



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.005/08

## Análogos Gravitacionais em Matéria Condensada

Clóvis Achy Soares Maia

Orientador

*Prof. Dr. George E. A. Matsas*

Setembro de 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## Agradecimentos

À minha esposa, Adriane, a quem dedico esse trabalho. Obrigado pelo companheirismo, compreensão e ajuda. E por me dar um novo ânimo a cada dia.

Aos meus pais Clóvis e Glaci, e aos meus irmãos Athos e Fabrício. Mãe, que cada letra aqui seja um abraço de agradecimento, sem você nada teria começado.

Aos meus segundos pais Hugo e Sibila, e meus segundos irmãos Dago e Cíntia, Rogério e Evelyn.

A mais um segundo irmão, Jefferson Stafusa.

Ao amigo e Professor, Adonai Sant'Anna. Obrigado por sempre acreditar em mim.

A todos amigos da IMEL. E também ao Rudolf Lessmann, cuja amizade e apoio na Alemanha foi marcante.

Ao Instituto de Física Teórica, que foi uma segunda casa por vários anos, e a todos amigos no IFT, em particular ao Carlos Mafra.

Aos amigos na USP: Alberto, Gustavo, Renê, Sílvio e Zwinglio.

Aos companheiros de grupo e journal club: Douglas, André, Adriano e Landulfo.

Ao Professores Reuven Opher e Alberto Saa, com quem a convivência nesses anos foi sempre um grande prazer.

Vielen Dank, Professor Ralf Schützhold.

Meu mais profundo agradecimento ao Professor George Matsas. Ter tido sua orientação, apoio e amizade foi, nesse período, minha maior conquista. Fazer jus ao seu exemplo será sempre um desafio a perseguir. Muito obrigado, George.

À FAPESP, cujo apoio financeiro foi fundamental, e à toda sociedade que permitiu a essa instituição existir.

# Resumo

Um programa de pesquisa situado na interface entre Teoria Quântica de Campos em espaços-tempos curvos e Matéria Condensada tem se desenvolvido nos últimos anos. Seu objetivo principal é simular, em laboratório, vários aspectos da física de buracos negros e modelos cosmológicos, por meio de sistemas em matéria condensada que apresentam propriedades formalmente análogas. Alguns exemplos de tais sistemas envolvem configurações em condensados de Bose-Einstein, Hélio superfluido ou guias de ondas eletromagnéticas. Espera-se ser possível reproduzir, entre outros, fenômenos tais como a emissão térmica de quase-partículas (e.g., fônons), em analogia à radiação Hawking de buracos negros, ou ainda a criação de partículas em espaços-tempos em expansão, tal como acredita-se ter ocorrido nos períodos iniciais de nosso próprio universo. Revisamos aqui algumas das propostas mais promissoras, em conjunto com um apanhado de resultados centrais da área. Dentro desse escopo, investigamos efeitos de backreaction na evaporação de buracos negros análogos, de maneira a entender como a analogia se estende a esse problema e quais são suas possíveis implicações experimentais. Em paralelo ao programa de modelos análogos discutimos também uma contribuição correlata, onde um novo efeito em relatividade geral, o efeito swimming, fora obtido em razão de propriedades similares entre o movimento de objetos quase-rígidos em espaços-tempos curvos e a natação de corpos extensos em fluidos a baixos números de Reynolds.

Palavras Chaves: Modelos análogos; Teoria quântica de campos; Espaços-tempos curvos; Radiação Hawking; Teoria de campos em matéria condensada.

Áreas de conhecimento: 10501037; 10501029; 10503013; 10507078.

# Abstract

A research program at the interface of Quantum Field Theory in curved spacetimes and Condensed Matter has been developed in the last few years. Its main objective is to simulate in laboratory numerous aspects of the physics of black holes and cosmological models by means of condensed matter systems presenting formally analogous properties. Some examples include configurations in Bose-Einstein condensates, Helium superfluid and electromagnetic waveguides. It may well be possible the reproduction, among others, of phenomena such as thermal emission of quasi-particles (e.g., phonons) in analogy to the Hawking radiation of black holes. Or the particle creation of expanding spacetimes, as the one believed to have happened in the begin of our own universe. We review here some promising proposals and describe a set of central results so far obtained in the area. We also investigate back-reaction effects in analogue black hole evaporation, in order to understand how the analogy manifests itself in this problem and its possible experimental implications. In parallel to the analogue program, we also discuss a contribution where a new effect in general relativity, the swimming effect, has been obtained due to similar properties between the movement of quasirigid bodies in curved spacetime and the swimming of extended bodies in low Reynolds number fluids.

Keywords: Analogue models; Quantum field theory; Curved spacetimes; Hawking radiation; Condensed matter field theory.

No phenomenon is a real phenomenon until it is an observed phenomenon.

Proud unbending immutability is a mistaken ideal for physics; this science now shares, and must forever share, the more modest mutability of its sister sciences, biology and geology.

[The black hole] teaches us that space can be crumpled like a piece of paper into an infinitesimal dot, that time can be extinguished like a blown-out flame, and that the laws of physics that we regard as “sacred”, as immutable, are anything but.

As surely as we now know how tangible water forms out of invisible vapor, so surely we shall someday know how the universe comes into being.

I confess to being an optimist about things, especially about someday being able to understand how things are put together. So many young people are forced to specialize in one line or another that a young person can't afford to try and cover this waterfront - only an old foggy who can afford to make a fool of himself. If I don't, who will?

John Archibald Wheeler (1911-2008).

Some people think Wheeler's gotten crazy in his later years, but he's always been crazy.

Richard Feynman (1918-1988).

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	A utilidade de modelos análogos . . . . .	2
1.2	Objetivos . . . . .	7
<b>2</b>	<b>O efeito “swimming”</b>	<b>8</b>
2.1	Análogos de física de fluidos em gravitação . . . . .	8
2.1.1	Natação a pequenos números de Reynolds . . . . .	8
2.1.2	Fases geométricas e Mecânica Clássica . . . . .	10
2.1.3	Natação no espaço-tempo . . . . .	13
2.1.4	Desenvolvimentos posteriores . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Espaços-tempos efetivos</b>	<b>17</b>
3.1	Introdução a analogia acústica . . . . .	17
3.1.1	Evaporação experimental de buracos negros? . . . . .	21
3.2	Outros exemplos de espaços-tempos efetivos . . . . .	28
3.2.1	Condensados de Bose-Einstein . . . . .	28
3.2.2	Hélio superfluido . . . . .	31
3.2.3	Sistemas fotônicos . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Radiação Hawking em modelos análogos</b>	<b>38</b>
4.1	Teoria Quântica de Campos . . . . .	38
4.2	Radiação após formação do horizonte . . . . .	43
4.2.1	O problema trans-planckiano . . . . .	51
4.3	Radiação sob relações de dispersão modificadas . . . . .	52
4.3.1	A equação de onda modificada . . . . .	55
4.3.2	O modelo de Unruh . . . . .	57
4.3.3	Universalidade do efeito Hawking . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Efeitos de backreaction</b>	<b>76</b>
5.1	Backreaction em espaços-tempos curvos . . . . .	76
5.2	Um modelo para o backreaction . . . . .	79
5.2.1	Escolhendo uma lagrangiana . . . . .	79

5.2.2	Equações de movimento . . . . .	81
5.2.3	Tensor energia-momento . . . . .	82
5.2.4	Soluções . . . . .	84
5.2.5	Uma abordagem perturbativa . . . . .	86
5.2.6	Recalculando a radiação Hawking . . . . .	92
5.2.7	Termodinâmica . . . . .	93
5.2.8	Sumário . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>96</b>
<b>A</b>	<b>Método de integração</b>	<b>98</b>
<b>B</b>	<b>Anexo I</b>	<b>102</b>
<b>C</b>	<b>Anexo II</b>	<b>108</b>
C.1	Anexo II-1 . . . . .	108
C.2	Anexo II-2 . . . . .	114

# Capítulo 1

## Introdução

As duas teorias que formaram os pilares da ciência feita no século XX, a relatividade e a mecânica quântica, alcançaram em algumas décadas validação experimental com precisão sem paralelos históricos anteriores. Tal sucesso fora possível, em grande parte, porque ambas teorias puderam ser parcialmente unidas na teoria quântica de campos, iniciando o longo caminho que culminou no atual modelo padrão de física de partículas [1]. Devido a profusão inicial de resultados nessa área, uma das interações fundamentais, a gravidade, descrita pela relatividade geral, fora inicialmente colocada em segundo plano. Não só era, e ainda é, muito difícil incluí-la no quadro teórico das outras interações, como em muitos dos fenômenos da física de aceleradores sua influência é descartável.

Porém, em meio aos sucessos estrondosos da física de partículas no período pós-guerra, resultados marcantes em gravitação reavivaram o interesse de alguns poucos, mas competentes grupos na Europa e nos Estados Unidos [2, 3]. A idéia, inicialmente descartada pelo próprio Einstein, de que buracos negros sejam objetos astrofísicos reais ganhou força após a verificação de que objetos igualmente exóticos, tais como estrelas de nêutrons, de fato existem. Observações astrofísicas a partir dos anos 60 e 70 não só apontaram muitos objetos que só se encaixam no escopo da relatividade geral, junto a vários candidatos a buracos negros, como reforçaram todos dados de décadas anteriores que apontam que nosso universo observável é uma solução das equações de Einstein.

Somado às observações experimentais, desenvolvimentos teóricos desse período jogaram alguma luz sobre o papel da gravitação no quadro maior das leis físicas fundamentais. Embora a relatividade geral seja uma teoria clássica independente da física de menor escala que origina as leis macroscópicas da termodinâmica, descobriu-se que para cada lei da termodinâmica existe uma correspondente lei para o comportamento de buracos negros [4]. Por exemplo, a segunda lei da termodinâmica, que rege que a entropia de um sistema jamais decresce,  $\sum_i \delta S_i \geq 0$ , encontra paralelo na demonstração de que a área do horizonte de um conjunto de buracos negros também jamais decresce,  $\sum_i \delta A_i \geq 0$ . E para completar esse quadro, a descoberta feita por Hawking de que buracos negros devem emitir radiação térmica [5], com tempera-

tura inversamente proporcional a sua massa, implica uma relação  $\delta S_i = \delta A_i/4$  para buracos negros, unificando ambas descrições por meio da lei generalizada da termodinâmica [4].

A radiação Hawking é resultado de se dar um passo a mais ao incluir efeitos gravitacionais em teoria quântica de campos. Chamado de teoria quântica de campos em espaços curvos, esse aparato teórico consiste em quantizar-se os campos fundamentais em um espaço-tempo de fundo clássico. Embora seja um procedimento relativamente simples, seus resultados são muitas vezes surpreendentes. Além da ampla conexão entre a física de buracos negros e a termodinâmica usual, descrita acima, uma outra consequência bem conhecida é o efeito Unruh [6, 7, 8, 9], com suas profundas implicações para o conceito de partícula elementar em teoria quântica de campos. Ou ainda no que se refere à cosmologia, acredita-se hoje que as sementes que originaram a atual estrutura de larga escala do universo tenha sua origem em flutuações quânticas primordiais [10], cujos vestígios podem ser agora observados na radiação cósmica de fundo.

Mas, apesar de seu relativo sucesso, a teoria quântica de campos em espaços curvos tem limitações bem conhecidas. Sendo uma teoria efetiva, sabe-se que sua validade em escalas próximas a de Planck é questionável. Como veremos posteriormente (e.g., ver §4.2.1), há na dedução de Hawking hipóteses implícitas sobre o comportamento do campo nesse regime, que motivaram extensas investigações na literatura sobre a realidade desse efeito. E mesmo no regime em que essa teoria semiclássica é certamente válida, há muitas vezes dificuldades intrínsecas de cálculo (e.g., ver §5.1) para que se possa extrair maiores resultados.

Assim como tiveram sua origem na mesma época, nossas teorias que dão conta da gravidade e do comportamento subatômico passam hoje por dificuldades parecidas, sendo vítimas de seu próprio sucesso. Ambas encontraram validação em um grande regime de aplicação, ao ponto de que experimentos que nos permitam enxergar além desses limites exigem condições difíceis de se obter em laboratório ou mesmo por observações astrofísicas. No entanto, todos indícios apontam que nosso conhecimento atual sobre essas teorias é incompleto, o que torna inevitável a busca por sua extensão. Mas como ter acesso a resultados que nos apontem para uma teoria de gravitação quântica, quando sequer temos como testar o limite semiclássico da gravitação?

## 1.1 A utilidade de modelos análogos

Em meio às dificuldades teóricas e observacionais, um conjunto de idéias para se testar ou simular predições e novas propostas em gravitação foram lançadas nas últimas duas décadas, ao que se denominam “modelos análogos” [11, 12, 13]. Sua característica comum é o reconhecimento de que muitos sistemas em matéria condensada são descritos por equações formalmente equivalentes, ou muito parecidas nos devidos limites, às equações de diferentes sistemas gravitacionais. O exemplo emblemático é o de um buraco sônico [14] (e.g., ver §3), onde as ondas sonoras

em um fluido que desenvolve uma região supersônica podem ser descritas por um espaço-tempo efetivo, em analogia direta com a propagação da luz nas proximidades de um buraco negro. Mas antes, para melhor entender a utilidade de se usar modelos análogos em gravitação, é interessante exemplificar de que maneira modelos análogos têm sido usados em física.

## Modelos análogos em vários contextos

Embora nem sempre use-se o termo “analogia”, na história da física pode-se identificar alguns exemplos em que a aproximação de um sistema por outro, em uso de uma analogia, rendeu descrições aprofundadas de um fenômeno. Tem-se um exemplo conhecido no desenvolvimento da eletrodinâmica, onde a derivação de Maxwell de suas equações envolvia o uso de um modelo mecânico análogo não trivial (e.g., vórtices sobre um hipotético éter)<sup>1</sup>. Exemplos mais recentes e mais próximos a nossos objetivos são os métodos de se resolver problemas de matéria condensada por meio de análogos acústicos [15], como descrevemos a seguir.

Um problema acústico interessante consiste no abatimento de ruído em estruturas motorizadas<sup>2</sup>, e.g., uma aeronave, como representado na figura 1.1. Ondas sonoras transversais, criadas pelo motor, podem propagar-se pela estrutura (e.g, o chão da aeronave) e induzir-lhes uma vibração que cria ruído para seus ocupantes (fig. 1.1-a). Porém, é próprio à estrutura da aeronave que existam colunas atachadas a sua base, e exemplificamos uma na fig. 1.1-b. Tal ponto de contato usualmente introduz uma reflexão das vibrações, ocasionando menos ruído em regiões distantes dali. Assim, se a introdução de uma coluna pode diminuir o ruído, seria natural esperar que a introdução de múltiplas colunas tenda a melhorar o abatimento. Mas, na prática, não é o que ocorre usualmente. Até pelo contrário, é possível que uma seqüência de colunas como na fig. 1.1-c transmita de maneira ainda mais eficiente o ruído, dependendo da banda de frequência. De fato, o fenômeno de transmissão de som em uma estrutura como a da fig. 1.1-c guarda analogia com a condução de elétrons em uma rede cristalina, e.g., as ondas de Bloch. Um metal, onde os elétrons podem ser fortemente espalhados pelos íons da rede, deveria em princípio ser um mal condutor. Mas o arranjo periódico de sua estrutura permite aos elétrons propagarem-se com baixa resistência devido ao teorema de Bloch, segundo o qual uma equação de onda com potenciais periódicos possui autofunções espacialmente ilimitadas [16]. A razão pela qual o fenômeno de transmissão de elétrons na rede e de ruídos na aeronave são tão próximos reside na equação que descreve ambos sistemas. Para o primeiro, a eq. de Schrödinger independente do tempo que o descreve,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi, \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>É claro que, após obter essas equações, pode-se posteriormente descartar qualquer referência ao modelo mecânico análogo, o que nesse caso está ligado ao nascimento da relatividade.

<sup>2</sup>Tomamos esse exemplo da ref. [15].

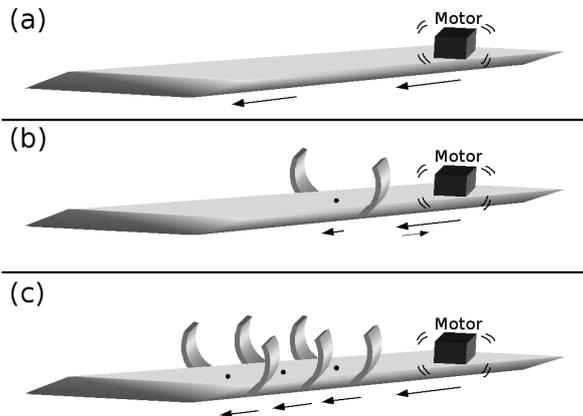


Figura 1.1: Propagação de ruídos em uma estrutura motorizada.

pode ser reescrita na forma

$$\nabla^2\psi + [\epsilon^2 - \bar{V}(r)]\psi = 0, \quad (1.2)$$

onde  $\epsilon = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  e  $\bar{V} = 2mV/\hbar^2$ . Já o sistema acústico é descrito pela equação de onda

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.3)$$

onde  $c$  é a velocidade do som no meio, que pode variar espacialmente,  $c = c(r)$  (e.g.,  $c$  varia nas proximidades das colunas). Pelo uso de modos normais  $\propto e^{-i\omega t}$ , a eq. acima pode ser reescrita na forma

$$\nabla^2\psi + [\epsilon^2 - \bar{V}(r)]\psi = 0, \quad (1.4)$$

onde  $\epsilon = \omega/c_0$ , sendo  $c_0$  o valor médio do som no material (e.g., longe das colunas) e  $\bar{V}(r)$  uma função dada pela expansão da função  $c(r)$ , e.g., nas proximidades das colunas.

Assim, fica claro por (1.2) e (1.4) que as equações que descrevem ambos sistemas são formalmente equivalentes. Uma vez que o sistema acústico é em princípio facilmente manipulável, pode-se usar a analogia para simular o sistema de elétrons na rede. Tais métodos tem sido usados para estudar fenômenos em matéria condensada cuja resolução analítica/computacional é de difícil tratamento, i.e., localização de Anderson e propriedades de quasicristais (ver [15] e referências ali contidas). Esse exemplo simples de modelo análogo mantém paralelo com muitas das aspirações de modelos análogos de gravitação que discutiremos nos capítulos que seguem.

Outro exemplo recente de analogia tem sido a descrição de um plasma de quark-glúons por meio de um fluido ideal. Tal plasma é um novo estado da matéria,

resultante de uma transição da fase hadrônica, em que quarks e glúons estão confinados, para um estado desconfinado. Acredita-se que ele fora criado no CERN e no RHIC [17] por um tempo da ordem de  $10^{-22}$  segundos. Em um período de vida tão curto só faz-se possível sua detecção por meios indiretos, e.g., pela observação das partículas geradas e emitidas subsequente. Esperava-se que, devido ao desconfinamento, esse jato de partículas emitidas tivesse o comportamento reminescente de um gás (e.g., partículas pouco interagentes com grande livre caminho médio). Os dados experimentais indicam, porém, que seu comportamento é mais próximo a de um fluido ideal, com menor livre caminho médio e razoável interação entre seus constituintes. De fato, tal comparação com um fluido vem do uso de uma analogia<sup>3</sup> com um plasma clássico, fortemente acoplado e não relativístico [18, 19].

### Modelos análogos em gravitação

A referência mais antiga<sup>4</sup> a apontar um fenômeno de matéria condensada que pode ser descrito em analogia com o formalismo da relatividade geral, ou seja, por meio de uma *métrica efetiva*, é um trabalho de W. Gordon nos anos 20 [21]. Procurando descrever o comportamento de raios de luz em meios dielétricos, Gordon notou que pode-se reescrevê-los como geodésicas de uma métrica parametrizada pelo índice de refração do material. Tal idéia mantém bastante proximidade com os análogos propostos atualmente, e de fato alguns tem como ponto de partida a métrica de Gordon (ver §3.2.3).

Porém, o atual interesse por modelos análogos em gravitação se deve a um trabalho de W. Unruh [14], e fora despertado pela percepção de que a analogia pode estender-se ao comportamento de campos quantizados sobre a métrica efetiva do sistema. Ou seja, é possível usar modelos análogos não só para simular aspectos clássicos da relatividade geral, mas também efeitos semiclassicos. Abre-se assim uma janela para reproduzir, em laboratório, fenômenos que até o momento tem sido resultados teóricos contundentes, porém sem verificação experimental. Dependendo do seu foco principal, muitos dos recentes modelos propostos podem ser classificados, de maneira geral, em duas categorias:

1. *Simular fenômenos gravitacionais em sistemas de matéria condensada.*

Um exemplo típico desse caso é visto nos esforços para se construir modelos que apresentem radiação Hawking. Propostas dignas de nota são as que envolvem condensados de Bose-Einstein [22], guias de onda eletromagnéticos [23], dielétricos [24] e hélio superfluido [25, 26] (ver §3.2). Outro exemplo envolve o uso de análogos para simular soluções cosmológicas das equações de Einstein e propriedades associadas às mesmas, i.e., a produção de partículas induzidas

---

<sup>3</sup>Ainda outra possível analogia, proposta para explicar o comportamento de fluido do plasma de quark-glúons, fora sugerida com base no comportamento coletivo de jatos granulares densos emitidos em alta velocidade [20].

<sup>4</sup>Para um breve apanhado histórico recomendamos a ref. [12].

pela expansão do universo. Propostas muito interessantes envolvendo o uso de condensados de Bose-Einstein [27, 28] e armadilhas de íons [29] contemplam esse caso. Ainda outro exemplo é a investigação de defeitos topológicos em cristais líquidos [30], que simulam teorias de cordas cósmicas [31].

2. *Aplicar idéias inspiradas por modelos de matéria condensada em gravitação.*  
Aqui um importante caso é visto nos estudos de efeitos de relações de dispersão alteradas (e.g., na propagação de fônons) na radiação Hawking análoga [32, 33]: em outras palavras, estudar como a radiação Hawking ocorre em um fluido em que os modos de onda propagam-se com diferentes velocidades (ver §4.3). Essa questão, interessante por si mesma, também leva-nos ao paralelo em teoria quântica de campos em espaços curvos: como poderia a radiação Hawking ocorrer na física de buracos negros, caso a própria luz propague-se sob uma relação de dispersão diferente, para comprimentos de onda próximos à escala de Planck? Esse exemplo particular é emblemático ao mostrar como idéias inspiradas em sistemas de matéria condensada tem oferecido novas direções de pesquisa, com uma literatura recente dirigida a esses pontos [34].

Essas duas classes resumem a filosofia de trabalho por trás do estudo de modelos análogos. Pode-se dizer que os sistemas no primeiro caso guardam relação com a idéia representada no exemplo anterior, de análogos acústicos para o transporte eletrônico. Nesse caso ambos sistemas são relativamente bem conhecidos, e aproveita-se o acesso experimental facilitado em um para engendrar uma simulação do outro. Já os sistemas no segundo caso guardam melhor paralelo com o exemplo do plasma de quark-glúons. Neles tem-se um sistema que não é totalmente compreendido (e.g., o plasma de quark-glúons, ou teorias de gravitação modificada em escalas de Planck), e usa-se outro sistema, melhor conhecido (e.g., plasmas clássicos, ou modelos análogos de gravitação em fluidos), para ganhar-se intuição sobre o primeiro. Em tal situação, até que ponto a analogia é de fato um guia fiel para a física do sistema que se tenta simular é uma discussão posterior.

Até aqui, a interação proporcionada entre a teoria quântica de campos em espaços curvos e matéria condensada fora muito produtiva. Vários e diferentes modelos análogos já foram propostos, onde algum fenômeno particular de física da matéria condensada pôde ser reinterpretado de novas formas. No que concerne à realização experimental desses sistemas, Leonhardt *et al* recentemente obteve o que se pode classificar como o primeiro horizonte de eventos análogo em laboratório [35] (e.g., ver §3.2.3), embora trate-se ainda de um modelo que simula propriedades clássicas da analogia. Ainda permanece como um desafio obter, experimentalmente, efeitos análogos quânticos tais como a radiação Hawking ou a produção de partículas em espaços-tempos cosmológicos. As propostas mais promissoras estão no limite da tecnologia necessária, e espera-se que a rápida evolução experimental em muitas dessas áreas proporcione novidades em breve.

## 1.2 Objetivos

Pretendemos, no que segue, apresentar um panorama geral da área de análogos de gravitação em matéria condensada. Tal área já se tornou extensa o suficiente para impedir uma discussão detalhada de seus vários desdobramentos, de forma que a exposição será, obrigatoriamente, centrada em nossa experiência particular:

- No capítulo 2 discutiremos um exemplo onde idéias provindas da física de fluidos proporcionou a descoberta de um interessante e novo efeito em relatividade geral, o efeito “swimming”.
- No capítulo 3 apresentamos, de maneira introdutória, um panorama geral de muitas das principais propostas de modelos análogos.
- No capítulo 4 deduzimos, de maneira mais detalhada, contribuições e resultados centrais obtidos até hoje na área.
- O capítulo 5 introduz outras contribuições que pudemos realizar, ao considerar efeitos de backreaction em modelos análogos.

Finalizamos então com as conclusões no capítulo 6.

# Capítulo 2

## O efeito “swimming”

O programa de análogos gravitacionais em matéria condensada, sendo uma área de interface entre diferentes tópicos, se propõe como uma via de mão dupla. Ou seja, temos por objetivo aplicar ferramentas e idéias da física gravitacional em sistemas físicos de matéria condensada, mas também estamos igualmente interessados no caminho inverso.

Assim, apresentamos no que segue nosso trabalho sobre o efeito “swimming”, que é um exemplo onde idéias de origem em física de fluidos inspiraram a descoberta de um novo e interessante efeito relativístico. Tal apresentação é complementar ao artigo [36] presente no anexo I, onde maiores detalhes podem ser obtidos.

### 2.1 Análogos de física de fluidos em gravitação

#### 2.1.1 Natação a pequenos números de Reynolds

Em 1976, em uma conferência em homenagem a Victor Weisskopf, Edward Purcell apresentou um célebre seminário em resposta a uma discussão que os dois físicos mantiveram tempos atrás, e posteriormente tal seminário fora transcrito e publicado [37]. Seu tópico versava sobre os mecanismos físicos pelo qual pequenos organismos, tais como protozoários, se deslocariam em líquidos, pois o regime hidrodinâmico que descreve a natação de microorganismos é bem diferente do caso de macroorganismos. Uma maneira de qualificar essa afirmação se dá pelo uso do número de Reynolds  $\eta$ , que para um objeto imerso em um meio é dado por

$$\eta = \frac{VL}{\nu} \tag{2.1}$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido,  $L$  o comprimento típico do objeto e  $V$  sua velocidade média em relação ao fluido. Grosso modo, o número de Reynolds quantifica o quão viscoso um objeto sente ser o meio à sua volta. Grande  $\eta$  implica em sensação de baixa viscosidade, e vice-versa. Para exemplificar, um ser humano

( $L \approx 2\text{m}$ ,  $V \approx 1\text{m/s}$ ) possui  $\eta \approx 10^6$  na água, e  $\eta \approx 1$  em xarope. Um protozoário como o *Paramecium* possui  $\eta \approx 0.1$  na água, o que seria equivalente ao número de Reynolds de um ser humano nadando a  $V \approx 1\text{m/s}$  em piche quente.

Assim a natação para grandes números de Reynolds, usualmente o caso de macroorganismos, ocorre em síntese pelo efeito de inércia e ação e reação envolvidos no deslocamento de massas de fluido por parte do nadador. Já a dinâmica a baixos números de Reynolds, usualmente o caso de microorganismos, é mais complexa, tendo a apresentação de Purcell reinstigado interesse no assunto. Nesse limite os efeitos de inércia são desprezíveis, de modo que na ausência de forças motoras um corpo tenderá sempre ao repouso. Atualmente o mecanismo de locomoção de muitos microorganismos é ainda um tópico em desenvolvimento, mas com reconhecidos avanços [38].

## Natação e fases geométricas

Um trabalho de destaque nesse contexto foi feito por A. Shapere e F. Wilczek em 1988 [39]. Além de modelar um mecanismo de locomoção que se mostra razoável para descrever alguns microorganismos (e.g., *Escherichia coli*, entre outros), eles foram capazes de mostrar uma conexão interessante entre seu modelo e outro tema da física de recente desenvolvimento, as chamadas fases geométricas [40]. Descreveremos em mais detalhes esse ponto.

Dado um corpo extenso deformável (um nadador) descrito por uma seqüência de formas  $S(w_i, t)$ <sup>1</sup>, imerso em um fluido tal que  $\eta < 1$ , é possível demonstrar [41] que sua locomoção total (provocada por suas deformações) é calculada pela resolução do conjunto de equações

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{v}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}|_{S_0} = \frac{\delta S_0}{\delta t}, \quad (2.4)$$

sendo  $\mathbf{v}$  o campo de velocidade do fluido. A princípio a resolução completa desse conjunto de equações diferenciais, somada a uma função de deformação  $S(t)$  previamente dada, seriam necessárias para descrever o movimento de natação. Porém, Shapere e Wilczek [39] demonstraram também ser possível descrever o mesmo problema através de outro formalismo. De maneira geral, pode-se calcular a trajetória  $R(t)$  do nadador mediante uma integral de caminho

$$R(t_2) = R(t_1) \overline{P} e^{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(t) dt}, \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Onde  $w_i$  representa os parâmetros de deformação do corpo, e.g., uma barra estendível teria seu comprimento  $l$  como um parâmetro de deformação. Ou um triângulo isósceles, onde o comprimento dos lados idênticos  $l$  e do ângulo entre os mesmos  $\alpha$  fossem variáveis, teria  $l$  e  $\alpha$  como parâmetros de deformação.

sendo  $\overline{P}$  o operador de ordenamento temporal, e  $\mathbf{A}(t)$  uma conexão (também chamada de campo de gauge) que toma valores no espaço tangente à variedade definida pelos parâmetros de deformação<sup>2</sup>. É possível mostrar que para deformações infinitesimais obtém-se

$$\overline{P}e^{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{A}(t)dt} \approx 1 + \frac{1}{2} \oint \sum_{m,n} \mathbf{F}_{mn} w_m \dot{w}_n dt, \quad (2.6)$$

sendo

$$\mathbf{F}_{mn} = \frac{\partial A_n}{\partial w_m} - \frac{\partial A_m}{\partial w_n} - [A_m, A_n]. \quad (2.7)$$

Assim, vemos que o problema de se descrever a natação de um corpo nesse meio é reduzido ao cálculo de integrais de caminho de um potencial de gauge ou, de maneira equivalente, de uma integral de superfície de um tensor de curvatura (este definido a partir do potencial de gauge). Nesse sentido estamos dando uma solução *geométrica* ao problema, pois ele fora reduzido a uma dependência direta para com a geometria do caminho percorrido no seu espaço de parâmetros de deformação: a maneira como o corpo se deforma irá determinar seu deslocamento no líquido. Essa característica do formalismo o classifica, na literatura, como sendo um efeito de *fase geométrica*<sup>3</sup> [40].

Pode-se resumir, de maneira pictórica, os resultados de Shapere e Wilczek através da figura 2.1. Nela representa-se um microorganismo que, mediante um ciclo fechado de deformações, é capaz de se locomover em um fluido. Reforçamos que esse movimento de natação é diferente do que presenciamos no cotidiano: o deslocamento do nadador não está condicionado à força ou velocidade com o qual o movimento de deformação é executado, sendo que o mesmo deslocamento será obtido independentemente do tempo que se leve para fechar o ciclo de deformação. Apenas a seqüência de deformações determinará o deslocamento final neste limite hidrodinâmico de pequenos números de Reynolds.

## 2.1.2 Fases geométricas e Mecânica Clássica

Com o objetivo de tornar mais clara a apresentação, tocaremos ainda em outro tópico no qual o formalismo de fases geométricas tem dado contribuições recentes: mecânica clássica. Uma discussão detalhada desse assunto está além dos objetivos dessa seção, de forma que nos limitaremos a comentar qualitativamente tais idéias. Recomendamos a referência [42] para maiores detalhes.

Um problema antigo em mecânica clássica, mas com importantes aplicações modernas, é o da separação entre movimentos de rotação e movimentos internos

---

<sup>2</sup>Não trata-se de simples analogia com o aparato matemático comum às teorias de gauge: o formalismo é idêntico. Para maiores detalhes ver [40].

<sup>3</sup>De maneira geral, fenômenos físicos que dividem esse formalismo matemático comum tem sido agrupados sob essa classificação desde o célebre trabalho de M. Berry, que deu origem à hoje chamada fase de Berry em mecânica quântica [40].

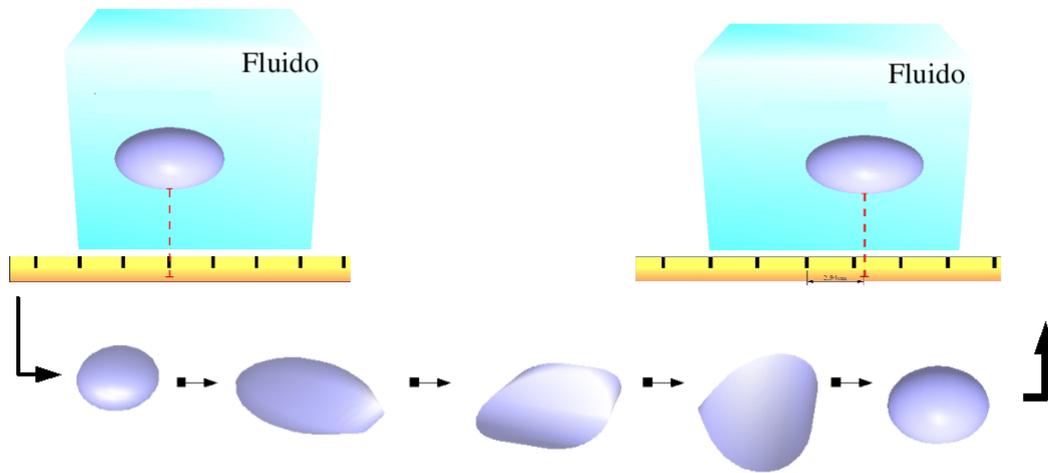


Figura 2.1: Representação de um microorganismo em natação a baixo número de Reynolds.

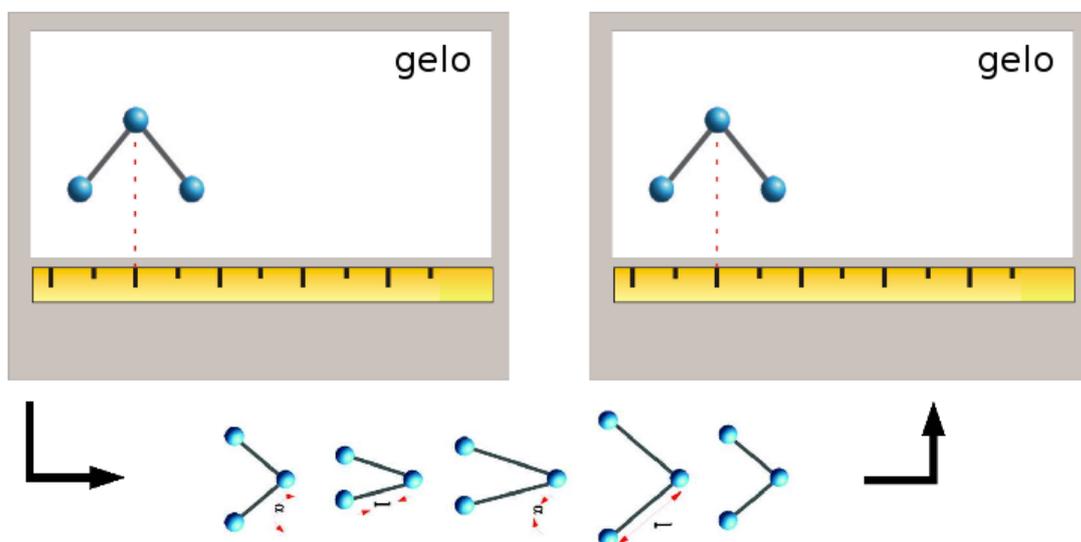


Figura 2.2: Objeto deformável sobre um plano sem fricção. Seu deslocamento é nulo ao fim de um ciclo de deformações.

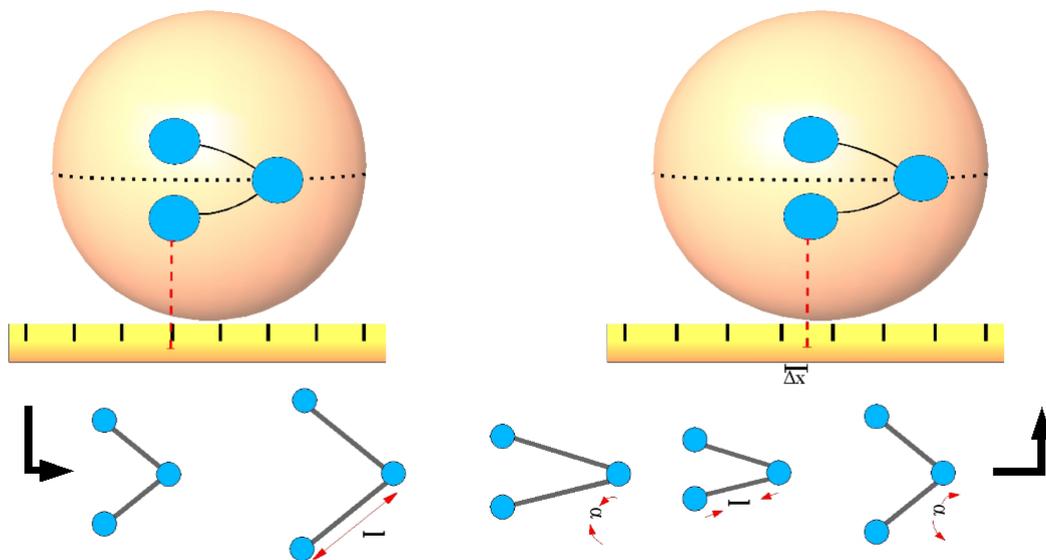


Figura 2.3: Objeto deformável agora sobre uma esfera. Seu deslocamento *não* anula-se ao fim de um ciclo de deformações.

em um problema de  $n$  corpos. Exemplos em que tal separação faz-se necessária são vários: corpos extensos flexíveis, átomos, moléculas e o sistema solar, para nomear alguns. Mais especificamente podemos citar um problema bem conhecido, o da queda de um gato. É de conhecimento comum que um gato, em situações cotidianas, que inicia sua queda com suas patas direcionadas para cima e com momento angular nulo, a termina em pé [43]. É usual professores mencionarem tal exemplo em sala de aula, finalizando com o questionamento “Como ele realiza sua rotação sem violar a conservação de momento angular?”. Embora alguns modelos para resolver esse problema já tenham sido oferecidos há algum tempo [44], foi dentro do formalismo de fases geométricas em mecânica clássica que encontrou-se a solução mais elegante e geral [45].

Pode-se afirmar que situações em que haja movimentos ou deformações cíclicas de corpos vinculados (quase-rígidos) são tratadas naturalmente dentro desse formalismo. Além do exemplo do gato, outras situações não intuitivas são facilmente realizáveis. É trivial, por exemplo, que um objeto deformável como o representado na figura 2.2, sobre uma superfície plana sem fricção, apresentará deslocamento nulo após um ciclo de deformações. Por outro lado, um corpo análogo (no sentido de ser formado por três massas que conectam-se por geodésicas) em uma superfície esférica, sujeito ao mesmo ciclo de deformações, encerraria seu movimento tendo induzido uma rotação total no sistema. Esquematizado na figura 2.3, percebe-se que para um observador externo à esfera, há um deslocamento total induzido a cada ciclo de deformações. Tal efeito é consequência dos vínculos não triviais impostos ao restringir-se o movimento do objeto à superfície da esfera e é possível mostrar

que o deslocamento por ciclo é proporcional à curvatura da esfera. De fato, essa característica é fundamental para a diferença entre o caso plano e o esférico: pode-se provar que para uma superfície geral o deslocamento sempre será proporcional a sua curvatura intrínseca. Assim, o mesmo objeto restrito a uma superfície cilíndrica (cuja curvatura intrínseca é nula, embora a extrínseca não o seja) não seria capaz de deslocar-se por meio de deformações cíclicas, enquanto que sobre um elipsóide algum deslocamento sempre faz-se possível.

### 2.1.3 Natação no espaço-tempo

A semelhança entre o deslocamento obtido por um nadador em um fluido a baixos números de Reynolds e uma estrutura deformável sobre uma esfera são conseqüência do formalismo comum pelo qual pode-se descrever os dois exemplos. Em ambos os casos, a curvatura  $\mathbf{F}_{mn}$  da variedade descrita pelo espaço de deformação é a responsável pelo efeito final obtido. No caso da estrutura sobre a esfera, há ainda uma identificação extra: a curvatura do espaço de parâmetros acaba por estar relacionada diretamente a própria curvatura da esfera que vincula os movimentos do corpo quase-rígido.

Em mecânica clássica (newtoniana), por simples conservação de momento, é trivial afirmar que um corpo extenso livre de vínculos e interações externas não é capaz de obter uma translação ao fim de um ciclo de deformações. Porém, inspirados nos exemplos acima, pode-se dizer (a grosso modo) que de alguma forma curvatura e movimentos cíclicos dão origem a efeitos não triviais. É também de conhecimento comum que, no contexto da relatividade geral, o próprio espaço-tempo sobre o qual desenvolvem-se os fenômenos físicos possui curvatura. Baseado nesse raciocínio heurístico podemos fazer a pergunta: em relatividade geral, corpos extensos seriam capazes de induzir movimento mediante um ciclo de deformações?

J. Wisdom recentemente ofereceu uma interessante resposta a essa pergunta [46]. Tomando por exemplo um corpo quase-rígido como o representado na figura 2.4, em um espaço-tempo de Schwarzschild e executando um ciclo como o representado na figura 2.5, Wisdom demonstrou que um deslocamento total de

$$\Delta r_0 = \frac{-3m_1 m_0}{(m_0 + 3m_1)^2} \frac{GMl^2}{c^2 r_0^3}, \quad (2.8)$$

é obtido ao fim do ciclo. Sua dedução, por seguir idéias análogas às já apresentado aqui e dividir o mesmo formalismo matemático, levou Wisdom a nomear o efeito como sendo uma “natação no espaço-tempo”. A presença do termo  $G/c^2$  indica seu caráter intrinsecamente relativístico, uma vez que tanto o limite  $G \rightarrow 0$  como  $c \rightarrow \infty$  anulam o efeito. Trata-se assim de um novo e interessante efeito, cujo limite clássico newtoniano inexistente.

Porém, a inexistência de um limite clássico para tal efeito gerou controvérsias na literatura por parte de outros pesquisadores [47, 48]. Seus argumentos podem ser resumidos da seguinte forma: Embora seja verdade que em mecânica newtoniana o

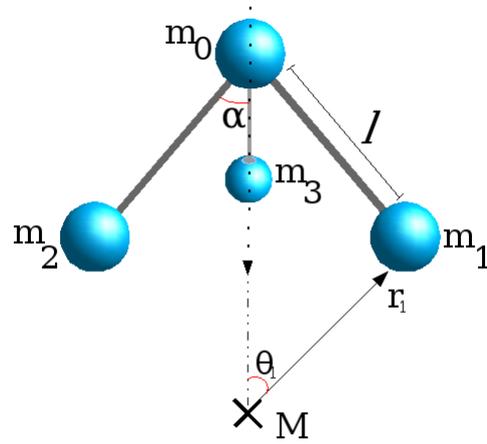


Figura 2.4: Tripé deformável disposto em simetria axial em um espaço-tempo de Schwarzschild.

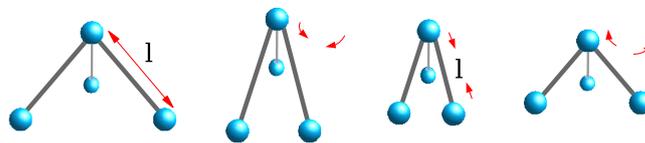


Figura 2.5: Ciclo de deformações executadas pelo tripé da figura 2.4.

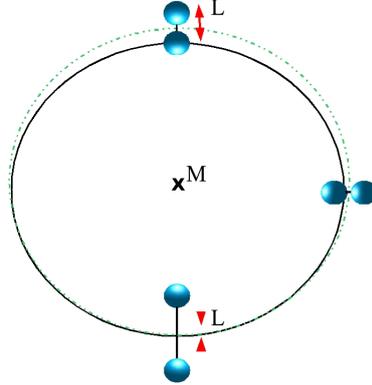


Figura 2.6: Ciclo de deformações executadas por um satélite em forma de alteres em uma órbita inicial circular. Sua expansão e contração em diferentes pontos da órbita lhe permite alterar sua trajetória para órbitas mais externas (ou mais internas, caso o ciclo seja invertido). Tal mecanismo deve-se ao trabalho contra as forças de maré: ao expandir e contrair o alteres em diferentes pontos da órbita, o trabalho realizado em um movimento não é totalmente compensado pelo outro, sendo a diferença de energia a origem de mudanças na órbita.

mesmo tripé, livre de forças externas, não deva atingir um movimento de translação após um ciclo fechado de deformações, a situação newtoniana que mantém a analogia com a relatividade geral seria a de um corpo extenso sob efeito de um campo gravitacional (newtoniano). Assim, a mesma situação descrita mediante uma solução de Schwarzschild deve ser reanalisada em um campo gravitacional newtoniano. Nesse caso, seria possível de fato obter alterações na órbita de um corpo quasi-rígido em deformação, como representado na figura 2.6.

Assim, nosso objetivo inicial ao iniciarmos o estudo desse assunto era entender o trabalho de Wisdom e a origem da controvérsia disposta acima. Uma exposição técnica de tais desenvolvimentos encontra-se no artigo em anexo, que deve ser considerado parte integrante dessa seção. Ressaltamos aqui apenas suas conclusões finais, que são:

- O efeito de natação no espaço-tempo é legítimo, no sentido de que efetivamente trata-se de um efeito relativístico sem análogo clássico. Vários pontos podem ser usados para distingui-lo do efeito clássico levantado por Landis e Longo, de forma que acreditamos ter resolvido por completo a controvérsia.
- Fomos capazes de reproduzir os argumentos de Wisdom e complementá-los, pois estendemos sua fórmula original, eq. (2.8), para situações em que o tripé esteja próximo ao horizonte de eventos de Schwarzschild,

$$\Delta r_0 = \frac{-3m_0m_1}{(m_0 + 3m_1)^2} \frac{GM}{c^2 r_0} \sqrt{f_0} \frac{l^2}{r_0^2} \sin \alpha \Delta \alpha \Delta l \quad (2.9)$$

sendo esse um limite não contemplado na formulação original de Wisdom.

- Desenvolvemos também um método de cálculo pelo qual efeitos de ordens maiores possam ser calculados, sendo que a próxima correção em  $GM/c^2$  à eq. (2.9) é dada por

$$\Delta^{(2)}r_0 = \Delta r_0 \left( \frac{3m_1}{m_0} \sqrt{f_0} + \frac{m_0 - 3m_1}{m_0 + 3m_1} \frac{GM}{c^2 r_0 \sqrt{f_0}} \right) \frac{l}{r_0} \cos \alpha. \quad (2.10)$$

#### 2.1.4 Desenvolvimentos posteriores

A discussão de nosso trabalho fora centrada tão somente no espaço-tempo de Schwarzschild, mas a princípio qualquer espaço-tempo curvo deve exibir o efeito swimming. A. Torres e G. Matsas investigaram-no [49] em espaços-tempos de Friedmann-Robertson-Walker, onde chegaram a conclusão que ali também o efeito swimming de fato ocorre, com algumas características interessantes. Devido a isotropia desse espaço-tempo, o deslocamento não depende de uma escala de distância característica (e.g., como a distância da massa central  $M$  no caso acima), e tão somente do eixo escolhido para realizar-se o ciclo de deformações. E, enquanto em um universo FRW plano o efeito é nulo, atinge-se o mesmo deslocamento líquido em um espaço-tempo aberto ou fechado, mas com sinais contrários. Ou seja, esse exemplo, ainda mais próximo do caso que inspirou a analogia (natação em baixos números de Reynolds), demonstra de forma clara como o efeito swimming depende da curvatura local presenciada pelo nadador.

Outro efeito relacionado, mas não idêntico, fora discutido por E. Gueron e R. Mosna [50]. Ainda lidando com um espaço-tempo de Schwarzschild, esses autores apontaram que mesmo em um espaço de fase de deformações unidimensional, é possível obter-se desvios da trajetória em queda livre mediante ciclos de deformações *assimétricos*, desvios esses que também não encontram correspondência clássica.

# Capítulo 3

## Espaços-tempos efetivos

### 3.1 Introdução a analogia acústica

É muito comum, por razões históricas e didáticas, deduzir a estrutura do espaço-tempo de Minkowski por consideração da propagação de raios de luz. Dada uma onda plana propagando-se na direção  $\mathbf{n}$ ,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c\mathbf{n}, \quad (3.1)$$

define-se, tendo em vista que  $\mathbf{n}^2 = 1$ , um cone de luz

$$-c^2 dt^2 + (d\mathbf{x})^2 = 0. \quad (3.2)$$

Ao considerar as transformações de coordenadas que mantêm essa equação invariante chega-se ao grupo de Lorentz. Em linguagem mais geométrica, podemos reescrever a equação acima como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (3.3)$$

sendo

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

a familiar métrica de Minkowski.

Em analogia consideremos agora outra situação, a saber, um fluido Newtoniano definido por um campo de velocidades  $\mathbf{v}$  e sobre o qual propaga-se um raio sonoro, cuja frente de onda obedeça

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c_s \mathbf{n} + \mathbf{v}, \quad (3.5)$$

sendo  $c_s$  a velocidade de propagação do som no referencial do fluido. Igualmente define-se um cone de som dado por

$$-(c_s^2 - v^2)dt^2 - 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}dt + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = 0, \quad (3.6)$$

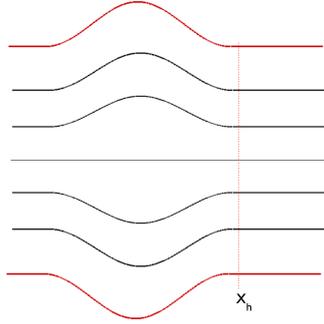


Figura 3.1: Esquema representando as linhas do campo de velocidades em um bocal de Laval.

pelo qual identifica-se, ao reescrever a equação acima na forma  $ds^2 = \mathbf{g}_{\mu\nu}^{\text{som}} dx^\mu dx^\nu$ , o surgimento de uma métrica

$$\mathbf{g}_{\mu\nu}^{\text{som}} = \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

que constitui o exemplo mais simples de um espaço-tempo efetivo. A figura 3.1 a seguir ilustra as linhas do campo de velocidade de um espaço-tempo efetivo sônico por meio do bocal de Laval, que é uma construção comumente usada para acelerar gases, produzidos em uma câmara de combustão, à velocidades supersônicas. Note-se que a “garganta” do bocal representa um horizonte sônico, em que  $v = c_s$ , além do qual sinais sonoros não podem voltar para região anterior. A figura 3.2-a representa o perfil de velocidades longitudinais, e 3.2-b um diagrama espaço-temporal das trajetórias dos raios sonoros, eq. (3.5), em diferentes regiões do fluido. A fig. 3.3 ilustra um diagrama de Carter-Penrose típico para um perfil de velocidade supersônico com um horizonte de eventos.

Note-se que há uma diferença, entre as métricas (3.4) e (3.7), de caráter fundamental. No primeiro caso  $\eta_{\mu\nu}$  é uma propriedade geométrica intrínseca, válida para todos observadores envolvidos, que define a relação de causalidade do espaço-tempo. No segundo caso,  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{\text{som}}$  é de fato uma métrica só acessível a observadores comóveis aos raios sonoros. Ou seja, na descrição efetiva temos duas métricas: a que se refere ao espaço-tempo real e à métrica acústica (ou outra métrica qualquer cuja analogia esteja sendo explorada) efetiva. Lembremo-nos agora que, para fins de se descrever a evolução desse sistema, a ferramenta natural a se usar é o tensor energia-momento, pelo qual podemos contabilizar o fluxo de energia e momento, e suas decorrentes forças. Tal tensor é melhor definido como uma derivada funcional da ação  $S$  em termos da métrica

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (3.8)$$

o que levanta a pergunta: qual o significado dessa quantidade quando temos a pre-

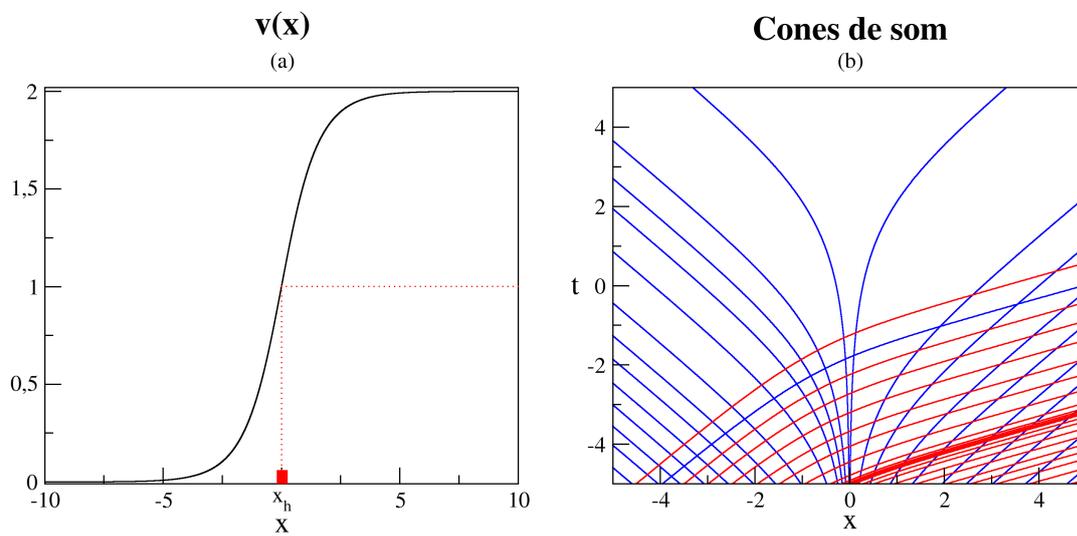


Figura 3.2: (a) Perfil de velocidades supersônico; (b) Trajetórias de raios sonoros em um fluido com o perfil de velocidades (a), onde linhas azuis representam ondas emitidas à esquerda, linhas vermelhas ondas emitidas à direita.

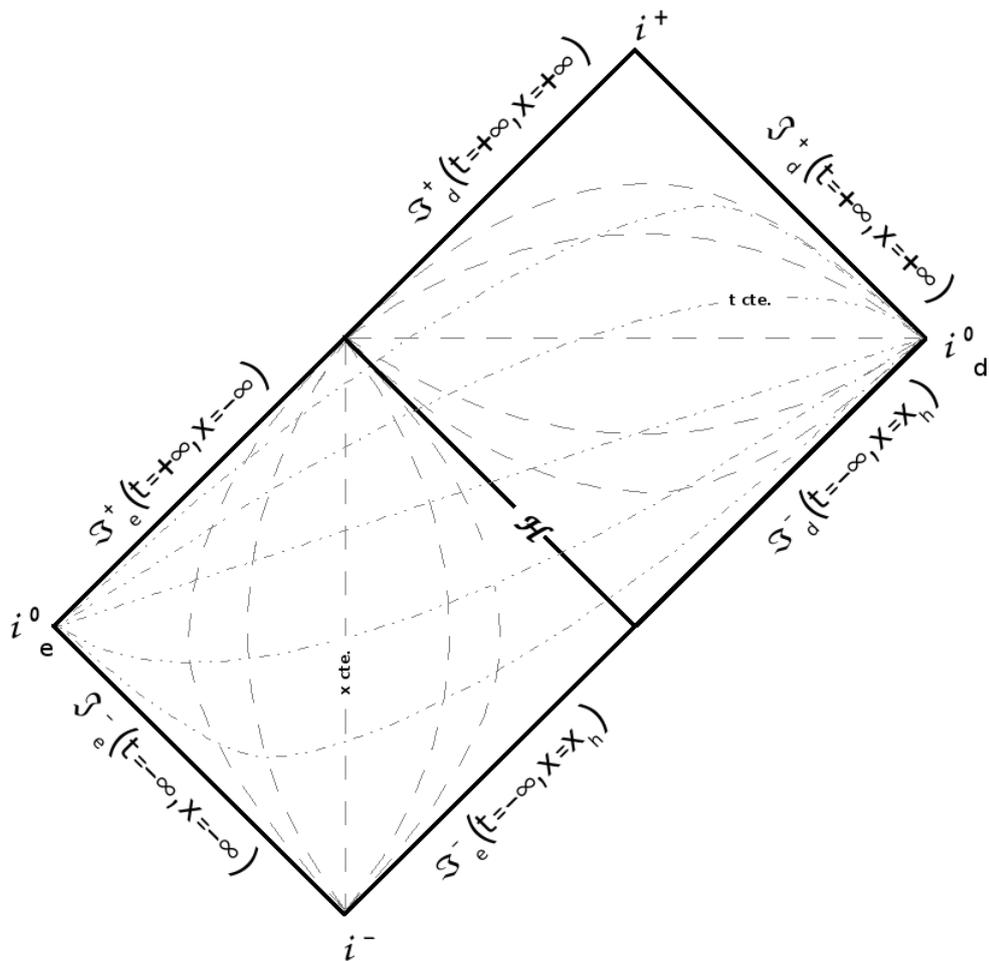


Figura 3.3: Diagrama de Carter-Penrose do espaço-tempo efetivo, eq. (3.7), gerado pelo perfil de velocidade da fig. 3.2-a [51].

sença de duas métricas? Para obter o que se possa chamar de energia “real” e momento “real” do sistema, é claro que se deve diferenciar com respeito à sua métrica “real”  $\eta_{\mu\nu}$ . O que obteremos caso utilize-se a métrica efetiva  $\mathbf{g}_{\mu\nu}^{\text{som}}$  na derivada funcional acima é, de fato, o que usualmente denomina-se por pseudo-energia e pseudo-momento [52], como discutiremos mais tarde (§5.2.3).

A emergência de um espaço-tempo efetivo deve-se, em última instância, ao caráter hiperbólico da equação que descreve a propagação do som no fluido. Assim uma característica comum a estes modelos análogos é a presença de um campo de perturbações cuja equação seja hiperbólica, simétrica e quase-linear, de modo que se obtenha um espaço-tempo efetivo ao menos em nível clássico (o limite eikonal da equação de onda). Para que o modelo análogo ainda simule características típicas de teoria quântica de campos em espaços curvos (e.g., criação de quasi-partículas, como na radiação Hawking) serão necessários ainda outros ingredientes, como melhor explicitaremos em §4.3.3.

### 3.1.1 Evaporação experimental de buracos negros?

Descreveremos a seguir o trabalho seminal, cujo título evoca a pergunta acima, em que W. Unruh [14] deu início ao uso de modelos análogos de gravitação semi-clássica em matéria condensada. Como relatara posteriormente [13], Unruh já havia notado a analogia acústica ao conceito de horizonte de eventos, assim como apontado na eq. (3.7), ao menos desde 1972, e usava o conceito para exemplificar o que seriam buracos negros em palestras dirigidas ao público não especialista. Porém, somente em 1981 [14] ele veio a perceber o quanto a analogia pode ser aprofundada. Após deduzir que ondas sonoras em um fluido possuem, sob determinadas condições, a mesma equação de propagação de campos escalares em um espaço-tempo curvo, Unruh notou que, mediante a quantização do campo sonoro, seria possível a emissão de fônons a partir de um horizonte sônico, em completa analogia à emissão de radiação Hawking por um buraco negro.

#### A equação de onda

Ao deduzir a eq. (3.7) a partir da eq. (3.5), assumimos simplesmente a existência de um raio sonoro, i.e., a aproximação eikonal para o som. Consideremos agora a equação de propagação do som de maneira mais abrangente. Sejam respectivamente  $p$ ,  $\rho$  e  $\mathbf{v}$  a pressão, densidade e campo de velocidade de um fluido ideal isentrópico (i.e., um fluido de entropia constante) de equação de estado  $p = p(\rho)$ , descrito pelas equações

$$\rho(\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\nabla\mathbf{v}) = -\nabla p, \quad (3.9)$$

$$\dot{\rho} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (3.10)$$

sendo a eq. (3.9) a bem conhecida equação de Euler e (3.10) a equação da continuidade. Assumindo ainda um fluxo irrotacional, tal que

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi, \quad (3.11)$$

e definindo a função entalpia  $h(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}$ , é possível reescrever a eq. (3.9) como

$$\nabla \left( \dot{\Phi} + \frac{v^2}{2} + h(\rho) \right) = 0, \quad (3.12)$$

que é a equação de Bernoulli. Introduzindo pequenas perturbações sobre o fluxo, mediante

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.13)$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (3.14)$$

e definindo  $\phi \equiv \delta\Phi$ ,  $\psi \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}$ , obtemos reunindo os termos em  $\phi$  e  $\psi$

$$\dot{\phi} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi + c_s^2\phi = 0, \quad (3.15)$$

$$\dot{\psi} + \mathbf{v} \cdot \nabla\psi + \nabla^2\phi + \nabla \ln(\rho) \cdot \nabla\phi = 0, \quad (3.16)$$

onde

$$c_s^2 = \rho \frac{dh}{d\rho} = \frac{dp}{d\rho} \quad (3.17)$$

é a velocidade do som no meio. Dividindo a eq. (3.15) por  $c_s^2$  e aplicando-lhe o operador derivativo  $\frac{d}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathbf{v}$ , obtem-se enfim

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{d}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \frac{\rho}{c_s^2} \left( \frac{d}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \phi - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \nabla\phi) = 0, \quad (3.18)$$

que é a equação que descreve a propagação do campo de perturbações (i.e., o som) sobre o pré-determinado campo de velocidade do fluido  $\mathbf{v} = \nabla\Phi_0$ . Mas note-se também que a eq. (3.18) é formalmente equivalente à equação de um campo escalar (não massivo e de acoplamento mínimo, e.g., ver §4.1)

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0, \quad (3.19)$$

em um espaço-tempo descrito pela métrica

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \rho \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v^2) & -v^i \\ -v^j & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Vemos que as seções em  $t$  constante na métrica (3.20) são seções espaciais planas, o que mantém analogia com a métrica de Schwarzschild expressa em coordenadas de Painlevé-Gullstrand. Da mesma maneira, para um fluxo estacionário e

radial, é possível ainda fazer uma mudança de coordenadas  $d\tau = (dt + \frac{v}{c_s^2 - v^2} dr)$  de modo a obter-se a métrica (3.20) na forma

$$ds^2 = \rho \left( -(c_s^2 - v^2) d\tau^2 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c_s^2}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.21)$$

cuja semelhança com a métrica usual de Schwarzschild é evidente, havendo um horizonte de Killing caso exista um ponto em que o fluido atinge  $v^2 = c_s^2$ .

É importante reforçar, da discussão acima, seu resultado principal: ondas sonoras em um fluido propagam-se segundo a equação<sup>1</sup>

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{d}{dt} + \partial_x v \right) \frac{\rho}{c_s^2} \left( \frac{d}{dt} + v \partial_x \right) \phi - \frac{1}{\rho} \partial_x \rho \partial_x \phi = 0, \quad (3.22)$$

análoga à propagação de um campo em um espaço-tempo curvo dado pela métrica (3.20).

Por ilustração, verifiquemos a propagação de modos, ditada pela eq. (3.22) na situação em que  $v$ ,  $c_s$  e  $\rho$  sejam constantes, para uma onda plana

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{4\pi w}} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (3.23)$$

sendo  $\omega$  sua frequência no referencial de laboratório e  $k$  seu número de onda. Introduzindo-os em (3.22) obtemos

$$\omega_{\pm} = (v \pm c_s)k \quad (3.24)$$

de onde vemos que tais modos possuem

$$v_{fase} = v_{grupo} = v \pm c_s, \quad (3.25)$$

i.e., sua frente de onda obedece à eq. (3.5), propagando-se como geodésicas tipo-luz no espaço-tempo efetivo (3.20).

## Quantização e radiação de fônons

Ondas sonoras são uma descrição, em escalas macroscópicas, da propagação de diferenças de pressão provocadas por uma perturbação do fluido, descrição essa que perde sentido quando a aproximação de fluido deixa de ser válida em escalas de distância intermolecular. Porém, como uma aproximação de campo efetivo para

---

<sup>1</sup>Reescrevemos a eq. (3.18) de forma unidimensional, eq. (3.22), por motivos de simplificação. Na grande maioria dos modelos análogos costuma-se tratar com um sistema efetivamente (1+1)-dimensional, sendo restauradas as outras dimensões espaciais quando necessário.

os  $N \gg 10^{23}$  graus de liberdade do sistema, em escala mesoscópica tal descrição não somente é a única possível, como sua quantização é bem definida. Quais seriam então os efeitos de se quantizar o campo sonoro na presença de um horizonte sônico, em analogia à quantização do campo em um espaço-tempo curvo? Unruh [14] demonstrou que, da mesma maneira que o colapso de uma estrela leva à emissão de radiação Hawking, a formação de um horizonte sônico implica em radiação de fônons com espectro térmico. A seguir faremos apenas uma exposição qualitativa desse resultado, cuja dedução é apresentada em maiores detalhes em §4.2.

Suponha que em uma configuração (e.g., o bocal de Laval, como delineado na fig. 3.1), tenha-se uma configuração inicial, em  $t \rightarrow -\infty$ , correspondente a um fluxo estacionário subsônico. Nesse caso os modos normais do campo  $\phi$  serão ondas planas, como na eq. (3.23). Ou de maneira mais geral, sem restrições sobre  $v(x)^2$ , podemos definir as coordenadas tipo luz  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$

$$\mathcal{U} = c_s \left( t - \int \frac{dx}{c_s + v} \right), \quad (3.26)$$

$$\mathcal{V} = c_s \left( t + \int \frac{dx}{c_s - v} \right), \quad (3.27)$$

sob as quais teremos como soluções de (3.22) os modos normais

$$\phi_{(\mathcal{U})} = \frac{1}{\sqrt{4\pi w}} e^{-i\frac{\omega}{c_s}\mathcal{U}}, \quad (3.28)$$

$$\phi_{(\mathcal{V})} = \frac{1}{\sqrt{4\pi w}} e^{-i\frac{\omega}{c_s}\mathcal{V}}, \quad (3.29)$$

Enquanto o fluxo mantém-se subsônico, os modos  $\phi_{(\mathcal{U})}$  representam ondas propagando-se à direita, e os modos  $\phi_{(\mathcal{V})}$  ondas propagando-se à esquerda, e ambos modos possuem frequência positiva com respeito a  $\partial_t$ . Expandindo-se o campo sob essa base<sup>3</sup> com operadores de criação e aniquilação  $[\mathbf{a}_{\vec{k}}, \mathbf{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = [\mathbf{a}_{\vec{k}}, \mathbf{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \hbar\delta(k - k')$ ,

$$\hat{\Phi} = \int_0^\infty [\mathbf{a}_{\vec{k}} \phi_u + \mathbf{a}_{\vec{k}} \phi_v + \text{C.C.}] dk \quad (3.30)$$

podemos definir o estado de vácuo  $|0\rangle_{in}$  como sendo o estado aniquilado pelos operadores  $\mathbf{a}_{\vec{k}}|0\rangle_{in} = \mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle_{in} = 0$ .

Suponha, agora, que o perfil de velocidade do fluido passe de subsônico à supersônico gradualmente, em um intervalo de tempo finito  $t_f \geq t \geq 0$ , tal que após o tempo  $t_f$  obtenha-se um fluxo estacionário com a presença de um horizonte de eventos, como representado no quadrante superior da figura 3.4 e no diagrama espaço-temporal da figura 3.5. Nas proximidades do horizonte, os modos que propagam-se

<sup>2</sup>Mas ainda supondo, por simplicidade,  $\rho$  e  $c_s$  constantes.

<sup>3</sup>Os modos (3.28) e (3.29) constituem uma base ortonormal completa sob o produto interno de Klein-Gordon, ver §4.2.

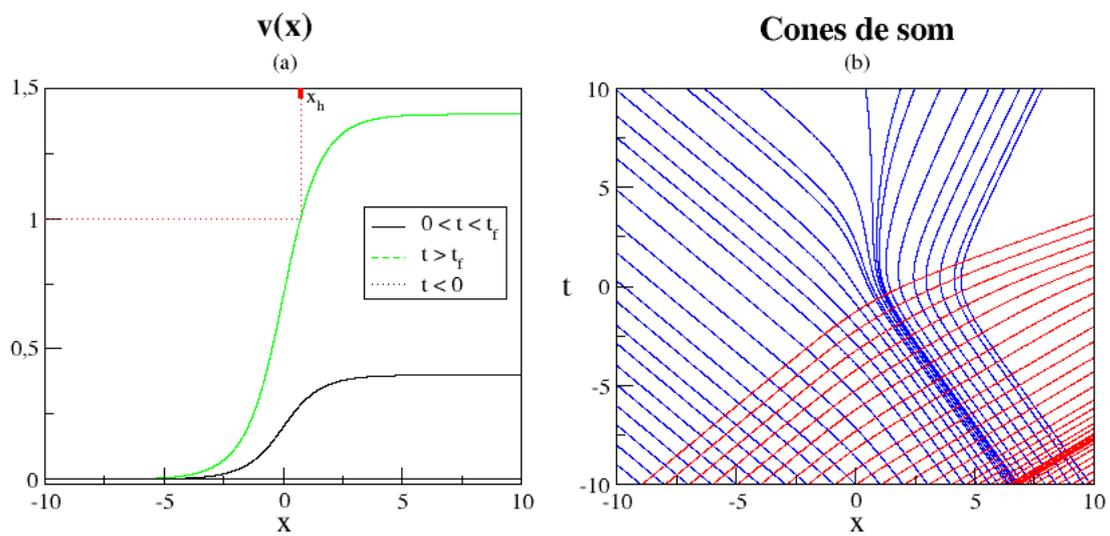


Figura 3.4: (a) Perfil de velocidades de um buraco sônico em formação; (b) Trajetórias de raios sonoros em um fluido com o perfil de velocidades (a), onde linhas azuis representam ondas emitidas à esquerda, linhas vermelhas ondas emitidas à direita.

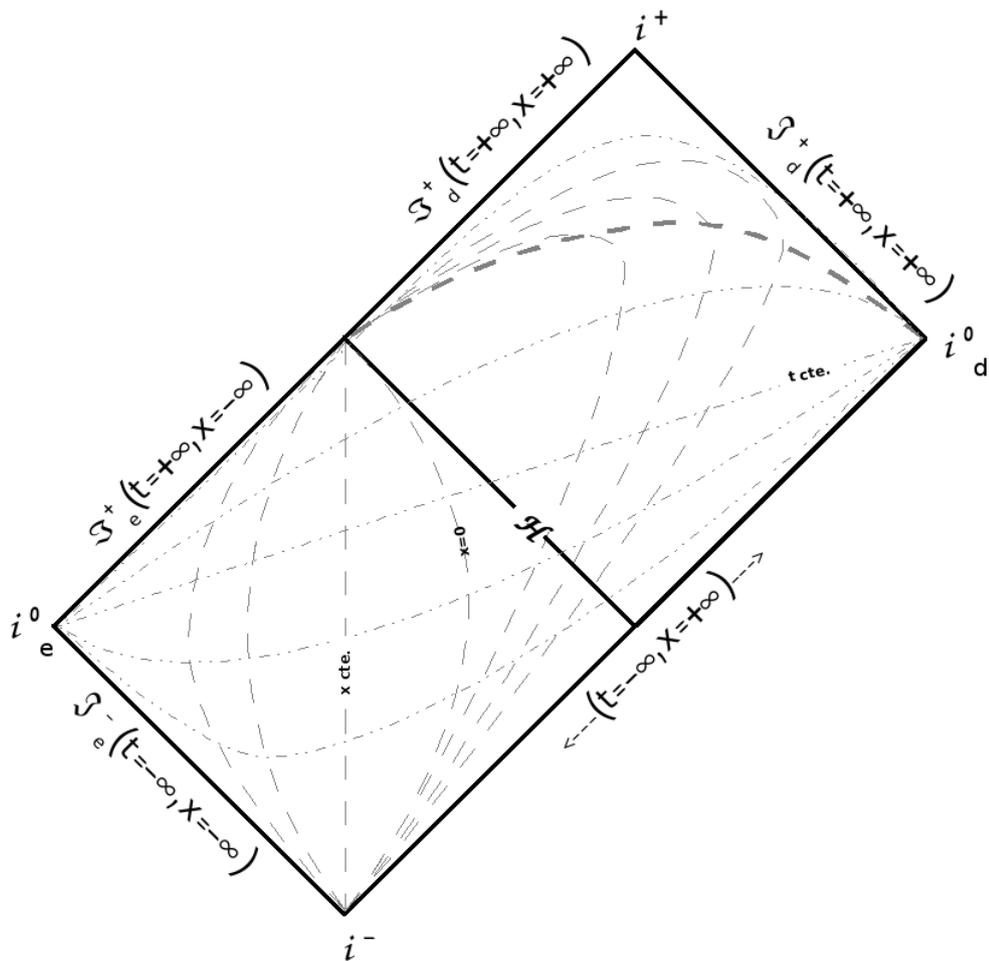


Figura 3.5: Diagrama de Carter-Penrose gerado pelo perfil de velocidade da fig. 3.4-a [51]. A linha em tracejado grosso denota o horizonte de eventos aparente.

à esquerda em  $t < t_f$  dividem-se entre os que são aprisionados pelo mesmo, e os que conseguem escapar, mesmo que sofrendo um redshift cada vez maior conforme suas trajetórias aproximem-se da superfície de aprisionamento  $\mathcal{H}$ . De fato, pode-se mostrar (ver §4.2.1) que o redshift sofrido por esses modos cresce exponencialmente com sua proximidade do horizonte. Uma onda plana inicial de frequência  $\omega$ , que em  $t \ll 0$  seja proporcional a  $e^{-i\frac{\omega}{c_s}\mathcal{V}}$ , e que passe próximo à superfície  $\mathcal{H}$ , transforma-se em  $t \gg t_f$  em uma onda proporcional a  $e^{-i\frac{\omega}{c_s}V}$ , onde  $V \propto -e^{-\kappa\mathcal{V}}$ , sendo  $\kappa$  a “gravidade superficial”

$$\kappa = \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (3.31)$$

Veremos que isso implica em criação de partículas, pois ao descrever-se os modos *in* em termos dos modos *out*, será necessária uma base de modos *out* com frequências positiva e negativa em relação a  $\partial_t$ . Como delineado em §4.1, isso significa que os coeficientes de Bogoliubov  $\beta_{\omega\omega'} \neq 0$ . De fato, é possível mostrar que

$$\langle in | n_\omega^{out} | in \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_H} - 1}, \quad (3.32)$$

onde  $\langle in | n_\omega^{out} | in \rangle = |\beta_\omega|^2$  é o número esperado de partículas (por unidade de frequência e tempo) criadas no infinito futuro,  $k_B$  a constante de Boltzmann e a temperatura  $T_H$  é dada por

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c_s k_B} \quad (3.33)$$

Trata-se portanto de uma distribuição Planckiana, em completa analogia à radiação Hawking resultante de um colapso estelar. Para obter uma estimativa da ordem de grandeza dessa temperatura podemos assumir  $\partial v/\partial r \approx c_s/R$ , onde  $R$  é o raio do horizonte de eventos (que é aproximadamente do tamanho do “gargalo” do bocal de Laval), de modo que

$$T_H \approx (3 \times 10^{-7} K) \left[ \frac{c_s}{300 m/s} \right] \left( \frac{mm}{R} \right). \quad (3.34)$$

Para um fluido como a água e um gargalo da ordem de 1 *mm*,  $T_H \approx 10^{-6} K$ . É claro que a água não existe como um fluido sob condições de temperatura tão baixas, de forma que, mesmo que se pudesse obter um fluxo de água com as condições necessárias, seu fluxo de radiação Hawking não seria detectável. Porém, como veremos a seguir, outros espaços-tempos efetivos foram propostos onde o fluido utilizado possui características mais interessantes. Caso o mesmo experimento fosse realizado com Hélio líquido, por exemplo, teríamos  $T_H \approx 10^{-4} K$ . Ou ainda, no caso do fluido ser um condensado de Bose-Einstein,  $T_H \approx 10 nK$ , o que não é tão baixo quando comparado às temperaturas já atingidas para condensados, que é da ordem  $\approx 100 nK$ .

## 3.2 Outros exemplos de espaços-tempos efetivos

### 3.2.1 Condensados de Bose-Einstein

Em uma fase líquido-gás de um material usual, chama-se de “condensação” à transição de fase na qual gotas de líquido se formam, a partir do gás, tendo-se um vapor saturado, com ambas as fases coexistindo em equilíbrio. Em paralelo a esse fenômeno clássico, a “condensação de Bose-Einstein” é o processo no qual um gás composto por bósons, a partir de uma temperatura crítica, passa a ter uma quantidade significativa de seus elementos em um mesmo estado. Nesse estado, partículas “de gás” coexistem com partículas “condensadas” mas, ao contrário das gotas líquidas em um gás usual, tais partículas não estão separadas espacialmente, mas sim no espaço de momentos. As partículas condensadas ocupam todas um estado de momento nulo, enquanto as partículas do gás possuem momento finito. Embora tenham sido previsto por Bose e Einstein desde os anos 20, somente em 1995 [53] esses condensados foram observados em laboratório, a temperaturas da ordem de  $1 \mu K$ . Sua realização rendeu o prêmio Nobel a Cornell, Ketterle e Weiman, e hoje essa é uma das mais férteis áreas da física experimental.

Uma maneira efetiva para descrever um condensado se dá pela aproximação de que a interação entre duas partículas,  $a$  e  $b$ , seja descrita por

$$V(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \approx g\delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b), \quad (3.35)$$

sendo  $g$  constante. Ou seja, (3.35) assume uma interação que atua em escalas pequenas se comparada à escala típica de separação entre as partículas. É possível ainda mostrar, por um cálculo de espalhamento em ondas-s, que  $g$  pode ser expresso por  $g = 4\pi a_s \hbar^2/m$ , onde  $m$  é a massa das partículas interagentes e  $a_s$  é o comprimento típico de espalhamento. Usualmente  $a_s$  é positivo, tal que a interação é repulsiva, embora essa propriedade seja controlável em muitos experimentos. Fazendo-se a média da interação de uma partícula com as demais, resulta que seu efeito total é adicionar ao sistema um potencial efetivo

$$V_{ef}(\mathbf{r}) = gn(\mathbf{r}), \quad (3.36)$$

onde  $n(\mathbf{r})$  é a densidade de átomos no ponto  $\mathbf{r}$ . Assim podemos, nessa aproximação, tratar esse gás de bósons, em segunda quantização, por meio de um campo quantizado  $\hat{\Psi}$  descrito pela equação

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{x}) + g\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right) \hat{\Psi}, \quad (3.37)$$

onde  $V_{ext}(\mathbf{r})$  é um possível potencial externo, usado muitas vezes para se ter maior controle experimental sobre o condensado. Essa equação, que precisa ser resolvida de maneira auto-consistente, uma vez que o potencial efetivo depende da solução que ele próprio define, é a bem conhecida equação de Gross-Pitaevskii [54].

A percepção de que a eq. (3.37) também pode dar origem a um espaço-tempo efetivo [22] estimulou em muito o interesse por modelos análogos. Enquanto a analogia com fluidos parte de uma equação clássica, de onde efeitos quânticos são analisados pela consideração posterior de fônons, a eq. (3.37) tem a grande vantagem de já incorporar efeitos quânticos desde o início. Além disso, o controle experimental sobre condensados de Bose-Einstein é sem precedentes e tem evoluído a passos rápidos. Indicamos a seguir a demonstração dessa analogia com espaços-tempos curvos.

Uma vez que a condensação de Bose-Einstein aconteça em um gás de bósons, é natural separar o campo  $\hat{\Psi}$  em uma componente macroscópica  $\psi$  e suas flutuações quânticas  $\hat{\phi}$  sobre o condensado,  $\hat{\Psi} = \psi + \hat{\phi}$ . A equação macroscópica atende à eq. de Gross-Pitaevskii,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\psi|^2 \right) \psi(t, \mathbf{r}), \quad (3.38)$$

enquanto suas perturbações lineares são descritas por

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\phi}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + 2g|\psi|^2 \right) \hat{\phi} + g\psi^2 \hat{\phi}^\dagger, \quad (3.39)$$

conhecida como a equação de Bogoliubov. Há uma formulação alternativa das eqs. (3.38-3.39) que nos será mais útil, dada pela representação de Madelung

$$\hat{\Psi} = \sqrt{n} e^{i\theta/\hbar} e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (3.40)$$

onde  $\theta$  é um fator de fase e  $\mu$  o potencial químico. Ao inserir (3.40) em (3.37) obtém-se,

$$\partial_t n = -\frac{1}{m} \nabla \cdot (n \nabla \theta), \quad (3.41)$$

$$\partial_t \theta = -\frac{1}{2m} (\nabla \theta)^2 - gn - V_{ext}(\mathbf{r}) - \mu + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}. \quad (3.42)$$

Note que identificando  $\mathbf{v} \equiv (\nabla \theta)/m$ , as eqs. (3.41,3.42) são os equivalentes das eqs. da continuidade (3.10) e de Euler (3.9) para fluidos clássicos, à exceção do termo conhecido como “potencial quântico”,  $V_q \equiv -(1/2m\sqrt{n})\hbar^2 \nabla^2 \sqrt{n}$ .

Linearizando as eqs. (3.41-3.42) em termos das quantidades

$$n(t, \mathbf{x}) = n_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{g} n_1(t, \mathbf{x}), \quad (3.43)$$

$$\theta(t, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}) + \theta_1(t, \mathbf{x}), \quad (3.44)$$

obtemos para  $(n_0, \theta_0)$  o mesmo conjunto de equações (3.41-3.42), equivalentes à equação de Gross-Pitaevskii (3.38) que governa a parte macroscópica do condensado. Porém, para  $(n_1, \theta_1)$  obtemos as equações

$$\partial_t n_1 = -\nabla \cdot (n_1 \mathbf{v}_0 + c^2 \nabla \theta_1), \quad (3.45)$$

$$\partial_t \theta_1 = -\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \theta_1 - n_1 + \frac{\xi^2}{4} \nabla \cdot \left( c^2 \nabla \left( \frac{n_1}{c^2} \right) \right), \quad (3.46)$$

que equivalem à equação de Bogoliubov (3.39) e onde redefinimos as variáveis como

$$\mathbf{v}_0 \equiv \frac{\nabla\theta_0}{m}, \quad c^2 \equiv \frac{gn_0}{m}; \quad \xi \equiv \frac{\hbar}{mc}, \quad (3.47)$$

para explicitar a analogia com o espaço-tempo efetivo. Caso ignoremos o termo de potencial quântico, podemos seguir os passos feitos a partir das eqs. (3.15) e (3.16), de maneira que as eqs. (3.45-3.46) sejam igualmente combinadas e obtenha-se uma equação de campo  $\square\theta_1 = 0$  equivalente à de um espaço-tempo curvo de métrica

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \frac{mc}{g} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -v^i \\ -v^j & \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

o que demonstra a descrição de espaço-tempo efetivo em um condensado de Bose-Einstein.

Na construção da métrica efetiva acima, desconsideramos o termo de potencial quântico em primeira aproximação, no limite hidrodinâmico. Essa é uma boa aproximação enquanto os comprimentos de onda das perturbações no condensado são maiores que o comprimento  $\xi$ , conhecido como *healing length*, que é uma escala natural para que efeitos quânticos manifestem-se na equação hidrodinâmica. Outra maneira de ver isso se dá pela consideração das relações de dispersão das perturbações sobre o condensado. Usando uma onda plana como à da eq. (3.23), i.e.,  $n_1$  e  $\theta_1 \propto e^{-i(\omega t - kx)}$ , nas eqs. (3.45-3.46), obtemos

$$(\omega - vk)^2 = c^2 k^2 + \frac{1}{4} c^2 \xi^2 k^4, \quad (3.49)$$

que é uma relação de dispersão “superluminal” (ou, mais corretamente, supersônica). O termo em  $k^4$  tem origem no potencial quântico, de onde vemos que seu papel é introduzir perturbações cuja propagação difere da relação de dispersão trivial  $(\omega - vk)^2 = c^2 k^2$  obedecida pelos modos de grande comprimento de onda. Ou seja, o espaço-tempo efetivo, e por consequência qualquer horizonte de eventos que nele exista, será só “visto” pelos modos que atendem o limite hidrodinâmico no condensado. Porém, muito embora os modos de maior número de onda não propaguem-se seguindo geodésicas desse espaço-tempo efetivo, veremos em §4.3.3 que eles tem um papel fundamental para a descrição do efeito Hawking no modelo análogo.

É interessante fornecer uma estimativa da velocidade do som  $c$  em uma situação típica. Para um condensado composto por átomos de rubídio, cuja constante  $g$  pode ser calculada por seu comprimento de espalhamento  $a_s \approx 5,77 \text{ nm}$ , de massa  $m = 86.9 \text{ u.a.}$ , e sendo a densidade típica em experimentos  $n_0 \approx 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , obtem-se que  $c \approx 6 \text{ mm/s}$ . Uma vez que o critério para se criar um horizonte de eventos é que a velocidade do fluido seja maior que a do som,  $v > c$ , um valor de  $c$  tão baixo é um motivo a mais para o interesse por condensados de Bose-Einstein como modelos análogos.

**Horizontes cosmológicos.** Além de horizontes de eventos de buracos mudos, há ainda outra proposta promissora para o uso desses condensados. Levando em conta (3.47) para reescrever a métrica (3.48) como

$$ds^2 = \frac{n_0}{c}(-[c^2 - v^2]dt^2 - 2\mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{r}dt + d\mathbf{r}^2), \quad (3.50)$$

vemos que há duas possibilidades para simular um universo em expansão:

- (i) Pode-se engendrar uma expansão do próprio fluido controlando-se seu perfil de velocidades. Por exemplo, sob o perfil radial  $\mathbf{v} = (\dot{a}/a)\mathbf{r}$ , sendo  $a = a(t)$  um fator que dependa somente do tempo, o elemento de linha (3.50) toma a forma

$$ds^2 = -n_0 c dt^2 + \frac{n_0}{c} a^2 (dr'^2 + r'^2 d\Omega^2), \quad (3.51)$$

onde redefinimos a coordenada espacial  $r' = r/a$ . Ou seja, essa configuração simula um universo tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) plano, parametrizado pelo tempo próprio  $d\tau = \sqrt{n_0 c} dt$ .

- (ii) A partir de um fluido em repouso  $\mathbf{v} = 0$ ,

$$ds^2 = -n_0 c dt^2 + \frac{n_0}{c} d\mathbf{r}^2, \quad (3.52)$$

pode-se também variar sua velocidade  $c = \sqrt{gn_0/m}$  de modo a novamente simular um universo FRW plano. Isso é possível ao alterar de maneira controlável a constante de interação  $g$  entre os átomos do condensado, por meio do efeito de ressonância de Feshbach [22]. Nesse caso, sempre que a velocidade  $c(t)$  diminua de forma que a quantidade

$$\Delta r(t) = \int_t^\infty dt' c(t') \quad (3.53)$$

seja finita, teremos um horizonte cosmológico, onde pontos que estejam distantes além dessa distância estão separados causalmente, ao menos no que se refere a sinais sonoros. Assim modos cujo comprimento de onda ultrapassem a escala do horizonte cosmológico sofrem um “congelamento”, tal que flutuações quânticas iniciais são amplificadas durante a expansão, sendo esse o mecanismo pelo qual acredita-se que se iniciou a formação de estruturas no universo. A possibilidade de simular esse e outros mecanismos cosmológicos (i.e., produção de partículas, transições de fase, formação de defeitos) por meio de condensados de Bose-Einstein é intrigante.

### 3.2.2 Hélio superfluido

Ao contrário de todas outras substâncias que eventualmente cristalizam-se em uma fase sólida, conforme são resfriadas ao zero absoluto, o Hélio é capaz de manter-se em sua fase líquida e eventualmente torna-se um superfluido - ou seja, um fluido

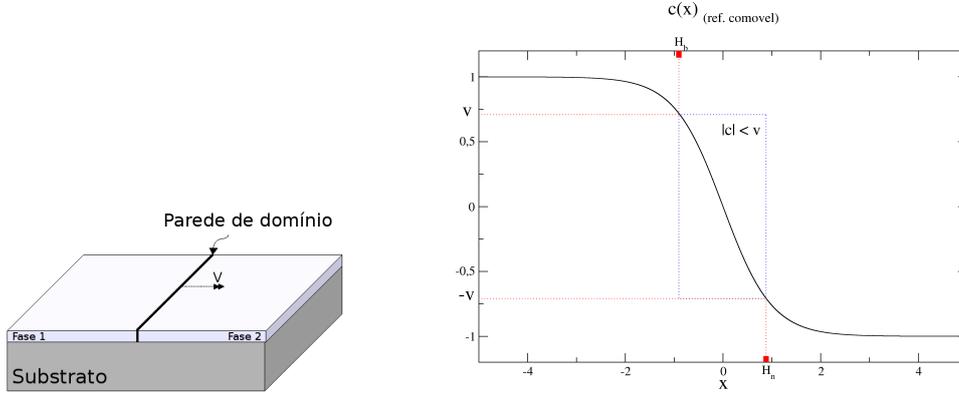
quântico de viscosidade nula. Hélio superfluido e condensados de Bose-Einstein ideais, embora dividam características comuns, não são estados idênticos da matéria. O gás que dá origem a um condensado de Bose-Einstein em laboratório é caracterizado por uma interação fraca entre seus átomos, enquanto o Hélio é caracterizado por fortes interações tendo papel predominante em sua fase superfluida. De fato, um condensado de Bose-Einstein ideal (e.g., em que há interação nula entre os átomos) *não* é um superfluido em absoluto, embora os condensados de Bose-Einstein obtidos em laboratório (onde as interações são pequenas porém finitas) sejam efetivamente superfluidos. Em contrapartida, o Hélio superfluido possui um condensado de átomos em seu estado fundamental, mas enquanto um condensado de Bose-Einstein ideal possui todas as partículas no estado de momento nulo em  $T = 0$ , no Hélio superfluido a essa temperatura um número macroscópico de partículas estarão nesse estado, mas não todas as partículas.

As propriedades de superfluidez do Hélio são conhecidas desde os anos 30, e sabemos hoje que há dois tipos de Hélio superfluido: o  $^4\text{He}$  e o  $^3\text{He}$ , e as propriedades responsáveis pela superfluidez de ambos são muito diferentes. O  $^4\text{He}$  é um bóson e torna-se superfluido a temperatura  $T \approx 2.17\text{ K}$ . Já o  $^3\text{He}$ , sendo um férmion, torna-se superfluido somente a temperaturas  $T \approx 2.5\text{ mK}$ . A razão para tal é que nessa temperatura torna-se permitida a formação de pares de férmions (i.e., pares de Cooper) que efetivamente interagem como bósons, tal que a condensação de Bose-Einstein passa a ser possível. O  $^3\text{He}$  possui ainda duas fases distintas,  $^3\text{He-A}$  e  $^3\text{He-B}$ , que coexistem em boa parte do espaço de fase de temperatura e pressão.

Um superfluido é, naturalmente, um fluido de viscosidade nula ideal e irrotacional, de modo que a descrição de espaço-tempo efetivo para os fônons, nos parâmetros da §3.1.1, é automaticamente válida. Uma vez que a velocidade do som na fase superfluida típica é da ordem de  $cm/s$ , configurações com horizontes de eventos sônicos passam a ser factíveis em um superfluido. Além disso, há outras características desses sistemas que abrem novas possibilidades para criação de espaços-tempos efetivos. Um modelo interessante proposto por Jacobson e Volovik [26] (e reanalisado por Jacobson e Koike [55]), usa propriedades topológicas de configurações não-triviais para gerar um horizonte de eventos por meio do movimento de uma parede de um sóliton topológico (e.g., uma parede de domínio), ver fig. 3.6a. Nessa figura representa-se um filme fino de  $^3\text{He-A}$  sobre um substrato (estático) de  $^4\text{He}$ , que tem por função isolar o contato do  $^3\text{He-A}$  com as paredes do recipiente que os contêm. A parede de domínio do filme fino é uma fase diferente do superfluido [26], que separa duas fases iguais porém com perfil de velocidade (das quase-partículas nessas regiões) inverso, fig. 3.6b. Ou seja, no referencial do  $^3\text{He-A}$  os fônons que propagam-se no plano do filme fino possuem perfil de velocidade dado por

$$c(x) = -c \tanh(x/d), \quad (3.54)$$

sendo  $x$  a direção perpendicular a parede de domínio, e  $d$  o tamanho médio dessa parede, que usualmente é da ordem da espessura do filme. Uma parede que se mova com velocidade  $v$  constante faz assim o papel de horizonte de eventos, por meio da



(a) Uma parede de domínio move-se com velocidade  $v$ , gerando um horizonte efetivo. (b) Perfil de velocidades no referencial comóvel à parede de domínio.  $H_b$  representa um buraco branco, e  $H_n$  um buraco negro, para as quasi-partículas que se propagam no filme fino.

Figura 3.6: Modelo proposto com o uso de filmes finos de  $^3\text{He}$ .

métrica efetiva

$$ds^2 = -(c^2(x, t) - v^2)dt^2 - 2vtdtdx + dx^2. \quad (3.55)$$

A vantagem principal de configurações como a descrita acima reside em sua estabilidade topológica, em comparação a um fluxo supersônico usual no qual instabilidades desenvolvem-se a medida que o fluxo atinge a velocidade do som. Porém, até o momento, não houve sucesso na realização experimental dessa configuração em particular.

### 3.2.3 Sistemas fotônicos

Os modelos anteriormente apontados são todos exemplos envolvendo a propagação de fônons. Embora cada um apresente diferentes vantagens e desvantagens do ponto de vista experimental, uma dificuldade comum a todos é a detecção de fônons correspondentes a temperaturas Hawking tão baixas quanto as que são realisticamente esperadas. Nesse sentido o uso de fótons, ao contrário de fônons, pode apresentar uma grande vantagem experimental, dada que a tecnologia de detecção de luz é muito mais avançada. De fato, o primeiro horizonte de eventos análogo feito em laboratório [35] fora construído por meio de pulsos óticos em fibras óticas, como ilustraremos mais a frente.

Como comentado na introdução, o primeiro trabalho a formular a idéia de uma métrica efetiva fora proposto por Gordon [21], que procurava verificar até que ponto um campo gravitacional era capaz de simular um meio dielétrico, no que é

hoje conhecido como métrica de Gordon

$$[g_{\text{eff}}]_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{n^2 - 1}{n^2} u_\mu u_\nu, \quad (3.56)$$

onde  $n$  é o índice de refração do material e  $u^\mu$  a quadrivelocidade do meio dielétrico. Embora essa métrica seja diferente do caso sônico (3.20), através dela também é possível obter um horizonte com a temperatura Hawking dada pela mesma fórmula (3.33), mais possíveis correções relativísticas [24]. Mas, nesse caso, a velocidade que entra na eq. (3.33) é a velocidade do próprio dielétrico, e.g., caso seja um material dielétrico líquido, seu perfil de velocidades, ou no caso de um dielétrico sólido, a velocidade do próprio bloco. Assim a dificuldade maior nesse caso reside no fato de que, para um dielétrico comum onde o índice de refração é da ordem de grandeza de 1, seria necessário velocidades próximas a velocidade da luz no vácuo, algo experimentalmente impraticável<sup>4</sup>.

Felizmente, mesmo essa limitação pode ser superada devido ao advento de materiais onde a velocidade da luz atinge valores de poucos  $m/s$  [57], conseguida através do fenômeno de transparência eletromagnética induzida. Nele um material tem suas propriedades óticas alteradas de acordo com a incidência de um laser-guia (de intensidade mais forte), que excita ressonâncias específicas dos átomos que compõe a amostra tal que, dependendo da frequência do laser-guia, permite-se a outro feixe de luz (de intensidade mais fraca) ser absorvido ou transmitido. Na janela de frequência de transmissão, a velocidade de grupo do feixe pode assumir valores bem baixos, embora sua velocidade de fase continue próxima de  $c$ .

Os primeiros trabalhos a darem conta da utilidade de configurações de “luz lenta” em modelos análogos [58] tiveram grande impacto por suas possibilidades experimentais. Porém, como provou-se mais tarde [59], os modelos em [58] são capazes de simular tão somente características *clássicas* da analogia, não sendo capazes de produzir radiação Hawking (ver §4.3.3). Posteriormente o modelo proposto em [24] pôde dar conta desse problema, mas sua exigência do uso de dielétricos em movimento, mesmo que a velocidades relativamente baixas, continua sendo uma dificuldade experimental não resolvida.

Seria possível utilizar um único sistema fotônico que possua as vantagens principais dos modelos acima, ou seja, não necessitar de partes móveis, e ainda assim gerar flutuações quânticas que atendam as condições necessárias para emissão de radiação Hawking? Um modelo promissor nesse sentido fora proposto por Schützhold e Unruh [23]. Nele um guia de ondas especial, constituído por um grande número de células menores de capacitores e indutores, é construído de maneira a formar um espaço-tempo efetivo para as perturbações do campo eletromagnético. Mediante a aplicação de um laser-guia sobre o material do capacitor, é possível alterar sua capacitância conforme o feixe incide sobre o mesmo. Esse efeito é engendrado de maneira que a frente de onda criada pela incidência do feixe, como ilustrado na

---

<sup>4</sup>Outros modelos que sugerem espaços-tempos clássicos usando outras propriedades dielétricas, provenientes de eletrodinâmica não-linear, podem ser vistos em [56].

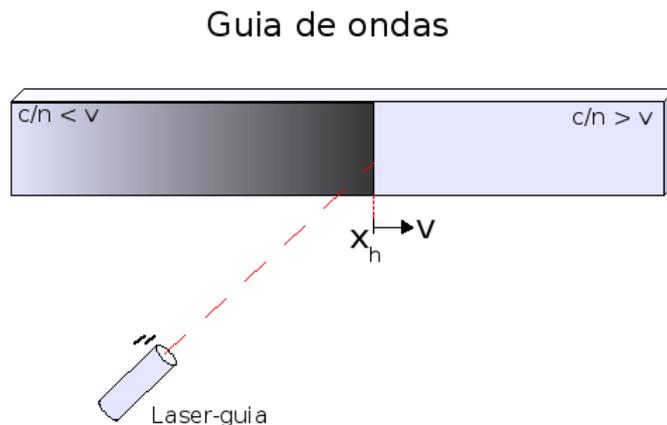


Figura 3.7: A velocidade de propagação da luz é alterada por meio de um laser-guia, que age sobre os capacitores que constituem o metamaterial do qual é constituído o guia de ondas. A frente de onda gerada pelo laser-guia é o horizonte efetivo.

figura 3.7, exerce o papel de um horizonte de eventos para as flutuações do campo eletromagnético no guia de ondas. Prevê-se [23] que, em uma estimativa realista, seria possível obter uma temperatura Hawking de  $10 - 100 \text{ mK}$  nessa configuração. Porém, na ref. [23] fora tão somente demonstrado que a existência de um capacitor com as propriedades necessárias é conceitualmente possível, mas não fora explicitado um material específico que as atenda. Tal experimento mostra-se então, em muitos aspectos, dentro das capacidades tecnológicas atuais, embora ainda não se tenha notícia de um grupo experimental que tenha tentado implementá-lo.

### Horizonte de eventos em fibras óticas

Outro sistema muito conhecido que pode agir como um guia de ondas para a luz são fibras óticas. Foi em um sistema de fibras óticas que Leonhardt *et al* [35] demonstraram em 2007, pela primeira vez, um horizonte de eventos análogo em laboratório. Como veremos, tal idéia tem muito em comum com os dois últimos modelos apresentados. Assim como no guia de ondas discutido acima, as propriedades óticas não lineares da fibra permitem que um pulso laser-guia (de maior intensidade) gere um espaço-tempo efetivo para um pulso-teste (de menor intensidade). E, assim como no modelo com a parede de domínio em  ${}^3\text{He}$ , um pulso ultra-curto não dispersivo em uma fibra ótica é um sóliton, cuja propagação gera o horizonte de eventos.

A configuração experimental usada está representada<sup>5</sup> por meio da fig. 3.8. Sua idéia consiste em alterar as propriedades óticas da fibra por meio de um pulso-guia, tal que um outro pulso-teste “enxergue” um espaço-tempo curvo efetivo quando nas

<sup>5</sup>Além das referências originais, recomendamos uma consulta a [60] para uma descrição mais rica do experimento.

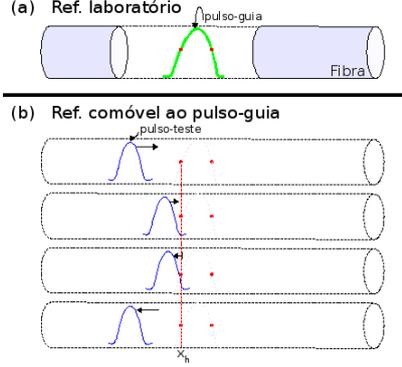


Figura 3.8: Formação de um horizonte efetivo por meio de fibras ópticas, como demonstrado experimentalmente em [35]. (a) Um pulso-guia gera o espaço-tempo efetivo por meio do efeito Kerr. (b) Um pulso-teste aborda o horizonte efetivo (um buraco branco) e, após ocorrer uma mistura de modos, passa a ter velocidade de grupo inferior ao pulso-guia (e.g., ver §4.3.2).

proximidades desse pulso-guia. Tal comportamento é possível por meio do efeito Kerr [61], que consiste na mudança do índice de refração  $n_0$  do material por uma contribuição  $\delta n$  que é proporcional à intensidade  $I(t, x)$  do pulso e localizada sobre o mesmo, e.g.,

$$n = n_0 + \delta n, \quad \delta n \propto I(t, x). \quad (3.57)$$

Assim, conforme um pulso-guia de maior intensidade propaga-se, ele altera o índice de refração da fibra de modo que um pulso-teste (de baixa intensidade) propagando-se nas vizinhanças do pulso-guia experimenta um índice de refração maior (tão maior quanto mais próximo esteja do centro de intensidade do pulso-guia). A métrica efetiva que esse pulso-teste enxerga continua sendo a métrica de Gordon (3.56), porém nesse caso a quadrivelocidade  $u^\mu$  será a velocidade do pulso-guia<sup>6</sup>, tal que reescrevemos a métrica efetiva explicitamente,

$$[g_{\text{eff}}]_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2(1 - \frac{u^2}{c^2/n^2}) & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

onde  $u$  é a tri-velocidade do pulso-guia, e  $c/n$  é a velocidade de propagação do pulso-teste.

O experimento de Leonhardt *et al* consiste em utilizar um pulso-teste de frequência identificavelmente diferente do pulso-guia, em uma fibra óptica construída especialmente para que modos com frequência próxima ao do pulso-teste tenham

<sup>6</sup>Ou seja, a métrica efetiva (3.56) não distingue a situação em que um meio dielétrico move-se da situação em que as mudanças são geradas por uma frente de onda em propagação no meio dielétrico estático.

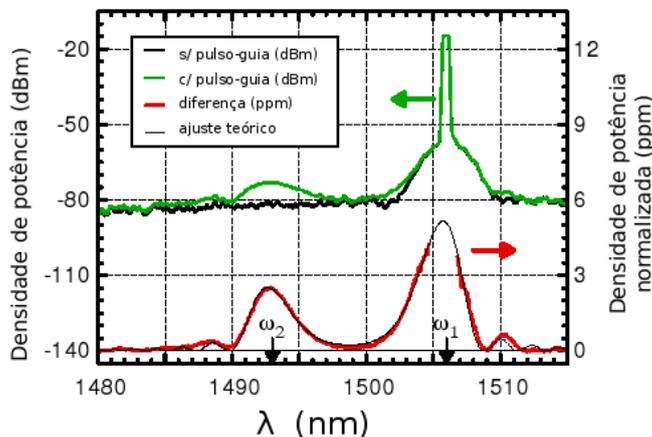


Figura 3.9: Resultado do experimento de Leonhardt et al (retirado de [35]). O pulso-teste, centrado inicialmente na frequência  $\omega_1$ , passa a ter mais outra componente centrada na frequência  $\omega_2$  após interagir com o horizonte (e.g., ver §4.3.2).

velocidade de grupo ligeiramente maior que os de frequência próxima à do pulso-guia. Como ilustrado na figura 3.8, partindo-se de um pulso-teste que persegue um pulso-guia ( $c/n > u$ , e.g., região externa ao horizonte), conforme o pulso-teste o alcança, toma contato com regiões de mais alto  $n$ , até que no ponto em que  $c/n = u$  ocorre um horizonte de eventos. Note-se que esse horizonte de eventos é um *buraco branco* (o inverso temporal de um buraco negro). Uma configuração experimental com todos esses requisitos é o que foi realizado por Leonhardt *et al*.

Mas como, experimentalmente, obteve-se a confirmação de que o experimento acima gerou um horizonte de eventos? Para entender esse ponto faz-se necessário a leitura da seção §4.3.2, onde explicita-se, por meio de uma simulação numérica de um modelo correlato, o mecanismo exato que permite tal conclusão. Por agora comentamos apenas que a relação de dispersão não-trivial da fibra ótica faz com que, conforme o pulso-teste sofra um blue-shift em sua aproximação do horizonte, ocorra uma mistura de modos, como ilustrado na figura 3.9. Essa mistura de modos é parecida com a que ocorre entre modos *in* e *out* no efeito Hawking, comentado anteriormente. Aqui, porém, é necessário lembrar que o experimento acima é intrinsecamente clássico, e.g., fora usado tão somente pulsos clássicos e sem considerações da quantização do campo. Seus autores, porém, estão procurando adaptá-lo de maneira a detectar radiação Hawking, o que seria feito mediante o uso somente do pulso-guia, dado que o papel do pulso-teste é tomado pelas flutuações quânticas de campos eletromagnéticos na fibra ótica.

# Capítulo 4

## Radiação Hawking em modelos análogos

Nesse capítulo iremos deduzir em maiores detalhes a quantização dos campos de perturbações em modelos análogos. Em primeiro lugar iremos completar a dedução da radiação Hawking para a formação dinâmica de um buraco mudo, como já delineado anteriormente na seção §3.1.1. Em seguida discutiremos um dos mais importantes resultados proporcionados pelos modelos análogos: a robustez da radiação Hawking. Em particular, deduziremos como a radiação Hawking ocorre quando as relações de dispersão de um fluido passam a ser não lineares, como de fato ocorre em sistemas reais de matéria condensada. Antes de cumprir o roteiro acima, introduziremos o formalismo de teoria quântica de campos em espaços-curvos.

Nosso objetivo principal é dar um panorama dos principais resultados da área, e para tanto baseamos a discussão seguinte em vários diferentes artigos [12, 14, 32, 33, 62]. Assim as deduções apresentadas não constituem idéias originais próprias, embora em alguns casos tratem-se de adaptações próprias do exposto nas referências indicadas.

### 4.1 Teoria Quântica de Campos

Faremos aqui uma breve exposição dos passos principais para a quantização de um campo em um espaço-tempo curvo. Por simplicidade detalharemos somente o caso do campo escalar real, de acoplamento mínimo. Maiores detalhes podem ser obtidos nas referências [6, 7, 63].

Seja um campo escalar real  $\phi(t, \mathbf{x})$ , definido em todos os pontos  $(t, \mathbf{x})$  de um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g}_{\mu\nu})$   $(n+1)$ -dimensional e que possua por densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{m^2\phi^2}{2}), \quad (4.1)$$

Sua ação, definida por

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^{n+1}x, \quad (4.2)$$

quando sujeita ao requisito de que sua variação em relação a  $\phi$  seja nula,  $\delta S = 0$ , retorna a equação de campo

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu - m^2)\phi(x) = 0. \quad (4.3)$$

Pode-se mostrar, pelo uso da eq. (4.3) que a quantidade

$$J^\mu = [\phi_1(x)\nabla^\mu\phi_2^*(x) - (\nabla^\mu\phi_1(x))\phi_2^*(x)] \quad (4.4)$$

possui quadri-divergência nula,  $\nabla_\mu J^\mu = 0$ , de onde se vê que o campo escalar possui uma quantidade conservada  $Q$

$$Q = \int_\Sigma [\phi_1(x)\partial_\mu\phi_2^*(x) - (\partial_\mu\phi_1(x))\phi_2^*(x)]d\Sigma^\mu, \quad (4.5)$$

sendo  $d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$ , onde  $d\Sigma$  é o elemento de volume de uma dada superfície tipo-espaço sobre a qual a integral é feita, e  $n^\mu$  um vetor tipo-tempo ortonormal à essa superfície. Essa carga conservada nos permite definir o produto escalar de Klein-Gordon  $(\phi_1, \phi_2)$ , para  $\phi_1$  e  $\phi_2$  soluções da eq. (4.3), como

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_\Sigma [\phi_1(x)\partial_\mu\phi_2^*(x) - (\partial_\mu\phi_1(x))\phi_2^*(x)]d\Sigma^\mu. \quad (4.6)$$

## Espaço-tempo plano

Por ilustração tomemos o exemplo em que o espaço-tempo seja o de Minkowski,  $\mathbf{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Nesse caso um conjunto de soluções usual para eq. (4.3) é dado em termos das ondas planas

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})^\pm = \frac{e^{\pm i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}}{\sqrt{2\omega(2\pi)^n}}, \quad (4.7)$$

$$\omega = (k^2 + m^2)^{1/2}, \quad (4.8)$$

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 = \left( \sum_{i=1}^n k_i^2 \right), \quad (4.9)$$

sendo o sinal (+) referente a soluções de frequência positiva com respeito a  $t$  e o sinal (−) de frequências negativas, tal nomenclatura justificando-se por tais funções serem autofunções do operador  $\partial/\partial t$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\mathbf{k}}^\pm(t, \mathbf{x}) = \mp i\omega u_{\mathbf{k}}^\pm(t, \mathbf{x}). \quad (4.10)$$

e possuïrem produto interno

$$(u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})^\pm, u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x})^\pm) = \pm \delta^n(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.11)$$

$$(u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})^\pm, u_{\mathbf{k}'}(t, \mathbf{x})^\mp) = 0. \quad (4.12)$$

Assim o conjunto de funções  $\{u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})^+, u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})^-\}$  forma um conjunto completo de soluções da equação de onda, sobre as quais podemos expandir uma configuração arbitrária do campo<sup>1</sup>

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d^n \mathbf{k} [a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})]. \quad (4.13)$$

De onde procedemos à quantização canônica desse sistema, segundo a qual o campo  $\phi$  passa a ser um operador  $\hat{\Phi}$  e seus coeficientes de expansão tornam-se operadores de criação  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  e aniquilação  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}) = \int d^n \mathbf{k} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})], \quad (4.14)$$

que obedecem as relações de comutação

$$[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}, \mathbf{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \hbar \delta^n(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.15)$$

$$[\mathbf{a}_{\mathbf{k}}, \mathbf{a}_{\mathbf{k}'}] = [\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \mathbf{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \quad (4.16)$$

e que agem no espaço de Fock, onde definem o estado de vácuo  $|0\rangle$  como sendo o estado aniquilado por

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0. \quad (4.17)$$

O estado de uma partícula de momento  $\mathbf{k}$  é obtido pela aplicação do operador de criação  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  sobre o estado de vácuo, e um estado genérico de  $n$  partículas é construído por suas repetidas aplicações.

## Espaço-tempo curvo

O procedimento de quantização canônico utilizado acima, para um espaço-tempo plano, possui diferenças importantes ao ser aplicado em um espaço-tempo curvo. Nesse caso não há, necessariamente, uma “definição global de tempo” e, conseqüentemente, não há uma maneira natural de diferenciar se um modo possui frequências negativas ou positivas. Assim, não há uma escolha única para o conjunto completo de soluções sobre o qual expandimos uma configuração do campo, e diferentes escolhas usualmente levam a diferentes definições de estado de vácuo. O conteúdo de partículas da teoria, e a própria noção de “partícula”, passam então a ser conceitos ambíguos em um espaço-tempo genérico.

---

<sup>1</sup>Em geral os coeficientes na expansão sobre o conjunto de modos negativos, i.e. o segundo termo no lado direito da eq. (4.13), seriam em princípio  $b_{\mathbf{k}}$  arbitrários e não relacionados a  $a_{\mathbf{k}}$ . O requerimento do campo ser real é que impõe  $b_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^*$ .

No caso particular de um espaço-tempo estacionário com um campo de Killing global  $\xi^\mu$  tipo-tempo, podemos recuperar uma noção natural de frequência positiva e negativa para soluções da eq. (4.3), por meio de uma equação de autovalores análoga à eq. (4.10),

$$\xi^\mu \nabla_\mu u_{\mathbf{k}}^\pm(t, \mathbf{x}) = \mp i\omega u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}). \quad (4.18)$$

Ainda caso o espaço-tempo não seja estacionário, mas possua regiões assintoticamente planas no infinito passado  $\mathfrak{S}^-$ , e no infinito futuro  $\mathfrak{S}^+$ , podemos utilizar o conteúdo de partículas definido em cada uma dessas regiões. Embora tal caracterização também não seja única, essa não-unicidade é uma propriedade essencial da teoria, com conseqüências físicas tais como a criação de partículas, como veremos a seguir.

Consideremos então um espaço-tempo assintoticamente plano no passado e no futuro. Chamaremos o conjunto ortonormal de soluções em  $\mathfrak{S}^-$  de  $\{u_{\mathbf{k}}^+, u_{\mathbf{k}}^-\}$ , sobre o qual expandimos o campo  $\hat{\Phi}$ ,

$$\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}) = \int d^n \mathbf{k} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})], \quad (4.19)$$

em termos de operadores  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$  e  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  que obedecem as relações de comutação (4.16) usuais, sendo o estado de vácuo  $|0_{in}\rangle$  definido como o estado aniquilado por  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} |0_{in}\rangle = 0. \quad (4.20)$$

Igualmente definimos o conjunto ortonormal  $\{g_{\mathbf{k}}^+, g_{\mathbf{k}}^-\}$  de soluções em  $\mathfrak{S}^+$ , sobre o qual expande-se  $\hat{\Phi}$  como

$$\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}) = \int d^n \mathbf{k} [\mathbf{b}_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{b}_{\mathbf{k}}^\dagger g_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})], \quad (4.21)$$

e tal que o estado de vácuo  $|0_{out}\rangle$  é aniquilado por

$$\mathbf{b}_{\mathbf{k}} |0_{out}\rangle = 0. \quad (4.22)$$

Embora  $u_{\mathbf{k}}$  e  $g_{\mathbf{k}}$  sejam definidos por suas propriedades assintóticas em diferentes regiões, ambos são soluções da equação de onda (4.3) e definidos em todo o espaço-tempo. Portanto uma solução pode sempre ser escrita em termos da outra, o que na forma mais geral é dada por

$$g_{\mathbf{k}'} = \int d^n \mathbf{k} (\alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^*), \quad (4.23)$$

que também implica em

$$\mathbf{b}_{\mathbf{k}'} = \int d^n \mathbf{k} (\alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^* \mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^* \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger). \quad (4.24)$$

Estas relações são conhecidas como transformações de Bogoliubov, e seus elementos  $\alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$  e  $\beta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$  são os coeficientes de Bogoliubov, que podemos redefinir ainda por meio do produto interno como

$$\alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = (g_{\mathbf{k}'}, u_{\mathbf{k}}), \quad (4.25)$$

$$\beta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = -(g_{\mathbf{k}'}, u_{\mathbf{k}}^*). \quad (4.26)$$

Uma vez que  $g_{\mathbf{k}}$  e  $u_{\mathbf{k}}$  atendem a eq. (4.18) nas regiões assintóticas, ambas obedecem relações de ortogonalidade idênticas a (4.11) e (4.12), o que também implica nas seguintes relações para  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\int d^n \mathbf{p} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{p}}^* - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{p}}^*) = \delta^n(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.27)$$

$$\int d^n \mathbf{p} (\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{p}}) = 0. \quad (4.28)$$

Fica claro, por meio da eq. (4.24), que os estados de vácuo correspondente as duas escolhas de modos,  $g_{\mathbf{k}}$  e  $u_{\mathbf{k}}$ , são inequivalentes caso  $\beta_{ij} \neq 0$ . Tomemos por exemplo o caso em que  $|0_{in}\rangle$  é o estado inicial do sistema. Na representação de Heisenberg, esse de fato será o estado do sistema por toda sua evolução. Porém, o operador fisicamente relevante que contabiliza o número de partículas em  $\mathfrak{S}^+$  é  $\mathbf{N}_{\mathbf{k}} = \mathbf{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \mathbf{b}_{\mathbf{k}}$ . Dado então que esse espaço-tempo esteja no estado de vácuo, como medido por observadores em  $\mathfrak{S}^-$ , o valor esperado de partículas de momento  $\mathbf{k}$  como medido por observadores ao final de sua evolução em  $\mathfrak{S}^+$  será dado por

$$\langle \mathbf{N}_{\mathbf{k}} \rangle = \langle 0_{in} | \mathbf{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \mathbf{b}_{\mathbf{k}} | 0_{in} \rangle = \int d^n \mathbf{k}' |\beta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2. \quad (4.29)$$

Como veremos a seguir, a radiação Hawking, assim como seu análogo em matéria condensada, é uma aplicação desse resultado, em que a diferença entre os estados  $|in\rangle$  e  $|out\rangle$  deve-se ou à formação dinâmica do horizonte de eventos, ou à imposição de condições de contorno apropriadas sobre o campo quantizado.

## 4.2 Radiação após formação do horizonte

Completaremos aqui a descrição, iniciada em §3.1.1, do processo de emissão de radiação Hawking de fônons durante a formação de um horizonte sônico. Como delineado na figura 3.4, uma configuração possui um perfil inicial de velocidade subsônico e constante,  $v = v_i$ . Após uma evolução suave no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq t_f$  durante o qual desenvolve-se um horizonte sônico, o fluxo estabiliza-se novamente em uma configuração estática  $\bar{v}(x)$ ,

$$v(t, x) = \begin{cases} v_i & t < 0, v_i = \text{cte} < c \\ \bar{v}(\xi(t)) & t_f \geq t \geq 0 \\ \bar{v}(x) & t > t_f, \{x \leq x_h \rightarrow \bar{v}(x) \leq c | x \geq x_h \rightarrow \bar{v}(x) \geq c\} \end{cases} \quad (4.30)$$

Para reforçar a generalidade do resultado, não assumiremos uma forma específica para o campo de velocidades, além da hipótese de que sua evolução seja suave e que um horizonte sônico se forme, com regiões assintóticas  $\bar{v}(x \rightarrow \pm\infty)$  constantes. Para tanto é suficiente que  $\xi(t)$  seja uma função monotônica crescente suave e tal que  $\dot{\xi}(t)$  tenha suporte compacto  $\{[t_1 = 0, t_2 = t_f] | \lim_{t \rightarrow t_1, t_2} \dot{\xi}(t) = 0\}$ , e o perfil  $\bar{v}(x)$  final também seja suave, como no exemplo da figura 3.4.

Temos então um espaço-tempo curvo efetivo, cuja métrica é dada por<sup>2</sup>

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

e tal que seu campo sonoro propaga-se segundo a equação de campo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \partial_x v\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \partial_x\right) \phi - c^2 \partial_x^2 \phi = 0. \quad (4.32)$$

Uma vez que esse espaço-tempo atende as condições discutidas na seção anterior, ou seja, é estacionário e assintoticamente plano em  $\mathfrak{S}^\pm$ , iremos aplicar o formalismo ali apresentado. Definiremos um estado de vácuo correspondente aos modos  $\{u_{\mathbf{k}}^+, u_{\mathbf{k}}^-\}$  em  $\mathfrak{S}^-$ , e o escreveremos em termos dos modos  $\{g_{\mathbf{k}}^+, g_{\mathbf{k}}^-\}$  em  $\mathfrak{S}^+$ .

### O produto interno.

Como explicitado anteriormente, usamos o produto interno (4.6) segundo o qual caracterizamos os modos de frequência positiva e negativa nas regiões assintóticas, devido à estacionariedade do espaço-tempo nesses limites. Uma família de observadores apropriada para tal é a que segue “queda livre”, fisicamente correspondente aos elementos de fluido que seguem o campo de velocidade  $\mathbf{v}$ , gerada

---

<sup>2</sup>Por simplificação a partir desse ponto  $c \equiv c_s$  e, por tratarmos um caso (1+1)-dimensional,  $\mathbf{x} = x$ ,  $\mathbf{v} = v$ ,  $\mathbf{k} = k$ . Sem perda de generalidade, assumiremos  $\rho = 1$  constante.

pelo vetor tangente  $(\partial_t + v\partial_x)$ . Assim podemos escolher a superfície a  $t$  constante ortonormal ao vetor  $n^\mu = (1, v)$  para tomar o produto de Klein-Gordon (4.6) das soluções de (4.32),

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int [\phi_1(x)(\partial_t + v\partial_x)\phi_2^*(x) - \phi_2^*(x)(\partial_t + v\partial_x)\phi_1(x)]dx. \quad (4.33)$$

embora ressaltemos que essa é uma quantidade conservada independente de  $t$ , que pode ser igualmente tomada em outras superfícies<sup>3</sup>.

### Modos *in*

Um tipo de solução da eq. (4.32) de interesse é a classe de soluções de frequência definida para os observadores em queda livre, caracterizada por

$$(\partial_t + v\partial_x)u_k^\pm = \mp i\omega' u_k^\pm \quad (4.34)$$

Modos de frequência positiva  $u_k^+$  não terão necessariamente, de maneira geral, norma positiva sob o produto interno (4.33), a não ser quando  $v(x)$  é constante<sup>4</sup>, o que acontece em  $\mathfrak{S}^\pm$ . Podemos verificar essa afirmação ao tomar  $v = v_i$  constante na eq. (4.32) e procurar por soluções da forma

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (4.35)$$

que inseridas em (4.32) retornam as relações de dispersão

$$(\omega - v_i k)^2 = c^2 k^2. \quad (4.36)$$

Uma vez que  $\omega$  é a frequência da onda como definida pelo referencial dos observadores no laboratório, e.g., é uma autofrequência do operador  $\partial_t$ , vemos pelas eqs. (4.36) e (4.34) que a frequência medida por observadores em queda livre é

$$\omega' = (\omega - v_i k) = c|k| \rightarrow \omega' = \frac{\omega}{(1 \pm v_i/c)}. \quad (4.37)$$

Assim os modos (4.35) são soluções de frequência positiva para a eq. (4.34), ortonormalizados sob o produto interno (4.33). O sinal  $\pm$  no lado direito de (4.37) refere-se ao sinal de  $k$ , e.g.,  $\{k > 0 \rightarrow +|k| < 0 \rightarrow -\}$ , tal que modos  $k > 0$  propagam-se com velocidade  $v_i + c$  no referencial do laboratório (e.g., em  $\mathfrak{S}^-$  são modos propagando-se

<sup>3</sup>O motivo para escolher essa superfície ortonormal a  $n^\mu$  em particular se deve à simplificação, e para manter a notação em consonância com a seção §4.3, onde tal escolha será preferencial.

<sup>4</sup>Outra classe de soluções a notar-se é a que possui frequências positivas caracterizadas pelo vetor de Killing  $\partial_t \phi = -i\omega \phi$ , que possuem norma positiva sob (4.33) quando  $v = 0$ , caso no qual coincidem com (4.34).

à direita), e modos  $k < 0$  propagam-se com velocidade  $v_i - c$  (e.g., em  $\mathfrak{S}^-$  propagam-se à esquerda)<sup>5</sup>.

Definimos então o conjunto de modos *in*  $\{u_k^+, u_k^-\}$  em  $\mathfrak{S}^-$  pelas eqs. (4.35) e (4.37) acima, onde por conveniência nomeamos os modos que deslocam-se para direita ( $\omega, k > 0$ ) pelo sufixo<sup>6</sup>  $\vec{k}$

$$u_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (\omega, k > 0), \quad (4.38)$$

e os que deslocam-se para esquerda ( $\omega, k < 0$ ) indexamos pelo sufixo  $\overleftarrow{k}$

$$u_{\overleftarrow{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t + |k|x)}, \quad (\omega > 0, k < 0). \quad (4.39)$$

Sobre esse conjunto completo de soluções em  $\mathfrak{S}^-$  construímos o estado  $|in\rangle$  do campo,

$$\hat{\Phi}(t, x) = \int_0^\infty dk [\mathbf{a}_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(t, x) + \mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*(t, x) + \mathbf{a}_{\overleftarrow{k}} u_{\overleftarrow{k}}(t, x) + \mathbf{a}_{\overleftarrow{k}}^\dagger u_{\overleftarrow{k}}^*(t, x)]. \quad (4.40)$$

Uma vez que no início de sua evolução impomos que o sistema não contém a presença de fônons, o estado  $|in\rangle$  é o estado de vácuo  $\mathbf{a}_{\vec{k}} |0_{in}\rangle = \mathbf{a}_{\overleftarrow{k}} |0_{in}\rangle = 0$ .

## Modos *out*

Embora as soluções da eq. (4.32) para o campo de velocidades  $\bar{v}(x)$ , em  $\mathfrak{S}^+$ , dependam do perfil específico de velocidades, podemos deduzir algumas características gerais para a classe de  $\bar{v}(x)$  consideradas. Para achar os modos normais que atendem a eq. de onda (4.32), iremos supor soluções na forma

$$\phi(t, x) = e^{-i\omega t} f_k(x), \quad (4.41)$$

que inserida em (4.32) retorna a equação

$$(-i\omega + \partial_x \bar{v})(-i\omega + \bar{v} \partial_x) f_k(x) = c^2 \partial_x^2 f_k(x). \quad (4.42)$$

Uma forma de procurar soluções aproximadas para essa equação consiste na aproximação WKB, onde toma-se o *ansatz*

$$f_k(x) \propto e^{i \int^x k(x') dx'}, \quad (4.43)$$

<sup>5</sup>Tais relações decorrem da escolha da solução positiva para a eq. (4.36),  $\omega'_+ = (\omega - v_i k) = +c|k|$ , que é a eq. (4.37), e seriam trocadas caso escolhêssemos a solução negativa,  $\omega'_- = (\omega - v_i k) = -c|k|$

<sup>6</sup>Que não deve ser tomado como notação vetorial, uma vez que estamos lidando com uma só dimensão espacial.

que, inserido na eq. (4.42), nos fornece uma equação separável em termos de diferentes ordens em  $\partial_x$ ,

$$(-\omega^2 + 2\omega\bar{v}k - \bar{v}^2k^2) + (-i\omega + 2ik\bar{v})\partial_x\bar{v} + i\bar{v}^2\partial_xk = ic^2\partial_xk - c^2k^2. \quad (4.44)$$

Reescrevendo essa equação mantendo termos em ordem 0 no lado esquerdo, e termos em ordem 1 no lado direito,

$$(-\omega^2 + 2\omega\bar{v}k - \bar{v}^2k^2) + c^2k^2 = ic^2\partial_xk + (i\omega - 2ik\bar{v})\partial_x\bar{v} - i\bar{v}^2\partial_xk, \quad (4.45)$$

iremos impor que ambos os termos devem anular-se. Do lado esquerdo obtemos

$$(\omega - \bar{v}k(x))^2 = c^2k^2(x), \quad (4.46)$$

de onde, ao ser re-inserido no lado direito de (4.45) na forma  $\partial_x\bar{v} = -(\omega/k^2)\partial_xk$ , obtem-se identicamente a mesma equação (4.46) acima. Ou seja, a solução WKB, que usualmente retorna uma série infinita como aproximação para  $k = k(\omega)$ , nesse caso é uma solução exata<sup>7</sup>.

Em resumo, mostramos assim que as soluções da eq. (4.32) para um perfil genérico de velocidades  $\bar{v}(x)$  têm a forma

$$g_k(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - \int^x k(x') dx')} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega(t - \int^x \frac{1}{\bar{v}(x') \pm c} dx')}, \quad (4.47)$$

onde o sinal  $\pm$  refere-se ao sinal de  $k$ , i.e.,  $\{k > 0 \rightarrow + | k < 0 \rightarrow -\}$ . Na região externa ao horizonte de eventos,  $\bar{v}(x) < 1$ , os modos  $k > 0$  propagam-se com velocidade  $\bar{v}(x) + c$  (i.e., em  $\mathfrak{S}^+$  são modos propagando-se à direita), enquanto os modos  $k < 0$  propagam-se com velocidade  $\bar{v}(x) - c$  (i.e., propagam-se à esquerda). Já na região interna ao horizonte de eventos,  $\bar{v}(x) > 1$ , teremos que ambos modos  $k > 0$  e  $k < 0$  propagam-se, no referencial do laboratório, à direita: os modos  $k > 0$  naturalmente propagam-se na direção do fluxo com velocidade  $\bar{v}(x) + c$ , porém os modos  $k < 0$  são de fato “arrastados” pelo fluido, uma vez que sua velocidade de propagação é excedida pela velocidade do fluido (i.e.,  $\bar{v}(x) - c > 0$ ). Portanto indexaremos os modos  $(\omega, k > 0)$  pelo sufixo  $\overrightarrow{k}$ ,

$$g_{\overrightarrow{k}}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - \int k(x') dx')}, \quad (\omega > 0, k > 0), \quad (4.48)$$

enquanto os modos  $(\omega, k < 0)$  serão ainda divididos entre os modos aprisionados dentro do horizonte, de sufixo  $\overleftarrow{a}$ , e os modos externos ao horizonte, de sufixo  $\overleftarrow{k}$ ,

$$g_{\overleftarrow{k}}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - \int k(x') dx')}, \quad (\omega > 0, k < 0, x < x_h), \quad (4.49)$$

$$g_{\overleftarrow{a}}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - \int k(x') dx')}, \quad (\omega > 0, k < 0, x > x_h). \quad (4.50)$$

---

<sup>7</sup>Tal fato é consequência da invariância conforme, decorrente de trabalharmos em (1+1)-dimensões.

Há uma diferença importante a notar-se em relação aos modos  $g_{\vec{k}}$  e  $g_{\vec{a}}$ . Enquanto o primeiro constitui um modo de frequência positiva em relação ao operador  $\partial_t + v\partial_x$ , o segundo constitui-se em um modo de frequência negativa, o que se constata por meio da eq. (4.46), tal que a frequência medida por observadores em queda livre  $\omega' = \omega/(1 - \bar{v}/c)$  é positiva para  $\bar{v} < c$  (caso dos modos  $g_{\vec{k}}$ ) e negativa para  $\bar{v} > c$  (caso de  $g_{\vec{a}}$ ), muito embora em ambos os casos  $\omega > 0$ . Portanto, dado o conjunto completo de soluções  $\{g_{\vec{k}}(t, x), g_{\vec{k}}^*(t, x), g_{\vec{a}}^*(t, x); C.C\}$ , podemos descrever o estado do campo por

$$\hat{\Phi}(t, x) = \int_0^\infty dk \quad [\mathbf{b}_{\vec{k}} g_{\vec{k}}(t, x) + \mathbf{b}_{\vec{k}}^\dagger g_{\vec{k}}^*(t, x) + \mathbf{b}_{\vec{k}} g_{\vec{k}}(t, x) + \mathbf{b}_{\vec{k}}^\dagger g_{\vec{k}}^*(t, x) + \mathbf{b}_{\vec{a}} g_{\vec{a}}^*(t, x) + \mathbf{b}_{\vec{a}}^\dagger g_{\vec{a}}(t, x)]. \quad (4.51)$$

Note-se que, como consequência de  $g_{\vec{a}}(t, x)$  ser de fato um modo de frequência negativa, sua ordem em relação aos operadores de criação e aniquilação é trocada em relação aos modos  $g_{\vec{k}}(t, x)$ . O estado de vácuo natural a ser definido em  $\mathfrak{S}^+$  é tal que  $\mathbf{b}_{\vec{k}}|0_{out}\rangle = \mathbf{b}_{\vec{k}}|0_{out}\rangle = \mathbf{b}_{\vec{a}}|0_{out}\rangle = 0$ .

Como mencionado na seção §4.1, o estado do sistema, adotado como sendo o estado de vácuo  $|0_{in}\rangle$  como definido em  $\mathfrak{S}^-$ , não corresponde em  $\mathfrak{S}^+$  ao estado de vácuo  $|0_{out}\rangle$ . Ao escrever os modos *out* em termos dos modos *in*, podemos achar os coeficientes de Bogoliubov  $\beta_{k'k}$ , através dos quais é possível quantificar a criação de partículas originária da formação do horizonte de eventos, eq. (4.29).

## Fórmulas de conexão

Para que se possa expandir os modos *out* em termos dos modos *in*, é necessário primeiro obter uma fórmula explícita para os modos *out*, uma vez que as eqs. (4.48-4.50) são válidas para um perfil de velocidades  $\bar{v}(x)$  genérico. Embora a forma exata desses modos dependa de cada  $\bar{v}(x)$  específico, veremos que seu comportamento nas proximidades do horizonte dependerá apenas de quantidades locais tomadas nessa região. Dada a hipótese de um perfil suave, nas proximidades do horizonte pode-se sempre expandir

$$\bar{v}(x) = c + c\kappa(x - x_h) + \mathcal{O}(x - x_h)^2, \quad (4.52)$$

onde a constante  $\kappa$ , conhecida como “gravidade superficial”<sup>8</sup>, é dada por

$$\kappa = \frac{1}{c} \left. \frac{d\bar{v}}{dx} \right|_{x=x_h}. \quad (4.53)$$

---

<sup>8</sup>Tal nomenclatura vem da analogia com o espaço-tempo efetivo gerado pelo fluido, onde  $\kappa(x)$  é a força a ser exercida por um observador no infinito, com o uso de uma corda ideal, para manter uma massa teste unitária estática no ponto  $x$ . A gravidade superficial é o valor limite dessa quantidade sobre o horizonte de eventos, i.e., dado um objeto estático que segue a linha de mundo  $u^\mu$ , com aceleração própria  $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$ , tem-se  $\kappa = \lim_{x \rightarrow x_h} (Va)$ , onde  $a = \sqrt{a^\mu a_\mu}$  e  $V$  é o fator de redshift gravitacional (i.e., dado o vetor de Killing tipo-tempo  $\xi^\mu$ ,  $V = \sqrt{-\xi^\mu \xi_\mu}$ ).

Inserindo a aproximação (4.52) nas eqs. (4.48-4.50) obtemos, para  $x \approx x_h$ ,

$$g_{\vec{k}}^-(x)|_{x \approx x_h} = e^{i \frac{\omega}{c\kappa} \ln(2+\kappa(x-x_h))}, \quad (4.54)$$

$$g_{\vec{k}}^-(x)|_{x \approx x_h} = \Theta(x_h - x) e^{i \frac{\omega}{c\kappa} \ln(x_h - x)}, \quad (4.55)$$

$$g_{\vec{a}}^-(x)|_{x \approx x_h} = \Theta(x - x_h) e^{i \frac{\omega}{c\kappa} \ln(x - x_h)}, \quad (4.56)$$

a menos do fator global  $\propto \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega t}$ . Vemos que os modos  $g_{\vec{k}}^-$  são analíticos no horizonte, o que era esperado uma vez que representam os modos que “caem” em sua direção. Por sua vez, os modos  $g_{\vec{k}}^-$  e  $g_{\vec{a}}^-$  são definidos, cada um, apenas em metade do espaço, de onde fica explícito que ambos  $g_{\vec{k}}^-$  e  $g_{\vec{a}}^*$  são necessários para formar o conjunto completo de soluções  $k < 0$ .

Agora que temos as fórmulas explícitas dos modos *in* em  $\mathfrak{S}^-$ , e dos modos *out* em  $\mathfrak{S}^+$ , precisamos conecta-los ao longo do horizonte de eventos, para que se possa escrevê-los um em termos do outro. Para tanto descreveremos os modos  $u_k$  durante o período de formação do horizonte em  $0 < t < t_f$ , quando o perfil de velocidades possui dependência temporal  $v(t, x)$ , ao final do qual podemos compará-los com os modos  $g_k$ . Ao procurar as soluções da equação de onda (4.32), que reescrevemos abaixo

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial \phi}{\partial t} + v^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (4.57)$$

iremos supor soluções da forma (4.41), ou seja  $\phi \propto e^{-i\omega t} h_k(x)$ , que inserido na eq. acima resulta<sup>9</sup>

$$\left[ (-c^2 + v^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2vv' - 2i\omega v + \dot{v}) \frac{\partial}{\partial x} - \omega^2 - i\omega v' \right] h_k(x) = 0, \quad (4.58)$$

onde  $\dot{v} \equiv \partial v / \partial t$  e  $v' \equiv \partial v / \partial x$ . Iremos resolver essa equação pelo uso de sua transformada de Laplace<sup>10</sup>,

$$h_k(x) = \int e^{s(x-x_h)} \tilde{h}(s) ds, \quad (4.59)$$

através da qual obteremos uma outra equação diferencial para  $\tilde{h}(s)$ , de resolução mais fácil, e sobre a qual pode-se aplicar a transformada de Laplace e obter a solução  $h_k(x)$  procurada. Considerando que estamos interessados no comportamento de  $h_k(x)$  nas proximidades do horizonte, em particular em suas características não transientes, é suficiente considerarmos a aproximação para o campo de velocidades em  $(t \approx t_h, x \approx x_h)$ , sendo  $t_h$  o valor de  $t$  que demarca a formação do horizonte,

<sup>9</sup>Dado que agora a eq. (4.57) apresenta dependência temporal em  $v(t, x)$ , o *ansatz* (4.41) não será necessariamente válido, de forma que o usamos para procurar soluções aproximadas.

<sup>10</sup>Há diferentes maneiras de completar essa dedução da emissão Hawking no processo de formação do horizonte. A escolhida aqui tem o objetivo de manter-se próxima da que será feita, mais à frente em §4.3.3, com relações de dispersão modificadas.

como

$$v(t, x)|_{x \approx x_h, t \approx t_h} \approx c + c\kappa[(x - x_h) + \underbrace{\lambda(t - t_h)(\Theta(t) - \Theta(t - t_f))}_{\xi_h(t)}] + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)^2, \quad (4.60)$$

onde  $\lambda = (1/\kappa)dv/dt|_{t_h}$ . Por tornar a notação mais clara no que segue, denotamos todo o termo em  $\lambda$  como  $\xi_h(t)$ . Após o uso da eq. (4.60) na eq. de onda (4.58), e tomando sua transformada de Laplace (4.59), obtemos para  $\tilde{h}(s)$  a equação<sup>11</sup>

$$\left[ 2c\kappa\xi_h s^2 - 2c\kappa \frac{\partial}{\partial s} s^2 + (-2i\omega + 2c\kappa + c\kappa\dot{\xi}_h)s - (\omega^2 + i\omega c\kappa) \right] \tilde{h}(s) = 0, \quad (4.61)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln(s^2 \tilde{h}(s)) = \xi_h + \left( -\frac{i\omega}{c\kappa} + \frac{\dot{\xi}_h}{2} + 1 \right) \frac{1}{s} - \frac{\omega^2 + i\omega c\kappa}{2c\kappa s^2}. \quad (4.62)$$

Tomando o  $\lim_{t \rightarrow t_f}$  na eq. acima e integrando-a, obtemos a menos de um fator de integração constante, a solução

$$\tilde{h}(s) = s^{-1 - i\frac{\omega}{c\kappa}} e^{\frac{\omega^2 + i\omega c\kappa}{2c\kappa s}}. \quad (4.63)$$

Através dessa solução podemos obter  $h_k(x)$  pela transformada de Laplace,

$$h_k(x) = \int s^{-1 - i\frac{\omega}{c\kappa}} e^{(x - x_h)s + \frac{\omega^2 + i\omega c\kappa}{2c\kappa s}} ds. \quad (4.64)$$

A maneira mais fácil de resolver essa integral é mediante a redefinição das variáveis

$$(x - x_h)s = -z, \quad (4.65)$$

tal que a eq. (4.64) toma a forma

$$h_k(x) = -(x - x_h)^{i\frac{\omega}{c\kappa}} \int (-z)^{-1 - i\frac{\omega}{c\kappa}} e^{-z} dz, \quad (4.66)$$

onde desconsideramos, em boa aproximação, o segundo termo da exponencial na eq. (4.64), uma vez que a integração toma seus limites em  $|s| \rightarrow \infty$ . Lembrando agora da representação integral da função gama [64],

$$\Gamma(p) = \frac{i}{2\text{sen}(\pi p)} \int (-y)^{-1+p} e^{-y} dy, \quad (4.67)$$

vemos que (4.66) pode ser reescrita como

$$h_k(x) = (x - x_h)^{i\frac{\omega}{c\kappa}} (e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} - e^{-\frac{\pi\omega}{c\kappa}}) \Gamma\left(-\frac{i\omega}{c\kappa}\right). \quad (4.68)$$

<sup>11</sup>Onde descartamos termos de ordem  $\kappa^2$  e  $\omega\kappa(x + \xi_h)$ , devido aos limites de validade de (4.60).

Resumindo o cálculo exposto acima, temos que modos que em  $\mathfrak{S}^-$  propagam-se à esquerda e possuem a forma (4.39),  $[u_{\vec{k}}^- \propto e^{ikx}, (\omega > 0, k = \omega/(v_i - c) < 0)]|_{\mathfrak{S}^-}$ , mas que passam próximos do horizonte de eventos  $H$ , enquanto o mesmo forma-se, após  $t \geq t_f$  possuem em  $x \approx x_h$  a forma (4.68),  $[u_{\vec{k}}^- \propto (x - x_h)^{i\frac{\omega}{c\kappa}} (e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} - e^{-\frac{\pi\omega}{c\kappa}}) \Gamma(-\frac{i\omega}{c\kappa})]|_{\approx H}$ . Como último passo, é importante notar agora qual o *branch cut* correto para a função  $(x - x_h)^{i\frac{\omega}{c\kappa}} = e^{i\frac{\omega}{c\kappa} \text{Ln}(x - x_h)}$ . Uma vez que o modo inicialmente, em  $\mathfrak{S}^-$ , possui somente ( $k < 0$ ), e.g., são modos que tomam valores no plano complexo inferior, temos que por continuidade analítica deve-se tomar também o plano complexo inferior para a função logaritmo, e.g.,  $\text{Ln}(x - x_h) = \ln(|x - x_h|) - i\pi$ . Assim temos nas proximidades do horizonte que

$$(u_{\vec{k}}^-)|_{x \approx x_h} = [e^{i\frac{\omega}{c\kappa} \text{Ln}(x - x_h)} \Theta(x - x_h) + e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} e^{i\frac{\omega}{c\kappa} \text{Ln}(x_h - x)} \Theta(x_h - x)] (e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} - e^{-\frac{\pi\omega}{c\kappa}}) \Gamma(-\frac{i\omega}{c\kappa}). \quad (4.69)$$

Finalmente, comparando a equação (4.69) acima para os modos *in* com as eqs. (4.55-4.56) para os modos *out*, vemos que<sup>12</sup>

$$(u_{\vec{k}}^-)|_{x \approx x_h} = [g_{\vec{a}}^-(x|_{\approx x_h}) + e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} g_{\vec{k}}^-(x|_{\approx x_h})] (e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} - e^{-\frac{\pi\omega}{c\kappa}}) \Gamma(-\frac{i\omega}{c\kappa}), \quad (4.70)$$

de onde infere-se facilmente os coeficientes de Bogoliubov por comparação direta com sua definição, eq. (4.23), tal que  $\alpha_{k'k} = \delta(k - k') e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} (e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} - e^{-\frac{\pi\omega}{c\kappa}}) \Gamma(-\frac{i\omega}{c\kappa}) \equiv \delta(k - k') \alpha_k$  e  $\beta_{k'k} = \delta(k - k') (e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} - e^{-\frac{\pi\omega}{c\kappa}}) \Gamma(-\frac{i\omega}{c\kappa}) \equiv \delta(k - k') \beta_k$ . Ou seja, esses coeficientes obedecem a relação

$$\frac{|\beta_k|^2}{|\alpha_k|^2} = e^{-\frac{2\pi\omega}{c\kappa}}. \quad (4.71)$$

Junto à relação (4.27),  $|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$ , obtemos que a taxa de emissão de partículas por unidade de tempo e de frequência, é dada por

$$n_k = |\beta_k|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{c\kappa}} - 1}, \quad (4.72)$$

o que demonstra que a formação do horizonte sônico implica em detecção, em  $\mathfrak{S}^+$ , de fônons de espectro térmico com temperatura  $T = \hbar c\kappa/2\pi k_B$ , a radiação Hawking análoga. É usual representar-se, pictoricamente, a emissão da radiação Hawking por meio da criação de uma partícula e sua anti-partícula, aonde a partícula é emitida enquanto sua anti-partícula é capturada pelo horizonte de eventos. Tal interpretação tem origem na eq. (4.70), uma vez que o modo  $g_{\vec{k}}^-$ , de frequência positiva (a “partícula”), propaga-se à esquerda afastando-se do horizonte, enquanto o modo  $g_{\vec{a}}^-$ , de frequência negativa (a “anti-partícula”) propaga-se à direita, aprisionada pelo horizonte.

---

<sup>12</sup>Para os modos  $u_{\vec{k}}^+$ , a menos de efeitos transientes, não haverá criação de partículas, e.g.,  $u_{\vec{k}}^+ \propto g_{\vec{k}}^+$ , tal que os coeficientes  $\beta_{\vec{k}'\vec{k}}^+ = 0$ .

### 4.2.1 O problema trans-planckiano

A dedução acima, embora use técnicas melhor adaptadas para o caso de modelos análogos, mantêm grandes semelhanças com a dedução original de Hawking. Ao mesmo tempo que indica a possibilidade marcante de usar um sistema em matéria condensada que simule o efeito Hawking, a dedução acaba por herdar também a mesma limitação conhecida como o “problema trans-planckiano”.

Voltando à eq. (4.55), vamos acompanhar a evolução daqueles modos no tempo. Uma vez que  $g_{\bar{k}}(x|_{\approx x_h}) = e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{c\kappa} \ln(x_h-x)} \Theta(x_h - x)$  deve propagar-se seguindo a superfície de fase constante, teremos que

$$\omega t - \frac{\omega}{c\kappa} \ln(x_h - x) = cte \rightarrow (x_h - x) \propto e^{c\kappa(t-t_h)}. \quad (4.73)$$

Ou seja, conforme esse modo propaga-se, a coordenada  $x_h - x$  deve ter proporção exponencial em  $\Delta t$  para manter a fase constante em relação a  $\omega t$ . O significado físico dessa relação é simples: conforme tomemos modos que mais proximalmente tangenciam o horizonte (e.g., conforme escolhermos  $\epsilon$  menor, sendo  $x = x_h - \epsilon$  no momento de formação do horizonte), muito mais distante no passado esses modos começaram sua trajetória (e.g.,  $t \ll t_h$ ), e conseqüentemente mais tempo esses modos levam para emergir das proximidades do horizonte. Levando essa consideração na relação entre a frequência em queda livre e a de laboratório, obtemos

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{\omega}{\kappa(x_h - x)} \rightarrow \omega' \propto \omega_{\mathfrak{S}^+} e^{c\kappa(t_h-t)}. \quad (4.74)$$

Note-se agora que a frequência em queda livre relaciona-se ao estado de vácuo inicial escolhido (i.e.,  $\omega'$  é a frequência do modo *in* do estado de vácuo  $|0_{in}\rangle$ ), e que a frequência de Killing  $\omega$  denota a frequência da partícula Hawking detectada em  $\mathfrak{S}^+$  (para reforçar esse ponto, indexamos  $\omega_{\mathfrak{S}^+}$  na equação acima). Assim, as partículas que emergem imediatamente após a formação do horizonte ( $t_h - t \approx \epsilon$ ) possuirão frequências, em  $\mathfrak{S}^+$ , próximas à frequência do modo *in* que a originou. Porém, as partículas que emergem algum tempo depois e são detectadas com uma frequência relativamente baixa em  $\mathfrak{S}^+$ , terão origem em modos *in* de frequências arbitrariamente grandes, i.e., após  $\Delta t \approx 100/c\kappa$  segundos uma partícula detectada com  $\omega \approx 1$  terá origem em um modo *in* de frequência  $e^{100}$  vezes maior<sup>13</sup>. É claro que modos com essa energia estão muito além do limite de validade da teoria quântica de campos usual. Essa dependência indireta que a dedução guarda com uma escala de física que vai muito além da escala de Planck é o chamado problema trans-planckiano.

Há diferentes opiniões à respeito da importância real desse problema. A observação acima não necessariamente invalida a existência do efeito Hawking, mas indica que sua dedução não é inquestionável. Logo após Hawking publicar seus resultados, houve um período em que os mesmos foram visto com ceticismo, motivado em parte

<sup>13</sup>Não damos ênfase às unidades nessa relação porque diferentes unidades introduzirão fatores desprezíveis em relação a tais grandezas.

pela argumentação acima [8], e mesmo na literatura recente há trabalhos que questionam a realidade da radiação Hawking [65]. Por outro lado, é surpreendente o fato de que, em seu resultado final, a radiação de buracos negros mostre-se independente dessa relação tão desigual entre as frequências dos modos *in* e as partículas criadas. De fato, as implicações do efeito Hawking para a termodinâmica de buracos negros sugerem fortemente que o mesmo deve ser um efeito real e robusto na natureza.

Na falta de uma teoria de gravidade quântica que possa responder diretamente a essa questão, possíveis respostas tem sido procuradas de outra maneira. Como veremos a seguir, os modelos análogos proporcionaram, até o momento, os maiores avanços sobre essa questão.

### 4.3 Radiação sob relações de dispersão modificadas

T. Jacobson [66] foi o primeiro a notar que, embora a física da escala de Planck (ou ainda muito acima da escala de Planck) não seja conhecida, o mesmo não ocorre para com a física que descreve sistemas análogos, nos quais podemos simular a radiação Hawking. Se esses sistemas de fato são capazes de reproduzir efeitos de teoria quântica de campos em sua descrição de espaço-tempo efetivo, como o problema trans-planckiano ali se manifesta?

É claro que ondas sonoras de comprimentos de onda sucessivamente menores irão atingir um limite no qual a aproximação de fluido não mais é válida, e.g., quando  $\lambda$  for comparável às distâncias intermoleculares do fluido. Assim, os modelos análogos naturalmente apresentam também uma escala análoga à escala de Planck. Para descrever um modo *in* de altíssima frequência, que dê origem a um fônon de baixas frequências, seria necessário tratar esse sistema além de sua descrição como fluido. A princípio, dada a hamiltoniana de muitos corpos que descreve o conjunto total de moléculas que formam o fluido, seria preciso investigar como ocorre a transição de modos *in* em *out* nas proximidades de um horizonte de eventos. Porém, tal cálculo é tecnicamente impraticável, pois envolve um sistema de muitos corpos  $N \gg 10^{23}$ . Por outro lado, uma descrição efetiva ou fenomenológica faz-se possível pelo uso de relações de dispersão modificadas. De maneira geral, dado um sistema qualquer cuja descrição macroscópica possa ser dada em termos de uma aproximação de campo médio, suas perturbações seguirão uma relação de dispersão  $\omega^2 = F^2(\omega)$ , onde  $F$  é uma função que depende da física que o descreve em menores escalas, e que pode ser calculada por modelos microscópicos ou obtida experimentalmente.

#### Um exemplo: rede unidimensional periódica de átomos.

Tomamos um modelo simples [67] de uma rede de átomos para demonstrar como as relações de dispersão surgem da construção intrínseca de cada material. Por simplicidade usaremos uma rede com condições de contorno periódicas, como a

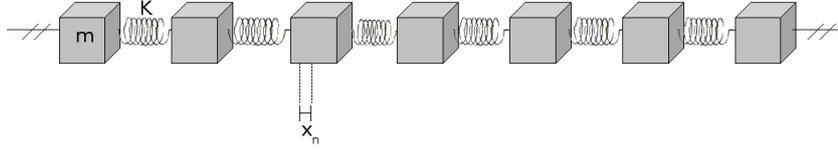


Figura 4.1: Rede de átomos unidimensional e monoatômica, onde aproxima-se sua interação com os sítios vizinhos por uma força harmônica.

disposta na figura 4.1. Ou seja, em uma rede de  $N$  átomos, tais que seus desvios da posição de equilíbrio denotem-se por  $x_i$ , impomos  $x_{N+1} = x_1$ . Supondo uma rede monoatômica (todos átomos com mesma massa  $m$  e constante harmônica  $K$ ), temos que a equação de movimento de um ponto  $n$  qualquer é

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -K(x_n - x_{n+1}) - K(x_n - x_{n-1}). \quad (4.75)$$

Uma vez que possuímos  $N$  graus de liberdade, espera-se que existam  $N$  modos de frequências características  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l, \dots, \omega_N\}$  tal que

$$x_n = A_{l,n} e^{-i\omega_l t}, \quad (4.76)$$

que levado à (4.75) retorna

$$-\omega_l^2 m A_{l,n} = -K(2A_{l,n} - A_{l,n+1} - A_{l,n-1}). \quad (4.77)$$

A solução para essa equação a diferenças finitas é

$$A_{l,n} = B_l \cos(\pi k_l n), \quad (4.78)$$

onde  $B_l$  é uma amplitude característica do modo  $l$  e  $k_l$  um número de onda determinado pela imposição da condição de periodicidade  $A_{l,N+1} = A_{l,1}$ , de onde segue que  $\cos(\pi k_l N) = 1$ , i.e.,

$$k_l = \frac{2l}{N}, \quad \pm l = 1, 2, \dots, N. \quad (4.79)$$

Tendo em vista a relação  $\cos(\pi k_l(n+1)) + \cos(\pi k_l(n-1)) = 2 \cos(\pi k_l n) \cos(\pi k_l)$ , obtemos de (4.77) que

$$-\omega_l^2 m = -K(2 - 2 \cos(\pi k_l)), \quad (4.80)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\omega_l^2 = \frac{4K}{m} \text{sen}^2 \left( \frac{\pi k_l}{2} \right). \quad (4.81)$$

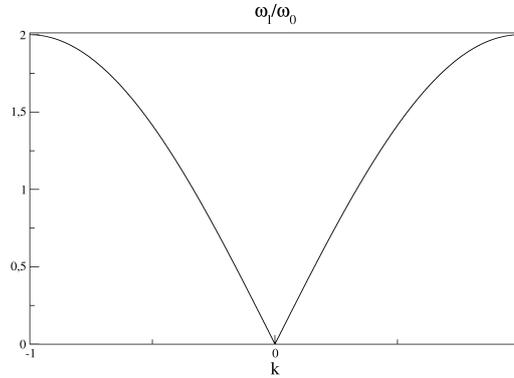


Figura 4.2: Gráfico da relação de dispersão  $\omega_l/\omega_0$ , eq. (4.82).

Assim como fizemos anteriormente, podemos tomar a raiz positiva de (4.81) tal que

$$\omega_l = 2\omega_0 \left| \text{sen} \left( \frac{\pi k_l}{2} \right) \right|, \quad (4.82)$$

onde  $\omega_0 = (K/m)^{1/2}$ . A figura 4.2 apresenta essa relação de dispersão graficamente. Para pequenos  $k_l$  obtemos que

$$\omega_{l|k_l \ll 1} \approx \omega_0 |\pi k_l|, \quad (4.83)$$

ou seja, para grandes comprimentos de onda (em relação ao espaçamento da rede), as perturbações desse sistema atendem uma relação de dispersão linear. A velocidade de grupo das perturbações é dada por

$$\frac{d\omega}{dk} = \pi\omega_0 \left| \cos \left( \frac{\pi k_l}{2} \right) \right|, \quad (4.84)$$

tal que os modos de baixa energia possuem velocidade de grupo  $v_{g|k_l \ll 1} \approx \pi\omega_0$ , que é a velocidade do som nessa rede para grandes comprimentos de onda.

Para um número muito grande de átomos presentes na rede, podemos tomar o limite do contínuo, segundo o qual as perturbações serão descritas por

$$x_n = \int B(k) \cos \left( \frac{\pi k}{2} \right) e^{-i\omega t} dk, \quad (4.85)$$

onde  $k$  tomará valores contínuos na curva de dispersão 4.2. Vemos então que, ao invés de considerar os graus microscópicos de liberdade de um sistema em matéria condensada, podemos descrever os efeitos introduzidos pela existência de uma escala fundamental por meio da relação de dispersão obedecida pelas perturbações. Assim continuamos a lidar com uma equação de onda, embora agora com termos não-lineares em  $\partial/\partial x$ .

### 4.3.1 A equação de onda modificada

Voltamos agora à equação de onda (4.32), assumindo  $\rho$  e  $c$  constantes,

$$[(\partial_t + \partial_x v)(\partial_t + v\partial_x) - c^2 \partial_x^2] \phi = 0. \quad (4.86)$$

Já fora apontado que em um referencial comóvel ao fluido, uma decomposição em modos nos leva à relação de dispersão trivial

$$\omega'^2 = c^2 k^2. \quad (4.87)$$

Agora, inspirados pelo exemplo exposto anteriormente, podemos introduzir uma relação de dispersão modificada através de uma função  $F(k)$  tal que

$$\omega'^2 = c^2 F^2(k), \quad (4.88)$$

onde é necessário exigir apenas que  $F(k)$  seja uma função analítica ímpar de  $k$ , tal que  $F(k) = k$  para pequenos  $k$ . No que segue de imediato iremos fazer ainda uma restrição mais forte e exigir que  $F(k)$  seja monotônica e constante para  $|k| \rightarrow \infty$ . Tais restrições significam que estaremos primeiro lidando com uma relação de dispersão “subluminal” (e.g., de velocidade de grupo sempre menor que a velocidade do som). Posteriormente consideraremos o caso “superluminal”, com uma classe de funções  $F(k)$  mais abrangente.

Assim, ao invés de usarmos a eq. (4.86), escolheremos trabalhar com

$$[(\partial_t + \partial_x v)(\partial_t + v\partial_x) - c^2 F^2(i\partial_x)] \phi = 0, \quad (4.89)$$

como sendo a equação de propagação para o som no fluido, sendo  $F(i\partial_x)$  em geral um operador diferencial não linear. É interessante notar que a eq. (4.89) pode ser obtida da seguinte lagrangeana, escrita no referencial do laboratório

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{\rho}{2c^2} [(\partial_t \phi + v(t, x) \partial_x \phi)^2 - [cF(i\partial_x) \phi]^2], \quad (4.90)$$

o que resulta em uma densidade de momento<sup>14</sup>

$$\pi_\phi(t, x) = \partial_t \phi + v(t, x) \partial_x \phi. \quad (4.91)$$

Ou ainda em uma notação covariante, a lagrangeana acima pode ser também escrita como

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (\Pi^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + [cF(iP^\mu \partial_\mu) \phi]^2), \quad (4.92)$$

onde  $\Pi^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu$  é o operador de projeção e  $P^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (escrito no referencial  $(t, x)$  do laboratório) é um vetor constante e que reforça o fato de que a

---

<sup>14</sup>Fatores  $\frac{\rho}{c^2}$  provenientes dessa constante multiplicativa na eq. (4.90) serão omitidos no que segue.

invariância de Lorentz do sistema não é mais uma simetria exata<sup>15</sup>. Vemos assim que nossa lagrangeana é consequência de modificarmos o operador derivativo apenas ao curva integral tipo-espaço gerada pelo vetor  $\partial_x$ , que é ortonormal ao vetor  $(\partial_t + v\partial_x)$  tangente aos observadores em queda livre.

Repetimos agora os passos delineados no caso anterior, de relação de dispersão trivial. As soluções da eq. (4.89), na região em que  $v(x) = v$  é constante, possuem norma constante sob o produto interno

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &= -i \int [\phi_1(x)(\partial_t + v\partial_x)\phi_2^*(x) - \phi_2^*(x)(\partial_t + v\partial_x)\phi_1(x)]dx \\ &= -i \int [\phi_1(x)\pi_2^*(x) - \phi_2^*(x)\pi_1(x)]dx, \end{aligned} \quad (4.93)$$

tal que a classe de soluções de frequência definida para observadores em queda livre é caracterizada por

$$(\partial_t + v\partial_x)u_k^\pm(x) = \pi_k^\pm(x) = \mp i\omega' u_k^\pm. \quad (4.94)$$

Ainda na região em  $v$  constante, há soluções na forma  $\propto e^{-i\omega t + ikx}$ , com relação de dispersão  $\omega'^2 = (\omega - vk)^2 = c^2 F^2(k)$ , tal que no referencial do laboratório sua velocidade de grupo será dada por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \pm c \frac{dF(k)}{dk}, \quad (4.95)$$

onde novamente o sinal  $\pm$  refere-se ao sinal de  $k$ , e.g.,  $\{k > 0 \rightarrow + | k < 0 \rightarrow -\}$ . A eq. (4.95) nos permite notar agora uma diferença importante para com o caso anterior, de relação de dispersão trivial. Na região externa ao horizonte de eventos,  $v < 1$ , os modos  $k > 0$  propagam-se com velocidade  $v + c(dF(k)/dk)$ . Enquanto que para  $k \ll 1$  (tal que  $F(k) \approx k$ ) tais modos propagam-se com velocidade  $v + c$ , modos de comprimento de onda menor terão ainda uma velocidade que depende da relação de dispersão  $F(k)$  - embora, sendo  $F(k)$  ímpar, tais modos propaguem-se certamente à direita (assumindo  $v > 0$ ). Já os modos  $k < 0$ , que propagam-se com velocidade  $v - c(dF(k)/dk)$ , apresentam ainda um comportamento mais rico. Para  $k \ll 1$  eles propagam-se com velocidade  $v - c$  (e.g., para a esquerda), mas para comprimentos de onda menores haverá um limite no qual tais modos irão se propagar para a direita (e.g.,  $dF(k)/dk < v/c$ ) no referencial do laboratório. Ou seja, para as relações de dispersão modificadas com  $F(k)$  subluminal, haverá um número de onda típico  $k_0$  a partir do qual tais modos serão efetivamente “arrastados” para a direita, mesmo na ausência de um horizonte de eventos.

Resta enfim a pergunta: como, após levar em conta alterações introduzidas por uma “microescala” por meio do modelo proposto através da eq. (4.89), altera-se o quadro da emissão de radiação Hawking?

---

<sup>15</sup>Representando assim a existência de um referencial privilegiado, que nesse caso trata-se do referencial do laboratório.

### 4.3.2 O modelo de Unruh

Para que se possa responder essa pergunta de modo mais ilustrativo, iremos eleger uma relação de dispersão em particular. No que segue, exploraremos numericamente o que ocorre com um pacote de onda expandido sobre modos *out*, conforme retraçamos ao horizonte de eventos sua evolução passada. Para tanto, usaremos uma classe de funções  $F(k)$  considerada por Unruh [14] no que foi o primeiro trabalho a demonstrar o caráter robusto da radiação Hawking em modelos análogos. Embora eleja-se um modelo particular, posteriormente veremos que os resultados a seguir são suficientemente gerais.

A relação de dispersão escolhida tem a seguinte forma<sup>16</sup>,

$$F(k) = k_0 \tanh \left[ \left( \frac{k}{k_0} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (4.96)$$

onde  $k_0$  marca a escala em que a função passa de linear a constante, introduzindo a escala de distância  $2\pi/k_0$  a partir da qual a descrição efetiva do fluido sofre modificações. O parâmetro  $n$  é um número inteiro positivo que torna tal transição mais abrupta quanto maior for  $n$ . Nas simulações apresentadas a seguir fora escolhido  $n = 1$ , mas resultados idênticos para outros valores de  $n$  são facilmente obtidos.

O procedimento para o cálculo da emissão Hawking em §4.2 se deu pelo uso dos modos *in* e *out*, escrevendo-se um em termos do outro nas imediações do horizonte, onde a forma de ambos depende apenas de  $v(x \approx x_h)$ . Para tanto traçamos a evolução dos modos *in* até o final da formação do horizonte ( $t \rightarrow t_f$ ), e comparamos o resultado com os modos *out* em ( $t \geq t_f$ ) calculados pela aproximação WKB. Igualmente poderíamos ter feito o caminho inverso, i.e., traçado os modos *out* até o início da formação do horizonte ( $t \rightarrow t_0$ ) e os conectado com os modos *in* nessa região. Assim nossa estratégia agora, por facilidade numérica, será a de partir do estado *out* e evoluí-lo para o passado, a fim de conecta-lo com os modos *in*.

Para tanto elegemos um espaço-tempo estático por meio de um campo de velocidades  $v(x)$  que possua horizonte de eventos, mas seja assintoticamente plano. Por conveniência escolhemos

$$v(x) = 1 - 0.2 \tanh[24 \cos[2\pi(x - 0.38)] + 23], \quad (4.97)$$

ilustrado na figura 4.3, por possuir suas regiões assintoticamente planas bem definidas<sup>17</sup>. Para fins da simulação numérica é necessário tomar um espaço finito, de modo que identificamos o espaço nos pontos 0 e 1, tomando posteriores cuidados para que tal identificação não influencie nossos resultados.

Uma vez que queremos traçar a evolução ao passado de um modo *out*, precisamos partir de soluções que estejam, no futuro, na região assintótica externa ao

<sup>16</sup>Essa escolha se deve ao caráter suave da função, necessário para a simulação numérica.

<sup>17</sup>Tal campo de velocidade possui dois horizontes de eventos, e.g., um buraco negro em  $x \approx 0.8339$  e um buraco branco em  $x \approx 0.9261$ . Porém, como esclarecido posteriormente, lidamos com aspectos da simulação que não permitirão que o buraco branco influencie nos resultados.

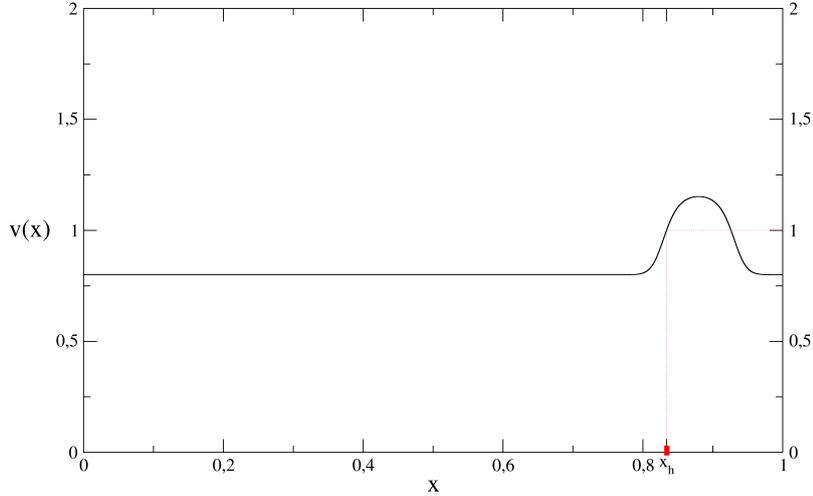


Figura 4.3: Campo de velocidades, eq. (4.97). A simulação é feita de modo que somente o horizonte denotado no gráfico tenha influência.

horizonte de  $v$  constante, o que nos leva a considerar a evolução dos modos *out*  $g_{\vec{k}}(x) = e^{-i(\omega t + kx)}$  ( $\omega > 0$ ,  $k < 0$ ,  $|k| < k_0$ ). Uma vez que estes são ilimitados espacialmente, para tornar a evolução computacionalmente possível consideraremos de fato a evolução de um pacote de onda (especialmente limitado)  $\phi_{\mathfrak{S}^+}(x)$  expandido sobre estes modos *out*,

$$\phi_{\mathfrak{S}^+}(x) = \int \tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}(k) g_{\vec{k}}(x) dk. \quad (4.98)$$

Exigindo que  $\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}(k)$  contenha somente modos  $k$  de baixa energia (para os quais  $F(k) \approx k$ ), é claro que se tratará de um modo que se propaga (na direção de tempo futuro) para a esquerda. Como exemplo inicial tomamos uma pacote de onda como o representado na figura 4.4, onde mostra-se a distribuição  $\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}(k)$  e sua correspondente representação espacial  $\phi_{\mathfrak{S}^+}(x)$ .

A evolução desse pacote de ondas se dá pela eq. (4.89), que pode ser reescrita na forma

$$(\partial_t + v\partial_x)\phi(x) = \pi(x) \quad (4.99)$$

$$(\partial_t + \partial_x v)\pi(x) = -c^2 F^2(i\partial_x)\phi(x). \quad (4.100)$$

Para resolver essas equações numericamente, transformamos as eqs. (4.99-4.100) em um par de equações a diferenças finitas, que são resolvidas por técnicas computacionais tais como as descritas no apêndice da ref. [14]. Apresentaremos abaixo o resultado dessa evolução e sua interpretação. Mas, antes disso discutiremos em

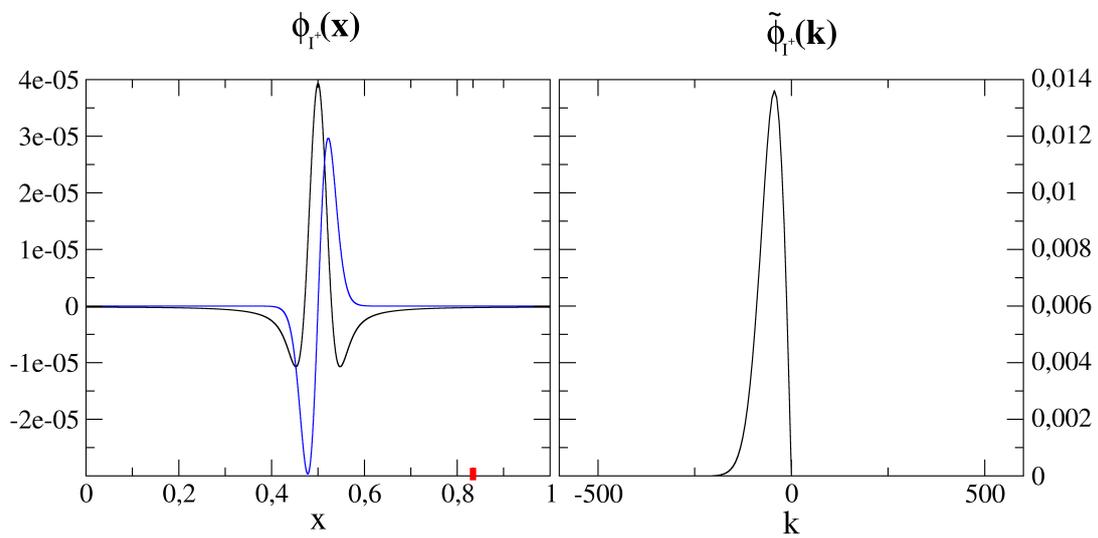


Figura 4.4: Pacote de ondas no tempo futuro (a partir do qual se inicia a simulação, que é iterada ao passado), representado no espaço de coordenadas,  $\phi_{\mathfrak{S}^+}(x)$ , e no espaço recíproco,  $\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}(k)$ .

maiores detalhes como caracterizar os modos nas regiões assintóticas, de maneira a explicar o procedimento utilizado para tal nas simulações.

### Caracterização dos modos

Dado um pacote de ondas  $\phi(x) = \int \tilde{\phi}(k)e^{-i(\omega t - kx)}dk$  construído sobre ondas planas  $e^{-i(\omega t - kx)}$ , que são soluções para as eqs. (4.99-4.100) na região de  $v(x) = v$  constante, temos que as equações a serem atendidas no espaço recíproco são

$$\tilde{\pi}(k) = -i(\omega - vk)\tilde{\phi}(k), \quad (4.101)$$

$$(\omega - vk)\tilde{\pi}(k) = -ic^2F^2(k)\tilde{\phi}(k). \quad (4.102)$$

Note que, inserindo-se (4.101) em (4.102), obtemos diretamente a relação de dispersão (4.88), que reescrevemos como

$$(\omega - vk)^2 = c^2F^2(k) \rightarrow \omega_{\pm} = vk \pm c|F(k)|. \quad (4.103)$$

O sinal  $\pm$  em  $\omega_{\pm}$  denota qual das soluções da equação  $\omega'^2 = c^2F^2(k)$  foi escolhida, e reforça que  $\omega_+$  são freqüências que, embora definidas no referencial do laboratório, são nomeadas por um subíndice positivo devido a sua freqüência de queda livre  $\omega'$  ser positiva (e vice-versa para  $\omega_-$ ), independentemente do próprio sinal de  $\omega$  (i.e., haverão alguns modos  $\omega_- > 0$ , desde que  $\omega' = \omega_- - vk < 0$ ).

Relembremos que, para um modo particular de número de onda definido  $g_k(t, x)$ , podemos caracterizá-lo como sendo de freqüência positiva, ou negativa (em relação a observadores em queda livre), por meio da equação de autovalores  $(\partial_t + v\partial_x)g_k^{\pm}(t, x) = \mp i\omega'g_k^{\pm}(t, x)$ , i.e., caso o autovalor resulte  $-i\omega'$ , o modo é positivo e fica nomeado por  $g^+(t, x)$  e vice-versa caso seja negativo. Assim, um pacote de ondas genérico pode ser separado no espaço recíproco como  $\phi = \int dk(\tilde{\phi}^+(k)g_k^+ + \tilde{\phi}^-(k)g_k^-)$ , e.g., podemos escrever

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^+ + \tilde{\phi}^-, \quad (4.104)$$

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}^+ + \tilde{\pi}^-, \quad (4.105)$$

que, inseridos nas eqs. (4.101-4.102), nos permitem decompor um pacote de ondas em freqüências negativas e positivas por meio de

$$\tilde{\phi}^+ = \frac{1}{2} \left( \tilde{\phi} + \frac{i\tilde{\pi}}{|F(k)|} \right), \quad (4.106)$$

$$\tilde{\pi}^+ = \frac{1}{2} \left( \tilde{\pi} - i|F(k)|\tilde{\phi} \right). \quad (4.107)$$

Assim, ao acompanhar a evolução de um pacote de ondas no espaço-tempo gerado pelo perfil de velocidades (4.97), podemos sempre decompô-lo em freqüências negativas e positivas por meio das eqs. (4.104-4.107) quando o mesmo encontra-se em uma região a  $v$  constante.

## Evolução

Na figura 4.5 acompanhamos a evolução do pacote de ondas  $\phi_{\mathfrak{S}+}(x)$ , eq. (4.98), em seu caminho para o horizonte de eventos, conforme iteramos para o tempo passado:

- (i) Enquanto o mesmo propaga-se tão somente na região de  $v$  constante, vemos que sua evolução é trivial, sem modificação nos modos  $k$  presentes no pacote (fig. 4.5-a).
- (ii) Quando a extremidade do pacote toma contato com a região em que a velocidade varia (fig. 4.5-b), o pacote altera-se ligeiramente, sendo que observa-se uma pequena parte que é refletida (a contribuição em cor verde) com baixos valores de  $k$  (e.g., grandes comprimentos de onda). Essa componente refletida deve-se à mudança de potencial associada à curvatura do espaço-tempo efetivo nessa região. Para efeitos práticos, tal componente pode ser feita tão menor quanto se queira (e.g., pela escolha de perfis velocidades que mudem mais suavemente). Para efeitos numéricos, porém, é preciso eliminar essa componente refletida, pois a condição de contorno periódica ocasiona sua interferência com o restante do pacote caso permita-se sua permanência na simulação<sup>18</sup>.
- (iii) Conforme o pacote adentra, em sua maior parte, na região em que a velocidade varia, seu comportamento é representado pelas figuras 4.5-c e 4.5-d. Note-se que nas proximidades do horizonte o pacote “congela”, tal que sua amplitude decai fortemente dentro do horizonte, e sua direção de propagação se *reverte*. Ao mesmo tempo a distribuição  $\tilde{\phi}(k)$  de modos que compõe o pacote migra para números de onda maiores na região de  $-k_0$ , acompanhadas do surgimento de amplitudes próximas a  $k_0$  (que caracteriza a mudança de comportamento da relação de dispersão). Para a simulação apresentada aqui escolheu-se  $k_0 = 512$  na eq. (4.96).
- (iv) Após reverter sua direção de propagação, o pacote (que agora nomearemos como  $\phi_{\mathfrak{S}-}(x)$ ) volta para a região a  $v$  constante, a partir da qual sua evolução volta a ser trivial, como constata-se na fig. 4.5-e. Obtêm-se então um pacote composto por grandes  $|k| \approx k_0$ , responsável por sua característica altamente oscilatória.

## Interpretação

A distinção em cores presente no lado direito da fig. 4.5-e refere-se à caracterização dos modos presentes em  $\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}-}(k)$ , feitas seguindo a prescrição (4.104-4.107).

---

<sup>18</sup>Uma vez que a componente refletida propaga-se a favor da velocidade do fluido, ela é capaz de “dar a volta” (no torus espacial da simulação) várias vezes, antes do término da simulação, o que comprometeria os resultados caso fosse permitido. Pode-se demonstrar que sua eliminação é desprezível nas condições desejadas, garantindo que a norma do pacote permaneça inalterada em uma parte em  $10^3$ .

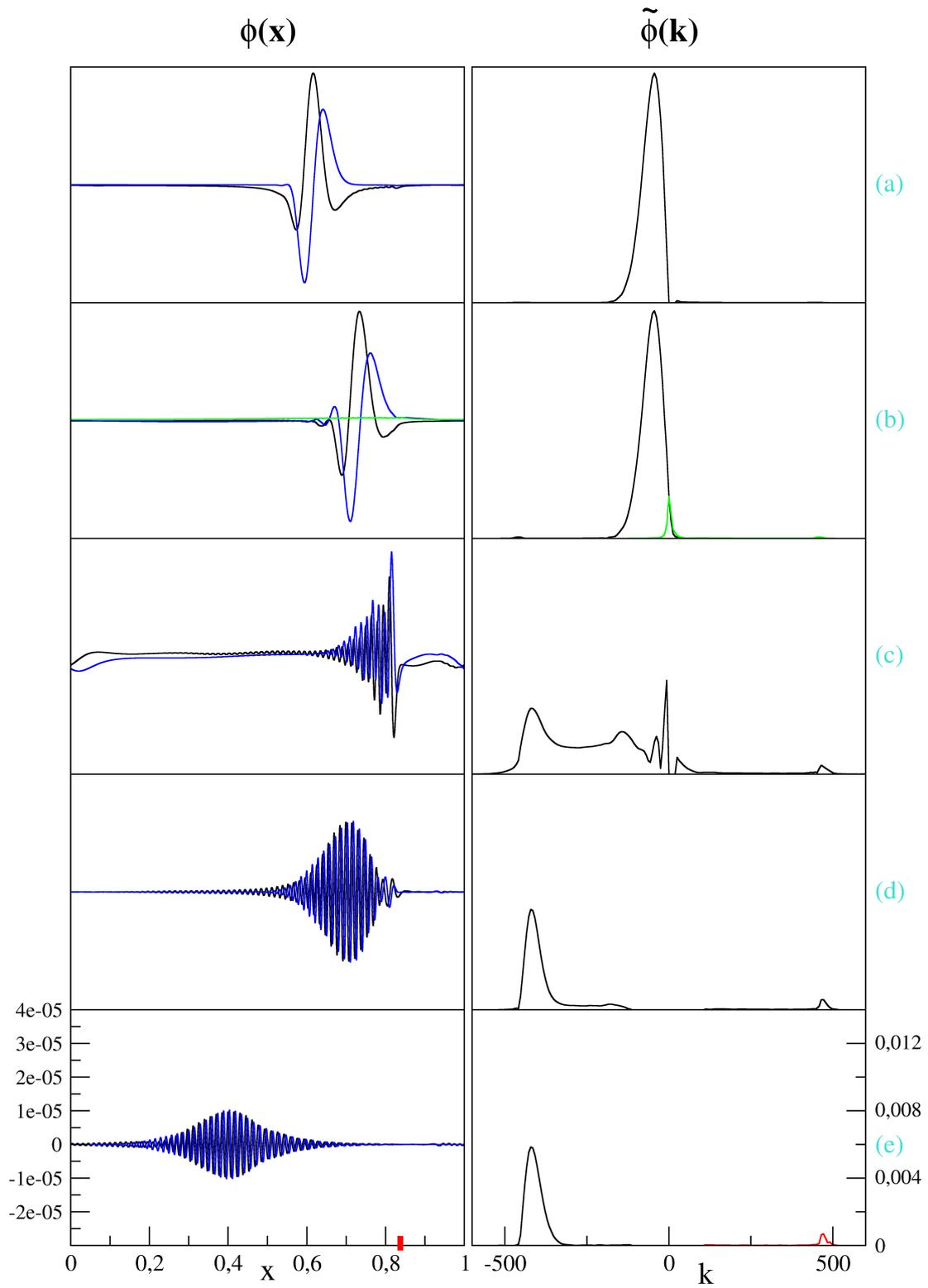


Figura 4.5: Evolução ao passado, no espaço de coordenadas e no espaço recíproco, do pacote de ondas representado na fig. 4.4.

A região da curva grafada em preto é constituída por modos de frequência positiva (com respeito a observadores em queda livre) assim como os modos presentes em  $\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}(k)$ , i.e.,  $(\omega_+, k < 0)$ . Porém, e aqui reside o principal resultado da simulação, a região da curva grafada em vermelho, próxima a  $+k_0$ , é constituída por modos de frequência *negativa*, i.e.,  $(\omega_-, k > 0)$  não presentes na distribuição inicial de  $\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}(k)$ : houve criação de partículas.

Pode-se quantificar esse processo de criação de partículas da seguinte maneira. Iremos *assumir* que o estado final  $\phi_{\mathfrak{S}^+}(x)$  é um estado térmico à temperatura  $T$ , tal que o número esperado de partículas presentes no mesmo será dado por

$$\beta_T = -i \frac{1}{N} \int \frac{1}{e^{\frac{\omega}{k_B T}} - 1} [\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}(k) \tilde{\pi}_{\mathfrak{S}^+}^*(k) - \tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}^*(k) \tilde{\pi}_{\mathfrak{S}^+}(k)] dk, \quad (4.108)$$

onde

$$N = (\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}, \tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}) = -i \int [\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}(k) \tilde{\pi}_{\mathfrak{S}^+}^*(k) - \tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}^*(k) \tilde{\pi}_{\mathfrak{S}^+}(k)] dk \quad (4.109)$$

é a norma de Klein-Gordon no espaço recíproco, o que se pode deduzir de (4.93). Para verificar se essa hipótese térmica é verdadeira, é necessário que o coeficiente de Bogoliubov  $\beta$  que, pela eq. (4.26), é dado por

$$\beta = -(\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}, \tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^-}^*) = (\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^-}, \tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}^-), \quad (4.110)$$

seja igual ao coeficiente  $\beta_T$  obtido acima. Em outras palavras, caso a norma de Klein-Gordon da região grafada em vermelho de  $\phi_{\mathfrak{S}^-}(x)$  (na fig. 4.5-e) mostrar-se igual à norma de um estado térmico de distribuição  $\phi_{\mathfrak{S}^+}(x)$ , confirmamos que a relação de dispersão modificada não afeta o caráter térmico da emissão Hawking. Para a simulação apresentada na fig. 4.5, o resultado é

$$\beta_T = 0.005351, \quad (4.111)$$

$$\beta = 0.005705. \quad (4.112)$$

Como se vê, a menos de um erro próximo de 6%, o caráter térmico da radiação é corroborado<sup>19</sup>.

Ambos os picos distribuídos próximos de  $-k_0$  e  $+k_0$  representam modos para os quais a velocidade de grupo, no referencial de laboratório, é próxima à velocidade

---

<sup>19</sup>O erro deve-se a vários fatores. Um exemplo se dá com os procedimentos para garantir que o caráter espacial limitado e a existência do buraco branco não interfiram com o pacote de ondas. Outro fator se deve ao fato de que, ao tomar a norma do pacote de ondas ao final da iteração, é difícil garantir que toda sua extensão esteja na região a  $v$  constante. Para testar se o resultado é confiável, testamos muitas diferentes simulações (sob diferentes pacotes de onda dados em  $\mathfrak{S}^+$ , diferentes perfis de velocidade e diferentes relações de dispersão) onde encontrou-se concordância com erros menores que 10%.

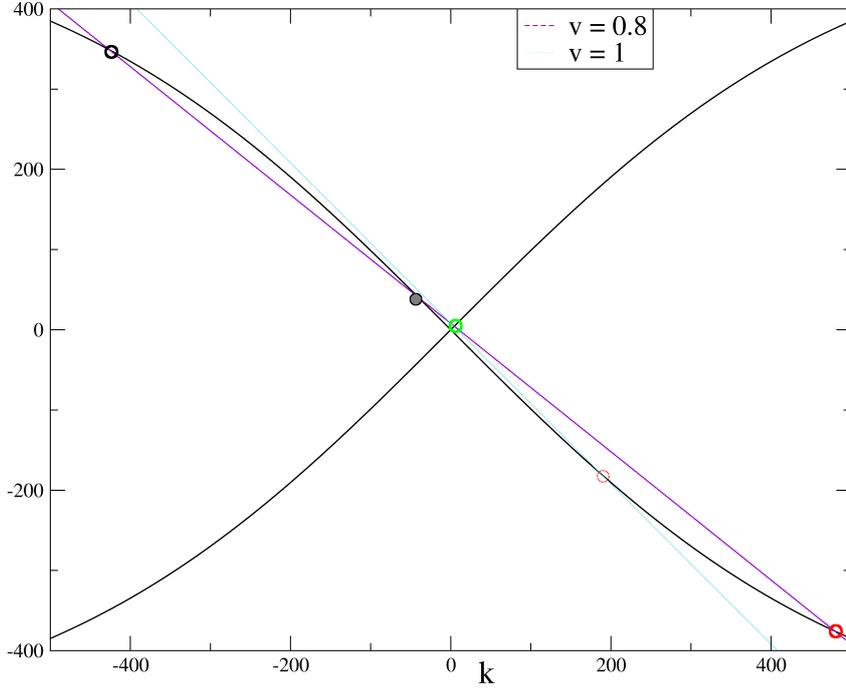


Figura 4.6: Solução gráfica para a equação  $\omega' = \pm c|F(k)| = \omega - vk$ . Os círculos apontam para as soluções  $k_i$  que possuem a mesma frequência de laboratório  $\omega$  (mas diferentes frequências no referencial de queda livre), dada uma curva com  $v$  específico ( $c = 1$  para facilitar a visualização).

do fluido ( $v_g = d\omega/dk = v \pm d|cF(k)|/dk \approx v$ ), pois, para  $|k| \approx k_0$ ,  $d|F(k)|/dk \ll 1$ . Tomando a direção temporal futura (ou seja, acompanhando esses modos de  $\mathfrak{S}^-$  a  $\mathfrak{S}^+$ ) vemos que o processo de criação de partículas se dá pelo “arrasto” de modos  $|k| \approx k_0$  do infinito à região do horizonte de eventos, onde os mesmos sofrem um redshift e passam a serem modos de  $k$  mais baixos para os quais  $F(k) \approx k \rightarrow d|F(k)|/dk \approx 1$ , tal que sua velocidade de grupo, agora maior que a velocidade de fundo do fluido, permite-lhes escapar novamente ao infinito.

Para entender como, na iteração para o passado, os modos de frequência positiva  $\omega_+$ , com números de onda negativos  $|k| < k_0$ , transformam-se em modos de frequência positiva  $\omega_+$  e negativa  $\omega_-$ , com números de onda negativos e positivos  $|k| \approx k_0$ , analisemos a figura 4.6. Nela mostra-se, no plano superior, o gráfico da relação de dispersão para modos positivos,  $\{\omega' : k \rightarrow c|F(k)|\}$ , e no plano inferior a relação para modos negativos  $\{\omega' : k \rightarrow -c|F(k)|\}$ . Superposto a esse gráfico também traçamos retas  $\{\omega' : k \rightarrow \omega - vk\}$ , possivelmente com diferentes valores de  $v$ .

É claro que os pontos em que ambos gráficos se tocam correspondem a soluções da relação de dispersão (4.103),  $\omega' = \omega_{\pm} - vk = \pm c|F(k)|$ . Agora é importante

lembrar que, dado que o sistema que integramos aqui, eq. (4.89), é independente do tempo,  $\omega$  será uma quantidade conservada durante toda sua evolução. Assim, dado um modo que inicialmente possui um determinado valor  $(\omega, k)$ , só é possível a esse modo evoluir de maneira a manter o mesmo valor  $\omega$ , mas lhe é permitido mudar para outro valor  $k_i$  que também seja solução da eq. (4.103), e conseqüentemente outro valor de  $\omega'$ . A reta tracejada na fig. 4.6 foi feita considerando-se o caso de modos que estejam na região assintótica  $v = 0.8c$  constante. Seu ponto de intersecção demarcado por um círculo sólido denota um dos modos presentes em  $\tilde{\phi}_{\mathfrak{S}^+}$ , com  $(\omega_+, k < 0, |k| \ll k_0)$ . Conforme tal modo aproxima-se do horizonte (ao iterarmos para o passado), a velocidade  $v$  aumenta, resultando em outras retas cujo limite é a reta com  $v = c$  pontilhada na fig. 4.6. Então, durante a evolução ao passado desse modo e sua aproximação ao horizonte, ocorrerá um blueshift tal que o modo poderá passar aos outros dois valores de  $|k| \approx k_0$ , representados pelos círculos vazios preto ( $k \approx -k_0$ ) e vermelho<sup>20</sup> ( $k \approx k_0$ ). De fato, a partir de certo ponto somente a intersecção vermelha será acessível. Vemos assim que o mecanismo de conversão entre modos positivos e negativos ocorre nas proximidades de  $k_0$ , que é nossa escala análoga à escala de Planck. Modos de frequência  $\omega$  muito altos não terão influência na emissão Hawking, uma vez que não possuem uma solução da eq. (4.103) que consiga “escapar” ao infinito quando aproxima-se do horizonte de eventos, e.g., serão retas de  $v = 0.8c$  como a da fig. (4.6), mas transladadas para cima no eixo da abscissa, tal que não tocam pontos como o demarcado pelo círculo sólido.

Nesse modelo vemos que o problema trans-planckiano foi eliminado, uma vez que as partículas emitidas não mais tem origem em frequências arbitrariamente grandes. Isso parece indicar que a escala de tempo que governa a criação de partículas é a da gravidade superficial  $\kappa$ , que no caso de buracos negros está ligada a escala de tempo típica de modos cujo comprimento de onda é da ordem do tamanho do buraco negro. Tal escala de tempo é grande quando comparada à escala de Planck, ou à escala atômica, no caso do buraco mudo aqui tratado. Assim, modos de frequências muito altas ajustam-se adiabaticamente a qualquer mudança e, se seu estado natural é o de vácuo, nele continuam. Dessa maneira, a emissão térmica seria um fenômeno devido a física de energias, no máximo, da mesma ordem da energia de Planck e em grande parte independente da física trans-planckiana.

### 4.3.3 Universalidade do efeito Hawking

O modelo de Unruh, como exposto acima, aponta que a radiação Hawking é um fenômeno robusto. Mas quão dependente do modelo, tais como a relação de dispersão usada, são esses resultados? Unruh e Schützhold [32] demonstraram que, sob exigências razoáveis de analiticidade da relação de dispersão, somadas a três hipóteses físicas sobre os graus de liberdade a altíssimas energias, o efeito Haw-

---

<sup>20</sup>Note que a escolha das cores mantém paralelo com as cores na fig. 4.5. O ponto de intersecção demarcado pelo círculo verde também é uma solução possível, e de fato corresponde aos modos refletidos que foram desprezados, como explicado no item (ii) que descreve a evolução da fig. 4.5.

king é sempre reproduzido como um efeito de primeira ordem. Enunciaremos tais hipóteses ao fim dessa seção. Por agora, ressaltamos que esse resultado implica que há uma grande classe de modelos nos quais o caráter térmico da radiação emitida é uma propriedade intrínseca, garantida por mecanismos idênticos aos presentes na simulação detalhada acima.

A generalidade da demonstração de Unruh e Schützhold tornariam sua apresentação, nesse espaço, muito extensa. Tomaremos uma abordagem mais concisa: delinearemos a seguir a dedução analítica, em um modelo mais simples [62], do caráter térmico da produção de partículas.

Usaremos técnicas parecidas com as dispostas na seção §4.2. Dado o sistema (4.89), adotaremos agora a relação de dispersão

$$(\omega')^2 = c^2 F^2(k) = c^2(k^2 - (k^4/k_0^2)). \quad (4.113)$$

Note que essa relação reproduz, qualitativamente, a função usada no modelo anterior, eq. (4.96), na região próxima a  $k_0$ . De fato, uma expansão em série de (4.96) reproduz (4.113) em segunda ordem<sup>21</sup>, sendo que os termos restantes de maior ordem não tem influência no que concerne o espectro térmico detectado na região assintótica.

Tomamos então o *ansatz*  $\phi(t, x) = e^{-i\omega t} h_k(x)$ , que inserido em (4.89) com a relação (4.113) leva a

$$\left[ -\frac{c^2}{k_0^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (v^2 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2vv' - 2i\omega v + \dot{v}) \frac{\partial}{\partial x} - \omega^2 - i\omega v' \right] h_k(x) = 0, \quad (4.114)$$

que pode ser comparada com a eq. (4.58). Assim como no caso de relação de dispersão linear, nas proximidades do horizonte podemos resolvê-la em termos das quantidades locais com o uso de (4.52),  $v(x) \approx c + c\kappa(x - x_h)$ , tal que

$$\frac{-c^2}{k_0^2} \partial_x^4 h_k(x) + 2c\kappa(x - x_h) \partial_x^2 h_k(x) - 2(i\omega - c\kappa) \partial_x h_k(x) - i\omega(i\omega - c\kappa) h_k(x) = 0. \quad (4.115)$$

Resolveremos essa equação diferencial no espaço recíproco de sua transformada de Laplace,  $h_k(x) = \int e^{s(x-x_h)} \tilde{h}(s) ds$ , da mesma forma e com as mesmas aproximações utilizadas nas passagens (4.59), (4.62), obtendo

$$\left( -\frac{c^2}{k_0^2} s^4 - 2c\kappa \frac{\partial}{\partial s} s^2 - 2(i\omega - c\kappa)s + i\omega(i\omega - c\kappa) \right) \tilde{h}_k(s) = 0, \quad (4.116)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial s} \ln(s^2 \tilde{h}(s)) = \frac{-s^4 c^2 / k_0^2 - 2(i\omega - c\kappa)s - (\omega^2 + i\omega c\kappa)}{2c\kappa s^2}, \quad (4.117)$$

cuja solução formal é

$$\tilde{h}(s) = s^{-1 - \frac{i\omega}{c\kappa}} e^{(-s^4 c^2 / 3k_0^2 + \omega^2 + i\omega c\kappa) / 2c\kappa s}. \quad (4.118)$$

---

<sup>21</sup>A menos de fatores multiplicativos triviais, que podem ser absorvidos por re-escalamento de  $k_0$ .

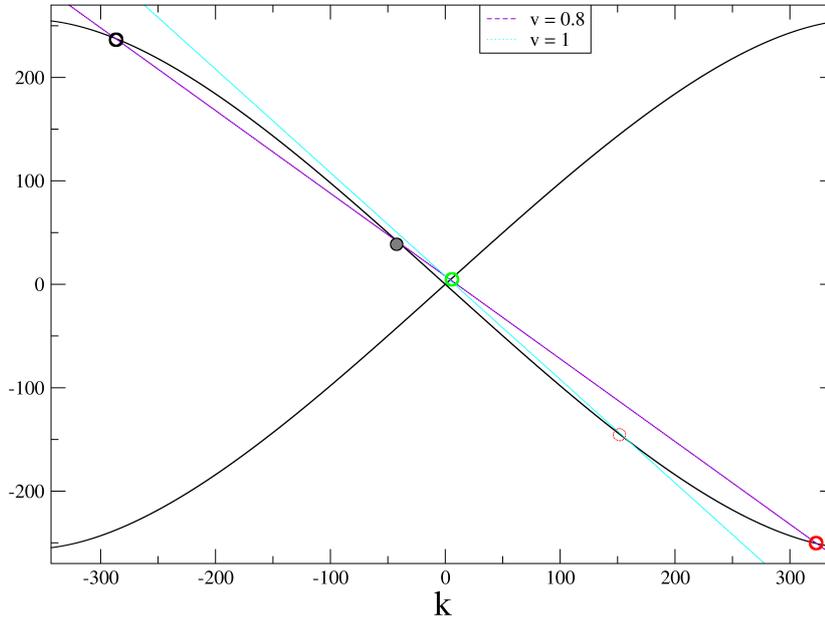


Figura 4.7: Gráfico análogo a fig. 4.6, mas agora com a relação de dispersão (4.113).

Por meio da transformada de Laplace pode-se agora obter  $h_k(x)$ , resolvendo-se a integral

$$h_k(x) = \int s^{-1 - \frac{i\omega}{c\kappa}} e^{(x-x_h)s + (-s^4 c^2 / 3k_0^2 + \omega^2 + i\omega c\kappa) / 2c\kappa s} ds. \quad (4.119)$$

Para que se possa discutir diretamente seu resultado, a resolução da integral (4.119) será discutida no apêndice A. Uma vez que presenciamos na simulação, fig. 4.5, uma completa reversão do pacote de ondas, para reproduzir tal solução toma-se como condição de contorno que sua amplitude em  $x \rightarrow \infty$  (dentro do horizonte) seja nula. Obtem-se na região  $x > x_h$  após o horizonte de eventos a solução  $h_k(x)$  descrita por

$$h_k(x)|_{x \gtrsim x_h^+} = \sqrt{\frac{\pi}{d^3}} \left( \frac{x - x_h}{d^3} \right)^{-\frac{3}{4} - \frac{i\omega}{2c\kappa}} e^{-\frac{i\pi}{2} + \frac{\pi\omega}{2c\kappa}} e^{-\frac{2}{3} \left( \frac{x-x_h}{d} \right)^{3/2}}, \quad (4.120)$$

que decai exponencialmente além do horizonte além da distância característica  $d \equiv (2k_0^2 \kappa / c)^{-1/3}$ , determinada tanto pela gravidade superficial  $\kappa$  como pela escala  $k_0$  que

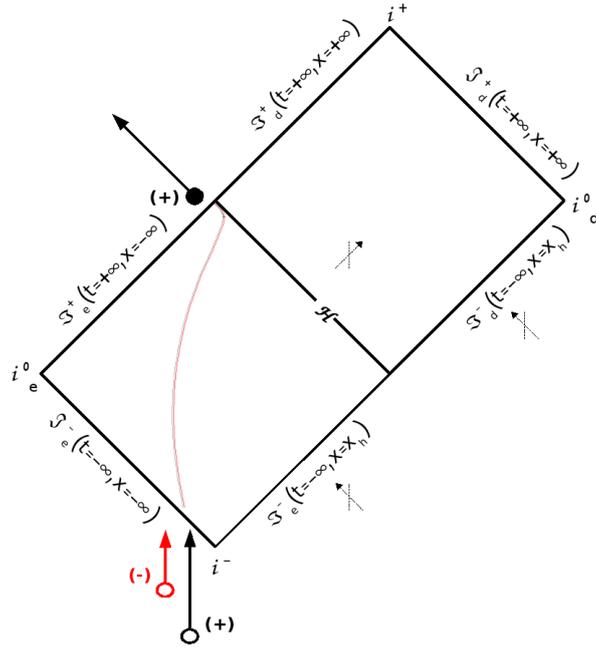


Figura 4.8: Diagrama espaço-temporal correspondente a evolução das soluções (4.121)-(4.124).

marca a mudança da relação de dispersão. Na região externa ao horizonte, temos

$$h_k(x)|_{x \lesssim x_h^+} = h_k^\bullet(x) + h_k^\oplus(x) + h_k^\ominus(x), \quad (4.121)$$

$$h_k^\bullet(x) = (|x - x_h|)^{i \frac{\omega}{c\kappa}} (e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} - e^{-\frac{\pi\omega}{c\kappa}}) \Gamma\left(-\frac{i\omega}{c\kappa}\right), \quad (4.122)$$

$$h_k^\oplus(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{d^3}} e^{-\frac{\pi\omega}{2c\kappa}} \left(\frac{|x - x_h|}{d^3}\right)^{-\frac{3}{4} - \frac{i\omega}{2c\kappa}} e^{\frac{2}{3}i \left(\frac{|x - x_h|}{d}\right)^{3/2}}, \quad (4.123)$$

$$h_k^\ominus(x) = \sqrt{\frac{\pi}{d^3}} e^{\frac{\pi\omega}{2c\kappa}} \left(\frac{|x - x_h|}{d^3}\right)^{-\frac{3}{4} - \frac{i\omega}{2c\kappa}} e^{-\frac{2}{3}i \left(\frac{|x - x_h|}{d}\right)^{3/2}}. \quad (4.124)$$

A solução  $h_k^\bullet(x)$  é parecida com a solução (4.68) do caso de relação de dispersão trivial, e representa uma onda de números de onda menores,  $k \propto \mathcal{O}(\omega)$  para a qual a relação de dispersão encontra-se na região  $w' \approx ck$ . Vemos no gráfico 4.7, análogo ao da fig. 4.6 mas agora com a relação de dispersão (4.113), que  $h_k^\bullet(x)$  corresponde à solução da relação de dispersão de intersecção marcada pelo círculo sólido. Já as soluções  $h_k^\oplus(x)$  e  $h_k^\ominus(x)$  representam ondas de muita oscilação, que possuem números de onda maiores próximos à região onde a relação de dispersão diferencia-se da trivial. A função  $h_k^\oplus(x)$  corresponde à solução com  $k \propto -k_0$ , de frequências positivas  $\omega_+$  e representadas pela intersecção em círculo vazio preto,

enquanto  $h_k^\ominus(x)$  corresponde a solução com  $k \propto +k_0$ , de frequências negativas  $\omega_-$  e círculo vazio vermelho.

Com base na simulação anterior, podemos comparar a evolução dinâmica do pacote com a descrição independente do tempo obtida pela análise acima. Vê-se claramente que  $h_k^\bullet(x)$  exerce o papel do pacote de ondas *out* imposto em  $\mathfrak{S}^+$ , cuja evolução ao passado o decompõe em modos  $\omega_+$  e  $\omega_-$ , representados por  $h_k^\oplus(x)$  e  $h_k^\ominus(x)$ . O conteúdo de partículas pode ser novamente obtido pela razão entre os modos *in* de frequência negativa  $h_k^\ominus(x)$  e positiva  $h_k^\oplus(x)$ , tal que

$$\frac{|\beta_k|^2}{|\alpha_k|^2} = e^{-\frac{2\pi\omega}{c\kappa}}. \quad (4.125)$$

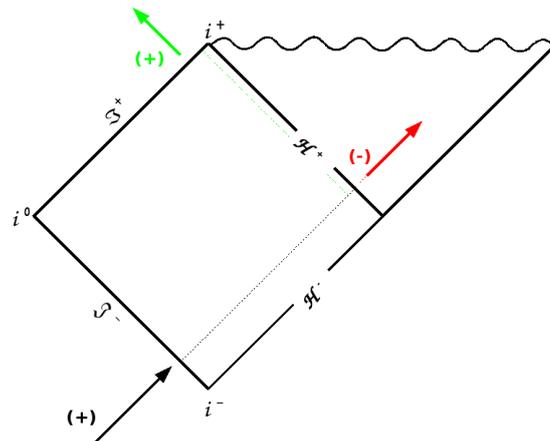
De onde novamente obtém-se um espectro Planckiano,  $n_k = |\beta_k|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{c\kappa}} - 1}$ , como no caso de relação de dispersão trivial, eq. (4.72).

A solução (4.121), construída de modo a reobter-se os resultados da simulação numérica, representa então um par de modos *in* de frequência (de queda livre) positiva e negativa, com o peso relativo exato para que se cancele a componente que se propagaria ao interior do horizonte de eventos (e.g.,  $h_k(x)|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ ), representado no diagrama da figura 4.8. Embora a construção do estado quântico com esse modos seja útil para o cálculo do número de partículas criadas, ele não mantém analogia exata com o estado quântico do campo em uma solução de buraco negro eterno [68], como representado na figura 4.9. Nesse caso tem-se que modos *in* de frequência positiva evoluem de forma a sofrerem reflexão parcial (gerando modos de frequência positiva que propagam-se para  $\mathfrak{S}^+$ , i.e., a partícula Hawking emitida) e transmissão parcial (gerando modos que atravessam o horizonte de eventos  $H^+$ , de frequência negativa, i.e., a partícula absorvida). Assim, o estado do campo tomado na superfície de Cauchy  $\mathfrak{S}^- \cup H^-$  (em que o estado de vácuo *in* é definido) é equivalente ao estado do campo na superfície de Cauchy  $\mathfrak{S}^+ \cup H^+$  (em que o estado de vácuo *out* é definido), porém a restrição dos observadores assintóticos à superfície  $\mathfrak{S}^+$  gera sua percepção de um estado térmico. Podemos construir um estado análogo a esse, no modelo de relações de dispersão modificadas, da seguinte maneira.

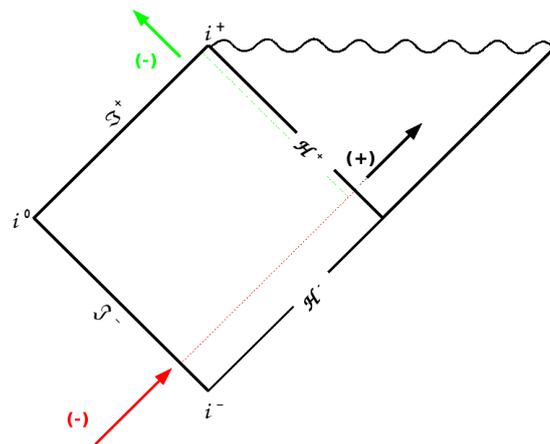
Já mencionamos que o modo (4.121), obtido mediante a condição  $h_k(x)|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , representa uma soma de modos positivos e negativos externos ao horizonte. Podemos alternativamente tomar agora a condição de contorno  $h_k(x)|_{x \gtrsim x_h} \propto h_k^\ominus(x)$ , de modo a representar uma partícula absorvida pelo horizonte de eventos. Realizando então os cálculos que levaram à solução (4.121), mas agora sob essa outra condição de contorno, obtemos novamente uma soma de modos de frequência positiva e negativa, embora agora com outro peso relativo entre os mesmos:

$$h_k(x)|_{x \gtrsim x_h} \equiv e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} \dot{h}_k^\ominus(x) \propto e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} \left( \frac{x - x_h}{d^3} \right)^{-\frac{3}{4} - \frac{i\omega}{2c\kappa}} e^{-\frac{2}{3}i \left( \frac{|x - x_h|}{d} \right)^{3/2}}, \quad (4.126)$$

$$h_k(x)|_{x \lesssim x_h} \propto (h_k^\oplus(x) - ie^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} h_k^\ominus(x)). \quad (4.127)$$



(a) Evolução dos modos positivos em um espaço-tempo de Schwarzschild.



(b) Evolução dos modos negativos em um espaço-tempo de Schwarzschild.

Figura 4.9

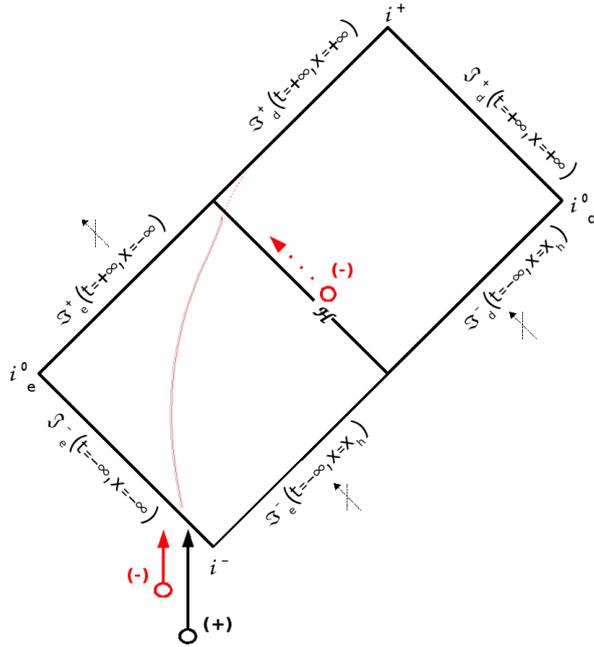
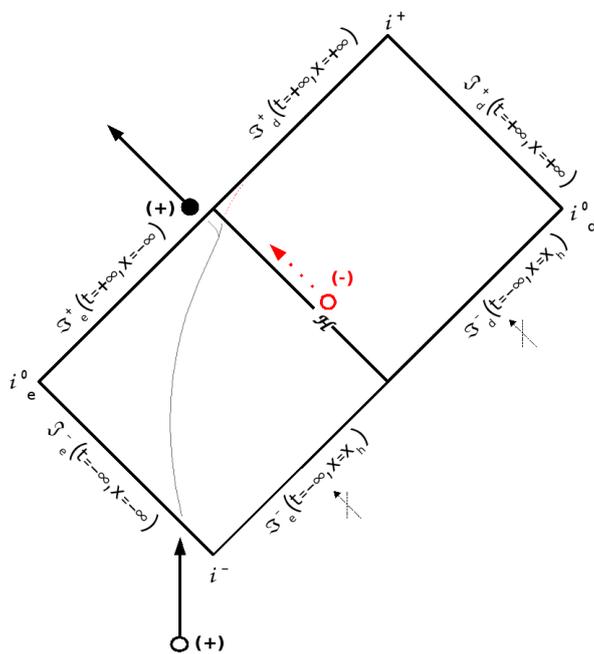


Figura 4.10: Diagrama espaço-temporal correspondente a evolução das soluções (4.126-4.127).

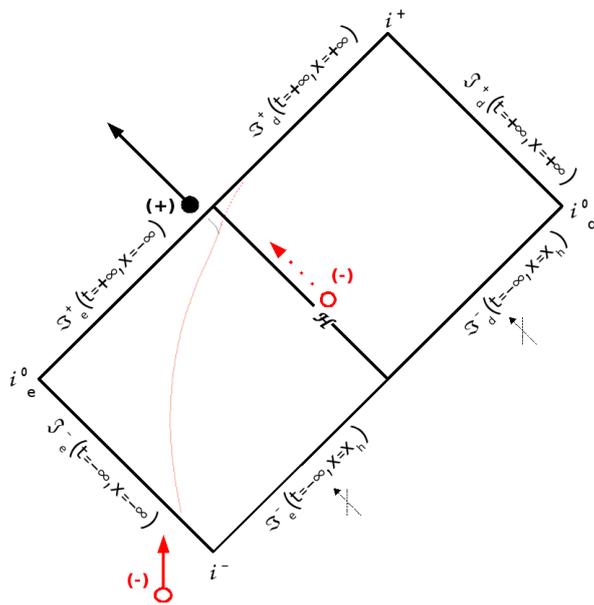
Representamos essa solução no diagrama da figura 4.10. Note que ela não contém modos de baixos números de onda  $h_k^\bullet(x)$ , representando tão somente um par de modos *in*, de frequência positiva e negativa, com o peso relativo exato para que no horizonte convertam-se totalmente em um modo transmitido de frequência negativa. Esse último está representado, na fig. 4.7, pelo círculo aberto tracejado vermelho (da reta em  $v = 1$ ), e chamamos atenção a tal fato pelo sobrescrito “ $\dot{h}$ ” em (4.126). Em uma reta com  $v > 1$  (não grafada na figura) tais modos seriam ainda mais centrados na região a baixos  $k$ , onde por mais que possam ter velocidade de grupo alta (e.g.,  $F(k) \sim k$ ), seu aprisionamento dentro do horizonte os “arrastam” inexoravelmente para  $x \rightarrow \infty$ .

Temos então duas soluções, (4.121) que representa a produção da partícula Hawking emitida, e (4.126)-(4.127) que representa o elemento do par absorvido. Como ambas possuem somas de modos positivos e negativos em  $x \lesssim x_h$ , podemos fazer combinações lineares entre (4.121) e (4.127), de modo a obter somente modos *in* positivos (ou negativos). Ou seja, temos a configuração análoga à da fig. 4.9a, com a propagação de um modo *in* positivo, que ao chegar ao horizonte de eventos dá origem a um modo de frequência positiva “refletido”<sup>22</sup> e a um modo de frequência

<sup>22</sup>De fato, nesse caso esse modo é consequência da parte do pulso que, ao sofrer redshift, passa a números de onda menores (com maior velocidade de grupo) e escapa ao infinito. Assim, ao contrário do modo equivalente para o caso de buracos negros eternos (fig. 4.9), onde têm-se um



(a) Modos gerados por uma combinação linear dos modos (4.121) e (4.127), e.g., soluções (4.128-4.129).



(b) Modos gerados pela outra possível combinação linear, e.g., soluções (4.130-4.131).

Figura 4.11: Soluções análogas ao caso de Schwarzschild (fig. 4.9) para o caso superluminal.

negativa absorvido

$$h_k(x)|_{x \gtrsim x_h} = e^{-\frac{\pi\omega}{c\kappa}} \ddot{h}_k^\ominus(x), \quad (4.128)$$

$$h_k(x)|_{x \lesssim x_h} = h_k^\bullet(x) + e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{3\pi\omega}{2c\kappa}} \frac{\sqrt{2\pi/d^3}}{\Gamma(-\frac{i\omega}{c\kappa})} h_k^\oplus(x), \quad (4.129)$$

cujo diagrama está representado na fig. (4.11a). Ou, pela outra possível combinação linear, obtemos a propagação de um modo *in* negativo em direção ao horizonte,

$$h_k(x)|_{x \gtrsim x_h} = e^{\frac{\pi\omega}{c\kappa}} \ddot{h}_k^\ominus(x), \quad (4.130)$$

$$h_k(x)|_{x \lesssim x_h} = h_k^\bullet(x) + e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2\pi/d^3}}{\Gamma(-\frac{i\omega}{c\kappa})} h_k^\ominus(x), \quad (4.131)$$

cujo diagrama está representado na fig. (4.11b).

### Caso superluminal

Até aqui discutimos tão somente casos de relações de dispersão subluminais (4.96) e (4.113), uma vez que no referencial de queda livre as perturbações propagam-se com  $v'_g = d\omega'/dk \leq c$ . Mas tal requerimento não é necessário. É também comum encontrar-se materiais nos quais a propagação de perturbações de alta frequência tem maior velocidade que as de grande comprimento de onda, tal como condensados de Bose-Einstein (ver §3.2). Como uma relação de dispersão “superluminal”, e.g.,  $v'_g \geq c$ , modificaria os resultados acima?

Embora a descrição do processo de emissão de partículas seja diferente, a radiação Hawking mantém-se igualmente válida em sistemas superluminais. Tomando como exemplo o caso da relação de dispersão

$$(\omega')^2 = c^2 F^2(k) = c^2(k^2 + (k^4/k_0^2)), \quad (4.132)$$

pode-se ter uma idéia, qualitativa, do processo de emissão por meio da figura 4.12. Nela vemos que um modo *out* em  $\mathfrak{S}^+$  (círculo sólido), idêntico ao usado na simulação subluminal, igualmente tem origem em modos *in* de frequência positiva e negativa (círculos vazio preto e vermelho). Porém, agora esses modos *in* não mais abordam o horizonte vindo da região assintótica externa  $v < c$ , mas vindo de *dentro* do horizonte de eventos, da região assintótica  $v > c$ . Ou seja, tratam-se de modos que, por serem superluminais, conseguem propagar-se no sentido de aproximar-se do horizonte de eventos a partir de sua região interna. Ao aproximar-se do horizonte de eventos, sofrem um redshift tal que um modo correspondente à partícula Hawking (círculo cheio) escapa à região assintótica externa ( $v < c$ ) com baixos números de onda ( $k \propto \mathcal{O}(\omega) \rightarrow F(k) \approx k$ ), e seu par (círculo vazio pontilhado vermelho) é arrastado à região assintótica interna ( $v > c$ )<sup>23</sup>. Uma descrição analítica desse

---

modo legitimamente refletido, seria mais correto dizer que esse é um modo que “escapa”.

<sup>23</sup>O círculo verde, na fig. 4.12, novamente corresponde a modos refletidos por variação do potencial efetivo e, assim como no caso subluminal, não tem papel relevante.

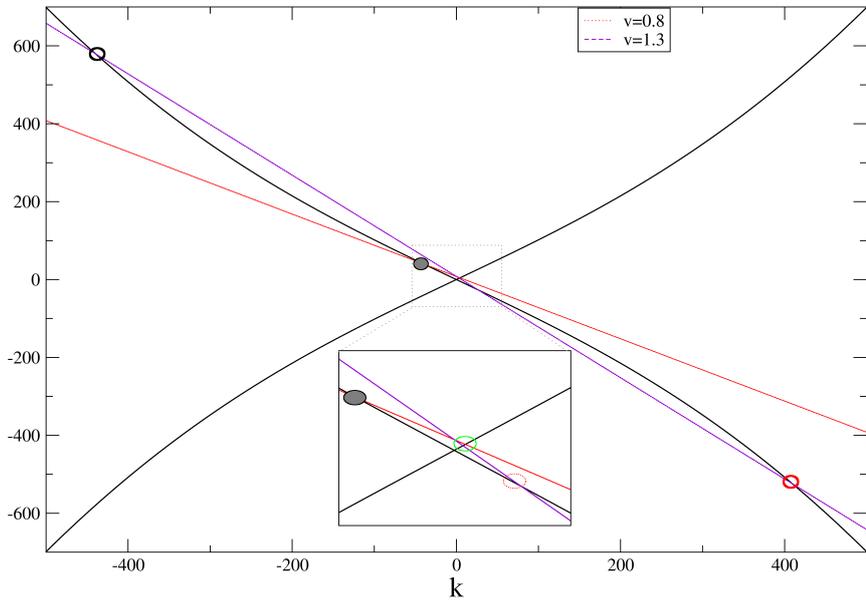
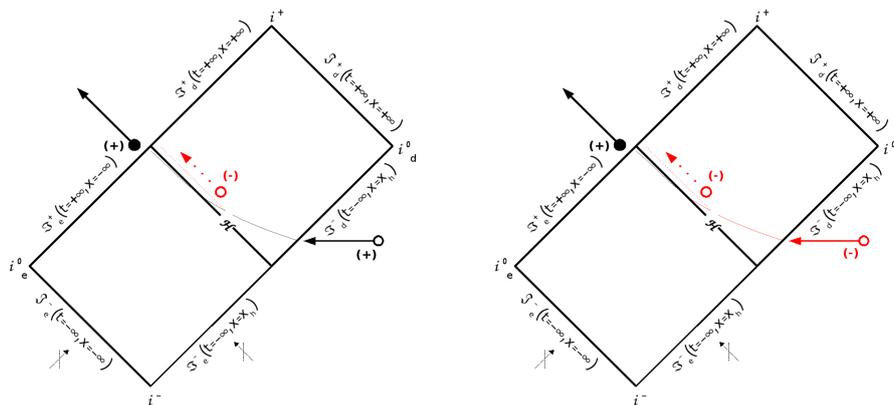


Figura 4.12: Solução gráfica para a equação  $\omega = \pm c|F(k)| = \omega - vk$ , agora para o caso superluminal 4.132.



(a) Equivalente superluminal da fig. 4.11a. (b) Equivalente superluminal da fig. 4.11b.

Figura 4.13: Soluções análogas ao caso de Schwarzschild (fig. 4.9).

processo pode ser obtida pelas mesmas técnicas usadas anteriormente [62], da qual podemos igualmente representar o processo de criação de partículas pelos diagramas das figuras 4.13a e 4.13b, análogo aos diagramas 4.11a e 4.11b.

## Generalização

Em resumo, os passos básicos do método analítico consistem em resolver-se o problema em seu espaço recíproco (i.e., passagens (4.115-4.116)), e obter a solução final por meio da transformada de Laplace (i.e., (4.119)). Uma extensão da demonstração acima, como detalhada em [32], é possível por meio de considerações gerais a respeito da relação de dispersão  $F(k)$ . Além de hipóteses matemáticas que garantem a analiticidade do problema, a tradução física dos requerimentos que uma função  $F(k)$  qualquer deve atender, para garantir o efeito Hawking, podem ser resumidas como:

- **Referencial de queda livre.** Uma vez que a invariância local de Lorentz seja quebrada pela introdução de uma função  $F(k)$  não trivial, cria-se um referencial privilegiado, que será aquele onde a física da “escala de Planck” (e.g., para modos  $k \approx k_0$  nos exemplos anteriores) é maximalmente simétrica. O requerimento que  $F(k)$  deve obedecer é o de que o referencial privilegiado seja o referencial de queda livre. Note-se que nos casos tratados anteriormente sempre definiu-se  $F(k)$  por meio da relação de dispersão natural para observadores em queda livre  $(\omega')^2 = c^2 F^2(k)$ .
- **Estado fundamental.** Assume-se que as excitações correspondentes a modos de frequência  $k \gtrsim k_0$ , ou seja, modos na escala de Planck, estejam em seu estado fundamental (com respeito a observadores em queda livre).
- **Evolução adiabática.** Supõe-se que a evolução dos modos Planckianos é adiabática. Ou seja, a dinâmica dos graus de liberdade à escala de Planck, independente da física que os governe, deve operar em uma escala de tempo muito mais rápida que todas as variações do sistema que ocorrem em escalas de tempo menores, tais como a escala na qual forma-se o horizonte de eventos.

Certamente as condições acima são suficientemente genéricas para garantir a robustez do efeito Hawking. Porém, também não é difícil achar contra-exemplos que não atendam a pelo menos um desses requerimentos. De fato, há na literatura exemplos de modelos análogos que foram inicialmente propostos em vista a reproduzirem radiação Hawking [58], mas subseqüentemente demonstrou-se serem análogos puramente clássicos, onde a criação de partículas em espectro térmico não se faz possível [59].

# Capítulo 5

## Efeitos de backreaction

No capítulo anterior descrevemos como o efeito Hawking ocorre em espaços-tempos efetivos onde as perturbações são quantizadas. Como consequência de propriedades intrínsecas a muitos modelos análogos, tais como suas relações de dispersão não triviais, pudemos investigar como uma questão fundamental, o problema trans-planckiano, pode ser tratado nessa perspectiva. Nosso objetivo nesse capítulo será investigar como outra questão, o problema do backreaction, também pode ser investigada em modelos análogos. Tal discussão será baseada em trabalho próprio [69, 70], que pode ser consultado para maiores detalhes no anexo II.

### 5.1 Backreaction em espaços-tempos curvos

Uma aproximação usual em teoria quântica de campos em espaços curvos, e que fora tomada nas deduções apresentadas no capítulo 4, é a de se considerar o espaço-tempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g}_{\mu\nu})$  de fundo como uma propriedade fixa, sobre a qual propagam-se os campos de matéria. Da mesma maneira que se justifica a propagação de uma partícula teste clássica em um espaço-tempo clássico [71], tal aproximação é verdadeira quando a densidade de energia e momento associada ao campo  $\phi$  é muito menor que a associada, por exemplo, à estrela de massa  $M$  que gera esse espaço-tempo,  $T_{\mu\nu}^{\phi} \ll T_{\mu\nu}^M$ .

Tal aproximação é certamente verdadeira para buracos negros macroscópicos, onde a radiação Hawking emitida é insignificante em relação à sua massa total. Mas uma vez que se queira acompanhar a evolução desse buraco negro até seus estágios finais de evaporação, faz-se necessário incorporar correções vindas do backreaction que o campo exerce sobre o espaço-tempo. Separando as contribuições ao tensor de energia momento entre sua parte clássica,  $T_{\mu\nu}^{cl}$ , e as flutuações quânticas que ocorrem sobre o mesmo,  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ , temos que a dinâmica desse espaço-tempo é descrita

pela equação semi-clássica de Einstein<sup>1</sup>

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu}^{cl} + \langle T_{\mu\nu} \rangle). \quad (5.1)$$

Voltando ao exemplo do buraco negro macroscópico, a energia absorvida pelo mesmo, como medida no infinito, é dada por

$$E = \int \langle T_{\mu\nu} \rangle \xi^\mu d\Sigma^\nu, \quad (5.2)$$

onde  $\xi^\mu$  é o vetor de Killing tipo-tempo desse espaço-tempo e  $d\Sigma^\mu$  o elemento de área da hiperfície tridimensional definida pelo seu horizonte de eventos. Para um buraco negro de Schwarzschild,  $\xi^\mu = \delta_t^\mu$  e  $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$ , sendo  $n^\mu = (1 - 2M/r)^{1/2} \delta_r^\mu$  o quadrivetor unitário na direção radial e  $d\Sigma = (1 - 2M/r)^{1/2} r^2 d\Omega dt$  o elemento de área da hiperfície de  $r$  constante. Levando isso à eq. (5.2), temos que o fluxo  $F$  de energia absorvida pelo buraco negro é dado por

$$F = \frac{dE}{dt} = \int \langle T_t{}^r \rangle r^2 d\Omega. \quad (5.3)$$

Assumindo agora que esse espaço-tempo evolua de maneira adiabática, de modo que se permita à massa do buraco negro variar no tempo  $M = M(t)$ , pode-se deduzir que a componente do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  relevante nesse caso terá a forma

$$G_t{}^r = \frac{2}{r^2} \frac{dM}{dt}. \quad (5.4)$$

Uma vez que a componente clássica  $(T_{cl})_t{}^r = 0$ , a equação de Einstein nos diz que  $G_t{}^r = 8\pi \langle T_t{}^r \rangle$ , que inserimos na eq. (5.3) para obter

$$F = \int \langle T_t{}^r \rangle r^2 d\Omega = \frac{dM}{dt}. \quad (5.5)$$

Por conservação de energia esse fluxo deve compensar o fluxo de radiação emitido ao infinito, que por ser térmico é dado pela luminosidade  $L \sim AT_H^4 \sim 1/M^2$  (onde  $A$  é a área do horizonte de eventos), tal que

$$\frac{dM}{dt} \sim -\frac{1}{M^2}. \quad (5.6)$$

Ou seja, levando essa estimativa até o final do processo, teríamos que o buraco negro evaporaria em uma escala de tempo  $t \sim G^2 M^3 / (\hbar c^4)$ , onde reinserimos as unidades internacionais. De fato, porém, o que essa estimativa representa é a escala de tempo após a qual esse cálculo certamente não é mais válido.

Para obter uma descrição mais completa e detalhada dos estágios finais da evaporação, é necessário resolver a equação (5.1) de maneira auto-consistente. Esse

---

<sup>1</sup>Essa equação pode ser derivada formalmente como uma correção em 1-loop ao valor esperado da métrica em uma expansão sobre uma solução clássica [6].

é um problema difícil por várias razões. Uma delas é o fato de que o próprio cálculo de  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  é bastante complicado, mesmo para os casos mais simples de espaços-tempos estáticos simétricos e em estado de vácuo. Para espaços-tempos genéricos que evoluem dinamicamente os desafios mostraram-se, até hoje, insuperáveis. Outra dificuldade reside na existência de derivadas da métrica de até quarta ordem em (5.1). Esse fato, além de dificultar a resolução da equação, leva a existência de soluções espúrias, onde condições iniciais razoáveis por vezes levam a um comportamento explosivo em tempo finito, de modo análogo ao que acontece com as equações de movimento de cargas em eletrodinâmica clássica (quando se considera o termo de reação à radiação [72], que introduz derivadas de quarta ordem). Mesmo em eletrodinâmica esse não é um problema completamente solucionado, e seu análogo em relatividade geral introduz dificuldades extras que são um tópico atual de pesquisa [73].

Apesar das dificuldades envolvidas, importantes questões dependem de um melhor entendimento do backreaction. Por exemplo:

- (i) No quadro descrito acima para a evaporação, buracos negros violam as leis de conservação do número bariônico e leptônico de maneira contundente, uma vez que a radiação Hawking é simétrica em termos de bárions e antibárions emitidos, independentemente do número de bárions existentes na estrela que deu origem ao buraco negro. Assim, por exemplo, uma estrela de nêutrons de massa solar ( $N_{\text{bárions}} \gtrsim 10^{57}$ ), que colapse em um buraco negro, teria esse número bariônico totalmente violado ao final de sua evaporação.
- (ii) Outro problema ainda mais fundamental refere-se a perda de coerência induzida pela evaporação do buraco negro, também conhecido como o “paradoxo da informação”. Grosso modo, o paradoxo consiste na percepção de que a radiação Hawking emitida durante o processo de evaporação, sendo térmica (logo não fornecendo nenhuma outra informação além da temperatura do buraco negro), não irá devolver nenhuma informação de volta ao universo. Ou seja, evoluem-se estados iniciais puros, onde têm-se acesso a toda informação, para estados mistos. Esse tipo de evolução não unitária é fonte de um intenso debate na literatura [4].
- (iii) Outra questão importante dentro do escopo da relatividade geral é a conjectura de censura cósmica, que prevê que não haveria singularidades nuas na natureza [74] em condições genéricas. Recentemente G. Matsas e A. Silva [75] demonstraram que a gravitação semiclássica também pode tocar esse problema, ao apontar um mecanismo pelo qual excitações de um campo quantizado à volta de um buraco negro tem potencial para transformá-lo em uma singularidade nua. Como apontado em [75] e discutido em maiores detalhes em [76, 77], efeitos de backreaction tem um papel importante para que se possa concluir, definitivamente, se mecanismos semi-clássicos de fato realizam uma singularidade nua.

Estamos interessados aqui em investigar como efeitos de backreaction ocorrem também em modelos análogos. Por exemplo, como podem afetar as conclusões obtidas em relação a radiação Hawking análoga? Há alguma analogia para com o paradoxo da informação? Como podemos tratar as dificuldades de cálculo nesses modelos? E, o mais importante, até que ponto a analogia mantém-se plausível como um modelo da física de gravitação?

## 5.2 Um modelo para o backreaction

Propomos, a seguir, um modelo análogo que captura importantes características presentes em modelos análogos, ao mesmo tempo que permite uma solução aproximada analítica para o problema do backreaction. A discussão abaixo visa ser complementar ao apresentado no anexo II.

### 5.2.1 Escolhendo uma lagrangiana

Em §4.3.1 apresentou-se a lagrangeana para a equação de onda modificada, eq. (4.92), a partir da qual contruiremos nosso modelo. De (4.92) podemos escrever a densidade hamiltoniana para o campo como

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{2}[\pi_\phi^2 + (\partial_x \phi)^2] - \pi_\phi v \partial_x \phi + [F'(i\partial_x)\phi]^2, \quad (5.7)$$

onde  $F'(k) \equiv F(k) - k$ .

Os resultados discutidos no capítulo §4, em que se leva em conta o efeito das relações de dispersão modificadas, lidam com a equação acima para um perfil de velocidade  $v(x, t)$  dado *a priori*, e sob a hipótese usual no método semiclassical de que o espaço-tempo (ou, nesse caso, o perfil do fluido) de fundo mantenha-se fixo, sendo a radiação Hawking emitida pouco relevante para a evolução do fluido em primeira aproximação. Para ir além dessa hipótese, seria de se esperar que o sistema estivesse acoplado às equações do fluido, e.g., a equação de Euler (3.9) e da continuidade (3.10), que descrevem a evolução do campo de velocidade, de maneira análoga à equação (5.1). Porém, as dificuldades técnicas em se tratar o backreaction nesse sistema também são consideráveis, sem que haja maiores ganhos em termos de aplicabilidade, uma vez que um análogo com um fluido clássico tem poucas chances de ser realizado em laboratório. Seguiremos então uma outra abordagem, e escolheremos trabalhar com a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{\rho_\phi}{c_\phi^2} \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_t \phi + v(t, x) \partial_x \phi)^2 - c_\phi^2 (\partial_x \phi)^2 - [c_\phi F'(i\partial_x)\phi]^2] - \gamma v^4 (\partial_x \phi)^4 \right\} + \mathcal{L}_v, \quad (5.8)$$

onde<sup>2</sup>

$$\mathcal{L}_v = \frac{\rho_v}{w_0^2} \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_t v)^2 + c_v^2 (\partial_x v)^2] - w_0^2 c_v^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{v}{c_v}\right) \right] \right\} \quad (5.9)$$

é a lagrangeana de um campo de sine-Gordon. A escolha por uma equação de sine-Gordon nesse ponto é feita para tornar o tratamento mais explícito, pois há outros campos que dão origem a sólitons e que apresentam resultados similares aos que serão discutidos aqui. Note-se que diferenciamos agora entre as constantes  $c_\phi$  e  $c_v$  de ambos os campos, uma vez que em princípio elas não precisam ser iguais. Por outro lado as densidades  $\rho_v$  e  $\rho_\phi$  podem ser tomadas  $\rho_\phi = \rho_v = \rho$  sem perda de generalidade, de modo que as desconsideraremos no que segue. A adição do termo  $\gamma v^4 (\partial_x \phi)^4$  (sendo  $\gamma$  uma constante positiva) será explicada em breve. A constante  $w_0$  define uma escala para o campo de sine-Gordon e é intrínseca à sua definição.

A idéia geral por trás dessa escolha é a de tratar o campo  $\phi(t, x)$  como um campo de pequenas amplitudes propagando-se sobre um campo de grandes amplitudes  $v(t, x)$ , mantendo semelhança com o que já acontecia quando as equações do fluido descreviam o sistema. Uma diferença agora é que o campo  $v(t, x)$ , não fosse pelo campo  $\phi(t, x)$ , seria um campo de sine-Gordon usual sujeito à invariância de Lorentz. Dada a solução tipo kink usual para campos de sine-Gordon, podemos visualizar uma configuração onde o campo  $\phi$  esteja propagando-se sobre uma solução tipo kink assim como descrito na figura 5.1. Tal solução é descrita por

$$v = -4c_v \arctan\left(e^{-\frac{w_0}{c_v} x}\right), \quad (5.10)$$

onde a posição exata  $x_h$  para o horizonte sônico  $v = c_\phi$  depende da escolha dos parâmetros  $c_v$  e  $w_0$  a ser discutida mais tarde.

A densidade hamiltoniana desse modelo é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{c_\phi^2}{2} (\pi_\phi^2 + (\partial_x \phi)^2) - \pi_\phi v \partial_x \phi + \frac{\gamma}{c_\phi^2} v^4 (\partial_x \phi)^4 + [F'(i\partial_x)\phi]^2 + \mathcal{H}_v, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{H}_v = \frac{w_0^2}{2} \pi_v^2 + \frac{1}{2w_0^2} (c_v \partial_x v)^2 + c_v^2 \left[ 1 - \cos\left(\frac{v}{c_v}\right) \right], \quad (5.12)$$

e é uma quantidade positivo definida, o que justifica a introdução do termo em  $\gamma$ , que garante tal requerimento (ver anexo II-1).

Do ponto de vista de teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos, estamos agora aptos a repetir os passos que levam à emissão de radiação Hawking no sistema descrito por  $\mathcal{L}$ . A quantização do campo  $\phi$  sobre um campo de fundo  $v(x, t)$  que apresente um horizonte (onde  $c_\phi = v$ ) irá levar-nos aos mesmos resultados já obtidos para análogos que apresentam relações de dispersão modificada. Em particular, teremos uma relação de dispersão superluminal dada por

---

<sup>2</sup>Note que o campo denominado por  $v(t, x)$  na eq. (5.9) é denominado como  $\psi(t, x)$  no anexo II. Usaremos aqui a notação  $v(t, x)$  para reforçar o paralelo com o campo de velocidades de um fluido usado nos capítulos anteriores.

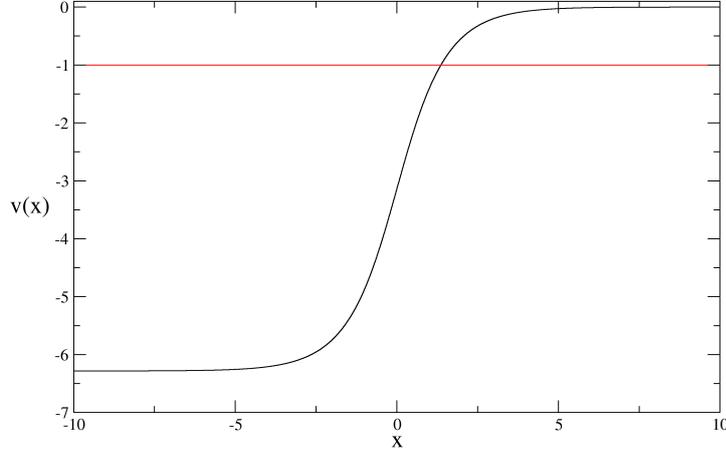


Figura 5.1: Gráfico do perfil do kink, eq. (5.10), para os parâmetros ilustrativos  $w_0 = c_v = c_\phi = 1$ . A linha horizontal representa  $-c_\phi$ , e seu ponto de contato com o kink marca a posição do horizonte sônico.

$(\omega - vk)^2 = c_\phi^2 k^2 + (c^2 F(k)''/2)k^4$ , sob a qual a radiação Hawking terá origem na transformação de modos  $k \gtrsim (F(k)'')^{-1/2}$  internos ao horizonte de eventos, como descrito em §4.3.3.

Por outro lado, do ponto de vista de teoria de campos “padrão” (ou seja, sem considerações de espaços curvos e no formalismo usual, e.g., na descrição de um observador no laboratório), a lagrangeana usada é em princípio um sistema bem definido onde podemos ter controle de todas variáveis - de tal modo que estaríamos aptos a explorar as questões mencionadas anteriormente.

Ainda outra motivação para usarmos o modelo considerado aqui reside nos vários exemplos de modelos análogos em que o espaço-tempo efetivo é gerado por uma configuração tipo sóliton, e.g., ver §3.2.

## 5.2.2 Equações de movimento

A partir da eq. (5.8) podemos calcular as equações de movimento para  $\phi(t, x)$  e  $v(t, x)$ , obtendo

$$(\partial_t + \partial_x v)(\partial_t + v\partial_x)\phi = c_\phi^2 \frac{\partial}{\partial x} [\partial_x \phi + \alpha \partial_x^3 \phi + 4\gamma v^4 (\partial_x \phi)^3], \quad (5.13)$$

$$\partial_t^2 v - c_v^2 \partial_x^2 v = -\frac{\partial}{\partial v} \left\{ w_0^2 c_v^2 \left(1 - \cos\left(\frac{v}{c_v}\right)\right) - \frac{w_0^2}{c_\phi^2} \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \phi + v \partial_x \phi)^2 - \gamma v^4 (\partial_x \phi)^4 \right] \right\}, \quad (5.14)$$

onde se fez uso da expansão de  $F(k)$  até segunda ordem. É fácil notar a similaridade entre as eqs. (5.13) e (4.89), como deveria ser. A única diferença provém do termo em  $\gamma$ , que por sua vez pode ser, dependendo da aproximação requerida, ignorado ou incorporado como parte da relação de dispersão efetiva presenciada pelos modos normais do campo  $\phi(t, x)$ . Dada a grande independência que a radiação Hawking possui em relação a detalhes da função de dispersão, esse passo não trará maiores conseqüências dentro das aproximações a serem consideradas. Em relação à eq. (5.14), vemos que o acoplamento ao campo  $\phi(t, x)$  aparece como uma mudança no potencial efetivo que governa a evolução de  $v(t, x)$ . Também aqui podemos ignorar em primeira aproximação os termos de maior ordem associados ao fator  $\gamma$ .

Queremos tratar do caso onde  $\phi(t, x)$  e  $v(t, x)$  são, de fato, campos quantizados. Para tanto podemos tomar as equações acima (5.13) e (5.14), sob as aproximações apontadas, como equações de valores esperados para um determinado estado quântico  $|\psi\rangle$ , levando à

$$\partial_t^2 \langle v \rangle_\psi - c_v^2 \partial_x^2 \langle v \rangle_\psi = -w_0^2 c_v \text{sen}(\langle v \rangle_\psi / c_v) + \frac{w_0^2}{c_\phi^2} [\partial_t \langle \phi \rangle_\psi + \langle v \rangle_\psi \partial_x \langle \phi \rangle_\psi] \partial_x \langle \phi \rangle_\psi. \quad (5.15)$$

Resolver a eq. (5.15) é o primeiro passo para que possamos traçar que efeitos de backreaction a emissão térmica leva ao campo  $v(t, x)$ , que é o campo que produz a métrica de fundo presenciada pelos modos de baixa energia (ou seja, os modos “não trans-planckianos”) do campo  $\phi(t, x)$ . Para tanto faz-se necessário explicitar o estado  $|\psi\rangle$  usado, o que faremos a seguir.

### 5.2.3 Tensor energia-momento

É interessante notar que o termo em  $[\partial_t \langle \phi \rangle_\psi + \langle v \rangle_\psi \partial_x \langle \phi \rangle_\psi] \partial_x \langle \phi \rangle_\psi$ , na eq. (5.15), representa um termo fonte se comparado a equação de sine-Gordon usual. Ou seja, é o termo responsável por exercer uma “força” atuando sobre o horizonte de eventos, de maneira a alterá-lo. Uma pergunta interessante é: de onde vem essa “força”?

Essa pergunta é ambígua no caso de um modelo análogo baseado nas equações da hidrodinâmica, como o modelo original proposto por Unruh, pois ali há um fluxo constante de energia e momento entrando e saindo do sistema (para que se possa manter o horizonte de eventos). Porém, nosso modelo é um sistema fechado onde o kink é um objeto bem localizado, tal que a origem da atuação de momentos e forças é, em princípio, identificável.

A maneira usual de se identificar fluxos de energia e momento é através do tensor de energia-momento. No entanto, como apontado em §3.1, temos duas possíveis escolhas para construí-lo nesse caso. A primeira, natural do ponto de vista de teoria quântica de campos usual, é obtê-lo a partir da lagrangeana completa (5.8), como uma derivada funcional com respeito à métrica de Minkowski. Chamaremos esse tensor de  $\mathcal{T}_\nu^\mu$ . Uma vez que a parte da lagrangeana em  $\phi$  (que nomeamos por  $\mathcal{L}_\phi$ )

não contêm derivadas do campo  $v$ , temos

$$\mathcal{T}_\nu^\mu = \mathcal{T}_\nu^\mu[v] + \mathcal{T}_\nu^\mu[\phi] = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_v}{\partial(\partial_\mu v)} \partial_\nu v - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_v \right] + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_\phi \right]. \quad (5.16)$$

É claro que em um esquema de renormalização pertinente, a soma de ambas contribuições deve se conservar,  $\partial_\mu \langle \mathcal{T}_\nu^\mu \rangle = 0$ , porém cada parte em separado não se conserva em geral, e.g.,  $\partial_\mu \langle \mathcal{T}_\nu^\mu[v] \rangle = -\partial_\mu \langle \mathcal{T}_\nu^\mu[\phi] \rangle \neq 0$ . Ou seja, haverá troca de energia e momento entre os dois campos, que é justamente o efeito de backreaction que procuramos descrever.

Outra possível escolha para construir o tensor de energia momento, natural dentro do formalismo de teoria quântica em espaços curvos, é dado pela derivada funcional da lagrangeana  $\mathcal{L}_\phi$  com respeito a métrica efetiva (uma vez que esse campo é o que enxerga o espaço-tempo efetivo), dado pela eq. (3.8),  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}[\langle \phi \rangle]}{\delta g^{\mu\nu}}$ . Esse de fato é o tensor de pseudo<sup>3</sup> energia-momento [52], uma vez que ele geralmente não descreve o momento e a energia reais presentes no sistema, muito embora a *diferença* de momento e energia calculadas por ele (de modo a obter as forças atuantes no sistema) é, em muitos casos, equivalente à calculada por meio do tensor de energia momento  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ . De fato o formalismo de espaços-tempos efetivos, do ponto de vista de mecânica de fluidos, representa uma maneira estruturada de derivar as leis de conservação de pseudo energia e pseudo momento quando o fluido de fundo move-se [52].

Uma vantagem do modelo usado aqui reside no fato de que, embora os dois tensores  $T_{\mu\nu}$  e  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  sejam definidos com respeito a diferentes métricas, tal que em geral  $T_{\mu\nu} \neq \mathcal{T}_{\mu\nu}$ , pode-se deduzir que os componentes *mistos* coincidem  $T_\nu^\mu = \mathcal{T}_\nu^\mu$  (tal coincidência não ocorre em modelos tais como o de fluidos, do capítulo anterior). De fato, é ainda possível mostrar a equivalência

$$\langle T_x^t \rangle = \langle \mathcal{T}_x^t \rangle = \frac{1}{c_\phi} [\partial_t \langle \phi \rangle_\psi + \langle v \rangle_\psi \partial_x \langle \phi \rangle_\psi] \partial_x \langle \phi \rangle_\psi, \quad (5.17)$$

que é justamente o termo fonte em (5.15).

Agora, uma vez que o campo  $\phi(t, x)$  está sujeito ao formalismo de teoria quântica de campos em espaços curvos, podemos partir do estado quântico que corresponde a emissão de radiação Hawking (que já sabemos de antemão ser possível em tal configuração, pelo exposto em §4.3.3). Somando a esse fato o resultado (5.17) acima, concluímos que podemos calcular as quantidades  $\langle \phi \rangle_\psi$  e  $\langle T_x^t \rangle$  por seus valores

---

<sup>3</sup>Um exemplo notório se dá no caso de fótons propagando-se em dielétricos, onde por décadas discutiu-se se seu momento é dado pela fórmula de Minkowski,  $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ , ou pela fórmula de Abraham,  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$ . Sabe-se hoje que a expressão de Minkowski descreve o pseudo-momento do fóton, enquanto a de Abraham descreve seu momento “real” [52, 78]. Igualmente, Campbell et al [79] mostraram recentemente que o momento adquirido por átomos, em condensados de Bose-Einstein, pela absorção de fótons é dado por  $n\hbar k$  (e.g., o pseudo-momento) em contraste ao momento real de fótons  $\hbar k$  [79, 80].

esperados no espaço-tempo curvo correspondente dado o estado quântico apropriado, que nesse caso é o vácuo de Unruh.

Em resumo, para resolver a eq. (5.15) precisamos primeiro determinar sua forma exata, e para tanto faz-se necessário calcular o tensor de energia-momento no espaço-tempo de fundo providenciado pelo perfil inicial  $\langle v \rangle_\psi$  dado por (5.10).

O cálculo do tensor energia-momento para o buraco negro de Schwarzschild 1+1-dimensional foi primeiro realizado por Fulling, Davies e Unruh [81]. Utilizando-se do mesmo método de point-splitting adotado por esses autores, realizamos tal cálculo para um espaço-tempo 1+1-dimensional geral dado pela métrica da eq. (3.20), nos estados de vácuo mais usuais na literatura (Boulware, Unruh e Hartle-Hawking). O resultado para o estado de vácuo de Unruh:

$$\langle T_1^0 \rangle = \frac{v}{12\pi c_\phi^2 (1 - \frac{v^2}{c_\phi^2})^2} [\kappa^2 - (\partial_x v)^2 - (1 - \frac{v^2}{c_\phi^2}) v \partial_x^2 v] - \frac{\kappa^2}{48\pi c_\phi (1 - \frac{v}{c_\phi})^2}, \quad (5.18)$$

onde  $\kappa = \partial_x v|_{v=c_\phi}$  é, assim como nos casos anteriores, a “gravidade superficial” associada ao horizonte de eventos. É interessante notar que a eq. (5.18) é uma quantidade bem definida para  $v \rightarrow -c_\phi$ , mas divergente para  $v \rightarrow +c_\phi$ . A razão para tal se deve ao fato de que para  $v < 0$  nossas coordenadas de Painlevé-Gullstrand cobrem o horizonte futuro do espaço-tempo, que no vácuo de Unruh é bem comportado. Já para  $v > 0$  tais coordenadas cobrem o horizonte passado, que no vácuo de Unruh é verdadeiramente singular. Uma vez que fizemos a escolha da solução anti-kink (5.10), onde  $v(t, x)$  cruza apenas com o valor bem comportado de  $-c_\phi$ , a divergência em  $v \rightarrow +c_\phi$  não traz maiores conseqüências. Uma representação ilustrativa de  $\langle T_x^t \rangle$  é dada na figura 5.2. Vale a pena notar que, diferentemente do vácuo de Unruh para um buraco negro, onde existe sempre a singularidade associada a origem  $r = 0$ , em nosso modelo tal fato não acontece, o que ocasiona um tensor energia-momento bem comportado de  $x = -\infty$  a  $x = \infty$ .

## 5.2.4 Soluções

Usando as eqs. (5.17) e (5.18) em (5.15), obtemos enfim a equação cuja solução nos dá, de fato, nossa primeira aproximação para o problema de backreaction<sup>4</sup>

$$\square v = -w_0^2 c_v \sin\left(\frac{v}{c_v}\right) + \frac{w_0^2}{c_\phi^2} \left( \frac{v}{12\pi c_\phi (1 - \frac{v^2}{c_\phi^2})^2} [\kappa^2 - (\partial_x v)^2 - (1 - \frac{v^2}{c_\phi^2}) v \partial_x^2 v] - \frac{\kappa^2}{48\pi (1 - \frac{v}{c_\phi})^2} \right). \quad (5.19)$$

Antes de procurar por qualquer solução explícita, é interessante apontar outra maneira pela qual se pode visualizar as conseqüências da eq. (5.19). Olhando novamente

---

<sup>4</sup>Para manter a notação mais clara, omitimos a partir daqui os brackets que representam valores esperados.

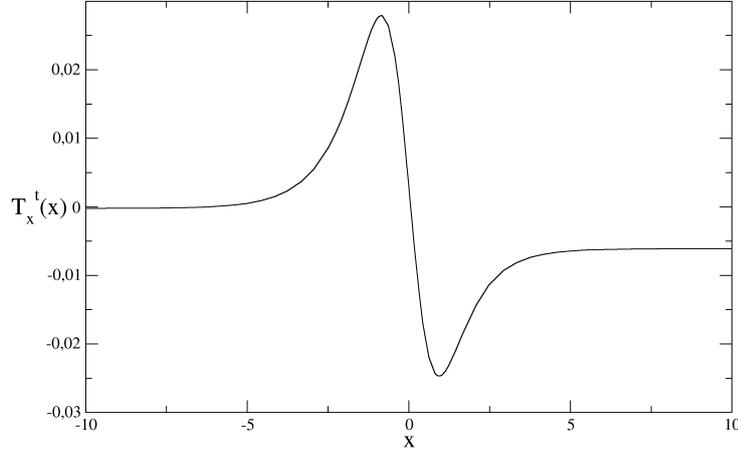


Figura 5.2: Perfil espacial para  $\langle T_x^t \rangle$  com  $v(x)$  dado pela eq. (5.10) e usando-se dos mesmos parâmetros da fig. 5.1.

para a eq. (5.14), podemos redefinir o “potencial do sólito”

$$U(v) = w_0^2 c_v^2 [1 - \cos(v/c_v)], \quad (5.20)$$

para um potencial efetivo

$$U_{\text{ef}}(v) = w_0^2 c_v^2 [1 - \cos(v/c_v)] - w_0^2 \int \frac{dv}{c_\phi} \langle T_1^0 \rangle. \quad (5.21)$$

Ou seja, podemos ver a emissão térmica como implicando em uma correção ao potencial que descreve a dinâmica do kink. A integral acima pode ser realizada por uso direto das eqs. (5.10) e (5.18). Ou, de uma maneira mais geral que não depende de uma solução tipo kink em particular ou do potencial do sólito, pelo uso das eqs. de movimento para o kink não perturbado

$$c_v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v = \frac{\partial}{\partial v} U(v) \rightarrow c_v^2 (\partial_x v)^2 = 2U(v), \quad (5.22)$$

de tal maneira que achamos o potencial efetivo como sendo

$$U_{\text{ef}}(v) = U(v) - \frac{w_0^2}{48\pi c_\phi (1 - \frac{v^2}{c_\phi^2})} \left[ \kappa^2 \left(1 - \frac{v}{c_\phi}\right) - 4U(v) \frac{v^2}{c_\phi^4} \right], \quad (5.23)$$

com a igualdade adicional  $\kappa^2 = 2U(-c_\phi)/c_\phi^2$ . Aqui também vemos que  $U_{\text{ef}}$  é uma quantidade bem definida para  $v \rightarrow -c_\phi$ , enquanto singular para  $v \rightarrow c_\phi$ .

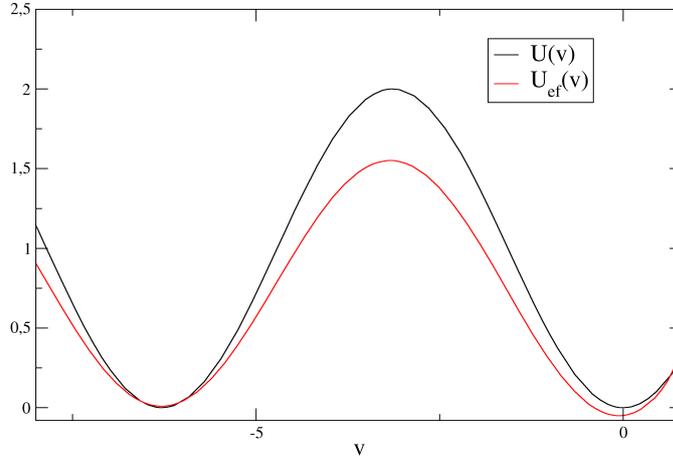


Figura 5.3: Gráfico de  $U_{\text{ef}}(v)$  (vermelho) e  $U(v)$  (azul) como função de  $v$ , usando-se dos mesmo parâmetros da fig. 5.1 (e escala alterada para salientar as características apontadas no texto).

Tal resultado é uma boa aproximação contanto que a correção ao potencial  $U(v)$  permaneça sempre bem menor que o próprio. Um gráfico de  $U_{\text{ef}}(v)$  usando a eq. (5.10) e uma escolha ilustrativa de parâmetros é apresentada na fig. 5.3. O comportamento importante a se notar aqui refere-se ao deslocamento de mínimos do potencial efetivo em relação ao potencial não perturbado. O mínimo presente em  $v = 0$  ( $n = 0$ ) sofre um deslocamento para baixo, enquanto o próximo mínimo ( $n = -1$ ) é deslocado para cima. Ou seja, esse último está se tornando um estado energeticamente desfavorecido. Uma vez que nossa solução anti-kink é uma interpolação entre ambos mínimos, podemos fazer a previsão de que o efeito de backreaction está aparentemente fornecendo momento ao kink, fazendo com que o mesmo mova-se de maneira tal que a solução do tipo  $n = 0$  domine sobre a do tipo  $n = 1$ . Assim, o efeito mais imediato do backreaction à radiação Hawking seria o de exercer um “empurrão” sobre o centro do kink, dando ao mesmo uma velocidade para a esquerda, onde a região ocupada pela solução  $v = -4c_v$  ( $n = -1$ ) começa a receder dando espaço à solução  $v = 0$  ( $n = 0$ ) - o buraco negro “encolhe”.

### 5.2.5 Uma abordagem perturbativa

Tentaremos confirmar os resultados acima procurando por uma solução explícita da eq. (5.19). O caráter não-linear dessa equação traz algumas dificuldades para que se possa achar soluções exatas. Portanto iremos usar um tratamento bem estabelecido na literatura para perturbações sobre soluções tipo kink [82, 83], o qual

revisaremos brevemente aqui.

Dada a equação

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \Psi = - \frac{\partial}{\partial \Psi} U(\Psi), \quad (5.24)$$

onde  $U(v)$  pode ser qualquer potencial solitônico usual (e.g., sine-Gordon), iremos primeiro procurar por uma solução que represente pequenas oscilações sobre a configuração tipo sólton. Isso significa que assumiremos soluções da forma

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) + \psi(x, t), \quad (5.25)$$

sendo  $\Psi_0$  uma solução tipo kink para o sistema. Substituição da eq. (5.25) na eq. (5.24) nos retorna

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \psi + \left. \frac{\partial^2 U(\Psi)}{\partial \Psi^2} \right|_{\Psi=\Psi_0} \psi = 0. \quad (5.26)$$

Por exemplo, usando o  $U(\Psi)$  de sine-Gordon da eq. (5.20), obteríamos

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \psi + w_0^2 \left[ 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{w_0}{c} x \right) \right] \psi = 0. \quad (5.27)$$

Assumindo ainda

$$\psi(x, t) = f(x) e^{-i\omega t}, \quad (5.28)$$

achamos a equação

$$-c^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \left. \frac{\partial^2 U(\Psi)}{\partial \Psi^2} \right|_{\Psi=\Psi_0} f(x) = \omega^2 f(x). \quad (5.29)$$

Agora, em geral, o operador  $D = -c^2 \partial_x^2 + U(\Psi)''$  será um operador auto-adjunto, com soluções  $L^2$  (quadraticamente integráveis). Para nosso exemplo-guia até aqui, a equação auto-adjunta resulta ser

$$\left\{ -c^2 \partial_x^2 + w_0^2 \left[ 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{w_0}{c} x \right) \right] \right\} f(x) = \omega^2 f(x). \quad (5.30)$$

Em outras palavras, reduzimos o problema a resolução de uma equação do tipo Schrödinger com um “potencial”  $w_0^2 [1 - 2 \operatorname{sech}^2(\frac{w_0}{c} x)]$ . Suas soluções são já conhecidas [83], sendo compostas de um estado de modo zero para a qual

$$\omega_z = 0, \quad (5.31)$$

$$f_z(x) = \frac{c}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \left( \frac{w_0}{c} x \right), \quad (5.32)$$

e soluções de modo contínuo

$$\omega_k^2 = c^2 k^2 + w_0^2, \quad (5.33)$$

$$f_k(x) = \frac{c^2}{\sqrt{2\pi\omega_k}} e^{ikx} \left[ k + i \frac{w_0}{c} \tanh \left( \frac{w_0}{c} x \right) \right]. \quad (5.34)$$

Elas formam ainda um conjunto completo que obedece às relações de ortogonalidade<sup>5</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_z(x) f_z(x) dx = \frac{c^3}{w_0}, \quad (5.35)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^*(x) f_{k'}(x) dx = c^2 \delta(k - k'), \quad (5.36)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) f_z(x) dx = 0, \quad (5.37)$$

com relações de completeza dadas por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk f_k^*(x) f_k^*(x') + \frac{w_0}{c} f_z(x) f_z(x') = c^2 \delta(x - x'). \quad (5.38)$$

**Expandindo sobre um conjunto completo de base.** Podemos enfim enunciar o formalismo para o cálculo de uma solução perturbativa para a equação

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \Psi = -\frac{\partial}{\partial \Psi} (U(\Psi)) + P(\Psi), \quad (5.39)$$

onde  $P(\Psi)$  é um termo perturbativo. O conjunto completo acima,  $f_i(x)$ , é construído sobre a equação do sóliton não perturbado, representando de fato flutuações sobre o mesmo. A idéia então é expandir o termo perturbativo  $P(\Psi)$  sobre o espectro de flutuações do sóliton não perturbado, i.e., procuraremos por uma solução do tipo

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) + \psi(x, t), \quad (5.40)$$

onde

$$\psi(x, t) = \psi_z(t) f_z(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(t) f_k(x). \quad (5.41)$$

Agora, pelo uso da eq. (5.41) com as eqs. (5.31)-(5.38) em (5.39), obtemos

$$\partial_t^2 \psi_z(t) = \frac{w_0}{c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx P(\Psi(t, x)) f_z(x) \quad (5.42)$$

para a evolução temporal do modo zero, e

$$\partial_t^2 \psi_k(t) + \omega^2 \psi_k(t) = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx P(\Psi(t, x)) f_k(x) \quad (5.43)$$

para a evolução temporal dos modos contínuos de nossa solução perturbativa. Note-se que o termo perturbativo pode, em princípio, ser uma função do próprio  $\psi(t, x)$ , e.g.,  $P(\Psi(t, x)) = P(\Psi_0(t, x) + \psi(t, x))$ , fazendo com que as eqs. (5.42) e (5.43) representem um intrincado sistema de equações parciais integro-diferenciais acopladas. Vale ainda notar que a estabilidade linear do sóliton e a validade desse esquema perturbativo seguem do fato de que  $(\omega_z, \omega_k)$  são todos não negativos.

---

<sup>5</sup>Tendo em vista objetivos futuros assumimos que  $\Psi(t, x)$  (logo,  $f_i(x)$ ) possui dimensão de velocidade, o que justifica a presença dos fatores  $w_0$  e  $c$ .

## Aplicando o esquema perturbativo

Estamos prontos agora para voltar a procura de uma solução para eq. (5.19). Escrevendo  $v(t, x)$  como

$$v(t, x) = v^{(0)}(t, x) + v^{(1)}(t, x), \quad (5.44)$$

onde  $v^{(0)}(t, x)$  é uma solução para a equação não perturbada (eq. (5.19) sem o segundo termo no seu lado direito), i.e., dada pela nossa eq. (5.10), e  $v^{(1)}(t, x)$  é a correção perturbativa procurada, que pode ser expandida na forma  $v^{(1)}(t, x) = v_z^{(1)}(t)f_z(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dk v_k^{(1)}(t)f_k(x)$  que, de acordo com as eqs. (5.42) e (5.43), nos leva a

$$\partial_t^2 v_z^{(1)}(t) = \frac{w_0^3}{c_v^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{c_\phi} \langle T_x^t \rangle f_z(x), \quad (5.45)$$

$$\partial_t^2 v_k^{(1)}(t) + \omega^2 v_k^{(1)}(t) = \frac{w_0^2}{c_v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{c_\phi} \langle T_x^t \rangle f_k(x). \quad (5.46)$$

Sabemos através da eq. (5.18) que  $T_x^t$  depende de maneira não trivial de  $v(t, x)$  de modo que, em princípio, as equações acima formam um sistema complicado de eqs. diferenciais parciais acopladas. Entretanto, é consistente com as aproximações tomadas até aqui assumir  $T_x^t(v^{(0)} + v^{(1)}) \approx T_x^t(v^{(0)})$  no cálculo do lado direito das eqs. (5.45) e (5.46). Nesse caso a integral na eq. (5.45) será tão somente um fator numérico

$$C \equiv \frac{1}{c_v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{c_\phi} \langle T_x^t \rangle f_z(x), \quad (5.47)$$

a ser calculado numericamente na maioria dos casos, e podemos escrever

$$v_z^{(1)}(t) = \frac{w_0^3 C t^2}{c_v^2 2}. \quad (5.48)$$

É claro que, embora essa seja uma função ilimitada no tempo, sua validade é limitada pelas aproximações assumidas no uso da abordagem perturbativa. Deixando de lado nesse momento as contribuições dos modos contínuos  $v_k^{(1)}(t)$  (a serem discutidas posteriormente), encontra-se que

$$v = \underbrace{-4c_v \arctan(e^{-xw_0/c_v})}_{v^{(0)}} + v_z^{(1)}(t) \underbrace{\frac{c_v}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}\left(\frac{w_0}{c_v} x\right)}_{f_z(x)}. \quad (5.49)$$

Uma propriedade muito útil da solução de modo zero  $f_z(x)$  pode ser invocada agora. Sendo  $\alpha$  um parâmetro suficientemente pequeno, é válida a seguinte relação

$$v^{(0)}(x) + \alpha v_z^{(1)}(x) \cong v^{(0)}(x + \alpha), \quad (5.50)$$

e vemos a partir de nossa solução (5.49) que a consequência mais imediata do efeito de backreaction é a translação do “centro de massa” do kink, de maneira semelhante

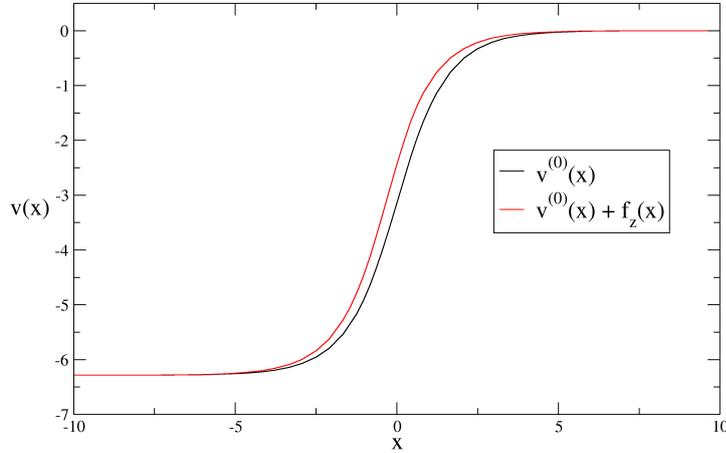


Figura 5.4: Gráfico de  $v^{(0)}(x)$  (curva à direita) e  $v^{(0)}(x) + f_z(x)$  (curva à esquerda), correspondente a  $t = \sqrt{2/C}$  e usando-se dos mesmo parâmetros da fig. 5.1.

ao que ocorreria caso o mesmo fosse uma partícula sujeita a uma força constante. A direção de aceleração depende do fator  $C$ , que para nossa solução  $v^{(0)}$ , dada pela eq. (5.10), é sempre positivo. Por exemplo, para os mesmos parâmetros  $w_0$ ,  $c_v$  e  $c_\phi$  usados na fig. 5.1 teríamos  $C \approx 0.0025636$ . Assim, para valores suficientemente pequenos de  $t$  a solução perturbativa assume a forma

$$v(x, t) = v^{(0)} \left( x + \frac{w_0^3 C t^2}{c_v^2 2} \right), \quad (5.51)$$

como delineado na figura 5.4, que representa uma onda solitônica movendo-se à esquerda. Vemos então que essa abordagem perturbativa está em concordância com a abordagem de potencial efetivo apresentada anteriormente. A extensão de sua validade depende em geral dos parâmetros  $w_0$ ,  $c_v$  e  $c_\phi$  escolhidos. A título de exemplo, pode-se mostrar que a eq. (5.49) permanece sendo uma solução razoável por um tempo da ordem de  $\Delta t \leq \sqrt{\frac{4\sqrt{2}c_v^2}{Cw_0^3}}$ , para os parâmetros usados na fig. 5.4.

Em relação aos modos contínuos, eq. (5.46), apontamos agora que propriedades sua consideração introduzem no quadro acima. A primeira delas é que, assim que o sóliton começa a movimentar-se, algumas ondas (associadas aos modos contínuos  $v_k^1(t)$ ) serão emitidas às regiões assintóticas. Porém, esse é um efeito menor comparado a própria translação do sóliton. Ou seja, a emissão dessas perturbações de  $v(x)$  de espectro contínuo é um efeito associado ao deslocamento do sóliton, sendo então de segunda ordem quando comparado ao deslocamento em si. Outra maneira de enxergar tal aspecto encontra-se em uma análise mais detalhada da fig. 5.3. Anteriormente já apontamos ali o rearranjo *vertical* dos mínimos e suas implicações. Mas é

possível notar também um efeito menor do rearranjo *horizontal* de ambos mínimos para a esquerda. O mesmo sugere que ambas soluções, na região assintótica à direita ( $v = 0$ ) e na região assintótica à esquerda ( $v = -4c_v$ ), estão ligeiramente transladando para baixo, e.g., o sólton como um todo é transladado para baixo. De fato, uma análise mais detalhada da contribuição dos modos contínuos à  $v^{(1)}(t, x)$  irá mostrar que, embora as ondas emitidas em resposta ao movimento do sólton estejam dissipando-se para o infinito, seu resultado total acaba por ser uma translação vertical do sólton como um todo, mas sem grandes alterações de sua forma.<sup>6</sup> Dito isso, nota-se a partir da fig. 5.3 que o deslocamento à esquerda dos mínimos é visivelmente menor que o deslocamento vertical dos mesmos, reforçando assim a desconsideração em primeira aproximação dos modos contínuos na solução (5.49).

### Balanco de energia e momento

As conclusões acima podem também ser analisadas por meio do balanço de energia e momento. Na região distante do kink, onde o espaço-tempo efetivo é plano, podemos estimar o tensor de pseudo energia-momento  $T_{\mu\nu}$  da radiação Hawking emitida por meio da aproximação de óptica geométrica, pelas substituições  $\dot{\phi} \rightarrow c\omega$  e  $\phi' \rightarrow -ck$ , somado ao uso da relação de dispersão  $(\omega - vk)^2 = c_\phi^2 k^2$ . Para a componente (5.17) obtemos

$$T_x^t = \frac{1}{c_\phi} [\partial_t \phi + v \partial_x \phi] \partial_x \phi \rightarrow -\frac{c_\phi^2 \omega^2}{(c_\phi + v)^2}. \quad (5.52)$$

Identificando  $\omega \sim \kappa$ , essa expressão coincide com a equação (5.18) longe do kink, onde  $v'$  e  $v''$  tendem a zero. A quantidade acima é a densidade de momento do campo, que não deve ser confundida com o fluxo de densidade de energia

$$T_t^x = \frac{1}{c_\phi} \dot{\phi} [v \dot{\phi} + (v^2 - c_\phi^2) \phi'] \rightarrow c_\phi^2 \omega^2, \quad (5.53)$$

que é constante. Além disso, a densidade de energia é dada por

$$T_t^t = \frac{1}{2c_\phi} ([\partial_t \phi]^2 + (c_\phi^2 - v^2) [\partial_x \phi]^2) \rightarrow \frac{c_\phi^2 \omega^2}{c_\phi + v}, \quad (5.54)$$

e, ainda na aproximação de óptica geométrica (onde a anomalia do traço não se manifesta), obtém-se pela mesma expressão a pressão  $T_x^x$ , i.e.,  $T_x^x = -T_t^t$ . Note que esse termo  $T_x^x$  muda de sinal no horizonte, o que tem implicações importantes: As partículas Hawking emitidas levam consigo momento positivo ( $T_x^t > 0$ ) e

---

<sup>6</sup>Tal comportamento é consequência da estabilidade topológica do kink. Como sua carga topológica está relacionada ao valor  $v(+\infty) - v(-\infty)$ , é necessário que o mesmo translade (verticalmente) como um todo se alguma translação for realizar-se. Assim vemos que as ondas associadas aos modos contínuos agem como um meio de transportar parte da amplitude do kink de uma extremidade à outra.

energia positiva ( $T_t^t > 0$ ); porém, seus pares absorvidos pelo horizonte de eventos atuam em sentido contrário, carregando energia negativa e momento negativo. Dessa forma, enquanto o balanço de energia é atendido, o balanço de momento não o é, i.e., as partículas Hawking são emitidas de modo a “empurrar” o kink, mas seus pares aprisionados são absorvidos de modo a “puxar” o mesmo. O resultado é que o horizonte de eventos “encolhe” (o kink move-se) para manter o balanço de momento do sistema. Essa é uma diferença importante em relação a buracos negros, onde a evaporação é ocasionada para manter a conservação de energia.

Estabelecemos então o efeito mais imediato da emissão de radiação Hawking, pelo campo  $\phi(t, x)$ , sobre o campo de fundo representado pelo kink. Uma questão natural agora é: que implicação o movimento do kink trás para a própria radiação Hawking, em seguida? Ou seja, o que a dinâmica do espaço-tempo de fundo causa à emissão térmica inicial?

### 5.2.6 Recalculando a radiação Hawking

Precisamos agora descrever o processo de radiação Hawking para o caso de um perfil de velocidade que represente um kink em movimento. Para tanto faz-se necessário esclarecer mais um ponto.

O resultado expresso acima - que o efeito de backreaction leva a um movimento do “centro de massa” do kink - possui sua validade limitada por dois fatores: (i) O primeiro, já mencionado, refere-se à validade do esquema perturbativo empregado, e leva a limites superiores sobre o tempo pelo qual a solução  $v^{(1)}(t, x)$  pode ser usada. É, então, somente consequência das aproximações usadas para obtermos um primeiro quadro do sistema. (ii) O segundo fator, porém, refere-se a uma limitação anterior. Para definir a equação (5.19), da qual obtivemos os resultados acima, foi necessário antes o cálculo do tensor energia-momento, devido ao resultado (5.17), e tal cálculo assumiu um estado de vácuo de Unruh para o espaço-tempo de fundo percebido pelo campo  $\phi(t, x)$ . A partir do momento em que o referencial do centro do kink e do laboratório não mais coincidem (ou seja, quando o kink move-se), espera-se uma mudança dos modos *in* e *out* que definem o vácuo. É uma excelente aproximação assumir nesse caso uma passagem adiabática entre os diferentes estados de vácuo do sistema. Enunciado de maneira heurística, enquanto o espaço-tempo de fundo altera-se lentamente, há um bom tempo de relaxação para que os modos *in* e *out* evoluam de maneira suave<sup>7</sup>. De fato, como discutido em §4.3.3, essa é uma das condições que modelos com relação de dispersão modificada precisam atender para

---

<sup>7</sup>Perceba-se que em nossa linguagem assumimos em cada momento modos *in* e *out* referentes a uma métrica de fundo estática. Caso estivéssemos tratando o sistema sem aproximações, não haveria necessidade de caracterizar uma evolução entre essas diferentes famílias de estados de vácuo, já que para uma métrica dinâmica a construção do estado de vácuo (quando possível) já levaria em conta a devida evolução temporal.

produzirem radiação Hawking.

Sendo  $j(t, x)$  a velocidade do “centro de massa” do kink como medida no referencial do laboratório, é possível mostrar que, assumindo uma transição adiabática nos moldes acima, e sob a restrição de que  $j \lll c_v$ , o sistema geral a ser descrito considerando o movimento do kink é dado por

$$\square v' = -w_0^2 c_v \sin(v'/c_v) + \frac{w_0^2}{c_\phi^2} \left( \frac{v'}{12\pi c_\phi (1 - v'^2/c_\phi^2)^2} [\kappa^2 - (\partial_x v')^2 - (1 - v'^2/c_\phi^2) v' \partial_x^2 v'] - \frac{\kappa^2}{48\pi (1 - v'/c_\phi)^2} \right), \quad (5.55)$$

onde

$$v'(t, x) = v(t, x) - j(t, x), \quad (5.56)$$

$$\kappa = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{v^2=c_\phi^2}. \quad (5.57)$$

Os resultados (5.56) e (5.57) acima garantem que no início do movimento do kink, assumindo que o sistema esteja inicialmente em repouso no referencial do laboratório, as previsões feitas na seção anterior de fato mantêm-se dentro do limite de validade do regime perturbativo. Garante também que a emissão continuará mantendo a dependência usual da gravidade superficial  $\kappa$ . Conforme a velocidade  $j$  altera-se, temos que a gravidade superficial se altera enquanto o kink ganha velocidade, uma vez que o horizonte de eventos e sua posição  $x_h$  são definidos por

$$v' = c_\phi \rightarrow x_h = x|_{(v-j)^2=c_\phi^2}. \quad (5.58)$$

A figura 5.5 a seguir é um gráfico dos diferentes valores da constante  $C$ , eq. (5.47), em relação a  $c_\phi - j$ , mantendo-se o parâmetro  $c_v = 1$ . Note que para  $c_v = c_\phi = 1$  e  $j = 0$  recuperamos o valor  $C \approx 0.0025636$  disposto no exemplo da seção anterior (e correspondente ao kink inicialmente em repouso). Conforme o kink ganha velocidade ( $j$  assume valores negativos, uma vez que o kink desloca-se à esquerda), podemos parametrizar os valores de  $C$  em função de  $c_\phi - j$ , como disposto na fig. 5.5.

### 5.2.7 Termodinâmica

A figura 5.5 indica uma propriedade peculiar do comportamento termodinâmico do modelo: sua capacidade térmica pode ser negativa ou positiva. Note que para uma dada escolha inicial de parâmetros, por exemplo,  $c_v = c_\phi = 1$ , o sistema evolui para um estado em que a gravidade superficial é *maior*. Tal comportamento é análogo a um buraco negro cuja evaporação leva o sistema a emitir com temperaturas maiores (capacidade térmica negativa), sendo esse o caso para o buraco negro de Schwarzschild [84]. Porém, podemos também obter um sistema (e.g., parâmetros  $c_v = \frac{2}{3\pi} c_\phi = 1$ )

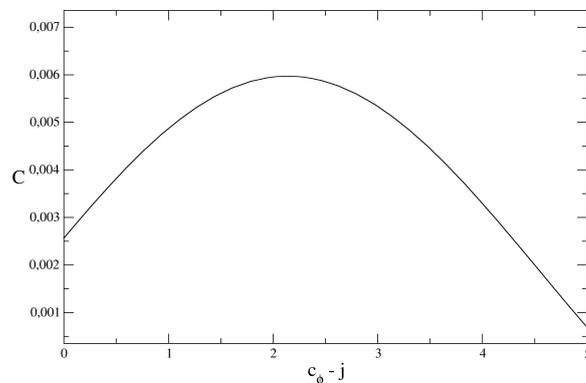


Figura 5.5: Gráfico de  $C$ , eq. (5.47), parametrizado por  $c_\phi - j$ , com a escolha de parâmetros  $w_0 = c_v = 1$ . Essa curva indica que, dependendo da escolha inicial de  $c_\phi$  no eixo da coordenada, a vizinhança de tal ponto dará o calor específico (positivo ou negativo) através da derivada dessa curva no ponto especificado (se positiva, calor específico negativo, e vice-versa).

cuja evolução o leva a estados de gravidade superficial *menor*, ou seja, sua evaporação o leva a emitir com temperaturas menores (capacidade térmica positiva). Tal comportamento é típico de sistemas termodinâmicos usuais, e também encontra analogia com buracos negros de Reissner-Nordstrom<sup>8</sup>. Mais exemplos podem ser vistos nos comentários ([15]) do anexo II-1.

Em resumo, a análise demonstrada aqui, levando em conta o backreaction em primeira aproximação, aponta que nosso modelo análogo é capaz de descrever a evaporação de buracos sônicos de calor específico positivo ou negativo, dependendo da escolha dos seus parâmetros  $c_v$  e  $c_\phi$ . Faz-se necessário agora relembrar o significado físico de tais parâmetros:  $c_\phi$ , como mencionado várias vezes, é o parâmetro que decide qual é, e onde ocorre, o horizonte de eventos de nosso modelo;  $c_v$  por sua vez está associado a uma quantidade fundamental, a saber, a carga topológica  $N_t = 2\pi c_v$  do sóliton que dá origem à métrica efetiva presenciada pelo campo  $\phi(t, x)$ . É possível mostrar que a capacidade térmica do buraco sônico será positiva para  $\frac{N_t}{c_\phi} \lesssim 1/2$  e negativa para  $1/2 \lesssim \frac{N_t}{c_\phi}$ .

Note-se que na discussão acima assumimos que a capacidade térmica,  $C_T =$

---

<sup>8</sup>Hiscock *et al* [84] mostraram que buracos negros carregados de massa superior a  $M > 2.03 \times 10^7 M_{sol}$  apresentam calor específico positivo ou negativo em seu processo de evaporação, dependendo de sua relação  $Q/M$ . Porém, tal comparação deve ser tomada com cuidado, uma vez que o buraco sônico não possui uma quantidade que se possa associar à massa. O que  $M$  e  $c_\phi$  possuem em comum é o fato de serem constantes que determinam a gravidade superficial.

$dE/dT$ , é definida por  $dE = \delta Q \propto \kappa^2 dt$ , que é a energia emitida pelo horizonte de eventos em um intervalo de tempo  $dt$ , e  $dT$  a variação decorrente da temperatura Hawking. Essa é a escolha natural do ponto de vista de observadores que enxergam a descrição de espaço-tempo efetivo. Mas poderíamos também ter partido da definição de variação de energia  $dE$  tendo por base  $E \propto \dot{x}_{kink}^2$  (válida para  $\dot{x}_{kink}^2 \ll c_v^2$ ), que seria a definição natural para observadores no referencial do laboratório. Embora ambas quantidades sejam, em geral, diferentes, obteríamos o mesmo resultado em relação a capacidade térmica (ser negativa ou positiva dependendo dos parâmetros) sob ambas definições, uma vez que  $dT \lesseqgtr 0$ . A mesma ambiguidade se aplica a entropia  $dS = dE/T$ .

Essas ambiguidades das quantidades termodinâmicas do sistema sugerem, em última instância, que a termodinâmica de buracos negros não encontra, necessariamente, uma analogia natural em modelos análogos. Uma vez que o caráter térmico de buracos negros está intimamente conectado com sua emissão Hawking, era possível imaginar que algo parecido ocorra em matéria condensada. Não parece ser, necessariamente, o caso. Estamos lidando com um sistema formado por dois campos que interagem entre si, de maneira não-trivial, tal que a restrição ao acesso à informação para um família particular de observadores (como implícito na diferentes escolhas de  $dE$ ) não implica em leis termodinâmicas bem definidas, como é o caso da física de buracos negros.

### 5.2.8 Sumário

Usando um modelo tipo kink para modelar um horizonte de eventos análogo, achamos que o backreaction associado ao processo de evaporação sempre causa o recesso do horizonte de eventos (i.e., o buraco negro “encolhe”). Porém, em contraste ao caso de buracos negros em relatividade geral, esse recedimento não é causado por conservação de energia, mas pelo balanço de momento do sistema. Em conjunto com outros resultados relacionados em alguns trabalhos na literatura [85], nossas conclusões sugerem que essa é uma característica universal do backreaction da emissão Hawking. Sugerem ainda que a termodinâmica de buracos negros é uma propriedade intrinsecamente dependente das equações de Einstein e, logo, não facilmente reproduzida em modelos análogos.

Em relação às quantidades termodinâmicas, encontramos que a capacidade térmica e a variação de entropia do kink são quantidades ambíguas, no sentido de que dependem de que família de observadores escolhe-se privilegiar. Porém, independentemente dessa escolha, essas quantidades podem ser tanto positivas como negativas, o que não encontra analogia com buracos negros.

# Capítulo 6

## Conclusão

Em seu objetivo mais simples e direto, que é o de implementar sistemas em matéria condensada que reproduzam características de física da gravitação, pode-se afirmar que o programa de modelos análogos tem avançado significativamente. Como delineado nos capítulos 1 e 3, muitas propostas têm sido lançadas e é possível que, em um futuro próximo, sejamos capazes de simular em laboratório características únicas tais como a radiação Hawking ou a criação e evolução de perturbações cosmológicas. Muitos outros fenômenos interessantes em gravitação clássica ou semiclássica têm sido traduzidos para uma formulação análoga [12, 56, 86, 87, 88] e é possível que experimentos futuros venham a realizá-los.

Do ponto de vista experimental, como já demonstrado por Leonhardt *et al* [35], os primeiros desafios de construção de espaços-tempos efetivos começam a serem vencidos após uma década de intensa atividade teórica. Além da motivação fornecida para os avanços experimentais necessários à sua construção, é de grande interesse entender o papel que fenômenos conhecidos, em matéria condensada, exercem na analogia. Por exemplo, a reversão da velocidade de grupo de pacotes de onda (sem que ocorra reflexão), e a mistura de modos entre diferentes ramos da relação de dispersão (e.g., ver §4.3), são ambos fenômenos já conhecidos na física de plasmas não homogêneos [89]. Ou ainda no caso de pulsos em fibras óticas [35], a interação não linear mediada pelo efeito Kerr é a responsável pela mistura de modos.

Como evidenciado no experimento de Leonhardt *et al*, é provável que para reproduzir a radiação Hawking seja necessário construir sistemas onde sua própria emissão crie condições para sua detecção, i.e., conforme a emissão ocorra, o backreaction do sistema o leve a emitir com temperaturas Hawking mais altas, de maneira a atingir limites onde sua detecção seja possível. Como vimos no cap. 5, isso corresponde a simular buracos negros de capacidade térmica negativa, como é o caso para um buraco negro astrofísico típico. Nosso tratamento do backreaction em §5.2 [69, 70] sugere que obter tal situação depende da habilidade de controle dos parâmetros do sistema, uma vez que tanto capacidades térmicas negativas como positivas fazem-se possíveis. Independentemente de nosso modelo em particular, a lição principal é que efeitos de backreaction terão um papel relevante em experimentos futuros

[90]. Assim, analisar tais efeitos em maiores detalhes nas próximas configurações experimentais é uma interessante extensão do trabalho apresentado aqui.

No que concerne o uso de modelos análogos como fonte de novas idéias em gravitação, exemplos variados na literatura têm dado conta desse aspecto. Discutimos em detalhes o caso do efeito swimming em §2 [36], assim como as implicações em relação à robustez do efeito Hawking em §4.3. Outros exemplos, tais como a influência de relações de dispersão modificadas em modelos cosmológicos [91], ou diferentes teorias de gravitação [92] merecem ser citados, embora sua discussão esteja além de nossos objetivos aqui.

De um ponto de vista mais especulativo, recentemente tem-se conjecturado até que ponto a física de modelos análogos é tão somente uma ferramenta para melhor entender fenômenos complexos, ou de fato um componente intrínseco à realidade das teorias físicas [93, 94]. Ou seja, em contraponto ao reducionismo historicamente usado na construção de novas teorias, conjectura-se hoje se mesmo nossas teorias mais fundamentais, como a teoria quântica de campos ou a relatividade geral, não seriam tão somente propriedades emergentes. Assim como o espaço-tempo efetivo de modelos análogos surge de uma física de menor escala muito mais complexa, mas ao mesmo tempo independe de toda essa complexidade, talvez o mesmo se aplique para nosso próprio espaço-tempo. De fato, tais idéias já tem sido propagadas mesmo no caso de partículas consideradas fundamentais, tais como fótons e elétrons [95] (e.g., que elas seriam excitações de um mesmo campo fundamental de um complexo modelo subjacente). Por esse ponto de vista, conforme investiguemos escalas de energia cada vez mais altas, não encontraríamos entidades mais fundamentais e maior simplicidade (como sugere a visão reducionista), e sim uma complexidade cada vez maior. É claro que, em última instância, tal questão somente será decidida por meio de experimentos.

Independentemente dos diferentes objetivos citados, o estudo de modelos análogos tem se mostrado uma sólida ferramenta para trazer novas sugestões e aspectos experimentais à discussão, em uma área que necessita fortemente deles.

# Apêndice A

## Método de integração

Explicitaremos aqui o método de integração usado para resolver a equação (4.119), o método de ponto de sela [96], que é usualmente empregado para determinar as propriedades assintóticas de uma função  $I(r)$  do tipo

$$I(r) = \int_C F(z, r) dz, \quad (\text{A.1})$$

onde  $r$  é uma variável real, e  $F$  uma função analítica na variável complexa  $z = x + iy$ . A maneira mais direta para tentar resolver essa integral é o método de resíduos. Nele costuma-se deformar o contorno  $C$  de maneira a tomar os valores da integral em regiões assintóticas tais que  $|F| \rightarrow 0$ , de modo que a integral fica totalmente estabelecida pelo resíduo relativo aos pólos internos ao contorno, onde  $|F| \rightarrow \infty$ . Porém, tal método não será a melhor aproximação nos casos em que  $|F|$  cresce com  $r$ , tal que sua amplitude aumenta nas regiões assintóticas do contorno. Nesse caso é necessário deformar o contorno tal que o mesmo passe pelas regiões em que  $|F|$  decresce de maneira mais acentuada, tomando o cuidado de computar a contribuição das regiões do contorno que não podem ser desprezadas. Essa é a estratégia que define o método de ponto de sela.

O nome do método deve-se ao fato que, ao separar a função  $F(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$  em sua parte real  $U$  e imaginária  $V$ , temos que um gráfico de seu módulo quadrado  $|F(x + iy)|^2 = U^2(x, y) + V^2(x, y)$  poderá possuir pontos de sela, mas nunca máximos ou mínimos<sup>1</sup>, como ilustrado na fig. A.1. O ponto de sela desse gráfico localiza a contribuição não desprezível à integral (A.1), e a partir dele deve-se determinar que direção o contorno deve seguir tal que as demais contribuições anulem-se mais rápido, como representado na fig. A.1 pela linha azul.

Especializando a função (A.1) para um caso mais próximo a nossos interesses,

$$I(r) = \int_C g(z) e^{rf(z)} dz, \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>A prova dessa propriedade é conhecida como teorema de Jensen [96].

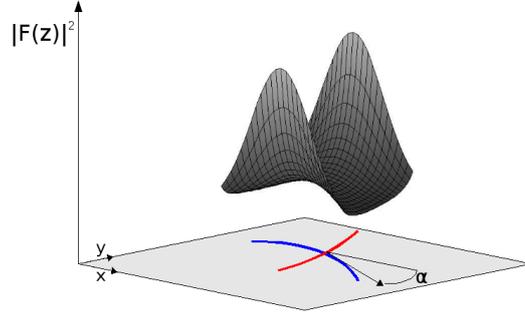


Figura A.1: Gráfico de  $|F(z)|^2$  e sua projeção no plano complexo. O ângulo  $\alpha$  dá a direção que o contorno deve seguir, a partir do ponto de sela, onde  $|F|$  decai mais rapidamente.

pode-se mostrar [96] que, a menos de eventuais pólos, o seu resultado em primeira aproximação é dado por

$$I(r) = \frac{\sqrt{2\pi}g(z_0)e^{rf(z_0)+i\alpha}}{\sqrt{|rf''(z_0)|}}. \quad (\text{A.3})$$

O ponto  $z_0$  corresponde ao ponto de sela, onde  $\partial f(z)/\partial z|_{z=z_0} = 0$ , e a fase  $\alpha$  é o ângulo pelo qual o contorno deve seguir a partir de  $z_0$ , no plano complexo, para tomar as contribuições de  $e^{rf(z)}$  que decaem exponencialmente, dado por

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg(f''(z_0)). \quad (\text{A.4})$$

## Aplicação

Seguindo as refs. [32, 62], ao comparar a eq. (4.119) com a eq. (A.2) acima, vê-se que se pode aplicar o método de ponto de sela após a identificação de  $r = x - x_h$ , e

$$g(s) = s^{-1-\frac{i\omega}{c\kappa}}, \quad (\text{A.5})$$

$$f(s) = s - \frac{1}{2c\kappa(x - x_h)} \left( \frac{s^3 c^2}{3k_0^2} - \frac{\omega^2 + i\omega c\kappa}{s} \right). \quad (\text{A.6})$$

Uma vez que para  $|s| \rightarrow \infty$  o termo  $\propto e^{-cs^3/6k_0^2\kappa}$  em (4.119) é que irá dominar, para garantir a convergência da integral deve-se tomar assintoticamente o contorno de integração nas regiões em que  $\Re(-s^3) < 0$ . Tais regiões correspondem à área em branco da fig. A.2, ou seja, dado que  $s = |s|e^{i\theta}$ , as regiões que atendem a convergência serão onde  $\{\cos(3\theta) > 0 \rightarrow \theta \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}), (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}), (\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})\}$ .

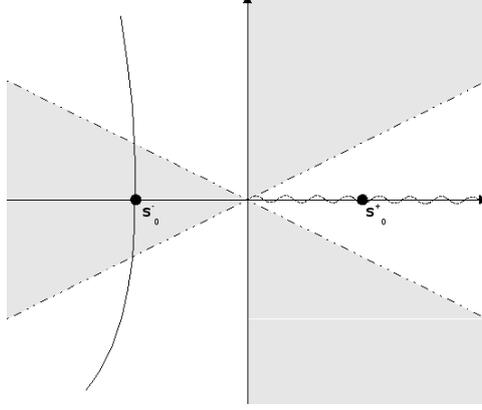


Figura A.2: Plano complexo com os pontos de sela  $s_0^+$  e  $s_0^-$ , eq. (A.7). A área não hachurada corresponde à região assintótica de convergência da integral, que é tomada no contorno que passa por  $s_0^-$ . A linha ondulada corresponde ao *branch cut* escolhido.

### Solução externa ao horizonte

Primeiro calculamos (4.119) na região em que  $x - x_h > 0$ . Os pontos de sela  $s_0$ , localizados por  $\partial f / \partial s_{|s_0} = 0$ , são<sup>2</sup>

$$s_0^\pm \simeq \pm \sqrt{\frac{x - x_h}{d^3}}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $d^3 \equiv c / (2\kappa k_0^2)$ . Tais pontos estão representados na fig. A.2, e a partir deles o contorno de integração deve seguir as direções determinadas por A.4. Por cálculo direto tem-se que  $f(s_0^\pm) = \pm(2/3)\sqrt{(x - x_h)/d^3}$  e  $f''(s_0^\pm) = \mp\sqrt{4d^3/(x - x_h)}$ , tal que obtemos os ângulos  $\alpha^+ = 0$  para  $s_0^+$ , e  $\alpha^- = \pi/2$  para  $s_0^-$ . Porém, para reproduzir o resultado obtido pela simulação numérica apresentada na §4.3.2, iremos impor que a amplitude em  $x \rightarrow \infty$  deve anular-se, o que seleciona a solução  $\alpha^-$  (i.e., a solução negativa de  $f(s_0)$  e positiva de  $f''(s_0)$ ) e descarta a solução  $\alpha^+$ . O contorno determinado por essas condições está ilustrado em A.2, onde nota-se que sua região assintótica segue para as regiões de  $\theta$  que atendem a convergência. Levando os termos acima para a eq. (A.3), obtemos a eq. (4.120).

### Solução interna ao horizonte

O cálculo para a região em que  $x - x_h < 0$  é análogo, i.e., temos as mesmas soluções (A.7), que reescrevemos agora como

$$s_0^\pm \simeq \pm i \sqrt{\frac{|x - x_h|}{d^3}}. \quad (\text{A.8})$$

<sup>2</sup>A solução A.7 foi obtida na aproximação de que o termo em  $s^{-1}$  da eq. (A.6) pode ser negligenciado, i.e., dado que o contorno tende a  $|s| \rightarrow \infty$ .

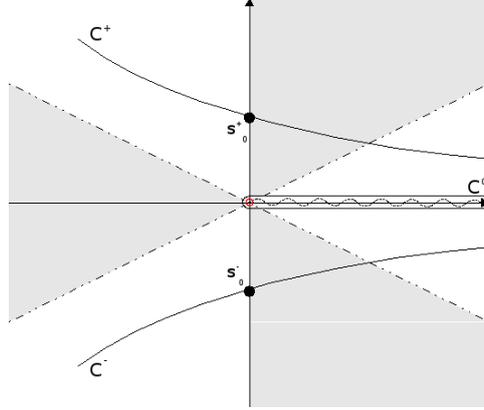


Figura A.3: Plano complexo com os pontos de sela  $s_0^+$  e  $s_0^-$ , eq. (A.8). O contorno de integração é tomado por  $C^- + C^0 + C^+$ . A linha ondulada corresponde ao *branch cut* escolhido, e na origem demarcou-se o pólo em vermelho.

Por cálculo direto obtém-se que  $f(s_0^\pm) = \pm(2i/3)\sqrt{|x - x_h|/d^3}$  e também que  $f''(s_0^\pm) = \pm i\sqrt{4d^3/(x - x_h)}$ , cujos ângulos que definem as direções para o contorno serão  $\alpha^+ = 3\pi/4$ , para  $s_0^+$ , e  $\alpha^- = \pi/4$  para o outro ponto de sela. Os contornos  $C^+$  e  $C^-$ , representados na figura A.3, são as curvas que atendem aos ângulos requeridos e têm suas assíntotas nas regiões de convergência. Note-se, porém, que uma vez que essa solução para  $x - x_h < 0$  deve conectar-se com a solução anterior em  $x - x_h > 0$ , deve-se ligar os contornos  $C^+$  e  $C^-$ . Para tanto é necessário atentar à existência do *branch cut* (ver fig. A.3) escolhido para a integração. Assim, um contorno  $C^0$  que ligue os contornos  $C^\pm$ , de forma que o contorno total seja deformável ao contorno da fig. A.2, está também desenhado na fig. A.3. Para realizar a integral no contorno  $C^0$ , pode-se reescreve-la, mediante a mudança de variável (4.65),  $(x - x_h)s = -z$ , na forma

$$I_{C_0} = -(x - x_h)^{i\frac{\omega}{c\kappa}} \int_{C^0} (-z)^{-1-i\frac{\omega}{c\kappa}} e^{-z+d^3z^3/3(x-x_h)^3} dz. \quad (\text{A.9})$$

Ao expandir o termo  $e^{d^3z^3/3(x-x_h)^3} \simeq 1 + d^3z^3/3(x - x_h)^3 + \mathcal{O}(z^6)$ , e assim como nas passagens (4.64)-(4.68), podemos resolver essa equação pela identificação com a função gama (4.67), resultando na eq. (4.122). A passagem do contorno pelos pontos de sela (A.8) resulta ainda, mediante o uso de (A.3) com os termos acima calculados, nas eqs. (4.123) e (4.124), o que encerra nossa dedução.

# Apêndice B

## Anexo I

**Swimming versus swinging effects in spacetime**

Eduardo Guéron\*

*Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade de Campinas, 13083-970, Campinas, SP, Brazil*Clóvis A. S. Maia<sup>†</sup> and George E. A. Matsas<sup>‡</sup>*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, 01405-900, São Paulo, SP, Brazil*

(Received 10 October 2005; published 25 January 2006)

Wisdom has recently unveiled a new *relativistic* effect, called “spacetime swimming”, where quasirigid free bodies in curved spacetimes can “speed up”, “slow down” or “deviate” their falls by performing *local* cyclic shape deformations. We show here that for fast enough cycles this effect dominates over a *nonrelativistic* related one, named here “space swinging”, where the fall is altered through *nonlocal* cyclic deformations in Newtonian gravitational fields. We expect, therefore, to clarify the distinction between both effects leaving no room to controversy. Moreover, the leading contribution to the swimming effect predicted by Wisdom is enriched with a higher order term and the whole result is generalized to be applicable in cases where the tripod is in large redshift regions.

DOI: 10.1103/PhysRevD.73.024020

PACS numbers: 04.20.Cv, 45.10.Na

Recently, Wisdom unveiled a new beautiful *relativistic effect* [1] (see also Ref. [2]) denominated *spacetime swimming*, where quasirigid free bodies in curved spacetimes can “speed up”, “slow down” or “deviate” their falls by performing *local* cyclic shape deformations (see Fig. 1). This is a full general-relativistic geometrical phase effect [3], which vanishes in the limit where the gravitational constant  $G \rightarrow 0$  or the light velocity  $c \rightarrow \infty$ . Similarly to the displacement attained by swimmers in low Reynolds number fluids [4,5], the displacement attained by swimmers in some given spacetime only depends on their local stroke.

The fact that the swimming effect is purely relativistic has caused some perplexity [6,7], since it has been known for a long time that there is a similar *classical effect* in nonuniform Newtonian gravitational fields, which is present when  $c \rightarrow \infty$ . For example, an orbiting dumbbell-shaped body can modify its trajectory by contracting the strut connecting the two masses at one point and expanding it at another one [8]. We stress here that this is a *nonlocal* effect, which appears due to the fact that the work performed by the dumbbell engine against the gravitational tidal force during the contraction differs from the one during the expansion. It is the resulting net work what allows the dumbbell to change from, say, a bounded to an unbounded orbit (see Fig. 2). The shorter is the period of the whole contraction-expansion process, the smaller is the change of the trajectory, although this cannot be made arbitrarily small if one requires that the deformation velocity does not exceed  $c$ . This is in analogy with playground swings, where the oscillation amplitude is modified

by an individual through standing and squatting in synchrony with the swing motion [9].

Here we perform a direct numerical simulation for a falling tripod to show that for fast enough cyclic deformations the swimming effect dominates over the swinging effect, while for slow enough cycles the opposite is true. We expect, thus, to set down any confusion concerning the independency of both effect. In addition, we calculate and discuss the idiosyncratic features of a higher order term beyond the leading one obtained by Wisdom and extend the whole result to be applicable in cases where the tripod is in large redshift regions.

Let us begin considering a tripod falling along the radial axis in the Newtonian gravitational field of a spherically symmetric static body with mass  $M$ . The three tripod endpoint masses  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) are connected to the mass  $m_0$  at the vertex through *straight massless* struts with length  $l$ . The tripod is set with its vertex mass above the three endpoint masses and aligned symmetrically with the radial axis in order that the three struts make a common angle  $\alpha$  with it (see Fig. 3). The tripod legs are designed to *contract and expand*,  $l = l(t)$ , and *open and close*,  $\alpha = \alpha(t)$ , as much as  $\Delta l$  and  $\Delta \alpha$ , respectively, along a complete cycle as ruled *a priori* by some internal engine. The Lagrangian used in the action  $S = \int L dt$  to describe the falling tripod is

$$L = \sum_{a=0}^3 \frac{GMm_a}{r_a} + \sum_{a=0}^3 \frac{m_a}{2} (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\theta}_a^2 + r_a^2 \sin^2 \theta_a \dot{\phi}_a^2), \quad (1)$$

where “ $\dot{\phantom{x}}$ ”  $\equiv d/dt$ . The positions of the masses  $m_a$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$ , are given through usual spherical coordinates  $r_a, \theta_a, \phi_a$  with origin at the central mass  $M$ . The tripod is not assumed to rotate,  $\dot{\phi}_i = 0$ , and the underlying symmetry guaranties that  $r_i = r_j$  and  $\theta_i = \theta_j$  for  $i, j = 1, 2, 3$ .

\*Electronic address: gueron@ime.unicamp.br

†Electronic address: clovis@ift.unesp.br

‡Electronic address: matsas@ift.unesp.br

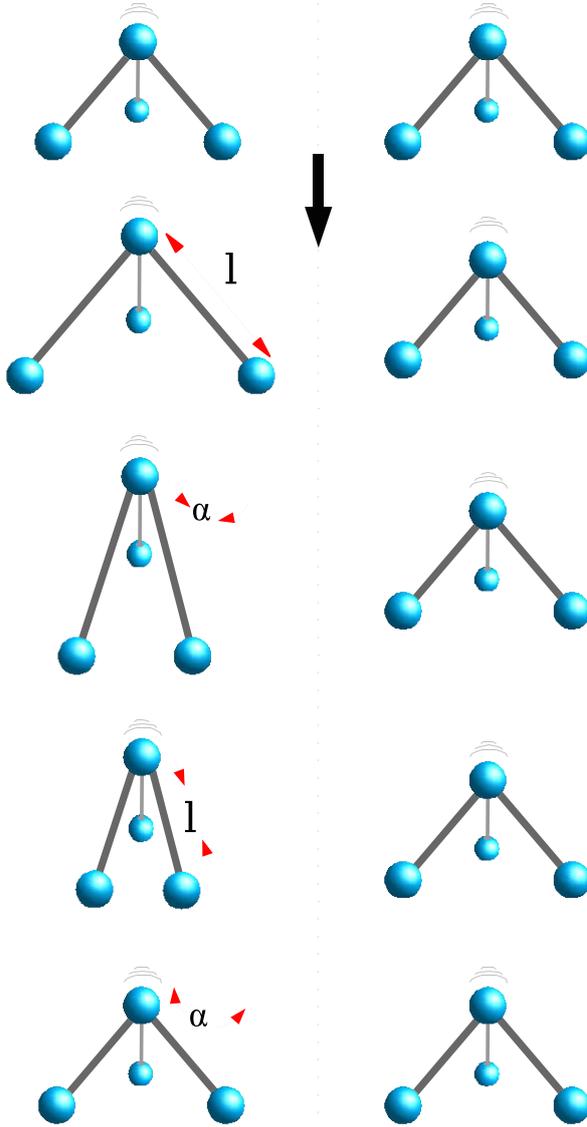


FIG. 1 (color online). Five snapshots of two tripods designed to have legs with length  $l$  and angle  $\alpha$  with the radial axis, along which they fall down, are shown with and without cyclic deformations, respectively. The swimming effect consists in realizing that *local* cyclic deformations lead, in general, to displacements of order  $G/c^2$  in the quasirigid tripod trajectory when compared with the rigid one.

The evolution  $r_0 = r_0(t)$  ( $\theta_0 = \phi_0 = 0$ ) of  $m_0$  is given by numerically integrating the corresponding Euler-Lagrange equations with the constraints

$$\begin{aligned} r_i &= (r_0^2 + l^2 - 2r_0l \cos\alpha)^{1/2}, \\ \theta_i &= \arcsin((l/r_i) \sin\alpha), \end{aligned} \quad (2)$$

and  $\phi_i = 2\pi(i-1)/3$ . Here we consider  $r_0$  and  $p_{r_0}$  as the

## Shape space diagram

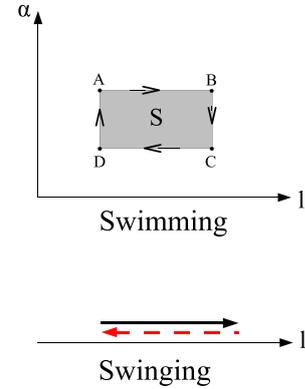


FIG. 2 (color online). The top figure carries the information that the swimming effect is a result of the nonzero area of the square (in the shape space diagram) associated with the body deformation. Were the deformation such that the area were null, the swimming effect would vanish. The bottom figure illustrates precisely this situation. Space displacements can be achieved in this case, however, through the swinging effect, i.e. by expanding and contracting the legs at *different* points of the trajectory.

only independent dynamical variables. ( $r_i$  and  $\theta_i$  are implicit functions of  $r_0$  through Eq. (2).) The solid line in Fig. 4 shows how much a quasirigid tripod changing shape as shown in Fig. 1 fails to follow a rigid one at the end of a complete cycle, where both tripods are let free simultaneously and we have assumed that each quarter of the whole cycle takes as long as  $T/4$  of the total period  $T$ . (For the sake of comparison we use the position of  $m_0$ .)

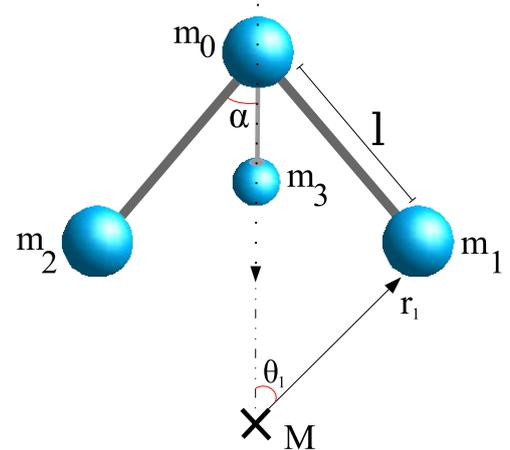


FIG. 3 (color online). The positions of the masses  $m_a$  ( $a = 0, 1, 2, 3$ ) are given through usual spherical coordinates  $r_a, \theta_a, \phi_a$  with origin at the central mass  $M$ .

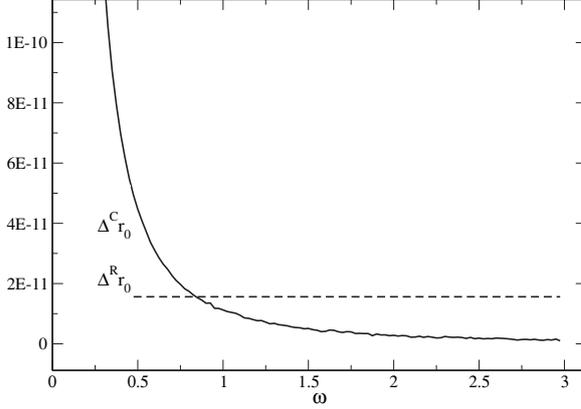


FIG. 4. The full and dashed lines show  $\Delta^C r_0 \equiv (r_0^{\text{quasi-rigid}} - r_0^{\text{rigid}})_{\text{clas}}$  and  $\Delta^R r_0 \equiv (r_0^{\text{quasi-rigid}} - r_0^{\text{rigid}})_{\text{rel}}$ , i.e. how much a free-falling quasirigid tripod fails to follow a rigid one at the end of a complete cycle assuming a Newtonian gravitational field and a Schwarzschild spacetime characterized by a central mass  $GM = 1$ , respectively. Here the tripod is assumed to change its shape as shown in Fig. 1 and  $\omega \equiv 1/T$  is the cycle frequency. The rigid and quasirigid tripods are set free simultaneously with  $Gm_a = 0.1$  and  $r_0 = 100$  ( $a = 0, 1, 2, 3$ ). Initially  $\alpha = 1$  and  $l = 1$  and they vary as much as  $\Delta\alpha = -0.01$  and  $\Delta l = 0.01$  along the cycle. Each quarter of the whole cycle takes as long as  $T/4$ . (Here  $c = 1$ .)

Clearly the slower (faster) is the cycle, the larger (smaller) is  $\Delta^C r_0$ .

Let us examine in detail the high-frequency shape deformation region,  $\omega \equiv 1/T \gg \sqrt{GM/(r_0^2 \Delta l)}$ , for the sake of further comparison with the swimming effect. By ‘‘high-frequency’’ we mean that along the whole period  $T$  the tripods do not fall much in comparison with  $\Delta l$ . We shall assume in this regime that  $p_{r_0}$  is arbitrarily small and approximately conserved:  $p_{r_0} = \partial L / \partial \dot{r}_0 \approx 0$ . As a result one obtains, for  $m_i = m_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,

$$dr_0 \approx U dl + V d\alpha, \quad (3)$$

where  $dr_0 = \dot{r}_0 dt$  and

$$U = -\frac{(\partial r_1 / \partial r_0)(\partial r_1 / \partial l) + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)(\partial \theta_1 / \partial l)}{m_0 / (3m_1) + (\partial r_1 / \partial r_0)^2 + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)^2}$$

and

$$V = -\frac{(\partial r_1 / \partial r_0)(\partial r_1 / \partial \alpha) + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)(\partial \theta_1 / \partial \alpha)}{m_0 / (3m_1) + (\partial r_1 / \partial r_0)^2 + r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)^2}.$$

The net translation accomplished after the complete cycle ABCDA shown in Fig. 2, which circumvents an area  $S$ , can be computed using the Stokes theorem

$$\Delta^C r_0 \approx \int_{\partial S} (\partial V / \partial l - \partial U / \partial \alpha) dl \wedge d\alpha, \quad (4)$$

where  $dl$  and  $d\alpha$  are treated as one-forms in the shape space manifold covered with coordinates  $\{l, \alpha\}$ . Now, because  $\partial U / \partial \alpha = \partial V / \partial l$  [see Eq. (2)], we have that in this regime  $\Delta^C r_0 \approx 0$ . Indeed, by associating the gravitational potential energy gained by the tripod along the process with the work performed against the gravitational tidal forces, we can estimate that

$$\Delta^C r_0 \approx aGMl\Delta l / (r_0^4 \omega^2), \quad (5)$$

where  $a$  is a constant, which depends on the detailed geometry of the body. For the parameters chosen in Fig. 4  $a \approx 0.1$ . The fact that  $\Delta^C r_0 \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$  is a general result because in the high-frequency regime the one-form  $dr_0$  will be approximately closed for any classical (or, even, semiclassical) potentials with no velocity dependence. Free-falling panicking individuals performing fast cyclic motions in Newtonian-like gravitational fields will not be able to change significantly their trajectories despite the strength of their local stroke; it had better that they swing suitably with low frequencies.

Next, let us investigate how the above picture is modified when one replaces the Newtonian gravitational field by the curved Schwarzschild spacetime associated with a spherically symmetric body with mass  $M$  as described by the line element

$$ds^2 = f(r)c^2 dt^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6)$$

where  $f(r) = 1 - 2GM/c^2 r$ . The Lagrangian used in the action  $S = \int L dt$  to evolve the tripod is

$$L = \sum_{a=0}^3 m_a (c^2 f_a - r_a^2 f_a^{-1} - r_a^2 \dot{\theta}_a^2 - r_a^2 \sin^2 \theta_a \dot{\phi}_a^2)^{1/2}, \quad (7)$$

where  $f_a \equiv f(r_a)$  and ‘‘ $\dot{\cdot}$ ’’  $\equiv d/dt$ . The constraints  $r_1 = r_1(r_0, l, \alpha)$  and  $\theta_1 = \theta_1(r_0, l, \alpha)$  are obtained in this case by requiring that the tripod struts be geodesics in the  $t \approx \text{const}$  space section of the static observers (with 4-velocity  $u \propto \partial/\partial t$ ), who measure  $l = l(t)$  as the struts’ proper length and  $\alpha = \alpha(t)$  as the proper angle of the struts with the radial axis. (The ‘‘ $\approx$ ’’ used above is because although we are in the high-frequency regime, it takes some time to complete each cycle.) Now, it is convenient to expand Eq. (7) up to order  $v^2/c^2$  to avoid nonlinear equations. We obtain, then, in the high-frequency regime,  $\omega \equiv 1/T \gg \sqrt{GMf_0^{1/2}/(r_0^2 \Delta l)}$  with  $T$  being the total coordinate period, the relativistic analogue of Eq. (3):

$$dr_0 \approx X dl + Y d\alpha, \quad (8)$$

where

$$X = \frac{-(\partial r_1 / \partial r_0)(\partial r_1 / \partial l) - f_1 r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)(\partial \theta_1 / \partial l)}{(m_0 / 3m_1)(f_1 / f_0)^{3/2} + (\partial r_1 / \partial r_0)^2 + f_1 r_1^2 (\partial \theta_1 / \partial r_0)^2}$$

and

$$Y = \frac{-(\partial r_1/\partial r_0)(\partial r_1/\partial \alpha) - f_1 r_1^2 (\partial \theta_1/\partial r_0)(\partial \theta_1/\partial \alpha)}{(m_0/3m_1)(f_1/f_0)^{3/2} + (\partial r_1/\partial r_0)^2 + f_1 r_1^2 (\partial \theta_1/\partial r_0)^2}.$$

Afterwards, we integrate Eq. (8),

$$\Delta^R r_0 \approx \int_{\partial S} (\partial Y/\partial l - \partial X/\partial \alpha) dl \wedge d\alpha, \quad (9)$$

along the complete cycle ABCDA (see Fig. 2), obtaining for small enough  $l/r_0$  and  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta l$

$$\begin{aligned} \Delta^R r_0 \approx & \frac{-3m_0 m_1}{(m_0 + 3m_1)^2} \frac{GM}{c^2 r_0} \sqrt{f_0} \left[ \frac{l^2}{r_0^2} + \left( \frac{3m_1}{m_0} \sqrt{f_0} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_0 - 3m_1}{m_0 + 3m_1} \frac{GM}{c^2 r_0 \sqrt{f_0}} \right) \frac{l^3}{r_0^3} \cos \alpha \right] \sin \alpha \Delta \alpha \Delta l, \end{aligned} \quad (10)$$

which corresponds to a proper distance  $\Delta\lambda \approx \Delta^R r_0/\sqrt{f_0}$  as measured by the static observers assuming  $\Delta^R r_0/r_0 \ll 1$ . A numerical integration of Eq. (8) with no restriction on  $\Delta\alpha$  and  $\Delta l$  was performed and is in agreement with Eq. (10) in the proper limit. Assuming that the leading term in this equation dominates over the next order one, we conclude that  $\Delta\lambda \ll \Delta l$ . The term of order  $l^2/r_0^2$  in Eq. (10) coincides with the result obtained in Ref. [1] for  $r_0 \gg 2GM/c^2$  and goes beyond, since it also holds close to the horizon:  $r_0 \gtrsim 2GM/c^2$ . It is interesting to note that the leading term of  $\Delta^R r_0$  tends to decrease as the tripod approaches the horizon. This can be understood from the fact that assuming that  $l$  is fixed, the coordinate size of the tripod decreases as  $l/\sqrt{f_0}$ . As a result, the tripod is only able to probe smaller *coordinate* size regions. Now, close to the horizon the  $t - r$  section of the Schwarzschild line element (6) can be approximated ( $\theta, \phi \approx \text{const}$ ) by the Rindler wedge one [10]:  $ds^2 \approx (\rho c^2/4GM)^2 c^2 dt^2 - d\rho^2$ , where  $\rho = (4GM/c^2)/\sqrt{f(r)^{-1} - 1}$ , which has vanishing curvature. Thus, for the same reason  $\Delta^R r_0$  *vanishes* in *flat* spacetimes, this is *damped* in the *horizon's neighborhood*. Clearly, it remains the fact that the corresponding  $\Delta\lambda$  not only is not damped but increases as the tripod approaches the horizon, as a consequence of the fact that the space curvature gets larger. Concerning the next order term, it is interesting to note that it can be positive, negative or null depending on the masses and tripod position.  $\Delta^R r_0$  is plotted in Fig. 4 (see dashed line) as a constant in the *high-frequency* region. We have taken care to keep the deformation velocity  $v < c$ . For the frequency range

shown in the Fig. 4, we have  $10^{-2} \lesssim v/c \lesssim 10^{-1}$ . We see that for high enough frequencies the swimming effect can dominate the swinging effect by orders of magnitude. For the parameters chosen in the graph, the swimming effect begins to dominate over the swinging effect at  $\omega \gtrsim 0.9$ . This can be estimated analytically quite well by equating Eqs. (5) and (10). A full general-relativistic numerical simulation, which would involve formidable difficulties associated with the relativistic rigid body concept, is expected to approach smoothly the swinging and swimming predictions in the low- and high-frequency regions, respectively. (For a movie on the swinging and swimming effects see Ref. [11].)

It seems to be a challenging problem to take into account the decrease (or increase) of the quasirigid body mass (i.e., rest energy) as a consequence of the swimming. This is desirable when the work  $W$  spent (or gained) along the process is of order of  $(m_0 + 3m_1)c^2$ . The work associated with a displacement  $\Delta^R r_0$  can be estimated for  $W \ll (m_0 + 3m_1)c^2$  to be

$$W \approx (m_0 + 3m_1)GM\Delta^R r_0/(f_0 r_0^2), \quad (11)$$

where  $\Delta^R r_0/r_0 \ll f_0 r_0 c^2/(GM)$ . Equation (11) suggests that this is very costly to swim close to the horizon. Actually, even far away from it, we do not expect the tripod to be able to climb upwards the space. This can be seen as follows. Along a complete period  $T$ , the free rigid tripod falls down about  $\Delta^F r_0 \approx GMf_0 T^2/(2r_0^2)$ . By imposing that the deformation velocity  $v \lesssim c$ , we obtain  $T \gtrsim l/(c\sqrt{f_0})$  and, thus,  $\Delta^F r_0 \gtrsim GMl^2/2c^2 r_0^2 > \Delta^R r_0$ . This raises the interesting “engineering” issue concerning what would be the most efficient geometry and stroke for quasirigid spacetime swimming bodies. In this vein, it would be also interesting to see how the tripod could accomplish more complex maneuvers through asymmetric deformations. This is remarkable that General Relativity, which is a quite studied 90-years-old theory did not lose its gift of surprising us. After all, free-falling panicking individuals may change their trajectories by doing fast cyclic motions because the world is relativistic.

E. G. is indebted to J. Wisdom for various conversations and P. Letelier for the support. Two of us, C. M. and G. M., would like to acknowledge full and partial financial supports from Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, respectively, while G. M. is also thankful to Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico for partial support.

- [1] J. Wisdom, *Science* **299**, 1865 (2003).  
 [2] S. K. Blau, *Phys. Today* **56**, 21 (2003); C. Seife, *Science* **299**, 1295 (2003).

- [3] A. Shapere and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2051 (1987); A. Shapere and F. Wilczek, *J. Fluid Mech.* **198**, 587 (1989); *Geometric Phases in Physics*, edited by F.

- Wilczek and A. Shapere (World Scientific, Singapore, 1989).
- [4] S. Childress, *Mechanics of Swimming and Flying* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
  - [5] E. M. Purcell, Am. J. Phys. **45**, 3 (1977); E. M. Purcell, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **94**, 011307 (1997); H. C. Berg, Phys. Today **53**, 24 (2000).
  - [6] G. A. Landis, Phys. Today **56**, 12 (2003); J. Wisdom, Phys. Today **56**, 12 (2003).
  - [7] M. J. Longo, Am. J. Phys. **72**, 1312 (2004).
  - [8] G. A. Landis, Acta Astronaut. **26**, 307 (1992); G. A. Landis and F. J. Hrach, J. Guid. Control Dyn. **14**, 214 (1991); M. Martinez-Sanchez and S. A. Gavit, J. Guid. Control Dyn. **10**, 233 (1987).
  - [9] J. Walker, Sci. Am. **260**, 86 (1989).
  - [10] W. Rindler, Am. J. Phys. **34**, 1174 (1966).
  - [11] See EPAPS Document No. E-PRVDAQ-73-075604 for a movie produced with two distinct numerical simulations emphasizing that the swinging and swimming effects tend to dominate in the low- and high-frequency regimes. For more information on EPAPS, see <http://www.aip.org/pub-servs/epaps.html>. For visualization purposes we have chosen  $GM = 1$ ,  $Gm_a = 0.1$ ,  $l = 1$ ,  $\Delta l = 1$ , and  $\alpha = 0.5$  with  $\Delta\alpha = 1$  and  $\alpha = 1.5$  with  $\Delta\alpha = -0.5$  in the first and second simulations, respectively.

# Apêndice C

## Anexo II

### C.1 Anexo II-1

**Quantum toy model for black-hole backreaction**Clovis Maia<sup>1,2</sup> and Ralf Schützhold<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>*Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Germany*<sup>2</sup>*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, 01405-900, São Paulo, SP, Brazil*

(Received 25 July 2007; published 9 November 2007)

We propose a simple quantum field theoretical toy model for black-hole evaporation and study the backreaction of Hawking radiation onto the classical background. It turns out that the horizon is also “pushed back” in this situation (i.e., the interior region shrinks) though this backreaction is not caused by energy conservation but by momentum balance. The effective heat capacity and induced entropy variation can have both signs—depending on the parameters of the model.

DOI: 10.1103/PhysRevD.76.101502

PACS numbers: 04.62.+v, 04.70.Dy

**I. INTRODUCTION**

Black holes are arguably the most simple and at the same time most intriguing objects in the Universe. The no-hair theorem states that they can fully be described by a small set of parameters such as their mass  $M$  and angular momentum  $J$ . Yet our standard picture of black holes contains many striking properties: Even though black holes should be completely black classically, they emit Hawking radiation due to quantum effects [1]. This evaporation process causes the black hole (horizon) to shrink in the absence of infalling matter due to the backreaction of Hawking radiation. Therefore, black holes possess a negative heat capacity [2], i.e., the temperature grows with decreasing energy. Extrapolating this picture till the final stages of the evaporation, the black hole should end up in an explosion, where its temperature blows up and thus effects of quantum gravity should become important. Perhaps most fascinating is the observation that the second law of thermodynamics apparently [3] requires to assign an entropy  $S$  to the black hole, which is determined by the horizon surface area  $A$  via  $S = A/4$  (in natural units with  $\hbar = G = c = 1$ ).

Taking the analogy between black holes and thermodynamics seriously provides a very consistent picture, which has been confirmed by various gedanken experiments [3,4] considering the construction of heat engines with black holes, etc. It almost seems as if nature was trying to give us some hints regarding the underlying structure which unifies quantum theory and gravity—which we do not fully understand yet. In order to comprehend these hints better, it might be useful to ask the question of whether (and how) the aforementioned properties depend on the detailed structure of the Einstein equations or whether they are more universal. For example, the study of condensed-matter based black-hole analogues [5,6] shows that Hawking radiation is a fairly robust quantum phenomenon [7], which just requires the occurrence of an effective horizon and thus is quite independent of the Einstein

equations. In contrast, the introduction of a black-hole entropy with the desired properties seems to rely on the Einstein equations.

In the following, we try to further disentangle universal features from properties which are specific to black holes (e.g., Einstein equations, rotational symmetry, conserved Arnowitt-Deser-Misner (ADM) mass). To this end, we propose a toy model which captures some of the relevant features of black holes and allows us to study the backreaction of the emitted Hawking radiation onto the classical background solution.

**II. TOY MODEL**

In the toy model we are going to discuss, the gravitational field will be represented by a real scalar field  $\psi$  in  $1 + 1$  dimensions with the Lagrangian ( $\hbar = 1$ )

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2}(\dot{\psi}^2 - c_\psi^2[\partial_x\psi]^2) - V(\psi). \quad (1)$$

With respect to the propagation speed  $c_\psi$  of the  $\psi$  field, this form is Lorentz invariant. The potential  $V(\psi)$  is supposed to be very stiff, i.e., the field  $\psi$  is assumed to be heavy in the sense that it can be approximated by a classical field. For definiteness, we choose the sine-Gordon potential  $V(\psi) \propto 1 - \cos(\psi/\psi_0)$ , but other potentials admitting stable localized solutions would also work. The global ground state  $\psi = 0$  then corresponds to a vanishing gravitational field whereas a kink (topological defect) models a black (or white) hole horizon

$$\psi(x) = -4\psi_0 \arctan(\exp\{-\xi[x - x_{\text{kink}}]\}). \quad (2)$$

The position  $x = x_{\text{kink}}$  of the kink at rest is arbitrary and its width  $1/\xi$  is determined by  $V(\psi)$  and  $c_\psi$ . In comparison to other models of black holes (see, e.g., [8,9]), the advantage of the above setup lies in the topologically protected stability and localization of the kink (see also [10]). This topological defect behaves very similar to a particle, i.e., the position of the kink is a dynamical variable with a well-defined inertial mass  $M_{\text{eff}}$  and the associated kinetic energy  $E_{\text{kin}} = M_{\text{eff}}c_\psi^2([1 - \dot{x}_{\text{kink}}^2/c_\psi^2]^{1/2} - 1)$ .

\*schuetz@theory.phy.tu-dresden.de

In order to study Hawking radiation and its impact on the kink, we consider a massless quantum field  $\phi$  coupled to the heavy field  $\psi$  via the coupling constant  $g$

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}([\partial_t \phi + g\psi \partial_x \phi]^2 - c_\phi^2 [\partial_x \phi]^2). \quad (3)$$

Note that the velocity  $c_\phi$  of the light (massless) field may differ from  $c_\psi$ . The propagation of the light field  $\phi$  in the approximately classical background  $\psi$  is completely analogous to that in a gravitational field described by the Painlevé-Gullstrand-Lemaître metric (cf. [5,6])

$$ds^2 = (c_\phi^2 - v^2)dt^2 - 2vtdtx - dx^2, \quad (4)$$

where  $v = g\psi$  denotes the local velocity of freely falling frames. A horizon occurs if this velocity  $v$  exceeds the speed of light  $c_\phi$ . Based on the analogy to gravity, we may also derive the pseudo energy-momentum tensor of the  $\phi$  field with respect to the above metric  $g^{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{A}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\rho \phi)(\partial^\rho \phi). \quad (5)$$

The associated energy density  $T_0^0$  of the light field

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{2}([\partial_t \phi]^2 + (c_\phi^2 - v^2)[\partial_x \phi]^2) \quad (6)$$

contains negative parts beyond the horizon  $v^2 > c_\phi^2$ . Of course, this is precisely the reason why effects like Hawking radiation are possible.

However, an energy density which is not bounded from below seems unphysical and typically indicates instabilities (already on the classical level). In order to avoid this problem, we may add an extra term which does not modify the linearized low-energy behavior of our model

$$\mathcal{L}_\phi^{\text{reg}} = \mathcal{L}_\phi - \alpha^2 (c_\phi^2 - v^2)^2 [\partial_x \phi]^4 - \frac{1}{16\alpha^2}, \quad (7)$$

but generates a positive definite energy density

$$\mathcal{H}_\phi^{\text{reg}} = \frac{1}{2} \left( [\partial_t \phi]^2 + \left[ \alpha (c_\phi^2 - v^2) [\partial_x \phi]^2 + \frac{1}{4\alpha} \right]^2 \right). \quad (8)$$

In the exterior region  $c_\phi^2 > v^2$ , the classical ground state is still given by  $\phi = 0$ , but beyond the horizon  $c_\phi^2 < v^2$ , we have  $2\alpha(\partial_x \phi) = (v^2 - c_\phi^2)^{-1/2}$ . Thus, the classical ground state profile would not be differentiable at the horizon, i.e., the term  $[\partial_x \phi]^2$  in the energy density, for example, would be ill-defined. This problem can be cured by adding another term (which again does not modify the low-energy behavior) and we finally arrive at the total Lagrangian of our toy model

$$\mathcal{L}_{\text{full}} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi^{\text{reg}} - \beta^2 [\partial_x^2 \phi]^2. \quad (9)$$

The last term smoothens the classical ground state profile at the horizon and induces a superluminal dispersion relation  $(\Omega + vk)^2 = c_\phi^2 k^2 + 2\beta^2 k^4$  at large wave numbers.

Assuming that the effective surface gravity  $\kappa$  in Eq. (15) is much smaller than the knee frequency where the dispersion relation changes  $\kappa \ll c_\phi/\beta$ , such a superluminal dispersion relation does not lead to alterations of the Hawking effect. On the contrary, it helps us to solve the trans-Planckian puzzle and to understand the origin of Hawking radiation in this model: Since wave packets with large  $k \gg c_\phi^2/\beta$  have a superluminal group velocity  $d\omega/dk \gg c_\phi$ , they may overcome the frame-dragging speed  $v$  and thus approach the horizon from the inside. During that process, the inhomogeneity of  $v$  (i.e.,  $v$  is smaller on the front end of the wave packet than on its rear end) stretches the wave packet and reduces its wave number (analogous to the gravitational redshift) and thereby its group velocity. Eventually, the wave packet gets “ripped apart” and one part (the Hawking radiation) escapes into the exterior region whereas the remaining part (the infalling partner particle) is swept away into the interior domain. Assuming that the wave packet was in its ground state initially (for large  $k$ ), the combined quantum state of the outgoing Hawking quanta and their infalling partner particles is a pure state, but the reduced density matrix of the Hawking radiation alone is thermal with the Hawking temperature [7]. Having established this thermal emission for our model, we may now ask what are its consequences.

### III. BACKREACTION

The equation of motion of the light field can be derived from the Lagrangian above

$$(\partial_t + v\partial_x)(\partial_t + \partial_x v)\phi = c_\phi^2 \partial_x^2 \phi + \mathcal{O}(\partial_x^4), \quad (10)$$

where  $\mathcal{O}(\partial_x^4)$  denote the higher-order  $\alpha$  and  $\beta$  terms we added for stability and regularity reasons. Similarly, the heavy field evolves according to

$$\hat{\psi} - c_\psi^2 \partial_x^2 \psi = V(\psi) - g[\partial_t \phi + g\psi \partial_x \phi] \partial_x \phi + \mathcal{O}(\partial_x^4). \quad (11)$$

From the full set of equations, we see that the kink profile in Eq. (2) together with  $\phi = 0$  exactly solves the classical equations of motion (though it is not the ground state). However, the impact of quantum fluctuations changes this picture: For  $2\pi g\psi_0 > c_\phi$ , the kink acts as a black-hole horizon and thus emits Hawking radiation. Of course, the energy/momentum given off must come from somewhere and hence this quantum effect should have some impact on the classical kink background.

In order to estimate the quantum backreaction, we quantize the fields  $\phi \rightarrow \hat{\phi}$  as well as  $\psi \rightarrow \hat{\psi}$  and employ a mean-field expansion  $\hat{\psi} = \psi_{\text{cl}} + \delta\hat{\psi}$  where  $\psi_{\text{cl}}$  denotes the classical kink profile in Eq. (2) and  $\delta\hat{\psi}$  as well as  $\hat{\phi}$  are supposed to be small (i.e.,  $\hat{\phi}, \delta\hat{\psi} \ll \psi_{\text{cl}}$ ). Taking the expectation value of Eq. (11) and comparing it with Eq. (5), we find that the lowest-order contributions of the

quantum backreaction force are just given by the expectation value of the pseudo energy-momentum tensor [11]

$$[\partial_t^2 - c_\phi^2 \partial_x^2 - V''(\psi_{\text{cl}})]\langle \delta \hat{\psi} \rangle \approx -g\langle \hat{T}_1^0 \rangle. \quad (12)$$

Remembering the covariant energy-momentum balance

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T_\nu^\mu) - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta} = 0, \quad (13)$$

we find that  $T_1^0$  denotes the momentum density  $\pi_\phi \phi'$ , which varies with position in general. In contrast, the energy flux  $T_0^1$  measured with respect to the stationary frame is constant  $\partial_x \langle \hat{T}_1^0 \rangle = 0$  for a kink at rest.

Fortunately, the expectation value  $\langle \hat{T}_1^\mu \rangle$  can be calculated analytically for a scalar field in 1 + 1 dimensions. In the Unruh state (which is the appropriate state for describing black-hole evaporation), one obtains [12]

$$\langle \hat{T}_1^0 \rangle = \frac{4\nu c_\phi (\kappa^2 - [\nu']^2 - \gamma \nu \nu'') - \kappa^2 (c_\phi + \nu)^2}{48\pi c_\phi^3 \gamma^2}, \quad (14)$$

with  $\gamma = 1 - \nu^2/c_\phi^2$  and the effective surface gravity  $\kappa$  determining the Hawking temperature

$$T_{\text{Hawking}} = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{d\nu}{dx} \right)_{\nu^2=c_\phi^2}. \quad (15)$$

Note that  $\langle \hat{T}_1^0 \rangle$  calculated in the Unruh state is regular across the black-hole horizon  $\nu = -c_\phi$ , but singular at the white-hole horizon  $\nu = +c_\phi$ . [The Israel-Hartle-Hawking state is regular at both horizons, cf. Eq. (18).] Far away from the kink/horizon  $\nu \rightarrow 0$ , we just get the usual thermal flux  $\langle \hat{T}_1^0 \rangle = -\kappa^2/(48\pi c_\phi)$ .

The corrections induced by the quantum backreaction can be visualized by incorporating them into an effective potential  $V_{\text{eff}}$  via

$$V'_{\text{eff}}(\psi) = V'(\psi_{\text{cl}}) - g\langle \hat{T}_1^0 \rangle. \quad (16)$$

For the classical potential  $V(\psi)$ , all minima  $\psi \in 2\pi\psi_0\mathbb{Z}$  occur at the same energy  $V = 0$ . However, the effective potential  $V_{\text{eff}}$  is distorted such that the central minimum is lower than the next one describing the black-hole interior  $V_{\text{eff}}(\psi = 0) < V_{\text{eff}}(-2\pi\psi_0)$ . In this sense, the exterior region is effectively energetically favorable and thus the horizon starts to move inwards, i.e., the black hole shrinks. Alternatively, the same result can be derived directly from Eq. (12) via classical time-dependent perturbation theory around the kink solution. The differential operator on the left-hand side of Eq. (12) possesses a continuum of gapped propagating (delocalized) modes with  $\omega^2 > 0$  and one localized zero mode  $\propto 1/\cosh(\xi[x - x_{\text{kink}}])$  with  $\omega = 0$ , which just corresponds to a translation of the kink position [13]. After expanding the source term  $-g\langle \hat{T}_1^0 \rangle$  in Eq. (12) into these modes, the perturbations in the continuous spectrum  $\omega^2 > 0$  just propagate away from the kink—whereas

the spatial overlap between  $-g\langle \hat{T}_1^0 \rangle$  and the zero mode determines the acceleration  $\ddot{x}_{\text{kink}} < 0$  of the kink position.

#### IV. ENERGY AND MOMENTUM

In contrast to the fluid analogues for black holes (with a steady inflow and outflow of energy and momentum), for example, the kink considered here represents a well-localized object, which allows us to ask the question of where the force pushing back the horizon comes from. In most cases, such an analysis is rather complicated [14] because the contribution of the  $\phi$  field to the total energy-momentum tensor  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  (defined with respect to the Minkowski metric  $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ ) differs from the pseudo energy-momentum tensor  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  in (5) defined with respect to the effective metric (4). Fortunately, these difficulties are absent in our toy model since the mixed components of both tensors coincide  $\mathcal{T}_\nu^\mu = T_\nu^\mu$ . The energy density  $T_0^0$  is given by Eq. (6) and the classical expression for the momentum flux density just reads  $T_1^1 = -T_0^0$  due to conformal invariance of the scalar field in 1 + 1 dimensions. Note, however, that the quantum expectation values differ due to the trace anomaly [12]. The energy flux density

$$T_0^1 = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = \dot{\phi} [\nu \dot{\phi} + (\nu^2 - c_\phi^2) \phi'], \quad (17)$$

also deviates from the momentum density  $T_1^0$  in Eqs. (11) and (12) for  $\nu \neq 0$ .

Far away from the kink, we may estimate the above quantities by employing the geometric-optics approximation and replacing  $\dot{\phi} \rightarrow \Omega$  and  $\phi' \rightarrow k$ . For solutions of the dispersion relation  $(\Omega + \nu k)^2 = c_\phi^2 k^2 + \mathcal{O}(k^4)$  corresponding to the outgoing Hawking radiation and its infalling partner particles, the energy density per normalized amplitude  $T_0^0 = c\Omega^2/(c - |\nu|)$  changes its sign at the horizon, cf. Eq. (6). The energy flux density  $T_0^1 = c\Omega^2$  is constant and positive everywhere (which is even true beyond the geometric-optics approximation). Note that  $\Omega$  is conserved as we are considering a quasistationary scenario. Thus, the total energy budget is balanced since the outgoing Hawking radiation carries away positive energy, but the infalling partners have a negative energy.

The momentum density  $T_1^0 = -c\Omega^2/(c - |\nu|)^2$ , on the other hand, turns out to be negative everywhere—or more precisely, far away from the kink, cf. the exact expression (14) with  $\Omega \sim \kappa$ . Thus the momentum flux density  $T_1^1 = -c\Omega^2/(c - |\nu|)$ , i.e., the pressure, also changes sign at the horizon. (The trace anomaly vanishes in the asymptotic region  $\nu' = \nu'' = 0$  far away from the kink where the geometric-optics approximation applies  $T_1^1 = -T_0^0$ .) Consequently, while the Hawking particles carry away positive momentum and push back the kink, their infalling partner particles act in the opposite way and pull on the kink. In summary, the momentum is not balanced and thus

CLOVIS MAIA AND RALF SCHÜTZHOLD

PHYSICAL REVIEW D **76**, 101502(R) (2007)

the kink starts to move, i.e., the black-hole interior region shrinks.

Of course, the above considerations can only be applied in the weak-field limit, i.e., when the acceleration  $\ddot{x}_{\text{kink}}$  of the kink is negligibly small during the typical emission time  $\mathcal{O}(1/\kappa)$  for one Hawking quantum  $|\dot{x}_{\text{kink}}| \ll \kappa c \phi$ . Using the above momentum balance  $M_{\text{eff}} \dot{x}_{\text{kink}} \propto \kappa^2$ , this translates to  $M_{\text{eff}} \gg \kappa/c_\phi^2$ , which is analogous to the usual semiclassical requirement  $M_{\text{Planck}} \gg \kappa/c^2$  in the black-hole case and will be automatically satisfied for sufficiently stiff potentials  $V(\psi)$  in Eq. (1) leading to an approximately classical background solution  $\psi_{\text{cl}}$  in Eq. (2).

## V. THERMODYNAMICS

The application of thermodynamic concepts to our toy model (in analogy to real black holes) presents some difficulties and ambiguities: Considering the heat capacity  $C = dE/dT$ , for example, we would associate  $T$  with the Hawking temperature (15). The variation of the internal energy  $dE$ , however, could be identified with the heat given off by the Hawking radiation  $dE = \delta Q \propto \kappa^2 dt$  during a time interval  $dt$  or, alternatively, with the change of the kinetic energy of the kink  $E = M_{\text{eff}} \dot{x}_{\text{kink}}^2/2$  (for  $\dot{x}_{\text{kink}}^2 \ll c_\psi^2$ ). Since the kink does not possess a conserved ADM mass, these quantities will be different in general. Either way, the heat capacity  $C = dE/dT$  could be positive as well as negative (or even infinite—at the turning point where  $dT = 0$ ) since the Hawking temperature can be increased  $dT > 0$  or decreased  $dT < 0$  by the quantum backreaction of the evaporation process [15].

Similar ambiguities apply to the entropy  $dS = dE/T$ . Choosing  $dE = \delta Q \propto \kappa^2 dt$  just reproduces the entropy flow of the Hawking radiation into the exterior region—which is of course indeed thermal. Inserting the kinetic energy  $E = M_{\text{eff}} \dot{x}_{\text{kink}}^2/2$ , on the other hand, does also yield a total differential  $dS = dE(\dot{x}_{\text{kink}})/T(\dot{x}_{\text{kink}})$  and hence allows us to define an alternative entropy concept. However, using this definition, we could violate the 2nd law since the kink can be accelerated or slowed down by incident coherent radiation (carrying zero entropy).

## VI. CONCLUSIONS

Modeling the black hole (horizon) by a stable topological defect in the form of a kink, we were able to derive the quantum backreaction of the resulting evaporation process. It turns out that the kink/horizon is also pushed inwards as in a real black hole though, in contrast to the gravitational case, this backreaction force is not caused by energy conservation but by momentum balance. Energetically, the expansion of the horizon should be favorable because the minimum energy density in exterior region  $\phi = \psi = 0$  lies far above  $1/(4\alpha)^2 > 0$  the ground state in the interior region. Hence, going beyond the linear analysis performed

here, one might suspect that the  $\phi$  field approaches its ground state via nonlinear (quantum) instabilities until the evaporation stops.

Note that in the Israel-Hartle-Hawking state with

$$\langle \hat{T}_{11}^0 \rangle_{\text{IHH}} = \frac{4vc_\phi(\kappa^2 - [v']^2 - \gamma v v'')}{48\pi c_\phi^3 \gamma^2}, \quad (18)$$

the horizon is still pushed inwards—i.e., this state does also not correspond to the thermal equilibrium for the combined system [kink in Eq. (2) plus  $\phi$  field]. This observation is related to the fact that the Lagrangian of our model in Eqs. (1) and (3) is only invariant under time reversal if we simultaneously invert  $\psi \rightarrow -\psi$ , which does not leave the background kink solution unaffected—but turns it into an antikink (corresponding to a white-hole horizon  $v \rightarrow -v$ ).

Further thermodynamical concepts such as heat capacity or entropy (variation) cannot be defined unambiguously and can have both signs—depending on the considered parameters [16]. Thus, in contrast to Hawking radiation, which is quite robust (i.e., independent of the Einstein equations) and just requires the existence of an effective horizon, the heat capacity and the entropy concept strongly depend on the underlying structure (e.g., Einstein equations). This observation may cast some doubt on the proposed explanation of black-hole entropy solely based on the entanglement entropy of the Hawking radiation (the latter is universal, the former not).

Together with the results in [9], our calculations and the energy-momentum considerations above suggest that the resulting backreaction force “pushing” the horizon inwards may also be universal. Speculating a bit further, one may ask whether the observation that the horizon “wants” to shrink could be somehow linked to the black-hole information paradox because a shrinking horizon (in contrast to a growing one) might perhaps entail the possibility of finally releasing the information which fell into the black hole.

## ACKNOWLEDGMENTS

R.S. acknowledges valuable discussions with Ted Jacobson, Bill Unruh, Renaud Parentani, and others at the workshop *From Quantum to Emergent Gravity: Theory and Phenomenology* (SISSA, Trieste, Italy 2007) and Gerard Dunne, Daniel Grumiller, and others at the 7th workshop on *Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions* (University of Leipzig, Germany, 2007) as well as support by the Emmy-Noether Programme of the German Research Foundation (DFG, No. SCHU 1557/1-2,3). C.M. is indebted to G. Matsas for the support, the ITP at TU-Dresden for the hospitality, and Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo for financial support.

- [1] S. W. Hawking, *Nature (London)* **248**, 30 (1974); *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [2] For simplicity, we are considering black holes without charge  $Q = 0$  and angular momentum  $J = 0$ . Otherwise we would have to distinguish different heat capacities in analogy to  $c_p$  and  $c_v$  in thermodynamics, as can be seen by comparing the first law of thermodynamics  $dE = TdS - pdV$  with the first law of black-hole dynamics  $dM = \kappa dA/(8\pi) + \Omega_H dJ + \Phi dQ$ , where  $\Omega_H$  is the angular velocity (at the horizon) and  $\Phi$  is the (electrostatic) potential.
- [3] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973); J. D. Bekenstein, *Lett. Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis.* **4**, 737 (1972); *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973); **9**, 3292 (1974); **12**, 3077 (1975).
- [4] See, e.g., W. G. Unruh and R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **25**, 942 (1982).
- [5] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
- [6] C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser, *Living Rev. Relativity* **8**, 12 (2005), <http://www.livingreviews.org/lrr-2005-12>; and references therein.
- [7] See, e.g., W. G. Unruh and R. Schützhold, *Phys. Rev. D* **71**, 024028 (2005); T. Jacobson and D. Mattingly, *Phys. Rev. D* **61**, 024017 (1999); S. Corley, *Phys. Rev. D* **57**, 6280 (1998); R. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel, *Phys. Rev. D* **52**, 4559 (1995); T. Jacobson, *Phys. Rev. D* **44**, 1731 (1991).
- [8] See, e.g., O. B. Zaslavskii, *Classical Quantum Gravity* **20**, 2963 (2003); S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **59**, 044003 (1999); and references therein.
- [9] R. Balbinot, S. Fagnocchi, A. Fabbri, and G. P. Procopio, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 161302 (2005); R. Balbinot, S. Fagnocchi, and A. Fabbri, *Phys. Rev. D* **71**, 064019 (2005).
- [10] T. Jacobson and T. Koike, in *Artificial Black Holes*, edited by M. Novello, M. Visser, and G. Volovik (World Scientific, Singapore, 2002).
- [11] In a similar way, one could calculate the backreaction of the quantum fluctuations of the  $\psi$  field itself. However, symmetry arguments show that these corrections do not generate any force on the kink.
- [12] P. C. Davies, S. A. Fulling, and W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **13**, 2720 (1976).
- [13] A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, and S. E. Trullinger, *Physica D (Amsterdam)* **1**, 1 (1980); M. B. Fogel, S. E. Trullinger, A. R. Bishop, and J. A. Krumhansl, *Phys. Rev. B* **15**, 1578 (1977); J. Rubinstein, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **11**, 258 (1970).
- [14] M. Stone, *Phys. Rev. E* **62**, 1341 (2000); *Phys. Rev. B* **61**, 11780 (2000); *Artificial Black Holes*, edited by M. Novello, M. Visser, and G. Volovik (World Scientific, Singapore, 2002).
- [15] There are several different effects: Because of the distortion of the effective potential  $V_{\text{eff}}$ , the shape of the kink deviates from the classical profile (2). This deviation is governed by the aforementioned continuum modes  $\omega^2 > 0$ . Furthermore, the kink starts to move—which is described by the zero mode. The motion of the kink, in turn, implies a Doppler shift of the Hawking radiation. Finally, even in the rest frame of the kink, the position of the horizon  $x_h$  changes since the kink velocity  $\dot{x}_{\text{kink}}$  effectively reduces the local frame-dragging speed  $v$  and therefore the surface gravity  $\kappa = v'(x_h)$  may change. As a result of all these effects, the heat capacity depends on many parameters ( $c_\phi$ ,  $c_\psi$ , and  $g\psi_0$ , etc.) and may assume negative as well as positive values. In order to demonstrate this sign ambiguity, let us consider the case  $c_\psi \gg c_\phi$  for simplicity. In this limit, the continuum modes  $\omega^2 > 0$  are very fast and hence the change of the shape of the kink can be neglected, i.e., the quantum backreaction induces a rigid motion of the kink only. As another simplification, the transformation of the  $\psi$ -field into the rest frame of the kink is just a Galilei transformation due to  $c_\psi \gg c_\phi$ . The new horizon position is then simply determined by  $v(x_h) = -c_\phi + \dot{x}_{\text{kink}}$ . Linearizing this equality together with  $\kappa = v'(x_h)$ , we find that the variation  $\delta\kappa$  of the surface gravity induced by the acceleration of the kink  $\delta\dot{x}_{\text{kink}}$  is determined by  $\delta\kappa = v''(x_h)\delta\dot{x}_{\text{kink}}/\kappa$ . Since  $v''(x_h)$  can be positive or negative (depending on the relation between  $c_\phi$  and  $g\psi_0$ ), the temperature measured in the rest frame of the kink could change in both directions. The temperature in the laboratory frame acquires an additional Doppler shift, which is given by  $\delta\kappa = -\kappa\delta\dot{x}_{\text{kink}}/c_\phi$ . The relative strength of the two competing effects (Doppler shift and horizon displacement) is given by  $c_\phi v''/(v')^2$ , which can be above or below one. Ergo, both temperatures (in the kink frame and in the laboratory frame) may increase or decrease due to the backreaction of Hawking radiation, i.e., the heat capacity can be positive or negative (or even infinite—at the turning point where  $\delta T = 0$ ).
- [16] The fate of the evaporating kink at late times also depends strongly on the parameters. E.g., for  $c_\psi \ll c_\phi$ , the kink will behave like a massive relativistic particle under the influence of an accelerating force. I.e., it will be accelerated towards  $|\dot{x}_{\text{kink}}| \uparrow c_\psi$  while its slope becomes constantly steeper due to the Lorentz contraction. As a result, the surface gravity grows—accelerating the kink even more. This mechanism will result in a *blowup* where eventually the higher-order terms will become important.

## **C.2 Anexo II-2**

O artigo a seguir é um complemento ao anterior, publicado em decorrência da apresentação desse trabalho no workshop “Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions” (Leipzig, Alemanha, 2007).

# Black-hole back-reaction—a toy model

Ralf Schützhold<sup>1</sup> and Clovis Maia<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, Germany

<sup>2</sup> Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, 01405-900, São Paulo, SP, Brazil

E-mail: [schuetz@theory.phy.tu-dresden.de](mailto:schuetz@theory.phy.tu-dresden.de)

Received 19 October 2007, in final form 14 January 2008

Published 9 April 2008

Online at [stacks.iop.org/JPhysA/41/164065](http://stacks.iop.org/JPhysA/41/164065)

## Abstract

Using a kink of arbitrary shape as a toy model for a black hole (horizon), we study the back-reaction of the evaporation process and find that the horizon is always pushed back (as in the gravitational case). The associated heat capacity and entropy variation, on the other hand, can be positive or negative, depending on the parameters.

PACS numbers: 04.62.+v, 04.70.Dy

## 1. Motivation

Our standard picture of black holes includes several rather odd features, which might give us some hints about quantum gravity. Due to the Hawking effect [1], black holes evaporate by emitting thermal radiation with the temperature being inversely proportional to the mass<sup>3</sup>. Hence they constantly lose energy via this evaporation process, and thereby their horizon shrinks. As a result, their heat capacity is negative, i.e. they get hotter by losing energy (see footnote 3). Finally, the generalization of the second law of thermodynamics to black holes yields an entropy, which is proportional to the surface area (instead of the volume, for example).

In order to understand the oddity of these features, it is useful to construct toy models which reproduce some of the relevant properties of black holes, but are still simple enough to do the calculations (which we cannot do in quantum gravity). In the following, we propose a very simple toy model for black-hole evaporation and study these issues; see [2].

<sup>3</sup> For simplicity, we consider the asymptotically flat Schwarzschild metric only, i.e. a black hole without charge and angular momentum. Otherwise, we would have to distinguish different heat capacities in analogy to  $c_p$  and  $c_V$  in thermodynamics.

## 2. Kink dynamics

Let us start by briefly reviewing some of the basic properties of kinks, see, e.g., [3, 4]. To this end, we consider a scalar field  $\psi$  in 1+1 dimensions ( $\hbar = 1$ ):

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2} (\dot{\psi}^2 - c_\psi^2 [\partial_x \psi]^2) - V(\psi), \quad (1)$$

where the potential is supposed to be non-negative  $V(\psi) \geq 0$  such that its zeros  $\psi_n$  denote the degenerate classical ground states  $V(\psi_n) = 0$ . Furthermore, we assume a very stiff potential which allows us to approximate the quantum field  $\psi$  by a classical solution (plus small quantum corrections). For any (non-negative) potential  $V(\psi)$  with more than one ground state, there exists at least one stable topological defect in the form of a static kink solution  $\psi_{\text{kink}}(x)$  which connects two adjoining zeros  $\psi_{\text{kink}}(x \rightarrow -\infty) = \psi_n$  and  $\psi_{\text{kink}}(x \rightarrow +\infty) = \psi_{n+1}$  or vice versa (anti-kink). These kinks are finite-energy solutions of the classical field equations and their stability (even in the non-static case) is protected by topology. The static kink solution  $\psi_{\text{kink}}(x)$  satisfies  $c_\psi^2 [\partial_x \psi_{\text{kink}}]^2 = 2V(\psi_{\text{kink}})$  (virial theorem) and hence obeys the implicit relation

$$\psi_{\text{kink}} = \psi_{\text{kink}}(x) \leftrightarrow x(\psi) = \pm \int^\psi \frac{d\tilde{\psi}}{\sqrt{2V(\tilde{\psi})}}. \quad (2)$$

A moving kink can be described in terms of the collective coordinate  $X[t]$  determining the kink position. Accordingly, we split up the total quantum field  $\psi$  into a classical kink solution with a quantized position operator  $X[t]$  (in the non-relativistic limit  $\dot{X}^2 \ll c_\psi^2$ ) plus quantum corrections via

$$\psi(t, x) = \psi_{\text{kink}}(x - X[t]) + \delta\psi(t, x). \quad (3)$$

In order to avoid double counting [3, 4], we demand  $\delta\psi \perp \partial_x \psi_{\text{kink}}$  (see below). The insertion of this (non-relativistic) ansatz into the action (1) yields

$$L_\psi = \frac{1}{2} M_{\text{eff}} \dot{X}^2 - \frac{1}{2} \int dx \delta\psi (\partial_t^2 - c_\psi^2 \partial_x^2 - V''(\psi_{\text{kink}})) \delta\psi + \mathcal{O}(\delta\psi^3), \quad (4)$$

plus an irrelevant constant. The differential operator on the rhs is self-adjoint and non-negative (since the kink is stable). It possesses one zero mode which is just given by  $\partial_x \psi_{\text{kink}}$  and corresponds to a translation of the kink (i.e. to  $X[t]$ ). Since this mode is excluded from the Hilbert space  $\delta\psi \perp \partial_x \psi_{\text{kink}}$ , all other modes have positive energies (stability).

## 3. Hawking radiation

Taking the kink (with a well-defined kinetic energy) as a model for the black hole (horizon), we may now add the ingredient of Hawking radiation. To this end, we introduce a light (massless) scalar quantum field  $\phi$  coupled to the classical kink solution according to

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} ([\partial_t \phi + g\psi \partial_x \phi]^2 - c_\phi^2 [\partial_x \phi]^2). \quad (5)$$

In this way, the light field  $\phi$  propagates in this kink background in the same way as in a curved spacetime with the effective metric [5]

$$ds^2 = (c_\phi^2 - v^2) dt^2 - 2v dt dx - dx^2, \quad (6)$$

where  $v = g\psi$  denotes the local frame-dragging velocity. If this velocity  $v$  exceeds the propagation speed  $c_\phi$ , we get the analogue of a black-hole horizon. Exploiting the analogy to gravity, we may introduce the pseudo energy-momentum tensor of the field  $\phi$ :

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{A}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\rho \phi)(\partial^\rho \phi). \quad (7)$$

Note that this quantity is not conserved itself in general  $\partial_\mu T_\nu^\mu \neq 0$ ; see the appendix. Instead, the analogue of the covariant energy–momentum balance,

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T_\nu^\mu) - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta} = 0, \quad (8)$$

contains a term  $T^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta}/2$  which describes the exchange of energy/momentum between the  $\phi$ -field and the gravitational field (in curved spacetimes) or the  $\psi$ -field (in our case); see the appendix. Fortunately, in 1+1 dimensions, the expectation value of  $T_\nu^\mu$  determining the Hawking radiation can be calculated analytically via the trace anomaly [6]. For example, the mixed component  $\langle T_1^0 \rangle$  which will become relevant reads (for an arbitrary massless scalar field)

$$\langle T_1^0 \rangle = \frac{4vc_\phi(\kappa^2 - [v']^2 - \gamma vv'') - \kappa^2(c_\phi + v)^2}{48\pi c_\phi^3 \gamma^2}, \quad (9)$$

with  $\gamma = 1 - v^2/c_\phi^2$  and the effective surface gravity  $\kappa$  determining the Hawking temperature is given by the velocity gradient at the horizon [5]<sup>4</sup>:

$$T_{\text{Hawking}} = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{dv}{dx} \right)_{v^2=c_\phi^2}. \quad (10)$$

#### 4. Back-reaction

Now let us estimate the back-reaction of the emitted Hawking radiation onto the kink. Variation of total action in equations (4) plus (5) w.r.t. the collective coordinate  $X$  yields

$$M_{\text{eff}} \ddot{X} = g \int dx T_1^0 \partial_x \psi_{\text{kink}} + \mathcal{O}(\delta\psi^2), \quad (11)$$

i.e. the acceleration of the kink induced by the evaporation process is determined by the overlap between the translational zero-mode  $\partial_x \psi_{\text{kink}}$  and the above component of the pseudo energy–momentum tensor (9). Inserting the expectation value, we see that  $v' \langle T_1^0 \rangle$  is a total differential and hence we get

$$M_{\text{eff}}(\ddot{X}) = - \frac{2v^2(v')^2 + c_\phi \kappa^2 (v - c_\phi)}{48\pi c_\phi^3 \gamma} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\kappa^2}{48\pi(v + c_\phi)} \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (12)$$

Consequently, the kink is pushed back by the emitted Hawking radiation.

This result can also be understood via the energy–momentum balance. Far away from the kink, we may estimate the energy–momentum tensor of the outgoing Hawking radiation and the associated in-falling partner particles via the geometric-optics approximation by replacing  $\dot{\phi} \rightarrow \Omega$  and  $\phi' \rightarrow k$  and using the dispersion relation  $(\Omega + vk)^2 = c_\phi^2 k^2$ . For the component (9), this yields

$$T_1^0 = [\partial_t \phi + v \partial_x \phi] \partial_x \phi \rightarrow - \frac{c_\phi \Omega^2}{(c_\phi + v)^2}. \quad (13)$$

Identifying  $\Omega \sim \kappa$ , this expression coincides with equation (9) far away from the kink, where  $v''$  and  $v'$  approach zero. The above quantity is the momentum density, which should not be confused with the energy flux density

$$T_0^1 = \dot{\phi} [v \dot{\phi} + (v^2 - c_\phi^2) \phi'] \rightarrow c_\phi \Omega^2, \quad (14)$$

<sup>4</sup> Note that calculating the expectation value  $\langle T_\nu^\mu \rangle$  via the trace anomaly does not tell us that the radiation is thermal—this property can be inferred from a direct derivation of the Bogoliubov coefficients; see, e.g., [2] and references therein.

which is constant. (For a static kink, this is even true exactly, i.e. without the geometric-optics approximation.) Finally, the energy density is given by

$$T_0^0 = \frac{1}{2} ([\partial_t \phi]^2 + (c_\phi^2 - v^2) [\partial_x \phi]^2) \rightarrow \frac{c_\phi \Omega^2}{c_\phi + v}, \quad (15)$$

and within the geometric-optics approximation (i.e. neglecting the trace anomaly), one obtains the same expression for the pressure  $T_1^1 = -T_0^0$ . Therefore, the particles of the Hawking radiation carry away positive energy and momentum, but their in-falling partner particles act in the opposite way and carry negative energy and momentum. Consequently, the energy flux is balanced, but the momentum flux is not. The pressure outside the horizon is positive and the pressure inside is negative, i.e. both contributions generate a force onto the kink in the same direction and hence the horizon is pushed back. Identifying  $\Omega \sim \kappa$ , the pressure difference yields the same force as in (12). Note that the asymptotic values of  $\langle T_\nu^\mu \rangle$  can also be calculated directly from the Bogoliubov coefficients, i.e. without any reference to the trace anomaly and possible renormalization ambiguities (cf the appendix).

The expectation value (9) was evaluated in the Unruh state, which describes the evaporation process and thus contains outgoing thermal radiation, but no incoming particles. Adding an equal amount of incoming thermal radiation (e.g., by placing a mirror for the  $\phi$ -field far away from the kink) would correspond to the (1+1 dimensional) Israel–Hartle–Hawking state. In this case, the relevant expectation value reads

$$\langle \hat{T}_1^0 \rangle_{\text{IHH}} = \frac{4vc_\phi(\kappa^2 - [v']^2 - \gamma vv'')}{48\pi c_\phi^3 \gamma^2}. \quad (16)$$

In contrast to (9), this quantity is invariant under velocity reversal  $v \rightarrow -v$ , and hence the Israel–Hartle–Hawking state is regular across both (black and white holes) horizons  $v = \pm c_\phi$ . Nevertheless, the horizon is still pushed inwards:

$$M_{\text{eff}} \langle \ddot{X} \rangle_{\text{IHH}} = - \left. \frac{v^2(v')^2 - c_\phi^2 \kappa^2}{24\pi c_\phi^3 \gamma} \right|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (17)$$

In gravity, the Israel–Hartle–Hawking state could describe a black hole surrounded by a large spherical mirror and would correspond to a stationary (though not necessarily stable) state of the total system (black hole plus radiation field). In contrast, the kink/horizon is still pushed back in our toy model, i.e. the Israel–Hartle–Hawking state does not correspond to an equilibrium state of the combined system (kink plus  $\phi$ -field). This finding is related to the fact that the Lagrangian of our toy model in equations (1) and (5) is only invariant under time reversal if we simultaneously invert  $\psi \rightarrow -\psi$ , which does not leave the background kink solution unaffected, but turns it into an anti-kink (corresponding to a white-hole horizon  $v \rightarrow -v$ ).

## 5. Conclusions

Using a kink of arbitrary shape as a toy model for a black hole (horizon), we found that the back-reaction of the evaporation process always tends to push the horizon inwards (i.e. the black hole to shrink, see also [7]). However, in contrast to real black holes in gravity, this shrinkage is not caused by energy conservation, but by momentum balance (and even persists for the Israel–Hartle–Hawking state).

Going a step further, one may also study the associated heat capacity and entropy variation of the kink [2]. It turns out that both could be positive or negative, depending on the chosen parameters.

Together with other analogues of black holes (see, e.g., [5, 7, 8]), our findings suggest that Hawking radiation and possibly the shrinkage of the horizon are quite robust phenomena, which are fairly independent of the Einstein equations. In contrast, understanding the origin of the black-hole entropy and heat capacity probably requires some aspects of the Einstein equations.

### Acknowledgments

RS acknowledges valuable discussions with Ted Jacobson, Bill Unruh, Renaud Parentani and others at the workshop *From Quantum to Emergent Gravity: Theory and Phenomenology* (SISSA, Trieste, Italy 2007) and Gerard Dunne, Daniel Grumiller and others at the 7th workshop on *Quantum Field Theory under the Influence of External Conditions* (University of Leipzig, Germany, 2007) as well as support by the Emmy-Noether Programme of the German Research Foundation (DFG, SCHU 1557/1-2,3). CM is indebted to G Matsas for the support, the ITP at TU Dresden for the hospitality and Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo for financial support.

### Appendix A

Let us compare the pseudo energy–momentum tensor  $T_{\mu\nu}$  of the field  $\phi$  in equation (7) with the total energy–momentum tensor  $\mathfrak{T}_\nu^\mu$  derived from the full Lagrangian  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi$  with respect to the Minkowski metric. Since  $\mathcal{L}_\phi$  does not contain derivatives of the  $\psi$ -field, we get

$$\mathfrak{T}_\nu^\mu = \mathfrak{T}_\nu^\mu[\psi] + \mathfrak{T}_\nu^\mu[\phi] = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \psi_{,\mu}} \partial_\nu \psi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_\psi \right] + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi_{,\mu}} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_\phi \right]. \quad (\text{A.1})$$

Obviously, the sum of both contributions must be conserved in a meaningful renormalization scheme  $\partial_\mu \langle \mathfrak{T}_\nu^\mu \rangle = 0$ , but each part is separately not conserved in general  $\partial_\mu \langle \mathfrak{T}_\nu^\mu[\psi] \rangle = -\partial_\mu \langle \mathfrak{T}_\nu^\mu[\phi] \rangle \neq 0$ , i.e. there will be an exchange of energy/momentum between the two fields, which is precisely the back-reaction force under consideration. Using the equations of motion for  $\psi$  and the assumption that  $\psi$  should be well approximated by a classical field, we get

$$\partial_\mu \langle \mathfrak{T}_\nu^\mu[\psi] \rangle = [\ddot{\psi} - c_\psi^2 \partial_x^2 \psi + V'(\psi)] \partial_\nu \psi = -g \langle [\partial_t \phi + g\psi \partial_x \phi] \partial_x \phi \rangle \partial_\nu \psi. \quad (\text{A.2})$$

Since the expectation value on the rhs is just  $\langle \mathfrak{T}_1^0[\phi] \rangle$ , this equality is the analogue of equation (11) and shows that the energy/momentum exchange is determined by  $\partial_\mu \langle \mathfrak{T}_\nu^\mu[\psi] \rangle = -\langle \mathfrak{T}_1^0[\phi] \rangle \partial_\nu v$ .

Now, even though the two tensors  $\mathfrak{T}_{\mu\nu}[\phi]$  and  $T_{\mu\nu}$  are defined w.r.t. different metrics and hence cannot be compared in general  $\mathfrak{T}_{\mu\nu}[\phi] \neq T_{\mu\nu}$ , it turns out that the *mixed* components coincide  $\mathfrak{T}_\nu^\mu[\phi] = T_\nu^\mu$ . Hence, switching from the Minkowski metric to the effective metric  $g_{\mu\nu}$  in equation (6), we find

$$\partial_\mu \langle T_\nu^\mu \rangle = \partial_\mu \langle \mathfrak{T}_\nu^\mu[\phi] \rangle = -\partial_\mu \langle \mathfrak{T}_\nu^\mu[\psi] \rangle = \langle \mathfrak{T}_1^0[\phi] \rangle \partial_\nu v = \langle T_1^0 \rangle \partial_\nu v = \frac{1}{2} \langle T^{\alpha\beta} \rangle \partial_\nu g_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.3})$$

Thus, by exploiting the total energy–momentum conservation  $\partial_\mu \langle \mathfrak{T}_\nu^\mu \rangle = 0$ , we are able to *derive* the covariant balance law  $\nabla_\mu \langle T_\nu^\mu \rangle = 0$  instead of just assuming it (note that  $\sqrt{-g} = \text{const}$ ). This is a non-trivial statement because the validity of  $\nabla_\mu \langle T_\nu^\mu \rangle = 0$  forces us to abandon the conformal invariance  $\langle T_\mu^\mu \rangle = 0$  which leads to the trace anomaly [6]. Demanding  $\nabla_\mu \langle T_\nu^\mu \rangle = 0$  is then a condition on the used renormalization scheme and is usually motivated via covariance arguments (whose applicability is not obvious in our model).

**References**

- [1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30  
Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
- [2] Maia C and Schützhold R 2007 *Phys. Rev. D* **76** R101502
- [3] Coleman S 1985 *Aspects of Symmetry* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Jackiw R 1977 *Rev. Mod. Phys.* **49** 681
- [5] Unruh W G 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 1351
- [6] Davies P C, Fulling S A and Unruh W G 1976 *Phys. Rev. D* **13** 2720
- [7] Balbinot R, Fagnocchi S, Fabbri A and Procopio G P 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 161302  
Balbinot R, Fagnocchi S and Fabbri A 2005 *Phys. Rev. D* **71** 064019
- [8] Barceló C, Liberati S and Visser M 2005 *Living Rev. Rel.* **8** 12  
Schützhold R and Uhlmann M 2005 Horizon analogues in the laboratory *Proc. Memorial Symp. for Gerhard Soff* (25 and 26 April 2005, Frankfurt, Germany)  
Schützhold R and Unruh W G (ed) 2007 *Quantum Analogues: From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology* (*Springer Lecture Notes in Physics* vol 718)

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Pais, *Theoretical particle physics*, Rev. Mod. Phys. **71**, 2, S16-S24 (1999).
- [2] J.A. Wheeler, K.W. Ford, *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics*, WW Norton Co. (1998).
- [3] K. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*, WW Norton Co. (1994).
- [4] R.M. Wald, *The Thermodynamics of Black Holes*, Living Rev. Relativity **4**, 6 (2001) [<http://www.livingreviews.org/lrr-2001-6>].
- [5] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975); *Black hole explosions*, Nature **248**, 30 (1974).
- [6] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press (1994).
- [7] N.D. Birrel, P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press (1994).
- [8] W.G. Unruh, *Notes on black hole evaporation*, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [9] L.C.B. Crispino, A. Higuchi, G.E.A. Matsas, *The Unruh effect and its applications*, Rev. Mod. Phys. **80**, 787 (2008).
- [10] D. Langlois, *Inflation, quantum fluctuations and cosmological perturbations*, Lectures of the Cargese School of Physics and Cosmology, Cargese, France (2003) [[arXiv:hep-th/0405053](http://arxiv.org/abs/hep-th/0405053)].
- [11] M. Novello, M. Visser, G. Volovik (Eds.), *Artificial Black Holes*, World Scientific (2002).
- [12] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, *Analogue Gravity*, Living Rev. Rel. **8**, 12 (2005) [<http://www.livingreviews.org/lrr-2005-12>].

- [13] W.G. Unruh, R. Schützhold (Eds.), *Quantum Analogues: From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology*, Lect. Notes Phys. **718**, Springer (2007).
- [14] W.G. Unruh, *Experimental black hole evaporation*, Phys. Rev. Lett. **46**, 1351 (1981).
- [15] J.D. Maynard, *Acoustical analogs of condensed-matter problems*, Rev. Mod. Phys. **73**, 2, 401 (2001).
- [16] C. Kittel, *Introduction to solid state physics*, J. Wiley (1996).
- [17] I. Arsene et al., *Quark-gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment*, Nucl. Phys. A **757**, 1 (2005); B.B. Back et al., *The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC*, *ibid.* **757**, 28 (2005); J. Adams et al., *Experimental and theoretical challenges in the search for the quark-gluon plasma: The STAR collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions*, *ibid.* **757**, 102 (2005); K. Adcox et al., *Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration*, *ibid.* **757**, 184 (2005).
- [18] M.H. Thoma, *The quark-gluon plasma liquid*, J. Phys. G **31**, 1, L7 (2005).
- [19] B. Müller, *From Quark-Gluon Plasma to the Perfect Liquid*, Lectures of the Cracow School of Theoretical Physics, Zakopane, Poland (2007) [[arXiv:0710.3366](https://arxiv.org/abs/0710.3366)].
- [20] X. Cheng et al, *Collective Behavior in a Granular Jet: Emergence of a Liquid with Zero Surface Tension*, Phys. Rev. Lett. **99**, 188001 (2007).
- [21] W. Gordon, *Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie*, Ann. Phys. (Leipzig) **72**, 421 (1923).
- [22] L.J. Garay, J.R. Anglin, J.I. Chirac, P. Zoller, *Sonic analog of gravitational black holes in Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4643 (2000); L.J. Garay, J.R. Anglin, J.I. Chirac, P. Zoller, *Sonic black holes in dilute Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **63**, 023611 (2001); C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, *Analogue gravity from Bose-Einstein condensates*, Class. Quant. Grav. **18**, 1137 (2001).
- [23] R. Schützhold, W.G. Unruh, *Hawking radiation in an electromagnetic wave-guide?*, Phys. Rev. Lett. **95**, 031301 (2005).
- [24] R. Schützhold, G. Plunien, G. Soff, *Dielectric black hole analogues*, Phys. Rev. Lett. **88**, 061101 (2002).
- [25] G.E. Volovik, *Effective gravity and quantum vacuum in superfluids*, na ref. [11] [[arXiv:gr-qc/0104046](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0104046)]; *Horizons and ergoregions in superfluids*, J. Low. Temp. Phys. **145**, 337-356 (2006).

- [26] T. Jacobson, G.E. Volovik, *Effective spacetime and Hawking radiation from moving domain wall in thin film of  $^3\text{He-A}$* , J. Exp. Theor. Phys. Lett. **68**, 874-880 (1998); *Event horizons and ergoregions in  $^3\text{He}$* , Phys. Rev. D **58**, 064021 (1998).
- [27] U.R. Fischer, *Quasiparticle universes in Bose-Einstein condensates*, Mod. Phys. Lett. **A19**, 1789-1812 (2004); *Quantum simulation of cosmic inflation in two-component Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **70**, 063615 (2004); M. Uhlmann, Y. Xu, R. Schützhold, *Aspects of cosmic inflation in expanding Bose-Einstein condensates*, New J. Phys. **7**, 248 (2005).
- [28] C. Barceló, L. Liberati, M. Visser, *Analogue models for FRW cosmologies*, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1641 (2003).
- [29] R. Schützhold, M. Uhlmann, L. Petersen, H. Schmitz, A. Friedenauer, T. Schätz, *Analogue of cosmological particle creation in an ion trap*, Phys. Rev. Lett. **99**, 201301 (2007).
- [30] I. Chuang, R. Durrer, N. Turok, B. Yurke, *Cosmology in the laboratory: defect dynamics in Liquid Crystals*, Science **251**, 1336 (1991); M.J. Bowick, L. Chandar, E.A. Schiff, A.M. Srivastava, *The cosmological Kibble mechanism in the laboratory: String formation in Liquid Crystals*, Science **263**, 943 (1994); S. Digal, R. Ray, A.M. Srivastava, *Observing correlated production of defects and antidefects in Liquid Crystals*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5030 (1999); R. Ray, A.M. Srivastava, *Measuring cosmic defect correlations in liquid crystals*, Phys. Rev. D **69**, 103525 (2004).
- [31] A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press (1994).
- [32] W.G. Unruh, R. Schützhold, *On the universality of the Hawking effect*, Phys. Rev. D **71**, 024028 (2005).
- [33] W.G. Unruh, *Sonic analog of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation*, Phys. Rev. D **51**, 2827 (1995).
- [34] T. Jacobson et al, *Lorentz violation and Crab synchrotron emission: a new constraint far beyond the Planck scale*, Nature **424**, 1019 (2003); *New limits on Planck scale Lorentz violation in QED*, Phys. Rev. Lett. **93** 021101 (2004); S. Liberati, M. Visser, S. Weinfurtner, *Naturalness in emergent spacetime*, Phys. Rev. Lett. **96**, 151301 (2006).
- [35] T.G. Philbin, C. Kuklewicz, S. Robertson, S. Hill, F. König, U. Leonhardt, *Fiber-optical analogue of the event horizon*, Science **319**, 1367 (2008) [arXiv:0711.4796,

- arXiv:0711.4797]; G. Rousseaux, C. Mathis, P. Maissa, T.G. Philbin, U. Leonhardt, *Observation of negative phase velocity waves in a water tank: A classical analogue to the Hawking effect?*, (2007) [arXiv:0711.4767].
- [36] E. Gueron, C. Maia, G.E.A. Matsas, *Swimming versus swinging effects in spacetime*, Phys. Rev. D **73**, 024020 (2006).
- [37] E.M. Purcell, *Life at low Reynolds number*, Am. J. Phys. **45**, 3 (1977).
- [38] H.C. Berg, *Motile behavior of bacteria*, Phys. Today **53**, 24 (2000).
- [39] A. Shapere, F. Wilczek, *Self-Propulsion at Low Reynolds Number*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2051 (1987); A. Shapere, F. Wilczek, *Efficiency of self-propulsion at low Reynolds numbers*, J. Fluid Mech. **198**, 587 (1989).
- [40] F. Wilczek, A. Shapere, *Geometric Phases in Physics*, World Scientific (1989).
- [41] S. Childress, *Mechanics of Swimming and Flying*, Cambridge University Press (1978).
- [42] R.G. Littlejohn, M. Reinsch, *Gauge fields in the separation of rotations and internal motions in the n-body problem*, Rev. Mod. Phys. **69**, 213 (1997).
- [43] C. Frohlich, *Do springboard divers violate angular momentum conservation?*, Am. J. Phys. **47**, 583 (1979); C. Frohlich, Sci. Am. **263**, 155 (1980).
- [44] T.R. Kane, M.P. Scher, *A dynamical explanation of the falling cat phenomenon*, Int. J. Solids Structures **5**, 663 (1969).
- [45] R. Montgomery, *Dynamics and Control of Mechanical Systems*, Ed. M.J. Enos (American Mathematical Society, 1993); T. Iwai, *Classical and quantum mechanics of jointed rigid bodies with vanishing total angular momentum*, J. Math. Phys. **40**, 2381 (1999).
- [46] J. Wisdom, *Swimming in spacetime: motion by cyclic changes in body shape*, Science **299**, 1295 (2003).
- [47] M.J. Longo, *Swimming in Newtonian space-time: Orbital changes by cyclic changes in body shape*, Am. J. Phys. **72**, 1312 (2004).
- [48] G.A. Landis, Phys. Today **56**, 12 (2003).
- [49] A. Torres, Dissertação de Mestrado, IFT/UNESP (2008).
- [50] E. Gueron, R.A. Mosna, *The relativistic glider*, Phys. Rev. D **75**, 081501 (2007).

- [51] C. Barceló, S. Liberati, S. Sonogo, M. Visser, *Causal structure of analogue spacetimes*, New J. Phys. **6**, 186 (2004).
- [52] M. Stone, *Phonons and Forces: Momentum versus Pseudomomentum in Moving Fluids*, na ref. [11] (2000) [[arXiv:cond-mat/0012316](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0012316)].
- [53] W. Ketterle, *When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser*, Rev. Mod. Phys. **74**, 1131 (2002); E.A. Cornell, C.E. Wieman, *Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments*, Rev. Mod. Phys. **74**, 875 (2002).
- [54] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [55] T. Jacobson, T. Koike, *Black hole and baby universe in a thin film of  $^3\text{He-A}$* , na ref. [11] [[arXiv:cond-mat/0205174](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0205174)].
- [56] M. Novello, V.A. De Lorenci, J.M. Salim, R. Klippert, *Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D **61**, 045001 (2000); M. Novello, S.E. Perez Bergliaffa, J.M. Salim, *Nonlinear electrodynamics and the acceleration of the Universe*, Phys. Rev. D **69**, 127301 (2004); M. Novello, S.E. Perez Bergliaffa, J.M. Salim, V.A. De Lorenci, R. Klippert, R., *Analog black holes in flowing dielectrics*, Class. Quantum Grav. **20**, 859 (2003). M. Novello, J.M. Salim, *Effective electromagnetic geometry*, Phys. Rev. D **63**, 083511 (2001).
- [57] M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J.P. Marangos, *Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media*, Rev. Mod. Phys. **77**, 633 (2005).
- [58] U. Leonhardt, P. Piwnicki, *Relativistic effects of light in moving media with extremely low group velocity*, Phys. Rev. Lett. **84**, 822 (2000); U. Leonhardt, *A laboratory analogue of the event horizon using slow light in an atomic medium*, Nature **415**, 406 (2002).
- [59] W.G. Unruh, R. Schützhold, *On slow light as a Black Hole analogue*, Phys. Rev. D **68**, 024008 (2003).
- [60] <http://www.st-andrews.ac.uk/~ulf/fibre.html>
- [61] G. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press (2001).
- [62] S. Corley, T. Jacobson, *Hawking spectrum and high frequency dispersion*, Phys.Rev. D **54**, 1568 (1996); S. Corley, *Computing the spectrum of black hole radiation in the presence of high frequency dispersion: an analytical approach*, Phys.Rev. D **57**, 6280 (1998).

- [63] G.E.A. Matsas, *Notas de teoria quântica de campos em espaços curvos*, (não publicadas).
- [64] I.S. Gradshteyn, I.M.Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press (1994).
- [65] A.D. Helfer, *Do black holes radiate?*, Rept. Prog. Phys. **66**, 943 (2003) e referências ali contidas.
- [66] T. Jacobson, *Black-hole evaporation and ultrashort distances*, Phys. Rev. **D 44**, 1731 (1991).
- [67] S. Gasiorowicz, *The Structure of Matter: A Survey of Modern Physics*, Addison-Wesley Pub. Co. (1979).
- [68] R.M. Wald, *On particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **45**, 9 (1975).
- [69] C. Maia, R. Schützhold, *Quantum toy model for black-hole backreaction*, Phys. Rev. **D 76**, 101502 (2007).
- [70] R. Schützhold, C. Maia, *Black-hole back-reaction - a toy model*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 164065 (2008).
- [71] J. Ehlers, R. Geroch, *Equation of motion of small bodies in relativity*, Annals Phys. **309**, 232 (2004); R. Geroch, P.S. Jang, *Motion of a body in General Relativity*, J. Math. Phys. **16**, 65 (1975).
- [72] F. Rohrlich, *Classical self-force* Phys. Rev. **D 60**, 084017 (1999); F. Rohrlich, *The self-force and radiation reaction*, Am. J. Phys. **68** (12), 1109 (2000).
- [73] E. Poisson, *The motion of point particles in curved spacetime*, Living Rev. Relativity **7**, 6 (2004) [<http://www.livingreviews.org/lrr-2004-6>].
- [74] R.M. Wald, *Gravitational collapse and cosmic Censorship*, (1997) [[arXiv:gr-qc/9710068](http://arxiv.org/abs/gr-qc/9710068)].
- [75] G.E.A. Matsas, A.R.R. Silva, *Overspinning a nearly extreme charged black hole via a quantum tunneling process*, Phys. Rev. Lett. **99**, 181301 (2007).
- [76] S. Hod, *Weak Cosmic Censorship: as strong as ever*, Phys. Rev. Lett. **100**, 121101 (2008)
- [77] M. Richartz, A. Saa, *Overspinning a nearly extreme black hole and the Weak Cosmic Censorship conjecture*, (2008) [[arXiv:0804.3921](http://arxiv.org/abs/0804.3921)].
- [78] R. Peierls, *More surprises in theoretical physics*, Princeton University Press (1991).

- [79] G.K. Campbell et al, *Photon recoil momentum in dispersive media*, Phys. Rev. Lett. **94**, 170403 (2005).
- [80] U. Leonhardt, *Energy-momentum balance in quantum dielectrics*, Phys. Rev. A **73**, 032108 (2006).
- [81] P.C.W. Davies, S.A. Fulling, W.G. Unruh, *Energy-momentum tensor near an evaporating black hole*, Phys. Rev. D **13**, 2720 (1976).
- [82] A.R. Bishop, J.A. Krumhansl, S.E. Trullinger, *Solitons in condensed matter: a paradigm*, Physica D **1**, 1 (1980); M.B. Fogel, S.E. Trullinger, A.R. Bishop, J.A. Krumhansl, *Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations*, Phys. Rev. B **15**, 1578 (1977).
- [83] J. Rubinstein, *Sine-Gordon equation*, J. Math. Phys. **11**, 258 (1970).
- [84] W.A. Hiscock e L.D. Weems, *Evolution of charged evaporating black holes*, Phys. Rev. D **41**, 1142 (1990); P.C.W. Davies, *The thermodynamic theory of black holes*, Proc. R. Soc. London **A353**, 499 (1977).
- [85] R. Balbinot et al, *Backreaction in acoustic Black Holes*, Phys. Rev. Lett. **94**, 161302 (2005); *Quantum effects in acoustic black holes: the backreaction*, Phys. Rev. D **71**, 064019 (2005).
- [86] C. Barcelo, S. Liberati, S. Sonego, M. Visser, *Hawking-like radiation does not require a trapped region*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 171301.
- [87] L.C. Crispino, E.S. Oliveira, G.E.A. Matsas, *Absorption cross section of canonical acoustic holes*, Phys. Rev. D **76**, 107502 (2007).
- [88] E. Abdalla, R.A. Konoplya, A. Zhidenko, *Perturbations of Schwarzschild black holes in laboratories*, Class. Quantum Grav. **42**, 5901 (2007).
- [89] D.G. Swanson, *Plasma Waves*, Academic Press (1989).
- [90] R. Schützhold, *Quantum back-reaction problems*, Proceedings do workshop “From Quantum to Emergent Gravity: Theory and Phenomenology”, Itália, Proceedings of Science (QG-Ph) 036 (2007) [[arXiv:0712.1429](https://arxiv.org/abs/0712.1429)].
- [91] J. Martin, S.E. Jorás, R.H. Brandenberger, *Trans-Planckian physics and the spectrum of fluctuations in a bouncing universe*, Phys. Rev. D **66**, 083514 (2001); J. Martin, R.H. Brandenberger, *Back-reaction and the trans-Planckian problem of inflation reexamined*, Phys. Rev. D **71**, 023504 (2005); F. Queisser, M. Uhlmann, R. Schützhold, *On signatures of Planck-scale interactions in the cosmic microwave background radiation*, Class. Quant. Grav. **24**, 1375 (2007).

- [92] *Einstein-aether gravity: a status report*, Proceedings do workshop “From Quantum to Emergent Gravity: Theory and Phenomenology”, Itália, Proceedings of Science (QG-Ph) 020 (2007) [[arXiv:0801.1547](https://arxiv.org/abs/0801.1547)].
- [93] G. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Oxford Press (2003).
- [94] Ver demais contribuições ao workshop “From Quantum to Emergent Gravity: Theory and Phenomenology”, Itália, Proceedings of Science (QG-Ph) (2007) [<http://pos.sissa.it/cgi-bin/reader/conf.cgi?confid=43>].
- [95] M. Levin, X.-G. Wen, *Photons and electrons as emergent phenomena*, Rev. Mod. Phys. **77**, 871 (2005).
- [96] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, Academic Press (2001).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)