



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.006/06

**Parâmetros cosmológicos e medidas de SNIa: estudando o efeito  
do acoplamento matéria-energia escura.**

Gabriela Camargo Campos

Orientador

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

Novembro de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Agradecimentos

Ao concluirmos um trabalho como esse, são muitas as pessoas a quem devemos agradecer. Algumas nos ajudaram mais diretamente com o trabalho, e com a Física. Outras, dando o apoio, ou uma ajuda aqui e outra ali, para que possamos, sempre, superar as dificuldades, encarar a luta e atingir os objetivos, e estas foram muitas. Assim, com certeza esquecerei de algumas delas, que não por isso não foram menos importantes.

Inicialmente, agradeço ao prof. Rogério Rosenfeld pela orientação, pelo respeito, liberdade e flexibilidade com a qual me orientou. Agradeço também aos professores Ioav Waga e Luca Amendola pela pronta ajuda sempre que solicitada.

Ao meu pai, minha mãe, à Marina e à tia Reça, por ajudarem a construir o caminho até aqui e sempre respeitarem minhas decisões, em especial as que foram tomadas no período final destes mestrado. Agradeço também pelo apoio durante todos estes anos de formação em física, em especial no duro término deste trabalho, e pela compreensão das minhas muitas ausências.

Aos amigos e colegas do IFT agradeço pela companhia, amizade, apoio e atenção durante estes quase dois anos e meio. Mesmo com as muitas diferenças de gostos, roupas, músicas e posições políticas, fui recebida com todo o apreço e foi criado um grupo sem o qual a realização deste trabalho seria com certeza mais difícil e menos prazerosa. Agradeço ao Marcelo Jovem pela companhia nos almoços e eterna paciência em escutar minhas crises com as coisas que sempre davam errado... e depois davam certo. Ao Marcelo “Bishcoito” pela amizade, apoio nos momentos difíceis e conversas sobre a vida e o mundo da academia. À Ana pelas caronas, que com certeza eram muito mais que caronas, e aos três, Marcelos e Ana, pela companhia nas aulas de MQ II e no estudo de Teoria Clássica de Campos, até tarde da noite na biblioteca, um dos momentos em que mais claramente pude ver a beleza da Física. Ao Hiroshi agradeço pela amizade, companheirismo, apoio, carinho e paciência nos últimos e duros meses deste mestrado, de dias de trabalho até altas horas. A todas estas pessoas e outros amigos do IFT, (Caco, Fernando, Bonin, Clóvis, Paulos, Rodrigo... e muitos outros), agradeço pelo apoio e paciência em escutar as minhas crises quando tudo parecia dar errado, quando o Mathematica dava “pau”, por não desligar os computadores que ficavam rodando no corredor. Por estarem sempre prontos a ajudar. Pelas conversas e tardes de estudo nas quais compartilhamos as dúvidas, medos, apreensões, revoltas e também o encantamento com o mundo da Física e da academia.

Um agradecimento muito especial vai para o pessoal da sala 7, em especial ao Leo e ao André, que, além de sempre estar disposto a ajudar, propiciou um ambiente extremamente agradável de trabalho, assim como de discussões sobre futebol, basquete, política, cinema... que com certeza vão deixar saudades.

Dentre todos estes agradecimentos, um deve ser feito de forma mais que especial. Um MUITO obrigada ao Leo tanto pela ajuda técnica, com o seu super computador, sem o qual a realização deste trabalho, e dos gráficos bonitos que veremos mais adiante, seria bastante difícil, quanto pela generosidade e apoio em muitos outros sentidos. Um muito obrigada pelas discussões sobre física e cosmologia, sobre a área da moda e a não da moda, pelo tempo gasto em esclarecer algumas de minhas dúvidas, por aturar os papéis e bichinhos que pulavam para a mesa dele de vez em quando, e pela amizade.

Um agradecimento muito especial mesmo ao time de basquete feminino da Física USP pela companhia e bons momentos proporcionados ao longo destes anos e deste último ano de trabalho intenso, que sempre garantiram momentos em que podíamos esquecer um pouco do trabalho e simplesmente se divertir, jogar bola e querer "apenas" fazer a cesta. Tiveram papel especial os treinos de terça feira anoite do primeiro semestre de 2006 quando, depois de um dia no qual tudo tinha dado errado, eu tinha ânimo revigorado pelo bate bola. Sem eles e as alegrias de 2007 com certeza este último ano teria sido muito mais solitário e difícil.

Embora não tão presentes no dia a dia, foram importantes também os amigos do IFUSP, entre eles Bel, Pat, Priscila, Mari, Gabriel, Edu, Fabinho, Leo, Henrique (companheiro de congressos, escolas, e algumas discussões cosmológicas e estatísticas) e Diogo. Agradeço pela amizade, por me darem ânimo novo quando o mestrado desanimava, por estarem sempre lá, no IFUSP e na vida, quando a coisa apertava, e por ouvirem minhas dúvidas e indecisões com relação à Física, desde o começo da graduação. Ao Urbano agradeço pela ajuda a entrar no mundo da cosmologia e do mestrado, e pelas raras conversas virtuais sobre este.

Um agradecimento também à Gabu, por ajudar a manter sempre (?) um pezinho no mundo fora da física.

Agradeço por fim à FAPESP que pelo apoio financeiro à realização deste mestrado, processo 04/04132-0.

# Resumo

Atualmente as observações em escala cosmológica indicam que vivemos em um universo composto por aproximadamente 70% de um componente desconhecido, com pressão negativa, denominado *energia escura*. Assim, um dos principais desafios da cosmologia é definir afinal o que é a energia escura, e existe um séria de modelos para ela. Uma das principais fontes observacionais de informações sobre as propriedades do universo e da energia escura são as medidas de supernovas do tipo Ia. Neste trabalho consideramos um modelo acoplado de energia e matéria escura e utilizamos uma parametrização tanto para este acoplamento como para a equação de estado da energia escura. Utilizando dados de supernova Ia são obtidas estimativas para os parâmetros do modelo, assim como do parâmetro de densidade de matéria escura,  $\Omega_{DM}$ , e verificado o efeito do acoplamento proposto sobre os valores obtidos para  $\Omega_{DM}$  e os parâmetros da equação de estado da energia escura, assim como algumas de suas implicações no que diz respeito ao comportamento da densidade de energia escura.

**Palavras Chaves:** Energia escura; parâmetros cosmológicos; supernovas Ia.

**Áreas do conhecimento:** Cosmologia

# Abstract

Current observations on cosmological scales indicate that we live in a universe composed approximately by 70% of an unknown component, with negative pressure, called *dark energy*. In this context, one of the main recent challenges of cosmology is define after all what is the dark energy. There are many dark energy models in the literature which try to solve this problem.

One of the main observational sources of information about the universe and dark energy properties are the SNIa data. In this work, we consider a model of coupled dark energy and dark matter. This coupling is defined using a parameterization, similar to the usual procedure of parameterizing dark energy equation of state, which is also done. Using supernova Ia data we estimate values for these parameters, and for dark matter density parameter,  $\Omega_{DM}$ , and verified the effect of the coupling on the best fit values obtained for  $\Omega_{DM}$  and the parameters of the equation of state of the dark energy, as well as some of its implications on the behavior of dark energy density.

## SUMÁRIO

1. Apresentação . . . . .	1
2. O Modelo Cosmológico Padrão . . . . .	4
I A Métrica de Friedmann Robertson Walker . . . . .	4
I.1 Redshift Cosmológico . . . . .	8
I.2 Distâncias no universo FRW . . . . .	10
II Dinâmica do universo . . . . .	16
II.1 O lado métrico . . . . .	16
II.2 O tensor energia-momento do universo . . . . .	16
II.3 As equações de Friedmann . . . . .	19
II.4 Solução para as equações de Friedmann na era da matéria. . . . .	21
III Modelos com constante cosmológica . . . . .	25
III.1 Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	26
IV O universo primordial . . . . .	27
3. Energia Escura . . . . .	30
I A constante cosmológica como energia escura . . . . .	36
II Quintessência . . . . .	39
III Energia escura <i>phantom</i> . . . . .	42
IV Acoplamento entre matéria e energia escura . . . . .	45
V Uma abordagem independente de lagrangeanas . . . . .	47
VI O modelo considerado . . . . .	48
VI.1 Equação de estado constante . . . . .	50
VI.2 Equação de estado variável . . . . .	54
4. Ajuste de parâmetros cosmológicos utilizando medidas de Supernovas Ia - preliminares. . . . .	58
I Ajuste de parâmetros e intervalos de confiança . . . . .	58
I.1 Abordagem frequentista e Bayesiana: intervalos de confiança e uso de Função densidade de probabilidade a priori . . . . .	58
I.2 Método da Máxima Verossimilhança . . . . .	60
II Obtenção de estimativas para os parâmetros cosmológicos a partir de medidas de supernovas. . . . .	63
II.1 Os dados do grupo Ouro . . . . .	65
II.2 Os dados do SNLS . . . . .	67
II.3 Escolha do intervalo de parâmetros considerado . . . . .	70
II.4 Função densidade de probabilidade a priori utilizada. . . . .	71
II.5 Teste do procedimento: comparação com os resultados da literatura . . . . .	72

5. <i>Resultados Obtidos</i> . . . . .	76
I Energia e matéria escura desacopladas . . . . .	76
I.1 Equação de estado constante . . . . .	77
I.2 Equação de estado variável . . . . .	81
II Energia e matéria escura acopladas: efeitos do acoplamento no espaço de parâmetros . . . . .	86
II.1 Equação de Estado Constante . . . . .	86
II.2 Equação de estado variável . . . . .	92
III Comparação simplificada com os dados da Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	96
6. <i>Discussão Final</i> . . . . .	101
 <i>Apêndice</i>	106
A. <i>Supernovas Ia Como Indicadores de Distância</i> . . . . .	107
I Alguns Tópicos Sobre Observações Astronômicas . . . . .	107
I.1 O uso de supernovas Ia como indicadores de distância. . . . .	113
II Supernovas Ia na cosmologia . . . . .	116
II.1 Multicolor Light Curve Shape . . . . .	126
III Spectral Adaptative Lightcurve Template . . . . .	133
Referências . . . . .	136

# 1. APRESENTAÇÃO

Até o fim do século passado, o modelo cosmológico padrão previa um universo em expansão, dominado por matéria escura, e portanto com expansão desacelerada. Na última década, no entanto, o avanço e aumento das observações cosmológicas, e em especial as observações de supernovas Ia e das anisotropias na radiação cósmica de fundo, indicaram que nos encontramos num universo aproximadamente plano, composto por cerca de apenas 30% de matéria não relativística, e acelerado.

A explicação de tais observações, que parece não poder ser feita considerando a gravitação padrão e um universo preenchido apenas por matéria não relativística e radiação, ou qualquer outro componente conhecido, é atualmente um dos principais, se não o grande desafio da cosmologia. No contexto da gravitação padrão, associa-se 70% do conteúdo de energia do universo à chamada energia escura, responsável também pela aceleração cósmica.

Embora o modelo de constante cosmológica ajuste de forma consistente os dados de supernovas e radiação cósmica de fundo, ele requer um ajuste muito fino do valor de  $\Lambda$  para que a energia escura tenha começado a dominar apenas recentemente, como indicam as observações, característica que não é desejável em um modelo físico. Tal problema é conhecido como *coincidência cósmica*. Visando resolvê-lo, assim como aumentar o leque de possibilidades para a energia escura, existe uma série de modelos dinâmicos para um fluido ao qual esta energia estaria associada, cujas propriedades podem ser caracterizadas por sua equação de estado. Assim, determinar, ou ao menos limitar possibilidades a respeito do comportamento e valor da equação de estado do componente de energia escura, é de grande importância para a cosmologia atual.

Dentre os modelos existentes na literatura, alguns propõem o acoplamento entre energia e matéria escura, que, além de constituir uma possibilidade teórica, pode resolver o problema da coincidência cósmica.

Neste trabalho, consideramos um modelo com acoplamento entre energia e matéria escura, implementado a partir da variação da massa da partícula de matéria escura, utilizando para tal uma determinada parametrização. É considerada também a parametrização na forma  $w_\phi = w_0 + w_1 z$  para a equação de estado da energia escura. A partir delas, realizamos a estimação de parâmetros cosmológicos, mais especificamente do parâmetro de densidade de matéria escura,  $\Omega_{DM0}$ ,  $w_0$  e  $w_1$ , utilizando dados de supernovas Ia (SNIa) disponíveis na literatura, para diferentes intensidades do acoplamento proposto. Pretendemos com isso não só realizar um estudo a respeito do valor de tais parâmetros e questões envolvidas na estimação destes, mas principalmente verificar o efeito do acoplamento proposto sobre os valores obtidos, e portanto sobre as propriedades do componente associado à energia escura.

Para realizar esta tarefa e compreender o contexto na qual ela se insere, foi necessária a aquisição de uma série de conhecimentos razoavelmente distintos entre si, que envolvem desde o formalismo da teoria de campos, até métodos estatísticos de tratamento de dados. Além disso, a familiarização e compreensão dos procedimentos utilizados na literatura

para a estimação de parâmetros cosmológicos utilizando dados de SNIa, envolvendo suas nuances, muitas vezes explicados de maneira sucinta em artigos, se colocou como uma tarefa em alguns momentos árdua.

Em vista disso, pretendemos nesta dissertação realizar uma introdução aos temas pertinentes à estimação de parâmetros cosmológicos a partir de dados de SNIa, que permita a um eventual leitor iniciante nesta tarefa, se familiarizar e ser introduzido não só ao problema da aceleração cósmica e da energia escura, mas também com as questões envolvidas na estimativa de parâmetros cosmológicos, e com o procedimento utilizado para obtenção de medidas de supernova. Isso porque acreditamos que, para realizarmos estimativas de parâmetros cosmológicos, é bastante importante que haja um conhecimento, ao menos superficial, destas questões.

Devido a esta escolha, em alguns momentos podemos pecar pela pouca profundidade ao tratar um determinado tema. No entanto, julgamos importante dar um panorama geral sobre os temas abordados, assim como das questões principais neles envolvidas, para posteriormente tratar o caso específico estudado tendo-as como pano de fundo.

Baseados nesta idéia, faremos no capítulo 2 uma introdução ao modelo cosmológico padrão, discutindo alguns de seus fundamentos e o desenvolvimento teórico inicial, a partir do qual é feito o estudo do universo. Destacaremos também algumas propriedades que serão de especial importância nos capítulos seguintes.

No capítulo 3 pretendemos realizar um panorama sobre o problema da aceleração cósmica, envolvendo suas evidências observacionais, algumas das principais abordagens ao problema da energia escura e as questões envolvidas no que diz respeito à obtenção do modelo que melhor a descreva. Introduziremos também o acoplamento entre matéria e energia escura, assim como a abordagem e o modelo utilizado. Por fim é realizado um estudo simplificado das propriedades deste modelo.

O método de tratamento de dados utilizados, assim como a caracterização dos dados de supernova em questão, uma breve explicação a respeito da obtenção de distâncias de supernovas Ia e dos procedimentos utilizados para a estimação de parâmetros cosmológicos por nós realizada é feita no capítulo 4. Devido às questões colocadas anteriormente, assim como para facilitar a leitura e compreensão deste trabalho, tivemos o cuidado de explicitar o procedimento utilizado, assim como as questões nele envolvidas e as opções feitas durante o trabalho.

Os resultados obtidos para os parâmetros de interesse, nos diversos casos estudados, assim como a análise deles é feita no capítulo 5.

No capítulo 6 é feita a discussão final a respeito dos resultados obtidos, ressaltando os pontos de maior importância no comportamento das estimativas realizadas, assim como outras questões relevantes à estimativa de parâmetros cosmológicos e ao modelo proposto. São também levantados pontos que ficam em aberto, para um estudo futuro.

A partir da necessidade de trabalhar com os dados de SNIa, nos deparamos em alguns momentos com escolhas que precisavam ser feitas, no que diz respeito à forma de tratar tais medidas. Para realizar tais escolhas, assim como compreender de forma geral como eram tomados os dados de supernovas Ia utilizados, foi feito um breve estudo dos métodos utilizados e das questões envolvidas na obtenção das distâncias das supernovas Ia. A compilação destes estudos, configurando um panorama sobre o uso de SNIa como indicadores de distância, e uma explicação um pouco mais detalhada dos métodos com os quais foram obtidos os dados por nós utilizados, é feita no apêndice A. Não pretendemos no entanto com o estudo realizado, nem com tal apêndice, tornar, a nós ou ao leitor, capazes de re-

alizer o ajuste de curvas de luz de SNIa ou obter distâncias a partir delas, mas apenas, como teóricos, ter uma visão geral sobre as questões e métodos envolvidos neste processo.

## 2. O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

Em um trabalho publicado em 1929, [1], E. Hubble mostrou que a luz de uma série de nebulosas, quando observadas da Terra, apresentava um desvio sistemático para o vermelho, indicando que todas elas se afastavam de nós, de forma regular e com módulo da velocidade proporcional à distância à qual se encontravam. Estava feita a primeira e mais conhecida medida da expansão do universo. Este fato, em conjunto com a formulação da Teoria da Relatividade Geral, em 1915, gerou uma significativa mudança em nossa visão do universo e a reformulação da cosmologia, dando início a um grande desenvolvimento que resultou no chamado *modelo cosmológico padrão*. Neste capítulo, procuraremos expor alguns dos fundamentos de tal modelo, em especial aqueles que são de fundamental importância para o estudo da aceleração do universo e da energia escura realizado neste trabalho.

A partir do ano de 1915, quando foi apresentada por Albert Einstein, a Teoria da Relatividade Geral se consolidou como a teoria física padrão para a gravitação. A interação predominante em escalas cosmológicas é a gravitacional, o que faz com que um dos pilares do modelo cosmológico padrão seja a relatividade geral. Neste cenário, para obter o comportamento do espaço-tempo do cosmológico, devemos resolver as equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  o tensor de Riemann,  $R$  o escalar de curvatura, e  $T_{\mu\nu}$  o tensor energia-momento do universo.

O lado esquerdo da equação tensorial acima está relacionado com as propriedades geométricas do espaço-tempo, tais como métrica e curvatura, enquanto que do lado direito temos os termos de fonte, mais especificamente o tensor energia-momento. Desta forma, ela nos diz como a presença de matéria e energia curva o espaço tempo.

### I A Métrica de Friedmann Robertson Walker

Como colocado acima, o estudo do universo parte da solução das equações de Einstein para este. Por se tratarem de dez equações diferenciais não lineares acopladas, elas não podem ser resolvidas utilizando única e exclusivamente os métodos matemáticos disponíveis. É necessário que utilizemos condições de contorno que simplifiquem esta tarefa e imponham restrições, preferivelmente associadas às observações que realizamos do universo, nas soluções que encontraremos para ele.

Neste momento entra em cena o *princípio cosmológico*. Ele supões que o universo é, em larga escala, espacialmente isotrópico e homogêneo. Dizer que um espaço é isotrópico em torno de um ponto significa dizer que ele possui as mesmas características em todas as direções, quando observado a partir deste ponto. A isotropia do universo, no entanto, diz

respeito não só às propriedades do próprio espaço, mas também da distribuição da matéria e energia, velocidade dos corpos, e outras propriedades físicas. Conforme a própria equação de Einstein, uma coisa implica na outra, visto que a anisotropia na distribuição de matéria e energia levaria à anisotropia das propriedades geométricas do espaço e vice-versa. O mesmo vale para a distribuição de campos e radiação, que deve igualmente ser isotrópica.

Já a homogeneidade está associada ao fato de que, para um mesmo instante e em larga escala, o universo é igual em todos os pontos. Num universo homogêneo e isotrópico, um observador em repouso em qualquer lugar do universo o enxergará igual em todas as direções.

Embora inicialmente proposto como uma condição teórica simplificadora, o princípio cosmológico é coerente com todas as observações cosmológicas feitas em escala grande o suficiente. Em especial, as observações da distribuição de galáxias indicam que, embora em escalas moderadas haja anisotropias, em larga escala elas se apresentam distribuídas de forma uniforme. Outra confirmação importante do princípio cosmológico são as características da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), que apresenta alta homogeneidade e isotropia, sendo que as perturbações na temperatura associada ao espectro de corpo negro desta são da ordem de  $\frac{\delta T}{T} = 10^{-5}$ .

Na discussão anterior, nos referimos aos termos espaço, tempo e repouso, sem especificar um observador ou sistema de coordenadas específico. No entanto, sabemos da teoria da relatividade que o tempo e espaço variam conforme quem os mede, e que as coordenadas espaciais e temporais dependem do sistema de coordenadas. Assim, ao estudar o universo como um todo, devemos ter em mente qual o sistema de coordenadas utilizado e como se relacionam as medidas dos diferentes observadores.

Da mesma forma, ao dizermos que o universo é homogêneo e isotrópico, devemos especificar para qual observador isso ocorre. Neste sentido, podemos interpretar o princípio cosmológico como a hipótese de que exista um conjunto de observadores, caracterizados por uma quadrivelocidade  $u^\mu$  para os quais a seção espacial do espaço-tempo, perpendicular à sua quadrivelocidade, é isotrópica e homogênea. Coerentemente, as componentes da métrica no sistema de coordenadas espaço-temporais no qual estes observadores estão em repouso apresentarão isometrias com relação à translações e rotações nos eixos espaciais.

O sistema de coordenadas em questão é o chamado *sistema de coordenadas comóvel*. Ele é definido a partir das curvas geodésicas do espaço-tempo cosmológico. Conforme a observação de expansão uniforme das galáxias feita por Hubble, e confirmada posteriormente, as geodésicas do espaço-tempo cosmológico são curvas que se afastam de forma ordenada e regular com o tempo (no presente estágio de expansão, como veremos posteriormente, elas podem vir a se aproximar), e não se interceptam. Assim, podemos construir um sistema de coordenadas no qual as geodésicas definam as coordenadas espaciais, na forma

$$x_{geod}^i = cte. \quad (2.2)$$

Ao longo deste trabalho, os índices utilizando letras do alfabeto latino denotarão as coordenadas espaciais de um evento, assim como as componentes espaciais de um quadri vetor, e o índice 0 denotará a coordenada temporal  $x^0 = ct$ . Para nos referirmos ao conjunto das quatro coordenadas utilizaremos índices do alfabeto grego. Portanto, o índice  $i$  na expressão acima diz respeito às coordenadas espaciais. Desta forma, no sistema comóvel, as coordenadas espaciais ao longo de uma geodésica são constantes.

A coordenada temporal pode ser definida de forma que cada hipersuperfície ortogonal às quadrivelocidades de todas as geodésicas, seja uma hipersuperfície de simultaneidade,

caracterizada pela coordenada  $t = cte$ . Podemos ver na figura abaixo um esquema da estrutura de tal sistema.

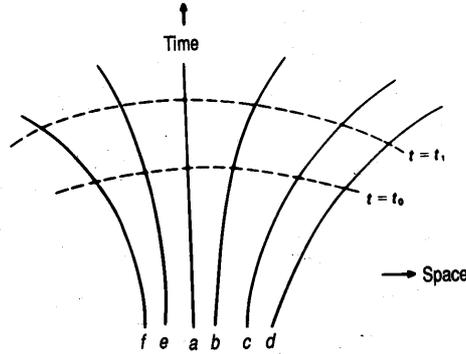


Fig. 2.1: *Esquema da estrutura do sistema de coordenadas comóvel. As curvas a, b, c, d, e e f são geodésicas do espaço-tempo, ao longo das quais  $x^i$  é constante. As linhas tracejadas representam as diferentes hipersuperfícies de simultaneidade. Figura extraída de [2].*

No sistema de coordenadas comóvel, um observador que segue uma geodésica estará em repouso. Sua seção espacial será, por definição, exatamente a hipersuperfície de simultaneidade do sistema. Ele é chamado *observador comóvel*, e observará um universo homogêneo e isotrópico. Devido ao repouso com relação a um mesmo sistema de coordenadas utilizado, todos os observadores comóveis medem o mesmo tempo, que é a coordenada temporal do sistema. Este é chamado *tempo cosmológico*, e a evolução do universo é descrita em função dele.

Definido o sistema de coordenadas, resta ainda relacionar as medidas feitas por diferentes observadores. Segundo o postulado de Weyl, corroborado pelas observações de Hubble, as galáxias seguem geodésicas do espaço-tempo. Assim, observadores nelas presentes são observadores comóveis, e medem todos o mesmo intervalo de tempo entre dois eventos (tempo cósmico) e a mesma distância espacial. Sabemos no entanto que as galáxias apresentam velocidades peculiares, devido à interação com aglomerados e outros objetos próximos, e não seguem exatamente as geodésicas de espaço-tempo. Estas velocidades podem ser corrigidas de forma a obtermos medidas no referencial comóvel. Além disso, em muitos casos elas são desprezíveis.

As propriedades de isotropia e homogeneidade da seção espacial dos observadores comóveis implicam que as componentes da métrica no sistema comóvel devam apresentar isometrias por translação e rotação dos eixos espaciais. É possível mostrar que, para tal, ela deve ter os termos [2, 3]

$$\begin{aligned} g^{i0} &= 0 \\ g^{00} &= cte = 1. \end{aligned}$$

Assim, o elemento de linha pode ser escrito na forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad (2.3)$$

onde  $d\sigma^2$  é o elemento de linha sobre a hipersuperfície de simultaneidade, ou seja, o elemento de linha espacial, dado por

$$d\sigma^2 = h_{ij}dx^i dx^j \quad (2.4)$$

Resta determinar o formato das componentes  $h_{ij}$ . Conforme a discussão acima, elas devem descrever uma hipersuperfície de três dimensões, que respeite o princípio cosmológico, caracterizada por um determinado valor da coordenada temporal. Existem três possibilidades para tal [3]. A primeira delas possui curvatura nula e é um plano 3D. Assim, o elemento de linha é o elemento de linha euclidiano, dado em coordenadas esféricas por

$$d\sigma^2 = a^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)],$$

onde  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  são coordenadas espaciais esféricas, que localizam um ponto sobre uma determinada hipersuperfície de simultaneidade. O parâmetro  $a$  será discutido a seguir.

Temos também os casos com curvatura positiva e negativa. No caso de curvatura positiva o espaço consiste numa hipersuperfície esférica de três dimensões imersa no espaço-tempo de quatro dimensões. Ela é caracterizada por

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = a^2$$

onde  $a$  é o raio da hiperesfera.

Utilizando coordenadas esféricas em 4 dimensões, o elemento de linha neste caso é dado por

$$d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.5)$$

onde  $\chi$  é o ângulo azimetal em quatro dimensões. Podemos notar que, fixando  $\chi$ , voltamos ao elemento de linha de uma superfície esférica com duas dimensões caracterizada pelo raio  $a \sin \chi$ . Assim, definimos como coordenada radial

$$r = \sin \chi$$

e temos

$$d\sigma^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.6)$$

Notemos que neste caso os observadores não têm acesso direto à coordenada  $r$ , interna à hipersuperfície, mas somente às distâncias e coordenadas medidas sobre ela.

O terceiro caso possui curvatura negativa, e consiste numa hipersuperfície com formato de sela. Neste caso define-se  $r = \sinh \chi$ , e o elemento de linha em cada hipersuperfície de simultaneidade é dado por

$$d\sigma^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.7)$$

As três possibilidades descritas acima podem ser escritas de maneira unificada como

$$d\sigma^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.8)$$

onde as variáveis  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas espaciais e o parâmetro  $k$  está relacionado com a geometria do universo. Para  $k = 1$  temos um universo com curvatura positiva, para

$k = 0$  temos um universo com curvatura nula, e para  $k = -1$  um universo com curvatura negativa.

O elemento de linha acima considera uma determinada hipersuperfície de simultaneidade do espaço-tempo. O valor de  $a$  pode portanto variar de uma delas para outra, ou seja, variar com o tempo. Assim, obtemos para o espaço-tempo um elemento de linha na forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.9)$$

Note que, assim como ao longo de todo este trabalho, estamos utilizando a assinatura da métrica na forma  $(+, -, -, -)$ .

A métrica que resulta em tal elemento de linha é chamada métrica de Friedmann Robertson Walker (FRW). A definição completa da métrica do espaço-tempo cosmológico passa agora por determinar não só o valor de  $k$  mas a evolução temporal de  $a(t)$ . Este é o chamado *fator de escala* que, como veremos mais adiante, dá a dimensão de distância para as coordenadas espaciais comóveis. Além disso, devido ao fato de as coordenadas comóveis de um observador comóvel serem, por definição, constantes, a expansão do universo medida por Hubble é expressa por uma função  $a(t)$  crescente com o tempo. O formato de  $a(t)$  determina, portanto, a evolução temporal das seções espaciais do espaço-tempo. Assim, com a utilização do sistema comóvel, a expansão do universo pode ser interpretada não como o deslocamento dos corpos nele presentes, mas como a expansão do próprio espaço, e portanto do elemento de linha.

Resolver as equações de Einstein para o universo significa agora obter uma expressão para  $a(t)$ . Como veremos mais adiante, o valor de  $k$  está diretamente ligado ao conteúdo de energia do universo, ou seja, aos valores envolvidos no tensor energia-momento deste, no lado direito das equações de Einstein.

A partir da métrica FRW, é possível obter algumas características cinemáticas do universo independentemente de sua dinâmica. Uma delas é o *redshift cosmológico*, e outra, que será utilizada neste trabalho, diz respeito às medidas de distância num universo FRW.

### I.1 Redshift Cosmológico

Interpretando o afastamento das galáxias proveniente da expansão do universo do ponto de vista newtoniano, o *redshift* observado por Hubble seria devido ao efeito Doppler. Como vimos, no sistema de coordenadas comóvel as galáxias estão em repouso, a menos de velocidades peculiares, e não estão sujeitas ao efeito Doppler. No entanto, sabemos observacionalmente que sua luz de fato apresenta um desvio para o vermelho, denominado *redshift cosmológico*. Ele pode ser obtido teoricamente ao considerarmos o percurso traçado por um fóton entre a fonte e o observador, num espaço-tempo com a métrica FRW.

Consideremos para tanto uma fonte emissora de raios luminosos que são detectados por um observador comóvel, posicionado na origem do sistema de coordenadas, sem perda de generalidade, onde  $\vec{r} = 0$ . Considerando a homogeneidade e isotropia do espaço, a curva de mundo traçada pela onda eletromagnética manterá as coordenadas  $\theta$  e  $\phi$  constantes, havendo variação apenas na coordenada  $r$ . Pela teoria de relatividade, sabemos que a trajetória da luz corresponde a uma curva de mundo caracterizada por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} dr^2 = 0.$$

Temos então

$$\frac{cdt}{a(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr.$$

Suponhamos agora duas cristas de uma onda eletromagnética emitidas consecutivamente, sendo a primeira em  $t_{em}$  e a segunda em  $t_{em} + \Delta t_{em}$ , que serão detectadas pelo observador nos tempos  $t_{obs}$  e  $t_{obs} + \Delta t_{obs}$ , respectivamente. Assim, integrando a equação acima dos dois lados para cada uma destas cristas de onda temos, respectivamente,

$$\int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_{em}}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.10)$$

$$\int_{t_{em} + \Delta t_{em}}^{t_{obs} + \Delta t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_{em}}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.11)$$

onde  $r_{em}$  é a coordenada da fonte. Subtraindo a equação (2.11) de (2.10), temos

$$\int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_{em} + \Delta t_{em}}^{t_{obs} + \Delta t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = 0,$$

que pode ser escrita na forma

$$\int_{t_{em}}^{t_{em} + \Delta t_{em}} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_{obs}}^{t_{obs} + \Delta t_{obs}} \frac{cdt}{a(t)} = 0.$$

Considerando que  $\Delta t_{em}$  e  $\Delta t_{obs}$  são, respectivamente, os intervalos temporais entre a emissão e detecção de uma crista de onda e da outra, e portanto pequenos em comparação com a evolução do fator de escala, podemos considerar este constante no cálculo das integrais acima, de onde obtemos

$$\frac{c\Delta t_{em}}{a(t_{em})} = \frac{c\Delta t_{obs}}{a(t_{obs})}.$$

Por se tratar do intervalo temporal entre duas cristas de onda consecutivas,  $\Delta t_{em}$  e  $\Delta t_{obs}$  não são nada mais que o período  $T$  da onda, quando emitida e quando detectada pelo observador, respectivamente. Considerando que  $T = \frac{\lambda}{c}$ , temos

$$\frac{\lambda_{em}}{\lambda_{obs}} = \frac{a(t_{em})}{a(t_{obs})}.$$

A definição usual do *redshift* é

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}.$$

Neste trabalho utilizaremos o índice 0 para denotar o valor de grandezas no presente. Assim, considerando observações feitas no tempo presente, em  $t = t_0$ , temos para a luz emitida por um determinado objeto no instante  $t$ :

$$\frac{1}{1+z} = \frac{\lambda_{em}}{\lambda_0} = \frac{a(t_{em})}{a_0}. \quad (2.12)$$

Quando observamos um objeto, recebemos a luz que foi por ele emitida em  $t_{em}$ . Devido à expansão do universo, o fator de escala cresce com o tempo, e portanto seu valor  $a(t_{em}) = a(t)$  diminui quanto menor é o valor de  $t_{em}(t)$ . Assim, quanto menor  $t$ , maior o *redshift* do objeto. Por outro lado, a luz de objetos mais distantes demora mais para chegar até nós, fazendo com que quanto mais distante o objeto observado, estejamos recebendo uma imagem mais antiga, com menor valor de  $t_{em}$  e maior *redshift*. Assim, *redshifts* baixos implicam pequenas distâncias e a observação do universo mais recente enquanto que altos *redshifts* implicam em altas distâncias e observação de objetos mais antigos. Estas relações serão utilizadas posteriormente, além de permitirem que possamos usar o *redshift* como parâmetro para a evolução do universo, assim como o fator de escala.

É importante ressaltar novamente que, no contexto da relatividade geral, este *redshift* não se deve ao efeito Doppler associado à velocidade das galáxias, visto que no referencial comóvel ela é nula, mas sim às propriedades do espaço-tempo.

## I.2 Distâncias no universo FRW

Em um universo com a métrica de FRW, dada pelo elemento de linha em (2.9), a medida de distâncias, assim como a relação destas com as coordenadas  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  pode não ser trivial, devido aos efeitos da expansão e eventual curvatura. Além disso, distâncias obtidas com diferentes métodos, que num universo plano e estático são equivalentes, passam a ser diferentes umas das outras e a se relacionar de forma distinta com as coordenadas comóveis. É necessário portanto um cuidado especial ao falarmos em distâncias.

Chamaremos *distância física* entre dois pontos a distância medida por um observador comóvel entre dois eventos que ocorrem sobre uma mesma hipersuperfície de simultaneidade. Ela pode ser obtida da integração do elemento de linha desta hipersuperfície. Consideremos duas galáxias 1 e 2, com coordenadas  $(r_1, \theta_1, \phi_1)$  e  $(r_2, \theta_2, \phi_2)$ , respectivamente. A distância física entre dois eventos que ocorram simultaneamente nestas galáxias, e portanto entre elas é dada por

$$d_f = \int_{\theta_1, \phi_1, r_1}^{\theta_2, \phi_2, r_2} ds = a(t) \int_{\theta_1, \phi_1, r_1}^{\theta_2, \phi_2, r_2} \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.13)$$

Note que a integral na expressão acima consiste em uma integral de linha sobre a menor trajetória entre os dois eventos e galáxias em questão. A partir da expressão acima, podemos definir a chamada *distância comóvel*, dada por

$$d_c = \int_{\theta_1, \phi_1, r_1}^{\theta_2, \phi_2, r_2} \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

Podemos então escrever

$$d_f = a(t)d_c. \quad (2.15)$$

É importante lembrar que as expressões (2.15) e (2.14) acima dizem respeito às distâncias entre eventos pertencentes a uma mesma hipersuperfície de simultaneidade. A partir das definições e expressões acima, vemos que a distância comóvel é afetada pela curvatura do espaço, mas não pela sua expansão, permanecendo constante com o tempo, a menos de velocidades peculiares. O fator de escala  $a(t)$  dá o caráter de distância física, medida de fato por um observador, à distância comóvel. Isto significa que, embora no sistema de coordenadas comóvel as galáxias estejam em repouso, podemos associar a elas uma velocidade de afastamento gerada pela expansão do próprio elemento de linha, que leva ao aumento da distância física. Ela pode ser obtida derivando esta última com relação ao tempo:

$$v = \frac{d}{dt}d_f = \dot{a}(t)d_c = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d_f. \quad (2.16)$$

Definindo

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.17)$$

temos

$$v(t) = H(t)d_f. \quad (2.18)$$

No caso de  $t = t_0$  a relação acima se reduz a

$$v = H_0d_f \quad (2.19)$$

Esta é a chamada *Lei de Hubble*. Ela foi formulada pela primeira vez pelo próprio Hubble, em 1929, quando realizou suas observações. Na verdade, devido à forma de medida, as distâncias obtidas por Hubble eram as chamadas *distâncias de luminosidade*, definidas a seguir. No entanto, como mostraremos, no caso de pequenas distâncias elas são aproximadamente iguais à distância física.

### *Distância de Luminosidade*

Uma das formas mais importantes de medir distâncias cosmológicas é utilizando objetos de luminosidade conhecida, chamados velas-padrão. Assim, medindo o fluxo de energia que chega até nós proveniente do objeto, podemos determinar a distância à qual ele se encontra. Considerando uma emissão uniforme em todas as direções, e um universo plano e estático, a densidade de fluxo  $F$  medida por um observador a uma distância física  $d_f$  da fonte corresponde a

$$F = \frac{L}{4\pi d_f^2} = \frac{L}{4\pi(a_0d_c)^2}, \quad (2.20)$$

onde  $L$  é a luminosidade de fonte (energia emitida por unidade de tempo). Note que neste caso temos o fator de escala constante,  $a(t) = a(t_0) = a_0$ .

Num universo com a métrica de FRW, no entanto, estas grandezas,  $F$  e  $L$ , se relacionam de maneira mais complexa. Deve ser levada em conta não só a expansão do universo, que

gera o progressivo aumento da distância física que um fóton emitido deve percorrer, como também o *redshift* cosmológico e efeitos devidos à eventual curvatura do universo. Para utilizar tal método como medida de distância, é necessário encontrar a relação correspondente a (2.20) para um universo FRW.

Consideremos uma fonte com emissão monocromática e uniforme em todas as direções, localizada na origem do sistema de coordenadas espaciais, sem perda de generalidade, sendo observada por um observador comóvel com coordenada radial  $r$ , no tempo  $t = t_0$ . A densidade de fluxo  $F$  detectada por tal observador será dada pela energia  $E$  que atravessa uma superfície esférica de coordenada  $r$  fixa, por unidade de tempo, dividida pela área total da superfície,  $A$ , ou seja,

$$F = \frac{E}{A}. \quad (2.21)$$

Tal superfície é caracterizada pela coordenada radial  $r$  e temporal  $t = t_0$ . Seu elemento de área é portanto

$$dA = a_0^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi,$$

cuja integral resulta em

$$A = 4\pi(a_0 r)^2.$$

Precisamos agora obter a quantidade de energia  $E$  que atravessa a superfície por unidade de tempo. Sabemos que a energia de um fóton é proporcional à frequência, na forma

$$E_{foton} = h\nu.$$

Assim, a energia  $E_{\Delta t_{obs}}$  que atravessa a superfície em questão em um intervalo de tempo  $\Delta t_{obs}$  é dada por

$$E_{\Delta t_{obs}} = N \times h\nu_{obs}, \quad (2.22)$$

onde  $N$  é o número de fótons que atravessa a superfície no intervalo de tempo  $\Delta t_{obs}$ . No cálculo do *redshift* cosmológico vimos que duas cristas de onda que são detectadas num intervalo temporal  $\Delta t_{obs}$  foram emitidas num intervalo  $\Delta t_{em} = \frac{\Delta t_{obs}}{1+z}$ . Considerando a luz emitida como fótons, o mesmo ocorrerá com eles: os fótons detectados dentro do intervalo  $\Delta t_{obs}$  foram emitidos no intervalo

$$\Delta t_{em} = \frac{\Delta t_{obs}}{1+z}. \quad (2.23)$$

Em consequência disso, o número  $N$  na expressão (2.22) é igual ao número de fótons emitidos neste intervalo de tempo  $\Delta t_{em}$ . Este último, por sua vez, corresponde à luminosidade da fonte dividida pela energia de cada fóton, multiplicada pelo intervalo temporal considerado, no caso  $\Delta t_{em}$ . Utilizando a relação  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , assim como as relações (2.23) e (2.12), obtemos

$$N = L \times \Delta t_{em} \frac{\lambda_{em}}{hc} = \frac{L \times \lambda_{obs} \times \Delta t_{obs}}{hc(1+z)^2}. \quad (2.24)$$

Utilizando agora as expressões (2.22) e (2.24) temos

$$E_{\Delta t_{obs}} = \frac{L \times \Delta t_{obs}}{(1+z)^2}, \quad (2.25)$$

e, por fim, substituindo a expressão acima em (2.21), a relação entre a densidade de fluxo de energia e a luminosidade resulta em

$$F = \frac{L}{4\pi [ra_0(1+z)]^2}. \quad (2.26)$$

Por analogia com (2.20), definimos a *distância de luminosidade*:

$$d_L = a_0(1+z)r, \quad (2.27)$$

a partir da qual podemos escrever (2.35) como

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (2.28)$$

Para universos com curvatura não nula, a coordenada  $r$  presente na expressão (2.27) não é passível de medida direta. No entanto, podemos obtê-la como função de  $H(t)$ .

Sabemos que os eventos de emissão e detecção dos fótons em questão são unidos por curvas do tipo luz, por estes percorridas. Considerando que a fonte se encontra na origem do sistema de coordenadas espaciais, a variação das coordenadas angulares ao longo de tais curvas é nula, e temos então

$$ds = 0 \longrightarrow \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.29)$$

Integrando a expressão acima dos dois lados da igualdade, utilizando a definição de  $H(t)$  e a relação (2.12) temos

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} = \int_{t_{em}}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^z \frac{cdz'}{Ha_0}. \quad (2.30)$$

A integral do lado esquerdo, que nada mais é que a distância comóvel  $d_c$  entre a fonte e o observador, pode ser calculada analiticamente para cada um dos valores possíveis para  $k$ . Fazendo as substituições de variáveis  $r' = \sinh \chi$  e  $r' = \sin \chi$  para os casos  $k = -1$  e  $k = 1$ , respectivamente, obtemos

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}} = \begin{cases} \sinh^{-1} r, & k=-1; \\ r, & k=0; \\ \sin^{-1} r, & k=1. \end{cases}$$

Assim, considerando também (2.29), em cada caso podemos escrever  $r$  como

$$r = \begin{cases} \sinh \int_0^z \frac{cdz}{H(z)a_0}, & k=-1, \\ \int_0^z \frac{cdz}{H(z)a_0}, & k=0, \\ \sin \int_0^z \frac{cdz}{H(z)a_0}, & k=1, \end{cases}$$

e a distância de luminosidade é dada então por

$$d_L = c(1+z) \begin{cases} \sinh \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, & k=-1; \\ \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, & k=0; \\ \sin \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, & k=1. \end{cases} \quad (2.31)$$

### Caso de pequenas distâncias

Consideremos agora o caso de pequenas distâncias, no qual a coordenada comóvel  $r$ , o *redshift*  $z$  e a diferença entre o tempo de emissão e de detecção de um fóton,  $\Delta t = t_{obs} - t_{em}$  são pequenos o suficiente para que possamos desprezar os termos quadráticos em tais variáveis. Note que a partir de agora estamos utilizando a notação  $t_{obs} = t_0 = t_{em} + \Delta t$ .

A distância comóvel entre fonte e observador, dada pela integral do lado esquerdo da igualdade (2.29) pode então ser aproximada por

$$d_c = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \approx \int_0^r dr' \left( 1 + \frac{kr'^2}{2} \right) \approx r. \quad (2.32)$$

O fator de escala pode ser expandido em série de Taylor em torno de  $t = t_0$ , na forma

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \mathcal{O}(t - t_0)^2 = a_0 (1 + H_0(t - t_0)), \quad (2.33)$$

onde a segunda igualdade foi obtida desprezando os termos de ordem igual ou superior a  $(t - t_0)^2$ .

Podemos também expandir em série de Taylor a expressão (2.12), que resulta em

$$\frac{a}{a_0} = 1 - z + \mathcal{O}(z^2)$$

Comparando a expressão acima com (2.33) e desprezando os termos em  $z^2$  temos

$$a_0 [1 + H_0(t - t_0)] = a_0(1 - z) \longrightarrow t_0 - t = \frac{z}{H_0}, \quad (2.34)$$

Consideremos agora a integral do lado direito da igualdade (2.29). Utilizando a expansão (2.33) temos

$$\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0} cdt a_0^{-1} (1 + H_0(t - t_0))^{-1}.$$

Resolvendo tal integral e desprezando os termos em  $(t_0 - t_{em})^2 = \Delta t^2$  obtemos

$$\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \approx \frac{c\Delta t}{a_0}.$$

Considerando a relação (2.34) para  $t = t_{em}$ , o que é válido por estarmos no limite de pequenas distâncias, obtemos finalmente

$$\int_{t_{em}}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \approx \frac{cz}{H_0 a_0}.$$

Utilizando o resultado acima e as expressões (2.32) e (2.30), temos, para pequenas distâncias

$$r \approx \frac{cz}{H_0 a_0},$$

o que, conforme a definição da distância de luminosidade, (2.31) resulta em

$$d_L \approx a_0(1+z) \frac{cz}{H_0 a_0},$$

que, desprezando novamente os termos em  $z^2$  leva a

$$d_L \approx \frac{cz}{H_0} \longrightarrow cz = H_0 d_L. \quad (2.35)$$

Por outro lado, a distância física é dada por (2.15), que, neste caso e no limite de pequenas distâncias, leva a

$$d_f \approx a_0(1_z)^{-1} r \approx a_0(1-z) \frac{cz}{H_0 a_0}. \quad (2.36)$$

Desprezando os termos em  $z$ , obtemos

$$d_f \approx \frac{cz}{H_0} \approx d_L. \quad (2.37)$$

Assim, vemos que para pequenas distâncias e baixos *redshifts*, a distância física e a distância de luminosidade são equivalentes. Além disso, utilizando a lei de Hubble dada na equação (2.19) obtemos finalmente,

$$v = H_0 d_f \approx H_0 d_L \approx cz \quad (2.38)$$

onde  $v$  é a velocidade da fonte luminosa devido à expansão do universo.

Tal relação também pode ser obtida considerando o *redshift* cosmológico como fruto do efeito Doppler devido ao afastamento das galáxias, no limite de baixas velocidades. De fato, quando realizou suas observações e obteve a relação (2.19), Hubble utilizou o *redshift* como indicador de velocidade através de (2.38). A expressão obtida em (2.35) constitui ainda hoje, em conjunto com (2.38), num dos métodos mais confiáveis para a estimativa de distâncias até objetos de *redshifts* moderados, pertencentes ao chamado *fluxo de Hubble*, ( $0.01 < z < 0.1$ ). Para estes valores de  $z$ , temos distâncias pequenas o suficiente para podermos utilizar a relação (2.35) e grandes o suficiente para que a velocidade peculiar dos objetos seja pequena em relação à velocidade de expansão, minimizando os erros ao considerarmos  $v_{\text{expansão}} = cz$ .

## II Dinâmica do universo

A métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) deixa em aberto tanto a curvatura do universo quanto a evolução temporal do parâmetro de escala. Estas informações virão da resolução das equações de Einstein, que discutiremos abaixo.

### II.1 O lado métrico

Do lado esquerdo da equação (2.1) temos o tensor de Einstein, associado às características métricas do espaço-tempo. Ele pode ser obtido em função de  $k$  e  $a(t)$  a partir da métrica FRW. Considerando o elemento de linha (2.9), suas componentes no referencial comóvel são dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 a^2(t) \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

A partir da métrica, calculamos os símbolos de Christoffel e o tensor de Riemann através de suas definições:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left[ \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} \right], \\ R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} &= \frac{\partial \Gamma_{\nu\beta}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu}. \end{aligned}$$

O tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  é obtido a partir da contração do tensor de Riemann obtemos e, contraindo-o novamente, obtemos o escalar de curvatura,  $R$ , na forma

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \\ R &= R^{\mu}{}_{\mu}. \end{aligned}$$

Assim, chegamos às componentes para o tensor de Einstein, cujas únicas componentes não nulas são:

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1}{c^2} \left[ \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} \right] \quad (2.39)$$

$$G_0^0 = -\frac{3}{c^2} \left[ \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} \right] \quad (2.40)$$

### II.2 O tensor energia-momento do universo

Do lado direito das equações de Einstein temos o termo de fonte, ou seja, o tensor energia-momento. Para resolvê-las considerando o universo como um todo, temos que utilizar o tensor energia-momento considerando *toda* a quantidade de energia e matéria contida neste. Para tal, considera-se que o universo é preenchido continuamente por um

fluido perfeito. Isto significa que para um observador em repouso com relação ao fluido *como um todo* ele é isotrópico e homogêneo, o que vai ao encontro do princípio cosmológico. Este observador, de acordo com a discussão anterior, nada mais é que o observador comóvel. É importante ressaltar que, quando falamos em repouso em relação ao fluido como um todo, estamos excluindo as velocidades peculiares dos componentes do fluido. Tais componentes são basicamente, no caso da matéria, as galáxias, e, no caso da radiação, os fótons da radiação cósmica de fundo. As componentes do tensor energia-momento de um fluido perfeito num sistema qualquer de coordenadas são dadas por [2]

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

onde  $u^\mu$  é a quadrivelocidade do fluido e  $p$  e  $\rho$  a pressão e a densidade de energia, respectivamente, medidas por um observador em repouso com relação ao fluido, como é o caso de um observador comóvel. No referencial comóvel o fluido está em repouso, tendo a quadrivelocidade dada por

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

Obtém-se então as componentes do tensor energia-momento. As únicas componentes não nulas são

$$T_0^0 = \rho, \quad (2.42)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p. \quad (2.43)$$

A igualdade das três componentes espaciais do tensor energia momento, assim como das três componentes espaciais da diagonal do tensor de Einstein já era esperada, pois está associada à homogeneidade e isotropia do espaço.

Consideremos agora a equação de conservação do tensor energia momento:

$$T_{\nu;\mu}^\mu \equiv \frac{\partial T_\nu^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0. \quad (2.44)$$

Aplicando-a no caso do tensor energia-momento obtido, chegamos à equação de conservação de energia para o universo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.45)$$

A equação acima vale para a densidade de energia e pressão do fluido como um todo, considerando todos os seus componentes. Podemos escrevê-la na forma

$$\sum_i \left[ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + 3H(\rho_i + p_i) \right] = 0,$$

onde o subscrito  $i$  diz respeito a cada um dos componentes do universo. A equação de conservação de energia escrita na forma acima considera que possa haver troca de energia entre os diferentes componentes do fluido cósmico (por exemplo, matéria bariônica e radiação). Se considerarmos componentes desacoplados um do outro, e que portanto não interagem entre si, podemos escrever a equação (2.45) para cada um dos componentes separadamente.

Até o fim do século passado, acreditava-se que o universo era composto por radiação e matéria não relativística, sendo esta última dividida em matéria escura (que conforme observações é predominantemente não bariônica) e matéria bariônica. Como veremos na seção IV deste capítulo, para  $z < 1100$ , matéria e radiação estão desacopladas, e praticamente não interagem mais. Assim, podemos tratá-las separadamente, e utilizar a expressão (2.45) para cada uma delas.

Em cosmologia, é utilizada para caracterizar o comportamento de um fluido a sua *equação de estado* que associa pressão e densidade de energia, dada por

$$p = f(\rho). \quad (2.46)$$

É frequente considerarmos a equação (2.46) na forma abaixo, chamando *equação de estado* a função  $w$ , sendo esta constante ou evoluindo com o tempo.

$$p = w(t)\rho. \quad (2.47)$$

A partir dela, podemos escrever a equação de conservação de energia para o fluido caracterizado pelo índice  $i$  como:

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}\rho_i(1 + 3w_i(t)) = 0, \quad (2.48)$$

que pode ser escrita também na forma

$$\frac{d\rho_i}{\rho_i(a)} = -3a^{-1}(1 + w_i(a))da.$$

Note que podemos considerar a equação de estado tanto como função do tempo como do fator de escala ou do *redshift*. Integrando esta igualdade dos dois lados, considerando que  $d \ln a = \frac{da}{a}$  e utilizando como condição de contorno  $\rho_i(a_0) = \rho_{i0}$  obtemos

$$\rho_i(a) = \rho_{i0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} e^{-3 \int_{a_0}^a w(a') d \ln a'}. \quad (2.49)$$

No caso de  $w_i$  constante a expressão acima leva a

$$\rho(a) = \rho_{i0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_i)} \quad (2.50)$$

Sabemos que atualmente as galáxias possuem velocidades peculiares não relativísticas. É possível mostrar [2] que a equação de estado de um fluido de partículas não relativísticas é dada por

$$w = \frac{v^2}{c^2}$$

Para a velocidade peculiar típica das galáxias de hoje,  $\frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-5}$  [2]. Assim, podemos desprezar a pressão da matéria bariônica, considerando sua equação de estado nula. O mesmo é feito para a matéria escura, considerando que ela é também não relativística, como indicam as observações. Substituindo este valor em (2.50) obtemos a expressão para a densidade de energia na forma de matéria não relativística:

$$\rho_M = \rho_{M0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (2.51)$$

Conforme expressão acima, a densidade de energia de matéria não relativística no universo diminui com  $a^3$ . Este fato pode ser compreendido se lembrarmos que a energia de uma partícula em repouso é proporcional à sua massa, e portanto constante. Além disso, considerando que o número de partículas de matéria não relativística é aproximadamente constante, é natural que a densidade de energia diminua conforme aumenta o volume, e portanto com  $a^3$ . O mesmo vale para a matéria escura, supondo que ela apresente propriedades semelhantes aos bárions.

Sabemos da mecânica estatística que a equação de estado para um gás de fótons é dada por

$$w_R = \frac{1}{3}$$

Assim, a expressão para a densidade de energia na forma de radiação é dada por:

$$\rho_R = \rho_{R0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4}. \quad (2.52)$$

Como no caso da matéria, a expressão acima é compreensível. De fato, a densidade de fótons, assim como a de partículas de matéria, diminui com o aumento do volume, e portanto é proporcional a  $a^{-3}$ , enquanto que a energia de cada fóton, proporcional à frequência, diminui com  $a$ , devido ao *redshift* cosmológico. Assim, a densidade de energia em radiação diminui com  $a^4$ .

Sabe-se das observações cosmológicas que atualmente a densidade de energia na forma de matéria domina sobre a em forma de radiação. No entanto, o fato de a densidade de energia da radiação diminuir mais rapidamente com o aumento do fator de escala faz com que, num universo em expansão como o nosso, ela possa, em alguma época no passado, ter sido maior que a densidade de energia de matéria. Isso de fato ocorreu, fazendo com que um universo composto por matéria e radiação seja inicialmente dominado por radiação, a chamada *era da radiação*, e em seguida passe a ser dominado por matéria, na *era da matéria*. O valor  $a_{eq}$  do fator de escala onde a transição de uma era para outra ocorre, e portanto para o qual  $\rho_R = \rho_M$ , pode ser obtido igualando as expressões para as respectivas densidades. Fazendo isso obtemos

$$a_{eq} = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} a_0.$$

### II.3 As equações de Friedmann

Obtidos o tensor de Einstein e o tensor energia-momento para o universo, resta agora substituí-los na equação de Einstein. Por ser uma equação tensorial que envolve tensores simétricos, esta resultará em 10 equações diferenciais acopladas. No entanto, as componentes  $\mu \neq \nu$  tanto do tensor energia-momento quanto do tensor de Einstein são nulas, fazendo com que restem apenas 4 equações. Mais uma vez devido à homogeneidade e isotropia imposta, as equações espaciais são equivalentes. Assim, as equações de Einstein resultam nas duas chamadas *equações de Friedmann*, que regem a dinâmica do universo:

$$H^2(t) = -\frac{kc^2}{a^2(t)} + \frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \quad (2.53)$$

$$\frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{kc^2}{a^2(t)} - \frac{8\pi Gp}{c^2}. \quad (2.54)$$

A partir das equações de Friedmann podemos relacionar a curvatura do universo com seu conteúdo de energia. Da equação (2.53) vemos que para  $k = 0$  o universo possui uma densidade de energia que é chamada *densidade crítica*, dada por

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)c^2}{8\pi G}.$$

Em particular em  $t = t_0$  temos

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2c^2}{8\pi G}. \quad (2.55)$$

Podemos definir também os parâmetros de densidade para cada componente do universo, assim como o parâmetro de densidade total, dados respectivamente por

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (2.56)$$

$$\Omega_t = \frac{\rho}{\rho_c} = \sum_i \Omega_i. \quad (2.57)$$

Observando a equação (2.53) e utilizando as definições acima, vemos que os parâmetros de densidade, a densidade e a curvatura estão associados na forma

$$\begin{aligned} \rho = \rho_c &\longrightarrow \Omega_t = 1 \longrightarrow k = 0, \\ \rho > \rho_c &\longrightarrow \Omega_t > 1 \longrightarrow k > 0, \\ \rho < \rho_c &\longrightarrow \Omega_t < 1 \longrightarrow k < 0. \end{aligned}$$

Assim, as três geometrias possíveis para o universo discutidas na seção I estão diretamente associadas ao conteúdo de energia deste. As relações acima valem especialmente quando consideramos  $\rho_{c0}$  e  $\Omega_{t0}$ .

Para escrever a equação (2.53) de uma forma mais conveniente, podemos definir uma densidade de energia relacionada à curvatura do universo, assim como o respectivo parâmetro de densidade, como

$$\begin{aligned} \rho_k &= -\frac{3kc^4a^{-2}(t)}{8\pi G} = \rho_{k0}a^{-2}(t), \\ \Omega_k &= \frac{\rho_k}{\rho_c}. \end{aligned}$$

Comparando as equações acima com (2.50), podemos associar à energia de curvatura a equação de estado constante  $w_k = -\frac{1}{3}$ . Utilizando (2.50) podemos escrever a equação (2.53) como

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_i \rho_i(t),$$

que, no caso em que as equações de estado de todos os componentes são constantes, como é o caso de um universo composto apenas por matéria e radiação, pode ser escrita como

$$H^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_{i0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_i)}. \quad (2.58)$$

A equação (2.54) pode ser reescrita mediante a definição da quantidade  $q(t)$ , associada à aceleração/desaceleração do universo e dada por

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)}{H^2(t)a}. \quad (2.59)$$

O valor  $q_0 = q(t_0)$  é chamado *parâmetro de desaceleração* e seu valor adquiriu especial importância na cosmologia recente, devido às medidas de aceleração do universo. Conforme sua definição, valores positivos de  $q(t)$  indicam a desaceleração do universo, enquanto que valores negativos a sua aceleração. A equação (2.54) pode então ser reescrita como

$$H^2(t)(1 - 2q(t)) = -\frac{kc^2}{a^2(t)} - \frac{8\pi Gp}{c^2}. \quad (2.60)$$

Até o fim do século passado, as observações indicavam um universo atualmente predominantemente preenchido por matéria não relativística. Como vimos, a densidade de energia da matéria diminui mais lentamente com o aumento do fator de escala do que a da radiação. Em consequência, a matéria continuaria dominando o cenário cosmológico, ao menos enquanto houvesse expansão. Neste contexto, o futuro do universo pode ser estudado resolvendo as equações de Friedmann considerando apenas a densidade de energia na forma de matéria não relativística, como faremos a seguir.

#### II.4 Solução para as equações de Friedmann na era da matéria.

Como discutido na seção II.2 deste capítulo, a pressão de um fluido perfeito composto por matéria não relativística pode ser considerada nula. Utilizando a expressão para  $\rho_M(a)$  obtida anteriormente, as equações de Friedmann ficam:

$$H^2(t) = -\frac{kc^2}{a^2(t)} + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{M0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (2.61)$$

$$H^2(t)(1 - 2q(t)) = -\frac{kc^2}{a^2}. \quad (2.62)$$

*Caso plano:  $k = 0$*

Considerando um universo plano, e dominado por matéria não relativística, temos

$$\rho_0 \approx \rho_{M0} \approx \rho_{c0} = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}.$$

Fazendo tal substituição e multiplicando a equação (2.61) por  $a^{-2}$ , obtemos para (2.61) e (2.62):

$$\dot{a}(t) = H_0 a_0^{\frac{3}{2}} a^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.63)$$

$$H^2(t)(1 - 2q(t)) = 0. \quad (2.64)$$

A equação acima pode ser escrita como

$$daa^{\frac{1}{2}} = H_0 a_0^{\frac{3}{2}} dt. \quad (2.65)$$

Integrando tal equação dos dois lados da igualdade, obtemos

$$\frac{a(t)}{a_0} = \left( \frac{3H_0}{2} \right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} + B,$$

onde  $B$  é uma constante de integração, que é obtida fixando a condição de contorno  $a(t=0) = 0$ , de onde obtemos

$$a(t) = \left( \frac{3H_0}{2} \right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}. \quad (2.66)$$

Note que, para  $t = t_0$ , considerando  $a_0 = 1$ , temos

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}, \quad (2.67)$$

que é a idade de um universo composto apenas por matéria.

A partir de (2.66), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \frac{2a_0}{3t_0^{\frac{2}{3}}} t^{-\frac{1}{3}}, \\ \ddot{a}(t) &= -\frac{a_0}{9t_0^{\frac{2}{3}}} t^{-\frac{4}{3}}, \end{aligned}$$

cujos limites quando  $t \rightarrow \infty$  são

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{a} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{a} &= 0 \end{aligned}$$

Além disso, em qualquer instante de tempo com  $t > 0$ ,  $\dot{a}(t) > 0$  e  $\ddot{a}(t) < 0$ . Isso significa que num universo dominado por matéria não relativística e com curvatura nula, o fator de escala cresce sempre com o tempo, com aceleração negativa, de forma assintótica. A partir da equação (2.64) obtemos também

$$q(t) = q_0 = \frac{1}{2}, \quad (2.68)$$

o que é coerente com o comportamento observado para  $\ddot{a}(t)$  e  $\dot{a}(t)$ .

*Curvatura positiva,  $k = 1$*

A equação (2.61) pode ser escrita de forma mais conveniente para os caso  $k \neq 0$ , dada abaixo [2]:

$$da = c \left[ \frac{\alpha}{a} - k \right]^{\frac{1}{2}} dt, \quad (2.69)$$

onde a constante  $\alpha$  é dada por

$$\alpha = \frac{2cq_0}{H_0 [k(2q_0 - 1)]^{\frac{3}{2}}}.$$

A partir de (2.69), temos

$$\frac{da}{\left[ \frac{\alpha}{a} - k \right]^{-\frac{1}{2}}} = cdt. \quad (2.70)$$

Integrando a expressão dos dois lados da igualdade, com os limites  $t = 0, a(t = 0) = 0$  e  $t, a$ , temos

$$ct = \int_0^a da' \left[ \frac{\alpha}{a'} - k \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.71)$$

No caso com curvatura positiva, utilizamos, para resolver a integral à direita na igualdade acima, a transformação de variável a seguir:

$$a' = \frac{\alpha}{2}(1 - \cos \theta) \quad (2.72)$$

Em termos de  $\theta$ , a equação (2.71) resulta em:

$$ct = \int_0^{\theta(a)} \frac{\alpha}{2}(1 - \cos \theta') d\theta'. \quad (2.73)$$

Assim, no caso de  $k = 1$ , a solução implícita, em termos de  $\theta$ , da equação (2.69) é

$$ct = \frac{\alpha}{2}(\theta - \sin \theta). \quad (2.74)$$

Note que durante a resolução de tal equação, assumimos  $a(t = 0) = 0$  e  $\theta(a = 0) = n\pi = 0$ . Tais escolhas dizem respeito apenas a onde colocamos a origem do eixo temporal, e portanto podem ser feitas livremente. A partir das expressões acima vemos que, no caso  $k = 1$ , o fator de escala parte de  $a = 0(\theta = 0)$ , cresce até atingir um valor máximo  $a_{max}$ , em  $\theta = \pi$ , e volta a se contrair até atingir  $a = 0$  novamente, com  $\theta = 2\pi$ . Vemos da equação (2.61) que neste momento  $\dot{a} \rightarrow \infty$ . Temos então o chamado *Big Crunch*. O tempo no qual ele ocorre e o valor de  $a_{max}$  podem ser obtidos das relações (2.72) e (2.74):

$$a_{max} = \alpha(k = 1) = \frac{2cq_0}{H_0(2q_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.75)$$

$$t_{crunch} = \frac{\alpha\pi}{2c}. \quad (2.76)$$

Além disso, temos de (2.62) que

$$q(t) > \frac{1}{2},$$

ou seja, o universo sempre desacelera. Esta condição vale inclusive para os dias atuais, fazendo com que, num universo com curvatura positiva e preenchido por matéria não relativística, tenhamos  $q_0 > \frac{1}{2}$ .

*Curvatura negativa:  $k = -1$*

No caso de curvatura negativa, a equação (2.71) pode ser resolvida utilizando a substituição de variável abaixo.

$$a' = \frac{\alpha}{2}(\cosh \Psi - 1). \quad (2.77)$$

De maneira análoga ao caso  $k = 1$ , a solução implícita obtida, em termos de  $\Psi$  é

$$ct = \sinh \Psi - \alpha \Psi, \quad (2.78)$$

onde  $\alpha$  é dado por

$$\alpha(k = -1) = \frac{2cq_0}{H_0(1 - 2q_0)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.79)$$

Notemos que a solução obtida apresenta um termo com  $\sinh \psi$  ao invés do termo em  $\sin \theta$  que aparece no caso  $k = 1$ . Além disso, há o termo em  $\Psi$ , para o qual não existe análogo no caso com curvatura positiva. Estes termos levam ao crescimento indefinido do fator de escala, que no limite de tempos muito grandes, cresce indefinidamente. Diferentemente do caso plano, este crescimento não é assintótico. De fato, analisando a equação (2.69) vemos que, com  $k = -1$  e  $\alpha$  positivo temos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \dot{a} \neq 0 \quad (2.80)$$

A partir da expressão para  $\alpha$ , vemos que neste caso devemos ter  $q(t) < \frac{1}{2}$  para que a solução não divirja, e tenha sentido físico. Além disso, vemos de (2.77) que valores negativos de  $\alpha$  implicam valores negativos do fator de escala, o que não tem sentido físico. Assim, num universo com curvatura negativa,  $0 < q(t) < \frac{1}{2}$ . Em especial

$$0 < q_0 < \frac{1}{2}. \quad (2.81)$$

Como discutido anteriormente, no cenário do modelo cosmológico padrão, onde o universo é composto apenas por matéria não relativística e radiação, as soluções expostas acima para um universo composto por matéria não relativística permitem associar as propriedades de curvatura ao futuro deste. Obtemos neste caso as seguintes relações entre curvatura, quantidade de energia e futuro de universo:

$$\begin{aligned}
\rho = \rho_c &\longrightarrow \Omega_t = 1 \longrightarrow k = 0 \longrightarrow \text{expansão eterna assintótica,} \\
\rho > \rho_c &\longrightarrow \Omega_t > 1 \longrightarrow k = 1 \longrightarrow \textit{Big Crunch}, \\
\rho < \rho_c &\longrightarrow \Omega_t < 1 \longrightarrow k = -1 \longrightarrow \text{expansão eterna livre.}
\end{aligned}$$

### III Modelos com constante cosmológica

Em 1917 [4], logo após a publicação da teoria da relatividade geral, em 1915, o próprio Albert Einstein buscou e publicou uma solução das equações de Einstein para o universo como um todo. Como condições de contorno ele utilizou não só o princípio cosmológico, como assumiu que o universo era preenchido por uma quantidade de matéria suficiente para tornar sua curvatura positiva, e era estático, possuindo fator de escala constante. Estas condições estavam intimamente ligadas à visão de universo vigente na época.

Substituindo tais condições nas equações de Friedmann, vemos que elas levam às equações [2]

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{a^2(t)} &= -\frac{8\pi G}{c^2}\rho_0, \\
\frac{1}{a^2} &= 0.
\end{aligned}$$

A segunda das equações acima claramente não apresenta solução física. Assim, um universo estático não era permitido pelas equações de Einstein em sua formulação original.

É neste cenário que surge a *constante cosmológica*. Visando obter uma solução estática, Einstein inseriu em suas equações uma constante que era permitida matematicamente, mas carecia de um sentido físico claro. As equações de Einstein com constante cosmológica são dadas abaixo.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.82)$$

A partir destas equações, Einstein obteve uma solução que consistia em um universo preenchido por matéria, fechado e estático. Tal solução, no entanto, requer ajuste muito fino para o valor de  $\Lambda$ , que deve ser dado por

$$\Lambda = \Lambda_c = \frac{4\pi G\rho_0}{c^4}. \quad (2.83)$$

Qualquer desvio com relação a  $\Lambda_c$  faz com que a solução estática obtida deixe de existir, tornando a solução encontrada por Einstein instável.

Com a observação da expansão do universo feita por *Hubble*, foi mostrado que de fato nosso universo não era estático, e portanto a inserção da constante cosmológica se tornou desnecessária. No entanto, um valor não nulo para  $\Lambda$  permaneceu como uma possibilidade teórica, e portanto presente no cenário da cosmologia padrão, constituindo um problema em aberto na cosmologia atual. Como veremos no próximo capítulo, com a medida da aceleração do universo, a constante cosmológica voltou ao centro das atenções na cosmologia moderna. Na seção abaixo discutiremos brevemente os efeitos de tal termo sobre os resultados acima obtidos e a dinâmica do universo.

### III.1 Modelo $\Lambda$ CDM

Na seção II.4 deste capítulo obtivemos relações entre a geometria do universo e o futuro deste, considerando um universo sem constante cosmológica e atualmente dominado por matéria não relativística. Pretendemos agora estudar como o termo de constante cosmológica afeta a dinâmica do universo. Para tal, continuaremos considerando um universo dominado por matéria não relativística, mas agora com valor não nulo para  $\Lambda$ . Em vista das observações atuais indicarem que a maioria da matéria do universo é composta por matéria escura, tal modelo é chamado  $\Lambda$ CDM, na sigla em inglês.

As equações de Friedmann obtidas a partir das equações de Einstein dadas em (2.82) são

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (2.84)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{c^2}p - H^2 - \frac{kc^2}{a^2} + \Lambda c^2. \quad (2.85)$$

Substituindo a equação (2.84) em (2.85) obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(p + \rho) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.86)$$

No caso do modelo  $\Lambda$ CDM, utilizando (2.51) e  $p_M=0$ , obtemos para (2.86) e (2.84):

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_{M0}a_0^3}{3ac^2} - kc^2 + \frac{\Lambda a^2 c^2}{3} \quad (2.87)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho_{M0}a_0^3}{a^3 c^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.88)$$

Note que, da mesma forma que definimos um parâmetro de densidade de energia associado à curvatura,  $\Omega_k$ , podemos definir um parâmetro de densidade de energia associado à constante cosmológica:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \longrightarrow \Omega_{\Lambda 0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}. \quad (2.89)$$

A equação (2.88) nos permite obter informações sobre o sinal da aceleração do universo no modelo  $\Lambda$ CDM. Enquanto no caso  $\Lambda = 0$  estudado anteriormente  $\ddot{a}$  é sempre negativo, para valores positivos de  $\Lambda$ , podemos ter um universo com aceleração positiva.

No caso de valores negativos para  $\Lambda$ , obtemos, assim como no caso anterior,  $\ddot{a} < 0$  sempre. Consideremos agora a equação (2.87). Com o crescimento de  $a$ , o termo que envolve a constante cosmológica aumenta, enquanto que o termo de curvatura permanece constante e o de densidade de energia da matéria diminui, levando à progressiva dominância do primeiro sobre os dois últimos. Devido ao termo em  $\dot{a}^2$  do lado esquerdo da igualdade, sabemos que o lado direito deve ser positivo. Para valores negativos de  $\Lambda$ , isso implica que haja um valor máximo para  $a$ , no qual  $\dot{a} = 0$ . Ou seja, independentemente da curvatura do universo, com a inserção do termo em  $\Lambda$  negativo, este expande até um valor máximo do fator de escala, e depois se contrai, ocorrendo o *Big Crunch*, de forma semelhante ao caso  $\Lambda = 0$ ,  $k = 1$ .

Os efeitos mais interessantes, e que motivam o estudo de modelos com constante cosmológica não nula, ocorrem para valores positivos de  $\Lambda$ . Neste caso, conforme a equação (2.88) podemos ter um universo com aceleração positiva, contanto que

$$\Lambda > \frac{4\pi G \rho_{M0} a_0^3}{a^3 c^4}. \quad (2.90)$$

Considerando que  $\Lambda$  é constante, enquanto que, num universo em expansão,  $a$  cresce com o tempo, isso ocorre para  $a(t) > a(t_{ac}) = a_{ac}$ , onde

$$a_{ac} = \left( \frac{4\pi G \rho_{M0} a_0^3}{c^4 \Lambda} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.91)$$

Note que, como era esperado, quanto maior o valor de  $\Lambda$ , mais cedo (considerando  $a(t)$  crescente) o termo de constante cosmológica domina e ocorre a aceleração.

Consideremos agora os diferentes valores para a curvatura. Nos casos com  $k = 0$  ou  $k = -1$ , podemos ver da equação (2.87) que  $\dot{a}$  nunca se anula. Sabendo que atualmente  $\dot{a} > 0$ , vemos que para estes casos o fator de escala cresce invariavelmente até atingir  $a_{ac}$ , a partir de quando a constante cosmológica domina e ocorre a aceleração, levando à expansão eterna.

Para  $k = 1$  temos duas possibilidades para o futuro do universo. Como vimos acima, a partir de um determinado valor do fator de escala ( $a_{ac}$ ), o termo de constante cosmológica domina e a partir de então temos  $\ddot{a} > 0$ . Por outro lado, conforme mostrado no capítulo anterior, um universo fechado com  $\Lambda = 0$  expande até  $a(t) = a_{max}$  e depois se contrai, levando ao *Big Crunch*. O mesmo pode ocorrer num modelo  $\Lambda$ CDM, pois, como vemos na equação (2.87),  $\dot{a}$  pode se anular, situação a partir da qual ocorre a contração. Conforme o valor de  $\Lambda$ , este valor  $a_{max}$  é inferior a  $a_{ac}$ , ( $a_{ac} > a_{max}$ ), fazendo com que a aceleração não se inicie e ocorra o *Big Crunch*, ou superior ( $a_{ac} < a_{max}$ ), quando a constante cosmológica domina, e leva à expansão eterna acelerada. A ocorrência de um ou outro caso dependerá da relação entre a densidade de matéria do universo, caracterizada por  $\rho_{M0}$  e o valor da constante cosmológica.

## IV O universo primordial

Como mostrado na seção II.4, as soluções das equações de Friedmann para um universo preenchido por matéria não relativística prevêm a existência de uma singularidade em  $t = 0$ , quando  $a = 0$ .

Tais soluções são razoáveis na era da matéria, mas não na da radiação, que a precede. Para estudar a existência ou não da singularidade, devemos portanto resolver as equações (2.53) e (2.54) para um universo dominado por radiação.

Substituindo a expressão (2.52) em (2.53) obtemos

$$\dot{a}^2 = -kc^2 + \frac{8\pi G \rho_{R0} a_0^4}{3c^2 a^2}. \quad (2.92)$$

Devido ao fato da era da radiação ocorrer no universo jovem, podemos tomar o limite para pequenos valores de  $a(t)$ , caso em que o termo que envolve  $\rho_{R0}$  do lado direito cresce indefinidamente, fazendo com que o termo de curvatura seja desprezível. Neste caso, temos para a equação (2.92):

$$\dot{a}(t) = \left( \frac{8\pi G \rho_{R0} a_0^4}{3c^2} \right)^{\frac{1}{2}} a^{-1}, \quad (2.93)$$

cuja resolução leva a

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (2.94)$$

Como vemos, a solução para o fator de escala na era da radiação também apresenta uma singularidade, neste caso em  $t = 0$ . Note que a escolha da origem do eixo temporal é arbitrária, e é frequente escolhermos  $a(t = 0) = 0$ .

A interpretação física de tal singularidade não é trivial e apresenta problemas, pois a própria noção de espaço e métrica deixam de fazer sentido em tal ponto. Além disso, nossas teorias atuais não dão conta de descrever os eventos que ocorreram arbitrariamente próximos à singularidade.

Independentemente destas questões, vemos que a partir da relatividade geral obtemos um universo dinâmico que teve um início, ou ao menos um momento em que possuía tamanho arbitrariamente pequeno, a partir da qual houve a expansão. Este processo é o chamado *Big Bang*.

A idéia de início do espaço-tempo, ou do universo conhecido, que conseqüentemente possui uma dinâmica e evolui, traz consigo uma série de desafios e questões adicionais. É preciso descrever com que características foi este início e como o universo evoluiu delas para as atuais.

É com este cenário que trabalha a cosmologia atual. Assim, faz parte da tarefa desta construir um perfil de evolução do cosmos desde este início pequeno e concentrado, quando as densidades de energia eram bastante altas, até os dias de hoje, incluindo não só a evolução do espaço-tempo (a forma da função  $a(t)$ ) mas também a evolução dos seus constituintes.

Uma destas questões, colocada inicialmente por G. Gamow, por volta de 1948, diz respeito à formação dos elementos leves. Já na época sabia-se da astrofísica que a fusão dos elementos pesados se dava no interior das estrelas, a partir dos núcleos leves, onde há temperatura e pressão altas o suficiente para realizar tal processo. Gamow e seus colegas explicaram a formação dos elementos leves no início do universo a partir da fusão de nucleons, ocorrida durante o processo chamado *nucleossíntese*. Para tal supuseram haver, no início do universo, condições ainda mais extremas que as dos núcleos estelares, envolvendo temperatura e pressão altíssimas. A partir do modelo para a nucleossíntese é possível prever a abundância dos elementos leves no universo, que tem bastante acordo com as observações.

No entanto, a existência das condições de temperatura e pressão necessárias para a ocorrência da fusão implica na existência de um gás de fótons, com espectro de corpo negro, que permeie todo o universo. Tal gás constitui a chamada *Radiação Cósmica de Fundo*, que foi descoberta em 1965 por Arnold Penzias e Robert Wilson [5], e configurou-se como um dos mais importantes pilares observacionais do modelo cosmológico padrão.

Em concordância com a previsão teórica, a radiação cósmica de fundo possui espectro de corpo negro, cuja temperatura atual corresponde a aproximadamente 2.7 Kelvin. Além disso, sua distribuição pelo céu é altamente homogênea, sendo que as flutuações na temperatura a ela associada são da ordem de  $\frac{\delta T}{T} \approx 10^{-5}$ , o que configura uma das principais comprovações do princípio cosmológico.

Devido à sua baixa energia, a radiação cósmica de fundo encontra-se hoje praticamente desacoplada da matéria. Mas não foi sempre assim. Com a alta temperatura do universo primordial, a distribuição das energias dos fótons, diretamente ligada à temperatura, fazia com que houvesse um número considerável de fótons com energia suficiente para ionizar a matéria bariônica, o que impedia a formação de átomos estáveis. Assim, radiação e matéria bariônica estavam acoplados, e havia transferência de energia de um para o outro. É possível mostrar que, com a expansão do universo, a temperatura associada ao gás de fótons diminui com o aumento do fator de escala. Consequentemente, a distribuição da energia de fótons se desloca para valores mais baixos de energia, fazendo com que haja cada vez menos fótons com energia suficiente para interagir com a matéria e, a partir de um certo momento, estes dois componentes se desacoplam.

Este processo no qual radiação e matéria deixam de interagir, ou, a rigor, começam a ter interação baixa, é chamado *desacoplamento*, e, segundo as observações atuais, ocorreu por volta de  $z_{dec} = 1100$ . Neste momento é gerada a radiação cósmica de fundo, que a partir de então interage muito fracamente com a matéria. Ela constitui portanto uma foto do universo em  $z \approx 1100$ .

Devido à alta interação entre matéria e fótons que ocorria antes do desacoplamento, a distribuição de fótons e da energia destes nesta época é fortemente dependente da distribuição de matéria de então. Isso faz com que, a partir das anisotropias na radiação cósmica de fundo, possamos inferir a distribuição de matéria na época do desacoplamento. É possível também inferir a distribuição de matéria entre a região do céu que espalhou o fóton observado pela última vez, denominada *superfície de último espalhamento* e nós, considerando os efeitos sofridos pela radiação entre o último espalhamento e sua detecção.

Assim, a radiação cósmica de fundo, e em especial as suas anisotropias, é fonte de muitas observações importantes acerca do universo, e, com as recentes observações do satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropies Probe) [6, 7, 8], tem tido papel central na cosmologia moderna.

### 3. ENERGIA ESCURA

No capítulo 2, fizemos breve apresentação do modelo padrão em cosmologia. Baseado nele e no universo observável, acreditava-se, até o fim do século passado, que nos encontrávamos num universo atualmente dominado por matéria não relativística e com  $\Lambda = 0$ , cuja curvatura determinaria a evolução do fator de escala. Assim, bastava medir  $\Omega_{t0} \approx \Omega_{M0}$  para que o futuro do universo ficasse definido.

Já então sabia-se que a maior parte desta matéria encontra-se na forma da chamada *matéria escura*. Existe uma série de efeitos gravitacionais observados que indicam, dentro da gravitação padrão, a existência da matéria escura, sendo que algumas das evidências provêm da forma das curvas de rotação de galáxias, estudo da dinâmica de aglomerados e das anisotropias na radiação cósmica de fundo e formação das estruturas observadas. Atualmente, acredita-se que ela constitua aproximadamente 25% do universo [8]. Além disso, embora parte da matéria escura esteja na forma de bárions, como planetas, sabe-se que ela é predominantemente não bariônica.

Como visto no capítulo anterior, neste cenário, de um universo preenchido por matéria não relativística e radiação, e com  $\Lambda = 0$ , o universo tem aceleração negativa, devido ao fato da interação gravitacional, tanto no caso da matéria como da radiação, ser atrativa.

O avanço das observações cosmológicas na última década do século XX levou ao que pode vir a ser uma revolução do modelo cosmológico padrão e abrir novas janelas na física como um todo. Tais observações provêm majoritariamente de observações de supernovas Ia [9, 10], e anisotropias da radiação cósmica de fundo [6, 7, 8, 11, 12].

Como colocado no capítulo anterior, as anisotropias na radiação cósmica de fundo podem ser utilizadas para obtenção de estimativas dos parâmetros cosmológicos [6, 8, 13]. Na figura 3.1, vemos o espectro de potências para tais anisotropias obtido pelo satélite WMAP no seu primeiro ano de resultados [6]. A forma de tal espectro indica um universo plano, sendo que em [7] é obtido o valor  $\Omega_{t0} = 1.02(02)$ , utilizando os dados do espectro das anisotropias na RCF e outras observações astronômicas. No entanto, a posição e altura relativa dos demais picos implicam no valor  $\Omega_{M0} = 0.29(7)$  [14] para o parâmetro de densidade de matéria. Estes valores indicam que, no contexto da cosmologia e gravitação padrão, há uma espécie de “energia faltante” no universo, responsável por aproximadamente 70% do seu conteúdo de energia, responsável pelo valor  $\Omega_t \approx 1$ .

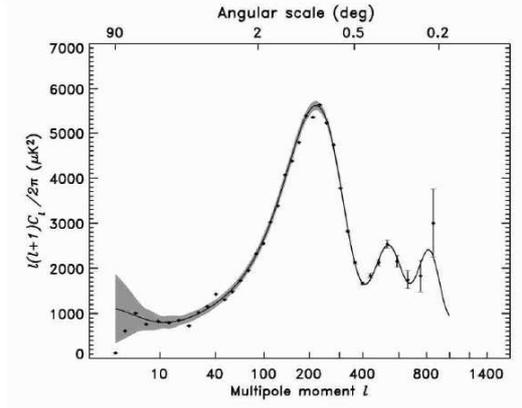


Fig. 3.1: *Espectro de potências para as perturbações na temperatura da radiação cósmica de fundo, obtido a partir dos dados do 1º ano do satélite WMAP. Figura extraída de [11].*

Em paralelo às medidas da radiação cósmica de fundo, os dados provenientes de supernovas Ia também abrem novas portas na cosmologia moderna [9, 10].

Por volta de 1998, observações de supernovas Ia [10], utilizando os métodos que serão descritos no capítulo 4 a seguir e no apêndice A, mostraram que as supernovas Ia mais distantes pareciam menos brilhantes do que o esperado. Todos os estudos e testes feitos até agora indicam que tal efeito se deve ao fato de que as distâncias de tais objetos, para um dado *redshift*, são maiores das que as esperadas num universo composto apenas por matéria e radiação, e desacelerado. Utilizando tais dados para estimar parâmetros cosmológicos, os resultados obtidos evidenciam que nos encontramos num universo acelerado, com  $q_0 < -0.4$ , conforme [10], cuja aceleração teve início aproximadamente em  $z = z_{ac} = 0.46(13)$  [10], após uma fase desacelerada. Além disso, considerando um universo  $\Lambda$ CDM plano, tais dados indicam um universo dominado pelo termo de constante cosmológica.

Podemos ver na figura 3.2 abaixo os dados das supernovas utilizados em [10], em conjunto com as curvas teóricas obtidas utilizando diferentes valores para os parâmetros de densidade de energia associados à constante cosmológica e à matéria não relativística. Vemos que o modelo  $\Lambda$ CDM ajusta os dados de melhor maneira que um modelo com constante cosmológica nula.

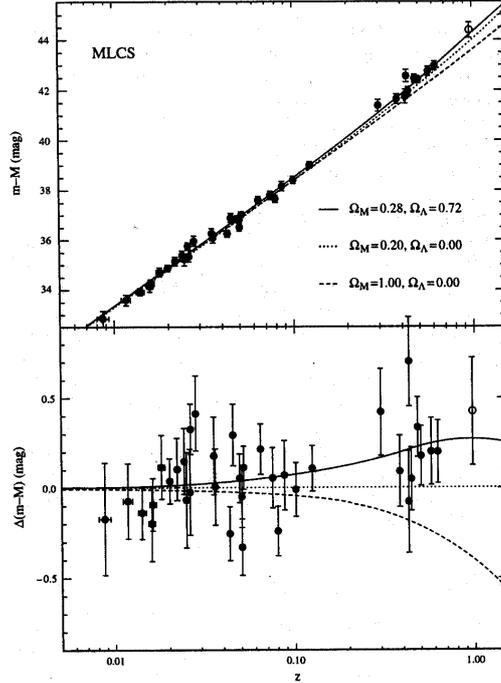


Fig. 3.2: Na figura superior vemos os módulos de distância, conforme discutido no capítulo 4 e no apêndice A, obtidos para as supernovas do tipo Ia compiladas em [9]. Temos também as curvas ajustadas utilizando diferentes valores para  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_{DM0}(\Omega_{DM})$ . Vemos que, especialmente para os objetos com alto redshift, um universo dominado com constante cosmológica se ajusta melhor aos dados. Na figura inferior temos o gráfico para os resíduos dos mesmos dados, com relação ao ajuste com  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $\Omega_{DM} = 0.2$ . Mais uma vez o modelo com constante cosmológica ajusta melhor os valores obtidos. Figura extraída de [9].

Os intervalos de confiança para os parâmetros  $\Omega_{M0}(\Omega_{DM})$  e  $\Omega_\Lambda$  obtidos em [9], utilizando medidas de supernovas podem ser vistos na figura 3.3(a), enquanto que os obtidos a partir dos dados do 3° ano do satélite WMAP podem ser vistos na figura 3.3(b). A partir deles, vemos que as medidas de supernovas indicam fortemente um universo acelerado e com constante cosmológica não nula, sendo que o modelo sem constante cosmológica pertence apenas à extremidade do intervalo de 95% de confiança, e implica em valores para  $\Omega_M$  inferiores a 0.1, não compatíveis com o universo plano e com o valor do parâmetro total de densidade indicado pelo WMAP. Da mesma forma, modelos com um universo desacelerado também são permitidos apenas na região extrema do intervalo de 95% de confiança, para valores dos parâmetros de escala também incompatíveis com os resultados do WMAP, observados na figura 3.3(b). Estes apontam fortemente para um universo plano, sendo que o formato e a inclinação dos intervalos de confiança obtidos são bastante compatíveis com a geometria plana.

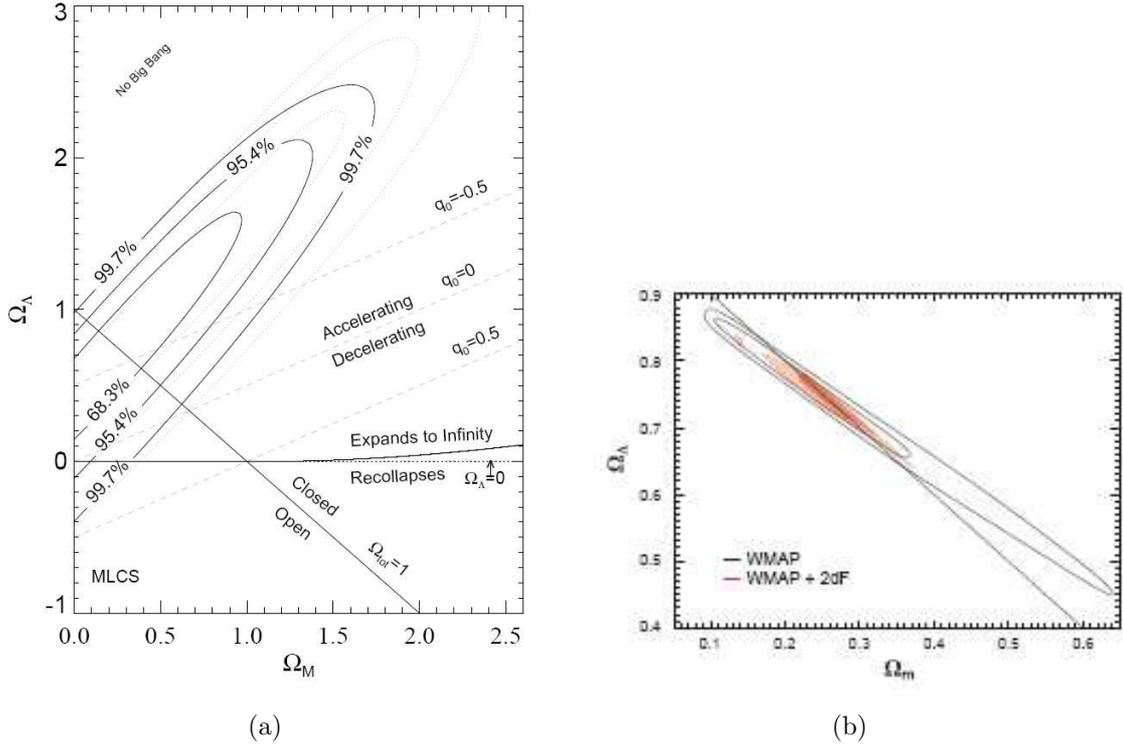


Fig. 3.3: Na figura 3.3(a) vemos os intervalos de confiança obtidos no plano  $\Omega_\Lambda \times \Omega_M$  a partir de dados de supenova, em [9] (figura extraída de [9]). Já em 3.3(b) vemos, em linha contínua escura, os intervalos de 68% e 95% de confiança obtidos a partir dos dados de anisotropias da radiação cósmica de fundo do terceiro ano do satélite WMAP. A reta traçada diz respeito aos valores que levam a um universo plano. Figura extraída de [8].

Embora de menor impacto, uma terceira evidência observacional da existência de outra forma de energia no universo é a inconsistência entre a idade do universo calculada teoricamente, considerando um universo preenchido apenas por matéria e radiação, e as idades dos objetos mais antigos conhecidos [12].

A idade do universo ( $t_0$ ) pode ser calculada a partir da integração do elemento  $dt$ , que pode ser escrito em função de  $H(t)$ . De fato, temos

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt,$$

que, considerando a definição (2.17) de  $H(t)$ , pode ser escrito na forma

$$dt = \frac{dt}{da} da = \frac{da}{Ha}.$$

Utilizando a relação (2.12) temos então

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{H(z)(1+z)}.$$

Note que, ao substituirmos (2.12) na expressão acima utilizamos  $a_0 = 1$ . De fato, o valor de  $a_0$  constitui apenas uma normalização e pode ser fixado arbitrariamente. A partir de agora utilizaremos neste trabalho  $a_0 = 1$ , como é usual na literatura. Utilizando a forma para  $H(z)$  dada em (2.58) obtemos, no caso de um universo preenchido por matéria, radiação e com constante cosmológica não nula,

$$t_0 = \int_0^{\infty} \frac{dz}{H_0(1+z)(\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda})}. \quad (3.1)$$

A contribuição da radiação para a densidade de energia do universo só é relevante na era da radiação, que ocorre para  $z > 1000$ , durante os primeiros 300.000 anos do universo. Conforme [12], tal período de tempo pode ser desprezado em comparação à idade total do universo, e, portanto, podemos desprezar o termo de radiação na integral em (3.1).

Como discutido acima, as observações indicam um universo plano. Assim, para que a quantidade de matéria seja a responsável por tal geometria, sem a necessidade de invocar alguma outra forma de energia, e tornar compatível com as observações um universo com  $\Omega_{\Lambda} = 0$ , temos que ter  $\Omega_M \approx 1$ . Neste caso, a expressão (3.1) fica

$$t_0 = \int_0^{\infty} dz \frac{1}{H_0(1+z)^{\frac{5}{2}}},$$

cujas solução trivial é

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (3.2)$$

Por coerência, tal solução é idêntica à obtida no capítulo anterior, quando obtivemos a solução do fator de escala para o universo plano preenchido apenas por matéria não relativística, (2.67). Utilizando o valor para  $H_0$  obtido pelo WMAP [14],  $H_0 = 73.5(3.2) \frac{km}{sMpc}$ , obtemos

$$t_0 \sim 10^9 \text{ anos.}$$

No entanto, a idade dos objetos mais antigos observados é de 11 a 12 Giga anos [12], o que leva à uma clara inconsistência, fazendo com que um universo plano com  $\Omega_{M0} = 1$  não seja compatível com as medidas de idade de tais objetos, e indo ao encontro das outras medidas para  $\Omega_{M0}$ , citadas anteriormente.

Considerando agora um universo plano composto por constante cosmológica e matéria não relativística, no qual  $\Omega_{\Lambda} = 1 - \Omega_{M0}$ , obtemos como solução da integral em (3.1):

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3\sqrt{1 - \Omega_{M0}}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_{M0}}}{\sqrt{\Omega_{M0}}} \right]. \quad (3.3)$$

Podemos ver na figura 3.4 a curva da idade do universo neste caso, em função do parâmetro de densidade de matéria, assim como a idade estimada para os objetos mais antigos. Vemos claramente como um universo plano e dominado por matéria não é consistente com tais medidas. Podemos ver também a curva obtida considerando um universo aberto preenchido por matéria, que é consistente com a a idade dos objetos mais antigos apenas para valores  $\Omega_{M0} < 0.25$ . No entanto, o universo aberto é bastante desfavorecido

pelos dados do WMAP. Por outro lado, um universo com  $\Omega_\Lambda > 0.45$  é compatível com a idade dos objetos mais antigos.

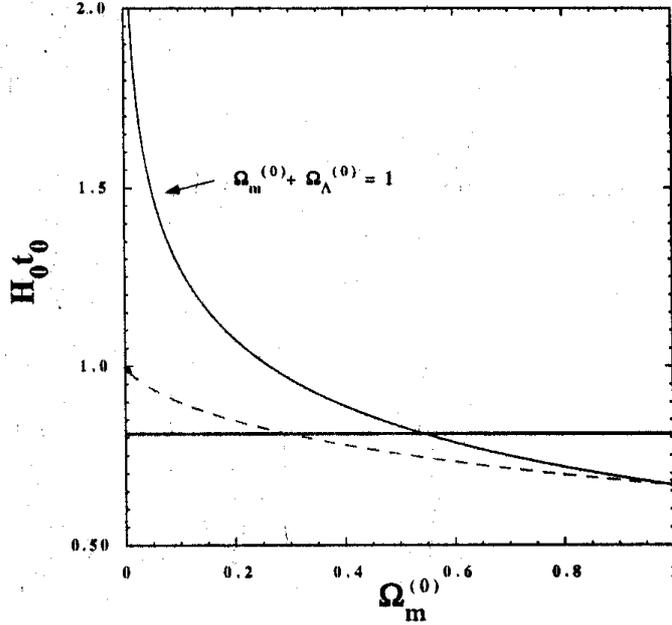


Fig. 3.4: Curvas para a idade do universo, multiplicada pelo parâmetro de Hubble, em função do parâmetro de densidade de matéria. A linha contínua considera um universo plano com constante cosmológica e a pontilhada um universo aberto com  $\Lambda = 0$ . A reta contínua indica o valor de  $H_0 t_0$  associado aos objetos mais antigos observados. Figura extraída de [12].

Em vista de tais observações, se coloca como principal desafio da cosmologia atual explicar tanto a aceleração do universo quanto o valor  $\Omega_t \approx 1$ . Neste cenário, surge uma gama de propostas e modelos, que consideram inclusive alterações na teoria da gravitação vigente. No entanto, a abordagem mais utilizada é reportar tanto a aceleração do universo quanto a “energia faltante” deste a um componente desconhecido, responsável portanto por aproximadamente 70% do conteúdo de energia do universo, denominado *energia escura* [15, 16, 17].

Embora nas discussões acima tenhamos considerado a constante cosmológica como fonte de tal energia, existem muitos modelos diferentes para o que poderia ser a energia escura, sendo a constante cosmológica apenas um deles.

Consideremos as equações de Friedmann. Substituindo a equação (2.53) em (2.54) e utilizando  $p = w(a)\rho$ , obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G\rho}{3c^2}(1 + 3w(a)) \quad (3.4)$$

Para termos um universo com aceleração positiva, é necessário então que

$$\frac{\ddot{a}}{a} > 0 \longrightarrow w(a) < -\frac{1}{3}. \quad (3.5)$$

As equações acima estão escritas em termos da densidade e pressão totais do universo, e portanto a equação de estado  $w$  diz respeito a elas, considerando seus diferentes componentes. Assim, para que tenhamos a aceleração, o universo deve atualmente ser dominado por um fluido com  $w_\phi < \frac{1}{3}$ , onde o índice  $\phi$  denota grandezas relativas à energia escura. Assim, candidatos a energia escura devem ter equação de estado menor que  $-\frac{1}{3}$  na época em ocorre a aceleração.

Outro vínculo observacional às propriedades da energia escura é o *redshift* no qual ela começa a dominar. Como colocado anteriormente, as medidas de supernova indicam  $z_{ac} = 0.46(13)$  [10]. Além disso, para que tenha sido possível a formação das estruturas observadas no universo atualmente, tais como galáxias e aglomerados destas, sabe-se que em algum momento o universo deve ter sido desacelerado, e dominado pela matéria. De fato, num universo acelerado, o colapso gravitacional da matéria que levou a tais estruturas seria bastante dificultado. Assim, este processo implica que tenha havido uma era dominada pela matéria, e também impõe vínculos sobre o valor do *redshift* a partir do qual a energia escura começa a dominar.

## I A constante cosmológica como energia escura

Como vimos no capítulo 2, a inserção de uma constante cosmológica com valor positivo nas equações de Einstein pode levar à aceleração do universo. Assim, ela surge como candidata natural à energia escura [15, 17, 18].

No capítulo 2, consideramos  $\Lambda$  do lado esquerdo das equações de Einstein. Isto significa interpretá-la como uma característica geométrica do espaço-tempo, que altera o pano de fundo do espaço-tempo cosmológico, no qual estão presente os termos de fonte, do lado direito das equações.

Podemos no entanto considerar o termo de constante cosmológica também como mais um fluido componente do universo, assim como matéria e radiação. Passando o termo em  $\Lambda$  para o lado direito das equações (2.82), obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} + \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \right).$$

Conforme equação acima, podemos associar à constante cosmológica um componente do universo com tensor energia-momento dado por

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}g_{\nu}^{\mu} = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}\delta_{\nu}^{\mu}. \quad (3.6)$$

Comparando o formato do tensor energia-momento dado acima com o de um fluido perfeito, dado em (2.42), a densidade de energia e a pressão do fluido associado à constante cosmológica são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda} &= \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}, \\ p_{\Lambda} &= -\frac{c^4\Lambda}{8\pi G}, \end{aligned}$$

de onde temos

$$w_{\phi} = w_{\Lambda} = -1. \quad (3.7)$$

Nesta nova interpretação, o parâmetro de densidade da constante cosmológica definido em (2.89) pode ser escrito como

$$\Omega_\phi = \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}.$$

O parâmetro de densidade total do universo é então dado por

$$\Omega_t = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_k + \Omega_\Lambda, \quad (3.8)$$

sendo que, conforme observações recentes,  $\Omega_{k0} \approx 0$  e  $\Omega_{R0} \approx 0$ .

Existem diferentes interpretações possíveis para o sentido físico da constante cosmológica, de forma que esta é uma questão que permanece em aberto. Como dito acima, considerando-a do lado esquerdo de (2.82) associamo-na a propriedades puramente geométricas do espaço-tempo cosmológico, sem a necessidade de maiores interpretações físicas. Ela pode também, como vimos, ser associada a um fluido com equação de estado  $w_\phi = -1$ . Tal fluido possuiria, conforme (2.50), densidade de energia constante. Outra possibilidade é que o termo  $\Lambda$  esteja associado à energia de vácuo. Tal interpretação vai ao encontro da física de partículas, na qual o universo estaria preenchido pela energia de ponto zero dos campos associados às diferentes partículas existentes. No entanto, as estimativas feitas utilizando teoria de campos levam a um valor de  $\Lambda$  associado à energia do vácuo que difere dezenas de ordens de grandeza do valor observacional de  $\Lambda$ , resultando em um problema, não só para tal interpretação da constante cosmológica, como para a compatibilidade das duas teorias e para o modelo padrão de partículas elementares.

O modelo de constante cosmológica como fonte da energia escura é chamado *modelo de concordância cósmica* por ser o que melhor ajusta simultaneamente os dados de SNIa e de radiação cósmica de fundo. No entanto, ele dá origem ao chamado problema da *coincidência cósmica*, que vai contra a sua aceitação como explicação para o problema. Como colocado anteriormente, sabe-se que a componente responsável pela energia escura começou a dominar o universo por volta de  $z \approx 0.46$ . Na escala de tempo cosmológico, isto significa que a transição entre a era dominada pela matéria e pela energia escura ocorreu recentemente. Da mesma forma, os valores de  $\Omega_{M0}$  e  $\Omega_{\phi0}$  atuais diferem entre si por um fator 2 ou 3, o que, considerando a variação das escalas de energias presentes na natureza, os torna bastante próximos. No modelo de constante cosmológica, podemos calcular o valor de  $z_{ac}$ , dado por

$$z_{ac} = \left( \frac{2\rho_{\Lambda0}}{\rho_{M0}} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left( \frac{\Lambda c^4}{4\pi G \rho_{M0}} \right)^{\frac{1}{3}} - 1$$

Na figura 3.5 vemos o gráfico para as densidades de energia de matéria e energia escura, considerando o modelo  $\Lambda$ CDM. É a proximidade da época de transição da época em que vivemos e podemos medir tais efeitos, que tem como consequência a proximidade dos valores de  $\Omega_{M0}$  e  $\Omega_\Lambda$ , que dá origem à *coincidência cósmica*. Para que tal proximidade ocorra, é necessário um ajuste muito fino do valor de  $\Lambda(\rho_\Lambda)$  e de  $\rho_{M0}$ , ou, analogamente, das densidades de energia na forma de matéria e energia escura iniciais do universo. Ou seja, neste cenário, os valores de  $\Lambda$ ,  $\rho_{M0}$  e  $\rho_{R0}$  estariam justamente no pequeno intervalo de valores que faz com que nós nos encontremos num período especial da história do universo. Tal idéia não parece plausível à parte da comunidade científica, sendo que deseja-se que uma teoria física prescindia de tais coincidências e ajustes finos.

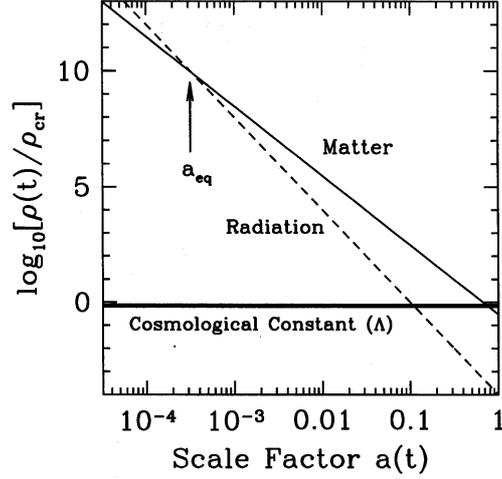


Fig. 3.5: Vemos no gráfico as curvas para densidade de energia em função do fator de escala, em escala logarítmica, para a matéria, radiação e energia escura. De fato, com relação à escala de tempo cosmológico, o início da era dominada pela energia escura ocorre recentemente. Figura extraída de [19].

Visando resolver tal problema, assim como ampliar o leque de possibilidades para a fonte da energia escura, é que surge uma série de modelos dinâmicos que atribuem-na a fluidos cuja densidade de energia varie com o tempo, podendo quem sabe evitar o problema do ajuste fino. Uma das formas de fazê-lo seria encontrar uma descrição para a energia escura que possua um regime atrator que faça com que, quaisquer que sejam as condições iniciais do universo, a transição entre a era da matéria e a fase dominada pela energia escura tenha acontecido em baixos *redshifts*, compatíveis com o observado.

Em tais modelos, a energia escura é associada a um fluido, normalmente minimamente acoplado com a matéria, cuja equação de estado, como no caso de um fluido genérico, pode variar com o tempo/fator de escala. As componentes de seu tensor energia-momento no referencial comóvel são  $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho_{\phi}, -p_{\phi}, -p_{\phi}, -p_{\phi})$  e as equações de conservação de energia (2.45) e da evolução da densidade de energia escura com o fator de escala (2.50) ficam

$$\frac{d\rho_{\phi}}{dt} + 3H(1 + w_{\phi}(a)) = 0 \quad (3.9)$$

$$\rho_{\phi} = \rho_{0\phi} \left[ \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} e^{-3 \int_0^a w_{\phi}(a') d \ln a'} \right]. \quad (3.10)$$

Note que, utilizando tal abordagem, não estamos entrando no mérito de qual a composição do fluido considerado, ou seja, não estamos fixando o que é de fato o componente responsável pela energia escura. As propriedades deste componente, como no caso da matéria não relativística e da radiação, estão implícitas na expressão para  $w_{\phi}(a)$ , que pode

ser obtida a partir de suas características, em especial sua lagrangeana. Sabemos, no entanto que ele deve ter dinâmica e propriedades tais que  $w_\phi(a_0) < -\frac{1}{3}$  e tenha começado a dominar o universo recentemente.

Existem muitos modelos dinâmicos para o fluido responsável pela energia escura, sendo que a maioria deles utiliza um ou mais campos escalares para modelá-lo. Dentre eles, um dos tipos de modelos mais utilizados são os chamados *modelos de quintessência* [12, 20, 21], cujo formalismo discutiremos brevemente a seguir.

## II Quintessência

Os modelos de quintessência propõem como componente do fluido responsável pela energia escura um campo escalar geralmente minimamente acoplado com a matéria, com termo cinético canônico e distribuído espacialmente de forma aproximadamente homogênea. Suas pequenas inhomogeneidades, assim como as da matéria, são relevantes apenas no estudo de formação de estrutura, mas não influenciam no estudo da evolução de sua densidade de energia e do universo como um todo. Assim, consideraremos  $\phi$  homogêneo espacialmente. Sua lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.11)$$

em que o termo que envolve as derivadas é chamado termo cinético e  $V(\phi)$  é o potencial do campo. Considerando a homogeneidade da distribuição de  $\phi$ , temos

$$\partial^i \phi = \partial^i \dot{\phi} = 0,$$

e obtemos para sua densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} - V(\phi). \quad (3.12)$$

O tensor energia-momento de um campo escalar é dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

que, considerando a lagrangeana (3.12) e a homogeneidade do campo, resulta num tensor energia-momento para o campo de quintessência  $\phi$  diagonal, com as componentes dadas por

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} + V(\phi), \\ T_i^i &= -\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} + V(\phi). \end{aligned}$$

Conforme a definição do tensor energia-momento, e considerando a densidade de energia e a pressão medidas por um observador comóvel, em repouso em relação ao fluido, temos

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} + V(\phi), \quad (3.13)$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} - V(\phi). \quad (3.14)$$

A partir das equações acima, podemos escrever a equação de estado da energia escura em função da derivada temporal do campo e de seu potencial, na forma:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} + V(\phi)}. \quad (3.15)$$

Note que, devido à evolução do campo  $\phi$  com o tempo, a equação de estado acima não necessariamente é constante. Isto só ocorrerá para potenciais e regimes para  $\phi(t)$  tais que

$$\dot{\phi}^2 \propto V(\phi(t)).$$

Mais especificamente, o campo terá uma equação de estado constante  $w_\phi(a) = w_{\phi 0}$  em regimes tais que

$$\frac{\dot{\phi}^2(t)}{2c^2} = \frac{1 + w_{\phi 0}}{1 - w_{\phi 0}} V(\phi(t)).$$

Devido à evolução temporal de  $\phi(t)$  e  $V(\phi(t))$ , assim como do fator de escala e das densidades de energia dos outros componentes do universo, a condição acima pode não ser satisfeita para qualquer  $t$ , mas apenas durante um época da evolução do universo. Desta forma, teríamos um componente que durante um período de tempo possui equação de estado aproximadamente constante, e, em outras épocas, no passado ou no futuro, tenha  $w_\phi$  variável. A partir da equação (3.15) vemos que o valor da equação de estado em modelos de quintessência está limitado ao intervalo

$$-1 < w_\phi < 1. \quad (3.16)$$

Levando em conta a condição (3.5), nos períodos em que há aceleração do universo devemos ter

$$\frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} + V(\phi)} < -\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} < V(\phi).$$

A obtenção da equação de movimento do campo pode ser feita utilizando as equações de Euler-Lagrange na sua forma covariante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right]_{;\mu} = 0 \quad (3.17)$$

a partir da qual obtemos

$$\frac{\ddot{\phi}}{c^2} + \frac{3H}{c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{dV(\phi)}{dt} = 0, \quad (3.18)$$

que, escrita em função da derivada do potencial com relação ao campo resulta em

$$\frac{\ddot{\phi}}{c^2} + \frac{3H}{c^2} \dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (3.19)$$

Devido ao acoplamento mínimo do campo  $\phi$  com os campos associados aos outros componentes do universo, tal equação pode também ser obtida através da substituição de (3.13) e (3.14) na equação de conservação de energia para o fluido associado ao campo de quintessência, (3.9).

A dinâmica do campo  $\phi$  é dada pela equação de campo (3.19). A partir dela, vemos que esta dinâmica é determinada predominantemente pela forma do potencial  $V(\phi)$ , sendo que o campo evolui temporalmente de forma a se aproximar do mínimo de  $V(\phi)$ , onde  $\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0$ . No mínimo do potencial, ou suficientemente próximo dele, temos  $\dot{\phi} \approx 0$  e  $w_\phi = -1$ , e o campo tem comportamento semelhante ao de constante cosmológica. Em analogia a um sistema de uma partícula sujeita a um potencial  $V(x)$ , tal processo é chamado *rolagem do campo*. O termo  $\frac{3H}{c^2}\dot{\phi}$  age como um termo de fricção, que dificulta a rolagem do campo, pois age no sentido contrário de  $\dot{\phi}$ .

Conforme (3.13), a densidade de energia escura depende de  $\dot{\phi}$  e  $V(\phi)$ . Assim, sua evolução será definida por este processo de rolagem do campo em direção ao mínimo do potencial.

Um universo plano composto por matéria, radiação e o campo de quintessência será então descrito pelas equações a seguir:

$$H^2(t) = H_0^2 \left[ \Omega_{M0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_{R0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} + V(\phi) \right], \quad (3.20)$$

$$\frac{d\rho_i}{da} + \frac{3\rho_i}{ac^2}(1 + w_i) = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{\ddot{\phi}\dot{\phi}}{c^2} + \frac{3H}{c^2}\dot{\phi}^2 + \frac{dV(\phi)}{dt} = 0. \quad (3.22)$$

onde o índice  $i$  diz respeito à matéria e radiação. Note que a equação (3.22) é equivalente à equação (3.21), para o campo de quintessência, e pode, como visto, ser escrita na forma (3.9).

Dado um determinado potencial  $V(\phi)$ , as expressões para  $\phi(a)$ ,  $\phi(t)$ , assim como para o fator de escala  $a(t)$ , podem ser obtidas resolvendo o sistema de equações acopladas acima. Nos casos de matéria e radiação discutidos no capítulo 2, tínhamos um sistema composto apenas pelas equações (3.20) e (3.21). Assim, ele pode ser resolvido obtendo as expressões para  $\rho_R(a)$  e  $\rho_M(a)$  da equação (3.21) e substituindo-as na equação de Friedmann, que, quando resolvida, resultou na expressão para  $a(t)$ . Para tal, foi necessário conhecer a equação de estado  $w_i$ . Caso conhecêssemos a expressão para  $w_\phi(a)$ , poderíamos fazer o mesmo para o caso da energia escura, resolvendo a equação (3.21), para este componente. No entanto, a equação de estado da energia escura não é conhecida, a menos que resolvamos a equação (3.22) e obtenhamos  $\phi(t)$ . Devido ao termo  $3\frac{H\dot{\phi}}{c^2}$ , isto não é possível sem a resolução da equação de Friedmann, fazendo com que não possamos desacoplar o sistema, como feito no caso de matéria e radiação. Tal acoplamento torna a resolução deste sistema bastante complexa, fazendo com que, para a maioria dos potenciais, ela só possa ser obtida numericamente. No entanto, frequentemente soluções analíticas podem ser obtidas para situações específicas, a partir de aproximações ou limites da equação (3.20). Uma abordagem comum, que permite estudar a dinâmica do universo e da energia escura nas eras da matéria e radiação, consiste em considerar um destes fluidos como dominante, fazendo com que a equação (3.20) possa ser resolvida independentemente do conhecimento de  $\rho_\phi(a)$ , e então obtida a forma para  $a(t)$ , que permita a solução da equação (3.22).

Como dito anteriormente, os modelos de campo escalar como um todo visam, entre outras coisas, resolver o problema da coincidência cósmica. Para tal, busca-se encontrar potenciais que gerem regimes atratores nos quais as densidades de energia escura e matéria

evoluam de forma que a razão entre os respectivos parâmetros de densidade permaneça constante. Caso tais soluções atratoras ocorram para um vasto intervalo de condições iniciais ou valores para os parâmetros do modelo, evitando a necessidade de ajuste fino de uns ou de outro, o problema da coincidência cósmica é resolvido.

Para realizar tal busca, são feitos estudos da dinâmica do sistema de equações (3.20), (3.21), (3.22), e em especial dos pontos fixos apresentados, dado um determinado potencial. Isto pode ser feito tanto propondo de início uma determinada expressão para  $V(\phi)$  como fixando um determinado comportamento para as densidades de energia e buscando o potencial que apresente soluções na forma desejada. Neste trabalho, utilizaremos no entanto uma abordagem diferente do problema, discutida na seção V deste capítulo.

### III Energia escura *phantom*

Modelos do tipo quintessência são os mais utilizados para a modelagem de energia escura utilizando campos escalares. Como visto na expressão (3.16), eles resultam numa equação de estado cujo valor pertence ao intervalo  $-1 < w_\phi < 1$ . No entanto, como veremos no capítulo 5, as estimativas observacionais para  $w_\phi$  incluem valores menores que -1, e, em alguns casos, o fazem com probabilidade considerável, como os resultados obtido em [10]. Componentes associados à energia escura que apresentam  $w_\phi < -1$  são chamados energia escura do tipo *phantom* [22, 23].

Utilizando um único campo escalar para modelá-lo, podemos obter  $w_\phi < -1$  a partir de um termo cinético não canônico na lagrangeana, dada por

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi). \quad (3.23)$$

Neste caso, considerando a homogeneidade espacial do campo, obtemos de forma análoga ao caso do campo de quintessência,

$$w_\phi = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} + V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} - V(\phi)}, \quad (3.24)$$

que apresenta valores  $w_\phi < -1$  para  $\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2} < V(\phi)$ .

Os modelos do tipo *phantom* no entanto apresentam problemas tanto do ponto de vista do formalismo de teoria de campos quanto do ponto de vista da cosmologia. Considerando uma equação de estado constante, vemos da equação (2.50) que, no caso  $w_\phi < -1$ , a densidade de energia escura cresce com o tempo, de forma que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \rho_\phi(a) = \infty.$$

Tal divergência acarreta também na divergência do valor do fator de escala, que ocorre num tempo finito, como veremos a seguir.

Com o crescimento de  $\rho_\phi$  com  $a$ , o universo permanecerá, invariavelmente, dominado pelo componente de energia escura. Neste caso, podemos, para valores suficientemente grandes de  $a$ , desprezar os outros componentes do universo (matéria e radiação) e, considerando  $a_0 = 1$  e  $k = 0$ , escrever a equação de Friedmann (2.53) como

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{\phi 0}} a^{-\frac{3(1+w_\phi)}{2}}, \quad (3.25)$$

que leva a

$$daa^{\frac{3}{2}(1+w_\phi)-1} = H_0\sqrt{\Omega_{\phi 0}}dt.$$

Integrando a equação acima dos dois lados da igualdade, utilizando como limites  $t = t_{dom}$  e  $a(t) = a(t_{dom}) = a_{dom}$ , sendo  $t_{dom}$  um instante qualquer onde a energia escura domine o universo o suficiente para que a expressão (3.25) seja válida, temos

$$\frac{2}{3(1+w_\phi)} \left[ a^{\frac{3}{2}(1+w_\phi)} - a_{dom}^{\frac{3}{2}(1+w_\phi)} \right] = H_0\sqrt{\Omega_{\phi 0}}(t - t_{dom}),$$

que pode ser escrita como

$$a(t) = \left[ (t - t_{rip}) \frac{H_0\sqrt{\Omega_{\phi 0}}}{\alpha} \right]^\alpha, \quad (3.26)$$

onde

$$t_{rip} = t_{dom} - a_{dom}^\alpha \frac{\alpha}{H_0\sqrt{\Omega_{\phi 0}}},$$

$$\alpha = \frac{2}{3(1+w_\phi)}.$$

Nos casos em que  $w_\phi < -1$ ,  $\alpha$  se torna negativo. Assim, podemos escrever (3.26) como

$$a(t) = \left[ (t - t_{rip}) \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{\phi 0}}\alpha} \right]^{-|\alpha|}. \quad (3.27)$$

A partir da expressão acima, vemos que, em  $t = t_{rip}$  ocorre a divergência do fator de escala, para um valor de tempo finito, dado por  $t_{rip}$ , sendo que, consistentemente, para  $\alpha < 0$ ,  $t_{rip} > t_{dom}$ . Verificamos portanto que modelos de energia escura do tipo *phantom*, com equação de estado constante e menor que  $-1$ , levam à divergência tanto da densidade de energia escura, quanto do fator de escala, em um tempo finito. Na figura 3.6 temos os gráficos de  $\rho_\phi(a)$  e  $a(t)$  para valores de  $w_\phi$  maiores, menores e iguais a  $-1$ , em unidades de tempo arbitrárias. Vemos que, de fato, para  $w_\phi < -1$ , a densidade de energia escura cresce e  $a(t)$  diverge num tempo finito. Note que, quando  $a \rightarrow \infty$ ,  $\rho_\phi \rightarrow \infty$ . Assim, considerando  $\rho_\phi(t)$ , quando  $t = t_{rip}$  também a densidade de energia escura diverge.

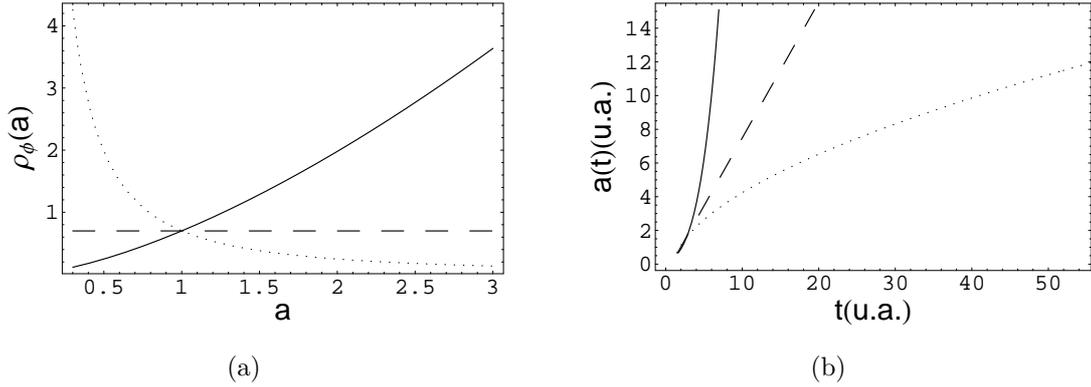


Fig. 3.6: Na figura 3.6(a) vemos as curvas para a densidade de energia escura em função do fator de escala, para  $w_0 = -0.8$ , linha pontilhada,  $w_0 = -1$ , linha tracejada e  $w_0 = -1.2$ , linha contínua. Já em 3.6(b) temos a evolução do fator de escala com o tempo, nos mesmos casos e com a mesma legenda. Ambos os gráficos estão em unidades arbitrárias de tempo, enquanto que a densidade de energia está em unidades de densidade crítica atual.

A expressão para valor de  $t_{rip}$  pode ser simplificada ao considerarmos que em  $t = t_0$  o universo já se encontra dominado pela energia escura. Assim, podemos fazer  $t_{dom} = t_0$  e  $a_{dom} = a_0 = 1$ , caso no qual obtemos

$$t_{rip} = t_0 + \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{\phi 0} \alpha}}.$$

Note que para a obtenção da solução acima não foram impostas condições a respeito do valor de  $w_\phi$ . Assim, para  $w_\phi = w_M = 0$  e  $\Omega_\phi = \Omega_M = 1$ , retornamos à solução para matéria não relativística, com  $k = 0$ . Para  $0 > w_\phi > -1$ ,  $\alpha$  é positivo, e obtemos um parâmetro de escala que cresce com o tempo, mas vai para  $\infty$  apenas num tempo infinito. A divergência obtida acima é conhecida como *Big Rip* e constitui um dos principais problemas de um componente de energia escura do tipo *phantom*.

Para obtenção da solução (3.27) para o fator de escala, consideramos o caso de uma equação de estado constante. No caso de  $w_\phi$  variável, no entanto, a equação de estado  $w_\phi(t)$  pode assumir valores menores que -1 em uma determinada época e posteriormente evoluir para um valor  $w_\phi(t) > -1$ , num tempo finito no futuro, evitando a divergência.

Notemos, no entanto, da equação (3.24), que para  $w_\phi(t) = -1$  temos  $\dot{\phi} = 0$ , e o campo deixa de evoluir, se comportando como constante cosmológica e permanecendo com equação de estado constante  $w_\phi = -1$ . Assim, um modelo de um único campo escalar, com densidade lagrangeana na forma (3.23) não permite que o valor da equação de estado passe de  $w_\phi < -1$  para  $w_\phi > -1$ , ou vice-versa, cruzando a chamada *barreira phantom*. Na seção VI discutiremos os efeitos de uma determinada expressão para  $w_\phi(t)$  sobre o problema da divergência do fator de escala.

Embora não exclua a possibilidade de o universo possuir uma componente do tipo *phantom*, o crescimento da densidade de energia escura com o fator de escala, a conseqüente divergência desta e do fator de escala são dois dos principais problemas dos modelos de energia escura *phantom*. Tais propriedades e suas conseqüências têm sido tema de estudos na literatura [23, 24, 25, 26, 27].

## IV Acoplamento entre matéria e energia escura

Até agora, consideramos o fluido responsável pela energia escura desacoplado tanto da radiação quanto da matéria bariônica e da matéria escura. A natureza da energia escura no entanto é desconhecida, e portanto é possível haver um acoplamento entre esta e os outros componentes do universo. O acoplamento com a matéria bariônica é altamente desfavorecido pelas observações da estrutura do universo, em conjunto com os modelos de formação de estrutura, assim como apresenta problemas do ponto de vista teórico. Também o acoplamento com a radiação não ocorre pois, caso contrário, observaríamos a energia escura a partir da interação desta com os fótons. Já o acoplamento com a matéria escura é, em princípio, possível. Considerando isso, existem muitos modelos que propõem tal acoplamento [28, 29, 30, 31]. Além de consistir em uma possibilidade teórica, a inserção da interação entre matéria e energia escura leva ao surgimento de novos comportamentos para tais componentes do universo, podendo inclusive vir a solucionar o problema da coincidência cósmica.

O acoplamento entre energia escura e matéria escura é feito normalmente considerando partículas de matéria escura que possuam massa variável, na forma

$$M_{DM} = M(\phi(t)), \quad (3.28)$$

onde  $M_{DM}$  é a massa das partículas de matéria escura. Tais modelos são chamados de *VAMP*, sigla em inglês para *Variable Massive Particles*.

Devido a tal acoplamento, a conservação do tensor energia-momento dada pela equação (2.44) só pode ser utilizada considerando o tensor energia-momento total de matéria e energia escura, obtido a partir da lagrangeana total dos campos associados a estes componentes.

Assim, a equação (2.45) resulta em

$$\frac{\rho_\phi}{dt} + \frac{\rho_{DM}}{dt} + 3H\rho_\phi(1 + w_\phi) + 3H\rho_{DM}(1 + w_{DM}) = 0. \quad (3.29)$$

Como discutido anteriormente, no caso de um fluido de partículas não relativísticas, como estamos considerando a matéria escura, a pressão é desprezível com relação à densidade de energia, e pode ser desprezada. O acoplamento não altera tais resultados, e portanto podemos considerar  $w_{DM} = 0$ . Neste caso, a equação anterior fica

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + \frac{d\rho_{DM}}{dt} + 3H\rho_\phi(1 + w_\phi) + 3H\rho_{DM} = 0. \quad (3.30)$$

A densidade de energia de um fluido composto por partículas não relativísticas pode no entanto ser escrita como

$$\rho_{DM} = n_{DM}M_{DM}c^2, \quad (3.31)$$

onde  $n_{DM}$  é a densidade numérica de partículas de matéria escura. Atualmente, podemos considerar o número de partículas de matéria escura no universo constante, pois processos de aniquilação são bastante raros. Assim, temos

$$\frac{dn_{DM}a^3}{dt} = 3a^2\dot{n}_{DM} + a^3\dot{n}_{DM} = 0 \longrightarrow \frac{dn_{DM}}{dt} = -3Hn_{DM}. \quad (3.32)$$

Por outro lado, considerando (3.31) obtemos

$$\dot{\rho}_{DM} = \dot{n}_{DM}M_{DM}c^2 + n_{DM}\dot{M}_{DM}c^2,$$

que, utilizando (3.32), pode ser escrita como

$$\dot{\rho}_{DM} = -3Hn_{DM}M_{DM}c^2 + n_{DM}\dot{M}_{DM}c^2. \quad (3.33)$$

Substituindo a expressão acima em (3.30) obtemos finalmente

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H(1 + w_\phi)\rho_\phi = -n_{DM}\dot{M}_{DM} \quad (3.34)$$

As equações (3.33) e (3.34) são equivalentes à equação (2.45) para matéria e energia escura, respectivamente, num modelo com acoplamento através de VAMPS, e são resultados do desmembramento da equação (3.29) em duas. Note que, somando uma à outra, de fato reobtemos (3.29).

O acoplamento entre matéria e energia escura discutido acima pode, de uma forma mais fundamental, ser tratado a partir do formalismo de campo.

Substituindo as expressões (3.13) e (3.14) para a densidade de energia e pressão do campo  $\phi$  em (3.34), obtemos

$$\frac{\ddot{\phi}}{c^2} + 3\frac{H\dot{\phi}}{c^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} + n_{DM}\frac{dM_{DM}}{d\phi}c^2 = 0.$$

Notemos que

$$n_{DM}c^2\frac{dM_{DM}}{d\phi} = \frac{d\rho_{DM}}{d\phi}.$$

Assim, obtemos a expressão (3.34) em termos do campo  $\phi$ :

$$\frac{\ddot{\phi}}{c^2} + 3\frac{H\dot{\phi}}{c^2} + \frac{d(V(\phi) + \rho_{DM}(\phi))}{d\phi} = 0. \quad (3.35)$$

A partir da equação de movimento para  $\phi$  dada acima, e comparando-a com a equação de um campo escalar genérico, (3.19), vemos que, num modelo com acoplamento entre matéria e energia escura na forma de VAMPS, o campo está sujeito, não só ao potencial  $V(\phi)$ , mas a um potencial efetivo dado por

$$V_{ef} = V(\phi) + \rho_{DM}(\phi) = V(\phi) + n_{DM}M_{DM}(\phi)c^2.$$

Tal efeito pode ser compreendido a partir do formalismo lagrangeano. De fato, ao incluímos o acoplamento, a lagrangeana do campo  $\phi$  será dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\phi - V(\phi) + \rho_{DM}(\phi). \quad (3.36)$$

Ao escrevermos a equação de Euler-Lagrange na sua forma covariante (3.17) a partir de tal densidade lagrangeana, obtemos para o primeiro termo em (3.17), que envolve a derivada da lagrangeana com relação a  $\phi$ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} + \frac{\partial\rho_{DM}(\phi)}{\partial\phi},$$

enquanto que o segundo termo em (3.17) obtido é igual ao caso sem acoplamento, uma vez que  $\rho_{DM}(\phi)$  não depende das derivadas do campo  $\phi$ . Assim, a equação de Euler-Lagrange, considerando a lagrangeana na forma (3.36) de fato leva à equação de campo (3.35).

Um tratamento mais rigoroso pode ser feito utilizando a abordagem de campo também para a matéria escura. No caso de bósons de spin zero, modelados por um campo escalar  $\phi_{DM}$ , o termo de massa tem a forma  $M_{DM}^2(\phi)\phi_{DM}^2$  e no caso de férmions de spin  $\frac{1}{2}$ , modelados por um campo spinorial  $\Psi$ , este termo é escrito como  $M_{DM}(\phi)\bar{\Psi}\Psi$ .

As equações de campo derivadas a partir das lagrangeanas obtidas, feita a quantização do campo de matéria, resultarão em equações na forma de (3.30), a partir da qual podemos obter (3.33) e (3.34). Tal procedimento, no caso de bósons, é feito em [28].

Note que, embora o campo esteja sujeito ao potencial  $V_{ef}(\phi)$ , na expressão para a densidade de energia a ele associada, (3.13) consideramos apenas  $V(\phi)$ . Isto ocorre por estarmos associando o termo de interação, no caso o termo de massa da matéria escura, à energia do fluido de matéria escura, e não à energia escura.

## V Uma abordagem independente de lagrangeanas

Nas seções anteriores discutimos brevemente as equações da dinâmica da energia escura desacoplada ou acoplada com a matéria escura. Em ambos os casos, a expressão para a equação de estado pode ser obtida ao considerarmos uma determinada composição para o fluido de energia escura. Considerando a abordagem da teoria de campos, escalares ou não, podemos propor uma lagrangeana, obter as equações de campo e, a partir de sua resolução, em conjunto com a resolução da equação de Friedmann (3.20), a expressão para a densidade de energia e para a equação de estado do fluido como função do tempo, ou do fator de escala. Possuindo tais expressões, que são funções dos parâmetros do modelo considerado, podemos, a partir dos dados observacionais, testar o modelo em questão e verificar se ele ajusta tais dados. Tal procedimento é válido tanto para energia escura acoplada como desacoplada da matéria escura. Desta forma, podemos selecionar modelos, afim de obter o que melhor descreve a energia escura.

A necessidade da existência tanto da matéria escura quanto da energia escura vem, no entanto, não da teoria, mas das observações. Outra abordagem possível para tal problema permite, a partir somente das observações e de forma mais independente de modelos e Lagrangeanas específicas, delimitar as propriedades do componente responsável pela energia escura para, posteriormente, buscarmos os modelos que dêem origem à tais propriedades. Desta forma, utilizamos os dados observacionais como um guia para a busca e formulação destes.

A utilização das observações para a obtenção destas propriedades, de forma mais ou menos independente do modelo utilizado, considerando tanto os casos de energia escura desacoplada como acoplada com a matéria escura, pode ser feita utilizando parametrizações para a equação de estado, no caso da primeira, e para a equação de estado e para a expressão  $M_{DM}(\phi(a))$ , no caso da segunda.

Para a equação de estado, é bastante comum a parametrização associada à expansão de Taylor de  $w_\phi(z)$  em torno de  $z = 0$ , na forma

$$w_\phi(z) = w_0 + w_1 z. \quad (3.37)$$

Por se tratar de uma expansão de Taylor, esta parametrização não é válida para altos *redshifts*. Da fato, vemos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w_\phi(z) = \pm\infty,$$

o que não possui sentido físico.

Outra parametrização frequente na literatura consiste na expansão de Taylor da equação de estado escrita como função do parâmetro de escala  $w_\phi(a)$  em torno de  $a = 1$ :

$$w_\phi(a) = w_0 + w_1(1 - a). \quad (3.38)$$

Note que, ao contrário de (3.37), esta parametrização é válida para altos *redshifts* ( $a \rightarrow 0$ ) mas não o é no limite  $a \rightarrow \infty$ .

O mesmo pode ser feito para o acoplamento. Em [31] é proposta uma parametrização na forma

$$M_{DM} = M_{DM0} e^{\int_0^a \delta(a') d \ln a'}, \quad (3.39)$$

onde  $\delta$  é a função que caracteriza o acoplamento. Considerando tal acoplamento, as equações (3.34) e (3.33) ficam

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = \delta(a)H\rho_{DM}, \quad (3.40)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi(1 + w_{DE}) = -\delta(a)H\rho_{DM}. \quad (3.41)$$

Na discussão acima, consideramos a parametrização das características de um fluido responsável pela energia escura, ou seja, um quinto componente do universo. A abordagem utilizando parametrizações pode também ser aplicada no caso mais geral de estudo de energia escura, considerando inclusive modificações na gravitação. Neste caso, é feita a parametrização da expressão para  $H(z)$ , independentemente de quais densidades de energia os termos de  $H(z)$  representem, ou a que fluidos que eles estejam ligados [32].

## VI O modelo considerado

Neste trabalho, utilizamos a parametrização (3.37) para a equação de estado. Para o acoplamento, foi utilizada a forma (3.39) com  $\delta$  constante. Neste caso,  $\delta$  passa a ser o parâmetro característico do acoplamento. De (3.39) temos

$$M_{DM} = M_{DM0} a^\delta. \quad (3.42)$$

Considerando também a parametrização utilizada para a equação de estado, as equações de fluido para energia e matéria escura resultam em

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = \delta H\rho_{DM}, \quad (3.43)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi(1 + w_0 + w_1 z) = -\delta H\rho_{DM}, \quad (3.44)$$

sendo que a equação (3.43) pode ser escrita na forma

$$\dot{\rho}_{DM} + H\rho_{DM}(3 - \delta) = 0,$$

e resolvida de forma análoga a (2.48), para  $w_{DM}^{ef} = -\delta$ , constante. Assim, conforme (2.50) temos

$$\rho_{DM} = \rho_{DM0} a^{-3+\delta}. \quad (3.45)$$

A solução da equação (3.44) foi obtida utilizando o software *Mathematica* e é dada por

$$\rho_{\phi}(a) = \rho_{\phi}^0(a) [1 + \Delta(a, w_0, w_1, \delta)], \quad (3.46)$$

onde

$$\rho_{\phi}^0 = \rho_{\phi0} e^{3w_1 z} a^{-3(1+w_0-w_1)}, \quad (3.47)$$

$$\Delta(w_0, w_1, \delta, a) = \delta e^{3w_1} (3w_1)^{3(w_0-w_1)+\delta} \frac{\Omega_{DM0}}{\Omega_{\phi0}} \Gamma(-3(w_0 - w_1) - \delta, 3w_1, \frac{3w_1}{a}), \quad (3.48)$$

sendo  $\rho_{\phi}^0(a)$  a solução obtida no caso sem acoplamento, e  $\Gamma[y, x_0, x_1]$  a chamada função generalizada de Euler incompleta, dada por

$$\Gamma(y, x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} t^{y-1} e^{-t} dt,$$

que, no nosso caso leva a

$$\Gamma(-3(w_0 - w_1) - \delta, 3w_1, \frac{3w_1}{a}) = \int_{3w_1}^{\frac{3w_1}{a}} t^{-3(w_0-w_1)-\delta-1} e^{-t} dt. \quad (3.49)$$

Note que, coerentemente, no caso  $\delta = 0$ , temos  $\Delta = 0$ .

Para o caso de equação de estado constante, ( $w_1 = 0$ ), a equação (3.44) muda qualitativamente. De fato, a solução (3.46) não é válida para tal valor. Resolvendo a equação (3.44) no caso  $w_1 = 0$  obtemos

$$\rho_{\phi}(a) = \rho_{\phi0} a^{-3(1+w_0)} + \frac{\delta \rho_{DM0} (a^{-3(1+w_0)} - a^{-3+\delta})}{3w_0 + \delta}. \quad (3.50)$$

O comportamento da solução de (3.44) em relação a  $w_1$ , no entanto, é contínuo em  $w_1 = 0$ , ou seja, no limite  $w_1 \rightarrow 0$ , a solução (3.46) tende à solução (3.50). Podemos ver na figura 3.7 como de fato isso ocorre.

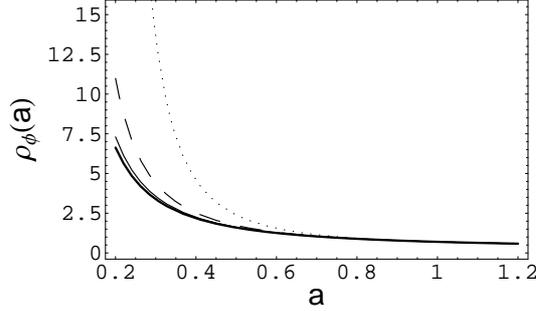


Fig. 3.7: Curvas para  $\rho_\phi(a)$ , em unidades de densidade crítica atual,  $\rho_{c0}$ , obtidas utilizando a solução geral dada por (3.46) e a solução (3.50). As soluções obtidas no caso geral para os valores  $w_1 = 0.5$ ,  $w_1 = 0.1$  e  $w_1 = 0.02$  são mostradas nas curvas em linha pontilhada, tracejada e contínua, respectivamente. A curva contínua em negrito mostra a solução particular para o caso  $w_1 = 0$ . Vemos que de fato, a solução geral tende à solução particular de forma contínua conforme  $w_1 \rightarrow 0$ . Foram utilizados os valores  $w_0 = -0.8$ ,  $\delta = 1.0$ ,  $\Omega_{DM0} = 0.3$ ,  $\Omega_{B0} = 0.05$ . e  $\Omega_{\phi_0} = 0.65$

Nosso objetivo neste trabalho é estudar o efeito do acoplamento proposto sobre as estimativas provenientes dos dados de SNIa para os parâmetros  $\Omega_{DM0}$ ,  $w_0$  e  $w_1$ . Embora fosse de grande interesse um estudo teórico mais aprofundado do modelo que utilizamos, ele foge do escopo deste trabalho.

No entanto, é importante termos um conhecimento ao menos qualitativo sobre o comportamento das densidades de energia e do fator de escala no modelo proposto, assim como do papel que desempenham os parâmetros que iremos estimar e a região do espaço de parâmetros que possui sentido físico. No que segue, faremos um breve e qualitativo estudo de algumas propriedades do modelo proposto, tanto com equação de estado constante quanto variável, no que diz respeito à eventual ocorrência de valores negativos para a densidade de energia escura, ao comportamento do modelo no caso de energia escura do tipo phantom, com  $w_0 < -1$ , e ao vínculo observacional de que o universo apresente um era dominada pela matéria e posteriormente uma dominada pela energia escura, o que implica que, ao menos na região de transição, a razão entre as densidades de energia,  $\frac{\rho_\phi(a)}{\rho_{DM}(a)}$  seja uma função crescente com o fator de escala.

Embora a existência de energia escura negativa possa ser interpretada de formas alternativas, como por exemplo modificações na equação de Friedmann, no caso estudado ela implica num valor imaginário para  $H(t)$ , o que não possui, em princípio, sentido físico. Assim, seria interessante proceder à identificação de eventuais regiões do espaço de parâmetros para as quais isto ocorra, assim como evitar tais regiões.

### VI.1 Equação de estado constante

A expressão para a densidade de energia escura, no caso de equação de estado constante, é dada por (3.50). Considerando as densidades de energia em unidades de densidade crítica atual, um universo plano, onde  $\Omega_{DM0} + \Omega_{B0} + \Omega_{\phi_0} = 1$ , e  $w_0 < 0$ , podemos escrever (3.50) como

$$\rho_\phi(a) = a^{-3} [Aa^{3|w_0|} + Ba^\delta] \quad (3.51)$$

onde

$$A(\Omega_{DM0}, \Omega_{B0}, w_0, \delta) = 1 - \Omega_{DM0} - \Omega_{B0} + \frac{\delta \Omega_{DM0}}{\delta - 3|w_0|},$$

$$B(\Omega_{DM0}, w_0, \delta) = -\frac{\delta \Omega_{DM0}}{\delta - 3|w_0|}.$$

Como vemos, a evolução da densidade de energia escura, assim como de matéria escura, será determinada pelos valores dos parâmetros  $\Omega_{DM}$ ,  $\Omega_B$ ,  $w_0$  e  $\delta$ . Discutiremos a expressão acima no que diz respeito aos três diferentes aspectos levantados. Pretendemos verificar inicialmente se existem conjuntos de valores para os parâmetros considerados que levem à existência de densidade de energia escura negativa, assim como impor a necessidade de que a razão  $\frac{\rho_\phi(a)}{\rho_{DM}(a)}$  seja crescente no passado, sendo que estes vínculos podem ser utilizados para limitar regiões possíveis do espaço de parâmetros do sistema.

As propriedades levantadas acima serão determinadas basicamente por três características da solução (3.51) e dos parâmetros nela envolvidos: o sinal de  $\delta$ , do termo  $\delta - 3|w_0|$  e de  $A$ . Começemos por discutir as implicações do sinal do parâmetro  $\delta$ .

Consideremos  $\delta < 0$ . Neste caso, temos  $A > 0$  e  $B < 0$ . O módulo do termo  $Aa^{3|w_0|}$  cresce com o fator de escala, enquanto que o termo  $Ba^\delta$  diminui com ele. Isto faz com que, no limite  $a \rightarrow 0$ , o segundo domine sobre o primeiro. Dado que  $B < 0$ , tal dominância implica na ocorrência de densidade de energia escura negativa para valores suficientemente pequenos de  $a$ . Conforme discutido na seção V, a parametrização (3.37) utilizada não é válida no limite  $a \rightarrow 0$ . No entanto, ela deve ser válida até  $z \approx 1.6$ , valor dos maiores *redshifts* das supernovas utilizadas neste trabalho para a estimação de parâmetros. Isso corresponde a  $a \approx 0.38$ . Podemos ver no gráfico mostrado na figura 3.8 como valores com  $\delta < 0$  levam à densidade de energia negativa para valores do fator de escala pertencentes ao intervalo de validade da parametrização.

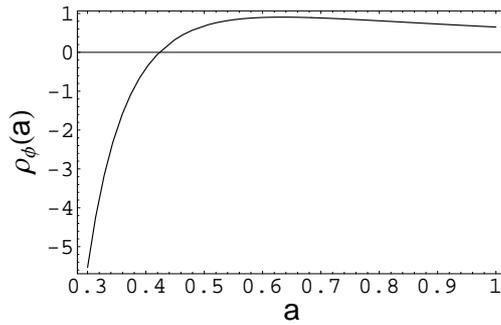


Fig. 3.8: *Evolução da densidade de energia escura, em unidades de densidade crítica atual, para  $a < a_0$ , obtida da solução para equação de estado constante, utilizando  $\Omega_{DM0} = 0.30$ ,  $\Omega_{B0} = 0.05$ ,  $\Omega_{\phi 0} = 0.65$ ,  $w_0 = -0.5$ ,  $w_1 = 0$  e  $\delta = -0.8$ . Vemos que, para este valor de  $\delta$ , a densidade de energia escura se torna negativa em  $a \approx 0.42$ , valor do fator de escala pertencente ao intervalo no qual estão os dados de supernova que serão utilizados.*

Outras restrições podem ser impostas aos valores de  $\delta$  e  $w_0$  considerando o ritmo de queda da densidade de energia escura, com relação ao da energia na forma de matéria, assim como, mesmo no caso  $\delta > 0$ , a existência de densidade de energia escura negativa no

futuro. As observações atuais indicam que, assim como a matéria bariônica, a densidade de matéria escura diminui com o tempo e com a expansão do universo. Observando a expressão para a densidade de energia na forma de matéria escura, dada por (3.45), vemos que o valor do parâmetro  $\delta$  deve satisfazer à condição

$$\delta < 3,$$

para evitar o crescimento de  $\rho_{DM}$  com o tempo. Embora não tenhamos realizado um estudo sobre quais seriam os efeitos de tal crescimento sobre o universo que observamos, consideramos que que ele resultaria em uma dinâmica para o universo bastante distinta do caso com  $\rho_{DM}(a)$  decrescente, que já teria sido notada pelas observações.

Consideremos agora os diferentes valores assumidos para  $\delta - 3|w_0|$ , e a relação entre estes dois parâmetros, dado  $\delta > 0$ . No caso em que  $\delta > 3|w_0|$ , temos, assim como quando  $\delta < 0$ ,  $A > 0$  e  $B < 0$ . Além disso, embora tanto o primeiro quanto o segundo termo em (3.51) cresçam com o fator de escala, o segundo o faz mais rapidamente, fazendo com que o termo em  $a^{-3-\delta}$  domine no limite  $a \rightarrow \infty$ . Lembrando que  $B < 0$ , isto faz com que, para valores de  $\delta$  e  $w_0$  tais que  $\delta > 3|w_0|$ , a densidade de energia escura evolua para valores negativos no futuro. Além disso, notemos que mesmo para  $a < a_0$ , região na qual o primeiro termo, proporcional a  $a^{3|w_0|}$ , domina, temos uma situação na qual a densidade de energia de matéria, proporcional a  $a^{-3+\delta}$  diminui mais lentamente que a de energia escura, impedindo que tenha havido a transição entre a fase da matéria e a dominada pela energia escura, na qual nos encontramos. Em vista da tais questões, optamos por trabalhar na região do espaço de parâmetros na qual é satisfeita a condição

$$\delta + 3w_0 < 0 \longrightarrow 3|w_0| > \delta. \quad (3.52)$$

Na figura 3.9 podemos ver a evolução da densidade de energia escura, assim como da razão  $\frac{\rho_\phi}{\rho_{DM}}$  em função do fator de escala, para um caso em que (3.52) é satisfeita e um em que não é. Vemos como de fato, no segundo caso temos densidade de energia escura negativa, assim como, para  $a < 1$ , a queda da razão  $\frac{\rho_\phi}{\rho_{DM}}$ .

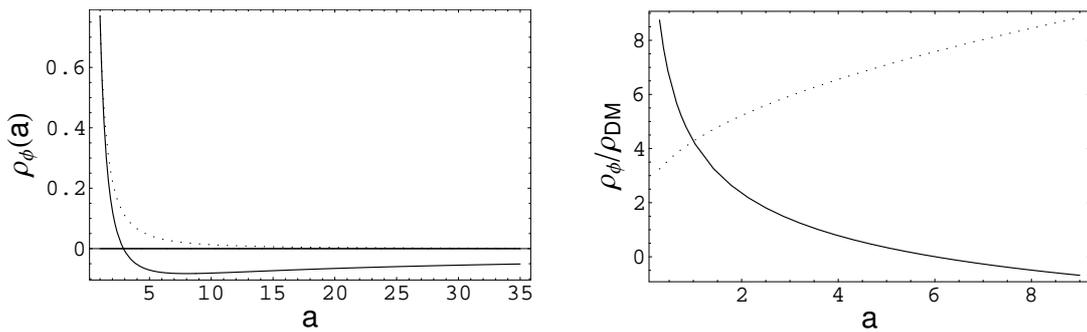


Fig. 3.9: Na figura da esquerda vemos a evolução de  $\rho_\phi(a)$  com o fator de escala, em unidades de densidade crítica atual. Foram utilizados os valores  $\Omega_{DM0} = 0.18$ ,  $\Omega_{B0} = 0.05$ ,  $\Omega_{\phi 0} = 0.65$ ,  $w_0 = -0.5$  e  $w_1 = 0$ . A curva contínua foi obtida utilizando  $\delta = 2.4$ , caso no qual a condição (3.52) não é satisfeita, e a curva pontilhada utilizando  $\delta = 1.2$ , com (3.52) satisfeita. Na figura da esquerda temos a evolução da razão  $\frac{\rho_\phi}{\rho_{DM}}$  com o fator de escala, para os mesmos casos e utilizando a mesma legenda.

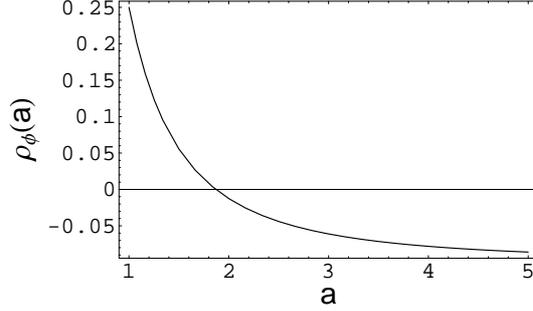


Fig. 3.10: Curva para a densidade de energia escura, em unidades de densidade crítica atual, obtida utilizando  $\Omega_{DM0} = 0.18$ ,  $\Omega_{B0} = 0.05$ ,  $\Omega_{\phi0} = 0.65$ ,  $w_1 = 0$ ,  $\delta = 1.0$  e  $w_0$ , caso no qual a condição (3.53) é satisfeita.

Notemos também que, nos casos com  $3|w_0| = \delta$  a solução (3.51) diverge, fazendo com que os valores de  $\delta$  e  $w_0$  que respeitem tal igualdade não possuam sentido físico. Como desejamos trabalhar com uma região contínua do espaço de parâmetros, devemos nos limitar ou à região com  $3|w_0| < \delta$  ou à região  $3|w_0| > \delta$ . Considerando que o caso sem acoplamento, no qual  $3|w_0| > \delta$ , deve estar presente na região considerada, mais uma vez a utilização de valores tais que  $3|w_0| < \delta$  se mostram problemáticos.

Dentro da região do espaço de parâmetros onde (3.52) é satisfeita, devemos ainda analisar a solução (3.50) com relação à ocorrência de densidade de energia escura negativa, no que diz respeito ao sinal de  $A$ . Notemos que, quando (3.52) é satisfeita, temos  $B > 0$ . No entanto, para determinados valores de  $\Omega_{DM0}$ ,  $w_0$  e  $\delta$ ,  $A$  pode se tornar negativo, o que, nas condições dadas acima, com  $\delta > 0$  e a expressão (3.52) respeitada, levaria invariavelmente à ocorrência de densidade de energia negativa no futuro, pois o termo em  $a^{-3+3|w_0|}$  domina para grandes valores de  $a$ . Considerando a expressão para  $A$ , dada por (3.52), tal termo será negativo quando

$$(1 - \Omega_{B0} - \Omega_{DM0})3|w_0| > \delta(1 - \Omega_{B0}). \quad (3.53)$$

Nos casos em que a condição acima é satisfeita temos a ocorrência de densidade de energia negativa no futuro, para valores do fator de escala suficientemente grandes, como vemos na figura 3.10.

Outra questão importante ao analisarmos o modelo proposto diz respeito ao comportamento de  $\rho_\phi(a)$  e  $a(t)$  no caso de  $w_0 < -1$ . Como discutimos na seção III deste capítulo, no caso sem acoplamento, tais valores levam ao chamado *Big Rip*. Vejamos se tal comportamento se confirma mesmo com a inserção do acoplamento.

Tomando o limite da expressão para  $\rho_\phi(a)$  neste caso, dada por (3.51), para grandes valores de  $a$ , vemos que, nos casos com  $w_0 < -1$ , o termo em  $a^{-3(1+w_0)}$  tende a  $\infty$ , já que cresce com  $a$ . Já o termo em  $a^{-3+\delta}$  diminui com  $a$ , para valores de  $\delta$  tais que  $\delta < 3$ . Como já discutido, valores com  $\delta > 3$  não são permitidos. Desta forma, temos para a densidade de energia escura:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \rho_\phi(a) = Aa^{-3(1+w_0)}, \quad (3.54)$$

solução igual à obtida para o caso sem acoplamento. Assim como neste último, valores para

$w_0$  tais que  $w_0 < -1$  levam ao *Big Rip*. Na figura 3.11 abaixo vemos as curvas para  $\rho_\phi(a)$  e  $a(t)$  no caso com acoplamento e  $w_1 = 0$ , para diferentes valores de  $w_0$ , que corroboram tal conclusão: a curva para a densidade de energia escura no caso com  $w_0 > -1$  diminui com o fator de escala, enquanto que, para  $w_0 < -1$ , ela cresce com este, caso em que, como mostrado na figura 3.11(b), ocorre o *Big Rip*.

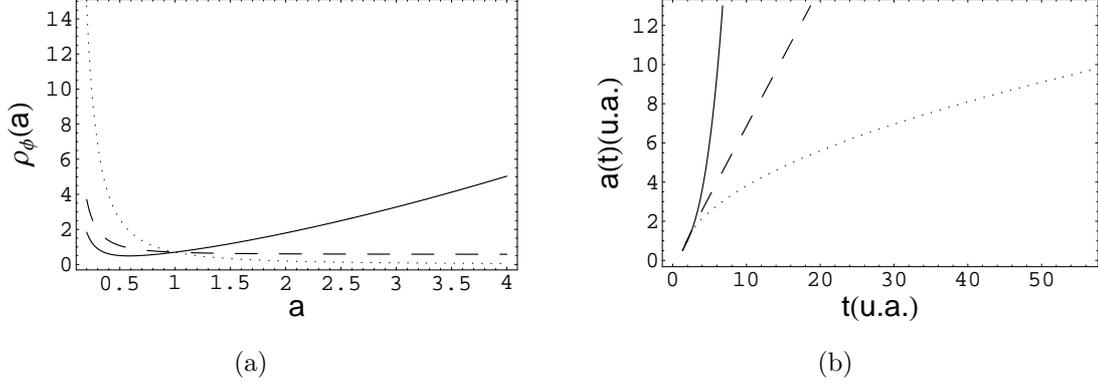


Fig. 3.11: Na figura 3.6(a) vemos as curvas para a densidade de energia escura, em unidades da densidade crítica atual, em função do fator de escala, para  $w_0 = -0.5$ , linha pontilhada,  $w_0 = -1$ , linha tracejada e  $w_0 = -1.5$ , linha contínua. Já em 3.6(b) temos a evolução do fator de escala como tempo, em unidades arbitrárias, nos mesmos casos e com a mesma legenda. Foi utilizado  $\Omega_{DM0} = 0.18$ ,  $\Omega_{B0} = 0.05$ ,  $\Omega_{\phi 0}$  e  $\delta = 1.0$ .

## VI.2 Equação de estado variável

A expressão para a densidade de energia escura no caso geral com acoplamento e equação de estado parametrizada por (3.37) é dada em (3.46). Devido ao maior número de parâmetros envolvidos e à presença do termo  $\Delta(\Omega_{DM0}, w_0, w_1, \delta, a)$  e da função  $\Gamma(-3(w_0 - w_1) - \delta, 3w_1, \frac{3w_1}{a})$ , ela apresenta uma gama muito maior de comportamentos do que o caso de equação de estado constante, e implica numa maior dificuldade na classificação dos diferentes comportamentos possíveis, assim como na identificação das regiões do espaço de parâmetros a eles associadas. Considerando isso, não pretendemos realizar tal tarefa aqui, mas apenas indicar alguns pontos e questões que devem ser levadas em conta e para as quais devemos permanecer atentos.

Consideremos inicialmente o caso desacoplado, com  $\delta = 0$ , mas equação de estado variável, na forma (3.37). Neste caso,  $\Delta(a, w_0, w_1, \delta) = 0$  e a densidade de energia escura em função de  $a$  é dada por  $\rho_\phi^0(a)$ , dada em (3.47), que claramente não apresenta valores negativos, quaisquer que sejam os valores adotados para  $\Omega_{DM0}$ ,  $w_0$ ,  $w_1$  e  $\delta$  e o fator de escala.

A partir de (3.37) e (2.12), considerando  $a_0 = 1$ , podemos escrever a expressão para a equação de estado em função do fator de escala, que resulta em

$$w_\phi(a) = w_0 + w_1 \frac{1 - a}{a} = w_0 - w_1 + \frac{w_1}{a}.$$

Tomando o limite da expressão acima obtemos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} w_\phi(a) = w_0 - w_1.$$

Assim, para grandes valores de  $a$ , a solução para a densidade de energia escura, dada por (3.46), se comporta como

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \rho_\phi(a) = \rho_{\phi 0} e^{-3w_1} a^{-3(1+w_0-w_1)},$$

e pode ser escrita na forma

$$\rho_\phi(a) = \rho_{\phi 0} e^{-3w_1} a^{-3(1+w_{ef})}, \quad (3.55)$$

onde

$$w_{ef} = w_0 - w_1.$$

A solução acima difere da obtida no caso de equação de estado constante, utilizando  $w_\phi = w_{ef}$ , apenas por uma constante de multiplicação, o que faz com que o comportamento assintótico de  $\rho_\phi(a)$  seja o mesmo que no caso de  $w_\phi$  constante, com  $w_\phi = w_{ef} = w_0 - w_1$ . Assim, a densidade de energia escura, para valores grandes de  $a$ , será crescente com o tempo desde que tenhamos  $w_{ef} < -1$ . Da mesma forma, considerando a equação (3.25) para grandes valores do fator de escala, e substituindo a expressão para  $\rho_\phi(a)$  dada em (3.55), obteremos novamente uma solução do tipo (3.27), tendo no lugar de  $w_\phi$ ,  $w_\phi = w_{ef}$ . Assim, no caso equação de estado variável e utilizando a parametrização (3.37), o problema da divergência de  $\rho_\phi$  e do fator de escala num tempo finito se mantém, mas agora para valores de  $w_0$  e  $w_1$  tais que  $w_0 - w_1 < -1$ . É interessante notar que tal condição possibilita inclusive que o *Big Rip* ocorra mesmo para valores de  $w_0$  maiores que  $-1$ , conforme o valor de  $w_1$ , no caso de valores suficientemente positivos para este. Por outro lado, para valores de  $w_1$  suficientemente negativos, podemos ter  $w_0 < -1$  sem que isso leve ao *Big Rip*.

Na figura 3.12 vemos o comportamento da densidade de energia escura e do fator de escala para diferentes valores de  $w_{ef}$ , que corrobora o comportamento acima discutido. Nela podemos notar não só a ocorrência do *Big Rip* no caso com  $w_{ef} < -1$  como também o comportamento assintótico da densidade de energia, que, no caso  $w_{ef} = -1$ , se aproxima do comportamento de constante cosmológica.

É importante lembrar no entanto que, como discutido na seção III deste capítulo, o cruzamento da barreira *phantom* não é permitido num modelo de um único campo escalar. Assim, caso consideremos um modelo deste tipo, o valor de  $w_\phi(z)$  não pode passar de valores menores que  $-1$  para maiores que  $-1$ , e portanto o termo  $w_1$  não pode nem causar nem evitar o *Big Rip*, cuja ocorrência ou não será determinada apenas pelo valor de  $w_0$ .

A parametrização utilizada para a equação de estado é válida para grandes valores de  $a$ , fazendo com que o comportamento assintótico obtido também o seja. No entanto, caso ela seja interpretada como uma expansão para baixos valores de  $z$ , sua validade para grandes valores de  $a$ , assim como o comportamento assintótico da densidade de energia e do fator de escala obtidos, deve ser discutida com mais cuidado.

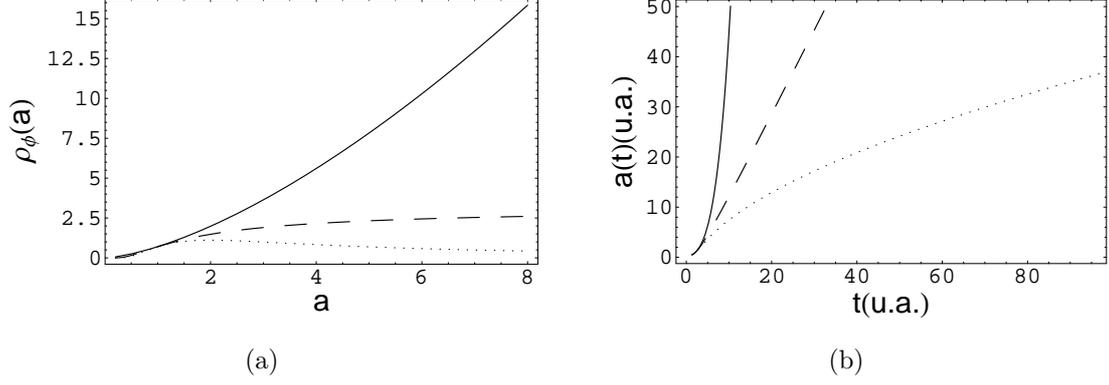


Fig. 3.12: Na figura 3.6(a) vemos as curvas para a densidade de energia escura em função do fator de escala. Utilizamos  $w_0 = -2$  em todas as curvas e  $w_1 = -1.5 \rightarrow w_{ef} > -1$ , em linha pontilhada,  $w_1 = -1 \rightarrow w_{ef} = -1$ , em linha tracejada, e  $w_1 = -0.5 \rightarrow w_{ef} < -1$ , em linha contínua. Já em 3.6(b) temos a evolução do fator de escala com o tempo, nos mesmos casos em com a mesma legenda. Ambos os gráficos estão em unidades arbitrárias de tempo, enquanto que a densidade de energia está em unidades de densidade crítica atual. A partir destas figuras podemos ver como, para  $w_{ef} < -1$ ,  $\rho_\phi(a)$  cresce e  $a(t)$  diverge em um tempo finito. Utilizamos  $\Omega_{DM0} = 0.18$ ,  $\Omega_{B0} = 0.05$  e  $\delta = 1.0$ .

Consideremos por fim o caso com acoplamento não nulo e equação de estado variável, cuja densidade de energia é dada pela expressão em (3.46). O comportamento de  $\rho_\phi^0(a)$  já foi estudado. No entanto, a densidade de energia pode se tornar negativa no futuro nos casos em que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \Delta(\Omega_{DM0}, \Omega_{B0}, w_0, w_1, \delta) < -1. \quad (3.56)$$

Notemos que o limite superior da integral presente na expressão para  $\Delta$ , a qual chamaremos daqui em diante de  $I(w_0, w_1, \delta, a)$ , tende a 0 no limite  $a \rightarrow \infty$ , de onde temos

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \Delta = \delta e^{3w_1} \frac{\Omega_{DM0}}{\Omega_{B0}} (3w_1)^y \int_{3w_1}^0 t^{-(y+1)} e^{-t} dt, \quad (3.57)$$

onde

$$y = 3(w_0 - w_1) + \delta.$$

O integrando em  $I(\Omega_{DM0}, w_0, w_1, \delta)$  é uma função positiva. Assim, um eventual valor negativo para  $\Delta$  será proveniente ou do termo  $(3w_1)^y$ , ou de valores para os limites de integração que tornem a integral negativa, ou seja, valores positivos para  $w_1$ , para os quais  $3w_1 > 0$ .

Consideremos inicialmente  $w_1 > 0$ . Neste caso, o termo  $(3w_1)^y$  é positivo, enquanto que a integral é negativa, o que resulta em  $\Delta < 0$ . No caso  $w_1 < 0$ , podemos escrever  $\Delta$  como

$$\Delta = e^{3w_1} \frac{\delta\Omega_{DM0}}{\Omega_{\phi 0}} 3^y (-1)^y |w_1|^y \int_{3w_1}^0 (-1)^{-(y+1)} |t|^{-(y+1)} dt = -e^{3w_1} \frac{\delta\Omega_{DM0}}{\Omega_{\phi 0}} \int_{3w_1}^0 |t|^{-(y+1)} e^{-t} dt, \quad (3.58)$$

cujo valor é mais uma vez negativo, pois neste caso o valor da integral na expressão obtida acima é positivo. Este comportamento pode ser compreendido se lembrarmos que a inclusão do acoplamento  $\delta$  representa um acoplamento entre matéria e energia escura de forma que, no caso  $\delta > 0$ , haja transferência de energia da componente de energia escura para a matéria escura. Assim, a densidade de energia do primeiro será menor que no caso sem acoplamento, o que implica em  $\Delta < 0$ . Notemos no entanto que ocorre densidade de energia negativa apenas quando  $\Delta < -1$ . O fato de  $\Delta$  ser negativo não garante que não ocorra densidade de energia negativa, mas também não assegura ou implica que esta ocorrerá. A obtenção dos limites inferiores de  $\Delta$ , que permite obter as regiões do espaço de parâmetros associadas à  $\rho_\phi < 0$  requer um estudo mais detalhado da função  $\Gamma(-y, 3w_1, \frac{3w_1}{a})$  e não será feita aqui, permanecendo como um problema em aberto. Foi possível verificar que de fato existem combinações dos valores para  $\Omega_{DM0}$ ,  $\Omega_{B0}$ ,  $\delta$ ,  $w_0$  e  $w_1$  que levam a  $\rho_\phi < 0$ , porém tais estudos não foram conclusivos.

Notemos que  $\Delta$  pode não só assumir a valores menores que  $-1$  no limite  $a \rightarrow \infty$ , mas também divergir nestes casos. É possível mostrar que de fato isso ocorre para os casos em que  $y > 0$ , pois então o integrando em  $I(\Omega_{DM0}, w_0, w_1, \delta)$  diverge em  $a = 0$  de forma mais rápida que  $\frac{1}{t}$ . Isso leva à divergência da integral na expressão (3.58). Considerando a presença da exponencial que multiplica o polinômio no integrando, no entanto, vemos que, nos casos em que  $w_{ef} > -1$  e  $y > 0$ , a divergência ocorre de forma mais lenta do que a queda de  $\rho_\phi^0(a)$ . Assim, embora o valor de  $\Delta(\Omega_{DM0}, \delta, w_0, w_1, a)$  determine o sinal da densidade de energia, ele nada influi na divergência ou convergência desta no limite  $a \rightarrow \infty$ , que, assim como no caso sem acoplamento, será determinada pelo valor de  $w_{ef} = w_0 - w_1$ .

## 4. AJUSTE DE PARÂMETROS COSMOLÓGICOS UTILIZANDO MEDIDAS DE SUPERNOVAS IA - PRELIMINARES.

### *I Ajuste de parâmetros e intervalos de confiança*

Ao utilizarmos dados observacionais para extrair informação acerca da natureza, é preciso que saibamos como fazê-lo. Para tal, existem diversos métodos de tratamento de dados, assim como ferramentas para, dado um conjunto de medidas, estimar grandezas, testar hipóteses e teorias. Tais procedimentos estão baseados nos conceitos da teoria de probabilidade e da estatística [33, 34].

Neste trabalho, utilizamos basicamente o chamado método da Máxima Verossimilhança para realizar estimativas dos parâmetros cosmológicos, assim como obter os respectivos intervalos de confiança. Nesta seção, apresentaremos alguns dos elementos envolvidos neste processo.

Para tal, é importante deixar clara a situação com a qual tratamos, assim como a notação que será utilizada.

Consideramos o caso em que temos um conjunto de  $n$  medidas de duas grandezas  $x$  e  $y$ ,  $\{(x_i, y_i)\} = [(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)]$ , que no nosso caso corresponderão ao *redshift*  $z_i$  e a distância de luminosidade  $d_{Li}$ , entre as quais há uma relação matemática dependente dos parâmetros  $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots)$ , que desejamos estimar, na forma

$$y = Y(x_i|\vec{\theta}).$$

Associado ao conjunto de dados, temos os erros  $\sigma_{x_i}$  e  $\sigma_{y_i}$ .

#### *I.1 Abordagem frequentista e Bayesiana: intervalos de confiança e uso de Função densidade de probabilidade a priori*

A teoria de probabilidades e a estatística podem ser utilizadas seguindo duas diferentes abordagens: a *frequentista* e a *bayesiana*.

Na primeira, a probabilidade de um evento está ligada à frequência de ocorrência dele caso realizássemos muitas medidas. Isto significa que, ao associarmos a um conjunto de parâmetros  $\vec{\theta}$ , que se deseja estimar, um determinado intervalo de valores com probabilidade  $\alpha$ , estamos dizendo que, caso realizássemos muitas medidas de tal parâmetro, obteríamos um valor pertencente a tal intervalo  $\alpha\%$  das vezes. Em outras palavras, podemos dizer que tal intervalo contém o valor verdadeiro do parâmetro com probabilidade  $\alpha$ .

Nesta abordagem, não é correto associar ao valor do parâmetro uma probabilidade de ocorrência, pois esta está sempre associada a medidas. Não podemos também falar em probabilidade de ele ter um determinado valor, pois não existe um espaço amostral

associado ao valor de  $\vec{\theta}$ . Os parâmetros que se deseja estimar têm um conjunto único e exato de valores, com probabilidade 1.

Na abordagem bayesiana, a idéia de probabilidade está associada à de credibilidade, ou confiança que temos em um determinado resultado, no caso uma determinada região no espaço de parâmetros que se deseja estimar. Assim, quando associamos aos parâmetros em questão um intervalo de valores com probabilidade  $\alpha$ , estamos dizendo que os valores verdadeiros de tais parâmetros se encontram naquele intervalo com probabilidade  $\alpha$ . Note que, diferentemente da abordagem frequentista, neste caso podemos associar aos valores desses parâmetros uma função densidade de probabilidade sem nos referirmos à qualquer tipo de medida. Tal função dá a probabilidade do parâmetro *ter* determinado valor, independente de estarmos ou não medindo-o, e de que forma o fazemos. Tal probabilidade está associada à confiança que temos em que o valor esteja naquele intervalo.

Devido a esta interpretação, a abordagem bayesiana abre espaço para que utilizemos funções densidade de probabilidade para quantificar nosso conhecimento a respeito de um determinado parâmetro ou sistema físico estudado, independentemente de um conjunto de medidas ou mesmo de uma experiência ou observação.

Isto é frequentemente feito utilizando-se a chamada *função densidade de probabilidade a priori*. Tal uso tem como suporte o Teorema de Bayes. Considerando dois eventos A e B, tal teorema enuncia que

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

onde  $P(A|B)(P(B|A))$  é a probabilidade de  $A(B)$  ocorrer dado que  $B(A)$  ocorreu e  $P(A)(P(B))$  é a probabilidade de ocorrência do evento  $A(B)$ .

Quando estamos estimando parâmetros, associamos ao evento  $B$  a obtenção de um determinado conjunto de medidas  $\{(x_i, y_i)\}$ , e ao evento A um determinado conjunto de valores para os parâmetros  $\vec{\theta}$ . Assim,  $P(B|A) = P(\{(x_i, y_i)\}|\vec{\theta})$  é a probabilidade de, dado que os parâmetros  $\vec{\theta}$  tenham um determinado conjunto de valores, obtermos a medida que foi obtida. Analogamente,  $P(A|B) = P(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$  é a probabilidade de, sabendo que foi obtido tal conjunto de medidas,  $\vec{\theta}$  assumir um conjunto determinado de valores. Considerando  $\vec{\theta}$  e  $\{(x_i, y_i)\}$  contínuos, podemos escrever o teorema de Bayes em termos de *funções densidade de probabilidade* (f.d.p.) como

$$f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\}) = \frac{f_y(\{(x_i, y_i)\}|\vec{\theta})f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta})}{f(\{(x_i, y_i)\})}, \quad (4.1)$$

onde  $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$  é a função densidade de probabilidade de  $\vec{\theta}$  dado que foi obtido determinado conjunto de dados e  $f_y(\{(x_i, y_i)\}|\vec{\theta})$  é a função densidade de probabilidade de obtermos tais dados, dado um conjunto de valores para os parâmetros.

A função  $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta})$  é interpretada como a função densidade de probabilidade dos parâmetros, e está associada à probabilidade de que os parâmetros assumam um determinado conjunto ou intervalo de valores, independente dos dados obtidos. Ela é chamada *função densidade de probabilidade a priori*, por preceder a realização do experimento/observação em questão. A partir de agora utilizaremos para funções densidade de probabilidade a notação *f.d.p.*.

Existe uma grande liberdade no que diz respeito à forma da f.d.p. a priori. No geral, ela considera a informação que temos a respeito dos valores para  $\vec{\theta}$ , independentemente ou anteriormente ao experimento ou observações consideradas. Tal informação pode provir

de expectativas e previsões teóricas ou medidas realizadas por outros experimentos. Ela pode ainda ser utilizada para corrigir erros experimentais sistemáticos, introduzindo um desvio no sentido oposto a tais erros, ou limitar o intervalo de valores possíveis de forma a excluir valores sem sentido físico.

Podemos interpretar o teorema de Bayes considerando que já há um conhecimento a respeito dos parâmetros  $\vec{\theta}$ , quantificado na f.d.p. a priori, e as observações feitas vão acrescentar mais informação, agindo sobre esta função e gerando a chamada *função densidade de probabilidade a posteriori*,  $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$ , a partir da qual obteremos os resultados desejados.

A função  $f(\{(x_i, y_i)\})$  diz respeito à probabilidade de obtenção de um determinado conjunto de medidas quaisquer que sejam os valores de  $\vec{\theta}$ , e pode ser escrita numa forma com a qual possamos operar. No entanto, ela tem o papel apenas de uma constante de normalização na função densidade de probabilidade dos parâmetros  $\vec{\theta}$  e portanto podemos ignorá-la, sem que isso afete os resultados obtidos, contanto que posteriormente normalizemos a função.

A partir da discussão acima fica clara a diferença com relação à abordagem frequentista, na qual não faz sentido atribuir uma função densidade de probabilidade a  $\vec{\theta}$ , tanto considerando o conjunto de dados utilizados ( $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$ ), quanto mais sem considerá-lo, como é o caso de ( $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta})$ ), visto que em tal abordagem ele possui um valor específico e não existe um espaço amostral a ele associado. Uma boa revisão a respeito das diferentes abordagens acima citadas, assim como dos métodos estatísticos por elas utilizadas pode ser vista em [33].

## I.2 Método da Máxima Verossimilhança

Existe uma série de métodos distintos para a obtenção de estimativas de parâmetros a partir de um conjunto de medidas [33, 34]. Um deles é o chamado *Método da Máxima Verossimilhança* (MMV), que consiste em considerar como estimativa para  $\vec{\theta}$  o conjunto de valores que maximiza, na abordagem frequentista, a probabilidade de obtermos o conjunto de medidas que foi obtido e, na bayesiana, a f.d.p. a posteriori dos parâmetros.

A probabilidade de, dado um conjunto de valores para  $\vec{\theta}$ , obtermos um par de medidas  $(x_i, y_i)$  é dada pela função densidade de probabilidade  $f_y((x_i, y_i)|\vec{\theta})$ , cuja forma é conhecida considerando as características e distribuição dos dados utilizados. Assim, a função densidade de probabilidade de obtermos todo o conjunto de medidas é

$$\mathcal{L}(\{(x_i, y_i)\}|\vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{i=N} f_y((x_i, y_i)|\vec{\theta}).$$

Tal função é chamada *função de verossimilhança*. Na abordagem frequentista, o procedimento adotado para a estimação dos parâmetros  $\vec{\theta}$  é utilizar os valores que maximizam a função de verossimilhança. Isto significa utilizar como estimativa os valores dos parâmetros que maximizam a probabilidade de obtermos o conjunto de medidas obtido.

Na abordagem bayesiana, podemos obter a função densidade de probabilidade a posteriori  $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$  a partir da função de verossimilhança utilizando o teorema da Bayes, dado em (4.1). Note que a função  $f_y(\{(x_i, y_i)\}|\vec{\theta})$ , definida na expressão (4.1) é justamente a função verossimilhança. Nos casos em que não temos, não é adequado ou opta-se por

não usar utilizar uma função densidade de probabilidade a priori, podemos considerá-la como constante, e a relação (4.1) nos dá

$$f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\}) = N\mathcal{L}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\}),$$

onde  $N$  é uma constante de normalização. Daqui em diante, utilizaremos a notação  $N$  para englobar quaisquer constante de normalização que venham a surgir.

É comum, principalmente nos casos com f.d.p. a priori constante, ao invés de procedermos à maximização de  $\mathcal{L}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$  ou  $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$ , procurarmos o mínimo da função  $L(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$  dada por

$$L = -\ln f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\}),$$

que, no caso de f.d.p. a priori constante ou da abordagem frequentista, é dada por

$$L = -\ln \mathcal{L}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\}) = -\sum_{i=1}^{i=n} \ln f_y((x_i, y_i)|\vec{\theta}). \quad (4.2)$$

Obtida a função  $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$ , com a utilização de uma f.d.p. a priori constante ou não, as estimativas para os valores de  $\vec{\theta}$  podem ser obtidas maximizando a função  $f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$ , de forma semelhante à abordagem frequentista. Podemos utilizá-la também para obter intervalos de confiança nos parâmetros desejados. Note que isso a rigor só é possível segundo a abordagem bayesiana, sendo que a partir daqui é nela que trabalharemos.

É frequente termos dados cujos erros são gaussianos, fazendo com que a própria distribuição dos dados seja gaussiana. Neste caso, temos

$$f((x_i, y_i)|\vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - Y(x_i|\vec{\theta}))^2}{2\sigma_i^2}}, \quad (4.3)$$

onde a incerteza  $\sigma_i$  deve considerar os erros  $\sigma_{x_i}$  e  $\sigma_{y_i}$ . A função  $\mathcal{L}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})$  neste caso será dada por

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - Y(x_i|\vec{\theta}))^2}{\sigma_i^2}} = e^{-\frac{\chi^2(\{(x_i, y_i)\}|\vec{\theta})}{2}}, \quad (4.4)$$

onde  $\chi^2$  é o chamado qui-quadrado do ajuste, dado por

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(y_i - Y(x_i|\vec{\theta}))^2}{\sigma_i^2}. \quad (4.5)$$

Considerando uma função densidade de probabilidade a priori constante, temos uma relação linear entre a função  $L$  e o  $\chi^2$  do ajuste:

$$L = \frac{\chi^2(\{(x_i, y_i)\}|\vec{\theta})}{2}. \quad (4.6)$$

O fato de a distribuição dos dados ser gaussiana não implica em que a distribuição dos parâmetros seja uma gaussiana, no caso uniparamétrico, ou uma multinormal, no caso multiparamétrico.

Nos casos em que isso ocorre, ou seja, em que a função densidade de probabilidade a posteriori a posteriori é gaussiana ou multinormal, é possível obter relações que permitem obter os intervalos de confiança mais facilmente, assim como estimativas para os desvios padrão dos diferentes parâmetros.

No caso uniparamétrico, considerando a forma da distribuição gaussiana, podemos mostrar [33, 34] que o intervalo de um desvio padrão é aquele tal que

$$\ln f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})|_{\theta=\theta_0+\sigma_\theta} - \ln f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}|\{(x_i, y_i)\})|_{\theta=\theta_0} = \frac{1}{2}, \quad (4.7)$$

onde  $\theta_0$  é valor verdadeiro do parâmetro em questão  $\theta$ . Nossa estimativa para o valor verdadeiro é o máximo da função  $f_\theta(\theta|\{(x_i, y_i)\})$ . Assim, podemos obter uma estimativa de  $\sigma_\theta$  cortando da função  $L(\theta|\{(x_i, y_i)\})$  obtida a partir da função densidade de probabilidade a posteriori na linha em que temos

$$\Delta L \equiv L(\theta|\{(x_i, y_i)\}) - \min L(\theta|\{(x_i, y_i)\}) = \frac{1}{2},$$

onde  $\min L$  significa o mínimo da função  $L$ . Segue de (4.6) que, no caso em que consideramos função densidade de probabilidade a priori constante temos

$$\Delta L = \frac{\Delta\chi^2}{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow \Delta\chi^2(\{(x_i, y_i)\}|\theta) = 1$$

Para uma distribuição normal uniparamétrica, os intervalos de 68%, 95% e 99% de confiança são dados por  $\theta = \theta_0 \pm 1\sigma$ ,  $\theta = \theta_0 \pm 2\sigma$  e  $\theta = \theta_0 \pm 3\sigma$ , respectivamente. No caso de um maior número de parâmetros, em que a distribuição gaussiana é generalizada para uma multinormal, tais relações vão se tornando mais complexas. Consideremos por exemplo o caso de dois parâmetros, no qual  $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ . A função multinormal neste caso é

$$f_{\vec{\theta}}(\vec{\theta}, \vec{\theta}_0) = Ne^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{\theta_1 - \theta_{10}}{\sigma_{\theta_1}} \right)^2 + \left( \frac{\theta_2 - \theta_{20}}{\sigma_{\theta_2}} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{\theta_1 - \theta_{10}}{\sigma_{\theta_1}} \right) \left( \frac{\theta_2 - \theta_{20}}{\sigma_{\theta_2}} \right) \right]},$$

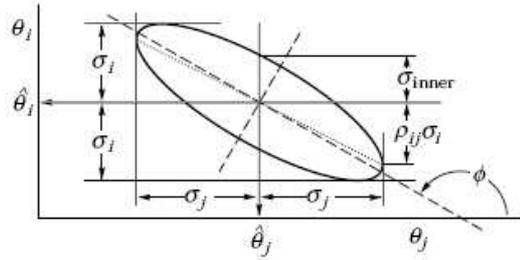
onde  $\rho$  é a correlação entre os dois parâmetros e  $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ .

O intervalo obtido utilizando o procedimento acima, ou seja, cortando a f.d.p. a posteriori (ou a função verossimilhança, no caso de abordagem frequentista) no plano em que a condição (4.7) é satisfeita, tem o formato mostrado na figura 4.1(b) e se relaciona com os parâmetros da distribuição como mostrado na figura. Embora possamos obter estimativas para os desvios padrão nos diferentes parâmetros através do formato de tal região, ela não possui 68% de conteúdo probabilístico. A obtenção das regiões com determinados conteúdos probabilísticos deve ser feita então utilizando a integração da função multinormal.

Realizando tais integrações, para diferentes números de parâmetros e níveis de confiança, é obtida a tabela mostrada na figura 4.1(a) abaixo. É importante ressaltar que, como comentado acima, ela só pode ser utilizada para estimar intervalos de confiança quando a função densidade de probabilidade dos parâmetros corresponde a uma multinormal.

$(1 - \alpha)$ (%)	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
68.27	1.00	2.30	3.53
90.	2.71	4.61	6.25
95.	3.84	5.99	7.82
95.45	4.00	6.18	8.03
99.	6.63	9.21	11.34
99.73	9.00	11.83	14.16

(a)



(b)

Fig. 4.1: Na figura 4.1(a) vemos tabela com os valores de  $\Delta\chi^2=2\Delta L$  que podem ser utilizados na obtenção de diferentes intervalos de  $(1 - \alpha)\%$  de confiança, para  $m$  parâmetros, no caso de f.d.p. dos parâmetros multinormal. Na figura 4.1(b) temos o formato da região obtida ao cortarmos a binormal em  $\Delta L = \frac{1}{2}$ . Os desvios padrão nos parâmetros  $\theta_i$  e  $\theta_j$  são dados por, respectivamente,  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$ , mostrados na figura. Figuras extraídas de [33].

## II Obtenção de estimativas para os parâmetros cosmológicos a partir de medidas de supernovas.

As supernovas do tipo Ia são utilizadas como indicadores de distâncias para que, a partir destas, possamos estimar parâmetros cosmológicos.

Embora não sejam objetos homogêneos, sendo que a luminosidade pode variar de uma supernova Ia para outra, existem relações entre características observáveis de uma supernova Ia e sua luminosidade, o que permite a determinação desta última a partir de observações feitas na Terra.

Por ser um evento transiente, o brilho de uma SNIa varia com o tempo, dando origem à chamada *curva de luz*, que nada mais é do que a curva da magnitude aparente  $m^i$  da supernova em questão, na banda  $i$  considerada, em função do tempo. Assim, uma supernova possui diferentes curvas de luz nas diferentes bandas. Há diversos trabalhos na literatura [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41] que mostram a existência de relações entre o formato das curvas de luz de uma supernova Ia, assim como seus índices de cor, e a sua luminosidade, ou magnitude absoluta. Existem diversos métodos que calibram estas relações e permitem, a partir das curvas de luz de uma supernova Ia, determinar sua magnitude absoluta [35, 39, 40, 41, 42]. Uma introdução e um panorama geral a alguns destes métodos, assim como ao uso de SNIa como indicadores de distância é feita no apêndice A.

As magnitudes absolutas e aparentes de um objeto celeste se relacionam com a distância deste na forma

$$\mu \equiv m^i - M^i = 5 \log d_L + 25, \quad (4.8)$$

onde  $\mu$  é chamado *módulo de distância* e a distância  $d_L$  está em MegaParsecs (Mpc). O subscrito  $i$  diz respeito às diferentes bandas de frequência na qual o objeto pode ser observado.

Devido à variabilidade das magnitudes absolutas das supernovas Ia, podemos definir

$$M^i = \overline{M}^i + \Delta^i, \quad (4.9)$$

onde  $\overline{M}^i$  é a magnitude absoluta de uma SNIa padrão na banda em questão. Podemos também, a partir da expressão para a distância de luminosidade (2.31), definir a distância  $d_h$ , que independe do valor de  $H_0$ , na forma

$$d_h = \frac{H_0}{c} d_L. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.8) podemos definir um *módulo de distância relativo*, dado por

$$\mu_r^i \equiv m^i - \Delta^i = 5 \log d_h + \mathcal{M}^i, \quad (4.11)$$

onde

$$\mathcal{M}^i = -5 \log \frac{H_0}{c} + \overline{M}^i + 25. \quad (4.12)$$

Notemos que o valor de  $\mathcal{M}^i$  é constante para todas as supernovas, e depende apenas do valor de  $H_0$  e da magnitude absoluta da supernova padrão na banda considerada. Notemos ainda que, para a determinação de  $d_h$  para uma determinada supernova, é necessário que conheçamos apenas suas magnitudes aparentes, que são medidas observacionalmente, o valor de  $\Delta^i$ , e o de  $\mathcal{M}^i$ , independente do valor de  $H_0$  ou  $\overline{M}^i$ .

Voltemos agora ao problema específico que pretendemos abordar. Utilizando as relações acima, dado um grupo de supernovas Ia observadas, é obtido um conjunto de medidas  $\{(z_i, \mu_i)\}$  para diferentes objetos, a partir do qual podemos utilizar o método da máxima verossimilhança descrito na seção I e estimar valores e intervalos de confiança para os parâmetros cosmológicos de interesse.

A relação entre distância de luminosidade e *redshift* foi obtida no capítulo 2 e é dada por (2.31). De forma análoga à colocada na seção I deste capítulo, temos então  $d_{Li} = f(z_i | \vec{\theta})$ , onde o vetor de parâmetros  $\vec{\theta}$  é composto pelos parâmetros cosmológicos, dependentes do modelo considerado. No nosso caso, temos os parâmetros de densidade  $\Omega_{\phi 0}$  e  $\Omega_{DM0}$ , que a partir de agora chamaremos apenas  $\Omega_{DM}$ ,  $\Omega_{\phi}$ , respectivamente, além de  $w_0$ ,  $w_1$  e  $\delta$ . No entanto, ao invés de considerarmos  $\delta$  como um parâmetro a ser ajustado, que pode assumir um contínuo de valores, realizamos os ajustes considerando apenas 4 valores para  $\delta$ :  $\delta = 0$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\delta = 0.6$ ,  $\delta = 1.0$ . Isto foi feito para reduzir o tempo de trabalho computacional. Como discutido na seção VI do capítulo 3, não foram utilizados valores negativos para  $\delta$ . O valor do parâmetro de densidade da matéria bariônica foi tomado  $\Omega_{B0} = 0.05$ , em consonância com observações recentes. Embora tal valor não seja obtido diretamente de algumas das formas observacionais de estimativas para ele, como os dados do satélite *WMAP*, ele é bastante próximo destas estimativas, sendo que os dados do primeiro ano do *WMAP*, por exemplo, indicam  $\Omega_{B0} = 0.044(4)$  [7], e eventuais diferenças não acarretarão em efeitos consideráveis.

De acordo com as medidas do *WMAP* [6, 8], foi considerado um universo plano, e com  $\Omega_{R0} \approx 0$  de forma que

$$\Omega_{\phi} = 1 - \Omega_{DM} - \Omega_{B0} = 0.95 - \Omega_{DM}.$$

Neste caso, a expressão (2.31) resulta em

$$d_L(z|\vec{\theta}) = \int_0^\infty \frac{cdz}{H_0 \sqrt{\Omega_{DM}(1+z)^{3(1+\delta)} \Omega_B(1+z)^3 + (0.95 - \Omega_{DM}) e^{3w_1 z} (1+z)^{3(1+w_0-w_1)}} [1 + \Delta(z)]}, \quad (4.13)$$

onde  $\Delta(z|\Omega_{DM}, z, w_0, w_1, \delta)$  é dado por (3.48).

Foram utilizados os dados das supernovas Ia do chamado *grupo Ouro* (Gold set), publicados em [10] e de 71 novos objetos publicados em [43] pelo Supernova Legacy Survey. Por utilizarem técnicas de detecção, critérios de classificação e métodos de ajuste das curvas de luz diferentes, optamos por tratar os dois conjuntos separadamente. Chamaremos tais conjuntos, respectivamente, de *Ouro* e *SNLS*.

## II.1 Os dados do grupo Ouro

No artigo [10], são apresentadas 186 supernovas Ia, classificadas em dois conjuntos, Ouro e Prata, conforme a qualidade dos dados e confiança na classificação de tais objetos como SNIa. Pertencem ao primeiro grupo os objetos cuja classificação não apresenta dúvidas e ao segundo os que apresentaram alguma característica que dificultou a classificação. Por conta disso, optamos por trabalhar apenas com o conjunto Ouro. Tais dados podem ser vistos na figura 4.2(a).

Os valores fornecidos no artigo incluem o *redshift*  $z_i$  e o módulo de distância relativo  $\mu_{ri}$  de cada objeto. Tais valores foram obtidos utilizando o método de ajuste de curva de luz MLCS2k2, comentado no apêndice A, e consideram não as magnitudes absolutas dos objetos, mas apenas a relativa entre eles, independentemente do valor exato de  $\mathcal{M}^i$ . São consideradas as estimativas na banda  $V$  das supernovas, sendo obtidos os valores de  $\Delta^V$ . Podemos escrever então

$$\mu_r \equiv \mu_r^V = m^V - \Delta^V = 5 \log d_h + \mathcal{M}^V,$$

onde  $d_h$  segue a definição (4.10). São também fornecidos os desvio padrão  $\sigma_i$  associados a cada  $\mu_{ri}$ . Tais valores incluem as incertezas associadas às medidas e ajustes de curva de luz e a incerteza associada ao *redshift*. Para estimativa da última foi considerada uma incerteza na velocidade de  $\sigma_v = 400 \frac{km}{s}$  para todos os objetos, que leva em conta as eventuais velocidades peculiares das supernovas.

Os dados possuem distribuição gaussiana, o que faz com que, conforme (4.4), a função de verossimilhança seja dada por

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}|\{(z_i, \mu_{ri})\}) = \prod_{i=1}^{i=157} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{\chi^2(\mathcal{M}^V, \Omega_{DM}, w_0, w_1)}{2}},$$

onde

$$\chi^2(\Omega_{DM}, w_0, w_1, \mathcal{M}^V) = \sum_{i=0}^{i=157} \frac{(\mu_{ri} - 5 \log d_h(z_i|\Omega_{DM}, w_0, w_1) - \mathcal{M}^V)^2}{2\sigma_i^2}.$$

A partir de tal função verossimilhança, podemos obter a função densidade de probabilidade para os parâmetros  $\mathcal{M}^V$ ,  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $w_1$  utilizando o teorema de Bayes e uma função densidade de probabilidade a priori, constante ou não. No entanto, neste trabalho não

estamos interessados em estimar os valores de  $H_0$  e  $\overline{M}^V$ , ou  $\mathcal{M}^V$ . Assim, marginalizaremos a função densidade de probabilidade com relação a este último. Tal marginalização independe de eventuais f.d.p. a priori que dependam apenas dos parâmetros  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $w_1$ . Assim, considerando uma f.d.p. a priori constante em  $\mathcal{M}^V$ , podemos realizar a marginalização com relação a este parâmetro, através da integração da própria função de verossimilhança em  $\mathcal{M}^V$ . Tal integração pode ser feita analiticamente, como feito em [44, 45]. Abrindo o termo quadrático dentro da somatória na exponencial, podemos escrever  $\mathcal{L}$  como

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}|\{(z_i, \mu_{ri})\}) = N e^{-A(\mathcal{M}^V)^2 + B\mathcal{M}^V + C}$$

onde novamente  $N$  é uma constante de normalização, que englobará também constantes multiplicativas que eventualmente surjam durante a integração, e

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=157} \frac{1}{\sigma_i^2}, \\ B &= \sum_{i=1}^{i=157} \frac{(\mu_{ri} - 5 \ln d_h(z_i|\Omega_{DM}, w_0, w_1))}{\sigma_i^2}, \\ C &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=157} \frac{(\mu_{ri} - 5 \ln d_h(z_i|\Omega_{DM}, w_0, w_1))^2}{\sigma_i^2}. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\mathcal{L}(\Omega_{DM}, w_0, w_1|\{(z_i, \mu_{ri})\}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{M}^V e^{-\frac{\chi^2(\Omega_{DM}, w_0, w_1, \mathcal{M}^V)}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{M}^V e^{-A(\mathcal{M}^V)^2 + B\mathcal{M}^V + C}.$$

Consultando uma tabela de integrais [46], temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-p^2 x^2 + qx} = \frac{\sqrt{\pi}}{|p|} e^{\frac{q^2}{4p^2}}, \quad (4.14)$$

sendo que no nosso caso

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{A}, \\ q &= B, \end{aligned}$$

o que leva a

$$\mathcal{L}(\Omega_{DM}, w_0, w_1|\{(z_i, \mu_{ri})\}) = N \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A} + C}.$$

Considerando que  $A$  independe de  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $w_1$ , assim como englobando todas as constantes em  $N$ , podemos escrever

$$\mathcal{L}(\Omega_{DM}, w_0, w_1) = N e^{\frac{B^2}{4A} + C},$$

que é a função verossimilhança por nós utilizada para os dados do grupo Ouro.

Uma das formas de avaliarmos a qualidade de um ajuste de parâmetros é o valor do  $\chi^2$ , cuja expressão é dada por (4.5). No entanto, ao realizarmos a marginalização em  $\mathcal{M}^V$ , não é mais possível obter o valor do  $\chi^2$  do ajuste, para o qual o conhecimento deste valor seria necessário. Assim, não será feito o cálculo do  $\chi^2$  do ajuste, e portanto não utilizaremos ele como teste da qualidade do ajuste.

## II.2 Os dados do SNLS

Em [43] são publicados os dados de 117 SNIa, sendo 44 já anteriormente apresentadas na literatura e 73 novos objetos detetados pelo SNLS. As estimativas de distância para tais objetos foram obtidas através do método *Spectral Adaptive Light curve Template* (SALT) [47], comentado no apêndice A.

Dos 73 novos objetos, dois (SNLS-03D4au e SNLS-03D4bc) mostraram uma dispersão muito alta com relação ao diagrama de Hubble do conjunto, e por isso foram excluídos do ajuste de parâmetros cosmológicos em [43]. Em nosso trabalho, optamos por utilizar apenas os dados referentes aos 71 novos objetos restantes, que podem ser vistos na figura 4.2(b) abaixo.

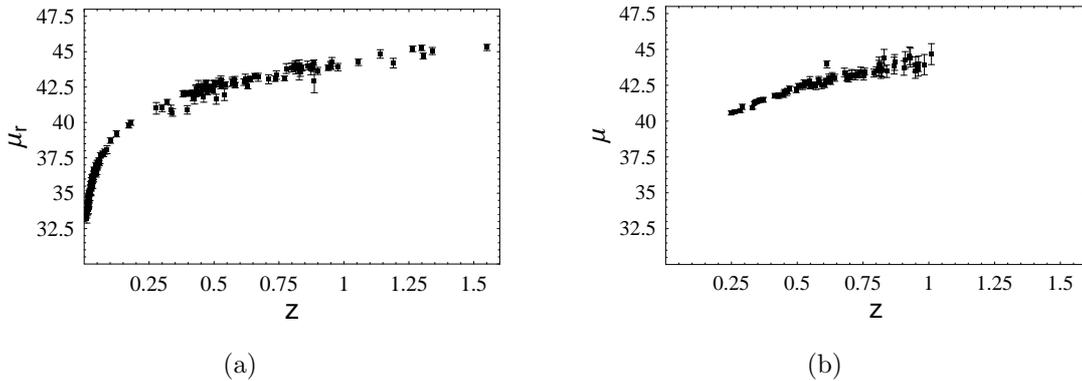


Fig. 4.2: Na figura 4.2(a) vemos o gráfico de  $\mu_r \times z$  para os 157 objetos do grupo Ouro publicado em [10]. Em 4.2(b) temos o gráfico de  $\mu \times z$  dos 71 objetos do grupo SNLS, publicados em [43], obtidos considerando  $H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ .

O método SALT utilizado em [43] obtém os valores de  $\Delta^B$  para as diferentes supernovas utilizando a relação

$$\Delta^B = -\alpha(s - 1) + \beta c, \quad (4.15)$$

onde  $s$  e  $c$  são parâmetros obtidos para cada supernova a partir do ajuste das curvas de luz, e  $\alpha$  e  $\beta$  são os parâmetros que caracterizam a relação  $\Delta^B \times$  curva de luz, iguais para todos os objetos. Uma discussão um pouco mais detalhada do método SALT pode ser vista no apêndice.

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser obtidos tanto utilizando SNIa cujas distâncias, e portanto as magnitudes absolutas, já sejam conhecidas, como através do ajuste dos próprios dados de [43]. Neste último caso, eles são adicionados ao conjunto de parâmetros cosmológicos a serem ajustados. O mesmo pode ser feito com  $\overline{M}^B$ . Em [43] é feito o ajuste

destes parâmetros e são obtidos os valores  $\alpha = 1.52(14)$ ,  $\beta = 1.57(15)$  e  $\overline{M^B} = -19.31$ , sendo que a estimativa deste último é feita fazendo  $H_0 = 70 \frac{km}{sMpc}$ . Devido à degenerescência entre  $\overline{M^B}$ , e  $H_0$ , que podem ser unificados no parâmetro  $\mathcal{M}^B$ , a fixação de um valor específico de  $H_0$  para que seja feito o ajuste de  $\overline{M^B}$  é válida, e significa na verdade um ajuste para  $\mathcal{M}^B$  na forma:

$$\mathcal{M}^B = \overline{M^B} - 5 \log \frac{H_0}{c} + 25 = -19.31 - 5 \log 70 + 25.$$

Devido à degenerescência em  $\overline{M^B}$  e  $H_0$ , caso tivesse sido fixado outro valor para  $H_0$  obteríamos um valor diferente para  $\overline{M^B}$ , de forma que o valor final para  $\mathcal{M}^B$  seria o mesmo.

Em [43] são fornecidos os valores dos módulos de distância calculados utilizando os valores de melhor ajuste para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\overline{M^B}$  e  $H_0 = 70 \frac{km}{Mpc}$ , com os respectivos desvios padrão, assim como as magnitudes aparentes e os parâmetros  $s$  e  $c$  de cada objeto, e as respectivas incertezas. Em vista de tais informações, os dados podem ser trabalhados de duas maneiras diferentes. Nos resultados apresentados aqui utilizamos os valores fornecidos por [43] para os módulos de distância. Para que possamos fazê-lo, devemos utilizar em nossa análise  $H_0 = 70 \frac{km}{sMpc}$ , pois só para este valor de  $H_0$  o valor utilizado para  $\overline{M^B}$  é válido. Assim, a função de verossimilhança dos dados tem a forma

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}|\{(z_i, \mu_i)\}) = \exp - \frac{1}{2} \sum \frac{(\mu_i - 5 \log d_i(H_0 = 70 \frac{km}{sMpc}, w_0, w_1, \Omega_{DM}, z_i) - 25)^2}{\sigma_{\mu_i}^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{int}^2},$$

onde  $\sigma_{\mu_i}$  é a incerteza associada aos erros observacionais em  $s$ ,  $c$ , e nas magnitudes aparentes,  $\sigma_v$  a associada às velocidades peculiares das galáxias e  $\sigma_{int}$  a dispersão intrínseca nas magnitudes absolutas das SNIa não corrigida pelo modelo. Foram utilizados os valores para as incertezas publicados na tabela fornecida pelo SNLS em [48], que já incluem as três variâncias citadas acima, considerando  $\sigma_v = 300 \frac{km}{s}$ . Podem ser utilizadas também as incertezas fornecidas em [43], que não incluem no entanto as incertezas nos *redshifts*. Para a faixa de valores dos *redshifts* considerados, porém, tais incertezas são bastante inferiores com relação às outras, e podem ser desprezadas sem afetar os resultados de forma considerável. Optamos por utilizar os valores para as incertezas que as incluem apenas por completudeza.

Devido ao fato dos valores para  $\mu_i$  utilizados terem sido obtidos utilizando os valores de melhor ajuste para  $\overline{M^B}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , o desvio padrão de  $\mu_i$  deve levar em conta também as incertezas a eles associadas. No entanto, a matriz de covariância não é fornecida em [43], e, segundo comunicação privada com P. Astier, é de fato desconhecida. Desta forma, tais incertezas não foram consideradas.

Uma forma de considerar a dispersão nos valores de tais parâmetros ( $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\overline{M^B}$ ) no ajuste dos parâmetros cosmológicos seria considerá-los como parâmetros livres de nossa função densidade de probabilidade, neste caso dada por

$$\mathcal{L} = e^{-\sum_1^{71} \frac{(m_i - \overline{M^B} + \alpha(s-1) - \beta c - 5 \log d_1(z_i|H_0, w_0, w_1, \Omega_{DM}) - 25)^2}{\sigma_{\mu_i}^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{int}^2}} \quad (4.16)$$

Para obter  $\mathcal{L}(\Omega_{DM}, w_0, w_1|\{(z_i, \mu_i)\})$ , devemos marginalizar a função verossimilhança acima com relação a  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\overline{M^B}$ , o que pode ser feito de forma análoga à marginalização em  $\mathcal{M}^B$  realizada para os dados do grupo Ouro acima. A integração em  $\overline{M^B}$  pode ser feita

de forma indêntica, sendo que o resultado dela é uma exponencial cujo argumento pode ser escrito como um polinômio de grau 2 em  $\beta$ , e procede-se à integração nesta variável da mesma forma feita em (4.14), levando a um resultado que, pela terceira vez da mesma forma, será integrado em  $\alpha$ .

Como colocado acima, nos resultados aqui apresentados foram utilizados os valores fornecidos em [43], e não feita a marginalização. Veremos a seguir que os resultados obtidos são bastante compatíveis com os apresentados em [43], onde é feita a marginalização, indicando que o tratamento utilizado é válido e tem resultados consistentes.

Por coerência com os dados do grupo Ouro, também no caso do SNLS não será calculado o valor de  $\chi^2$  dos ajustes.

No próximo capítulo apresentaremos e discutiremos os resultados obtidos para os valores dos parâmetros  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $w_1$ , melhores ajustes e intervalos de confiança, tanto para os dados do grupo Ouro quanto do SNLS, e para os diferentes valores de  $\delta$  considerados.

Tais resultados foram obtidos utilizando o software *Mathematica*, onde a obtenção do ponto de máximo da função de verossimilhança foi feita de forma numérica. Os intervalos de confiança foram obtidos a partir da integração numérica da função densidade de probabilidade a posteriori, para os parâmetros considerados, normalizada. Para tal, buscou-se obter o plano no qual a função deveria ser cortada para que sua integral na região interna à curva de intersecção plano/função correspondesse ao conteúdo probabilístico desejado. Obtido tal plano, a região interna à curva de intersecção plano/função, na qual foi feita a integração, corresponde ao intervalo de confiança com o respectivo conteúdo probabilístico.

Existem na literatura trabalhos que utilizam a tabela mostrada na figura 4.1(a) para a obtenção de tais intervalos, como por exemplo [49]. No entanto, veremos que as funções densidade de probabilidade a posteriori obtidas por nós na maioria das vezes não têm a forma de uma multinormal, fazendo com que a rigor não possamos utilizar tal tabela. Isso nos levou a optar pelo procedimento de integração direta.

Também devido ao fato de tais funções densidade de probabilidade muitas vezes não consistirem em multinormais, não foram estimadas incertezas para os valores de melhor ajuste para os parâmetros, no caso de estimação simultânea de mais de um parâmetro.

No caso uniparamétrico, utilizamos como incerteza para o valor estimado do parâmetro  $\theta$  os valores

$$\sigma_+ = \theta_{max} - \hat{\theta}, \quad (4.17)$$

$$\sigma_- = \hat{\theta} - \theta_{min}, \quad (4.18)$$

onde  $\hat{\theta}$  é o valor de melhor ajuste,  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$  são os valores inferiores e superiores que definem o intervalo de 68% de confiança, respectivamente. Adotamos então como estimativa  $\theta = \hat{\theta}_{-\sigma_-}^{+\sigma_+}$ .

Consideremos agora o caso de dois parâmetros. Quando temos uma distribuição multinormal, a forma da região associada a um determinado conteúdo probabilístico pode ser obtida a partir da função densidade de probabilidade binormal, conhecida. Os intervalos de confiança e desvios padrão podem ser obtidos conforme discutido na seção I deste capítulo.

Pelo fato de nossa função densidade de probabilidade a posteriori não constituir uma multinormal, não podemos utilizar tais procedimentos e o desvio padrão enquanto parâmetro

da distribuição não faz mais sentido. Além disso, diferentemente do caso de um único parâmetro, a região com um determinado conteúdo probabilístico não pode ser descrita através valores máximos e mínimos apenas. Por isso, no caso de ajuste simultâneo para os valores de dois parâmetros, não foram feitas estimativas de incertezas, mas apenas do intervalo no espaço de parâmetros que possui 68% de confiança.

### II.3 Escolha do intervalo de parâmetros considerado

Como vemos da expressão para  $\Delta(z, w_0, w_1)$  (3.48) e  $d_L$  (4.13), a distância de luminosidade para um dado valor do *redshift* só pode ser obtida por integração numérica. Isso faz com que o tempo de trabalho computacional envolvido no cálculo e uso da função verossimilhança, ou da função densidade de probabilidade a posteriori, seja bastante alto. Visando diminuí-lo, trabalhamos com funções para  $d_h(z|\Omega_{DM}, w_0, w_1)$  interpoladas a partir de tabelas. Para gerá-las foi necessário escolher um intervalo de valores para cada parâmetro considerado, assim como definir um passo de discretização. Este último foi escolhido levando em conta a qualidade da interpolação obtida e o tempo de trabalho computacional gasto para a obtenção da tabela. Foram utilizados os passos 0.06 para  $\Omega_{DM}$ , 0.15 para  $w_0$  e  $w_1$ . Para o *redshift*, realizamos a discretização na forma  $z = 10^{\log z}$ , utilizando como passo de discretização para  $\log z$  o valor 0.1275.

A função densidade de probabilidade a posteriori deve ser normalizada, o que pode ser feito dividindo-a por

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_{DM} \int_{-\infty}^{\infty} dw_0 \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 f_{\tilde{\theta}}(\Omega_{DM}, w_0, w_1 | \{(z_i, \mu_i(\mu_{ri}))\}), \quad (4.19)$$

onde  $f(\Omega_{DM}, w_0, w_1)$  é a função densidade de probabilidade a posteriori não normalizada. A integral acima pode ser limitada à região do espaço de parâmetros em que a função  $f(\Omega_{DM}, w_0, w_1)$  é não nula. Como veremos no capítulo 5, em alguns casos o intervalo do espaço de parâmetros considerado não engloba toda a região na qual isso ocorre. Isto faz com que, a rigor, não possamos normalizar a função integrando-a apenas no intervalo considerado, nem estimar intervalos de confiança considerando apenas tal região do espaço de parâmetros.

No entanto, a extensão desta região muitas vezes acarretaria num aumento muito grande do tempo de trabalho computacional envolvido, em especial no tempo gasto na geração das tabelas utilizadas na interpolação. Por outro lado, os testes feitos indicaram que, a partir de uma certa região considerada, o aumento desta provocava mudanças bastante pequenas nos intervalos de confiança obtidos, sem mudá-los de forma considerável e sem mudar o comportamento destes com a alteração do valor de  $\delta$ . Assim, em cada valor de  $\delta$ , foi considerada uma determinada região no espaço de parâmetros  $(\Omega_{DM}, w_0, w_1)$ , de forma que ela incluísse grande parte da região na qual a função densidade de probabilidade a posteriori é não nula, assim como a região de valores com interesse e sentido físico. Tal limitação pode ser interpretada como o uso de uma f.d.p. a priori quadrada, constante no intervalo de parâmetros considerado e nula fora dele. Os intervalos utilizados são vistos na tabela 4.1 a seguir. Note que os intervalos utilizados para  $w_0$  satisfazem, em todos os casos, a condição (3.52). Utilizando tais intervalos e passos de discretização, foram obtidas tabelas de em média 190.000 linhas.

$\delta$	$\Omega_{DM}$	$w_0$	$w_1$
0.0	{0, 0.66}	{-9.0, -0.4}	{-8, 6}
0.2	{0.0, 0.72}	{-10, -0.4}	{-8, 6}
0.6	{0.0, 0.8}	{-11.8, -0.4}	{-8, 6}
1.0	{0.0, 0.8}	{-13.5, -0.4}	{-8, 6}

Tab. 4.1: Intervalo considerado para cada parâmetro, na forma  $\{\theta_{min}, \theta_{max}\}$ , para os diferentes valores de  $\delta$

#### II.4 Função densidade de probabilidade a priori utilizada.

Como discutido na seção I.1, segundo a abordagem bayesiana, para obtermos a função densidade de probabilidade a posteriori a partir da função de verossimilhança, é necessária uma f.d.p. a priori para os parâmetros que desejamos estimar. Neste trabalho, foram utilizadas duas f.d.p. a priori distintas. A primeira delas é constante em todos os parâmetros, a menos da limitação dos valores de  $w_0$  e  $w_1$  a um determinado intervalo, e da imposição  $\Omega_{DM} > 0$ .

A segunda f.d.p. a priori utilizada também é constante em  $w_0$  e  $w_1$ , e consiste em uma gaussiana na forma

$$f_{\theta}(\Omega_{DM}) = e^{-\frac{(\Omega_{DM}-0.18)^2}{2 \times 0.04^2}}, \quad (4.20)$$

Tal função densidade de probabilidade foi construída a partir dos valores para os parâmetros de densidade de matéria escura obtidos utilizando os dados do terceiro ano do WMAP, em [8]. Neste artigo é publicado o valor obtido para o parâmetro de densidade da matéria,  $\Omega_M = 0.234(0.035)$ , mas não o parâmetro de densidade da matéria escura especificamente. Por estarmos utilizando  $\Omega_B = 0.05$ , utilizamos como função densidade de probabilidade a priori uma gaussiana, centrada em  $\Omega_{DM} = 0.23 - 0.05 = 0.18$  e com o desvio padrão fornecido pelo WMAP, apenas limitando o número de casas decimais a duas.

Utilizamos esta f.d.p. a priori para considerar em nossas estimativas o valor obtido a partir dos dados do WMAP para o parâmetro de densidade de matéria. Como será mostrado a seguir, tal valor é bastante distinto das estimativas obtidas utilizando dados de supernova do grupo Ouro e f.d.p. constante, sistematicamente maiores. Os valores obtidos pelo WMAP são, no entanto, mais compatíveis com outras estimativas, e são utilizados como referência na literatura. Devido a isso foram feitas estimativas utilizando tal f.d.p. a priori.

Comparando os resultados obtidos com as diferentes f.d.p. a priori será possível também tirar conclusões a respeito da forma da função verossimilhança obtida para cada conjunto de dados. A motivação do uso da f.d.p. a priori dada acima será discutida novamente no próximo capítulo, à luz dos resultados obtidos com f.d.p. a priori constante.

## II.5 Teste do procedimento: comparação com os resultados da literatura

Antes de aplicarmos o método estatístico e computacional utilizado, é importante verificar a validade deste. Para tal, foram feitas comparações dos resultados por nós obtidos com os apresentados em [10] e [43]. Tais trabalhos foram escolhidos para comparação por serem referências na literatura, e utilizarem tratamento de dados e modelos mais próximo dos nossos. Para realizarmos tais comparações, foram obtidos os resultados considerando os mesmos intervalos de parâmetros e funções densidade de probabilidade a priori utilizadas em tais trabalhos, mesmo sendo estas diferentes das que utilizaremos no restante deste trabalho. No caso sem acoplamento, matéria bariônica e matéria escura têm o mesmo comportamento. Assim, para efetuar tais comparações, trabalharemos não mais com o parâmetro  $\Omega_{DM}$ , mas com  $\Omega_M$ .

Utilizando o conjunto Ouro, realizamos, assim como em [10], estimativas no plano  $(w_0 \times \Omega_M)$ , para o caso de  $w_1 = 0$ ,  $\delta = 0$  de duas formas distintas: utilizando função densidade de probabilidade a priori constante e também utilizando

$$f_{\tilde{\theta}}(\Omega_M) \propto e^{-\frac{(\Omega_M - 0.27)^2}{2 \times 0.4^2}}. \quad (4.21)$$

Podemos ver na figura 4.3 a seguir o resultado por nós obtido, ao lado do apresentado em [10]. Vemos que a semelhança é bastante alta, indicando que o procedimento por nós utilizado, conseguindo reproduzir tal resultado, é válido.

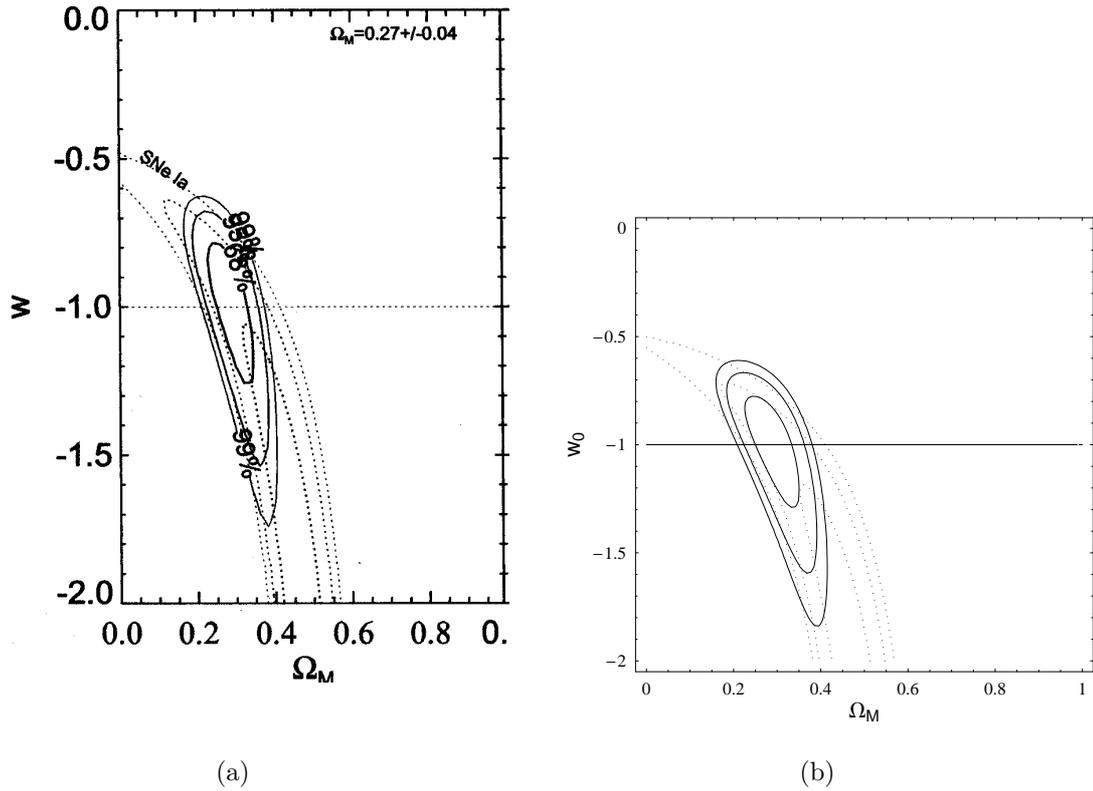


Fig. 4.3: Intervalos de 68%, 95% e 99% de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_M$ . Na figura 4.3(a), extraída de [10], vemos os intervalos obtidos em [10] e na 4.3(b) os obtidos por nós, ambos utilizando os dados do grupo Ouro. As linhas pontilhadas dizem respeito aos intervalos obtidos utilizando f.d.p. a priori constante, e em linha contínua utilizando 4.21.

Ainda comparando com os resultados obtidos em [10], podemos ver na figura 4.4 os intervalos de confiança no plano  $w_1 \times w_0$  obtidos em tal trabalho e por nós, considerando a função densidade de probabilidade a priori dada por (4.21) e marginalizando a f.d.p. a posteriori sobre  $\Omega_{DM}$ . Comparando as duas figuras, vemos que, como no plano  $w_0 \times \Omega_M$ , os dois resultados são bastante semelhantes, indicando novamente a validade do procedimento adotado.

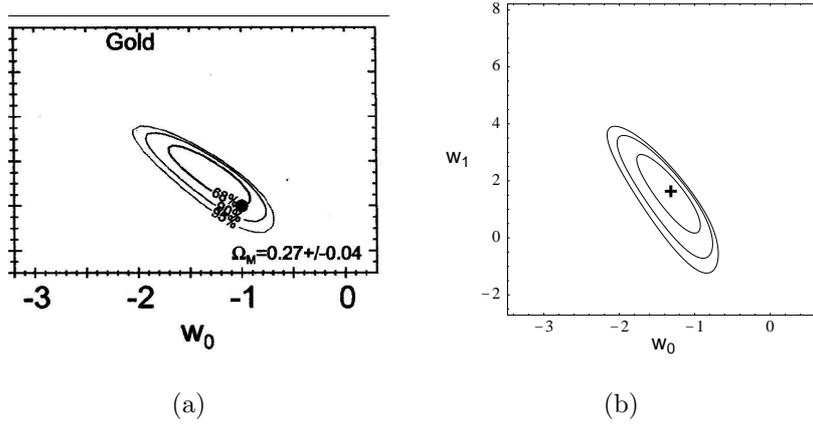
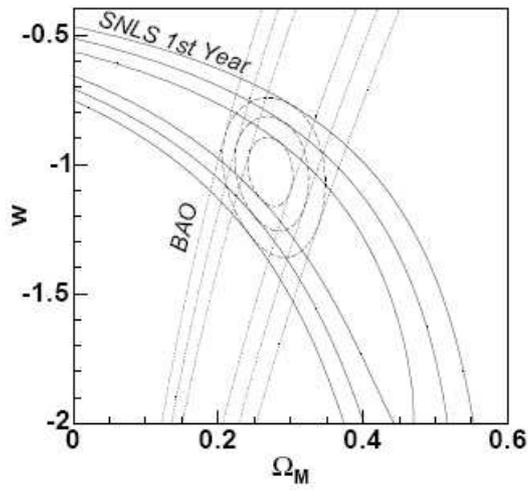
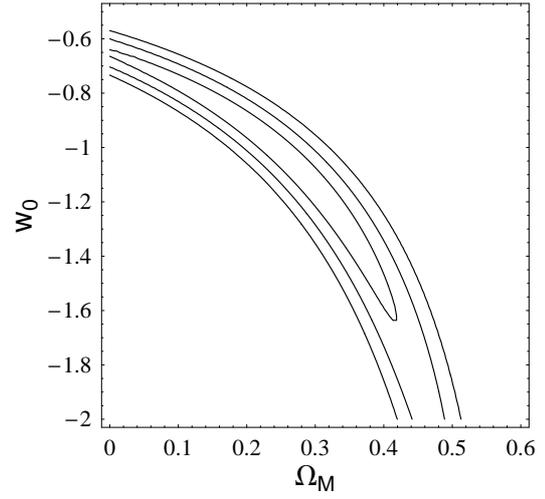


Fig. 4.4: Intervalos de 68%,90% e 95% de confiança obtidos no plano  $w_1 \times w_0$  utilizando a f.d.p. a priori dada em (4.21) e marginalizando a f.d.p. a posteriori sobre  $\Omega_{DM}$ . Na figura 4.4(a), extraída de [10], vemos os intervalos obtidos em [10] e na 4.4(b) os por nós obtidos.

Também foram feitas comparações com a literatura no que diz respeito aos resultados obtidos com os dados SNLS. Na figura 4.5 vemos o intervalos de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_M$  obtidos com tais dados, com função densidade de probabilidade a priori constante, ao lado do gráfico apresentado em [43]. Neste último, no entanto, é feita a marginalização sobre os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\overline{M^B}$ , e são considerados os 115 objetos publicados no trabalho em questão (117 objetos, excluídas as supernovas SNLS-03D4au e SNLS-03D4bc). Novamente, vemos que a semelhança entre os dois resultados é bastante alta. Vemos também que os intervalos de confiança na figura 4.5(a) são mais alargados que os na figura 4.5(b) nossos, efeito que pode ser explicado considerando as diferenças no que diz respeito ao tratamento de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\overline{M^B}$ , e aos objetos considerados. A semelhança verificada indica no entanto que nosso procedimento, embora não leve em conta a dispersão em  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\overline{M^B}$ , é confiável.



(a)



(b)

Fig. 4.5: Intervalos de 68%, 95% e 99% de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_M$ , utilizando os dados do SNLS e f.d.p. a priori constante. Na figura 4.5(a), extraída de [43], vemos o resultado obtido em [43] e na 4.5(b) o obtido por nós.

## 5. RESULTADOS OBTIDOS

### *I Energia e matéria escura desacopladas*

Neste capítulo apresentaremos e discutiremos os resultados obtidos para a estimativas dos parâmetros  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $w_1$ , utilizando os dois conjuntos de dados e as duas f.d.p. a priori utilizadas. Nosso objetivo final é estudar o efeito do acoplamento proposto, na forma de (3.43) e (3.44), sobre as estimativas obtidas a partir dos dados de supernovas Ia para tais parâmetros.

Antes de considerar o caso com acoplamento, discutiremos o modelo de energia e matéria escura desacopladas, com equação de estado parametrizada na forma (3.37). A partir dele, podemos inferir características da energia escura desacoplada. Além disso, o modelo sem acoplamento serve como referência para que estudemos os efeitos do acoplamento.

É importante lembrar novamente que, no caso sem acoplamento, matéria bariônica e matéria escura se comportam da mesma forma. Como colocado no capítulo anterior, utilizamos  $\Omega_B = 0.05$ . Assim, quando obtemos estimativas para  $\Omega_{DM}$ , estamos também estimando  $\Omega_M$ , que é dado por  $\Omega_M = \Omega_{DM} + 0.05$ .

#### *Modelo $\Lambda$ CDM*

Devido ao fato de estarmos considerando um universo plano e com  $\Omega_B = 0.05$ , temos

$$\Omega_\phi = 1 - \Omega_{DM} - \Omega_B = 0.95 - \Omega_{DM}.$$

Assim, num modelo  $\Lambda$ CDM, no qual  $w_1 = 0$  e  $w_0 = -1$ , o único parâmetro livre é o parâmetro de densidade de matéria escura,  $\Omega_{DM}$ . Foram obtidos os valores  $\Omega_{DM} = 0.26(04)$  e  $\Omega_{DM} = 0.19(02)$ , respectivamente, para os conjuntos Ouro e SNLS. No caso sem acoplamento entre energia escura e matéria escura, tais valores implicam em  $\Omega_M = 0.31(04)$  e  $\Omega_M = 0.24(02)$ , para os dados do grupo Ouro e SNLS, respectivamente, o que leva a  $\Omega_\phi = 0.69(04)$  e  $\Omega_\phi = 0.76(02)$ , para cada um dos casos. O valor para  $\Omega_{DM}$  que corresponde a  $\Omega_M = 1$  é excluído, em ambos os conjuntos de dados, com nível de confiança superior a 99%. Tais resultados confirmam uma das principais evidências para a energia escura discutidas no capítulo 3: a necessidade de um outro componente para que, conforme as observações do WMAP, o universo seja plano. Considerando um modelo  $\Lambda$ CDM, vemos que os dados favorecem fortemente um universo com parte considerável preenchida por energia escura, no caso, do tipo constante cosmológica.

O resultado obtido a partir dos dados do WMAP, considerando o modelo  $\Lambda$ CDM, publicado em [14], é  $\Omega_{DM} = 0.237(34)$ . Assim, o valor obtido para  $\Omega_{DM}$  utilizando os dados do SNLS é compatível com a estimativa do WMAP dentro do intervalo de um desvio padrão, e o valor obtido a partir do conjunto Ouro é compatível dentro de um

intervalo de 2 desvios padrão. No entanto, ambos os valores são maiores que a estimativa do WMAP, sendo o do grupo Ouro o caso no qual a diferença é maior, comportamento que vai no sentido da tensão entre os dados do grupo Ouro e os de anisotropias na RCF, apontada em [32].

### I.1 Equação de estado constante

Um caso específico da parametrização utilizada é o com equação de estado constante, no qual  $w_1 = 0$ , e, considerando  $\delta = 0$ , a expressão para  $\rho_\phi(a)$  é dada, conforme (3.50), por

$$\rho_\phi(a) = \rho_{\phi 0} a^{-3(1+w_0)}.$$

Podemos ver na figura 5.1 os intervalos de confiança, assim como os melhores ajustes obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  para ambos os conjuntos de dados e utilizando função densidade de probabilidade a priori constante. Os intervalos mostrados, assim como em todos os gráficos que serão apresentados a partir de agora, são de 68%, 95% e 99% de confiança.

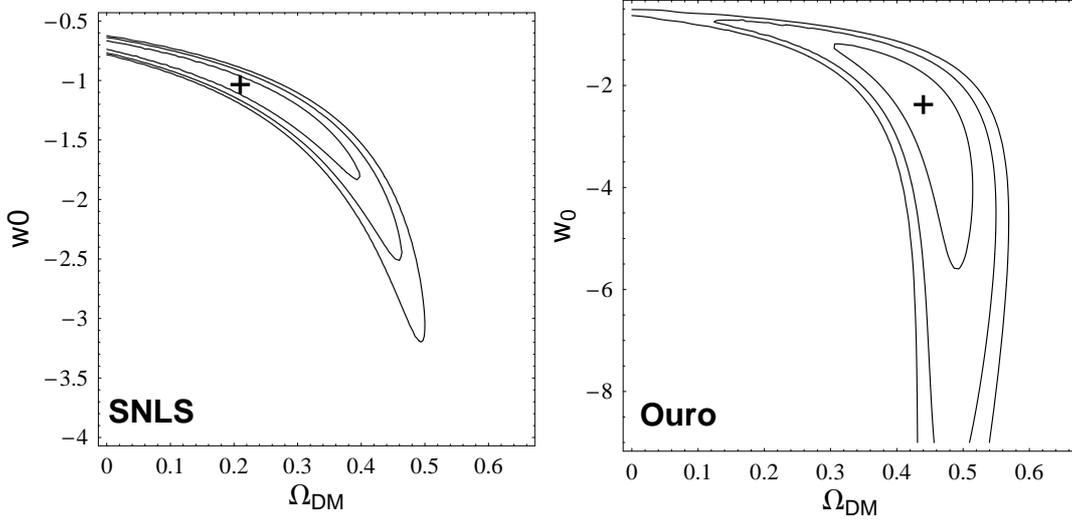


Fig. 5.1: Intervalos de 68%, 95% e 99% de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , no caso  $\delta = 0$  e equação de estado e f.d.p. a priori constantes, para os dados do grupo Ouro e SNLS. Os valores de melhor ajuste são, respectivamente:  $\Omega_{DM} = 0.44, w_0 = -2.4$ , e  $\Omega_{DM} = 0.21, w_0 = -1.05$

Foram obtidas também estimativas uniparamétricas, ou seja, considerando apenas um parâmetro, independente do valor dos outros parâmetros envolvidos. Para tal, a função densidade de probabilidade a posteriori foi marginalizada no restante dos parâmetros. No caso de equação de estado constante, temos apenas dois parâmetros,  $w_0$  e  $\Omega_{DM}$ . Desta forma, a função densidade de probabilidade de  $\Omega_{DM}(w_0)$ , independente do valor de  $w_0(\Omega_{DM})$  é obtida integrando a função densidade de probabilidade a posteriori total em  $\Omega_{DM}(w_0)$ . Os resultados obtidos, utilizando f.d.p. a priori constante, podem ser vistos na tabela 5.1. Nela apresentamos ainda as mesmas estimativas obtidas a partir dos resultados dos dados do WMAP, publicadas em [14], considerando um modelo de energia escura com equação de estado constante. Em [14] é disponibilizado o valor obtido para o parâmetro de

densidade total de matéria. Para obtenção do valor correspondente de  $\Omega_{DM}$ , que possa ser comparado com nossas estimativas, fizemos  $\Omega_{DM}^{wmap} = \Omega_M^{wmap} - \Omega_B = \Omega_M^{wmap} - 0.05$ , sendo que o superescrito *wmap* denota valores obtidos a partir dos dados deste satélite.

—	Ouro	SNLS	WMAP
$\Omega_{DM}$	$0.48^{+0.05}_{-0.05}$	$0.29^{+0.1}_{-0.14}$	$0.256^{+0.089}_{-0.081}$
$w_0$	$-2.27^{+1.07}_{-2.13}$	$-0.97^{+0.24}_{-0.43}$	$-0.81^{+0.22}_{-0.20}$

Tab. 5.1: Estimativas para os valores de  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  obtidas no caso sem acoplamento e equação de estado constante, marginalizando a função densidade de probabilidade a posteriori em  $w_0$  e  $\Omega_{DM}$ , respectivamente, considerando a f.d.p. a priori constante. Na quarta coluna vemos as estimativas obtidas a partir das publicadas em [14], que utilizam os dados do WMAP, para um modelo com equação de estado constante.

Consideremos inicialmente o resultado obtido no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  utilizando os dados do grupo Ouro. Vemos na figura 5.1 que há uma longa cauda da função densidade de probabilidade a posteriori obtida neste caso, e em consequência dos intervalos de confiança, para valores negativos de  $w_0$ , que ocorre para valores maiores de  $\Omega_{DM}$ . O intervalo de 68% de confiança exclui tanto valores para  $w_0$  maiores que -1 como o modelo  $\Lambda$ CDM, que só são permitidos dentro da região de 95% de confiança. O valor de melhor ajuste de  $w_0$  é também consideravelmente menor que -1. A estimativa uniparamétrica para o valor de  $w_0$  independentemente do valor assumido por  $\Omega_{DM}$  corrobora os resultados obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , pois resulta em  $w_0 < -1$  com 68% de confiança. Tais resultados indicam um componente responsável pela energia escura do tipo *phantom*. Como discutido no capítulo 3, tais modelos levam à divergência do fator de escala em tempos finitos, especialmente para equação de estado constante, como é o caso.

Embora compatíveis dentro de dois desvios padrão, os valores obtidos tanto para  $\Omega_{DM}$  quanto para  $w_0$  a partir do grupo Ouro são bastante distintos dos obtidos a partir dos dados do WMAP, mostrados na tabela 5.1. Em especial o valor de  $\Omega_{DM}$  por nós obtido dista de  $\Omega_{DM}^{wmap}$  por mais de dois desvios padrão. Tais resultados evidenciam a tensão existente entre as estimativas provenientes dos dados do grupo Ouro e dos de anisotropias na radiação cósmica de fundo.

Apesar de também apresentar uma cauda para valores negativos de  $w_0$ , os resultados obtidos utilizando os dados do SNLS diferem bastante dos resultantes do grupo Ouro. A cauda dos intervalos de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  para valores negativos de  $w_0$  é bem menos acentuada e o intervalo de 68% inclui valores com  $w_0 > -1$ . Além disso, embora ligeiramente menor que -1, o valor de melhor ajuste para  $w_0$  em tal plano aponta para uma componente de energia escura com comportamento bastante próximo de constante cosmológica e, levando em conta o intervalo de 68% de confiança, podemos concluir que os resultados são compatíveis com o modelo  $\Lambda$ CDM.

O mesmo ocorre com a estimativa uniparamétrica de  $w_0$ , ligeiramente maior que -1, mas que inclui este valor no intervalo de 68% de confiança.

Os valores obtidos para  $\Omega_{DM}$  são bem menores que no caso do grupo Ouro. Tanto o valor de melhor ajuste no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  quanto a estimativa uniparamétrica para  $\Omega_{DM}$  são bastante próximos do valor  $\Omega_{DM}^{wmap}$ , e compatíveis com ele dentro do intervalo de 68%

de confiança. Também as estimativas para  $w_0$  são compatíveis com a do WMAP mostrada na tabela 5.1. Desta forma, a tensão com os dados de *RCF* apresentada nos resultados dos dados do grupo Ouro deixa de existir, no caso dos dados do SNLS. É interessante notar que, assim como no caso  $\Lambda$ CDM, mesmo sendo compatível com o valor obtido pelo WMAP, a estimativa para  $\Omega_{DM}$  obtida a partir dos dados do SNLS é, assim como no caso do grupo Ouro, maior que  $\Omega_{DM}^{wmap}$ . Isto pode indicar que de fato as estimativas provenientes de supernovas sejam superestimadas com relação às das anisotropias na radiação cósmica de fundo.

Até meados do ano passado, quando ainda não estavam disponíveis os dados do SNLS, a tensão entre os dados do grupo Ouro e da *RCF*, já notada em [32], se colocava entre estimativas obtidas a partir dos dados de SNIa como um todo e dos dados do WMAP, e portanto como uma questão que devia ser resolvida. Isso porque espera-se que um modelo que de fato descreva o universo ajuste os diferentes conjuntos de dados com um mesmo conjunto de valores para os parâmetros cosmológicos. Com a obtenção dos dados do SNLS, que, como vimos, levam à estimativas mais compatíveis com as do WMAP, tal tensão parece ter sido aliviada. No entanto, a incompatibilidade com os resultados obtidos a partir dos dados do grupo Ouro permanece, e a compatibilidade entre eles, assim como entre dados de supernovas em geral e das anisotropias da radiação cósmica de fundo permanece como um ponto importante na seleção de modelos cosmológicos, e na determinação de valores para os parâmetros cosmológicos.

Como vemos na figura 5.3 há forte correlação e degenerescência entre os valores de  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$ . Ela ocorre de forma que, quanto maior o valor de  $\Omega_{DM}$ , mais negativo o de  $w_0$ . Consideremos um determinado objeto com *redshift*  $z$ . No caso de energia e matéria escura desacopladas, a distância de luminosidade de tal objeto será dada por

$$d_L = \int_0^z \frac{dzc(1+z)}{H_0 \sqrt{(\Omega_{DM} + \Omega_B)(1+z)^3 + (1 - \Omega_{DM} - \Omega_B)(1+z)^{3(1+w_0)}}} \quad (5.1)$$

Consideremos o termo no denominador dado por

$$K \equiv (1 - \Omega_{DM} - \Omega_B)(1+z)^{3(1+w_0)}.$$

O aumento do valor de  $\Omega_{DM}$  leva à queda do valor de  $(1 - \Omega_{DM} - \Omega_B)$ , enquanto a queda do valor de  $w_0$  leva ao aumento do valor de  $(1+z)^{3(1+w_0)}$ . Assim, podemos em princípio aumentar o valor de  $\Omega_{DM}$  e diminuir o de  $w_0$  de forma que o valor do termo  $K$  permaneça o mesmo. Desta forma, é compreensível que, para um mesmo conjunto de dados, o aumento do valor de  $\Omega_{DM}$  leve à queda do valor de  $w_0$ , e podemos de alguma maneira compreender a origem da degenerescência apresentada em tais parâmetros. É importante notar no entanto que há também o efeito do termo do denominador de (5.1) que envolve apenas  $\Omega_{DM}$ . Com o aumento de  $\Omega_{DM}$ , ele começa a dominar com relação a  $K$ , que passar a assumir valores baixos, e, portanto, a correlação diminui bastante, como de fato é observado nos intervalos de confiança. Trabalhando com a f.d.p. a posteriori obtida a partir dos dados do grupo Ouro, vimos que de fato, para valores de  $\Omega_{DM}$  em torno de 0.45, ela varia de forma razoavelmente suave com  $w_0$ , mostrando uma menor sensibilidade ao valor deste parâmetro.

Conforme [10], a correlação notada dificulta a obtenção de estimativas mais precisas e intervalos de confiança mais estreitos tanto no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  quanto para cada um

dos parâmetros isoladamente. Devido à ela, deixando variar livremente os dois parâmetros, existe uma gama de pares de valores  $(w_0, \Omega_{DM})$  que ajustam os dados, e para muitos valores de  $w_0$ , por exemplo, encontramos um valor de  $\Omega_{DM}$  que o faça. Este fato leva à dispersão da função de verossimilhança e em consequência da função densidade de probabilidade a posteriori obtida utilizando f.d.p. a priori constante, como mostrado na figura 5.1. Tal dispersão gera intervalos de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  bastante extensos, como observado, e faz com que, quando marginalizamos a f.d.p. obtida para obter estimativas uniparamétricas, esta resulte numa f.d.p. também bastante alargada, levando aos grandes valores para as incertezas nas estimativas uniparamétricas. Isto ocorre especialmente nas estimativas para  $w_0$ , eixo no qual a dispersão da f.d.p. a posteriori é maior, como atesta a cauda observada no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ .

Esta degenerescência é bem mais acentuada no caso dos dados do grupo Ouro. É interessante notar que a discrepância entre os resultados obtidos a partir deste conjunto de dados e do WMAP pode estar associada a esta degenerescência. De fato, observando o gráfico da figura 5.1 vemos que ao fixarmos o valor obtido para  $\Omega_{DM}$  ou  $w_0$  pelo WMAP, o valor do parâmetro restante ( $w_0$  e  $\Omega_{DM}$ , respectivamente), fica bem mais próximo da estimativa resultante dos dados do satélite. Da mesma forma, as estimativas obtidas para o modelo  $\Lambda$ CDM eram de fato mais compatíveis.

Os efeitos resultantes da degenerescência podem ser minimizados utilizando uma f.d.p. a priori que limite os valores possíveis de um dos parâmetros ajustados. Em paralelo aos dados de supernova, temos as estimativas para o parâmetro de densidade de matéria obtidas a partir dos dados do WMAP, a partir de uma das quais foi obtida a f.d.p. a priori dada por (4.20). Baseados nas considerações acima, utilizamos também tal função para obter estimativas dos parâmetros desejados. Note que poderíamos utilizar também uma f.d.p. a priori dependente de  $w_0$ .

Os intervalos de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  utilizando a f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$  podem ser vistos na figura 5.2, e as estimativas uniparamétricas obtidas são apresentadas na tabela 5.2.

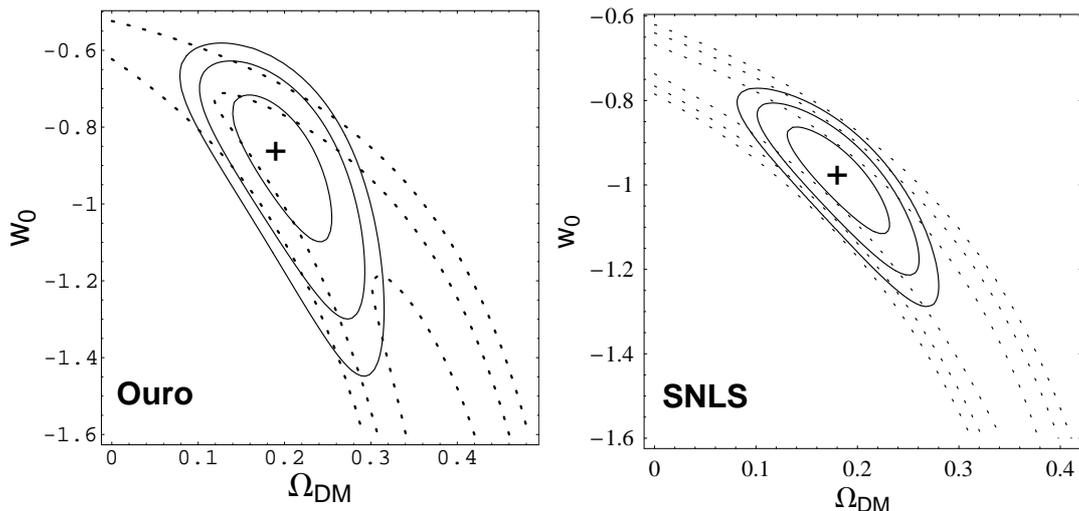


Fig. 5.2: Intervalos de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , no caso sem acoplamento, utilizando a f.d.p. (4.20), para os dois conjuntos de dados, em linha contínua. Com linhas pontilhadas, vemos os mesmos intervalos obtidos com f.d.p. a priori constante.

—	Ouro	SNLS
$\Omega_{DM}$	$0.20^{+0.03}_{-0.04}$	$0.18^{+0.04}_{-0.03}$
$w_0$	$-0.87^{+0.12}_{-0.14}$	$-0.97^{+0.08}_{-0.1}$

Tab. 5.2: Estimativas uniparamétricas para os valores de  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  obtidas no caso sem acoplamento e equação de estado constante, marginalizando a função densidade de probabilidade a posteriori em  $w_0$  e  $\Omega_{DM}$ , respectivamente, e considerando a f.d.p. a priori gaussiana.

Como esperado, tanto os valores de melhor ajuste obtidos para  $\Omega_{DM}$  quanto as estimativas uniparamétricas para tal parâmetro são bastante próximos do valor central da gaussiana utilizada como f.d.p. a priori e, por consequência, os valores obtidos para  $w_0$  são bem menos negativos e compatíveis com a estimativa do WMAP. Devido ao baixo valor do desvio padrão da gaussiana utilizada, em comparação à dispersão nos valores de  $\Omega_{DM}$  apresentada pela função verossimilhança, o deslocamento da função densidade de probabilidade a posteriori para valores mais baixos de  $\Omega_{DM}$  é bastante intenso. Na verdade ocorre que ao utilizarmos a f.d.p. a priori dada por (4.20), passamos a trabalhar apenas com a região da função de verossimilhança em torno de  $\Omega_{DM} = 0.18$ , pois tal f.d.p. a priori torna o valor da f.d.p. a posteriori desprezível em outras regiões do espaço de parâmetros.

No caso dos dados do grupo Ouro, onde havia discrepância com relação às estimativas do WMAP, a mudança nos valores de melhor ajuste e nos intervalos de confiança é bastante grande. Valores maiores que -1 passam a integrar a região de 68% de confiança, o que não ocorria anteriormente. Além disso, embora os intervalos de confiança ainda incluam valores para  $w_0$  tais que  $w_0 < -1$ , a cauda destes para valores negativos de  $w_0$  deixa de existir. O valor de melhor ajuste para tal parâmetro também passa a ser maior que -1, não mais indicando um componente de energia escura do tipo *phantom* e sendo compatível com o modelo  $\Lambda$ CDM, que passa a integrar o intervalo de 68% de confiança. Este comportamento é observado também no caso das estimativas uniparamétricas.

Para os resultados obtidos dos dados do SNLS, as mudanças nos valores de melhor ajuste e intervalos de confiança ocorrem no mesmo sentido, mas em intensidade bem menor, visto que já com a f.d.p. a priori constante eles indicavam valores menores para  $\Omega_{DM}$  e maiores para  $w_0$ .

Assim, a discrepância entre os resultados dos dois conjuntos de dados verificada no caso de f.d.p. a priori constante e a discrepância das estimativas resultantes do conjunto Ouro com as do WMAP não mais se verificam, e eles passam a apresentar resultados semelhantes e compatíveis.

Nenhum dos conjuntos de dados, no entanto, permite tirar informações conclusivas a respeito do valor de  $w_0$ , e se ele é maior ou menor que  $-1$ . Mesmo no caso de f.d.p. a priori constante, quando, especialmente no caso do grupo Ouro, valores maiores que  $-1$  são desfavorecidos, em ambos os conjuntos de dados o intervalo de 95% de confiança inclui tais valores.

## 1.2 Equação de estado variável

Para a obtenção dos intervalos de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , no caso da parametrização genérica dada em (3.37), foi feita a marginalização da função densidade de probabilidade a

posteriori em  $w_1$ . Podemos ver na figura 5.3 os resultados obtidos utilizando f.d.p. a priori constante em  $\Omega_{DM}$  e na figura 5.4 utilizando a f.d.p. a priori gaussiana dada por (4.20). Na tabela 5.3 apresentamos as estimativas uniparamétricas obtidas utilizando ambas funções densidade de probabilidade a priori.

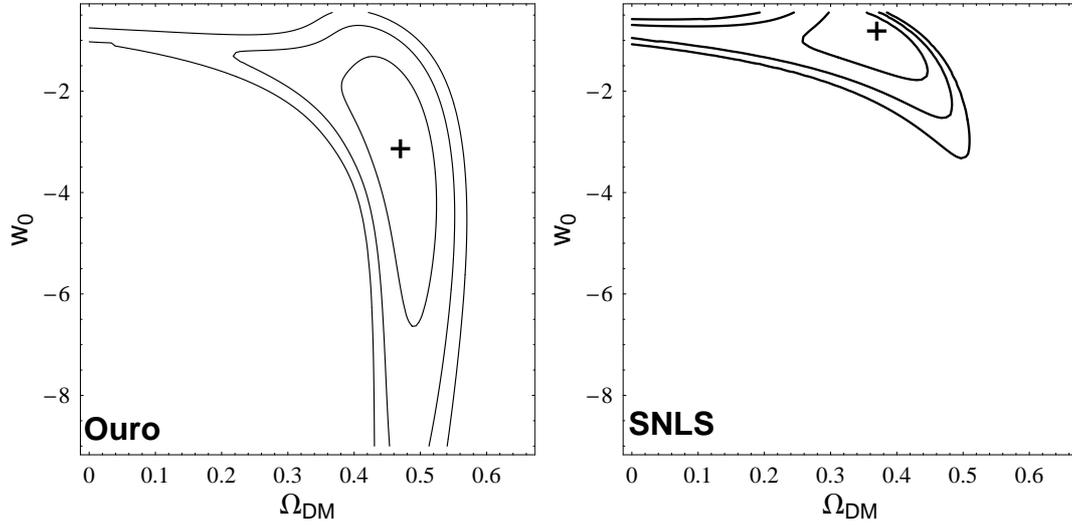


Fig. 5.3: Intervalos de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , no caso sem acoplamento e equação de estado variável, utilizando os dois conjuntos de dados e f.d.p. a priori constante. Os valores de melhor ajuste são,  $\Omega_{DM} = 0.47$ ,  $w_0 = -3.17$  e  $\Omega_{DM} = 0.37$ ,  $w_0 = -0.85$ , utilizando os dados do grupo Ouro e do SNLS, respectivamente.

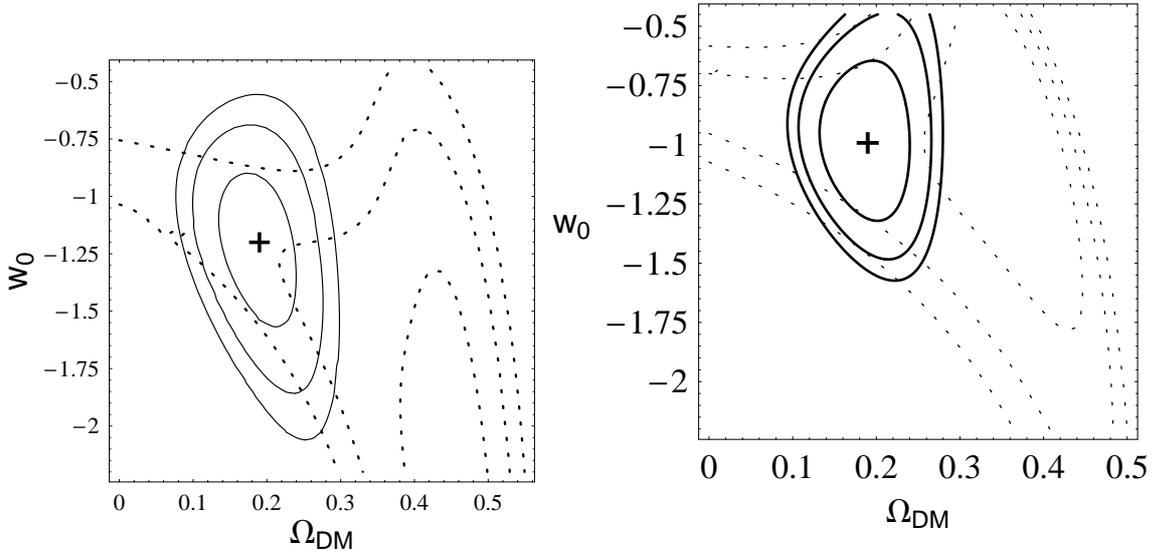


Fig. 5.4: Intervalos de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , no caso sem acoplamento e equação de estado variável, utilizando os dois conjuntos de dados e f.d.p. a priori gaussiana. Na figura da esquerda vemos os resultados obtidos para os dados do SNLS e da direita para os dados do grupo Ouro. Os valores de melhor ajuste são, respectivamente,  $\Omega_{DM} = 0.19$ ,  $w_0 = -1.21$  e  $\Omega_{DM} = 0.19$ ,  $w_0 = -0.99$ .

f.d.p. a priori	$\Omega_{DM}$		$w_0$	
	Ouro	SNLS	Ouro	SNLS
constante	$0.48^{+0.03}_{-0.04}$	$0.37^{+0.08}_{-0.08}$	$-2.27^{+1.07}_{-2.13}$	$-0.97^{+0.24}_{-0.43}$
gaussiana	$0.20^{+0.03}_{-0.04}$	<i>colocar</i>	$-0.87^{+0.12}_{-0.14}$	$-0.97^{+0.08}_{-0.1}$

Tab. 5.3: Estimativas para os valores de  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  obtidas no caso sem acoplamento, marginalizando a função densidade de probabilidade a posteriori nos parâmetros  $(w_0, w_1)$  e  $(\Omega_{DM}, w_1)$ , respectivamente.

Os resultados são bastante semelhantes ao caso de equação de estado constante, sendo que utilizando f.d.p. a priori constante obtemos resultados bastante diferentes para os dois conjuntos de dados.

Novamente os intervalos de confiança, assim como o valor de melhor ajuste para  $w_0$  no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  e a estimativa uniparamétrica para tal parâmetro, no caso dos dados do grupo Ouro, apontam para um componente associado à energia escura do tipo *phantom*. Notemos que neste caso com  $w_1 \neq 0$  os valores obtidos para  $w_0$  e  $\Omega_{DM}$  a partir do grupo Ouro são mais negativos e maiores, respectivamente, do que no caso de equação de estado constante. Devemos lembrar que, no caso de equação de estado variável, os efeitos de valores com  $w_0 < -1$  estão sujeitos ao valor de  $w_1$ , conforme discutido no capítulo 3. Os resultados obtidos dos dados do SNLS também apresentam estimativas para  $\Omega_{DM}$  maiores

que no caso de equação de estado constante, tanto o valor de melhor ajuste no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  quanto a estimativa uniparamétrica. No entanto, os valores obtidos para  $w_0$  são menos negativos que no caso  $w_1 = 0$ . Tal comportamento faz com que a discrepância entre os dois conjuntos de dados aumente no caso de  $w_0$  e diminua para os valores de  $\Omega_{DM}$ .

Como vemos na figura 5.4, os efeitos devido ao uso da função densidade de probabilidade a priori gaussiana nas estimativas obtidas são semelhantes ao caso de equação de estado constante, no que diz respeito ao deslocamento dos intervalos de confiança, assim como dos valores de melhor ajuste e estimativas uniparamétricas de  $\Omega_{DM}$ , para valores mais baixos deste parâmetro. Também o valor de melhor ajuste para  $w_0$  no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  e a estimativa uniparamétrica para  $w_0$  obtida utilizando o grupo Ouro se tornam bem menos negativos e se aproximam dos valores usuais, publicados na literatura [44, 49, 45]. É interessante notar no entanto que os valores obtidos para  $w_0$  utilizando os dados do SNLS se tornam mais negativos quando utilizamos a f.d.p. a priori gaussiana, ao contrário do que ocorreu no caso de equação de estado constante. Outro efeito que pode ser notado é que a correlação entre os dois parâmetros é bastante atenuada quando utilizamos tal f.d.p. a priori.

Para a equação de estado variável parametrizada na forma (3.37), não podemos efetuar a comparação com os dados do WMAP. Isto ocorre pois as estimativas dos parâmetros são dependentes do modelo utilizado para ajustar os dados, sendo que diferentes modelos podem inclusive envolver parâmetros diferentes. Tanto em [8] quanto em [14] não são fornecidos os valores para  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  utilizando a parametrização (3.37).

Na verdade, conforme discutido na seção V do capítulo 3, tal parametrização não é válida para grandes *redshifts*, situação na qual  $w(z)$  diverge. A superfície de desacoplamento tem  $z \approx 1.000$ , *redshift* no qual a parametrização utilizada não é válida, fazendo com que não possamos usá-la para ajustar dados relativos à radiação cósmica de fundo. Uma parametrização mais conveniente para tal seria a dada por (3.38).

Foram obtidas também estimativas no plano  $w_1 \times w_0$ . Para tal, operamos a marginalização em  $\Omega_{DM}$ . Utilizando f.d.p. a priori constante para este parâmetro, a integração em  $\Omega_{DM}$  resultou, no conjunto de dados do grupo Ouro, em uma função densidade de probabilidade extremamente suave e cuja região onde a função é não nula extrapola em muito a região do espaço de parâmetros considerada.

Realizando estudos da f.d.p. a posteriori, foi possível notar que tal função apresentava seu valor máximo, bem maior do que no resto do espaço de parâmetros, para grandes valores do parâmetro de densidade de matéria escura, ( $\Omega_{DM} \approx 0.5$ ), região na qual ela possui a forma de um platô aproximadamente constante em  $w_1$  e  $w_0$ , ao menos no intervalo do espaço de parâmetros considerado. Isto faz com que, ao integrarmos a f.d.p. em  $\Omega_{DM}$ , tal região domine sobre as demais e gere a função suave em  $w_0$  e  $w_1$ .

Acreditamos que este comportamento, como colocado em [10] seja, analogamente ao comportamento no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , gerado pela alta degenerescência entre os três parâmetros  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $w_1$ , que dificulta também a obtenção de estimativas para três, dois ou mesmo um destes parâmetros sem fixar ou limitar o intervalo de valores possíveis para um deles. Sem fazê-lo, para qualquer valor de  $w_0$ , por exemplo, encontraremos um par de valores ( $\Omega_{DM} w_1$ ) que ajuste os dados. Além disso, parece haver uma certa insensibilidade da função verossimilhança com relação aos valores de  $w_0$  e  $w_1$  na região com  $\Omega_{DM} \approx 0.5$ , de forma análoga à que ocorria no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  no caso de equação de estado constante. Devido a este comportamento, consideramos que não fazia sentido estimarmos intervalos de confiança no plano  $w_1 \times w_0$  utilizando a f.d.p. a priori constante.

Os intervalos de confiança e melhores ajustes obtidos utilizando a f.d.p. a priori gaussiana podem ser vistos na figura 5.5, para os dois conjuntos de dados.

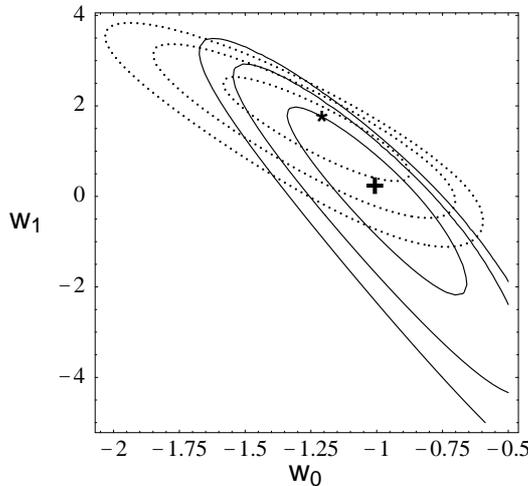


Fig. 5.5: Intervalos de confiança obtidos no plano  $w_1 \times w_0$ , utilizando a f.d.p. a priori gaussiana e marginalizando a f.d.p. em  $\Omega_{DM}$ . Em linha pontilhada vemos os intervalos obtidos com os dados do grupo Ouro (\*) e em linha contínua com os dados do SNLS (+). Os melhores ajustes são, respectivamente,  $w_0 = -1.20$ ,  $w_1 = 1.49$  e  $w_0 = -1.00$ ,  $w_1 = 0.20$ .

Os resultados obtidos para os dois conjuntos de dados apresentam diferenças entre si. Embora haja uma região de intersecção dos intervalos de confiança para os dois casos, eles estão deslocados de forma regular, sendo que os dados do grupo Ouro indicam valores menores para  $w_0$  e maiores para  $w_1$ . Esta diferença está de acordo com a degenerescência apresentada: conforme o formato dos intervalos de confiança, valores mais negativos de  $w_0$  implicam em valores maiores para  $w_1$ . Este comportamento pode ser compreendido a partir da expressão (3.37): dado um valor para o *redshift*, o valor de  $w_0$  pode ser mais negativo, contanto que o de  $w_1$  seja mais positivo, resultando em um mesmo valor para  $w(z)$ .

Ambos os conjuntos de dados incluem dentro do intervalo de 68% de confiança valores para  $w_0$  maiores e menores que  $-1$ . Além disso, o modelo  $\Lambda$ CDM pertence ao intervalo de confiança de 68% dos dados do SNLS e de 95% do grupo Ouro. É importante notar que os resultados obtidos com o grupo Ouro praticamente excluem a possibilidade de  $w_1 < 0$ , o que leva a  $w(z)$  crescente com o *redshift*, e portanto decrescente com o tempo. Considerando a discussão feita no capítulo 3, e o valor de  $w_{ef}$ , vemos que os resultados obtidos a partir do grupo Ouro favorecem quase que totalmente valores para  $w_0$  e  $w_1$  tais que  $w_{ef} < -1$ . Já os intervalos do SNLS incluem de forma considerável tanto regiões com  $w_{ef} < -1$  quanto com  $w_{ef} > -1$ , assim como valores positivos e negativos de  $w_1$ , e maiores e menores que  $-1$  para  $w_0$ .

## II Energia e matéria escura acopladas: efeitos do acoplamento no espaço de parâmetros

De forma análoga ao caso sem acoplamento, foram obtidas estimativas para os parâmetros  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $w_1$ , assim como os intervalos de 68%, 95% e 99% de confiança, para os diferentes valores de  $\delta$  utilizados. Desta forma, podemos estudar o efeito do acoplamento sobre tais estimativas. Assim como no caso sem acoplamento e equação de estado variável, não podemos comparar os resultados obtidos com acoplamento diferente de zero com os obtidos pelo WMAP. Para fazê-lo, seria necessário ajustarmos os dados deste satélite utilizando o modelo com acoplamento, e os diferentes valores de  $\delta$ . Feito isso poderíamos comparar o efeito do acoplamento sobre os resultados obtidos dos dados de SNIa e do WMAP, e a discrepância ou não entre eles. Uma comparação simplificada é feita na seção III deste capítulo. Como no caso sem acoplamento, discutiremos inicialmente o caso com equação de estado constante.

### II.1 Equação de Estado Constante

Podemos ver na figura (5.6) os intervalos de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  para os diferentes valores de  $\delta$ , utilizando f.d.p. a priori e equação de estado constante. A legenda para os diferentes valores de  $\delta$  que será utilizada ao longo de todo este capítulo, salvo quando ela for explicitamente alterada, é:  $\delta = 0$ : linha pontilhada, (\*)  $\delta = 0.2$ : linha tracejada, (+)  $\delta = 0.6$ : linha contínua, (†) e  $\delta = 1.0$ , linha em negrito, (x). Os valores de melhor ajuste dos parâmetros podem ser vistos na tabela 5.4.

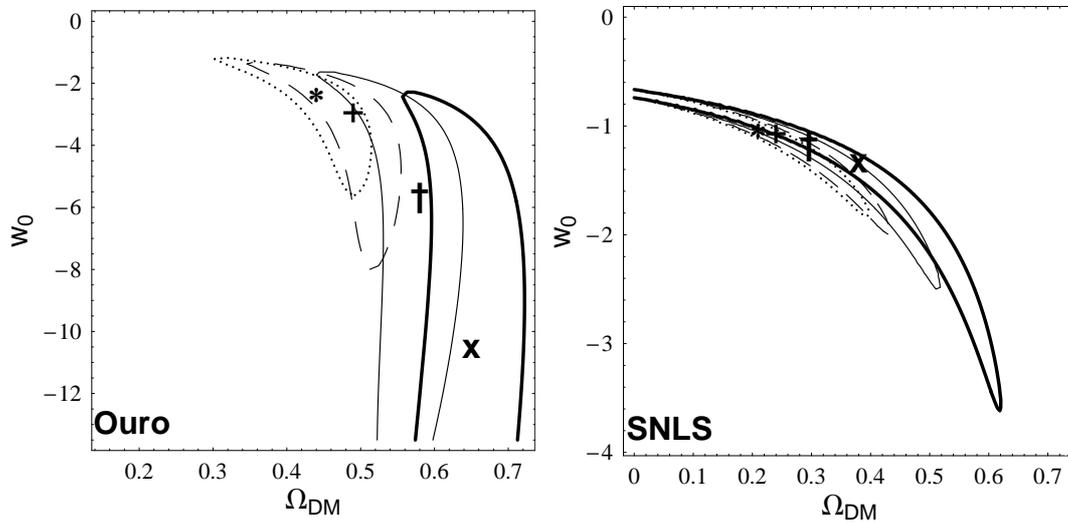


Fig. 5.6: Intervalos de 68% de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , para os diferentes valores de  $\delta$ , os dois conjuntos de dados e no caso de equação de estado e f.d.p. a priori constantes.

	$\Omega_{DM}, w_0$	
$\delta$	Ouro	SNLS
0.0	0.44, -2.4	0.21, -1.05
0.2	0.49, -3.01	0.24, -1.08
0.6	0.58, -5.68	0.29, -1.19
1.0	0.65, -10.59	0.38, -1.36

Tab. 5.4: Melhores ajustes obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , para os diferentes valores de  $\delta$  e conjuntos de dados utilizados, considerando equação de estado e f.d.p. a priori constante.

Observando a figura 5.6 vemos que o feito do acoplamento é deslocar os intervalos de confiança, assim como os valores de melhor ajuste, para valores maiores de  $\Omega_{DM}$  e mais negativos de  $w_0$ . Em ambos os conjuntos de dados a cauda para valores negativos de  $w_0$  é progressivamente acentuada com o aumento do valor de  $\delta$ .

No caso do grupo Ouro, o deslocamento das estimativas é bastante acentuado e tanto o intervalo de 68% de confiança quanto os valores de melhor ajuste atingem valores para  $w_0$  bastante negativos.

Já nos resultados obtidos utilizando os dados do SNLS, o acoplamento, embora atue no mesmo sentido, tem efeito bastante reduzido, especialmente sobre o valor de melhor ajuste de  $w_0$ .

Em ambos os casos, no entanto, vemos que, ao menos para equação de estado constante, o acoplamento não diminui a tendência, no caso do grupo Ouro, e possibilidade, no caso do SNLS, de termos modelos do tipo *phantom*, mas a acentua.

As estimativas uniparamétricas obtidas são apresentadas na tabela 5.5 e apresentam a mesma tendência. Na figura 5.7 vemos as funções densidade de probabilidade obtidas para  $w_0$  e  $\Omega_{DM}$ , após a marginalização em  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$ , respectivamente, para os diferentes valores de  $\delta$ , no caso de f.d.p. a priori constante.

	$\Omega_{DM}$		$w_0$	
-	Ouro	SNLS	Ouro	SNLS
0.0	$0.48^{+0.05}_{-0.05}$	$0.29^{+0.1}_{-0.14}$	$-2.27^{+1.07}_{-2.13}$	$-0.97^{+0.24}_{-0.43}$
0.2	$0.51^{+0.03}_{-0.04}$	$0.33^{+0.11}_{-0.16}$	$-2.84^{+1.64}_{-1.56}$	$-0.99^{+0.27}_{-0.51}$
0.6	$0.57^{+0.04}_{-0.03}$	$0.43^{+0.11}_{-0.19}$	$-5.71^{+2.49}_{-3.88}$	$-1.03^{+0.31}_{-0.77}$
1.0	$0.65^{+0.04}_{-0.04}$	$0.60^{+0.13}_{-0.21}$	$-11.67^{+4.53}_{-1.83}$	$-1.04^{+0.59}_{-1.36}$

Tab. 5.5: Melhores ajustes obtidos para  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  e respectivas incertezas, para os dois conjuntos de dados utilizados, no caso de equação de estado e f.d.p. a priori constante.

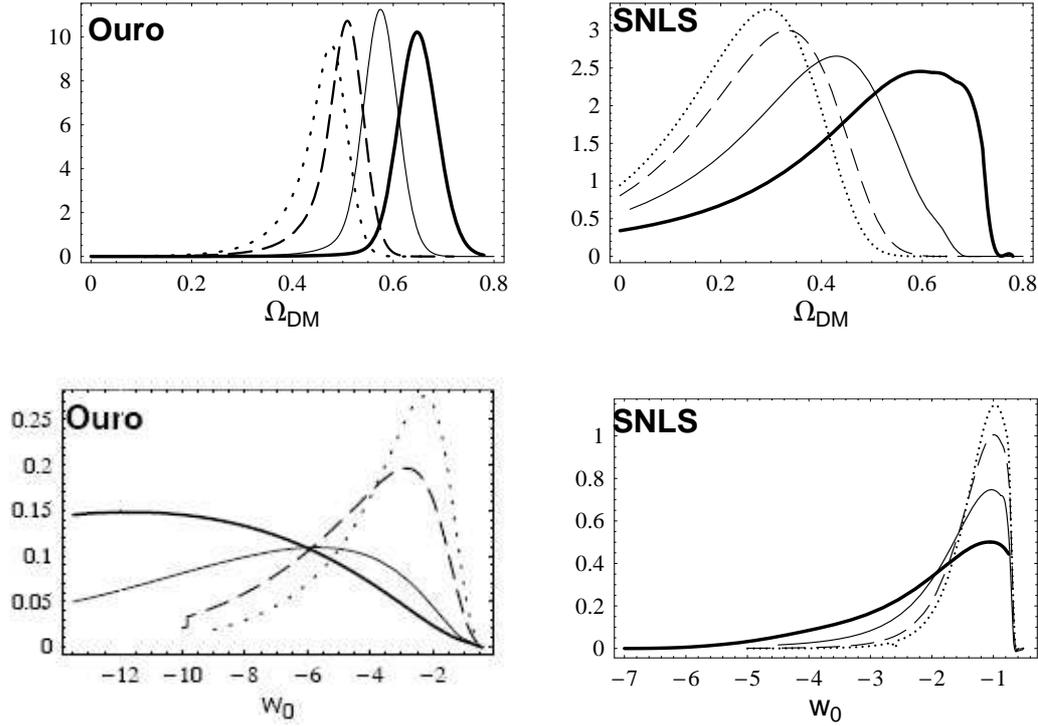


Fig. 5.7: Nas figuras superiores vemos as f.d.p. obtidas para  $\Omega_{DM}$  após a marginalização em  $w_0$ , para os diferentes valores de  $\delta$  e os dois conjuntos de dados. Nas figuras inferiores temos as f.d.p. para  $w_0$ , obtidas após a marginalização em  $\Omega_{DM}$ . Tais funções foram obtidas utilizando equação de estado e f.d.p. a priori constante. Devido aos diferentes intervalos de parâmetros considerados nos casos de diferentes valores de  $\delta$ , as curvas terminam em diferentes pontos dos gráficos.

Como vemos nas figuras e na tabela acima, as estimativas e funções densidade de probabilidade uniparamétricas seguem a mesma tendência apresentada no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  com a inserção do acoplamento e o aumento do valor de  $\delta$ . É interessante notar que, embora o deslocamento dos valores de  $\Omega_{DM}$  no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  seja limitado e menor para o conjunto de dados do SNLS que nos resultados do grupo Ouro, o deslocamento das estimativas uniparamétricas e o alargamento das f.d.p. a posteriori, para um mesmo parâmetro é mais acentuada para o primeiro do que para o segundo. Mais ainda que no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , o deslocamento dos valores estimados para  $w_0$  é desprezível no resultado obtido para os dados do SNLS. A queda da f.d.p. quando  $w_0$  se aproxima de -0.45 e  $\Omega_{DM}$  se aproxima de 0.8 ocorre de maneira incomum devido ao fato de que, para estes valores, tal função se desloca no eixo  $\Omega_{DM}$  e extrapola o intervalo considerado para  $w_0$ .

Na figura 5.8 podemos ver os intervalos de 68% de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  utilizando a f.d.p. a priori gaussiana. Os valores dos melhores ajustes e as estimativas uniparamétricas para  $w_0$  são apresentados nas tabelas 5.6 e 5.7, respectivamente. Para o conjunto de dados do grupo Ouro foram obtidas as funções densidade de probabilidade a posteriori para  $\Omega_{DM}$ , marginalizadas em  $w_0$ , no caso com a f.d.p. a priori gaussiana, para os diferentes valores de  $\delta$ . Os valores obtidos apresentaram o mesmo deslocamento para valores maiores que o caso com f.d.p. a priori constante, mas com valores menores,

deslocados pelo efeito da gaussiana, e com deslocamento desprezível. Por julgar que este era de fato o comportamento esperado e previsível, e que não nos fornece informação adicional sobre os dados e valores de tal parâmetro, não realizamos tal procedimento para o conjunto SNLS e não trataremos de tais estimativas aqui.

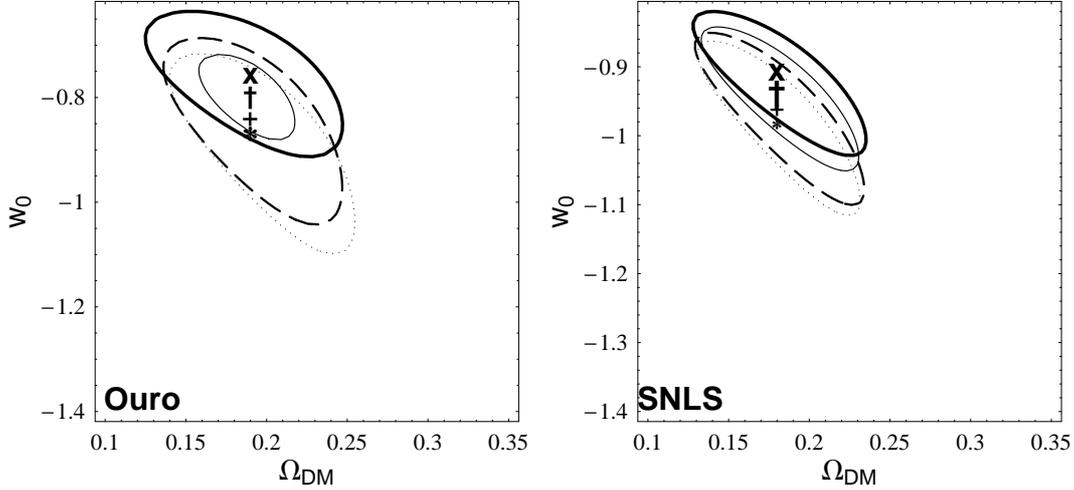


Fig. 5.8: Intervalos de 68% de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , para os diferentes valores de  $\delta$ , considerando equação de estado constante e f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$ , para os dois conjuntos de dados.

-	Ouro	SNLS
	$\Omega_{DM}, w_0$	
0.0	0.19, -0.87	0.18, -0.98
0.2	0.19, -0.84	0.18, -0.96
0.6	0.19, -0.79	0.18, -0.94
1.0	0.18, -0.76	0.18, -0.91

Tab. 5.6: Melhores ajustes obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , para os diferentes valores de  $\delta$ , considerando uma equação de estado constante e a f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$ .

	$w_0$	
-	Ouro	SNLS
0.0	$-0.87^{+0.12}_{-0.14}$	$-0.97^{+0.08}_{-0.01}$
0.2	$-0.83^{+0.11}_{-0.14}$	$-0.96^{+0.08}_{-0.08}$
0.6	$-0.80^{+0.10}_{-0.09}$	$-0.93^{+0.07}_{-0.08}$
1.0	$-0.76^{+0.09}_{-0.08}$	$-0.91^{+0.06}_{-0.07}$

Tab. 5.7: Melhores ajustes e incertezas obtidos para  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$ , utilizando f.d.p. a priori constante, para os dois conjuntos de dados utilizados, no caso de equação de estado constante.

A partir dos resultados apresentados acima, vemos que a utilização da f.d.p. gaussiana inibe o efeito do acoplamento sobre as estimativas, fazendo com que tanto os intervalos de confiança e os valores de melhor ajuste no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , quanto as estimativas uniparamétricas mudem bem menos com o valor de  $\delta$ . No entanto, tais mudanças apresentam uma tendência definida para valores menos negativos de  $w_0$ . É interessante notar a diferença com relação aos resultados obtidos utilizando a f.d.p. a priori constante. Neste caso, o acoplamento levava a valores mais negativos, enquanto que no caso com f.d.p. a priori gaussiana o acoplamento age no sentido inverso. Isto indica que, caso obtenhamos uma medida que confirme o valor  $\Omega_{DM} \approx 0.18$ , independentemente do modelo, o acoplamento pode evitar a energia escura do tipo *phantom*.

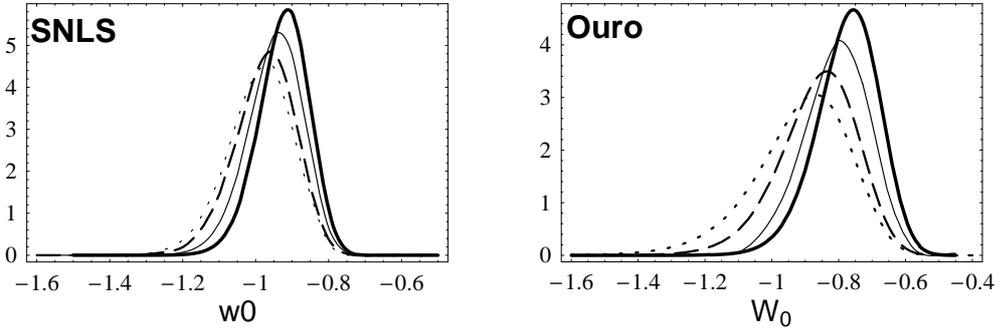


Fig. 5.9: Funções densidade de probabilidade obtidas para  $w_0$ , no caso de equação de estado constante, obtidas após a marginalização em  $\Omega_{DM}$ , utilizando a f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$ , para os diferentes valores de  $\delta$ .

#### Densidade de energia negativa

Como discutido na seção VI do capítulo 3, para determinados valores dos parâmetros  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $\delta$ , o modelo estudado apresenta densidade de energia escura negativa, para valores suficientemente grandes do fator de escala. Isto ocorre para valores para estes parâmetros tais que a condição (3.52) é satisfeita. Considerando os valores para  $\delta$  utilizados, podemos obter as condições para  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  nas quais isso ocorre, a partir de (3.52), para os respectivos valores de  $\delta$ .

$$\delta = 0 \longrightarrow \Omega_{DM} > 0.95, \quad (5.2)$$

$$\delta = 0.2 \longrightarrow \Omega_{DM} > -\frac{0.19}{3|w_0|} + 0.95, \quad (5.3)$$

$$\delta = 0.6 \longrightarrow \Omega_{DM} > -\frac{0.57}{3|w_0|} + 0.95, \quad (5.4)$$

$$\delta = 1.0 \longrightarrow \Omega_{DM} > -\frac{0.95}{3|w_0|} + 0.95. \quad (5.5)$$

No caso sem acoplamento, é automático ver que, como esperado, não há ocorrência de densidade de energia negativa. Para os outros casos, podemos obter o valor mínimo assumido pelo termo à direita nas expressões (5.3, 5.4, 5.5). Ele está associado ao valor mínimo de  $|w_0|$ , ou seja,  $|w_0| = 0.40$ . Fazendo isso, obtemos, no caso  $\delta = 0.2$ , a condição  $\Omega_{DM} > 0.81$ , região que não está presente no nosso espaço de parâmetros. Assim, também para  $\delta = 0.2$  não há casos que apresentem densidade de energia escura negativa neste caso. Para os casos  $\delta = 0.6$  e  $\delta = 1.0$ , existem regiões no espaço de parâmetros nas quais isto ocorre, que podem ser vistas na figura 5.10, em conjunto com os intervalos de confiança obtidos neste plano. Como vemos, tais regiões são bastante reduzidas, e não possuem intersecção com os intervalos de confiança obtidos, não comprometendo portanto os resultados obtidos ou o modelo utilizado, para estes valores de  $\delta$  e equação de estado constante.

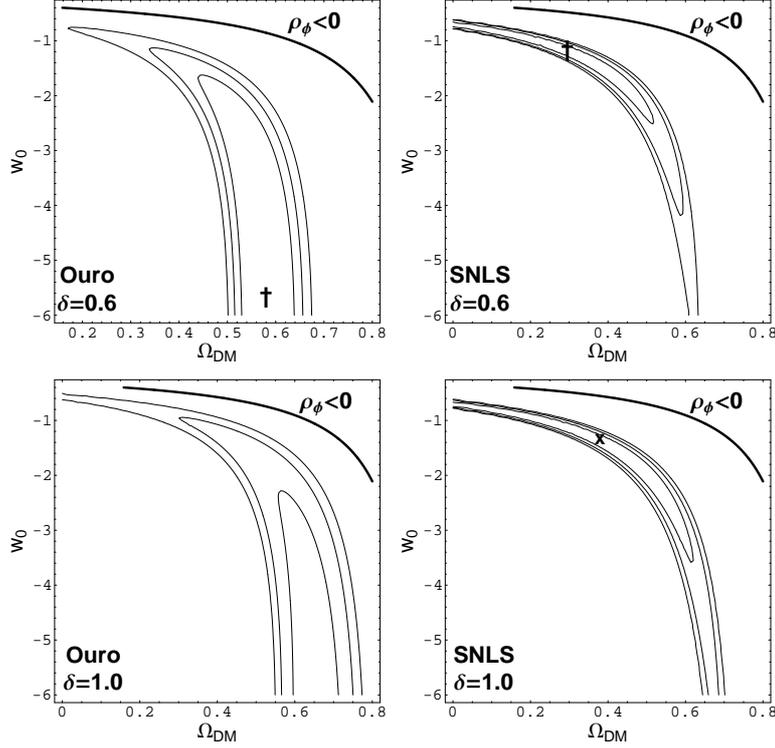


Fig. 5.10: *Intervalos de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , para  $\delta = 0.6$  e  $\delta = 1.0$ , utilizando os dados do grupo Ouro e do SNLS. As regiões acima das curvas traçadas em negrito, marcadas com  $\rho_\phi < 0$ , representam os valores de  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  nos quais ocorre densidade de energia negativa.*

## II.2 Equação de estado variável

Na figura 5.11 podemos ver os intervalos de 68% de confiança obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  no caso de equação de estado variável, para os diferentes valores de  $\delta$ , utilizando f.d.p. a priori tanto constante como gaussiana. Os valores para os melhores ajustes obtidos podem ser vistos na tabela 5.8.

Como no caso de equação de estado constante, o efeito do acoplamento no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , quando utilizamos a f.d.p. a priori constante, é deslocar tanto os valores de melhor ajuste como os intervalos de confiança para valores maiores de  $\Omega_{DM}$  e mais negativos de  $w_0$ . Neste caso, com equação de estado variável, porém, este efeito é também acentuado para os resultados obtidos dos dados do SNLS, especialmente no que diz respeito ao aumento dos valores para  $\Omega_{DM}$ . Novamente ocorre o aumento da cauda da função densidade de probabilidade para valores negativos de  $w_0$ , fazendo com que também no caso de equação de estado variável o acoplamento não atenua a tendência dos resultados para modelos do tipo *phantom*, mas a torne mais acentuada. É importante lembrar no entanto que, no caso de equação de estado variável, a ocorrência ou não do *Big Rip* era determinada não pelo valor de  $w_0$ , mas sim de  $w_{ef} = w_0 - w_1$ .

Quando utilizamos f.d.p. a priori gaussiana, o efeito do acoplamento pode ser considerado desprezível, resultando em deslocamentos nos valores de melhor ajuste, que são muito pequenos com relação aos intervalos de 68% de confiança e, ao contrário do caso

com equação de estado constante, não apresentam tendência clara de mudança.

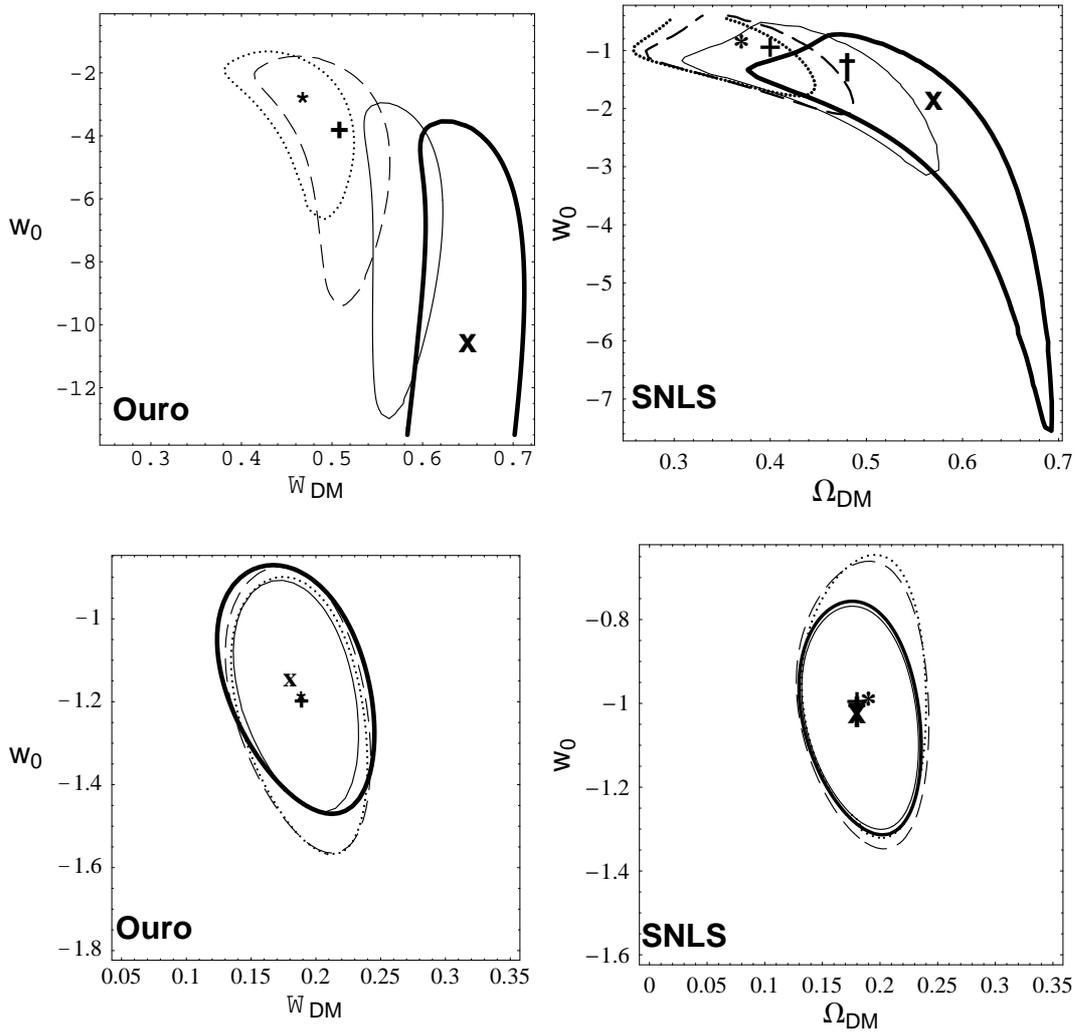


Fig. 5.11: Intervalos de 68% de confiança e melhores ajustes obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  para os diferentes valores de  $\delta$ , com os dois conjuntos de dados. Nas figuras superiores temos os resultados obtidos utilizando f.d.p. a priori constante e nas inferiores utilizando a f.d.p. a priori gaussiana. Os valores de melhor ajuste para  $\delta = 0.6$  e os dados do grupo Ouro não podem ser vistos nas figuras, mas sim na tabela abaixo.

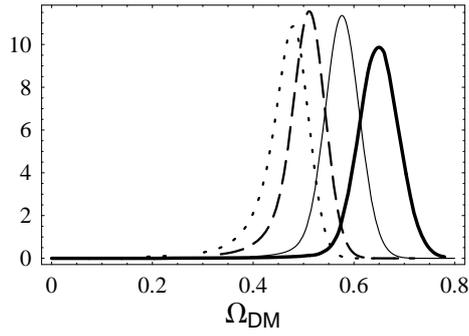
-	$\Omega_{DM}, w_0$			
-	<b>f.d.p. a priori constante</b>		<b>f.d.p. a priori gaussiana</b>	
$\delta$	Ouro	SNLS	Ouro	SNLS
0.0	0.47, -3.17	0.37, -0.85	0.19, -1.21	0.19, -0.99
0.2	0.51, -3.83	0.40, -0.096	0.19, -1.20	0.18, -1.01
0.6	0.68, -6.16	0.48, -1.29	0.18, -1.17	0.18, -1.02
1.0	0.65, -10.63	0.57, -1.89	0.18, -1.14	0.18, -1.03

Tab. 5.8: Melhores ajustes obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , para os diferentes valores de  $\delta$ , conjuntos de dados e f.d.p. a priori utilizadas.

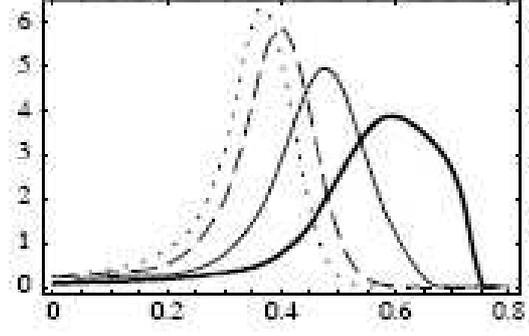
As estimativas uniparamétricas obtidas para  $\Omega_{DM}$  utilizando a f.d.p. a priori constante e para  $w_0$  utilizando ambas f.d.p. a priori podem ser vistas na tabela 5.9. Na figura 5.12 vemos as f.d.p. uniparamétricas obtidas no caso de f.d.p. a priori constante, para os diferentes valores de  $\delta$ . Notemos que, no caso de f.d.p. constante, o aumento do valor de  $\delta$  leva ao aumento da dispersão da f.d.p. a posteriori, e em consequência dos intervalos de confiança e da cauda destes para valores negativos de  $w_0$ . Isso leva ao alargamento das f.d.p. uniparamétricas.

-	<b>f.d.p. a priori constante</b>				<b>f.d.p. a priori gaussiana</b>	
-	$w_0$		$\Omega_{DM}$		$w_0$	
$\delta$	Ouro	SNLS	Ouro	SNLS	Ouro	SNLS
0.0	$-2.6^{+1.2}_{-2.1}$	$-0.95^{+0.32}_{-0.42}$	$0.48^{+0.03}_{-0.04}$	$0.37^{+0.06}_{-0.08}$	$-1.20^{+0.21}_{-0.23}$	$-0.98^{+0.22}_{-0.21}$
0.2	$-3.2^{+1.5}_{-2.8}$	$-1.00^{+0.35}_{-0.52}$	$0.51^{+0.04}_{-0.05}$	$0.40^{+0.07}_{-0.08}$	$-1.19^{+0.21}_{-0.23}$	$-1.00^{+0.22}_{-0.21}$
0.6	$-6.0^{+2.4}_{-3.7}$	$-1.15^{+0.42}_{-0.82}$	$0.58^{+0.03}_{-0.04}$	$0.48^{+0.48}_{-0.09}$	$-1.17^{+0.18}_{-0.19}$	$-1.01^{+0.19}_{-0.20}$
1.0	$-7.18^{+4.47}_{-1.85}$	$-1.42^{+0.63}_{-1.62}$	$0.65^{+0.04}_{-0.04}$	$0.59^{+0.12}_{-0.10}$	$-1.15^{+0.19}_{-0.2}$	$-1.02^{+0.18}_{-0.19}$

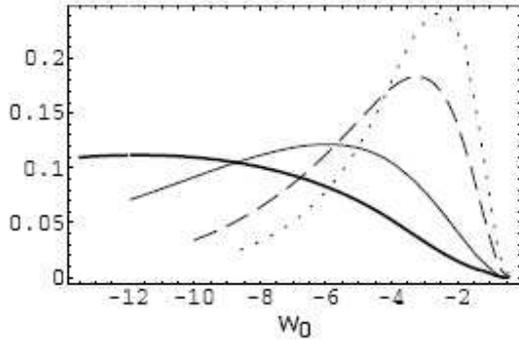
Tab. 5.9: Melhores ajustes obtidos para  $w_0$  e  $\Omega_{DM}$ , e respectivas incertezas, utilizando as f.d.p. marginalizadas nos parâmetros restantes, para os dois conjuntos de dados utilizados.



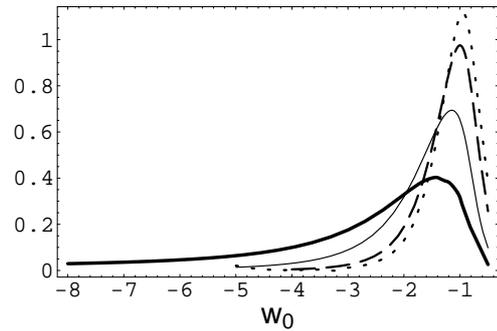
(a) f.d.p. obtida para  $\Omega_{DM}$ , para os dados do grupo Ouro



(b) f.d.p. obtida para  $\Omega_{DM}$ , para os dados do SNLS



(c) f.d.p. obtida para  $w_0$ , para os dados do grupo Ouro



(d) f.d.p. obtida para  $w_0$ , para os dados do SNLS

Fig. 5.12: *f.d.p. obtidas para  $w_0$  e  $\Omega_{DM}$ , marginalizadas nos outros parâmetros, obtidas com ambos os conjuntos de dados, para os diferentes valores de  $\delta$  e f.d.p. a priori constante.*

Em consonância com o comportamento observado no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , o acoplamento leva ao aumento dos valores estimados e ao alargamento da f.d.p. para  $\Omega_{DM}$ , considerando os dois conjuntos de dados, sendo que os valores obtidos a partir dos dados do grupo Ouro sistematicamente são mais elevados. Já o alargamento da f.d.p. é mais acentuado no caso do SNLS. Também o efeito sobre as estimativas de  $w_0$  é o mesmo que o observado no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ : o deslocamento para valores mais negativos e o aumento da dispersão da função verossimilhança, e portanto das incertezas. No caso dos dados do SNLS, o deslocamento é bastante pequeno, muito menor que as incertezas associadas, sendo pouco significativo, enquanto que no caso dos dados do grupo Ouro ele é bastante significativo, assim como o alargamento da f.d.p. É interessante notar que, embora o deslocamento seja pequeno, as estimativas uniparamétricas obtidas para  $w_0$  utilizando f.d.p. a priori gaussiana apresentam tendências diferentes para os diferentes conjuntos de dados.

Obtivemos também estimativas e intervalos de confiança no plano  $w_1 \times w_0$ , após efetuarmos a marginalização em  $\Omega_{DM}$ , utilizando a f.d.p. a priori gaussiana, que podem ser vistos na figura 5.13, e os valores de melhor ajuste na tabela 5.10.

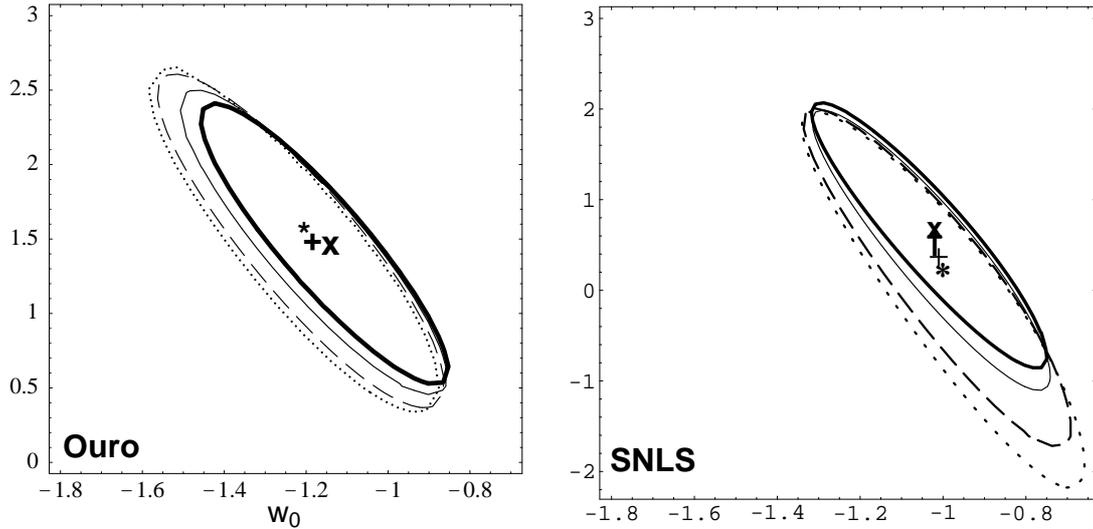


Fig. 5.13: Intervalos de 68% de confiança obtidos no plano  $w_1 \times w_0$ , após a marginalização em  $\Omega_{DM}$ , utilizando a f.d.p. a priori gaussiana, para os dois conjuntos de dados. No eixo das abcissas temos  $w_0$  e no das ordenadas  $w_1$ .

	$w_0, w_1$	
-	Ouro	SNLS
0.0	-1.2, 1.49	-1.00, 0.20
0.2	-1.8, 1.47	-1.01, 0.33
0.6	-1.16, 1.46	-1.02, 0.52
1.0	-1.14, 1.44	-1.02, 0.64

Tab. 5.10: Melhores ajustes obtidos no plano  $w_1 \times w_0$ , para os diferentes valores de  $\delta$  e os dois conjuntos de dados utilizados, utilizando a f.d.p a priori dada em (4.20) e marginalizando em  $\Omega_{DM}$ .

Assim como no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , o efeito do acoplamento sobre as estimativas no plano  $w_1 \times w_0$  quando utilizamos a f.d.p. a priori gaussiana é muito pequeno e pode ser considerado desprezível. É interessante notar no entanto que há um estreitamento dos intervalos de confiança, e um leve deslocamento das estimativas para valores menos negativos de  $w_0$ , no caso do grupo Ouro, e para valores mais negativos, no caso do SNLS. Esta diferença está de acordo com o comportamento observado para as estimativas uniparamétricas para  $w_0$  no caso com f.d.p. a priori gaussiana.

### III Comparação simplificada com os dados da Radiação Cósica de Fundo

Conforme discutido na seção II.1 deste capítulo, para verificarmos o efeito do acoplamento proposto sobre a compatibilidade ou não entre as estimativas para  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  obtidas a partir dos dados de SNIa, especialmente do grupo Ouro, e dos dados do WMAP,

é necessário que façamos o ajuste destes últimos utilizando o modelo com acoplamento. Devido à divergência da parametrização (3.37) para  $z = z_{dec}$ , isso só é possível no caso  $w_1 = 0$ .

Embora seja de grande importância para avaliarmos o efeito do modelo sobre os parâmetros estimados a partir dos dados de RCF, o ajuste de todo o espectro de potências requer um estudo mais aprofundado e não será feito neste trabalho. Uma comparação bastante simplificada no entanto, pode ser feita utilizando a posição do 1º pico do espectro mostrado na figura 3.1 [6]. Tal posição indica o multipolo de menor valor obtido na decomposição em harmônicos esféricos das anisotropias observadas na RCF e está associada ao ângulo no céu de maior valor no qual é observada oscilação, e portanto estrutura, nestas anisotropias,  $\Theta_A$ . Por outro lado, sabemos que as perturbações não podem apresentar correlação ou estrutura em escalas maiores do que a distância máxima que o som tenha percorrido desde o início do universo até a época do desacoplamento, chamada *distância de horizonte sonoro*,  $d_s$ . Assim,  $\Theta_A$  é o ângulo no céu associado a um arco com diâmetro  $d_s$  localizado sobre a superfície de último espalhamento, e é dado portanto por:

$$\Theta_A = \frac{d_s}{r_{dec} a_{dec}} = \frac{d_s^c}{r_{dec}}, \quad (5.6)$$

onde o subscrito *dec* diz respeito aos valores assumidos para  $a$  e  $r$  sobre a superfície de último espalhamento, e  $d_s^c$  é a distância comóvel de horizonte sonoro.

Note que, no caso de um universo plano, como estamos considerando,  $r_{dec}$  é a distância comóvel entre nós e a superfície de último espalhamento. O valor de  $d_s^c(z_{dec})$  pode ser obtido, em função dos parâmetros cosmológicos, integrando o elemento de distância percorrido por uma onda sonora em um intervalo  $dt$ , desde o início do universo, onde  $z = \infty$ , até a época do desacoplamento, onde  $z = z_{dec}$  e  $t = t_{dec}$ , conforme [13]. Assim, utilizando também as igualdades (2.12) e (2.17), temos

$$d_s^c = \int_{t=0}^{t=t_{dec}} \frac{v_s}{a(t)} dt = \int_{z=\infty}^{z_{dec}} \frac{v_s}{H(z)} dz, \quad (5.7)$$

onde  $v_s$  é a velocidade do som, que, conforme [50] é dada por

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{3(1 + \frac{3\Omega_B(1+z)}{4\Omega_R})}}.$$

A distância comóvel  $r_{dec}$  entre nós e a superfície de último espalhamento pode ser obtida considerando a curva do tipo luz seguida por um fóton emitido nesta superfície, em  $t = t_{dec}$ ,  $z = z_{dec}$  e observado por nós em  $t = t_0$ ,  $z = 0$ . Considerando  $a_0 = 1$  temos então

$$r_{dec} = \int_{z_{dec}}^0 \frac{cdz}{H(z|\Omega_B, \Omega_{DM}, \Omega_\phi, w_0)}, \quad (5.8)$$

Assim, utilizando a expressão obtida em (5.6), além de (5.8) e (5.7), obtemos o valor de  $\Theta_A$  em função dos parâmetros cosmológicos,  $\Omega_{DM}$ ,  $w_0$  e  $\delta$ , no caso do nosso modelo, com acoplamento e equação de estado constante. Por outro lado, como colocado no início desta seção, o valor de  $\Theta_A$  pode ser obtido, de forma razoavelmente independente do modelo cosmológico, da posição do primeiro pico do espectro das anisotropias na RCF.

Em [8] é obtido, a partir dos dados do terceiro ano do WMAP, o valor  $\Theta_A = 0.595(2)$ . A função verossimilhança deste valor é portanto uma gaussiana centrada em  $\Theta_A = 0.595$  e com desvio padrão  $\sigma = 0.002$ . Considerando f.d.p. a priori constante em todos os parâmetros e em  $\Theta_A$ , a função densidade de probabilidade a posteriori é dada por

$$f(\Omega_{DM}, w_0, \delta | \Theta_A = 0.595) = e^{-\frac{(\Theta_A(\Omega_{DM}, w_0, \delta) - 0.595)^2}{2 \times 0.002^2}}.$$

De forma análoga ao procedimento utilizado na obtenção de estimativas a partir dos dados de SNIa, obtivemos os intervalos de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  utilizando a f.d.p. a posteriori obtida. Os intervalos de 99% de confiança, para os diferentes valores de  $\delta$ , podem ser vistos nas figuras 5.14 e 5.15 abaixo, em conjunto com os mesmos intervalos obtidos utilizando os dados do grupo Ouro e SNLS, respectivamente.

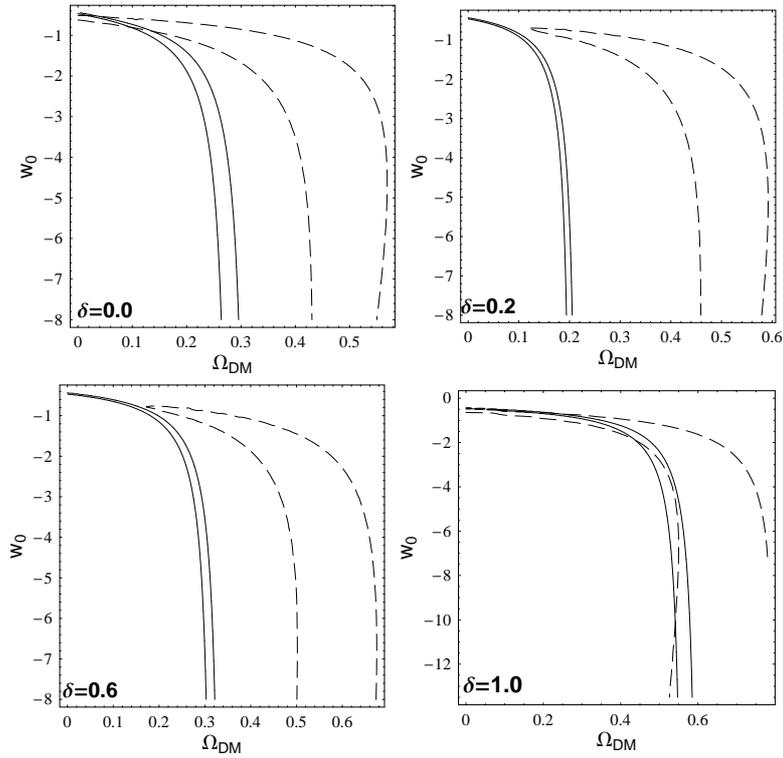


Fig. 5.14: Intervalos de 99% de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  obtidos utilizando os dados do grupo Ouro, e f.d.p. a priori constante, em linha tracejada, e o valor para  $\Theta_A$  obtido a partir dos dados do 3º ano do satélite WMAP, reportado em [8], em linha contínua, para os diferentes valores de  $\delta$ .

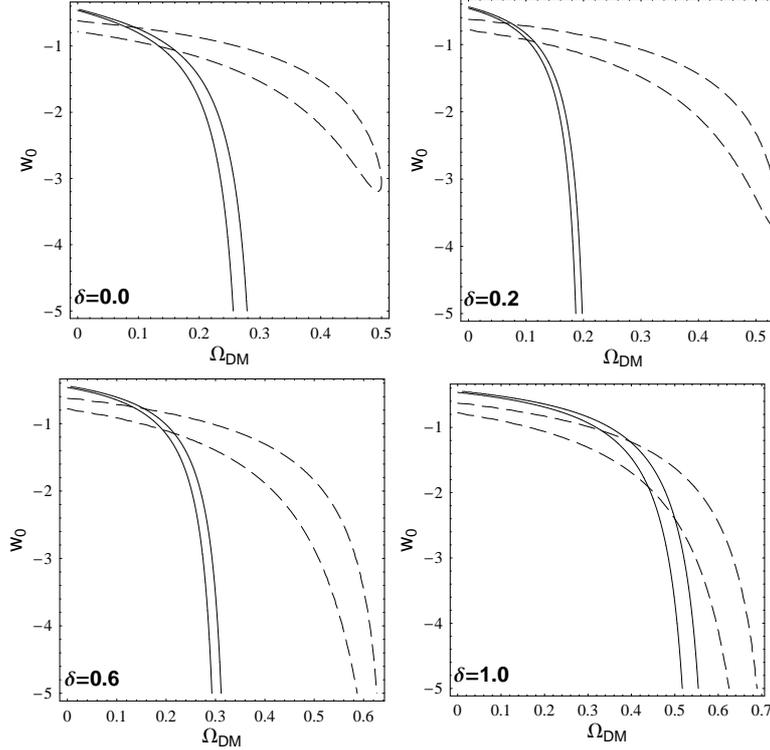


Fig. 5.15: *Intervalos de 99% de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  obtidos utilizando os dados do SNLS e f.d.p. a priori constante, em linha tracejada, e o valor para  $\Theta_A$  obtido a partir dos dados do 3º ano do satélite WMAP, reportado em [8], em linha contínua, para os diferentes valores de  $\delta$ .*

Consideremos inicialmente os resultados obtidos a partir do valor de  $\Theta_A$  em comparação com os provenientes dos dados do grupo Ouro, mostrados a figura 5.14. Neste caso, o acoplamento parece eliminar a tensão existente entre os intervalos de confiança resultantes das medidas de supernovas e da radiação cósmica de fundo, especialmente no caso  $\delta = 1.0$ . Assim, ele torna compatível com tais observações um universo com valores mais elevados do parâmetro de densidade de matéria,  $\Omega_{DM} \approx 0.6$ . É interessante notar que, para  $\delta = 0.2$ , o intervalo de confiança resultante do valor de  $\Theta_A$  se desloca para valores menores de  $\Omega_{DM}$ , e inicia a deslocar-se para valores mais altos de  $\Omega_{DM}$  para maiores valores de  $\delta$ .

No caso dos resultados obtidos com os dados do SNLS, já para  $\delta = 0$  há uma estreita região de compatibilidade entre os intervalos de confiança obtidos a partir destes últimos e do valor de  $\Theta_A$ . Com a inserção e o aumento do acoplamento, tal região vai se deslocando para valores maiores de  $\Omega_{DM}$ , conforme tendência geral dos intervalos de confiança, como observado nos outros intervalos obtidos. Além disso, para  $\delta = 1.0$  há uma maior região de compatibilidade, mais uma vez indicando que, para este valor, há uma maior compatibilidade entre as duas observações do que no caso de matéria e energia escuras desacopladas.

A comparação feita acima no entanto é bastante limitada. Podemos ver nos gráficos que o intervalo de confiança obtido utilizando o valor de  $\Theta_A$  é excessivamente estreito e alongado. Acreditamos que tais características com certeza não são representativas da precisão obtida, mas sejam resultantes do fato de estarmos utilizando apenas um único

valor para estimar os dois parâmetros. Desta forma, a degenerescência entre  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  faz com que, para qualquer valor de  $w_0$ , haja um valor para  $\Omega_{DM}$  que resulte na estimativa obtida para  $\Theta_A$ .

Podemos notar também que o intervalo de confiança obtido para  $\delta = 0$  apresenta, próximo à região com  $w_0 \approx -1$ ,  $\Omega_{DM} \approx 0.1$ , valor bem menor que as estimativas para o parâmetro de densidade de matéria escura num modelo  $\Lambda$ CDM, obtidas a partir do ajuste do espectro de potências das anisotropias da RCF feito pelo grupo do WMAP, que, conforme [14] assumem o valor  $\Omega_{DM} = 0.237(34)$ . O sentido da correlação entre  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  apresentada, que leva a valores mais negativos para  $w_0$  quando aumentamos o valor de  $\Omega_{DM}$ , é oposto ao observado nos intervalos de confiança obtidos a partir do ajuste de todo o espectro, como os mostrados na figura 5.16. Nesta figura vemos também os intervalos de confiança obtidos em [8] considerando conjuntamente os dados de RCF e do SNLS, que ocupam uma região bem mais limitada do espaço de parâmetros. Isto ocorre devido às diferentes correlações entre  $\Omega_{DM}$  e  $w_0$  apresentadas pelos dois conjuntos de dados.

Tais questões tornam a comparação feita bastante limitada. Além da subestimação dos valores de  $\Omega_{DM}$ , a diferença na correlação dos intervalos de confiança indica que uma comparação com os resultados obtidos a partir da análise completa dos dados da radiação cósmica de fundo pode apresentar comportamento bastante diferente, no que diz respeito às regiões de compatibilidade entre estes e os intervalos obtidos a partir de supernovas Ia, assim como o comportamento destas no espaço de parâmetros em função do valor de  $\delta$ . Assim, o efeito do acoplamento proposto sobre a compatibilidade das duas observações permanece em aberto, sendo necessária a análise completa do espectro de potências das anisotropias na RCF para uma conclusão a respeito.

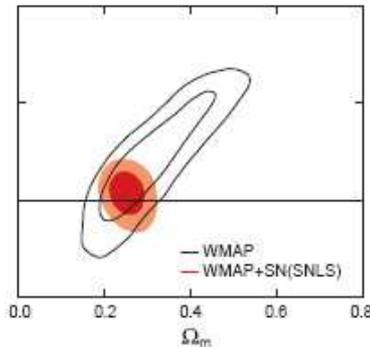


Fig. 5.16: Intervalos de 65% e 95% de confiança no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  obtidos em [8], a partir do 3º ano do WMAP, considerando um universo plano e equação de estado para a energia escura constante. Figura extraída de [8].

## 6. DISCUSSÃO FINAL

A partir dos resultados e discussões apresentadas neste trabalho, podemos destacar alguns pontos e obter algumas conclusões no que diz respeito não só ao efeito do acoplamento entre matéria e energia escura sobre as estimativas de parâmetros cosmológicos realizadas, como era o objetivo inicial do trabalho, mas também sobre questões que dizem respeito à estimativa de parâmetros cosmológicos em geral, e em especial as dificuldades inerentes a esta tarefa, com algumas das quais nos deparamos ao longo deste trabalho. Em primeiro lugar, tais estimativas são altamente dependentes do modelo considerado. Antes mesmo das estimativas em si, a definição dos próprios parâmetros que devem ser ajustados já depende do modelo utilizado. Além disso, mesmo considerando modelos usuais, que propõem um universo FRW, com equações de Einstein e de Friedmann padrão, composto por matéria, radiação e energia escura, e resultam portanto num conjunto bastante semelhante de parâmetros a serem estimados, os valores obtidos dependem das variações do modelo estudado, como, por exemplo, parametrização para a equação de estado da energia escura, variabilidade ou não dela, a existência ou não de acoplamento, entre outras.

Esta dependência dificulta não só a comparação entre estimativas obtidas na literatura, provenientes das mesmas ou de diferentes observações, como no caso da impossibilidade de compararmos nossos resultados para o modelo com acoplamento diretamente com os obtidos pela colaboração do WMAP, mas também a seleção de quais modelos se adequam mais ou menos ao universo observado e quais os valores assumidos de fato pelos parâmetros cosmológicos de interesse. Isso porque, conforme o modelo a partir do qual o observarmos, tais observações podem levar a valores de parâmetros e comportamentos diferentes. Assim, quando consideramos um determinado modelo e ajustamos os valores dos parâmetros envolvidos, obtemos valores assumidos por tais parâmetros caso o universo seja da forma suposta pelo modelo utilizado. É possível que, utilizando um outro modelo alternativo, consigamos ajustar as observações com a mesma precisão e qualidade de ajuste, resultando em valores diferentes para os parâmetros estimados.

Além desta dependência, foi presente em nosso trabalho, sempre que realizamos estimativas simultâneas de mais de um parâmetro, a degenerescência e correlação entre os valores destes. Isto faz com que, para um região extensa de valores para  $\Omega_{DM}$ , por exemplo, haja valores de  $w_0$  e  $w_1$  que ajustem os dados observacionais. Como vimos, por exemplo, no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$ , os intervalos de confiança são extensos e possuem dispersão e degenerescência tal que acabam permitindo uma larga faixa de valores tanto para  $w_0$  quanto para  $\Omega_{DM}$ . Acreditamos que tal característica é fruto não só da limitação dos dados utilizados, mas também da correlação entre os dois parâmetros em questão. Mostra disso é que, com a utilização da f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$ , houve uma redução bastante grande da região do espaço de parâmetros ocupada pelos intervalos de confiança, aumentando bastante a precisão dos resultados obtidos para o valor de  $w_0$ . Além disso, em especial no caso dos dados do grupo Ouro, a alteração nos valores obtidos para  $w_0$  foi bastante grande: no caso sem acoplamento, por exemplo, utilizando f.d.p. a priori constante

obtivemos  $w_0 = -2.6_{-2.1}^{+1.2}$ , enquanto que utilizando f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$  foi obtido  $w_0 = -1.20_{-0.23}^{+0.21}$ . Isto mostra que a determinação precisa de um dos parâmetros cosmológicos em questão, independente do valor dos demais, tem papel bastante importante na determinação do conjunto de parâmetros de interesse. Desta forma, é importante a obtenção de estimativas independentes de um deles.

Frente à estas questões, se torna também importante a obtenção de observações provenientes de diferentes fontes e grandezas observáveis, que dependam de forma distinta dos diferentes parâmetros de interesse. Com base nesta diversidade de observações, certamente um dos principais critérios tanto para seleção de modelos cosmológicos, ou, mais especificamente, de energia escura, quanto para a adoção de um determinado conjunto de valores para os parâmetros envolvidos, é que o modelo ajuste o maior número de observações utilizando o mesmo conjunto de valores.

O cruzamento de testes observacionais independentes, em especial aqueles que possuam correlação oposta, adquire especial importância para que limitemos a região do espaço de parâmetros permitida, através da superposição de intervalos de confiança, restringindo mais intensamente a região permitida. Isto é feito atualmente com os dados de supernovas e RCF. Podemos ver na figura 5.16 como de fato os intervalos de confiança se tornam bem mais limitados ao combinarmos os dois conjuntos de dados.

Tais questões se aplicam diretamente ao que hoje é um dos grandes desafios da cosmologia moderna e o pano de fundo deste trabalho: a resolução do problema da aceleração cósmica e da “energia faltante”, e a determinação da origem e das propriedades da energia escura, assim como do modelo que melhor a descreve. Neste cenário, é de fundamental importância a obtenção de novos dados, provenientes de diferentes observações, que auxiliem nesta tarefa e possibilitem de fato a seleção dos diversos modelos presentes na literatura. Atualmente, devido às questões levantadas acima e limitação do número de observações, os vínculos observacionais impostos aos modelos de energia escura presentes na literatura não são, na maioria deles, fortes o suficiente para descartar totalmente um modelo, ou selecionar apenas um de forma definitiva. O número crescente de observações no entanto caminha neste sentido.

Em vista destas questões, presentes de uma forma geral neste trabalho, podemos agora discutir mais especificamente os resultados por nós obtidos.

Um ponto que salta aos olhos no caso das estimativas realizadas com f.d.p. a priori constante é a discrepância entre os dois principais conjuntos de dados de supernovas Ia presentes na literatura, por nós utilizados. Como colocado no início do capítulo 3 e mostrado no capítulo 5, os dados do grupo Ouro apresentam uma tensão com relação às estimativas obtidas pelo WMAP, indicando valores maiores para  $\Omega_{DM}$  e mais negativos da equação de estado da energia escura. Como vimos, tal tensão desaparece no caso dos dados do SNLS, cujos resultados são bastante distintos dos do grupo Ouro. Embora ambos apresentem o mesmo sentido da correlação, e uma cauda para valores negativos de  $w_0$ , que ocorre para valores mais elevados de  $\Omega_{DM}$ , os dados do SNLS indicam sistematicamente valores menos negativos para  $w_0$  e menores para  $\Omega_{DM}$  do que os do grupo Ouro. Os valores para  $\Omega_{DM}$  obtidos a partir dos dados do SNLS também são maiores que os obtidos a partir dos dados do WMAP, o que pode indicar uma sistemática superestimação deste valor pelos dados de supernovas com relação aos de RCF. No entanto, eles são compatíveis com estes últimos dentro do intervalo de confiança de 68%.

A discrepância sistemática entre os resultados dos dados do SNLS e do grupo Ouro parece indicar que de fato algum procedimento, seja na detecção, medida ou método de

ajuste de curvas utilizado nos dois grupos esteja causando tal diferença. A maior compatibilidade dos dados do SNLS com as estimativas do WMAP, pode refletir uma maior qualidade destes últimos em relação aos dados de grupo Ouro. É interessante notar que esta diferença está fortemente ligada, senão aos valores de  $\Omega_{DM}$  favorecidos pelos diferentes conjuntos de dados, ao deslocamento dos valores de  $w_0$  e  $\Omega_{DM}$  no espaço de parâmetros, seguindo a direção de correlação entre eles. Isso é notável pois, ao utilizarmos a f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$  a diferença entre os resultados provenientes dos dois conjuntos, como visto nas figuras 5.6, 5.8, 5.11, assim como entre os do grupo Ouro e do WMAP, desaparece. Ou seja, considerando os dados do grupo Ouro, se fixarmos o valor de  $\Omega_{DM} \approx 0.18$ , obtemos valores para  $w_0$  totalmente compatíveis com os obtidos dos dados do SNLS e do WMAP. Como visto nas figuras 5.1 e 5.3 e levando em conta os valores para  $\Omega_{DM}$  obtidos no caso do modelo  $\Lambda$ CDM, acreditamos que, caso utilizássemos uma f.d.p. a priori gaussiana em  $w_0$  centrada em  $w_0 \approx -1$ , o resultado seria análogo.

Pudemos verificar também como de fato as observações não excluem, quando não favorecem, modelos de energia do tipo *phantom*, especialmente os dados do grupo Ouro. Isto ocorre tanto no caso de equação de estado constante quanto no de equação de estado variável.

Quanto ao efeito do acoplamento proposto sobre as estimativas obtidas, vimos que ele varia bastante entre o caso em que utilizamos f.d.p. a priori constante e em que usamos f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$ . No primeiro, o acoplamento leva, tanto no caso de equação de estado constante como variável, ao aumento dos valores de  $\Omega_{DM}$  e à diminuição dos valores obtidos para  $w_0$ , acentuando ainda mais a tendência à energia escura do tipo *phantom*, especialmente no caso do grupo Ouro. Isto significa dizer que, caso o universo seja composto por uma componente de energia escura acoplada à matéria escura na forma proposta, ele é, segundo os dados de supernova Ia, compatível com um valor maior para o parâmetro de densidade de matéria escura e mais negativo para  $w_0$ , que chega, especialmente no caso do grupo Ouro, a valores bastante negativos, tais como o valor de melhor ajuste no caso  $\delta = 1.0$ ,  $w_0 = -10.59$ . Levando em conta o problema da ocorrência do *Big Rip*, assim como outras restrições a modelos do tipo *phantom*, tal comportamento não é desejado, e desfavorece a inserção do acoplamento.

Quando utilizamos a f.d.p. a priori gaussiana em  $\Omega_{DM}$ , este efeito é bastante reduzido, tanto no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  quanto no plano  $w_1 \times w_0$ . No primeiro, ele age no sentido contrário ao observado para f.d.p. a priori constante, e leva a valores menos negativos de  $w_0$ , portanto diminuindo a probabilidade de ocorrência de modelos do tipo *phantom*. Neste sentido, caso o valor do parâmetro de densidade  $\Omega_{DM}$  obtido pelo WMAP seja de fato o correto, o acoplamento proposto minimiza a tendência à energia escura *phantom*. Por outro lado, esta tendência não é muito acentuada, fazendo com que mesmo neste caso talvez o modelo considerado não apresente grandes vantagens com relação aos presentes na literatura. É importante ressaltar que este valor foi obtido pelo WMAP utilizando um modelo  $\Lambda$ CDM, e não o modelo com acoplamento considerado.

Devemos lembrar no entanto que, no caso de equação de estado variável, a ocorrência ou não do *Big Rip* depende não do valor de  $w_0$ , mas de  $w_{ef} = w_0 - w_1$ , o que dificulta a análise dos intervalos obtidos no plano  $w_0 \times \Omega_{DM}$  no que diz respeito à esta questão. No entanto, mesmo considerando o menor valor possível para  $w_1$ , -8, o valor de melhor ajuste para  $w_0$  obtido no caso  $\delta = 1.0$  a partir dos dados do grupo Ouro,  $w_0 = -10.63$  continua levando a  $w_{ef} < -1$  e portanto à ocorrência do *Big Rip*.

No que diz respeito ao efeito do acoplamento à compatibilidade ou não dos resultados

obtidos a partir dos dados de supernovas Ia e da radiação cósmica de fundo, foi feita apenas uma comparação bastante simplificada. Também nas estimativas feitas utilizando os dados do WMAP, a inserção do acoplamento leva, a partir de  $\delta = 0.2$ , ao aumento de  $\Omega_{DM}$ , fazendo com que o acoplamento proposto aumente a compatibilidade e diminua a tensão entre os resultados dos dados do grupo Ouro e da RCF. Além disso, eles indicam que, caso haja de fato o acoplamento entre matéria e energia escura na forma proposta, o universo observado é compatível com valores maiores de  $\Omega_{DM}$ . No entanto, como discutido no capítulo 5, a comparação realizada é por demais simplificada, sendo que os resultados obtidos a partir somente do valor de  $\Theta_A$  apresentam diferenças consideráveis em relação aos resultados obtidos pela colaboração do WMAP, a partir da análise de todo o espectro de potências das anisotropias da RCF, mostrados na figura 3.3(b). Assim, para uma comparação conclusiva com os dados de RCF, é necessária a realização do ajuste dos dados do WMAP considerando todo o espectro de potências e o modelo considerado, ou ao menos uma estimativa mais refinada e utilizando um método mais adequado do que a aqui realizada. Ressaltemos mais uma vez, no entanto, que a compatibilidade mostrada entre os dados do WMAP e do SNLS, indica que talvez a tensão com os dados do grupo Ouro não esteja relacionada com questões maiores do modelo cosmológico utilizado, mas apenas das metodologias utilizadas no que diz respeito aos dados.

Por fim, é também de interesse cosmológico o valor do parâmetro  $w_1$ . Caso o componente de energia escura tenha equação de estado constante, deve-se obter  $w_1 = 0$ . Além disso, no caso  $w_1 \neq 0$ , seu valor indica o sinal da derivada de  $w_\phi$  com o *redshift*, e consequentemente está associado com a variação de  $w_\phi$  com o fator de escala. Desta forma, a determinação do valor de  $w_1$  tem papel importante na caracterização das propriedades do componente de energia escura e portanto, conforme expressão (3.15), pode dar pistas do formato da densidade lagrangeana deste. No entanto, não foi possível chegar à conclusões significativas a respeito dele. Enquanto os dados do SNLS apresentam valores compatíveis com  $w_1 = 0$  dentro do intervalo de 68% de confiança, que inclui valores positivos e negativos, os dados do grupo Ouro indicam fortemente valores positivos para  $w_1$ .

Independente do efeito que o acoplamento considerado teve sobre as estimativas dos parâmetros envolvidos, um estudo teórico do comportamento de tal modelo, e de um universo dominado por um componente de energia escura com estas propriedades é necessário.

Como discutido no capítulo 3, ele apresenta densidade de energia negativa para determinadas regiões do espaço de parâmetros. Considerando equação de estado constante, foi feita a caracterização destas regiões, especialmente das que integravam a região do espaço de parâmetros considerada, escolhida também de forma a minimizar este problema. Nestes casos, vimos que tais intervalos de parâmetros estão bastante excluídos dos intervalos de 99% de confiança obtidos, e portanto não se colocam como possibilidades efetivas, segundo os dados utilizados. No caso de equação de estado variável no entanto, esta é uma questão ainda em aberto, sendo que mesmo a região considerada pode envolver conjuntos de valores dos parâmetros que levem à densidade de energia negativa. Assim, a determinação de quais as regiões do espaço de parâmetros que leva à existência de  $\rho_\phi < 0$  é de grande importância para a validade ou não do modelo considerado.

Outros elementos que devem ser estudados com mais atenção, são o comportamento do modelo no caso de equação de estado  $w_\phi < -1$ , e a compatibilidade deste ou não com o vínculo observacional da existência de uma época dominada por matéria, seguida pela era da energia escura. Tais questões permanecem em aberto especialmente para modelos com equação de estado variável. Neste caso, vimos que a densidade de energia escura

diverge no limite  $a \rightarrow \infty$  quando  $w_{ef} = w_0 - w_1 < -1$ . No entanto, devido à possibilidade de termos  $\Delta < -1$ , que de fato ocorre para alguns casos, a divergência pode ocorrer para valores negativos, o que não mais levaria ao *Big Rip*, mas implicaria em outras dificuldades do ponto de vista teórico e de interpretação da energia escura como um fluido. Em uma análise mais aprofundada desta questão, devemos levar em conta também a impossibilidade de modelos com um único campo escalar cruzarem a barreira *phantom*. Caso consideremos modelos deste tipo, portanto, não podemos associar a divergência à valores de  $w_0$  e  $w_1$  com  $w_0 > -1$  e  $w_{ef} < -1$ , visto que  $w_\phi$  não chegará a atingir o valor  $w_{ef}$ .

Ao utilizarmos as parametrizações propostas para a equação de estado e para o acoplamento, estamos supondo, implicitamente, a existência de uma ou mais lagrangeanas que levem a elas. É importante também verificar quais formatos de lagrangeanas realizam esta tarefa, de onde poderemos então obter propriedades deste eventual componente de energia escura. Tal tarefa se mostrará mais premente caso ambas as parametrizações se confirmem como descrições adequadas do universo observado.

No que diz respeito à parametrização utilizada para a equação de estado da energia escura, seria interessante realizar o ajuste de parâmetros considerando uma segunda parametrização, em especial a apresentada na expressão (3.38), que, pelo fato de não divergir para altos valores do *redshift*, poderia ser utilizada na comparação com os dados da RCF. Além disso, utilizando duas parametrizações distintas, poderíamos verificar também a influência da parametrização considerada sobre os resultados obtidos.

# APÊNDICE

## A. SUPERNOVAS IA COMO INDICADORES DE DISTÂNCIA

### I Alguns Tópicos Sobre Observações Astronômicas

#### *Sistemas de magnitudes*

Ao estudarmos os objetos celestes, é de fundamental importância sabermos quantificar a intensidade de luz proveniente deles. Na astronomia e astrofísica, isto é feito principalmente pelo que chamamos *magnitude*. A magnitude de um objeto está relacionada com a intensidade de luz emitida por ele e com o fluxo (energia por unidade de tempo) que chega até nós. Este conceito foi criado cerca de dois séculos antes de Cristo, por Hipparchos, para classificar as estrelas e objetos celestes conforme o brilho destes, quando observados da Terra. Na classificação de Hipparchos havia 6 magnitudes, sendo as mais brilhantes de primeira magnitude, de segunda magnitude as com brilho duas vezes menor e assim sucessivamente. Esta classificação era, no entanto, demasiadamente vaga e nada quantitativa ou objetiva. Atualmente temos definições operacionais e precisas de magnitude, sendo que a magnitude associada ao brilho de uma fonte quando observada da Terra é hoje chamada *magnitude aparente*, em contraposição à *magnitude absoluta* que veremos a seguir. As definições atuais, por razões de evolução histórica, foram criadas de modo a se adequar o máximo possível ao sistema de Hipparchos, sendo que uma estrela de maior magnitude possui brilho menor, de forma pouco intuitiva. Devido à época em que foi desenvolvida, a classificação de Hipparchos era baseada na observação a olho nu. A sensibilidade deste a uma fonte luminosa não é, no entanto, linear com o fluxo de luz dela proveniente, mas sim logarítmica. Assim, a diferença de magnitudes aparentes entre uma fonte com densidade de fluxo  $F_1$  e outra com densidade de fluxo  $F_2$  é dada por

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log \frac{F_2}{F_1}. \quad (\text{A.1})$$

A definição da magnitude aparente de um único objeto é feita fixando-se um ponto zero para a escala de magnitudes. Ou seja: é considerada como tendo magnitude aparente zero uma fonte com uma determinada densidade de fluxo  $F_0$ . Assim, temos

$$m = -2.5 \log \frac{F}{F_0} = -2.5 \log F + \beta, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\beta$  é uma constante ligada a densidade de fluxo de referência escolhida.

Quando utilizou o termo magnitude pela primeira vez, Hipparchos com certeza se referia ao brilho na região do visível. Atualmente, sabemos que os objetos celestes emitem luz nas mais diferentes frequências. Na maioria das vezes as observações são mediadas por filtros, e portanto medimos apenas a radiação em um determinado intervalo de frequência, conforme o filtro e aparelho utilizado. Para padronizar as observações feitas, são definidos alguns intervalos de comprimento de onda preferenciais para observação, associados aos

diferentes filtros. Tais intervalos são chamados *bandas*. Em cada banda temos um fluxo de referência diferente, e portanto um determinado valor para  $\beta$ . A um determinado conjunto de bandas, cada uma com o respectivo valor para  $\beta$ , chamamos *sistema de magnitudes*. O mais conhecido deles, e ao qual nos referimos neste trabalho, é o de Johnson. Inicialmente composto pelas bandas U, na região do ultravioleta, B, na região do azul e V, na região do visível, ele foi posteriormente estendido, incluindo as bandas R, na região do vermelho (frequências visíveis mais baixas), I, J, H e K, sendo estas últimas na região do infravermelho. A sensibilidade destas bandas aos diferentes comprimentos de onda pode ser vista na figura A.1.

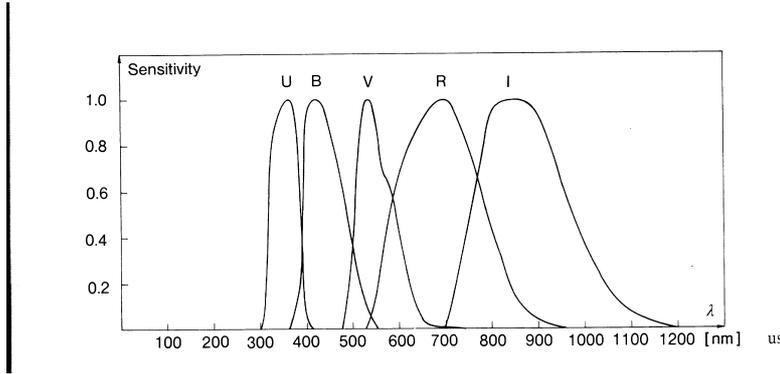


Fig. A.1: Formato das curvas de transmissão para os filtros correspondentes às diferentes bandas. Figura extraída de [51].

A cada uma destas magnitudes aparentes chamaremos  $m^i = m^B, m^V, m^R, \dots$ , conforme a banda correspondente. Para cada um destes casos temos

$$m^i = -2.5 \log F^i + \beta^i, \quad (\text{A.3})$$

onde  $F^i$  e  $\beta^i$  são, respectivamente, a densidade de fluxo do objeto e a constante associada à magnitude de ponto zero na banda  $i$ .

A magnitude aparente de um objeto, como dito acima, está relacionada com o fluxo de radiação medido por um determinado observador, posicionado a uma determinada distância da fonte. No entanto, muitas vezes é necessária uma medida do brilho ou luminosidade intrínseca do objeto. Esta é dada pela *magnitude absoluta*,  $M$ , que é, por definição, a magnitude aparente que o objeto teria caso estivesse a 10 Parsecs (Pc) de nós, ou caso estivesse sendo observado por um observador a 10 Pc dele. Assim, dois objetos com a mesma luminosidade terão a mesma magnitude absoluta, independentemente de sua distância, o que não ocorre com a magnitude aparente. Assim como no caso das magnitudes aparentes, podemos falar em diferentes magnitudes absolutas para uma mesma fonte, cada uma associada a uma banda, sendo que designaremos cada uma delas, analogamente ao caso das magnitudes aparentes, por  $M^i = M^B, M^U, M^V, \dots$ . Considerando o caso de uma fonte com emissão esféricamente simétrica, vale a relação (2.28), e temos para cada banda:

$$M^i = -2.5 \log \frac{L^i}{4\pi 10^2} + \beta^i = -2.5 \log L^i + \gamma^i, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\gamma^i = +2.5 \log 4\pi + 5 + \beta^i$ .

A partir da expressão (A.4) e de (A.2) podemos definir o chamado *módulo de distância* de um determinado objeto, dado por

$$\mu \equiv m^i - M^i = 5 \log \frac{d_L}{P_c} - 5, \quad (\text{A.5})$$

Note que  $\mu$  ele independe da banda considerada.

Diferentes escalas de distância utilizadas implicarão em diferentes valores para constante do lado direito da relação (A.7). Assim, numa escala de distância arbitrária temos

$$m - M = 5 \log d_L + \alpha, \quad (\text{A.6})$$

onde,  $d_L$  se encontra na escala considerada. Lembremos que o valor de  $\alpha$  varia conforme a escala escolhida. É frequente encontrarmos a expressão acima na forma apresentada em (A.5) a seguir, na qual a distância é dada em MPc.

$$\mu = 5 \log d_L - 25. \quad (\text{A.7})$$

### *Cores e Extinção*

Conforme exposto acima, a luz emitida pelos objetos celestes possui um espectro contínuo de frequências, fazendo com que possamos observá-los em diversas bandas. Os processos físicos neles envolvidos determinam qual será a distribuição do espectro, ou seja, qual a intensidade de luz emitida em cada comprimento de onda. Da mesma forma como o que chamamos de cor para um objeto, podemos definir índices de cor para um objeto celeste emissor. Eles são dados pela diferença entre a magnitude de tal objeto em duas diferentes bandas. Para um mesmo objeto podem ser definidos diferentes índices de cor, conforme as duas bandas consideradas. Alguns frequentemente utilizados são  $c_{B-V} = B - V$ ,  $c_{V-R} = V - R$ ,  $c_{R-I} = R - I$ , onde B, V, R e I são as magnitudes nas respectivas bandas. Um objeto de aspecto avermelhado, por exemplo, terá um índice de cor  $B - V$  bastante alto.

Devido ao fato da densidade de fluxo diminuir com  $d_L^{-2}$  independentemente da frequência, o índice de cor pode ser calculado utilizando tanto as magnitudes absolutas  $M^i$  de um objeto quanto as aparentes  $m^i$ , obtendo-se o mesmo resultado, a menos de efeitos devidos à extinção, como veremos a seguir. É importante lembrar que diferentes bandas possuem diferentes magnitudes de ponto zero, fazendo com que o ponto zero de cada índice de cor dependa do sistema de magnitudes considerado e não necessariamente corresponda a fluxos iguais nas duas bandas envolvidas. Neste trabalho, denominaremos  $c_{i-j}$  o índice de cor envolvendo as bandas  $i$  e  $j$ .

Ao observarmos um objeto celeste, frequentemente a luz por ele emitida passa por nuvens de poeira interestelar antes de chegar até nós, que absorvem parte da luz, reduzindo o fluxo em relação ao que seria detectado na ausência de poeira. A absorção ocorre com intensidade diferente para cada frequência, conforme a composição e características do meio atravessado. Desta forma, a relação (A.7) pode ser escrita na forma

$$m_i - M_i = 5 \log d_L - 25 + A_i, \quad (\text{A.8})$$

onde  $A_i$  é a magnitude associada à luminosidade que foi absorvida. Ao realizarmos o tratamento de dados observacionais, ela pode ser considerada explicitamente, como na equação acima, ou ser aplicada como correção aos dados, alterando o valor de  $m^i$ .

Para que tenhamos acesso ao fluxo que chegaria até aqui na ausência de poeira, a partir do qual possamos utilizar as equações (A.3) e (A.7), é necessária a obtenção do valor de  $A_i$ , para que seja feita a correção explicitada acima.

Devido ao fato da absorção variar com a banda/frequência, esta causará também a alteração dos índices de cor observados, que é caracterizada pelo excesso de cor, dado por

$$E_{i-j} = c_{i-j}^{obs} - c_{i-j}^0, \quad (\text{A.9})$$

onde o superescrito *obs* diz respeito ao índice observado e 0 ao índice de cor intrínseco à estrela, sem os efeitos da extinção. A magnitude absoluta está ligada à luminosidade intrínseca e portanto não é afetada pela extinção, sendo considerado o fluxo detectado a uma distância de  $10\text{Mpc}$  da estrela, em não havendo absorção. Desta forma, o índice de cor observado  $c^{obs}$  deve ser calculado utilizando as magnitudes aparentes. O índice  $c^0$  pode ser entendido como a diferença entre as magnitudes absolutas,  $M^i$  ou entre as aparentes que seriam observadas na ausência de poeira,  $m_0^i$  equivalentemente. Neste trabalho, utilizaremos a segunda notação,  $c^0 = m_0^i - m_0^j = (m^i - m^j)_0$ . Consideremos, por exemplo o índice de cor  $c_{B-V}$ . Conforme (A.7) temos

$$\begin{aligned} m_{obs}^B &= M^B + A_B + 5 \log d_L - 25, \\ m_0^B &= M^B + 5 \log d_L - 25, \\ m_{obs}^V &= M^V + A_V + 5 \log d_L - 25, \\ m_0^V &= M^V + 5 \log d_L - 25, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$E_{B-V} = A_B - A_V, \quad (\text{A.10})$$

que vale para bandas quaisquer na forma

$$E_{i-j} = A_i - A_j. \quad (\text{A.11})$$

A razão entre a absorção em duas diferentes bandas depende, como já colocado, das características do meio atravessado, tais como tamanho dos grãos de poeira, composição e distribuição espacial destes. Ela é caracterizada pela chamada *lei de extinção*, dada na forma

$$\frac{A_\lambda}{A_V} = F(\lambda) \quad (\text{A.12})$$

A partir desta lei e de (A.11), obtemos:

$$E_{i-j} = [F(\lambda_i) - F(\lambda_j)] A_V, \quad (\text{A.13})$$

que, no caso da banda B resulta em

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} = \frac{1}{F(\lambda_B) - 1} \equiv R_V \quad (\text{A.14})$$

Frequentemente, a curva de extinção galáctica é parametrizada por  $R_V$ , fazendo com que ela seja caracterizada por ele.

Existem trabalhos que visam compreender e obter a lei de extinção, assim como modelar a absorção da luz por poeira cósmica, tanto em nossa como em outras galáxias. Estes indicam a variação desta lei não só de uma galáxia para outra mas entre diferentes linhas de visada dentro de nossa galáxia, que pode ser implementada pela variação do valor de  $R_V$ . Por intermédio de estudos feitos na Via Láctea é possível obter uma lei de extinção média para ela, caracterizada por  $R_V \approx 3.1$ . Na figura A.2 vemos o formato esquemático da lei de extinção na nossa galáxia.

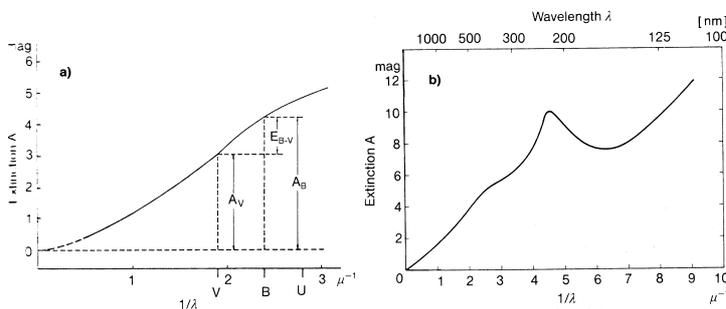


Fig. A.2: Lei de extinção média ( $R_V = 3.1$ ) para nossa galáxia, a menos da normalização para  $A_V$ . Figura extraída de [51]

Como vemos na figura acima, a extinção na Via Láctea diminui com o comprimento de onda. Em especial na região do visível, ela é maior na região do azul (banda B) do que na do vermelho. Isto gera o avermelhamento da luz das estrelas devido à extinção.

Através das relações (A.12), (A.13) e de estudos observacionais a respeito da extinção, é possível, ao menos na nossa galáxia, usar medidas do excesso de cor de uma fonte para estimar a extinção sofrida por sua luz. Atualmente, estimativas do excesso de cor causado à luz de um objeto pela absorção dentro da Via Láctea podem ser obtidas utilizando mapas de extinção galáctica, como [52], e as relações acima.

Ao estudarmos objetos extragalácticos, como é o caso da maioria das SNIa, devemos corrigir tanto a extinção na nossa galáxia quanto na galáxia hospedeira. Por depender do meio, a lei de extinção (em especial o valor de  $R_V$ ), e conseqüentemente as relações numéricas entre  $E_{i-j}$  e  $A_i$  podem variar de uma galáxia para outra, o que faz com que não possamos a rigor utilizá-las para a correção de toda a extinção sofrida pela luz do objeto. Esta questão é fonte de discussão atual, existindo diferentes abordagens do problema, que permeiam os estudos observacionais de SN que serão utilizados neste trabalho.

### Redshift Cosmológico e Correção K

Ao observarmos a luz emitida por um objeto celeste, devemos levar em conta o *redshift* cosmológico, que leva ao deslocamento não linear das linhas espectrais. Um fóton detetado

com  $\lambda = \lambda_1$ , está associado ao comprimento de onda com o qual ele foi emitido (no referencial da estrela),  $\lambda_{em} = \frac{\lambda_1}{1+z}$ . Isto faz com que, ao nos referirmos a uma determinada banda, tenhamos que explicitar se nos referimos ao referencial de repouso (fótons que foram emitidos naquele intervalo de frequência), ou no referencial do observador (fótons que foram detectados naquele intervalo).

Além disso, observações feitas em uma determinada banda são mediadas por um filtro caracterizado pela função de transmissão  $T(\lambda)$ , no referencial do observador, e devem ser corrigidas para que seja obtido o fluxo que chega até nós e foi realmente emitido nesta banda, no referencial de repouso. Estas correções são chamadas *correções K*.

Para *redshifts* pequenos são necessárias apenas pequenas correções, pois o deslocamento das linhas espectrais/bandas é pequeno, e os comprimentos de onda centrais de cada banda não se deslocam o suficiente para serem detectados em outra banda. Neste caso são utilizadas correções K na forma (A.15). Para *redshifts* mais altos o deslocamento das linhas pode ser tal que um fóton emitido com o comprimento de onda central de uma determinada banda seja detectado em outra banda. Nestes casos é utilizada a chamada correção K de filtros cruzados, dada por (A.16), e cuja visualização pode ser feita na figura A.3. Para  $z=0.45$ , por exemplo, a região da banda R no nosso referencial corresponde à região da banda B no referencial da estrela. As correções K dependem do espectro da fonte, e normalmente são calculadas utilizando espectros médios, [53, 54, 55].

$$m_{kcorr}^i = m^i + K_i \quad (\text{A.15})$$

$$m_{kcorr}^i = m^j + K_{ij} \quad (\text{A.16})$$

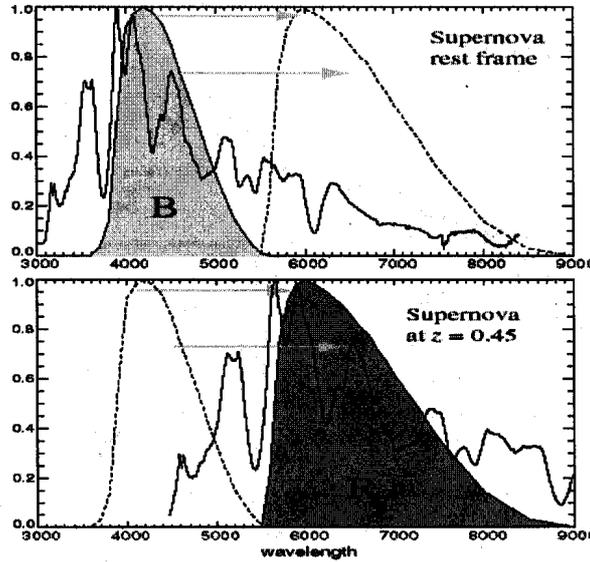


Fig. A.3: Visualização esquemática do efeito do redshift cosmológico sobre o fluxo detectado através de um filtro. No caso  $z = 0.45$  o comprimento de onda central da banda B no referencial de repouso da estrela pertence à banda R no referencial de observação. Devido à dilatação do comprimento de onda dos fótons e à diferença no formato da função de transmissão das diferentes bandas, é necessária a utilização das correções K. Figura extraída de [53]

## I.1 O uso de supernovas Ia como indicadores de distância.

A primeira supernova (SN) registrada pelo homem foi observada pelos chineses em 1054. Certamente os observadores daquela época não deram ao evento a mesma explicação que damos hoje, e a descrição utilizada foi a do aparecimento de uma nova estrela no céu. É exatamente este efeito aparente, o surgimento de uma nova estrela, que levou aos nomes *nova* e *supernova*, para os respectivos objetos celestes, sendo os segundos bem mais brilhantes que os primeiros, e por isso o prefixo *super*.

Supernovas são grandes explosões que ocorrem no final do processo de evolução de estrelas massivas, ou em sistemas binários com a presença de anãs brancas.

Para obter informações observacionais a respeito de tais objetos, dispomos de medidas fotométricas e espectrais. As fotométricas fazem com que consigamos reconstruir a chamada *curva de luz* da supernova. Por se tratar de um evento transiente, as magnitudes absolutas e aparentes de uma SN variam com o tempo, ao longo do processo de explosão. Assim, na sua observação, o evento é acompanhado por telescópios de forma que meçamos a magnitude aparente em diferentes momentos. A partir destas observações é reconstruída a curva de luz de uma SN, ou seja, a curva da magnitude aparente em função do tempo. É importante lembrar que, como discutido na seção I.1, na qual tratamos do *redshift* cosmológico, existe uma diferença entre a escala temporal associada à emissão dos fótons e a escala de detecção, o que gera a necessidade de correção do tempo medido na detecção para o de emissão, na estrela, na forma  $t_{SN} = \frac{t_{obs}}{1+z}$ , que deve ser considerada no ajuste das curvas. As SN possuem curvas de luz diferentes para cada banda. Frequentemente são obtidas curvas de luz na banda B, V, R e I, no referencial de repouso da estrela. Como exemplo, podemos ver na figura (A.4) as curvas de luz da supernova SN2001el. Todas elas apresentam um crescimento inicial da luminosidade até atingir um máximo  $m_{max}^i$ , em  $t_{max}^i$ , respectivo à curva de luz na banda  $i$ , e após iniciam a queda.

A partir da obtenção das curvas de luz em diferentes bandas, podemos obter também os índices de cor da SN, assim como as curvas de cor (evolução de um determinado índice de cor com o tempo).

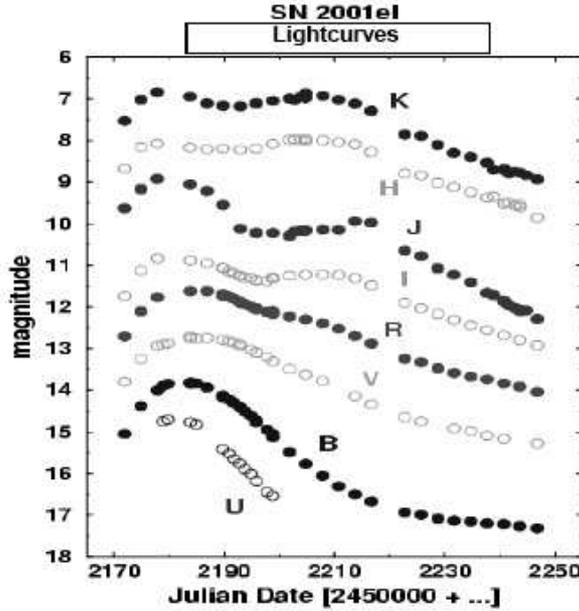


Fig. A.4: *Curvas de luz nas diferentes bandas da supernova Ia SN2001el. Figura extraída de [53]*

Outra forma de obter informações das supernovas é a partir de seu espectro. Ele se altera conforme a evolução da estrela, e portanto são tomados espectros em diferentes épocas desta, que apresentam características diferentes. O espectro da SN pode nos fornecer informação não só a respeito de seu *redshift* como da composição da estrela e da velocidade de ejeção do material, além de ser necessário para o cálculo da correção K e ajudar na sua identificação e classificação.

### *Tipos de Supernovas*

Os processos que geram as explosões de Supernovas ainda não são totalmente compreendidos, mas, conforme as características e diferenças observacionais, que estão diretamente ligadas a eles, as supernovas são classificadas em diferentes grupos: Ia, Ib, Ic e II (IIL e IIP)

Supernovas do tipo I não possuem linhas de absorção de hidrogênio, e são explosões de estrelas localizadas em sistemas binários, geralmente sendo uma das estrelas uma anã branca e a outra uma gigante vermelha. Supernovas do tipo Ia são as mais brilhantes, apresentam fortes linhas de absorção de silício no espectro da época próxima ao máximo de luz e não apresentam linhas de hélio. Acredita-se que elas sejam explosões da anã branca do sistema binário, resultante do acréscimo de massa da companheira. Com o crescimento da gigante vermelha, sua massa começa a ser atraída gravitacionalmente pela anã branca, de forma lenta. Esta atração leva à transferência de massa da primeira para a segunda estrela que, ao atingir o limite de Chandrasekar de  $1.4 M_{\odot}$ , a partir do qual a anã branca deixa de ser estável, dá início a um processo de explosão, gerando a supernova. As supernovas do tipo Ia são as mais homogêneas e luminosas, o que as torna, como veremos, as mais úteis para observações cosmológicas.

Supernovas do tipo Ib apresentam, na época próxima ao máximo da luminosidade, fortes linhas de absorção de hélio, enquanto que as do tipo Ic apresentam linhas fracas de

hélio ou não as apresentam.

Supernovas do tipo II, ao contrário das do tipo I, não ocorrem em sistemas binários. Elas apresentam fortes linhas Lyman  $\alpha$  no espectro e não apresentam linhas de silício ou hélio. Tanto SN II quanto SN Ib e Ic são explosões de estrelas massivas nos estágios finais da evolução. A estabilidade de uma estrela da sequência principal é consequência do balanço entre a força gravitacional, que trabalha no sentido da contração da estrela, e a pressão no seu interior, gerada principalmente pela energia liberada no processo de fusão nuclear dos elementos presentes. O esgotamento dos elementos leves no núcleo da estrela ocorre num momento em que a temperatura ainda não é suficiente para fundir elementos mais pesados, fazendo com que a fusão cesse e levando à contração da estrela. Este processo gera o aumento da temperatura, que atinge o valor necessário para a fusão do hélio. Após o esgotamento deste, cessa a fusão novamente e ocorre o mesmo processo de contração e aquecimento, iniciando a fusão de elementos ainda mais pesados. Este processo continua até a criação do carbono ou ferro (conforme a massa da estrela), dos quais não ocorre mais a fusão. Ocorre então o colapso gravitacional da estrela, gerando a explosão da supernova. No caso das supernovas Ib e Ic a matéria das camadas superficiais da estrela é perdida anteriormente ao colapso, na maioria das vezes através da interação com a companheira no sistema binário, e não toma parte na explosão, o que explicaria a ausência de hidrogênio em seu espectro, enquanto que nas SN II, que não se encontram em sistemas binários, isso não ocorre.

As SNII são separadas em duas famílias, conforme sua curva de luz: SNIIP, cuja curva de luz apresenta um platô no declínio após o máximo, e as SNIIL, que não o apresentam. Em todos os casos de supernovas ocorre a ejeção de parte da matéria estelar, fazendo com que estes processos tenham grande importância na produção de elementos pesados no universo.

Até hoje foram observadas SNsIa em todos os tipos de galáxias, enquanto que as demais não são observadas em galáxias elípticas ou do tipo S0. Este fato, que não possui explicação ou limitação teórica, pode indicar uma relação entre o tipo de SN e a população estelar.

As características acima apresentadas são de fundamental importância na identificação de objetos observados como supernovas e na classificação destes. Devido à sua alta luminosidade, a explosão de uma supernova faz com que uma estrela que não era observada pelos nossos telescópios passe a ser detectada durante o processo de explosão. Assim, a procura por supernovas é feita através de mapeamentos do céu em diferentes épocas, buscando a presença de objetos novos. Após a detecção de uma série de candidatos, estes são classificados e identificados. Para a obtenção da medida do fluxo proveniente da supernova é feita a subtração do fluxo proveniente da galáxia hospedeira, medido na ausência da primeira. O *redshift* pode ser obtido a partir do deslocamento observado para as linhas espectrais da própria supernova, ou da galáxia hospedeira.

Como vimos no capítulo 2, as medidas de distâncias em escala cosmológica como função do *redshift* dependem fortemente dos parâmetros e modelos cosmológicos. Assim, torna-se de grande utilidade obtermos a distância até objetos com *redshift* conhecido, para podermos excluir e selecionar modelos cosmológicos, assim como estimar os parâmetros neles envolvidos. Um processo bastante frequente para obter tais medidas é utilizar as chamadas velas-padrão: classes de objetos cuja luminosidade seja igual para todos eles e conhecida, para que, através das relações (A.6) e (A.7) possamos inferir sua distância. Podem ser utilizados também objetos cuja luminosidade não seja igual para todos, mas passível de ser conhecida através da relação com alguma característica observável deste. É o caso por

exemplo das estrelas do tipo cefeidas, para as quais existe uma relação período de oscilação  $\times$  luminosidade que permite determinar a magnitude absoluta de cada uma delas, a partir da observação de seu período.

## II Supernovas Ia na cosmologia

Como visto no capítulo 2, as distâncias medidas no universo dependem fortemente do modelo cosmológico utilizado e dos valores dos respectivos parâmetros cosmológicos, e o uso de velas-padrão para medidas de distância tem grande potencial como métodos de estimação de parâmetros cosmológicos. Desde o início do estudo e observação de supernovas, estas têm sido consideradas possíveis velas padrão devido à sua homogeneidade e alta luminosidade. Inicialmente, o baixo conhecimento e a falta de observações destes eventos não possibilitava a distinção entre os diferentes grupos, fazendo com que fosse considerado o uso de supernovas quaisquer como vela-padrão. O progressivo aumento do conhecimento a respeito delas levou à distinção dos diferentes tipos descritos anteriormente, na metade dos anos 80. A partir desta época o foco desta busca por indicadores de distância foi as SNIa, por serem as mais brilhantes e mais uniformes dentre todos as classes destes objetos, sendo que sua luminosidade máxima equivale a aproximadamente 10 bilhões de Sóis, chegando a ser maior do que a de algumas das galáxias hospedeiras. Devido a esta intensa luminosidade, elas podem ser observadas em altos *redshifts*, configurando-se como bons candidatos ao uso em cosmologia. No entanto, SNs Ia são eventos muito raros (em uma galáxia típica ocorrem algumas a cada milênio) e transientes, sendo passíveis de observação durante cerca de apenas dois a três meses: 2 ou 3 semanas até atingirem seu máximo de luminosidade e um ou dois meses até seu fluxo diminuir abaixo do que podemos detectar com nossos melhores telescópios. Além disso, estes eventos ocorrem de forma aleatória no céu, e não é possível prever onde ocorrerá o próximo. Estas características dificultam a observação de um número grande de objetos, e assim também seu estudo e uso para obtenção de medidas de distâncias. Apesar das dificuldades acima levantadas, o uso de supernovas Ia é atualmente uma das principais formas de obtenção de medidas cosmológicas.

Assim como no caso das supernovas como um todo, a homogeneidade das SNIa, no que diz respeito à sua luminosidade, forma da curva de luz, cor e características espectrais, e, conseqüentemente, a possibilidade do uso destas na determinação de distâncias, foi polêmica desde a sua distinção dos demais tipos de SN.

A dificuldade de observação acima citada, assim como a baixa qualidade dos dados disponíveis e a falta de um modelo teórico que explicasse totalmente o processo envolvido em tais eventos dificultavam a conclusão a respeito.

### *Supernovas Ia como velas padrão.*

Inicialmente as SNIa foram utilizadas como velas-padrão. Neste cenário, a obtenção da distância até uma delas é relativamente simples, utilizando a relação (A.7). As correções  $K$  são calculadas utilizando um espectro padrão, e a extinção causada pela nossa galáxia pode ser obtida utilizando mapas de extinção galácticas disponíveis na literatura [52].

Para a obtenção da distância à qual uma supernova se encontra, podemos considerar a magnitude aparente em qualquer ponto da sua curva de luz cuja luminosidade seja conhecida. Por convenção, utilizam-se as magnitudes nas mais diversas bandas no tempo

$t = t_{maxB}$ , ou seja, o tempo no qual a curva de luz na banda B é máxima. A escala de tempo utilizada na descrição das curvas de luz/cor de uma supernova é a de dias. É comum utilizar-se como zero da escala  $t = t_{maxB} = 0$ .

A partir dos dados obtidos para as curvas de luz nas diferentes bandas é feito um ajuste para as curvas e determinado  $t_{maxB}$  e  $m_{maxB}^i = m^i(t_{maxB})$  para cada curva. Quando consideramos as SNs Ia como homogêneas e perfeitas velas padrão, tal ajuste pode ser feito utilizando um molde de curva médio. É chamado *molde* uma curva de luz ajustada utilizando dados de uma SN que possua uma boa amostragem na sua curva de luz, tanto no que diz respeito ao número de pontos antes e depois do máximo, para que a forma do pico seja bem caracterizada, quanto à precisão das medidas. Estes ajustes são frequentemente feitos utilizando funções diferentes para cada região da curva. Podem ser feitos moldes também a partir da combinação de dados de dois ou mais objetos semelhantes, ou moldes médios, a partir da média de diferentes moldes. Uma das formas de construção de moldes pode ser vista em [38], sendo que outras formas serão vistas mais adiante. A partir do momento em que temos um molde, ele pode ser utilizado para ajustar eventos com poucos dados, sem o qual o ajuste de uma curva seria impossível ou muito precário. O uso de moldes possibilita também um tratamento mais sistemático e coerente das curvas de luz observacionais.

Conhecendo-se  $m_{maxB}^i$  e  $M_{maxB}^i$ , obtém-se o módulo de distância, ou a distância de luminosidade a partir da relação (A.7).

O valor para  $M_{maxB}^i$  pode ser obtido utilizando um conjunto de supernovas Ia cujas distâncias sejam conhecidas através de outros métodos. A partir de  $m_{maxB}^i$  e desta distância calcula-se  $M_{maxB}^i$  para cada uma delas e obtém-se o valor geral através da média ou do ajuste de uma reta à relação (A.7), como mostrado no gráfico superior da figura (A.7).

### *SNIa como velas padronizáveis*

Com o aumento do número e qualidade das observações, foram sendo detectadas supernovas Ia cujas luminosidades, curvas de luz, índices de cor e espectros apresentavam variações consideráveis, indicando a não uniformidade de tais objetos e respectivas magnitudes absolutas. Como consequência, as distâncias calculadas via o procedimento descrito acima se mostravam imprecisas.

Um artigo de fundamental importância neste processo é [35], no qual são analisadas nove supernovas Ia, selecionadas de forma a excluir observações muito precárias ou imprecisas. Utilizando distâncias relativas destes objetos calculadas por métodos já conhecidos, e a magnitude aparente do máximo de cada uma das curvas de luz, Phillips obteve magnitudes absolutas  $M_{maxB}^i$  nas bandas B, V e I, que mostraram dispersão intrínseca considerável entre os valores obtidos, evidenciando sua variação entre diferentes objetos e mostrando que, de fato, as SNIa não constituem velas-padrão precisas.

No entanto, para nossa sorte, os mesmos artigos que indicaram a variação da luminosidade de supernovas Ia indicaram também a correlação entre esta e outras características observáveis de tais objetos, tais como o formato da curva de luz, índices de cor, características espectrais, a localização do segundo pico existente na curva da banda I, e em especial o ritmo de crescimento/queda da curva de luz antes/depois do máximo. Podemos ver na figura (A.5) como de fato isto ocorre: as SNs mais brilhantes apresentam declínio mais lento da curvas de luz, e as menos brilhantes apresentam declínio mais rápido. Esta relação, se bem calibrada, permite obter a magnitude absoluta de uma SNIa através do

formato de sua curva de luz, e assim determinar a distância até tal objeto, fazendo com que, apesar de não serem velas padrão, as supernovas do tipo Ia sejam *velas padronizáveis*. Como veremos mais adiante, há relação também entre a luminosidade e os índices de cor da SN, a qual atualmente também é utilizada na determinação de distâncias.

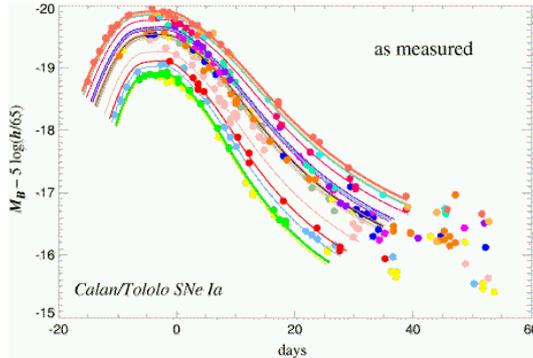


Fig. A.5: *Curvas de luz obtidas para as supernovas do Calán/Tololo Survey.*

Há na literatura alguns métodos diferentes para a determinação da luminosidade a partir da forma da curva de luz de uma SN. Na grande maioria deles, a relação ritmo de declínio da curva  $\times$  luminosidade é determinada utilizando-se supernovas mais próximas cujas distâncias relativas são conhecidas (conjunto de calibração), para que ela possa posteriormente ser aplicada a objetos com distância desconhecida. Para tal, é necessário parametrizar as curvas de luz, utilizando algum parâmetro que quantifique seu ritmo de crescimento e queda.

Já em [35], Phillips propõe um método e calibra uma relação curva de luz  $\times$  luminosidade. O ajuste das curvas é feito utilizando interpolação simples, sem utilização de moldes prévios. O parâmetro proposto para caracterizar a curva de luz é  $\Delta m_{15}$ , que é a diferença entre a magnitude aparente da curva na banda B no máximo desta e quinze dias depois deste. A partir das magnitudes absolutas em  $t_{maxB}$  em cada banda ( $M_{maxB}^i$ ) e  $\Delta m_{15}$  para cada estrela, obteve-se o gráfico mostrado na figura (A.6). Além de explicitar graficamente a inhomogeneidade das magnitudes absolutas, ele mostra a reta ajustada por Phillips, que define a relação linear  $M_{maxB}^i \times \Delta m_{15}$  conforme (A.17), sendo determinados os parâmetros  $a^i$  e  $b^i$ .

$$M_{maxB}^i = a^i + b^i \Delta m_{15}. \quad (\text{A.17})$$

Este método foi tomado como referência em parte dos trabalhos subsequentes que visavam desenvolver novos métodos de obtenção da magnitude absoluta de supernovas Ia, ou estimar parâmetros cosmológicos.

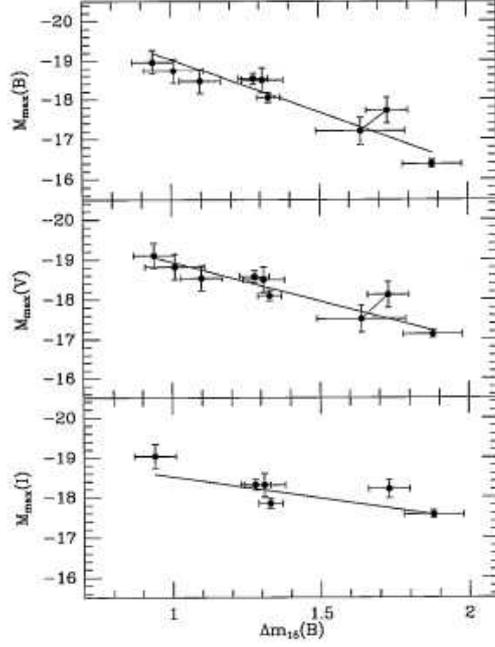


Fig. A.6: Gráfico com as magnitudes  $M_{maxB}^i$  das supernovas consideradas em [35], nas diferentes bandas, em função do parâmetro  $\Delta m_{15}$ . Vemos também as retas ajustadas. Figura extraída de [35].

#### Escala de distância, magnitudes absolutas e valores de $H_0$

Para estimar parâmetros cosmológicos, em princípio são necessárias medidas de distância absolutas de objetos com *redshift* conhecido. Devido à dependência logarítmica do módulo de distância com a distância de luminosidade, podemos, no entanto, realizar algumas manipulações de forma a contornar este problema, ao menos em parte, na calibração de uma relação  $M_{maxB}^i \times$  curva de luz.

O processo básico de calibração de tal relação se dá na forma a seguir. Utiliza-se um conjunto de supernovas cuja distância absoluta pode ser obtida por métodos alternativos, que não a relação (2.31), que chamaremos conjunto de calibração. De posse das curvas de luz, obtém-se o valor do parâmetro escolhido para caracterizar seu formato e o valor de  $m_{maxB}^i$ . A partir deste último e da distância do objeto, podemos calcular a magnitude absoluta  $M_{maxB}^i$  e ajustar uma relação entre seu valor e o parâmetro característico da curva de luz, no caso proposto em [35],  $\Delta m_{15}$ .

No entanto, podemos utilizar outra abordagem que prescinde de medidas de distância absoluta para os objetos do conjunto de calibração. Considerando a variação de  $M_{maxB}^i$  entre diferentes supernovas, podemos adotar uma notação conveniente, como feito no capítulo 4, na forma

$$M_{maxB}^i = \bar{M}^i + \Delta_i, \quad (\text{A.18})$$

que pode ser interpretada como a escolha de uma *supernova padrão* com magnitudes absolutas  $M_{maxB}^i = \bar{M}^i$ , à qual faremos correções  $\Delta^i$ . Como supernova padrão podemos escolher qualquer objeto, para o qual tenhamos as curvas de luz nas bandas de interesse. Pode ser escolhido inclusive um conjunto de moldes médios, composto por observações de

várias supernovas. Tal escolha possui um alto grau de arbitrariedade, contanto que, como veremos, trabalhemos com medidas relativas ao objeto padrão considerado.

Equivalentemente, o termo  $\Delta_i$  pode ser considerado não como uma correção nas magnitudes absolutas, mas nas magnitudes aparentes observadas, levando às mesmas relações. Tal notação é utilizada em alguns trabalhos da literatura.

Encontrar uma relação entre as curvas de luz e as magnitudes absolutas de uma supernova Ia se torna então encontrar uma relação entre o parâmetro característico da curva de luz e  $\Delta^i$  que, quando aplicada à supernova padrão, resultará em  $\Delta^i = 0$ . Considerando uma escala de distância arbitrária, podemos, utilizando a relação (A.6), escrever  $\Delta^i$  e  $\overline{M}^i$ , respectivamente, como

$$\Delta^i = m^i - \overline{M}^i - 5 \log d_L - \alpha, \quad (\text{A.19})$$

$$\overline{M}^i = \overline{M}_{maxB}^i = \overline{m}_{maxB}^i - 5 \log \overline{d}_L - \alpha. \quad (\text{A.20})$$

onde as variáveis barradas dizem respeito ao objeto padrão. Substituindo (A.20) em (A.19), obtemos

$$\Delta^i \equiv M^i - \overline{M}^i = m^i - \overline{m}^i - 5 \log \frac{d_L}{\overline{d}_L}. \quad (\text{A.21})$$

Note que, para obtenção de  $\Delta^i$ , não é necessário o conhecimento de  $\overline{M}^i$ , ou das distâncias absolutas  $d_L$  e  $\overline{d}_L$ , mas apenas das distâncias relativas entre as supernovas do conjunto de calibração e a supernova escolhida como padrão. Isto pode ser feito utilizando um método alternativo de medida de distâncias que forneça distâncias relativas com precisão, independente da correção de sua escala absoluta. Para a calibração da relação  $\Delta^i \times$  curva de luz é desnecessário inclusive que conheçamos o valor da magnitude absoluta  $\overline{M}^i$ . Um dos métodos para determinação de distâncias relativas mais confiáveis consiste em usar supernovas do fluxo de Hubble. Para elas, temos de (2.35):

$$d = \frac{cz}{H_0},$$

de forma que podemos estimar suas distâncias relativas apenas a partir de medidas do *redshift*. A divisão por  $H_0$  pode ser interpretada como a utilização de distâncias numa escala de  $H_0$ , e não afetará as distâncias relativas.

Também podem ser utilizados outros métodos alternativos, independentemente da qualidade de sua calibração de distância absoluta, contanto que as distâncias relativas sejam confiáveis.

Obtida a relação curva de luz  $\times \Delta^i$ , podemos encontrar a diferença de magnitude de uma supernova em questão com relação à  $\overline{M}^i$ , utilizando a sua curva de luz. No entanto, como colocado, para obter estimativas para parâmetros cosmológicos, precisamos, ao menos em princípio, de medidas de distância absoluta, numa escala conhecida e confiável.

Conforme visto em (2.31) e definido em (4.10), a distância de luminosidade em função do *redshift* pode ser escrita como

$$d_L = \frac{cd_h(z|\vec{\theta})}{H_0}, \quad (\text{A.22})$$

onde  $\vec{\theta}$  é o conjunto de parâmetros cosmológicos, à exceção do parâmetro de Hubble e  $d_h(\vec{\theta})$  é uma função adimensional.

Podemos então, a partir de (A.6), escrever para uma SNIa:

$$m^i = 5 \log d_h(\vec{\theta}) + \Delta^i + \overline{M}^i - 5 \log H_0 + \alpha \quad (\text{A.23})$$

Considerando que tanto  $\overline{M}^i$  quanto os valores de  $H_0$  e da constante  $\alpha$  são iguais para todas as supernovas, podemos, independente de conhecermos o valor de  $\overline{M}^i$ , definir a constante  $\mathcal{M}^i$  na forma

$$\mathcal{M}^i = \overline{M}^i - 5 \log H_0 + \alpha. \quad (\text{A.24})$$

É importante lembrar que o valor da constante  $\alpha$  dependerá da escala de distância que está sendo utilizada, assim como  $\overline{M}^i$ . A expressão (A.23) pode então ser escrita como

$$m^i - \Delta^i = 5 \log cd_h(\vec{\theta}) + \mathcal{M}^i, \quad (\text{A.25})$$

sendo que o lado direito da equação pode ser obtido da curva de luz, e portanto é conhecido.

A formulação acima da equação (A.6) permite uma certa flexibilidade na determinação das distâncias necessárias para a obtenção de estimativas para parâmetros cosmológicos que não  $H_0$ . Vemos que para tal, é necessário apenas conhecer o valor da constante  $\mathcal{M}^i$ , e não especificamente o de  $H_0$  e  $\overline{M}^i$ . Se optarmos por trabalhar com  $H_0$  e  $\overline{M}^i$  separadamente, existe uma degenerescência nos valores para estes parâmetros. Podemos fixar um valor para  $H_0 = H_0^*$ , por exemplo, desde que usemos para  $\overline{M}^i$  um valor obtido observacionalmente também utilizando  $H_0 = H_0^*$ , de forma que o valor total de  $\mathcal{M}^i$  seja o correto. De fato, este foi o procedimento que adotamos para os dados do SNLS, conforme descrito no capítulo 4. Assim, considerando  $\overline{M}^i$  e  $H_0$  como parâmetros a serem ajustados, em conjunto com  $\vec{\theta}$ , há uma degenerescência entre eles, de forma que podemos unificá-los em  $\mathcal{M}^i$ , tanto para estimá-lo quanto para estimar outros parâmetros, efetuando a marginalização da função verossimilhança sobre  $\mathcal{M}^i$ , como foi feito no capítulo 4 para os dados do grupo Ouro.

A obtenção de um valor para  $\mathcal{M}^i$  pode ser feita também utilizando objetos cuja distância relativa seja conhecida, em especial pertencentes ao fluxo de Hubble. Para eles, a equação (A.25) resulta em

$$m^i - \Delta^i = 5 \log cz + \mathcal{M}^i, \quad (\text{A.26})$$

sendo que o valor de  $\Delta^i$  para cada supernova pode ser obtido a partir da curva de luz. Portanto,  $\mathcal{M}^i$  pode ser obtido do valor em que a reta ajustada ao diagrama de Hubble corrigido através da relação acima corta o eixo vertical.

Utilizando a formulação discutida acima, a não uniformidade das SNIa e a relação proposta por Phillips foram confirmadas e novamente calibradas numa série de artigos publicados entre 1995 e 1997, [36, 37, 38], onde são apresentados e analisados os dados de 29 supernovas Ia detectadas pelo Cerro Tololo Inter-American Observatory (CTIO), que tiveram importante papel no progresso da modelagem de curvas de luz. A obtenção do parâmetro  $\Delta m_{15}$  para estas supernovas é feita não mais através de interpolação simples,

mas utilizando o ajuste de diferentes moldes, cada um com um valor de  $\Delta m_{15}$ , para a mesma curva de luz. A cada molde ajustado, calcula-se o  $\chi^2$  do ajuste, de forma que ao final obtém-se um gráfico de  $\chi^2 \times \Delta m_{15}$ , ao qual é ajustado um parábola cujo mínimo determina o valor de  $\Delta m_{15}$  utilizado. Utilizando este método, foram obtidos os  $\Delta m_{15}$  das SN do CTIO. Todas elas pertencem ao fluxo de Hubble, fazendo com que, utilizando a relação (A.26) e os *redshifts* das galáxias hospedeiras, tenham sido determinadas as relações correspondentes às relações obtidas por Phillips, considerando esta nova formulação, dadas por

$$\begin{aligned}\Delta^B &= -0.784(182)(\Delta m_{15} - 1.1) \\ \Delta^V &= -0.707(150)(\Delta m_{15} - 1.1) \\ \Delta^I &= -0.575(178)(\Delta m_{15} - 1.1)\end{aligned}$$

Neste ajuste, a SN escolhida como padrão tem  $\Delta m_{15} = 1.1$ , pois para este caso a correção será nula. Podemos ver na figura (A.7) o diagrama de Hubble obtido para as SN do CTIO em [37] tanto considerando as SNIa como velas-padrão como aplicando a correção acima nas magnitudes aparentes observadas. É possível perceber claramente a diminuição da dispersão do diagrama no caso em que é aplicada a correção.

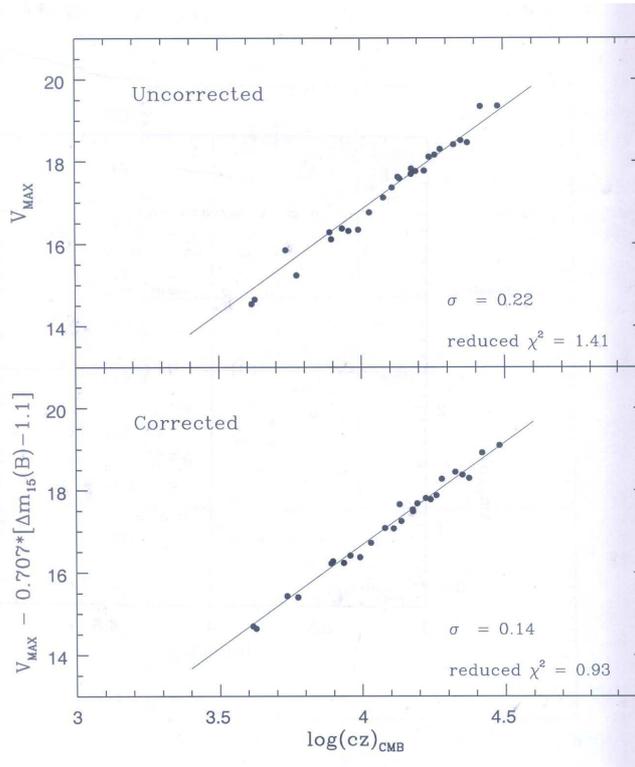


Fig. A.7: Diagrama de Hubble obtido em [37] para as supernovas do CTIO. Na figura superior vemos o diagrama obtido considerando as supernovas como homogêneas, e na figura inferior aplicando a correção obtida a partir das curvas de luz. Figura extraída de [37].

Um segundo método bastante conhecido, referência na literatura [39, 40, 47, 56] e que serviu de base para outros métodos [47], foi proposto por Perlmutter em [39]. Um estudo dele é feito em [56]. Inicialmente proposto para ajustar apenas a curva de luz na banda B, tal método utiliza apenas um molde padrão para esta curva, diferentemente da abordagem acima, que usa vários moldes para os diferentes valores de  $\Delta m_{15}$ . O ajuste às diversas curvas das diferentes supernovas é feito através da dilatação do eixo temporal do molde, o suficiente para que ele ajuste os dados da melhor maneira. Tal dilatação é caracterizada pelo parâmetro  $s$ , na forma [56]:

$$\frac{F(t)}{F_{max}} = \Phi \left( \frac{t - t_{max}}{s(1+z)} \right) + b \quad (\text{A.27})$$

onde  $F$  é a densidade do fluxo detectado,  $F_{max} = F(t = t_{max} = 0)$ , e  $\Phi$  o molde padrão, normalizado em  $\Phi(0) = 1$ . O termo  $(1+z)$  diz respeito à correção temporal para o referencial da estrela e o termo  $b$  nos dá a linha de base da curva, normalmente associada a resíduos do fluxo da galáxia hospedeira.

O valor do parâmetro  $s$  refletirá o quanto a curva de luz da supernova em questão se distancia de curva padrão. Da mesma forma, podemos fazer a transformação temporal inversa, utilizando  $s^{-1}$ , para, a partir da curva de luz de uma supernova, caracterizada por um valor de tal parâmetro, obter a curva de luz padrão, que possui  $s = 1$ . Neste caso,  $s$  é o parâmetro a partir do qual caracterizamos a curva de luz, analogamente a  $\Delta m_{15}$ .

Em [56] é utilizado tal método para o ajuste de 52 SNsIa. Na figura (A.8) podemos ver as curvas de luz na banda B de tais objetos: na figura (A.8a) sem correção alguma no eixo temporal, desconsiderando inclusive a transformação para o referencial da estrela, na figura (A.8b) havendo apenas a correção temporal de referencial e na figura A.8c havendo a correção de referencial e utilizando a dilatação através do parâmetro  $s$  obtido a partir do ajuste ao molde utilizado. Vemos que de fato há diminuição considerável da dispersão das curvas, que, após a deformação feita utilizando o valor de  $s$  ajustado, se adequam ao molde padrão.

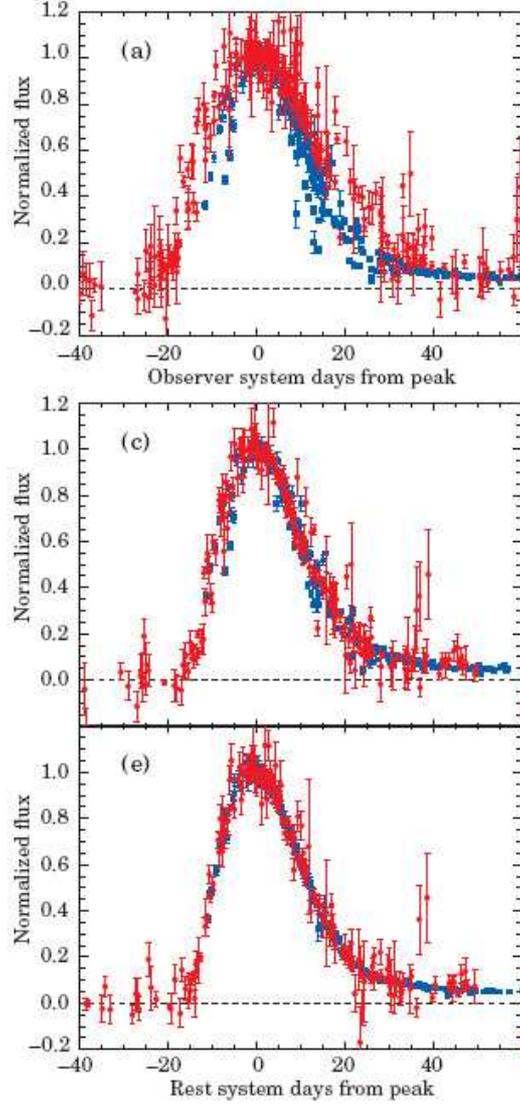


Fig. A.8: Pontos obtidos para as curvas de luz das supernovas consideradas em [56]. Na figura superior vemos os dados sem qualquer tipo de correção. Na figura do meio é aplicada apenas a correção relativa ao tempo de emissão dos fótons, e na inferior ambas as correções, incluindo a deformação das curvas utilizando o parâmetro  $s$ . Figura extraída de [56].

Da mesma forma que ao parametrizarmos a curva de luz por  $\Delta m_{15}$ , pode ser calibrada uma relação entre  $s$  e  $\Delta^i$ . Em [39] é obtida uma relação dada por

$$\Delta^B = 2.35(1 - s^{-1}) \quad (\text{A.28})$$

É possível obter um paralelo entre as duas parametrizações da curva de luz apresentadas acima, através de relações como a obtida em [40]:

$$\Delta m_{15} = 1.96(0.17)(s^{-1} - 1) + 1.07 \quad (\text{A.29})$$

Este método se aplica bastante bem para o ajuste de curvas de luz na banda B e com  $t < 35$ , mas, conforme colocado em [42] falha para as bandas R e I, além de apresentar

dispersão muito grande para as bandas U e V. Como veremos adiante, no entanto, ele será utilizado como base para outro método que considera também estas bandas.

### *Cores, extinção e luminosidade de SNIa*

Embora a relação entre a forma da curva de luz e a luminosidade de uma SNIa tenha sido a primeira a ser utilizada para a obtenção da última, ela não é a única. Existem relações entre a luminosidade da supernova e suas características espectrais, índices de cor, além de outras características das curvas de luz. Assim como a curva de luz e a luminosidade, inicialmente considerava-se que todas as SNIa possuíam a mesma evolução espectral e os mesmos índices de cor. Com o tempo, percebeu-se não só que as SNIa possuem diferentes índices de cor, mas também que há uma relação entre estes e a luminosidade, sendo que as mais avermelhadas possuem menor luminosidade enquanto que as menos avermelhadas (mais azuladas) possuem maior luminosidade.

A relação cor/luminosidade pode ser intrínseca ou gerada pela extinção na galáxia hospedeira. Como colocado na seção I deste apêndice, os índices de cor das supernovas são afetados pela extinção devida à poeira tanto de nossa galáxia quanto da hospedeira. A correção feita utilizando os chamados mapas de extinção galáctica dá conta da extinção ocorrida dentro da Via Láctea, mas não na galáxia hospedeira, que na maioria das vezes é desconhecida. O deslocamento para o vermelho fruto da extinção faz com que as estrelas cuja luz tenha sido mais absorvida sejam mais avermelhadas do que as estrelas cuja luz sofreu menos extinção, fazendo com que as mais avermelhadas sejam observadas com menos brilho e as mais azuladas com maior. Assim, a variação nos índices de cor de uma SNIa, assim como a relação avermelhamento/luminosidade pode ser tanto intrínseca quanto fruto da extinção na galáxia hospedeira. Distinguir entre um e outro caso é um problema que deve ser resolvido e ainda está em aberto. Atualmente acredita-se que haja uma mistura dos dois efeitos, e existem formas de estimar o avermelhamento causado pela extinção na galáxia hospedeira. Caso esta tenha a mesma natureza que na Via Láctea, espera-se que o decréscimo de magnitude absoluta da SN numa determinada banda obedeça uma relação na forma de (A.14) e das outras relações discutidas na seção I deste apêndice.

O uso desta relação para melhorar as estimativas de distância, no entanto, pode ser feito independentemente de sua origem, conforme [57]. Neste trabalho são utilizados os dados referentes a 35 SNIa.

Em adição à correção pela curva de luminosidade proposta em [35], Tripp propõe uma relação na forma

$$M_{maxB}^B = -19.48 + b(\Delta m_{15} - 1.05) + R(B - V)_{maxB} \quad (\text{A.30})$$

A SN padrão considerada neste caso tem  $M_{maxB}^B = -19.48$ ,  $\Delta m_{15} = 1.05$  e  $(B - V)_{maxB} = 0$  e foi obtida pela média das magnitudes absolutas no pico da banda B, obtidas por distância de cefeidas, e dos ritmos de queda de sete SNIa não pertencentes ao conjunto utilizado. Considerando isso, a relação acima pode ser escrita na forma:

$$\Delta^B = b(\Delta m_{15} - 1.05) + R_{CB-V}(t_{maxB}) \quad (\text{A.31})$$

Os valores obtidos para  $R$  em [57] giram em torno de 2. O valor esperado para tal parâmetro no caso em que o avermelhamento fosse causado pela extinção é  $R = 4.1$  [57]. Assim, os valores obtidos neste trabalho descartam a possibilidade de que todo o

avermelhamento, assim como a relação índice de cor/luminosidade das SNIa, seja causado por extinção na galáxia hospedeira, indicando que, de fato, as SNIa possuem índices de cor diferente e que estes estão ligados à sua luminosidade.

A partir destas duas relações cor/luminosidade e curva de luz/luminosidade a obtenção de magnitudes absolutas de SNIa, e estimativas de distância utilizando-as podem ser feitas de algumas maneiras distintas, encontradas na literatura [9, 41, 42, 47, 56, 57, 58]. Utilizamos em nosso trabalho as SNIa publicadas em [10] e [43]. Em cada um destes trabalhos, as distâncias são obtidas utilizando métodos diferentes. A seguir, faremos breve explicação destes.

### II.1 Multicolor Light Curve Shape

O Multicolor Light Curve Shape (MLCS) foi proposto inicialmente por A.G. Riess, William H. Press e Robert P. Kirshner em [41], como uma generalização e refinamento do método proposto em [58], e foi progressivamente aperfeiçoado, gerando diferentes versões.

No MLCS são utilizadas não só as curvas de luz e os índices de cor em  $t_{maxB}$  das SNIa, mas também suas curvas de cor, ou seja, curvas de um determinado índice de cor em função do tempo, obtidas a partir das magnitudes aparentes observadas. Tais curvas permitem, a partir das relações (A.13), e da lei de extinção galáctica, estimar a extinção sofrida pela luz da estrela, além de serem utilizadas na obtenção de distâncias através da relação cor/luminosidade acima tratada. É considerado um único molde padrão para cada curva de luz ou cor utilizada.

Consideremos agora uma supernova qualquer e sua curva de magnitudes absolutas,  $M^i(t)$ . Em cada momento ela terá uma determinada diferença em relação à mesma curva associada à supernova padrão. Assim, podemos construir uma curva em função do tempo para a correção da curva  $M^i(t)$  em relação à curva  $\bar{M}^i(t)$  padrão. O mesmo vale para as curvas de cor. No MLCS são construídos moldes para estas correções. Dada uma supernova, suas curvas nas diferentes bandas e índices de cor serão caracterizadas pelo conjunto de moldes de correção que melhor as ajusta.

Assim como nos outros métodos, é necessária a escolha de um parâmetro que caracterize os moldes de correção e possa ser relacionado com a luminosidade da supernova. O parâmetro escolhido é a própria diferença de magnitude  $\Delta^i$ , no máximo da curva B. Isso faz com que as etapas de ajuste das curvas e calibração da relação luminosidade/curva e luminosidade/cor se fundam em uma só. Estas últimas são na verdade consideradas de forma implícita, pela necessidade de ajuste das curvas de cor e luz para a obtenção de  $\Delta^i$ .

#### MLCS linear

A primeira versão deste método é apresentada em [41]. Neste trabalho são utilizadas observações feitas nas bandas B, V, R e I, a partir das quais obtém-se a curva de luz na banda V e as curvas nas cores B-V, V-R e R-I de cada supernova. Para seguir o procedimento apresentado em [41], trabalharemos aqui com estas curvas, mas o procedimento descrito pode ser utilizado facilmente com outras curvas de cor/luz, de outras bandas. São consideradas portanto as seguintes relações:

$$m^V(t) = M^V(t) + \mu + n(t), \quad (\text{A.32})$$

$$c_{i-j}^{obs}(t) = c_i^0(t) + E_{i-j} + n_{i-j}(t), \quad (\text{A.33})$$

onde  $n(t)$  e  $n^{i-j}(t)$  são os erros, ou seja, a diferença entre os valores medidos, respectivamente, para  $m^V(t)$  e  $c_{i-j}^{obs}(t)$  e os verdadeiros, que seriam obtidos utilizando  $M^V(t)$ ,  $\mu$  e  $E_{i-j}$  verdadeiros.  $c_{i-j}^{obs}(t)$  representa os índices de cor observados para cada cor considerada, como função do tempo, e  $c_{i-j}^0(t)$  os índices de cor intrínsecos ao objeto, sem levar em conta a extinção devida à poeira.

Nas expressões acima não estamos considerando a extinção no visível  $A_V$ . Assim, os módulos de distância obtidos devem, ao final do processo, ser corrigidos, na forma  $\mu_{corr} = \mu - A_V$ . As correções  $K$  e a correção do tempo para o referencial da estrela são feitas separadamente.

Como discutido anteriormente, podemos escrever

$$\begin{aligned} M^V(t) &= \bar{M}^V(t) + f(t), \\ c_{i-j}^0(t) &= \bar{c}_{i-j}^0(t) + g_{i-j}(t), \end{aligned}$$

onde  $f(t)$  e  $g_{i-j}(t)$  são as funções de correção.

Em [41] é proposta e utilizada uma relação linear entre as funções de correção e o parâmetro  $\Delta^V$ , na forma

$$\begin{aligned} M^V(t) &= \bar{M}^V + \Delta^V R(t), \\ c_{i-j}^0(t) &= \bar{c}_{i-j}^0(t) + \Delta^V R_{i-j}(t), \end{aligned}$$

onde  $R(t)$  e  $R_{i-j}$  são os chamados moldes de correção para a curva de luz na banda  $V$  e para a curva do índice de cor  $c_{i-j}^0$ . A partir das expressões anteriores, obtemos

$$m^V(t) = \bar{M}^V(t) + \Delta^V R(t) + \mu + n(t) \quad (\text{A.34})$$

$$c_{i-j}(t) = \bar{c}_{i-j}^0(t) + \Delta^V R_{i-j}(t) + E_{i-j} + n_{i-j}(t). \quad (\text{A.35})$$

A partir da relação (A.13), e da lei de extinção galáctica empiricamente conhecida, utiliza-se em [41] as relações abaixo

$$E_{B-V} = \frac{1}{3.1} A_V \quad (\text{A.36})$$

$$E_{V-R} = \frac{1}{3.9} A_V \quad (\text{A.37})$$

$$E_{R-I} = \frac{1}{1.9} A_V \quad (\text{A.38})$$

Os ajustes feitos aos dados observacionais não são analíticos, de forma que tanto para  $m^V(t)$ ,  $\bar{M}^V(t)$ , quanto para  $c_{i-j}(t)$  e  $\bar{c}_{i-j}(t)$  não possuímos formas analíticas. Assim, utiliza-se as relações (A.34) e (A.35) em diferentes momentos das curvas de luz e cor ajustadas aos dados observacionais, utilizando notação matricial, na forma:

$$\begin{pmatrix} m^V(t_1) \\ m^V(t_2) \\ \dots \\ m^V(t_n) \\ c_{B-V}(t_1) \\ c_{B-V}(t_2) \\ \dots \\ c_{B-V}(t_n) \\ c_{V-R}(t_1) \\ c_{V-R}(t_2) \\ \dots \\ c_{V-R}(t_n) \\ c_{R-I}(t_1) \\ c_{R-I}(t_2) \\ \dots \\ c_{R-I}(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{M}^V(t_1) \\ \overline{M}^V(t_2) \\ \dots \\ \overline{M}^V(t_n) \\ \overline{c}_{B-V}^0(t_1) \\ \overline{c}_{B-V}^0(t_2) \\ \dots \\ \overline{c}_{B-V}^0(t_n) \\ \overline{c}_{V-R}^0(t_1) \\ \overline{c}_{V-R}^0(t_2) \\ \dots \\ \overline{c}_{V-R}^0(t_n) \\ \overline{c}_{R-I}^0(t_1) \\ \overline{c}_{R-I}^0(t_2) \\ \dots \\ \overline{c}_{R-I}^0(t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & R(t_1) \\ 1 & 0 & R(t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & R(t_n) \\ 0 & \frac{1}{3.1} & R_{B-V}(t_1) \\ 0 & \frac{1}{3.1} & R_{B-V}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{3.1} & R_{B-V}(t_n) \\ 0 & \frac{1}{3.9} & R_{V-R}(t_1) \\ 0 & \frac{1}{3.9} & R_{V-R}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{3.9} & R_{V-R}(t_n) \\ 0 & \frac{1}{1.9} & R_{V-I}(t_1) \\ 0 & \frac{1}{1.9} & R_{V-I}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{1.9} & R_{V-I}(t_n) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mu \\ A_V \\ \Delta^V \end{pmatrix} + \mathbf{n}(t) \quad (\text{A.39})$$

onde o vetor  $\mathbf{n}(t)$  é uma composição de  $n(t)$  e  $n_{i-j}(t)$ . Podemos nomear as matrizes na relação acima, de forma que ela possa ser escrita como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{s} + \mathbf{L} * \mathbf{q} + \mathbf{n}. \quad (\text{A.40})$$

Assim, seguindo procedimento padrão no método dos mínimos quadrados [34] escrevemos:

$$\mathbf{n} = \mathbf{Y} - \mathbf{s} - \mathbf{L} * \mathbf{q},$$

e obtemos então

$$\chi^2 = \mathbf{n}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{n}, \quad (\text{A.41})$$

onde  $\mathbf{C}$  é a matriz de covariância dos dados observacionais em  $\mathbf{Y}$ , obtida conjuntamente com os mesmos.

Observando a equação (A.40), vemos que, dadas as matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{s}$ , conseguimos determinar os parâmetros da matriz  $\mathbf{q}$  para uma SN. Desta forma, para utilizar o MLCS na determinação de distâncias, assim como da extinção  $A_V$ , precisamos antes obter valores para as matrizes acima citadas, ou seja, obter o formato dos moldes padrão para as curvas de luz e de cor envolvidas, assim como os moldes de correção  $R(t)$  e  $R_{i-j}(t)$ . Esta necessidade faz com que o uso do método, assim como sua calibração, seja, da mesma forma que os métodos anteriores, dividido em duas etapas. Primeiro são utilizadas SNs Ia próximas com curvas de luz, distâncias relativas e extinção conhecidas (conjunto de calibração) para a obtenção dos moldes  $R(t)$ ,  $R_{i-j}(t)$  e para as curvas de luz e cor padrão. Após esta calibração, o método está pronto para ser utilizado na determinação dos parâmetros  $A_V$ ,  $\Delta^V$  e  $\mu$  de objetos para os quais eles sejam desconhecidos, e assim determinar as distâncias até eles.

### Calibração do método

Em [41] é feita a calibração do método utilizando um conjunto de supernovas próximas cujas distâncias relativas são obtidas utilizando métodos alternativos ( Tully-Fisher, Surface Brightness Function (SBF) e Planetary Nebulae Luminosity Function (PNLF)). Os valores para  $A_V$  são obtidos a partir da relação (A.13), sendo que os valores para  $E_{i-j}$  são estimados através da comparação dos índices de cor observados da supernova em questão com os índices de cor intrínsecos de outra SNIa, fotometricamente e espectralmente semelhante e cuja luz não sofra extinção, ou sofra extinção conhecida, possibilitando a obtenção dos índices intrínsecos.

Devido à linearidade de  $\mathbf{n}(t)$  em  $R(t)$  e  $R_{i-j}(t)$ , pode ser utilizado o método dos mínimos quadrados linear [34] para obtenção dos moldes de correção, que não possuem expressão analítica e são utilizados no formato da matriz  $\mathbf{L}$ . Podemos ver na figura (A.9) tais moldes ( $\Delta^V R_V(t)$  e  $\Delta^V R_{i-j}$ ) para cada  $\Delta^V$ , obtidos em [41].

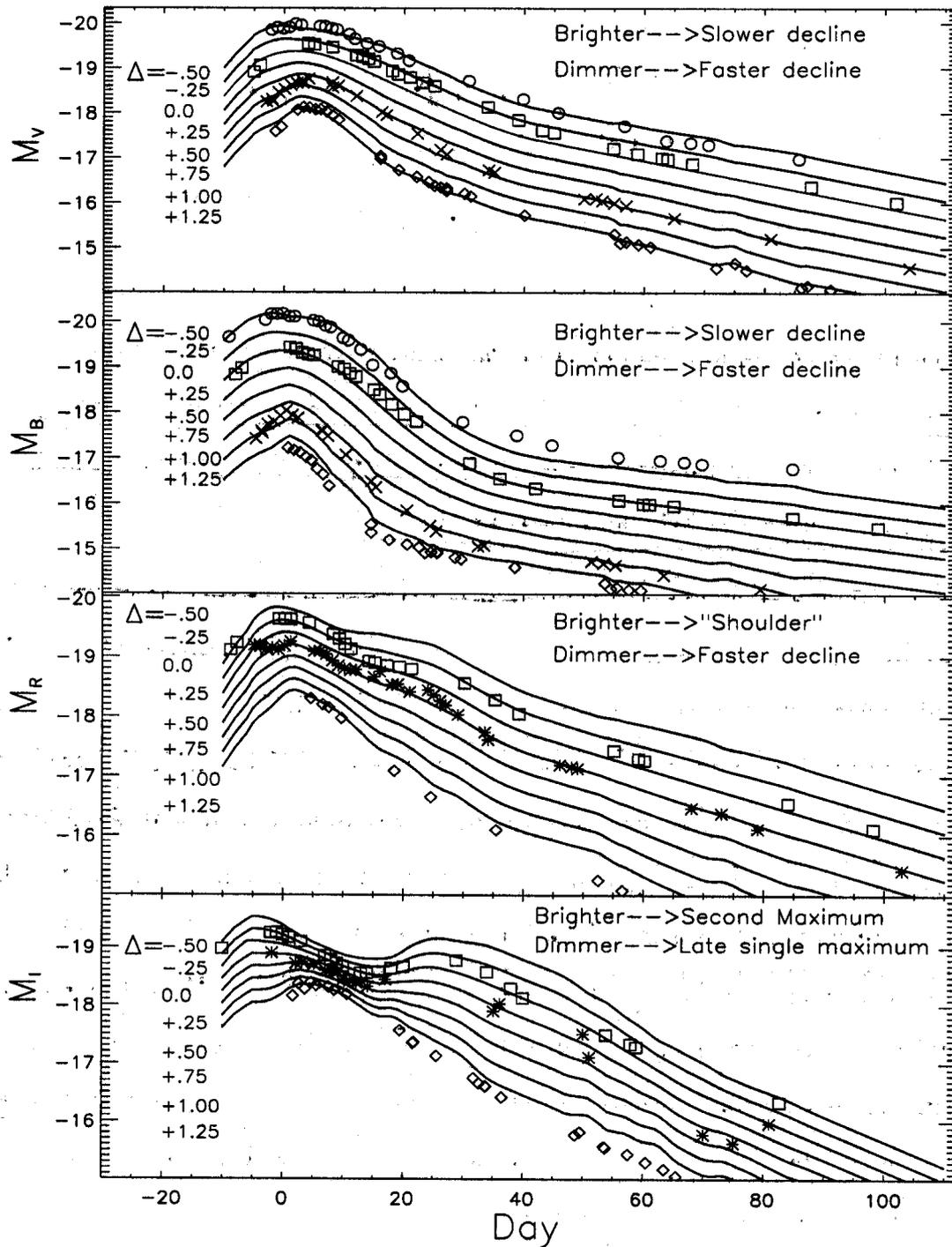


Fig. A.9: Curvas de luz obtidas a partir dos moldes de correção em [41], para diferentes valores de  $\Delta^V$  ( $\Delta$ ). Figura extraída de [41].

Vemos pelos moldes das curvas de cor que, após  $t = t_{maxB} + 35$ , as SNIa apresentam valores para os índices de cor com pequena variação temporal e semelhantes, mesmo para objetos com diferentes luminosidades. Este fato, verificado e comprovado posteriormente, é utilizado atualmente para estimar os valores dos índices de cor intrínsecos de SNIa neste

estágio de sua evolução. A partir deles é calculado  $E_{i-j}$ , e assim obtidas estimativas para a extinção sofrida por estes objetos.

A partir dos moldes de correção e do molde padrão para as curvas de luz e cor, podemos aplicar o MLCS para obter o vetor  $\mathbf{q}$  e determinar distâncias e extinção de supernovas Ia distantes.

A versão inicial do MLCS proposta em [41] e apresentada acima corrige toda a extinção utilizando a lei de extinção empiricamente conhecida para a Via Láctea. Como discutido anteriormente, uma correção como esta supõe que a extinção ocorrida na galáxia hospedeira siga as mesmas relações que na Via Láctea, o que contraria as observações. Desta forma, considerar tais variações é um aperfeiçoamento importante no tratamento dos dados observacionais de SNIa.

Outro ponto relativo à extinção que deve ser levado em conta é o fato de sabermos pela teoria que  $A_i$  deve sempre ser positivo, visto que a extinção sempre diminui o fluxo de luz. Quando as estimativas para este parâmetro são feitas livremente, a distribuição obtida para tal pode incluir valores negativos. Assim, a consideração da informação  $A_V > 0$  é feita utilizando uma *função densidade de probabilidade à priori* (conforme discutida no capítulo 4), que exclua tais valores, multiplicando a *função de verossimilhança* obtida a partir dos dados. A *f.d.p.* a priori pode incluir também o conhecimento a respeito da extinção nas galáxias hospedeiras proveniente de modelos ou observações de extinção em galáxias distantes.

### MLCS2k2

A versão linear apresentada acima para o MLCS foi aperfeiçoada em trabalhos subsequentes, [9], [42], tendo como versão mais atual o MLCS2k2, apresentado de forma detalhada e calibrado em [42]. Com ele foram obtidos os dados publicados em [10], aqui utilizados.

A relação linear entre o parâmetro  $\Delta^V$  e os moldes de correção  $R(t)$  e  $R_{i-j}(t)$  é uma aproximação para uma relação desconhecida e que pode ter um formato mais complexo. No entanto, segundo apontado em [41], eventuais termos de ordem superior levariam à correções desprezíveis em comparação aos erros provenientes do baixo número e qualidade restrita das observações disponíveis até então. O aumento tanto de um como de outro possibilitou que, num artigo publicado em 1998 [9], fosse adicionado um termo quadrático em  $\Delta^V$  nos moldes de correção, na forma

$$\overline{M}^i(t) = \overline{M}^i + \Delta^V R_i(t) + \Delta^{V^2} Q_i(t), \quad (\text{A.42})$$

onde  $Q_i(t)$  é o termo quadrático em  $\Delta^V$  do molde de correção.

A extinção galáctica é tratada no MLCS2k2 de forma razoavelmente distinta do método original. Primeiramente, é feita distinção entre a extinção ocorrida na Via Láctea, que é corrigida utilizando mapas/tabelas de extinção, e a extinção na galáxia hospedeira.

Devido ao fato da extinção ser diferente para cada comprimento de onda, a evolução espectral da supernova faz com que também a extinção sofrida pela luz varie com o tempo. Além disso, como colocado na seção I, os valores de  $R_V$ , que caracterizam a lei de extinção galáctica variam de uma galáxia para outra. Considerando estas questões, o MLCS2k2 inclui a variação temporal da extinção entre diferentes galáxias na correção para esta realizada, sendo que os valores de  $R_V$  são ajustados para cada supernova, dizendo respeito

à extinção na respectiva galáxia hospedeira. Uma descrição mais detalhada de tal correção, assim como de todo o MLCS2k2 e do MLCS pode ser obtida em [42].

Esta abordagem trata a extinção sem lançar mão dos excessos de cor, fazendo com que ela possa ser obtida diretamente das diversas curvas de luz. Assim, em [42] são obtidos inicialmente moldes não mais para as curvas de luz e cor, mas para as curvas de luz em diversas bandas.

Os moldes para o MLCS2k2 são obtidos de forma análoga ao método original. Diferentemente deste, no entanto, é utilizado em [42] um conjunto de supernovas de calibração pertencentes ao fluxo de Hubble, com as respectivas distâncias relativas. Os moldes padrão considerados são ajustados em conjunto com os moldes de correção, configurando uma média das curvas dos objetos utilizados.

Outro aperfeiçoamento do método MLCS2k2 em relação ao original é a aplicação do método também à banda de repouso U, o que possibilita a aplicação deste para altos *redshifts*. Nestes casos, o comprimento de onda máximo que é detectado pelos instrumentos utilizados corresponde à banda U. Além disso, o MLCS2k2 facilita o uso de *f.d.p.* a priori nos diferentes parâmetros utilizados no método.

Podemos ver na figura A.10 os moldes obtidos utilizando o MLCS2k2 em [42].

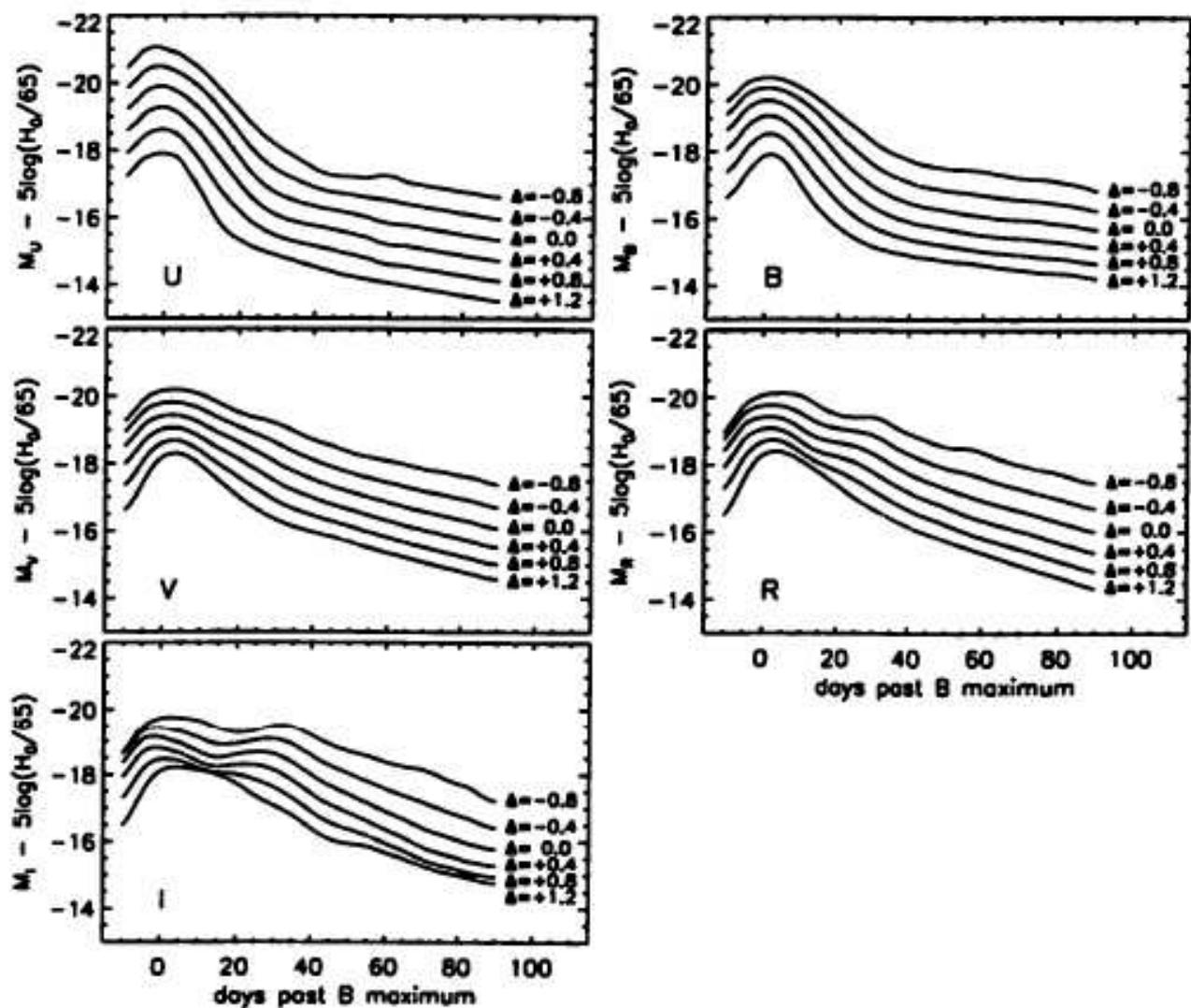


Fig. A.10: *Moldes de obtidos para as curvas de luz, (curva padrão mais moldes de correção), para diferentes valores de  $\Delta^V$ , utilizando o MLCS2k2 em [42]. Figura extraída de [42].*

### III Spectral Adaptive Lightcurve Template

Proposto em [47], o Spectral Adaptive Lightcurve Template, (SALT) cria um molde semi analítico para as curvas de luz de supernovas Ia, que trata explicitamente a dependência do fluxo detectado com o espectro médio destes objetos e com o comprimento central da banda consideradas. Ou seja: ao invés de termos um molde para cada banda, temos um único molde, que possui dependência em  $\lambda$  e na distribuição espectral de fótons. Desta forma, as correções K são implementadas no molde diretamente.

Como o MLCS, o SALT busca levar em conta para o ajuste das curvas de luz e determinação da distância de SNsIa o formato de suas curvas de luz e também a cor do objeto. Assim, as curvas de luz de uma supernova são caracterizadas por 2 parâmetros. O primeiro deles é  $s$ , análogo ao utilizado no método de dilatação temporal proposto em [39] e apresentado anteriormente e o segundo um parâmetro de cor,  $c = c_{B-V}^0(t_{maxB})$ . São

ajustados também para cada curva a intensidade do fluxo no pico desta,  $f_0$  e o tempo de máximo  $t_{max}$ .

O fluxo de fótons detectados numa determinada banda caracterizada pela função de transmissão  $T(\lambda)$ , proveniente de uma SNIa pode ser escrito na forma

$$f(p, \lambda, s, c) = f_0(1+z) \int d\lambda \phi(p, \lambda, s, c) \frac{\lambda}{hc} T(\lambda(1+z)). \quad (\text{A.43})$$

onde  $p = t - t_{max}$  e  $\phi(p, \lambda, s, c)$  é a distribuição de energia, por unidade de comprimento de onda, no referencial da estrela, por ela emitida. O termo em  $z$  na função transmissão característica da banda leva em conta o *redshift* cosmológico, considerando que a função  $\phi(p, \lambda, s, c)$ , assim como os próprios  $p$  e  $\lambda$ , estão no referencial da estrela.

A função  $\phi(p, \lambda, s, c)$  possui peculiaridades de cada estrela, especialmente no que diz respeito à dependência do número de fótons emitidos com  $\lambda$ , e à relação desta com  $p$ . No entanto, o número e qualidade de dados disponíveis hoje faz com que não seja possível construir  $\phi(p, \lambda, s, c)$ . Baseado em estudos e trabalhos que investigam as relações acima citadas, é proposta em [47] a seguinte forma para o fluxo de fótons detectado em uma determinada banda:

$$f(p_s, z, T) = f_0(1+z) e^{-0.4 \ln 10 K(p_s, \lambda_T, s, c)} \int d\lambda \phi(p_s, \lambda) \frac{\lambda}{hc} T(\lambda(1+z)) \quad (\text{A.44})$$

onde  $p_s = \frac{t-t_{max}}{s}$ .

No formato acima,  $\phi(p_s, \lambda)$  é responsável pela consideração das características espectrais da supernova, assim como, conjuntamente com a integração em  $\lambda$  e a multiplicação pela função  $T(\lambda(1+z))$ , aplicar a correção  $K$ , que é portanto abarcada pelo modelo. Variações intensas da curva de luz tanto com o comprimento de onda da banda considerada como com o tempo são modeladas por este termo. Para  $\phi(p_s, \lambda)$  é utilizado um molde médio para a distribuição espectral, normalizado de forma a reproduzir, na banda B, um dos moldes obtidos para tal banda em [56]. Por se tratar de um molde espectral médio, ele não leva em conta a eventual variabilidade da cor da SN, tanto intrínseca quanto fruto de extinção na galáxia hospedeira. Além disso, por se tratar de um molde para a banda B, e cuja única dependência em  $s$  é pela da dilatação temporal, ele não descreve adequadamente a região  $t > t_{maxB} + 35$  da banda B e outras bandas. Assim, a função  $K(p_s, s, c, \lambda_T)$ , que varia lentamente com  $\lambda$  ( e por isso pode ser deixada do lado de fora da integral), tem o papel de modelar características da curva de luz não ajustadas pela dilatação temporal, assim como diferenças no formato das curvas em outras bandas com relação à banda B e diferenças na curva de luz fruto da dispersão nas cores da SN. Para explicitar estes diferentes papéis,  $K(p_s, \lambda, s, c)$  é escrita na forma

$$K(p_s, \lambda, s, c) = K_s(p_s, \lambda, c) + K_c(\lambda, c). \quad (\text{A.45})$$

As funções  $K_c$  e  $K_s$  são implementadas por polinômios com respectivos graus. Elas são ajustadas em [47] utilizando um conjunto de SNIa de forma recursiva: propõe-se uma forma original para cada uma delas, a partir das quais são determinados os parâmetros  $s$  e  $c$  das supernovas utilizadas. São calculados os resíduos  $s$  das curvas obtidas com relação às observacionais, ajustadas funções  $\delta K_s(p_s, \lambda, c)$  e  $\delta K_c(\lambda, c)$  para estes, a partir das quais serão geradas novas funções  $K_s = K_s + \delta K_s$  e  $K_c = K_c + \delta K_c$ , e assim sucessivamente até a convergência.

Com a determinação destas funções, obtém-se então moldes para as curvas de luz em diferentes bandas, em função de  $s$  e  $c$ , que podem ser ajustados às curvas de um objeto para os respectivos valores destes parâmetros, assim como  $f_0$  e  $t_{maxB}$ . Na figura A.11 podemos ver os moldes obtidos para alguns valores diferentes de  $s$  e  $c = 0$ .

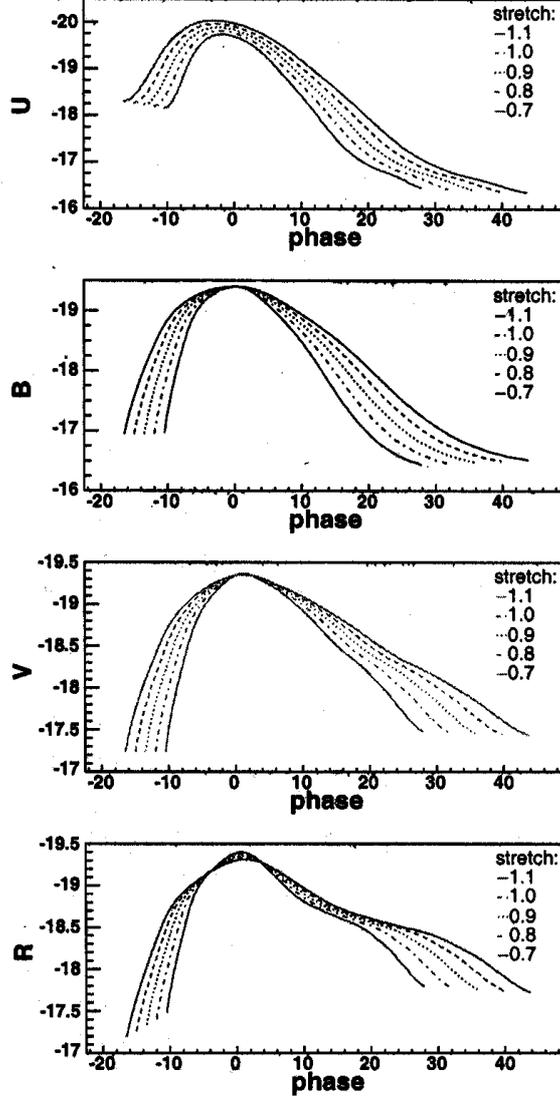


Fig. A.11: *Curvas obtidas em [47], utilizando o método SALT, para diferentes valores de  $s$  (stretch), nas diferentes bandas e um mesmo valor de  $c$ . Figura extraída de [47].*

Para obtenção da magnitude absoluta e portanto distância até a SN é utilizada no SALT uma relação análoga à proposta por Tripp em [57], dada por

$$\Delta^B = -\alpha(s - 1) + \beta c. \quad (\text{A.46})$$

Tal relação é calibrada de forma semelhante às anteriores, utilizando SNIa próximas cuja distância possa ser estimada por outras formas que não a relação luminosidade  $\times$  curva de luz, luminosidade  $\times$  cor. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  podem também ser ajustados em conjuntos com parâmetros cosmológicos, como feito em [43], para obtenção dos valores a partir dos quais foram obtidos  $\mu$  para as supernovas do SNLS.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Hubble, E. *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae.*, Proc.Nat.Acad.Sci. **15**, 168 (1929).
- [2] Narlikar, J.V., *Introduction to cosmology*, 2a. edição, Cambridge University Press (1999).
- [3] Weingerg, S., *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, John Miley and Sons (1972).
- [4] Einstein, A., *Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber, 142 (1917).
- [5] Penzias,A. A. e Wilson, R. W., *A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s.* , Astrophys.J. **142**, 419 (1965)
- [6] Page,L. Nolta, M. R. et al, *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations:interpretation of the TT and TE angular power spectrum peaks.*, Astrophys.J.Suppl. **148**, 233 (2003).
- [7] Spergel, D.N. et al., *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters.*, Astrophys.J.Suppl **148**, 175 (2003).
- [8] Spergel, D.N. et al, *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology.*, Submitted to Astrophys.J, e-Print Archive: astro-ph/0603449, (2006).
- [9] Riess, A. G. et al, *Observational Evidence for an Accelelerating Universe and a Cosmological Constant-* Astron.J. **116**, 1009 (1998).
- [10] Riess, A. G. et al, *Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  From the Hubble Spce Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution-* Astrophys.J. **607**, 687 (2004).
- [11] Hinshaw, G. et al., *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: The Angular power spectrum.* , Astrophys.J.Suppl. **148**, 135 (2003).
- [12] Copeland, E. J., Sami, M. e Tsugykawa, S. *Dynamics of dark energy*, submetido a Int.J.Mod.Phys.D, hep-th/0603057 (2006)Astrophys. J. **117**, 707 (1996).
- [13] Hu, W., Fukugita, M., Zaldarriaga, M e Tegmark, M., *CMB Observables and Their Cosmological Implications* , Astrophys. J. **549**, 669 (2001).

- [14] *LAMBDA - Legacy Archive for Microwave Background Data Home Page*. Disponível em: < [http : //lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/parameters.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/parameters.cfm) >. Acessado pela última vez em 16/11/2006.
- [15] Peebles, P. J. E. e Ratra, B., *The Cosmological Constant and Dark Energy*, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [16] Padmanabhan, T., *Dark energy: mystery of the Millenium*, AIP Conf.Proc. **861**, 179 (2006). Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001).
- [17] Padmanabhan, T., *Cosmological constant: The Weight of the vacuum.*, AIP Conf.Proc. **861**, 179 (2006). Phys.Rept. **380**, 235 (2003).
- [18] Carroll, S. M., *The Cosmological Constant*, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001).
- [19] Dodelson, S., *Modern Cosmology*, Academic Press (2003).
- [20] Sahni, V. *The cosmological constant problem and quintessence*, Class. Quant. Grav. **19**, 3435 (2002).
- [21] França, U. L., *Fenomenologia de modelos cosmológicos com campos escalares exponenciais.*, dissertação de mestrado pelo Instituto de Física Teórica da Unesp (2004).
- [22] Kujat, J., Scherrer, R. J. e Sen, A. A., *Phantom dark energy models with negative kinetic term*, Phys.Rev.D **74**, 083501 (2006).
- [23] Johri, V., *Phantom cosmologies*, Phys.Rev. D **70**, 041303 (2004).
- [24] Scherrer, R. J., *Phantom dark energy, cosmic doomsday, and the coincidente problem*, Phys.Rev.D **71**, 063519 (2005).
- [25] Caldwell, R. R., Kamionkoski, M. e Weinberg, N. N., *Phantom dark energy and cosmic doomsday*, Phys. Rev. Lett. **91**, 071301 (2003).
- [26] Perivolaropoulos, L. e Nesseris, S., *The fate of bound systems in phantom and quintessence cosmologies*, Phys.Rev.D **70**, 123529 (2004).
- [27] Cai, R. e Wang, A., *Cosmology with interaction between phantom dark energy and dark matter and the coincidente problem*, JCAP **0503**, 002 (2005).
- [28] Hoffman, M. B., *Cosmological constraints on a dark matter - dark energy interaction*, astro-ph/0307350 v2 (2003).
- [29] Gumjudpai, B., Naskar, T., Sami, M. e Tsujikawa, S. *Coupled dark energy: Towards a general description of the dynamics.*, JCAP **0506**, 7 (2005); Amendola, L. e Tocchini-Valentini, D., *Stationary dark energy: the present universe as a global attractor*, Phys. Rev. D **64**, 043509 (2000); Anderson, G. W. e Carrol, S. M., *Dark Matter with Time-Dependent Mass*, astro-ph/9711288 (1997); Casas, J., A., García-Bellido e J., Quirós, M., *Scalar - tensor theories of gravity with phi dependent masses.* , Class. Quantum Grav. **9**, 1371 (1992); Farrar, G. R. e Peebles, P. J. E., *Interacting Dark Matter and Dark Energy*, Astrophys. J. **604**, 1 (2004); Amendola, L., *Coupled quintessence*, Phys.Rev.D62:043511 (2000); Amendola, L., : *Acceleration at  $z \approx 1$ ?*

- Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **342**, 221 (2003); Comeli, D., Pietroni, M. e Riotta, A., *Dark Energy and Dark Matter*, Phys.Lett. B **571**, 115 (2003).
- [30] Amendola, L., Gasperini, M. e Piazza, F. *Fitting Type Ia supernovae with coupled dark energy*, JCAP **0409**, 14 (2004).
- [31] E. Majerotto, D. Sapone, L. Amendola, *Supernovae type IA favour negatively coupled phantom energy*, arXiv:astro-ph/0410543 v1 (2004).
- [32] H. K. Jassal, J. S. Bagla, T. Padmanabhan, *Observational constraints on low redshift evolution of dark energy: How consistent are different observations?* Phys.Rev.D **72**, 103503 (2005).
- [33] Yao, W. M. et al., *The review of particle physics*, Journal of Physics G **33**, 1 (2006)
- [34] Vanin, V. R. e Gouffon, P., *Tópicos avançados em tratamento estatístico de dado em física experimental: notas de aula*, não publicado (1994).
- [35] Phillips, M.M., *The absolute magnitudes of Type Ia Supernovae*, ApJ **413**, L105. (1993)
- [36] Hamuy et al, *The morphology of Type Ia Supernovae light curves*, astro-ph/9609063 (1996); Hamuy et al, *A Hubble diagram of distant Type Ia Supernovae*, AJ **109**, 1 (1995); Hamuy et al, *The absolute luminosities of the Calán/Tololo Type Ia Supernovae*, AJ **112**, 2391 (1996a); Hamuy et al, *BVRI Light curves for 29 Type Ia Supernovae*, AJ **112**, 2408 (1996b).
- [37] Hamuy et al, *The Hubble diagram of the Calán/Tololo Type Ia Supernovae and the value of  $H_0$* , **112**, 2398 (1996).
- [38] Hamuy et al, *The morphology of type Ia supernovae light curves*, AJ **112**, 2408 (1996).
- [39] Perlmutter, S. et al, *Scheduled discoveries of 7+ high-redshift supernovae: first cosmology results and bounds on  $q_0$* , Thermonuclear Supernovae, ed. p. Ruiz-Lapuente, R. Canal & J.Isern (Dordrecht: Kluwer), 749 (1995)
- [40] Perlmutter, S., Gabi, S., Goldhaber, G. et al, *Measurements of the cosmological parameters  $\Omega$  and  $\Lambda$  from the seven supernovae at  $z \geq 0.35$* , ApJ **483**, 565 (1997).
- [41] Riess, A. G. et al, *A Precise Distance Indicator: Type Ia Supernovae Multicolor Light Curve Shapes*, Astrophys. J., **117**, 707 (1996).
- [42] Jha, S. *Exploding stars, near and far*, tese de doutoramento, Harvard University (2002).
- [43] Astier, P. et al *The Supernova Legacy Survey: Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the First Year Data Set*, Astron.Astrophys. **447**, 31 (2006).
- [44] Perivolaropoulos, L., *Constraints on linear negative potentials in quintessence and phantom models from recent supernova data*, Physical Review D **71**, 063503 (2005).
- [45] Lazkoz, R., Nesseris, S. e Perivolaropoulos, L., *Exploring cosmological expansion parametrizations with the gold SnIa data set*, JCAP **0511**, 010 (2005).

- [46] Gradshteyn, I.S. e Ryzhik, I.M., *Table of Integrals, Series, and Products*, 5a. edição, Academic Press, Inglaterra, (1994).
- [47] Guy, J. et al, (Paris, LPTHE), *SALT: a Spectral Adaptive Light curve Template for Type Ia Supernovae* , (2005), Submitted to Astron.Astrophys. e-Print Archive: astro-ph/0506583
- [48] *SNLS-Supernova Legacy Survey Home Page*. Disponível em: < [http : //snls.in2p3.fr/conf/papers/cosmo1/sne\\_snls.list](http://snls.in2p3.fr/conf/papers/cosmo1/sne_snls.list) >. Acessado em 20/06/2006.
- [49] Nesseris, S. e Perivolaropoulos, L., *A comparison of cosmological models using recent supernova data*, Physical Review D **70**, 043531 (2004).
- [50] Hu, W. e Sugiyama, *Small scale cosmological perturbations: an analytic approach.*, Astrophys.J. **471**, 542 (1996).
- [51] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M. e Donner, K.J. *Fundamental Astronomy*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg Nova Iorque (1996)
- [52] Schlegel, D. J., Finkbeiner, D. P. e Davis, M., *Maps of Dust IR Emission for Use in Estimation of Reddening and CMBR Foregrounds*, ApJ **500**, 525 (1998).
- [53] Perivolaropoulos, L. *Accelerating universe: observational status and theoretical implications.*, AIP Conf.Proc., **848** 698 (2006).
- [54] Kim, A., Goobar, A. e Perlmutter, S. *A generalized K correction for Type Ia Supernovae: Comparing R-band Photometry Beyond  $z=0.2$  with B, V and R-band Nearby Photometry*, Publ.Astron.Soc.Pac. **108**, 190 (1996).
- [55] Nugent, P., Kim, Alex, Perlmutter, S. *K-correction and Extinction Corrections for Type Ia Supernovae*, astro-ph/0205351, (2002).
- [56] Goldhaber, G., Groom, D.E., Kim, A. et al. *Timescale stretch parameterization of Type Ia supernova B-band light curves.*, Publ.Astron.Soc.Pac. **108**, 190 (2001).
- [57] Tripp, R., *A two parameter luminosity correction for Type Ia supernovae* , A & A, **331**, 815 (1998).
- [58] Riess, A. G., Press, W. H. e Kirshner, R. P. *Using type Ia supernova light curve shapes to measure the hubble constant.*, Astrophys. J. **438**, 17 (1995).
- [59] Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe*, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City (1990).
- [60] Aldrovandi, R., Cuzinatto, R.R., Medeiros, L. G., *Analytic solutions for the Lambda-FRW model.*, gr-qc/0508073 (2005).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)