IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

Dissertação de Mestrado

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA PARA PRINCÍPIOS DE LOCALIZAÇÃO DE INTEGRAIS FUNCIONAIS

Marcelo Azevedo Dias

Orientador

Prof. Dra. Maria Cristina Batoni Abdalla Ribeiro

Co-orientador

Prof. Dr. Andrey Alexandrovich Bytsenko

6 de Fevereiro de 2007

Dedico esta dissertação à memória de meu avô, José do Carmo Dias, o qual foi o meu exemplo de compaixão e de busca pela verdade. Também dedico à minha mãe, Maria Regina Azevedo Dias, pois além de proporcionar-me todo o amor necessário para a minha condição dinâmica de felicidade, ela também tem sido o meu exemplo de persistência e de como prosseguir lutando pela vida.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer à minha família pelo apoio e dedicação devotada a mim. À minha mãe Maria Regina e meu irmão Bruno por todo amor e pela luta que enfrentamos sempre juntos e que somente nós sabemos o quão significativa foi a nossa vitória. Também ao Antônio pelo apoio, companhia e por segurar o estresse da minha mãe. À minha vó Maria Inez pelo seu imensurável amor e por financiar grande parte da minha biblioteca particular.

Um especial agradecimento à minha orientadora, Professora Maria Cristina Batoni Abdalla Ribeiro, por oferecer-me a oportunidade de estudar no IFT, lugar almejado por mim nos tempos de graduação para complementar a minha formação. Além disso, sou grato a ela pelas orientações ao nosso trabalho, ampliação dos meus horizontes profissionais e as lições que carrego para a minha vida. *"Aquilo que se faz por amor, parece ir sempre além dos limites do bem e do mal" (Nietzsche).* Agradeço também ao Professor Andrey Alexandrovich Bytsenko pela sugestão do tema desenvolvido nesta dissertação e pelos momentos de discussão os quais tivemos a oportunidade de desfrutar. Agradeço à "Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior", CAPES, pelo apoio financeiro.

Agradeço também aos professores do IFT, os quais contribuíram imensamente para a minha formação em física teórica. Gostaria também de agradecer à todos os funcionários do IFT por fornecerem ótimas condições de trabalho. Valeu Senhor Jorge (conterrâneo gente boa!), Marcela (sempre muito prestativa), pessoal da secretaria e da seção de pós-graduação (valeu à paciência da Luzinete), pessoal da limpeza, . . .

Aos grandes amigos Cássius, David, Gérman, Paulo, Pedro José e Rodrigo devo também agradecimentos primeiramente por dividirmos a mesma sala, ou calabouço, por um tempo considerável e por compartilharem comigo a amizade e conhecimento em física de grande valor.

É uma tarefa muito difícil citar todos os meus amigos os quais devo os meus agradecimentos por contribuírem à minha dissertação, seja de maneira direta ou indireta. De qualquer forma tentarei cumprir esta tarefa e antecipadamente peço perdão se deixei de citar alguns nomes. Obrigado Gabriela Palotta por todos os anos de crescimento pessoal, amizade, compreenção e aprendizados baseados num amor que foi e sempre será verdadeiro. Valeu Tama's, meu amigo irmão de todos os momentos . . . aquele abraço. Fala aí Julio, muita irmandade, diversão, física e se bobiar é "pei"! Roldão, grande camarada, valeu por todas as dicas e sugestões neste trabalho, além de me incluir nas suas preces. Carinhosamente aos amigos Ana, Bonin, Bruno, Cadu, Caco, Danilo, Evandro, Gabí, Genilson, Graziela, Guilherme, Guto, Hiroshi, Latino, Leandro, Marcelo, Mário, Maurício, Mirna, Rafael . . . valeu por todos os momentos e por fazerem parte da minha vida. Novamente, obrigado aqueles que me esqueci de citar.

I would like to thank Professor Floyd L. Williams, Professor George Avrunin, and the Department of Mathematics and Statistics for all support and hospitality that I had when I was visiting the University of Massachusetts.

Dear Professor Floyd, I would also like to thank you for all of the knowledge, generosity, and opportunities that you have provided me. I really appreciate all that I learned with you about equivariant localization and I-Z formulas, the most important parts of this dissertation. Besides that, for two months you taught me not only mathematics, but I learned with you an amazing professional and human posture. Since meeting you, my perspectives on life have changed and I am now ready to take on new challenges in my life.

I would like to stress that I am extremely grateful to Rachel Bray and everything that she has made for me. Thank you so much for wonderful moments that we have lived and for thinking about "Copo Verde" in that restaurant! I just want to sing: [...] "*and we'll collect the moments one by one, I guess that's how the future's done*" [...] Tshepiso and Julia, thank you so much for all the hospitality and friendship. I am also grateful to Jacob, Jennie, "Tia" June, Olwen, Patricia, Shabnam, and Teca. These people are very important to me and they helped me a lot when I was living a difficult transition. Thank you so much!

Resumo

Apresentamos nesta dissertação uma revisão dos conceitos de geometria diferencial, onde estamos interessados em definir campos vetoriais que geram transformações de um parâmetro, formas diferenciais, variedades simpléticas e fibrados. Além disso, detalhamos o conceito de cohomologia de De Rham, o qual nos fornece uma ferramenta algébrica fundamental para analisar propriedades topológicas das variedades. A combinação desses conceitos, os quais suportam o nosso trabalho, permite-nos desenvolver teorias de localização equivariante de integrais definidas sobre espaços de fase clássicos, os quais também podem ser uma órbita co-adjunta. A localização é possível devido ao teorema de Duistermaat-Heckman, o qual nos permite escrever integrais como uma soma, ou integral, sobre o conjunto dos pontos críticos do espaço. Em seguida fazemos uma extensão para teorias de localização de integrais funcionais, onde é preciso definir o espaço dos *loops*. Nesse contexto aplicamos a formulação de localização equivariante tendo como base a conjectura de Atiyah-Witten para teorias supersimétricas, onde derivamos o teorema de índice de Atiyah-Singer para um operador de Dirac. O teorema de índice é aplicado no cálculo da anomalia quiral.

Palavras Chaves: Cohomologia e Localização Equivariantes; Duistermaat-Heckman; Integrais Funcionais; Operador de Dirac.

Áreas do conhecimento: Física Matemática.

Abstract

We present in this dissertation a conceptual review of differential geometry, where we are interested in defining vector fields which are one-parameter transformation generators, differential forms, symplectic manifolds, and fiber bundles. In addition, we detail the concept about De Rham's cohomology, which provides us a fundamental algebraic tool to analyze topological properties of manifolds. The combination of these concepts, which are the background material of our work, allows us to develop equivariant localization theories of integrals defined on classical phase spaces, which can also be a co-adjoint orbit. The localization is possible because of the Duistermaat-Heckman theorem, which allows us to write integrals on the whole space just as a sum, or integral, on a critical points set. Further more, we do an extension to functional integrals localization theories, where it is needed to define loop spaces. In this context we apply equivariant localization formulation having the bases of Atiyah-Witten conjecture to supersymmetric theories, where we derive the Atiyah-Singer index theorem for a Dirac operator. The index theorem is applied to chiral anomaly calculation.

Key Words: Equivariant Cohomology and Localization; Duistermaat-Heckman; Functional Integrals; Dirac Operator.

Knowledge Areas: Mathematical Physics.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A motivação principal para desenvolvermos um formalismo baseado em métodos de localização está em como compreender mais a fundo teorias quânticas de sistemas dinâmicos gerais. Mais especificamente, queremos descrever uma linguagem comum a qual seja possível interpretar geometricamente o conceito de integrabilidade quântica [33]. Conceitos de integrabilidade clássica [7] são bem compreendidos, mas ainda existem muitos desafios tanto dos pontos vista físicos quanto matemáticos, onde a integrabilidade quântica é não tão clara. Para que possamos tratar este problema do ponto de vista geométrico, é crucial entendermos as condições que devem ser satisfeitas para que teoremas de localização possam ser usados para integrais funcionais. Neste espaço existe uma dificuldade técnica para definir a medida de integração para um espaço de dimensão infinita e, portanto, o conceito de integrabilidade não é completamente formulado. Contribuições nesta direção têm ocupado um papel fundamental nas investigações sobre Mecânica Quântica Supersimétrica [3], Teorias Quânticas de Campos Topológicas [12], Modelos Integráveis e Teorias de Gauge para baixas dimensões, tais como Teorias de Yang-Mills em duas dimensões [18].

As condições necessárias para estabelecermos as condições de integrabilidade estão principalmente fundamentadas nos conceitos de cohomologia equivariante. Cohomologia equivariante nos permite analizar a cohomologia ordinária de espaços quocientes do tipo M/G, tal que M é uma variedade e G é um grupo de Lie que age sobre M. Entendemos a Cohomologia Equivariante como uma generalização da Cohomologia de De Rham a qual contém informações sobre as simetrias do espaço. De maneira mais formal, devemos generalizar o operador derivada exterior d para incluir a ação de campos vetoriais X sobre a variedade os quais são geradores das isometrias sobre M, ou seja, campos de Killing. Portanto, o operador a ser considerado será basicamente dado por $d + i_X$, onde i_X é a contração ao longo de X. Se os campos vetoriais geram isometrias sobre a variedade, é possível concluir que uma certa classe de integrais são dadas exatamente pelo primeiro termo da aproximação do ponto de sela. Esta integral é escrita apenas em termos de uma soma sobre os pontos fixos do campo vetorial que gera as isometrias. Por isso damos a denominação de teorias de localização, ou seja, integrais que são determinadas por informações locais.

Duistermaat e Heckman primeiramente propuseram uma fórmula de localização para integrais oscilatórias definidas sobre uma variedade simplética compacta [20] como uma soma sobre todos os pontos críticos correspondentes à função Hamiltoniana. Alguns anos depois, Witten propôs uma extensão das fórmulas do tipo Duistermaat-Heckman para variedades de dimensão infinita, a qual serve como uma primeira tentativa de localização para problemas quânticos. Para esses propósitos, apresentaremos algumas propriedades geométricas do operador de Dirac para variedades que admitem estruturas spinoriais, onde é possível lidar com aspectos qualitativos do teorema de índice de Atiyah-Singer para espaços de *loop* sobre os quais a validade da conjectura de Atiyah-Witten [9], proposta para definir uma medida de integração, está baseada. Essa conjectura envolve uma derivação supersimétrica do teorema de Duistermaat-Heckman para espaços de dimensões infinitas, ou seja, espaços de *loops*. Argumentos adicionais e matematicamente mais rigorosos foram dados nesta direção por J.-M. Bismut [13, 14]. Apresentaremos neste trabalho um tratamento não tão rigoroso quanto o de Bismut do teorema de índice para um caso particular de operador diferencial de Fredholm, ou seja, para um operador de tipo Dirac. A prova que daremos aqui é baseada no formalismo de integral de trajetória de Feynman para a mecânica quântica supersimétrica, a qual faremos uma breve revisão dos conceitos fundamentais desta teoria. Sabemos como os formalismos que descrevem férmions e bósons podem ser quantizados do ponto de vista de integração funcional usando variáveis de Grassmann e variáveis ordinárias, respectivamente. Portanto, podemos definir uma operação de supersimetria que relaciona transformações entre essas duas classes de partículas, onde isso será feito primeiro para um espaço plano e em seguida para uma variedade arbitrária com curvatura diferente de zero. O índice de um operador de Fredholm é definido como sendo a diferença das dimensões dos espaços vetoriais formados pelo núcleo do operador e o núcleo do seu adjunto. Provaremos dois importantes teoremas que sustentam a nossa abordagem, onde o primeiro deles garante que o índice é invariante sob pequenas deformações do operador e o outro que índice pode ser escrito em termos de funções de partição com relação ao Hamiltoniano da mecânica quântica supersimétrica. Com isto em mente podemos reescrever o índice como uma integral funcional, onde a ação em questão é euclidiana e as condições de contorno são periódicas. Usando o método do ponto de sela podemos calcular esta integral, e sendo assim chegamos a expressão final para o teorema de índice para um complexo de spin, ou seja, para um operador de Dirac definido sobre uma variedade M arbitrária como sendo a integral sobre M do $\hat{\text{A}}$-genus de Dirac, o qual é uma classe característica em função do escalar de curvatura.

Uma outra possibilidade de aplicação das teorias de localização equivariante para as quais o teorema de Duistermaat-Heckman é válido serão aplicadas em integrais definidas sobre variedades construídas como órbitas co-adjuntas $\mathcal{O}$, ou seja, particularmente consideraremos espaços quocientes G/T, onde G é um grupo de Lie compacto e T é o toro maximal em G. Como resultado, obteremos integrais sobre o espaço das matrizes, as quais têm atualmente importantes aplicações na física, como Gravidade Quântica e Cromodinâmica Quântica [43]. Daremos neste trabalho uma derivação dessas integrais num contexto de localização equivariante, ainda que as mesmas foram primeiramente derivadas por Itzykson e Zuber [29] para modelo de matrizes.

2. MÉTODOS GEOMÉTRICOS

Vamos iniciar com uma discussão um tanto quanto geral para que possamos estabelecer as bases de todo o desenvolvimento do trabalho. Portanto escolhemos como uma primeira motivação revisar conceitos de geometria diferencial. O material desenvolvido aqui está basicamente restrito as necessidades para o desenvolvimento dos conceitos de campos vetoriais que geram transformações de 1 parâmetro sobre variedades, formas diferenciais, variedades simpléticas e fibrados. Mais detalhes são encontrados nas referências [1, 19, 32].

2.1 *Cálculo sobre Variedades*

2.1.1 Variedades

Procuraremos nesta subseção dar as definições básicas necessárias para compreender o ambiente no qual vamos trabalhar. A intenção é definir espaços de forma geral, e para isso começamos com a definição mais primitiva de espaço, chamada *espaço topológico*:

Definição 2.1. *Seja X qualquer conjunto e $T = \{U_i | i \in I\}$ denota uma coleção de subconjuntos de X, chamados conjuntos abertos. O par (X, T) é um espaço topológico se, e somente se, T satisfaz as seguintes condições:*

- $\emptyset, \quad X \in T$.
- *Se J é qualquer subcoleção (finita ou infinita) de I, a família $\{U_j | j \in J\}$ satisfaz $\bigcup_{j \in J} U_j \in T$.*
- *Se K é qualquer subcoleção finita de I, a família $\{U_k | k \in K\}$ satisfaz $\bigcap_{k \in K} U_k \in T$.*

Agora daremos a definição de *variedades*, as quais são espaços topológicos com propriedades especiais quanto as suas estruturas locais. Estas propriedades permitem que este espaço, m-dimensional, seja localmente homeomorfo à $\mathbb{R}^m$ (espaço Euclidiano de m dimensões). Segue a definição de uma variedade:

Definição 2.2. *M é uma variedade diferenciável de m dimensões se, e somente se,*

- *M é um espaço topológico.*
- *M é munido com uma família de pares chamados cartas, $\{(U_i, \phi_i)\}$.*
- *$\{U_i\}$ é uma família de conjuntos abertos que cobre M, $\bigcup_i U_i = M$. ϕ_i é um homeomorfismo de U_i sobre um conjunto de abertos U_i' de $\mathbb{R}^m$.*
- *Dado U_i e U_j, tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, o mapa $\psi_{ij} \equiv \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ para $\phi_i(U_i \cap U_j)$ é infinitamente diferenciável, $\psi_{ij} \in C^\infty(M)$.*

O homeomorfismo ϕ_i pode ser representado por m funções $\{x^1(p), ..., x^m(p)\}$, onde $p \in M$ é um ponto da variedade M. Chamaremos o conjunto $\{x^\mu(p)\}_{\mu=1}^m$ de *coordenadas* do ponto p sobre M. Da definição (2.2), temos que M é localmente Euclidiano. Também concluímos que quando as cartas se sobrepõem, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, os dois sistemas de coordenadas são designados para um ponto da variedade $p \in U_i \cap U_j$. O que significa que, se ϕ_i corresponde a $\{x^\mu(p)\}_{\mu=1}^m$ e ϕ_j a $\{y^\nu(p)\}_{\nu=1}^m$, temos uma transformação de coordenadas dada por m funções de m variáveis $x^\mu = x^\mu(y)$, as quais correspondem às funções de transição $\psi_{ij} \equiv \phi_i \circ \phi_j^{-1}$.

Vamos considerar um mapa entre duas variedades M de dimensão m e N de dimensão n, $f : M \to N$. Portanto, para um ponto $p \in M$ temos que $f(p) \in N$. Tomamos uma carta (U, ϕ) sobre M e uma (V, ψ) sobre N. Segue que as coordenadas são mapeadas pela composição $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. As respectivas coordenadas para o ponto p são $\phi(p) = \{x^\mu\}$ e $\psi(f(p)) = \{y^\alpha\}$, onde $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = y$. Como um abuso de notação usaremos $y = f(x)$ ou $y^\alpha = f^\alpha(x^\mu)$. Vamos a uma importante definição:

Definição 2.3. *Seja $f : M \to N$ um homeomorfismo e ψ e ϕ são funções coordenadas. Se existe a inversa de $\psi \circ f \circ \phi^{-1} = y$, dada por $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = x$, sendo ambas C^∞, chamamos f de um difeomorfismo e dizemos que M é difeomorfo à N, $M \equiv N$.*

2.1.2 Vetores

Para definirmos um vetor tangente sobre uma variedade M, precisamos antes de mais nada definir uma curva $c : (a, b) \to M$ e uma função $f : M \to \mathbb{R}$, ambas pertencentes à $C^\infty(M)$, onde o intervalo aberto $t = (a, b) \in \mathbb{R}$ contém $t = 0$. O vetor tangente à $c(0)$ é a derivada direcional ao longo da curva $c(t)$ da função $f(c(t))$ tomada no ponto para $t = 0$. A taxa de variação de $f(c(t))$ em $t = 0$ ao longo da curva é

$$\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0}. \tag{2.1}$$

Explicitando a derivada acima em termos das coordenadas locais, temos

$$\left.\frac{\partial f \circ \phi^{-1}(x)}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\right|_{t=0}. \tag{2.2}$$

Portanto, definimos aqui um operador diferencial

$$X \equiv X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right), \quad X^\mu = \left.\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\right|_{t=0}, \tag{2.3}$$

onde a sua ação em funções $\{f\}$ definidas sobre a variedade M nos dá a informação da taxa de variação de f:

$$\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right) \equiv X[f]. \tag{2.4}$$

O conjunto de todos os vetores definidos sobre um ponto p é uma classe de equivalência das curvas que passam por p, a qual determina um espaço vetorial chamado *espaço tangente*, denotado por T_pM. Naturalmente temos que $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$, para $(1 \leq \mu \leq m)$, são os vetores que formam uma base (coordenada) para T_pM. Portanto, para $V \in T_pM$, podemos escrever $V = V^\mu e_\mu$, onde os números V^μ são chamados de componentes de V. Notemos que $\dim T_pM = \dim M$. Devido a (2.4) vemos do seu lado esquerdo que esta construção não depende explicitamente das coordenadas. Esta condição nos permite estabelecer como os componentes de um vetor se transformam perante uma mudança de coordenada, ou seja, para um ponto $p \in U_i \cap U_j$, $x = \phi_i(p)$, $y = \phi_j(p)$ e $X \in T_pM$ temos

$$X = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = X'^\mu \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) \tag{2.5}$$

$$X \quad \text{independente das coordenadas} \Rightarrow X'^\mu = X^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{2.6}$$

2.1.3 Espaço Dual

Desde que T_pM é um espaço vetorial, existe um espaço vetorial dual a T_pM cujos elementos são funcionais lineares de T_pM em $\mathbb{R}$. O espaço dual é chamado de espaço cotangente a p e é representado por T_p^*M. De acordo com esta definição, temos

$$\omega \doteq \langle \omega, \cdot \rangle : T_pM \to \mathbb{R}, \qquad \omega \in T_p^*M. \tag{2.7}$$

Chamamos os elementos $\omega \in T_p^*M$ de *1-forma diferencial*. Como um exemplo temos o diferencial *df* de uma função $f \in \mathcal{F}(M)$, onde $\mathcal{F}(M)$ é o espaço das funções diferenciáveis sobre M. De acordo com (2.4), temos que a ação de um vetor $V \in T_pM$ sobre f é dada por

$$V[f] = V^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right), \tag{2.8}$$

onde também definimos a ação de *df* $\in T_p^*M$ sobre o espaço tangente T_pM por

$$\langle df, V \rangle \equiv V[f] = V^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right). \tag{2.9}$$

Explicitando *df* em termos de coordenadas, *df* $= (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$, vemos que o conjunto $\{dx^\mu\}$ forma uma base para o espaço dual T_p^*M. Logo concluímos que

$$\left\langle dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu. \tag{2.10}$$

Em termos das bases coordenadas, uma 1-forma pode ser escrita em termos dos seus componetes, $\omega = \omega_\mu dx^\mu$. O produto interno definimos como um mapa $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*M \times T_pM \to \mathbb{R}$,

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu V^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \omega_\mu V^\mu. \tag{2.11}$$

Da mesma forma que os vetores, as 1-formas são independentes do sistema de coordenadas, e em uma sobreposição de cartas, para $p \in U_i \cap U_j$, temos que

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\nu dy^\nu \tag{2.12}$$

$$dy^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \Rightarrow \omega'_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \tag{2.13}$$

2.1.4 Tensores

Um tensor T do tipo (q, r) é um objeto multilinear que mapeia q elementos de T_p^*M e r elementos de T_pM em um número real,

$$T : \underbrace{T_p^*M \otimes ... \otimes T_p^*M}_{q} \otimes \underbrace{T_pM \otimes ... \otimes T_pM}_{r} \to \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Denotaremos o conjunto dos (q, r)-tensores em um ponto p por $(\bigotimes^q T_pM) \otimes (\bigotimes^r T_p^*M) \equiv \mathcal{T}^q_{r,p}(M)$. Fixando as coordenadas temos que o tensor é representado em termos das bases coordenadas,

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_r} \bigotimes_{i=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_i}} \otimes \bigotimes_{j=1}^{r} dx^{\nu_j}, \tag{2.15}$$

onde a aplicação é dada por

$$T(\omega_1, ..., \omega_q, V_1, ..., V_r) = T^{\mu_1...\mu_q}{}_{\nu_1...\nu_r}\omega_{\mu_1}...\omega_{\mu_q}V^{\nu_1}...V^{\nu_r}. \tag{2.16}$$

Quando estudamos física é necessário definirmos o nosso espaço-tempo. Podemos entendê-lo como sendo uma variedade, mas que seja naturalmente dotada de um tipo particular de tensor $(0, 2)$ chamado *métrica*. Por outro lado, sabemos de geometria elementar que o produto interno entre dois vetores U e V sobre um espaço vetorial (tangente) é dado por $U \cdot V = \sum_{i=1}^{m} U_i V_i$, o qual é importante para estabelecer os observáveis de uma teoria física, uma vez que o resultado é um número real. Com isto em mente vamos procurar definir o tensor métrico Riemanniano, o qual nos fornecerá a generalização, para uma variedade arbitrária, do produto interno entre dois vetores.

Definição 2.4. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana g sobre M é um campo tensorial (assume valores em todos os pontos de M) do tipo $(0, 2)$ que satisfaz os seguinte axiomas em todo ponto $p \in M$:*

- $g_p(U, V) = g_p(V, U)$,
- $g_p(V, V) \geq 0$, *onde a igualdade existe se, e somente se,* $V = 0$.

Aqui temos $U, V \in T_pM$.

Na subseção anterior definimos o produto interno como um mapa $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^*M \times T_pM \to \mathbb{R}$. Se a variedade é dotada de um tensor métrico g, definimos o produto interno entre dois vetores $U, V \in T_pM$ por $g_p(U, V)$. Desde que a métrica é um mapa $g_p : T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R}$, podemos definir um mapa linear $g_p(U, \cdot) : T_pM \to \mathbb{R}$ por $V \mapsto g(U, V)$. Portanto $g_p(U, \cdot)$ é identificado com uma 1-forma $\omega_U \in T_p^*M$. Similarmente $\omega \in T_p^*M$ induz um vetor $V_\omega \in T_pM$ por $\langle \omega, U \rangle = g(V_\omega, U)$. Então concluímos que o tensor métrico estabelece um isomorfismo entre os espaços T_pM e T_p^*M.

Se fixarmos uma carta (U, ϕ) sobre M com coordenadas $\{x^\mu\}$, temos que g é dado em termos das bases coordenadas por

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu, \tag{2.17}$$

onde $g_{\mu\nu}$ são elementos de uma matriz simétrica com autovalores reais. Dizemos que uma métrica g é Riemanniana quando todos os seus autovalores são estritamente positivos, enquanto que é pseudo-riemanniana quando um ou mais autovalores são negativos. O par (M, g) é chamada de variedade Riemanniana (ou pseudo-riemanniana), ou espaço-tempo.

Tomemos um vetor deslocamento infinitesimal, $dx^\mu \partial/\partial x^\mu$, em T_pM e calculamos a ação da métrica sobre ele. Encontramos de (2.17) que

$$g\left(dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv ds^2. \tag{2.18}$$

Logo a métrica nos diz como calcular distâncias sobre uma variedade M.

2.1.5 Mapeamentos Induzidos

Um mapa $f : M \to N$ infinitamente diferenciável entre duas variedades induz naturalmente um mapa $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ entre os respectivos espaços tangentes. Chamamos este mapa de *mapeamento diferencial*. Seja $g \in \mathcal{F}(N)$, então por composição dos mapas temos que $g \circ f \in \mathcal{F}(M)$. Logo, de acordo com a definição da ação de um vetor sobre funções (2.4), um vetor $V \in T_pM$ age sobre $g \circ f$ e resulta num número $V[g \circ f]$. Agora definimos $f_*V \in T_{f(p)}N$ por

$$(f_*V)[g] = V[g \circ f] \Leftrightarrow (f_*V)[g \circ \psi^{-1}(y)] = V[g \circ f \circ \phi^{-1}(x)]. \tag{2.19}$$

Fixando uma determinada base, $V = V^\mu(\partial/\partial x^\mu)$ e $f_*V = W^\alpha(\partial/\partial y^\alpha)$, temos

$$\begin{aligned} & W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}[g \circ \psi^{-1}(y)] = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}[g \circ f \circ \phi^{-1}(x)] \\ & \Rightarrow W^\alpha = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y^\alpha(x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

O mapeamento diferencial é naturalmente estendido para tensores do tipo $(q, 0)$, $f_* : \mathcal{T}^q_{0,p}(M) \to \mathcal{T}^q_{0,f(p)}(N)$, onde cada componente se transforma de acordo com (2.20).

Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$, então $g \circ f : M \to P$, onde M, N e P são variedades diferenciáveis. Temos também uma função $h : P \to \mathbb{R}$. Portanto os mapas induzidos nos levam a seguinte relação:

$$(g_* \circ f_*V)[h] = (f_*V)[h \circ g] = V[h \circ g \circ f] \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \therefore \qquad & Z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\mu} h = Y^\alpha \frac{\partial z^\beta}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial z^\beta} h = X^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial z^\gamma}{\partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial z^\gamma} h \\ & \Rightarrow Z^\alpha = Y^\beta \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\beta} = X^\gamma \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\beta} \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\therefore (g \circ f)_* = g_* \circ f_*. \tag{2.23}$$

O mapa $f : M \to N$ também induz um mapa entre os espaços duais dado por $f^* : T^*_{f(p)}N \to T^*_pM$. A direção do mapa f^* é contrária à do mapa f e f^*, sendo a motivação para a sua denominação, *pullback*. Para uma 1-forma $\omega \in T^*_{f(p)}N$, temos que o *pullback* de ω por f^* é definido por

$$\langle f^*\omega, V \rangle = \langle \omega, f_*V \rangle. \tag{2.24}$$

Sendo $\omega = \omega_\alpha dy^\alpha \in T^*_{f(p)}N$ e $f^*\omega = \xi_\mu dx^\mu \in T^*_pM$, temos

$$\begin{aligned} & \left\langle \xi_\mu dx^\mu, V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \left\langle \omega_\alpha dy^\alpha, V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right\rangle \\ & \Rightarrow \xi_\mu = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

O *pullback* também pode ser estendido para tensores do tipo $(0, r)$, $f^* : \mathcal{T}^0_{r,f(p)}(N) \to \mathcal{T}^*_{r,p}(M)$, onde cada componente do tensor se transforma de acordo com a regra (2.25).

Como feito anteriormente, vamos considerar que $f : M \to N$ e $g : N \to P$, então $g \circ f : M \to P$, onde M, N e P são variedades diferenciáveis e $h : P \to \mathbb{R}$. Portanto

$$\begin{aligned} \langle (g \circ f)^*\omega, V \rangle &= \langle \omega, (g \circ f)_*V \rangle = \langle \omega, (g_* \circ f_*)V \rangle \\ &= \langle g^*\omega, f_*V \rangle = \langle f^* \circ g^*\omega, V \rangle \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\therefore (g \circ f)^* = f^* \circ g^*. \tag{2.27}$$

2.2 Derivadas de Lie

2.2.1 Fluxos e Grupos de Um Parâmetro

Quando um vetor é designado suavemente para cada ponto da variedade M, dizemos que ele define um *campo vetorial.* Isto significa que cada componente de um campo vetorial é uma função infinitamente diferenciável de M para $\mathbb{R}$. O conceito de campo é obviamente generalizado para tensores de qualquer ordem.

Seja X um campo vetorial sobre a variedade M. Uma *curva integral* $x(t)$ de X é uma curva sobre M, cujo vetor tangente em $x(t)$ é $X|_{x(t)}$. Dada uma carta (U, ϕ), temos que as componentes do campo definem equações diferenciais ordinárias para encontrarmos as curvas integrais, ou seja,

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu(x(t)), \tag{2.28}$$

onde $x^\mu(t)$ é o componente de ordem μ de $\phi(x(t))$. Fixamos as condições iniciais por $x_0^\mu = x^\mu(0)$ e, se a variedade M for compacta, podemos dizer que $c(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por conveniência, vamos mudar a notação. Seja $\sigma(t, x_0)$ a curva integral do campo X a qual passa por um ponto x_0, para $t = 0$. Se a coordenada é denotada por $\sigma^\mu(t, x_0)$, como em (2.28) temos que

$$\frac{d\sigma^\mu(t, x_0)}{dt} = X^\mu(\sigma(t, x_0)), \tag{2.29}$$

onde as condições iniciais são $\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu$. O mapa $\sigma : \mathbb{R} \times M \to M$ é chamado de *fluxo* gerado pelo campo X. Existe uma regra que devemos respeitar devido à estrutura de unicidade das equações diferenciais dada por

$$\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = \sigma(t + s, x_0) \tag{2.30}$$

para $t, s \in \mathbb{R}$. Vamos ver as condições iniciais que determinam este resultado:

$$\begin{aligned} &\frac{d\sigma^\mu(t, \sigma^\mu(s, x_0))}{dt} = X^\mu(\sigma(t, \sigma(s, x_0))) \\ &\Rightarrow \sigma(0, \sigma(s, x_0)) = \sigma(s, x_0) \end{aligned} \tag{2.31}$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{d\sigma^\mu(t + s, x_0)}{dt} = \frac{d\sigma^\mu(t + s, x_0)}{d(t + s)} = X^\mu(\sigma(t + s, x_0)) \\ &\Rightarrow \sigma(0 + s, x_0) = \sigma(s, x_0). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Segue o teorema:

Teorema 2.1. *Para qualquer ponto $x \in M$ existe um mapa diferenciável $\sigma : \mathbb{R} \times M \to M$, tal que*

- $\sigma(0, x) = x$.
- $t \mapsto \sigma(t, x)$ *é uma solução de (2.29).*
- $\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = \sigma(t + s, x_0)$.

Para um parâmetro $t \in \mathbb{R}$ fixo, temos que o fluxo $\sigma(t, x)$ é um difeomorfismo de M no próprio M, $\sigma_t : M \to M$. Devido à estrutura dos fluxos descrita acima, podemos notar que σ_t forma um grupo comutativo, chamado de *grupo de transformações de um parâmetro*:

- $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x) \Leftrightarrow \sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}$, para $t, s \in \mathbb{R}$.
- σ_0 é o elemento identidade.
- $\sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1}$.

Encontramos da relação (2.29) que, sob uma ação infinitesimal σ_ϵ, $\epsilon \ll 1$, um ponto de coordenadas x^μ é mapeado em

$$\sigma_\epsilon^\mu(x) = \sigma^\mu(\epsilon, x) = x^\mu + \epsilon X^\mu(x), \tag{2.33}$$

ou seja, o campo X é um gerador infinitesimal de uma transformação σ_t. Portanto, dado o campo X, o fluxo correspondente é dado como uma exponenciação de X,

$$\sigma^\mu(t, x) = e^{tX} x^\mu, \qquad \sigma^\mu(0, x) = x^\mu. \tag{2.34}$$

2.2.2 Construção da Derivada de Lie

Vamos agora considerar dois fluxos, $\sigma(s, x)$ e $\tau(t, x)$, gerados respectivamentes pelos campos vetoriais X e Y. Logo, da equação (2.29) temos

$$\frac{d\sigma^\mu(s, x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x)) \tag{2.35}$$

e

$$\frac{d\tau^\mu(t, x)}{dt} = Y^\mu(\tau(t, x)). \tag{2.36}$$

O objetivo aqui é analisar a variação do campo Y ao longo da curva integral $\sigma(s, x)$ gerada pelo campo X. Devemos comparar o campo Y em dois pontos diferentes do espaço, ou seja, vamos comparar Y no espaço tangente ao ponto x, T_xM, com o vetor que o determina tangente ao ponto $x' = \sigma_\epsilon(x)$, $T_{\sigma_\epsilon(x)}M$. Para isso devemos utilizar o mapeamento diferencial, já que não é possível fazermos qualquer operação entre vetores de espaços tangentes distintos. Isto significa que, se usarmos o mapa $(\sigma_{-\epsilon})_* : T_{\sigma_\epsilon(x)}M \to T_xM$, temos os vetores $(\sigma_{-\epsilon})_* Y|_{\sigma_\epsilon(x)}$ e $Y|_x$ no mesmo espaço tangente, T_xM. Logo, a *derivada de Lie* de um campo vetorial Y ao longo do fluxo σ do campo X é definida por

$$\mathcal{L}_X Y \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[(\sigma_{-\epsilon})_* Y|_{\sigma_\epsilon(x)} - Y|_x \right]. \tag{2.37}$$

Seja (U, ϕ) uma carta que cobre a coordenada x. Os campos vetoriais sobre o aberto U são $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ e $Y = Y^\mu \partial/\partial x^\mu$ nas bases cooredenadas. Se $\sigma_\epsilon(x)$ tem uma cooredenada $x^\mu + \epsilon X^\mu(x)$, temos

$$\begin{aligned} Y|_{\sigma_\epsilon(x)} &= Y^\mu(x^\nu + \epsilon X^\nu(x)) e_\mu|_{x+\epsilon X} \\ &\approx \left[Y^\mu(x) + \epsilon X^\nu(x) \partial_\nu Y^\mu(x) \right] e_\mu|_{x+\epsilon X}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu\}$. Agora usamos o mapa diferencial $(\sigma_{-\epsilon})_*$ em $Y|_{\sigma_\epsilon(x)}$ de acordo com a relação (2.20),

$$\begin{aligned} (\sigma_{-\epsilon})_* Y|_{\sigma_\epsilon(x)} &= \left[Y^\mu(x) + \epsilon X^\nu(x) \partial_\nu Y^\mu(x) \right] \partial_\mu [x^\lambda - \epsilon X^\lambda(x)] e_\lambda\big|_x \\ &= \left[Y^\mu(x) + \epsilon X^\nu(x) \partial_\nu Y^\mu(x) \right] [\delta_\mu^\lambda - \epsilon \partial_\mu X^\lambda(x)] e_\lambda\big|_x \\ &= \left[Y^\lambda(x) - \epsilon Y^\mu(x) \partial_\mu X^\lambda(x) + \epsilon X^\nu(x) \partial_\nu Y^\lambda(x) \right] e_\lambda\big|_x + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= Y^\lambda(x) e_\lambda|_x + \epsilon \left[X^\nu(x) \partial_\nu Y^\lambda(x) - Y^\mu(x) \partial_\mu X^\lambda(x) \right] e_\lambda\big|_x + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Substituindo (2.39) em (2.37) temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Y &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\epsilon\left[X^\nu(x)\partial_\nu Y^\lambda(x) - Y^\mu(x)\partial_\mu X^\lambda(x)\right] e_\lambda\big|_x + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right\} \\
&= \left[X^\nu(x)\partial_\nu Y^\lambda(x) - Y^\mu(x)\partial_\mu X^\lambda(x)\right] e_\lambda\big|_x \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}_X Y = [X, Y], \qquad (2.41)$$

onde (2.41) é conhecido como *"bracket" de Lie.*

Vamos construir a derivada de Lie sobre uma 1-forma diferencial. O conceito é o mesmo que antes, ou seja, vamos comparar 1-formas de espaços cotangentes diferentes utilizando o *pullback*:

$$\mathcal{L}_X\omega \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[(\sigma_\epsilon)^*\omega|_{\sigma_\epsilon(x)} - \omega|_x\right], \qquad (2.42)$$

onde $\omega|_x \in T_x^*M$ e $\sigma_\epsilon^* : T_x^*M \to T_{\sigma_\epsilon(x)}^*M$. Vamos proceder como antes e explicitar a derivada de Lie em termos das coordenadas. Seja $\omega|_{\sigma_\epsilon(x)} \in T_{\sigma_\epsilon(x)}^*M$, temos

$$\omega|_{\sigma_\epsilon(x)} \approx \left[\omega_\mu(x) + \epsilon X^\nu(x)\partial_\nu\omega_\mu(x)\right] dx^\mu|_{x+\epsilon X} \qquad (2.43)$$

$$\Rightarrow \sigma_\epsilon^*\omega|_{\sigma_\epsilon(x)} = \omega_\mu(x)dx^\mu + \epsilon\left[X^\mu(x)\partial_\mu\omega_\lambda(x) + \partial_\lambda X^\mu(x)\omega_\mu(x)\right] dx^\lambda\big|_x + \mathcal{O}(\epsilon^2), \qquad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathcal{L}_X\omega &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\epsilon\left[X^\mu(x)\partial_\mu\omega_\lambda(x) + \partial_\lambda X^\mu(x)\omega_\mu(x)\right] dx^\lambda\big|_x + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right\} \\
&= \left[X^\mu(x)\partial_\mu\omega_\lambda(x) + \partial_\lambda X^\mu(x)\omega_\mu(x)\right] dx^\lambda. \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

A derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ sobre uma função $f \in \mathcal{F}(M)$ definida sobre a variedade M coincide com a atuação do campo X em f,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X f &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}[f(\sigma_\epsilon(x)) - f(x)] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}[f(x+\epsilon X) - f(x)] \\
&= X^\mu(x)\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X[f]. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

A generalização para a atuação da derivada de Lie sobre tensores de maior ordem é dada pela regra de Leibniz,

$$\mathcal{L}_X(t_1\otimes t_2) = (\mathcal{L}_X t_1)\otimes t_2 + t_1\otimes(\mathcal{L}_X t_2), \qquad (2.47)$$

onde t_1 e t_2 são campos tensoriais de tipos arbitrários.

2.2.3 Isometrias e Campos de Killing

Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo sobre a variedade M e T um campo tensorial qualquer definido sobre M. Se $f^*T = T$, então, mesmo que tenhamos transformado T por um *pullback*, T permanece constante. Portanto, neste caso, f é uma transformação de simetria para T.

Definição 2.5. *Seja (M, g) uma variedade (pseudo) Riemanniana. Um difeomorfismo $\sigma_t : M \to M$ é uma isometria se ele preserva a métrica g:*

$$\sigma_t^* g_{f(p)} = g_p \Rightarrow g_{f(p)}(\sigma_{t*}X, \sigma_{t*}Y) = g_p(X, Y) \qquad (2.48)$$

$$\therefore \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}g_{\alpha\beta}(f(p)) = g_{\mu\nu}(p), \qquad (2.49)$$

onde $X, Y \in T_pM$.

Da transformação infinitesimal do tipo (2.33), $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon X^\mu$, e da relação (2.49) temos

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(x') \\
&= \left(\delta^\alpha_\mu + \epsilon\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\left(\delta^\beta_\nu + \epsilon\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\right)\left(g_{\alpha\beta}(x) + \epsilon X^\gamma \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&\approx g_{\mu\nu}(x) + \epsilon\left[X^\alpha\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + g_{\beta\nu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\mu} + g_{\mu\gamma}\frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\nu}\right] \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore X^\alpha\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + g_{\beta\nu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\mu} + g_{\mu\gamma}\frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\nu} = 0. \qquad (2.51)
$$

Vamos agora atuar a derivada de Lie sobre o tensor métrico (2.17),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_X g &= \mathcal{L}_X(g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu) \\
&= (\mathcal{L}_X g_{\mu\nu}) dx^\mu \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu}(\mathcal{L}_X dx^\mu) \otimes dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes (\mathcal{L}_X dx^\nu) \\
&= \left[X^\alpha\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + g_{\beta\nu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\mu} + g_{\mu\gamma}\frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\nu}\right] dx^\mu \otimes dx^\nu. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Logo usando a relação (2.51) imposta pela condição de isometria temos que

$$
(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = 0 \qquad (2.53)
$$

também é uma condição de isometria. O mapa $\sigma_t : M \to M$ gera o campo $X = X^\mu e_\mu$, o qual, se satisfaz a condição (2.53), é denominado *campo de Killing.* (2.53) Também nos informa que a geometria local não se altera em um movimento gerado por σ_t, então o campo X nos fornece as direções de simetria de M.

Vamos explicitar mais a relação (2.53):

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} &= X^\alpha\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + g_{\beta\nu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\mu} + g_{\mu\gamma}\frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\nu} \\
&= X^\alpha\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\right] + \frac{\partial X_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial X_\mu}{\partial x^\nu}, \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

onde definimos os componentes de uma conexão

$$
\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right], \qquad (2.55)
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} &= \left(\frac{\partial X_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} X_\alpha\right) + \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} X_\alpha\right) \\
&\equiv \nabla_\nu X_\mu + \nabla_\mu X_\nu, \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

onde ∇_μ é a derivada covariante, a qual define a coneção. Portanto com a validade de (2.53) temos as equações de Killing

$$
\nabla_\nu X_\mu + \nabla_\mu X_\nu = 0. \qquad (2.57)
$$

Assim determinar todas as isometrias infinitesimais de uma métrica dada significa determinar os campos vetoriais que satisfazem a equação de Killing (2.57).

2.3 Formas Diferenciais

2.3.1 Definições

Definição 2.6. *Uma forma diferencial de ordem r, ou uma r-forma, é um tensor totalmente anti-simétrico do tipo $(0, r)$. Os componentes de um tensor anti-simétrico do tipo $(0, r)$ satisfazem a seguinte relação:*

$$T_{\mu_1 \cdots \mu_r} = sgn(P) T_{\mu_{P(1)} \cdots \mu_{P(r)}}, \tag{2.58}$$

para todas as permutações P ($sgn(P)$ é $+1$ ou -1 se P é par ou ímpar).

Os elementos da base coordenada de uma forma diferencial são escritos em termos do *produto exterior* $\wedge$ (totalmente anti-simétrico) definido por

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = \sum_P \mathrm{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} \otimes ... \otimes dx^{\mu_{P(r)}}, \tag{2.59}$$

onde podemos concluir que

- $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = 0$ se algum índice μ se repete.
- $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = \mathrm{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \wedge dx^{\mu_{P(2)}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_{P(r)}}$.
- $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$ é linear em cada dx^{μ}.

Denotaremos o espaço das r-formas diferenciais num ponto p da variedade M por $\Lambda^r_p(M)$ e a base para esse espaço é dada por (2.59), onde um elemento deste espaço pode ser expandido por

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}. \tag{2.60}$$

Sendo m a dimensão da variedade M, notemos que o número $\begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} = m!/r!(m-r)!$ nos fornece todas as permutações possíveis para $(\mu_1, ..., \mu_r)$. Portanto a dimensão do espaço $\Lambda^r_p(M)$ é dada por

$$\dim \Lambda^r_p(M) = \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix}. \tag{2.61}$$

O produto exterior entre duas formas diferenciais, uma q-forma por uma r-forma, define o mapa $\wedge : \Lambda^q_p(M) \times \Lambda^r_p(M) \to \Lambda^{q+r}_p(M)$. Para $\omega \in \Lambda^q_p(M)$ e $\xi \in \Lambda^r_p(M)$, temos que a ação de uma $(q + r)$-forma $\omega \wedge \xi$ sobre $q + r$ vetores é definida por

$$(\omega \wedge \xi)(V_1, ..., V_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum_P \mathrm{sgn}(P) \omega(V_{P(1)}, ..., V_{P(q)}) \xi(V_{P(q+1)}, ..., V_{P(q+r)}), \tag{2.62}$$

onde $\{V_i\}_{i=1}^{q+r} \in T_pM$. Da definição (2.62), verificam-se as seguintes propriedades:

$$\omega \wedge \omega = 0 \tag{2.63}$$

e

$$\omega \wedge \xi = (-1)^{qr} \xi \wedge \omega. \tag{2.64}$$

2.3.2 Derivada Exterior

Definição 2.7. *A derivada exterior d_r é um mapa $\Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r+1}(M)$, cuja ação sobre uma r-forma (2.60) é definida por*

$$d_r\omega \equiv \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r}\right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}. \tag{2.65}$$

Quando d_r agir sobre uma forma passaremos a usar apenas d, onde a ordem r da ação estará subentendida.

Uma propriedade muito importante da derivada exterior é a sua idempotência, $d_{r+1} \circ d_r = d^2 = 0$. Esta propriedade é provada aplicando diretamente a definição acima:

$$d^2\omega = \frac{1}{r!}\frac{\partial^2\omega_{\mu_1...\mu_r}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = 0, \tag{2.66}$$

uma vez que os índices λ e ν estão contraídos numa parte simétrica (derivada segunda) com uma anti-simétrica ($dx^\lambda \wedge dx^\nu$).

Sejam as formas $\omega \in \Lambda^q_p(M)$ e $\xi \in \Lambda^r_p(M)$. Portanto temos

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \xi) &= \frac{1}{q!r!} d\sum_P \text{sgn}(P)\omega \otimes \xi \\ &= \frac{1}{q!r!} d\sum_P \text{sgn}(P)\left(\frac{1}{q!}\omega_{\mu_{P(1)}...\mu_{P(q)}} dx^{\mu_{P(1)}} \otimes ... \otimes dx^{\mu_{P(q)}}\right) \\ &\otimes \left(\frac{1}{r!}\xi_{\nu_{P(1)}...\nu_{P(r)}} dx^{\nu_{P(1)}} \otimes ... \otimes dx^{\nu_{P(r)}}\right) \\ &= \frac{1}{q!r!}\left[\frac{1}{q!r!}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\omega_{\mu_1...\mu_q}\xi_{\mu_{q+1}...\mu_{q+r}}\right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_{q+r}}\right] \\ &= \frac{1}{q!r!}\left[\frac{1}{q!r!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1...\mu_q}\right)\xi_{\mu_{q+1}...\mu_{q+r}} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_{q+r}} + \right. \\ & \left. +(-1)^q \frac{1}{q!r!}\omega_{\mu_1...\mu_q}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\xi_{\mu_{q+1}...\mu_{q+r}}\right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_{q+1}} \wedge dx^{\mu_{q+r}}\right] \\ &= d\omega \wedge \xi + (-1)^q \omega \wedge d\xi. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Para uma 1-forma $\omega = \omega_\mu dx^\mu \in \Lambda^1(M)$ e dois campos vetoriais X e Y temos

$$\begin{aligned} X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X,Y]) &= X^\mu\partial_\mu(\omega_\nu Y^\nu) - Y^\mu\partial_\mu(\omega_\nu X^\nu) - \omega[(X^\mu\partial_\mu Y\nu - Y^\mu\partial_\mu X^\nu)\partial_\nu] \\ &= \partial_\mu\omega_\nu(X^\mu Y^\nu - Y^\mu X^\nu) \end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\therefore d\omega(X,Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X,Y]). \tag{2.69}$$

A generalização da fórmula (2.69) é dada por

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, ..., X_{r+1}) = & \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}X_i[\omega(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{r+1})] + \\ & + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{r+1}), \end{aligned} \tag{2.70}$$

onde os campos $\hat{X}_i$ são omitidos na soma explícita.

2.3.3 Produto Interior e derivada de Lie

Uma outra operação fundamental para o nosso estudo é o *produto interior* definido com um mapa $i_X : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r-1}(M)$, onde X é um campo vetorial definido sobre a variedade M. Para uma r-forma ω, definimos o produto interior por

$$i_X\omega(X_1, ..., X_{r-1}) \equiv \omega(X, X_1, ..., X_{r-1}). \tag{2.71}$$

Em termos das coordenadas explícitas temos,

$$\begin{aligned} i_X\omega &= \frac{1}{(r-1)!} X^\nu \omega_{\nu\mu_2...\mu_r} dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{s=1}^{r} \omega_{\mu_1...\mu_s...\mu_r} (-1)^{s-1} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Com o produdo interior e a derivada exterior escrevemos a seguinte relação fundamental:

$$\begin{aligned} (di_X + i_X d)\omega &= d(i_X\omega) + i_X(d\omega) \\ &= d(X^\mu\omega_\mu) + i_X\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu)dx^\mu \wedge dx^\nu\right) \\ &= (\omega_\mu\partial_\nu X^\mu + X^\mu\partial_\nu\omega_\mu)dx^\nu + X^\mu(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu)dx^\nu \\ &= (\omega_\mu\partial_\nu X^\mu + X^\mu\partial_\mu\omega_\nu)dx^\nu, \end{aligned} \tag{2.73}$$

portanto, de (2.45), temos

$$\mathcal{L}_X\omega = (di_X + i_X d)\omega. \tag{2.74}$$

2.3.4 Variedades Simpléticas

Seja uma variedade diferenciável M de dimensão $m = 2n$. Uma *estrutura simplética* sobre M é uma 2-forma diferencial ω, não degenerada e fechada, ou seja, para $U, V \in T_pM$ temos

$$\forall U \neq 0 \quad \exists V \quad | \quad \omega(U, V) \neq 0 \quad \text{e} \quad d\omega = 0. \tag{2.75}$$

O par (M, ω) é chamado *variedade simplética* ou *espaço de fase*.

Vamos introduzir uma nova estrutura chamada *fibrado cotangente*, o qual é a união dos espaços cotangentes de uma variedade. Seja N uma variedade de n dimensões, portanto o fibrado cotangente é dado por $T^*N = \bigcup_p T_p^*N$. O conjunto T^*N tem uma estrutura natural de uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, uma vez que um ponto de T^*N é uma 1-forma sobre o espaço contangente em algum ponto de N. Se q^μ é a escolha das n coordenadas locais em N, estão temos associada uma forma dada por n componentes p_μ.

Teorema 2.2. *O fibrado cotangente T^*N tem uma estrutura natural simplética. Nas coordenadas locais descritas acima, esta estrutura simplética é dada por*

$$\omega = dp_\mu \wedge dq^\mu = dp_1 \wedge dq^1 + ... + dp_n \wedge dq^n, \tag{2.76}$$

chamado sistema de coordenadas de Darboux, $(p_1, ..., p_n; q^1, ..., q^n)$

Demonstração. Seja um vetor V tangente ao fibrado cotangente, $V \in T_p(T^*N)$, em um ponto $p \in T_x^*N$. O mapa de projeção do fibrado tangente na variedade é dado por $\pi : T^*N \to N$. Portanto o mapa diferencial $\pi_* : T(T^*N) \to TN$ é definido por $V \mapsto \pi_*V$, onde $\pi_*V \in T_xN$. Definimos uma 1-forma θ sobre T^*N pela relação $\theta(V) = p(\pi_*V)$. Em coordenadas locais, esta forma é dada por $\theta = p_\mu dq^\mu$. A estrutura simplética é dada por $\omega = d\theta$. □

Sabemos que uma estrutura Riemanniana sobre uma variedade estabelece um isomorfismo entre o espaço tangente e o espaço dual. Uma estrutura simplética estabelece um isomorfismo similar.

Definição 2.8. *Seja um vetor V pertencente a um espaço tangente à variedade simplética (M, ω) no ponto x. Para cada V podemos associar uma 1-forma θ_V sobre T_x^*M por*

$$\theta_V(U) = \omega(U, V), \quad \forall U \in T_xM. \tag{2.77}$$

Denotaremos por I o isomorfismo $I : T_x^*M \to T_xM$ construído acima. Seja uma função H sobre uma variedade simplética M. Estão dH é uma 1-forma diferencial sobre M e em cada ponto existe um vetor tangente associado a ela. Portanto obtemos o campo vetorial IdH sobre M.

Definição 2.9. *O campo vetorial IdH é chamado de campo vetorial Hamiltoniano e H é chamada de função Hamiltoniana.*

Vamos reescrever (2.77) em termos do produto interior,

$$i_{IdH}\omega = -dH = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}dq^\mu - \frac{\partial H}{\partial p_\mu}dp_\mu, \tag{2.78}$$

a qual é satisfeita para

$$IdH = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial H}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu}. \tag{2.79}$$

Portanto o vetor velocidade do espaço de fase (M, ω) nos fornece as equações canônicas de Hamilton:

$$\dot{x} = IdH(x) \Leftrightarrow \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu} \quad \text{e} \quad \dot{q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}. \tag{2.80}$$

A função Hamiltoniana é um mapa $H : M \to \mathbb{R}$. Assumindo que o campo vetorial IdH correspondente a H nos gera grupos de um parâmetro de difeomorfismos $\sigma_t : M \to M$, temos

$$\left.\frac{d}{dt}\sigma_t(x)\right|_{t=0} = IdH(x). \tag{2.81}$$

O grupo σ_t é chamado de *fluxo de fase hamiltoniano.*

Teorema 2.3. *O fluxo de fase Hamiltoniano preserva a estrutura simplética:*

$$\sigma_t^*\omega = \omega. \tag{2.82}$$

2.4 Grupos e Álgebras de Lie

2.4.1 Grupos de Lie

Definição 2.10. *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável dotada com uma estrutura de grupo tal como as seguintes operações:*

- $\cdot : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$
- ${}^{-1} : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$
- $e : e \cdot g = g \cdot e \mapsto g$, *elemento identidade.*

Teorema 2.4. *Todo subgrupo fechado H de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie.*

Seja um grupo de Lie G e H um subgrupo de Lie de G, $H \subset G$. Temos uma relação de equivalência $g \sim g'$, para $g, g' \in G$, se existe um elemento $h \in H$ tal que $g' = gh$. A classe de equivalência é dada pelo conjunto $[g] = \{gh | h \in H\}$. O espaço "coset" G/H é uma variedade com dimensão $\dim G/H = \dim G - \dim H$. G/H é um grupo de Lie se, e somente se, $ghg^{-1} \in H$ para qualquer $g \in G$ e $h \in H$, ou seja, se H é um subgrupo normal de G.

2.4.2 Álgebras de Lie

Definição 2.11. *Sejam a e g elementos de um grupo de Lie G. A translação à direita $R_a : G \to G$ e a translação à esquerda $L_a : G \to G$ de g por a são respectivamente definidas por*

$$R_a g = ga \tag{2.83}$$

e

$$L_a g = ag. \tag{2.84}$$

Portanto podemos dizer que o mapa $R_a : G \to G$ induz um mapa diferencial $R_{a*} : T_g G \to T_{ga} G$ e $L_a : G \to G$ induz $L_{a*} : T_g G \to T_{ag} G$.

Definição 2.12. *Seja X um campo vetorial sobre o grupo de Lie G. Dizemos que X é um campo vetorial invariante à esquerda se $L_{a*} X|_g = X|_{ag}$.*

Usando (2.20) verificamos que um vetor invariante à esquerda satisfaz a relação

$$L_{a*} X|_g = X^\mu(g) \frac{\partial x^\nu(ag)}{\partial x^\mu(g)} \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_{ag} = X^\nu(ag) \left. \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right|_{ag}, \tag{2.85}$$

onde $x^\mu(g)$ e $x^\mu(ag)$ são as coordenadas dos pontos g e ag sobre a variedade G. Um vetor $V \in T_e G$ define um único campo vetorial invariante à esquerda X_V sobre G dado por

$$X_V|_g = L_{g*} V, \qquad g \in G. \tag{2.86}$$

Usando a propriedade (2.23) temos

$$X_V|_{ag} = L_{ag*} V = (L_a L_g)_* V = L_{a*} L_{g*} V = L_{a*} X_V|_g. \tag{2.87}$$

Logo, se X é um campo invariante à esquerda o mesmo define um único vetor $V = X|_e \in T_e G$. Vamos denotar o conjunto de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G por $\mathfrak{g}$. O mapa $T_e G \to \mathfrak{g}$ é definido por $V \mapsto X_V$ e $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Tomemos dois pontos g e $ag = L_a g$ sobre a variedade G, e dois vetores X e Y sobre o espaço tangente $\mathfrak{g}$. Aplicando L_{a*} sobre o bracket de Lie temos

$$L_{a*}[X, Y]|_g = [L_{a*} X|_g, L_{a*} Y|_g] = [X, Y]|_{ag}, \tag{2.88}$$

portanto concluímos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, ou seja, $\mathfrak{g}$ é fechado sob o bracket de Lie.

Definição 2.13. *O conjunto de campos vetoriais invariantes à esquerda $\mathfrak{g}$ com bracket de Lie $[\quad , \quad] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é chamado de álgebra de Lie de um grupo de Lie G.*

É importante ressaltar que as mesmas definições acima podem ser feitas para translações à direita.

Um grupo de Lie G pode agir sobre ele mesmo de uma forma especial. Portanto vamos definir este tipo de ação.

Definição 2.14. *Tomemos qualquer $a \in G$ e definamos o homeomorfismo $ad_a : G \to G$ pela conjugação*

$$ad_a : g \mapsto aga^{-1}. \tag{2.89}$$

Este homeomorfismo é chamado de representação adjunta de G.

É fácil ver que $\mathrm{ad}_a e = e$, conduzindo a restrição do mapeamento induzido $\mathrm{ad}_{a*} : T_gG \to T_{\mathrm{ad}_a g}G$ a $g = e$ ao mapa $\mathrm{Ad}_a : T_eG \to T_eG$ definido por $\mathrm{Ad}_a \equiv \mathrm{ad}_{a*}|_{T_eG}$. Logo temos o mapa $\mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ chamado de *mapeamento adjunto de G*.

2.4.3 Subgrupo de Um Parâmetro

Definição 2.15. *Uma curva $\varphi : \mathbb{R} \to G$ é chamada de subgrupo de um parâmetro de G se a seguinte condição é satisfeita:*

$$\varphi(t)\varphi(s) = \varphi(t+s), \tag{2.90}$$

onde a identidade é $\varphi(0) = e$ e o elemento inverso é $\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$.

Sendo

$$\varphi(t)\varphi(s) = \varphi(t+s) = \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t), \tag{2.91}$$

concluímos que o subgrupo de um parâmetro é um subgrupo Abeliano. Como vimos na subseção (2.2.1), dado o subgrupo de um parâmetro existe um campo vetorial X tal que

$$\frac{d\varphi^\mu(t)}{dt} = X^\mu(\varphi(t)). \tag{2.92}$$

Para mostrarmos que o campo X é invariante à esquerda, vamos considerar um vetor d/dt sobre $\mathbb{R}$, tal que

$$(L_t)_* \left.\frac{d}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_t. \tag{2.93}$$

Usando o mapa diferencial $\varphi_* : T_t\mathbb{R} \to T_{\varphi(t)}G$, temos

$$\varphi_* \left.\frac{d}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\varphi^\mu(t)}{dt}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial g^\mu}\right|_e = X|_e \tag{2.94}$$

e

$$\varphi_* \left.\frac{d}{dt}\right|_t = \left.\frac{d\varphi^\mu(t)}{dt}\right|_t \left.\frac{\partial}{\partial g^\mu}\right|_g = X|_g, \qquad \varphi(t) = g, \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\varphi L_t)_* \left.\frac{d}{dt}\right|_0 = \varphi_* L_{t*} \left.\frac{d}{dt}\right|_0 &= X|_g \\ &= L_{g*}\varphi_* \left.\frac{d}{dt}\right|_0 = L_{g*}X|_e, \end{aligned} \tag{2.96}$$

onde usamos a relação de comutação $\varphi L_t = L_g\varphi$, a qual implica em $\varphi_* L_{t*} = L_{g*}\varphi_*$. Portanto, concluímos que $L_{g*}X|_e = X|_g$, ou seja, dado o fluxo $\varphi(t)$, existe um campo vetorial invariante à esquerda $X \in \mathfrak{g}$.

O campo X define um grupo de transformações de um parâmetro $\sigma(t, g)$, tal que $d\sigma(t, g)/dt = X$ e $\sigma(0, g) = g$. O mapa $\varphi : \mathbb{R} \to G$ é definido na identidade de G, $\varphi(t) \equiv \sigma(t, e)$. Se fixarmos o parâmetro s, temos que $\overline{\sigma}(t, \varphi(s)) \equiv \varphi(s)\varphi(t)$ é uma curva de $\mathbb{R}$ em G em $\varphi(0)\varphi(s) = \varphi(s)$. As condições iniciais são dadas por $\sigma(0, \sigma(s,e)) = \overline{\sigma}(0, \varphi(s)) = \varphi(s)$ e a equação diferencial é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\overline{\sigma}(t,\varphi(s)) &= \frac{d}{dt}\varphi(s)\varphi(t) = (L_{\varphi(s)})_* \frac{d}{dt}\varphi(t) \\ &= (L_{\varphi(s)})_* X(\varphi(t)) = X(\varphi(s)\varphi(t)) \\ &= X(\overline{\sigma}(t,\varphi(s))). \end{aligned} \tag{2.97}$$

Definição 2.16. *Seja G um grupo de Lie e $V \in T_eG$. O mapa exponencial $\exp : T_eG \to G$ é definido por*

$$\exp V \equiv \varphi_V(1), \tag{2.98}$$

onde φ_V é um subgrupo de um parâmetro de G gerado pelos campos vetoriais invariantes à esquerda $X_V|_g = L_{g*}V$.

Corolário 2.4.1. *Seja $V \in T_eG$ e $t \in \mathbb{R}$. Então*

$$\exp(tV) = \varphi_V(t), \tag{2.99}$$

onde $\varphi_V(t)$ é um subgrupo de um parâmetro gerado por $X_V|_g = L_{g*}V$.

Demonstração. Seja $a \neq 0$ uma constante. Portanto temos que

$$\left.\frac{d}{dt}\varphi_V(at)\right|_{t=0} = a \left.\frac{d}{dt}\varphi_V(t)\right|_{t=0} = aV \tag{2.100}$$

$$\therefore \varphi_V(at) = \varphi_{aV}(t) \tag{2.101}$$

$$\Rightarrow \exp(aV) = \varphi_{aV}(1) = \varphi_V(a). \tag{2.102}$$

□

Um resultado importante é com relação ao mapeamento adjunto. Seja $g \in G$, $X_V \in \mathfrak{g}$ e $\sigma_V(t) = \exp(tV)$ um subgrupo de um parâmetro gerado por $V \in T_eG$. Então a ação ad_g sobre $\sigma_V(t)$ resulta em

$$g \exp(tV) g^{-1} = \exp(tgVg^{-1}), \tag{2.103}$$

como para $\mathrm{Ad}_g : V \to gVg^{-1}$, desde que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g V &= \left.\frac{d}{dt}[\mathrm{ad}_g \exp(tV)]\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}\exp(tgVg^{-1})\right|_{t=0} = gVg^{-1}. \end{aligned} \tag{2.104}$$

2.4.4 Ação de Grupos de Lie Sobre Variedades

Vamos começar a nossa discussão com duas importantes definições.

Definição 2.17. *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. A ação de G sobre M é um mapa diferenciável $\sigma : G \times M \to M$ que satisfaz as seguintes condições:*

- *$\sigma(e, p) = p$ para qualquer $p \in M$.*
- *$\sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p)$.*

Definição 2.18. *Seja G um grupo de Lie que age sobre uma variedade M por $\sigma : G \times M \to M$. A ação σ é dita ser*

- *Transitiva se, para qualquer $p_1, p_2 \in M$, existe $g \in G$ tal que $\sigma(g, p_1) = p_2$.*
- *Livre se todo elemento não trivial $g \neq 0 \in G$ não tem pontos fixos em M, ou seja, se existe $p \in M$ tal que $\sigma(q, p) = p$, então $g = e$.*
- *Efetiva se o elemento unidade $e \in G$ é o único elemento que define a ação trivial sobre M, $\sigma(g, p) = p$ para todo $p \in M$ e $g = e$.*

Dado um ponto $p \in M$, a ação do grupo G sobre p leva p para vários pontos de M. A *órbita* de p sob a ação σ é o subconjunto de M definido por

$$G_p = \{\sigma(g, p) | g \in G\}. \tag{2.105}$$

Se a ação de G sobre M é transitiva, podemos concluir que a órbita para qualquer $p \in M$ é a própria variedade.

Definição 2.19. *Seja G um grupo de Lie que age sobre M. O grupo de isotropia de $p \in M$ é um subgrupo de G definido por*

$$H(p) = \{g \in G | \sigma(g, p) = p\}. \tag{2.106}$$

$H(p)$ é também conhecido como estabilizador de p.

Teorema 2.5. *Seja G um grupo de Lie que age sobre M. Portanto, o grupo de isotropia $H(p)$ para qualquer $p \in M$ é um subgrupo de Lie.*

Demonstração. Definimos o mapa $\varphi_p : G \to M$ por $\varphi_p(g) = gp$. Então $H(p)$ é a imagem inversa $\varphi_p^{-1}(p)$ de um ponto p, e portanto um conjunto fechado. Devido ao teorema (2.4) a demonstração está terminada. □

Sendo $H \subset G$ e a ação de G sobre M transitiva, $G/H(p)$ admite uma estrutura diferenciável e é uma variedade chamada *espaço homogêneo.*

Seja uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M representada por $(g, x) \mapsto gx$. Um campo vetorial invariante à esquerda X_V gerado por $V \in T_eG$ induz naturalmente um campo vetorial sobre M. Um fluxo $\sigma(t, x) = \exp(tV)x$ sobre M é um grupo de transformação de um parâmetro, onde o mesmo define um campo vetorial induzido denotado por $V^\sharp$,

$$V^\sharp|_x = \frac{d}{dt} \exp(tV)x \bigg|_{t=0}. \tag{2.107}$$

Então definimos o mapa $\sharp : T_eG \to T(M)$ por $V \mapsto V^\sharp$.

2.5 Fibrados

2.5.1 Definições

Apesar de já termos usado o conceito de fibrados na subseção (2.3.4) para definirmos variedades simpléticas, vamos agora definir tais estruturas de uma maneira mais precisa.

Definição 2.20. *Um fibrado diferenciável (E, π, M, F, G) consiste dos seguintes elementos:*

- *Uma variedade diferenciável E chamada espaço total.*

- *Uma variedade diferenciável M chamada espaço base.*
- *Uma variedade diferenciável F chamada de fibra típica.*
- *Uma função $\pi : E \to M$ chamada projeção. A imagem da função inversa, $\pi^{-1} = F_p \cong F$, é a fibra com relação ao ponto $p \in M$.*
- *Um grupo de Lie G chamado de grupo de estrutura, o qual age sobre a fibra F do lado esquerdo.*
- *Um conjunto de abertos $\{U_i\}$ que são a cobertura de M, onde um difeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ é definido tal que $\pi \circ \phi(p, f) \equiv p$, onde $f \in F$. O mapa ϕ_i é chamado de trivialização local devido ao fato de ϕ_i^{-1} mapear $\pi^{-1}(U_i)$ no produto direto $U_i \times F$.*
- *Se escrevermos $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$, o mapa $\phi_{i,p}(f) : F \to F_p$ é um difeomorfismo. Sobre a região de sobreposição $U_i \cap U_j \neq 0$, requeremos que $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \to F$ seja um elemento de G. Então ϕ_i e ϕ_j são relacionados por uma função suave $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ tal que*
$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p) f). \tag{2.108}$$
Os mapas t_{ij} são chamados de funções de transição.

Sobre a sobreposição de cartas $U_i \cap U_j \neq 0$, dois elementos $f_i, f_j \in F$ são desiguinados para $u \in \pi^{-1}(p)$, onde $p \in U_i \cap U_j$. Estes elementos estão relacionados pela a ação da função de transição, $f_i = t_{ij}(p) f_j$.

Seja U_i uma carta sobre M. Então o mapa $\phi_i^{-1} : \pi(U_i)^{-1} \to U_i \times F$ é um difeomorfismo. Se $U_i \cap U_j \neq 0$, então temos dois mapas ϕ_i e ϕ_j sobre $U_i \cap U_j$ tais que, tomando um ponto $u \in E$, $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$, desiguinamos dois elementos de F,
$$\phi_i^{-1}(u) = (p, f_i) \quad \text{e} \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, f_j). \tag{2.109}$$

Por consistência, as funções de transição devem satisfazer as seguintes condições:
$$\begin{aligned} t_{ii}(p) &= e, && (p \in U_i) \\ t_{ij}(p) &= t_{ji}^{-1}(p), && (p \in U_i \cap U_j) \\ t_{ij}(p) t_{jk}(p) t_{ki}(p) &= e, && (p \in U_i \cap U_j \cap U_k). \end{aligned} \tag{2.110}$$

Se todas as funções de transição podem ser tomadas como sendo o mapa identidade, chamamos este fibrado de *fibrado trivial*.

Seja $\{U_i\}$ a cobertura da variedade M e dois conjuntos de trivializações locais, $\{\phi_i\}$ e $\{\widetilde{\phi}_i\}$, para o mesmo fibrado. As funções de transição para pontos de sobreposição de cartas são dadas por $t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}$ e $\widetilde{t}_{ij}(p) = \widetilde{\phi}_{i,p}^{-1} \circ \widetilde{\phi}_{j,p}$. Definimos um mapa $g_i(p) : F \to F$ para cada ponto $p \in M$ por $g_i \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \widetilde{\phi}_{i,p}$. $g_i(p)$ é um homeomorfismo que pertence a G e podemos ver que
$$\begin{aligned} g_i^{-1}(p) \circ t_{ij}(p) \circ g_j(p) &= \widetilde{\phi}_{i,p}^{-1} \circ \phi_{i,p} \circ \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} \circ \phi_{j,p}^{-1} \circ \widetilde{\phi}_{j,p} \\ &= \widetilde{\phi}_{i,p}^{-1} \circ \widetilde{\phi}_{j,p} \\ &= \widetilde{t}_{ij}(p). \end{aligned} \tag{2.111}$$

Em termos práticos temos que, t_{ij} são chamados de transformações de gauge, enquanto que g_i correspondem aos graus de liberdade de gauge para a carta U_i.

Como um exemplo temos o fibrado vetorial, cujo a fibra típica é um espaço vetorial. Seja $F \cong \mathbb{R}^k$ e M uma variedade de m dimensões. O número k é a dimensão da fibra e a dimensão do espaço total é dada por $(k+m)$. As funções de transição pertencem ao grupo $GL(k, \mathbb{R})$, desde que elas mapeiam isomorficamente um espaço vetorial em outro de mesma dimensão. Mais explicitamente, um exemplo de fibrado vetorial é o que chamamos de *fibrado tangente*, $TM \equiv \bigcup_p T_pM$. TM é definido sobre uma variedade M e as sua fibras típicas são dadas por $\mathbb{R}^m$. Seja um ponto u em TM tal que $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$. O vetor V tangente a variedade no ponto p corresponde ao ponto u e é expresso como $V = V^\mu \partial/\partial x^\mu|_p = V'^\mu \partial/\partial y^\mu|_p$. As trivializações locais são

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, \{V^\mu\}) \quad \text{e} \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, \{V'^\mu\}). \tag{2.112}$$

As coordenadas da fibra $\{V^\mu\}$ e $\{V'^\mu\}$ são relacionadas por

$$V^\mu = G^\mu{}_\nu(p) V'^\nu, \tag{2.113}$$

onde $\{G^\mu{}_\nu(p) = \partial x^\mu/\partial x^\nu|_p\} \in GL(m, \mathbb{R})$. As seções de TM são os campos vetoriais sobre M.

2.5.2 Fibrados Principais e Associados

Um *fibrado principal* tem a fibra típica F idêntica ao grupo de estrutura G. Um fibrado pricipal, denotado por $P \xrightarrow{\pi} M$, é chamado de um G-fibrado sobre M. A função de transição age na fibra pela a esquerda, como havíamos determinados antes. Além disso, podemos também definir a ação de G sobre F pela direita. Seja $\phi_i^{-1} : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ a trivialização local dada por $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, onde $u \in \pi^{-1}(U_i)$, $p = \pi(u) \in M$ e $g_i \in G$. A ação de G pela direita de $\pi^{-1}(U_i)$ é definida por

$$\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a) \Rightarrow ua = \phi_i(p, g_i a), \tag{2.114}$$

onde $a \in G$. A ação à direita comuta com a ação à esquerda. Para $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ e $g_i, g_j \in G$ temos

$$\phi_j(p, g_j) = \phi_i(p, t_{ij}(p) g_j) \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ua &= \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a) \\ &= \phi_i(p, [t_{ij}(p) g_j] a) = \phi_i(p, g_i a), \end{aligned} \tag{2.116}$$

portanto ua é independente das trivializações locais.

Dado um fibrado principal, podemos contruir um *fibrado assiciado*. Seja G um grupo agindo sobre a fibra típica à esquerda, onde a ação de $g \in G$ sobre $P \times F$ é definida por

$$(u, f) \to (ug, g^{-1} f), \tag{2.117}$$

onde $u \in P$ e $f \in F$. Então o fibrado associado (E, π, M, G, F, P) é uma classe de equivalência $P \times F/G$ em que os pontos (u, f) e $(ug, g^{-1}f)$ são identificados.

Vamos considerar o caso em que F é um espaço vetorial de k dimensões. Seja ρ uma representação de G em k dimensões. Portanto o fibrado associado $P \times_\rho V$ é definido pela identificação dos pontos (u, v) e $(ug, \rho^{-1}(g) v)$ de $P \times V$, onde $v \in V$.

3. GRUPOS DE COHOMOLOGIA DE DE RHAM

Podemos afirmar que os grupos de homologia são definidos para espaços topológicos [32]. Além disso, se uma variedade M é um espaço topológico, podemos definir uma outra estrutura de grupo que seja *dual* aos grupos de homologia usando as propriedades do cálculo das formas diferenciais definidas sobre M, as quais foram desenvolvidas na seção (2.3). Chamaremos estas estruturas duais de *grupos de cohomologia de De Rham.*

3.1 Teorema de Stokes

3.1.1 Considerações e Definições

Vamos inicialmente definir o *r-simplexo padrão* $\sigma_r = (p_0p_1...p_r)$ em $\mathbb{R}^r$, onde

$$\begin{aligned} p_0 &= (0,0,...,0) \\ p_1 &= (1,0,...,0) \\ &\vdots \\ p_r &= (0,...,0,1). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se $\{x^\mu\}$ padroniza a coordenada de $\mathbb{R}^r$, podemos definir que

$$\sigma_r \equiv \left\{ (x^1, x^2, ..., x^r) \in \mathbb{R}^r \mid x^\mu \geq 0, \quad \sum_{\mu=1}^{r} x^\mu \leq 1) \right\}. \tag{3.2}$$

Uma r-forma, conhecida também como forma volume, definida sobre $\mathbb{R}^r$ é dada por

$$\omega = a(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^r. \tag{3.3}$$

Sendo assim, podemos também definir a integração de ω sobre o simplexo σ_r por

$$\int_{\sigma_r} \omega \equiv \int_{\sigma_r} a(x)dx^1dx^2...dx^r. \tag{3.4}$$

Num próximo passo definimos também os seguintes conjuntos sobre uma variedade m-dimensional: *r-cadeia* ("*r-chain*"), $C_r(M)$; *r-ciclo* ("*r-cycle*"), $Z_r(M)$; e *r-borda* ("*r-boundary*"), $B_r(M)$. Para isso vamos considerar que um r-simplexo σ_r em $\mathbb{R}^r$ é mapeado em M através de uma função $f \in C^\infty$, onde $f : \sigma_r \longrightarrow M$, e para os nossos propósitos não é necessário que f tenha uma inversa. Denotamos a imagem de f sobre M por s_r, $f(\sigma_r) = s_r$, e a chamamos de *r-simplexo singular* sobre M. Por singular entendemos que estes simplexos não fornecem uma triangulação de M e, além disso, a independência geométrica dos pontos não fazem sentido em uma variedade.

Seja $\{s_{r,i}\}$ um conjunto de r-simplexos sobre M. Podemos definir uma r-cadeia em M por

$$c_r \equiv \sum_i a_i s_{s,i}, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

onde o conjunto das r-cadeias formam o *grupo cadeia* $C_r(M)$. O *operador borda*, $\partial_r : C_r(M) \longrightarrow C_{r-1}(M)$, é convenientemente definido para que possamos estudar as propriedades topológicas do espaço que estamos considerando. Definimos estão a ação de ∂_r sobre $\sigma_r = (p_0 p_1 ... p_r)$ por

$$\partial_r \sigma_r \equiv \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 ... \widehat{p_i} ... p_r), \tag{3.6}$$

onde o termo $\widehat{p_i}$ não é considerado. Facilmente podemos provar que ∂ é nilpotente, ou seja, $\partial_r \circ \partial_{r+1} = \partial^2 = 0$ (passaremos a omitir sub-índice de ∂_r, onde o grau da atuação ficará subentendido). Portanto temos

$$\begin{aligned} \partial_r \circ \partial_{r+1} \sigma &= \partial_r \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 p_1 ... \widehat{p_i} ... p_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} \left[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 p_1 ... \widehat{p_j} ... \widehat{p_i} ... p_{r+1}) + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0 p_1 ... \widehat{p_i} ... \widehat{p_j} ... p_{r+1}) \right] \\ &= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 ... \widehat{p_j} ... \widehat{p_i} ... p_{r+1}) - \sum_{j>i} (-1)^{j+i} (p_0 p_1 ... \widehat{p_i} ... \widehat{p_j} ... p_{r+1}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

É importante notar que, devido ao mapeamento $f : \sigma_r \longrightarrow M$, $\partial \sigma_r$ também é mapeado em um subconjunto de M, ou seja, $\partial s_r \equiv f(\partial \sigma_r)$ é um conjunto de $(r-1)$-simplexos em M chamado de *borda* de s_r. Se $\partial c_r = 0$, então dizemos que $c_r \in Z_r(M)$ é um r-ciclo. Agora, se $c_r = \partial c_{r+1}$, para $c_{r+1} \in C_{r+1}(M)$, então dizemos que $c_r \in B_r(M)$ é um r-borda. Uma propriedade importante é que

$$\partial^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_r(M) \supset B_r(M). \tag{3.8}$$

Devido a (3.8) nos cabe perguntar se todos os r-ciclos são r-bordas. A resposta é negativa e a medida dessas quantidades não triviais são dadas através da definição dos *grupos de homologia* como se segue,

$$H_r(M) \equiv Z_r(M)/B_r(M). \tag{3.9}$$

Agora é conveniente definirmos a integração de uma r-forma diferencial sobre uma r-cadeia em M por

$$\int_{s_r} \omega \equiv \int_{\sigma_r} f^* \omega, \tag{3.10}$$

onde $f^* \omega \in \mathbb{R}^r$.

3.1.2 O Teorema de Stokes

Teorema 3.1 (Stokes)**.** *Seja $\omega \in \Lambda^{r-1}(M)$ e $c \in C_r(M)$. Então*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \tag{3.11}$$

Demonstração. De acordo com a definição (3.5), vemos que a prova pode ser feita, sem perda de generalidade, para s_r apenas, uma vez que c_r é uma combinação linear dos $s_{r,i}$ a coeficientes constantes a_i. Sendo $f : \sigma_r \longrightarrow M \quad | \quad f(\sigma_r) = s_r$, temos

$$\int_{s_r} d\omega = \int_{\sigma_r} f^*(d\omega) = \int_{\sigma_r} d(f^*\omega) \tag{3.12}$$

e

$$\int_{\partial s_r} \omega = \int_{\partial\sigma_r} f^*\omega, \tag{3.13}$$

onde $f^*\omega \in \Lambda^{r-1}(\mathbb{R}^r)$. Para provar (3.11) é suficiente provar que, novamente sem perda de generalidade,

$$\int_{\sigma_r} d\psi = \int_{\partial\sigma_r} \psi, \quad \psi \in \Lambda^{r-1}(\mathbb{R}^r). \tag{3.14}$$

Notemos que

$$\psi = a(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^{r-1} \tag{3.15}$$

e

$$\begin{aligned} d\psi &= \left(\frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^r\right) \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^{r-1} \\ &= (-1)^{r-1} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^r, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\sigma_r} d\psi &= (-1)^{r-1} \int_{\sigma_r} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^1 dx^2 ... dx^r \\ &= (-1)^{r-1} \int_{x^\mu \geq 0, \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu \leq 1} dx^1 ... dx^{r-1} \int_0^{1-\sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^r \\ &= (-1)^{r-1} \int_{x^\mu \geq 0, \sum_{\mu=1}^{r-1} \leq 1} \left[a\left(x^1, ..., x^{r-1}, 1 - \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu \right) - a\left(x^1, ..., x^{r-1}, 0\right) \right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Podemos ver que (3.17) é o lado esquerdo de (3.14). Agora vamos calcular o lado direito de (3.14), onde começamos com uma análise do domínio de integração:

$$\begin{aligned} \partial\sigma_r &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 ... \widehat{p_i} ... p_r) \\ &= (p_1 ... p_r) - (p_0 p_2 ... p_r) + ... + (-1)^r (p_0 p_1 ... p_{r-1}). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Desde que $\psi = 0$ quando algum dos x^μ é constante, temos que as únicas "faces" de $\partial\sigma_r$

que contribuem para o lado direito de (3.14) são $(p_1 ... p_r)$ e $(-1)^r(p_0 p_1 ... p_{r-1})$.

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{\partial\sigma_r} \psi &= \int_{(p_1...p_r)} \psi + (-1)^r \int_{(p_0 p_1 ... p_{r-1})} \psi \\
&= \int_{(p_1...p_{r-1}p_0)} a\left(x^1, ..., x^{r-1}, 1 - \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu\right) dx^1 ... dx^{r-1} + \\
&\quad +(-1)^r \int_{(p_0 p_1 ... p_{r-1})} a\left(x^1, ..., x^{r-1}, 0\right) dx^1 ... dx^{r-1} \\
&= (-1)^{r-1} \int_{(p_0 p_1 ... p_{r-1})} \left[a\left(x^1, ..., x^{r-1}, 1 - \sum_{\mu=1}^{r-1} x^\mu\right) - a\left(x^1, ..., x^{r-1}, 0\right)\right], \quad (3.19)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que o domínio da integral em $(p_1 ... p_r)$ tem sido projetado ao longo de x^r para o "plano" $(p_1 ... p_{r-1} p_0)$, preservando a orientação. Portanto, substituindo os resultaldos (3.17) e (3.19) em (3.14), vemos que o teorema de Stokes está provado. □

3.2 Cohomologia de De Rham

3.2.1 Definições

Seja M uma variedade diferenciável com dimensão m. O conjunto das *r-formas fechadas*, ou seja, $\{\omega \in \Lambda^r(M) \mid d\omega = 0\} = \ker d_r$, é chamado de *grupo co-ciclo* de ordem r e será denotado por $Z^r(M)$. Por outra lado temos que o conjunto das *r-formas exatas*, ou seja, $\{\omega \in \Lambda^r(M) \mid \exists\gamma \in \Lambda^{r-1}(M) \quad \text{onde} \quad d\gamma = \omega\} = \mathrm{im} d_{r-1}$, é chamado de *grupo de co-borda* de ordem r e será denotado por $B^r(M)$. Ambos são espaços vetoriais onde os coeficientes de expanção são números reais. Como $d_r \circ d_{r-1} = d^2 = 0$ temos que

$$Z^r(m) \supset B^r(M) \Leftrightarrow \mathrm{im} d_{r-1} \subset \ker d_r. \quad (3.20)$$

Vamos agora utilizar o que conhecemos de cálculo sobre formas diferenciais e listar abaixo algumas propriedades importantes:

- Se $\omega \in Z^r(M)$ e $\psi \in Z^s(M)$, então $\omega \wedge \psi \in Z^{r+s}(M)$.

  Demonstração. Sabemos que para $\omega \in \Lambda^r(M)$ e $\psi \in \Lambda^s(M)$ temos $\omega \wedge \psi \in \Lambda^{r+s}(M)$. Mas se $d\omega = 0$ e $d\psi = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \psi) &= d\omega \wedge \psi + (-1)^s \omega \wedge d\psi = 0 \\
&\therefore \ \omega \wedge \psi \in Z^{r+s}(M). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

□

- Se $\omega \in Z^r(M)$ e $\psi \in B^s(M)$, então $\omega \wedge \psi \in B^{r+s}(M)$.

  Demonstração. Se $\psi \in B^s(M)$ deve existir um $\phi \in \Lambda^{s-1}(M) \mid \psi = d\phi$, então

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \psi) &= d\omega \wedge d\phi + (-1)^s \omega \wedge d(d\phi) \\
&= d\left[d((-1)^{s-1} \omega \wedge \phi)\right] = 0 \\
&\therefore \ \omega \wedge \psi = d\left[(-1)^{s-1} \omega \wedge \phi\right] \in B^{r+s}(M). \quad (3.22)
\end{aligned}$$

□

- Se $\omega \in B^r(M)$ e $\psi \in B^s(M)$, então $\omega \wedge \psi \in B^{r+s}(M)$.

  Demonstração. Se $\omega \in B^r(M)$ e $\psi \in B^s(M)$ deve existir um $\xi \in \Lambda^{r-1}(M) \mid \xi = d\omega$ e um $\phi \in \Lambda^{s-1}(M) \mid \psi = d\phi$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \psi) &= d(d\xi) \wedge d\phi + (-1)^s d\xi \wedge d(d\phi) \\ &= d\left[d((-1)^{s-1} d\xi \wedge \phi)\right] = 0 \\ \therefore\ & \omega \wedge \psi = d\left[(-1)^{s-1} d\xi \wedge \phi\right] \in B^{r+s}(M). \end{aligned} \tag{3.23}$$

□

Agora estamos aptos a definir um importante conceito que é o grupo de cohomologia, onde o mesmo é responsável por "medir" as formas diferenciais não triviais, ou seja, a classe de equivalência das formas fechadas que não são exatas. A definição que se segue é consistentemente elaborada uma vez que a hierarquia dos grupos (3.20) é válida.

Definição 3.1. *O grupo de cohomologia de De Rham de ordem r é definido por*

$$H^r(M; \mathbb{R}) \equiv Z^r(M)/B^r(M), \tag{3.24}$$

ou seja

$$H^r(M; \mathbb{R}) = \ker d_r / imd_{r-1}. \tag{3.25}$$

Se $r \leq -1$ ou $r \geq m+1$, $H^r(M; \mathbb{R})$ pode ser definido como sendo o grupo trivial.

Se $\omega \in Z^r(M)$, então $[\omega] \in H^r(M)$ é uma classe de equivalência dada por

$$\left\{\omega' \in Z^r(M) \mid \omega' = \omega + d\psi, \psi \in \Lambda^{r-1}(M)\right\}$$

$$\therefore \omega' - \omega = d\psi \Rightarrow [\omega'] = [\omega]. \tag{3.26}$$

Vejamos a seguir alguns exemplos simples do cálculo de grupos de cohomologia de De Rham:

1. Se $r = 0$ podemos concluir que $B^0(M)$ não tem significado, pois não existe uma (-1)-forma. Portanto $\Lambda^{-1}(M) \equiv \{\emptyset\}$, então $B^0(M) = \{0\}$. Sendo assim concluímos que o grupo de cohomologia de De Rham para o caso onde $r = 0$ é dado por $H^0(M) = Z^0(M) = \{f \in \Lambda^0(M) = \mathcal{F}(M) \mid df = 0\}$. Se M é uma variedade conexa, temos que $df = 0$ é satisfeito se, e somente se, f é constante sobre M, o que nos leva a concluir que (para M localmente isomorfo a $\mathbb{R}^m$)

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

   No entanto, se M tem n componentes conexos, $df = 0$ é satisfeito se, e somente se, f é constante sobre cada componente conexo, ou seja,

$$H^0(M) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus ... \oplus \mathbb{R}}_{n}. \tag{3.28}$$

2. Seja a variedade $M = \mathbb{R}$, onde de (3.27) concluímos que $H^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Estabelecemos que localmente esta variedade tem coordenadas $\{x\} \in \{\mathbb{R}\}$ e, sendo $dim\mathbb{R} = 1$, sabemos que para qualquer $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R})$ temos $d\omega = 0$, onde $\omega = f(x)dx$ e $f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Definimos o seguinte objeto pertencente a $\mathcal{F}(\mathbb{R})$,

$$F(x) \equiv \int_0^x f(t)dt \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x), \tag{3.29}$$

onde fixamos $f(0) = 0$. Portanto

$$\omega = f(x)dx = \frac{dF(x)}{dx}dx = dF, \tag{3.30}$$

então qualquer 1-forma definida sobre $M = \mathbb{R}$ é fechada bem como exata, ou seja $Z^1(\mathbb{R}) = B^1(\mathbb{R})$

$$\therefore H^1(\mathbb{R}) \cong \{0\}. \tag{3.31}$$

3.2.2 Dualidade e o Teorema de De Rham

Quando provamos a validade do teorema de Stokes (3.11) estabelecemos uma concepção de que o espaço formado pelo grupo de cohomologia pode ser visto como *dual* ao espaço do grupo de homologia. Isto é feito analisando que o domínio de integração (em ambos os lados da igualdade) é determinado por objetos que pertencem ao espaço das *cadeias* $C_r(M)$, enquanto que o integrando é determinado pelo espaço das formas diferenciais $\Lambda^r(M)$, onde a composição entre esses dois espaços via (3.11) resulta em um número real (para "variedades reais"). Claramente, importamos aqui uma analogia com o que ocorre quando estabelecemos, através do produto interno, que o espaço das 1-formas é dual ao espaço tangente. Mais formalmente, definimos um "produto interno" de acordo com o seguinte mapeamento:

$$\begin{aligned} (\quad , \quad) : C_r(M) \times \Lambda^r(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ c, \omega \longmapsto (c, \omega) &\equiv \int_c \omega, \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $c \in C_r(M)$ e $\omega \in \Lambda^r(M)$. O mapa (3.32) é definido de tal forma que seja linear em c e ω, ou seja,

$$(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2, \omega) = \int_{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2} \omega = \lambda_1 \int_{c_1} \omega + \lambda_2 \int_{c_2} \omega \tag{3.33}$$

e

$$(c, \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \int_c (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_c \omega_1 + \lambda_2 \int_c \omega_2, \tag{3.34}$$

onde as constantes λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Usando (3.32) podemos reescrever o teorema de Stokes (3.11) da seguinte forma:

$$(c, d\omega) = (\partial c, \omega), \tag{3.35}$$

onde temos que o operador derivada exterior d pode ser interpretado como *adjunto* do operador borda ∂, e vice versa.

O produto (3.32) induz naturalmente um produto interno entre os elementos de $H_r(M)$ e $H^r(M)$. Portanto, para $[c] \in H_r(M)$ e $[\omega] \in H^r(M)$, definimos

$$\begin{aligned} \wedge : H_r(M) \times H^r(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \wedge([c], [\omega]) \equiv (c, \omega) &= \int_c \omega. \end{aligned} \tag{3.36}$$

O produto (3.36) é bem definido desde que seja independente das representações, ou seja,

$$\begin{aligned} &c + \partial c', \quad c' \in C_{r+1}(M) \\ &\Rightarrow (c + \partial c', \omega) = (c, \omega) + (c', d\omega) = (c, \omega), \end{aligned} \tag{3.37}$$

onde $d\omega = 0$, e

$$\begin{aligned} &\omega + d\psi, \quad \psi \in \Lambda^{r-1}(M) \\ &\Rightarrow (c, \omega + d\psi) = (c, \omega) + (\partial c, \omega) = (c, \omega), \end{aligned} \tag{3.38}$$

onde $\partial c = 0$.

Um resultado não-trivial segue do fato que a dualidade entre os espaços $H_r(M)$ e $H^r(M)$ depende de $\wedge(\quad, [\omega]) : H_r(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ ter "rank" maximal, ou seja, $\dim H_r(M) = \dim H^r(M)$. Sendo assim, admitimos o seguinte teorema:

Teorema 3.2 (Teorema de De Rham)**.** *Se M é uma variedade compacta, $H_r(M)$ e $H^r(M)$ são dimensionalmente finitos. Além disso o mapa*

$$\wedge : H_r(M) \times H^r(M) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.39}$$

é bilinear e não-degenerado. Então $H^r(M)$ é o espaço vetorial dual de $H_r(M)$.

Corolário 3.2.1. *Seja M uma variedade compacta e seja k o número de Betti (definido em (3.63)) de ordem r. Seja $c_1, c_2, ..., c_k$ elementos de $Z_r(M)$ puramente escolhidos tal que $[c_i] \neq [c_j]$.*

1. *Uma r-forma fechada ψ é exata se, e somente se,*

$$\int_{c_i} \psi = 0, \qquad 1 \leq i \leq k. \tag{3.40}$$

2. *Para qualquer conjunto de números reais $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ existe uma r-forma fechada ω tal que*

$$\int_{c_i} \omega = b_i, \qquad 1 \leq i \leq k. \tag{3.41}$$

Demonstração.

1. O teorema de De Rham implica que formas bilineares do tipo $\wedge([c], [\omega])$ são não-degeneradas. Portanto, se $\wedge([c], \quad)$ é um mapeamento linear que age sobre elementos que pertencem a $H^r(M)$, temos que o "kernel" consiste dos elementos triviais, ou seja, a classe de cohomologia das formas exatas.

2. Pelo teorema de De Rham temos

$$\wedge([c_i], [\omega_j]) \int_{c_i} \omega_j = \delta_{ij} \tag{3.42}$$

onde $\omega \equiv \sum_{i=1}^{k} b_i \omega_i$, portanto

$$\int_{c_i} \omega = b_i. \tag{3.43}$$

$\square$

3.3 Propriedades de Gerais dos Grupos de Homologia

3.3.1 Conexidade e Grupos de Homologia

Teorema 3.3. *Seja K um complexo simplicial que é uma união disjunta de N componentes conexos, $K = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_N$, onde $K_i \cap K_j = \emptyset$. Então*

$$H_r(K) = H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \oplus ... \oplus H_r(K_N). \tag{3.44}$$

Demonstração. Um grupo r-cadeia é separado em uma soma direta de N subgrupos r-cadeia. Seja

$$C_r(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i} \mid c_i \in \mathbb{N} \right\}, \tag{3.45}$$

onde I_r é o número de r-simplexos linearmentes independentes em K. É sempre possível reagrupar os σ_i de tal forma que os r-simplexos de K_1 estão em primeiro, depois os de K_2 e assim por diante. Então temos que $C_r(K)$ é substituído na soma direta dos subgrupos $C_r(K_i)$:

$$C_r(K) = C_r(K_1) \oplus C_r(K_2) \oplus ... \oplus C_r(K_N). \tag{3.46}$$

Esta subdivisão também ocorre para $Z_r(K)$ e $B_r(K)$,

$$\begin{aligned} Z_r(K) &= Z_r(K_1) \oplus Z_r(K_2) \oplus ... \oplus Z_r(K_N) \\ B_r(K) &= B_r(K_1) \oplus B_r(K_2) \oplus ... \oplus B_r(K_N). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Se $H_r(K_i) = Z_r(K_i)/B_r(K_i)$, onde $Z_r(K_i) \supset B_r(K_i)$, temos

$$\begin{aligned} H_r(K) &= Z_r(K)/B_r(K) \\ &= Z_r(K_1) \oplus Z_r(K_2) \oplus ... \oplus Z_r(K_N)/B_r(K_1) \oplus B_r(K_2) \oplus ... \oplus B_r(K_N) \\ &= H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \oplus ... \oplus H_r(K_N). \end{aligned} \tag{3.48}$$

□

Corolário 3.3.1.

1. *seja K uma união disjunta de N componentes conexos, $K_1, ..., K_N$. Segue que*

$$H_0(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{N \text{ fatores}}. \tag{3.49}$$

2. *Se $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, K é simplesmente conexo.*

3.3.2 Estrutura dos Grupos de Homologia

Agora daremos uma introdução a alguns aspectos que dão estrutura matemática aos grupos de homologia. Sendo assim segue abaixo uma seqüência de definições e teoremas relevantes.

Teorema 3.4 (Teorema fundamental do homomorfismo)**.** *Seja $f : G_1 \longrightarrow G_2$ um homomorfismo. Então*

$$G_1/\ker f \cong imf. \tag{3.50}$$

Demonstração.

- $\ker f = \{x \mid x \in G_1, f(x) = 0\}$ é um sub grupo de G_1.
- $\mathrm{im} f = \{x \mid x \in f(G_1) \subset G_2\}$ é um subgrupo de G_2.

Seja $H \subset G$. Dizemos que $x, y \in G$ são equivalentes se $x - y \in H$. Portanto a classe de equivalência é dada por

$$G/H = \{[x] \mid x' = x + h, h \in H\}. \tag{3.51}$$

Definimos $\phi : G_1/\ker f \longrightarrow \mathrm{im} f$ por $\phi([x]) = f(x)$. Para $x' \in [x]$, existe $h \in \ker f$ tal que $x' = x + h$ e $f(x') = f(x + f) = f(x) + f(h) = f(x)$. Agora mostramos que ϕ é um isomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi([x] + [y]) &= \phi([x + y]) = f(x + y) \\ &= f(x) + f(y) = \phi([x]) + \phi([y]). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Se $\phi([x]) = \phi([y])$ temos $f(x) = f(y)$, ou seja, $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$,

$$\therefore x - y \in \ker f \in [x] = [y]. \tag{3.53}$$

Se $y \in \mathrm{im} f$, existe $x \in G_1$ tal que $f(x) = y = \phi([x])$. □

Definição 3.2. *Se G é finitamente gerado por r elementos linearmente independentes, G é chamado de Grupo Abeliano livre de "rank" r.*

Proposição 3.1. *Seja G um grupo abeliano livre de "rank" r e seja H $(\neq \emptyset)$ um sub grupo de G. Podemos sempre escolher p geradors $x_1, ..., x_p$, dos r $(p < r)$ geradores de G tal que $k_1x_1, ..., k_px_p$ geram H. Então $H \cong k_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus k_p\mathbb{Z}$ e H é de "rank" p.*

Teorema 3.5 (Teorema fundamental dos grupos abelianos gerados finitamente)**.** *Seja G um grupo abeliano gerado finitamente (não necessariamente livre) com m gera-dores. Então G é isomorfo à soma direta dos grupos cíclicos,*

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{r} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{k_p}, \tag{3.54}$$

onde $m = r + p$. O número r é chamado "rank" de G.

Demonstração. Seja G gerado por m elementos $x_1, ...x_m$ e seja o seguinte homomorfismo

$$f : \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{m} \longrightarrow G, \tag{3.55}$$

definido por

$$f(n_1, ..., n_m) \equiv n_1x_1 + ... + n_mx_m. \tag{3.56}$$

Sabemos que

$$\underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{m} / \ker f \cong G, \tag{3.57}$$

onde

$$\ker f \subset \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{m}. \tag{3.58}$$

Pela proposição acima temos

$$\ker f \cong k_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus k_p\mathbb{Z}. \tag{3.59}$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned} G &\cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus ...\oplus\mathbb{Z}}_{m}/\ker f \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus ...\oplus\mathbb{Z}}_{m}/k_1\mathbb{Z}\oplus ...\oplus k_p\mathbb{Z} \\ &\cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus ...\oplus\mathbb{Z}}_{m-p}\oplus\mathbb{Z}_{k_1}\oplus ...\oplus\mathbb{Z}_{k_p}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

□

Pela definição acima temos que $Z_r(K)$ e $B_r(K)$ são grupos abelianos livres, desde que sejam subgrupos de um grupo abeliano livre $C_r(K)$. No entanto, isto não significa que $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$ também seja um grupo abeliano livre. Portanto, pelo teorema (3.54), temos que

$$H_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z}\oplus ...\oplus\mathbb{Z}}_{f}\oplus\mathbb{Z}_{k_1}\oplus ...\oplus\mathbb{Z}_{k_p}. \tag{3.61}$$

Os f fatores formam um grupo abeliano livre de "rank" f e os p fatores são chamados de *subgrupos de torção* de $H_r(K)$. Como um exemplo, temos que o *plano projetivo* tem $H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2$ e a *garrafa de Klein* tem $H_1(K) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$. Num certo sentido, os subgrupos de torção detectam os "twisting" no poliedro $\mid K \mid$.

Grupos de homologia do tipo $H_r(K,\mathbb{Z})$ são mais fáceis de trabalhar do que grupos da forma $H_r(K,\mathbb{Z}_2)$ ou $H_r(K,\mathbb{R})$. Isso se deve ao fato de que $\mathbb{Z}_2$ não tem subgrupos triviais, e portanto o subgrupo de torção nunca pode ser reconhecido. No entanto, se empregarmos os coeficientes $\mathbb{R}$ também não podemos ver os subgrupos de torção, mas $\mathbb{R}/m\mathbb{R} \cong \{\emptyset\}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$,

$$\therefore H_r(K;\mathbb{R}) \cong \underbrace{\mathbb{R}\oplus ...\oplus\mathbb{R}}_{f}. \tag{3.62}$$

3.3.3 Números de Betti e Teorema de Euler-Poincaré

Definição 3.3. *Seja K um complexo simplicial. O número de Betti de ordem r $b_r(K)$ é definido por*

$$b_r(K) \equiv \dim H_r(K;\mathbb{R}). \tag{3.63}$$

Em outras palavras, $b_r(K)$ é o "rank" da parte abeliana livre de $H_r(K;\mathbb{Z})$

Segue abaixo um importante teorema que relaciona o número de Betti definido acima com a *característica de Euler* $\chi(X)$, sendo X um espaço topológico. Como um caso particular temos que a característica de Euler $\chi(X)$, para $X \in \mathbb{R}^3$ que é homeomorfo a um poliedro K, é definida por

$$\chi(X) \equiv (\#\quad \text{de vértices em}\quad K) - (\#\quad \text{de arestas em}\quad K) + (\#\quad \text{de faces em}\quad K). \tag{3.64}$$

Um importante teorema, devido a Poincaré e Alexander, garante que $\chi(X)$ é independente do poliedro K, tanto quanto K é homeomorfo a X, ou seja, $\chi(X)$ é um invariante topológico muito útil. Segue agora um teorema que generaliza o conceito da característica de Euler.

Teorema 3.6 (Euler-Poincaré)**.** *Seja K um complexo simplicial de n dimensões e I_r o número de r-simplexos em K. Então segue que*

$$\chi(X) \equiv \sum_{r=0}^{n}(-1)^r I_r = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r b_r(K). \tag{3.65}$$

Demonstração. Primeiramente consideremos o seguinte homomorfismo

$$\partial_r : C_r(K;\mathbb{R}) \longrightarrow C_{r-1}(K;\mathbb{R}). \tag{3.66}$$

Desde que o mapa acima seja um mapeamento linear entre espaços vetoriais, temos que

$$\begin{aligned} I_r &\equiv \dim C_r(K;\mathbb{R}) = \dim(\ker \partial_r) + \dim(\mathrm{im}\partial_r) \\ &= \dim Z_r(K;\mathbb{R}) + \dim B_{r-1}(K;\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Da definição (3.63) temos que

$$\begin{aligned} b_r(K) &= \dim H_r(K;\mathbb{R}) = \dim\left(Z_r(K;\mathbb{R})/B_r(K;\mathbb{R})\right) \\ &= \dim Z_r(K;\mathbb{R}) - \dim B_r(K;\mathbb{R}) \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned} \therefore \chi(X) &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r I_r = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\left(\dim Z_r(K;\mathbb{R}) + \dim B_{r-1}(K;\mathbb{R})\right) \\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \dim Z_r(K;\mathbb{R}) - \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \dim B_r(K;\mathbb{R}) \\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\left(\dim Z_r(K;\mathbb{R}) - \dim B_r(K;\mathbb{R})\right) \\ &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r b_r(K). \end{aligned} \tag{3.69}$$

□

Neste momento podemos voltar a falar de dualidade e resgatar o conceito envolvido na equação (3.36). Como o espaço $H^r(M)$ é isomorfo ao espaço $H_r(M)$, podemos definir um objeto $b^r(M)$ tal que

$$b^r(M) \equiv \dim H^r(M) = \dim H_r(M) = b_r(M) \tag{3.70}$$

$$\therefore \chi(X) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r b^r(M). \tag{3.71}$$

A expressão acima estabelece uma relação entre topologia e análise, onde o primeiro termo (lado esquerdo) é definido de tal forma a ser puramente topológico, ou seja, sua definição depende das estruturas fundamentais da construção da variedade M, enquanto que o segundo termo (lado direito) é determinado por condições analíticas estabelecidas no cálculo das forma diferenciais definidas sobre a variedade M. Um importatante resultado é estabelecido quando temos uma curvatura Riemanniana associada a um fibrado tangente TM, ou seja, um $SO(2n)$ fibrado principal, sobre uma variedade M de dimensão $2n$. Pode ser mostrado que a integral sobre M de um polinômio invariante chamado classe característica de Euler [32], $E(R) = \mathrm{Pfaff}R$, é um número inteiro relacionado com a cohomologia de M:

$$\chi(M) = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^n n!}\int_M E(R) = \sum_{r=0}^{2n}(-1)^r \dim H^r(M). \tag{3.72}$$

Este resultado é conhecido como *teorema de Gauss-Bonnet*.

3.4 Estrutura dos Grupos de Cohomologia de De Rham

3.4.1 Dualidade de Poincaré

Seja M uma variedade compacta de m dimensões e $\omega \in H^r(M)$ e $\eta \in H^{m-r}(M)$ e notemos que $\omega \wedge \eta$ é um elemento de volume. Definimos o seguinte produto interno,

$$\begin{aligned} \langle \quad , \quad \rangle \ : \ & H^r(M) \times H^{m-r}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle \omega, \eta \rangle \equiv & \int\limits_M \omega \wedge \eta. \end{aligned} \tag{3.73}$$

O produto $\langle \quad , \quad \rangle$ é bilinear e não-singular, ou seja, se $\omega \neq 0$ e $\eta \neq 0$ temos $\langle \omega, \eta \rangle \neq 0$. A definição (3.73) estabelece a dualidade entre $H^r(M)$ e $H^{m-r}(M)$,

$$H^r(M) \cong H^{m-r}(M), \tag{3.74}$$

que é chamada de *dualidade de Poincaré*.

Por definição sabemos que $b^r(M) = \dim H^r(M)$ e de acordo com a definição da dimencionalidade das formas diferenciais temos que $\dim \Lambda^r(M) = \dim \Lambda^{m-r}(M)$, ou seja, $\dim H^r(M) = \dim H^{m-r}(M)$,

$$\therefore b^r(M) = b^{m-r}(M). \tag{3.75}$$

Para um espaço de dimensão impar temos

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_r (-1)^r b^r = \frac{1}{2} \left\{ \sum_r (-1)^r b^r + \sum_r (-1)^{m-r} b^{m-r} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_r (-1)^r b^r - \sum_r (-1)^{-r} b^r \right\} = 0. \end{aligned} \tag{3.76}$$

3.4.2 Anéis de Cohomologia

Seja $[\omega] \in H^q(M)$ e $[\eta] \in H^r(M)$. Definimos o produto

$$[\omega] \wedge [\eta] \equiv [\omega \wedge \eta]. \tag{3.77}$$

Como $\omega \wedge \eta$ é fechado, temos que $[\omega] \wedge [\eta] \in H^{q+r}(M)$. Além disso temos que $[\omega] \wedge [\eta]$ é independente da escolha das representações de $[\omega]$ e $[\eta]$: para $\omega' = \omega + d\psi$ temos

$$\begin{aligned} [\omega'] \wedge [\eta] &= [(\omega + d\psi) \wedge \eta] = [\omega \wedge \eta + d\psi \wedge \eta] \\ &= [\omega \wedge \eta + d(\psi \wedge \eta)] = [\omega \wedge \eta]. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Portanto $\wedge : H^q(M) \times H^r(M) \longrightarrow H^{q+r}(M)$ é bem definido.

Os *anéis de cohomologia* são definidos por

$$H^*(M) \equiv \bigoplus_{r=1}^{m} H^r(M), \tag{3.79}$$

onde temos o produto que define a álgebra

$$\wedge : H^*(M) \times H^*(M) \longrightarrow H^*(M). \tag{3.80}$$

4. COHOMOLOGIA EQUIVARIANTE E PRINCÍPIO DE LOCALIZAÇÃO

Um importante objetivo deste capítulo está em compreender como localizar integrais oscilatórias do tipo $\int_M d\mu e^{iTH}$, as quais representam uma transformada de Fourier-Laplace de algumas medidas bem definidas $d\mu$ sobre uma variedade M em termos de funções diferenciáveis H. Um método comum para calcular tais integrais é o método de *aproximação de fase estacionária*, ou método *aproximação do ponto de sela*, o qual expressa o fato de que para grandes valores do parâmetro T a principal contribuição vem dos pontos críticos de H.

Primeiramente é necessário estabelecer um conceito geral de cohomologia equivariante, o qual é fundamental para compreender teorias gerais de localização via o teorema de Berline-Vergne. Colocando isto num contexto de geometria simplética, é possível estabelecer um critério para aproximações de fase estacionária para integrais oscilatórias serem cálculadas exatamente, o que é um forte teorema estabelecido por Duistermaat-Heckman.

4.1 Princípios Básicos

4.1.1 Exemplo: Esfera S^2

Primeiramente vamos considerar um exemplo mais simples de localização. Seja S^2 uma 2-esfera de raio unitário imersa em $\mathbb{R}^3$. Por conveniência, vamos convencionar a esfera com o seu ponto inferior tangenciando o plano xy, centrada em $z = a$ e simetricamente em torno do eixo z. Ou seja, podemos representar as suas coordenadas por

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta\cos\phi \\ y &= \sin\theta\sin\phi \\ z &= a - \cos\theta; \qquad 0 \le \theta \le \pi \quad e \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + (z-a)^2 = 1\}. \tag{4.2}$$

A função que mede a altura de um ponto da esfera com relação ao plano xy é dada por

$$h_0(\theta, \phi) = a - \cos\theta. \tag{4.3}$$

Estamos interessados em calcular a seguinte integral oscilatória,

$$Z_0(T) = \int d\Omega e^{iTh_0(\theta,\phi)} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \sin\theta e^{iTh_0(\theta,\phi)}. \tag{4.4}$$

A medida de integração representa o volume sobre S^2 e T é algum parâmetro real. Vamos calcular explicitamente esta integral:

$$\begin{aligned} Z_0(T) &= 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta e^{iT(a-\cos\theta)} \\ &= \frac{2\pi i}{T}\left(e^{iT(a-1)} - e^{iT(a+1)}\right) = \frac{4\pi}{T} e^{iTa}\sin T. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Podemos tirar importantes conclusões das características apresentadas no resultado (4.5). O primeiro deles é que a função $Z_0(T)$ pode ser expressa apenas como a soma de dois termos, os quais estão relacionados aos dois extremos da função (4.3), ou seja, o ponto de máximo no pólo norte e o ponto de mínimo no pólo sul. O sinal de menos entre os dois termos surge da signatura da matriz Hessiana de h_0, onde o máximo contribui com um sinal negativo e o mínimo com um sinal positivo. O fator $2\pi i/T$ pode ser compreendido como a contribuição do determinante 1-*loop* quando (4.3) é expandido em ordens quadráticas de (θ, ϕ) e então a aproximação WKB é utilizada. A segunda caracaterística é devida à simetria entre a medida de integração globalmente definida e a função no integrando, sendo responsável para um simples cálculo de (4.4). Isto quer dizer que existe uma independência com relação à coordenada ϕ, a qual é representada por uma invariância sob as translações $\phi \to \phi + \phi_0$, onde $\phi_0 \in [0, 2\pi)$, geradas por um grupo $U(1) \sim S^1$. Portanto, a existência de um grupo de simetria agindo sobre S^2, o qual serve como um mecanismo para a *localização* de $Z_0(T)$ sobre os pontos estacionários de h_0, fornece-nos uma indicação de que poderíamos compreender estes procedimentos explorando características globais não triviais do espaço quociente S^2/S^1:

$$S^2/U(1) \simeq [0, 1]. \tag{4.6}$$

4.1.2 Modelo de Cartan para Cohomologia Equivariante

Primeiramente vamos relembrar o que a ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M. Representamos esta ação à esquerda pelo seguinte mapa,

$$\begin{aligned} &G \times M \to M \\ &(g, x) \mapsto g.x, \qquad g \in G \quad e \quad x \in M. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para um $g \in G$ fixo, a função $x \to g.x$ é um difeomorfismo sobre M. Um exemplo de uma ação deste tipo pode ser encontrada no contexto de Teoria Quântica de Campos Topológica, onde M pode ser visto como o espaço das conexões de uma teoria de gauge e G é o grupo de transformações de gauge. O espaço M modulado pela a ação do grupo é conhecido como *espaço modulo* das órbitas de gauge.

Aqui estamos interessados em compreender a cohomologia de M dada a ação do grupo G, o que implicará no que chamaremos de *cohomologia G-equivariante* [8]. O espaço das órbitas M/G é uma classe de equivalência $\{x \sim x' | x' = g.x, g \in G\}$, e a sua topologia é uma topologia induzida de M. Portanto, temos aqui uma importante definição dos grupos de cohomologia equivariante:

Definição 4.1. *Se a G-ação sobre M é livre, ou seja, $g.x = x \Leftrightarrow g = e, \forall x \in M$, então o espaço das órbitas M/G é também uma variedade diferenciável de dimensão $dimM - dimG$ e a cohomologia G-equivariante de M é simplesmente definida como a cohomologia de De Rham do espaço quociente M/G,*

$$H^k_G(M) \equiv H^k(M/G). \tag{4.8}$$

Para uma ação de um grupo que não é livre, é necessário tomarmos alguns cuidados pois o espaço pode ficar singular. A dimensão da órbita $G.x = \{g.x | g \in G\}$ de um ponto $x \in M$ é $\dim G - \dim G_x$, onde $G_x = \{g \in G | g.x = x\}$ é o subgrupo de isotropias. Se M/G é singular, denominamos-lo de *orbifold*.

O entendimento completo da cohomologia equivariante consiste agora em procurar definir uma forma diferencial sobre uma variedade M, a qual a informação da ação de um grupo G está contida. Desta forma, consideremos um mapa $f : M_1 \to M_2$ entre duas variedades diferenciáveis com uma G-ação sobre elas. Dizemos que o mapa f é equivariante com relação à ação do grupo G se

$$f(g.x) = g.f(x), \qquad \forall x \in M_1 \quad e \quad \forall g \in G. \tag{4.9}$$

Agora vamos estender este conceito para formas diferenciais. Para essa extensão, consideremos funções polinomiais da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $G = \exp(\mathfrak{g})$ na álgebra exterior $\Lambda M \equiv \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k M$ da variedade M. Representaremos essas funções como elementos pertencentes à álgebra $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda M$, onde $S(\mathfrak{g}^*)$ é a álgebra simétrica sobre o espaço vetorial dual à $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$, ou seja, a álgebra das funções polinomiais sobre $\mathfrak{g}$. Logo, a ação de $g \in G$ sobre um elemento $\alpha \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda M$ é dada por

$$(g.\alpha)(X) = g.\left(\alpha(\mathrm{Ad}_{(g^{-1})}.X)\right) = g.\left(\alpha(g^{-1}Xg)\right), \tag{4.10}$$

onde $X \in \mathfrak{g}$. Portanto, de (4.10) segue que (4.9) é satisfeita para mapas do tipo $\alpha : \mathfrak{g} \to \Lambda M$ na sub-álgebra G-equivariante $\Lambda_G M = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda M)^G$. Os elementos que pertencem à $\Lambda_G M$ são chamados *formas diferenciais equivariantes* e satisfazem a relação

$$\alpha(\mathrm{Ad}_g.X) = g.\alpha(X). \tag{4.11}$$

Em termos da álgebra de Lie, os elementos de G são representados na seguinte forma exponencial,

$$g = e^{c^a X^a}, \tag{4.12}$$

onde c^a são constantes e $\{X^a\} = \{(\partial/\partial c^a)g|_{c=0}\}$ é o conjuntos dos geradores da álgebra $\mathfrak{g}$, os quais são vistos como uma base do espaço tangente na identidade sobre a variedade do grupo de Lie G. Sabemos que os elementos do conjunto $\{X^a\}$ satisfazem a condição $[X^a, X^b] = f^{abc}X^c$, onde f^{abc} são constantes de estrutura e definem a representação adjunta de G, $(\mathrm{Ad}X^a)_{bc} = if^a{}_{bc}$.

Como já sabemos dos capítulos anteriores, a ação do grupo G sobre a variedade M é representada localmente por fluxos contínuos,

$$g_t.x = x(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.13}$$

A ação induzida sobre as formas diferenciais são dadas por

$$(g_t.\alpha)(x) = \alpha(x(t)). \tag{4.14}$$

Por exemplo, para $f \in \Lambda^0 M$ temos uma ação que representa o fluxo do grupo sobre funções diferenciáveis $C^\infty(M)$,

$$(g_t.f)(x) = f(x(t)) = e^{tV(x(t))}f(x), \tag{4.15}$$

onde $V(x(t)) = V^\mu(x(t))\partial/\partial x^\mu = \dot{x}^\mu(t)\partial/\partial x^\mu$ é um campo vetorial o qual define as curvas de simetria sobre M, uma vez que os seus componentes representam os geradores da álgebra $\mathfrak{g}$ na variedade. Sabemos também que a G-ação infinitesimal sobre as formas de mais alto grau é gerada pela derivada de Lie ao longo do campo vetorial V, $\mathcal{L}_V = di_V + i_V d$, a qual preserva a estrutura da álgebra de Lie,

$$\left[\mathcal{L}_{V^a}, \mathcal{L}_{V^b}\right](\alpha) = f^{abc}\mathcal{L}_{V^c}(\alpha), \qquad \forall \alpha \in \Lambda M. \tag{4.16}$$

Com as considerações preliminares que temos até o presente momento, os elementos básicos para definir o modelo de Cartan para a G-cohomologia equivariante já estão colocados. Por definição, o grau de uma forma diferencial equivariante é a soma do grau da forma ordinária e duas vezes o grau polinomial da parte $S(\mathfrak{g})$. Denotaremos $\{\phi^a\}_{a=1}^{\dim G}$ como o conjunto das bases do espaço $\mathfrak{g}^*$ tal que $\phi^a(X^b) = \delta^{ab}$. Definimos um mapa linear sobre a álgebra $\Lambda_G M = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Lambda M)^G$,

$$d_{\mathfrak{g}} : \Lambda_G^k M \to \Lambda_G^{k+1} M, \tag{4.17}$$

por

$$d_{\mathfrak{g}}\phi^a = 0, \qquad d_{\mathfrak{g}}\alpha = (\mathbf{1} \otimes d - \phi^a \otimes i_{V^a})\alpha, \qquad \alpha \in \Lambda M \tag{4.18}$$

$$\Rightarrow (d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = (d - i_V)(\alpha(X)). \tag{4.19}$$

O quadrado do operador $d_{\mathfrak{g}}$ resulta na identidade de Cartan-Weil,

$$d_{\mathfrak{g}}^2 = -\phi^a \otimes (di_{V^a} + i_{V^a}d) = -\phi^a \otimes \mathcal{L}_{V^a}. \tag{4.20}$$

O operador $d_{\mathfrak{g}}$ é nilpotente se, e somente se, está agindo sobre a álgebra $\Lambda_G M$ das formas diferenciais equivariantes. Então o conjunto das álgebras G-invariantes $\{\Lambda_G^k M\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ e as derivadas $d_{\mathfrak{g}}$ definem o complexo G-equivariante da variedade M. Como no caso da cohomologia de De Rham, definição (3.1), podemos analisar o quociente entre o espaço das formas fechadas equivariantemente, $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$, pelo espaço das formas exatas equivariantemente, $\alpha = d_{\mathfrak{g}}\beta$,

$$H_G^k(M) = \ker d_{\mathfrak{g}}|_{\Lambda_G^k M} / \mathrm{im} d_{\mathfrak{g}}|_{\Lambda_G^{k-1} M}, \tag{4.21}$$

chamado *Grupo de Cohomologia G-Equivariante de M*, conhecida também como modelo de Cartan. Segue das definições acima que, se o grupo G é trivial, ou seja, se G consiste apenas do elemento identidade, concluímos que $H_G^k(M)$ coincide com o grupo de cohomologia de De Rham. Também temos que a cohomologia G-equivariante de um ponto é a álgebra dos polinômios G-invariantes sobre o espaço $\mathfrak{g}$, ou seja, $H_G(pt) = S(\mathfrak{g}^*)^G$.

4.1.3 Fibrados do Ponto de Vista Equivariante

Sabemos da definição (2.20) que localmente o fibrado é trivial, mas a sua estrutura global pode ser "twisted" em muitas formas. Uma forma de medirmos a não-trivialidade dos fibrados é analisarmos as classes de cohomologia do espaço base sobre o qual o fibrado é definido. Essas classes de cohomologia são chamadas *classes características* [11, 32], onde a sua não-trivialidade implica em uma estrutura de fibrados não-trivial. Essas noções podem ser estendidas para o caso que estamos propondo de cohomologia equivariante de uma variedade, o qual implicará no estudo de fibrados equivariantes. Podemos dizer que um fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ é G-equivariante se existem G-ações sobre o espaço total E e a variedade M tais que

$$g.\pi(x) = \pi(g.x), \qquad \forall x \in E \quad e \quad g \in G, \tag{4.22}$$

onde π é o mapa das projeções do espaço total para a variedade. Sendo assim, vamos agora definir o espaço das formas diferenciais sobre M e que assumem valores no fibrado por

$$\Lambda^k(M, E) \equiv \Lambda^k M \otimes E. \tag{4.23}$$

Portanto, podemos dizer que a ação do grupo G sobre as formas diferenciais com valores assumidos no fibrado é gerada pela derivada de Lie $\mathcal{L}_V$.

No caso onde consideramos a cohomologia de De Rham, as não trivialidades do fibrados aparecem devido à necessidade de especificar como conectar as diferentes fibras. Isto é feito utilizando um objeto geométrico definido sobre M que assume valores em E. Este objeto é chamado conexão e a sua ação sobre as seções do fibrado especifica o transporte paralelo ao longo das fibras de acordo com a informação da derivada covariante,

$$\nabla \equiv d + \Gamma. \tag{4.24}$$

A escolha da conexão equivale a escolha do componente horizontal H_p do espaço tangente ao ponto $p \in E$, $T_pE = V_p \oplus H_p$. Quando estamos olhando para o fibrado principal $P \xrightarrow{\pi} M$, como discutido na subseção (2.5.2), onde a fibra típica é o próprio grupo de estrutura G, requeremos, além da divisão do espaço tangente em $T_pP = V_p \oplus H_p$, que os componentes V_p e H_p sejam G-equivariantes. Portanto temos que $H_p \to H_{p.g}$ sob a ação de $g \in G$. O espaço vertical é isomórfico à álgebra do grupo G, $V_p \cong \mathfrak{g}$, o que implica que uma conexão Γ é uma 1-forma globalmente definida com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, ou seja, $\Gamma \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$.

Quando temos um fibrado G-equivariante, assumimos que a derivada covariante é G-invariante e esta informação é dada por,

$$[\nabla, \mathcal{L}_{V^a}] = 0. \tag{4.25}$$

Relembrando a definição de derivada exterior equivariante (4.18), generalizamos a derivada covariante do seguinte modo:

$$\nabla_{\mathfrak{g}}\alpha = (\mathbf{1} \otimes \nabla - \phi^a \otimes i_{V^a})\alpha, \tag{4.26}$$

onde $\alpha \in \Lambda_G(M, E)$. Da identidade de Cartan-Weil (4.20), definimos a curvatura equivariante da conexão (4.26),

$$F_{\mathfrak{g}} = (\nabla_{\mathfrak{g}})^2 + \phi^a \otimes \mathcal{L}_{V^a}, \tag{4.27}$$

onde de (4.25) temos a identidade de Bianchi

$$[\nabla_{\mathfrak{g}}, F_{\mathfrak{g}}] = 0. \tag{4.28}$$

Vamos agora explicitar a curvatura (4.27),

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{g}} &= (\mathbf{1} \otimes \nabla - \phi^a \otimes i_{V^a})^2 + \phi^a \otimes \mathcal{L}_{V^a} \\ &= \nabla^2 + (\phi^a \otimes i_{V^a})^2 - [\phi^a \otimes i_{V^a}, \mathbf{1} \otimes \nabla] + \phi^a \otimes \mathcal{L}_{V^a} \\ &= F + \phi^a \otimes \mathcal{L}_{V^a} - [\phi^a \otimes i_{V^a}, \mathbf{1} \otimes \nabla] \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\Rightarrow F_{\mathfrak{g}} = F + \mu, \tag{4.30}$$

onde

$$\mu \equiv \phi^a \otimes \mathcal{L}_{V^a} - [\phi^a \otimes i_{V^a}, \mathbf{1} \otimes \nabla] \tag{4.31}$$

é o *mapa momento* da G-ação com respeito à conexão ∇. O mapa momento é uma extensão G-equivariante da 2-forma curvatura ordinária, $F = \nabla^2 = dA + 1/2[A, A]$, de uma 2-forma covariantemente fechada, $[\nabla, F] = dF + [A, F] = 0$, para uma equivariante fechada no sentido de (4.28).

Avaliando o valor de (4.27) com relação à $X \in \mathfrak{g}$ temos

$$F_{\mathfrak{g}}(X) = F + \mu(X) \equiv F + \mu_V \equiv F_V, \tag{4.32}$$

onde $V \in TM \otimes W$, sendo W o espaço para uma representação ρ de G. Portanto,

$$\mu_V = \mathcal{L}_V - [i_V, \nabla]. \tag{4.33}$$

Localmente, consideramos que o mapa momento é dado por

$$\mu : \Lambda U \otimes W \to \mathfrak{g}^*, \tag{4.34}$$

onde U é um aberto de M. De (4.28) temos

$$[\nabla_{\mathfrak{g}}, F_{\mathfrak{g}}] = [\mathbf{1} \otimes \nabla, \mu] - [\phi^a \otimes i_{V^a}, \mathbf{1} \otimes F] = 0 \tag{4.35}$$

$$\therefore \nabla\mu_V = i_V F. \tag{4.36}$$

4.1.4 Princípio de Localização

Seja M uma variedade diferenciável, orientável, compacta e sem fronteira. Denotemos V como sendo um campo vetorial sobre M o qual corresponde à alguma ação do grupo ciclo, $G = U(1) \sim S^1$, sobre M. Neste caso o fator multiplicador $\phi \in S(\mathfrak{u}(1)^*)$ em (4.18), o qual é um funcional linear sobre a álgebra de Lie unidimensional do grupo $U(1)$, não será importante para o que se segue. Por conveniência adotaremos $\phi = -1$. Portanto, para uma $U(1)$-ação livre sobre M temos $(S(\mathfrak{u}(1)^*) \otimes \Lambda M)^{U(1)} = S(\mathfrak{u}(1)^*) \otimes \Lambda(M/U(1))$ como o espaço das forma equivariantes. A cohomologia equivariante corresponde à analise da derivada exterior equivariante denotada por

$$d_{\mathfrak{u}(1)} \equiv d_V = d + i_V \tag{4.37}$$

agindo sobre a álgebra

$$\Lambda_V M = \{\alpha \in \Lambda M | \mathcal{L}_V \alpha = 0\}. \tag{4.38}$$

Veremos que este é um ponto fundamental para as teorias de localização, o que quer dizer que a cohomologia equivariante é apenas determinada pelos pontos fixos de uma G-ação. Mais especificamente, veremos como tirar toda informação necessária do seguinte conjunto de pontos,

$$M_V = \{x \in M | V(x) = 0\}. \tag{4.39}$$

O nosso objetivo neta seção é, dada uma integral do tipo $\int_M \alpha$ sobre a variedade M de uma forma diferencial equivariantemente fechada $\alpha \in \Lambda_V M$, $d_V \alpha = 0$, desejamos mostrar que esta integral depende somente do conjunto pontos fixos (4.39) da $U(1)$-ação sobre M. Para isto, seja λ uma forma diferencial restrita ao espaço $M - M_V$, tal que $d_V \lambda = \alpha$. Esta condição implica que a forma α é equivariantemente exata fora da região (4.39). Desde que a integração de α sobre M é feita para os componentes $\alpha_{[\dim M]}$ e $\partial M = \emptyset$ por construção, segue do teorema de Stokes (3.11) que $\int_M \alpha$ tem contribuições de uma vizinhança de M_V em M.

A construção de λ é devida à restrições geométricas sobre a variedade M. Precisamos aqui de condições de simetria sobre M, como estabelecida pela definição (2.5), a qual é especificada se assumimos uma estrutura Riemanniana globalmente definida e $U(1)$-invariante, ou seja, M admite um tensor métrico $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ que é invariante sob a ação de grupo $U(1)$ gerada por V,

$$\mathcal{L}_V g = 0. \tag{4.40}$$

Explicitando as coordenadas, como feito para (2.57), temos

$$g_{\mu\lambda} \nabla_\nu V^\lambda + g_{\nu\lambda} \nabla_\mu V^\lambda = 0. \tag{4.41}$$

Como sabemos da subseção (2.2.3), os campos vetoriais que satisfazem a equação (4.40) são os campos de Killing, os quais são geradores do grupo de isometrias sobre M. Devido a dualidade definida pelo tensor métrico, temos que a 1-forma dual ao campo V é dada por

$$\beta = g(V, \cdot) = g_{\mu\nu}(x) V^\nu(x) dx^\mu, \tag{4.42}$$

onde podemos aplicar o operador (4.20) que resulta em

$$d_V^2 \beta = \mathcal{L}_V \beta = \mathcal{L}_V g(V, \cdot) = (\mathcal{L}_V g)(V, \cdot) + g(\mathcal{L}_V V, \cdot) = 0. \tag{4.43}$$

Portanto, β é uma 1-forma diferencial equivariante. Podemos também aplicar sobre β (4.37) e separar o resultado em duas partes importantes dadas por

$$\begin{aligned} d_V \beta &\equiv \Omega_V + K_V \\ &= (d + i_V) g(V, \cdot) = d\beta + g(V, V), \end{aligned} \tag{4.44}$$

onde

$$\Omega_V = d\beta = dg(V,\cdot) \Rightarrow (\Omega_V)_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\nabla_\nu V^\lambda - g_{\nu\lambda}\nabla_\mu V^\lambda \tag{4.45}$$

e

$$K_V = g(V,V) = g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x). \tag{4.46}$$

Logo, fora da região (4.39) temos $K_V \neq 0$, e portanto segue que $d_V\beta$ é inversível sobre $M - M_V$. Agora definimos uma forma diferencial não-homogênea por

$$\xi \equiv \beta(d_V\beta)^{-1}, \tag{4.47}$$

onde segue que sobre $M - M_V$ temos

$$d_V\xi = d_V\beta(d_V\beta)^{-1} - \beta(d_V\beta)^{-2}d_V^2\beta = 1 \tag{4.48}$$

e

$$\mathcal{L}_V\xi = \mathcal{L}_V\beta(d_V\beta)^{-1} - \beta(d_V\beta)^{-2}\mathcal{L}_V d_V\beta = 0. \tag{4.49}$$

Logo definimos a forma λ pela qual estávamos procurando,

$$\lambda \equiv \xi\alpha, \tag{4.50}$$

onde

$$\alpha = 1.\alpha = (d_V\xi)\alpha = d_V(\xi\alpha). \tag{4.51}$$

Um outro ponto importante para a teoria de localização equivariante é dado em termos de argumentos de cohomologia. Vamos considerar uma forma ordinária fechada ω, $d\omega = 0$, e uma outra forma qualquer λ, tal que

$$\int_M (\omega + d\lambda) = \int_M \omega. \tag{4.52}$$

Como $\omega' \equiv \omega + d\lambda$ também é fechado, $d\omega = 0$, temos que a integral depende somente da classe de cohomologia definida por ω. Desde que, para uma G-ação sobre M, a integração de uma forma diferencial toma somente os componentes de maior ordem, para qualquer forma diferencial α fechada equivariantemente podemos usar o teorema de Stokes (3.11),

$$\int_M (\alpha + d_{\mathfrak{g}}\lambda) = \int_M \alpha. \tag{4.53}$$

A integração de uma forma diferencial equivariante, a qual depende apenas das classes de cohomologia equivariante, define dado por $\int_M : H_G(M) \to S(\mathfrak{g}^*)^G$, onde

$$\left(\int_M \alpha\right)(X) = \int_M \alpha(X), \qquad X \in \mathfrak{g} \quad e \quad \int_M \alpha \in S(\mathfrak{g}^*)^G. \tag{4.54}$$

Vamos considerar a forma β como definida por (4.42), a qual é fundamental para a análise da integral que se segue:

$$Z(s) \equiv \int_M \alpha e^{-sd_V\beta}, \qquad s \in \mathbb{R}^+. \tag{4.55}$$

Podemos notar que se tomarmos o limite para $s \to 0$ temos como resultado a simples integral da forma α sobre M, ou seja, $\int_M \alpha$. Olhando o resultado (4.44) podemos analisar o limite para $s \to \infty$. Substituindo $d_V\beta = d\beta + |V|^2$ na integral (4.55), vemos que o resultado é uma gaussiana em V e, portanto, quando tomamos o limite $s \to \infty$ em (4.55) temos uma forma gaussiana crescentemente afinada em torno de $M_V \subset M$. Uma outra propriedade interessante de (4.55) é a sua independência com relação ao parâmetro s, a qual pode ser vista se derivarmos (4.55) com relação a s:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}Z(s) &= -\int_M \alpha(d_V\beta)e^{-sd_V\beta} = -\int_M d_V(\beta\wedge\alpha)e^{-sd_V\beta} \\ &= -\int_M \beta d_V\left(\alpha e^{-sd_V\beta}\right) = s\int_M \beta\wedge\alpha(\mathcal{L}_V\beta)e^{-sd_V\beta} = 0,\end{aligned} \tag{4.56}$$

onde usamos

$$(4.47) \quad \text{em} \quad (4.51) \Rightarrow \alpha = d_V\left(\frac{\beta\wedge\alpha}{d_V\beta}\right) = \frac{d_V(\beta\wedge\alpha)}{d_V\beta} \tag{4.57}$$

e

$$\mathcal{L}_V\beta = 0. \tag{4.58}$$

Uma vez que (4.55) é independente de s, concluímos que o limite $s \to \infty$ resulta em

$$\lim_{s\to\infty}\int_M \alpha e^{-sd_V\beta} = \int_M \alpha. \tag{4.59}$$

A integral (4.59) estabelece o princípio de localização de $\int_M \alpha$ no subespaço dos pontos fixos (4.39).

4.1.5 O Teorema de Berline-Vergne

O subespaço dos pontos fixos M_V (4.39) da $U(1)$-ação sobre M consiste de pontos isolados e discretizados. É importante ressaltar que, se M é compacta, então M_V é um conjunto finito de pontos. Também é possível estabelecer princípios de localização para variedades não compactas, mas para isto é necessário um formalismo mais complexo que utiliza teoria de distribuições e conjuntos de poliedros.

É conveniente tentarmos reescrever o lado esquerdo de (4.59), e para isto vamos introduzir um novo conjunto de variáveis que anti-comutam, ou seja, variáveis fermiônicas ψ^μ tais que

$$\psi^\mu\psi^\nu = -\psi^\nu\psi^\mu \tag{4.60}$$

e que geram a álgebra exterior ΛM. Portanto, identificaremos $\{\psi^\mu\}_{\mu=1}^m$ com o conjunto de bases locais $\{dx^\mu\}_{\mu=1}^m$, sendo m a dimensão da variedade M. Agora $\Lambda^k M$ é gerado por $\{\psi^\mu\}_{\mu=1}^k$ e esta definição torna ΛM numa álgebra de Grassmann gradeada com os seus geradores $\{\psi^\mu\}_{\mu=1}^n$ tendo gráu 1. Vamos supor que

$$\alpha = \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} + ... + \alpha^{(m)}, \qquad \alpha^{(k)} \in \Lambda^k M, \tag{4.61}$$

$$\therefore \alpha^{(k)}(x,\psi) \equiv \alpha^{(k)}{}_{\mu_1...\mu_k}(x)\psi^{\mu_1}...\psi^{\mu_k}, \tag{4.62}$$

onde $\alpha(x,\psi)$ são funções que tomam valores sobre o fibrado exterior, o qual é considerado como uma super-variedade $M\otimes\Lambda M$ $2m$-dimensional com coordenadas locais (x,ψ).

A integração das formas diferenciais é agora realizada de acordo com as regras de integração de Berezin para variáveis grassmanianas (apêndice **A**). Estas regras são dadas por

$$\int d\psi^\mu\psi^\mu = 1 \quad e \quad \int d\psi^\mu = 0. \tag{4.63}$$

Uma integral muito útil, a qual pode ser derivada das regras (4.63), é dada por

$$\int d^m\psi e^{\frac{1}{2}\psi^\mu A_{\mu\nu}\psi^\nu} = \det A^{1/2} = \mathrm{Pfaff}A, \tag{4.64}$$

onde $d^m\psi = d\psi^m d\psi^{m-1}...d\psi^1$ e $A_{\mu\nu}$ são os elementos de uma matriz anti-simétrica de ordem $2m$. As regras de diferenciação são tais que (4.63) são vistas como anti-derivadas, o que segue a seguinte regra

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\psi^\mu}, \psi^\nu\right\} = \delta^\nu_\mu. \tag{4.65}$$

Com as regras (4.63) e (4.65) temos

$$\int d\psi^\mu \frac{d}{d\psi^\mu} f(\psi^\mu) = 0 \quad \text{desde que} \quad \int d\psi^\mu f(\psi^\mu) = \frac{d}{d\psi^\mu} f(\psi^\mu). \tag{4.66}$$

Agora estamos prontos para reescrever (4.59) e calculá-la explicitamente. Segue de (4.44) que

$$\int_M \alpha = \lim_{s\to\infty} \int_{M\otimes\Lambda^1 M} d^m x d^m\psi \alpha(x,\psi) \exp\left[-\frac{s}{2}\psi^\mu(\Omega_V)_{\mu\nu}(x)\psi^\nu - s g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x)\right], \tag{4.67}$$

onde $d^m x d^m\psi$ é a medida de integração sobre o espaço $M\otimes\Lambda^1 M$ e $d^m x = dx^1\wedge ...\wedge dx^m$. O cálculo da integral (4.67) no limite $s\to\infty$ é feita utilizando as seguintes representações da função delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \delta(\psi) &= \lim_{s\to\infty}(-s)^{-m/2}\frac{1}{\mathrm{Pfaff}\Omega_V} e^{-\frac{s}{2}\psi^\mu(\Omega_V)_{\mu\nu}(x)\psi^\nu} \\ \delta(V) &= \lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{\pi}\right)^{m/2}\sqrt{\det g} e^{-s g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x)}, \end{aligned} \tag{4.68}$$

as quais podem ser verificadas das identidades

$$\begin{aligned} \int d^m\psi\delta(\psi) &= 1 \\ \int d^m x\delta(V) &= 1. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Substituindo a informação contida na equação de Killing (4.41) em (4.45) temos

$$(\Omega_V)_{\mu\nu} = 2g_{\mu\lambda}\nabla_\nu V^\lambda. \tag{4.70}$$

Usando (4.68) em (4.67) temos

$$\int_M \alpha = \lim_{s\to\infty}\int_{M\otimes\Lambda^1 M} d^m x d^m\psi\alpha(x,\psi)\frac{\mathrm{Pfaff}\Omega_V(x)}{\sqrt{\det g(x)}}\delta(\psi)\delta(V). \tag{4.71}$$

A integração sobre o espaço $\Lambda^1 M$ cancela a dependência de todos os componentes da k-formas da forma α, exceto a parte da função C^∞, $\alpha^{(0)}(x)\equiv\alpha(x,0)$. Além disso, temos também que a integração sobre M é responsável por localizar a integral (4.71) em uma soma sobre os pontos de M_V. Para explicitar este resultado, temos que considerar o fator jacobiano $|\det dV(p)|$ da transformação de coordenadas $x\to V(x)$, onde a função delta $\delta(V(x))$ é vista como uma soma de funções deltas $\sum_p \delta(x-p)$, para $p\in M_V$.

Proposição 4.1. *Seja $g(x)$ uma função com zeros simples sobre o eixo real. Então*

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x), \qquad a>0 \tag{4.72}$$

e

$$\delta(g(x)) = \sum_a \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}, \qquad g(a)=0 \quad e \quad g'(a)\neq 0 \tag{4.73}$$

Demonstração.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)dy = \frac{1}{a}f(0). \tag{4.74}$$

No próximo caso é necessário considerar apenas as contribuições da soma sobre pequenos intervalos contendo os zeros de $g(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(g(x))dx &= \sum_a \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(g(x))dx \\
&\approx \sum_a \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(g(a)+(x-a)g'(a))dx = \sum_a \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta((x-a)g'(a))dx \\
&= \sum_a \frac{1}{|g'(a)|}\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x-a)dx.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

□

Substituindo (4.70) em (4.71) e observando que $\nabla V(p) = dV(p)$ e $\mathrm{Pfaff}\Omega_V(p) = \sqrt{\det \Omega_V} = 2^{m/2}\sqrt{\det(dV(p))\det(g(p))}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_M \alpha &= (-\pi)^{m/2} \sum_{p\in M_V} \frac{\alpha^{(0)}(p)}{|\det dV(p)|}\frac{\mathrm{Pfaff}\Omega_V(p)}{\sqrt{\det g(p)}} \\
&= (-2\pi)^{m/2} \sum_{p\in M_V} \frac{\alpha^{(0)}(p)}{\mathrm{Pfaff} dV(p)}.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Um outro ponto importante está em observarmos a informação de simetria da derivada de Lie como uma transformação linear, ou seja, para $V^\mu(p) = 0$ temos que

$$\mathcal{L}_V W|_{x=p} \equiv L_V(p)W = \partial_\nu V^\mu(p) W^\nu(p)\partial_\mu|_{x=p} \to dV(p). \tag{4.77}$$

Portanto temos a fórmula de localização estabelecida por Berline e Vergne:

$$\int_M \alpha = (-2\pi)^{m/2} \sum_{p\in M_V} \frac{\alpha^{(0)}(p)}{\mathrm{Pfaff} L_V(p)}. \tag{4.78}$$

4.2 Teoria de Localização de Dimensão Finita para Sistemas Dinâmicos

4.2.1 Extensão Equivariante Sobre Variedades Simpléticas

Seja G um grupo de Lie que age sobre uma variedade simplética M, descutida na subseção (2.3.4), onde a álgebra de G é gerada por vetores $\{V^a\}$, com $[V^a, V^b] = f^{abc}V^c$. Assumimos também que a ação de G sobre M é simplética, ou seja, ela preserva a estrutura simplética,

$$\mathcal{L}_{V^a}\omega = (i_{V^a}d + di_{V^a})\omega = 0, \tag{4.79}$$

como ω é uma 2-forma fechada e

$$di_{V^a}\omega = 0. \tag{4.80}$$

Vamos considerar um fibrado linha $L \to M$ onde a conexão 1-forma é o potencial simplético θ. Se θ satisfaz a relação

$$\mathcal{L}_{V^a}\theta = 0, \tag{4.81}$$

de acordo com os conceitos desenvolvidos na subseção 4.1.3 a equação (4.81) define um fibrado G-equivariante, que representado por uma derivada covariante G-invariante $\nabla = d + \theta$. O mapeamento momento associado, $H : M \to \mathfrak{g}^*$, avaliado sobre um elemento da álgebra de Lie $X \in \mathfrak{g}$, com campo vetorial V sobre M associado, é chamado correspondente Hamiltoniano à V,

$$\begin{aligned} H_V &= \mathcal{L}_V - [i_V, \nabla] \\ &= \mathcal{L}_V - [i_V, d] - [i_V, \theta] \\ &= i_V\theta = V^\mu\theta_\mu. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Portanto, diferenciando o Hamiltoniano e utilizando (4.81) temos

$$dH_V = d(i_V\theta) = -i_v(d\theta) = -i_V\omega. \tag{4.83}$$

Em coordenadas locais temos

$$\partial_\mu H_V(x) = V^\nu(x)\omega_{\mu\nu}(x) \Rightarrow V(x) = \omega^{\mu\nu}\partial_\mu H_V(x)\partial_\nu. \tag{4.84}$$

Portanto, os componentes do mapa momento, $H = \phi^a \otimes H^a$, obedecem a relação

$$dH^a = -i_{V^a}\omega. \tag{4.85}$$

Das relações (4.80) e (4.85) vemos que estamos tratando com 1-formas $i_{V^a}\omega$ fechadas e ao mesmo tempo exatas, ou seja, o espaço considerado obedece $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$. Quando um momento com essas características existe como um mapa C^∞ globalmente definido sobre M, dizemos que a ação do grupo é hamiltoniana. O campo vetorial V o qual satisfaz (4.84) é chamado de *campo vetorial Hamiltoniano*, de acordo com a definição (2.9), associado com H_V e chamaremos a tripla (M, ω, H_V) um sistema Hamiltoniano ou dinâmico.

As curvas integrais que definem a evolução temporal da teoria são os fluxos de campo vetorial Hamiltoniano definido por (4.84). Logo as equações de movimento são dadas pelas curvas integrais,

$$\dot{x}^\mu(t) = \omega^{\mu\nu}(x(t))\partial_\nu H_V(x(t)) = \{x^\mu, H_V\}_\omega \tag{4.86}$$

$$\therefore \dot{q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \quad e \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}, \tag{4.87}$$

onde estamos usando as coordenadas canônicas para a forma simplética, $\omega = dp_\mu \wedge dq^\mu$, como no resultado (2.80). Sabemos que o parênteses de Poisson do Hamiltoniano com qualquer outra função f determina a evolução temporal, ou seja, nos permite conhecer a variação de f ao longo da trajetória clássica do sistema dinâmico:

$$\{x^\mu, H_V\}_\omega = \mathcal{L}_V f = \left.\frac{d}{dt}f(x(t))\right|_{t=0}. \tag{4.88}$$

Em analogia com a subseção 4.1.3, temos que a curvatura equivariante do fibrado com conexão θ é uma extensão equivariante da 2-forma simplética dada por

$$\omega_\mathfrak{g} = \mathbf{1} \otimes \omega - \phi^a \otimes H^a, \tag{4.89}$$

onde a principal propriedade é mantida, (4.89) é equivariantemente fechada,

$$\begin{aligned} (d_\mathfrak{g}\omega_\mathfrak{g})(X) &= (d - i_V)(\omega - H_V) \\ &= d\omega - dH_V - \underbrace{i_V\omega}_{(4.83)} = 0. \end{aligned} \tag{4.90}$$

Notemos também que

$$d_{\mathfrak{g}}\theta = \mathbf{1} \otimes d\theta - \phi^a \otimes i_V\theta = \omega_{\mathfrak{g}}. \tag{4.91}$$

Vamos agora analisar as informações algébricas contidas no sistema dinâmico. O parênteses de Poisson dos Hamiltonianos é calculado utilizando (4.84),

$$\begin{aligned}
\{H^a, H^b\}_\omega &= \omega^{\mu\nu}\partial_\mu H^a \partial_\nu H^b = \omega^{\mu\nu} V^{a\kappa}\omega_{\mu\kappa} V^{b\lambda}\omega_{\nu\lambda} \\
&= \delta^\nu_\kappa V^{a\kappa} V^{b\lambda}\omega_{\nu\lambda} = \omega_{\kappa\lambda} V^{a\kappa} V^{b\lambda} \\
&= \omega(V^a, V^b) = V^{a\mu}\partial_\mu H^b \\
&= \mathcal{L}_{V^a} H^b = -\mathcal{L}_{V^b} H^a.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Como a identidade de Jacobi é respeitada, $\{f,\{g,h\}_\omega\}_\omega + \{g,\{h,f\}_\omega\}_\omega + \{h,\{f,g\}_\omega\}_\omega = 0$, o mapa $H^a \mapsto V^a$ é um homomorfismo das álgebras de Lie $(\Lambda^0 M, \{\cdot,\cdot\}_\omega) \to (TM, [\cdot,\cdot])$. Portanto se $\{A, B\}_\omega \equiv C$, temos

$$\{f,\{g,h\}_\omega\}_\omega + \{g,\{h,f\}_\omega\}_\omega + \{h,\{f,g\}_\omega\}_\omega = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_C = \mathcal{L}_A\mathcal{L}_B - \mathcal{L}_B\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{\{A,B\}_\omega} \tag{4.93}$$

$$\therefore V^{\{H^a,H^b\}_\omega} = [V^a, V^b]. \tag{4.94}$$

4.2.2 Teorema de Duistermaat-Heckman

Agora vamos considerar uma ação de um grupo ciclico abeliano sobre uma variedade simplética M. Em outras palavras, o campo vetorial hamiltoniano definido em (4.84) representa o gerador da ação de um grupo de 1-parâmetro sobre o espaço de fase M. As órbitas de V geram o grupo $U(1) \sim S^1$. Assumiremos também que o Hamiltoniano H definido como na subseção anterior é uma *função de Morse*. Isto significa que os pontos críticos $\{p\}$ do Hamiltoniano, definidos por $dH(p) = 0$, são isolados e a matrix Hessiana é dada por

$$\mathcal{H}(x) = \left[\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right]. \tag{4.95}$$

Portanto em cada ponto p a matrix Hessiana é não degenerada, ou seja,

$$\det \mathcal{H}(p) \neq 0. \tag{4.96}$$

Notemos de (4.84) que os pontos críticos de H são os mesmos pontos do espaço M_V (4.39) com relação ao campo vetorial V.

Sabemos que uma quantidade importante para obter informações sobre o sistema dinâmico em estudo é a chamada *função de partição clássica*. Também temos que cada ponto do espaço de fase é um estado clássico do sistema e a energia total é determinada pelo Hamiltoniano. Portanto, de acordo com princípios gerais da Mecânica Estatística, a função de partição é construída fixando em cada ponto $x \in M$ o peso de Boltzmann $e^{iTH(x)}$ e somando sobre todos os estados possíveis do sistema. Gostaríamos também de obter uma quantidade invariante sob transformações que preservam o volume do espaço de fase M, ou seja, a medida de Liouville $d\mu_L = \omega^m/m! = \sqrt{\det \omega(x)}\, d^{2m}x$, e por consequência as equações clássicas de movimento. Usando a medida de Liouville para obter uma quantidade invariante por transformações canônicas, temos que a função de partição clássica é dada por

$$Z(T) = \int_M \frac{\omega^m}{m!} e^{iTH} = \int_M d^{2m}x \sqrt{\det \omega(x)}\, e^{iTH(x)}. \tag{4.97}$$

Quando as integrais são oscilatórias como a função de partição acima e queremos obter informações sobre o comportamento de tais integrais, podemos calculá-la usando o método de aproximação de fase estacionária usando os limites para $T \to \infty$. Neste limite o integrando de $Z(T)$ oscila muito rapidamente e amortece para um valor tendendo a zero. Portanto, a integral tem uma expansão assimptótica em potências de $1/T$. Quanto maior o valor de T, mais o integrando vai à zero e a integral se localiza em torno dos valores estacionários sempre quando a função $H(x)$ têm extremos.

Utilizando o *lema de Morse* [31], é possível calcular o termos de primeira ordem do resultado do método de aproximação de fase estacionária aplicado à integral (4.97). O resultado de um extenso cálculo [26, 27] é

$$Z(T) = \left(\frac{2\pi i}{T}\right)^k \sum_{p\in M_V} (-i)^{\lambda(p)} e^{iTH(p)} \sqrt{\frac{\det \omega(p)}{\det \mathcal{H}(p)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{n+1}}\right), \tag{4.98}$$

onde $\lambda(p)$ é o índice de Morse dos pontos críticos $\{p\}$, o qual define o número de autovalores negativos numa diagonalização da matriz Hessiana de H em p.

Vamos agora anunciar o importante resultado obtido por Duistermaat-Heckman: *Seja M uma variedade simplética e compacta. Suponha que o campo vetorial V definido por (4.84) gera uma ação Hamiltoniana global de um grupo de toro $T = (S^1)^m$ sobre M. Desde que o conjunto dos pontos críticos do hamiltoniano H coincide com os pontos fixos do conjunto M_V da T-ação sobre M, podemos aplicar o teorema de Darboux equivariante para o sistema Hamiltoniano.*

A ação do toro é localmente linear e tem a forma de m geradores de rotação canônica,

$$V = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\lambda_\mu(p)}{i}\left(p_\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} - q^\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right), \qquad p \in M_V. \tag{4.99}$$

A equação (4.84) nos permite explicitar o Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} dH_V = \partial_\mu H_V(x) dx^\mu &= -\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\lambda_\mu(p)}{i}\left(p_\mu dp_\mu + q^\mu dq^\mu\right) \\ \Rightarrow H(x) = H(p) &+ \sum_{\mu=1}^{m} \frac{i\lambda_\mu(p)}{2}\left(p_\mu^2 + q_\mu^2\right). \end{aligned} \tag{4.100}$$

Neste caso as equações do movimento nos dizem que

$$\begin{aligned} \dot{q}^\mu &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \Rightarrow \dot{q}^\mu = i\lambda_\mu(p) p_\mu \\ \dot{p}_\mu &= -\frac{\partial H}{\partial q^\mu} \Rightarrow \dot{p}_\mu = -i\lambda_\mu(p) q^\mu \end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\therefore (p_\mu(t), q^\mu(t)) \sim e^{i\lambda_\mu t}, \tag{4.102}$$

o que implica que o fluxo determinado pelas equações de movimento são círculos em torno dos pontos críticos, os quais dão uma representação explícita da T-ação Hamiltoniana localmente sobre M. Devido a (4.100) temos que cada integração em (4.97) é puramente gaussiana e, portanto, os termos de ordem superior no cálculo da aproximação de fase estacionária são zeros e a função de partição é dada exatamente pelo termo principal de (4.98).

Vamos supor que V seja um campo vetorial Hamiltoniano, o qual gera as ações de ciclo simpléticas sobre o espaço de fase M que admite uma estrutura global Riemanniana. Logo V é um campo de Killing. Sendo assim, vamos utilizar os conceitos da subseção anterior e convenientemente reescrever a função de partição (4.97) na linguagem de formas diferenciais. Seja a seguinte função de partição,

$$Z(T) = \int_M \alpha, \tag{4.103}$$

onde

$$\alpha \equiv \frac{1}{(iT)^m} e^{iT(\omega - H)} = \frac{1}{(iT)^m} e^{-iTH} \sum_{k=0}^{m} \frac{(iT)^k}{k!} \omega^k \tag{4.104}$$

e

$$\alpha^{(2k)} = \frac{e^{-iTH}}{(iT)^{m-k}} \frac{\omega^k}{k!} \tag{4.105}$$

Como $\omega - H$ é equivariantemente fechada, temos a boa propriedade $d_V \alpha = 0$. Isto nos leva a possibilidade de aplicar a fórmula de localização de Berline-Vergne (4.76), onde $\alpha^{(0)} = e^{-iTH(p)}/(iT)^m$:

$$Z(T) = \left(\frac{2\pi i}{T}\right)^m \sum_{p \in M_V} \frac{e^{-iTH(p)}}{\text{Pfaff} dV(p)}. \tag{4.106}$$

O denominador de (4.106) pode ser encontrado usando (4.84) e (4.95),

$$(4.84) \Rightarrow \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \partial_\mu V^\lambda(x) \omega_{\nu\lambda} \tag{4.107}$$

$$\therefore \mathcal{H}(p) = dV(p)\omega(p) \Rightarrow dV(p) = \omega^{-1}(p)\mathcal{H}(p). \tag{4.108}$$

O Pfaffian de $dV(p)$ tem uma escolha específica de sinal quando tomamos a raíz quadrada do determinante. O sinal pode ser determinado se olharmos a Hessiana nas coordenadas de Darboux, onde por (4.100) vemos que ela é diagonal com autovalores $i\lambda_\mu$, cada um com multiplicidade dupla:

$$\mathcal{H}(x) = \begin{bmatrix} i\lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & i\lambda_1 & & & \bigcirc \\ & & i\lambda_2 & 0 & \\ & & 0 & i\lambda_2 & \\ & \bigcirc & & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{4.109}$$

Como a forma simplética é anti-simétrica, temos que a matriz $dV(p)$ também é anti-simétrica com autovalores $i\lambda_\mu$. Vamos introduzir a função η-invariante definida por

$$\eta(\mathcal{H}(p)) \equiv \sharp\text{autovalores} > 0 - \sharp\text{autovalores} < 0 = 2\sum_{\mu=1}^{m} \text{sgn} i\lambda_\mu(p), \tag{4.110}$$

a qual está relacionada com o índice Morse por

$$\eta(\mathcal{H}(p)) = 2m - 2\lambda(p). \tag{4.111}$$

Pela identidade $\pm 1 = e^{i\pi(\pm 1 - 1)/2}$, temos

$$\begin{aligned} \text{sgnPfaff} dV(p) &= \prod_{\mu=0}^{m} \text{sgn} i\lambda_\mu(p) = \prod_{\mu=0}^{m} e^{i\frac{\pi}{2}(\text{sgn} i\lambda_\mu(p) - 1)} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}(\sum_{\mu=1}^{m} \text{sgn} i\lambda_\mu(p) - \sum_{\mu=1}^{m} 1)} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}(\eta(\mathcal{H}(p)) - m)} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda(p)} = (-i)^{\lambda(p)}. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Portanto chegamos ao resultado final da fórmula de Duistermaat-Heckman,

$$Z(T) = \left(\frac{2\pi i}{T}\right)^m \sum_{p \in M_V} (-i)^{\lambda(p)} e^{-iTH(p)} \sqrt{\frac{\det \omega(p)}{\det \mathcal{H}(p)}}, \tag{4.113}$$

a qual foi derivada primeiramente em [20].

4.2.3 Versão Degenerada do Teorema de Duistermaat-Heckman

Uma generalização do caso anterior é quando estamos considerando um Hamiltoniano que é degenerado, ou seja, a condição (4.96) não é mais necessariamente válida. Para o caso degenerado, o conjunto dos pontos críticos do Hamiltoniano M_V é agora uma sub-variedade de M de co-dimensão $r \equiv \dim M - \dim M_V$. Neste caso devemos considerar algumas modificações fundamentais em (4.67). A Hessiana de H é zero em todo o espaço M_V, mas assumiremos que ela não é zero nas direções normais à sub-variedade crítica M_V. Portanto é necessário definirmos um fibrado normal N_V de M_V em M, sendo o espaço de fase localmente uma união disjunta,

$$M = M_V \cup N_V. \tag{4.114}$$

Por consequência desta definição, podemos considerar que as coordenadas locais sobre M são dadas por

$$x^\mu = x_0^\mu + x_\perp^\mu, \tag{4.115}$$

onde x_0 são coordenadas locais de M_V, para as quais $V(x_0) = 0$, e $x_\perp$ são coordenadas locais de N_V. O espaço tangente em qualquer ponto x sobre M também pode ser decomposto por

$$T_x M = T_x M_V \oplus T_x N_V, \tag{4.116}$$

onde a base de $T_x N_V$ é necessariamente ortogonal à base de $T_x M_V$. A base dual que gera a álgebra exterior de M, ou seja, as variáveis de Grassman ψ^μ, também são decompostas:

$$\psi^\mu = \psi_0^\mu + \psi_\perp^\mu, \tag{4.117}$$

onde ψ_0^μ gera a álgebra ΛM_V e $\psi_\perp^\mu$ gera ΛN_V.

O fibrado tangente equivariante tem uma conexão Levi-Civita Γ associada com um tensor métrico g $U(1)$-invariante. Sabemos que a derivada de Lie $\mathcal{L}_V$ induz uma ação não trivial do grupo sobre as fibras, a qual é dada pela matriz dV. Mais precisamente temos que relembrar de (4.33), onde ∇ é a conexão do fibrado tangente equivariante. Portanto, para uma teoria sem torção, temos

$$T(V, X) = \nabla_V X - \nabla_X V - [V, X] \equiv 0 \Rightarrow \nabla_V X = \nabla_X V + [V, X] \tag{4.118}$$

$$\therefore \mu_V X = [V, X] - \nabla_X V - [V, X] = -\nabla_X V \Rightarrow \mu_V = -\nabla V \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}_V &= [i_V, \nabla] - \nabla V \\ &= V^\mu \partial_\mu - dV^\mu i_{V^\mu} - dV. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Devido as equações de Killing para V obtemos a relação (4.70), onde podemos ver que a 2-forma Ω_V pode ser relacionada com o mapa momento por

$$(\Omega_V)_{\mu\nu} = 2 g_{\mu\lambda} (\mu_V)^\lambda{}_\nu. \tag{4.121}$$

A curvatura equivariante do fibrado é dada por

$$R_V = R + \mu_V, \tag{4.122}$$

onde a 2-forma curvatura de Riemann do fibrado tangente é dada por

$$R = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma \Rightarrow R^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}(x)\psi^\lambda \psi^\rho. \tag{4.123}$$

A decomposição do fibrado tangente nos diz que, o fibrado normal herda uma conexão $U(1)$-invariante de TM, e a curvatura e o mapa momento sobre TN_V são apenas restrições dos correspondentes objetos definidos sobre TM. Dada as características da 2-forma Ω_V, segue que os geradores ψ_0^μ de ΛM_V satisfazem

$$(\Omega)_{\mu\nu}(x_0)\psi_0^\nu = 2(g_{\mu\lambda}\partial_\nu V^\lambda)(x_0)\psi_0^\nu = 0, \tag{4.124}$$

sendo que $\psi_0^\mu \sim dx_0^\mu$ está na direção cotangente à M_V [35]. Para grandes limites de s em (4.67) a integral será localizada na vizinhança de M_V, mas devido a linearização (4.115) a localização será aproximada com a vizinhança do fibrado normal N_V. Para isto, vamos introduzir uma mudança nas variáveis de integração

$$\begin{aligned} x^\mu &= x_0^\mu + x_\perp^\mu \to x_0^\mu + \frac{x_\perp^\mu}{\sqrt{s}} \\ \psi^\mu &= \psi_0^\mu + \psi_\perp^\mu \to \psi_0^\mu + \frac{\psi_\perp^\mu}{\sqrt{s}}. \end{aligned} \tag{4.125}$$

Podemos expandir o argumento de (4.67) de acordo com as decomposições (4.125), onde o Jacobiano da mudança de variável de Grassmann cancela o Jacobiano da mudança de variável ordinária. As expansões são calculadas usando (4.45), (4.46) e a condição (4.124):

$$\begin{aligned} \frac{s}{2}\Omega_V &\xrightarrow{s\to\infty} s g_{\mu\lambda}(\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\nu\kappa}V^\kappa)\psi^\mu\psi^\nu \\ &\approx \left(g_{\mu\lambda}(x_0) + \frac{x_\perp^\zeta}{\sqrt{s}}\partial_\zeta g_{\mu\lambda}(x_0)\right) \\ &\times \left(\partial_\nu V^\lambda(x_0) + \frac{x_\perp^\zeta}{\sqrt{s}}\partial_\zeta\partial_\nu V^\lambda(x_0) + \frac{1}{s}\partial_\sigma\Gamma^\lambda{}_{\nu\kappa}\partial_\rho V^\kappa\right)(\psi_0^\mu + \psi_\perp^\mu)(\psi_0^\nu + \psi_\perp^\nu) \\ &= \frac{1}{2}(\Omega_V)_{\mu\nu}(x_0)\psi_\perp^\mu\psi_\perp^\nu + \frac{1}{2}(\Omega_V)_{\mu\sigma}(x_0)R^\sigma{}_{\nu\lambda\rho}(x_0)x_\perp^\mu x_\perp^\nu\psi_0^\lambda\psi_0^\rho + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \end{aligned} \tag{4.126}$$

$$\begin{aligned} K_V &\xrightarrow{s\to\infty} g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x) \\ &\approx \left(g_{\mu\lambda}(x_0) + \frac{x_\perp^\zeta}{\sqrt{s}}\partial_\zeta g_{\mu\lambda}(x_0)\right) \\ &\times \left(V^\mu(x_0) + \frac{x_\perp^\zeta}{\sqrt{s}}\partial_\zeta V^\mu(x_0)\right)\left(V^\nu(x_0) + \frac{x_\perp^\zeta}{\sqrt{s}}\partial_\zeta V^\nu(x_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\mu_V)_{\mu\rho}(x_0)(\Omega_V)_{\rho\nu}(x_0)x_\perp^\mu x_\perp^\nu + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right). \end{aligned} \tag{4.127}$$

O domínio de integração tem a seguinte decomposição:

$$M \otimes \Lambda^1 M = (M_V \otimes \Lambda^1 M_V) \cup (N_V \otimes \Lambda^1 N_V). \tag{4.128}$$

Portanto, vemos que sobre as variáveis $(x_\perp, \psi_\perp)$ a integral é gaussiana e pode ser calculada explicitamente. De (4.67) temos que

$$\begin{aligned} Z(T) &= \int_{(M_V\otimes\Lambda^1 M_V)\cup(N_V\otimes\Lambda^1 N_V)} d^r x_0 d^r x_\perp d^r\psi_0 d^r\psi_\perp \alpha(x,\psi)\exp\Bigg[-\frac{1}{2}(\Omega_V)_{\mu\nu}(x_0)\psi_\perp^\mu\psi_\perp^\nu - \\ &- \left(\frac{1}{2}(\Omega_V)_{\mu\sigma}(x_0)R^\sigma{}_{\nu\lambda\rho}(x_0)\psi_0^\lambda\psi_0^\rho - \frac{1}{2}(\mu_V)_{\mu\rho}(x_0)(\Omega_V)_{\rho\nu}(x_0)\right)x_\perp^\mu x_\perp^\nu\Bigg] \\ &= \left(\frac{2\pi i}{T}\right)^{r/2}\int_{(M_V\otimes\Lambda^1 M_V)} d^r x_0 d^r\psi_0 e^{iT(H(x_0)+\omega(x_0,\psi_0))}\frac{\mathrm{Pfaff}\Omega_V(x_0)}{\sqrt{\det\Omega_V(x_0)(\mu_V(x_0)+R(x_0,\psi_0))}}. \end{aligned}$$

A integral acima pode ser reescrita em termos das classes características equivariantes [11, 35] de Chern e Euler,

$$ch_{\mathfrak{g}}(F) = \mathrm{Tr} e^{F_{\mathfrak{g}}} \tag{4.129}$$

e

$$E_{\mathfrak{g}}(F) = \mathrm{Pfaff}(F_{\mathfrak{g}}). \tag{4.130}$$

Portanto o resultado para a generalização do teorema de Duistermaat-Heckman para o caso degenerado é dado por

$$Z(T) = \left(\frac{2\pi i}{T}\right)^{r/2}\int_{M_V}\frac{ch_V(iT\omega)|_{M_V}}{E_V(R)|_{N_V}}. \tag{4.131}$$

4.3 Localização para Dimensão Infinita

4.3.1 Integrais Funcionais e Espaço dos Loops

Vamos considerar agora um espaço para descrever um sistema quântico, ou seja, a medida de integração sobre este sistema nos dá uma integral sobre todos os caminhos do espaço de fase definidos num intervalo de tempo $[0,T]$. Esta medida é definida por

$$[dp][dq] \equiv \lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\frac{dp_j}{2\pi\hbar}\prod_{j=1}^{N-1}dq_j \equiv \prod_{t\in[0,T]}\frac{dp(t)}{2\pi\hbar}dq(t). \tag{4.132}$$

Apesar da dificuldade matemática para definir esta medida, entendemos (4.132) como uma medida sobre o espaço funcional de dimensão infinita das trajetórias do espaço de fase $(p(t), q(t))$, onde cada "fatia" de tempo $t \in [0,T]$ fixa é uma medida ordinária de Riemann-Lebesgue. Esta medida não é rigorosamente definida e alguns cuidados devem ser tomados para determinar o significado preciso do limite $N \to \infty$. Nesta seção tentaremos construir alguns argumentos os quais serão a base para a conjectura de Atiyah-Witten, a qual define uma medida para espaços de dimensões infinitas e que tem sido proposta na tentativa estabelecer uma teoria quântica de campos mais formal.

A função de partição quântica, ou gerador funcional [34], pode ser escrita na seguinte forma:

$$Z(T) = \mathrm{Tr}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}TH\right] = \int[dp][dq]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt(p(t)\dot{q}(t) - H(p,q))\right\}\delta(q(0)-q(T)). \tag{4.133}$$

A função de partição (4.133) descreve o espectro do Hamiltoniano H de um sistema dinâmico. A generalização para uma variedade simplética arbitrária, (M,ω), de dimensão $2n$ pode ser estabelecida. O fator $p\dot{q}$ é escrito na forma canônica $\theta_\mu(x)\dot{x}^\mu$ num sistema de coordenadas sobre M. A medida do espaço de fase deve ser canonicamente invariante, ou seja, deve ser uma medida do tipo Liouville. Portanto a função de partição para um sistema dinâmico (M, ω, H) é definida por

$$Z(T) = \int_{LM} [d\mu_L(x)] e^{iS[x]} = \int_{LM} [d^{2n}x] \mathrm{Pfaff}(\Omega) e^{iS[x]}, \tag{4.134}$$

onde

$$S[x] = \int_0^T dt (\theta_\mu(x)\dot{x}^\mu - H(x)) \tag{4.135}$$

é a ação clássica do Hamiltoniano do sistema. A integral é sobre o espaço de dimensão infinita dos caminhos $x(t) : [0, T] \to M$ que obedecem as condições de contorno $x^\mu(T) = x^\mu(0)$, ou seja, o espaço dos *loops* sobre M. Este espaço é denotado por LM. LM tem uma medida de Liouville $[d^{2n}x]\mathrm{Pfaff}(\Omega)$ tal que Ω é uma 2-forma pré-simplética (não necessariamente inversível) definida por

$$\Omega(t, t') = \omega[x]\delta(t - t'). \tag{4.136}$$

A definição (4.136) nos permite interpretar a medida sobre o espaço de *loop* como sendo uma medida de Liouville ordinária para cada fatia de tempo sobre M. Introduzindo variáveis de Grassmann $\{\psi\}$ temos que o Pfaffian em (4.134) pode ser exponenciado,

$$Z(T) = \int_{LM \otimes L\Lambda^1 M} [d^{2n}x][d^{2n}\psi] \exp\left\{ i \int_0^T dt \left(\theta_\mu(x)\dot{x}^\mu - H(x) + \frac{1}{2}\psi^\mu \omega_{\mu\nu} \psi^\nu \right) \right\}. \tag{4.137}$$

Temos aqui que LM é o espaço dos *loops* sobre o fibrado cotangente $\Lambda^1 M$, o qual é interpretado como uma supervariedade com coordenadas $(x, \psi \sim dx) \in LM \otimes L\Lambda^1 M$.

Chamamos de ação bosônica S_B a parte com dependência em x, ou seja,

$$S_B = \int_0^T dt (\theta_\mu(x)\dot{x}^\mu - H(x)), \tag{4.138}$$

a qual é um observável sobre LM. O correspondente campo vetorial Hamiltoniano é definido pela relação

$$\Omega_{\mu\nu} X_S^\nu = \frac{\delta S_B}{\delta x^\mu}, \tag{4.139}$$

onde $\delta/\delta x$ são derivadas funcionais definidas agindo sobre um funcional $F[x(t)]$ arbitrário sobre LM por

$$\frac{\delta}{\delta x(t')} F[x(t)] \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[x(t) + \epsilon\delta(t - t')] - F[x(t)]}{\epsilon}. \tag{4.140}$$

Se a 2-forma Ω sobre LM é inversível podemos explicitar os componentes do campo vetorial Hamiltoniano correspondente a S_B por

$$\begin{aligned} X_S^\mu(t) &= \int dt' \omega^{\mu\nu} \delta(t - t') \frac{\delta}{\delta x^\nu(t')} S[x] = \dot{x}^\mu(t) - \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H(x(t)) \\ &= \dot{x}^\mu(t) - X_H^\mu(t). \end{aligned} \tag{4.141}$$

Sabemos que as equações de movimento nos fornecem que $\dot{x}^\mu = X_H^\mu$, o que corresponde aos pontos críticos de S_B, $LM_S = \{x(t) \in LM | X_S^\mu = 0\}$. Podemos verificar que a ação

$$\int_0^T dt \left(\theta_\mu(x)\dot{x}^\mu - H(x) + \frac{1}{2}\psi^\mu \omega_{\mu\nu} \psi^\nu \right) = S_B + \Omega \tag{4.142}$$

é invariante sob transformações do tipo

$$\delta x^\mu \sim \psi^\mu, \quad \delta\psi^\mu \sim X_S^\mu, \tag{4.143}$$

pela qual sugerimos a derivada exterior equivariante sobre LM,

$$d_S = d + i_{X_S} = \int_0^T dt \left[\psi^\mu \frac{\delta}{\delta x^\mu} + X_S^\mu \frac{\delta}{\delta \psi^\mu}\right]. \tag{4.144}$$

Devido a (4.143), vemos que a ação é equivariantemente fechada,

$$d_S(S_B + \Omega) = 0. \tag{4.145}$$

4.3.2 Localização para o Espaço dos Loops

O teorema de Duistermaat-Heckman pode ser generalizado para as integrais do tipo (4.137). Como vimos, a ação é fechada com relação a derivada exterior do espaço de *loop*

$$d_S = d + i_{X_S} = d + i_{\dot{x}} - i_{X_H}. \tag{4.146}$$

Logo temos que a integral de trajetória (4.137) depende formalmente apenas das classes de d_S-cohomologia. No entanto, os argumentos feitos para o caso de dimensão finita, onde a função de partição é invariante sob deformações de um certo parâmetro, não podem ser aplicados diretamente neste caso uma vez que o teorema de Stokes, usado em (4.53), não tem um análogo para o espaço de dimensão infinita. O princípio de localização aqui é estabelecido interpretando a estrutura de cohomologia equivariante de LM como uma simetria "escondida" da teoria quântica. Deste modo temos um tipo de teorema de Stokes na forma de uma identidade de Ward associada à simetria. A função de partição (4.137) pode ser vista como uma integral de tragetória BRST, onde as variáveis $\{\psi\}$ são os campos "ghosts" e $\{x\}$ as variáveis bosônicas. O operador d_S é o gerador desta simetria BRST, ou seja,

$$d_S x^\mu(t) = \psi^\mu(t), \quad d_S \psi^\mu(t) = X_S^\mu[x]. \tag{4.147}$$

A dependência de (4.137) das classes de cohomologia nos permite adicionar à ação termos do tipo $d_S\Psi$ os quais respeitam $\mathcal{L}_{X_S}\Psi = 0$, onde

$$d_S^2 = \mathcal{L}_{X_S} = \frac{d}{dt} - \mathcal{L}_{X_H}. \tag{4.148}$$

Portanto

$$Z(\lambda) = \int_{LM\otimes L\Lambda^1 M} [d^{2n}x][d^{2n}\psi] e^{i(S[x]+\Omega[x,\psi]+\lambda d_S\Psi[x,\psi])}, \tag{4.149}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Psi \in L\Lambda^1_S M$ é um campo fermiônico submetido à condição de gauge. Queremos estabelecer a independência de λ desta integral funcional e para isto vamos considerar a variação $\lambda \to \lambda + \delta\lambda$, a qual pode ser feita se $\Psi \to \Psi + \delta\Psi$ com $\delta\Psi = \delta\lambda\Psi$. Consideremos também uma transformação infinitesimal sobre o espaço de super-loop $LM \otimes L\Lambda^1 M$ parametrizada pelo gauge fermiônico $\delta\Psi \in L\Lambda^1_S M$,

$$\begin{aligned} x^\mu &\to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \delta\Psi d_S x^\mu = x^\mu + \delta\Psi\psi^\mu \\ \psi^\mu &\to \psi'^\mu = \psi^\mu + \delta\psi^\mu = \psi^\mu + \delta\Psi d_S\psi^\mu = \psi^\mu + \delta\Psi X_S^\mu. \end{aligned} \tag{4.150}$$

Portanto a transformação é determinada por um super-Jacobiano [35]

$$[d^{2n}x'][d^{2n}\psi'] = \mathrm{sdet}\begin{bmatrix} \frac{\delta x'}{\delta x} & \frac{\delta x'}{\delta \psi} \\ \frac{\delta \psi'}{\delta x} & \frac{\delta \psi'}{\delta \psi} \end{bmatrix} [d^{2n}x][d^{2n}\psi]. \tag{4.151}$$

Para $\delta\lambda$ infinitesimal podemos escrever o super-determinante em termos do super-traço, $\mathrm{sdet}[A] = 1 + \mathrm{str}[A]$ [11]. Portanto

$$\begin{aligned} [d^{2n}x'][d^{2n}\psi'] &= \left\{1 + \int_0^T dt \left[\frac{\delta}{\delta x^\mu}(\delta\Psi)\psi^\mu - \frac{\delta}{\delta\psi^\mu}(\delta\Psi)X_S^\mu\right]\right\}[d^{2n}x][d^{2n}\psi] \\ &= \left\{1 - \int_0^T dt \left[\psi^\mu\frac{\delta}{\delta x^\mu} + X_S^\mu\frac{\delta}{\delta\psi^\mu}\right]\delta\Psi\right\}[d^{2n}x][d^{2n}\psi] \\ &= (1 - d_S\delta\Psi)[d^{2n}x][d^{2n}\psi] = e^{-\delta\lambda d_S\Psi}[d^{2n}x][d^{2n}\psi]. \end{aligned} \tag{4.152}$$

Substituindo a mudança (4.152) da medida de integração em (4.149) obtemos que

$$Z(\lambda) = Z(\lambda - \delta\lambda) \tag{4.153}$$

que estabelece a independência da integral de trajetória com relação às deformações do parâmetro λ, ou seja, a independência com relação ao campo Ψ. Logo, no limite $\lambda \to 0$ recuperamos (4.137), enquanto que no limite $\lambda \to \infty$ podemos escrever o princípio de localização para o espaço de *loops* por

$$Z(T) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{LM\otimes L\Lambda^1 M}[d^{2n}x][d^{2n}\psi]e^{i(S[x]+\Omega[x,\psi]+\lambda d_S\Psi[x,\psi])}. \tag{4.154}$$

Dada as características de localização (4.154) de uma teoria quântica, gostaríamos agora de escolher uma representação para Ψ de modo que a localização se manifeste. Como no caso de dimensão finita, as integrais são localizadas em pontos fixos do espaço de *loop* para um campo vetorial $X_S[x]$ sobre LM. Para relacionarmos este campo a uma 1-forma diferencial, admitimos que existe uma estrutura Riemanniana G sobre o espaço dos *loops* LM com componentes dados por $G_{\mu\nu}[x;t,t'] = g_{\mu\nu}(x(t))\delta(t-t')$, tal que o campo vetorial Hamiltoniano X_S é um campo vetorial de Killing, ou seja,

$$\mathcal{L}_{X_S}G = 0 \tag{4.155}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}_{X_S}G_{\mu\nu}[x] &= \int_0^T dtdt'\left(\frac{d}{dt} - \mathcal{L}_{X_H}\right)g_{\mu\nu}(x(t))\delta(t-t') \\ &= \int_0^T dtdt'\left(\frac{d}{dt}g_{\mu\nu}(x(t)) - \mathcal{L}_{X_H}g_{\mu\nu}(x(t))\right)\delta(t-t') \\ &= \int_0^T dt\frac{d}{dt}g_{\mu\nu}(x(t)) = 0, \end{aligned} \tag{4.156}$$

onde usamos o fato de que $\mathcal{L}_{X_H}g_{\mu\nu}(x(t)) = 0$ e $g_{\mu\nu}(x(T)) = g_{\mu\nu}(x(0))$. Portanto, usando (4.141), temos que

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^T dtdt' G_{\mu\nu}[x;t,t']X_S^\mu[x]\psi^\nu(t') \\ &= \int_0^T dtdt' G_{\mu\nu}[x;t,t']\{\dot{x}^\mu(t) - \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H(x(t))\}\psi^\nu(t'). \end{aligned} \tag{4.157}$$

Diferenciando Ψ com relação a d_S, usando (4.144) e (4.140), obtemos

$$\begin{aligned} d_S\Psi &= (d + i_S)\int_0^T dt g_{\mu\nu}(x(t))X_S^\mu[x]\psi^\nu(t) \\ &= \int_0^T dt\left[g_{\mu\nu}(x(t))X_S^\mu[x]X_S^\nu[x] + \psi^\mu\left(\partial_\mu g_{\lambda\nu}(x(t))X_S^\lambda[x] + g_{\mu\lambda}(x(t))\partial_\nu X_S^\lambda[x]\right)\psi^\nu\right] \\ &= \int_0^T dt\left[g_{\mu\nu}X_S^\mu X_S^\nu + \psi^\mu\left(g_{\mu\nu}\partial_t - g_{\nu\lambda}\partial_\mu X_H^\lambda + \partial_\mu g_{\lambda\nu}X_S^\lambda\right)\psi^\nu\right]. \end{aligned} \tag{4.158}$$

A ação em (4.149) pode ser escrita usando (4.158):

$$\begin{aligned} S_\lambda &= S[x] + \Omega[x,\psi] + \lambda d_S \Psi[x,\psi] \\ &= \int_0^T dt \left\{ \theta_\mu \dot{x}^\mu - H + \frac{1}{2}\psi^\mu \omega_{\mu\nu}\psi^\nu + \lambda g_{\mu\nu}[\dot{x}^\mu - \omega^{\mu\lambda}\partial_\lambda H][\dot{x}^\nu(t) - \omega^{\nu\kappa}\partial_\kappa H] + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \psi^\mu \left[g_{\mu\nu}\partial_t - g_{\nu\lambda}\partial_\mu(\omega^{\lambda\kappa}\partial_\kappa H) + \partial_\mu g_{\lambda\nu}(\dot{x}^\lambda - \omega^{\lambda\kappa}\partial_\kappa H)\right]\psi^\nu \right\}. \end{aligned} \tag{4.159}$$

De acordo com as funções deltas (4.68) utitlizadas para derivar a fórmula de Berline-Vergne, temos que

$$\begin{aligned} Z(T) &\sim \int_{LM} [d^{2n}x]\sqrt{\det ||\omega_{\mu\nu}||}\sqrt{\det ||\delta X_S^\mu/\delta x^\nu||}\delta(X_S^\mu)\exp(iS[x]) \\ &\sim \int_{LM} [d^{2n}x]\sqrt{\det ||\omega_{\mu\nu}||}\sqrt{\det ||\delta_\nu^\mu \partial_t - \partial_\nu(\omega^{\mu\lambda}\partial_\lambda H)||}\delta(\dot{x}^\mu - \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H)\exp(iS[x]) \\ &\sim \sum_{x(t)\in LM_S} \frac{\sqrt{\det ||\omega_{\mu\nu}||}\exp(iS[x])}{\sqrt{\det ||\delta_\nu^\mu\partial_t - \partial_\nu(\omega^{\mu\lambda}\partial_\lambda H)||}}. \end{aligned} \tag{4.160}$$

O resultado (4.160) é a aproximação WKB para a função de partição, onde a soma é feita sobre todos os caminhos clássicos [15]. Se introduzirmos novamente o fator $\hbar$, então temos que o cálculo é feita para o limite clássico, $\hbar \to 0$.

Sabemos que os pontos críticos do campo vetorial X_S são dados pelas soluções clássicas

$$X^\mu = \dot{x}^\mu(t) - \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H(x(t)) = 0 \tag{4.161}$$

com as condições de contorno $x^\mu(T) = x^\mu(0) \equiv x_0^\mu$ formando uma subvariedade, ou espaço modular das soluções clássicas, LM_S de M. Para Hamiltonianos que determinam a ação de um círculo sobre o espaço de fase podem ser caracterizadas por:

- Existem valores discretos de T para o qual as soluções clássicas (4.161) admitem soluções periódicas não triviais $x^\mu(T) = x^\mu(0)$ para qualquer condição inicial $x^\mu(0) = x_0^\mu$ numa subvariedade compacta LM_S de M.

- Para valores genéricos de T as soluções periódicas com $x^\mu(T) = x^\mu(0)$ podem apenas existir se $x^\mu(0) = x_0^\mu$ é um ponto fixo sobre a subvariedade crítica de H. Em particular, as equações de movimento clássicas se reduzem à

$$\dot{x}^\mu(t) = \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H(x(t)) = 0. \tag{4.162}$$

  Então o espaço LM_S coincide com o conjunto dos pontos críticos $M_V \subset M$.

Para localizarmos (4.149) para o caso dos pontos críticos degenerados, vamos decompor LM e $L\Lambda^1 M$ em modos clássicos e flutuações em torno das soluções clássicas com um fator de escala

$$\begin{aligned} x^\mu(t) &= \overline{x}^\mu(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}x_f^\mu(t) \\ \psi^\mu(t) &= \overline{\psi}^\mu(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\psi_f^\mu(t), \end{aligned} \tag{4.163}$$

onde $\overline{x}(t) \in LM_S$ são as soluções clássicas das equações de movimento, ou seja, $\dot{\overline{x}}^\mu(t) = \omega^{\mu\nu}(\overline{x})\partial_\nu H(\overline{x}) = 0$, e $\overline{\psi}(t) \in \Lambda^1 LM_S$ expandem o kernel do mapa momento Riemanniano do espaço de *loops*,

$$(\Omega_S)_{\mu\nu}(\overline{x})\overline{\psi}^\nu = 0, \tag{4.164}$$

onde

$$\Omega_S = d\Psi = \int_0^T dt\psi^\mu \frac{\delta}{\delta x^\mu}(g_{\nu\lambda}X_S^\lambda)\psi^\nu. \tag{4.165}$$

Em particular isto implica que $\overline{\psi}^\mu(t)$ são campos que satisfazem as equações de flutuação

$$[\delta^\mu_\nu \partial_t - \partial_\nu X_S^\mu(\overline{x})]\psi^\nu = 0. \tag{4.166}$$

A medida de integração no epaço de loops é definida por

$$[d^{2n}x][d^{2n}\psi] = d^{2n}\overline{x}(t)d^{2n}\overline{\psi}(t)\prod_{t\in[0,T]} d^{2n}x_f(t)d^{2n}\psi_f(t), \tag{4.167}$$

onde a mudança de variáveis (4.163) tem um Jacobiano igual a unidade uma vez que os determinantes das flutuações bosônicas e fermiônicas se cancelam. Similarmente ao cálculo desenvolvido na subseção (4.2.3) temos que

$$Z(T) \sim \int_{LM_S} d^{2n}\overline{x}(t)\frac{\sqrt{\det||\omega_{\mu\nu}||}\exp(iS[x])}{\mathrm{Pfaff}||\delta^\mu_\nu\partial_t - (\Omega_S)^\mu_\nu(\overline{x}) - R^\mu_\nu(\overline{x})||_{NLM_S}}. \tag{4.168}$$

A fórmula (4.168) é a versão degenerada da localização de integrais funcionais e foi derivada por Niemi e Tirkkonen [33].

4.4 Localização para Grupos Compactos

4.4.1 O Espaço $H_V(M)$

Vamos aqui resgatar alguns conceitos que foram já definidos e colocar a cohomologia equivariante num âmbito mais geral, ou seja, dependente de menos estruturas. Precisaremos apenas de um campo vetorial V sobre uma variedade e a estrutura de grupo não é ainda requerida. Seja a derivada equivariante

$$d_V = d + i_V \tag{4.169}$$

agindo sobre o espaço $\Lambda M = \bigoplus_{k\geq 0}\Lambda^k M$. Sabemos que $d_V^2 = \mathcal{L}_V$ e, portanto, o subespaço $\Lambda_V M = \{\omega \in \Lambda M | \mathcal{L}_V\omega = 0\}$ de ΛM é dito ser d_V-invariante e $d_V^2 = 0$ somente sobre $\Lambda_V M$. O grupo dos co-ciclos equivariantes são dados por $Z_V(M) = \mathrm{ker} d_V$, enquanto que as co-bordas equivariantes são $B_V(M) = d_V\Lambda_V M$. Logo, como já visto, o grupo de cohomologia equivariante é dado por

$$H_V(M) = Z_V(M)/B_V(M). \tag{4.170}$$

Claramente temos que, para $V = 0$ uma redução à cohomologia de De Rham.

As primeiras restrições são feitas se considerarmos que M é uma variedade Riemanniana, ou seja, admite um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ determinado pela estrutura Riemanniana. Também consideramos que M é orientável e de dimensão par, $m = 2n$. Além disso V é um campo vetorial de Killing:

$$\begin{aligned} V\langle X_1, X_2\rangle &= V[g_{\mu\nu}X_1^\mu X_2^\nu] = V^\lambda\partial_\lambda[g_{\mu\nu}X_1^\mu X_2^\nu] \\ &= V^\lambda(\partial_\lambda g_{\mu\nu})X_1^\mu X_2^\nu + V^\lambda g_{\mu\nu}(\partial_\lambda X_1^\mu)X_2^\nu + V^\lambda g_{\mu\nu}X_1^\mu(\partial_\lambda X_2^\nu) \end{aligned} \tag{4.171}$$

$$\begin{aligned} (2.57) \Rightarrow V\langle X_1, X_2\rangle &= [V^\lambda g_{\mu\nu}(\partial_\lambda X_1^\mu) - (\partial_\mu V^\lambda)g_{\lambda\nu}X_1^\mu]X_2^\nu \\ &\quad + X_1^\mu[V^\lambda g_{\mu\nu}(\partial_\lambda X_2^\nu) - (\partial_\nu V^\lambda)g_{\mu\lambda}X_2^\nu] \\ &= \langle[V, X_1], X_2\rangle + \langle X_1, [V, X_2]\rangle, \end{aligned} \tag{4.172}$$

para quaisquer $X_1, X_2 \in TM$. se $p \in M$ é um ponto para o qual $V|_p = 0$, temos

$$\mathcal{L}_V X|_p \equiv L_V(p)X|_p = [V, X]|_p, \qquad \text{para} \quad X \in TM. \tag{4.173}$$

Portanto, devido à equação (4.172) temos que $L_V(p)$ pode ser visto como uma matriz anti-simétrica, ou seja,

$$\langle L_V(p)X_1, X_2\rangle_p = -\langle X_1, L_V(p)X_2\rangle_p. \tag{4.174}$$

Sendo assim, vemos que com o mínimo de estruturas requeridas, existe uma forma bilinear e anti-simétrica agindo sobre T_pM, ou seja, existe um mapa $\omega_V(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ definido por

$$\omega_V(p)(X_1, X_2) = \langle X_1, L_V(p)X_2\rangle_p. \tag{4.175}$$

Vamos supor que a forma bilinear é não degenerada, isto significa que $\det L_V(p) \neq 0$. Podemos encontrar uma base ortonormal e ordenada $\{e_j|_p\}_{j=1}^{2n}$ de T_pM tal que

$$\begin{aligned} L_V(p)e_{2j-1} &= \lambda_j e_{2j} \\ L_V(p)e_{2j} &= -\lambda_j e_{2j-1}, \qquad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \tag{4.176}$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{R} - \{0\}$. Nesta base podemos escrever $L_V(p)$ explicitamente,

$$L_V(p) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & \\ \lambda_1 & 0 & & \bigcirc & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\lambda_n \\ & \bigcirc & & \lambda_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.177}$$

Vamos agora calcular o Pfaffian de $L_V(p)$ relativo a base e, ou seja,

$$\text{Pfaff}(L_V(p)) = \frac{1}{n!}[\omega_V(p) \wedge ... \wedge \omega_V(p)](e_1, ..., e_{2n}) = (-1)^n \lambda_1 ... \lambda_n. \tag{4.178}$$

Por questões de orientabilidade temos que $[\det L_V(p)]^{1/2} = (-1)^n \text{Pfaff}(L_V(p))$, portanto

$$[\det L_V(p)]^{1/2} = \lambda_1 ... \lambda_n. \tag{4.179}$$

4.4.2 A Fórmula de Localização

Agora vamos introduzir um grupo de Lie compacto agindo sobre a variedade M à esquerda, e que a métrica seja G-invariante. Mais uma vez, a álgebra de Lie é denotada por $\mathfrak{g}$, onde para cada $X \in \mathfrak{g}$ temos um vetor induzido $X^\sharp \in TM$ devido a (2.107):

$$(X^\sharp \phi)(p) = \frac{d}{dt}\phi(\exp(tX) \cdot p)\bigg|_{t=0}, \tag{4.180}$$

onde $\phi \in C^\infty(M)$ e $p \in M$. Uma vez que por definição a métrica é G-invariante, temos que o campo $X^\sharp$ é um campo de Killing. Portanto, de acordo com a subseção anterior, o mapa $L_{X^\sharp}(p) : T_pM \to T_pM$ é não singular.

Seja $\alpha \in \Lambda M$ uma forma diferencial, onde a escrevemos em termos dos seus componentes

$$\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_{2n}) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k, \tag{4.181}$$

para $\alpha_k \in \Lambda^k M$. Sabemos que a integral da forma α sobre a variedade M depende apenas da sua classe de cohomologia $[\alpha]$. Segue a proposição:

Proposição 4.2. *Se $\alpha' \in B_V(M)$, por um cálculo usando o teorema de Stokes vemos que*

$$\int_M \alpha' = 0. \tag{4.182}$$

Similarmente, se $p \in M$ com $V|_p = 0$ então $\alpha'_0(p) = 0$ para $\alpha' \in B_V(M)$.

Demonstração. Se escrevemos $\alpha' = d_V\beta$ para $\beta \in \Lambda_V M$, então

$$\alpha' = (i_V\beta_1, d\beta_0 + i_V\beta_2, d\beta_1 + i_V\beta_3, ..., d\beta_{2n-2} + i_V\beta_{2n}, d\beta_{2n-1}). \tag{4.183}$$

Então $\alpha'_0(p) = i_V\beta_1|_{V=V|_p} = \beta_{1p}(V|_p) = 0$ e

$$\int_M \alpha' = \int_M \alpha'_{2n} = \int_M d\beta_{2n-1} = 0. \tag{4.184}$$

□

Segue que o mapa $p^\sharp : H_V(M) \to \mathbb{R}$ definido por

$$p^\sharp[\alpha] = [\alpha_0 \equiv i_V\beta_1]_{V=V|_p} = \alpha_0(p). \tag{4.185}$$

Da fórmula de Berline e Vergne (4.78), temos o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Assumimos como acima que M e G são compactos e que a métrica sobre M é G-invariante, ou seja, para cada $a \in G$ age como uma isometria de M. Para $X \in \mathfrak{g}$, assumimos que o campo vetorial induzido $X^\sharp$ sobre M (4.180) é não degenerado, é o mesmo que dizer que $L_{X^\sharp}(p)$ é não degenerado para os zeros de $X^\sharp$. Então para qualquer classe de cohomologia $[\alpha]$ tem-se*

$$\int_M [\alpha] = (-2\pi)^n \sum_{p \in M_V} \frac{p^\sharp[\alpha]}{[\det L_{X^\sharp}(p)]^{1/2}}. \tag{4.186}$$

Uma aplicação deste teorema geral é, como já visto, quando M é uma variedade simplética, ou seja, possui uma estrututa simplética $\omega \in \Lambda^2 M$. Sabemos também que o elemento de volume deste espaço é dado pela medida de Liouville. Mapa momento, ou Hamiltoniano, é dado por $H : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ e respeita a condição (4.83). Podemos concluir a seguinte proposição:

Proposição 4.3. *Para um dado H vamos definir para cada $X \in \mathfrak{g}$ a forma $\alpha^X \in \Lambda M$ por*

$$\alpha^X \equiv (H_X, 0, \omega, 0, ..., 0). \tag{4.187}$$

Então temos que $\alpha^X \in Z_{X^\sharp}(M)$.

Demonstração. Desde que H_X é uma função temos que $i_{X^\sharp}H_X = 0$. Portanto

$$\mathcal{L}_{X^\sharp}H_X = i_{X^\sharp}dH_X = -i^2_{X^\sharp}\omega = 0 \tag{4.188}$$

e

$$\mathcal{L}_{X^\sharp}\omega = di_{X^\sharp}\omega = -d^2H_X = 0. \tag{4.189}$$

Da definição (4.187) temos

$$\mathcal{L}_{X^\sharp}\alpha^X = (\mathcal{L}_{X^\sharp}H_X, 0, \mathcal{L}_{X^\sharp}\omega, 0, ..., 0) = 0, \tag{4.190}$$

o que implica que $\alpha^X \in \Lambda_{X^\sharp}$. De (4.83) temos

$$\begin{aligned} d_{X^\sharp}\alpha^X &= (d + i_{X^\sharp})\alpha^X \\ &= dH_X + i_{X^\sharp}H_X + d\omega + i_{X^\sharp}\omega = 0. \end{aligned} \tag{4.191}$$

□

4.4.3 A Classe $e^{c\alpha^X}$

O centro da questão sobre teorias de localização está em encontrarmos classes de cohomologia apropriadas. Sendo $\alpha^X \in Z_{X^\sharp}(M)$ definida por (4.187), queremos construir uma forma $e^{c\alpha^X} \in Z_{X^\sharp}(M)$, onde $c \in \mathbb{C}$. Vamos otimizar a notação da forma (4.187) por $\alpha^X \equiv \alpha = (\alpha_0, 0, \alpha_2, 0, ..., 0)$. Sendo α_0 uma função, temos que α_0 e α_2 comutam. Logo podemos escrever que

$$e^{c\alpha} = e^{c\alpha_0} \cdot e^{c\alpha_2} = e^{c\alpha_0}\left(1 + c\alpha_2 + \frac{1}{2!}c^2\alpha_2^2 + ...\right). \tag{4.192}$$

Mas a soma da série não vai até infinito pois $\Lambda^{2k}M = \emptyset$ para $k > n$, onde $\sum_{k=0}^{\infty} c^k\alpha_2^k/k! = \sum_{k=0}^{n} c^k\alpha_2^k/k!$. Logo temos que

$$e^{c\alpha} = \left(e^{c\alpha_0}, 0, e^{c\alpha_0}c\alpha_2, 0, e^{c\alpha_0}\frac{1}{2!}c^2\alpha_2^2, 0, ..., 0, e^{c\alpha_0}\frac{1}{n!}c^n\alpha_2^n\right) \in \Lambda M. \tag{4.193}$$

Sendo $i_{X^\sharp}e^{c\alpha_0} = 0$ e $de^{c\alpha_0} = ce^{c\alpha_0}d\alpha_0$, temos

$$\mathcal{L}_{X^\sharp}e^{c\alpha_0} = ci_{X^\sharp}(e^{c\alpha_0}d\alpha_0) = ce^{c\alpha_0}i_{X^\sharp}d\alpha_0, \tag{4.194}$$

onde

$$\alpha_0 = H_X \Rightarrow i_{X^\sharp}d\alpha_0 = -i^2_{X^\sharp}\omega = 0 \tag{4.195}$$

$$\therefore \mathcal{L}_{X^\sharp}e^{c\alpha_0} = 0. \tag{4.196}$$

Para toda a forma temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X^\sharp}e^{c\alpha_0}\frac{1}{k!}c^k\alpha_2^k &= (\mathcal{L}_{X^\sharp}e^{c\alpha_0})\frac{1}{k!}c^k\alpha_2^k + e^{c\alpha_0}\frac{1}{k!}c^k(\mathcal{L}_{X^\sharp}\alpha_2^k) \\ &= e^{c\alpha_0}\frac{1}{k!}c^k(\mathcal{L}_{X^\sharp}\alpha_2^k) = 0. \end{aligned}\tag{4.197}$$

Portanto concluímos que a forma (4.193) pertence ao espaço $\Lambda_{X^\sharp}M$. Vamos agora computar a ação de $d_{X^\sharp}$ sobre (4.193):

$$d_{X^\sharp}e^{c\alpha} = (0, d\beta_0 + i_{X^\sharp}\beta_2, 0, d\beta_2 + i_{X^\sharp}\beta_4, 0, ..., d\beta_{2n-2} + i_{X^\sharp}\beta_{2n}, 0), \tag{4.198}$$

onde $\beta_{2k} \equiv e^{c\alpha_0}c^k\alpha_2^k/k!$. Desde que $d\omega = 0$, ou seja, $d\alpha^k$, podemos calcular o termo $d\beta_{2k}$:

$$\begin{aligned} d\beta_{2k} &= d\left(e^{c\alpha_0}\frac{1}{k!}c^k\alpha_2^k\right) = ce^{c\alpha_0}\frac{1}{k!}c^k d\alpha_0 \wedge \alpha_2^k \\ &= -e^{c\alpha_0}\frac{1}{k!}c^{k+1}(i_{X^\sharp}\omega)\alpha_2^k. \end{aligned}\tag{4.199}$$

Agora vamos calcular a parte $i_{X^\sharp}\beta_{2k+2}$:

$$i_{X^\sharp}e^{c\alpha_0}\alpha_2^k = e^{c\alpha_0}i_{X^\sharp}\alpha_2^k = e^{c\alpha_0}k\alpha_2^{k-1}i_{X^\sharp}\alpha_2 \tag{4.200}$$

$$\begin{aligned} i_{X^\sharp}\beta_{2k+2} &= i_{X^\sharp}\left(e^{c\alpha_0}\frac{1}{(k+1)!}c^{k+1}\alpha_2^{k+1}\right) = e^{c\alpha_0}\frac{k}{(k+1)!}c^{k+1}\alpha_2^k i_{X^\sharp}\alpha_2 \\ &= e^{c\alpha_0}\frac{1}{k!}c^{k+1}(i_{X^\sharp}\omega)\alpha_2^k. \end{aligned}\tag{4.201}$$

Logo, de (4.199) e (4.201) concluímos que

$$d\beta_{2k} + i_{X^\sharp}\beta_{2k+2} = 0 \tag{4.202}$$

$$\therefore d_{X^\sharp}e^{c\alpha} = 0. \tag{4.203}$$

Teorema 4.2. *Supomos um Hamiltoniano $H : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ sujeito a condição (4.83), onde M é uma variedade simplética com uma forma bilinear e anti-simétrica ω intrínseca. Seja o campo $X \in \mathfrak{g}$ e a forma (4.187) a qual define os elementos do grupo co-ciclo $Z_{X^\sharp}(M)$. Similarmente, para $c \in \mathbb{C}$, definimos $e^{c\alpha^X}$ por (4.193):*

$$e^{c\alpha} = \left(e^{cH_X}, 0, e^{cH_X} c\omega, 0, e^{cH_X}\frac{1}{2!}c^2\omega^2, 0, ..., 0, e^{cH_X}\frac{1}{n!}c^n\omega^n\right) \in \Lambda M. \tag{4.204}$$

A forma $e^{c\alpha^X}$ também pertence à $Z_{X^\sharp}(M)$ e temos a classe de cohomologia $\left[e^{c\alpha^X}\right] \in H_{X^\sharp}(M)$.

4.4.4 Mais Informações Sobre a Fórmula de Duistermaat-Heckman

Seja o Hamiltoniano $H : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, o qual respeita a condição (4.83), um mapa bem definido sobre a variedade M. Se G age sobre M e tem uma álgebra associada $\mathfrak{g}$, dizemos que a sua ação é Hamiltoniana. A tripla (M, ω, H), onde o conjunto de funções Hamiltonianas sobre M respeitam (4.94), é chamado de G-espaço Hamiltoniano. Um exemplo para este espaço é uma órbita $\mathcal{O}$ no espaço dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ sob uma ação coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}^*$. Esta ação coadjunta é induzida por uma ação adjunta de G sobre $\mathfrak{g}$, onde ω é uma forma simplética sobre $M = \mathcal{O}$.

Seja $f \in \mathfrak{g}^*$ um funcional linear que age sobre $\mathfrak{g}$. A ação coadjunta é definida por

$$(a \cdot f) = f(\mathrm{Ad}_{a^{-1}} X), \tag{4.205}$$

onde $a \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$. A órbita de f é um espaço homogênio dado por $\mathcal{O} \cong G/G_f$, onde G_f é o estabilizador de f definido por

$$G_f \equiv \{a \in G | a \cdot f = f\}. \tag{4.206}$$

G_f é um subgrupo fechado de G com sub-álgebra de Lie $\mathfrak{g}_f$ dada por

$$\mathfrak{g}_f = \{X \in \mathfrak{g} | f([X, Y]) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}. \tag{4.207}$$

Agora vamos considerar a correspondente *1-forma de Maurer-Cartan* τ^f sobre G, a qual $\tau^f \in \Lambda^1 G$ e é a única 1-forma invariante à esquerda sobre G sujeita a condição

$$\tau^f(X)(1) = f(X), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{4.208}$$

Vamos também denotar o mapa quociente $\pi : G \to G/G_f$. Assumimos o seguinte teorema sem a sua prova:

Teorema 4.3. *G/G_f tem uma estrutura simplética ω a qual é unicamente determinada por $\pi^*\omega = d\tau^f$.*

A forma ω é invariante à esquerda, ou seja, $L_a^*\omega = \omega$, onde $L_a : G/G_f \to G/G_f$. Para $X \in \mathfrak{g}$ definimos $\Psi_X : G/G_f \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi_X(aG_f) \equiv f(\mathrm{Ad}_{a^{-1}} X) = (a \cdot f)(X), \tag{4.209}$$

onde o mesmo deve satisfazer a relação

$$d\Psi_X = -i_{X^\sharp}\omega \tag{4.210}$$

para que seja uma função Hamiltoniana. Logo a ação de G sobre G/G_f é simplética.

Devido a fórmula de Duistermaat-Heckman (4.113) temos o seguinte teorema geral:

Teorema 4.4. *Suponhamos como acima que (M, ω, H) é um G-espaço Hamiltoniano, onde G e M são compactos. A medida de volume da variedade M é dada pela medida de Liouville $d\mu_L$. Então para $c \in \mathbb{C}$ e para $X \in \mathfrak{g}$, com $X^\sharp$ não-degenerado, temos*

$$\int_M e^{cH_X} d\mu_L = \left(\frac{2\pi}{c}\right)^n \sum_{p \in M, X^\sharp|_p = 0} \frac{e^{cH_X(p)}}{[\det L_{X^\sharp}(p)]^{1/2}}. \tag{4.211}$$

4.4.5 Fórmulas Integrais do Tipo Itzykson-Zuber

Vamos dar aqui uma aplicação da fórmula de Duistermaat-Heckman (4.211) para órbitas co-adjuntas $\mathcal{O}$ de dimensão maximal. Um caso de especial de interesse pode ser visto para $\mathcal{O} = G/T$, o espaço modular do grupo de Lie conexo G pelo toro maximal T. Por razões físicas, vamos nos ater ao caso onde o grupo é unitário, $G = U(n)$. Integrações sobre o grupo de matrizes G, o mesmo que integrar sobre G/T para funções T-invariantes, tem importantes aplicações na física como Quantum Gravity, Sistemas Integráveis e Cromodinâmica Quântica.

Nesta subseção vamos usar o teorema (4.4) para calcular a integral no caso onde $M = G/T$, onde $G = U(n)$. Para isso é necessário aplicar um extenso argumento baseado em álgebras de Lie, o qual é desenvolvido em parte no apêndice (**B**). Vamos G denotar como um grupo de Lie compacto, conexo e com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dizemos também que G contém um *toro maximal* $T = \exp \mathfrak{t}$, onde $\mathfrak{t}$ é a sub-álgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, ou seja, $\mathfrak{t}$ é uma sub-álgebra abeliana maximal. $\mathfrak{t}$ é abeliano e se existe um elemento $X \in \mathfrak{g}$ o qual $[X, Y] = 0$ ocorre, então, para qualquer $Y \in \mathfrak{t}$, temos $X \in \mathfrak{t}$. G age sobre $\mathfrak{g}$ pela representação adjunta, portanto temos os mapas

$$\mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \supset \mathfrak{t} \Rightarrow \mathrm{Ad} : T \times \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}, \tag{4.212}$$

ou seja, $\mathrm{Ad}_b \mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}$ para qualquer $b \in T$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno $\mathrm{Ad}(G)$-invariante sobre $\mathfrak{g}$. Sendo $\mathfrak{z}$ o centro de $\mathfrak{g}$, podemos fazer a seguinte decomposição

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{t} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}_1, \tag{4.213}$$

onde $\mathfrak{g}_1 \equiv [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é o subespaço semi-simples (forma de Cartan-Killing é não degenerada) de $\mathfrak{g}$ expandido por $\{[X, Y] | X, Y \in \mathfrak{g}\}$, $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{m} = [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{g}_1]$ é o complemento de $\mathfrak{t}$. Se $T = \exp \mathfrak{t}$, então $\mathfrak{m}$ é $\mathrm{Ad}(T)$-invariante, o que significa que a restrição do produto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{m}$ induz naturalmente uma métrica Riemanniana sobre $M = G/T$, onde pode-se considerar $\mathfrak{m}$ como o espaço tangente à M na origem. $M = G/T$ é chamado de *espaço homogêneo redutivo.*

Proposição 4.4. *Seja T um subgrupo fechado de um grupo de Lie G. Seja $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{g}$ as suas respectivas álgebras de Lie. Assumimos que existe um subespaço $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$ com $Ad(T)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Então um produto interno $Ad(T)$-invariante em $\mathfrak{m}$ induz uma estrutura Riemanniana em G/T. Esta estrutura é G-invariante [39].*

Um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é chamado de *elemento regulador* se o seu centralizador $\mathfrak{g}_X \equiv \{Y \in \mathfrak{g} | [Y, X] = 0\}$ tem a dimensão mínima entre todos os outros centralizadores, ou seja, $\dim \mathfrak{g}_X \leq \dim \mathfrak{g}_Y$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Existe um resultado da teoria das álgebras de Lie, mas difícil de se provar, o qual nos diz que é possível escolher um elemento regulador $X_0 \in \mathfrak{t}_1$ tal que $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_{X_0}$, $T = G_{f_{X_0}}$ para $G_{f_{X_0}}$ dado por (4.206), onde $f_{X_0} \in \mathfrak{g}^*$ é dado pelo produto $f_{X_0}(X) = \langle X, X_0 \rangle$. Então M é uma órbita coadjunta $\mathcal{O}$ de dimensão maximal uma vez que $\mathfrak{g}_{X_0}$ é de dimensão minimal.

Uma importante informação a ser determinada na fórmula de Duistermaat-Heckman (4.211) para órbitas co-adjuntas é a parte do determinante, $\det^{1/2} L_{X^\sharp}(p)$. Para isso vamos escolher um sistema de raízes positivas P contido no conjunto de raízes $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ de $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$, as quais são as complexificações de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. A bijeção $\alpha \leftrightarrow \widetilde{\alpha} : \Delta^+ \leftrightarrow P$ definida por $\widetilde{\alpha}(Z + X) = \alpha(X)$, onde $Z + X \in \mathfrak{z}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, relaciona P a um sistema de raízes positivas Δ^+ no sistema de raízes $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}})$ de $(\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}})$. Aqui $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$ é a álgebra semi-simples e $\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}$ é a sub-álgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$. Podemos escolher um conjunto de bases ortonormais $\mathcal{B} = \{e_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in \Delta^+}$ de $\mathfrak{m}$ tais que

$$[Y, e_\alpha] = -i\alpha(Y) f_\alpha \quad \text{e} \quad [Y, f_\alpha] = i\alpha(Y) e_\alpha, \tag{4.214}$$

para $Y \in \mathfrak{t}_1$. Então, para um particular ordenamento $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n=\dim M/2}$ de Δ^+, tomamos a matriz $\mathrm{ad}_Y : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ relativo a base $\mathcal{B}$ assumindo uma forma similar a (4.177)

$$\mathrm{ad}_Y = \begin{bmatrix} 0 & i\alpha_1(Y) & & & \bigcirc \\ -i\alpha_1(Y) & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & i\alpha_n(Y) \\ \bigcirc & & & -i\alpha_n(Y) & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.215}$$

Um elemento $X \in \mathfrak{t}$ é regular se, e somente se, $\alpha(X) \neq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$. Para um elemento regular $X \in \mathfrak{t}_1$ e $p \in M$ com $X^\sharp|_p = 0$, onde $p = \pi(a)$ para $a \in G$ e $\pi : G \to M = G/T$, o mapa $L_{X^\sharp}(p)$ é agora considerado como um mapa de $\mathfrak{m}$ para $\mathfrak{m}$ e é calculado para ser dado por $L_{X^\sharp}(p) = -\mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_{(a^{-1})}X}$ onde $X^\sharp|_p = 0$ implica que $\mathrm{Ad}_{(a^{-1})}X \in \mathfrak{t}_1$. De acordo com a equação (4.179) temos que

$$[\det L_{X^\sharp}(p)]^{1/2} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(i\mathrm{Ad}_{(a^{-1})}X). \tag{4.216}$$

Assumimos também que a $\mathcal{B}$ é positivamente orientada com relação a medida de Liouville $d\mu_L = \omega \wedge \ldots \wedge \omega / n!$. ω é a forma simplética sobre a órbita $\mathcal{O} = M = G/T = G/G_{f_{X_0}}$ e 0 é a origem T de M. Uma outra exigência é que $i\alpha(X_0) > 0$ para qualquer $\alpha \in \Delta^+$.

No caso em que estamos tratando agora, um argumento final para estabelecermos a fórmula de localização é que $X^\sharp|_{p=\pi(a)} = 0$ para qualquer elemento regular de $X \in \mathfrak{t}$ se, e somente se,

$$a \in N_G(\mathfrak{t}) \equiv \{a \in G | \mathrm{Ad}_a \mathfrak{t} = \mathfrak{t}\}, \tag{4.217}$$

onde $N_G(\mathfrak{t})$ é o normalizador de $\mathfrak{t}$ em G. Também podemos defini-lo por

$$N_G(T) \equiv \{a \in G | aTa^{-1} = T\}. \tag{4.218}$$

Por outro lado, o *grupo de Weyl* de (G, T) é definido por $W \equiv N_G(T)/T$ e vemos desta forma que o mapa $W \to M$, dado por $w \mapsto p = \pi(a)$ para um coset $w = aT \in W$ e $a \in N_G(T)$, é uma bijeção bem definida de W sobre o conjunto $F^X \equiv \{p \in M | X^\sharp|_P = 0\}$. Na presente situação temos que o Hamiltoniano $H : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, respeitando (4.209) e (4.210), é dado por

$$H_X(aT) \equiv f_{X_0}(\mathrm{Ad}_{(a^{-1})}X) \equiv \langle \mathrm{Ad}_{(a^{-1})}X, X_0 \rangle, \qquad a \in G. \tag{4.219}$$

Juntando os resultados obtidos na fórmula de Duistermaat-Heckman (4.211) obtemos uma a localização para uma variedade $M = G/T$:

$$\begin{aligned} \int_{G/T} e^{c\langle \mathrm{Ad}(a^{-1})X, X_0 \rangle} \frac{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}{n!}(aT) &= \left(\frac{2\pi}{c}\right)^n \sum_{w \in W, w = aT, a \in N_G(T)} \frac{e^{c\langle \mathrm{Ad}_{(a^{-1})}X, X_0 \rangle}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(i\mathrm{Ad}_{(a^{-1})}X)} \\ &= \left(\frac{2\pi}{c}\right)^n \sum_{w \in W} \frac{e^{c(w \cdot \lambda_{X_0})(X)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (w \cdot \alpha)(iX)}, \end{aligned} \tag{4.220}$$

onde $\lambda_{X_0} \in \mathfrak{t}_1^*$ é dado por $\lambda_{X_0}(Y) \equiv \langle Y, X_0 \rangle$ para $Y \in \mathfrak{t}_1$, ou seja, $\lambda_{X_0} = f_{X_0}|_{\mathfrak{t}_1}$ e

$$(w \cdot \lambda)(Y) \equiv \lambda(\mathrm{Ad}_{(a^{-1})} Y), \tag{4.221}$$

para $w = aT$ e $a \in N_G(T)$.

Agora vamos olhar o caso para o grupo unitário $G = U(n)$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$, o qual é o espaço das matrizes anti Hermitianas de grau n. Neste espaço temos um produto interno definido pela forma de Killing, $\langle X, Y \rangle \equiv -\mathrm{Tr} XY$, para $X, Y \in \mathfrak{g}$. A sub-álgebra $\mathfrak{t}$ é o espaço das matrizes diagonais com entradas $i\theta_1, ..., i\theta_n$, onde $\theta_j \in \mathbb{R}$, e T é o grupo das matrizes diagonais com entradas $e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}$. A álgebra semi-simples é dada por $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{su}(n)$, a qual implica em que $\mathfrak{t}_1$ são as matrizes em $\mathfrak{t}$ com traço zero e $\mathfrak{z}$ são as matrizes em $\mathfrak{t}$ com todas as entradas iguais. As complexificações são $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \{\widetilde{\alpha}_{rs}\}_{r \neq s}$, onde $\widetilde{\alpha}_{rs} = Y_r - Y_s$ para $\mathrm{diag}(Y_1, ..., Y_n)$ o espaço das matrizes diagonais complexas e $\Delta(\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}})$ o conjunto das restrições dos elementos de $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ para as matrizes de traço zero $\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}$. O conjunto das raízes positivas são dadas por

$$P = \{\widetilde{\alpha}_{rs} | 1 \leq r < s \leq n\}, \qquad \Delta^+ = \{\widetilde{\alpha}|_{\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}} | \widetilde{\alpha} \in P\}. \tag{4.222}$$

Seja $Y_j \in \mathfrak{t}$ um elemento com todas as entradas zero exceto para a entrada de ordem j na diagonal com valor $i = \sqrt{-1}$, para $1 \leq j \leq n$. Como definido anteriormente, se $a \in N_G(T)$ então $\mathrm{Ad}_a Y_j = a Y_j a^{-1} = H_{\sigma(j)}$, onde σ é o conjunto das permutações $\{1, 2, ..., n\}$. É possível mostrar que o mapa $a \to \sigma$ define um isomorfismo $aT \to \sigma$ do grupo de Weyl $W = N_G(T)/T$ de $U(n)$ no grupo simétrico S_n sobre n letras tais que para $(\lambda, Y) \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^* \times \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ a ação de $w \in W$, ou seja,

$$(w \cdot \lambda)(Y) \equiv \lambda(\mathrm{Ad}_{(a^{-1})} Y) = \lambda(a^{-1} Y a) \tag{4.223}$$

está relacionada com a ação de S_n sobre $(\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$ dada por

$$(\sigma \cdot \lambda)(Y = \mathrm{diag}(Y_1, ..., Y_n)) = \lambda(\mathrm{diag}(Y_{\sigma(1)}, ..., Y_{\sigma(n)})). \tag{4.224}$$

Por conveniência vamos fazer uma mudança de sinal redefinindo a estrutura simplética $\omega^- \equiv -\omega$. Logo devemos tocar a função Hamiltoniana, $H^- = -H$, e a medida de Liouville, $d\mu_L^- = (-1)^n d\mu_L$. Portanto a fórmula (4.220), para $c = -i$, é dada por

$$\int_{G/T} e^{i\langle \mathrm{Ad}_{(a^{-1})} X, X_0 \rangle} d\mu_L^-(aT) = (2\pi)^n \sum_{w \in W} \frac{e^{i(w \cdot \lambda_{X_0})(X)}}{\prod\limits_{\alpha \in \Delta^+} (w \cdot \alpha)(X)}, \tag{4.225}$$

para X e X_0 elementos regulares de $\mathfrak{t}$. Mais explicitamente temos que para

$$X_0 = \mathrm{diag}(it_1, ..., it_n), \quad X = \mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n) \in \mathfrak{t} \tag{4.226}$$

a condição de regularidade é que as entradas da diagonal são todas distintas e a condição $i\alpha(X_0) > 0$, para qualquer $\alpha \in \Delta^+$, diz que $t_1 > t_2 > ... > t_n$. Se $\sigma(X) \equiv \mathrm{diag}(i\theta_{\sigma(1)}, ..., i\theta_{\sigma(n)})$ para $\sigma \in S_n$, então, para $P(n) \equiv n(n-1)/2 = \dim(U(n)/T)/2$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{U(n)/T} e^{-i\mathrm{Tr}(X a X_0 a^{-1})} \frac{\omega^- \wedge ... \wedge \omega^-}{P(n)!(2\pi)^{P(n)}}(aT) &= \frac{1}{(-1)^{P(n)/2}} \frac{1}{\prod_{r<s}(\theta_r - \theta_s)} \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\sigma) e^{-i\mathrm{Tr}(\sigma(X) X_0)} \\ &= \frac{1}{(-1)^{P(n)/2}} \frac{1}{\prod_{r<s}(\theta_r - \theta_s)} \det \left[e^{i\theta_i t_j} \right], \end{aligned} \tag{4.227}$$

onde usamos que $\prod_{r<s}(\theta_{\sigma(r)} - \theta_{\sigma(s)}) = (\mathrm{sgn}\sigma) \prod_{r<s}(\theta_r - \theta_s)$ e a expansão do determinante $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\sigma) A_{1\sigma(1)} ... A_{n\sigma(n)}$.

Podemos ver que (4.227) nos conduz à fórmula de Itzykson-Zuber, mas primeiramente vamos definir a medida μ_0 sobre o grupo G por

$$\int_G f(a)d\mu_0(a) = \int_{G/T} \left[\int_T f(at)dt\right] \frac{d\mu_L^-(aT)}{(2\pi)^{\dim(G/T)/2}}, \tag{4.228}$$

onde dt é a medida de Haar [25] normalizada sobre T e f é qualquer função contínua sobre G. A G-invariância de ω implica na G-invariância de $d\mu_L^-$ e μ_0 é a medida de Haar sobre o grupo G. Com a escolha de $f = 1$ definimos

$$v(G/T) \equiv \int_{G/T} \frac{d\mu_L^-}{(2\pi)^{\dim(G/T)/2}}. \tag{4.229}$$

Para um cálculo explicito de $v(G/T)$ para $G = U(n)$ vamos escolher $\theta_j = \epsilon(n-j)$ em $X = \mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n)$. Logo o determinante da fórmula (4.227) é dado pelo *determinante de Vandermonde* definido por $\prod_{r<s}(e^{i\epsilon t_r} - e^{i\epsilon t_s})$. Portanto, o lado direito de (4.227) é dado por

$$\frac{1}{(-1)^{P(n)/2}} \frac{1}{\prod_{r<s}(s-r)} \prod_{r<s} \frac{(e^{i\epsilon t_r} - e^{i\epsilon t_s})}{\epsilon} \tag{4.230}$$

tal que no limite $\epsilon \to 0$ temos

$$\frac{1}{(-1)^{P(n)/2}} \prod_{r<s} \frac{(t_r - t_s)}{(s-r)}. \tag{4.231}$$

O mesmo limite, $\epsilon \to 0$, no lado esquerdo de (4.227) é o próprio $v(U(n)/T)$, desde que $X \to 0$. Portanto

$$v(U(n)/T) = \int_{U(n)/T} \frac{d\mu_L^-}{(2\pi)^{P(n)}} = \prod_{r<s} \frac{(t_r - t_s)}{(s-r)} = \frac{\prod_{r<s}(t_r - t_s)}{\prod_{k=0}^{n-1} k!} \tag{4.232}$$

é o volume simplético da órbita coadjunta definida por $X_0 = \mathrm{diag}(it_1, ..., it_n)$. Por fim, vamos escolher $f(a) = \exp\left(-i\mathrm{Tr}(XaX_0a^{-1})\right)$. Para $b \in T$ temos $f(ab) = f(a)$ pois b comuta com X_0. Definindo a medida de Haar normalizada sobre $U(n)$ por $\mu = \mu_0[v(U(n)/T)]^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{U(n)} e^{-i\mathrm{Tr}(XaX_0a^{-1})} d\mu(a) &= \frac{1}{v(U(n)/T)} \int_{U(n)/T} e^{-i\mathrm{Tr}(XaX_0a^{-1})} \frac{d\mu_L^-}{(2\pi)^{P(n)}} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} k!}{\prod_{r<s}(t_r - t_s)} \frac{i^{-P(n)}}{\prod_{r<s}(\theta_r - \theta_s)} \det\left[e^{i\theta_i t_j}\right], \end{aligned} \tag{4.233}$$

a qual é a fórmula de Itzykson-Zuber obtida neste exemplo sob condições muito gerais de localização por cohomologia equivariante. Esta fórmula foi descoberta num contexto de modelos de matrizes [29] para descrever matéria conforme acoplada à gravidade quântica bidimensional. No modelo de matrizes a aproximação de fase estacionária é sempre empregada para o limite de $n \to \infty$ [43], onde é possivel descrever relevantes teorias físicas como Teoria de Cordas, Gravidade Quântica em baixas dimensões e Teorias de Gauge na rede em altas dimensões.

5. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DO OPERADOR DE DIRAC E O TEOREMA DE ÍNDICE

Em princípio daremos neste capítulo uma motivação apresentando algumas propriedades geométricas do operador de Dirac em espaços gerais. Para isto, será necessário utilizar o formalismo de tetradas com o intuito de definir uma conexão de spin. Logo, uma argumentação supersimétrica para a derivação do teorema de índice é dada, a qual tem como base propriedades de localização para espaços de dimensões infinitas desenvolvidas na seção (4.3). Por último apresentaremos uma aplicação simples do teorema de índice de Atiyah-Singer em teorias de gauge. O objeto de estudo será anomalias abelianas, onde um significado geométrico para a não conservação da corrente quiral dado será visto como a integral de uma classe característica.

5.1 Spinors em Espaços Curvos

5.1.1 Frames

Antes de introduzirmos objetos como spinores sobre uma variedade M, é conveniente definirmos o que chamaremos de *frames*. Sabemos que sobre cada fibra de um fibrado tangente TM podemos agregar uma base natural $\{\partial/\partial x^\mu\}$ definida através de uma carta U_i. Uma vez que estamos considerando que a nossa variedade M é dotada com uma métrica g, além das bases naturais, podemos empregar também bases ortonormais $\{\hat{e}_\alpha\}$. Tanto $\{\partial/\partial x^\mu\}$ quanto $\{\hat{e}_\alpha\}$ são campos vetoriais linearmente independentes sobre a carta U_i, onde os mesmos definem um *frame* local.

Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial cuja fibra típica é dada por $\mathbb{R}^k$, onde π é a projeção. Sobre a carta U_i temos o isomorfismo $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^k$ devido às trivializações locais, onde podemos escolher k seções linearmente independentes $\{e_1(p), ..., e_k(p)\}$, para $p \in M$. Dizemos que estas seções definem *um* frame sobre U_i e dado isto temos um mapa natural $F_p \to F$ definido por

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) \mapsto \{V^\alpha\} \in F. \tag{5.1}$$

A trivialização local é dada por

$$\phi_i^{-1}(V) = (p, \{V^\alpha\}), \tag{5.2}$$

onde, por definição, temos que

$$\phi_i(p, \{0, ..., 0, 1_\alpha, 0, ..., 0\}) = e_\alpha(p). \tag{5.3}$$

Vamos agora considerar uma superposição de cartas $U_i \cap U_j \neq 0$, onde ocorre uma mudança entre os frames $\{e_1(p), ..., e_k(p)\}$ sobre U_i e $\{\widetilde{e}_1(p), ..., \widetilde{e}_k(p)\}$ sobre U_j, onde $p \in U_i \cap U_j$. Podemos expressar o vetor $\widetilde{e}_\alpha(p)$ por

$$\widetilde{e}_\beta(p) = e_\alpha(p) G(p)^\alpha{}_\beta, \tag{5.4}$$

onde $G(p)^\alpha{}_\beta \in GL(k, \mathbb{R})$. Para as componentes do vetor temos que

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) = \widetilde{V}^\alpha \widetilde{e}_\alpha(p) \tag{5.5}$$

$$\therefore \widetilde{V}^{\beta} = G^{-1}(p)^{\beta}{}_{\alpha} V^{\alpha}. \tag{5.6}$$

Associado com o fibrado tangente TM sobre uma variedade M de dimensão m temos um fibrado principal que é o *fibrado de frames* $LM \equiv \bigcup_{p \in M} L_pM$, onde L_pM é um conjunto de frames em p. Tendo o fibrado TM uma base natural $\{\partial/\partial x^{\mu}\}$ sobre U_i, podemos expressar o frame $u = \{X_1, ..., X_m\}$ por

$$X_{\alpha} = X^{\mu}{}_{\alpha} \left. \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right|_p, \quad 1 \leq \alpha \leq m, \tag{5.7}$$

onde $X^{\mu}{}_{\alpha} \in GL(m, \mathbb{R})$ e X_{α} são linearmente independentes. As trivializações locais são definidas por $\phi_i : U_i \times GL(m, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_i)$, tal que $\phi_i^{-1}(u) = (p, (X^{\mu}{}_{\alpha}))$. Agora podemos definir a estrutura de LM como se segue:

- Se $u = \{X_1, ..., X_m\}$ é um frame em p, definimos $\pi_L : LM \to M$ por $\pi_L(u) \equiv p$.
- A ação de $a \in GL(m, \mathbb{R})$ sobre o frame $u = \{X_1, ..., X_m\}$ é definida por uma atuação à direita, $(a, u) \mapsto ua$, onde ua é um novo frame em p dado por

$$Y_{\alpha} \equiv X_{\beta} a^{\beta}{}_{\alpha}. \tag{5.8}$$

  Podemos concluir que $GL(m, \mathbb{R})$ age sobre LM transitivamente.

- Seja a superposição de cartas $U_i \cap U_j \neq 0$ e um ponto $p \in U_i \cap U_j$ tal que

$$X_{\alpha} = X^{\mu}{}_{\alpha} \left. \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right|_p = \widetilde{X}^{\mu}{}_{\alpha} \left. \frac{\partial}{\partial y^{\mu}} \right|_p \tag{5.9}$$

$$\therefore X^{\mu}{}_{\alpha} = \left. \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\nu}} \right|_p \widetilde{X}^{\nu}{}_{\alpha}, \tag{5.10}$$

  onde $X^{\mu}{}_{\alpha}, \widetilde{X}^{\mu}{}_{\alpha} \in GL(m, \mathbb{R})$. Portanto podemos definir uma função de transição, $t^L_{ij}(p) = \partial x^{\mu}/\partial y^{\nu}|_p \in GL(m, \mathbb{R})$, devido à superposição das cartas agindo à esquerda. Dado o fibrado tangente TM, construímos o fibrado de frames com a mesma função de transição.

Em teorias relativísticas identificamos a ação à direita como sendo responsável por transformações de Lorentz locais, enquanto que a ação à esquerda corresponde as transformações gerais de coordenadas devido ao grupo de difeomorfismos de M, $Diff(M)$.

Seja a n-esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = 1\}$. O espaço real projetivo $\mathbb{R}P^n$ é obtido de S^n identificando o par de pontos antipodais $(x, -x)$. Assim vemos que S^n é o espaço de recobrimento de $\mathbb{R}P^n$ para $n \geq 2$. Desde que o grupo fundamental $\pi_1(S^n) = \{e\}$ para $n \geq 2$, S^n é o espaço de recobrimento universal de $\mathbb{R}P^n$ e

$$\pi_n(S^m) \cong \pi_n(\mathbb{R}P^m). \tag{5.11}$$

Como um exemplo, temos que um elemento de $SO(3)$ é especificado por uma rotação em torno de um eixo $\hat{n}$ por um ângulo θ $(0 < \theta < \pi)$, onde o vetor $\widehat{\Omega} \equiv \theta \hat{n}$ é designado para cada elemento de $SO(3)$. Ω assume os seus valores no disco D^3, onde $\pi\hat{n}$ e $-\pi\hat{n}$ representam a mesma rotação. Logo o espaço o qual Ω pertence é um disco D^3 cujos pontos antipodais sobre a superfície S^2 são identificados. Isto mostra que $\mathbb{R}P^3$ é dado por $SO(3)$ e podemos ver também que S^3 é isomorfo ao grupo $SU(2)$, onde para qualquer $g \in SU(2)$ temos

$$g = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \det g = |a|^2 + |b|^2 \equiv 1. \tag{5.12}$$

Se fixarmos $a \equiv u + iv$ e $b \equiv x + iy$, definimos S^3. De forma generalizada, o grupo de recobrimento universal $SPIN(n)$ de $SO(n)$ é chamado de *grupo de spin*, onde alguns deles são dados por

$$\begin{aligned} SPIN(3) &= SU(2) \\ SPIN(4) &= SU(2) \times SU(2) \\ SPIN(5) &= USp(2) \\ SPIN(6) &= SU(4). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Um campo *spinorial* sobre uma variedade M é definido como sendo a seção de um *fibrado de spin*. Devido ao fato de $GL(k,\mathbb{R})$ não ter representação spinorial, é necessário induzirmos um fibrado de frames ortonormais cujo grupo de estrutura seja dado por $SPIN(k)$. Como já foi mencionado, $SPIN(k)$ é o grupo de recobrimento universal de $SO(k)$ e, portanto, para que possamos definir um fibrado de spin é preciso checar se existem "lifts" do fibrado principal definido por $SO(k)$ para o outro fibrado principal definido por $SPIN(k)$ (trivialidade da primeira e segunda classe de Stiefel-Whitney [32]). Um exemplo disso é quando consideramos um fibrado de spin associado com o fibrado de frames de Lorentz quadridimensional, LM, onde M é uma variedade de Lorentz. O grupo de estrutura é dado por

$$O^+_\uparrow(3,1) \equiv \{\Lambda \in O(3,1) |\, \det\Lambda = +1, {\Lambda_0}^0 > 0\}. \tag{5.14}$$

O grupo de recobrimento universal de $O^+_\uparrow(3,1)$ é o grupo $SL(2,\mathbb{C})$, onde o homomorfismo $\varphi : SL(2,\mathbb{C}) \to O^+_\uparrow(3,1)$ é um mapa $2:1$ com $\ker\varphi = \{1_2, -1_2\}$. O spinor de Weyl é uma seção do fibrado

$$(W, \pi, M, \mathbb{C}^2, SL(2,\mathbb{C})), \tag{5.15}$$

enquanto que o spinor de Dirac é uma seção do fibrado

$$(D, \pi, M, \mathbb{C}^4, SL(2,\mathbb{C}) \oplus \overline{SL(2,\mathbb{C})}). \tag{5.16}$$

Uma seção de W é uma representação $(1/2, 0)$ de $O^+_\uparrow(3,1)$, e uma seção de $\overline{W}$ é uma representação $(0, 1/2)$. O spinor de Dirac pertence à representação $(1/2,0) \oplus (0,1/2)$.

5.1.2 Bases Não-Coordenadas

Quando estamos considerando bases coordenadas temos que T_pM é expandido por $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ e T_p^*M por $\{dx^\mu\}$. Para uma variedade M podemos fazer uma outra escolha de base. Portanto, vamos considerar a seguinte combinação linear,

$$\hat{e}_\alpha = {e_\alpha}^\mu e_\mu = {e_\alpha}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \{{e_\alpha}^\mu\} \in GL(m,\mathbb{R}), \tag{5.17}$$

onde escolhemos $\det {e_\alpha}^\mu > 0$ por questões de orientabilidade. O conjunto $\{\hat{e}_\alpha\}$ é o frame dos vetores de base, o qual é obtido por uma rotação de $\{e_\mu\}$ gerada pelo grupo $GL(m,\mathbb{R})$ de modo que a orientação seja preservada. Neste momento estamos requerendo que a base $\{\hat{e}_\alpha\}$ seja ortonormal, o que implica na seguinte relação

$$g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = {e_\alpha}^\mu {e_\beta}^\nu g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\alpha\beta}, \tag{5.18}$$

ou

$$g_{\mu\nu} = {e^\alpha}_\mu {e^\beta}_\nu \delta_{\alpha\beta}, \tag{5.19}$$

onde $(e^{\alpha}{}_{\mu})^{-1} = e_{\alpha}{}^{\mu}$, $e^{\alpha}{}_{\mu}e_{\alpha}{}^{\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu}$ e $e^{\alpha}{}_{\mu}e_{\beta}{}^{\mu} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$. Se M é lorentziana, devemos trocar $\delta_{\alpha\beta}$ pela métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$. Como um vetor V não depende da base escolhida, temos que

$$V = V^{\mu}e_{\mu} = V^{\alpha}\hat{e}_{\alpha} = V^{\alpha}e_{\alpha}{}^{\mu}e^{\mu} \tag{5.20}$$

$$\therefore V^{\mu} = V^{\alpha}e_{\alpha}{}^{\mu}, \quad V^{\alpha} = e^{\alpha}{}_{\mu}V^{\mu}. \tag{5.21}$$

Agora podemos introduzir as bases duais $\{\hat{\theta}^{\alpha}\}$, definidas pelo produto interno $\langle\hat{\theta}^{\alpha}, \hat{e}_{\beta}\rangle = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$, onde esta relação é satisfeita se

$$\hat{\theta}^{\alpha} = e^{\alpha}{}_{\mu}dx^{\mu}. \tag{5.22}$$

A métrica na base $\{\hat{\theta}^{\alpha}\}$ pode ser escrita por

$$g = g_{\mu\nu}dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} = \delta_{\alpha\beta}\hat{\theta}^{\alpha} \otimes \hat{\theta}^{\beta}. \tag{5.23}$$

Chamamos $\{\hat{e}_{\alpha}\}$ e $\{\hat{\theta}^{\alpha}\}$ de *bases não-coordenadas* e os coeficientes $e_{\alpha}{}^{\mu}$ são as *tetradas* (ou *vierbein* para o espaço quadridimensional). Podemos calcular o bracket de Lie e verificamos que para bases não coordenadas ele é diferente de zero:

$$\begin{aligned} [\hat{e}_{\alpha}, \hat{e}_{\beta}]\big|_p f &= e_{\alpha}{}^{\mu}\partial_{\mu}(e_{\beta}{}^{\nu}\partial_{\nu}f) - e_{\beta}{}^{\mu}\partial_{\mu}(e_{\alpha}{}^{\nu}\partial_{\nu}f) \\ &= \left[e_{\alpha}{}^{\mu}(\partial_{\mu}e_{\beta}{}^{\nu}) - e_{\beta}{}^{\mu}(\partial_{\mu}e_{\alpha}{}^{\nu})\right]\big|_p \partial_{\nu}f \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\therefore [\hat{e}_{\alpha}, \hat{e}_{\beta}]\big|_p = c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(p)\hat{e}_{\gamma}|_p, \tag{5.25}$$

onde

$$c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}(p) \equiv e^{\gamma}{}_{\nu}\left[e_{\alpha}{}^{\mu}\partial_{\mu}e_{\beta}{}^{\nu} - e_{\beta}{}^{\mu}\partial_{\mu}e_{\alpha}{}^{\nu}\right](p). \tag{5.26}$$

5.1.3 Equações de Estrutura de Cartan

Vamos definir aqui dois objetos através da conexão, a qual é intrínseca à variedade M. Primeiramente temos o *tensor de torção* dado por um mapa $T : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \tag{5.27}$$

e por fim temos o *tensor curvatura de Riemann*, $R : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definido por

$$R(X, Y, Z) \equiv R(X, Y)Z \equiv \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \tag{5.28}$$

onde $\mathfrak{X}(M)$ é o espaço dos campos vetoriais definidos sobre a variedade M. Definimos também os coeficientes da conexão com relação às bases não coordenadas (5.17) por

$$\nabla_{\alpha}\hat{e}_{\beta} \equiv \nabla_{\hat{e}_{\alpha}}\hat{e}_{\beta} = \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\hat{e}_{\gamma}. \tag{5.29}$$

Substituindo (5.17) em (5.29), temos que

$$\nabla_{\hat{e}_{\alpha}}\hat{e}_{\beta} = \nabla_{e_{\alpha}{}^{\mu}e_{\mu}}(e_{\beta}{}^{\nu}e_{\nu}) = e_{\alpha}{}^{\mu}\nabla_{e_{\mu}}(e_{\beta}{}^{\nu}e_{\nu}) = \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}e_{\gamma}{}^{\lambda}e_{\lambda}$$

$$e_{\alpha}{}^{\mu}(\partial_{\mu}e_{\beta}{}^{\nu} + e_{\beta}{}^{\lambda}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda})e_{\nu} = \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}e_{\gamma}{}^{\lambda}e_{\lambda}$$

$$\therefore \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = e^{\gamma}{}_{\nu}e_{\alpha}{}^{\mu}(\partial_{\mu}e_{\beta}{}^{\nu} + e_{\beta}{}^{\lambda}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}) = e^{\gamma}{}_{\nu}e_{\alpha}{}^{\mu}\nabla_{\mu}e_{\beta}{}^{\nu}. \tag{5.30}$$

Os componentes de (5.27) e (5.28) na base não coordenada são dados respctivamente por

$$\begin{aligned} T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= \langle\hat{\theta}^{\alpha}, T(\hat{e}_{\beta}, \hat{e}_{\gamma})\rangle = \langle\hat{\theta}^{\alpha}, \nabla_{\beta}\hat{e}_{\gamma} - \nabla_{\gamma}\hat{e}_{\beta} - [\hat{e}_{\beta}, \hat{e}_{\gamma}]\rangle \\ &= \langle\hat{\theta}^{\alpha}, \Gamma^{\delta}{}_{\beta\gamma}\hat{e}_{\delta} - \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}\hat{e}_{\delta} - c_{\beta\gamma}{}^{\delta}\hat{e}_{\delta}\rangle \\ &= \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} - c_{\beta\gamma}{}^{\alpha} \end{aligned} \tag{5.31}$$

e

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= \langle \hat{\theta}^{\alpha}, \nabla_{\gamma}\nabla_{\delta}\hat{e}_{\beta} - \nabla_{\delta}\nabla_{\gamma}\hat{e}_{\beta} - \nabla_{[\hat{e}_{\gamma},\hat{e}_{\delta}]}\hat{e}_{\beta}\rangle \\ &= \langle \hat{\theta}^{\alpha}, \nabla_{\gamma}(\Gamma^{\varepsilon}{}_{\delta\beta}\hat{e}_{\varepsilon}) - \nabla_{\delta}(\Gamma^{\varepsilon}{}_{\gamma\beta}\hat{e}_{\varepsilon}) - c_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}\hat{e}_{\beta}\rangle \\ &= \langle \hat{\theta}^{\alpha}, \hat{e}_{\gamma}[\Gamma^{\varepsilon}{}_{\delta\beta}]\hat{e}_{\varepsilon} + \Gamma^{\varepsilon}{}_{\delta\beta}\Gamma^{\zeta}{}_{\gamma\varepsilon}\hat{e}_{\zeta} - \hat{e}_{\delta}[\Gamma^{\varepsilon}{}_{\gamma\beta}]\hat{e}_{\varepsilon} - \Gamma^{\varepsilon}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\zeta}{}_{\delta\varepsilon}\hat{e}_{\zeta} - c_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon}\Gamma^{\zeta}{}_{\varepsilon\beta}\hat{e}_{\zeta}\rangle \\ &= \hat{e}_{\gamma}[\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\beta}] + \Gamma^{\varepsilon}{}_{\delta\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\varepsilon} - \hat{e}_{\delta}[\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}] - \Gamma^{\varepsilon}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\varepsilon} - c_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon}\Gamma^{\alpha}{}_{\varepsilon\beta}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Definimos a 1-forma (*matrix-valued*) $\{\omega^{\alpha}{}_{\beta}\}$ chamada *conexão 1-forma* por

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\hat{\theta}^{\gamma}. \tag{5.33}$$

Teorema 5.1 (Equações de Estrutura de Cartan)**.** *A conexão 1-forma $\{\omega^{\alpha}{}_{\beta}\}$ satisfaz as seguintes equações*

$$d\hat{\theta}^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \hat{\theta}^{\beta} = T^{\alpha} \tag{5.34}$$

$$d\omega^{\alpha}{}_{\beta} + \omega^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}{}_{\beta} = R^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{5.35}$$

onde estamos definindo a torção 2-forma, $T^{\alpha} \equiv \frac{1}{2}T^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\hat{\theta}^{\beta} \wedge \hat{\theta}^{\gamma}$, e a curvatura 2-forma, $R^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\hat{\theta}^{\gamma} \wedge \hat{\theta}^{\delta}$.

Podemos derivar as equações (5.34) e (5.35) para obtermos as *identidades de Bianchi*:

$$dT^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\beta} \wedge T^{\beta} = R^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \hat{\theta}^{\beta} \tag{5.36}$$

e

$$dR^{\alpha}{}_{\beta} + \omega^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge R^{\gamma}{}_{\beta} - R^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}{}_{\beta} = 0. \tag{5.37}$$

5.1.4 Frame Local

Vamos considerar uma variedade Riemanniana de dimensão m, onde o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tem $m(m+1)/2$ graus de liberdade, enquanto que a tetrada $e_{\alpha}{}^{\mu}$ tem m^2. De acordo com a construção que gerou a relação (5.6) temos muitas bases não coordenadas que resultam na mesma métrica, g, onde cada uma delas estão relacionadas umas às outras por uma “rotação” ortogonal local, dada por

$$\hat{\theta}^{\alpha} \longrightarrow \hat{\theta}'^{\alpha}(p) = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(p)\hat{\theta}^{\beta}(p) \tag{5.38}$$

e

$$\hat{e}_{\alpha} \longrightarrow \hat{e}'_{\alpha}(p) = \hat{e}_{\beta}(p)(\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\alpha}(p), \tag{5.39}$$

para cada ponto $p \in M$. As tetradas se transformam de acordo com

$$e^{\alpha}{}_{\mu}(p) \longrightarrow e'^{\alpha}{}_{\mu}(p) = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(p)e^{\beta}{}_{\mu}(p). \tag{5.40}$$

Estamos considerando aqui que os índices $\kappa, \lambda, \mu, \nu, ...$ transformam-se sob mudanças gerais no sistema de coordenadas, ou seja, se transformam sob o grupo de difeomorfismos sobre M, $Diff(M)$, enquanto que os índices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$ transformam-se sob “rotações” ortogonais locais, ou seja, a mudança ocorre na fibra típica. Olhando para a invariância dos componentes do tensor métrico sob a ação de $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(p)$ temos

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(p)\delta_{\alpha\delta}\Lambda^{\delta}{}_{\gamma}(p) = \delta_{\beta\gamma}, \tag{5.41}$$

ou, se estivermos considerando uma variedade M pseudo-riemanniana devemos trocar $\delta_{\alpha\beta}$ por $\eta_{\alpha\beta} = (-,+,+,+,...)$. Isto implica que $\{\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(p)\} \in SO(m)$ (ou $\{\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(p)\} \in$

$SO(1, m-1)$). As dimensões desses grupos de Lie são dadas pela diferença entre os graus de liberdade das tetradas e da métrica, ou seja, $m^2 - m(m+1)/2 = m(m-1)/2$. Sob a ação do grupo $SO(m)$ (ou $SO(1, m-1)$) os índices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$ são alterados, enquanto que $\kappa, \lambda, \mu, \nu, ...$ permanecem fixos.

Agora vamos ver como um tensor se comporta sob uma transformação local. Seja um tensor do tipo $(1,1)$ $t = t^{\mu}{}_{\nu} e_{\mu} \otimes dx^{\nu} = t^{\alpha}{}_{\beta} \hat{e}_{\alpha} \otimes \hat{\theta}^{\beta}$. De acordo com (5.38) e (5.39) temos que

$$t = t'^{\alpha}{}_{\beta} \hat{e}'_{\alpha} \otimes \hat{\theta}'^{\beta} = t'^{\alpha}{}_{\beta} \hat{e}_{\gamma} (\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\alpha} \otimes \Lambda^{\beta}{}_{\delta} \hat{\theta}^{\delta} \tag{5.42}$$

$$\therefore t^{\alpha}{}_{\beta} \longrightarrow t'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} t^{\gamma}{}_{\delta} (\Lambda^{-1})^{\delta}{}_{\beta}. \tag{5.43}$$

Aplicando este tipo de transformação para a primeira das equações de estrutura de Cartan, (5.34), temos que a torção se transforma da seguinte maneira

$$\begin{aligned} T^{\alpha} \longrightarrow T'^{\alpha} &= d\hat{\theta}'^{\alpha} + \omega'^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \hat{\theta}'^{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \left[d\hat{\theta}^{\beta} + \omega^{\beta}{}_{\gamma} \wedge \hat{\theta}^{\gamma} \right] \\ &= d(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \hat{\theta}^{\beta}) + \omega'^{\alpha}{}_{\beta} \wedge \Lambda^{\beta}{}_{\gamma} \hat{\theta}^{\gamma} \\ &= (d\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}) \wedge \hat{\theta}^{\beta} + \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} d\hat{\theta}^{\beta} + \omega'^{\alpha}{}_{\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\gamma} \wedge \hat{\theta}^{\gamma} \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\therefore \omega'^{\alpha}_{\beta} \Lambda^{\beta}{}_{\gamma} = \Lambda^{\alpha}{}_{\delta} \omega^{\delta}{}_{\gamma} - d\Lambda^{\alpha}_{\gamma} \tag{5.45}$$

$$\Rightarrow \omega'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \omega^{\gamma}{}_{\delta} (\Lambda^{-1})^{\delta}{}_{\beta} + \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} (d\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\beta}, \tag{5.46}$$

onde usamos que $\Lambda\Lambda^{-1} = 1 \Rightarrow d\Lambda\Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1} = 0$. A transformação da curvatura é dada por

$$R^{\alpha}{}_{\beta} \longrightarrow R'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} R^{\gamma}{}_{\delta} (\Lambda^{-1})^{\delta}{}_{\beta}. \tag{5.47}$$

5.1.5 Spinores

Vamos considerar agora spinores de Dirac ψ definidos sobre uma variedade M lorentziana quadridimensional. A tetrada é definida por (5.19), de acordo com a métrica de $\eta_{\alpha\beta} = (-,+,+,+)$. Define-se um frame ortonormal $\{\hat{\theta}^{\alpha}\}$ para cada ponto $p \in M$, onde as matrizes gamas são dadas neste novo frame por $\gamma^{\alpha} = e^{\alpha}{}_{\mu} \gamma^{\mu}$, e portanto temos $\{\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}\} = 2\eta^{\alpha\beta}$. Quando consideramos uma transformação de Lorentz local dada por $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}(p)$, temos que o spinor de Dirac se transforma de acordo com uma representação $\rho(\Lambda)$:

$$\psi(p) \longrightarrow \rho(\Lambda)\psi(p), \qquad \overline{\psi}(p) \longrightarrow \overline{\psi}(p)\rho(\Lambda)^{-1}, \tag{5.48}$$

onde $\overline{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma^{0}$. Para construírmos uma *boa* teoria física esperamos que a ação seja invariante sob as transformações (5.48), ou seja, em termos matemáticos temos que isto é possível se procurarmos uma derivada que seja covariante (devido ao termo cinético da equação de Dirac). Portanto devemos ter $\nabla_{\alpha}\psi$ como um vetor de Lorentz local e uma transformação como um spinor dada por

$$\nabla_{\alpha}\psi \longrightarrow \rho(\Lambda)\Lambda_{\alpha}{}^{\beta}\nabla_{\beta}\psi. \tag{5.49}$$

Se encontrarmos (5.49), a Lagrangeana será dada por

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha} + m\right)\psi. \tag{5.50}$$

Para procurarmos uma forma para a derivada covariante vamos olhar como $e_{\alpha}{}^{\mu}\partial_{\mu}\psi$ se transforma:

$$e_{\alpha}{}^{\mu}\partial_{\mu}\psi \longrightarrow \Lambda_{\alpha}{}^{\beta} e_{\beta}{}^{\mu}\partial_{\mu}(\rho(\Lambda)\psi) = \Lambda_{\alpha}{}^{\beta} e_{\beta}{}^{\mu}\left[\rho(\Lambda)\partial_{\mu}\psi + (\partial_{\mu}\rho(\Lambda))\psi\right]. \tag{5.51}$$

Agora supomos que

$$\nabla_\alpha \psi \equiv e_\alpha{}^\mu [\partial_\mu + \Omega_\mu]\psi, \tag{5.52}$$

onde obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \psi \longrightarrow \rho(\Lambda)\Lambda_\alpha{}^\beta \nabla_\beta \psi &= \Lambda_\alpha{}^\beta e_\beta{}^\mu \left[\rho(\Lambda)\partial_\mu \psi + (\partial_\mu \rho(\Lambda))\psi\right] + \Lambda_\alpha{}^\beta e_\beta{}^\mu \Omega'_\mu \rho(\Lambda)\psi \\
&= \rho(\Lambda)\Lambda_\alpha{}^\beta e_\beta{}^\mu \partial_\mu \psi + \rho(\Lambda)\Lambda_\alpha{}^\beta e_\beta{}^\mu \Omega_\mu \psi,
\end{aligned}$$

$$\therefore \Omega_\mu \longrightarrow \rho(\Lambda)\Omega_\mu \rho(\Lambda)^{-1} - (\partial_\mu \rho(\Lambda))\rho(\Lambda)^{-1}. \tag{5.53}$$

Para encontrarmos uma forma explicita para o termos Ω_μ, vamos considerar uma transformação de Lorentz local e infinitesimal, $\Lambda_\alpha{}^\beta(p) = \delta_\alpha{}^\beta + \epsilon_\alpha{}^\beta(p)$. Sabemos que uma representação para $\rho(\Lambda)$ [34] nos fornece a seguinte lei de transformação para os spinors de Dirac,

$$\psi \longrightarrow \exp\left[\frac{1}{2} i\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right]\psi \simeq \left[1 + \frac{1}{2} i\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right]\psi, \tag{5.54}$$

onde $\Sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4} i[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$ é a representação spinorial dos geradores da transformação de Lorentz. Sabemos também que $\Sigma_{\alpha\beta}$ satisfaz a álgebra de Lie $\mathfrak{o}(1,3)$,

$$i[\Sigma_{\alpha\beta}, \Sigma_{\gamma\delta}] = \eta_{\gamma\beta}\Sigma_{\alpha\delta} - \eta_{\gamma\alpha}\Sigma_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}\Sigma_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}\Sigma_{\gamma\beta}. \tag{5.55}$$

De acordo com (5.54) e (5.53) temos que

$$\begin{aligned}
\Omega_\mu \longrightarrow \quad & \left[1 + \frac{1}{2} i\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right]\Omega_\mu \left[1 - \frac{1}{2} i\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}\right] - \left(\partial_\mu \left[1 + \frac{1}{2} i\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right]\right)\left[1 - \frac{1}{2} i\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}\right] \\
&\simeq \left[1 + \frac{1}{2} i\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right]\Omega_\mu \left[1 - \frac{1}{2} i\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}\right] - \frac{1}{2} i\partial_\mu \epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\left[1 - \frac{1}{2} i\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}\right] \\
&\simeq \Omega_\mu + \frac{1}{2} i\epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta}, \Omega_\mu] - \frac{1}{2} i\partial_\mu \epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Substituindo $\Lambda_\alpha{}^\beta(p) = \delta_\alpha{}^\beta + \epsilon_\alpha{}^\beta(p)$ em (5.46) temos

$$\omega^\alpha{}_\beta \longrightarrow \omega^\alpha{}_\beta + \epsilon^\alpha{}_\gamma \omega^\gamma{}_\beta - \omega^\alpha{}_\gamma \epsilon^\gamma{}_\beta - d\epsilon^\alpha{}_\beta, \tag{5.57}$$

ou em termos dos componentes dados por (5.33),

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \longrightarrow \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \epsilon^\alpha{}_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\epsilon^\gamma{}_\beta - \partial_\mu \epsilon^\alpha{}_\beta. \tag{5.58}$$

Logo, obtemos de (5.56) e da álgebra (5.55) o seguinte

$$\Omega_\mu \equiv \frac{1}{2} i\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta \Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} i e^\alpha{}_\nu \nabla_\mu e^{\beta\nu}\Sigma_{\alpha\beta}, \tag{5.59}$$

onde verifica-se a propriedade de transformação,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} i\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta \Sigma_{\alpha\beta} \longrightarrow \quad & \frac{1}{2} i\left(\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta + \epsilon^\alpha{}_\gamma \Gamma^\gamma{}_\mu{}^\beta - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\epsilon^{\gamma\beta} - \partial_\mu \epsilon^{\alpha\beta}\right)\Sigma_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2} i\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta \Sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} i\left(\epsilon^\alpha{}_\gamma \Gamma^\gamma{}_\mu{}^\beta \Sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\epsilon^{\gamma\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2} i\partial_\mu \epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2} i\Gamma^\alpha{}_\mu{}^\beta \Sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} i\epsilon^{\alpha\beta}\left[\Sigma_{\alpha\beta}, \frac{1}{2} i\Gamma^\gamma{}_\mu{}^\delta \Sigma_{\gamma\delta}\right] - \frac{1}{2} i\partial_\mu \epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Por fim podemos escrever a Lagrangeana, a qual é invariante por transformações de coordenadas gerais e por transformações de Lorentz locais,

$$\mathcal{L} \equiv \overline{\psi}\left[i\gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} i\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma \Sigma_{\beta\gamma}\right) + m\right]\psi \tag{5.61}$$

e a ação é dada por

$$S \equiv \int_M d^4x\sqrt{-g} \quad \overline{\psi}\left[i\gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}i\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\Sigma_{\beta\gamma}\right) + m\right]\psi. \tag{5.62}$$

Se acoplarmos o spinor de Dirac com um campo de gauge $\mathcal{A}$, temos a ação

$$S \equiv \int_M d^4x\sqrt{-g} \quad \overline{\psi}\left[i\gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{2}i\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\Sigma_{\beta\gamma}\right) + m\right]\psi. \tag{5.63}$$

5.2 Mecânica Quântica Supersimétrica

5.2.1 Álgebra de Clifford e Férmions

Em princípio vamos considerar uma partícula se movendo sobre uma variedade $M = \mathbb{R}$. Agora consideremos as *variáveis de Grassmann* reais $\{\psi_i\} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, onde i rotula os índices das coordenadas. A álgebra satisfeita por estas variáveis é dada por uma relação de anti-comutação,

$$\{\psi_i, \psi_j\} = 0. \tag{5.64}$$

Para que tenhamos uma dinâmica para essas novas variáveis definidas sobre M, definimos a seguinte função Lagrangeana

$$L = \frac{i}{2}\psi_i\dot{\psi}_i - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}B_i\psi_j\psi_k, \tag{5.65}$$

onde B_i é um número real. Notemos que a Lagrangeana não pode ter um termo cinético usual tal como $\dot{\psi}_i\dot{\psi}_i$, uma vez que pela relação de anti-comutação ele é igual a zero. O momento canonicamente conjugado para a variável é dado por

$$\begin{aligned} \pi_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_i} = \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}_i}\left(-\frac{i}{2}\dot{\psi}_i\psi_i\right) \\ &= -\frac{i}{2}\psi_i. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Então, por uma transformação de Legendre do Lagrangiano, temos que o Halmitoniano é dado por

$$H \equiv \dot{\psi}_i\pi_i - L = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}B_i\psi_j\psi_k. \tag{5.67}$$

Da geometria simplética temos que a 1-forma de Poincaré para o sistema de variáveis fermiônicas é dado por

$$\theta \equiv d\psi_i\pi_i = \frac{1}{2}i\psi_i d\psi_i. \tag{5.68}$$

Logo a 2-forma simplética correspondente é

$$\omega \equiv d\theta = \frac{1}{2}i d\psi_i \wedge d\psi_i. \tag{5.69}$$

Da geometria simplética sabemos que o colchete de Poisson é definido de acordo com a 2-forma simplética:

$$\{f, g\}_{PB} \equiv \omega^{ij}(z)\frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial g}{\partial z^j}, \tag{5.70}$$

onde $z_i = (\psi_i, \pi_i)$. Pelo teorema de Darboux [7], encontramos uma carta conveniente de tal forma que

$$\{\psi_j, i\psi_k\}_{PB} = \delta_{jk}. \tag{5.71}$$

5.2.2 Modelo para Espaços Planos

O Hamiltoniano (5.67) não descreve uma partícula com spin se movendo num espaço plano, pois está em termos apenas das coordenadas de spin $\{\psi_i\}$ e independente das coordenadas de espaço $\{x_i\}$. Para que seja possível esta descrição do movimento no espaço, temos que adicionar um termo cinético ao Hamiltoniano. Portanto, seja uma partícula com spin em uma variedade $M = \mathbb{R}^d$, onde d é a dimensão do espaço, para $B_k \equiv 0$. A Langrangeana do sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_k\dot{x}_k + \frac{i}{2}\psi_k\dot{\psi}_k. \tag{5.72}$$

Os momentos canonicamente conjugados são dados por

$$p_k = \dot{x}_k \quad e \quad \pi_k = -\frac{i}{2}\psi_k, \tag{5.73}$$

onde os “brackets” de Poisson são

$$\{x_j, x_k\}_{PB} = \{p_j, p_k\}_{PB} = 0, \quad \{x_j, p_k\}_{PB} = \delta_{jk} \quad e \quad \{\psi_j, \psi_k\}_{PB} = -i\delta_{jk}. \tag{5.74}$$

Submetidos às condições de quantização, temos

$$[x_j, x_k] = [p_j, p_k] = 0, \quad [x_j, p_k] = i\delta_{jk} \quad e \quad \{\psi_j, \psi_k\} = \delta_{jk}. \tag{5.75}$$

Neste caso temos o seguinte Hamiltoniano

$$\dot{x}_j p_j - \dot{\psi}_j\frac{i}{2}\psi_j - L = \frac{1}{2}p^2 \equiv -\frac{1}{2}\Delta, \tag{5.76}$$

onde $\Delta \equiv \sum_{k=1}^{d} \partial_k^2$ é o laplaciano de dimensão d. O espaço de Hilbert sobre o qual H está agindo é definido por $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^{2^n}$, onde $L^2(\mathbb{R}^d)$ é o espaço das funções de quadrado integráveis em $\mathbb{R}^d$ e $n \equiv d/2$.

Uma variação na Lgrangeana resulta em

$$\delta L = \dot{x}_j\frac{d}{dt}\delta x_j + \frac{i}{2}\delta\psi_j\dot{\psi}_j + \frac{i}{2}\psi_j\frac{d}{dt}\delta\psi_j. \tag{5.77}$$

Podemos verificar que a *ação*, dada pela Lagrangeana (5.72), é um invariante sob transformações que definiremos a seguir, chamadas *transformações de supersimetrias*, dadas por

$$\delta x_j = i\epsilon\psi_j \quad e \quad \delta\psi_j = -\epsilon\dot{x}_j, \tag{5.78}$$

onde ϵ é uma constante de Grassmann real. Submetendo (5.72) às transformações (5.78) temos

$$\begin{aligned} \delta L &= i\dot{x}_j\epsilon\dot{\psi}_j - \frac{i}{2}\epsilon\dot{x}_j\dot{\psi}_j - \frac{i}{2}\psi_j\epsilon\ddot{x}_j \\ &= -\frac{i}{2}\frac{d}{dt}(\psi_j\epsilon\dot{x}_j). \end{aligned} \tag{5.79}$$

De acordo com o *Teorema de Noether*, temos que a *Supercarga* é conservada, ou seja, o gerador das transformações de supersimetria (5.78), é dada por

$$Q = i\psi_j\dot{x}_j \tag{5.80}$$

$$\therefore \begin{cases} [x_j, \epsilon Q] = \delta x_j \\ \{\psi_j, \epsilon Q\} = i\delta\psi_j. \end{cases} \tag{5.81}$$

Agora consideremos a dimensão do espaço par, $d = 2n$, e vamos quantizar o sistema na representação onde $\psi_j = \gamma_j/\sqrt{2}$, ou seja, representação $2n$ dimensional da *Álgebra de Clifford*, a qual a seguinte relação de anticomutação é válida,

$$\{\gamma_j, \gamma_k\} = 2\delta_{ij}. \tag{5.82}$$

Nesta representação temos que a supercarga é dada por

$$Q = i\psi_j p_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_j\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial\!\!\!/. \tag{5.83}$$

Estando a supercarga sujeita a uma transformação de supersimetria (5.78) temos que

$$\begin{aligned} \delta Q &= i\delta\psi_j\dot{x}_j + i\psi_j\frac{d}{dt}\delta x_j = -2i\epsilon\left(\frac{1}{2}\dot{x}_j\dot{x}_j + \frac{i}{2}\psi_j\dot{\psi}_j\right) \\ &= -2i\epsilon L. \end{aligned} \tag{5.84}$$

Com o intuito de obter a relação entre a supercarga e o Hamiltoniano, vemos duas transformações de supersimetria sucessivamente, onde os parâmetros de transformação são grassmannianos, ϵ_1 e ϵ_2. Considerando primeiramente a ordem de transformação ϵ_1 e ϵ_2 temos

$$\begin{array}{ccccc} x_j & \xrightarrow{\epsilon_1} & x_j + i\epsilon_1\psi_j & \xrightarrow{\epsilon_2} & x_j + i(\epsilon_1+\epsilon_2)\psi_j - i\epsilon_1\epsilon_2\dot{x}_j \\ \psi_j & \xrightarrow{\epsilon_1} & \psi_j - \epsilon_1\dot{x}_j & \xrightarrow{\epsilon_2} & \psi_j - (\epsilon_1+\epsilon_2)\dot{x}_j - i\epsilon_1\epsilon_2\dot{\psi}_j, \end{array} \tag{5.85}$$

enquanto que se invertermos a ordem das transformações, ficamos com

$$\begin{array}{ccc} x_j & \xrightarrow{\epsilon_2 \to \epsilon_1} & x_j + i(\epsilon_1+\epsilon_2)\psi_j + i\epsilon_1\epsilon_2\dot{x}_j \\ \psi_j & \xrightarrow{\epsilon_2 \to \epsilon_1} & \psi_j - (\epsilon_1+\epsilon_2)\dot{x}_j + i\epsilon_1\epsilon_2\dot{\psi}_j. \end{array} \tag{5.86}$$

Portanto a relação de comutação das operações acima é dada por

$$[\delta_{\epsilon_2}, \delta_{\epsilon_1}] = \delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} - \delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2} = -2i\epsilon_1\epsilon_2\frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.87}$$

A equação acima nos diz que o comutador de duas transformações de supersimetria é um gerador de translação temporal e segue que, devido aos "brackets" de Poisson definidos *a priori*, temos a definição do Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \{\epsilon_2 Q, \epsilon_1 Q\}_{PB} &= \{\epsilon_2 i p_j\psi_j, \epsilon_1 i p_k\psi_k\}_{PB} \\ &= -\epsilon_2\epsilon_1 p_j p_k\{\psi_j, \psi_k\}_{PB} \\ &= -i\epsilon_1\epsilon_2 p^2 = -2i\epsilon_1\epsilon_2 H. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Sub a condição de quantização vemos que

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= 2Q^2 = 2(ip_j\psi_j)(ip_k\psi_k) \\ &= -p_j p_k(\psi_j\psi_k + \psi_k\psi_j) \\ &= -2H \end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\therefore H = -Q^2. \tag{5.90}$$

Concluímos que a álgebra supersimétrica satisfeita por L e Q são resumidas da seguinte forma,

$$\delta Q = -2i\epsilon L \tag{5.91}$$

e

$$\delta L = \epsilon \frac{1}{2}\frac{dQ}{dt}. \tag{5.92}$$

Comparando (5.91) e (5.92) com (5.78) encontramos similaridades na forma as quais estão escritas. Chamamos a representação da álgebra dada por (5.78) de multipletos bosônicos, equanto que (5.91) e (5.92) são chamados de multipletos fermiônicos.

5.2.3 Variedades Gerais

Seja uma variedade M Riemanniana com dimensão $2n$, onde a métrica é um funcional bilinear $g(\cdot,\cdot) : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, não degenerado e simétrico, definido da seguinte forma para um sistema de coordenadas predeterminado,

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \tag{5.93}$$

onde

$$\langle X, Y\rangle \equiv g(X,Y) = g_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu, \quad X, Y \in T_pM. \tag{5.94}$$

Para um vetor $\psi^\mu(t) \in T_{x(t)}M$ definido em cada instante t (parâmetro), temos que sob mudança de coordenadas, $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$, a seguinte lei de transformação é válida

$$\psi^\mu \longrightarrow \psi'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\psi^\nu. \tag{5.95}$$

Sabemos que sob transformação de supersimetria as coordenados se transformam de acordo com

$$\delta x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} i\epsilon\psi^\nu = i\epsilon\psi'^\mu. \tag{5.96}$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned}
\delta\psi'^\mu &= \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\delta x^\lambda \psi^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\delta\psi^\nu \\
&= \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} i\epsilon\psi^\lambda\psi^\nu - \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} i\epsilon \dot{x}^\nu \\
&= -\epsilon \dot{x}'^\mu.
\end{aligned} \tag{5.97}$$

Agora introduzimos a supercarga generalizada,

$$Q = i\langle \dot{x}, \psi\rangle = i g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\psi^\nu. \tag{5.98}$$

Sabemos que a Lagrangeana supersimétrica sobre M pode ser encontrada a partir da supercarga, ou seja, tomanda a variação de Q:

$$\begin{aligned}
\delta Q &= i\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)\delta x^\lambda \dot{x}^\mu\psi^\nu + i g_{\mu\nu}(x)\delta\dot{x}^\mu\psi^\nu + i g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\delta\psi^\nu \\
&= -2i\epsilon\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}\psi^\nu\dot{\psi}^\mu + \frac{i}{2}\dot{x}^\mu g_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\psi^\lambda\psi^\nu\right),
\end{aligned} \tag{5.99}$$

onde

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} \equiv \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\lambda} - \partial_\rho g_{\lambda\nu}\right) \tag{5.100}$$

são os componentes da conexão. Comparando com (5.91) temos

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{i}{2}g_{\mu\nu}\psi^\mu\left(\frac{d\psi^\nu}{dt} + \dot{x}^\lambda\Gamma^\nu_{\lambda\kappa}(x)\psi^\kappa\right) \\ &= \frac{1}{2}\langle\dot{x},\dot{x}\rangle + \frac{i}{2}\left\langle\psi, \frac{D\psi}{Dt}\right\rangle. \end{aligned} \tag{5.101}$$

5.3 O Teorema de Índice

5.3.1 O Índice

Vamos agora considerar fibrados vetoriais $E_\pm \xrightarrow{\pi} M$, tais que definimos o *superespaço* [11] $E = E_+ \oplus E_-$ (espaço vetorial $\mathbb{Z}_2$-graduado) e o operador diferencial elíptico de Fredholm, $\mathcal{D}$, definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &: \Gamma(M,E^+) \longrightarrow \Gamma(M,E^-) \\ \mathcal{D}^\dagger &: \Gamma(M,E^-) \longrightarrow \Gamma(M,E^+), \end{aligned} \tag{5.102}$$

onde $\Gamma(M,E^\pm)$ e o conjunto das seções do fibrado $E^\pm$. O índice do operador $\mathcal{D}$ é definido por

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}\mathcal{D} &\equiv \dim\ker\mathcal{D} - \dim\mathrm{coker}\mathcal{D} \\ &= \dim\ker\mathcal{D} - \dim\ker\mathcal{D}^\dagger. \end{aligned} \tag{5.103}$$

Teorema 5.2. *O número Ind$\mathcal{D}$ é um invariante sob uma pequena deformação de $\mathcal{D}$.*

Demonstração. Notemos que $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger$ e $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ são operadores positivos e, portanto, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} &: \Gamma(M,E^+) \longrightarrow \Gamma(M,E^+) \\ \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger &: \Gamma(M,E^-) \longrightarrow \Gamma(M,E^-) \end{aligned} \tag{5.104}$$

$$\Rightarrow \ker\mathcal{D} = \ker\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}, \qquad \ker\mathcal{D}^\dagger = \ker\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger. \tag{5.105}$$

Seja $\{\phi_n\}$ o conjunto ortogonal das autofunções de $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$, ou seja,

$$\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}\phi_n = \lambda_n\phi_n. \tag{5.106}$$

Definimos $\psi_n \equiv \mathcal{D}\phi_n/\sqrt{\lambda_n}$ para $\lambda_n > 0$, que é o mesmo se indicarmos para todo $\phi_n \in (\ker\mathcal{D})^\perp$. Logo, segue que

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger\psi_n = \mathcal{D}\frac{\left(\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}\phi_n\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = \lambda_n\frac{\mathcal{D}\phi_n}{\sqrt{\lambda_n}} = \lambda_n\psi_n \tag{5.107}$$

onde concluímos que ψ_n é uma auto-seção com o mesmo autovalor λ_n e que $\psi_n \in (\ker\mathcal{D}^\dagger)^\perp$. Podemos ver também que o conjunto das autoseções $\{\psi_n\}$ é ortornormal,

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n\lambda_m}}\langle\phi_n|\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}|\phi_m\rangle = \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n\lambda_m}}\delta_{nm} = \delta_{nm}. \tag{5.108}$$

Portanto, podemos concluir que existe um isomorfismo natural entre $(\ker\mathcal{D})^\perp$ e $(\ker\mathcal{D}^\dagger)^\perp$. Note, contudo, que com as informações acima não temos como estabelecer um isomorfismo entre $\ker\mathcal{D}$ e $\ker\mathcal{D}^\dagger$. Agora vamos supor que N estados em $\ker\mathcal{D}$ são "promovidos" a ter autovalores diferentes de zero devido ao resultado de uma pequena perturbação de $\mathcal{D}$, ou seja, a perturbação faz com que a dimensão $\ker\mathcal{D}$ decresça de N. Segue então que o mesmo número N de estados deve também deixar $\ker\mathcal{D}^\dagger$ devido ao isomorfismo estabelecido e assim o índice é invariante. O caso inverso, onde acrescentamos N estados em $\ker\mathcal{D}$ devido a perturbação, também preserva o índice uma vez que N estados deixa $(\ker\mathcal{D}^\dagger)^\perp$ e vão para $\ker\mathcal{D}^\dagger$. □

Teorema 5.3. *Seja $\mathcal{D}$ um operador diferencial de Fredholm. Então o seu Índice é dado por*

$$Ind\mathcal{D} = Tre^{-\beta\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}} - Tre^{-\beta\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger}, \tag{5.109}$$

onde $\beta > 0$ é uma constante real. De fato, o índice é independente de β.

Demonstração. Os traços em (5.109) são calculados com relação as bases $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$. Seja $\{\phi_i^0\}$ e $\{\psi_j^0\}$ autoseções ortonormais de $\ker\mathcal{D}$ e $\ker\mathcal{D}^\dagger$, e $1 \leq i \leq \dim\ker\mathcal{D}$ e $1 \leq j \leq \dim\ker\mathcal{D}^\dagger$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}e^{-\beta\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}} - \mathrm{Tr}e^{-\beta\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger} &= \sum_{\lambda_n\neq 0}\langle\phi_n|e^{-\beta\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}}|\phi_n\rangle - \sum_{\lambda_n\neq 0}\langle\psi_n|e^{-\beta\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger}|\psi_n\rangle + \\
&\quad + \sum_i\langle\phi_i^0|\phi_i^0\rangle - \sum_j\langle\psi_j^0|\psi_j^0\rangle \\
&= \sum_{\lambda_n\neq 0} e^{-\beta\lambda_n}(\langle\psi_n|\psi_n\rangle - \langle\psi_n|\psi_n\rangle) + \sum_i 1 - \sum_j 1 \\
&= \dim\ker\mathcal{D} - \dim\ker\mathcal{D}^\dagger \\
&= \mathrm{Ind}\mathcal{D}.
\end{aligned} \tag{5.110}$$

□

Seja $E = E_+ \oplus E_-$ o superespaço, portanto podemos definir o operador agindo sobre ele da seguinte forma

$$iQ \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^\dagger \\ \mathcal{D} & 0 \end{pmatrix} : E \longrightarrow E. \tag{5.111}$$

Além disso, podemos definir também um outro operador que chamaremos de *Hamiltoniano* (mais para frente será esclarecido este nome) e a matriz Γ por

$$H \equiv (iQ)^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.112}$$

Notemos que Q é um operador anti-hermitiano, enquanto que H é hermitiano e positivo definido. O índice (5.109) de $\mathcal{D}$ pode ser escrito usando (5.112), ou seja,

$$\mathrm{Ind}\mathcal{D} = \mathrm{Tr}\Gamma e^{-\beta H}. \tag{5.113}$$

Seja M uma variedade que admite estrutura Spinorial, ou seja, uma variedade cuja segunda classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$ é trivial. O grupo $SO(k)$ define um fibrado principal sobre M, onde podemos fazer um mapeamento ("lift") para o grupo de spin $SPIN(k)$, definido como sendo o grupo de recobrimento universal, de maneira a formar um outro fibrado principal:

$$\begin{array}{ccc} SO(k) & \longrightarrow & SPIN(k) \\ \downarrow\pi & & \\ M & & \end{array} \tag{5.114}$$

Seja $E = \Delta(M)$ este fibrado spinorial. Então associamos a $\Delta(M)$ uma álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Sendo assim, vamos definir o *Operador Quiralidade*,

$$\gamma_{2n+1} \equiv i^n\gamma_1\gamma_2...\gamma_{2n}, \tag{5.115}$$

onde $\gamma_{2n+1}^2 = 1$, portanto os seus autovalores são ± 1, ou seja, quiralidade positiva ou negativa.

O conjunto das seções $\Gamma(M,\Delta)$, para um k par, não é uma representação irredutível de $SPIN(k)$, mas pode ser decomposta em dois subespaços de acordo com a sua respectiva quiralidade. A decomposição é dada por

$$\Gamma(M,\Delta) = \Gamma(M,\Delta^+) \oplus \Gamma(M,\Delta^-), \tag{5.116}$$

onde $\Psi_\pm \in \Gamma(M,\Delta^\pm)$ satisfaz a relação de autovalores $\gamma_{2n+1}\Psi_\pm = \pm\Psi_\pm$. Designamos o *Número Fermiônico* $F=0$ para seções em $\Gamma(M,\Delta^+)$, enquanto que $F=1$ para seções em $\Gamma(M,\Delta^-)$. Logo, de acordo com a definição (5.112) temos

$$\Gamma = (-1)^F \tag{5.117}$$

e

$$\{Q,\Gamma\} = \{Q,(-1)^F\} = 0. \tag{5.118}$$

Na base em que $(-1)^F$ está diagonalizado, ou seja, (5.112), temos que os autoestados de quiralidade são dados explicitamente por

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_- \end{pmatrix}. \tag{5.119}$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned} Q &: \Gamma(M,\Delta^+) \longrightarrow \Gamma(M,\Delta^-) \\ Q &: \Gamma(M,\Delta^-) \longrightarrow \Gamma(M,\Delta^+), \end{aligned} \tag{5.120}$$

portanto o índice do operador Q é dado por

$$\mathrm{Ind}Q = \dim\ker\mathcal{D} - \dim\ker\mathcal{D}^\dagger = \mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right]. \tag{5.121}$$

Quando estamos aplicando a discussão do índice para operadores definidos através de suas atuações em spinors, escolhemos E como sendo um fibrado de spin, $E = \Delta(M) = \Delta^+(M)\oplus\Delta^-(M)$. Seja Q um operador do tipo Dirac definido sobre M e escolhemos $\Gamma = (-1)^F$ como sendo a matriz quiralidade γ_{2n+1}. Então o índice do operador de Dirac é o número de modos zeros de quiralidade positiva (Bósons) menos o número de modos zeros de quiralidade negativa (Férmions). Segue das definições acima, (5.112), que a energia é sempre zero ou positiva; os estados de energia zero, $E=0$, são exatamente os estados supersimétricos $|\Omega\rangle$, ou seja, os estados aniquilados por Q,

$$Q|\Omega\rangle = 0 \Rightarrow H|\Omega\rangle = 0, \tag{5.122}$$

os quais fornecem uma representação unidimensional da supersimetria e não necessariamente balanceados (número de bósons pode ser diferente do número de férmions); e cada autovalor de energia $E_i \neq 0$ está associado com um par de autoestados, fermiônico, $|F_i\rangle$, e bosônico, $|B_i\rangle$, tal que

$$\begin{aligned} (-1)^F|B_i\rangle &= |B_i\rangle, \quad Q|B_i\rangle = \sqrt{E_i}|F_i\rangle, \\ (-1)^F|F_i\rangle &= -|F_i\rangle, \quad Q|F_i\rangle = -\sqrt{E_i}|B_i\rangle, \end{aligned} \tag{5.123}$$

fornecendo uma representação bidimensional da supersimetria para cada nível de energia E_i. Como sabemos da discussão feita na demonstração do teorema (5.2), temos que os estados podem apenas chegar ou deixar a energia zero em pares, um fermiônico para cada bosônico, deixando o índice invariante. Deve haver $|\mathrm{Ind}|$ estados de energia zero para produzir o índice, então um índice diferente de zero implica que existe no mínimo um estado de energia zero que é um estado fundamental de supersimetria apropriado da teoria em questão. Portanto a supersimetria não pode ser quebrada neste caso. Por outro lado, temos que, devido a condição (5.122), o espaço de Hilbert da teoria permite bósons e férmions de massas iguais, o que não é observado na natureza. Então se a supersimetria tem algum papel na natureza, o mundo não é descrito por uma teoria onde a solução (5.122) seja admitida, ou seja, a supersimetria é dita ser quebrada espontaneamente. Um critério necessário para quebra dinâmica de supersimetria é o índice igual a zero [40, 41].

5.3.2 Propriedades de Localização e Supersimetria

Vamos retornar à equação (5.121), onde sabemos que Q é o operador de Dirac. Como já provamos, o índice é independente do parâmetro β e, portanto, o fator $e^{-\beta H}$ (para $\beta > 0$) é visto como um regulador do traço. O lado direito da equação (5.121) pode ser visto como uma função de partição e nos limites de baixa temperatura ($\beta \to \infty$) somente os modos zeros contribuem para o valor do traço.

Até o momento vimos como podemos definir o índice de um operador de Dirac Q na forma dada por (5.121). Gostaríamos agora de identificar esta formulação com a linguagem de integral de caminho [5] definindo o operador de Dirac sobre uma variedade spinorial (admite estrutura spinorial) M com $\dim M = 2n$, onde empregaremos nos cálculos da subseção seguinte a euclidianização da métrica (*rotação de Wick*) por $t \to -it$. Após uma rotação de Wick para o espaço euclidiano, temos que as transformações de supersimetria são dadas por

$$\delta x^\mu = i\epsilon\psi^\mu, \qquad \delta\psi^\mu = -i\epsilon\dot{x}^\mu. \tag{5.124}$$

Vamos considerar o seguinte Hamiltoniano

$$H = (iQ)^2 = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu. \tag{5.125}$$

Então temos para o índice do operador Q uma expressão para o formalismo de integral de trajetória dada por

$$\text{Ind}Q = \text{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right] = \int_{PBC}[d^{2n}x][d^{2n}\psi]\exp\left\{-\int_0^\beta dt L[x,\dot{x};\psi,\dot{\psi}]\right\}, \tag{5.126}$$

onde PCB ("periodic boundary conditions") fixa as condições de contorno periódicas para a integral calculada sobre os caminhos $x(T) = x(T+\beta)$ e $\psi(T) = \psi(T+\beta)$, e L é dada pela euclidianização de (5.101),

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\frac{D\psi^\nu}{Dt}. \tag{5.127}$$

Podemos estabelecer uma analogia entre (5.126) e (4.168), onde de maneira geral temos as partes bosônica e fermiônica da ação. Se consideramos o acréscimo do campo de gauge, temos que a Lagrangeana $N = 1/2$ supersimétrica total é dada por

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu\mathcal{A}_\mu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\frac{D\psi^\nu}{Dt} - \frac{1}{2}\psi^\mu\mathcal{F}_{\mu\nu}\psi^\nu. \tag{5.128}$$

É importante notar que o fator $(-1)^F$ em (5.126) não é necessário se estamos usando condições de contorno antiperiódicas. Isto pode ser visto se considerarmos o seguinte argumento. Seja

$$\text{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right] = \sum_n \langle n|(-1)^F e^{-\beta H}|n\rangle = \int d\psi^* d\psi \langle -\psi|(-1)^F e^{-\beta H}|\psi\rangle e^{-\psi^*\psi}, \tag{5.129}$$

onde $F = c^\dagger c$ e

$$\begin{aligned} &|\psi\rangle = |0\rangle + |1\rangle\psi \\ &\Rightarrow (-1)^F|\psi\rangle = |0\rangle - |1\rangle\psi = |-\psi\rangle. \end{aligned} \tag{5.130}$$

Portanto a integral (5.129) pode ser calculada,

$$\mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right] = \int d\psi^* d\psi \langle\psi|e^{-\beta H}|\psi\rangle e^{-\psi^*\psi}. \tag{5.131}$$

A inserção do fator $(-1)^F$ no cálculo do traço implica em considerarmos condições de contorno periódicas, as quais respeitam as transformações de supersimetria (5.78). Portanto PBC é imprescindível para o sistema supersimétrico, ou seja, o emparelhamento dos estados.

Como esperado, o gerador da supersimetria é definido pela equação dos modos zeros para o operador de Dirac iQ, onde a inclusão da informação dos modos zeros pode ser entendido como um vínculo. O operador de Dirac é dado por

$$\begin{aligned} iQ &= i\gamma^\mu Q_\mu = i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{2}i\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\Sigma_{\beta\gamma}\right) \\ &= i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{8}\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma[\gamma_\beta, \gamma_\gamma]\right), \end{aligned} \tag{5.132}$$

onde $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = e^\gamma{}_\nu e_\alpha{}^\mu\left(\partial_\mu e_\beta{}^\nu + e_\beta{}^\lambda\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\right)$. Adotando uma representação para as álgebras de Clifford, reescrevemos o gerador de supersimetria $N = 1/2$ com a informação das contribuições dos modos zeros por

$$\mathcal{Q} \equiv \psi^\mu\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right) \approx 0. \tag{5.133}$$

Usando o comutador para as álgebras gradeadas, $\{\mathcal{S}, \mathcal{O}\} = \mathcal{S}\mathcal{O} - (-1)^p\mathcal{O}\mathcal{S}$, onde p é o grau de $\mathcal{O}$, temos que o Hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned} \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\} &= \left\{\psi^\mu\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right), \psi^\nu\left(\partial_\nu + \mathcal{A}_\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\nu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right)\right\} \\ &= \{\psi^\mu, \psi^\nu\}\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right)\left(\partial_\nu + \mathcal{A}_\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\nu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right) + \\ &\quad +\psi^\mu\left\{\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right), \left(\partial_\nu + \mathcal{A}_\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\nu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right)\right\}\psi^\nu \\ &= 2\left[g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\mu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right)\left(\partial_\nu + \mathcal{A}_\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_\nu{}^\gamma\psi_\beta\psi_\gamma\right) + \frac{1}{2}\psi^\mu\mathcal{F}_{\mu\nu}\psi^\nu\right] \\ &= 2H. \end{aligned} \tag{5.134}$$

O exaustivo cálculo acima foi realizado usando propriedades de simetria do tensor curvatura de Riemann. Portanto segue que

$$\{\mathcal{Q}, H\} = \{H, H\} = 0. \tag{5.135}$$

A função de partição pertinente com o gauge fixo é dada por

$$Z = \int [d(Liouville)] \exp(iS_\Psi), \tag{5.136}$$

onde S_Ψ é a ação BRST com o gauge fixo correspondente às realizações (5.133), (5.134) e (5.135) da álgebra vinculada [28], descrevendo a propagação de uma partícula de Dirac sobre uma variedade M. Com condições periódicas de contorno para um problema supersimétrico $N = 1/2$, temos que S_Ψ é dada de acordo com o Lagrangiano (5.194).

Antes de mostrarmos a validade das características de localização relacionadas com uma integral de medida para um espaço de dimensão infinita, é imprescindível adotarmos uma conjectura sugerida por Atiyah e Witten [9, 42]. É notável ressaltar que o problema ainda carece de mais formulações matemáticas para que seja visto de forma rigorosa, ou seja, estamos aceitando uma conjectura que ainda não tem uma prova formal, mas que para princípios físicos tem se mostrado útil. A conjectura pode ser anunciada por:

Conjectura 5.1 (Atiyah-Witten)**.** *A integral de caminho para um problema de mecânica quântica supersimétrica admite uma estrutura formal de cohomologia equivariante sobre o espaço de superloop: $LM \otimes L\Lambda^1 M$. A parte fermiônica da ação supersimétrica pode ser interpretada como uma 2-forma (pré-) simplética no espaço de loop bosônico, a qual torna a medida bosônica original uma medida para o espaço da medida de Liouville.*

Se assumirmos a validade da versão degenerada de dimensão finita do teorema de Duistermaat-Heckman para a fórmula de integração, através da conjectura de Atiyah-Witten parece natural extender os conceitos de localização para um espaço superloop de dimensão infinita. Assim, veremos que a integral de caminho para mecânica quântica supersimétrica resultará no teorema de Atiyah-Singer para o operador de Dirac.

Vamos agora definir algumas propriedades do espaço de *loops*, como desenvolvidas na seção (4.3), para que as condições que permitem a localização possam ser estabelecidas. Dado qualquer funcional $F[x]$ de caminhos fechados em LM, definimos a diferenciação funcional,

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu(\tau)} F[x(\tau')] = \delta(\tau - \tau') F'[x(\tau')], \tag{5.137}$$

e as regras para diferenciação funcional dos caminhos grassmanianos periódicos pelo anticomutador,

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta \psi^\mu(\tau)}, \psi^\nu(\tau') \right\} = \delta^\nu_\mu \delta(\tau - \tau'). \tag{5.138}$$

A parte fermiônica em (5.194) é bilinear nos campos. Então, pela integração funcional de Berezin temos um fator determinante, $\det^{1/2} \parallel \hat{\Omega} \parallel$, o qual é visto como um fator da medida de integração sobre LM em (5.126), ou seja, pela conjectura de Atiyah-Witten isto define a medida simplética sobre o espaço dos *loops*. Portanto definimos $\hat{\Omega}$ por

$$\hat{\Omega}[x, \psi] \equiv \oint_{S^1} d\tau \frac{1}{2} \psi^\mu(\tau) \left(g_{\mu\nu} \frac{D}{D\tau} - \mathcal{F}_{\mu\nu}[x(\tau)] \right) \psi^\nu(\tau). \tag{5.139}$$

Na função de partição a integração somente da parte fermiônica, ou seja, a integração de Berezin, nos dá uma integral funcional onde a medida é do tipo Liouville: $[d^{2n}x]\sqrt{\det \parallel \hat{\Omega} \parallel}$. Se introduzirmos um operador nilpotente que age sobre o espaço dos *loops* dado por

$$D \equiv \oint_{S^1} d\tau \psi^\mu(\tau) \frac{\delta}{\delta x^\mu(\tau)}, \tag{5.140}$$

verificamos que (5.139) é D-exato:

$$\hat{\Omega}[x, \psi] = D\hat{\Sigma}[x, \psi], \tag{5.141}$$

onde

$$\hat{\Sigma}[x,\psi] \equiv \oint_{S^1} d\tau \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[x(\tau)]\dot{x}^\nu(\tau) + \mathcal{A}_\mu[x(\tau)]\right)\psi^\mu(\tau) = \oint_{S^1} d\tau \hat{\Sigma}_\mu[x(\tau)]\psi^\mu(\tau). \quad (5.142)$$

A forma (5.139) é chamada de estrutura (pré-) simplética do espaço de *loops*. Também podemos definir um operador de contração sobre o espaço dos *loops* por

$$I_{\dot{x}} \equiv \oint_{S^1} d\tau \dot{x}^\mu(\tau)\frac{\delta}{\delta\psi^\mu(\tau)}. \quad (5.143)$$

Portanto, o operador derivada exterior equivariante no espaço dos *loops* é por analogia construído como a soma de (5.140) com (5.143):

$$D_{\dot{x}} \equiv D + I_{\dot{x}} = \oint_{S^1} d\tau \left(\psi^\mu(\tau)\frac{\delta}{\delta x^\mu(\tau)} + \dot{x}^\mu(\tau)\frac{\delta}{\delta\psi^\mu(\tau)}\right). \quad (5.144)$$

Das transformações de supersimetria (5.124), podemos concluir que

$$\mathcal{Q} \sim D_{\dot{x}} \quad (5.145)$$

sobre o espaço $LM \otimes L\Lambda^1 M$, uma vez que

$$\begin{aligned} D_{\dot{x}}x^\mu(\tau) &= \oint_{S^1} d\tau' \left(\psi^\nu(\tau')\frac{\delta x^\mu(\tau)}{\delta x^\nu(\tau)}\right) = \psi^\mu(\tau) \\ D_{\dot{x}}\psi^\mu(\tau) &= \oint_{S^1} d\tau' \left(\dot{x}^\nu(\tau')\frac{\delta\psi^\mu(\tau)}{\delta\psi^\nu(\tau')}\right) = \dot{x}^\mu(\tau). \end{aligned} \quad (5.146)$$

Facilmente verificamos que o quadrado do operador (5.144) é o gerador de translações temporais (análago ao Hamiltoniano) sobre o espaço dos Superloops, ou seja,

$$D_{\dot{x}}^2 = \oint_{S^1} d\tau \left(\dot{x}^\mu(\tau)\frac{\delta}{\delta x^\mu(\tau)} + \dot{\psi}^\mu(\tau)\frac{\delta}{\delta\psi^\mu(\tau)}\right) = \oint_{S^1} d\tau\frac{d}{d\tau}. \quad (5.147)$$

Operando (5.147) em um funcional $W[x,\psi]$ qualquer definido sobre $LM \otimes L\Lambda^1 M$ temos

$$D_{\dot{x}}^2 W[x,\psi] = \oint_{S^1} d\tau\frac{dW[x,\psi]}{d\tau} = W[x(1),\psi(1)] - W[x(0),\psi(0)], \quad (5.148)$$

o que nos leva a concluir que (5.147) é nilpotente se, e somente se, estamos restritos à funcionais de valores únicos sobre o espaço dos loops.

A conjectura de Atiyah-Witten implica que a ação para supersimetria $N = 1/2$ define uma estrutura equivariante sobre $LM \otimes L\Lambda^1 M$, sendo esta a base dos argumentos gerais para localizar uma integral sobre uma variedade M. O locus zero do campo vetorial (como definido em (4.39)) com componentes $\dot{x}^\mu(\tau)$ é dado polos caminhos constantes $x(t) = x(0) \in M$ para qualquer t. Logo, a ação devida ao Lagrangiano (5.194) pode ser reescrita usando (5.139), (5.141) e (5.144):

$$\begin{aligned} S_{1/2} &= \oint_{S^1} d\tau\hat{\Sigma}_\mu[x,\psi]\dot{x}^\mu(\tau) + \hat{\Omega}[x,\psi] = I_{\dot{x}}\hat{\Sigma}[x,\psi] + \hat{\Omega}[x,\psi] \\ &= D_{\dot{x}}\hat{\Sigma}[x,\psi]. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Portanto o índice pode ser reescrito em termos de (5.149),

$$\mathrm{Ind}Q = \int_{LM\otimes L\Lambda^1 M} [d^{2n}x][d^{2n}\psi]e^{iTD_{\dot{x}}\hat{\Sigma}[x,\psi]}. \quad (5.150)$$

Vemos que se $T \sim \hbar$, para $\hbar \to 0$, ou seja, $T \to \infty$, recuperamos o conceito de aproximação semi-clássica. Como encontramos uma estrutura de cohomologia equivariante para o espaço do superloop $LM \otimes L\Lambda^1 M$, ou seja, é possível escrever a ação supersimétrica como sendo $D_{\dot{x}}$-exata, podemos localizar (5.150) usando (4.168).

5.3.3 Cálculo do Índice

Por argumentos gerais sabemos que o lado direito de (5.126) é independente de β. Nos limites de baixas temperaturas ($\beta \to \infty$) temos que somente os modos zeros contribuem, onde o conceito de índice do operador de Dirac é compreendido. Nos limites de altas temperaturas ($\beta \to 0$) o lado direito de (5.126) pode ser explicitamente calculado usando o método de expansão por "heat kernel" ou a integral supersimétrica. Nesta seção usaremos o Lagrangeano $N = 1/2$ supersimétrico sem campos de gauge para calcular explicitamente este invariante topologico. Reescalando o parâmetro, $t = \beta s$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^\beta dt \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{Dt} \right\} = \\ = \int_0^1 ds \left\{ \frac{1}{2\beta} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\psi^\mu \frac{D\psi^\nu}{Ds} \right\}.\end{aligned} \tag{5.151}$$

Os caminhos que satisfazem $\dot{x} \neq 0$ contribuem despresivelmente para a integral de caminho no limite $\beta \to 0$. Portanto as contribuições significativas no limite considerado são pontos críticos os quais mapas $x(t)$ são constantes. De fato, estes caminhos satisfazem condições de contorno periódicas. Logo, devido a estarmos forçados a mantermos as condições de contorno periódicas, nosso espaço de configuração para as coordenadas bosônicos é o espaço dos *loops* sobre M, LM. Para implantarmos o *método da aproximação da fase estacionária* no cálculo da integral de caminho, devemos primeiro encontrar o conjunto dos pontos críticos M_0, ou seja, pontos que extremizam a ação. As soluções das equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \psi^\rho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\rho}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \psi^\rho}\left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\psi^\mu(\dot{\psi}^\nu + \dot{x}^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\kappa}\psi^\kappa)\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}^\rho}\psi^\mu(\dot{\psi}^\nu + \dot{x}^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\kappa}\psi^\kappa)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[g_{\rho\nu}\frac{D\psi^\nu}{Dt} - g_{\mu\nu}\dot{x}^\lambda \Gamma^\nu_{\lambda\rho}\psi^\mu + (\partial_\lambda g_{\rho\mu})\dot{x}^\lambda \psi^\mu + g_{\rho\mu}\dot{\psi}^\mu\right] \end{aligned} \tag{5.152}$$

e multiplicando (5.152) por $g^{\kappa\rho}$ obtemos

$$\frac{D\psi^\mu}{Dt} = \frac{d\psi^\mu}{dt} + \dot{x}^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\psi^\nu = 0. \tag{5.153}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\nu g_{\alpha\beta})\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + (\partial_\nu g_{\alpha\beta})\psi^\alpha \frac{D\psi^\beta}{Dt} + g_{\alpha\beta}\psi^\alpha \dot{x}^\lambda \partial_\mu \Gamma^\beta_{\lambda\kappa}\psi^\kappa\right] - \frac{d}{dt}\left[g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\psi^\alpha \Gamma^\beta_{\mu\kappa}\psi^\kappa\right] \\ &= -g_{\mu\nu}\frac{D\dot{x}^\nu}{Dt} + \frac{g_{\alpha\beta}}{2}(\partial_\mu \Gamma^\beta_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda \Gamma^\beta_{\mu\kappa} + \Gamma^\beta_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\lambda\kappa} - \Gamma^\beta_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\kappa})\psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda \end{aligned} \tag{5.154}$$

onde definimos o tensor de curvatura $R^\beta_{\kappa\mu\lambda} \equiv \partial_\mu \Gamma^\beta_{\lambda\kappa} - \partial_\lambda \Gamma^\beta_{\mu\kappa} + \Gamma^\beta_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\lambda\kappa} - \Gamma^\beta_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\kappa}$

$$\therefore -g_{\mu\nu}\frac{D\dot{x}^\nu}{Dt} + \frac{1}{2} R_{\alpha\kappa\mu\lambda}\psi^\alpha \psi^\kappa \dot{x}^\lambda = 0. \tag{5.155}$$

Agora vamos discutir um pouco sobre os resultados (5.153) e (5.155), os quais são equações para uma partícula com spin num campo gravitacional. Notemos que o par $x = const_1$ e

$\psi = const_2$ são pontos críticos e soluções para as equações do movimento. O conjunto dos pontos críticos bosônicos contêm os mapas constantes, ou seja, $M_0 \subset M$. Podemos ver também que (5.155) reduz-se a equação da geodésica quando $\psi = 0$, onde somos levados a concluir que uma partícula com spin não se move ao longo da geodésica "usual".

Agora vamos prosseguir com os cálculos da integral de caminho para flutuações quadráticas em torno dos pontos críticos, ou seja, soluções clássicas do movimento para as equações de Euler-Lagrange. O procedimento consiste em expandir a ação, ou seja, expandir o argumento da exponencial em (5.126) em torno dos pontos críticos. Como já observado, as principais contribuições da integral de caminho é devido aos modos constantes $x = x_0$ e $\psi = \psi_0$, onde $\delta S[x_0, \psi_0] = 0$, portanto escolhemos as coordenadas normais riemannianas,

$$\begin{aligned} &g_{\mu\nu}(x_0) = \delta_{\mu\nu}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu}(x_0) = 0 \\ &g = \det g_{\mu\nu} = 1. \end{aligned} \tag{5.156}$$

Além disso, definimos as flutuações neste sistema de coordenadas,

$$x^\mu(t) = x_0^\mu + \xi^\mu(t) \Rightarrow dx^\mu = d\xi^\mu \tag{5.157}$$

e

$$\psi^\mu(t) = \psi_0^\mu + \eta^\mu(t) \Rightarrow d\psi^\mu = d\eta^\mu. \tag{5.158}$$

Portanto a expansão de segunda ordem da ação pode ser escrita por

$$S_2 = \int_0^\beta dt \left[\frac{1}{2} \frac{d\xi^\mu}{dt} \frac{d\xi^\mu}{dt} + \frac{1}{2} \eta^\mu \frac{d\eta^\mu}{dt} + \frac{1}{2} \widetilde{R}_{\mu\nu}(x_0) \xi^\mu \frac{d\xi^\nu}{dt} \right], \tag{5.159}$$

onde usamos (5.153) e (5.155) em (5.101), e definimos

$$\widetilde{R}_{\mu\nu}(x_0) \equiv \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}(x_0) \psi_0^\rho \psi_0^\sigma. \tag{5.160}$$

Observemos também que o termos de ordem zero, $S_0 = S[x_0, \psi_0]$, é nulo.

Para calcularmos o índice pelo método da aproximação de fase estacionária, vemos que apenas é necessário o termo de segunda ordem. Portanto podemos escrever o índice como

$$\text{Ind}Q = \int [d^{2n}\xi][d^{2n}\eta] e^{-S_2}, \tag{5.161}$$

onde $[d^{2n}x][d^{2n}\psi] = [d^{2n}\xi][d^{2n}\eta]$. Novamente, enfatizando que estamos lidando com condições de contorno periódicas, temos que as expansões em Fourier de ξ e η são dadas por

$$\xi^\mu = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^\mu e^{2\pi i n t/\beta} \tag{5.162}$$

e

$$\eta^\mu = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n^\mu e^{2\pi i n t/\beta}. \tag{5.163}$$

Notemos que, devido a equação (5.159), os operadores de flutuação para ξ e η são dados respectivamente por

$$-\delta_{\mu\nu} \frac{d^2}{dt^2} + \widetilde{R}_{\mu\nu} \frac{d}{dt} \tag{5.164}$$

e

$$\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt}. \tag{5.165}$$

Vamos agora calcular o índice de acordo com a expressão (5.161) usando os operadores (5.164) e (5.165),

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}Q &= \int [d^{2n}\xi][d^{2n}\eta] \exp\left\{\eta^\mu \left(\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt}\right)\eta^\nu\right\} \exp\left\{\xi^\mu\left(-\delta_{\mu\nu}\frac{d^2}{dt^2} + \widetilde{R}_{\mu\nu}\frac{d}{dt}\right)\xi^\nu\right\} \\
&= \mathcal{N}\int\prod_{\mu=1}^{d}\frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}d\eta_0^\mu \left\{\mathrm{Det}'_{PBC}\left(\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt}\right)\right\}^{1/2}\left\{\mathrm{Det}'_{PBC}\left(-\delta_{\mu\nu}\frac{d^2}{dt^2} + \widetilde{R}_{\mu\nu}\frac{d}{dt}\right)\right\}^{-1/2} \\
&= \mathcal{N}\int\prod_{\mu=1}^{d}\frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}d\eta_0^\mu \left\{\mathrm{Det}'_{PBC}\left(\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt}\right)\right\}^{1/2}\left\{\mathrm{Det}'_{PBC}\left(\frac{d}{dt}\right)\left(-\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt} + \widetilde{R}_{\mu\nu}\right)\right\}^{-1/2} \\
&= \mathcal{N}\int\prod_{\mu=1}^{d}\frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}}d\eta_0^\mu \left\{\mathrm{Det}'_{PBC}\left(-\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt} + \widetilde{R}_{\mu\nu}\right)\right\}^{-1/2},
\end{aligned} \tag{5.166}$$

onde temos que os modos $n = 0$ não contribuem para a integral gaussiana, e $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização.

Vamos analisar agora o fator de normalização, pois é necessário tomar o devido cuidado devido às ambigüidades associadas com o ordenamento dos números de Grassmann. Como $\mathrm{Ind}Q$ é independente de β, vamos fixar $\beta = 1$ para simplificar os cálculos. É conveniente também escolhermos a métrica $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, onde podemos ver de (5.101) que as partes bosônicas e fermiôncas são separadas. Primeiramente analisamos a parte fermiônica, onde $H_f = 0$, dada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\gamma_{2n+1} &= \int_{PBC}[d^{2n}\psi]e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 \psi.\dot{\psi}dt} \\
&= \mathcal{N}_f \mathrm{Det}'_{PBC}(\delta_{\mu\nu}\partial_t)^{1/2}\int d\psi_0^1...d\psi_0^{2n}.
\end{aligned} \tag{5.167}$$

Pelo cálculo da função de partição para o oscilador harmônico fermiônico, temos

$$\mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right] = 2\sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) = e^{\beta\omega/2}\mathrm{Det}'_{PBC}\left(\partial_t + \omega\right). \tag{5.168}$$

Tomando o limite $\omega \to 0$ encontramos

$$\mathrm{Det}'_{PBC}\left(\partial_t\right) = \lim_{\omega\to 0} e^{-\beta\omega/2}2\sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) = 1 \tag{5.169}$$

$$\mathrm{Tr}\gamma_{2n+1} = \mathcal{N}_f\int d\psi_0^1...d\psi_0^{2n}. \tag{5.170}$$

Por outro lado, podemos calcular o traço usando a seguinte representação das matrizes gamas,

$$\gamma_{2n+1} = i^n\gamma_0^1...\gamma_0^{2n} = (2i)^n\psi_0^1...\psi_0^{2n}, \tag{5.171}$$

onde $\mathrm{Tr}\gamma_{2n+1}^2 = \mathrm{Tr}1 = 2^n$, portanto

$$\mathrm{Tr}\gamma_{2n+1}^2 = 2^n = \mathcal{N}_f\int d\psi_0^1...d\psi_0^{2n}(2i)^n\psi_0^1...\psi_0^{2n} = \mathcal{N}_f(-2i)^n \tag{5.172}$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}_f = i^n. \tag{5.173}$$

Agora olhemos para a parte bosônica. Sabemos do cálculo de integrais gaussianas de tragetória que

$$\int [d^{2n}x] e^{\frac{1}{2}\int_0^1 dt \dot{x}^2} = \mathcal{N}_b \frac{1}{\mathrm{Det}^{1/2}(-\delta_{\mu\nu}\partial_t^2)} \int \prod_{\mu=1}^{2n} \frac{dx^\mu}{\sqrt{2\pi}} = (2\pi)^{-n} \int \prod_{\mu=1}^{2n} dx^\mu. \tag{5.174}$$

O determinante pode ser calculado usando a função espectral zeta. Portanto olhemos para o autovalor de $-\partial_t$ com condições de contorno periódicas, ou seja, $\lambda_n = (2\pi n/\beta)$. Então

$$\mathrm{Det}'_{PBC}(-\partial_t^2) = \prod_{n\in\mathbb{N}, n\neq 0} \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 \tag{5.175}$$

e a função espectral zeta é definida por

$$\zeta_{-\partial_t^2}(s) \equiv \sum_{n\in\mathbb{N}, n\neq 0} \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2\right]^{-s} = 2\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2s} \zeta(2s), \tag{5.176}$$

onde $\zeta(s)$ é a função zeta usual. Podemos mostrar que $\zeta'_{-\partial_t^2}(0) = -2\log\beta$, o que nos leva a concluir que

$$\mathrm{Det}'_{PBC}(-\partial_t^2) = \exp[-\zeta'_{-\partial_t^2}(0)] = \beta^2 \equiv 1 \tag{5.177}$$

$$\therefore \mathcal{N}_b = 1. \tag{5.178}$$

Finalmente escrevemos o índice do operador de Dirac na seguinte forma

$$\mathrm{Ind}Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^{d} \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\eta_0^\mu \left\{\mathrm{Det}'_{PBC}\left(-\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt} + \widetilde{R}_{\mu\nu}(x_0)\right)\right\}^{-1/2}. \tag{5.179}$$

Antes de calcularmos o determinante em (5.179), notemos que a propriedade de anti-simetria do tensor de Riemann temos que $\widetilde{R}_{\mu\nu}(x_0)$ satisfaz $\widetilde{R}_{\mu\nu} = -\widetilde{R}_{\nu\mu}$. Desta forma, já que stamos em uma variedade de dimensão par, podemos diagonalizar em bloco $\widetilde{R}_{\mu\nu}$,

$$\widetilde{R}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & & & \\ -y_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & y_n \\ & & & -y_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.180}$$

Olhando para o primeiro bloco de $-\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt} + \widetilde{R}_{\mu\nu}(x_0)$ podemos ver que

$$\begin{aligned} \det'\begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} & y_1 \\ -y_1 & -\frac{d}{dt} \end{pmatrix} &= \mathrm{Det}\left(\frac{d^2}{dt^2} + y_1^2\right) = \prod_{n\neq 0}\left(y_1^2 - \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2\right) \\ &= \left[\prod_{n\geq 1}\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 \prod_{n\geq 1}\left[1 - \left(\frac{y_1\beta}{2\pi n}\right)^2\right]\right]^2 \\ &= \left(\frac{\sin(\beta y_1/2)}{y_1/2}\right)^2. \end{aligned} \tag{5.181}$$

Logo, substituindo todas as n ordens similares à (5.181) em (5.179) temos

$$\mathrm{Ind}Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^{d} \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\eta_0^\mu \prod_{j=1}^{n} \frac{y_j/2}{\sin(\beta y_j/2)}. \tag{5.182}$$

O produto em (5.182) pode ser escrito como

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{y_j/2}{\sin(\beta y_j/2)} = \frac{1}{\beta^{d/2}} \det \left(\frac{\beta \widetilde{R}/2}{\sin(\beta \widetilde{R}/2)} \right)^{1/2}. \tag{5.183}$$

Até o momento apenas calculamos as contribuições devido aos termos de flutuações quadráticas em torno de pontos críticos particulares. Agora devemos levar em conta contribuições provindas de todas as soluções para as equações de movimento clássicas. Sabemos que o conjunto M_0 contém as soluções constantes (x_0, ψ_0) e todas as outras que contribuições não constantes que são exponencialmente desprezíveis, no cálculo da integral, quando $\beta \to 0$. Notemos que estamos considerando uma expansão dada por

$$x^\mu = x_0^\mu + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \xi_0^\mu + ..., \tag{5.184}$$

onde temos que a integral sobre x_0 é equivalente a tomarmos a mesma sobre $\xi_0/\sqrt{\beta}$, ou seja, $dx_0 = d\xi_0/\sqrt{\beta}$. O mesmo argumento é dado para o modo grassmanniano, onde encontramos $d\psi_0 = \sqrt{\beta} d\eta_0$. Portanto temos que índice é

$$\mathrm{Ind}Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^{d} \frac{dx_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\psi_0^\mu \frac{1}{\beta^{d/2}} \det \left(\frac{\beta \widetilde{R}/2}{\sin(\beta \widetilde{R}/2)} \right)^{1/2}. \tag{5.185}$$

Escolhendo uma mudança conveniente de variável, conseguimos eliminar a dependência em β. Sendo assim temos

$$\psi_0^\mu = \frac{\chi_0^\mu}{\sqrt{2\pi\beta}}, \qquad d\psi_0^\mu = \sqrt{2\pi\beta} d\chi_0^\mu \tag{5.186}$$

$$\therefore \beta \widetilde{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma} \chi_0^\rho \chi_0^\sigma. \tag{5.187}$$

Portanto temos

$$\mathrm{Ind}Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^{2n} dx_0^\mu d\chi_0^\mu \det \left(\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma} \chi_0^\rho \chi_0^\sigma}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma} \chi_0^\rho \chi_0^\sigma\right)} \right)^{1/2}. \tag{5.188}$$

A equação (5.188) estabelece a fórmula para o índice do operador de Dirac, mas vamos escrevê-la de uma maneira mais conveniente e familiar aos matemáticos. Notemos que a medida $\int \prod_{\mu=1}^{2n} dx_0^\mu d\chi_0^\mu$ nos fornece uma noção de integração de formas diferenciais quando age sobre o integrando. O $d\chi$ nos diz que somente obtemos uma contribuição do termo que é homogêneo de grau $2n$ em χ. Como os χ's são anti-comutantes, a expressão é totalmente anti-simetrizada. O termo dx nos fornece apenas uma integração ordinária. Isto é exatamente o significado de uma integração de formas diferenciais. Vamos agora introduzir a 2-forma curvatura,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) dx^\rho \wedge dx^\sigma. \tag{5.189}$$

Notemos que $\mathcal{R}/\sin\mathcal{R}$ é par em $\mathcal{R}$ e, portanto, a integral somente é diferente de zero quando n é par. Se este é o caso, o fator $(i)^n$ contribui apenas com ± 1. Desta forma, somos levados a fazer a troca $i^n \mathcal{R}/\sin\mathcal{R} \to \mathcal{R}/\sin\mathcal{R}$. Portanto temos

$$\mathrm{Ind}Q = \int_M \det \left(\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}}{\sin\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\right)} \right)^{1/2}, \tag{5.190}$$

onde podemos diagonalizar $\mathcal{R}$ dado por

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & & \\ -x_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & x_n \\ & & & -x_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.191}$$

Então definimos uma classe característica, chamada $\widehat{A}(M)$-genus de Dirac, por

$$\widehat{A}(M) \equiv \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j/2}{\sin(x_j/2)}. \tag{5.192}$$

Finalmente, provamos o enunciado do seguinte teorema, o qual foi provado inicialmente por Atiyah e Singer.

Teorema 5.4 (Teorema de Atiyah-Singer para um complexo spinorial)**.** *O índice de um operador de Dirac definido sobre M, onde* $\dim M = 2n$, *é dado por*

$$IndQ = \int_M \widehat{A}(M). \tag{5.193}$$

Podemos agora considerar uma generalização de (5.127) incluindo um campo de gauge A_μ,

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu A_\mu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\frac{D\psi^\nu}{Dt} - \frac{1}{2}\psi^\mu F_{\mu\nu}\psi^\nu. \tag{5.194}$$

Reconsiderendo todas as aproximações utilizadas nesta seção, podemos recalcular o índice para um sistema mais geral daquele considerado até o presente momento, ou seja, o índice para um operador de Dirac num "background" curvo e invariante de gauge. Então temos a generalização de (5.179),

$$\mathrm{Ind}Q = i^n \int \prod_{\mu=1}^{d} \frac{d\xi_0^\mu}{\sqrt{2\pi}} d\eta_0^\mu e^{\frac{i}{2\pi}F_{\mu\nu}(x_0)\eta_0^\mu\eta_0^\nu} \left\{\mathrm{Det}'_{PBC}\left(-\delta_{\mu\nu}\frac{d}{dt} + \widetilde{R}_{\mu\nu}(x_0)\right)\right\}^{-1/2}. \tag{5.195}$$

O fator exponencial em (5.195) pode ser identificado com o *caracter de Chern*,

$$\mathrm{ch}(F) \equiv \mathrm{tr}\left[\exp\left(\frac{iF}{2\pi}\right)\right] = \sum_{j=1} \frac{1}{j!}\mathrm{tr}\left(\frac{iF}{2\pi}\right)^j, \tag{5.196}$$

onde, para uma matriz diagonal $A = (x_1, ..., x_k)$, estamos utilizando que

$$\mathrm{tr}\left[\exp\left(A\right)\right] = \sum_{j=1}^{k} \exp(x_j). \tag{5.197}$$

Teorema 5.5 (Teorema de Atiyah-Singer para um complexo spinorial)**.** *O índice de um operador de Dirac definido sobre uma variedade geral M, onde* $\dim M = 2n$ *e uma simetria de gauge é admitida, é dado por*

$$IndQ = \int_M ch(\mathcal{F})\widehat{A}(M). \tag{5.198}$$

5.3.4 Operador de Dirac e Complexos de Spin

Consideremos uma estrutura de fibrado de spin, denotada por $S(M)$, definida sobre uma variedade M de dimensão par, $m = 2l$, orientável e sem contorno. Por definição, denotamos o conjunto das seções deste fibrado por $\Delta(M) = \Gamma(M, S(M))$. Como sabemos, a fibra típica do fibrado de spin é o próprio grupo de spin $SPIN(m)$, o qual é gerado por $\{m\}$ matrizes de Dirac $\{\gamma^\alpha\}$ que satisfazem as seguintes propriedades,

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\delta^{\alpha\beta}, \qquad \gamma^{\alpha\dagger} = \gamma^\alpha. \tag{5.199}$$

De maneira geral, temos que a álgebra de Clifford é gerada por

$$1; \gamma^{\alpha_1}; \gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}(\alpha_1 < \alpha_2); ...; \gamma^{\alpha_1}...\gamma^{\alpha_k}(\alpha_1 < ... < \alpha_k); ...; \gamma^1...\gamma^{2l}. \tag{5.200}$$

O último gerador é de importância particular, sendo conveniente definir, devido aos nossos propósitos físicos (matriz quiralidade (5.115)), que

$$\gamma^{m+1} \equiv i^l \gamma^1...\gamma^m, \tag{5.201}$$

onde $(\gamma^{m+1})^2 = \hat{1}$ e $(\gamma^{m+1})^\dagger = \gamma^{m+1}$. Devido às propriedades das álgebras de Clifford, podemos encontrar uma representação para os geradores gamas em termos de matrizes $2^l \times 2^l$ com entradas complexas. É conveniente (novamente por propósitos físicos) tomar uma representação tal que

$$\gamma^{m+1} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}. \tag{5.202}$$

Como já definimos, um spinor de Dirac pertence ao espaços das seções do fibrado de spin, $\psi \in \Delta(M)$. Devido ao fato das matrizes gamas serem os geradores do grupo de spin, temos que o spinor de Dirac também é definido como sendo uma representação irredutível da álgebra de Clifford, mas não de $SPIN(2l)$. As representações irredutíveis de $SPIN(2l)$ são dadas por uma separação de $\Delta(M)$ de acordo com os autovalores de γ^{m+1}. Como $(\gamma^{m+1})^2 = \hat{1}$, temos que os autovalores são ± 1, os quais são denominados de quiralidade. Então o espaço das seções deve ser dividido em dois autoespaços, os quais são determinados de acordo com as suas respectivas quiralidades,

$$\Delta(M) = \Delta^+(M) \oplus \Delta^-(M), \tag{5.203}$$

onde $\gamma^{m+1}\Psi^\pm = \pm\Psi^\pm$ para $\Psi^\pm \in \Delta^\pm(M)$. Os operadores de projeção, $\mathcal{P}^\pm$, sobre os subespaços $\Delta^\pm(M)$, são dados por

$$\mathcal{P}^+ \equiv \frac{1}{2}(\hat{1} + \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.204}$$

e

$$\mathcal{P}^- \equiv \frac{1}{2}(\hat{1} - \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.205}$$

onde

$$\Psi^+ = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix}. \tag{5.206}$$

Agora vamos considerar um operador de Dirac definido em um *background* curvo dado por (5.52),

$$i\nabla\!\!\!\!/\,\psi = i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi = i\gamma^\mu[\partial_\mu + \Omega_\mu]\psi, \tag{5.207}$$

onde $\Omega_\mu = \frac{1}{2} i\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}$ é a conexão spinorial e $\gamma^\mu = \gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu$. Uma característica importante de (5.207) é a sua propriedade elíptica, ou seja, dada uma função f definida na vizinhança do ponto $p \in M$, tal que $f(p) = 0$ e $i\gamma^\mu \partial_\mu f(p) = i\gamma^\mu \xi_\mu = i\not\xi$, temos que o *símbolo* de (5.207) é dado por

$$\sigma(i\not\nabla, \xi)\psi \equiv i\not\nabla(f\widetilde{\psi})|_p = (i\not\nabla f)\widetilde{\psi}|_p = i\not\xi\psi \tag{5.208}$$

$$\therefore \sigma(i\not\nabla, \xi) = i\not\xi, \tag{5.209}$$

onde $\widetilde{\psi}(p) = \psi$. Como $\not\xi\not\xi = \xi_\alpha\xi_\beta\gamma^\alpha\gamma^\beta = \xi^\mu\xi_\mu$, temos que (5.209) é inversível para $i\not\xi \neq 0$, logo (5.207) é elíptico.

Vamos considerar uma representação matricial explícita do operados de Dirac para $m = 4$. Por definição, usamos aqui a seguinte representação:

$$\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha^\beta \\ -i\overline{\alpha}^\beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.210}$$

onde $\alpha^\beta = (1_2, -i\overrightarrow{\sigma})$ e $\overline{\alpha}^\beta = (1_2, i\overrightarrow{\sigma})$, sendo $\overrightarrow{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ as matrizes de Pauli. De (5.207) temos

$$i\not\nabla = i\begin{pmatrix} 0 & i\alpha^\beta \\ -i\overline{\alpha}^\beta & 0 \end{pmatrix} e_\beta{}^\mu \nabla_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^\beta e_\beta{}^\mu \nabla_\mu \\ \overline{\alpha}^\beta e_\beta{}^\mu \nabla_\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^\dagger \\ \mathcal{D} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.211}$$

onde

$$\mathcal{D} \equiv \overline{\alpha}^\beta e_\beta{}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu) \qquad \mathcal{D}^\dagger \equiv -\alpha^\beta e_\beta{}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu). \tag{5.212}$$

Desta forma temos os seguintes mapeamentos

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = i\not\nabla\mathcal{P}^+ &: \Delta^+(M) \longrightarrow \Delta^-(M) \\ \mathcal{D}^\dagger = i\not\nabla\mathcal{P}^- &: \Delta^-(M) \longrightarrow \Delta^+(M) \end{aligned} \tag{5.213}$$

definindo o *complexo spinorial* de dois termos,

$$\Delta^+(M) \underset{D^\dagger}{\overset{D}{\rightleftarrows}} \Delta^-(M). \tag{5.214}$$

O índice analítico do complexo (5.214) é dado por

$$\mathrm{Ind}\mathcal{D} = \dim\ker\mathcal{D} - \dim\ker\mathcal{D}^\dagger = \nu_+ - \nu_-, \tag{5.215}$$

ond e $\nu_+(\nu_-)$ é o número dos modos de energia zero de quiralidade positiva (negativa). Portanto, de acordo com o teorema (5.193) concluímos que

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \widehat{A}(TM)|_{vol}. \tag{5.216}$$

5.3.5 *Complexo Spinorial Twisted*

Como vimos anteriormente, o campo spinorial pode ser interpretado como uma repesentação de um grupo G. Isto significa que, considerando por exemplo uma teoria de gauge que descreve a QCD, temos que os campos de quark pertencem a uma representação de $SU(3)$. Um spinor que pertence a uma representação de G é geometricamente interpretado como sendo uma seção do fibrado produto $S(M) \otimes E$, onde E é um fibrado vetorial associado, em uma representação apropriada, ao fibrado principal $P(M, G)$ de fibra típica G. Neste caso, definimos o operador de Dirac como sendo o mapeamento $D_E : \Delta^+(M) \otimes E \longrightarrow \Delta^-(M) \otimes E$,

$$D_E \equiv i\gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu[\partial_\mu + \Omega_\mu + \mathcal{A}_\mu]\mathcal{D}_+, \tag{5.217}$$

onde $\mathcal{A}_\mu$ é o potencial de gauge, ou seja, a conexão que é responsável pelo transporte paralelo no fibrado E.

O teorema de índice para este complexo spinorial *Twisted*, devido à inclusão do fibrado E, é dado de acordo com teorema (5.198) por

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \widehat{A}(TM)\mathrm{ch}(E)|_{vol}. \tag{5.218}$$

Para $m = 2$ temos

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \mathrm{ch}_1(E) = \frac{i}{2\pi}\int_M \mathrm{tr}\mathcal{F} \tag{5.219}$$

e para $m = 4$

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M [\mathrm{ch}_2(E) + \widehat{A}_1(TM)\mathrm{ch}_0(E)] = \frac{-1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 + \frac{\dim E}{192\pi^2}\int_M \mathrm{tr}\mathcal{R}^2. \tag{5.220}$$

5.4 Anomalias e o Índice

5.4.1 Considerações Gerais

O nosso propósito aqui é mostrar uma aplicação para o teorema de índice de Atiyah-Singer em teorias de gauge. Mais especificamente, consideraremos esta aplicação às *anomalias*, onde as simetrias da ação efetiva, ou seja, simetrias em nível quântico, tem um papel fundamental no que diz respeito a unitariedade e a renormalizabilidade da teoria em questão. Para formularmos o problema, vamos considerar um campo fermiônico ψ sem massa e interagindo com um campo de gauge externo $\mathcal{A}_\mu = A^a_\mu T_a$ via uma acoplamento mínimo, onde $\{T_a\}$ são geradores anti-unitários da álgebra relacionada ao grupo G responsável pelas transformações de gauge, o qual estamos considerando como sendo compacto e simples. A Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu)\psi \tag{5.221}$$

e é invariante por transformações de gauge locais,

$$\psi(x) \longrightarrow g^{-1}\psi(x), \qquad \mathcal{A}_\mu(x) \longrightarrow g^{-1}[\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu]g, \tag{5.222}$$

onde $g \in G$. Por outro lado, podemos considerar também em especial uma transformação global que revela a *simetria quiral*:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\gamma_5\alpha}\psi(x), \qquad \overline{\psi}(x) \longrightarrow \overline{\psi}(x)e^{i\gamma_5\alpha}. \tag{5.223}$$

Podemos calcular a corrente de Noether, devido a uma simetria clássica:

$$j^\mu_5 = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\frac{\delta\psi}{\delta\alpha} \quad \Rightarrow \quad j^\mu_5 = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \tag{5.224}$$

A pergunta que surje quando estamos estudando esta teoria no contexto de teoria quântica de campos é se a simetria de uma Lagrangiana é mantida mesmo depois de um processo de quantização. No formalismo de integração funcional temos que, devido a imposição da invariância por transformações de gauge do gerador funcional, passar a considerar uma ação efetiva e isto levará a conclusão que a corrente não se conserva, $\partial_\mu j^\mu_5 \neq 0$. Classicamente sabemos que $\partial_\mu j^\mu_5 = 0$.

5.4.2 Anomalias Abelianas

Dada uma variedade de dimensão par, $\dim M = m = 2l$, com signatura Euclidiana. Assumimos que o nosso sistema é não quiral, isto é, o campo de gauge acopla à direita e à esquerda do mesmo modo. Para calcularmos a não conservação da corrente quiral, devido a quantização do sistema, vamos utilizar o método de Fujikawa [6, 10]. Dentre todos os métodos existentes, esse é o mais apropriado para revelar problemas de natureza topológica e geométrica de maneira mais direta.

Sendo assim vamos considerar uma ação efetiva, $W[\mathcal{A}]$, onde o gerador funcional é dado por

$$e^{-W[\mathcal{A}]} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}e^{-\int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi}, \tag{5.225}$$

onde $i\nabla\!\!\!/ = i\gamma^\mu\nabla_\mu = i\gamma^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu + \mathcal{A}_\mu)$ e $\Omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}$ como sabemos é a conexão de spin para o espaço de fundo considerado. Procuramos aqui uma compactificação tal que a conexão de spin não tenha nenhum papel nos cálculos, ou seja, se $\mathbb{R} \longrightarrow S^4 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ temos que gênus de Dirac $\hat{A}(TM)$ é trivial.

A ação clássica, dada por $\int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi$, é invariante com respeito a rotação quiral (5.223). Vamos expandir os campos fermiônicos de acordo com,

$$\psi = \sum_i a_i\psi_i, \qquad \overline{\psi} = \sum_i \overline{b}_i\psi_i^\dagger, \tag{5.226}$$

onde a_i e $\overline{b}_i$ são variáveis de Grassmann que respeitam a seguinte estrutura algébrica,

$$\{a_i, a_j\} = 0, \qquad \{\overline{b}_i, \overline{b}_j\} = 0, \qquad \{a_i, \overline{b}_j\} = 0. \tag{5.227}$$

ψ_i é um autoestado normalizado, devido à compacticidade de M, do operador de Dirac com autovalor real λ_i ($i\nabla\!\!\!/$ é hermitiano),

$$\begin{aligned} i\nabla\!\!\!/\psi_i &= \lambda_i\psi_i \\ \langle\psi_i|\psi_j\rangle &= \int dx\psi_i^\dagger(x)\psi_j(x) = \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{5.228}$$

Vamos considerar uma transformação quiral infinitesimal do tipo (5.223), para uma variedade de m dimensões compacta,

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi(x) + i\alpha(x)\gamma^{m+1}\psi(x) \\ \overline{\psi}(x) &\longrightarrow \overline{\psi}(x) + i\overline{\psi}(x)\alpha(x)\gamma^{m+1}. \end{aligned} \tag{5.229}$$

Portanto, sob esta mudança, ação clássica se comporta do seguinte modo,

$$\begin{aligned} \int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi \longrightarrow & \int dx(\overline{\psi}(x) + i\overline{\psi}(x)\alpha(x)\gamma^{m+1})i\nabla\!\!\!/(\psi(x) + i\alpha(x)\gamma^{m+1}\psi(x)) \\ = & \int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi + i\int dx\left[\alpha\overline{\psi}\gamma^{m+1}i\nabla\!\!\!/\psi + \overline{\psi}i\nabla\!\!\!/(\alpha\gamma^{m+1}\psi)\right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ = & \int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi - \int dx\left[\alpha\overline{\psi}\gamma^{m+1}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)(\alpha\gamma^{m+1}\psi)\right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ = & \int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi - \int dx\left[\alpha\overline{\psi}\gamma^{m+1}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \alpha\overline{\psi}\gamma^{m+1}\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu\psi\right. \\ & \left. +\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\alpha)\gamma^{m+1}\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu\alpha\gamma^{m+1}(\partial_\mu\psi) + \overline{\psi}\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu(\alpha\gamma^{m+1}\psi)\right] + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned}$$

onde podemos usar que

$$\begin{cases} \{\gamma^{\mu}, \gamma^{m+1}\} = 0 \\ j^{\mu}_{m+1} = \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^{m+1}\psi(x), \end{cases} \tag{5.230}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi \quad &\longrightarrow \quad \int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi - \int dx(\partial_{\mu}\alpha)(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{m+1}\psi) \\ &= \quad \int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi - \int dx\partial_{\mu}(\alpha j^{\mu}_{m+1}) + \int dx\alpha(\partial_{\mu}j^{\mu}_{m+1}) \\ &= \quad \int dx\overline{\psi}i\nabla\!\!\!/\psi + \int dx\alpha(x)\partial_{\mu}j^{\mu}_{m+1}(x). \end{aligned} \tag{5.231}$$

Ingenuamente poderíamos pensar que a conservação da corrente, $\partial_{\mu}j^{\mu}_{m+1}(x) = 0$, conduz à uma ação invariante (devido às identidades de Ward-Takahashi [34]), mas, no entanto, em teorias quânticas devemos considerar uma mudança adicional que provém da medida de integração funcional em (5.225). Vamos agora analisar a mudança na medida de integração devido a rotação quiral nos campos,

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \psi(x) + i\alpha(x)\gamma^{m+1}\psi(x) = \sum_i a'_i\psi_i \\ \overline{\psi}'(x) &= \overline{\psi}(x) + i\overline{\psi}(x)\alpha(x)\gamma^{m+1} = \sum_i \overline{b}'_i\psi^{\dagger}_i. \end{aligned} \tag{5.232}$$

Portanto, temos uma nova medida

$$\int \prod_i da_i d\overline{b}_i \longrightarrow \int \prod_i da'_i d\overline{b}'_i. \tag{5.233}$$

Utilizando a condição de ortonormalidade das funções $\{\psi_i\}$, encontramos que

$$\begin{aligned} a'_i \quad &= \quad \langle\psi_i|\psi'\rangle = \langle\psi_i|(1 + i\alpha\gamma^{m+1})|\psi\rangle = \sum_j \langle\psi_i|(1 + i\alpha\gamma^{m+1})|\psi_j\rangle a_j \\ &= \quad \sum_j C_{ij}a_j, \end{aligned} \tag{5.234}$$

onde $C_{ij} \equiv \delta_{ij} + i\alpha\langle\psi_i|\gamma^{m+1}|\psi_j\rangle$. Logo concluímos que

$$\begin{aligned} \prod da'_j \quad &= \quad [\det C_{ij}]^{-1} \prod da_i = \exp\left(-\mathrm{tr}\ln C_{ij}\right) \prod da_i \\ &= \quad \exp\left(-\mathrm{tr}\ln\left(\delta_{ij} + i\alpha\langle\psi_i|\gamma^{m+1}|\psi_j\rangle\right)\right) \prod da_i \\ &\approx \quad \exp\left(-\mathrm{tr} i\alpha\langle\psi_i|\gamma^{m+1}|\psi_j\rangle\right) \prod da_i \\ &= \quad \exp\left(-i\alpha\sum_i \langle\psi_i|\gamma^{m+1}|\psi_j\rangle\right) \prod da_i. \end{aligned} \tag{5.235}$$

O mesmo é feito para $\overline{b}_i$,

$$\overline{b}'_i = \sum_j C_{ji}\overline{b}_j \tag{5.236}$$

$$\therefore \prod_i da_i d\overline{b}_i \longrightarrow \prod_i da'_i d\overline{b}'_i \exp\left(-2i\int dx\alpha(x)\sum_n \psi^{\dagger}_n(x)\gamma^{m+1}\psi_n(x)\right). \tag{5.237}$$

Substituindo a transformação da medida (5.237) na ação efetiva (5.225) temos

$$
\begin{aligned}
e^{-W[\mathcal{A}]} &= \int \prod_i da_i d\bar{b}_i \exp\left(-\int dx \overline{\psi} i \nabla\!\!\!/ \psi\right) \\
&= \int \prod_i da'_i d\bar{b}'_i \exp\left(-\int dx \overline{\psi}(x) i \nabla\!\!\!/ \psi(x)\right. \\
&\quad \left. - \int dx \alpha(x) \partial_\mu j^\mu_{m+1}(x) - 2i \int dx \alpha(x) A(x)\right), \qquad (5.238)
\end{aligned}
$$

onde $A(x) \equiv \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma^{m+1} \psi_n(x)$. Devido à arbitrariedade de $\alpha(x)$, concluímos que a corrente quiral não é conservada,

$$
\partial_\mu j^\mu_{m+1}(x) = -2iA(x), \qquad (5.239)
$$

e chamamos isto de *anomalia abeliana.*

Agora estamos aptos a procurar algum significado geométrico para a anomalia encontrada acima. Para isto, vamos fixar α como uma constante independente das posições da variedade (identidades de Ward de momento zero) e olhar para o jacobiano da transformação (5.237). Por conveniência vamos introduzir um *cut-off* como segue

$$
\begin{aligned}
\int dx A(x) &= \int dx \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma^{m+1} \psi_n(x)\, e^{-(\lambda_n/M)^2}\Big|_{M\to\infty} \\
&= \sum_n \langle \psi_n | \gamma^{m+1} e^{-(i\nabla\!\!\!/ /M)^2} | \psi_n \rangle \Big|_{M\to\infty}. \qquad (5.240)
\end{aligned}
$$

Dentre todos os estados existentes, existe um em especial que $|\psi_n\rangle^\chi \equiv \gamma^{m+1}|\psi_n\rangle$, tal que

$$
\begin{aligned}
i\nabla\!\!\!/ |\psi_n\rangle^\chi &= i\nabla\!\!\!/ \gamma^{m+1}|\psi_n\rangle = -i\gamma^{m+1}\nabla\!\!\!/ |\psi_n\rangle \\
&= -\lambda_n \gamma^{m+1}|\psi_n\rangle = -\lambda_n |\psi_n\rangle^\chi, \qquad (5.241)
\end{aligned}
$$

onde para auto estados com diferentes autovalores temos

$$
\begin{gathered}
\langle \psi_n | \psi_n \rangle^\chi = \langle \psi_n | \gamma^{m+1} | \psi_n \rangle = 0 \\
\therefore \langle \psi_n | \gamma^{m+1} e^{-(i\nabla\!\!\!/ /M)^2} | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \gamma^{m+1} | \psi_n \rangle e^{-(\lambda_n/M)^2} = 0. \qquad (5.242)
\end{gathered}
$$

Logo, a contribuição de (5.240) é devida somente aos modos de energia zero de $i\nabla\!\!\!/$, com autoestados $|0,i\rangle$ $(1 \leq i \leq n_0)$. Esses estados de modo zero são classificados de acordo com os autovetores de γ^{m+1},

$$
\gamma^{m+1}|0,i\rangle_\pm = \pm|0,i\rangle_\pm. \qquad (5.243)
$$

Portanto, concluímos o seguinte resultado importante, dotado de significado geométrico:

$$
\begin{aligned}
\int dx A(x) &= \int dx \sum_n \psi_n^\dagger(x) \gamma^{m+1} \psi_n(x)\, e^{-(\lambda_n/M)^2}\Big|_{M\to\infty} \\
&= \sum_i {}_+\langle 0,i|0,i\rangle_+ - \sum_i {}_-\langle 0,i|0,i\rangle_- \\
&= \nu_+ - \nu_- = \mathrm{Ind}(i\nabla\!\!\!/), \qquad (5.244)
\end{aligned}
$$

onde ν_+ (ν_-) é o número de modos de energia zero e de quiralidade positiva (negativa). A equação (5.244) nos diz que a anomalia é dada através do cálculo do índice do operador em questão.

6. CONCLUSÃO

Integrais funcionais nos fornecem uma transição intuitiva, um tanto quanto clara, para a teorias quânticas, desde que a quantidade fundamental da quantização é a ação clássica do sistema. Neste contexto é possível obter pontos de vista muito eficientes e instrutivos para os métodos de quantização das teorias de campos, onde, pelos procedimentos de localização equivariante, temos que as características topológicas e geométricas do sistema físico se mostram mais explícitas no contexto abordado neste trabalho. Além de esclarecer tais características, temos também mostrado limitações quanto a interpretação da medida de integração para espaços de dimensões infinitas, mesmo assumindo a conjectura de Atiyah-Witten e seu rigoroso tratamento no trabalho de J.-M. Bismut [13]. Tais formulações feitas para localização de sistemas supersimétricos nos ajudaram em argumentos para compreender mais sobre a quebra de supersimetria.

Integrais funcionais que podem ser calculadas exatamente são muito restritas e, desta maneira, métodos de aproximação e perturbativos são usados com freqüência. Para que possamos usar uma expansão perturbativa, devemos ter um sistema com uma constante de acoplamento fraca, permitindo que as séries convirjam assintoticamente. No entanto, existem muitos fenômenos em teorias de campos e cordas os quais não podem ser vistos como teorias perturbativas. Por exemplo, um importante caso do tratamento não-perturbativo é o confinamento de cor em teorias de Yang-Mills e assuntos correlatos como quebra de simetria quiral e "gap"de massa. Também, temos que cinco teorias de supercordas podem ser relacionadas de forma consistente usando espaço "target"e dualidades de acoplamento forte-fraco. Além disso, após os anos 70 aspectos geométricos e topológicos têm ganha-do significativa relevância devido a descoberta de objetos não-perturbativos tais como sólitons, instantons e monopolos. Problemas relacionados à integrabilidade, ou seja, como calcular integrais sem o uso de métodos perturbativos, nos motivou a considerar teorias de cohomologia e localização equivariante, as quais mostraram-se úteis na tentativa para reduzir integrais funcionais à integrais dimensionalmente finitas ou a somas sobre pontos críticos. Também é importante ressaltar que uma grande interação entre física teórica e matemática pura foi usada neste trabalho para melhor compreender tais aspectos, ainda que alguns pontos careçam de um tratamento mais rigoroso. Promissoramente, temos também que aplicações e análises mais profundas em modelos de matrizes serão de grande importância para muitas áreas na física devido ao crescente interesse da comunidade científica na área.

Perspectivas futuras estão em como encontrar uma caracterização geométrica mais formal para a integrabilidade quântica, onde a cohomologia e localização equivariantes pareceram ser fortes candidatas por terem nos fornecido alguns insights para esta difícil tarefa. Uma vez desenvolvida parte desta extensa teoria de localização, será possível nos dedicarmos mais, em trabalhos futuros, às aplicações físicas relatadas nesta conclusão.

APÊNDICE

A. CÁLCULO COM VARIÁVEIS DE GRASSMANN

A.1 Álgebra

Estabeleceremos aqui as variáveis de Grassmann as quais são números que anti-comutam entre si. Portanto vamos considerar o conjunto $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ de n geradores que anti-comutam de acordo com a relação

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i = 0, \qquad \forall i, j \in \{1, ..., n\}. \tag{A.1}$$

Variáveis que comutam são chamadas de c-números, sendo que o conjunto das combinações lineares de $\{\psi_i\}$ com os c-números como coeficientes são chamados de números de Grassmann. Por definição os c-números comutam com os números de Grassmann. A álgebra gerada por $\{\psi_i\}$ é chamada de *álgebra de Grassmann*, a qual é denotada por Λ^n. Podemos expandir uma função arbitrária de Λ^n em termos de $\{\psi_i\}$, ou seja, por expansão de Taylor de $f = f(\psi)$ temos

$$f(\psi) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i\psi_i + \sum_{i<j} f_{ij}\psi_i\psi_j + ... = \sum_{0\leq k\leq n} \frac{1}{k!} \sum_{\{i\}} f_{i_1,...,i_k}\psi_{i_1}...\psi_{i_k}, \tag{A.2}$$

onde $f_{i_1,...,i_k}$ são c-números anti-simétricos sob a troca de dois índices. O espaço da álgebra de Grassmann dos polinômios pode ser decomposto na forma $\Lambda^n = \Lambda^n_+ \oplus \Lambda^n_-$, onde Λ^n_+ é o subespaço das potências pares e Λ^n_- o subespaço das potências ímpares. Esta decomposição é denominada $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Como não designamos magnitude aos geradores $\{\psi_i\}$, concluímos que o conjunto dos números de Grassmann não é um conjunto ordenado. No entanto, o número zero é o único a pertencer a ambas as classes, tanto c-números quanto números de Grassmann. Os geradores $\{\psi_i\}$ satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \psi_i^2 &= 0 \\ \psi_{i_1}...\psi_{i_n} &= \epsilon_{i_1,...,i_n}\psi_1...\psi_n \\ \psi_{i_1}...\psi_{i_m} &= 0 \quad m > n, \end{aligned} \tag{A.3}$$

onde

$$\epsilon_{i_1,...,i_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{i_1, ..., i_n\} \text{ é uma permutação par de } \{1, ..., n\} \\ -1 & \text{se } \{i_1, ..., i_n\} \text{ é uma permutação ímpar de } \{1, ..., n\} \\ 0 & \text{nenhuma das condições acima.} \end{cases} \tag{A.4}$$

Como exemplo tomemos $n = 1$ para a função exponencial. Por expanção de Taylor e as relações acima temos que $f(\psi) = \exp(\psi)$ é dado por

$$\exp(\psi) = 1 + \psi. \tag{A.5}$$

A.2 Diferenciação

Aqui vamos definir o operador derivada como atuando à esquerda da variável, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial \psi_i}\psi_j = \delta_{ij}. \tag{A.6}$$

De acordo com a regra de Leibnitz e as regras de anti-comutação (A.1) temos

$$\frac{\partial}{\partial \psi_i}(\psi_j \psi_k) = \frac{\partial \psi_j}{\partial \psi_i}\psi_k - \psi_j \frac{\partial \psi_k}{\partial \psi_i} = \delta_{ij}\psi_k - \delta_{ik}\psi_j \tag{A.7}$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \psi_i}\frac{\partial}{\partial \psi_j} + \frac{\partial}{\partial \psi_j}\frac{\partial}{\partial \psi_i} = 0 \\ &\frac{\partial^2}{\partial \psi_i^2} = 0. \end{aligned} \tag{A.8}$$

A.3 Integração

Vamos denotar a operação de diferenciação por D e de integração por I. Para definirmos a integração, semelhantemente à diferenciação, vamos considerar que as seguintes relações são satisfeitas para A e B funções arbitrárias de variáveis de Grassmann:

$$\begin{array}{ll} ID = 0 & \text{termos de superfície nulos} \\ DI = 0 & \text{derivada de uma integral definida é nula} \\ D(A) = 0 \Rightarrow I(BA) = I(B)A & \text{derivada de uma constante é nula.} \end{array} \tag{A.9}$$

Estas relações são satisfeitas se $I \propto D$, ou seja,

$$\int d\psi f(\psi) = \frac{\partial f(\psi)}{\partial \psi}. \tag{A.10}$$

Portanto

$$\int d\psi = \frac{\partial 1}{\partial \psi} = 0 \tag{A.11}$$

e

$$\int d\psi \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \psi} = 1. \tag{A.12}$$

Generalizando (A.10) temos

$$\int d\psi_1 ... d\psi_n f(\psi_1, ..., \psi_n) = \frac{\partial}{\partial \psi_1} ... \frac{\partial}{\partial \psi_n} f(\psi_1, ..., \psi_n). \tag{A.13}$$

Para $n = 1$ e $\psi' = a\psi$ temos

$$\int d\psi f(\psi) = \frac{\partial f(\psi)}{\partial \psi} = \frac{\partial f(\psi'/a)}{\partial \psi'/a} = a \int d\psi' f(\psi'/a). \tag{A.14}$$

A extensão de (A.14) para n variáveis é dada de acordo com a tranformação $\psi_i \to \psi'_i = a_{ij}\psi_j$, onde a_{ij} são elementos de uma matriz a. Portanto

$$\begin{aligned}
\int d\psi_1...d\psi_n f(\psi_1,...,\psi_n) &= \frac{\partial}{\partial\psi_1}...\frac{\partial}{\partial\psi_n} f(\psi_1,...,\psi_n) \\
&= \sum_{k_i=1}^{n} \frac{\partial\psi'_{k_1}}{\partial\psi_1}...\frac{\partial\psi'_{k_n}}{\partial\psi_n}\frac{\partial}{\partial\psi'_{k_1}}...\frac{\partial}{\partial\psi'_{k_n}} f(a^{-1}\psi') \\
&= \sum_{k_i=1}^{n} \epsilon_{k_1,...,k_n} a_{k_1 1}...a_{k_n n}\frac{\partial}{\partial\psi'_{k_1}}...\frac{\partial}{\partial\psi'_{k_n}} f(a^{-1}\psi') \\
&= \det(a)\int d\psi'_1...d\psi'_n f(a^{-1}\psi'), \qquad (A.15)
\end{aligned}$$

onde concluímos que a medida de integração se transforma de acordo com

$$d\psi_1...d\psi_n = \det(a) d\psi'_1...d\psi'_n. \qquad (A.16)$$

A.4 Integral Gaussiana

Vamos considerar a seguinte integral:

$$I = \int d\overline{\psi}_1 d\psi_1...d\overline{\psi}_n d\psi_n e^{-\sum_{ij}\overline{\psi}_i M_{ij}\psi_j}, \qquad (A.17)$$

onde M é uma matriz anti-simétrica. A mudança de variáveis $\psi'_i = \sum_j M_{ij}\psi_j$, da relação (A.16), temos

$$\begin{aligned}
I &= \det(M)\int d\overline{\psi}_1 d\psi'_1...d\overline{\psi}_n d\psi'_n e^{-\sum_{ij}\overline{\psi}_i\psi'_j} \\
&= \det(M)\left[\int d\overline{\psi} d\psi(1+\psi'\overline{\psi})\right]^n \\
&= \det(M). \qquad (A.18)
\end{aligned}$$

Segue a proposição:

Proposição A.1. *Seja a uma matriz anti-simétrica de ordem $2n$ e definimos o Pfaffian de a por*

$$Pfaff(a) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{P\{i_1,...,i_{2n}\}} sgn(P) a_{i_1 i_2}...a_{i_{2n-1}i_{2n}}. \qquad (A.19)$$

Então

$$\det(a) = Pfaff(a)^2. \qquad (A.20)$$

Demonstração. Notemos que

$$I = \int d\psi_{2n}...d\psi_1 e^{\frac{1}{2}\sum_{ij}\psi_i a_{ij}\psi_j} = \frac{1}{2^n n!}\int d\psi_{2n}...d\psi_1\left(\sum_{ij}\psi_i a_{ij}\psi_j\right)^n = \mathrm{Pfaff}(a) \qquad (A.21)$$

e

$$I^2 = \int d\psi_{2n}...d\psi_1 d\psi'_{2n}...d\psi'_1 e^{\frac{1}{2}\sum_{ij}(\psi_i a_{ij}\psi_j + \psi'_i a_{ij}\psi'_j)}. \qquad (A.22)$$

Agora vamos fazer a seguinte mudança de variáveis

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_k + \psi'_k), \quad \overline{\xi}_k = \frac{1}{\sqrt{2i}}(\psi_k - \psi'_k), \tag{A.23}$$

a qual contribui com um termo do Jacobiano de $(-1)^n$ e

$$\begin{gathered} \psi_i\psi_j + \psi'_i\psi'_j = \xi_i\overline{\xi}_j - \overline{\xi}_j\xi_i \\ d\xi_{2n}...d\xi_1 d\overline{\xi}_{2n}...d\overline{\xi}_1 = (-1)^{n^2} d\xi_1 d\overline{\xi}_1...d\xi_{2n} d\overline{\xi}_{2n}. \end{gathered} \tag{A.24}$$

Portanto verificamos que

$$\mathrm{Pfaff}(a)^2 = \int d\xi_1 d\overline{\xi}_1...d\xi_{2n} d\overline{\xi}_{2n} e^{-\sum_{ij}\overline{\psi}_i a_{ij}\psi_j} = \det(a). \tag{A.25}$$

$\square$

B. INFORMAÇÕES ADICIONAIS SOBRE ÁLGEBRAS DE LIE

B.1 Sub-álgebras de Cartan

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Definição B.1. *Uma sub-álgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ é uma sub-álgebra $\mathfrak{h}$ a qual satisfaz as seguintes condições:*

- *$\mathfrak{h}$ é uma sub-álgebra maximal abeliana de $\mathfrak{g}$.*
- *Para cada $H \in \mathfrak{h}$, o endomorfismo $Ad(H)$ de $\mathfrak{g}$ é semisimples.*

Seja então $H \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ e o conjunto de autovalores de $\mathrm{Ad}(H)$, $\{0 = \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_r\}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ consideramos o subespaço

$$\mathfrak{g}(H; \lambda) = \{X \in \mathfrak{g} | (\mathrm{Ad}(H) - \lambda 1)^k X = 0, \quad \text{para algum } k\}, \tag{B.1}$$

onde

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathfrak{g}(H; \lambda_i). \tag{B.2}$$

Definição B.2. *O elemento $H \in \mathfrak{g}$ é chamado de regulador se*

$$dim \mathfrak{g}(H; 0) = \min_{X \in \mathfrak{g}} (dim \mathfrak{g}(X; 0)). \tag{B.3}$$

B.2 Decomposição do Espaço das Raízes

Teorema B.1. *Toda a álgebra de Lie semisimples sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ contém uma sub-álgebra de Cartan.*

Seja α um funcional linear sobre o espaço vetorial complexo $\mathfrak{h}$. Logo, definimos um subespaço linear de $\mathfrak{g}$ dado por

$$\mathfrak{g}^\alpha \equiv \{X \in \mathfrak{g} | \mathrm{Ad}(H)X = [H, X] = \alpha(H)X, \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}. \tag{B.4}$$

α é chamado de *raiz* de $\mathfrak{g}$ com relação a $\mathfrak{h}$ se, e somente se, $\alpha \neq 0$ e $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$. $\mathfrak{g}^\alpha$ é chamado de *espaço das raízes*, também denotado por $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \Delta$. Notemos que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$. Para $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}^\alpha$ e $Z \in \mathfrak{g}^\beta$, vemos da identidade de Jacobi que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(X)[Y, Z] &= [\mathrm{Ad}(X)Y, Z] + [Y, \mathrm{Ad}(X)Z] \\ &= (\alpha(X) + \beta(X))[Y, Z] \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\therefore [Y, Z] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta} \Rightarrow [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}. \tag{B.6}$$

O espaço $\mathfrak{g}$ pode ser decomposto na seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left[\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha} \right], \tag{B.7}$$

onde $\dim \mathfrak{g}^{\alpha} = 1$ para cada $\alpha \in \Delta$.

Vamos agora considerar as complexificações. Seja G um grupo de Lie semisimples, compacto e com álgebra $\mathfrak{g}$. A sub-álgebra de Cartan é dada por $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. A complexificação de $\mathfrak{g}$ é dada por

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \equiv \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}. \tag{B.8}$$

Um elemento de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é representadado por (X, Y), onde $X, Y \in \mathfrak{g}$. A operação de conjugação complexa é definida por

$$\overline{(X, Y)} \equiv (-X, Y). \tag{B.9}$$

Portanto, temos o mapa $\mathrm{Ad}(X) : Y \to [X, Y]$ e a validade da seguinte relação:

$$\overline{[Z, W]} = -[\overline{Z}, \overline{W}], \tag{B.10}$$

onde $Z, W \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. O produto interno sobre o espaço $\mathfrak{g}$ é dado pela forma de Killing, $B : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, definida por

$$B(Z_1, Z_1) \equiv \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Ad}(Z_1) \circ \mathrm{Ad}(Z_2)\right). \tag{B.11}$$

Definição B.3. *Uma raiz é um funcional linear α diferente de zero o qual age sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Então, como visto, existe um $Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tal que*

$$Ad(X)Y = [X, Y] = \alpha(X)Y, \quad \forall X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}. \tag{B.12}$$

O subespaço de todos os Y é chamado de espaço das raízes. O único vetor $H_\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ que satisfaz

$$\alpha(H) = \langle H_\alpha, X \rangle = B(H_\alpha, X), \tag{B.13}$$

é chamado de vetor raiz para α.

Logo temos que decomposição de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é dada por

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \left[\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha} \right], \tag{B.14}$$

onde $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$.

Proposição B.1.

1. *Se α é uma raiz, então $-\alpha$ também é uma raiz.*
2. $[\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{X}_{-\alpha}] = H_\alpha$.
3. *As raízes expandem o espaço $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, enquanto que os vetores raízes expandem o espaço $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.*

Demonstração.

1. Seja $\widetilde{X}_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, onde $\langle \widetilde{X}_\alpha, \widetilde{X}_\alpha \rangle = 1$. Vemos de (B.10) que $\mathrm{Ad}(Z)\overline{W} = \mathrm{Ad}(\overline{Z})\overline{W} = -\overline{\mathrm{Ad}(Z)W}$ se, e somente se, $\overline{Z} = Z$, ou seja, $Z \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}$. Portanto, para $X \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$, temos

$$\mathrm{Ad}(X)\overline{\widetilde{X}_\alpha} = -\overline{\mathrm{Ad}(X)\widetilde{X}_\alpha} = -\alpha(X)\overline{\widetilde{X}_\alpha}. \tag{B.15}$$

   Então $\widetilde{X}_{-\alpha} = \overline{\widetilde{X}_\alpha}$ é um elemento diferente de zero o qual pertence a $\mathfrak{g}^\alpha$.

2. Usando (B.6) vemos que, se $Y = [\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{X}_{-\alpha}]$ então $Y \in \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$. Além disso, temos também que

$$\overline{[\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{X}_{-\alpha}]} = [\overline{\widetilde{X}_{-\alpha}}, \overline{\widetilde{X}_\alpha}] = [\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{X}_{-\alpha}], \tag{B.16}$$

   então $Y \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Por fim, de (B.11) vemos

$$\begin{aligned} B(Y,H) &= B([\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{X}_{-\alpha}], H) = B(\mathrm{Ad}(\widetilde{X}_\alpha)\widetilde{X}_{-\alpha}, H) \\ &= -B(\widetilde{X}_{-\alpha}, \mathrm{Ad}(\widetilde{X}_\alpha)H) = -B(\widetilde{X}_{-\alpha}, [\widetilde{X}_\alpha, H]) \\ &= B(\widetilde{X}_{-\alpha}, [H, \widetilde{X}_\alpha]) = B(\widetilde{X}_{-\alpha}, \mathrm{Ad}(H)\widetilde{X}_\alpha) \\ &= \alpha(H)B(\widetilde{X}_{-\alpha}, \widetilde{X}_\alpha) = \alpha(H)\langle \widetilde{X}_{-\alpha}, \widetilde{X}_\alpha \rangle \\ &= \alpha(H) \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\Rightarrow Y = H_\alpha. \tag{B.18}$$

3. Sabemos que $\dim(\mathfrak{g}^\alpha) = 1$. De (B.11) e $X \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ temos

$$B(X,X) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Ad}(X) \circ \mathrm{Ad}(X)\right) = \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(H)^2 = \sum_{\alpha\in\Delta} \langle H_\alpha, X\rangle^2. \tag{B.19}$$

   Portanto, se $X \neq 0$ temos $\alpha(X) \neq 0$, onde $\{\alpha\}$ expande $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ e $\{H_\alpha\}$ expande $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

□

Para $\alpha \in \Delta$, podemos considerar a reflexão do subespaço $\mathfrak{h}$ sobre o plano ortogonal à H_α, dada por

$$S_\alpha(H) \equiv H - \alpha(H)H_\alpha, \tag{B.20}$$

onde requeremos que $S_\alpha^2 = 1$. O subgrupo $W \equiv W(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h})$ de transformações de $\mathfrak{h}$ geradas pelas reflexões S_α é um grupo finito o qual chamamos de *grupo de Weyl*. Definimos também o conjunto das raízes positivas, $P \subset \Delta$. P é tal que, para $\alpha \in \Delta$, α ou $-\alpha$ pertence à P, mas não ambos. Além disso, se $\alpha, \beta \in P$ e $\alpha + \beta \in \Delta$ então $\alpha + \beta \in P$. Portanto, mais precisamente, o conjunto $\{S_\alpha | \alpha \in P \quad \text{e simples}\}$ contém os geradores de W, onde uma raiz simples com relação a um sistema positivo e fixo P é uma raiz que não pode ser escrita como uma soma de dois elementos de P.

B.3 Estrutura do Grupo $U(n)$

Vamos considerar o caso em que $G = U(1) = \{a \in GL(n,\mathbb{C}) | \overline{a}^t a = 1\}$. Portanto, a respectiva álgebra de Lie é dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) | \overline{X}^t + X = 0\}$. Se tomarmos a representação matricial $X = [X_{ij}] \in \mathfrak{g}$, temos que $X_{ii} \in i\mathbb{R}$, ou seja, $X_{ii} =$

$-(\overline{X}^t)_{ii} = -\overline{X}_{ii}$, e para $i \neq j$ temos que $X_{ij} = -(\overline{X}^t)_{ij} = -\overline{X}_{ji}$. Seja a sub-álgebra abeliana maximal $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ representada por

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{bmatrix} i\theta_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & i\theta_n \end{bmatrix} \middle| \theta_j \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{g}. \tag{B.21}$$

Quando $X \in \mathfrak{g}$ e se $[X, H] = 0$, para qualquer $H \in \mathfrak{t}$, então devemos ter que $X \in \mathfrak{t}$. O centralizador $\mathfrak{g}_H$ de H em $\mathfrak{g}$ está contido em $\mathfrak{t}$ e, portanto, $\mathfrak{g}_H = \mathfrak{t}$ para $H \in \mathfrak{t}$ com elementos diagonais distintos. Em particular chamamos H de elemento regular se $\dim\mathfrak{g}_H = \dim\mathfrak{t}$.

A forma de Killing (B.11) sobre $\mathfrak{g}$ é dada por

$$B(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY) = \sum_{j=1}^{n} (XY)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_{jk}Y_{kj} \tag{B.22}$$

$$\Rightarrow \overline{B(X, Y)} = \overline{\mathrm{Tr}(XY)} = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{X}_{jk}\overline{Y}_{kj} = \sum_{j,k=1}^{n} (-X_{kj})(-Y_{jk}) = \mathrm{Tr}(XY) \tag{B.23}$$

$$\therefore \mathrm{Tr}(XY) \in \mathbb{R}. \tag{B.24}$$

Semelhantemente, temos o seguinte resultado:

$$B(X, X) = \mathrm{Tr}(XX) = \sum_{j,k=1}^{n} X_{jk}X_{kj} = -\sum_{j,k=1}^{n} X_{jk}(\overline{X}^t)_{kj} = -\sum_{j,k=1}^{n} |X_{jk}|^2 \tag{B.25}$$

$$\therefore -\mathrm{Tr}(XX) \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Tr}(XX) = 0 \Leftrightarrow X = 0. \tag{B.26}$$

Logo

$$\langle X, Y \rangle \equiv -\mathrm{Tr}(XY), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{B.27}$$

define um produto interno real e $\mathrm{Ad}(G)$-invariante sobre $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$. Uma vez que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno $U(n)$-invariante (ou $\mathrm{Ad}(G)$-invariante), sabemos que

$$\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle \tag{B.28}$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{u}(n)$. Escolhemos uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1$, onde $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é semi-simples. Também $B(X, X) \leq 0$ é a forma de Killing sobre $\mathfrak{g}$, onde $B(X, X) < 0$ sobre $\mathfrak{g}_1 - \{0\}$. Para $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos que $\mathrm{Tr}[X, Y] = 0$ nos leva a concluir que $[X, Y] \in \mathfrak{su}(n)$ e, portanto, $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{su}(n)$. Inversamente, dado $X \in \mathfrak{su}(n)$ escrevemos $X = Z + X_1 \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1$. Então $Z = X - X_1 \in \mathfrak{su}(n)$ tal que $\mathrm{Tr}Z = 0$. No entanto, $Z = \mathrm{diag}(i\theta, ..., i\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, o que implica em $\mathrm{Tr}Z = ni\theta$, onde θ deve ser zero, ou seja, $Z = 0$. Logo $X = X_1 \in \mathfrak{g}_1$, ou seja, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{su}(n)$.

Também podemos considerar a decomposição $\mathfrak{t} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}_1$, onde $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_1$ é abeliano maximal em $\mathfrak{g}_1$. Neste caso temos

$$\mathfrak{t}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} i\theta_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & i\theta_n \end{bmatrix} \middle| \theta_j \in \mathbb{R}, \quad \theta_1 + ... + \theta_n = 0 \right\} = \{H \in \mathfrak{t} | \mathrm{Tr}H = 0\}. \tag{B.29}$$

Mais explicitamente, dado $H = \mathrm{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n) \in \mathfrak{t}$, $\theta \equiv \sum_{j=1}^{n} \theta_j / n$ e $t_j \equiv \theta_j - \theta$, vemos que $Z = \mathrm{diag}(i\theta, ..., i\theta) \in \mathfrak{z}$ e $H_1 = \mathrm{diag}(it_1, ..., it_n) \in \mathfrak{t}_1$, onde $H = H_1 + Z$.

Agora vamos olhar as complexificações:

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}_1 \to \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{z}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}. \tag{B.30}$$

Dado $H = \text{diag}(H_1, ..., H_n) = (X, Y) \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$, temos $X = Z_1 + T_1 \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}_1$ e $Y = Z_2 + T_2 \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}_2$, onde $(Z_1, Z_2) \in \mathfrak{z}^{\mathbb{C}}$ e $(T_1, T_2) \in \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}$. Devemos considerar as representações matriciais explicitas $(Z_1, Z_2) = \text{diag}(\lambda, ..., \lambda)$ e $(T_1, T_2) = \text{diag}(u_1, ..., u_1)$, onde $\lambda, u_j \in \mathbb{C}$ e $\text{Tr}(T_1, T_2) = 0$. Portanto temos que $H_j = \lambda + u_j$, tal que

$$\sum_{j=1}^{n} H_j = n\lambda + \sum_{j=1}^{n} u_j = n\lambda \tag{B.31}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sum_{j=1}^{n} H_j}{n} \quad \text{e} \quad u_j = H_j + \lambda. \tag{B.32}$$

Como já notado, $\mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}} \subset \{H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} | \text{Tr}H = 0\}$. Inversamente, se $H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ e $\text{Tr}H = 0$, a decomposição $H = X + iY \in \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$, onde $X = (H - \overline{H}^t)/2$ e $Y = (-i)(H + \overline{H}^t)/2$, implica que $\text{Tr}X = \text{Tr}Y = 0$, ou seja, $X, Y \in \mathfrak{t}_1$. A álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ realiza a complexificação de $\mathfrak{su}(n)$. Em outras palavras temos que $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ e o espaço das raízes é dado por

$$\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \Delta(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \{\alpha \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^* - \{0\} | (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\alpha} \neq 0\}, \tag{B.33}$$

onde

$$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\alpha} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) | [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}. \tag{B.34}$$

Existe uma bijeção $\alpha \to \widetilde{\alpha}$ de $\Delta(\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}}) = \Delta(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{t}_1^{\mathbb{C}})$ em $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ definida por

$$\widetilde{\alpha}(Z + H_1) \equiv \alpha(H_1), \tag{B.35}$$

para $H = Z + H_1 \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}_1$. Portanto os espaços das raízes coincidem, $(\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}})^{\alpha} \cong (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\widetilde{\alpha}}$. Então, para $\alpha = \alpha_{rs}$, onde $r \neq s$, temos que

$$\widetilde{\alpha}_{rs}(H) = \alpha_{rs}(H_1) = (H^r - \lambda) - (H^s - \lambda) = H^r - H^s. \tag{B.36}$$

Para a escolha $\Delta^+ = \{\alpha_{rs} | r < s\}$ temos $P = \{\widetilde{\alpha}_{rs} | 1 \leq r < s \leq n\}$. Vamos definir a matriz $H_{rs} = \text{diag}(0, ..., 1_{(r)}, ..., -1_{(s)}, ..., 0) \in i\mathfrak{t}$, portanto

$$\langle H, H_{rs} \rangle = \text{Tr} H \overline{H}_{rs}^t = H^r - H^s = \widetilde{\alpha}_{rs}(H). \tag{B.37}$$

Seja $a \in N_G(\mathfrak{t}) = \{a \in G | \text{Ad}(a)\mathfrak{t} = \mathfrak{t}\}$. Para $1 \leq j \leq n$ seja $H_j \equiv \text{diag}(0, ..., i1_{(j)}, ..., 0) \in \mathfrak{t}$. Logo $\text{Ad}(a)H_j = aH_ja^{-1} \equiv \text{diag}(i\theta_1, ..., i\theta_n) \in \mathfrak{t}$, onde $\theta_k \in \mathbb{R}$. Contudo aH_ja^{-1} and H_j tem os mesmos autovalores, o que nos leva concluir que $aH_ja^{-1} \cong H_l$. Logo estabelecemos um isomorfismo $\sigma : \{n\} \to \{n\}$, tal que $aH_ja^{-1} = H_{\sigma(j)}$, o que implica em $\sigma(j) = l$. Então $\sigma \in S_n$, grupo simétrico, e depende de a, $\sigma = \sigma^a$. Portanto, existe um mapa $\epsilon : N_G(\mathfrak{t}) \to S_n$ dado por $\epsilon(a) = \sigma^a$. Se $b \in T$, então $\text{Ad}H = H$, para qualquer $H \in \mathfrak{t}$. Sendo assim,

$$H_{\sigma^{ab}(j)} = abH_jb^{-1}a^{-1} = aH_ja^{-1} = H_{\sigma^a(j)} \tag{B.38}$$

$$\Rightarrow \sigma^{ab} = \sigma^a, \tag{B.39}$$

ou seja, podemos definir mais um mapa $\widetilde{\epsilon} : W \equiv N_G(\mathfrak{t})/T \to S_n$ dado por $\widetilde{\epsilon}(aT) = \sigma^a$. W é o grupo de Weyl.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Aldrovandi, R., Pereira, J. G. *An Introduction to Geometrical Physics*. World Scientific Publishing Company, 1995.

[2] Alvarez, O., Singer, I. M., Windey, P. Quantum mechanics and the geometry of the Weyl character formula. *Nucl. Phys.*, B337:467–486, 1990.

[3] Alvarez, O. Lectures on quantum mechanics and the index theorem. *IAS/Park City, Mathematics Series*, 1, 1991.

[4] Alvarez-Gaumé, L., Ginsparg, P. H. The topological meaning of nonabelian anomalies. *Nucl. Phys.*, B243:449, 1984.

[5] Alvarez-Gaumé, L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem. *Commun. Math. Phys.*, 90:161, 1983.

[6] Alvarez-Gaumé, L., Ginsparg, P. H. The structure of gauge and gravitational anomalies. *Ann. Phys.*, 161:423, 1985.

[7] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, second edition, 2000.

[8] Atiyah, M. F., Bott, R. The moment map and equivariant cohomology. *Topology*, 23(1):1–28, 1984.

[9] Atiyah, M. F. Circular symmetry and stationary-phase approximation. *Asterisque*, 131:43–59, 1985.

[10] Bardeen, W. A., Zumino, B. Consistent and covariant anomalies in gauge and gravitational theories. *Nucl. Phys.*, B244:421, 1984.

[11] Berline, N.,Getzler, E., Vergne, M. *Heat Kernels and Dirac Operators*. Springer, 1996.

[12] Birmingham, D., Blau, M., Rakowski, M., Thompson, G. Topological field theory. *Phys. Rep.*, 209(4,5):129–340, 1991.

[13] Bismut, J.-M. Index theorem and equivariant cohomology on the loop space. *Commun. Math. Phys.*, 98:213–237, 1985.

[14] Bismut, J.-M. Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families. *Commun. Math. Phys.*, 103:127–166, 1986.

[15] Blau, M., Keski-Vakkuri, E., Niemi, A. J. Path integrals and geometry of trajectories. *Phys. Lett. B*, 246(1,2):92–98, 1990.

[16] Bytsenko, A. A., Williams, F. L. Localization of equivariant cohomology - introduction and expository remarks. *arXiv:hep-th/0009238*, 2000.

[17] Bytsenko, A. A., Libine, M., Williams, F. L. Localization of equivariant cohomology for compact and non-compact group actions. *arXiv:math.SG/0502190*, 2005.

[18] Cordes, S., Moore, G., Ramgoolam, S. Lectures on 2D Yang-Mills theory, equivariant cohomology and topological field theories. *arXiv:hep-th/9411210*, 1996.

[19] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., Novikov, S. P. *Modern Geometry - Methods and Applications*, volume I, II, III. Springer, 1993.

[20] Duistermaat, J. J., Heckman, G. J. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space. *Invent. Math.*, 69:259–268, 1982.

[21] Duistermaat, J. J., Heckman, G. J. Addendum to "On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space". *Invent. Math.*, 72:153–158, 1983.

[22] Felsager, B. *Geometry, Particles, and Fields.* Springer, 1997.

[23] Friedan, D., Windey, P. Supersymmetric derivation of the Atiyah-Singer index and the chiral anomaly. *Nucl. Phys.*, B235:395, 1984.

[24] Friedan, D., Windey, P. Supersymmetry and index theorems. *Physica*, 15D:71–74, 1985.

[25] Gilmore, R. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications.* Dover, 2005.

[26] Guillemin, V., Sternberg, S. *Symplectic Techniques in Physics.* Cambridge University Press, 1986.

[27] Guillemin, V., Sternberg, S. *Geometric Asymptotics*, volume 14. AMS Math. Surveys, 1977.

[28] Hietamaki, A., Morozov, A. Yu., Niemi, A. J., Palo, K. Geometry of N=1/2 supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem. *Phys. Lett.*, B263:417–424, 1991.

[29] Itzykson, C, Zuber, J.-B. The planar approximation II. *J. Math. Phys.*, 21(3):411–421, 1980.

[30] Marsden, J., Weinstein, A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Rep. on Math. Phys.*, 5(1):121–129, 1974.

[31] Milnor, J. *Morse Theory.* Princeton University Press, 1963.

[32] Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics.* Institute of Physics Publishing, second edition, 2003.

[33] Niemi, A. J., Tirkkonen, O. Cohomological partition functions for a class of bosonic theories. *Phys. Lett. B*, 293(3,4):339–343, 1992.

[34] Ryder, L. H. *Quantum Field Theory.* Cambridge University Press, second edition, 1996.

[35] Szabo, R. J. Equivariant localization of path integrals. *arXiv:hep-th/9608068*, 1996.

[36] Williams, F. L. Localization of equivariant cohomology. Group Representations Seminar, 2002.

[37] Williams, F. L. Some Lie group basics. Private Notes, 2006.

[38] Williams, F. L. $U(1)$-structure. Private Notes, 2006.

[39] Williams, F. L. Compact Lie group structure and background information for the Duistermaat-Heckman formula. Private Notes, 2006.

[40] Witten, E. Dynamical breaking of supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B188:513, 1981.

[41] Witten, E. Constraints on supersymmetry breaking. *Nucl. Phys.*, B202:253, 1982.

[42] Witten, E. Supersymmetry and Morse theory. *J. Diff. Geom.*, 17:661–692, 1982.

[43] Zinn-Justin, P., Zuber, J.-B. On some integrals over the U(N) unitary group and their large N limit. *J. Phys. A*, 36:3173–3193, 2003.