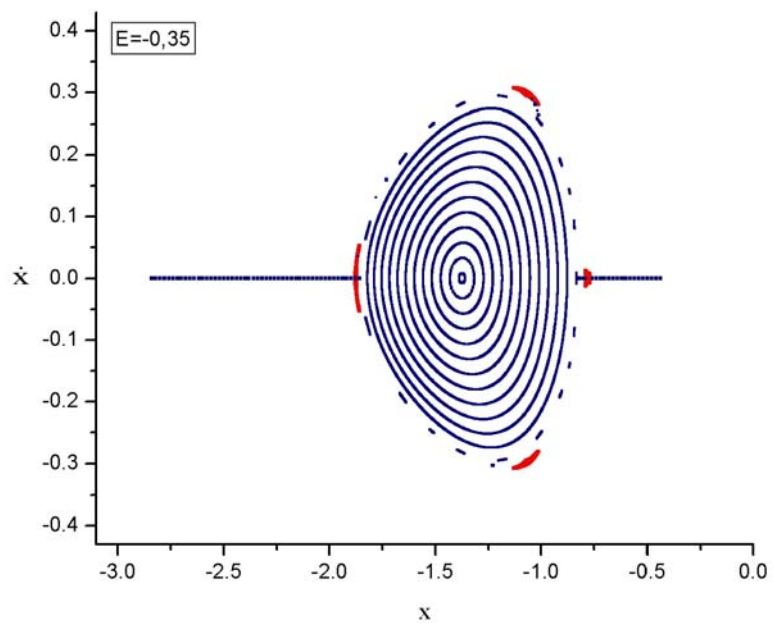


Figura 4.24 – Secção de Poincaré – Energia = -0,35.

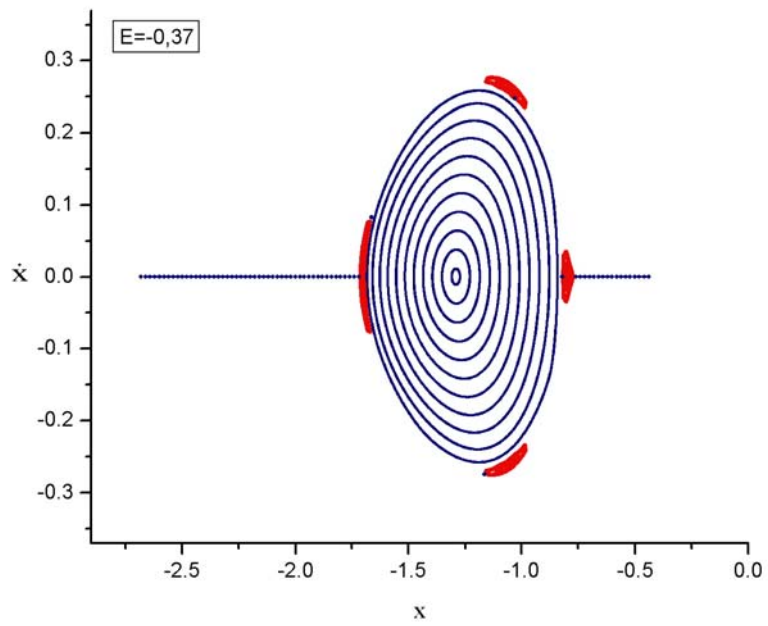


Figura 4.25 – Secção de Poincaré – Energia = -0,37.

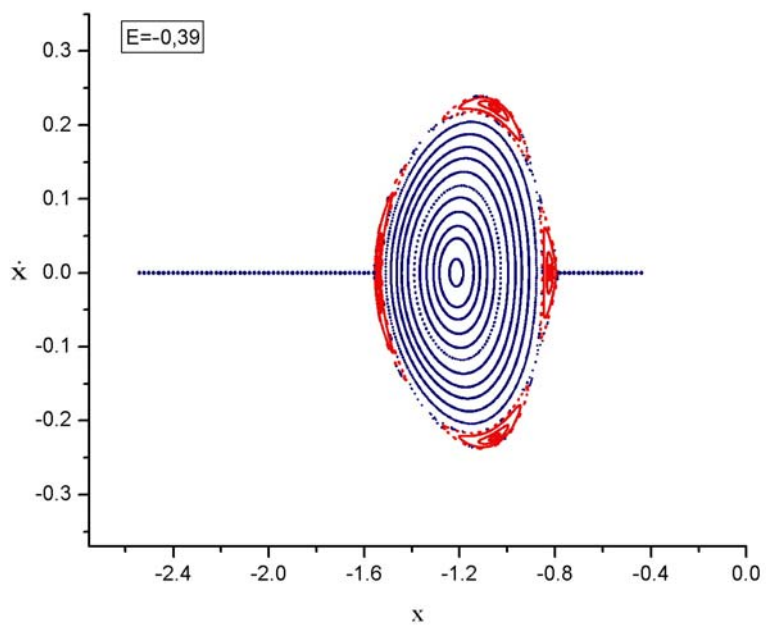


Figura 4.26 – Secção de Poincaré – Energia = -0,39.



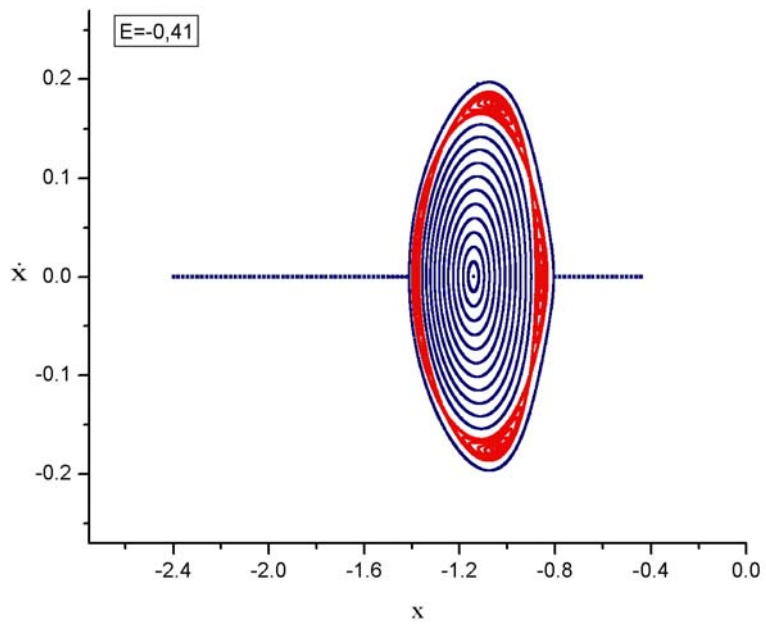


Figura 4.27 – Secção de Poincaré – Energia = -0,41.

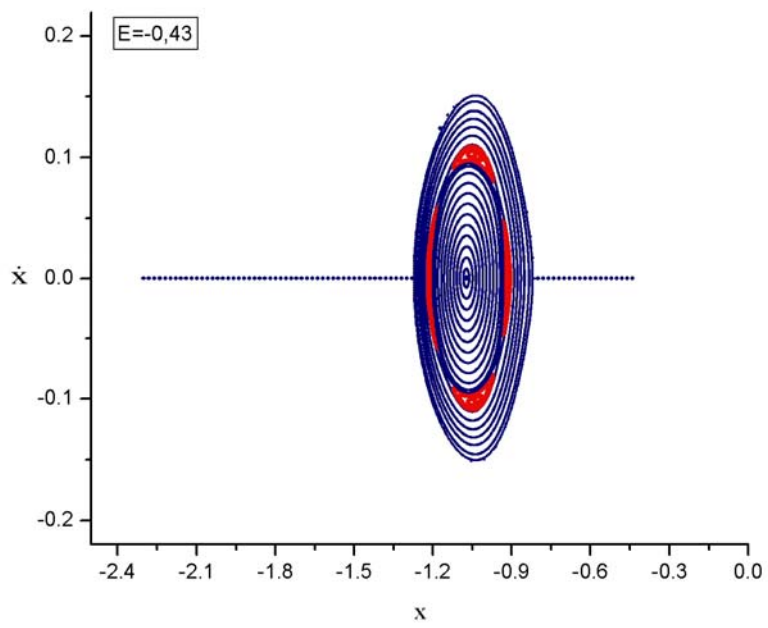


Figura 4.28 – Secção de Poincaré – Energia = -0,43.

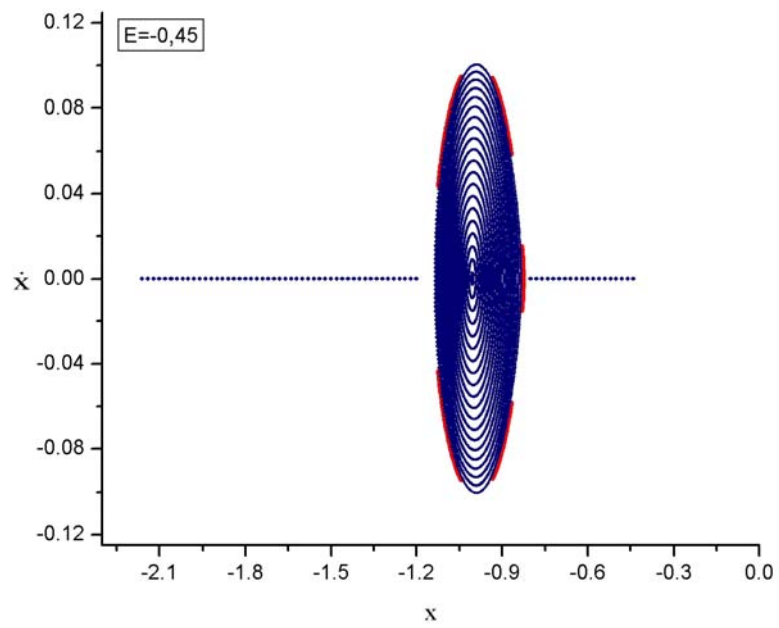


Figura 4.29 – Secção de Poincaré – Energia = -0,45.

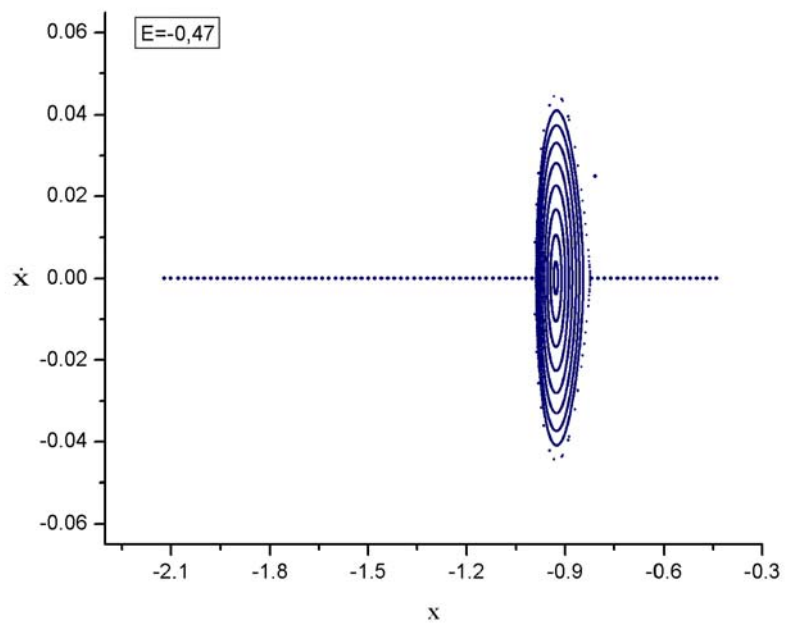


Figura 4.30 – Secção de Poincaré – Energia = -0,47.

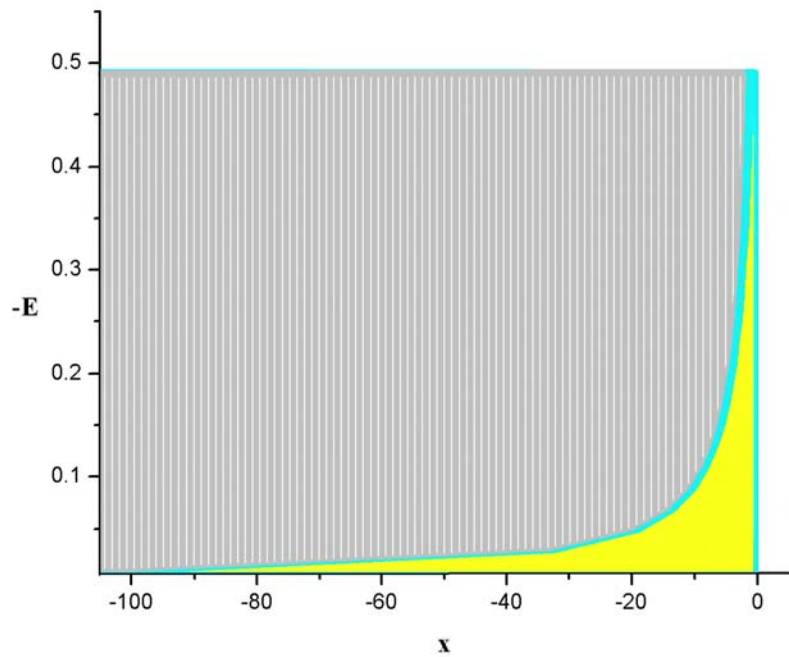


Figura 4.31 – Estudo do espaço de fase ao redor da placa triangular: região estável (amarelo); região de colisão (azul) e região “proibida” (cinza).

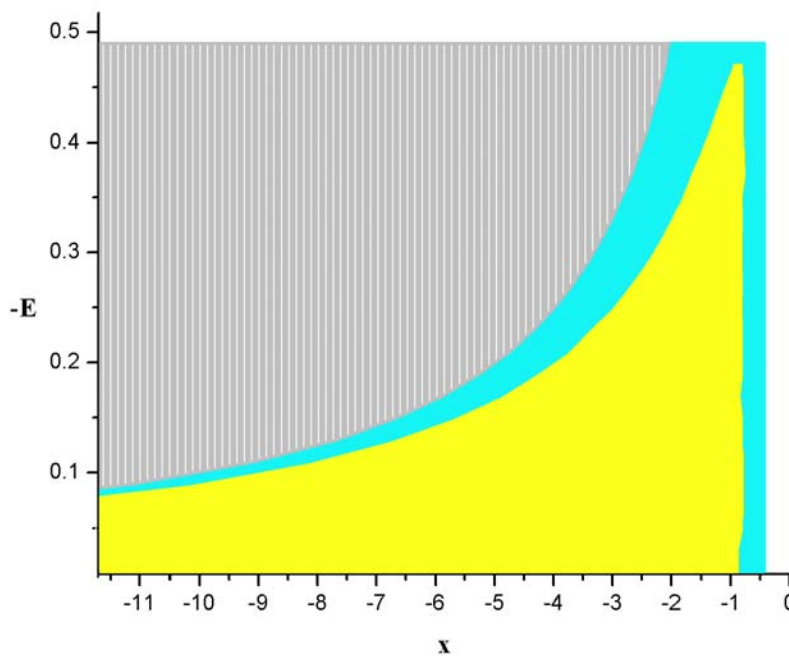


Figura 4.32 – Ampliação da Figura 31. Estudo do espaço de fase ao redor da placa triangular: região estável (amarelo); região de colisão (azul) e região “proibida” (cinza).

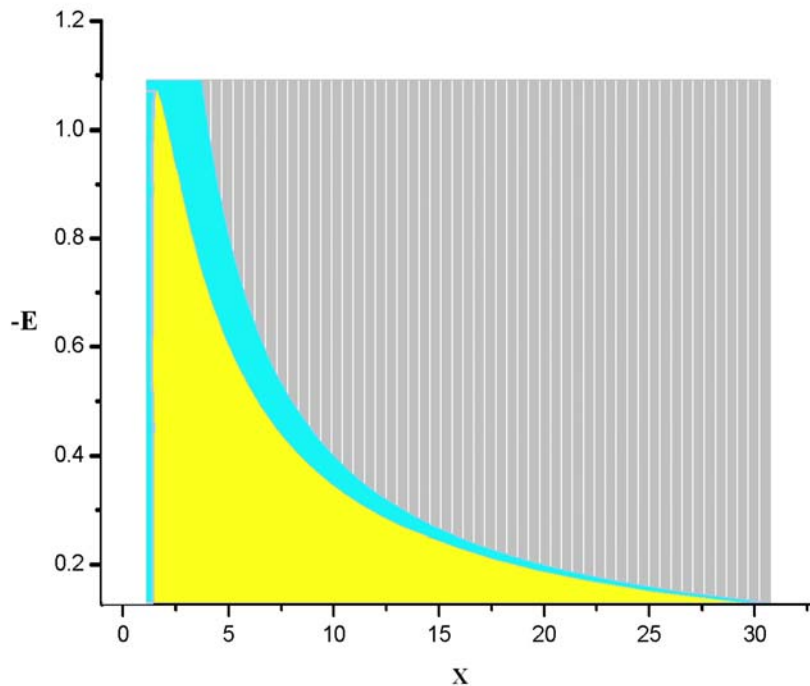
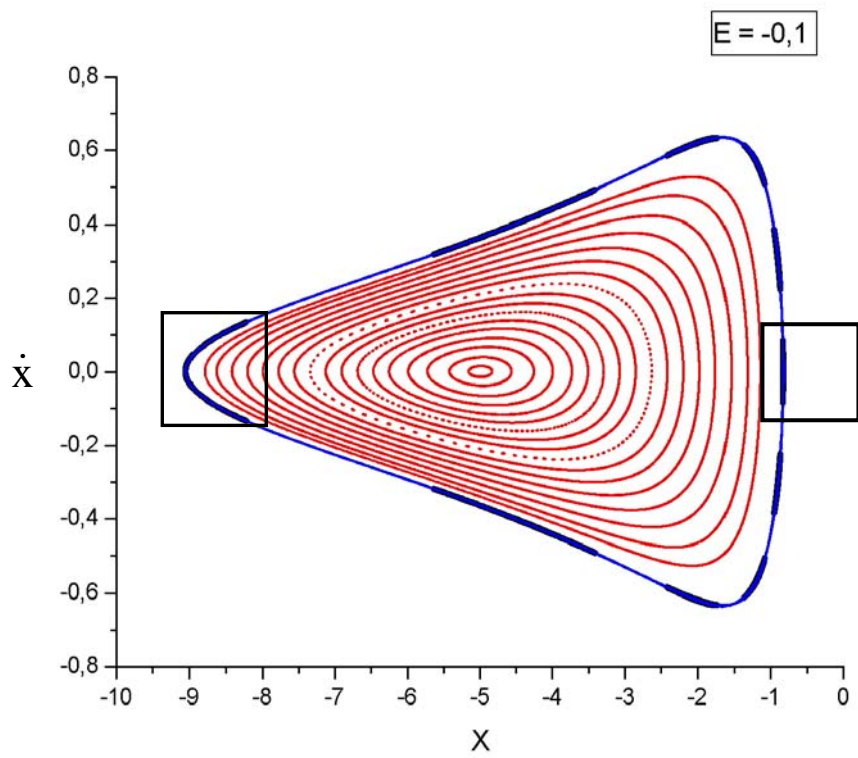


Figura 4.33 – Estudo do espaço de fase ao redor da placa quadrada: região estável (amarelo); região de colisão (azul) e região “proibida” (cinza).

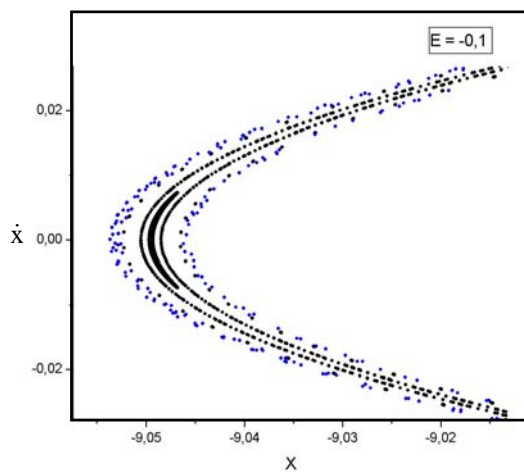
#### 4.3.4 Secções de Poincaré – Conjunto de Ilhas Gerado a Partir de uma Única Condição Inicial

Este item apresenta alguns conjuntos de superfícies de secção de Poincaré ao redor da placa triangular para as energias  $E = -0,1; -0,3; -0,37$  e  $-0,4$  com a ampliação de algumas das ilhas de ressonância que foram geradas a partir de uma única condição inicial. As Figuras 4.34 a 4.37 mostram um conjunto de três figuras cada uma. A primeira figura (a) mostra a reprodução das secções para as energias citadas acima; a figura da esquerda (b) representa a ampliação da região marcada à esquerda da secção; e a figura da direita (c) representa a ampliação da região marcada à direita da secção. O conjunto de ilhas (mostrado nas figuras menores) foi gerado com mais de uma condição inicial. A Figura 4.37c mostra um espalhamento de pontos gerado a partir de uma única condição inicial e representa o caos dentro de uma região confinada – a separatriz.

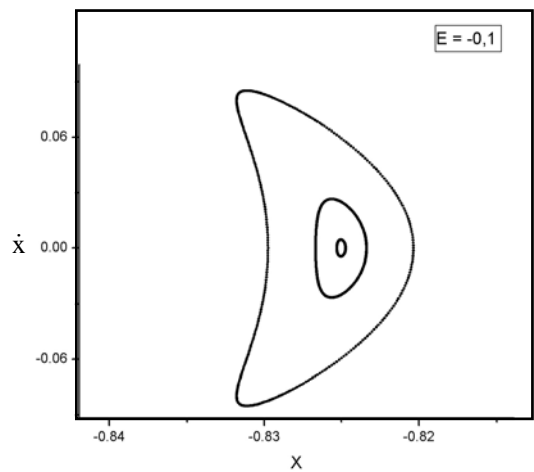
As Figuras 4.38 a 4.43 acompanham um conjunto de quatro ilhas geradas com apenas uma condição inicial para as energias  $E = -0,41; -0,42; -0,43; -0,44; -0,45$  e  $-0,46$ . Note que as figuras apresentam a mesma escala, o que permite verificar a diminuição do tamanho da região estável (essa diminuição também está representada nas Figuras 4.31 e 4.32), bem como o deslocamento do conjunto de ilhas que está sendo acompanhado. A Figura 4.41 mostra que o grupo de quatro ilhas está desaparecendo e um novo conjunto de cinco ilhas é encontrado. Essas novas ilhas correspondem a uma trajetória com as condições iniciais dadas por:  $E = -0,44$  e  $x_0 = 0,80281$ .



(a)

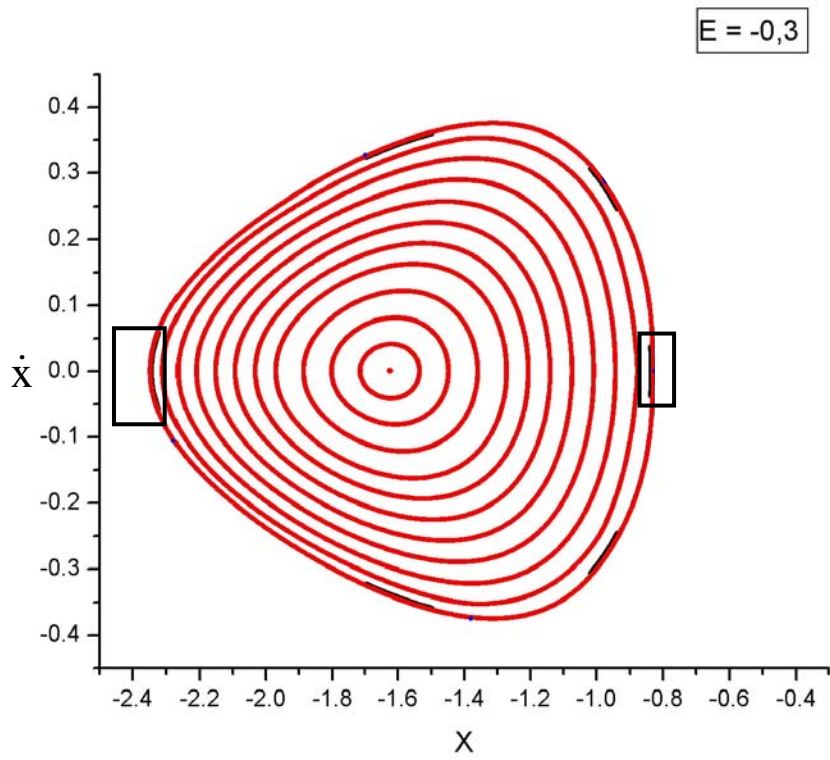


(b)

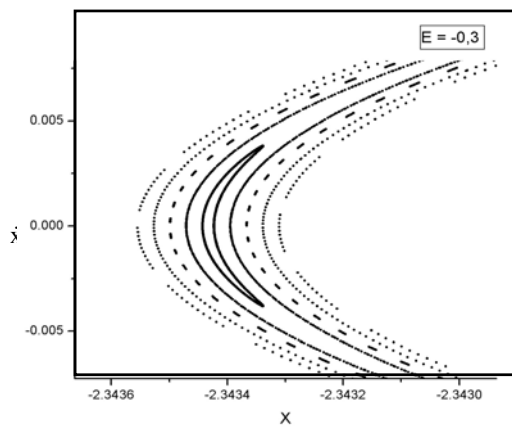


(c)

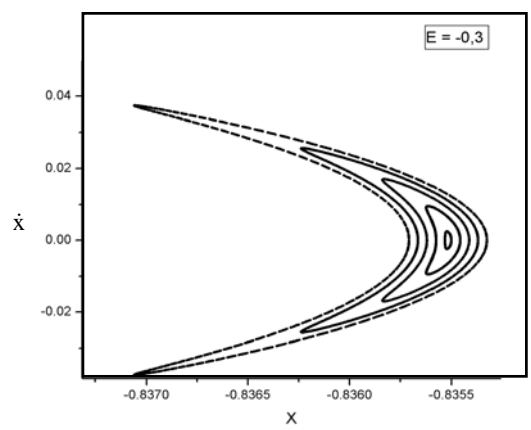
Figura 4.34 – Ampliação das ilhas marcadas na secção de Poincaré com Energia = -0,1.



(a)

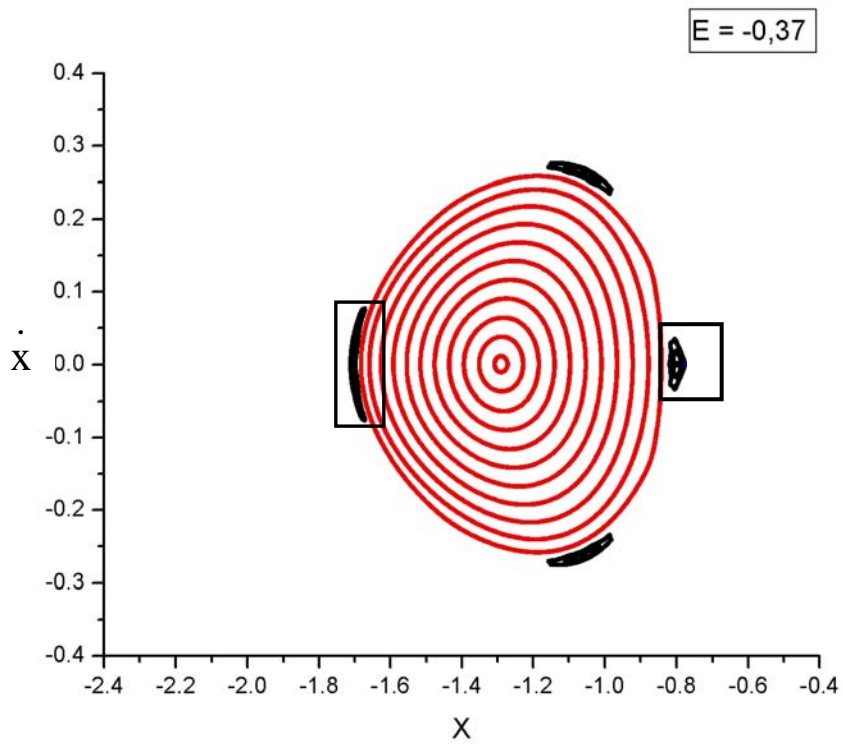


(b)

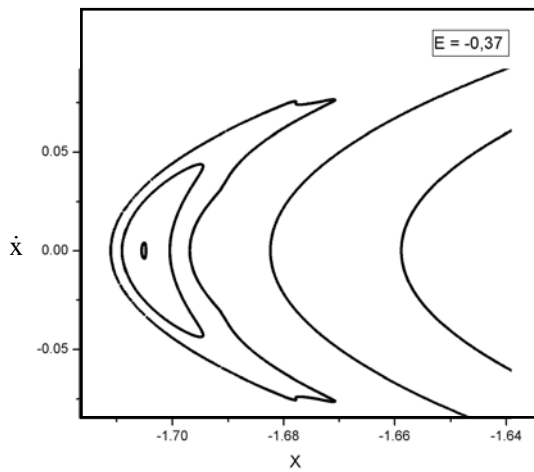


(c)

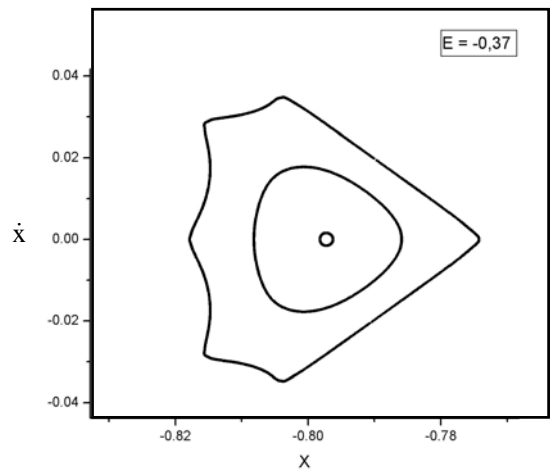
Figura 4.35 – Ampliação das ilhas marcadas na secção de Poincaré com Energia = -0,3.



(a)



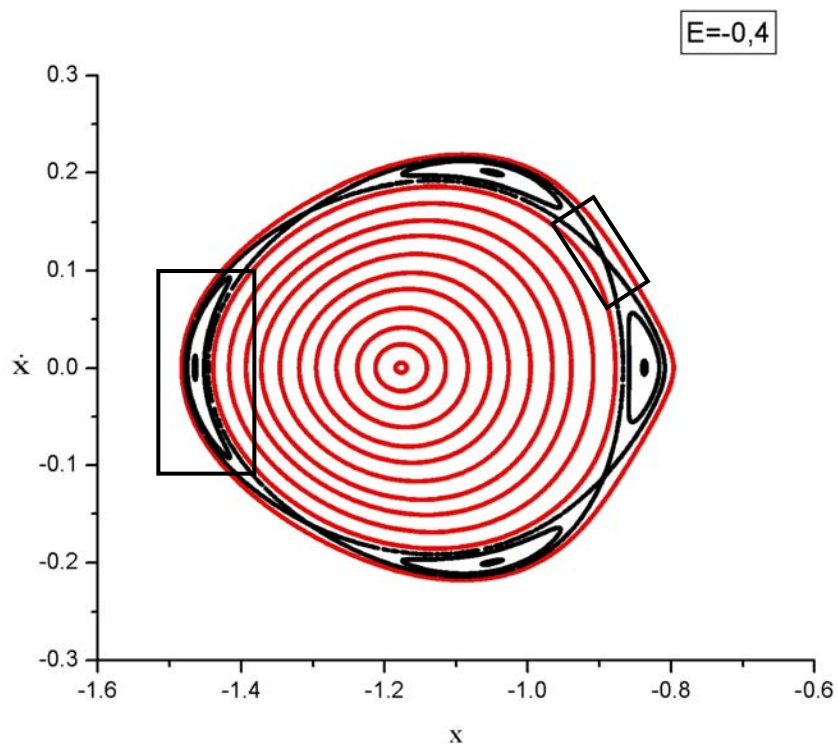
(b)



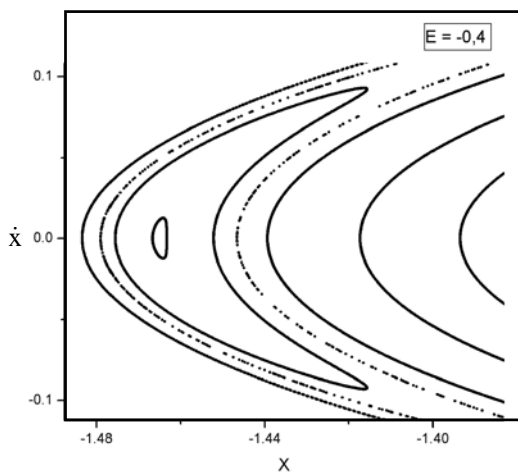
(c)

Figura 4.36 – Ampliação das ilhas marcadas na secção de Poincaré com Energia = -0,37.

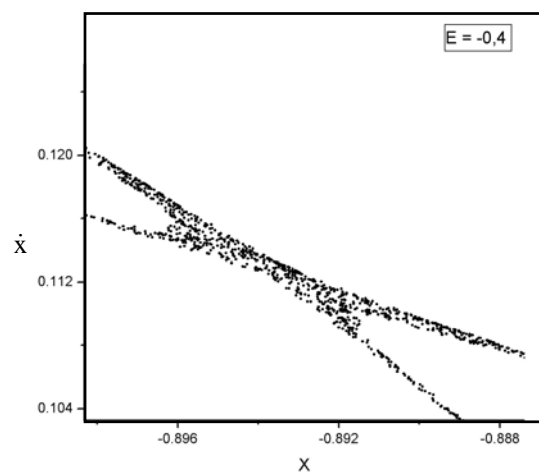




(a)



(b)



(c)

Figura 4.37 – Ampliação das ilhas marcadas na secção de Poincaré com Energia = -0,4.

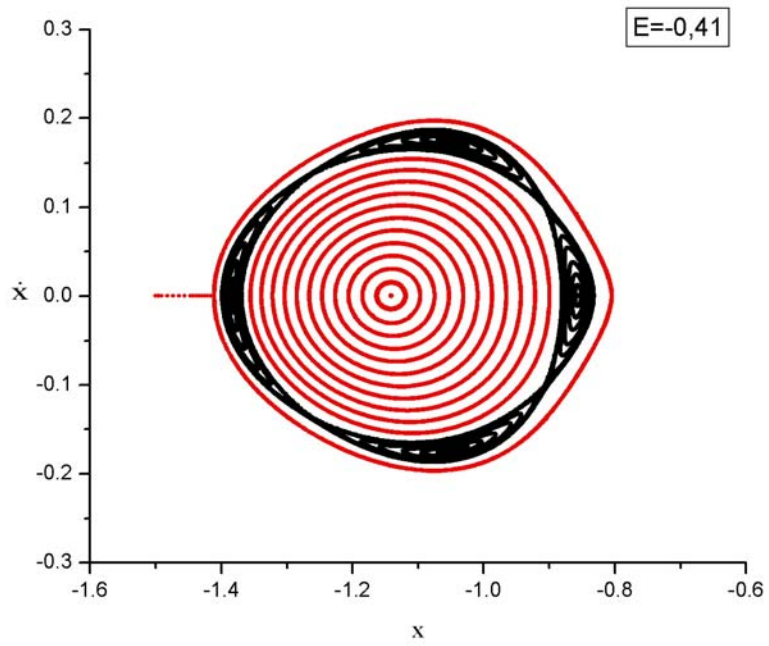


Figura 4.38 – Secção de Poincaré com Energia = -0,41.

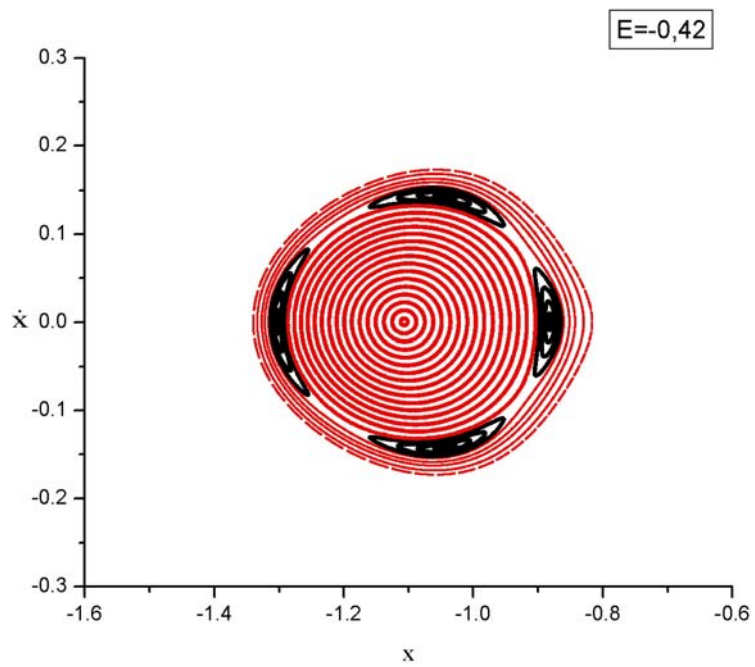


Figura 4.39 – Secção de Poincaré com Energia = -0,42.

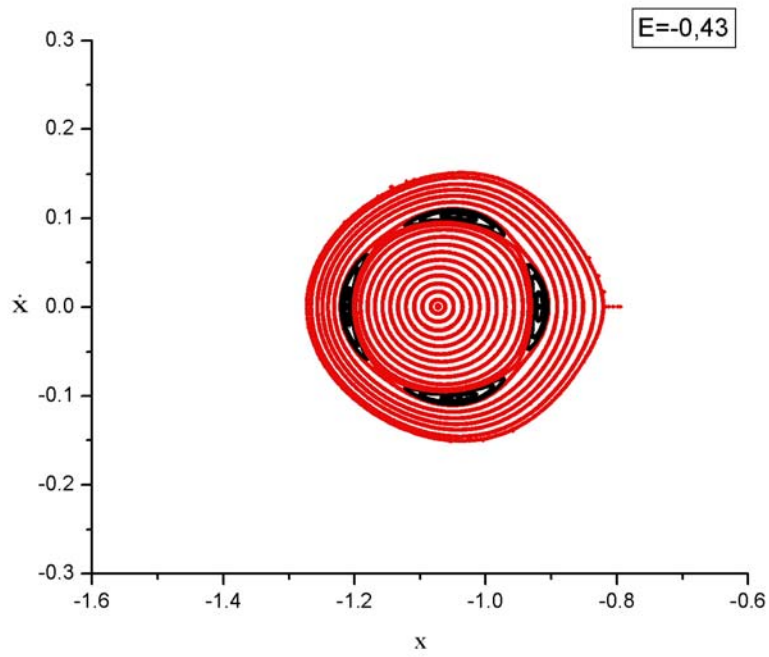


Figura 4.40 – Secção de Poincaré com Energia = -0,43.

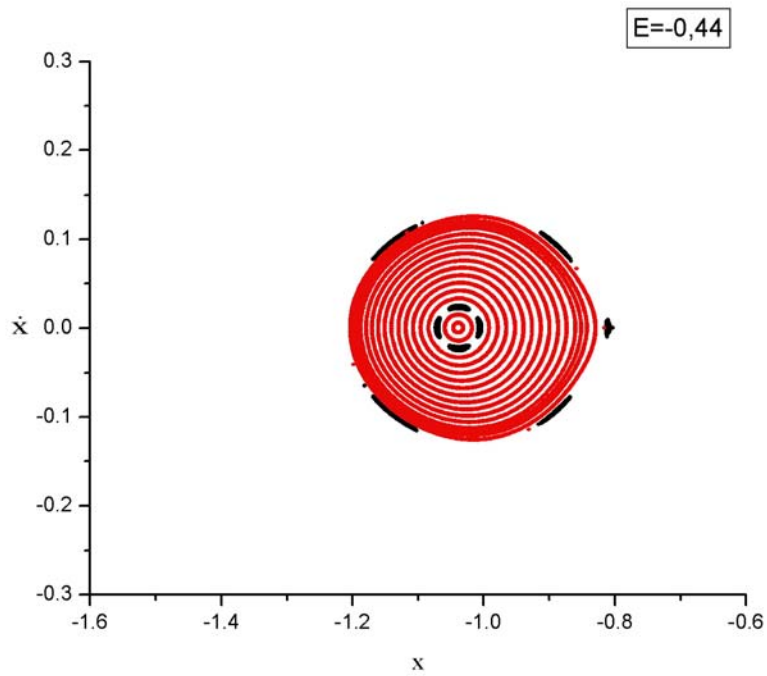


Figura 4.41 – Secção de Poincaré com Energia = -0,44.

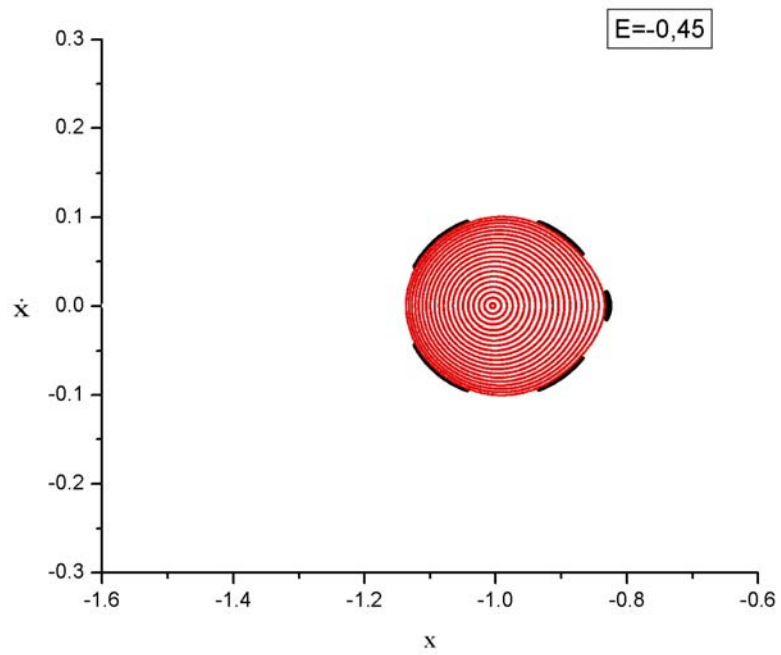


Figura 4.42 – Secção de Poincaré com Energia = -0,45.

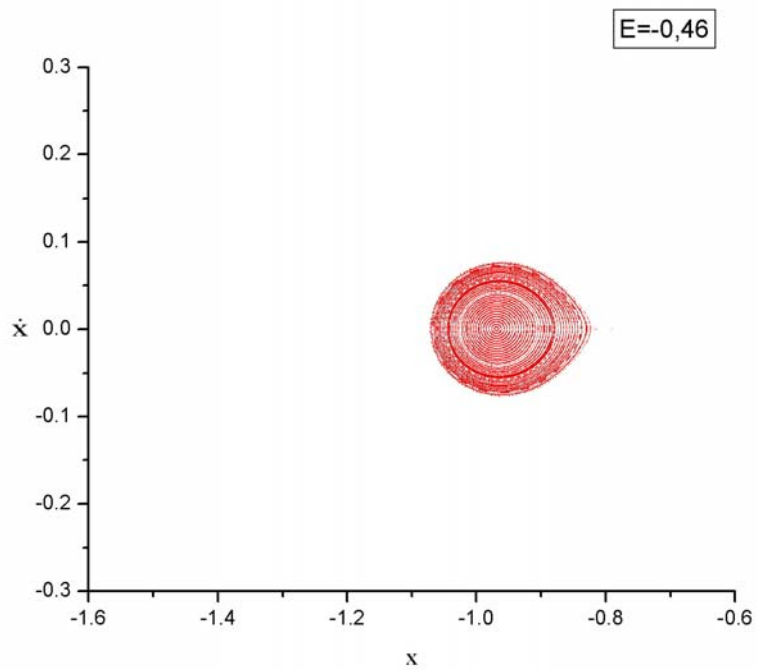


Figura 4.43 – Secção de Poincaré com Energia = -0,46.

### 4.3.5. Trajetórias ao Redor das Placas Triangular e Quadrada

A seção anterior apresentou uma visão global do espaço de fase ao redor das placas geométricas. Esta seção apresenta algumas das trajetórias da partícula teste ao redor dessas placas (triangular e quadrada).

As Figuras 4.44 a 4.47 mostram a trajetória de uma partícula teste ao redor da placa triangular, cujas condições iniciais (posição e velocidade) são dadas por:

$$(x, y, z) = (x_0, 0, 0) \quad \text{e} \quad (V_x, V_y, V_z) = (0, -\sqrt{2(E + U)}, 0),$$

em que E é a energia total do sistema e U é a energia potencial gerada pela placa.

A Tabela 4.2 mostra os valores da posição  $x_0$  da partícula e seu correspondente valor de energia para cada trajetória.

Tabela 4.2 – Valores de energia e posição inicial da partícula.

<b>Figura</b>	<b>Valor da Energia (E)</b>	<b>Posição inicial <math>x_0</math></b>
4.44	-0,10	-1,14
4.45	-0,40	-0,83
4.46	-0,41	-0,83176
4.48	-0,60	1.4

As Figuras 4.44 e 4.45 mostram um comportamento quasi-periódico da órbita. A Figura 4.46 representa a órbita da partícula em um ponto dentro da região caótica (separatriz) e a Figura 4.47 representa a partícula numa região qualquer para um valor de energia cuja trajetória resulta numa colisão da partícula com a placa triangular devido ao seu campo gravitacional.

A Figura 4.48 mostra a trajetória da partícula ao redor da placa quadrada que corresponde a uma órbita quasi-periódica.

As trajetórias apresentadas nessas figuras mostram que o efeito do potencial das placas pode ser comparado ao efeito do achatamento da Terra ( $J_2$ ), pois geram trajetórias que podem ser vistas como uma órbita elíptica precessionando.

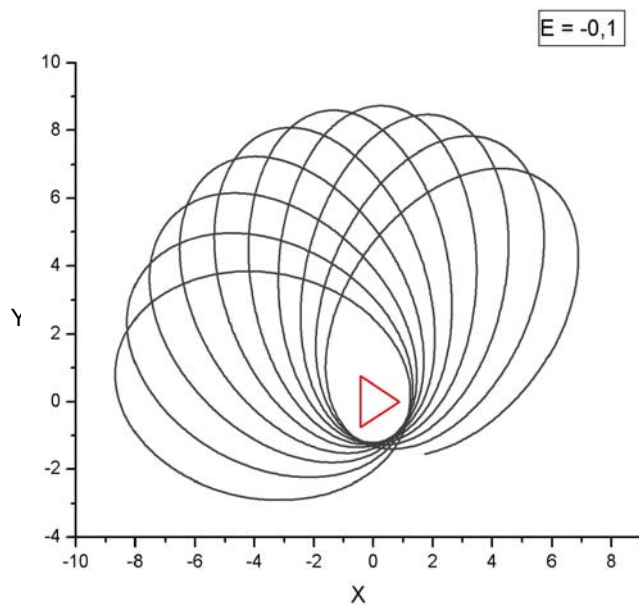


Figura 4.44 – Trajetória ao redor da placa triangular: órbita quasi-periódica.

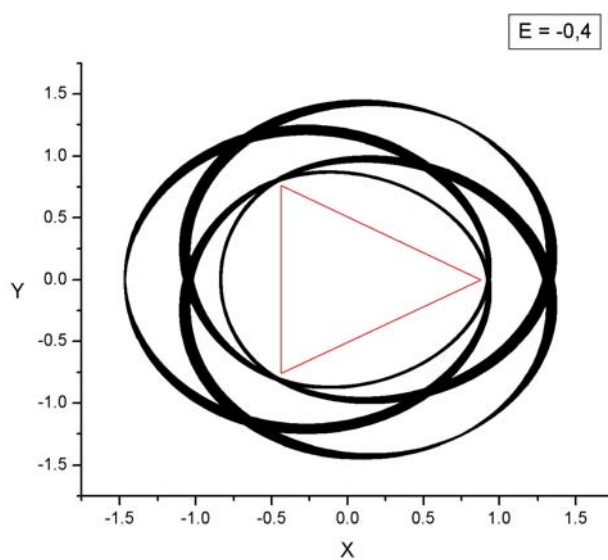


Figura 4.45 – Trajetória ao redor da placa triangular: órbita quasi-periódica.

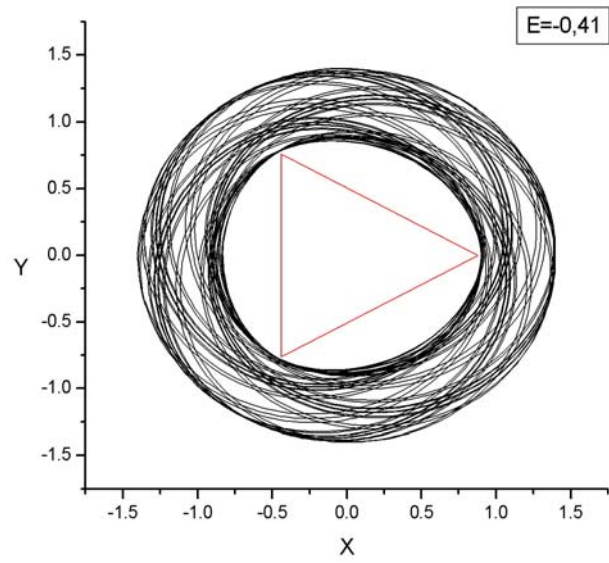


Figura 4.46 – Trajetória ao redor da placa triangular: órbita caótica.

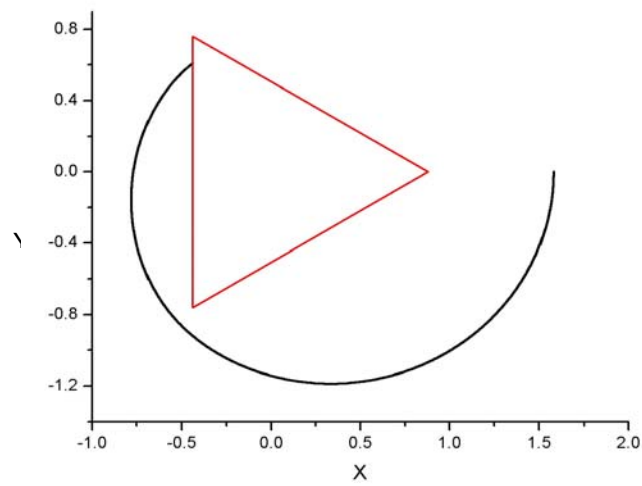


Figura 4.47 – Trajetória ao redor da placa triangular: órbita de colisão.

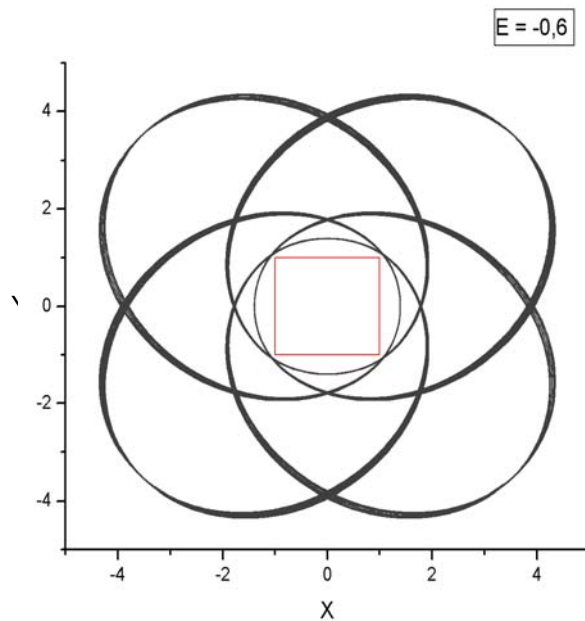


Figura 4.48 – Trajetória ao redor da placa quadrada: órbita quasi-periódica.

#### 4.3.6. Estudo do Comportamento da Órbita nas Proximidades dos Vértices da Placa Triangular

Ao estudar o comportamento de uma partícula teste ao redor de placas geométricas planas, observaram-se regiões de órbitas periódicas, quasi-periódicas e regiões de colisão. Esse estudo pode ser verificado na seção 4.3.3 através das Figuras 4.31 a 4.33, que apresentam uma visão global das regiões estáveis e caóticas via Superfície de Secção de Poincaré.

Neste item, o principal objetivo é explorar as regiões muito próximas aos vértices das placas geométricas e verificar o comportamento da partícula diante de seus potenciais. Para isso fez-se uma análise do semi-eixo maior, excentricidade da órbita, anomalia verdadeira e argumento do pericentro ao longo do tempo.

**Primeiro caso (placa triangular):** De acordo com o estudo de superfície de secções de Poincaré, o valor da energia total ( $E = -0,1$ ) e a posição da partícula teste ( $x_0 = -1,14$  e  $y_0 = z_0 = 0$ ) gera uma órbita quasi-periódica. Para essa órbita, a Figura 4.49 representa o gráfico de semi-eixo maior vs. tempo ( $a$  vs.  $T$ ) e a Figura 4.50 mostra a trajetória da



partícula ao redor da placa triangular, em que A, B e C são os vértices da placa. Os pontos coloridos na Fig. 4.50 representam as regiões enumeradas da Figura 4.49. Tem-se, então, a seguinte análise:

- Na Figura 4.49 os códigos **1a**, **2a**, **3a**, **4a**, **5a** e **6a** representam os picos máximos de semi-eixo maior. Esses picos de semi-eixo ocorrem quando a partícula passa próximo ao vértice A da placa triangular durante seis voltas completas e, na Figura 4.50, essas regiões estão representadas por pontos coloridos (acompanhando o mesmo código de cores da Figura 4.49);
- Na Figura 4.49 os códigos **2c**, **3c**, **4c** e **5c** representam os menores picos de semi-eixo maior (lado esquerdo). Esses picos de semi-eixo ocorrem quando a partícula passa próximo ao vértice C da placa triangular e essas regiões onde ocorrem os picos estão indicadas na órbita (Figura 4.50). Novamente, os pontos coloridos acompanham o código de cores da Figura 4.49;
- Na Figura 4.49 os códigos **5b** e **6b** representam os menores picos de semi-eixo maior (lado direito). Na Figura 4.50 essas regiões mostram as posições onde a partícula está mais próxima do vértice B da placa triangular. O código de cores é mantido na Figura 4.50 através de pontos.

No momento em que a partícula está mais próxima de um dos vértices da placa (vértice A), o semi-eixo maior da órbita atinge seu máximo, até o momento em que ela se afasta novamente do vértice A e se aproxima cada vez mais dos demais (B e C). Assim, o pico de semi-eixo, 'a' (Figura 4.49) aumenta até a quinta órbita e depois começa a diminuir até que complete um ciclo. O mesmo ocorre nas proximidades dos vértices B e C. É possível verificar que os picos **5b** e **5c** têm aproximadamente o mesmo valor de semi-eixo. Isso significa que a partícula está numa posição intermediária entre os vértices B e C durante o quinto período orbital.

A Figura 4.51 mostra um conjunto de gráficos (a vs. T) que representa uma ampliação da Figura 4.49 para melhor visualização do que acontece com os picos de semi-eixo maior.

A Figura 4.52 mostra um gráfico de excentricidade da órbita vs. tempo (e vs. T). A análise da excentricidade assemelha-se ao do semi-eixo maior, ou seja, os picos de excentricidade ocorrem quando a partícula está próxima aos vértices da placa.

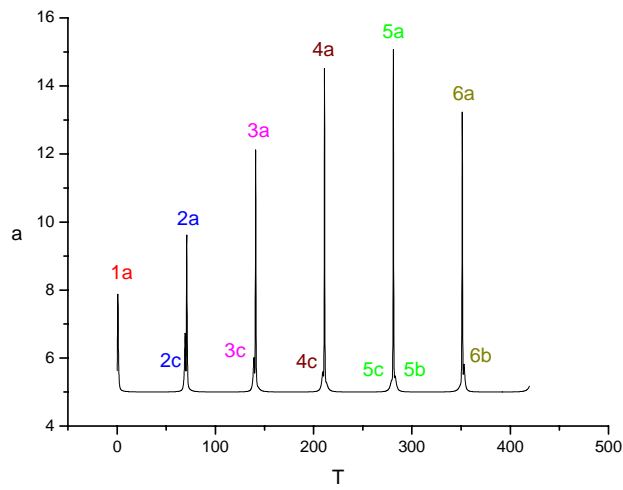


Figura 4.49 – Semi-eixo maior da órbita.

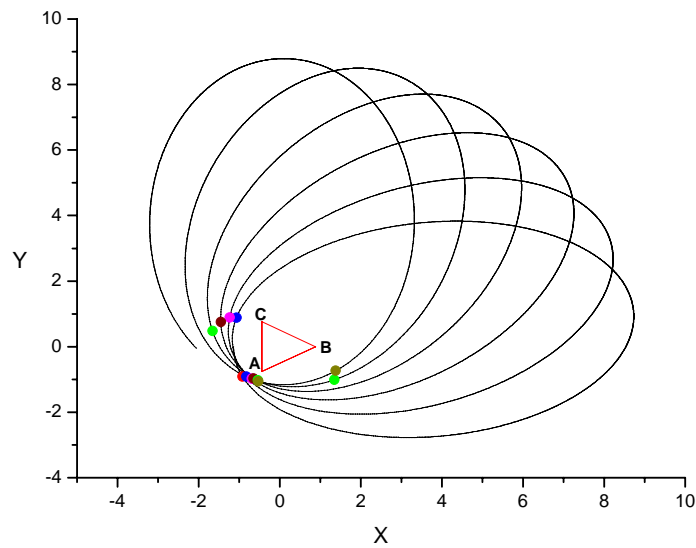


Figura 4.50 – Trajetória da partícula ao redor da placa triangular.

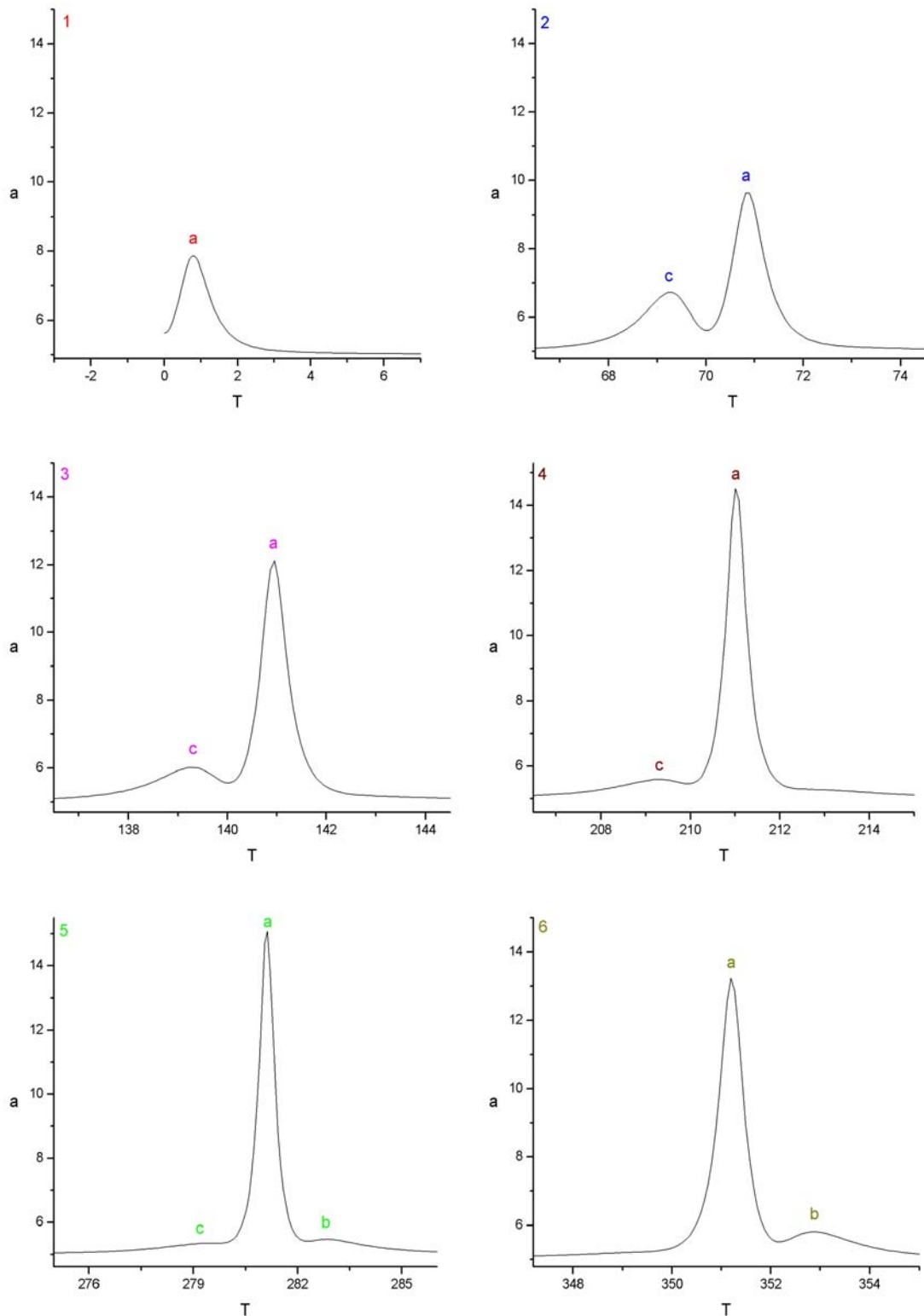


Figura 4.51 – Ampliação da Figura 4.49. Picos de semi-eixo maior em seis períodos orbitais.

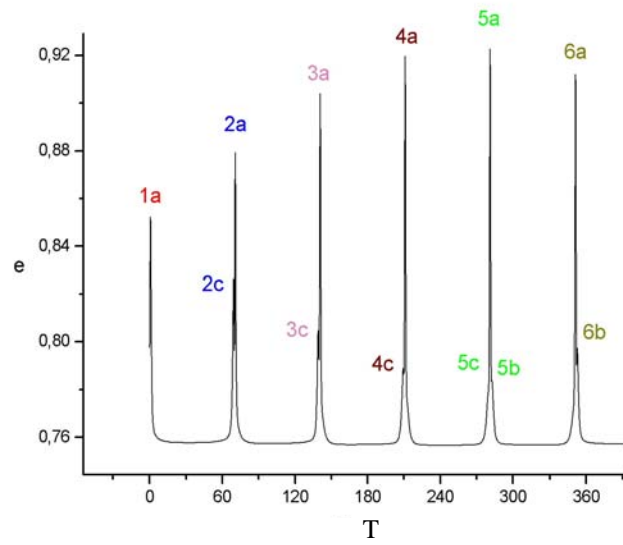


Figura 4.52 – Excentricidade da órbita.

**Segundo caso (placa triangular):** a energia total é  $E = -0,4$  e a posição da partícula teste é  $x_0 = -0,8366$  e  $y_0 = z_0 = 0$ . A Figura 4.53 representa o gráfico ( $a$  vs.  $T$ ) e sua ampliação, a Figura 4.54 representa o gráfico ( $e$  vs.  $T$ ) e a Figura 4.55 representa a órbita ao redor da placa.

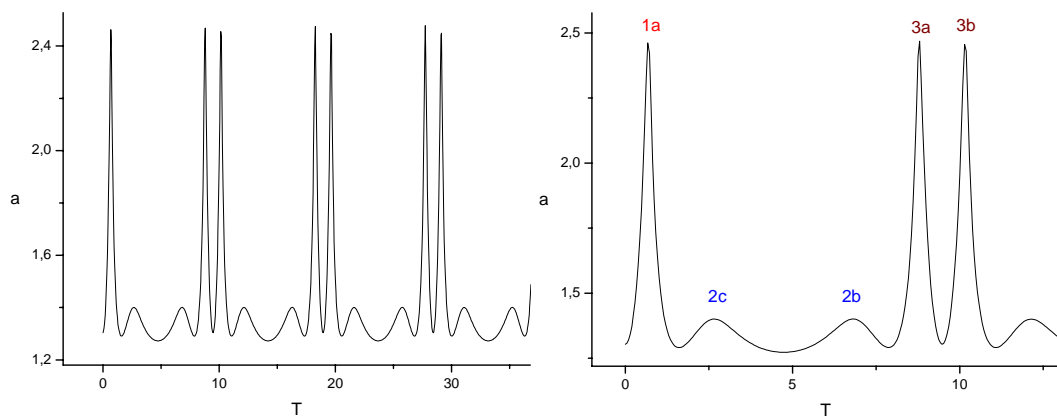


Figura 4.53 – Semi-eixo maior da órbita.

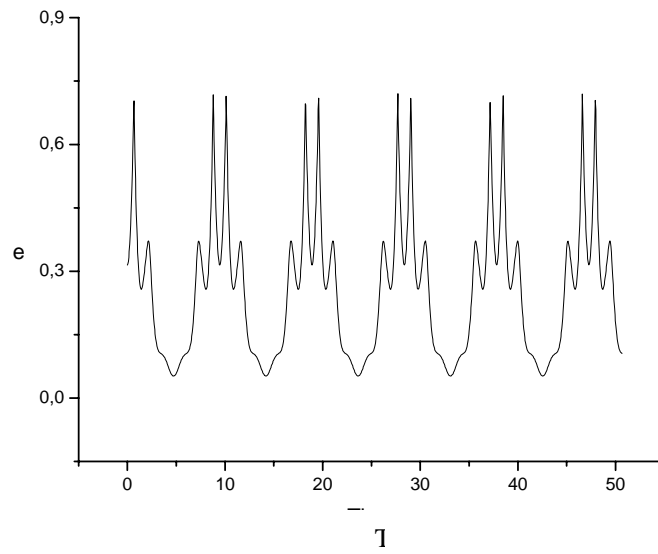


Figura 4.54 – Excentricidade da órbita.

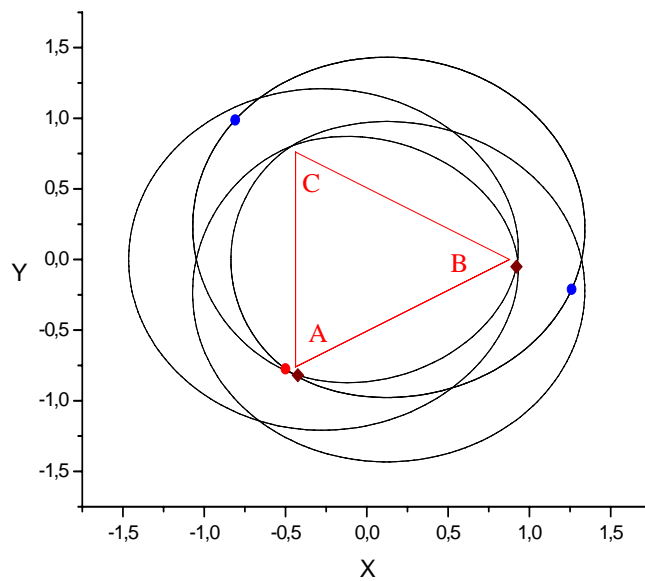


Figura 4.55 – Trajetória da partícula ao redor da placa triangular.

A análise do semi-eixo maior ou excentricidade da órbita assemelham-se ao caso anterior, ou seja, o semi-eixo maior e a excentricidade atingem um valor máximo quando a partícula passa próxima aos vértices da placa.

Neste exemplo pode-se verificar que a superfície de secção de Poincaré apresenta um conjunto de ilhas de ressonância (Figura 4.56). Assim, verifica-se a relação entre o período de precessão do pericentro e o período da órbita. Essa análise pode ser feita através da anomalia verdadeira (Figura 4.57) e do argumento do pericentro (Figura 4.58).

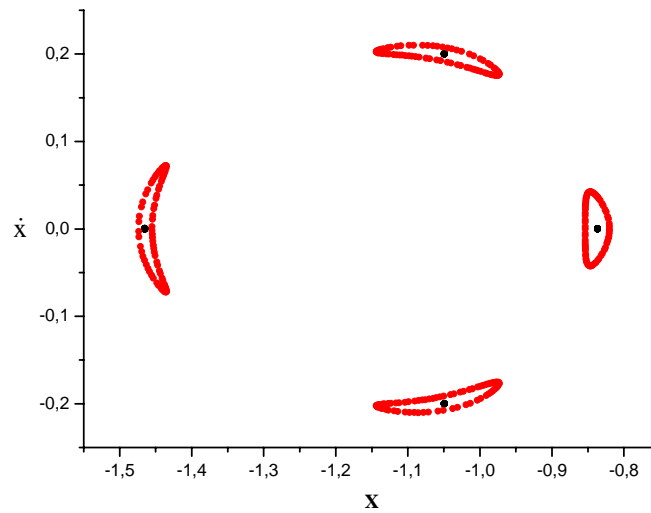


Figura 4.56 – Superfície de secção de Poincaré.

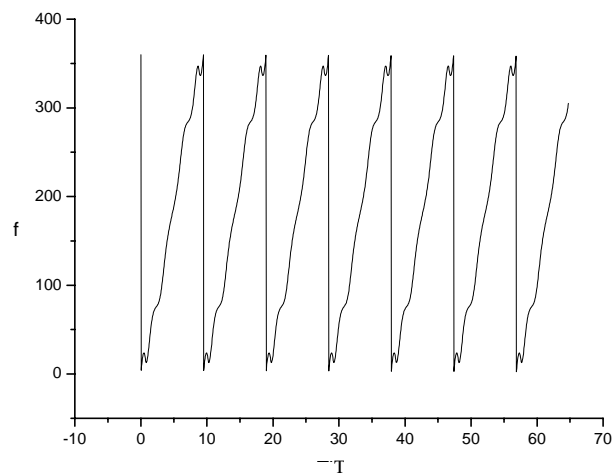


Figura 4.57 – Evolução da anomalia verdadeira no tempo.

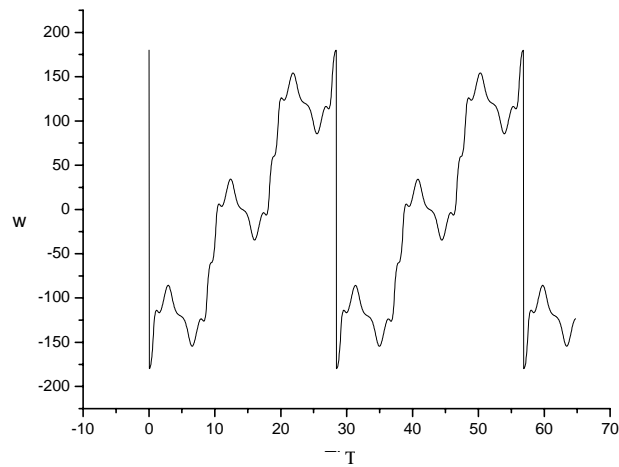


Figura 4.58 – Evolução do argumento do pericentro no tempo.

A relação entre os períodos pode ser dada por:

$$\frac{T_f}{T_\omega} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbf{3:1}$$

em que  $T_f$  é o período da órbita, obtido através da Figura 4.57 e  $T_\omega$  é o período de precessão da órbita, obtido através da Figura 4.58.

A equação anterior mostra que a cada três períodos orbitais da partícula ao redor da placa, a sua órbita precessiona completando uma volta e o pericentro retorna para a mesma posição da órbita inicial.





## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS NUMÉRICOS PARA FORMAS GEOMÉTRICAS TRIDIMENSIONAIS

#### 5.1. Introdução

Neste capítulo as equações para potenciais de poliedros são apresentadas e suas funções são descritas de modo que sejam facilmente implementadas. Diferentes sólidos tridimensionais homogêneos tiveram seu potencial gravitacional calculado, constando de uma esfera de raio unitário e alguns elipsóides oblatos e prolatos com diferentes medidas de semi-eixo. Tais sólidos são construídos através de um software chamado FEMAP (Finite Element Pre and Post Processing Program) e, então, divididos em um número finito de tetraedros. Os primeiros resultados numéricos representam a análise e escolha do melhor conjunto de tetraedros necessários para formar uma esfera de raio unitário. Para selecionar o melhor conjunto de tetraedros considerou-se aquele em que a trajetória de uma partícula ao redor desse sólido esteja de acordo com o esperado pelo problema de dois corpos. O conjunto de tetraedros escolhido para formar o sólido será aquele que apresentar o menor erro possível na trajetória. Essa análise é repetida para todos os sólidos estudados. Após essa análise, fez-se um estudo da dinâmica das órbitas ao redor desses corpos tridimensionais, comparando-se o comportamento das órbitas de acordo com a forma dos sólidos. É apresentada a variação do semi-eixo e excentricidade de cada órbita. O capítulo termina com o estudo de um método de manobras orbitais e sua aplicação para um sólido tridimensional.

#### 5.2. Expressões Analíticas do Potencial Gravitacional de Poliedros

Supondo que o corpo tridimensional tenha sua forma conhecida, este é então dividido em um número finito de tetraedros, cujos vértices (ou nós) sejam definidos. O potencial

total do sólido será calculado a partir da soma de um conjunto de potenciais de cada tetraedro.

Conhecendo-se os valores dos nós de cada tetraedro, pode-se calcular o seu potencial gravitacional, através do método de poliedros. Para o uso desse método, foram feitas as hipóteses de que o sólido desenvolvido está representando um asteróide (corpo primário) e a densidade desse asteróide é considerada constante.

De acordo com Werner (1996), o potencial gravitacional de um poliedro com densidade constante é dado por:

$$U = \frac{1}{2} G \sigma \sum_{b \in \text{bordas}} \mathbf{r}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{r}_b \cdot L_b - \frac{1}{2} G \sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f^T \mathbf{F}_f \mathbf{r}_f \cdot \omega_f, \quad (5.1)$$

em que:

$\mathbf{F}_f \equiv \hat{\mathbf{n}}_f \hat{\mathbf{n}}_f^T$  é uma matriz 3x3 definida pela normal a cada face;

$\mathbf{E}_b \equiv \mathbf{E}_{ij} \equiv \hat{\mathbf{n}}_A (\hat{\mathbf{n}}_{ij}^A)^T + \hat{\mathbf{n}}_B (\hat{\mathbf{n}}_{ji}^B)^T$  é uma matriz 3x3 que é função de duas faces e dos vetores normais a borda, sendo A e B as faces comuns a cada borda (Figura 3.9). Cada borda do poliedro tem sua própria matriz do tipo  $\mathbf{E}_b$ ;

$\mathbf{r}_b$  e  $\mathbf{r}_f$  são as distâncias do ponto de prova à borda e à face, respectivamente;

$L_b$  é o potencial de um fio ou de cada borda (logaritmo);

$\omega_f$  é definido como a área de uma esfera unitária (arco tangente);

G e  $\sigma$  são a constante gravitacional e a densidade do material, respectivamente.

Cada uma das expressões que compõem o potencial é, a seguir, descrita analiticamente de forma bem simplificada para que seja facilmente implementada.

### 5.2.1. Cálculo das Normais

Os vetores normais às faces e os vetores normais às bordas de cada tetraedro são descritos a seguir.

- As normais a cada face são calculadas a partir dos vértices de cada tetraedro, representados por  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_3$  e  $\mathbf{P}_4$ . São dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}_1 &= \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1)}{|(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1)|}, & \hat{\mathbf{n}}_2 &= \frac{(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1)}{|(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1)|}, \\ \hat{\mathbf{n}}_3 &= \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1)}{|(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1)|}, & \hat{\mathbf{n}}_4 &= \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3)}{|(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3) \times (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3)|}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

- As normais a cada borda são calculadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\begin{cases} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot (x_1, y_1, z_1) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_{f1} \cdot (x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases} & \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}_{b1} = \frac{(x_1, y_1, z_1)}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \\ \begin{cases} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_{f1} \cdot (x_2, y_2, z_2) = 0 \end{cases} & \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}_{b2} = \frac{(x_2, y_2, z_2)}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \\ \begin{cases} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \cdot (x_3, y_3, z_3) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_{f1} \cdot (x_3, y_3, z_3) = 0 \end{cases} & \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}_{b3} = \frac{(x_3, y_3, z_3)}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}} \\ \begin{cases} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \cdot (x_4, y_4, z_4) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_{f2} \cdot (x_4, y_4, z_4) = 0 \end{cases} & \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}_{b4} = \frac{(x_4, y_4, z_4)}{\sqrt{x_4^2 + y_4^2 + z_4^2}} \\ & \vdots \\ \begin{cases} (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \cdot (x_{12}, y_{12}, z_{12}) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_{f4} \cdot (x_{12}, y_{12}, z_{12}) = 0 \end{cases} & \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}_{b12} = \frac{(x_{12}, y_{12}, z_{12})}{\sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2}}\end{aligned}\tag{5.3}$$

Para resolver esse sistema de equações, faz-se necessário definir uma das variáveis. Por exemplo, assumem-se os valores iniciais de  $x_i$  como unitários, ou seja:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{12} = 1$$

Com isso, podem-se resolver os doze conjuntos de equações e determinar os valores das normais às bordas,  $\hat{\mathbf{n}}_{b1}, \hat{\mathbf{n}}_{b2}, \dots, \hat{\mathbf{n}}_{b12}$ .

As normais às faces e às bordas de duas faces, A e B, estão representadas na Figura 3.9 por  $\hat{\mathbf{n}}_A$  e  $\hat{\mathbf{n}}_B$  (face) e  $\hat{\mathbf{n}}_{ij}^A$  e  $\hat{\mathbf{n}}_{ji}^B$  (borda):

### 5.2.2. Cálculo das Funções F's e E's Referentes às Normais

Para determinar o potencial gravitacional através do método de poliedros (Equação 5.1), têm-se as seguintes matrizes, dependentes diretamente das normais  $\mathbf{n}_f$ 's e  $\mathbf{n}_b$ 's:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \hat{\mathbf{n}}_{f1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{f1}^T; & \mathbf{F}_2 &= \hat{\mathbf{n}}_{f2} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{f2}^T; \\ \mathbf{F}_3 &= \hat{\mathbf{n}}_{f3} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{f3}^T; & \mathbf{F}_4 &= \hat{\mathbf{n}}_{f4} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{f4}^T. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Em que  $\hat{\mathbf{n}}_{fi}$  são os vetores das normais às faces e  $\hat{\mathbf{n}}_{fi}^T$  são os vetores transpostos. As funções  $\mathbf{F}_i$  são matrizes 3x3 em função de cada face.

As funções  $\mathbf{E}$ 's são dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{12} &= \hat{\mathbf{n}}_{f1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b1}^T + \hat{\mathbf{n}}_{f3} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b7}^T; \\
\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{13} &= \hat{\mathbf{n}}_{f1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b2}^T + \hat{\mathbf{n}}_{f2} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b4}^T; \\
\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_{23} &= \hat{\mathbf{n}}_{f1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b3}^T + \hat{\mathbf{n}}_{f4} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b10}^T; \\
\mathbf{E}_4 = \mathbf{E}_{14} &= \hat{\mathbf{n}}_{f2} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b5}^T + \hat{\mathbf{n}}_{f3} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b8}^T; \\
\mathbf{E}_5 = \mathbf{E}_{34} &= \hat{\mathbf{n}}_{f2} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b6}^T + \hat{\mathbf{n}}_{f4} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b12}^T; \\
\mathbf{E}_6 = \mathbf{E}_{24} &= \hat{\mathbf{n}}_{f3} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b9}^T + \hat{\mathbf{n}}_{f4} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{b11}^T.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

As funções  $\mathbf{E}_i$  são matrizes 3x3 em função de duas faces com bordas comuns e os vértices normais à borda associada com cada segmento  $\overline{P_i P_j}$ .

### 5.2.3. Cálculo das Funções Logarítmicas L's

Na Equação 5.1, a função  $L_b$  representa o potencial de um fio reto (1D). Adota-se o símbolo  $L_b \equiv \int_b \frac{1}{r} ds$  para uma borda geral  $b$  da face  $f$ . Werner (1994) mostra que a integral definida pode ser expressa intrinsecamente em função das distâncias  $\mathbf{P}_i$  e  $\mathbf{P}_j$  do ponto de prova com relação aos dois extremos do comprimento da borda, o qual resulta em:

$$L_b \equiv \int_b \frac{1}{r} ds = \ln \left[ \frac{r_i + r_j + r_{ij}}{r_i + r_j - r_{ij}} \right],$$

em que  $r_i$  é a distância do vértice  $\mathbf{P}_i$  ao ponto de prova;  $r_j$  é a distância do vértice  $\mathbf{P}_j$  ao ponto de prova; e  $r_{ij}$  é a distância entre os vértices  $\mathbf{P}_i$  e  $\mathbf{P}_j$ , ou seja, o comprimento da borda. Pode-se, então, calcular as funções L's como:

$$\begin{aligned}
L_1 = L_{12} &= \ln \left[ \frac{r_1 + r_2 + r_{12}}{r_1 + r_2 - r_{12}} \right]; & L_2 = L_{13} &= \ln \left[ \frac{r_1 + r_3 + r_{13}}{r_1 + r_3 - r_{13}} \right]; \\
L_3 = L_{23} &= \ln \left[ \frac{r_2 + r_3 + r_{23}}{r_2 + r_3 - r_{23}} \right]; & L_4 = L_{14} &= \ln \left[ \frac{r_1 + r_4 + r_{14}}{r_1 + r_4 - r_{14}} \right]; \\
L_5 = L_{34} &= \ln \left[ \frac{r_3 + r_4 + r_{34}}{r_3 + r_4 - r_{34}} \right]; & L_6 = L_{24} &= \ln \left[ \frac{r_2 + r_4 + r_{24}}{r_2 + r_4 - r_{24}} \right].
\end{aligned} \tag{5.6}$$

em que:  $r_i = \sqrt{(P_{xi} - X)^2 + (P_{yi} - Y)^2 + (P_{zi} - Z)^2}$ , sendo  $(P_{xi}, P_{yi}, P_{zi})$  e  $(X, Y, Z)$  as coordenadas do vértice  $P_i$  e as coordenadas do ponto de prova, respectivamente.

#### 5.2.4. Cálculo das Funções Arco tangentes $\omega$ 's

A integral  $\omega_f = \iint_S \frac{z}{r^3} dS$  é definida como a região planar S quando projetada em uma esfera de raio unitário, conforme a Figura 3.10. A esfera unitária está centrada no ponto de prova e z é a coordenada do plano relativo ao ponto de prova.

O ângulo sólido  $\omega_f$  é um escalar adimensional que está associado com cada face do tetraedro. Para evitar o cálculo dessa integral, tem-se que  $\omega_f$  é dado por:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \tan^{-1} \left[ \frac{\text{sinal}(z) \cdot |\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|}{r_1 r_2 r_3 + r_1 (\mathbf{r}_2^T \cdot \mathbf{r}_3) + r_2 (\mathbf{r}_3^T \cdot \mathbf{r}_1) + r_3 (\mathbf{r}_1^T \cdot \mathbf{r}_2)} \right], \\
\omega_2 &= \tan^{-1} \left[ \frac{\text{sinal}(z) \cdot |\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4|}{r_1 r_3 r_4 + r_1 (\mathbf{r}_3^T \cdot \mathbf{r}_4) + r_3 (\mathbf{r}_4^T \cdot \mathbf{r}_1) + r_4 (\mathbf{r}_1^T \cdot \mathbf{r}_3)} \right], \\
\omega_3 &= \tan^{-1} \left[ \frac{\text{sinal}(z) \cdot |\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_4|}{r_1 r_2 r_4 + r_1 (\mathbf{r}_2^T \cdot \mathbf{r}_4) + r_2 (\mathbf{r}_4^T \cdot \mathbf{r}_1) + r_4 (\mathbf{r}_1^T \cdot \mathbf{r}_2)} \right], \\
\omega_4 &= \tan^{-1} \left[ \frac{\text{sinal}(z) \cdot |\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4|}{r_2 r_3 r_4 + r_2 (\mathbf{r}_3^T \cdot \mathbf{r}_4) + r_3 (\mathbf{r}_4^T \cdot \mathbf{r}_2) + r_4 (\mathbf{r}_2^T \cdot \mathbf{r}_3)} \right].
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Em que sinal (z) é o sinal da variável z que depende da posição do plano da face, acima ou abaixo da esfera unitária. As expressões  $\mathbf{r}_i = (\mathbf{P}_{xi} - X, \mathbf{P}_{yi} - Y, \mathbf{P}_{zi} - Z)$  representam os vetores distâncias do ponto de prova aos vértices  $\mathbf{P}_i$ .

Assim, têm-se todas as funções necessárias para determinar o potencial de um único tetraedro, através da Equação 5.1. Para o cálculo do potencial de todo o sólido é suficiente somar o potencial de todos os tetraedros que formam o sólido.

Tem-se então que o potencial de um único tetraedro é dado por:

$$U_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{2} G \sigma \sum_{b=1}^6 \mathbf{r}_b^T \cdot \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{r}_b L_b - \frac{1}{2} G \sigma \sum_{f=1}^4 \mathbf{r}_f^T \cdot \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{r}_f \omega_f . \tag{5.8}$$

Já o potencial do corpo é dado por:

$$U = \sum_{\text{tetraedro}=1}^{n-\text{tetra}} U_{\text{tetraedro}} \tag{5.9}$$

em que n-tetra é o número de tetraedros que forma o asteróide.

Para calcular a força gravitacional do asteróide hipotético, ou de qualquer poliedro 3D, basta calcular o gradiente do potencial. Assim, têm-se as expressões necessárias para o estudo de órbitas ao redor de corpos tridimensionais com formas irregulares.

### **5.3. Estudo do Erro Numérico Utilizando Diferentes Números de Tetraedros**

A precisão da trajetória pode estar diretamente ligada ao número de tetraedros que formam o sólido. Antes de iniciar a integração, alguns testes foram feitos e o melhor conjunto de tetraedros foi utilizado, levando sempre em conta o melhor resultado para a precisão da trajetória e o tempo de processamento. Para que um sólido tenha sua forma bem representada por um poliedro deve-se construir um maior conjunto de pequenos tetraedros, porém, essa escolha fará o tempo de processamento aumentar proporcionalmente. Um pequeno número de tetraedros pode criar um sólido que não representa fielmente o corpo desejado. Seu volume, representado pela soma dos volumes de cada tetraedro, poderá ser maior ou menor que o volume total do sólido real. Quando o sólido é formado por um maior número de pequenos tetraedros, sua forma e seu volume podem ser melhor representados. O software FEMAP, utilizado neste trabalho para a criação e divisão dos sólidos, faz uma escolha do número de tetraedros, dentro de um critério de precisão utilizado. O usuário também pode solicitar um determinado número de tetraedros, porém, nem sempre a escolha será mais precisa que aquela selecionada pelo software. Os tetraedros utilizados pelo software não são regulares e possuem diferentes tamanhos dependendo da lacuna a ser preenchida. Em alguns casos, tais escolhas acabam gerando alguns tetraedros com pequenos ângulos e, então, uma de suas bases será muito pequena, comprometendo os cálculos relacionados aos potenciais das bases. Isso pode gerar um erro numérico no cálculo do potencial de cada tetraedro e, conseqüentemente, na trajetória da partícula teste. Neste trabalho, procurou-se um conjunto de tetraedros que pudesse representar bem o sólido escolhido, levando em conta a qualidade do modelo poliedral e o tempo de processamento. Vale lembrar que o erro numérico aumenta com a proximidade da partícula teste ao sólido. Portanto, a melhor escolha é aquela que reduz o erro para cada conjunto de trajetórias gerado.



O teste inicial utilizou uma esfera de raio unitário como sendo o primeiro corpo tridimensional. A esfera foi dividida em diferentes números de tetraedros e encontrou-se a melhor situação em que o comportamento da trajetória fosse similar ao previsto para o problema de dois corpos.

A trajetória da partícula iniciou-se na posição  $X_i = 10$ , com  $Y_i$  e  $Z_i$  nulos. Essa distância corresponde a 10 raios da esfera e encontra-se suficientemente distante para resultar numa órbita próxima a uma trajetória circular e fechada, de acordo com as condições iniciais do problema. Espera-se que, após meio período orbital, a partícula passe em  $X = -10$  e, depois de um período completo, a sua posição final seja exatamente  $X_f = 10$ . O melhor resultado corresponde ao menor valor de  $\Delta X$ , em que  $\Delta X = X_f - X_i$ .

A Tabela 5.1 apresenta os diferentes números de tetraedros (n-tetra) que formam a esfera e a variação da posição da partícula ( $\Delta X$ ). A Figura 5.1a representa diferentes trajetórias para cada conjunto de tetraedros. O código de cores mostra qual conjunto de tetraedros foi utilizado para obter cada trajetória. O melhor conjunto de tetraedros para a esfera de raio unitário foi de n-tetra = 493. A Figura 5.1b representa uma ampliação do lado esquerdo da Figura 5.1a. Pode-se verificar que a melhor órbita é aquela que, após meio período orbital, a partícula encontra-se próxima de  $X = -10$ .

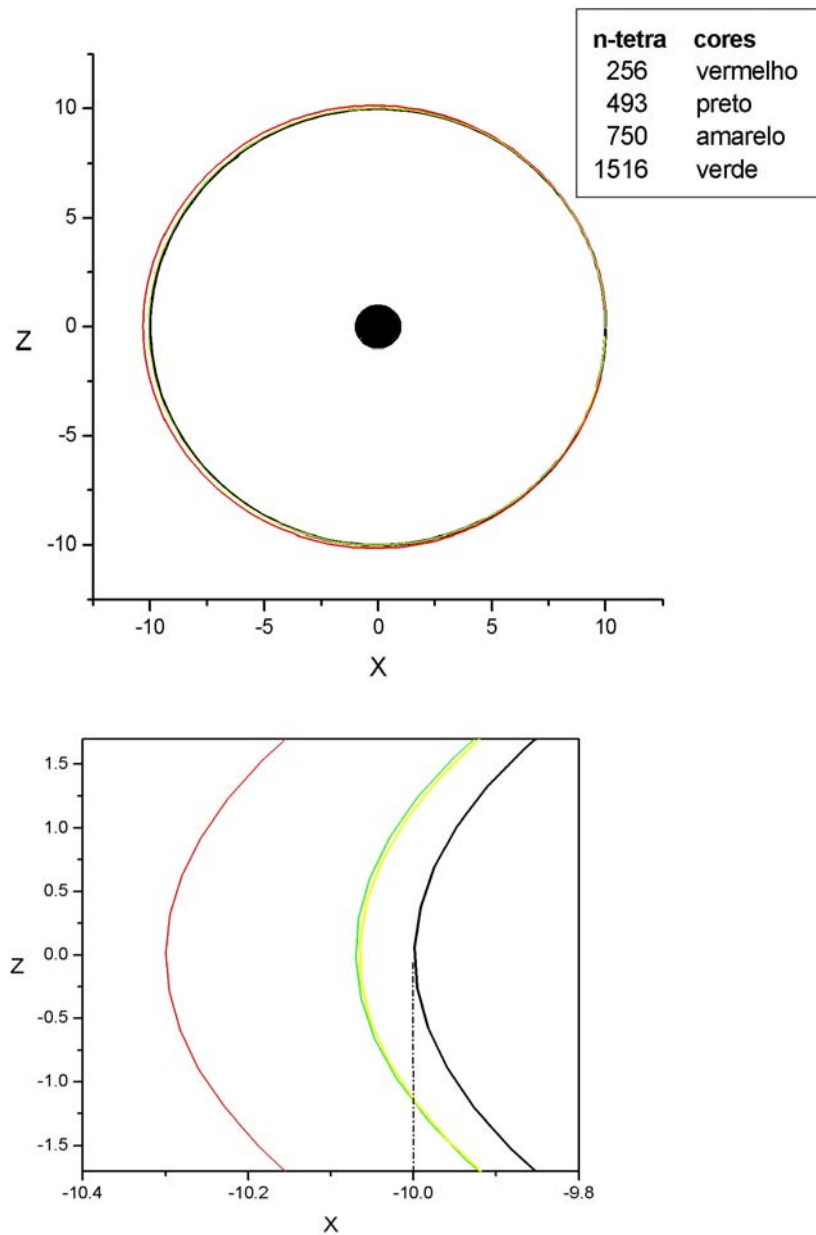


Figura 5.1 – (a) Trajetórias ao redor da esfera de raio unitário formada por diferentes números de tetraedros. Cada órbita foi gerada ao redor de uma esfera formada por um diferente conjunto de tetraedros e está representada por diferentes cores. (b) Com uma ampliação do lado esquerdo da Figura 5.1a pode-se verificar que o melhor resultado encontra-se próximo ao valor  $X = -10$ .

Tabela 5.1 – Conjunto de tetraedros que formam a esfera de raio unitário.

<b>n-tetra</b>	<b><math>\Delta x</math></b>
256	0,2
493	0,0004
750	0,04
1516	0,02

Para o conjunto de 256 tetraedros verificou-se que a órbita não fecha, pois o valor de  $\Delta X$  é muito grande, da ordem de  $10^{-1}$ . Isso ocorre devido ao fato de que o número de tetraedros não foi suficiente para formar a esfera com precisão, o que resultou numa superfície pouco suave. Além disso, o volume total da esfera dividida corresponde a um valor abaixo do seu volume real, devido às lacunas deixadas pelo conjunto de tetraedros. Para o conjunto de 493 tetraedros obteve-se um resultado considerado suficiente para o propósito desse trabalho, com um erro da ordem de  $10^{-4}$ . A soma dos volumes dos tetraedros ficou próxima ao volume total da esfera e a sua superfície apresentou-se mais suave. Os demais valores, 750 e 1516, não apresentaram bons resultados, embora eles representem melhor a esfera. Isso ocorre devido a imprecisão na escolha do número de tetraedros solicitada ao FEMAP, gerando tetraedros com pequenos ângulos.

Essa análise foi repetida a cada vez que um novo sólido foi criado, buscando sempre as melhores formas de representar os sólidos. Após a verificação do melhor conjunto de tetraedros para cada sólido tridimensional, estudou-se a dinâmica da órbita para sólidos com diferentes formas. São eles: esfera de raio unitário, elipsóides prolatos e elipsóides oblatos. A Tabela 5.2 representa os diferentes sólidos, seus semi-eixos e os números de tetraedros para cada um.

Tabela 5.2 – Conjunto de tetraedros que formam os sólidos tridimensionais.

<b>Sólido</b>	<b>raio / semi-eixos</b>	<b>n-tetra</b>
<b>Esfera</b>	1	493
<b>Elipsóide</b>	(1 x 3 x 1)	239
<b>Prolato</b>	(1 x 12 x 1)	324
<b>Elipsóide</b>	(2 x 1 x 2)	451
<b>Oblato</b>	(4 x 1 x 4)	773

#### 5.4. Conjunto de Trajetórias ao Redor de Sólidos Tridimensionais

Após a construção do corpo primário através de um modelo poliedral, formado por um número finito de tetraedros, as órbitas de uma partícula teste foram propagadas usando um integrador numérico chamado Runge-Kutta para integrar numericamente as equações do movimento. Nas equações do movimento considerou-se apenas a atração gravitacional do corpo central, calculada através do método de poliedros. O corpo primário encontra-se fixo no sistema de coordenadas e a origem do sistema coincide com o centro de massa do corpo. Uma partícula de massa negligenciável é colocada em diferentes posições iniciais e sua integração ocorre durante um determinado período de tempo calculado pelo problema de dois corpos. Tem-se que:

R – é a posição inicial da partícula em relação à origem do sistema. Sua posição inicial pode ser dada pelas coordenadas X, Y ou Z, de acordo com o plano da órbita de interesse.

T – é o período orbital obtido pela terceira lei de Kepler, definido como o tempo decorrente entre duas passagens de uma partícula pelo pericentro da órbita.

O primeiro caso teste foi a propagação de uma órbita ao redor de uma esfera de raio unitário. Em seguida, o corpo primário considerado foi um elipsóide prolato com semi-eixos (1 x 3 x 1) e outro com semi-eixos (1 x 12 x 1). Os últimos testes foram feitos

com um elipsóide oblato (2 x 1 x 2) e outro (4 x 1 x 4). As condições iniciais do problema (posição e velocidade) são dadas pelo problema de dois corpos. Nos planos XY e XZ, as condições iniciais são, respectivamente,

$$(X, Y, Z) = (R, 0, 0); \quad (V_x, V_y, V_z) = \left( 0, \sqrt{\frac{\mu}{R}}, 0 \right) \quad e$$

$$(X, Y, Z) = (R, 0, 0); \quad (V_x, V_y, V_z) = \left( 0, 0, \sqrt{\frac{\mu}{R}} \right)$$

sendo  $\mu$  a massa do sólido. O período orbital Kepleriano é dado por:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mu}}$  e as unidades são escolhidas de modo que  $G\rho = 1$ , em que  $\rho$  é a densidade do sólido.

Por simplicidade na leitura dos resultados, classificam-se os sólidos estudados de acordo com a Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Classificação dos sólidos tridimensionais.

Sólido	Classificação
esfera de raio unitário	Esfera
elipsóide Prolato (1 x 3 x 1)	Prolato 3
elipsóide Prolato (1 x 12 x 1)	Prolato 12
elipsóide Oblato (2 x 1 x 2)	Oblato 2
elipsóide Oblato (4 x 1 x 4)	Oblato 4

A Figura 5.2 representa o conjunto de trajetórias ao redor da Esfera no plano XZ; as Figuras 5.5 e 5.8 mostram um conjunto de órbitas ao redor do Prolato 3, nos planos orbitais XZ e XY, respectivamente. A Figura 5.9 representa o conjunto de órbitas ao

redor do Prolato 12 no plano XZ; e as Figuras 5.12 e 5.15 representam o conjunto de trajetórias ao redor do Oblato 2 e Oblato 4, respectivamente. Uma partícula teste orbita ao redor desses sólidos tridimensionais considerando-se diferentes posições iniciais ( $R$ ) e a integração é feita em um determinado número de períodos ( $T$ ).

Os primeiros resultados apresentados utilizam a Esfera como corpo central. Na Figura 5.2 pode-se observar que a órbita é circular e fechada quando a partícula encontra-se distante do primário. Nas proximidades da Esfera ( $R \leq 1,5$ ), a partícula sofre uma pequena perturbação do potencial gravitacional devido à forma poliedral do sólido, levando a uma pequena mudança na trajetória. Vale lembrar que a esfera foi gerada a partir de um conjunto de tetraedros que não representa fielmente o corpo, contendo certa imprecisão na sua modelagem. Isso gera pequenos erros numéricos que aumentam com a proximidade da partícula ao sólido. Neste caso em particular, a esfera foi muito bem representada por poliedros, mesmo quando a partícula está muito próxima da esfera. Para resultados mais precisos é suficiente representar o corpo por um número maior de faces triangulares em seu modelo poliedral.

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram a evolução do semi-eixo maior ( $a$ ) e da excentricidade ( $e$ ) da órbita ao longo do tempo. A posição inicial escolhida foi  $R = 10$  e o tempo de 10 períodos orbitais keplerianos. Para essas condições iniciais, tanto o semi-eixo quanto a excentricidade apresentam variações de curto período da ordem de  $10^{-3}$  em ' $a$ ' e da ordem de  $10^{-5}$  em ' $e$ '. A partir desses resultados verificou-se que a órbita continua praticamente circular, mantendo uma pequena excentricidade e o semi-eixo próximo ao valor da posição inicial  $R$ .

Esses resultados estão de acordo com o trabalho de Rossi et al. (1999) que encontrou uma variação de curto período da ordem de  $10^{-4}$  tanto para ' $a$ ' quanto para ' $e$ ', considerando-se a trajetória de uma partícula teste a uma distância de dois raios da esfera. Nesse trabalho, os autores calculam o potencial gravitacional da esfera através de dois métodos: o método de poliedros com 1521 faces e o método mascons com 11753 pontos de massa. Em ambos os casos, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita apresentaram uma mesma variação.

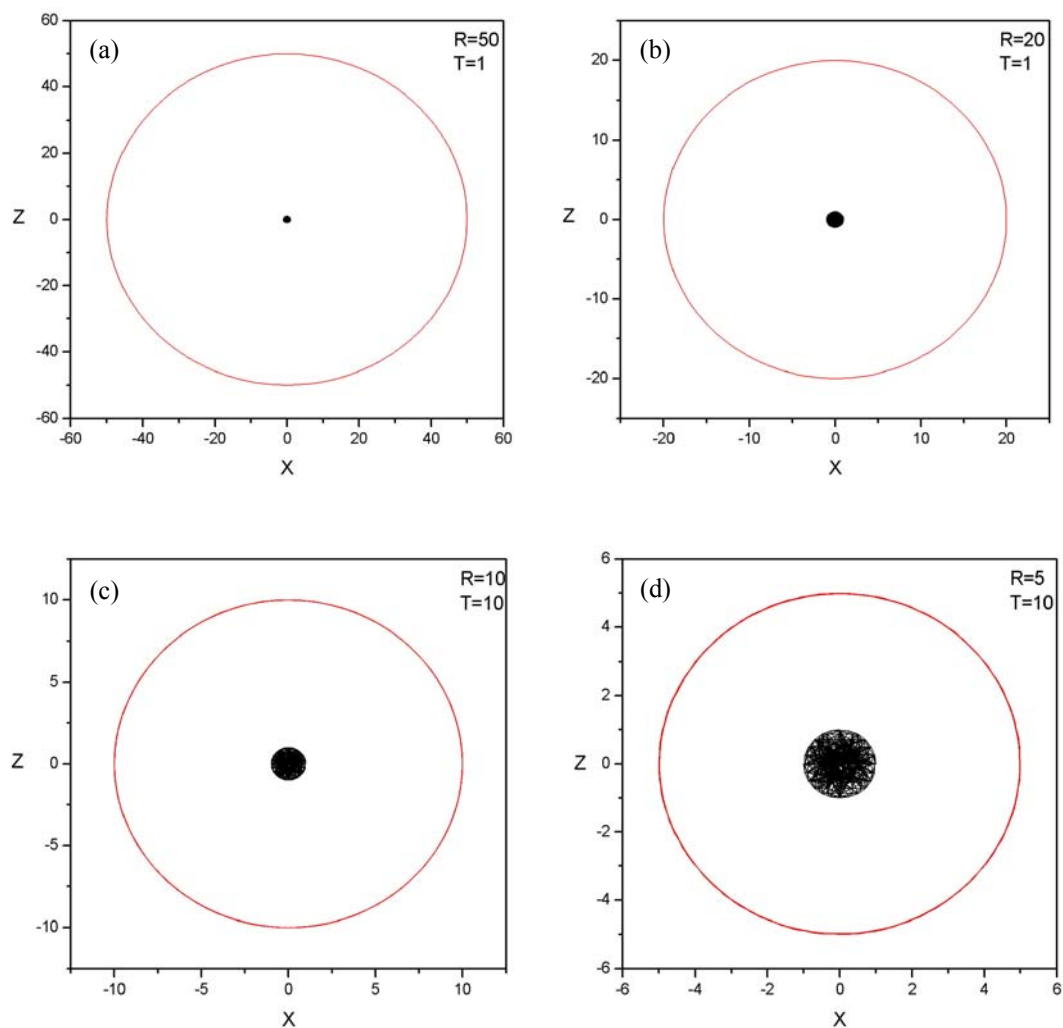


Figura 5.2 – Conjunto de trajetórias ao redor da Esfera. As figuras (a) e (b) representam um período orbital da partícula nas posições  $R = 50$  e  $20$  vezes o raio da Esfera. As figuras (c), (d) e (e) representam dez períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 10$ ;  $5$  e  $2,5$ . As figuras (f), (g) e (h) representam cinquenta períodos orbitais da partícula, iniciando-se em  $R = 2$ ;  $1,5$  e  $1,2$ . O plano da órbita considerado é o plano XZ (continua).

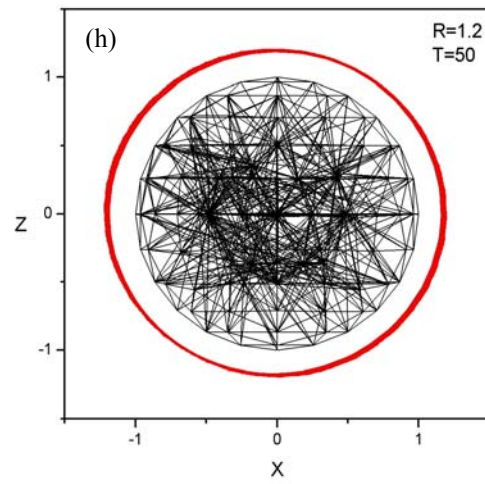
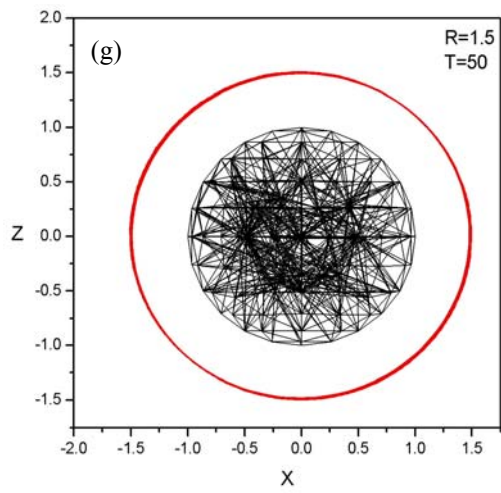
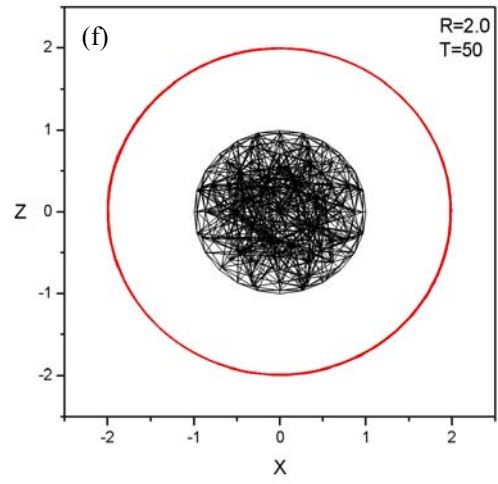
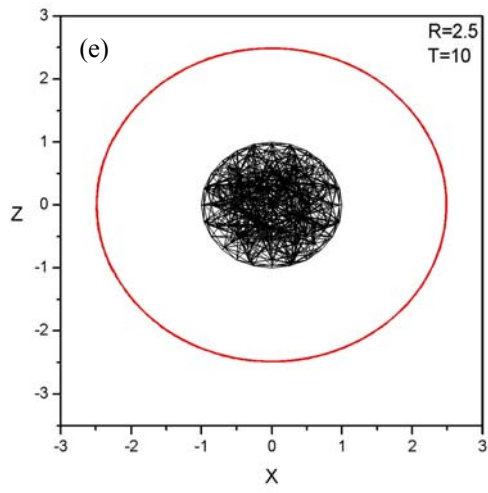


Figura 5.2 – (conclusão).



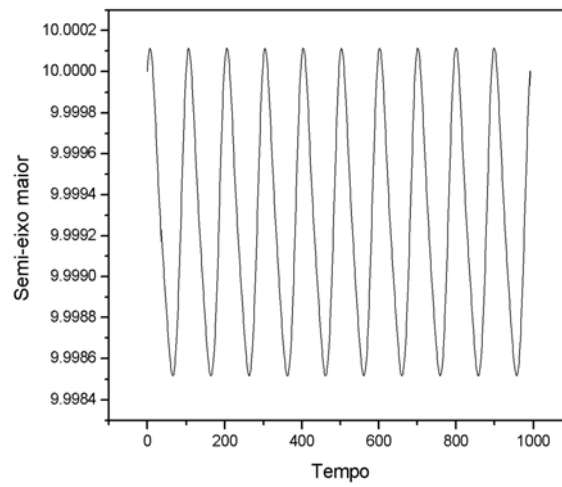


Figura 5.3 – Semi-eixo maior vs. tempo para o caso teste da partícula em órbita circular ao redor da Esfera, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 10$ .

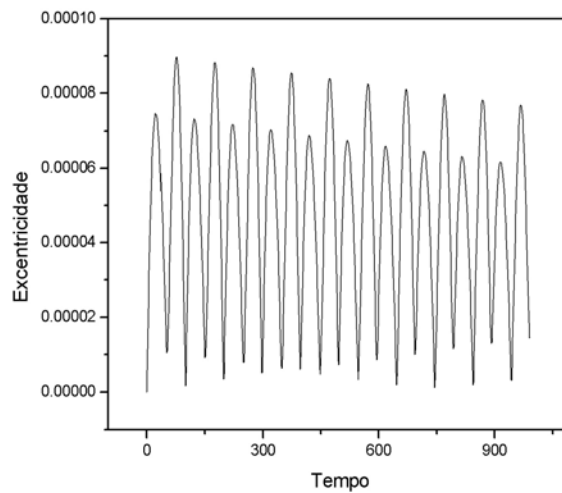


Figura 5.4 – Excentricidade vs. tempo para o caso teste da partícula em órbita circular ao redor da Esfera, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 10$ .

O segundo teste consiste na propagação da órbita de uma partícula teste ao redor dos elipsóides alongados: o Prolato 3 e o Prolato 12.

A Figura 5.5 mostra um conjunto de órbitas no plano orbital XZ ao redor do Prolato 3, mantendo o plano de simetria axial do sólido. Quando a partícula se encontra distante do primário, sua órbita mostra-se similar a uma órbita kepleriana, porém, depois de um período orbital (T) a partícula não retorna à posição inicial. Seu período orbital torna-se mais longo que o período kepleriano. Nas proximidades do primário esse efeito é maior, pois a partícula sofre uma maior perturbação do potencial gravitacional devido à forma elipsoidal do primário. As órbitas tornam-se excêntricas e precessionam. Vale lembrar que, ao efeito do potencial, devem-se somar os pequenos erros numéricos devido à forma poliedral do elipsóide, quando a partícula se encontra muito próxima ao primário.

As Figuras 5.6 e 5.7 mostram a evolução do semi-eixo maior (a) e da excentricidade (e) da órbita ao longo do tempo. A posição inicial escolhida foi  $R = 10$  e o tempo corresponde a 3 períodos orbitais keplerianos. Para essas condições iniciais, tanto o semi-eixo quanto a excentricidade apresentam variações de curto período da ordem de  $10^{-2}$ , tanto para 'a' quanto para 'e'.

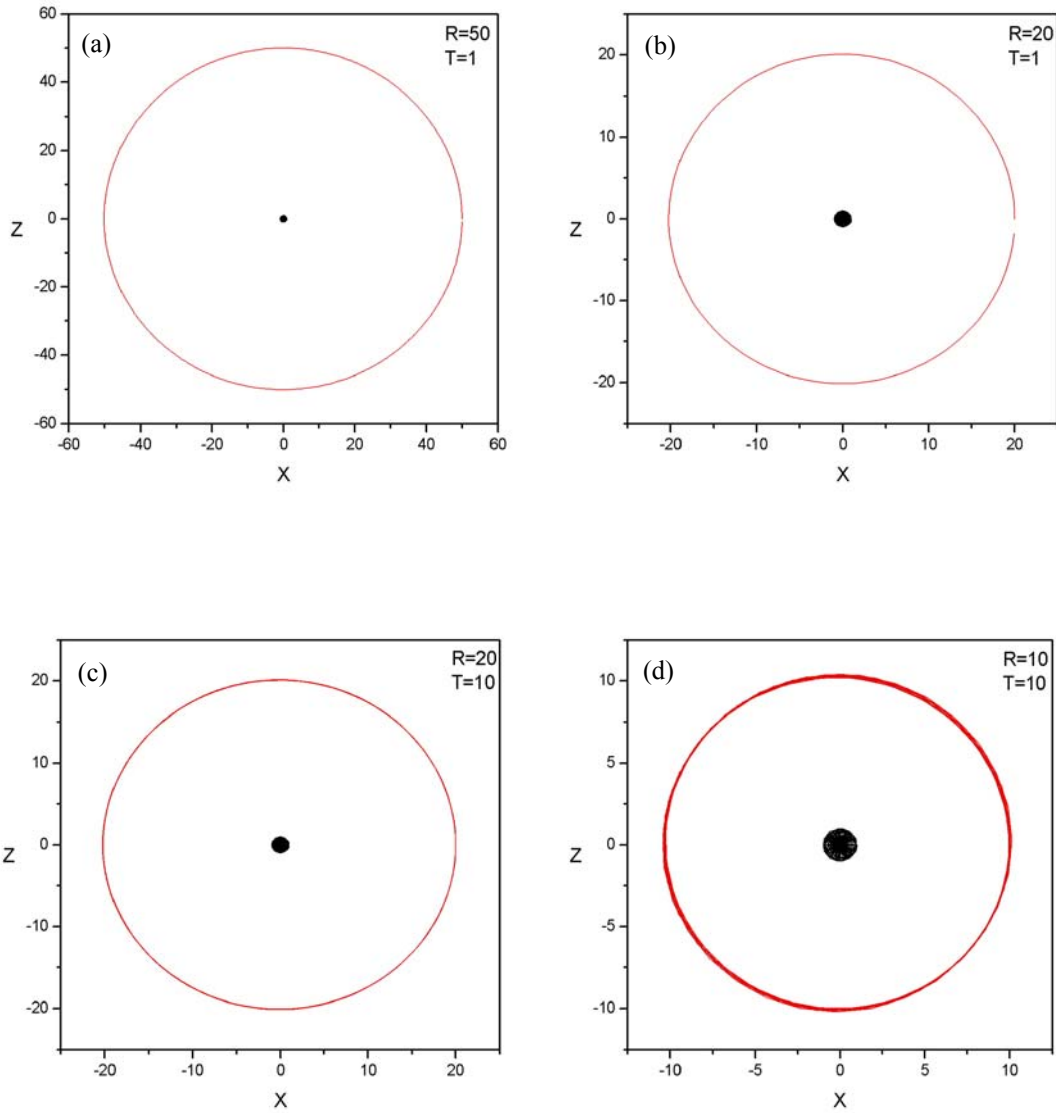


Figura 5.5 – Conjunto de trajetórias ao redor do Prolato 3. As figuras (a) e (b) representam um período orbital da partícula nas posições  $R = 50$  e 20 vezes o semi-eixo de simetria do elipsóide. As figuras (c), (d) e (e) representam dez períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 20$ ; 10 e 5. As figuras (f), (g), (h) e (i) representam cinquenta períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 5$ ; 2,5; 1,5 e 1,2. A figura (j) representa cem períodos orbitais da partícula, iniciando-se em  $R = 1,2$ . O plano da órbita considerado é o plano XZ (continua).

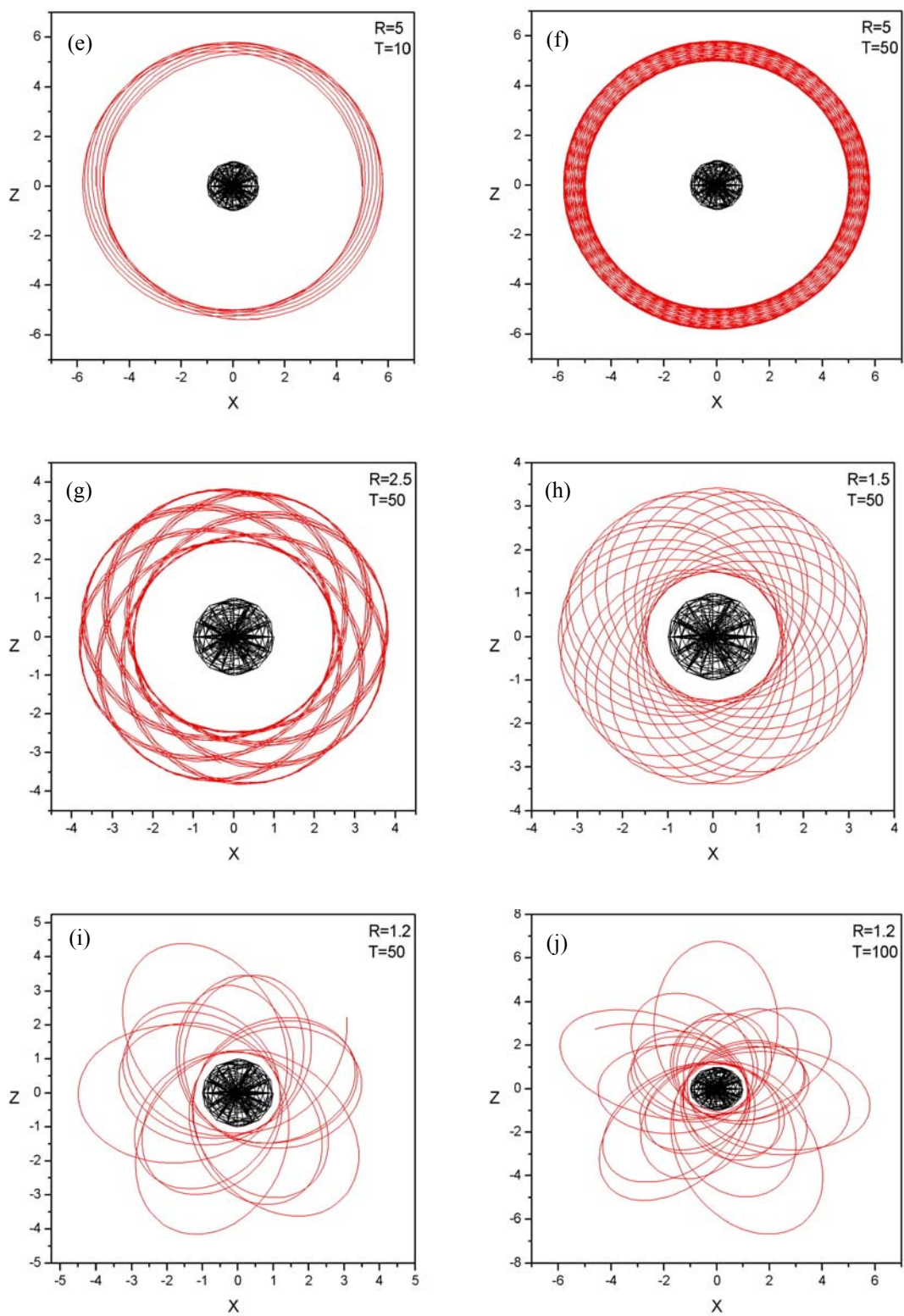


Figura 5.5 – (conclusão).

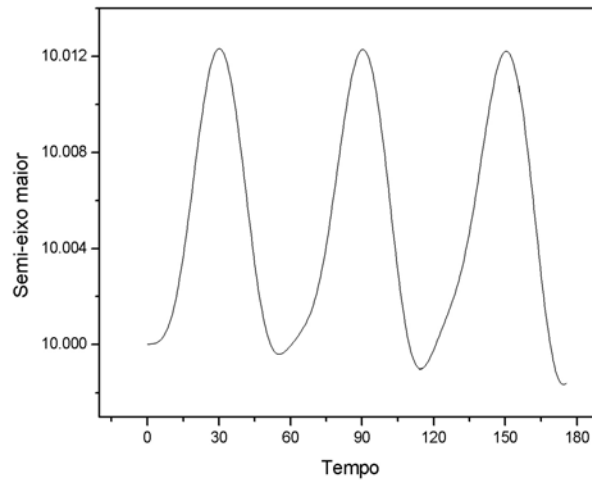


Figura 5.6 – Semi-eixo maior vs. tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Prolato 3, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 3$ .

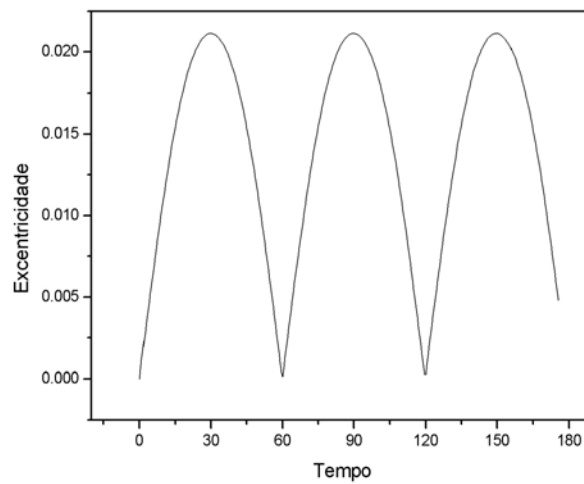


Figura 5.7 – Excentricidade vs. tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Prolato 3, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 3$ .

A Figura 5.8 mostra um conjunto de órbitas no plano orbital YZ ao redor do Prolato 3, no plano orbital XY. Diferentes posições iniciais da partícula e diferentes períodos foram observados até o momento da colisão da partícula devido ao efeito da força gravitacional. Para longas distâncias a partícula percorre uma trajetória circular, mas com sua aproximação ao corpo central ocorre a colisão com o elipsóide.

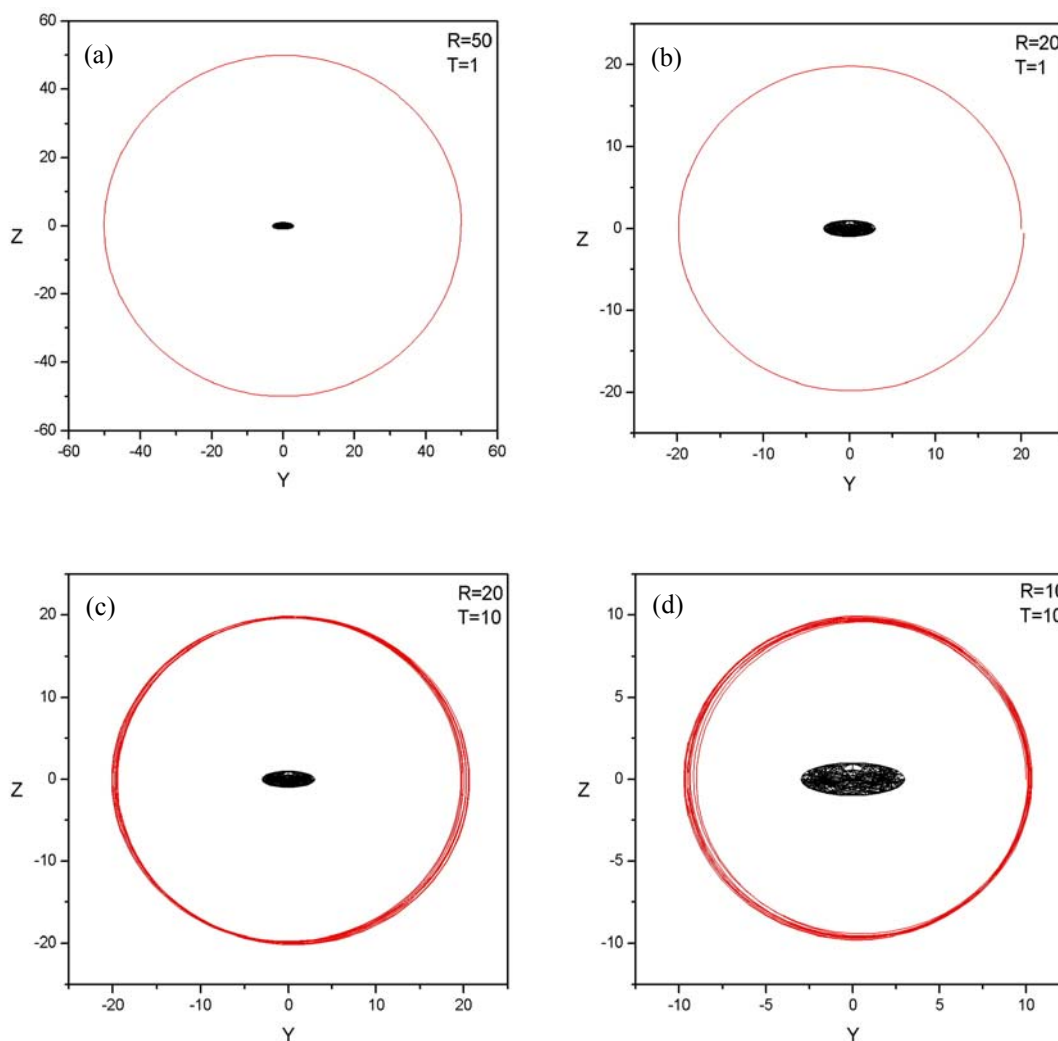


Figura 5.8 – Conjunto de trajetórias ao redor do Prolato 3. As figuras (a) e (b) representam um período orbital da partícula nas posições  $R = 50$  e  $20$  vezes o semi-eixo de simetria do elipsóide. As figuras (c), (d) e (e) representam dez vezes o período orbital da partícula nas posições  $R = 20$ ;  $10$  e  $5$ . A figura (f) representa a órbita da partícula, iniciando-se em  $R = 4$  até o momento da colisão. O plano orbital está em YZ (continua).

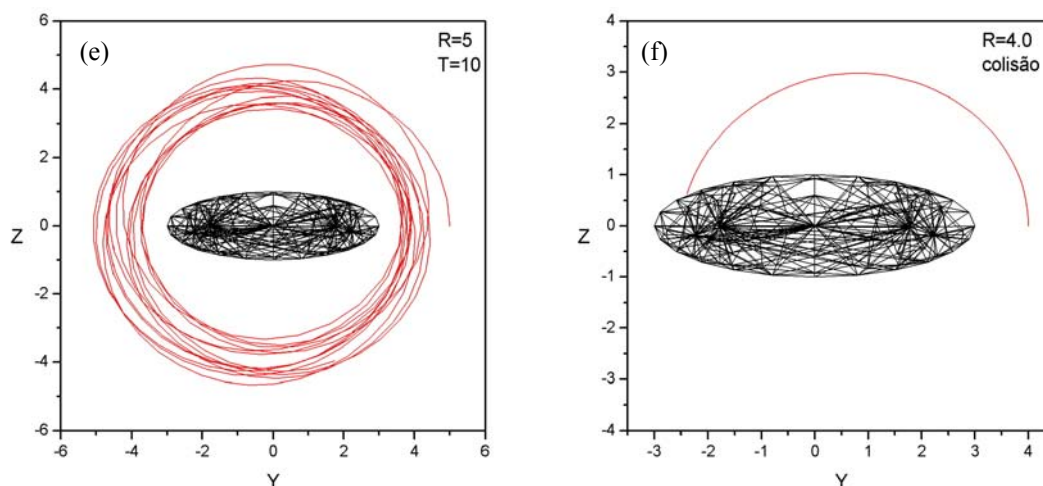


Figura 5.8 – (conclusão).

A Figura 5.9 mostra um conjunto de órbitas no plano orbital XZ ao redor do Prolato 12, mantendo o plano de simetria axial do sólido. Os resultados são similares aos do primeiro caso (Prolato 3). A principal característica observada nesse conjunto de órbitas é que, mesmo distante do primário, a partícula sofre o efeito gravitacional e a órbita não se fecha. O período kepleriano ( $T$ ) utilizado nas condições iniciais não é suficiente para que a partícula complete uma volta. Nas proximidades do primário o período orbital torna-se cada vez mais longo, comparado com o período kepleriano. Outra característica observada é que as órbitas tornam-se excêntricas e precessionam. Essa excentricidade torna-se mais acentuada que no caso anterior, devido ao formato mais alongado do elipsóide. Além disso, a órbita precessiona mais rapidamente para uma mesma posição da partícula teste quando se comparam os resultados dos dois modelos de elipsóides: o Prolato 3 e o Prolato 12.

As Figuras 5.10 e 5.11 mostram a evolução do semi-eixo maior ( $a$ ) e da excentricidade ( $e$ ) da órbita ao longo do tempo. A posição inicial escolhida foi  $R = 10$  e o tempo corresponde a três períodos orbitais keplerianos. Para essas condições iniciais tanto o semi-eixo quanto a excentricidade apresentam variações de curto período em torno de 1,65 em ' $a$ ' e aproximadamente 0,76 em ' $e$ '. Com esses resultados pode-se verificar

que, devido ao formato bastante alongado do elipsóide, a órbita torna-se bastante excêntrica, sendo uma órbita elíptica que precessiona.

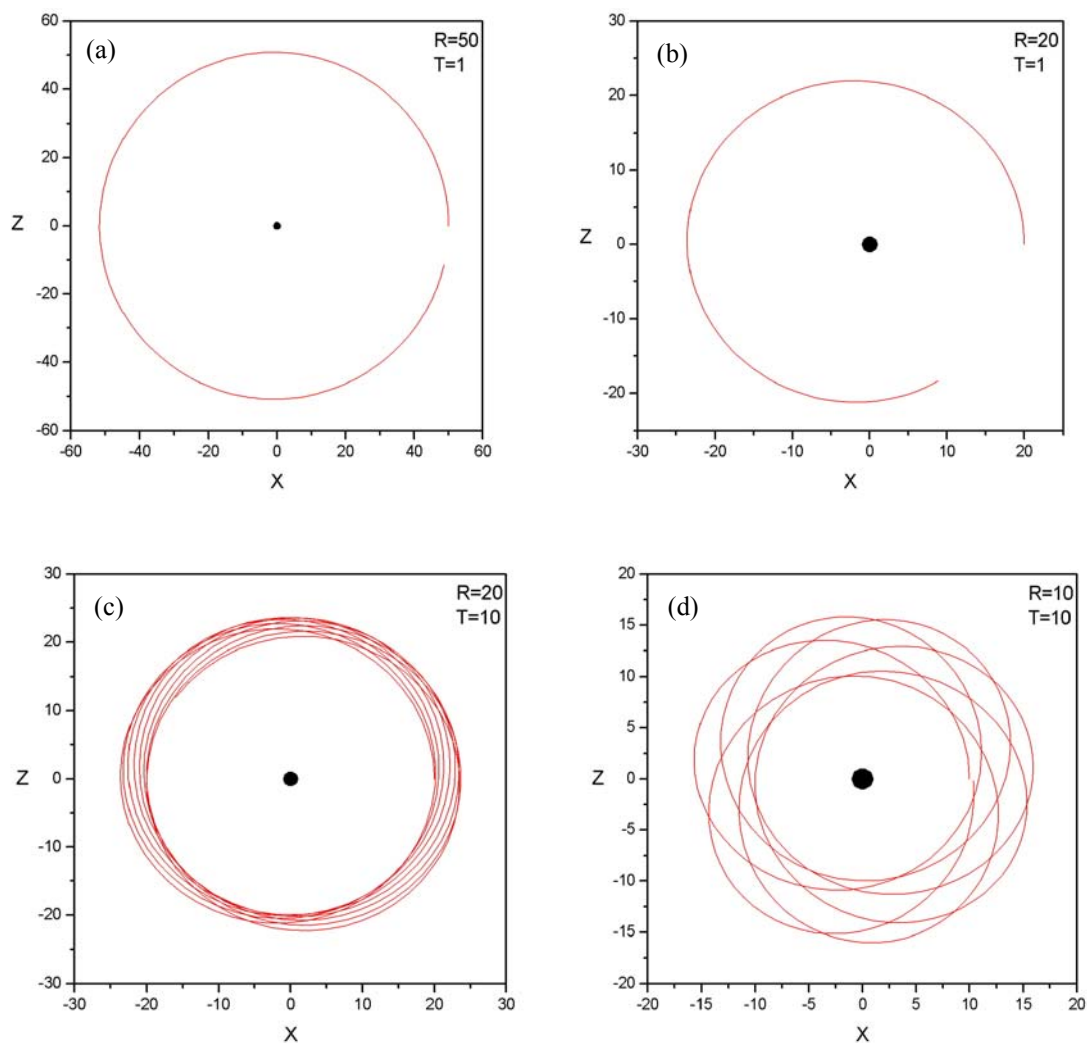


Figura 5.9 – Conjunto de trajetórias ao redor do Prolato 12. As figuras (a) e (b) representam um período orbital da partícula nas posições  $R = 50$  e  $20$  vezes o semi-eixo de simetria do elipsóide. As figuras (c) e (d) representam dez períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 20$  e  $10$ . As figuras (e), (f), e (h) representam cinquenta períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 10$ ;  $5$  e  $2,5$ . As figuras (g) e (i) representam cem períodos orbitais da partícula iniciando-se em  $R = 5$  e  $2,5$ . A figura (j) representa quinhentos períodos orbitais da partícula, iniciando-se em  $R = 2,5$ . O plano da órbita considerado é o plano XZ (continua).



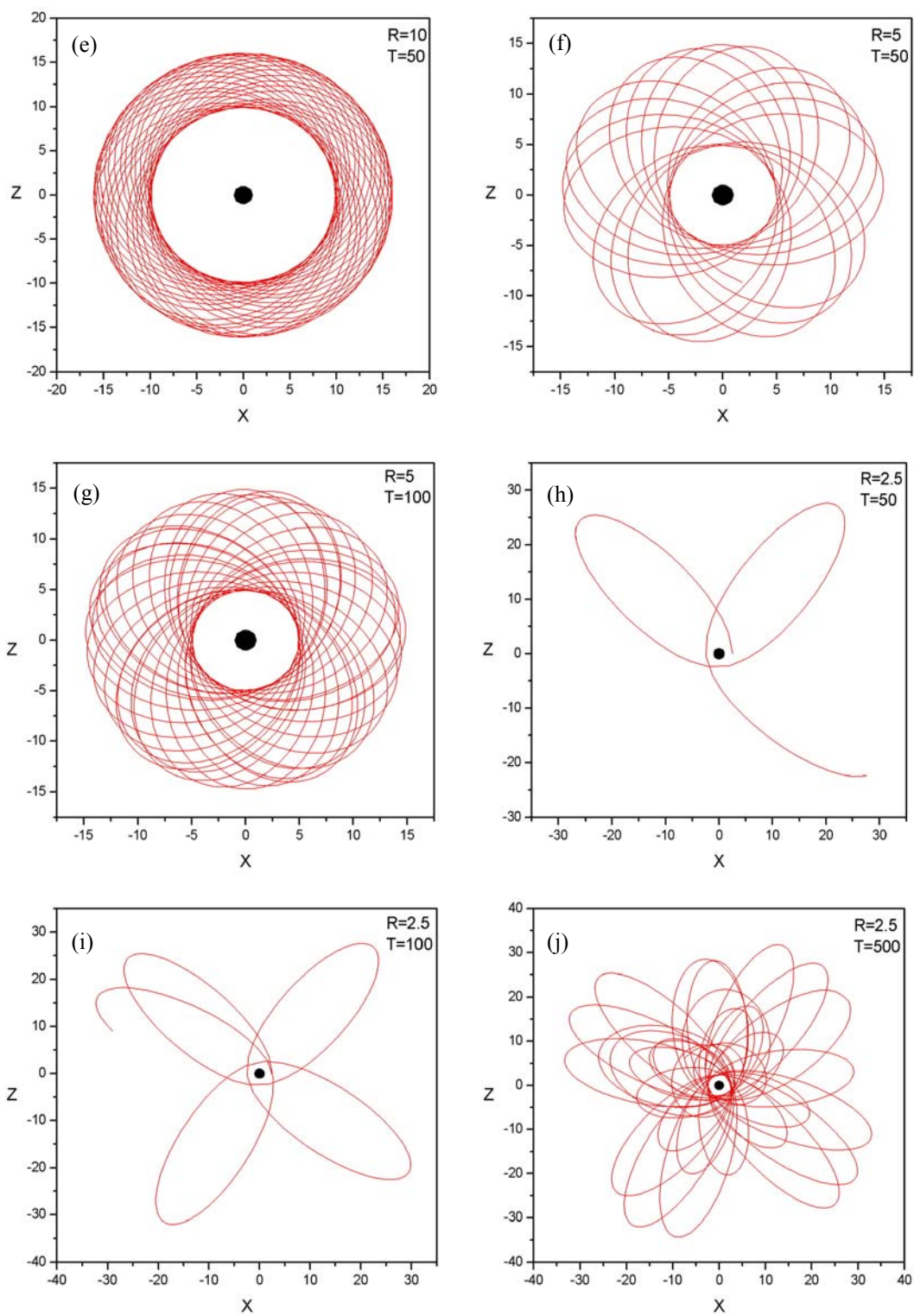


Figura 5.9 – (conclusão).

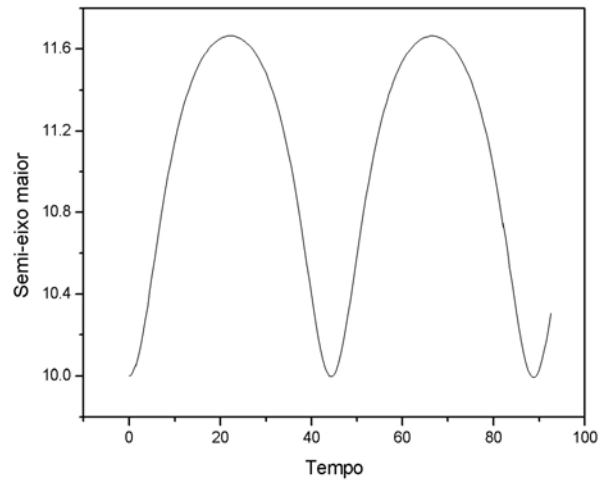


Figura 5.10 – Semi-eixo maior vs. tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Prolato12, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 3$ .

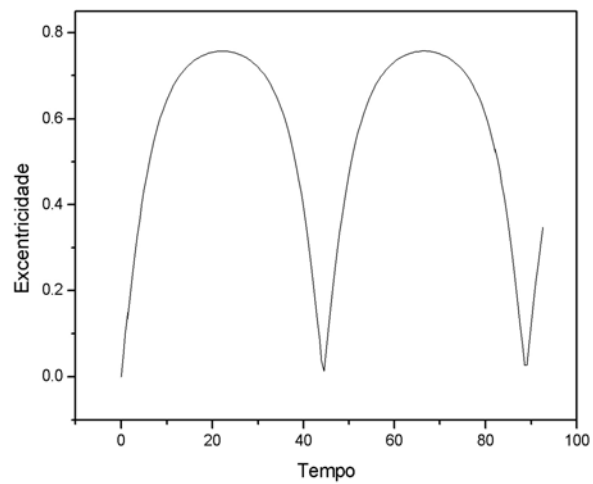


Figura 5.11 – Excentricidade vs. tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Prolato 12, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 3$ .

O terceiro teste consiste na propagação da órbita de uma partícula teste ao redor do Oblato 2 e do Oblato 4. Esses elipsóides são achatados e a órbita da partícula teste encontra-se no plano equatorial de cada elipsóide (plano orbital XZ), mantendo o plano de simetria axial do sólido.

A Figura 5.12 mostra um conjunto de órbitas ao redor do Oblato 2. Pode-se notar que, após um período orbital ( $T$ ), a partícula avança o ponto inicial. Seu período se torna mais curto que o período kepleriano. Quanto mais próxima a partícula se encontra do primário, maior é o efeito da perturbação do potencial gravitacional, devido à sua forma elipsoidal. As órbitas tornam-se excêntricas e precessionam. As trajetórias apresentadas mostram que o efeito do potencial do elipsóide oblato pode ser comparado ao efeito do achatamento da Terra ( $J_2$ ).

As Figuras 5.13 e 5.14 mostram a evolução do semi-eixo maior ( $a$ ) e da excentricidade ( $e$ ) da órbita ao longo do tempo. A posição inicial escolhida foi  $R = 10$  e o tempo corresponde a 3 períodos orbitais keplerianos. Para essas condições iniciais, tanto o semi-eixo quanto a excentricidade apresentam variações de curto período da ordem de  $10^{-3}$  em ' $a$ ' e da ordem de  $10^{-2}$  em ' $e$ '.

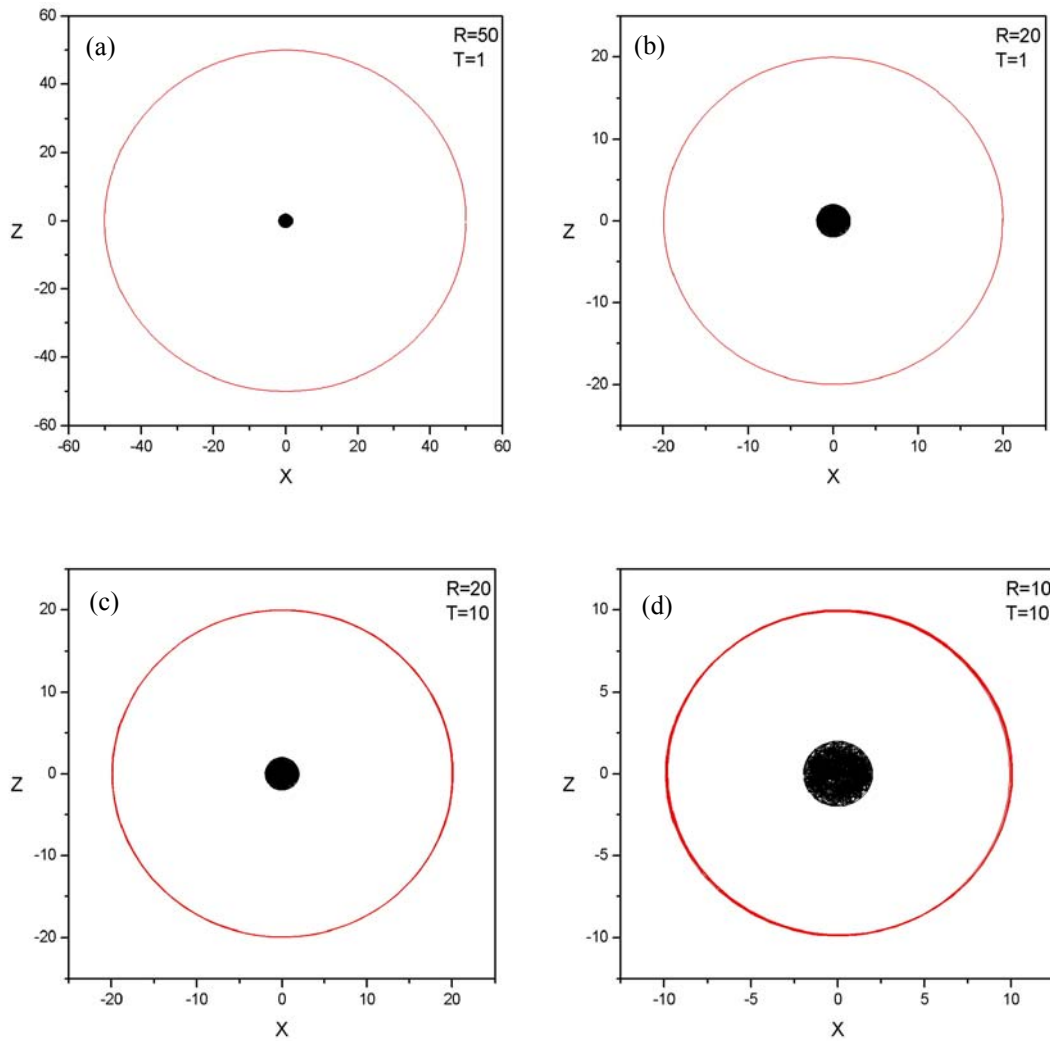


Figura 5.12 – Conjunto de trajetórias ao redor do Oblato 2. As figuras (a) e (b) representam um período orbital da partícula nas posições  $R = 50$  e  $20$  vezes o semi-eixo ‘b’ do elipsóide. As figuras (c) (d) e (e) representam dez períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 20$ ;  $10$  e  $5$ . As figuras (f), (g), e (h) representam cinquenta períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 5$ ;  $4$  e  $3$ . O plano da órbita considerado é o plano XZ, plano de simetria axial do elipsóide achatado (continua).

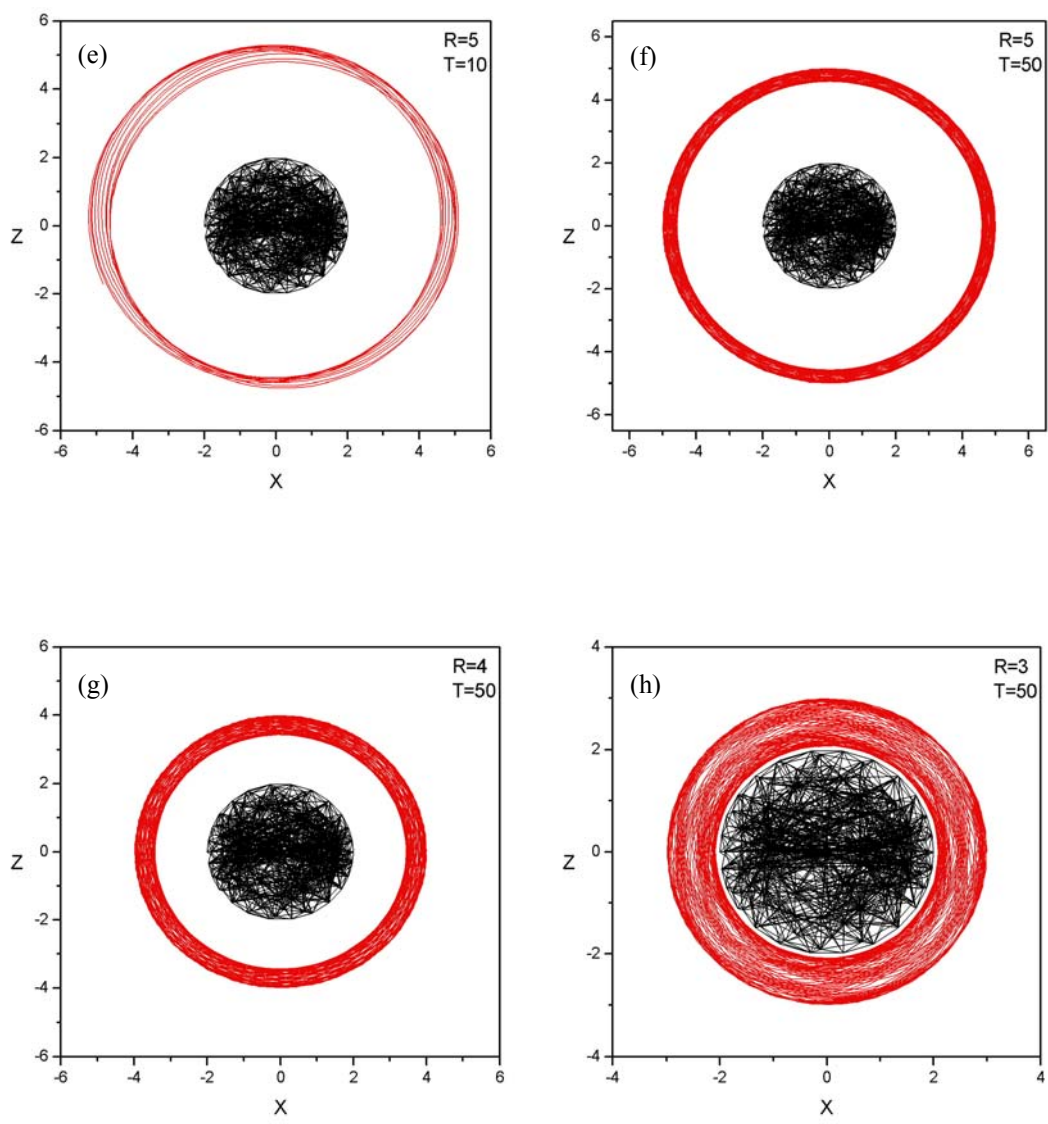


Figura 5.12 – (conclusão).

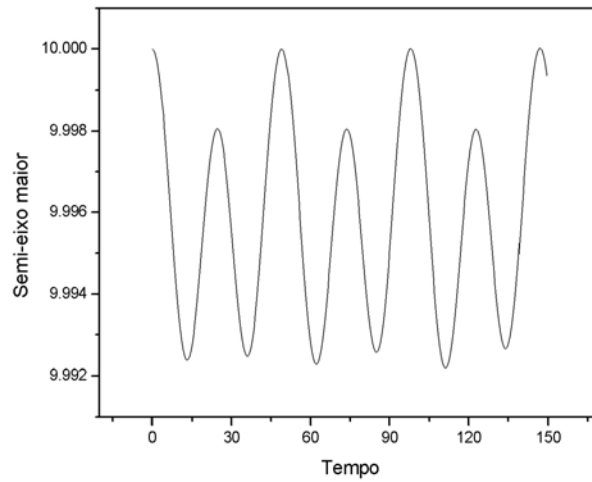


Figura 5.13 – Semi-eixo maior vs. tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Oblato 2, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 3$ .

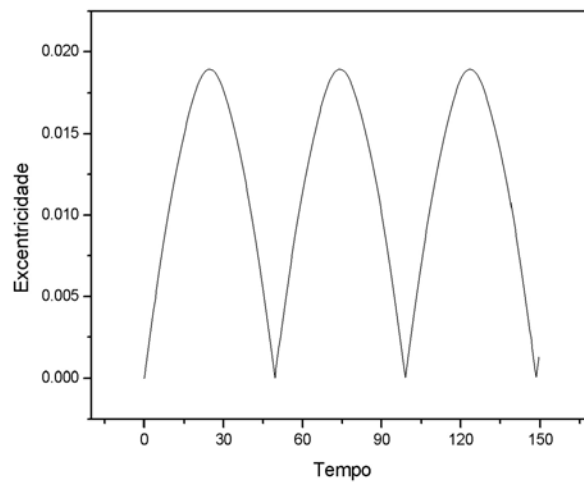


Figura 5.14 – Excentricidade vs. tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Oblato 2, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 3$ .

A Figura 5.15 apresenta um conjunto de órbitas ao redor do Oblato 4 e os resultados são similares ao caso anterior (Oblato 2). Novamente o efeito do achatamento pode ser verificado nas trajetórias; porém, com o maior achatamento desse primário, o efeito do seu potencial torna-se mais acentuado, gerando órbitas que precessionam mais rapidamente. Um exemplo pode ser verificado na posição  $R = 10$  para os dois casos testes, o Oblato 2 e o Oblato 4. O efeito do achatamento pode ser verificado, comparando-se as Figuras 5.12d e 5.15d. A primeira apresenta uma pequena precessão em dez períodos orbitais keplerianos, enquanto que, no segundo caso, para um mesmo período, a órbita tem uma maior precessão. Dois efeitos podem ser adicionados a esse segundo caso: o primeiro está relacionado ao maior achatamento do corpo central e o segundo efeito deve-se ao maior volume do corpo.

As Figuras 5.16 e 5.17 mostram a evolução do semi-eixo maior ( $a$ ) e da excentricidade ( $e$ ) da órbita ao longo do tempo. A posição inicial escolhida foi  $R = 10$  e o tempo corresponde a 3 períodos orbitais keplerianos. Para essas condições iniciais, tanto o semi-eixo quanto a excentricidade apresentam variações de curto período da ordem de  $10^{-1}$  em ' $a$ ' e da mesma ordem em ' $e$ '.

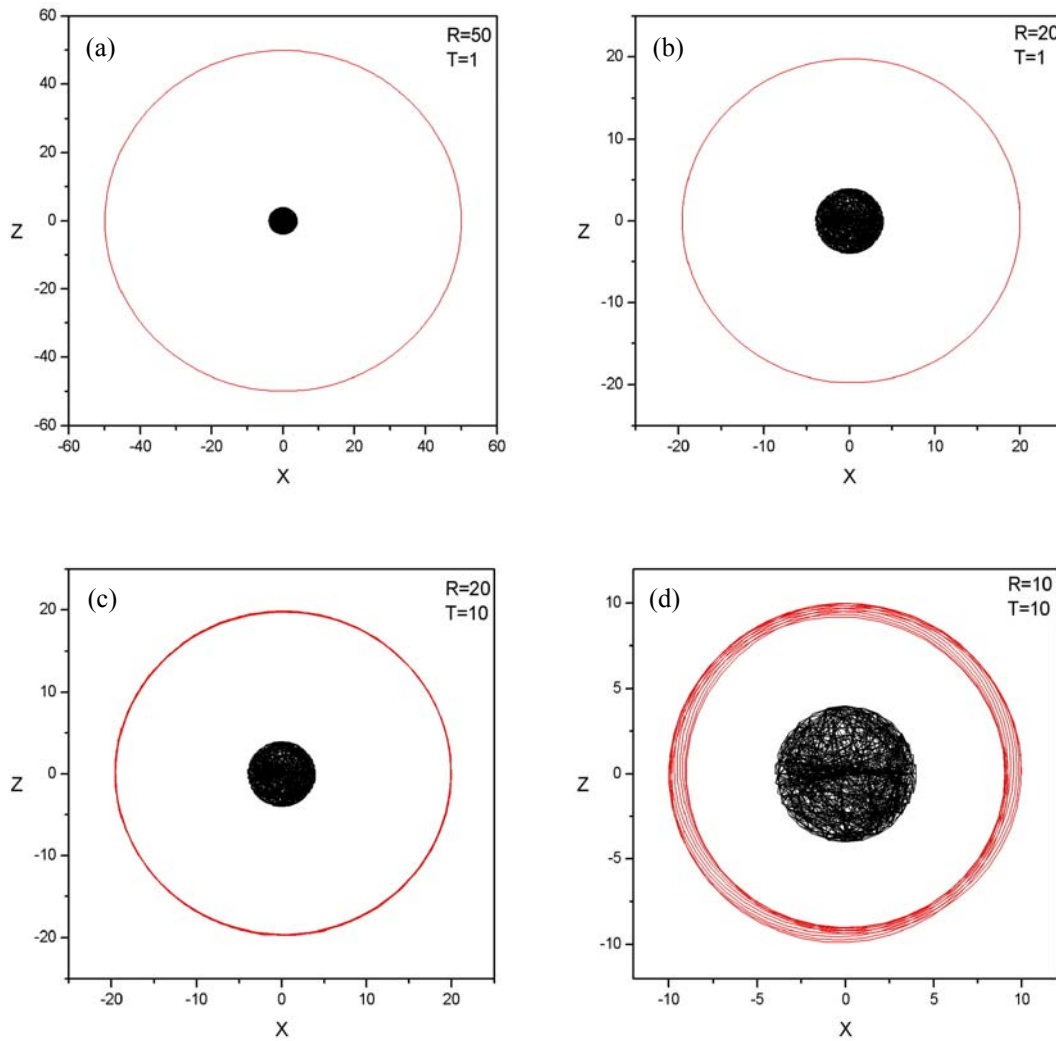


Figura 5.15 – Conjunto de trajetórias ao redor do Oblato 4. As figuras (a) e (b) representam um período orbital da partícula nas posições  $R = 50$  e  $20$  vezes o semi-eixo ‘b’ do elipsóide. As figuras (c) e (d) representam dez períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 20$  e  $10$ . As figuras (e), (f), e (g) representam cinquenta períodos orbitais da partícula nas posições  $R = 10$ ;  $8$  e  $7$ . A figura (h) representa a órbita da partícula iniciando-se em  $R = 5$  até o momento da colisão. O plano da órbita considerado é o plano  $XZ$ , plano de simetria axial do elipsóide achatado (continua).



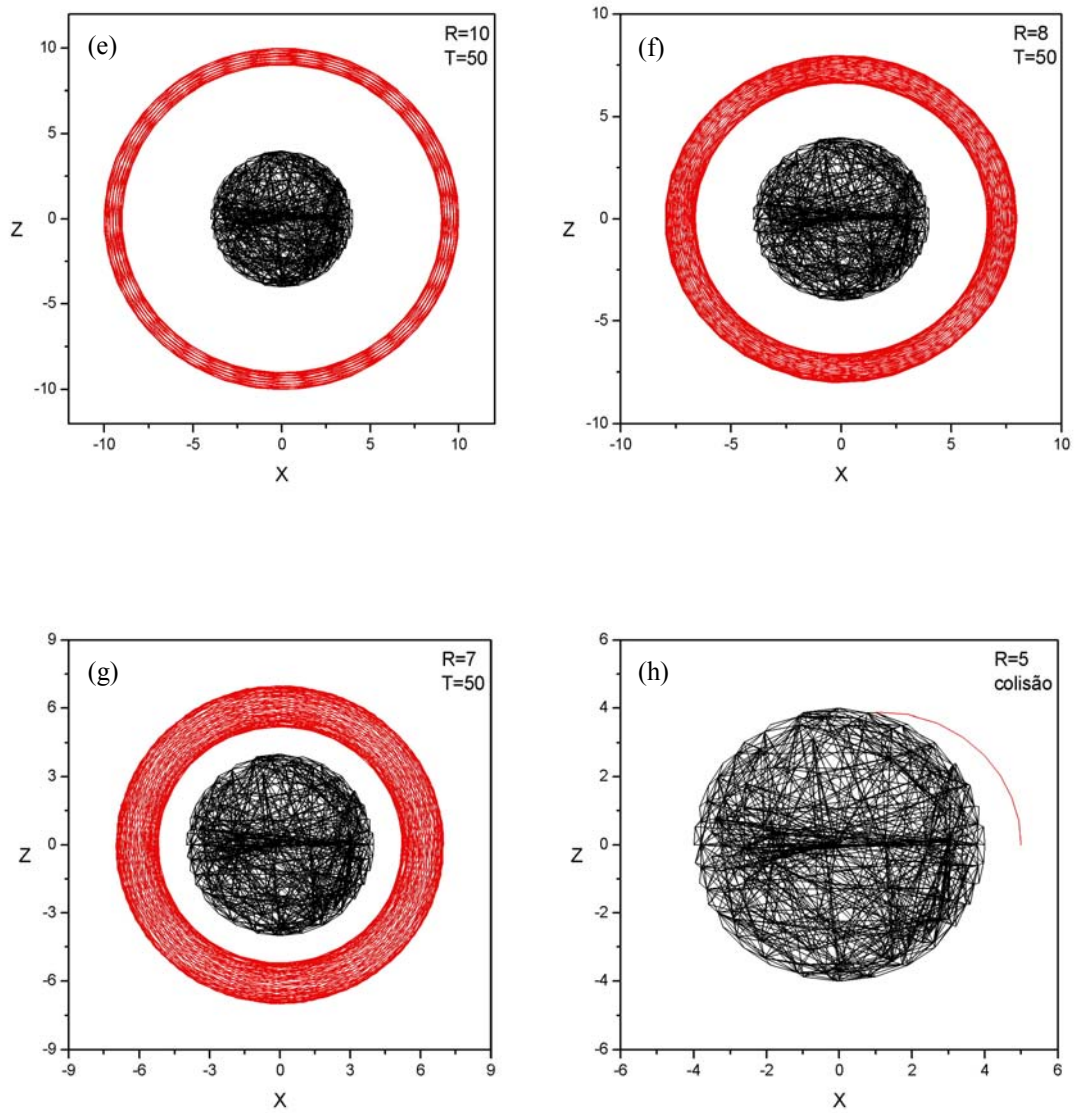


Figura 5.15 – (conclusão).

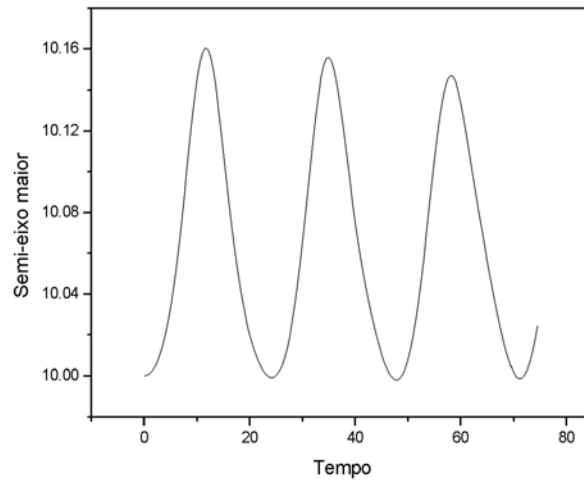


Figura 5.16 – Semi-eixo maior vs. tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Oblato 4, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 3$ .

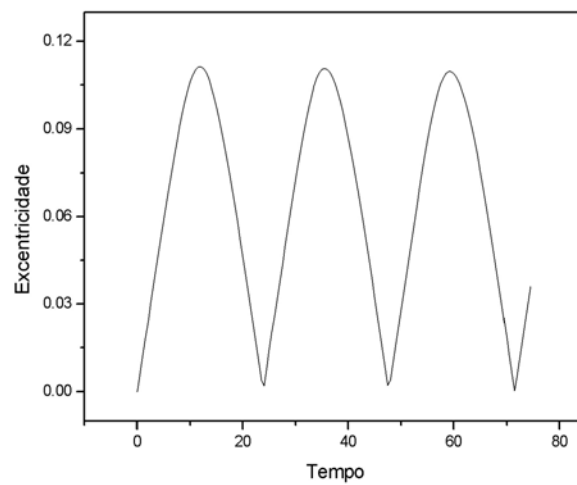


Figura 5.17 – Excentricidade vs. tempo para o caso teste da partícula orbitando ao redor do Oblato 4, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 3$ .

## 5.5. Comentários Gerais

Observando-se o comportamento da partícula teste ao redor de cada um dos objetos em estudo, pode-se notar que:

- 1) Na esfera de raio unitário a órbita permaneceu quase circular para qualquer posição da partícula, mesmo quando esta se encontra próxima ao primário. Tanto seu semi-eixo maior quanto sua excentricidade mantêm-se aproximadamente constantes. Isso leva a concluir que a aproximação poliedral desse corpo foi muito bem representada e que esse método é eficiente para o cálculo de trajetórias.
- 2) Nos elipsóides prolatos de diferentes valores de semi-eixos, a órbita torna-se excêntrica e precessiona. Esse efeito, devido ao campo gravitacional do corpo, é mais acentuado para o elipsóide mais alongado, o Prolato 12, do que para o Prolato 3.
- 3) Nos elipsóides oblatos observaram-se efeitos similares ao caso anterior. O efeito gravitacional do primário é mais acentuado no Oblato 4 do que no Oblato 2. Esse efeito compara-se ao efeito do achatamento da Terra ( $J_2$ ).
- 4) Uma importante observação para esse estudo é com respeito ao período orbital da partícula ao redor desses primários. No caso dos elipsóides prolatos, o período orbital torna-se mais longo que o valor calculado através do problema de dois corpos; enquanto que no caso dos elipsóides oblatos o período orbital torna-se mais curto. Esse efeito pode ser acompanhado através das Figuras 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21, que mostram a posição  $R$  da partícula teste, iniciando em  $R = 10$ , ao longo da órbita, durante 10 períodos orbitais keplerianos.
- 5) Comparando-se as trajetórias da partícula ao redor de cada sólido estudado, pode-se observar que a velocidade orbital para cada caso difere da velocidade em relação ao caso circular. Para os elipsóides prolatos a velocidade orbital é menor que a velocidade do movimento circular (dada pela condição inicial do problema) e quanto mais alongado é o elipsóide, menor será a sua velocidade. Com isso, a

partícula não retorna ao ponto inicial da órbita durante um período kepleriano. Com os elipsóides oblatos o efeito é contrário, ou seja, a velocidade orbital é maior que a velocidade inicial do problema (kepleriano) e a partícula avança o ponto inicial após um período orbital.

- 6) De acordo com as condições iniciais do problema, a partícula deveria descrever uma órbita circular com um raio orbital constante. Devido ao efeito do potencial, observou-se que o semi-eixo maior tem uma variação de curto período. Nos exemplos representados pelas Figuras 5.18 a 5.21, a trajetória da partícula teste inicia-se na posição  $R = 10$ . Para os elipsóides prolatos essa posição inicial passa a ser o pericentro da órbita e o raio orbital evolui para um valor máximo (apocentro). No entanto, para os elipsóides oblatos, a posição inicial da partícula representa o apocentro da órbita e o raio orbital evolui para um valor mínimo (pericentro).

Na Figura 5.18 a partícula orbita em torno do Prolato 3. Segundo o problema de dois corpos, são considerados 10 períodos orbitais, porém a partícula retorna 9 vezes ao pericentro da órbita. Na Figura 5.19, para o Prolato 12, a partícula retorna 7 vezes ao pericentro. Nas Figuras 5.20 e 5.21 a partícula orbita os elipsóides Oblato 2 e Oblato 4, respectivamente. Em ambos os casos a partícula retorna 10 vezes ao apocentro da órbita, mas no primeiro caso a partícula ultrapassa um pouco do apocentro e no segundo caso quase se aproxima do pericentro novamente, completando cerca de dez voltas e meia.

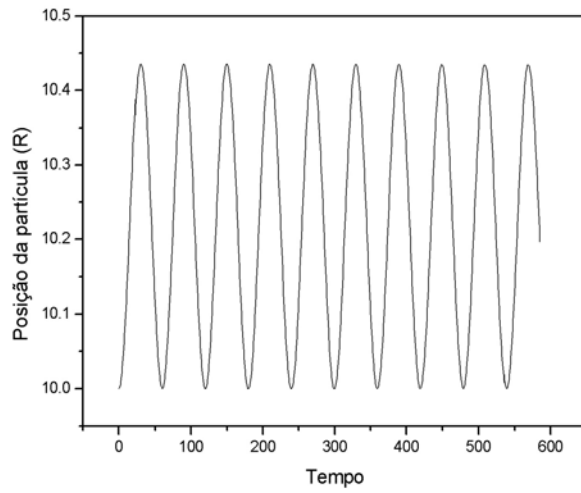


Figura 5.18 – Posição da partícula ao longo do tempo para o Prolato 3, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 10$ .

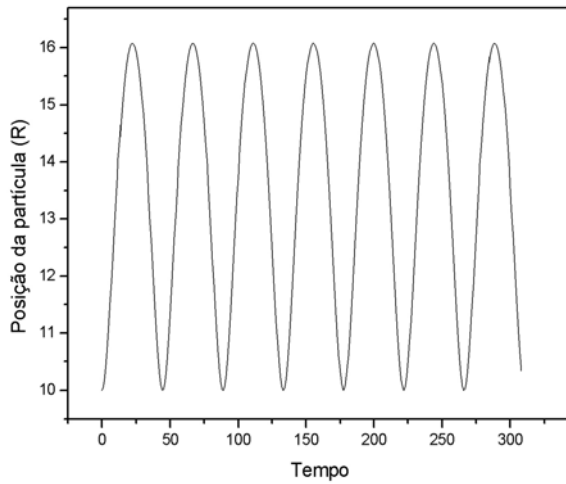


Figura 5.19 – Posição da partícula ao longo do tempo para o Prolato 12, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 10$ .

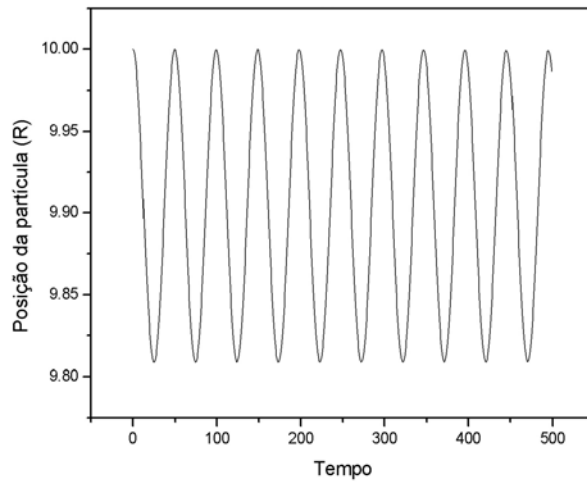


Figura 5.20 – Posição da partícula ao longo do tempo para o Oblato 2, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 10$ .

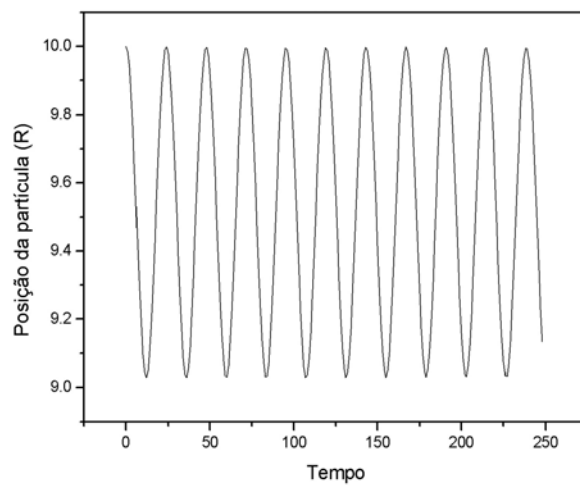


Figura 5.21 – Posição da partícula ao longo do tempo para o Oblato 4, iniciando-se em  $R = 10$ , para  $T = 10$ .

Através da literatura, (Roy, 1988; Murray e Dermott, 1999; Greenberg, 1981 e Rossi et al., 1999), os resultados obtidos nesse trabalho puderam ser verificados de acordo com estudos analíticos de seus elementos orbitais.

De acordo com Morando (1974), um elipsóide qualquer de semi-eixos A, B e C, com simetria axial, ou seja, A = B, tem o coeficiente  $J_2$  dado por:

$$J_2 = \frac{(A^2 - C^2)}{5R_e^2} \quad (5.10)$$

em que  $R_e$  é o raio equatorial do elipsóide. Com essa expressão pode-se calcular o coeficiente  $J_2$  de cada um dos diferentes elipsóides estudados nesse trabalho.

A Tabela 5.4 mostra os valores de  $J_2$  calculados para cada sólido, incluindo-se os valores de  $J_2$  da Terra e de Saturno como referências (Murray e Dermott, 1999). Analisando o coeficiente  $J_2$  dos elipsóides oblato, observa-se que seus valores são cerca de cem vezes maiores que o  $J_2$  da Terra. Ainda com relação ao planeta mais achatado, Saturno, os coeficientes são cerca de dez vezes maiores. Outra característica importante é que o  $J_2$  dos elipsóides oblato têm sinais positivos, enquanto que dos elipsóides prolato são negativos. O Prolato 12 possui um coeficiente muito grande, se comparado com a Terra, devido ao seu formato altamente alongado.

Tabela 5.4 – Valores do coeficiente  $J_2$ .

<b>Planeta / Elipsóide</b>	<b>Coefficiente <math>J_2</math></b>
Terra	0,001083
Saturno	0,016298
Oblato 2	0,15
Oblato 4	0,1875
Prolato 3	-1,6
Prolato 12	-28,6

Para comparar os resultados numéricos obtidos, foram calculados os valores de semi-eixo e excentricidade de uma órbita osculadora por meio de expressões analíticas aproximadas que levam em conta apenas o termo  $J_2$ . Esses resultados foram comparados com os valores médios de semi-eixo e excentricidade da órbita osculadora obtida por meio da integração numérica para cada sólido tridimensional.

Conhecido o potencial perturbador, utilizam-se as equações de Lagrange para encontrar a variação dos elementos orbitais. A partir de Roy (1988) podem-se obter os valores médios dos elementos orbitais considerando a perturbação secular de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= a_0 \\ \bar{e} &= e_0 \\ \bar{n} &= n_0 \left[ 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_e}{a} \right)^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{1/2} \right]\end{aligned}\tag{5.11}$$

Tem-se que  $n_0$  é o movimento médio não perturbado, dado por:

$$n_0^2 a_0^3 = \mu.\tag{5.12}$$

Substituindo-se a expressão do movimento médio da Equação 5.11 na Equação 5.12, encontram-se as novas expressões do semi-eixo maior e excentricidade da órbita. Considerando  $i = e = 0$  e  $\bar{a} = a_0(1 - e_0)$ , tem-se:

$$\begin{aligned}a_0 &= \bar{a} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_e}{\bar{a}} \right)^2 \right) \\ e & \\ e_0 &= \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R_e}{\bar{a}} \right)^2\end{aligned}\tag{5.13}$$

em que o subscrito ‘o’ representa os elementos orbitais osculadores,  $\bar{a}$  e  $\bar{e}$  representam os elementos orbitais da órbita geométrica que pode ser obtido através da expressão:



$$\begin{aligned}\bar{a}(1 - \bar{e}) &= R_{\text{per}} \\ \bar{a}(1 + \bar{e}) &= R_{\text{apo}}\end{aligned}\tag{5.14}$$

em que  $R_{\text{per}}$  e  $R_{\text{apo}}$  são o pericentro e o apocentro da órbita geométrica, respectivamente. No exemplo utilizado, os valores de  $R_{\text{per}}$  e  $R_{\text{apo}}$  são obtidos a partir da representação gráfica da posição da partícula teste em função do tempo, quando sua trajetória inicia-se a uma distância  $R = 10$  em relação ao corpo central (Figuras 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21).

Utilizando-se as Equações 5.13, calcula-se os elementos orbitais osculadores via Greenberg (1981) em função dos elementos orbitais da órbita geométrica. Esses resultados são comparados com os elementos orbitais osculadores médios obtidos através da integração numérica e podem ser observados a partir das Figuras 5.6; 5.7; 5.10 e 5.11 para os elipsóides prolatos e das Figuras 5.13, 5.14, 5.16 e 5.17 para os elipsóides oblatos.

As Tabelas 5.5 e 5.6 mostram os valores de semi-eixo maior e excentricidade da órbita osculadora via Greenberg (1981) – coluna 2, calculados através da Equação 5.13 e da órbita osculadora média via integração numérica – coluna 3, para cada corpo primário estudado.

Tabela 5.5 – Semi-eixo maior da órbita osculadora via Greenberg ( $a_G$ ) e da órbita osculadora média via integração numérica ( $a_n$ ).

<b>Elipsóide</b>	<b><math>a_G</math></b>	<b><math>a_n</math></b>
Oblato 2	9.991	9.996
Oblato 4	9.970	10.080
Prolato 3	9.980	10.006
Prolato 12	9.706	10.800

Tabela 5.6 – Excentricidade da órbita osculadora via Greenberg ( $e_G$ ) e da órbita osculadora média via integração numérica ( $e_n$ ).

<b>Elipsóide</b>	<b><math>e_G</math></b>	<b><math>e_n</math></b>
Oblato 2	0.0092	0.0090
Oblato 4	0.0490	0.0550
Prolato 3	0.0229	0.0110
Prolato 12	0.2500	0.3800

Através das Tabelas 5.5 e 5.6 pode-se observar que os valores de semi-eixo e excentricidade calculados a partir da Equação 5.13 se aproximam dos valores médios da órbita osculadora via integração numérica. Comparando-se os elementos orbitais obtidos via Greenberg ou via integração numérica, observa-se que a diferença aumenta conforme o corpo central se torna mais achatado ou mais alongado. Essa diferença ocorre primeiramente devido a aproximação analítica feita para o cálculo dos elementos osculadores, diminuindo a precisão para altos valores do coeficiente  $J_2$ . O segundo efeito é devido à aproximação do corpo central por tetraedros. Quanto mais alongado ou mais achatado é o corpo central, menor será a precisão da órbita obtida.

## 5.6. Manobras Orbitais

Determinar a evolução orbital e executar manobras em satélites que orbitam a Terra ou outros corpos celestes são hoje objetivos importantes das atividades espaciais. Existem muitos estudos disponíveis na literatura a este respeito e muitas alternativas para resolver estas questões, porém todos apresentam modelagens específicas para cada tipo de problema. O problema de determinar a evolução orbital de um veículo espacial consiste em obter uma descrição de seu estado (posição e velocidade) como uma função do tempo. De uma forma abrangente, a transferência orbital pode ser definida como sendo o problema de mudança do estado inicial de um veículo espacial (posição, velocidade e massa) de  $r_0$ ,  $v_0$  e  $m_0$  no instante  $t_0$  para  $r_f$ ,  $v_f$  e  $m_f$  no instante  $t_f$  ( $t_f \geq t_0$ )

com o menor consumo de combustível ( $m_f - m_0$ ) possível. Para obter esse resultado deve-se escolher o módulo, a direção e o sentido do empuxo a ser aplicado ao veículo (controle disponível). O problema de manobra orbital consiste em determinar o comportamento orbital e transferir um veículo espacial entre duas órbitas dadas. Em uma transferência desse tipo existem diversos fatores importantes como, por exemplo, controle do tempo gasto com a transferência, economia no consumo de combustível, limites nos atuadores e/ou estado do veículo, etc.

Nas seções anteriores desse trabalho mostrou-se o comportamento da órbita de uma partícula teste ao redor de sólidos tridimensionais e não esféricos sob a ação de um campo gravitacional. A partir da dinâmica da órbita estudada, deseja-se simular uma manobra orbital de uma órbita interna conhecida (dados os valores de  $R_0$ ,  $V_0$  e  $T_0$ ) para uma órbita externa desejada (dados os valores de  $R_f$ ,  $V_f$  e  $T_f$ ) com um mínimo  $\Delta V$  e no menor tempo possível, sendo:

$R_0, V_0 \rightarrow$  os vetores posição e velocidade da órbita inicial;

$R_f, V_f \rightarrow$  os vetores posição e velocidade da órbita final;

$T_0$  e  $T_f \rightarrow$  os períodos da órbita inicial e final, respectivamente e

$\Delta V \rightarrow$  incremento de velocidade necessário para a manobra.

Será assumido que as duas órbitas envolvidas são coplanares, pois existe um grande número de missões que requer uma manobra desse tipo. Em algumas missões, o satélite pode ser lançado em uma órbita mais baixa e, com uma manobra orbital, ser conduzido para uma órbita mais alta, porém no mesmo plano orbital.

Um método para resolver problemas de trajetórias ótimas e que foi aplicado neste trabalho é o *Two-Point Boundary Value Problem* (TPBVP), em que as condições necessárias para a otimização são encontradas usando técnicas de cálculo variacional. Esse método é resolvido numericamente.

O procedimento desse trabalho é demonstrado a seguir. Conhecidos os parâmetros necessários das órbitas inicial e final, faz-se uma discretização dessas órbitas em um

número finito de pontos. Para cada combinação desses pontos ( $P_{0i}$  e  $P_{fj}$ , em que os subscritos '0' e 'f' indicam as órbitas inicial e final e os subscritos 'i' e 'j' são os números de cada ponto discretizado) faz-se uma manobra orbital com um incremento de velocidade no instante do impulso. Existem infinitas trajetórias ligando esses dois pontos e a forma utilizada para encontrar a trajetória de menor consumo de combustível é indexar cada uma delas pelo tempo de transferência e resolver o *Two-Point Boundary Value Problem* com esse tempo dado. Assim procedendo, ao variar o tempo de transferência, pode-se cobrir um amplo conjunto de opções e obter a transferência de menor consumo entre dois pontos considerados. Efetuando esse procedimento para todas as combinações de pontos das órbitas inicial e final pode-se obter o instante que gera a manobra de menor consumo de combustível (que corresponde ao menor incremento de velocidade). Quanto maior o número de pontos em que as duas órbitas são discretizadas, menor será o  $\Delta V$  necessário para a manobra, porém, o tempo de processamento aumenta proporcionalmente. Vale lembrar ainda que o sólido tridimensional que representa o corpo central do problema é formado por um número elevado de tetraedros (cerca de 500) o que torna o tempo de processamento ainda maior para efetuar a transferência orbital.

Ao final de cada teste o resultado será uma transferência de uma órbita inicial  $O_0$  para uma órbita final  $O_f$  com o menor  $\Delta V$ . A melhor transferência ocorrerá de um ponto  $P_i$  (dados  $R_0$  e  $V_0$ ) da órbita interna para um ponto  $P_j$  (dados  $R_f$  e  $V_f$ ) da órbita externa com um incremento mínimo  $\Delta V_{\min}$ , conforme o esquema da Figura 5.22.

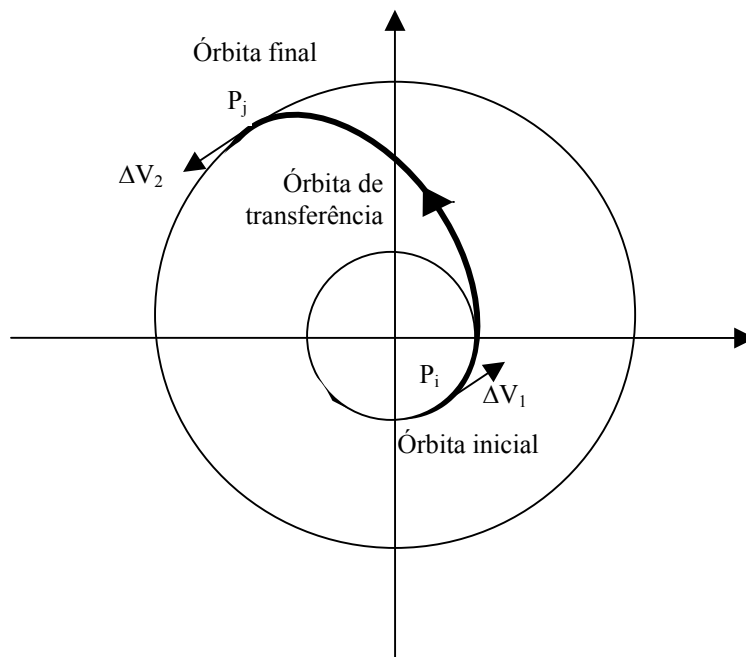


Figura 5.22 – Transferência orbital

Os métodos clássicos de manobras orbitais são baseados no modelo de propulsão impulsivo. Um dos métodos mais utilizados é a transferência de Hohmann. Esta é uma solução bi-impulsiva ótima para uma transferência ótima entre duas órbitas circulares e coplanares com tempo livre. Na órbita inicial aplica-se um impulso na direção do movimento e de magnitude dada por:

$$\Delta V_0 = V_0 \left| \sqrt{\frac{2 \left( \frac{R_f}{R_0} \right)}{\left( \frac{R_f}{R_0} \right) + 1}} - 1 \right| \quad (5.15)$$

Com isso o veículo entra em uma órbita de transferência elíptica com periapsis  $R_0$  e apoapsis  $R_f$ . Então, espera-se que o veículo complete meia revolução e atinja o apoapsis, quando é aplicado o segundo impulso, na direção do movimento e com magnitude dada por:

$$\Delta V_f = V_0 \left| 1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{R_f}{R_0}\right) + 1}}}{\sqrt{\left(\frac{R_f}{R_0}\right)}} \right| \quad (5.16)$$

Esse impulso faz com que o veículo entre em uma órbita circular de raio  $R_f$ . Com isso, tem-se que o tempo de transferência é a metade do período orbital da órbita elíptica de transferência:

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \frac{R_f}{R_0}}{2} \right)^{3/2} T_0 \quad (5.17)$$

Essa é a chamada transferência de Hohmann (Kuga et al., 2001; Chiaradia, 2000).

Neste trabalho, a técnica utilizada para a realização da manobra é o *Two-Point Boundary Value Problem* (TPBVP). Escolheu-se uma órbita inicial com vetores  $R_0$  e  $V_0$  e uma órbita final com vetores  $R_f$  e  $V_f$  dados por:

$$R_0 = \sqrt{(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)} = 5 \quad \text{e} \quad R_f = \sqrt{(X_f^2 + Y_f^2 + Z_f^2)} = 10.$$

Devido ao grande esforço computacional exigido pelo problema, o primeiro teste de manobras orbitais considerou um corpo central criado por apenas dois tetraedros. Cada órbita foi discretizada em um conjunto de 4 pontos igualmente espaçados, gerando um total de 16 conjuntos de soluções para as manobras, num tempo livre que varia desde  $T_1$  até  $T_2$ , sendo  $T_1 = \frac{T_0}{4}$ , ou seja, um quarto do período da órbita inicial; e  $T_2 = T_f$ , que corresponde ao período da órbita final.

O conjunto de soluções foi armazenado gerando gráficos do incremento de velocidade versus tempo ( $\Delta V$ .vs. $T$ ) para cada conjunto de pontos  $P_{0i}$  e  $P_{fj}$ . A melhor manobra

corresponde ao ponto de mínimo do gráfico, ou seja, ao menor  $\Delta V$  em um menor tempo possível.

A Figura 5.23 apresenta os valores do incremento de velocidade  $\Delta V$  durante um determinado período de tempo. Verifica-se que o ponto de mínimo desse gráfico corresponde ao menor  $\Delta V$  para um dado período.

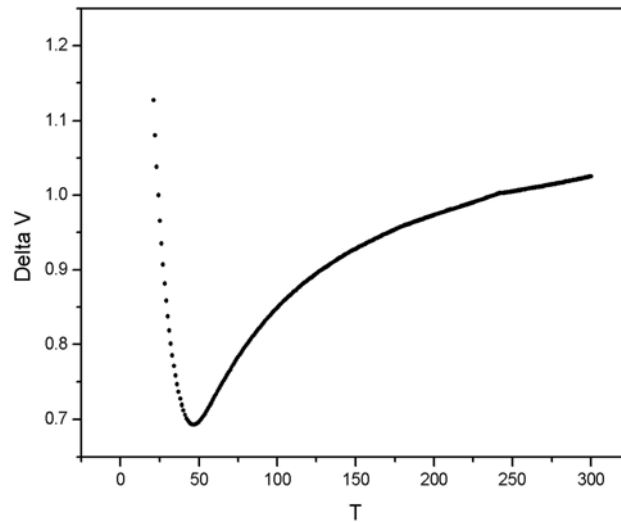


Figura 5.23 – Mínimo valor de  $\Delta V$ .

A Tabela 5.7 apresenta os menores valores de  $\Delta V$  para cada manobra ótima realizada de um ponto  $P_{0i}$  da órbita interna para um ponto  $P_{fj}$  da órbita externa.

Tabela 5.7 – Mínimo de  $\Delta V$  para cada conjunto de pontos das órbitas discretizadas.

O corpo primário considerado é o conjunto de dois tetraedros.

$P_{0i} / P_{fj}$	$\Delta V$	$T$
1 / 3	0,717	54
2 / 4	0,711	50
3 / 1	0,699	47
4 / 2	0,690	46

As Figuras 5.24 (a, b, c, d) apresentam esquematicamente a manobra orbital realizada com o valor de  $\Delta V$  para cada conjunto de pontos conforme é apresentado na Tabela 5.7.

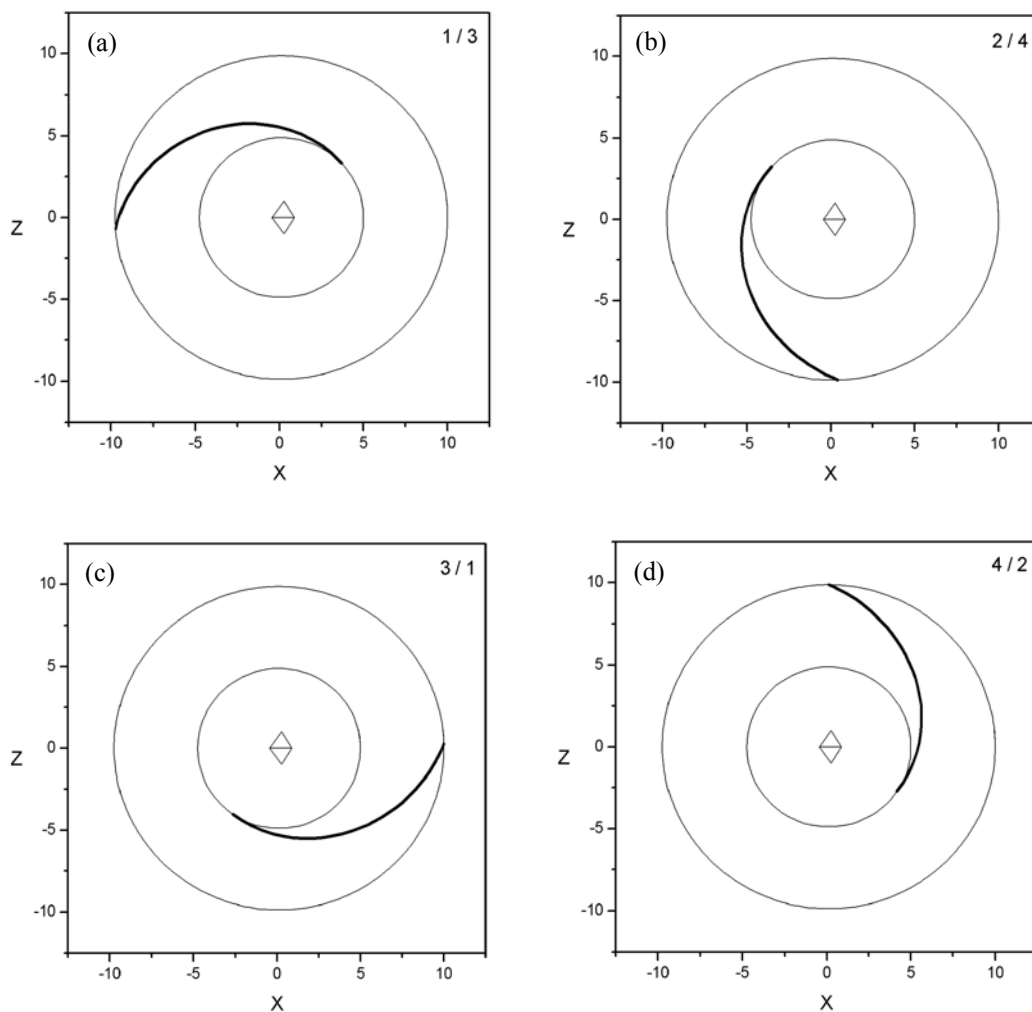


Figura 5.24 – Manobras orbitais de uma órbita interna de raio  $R_0 = 5$  para uma órbita externa de raio  $R_f = 10$  com diferentes conjuntos de pontos. Cada conjunto de ponto apresenta um mínimo  $\Delta V$  necessário para a realização da transferência orbital. O corpo central é representado por um conjunto de dois tetraedros centrados na origem do sistema de referência. De acordo com a Tabela 5.7, a transferência 4 / 2 (Figura 5.24d) apresenta o menor  $\Delta V$  e o menor período de tempo para a manobra.



De acordo com os resultados apresentados pela Tabela 5.7 e pelas Figuras 5.24, verificou-se que a transferência ótima para cada conjunto de pontos é similar a de Hohmann, apresentada anteriormente. Essa análise pode ser verificada calculando-se os valores do pericentro e apocentro da órbita de transferência ( $R_{\text{per}}$  e  $R_{\text{apo}}$ ). Esses valores ficaram próximos dos valores do semi-eixo da órbita interna ( $R_{\text{per}} \cong 5$ ) e da órbita externa ( $R_{\text{apo}} \cong 10$ ). Os demais conjuntos de pontos mostraram um grande acréscimo de velocidade e também um maior período de tempo para que ocorra a transferência. Uma condição para encontrar uma transferência ótima é aumentar o número de pontos na discretização das órbitas inicial e final.

Com esse teste inicial, a obtenção de uma manobra orbital com um mínimo  $\Delta V$  pode ser simulada a partir de uma órbita inicial (interna / externa) para uma órbita final (externa / interna). O corpo central do problema pode ser qualquer um dos sólidos tridimensionais estudados: os elipsóides Prolato 3, Prolato 12, Oblato 2, Oblato 4 e a Esfera. Uma aplicação para a manobra orbital utilizando um desses sólidos (ou até mesmo um asteroide real) seria fazer com que a partícula teste ou veículo espacial passe tão próximo quanto possível do corpo primário e, imediatamente antes da colisão, fazer uma transferência orbital para uma órbita mais externa, numa região livre de colisão.

Um segundo teste que exemplifica a transferência orbital considera a Esfera como corpo central. Novamente as órbitas inicial e final são dadas pelas distâncias  $R_0 = 5$  e  $R_f = 10$ , respectivamente. A Tabela 5.8 apresenta os conjuntos de pontos de cada órbita discretizada que gerou a melhor transferência orbital, os valores de  $\Delta V$  e o menor tempo de transferência para cada caso.

Tabela 5.8 – Mínimo de  $\Delta V$  para cada conjunto de pontos das órbitas discretizadas.

O corpo primário é representado pela Esfera.

$P_{0i} / P_{fj}$	$\Delta V$	$T$
1 / 3	1,804	36
2 / 4	1,787	31
3 / 1	1,782	30
4 / 2	1,795	32

O último exemplo sobre manobras orbitais considera o elipsóide Oblato 2 como corpo central e novamente as órbitas inicial ( $R_0 = 5$ ) e final ( $R_f = 10$ ) são discretizadas em um determinado número de pontos. O menor  $\Delta V$  para a manobra é obtido, escolhendo-se o melhor conjunto de pontos. A Tabela 5.9 apresenta os valores de  $\Delta V$  e o menor tempo de transferência para cada conjunto de pontos em que se encontrou uma transferência ótima. A Figura 5.25 apresenta uma dessas transferências orbitais, considerando o Oblato 2 como corpo central.

Tabela 5.9 – Mínimo de  $\Delta V$  para cada conjunto de pontos das órbitas discretizadas.

O corpo primário é representado pelo Oblato 2.

$P_{0i} / P_{fj}$	$\Delta V$	$T$
1 / 3	3,481	12
2 / 4	3,583	14
3 / 1	3,369	12
4 / 2	3,305	12

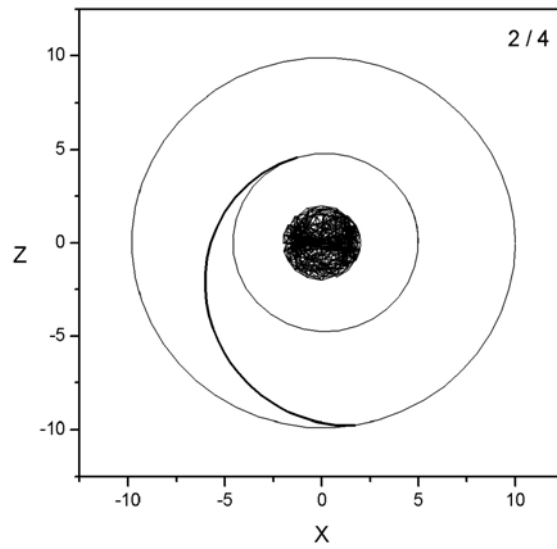


Figura 5.25 – Manobra orbital de uma órbita interna de raio  $R_0 = 5$  para uma órbita externa de raio  $R_f = 10$ , com um mínimo  $\Delta V$ . O corpo central é representado pelo Oblato 2 e a transferência ocorre no conjunto de pontos 2 / 4.



## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 6.1. Conclusões

O foco deste trabalho foi o estudo analítico do potencial gravitacional de alguns corpos homogêneos com formas geométricas simples, bem definidas e irregulares. Inicialmente foram utilizadas algumas formas geométricas planas (2D), tais como a placa retangular e a placa triangular, cujo potencial foi descrito através de expressões analíticas simples. Posteriormente, determinou-se o potencial de corpos tridimensionais como a esfera, o elipsóide prolato e o elipsóide oblato de diferentes valores de semi-eixo. Seus potenciais foram obtidos numericamente através do método de poliedros. Esse método modela o sólido tridimensional como um poliedro com um número variável e finito de faces triangulares. Os resultados mostraram que o potencial de cada sólido estudado estava de acordo com o esperado, ou seja, decrescendo com a distância.

O estudo do potencial de corpos bi e tridimensionais simples e de trajetórias ao redor de tais corpos teve como foco principal o estudo do comportamento de uma partícula teste dentro do campo gravitacional gerado por formas geométricas simples, porém não esféricas. Esse estudo introdutório é base do entendimento necessário para explicar o comportamento de uma partícula ou veículo espacial dentro de um campo gravitacional mais complexo, gerados por corpos altamente irregulares, tais como os asteróides. Aplicar o método de poliedros em formas geométricas, cujos potenciais já sejam conhecidos através da literatura, traz informações úteis que podem ser aplicadas em objetos com formas mais complexas. Neste trabalho, toda implementação computacional feita para formas simples pode ser aplicada diretamente para quaisquer outros corpos irregulares, desde que a forma e o modelo poliedral desse corpo sejam conhecidos.

Para objetos bidimensionais, estudou-se a dinâmica da órbita de uma partícula que orbita ao seu redor, obtendo-se uma descrição da região de estabilidade ou instabilidade da órbita (órbitas periódicas, quase-periódicas e caóticas) e as regiões de colisão. Um estudo global do espaço de fase ao redor dessas placas foi obtido, através da técnica de superfície de secção de Poincaré. Com as regiões bem definidas, verificou-se o comportamento da órbita de uma partícula teste nas vizinhanças das placas e o seu comportamento quando se aproxima de seus vértices, verificando-se a evolução temporal do semi-eixo, excentricidade, argumento do pericentro e anomalia média da órbita. Esse estudo teve grande importância para se fazer uma previsão do comportamento da partícula que orbita ao redor de sólidos tridimensionais, cujas formas são aproximadas por um conjunto de tetraedros contendo um número finito de vértices. Observou-se que o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita sofrem grandes alterações durante a passagem da partícula nas proximidades de um dos vértices das placas. Esses elementos orbitais apresentaram um pico de máximo no instante da passagem pelos vértices. As trajetórias apresentadas no trabalho mostraram que o efeito do potencial das placas pode ser comparado ao efeito do achatamento da Terra ( $J_2$ ), pois geraram trajetórias que podem ser vistas como uma órbita elíptica precessionando.

No caso tridimensional, estudou-se a dinâmica da órbita de uma partícula teste ao redor de diferentes sólidos representados por um número finito de tetraedros. Apresentou-se a eficiência do método poliedral na determinação do potencial gravitacional e a evolução da órbita ao longo do tempo. Uma esfera de raio unitária é representada por um número finito de tetraedros e tem seu potencial determinado através do método de poliedros. De um modo geral, quando a partícula se encontra distante do corpo central, sua posição retorna ao ponto inicial após um período orbital kepleriano. Por outro lado, quando a partícula se aproxima da superfície da esfera, o efeito de sua forma poliedral faz com que os elementos orbitais tenham variações de curto período para o semi-eixo maior e excentricidade, da ordem de  $10^{-3}$  em 'a' e da ordem de  $10^{-5}$  em 'e'. Com esses resultados pode-se verificar que a forma poliedral da esfera foi bem representada e que esse método é eficiente para o cálculo de trajetórias.

Ainda no estudo de corpos tridimensionais, verificou-se o comportamento da partícula teste ao redor de corpos com diferentes formas, representados por elipsóides alongados (prolatos) e elipsóides achatados (oblatos). Tanto nos elipsóides prolatos quanto nos oblatos, a órbita torna-se excêntrica e precessiona, devido ao efeito do campo gravitacional. Os elipsóides prolatos tiveram diferentes valores de semi-eixo, sendo um mais alongado que o outro. Logo, o efeito devido ao campo gravitacional do corpo mostrou-se mais acentuado para o elipsóide mais alongado. A órbita torna-se mais excêntrica e precessiona rapidamente para o elipsóide mais alongado. Para o Prolato 3, a excentricidade da órbita atinge um valor máximo de aproximadamente 0,022; enquanto que no Prolato 12, o máximo da excentricidade é cerca de 0,8. A mesma observação pode ser feita com os elipsóides oblatos. Os elipsóides Oblato 2 e Oblato 4 apresentam uma excentricidade máxima de aproximadamente 0,02 e 0,11, respectivamente. Isso mostra que, quanto mais achatado é o corpo central, maior será a excentricidade da órbita.

Uma observação do período orbital pode ser feita para esses sólidos em estudo. O período orbital utilizado no problema é o Kepleriano. Porém, no caso dos elipsóides prolatos, o período orbital torna-se mais longo que o período Kepleriano; enquanto que no caso dos elipsóides oblatos o período orbital torna-se mais curto.

O trabalho foi então finalizado com a apresentação de um tipo de manobra orbital ao redor de um conjunto de tetraedros que representam um corpo tridimensional qualquer, mostrando o menor incremento de velocidade necessário para efetuar a transferência de uma órbita interna para uma órbita externa. Esse estudo fez uso da técnica chamada *Two-Point Boundary Value Problem*. Os resultados mostraram que a transferência orbital teve um menor consumo de combustível (menor incremento de velocidade) para uma manobra similar a de Hohmann.

## 6. 2. Sugestões Futuras

Algumas sugestões para futuras extensões dos tópicos abordados neste trabalho são apresentadas a seguir.

- Incluir a rotação das placas geométricas planas e estudar a dinâmica da órbita de uma partícula teste considerando o efeito do potencial gravitacional.
- Construir um modelo numérico para a representação poliedral de corpos tridimensionais utilizando tetraedros regulares.
- Utilizar dados reais de asteróides ou outras formas geométricas tridimensionais irregulares, estudando a dinâmica da órbita devido ao efeito do potencial gravitacional.
- Simular manobras orbitais com órbitas mais discretizadas com a finalidade de melhorar a precisão e encontrar o menor consumo de combustível.
- Utilizar outros métodos para o cálculo do potencial gravitacional de corpos com formas irregulares, com o propósito de comparação, buscando o método mais eficiente com um menor tempo de processamento. Alguns desses métodos são: Mascom (Concentração de Massa) e Aproximação de Ivory, entre outros.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A'HEARN, M.; The Deep Impact mission to comet 9P? Tempel 1. In: Committee on Space Research – Cospar Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (Cospar A-001054).
- ASPHAUG, E. Once upon an asteroid. **Nature**, vol. 413, p. 369-370, Sept. 2001.
- BANNERJEE, B.; GUPTA, S. P. D. Gravitational attraction of a rectangular parallelepiped. **Geophysics**, v. 42, n. 5, p. 1053-1055, 1977.
- BARNETT, C. T. Theoretical modeling of the magnetic and gravitational fields of an arbitrarily shaped three-dimensional body. **Geophysics**, v. 41, n. 6, p. 1353-1364, Dec. 1976.
- BARUCCI, M. A. Asteroid targets of ongoing and future space missions. In: Committee on Space Research – Cospar Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France, **Proceedings...** Paris: CD-ROM, 2004. (COSPAR A-02722).
- BELTON, M. J. S. 9P/Tempel 1: Properties of the Deep Impact mission target. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-01478).
- BOICE, D. C. The latest results on comet 19P/Borrelly from Deep Space 1 data analysis and modeling. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-03678).
- BROUCKE, R. A. Closed form expressions for some gravitational potential: triangle, rectangle, pyramid and polyhedron. In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, 1995, Albuquerque. **Proceedings...** San Diego: AAS/AIAA, 1995, (PAPER AAS 95 - 190).
- CADY, J. W. Calculation of gravity and magnetic anomalies of finite-length right polygonal prisms. **Geophysics**, v. 45, n. 10, p. 1507-1512, 1980.
- CHIARADIA, A. P. M. **Determinação e manobras autônomas de órbitas de satélites artificiais em tempo real usando medidas GPS de uma frequência.** 2000. 202p. (INPE – 8755 – TDI / 790). Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2000.

DEMURA, H.; KOBAYASHI, S.; ASADA, N.; HASHIMOTO, S.; SAITO, J. Three Dimensional Modeling for the target asteroid of Hayabusa. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-03711).

ECONOMOU, T. E., TUZZOLINO, A. J., GREEN, S. F. Preliminary results from the stardust encounter with Wild2 comet obtained by the Dust Flux Monitor Instrument. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-03820).

DUXBURY, T. C. The figure of Phobos. **Icarus**, v. 78, n. 1, p. 169-180, 1989.

EVEREST, G. **An account of the measurement of an arc of the Meridian between the parallels of 18°3' e 24°7'**. London: [s. n], 1830. 337 p.

GOLIZDRA, G. Ya. Calculation of the gravitational field of a polyhedron – **Izvestiya, Physics of the Solid Earth**, v. 17, n. 8, p. 625-628, 1981.

GREENBERG, M. D. **Foundations of applied mathematics**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1978.

GREENBERG, R. Apsidal precession of orbits about an oblate planet. **The Astronomical Journal**, v. 86, n. 6, June 1981.

HO, T. M.; THOMAS, N.; BOICE, D. C.; BONEV, T.; JOCKERS, K.; SONDERBLOM, L. A. The Dust Coma of 19P/Borrelly. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-01002).

KUGA, H. K.; RAO, K. R.; PRADO, A. F. B. A. (eds). **Introdução à determinação de órbita e manobras orbitais, fundamentos de tecnologia espacial**. São José dos Campos: INPE, 2001. p. 44-64.

HUDSON, R. S.; OSTRO, S. J.; JURGENS, R. F.; ROSEMA, K. D.; GIORGINI, J.D.; WINKLER, R.; ROSE, R.; CHOATE, D.; CORMIER, R. A.; FRANCK, C. R.; FRYE, R.; HOWARD, D.; KELLEY, D.; LITTLEFAIR, R.; SLADE, M.A.; BENNER, L.A.M.; THOMAS, M. L.; MITCHELL, D. L.; CHODAS, P. W.; YEOMANS, K. D.; SHEERES, D. J.; PALMER, P.; ZAITSEV, A.; KOYAMA, Y.; NAKAMURA, A.; HARRIS, A.W.; MESHKOV, M. N. Radar Observations and physical model of asteroid 6489 Golevka. **Icarus**, v. 148, n. 1, p. 37-51, 2000.

JOHNSON, E.; BURCHELL, M. J. Crater size predictions for impacts on a comet nucleus. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-02305).

KELLOGG, O. D. **Foundations of potential theory**. New York: Dover, 1929.

- KWOK, Y. K. Gravity gradient tensors due to a polyhedron with polygonal facets. **Geophysical Prospecting Netherlands**, v. 39, n. 3, p. 435-443, Apr. 1991.
- MACMILLAN, W. D. **The theory of the potential**. New York: Dover Publications, 1958.
- MEECH, K. J. Earth-based and LEO observing coordination for the Deep Impact mission. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-02658).
- MONTANA, C. J.; MICKUS, K. L.; PEEPLES, W. J. Program to calculate the gravitational field and gravity gradient tensor resulting from a system of right rectangular prisms. **Computers & Geoscience**, UK, v. 18, n. 5, p. 587-602, 1992.
- MORANDO, B. **Mouvement d'un satellite artificiel de la Terre**. London: Gordon & Breach Science Publishers, 1974.
- MUINONEN, K.; LAGERROS, J. S. V. Inversion of shape statistics for small solar system bodies. **Astronomy and Astrophysics**, v. 333, p. 753-761, 1998.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- NAGY, D. The Gravitational attraction of a right rectangular prism. **Geophysics**, v. 31, n. 2, p. 362-371, Apr. 1966.
- OKABE, M. Analytical expressions for gravity anomalies due to homogeneous polyhedral bodies and translations into magnetic anomalies. **Geophysical**, v. 44, n. 4, p. 730-741, 1979.
- OSTRO, S. J.; HUDSON, R. S.; NOLAN, M. C.; MARGOT, J. L.; SHEERES, D. J.; CAMPBELL, D. B.; MAGRI, C.; GIORGINI, J. D.; YEOMANS, D. K. Radar observations of asteroid 216 Kleopatra. **Science**, v. 288, n. 5467, p. 836-839, 2000.
- OSTRO, S. J.; HUDSON, R. S.; BENNER, L. A. M.; NOLAN, M. C.; GIORGINI, J. D.; SHEERES, D. J.; JURGENS, R. F.; ROSE, R. Radar observations of asteroid 1998 ML14. **Meteoritics & Planetary Science**, v. 36, n. 9, p. 125-1236, 2001.
- PLOUFF, D. Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and applications to magnetic terrain corrections. **Geophysics**, v. 41, n. 4, p. 727-741, 1976.
- POHÁNKA, V. Optimum expression for computation of the gravity field of a homogeneous polyhedral body. **Geophysical Prospecting**, v. 36, p. 733-751, 1988.

- ROMAIN, G.; Jean-Pierre, B. Ellipsoidal harmonic expansions of the gravitational potential: theory and application. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 79, n. 4, p. 235-275, 2001.
- ROSSI, A.; MARZARI, F.; FARINELLA, P. Orbital evolution around irregular bodies. **Earth Planets Space**, v. 51, p. 1173-1180, 1999.
- ROY, A. E. **Orbital motion**. Philadelphia: IOP Publishing, 1988.
- RUSSELL, C. T. Dawn discovery mission to Vesta and Ceres: present status. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-00679).
- SHEERES, D. J.; OSTRO, S. J.; HUDSON, R. S.; WERNER, R. A. Orbits close to asteroid 4769 Castalia. **Icarus**, v. 121, n. 1, p. 67-87, 1996.
- SHEERES, D. J.; OSTRO, S. J.; WERNER, R. A.; ASPHAUG, E.; HUDSON, R. S. Effects of gravitational interactions on asteroid spin states. **Icarus**, v. 147, n. 1, p. 106-118, 2000.
- SHEERES, D. J.; KHUSHALANI, B.; WERNER, R. A. Estimating asteroid density distributions from shape and gravity information. **Planetary and Space Science**, v. 48, p. 965-971, 2000.
- SPIEGEL, M. R. **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas**. Coleção Schaum, McGraw-Hill. 1981.
- STRAKHOV, V. N.; LAPINA, M. I. Direct gravimetric and magnetometric problems for homogeneous polyhedron. **Geophysical Journal**, UK, v. 8, n. 6, p. 740-756, 1990.
- TELFORD, W. M.; GELDART, L. P.; SHERIFF, R. E.; KEYS, D. A. **Applied geophysics**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976.
- THOMAS, P. C. Radii, shapes, and topography of the satellites of Uranus from limb coordinates. **Icarus**, v. 73, n. 3, p. 427-441, 1988.
- THOMAS, P. C. The shapes of small satellites. **Icarus**, v. 77, n. 2, p. 248-274, 1989.
- THOMAS, P. C.; VEVERKA, J.; SIMONELLI, D.; HELFENSTEIN, P.; CARCICH, B.; BELTON, M. J. S.; DAVIES, M. E.; CHAPMAN, C. R. The shape of Gaspra. **Icarus**, v. 107, n. 1, p. 23-36, 1994.
- THOMAS, P. C.; BLACK, G. J.; NICHOLSON, P. D. Hyperion: rotation, shape, and geology from Voyager images. **Icarus**, v. 117, n. 1, p. 128-148, 1995.

THOMAS, P. C.; BELTON, M. J. S.; CARCICH, B.; CHAPMAN, C. R.; DAVIES, M. E.; SULLIVAN, R.; VEVERKA, J. The shape of Ida. **Icarus**, v. 120, n. 1, p. 20-32, 1996.

THOMAS, P. C.; BINZEL, R. P.; GAFFEY, M. J.; ZELLNER, B. H.; STORRS, A. D.; WELLS, E. Vesta: spin pole, size, and shape from HST images. **Icarus**, v. 128, n. 1, p. 88-94, 1997.

THOMAS, P. C.; VEVERKA, J.; ROBINSON, M. S.; MURCHIE, S. Shoemaker crater as the source of most ejecta blocks on the asteroid 433 Eros. **Nature**, v. 413, n. 6854, p. 394-396, Sept. 2001.

TURNER, R. J. A model of Phobos. **Icarus**, v. 33, n. 1, p. 116-140, 1978.

ULAMEC, S.; BIELE, J.; ESPINASSE, S.; FEUERBACHER, B.; MOURA, D.; NIETNER, G.; ROSENBAUER, H.; SCHEUERLE, H.; WILLNECKER, R. Philae (Rosetta Lander): Status after launch to comet 67P/Churyumov-Gerasimenko. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-01077).

VEVERKA, J.; FARQUHAR, B.; ROBINSON, M.; THOMAS, P.; MURCHIE, S.; HARCH, A.; ANTREASIAN, P.G.; CHESLEY, S.R.; MILLER, J.K.; OWEN, W.M.; WILLIAMS, B.G.; YEOMANS, D.; DUNHAM, D.; HEYLER, G.; HOLDRIDGE, M.; NELSON, R.L.; WHITTENBURG, K.E.; RAY, J.C.; CARCICH, B.; CHENG, A.; CHAPMAN, C.; BELL, J.F.; BELL, M.; BUSSEY, B.; CLARK, B.; DOMINGUE, D.; GAFFEY, M.J.; HAWKINS, E.; IZENBERG, N.; JOSEPH, J.; KIRK, R.; LUCEY, P.; MALIN, M.; MCFADDEN, L.; MERLINE, W.J.; PETERSON, C.; PROCKTER, L.; WARREN, J.; WELLNITZ, D. The landing of the NEAR-Shoemaker spacecraft on asteroid 433 Eros. **Nature**, v. 413, n. 6854, p. 390-393, Sept. 2001.

YOSHIKAWA, M. Orbital Evolution of (25143) Itokawa, the target asteroid of Hayabusa (Muses-C) mission. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-03689).

WALDVOGEL, J. The Newtonian potential of homogeneous cube. **Journal of Applied Mathematics and Physics**, ZAMP, v. 27, p. 867-871, 1976.

WALDVOGEL, J. The Newtonian potential of homogeneous polyhedra. **Journal of Applied Mathematics and Physics**, ZAMP, v. 30, p. 388-398, 1979.

WEAVER, H. A.; STERN, S. A. The New Horizons mission to Pluto and the Kuiper belt. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-01752).

WEINWURM, G.; WEBER, R. Gravity field of Jupiter's Moon Amalthea and the implication on a spacecraft trajectory. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-01675).

WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 59, n. 3, p. 253-278, 1994.

WERNER, R. A.; SHEERES, D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 65, n. 3, p. 313-344, 1996.

WERNER, R. A. **On the gravity field of irregularly shaped celestial bodies.** (Thesis) - University of Texas at Austin, 1996. 128p.

WINTER, O. C., MURRAY C. D. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem. I. Internal orbits.** Londres, Inglaterra: Queen Mary and Westfield College, 1994. QMW Maths Notes no. 16,

WINTER, O. C. The stability evolution of a family of simply periodic lunar orbits. **Planetary and Space Science**, v. 48, n. 1, p. 23-28, 2000.

WINTER, O. C.; VIEIRA NETO, E. Distant stable direct orbits around the Moon. **A&A**, v. 393, p. 661-671, 2002.

WIRTH, K. R.; HOOFS, R.; KOSCHNY, D.; FREW, D.; DHIRI, V. Rosetta science mission overview. In: Committee on Space Research – COSPAR Scientific Assembly, 35., 2004. Paris, France. **Proceedings...** Paris: Cospar, 2004, CD-ROM. (COSPAR A-00828).

## **PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE**

### **Teses e Dissertações (TDI)**

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

### **Manuais Técnicos (MAN)**

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

### **Notas Técnico-Científicas (NTC)**

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

### **Relatórios de Pesquisa (RPQ)**

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

### **Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)**

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

### **Publicações Didáticas (PUD)**

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

### **Publicações Seriadas**

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o Internacional Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

### **Programas de Computador (PDC)**

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

### **Pré-publicações (PRE)**

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)