

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

**Dinâmica das Excitações dos Modos  
Coerentes Topológicos em um  
Condensado de Bose-Einstein**

Edmir Ravazzi Franco Ramos

São Carlos

2006

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

**Dinâmica das Excitações dos Modos  
Coerentes Topológicos em um  
Condensado de Bose-Einstein**

Dissertação apresentada ao Instituto  
de Física de São Carlos, da Universidade  
de São Paulo, para obtenção do título de  
Mestre em Ciências: Física Básica.

Edmir Ravazzi Franco Ramos

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato

São Carlos  
2006

*a Deus, pela vida*  
*aos meus pais, pela força*  
*à Dayana, pelo amor*

## Agradecimentos

*Primeiramente, agradeço a Deus por tudo que tenho conquistado em minha vida. Agradeço aos meus pais, Edmir e Marilene, e aos meus irmãos, Emilson e Erika, pelo apoio, pela força, por sempre estarem do meu lado.*

*Agradeço aos meus amigos de infância, ainda tão presentes em minha vida. Em especial ao Tito, Guga, Pirica, Julio, Renato, Barba, Vidião, Kenzo, Talita. Aos amigos da UEM, que estiveram presentes na minha primeira conquista e que estarão sempre em meu coração. Em especial à Roselí, Tati, Breno, Iris, Marcelo, Liz, Ana Paula, Paula, Sil, Mineira, Saulo, Minhoca, Valdeir Pitico, Luciano Salgadinho. Às pessoas que fui encontrando durante minha vida, em especial ao Matheus, Dani Dot, Dani Jands, Renata Barradas, Gabi Pavan. Aos amigos de São Carlos, que me ajudaram nessa minha conquista: Rafael Orelha, Seu Zé, Juh Arcanjo, Reginaldo e Dulce, Emanuel e Vivian, Baca e Daniel Vieira, Daniel Beição e Marcão, Krusty e Pirata, Valter e Alessandra, Ubaldão, Ezequiel e Seila, os Favaros: Ana e Guilherme, Afonso, Jorge, Léo, Coxa, Crespo e Gordo, etc (quem eu tiver esquecido, favor reclamar e será agradecido pessoalmente). Aos professores Sônia, Jonas, e Evangelista por terem me iniciado na vida acadêmica. Ao professor e orientador Vanderlei Bagnato que confiou em meu trabalho, me apoiou, me ensinou, me ajudou, enfim, me orientou muito bem.*

*Por fim, àquela que está ao meu lado sempre, me amando, me fazendo feliz. Obrigado Dayana por tudo que você é e por tudo que você me ensinou a ser. Te amo!*

*Muito obrigado a todos!*

*“I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.”*

*(Richard Feynman, Character Of Physical Law)*

## Resumo

No presente trabalho, estudamos a possibilidade de se produzir um Condensado de Bose-Einstein em um estado excitado de um potencial confinante. Vimos que, com um campo externo oscilante, é possível transferir átomos do estado fundamental para um estado excitado qualquer. Se esse campo oscilar próximo da frequência de transição entre os dois modos, é possível aproximar esse sistema para um de dois níveis. Analisando numericamente a evolução temporal das populações de cada nível, vimos que há oscilações de população do tipo Rabi. Estas oscilações variam de acordo com a forma espacial, a intensidade e com a dessintonia do campo aplicado. Vimos, também, que há a formação de franjas do tipo Ramsey, ao aplicarmos um campo oscilatório com dois pulsos separados. Além disso, definindo um parâmetro de ordem  $\eta$  como sendo a diferença entre a média temporal da população de cada estado, é possível caracterizar um tipo de transição de fase no condensado. Estudamos como a forma do campo externo interfere na transição de fase, caracterizada pelo parâmetro de ordem. Obtemos também, um valor crítico do campo no qual ocorre essa transição.

## Abstract

In this work, we have studied the possibility of producing a Bose-Einstein Condensate in an excited state of a confining potential. We have seen that, with a oscillatory external field, it is possible to transfer atoms from the ground state to any excited state. If this field oscillates near the transition frequency between the two modes, it is possible to approximate that system to a two-level system. Analyzing numerically the temporal evolution of population of each level, we have seen there are Rabi-like oscillations of population. This oscillations vary according to the spacial shape, the intensity and the detuning of the applied field. We have also seen there is a Ramsey-like fringes formation, if we apply an oscillatory field with separate two pulses. Moreover, defining an order parameter  $\eta$  as being a difference between the population time average of each level, it is possible to characterize a kind of phase transition in the condensate. We have studied how the shape of the external field interferes in the phase transition, characterized by the order parameter. We have also obtained a critical value for the field in which that transition occurs.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
Da Idéia à Criação . . . . .	2
Motivação . . . . .	4
Apresentação do Trabalho . . . . .	4
<b>1 Formação dos Modos Coerentes Topológicos</b>	<b>6</b>
1.1 Equação de Gross-Pitaevskii . . . . .	7
1.2 Teoria de Perturbação Otimizada: Armadilha Cilíndrica . . . . .	11
1.3 Sistema de Dois Níveis . . . . .	21
<b>2 Probabilidade de Transição</b>	<b>29</b>
2.1 Evolução Temporal das Populações . . . . .	30
2.2 Pulso de Rabi . . . . .	33
2.3 Franjas de Ramsey . . . . .	36
<b>3 Efeitos Críticos</b>	<b>43</b>
3.1 Largura de Linha e Máximo de Excitação . . . . .	44
3.2 Parâmetro de Ordem . . . . .	48
3.3 Distribuição Espacial do Campo . . . . .	54

3.3.1	Cálculo de $a$ . . . . .	54
3.3.2	Cálculo de $b$ . . . . .	62
3.3.3	Criticalidade do Campo Aplicado . . . . .	64
	<b>Conclusões</b>	<b>68</b>
	<b>Referências</b>	<b>72</b>

# Lista de Figuras

2.1	Fração da população no estado fundamental (preto) e no estado excitado (vermelho) na presença um campo externo ressonante, $\delta = 0$ e $a = 1$ para (a) $b=0,4$ ; (b) $b=0,50$ ; (c) $b=0,5001$ ; (d) $b=0,60$ . . . . .	31
2.2	Fração da população no estado fundamental (preto) e no estado excitado (vermelho) na presença um campo com uma dessintonia $\delta = 0,45$ e $a = 0,1$ para (a) $b=0,2$ ; (b) $b=0,2749$ ; (c) $b=0,2750$ ; (d) $b=0,4$ . . . . .	32
2.3	Seqüência temporal de uma excitação utilizando um pulso de Rabi. A detecção é feita após o campo de excitação ser desligado. Neste caso, utilizamos $a = 1$ , $b = 0,6$ e $\delta = 0$ . . . . .	33
2.4	Probabilidade de transição em função da dessintonia para um pulso de Rabi com $a = 1$ : (a) $b = 0,2$ ; (b) $b = 0,3$ ; (c) $b = 0,4$ e (d) $b = 0,5$ . . . . .	34
2.5	Probabilidade de transição em função da dessintonia para um pulso de Rabi para $a = 1$ : (a) $b = 0,6$ ; (b) $b = 0,8$ ; (c) $b = 1,0$ e (d) $b = 2,0$ . . . . .	34

2.6	Probabilidade de transição em função da dessintonia $\delta$ para alguns valores de $b$ , utilizando um pulso de Rabi e fixando $a = 0, 1$ . . . . .	36
2.7	Seqüência temporal de uma excitação utilizando um pulso de Ramsey. A detecção é feita após o segundo pulso de excitação ser desligado. Neste caso, utilizamos $a = 1$ , $b = 0, 4$ e $\delta = 0$ . . . . .	37
2.8	População do estado excitado, $n_j$ , em função da dessintonia $\delta$ para três diferentes configurações de pulsos. Em todos os casos $b = 0, 4$ . Em preto: pulso $\pi/2$ de Ramsey com $\tau = 3t_1$ ; azul: um pulso $\pi$ de Rabi; vermelho: pulso $\pi/2$ de Rabi. . . . .	38
2.9	Franjas de Ramsey da probabilidade $n_j$ em função de $\delta$ após a aplicação de pulsos de Ramsey com (a) $\tau = t_1$ , (b) $\tau = 2t_1$ , (c) $\tau = 3t_1$ e (d) $\tau = 8t_1$ . As linhas tracejadas em vermelho correspondem a um pulso $\pi/2$ de Rabi. . . . .	39
2.10	Franjas de Ramsey da probabilidade $n_j$ em função de $\delta$ após a aplicação de dois pulsos $\pi/2$ separados por $\tau = 4t_1$ , para diferentes valores de $b$ . Azul: $b = 0, 1$ ; preto: $b = 0, 2$ ; vermelho: $b = 0, 3$ . . . . .	40
2.11	População do estado excitado, $n_j$ , em função da dessintonia $\delta$ para um pulso $\pi/2$ de Ramsey com $\tau = 4t_1$ . Em (a), $b = 0, 5$ e em (b), $b = 0, 6$ . . . . .	41
2.12	População do estado excitado, $n_j$ , em função da dessintonia $\delta$ para um pulso $\pi/2$ de Ramsey com $\tau = 4t_1$ . Em (a), $b = 1, 0$ e em (b), $b = 1, 2$ . . . . .	41
3.1	Esquema de como é obtida a largura a meia altura $\Gamma$ e a dessintonia do máximo de excitação $\delta_{max}$ . . . . .	45

3.2	Dessintonia do máximo de excitação de um pulso de Rabi em função de $b$ . No caso usamos $a = 1$ . . . . .	46
3.3	Dessintonia do máximo de excitação de um pulso de Rabi em função de $b$ . No caso usamos $a = 0, 1$ . . . . .	46
3.4	Largura a meia altura $\Gamma$ em função de $b$ . Utilizamos $a = 1, 0$ para esse caso. . . . .	47
3.5	Largura a meia altura $\Gamma$ em função de $b$ . Utilizamos $a = 0, 1$ para esse caso. . . . .	47
3.6	Parâmetro de ordem $\eta$ em função de $b$ , para $a = 1$ e a evolução temporal para $b = 0, 4$ e $b = 0, 6$ . Em todos os casos $\delta = 0$ . . . . .	49
3.7	Parâmetro de ordem em função de $b$ para $a \leq 1, 0$ . Em todos os casos utilizamos $\delta = 0$ . . . . .	50
3.8	Parâmetro de ordem em função de $b$ para $a \geq 1, 0$ . Em todos os casos utilizamos $\delta = 0$ . . . . .	50
3.9	Fração da população no estado fundamental (preto) e no estado excitado (vermelho) para $a = 0, 8$ e (a) $b=0,55$ ; (b) $b=0,56$ ;(c) $b=0,565$ ; (d) $b=0,57$ . . . . .	52
3.10	Parâmetro de ordem em função de $b$ com $a = 0, 1$ e $\delta < 0, 45$ . . . . .	53
3.11	Parâmetro de ordem em função de $b$ com $a = 0, 1$ e $\delta > 0, 45$ . . . . .	53
3.12	Razão $R_{0,100}$ (linha cheia) e $R_{100,0}$ (linha tracejada) para diferentes simetrias da armadilha. . . . .	56
3.13	Razão $R_{0,010}$ (linha cheia) e $R_{010,0}$ (linha tracejada) para diferentes simetrias da armadilha. . . . .	57
3.14	Razão $R_{0,001}$ (linha cheia) e $R_{001,0}$ (linha tracejada) para diferentes simetrias da armadilha. . . . .	57

---

3.15	$a_{100}$ , para $g < 1$ , em diferentes simetrias da armadilha. . . . .	60
3.16	$a_{010}$ , para $g < 1$ , em diferentes simetrias da armadilha. . . . .	61
3.17	$a_{001}$ , para $g < 1$ , em diferentes simetrias da armadilha. . . . .	62
3.18	Parâmetro de ordem $\eta$ em função da amplitude $V_0$ do campo dado pela equação (3.25) para a transição $000 \leftrightarrow 100$ , com $\lambda = 10$ , $a = 0, 1$ . . . . .	66
3.19	Parâmetro de ordem $\eta$ em função da amplitude $V_0$ do campo dado pela equação (3.27) para a transição $000 \leftrightarrow 010$ , com $\lambda = 10$ e $a = 0, 1$ . . . . .	67
3.20	Parâmetro de ordem $\eta$ em função da amplitude $V_0$ do campo dado pela equação (3.29) para a transição $000 \leftrightarrow 001$ , com $\lambda = 0, 1$ e $a = 0, 1$ . . . . .	67

# Introdução

As manifestações macroscópicas de certos fenômenos quânticos são sempre surpreendentes e acabam revelando efeitos inesperados como é o caso da superfluidez do Hélio, a supercondutividade e outros. Um destes fenômenos é o *Condensado de Bose-Einstein* (CBE) em gases rarefeitos de átomos alcalinos. Experimentos envolvendo o CBE têm sido observados e explorados recentemente graças ao advento e avanço das modernas técnicas para resfriar e confinar átomos neutros. Observações deste tipo revelam propriedades do sistema que nos permite entender importantes detalhes de sistemas quânticos degenerados, fornecendo evidências para um melhor entendimento da estrutura da natureza quântica como um todo.

Para conhecermos melhor o que é o CBE, como foi criado e algumas de suas propriedades, faremos uma breve introdução a respeito nas seções seguintes.

## Da Idéia à Criação

Podemos dizer que a idéia do condensado é mais antiga que a própria Mecânica Quântica. Parece estranho, já que o CBE se trata de um fenômeno quântico, como citado anteriormente. Porém, já em 1924, Satyendra Nath Bose [1] publica um artigo<sup>1</sup> no qual ele obtém o espectro de radiação de um corpo negro, porém com uma abordagem diferente de Planck [2]. No ano seguinte, Albert Einstein [3] generaliza as idéias de Bose, e obtém a fórmula de Planck para um sistema de partículas massivas não interagentes. O curioso é que esses artigos foram publicados um ano antes do artigo de Heisenberg [4, 5] em que, pela primeira vez, a Mecânica Quântica é totalmente desvencilhada da Mecânica Clássica [2].

Einstein propõem em seu artigo de 1925 que, à temperaturas suficientemente baixas, um número grande, porém finito, de partículas ocupariam um mesmo estado. É justamente esta a idéia do Condensado de Bose-Einstein. Para acontecer esse fenômeno, a separação entre os átomos deve ser menor do que o comprimento de onda de de Broglie  $\lambda_{dB}$  [2, 6]. Na verdade, a condição mais precisa é dada por uma relação [7, 8] entre a densidade  $\rho$  e o comprimento de onda de de Broglie na qual

$$\rho\lambda_{dB} > 2,612 \quad , \quad \lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_bT}}.$$

---

<sup>1</sup>Originalmente, Bose escreveu o artigo em inglês, o qual foi traduzido por A. Einstein para ser publicado na revista alemã *Zeitschrift für Physik*.

A idéia ficou engavetada por alguns anos, por se tratar de um fenômeno considerado puramente acadêmico, sem possibilidade da criação experimental. Em 1938, Fritz London and Laszlo Tisza [9, 10] ressuscitaram a idéia do condensado ao utilizá-lo como um possível mecanismo para a superfluidadez do Hélio 4, embora o hélio líquido seja um sistema diferente do gás ideal proposto por Einstein [6].

Mesmo explicando alguns fenômenos, a condensação idealizada por Einstein ainda não havia sido feita em laboratório devido às dificuldades experimentais para se atingir densidades atômicas e temperaturas tais que a condição  $\rho\lambda_{dB} > 2,612$  seja satisfeita. Por exemplo, para se ter um gás atômico, com uma densidade da ordem de  $10^{15}$  átomos/cm<sup>3</sup>, precisaria de uma temperatura da ordem de  $100nK$ ! Só foi possível confinar átomos em armadilhas magnéticas com densidades e temperaturas ideais para a condensação com o avanço das técnicas de aprisionamento e resfriamento a laser, aliada à técnica de resfriamento evaporativo [11]. Com isso, o condensado de Bose-Einstein foi realizado pela primeira vez em 1995, em experimentos independentes, com três espécies atômicas diferentes: <sup>7</sup>Li [12], <sup>87</sup>Rb [13] e <sup>23</sup>Na [14].

A partir daí, a produção experimental da Condensação de Bose-Einstein em amostras gasosas de átomos alcalinos em armadilhas magnéticas abriu um novo campo de pesquisas, tanto experimentais quanto teóricas, extremamente rico e excitante que ainda se encontra em forte expansão. O CBE passou a ser objeto de estudo por vários grupos de pesquisa ao redor do mundo, motivado por uma idéia de Albert Einstein, há mais de 70 anos atrás!

## Motivação

A disponibilidade de sistemas macroscópicos em um regime completamente quântico abre um leque imenso de possíveis campos de pesquisa. Tais possibilidades vão, por exemplo, desde testes de física básica, em estatística quântica ou da observação do comportamento de ondas coerentes de matéria, em óptica atômica, lasers de átomos e outros, até o uso dessas características para o desenvolvimento de portas lógicas para aplicação em computação quântica.

Nossa principal motivação está no uso do CBE para a obtenção de lasers de átomos ou *Bosers* [15, 16, 17, 18]. Em lasers de luz convencionais, é fundamental que se possa controlar os diferentes modos dos fótons emitidos. Como, nos bosers, os átomos é que são emitidos coerentemente, nossa idéia é produzir o CBE em diferentes modos de uma armadilha harmônica, mantendo a coerência dos átomos condensados. Para isso, estudamos a formação do condensado em um estado excitado da armadilha por meio de um campo externo que oscila no tempo e que tenha uma distribuição espacial capaz de acoplar o estado fundamental ao estado excitado que escolhermos.

## Apresentação do Trabalho

A pesquisa teórica em condensação de Bose-Einstein também evoluiu enormemente nos últimos anos, com previsões confirmadas e ainda em estudo

nas mais diversas frentes. Um dos principais pontos de partida do estudo teórico de sistemas condensados é a equação de Gross-Pitaevskii (EGP), que é a versão não-linear da equação de Schrödinger. A EGP, desde as primeiras observações experimentais, se mostrou capaz de explicar e prever muito bem os fenômenos relativos aos átomos condensados [19]. Uma breve dedução da EGP e o processo de excitação dos modos coerentes serão mostrados no capítulo 1.

Na seqüência, mostramos os resultados do nosso trabalho. Estes são divididos em dois capítulos. No capítulo 2, mostramos como a população de cada estado evolui no tempo, com a aplicação de um campo externo. Este sistema pode ser aproximando a um de dois níveis, com a adição de um termo não linear devido à interação entre os átomos. Vemos, também, a probabilidade de transição caso o campo externo tenha uma configuração do tipo Rabi ou Ramsey. No capítulo 3, analisamos comportamentos críticos associados à dinâmica da excitação dos modos. Estudamos quais distribuições espaciais do campo externo produzem estes efeitos e com qual intensidade. Dessa forma, podemos entender como a não linearidade atua no comportamento da dinâmica do condensado.

No capítulo final, concluímos nosso trabalho com análises sobre os resultados apresentados e perspectivas para trabalhos futuros.

# Capítulo 1

## Formação dos Modos Coerentes Topológicos

A primeira proposta para a criação de um condensado em um estado excitado da armadilha magnética foi apresentado por Yukalov *et al.* em [20], no qual o condensado é submetido a um campo oscilante. No artigo, os autores supõem que o campo oscila com uma frequência próxima a frequência de transição entre o estado fundamental e um estado excitado da armadilha harmônica. Dessa maneira, podemos aproximar o sistema a um sistema de dois níveis e estudar sua dinâmica.

Nosso sistema consiste em um gás muito rarefeito a temperaturas baixas, o qual podemos descrever com a equação de Gross-Pitaevskii (GPE). A equação de Gross-Pitaevskii é uma equação de Schrödinger não linear, cujas soluções desse tipo de equação são funções de onda coerentes. Além disso, a densidade de probabilidade atribuída a cada modo tem formas es-

paciais diferentes e, por isso, as soluções são chamadas de *modos coerentes topológicos*.

Neste capítulo, faremos uma introdução sobre a teoria e os métodos utilizados para a obtenção e análises dos resultados. Após obtermos a expressão para a equação de Gross-Pitaevskii na seção 1.1, falaremos da *Teoria de Perturbação Otimizada* na seção 1.2. Com essa teoria podemos obter soluções aproximadas para a GPE.

Na seção 1.3, discutiremos como podemos transferir os átomos condensados do estado fundamental da armadilha harmônica para um estado excitado. Faremos algumas observações acerca do campo externo a ser aplicado e as condições para que as equações da evolução temporal dos modos sejam válidas.

## 1.1 Equação de Gross-Pitaevskii

Para chegarmos na equação que descreve nosso sistema, vamos considerar apenas interações binárias entre as partículas. O fato de estarmos trabalhando com um gás rarefeito nos permite tal aproximação. Assim, o hamiltoniano de muitos corpos [21] que descreve nosso sistema é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U_{trap}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \\ & + \frac{1}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (1.1)$$

no qual,  $U_{trap}(\mathbf{r})$  é o potencial da armadilha,  $V_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é o potencial de interação interatômica,  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$  e  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  são operadores de criação e aniquilação de um bóson na posição  $\mathbf{r}$ . Esses operadores obedecem às relações de comutação

$$\left[ \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (1.2a)$$

$$\left[ \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right] = 0; \quad (1.2b)$$

$$\left[ \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = 0. \quad (1.2c)$$

Como estamos interessados na dinâmica do sistema, devemos saber como o operador  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  evolui no tempo. Para isso, usaremos a equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[ \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H} \right]. \quad (1.3)$$

Substituindo a equação (1.1) em (1.3) e utilizando as relações de comutação, obtemos a expressão

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U_{trap}(\mathbf{r}) + \int V_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

Essa equação é uma equação *exata* para o operador de campo  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  [11,

22]. Suponha que esse operador possa ser representado por um campo médio  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , normalizado na unidade. Como

$$\int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = N, \quad (1.5)$$

em que  $N$  é o número de átomos do condensado, podemos escrever o operador como

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{N} \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.6)$$

Substituindo (1.6) em (1.4), temos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U_{trap}(\mathbf{r}) + N \int V_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\Phi(\mathbf{r}', t)|^2 d\mathbf{r}' \right] \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.7)$$

Embora as equações (1.4) e (1.7) tenham a mesma estrutura, representam diferentes situações. A equação (1.4) é uma equação exata para o operador de campo, enquanto a equação (1.7) é uma *aproximação de campo médio* para um campo clássico, que é um parâmetro de ordem do condensado, também chamado de *função de onda do condensado* [19].

Nosso sistema está a uma temperatura muito baixa <sup>1</sup> e, portanto, a energias tão baixas que o comprimento de onda de de Broglie  $\lambda_{dB} = h/p$  é muito maior que o alcance da interação entre os átomos [2]. Além disso, o processo de espalhamento mais importante das partículas é a colisão elástica de dois corpos. Assim, o potencial de interação pode ser representado pelo potencial

---

<sup>1</sup>Os condensados em gases diluídos atingem temperaturas da ordem de 100nK

de contato de Fermi [8], dado por

$$V_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = A\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad , \quad A = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (1.8)$$

Substituindo a equação (1.8) em (1.7), obtemos a equação de Gross-Pitaevskii

$$\hat{H}\Phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, t), \quad (1.9)$$

com

$$\hat{H} = \hat{H}[\Phi] = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + U_{trap}(\mathbf{r}) + AN|\Phi|^2. \quad (1.10)$$

As soluções dessa equação são do tipo

$$\Phi_n(\mathbf{r}, t) = \phi_n(\mathbf{r})e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (1.11)$$

na qual  $\phi_n(\mathbf{r})$  são soluções da equação independente do tempo

$$\hat{H}[\phi_n]\phi_n(\mathbf{r}) = E_n\phi_n(\mathbf{r}). \quad (1.12)$$

A seguir, será apresentada uma forma de obter, aproximadamente, os modos topológicos, bem como o espectro da equação (1.12), para o caso da armadilha cilíndrica.

## 1.2 Teoria de Perturbação Otimizada: Armadilha Cilíndrica

Utilizaremos a *Teoria de Perturbação Otimizada* para obtermos uma aproximação para as funções de onda do problema (1.12). Para tal, seguiremos os procedimentos descritos por Courteille *et al.* em [11].

No método das perturbações usual, temos um problema do tipo

$$H = H_0 + H',$$

no qual  $H$  é o hamiltoniano que queremos resolver,  $H_0$  é o hamiltoniano do qual conhecemos os autovalores e as autofunções e  $H'$  é a perturbação. Na teoria de perturbação otimizada, introduzimos parâmetros variacionais em  $H_0$ . Assim, nosso problema fica

$$\begin{aligned} H &= H_0(u, v, w, \dots) + \Delta H, \\ \Rightarrow \Delta H &= H - H_0(u, v, w, \dots), \end{aligned} \quad (1.13)$$

no qual se vê que  $\Delta H \neq H'$ .

Então a correção de primeira ordem das energias, é dada por

$$E_n^{(1)}(u, v, w, \dots) = E_n^{(0)}(u, v, w, \dots) + \langle \Phi_n^{(0)} | \Delta H | \Phi_n^{(0)} \rangle, \quad (1.14)$$

na qual  $\Phi_n^{(0)} = \Phi_n^{(0)}(u, v, w, \dots)$  são soluções do hamiltoniano não perturbado  $H_0$ . Achadas as energias, devemos minimizá-las nos parâmetros variacionais.

Assim,

$$\frac{\partial E_n}{\partial u} = 0 \ ; \ \frac{\partial E_n}{\partial v} = 0 \ ; \ \frac{\partial E_n}{\partial w} = 0 \ \dots \quad (1.15)$$

De posse dos parâmetros variacionais, obtemos tanto as energias como as funções de onda.

Atualmente, a maioria dos condensados são produzidos em armadilhas harmônicas com simetrias cilíndricas. Dessa forma, supomos que o potencial da armadilha na equação (1.12) tenha simetria cilíndrica

$$U_{trap}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\omega_r^2 r^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (1.16)$$

na qual  $\omega_r$  é a frequência angular radial e  $\omega_z$  é a frequência angular axial. A seguir, definiremos alguns parâmetros importantes para nossos cálculos.

O comprimento do oscilador

$$l_r = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_r}}, \quad (1.17)$$

que nos dá um tamanho efetivo do condensado.

O parâmetro de anisotropia

$$\lambda = \frac{\omega_z}{\omega_r} \quad (1.18)$$

nos dá a forma da nuvem atômica do condensado. Para  $\lambda < 1$ , temos uma nuvem alongada, como um charuto. No caso em que  $\lambda > 1$ , a nuvem é achatada, como um disco. Se  $\lambda = 1$  a nuvem atômica é esféricamente simétrica.

Definimos, ainda, o parâmetro de acoplamento adimensional

$$g = 4\pi N \frac{a_s}{l_r}, \quad (1.19)$$

que nos indica a intensidade da interação interatômica.

Com o comprimento do oscilador definimos nossas coordenadas adimensionais

$$x_r = \frac{r}{l_r}, \quad x_z = \frac{z}{l_r}. \quad (1.20)$$

Além disso, definimos também um hamiltoniano adimensional, dado por

$$\hat{H}[\psi] = \frac{\hat{H}[\phi]}{\hbar\omega_r}, \quad (1.21)$$

o que implica que as autofunções  $\psi_n(\mathbf{x})$  e as auto-energias  $e_n$  são dadas por

$$\psi(\mathbf{x}) = l_r^{3/2} \phi(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \varepsilon_n = \frac{E_n}{\hbar\omega_r}. \quad (1.22)$$

Substituindo o potencial (1.16) na equação (1.12) e reescrevendo a equação como função dos parâmetros definidos anteriormente, obtemos

$$\hat{H}\psi_n(\mathbf{x}) = \varepsilon_n\psi_n(\mathbf{x}), \quad (1.23)$$

com

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\nabla_x^2 + \frac{1}{2}(x_r^2 + \lambda^2 x_z^2) + g|\psi|^2. \quad (1.24)$$

Comparando a equação (1.24) com o hamiltoniano (1.13) identificamos

$H_0$  como sendo

$$H_0(u, v) = -\frac{1}{2}\nabla_x^2 + \frac{1}{2}(u^2x_r^2 + v^2x_z^2), \quad (1.25)$$

no qual  $u$  e  $v$  são os parâmetros variacionais. A equação de Schrödinger, associada ao hamiltoniano (1.25), tem solução exata e suas autofunções são do tipo

$$\psi_{nmk} = \left[ \frac{2n!u^{|m|+1}}{(n+|m|)!} \right]^{1/2} x_r^{|m|} e^{-ux_r^2/2} L_n^{|m|}(ux_r^2) \frac{e^{im\varphi}(v/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2^{k+1}\pi k!}} e^{-vx_z^2/2} H_k(\sqrt{v}x_z), \quad (1.26)$$

na qual  $L_n^{|m|}(x)$  são os polinômios associados de Laguerre e  $H_k(x)$  são os polinômios de Hermite. Os números quânticos  $n$ ,  $m$  e  $k$  são tais que

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

As auto-energias são dadas por

$$\varepsilon_{nmk}^{(0)} = (2n + |m| + 1)u + \left(k + \frac{1}{2}\right)v. \quad (1.27)$$

Novamente comparando com a equação (1.13), vemos que

$$\begin{aligned} \Delta H &= H - H_0 \\ &= \frac{1}{2} [(1 - u^2)x_r^2 + (\lambda^2 - v^2)x_z^2] + g|\psi|^2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Assim, podemos calcular a correção de primeira ordem da energia

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nmk}^{(1)} &= \varepsilon_{nmk}^{(0)} + \langle \psi_{nmk} | \Delta H | \psi_{nmk} \rangle \\ &= \frac{p}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right) + \frac{q}{4} \left( v + \frac{\lambda^2}{v} \right) + gu\sqrt{v}I_{nmk},\end{aligned}\quad (1.29)$$

na qual

$$I_{nmk} = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{n!}{(n+|m|)!2^k k!} \right]^2 \int_0^\infty d\rho \rho^{2|m|} e^{-2\rho} [L_n^{|m|}(\rho)]^4 \int_{-\infty}^\infty d\zeta e^{-2\zeta^2} [H_k(\zeta)]^4 \quad (1.30)$$

e

$$p = 2n + |m| + 1 \quad \text{e} \quad q = 2k + 1. \quad (1.31)$$

Minimizando a energia obtida em (1.29) nos parâmetros variacionais,

$$\frac{\partial}{\partial u} \varepsilon_{nmk}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial v} \varepsilon_{nmk}^{(1)} = 0, \quad (1.32)$$

obtemos um sistema de equações para  $u$  e  $v$

$$p \left( 1 - \frac{1}{u^2} \right) + \frac{s}{p\lambda} \sqrt{\frac{v}{q}} = 0 \quad (1.33a)$$

$$q \left( 1 - \frac{\lambda^2}{v^2} \right) + \frac{su}{p\lambda\sqrt{vq}} = 0 \quad (1.33b)$$

no qual

$$s = 2p\sqrt{q}I_{nmk}\lambda g. \quad (1.34)$$

O sistema (1.33) não pode ser resolvido analiticamente. Porém, podemos

obter expressões para os casos de acoplamento fraco entre os átomos, ou seja,  $g \rightarrow 0 \Rightarrow s \rightarrow 0$  e de acoplamento forte,  $g \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow \infty$ .

Para o acoplamento fraco, temos

$$u(s) = 1 - \frac{1}{2p^2\sqrt{\lambda q}}s + \dots \quad (1.35a)$$

$$v(s) = \lambda - \frac{\lambda}{2p(\lambda q)^{3/2}}s + \dots \quad (1.35b)$$

E para o acoplamento forte

$$u(s) = ps^{-2/5} + \frac{p}{5}[-3p^2 + (\lambda q)^2]s^{-6/5} + \dots \quad (1.36a)$$

$$v(s) = q\lambda^2s^{-2/5} - \frac{2}{5}q\lambda^2[p^2 - 2(q\lambda)^2]s^{-6/5} + \dots \quad (1.36b)$$

De posse das expressões para os parâmetros variacionais, podemos construir as funções de onda (1.26), e o espectro de energia (1.27).

A função de onda associada ao modo coerente para o estado fundamental ( $n=0, m=0, k=0$ ) é dada por

$$\psi_{000} = \left( \frac{u_{000}^2 v_{000}}{\pi^3} \right)^{1/4} e^{-(u_{000}x_r^2 + v_{000}x_z^2)/2}. \quad (1.37)$$

No limite de acoplamento fraco, temos

$$u_{000} \simeq 1 - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{2}} + \frac{(1+3\lambda)}{16\pi^3} g^2 \quad (1.38a)$$

$$v_{000} \simeq \lambda - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{2}} + \frac{(1+\lambda)}{8\pi^3} g^2 \quad (1.38b)$$

e a energia

$$\varepsilon_{000} \simeq 1 + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{2}} - \frac{(2\lambda+1)}{32\pi^3} g^2. \quad (1.39)$$

No limite de acoplamento forte, temos

$$u_{000} \simeq \frac{(2\pi^3)^{1/5}}{(\lambda g)^{2/5}} \quad (1.40a)$$

$$v_{000} \simeq \frac{(2\pi^3)^{1/5} \lambda^2}{(\lambda g)^{2/5}} \quad (1.40b)$$

e a energia

$$\varepsilon_{000} \simeq \frac{5}{4} \frac{(\lambda g)^{2/5}}{(2\pi^3)^{1/5}} + \frac{(2+\lambda^2)}{4} \frac{(2\pi^3)^{1/5}}{(\lambda g)^{2/5}}. \quad (1.41)$$

Além do estado fundamental, podemos construir os demais estados do potencial harmônico. A seguir, mostraremos os três primeiros estados excitados, os quais denominaremos de vórtice, quando  $n=0$ ,  $m=1$  e  $k=0$ ; dipolo axial, quando  $n=0$ ,  $m=0$  e  $k=1$ ; e por fim o dipolo radial, quando  $n=1$ ,  $m=0$  e  $k=0$ .

Para o estado de vórtice ( $n=0$ ,  $m=1$ ,  $k=0$ ), temos

$$\psi_{010} = u_{010} \left( \frac{v_{010}}{\pi^3} \right)^{1/4} x_r e^{i\varphi} e^{-(u_{010}x_r^2 + v_{010}x_z^2)/2}. \quad (1.42)$$

No limite de acoplamento fraco, os parâmetros variacionais têm a forma

$$u_{010} \simeq 1 - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{8} + \frac{(2+3\lambda)}{256\pi^3} g^2} \quad (1.43a)$$

$$v_{010} \simeq \lambda - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{4} + \frac{(2+\lambda)}{64\pi^3} g^2} \quad (1.43b)$$

sendo a energia

$$\varepsilon_{010} \simeq 2 + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{4} - \frac{(\lambda+1)}{128\pi^3} g^2}. \quad (1.44)$$

No limite de acoplamento forte,

$$u_{010} \simeq \frac{2(2\pi^3)^{1/5}}{(\lambda g)^{2/5}} \quad (1.45a)$$

$$v_{010} \simeq \frac{(2\pi^3)^{1/5} \lambda^2}{(\lambda g)^{2/5}} \quad (1.45b)$$

e a energia

$$\varepsilon_{010} \simeq \frac{5}{4} \frac{(\lambda g)^{2/5}}{(2\pi^3)^{1/5}} + \frac{(8+\lambda^2)}{4} \frac{(2\pi^3)^{1/5}}{(\lambda g)^{2/5}}. \quad (1.46)$$

A função de onda para o estado de dipolo axial ( $n=0$ ,  $m=0$ ,  $k=1$ ) é dada

por

$$\psi_{001} = \left( \frac{4u_{001}^2 v_{001}^2}{\pi^3} \right)^{1/4} x_z e^{-(u_{001}x_r^2 + v_{001}x_z^2)/2}, \quad (1.47)$$

no limite de acoplamento fraco,

$$u_{001} \simeq 1 - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{3g}{8} + \frac{(1+9\lambda)}{256\pi^3} 3g^2} \quad (1.48a)$$

$$v_{001} \simeq \lambda - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{8} + \frac{(1+3\lambda)}{128\pi^3} g^2} \quad (1.48b)$$

e a energia

$$\varepsilon_{001} \simeq 1 + \frac{3\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{3g}{8} - \frac{3(6\lambda+1)}{512\pi^3} g^2}. \quad (1.49)$$

No limite de acoplamento forte,

$$u_{001} \simeq \left(\frac{\pi^3}{3}\right) \frac{2}{(\lambda g)^{2/5}} \quad (1.50a)$$

$$v_{001} \simeq \left(\frac{\pi^3}{3}\right) \frac{6\lambda^2}{(\lambda g)^{2/5}} \quad (1.50b)$$

e a energia

$$\varepsilon_{001} \simeq \frac{5}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{3/5} (\lambda g)^{2/5} + \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/5} \frac{(2+9\lambda^2)}{2(\lambda g)^{2/5}}. \quad (1.51)$$

Finalmente, temos o estado de dipolo radial ( $n=1$ ,  $m=0$ ,  $k=0$ )

$$\psi_{100} = \left(\frac{u_{100}^2 v_{100}}{\pi^3}\right)^{1/4} (1 - u_{100} x_r^2) e^{-(u_{100} x_r^2 + v_{100} x_z^2)/2}, \quad (1.52)$$

no qual, para o acoplamento fraco, temos

$$u_{100} \simeq 1 - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{12}} + \frac{(1+\lambda)}{192\pi^3} g^2 \quad (1.53a)$$

$$v_{100} \simeq \lambda - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{4}} + \frac{(3+\lambda)}{96\pi^3} g^2 \quad (1.53b)$$

e a energia

$$\varepsilon_{100} \simeq 1 + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3} \frac{g}{4}} - \frac{(3+2\lambda)}{384\pi^3} g^2. \quad (1.54)$$

No limite de acoplamento forte,

$$u_{000} \simeq \frac{(6\pi^3)^{3/5}}{(\lambda g)^{2/5}} \quad (1.55a)$$

$$v_{000} \simeq \frac{(6\pi^3)^{3/5} \lambda^2}{3(\lambda g)^{2/5}} \quad (1.55b)$$

e a energia

$$\varepsilon_{100} \simeq \frac{5}{8} \left( \frac{36}{\pi^3} \right)^{1/5} (\lambda g)^{2/5} + \left( \frac{\pi^3}{36} \right)^{1/5} \frac{(18 + \lambda^2)}{2(\lambda g)^{2/5}}. \quad (1.56)$$

Ao calcularmos o produto interno entre as funções de onda associadas aos modos topológicos, vemos que tanto o estado de vórtice,  $\psi_{010}$ , quanto o dipolo axial,  $\psi_{001}$ , são ortonormais entre si e com o estado fundamental,  $\psi_{000}$ . O mesmo não acontece com o estado de dipolo radial,  $\psi_{100}$ . O produto escalar entre as duas é dado por

$$\langle \psi_{000} | \psi_{100} \rangle = 2\sqrt{2} \frac{(u_{100} - u_{000})\sqrt{u_{100}u_{000}}}{(u_{100} + u_{000})^2} \frac{(v_{100}v_{000})^{1/4}}{\sqrt{v_{100} + v_{000}}}. \quad (1.57)$$

Pelas aproximações assintóticas dos parâmetros variacionais  $u_{nmk}$  e  $v_{nmk}$ , temos que para o acoplamento fraco

$$\langle \psi_{000} | \psi_{100} \rangle \simeq \frac{5}{48} \frac{\sqrt{2\lambda} g}{\pi^{3/2}} \simeq 0,03\sqrt{\lambda} g, \quad (1.58)$$

e para o acoplamento forte

$$\langle \psi_{000} | \psi_{100} \rangle \simeq 0,39. \quad (1.59)$$

Das expressões (1.58) e (1.59), podemos concluir que o método de perturbação otimizado não calcula apropriadamente a função de onda para o dipolo radial. Para o acoplamento fraco, no entanto, o resultado obtido é uma boa aproximação. Vemos que o produto interno (1.58) é proporcional ao parâmetro de acoplamento e  $g \rightarrow 0$ . Assim, podemos considerar que  $\langle \psi_{000} | \psi_{100} \rangle \simeq 0$  e a equação (1.52) é uma boa aproximação para esse modo, no limite de acoplamento fraco.

Na seção seguinte, faremos uma aproximação do nosso sistema para um de dois níveis, acoplando o estado fundamental (1.37) com um dos estados excitados obtidos nesta seção.

### 1.3 Sistema de Dois Níveis

Nesta seção, estudaremos o acoplamento entre o estado fundamental e um dos estados excitados calculados na seção anterior.

Supondo que, inicialmente, todos os átomos condensados estão no es-

tado fundamental. Devido à não linearidade do sistema, os níveis de energia do nosso sistema não estão igualmente espaçados como em um oscilador harmônico não interagente [11]. Assim, com um campo externo, quase ressonante com a transição entre os níveis, os átomos podem ser transferidos para um único estado excitado. Podemos, então, considerar nosso problema como um sistema de dois níveis.

Para a análise da evolução da população em cada nível, trataremos o campo externo como uma perturbação, dependente do tempo e, com isso, obtemos as equações de evolução das populações de cada modo.

Aplicando uma perturbação do tipo

$$V_p = V(\vec{r})\cos\omega t \quad (1.60)$$

na equação de Gross-Pitaevskii (1.10), consideramos que a solução do sistema perturbado

$$(H + V_p)\Phi = i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (1.61)$$

seja uma combinação linear das soluções gerais (1.1) da equação não perturbada, ou seja,

$$\Phi = \sum_n c_n(t)\phi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (1.62)$$

Aqui, fazemos teoria de perturbação dependente do tempo usual. Substituindo (1.62) em (1.61), multiplicando por  $\phi_m^*(\vec{r})e^{-iE_m t/\hbar}$  e integrando no espaço,

$$\int \phi_m^* e^{-iE_m t/\hbar} (H + V_p)\Phi d\vec{r} = \int \phi_m^* e^{-iE_m t/\hbar} i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} d\vec{r},$$

obtemos um conjunto de equações para os coeficientes  $c_n(t)$ , dado por

$$\begin{aligned} \left( i\hbar \frac{dc_m}{dt} + c_m E_m \right) e^{i\omega_{mn}t} &= \sum_n c_n e^{i\omega_{mn}t} \int \phi_m^* \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U_{trap} \right) \phi_n d\vec{r} + \\ &+ AN \sum_{n,k,l} c_k^* c_l c_n e^{i(\omega_{mn} + \omega_{kl})t} \int \phi_m^* \phi_k^* \phi_l \phi_n d\vec{r} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_n c_n V_{mn} [e^{i(\omega - \omega_{nm})t} + e^{-i(\omega - \omega_{mn})t}], \end{aligned} \quad (1.63)$$

no qual  $A$  é a constante definida na equação (1.8),

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}, \quad (1.64)$$

e

$$V_{mn} = \int \phi_m^* V(\vec{r}) \phi_n d\vec{r}. \quad (1.65)$$

Pelo fato de  $V_p(\vec{r}, t)$  ser uma perturbação, os coeficientes  $c_n$  não devem variar muito no tempo quando comparados com a frequência característica do sistema não perturbado. Assim, espera-se que

$$\left| \frac{dc_n}{dt} \right| \ll \frac{E_n}{\hbar}. \quad (1.66)$$

Por isso, podemos tratar  $c_n$  e sua derivada temporal como sendo quase invariantes no tempo.

Se um função  $f(t)$  é tida como quase invariante no tempo, é possível assumir que

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) e^{i\omega_{mn}t} dt \simeq \frac{1}{\tau} f(t) \int_0^\tau e^{i\omega_{mn}t} dt.$$

Usando esta consideração, chegamos a um sistema de equações diferenciais

para os coeficientes  $c_n$  tomando a média temporal da equação (1.63). Antes, obteremos algumas expressões importantes. Primeiro, temos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{i\omega_{mn}t} dt = \delta_{mn} \quad (1.67a)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{i(\omega_{mn} + \omega_{kl})t} dt = \delta_{mn}\delta_{kl} + \delta_{ml}\delta_{kn} - \delta_{mk}\delta_{kn}\delta_{nl}. \quad (1.67b)$$

Além disso, como queremos um sistema de dois níveis, devemos impor que a frequência  $\omega$  do campo  $V_p$  deva ser muito próxima da frequência de transição,  $\omega_{j0}$ , entre o estado fundamental e um estado excitado  $j$ . Em outras palavras,

$$\Delta\omega = \omega - \omega_{j0} \rightarrow 0. \quad (1.68)$$

Com isso, temos que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty (e^{i(\omega - \omega_{nm})t} + e^{-i(\omega - \omega_{mn})t}) dt = \delta_{m,0} e^{i\Delta\omega t} + \delta_{m,j} e^{-i\Delta\omega t}. \quad (1.69)$$

Feita a média temporal, e usando as expressões (1.67) e (1.69), obtemos uma nova equação para os coeficientes, dada por

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_m}{dt} + c_m E_m &= c_m \int \phi_m^* \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U_{trap} + AN|c_m|^2|\phi_m|^2 \right] \phi_m d\vec{r} + \\ &+ 2AN \sum_{k \neq m} |c_k|^2 c_m \int \phi_m^* |\phi_k|^2 \phi_m d\vec{r} \\ &+ \frac{1}{2} [c_0 V_{0j} \delta_{m,0} e^{i\Delta\omega t} + c_j V_{0j}^* \delta_{m,j} e^{-i\Delta\omega t}]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Da condição de normalização da solução geral (1.1),  $\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$ , temos a relação

$$\sum_{mk} c_m^* c_k \langle \phi_m | \phi_k \rangle e^{i\omega_{mk}t} = 1.$$

Usando  $\langle \phi_m | \phi_k \rangle = \delta_{mk}$ , vemos que

$$\sum_k |c_k|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |c_m|^2 = 1 - \sum_{k \neq m} |c_k|^2.$$

Substituindo a expressão acima na equação (1.70), obtemos que

$$\frac{dc_m}{dt} = -i \sum_{k \neq m} \alpha_{m,k} |c_k|^2 c_m - \frac{i}{2} [c_j \beta \delta_{m,0} e^{i\Delta\omega t} + c_0 \beta^* \delta_{m,j} e^{-i\Delta\omega t}], \quad (1.71)$$

na qual definimos duas amplitudes de transição [22], uma decorrente da interação interatômica, dada por

$$\alpha_{m,k} = \frac{AN}{\hbar} \int |\phi_m|^2 (2|\phi_k|^2 - |\phi_m|^2) d\vec{r}, \quad (1.72)$$

a outra decorrente do campo externo aplicado, dada por

$$\beta = \frac{V_{0j}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \int \phi_0^* V(\vec{r}) \phi_j d\vec{r}. \quad (1.73)$$

Essas amplitudes definem quão importante é a interação atômica e o campo externo aplicado no processo de transferência dos átomos do estado fundamental para o  $j$ -ésimo estado excitado.

A equação (1.71) nos mostra que um campo quase ressonante acopla dois modos, 0 e  $j$ , e podemos considerar o sistema como sendo de dois níveis. Isto

fica mais claro se olharmos para o comportamento da fração da população em cada modo. Essa fração é dada por

$$n_m(t) = |c_m(t)|^2. \quad (1.74)$$

Da definição (1.74) e da equação (1.71), obtemos que a população em um estado  $q$  qualquer é governado pela equação

$$\frac{dn_q}{dt} = c_q \frac{dc_q^*}{dt} + c_q^* \frac{dc_q}{dt} = \text{Im} (c_0^* c_j \beta \delta_{q,0} e^{i\Delta\omega t} + c_0 c_j^* \beta^* \delta_{q,j} e^{-i\Delta\omega t}). \quad (1.75)$$

Assim, vemos que

$$\frac{dn_q(t)}{dt} = 0$$

para  $q \neq 0, j$ . Dado que, inicialmente, o condensado se encontra todo no estado fundamental, ou seja,  $n_m(0) = \delta_{m,0}$ , podemos concluir que  $n_q(t) = 0$ , para todo tempo. Portanto, pela definição (1.74), temos que  $c_q(t) = 0$  e concluímos que nosso sistema é de fato um sistema de dois níveis.

Escrevendo as equações que descrevem a evolução temporal dos coeficientes  $c_n(t)$ , temos

$$\frac{dc_0}{dt} = -i\alpha_{0,j} n_j c_0 - \frac{i}{2} \beta e^{i\Delta\omega t} c_j \quad (1.76a)$$

$$\frac{dc_j}{dt} = -i\alpha_{j,0} n_0 c_j - \frac{i}{2} \beta^* e^{-i\Delta\omega t} c_0. \quad (1.76b)$$

As soluções deste sistema nos da toda a informação necessária sobre a

dinâmica das populações tanto do estado fundamental quanto do excitado. Uma solução analítica de (1.76) pode ser obtida quando  $\alpha_{0,j} = \alpha_{j,0} = \alpha$  e  $|\beta| \ll |\alpha|$  [11], na qual obtemos uma expressão para  $n_0$  e  $n_j$  da forma

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 - \frac{|\beta|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \\ n_j &= \frac{|\beta|^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

com a frequência coletiva  $\Omega$  definida como

$$\Omega = \sqrt{|\beta|^2 + [\alpha(n_0 - n_j) - \Delta\omega]^2}. \quad (1.78)$$

Podemos notar que a frequência coletiva  $\Omega$  não é constante mas uma função das populações instantâneas  $n_0$  e  $n_j$ . A solução analítica das populações está ligada com a condição de que as populações dos modos têm variações pequenas. Portanto, a diferença de população  $\Delta n = |n_0 - n_j|$  é quase constante e  $n_j \simeq 0$ . Porém, estamos interessados em uma população macroscópica do estado excitado, o que nos leva a fazer uma análise numérica do sistema (1.76). Assim, podemos atribuir valores a  $\alpha$  e  $\beta$  que vão além da restrição  $|\beta| \ll |\alpha_{m,k}|$ .

Desse modo, a única restrição que temos é a de que o sistema de equações (1.76) só é possível se a condição (1.66) for satisfeita. Dessa condição e do sistema, obtemos outras condições a serem satisfeitas

$$\left| \frac{\alpha_{0,j}}{\omega_{j0}} \right| \ll 1 \quad , \quad \left| \frac{\alpha_{j,0}}{\omega_{j0}} \right| \ll 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\beta}{\omega_{j0}} \right| \ll 1. \quad (1.79)$$

Essas condições serão discutidas na seção 3.3, na qual testaremos para que valores de  $g$  e  $\lambda$  as condições (1.79) são válidas.

Nas seções seguintes, faremos um estudo numérico da evolução temporal da população dos modos topológicos, variando a configuração temporal do campo de excitação, além de alisar o comportamento do sistema variando os parâmetros  $\alpha_{0,j}$ ,  $\alpha_{j,0}$  e  $\beta$ , além da dessintonia  $\Delta\omega$ .

## Capítulo 2

# Probabilidade de Transição

No capítulo anterior obtemos as equações que regem a evolução temporal da população de cada modo topológico. Na seção 2.1, faremos uma exposição de como fazemos para obter a evolução temporal da população dos modos bem como nossos primeiros resultados. Inicialmente, analisaremos o comportamento das frações de população dos modos acoplados quando o campo externo está o tempo todo ligado e para uma dessintonia fixa.

Em seguida, faremos um estudo numérico dessas evoluções ao considerar excitações do tipo Rabi, na seção 2.2, e do tipo Ramsey, na seção 2.3. Antes, porém, na seção 2.1, faremos uma exposição de como fazemos para obter a evolução temporal da população dos modos bem como nossos resultados.

## 2.1 Evolução Temporal das Populações

Das equações (1.76), podemos, por simplicidade, dividir tudo por  $\alpha_{j,0}$ . Assim, obtemos

$$\frac{dc_0}{dt'} = -ian_j c_0 - \frac{i}{2} b e^{i\delta t'} c_j \quad (2.1)$$

$$\frac{dc_j}{dt'} = -in_0 c_j - \frac{i}{2} b^* e^{-i\delta t'} c_0, \quad (2.2)$$

em que definimos os seguintes parâmetros

$$a = \frac{\alpha_{0,j}}{\alpha_{j,0}}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha_{j,0}}, \quad \delta = \frac{\Delta\omega}{\alpha_{j,0}} \quad e \quad t' = \alpha_{j,0} t. \quad (2.3)$$

Como condições iniciais, temos todo o condensado no estado fundamental, ou seja,  $c_0(0) = 1$  e  $c_j(0) = 0$ . Utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem [23, 24] obtemos, numericamente,  $n_0(t)$  e  $n_j(t)$ , a partir das equações para os coeficientes  $c_0(t)$  e  $c_j(t)$ .

Primeiramente, obteremos as soluções numéricas para os coeficientes atribuindo valores aos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $\delta$ . Definidos os valores que nos são interessantes, calcularemos explicitamente esses parâmetros. Dessa forma, poderemos ajustar os parâmetros do sistema ou do campo externo de acordo com o valor de  $a$ ,  $b$  e  $\delta$  obtidos.

A figura 2.1 mostra as oscilações das populações em função do tempo para diferentes valores de  $b$ . Neste caso, usamos  $a = 1$  e um campo ressonante, ou seja,  $\delta = 0$ . Na figura 2.2 temos a evolução temporal das populações para

$a = 0,1$  e um campo com uma dessintonia  $\delta = 0,45$ .

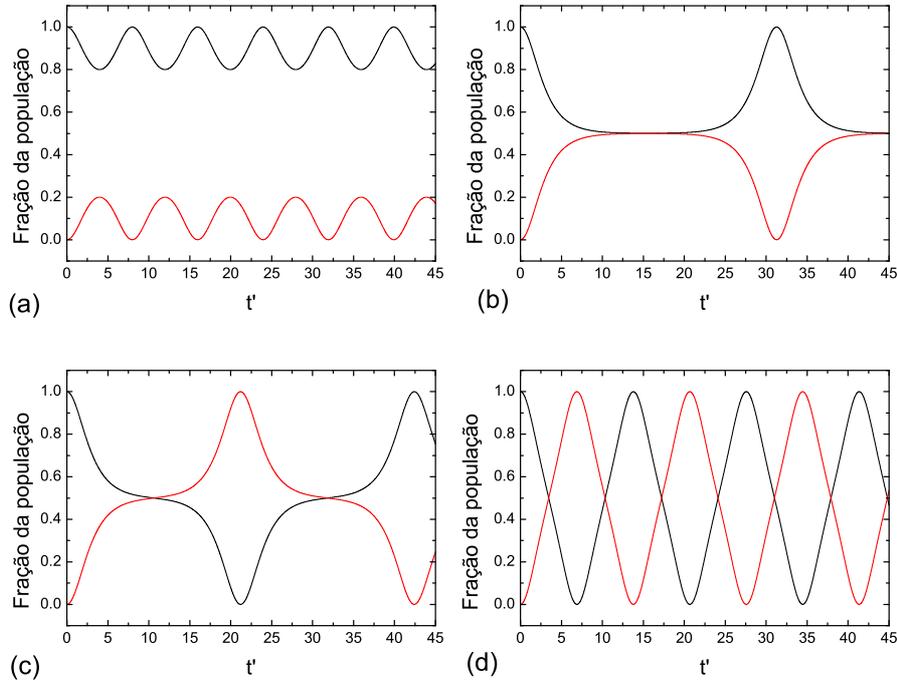


Figura 2.1: Fração da população no estado fundamental (preto) e no estado excitado (vermelho) na presença um campo externo ressonante,  $\delta = 0$  e  $a = 1$  para (a)  $b=0,4$ ; (b)  $b=0,50$ ; (c)  $b=0,5001$ ; (d)  $b=0,60$ .

Vemos dois comportamentos distintos das oscilações. No caso em que  $a = 1$  e o campo é ressonante (figura 2.1), para  $b < 0,5$ , durante todo o tempo a população do estado fundamental é maior que a do excitado. Porém, para  $b > 0,5$ , as médias temporais das duas populações,  $n_0$  e  $n_j$ , são iguais, sendo possível transferir todos os átomos do estado fundamental para o excitado.

O mesmo ocorre no caso em que  $a = 0,1$  e o campo tem uma dessintonia  $\delta = 0,45$  (figura 2.2). Para  $b < 0,275$  a população do estado fundamental

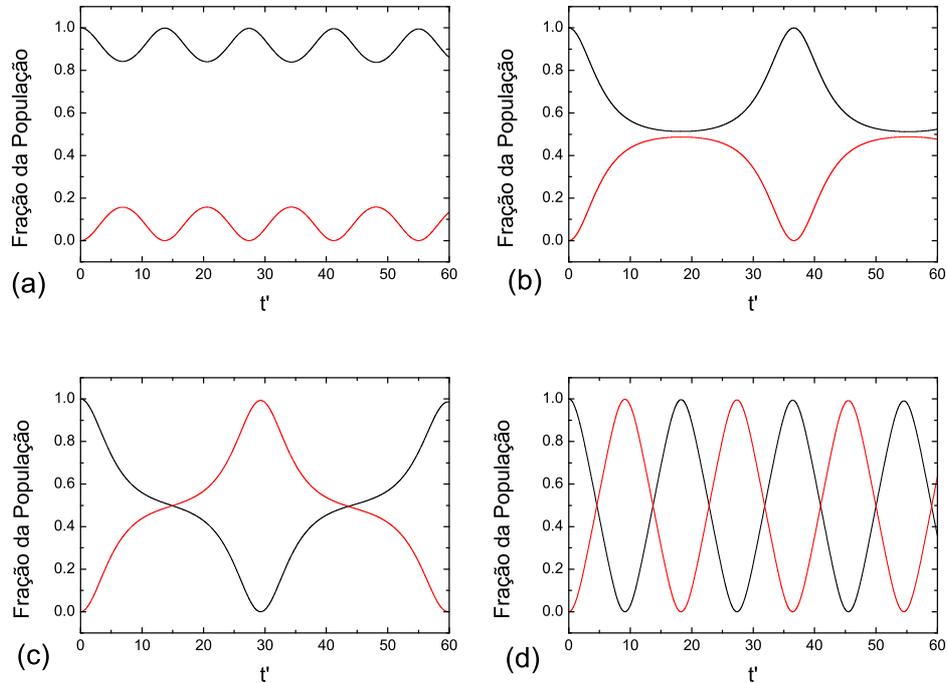


Figura 2.2: Fração da população no estado fundamental (preto) e no estado excitado (vermelho) na presença um campo com uma dessintonia  $\delta = 0,45$  e  $a = 0,1$  para (a)  $b=0,2$  ; (b)  $b=0,2749$  ; (c)  $b=0,2750$  ; (d)  $b=0,4$ .

é sempre maior que no estado excitado. E para  $b \geq 0,275$  conseguimos transferir todos os átomos para o estado excitado.

Esse aspecto de haver dois regimes distintos na evolução temporal das populações será discutido mais adiante, no capítulo 3. Nas seções seguintes, apresentaremos como a probabilidade de transição em função da dessintonia é afetada devido a esses dois comportamentos distintos. Nossos resultados foram obtidos para duas configurações diferentes do campo externo, dos tipos Rabi e Ramsey e, em todas as nossas análises, utilizaremos  $a = 1$  e  $a = 0,1$ . No capítulo seguinte, faremos uma análise dos diferentes comportamentos da

evolução temporal das populações para outros valores de  $a$ .

## 2.2 Pulso de Rabi

Nesta seção, discutiremos os resultados obtidos utilizando um campo de excitação do tipo Rabi [25, 26]. Esse tipo de excitação é feita aplicando-se o campo de excitação durante um determinado tempo,  $t_{lig}$ , e desligando-o logo em seguida. A detecção da distribuição dos átomos entre os dois níveis da armadilha é feita logo após. A figura 2.3 mostra a seqüência temporal de uma excitação do tipo Rabi.

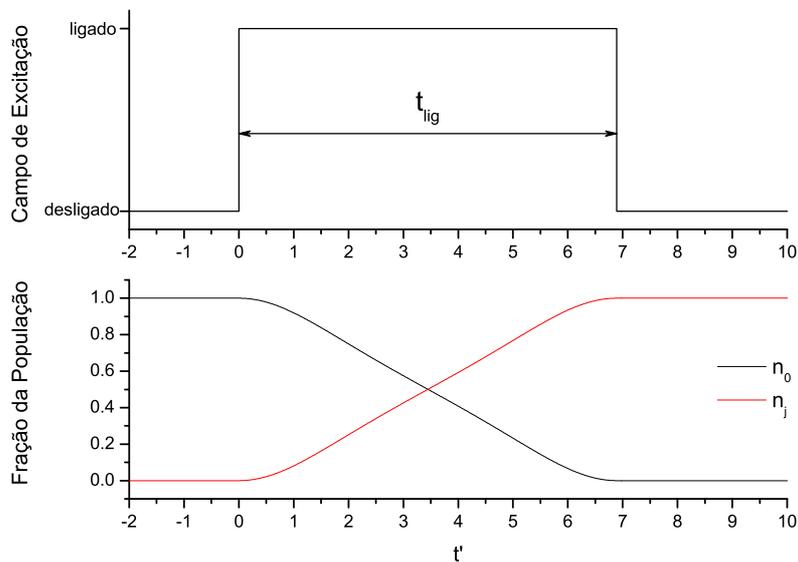


Figura 2.3: Seqüência temporal de uma excitação utilizando um pulso de Rabi. A detecção é feita após o campo de excitação ser desligado. Neste caso, utilizamos  $a = 1$ ,  $b = 0,6$  e  $\delta = 0$ .

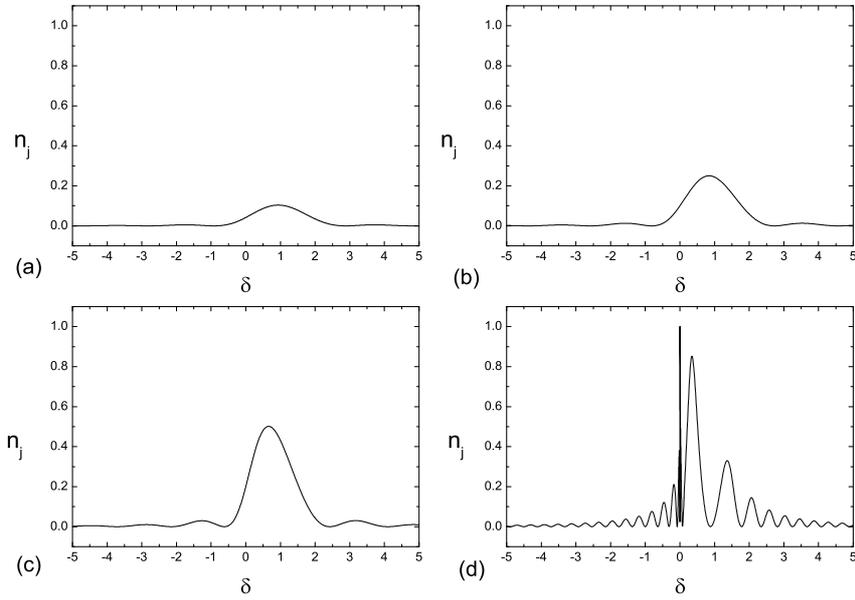


Figura 2.4: Probabilidade de transição em função da dessintonia para um pulso de Rabi com  $a = 1$ : (a)  $b = 0,2$ ; (b)  $b = 0,3$ ; (c)  $b = 0,4$  e (d)  $b = 0,5$ .

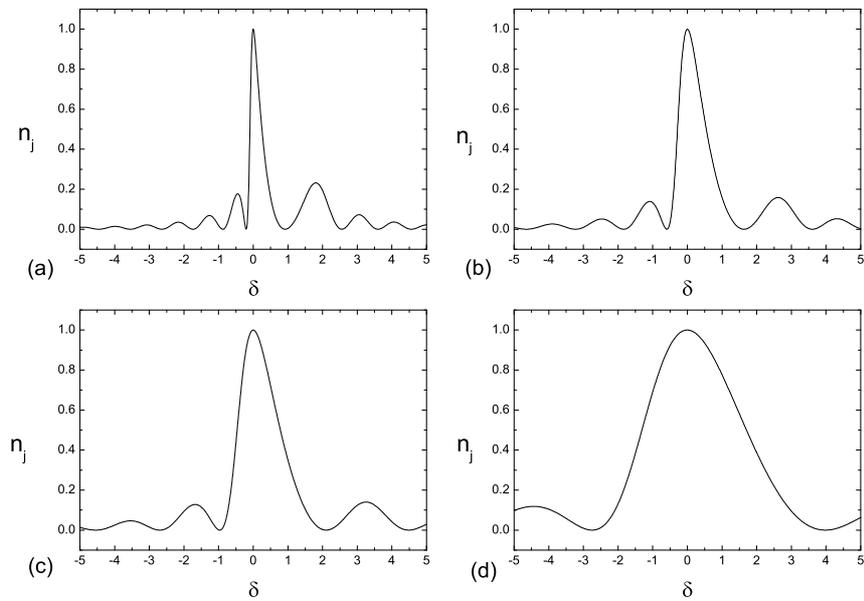


Figura 2.5: Probabilidade de transição em função da dessintonia para um pulso de Rabi para  $a = 1$ : (a)  $b = 0,6$ ; (b)  $b = 0,8$ ; (c)  $b = 1,0$  e (d)  $b = 2,0$ .

O tempo  $t_{lig}$  pode variar. Porém, nossas análises foram feitas utilizando um pulso do tipo  $\pi$ , onde  $t_{lig}$  é igual ao tempo quando ocorre a transferência do maior número de átomos possível por um campo ressonante ( $\delta = 0$ ). Aplicando, então, esse tipo de campo de excitação, obtemos a probabilidade de transição, dada por  $n_j$ , em função da dessintonia  $\delta$ .

As figuras 2.4 e 2.5 mostram  $n_j$  em função da dessintonia  $\delta$  para  $a = 1$  e diferentes valores de  $b$ . Na figura 2.4, vemos que a probabilidade de transição tem um máximo fora da ressonância enquanto que, na figura 2.5, o máximo ocorre justamente na ressonância. Esse deslocamento do máximo para  $b \leq 0,5$  está associado ao termo não linear do hamiltoniano (1.10). Vemos, também, que a largura de linha diminui à medida que  $b \rightarrow 0,5$ . Para  $b = 0,4$ , a largura a meia altura,  $\Gamma$ , é aproximadamente 1,35; para  $b = 0,5$ ,  $\Gamma \simeq 0,017$ ; e  $b = 1,0$ ,  $\Gamma \simeq 1,24$ .

Pela figura 2.4(d), vemos um sinal de interferência muito forte, o que não acontece em sistemas lineares ao serem interrogados com um pulso de Rabi. Isso se deve ao fato de que, para  $b = 0,5$  e  $a = 1$ , a população dos modos é quase constante no tempo quando  $n_0 \simeq n_j$ , como mostra a figura 2.1. Porém a fase da função de onda continua evoluindo. Dessa forma, temos um padrão de interferência devido a um acúmulo de fase em um processo de interrogação de Rabi. Na seção seguinte, veremos outro tipo de interferência com um pulso de Ramsey.

Na figura 2.6 temos a probabilidade de transição em função da dessintonia para  $a = 0,1$ . Vemos um comportamento semelhante ao obtido anteriormente. Porém o máximo de excitação nunca ocorre na ressonância. Vemos, ainda, que a dessintonia do máximo de excitação satura em  $\delta \simeq 0,45$ . E para

esse mesmo valor de dessintonia é onde ocorre um condensado puramente excitado, ou seja, todos os átomos são transferidos do estado fundamental para o excitado.

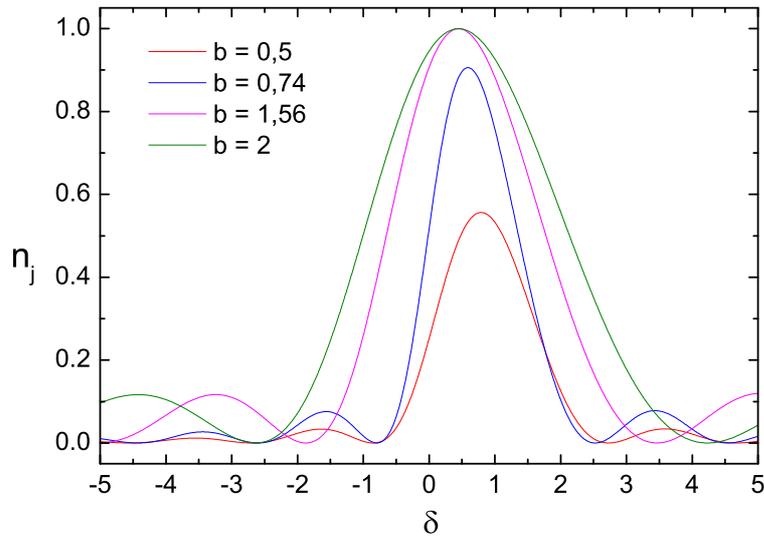


Figura 2.6: Probabilidade de transição em função da dessintonia  $\delta$  para alguns valores de  $b$ , utilizando um pulso de Rabi e fixando  $a = 0, 1$ .

## 2.3 Franjas de Ramsey

Nesta seção, discutiremos a formação das franjas de Ramsey [27, 28] em nosso sistema de dois modos topológicos acoplados por um campo externo.

Assim como no pulso de Rabi, dado um certo valor de  $b$ , estimamos o tempo onde o máximo de átomos é transferido do estado fundamental para

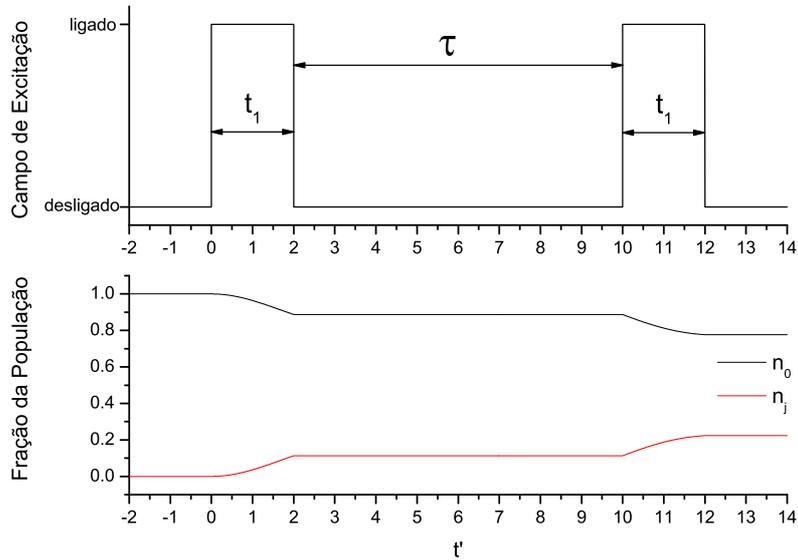


Figura 2.7: Seqüência temporal de uma excitação utilizando um pulso de Ramsey. A detecção é feita após o segundo pulso de excitação ser desligado. Neste caso, utilizamos  $a = 1$ ,  $b = 0,4$  e  $\delta = 0$ .

o excitado. Porém agora a configuração utilizada ocorre em três passos. Primeiro, utilizamos um pulso do tipo  $\pi/2$ , onde o tempo de duração do pulso  $t_1$  é a metade do tempo onde ocorre a máxima excitação na ressonância. Após a aplicação do primeiro pulso, deixamos o sistema evoluir por um tempo  $\tau$  com campo de excitação desligado, ou seja, fazemos  $b = 0$ . Por fim, ligamos novamente o campo de bombeio por um tempo  $t_1$ , onde teremos mais um pulso  $\pi/2$ . A detecção da população de cada modo é feita após o segundo pulso ser desligado. A figura 2.7 ilustra o processo descrito acima. Por simplicidade, faremos nossas análises dos resultados desta seção para  $a = 1$ .

Na figura 2.8, temos a população do estado excitado,  $n_j$ , em função da dessintonia  $\delta$ , para  $b = 0,4$ , considerando três diferentes configurações do pulso aplicado. Em preto, vemos a formação das franjas de Ramsey ao

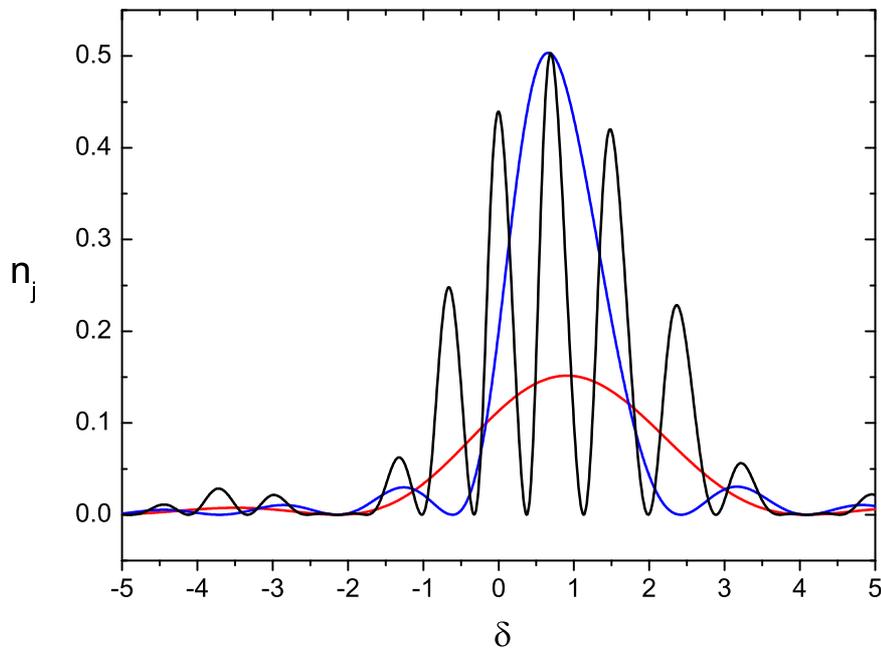


Figura 2.8: População do estado excitado,  $n_j$ , em função da dessintonia  $\delta$  para três diferentes configurações de pulsos. Em todos os casos  $b = 0, 4$ . Em preto: pulso  $\pi/2$  de Ramsey com  $\tau = 3t_1$ ; azul: um pulso  $\pi$  de Rabi; vermelho: pulso  $\pi/2$  de Rabi.

aplicarmos um pulso  $\pi/2$  de Ramsey com um intervalo  $\tau = 3t_1$ . Em azul, temos a mesma curva obtida na figura 2.4(c), onde aplicamos um único pulso  $\pi$  de Rabi. Finalmente, temos em vermelho a probabilidade de transição quando aplicamos um pulso  $\pi/2$  de Rabi, ou seja, é o mesmo procedimento descrito na seção 2.2 porém o campo é desligado na metade do tempo do máximo de excitação.

Vemos que a curva em vermelho é uma espécie de envoltório das franjas, o que caracteriza um processo de interferência. No processo  $\pi/2$  de Rabi, temos

um único pulso onde pode ocorrer a transição com uma certa probabilidade. Porém, no pulso de Ramsey, temos duas possibilidades para a ocorrência da transição. Essa soma de probabilidades causa uma interferência, indicada pela presença das franjas de Ramsey.

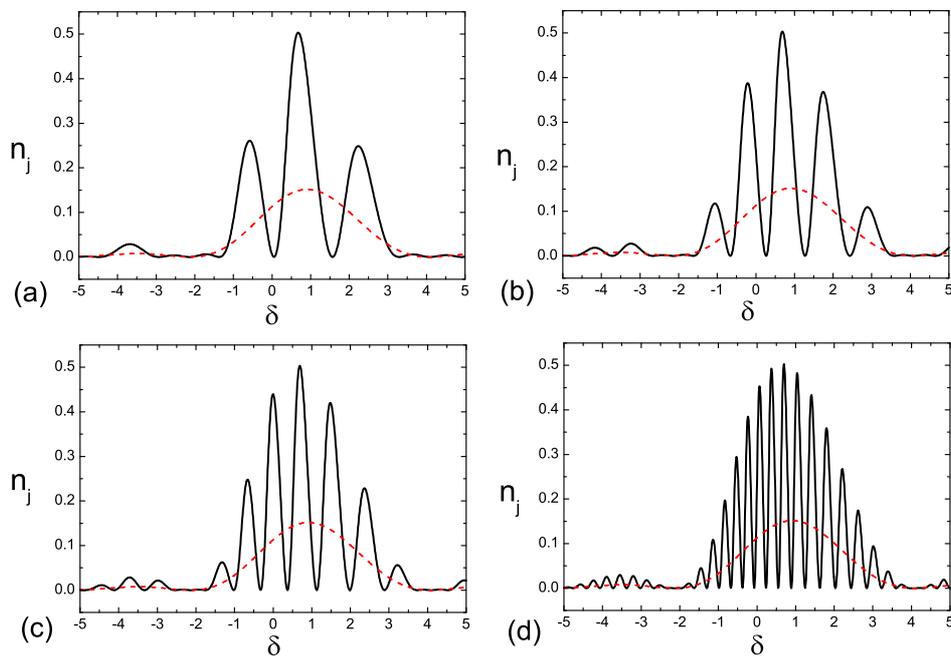


Figura 2.9: Franjas de Ramsey da probabilidade  $n_j$  em função de  $\delta$  após a aplicação de pulsos de Ramsey com (a)  $\tau = t_1$ , (b)  $\tau = 2t_1$ , (c)  $\tau = 3t_1$  e (d)  $\tau = 8t_1$ . As linhas tracejadas em vermelho correspondem a um pulso  $\pi/2$  de Rabi.

Na figura 2.9, mostramos o comportamento das franjas ao variarmos o intervalo  $\tau$  em que o campo é desligado. Vemos que quanto maior é  $\tau$ , maior o número de franjas. No caso, utilizamos  $b = 0,4$ . A linha tracejada em vermelho corresponde ao pulso  $\pi/2$  de Rabi, conforme comentamos no caso da figura 2.8.

Além do caso em que  $b = 0,4$ , fizemos também simulações para outros valores de  $b$ . Vimos que os padrões de interferência para  $b < 0,5$  tem um comportamento parecido, com amplitudes e a posição do máximo diferentes, conforme podemos ver na figura 2.10. Na figura, podemos ver três casos: azul,  $b = 0,1$ ; preto,  $b = 0,2$ ; vermelho,  $b = 0,3$ . Todos utilizamos  $\tau = 4t_1$ .

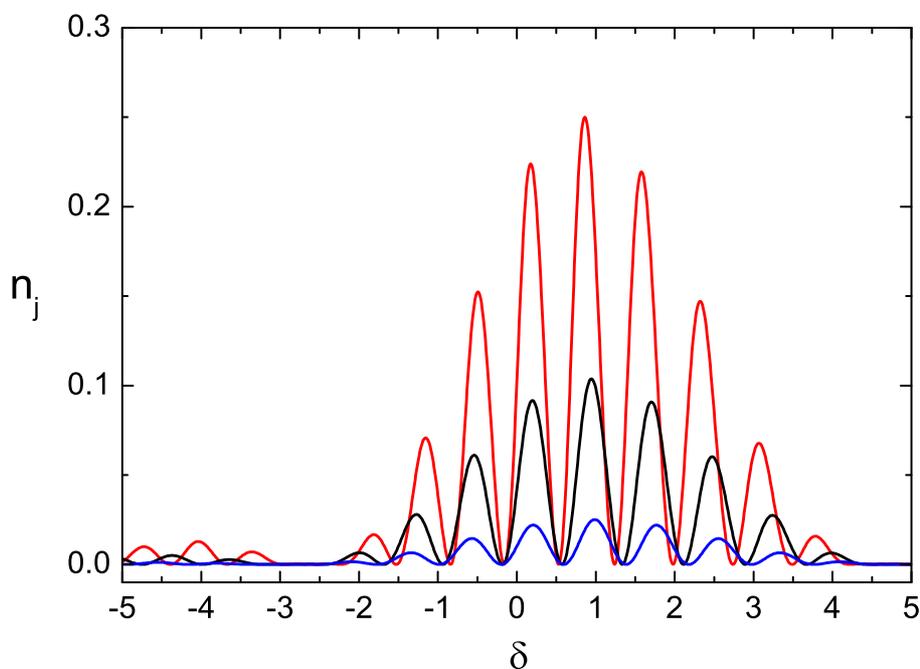


Figura 2.10: Franjas de Ramsey da probabilidade  $n_j$  em função de  $\delta$  após a aplicação de dois pulsos  $\pi/2$  separados por  $\tau = 4t_1$ , para diferentes valores de  $b$ . Azul:  $b = 0,1$ ; preto:  $b = 0,2$ ; vermelho:  $b = 0,3$ .

Para  $b \geq 0,5$ , os comportamentos das franjas mudam. Como podemos ver na figura 2.11, há uma intensa interferência na região de máxima excitação. Isso porque há um processo de interferência mesmo quando aplicamos um

único pulso, como visto na seção anterior. Ao aplicarmos dois pulsos separados, temos a interferência de cada pulso isolado, mais o acúmulo de fase devido ao tempo em que o campo é desligado.

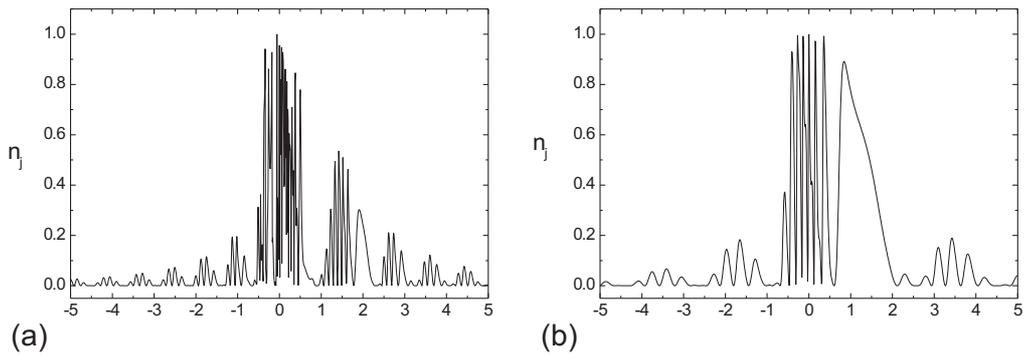


Figura 2.11: População do estado excitado,  $n_j$ , em função da dessintonia  $\delta$  para um pulso  $\pi/2$  de Ramsey com  $\tau = 4t_1$ . Em (a),  $b = 0,5$  e em (b),  $b = 0,6$ .

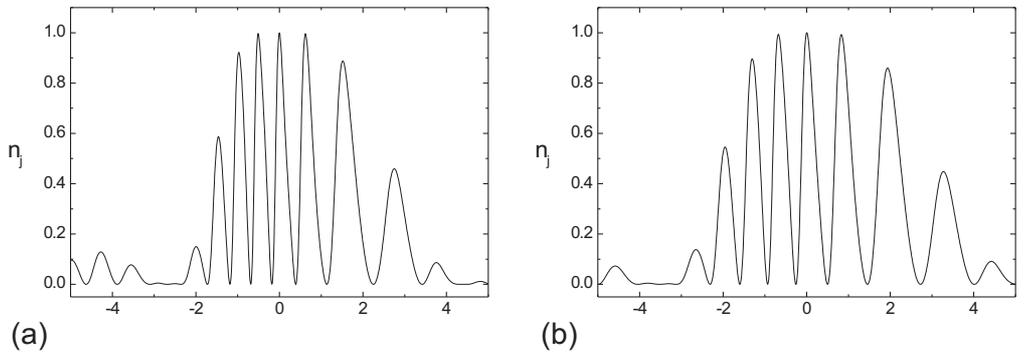


Figura 2.12: População do estado excitado,  $n_j$ , em função da dessintonia  $\delta$  para um pulso  $\pi/2$  de Ramsey com  $\tau = 4t_1$ . Em (a),  $b = 1,0$  e em (b),  $b = 1,2$ .

Obtemos, ainda, as franjas para  $b = 1,0$  e  $b = 1,2$ , ilustrado na figura 2.12. Podemos notar aqui uma assimetria em relação ao máximo muito mais acentuada do que nos casos das figuras 2.8, 2.9 e 2.10.

Vimos que há dois comportamentos distintos das populações dos modos topológicos. Há um valor crítico de  $b$  que diferencia esses dois comportamentos. No próximo capítulo, apresentaremos nossos resultados das análises feitas desses comportamentos distintos em relação aos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $\delta$ .

# Capítulo 3

## Efeitos Críticos

No capítulo anterior, analisamos o comportamento da evolução da população dos dois níveis, fundamental e excitado, como funções do parâmetro  $b$ , associado ao acoplamento entre os modos por meio de um campo externo. Veremos como nosso sistema se comporta com a mudança dos parâmetros que o caracterizam. Além de  $b$ , veremos o comportamento para diferentes valores do parâmetro  $a$  e da dessintonia  $\delta$ .

Na seção 3.1, voltamos a abordar o tema do capítulo anterior, porém com outro enfoque. Veremos como o máximo de excitação e a largura de linha alteram-se em relação ao parâmetro  $b$ . Um parâmetro de ordem para a dinâmica do condensado, definido por Yukalov *et al.* em [29], é explorado na seção 3.2. Esse parâmetro é definido como sendo a diferença entre as médias temporais de  $n_0$  e  $n_j$ . Veremos o comportamento desse parâmetro de ordem com um campo ressonante ( $\delta = 0$ ) para alguns valores de  $a$ .

Na seção seguinte, 3.3, calcularemos  $b$  explicitamente, utilizando diferen-

tes distribuições espaciais para o campo de excitação, dependendo do estado excitado escolhido para acoplar com o estado fundamental. Assim, podemos ver como os efeitos críticos se comportam alterando-se a intensidade e a forma do campos de excitação.

### 3.1 Largura de Linha e Máximo de Excitação

Como visto no capítulo anterior, a probabilidade de transição, tanto do pulso de Rabi quanto do pulso de Ramsey, tem um comportamento diferente à medida que  $b \rightarrow 0,5$ . Nesta seção mostraremos como a frequência do máximo de transição e a largura de linha do padrão de  $n_j$  variam com  $b$ . Aqui, estudamos os casos em que  $a = 0,1$  e  $a = 1$ .

Para obtermos nossos resultados, simulamos, para vários valores de  $b$ , a probabilidade de transição em função da dessintonia  $\delta$ , como feitos na seção 2.2. Para cada valor de  $b$  obtemos o valor da dessintonia do máximo de excitação  $\delta_{max}$ , além da largura a meia altura  $\Gamma$ . O esquema da figura 3.1 ilustra como obtemos  $\delta_{max}$  e  $\Gamma$  para um dado valor de  $b$ .

As figuras 3.2 e 3.3 mostram nossos resultados da dessintonia do máximo de excitação em função de  $b$  para  $a = 1$  e  $a = 0,1$ , respectivamente. As figura 3.4 e 3.5 mostram a largura a meia altura da probabilidade de transição em função de  $b$ , para  $a = 1$  e  $a = 0,1$ , como indicado na legenda.

Podemos notar uma mudança drástica de regime para  $a = 1$  tanto para o máximo de excitação quanto para a largura a meia altura. Vemos uma linha crítica em  $b = 0,5$ , conforme antecipado na seção 2.2. Porém, para  $a = 0,1$ ,

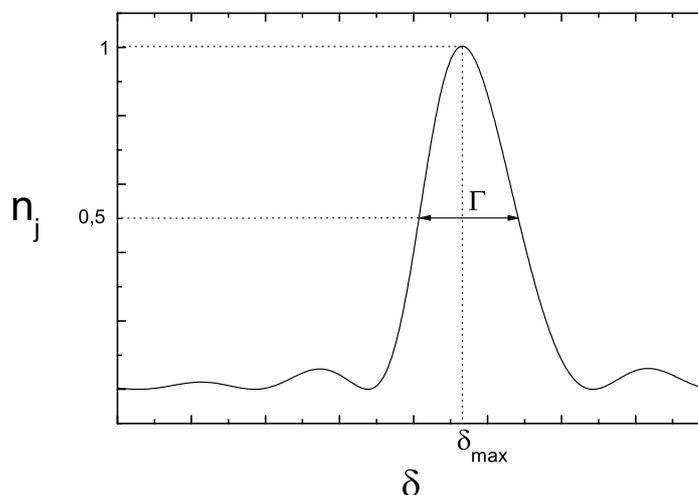


Figura 3.1: Esquema de como é obtida a largura a meia altura  $\Gamma$  e a dessintonia do máximo de excitação  $\delta_{max}$ .

não vemos uma mudança brusca de comportamento.

Na figura 3.2, podemos ver que o deslocamento do máximo só acontece para  $b \leq 0,5$ . Isso quer dizer que o termo não-linear no hamiltoniano 1.10 influencia fortemente na dinâmica até um certo ponto. Quando o campo aplicado torna-se forte suficiente para competir com a interação interatômica, o máximo de excitação passa a ser na ressonância, como em um sistema linear. Quando o termo não linear é mais fraco, como na figura 3.3, vemos que há uma saturação do máximo em  $\delta_{max} \simeq 0,45$  e o comportamento de  $\delta_{max}$  é mais suave do que no caso anterior.

Da mesma maneira, vemos que, na figura 3.4, há uma influência do termo não-linear na largura a meia altura da probabilidade de transição. No caso de  $b < 0,5$ , ao aumentarmos a intensidade do campo, a largura diminui.

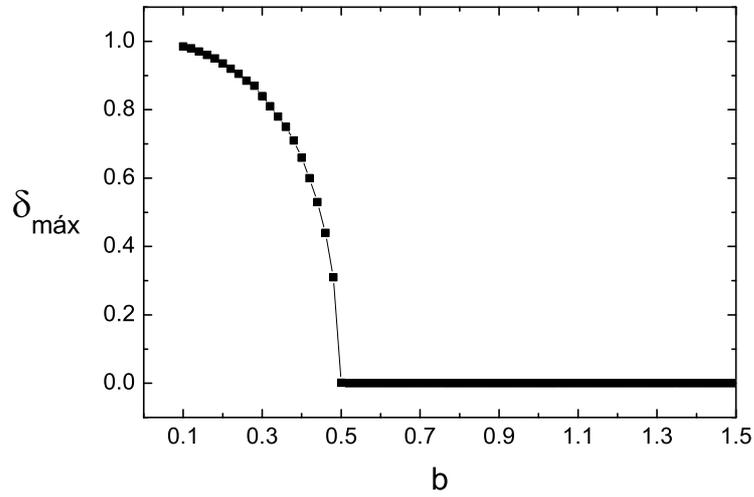


Figura 3.2: Dessintonia do máximo de excitação de um pulso de Rabi em função de  $b$ . No caso usamos  $a = 1$ .

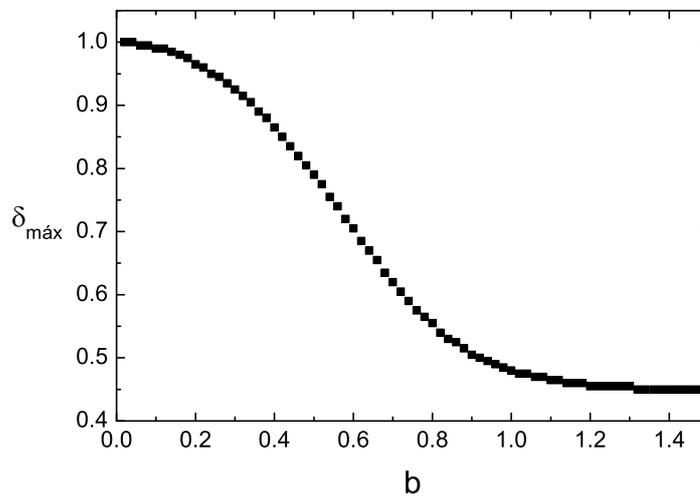


Figura 3.3: Dessintonia do máximo de excitação de um pulso de Rabi em função de  $b$ . No caso usamos  $a = 0, 1$ .

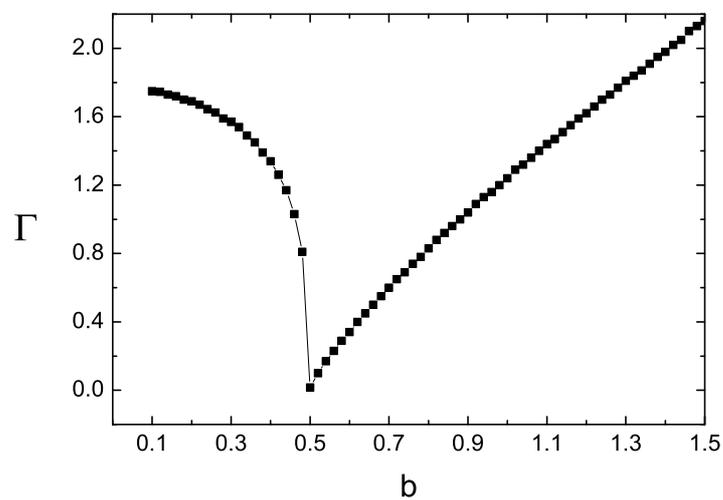


Figura 3.4: Largura a meia altura  $\Gamma$  em função de  $b$ . Utilizamos  $a = 1,0$  para esse caso.

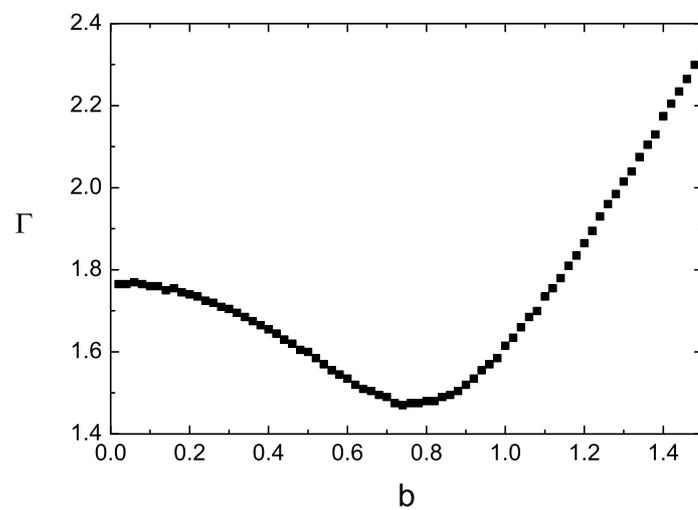


Figura 3.5: Largura a meia altura  $\Gamma$  em função de  $b$ . Utilizamos  $a = 0,1$  para esse caso.

Ao contrário, para  $b > 0,5$ , a largura aumenta, o que é esperado em um sistema linear. Assim, fica claro como a interação influencia muito mais no sistema quando o campo aplicado é de baixa intensidade. Esse mesmo comportamento é visto na figura 3.5 para  $a = 0,1$ , porém não é possível definir um ponto crítico que separa os dois comportamentos. O que vemos é um mínimo, que ocorre para  $b \simeq 0,74$ .

Na próxima seção analisaremos o comportamento do parâmetro de ordem  $\eta$ , definido por Yukalov *et. al.* em [29] como a diferença das médias temporais da população de cada modo. Consideraremos os efeitos não lineares com maior atenção, especialmente quando temos  $a \neq 1$ .

## 3.2 Parâmetro de Ordem

Na seção 2.1, vimos, para  $a = 1$  e  $a = 0,1$ , o comportamento da evolução temporal das populações dos modos topológicos. Vimos também que há dois comportamentos distintos dessa evolução. Quando  $b \leq 0,5$ , a população do estado fundamental é sempre maior do que a do estado excitado. Porém, quando temos  $b \geq 0,5$ , é possível transferir toda a população do estado fundamental ao excitado.

Yukalov *et al.* [29] introduziram um parâmetro de ordem, definido como

$$\eta = \bar{n}_0 - \bar{n}_j, \quad (3.1)$$

no qual  $\bar{n}$  significa a média temporal de  $n$ . O parâmetro de ordem  $\eta$  nos

diz em qual regime está ocorrendo a transferência atômica entre os modos. A figura 3.6 ilustra como  $\eta$  define o regime em que a evolução temporal de  $n_0$  e  $n_j$  está ocorrendo. Como ilustração, temos a evolução temporal de dois

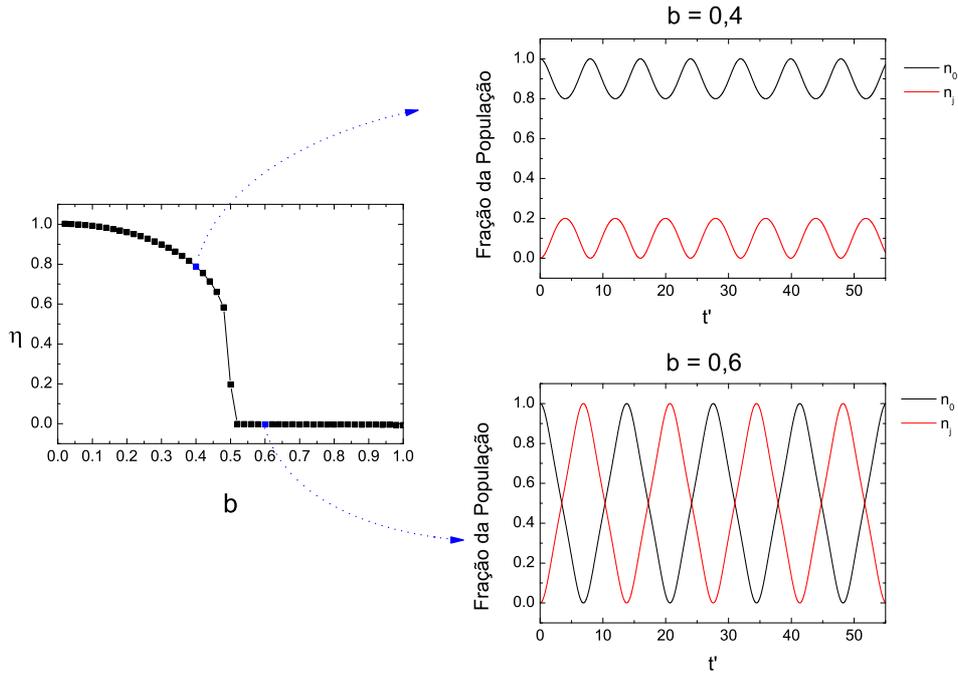


Figura 3.6: Parâmetro de ordem  $\eta$  em função de  $b$ , para  $a = 1$  e a evolução temporal para  $b = 0,4$  e  $b = 0,6$ . Em todos os casos  $\delta = 0$ .

comportamentos distintos. Quando  $b < 0,5$ , a média temporal de  $n_j$  é menor que a de  $n_0$ , ou seja,  $\eta > 0$ . Nesse regime, o condensado passa mais tempo com sua população no estado fundamental. No caso  $b = 0,4$ , a população do estado fundamental é sempre maior que a do estado excitado. Agora, para  $b > 0,5$ , temos outro comportamento. Na figura, temos o exemplo com  $a = 1,0$ . Nesse caso,  $\eta = 0$  para  $b > 0,5$ . Isso significa que o tempo que o condensado permanece no estado fundamental é igual ao tempo em que ele fica no estado excitado. No caso de  $b = 0,6$ , vemos a formação de um condensado puramente no estado excitado ( $n_j = 1$ ).

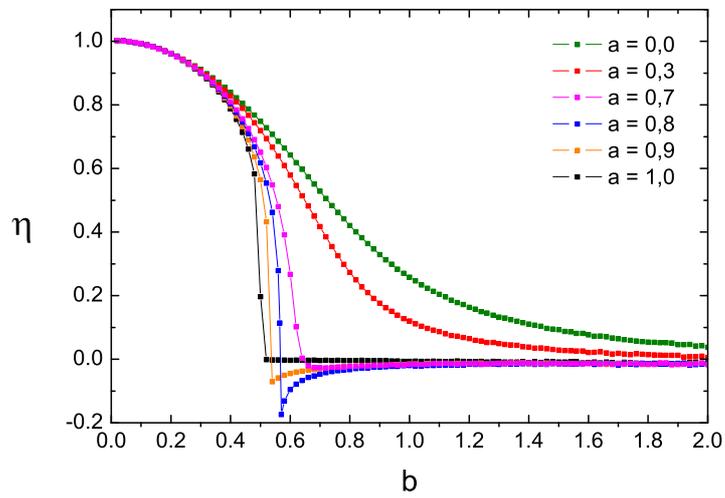


Figura 3.7: Parâmetro de ordem em função de  $b$  para  $a \leq 1,0$ . Em todos os casos utilizamos  $\delta = 0$ .

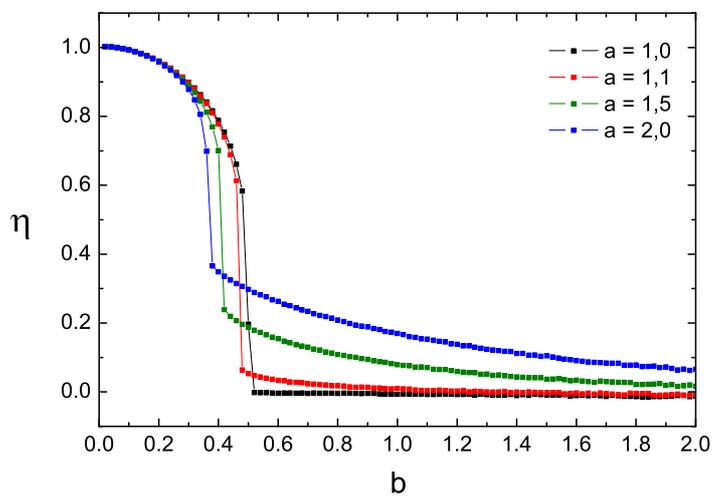


Figura 3.8: Parâmetro de ordem em função de  $b$  para  $a \geq 1,0$ . Em todos os casos utilizamos  $\delta = 0$ .

Fizemos simulações do comportamento do parâmetro de ordem  $\eta$  em função de  $b$ , para  $0 \leq a \leq 2$  com o campo ressonante ( $\delta = 0$ ). Os resultados são mostrados nas figuras 3.7 e 3.8. Vemos, pela figura 3.7, que só ocorre uma transição de fase abrupta a partir de  $a = 0,8$ . Para valores de  $a$  menores que  $0,8$ , o que se vê é que  $\eta$  vai suavemente a zero. Em alguns casos, como  $a = 0$  e  $a = 0,3$  indicados na figura,  $\eta$  não chega a zero. Isto indica que o estado fundamental sempre terá, na maior parte do tempo, uma população maior do que a do estado excitado. Ainda pela figura 3.7, vemos que, quando  $0,8 \leq a < 1,0$ ,  $\eta$  chega a ter valores negativos. Isso não significa que a população no estado excitado seja sempre maior do que a do fundamental. Apenas que o condensado passa maior parte do tempo no estado excitado, o que favoreceria a detecção dos átomos condensados nesse estado.

Na figura 3.8 vemos o caso em que  $\eta > 1$ . Aqui, ocorre uma mudança de comportamento brusca, como no caso em que  $a = 1$ , porém, após a mudança de comportamento,  $\eta$  vai suavemente a zero, como nos casos de  $a < 0,8$ .

Para ilustrar os diferentes comportamentos da evolução das populações, mostramos na figura 3.9  $n_0$  e  $n_j$ , para  $a = 0,8$  com diferentes valores de  $b$ . Em todos os casos utilizamos um campo ressonante. Vimos que, pelas figuras 3.7 e 3.9, no caso de  $a = 0,8$ , quando  $b = 0,57$ ,  $\eta \simeq -0,174$ . Porém,  $n_j$  mal chega a 1, ou seja, não temos um condensado puramente no estado excitado. Mas, o que podemos ver pela figura 3.9(d), é que a maior parte do tempo o condensado permanece com uma população maior no estado excitado do que no fundamental, como dito anteriormente.

Foram feitas também simulações fixando o valor de  $a = 0,1$ , porém agora, variando  $\delta$ . As figuras 3.10 e 3.11 mostram o comportamento de  $\eta$  em função

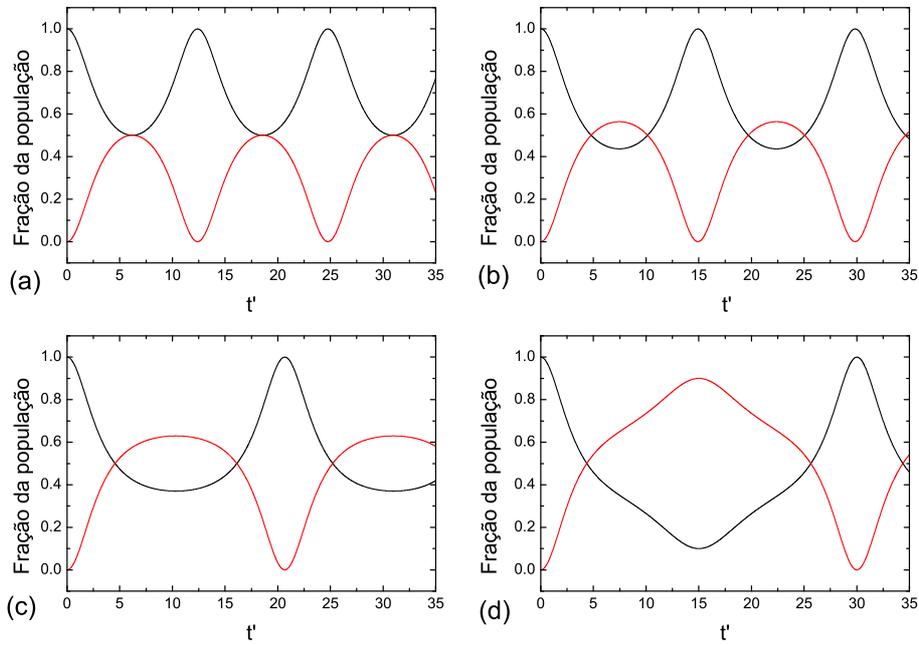


Figura 3.9: Fração da população no estado fundamental (preto) e no estado excitado (vermelho) para  $a = 0,8$  e (a)  $b=0,55$  ; (b)  $b=0,56$ ; (c)  $b=0,565$  ; (d)  $b=0,57$ .

de  $b$  para diferentes valores da dessintonia. Vemos o mesmo comportamento obtido anteriormente, porém com valores diferentes dos parâmetros.

Até agora, fizemos nossas análises numéricas utilizando valores diferentes para  $a$ ,  $b$  e  $\delta$ . Na seção seguinte, calcularemos explicitamente  $a$  e  $b$  utilizando as funções de onda obtidas na seção 1.2.

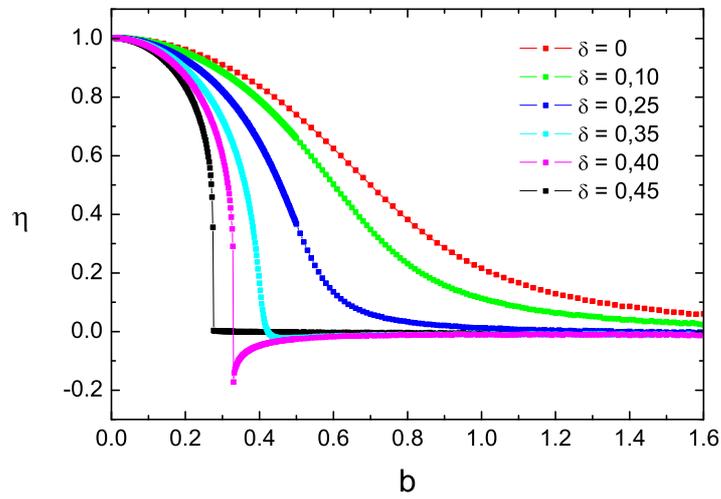


Figura 3.10: Parâmetro de ordem em função de  $b$  com  $a = 0,1$  e  $\delta < 0,45$ .

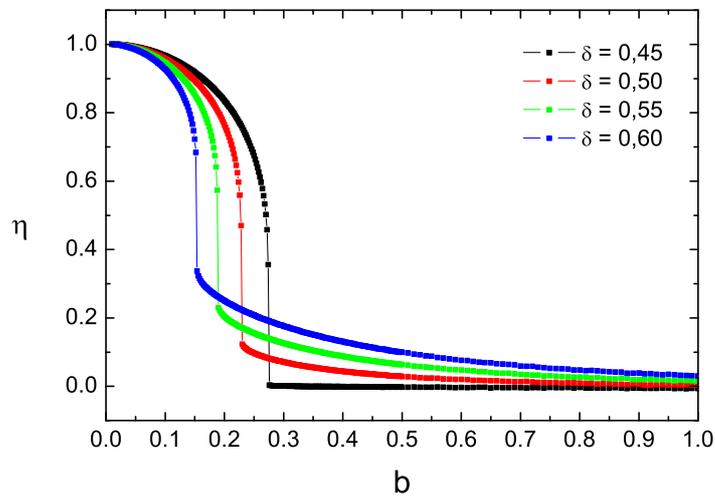


Figura 3.11: Parâmetro de ordem em função de  $b$  com  $a = 0,1$  e  $\delta > 0,45$ .

### 3.3 Distribuição Espacial do Campo

Nesta seção, obteremos analiticamente os parâmetros  $a$  e  $b$  por meio da teoria de perturbação otimizada, discutida na seção 1.2. Assim, podemos chegar a uma intensidade e a uma forma espacial adequada do campo externo aplicado para se ter os efeitos críticos discutidos nas seções anteriores.

Porém, antes, faremos uma breve discussão sobre o limite de aplicação das aproximações feitas para se obter as equações de evolução dos modos topológicos (1.76). E, desse modo, calcular  $\alpha_{m,k}$ , definido na equação (1.72).

#### 3.3.1 Cálculo de $a$

Com as funções de onda obtidas na seção 1.2, podemos calcular  $\alpha_{0,j}$  e  $\alpha_{j,0}$  e testar a validade das condições (1.79). Da definição (1.72) e das transformações (1.17), (1.19) e (1.22), podemos reescrever  $\alpha_{m,k}$  como

$$\alpha_{m,k} = g\omega_r \int |\psi_m|^2 (2|\psi_k|^2 - |\psi_m|^2) d\vec{x}. \quad (3.2)$$

Assim, para a transição  $000 \leftrightarrow 010$ , substituímos as funções de onda (1.37) e (1.42) em (3.2) e obtemos

$$\alpha_{0,010} = \frac{g\omega_r}{\pi^{3/2}} \left[ \frac{2u_{000}u_{010}^2}{(u_{000} + u_{010})^2} \sqrt{\frac{v_{000}v_{010}}{v_{000} + v_{010}}} - \frac{u_{000}}{2} \sqrt{\frac{v_{000}}{2}} \right] \quad (3.3a)$$

$$\alpha_{010,0} = \frac{g\omega_r}{\pi^{3/2}} \left[ \frac{2u_{000}u_{010}^2}{(u_{000} + u_{010})^2} \sqrt{\frac{v_{000}v_{010}}{v_{000} + v_{010}}} - \frac{u_{010}}{4} \sqrt{\frac{v_{010}}{2}} \right] \quad (3.3b)$$

Da mesma forma, para a transição  $000 \leftrightarrow 001$ , com as funções de onda (1.37) e (1.47), obtemos

$$\alpha_{0,001} = \frac{g\omega_r}{\pi^{3/2}} \left[ \frac{2u_{000}u_{001}}{u_{000} + u_{001}} \sqrt{\frac{v_{000}v_{001}^3}{(v_{000} + v_{001})^3}} - \frac{u_{000}}{2} \sqrt{\frac{v_{000}}{2}} \right] \quad (3.4a)$$

$$\alpha_{001,0} = \frac{g\omega_r}{\pi^{3/2}} \left[ \frac{2u_{000}u_{001}}{u_{000} + u_{001}} \sqrt{\frac{v_{000}v_{001}^3}{(v_{000} + v_{001})^3}} - \frac{3u_{001}}{8} \sqrt{\frac{v_{001}}{2}} \right] \quad (3.4b)$$

Obtemos, também, para a transição  $000 \leftrightarrow 100$ , com as funções de onda (1.37) e (1.52),

$$\alpha_{0,100} = \frac{g\omega_r}{\pi^{3/2}} \left[ \frac{2u_{000}u_{100}(u_{000}^2 + u_{100}^2)}{(u_{000} + u_{100})^3} \sqrt{\frac{v_{000}v_{100}}{v_{000} + v_{100}}} - \frac{u_{000}}{2} \sqrt{\frac{v_{000}}{2}} \right] \quad (3.5a)$$

$$\alpha_{100,0} = \frac{g\omega_r}{\pi^{3/2}} \left[ \frac{2u_{000}u_{100}(u_{000}^2 + u_{100}^2)}{(u_{000} + u_{100})^3} \sqrt{\frac{v_{000}v_{100}}{v_{000} + v_{100}}} - \frac{u_{100}}{4} \sqrt{\frac{v_{100}}{2}} \right] \quad (3.5b)$$

Os parâmetros  $u_{nmk}$  e  $v_{nmk}$  são obtidos do sistema de equações (1.33). Como dito anteriormente, esse sistema não pode ser resolvido analiticamente, mas podemos resolvê-lo numericamente. Assim, com a equação da energia,

$$\varepsilon_{nmk} = \frac{p}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right) + \frac{q}{4} \left( v + \frac{\lambda^2}{v} \right) + gu\sqrt{v}I_{nmk},$$

obtida em (1.29), podemos testar em que limite de  $g$  e  $\lambda$ , são válidas as

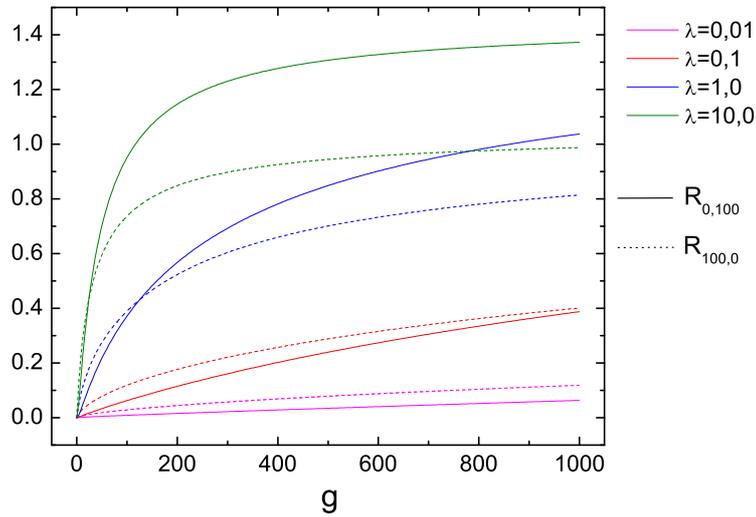


Figura 3.12: Razão  $R_{0,100}$  (linha cheia) e  $R_{100,0}$  (linha tracejada) para diferentes simetrias da armadilha.

condições dadas em (1.79)

$$R_{0,j} = \left| \frac{\alpha_{0,j}}{\omega_{j0}} \right| \ll 1 \quad (3.6a)$$

$$R_{j,0} = \left| \frac{\alpha_{j,0}}{\omega_{j0}} \right| \ll 1. \quad (3.6b)$$

As figuras (3.12), (3.13) e (3.14) mostram as razões (3.6) em função do parâmetro de acoplamento  $g$  para as transições em que  $j = \{nmk\} = \{100\}$ ,  $\{010\}$ ,  $\{001\}$ , respectivamente. Obtemos as curvas para diferentes simetrias da armadilha harmônica: forma de charuto com  $\lambda = 0,01$  e  $0,1$ ; esférica com  $\lambda = 1,0$  e forma de disco com  $\lambda = 10,0$ .

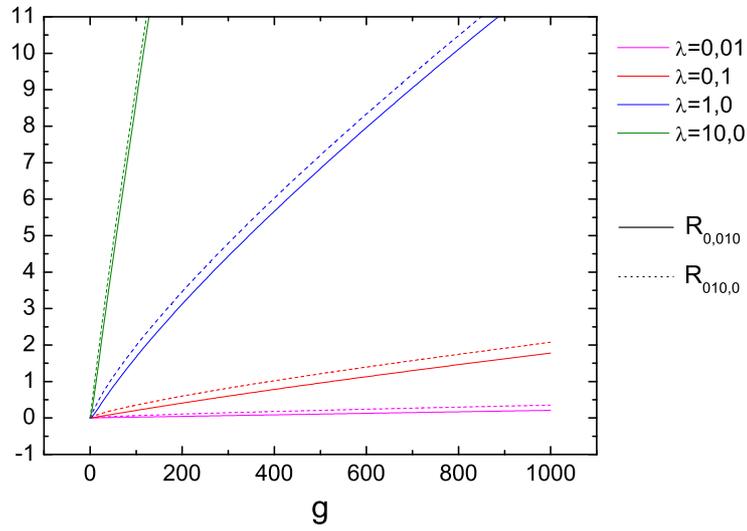


Figura 3.13: Razão  $R_{0,010}$  (linha cheia) e  $R_{010,0}$  (linha tracejada) para diferentes simetrias da armadilha.

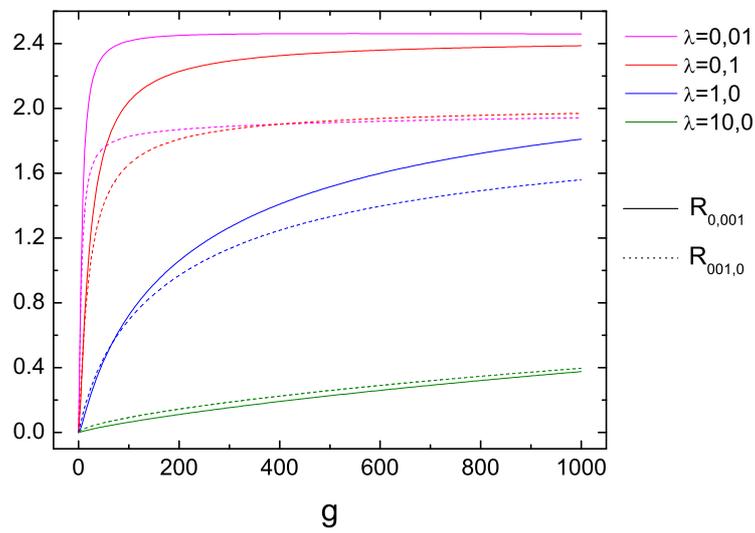


Figura 3.14: Razão  $R_{0,001}$  (linha cheia) e  $R_{001,0}$  (linha tracejada) para diferentes simetrias da armadilha.

Em todos os casos, vemos que a condição de que  $\alpha_{0,j}$  e  $\alpha_{j,0}$  devem ser muito menores do que a frequência de transição só é satisfeita no limite de acoplamento fraco, quando  $g$  é pequeno.

Utilizando as expansões obtidas para  $u_{nmk}$  e  $v_{nmk}$  no regime de acoplamento fraco, feitas na seção 1.2, podemos obter, analiticamente,  $\alpha_{m,k}$ . Dessa forma, obtemos também, uma expressão para  $a$  como função do parâmetro de acoplamento  $g$  e do parâmetro de assimetria  $\lambda$ .

Para a transição  $000 \leftrightarrow 010$ , utilizamos as expansões para  $u_{000}$  e  $v_{000}$ , obtidas em (1.38),

$$u_{000} \simeq 1 - \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi^3}} \frac{g}{4} + \frac{(1+3\lambda)}{16\pi^3} g^2$$

$$v_{000} \simeq \lambda - \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi^3}} \frac{g}{4} + \frac{(1+\lambda)}{8\pi^3} g^2$$

e as expansões para  $u_{010}$  e  $v_{010}$ , obtidas em (1.43),

$$u_{010} \simeq 1 - \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi^3}} \frac{g}{16} + \frac{(2+3\lambda)}{256\pi^3} g^2$$

$$v_{010} \simeq \lambda - \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi^3}} \frac{g}{8} + \frac{(2+\lambda)}{64\pi^3} g^2.$$

Substituindo as expressões acima nas equações (3.3), obtemos

$$\alpha_{0,010} \simeq \frac{(1+6\lambda)\omega_r g^2}{64\pi^3}, \quad (3.9a)$$

$$\alpha_{010,0} \simeq \frac{\omega_r g}{4} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3}} - \frac{(2+\lambda)\omega_r g^2}{64\pi^3}, \quad (3.9b)$$

e, por conseqüência,

$$a_{010} = \frac{\alpha_{0,010}}{\alpha_{010,0}} \simeq \frac{(1+6\lambda)g}{8\sqrt{2\lambda\pi^3}} - \frac{(174\lambda^2 + 84\lambda + 13)g^2}{512\pi^3\lambda}. \quad (3.10)$$

Da mesma forma, para a transição  $000 \leftrightarrow 001$ , com as equações (1.48),

$$u_{001} \simeq 1 - \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi^3}} \frac{3g}{16} + \frac{(1+9\lambda)}{256\pi^3} 3g^2$$

$$v_{001} \simeq \lambda - \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi^3}} \frac{g}{16} + \frac{(1+3\lambda)}{128\pi^3} g^2$$

obtemos

$$\alpha_{0,001} \simeq \frac{(9+2\lambda)\omega_r g^2}{3}, \quad (3.12a)$$

$$\alpha_{001,0} \simeq \frac{\omega_r g}{8} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3}} + \frac{5(1+2\lambda)\omega_r g^2}{256\pi^3}, \quad (3.12b)$$

e

$$a_{001} = \frac{\alpha_{0,001}}{\alpha_{001,0}} \simeq \frac{2(9+2\lambda)g}{8\sqrt{2\lambda\pi^3}} - \frac{(96\lambda^2 + 380\lambda + 477)g^2}{1024\pi^3\lambda} \quad (3.13)$$

Por último, para a transição  $000 \leftrightarrow 100$ , com as equações (1.53),

$$u_{100} \simeq 1 - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3}} \frac{g}{12} + \frac{(1+\lambda)}{192\pi^3} g^2$$

$$v_{100} \simeq \lambda - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3}} \frac{g}{4} + \frac{(3+\lambda)}{96\pi^3} g^2$$

obtemos

$$\alpha_{0,100} \simeq \frac{(3 + 10\lambda) \omega_r g^2}{192\pi^3}, \quad (3.15a)$$

$$\alpha_{100,0} \simeq \frac{\omega_r g}{4} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi^3}} + \frac{(1 + 2\lambda) \omega_r g^2}{32\pi^3}, \quad (3.15b)$$

e

$$a_{100} = \frac{\alpha_{0,100}}{\alpha_{100,0}} \simeq \frac{(3 + 10\lambda) g}{24\sqrt{2\lambda\pi^3}} - \frac{(40\lambda^2 + 52\lambda + 13)g^2}{512\pi^3\lambda}. \quad (3.16)$$

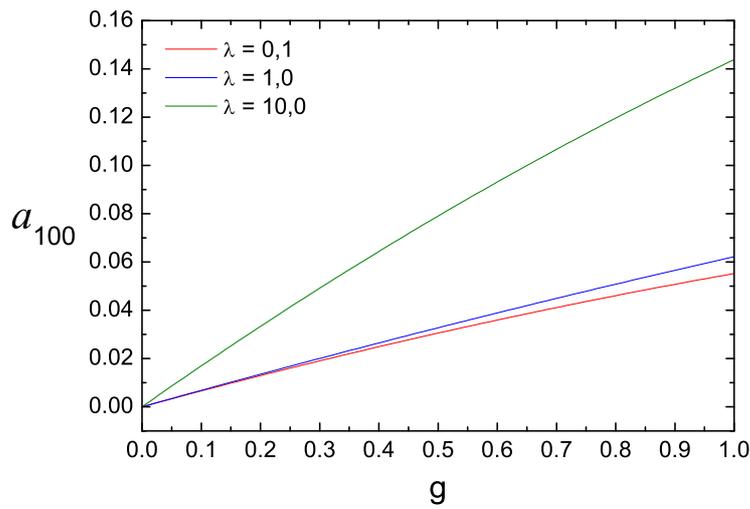


Figura 3.15:  $a_{100}$ , para  $g < 1$ , em diferentes simetrias da armadilha.

As expressões encontradas para  $a$  valem somente para  $g < 0$ , o que limita muito o valor de  $a$ . As figuras 3.15, 3.16 e 3.17 mostram  $a_{100}$ ,  $a_{010}$  e  $a_{001}$ , respectivamente, em função de  $g$  para diferentes simetrias da armadilha: forma de charuto com  $\lambda = 0,01$  e  $0,1$ ; esférica com  $\lambda = 1,0$  e forma de disco com  $\lambda = 10,0$ .

Vemos que  $a$  é sempre menor que um, assim não podemos reproduzir alguns dos resultados obtidos nas seções anteriores. Isso porque as funções de onda obtidas na seção 1.2, são válidas somente para o caso de acoplamento fraco.

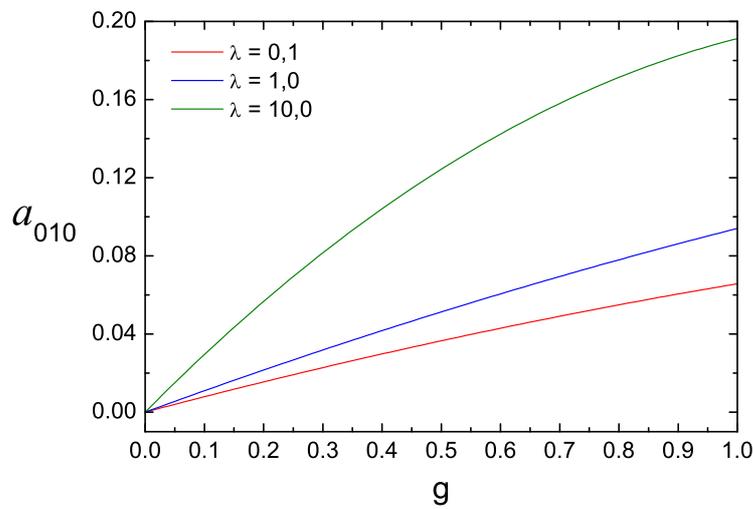


Figura 3.16:  $a_{010}$ , para  $g < 1$ , em diferentes simetrias da armadilha.

Nesta, encontramos expressões analíticas para o parâmetro  $a$  do nosso sistema de equações diferenciais (2.2). Falta agora calcularmos o parâmetro  $b$ , definido em (2.3), que será calculado na próxima seção.

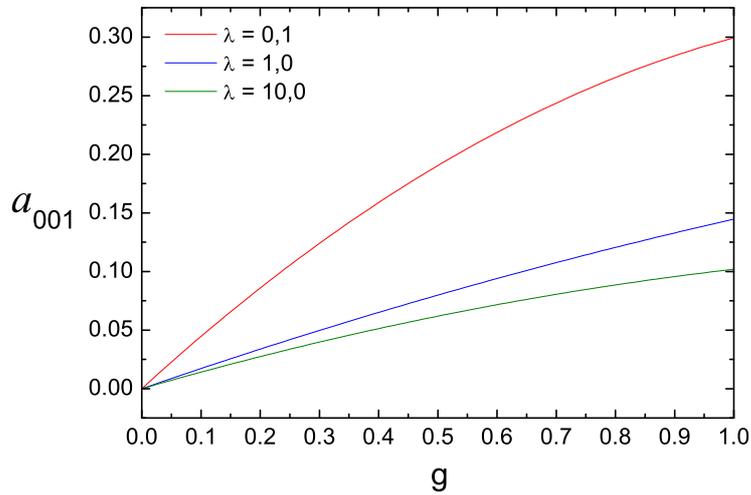


Figura 3.17:  $a_{001}$ , para  $g < 1$ , em diferentes simetrias da armadilha.

### 3.3.2 Cálculo de $b$

Nesta seção iremos calcular o parâmetro  $b$ , definido em (2.3) como

$$b_j = \frac{\beta}{\alpha_{j,0}} \quad (3.17)$$

no qual  $\beta$  é dado pela equação (1.73) como

$$\beta = \frac{V_{0j}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \int \phi_0^* V(\vec{r}) \phi_j d\vec{r}.$$

Assim como em (3.2), podemos reescrever (1.73) utilizando as transformações (1.20) e (1.22), por meio das quais, obtemos uma nova expressão

para  $b$  dada por

$$b_j = \frac{1}{\alpha_{j,0}\hbar} \int \psi_0^* V(l_r \vec{x}) \psi_j d\vec{x}. \quad (3.18)$$

Como mostra a equação (3.18), para calcularmos  $b$ , precisamos conhecer a distribuição espacial do campo aplicado. Assim, iremos propor alguns potenciais gerais que acoplam o estado fundamental,  $\psi_{000}$ , aos primeiros estados excitados,  $\psi_{100}$ ,  $\psi_{001}$  e  $\psi_{010}$ .

Para a transição  $000 \leftrightarrow 100$ , basta um potencial na forma

$$V(\vec{r}) = V_0 r^d = V_0 (l_r x_r)^d \quad (3.19)$$

Com esse tipo de potencial, obtemos

$$b_{100} = \frac{V_0 l_r^d}{\alpha_{100,0}\hbar} \frac{(u_{000}^2 u_{100}^2 v_{000} v_{100})^{1/4}}{\sqrt{v_{000} + v_{100}}} \frac{2^{(d+3)/2} \Gamma(d/2 + 1)}{(u_{000} + u_{100})^{d/2+1}} \left[ 1 - \frac{2u_{100}}{u_{000} + u_{100}} \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \right] \quad (3.20)$$

Para a transição  $000 \leftrightarrow 001$ , precisamos de um potencial do tipo

$$V(\vec{r}) = V_0 z^d = V_0 (l_r x_z)^d \quad (3.21)$$

Com esse tipo de potencial, obtemos, somente para  $d$  ímpar,

$$b_{001} = \frac{V_0 l_r^d}{\alpha_{001,0}\hbar\sqrt{\pi}} \frac{(4u_{000}^2 u_{001}^2 v_{000} v_{001}^3)^{1/4}}{\sqrt{u_{000} + u_{001}}} \frac{2^{d/2+1} \Gamma(d/2 + 1)}{(v_{000} + v_{001})^{d/2+1}} \quad (3.22)$$

No caso em que  $d$  é par,  $b_{001} = 0$  para um potencial do tipo (3.21).

Por fim, para a transição  $000 \leftrightarrow 010$ , é necessário que o potencial tenha

uma dependência em  $\phi$ . Assim, podemos supor um potencial na forma

$$V(\vec{r}) = V_0 r^d e^{-im'\phi} = V_0 (l_r x_r)^d e^{-im'\phi} \quad (3.23)$$

Com esse tipo de potencial, obtemos, somente para  $m' = 1$ ,

$$b_{010} = \frac{V_0 l_r^d}{\alpha_{010,0} \hbar} \frac{u_{010} (u_{010}^2 v_{000} v_{010})^{1/4}}{\sqrt{v_{000} + v_{010}}} \frac{2^{d/2+2} \Gamma((d+3)/2)}{(u_{000} + u_{010})^{(d+3)/2}} \quad (3.24)$$

No caso em que  $m' \neq 1$ ,  $b_{010} = 0$  para um potencial do tipo (3.23).

### 3.3.3 Criticalidade do Campo Aplicado

Com as expressões para os parâmetros  $a$  e  $b$ , calculadas nas seções anteriores, obtemos os efeitos críticos descritos nas seções 3.1 e 3.2. Conforme visto na seção 3.3.1, nossos cálculos para  $a$  só são válidos para o limite de acoplamento fraco. O fato de  $g$  ser pequeno nos limita em atribuímos valores para  $a$ . Pelos resultados anteriores, vimos que, nesse limite, que não conseguimos valores de  $a$  maiores que 0, 3. Assim, faremos uma análise fixando  $a = 0, 1$ . Para esse valor de  $a$ , assumimos que, nas transições para os modos  $\psi_{100}$  e  $\psi_{010}$ ,  $\lambda = 10$ ; na transição para o estado  $\psi_{001}$ ,  $\lambda = 0, 1$ .

Analisaremos o parâmetro de ordem  $\eta$ , definido em (3.1), fixando  $a = 0, 1$  e variando a dessintonia. Nosso interesse é vermos a dependência de  $\eta$  em termos da amplitude do campo aplicado. Escolhemos então, para o cálculo de  $b$ , o caso em que os campos dados pelas equações (3.19), (3.21) e (3.23) têm uma distribuição espacial linear, ou seja,  $d = 1$ . Além disso, assumimos

$\omega_r = 2\pi \times 120 \text{ Hz}$  e a massa do  $^{87}\text{Rb}$ ,  $m = 0,144 \times 10^{-21} \text{ g}$ , para todos os casos.

A figura 3.18 mostra  $\eta$ , para a transição  $000 \leftrightarrow 100$ , em função da amplitude  $V_0$  do campo

$$V(r) = V_0 l_r x_r, \quad (3.25)$$

considerando  $\lambda = 10$ . Pela equação (3.16), temos que para  $a = 0, 1$  e  $\lambda = 10$ ,  $g \simeq 0,65$ . Esse valor de  $g$  implica que

$$Na_s \simeq 0,51 \times 10^{-5} \text{ cm}. \quad (3.26)$$

Na figura 3.19, temos  $\eta$ , para a transição  $000 \leftrightarrow 010$ , em função da amplitude  $V_0$  do campo

$$V(r, \phi) = V_0 l_r x_r e^{-i\phi}, \quad (3.27)$$

com  $\lambda = 10$ . Para obtermos  $\lambda = 10$  e  $a = 0, 1$ , temos que  $g \simeq 0,38$ . Essas condições implicam em

$$Na_s \simeq 0,30 \times 10^{-5} \text{ cm}. \quad (3.28)$$

Na figura 3.20, temos  $\eta$ , para a transição  $000 \leftrightarrow 001$ , em função da amplitude  $V_0$  do campo

$$V(r, \phi) = V_0 l_r x_z, \quad (3.29)$$

com  $\lambda = 0, 1$ . Para  $\lambda = 0, 1$  e  $a = 0, 1$ , temos que  $g \simeq 0,24$ . Para isso,

devemos ter

$$Na_s \simeq 0,19 \times 10^{-5} \text{ cm}. \quad (3.30)$$

Em todos os casos, utilizamos as dessintonias  $\delta = 0,40$  (vermelho),  $\delta = 0,45$  (verde) e  $\delta = 0,55$  (azul), as quais mostramos nas figuras o valor de  $\Delta\omega$  calculado da definição de  $\delta$  em (2.3), utilizando o parâmetro de cada caso. Vemos pelas figuras 3.18 e 3.19 que a amplitude crítica do campo aplicado, para as transições  $000 \leftrightarrow 100$  e  $000 \leftrightarrow 010$ , é da ordem de  $10^{-25}$  erg/cm. Enquanto que, pela figura 3.20, para a transição  $000 \leftrightarrow 100$ , a amplitude crítica do campo é da ordem de  $10^{-27}$  erg/cm.

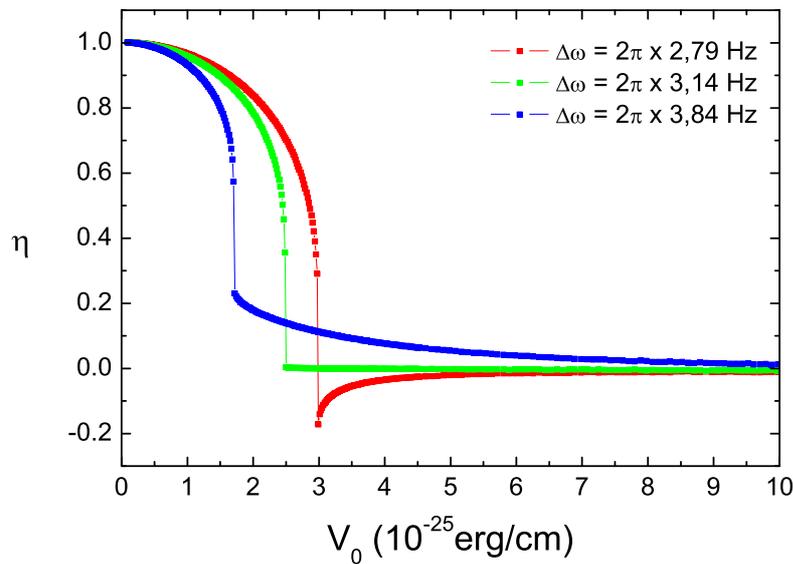


Figura 3.18: Parâmetro de ordem  $\eta$  em função da amplitude  $V_0$  do campo dado pela equação (3.25) para a transição  $000 \leftrightarrow 100$ , com  $\lambda = 10$ ,  $a = 0,1$ .

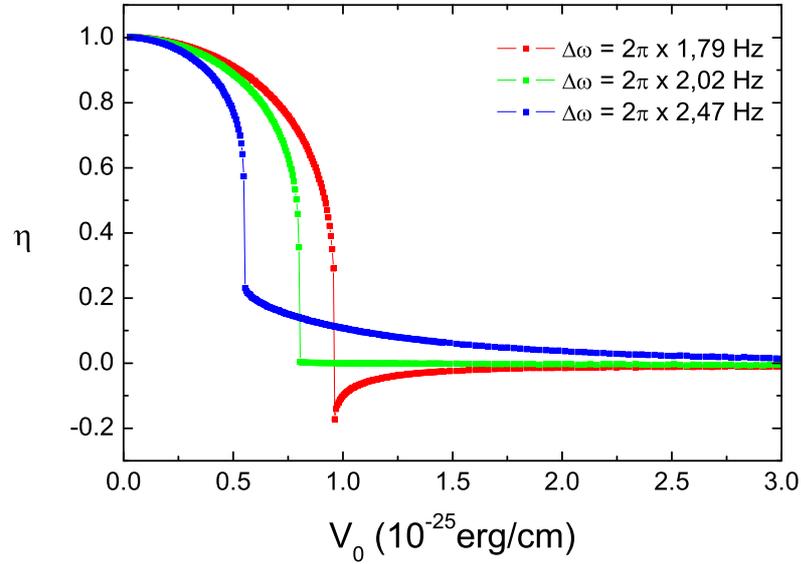


Figura 3.19: Parâmetro de ordem  $\eta$  em função da amplitude  $V_0$  do campo dado pela equação (3.27) para a transição  $000 \leftrightarrow 010$ , com  $\lambda = 10$  e  $a = 0, 1$ .

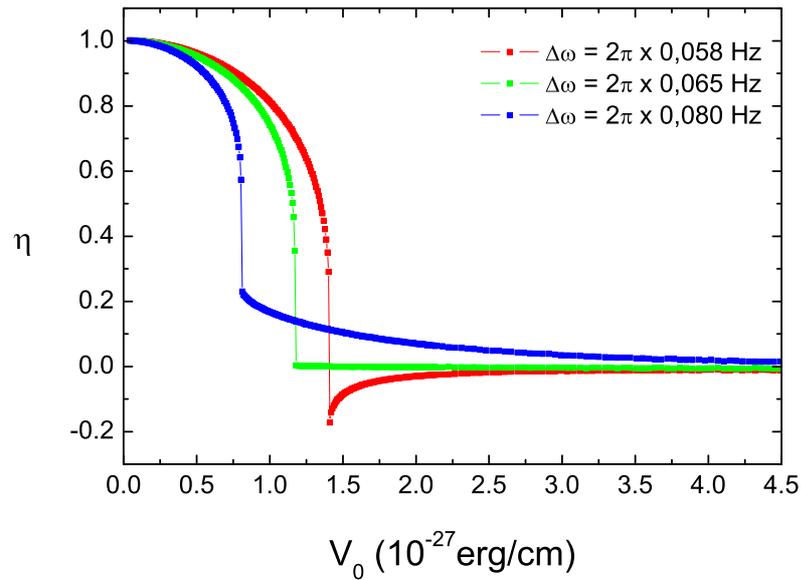


Figura 3.20: Parâmetro de ordem  $\eta$  em função da amplitude  $V_0$  do campo dado pela equação (3.29) para a transição  $000 \leftrightarrow 001$ , com  $\lambda = 0, 1$  e  $a = 0, 1$ .

# Conclusões

Neste trabalho estudamos a possibilidade de se obter um condensado de Bose-Einstein em um estado excitado de uma armadilha harmônica e alguns efeitos relacionados a este processo.

Conforme visto no capítulo 1, aplicando-se um campo externo oscilante, é possível transferir átomos condensados do estado fundamental de uma armadilha harmônica para um estado excitado. Isto já havia sido proposto por Yukalov *et al.* em [20] e discutido em trabalhos posteriores [11, 22]. O intuito do nosso trabalho foi o de manipular o campo externo, variando sua forma temporal e espacial.

Com relação à parte temporal, analisamos o comportamento da evolução das populações de cada estado primeiramente com um pulso de Rabi e depois com uma interrogação do tipo Ramsey. Os resultados obtidos com o pulso de Rabi, mostraram que o máximo de excitação pode ocorrer fora da ressonância, dependendo do acoplamento entre o campo e os modos. Inclusive, para  $a = 0, 1$ , o máximo nunca ocorre para  $\delta = 0$ , seja qual for o valor de  $b$ . Esse deslocamento de frequência do máximo de excitação se deve ao termo não linear do hamiltoniano (1.10), que passa a ser importante no processo

de transferência atômica para  $b$  pequeno. Quando  $b$  atinge um certo valor crítico, o campo externo domina o processo. Ainda vimos um padrão de interferência devido à fase acumulada pela função de onda no processo de transferência de população. Isso ocorre mesmo sendo um pulso de Rabi que em um sistema linear esse processo de interferência não acontece.

Em seguida, utilizamos uma seqüência temporal do tipo Ramsey para o campo de excitação. Pelos nossos resultados, concluímos que, embora o sistema seja não linear, há a formação de franjas do tipo Ramsey que indica que o processo de excitação dos modos topológico é coerente. Como na interrogação de Rabi, na de Ramsey há um deslocamento da freqüência do máximo de excitação, cuja interpretação é a mesma dada anteriormente. A vantagem de se utilizar a configuração de Ramsey é que podemos conhecer a fase relativa entre os modos, o que não é possível com um pulso de Rabi.

Com relação à parte espacial do campo aplicado, o objetivo do trabalho era ver como a distribuição do campo modificava o processo de excitação. Primeiramente, variamos o valor de  $b$  em nossas simulações, já que mantendo os parâmetros da armadilha e a interação atômica fixos, quem determina o valor de  $b$  é a distribuição espacial e/ou a intensidade do campo. Dessa forma, vemos qual valor de  $b$  nos interessa e, por meio das funções de onda obtidas na seção 1.2, calculamos quais parâmetros do campo se ajustam aos efeitos em que estamos interessados.

Os primeiros efeitos que observamos são decorrentes dos resultados obtidos com os pulsos de Rabi. Verificamos que, para  $a = 1$ , a dessintonia do máximo de excitação vai a zero bruscamente quando  $b \simeq 0,5$ . Porém, para  $a = 0,1$ , a dessintonia do máximo vai suavemente para  $\delta \simeq 0,45$ . Além

desse efeito, vimos que a largura a meia altura tem dois comportamentos distintos para  $a = 1$ , sendo o ponto crítico novamente  $b \simeq 0,5$ . Para  $a = 0,1$  o comportamento da largura a meia altura em função de  $b$  também é de uma curva suave.

Calculando explicitamente o parâmetro  $a$ , vimos que  $a = 1$  só é possível no caso de acoplamento forte, ou seja, para  $g$  grande. Mas nossas aproximações só são válidas no limite de acoplamento fraco. Dessa forma, não pudemos ver que campo deve ser aplicado para obtermos o comportamento crítico da largura de linha e da dessintonia do máximo de excitação.

Analisando, agora, o comportamento do parâmetro de ordem, definido primeiramente por Yukalov *et al.* em [29] e neste trabalho dado pela equação (3.1), vimos efeitos críticos relacionados ao parâmetro  $b$ . Ou, em outras palavras, efeitos relacionados à intensidade e a distribuição do campo aplicado.

Primeiramente analisamos o parâmetro de ordem fixando o campo na ressonância e variando o valor de  $a$ . Vimos que há um ponto crítico em  $\eta$  a partir de  $a = 0,8$ . Porém, esse valor de  $a$ , novamente, só acontece para o acoplamento forte. Então precisaríamos de um valor de  $a$  que valesse no limite de acoplamento fraco. Escolhemos  $a = 0,1$  e variamos a dessintonia do campo externo. Vimos efeitos críticos parecidos com os obtidos anteriormente, porém dentro do limite de aplicação das nossas aproximações.

Escolhemos, então, três distribuições espaciais diferentes para o potencial para acoplarmos o estado fundamental com os três primeiros estados excitados. Simulamos essas transições com base no experimento que está sendo realizado em nosso grupo, onde utilizamos átomos de  $^{87}\text{Rb}$  e uma frequência

radial da armadilha de  $\omega_r = 2\pi \times 120Hz$ . Com esses valores vimos que para a transição  $000 \leftrightarrow 100$ , com um potencial linear em  $r$ , a amplitude do campo aplicada para vermos a criticalidade de  $\eta$  é da ordem de  $10^{-25}erg/cm$ . Para a transição  $000 \leftrightarrow 010$ , aplicamos um campo cujo potencial é linear em  $r$  e uma dependência angular do tipo  $e^{i\phi}$ . Obtemos que a amplitude do campo crítico também é da ordem de  $10^{-25}erg/cm$ . Já para a transição  $000 \leftrightarrow 001$ , aplicamos um potencial linear em  $z$  e obtemos uma amplitude crítica da ordem de  $10^{-27}erg/cm$ .

Esses efeitos só são válidos quando temos uma relação entre o número de átomos condensado  $N$  e o comprimento de espalhamento  $a_s$  dado por  $Na_s \sim 10^{-5}cm$ . Como o comprimento de espalhamento do  $^{87}Rb$  é da ordem de  $5nm$  [30], para que pudéssemos ver experimentalmente os efeitos obtidos nesse trabalho, seria necessário manipular o comprimento de espalhamento via ressonância de Feshbach [8].

Em trabalhos futuros, acrescentaremos a interação entre os dipolos magnéticos dos átomos, estudando como essa interação afeta na dinâmica e estabilidade do condensado.

# Referências

- [1] BOSE. *Z. Phys.*, v. 26, n. 1, p. 178, 1924. (A tradução deste artigo pode ser encontrada na *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v.27, n.3, p.463, 2005.).
- [2] PIZA, A. F. R. de T. *Condensados Atômicos de Bose-Einstein*. 2002. Curso de Verão - IFUSP.
- [3] EINSTEIN, A. *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, v. 1, p. 3, 1925. (A tradução deste artigo pode ser encontrada na *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v.27, n.1, p.113, 2005.).
- [4] HEISENBERG, W. *Z. Phys.*, v. 33, n. 1, p. 879, 1925.
- [5] AITCHISON, I. J. R.; MACMANUS, D. A.; SNYDER, T. M. *Am. J. Phys.*, v. 72, n. 11, p. 1370, 2004.
- [6] CORNELL, E. A.; WIEMAN, C. E. *Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas: The First 70 Years and Some Recent Experiments*. 2001. Nobel Lecture.
- [7] REICHL, L. E. *A Modern Course in Statistical Physics*. 1. ed. Great Britain: Edward Arnold (Publishers) LTD, 1980.

- 
- [8] PETHICK, C. J.; SMITH, H. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. 1. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- [9] LONDON, F. *Nature*, v. 141, p. 643, 1938.
- [10] TISZA, L. *Nature*, v. 141, p. 913, 1938.
- [11] COURTEILLE, P. W.; BAGNATO, V. S.; YUKALOV, V. I. *Laser Phys.*, v. 11, p. 659–800, 2001.
- [12] BRADLEY, C. C. et al. *Phys. Rev. Lett.*, v. 75, p. 1687, 1995.
- [13] ANDERSON, M. H. et al. *Science*, v. 269, p. 198, 1995.
- [14] DAVIS, K. B. et al. *Phys. Rev. Lett.*, v. 75, p. 3969, 1995.
- [15] MEWES, M.-O. et al. *Phys. Rev. Lett.*, v. 78, p. 582, 1997.
- [16] ANDERSON, B.; KASEVICH, M. *Science*, v. 282, p. 1686, 1998.
- [17] HAGLEY, E. et al. *Science*, v. 283, p. 1706, 1999.
- [18] BLOCH, I.; HANSCH, T.; ESSLINGER, T. *Phys. Rev. Lett.*, v. 82, p. 3008, 1999.
- [19] DALFOLVO, F. et al. *Rev. Mod. Phys.*, v. 71, n. 3, p. 463, 1999.
- [20] YUKALOV, V.; YUKALOVA, E.; BAGNATO, V. S. *Phys. Rev. A*, v. 56, p. 4845, 1997.
- [21] MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. 3. ed. New York: John Wiley, 1998.

- 
- [22] YUKALOV, V. I.; YUKALOVA, E. P.; BAGNATO, V. S. *Phys. Rev. A*, v. 66, p. 043602, 2002.
- [23] KREYSZIG, E. *Advanced engineering mathematics*. 8. ed. New York: John Wiley, 1999.
- [24] KREYSZIG, E. *Maple computer guide: a self-contained introduction*. 8. ed. New York: John Wiley, 2001.
- [25] RABI, I. I. et al. *Phys. Rev.*, v. 53, p. 318, 1938.
- [26] RABI, S. M. I. I.; KUSCH, P.; ZACHARIAS, J. R. *Phys. Rev.*, v. 55, p. 526, 1939.
- [27] RAMSEY, N. F. *Phys. Rev.*, v. 79, p. 996, 1949.
- [28] RAMSEY, N. F. *Phys. Rev.*, v. 78, p. 695, 1950.
- [29] YUKALOV, V.; YUKALOVA, E.; BAGNATO, V. S. *Proc. SPIE*, v. 4243, p. 150–155, 2001. (também disponível em cond-mat/0108508).
- [30] NEWBURY, N. R.; MYATT, C. J.; WIEMAN, C. E. *Phys. Rev. A*, v. 51, p. R2680, 1995.