

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Equação de Burgers:
Propriedades e
comportamento assintótico**

por

Bárbara Cristina Pasa

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano
Orientador

Porto Alegre, Outubro de 2005.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Pasa, Bárbara Cristina

Equação de Burgers: Propriedades e comportamento assintótico / Bárbara Cristina Pasa.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2005.

80 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2005.

Orientador: Zingano, Paulo Ricardo de Ávila

Dissertação: Matemática Aplicada
Equação de Burgers, Comportamento Assintótico, Desigualdades de Energia, Taxas de Decaimento

Equação de Burgers: Propriedades e comportamento assintótico

por

Bárbara Cristina Pasa

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano

Banca examinadora:

Prof. Dr. Oclide José Dotto
UCS

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
PPGMAT/IM/UFRGS

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva
PPGMAP/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
16 de Agosto de 2002.

Prof^a. Dra. Maria Cristina Varriale
Coordenador

*Aos meus pais,
Ivo e Delires,
e à minha irmã,
Suelem.*

SUMÁRIO

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÃO DO CALOR EM 1-D	6
2.1 Introdução	6
2.2 Propriedades básicas	8
2.3 Decaimento em $L^r(\mathbb{R})$	17
2.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$	20
2.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p > 1$	30
3 EQUAÇÃO DE BURGERS	33
3.1 Introdução	33
3.2 Propriedades básicas	35
3.3 Decaimento em $L^r(\mathbb{R})$	42
3.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$	53
3.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p > 1$	58
4 EQUAÇÃO DE BURGERS GENERALIZADA	60
4.1 Introdução	60
4.2 Propriedades básicas	61
4.3 Decaimento	63
4.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$	67
4.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p > 1$	69
ANEXO A	72

BIBLIOGRAFIA **79**

RESUMO

No presente trabalho, obtemos e analisamos diversas propriedades das soluções $u(\cdot, t)$ da equação de difusão linear (equação do calor em meios unidimensionais homogêneos)

$$u_t = \mu u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

correspondentes a estados iniciais $u(x, 0) = u_0(x)$, com $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, para algum $1 \leq p < \infty$; bem como da equação de Burgers

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

onde c, μ são constantes dadas, sendo $c \neq 0$ e $\mu > 0$ e ainda assumindo $u(x, 0) = u_0(x)$ com $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$, e limitado.

Estudamos também a equação mais geral da forma

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

discutindo várias propriedades importantes das soluções, associadas a estados iniciais $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p < \infty$. Em particular, examinamos o comportamento de $\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$, $p \leq r \leq \infty$, para $t \gg 1$, e diversas propriedades relacionadas.

ABSTRACT

In this work, we discuss a number of fundamental properties of the solutions $u(\cdot, t)$ of the linear diffusion equation (the so-called heat equation for uni-dimensional, homogeneous media)

$$u_t = \mu u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

with initial data $u(x, 0) = u_0(x)$, when $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ for some $1 \leq p < \infty$. We also investigate the corresponding properties for the Burgers' equation

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

with $c, \mu \in \mathbb{R}$ constant, $\mu > 0$, under the assumption that $u(x, 0) = u_0(x)$ with $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, with u_0 bounded. This analysis is further extended to slightly more general equations of the form

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

with bounded initial data in $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Particular attention is given to the study of the large time behavior of solution norms $\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$, $p \leq r \leq \infty$, and some closely related properties.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos analisar várias propriedades das soluções $u(\cdot, t)$ de problemas de valor inicial de certas equações (escalares) parabólicas em 1-D. Esta investigação é iniciada no Capítulo 2 com o problema linear

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (1.1)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \quad (1.2)$$

onde $1 \leq p < \infty$ e μ denota uma constante positiva, dita “coeficiente de difusividade”. A condição inicial (1.2) é entendida no sentido de se ter $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$ ao $t \rightarrow 0^+$, ou seja,

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow 0^+. \quad (1.3)$$

onde $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ denota a norma dada por

$$\|w\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

Dado (1.3), é natural impor que se busquem soluções $u(\cdot, t)$ para (1.1), (1.2) variando continuamente em $t \in [0, \infty[$ no espaço $L^p(\mathbb{R})$, de modo a se ter

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_*)\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow t_* \quad (1.5)$$

para cada $t_* \geq 0$ dado; em símbolos, $u(\cdot, t) \in C^0([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R}))$. Com essa condição, a solução de (1.1), (1.2) é única, infinitamente diferenciável em $\mathbb{R} \times]0, \infty[$, e dado pela conhecida expressão

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u_0(y) dy \quad (1.6)$$

para cada $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Esta representação explícita permite a obtenção direta de diversas propriedades importantes de $u(\cdot, t)$ que formam o tema do Capítulo 2. Em particular, verificamos que $u(\cdot, t) \in L^r(\mathbb{R})$ para cada $p \leq r \leq \infty$ e todo $t > 0$, com

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} (\mu t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \quad (1.7)$$

para todo $t > 0$, $p \leq r \leq \infty$ e certa constante $C(p) > 0$ que depende apenas do parâmetro p . (Em geral, neste trabalho, constantes serão denotadas pela letra C , indicando-se entre parênteses os parâmetros que influem em seu valor numérico; um mesmo símbolo em instâncias diferentes denotam em geral valores distintos.)

Resulta de (1.7) que $t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$ é limitado por $C(p) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \mu^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}$ para todo $t > 0$, e cada $p \leq r \leq \infty$; o objetivo maior do Capítulo 2 é mostrar que estes produtos tendem a limites bem definidos ao $t \rightarrow +\infty$, dados por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \quad \text{se } p > 1 \quad (1.8)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r , e por valores em geral não nulos no caso $p = 1$, dados por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m|, \quad p = 1 \quad (1.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}} \left(\frac{4\pi\mu}{r} \right)^{\frac{1}{2r}}, \quad p = 1 \quad (1.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}}, \quad p = 1 \quad (1.11)$$

onde m denota a massa da solução, invariante em t ,

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx. \quad (1.12)$$

No Capítulo 3, essas propriedades são investigadas no caso do problema

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (1.13)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.14)$$

onde c, μ denotam constantes dadas, com $\mu > 0$. Como a equação (1.1), a equação (1.13) representa um modelo fundamental em Física Matemática, tendo sido introduzido por J. Burgers no final dos anos 30 como um modelo simplificado no estudo de turbulência em fluidos [1]. E como no problema (1.1), (1.2) para a equação do calor, a solução $u(\cdot, t)$ de (1.13), (1.14), única no espaço $C^0([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$,

decai em várias normas ao $t \rightarrow +\infty$; utilizando técnicas baseadas em estimativas de energia apropriadas, mostraremos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} (\mu t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \quad \forall t > 0 \quad (1.15)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, e certa constante $C(p) > 0$ que, mais uma vez, pode ser escolhida de modo a depender só de p . (Para evitar repetição de argumentos, o caso $p > 2$ é examinado, na verdade, no Capítulo 4.) Novamente, os limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} =: \gamma_r(p) \quad (1.16)$$

existem, tendo-se $\gamma_r(p) = 0$ para todo $p \leq r \leq \infty$ quando $p > 1$, enquanto para $p = 1$ temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m|, \quad (p = 1) \quad (1.17)$$

onde m é a massa da solução, ver (1.12) acima, como no caso anterior da equação do calor; por outro lado, os demais limites $\gamma_r(1)$ (para $r > 1$) são mais complicados, e é mostrado no Capítulo 3 que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}} (4\mu)^{\frac{1}{2r}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^r(\mathbb{R})} \quad (1.18)$$

para $p < r < \infty$, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad (1.19)$$

para $r = \infty$, sendo $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sigma - h \operatorname{erf}(\xi)},$$

onde

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2} ds,$$

$$\sigma = \frac{1 + e^{-\frac{cm}{2\mu}}}{2}$$

e

$$h = \left| 1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}} \right|$$

e

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx.$$

Finalmente no Capítulo 4 examinamos uma generalização do problema (1.13), (1.14), da forma

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (1.20)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad (1.21)$$

onde, novamente, p é um dado real maior ou igual a 1. Após examinarmos as propriedades básicas das soluções $u(\cdot, t) \in C^0([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ deste problema, obtemos por desigualdades de energia a estimativa

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} (\mu t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \quad \forall t > 0 \quad (1.22)$$

para todo $p \leq r \leq \infty$ e cada $p \geq 1$, e certa constante $C(p) > 0$ adequada. O objetivo seguinte deste capítulo é, novamente, computar os limites $\gamma_r(p)$ dados em (1.16) acima. No caso $p > 1$, reobtem-se o resultado anterior

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \quad (p > 1) \quad (1.23)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r , enquanto, uma vez mais, o caso $p = 1$ requer uma análise mais trabalhosa. Neste último caso, é mostrado no Capítulo 4 que, tendo-se f suave, resulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \quad (1.24)$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r , onde $v(\cdot, t)$ é solução da equação de Burgers

$$v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x = \mu v_{xx} \quad (1.25)$$

correspondente a qualquer estado inicial $v(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$ de mesma massa que $u(\cdot, 0)$, isto é,

$$v(\cdot, 0) = v_0 \in L^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx. \quad (1.26)$$

Em particular, obtém-se para $\gamma_r(1)$ os mesmos valores dados em (1.9), (1.11) acima, onde $c = f''(0)$.

Para finalizar esta introdução, observamos que os resultados aqui obtidos não são originais, nem os argumentos utilizados; tratamos, ao invés, de reunir numa discussão uniforme resultados e métodos encontrados nas referências citadas, especialmente [11], [12], [13] e [14].

2 EQUAÇÃO DO CALOR EM 1-D

2.1 Introdução

O objeto de investigação deste capítulo será a solução $u(\cdot, t)$ da equação de difusão linear

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

sendo $\mu > 0$ constante (coeficiente de difusividade ou viscosidade), correspondente a estados iniciais $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p < \infty$,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^p(\mathbb{R}), \quad (2.2)$$

no sentido de se ter $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$ ao $t \rightarrow 0$, isto é,

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow 0,$$

onde $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ denota a norma L^p em \mathbb{R} , isto é,

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Nessas condições (ver Teorema 2.5), existe uma única solução para o problema (2.1) em $C^0([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R}))$, (2.2), dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u_0(y) dy \quad (2.3)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

De (2.3), temos que $u(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$, satisfaz a equação (2.1) no sentido clássico e $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$ ao $t \rightarrow 0$ (ver Teorema 2.3).

Definindo $K : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, (“heat Kernel”) via

$$K(\xi, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{\xi^2}{4\mu t}} \quad (2.4)$$

para $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$ quaisquer, tem-se $K(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ e (2.3) pode ser escrita como

$$u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u_0 \quad \forall t > 0 \quad (2.5)$$

onde $*$ denota o produto convolutivo em $L^1(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R})$, ou seja,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \quad (2.6)$$

para $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$, ver [9], [10].

Na seção 2.2, várias propriedades básicas das soluções $u(\cdot, t)$ de (2.1), (2.2) são revistas, por exemplo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0, \quad (2.7)$$

que decorre da desigualdade de Young (A.7), e também a propriedade de monotonicidade

$$u(\cdot, 0) \leq \hat{u}(\cdot, 0) \implies u(\cdot, t) \leq \hat{u}(\cdot, t) \quad \forall t > 0, \quad (2.8)$$

onde $u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u(\cdot, 0)$ e $\hat{u}(\cdot, t) = K(\cdot, t) * \hat{u}(\cdot, 0)$ denotam as soluções de (2.1) correspondentes aos estados iniciais $u(\cdot, 0)$, $\hat{u}(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$ dados. Outras propriedades são também discutidas.

Na seção 2.3, mostramos que as soluções $u(\cdot, t)$ acima decaem em $L^r(\mathbb{R})$, $r > p$, bem como suas derivadas, tendo-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(r, p, \mu) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \quad \forall t > 0,$$

para cada $p < r \leq \infty$ e certa constante $C(r, p, \mu) > 0$ que depende de r , p , μ ; e

$$\|D^\ell u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C_\ell(r, p, \mu) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) - \frac{\ell}{2}} \quad \forall t > 0,$$

para cada $\ell = 1, 2, 3, \dots$, onde $C_\ell(r, p, \mu)$ depende novamente dos parâmetros r , p e μ .

Na seção 2.4, consideramos o caso $p = 1$, (isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$) e computamos os limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \gamma_r,$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$. Em particular, tem-se $\gamma_1 = |m|$, onde m é a massa (invariante no tempo) de $u(\cdot, t)$, isto é,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow |m| \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty,$$

onde

$$m = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx \quad \forall t > 0.$$

Para $r = \infty$, temos

$$t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}} \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty,$$

enquanto, para $1 < r < \infty$,

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \rightarrow \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}} \left(\frac{4\pi\mu}{r}\right)^{\frac{1}{2r}} \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty.$$

Se $u_0, \hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R})$ são dois estados iniciais com a mesma massa, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(x) dx,$$

então as soluções correspondentes $u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u_0$, $\hat{u}(\cdot, t) = K(\cdot, t) * \hat{u}_0$ satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0,$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r .

Finalmente, na seção 2.5, mostramos que os resultados correspondentes no caso $p > 1$ são triviais: sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0,$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r .

2.2 Propriedades básicas

Nesta seção, derivamos certas propriedades básicas das soluções de (2.1), (2.2), que serão úteis mais adiante. Estes resultados são obtidos de modo

simples a partir da representação (2.5) para $u(\cdot, t)$,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} K(x - y, t) u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.9)$$

onde $K(\cdot, t)$ é dada por (2.4).

Lema 2.1. *Sendo $K(\cdot, t)$ satisfazendo (2.4), tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, t) dx = 1, \quad \forall t > 0. \quad (2.10)$$

Demonstração. Tomando $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2} dx$, $\gamma > 0$ tem-se pelo Teorema de Fubini [9], [10] que

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\gamma(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\gamma r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-\gamma r^2} r \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr \\ &= \frac{\pi}{\gamma} \int_0^\infty e^{-\gamma r^2} \gamma 2r dr = \frac{\pi}{\gamma}, \end{aligned}$$

logo,

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \gamma > 0. \quad (2.11)$$

Agora, tomando $\gamma = \frac{1}{4\mu t}$, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} dx = \sqrt{4\pi\mu t}$$

e, por (2.4)

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, t) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} dx = 1 \quad \forall t > 0,$$

como afirmado. □

Teorema 2.1 (Monotonicidade de $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$). Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2) então $u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R})$ e

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0. \quad (2.12)$$

Demonstração. Temos por (2.5) que $u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u(\cdot, 0)$, para todo $t > 0$. Como $K(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ e $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$, pela desigualdade de Young (A.7) temos $u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R})$ e,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|K(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

visto que, por termos $K(\cdot, t) > 0$,

$$\|K(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1, \quad (2.13)$$

por (2.10) acima. □

Teorema 2.2 (Princípio do Máximo). Sendo $u(\cdot, 0) \in L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se $u(\cdot, t)$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ para todo $t > 0$ e

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0. \quad (2.14)$$

Demonstração. Temos que $u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u(\cdot, 0)$ para todo $t > 0$, onde $K(\cdot, t)$ é dada por (2.4). Aplicando a desigualdade de Young (A.7) e valendo (2.13), obtém-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|K(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. □

Teorema 2.3. Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, e $u(\cdot, t)$ dada por (2.9), tem-se

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Demonstração. Considerando primeiramente o caso $p = 1$, podemos proceder como segue: pelo Lema 2.1,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} (u_0(y) - u_0(x)) dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u_0(y) - u_0(x)| dy \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} |u_0(x + s\sqrt{4\mu t}) - u_0(x)| ds \right) dx,
\end{aligned}$$

onde $s = \frac{y-x}{\sqrt{4\mu t}}$. Pelo Teorema de Fubini, resulta

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x + s\sqrt{4\mu t}) - u_0(x)| dx \right) ds. \quad (2.16)$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $R > 0$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s| \geq R} e^{-s^2} ds \leq \epsilon$, de modo que

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \epsilon + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s| < R} e^{-s^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x + s\sqrt{4\mu t}) - u_0(x)| dx \right) ds, \quad (2.17)$$

para todo $t > 0$. Tomando $\delta > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x + a) - u_0(x)| dx \leq \epsilon,$$

para todo $|a| \leq \delta$, ver [9], [10], temos, por Fubini,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} |u_0(x + s\sqrt{4\mu t}) - u_0(x)|^p ds \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x + s\sqrt{4\mu t}) - u_0(x)|^p dx \right) ds.
\end{aligned}$$

Procedendo como antes, dado $\epsilon > 0$ tomamos $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s| \geq R} e^{-s^2} ds \leq \epsilon,$$

de modo que

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq 2^{p+1} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \epsilon + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s| < R} e^{-s^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |u_0(x + s\sqrt{4\mu t}) - u_0(x)|^p dx \right) ds.$$

Assim, sendo $\delta > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+a) - u_0(x)|^p dx \leq \epsilon$, para $|a| \leq \delta$, teremos, para $0 < t \leq \frac{\delta^2}{R^2 4\mu}$,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}\epsilon + \epsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|s| < R} e^{-s^2} ds \\ &\leq (1 + 2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})})\epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra o resultado quando $p = 1$.

Finalmente, quando $1 < p < \infty$, temos, usando novamente o Lema 2.1,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} (u_0(y) - u_0(x)) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u_0(y) - u_0(x)|^p dy \right) dx, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder (A.4). Assim, fazendo $s = \frac{(y-x)}{\sqrt{4\mu t}}$,

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq (2^{p+1}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + 1) \epsilon,$$

o que conclui o argumento. \square

Teorema 2.4. Dado $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $0 \leq p < \infty$ e $u(\cdot, t)$ definida em (2.9), temos, para cada $t_0 > 0$,

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow t_0. \quad (2.18)$$

Demonstração. No caso $p = 1$, temos, por Fubini,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u_0(y) dy - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} u_0(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| dx dy. \end{aligned}$$

Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| \rightarrow 0,$$

ao $t \rightarrow t_0$, e, para $t \in [t_0/2, 2t_0]$, temos

$$\left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{8\mu t_0}} |u_0(y)| = F(x, y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $F \in L^1(\mathbb{R}^2)$; logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver [9], [10]), segue

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| dx dy \rightarrow 0,$$

ao $t \rightarrow t_0$ como afirmado.

O caso $1 < p < \infty$ é análogo: tomando $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se, pela desigualdade de Hölder (A.4) e Lema 2.1,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u_0(y) dy - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} u_0(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)| dy \right)^p dx \\ &\leq 2^{p/q} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t_0}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t_0}} \right| |u_0(y)|^p dy \right) dx \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

ao $t \rightarrow t_0$ pelo Teorema da Convergência Dominada, como no caso anterior. \square

Teorema 2.5 (Unicidade da solução). *Para o problema (2.1), (2.2), existe somente uma solução $u(\cdot, t) \in C^0([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R}))$, dada por (2.9).*

Demonstração. O argumento a seguir é adaptado de [5], Capítulo 5 (Teorema 4.3). Sendo $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{t} > 0$ dados, fixos no que segue, e $u(x, t)$ em $C^0([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R}))$ solução de (2.1), (2.2), vamos mostrar que

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu\bar{t}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\bar{x}-y)^2}{4\mu\bar{t}}} u(y, 0) dy. \quad (2.19)$$

Para isso tomemos, para $\epsilon \in]0, \bar{t}[$, $R > |\bar{x}|$ dados, $v \in C^\infty(\mathbb{R} \times]-\infty, \bar{t} - \epsilon[)$ dada por

$$v(x, t) = K(\bar{x} - x, \bar{t} - t) \quad (2.20)$$

onde $K(\xi, \tau)$ satisfazendo

$$\zeta_R = \begin{cases} 1, & |x| \leq R \\ 0, & |x| \geq R+1 \end{cases} \quad (2.21)$$

com $\|\zeta'_R\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$, $\|\zeta''_R\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$ para $M > 0$ fixo, independente de R .

Como $v_t = -\mu v_{xx}$ e $u_t = \mu u_{xx}$ para todos $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < \bar{t}$, obtemos

$$(u\zeta_R v)_t + \mu(u(\zeta_R v)_x - \zeta_R v u_x)_x = \mu u(2\zeta'_R v_x + \zeta''_R v). \quad (2.22)$$

Integrando em $[-R-1, R+1] \times [\epsilon, \bar{t} - \epsilon]$, obtém-se, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_{-R-1}^{R+1} u(x, \bar{t} - \epsilon) \zeta_R(x) v(x, \bar{t} - \epsilon) dx &- \int_{-R-1}^{R+1} u(x, \epsilon) \zeta_R(x) v(x, \epsilon) dx = \\ &= \mu \int_{\epsilon}^{\bar{t} - \epsilon} \int_{-R-1}^{R+1} u(2\zeta'_R v_x + \zeta''_R v) dx dt \end{aligned}$$

visto que $\zeta_R(x) = \zeta'_R(x) = 0$ se $|x| \geq R+1$; como tem-se também $\zeta'_R(x) = \zeta''_R(x) = 0$ se $|x| \leq R$,

$$\begin{aligned} \int_{-R-1}^{R+1} u(x, \bar{t} - \epsilon) \zeta_R(x) v(x, \bar{t} - \epsilon) dx &- \int_{-R-1}^{R+1} u(x, \epsilon) \zeta_R(x) v(x, \epsilon) dx = \quad (2.23) \\ &= \mu \int_{\epsilon}^{\bar{t} - \epsilon} \int_{R \leq |x| \leq R+1} u(2\zeta'_R v_x + \zeta''_R v) dx dt. \end{aligned}$$

Como $u \in C^0([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R}))$, segue pela desigualdade de Hölder (A.4)

que

$$uv_x, uv \in L^1(\mathbb{R} \times [0, \bar{t} - \epsilon]),$$

portanto

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\epsilon}^{\bar{t} - \epsilon} \int_{R \leq |x| \leq R+1} u(2\zeta'_R v_x + \zeta''_R v) dx dt = 0. \quad (2.24)$$

Por outro lado, ao $R \rightarrow +\infty$, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{-R-1}^{R+1} u(x, \bar{t} - \epsilon) \zeta_R(x) v(x, \bar{t} - \epsilon) dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}} u(x, \bar{t} - \epsilon) v(x, \bar{t} - \epsilon) dx \\ \int_{-R-1}^{R+1} u(x, \epsilon) \zeta_R(x) v(x, \epsilon) dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}} u(x, \epsilon) v(x, \epsilon) dx \end{aligned}$$

de modo que, por (2.20), (2.23) e (2.24), temos

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, \bar{t} - \epsilon) K(\bar{x} - x, \epsilon) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, \epsilon) K(\bar{x} - x, \bar{t} - \epsilon) dx.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$, tem-se então

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \int_{\mathbb{R}} K(\bar{x} - x, \bar{t}) u(x, 0) dx$$

visto que u é contínua em (\bar{x}, \bar{t}) . O que mostra (2.19). \square

Teorema 2.6. *Se $u(\cdot, t)$ solução de (2.1) e (2.2), tem-se*

$$u(x, 0) \geq \gamma \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x, t) \geq \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.25)$$

$$u(x, 0) \leq \Gamma \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R} \Rightarrow u(x, t) \leq \Gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (2.26)$$

Demonstração. Supondo $u(\cdot, 0) \geq \gamma$, tem-se por (2.3) e (2.10),

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \geq \gamma \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} dy = \gamma,$$

ou seja,

$$u(x, t) \geq \gamma \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

A demonstração da (2.26) é análoga. \square

Generalizando o Teorema 2.6, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.7 (Monotonicidade do Operador Solução). *Se $u(\cdot, t)$, $v(\cdot, t)$ soluções de (2.1) com $u(\cdot, 0), v(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0) \Rightarrow u(\cdot, t) \leq v(\cdot, t) \quad \forall t > 0. \quad (2.27)$$

Demonstração. Dado $t > 0$, tem-se, por (2.3),

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} v(y, 0) dy \\ &= v(x, t) \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$u(x, t) \leq v(x, t) \quad \forall t > 0.$$

□

Quando $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$, a quantidade m definida por

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx, \quad (2.28)$$

chamada de *massa*, é fundamental para a descrição do comportamento assintótico ($t \rightarrow +\infty$) de $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Além disso, é válido observar que a *massa* de $u(\cdot, t)$ não varia no tempo, como mostrado a seguir.

Teorema 2.8 (Conservação da massa). *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), com $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx \quad \forall t > 0. \quad (2.29)$$

Demonstração. Dado $t > 0$, temos por (2.3) e pelo Teorema de Fubini [9], [10] que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} dx \right) u(y, 0) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(y, 0) dy \end{aligned}$$

devido a (2.10). □

Para finalizar, vamos observar que as soluções $u(\cdot, t)$ de (2.1), (2.2), possuem a propriedade TVD (“*Total Variation Diminishing*”), sendo $TV_{\mathbb{R}}u(\cdot, t)$ a variação total de $u(\cdot, t)$ no instante t , isto é,

$$TV_{\mathbb{R}}u(\cdot, t) = \sup \sum_{j=1}^N |u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)|, \quad (2.30)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coleções finitas de pontos $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, e sendo $TV_{\mathbb{R}}u_0$ a variação total do estado inicial $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.9 (Propriedade TVD). *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2), tem-se*

$$TV_{\mathbb{R}}u(\cdot, t) \leq TV_{\mathbb{R}}u_0 \quad \forall t > 0. \quad (2.31)$$

Em particular, $TV_{\mathbb{R}}u(\cdot, t)$ decresce com t .

Demonstração. De [14], tem-se $u_0(\cdot + h) - u_0(\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $0 < h < h_0$, $h_0 \ll 1$, de modo que, pelo Teorema 2.1, temos $u(\cdot + h, t) - u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$ e $0 < h < h_0$, e

$$\|u(\cdot + h, t) - u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0(\cdot + h) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (2.32)$$

para todo $t > 0$. Como (ver [14])

$$TV_{\mathbb{R}}u(\cdot, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |u(x + h, t) - u(x, t)| dx,$$

resulta então, por (2.32) acima,

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}u(\cdot, t) &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x + h) - u_0(x)| dx \\ &= TV_{\mathbb{R}}u_0, \end{aligned}$$

como afirmado. □

2.3 Decaimento em $L^r(\mathbb{R})$

Nesta seção, obteremos taxas para o decaimento de $u(\cdot, t)$ e suas derivadas em várias normas.

Teorema 2.10. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2), tem-se $u(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$, com*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu, p) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}} \quad \forall t > 0, \quad (2.33)$$

onde $C(\mu, p) = (4\pi\mu)^{-\frac{1}{2p}} (1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p})}$ quando $p > 1$ e $C(\mu, 1) = (4\pi\mu)^{-\frac{1}{2}}$ se $p = 1$.

Demonstração. Primeiro analisemos para $p = 1$:

Dado $t > 0$, tem-se, por (2.3),

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u(y, 0)| dy \\ &\leq (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |u(y, 0)| dy \\ &= C(\mu, 1) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu, 1) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}} \quad \forall t > 0,$$

onde $C(\mu, 1) = (4\mu\pi)^{-\frac{1}{2}}$.

Para $1 < p < \infty$:

Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se pela desigualdade de Hölder

(A.4),

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u(y, 0)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-q\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(y, 0)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}$, $\gamma > 0$, tomando $\gamma = \frac{q}{4\mu t}$, temos

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left(\frac{4\pi\mu t}{q} \right)^{\frac{1}{2q}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})} \left(\frac{1}{q} \right)^{\frac{1}{2q}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &= (4\pi\mu t)^{-\frac{1}{2p}} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, para cada $t > 0$,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\mu, p) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}},$$

onde $C(\mu, p) = (4\mu\pi)^{-\frac{1}{2p}}(1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$, como afirmado. \square

O próximo resultado é consequência imediata do teorema anterior e a propriedade de monotonicidade (2.12), em vista da desigualdade (A.8).

Teorema 2.11. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2), tem-se, para cada $t > 0$, $u(\cdot, t) \in L^r(\mathbb{R})$ para todo $r \geq p$, com*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(\mu, p)^{1-\frac{p}{r}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \quad \forall t > 0, p \leq r \leq \infty$$

onde $C(\mu, p)$ é a constante dada no Teorema (2.10).

Demonstração. Dado $t > 0$, temos $u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ pelo Teorema 2.1 e Teorema 2.10, de modo que $u(\cdot, t) \in L^r(\mathbb{R})$ para cada $p \leq r \leq \infty$ e

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} \\ &\leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} C(\mu, p)^{1-\frac{p}{r}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} t^{-\frac{1}{2p}(1-\frac{p}{r})} \\ &= C(\mu, p)^{1-\frac{p}{r}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, pelos Teoremas 2.1 e 2.10 e a desigualdade de Interpolação (A.8). \square

A seguir obtemos estimatias para as derivadas de $u(\cdot, t)$.

Teorema 2.12. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2), com $1 \leq p < \infty$, tem-se, para cada $\ell \in \mathbb{N}$,*

$$\left\| \frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell}(\cdot, t) \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C_\ell(\mu, p, r) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})-\frac{\ell}{2}}, \quad (2.34)$$

para todo $t > 0$, onde $C_\ell(\mu, p, r)$ é uma constante que depende de ℓ , μ , p e r .

Demonstração. Lembrando que $u(\cdot, t)$ é dado por (2.3), isto é,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy,$$

obtem-se, derivando com respeito a x ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{(x-y)}{2\mu t} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\sqrt{\mu t}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{(x-y)}{\sqrt{4\mu t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy,\end{aligned}\quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{2\mu t} + \left(\frac{x-y}{2\mu t}\right)^2\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\mu t} \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{x-y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy,\end{aligned}\quad (2.36)$$

e, em geral, para cada $\ell \geq 1$,

$$\frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{(\mu t)^{\ell/2}} \int_{\mathbb{R}} P_\ell\left(\frac{x-y}{\sqrt{4\mu t}}\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy,\quad (2.37)$$

onde $P_\ell(\cdot)$ é um polinômio real de grau ℓ . Em particular, de (2.37) obtém-se,

$$\left|\frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell}(x, t)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{(\mu t)^{\ell/2}} \hat{C}_\ell \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{8\mu t}} |u(y, 0)| dy\quad (2.38)$$

onde $\hat{C}_\ell := \sup_{s>0} |P_\ell(s)|e^{-s^2}$. Assim, repetindo o argumento dos Teoremas 2.10 e 2.11, obtemos o resultado. \square

2.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$

Consideramos agora, as soluções $u(\cdot, t)$ de (2.1), (2.2) para $p = 1$ (isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$), e vamos mostrar que os limites

$$\gamma_r = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})},\quad (2.39)$$

estão bem definidos para todo $1 \leq r \leq \infty$, sendo todos não nulos quando a massa de $u(\cdot, t)$ for diferente de zero. A discussão a seguir é baseada em [13].

Lema 2.2. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (2.1) e (2.2) com $p = 1$, e sendo $\int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx = 0$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty.\quad (2.40)$$

Demonstração. Por (2.3), temos que $u(\cdot, t)$ é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $R = R(\epsilon) > 0$ tal que $\int_{|y| \geq R} |u(y, 0)| dy \leq \epsilon$.

Então,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left[\left| \int_{|y| \geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| + \left| \int_{|y| < R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| \right] dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left[\left| \int_{|y| \geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| + \left| \int_{|y| < R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| \right] dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|y| \geq R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} |u(y, 0)| dy \right) dx + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y| < R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| dx \end{aligned}$$

Utilizando, no primeiro termo, o Teorema de Fubini e (2.13), tem-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \int_{|y| \geq R} |u(y, 0)| dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y| < R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| dx$$

ou seja,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y| < R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| dx, \quad \forall t > 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y| < R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \int_{|y| < R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy - \int_{|y| < R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| + \left| \int_{|y| < R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| \right) dx \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} u(y, 0) dy = 0$, obtemos

$$\int_{|y|<R} u(y, 0) dy = - \int_{|y|\geq R} u(y, 0) dy$$

dessa forma

$$\int_{|y|<R} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy = - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \int_{|y|\geq R} u(y, 0) dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} u(y, 0) dy \right| dx \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \right) u(y, 0) dy \right| dx \\ & + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \left| \int_{|y|\geq R} u(y, 0) dy \right| dx \\ & \leq \epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \right) u(y, 0) dy \right| dx \end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} & \leq 2\epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|y|<R} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \right) u(y, 0) dy \right| dx \\ & \leq 2\epsilon + \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{\mathbb{R}} \int_{|y|<R} \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} - e^{-\frac{x^2}{4\mu t}} \right| |u(y, 0)| dy dx. \end{aligned}$$

Introduzindo $\xi = \frac{x}{\sqrt{4\mu t}}$, tem-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2\epsilon + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{|y|<R} \left| e^{-\left(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} - e^{-\xi^2} \right| |u(y, 0)| dy d\xi$$

$$\text{Seja } g(\xi, y) = \left| e^{-\left(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} - e^{-\xi^2} \right| |u(y, 0)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, y \in [-R, R].$$

Note que para cada $\xi \in \mathbb{R}$, e para quase todo $y \in [-R, R]$ dados, temos $g(\xi, y) \rightarrow 0$ ao $t \rightarrow \infty$; por outro lado,

$$\begin{aligned}
 |g(\xi, y)| &= \left| e^{-\left(\xi^2 - \frac{2y\xi}{\sqrt{4\mu t}} + \frac{y^2}{4\mu t}\right)} - e^{-\xi^2} \right| |u(y, 0)| \\
 &\leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\xi^2} e^{\frac{2y\xi}{\sqrt{4\mu t}}} e^{-\frac{y^2}{4\mu t}} \right) |u(y, 0)| \\
 &\leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\xi^2} e^{\frac{2y^2}{4\mu t}} e^{\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{4\mu t}} \right) |u(y, 0)| \\
 &= \left(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{\frac{y^2}{4\mu t}} \right) |u(y, 0)| \\
 &\leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{\frac{R^2}{4\mu t}} \right) |u(y, 0)|
 \end{aligned}$$

que obtemos utilizando a desigualdade de Young (A.2).

Para todo $t \geq \frac{R^2}{4\mu}$, temos

$$e^{\frac{R^2}{4\mu t}} \leq e$$

e, dessa forma,

$$|g(\xi, y)| \leq \left(e^{-\xi^2} + e^{-\frac{\xi^2}{2}} + 1 \right) |u(y, 0)| := G(\xi, y),$$

com $G \in L^1(\mathbb{R} \times [-R, R])$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{|y| < R} |g(\xi, y)| d\xi dy \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty,$$

de modo que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 3\epsilon$$

para t suficientemente grande.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue o resultado. \square

Teorema 2.13. *Se $u(\cdot, t)$, $v(\cdot, t)$ são soluções de (2.1), (2.2) com $p = 1$, tendo a mesma massa, ou seja,*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) dx,$$

então

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.41)$$

Demonstração. Sendo $\theta(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$, temos que θ satisfaz

$$\theta_t = \mu\theta_{xx}$$

$$\theta(\cdot, 0) = u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$$

com massa nula,

$$\int_{\mathbb{R}} \theta(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) dx = 0;$$

pelo Lema 2.2, segue então

$$\|\theta(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty$$

isto é,

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty,$$

como afirmado. □

Em particular, obtemos o seguinte resultado fundamental.

Teorema 2.14. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2) com $p = 1$. Então,*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow |m| \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty \quad (2.42)$$

onde m é a massa da solução

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx. \quad (2.43)$$

Demonstração. Tome $v(\cdot, t)$ dada por

$$v_t = \mu v_{xx} \quad (2.44)$$

$$v(\cdot, 0) = v_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

com v_0 dada por

$$v_0(x) = \begin{cases} m & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.45)$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} v(x, 0) dx = \int_0^1 m dx = m,$$

isto é, $v(\cdot, t)$ e $u(\cdot, t)$ tem a mesma massa.

Observando que, pelo Teorema 2.6,

$$\text{Se } m \geq 0 : \quad v(x, t) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$\text{se } m < 0 : \quad v(x, t) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

obtemos em qualquer caso

$$|v(x, t)| = (\text{sgn } m) v(x, t) \quad \forall t > 0,$$

onde $\text{sgn } m$ denota o sinal de m , ou seja,

$$\text{sgn } m = \begin{cases} 1 & \text{se } m > 0 \\ 0 & \text{se } m = 0 \\ -1 & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 2.8, obtemos

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |v(x, t)| dx \\ &= (\text{sgn } m) \int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx \\ &= (\text{sgn } m) \int_{\mathbb{R}} v(x, 0) dx \\ &= (\text{sgn } m) m = |m| \end{aligned}$$

isto é,

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m|$$

para todo $t > 0$, e em particular:

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow |m| \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty.$$

Pelo Teorema 2.13 tem-se

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty,$$

e assim,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow |m| \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty,$$

como afirmado. \square

No que segue, vamos examinar $\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$, para $r > 0$. Começamos pelo caso $r = \infty$.

Lema 2.3. *Se $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$ tem massa nula, então, para cada $1 \leq r \leq \infty$ tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \quad (2.46)$$

uniformemente em r .

Demonstração. O caso $r = 1$ já visto no Teorema 2.14. Consideremos então o caso $r = 2$. Pela desigualdade de Interpolação (A.8),

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{4}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq t^{\frac{1}{4}} (\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} (t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e daí por (2.40) e (2.33) tem-se

$$t^{\frac{1}{4}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty.$$

Para o caso $r = \infty$, usando a desigualdade de Sobolev (A.10), temos

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \\ t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2} (t^{\frac{1}{4}} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} (t^{\frac{3}{4}} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e então

$$t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty,$$

pelo resultado anterior $r = 2$.

Finalmente, para o caso $1 < r < \infty$, tem-se pela desigualdade (A.8)

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{r}} (t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{1-\frac{1}{r}} \\ &\leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{r}} (t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{1-\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

de modo que

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow \infty,$$

pelo resultado anterior $p = \infty$. □

Utilizando o Lema 2.3, resulta fácil computar os limites γ_r , definidos em (2.39) para $r > 1$.

Teorema 2.15. *Ao $t \rightarrow \infty$ tem-se*

$$t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}}, \quad (2.47)$$

onde m é a massa de $u(\cdot, t)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3, é suficiente mostrar esse resultado para a solução $v(x, t)$ dada por (2.44) com $v_0(x)$ dada por (2.45).

De fato, $w_0(x) = u_0(x) - v_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tem massa nula, e assim, pelo Lema 2.3 temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

sendo $w(\cdot, t)$ solução de

$$\begin{aligned} w_t &= \mu w_{xx} \\ w(x, 0) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou seja,

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$$

de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} |v(x, t)| &= \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 e^{-\frac{|x-y|^2}{4\mu t}} dy \\ t^{\frac{1}{2}} |v(x, t)| &= \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} dy \end{aligned}$$

Em particular,

$$t^{\frac{1}{2}} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq t^{\frac{1}{2}} |v(0, t)| = \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{4\mu t}} dy$$

fazendo $t \rightarrow \infty$,

$$t^{\frac{1}{2}} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall t > 0,$$

assim,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}.$$

Analogamente,

$$|v(x, t)| = \frac{1}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} v(y, 0) dy \right| \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} dy \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}},$$

logo,

$$|v(x, t)| \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

e assim,

$$\|v(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}} \implies t^{\frac{1}{2}} \|v(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}$$

fazendo $t \rightarrow \infty$ obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}$$

o que completa a demonstração. \square

Teorema 2.16. *Seja $u(x, t)$ solução de (2.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$ e $1 \leq r < \infty$ tem-se*

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \rightarrow \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}} \left(\frac{4\pi\mu}{r} \right)^{\frac{1}{2r}} \quad \text{ao} \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2.49)$$

onde m é a massa de $u(\cdot, t)$.

Demonstração. Seja $v(x, t)$ dada por (2.44) com $v_0(x)$ dada por (2.45), e além disso, $w_0(x) = u_0(x) - v_0(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tem massa nula. Assim, pelo Lema 2.3 obtemos,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|w(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

sendo $w(\cdot, t)$ solução de (2.48) ou seja,

$$w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$$

de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Portanto, basta mostrar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{1/2}} \left(\frac{(4\pi\mu)}{r} \right)^{\frac{1}{2r}}, \quad 1 < r < \infty.$$

Dessa forma temos,

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(r-1)} \|v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}^r &= t^{\frac{1}{2}(r-1)} \int_{\mathbb{R}} |v(\cdot, t)|^r dx \\ &= t^{\frac{1}{2}(r-1)} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{(4\pi\mu t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\pi\mu}} v(\cdot, 0) dy \right|^r dx \\ &= t^{\frac{1}{2}(r-1)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|m|^r}{(4\pi\mu t)^{\frac{r}{2}}} \left(\int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4\pi\mu}} dy \right)^r dx \\ &= t^{\frac{1}{2}(r-1)} \frac{|m|^r}{(4\pi\mu t)^{\frac{r}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4\pi\mu}} dy \right)^r dx, \end{aligned}$$

tomando $\xi = \frac{x}{\sqrt{4\mu t}}$ e $d\xi = \sqrt{4\mu t} dx$ então,

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(r-1)} \|v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}^r &= t^{-\frac{1}{2}} \frac{|m|^r}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} (4\mu t)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}})^2} dy \right)^r d\xi \\ &= \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} |m|^r \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}})^2} dy \right)^r d\xi \end{aligned}$$

logo, para cada $\xi \in \mathbb{R}$ dado e $t \rightarrow \infty$ temos

$$\int_0^1 e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}})^2} dy \longrightarrow \int_0^1 e^{-\xi^2} dy = e^{-\xi^2} \int_0^1 dy = e^{-\xi^2}$$

e

$$\int_0^1 e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}})^2} dy \leq C e^{-\xi^2}.$$

Pelo teorema de Convergência Dominada da Lebesgue obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(r-1)} \|v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} |m|^r \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 e^{-(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}})^2} dy \right)^r d\xi.$$

Seja $g(\xi, y) = \int_0^1 e^{-\left(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} dy$ então $g(\xi, y) \rightarrow e^{-r\xi^2}$ e $g(\xi, y) \leq C e^{-r\xi^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Assim, pelo Lema 2.1

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} |m|^r \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 e^{-\left(\xi - \frac{y}{\sqrt{4\mu t}}\right)^2} dy \right)^r d\xi &= \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} |m|^r \int_{\mathbb{R}} e^{-r\xi^2} d\xi \\ &= \frac{2\mu^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} |m|^r \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \\ &= \frac{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}{(4\pi\mu)^{\frac{r}{2}}} \frac{|m|^r}{r^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{|m|}{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{4\pi\mu}{r} \right)^{\frac{1}{2r}}, \end{aligned}$$

como afirmado. □

2.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p > 1$

Nesta seção vamos mostrar que, no caso $p > 1$, os limites correspondentes para a solução de (2.1), (2.2), são todos nulos, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \quad (2.50)$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r .

Teorema 2.17. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2), onde $1 < p$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.51)$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{|x| \geq R} |u(x, 0)|^p dx \leq \epsilon^p \quad (2.52)$$

e considere $v(\cdot, t)$ dada por

$$\begin{aligned} v_t &= \mu v_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x, 0) &= v_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ é dada por

$$v_0(x) = \begin{cases} u(x, 0), & |x| \leq R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.11 (com $p = 1$, $r = p$), temos

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(\mu, 1)^{1-\frac{1}{p}} \|v(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})},$$

de modo que

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty$$

visto que $p > 1$.

Logo, pela desigualdade triangular, usando o Teorema 2.1 e (2.52)

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \epsilon + \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

para todo t suficientemente grande. \square

Os seguintes resultados são consequências imediatas.

Teorema 2.18. *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2) com $u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R})$ e $p > 1$ tem-se,*

$$t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0. \quad (2.53)$$

Demonstração. Analisando a desigualdade de Sobolev (A.12), verificamos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2}{2+p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}}.$$

Dessa forma,

$$t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq t^{\frac{1}{2p}} C \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2}{2+p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}},$$

e, pelo Teorema 2.12,

$$t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \tilde{C} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}}.$$

O resultado segue, pelo Teorema 2.17. \square

Teorema 2.19. *Seu $u(\cdot, t)$ solução de (2.1), (2.2) com $u(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R})$ então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0, \quad (2.54)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

Demonstração. Os casos $r = p$ e $r = \infty$ já foram feitos. Analisemos para $p < r < \infty$.

Utilizando a desigualdade de Interpolação (A.8) tem-se,

$$t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1 - \frac{p}{r}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}}.$$

Assim, por (2.33),

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq (C(\mu) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}})^{1 - \frac{p}{r}} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \\ &\leq C(\mu)^{1 - \frac{p}{r}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{1 - \frac{p}{r}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}}, \end{aligned}$$

e o resultado segue pelo Teorema 2.17. □

3 EQUAÇÃO DE BURGERS

3.1 Introdução

A equação analisada neste capítulo é a equação clássica de Burgers,

$$u_t + cuu_x = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

onde c , μ são constantes dadas, com $c \neq 0$ e $\mu > 0$. Esta equação foi introduzida originalmente por J. M. Burgers [1] em seus estudos sobre turbulência em fluidos, aparecendo como um modelo básico em diversos outros fenômenos onde efeitos de advecção não lineares e difusão linear desempenham papel importante, conforme [4]. Com efeito, mostraremos no Capítulo 4 que soluções $u(\cdot, t)$ de equações de advecção-difusão mais gerais da forma

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

onde f é dada (suave), podem ser bem aproximadas para $t \gg 1$ por soluções da equação (3.1), com $c = f''(0)$, na variável espacial $\xi = x - f'(0)t$. A equação de Burgers pode ser considerada como uma das equações fundamentais da Física Matemática.

Em (3.1), assumimos que $u(\cdot, t)$ é conhecida no instante $t = 0$, com

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

onde se supõe $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ para algum $1 \leq p < \infty$ e limitada (isto é, $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$); a condição (3.3) é entendida no sentido de se ter $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$, isto é,

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Para $p = 1$, E. Hopf [7] e J. Cole [2] mostraram a existência de uma única solução $u(\cdot, t) \in C^0([0, +\infty[, L^1(\mathbb{R}))$, infinitamente diferenciável em $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$,

e obtiveram a representação explícita

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) u_0(y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) dy} \quad (3.5)$$

onde $\varphi_0(y) = e^{-\frac{c}{2\mu} \int_{-\infty}^y u_0(\xi) d\xi}$, introduzindo a mudança de variável

$$\varphi(x, t) = e^{-\frac{c}{2\mu} \int_{-\infty}^x u(\xi, t) d\xi}. \quad (3.6)$$

Mais geralmente, no caso $p > 1$, existe uma única solução $u(\cdot, t)$ em $C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}))$ limitada satisfazendo $u(\cdot, 0) = u_0$ conforme (3.4) acima, que é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ e satisfaz, assim, a equação (3.1) no sentido clássico para todo $t > 0$.

Na seção 3.2, derivamos algumas propriedades básicas destas soluções, análogas às propriedades obtidas no capítulo anterior para a equação do calor; estas propriedades serão úteis na análise desenvolvida no restante do capítulo. A análise apresentada detalha os resultados discutidos em [12], [13] e [11].

Na seção 3.3, obtemos diversas estimativas para $u(\cdot, t)$ e, no caso $p = 1$, suas derivadas; em particular, mostraremos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(\mu, p, r) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \quad \forall t > 0 \quad (3.7)$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, onde $C(\mu, p, r)$ é uma constante positiva que depende dos parâmetros μ , p e r .

A seguir, nas seções 3.4 e 3.5, é mostrado que os limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \gamma(r, p), \quad p \leq r \leq \infty \quad (3.8)$$

estão todos bem definidos; como no caso da equação do calor, tem-se $\gamma(r, p) = 0$ para todo $r \geq p$ quando $p > 1$, e no caso $p = 1$ estes limites dependem fundamentalmente da massa de $u(\cdot, t)$, isto é, a quantidade $m \in \mathbb{R}$ (invariante no tempo) dada por

$$m = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx. \quad (3.9)$$

3.2 Propriedades básicas

Será conveniente iniciarmos considerando o caso $p = 1$ (isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$) e examinarmos o comportamento das soluções $u(\cdot, t)$ de (3.1), (3.3) em $L^1(\mathbb{R})$. Para isso, utilizemos as chamadas “*funções sinal regularizadas*”, ver [8], [12] tomando $S \in C^1(\mathbb{R})$ uma função crescente tal que,

$$S(x) = 1 \quad \text{se } x \geq 1 \quad (3.10)$$

$$S(0) = 0 \quad \text{se } x = 0 \quad (3.11)$$

$$S(x) = -1 \quad \text{se } x \leq -1 \quad (3.12)$$

e, para cada $\delta > 0$, definindo $L_\delta \in C^2(\mathbb{R})$ como

$$L_\delta(x) = \int_0^x S\left(\frac{\xi}{\delta}\right) d\xi, \quad (3.13)$$

temos $L_\delta \geq 0$, $L_\delta'' \geq 0$ e

$$L_\delta(x) \rightarrow |x| \quad \text{ao } \delta \rightarrow 0 \quad (3.14)$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}$, com

$$L_\delta'(x) \rightarrow \text{sgn } x \quad \text{ao } \delta \rightarrow 0 \quad (3.15)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, onde sgn denota a *função sinal*, ou seja,

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Aproximando $|\cdot|$ por meio de funções L_δ obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.1 (Monotonicidade de $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$). *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0. \quad (3.16)$$

Demonstração. Seja $T > 0$ dado e $0 < t_0 < T$ qualquer. Tomando as funções L_δ , $\delta > 0$ conforme (3.13), multiplicando (3.1) por $L'_\delta(u(x, t))$ e ainda integrando em $[t_0, T] \times \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) u_t(x, t) dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) f(u(x, t))_x dx dt = \\ = \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) \mu u_{xx}(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

onde $f(u) = cu^2/2$. Com respeito ao primeiro termo, temos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) u_t(x, t) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{t_0}^T L'_\delta(u(x, t)) u_t(x, t) dt \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta(u(x, T)) dx - \int_{\mathbb{R}} L_\delta(u(x, t_0)) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, para o segundo termo, temos

$$\begin{aligned} L'_\delta(u(x, t)) f(u(x, t))_x &= L'_\delta(u(x, t)) f'(u(x, t)) u_x(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F(u(x, t)), \end{aligned}$$

e então

$$\int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) f(u(x, t))_x dx = \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} F(u(x, t)) dx = 0,$$

onde $F(u) := \int_0^u L'_\delta(v) f'(v) dv$, de modo que

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) f(u(x, t))_x dx = 0 \quad \forall t_0 \leq t \leq T.$$

Finalmente, para o terceiro termo, temos, integrando por partes,

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) \mu u_{xx}(x, t) dx dt = - \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L''_\delta(u(x, t)) \mu u_x^2(x, t) dx dt,$$

de modo que, como $L''_\delta \geq 0$, resulta

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(u(x, t)) \mu u_{xx}(x, t) dx dt = - \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L''_\delta(u(x, t)) \mu u_x^2(x, t) dx dt \leq 0, \quad \forall t, \delta > 0.$$

Dessa forma, fazendo $\delta \rightarrow 0^+$, obtemos, por (3.14),

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, T)| dx - \int_{\mathbb{R}} |u(x, t_0)| dx \leq 0;$$

para $t_0 > 0$ arbitrário; fazendo $t_0 \rightarrow 0^+$, resulta então

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, T)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x, 0)| dx \quad \forall T > 0,$$

como afirmado. \square

O resultado acima mostra, em particular, que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall 0 \leq t_0 \leq t, \quad (3.17)$$

de modo que $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ decresce monotonicamente com t , quando $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$.

Outra propriedade bastante importante é o Princípio do Máximo,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0, \quad (3.18)$$

o qual pode ser derivado do seguinte resultado.

Teorema 3.2 (Monotonicidade de $\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$). *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1), (3.3), onde $1 \leq p < \infty$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^r(\mathbb{R})} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (3.19)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

Demonstração. O caso $p = r = 1$ já foi visto no teorema anterior. Analisemos então quando $r > 1$, $r \geq p$. Para $T > 0$ dado, tomando $t_0 \in]0, T]$, as funções L_δ dadas e ainda multiplicando (3.1) por $rL_\delta^{r-1}(u(x, t))L'_\delta(u(x, t))$ e integrando $\mathbb{R} \times [t_0, T]$ temos,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} rL_\delta^{r-1}(u)L'_\delta(u)u_t dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} rL_\delta^{r-1}(u)L'_\delta(u)f'(u)u_x dx dt = \\ = \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} rL_\delta^{r-1}(u(x, t))L'_\delta(u(x, t))\mu u_{xx} dx dt, \end{aligned}$$

onde, como acima, $f(u) = cu^2/2$.

Por Fubini obtemos,

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} rL_\delta^{r-1}(u(x, t))L'_\delta(u(x, t))u_t dx dt = \int_{\mathbb{R}} L_\delta^r(u(x, T)) dx - \int_{\mathbb{R}} L_\delta^r(u(x, t_0)) dx.$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} L_{\delta}^{r-1}(u(x, t)) L'_{\delta}(u(x, t)) f'(u) u_x dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} A(u(x, t)) dx = 0$$

onde $A(u) = \int_0^u L_{\delta}^{r-1}(v) L'_{\delta}(v) f'(v) dv$.

Lembrando que $L_{\delta} \geq 0$ e $L''_{\delta} \geq 0$ obtemos que,

$$\begin{aligned} r\mu \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L_{\delta}^{r-1}(u) L'_{\delta}(u) u_{xx} dx dt &= -r\mu \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L_{\delta}^{r-1}(u) L''_{\delta}(u) u_x^2 dx dt \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} L_{\delta}^r(u(x, T)) dx \leq \int_{\mathbb{R}} L_{\delta}^r(u(x, t_0)) dx,$$

para todo $t \geq t_0 \geq 0$. Fazendo $\delta \rightarrow 0^+$ obtém-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^r(\mathbb{R})}, \quad (3.20)$$

em virtude de (3.14).

Finalmente, fazendo $r \rightarrow \infty$ em (3.20), obtém-se (3.18) como afirmado. \square

Outra propriedade fundamental das soluções $u(\cdot, t)$ de (3.1), no caso $p = 1$ (isto é, $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$), é o fato de a massa de $u(\cdot, t)$ ser invariante no tempo, conforme mostramos a seguir.

Teorema 3.3 (Conservação da Massa). *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx \quad \forall t \geq 0. \quad (3.21)$$

Demonstração. Seja $T > 0$ e tomemos $0 < t_0 < T$. Integrando (3.1) em $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ obtemos

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} u_t(x, t) dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} f(u(x, t))_x dx dt = \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} \mu u_{xx}(x, t) dx dt,$$

onde $f(u) = cu^2/2$.

Pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} u_t(x, t) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{t_0}^T u_t(x, t) dt \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}} u(x, t_0) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} f(u(x, t))_x dx dt = \int_{t_0}^T \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) dx \right] dt = 0,$$

e

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} \mu u_{xx}(x, t) dx dt = \mu \int_{t_0}^T \left[\int_{\mathbb{R}} u_{xx} dx \right] dt = 0.$$

Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, T) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, t_0) dx;$$

fazendo $t_0 \rightarrow 0^+$ obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, T) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx,$$

como afirmado. □

Teorema 3.4 (Contratividade em $L^1(\mathbb{R})$). *Seja $u(\cdot, t)$, $\tilde{u}(\cdot, t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot, 0)$, $\tilde{u}(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, 0) - \tilde{u}(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0. \quad (3.22)$$

Demonstração. O argumento a seguir é tomado de [6] e [8]. Seja $T > 0$ dado, e $0 < t_0 < T$ qualquer. Tomando as funções L_δ , $\delta > 0$ dadas em (3.13) e, sendo $w(\cdot, t) = u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)$, $f(u) = cu^2/2$, temos de

$$\begin{aligned} u_t + f(u(x, t))_x &= \mu u_{xx}(x, t) \\ \tilde{u}_t + f(\tilde{u}(x, t))_x &= \mu \tilde{u}_{xx}(x, t) \end{aligned}$$

que $w(\cdot, t)$ satisfaz

$$w_t + [f]_x = \mu w_{xx}, \quad (3.23)$$

onde $[f] := f(\tilde{u} + w) - f(\tilde{u})$.

Multiplicando (3.23) por $L'_\delta(w)$ e integrando em $[t_0, T] \times \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(w(x, t)) w_t(x, t) dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(w(x, t)) [f]_x dx dt &= \\ &= \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(w(x, t)) \mu w_{xx}(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Examinando o primeiro termo em (3.24) acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(w(x, t)) w_t(x, t) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{t_0}^T L'_\delta(w(x, t)) w_t(x, t) dt \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta(w(x, T)) dx - \int_{\mathbb{R}} L_\delta(w(x, t_0)) dx. \end{aligned}$$

Para o segundo termo, obtemos, integrando por partes

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(w(x, t)) [f]_x dx dt = - \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L''_\delta(w(x, t)) [f] w_x(x, t) dx dt.$$

Como, para cada (x, t) fixado, temos

$$L''_\delta(w(x, t)) [f] w_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad \delta \rightarrow 0^+,$$

e vale a estimativa

$$\begin{aligned} |L''_\delta(w(x, t)) [f] w_x(x, t)| &= L''_\delta(w(x, t)) |w_x(x, t)| |f(\tilde{u} + w) - f(\tilde{u})| \\ &\leq EC_0 |w_x(x, t)| \end{aligned}$$

para $E > 0$, $C_0 > 0$ constantes (C_0 dependendo de t_0), pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L''_\delta(w(x, t)) [f] w_x(x, t) dx dt \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad \delta \rightarrow 0^+.$$

Finalmente, considerando o terceiro termo em (3.24), obtemos, integrando por partes,

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L'_\delta(w(x, t)) \mu w_{xx}(x, t) dx dt = - \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L''_\delta(w(x, t)) \mu w_x^2(x, t) dx dt \leq 0,$$

visto que $L''_\delta \geq 0$. Portanto, resulta de (3.24) acima, a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}} L_\delta(w(x, T)) dx - \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} L''_\delta(w(x, t)) [f] w_x(x, t) dx dt \leq \int_{\mathbb{R}} L_\delta(w(x, t_0)) dx$$

para cada $\delta > 0$, $0 < t_0 < T$. Fazendo $\delta \rightarrow 0^+$ e $t_0 \rightarrow 0^+$, obtemos então

$$\int_{\mathbb{R}} |w(x, T)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |w(x, 0)| dx,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x, T) - \tilde{u}(x, T)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x, 0) - \tilde{u}(x, 0)| dx,$$

como afirmado em (3.22). \square

Usando argumento da literatura [3] e as propriedades (3.21) e (3.22), podemos estabelecer a seguinte propriedade de monotonicidade.

Teorema 3.5 (Monotonicidade do Operador Solução). *Sendo $u(\cdot, t)$, $\tilde{u}(\cdot, t)$ soluções de (3.1) correspondentes a estados iniciais $u(\cdot, 0)$, $\tilde{u}(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, respectivamente, temos que*

$$u(\cdot, 0) \leq \tilde{u}(\cdot, 0) \Rightarrow u(\cdot, t) \leq \tilde{u}(\cdot, t), \quad \forall t > 0$$

Demonstração. Dado $t > 0$ tem-se, pelos Teoremas (3.3) e (3.4) acima,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| + u(x, t) - \tilde{u}(x, t)) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| dx + \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x, t) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |u(x, 0) - \tilde{u}(x, 0)| dx + \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x, 0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx + \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x, 0) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, como $|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| + u(x, t) - \tilde{u}(x, t) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| + u(x, t) - \tilde{u}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

o que prova o resultado. \square

O Teorema 3.4 garante, em particular, a unicidade da solução $u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^1(\mathbb{R}))$ do problema (3.1), (3.3) no caso $p = 1$. Para $p > 1$, a unicidade da solução $u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ decorre da seguinte generalização do Teorema 3.4 a este caso.

Teorema 3.6. *Seendo $u_0, \hat{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $0 < p < \infty$ e $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}))$ soluções de (3.1) correspondentes aos estados iniciais u_0, \hat{u}_0 , respectivamente, tem-se*

$$\|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R})} e^{C(\mu, p, K_\infty)t}$$

para cada $t > 0$, onde $C(\mu, p, K_\infty)$ denota uma constante cujo valor depende apenas de μ, p e $K_\infty > 0$ tal que $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty, \|\hat{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty$.

A prova deste resultado será vista para equações mais gerais no Capítulo 4.

3.3 Decaimento em $L^r(\mathbb{R})$

Nesta seção, obteremos certas estimativas para $u(\cdot, t)$ e algumas derivadas, que serão importantes na análise a seguir. Iniciaremos considerando o caso $p = 1$ (isto é, $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$).

Teorema 3.7 (Desigualdade de Energia 1). *Seendo $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$T\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq 2\sqrt{2}\|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{1/2} \mu^{-1/2} \quad (3.25)$$

para todo $T > 0$.

Demonstração. Os argumentos aqui usados são obtidos analisando a literatura, [12].

Seja $T > 0$ dado, multiplicando (3.1) por $tu(x, t)$ e integrando em $\mathbb{R} \times [0, T]$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(x, t) u_t(x, t) dx dt &+ \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(x, t) f'(u(x, t)) u_x(x, t) dx dt = \\ &= \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} \mu u(x, t) u_{xx}(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

onde $f(u) = cu^2/2$.

Usando o Teorema de Fubini e integração por partes,

$$\int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u(x, t) u_t(x, t) dx dt = \frac{T}{2} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{2} \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt. \quad (3.26)$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) f'(u(x, t)) u_x(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} g(u(x, t)) dx = 0, \quad (3.27)$$

onde $g(u) = \int_0^u v f'(v) dv$, e

$$\begin{aligned} \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} \mu u(x, t) u_{xx}(x, t) dx dt &= -\mu \int_0^T t \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x, t) dx dt \\ &= -\mu \int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Portanto, devido a (3.26), (3.27) e (3.28) obtemos,

$$\frac{T}{2} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{2} \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = -\mu \int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt,$$

isto é,

$$T \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt.$$

Usando a desigualdade de Sobolev (A.11) e posteriormente a desigualdade de Hölder (A.4), tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt &\leq \sqrt[3]{4} \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{2/3} dt \\ &\leq \sqrt[3]{4} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \int_0^T \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{2/3} dt \\ &\leq 2^{2/3} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} (2\sqrt{T})^{2/3} (2\mu)^{-1/3} \left(2\mu \int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Assim, sendo

$$E(T) := T \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt$$

temos

$$E(T) \leq 2\|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \mu^{-1/3} T^{1/3} E(T)^{1/3}$$

o que implica

$$E(T)^{2/3} \leq 2\|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{4/3} \mu^{-1/3} T^{1/3}$$

ou seja

$$E(T) \leq 2^{3/2} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \mu^{-1/2} T^{1/2}$$

de onde segue o resultado. \square

Em particular,

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} (\mu T)^{-1/4} \quad \forall T > 0, \quad (3.29)$$

e ainda,

$$\int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \sqrt{2} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \mu^{-3/2} T^{1/2}. \quad (3.30)$$

Uma consequência do resultado acima é dada a seguir.

Teorema 3.8. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2\sqrt{2}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \mu^{-1/2} T^{-1/2} \quad \forall T > 0. \quad (3.31)$$

Demonstração. Dado $T > 0$ temos, por (3.30),

$$\int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \sqrt{2} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \mu^{-3/2} T^{1/2}$$

e então, por (A.9), existe $\hat{t} \in [\frac{T}{2}, T]$ tal que

$$\hat{t} \|u_x(\cdot, \hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{\sqrt{2} \mu^{-3/2} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{1/2}}{T - \frac{T}{2}}$$

isto é,

$$\|u_x(\cdot, \hat{t})\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}} \mu^{-3/4} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} T^{-1/4} \hat{t}^{-1/2}. \quad (3.32)$$

Pela desigualdade de Sobolev (A.10), (3.31) e (3.32) tem-se,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq 2\sqrt[4]{2} \mu^{-1/2} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} T^{-1/8} \hat{t}^{-3/8} \\ &\leq 2^{13/8} \mu^{-1/2} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} T^{-1/2}, \end{aligned}$$

uma vez que $T \geq \hat{t} \geq \frac{T}{2}$.

Assim,

$$\|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}\mu^{-1/2}}\|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}T^{-1/2}$$

e o resultado segue, visto que $\|u(\cdot, T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, \hat{t})\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pelo Princípio do Máximo. \square

Teorema 3.9. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C_r \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} (\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \quad (3.33)$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, onde $C_r = 2^{\frac{13}{8}(1-\frac{1}{r})}$.

Demonstração. Os casos $r = 1$ e $r = \infty$ já foram estabelecidos (ver Teorema 3.1 e 3.8). Considerando $1 < r < \infty$, tem-se, para $t > 0$, usando (A.8),

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{r}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{r}} \\ &\leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{r}} \left(2\sqrt{2\sqrt[4]{2}\mu^{-1/2}}\|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}(\mu t)^{-\frac{1}{2}} \right)^{1-\frac{1}{r}} \\ &= 2^{\frac{13}{8}(1-\frac{1}{r})} (\mu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

como afirmado em (3.33). \square

Os resultados a seguir tem o objetivo de estabelecer estimativas para $\|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $\|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Para isso será conveniente introduzirmos $K_1 > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq K_1. \quad (3.34)$$

Note que, pelo Teorema 3.8, temos $u(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$, com

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty(t_0, \mu, K_1) \quad \forall t \geq t_0$$

para cada $t_0 > 0$ dado, onde

$$K_\infty(t_0, \mu, K_1) = 2\sqrt{2\sqrt[4]{2}} K_1 (\mu t_0)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.35)$$

Do Teorema 3.7, segue que, dado $\hat{t}_0 > 0$ qualquer, temos

$$\int_0^{\hat{t}_0} t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, K_1) \hat{t}_0^{\frac{1}{2}}$$

para $C(\mu, K_1)$ constante apropriada dependendo apenas de μ, K_1 dados. Pelo Teorema A.9, Anexo A, existe $t_0 \in]0, \hat{t}_0[$ tal que

$$t_0 \|u_x(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C(\mu, K_1) \hat{t}_0^{-\frac{1}{2}},$$

de modo que, multiplicando por t_0 , obtemos

$$t_0^2 \|u_x(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C(\mu, K_1) \hat{t}_0^{\frac{1}{2}};$$

assim, como $\hat{t}_0 > 0$ é arbitrário, resulta de (3.25) que podemos tomar uma sequência $(t_0^{(\ell)})_\ell$ com

$$t_0^{(\ell)2} \|u_x(\cdot, t_0^{(\ell)})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow 0, \quad t_0^{(\ell)} \rightarrow 0 \quad (3.36)$$

ao $\ell \rightarrow \infty$. Esta observação permite obter o seguinte resultado.

Teorema 3.10 (Desigualdade de Energia 2). *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se,*

$$T^2 \|u_x(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu \int_0^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

para todo $T > 0$, onde $C(\mu, K_1) > 0$ é uma constante que depende dos parâmetros $\mu, K_1 > 0$ dados em (3.1) e (3.34) acima.

Demonstração. Dado $T > 0$, tomemos $t_0 \in]0, T[$ verificando (3.36). Derivando (3.1) em relação a x , multiplicando por $t^2 u_x$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} t^2 u_x(x, t) u_{tx}(x, t) dx dt &+ \int_{t_0}^T t^2 \int_{\mathbb{R}} u_x(x, t) (f'(u) u_x(x, t))_x dx dt = \\ &= \mu \int_{t_0}^T t^2 \int_{\mathbb{R}} u_x(x, t) u_{xxx}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

onde $f(u) = cu^2/2$.

Usando Fubini, concluímos que:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} t^2 u_x(x, t) u_{tx}(x, t) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{t_0}^T t^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_x(x, t)^2 \right) dt dx \\ &= \frac{T^2}{2} \|u_x(x, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \frac{t_0^2}{2} \|u_x(x, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\quad - \int_{t_0}^T t \|u_x(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u_x(x, t) (f'(u) u_x(x, t))_x dx &= - \int_{\mathbb{R}} f'(u) u_x(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (f'(u) - f'(0)) u_x(x, t) u_{xx}(x, t) dx, \end{aligned}$$

e também

$$\mu \int_{t_0}^T t^2 \int_{\mathbb{R}} u_x(x, t) u_{xxx}(x, t) dx dt = -\mu \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt.$$

Portanto, obtém-se

$$\begin{aligned} T^2 \|u_x(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &+ 2\mu \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = t_0^2 \|u_x(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \\ &+ 2 \int_{t_0}^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + \\ &+ 2 \int_{t_0}^T t^2 \left[\int_{\mathbb{R}} (f'(u) - f'(0)) u_x(x, t) u_{xx}(x, t) dx \right] dt. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por (3.36), temos

$$t_0^2 \|u_x(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t_0 \rightarrow 0,$$

e, por (3.25),

$$2 \int_{t_0}^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq 2\sqrt{2}\mu^{-\frac{3}{2}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}}.$$

Analisemos agora o último termo em (3.38). Pela desigualdade de Cauchy (A.1), com $\epsilon = \mu$, temos

$$\begin{aligned} |f'(u) - f'(0)| |u_x(x, t)| |u_{xx}(x, t)| &\leq \mu |u_{xx}(x, t)|^2 + \frac{1}{4\mu} |f'(u) - f'(0)|^2 |u_x(x, t)|^2 \\ &\leq \mu |u_{xx}(x, t)|^2 + \frac{c^2}{4\mu} |u(x, t)|^2 |u_x(x, t)|^2. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $t \in [t_0, T]$, resulta

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)| |u_x(x, t)| |u_{xx}(x, t)| dx \leq \mu \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{c^2}{4\mu} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 u_x^2(x, t) dx.$$

Por (3.31), resulta

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(u) - f'(0)| |u_x(x, t)| |u_{xx}(x, t)| dx \leq \mu \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C(\mu, K_1) t^{-1} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Portanto, segue de (3.38) que

$$\begin{aligned} T^2 \|u_x(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &+ \mu \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq t_0^2 \|u_x(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \\ &+ C(\mu) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} + \\ &+ C(\mu, K_1) \int_{t_0}^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt, \end{aligned}$$

ou seja, por (3.25),

$$\begin{aligned} T^2 \|u_x(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &+ \mu \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq t_0^2 \|u_x(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \\ &+ C(\mu) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^2 + \\ &+ C(\mu, K_1) \int_{t_0}^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt. \end{aligned}$$

Fazendo $t_0 \rightarrow 0$, resulta

$$\begin{aligned} T^2 \|u_x(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt &\leq C(\mu) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} + \\ &+ C(\mu, K_1) \int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt, \\ &\leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pelo Teorema 3.7, o que conclui o argumento. \square

O argumento usado na prova do teorema anterior pode ser repetido para estimar $\|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e obter o seguinte resultado.

Teorema 3.11 (Desigualdade de Energia 3). *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^1(\mathbb{R})$, tem-se,*

$$T^3 \|u_{xx}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

para todo $T > 0$, para alguma constante $C(\mu, K_1) > 0$ que depende dos parâmetros $\mu, K_1 > 0$ introduzidos em (3.1) e (3.34) acima.

Demonstração. Como na derivação de (3.36) acima, obtém-se de (3.37) que existe sequência $(t_0^{(\ell)})_\ell$ com

$$t_0^{(\ell)^3} \|u_{xx}(\cdot, t_0^{(\ell)})\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \rightarrow 0, \quad t_0^{(\ell)} \rightarrow 0 \quad (3.40)$$

ao $\ell \rightarrow \infty$. Assim, dado $T > 0$ qualquer, e tomando $t_0 \in]0, T[$ satisfazendo (3.40), temos, derivando (3.1) em relação a x duas vezes, multiplicando o resultado por $2t^3 u_{xx}$ e integrando em $\mathbb{R} \times [t_0, T]$,

$$\begin{aligned} T^3 \|u_{xx}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &+ 2\mu \int_{t_0}^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = t_0^3 \|u_{xx}(x, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \\ &+ 3 \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + \\ &+ 2 \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} cu(x, t) u_{xx}(x, t) u_{xxx}(x, t) dx dt + \\ &+ 2c \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x, t) u_{xxx}(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Por outro lado,

$$\left| 2c \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} u(x, t) u_{xx} u_{xxx} dx dt \right| \leq 2|c| \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)| |u_{xx}| |u_{xxx}| dx dt,$$

e

$$\left| 2c \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} u_x^2 u_{xxx} dx dt \right| \leq 2|c| \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 |u_{xxx}| dx dt;$$

utilizando a desigualdade de Cauchy (A.1) com $\epsilon = \mu/4$,

$$\begin{aligned} 2|c| \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)| |u_{xx}| |u_{xxx}| dx dt &\leq \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}|^2 dx dt + \\ &+ \frac{2c^2}{\mu} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 |u_{xx}|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (3.42)$$

e também,

$$\begin{aligned} 2|c| \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^2 |u_{xxx}| dx dt &\leq \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_{xxx}|^2 dx dt + \\ &+ \frac{2c^2}{\mu} \int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^4 dx dt. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pelo Teorema 3.8 e por (3.37),

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 |u_{xx}|^2 dx dt &\leq \int_{t_0}^T t^3 \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\
&\leq C(\mu, K_1) \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\
&\leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{1/2}. \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Por outro lado, também pelo Teorema 3.8 e pela desigualdade (A.12), Anexo A, temos,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^T t^3 \int_{\mathbb{R}} |u_x|^4 dx dt &\leq \int_{t_0}^T t^3 \|u_x(\cdot, t)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 dt \\
&\leq C \int_{t_0}^T 2t^3 \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^3 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\
&\leq C(\mu, K_1) \int_{t_0}^T t^{3/2} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\
&\leq C(\mu, K_1) \int_{t_0}^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + \int_{t_0}^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\
&\leq C(\mu, K_1) \|u(\cdot, 0)\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{1/2}, \tag{3.45}
\end{aligned}$$

pela Desigualdade de Energia (3.25) e (3.37), para $C(\mu, K_1)$ apropriada. Fazendo $t_0 \rightarrow 0$, obtemos o resultado por (3.44), (3.45) e (3.40). \square

No que segue, vamos examinar o caso em que $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$ para $p > 1$. O caso mais simples é quando $1 < p \leq 2$, que será examinado no resultado abaixo. O caso $p > 2$ resulta de uma análise mais geral apresentada no Capítulo 4 (ver Teorema 4.5).

Teorema 3.12. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, tem-se*

$$T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{2p}} \mu^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \tag{3.46}$$

para todo $T > 0$.

Demonstração. No caso $p = 2$, temos, multiplicando (3.1) por $u(x, t)$ e integrando em $[0, T]$,

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

o que mostra (3.46) neste caso.

Considerando agora $1 < p < 2$, multiplicando (3.1) por $2 t^{\frac{1}{p}} u(x, t)$ e integrando em $[0, T]$, obtemos, integrando por partes,

$$T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = \frac{2}{p} \int_0^T t^{\frac{1}{p}-1} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt,$$

de modo que, por (A.11), Anexo A, obtemos

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &+ 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \\ &\leq \frac{2}{p} 4^{\frac{2-p}{2+p}} \int_0^T t^{\frac{1}{p}-1} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{4p}{2+p}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{4-2p}{2+p}} dt \\ &\leq \frac{2}{p} 4^{\frac{2-p}{2+p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{4p}{2+p}} \int_0^T t^{\frac{1}{p}-1} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{4-2p}{2+p}} dt \\ &\leq \frac{4}{p} \mu^{-\frac{2-p}{2+p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{4p}{2+p}} T^{\frac{-p}{p+2}} \left(2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \right)^{\frac{2-p}{2+p}} \end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder. Isso implica que

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &+ 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \\ &\leq \left(\frac{4}{p} \right)^{\frac{2+p}{2p}} \mu^{-\frac{2-p}{2p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

para todo $T > 0$, o que conclui o argumento. \square

Uma consequência importante deste resultado é dada a seguir.

Teorema 3.13. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, temos*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_p \mu^{-\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}} \quad (3.47)$$

para todo $t > 0$, onde $C_p = \frac{\sqrt[4]{2\sqrt{2}} 2^{\frac{p+3}{2p}}}{p^{\frac{2+p}{4p}}}$.

Demonstração. Do Teorema 3.12, temos, para $T > 0$ qualquer,

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{4p}} \mu^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} T^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \quad (3.48)$$

e

$$\int_{\frac{T}{2}}^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{2p}} \mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}}, \quad (3.49)$$

de modo que, por (A.9), Anexo A, existe $t_* \in [\frac{T}{2}, T]$ tal que

$$t_*^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot, t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{2p}} \mu^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^2 T^{-\frac{1}{2}},$$

isto é

$$\|u_x(\cdot, t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{4p}} \mu^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} T^{-\frac{1}{4}} t_*^{-\frac{1}{2p}}. \quad (3.50)$$

Portanto, por (A.10), resulta

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2} \|u(\cdot, t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|u_x(\cdot, t_*)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\frac{4}{p}\right)^{\frac{2+p}{4p}} \mu^{-\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} T^{-\frac{1}{8}} t_*^{-\frac{1}{2p}+\frac{1}{8}}, \end{aligned}$$

e então, pelo princípio do máximo,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t_*)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq \sqrt[4]{2\sqrt{2}} 2^{\frac{p+3}{2p}} \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2+p}{4p}} \mu^{-\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} T^{-\frac{1}{2p}}. \end{aligned}$$

□

Em particular, por interpolação, obtemos a seguinte estimativa.

Teorema 3.14. *Sendo $u(\cdot, t)$ solução de (3.1) com $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, tem-se, para cada $p \leq r \leq \infty$,*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(r, p) \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} (\mu t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \quad (3.51)$$

para todo $t > 0$, onde $C(r, p) = C_p^{1-\frac{r}{p}}$, $C_p > 0$ dada no Teorema 3.13.

Demonstração. De (A.8), Anexo A,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{r}{p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{r}{p}} \\ &\leq \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{r}{p}} (C_p \|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \mu^{-\frac{1}{2p}} t^{-\frac{1}{2p}})^{1-\frac{r}{p}}, \end{aligned}$$

usando Teorema 3.2 e 3.13. \square

Finalmente, como será mostrado em maior generalidade no Capítulo 4 a seguir (ver Teorema 4.5), temos a seguinte estimativa para as soluções $u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}))$ limitadas no caso $1 \leq p < \infty$ qualquer.

Teorema 3.15. *Se f continuamente diferenciável, e supondo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, a solução $u(\cdot, t)$ de (3.1), (3.3) satisfaz*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \quad \forall t > 0 \quad (3.52)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

3.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$

Nesta seção, obteremos vários resultados assintóticos (ao $t \rightarrow +\infty$) para as soluções $u(\cdot, t)$ da equação de Burgers (3.1) correspondentes a estados iniciais $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Seria útil no que segue, introduzirmos a transformação de Hopf-Cole [7], [2],

$$\varphi(x, t) = e^{-\frac{c}{2\mu} \int_{-\infty}^x u(\xi, t) d\xi} \quad (3.53)$$

cuja inversa é dada por

$$u(x, t) = -\frac{2\mu}{c} \frac{\varphi_x(x, t)}{\varphi(x, t)}. \quad (3.54)$$

Em termos de $\varphi(\cdot, t)$ a equação (3.1) produz

$$\varphi_t = \mu \varphi_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.55)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad (3.56)$$

onde

$$\varphi_0(x) = e^{-\frac{c}{2\mu} \int_{-\infty}^x u_0(\xi) d\xi}. \quad (3.57)$$

Como $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, obtemos $\varphi_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, com

$$e^{-\frac{c}{2\mu}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}} \leq \varphi_0(x) \leq e^{\frac{c}{2\mu}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}} \quad (3.58)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que $1/\varphi_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Mais geralmente, por (A.1), temos

$$e^{-\frac{c}{2\mu}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}} \leq \varphi(x, t) \leq e^{\frac{c}{2\mu}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}} \quad (3.59)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. De (3.55) e (3.56), obtemos

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) dy, \quad (3.60)$$

de modo que, por (3.54), obtemos a seguinte representação explícita para a solução $u(\cdot, t)$,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\varphi(x, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) u_0(y) dy, \quad (3.61)$$

onde φ , φ_0 são dadas em (3.53) e (3.57) acima.

Lema 3.1. *Seja $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx = 0$. Então, para todo $p \leq r \leq \infty$ tem-se,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Demonstração. De fato, por (3.55) e (3.56) vemos que φ_x satisfaz o Lema 2.3, então, para todo $p \leq r \leq \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|\varphi_x(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Visto que $1/\varphi$ é uniformemente limitado, o mesmo é verdade para $u(\cdot, t)$ dado em (3.61). \square

Lema 3.2. *Seja $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(x) dx$$

onde $u(\cdot, t)$ e $v(\cdot, t)$ são soluções de (3.1) correspondendo a estados iniciais u_0 e v_0 respectivamente. Então, para todo $1 \leq r \leq \infty$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Demonstração. Sendo φ , ψ transformações de Hopf-Cole de u , v respectivamente, isto é,

$$\varphi(x, t) = e^{-\frac{c}{2\mu} \int_{-\infty}^x u(\xi, t) d\xi} \quad , \quad \psi(x, t) = e^{-\frac{c}{2\mu} \int_{-\infty}^x v(\xi, t) d\xi}$$

e, tomando $\omega = \varphi_x - \psi_x$, temos que ω tem massa nula e satisfaz $\omega_t = \mu\omega_{xx}$, assim, pelo Lema 2.3,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|\varphi_x(\cdot, t) - \psi_x(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|\varphi(\cdot, t)u(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)v(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0.$$

Sendo $1/\varphi(\cdot, t)$, $1/\psi(\cdot, t)$ uniformemente limitados e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

segue o resultado. □

Teorema 3.16. Dado $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, a solução $u(\cdot, t)$ de (3.1) satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m| \tag{3.62}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}} (4\mu)^{\frac{1}{2r}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^r(\mathbb{R})} \tag{3.63}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \tag{3.64}$$

onde $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e é dada por

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sigma - h \operatorname{erf}(\xi)},$$

onde

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2} ds,$$

$$\sigma = \frac{1 + e^{-\frac{cm}{2\mu}}}{2}$$

e

$$h = \left| 1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}} \right|$$

e

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx.$$

Demonstração. Devido ao Lema 3.2, é suficiente mostrar o resultado para o estado particular inicial $u_0 = m\mathcal{X}_{[0,1]}$, no caso $u(x, t)$ é dado por

$$u(x, t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\varphi(x, t)} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y-at)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) dy$$

onde

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y-at)^2}{4\mu t}} \varphi_0(y) dy$$

com

$$\varphi_0(x) = e^{-\frac{c}{2\mu} \int_{-\infty}^x u_0(\xi) d\xi}.$$

Em particular, para todo $t > 0$,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx \right| = |m|$$

o qual mostra (3.62). Para mostrar (3.63) e (3.64), introduziremos,

$$\mathcal{H}_0(x) = \begin{cases} 1, & x < \alpha \\ e^{-\frac{cm}{2\mu}}, & x > \alpha \end{cases} \quad (3.65)$$

onde $\alpha > 0$ satisfaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}_0(x) - \varphi_0(x)) dx = 0 \quad (3.66)$$

isto é,

$$\alpha + (1 - \alpha)e^{-\frac{cm}{2\mu}} = \frac{2\mu}{cm}(1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}).$$

Sendo

$$\mathcal{H}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} \mathcal{H}_0(y) dy \quad (3.67)$$

temos, por (3.66) e Lema 2.3,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|\mathcal{H}(\cdot, t) - \varphi(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t) - \omega(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0$$

onde ω é definido por

$$\omega(x, t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\mathcal{H}(x, t)} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y-at)^2}{4\mu t}} \mathcal{H}_0(y) dy$$

e $\mathcal{H}(x, t)$ é dado em (3.67), isto é,

$$\mathcal{H}(x, t) = \sigma - \gamma h \operatorname{erf}\left(\frac{x - \alpha}{\sqrt{4\mu t}}\right),$$

onde γ é o sinal do produto cm (isto é, $\gamma = 1$ se $cm > 0$, $\gamma = -1$ se $cm < 0$).

Queremos agora derivar (3.63), para $p \leq r \leq \infty$. Dado $\xi \in \mathbb{R}$, temos

$$\omega(\alpha + \xi\sqrt{4\mu t}, t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\sigma - \gamma h \operatorname{erf}(\xi)} \int_0^1 e^{-(\xi + \frac{\alpha-y}{\sqrt{4\mu t}})^2} \mathcal{H}_0(y) dy, \quad (3.68)$$

tal que

$$t^{\frac{r}{2} - \frac{1}{2}} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}^r = \left(\frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}}\right)^r \sqrt{4\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\sigma - \gamma h \operatorname{erf}(\xi)|^r} \left| \int_0^1 e^{-(\xi + \frac{\alpha-y}{\sqrt{4\mu t}})^2} \mathcal{H}_0(y) dy \right|^r d\xi.$$

Dessa forma, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e $t \geq 1/4\mu$, temos,

$$\left| \int_0^1 e^{-(\xi + \frac{\alpha-y}{\sqrt{4\mu t}})^2} \mathcal{H}_0(y) dy \right|^r \leq e^{-\frac{r}{2}\xi^2 + 1} \|\mathcal{H}_0\|_{L^r(0,1)}^r,$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r})} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &= \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} (4\mu)^{\frac{1}{2r}} \left(\int_0^1 \mathcal{H}_0(y) dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{-\xi^2}}{\sigma - \gamma h \operatorname{erf}(\xi)} \right|^r d\xi \right)^{1/r} \\ &= \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} (4\mu)^{\frac{1}{2r}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^r(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

por (3.65) e (3.66). Isto nos mostra (3.63). Finalmente, para $p = \infty$, nos observamos que, fazendo $t \rightarrow \infty$ em (3.68), obtemos,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \frac{e^{-\xi^2}}{\sigma - \gamma h \operatorname{erf}(\xi)}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad (3.69)$$

Por outro lado, para $t > 0$ seja $\xi_t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = |\omega(\alpha + \xi_t \sqrt{4\mu t}, t)|. \quad (3.70)$$

Assim, $\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} > 0$ por (3.69). Agora, tomando qualquer sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\xi_n \rightarrow \xi_*$, então temos, por (3.68), (3.70),

$$\sqrt{t_n} \|\omega(\cdot, t_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \frac{1}{\sigma - \gamma h \operatorname{erf}(\xi)} \int_0^1 e^{-(\xi_n + \frac{\alpha-y}{\sqrt{4\mu t_n}})^2} \mathcal{H}_0(y) dy$$

assim, fazendo $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t_n} \|\omega(\cdot, t_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \frac{e^{-\xi_*^2}}{\sigma - \gamma h \operatorname{erf}(\xi_*)}.$$

Isto resulta,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{|m|}{\sqrt{4\pi\mu t}} \left| \frac{2\mu}{cm} (1 - e^{-\frac{cm}{2\mu}}) \right| \|\mathcal{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

a qual, juntamente com (3.70), mostra (3.64). \square

3.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p > 1$

Vejamos como a solução $u(\cdot, t)$ de (3.1), (3.3) se comporta, com respeito a suas normas $\|\cdot\|_{L^r}$, quando $r \geq p$ e $1 < p < \infty$.

Teorema 3.17. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1), (3.3) com $u(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.71)$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, tome $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{|x| \geq R} |u_0(x)|^p dx \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \quad (3.72)$$

e seja $v_0 \in L^p(\mathbb{R})$ dada por

$$v_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq R \\ u_0(x), & |x| > R \end{cases} \quad (3.73)$$

Em particular, $|v_0(x)| \leq |u_0(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} |v_0(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^p dx \leq K_p^p < \infty.$$

Seja $v(\cdot, t)$ solução de $v_t + cvv_x = \mu v_{xx}$ com $v(\cdot, 0) = v_0$, temos, pelo Teorema 3.2,

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|v_0\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |v_0(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{|x| \geq R} |u_0(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $t > 0$, ou seja,

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall t > 0.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Interpolação (A.8),

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/p} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-1/p} \\ &\leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/p} (\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{1-1/p} \\ &\leq C t^{-1/2p} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

por (3.22) e Teorema 3.13. Assim, podemos tomar $t_0 = t_0(\epsilon) > 0$ suficientemente grande tal que

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.74)$$

Daí temos,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $t \geq t_0$. □

Teorema 3.18. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.1), (3.3) com $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e $1 < p < \infty$, tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \quad (3.75)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r .

Demonstração. O caso $r = p$ foi examinado no Teorema 3.17 acima, e $r = \infty$ resulta do Teorema 4.10 (mais geral) a ser visto no Capítulo 4. Uma vez obtido (3.75) para $r = p$ e $r = \infty$, obtém-se a mesma propriedade para todo $p < r < \infty$, por interpolação: pela desigualdade (A.8), tem-se

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1 - \frac{p}{r}} \\ &\leq \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \left(t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right)^{1 - \frac{p}{r}} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

o que conclui o argumento. □

4 EQUAÇÃO DE BURGERS GENERALIZADA

4.1 Introdução

Neste capítulo vamos estender os resultados anteriores às soluções $u(\cdot, t)$ de equações da forma

$$u_t + f(u)_x = \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

associadas a estados iniciais $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ limitados,

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad (4.2)$$

onde $1 \leq p < \infty$. Em (4.1), μ denota uma constante positiva, dita “constante (ou coeficiente) de viscosidade”, e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é função (suave) dada. Nestas condições, existe uma única $u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}))$ limitada satisfazendo (4.1) no sentido clássico em $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ e tal que $u(\cdot, 0) = u_0$ em $L^p(\mathbb{R})$, isto é,

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow 0^+. \quad (4.3)$$

Na seção 4.2, vamos revisar algumas propriedades básicas de $u(\cdot, t)$, que serão úteis na análise do restante do capítulo. Na seção 4.3, taxas de decaimento (ao $t \rightarrow +\infty$) serão obtidas, e em particular será mostrado que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu, K_p, K_\infty) \cdot t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})} \quad (4.4)$$

para todo $t > 0$ e cada $p \leq r \leq \infty$, onde $C(p, \mu, K_p, K_\infty)$ é uma constante dependendo de p, μ , e K_p, K_∞ escolhidas de modo a se ter

$$\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq K_p, \quad \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty. \quad (4.5)$$

No caso $p = 1$, isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, é mostrado na seção 4.4 que

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow +\infty \quad (4.6)$$

onde $v(\cdot, t)$ é solução da equação de Burgers

$$v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x = \mu v_{xx} \quad (4.7)$$

com $v(\cdot, 0)$ tendo a mesma massa de u_0 , isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} v(x, 0) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx \equiv m. \quad (4.8)$$

Este resultado permite estender as propriedades assintóticas vistas para a equação de Burgers (Capítulo 3) para as soluções $u(\cdot, t)$ de (4.1) acima; em particular, no caso $p = 1$, para quaisquer soluções $u(\cdot, t)$, $\hat{u}(\cdot, t)$ de (4.1) transportando a mesma massa, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0, \quad (4.9)$$

tendo-se os limites

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \gamma_r \quad (4.10)$$

bem definidos para cada $1 \leq r \leq \infty$ e não nulos para $m \neq 0$, com

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m|. \quad (4.11)$$

Finalmente, na seção 4.5, examinamos o caso $p > 1$, obtendo (como no Capítulo 3)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad (4.12)$$

e, em consequência,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \quad (4.13)$$

para todo $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r .

4.2 Propriedades básicas

Sendo $u(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}))$ solução de (4.1), (4.2), podemos obter, repetindo os argumentos utilizados no Capítulo 3 para a equação de Burgers, os resultados dados nos Teoremas 4.1 e 4.2 a seguir.

Teorema 4.1 (Monotonicidade de $\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})}$). Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, e $u(\cdot, t)$ a solução de (4.1), (4.2) correspondente, tem-se

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^r(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0 \quad (4.14)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$.

O caso $r = \infty$ correspondente ao princípio do máximo

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)| \leq \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x)| \quad \forall t > 0, \quad (4.15)$$

onde *ess sup* denota o supremo essencial de $|u_0(\cdot)|$.

Teorema 4.2 (Contratividade em $L^1(\mathbb{R})$). Sendo $u_0, \hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R})$, as soluções correspondentes $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^1(\mathbb{R}))$ satisfazem

$$\|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \forall t > 0. \quad (4.16)$$

No caso $p > 1$, obtém-se a seguinte versão para a desigualdade (4.16) acima.

Teorema 4.3. Sendo $u_0, \hat{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ e $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t) \in C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}))$ soluções limitadas de (4.1) correspondentes aos estados iniciais, u_0, \hat{u}_0 , respectivamente, tem-se

$$\|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R})} e^{B(\mu, p, K_\infty)t} \quad \forall t > 0, \quad (4.17)$$

onde $B(\mu, p, K_\infty)$ denota uma constante que depende apenas dos valores de μ, p e $K_\infty > 0$ tal que $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty, \|\hat{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K_\infty$.

Demonstração. Sendo $\theta(\cdot, t) := u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)$, tem-se $\theta(\cdot, t)$ satisfazendo

$$\theta_t + [f]_x = \mu \theta_{xx} \quad (4.18)$$

onde $[f] := f(\hat{u} + \theta) - f(\hat{u})$. Tomando uma família de funções sinal regularizadas $L'_\delta(\cdot)$, obtém-se, multiplicando (4.18) por $pL_\delta(\theta)^{p-1}L'_\delta(\theta)$ e integrando em $\mathbb{R} \times [0, T]$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x, T))^p dx &+ \mu p(p-1) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-2} L'_\delta(\theta)^2 \theta_x^2 dx dt + \\ &+ \mu p \int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-1} L''_\delta(\theta) \theta_x^2 dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x, 0))^p dx + p(p-1) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-2} L'_\delta(\theta)^2 \theta_x [f] dx dt + \\ &+ p \int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-1} L''_\delta(\theta) \theta_x [f] dx dt. \end{aligned}$$

Como $|\theta_x [f]| \leq C(K_\infty, \mu) \theta^2 + \mu \theta_x^2 / 2$ para $C(K_\infty, \mu) > 0$ constante apropriada, resulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x, T))^p dx &+ \frac{\mu}{2} p(p-1) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-2} L'_\delta(\theta)^2 \theta_x^2 dx dt + \\ &+ \mu p \int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-1} L''_\delta(\theta) \theta_x^2 dx dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta(x, 0))^p dx + C(K_\infty, \mu) p(p-1) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-2} L'_\delta(\theta)^2 \theta^2 dx dt + \\ &+ p \int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_\delta(\theta)^{p-1} L''_\delta(\theta) \theta_x [f] dx dt, \end{aligned}$$

para cada $\delta > 0$; fazendo $\delta \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\|\theta(\cdot, T)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq \|\theta(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p + C(\mu, p, K_\infty) \int_0^T \|\theta(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p dt$$

para $C(\mu, p, K_\infty)$ constante dependendo apenas de μ , p e K_∞ . Pela desigualdade de Gronwall [8], tem-se então

$$\|\theta(\cdot, T)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq \|\theta(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p e^{C(\mu, p, K_\infty)T},$$

o que mostra o resultado. \square

4.3 Decaimento

Considerando inicialmente o caso $p = 1$, isto é, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, obtém-se os seguintes resultados.

Teorema 4.4. *Seja f continuamente diferenciável, e supondo $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \mu^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{4}} \quad \forall t > 0. \quad (4.19)$$

Com efeito, procedendo como no Capítulo 3, resulta que $u(\cdot, t)$ satisfaz a desigualdade

$$T \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}}, \quad (4.20)$$

para cada $T > 0$ dado. Diferenciando (4.1) com relação a x e multiplicando por $2t^2 u_x(x, t)$, a integração em $\mathbb{R} \times [0, T]$ produz, então,

$$\begin{aligned} T^2 \|u_x(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt &= \\ &= 2 \int_0^T t^2 \int_{\mathbb{R}} f'(u) u_x u_{xx} dx dt \\ &= 2 \int_0^T t^2 \int_{\mathbb{R}} (f'(u) - f'(0)) u_x u_{xx} dx dt; \end{aligned} \quad (4.21)$$

como, por (4.20), resulta, repetindo o argumento do Capítulo 3,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}} \quad \forall t > 0, \quad (4.22)$$

segue imediatamente de (4.20) e (4.21) que

$$T^2 \|u_x(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu \int_0^T t^2 \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, K_\infty) \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \quad (4.23)$$

para todo $T > 0$, onde $C(\mu, K_\infty)$ denota uma constante dependendo apenas dos valores de μ, K_∞ . Diferenciando (4.1) duas vezes e repetindo o argumento, como no Capítulo 3, resulta

$$T^3 \|u_{xx}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \mu \int_0^T t^3 \|u_{xxx}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C(\mu, K_1, K_\infty) \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 T^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

para todo $T > 0$, e assim sucessivamente, assumindo f suave.

Por outro lado, no caso $1 < p \leq 2$, obtemos (repetindo o argumento visto no Capítulo 3),

$$T^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\mu \int_0^T t^{\frac{1}{p}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \leq C_p \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^2 \mu^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} T^{\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

para todo $T > 0$, onde $C_p > 0$ é constante dependendo apenas de p . Em particular, resulta

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}, \quad (4.26)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}}, \quad (4.27)$$

para todo $t > 0$, e certa constante $C(p, \mu) > 0$ dependendo apenas dos parâmetros p, μ . Por interpolação, resulta

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \quad \forall t > 0 \quad (4.28)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, e certa constante $C(p, \mu) > 0$ apropriada.

Finalmente, no caso $p > 2$, podemos obter (4.28) como segue. Tomando $q \geq p$ da forma $q = 4\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, multiplicamos (4.1) por $qt^\gamma u(x, t)^{q-1}$, onde $\gamma = \frac{q}{p}$, e integramos em $\mathbb{R} \times [0, T]$ para obter

$$T^\gamma \|u(\cdot, T)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q + q(q-1)\mu \int_0^T t^\gamma \int_{\mathbb{R}} u(x, t)^{q-2} u_x^2 dx dt = \gamma \int_0^T t^{\gamma-1} \|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q dt,$$

ou seja, em termos de $w(\cdot, t) := u(\cdot, t)^{\frac{q}{2}}$,

$$T^\gamma \|w(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 4\mu \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_0^T t^\gamma \|w_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt = \gamma \int_0^T t^{\gamma-1} \|w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt. \quad (4.29)$$

Como,

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |w(x, t)|^{\frac{2p}{q}} |w(x, t)|^{\frac{2q-p}{q}} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |w(x, t)|^{\frac{2p}{q}} \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{2q-p}{q}} dt \\ &= \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{\frac{2q-p}{q}} \\ &\leq 2^{1-\frac{p}{q}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \|w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{q}} \|w_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

resulta

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1-p/q}{1+p/q}} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{1+p/q}} \|w_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1-p/q}{1+p/q}}, \quad (4.30)$$

de modo que (4.29) fornece, lembrando (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} T^\gamma \|w(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 4\mu \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_0^T t^\gamma \|w_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt &\leq \\ &\leq \gamma 4^{\frac{1-p/q}{1+p/q}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{2p}{1+p/q}} \int_0^T t^{\gamma-1} \|w_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2(1-p/q)}{1+p/q}} dt. \end{aligned}$$

Como no Capítulo 3, resulta, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} T^\gamma \|w(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 4\mu \left(1 - \frac{1}{q}\right) \int_0^T t^\gamma \|w_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt &\leq \\ &\leq C(p, q, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^q T^{\gamma - \frac{1-p/q}{2p/q}}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T^{\frac{q}{p}} \|u(\cdot, T)\|_{L^q(\mathbb{R})}^q + q(q-1)\mu \int_0^T t^{\frac{q}{p}} \int_{\mathbb{R}} u(x, t)^{q-2} u_x^2 dx dt &\leq \\ &\leq C(p, q, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^q T^{\frac{1}{2}(1+\frac{q}{p})}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

para todo $T > 0$, e onde $C(p, q, \mu) > 0$ depende apenas dos parâmetros p, q, μ indicados. Em particular, obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C(p, q, \mu) t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \quad (4.33)$$

para todo $t > 0$ e cada $q \geq p$ múltiplo de 4, com $C(p, q, \mu) > 0$ constante. Além disso, de (4.32) obtemos, como no Capítulo 3,

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(p, q, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{q}{2}} t^{-\frac{1}{4p/q}} \quad (4.34)$$

para cada $t > 0$, ou seja,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2p}} \quad \forall t > 0 \quad (4.35)$$

para certa constante $C(p, \mu) > 0$ adequada. Como $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}$ pelo Teorema 4.1, obtemos novamente (4.28) por um argumento simples de interpolação. Fica, assim, mostrado o resultado abaixo.

Teorema 4.5. *Sendo f continuamente diferenciável, e supondo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, a solução $u(\cdot, t)$ de (4.1) e (4.2) satisfaz*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C(p, \mu) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} t^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \quad \forall t > 0 \quad (4.36)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, onde $C(p, \mu)$ denota uma constante que depende dos parâmetros p, μ .

4.4 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p = 1$

Nesta seção, vamos mostrar que, sendo $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, a solução $u(\cdot, t)$ do problema (4.1), (4.2) satisfaz propriedades análogas às examinadas no Capítulo 3 para a equação de Burgers. O ponto de partida é dado pelo seguinte resultado fundamental: sendo $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$ um estado inicial com mesma massa que u_0 , e sendo $v(\cdot, t)$ definida por

$$v_t + f'(0)v_x + f''(0)vv_x = \mu v_{xx} \quad (4.37)$$

$$v(\cdot, 0) = v_0 \in L^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} v_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx, \quad (4.38)$$

então

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

ao $t \rightarrow +\infty$. Para estabelecer este fato, será preciso que f seja de classe C^2 com f'' Hölder-contínua no ponto $u = 0$, de modo que existem $\Omega > 0$ e constantes $\Gamma, \alpha > 0$ tais que

$$|f''(u) - f''(0)| \leq \Gamma|u|^\alpha \quad \text{se} \quad |u| \leq \Omega. \quad (4.39)$$

Lema 4.1. *Assumindo (4.39), tem-se que, para cada $\epsilon > 0$, existe $t_0 = t_0(\mu, K_1, \alpha, \Gamma, \Omega; \epsilon)$ suficientemente grande, dependendo apenas dos parâmetros indicados, tal que a solução $w(\cdot, t)$, $t \geq t_0$, de*

$$\begin{cases} w_t + f'(0)w_x + f''(0)ww_x = \mu w_{xx}, & t > t_0 \\ w(\cdot, t_0) = u(\cdot, t_0) \end{cases}$$

satisfaz $\|u(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon$, para todo $t \geq t_0$.

Demonstração. Tomando $\hat{t}_0 = \hat{t}_0(\mu, K_1, \Omega)$ suficientemente grande de modo a se ter

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \Omega \quad \forall t \geq \hat{t}_0,$$

vamos escolher $t \geq \hat{t}_0$ em (4.40) a seguir. Seja $w : \mathbb{R} \times [t_0, \infty[$ a solução de (4.37), (4.38); então a diferença $\theta(\cdot, t) = u(\cdot, t) - w(\cdot, t)$ satisfaz

$$\theta_t + f'(0)\theta_x + f''(0) \left(\frac{\theta^2}{2} + \theta w \right)_x = \mu \theta_{xx} - \mathcal{F}(u)u_x$$

onde

$$\mathcal{F}(u) = f'(u) - f'(0) - f''(0)u;$$

como $|\mathcal{F}(u)| \leq \Gamma|u|^{1+\alpha}$ por (4.39), resulta, repetindo o argumento do Teorema 3.4 (Capítulo 3), para cada $T \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \|\theta(\cdot, T)\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \Gamma \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} |u|^{1+\alpha} |u_x| dx dt \\ &\leq \Gamma \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^\alpha \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq C(\mu, K_1) \Gamma \int_{t_0}^T t^{-\frac{\alpha}{2}-1} dt \leq \epsilon \end{aligned}$$

se $t_0 \geq \hat{t}_0$ for tomado de tal forma que

$$t_0 = \left(\frac{2\Gamma C(\mu, K_1)}{\epsilon \alpha} \right)^{\frac{2}{\alpha}}. \quad (4.40)$$

□

Teorema 4.6. *Assumindo (4.39), e sendo $u(\cdot, t)$ solução de (4.1), (4.2), $v(\cdot, t)$ solução de (4.37), (4.38), tem-se*

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (4.41)$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sejam $t_0, w(\cdot, t)$ dados no Lema 4.1 tais que $\|u(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ para todo $t \geq t_0$; como $u(\cdot, t_0)$ e $v(\cdot, t_0)$ têm a mesma massa, resulta do Lema 3.2 (Capítulo 3), que $\|v(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ ao $t \rightarrow +\infty$, e (4.41) fica provado. □

Teorema 4.7. *Seja $u_0, \hat{u}_0 \in L^1(\mathbb{R})$ com mesma massa, e $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t)$ as soluções de (4.1), correspondentes a u_0, \hat{u}_0 ; então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \quad (4.42)$$

para cada $1 \leq r \leq \infty$, uniformemente em r .

Demonstração. Para $r = 1$, isso é consequência direta do Teorema 4.6; para $r = 2$, resulta de se ter

$$t^{\frac{1}{4}} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + t^{\frac{1}{2}} \|\hat{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e, para $r = \infty$, da desigualdade

$$t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} \left(t^{\frac{1}{4}} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{3}{4}} \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + t^{\frac{3}{4}} \|\hat{u}_x(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, dado $1 < r < \infty$, temos

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{r}} \left(t^{\frac{1}{2}} \|u(\cdot, t) - \hat{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right)^{1-\frac{1}{r}},$$

e o resultado está mostrado. \square

Teorema 4.8. *Seja $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, então a solução $u(\cdot, t)$ de (4.1), (4.2) satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = |m| \quad (4.43)$$

onde m é a massa transportada, $m = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$.

Demonstração. Imediata de (3.62), Teorema 3.16 (Capítulo 3), e do fato de se ter, pelo Teorema 4.6,

$$\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} - \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

\square

Analogamente, os demais limites

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = \gamma_r \quad (4.44)$$

obtidos na seção 3.4, Capítulo 3, continuam válidas, em vista do Teorema 4.7.

4.5 Comportamento em $L^r(\mathbb{R})$, $r \geq p$, $p > 1$

Nesta seção, vamos examinar as questões consideradas na seção 4.3, no caso $p > 1$, isto é, $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Neste caso, como mostram os dois resultados abaixo, as respostas são triviais.

Teorema 4.9. *Seja $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ com $p > 1$, então a solução $u(\cdot, t)$ de (4.1), (4.2) satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \quad (4.45)$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $R > 0$ tal que $\int_{|x| \geq R} |u_0(x)|^p dx \leq \epsilon^p$; então, sendo $u_1(\cdot, t)$ a solução de (4.1) correspondente ao estado inicial $u_1(\cdot, 0) = u_0 : (1 - \mathcal{X}_{[-R, R]})$, temos por (4.14),

$$\|u_1(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u_1(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon \quad (4.46)$$

para todo $t > 0$, enquanto

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_1(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|u(\cdot, t) - u_1(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{p}} \|u(\cdot, t) - u_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq \|u_0 \mathcal{X}_{[-R, R]}\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{p}} \left(\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{p}} + \|u_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{1}{p}} \right) \end{aligned}$$

produz $\|u(\cdot, t) - u_1(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ para todo t suficientemente grande, pelos resultados da seção 4.3. \square

Teorema 4.10. *Seja $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ com $p > 1$, então a solução $u(\cdot, t)$ de (4.1), (4.2) satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2p}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0. \quad (4.47)$$

Demonstração. Sendo $w(\cdot, t) := t^{\frac{1}{2p}} u(\cdot, t)$, temos $w(\cdot, t)$ satisfazendo

$$w_t + f'(u)w_x = \mu w_{xx} + \frac{1}{2p} \frac{1}{t} w$$

para cada $t > 0$. Sendo $\Gamma(t, s; x, y)$ a solução fundamental da equação $w_t + f'(u)w_x = \mu w_{xx}$, e tomando $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \epsilon$ para $t \geq t_0$, obtemos, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} w(x, t_0 + t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, s; x, y) \frac{1}{2p} \frac{1}{t_0 + s} w(y, t_0 + s) dy ds \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t, 0; x, y) w(y, t_0) dy =: w_1(x, t) + w_2(x, t), \end{aligned}$$

com $|\Gamma(t, s; x, y)| \leq \frac{\Lambda}{\sqrt{t-s}} e^{-\frac{\lambda(x-y)^2}{t-s}}$ para constantes $\Lambda, \lambda > 0$ apropriadas, segue, pela desigualdade de Hölder (A.4),

$$\begin{aligned} |w_1(x, t)| &\leq \frac{\Lambda}{2p} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda(x-y)^2}{t-s}} \frac{1}{t_0 + s} |w(y, t_0 + s)| dy ds \\ &\leq C(\lambda, \Lambda, p) \int_0^t (t_0 + s)^{\frac{1}{2p}-1} (t-s)^{-\frac{1}{2p}} ds \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \epsilon C(\lambda, \Lambda, p) \int_0^t (t_0 + s)^{\frac{1}{2p}-1} (t-s)^{-\frac{1}{2p}} ds \end{aligned}$$

para $C(\lambda, \Lambda, p) > 0$ constante independente de ϵ . Como

$$\begin{aligned} \int_0^{t/2} (t_0 + s)^{\frac{1}{2p}-1} (t-s)^{-\frac{1}{2p}} ds &\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2p}} \int_0^{t/2} (t_0 + s)^{\frac{1}{2p}-1} ds \\ &\leq 2^{\frac{1}{2p}} 2p \left(\frac{t_0 + t}{t}\right)^{\frac{1}{2p}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{t/2}^t (t_0 + s)^{\frac{1}{2p}-1} (t-s)^{-\frac{1}{2p}} ds &\leq \left(t_0 + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2p}-1} \int_{t/2}^t (t-s)^{-\frac{1}{2p}} ds \\ &\leq \frac{2p}{2p-1} \left(\frac{t/2}{t_0 + t/2}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \leq \frac{2p}{2p-1} \end{aligned}$$

para todo $t > 0$, obtemos

$$\int_0^t (t_0 + s)^{\frac{1}{2p}-1} (t-s)^{-\frac{1}{2p}} ds \leq 2p \left(2^{\frac{1}{2p}} + \frac{1}{2p-1}\right)$$

para todo $t \geq t_0$, de modo que $\|w_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(\lambda, \Lambda, p)\epsilon$ para todo $t \geq t_0$ e certa constante $C(\lambda, \Lambda, p)$ independente de ϵ .

Analogamente,

$$|w_2(x, t)| \leq C(\lambda, \Lambda, p) \|u(\cdot, t_0)\|_{L^p(\mathbb{R})} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{1}{2p}}$$

para todo $t > 0$, e certa constante $C(\lambda, \Lambda, p)$ que depende apenas dos parâmetros λ , Λ e p de modo que $\|w_2(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\epsilon$ para todo $t \geq t_0$ e certa constante $C > 0$ independente de ϵ . Resulta, assim, $\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\epsilon$ para todo $t \geq 2t_0$ e uma dada constante independente de ϵ , o que mostra o resultado. \square

Por um argumento simples de interpolação, obtém-se então a seguinte propriedade.

Teorema 4.11. *Sendo $u_0 \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ com $p > 1$, tem-se que a solução $u(\cdot, t)$ de (4.1), (4.2) satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R})} = 0 \quad (4.48)$$

para cada $p \leq r \leq \infty$, uniformemente em r .

ANEXO A

Teorema A.1 (Desigualdade de Cauchy). *Seja $a, b \geq 0$, tem-se*

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2 \quad \forall \epsilon > 0. \quad (\text{A.1})$$

Demonstração. Tem-se, para todo $\epsilon > 0$ dado,

$$\begin{aligned} ab &= (\sqrt{2\epsilon}a) \frac{b}{\sqrt{2\epsilon}} \leq \frac{2\epsilon a^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{2\epsilon} \\ &= \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \end{aligned}$$

visto que $2ab \leq a^2 + b^2$. □

Teorema A.2 (Desigualdade de Young: Primeira Versão). *Seja $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \forall a, b \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, (A.2) é trivial. Basta então considerar $a, b > 0$. Como e^x é convexa, tem-se

$$\begin{aligned} ab &= \exp \left(\frac{1}{p} \ln (a^p) + \frac{1}{q} \ln (b^q) \right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp (\ln (a^p)) + \frac{1}{q} \exp (\ln (b^q)) \\ &= \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \end{aligned}$$

como afirmado. □

Teorema A.3 (Desigualdade de Young: Segunda Versão). *Seja $p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \quad \forall a, b \geq 0, \quad \epsilon > 0 \quad (\text{A.3})$$

onde $C(\epsilon) = \frac{1}{q(p\epsilon)^{\frac{p}{q}}}$.

Demonstração. Tem-se, para $\epsilon > 0$ dado,

$$\begin{aligned} ab &= (p\epsilon)^{\frac{1}{p}} a \frac{b}{(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{1}{p} ((p\epsilon)^{\frac{1}{p}} a)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{b}{(p\epsilon)^{\frac{1}{p}}} \right)^q \\ &= \epsilon a^p + \frac{b^q}{q(p\epsilon)^{\frac{q}{p}}} \end{aligned}$$

devido à (A.2). □

Teorema A.4 (Desigualdade de Hölder). *Seja Ω mensurável $\subseteq \mathbb{R}^n$, e sendo $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \quad (\text{A.4})$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

Demonstração. Se $p = 1$ e $q = \infty$ ou ainda $p = \infty$ e $q = 1$ a desigualdade é óbvia.

Se $p, q > 1$ finitos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o procedimento é o seguinte: caso $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|g\|_{L^q(\Omega)} = 0$, (A.4) é óbvia; dessa forma, vamos supor $\|f\|_{L^p(\Omega)} > 0$ e $\|g\|_{L^q(\Omega)} > 0$.

Definindo $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$, $\tilde{g} \in L^q(\Omega)$, via

$$\tilde{f}(x) := \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}$$

$$\tilde{g}(x) := \frac{g(x)}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}$$

para todo $x \in \Omega$, obtém-se

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\Omega)} = 1, \quad \|\tilde{g}\|_{L^q(\Omega)} = 1$$

e, pela Desigualdade de Young (A.2) tem-se,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\tilde{f}(x)| |\tilde{g}(x)| dx &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} |\tilde{f}(x)|^p + \frac{1}{q} |\tilde{g}(x)|^q \right) dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\tilde{f}(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\tilde{g}(x)|^q dx \\ &= \frac{1}{p} \|\tilde{f}\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{q} \|\tilde{g}\|_{L^q(\Omega)}^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| dx \leq 1$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| dx = \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

como afirmado. \square

Teorema A.5 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável, então*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{A.5})$$

para toda $f, g \in L^2(\Omega)$.

Demonstração. Resultado de (A.4) tomando $p = q = 2$. \square

Teorema A.6 (Desigualdade de Minkowski). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável e f, g em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$, tem-se*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \quad (\text{A.6})$$

Demonstração. Se $p = 1$ ou $p = \infty$, a desigualdade é óbvia. Se $1 < p < \infty$, procedemos do seguinte modo: se $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} = 0$, (A.6) é óbvia; se $\|f + g\|_{L^p(\Omega)} > 0$ tomando $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se por (A.4)

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} (|f(x)| + |g(x)|) dx \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &= \|f + g\|_{L^p(\Omega)}^{p/q} (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}) \end{aligned}$$

isto é,

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-p/q} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

que é a Desigualdade de Minkowski, visto que $p - \frac{p}{q} = 1$. \square

Teorema A.7 (Desigualdade de Young para Convolução). *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, tem-se $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (\text{A.7})$$

Demonstração. Se $p = 1$ ou $p = \infty$, a desigualdade é óbvia. Se $1 < p < \infty$, procedemos do seguinte modo: tomando $1 \leq p \leq \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy \right]^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} |f(y)|^{\frac{1}{p}} |g(x-y)| dy \right]^p dx \\ &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right] dx \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p dx \right] dy \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1+p/q} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \end{aligned}$$

onde foi usada a desigualdade de Hölder (A.4) e o Teorema de Fubini (ver e.g. 11).

Logo, elevando na $1/p$, obtém-se

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

que é a Desigualdade (A.7) visto que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. \square

Teorema A.8 (Desigualdade de Interpolação). *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ para $1 \leq p < \infty$, tem-se $f \in L^r(\mathbb{R})$ para cada $p \leq r \leq \infty$, com*

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} \quad (\text{A.8})$$

Demonstração. Basta considerar o caso $p < r < \infty$: claramente,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p |f|^{r-p} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{r-p} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= (\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{r-p})^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{r}} \end{aligned}$$

□

Teorema A.9. Se $f \in C^0([a, b])$ e $\int_a^b f(t) dt \leq M$, para $a, b, M \in \mathbb{R}$, $a < b$, então existe $t_* \in [a, b]$ tal que

$$f(t_*) \leq \frac{M}{b-a}. \quad (\text{A.9})$$

Demonstração. Se não houvesse tal t_* , teríamos

$$f(t) > \frac{M}{b-a} \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

e então teríamos de ter

$$\int_a^b f(t) dt > \int_a^b \frac{M}{b-a} dt = M,$$

contradizendo a hipótese sobre f . □

Teorema A.10 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 1). Sendo $u \in H^1(\mathbb{R})$, tem-se $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \quad (\text{A.10})$$

Demonstração. Tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (A.5),

$$\begin{aligned} u(\bar{x})^2 &= 2 \int_{-\infty}^{\bar{x}} u(x) u_x(x) dx \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} (u(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}} (u_x(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u_x(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$|u(\bar{x})| \leq \sqrt{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R},$$

de onde segue (A.10) □

Teorema A.11 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 2). *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$, tem-se*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{2p}{p+2}} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2-p}{p+2}} \quad (\text{A.11})$$

onde $C = 2^{\frac{2-p}{2+p}}$.

Demonstração. Usando (A.8), temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{2}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{1-\frac{p}{2}} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{2}} (\sqrt{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}})^{1-\frac{p}{2}} \\ &= 2^{\frac{1-p}{2}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1-p}{4}} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1-p}{4}}, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Teorema A.12 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 3). *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$, tem-se*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2}{p+2}} \quad (\text{A.12})$$

onde $C = 2^{\frac{2}{2+p}}$.

Demonstração. Usando (A.10) e (A.11), obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sqrt{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{2}{p+2}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{p}{p+2}} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{2}{p+2}}. \end{aligned}$$

□

Teorema A.13 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 4). *Seja $u \in H^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R})} \leq \sqrt[4]{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{3/4} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/4} \quad (\text{A.13})$$

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 &= \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^4 dx \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

e, devido a (A.10),

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 \leq 2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^3 \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

de onde segue (A.13). \square

Teorema A.14 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 5). *Sendo $u \in H^1(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u\|_{L^6(\mathbb{R})} \leq \sqrt[3]{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{2/3} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3} \quad (\text{A.14})$$

Demonstração. Por (A.10) tem-se,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^6(\mathbb{R})} &\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3} \\ &\leq \left(\sqrt{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \right)^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/3}, \end{aligned}$$

que corresponde a desigualdade (A.14). \square

Teorema A.15 (Desigualdade de Sobolev: exemplo 6). *Sendo $u \in H^2(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \quad (\text{A.15})$$

Demonstração. Integrando por partes tem-se,

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} u_x u_x dx = - \int_{\mathbb{R}} u u_{xx} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |u| |u_{xx}| dx \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u_{xx}\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

pela desigualdade (A.5). \square

BIBLIOGRAFIA

- [1] BURGERS, J. M. Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence. *Nederl. Akad. Wefensh. Proc* 43 (1940), 2–12.
- [2] COLE, J. D. On a quasilinear parabolic equation occuring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math* 9 (1951), 225–236.
- [3] CRANDALL, M., AND TARTAR, L. Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.* 78 (1980), 385–390.
- [4] FLETCHER, C. A. J. Burgers equation: a model for all reasons. In *Numerical solutions of partial differential equations (Parkville, 1981)*. North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 139–225.
- [5] GUENTHER, R. B., AND LEE, J. W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Prentice-Hall, Englewood Clifs, 1988. Reimpresso por Dover, New York, 1996.
- [6] HARABETIAN, E. Rarefactions and large time behavior for parabolic equations and monotone schemes. *Communications in Mathematical Physics*, 114 (1988), 527–536.
- [7] HOPF, E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. *Comm. Pure Appl. Math.* 3 (1950), 201–230.
- [8] KREISS, H., AND LORENZ, J. *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. Academic Press, New York, 1989.
- [9] ROYDEN, H. L. *Real Analysis*, 2nd ed. Macmillan, New York, 1968.
- [10] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, 3rd ed. Mcgraw-Hill, Singapore, 1986.

- [11] ZINGANO, P. Some asymptotic limits for burgers equation. Submitted.
- [12] ZINGANO, P. R. Nonlinear L^2 stability under large disturbances. *J. Comp. Appl. Math.* 103 (1999), 207–219.
- [13] ZINGANO, P. R. Asymptotic behavior of the L^1 norm of solutions to nonlinear parabolic equations. 2003.
- [14] ZINGANO, P. R., AND STEINBERG, S. L. On the hardy-littlewood theorem for functions of bounded variation. *SIAM J. Math. Anal.* 33 (2002), 1199–1210.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)