



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.001/06

Geometria Invariante de Escala

Cássius Anderson Miquele de Melo

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Fevereiro de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Índice

Preâmbulo	1
Bibliografia	3
1 Introdução	7
Bibliografia	10
2 A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau	13
2.1 Construindo a Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau livre	15
2.2 A Álgebra DKP	17
2.3 Covariância de Poincaré em DKP	25
2.4 O Campo Conjugado $\bar{\psi}$	29
2.5 Conteúdo de spin e conteúdo de partículas em DKP	31
2.6 Campos de massa nula e liberdade de gauge	33
2.7 Projetores de Umezawa	36
2.7.1 Setor escalar	36
2.7.2 Setor vetorial	42
Apêndice: Álgebras e Grupos	46
Definições Básicas	46
Grupos de Lie	55
Subgrupos Invariantes, Ideais, Classes de Equivalência e Outras Definições	61

Invariância sob um Simetria	63
Operadores Invariantes	65
Aplicações	66
Bibliografia	71
3 A Geometria Invariante de Escala e a Geometria de Lyra	74
3.1 Sistemas de Coordenadas e Sistemas de Referência	75
3.2 Vetores, Tensores e Sistemas de Base	77
3.3 Transporte Paralelo	79
3.4 Intervalo	83
3.5 Metricidade	85
3.6 Curvatura Como Uma Medida de Não-Integrabilidade das Rotações, ou de Não-Holonomia	88
3.7 Tetradas	90
3.8 Curvatura, Torção e o Grupo de Poincaré	91
3.9 Mais Sobre Conexão de Spin	96
3.10 Torção Como uma Medida de Não-Integrabilidade das Translações, ou de Não-Paralelismo	100
3.11 Ainda Sobre Curvatura e Torção de Gauge	102
3.12 Anulamento de Curvatura e Torção e o Espaço de Minkowski	106
3.12.1 Curvatura Nula	106
3.12.2 Torção Nula	108
3.12.3 Curvatura e Torção Nulas, ou Espaço Flat	108
3.12.4 Minkowski-SI	109
3.13 Isometrias e Simetria Conforme	110
3.13.1 Isometrias	110
3.13.2 Isometrias Conformes em Minkowski-SI	112

3.13.3	Transformações Conformes na Geometria SI	114
3.14	A Restrição de Lyra	116
Apêndice: Formas Diferenciais		120
Objetos Básicos		120
Produto Exterior		125
Derivação de Formas Diferenciais		126
Teoremas da Análise Vetorial (Unificação)		128
Teoria de Gauge		129
Formas na Variedade Invariante de Escala		131
Bibliografia		132
4 Aplicações		134
4.1	Campos Escalar e Vetorial Massivos na Variedade de Lyra	136
4.2	Campo Eletromagnético na Variedade de Lyra: Uma Abordagem de Primeira Ordem	144
4.3	Campo DKP sem Massa na Variedade de Lyra	149
4.4	Campo Espinorial e Geometria de Lyra	161
5 Comentários Finais		173
Apêndice: Teoria de Gauge de Segunda Ordem		176

Agradecimentos

À minha família. Em especial às minhas filhas, Linda e Lílian.

Aos meus amigos Rodrigo, Léo, Pejú e CR, que nunca faltaram nos momentos em que mais precisei deles.

Ao professor Bruto Max Pimentel, pelos longos anos de amizade e por continuar sendo o meu pai na rua.

A todos os amigos que fiz nesta jornada pela Física, sejam eles da USP, IFT ou qualquer outro lugar do Brasil ou do mundo. Eu aprendi muito com vocês.

Aos funcionários do IFT, pelo auxílio que sempre me prestaram.

À FAPESP, pelo apoio financeiro (processo 01/12584-0).

Resumo

Propomos uma generalização afim da geometria de Lyra que incorpora transformações de escala em nível de igualdade com as transformações gerais de coordenadas. Caracterizamos alguns casos particulares com curvatura e/ou torção nula(s) e implementamos as equações de Killing como base para o estudo das isometrias nessa geometria generalizada.

No caso particular da geometria de Lyra, estudamos seu acoplamento com campos de spin inteiro e semi-inteiro, destacando aspectos da interação com a torção, como essa interação afeta a simetria de gauge $U(1)$, e as similaridades entre as transformações de escala e as transformações conformes.

Palavras Chave:

Geometria Diferencial; Gravitação; Teoria de Campos em Espaços Curvos

Áreas do conhecimento:

1.01.03.00-7; 1.05.01.00-2; 1.05.02.00-9; 1.05.03.00-5

Abstract

We propose an affine generalization of the Lyra geometry which incorporate scale transformations at the same level as general coordinate transformations. We have characterized some particular cases of null curvature and/or torsion and introduced the Killing equations as the base to study isometries in such generalized geometry.

In the particular case of Lyra geometry, we have studied the coupling of integer and half-integer spin fields with the torsion, how this interaction affects the $U(1)$ gauge symmetry, and similarities among scale transformations and conformal ones.

Keywords:

Differential Geometry; Gravitation; Field Theory on Curved Spaces

Knowledge areas :

1.01.03.00-7; 1.05.01.00-2; 1.05.02.00-9; 1.05.03.00-5

Para minhas filhas que, com seu amor, desenharam a geometria da minha vida.

O Amor Bate na Aorta

Cantiga do amor sem eira nem beira,
vira o mundo de cabeça para baixo,
suspende a saia das mulheres,
tira os óculos dos homens,
o amor, seja como for,
é o amor.

Meu bem, não chores,
Hoje tem filme de Carlito!

O amor bate na porta
O amor bate na aorta,
fui abrir e me constipei.
Cardíaco e melancólico,
o amor ronca na horta
entre pés de laranjeira
entre uvas meio verdes
e desejos já maduros.

Entre uvas meio verdes,
meu amor, não te atormentes.

Certos ácidos adoçam
a boca murcha dos velhos
e quando os dentes não mordem
e quando os braços não prendem
o amor faz uma cócega

o amor desenha uma curva
propõe uma geometria.
Amor é bicho instruído.
Olha: o amor pulou o muro
o amor subiu na árvore
em tempo se estrepou.
Pronto, o amor se estrepou.
Daqui estou vendo o sangue
que escorre do corpo andrógino.
Essa ferida, meu bem,
às vezes não sara nunca
às vezes sara amanhã.
Daqui estou vendo o amor
irritado, desapontado,
mas também vejo outras coisas:
vejo corpos, vejo almas
vejo beijos que se beijam
ouço mãos que se conversam
e que viajam sem mapa.
Vejo muitas outras coisas
que não ousou compreender...

Carlos Drummond de Andrade

Preâmbulo

Em anos recentes instaurou-se um elevado pragmatismo no que diz respeito às políticas científicas e ao desenvolvimento dos programas de pós-graduação brasileiros. As agências de fomento reduziram o prazo para a titulação, exemplo que foi regamente seguido e ratificado pela totalidade dos programas de pós-graduação. Incidentalmente, instituiu-se a cultura de que fazer doutorado é “produzir uma tese”, o que levou a maioria dos pós-graduandos a acatar também o costume de cursar o número mínimo necessário de disciplinas, focando-se ao máximo apenas no seu projeto de pesquisa. Por outro lado, consolidou-se também a noção de que “quanto mais artigos, melhor” sem mesmo se discutir a utilidade da pulverização de resultados de uma tese em uma série de pequenas *letters*.

Tendo sido escrita como parte dos requerimentos para a obtenção do título de “Doutor em Física”, esta tese pode ser vista também como um exemplo de que esse modelo pragmático de administração da produção do conhecimento está fundamentalmente errado. Ao iniciarmos este projeto, tínhamos por objetivo estudar diversos aspectos da teoria de Duffin-Kemmer-Petiau quantizada. Porém, ao cursar disciplinas optativas que não estavam diretamente relacionadas ao corpo principal do projeto, o autor passou a se interessar por outras questões de cunho fundamental contidas apenas marginalmente no mesmo. A mudança de foco demandou tempo, mas rendeu frutos mais saborosos do que se podia imaginar ao início [1, 2, 4, 3]. Não obstante, prosseguimos perseguindo o objetivo da diversificação e ampliação de horizontes, esforço que foi recompensado apenas após um longo período de trabalho [5, 6, 7]. Com isso, queremos destacar que a produção de artigos científicos não é o *objetivo*, mas a

conseqüência do trabalho de pesquisa. Fugindo ao escopo principal da tese, escrevemos um artigo com parte dos resultados de nosso Mestrado [8], e ainda pudemos editar dois anais de eventos [9, 10] e realizar duas publicações internas de cunho didático [11]. Isso demonstra, segundo nosso ponto de vista, que a pluralidade é mais fecunda que a ultra-especialização, desde que seja observado o tempo necessário para o amadurecimento do trabalho.

Vemos, portanto, que um doutorado não é apenas a produção de uma tese mas, antes de mais nada, é um *aprendizado* que passa por um período natural de amadurecimento do pósgraduando, com vistas à sua capacitação enquanto pesquisador auto-suficiente e futuro orientador/professor de outros estudantes. De fundamental importância para que alcançássemos esse objetivo, foi a compreensão, colaboração e estímulo encontrados na figura de nosso parecerista anônimo da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), que soube reconhecer a necessidade de tempo adicional aos três anos iniciais de bolsa e também nos estimulou a complementar nossa formação estudando assuntos que não eram relacionados ao corpo do projeto, tais como as Mecânicas Estatística e Clássica.

Esperamos que a nossa comunidade reflita melhor sobre as desventuras do pragmatismo exacerbado e da ultra-especialização, de modo a concluir como nós que, em um doutoramento, o menor dos benefícios é o *paper*.

Bibliografia

- [1] R. Casana, C. A. M. de Melo & B. M. Pimentel - *Proc.Sci. WC2004* (2004) 013, [hep-th/0501085]; Palestra apresentada na Fourth International Winter Conference on Mathematical Methods in Physics, August 9-23, 2004, Rio de Janeiro, Brazil.
- [2] R. Casana, C. A. M. de Melo & B. M. Pimentel - *Braz. J. Phys.* **35**, 1151 (2005); Palestra apresentada na 100 Years of Relativity: International Conference on Classical and Quantum Aspects of Gravity and Cosmology, August 22-24, 2005, São Paulo, Brazil.
- [3] R. Casana, C. A. M. de Melo & B. M. Pimentel - *Massless DKP field in Lyra manifold*, [gr-qc/0509117]; Submetido a *Physical Review D*.
- [4] R. Casana, C. A. M. de Melo & B. M. Pimentel - *Spinorial Field and Lyra Geometry*, [gr-qc/0509096]; Submetido a *Nuclear Physics B*.
- [5] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo & P. J. Pompeia - *Second Order Gauge Theory*, Preprint IFT - P.058/2004, [hep-th/0502052]; Submetido a *Modern Physics Letters A*.
- [6] C. A. M. Melo & B. M. Pimentel - *Princípio Variacional de Schwinger e Mecânica Estatística: Cavidades Ressonantes e Átomos Frios*, Anais do Simpósio *Tendências da Física Estatística no Brasil*, organização: Tânia Tomé, editora Livraria da Física, São Paulo, (2003).

-
- [7] C. A. M. de Melo & B. M. Pimentel - *Princípio Variacional de Schwinger, Espalhamento e Sistemas Quânticos à Temperatura Finita*, U. França, A. Doff & C. A. M. Melo eds., *Anais do XXV Congresso Paulo Leal Ferreira*, editora Livraria da Física, São Paulo, (2003).
- [8] C. A. M. de Melo, B. M. Pimentel & P. J. Pompeia - *Schwinger's Principle and Gauge Fixing in the Free Electromagnetic Field*, [hep-th/0502229]; Submetido a *Il Nuovo Cimento B*.
- [9] *Anais do XXV Congresso Paulo Leal Ferreira*, editores: C. A. M. de Melo, U. França & A. Doff, editora Livraria da Física, São Paulo, (2003).
- [10] *Anais do XXVIII Congresso Paulo Leal Ferreira*, editores: C. A. M. de Melo, R. C. Lopes de Sá, D. J. P. da Silva & E. C. da Silva, editora Livraria da Física, São Paulo, (2006). Atualmente em editoração.
- [11] C. A. M. de Melo & B. M. Pimentel - *Formulação Variacional da Mecânica Quântica Vols. I e II*, Notas Internas do Instituto de Física Teórica - UNESP, (2004); Cópias disponíveis pela biblioteca do Instituto de Física Teórica - Unesp: IFT-N.001/2004 e IFT-N.002/2004.

1. Introdução

Logo após ter proposto a relatividade geral [1], e do seu sucesso em explicar o problema da precessão do periélio de Mercúrio, Einstein passou a investigar uma teoria unificada das interações nos moldes da relatividade geral, ou seja, uma teoria que pudesse explicar as forças da Natureza como efeitos geométricos do espaço-tempo. Esse programa de geometrização foi mesmo estendido até a idéia de que as partículas elementares poderiam também ser descritas por configurações complicadas da geometria, em geral com o auxílio de topologias não-triviais.

Entretanto, quem conseguiu dar os primeiros passos nesse programa não foi Einstein, mas sim Hermann Weyl que, em 1918 [2], propôs uma geometria que incorporava além das transformações de coordenadas, também transformações de escala, chamadas por ele de *transformações de gauge*. O intuito de Weyl era descrever o campo eletromagnético como um ente geométrico associado a essas transformações. Porém, a geometria de Weyl padece do mal de não ser métrica, o que a inviabiliza como descrição unificada da gravitação e eletromagnetismo.

Alguns anos depois, Cartan [3] propõe uma extensão da geometria riemanniana, onde resgata o conceito de torção originário dos trabalhos de Gauss [4] e Frenet [5] em três dimensões, lançando aí as bases do que hoje é conhecido por *geometria afim* [6]. Em 1951 Lyra propõe [7] uma generalização da geometria riemanniana que também incorpora transformações de escala, mas que é vista como um difeomorfismo adicional às transformações de coordenadas, ou seja, as transformações de escala passam a at-

uar na variedade ainda desprovida de estrutura métrica e de paralelismo. No ano seguinte essa teoria foi completada por Scheibe [8], e de lá para cá pouco foi feito com relação ao estudo da geometria *per se* [9, 10]. A geometria de Lyra possui torção – embora aparentemente o próprio Lyra ignorasse tal fato – ligada exclusivamente às transformações de escala, o que nos motivou a estudar essa geometria como proposta para uma teoria com torção dinâmica. Mas por que é interessante ter uma torção dinâmica?

Um dos aspectos mais intrigantes da pesquisa atual em gravitação diz respeito à existência e natureza da dinâmica da torção [11]. As geometrias usuais, aplicadas como modelos da interação gravitacional, fornecem descrições para a torção que não estão em pleno acordo com a física esperada desse fenômeno. Por exemplo, a geometria riemanniana [12] ignora completamente a presença de spin enquanto característica fundamental da matéria. Entretanto, a mecânica quântica nos ensina que spin e massa estão em pé de igualdade como propriedades fundamentais na caracterização das partículas elementares, uma vez que a classificação de Wigner [13] das representações irredutíveis do grupo de Poincaré usa exatamente esses dois invariantes de Casimir como rótulos fundamentais.

A relatividade restrita estabeleceu a equivalência entre massa e energia, enquanto que a relatividade geral (RG) nos mostrou a equivalência entre massa e curvatura. Assim, se confiarmos nesta lição básica de que as propriedades fundamentais da matéria estão ligadas à estrutura geométrica do espaço-tempo, então é de se esperar que o spin possua uma contraparte na geometria. A geometria de Riemann-Cartan incorpora a torção como essa contraparte [14], no entanto a torção comparece como uma quantidade não-propagante, como revela a análise dos seus dados de Cauchy, confinada a um valor não-nulo apenas no interior da matéria. Além disso, na geometria de Riemann-Cartan o acoplamento com a torção quebra a simetria de gauge do campo eletromagnético. Por outro lado, a relatividade geral também promoveu a geometria a um ente *dinâmico*

na descrição do mundo físico, de forma que perturbações locais devam se propagar e afetar, após um determinado lapso de tempo, observadores distantes. Uma torção não-propagante está, portanto, em desacordo com essa premissa física de que a *geometria* deve ser dinâmica.

Há várias propostas *ad hoc* na literatura de construção de uma torção propagante [15, 16], não obstante, até o momento, nenhuma delas consegue obter esse resultado como uma consequência natural da geometria escolhida para modelar o espaço-tempo. A geometria de Lyra aparece então como candidata natural para resolver esse problema.

Nesta tese, buscamos estudar a geometria de Lyra com vistas a confirmar essa idéia. Esses estudos nos levaram então a propor um extensão afim da geometria de Lyra, batizada de *geometria invariante de escala*, cujas bases são descritas no capítulo 3. Essa geometria incorpora as geometrias de Lyra, Riemann e Riemann-Cartan como casos particulares. Pudemos então verificar a aplicabilidade dessas idéias através de um estudo clássico do acoplamento entre a geometria de fundo de Lyra e os campos de matéria. esse estudo resultou numa série de artigos contidos no capítulo 4. Para isso, escolhemos utilizar a teoria de Duffin-Kemmer-Petiau, descrita no capítulo 2, e o Princípio Variacional de Schwinger [17]. Abordagens de primeira ordem, como a de Duffin-Kemmer-Petiau, são largamente utilizadas em teoria dos campos em função de várias vantagens, tais como uma dinâmica hamiltoniana mais transparente e uma abundância de métodos para tratar sistemas vinculados de primeira ordem [18]. Além disso, para sistemas de primeira ordem também é possível dar provas bastante gerais e elegantes dos teoremas CPT e spin-estatística por meio de métodos variacionais [19].

No capítulo 5 comentaremos sobre as implicações do trabalho desenvolvido na tese e os rumos futuros desse trabalho.

Com o intuito de manter esta tese um pouco mais autocontida, foram adicionados apêndices matemáticos aos capítulos 2 e 3. Esses apêndices não têm a intenção de ser completos ou rigorosos, tendo sido incluídos mais em função do processo de aprendiza-

gem do autor, e também pensando em futuros leitores que venham a utilizar a tese como referência para seus estudos. Além disso, em consonância ao que foi dito no preâmbulo, incluímos um apêndice adicional ao final da tese com alguns dos resultados obtidos pelo autor fora da linha principal de pesquisa do seu doutoramento.

Bibliografia

- [1] Albert Einstein - *Annalen Phys.* **49**, 769-822 (1916), versão em inglês disponível em: *Annalen Phys.* **14**, 517-571 (2005).
- [2] Hermann Weyl - *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch.*, 465 (1918); versão em inglês disponível em: L. O’Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton Series in Physics (1997).
- [3] Élie Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2nd ed. (Gauthier-Villars, Paris, 1963).
- [4] Carl Friedrich Gauss - *Comment. Soc. Reg. Sci. Göttingen Rec.*, **6** (1828); versão em inglês disponível em: *150 Years after Gauss’ “Disquisitiones generales circa superficies curvas”*, 2nd ed., P. Dombrowski, *Astérisque*, **62** (1979), Soc. Matth. France, Paris.
- [5] F. Frenet - *Journal de Mathém.* **17**, 437-447 (1852).
- [6] David A. Brannan, Matthew F. Esplen & Jeremy J. Gray - *Geometry*, Cambridge University Press (1999).
- [7] Gerhard Lyra, *Math. Z.* **54**, 52 (1951).
- [8] E. Scheibe, *Math. Z.* **57**, 65 (1952).
- [9] D. K. Sen and J. R. Vanstone, *J. Math. Phys.* **13**, 990 (1972).

-
- [10] Jerzy Matyjasek - *Int. J. Theor. Phys.* **33**, 967-982 (1994).
- [11] F. Gronwald & F. W. Hehl - *On the Gauge Aspects of Gravity*, em *Proceedings of the 14th School of Cosmology and Gravitation*, Erice, Italy, ed. P. G. Bergmann, V. de Sabbata & H.-J Treder (World Scientific, Singapore, 1996).
- [12] V. De Sabbata & M. Gasperini - *Introduction to Gravitation*, (World Scientific, Singapore, 1985).
- [13] E. Wigner - *Ann. Math.* **40**, 149 (1939).
- [14] F.W. Hehl, P. von der Heyde & G. D. Kerlick - *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976).
- [15] V. De Sabbata and C. Sivaram, *Spin and Torsion in Gravitation*, World Scientific (1994).
- [16] R. A. Mosna and A. Saa, *Volume elements and torsion*, gr-qc/0505146.
- [17] C. A. M. de Melo & B. M. Pimentel - *Formulação Variacional da Mecânica Quântica Vols. I e II*, Notas Internas do Instituto de Física Teórica - UNESP, (2004); Cópias disponíveis pela biblioteca do Instituto de Física Teórica - Unesp: IFT-N.001/2004 e IFT-N.002/2004.
- [18] Mário César Bertin, Bruto Max Pimentel & Pedro José Pompeia - *Mod. Phys. Lett.* **A20**, 2873-2890 (2005).
- [19] Julian Seymour Schwinger - *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **44**, 223 & 617 (1958).

2. A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau

Buscando resolver o problema dos estados de energia negativa da equação de Klein-Gordon-Fock (KGF) [1], Dirac [2] propôs a equação de onda linear (ou de primeira ordem)

$$(i\gamma^a \partial_a - m) \psi(x) = 0, \quad (2.1)$$

invariante pelas transformações de Lorentz, onde o campo $\psi(x)$ tem mais de uma componente e os fatores γ^a são matrizes que obedecem a álgebra

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}.$$

A expressão (2.1), cujas soluções também devem satisfazer a equação de KGF, passou a ser conhecida como a equação de Dirac.

Com o sucesso da equação de Dirac para a descrição de partículas relativísticas de massa m e spin $1/2$, surge o interesse em propor para outras classes de partículas equações de onda linearizadas¹, ou seja, de primeira ordem nas derivadas, e que pudessem ser usadas como alternativa à equação de onda de Klein-Gordon-Fock. Utilizando a notação spinorial, Fierz e Pauli [3] formularam equações lineares para partículas relativísticas de spin arbitrário (inteiro e semi-inteiro) tomando como princípio-guia a hipótese de que cada componente do campo deveria satisfazer uma equação de segunda

¹A expressão linearizada é utilizada aqui no sentido em que a relação de dispersão obtida a partir da transformada de Fourier da equação de onda é *linear* no quadrimomento da partícula.

ordem. Nesta formulação, as componentes do campo não são todas independentes, pois obedecem a relações subsidiárias.

Outra investigação foi feita por de Broglie [4], que buscou combinar dois léptons para obter um fóton massivo. As equações de onda obtidas foram dadas em termos de matrizes 16×16 resultantes do produto direto de duas matrizes de Dirac. Mais tarde, Petiau [5] efetuou algumas modificações na álgebra, obtendo matrizes β^a também 16×16 que satisfazem a álgebra

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \eta^{bc} + \beta^c \eta^{ba}. \quad (2.2)$$

cujas três representações irredutíveis são de dimensões 1, 5 e 10 [6]. As representações de dimensões 5 e 10 estão associadas aos campos escalar e vetorial respectivamente, e a trivial, unidimensional, é dita sem significado físico. Inspirados na equação de Proca [7] para campos vetoriais massivos e pela possibilidade de expressá-la numa equação de primeira ordem, Duffin [8] e Kemmer [9] propuseram uma equação de onda da forma (2.1) onde as matrizes correspondentes são 16×16 e satisfazem a álgebra (2.2). Esta equação passou a ser conhecida como a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Outras contribuições foram dadas no estudo da teoria de equações lineares de onda, e uma boa revisão histórica do assunto foi feita por Krajcik e Nieto [10].

Mesmo tendo inspirado um grande número de trabalhos, o estudo da teoria DKP teve seu declínio a partir dos anos 1950 tendo como um forte motivo a impressão de que esta teoria e a de Klein-Gordon-Fock eram *totalmente* equivalentes [10]. A complexidade aparente da teoria DKP, quando comparada à de KGF, foi o fator de maior contribuição para que aquele formalismo fosse preterido em favor deste. Entretanto, alguns resultados como os obtidos pelo estudo de quebras de simetria e processos hadrônicos [10] mostraram que os dois formalismos citados acima podem produzir resultados diferentes. O formalismo DKP também mostrou-se mais rico quanto às possibilidades de introdução de interações [11]. Estes e outros resultados apontam no sentido contrário

da equivalência *completa* das teorias DKP e de Klein-Gordon-Fock.

Investigando a equivalência entre as teorias DKP e de segunda ordem, alguns resultados mais recentes foram adicionados, como a prova de equivalência entre os elementos físicos da matriz de espalhamento para o campo escalar interagindo com campos externos eletromagnético, de Yang-Mills e gravitacional [12]. A teoria DKP quantizada também mostrou-se equivalente à de segunda ordem quando na presença do acoplamento mínimo eletromagnético (também quantizado) onde foram analisados os termos anômalos que surgem na hamiltoniana da equação [13].

Neste capítulo, pretendemos dar uma breve introdução à teoria clássica *livre* do campo DKP. Uma descrição detalhada da interação mínima eletromagnética pode ser consultada na referência [14].

2.1 Construindo a Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau livre

Vamos seguir aqui um roteiro simples e direto, elucidado pelos comentários históricos feitos acima, para obter a teoria DKP livre.

Nosso objetivo é colocar a equação KGF,

$$(\square + m^2) \varphi = 0$$

numa forma *a la* Dirac:

$$(i\beta^a \partial_a - m) \psi = 0 \tag{2.3}$$

Como toda equação de segunda ordem, KGF pode ser transformada em um sistema de equações de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \partial^a \psi_a &= -im\varphi \\ \psi_a &= \frac{i}{m} \partial_a \varphi \end{aligned}$$

Esse sistema pode ser posto de maneira explícita, como

$$\begin{array}{cccccc}
 i\partial^0\psi_0 & + & i\partial^1\psi_1 & + & i\partial^2\psi_2 & + & i\partial^3\psi_3 & - & m\varphi & = & 0 \\
 i\partial_0\varphi & + & 0 & + & 0 & + & 0 & - & m\psi_0 & = & 0 \\
 0 & + & i\partial_1\varphi & + & 0 & + & 0 & - & m\psi_1 & = & 0 \\
 0 & + & 0 & + & i\partial_2\varphi & + & 0 & - & m\psi_2 & = & 0 \\
 0 & + & 0 & + & 0 & + & i\partial_3\varphi & - & m\psi_3 & = & 0
 \end{array}$$

ou ainda, na seguinte *forma matricial*:

$$\begin{array}{l}
 \beta^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \beta^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array} \tag{2.4}$$

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad i\beta^a\partial_a\psi - m\psi = 0$$

que é exatamente a forma linear procurada. Com isso, acabamos por encontrar também uma representação particular para a chamada *álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau*.

2.2 A Álgebra DKP

A principal característica que diferencia a teoria de DKP da de Dirac é a *álgebra* satisfeita pelas matrizes que compõem na equação de movimento. Sendo assim, é natural que comecemos nosso estudo pelas características particulares dessa álgebra. O termo “álgebra” será usado nessa seção com um sentido um tanto vago. A noção *precisa* do que denominamos *álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau* será dada na seção seguinte.

A partir da relação

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \eta^{bc} + \beta^c \eta^{ba} \quad (2.5)$$

podemos tirar uma série de relações subseqüentes, que são de extrema utilidade nos cálculos. Na derivação dessas relações devemos, no entanto, ser extremamente cuidadosos com as manipulações, uma vez que *todas* as matrizes β são *singulares*.

A primeira relação importante é encontrada fazendo-se $a = b = c$ na relação acima,²

$$(\beta^a)^3 = \beta^a \eta^{aa} \quad (\text{sem soma}) \quad (2.6)$$

Um conjunto de matrizes que complementa as $\beta\beta$ é dado por

$$\eta^a \equiv 2(\beta^a)^2 - \eta^{aa} \quad (2.7)$$

Apesar das matrizes β serem singulares, as η são inversíveis:

$$\begin{aligned} (\eta^a)^2 &= 4(\beta^a)^4 + (\eta^{aa})^2 - 4(\beta^a)^2 \eta^{aa} = \\ &= 4(\beta^a)^4 - 4\beta^a (\beta^a)^3 + (\eta^{aa})^2 = 1 \end{aligned}$$

onde fizemos uso da relação (2.6).

²A convenção da soma só será empregada caso os índices repetidos estejam devidamente posicionados como inferior e superior. Quando houver soma com ambos os índices na mesma posição, esta será explicitamente citada.

A comutatividade entre as $\eta\eta$ e as $\beta\beta$ pode ser estabelecida multiplicando, à direita, a definição (2.7) por β^b :

$$\eta^a \beta^b = 2 (\beta^a)^2 \beta^b - \eta^{aa} \beta^b$$

O primeiro termo no segundo membro dessa expressão pode ser obtido da relação (2.5) fazendo-se $a = b$,

$$(\beta^a)^2 \beta^b + \beta^b (\beta^a)^2 = \beta^a \eta^{ab} + \beta^b \eta^{aa}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \eta^a \beta^b &= 2 \left(\beta^a \eta^{ab} + \beta^b \eta^{aa} - \beta^b (\beta^a)^2 \right) - \eta^{aa} \beta^b = \\ &= 2\beta^a \eta^{ab} + \beta^b \eta^{aa} - 2\beta^b (\beta^a)^2 = \\ &= -\beta^b \left(2(\beta^a)^2 - \eta^{aa} \right) + 2\beta^a \eta^{ab} = \\ &= -\beta^b \eta^a + 2\beta^a \eta^{ab} \end{aligned}$$

$$\{ \eta^a, \beta^b \} = 2\beta^a \eta^{ab}$$

Esta relação nos informa que, num sistema *ortogonal* de coordenadas,

$$\begin{aligned} \{ \eta^a, \beta^b \} &= 0 \quad a \neq b \\ \{ \eta^a, \beta^a \} &= 2\eta^{aa} \beta^a \end{aligned}$$

Por outro lado, partindo diretamente da definição (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} \eta^a \beta^a &= \left(2(\beta^a)^2 - \eta^{aa} \right) \beta^a = 2(\beta^a)^3 - \eta^{aa} \beta^a = (\beta^a)^3 = \eta^{aa} \beta^a \\ \beta^a \eta^a &= \beta^a \left(2(\beta^a)^2 - \eta^{aa} \right) = 2(\beta^a)^3 - \eta^{aa} \beta^a = (\beta^a)^3 = \eta^{aa} \beta^a \end{aligned}$$

logo,

$$\eta^a \beta^a = \beta^a \eta^a = (\beta^a)^3 = \eta^{aa} \beta^a$$

$$[\eta^a, \beta^a] = 0$$

A relação de comutação das $\eta\eta$ entre si pode ser obtida diretamente da definição (2.7):

$$\begin{aligned}
 \eta^a \eta^b &= \eta^a \left(2 (\beta^b)^2 - \eta^{bb} \right) = 2 \eta^a (\beta^b)^2 - \eta^{bb} \eta^a = 2 (\eta^a \beta^b) \beta^b - \eta^{bb} \eta^a = \\
 &= 2 (2 \beta^a \eta^{ab} - \beta^b \eta^a) \beta^b - \eta^{bb} \eta^a = 4 \eta^{ab} \beta^a \beta^b - 2 \beta^b (\eta^a \beta^b) - \eta^{bb} \eta^a = \\
 &= 4 \eta^{ab} \beta^a \beta^b - 2 \beta^b (2 \beta^a \eta^{ab} - \beta^b \eta^a) - \eta^{bb} \eta^a = \\
 &= 4 \eta^{ab} \beta^a \beta^b - 4 \eta^{ab} \beta^b \beta^a + 2 (\beta^b)^2 \eta^a - \eta^{bb} \eta^a = \\
 &= 4 \eta^{ab} [\beta^a, \beta^b] + \left(2 (\beta^b)^2 - \eta^{bb} \right) \eta^a = \\
 &= 4 \eta^{ab} [\beta^a, \beta^b] + \eta^b \eta^a \\
 & \qquad \qquad \qquad [\eta^a, \eta^b] = 4 \eta^{ab} [\beta^a, \beta^b]
 \end{aligned}$$

Num sistema de coordenadas ortogonal, isto se reduz a

$$[\eta^a, \eta^b] = 0 \tag{2.8}$$

Agora, se escolhermos uma representação tal que

$$\beta^{a\dagger} = \eta^{aa} \beta^a \tag{2.9}$$

as matrizes η tornam-se *hermiteanas*:

$$\begin{aligned}
 \eta^{a\dagger} &= 2 (\beta^a)^{2\dagger} - \eta^{aa} = 2 (\beta^{a\dagger})^2 - \eta^{aa} = \\
 &= 2 (\eta^{aa} \beta^a)^2 - \eta^{aa} = 2 (\beta^a)^2 - \eta^{aa} \\
 & \qquad \qquad \qquad \eta^{a\dagger} = \eta^a
 \end{aligned}$$

Vamos agora tentar encontrar uma matriz tal que

$$\begin{aligned}
 D \beta^a D &= \beta^{a\dagger} \\
 D^2 &= 1
 \end{aligned}$$

Usando repetidas vezes as relações deduzidas anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}
 D\beta^a D &= \beta^a \eta^a \\
 D\beta^a &= \beta^a \eta^a D, \quad \beta^a D = D\beta^a \eta^a \\
 [D, \beta^a] &= [\beta^a \eta^a, D] = \beta^a [\eta^a, D] + [\beta^a, D] \eta^a \\
 \\
 D\beta^a &= \eta^{aa} \beta^a D, \quad \beta^a D = \eta^{aa} D\beta^a \\
 [\beta^a, D] &= \eta^{aa} [D, \beta^a] \rightarrow (\eta^{aa} + 1) [D, \beta^a] = 0
 \end{aligned}$$

Como esta última identidade deve valer *para todo a*, temos

$$[D, \beta^a] = 0$$

e portanto concluímos que

$$[D, \eta^a] = 0$$

Assim, em um sistema ortogonal de coordenadas, podemos, em virtude da relação (2.8), escolher D tal que

$$D = A_a \eta^a$$

Lembrando que o quadrado dessa matriz deve ser a identidade, restringimos ainda mais a sua forma:

$$D^2 = A_a A_b \eta^a \eta^b = \sum_a A_a^2 + \sum_{a \neq b} A_a A_b \eta^a \eta^b = 1$$

A maneira mais simples de satisfazer essa restrição, é se todos os coeficientes A_a forem nulos, com exceção de um em particular, que denotaríamos por C . Não obstante, a imposição $D^2 = 1$ novamente nos faz escolher $C = 1$. Ficamos então com

$$D = \eta^a$$

Por outro lado, se substituirmos isso para o cálculo da hermiteana de β^a , encontramos

$$\begin{aligned}\beta^{a\dagger} &= \eta^a \beta^a \eta^a = \eta^{aa} \beta^a \\ \beta^a \eta^a &= \eta^{aa} \eta^a \beta^a = \eta^{aa} \beta^a \eta^a \\ \beta^a &= \eta^{aa} \beta^a \\ (1 - \eta^{aa}) \beta^a &= 0\end{aligned}$$

Desta forma, somos levados a concluir que

$$\eta^{aa} = 1$$

o que só é possível para $a = 0$, de acordo com a nossa convenção de métrica, $(\eta_{ab}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Finalmente, podemos afirmar que

$$\beta^{a\dagger} = \eta^0 \beta^a \eta^0 = \eta^{aa} \beta^a$$

É importante observar que a condição (2.9) implica que a representação 5×5 dada na seção anterior (eq. 2.4) deve ser alterada. Sendo assim, deste ponto em diante passaremos sempre a usar a seguinte representação para o setor escalar de DKP:

$$\begin{aligned}\beta^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \beta^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \beta^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Consideremos agora as relações de DKP (2.5). Se tomarmos ainda as matrizes η^a , pode-se mostrar que as 126 matrizes,

Matrizes	Quantidade
1	1
β^a	4
$\beta^a \beta^b$	12
$\beta^a \beta^b \beta^c$	12
$\beta^a \beta^b \beta^c \beta^d$	6
η^a	4
$\eta^a \beta^b$	12
$\eta^a \beta^b \beta^c$	24
$\eta^a \beta^b \beta^c \beta^d$	12
$\eta^a \eta^b$	6
$\eta^a \eta^b \beta^c$	12
$\eta^a \eta^b \beta^c \beta^d$	12
$\eta^a \eta^b \eta^c$	4
$\eta^a \eta^b \eta^c \beta^d$	4
$\eta^a \eta^b \eta^c \eta^d$	1
Total	126

formam uma base para a álgebra definida pela relação de produto (2.5). Calculando-se diretamente a métrica de Pauli-Artin, podemos ver também que essa álgebra é semisimples. Além disso, por meio de um cálculo direto, mas também laborioso, pode-se mostrar que há três elementos da base que comutam com qualquer elemento de base, sejam eles,

$$1, \sum_a \eta^a - \sum_{a < b} \eta^a \eta^b, \eta^0 \eta^1 \eta^2 \eta^3 \left(1 - \sum_a \eta^a \right)$$

ou seja, a álgebra DKP possui um ideal não-abeliano de dimensão três. Pelo teorema de

Frobenius-Schur, essa álgebra deve possuir então três representações irredutíveis cujas dimensões devem respeitar a relação³

$$126 = 1^2 + n_0^2 + n_1^2$$

A primeira dessas representações irredutíveis é a trivial, sempre presente. A segunda, como vimos acima, é uma representação de dimensão 5 que descreve o campo escalar, restando então uma representação de dimensão 10.

É interessante notar que estas considerações algébricas nos levam a concluir que a equação de Duffin-Kemmer-Petiau contém mais do que apenas a teoria de KGF de onde partimos, dado que existem outras duas representações. A representação unidimensional não pode possuir nenhum significado físico, dado que nessa representação $\beta^a = 0$, o que implica que $\varphi = 0$. A representação decadimensional por outro lado, tem um significado físico. O fato do vetor DKP ψ ter dez componentes nos remete imediatamente ao campo de Proca, que pode ser descrito em termos de seis componentes de um tensor antissimétrico e mais quatro para um potencial vetor. De fato, em sua formulação de primeira ordem, as equações para o campo de Proca se escrevem

$$\begin{aligned}\partial_a F^{ab} - m^2 A^b &= 0 \\ \partial^a A^b - \partial^b A^a - F^{ab} &= 0\end{aligned}$$

Usando a mesma linha de raciocínio do caso escalar, e agora lembrando que queremos uma representação que respeite a condição (2.9), chegamos à seguinte representação

³Observe que esta relação também possui a solução $126 = 1^1 + 2^2 + (11)^2$, entretanto não existem representações de dimensão 2 ou 11 das matrizes DKP, o que apenas ilustra a *necessidade*, mas não a *suficiência*, da relação (2.25) para a determinação das dimensões das representações irredutíveis de uma álgebra semissimples.

para as matrizes β :

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essas matrizes obedecem a relação (2.5) e portanto formam uma representação 10×10 da álgebra DKP.

Podemos então “coleccionar” as representações irreduzíveis de DKP na forma de uma realização em termos de matrizes 16×16 reduzíveis.

Mostramos aqui como são obtidas as representações irreduzíveis dessa álgebra de matrizes $\beta_{16 \times 16}$, porém de uma maneira simples e sem nenhum rigor. A prova mais rigorosa dessa decomposição, bem como a expressão das matrizes $\beta_{16 \times 16}$ em termos das matrizes de Dirac,

$$\beta^a = \frac{1}{2} (\gamma^a \otimes 1 + 1 \otimes \gamma^a) \quad (2.12)$$

pode ser encontrada em [16]. Uma vez que o campo DKP pode representar tanto partículas de spin 0 quanto as de spin 1, fica claro que a representação escalar deve corresponder à decomposição

$$D = D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \oplus D^{00}$$

em termos das representações irreduzíveis do grupo das rotações no espaço de Minkowski, enquanto que a representação vetorial corresponde a

$$D = D^{10} \oplus D^{01} \oplus D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$$

2.3 Covariância de Poincaré em DKP

Nesta seção vamos estudar a covariância da equação de Duffin-Kemmer-Petiau sob transformações de Poincaré no espaço de Minkowski. A dita covariância expressa que sob as transformações

$$\begin{aligned} \bar{x}^a &= \Lambda^a_b x^b + \Delta^a & \bar{\partial}_a &= (\Lambda^{-1})^b_a \partial_b & \bar{m} &= m \\ \tilde{\psi}(\bar{x}) &= U(\Lambda) \psi(x) \end{aligned}$$

a equação de DKP permanece invariante:

$$i\bar{\beta}^a \bar{\partial}^a \tilde{\psi}(\bar{x}) - \bar{m} \tilde{\psi}(\bar{x}) = 0$$

Nosso intuito é encontrar a forma explícita das transformações $U(\Lambda)$ e $\bar{\beta}^a$. Para tanto, substituímos as transformações acima na equação transformada e comparamos

com a equação original:

$$i\bar{\beta}^a (\Lambda^{-1})^b_a \partial_b (U(\Lambda) \psi(x)) - mU(\Lambda) \psi(x) = 0$$

Lembrando que estamos estudando transformações globais ($[\partial, U] = 0$ ou $\partial\Lambda = 0$), e aplicando a inversa à esquerda, encontramos

$$i \left(U^{-1}(\Lambda) \bar{\beta}^a (\Lambda^{-1})^b_a U(\Lambda) \right) \partial_b \psi(x) - m\psi(x) = 0$$

Comparando com a forma da equação de DKP, vemos que as matrizes β devem se transformar como

$$U^{-1}(\Lambda) \bar{\beta}^a U(\Lambda) = \Lambda^a_b \beta^b \quad (2.13)$$

Tomemos agora o caso de uma transformação infinitesimal:

$$\begin{aligned} U(\Lambda) &= 1 + i\alpha\omega_{ab}S^{ab} + O(\omega^2) \\ \Lambda^a_b &= \delta^a_b + \omega^a_b + O(\omega^2) \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba} \end{aligned}$$

Substituindo isso em (2.13),

$$\begin{aligned} \bar{\beta}^a + i\alpha\omega_{bc}\bar{\beta}^a S^{bc} &= \left(1 + i\alpha\omega_{bc}S^{bc}\right) (\delta^a_b + \omega^a_b) \beta^b + O(\omega^2) \\ \bar{\beta}^a + i\alpha\omega_{bc}\bar{\beta}^a S^{bc} &= \left(1 + i\alpha\omega_{bc}S^{bc}\right) (\beta^a + \omega^a_b \beta^b) + O(\omega^2) \\ \bar{\beta}^a + i\alpha\omega_{bc}\bar{\beta}^a S^{bc} &= \beta^a + \omega^a_b \beta^b + i\alpha\omega_{bc}S^{bc}\beta^a + O(\omega^2) \end{aligned}$$

Pelo princípio de identidade de polinômios (em ω),

$$\bar{\beta}^a = \beta^a, \quad i\alpha\omega_{bc} [\beta^a, S^{bc}] = \omega^a_b \beta^b$$

A primeira destas relações estabelece, juntamente com a transformação (2.13), que as matrizes β devem ser independentes das coordenadas escolhidas no espaço de

Minkowski. A segunda equação pode ser usada para determinar a forma explícita do gerador infinitesimal S . Para isso, devemos em primeiro lugar simetrizar o segundo membro:

$$\begin{aligned}\omega_b^a \beta^b &= \eta^{ac} \omega_{cb} \beta^b = \frac{1}{2} \left(\eta^{ac} \omega_{cb} \beta^b - \eta^{ac} \omega_{bc} \beta^b \right) = \frac{1}{2} \left(\eta^{ab} \omega_{bc} \beta^c - \eta^{ac} \omega_{bc} \beta^b \right) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_{bc} \left(\eta^{ab} \beta^c - \eta^{ac} \beta^b \right)\end{aligned}$$

de modo que

$$i\alpha \left[\beta^a, S^{bc} \right] = \frac{1}{2} \left(\eta^{ab} \beta^c - \eta^{ac} \beta^b \right) \quad (2.14)$$

Como S^{bc} está no espaço da álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau, é possível expandi-lo como

$$S = A_a \beta^a + B_{ab} \beta^a \beta^b + C_{abc} \beta^a \beta^b \beta^c + D_{abcd} \beta^a \beta^b \beta^c \beta^d + \dots$$

Entretanto, uma maneira mais rápida de obter essa expansão é usar diretamente a relação (2.5):

$$\begin{aligned}\ominus \quad & \beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \eta^{bc} - \beta^c \eta^{ba} \\ & \beta^a \beta^c \beta^b + \beta^b \beta^c \beta^a = \beta^a \eta^{cb} - \beta^b \eta^{ca} \\ \hline & \beta^a [\beta^b, \beta^c] - [\beta^b, \beta^c] \beta^a = -(\eta^{ab} \beta^c - \eta^{ac} \beta^b)\end{aligned}$$

Comparando isto com (2.14) vemos que

$$i\alpha \left[\beta^a, S^{bc} \right] = -\frac{1}{2} \left[\beta^a, [\beta^b, \beta^c] \right]$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{i}{2} \quad S^{bc} = [\beta^b, \beta^c]$$

Uma vez que temos o gerador infinitesimal, a transformação contínua finita fica completamente determinada:

$$U(\Lambda) = \exp \left(-\frac{1}{2} \omega_{ab} S^{ab} \right)$$

É importante destacar que isso nos dá a lei de transformação do campo DKP e das matrizes β sob ação do subgrupo próprio ortocrômico contínuo à identidade do grupo homogêneo de Poincaré. As transformações discretas devem ser estudadas como um caso à parte.

A parte não-homogênea do grupo de Poincaré (translações) é estudada da maneira convencional. Realizamos uma translação infinitesimal,

$$\bar{x} = x + \varepsilon, \quad \psi'(\bar{x}) = U(\varepsilon)\psi(x), \quad U(\varepsilon) \equiv \exp\left(i\varepsilon^b \hat{P}_b\right)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \psi'(x + \varepsilon) &= \left(1 + i\varepsilon^b \hat{P}_b + O(\varepsilon^2)\right) \psi(x) \\ \psi'(x) + \varepsilon^b \partial_b \psi'(x) &= \psi(x) + i\varepsilon^b \hat{P}_b \psi(x) + O(\varepsilon^2) \\ \delta_0 \psi(x) &\equiv \psi'(x) - \psi(x) = \varepsilon^b \left(i\hat{P}_b - \partial_b\right) \psi(x) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Uma vez que estamos nos restringindo a estudar as variações induzidas pelas translações, devemos ter que uma variação funcional nula, $\delta_0 \psi(x) = 0$, o que nos leva a concluir que o operador que gera as translações se realiza por

$$\hat{P}_b \psi(x) = -i\partial_b \psi(x)$$

Por outro lado, a partir de uma densidade Lagrangeana para o campo DKP podemos calcular seu tensor energia-momento canônico associado:⁴

$$T^a_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \psi)} \partial_b \psi + \partial_b \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \bar{\psi})} - \delta^a_b \mathcal{L}$$

que serve para definir o quadrimomento,

$$P_b \equiv \int_V d^3 \mathbf{x} T^0_b$$

⁴As definições da densidade Lagrangeana do campo DKP e de seu campo conjugado serão dadas na próxima seção. Nos adiantamos aqui apenas para completar a argumentação referente a translações e momento linear.

e como é sabido da teoria clássica de campos, o quadrimomento é a função geratriz da transformação canônica de translação,

$$\{P_b, \psi\} = \partial_b \psi$$

que é a forma compacta das equações de Hamilton quando consideramos coordenadas de espaço e tempo em pé de igualdade.

2.4 O Campo Conjugado $\bar{\psi}$

Nosso próximo passo é encontrar quem corresponde ao conjugado de ψ , no sentido de respeitar uma equação de movimento de forma análoga à (2.3), e cujo produto matricial com ψ gere um *escalar*.

Como ponto de partida para a construção desse campo conjugado, apliquemos a conjugação hermiteana à equação de DKP:

$$-i\partial_a \psi^\dagger \beta^{\dagger a} - m\psi^\dagger = 0$$

Essa equação não tem uma forma “conjugada” (*a la Dirac*) à da equação de Duffin-Kemmer-Petiau, mas usando a expressão de β^\dagger obtida na seção 2.2, temos:

$$-i\partial_a \psi^\dagger \eta^0 \beta^a \eta^0 - m\psi^\dagger = 0 \rightarrow i\partial_a \left(\psi^\dagger \eta^0 \right) \beta^a + m \left(\psi^\dagger \eta^0 \right) = 0$$

Portanto, parece-nos antural definir o campo DKP *conjugado* como sendo

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &\equiv \psi^\dagger \eta^0 \\ i\partial_a \bar{\psi} \beta^a + m\bar{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

Podemos agora olhar para a lei de transformação de $\bar{\psi}$ sob uma transformação de Lorentz,

$$\psi' = U\psi, \quad \bar{\psi}' \equiv \psi'^\dagger \eta^0$$

Se a transformação de Lorentz é realizada entre dois sistemas de coordenadas cartesianos, então

$$\bar{\psi}' = \psi^\dagger U^\dagger \eta^0 = \psi^\dagger \eta^0 \left(\eta^0 U^\dagger \eta^0 \right)$$

Mas,

$$\begin{aligned} U^\dagger &= \exp \left(-\frac{1}{2} \omega_{ab} S^{\dagger ab} \right) \\ S^{\dagger ab} &= \left(\beta^a \beta^b \right)^\dagger - \left(\beta^b \beta^a \right)^\dagger = \beta^{\dagger b} \beta^{\dagger a} - \beta^{\dagger a} \beta^{\dagger b} = \\ &= \eta^0 S^{ba} \eta^0 = -\eta^0 S^{ab} \eta^0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \eta^0 U^\dagger \eta^0 &= \eta^0 \left(1 + \frac{1}{2} \omega_{ab} \eta^0 S^{ab} \eta^0 + \eta^0 O(\omega^2) \eta^0 \right) \eta^0 = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \omega_{ab} S^{ab} + O(\omega^2) = \exp \left(\frac{1}{2} \omega_{ab} S^{ab} \right) = U^{-1} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} U^{-1}$$

que é a lei de transformação esperada para um objeto conjugado. Além disso, essa lei se mostra bastante conveniente, pois com ela uma densidade Lagrangeana do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \beta^a \partial_a \psi - \partial_a \bar{\psi} \beta^a \psi) - m \bar{\psi} \psi$$

escolhida de forma a gerar ambas as equações de movimento, permanece invariante sob uma transformação de Lorentz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} U^{-1} \beta^a \Lambda_a^{-1}{}^b \partial_b U \psi - \Lambda_a^{-1}{}^b \partial_b U^{-1} \bar{\psi} \beta^a U \psi \right) - m \bar{\psi} U^{-1} U \psi = \\ &= \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \left[U^{-1} \beta^a \Lambda_a^{-1}{}^b U \right] \partial_b \psi - \partial_b \bar{\psi} \left[U^{-1} \beta^a \Lambda_a^{-1}{}^b U \right] \psi \right) - m \bar{\psi} \psi = \\ &= \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \beta^b \partial_b \psi - \partial_b \bar{\psi} \beta^b \psi \right) - m \bar{\psi} \psi = \mathcal{L} \end{aligned}$$

onde lançamos mão de (2.13).

2.5 Conteúdo de spin e conteúdo de partículas em DKP

À primeira vista, o fato de o campo DKP se transformar sob rotações de acordo com gerador S^{ab} matricial pode parecer algo estranho, levando-nos a imaginar se o conteúdo de spin dessa teoria estaria em acordo com a proposta de descrição alternativa para campos escalares e vetoriais. Tomemos como exemplo o caso escalar. A componente do vetor de spin na direção z é dada por⁵

$$S^3 = \frac{\hbar}{i} (\beta^1 \beta^2 - \beta^2 \beta^1)$$

que, na representação (2.10) tem a forma:

$$S^3 = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essa componente do spin possui então autovalores $0, 0, 0, -\hbar, \hbar$, sendo que os respectivos autovetores são

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow s = 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow s = -\hbar, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow s = \hbar$$

Para interpretar como é possível haver estados de spin $\pm\hbar$ em uma teoria para um campo de spin 0, vamos analisar o caso simples da teoria não-quantizada (ou em

⁵Nesta seção reintroduzimos as constantes c e \hbar de modo a tornar a análise dimensionalmente transparente.

primeira quantização, como preferem alguns). Para tanto, a partir da equação de Duffin-Kemmer-Petiau e da sua conjugada, obtemos a *equação de continuidade*:

$$i\beta^a \partial_a \psi - m\psi = 0$$

$$i\partial_a \bar{\psi} \beta^a + m\bar{\psi} = 0$$

$$\partial_a j^a \equiv \partial_a (\bar{\psi} i \beta^a \psi) = 0$$

onde é interpretada como a quadricorrente de densidade de probabilidade da teoria, sendo que a componente zero nos fornece a densidade de probabilidade,

$$\rho \equiv \bar{\psi} i \beta^0 \psi$$

que, usando a representação (2.10) mais uma vez podemos colocar isto na forma

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \psi \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

$$\rho = i(\varphi^* \psi_0 + \varphi \psi_0^*) = -\frac{1}{mc}(\varphi^* \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^*)$$

Observe que, em contraste ao caso do campo de Dirac, *esta densidade não é positiva definida*. Agora, perceba que os dois auto-estados de spin $\pm \hbar$ possuem as duas primeiras componentes do multipletto nulas, e estas são as únicas componentes que contribuem para a densidade de probabilidade. Portanto, concluímos que a probabilidade de se observar esses estados é nula. No caso do autovalor de spin $s = 0$, vemos que existem

auto-estados possíveis cuja densidade de probabilidade é não-nula, e.g,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Em suma, vimos que a teoria DKP livre é realmente uma maneira alternativa para a descrição de partículas de spin 0 e/ou 1. No entanto, equanto a formulação KGF (ou a de Proca) é eminentemente uma descrição em termos de equações de *onda* a teoria DKP parece destacar de maneira contundente a descrição de partículas do sistema, sendo que ρ , por exemplo, pode ser interpretado como uma densidade de partículas correspondente ao estado ψ .

2.6 Campos de massa nula e liberdade de gauge

A representação de campos bosônicos numa descrição de primeira ordem não é de construção trivial, dado que campos de spin inteiro e massa nula são, associados à uma simetria de *gauge* [15]. A melhor descrição desse tipo, i.e., que mimetiza a de Dirac, foi dada por Harish-Chandra [16] complementando a álgebra DKP com uma matriz γ adicional. A construção sistemática que leva à essa descrição é por demais longa para ser incluída aqui, e portanto nos limitaremos a descrever seus resultados dando especial ênfase ao problema da simetria de gauge.

A densidade Lagrangeana proposta por Harish-Chandra é

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma\beta^a\partial_a\psi - i\partial_a\bar{\psi}\beta^a\gamma\psi - \bar{\psi}\gamma\psi \tag{2.15}$$

A condição de hermiticidade dessa Lagrangeana nos leva a duas condições para a matriz

γ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\dagger &= i\psi^\dagger\gamma^\dagger\beta^{a\dagger}\partial_a\bar{\psi}^\dagger - i\partial_a\psi^\dagger\beta^{a\dagger}\gamma^\dagger\bar{\psi}^\dagger - \psi^\dagger\gamma^\dagger\bar{\psi}^\dagger = \\ &= i\bar{\psi}\left(\eta^0\gamma^\dagger\eta^0\right)\beta^a\partial_a\psi - i\partial_a\bar{\psi}\beta^a\left(\eta^0\gamma^\dagger\eta^0\right)\psi - \bar{\psi}\gamma^\dagger\psi\end{aligned}$$

i.e.,

$$\gamma^\dagger = \gamma, \quad [\eta^0, \gamma] = 0$$

As equações de movimento para a Lagrangeana de Harish-Chandra são obtidas facilmente por meio das equações de Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned}i(\gamma\beta^a + \beta^a\gamma)\partial_a\psi - \gamma\psi &= 0 \\ i\partial_a\bar{\psi}(\beta^a\gamma + \gamma\beta^a) + \bar{\psi}\gamma &= 0\end{aligned}$$

Para que estas equações tenham a forma correta, faz-se necessário que

$$\beta^a\gamma + \gamma\beta^a = \beta^a \tag{2.16}$$

o que é consistente com a condição de hermiticidade colocada acima pois, uma vez que estamos utilizando uma representação na qual $\beta^{0\dagger} = \beta^0$ e $\beta^{i\dagger} = -\beta^i$, temos que a condição (2.16) implica em

$$\begin{aligned}\beta^{a\dagger}\gamma^\dagger + \gamma^\dagger\beta^{a\dagger} &= \beta^{a\dagger} \\ \beta^0\gamma^\dagger + \gamma^\dagger\beta^0 &= \beta^0\gamma + \gamma\beta^0 \quad \text{se } a = 0 \\ \beta^i\gamma^\dagger + \gamma^\dagger\beta^i &= \beta^i\gamma + \gamma\beta^i \quad \text{se } a \neq 0\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\{\beta^a, \left(\gamma^\dagger - \gamma\right)\right\} = 0$$

cuja solução mais simples é escolher $\gamma^\dagger = \gamma$. Com isso, a equação de movimento para o campo DKP de massa nula passa a ser

$$i\beta^a\partial_a\psi - \gamma\psi = 0 \tag{2.17}$$

Por outro lado, a simetria de gauge é representada aqui por meio da seguinte transformação infinitesimal:

$$\delta\psi = (1 - \gamma) \Phi, \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\Phi} (1 - \gamma) \quad (2.18)$$

que implica numa variação da ação dada por

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{\Omega} dx \left[\delta\bar{\psi} (i\gamma\beta^a \partial_a \psi - \gamma\psi) - i (\partial_a \delta\bar{\psi}) \beta^a \gamma\psi \right] + \\ & - \int_{\Omega} dx \left[(i\partial_a \bar{\psi} \beta^a \gamma + \bar{\psi} \gamma) \delta\psi - i\bar{\psi} \gamma \beta^a (\partial_a \delta\psi) \right] \end{aligned}$$

Na camada de massa, essa variação será

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{\Omega} dx \left[\delta\bar{\psi} (\gamma^2 - \gamma) \psi + \bar{\psi} (\gamma^2 - \gamma) \delta\psi \right] + \\ & + \int_{\Omega} dx \left[i\bar{\psi} \gamma \beta^a (1 - \gamma) \partial_a \Phi - i\partial_a \bar{\Phi} (1 - \gamma) \beta^a \gamma\psi \right] \end{aligned}$$

Assim, para que isto constitua uma simetria do sistema em questão, devemos ver satisfeitas as condições

$$\gamma^2 - \gamma = 0 \quad (2.19)$$

$$i\beta^a (1 - \gamma) \partial_a \Phi = 0 \quad \text{e} \quad i\partial_a \bar{\Phi} (1 - \gamma) \beta^a = 0 \quad (2.20)$$

onde a primeira é mais uma condição sobre γ , enquanto que a segunda corresponde a uma condição de gauge. Pode-se também verificar diretamente que a condição de invariância da equação de movimento (2.17) sob a transformação (2.18) implica nas condições (2.19) e (2.20):

$$i\beta^a \partial_a \delta\psi - \gamma \delta\psi = 0 \rightarrow i\beta^a \partial_a (1 - \gamma) \Phi - \gamma (1 - \gamma) \Phi = 0$$

De fato, após propor essa formulação de primeira ordem, Harish-Chandra [16] verificou que ela descrevia na verdade quatro tipos diferentes de campos de gauge, sendo um deles escalar, outro vetorial e outros dois potenciais de gauge topológicos, um antissimétrico de posto 2 e outro totalmente antissimétrico de posto 3. Uma vez que estes

dois últimos não possuem graus de liberdade propagantes [17, 18], nos concentraremos apenas nos dois primeiros como uma descrição DKP de massa nula.

Para ver que isso realmente descreve campos de spin 0 e 1 com simetria de gauge, devemos nos concentrar em representações específicas da álgebra DKP, ou alternativamente, utilizar os *projetores de Umezawa*, que serão descritos na próxima seção.

2.7 Projetores de Umezawa

Para sistemas bosônicos em interação com campos externos há problemas em se estabelecer a equivalência da descrição DKP e a de KGF/Proca. De fato, no caso de interação com uma variedade com torção, há vários resultados na literatura que apontam no sentido da não-equivalências destas descrições.

De forma a facilitar a identificação das componentes físicas do campo DKP, Umezawa [19] formulou um conjunto de “projetores” que selecionam componentes do multipletto⁶ ψ que se transformam sob Lorentz de acordo com as leis de transformação usuais de escalares, vetores e tensores de ordem 2. A razão pela qual a seleção destas componentes auxilia na identificação do setor físico da teoria, está ligada à classificação de Wigner das partículas elementares segundo representações irredutíveis do grupo de Poincaré [20].

2.7.1 Setor escalar

Tomemos uma realização, em coordenadas ortogonais, das matrizes β , e.g. (2.12).

Defina-se os operadores

$$P \equiv -(\beta^0)^2 (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2, \quad P^a \equiv P\beta^a$$

que satisfazem as seguintes relações algébricas:

$$P^a \beta^b = P\eta^{ab}, \quad PS^{ab} = S^{ab}P = 0, \quad P^a S^{bc} = \eta^{ab}P^c - \eta^{ac}P^b \quad (2.21)$$

⁶A palavra multipletto constitui aqui um claro abuso de linguagem.

Esses operadores, que foram definidos de forma independente da representação, são chamados de projetores do setor escalar, pois selecionam as componentes do multipletto ψ que se transformam como o campo escalar de Klein-Gordon-Fock, e como o seu vetor gradiente associado, ou seja, dada uma transformação de Lorentz, $\beta'^a = \beta^a$, $P' = P$, $P'^a = P^a$ e

$$\begin{aligned} (P\psi)' &= PU\psi = P \left(1 - \frac{1}{2}\omega_{ab}S^{ab} + O(\omega^2) \right) \psi = P\psi - \frac{1}{2}\omega_{ab}P \left(\beta^a\beta^b - \beta^b\beta^a \right) \psi + O(\omega^2) = \\ &= P\psi - \frac{1}{2}\omega_{ab} \left(P\eta^{ab} - P\eta^{ba} \right) \psi + O(\omega^2) = P\psi \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que todos os termos de ordem superior se anulam igualmente ao termo de primeira ordem⁷.

Logo, vemos que $P\psi$ transforma-se como um campo escalar entre sistemas ortogonais. Para o projetor P^a , temos

$$\begin{aligned} (P^a\psi)' &= P^a \left(1 - \frac{1}{2}\omega_{bc}S^{bc} + O(\omega^2) \right) \psi = P^a\psi - \frac{1}{2}\omega_{bc}P^a \left(\beta^b\beta^c - \beta^c\beta^b \right) \psi + O(\omega^2) = \\ &= P^a\psi - \frac{1}{2}\omega_{bc} \left(\eta^{ab}P^c - \eta^{ac}P^b \right) \psi + O(\omega^2) = \left(\delta^a_d - \frac{1}{2}\omega_{bc} \left(\Sigma_1^{bc} \right)_d^a \right) P^d\psi + O(\omega^2) = \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2}\omega_{bc} \left(\Sigma_1^{bc} \right)_d^a \right) P^d\psi \end{aligned}$$

onde usamos que todos os termos de ordem superior se comportam de maneira análoga ao termo de primeira ordem, e sendo $\left(\Sigma_1^{bc} \right)_d^a \equiv \eta^{ab}\delta_d^c - \eta^{ac}\delta_d^b$ a representação matricial de spin 1 da álgebra de Lorentz. Concluimos assim, que $P^d\psi$ se transforma como um vetor de Lorentz.

Observe que estas leis de transformação são completamente independentes do fato do multipletto ψ representar um campo massivo ou um campo de gauge, como seria de se esperar, já que estamos nos referindo apenas à cinemática desses campos.

⁷Observe-se que isto nada mais é do que uma aplicação das propriedades algébricas anunciadas para os projetores, vide (2.21).

Mais acima, dissemos que P e P^a selecionam componentes que podemos associar ao campo KGF e seu gradiente. Isso pode ser visto de maneira explícita escolhendo uma realização explícita para as matrizes β . Por exemplo, no caso da representação escalar (2.10), vemos que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto,

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}, \quad P\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^a\psi = \begin{pmatrix} \psi^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uma outra maneira (independente da realização) de ver que $P\psi$ representa um

campo escalar e que $P^a\psi$ é o seu gradiente, é aplicarmos esse projetores à equação de Duffin-Kemmer-Petiau:

$$\partial_a (P^a\psi) = -imP\psi \quad (2.22)$$

$$\partial^b (P\psi) = -imP^b\psi \quad (2.23)$$

cuja combinação resulta

$$(\square + m^2) P\psi = 0$$

ou seja, cada componente da matriz representa um campo escalar de massa m que satisfaz a equação de Klein-Gordon-Fock. Da segunda das equações projetadas, (2.23), vemos também que $P^a\psi$ representa o gradiente de $P\psi$.

Temos também chamado a atenção ao fato de que estamos utilizando sempre sistemas de coordenadas ortogonais. A importância disto está ligada ao fato de que é somente nesses sistemas de coordenadas que vale a propriedade $P^2 = P$ (que é uma das propriedades exigidas para que esse operador seja um *projetor* em um sentido matemático preciso) pois, relembando o início da seção 2.2:

$$(\beta^a)^2 \beta^b + \beta^b (\beta^a)^2 = \beta^a \eta^{ab} + \beta^b \eta^{aa} , \quad (\beta^a)^3 = \eta^{aa} \beta^a$$

e portanto segue que é somente em sistemas *ortogonais* ($\eta^{ab} = 0$ se $a \neq b$) que podemos reordenar adequadamente as matrizes em P^2 de modo a obter P . Não obstante, podemos ver também que mesmo em sistemas ortogonais P^a não é idempotente, e portanto chama-lo de projetor constitui um abuso genuíno⁸.

A razão pela qual os projetores são importantes, está ligada, como dissemos anteriormente, à presença de interação com campos externos. Em particular, no caso de acoplamento com variedades não-euclidianas⁹, que é nosso principal interesse aqui,

⁸Talvez a melhor forma de denominá-lo seja como um operador *complementar* ao projetor P .

⁹Perceba que aqui subentende-se outro abuso de linguagem que toma o espaço-tempo de Minkowski como um espaço euclidiano.

podemos notar que a maneira mais natural de obter a equação de DKP acoplada, é utilizando-se do formalismo de tetradas, definindo-se aí, imediatamente, os projetores em espaços curvos, por $P^\mu \equiv e_a^\mu P^a$ e, uma vez que cada P^μ possui índices matriciais “internos”, vemos que as propriedades algébricas (2.21) se generalizam automaticamente. Mas deixemos essa discussão para as aplicações.

Campos de Gauge

Para analisar o caso de massa nula, faremos uso tanto dos projetores quanto da representação (2.10), de modo a explicitar que há dois campos escalares descritos pela Lagrangeana de Harish-Chandra, sendo um deles o de KGF e outro topológico.

Antes de mais nada, devemos observar que a relação (2.16) implica que $\gamma P = P\gamma$ e $P^a\gamma + \gamma P^a = P^a$, de modo que a aplicação dos projetores escalares à equação de movimento (2.17) leva à equação de KGF de massa nula,

$$\partial_a \partial^a (P\psi) = 0.$$

Em termos do campo escalar $P\psi$ a transformação de gauge (2.18) se escreve

$$P\psi' = P\psi + (1 - \gamma)P\Phi \quad , \quad P^a\psi' = P^a\psi + P^a(1 - \gamma)\Phi,$$

equanto que a condição de gauge (2.20) se torna

$$\partial_a P^a(1 - \gamma)\Phi = 0 \quad , \quad \partial^a P(1 - \gamma)\Phi = 0.$$

Até aqui todos os resultados obtidos são independentes da escolha de representação para as matrizes β e γ . Não obstante, para estudarmos a simetria de gauge em maior detalhe, vamos nos focar na representação (2.10). Nessa representação, pode-se verificar diretamente que a matriz γ mais geral satisfazendo a condição (2.16) é dada por

$$\gamma = \text{diag}(\lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda).$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$ é um parâmetro determinado pela invariância de gauge, como veremos mais adiante.

Nesta representação, a matriz coluna da função de onda de Duffin-Kemmer-Petiau, e suas projeções, são

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^a \end{pmatrix}, & P\psi &= \begin{pmatrix} \varphi \\ [0]_{4 \times 1} \end{pmatrix}, & P\gamma\psi &= \begin{pmatrix} \lambda\varphi \\ [0]_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \\ P^a\psi &= \begin{pmatrix} \psi^a \\ [0]_{4 \times 1} \end{pmatrix}, & P^a\gamma\psi &= \begin{pmatrix} (1-\lambda)\psi^a \\ [0]_{4 \times 1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entretanto, a condição (2.19) implica que o parâmetro λ deve satisfazer a equação

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, 1.$$

Para verificar que tipo de campo de gauge está associado a cada valor de λ , devemos analisar como se comportam os vínculos e a condição de gauge do campo DKP. Em primeiro lugar, temos que os vínculos ficam na forma

$$(1-\lambda)\psi^a = i\partial^a\varphi, \quad \lambda\varphi = i\partial_a\psi^a, \quad (2.24)$$

enquanto que, se denotarmos

$$\Phi = (\varphi_\Phi, \phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3)^T$$

a transformação de gauge (2.18) para as componentes de ψ será

$$\varphi' = \varphi + (1-\lambda)\varphi_\Phi, \quad \psi'^a = \psi^a + \lambda\phi^a,$$

enquanto que a condição de gauge (2.20) fica

$$\lambda\partial_a\phi^a = 0 \quad , \quad (1-\lambda)\partial^a\varphi_\Phi = 0.$$

Dessas equações podemos ver que o valor $\lambda = 0$ corresponde ao campo escalar de Klein-Gordon-Fock com massa nula, $\partial_a\partial^a\varphi = 0$, e transformação de gauge dada por

$\varphi' = \varphi + \varphi_\Phi$ com φ_Φ constante. Além disso, pode-se verificar também por cálculo direto que a densidade Lagrangeana de Harish-Chandra (2.15) se reduz nesse caso à de KGF:

$$\mathcal{L}_{s=0} = \partial^a \varphi^* \partial_a \varphi$$

Das equações (2.24) vemos também $\lambda = 1$ corresponde a um campo φ constante. Esse campo topológico,¹⁰ foi originalmente encontrado por Harish-Chandra em termos de uma descrição utilizando um potencial de gauge de posto 3 totalmente antissimétrico. Entretanto, como se trata de um sistema sem graus de liberdade dinâmicos, o deixaremos de lado.

2.7.2 Setor vetorial

Analogamente ao caso escalar, podemos definir “projetores”

$$R^a \equiv (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 [\beta^a \beta^0 - \eta^{a0}] , \quad R^{ab} \equiv R^a \beta^b$$

em sistemas de coordenadas ortogonais, que respeitam as relações algébricas

$$\begin{aligned} R^{ab} &= -R^{ba} , \quad R^{ab} \beta^c = R^a \eta^{bc} - R^b \eta^{ca} \\ R^a S^{bc} &= \eta^{ab} R^c - \eta^{ca} R^b , \quad S^{bc} R^a = 0 \\ R^{ab} S^{cd} &= - \left(\eta^{ac} R^{bd} + \eta^{cb} R^{da} + \eta^{bd} R^{ac} + \eta^{da} R^{cb} \right) \end{aligned}$$

Tal como antes, em um sistema de coordenadas ortogonal pode-se mostrar que $(R^a)^2 = R^a$ embora o mesmo não seja válido para R^{ab} . É importante salientar que, apesar da idempotência, os operadores P e R^a não são projetores genuínos, dado que lhes falta, essencialmente, a propriedade de completeza.

Dito isso, cabe observar que foi definido de modo a selecionar as componentes de

¹⁰Que não possui graus de liberdade propagantes.

ψ que se transformam como um vetor de Lorentz:

$$\begin{aligned} (R^a\psi)' &= R^a U\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{bc}\left(\Sigma_1^{bc}\right)_d^a\right) R^d\psi \\ (R^{ab}\psi)' &= R^{ab} U\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{cd}\left(\Sigma_2^{cd}\right)_{ef}^{ab}\right) R^{ef}\psi \end{aligned}$$

onde Σ_2^{cd} é a representação de spin 2 da álgebra de Lorentz.

Novamente, por meio da aplicação dos projetores do setor vetorial à equação DKP temos

$$\begin{aligned} \partial_a (R^{ab}\psi) &= -imR^a\psi \\ R^{ab}\psi &= -\frac{i}{m}U^{ab}, \quad U^{ab} \equiv \partial^a (R^b\psi) - \partial^b (R^a\psi) \end{aligned}$$

e combinando essas duas equações encontramos

$$(\square + m^2) R^a\psi = 0, \quad \partial_a (R^a\psi) = 0$$

que são as equações de campo de Proca. Vemos assim que as componentes $R^a\psi$ devem descrever um campo vetorial massivo. Da mesma forma que no caso escalar, isso também pode ser visto através de uma realização específica das matrizes β , e.g., a (2.11).

Campos de Gauge

Analogamente ao que fizemos no caso escalar, temos que a relação (2.16), implica em $\gamma R^a = R^a\gamma$ e $R^{ab}\gamma + \gamma R^{ab} = R^{ab}$ de modo que a equação de movimento para $R^a\psi$ se torna

$$\partial_b \left[\partial^a (R^b\psi) - \partial^b (R^a\psi) \right] = 0.$$

A transformação de gauge (2.18) e a condição de gauge (2.20) serão

$$\begin{aligned} R^a\psi' &= R^a\psi + R^a(1-\gamma)\Phi, \quad R^{ab}\psi' = R^{ab}\psi + R^{ab}(1-\gamma)\Phi, \\ \partial_b R^{ab}(1-\gamma)\Phi &= 0, \quad \partial^a R^b(1-\gamma)\Phi - \partial^b R^a(1-\gamma)\Phi = 0 \end{aligned}$$

Mais uma vez, para estudar a liberdade de gauge de forma apropriada, lançamos mão da representação (2.11). Nessa representação, vemos por inspeção que a forma mais geral da matriz γ satisfazendo (2.16) é dada por

$$\gamma = \text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda),$$

e mais uma vez a condição (2.19) implica em

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0, 1.$$

Nessa representação, temos explicitamente

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{pmatrix} [\psi^a]_{4 \times 1} \\ [\psi^{ab}]_{6 \times 1} \end{pmatrix}, \quad R^a \psi = \begin{pmatrix} \psi^a \\ [0]_{9 \times 1} \end{pmatrix}, \quad R^a \gamma \psi = \begin{pmatrix} \lambda \psi^a \\ [0]_{9 \times 1} \end{pmatrix} \\ R^{ab} \psi &= \begin{pmatrix} \psi^{ab} \\ [0]_{9 \times 1} \end{pmatrix}, \quad R^{ab} \gamma \psi = \begin{pmatrix} (1 - \lambda) \psi^{ab} \\ [0]_{9 \times 1} \end{pmatrix}, \quad a = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Os vínculos da teoria são agora expressos por

$$\lambda \psi^a = i \partial_b \psi^{ab},$$

$$i(1 - \lambda) \psi^{ab} = \partial^a \psi^b - \partial^b \psi^a.$$

Adotando a representação

$$\Phi = \begin{pmatrix} [\phi^a]_{4 \times 1} \\ [\phi^{ab}]_{6 \times 1} \end{pmatrix}$$

a transformação de gauge (2.18) fica

$$\psi'^a = \psi^a + (1 - \lambda) \phi^a, \quad \psi'^{ab} = \psi^{ab} + \lambda \phi^{ab},$$

enquanto que (2.20) será

$$\lambda \partial_b \phi^{ab} = 0, \quad (1 - \lambda) (\partial^a \phi^b - \partial^b \phi^a) = 0.$$

Novamente, podemos ver que o caso $\lambda = 0$ corresponde ao campo de gauge dinâmico (Maxwell), cuja transformação de gauge é

$$\psi'^a = \psi^a + \phi^a \quad , \quad \phi^a = \partial^a \Lambda(x) ,$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função \mathcal{C}^2 arbitrária.

Finalmente, usando essa representação explícita e a normalização

$$\psi^a = \frac{1}{\sqrt{2}} A^a$$

encontramos a densidade Lagrangeana de Maxwell,¹¹

$$\mathcal{L}_{s=1} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}, \quad F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a .$$

Para finalizar, devemos observar que o caso $\lambda = 1$ corresponde a outro campo escalar topológico, cuja descrição mais natural se dá por meio de um tensor de posto 2 antissimétrico.

¹¹É claro que aqui nos restringimos a um campo de carga elétrica nula, enquanto que, em geral, o que obtemos é a Lagrangeana de campos carregados.

Apêndice: Álgebras e Grupos

Neste apêndice enunciaremos algumas estruturas elementares de álgebras e grupos que são de importância para um melhor entendimento do conteúdo desta tese. Nosso intuito aqui não é o de produzir um texto rigoroso e completo sobre o assunto, mas sim dar as idéias básicas necessárias à aplicação dessas teorias. Sempre que possível ilustraremos os conceitos expostos por aplicações simples, especialmente à física, de modo a ressaltar o sentido prático dessa construção.

Definições Básicas

Admitiremos a noção de par ordenado como conceito primitivo¹². A cada elemento a e a cada elemento b está associado um terceiro elemento indicado por

$$(a, b)$$

e denominado *par ordenado*, de modo que

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \quad \wedge \quad b = d$$

Diremos ainda que a é o primeiro elemento e b o segundo do par ordenado (a, b) .

¹²Em lugar disso poderíamos ainda *defini-lo* utilizando-nos da composição de três conjuntos, mas tal grau de sofisticação analítica não é necessário aqui.

Note que:

$$a \neq b \implies \{a, b\} = \{b, a\}, \quad (a, b) \neq (b, a)$$

$$a = b \implies \{a, b\} = \{a\}, \quad (a, b) = (b, a)$$

portanto, os conceitos de conjunto e par ordenado são distintos.

Produto Cartesiano Chama-se *produto cartesiano* de um conjunto $A \neq \emptyset$ por outro $B \neq \emptyset$ ao conjunto de todos os pares ordenados $(a, b) : a \in A \wedge b \in B$. Indicaremos o produto cartesiano pela notação $A \times B$ (lê-se: “A cartesiano B”); portanto,

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo: $A = \{1, 3\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

$$\left. \begin{array}{l} A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \\ B \times A = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\} \end{array} \right\} \longrightarrow A \times B \neq B \times A$$

Relação Sejam E e F dois conjuntos. Todo subconjunto R de $E \times F$ é denominado *relação* de E em F (ou relação entre elementos de E e elementos de F). No caso de $E = F$ diz-se, simplesmente, que R é uma relação sobre E .

Se R é uma relação de E em F usaremos a notação aRb (leia-se: “a está na relação R com b ”). para indicar que $(a, b) \in R$. A negação será indicada $a \not R b$.

As primeiras estruturas da Álgebra que comparecem de maneira destacada nas teorias físicas, são as chamadas *classes de equivalência*. Classes de equivalência são conjuntos caracterizados por um tipo especial de relação denominada de *relação de equivalência*.

Relação de Equivalência Diz-se que uma relação R sobre um conjunto E é uma *relação de equivalência* se, e somente se, são válidas as seguintes condições:

E1 Propriedade Reflexiva: $\forall a \in E \quad aRa$

E2 Propriedade Simétrica: $\forall a, b \in E \quad aRb \implies bRa$

E3 Propriedade Transitiva: $a, b, c \in E \quad aRb \wedge bRc \implies aRc$

Veremos a seguir alguns exemplos de relações de equivalência e ao mesmo tempo mostraremos que, em geral, as condições E1, E2 e E3 são independentes.

Exemplo 1: Considere o conjunto E de todas as retas de um plano α e seja R a relação

$$XRY \iff X = Y \vee X \cap Y = \emptyset$$

A relação R é, simplesmente, a relação de paralelismo da Geometria Plana, e sabemos ser uma relação de equivalência sobre E .

Exemplo 2: Com as notações do exemplo anterior, considere R definida por

$$XRY \iff X \perp Y$$

Esta é a relação de perpendicularismo da Geometria Plana, e sabemos que R só satisfaz E2, logo, R não é relação de equivalência sobre E .

Classe de Equivalência Seja R uma relação de equivalência sobre $E \neq \emptyset$. $\forall a \in E$ o conjunto

$$\bar{a} = \{x \in E / xRa\}$$

é denominado *classe de equivalência* de a sob R , e a é chamado *representante* da classe de equivalência \bar{a} .

Exemplo1: Em sua breve, porém eloqüente, discussão acerca do sincronismo de dois relógios posicionados em pontos distantes A e B feita no “Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento” de 1905, Einstein conclui que:

1. “Se o relógio em B é síncrono com o relógio em A, também o relógio em A é síncrono com o relógio em B.”
2. “Se o relógio em A é síncrono com o relógio em B e também com o relógio em C, então os relógios em B e C são síncronos entre si.”

Uma vez que o sincronismo de um relógio consigo mesmo é um fato fisicamente óbvio, vemos que o conjunto dos relógios relacionados pela operação de sincronismo formam uma classe de equivalência, ou, o que dá no mesmo, que *o conjunto dos relógios síncronos forma uma classe de equivalência*.

Exemplo 2: A Lei Zero da Termodinâmica assegura que, *se um sistema termodinâmico A está em equilíbrio térmico com outros dois sistemas B e C, então os sistemas B e C estão em equilíbrio térmico entre si*. Isso, juntamente com outras propriedades fisicamente evidentes do equilíbrio térmico, nos assegura que *o conjunto dos sistemas termodinâmicos relacionados pelo equilíbrio térmico formam uma classe de equivalência*. Com efeito, podemos trocar a expressão da Lei Zero, destacada no início deste exemplo, por esta última frase enfatizada, que nenhuma alteração se verifica em nossa teoria.

Exemplo 3: A relação de movimento relativo uniforme é claramente simétrica e reflexiva. Além disso, a experiência demonstra que essa relação também é transitiva, ao menos enquanto admitirmos uma lei linear de adição de velocidades. Assim, temos que o conjunto dos referenciais inerciais, mais a relação de movimento relativo uniforme, formam outra classe de equivalência, de suma importância em teorias relativísticas, *a classe dos referenciais inerciais*.

Anéis Um *anel* é um conjunto A junto com duas leis de composição chamadas de adição e multiplicação, e escritas como uma soma \oplus e um produto \circ respectivamente, satisfazendo as seguintes condições:

A1 Com respeito à adição, A é um grupo abeliano.

A2 A multiplicação é associativa e possui elemento identidade.

A3 A multiplicação é distributiva, ou seja,

$$\forall x, y, z \in A \quad (x \oplus y) \circ z = x \circ z \oplus y \circ z \quad \wedge \quad z \circ (x \oplus y) = z \circ x \oplus z \circ y$$

Observe que, em geral, a multiplicação não é comutativa. Assim, é comum fixarmos a nossa atenção em um elemento da multiplicação de nosso particular interesse, e falarmos em *produto à direita* e *produto à esquerda*. Por exemplo, $x \circ z$ é o “produto à direita de x por z ”, ou ainda o “produto à esquerda de z por x ”.

Um anel cuja operação de multiplicação é comutativa, ou seja, tal que

$$\forall x, y \in A \quad x \circ y = y \circ x$$

é dito um *anel comutativo*.

Um anel cujos elementos não-nulos formam um grupo sob a multiplicação, é chamado de *anel-quociente*. Um anel quociente comutativo é chamado de *campo*, ou *corpo*.

Como é usual, nós denotaremos o elemento identidade da adição por 0 e o da multiplicação por 1 , e a partir daqui já podemos notar o aparecimento das regras de operação básicas a que estamos acostumados. Os teoremas a seguir ilustram bem isso.

Teorema 1 $\forall x \in A \quad 0 \circ x = 0$. **Prova:** $0 \circ x \oplus x = (0 \oplus 1) \circ x = 1 \circ x = x = 0 \oplus x \longrightarrow 0 \circ x = 0$

Teorema 2 Sejam $x, y \in A$, $(-x) \circ y = -(x \circ y)$. **Prova:** $x \circ y \oplus (-x) \circ y = (x \oplus (-x)) \circ y = 0 \circ y = 0 \longrightarrow (-x) \circ y = -(x \circ y)$

Outras regras de operação usuais tais como $(-x) \circ (-y) = x \circ y$ são também facilmente provadas.

Módulo Seja K um anel. Um *módulo sob K* ou *K -módulo*, é um tripleto ordenado $(E, +, \cdot)$ tal que $(E, +)$ é um grupo abeliano e “ \cdot ” é uma função $K \times E \rightarrow E$ satisfazendo as condições:

$$\text{M1} \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$\text{M2} \quad (\lambda \oplus \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$\text{M3} \quad \lambda \mu \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$$

$$\text{M4} \quad \exists 1 \in K / 1 \cdot x = x$$

$$\forall x, y \in E \wedge \forall \lambda, \mu \in K.$$

Os elementos de K são chamados de *escalares*, e K em si é chamado de *anel escalar*. Observe que aqui tivemos o cuidado de explicitar todas as diferentes operações envolvidas, representando de maneira diferenciada a adição em K (\oplus) e a adição em E ($+$), bem como os produtos (denotado em K pela justaposição e em E por “ \cdot ”). Esse cuidado justifica-se para que tenhamos uma noção muito clara da natureza de todas as operações envolvidas. Entretanto, uma vez que tenhamos os conceitos claros em mente, torna-se desnecessário sobrecarregar a notação utilizando-se de tantos símbolos. Uma vez que todas as operações de adição tem as mesmas propriedades básicas (formam grupos abelianos nos conjuntos que as definem), e todas as operações de multiplicação são associativas e distributivas, onde não houver risco de confusão, denotaremos todas as adições pelo mesmo símbolo, $+$, e também as multiplicações *entre* escalares e *por* escalares simplesmente pela justaposição.

Agora estamos prontos para definir a mais rica das estruturas algébricas que nos interessam, a *álgebra*:

Álgebra Seja K um anel comutativo. Uma *K -álgebra*, ou uma *álgebra sobre K* é uma K -estrutura algébrica $(A, +, \cdot, \circ)$ com três composições tais que

$$\text{A1} \quad (A, +, \cdot) \text{ é um } K\text{-módulo.}$$

A2 $(A, +, \circ)$ é um anel.

$$\text{A3 } \alpha \cdot (x \circ y) = (\alpha \cdot x) \circ y = x \circ (\alpha \cdot y) \quad \forall x, y \in A \wedge \forall \alpha \in K$$

Observe que, apesar da álgebra ser definida em termos de um anel *comutativo* isso *não* implica que estamos tratando apenas com álgebras comutativas. As únicas operações assumidas comutativas aqui, são as somas e a operação de produto *dentro* do anel *escalar*, ou seja, somente a operação de produto entre os escalares é admitida ser comutativa, e esta nada tem a ver com a operação de produto da *álgebra*.

Alguns K -módulos são também muitas vezes denominados *espaços vetoriais lineares*. Esta é, talvez, a estrutura mais largamente utilizada pela Física, entretanto, é importante enfatizar que *nem todos K -módulos são espaços vetoriais lineares*, e também, *nem todos os espaços vetoriais são K -módulos*. Para compreender bem essa diferença, vejamos a definição de espaço vetorial linear:

Espaço Vetorial Linear Seja F um campo e V um grupo abeliano (sob $+$) tal que $\forall s \in F \wedge \forall x \in V \exists$ um único elemento $y \in V : sx = y$. Então, V é chamado de espaço vetorial sobre F se, e somente se,

$$\text{V1 } s(x + y) = sx + sy$$

$$\text{V2 } (s + t)x = sx + tx$$

$$\text{V3 } s(tx) = (st)x \quad \forall s, t \in F \wedge \forall x, y \in V$$

$$\text{V4 } \exists 1 \in F : 1x = x$$

Observe que aqui já nos utilizamos extensivamente do abuso de linguagem que denomina as estruturas matemáticas pelos conjuntos sob as quais elas estão definidas. Portanto, apenas como observação, é sempre bom lembrar que *espaço vetorial linear não* é o grupo V , mas sim o triplete (V, \cdot, F) onde o ponto está denotando o produto entre os elementos de V e os de F , ou seja, o produto *por* um escalar, tal como definido acima.

No caso mais geral de um espaço vetorial não-linear, as propriedades V1, V2 e V3 que garantem que a operação de produto por um escalar é uma aplicação linear, são suprimidas. Assim, para formar um espaço vetorial, bastam um campo, um grupo abeliano e uma aplicação injetora $f : F \times V \longrightarrow V$ que possua um elemento identidade associado em F . Atente ao fato de que, uma vez que esta aplicação define o produto *por* um escalar, basta que ela seja *injetora*, entretanto, muitas vezes é mais útil trabalharmos com produtos por escalares que sejam também *sobrejetores*, ou seja, definidos como aplicações *bijetoras*. No caso desses produtos serem definidos como funções, estaremos pensando neles como homeomorfismos.

Assim, caso a aplicação f seja não-linear, não poderemos identificar o espaço vetorial com um K -módulo. Da mesma forma, caso o anel K , na definição de módulo, seja não-comutativo, não poderemos identificar o K -módulo como um espaço vetorial linear. Estamos supondo deste ponto em diante que o leitor está bem familiarizado com os teoremas e procedimentos da álgebra *linear*.

Agora, vamos tratar de três teoremas que têm importância fundamental no estudo da álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau. Em primeiro lugar, consideremos um certa álgebra gerada por certos elementos de base e_A . Suponha que temos também uma representação dessa álgebra e que imagem dos elementos de base e_A é denotada por $D(A)$. Considere agora as n^2 quantidades

$$G_{AB} \equiv Tr [D(A) D(B)]$$

Pauli e Artin [9] mostraram que essa quantidade é análoga à métrica de Killing-Cartan¹³ e que uma condição necessária e suficiente para saber se a álgebra A é semisimples é que

$$\det \|G_{AB}\| \neq 0$$

¹³Os conceitos de métrica de Killing-Cartan, semisimplicidade, etc., serão apresentados de maneira mais rigorosa na próxima seção. Nos adiantamos aqui apenas para concluir as idéias relativas a Álgebra.

O segundo teorema que enunciaremos é o teorema de Frobenius-Schur.

Teorema de Frobenius-Schur Seja A uma álgebra de ordem n . Seja k o número de representações irredutíveis inequivalentes dessa álgebra, e denote as dimensões de cada representação por n_1, n_2, \dots, n_k . Então,

$$n = (n_1)^2 + (n_2)^2 + \dots + (n_k)^2 \quad (2.25)$$

O terceiro e último teorema limita o número de representações irredutíveis de uma álgebra.

Teorema do Número de Representações Se a álgebra é semisimples, então o número de representações irredutíveis possíveis é igual ao número máximo de elementos de base comutantes com todos os outros elementos da base.

Combinando esses dois últimos teoremas podemos ver que para álgebras semisimples de baixa dimensão, torna-se um jogo simples adivinhar as dimensões das representações irredutíveis. Isso foi aplicado quando discutimos as representações irredutíveis da álgebra de Duffin-Kemmer-Petiau.

Uma das estruturas mais utilizadas tanto em física quanto na matemática, é o conceito de *grupo*:

Semigrupo à Esquerda Um semigrupo à esquerda é definido como sendo o par $(G, *)$ onde G é um conjunto e $*$ é uma operação $*$: $G \rightarrow G$ respeitando as seguintes propriedades:

G1. Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$.

G2. Identidade à Esquerda: $\exists e \in G \setminus e * a = a, \forall a \in G$.

G3. Inversa à Esquerda: $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G \setminus a^{-1} * a = e$.

O conjunto G pode ser finito ou infinito, contínuo ou discreto. A operação $*$ pode ser diferenciável, ou não.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, podemos definir um semigrupo à direita com alterações simples das propriedades $G2$ e $G3$. Um *grupo* é o par $(G, *)$ tal que $(G, *)$ é um semigrupo à direita e à esquerda simultaneamente.

Há inúmeros exemplos simples de grupos em nosso cotidiano.

Exemplo 1: Conjuntos dotados de relações de equivalência entre seus membros, constituem grupos. Assim, por exemplo, o conjunto de todos os relógios de um referencial mais a operação de sincronismo (que é reversível), constitui um grupo.

Exemplo 2: O conjunto de números (\mathbb{Z} , \mathbb{Q} ou \mathbb{R}) constitui um grupo sob a adição, cuja identidade é o elemento 0.

Na próxima seção vamos nos centrar num ramo particular da teoria de grupos, especialmente caro à física: os grupos de Lie.

Grupos de Lie

Tomemos um grupo contínuo com parâmetros α . Expandindo um elemento do grupo para um parâmetro infinitesimal $\delta\alpha$, temos

$$U(\delta\alpha) = U(0) + \delta\alpha^a \left. \frac{\partial U}{\partial \alpha^a} \right|_{\alpha=0}$$

Vamos escolher a parametrização de tal forma que

$$U(0) = 1$$

A quantidade $\left. \frac{\partial U}{\partial \alpha^a} \right|_{\alpha=0}$ define o chamado *gerador* infinitesimal G_a do grupo:

$$iG_a \equiv \left. \frac{\partial U}{\partial \alpha^a} \right|_{\alpha=0}$$

Assim,

$$U(\delta\alpha) = 1 + i\delta\alpha^a G_a$$

De acordo com a regra de composição do grupo, e pela continuidade da operação de multiplicação no grupo, segue que uma transformação finita pode ser construída por uma aplicação sucessiva de transformações infinitesimais,

$$U(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i\delta\alpha^a G_a)^n$$

com uma escolha apropriada da partição da parametrização α , resulta que

$$U(\alpha) = e^{i\alpha^a G_a}$$

Se o grupo é *unitário*, segue que

$$U^{-1}(\alpha) = e^{-i\alpha^a G_a}$$

A partir da analiticidade da função exponencial, vemos que uma expansão até segunda ordem nos dá:

$$\begin{aligned} U(\delta\alpha) &= 1 + i\delta\alpha^a G_a - \frac{1}{2}\delta\alpha^a \delta\alpha^b G_a G_b \\ U^{-1}(\delta\alpha) &= 1 - i\delta\alpha^a G_a - \frac{1}{2}\delta\alpha^a \delta\alpha^b G_a G_b \end{aligned}$$

Com estas expressões, podemos avaliar o efeito de se realizar um “ciclo fechado” no espaço dos parâmetros, ou seja,

$$\begin{aligned} &U^{-1}(\delta\beta) U^{-1}(\delta\alpha) U(\delta\beta) U(\delta\alpha) = \\ &= \left(1 - i\delta\beta^j G_j - \frac{1}{2}\delta\beta^k \delta\beta^l G_k G_l\right) \left(1 - i\delta\alpha^g G_g - \frac{1}{2}\delta\alpha^h \delta\alpha^i G_h G_i\right) \times \\ &\times \left(1 + i\delta\beta^d G_d - \frac{1}{2}\delta\beta^e \delta\beta^f G_e G_f\right) \left(1 + i\delta\alpha^a G_a - \frac{1}{2}\delta\alpha^a \delta\alpha^b G_a G_b\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - i\delta\alpha^g G_g + \delta\alpha^g \delta\beta^d G_g G_d - \delta\beta^j \delta\alpha^g G_j G_g - \frac{1}{2} \delta\alpha^h \delta\alpha^i G_h G_i \right) \times \\
 &\times \left(1 + i\delta\alpha^a G_a - \frac{1}{2} \delta\alpha^a \delta\alpha^b G_a G_b \right) \\
 &= 1 + \delta\alpha^g \delta\beta^d [G_g G_d - G_d G_g]
 \end{aligned}$$

Agora, a composição de elemntos do grupo deve, novamente, ser equivalente a um outro elemento do grupo:

$$U^{-1}(\delta\beta) U^{-1}(\delta\alpha) U(\delta\beta) U(\delta\alpha) = U(\delta\gamma)$$

Até segunda ordem, isto nos leva à seguinte identidade:

$$1 + \delta\alpha^g \delta\beta^d [G_g, G_d] = 1 + i\delta\gamma^a G_a - \frac{1}{2} \delta\gamma^a \delta\gamma^b G_a G_b$$

Por outro lado, pela continuidade dos parâmetros, as variações $\delta\gamma^a$ devem ser *funções* de $\delta\alpha^g$ e $\delta\beta^d$, logo,

$$\delta\gamma^a = C_c^a \delta\alpha^c + D_c^a \delta\beta^c + E_{ef}^a \delta\alpha^e \delta\alpha^f - i f_{g\ d}^a \delta\alpha^g \delta\beta^d + H_{ef}^a \delta\beta^e \delta\beta^f$$

Pelo princípio de identidade de polinômios, temos que

$$\delta\alpha^g \delta\beta^d [G_g, G_d] = \delta\alpha^g \delta\beta^d f_{g\ d}^a G_a$$

$$[G_g, G_d] = f_{g\ d}^a G_a$$

Passemos a considerar agora realizações matriciais dessas relações. Começaremos por considerar um grupo de transformações unitárias com n parâmetros reais contínuos designados por λ^a , $a \in \{1, \dots, n\}$. Se $U(\lambda)$ é um elemento típico do grupo, o fechamento da lei de composição do grupo exige que

$$U(\bar{\lambda}) U(\tilde{\lambda}) = U(\lambda), \quad \lambda = \lambda(\bar{\lambda}, \tilde{\lambda})$$

Uma transformação infinitesimal, por sua vez, deve ser construída a partir dos geradores infinitesimais G_a através de uma combinação linear genérica:

$$U(\delta\lambda) = 1 + iG$$

$$G = \delta\lambda^a G_a$$

O que implica ainda que os geradores podem ser redefinidos por uma transformação linear não-singular qualquer, desde que os parâmetros sofram, igualmente, uma redefinição correspondente. Ao submetermos um operador infinitesimal $U(\delta\lambda)$ a uma transformação unitária arbitrária do grupo, devemos obter, de acordo com a lei de composição, uma outra transformação infinitesimal no próprio grupo:

$$U^{-1}(\lambda) G_a U(\lambda) = u_a^b(\lambda) G_b \tag{2.26}$$

onde os números u_a^b são reais, pois os λ também o são. Alternativamente, podemos apresentar a mesma transformação na forma

$$U(\lambda) G_b U^{-1}(\lambda) = G_a \tilde{u}_b^a(\lambda)$$

Os dois conjuntos de matrizes podem ser relacionados substituindo uma transformação na outra:

$$G_a = u_a^b(\lambda) U(\lambda) G_b U^{-1}(\lambda) = u_a^b(\lambda) \tilde{u}_b^c(\lambda) G_c$$

ou ainda,

$$u \tilde{u}^T = 1 \rightarrow \tilde{u} = (u^T)^{-1} \tag{2.27}$$

Perceba que isto é equivalente à conjugação hermiteana, uma vez que u é real.

Vemos, portanto, que as matrizes u correspondem, de fato, a uma realização matricial real do grupo em questão. Uma vez que o operador unidade corresponde à matriz identidade, a forma infinitesimal das matrizes u será

$$u(\delta\lambda) = 1 + i\delta\lambda^a g_a, \quad \tilde{u}(\delta\lambda) = 1 + i\delta\lambda^a \tilde{g}_a$$

A correspondência (2.27) implica que

$$(u^T)^{-1} u^T = (1 + i\delta\lambda^a \tilde{g}_a) (1 + i\delta\lambda^a g_a^T) = 1 + i\delta\lambda^a (\tilde{g}_a + g_a^T)$$

$$\tilde{g}_a = -g_a^T = g_a^\dagger$$

onde a última identidade segue do fato de u ser real.

A regra de composição (2.26) do grupo unitário, implica que os geradores infinitesimais satisfazem uma álgebra de Lie:

$$U^{-1}(\delta\lambda) G_a U(\delta\lambda) = (1 - i\delta\lambda^b G_b) G_a (1 + i\delta\lambda^b G_b) = G_a + i\delta\lambda^b [G_a, G_b]$$

$$u_a^c(\delta\lambda) G_c = (1 + i\delta\lambda^b g_b)_a^c G_c = G_a + i\delta\lambda^b (g_b)_a^c G_c$$

Se denotarmos os elementos de matriz imaginários das matrizes g_b por

$$(g_b)_a^c = g_{ab}{}^c$$

vemos a forma familiar das álgebras de Lie:

$$[G_a, G_b] = g_{ab}{}^c G_c \tag{2.28}$$

de onde extraímos imediatamente a propriedade de antissimetria das constantes de estrutura $g_{ab}{}^c$,

$$g_{ab}{}^c = -g_{ba}{}^c$$

Em vista da correspondência multiplicativa entre os elementos do grupo U e suas realizações finitas u , segue que as matrizes g também obedecem as mesmas relações de comutação:

$$[g_a, g_b] = g_{ab}{}^c g_c \tag{2.29}$$

Isto nada mais é do que uma outra forma de expressar a identidade de Jacobi para os comutadores.

Em termos das matrizes u , a regra de composição do grupo é mapeada na regra de multiplicação de matrizes:

$$U^{-1}(\tilde{\lambda}) U^{-1}(\lambda) G_a U(\lambda) U(\tilde{\lambda}) = u_a^b(\lambda) U^{-1}(\tilde{\lambda}) G_b U(\tilde{\lambda}) = u_a^b(\lambda) u_b^c(\tilde{\lambda}) G_c$$

$$U(\lambda) U(\tilde{\lambda}) = U(\gamma)$$

$$U^{-1}(\tilde{\lambda}) U^{-1}(\lambda) G_a U(\lambda) U(\tilde{\lambda}) = U^{-1}(\gamma) G_a U(\gamma) = u_a^c(\gamma) G_c$$

$$u_a^c(\gamma) = u_a^b(\lambda) u_b^c(\tilde{\lambda})$$

Concluimos então que as matrizes u constituem uma representação matricial do grupo. Correspondentemente, as matrizes g constituem representações matriciais dos geradores. Uma vez que esta representação é sugerida muito naturalmente pelas constantes de estrutura do grupo, dá-se a ela um nome especial: *representação adjunta*.

Assim, vemos que associados à regra de composição de um grupo de Lie, os seus geradores infinitesimais devem satisfazer uma álgebra (2.28). Qualquer álgebra (2.28) cujas constantes de estrutura satisfazem (2.29), ou seja, constantes de estrutura satisfazendo *exatamente* a mesma álgebra, é chamada de *álgebra de Lie*.

Exemplo: O grupo das rotações, $SO(3)$. O grupo das rotações no espaço euclidiano a três dimensões é denominado de grupo $SO(3)$, em virtude da sua representação adjunta aparecer, naturalmente, na forma de matrizes ortogonais com determinante unitário.

A álgebra dos geradores desse grupo é dada por

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ij}^k J_k$$

No entanto, observe que para os elementos do grupo o que importa não é cada gerador individualmente, mas sim uma combinação linear geral destes:

$$U(\delta\lambda) = 1 + i\delta\lambda^a J_a$$

Assim, podemos trocar um determinado conjunto de geradores por qualquer outro conjunto de combinações lineares *linearmente independentes* dos mesmos geradores, e as transformações do grupo permanecerão as mesmas. Em mecânica Quântica, por exemplo, é muito comum o uso dos operadores de criação-aniquilação $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ em lugar dos geradores canônicos. Uma vez que os geradores são transformados por combinações lineares, os parâmetros, bem como as constantes de estrutura, também o serão. No presente caso, a nova álgebra será

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_3$$

Subgrupos Invariantes, Ideais, Classes de Equivalência e Outras Definições

A operação de conjugação de elementos de um dado grupo é definida por

$$U_a = U_n U_b U_n^{-1}$$

dizemos então que U_a é conjugado a U_b por U_n . Observe que a operação de conjugação é na realidade um operação de equivalência:

$$\begin{aligned} U_a &= E U_a E^{-1} \\ U_a = U_n U_b U_n^{-1} &\Rightarrow U_b = U_k U_a U_k^{-1}, \quad U_k = U_n^{-1} \\ U_a = U_n U_b U_n^{-1} \wedge U_b = U_m U_c U_m^{-1} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow U_a = U_n U_m U_c U_m^{-1} U_n^{-1} = (U_n U_m) U_c (U_n U_m)^{-1} \end{aligned}$$

Isto implica que os conjuntos de todos os elementos do grupo, conjugados entre si, formam *classes* de equivalência, sendo que essas classes podem ou não constituírem-se em subgrupos¹⁴.

Todo grupo de Lie que *não* possui subgrupos de Lie invariantes¹⁵ é chamado de *simples*. Um grupo de Lie é dito *semisimples* se ele *não* possui subgrupos invariantes *abelianos* de Lie¹⁶.

A invariância de um subgrupo implica em uma propriedade análoga para a álgebra de seus geradores. Essa propriedade pode ser facilmente encontrada lembrando que, se os elementos \tilde{U}_a formam um subgrupo invariante, i.e.,

$$\tilde{U}_a = U_n \tilde{U}_b U_n^{-1}$$

então

$$\tilde{U}_c = \tilde{U}_a \tilde{U}_b^{-1} = U_n \tilde{U}_b U_n^{-1} \tilde{U}_b^{-1}$$

Seguindo o mesmo raciocínio que desenvolvemos para encontrar as álgebras de Lie, temos

$$[G_i, A_k] = \tilde{f}_{i\ k}^l A_l \tag{2.30}$$

onde

$$\tilde{U}_b = 1 + \delta \lambda_b^k G_k$$

O índice b serve para indicar que cada elemento do subgrupo é construído a partir de uma combinação linear apropriada.

¹⁴É fácil ver que a identidade, por exemplo, sempre faz parte de uma classe de equivalência, já que o elemento identidade é sempre conjugado a si mesmo por qualquer membro do grupo.

¹⁵Ou seja, classes de equivalência que sejam também grupos de Lie.

¹⁶Em outras palavras, é um grupo que *pode* possuir subgrupos invariantes, mas pelo menos eles não são *abelianos*.

Por outro lado, os geradores de um subgrupo formam uma sub-álgebra:

$$[A_i, A_k] = \tilde{f}_{i\ k}^l A_l \quad (2.31)$$

Toda sub-álgebra (2.31) dotada da propriedade (2.30) é denominada um *ideal*. Por analogia às definições utilizadas no caso dos grupos, uma álgebra é chamada de *simples* se ela *não* possui nenhum ideal¹⁷, ou de *semisimples* se ela *não* possui nenhum *ideal abeliano*.

Invariância sob uma Simetria

Vamos denotar por $U(\alpha)$ os operadores de um grupo de simetria de um determinado sistema quântico. Uma vez que $U(\alpha)$ é uma operação de simetria, tanto o estado $|\psi\rangle$ quanto $U(\alpha)|\psi\rangle$ devem satisfazer a mesma equação de evolução:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} &= H(t) |\psi\rangle \\ i\hbar \frac{\partial (U(\alpha) |\psi\rangle)}{\partial t} &= H(t) U(\alpha) |\psi\rangle \end{aligned}$$

Isto implica que

$$i\hbar \frac{\partial (U(\alpha) |\psi\rangle)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} |\psi\rangle + i\hbar U(\alpha) \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} |\psi\rangle + U(\alpha) H(t) |\psi\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial U(\alpha)}{\partial t} + [U(\alpha), H(t)] = 0$$

Em particular, caso nenhum dos parâmetros envolvidos na simetria tenha dependência temporal, isto se reduz a

$$[U(\alpha), H(t)] = 0$$

ou ainda,

$$[G_a, H(t)] = 0$$

¹⁷Exceto pelo ideal trivial nulo.

Uma vez que operadores comutantes podem ser simultaneamente diagonalizados, segue que os auto-estados de energia de um determinado sistema são degenerados entre os possíveis valores esperados dos geradores (e consequentemente dos operadores de simetria também). Essa degenerescência implica que os estados referentes a uma dada classe de equivalência de um grupo, formam um sub-espaço invariante pela ação dos membros do grupo de simetria $U(\alpha)$, ou seja, a partir de um estado qualquer $|\psi_0\rangle$ desse subespaço, todos os outros estados do mesmo subespaço são gerados pela aplicação sucessiva dos elementos do grupo de simetria:

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} A(\alpha) U(\alpha) |\psi_0\rangle$$

Exemplo: Subespaço invariante das Rotações

Os harmônicos esféricos servem para caracterizar os auto-estados invariantes sob o grupo das rotações, pois qualquer um dos geradores J_k pode no máximo alterar o índice m de um esférico harmônico Y_{lm} , mas nunca o seu índice (número quântico) l , assim,:

$$J_{\pm} |Y_{lm}\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |Y_{lm \pm 1}\rangle$$

$$J_3 |Y_{lm}\rangle = m |Y_{lm}\rangle$$

Consideremos, por exemplo, o conjunto de quatro vetores $\{Y_{00}, Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}\}$. esse conjunto forma um subespaço do grupo de rotações. No entanto, esse subespaço ainda pode ser reduzível a subespaços ainda menores, denominados de *multipletos*. Uma vez que os geradores J_k não podem alterar l , vemos que o estado $|Y_{00}\rangle$ forma por si só um subespaço unidimensional, chamado *singlete*. Os vetores $\{Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}\}$, por outro lado, formam um espaço tridimensional, denominado *triplete*. O subespaço original é então dito ser uma *soma direta* dos dois multipletos.

Operadores Invariantes

Operadores invariantes, ou operadores de Casimir, são definidos como sendo aqueles que comutam com todo o conjunto de geradores de um determinado grupo:

$$[C_i, G_a] = 0$$

A importância dos operadores de Casimir reside na sua relação com as simetrias de um sistema quântico.

Uma vez que os operadores de Casimir comutam com todos os elementos da álgebra de Lie, e lembrando que os geradores formam uma *base* para o espaço dessa álgebra, segue os operadores invariantes devem ser funções dos geradores:

$$C_i = C_i(G_a)$$

e portanto,

$$[C_i, C_j] = 0$$

Por outro lado, vimos acima que os geradores das simetrias devem comutar com a Hamiltoniana, segue então que

$$[C_i, H] = 0$$

Concluimos portanto que o operadores de Casimir servem para descrever as propriedades de simetria de um sistema, de modo que os seus auto-estados devem classificar as degenerescências dos auto-estados de energia do sistema.

Em geral, não existe método algum para a construção dos operadores invariantes para grupos arbitrários. Somente no caso dos grupos $SU(N)$ sabemos que os operadores de Casimir tem a forma simples de polinômios homogêneos nos geradores:

$$\begin{aligned} C_1 &= A^a G_a \\ C_2 &= A^{ab} G_a G_b \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde as constantes A são funções das constantes de estrutura.

Um dos operadores de Casimir é sempre dado por

$$C_2 = \eta^{ab} G_a G_b$$

onde η é a *métrica de Killing-Cartan*:

$$\eta_{ab} = f_{ac}^d f_{bd}^c = Tr(g_a g_b)$$

onde na última identidade usamos que as constantes de estrutura fornecem-nos a representação adjunta da álgebra.

Aplicações

Quatérnions $Gl(1, \mathbb{Q})$

Um quatérnion é uma generalização do conceito de número complexo, e pode ser definido pela combinação linear geral

$$q = q^\mu \lambda_\mu = q^0 \lambda_0 + q^1 \lambda_1 + q^2 \lambda_2 + q^3 \lambda_3$$

onde os coeficientes q^μ são todos reais e os “geradores” λ_μ obedecem a seguinte tabela de multiplicação:

	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_1	λ_1	$-\lambda_0$	λ_3	$-\lambda_2$
λ_2	λ_2	$-\lambda_3$	$-\lambda_0$	λ_1
λ_3	λ_3	λ_2	$-\lambda_1$	$-\lambda_0$

Esta tabela pode também ser expressa de forma algébrica pela relação

$$\lambda_i \lambda_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}{}^k \lambda_k$$

Para os quatérnions, a identidade sob a multiplicação é $1\lambda_0$, enquanto que a identidade sob a adição é 0. A adição de quatérnions forma um grupo. Se excluirmos o zero, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, os quatérnions formam um grupo $Gl(1, \mathbb{Q})$ sob a multiplicação.¹⁸

Para encontrarmos os geradores do grupo multiplicativo dos quatérnions, construímos um quatérnion infinitesimalmente próximo da identidade:

$$U(\delta q) = 1\lambda_0 + \delta q = (1 + \delta\theta^0) \lambda_0 + \delta\theta^i \lambda_i$$

Agora, podemos reconhecer aqui os geradores e a álgebra associada:¹⁹

$$G_\mu = -\frac{1}{2}\lambda_\mu \quad [G_0, G_i] = 0$$

$$[G_i, G_j] = \varepsilon_{ij}{}^k \lambda_k$$

Um subgrupo dos quatérnions pode ser especificado pelo conjunto dos quatérnions de norma unitária, $Sl(1, \mathbb{Q})$. Isto claramente deve se dar por meio de uma restrição no espaço de parâmetros do grupo, que pode ser encontrada através da relação

$$(1\lambda_0 + \delta q)^* (1\lambda_0 + \delta q) = 1\lambda_0$$

$$[(1 + \delta\theta^0) \lambda_0 - \delta\theta^i \lambda_i] [(1 + \delta\theta^0) \lambda_0 + \delta\theta^i \lambda_i] = (1 + \delta\theta^0) \lambda_0 + \delta\theta^i \lambda_i + \delta\theta^0 \lambda_0 - \delta\theta^i \lambda_i =$$

$$= (1 + 2\delta\theta^0) \lambda_0$$

Segue então que esse subgrupo corresponde à sub-álgebra de Lie com $\delta\theta^0 = 0$, cujos geradores infinitesimais são os G_i .

¹⁸Caso o zero não seja excluído, dizemos que os quatérnions formam um anel sob a multiplicação.

¹⁹O fator $-\frac{1}{2}$ foi escolhido de tal forma a manter a relação

$$[G_i, G_j] = \varepsilon_{ij}{}^k \lambda_k$$

que é a forma comumente encontrada na literatura.

A partir destas álgebras de Lie, podemos construir os elementos correspondentes do grupo através da exponenciação:

$$Sl(1, \mathbb{Q}) \ni U(\theta) = \exp(\theta^i G_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\theta^i \lambda_i\right)^n$$

Uma vez que, devido à álgebra dos quatérnions temos

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\theta^i \lambda_i\right)^2 &= -\lambda_0 \left(\frac{\theta}{2}\right)^2, \quad \theta^2 \equiv \sum_{i=1}^3 (\theta^i)^2 \\ \left(-\frac{1}{2}\theta^i \lambda_i\right)^3 &= -\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\theta^i \lambda_i\right) \end{aligned}$$

podemos separar a soma acima na forma

$$\begin{aligned} \exp(\theta^i \lambda_i) &= \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n} + \hat{\theta}^i \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2n+1} = \\ &= \lambda_0 \cos \frac{\theta}{2} + \hat{\theta}^i \lambda_i \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\theta}^i \equiv \frac{\theta^i}{\theta}$$

Os elementos do grupo $Gl(1, \mathbb{Q})$ também podem ser construídos por exponenciação direta, mas aqui é mais simples lembrar que se dois operadores comutam, $[A, B] = 0$, então

$$\exp(A + B) = \exp A \exp B$$

logo,

$$\exp(\theta^\mu \lambda_\mu) = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^0 \lambda_0\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^i \lambda_i\right) = e^{-\frac{\theta^0}{2}} \left(\lambda_0 \cos \frac{\theta}{2} + \hat{\theta}^i \lambda_i \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

Grupo Unitário $U(2)$

As matrizes complexas que preservam a métrica euclideana são chamadas de unitárias:

$$U_i^{*r} \delta_{rs} U_j^s = \delta_{ij}$$

ou em notação matricial,

$$U^\dagger U = 1$$

Seguindo o procedimento padrão, encontramos os geradores construindo uma matriz unitária infinitesimalmente próxima da identidade:

$$U(\delta\theta) = 1 + iM$$

Neste caso, a condição de unitariedade implica que a matriz infinitesimal M deve ser hermiteana,

$$(1 - iM^\dagger)(1 + iM) = 1 + i(M - M^\dagger) = 1$$

$$M - M^\dagger = 0$$

No que segue, trabalharemos apenas com matrizes a duas dimensões, ou seja, 2×2 . A matriz hermiteana de duas dimensão mais geral pode ser escrita como

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta\theta^0 + \delta\theta^3 & \delta\theta^1 - i\delta\theta^2 \\ \delta\theta^1 + i\delta\theta^2 & \delta\theta^0 - \delta\theta^3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\delta\theta^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\delta\theta^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\delta\theta^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\delta\theta^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\delta\theta^\mu \sigma_\mu \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

são as matrizes de Pauli.

A álgebra dos geradores $G_\mu = \frac{i}{2}\sigma_\mu$ é dada por

$$\begin{aligned} [G_0, G_i] &= 0 \\ [G_i, G_j] &= \varepsilon_{ij}{}^k G_k \end{aligned}$$

Esta álgebra é isomórfica à álgebra dos quatérnions. Vemos daqui que ambos os grupos devem então estar relacionados. De fato, o isomorfismo dessas duas álgebras de Lie permite que se construa uma representação matricial para os quatérnions.

Um subgrupo de $U(2)$ é o grupo das matrizes unitárias de determinante unitário, denominado $SU(2)$. Uma vez que os elementos do grupo são construídos pela exponenciação direta dos geradores da álgebra, segue que a subálgebra associada ao $SU(2)$ é determinada pela condição de traço nulo:

$$U = \exp(\theta^\mu G_\mu) \quad \det U = \exp[\theta^\mu \text{Tr}(G_\mu)]$$

$$\text{Tr} M = \delta\theta^0 = 0$$

e novamente as subálgebras associadas também são isomórficas.

O mapeamento da álgebra no grupo também é feito por exponenciação direta, como no caso anterior, e uma vez que as álgebras são isomórficas, podemos inferir diretamente o resultado final:

$$SU(2) \ni \exp(\theta^k G_k) = \sigma_0 \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{\theta}^k \sigma_k \sin \frac{\theta}{2}$$

$$U(2) \ni \exp(\theta^\mu G_\mu) = e^{i\frac{\theta^0}{2}} \left(\sigma_0 \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{\theta}^k \sigma_k \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

O fato de os subgrupos $SU(2)$ e $Sl(1, \mathbb{Q})$ apresentarem formas *idênticas* é matematicamente especificado dizendo-se que existe um isomorfismo entre esses eles. O fato

dos parâmetros associados serem exatamente *metade* dos parâmetros correspondentes ao grupo das rotações em três dimensões no espaço euclideo, é especificado dizendo-se que $SU(2)$ (ou $Sl(1, \mathbb{Q})$) é o grupo de *recobrimento* das rotações.

Bibliografia

- [1] O. Klein, *Zeit. Physik* **37**, 895 (1926); V. Fock, *Zeit. Physik* **38**, 242 (1926); e ibid **39**, 226 (1926); W. Gordon, *Zeit. Physik* **40**, 117 (1926).
- [2] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc.* **A117**, 610 (1928).
- [3] M. Fierz & W. Pauli, *Proc. Roy. Soc.* **A173**, 211 (1939).
- [4] L. de Broglie, *Compt. Rend.* **199**, 445 (1934).
- [5] G. Petiau, *Acad. R. Soc. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect.* **8**, No 2, 16 (1936).
- [6] J. Géhéniau, *Acad. R. Soc. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect.* **8**, No 1, 18 (1938).
- [7] A. Proca, *J. de Phys. et Rad.* **7**, 347 (1936).
- [8] R. J. Duffin, *Phys. Rev.* **54**, 1114 (1938).
- [9] N. Kemmer, *Proc. R. Soc.* **A173**, 91 (1939).
- [10] R. A. Krajcik & M. M. Nieto, *Am. J. Phys.* **45**, 818 (1977).
- [11] E. Fishbach, M. M. Nieto & C. K. Scott, *J. Math. Phys.* **14**, 1760 (1973).
- [12] V. Ya. Feinberg & B. M. Pimentel, *Braz. J. Phys.* **30**, 275 (2000); *Phys. Lett.* **A271**, 16 (2000).

-
- [13] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira & J. S. Valverde, *Phys. Lett.* **A268**, 165 (2000).
- [14] José Tadeu Teles Lunardi - *O Campo Escalar no Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau*, Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica - UNESP, IFT-T.007/2001, (2001).
- [15] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
- [16] Harish-Chandra, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 186**, 502 (1946).
- [17] S. Deser and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 178**, 491 (1981).
- [18] P.K. Townsend, CERN-TH-3067, Proceedings of 18th Winter School of Theoretical Physics: Gauge Field Theories (Ed. by W. Garczyński, 1986), pp. 649-669.
- [19] H. Umezawa - *Quantum Field Theory*, North-Holland (Amsterdam, 1956).
- [20] E. Wigner, - *Ann. Math.* **40**, 149 (1939).

3. A Geometria Invariante de Escala e a Geometria de Lyra

Nas próximas linhas iremos dar uma breve introdução a um novo tipo de geometria diferencial, proposta como uma modificação da geometria de Weyl, onde a condição de metricidade é respeitada. Essa geometria é construída como uma generalização da geometria de Lyra, utilizando variedades base não-riemannianas. Veremos também a restrição de Lyra sobre a variedade base, demonstrando que ela é um caso particular da geometria invariante de escala desenvolvida aqui.

A linguagem adotada aqui para descrever espaços com curvatura e torção é a mesma empregada nos textos clássicos, tais como [1] e [2]. Para o estudo de formas diferenciais, usamos especialmente a referência [3]. O roteiro que utilizaremos para apresentar os conceitos básicos da geometria invariante de escala é baseado naquele utilizado no capítulo 2 da referência [4], ao apresentar a geometria diferencial usual. As convenções quanto à assinatura da métrica, ordenamento de índices nas derivadas covariantes, curvatura, torção e qualquer outra convenção de índices, serão as mesmas adotadas na referência [5], pois são aquelas que o nosso grupo de pesquisa vêm adotando desde o princípio.

3.1 Sistemas de Coordenadas e Sistemas de Referência

A maneira mais simples de se visualizar a construção de variedades diferenciáveis, é tomá-las como subconjuntos do \mathbb{R}^N equipados com certas propriedades¹. A primeira, e mais fundamental dessas propriedades, nos diz que esse subconjunto de pontos deve formar uma superfície *suave*. O conceito chave para vermos o que se entende por “suave”, é o de um *sistema de coordenadas*: Sejam $M \subseteq \mathbb{R}^N$ e U um aberto do \mathbb{R}^n , e seja $\chi : U \rightarrow M$. Como χ é injetivo (\hookrightarrow), fica estabelecida uma relação de equivalência univalente entre pontos no domínio U e na imagem $\chi(U)$. Dado um ponto $P = \chi(P^U) \in M$, a n -nupla $P^U \in U$ é chamada *coordenadas de P em U* (vide figura 3.1).

À primeira vista, parece-nos então que a suavidade de M significa simplesmente dizer que χ é suave. Porém, isto está longe de ser suficiente! Para ser de alguma utilidade, χ deve respeitar a topologia de M , ou seja, dois pontos sobre M são próximos entre si se, e somente se, suas coordenadas são próximas. Isto significa que, dada uma seqüência (P_i) , $i \in \mathbb{N}$, diremos que a mesma converge a P_∞ se, e somente se, a seqüência de coordenadas correspondente, $(x_i^1, \dots, x_i^n) = (P_i^U)$ converge para (P_∞^U) , o que é o mesmo que exigir que χ seja um *homeomorfismo*. Observe que na definição de convergência, encontra-se implícito o uso da métrica definida sobre² U . No que segue, estaremos sempre supondo que a métrica em U é *euclídeana* (ou pseudo), tanto ao falarmos da geometria invariante de escala ou de uma outra geometria qualquer. Assim, a distância entre pontos em U é dada por

$$d(x; y) = \|x - y\| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}$$

¹Embora isto possa ser visto como uma espécie de *imersão* da variedade diferenciável, tentaremos sempre que possível falar apenas na variedade *em si*, de modo a enfatizar que as suas propriedades geométricas são *intrínsecas*, ou seja, independem de como olhamos essa variedade, seja a partir de um espaço maior ou da própria variedade.

²Ainda mais implícita, está a noção de distância (ou diferença entre pontos) *sobre* a variedade.

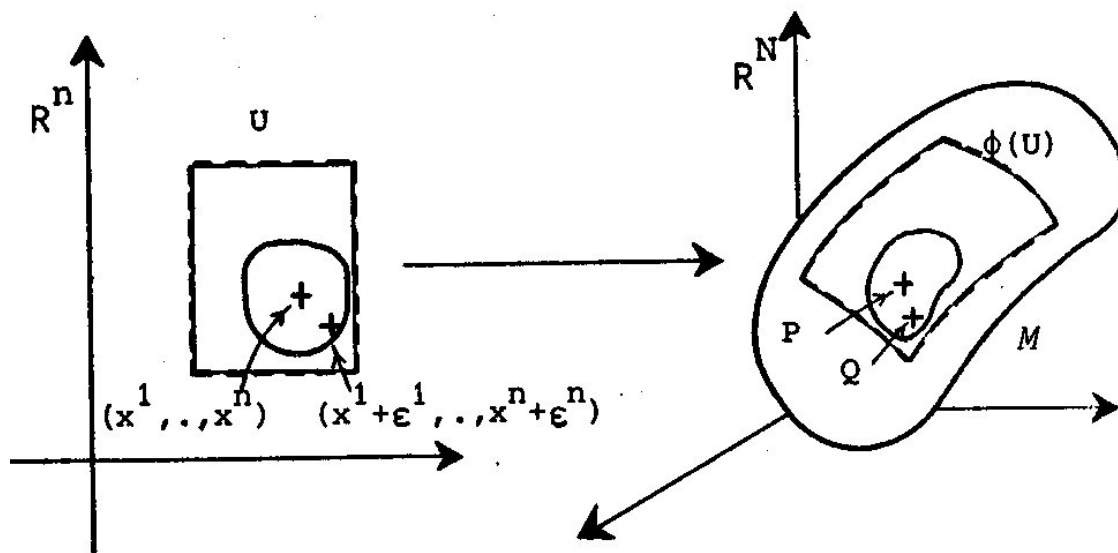


Figura 3.1: Representação de um sistema de coordenadas na variedade M .

Temos, portanto, que em geometria diferencial ordinária, um sistema de coordenadas é definido como o par (χ, U) , onde χ é um homeomorfismo definido da maneira exposta acima.

A geometria invariante de escala (SI) é construída com base em uma variedade conhecida que chamaremos de variedade base. Para se construir a variedade invariante de escala a partir da variedade base, associamos, a cada sistema de coordenadas (χ, U) sobre a variedade base, uma função de escala $\phi(x)$, e construímos um novo espaço tangente cujas componentes *intrínsecas* são agora dadas por

$$d\xi^\mu = \phi(x) dx^\mu \quad (3.1)$$

Dizemos então que a vizinhança de um dado ponto P na variedade invariante de escala é descrita por um *sistema de referência* (χ, U, ϕ) , ou seja, continuamos a utilizar o sistema

de coordenadas da variedade base, incorporando a função de escala como uma espécie de “elemento externo”. É importante notar que a mudança de sistema de referência se dá tanto por uma mudança no sistema de coordenadas, quanto por uma mudança na função de escala, onde a primeira é independente da segunda (embora a segunda não seja completamente independente da primeira). Isto se tornará mais claro na seção seguinte.

De fato, veremos adiante que a associação (3.1) serve para definir vetores SI, *em geral*, e não apenas no espaço tangente, i.e., dado um vetor A^μ na variedade base, definimos o seu vetor SI correspondente por $\xi^\mu = \phi(x) A^\mu$.

É importante salientar que, apesar do nome, a tríada (χ, U, ϕ) *não* está ligada ao conceito físico de um referencial. Como sabemos dos fundamentos da Física, é possível mudar de sistema de coordenadas *sem* fazer qualquer tipo de alteração no referencial, e portanto (χ, U, ϕ) *não especifica um referencial físico*. A representação geométrica para as mudanças entre referenciais *inerciais* emergirá ao tratarmos das tetradas dessa variedade.

Abaixo ilustramos a riqueza de transformações possíveis na geometria SI, no caso simples de uma variedade bidimensional, por meio de uma tabela

Sist. Ref.	$(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))$	$(\bar{\mathbf{x}}, \phi(\bar{\mathbf{x}}))$	$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}}))$	$(\mathbf{x}, \bar{\phi}(\mathbf{x}))$
Sist. Coord.	x y	r θ	r θ	x y
Escala	$\phi(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 + R^2$	$\phi(\bar{\mathbf{x}}) = r^2 + R^2$	$\bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}}) = e^{(r^2+R^2)}$	$\bar{\phi}(\mathbf{x}) = e^{(x^2+y^2+R^2)}$

3.2 Vetores, Tensores e Sistemas de Base

A lei de transformação de vetores SI é construída com base na lei de transformação de vetores da variedade base. Nesta, sabemos que o vetor deslocamento transforma-se

como

$$d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

onde \bar{x} e x são coordenadas referentes a dois sistemas de coordenadas distintos. Assim, cada um desses sistemas de coordenadas será associado a um sistema de referência distinto na variedade invariante de escala, e podemos escrever a lei de transformação de vetores SI multiplicando a lei acima por fatores de escala apropriados:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{x}) d\bar{x}^\nu &= \frac{\bar{\phi}(\bar{x})}{\phi(x)} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \phi(x) dx^\mu \\ \bar{\xi}^\nu &= \frac{\bar{\phi}(\bar{x})}{\phi(x)} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \xi^\mu \end{aligned}$$

Não obstante, para que a suavidade da variedade base seja respeitada, algumas restrições se impõem. Em primeiro lugar, temos que

$$\det \left(\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \right) \neq 0$$

como consequência direta do fato de utilizarmos um espaço Riemanniano como base. Em segundo lugar, a transformação *entre* as funções de escala também deve ser “suave”, entretanto a suavidade aqui deve ser tomada num sentido mais amplo, pois equivale a admitir algum tipo de dependência *funcional* entre essas escalas. Denotaremos isso exigindo que

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \bar{\phi}(x(\bar{x}); \phi(x(\bar{x}))) \quad \frac{\delta \bar{\phi}}{\delta \phi} \neq 0$$

onde o ponto e vírgula serve para separar a dependência funcional da transformação explícita de coordenadas. Da lei de transformação acima, fica claro também que a função de escala deve ser uma aplicação do tipo $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^*$. Desse modo, ao realizarmos uma mudança no sistema de coordenadas (e exclusivamente nele!), *induzimos* uma mudança de escala dada por

$$(\chi, U) \rightarrow (\chi, \bar{U}) \Rightarrow \bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x(\bar{x}))$$

$$(\chi, U, \phi) \rightarrow (\chi, \bar{U}, \bar{\phi} = \phi(x(\bar{x})))$$

Não obstante, também podemos mudar de sistema de referência sem mudar o sistema de coordenadas, bastando para isso uma mudança funcional na função de escala, i.e.,

$$(\chi, U, \phi) \rightarrow (\chi, U, \bar{\phi})$$

onde $\bar{\phi}$ é uma função $\bar{\phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^*$ completamente diferente de ϕ , mas ainda especificada por ϕ por meio de um *funcional*,

$$\bar{\phi}(x) \equiv \int_{y_0}^x d\mu_y F[\phi(y); y]$$

onde F é o núcleo do funcional, μ_y é a medida de integração nas coordenadas y e o limite de integração inferior, y_0 , depende da natureza da função de escala original.

A generalização da lei de transformação para tensores de ordem arbitrária é imediata:

$$\bar{\xi}_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \left(\frac{\bar{\phi}(\bar{x})}{\phi(x)} \right)^{s-r} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial \bar{x}^{\alpha_s}}{\partial x^{\mu_s}} \right) \left(\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\beta_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial x^{\nu_r}}{\partial \bar{x}^{\beta_r}} \right) \xi_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\mu_1 \dots \mu_s}$$

3.3 Transporte Paralelo

Em geometria diferencial, o transporte paralelo é definido como uma aplicação *linear* associando vetores em um dado ponto de uma variedade, a vetores em outro ponto, infinitesimalmente vizinho, da mesma variedade,

$$\delta V^\mu \equiv L_\alpha^\mu(V) dx^\alpha$$

Além da linearidade,

$$\begin{aligned} \delta(\lambda V_1^\mu + V_2^\mu) &= L_\alpha^\mu(\lambda V_1) dx^\alpha + L_\alpha^\mu(V_2) dx^\alpha = \\ &= \lambda L_\alpha^\mu(V_1) dx^\alpha + L_\alpha^\mu(V_2) dx^\alpha \end{aligned}$$

costuma-se exigir também que o deslocamento paralelo respeite uma regra de composição do tipo Leibniz,

$$\delta(V_1^\mu V_2^\nu) = L_\alpha^\mu(V_1) V_2^\nu dx^\alpha + L_\alpha^\nu(V_2) V_1^\mu dx^\alpha$$

Entretanto, o ponto crucial na definição de um transporte paralelo, está na propriedade de linearidade,

$$L_\alpha^\mu(\lambda V) = \lambda L_\alpha^\mu(V)$$

que, em conjunto com o caráter infinitesimal da transformação, leva à conclusão de que esse mapeamento linear é necessariamente proporcional ao próprio vetor que está sendo transportado, ou seja,³

$$\delta V^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\beta dx^\alpha$$

Na verdade, é simples provar que *toda* aplicação linear infinitesimal tem esta propriedade⁴.

Tendo em vista essas considerações, o transporte paralelo de um vetor SI é definido de maneira similar ao de uma variedade afim qualquer,

$$\delta \xi^\mu(x) = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\beta(x + dx) \phi(x) dx^\alpha \quad (3.2)$$

³Perceba que nesta expressão Γ denota a conexão da variedade em discussão, e não necessariamente a conexão ST definida mais abaixo.

⁴**Prova:** A linearidade

$$F(\lambda x) = \lambda F(x)$$

implica que a função F é homogênea de Euler de grau 1, e como tal

$$x \frac{\partial F}{\partial x} = F(x)$$

Consequentemente,

$$F(0) = 0$$

e

$$F(x) \approx x \dot{F}(0)$$

infinitesimalmente.

A lei de transformação dessa conexão é definida exigindo-se que a diferença entre a diferencial de um vetor invariante de escala,

$$\bar{\xi}^\nu = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \xi^\mu$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\xi}^\nu}{\partial \bar{x}^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda} \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \xi^\mu + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \xi^\mu + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda} \xi^\mu = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \xi^\mu + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial^2 \bar{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \xi^\mu + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \end{aligned}$$

$$d\bar{\xi}^\mu(x) = \frac{\partial \bar{\xi}^\mu}{\partial \bar{x}^\lambda} d\bar{x}^\lambda \quad d\bar{x}^\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta} dx^\beta$$

$$d\bar{\xi}^\nu(x) = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} d\xi^\mu + \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \xi^\mu d\left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\right) + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial^2 \bar{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \xi^\mu dx^\alpha$$

e a variação dada pelo transporte paralelo, seja um vetor invariante de escala, ou seja,

$$D\bar{\xi}^\nu(x) = d\bar{\xi}^\nu(x) - \delta\bar{\xi}^\nu(x) = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\rho} D\xi^\rho(x)$$

A diferencial absoluta é dada por

$$\begin{aligned} D\bar{\xi}^\nu(x) &= d\bar{\xi}^\nu(x) + \bar{\Gamma}^\nu_{\alpha\beta} \bar{\xi}^\beta \bar{\phi} d\bar{x}^\alpha = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \xi^\mu + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial^2 \bar{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} \xi^\mu + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \bar{\Gamma}^\nu_{\lambda\epsilon} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\epsilon}{\partial x^\beta} \xi^\beta \right) dx^\alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\rho} D\xi^\rho(x) = \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\alpha} + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \phi \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\rho} \xi^\beta \right) dx^\alpha \quad (3.4)$$

Igualando (3.3) com (3.4), obtemos a lei de transformação para a conexão invariante de escala,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial^2 \bar{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \bar{\Gamma}^\nu_{\lambda\epsilon} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\epsilon}{\partial x^\beta} = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \phi \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\rho}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \bar{\Gamma}_{\lambda\varepsilon}^{\nu} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \delta_{\beta}^{\rho} \quad (3.5)$$

Assim, vemos que a lei de transformação da conexão SI é perfeitamente análoga ao caso de uma geometria afim qualquer, mas agora temos *dois* termos não-homogêneos, sendo o último devido, exclusivamente, à mudança de escala ocorrida ao efetuarmos uma transformação de *sistema de referência*.

Da expressão para a diferencial covariante, podemos definir um operador *derivada covariante SI*, como sendo o coeficiente oriundo de uma mudança de ponto *e* de escala (ou seja, de sistema de referência) em um objeto da geometria invariante de escala (vetor, tensor, etc.). Por exemplo, para o caso de um vetor SI,

$$\begin{aligned} D\xi^{\rho}(x) &= \left(\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \xi^{\beta} \phi \right) dx^{\alpha} = \\ &= \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \xi^{\beta} \right) \phi dx^{\alpha} \\ \nabla_{\alpha} \xi^{\rho}(x) &\equiv \frac{1}{\phi} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \xi^{\beta} \end{aligned}$$

É fácil perceber, desta definição e da lei de transformação de tensores SI, que as regras para a composição das derivadas covariantes dos objetos da geometria invariante de escala são exatamente as mesmas que as da geometria diferencial ordinária, bastando trocar-se as derivadas parciais por $\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x}$. Assim, a derivada covariante de um tensor covariante de segunda ordem qualquer é dada por

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} g_{\mu\alpha}$$

De modo que a variação que esse tensor sofre por um transporte paralelo na variedade invariante de escala, é dado por

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} &= dg_{\mu\nu} - Dg_{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{\phi} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \phi dx^{\sigma} - \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} g_{\mu\alpha} \right) \phi dx^{\sigma} = \\ &= \left(\Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} g_{\mu\alpha} \right) \phi dx^{\sigma} \end{aligned}$$

3.4 Intervalo

Consideremos agora a combinação

$$s^2 = g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$$

que é obviamente, um escalar SI. Sob um transporte paralelo, temos que

$$\begin{aligned} \delta s^2 &= \delta (g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu) = \delta g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu + g_{\mu\nu}\delta\xi^\mu\xi^\nu + g_{\mu\nu}\xi^\mu\delta\xi^\nu = \\ &= (\Gamma_{\sigma\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha g_{\mu\alpha}) \phi dx^\sigma \xi^\mu\xi^\nu - g_{\mu\nu} (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\beta \phi dx^\alpha) \xi^\nu - g_{\mu\nu} \xi^\mu (\Gamma_{\alpha\beta}^\nu \xi^\beta \phi dx^\alpha) = \\ &= (\Gamma_{\sigma\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} \xi^\mu \xi^\nu + \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} \xi^\mu \xi^\nu - g_{\beta\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \xi^\mu \xi^\nu - g_{\mu\beta} \Gamma_{\sigma\nu}^\beta \xi^\mu \xi^\nu) \phi dx^\sigma = \\ &= (\Gamma_{\sigma\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha) \xi^\mu \xi^\nu \phi dx^\sigma = 0 \end{aligned}$$

Isto nos mostra, de maneira consistente, que qualquer escalar SI é preservado pela operação de transporte paralelo na variedade. Agora, atente-se ao fato de que, em virtude de $\xi^\mu\xi^\nu$ ser um objeto *simétrico* pela permuta de seus índices, *somente a parte simétrica de $g_{\mu\nu}$ comparece no invariante s^2* . Isto inspira-nos então a *definir* o tensor métrico na variedade invariante de escala pela combinação

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\phi dx^\mu\phi dx^\nu$$

onde $g_{\mu\nu}$ é um tensor *SI* simétrico. Dessa expressão, vemos que $\phi(x)$ deve ser uma função real de sinal definido, ou seja, que não se anula em nenhum ponto, pois caso contrário a estrutura do cone de luz, i.e., o caráter absoluto da classificação dos intervalos entre gêneros espaço, tempo e luz, não é preservado. Para ilustrar isso, observe a figura 3.2.

Considerando dois pontos P e Q de uma variedade bidimensional localizados em lados opostos da região de anulamento da função de escala, e cujas coordenadas diferem infinitesimalmente por uma quantidade dx . O intervalo entre esses dois pontos será

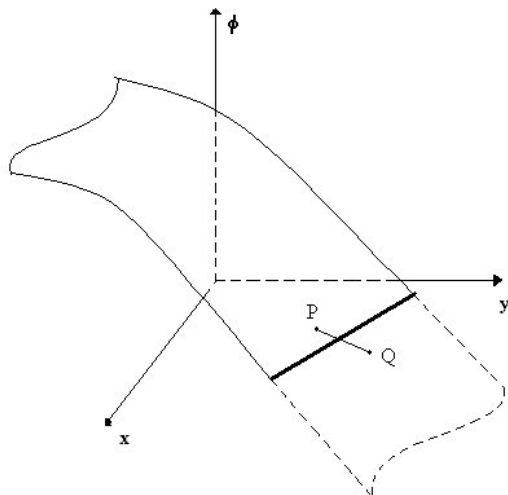


Figura 3.2: Função de escala para uma variedade bidimensional. Observe que se a função de escala se anula numa região, então todo intervalo infinitesimal que cruze essa região também será nulo.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) \phi^2(x) dx^\mu dx^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu}(x) \neq 0$$

pois $\phi(x) = 0$ no ponto médio x . Agora, se escolhermos um novo sistema de referência tal que a função de escala nunca se anule

$$d\bar{s}^2 = g_{\mu\nu}(x) \bar{\phi}^2(x) dx^\mu dx^\nu \neq 0$$

de modo que o caráter do tipo do luz do intervalo não seria preservado por essa transformação de sistema de referência. Para sanar essa patologia, devemos exigir que $\phi(x)$

jamais se anule, o que implica que ela será uma função de sinal definido que, por convenção e sem perda de generalidade, escolhemos como sendo positivo.

É importante salientar, no entanto, que o papel da função de escala em alterar a estrutura do cone de luz pode ser de muita utilidade em diversos casos, tais como no estudo de corpos em queda em buracos negros ou quando queremos estudar a estrutura de curvas fechadas do tipo tempo em um espaço-tempo de Göedel.

3.5 Metricidade

A relação entre a conexão SI e o análogo da conexão de Levi-Civita é deduzida da maneira usual em geometria diferencial [6],

$$\begin{aligned}\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu} &= \frac{1}{\phi}\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}g_{\mu\alpha} \\ \nabla_{\mu}g_{\nu\sigma} &= \frac{1}{\phi}\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}g_{\alpha\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}g_{\nu\alpha} \\ \nabla_{\nu}g_{\sigma\mu} &= \frac{1}{\phi}\partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}g_{\sigma\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}g_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu}g_{\sigma\mu}) &= \frac{1}{2\phi}(\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}g_{\sigma\mu}) + \\ -\frac{1}{2}(\Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}g_{\mu\alpha}) &+ \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}g_{\alpha\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}g_{\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}g_{\sigma\alpha}) =\end{aligned}$$

Definindo o tensor de não-metricidade,

$$\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu} \equiv N_{\mu\nu\sigma}$$

podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(N_{\mu\nu\sigma} - N_{\nu\sigma\mu} - N_{\sigma\mu\nu}) &= -\frac{1}{2\phi}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) + \\ +\Gamma_{[\mu\sigma]}^{\alpha}g_{\nu\alpha} + \Gamma_{[\nu\sigma]}^{\alpha}g_{\alpha\mu} &+ \Gamma_{(\mu\nu)}^{\alpha}g_{\alpha\sigma}\end{aligned}$$

ou ainda, definindo o análogo do símbolo de Christoffel na variedade invariante de escala,

$$\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (N_{\mu\nu\sigma} - N_{\nu\sigma\mu} - N_{\sigma\mu\nu}) = -\frac{1}{\phi}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{[\mu\sigma]}g_{\nu\alpha}g^{\rho\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{[\nu\sigma]}g_{\alpha\mu}g^{\rho\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{(\mu\nu)}g_{\alpha\sigma}g^{\rho\sigma}$$

De modo que

$$\begin{aligned} -\Gamma^{\rho}_{(\mu\nu)} &= -\frac{1}{\phi}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{[\mu\sigma]}g_{\nu\alpha}g^{\rho\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{[\nu\sigma]}g_{\alpha\mu}g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (N_{\nu\sigma\mu} + N_{\sigma\mu\nu} - N_{\mu\nu\sigma}) \\ \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{\phi}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{[\mu\sigma]}g_{\nu\alpha}g^{\rho\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{[\nu\sigma]}g_{\alpha\mu}g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (N_{\mu\nu\sigma} - N_{\nu\sigma\mu} - N_{\sigma\mu\nu}) \\ \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} &= \frac{1}{\phi}\mathring{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]} - \Gamma^{\alpha}_{[\mu\sigma]}g_{\nu\alpha}g^{\rho\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{[\nu\sigma]}g_{\alpha\mu}g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (N_{\mu\nu\sigma} - N_{\nu\sigma\mu} - N_{\sigma\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na geometria diferencial ordinária, as componentes $\Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]}$ constituem um tensor antissimétrico nos índices inferiores, usualmente identificado com a noção geométrica de *torção* da variedade. Entretanto, devido à mudança de escala, essas componentes *não* formam um tensor SI:

$$\begin{aligned} 2\Gamma^{\rho}_{[\alpha\beta]} &= \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} = \\ &= \frac{\bar{\phi}}{\phi}\bar{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\varepsilon} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \delta^{\rho}_{\beta} + \\ &- \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi}\bar{\Gamma}^{\nu}_{\lambda\varepsilon} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \delta^{\rho}_{\alpha} \right) \\ &= \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\nu}} 2\bar{\Gamma}^{\nu}_{[\lambda\varepsilon]} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\varepsilon}}{\partial x^{\beta}} + \frac{1}{\phi} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \delta^{\rho}_{\beta} - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \delta^{\rho}_{\alpha} \right] \end{aligned}$$

Em função desse caráter não-tensorial, não podemos associar a componente antisimétrica da conexão com a torção da variedade. A expressão correta da torção emergirá mais tarde, ao analisarmos a sua definição *geométrica*.

Mostramos acima que um escalar formado pela contração de um tensor qualquer com dois vetores, é invariante por um transporte paralelo. Em certo sentido, isso nos garante que o invariante ds^2 pode mesmo ser associado à noção de distância na variedade. Não obstante, exigiremos também, como é usual, que o tensor métrico seja transportado paralelamente pela conexão SI, ou seja, exigiremos que o tensor de não-metricidade seja identicamente nulo,

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} \equiv N_{\mu\nu\sigma} \equiv 0$$

Isto simplifica então a relação (3.7) para:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{\phi} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho - \Gamma_{[\mu\sigma]}^\alpha g_{\nu\alpha} g^{\rho\sigma} - \Gamma_{[\nu\sigma]}^\alpha g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} \quad (3.8)$$

É importante destacar que isto constitui tão somente em uma restrição a mais sobre o espaço invariante de escala⁵, de modo que extensões não-métricas da teoria ($N_{\mu\nu\sigma} \neq 0$) também são possíveis. Também é importante lembrar que $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ é apenas *análogo* à conexão de Levi-Civita da variedade base, dado que é construído da mesma maneira a partir do tensor métrico. Entretanto, $g_{\mu\nu}$ é um tensor SI, de modo que a lei de transformação de $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ é a mesma que (3.5), e não a que se obtém na variedade base.

É interessante também notar a partição da conexão (3.8) em suas partes simétrica e antissimétrica. Para isso, introduzimos a notação

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}^\rho &\equiv \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho - \Gamma_{[\mu\sigma]}^\alpha g_{\nu\alpha} g^{\rho\sigma} - \Gamma_{[\nu\sigma]}^\alpha g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} \\ Q_{[\mu\nu]}^\rho &= \Gamma_{[\mu\nu]}^\rho, \quad Q_{(\mu\nu)}^\rho = \Gamma_{[\mu\sigma]}^\alpha g_{\nu\alpha} g^{\rho\sigma} + \Gamma_{[\nu\sigma]}^\alpha g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (3.9)$$

de forma que

$$\Gamma_{[\mu\nu]}^\rho = Q_{[\mu\nu]}^\rho, \quad \Gamma_{(\mu\nu)}^\rho = \frac{1}{\phi} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + Q_{(\mu\nu)}^\rho$$

⁵De fato, isso constitui um vínculo entre a conexão e a métrica, ou se preferirmos, entre os símbolos de Christoffel e a conexão afim.

3.6 Curvatura Como Uma Medida de Não-Integrabilidade das Rotações, ou de Não-Holonomia

A curvatura de uma variedade pode ser encarada como uma medida da integrabilidade das curvas autoparalelas definidas sobre a mesma. Uma curva autoparalela é definida por

$$\nabla_{\alpha}\xi^{\rho}(x) \equiv \frac{1}{\phi} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \xi^{\beta} = 0$$

onde ξ^{ρ} denota o vetor tangente à curva. A integrabilidade dessa equação diferencial parcial é baseada na comutatividade das derivadas covariantes. Se a geometria fosse trivial, a condição de integrabilidade seria escrita como

$$\frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = \frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}}$$

enquanto que a equação de autoparalela se reduziria a

$$\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

Em geometrias não-euclidianas, a integrabilidade deve ser definida em termos da comutatividade das diferenciais absolutas. Assim,

$$D\xi^{\rho}(x) = \left(\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho} \xi^{\lambda} \phi \right) dx^{\alpha} = \mathcal{A}^{\rho}$$

$$\begin{aligned} D^2 \xi^{\rho}(x) &= D\mathcal{A}^{\rho} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} \mathcal{A}^{\sigma} \phi \right) dx^{\beta} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left[\left(\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho} \xi^{\lambda} \phi \right) dx^{\alpha} \right] + \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} \left(\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} \xi^{\lambda} \phi \right) dx^{\alpha} \phi \right) dx^{\beta} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \xi^{\rho}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} + \frac{\partial (\phi \Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho})}{\partial x^{\beta}} \xi^{\lambda} + \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \phi \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} + \phi \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} \xi^{\lambda} \right) dx^{\alpha} dx^{\beta} \end{aligned}$$

Por outro lado, também poderíamos ter calculado as diferenciais com índices trocados

$$D\xi^{\rho}(x) = \left(\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} \xi^{\sigma} \phi \right) dx^{\beta} = \mathcal{A}^{\rho}$$

$$\begin{aligned}
 D^2\xi^\rho(x) &= D\mathcal{A}^\rho = \left(\frac{\partial\mathcal{A}^\rho}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \mathcal{A}^\lambda \phi \right) dx^\alpha = \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\Gamma_{\beta\sigma}^\rho \xi^\sigma \phi \right) + \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\beta} + \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda \xi^\sigma \right) dx^\beta dx^\alpha = \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \left(\Gamma_{\beta\sigma}^\rho \phi \right)}{\partial x^\alpha} \xi^\sigma + \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\alpha} + \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\beta} + \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda \xi^\sigma \right) dx^\beta dx^\alpha
 \end{aligned}$$

Dizemos que a curva é integrável quando

$$D^2\xi^\rho(x) - D^2\xi^\rho(x) = 0$$

Ou seja, devemos ter que a diferença,

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial^2\xi^\rho}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} + \frac{\partial \left(\phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \right)}{\partial x^\beta} \xi^\lambda + \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\beta} + \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\alpha} + \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \xi^\lambda \right) dx^\alpha dx^\beta + \\
 &- \left(\frac{\partial^2\xi^\rho}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial \left(\phi \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \right)}{\partial x^\alpha} \xi^\sigma + \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\alpha} + \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \frac{\partial\xi^\lambda}{\partial x^\beta} + \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda \xi^\sigma \right) dx^\beta dx^\alpha = \\
 &= \left(\frac{\partial \left(\phi \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho \right)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \left(\phi \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \right)}{\partial x^\alpha} + \phi \Gamma_{\beta\lambda}^\rho \phi \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda - \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda \right) \xi^\sigma dx^\alpha dx^\beta
 \end{aligned}$$

seja identicamente nula. Isso pode ser expresso em termos do tensor de *Riemann* (ou de *curvatura*):

$$R_{\beta\alpha\sigma}^\rho \equiv \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{\partial \left(\phi \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho \right)}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \left(\phi \Gamma_{\beta\sigma}^\rho \right)}{\partial x^\alpha} + \phi \Gamma_{\beta\lambda}^\rho \phi \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda - \phi \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \phi \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda \right) \quad (3.10)$$

exigindo que todas as suas componentes sejam nulas.

Assim, podemos dizer que *o tensor de Riemann é uma medida da não-integrabilidade das curvas autoparalelas de uma dada variedade.*

3.7 Tetradas

Podemos definir, em analogia ao caso da variedade base, um campo de tetradas para a variedade SI através da seguinte expressão:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \phi dx^\mu \phi dx^\nu = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b \phi dx^\mu \phi dx^\nu$$

onde η_{ab} é a métrica de Minkowski, que em coordenadas cartesianas toma a forma $\eta = (\eta_{ab}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Em analogia à variedade base, definiremos que a métrica de Minkowski se transforma como um tensor de Lorentz, e que as tetradas se transformam como vetores de Lorentz nos índices internos (latinos), e como vetores SI nos índices de espaço-tempo,

$$\begin{aligned} \eta_{\bar{a}\bar{b}} &= \Lambda_{\bar{a}}^a \Lambda_{\bar{b}}^b \eta_{ab} & e_{\bar{\mu}}^{\bar{a}} &= \Lambda_{\bar{a}}^a e_\mu^a \\ e_{\bar{\mu}}^a &= \frac{\phi}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}} e_\alpha^a \end{aligned}$$

Observe que estas definições são consistentes com toda a construção colocada acima. Em particular, vemos que o intervalo é invariante não apenas por transformações gerais de sistemas de referência, mas também por transformações de Lorentz em cada ponto da variedade invariante de escala,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\bar{a}\bar{b}} e_{\bar{\mu}}^{\bar{a}} e_{\bar{\nu}}^{\bar{b}} \bar{\phi} d\bar{x}^{\bar{\mu}} \bar{\phi} d\bar{x}^{\bar{\nu}} = \Lambda_{\bar{a}}^a \Lambda_{\bar{b}}^b \eta_{ab} \Lambda_{\bar{c}}^c e_{\bar{\mu}}^c \Lambda_{\bar{d}}^d e_{\bar{\nu}}^d \bar{\phi} d\bar{x}^{\bar{\mu}} \bar{\phi} d\bar{x}^{\bar{\nu}} = \\ &= \eta_{ab} e_{\bar{\mu}}^a e_{\bar{\nu}}^b \bar{\phi} d\bar{x}^{\bar{\mu}} \bar{\phi} d\bar{x}^{\bar{\nu}} = \\ &= \eta_{ab} \frac{\phi}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}} e_\alpha^a \frac{\phi}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} e_\beta^b \bar{\phi} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\rho} dx^\rho \bar{\phi} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}}{\partial x^\sigma} dx^\sigma = \\ &= \eta_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b \phi dx^\alpha \phi dx^\beta \end{aligned}$$

Assim, podemos ver que a relação entre a tetrada SI e e a da variedade base h , é da forma

$$e_\alpha^a = \frac{1}{\phi} h_\alpha^a$$

A principal diferença entre o campo de tetradas SI e o da variedade base, é que enquanto nesta as tetradas levam vetores, tensores, etc., da variedade para o *espaço tangente*, e vice-versa, na outra *não*. Os vetores SI são mapeados, via tetrada, em vetores de Poincaré, que *não estão no espaço tangente da variedade invariante de escala*. De fato, o espaço-tempo de Minkowski adquire, na teoria SI, um caráter muito mais semelhante ao dos espaços internos (fibrados) das teorias de gauge usuais, enquanto que nas teorias relativistas mais comuns (Relatividade Geral, Teleparalelismo, Einstein-Cartan, etc.) essa identificação é muitas vezes nublada pelo fato do fibrado principal se confundir com o espaço tangente.

3.8 Curvatura, Torção e o Grupo de Poincaré

Modelos gravitacionais geométricos têm grande similaridades com as chamadas *teorias de gauge*. De fato, em certos casos particulares (como o do Teleparalelismo), pode-se mesmo descrever a gravitação como uma teoria “de gauge”⁶, onde o grupo de simetria interna, local, é tomado como o grupo de Poincaré (ou algum dos seus subgrupos, tais como o das translações). Nesta seção, veremos como podemos encarar a teoria invariante de escala como uma teoria “de gauge” para o grupo de Poincaré utilizando o formalismo de formas diferenciais. Uma rápida introdução a esse formalismo pode ser encontrada no apêndice ao final deste capítulo.

Os geradores do grupo de Poincaré são

$$t_A = \{P_a, M_{ab}\}$$

onde P_a são os geradores das translações, e M_{ab} são os geradores das rotações espaço-

⁶A razão para as aspas é que certos autores não consideram teorias “de gauge” aquelas que são baseadas em grupos não-compactos, em virtude de certas dificuldades e ambigüidades que aparecem ao se introduzir os campos compensadores (campos de gauge).

temporais de Lorentz. A álgebra de Lie satisfeita por esses geradores é

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= 0 \\ [M_{ab}, P_c] &= \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \\ [M_{ab}, M_{cd}] &= \eta_{ad}M_{bc} + \eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Conforme discutido no apêndice, ao tornar esse grupo uma simetria *local* da teoria em questão, faz-se necessária a introdução de campos de gauge “compensadores”. Pode-se mostrar [7] que os campos de gauge requeridos para isso são as 1-formas SI

$$\begin{aligned} A^A &= \{e^a, \omega^{ab}\} \\ e^a &= e_\mu^a \phi dx^\mu \quad \omega^{ab} = \omega_\mu^{ab} \phi dx^\mu \end{aligned}$$

onde e_μ^a são as tetradas, e ω_μ^{ab} é conhecido como *conexão de spin* (ou conexão de Lorentz). A conexão de spin é *definida* pela relação⁷

$$\nabla_\alpha e_\mu^a = \frac{1}{\phi} \frac{\partial e_\mu^a}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho e_\rho^a = -\omega_{\alpha b}^a e_\mu^b$$

Essa definição é análoga à equação (3.2) usada para definir a conexão SI. O lado esquerdo nos dá a variação total da tetrada ao sofrer um deslocamento paralelo no espaço de Minkowski (lado direito).

As constantes de estrutura do grupo de Poincaré são facilmente obtidas comparando-se a álgebra acima com a expressão

$$[t_A, t_B] = f_{AB}^C t_C$$

O *field strength* associado a esse grupo é dado por

$$\begin{aligned} F^A t_A &= \left(dA^A + \frac{1}{2} A^B \wedge A^C f_{BC}^A \right) t_A = \\ &= \frac{1}{2} \tau^d P_d + \frac{1}{2} R^{ik} M_{ik} \end{aligned}$$

⁷Como a tetrada é um vetor de Lorentz, os índices latinos, tanto das tetradas como da conexão de spin, são levantados e abaixados usando-se a métrica de Minkowski.

Para facilitar os cálculos, vamos dividir o “domínio” do índice A da álgebra em dois subconjuntos: \dot{A} associado aos geradores P_a , e \ddot{A} associados aos geradores M_{ab} . Assim,

$$\begin{aligned} & \left(dA^A + \frac{1}{2}A^B \wedge A^C f_{BC}^A \right) t_A = \\ & = \left(dA^{\dot{A}} + \frac{1}{2}A^B \wedge A^C f_{BC}^{\dot{A}} \right) t_{\dot{A}} + \\ & + \left(dA^{\ddot{A}} + \frac{1}{2}A^B \wedge A^C f_{BC}^{\ddot{A}} \right) t_{\ddot{A}} \\ & = \left(dA^d + \frac{1}{2}A^B \wedge A^C f_{BC}^d \right) P_d + \\ & + \left(dA^{ik} + \frac{1}{2}A^B \wedge A^C f_{BC}^{ik} \right) M_{ik} \end{aligned}$$

Comparando

$$[t_A, t_B] = f_{AB}^{\dot{C}} t_{\dot{C}} = f_{AB}^d P_d$$

com (3.11), vemos que os únicos $f_{BC}^{\dot{A}}$ não-nulos são dados por

$$\begin{aligned} f_{AB}^d &= f_{\dot{A}\dot{B}}^d = f_{ab,c}^d \\ [M_{ab}, P_c] &= f_{ab,c}^d P_d = \left(\eta_{bc} \delta_a^d - \eta_{ac} \delta_b^d \right) P_d \end{aligned}$$

Similarmente, as constantes de estrutura $f_{BC}^{\ddot{A}}$ são obtidas a partir da última linha da álgebra de Poincaré (3.11),

$$\begin{aligned} [t_A, t_B] &= f_{AB}^{\ddot{C}} t_{\ddot{C}} = f_{AB}^{ik} M_{ik} \\ [M_{ab}, M_{cd}] &= f_{ab,cd}^{ik} M_{ik} = \\ &= \left(\eta_{ad} \delta_b^i \delta_c^k + \eta_{bc} \delta_a^i \delta_d^k - \eta_{ac} \delta_b^i \delta_d^k - \eta_{bd} \delta_a^i \delta_c^k \right) M_{ik} \end{aligned}$$

Portanto, as componentes, na álgebra, de τ^d são dadas por

$$\frac{1}{2} \tau^d = de^d + \frac{1}{2} \omega^{ab} \wedge e^c f_{ab,c}^d =$$

$$\begin{aligned}
 &= de^d + \frac{1}{2}\omega^{ab} \wedge e^c \left(\eta_{bc}\delta_a^d - \eta_{ac}\delta_b^d \right) \\
 &= de^d + \omega_c^d \wedge e^c
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

enquanto que as componentes de R^{ik} são

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}R^{ik} &= d\omega^{ik} + \frac{1}{2}\omega^{ab} \wedge \omega^{cd} f_{ab,cd}{}^{ik} \\
 &= \frac{1}{2}\omega^{ab} \wedge \omega^{cd} \left(\eta_{ad}\delta_b^i\delta_c^k + \eta_{bc}\delta_a^i\delta_d^k - \eta_{ac}\delta_b^i\delta_d^k - \eta_{bd}\delta_a^i\delta_c^k \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\eta_{ad}\omega^{ai} \wedge \omega^{kd} + \eta_{ac}\omega^{ia} \wedge \omega^{ck} - \eta_{ac}\omega^{ai} \wedge \omega^{ck} - \eta_{ad}\omega^{ia} \wedge \omega^{kd} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\eta_{ad}\omega^{ai} \wedge \omega^{kd} - \eta_{ad}\omega^{ia} \wedge \omega^{kd} \right) = \eta_{ad}\omega^{ai} \wedge \omega^{kd} = \\
 &= \omega_d^i \wedge \omega^{kd} = \omega_d^i \wedge \omega^{dk} \\
 \frac{1}{2}R^{ik} &= d\omega^{ik} + \omega_d^i \wedge \omega^{dk}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

As equações (3.12) e (3.13) são conhecidas em geometria como *equações de estrutura de Cartan*. Para projetar essas expressões em termos de componentes do sistema de coordenadas da variedade base, é preciso apenas lembrar que ω e e são *1-formas SI*, e aplicar então os resultados do apêndice. Para a parte translacional, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\tau^d &= d \left(e_\mu^d \phi dx^\mu \right) + \frac{1}{2} \left(\omega_\mu^{ab} \phi dx^\mu \right) \wedge \left(e_\nu^c \phi dx^\nu \right) f_{ab,c}{}^d = \\
 &= de_\mu^d \phi dx^\mu + e_\mu^d d\phi dx^\mu + \\
 &+ \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab} e_\nu^c \left(\eta_{bc}\delta_a^d - \eta_{ac}\delta_b^d \right) \phi dx^\mu \wedge \phi dx^\nu \\
 &= \frac{1}{\phi} \partial_\nu e_\mu^d (\phi dx^\nu \wedge \phi dx^\mu) + \frac{1}{\phi^2} \partial_\nu \phi e_\mu^d (\phi dx^\nu \wedge \phi dx^\mu) + \\
 &+ \omega_{\mu c}^d e_\nu^c (\phi dx^\mu \wedge \phi dx^\nu)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\phi} \partial_\nu e_\mu^d - \frac{1}{\phi} \partial_\mu e_\nu^d + \omega_{\nu c}^d e_\mu^c - \omega_{\mu c}^d e_\nu^c + \frac{1}{\phi} \partial_\nu \ln \phi e_\mu^d - \frac{1}{\phi} \partial_\mu \ln \phi e_\nu^d \right] \phi dx^\nu \phi dx^\mu = \\
 &= \frac{1}{2} \tau_{\nu\mu}{}^d \phi dx^\nu \phi dx^\mu
 \end{aligned}$$

onde definimos

$$\tau_{\nu\mu}{}^d \equiv \frac{1}{\phi} \partial_\nu e_\mu^d - \frac{1}{\phi} \partial_\mu e_\nu^d + \omega_{\nu c}^d e_\mu^c - \omega_{\mu c}^d e_\nu^c + \frac{1}{\phi} \partial_\nu \ln \phi e_\mu^d - \frac{1}{\phi} \partial_\mu \ln \phi e_\nu^d \quad (3.14)$$

Para a parte de rotação do grupo de Poincaré, encontramos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} R^{ik} &= d \left(\omega_\mu^{ik} \phi dx^\mu \right) + \left(\omega_{\mu d}^i \phi dx^\mu \right) \wedge \left(\omega_\nu^{dk} \phi dx^\nu \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{\phi} \partial_\nu \omega_\mu^{ik} \phi dx^\nu \right) \wedge \phi dx^\mu + \frac{1}{\phi} \omega_\mu^{ik} \left(\frac{1}{\phi} \partial_\nu \phi \phi dx^\nu \right) \wedge \phi dx^\mu + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\omega_{\mu d}^i \omega_\nu^{dk} - \omega_\nu^i \omega_\mu^{dk} \right) (\phi dx^\mu \wedge \phi dx^\nu) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\phi} \left(\partial_\nu \omega_\mu^{ik} - \partial_\mu \omega_\nu^{ik} + \phi \omega_{\nu d}^i \omega_\mu^{dk} - \phi \omega_{\mu d}^i \omega_\nu^{dk} + \omega_\mu^{ik} \partial_\nu \ln \phi - \omega_\nu^{ik} \partial_\mu \ln \phi \right) \phi dx^\nu \phi dx^\mu = \\
 &= \frac{1}{2} R_{\nu\mu}{}^{ik} \phi dx^\nu \phi dx^\mu
 \end{aligned}$$

onde definimos

$$R_{\nu\mu}{}^{ik} \equiv \frac{1}{\phi} \left(\partial_\nu \omega_\mu^{ik} - \partial_\mu \omega_\nu^{ik} + \phi \omega_{\nu d}^i \omega_\mu^{dk} - \phi \omega_{\mu d}^i \omega_\nu^{dk} + \omega_\mu^{ik} \partial_\nu \ln \phi - \omega_\nu^{ik} \partial_\mu \ln \phi \right) \quad (3.15)$$

Nas teorias usuais de gravitação, as quantidades (3.14) e (3.15) são, respectivamente, associadas com a *torção* e a *curvatura* da variedade. Antes de verificar se essa mesma associação pode ser feita aqui, precisamos analisar um pouco mais de perto a conexão de spin.

3.9 Mais Sobre Conexão de Spin

Como vimos na seção anterior, a conexão de spin é uma 1-forma SI definida de maneira análoga ao processo de transporte paralelo. Conforme discutido na referência [7], essa conexão também pode ser interpretada como sendo o potencial de gauge do grupo de simetria local cujo conjunto de parâmetros é dado pela transformação de Lorentz dependente do ponto, i.e., o grupo de simetria é tomado aqui como o grupo de Poincaré. Entretanto, para que a definição de conexão de spin fique completa, é necessário especificar como a mesma se transforma sob uma transformação de Lorentz e sob uma mudança de ponto na variedade base⁸. Ambas as leis de transformação podem ser obtidas diretamente a partir da definição da conexão de spin, sob a exigência que essa definição seja covariante sob as transformações requeridas.

Assim, fazendo uma transformação de Lorentz, temos

$$\nabla_\alpha e_\mu^{\bar{a}} = -e_\mu^{\bar{b}} \bar{\omega}_{\alpha\bar{b}}^{\bar{a}}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha e_\mu^{\bar{a}} &= \frac{1}{\phi} \frac{\partial e_\mu^{\bar{a}}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho e_\rho^{\bar{a}} = \frac{1}{\phi} \partial_\alpha (\Lambda_a^{\bar{a}} e_\mu^a) - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \Lambda_a^{\bar{a}} e_\rho^a = \\ &= \frac{1}{\phi} \partial_\alpha \Lambda_a^{\bar{a}} e_\mu^a + \Lambda_a^{\bar{a}} \left(\frac{1}{\phi} \partial_\alpha e_\mu^a - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho e_\rho^a \right) = \\ &= \frac{1}{\phi} \partial_\alpha \Lambda_a^{\bar{a}} e_\mu^a + \left(-\Lambda_b^{\bar{a}} \omega_{\alpha a}^b \right) e_\mu^a \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} \partial_\alpha \Lambda_a^{\bar{a}} e_\mu^a + \left(-\Lambda_b^{\bar{a}} \omega_{\alpha a}^b \right) e_\mu^a &= -\Lambda_a^{\bar{b}} \bar{\omega}_{\alpha\bar{b}}^{\bar{a}} e_\mu^a \\ \bar{\omega}_{\alpha\bar{c}}^{\bar{a}} &= \Lambda_b^{\bar{a}} \omega_{\alpha a}^b \Lambda_c^a - \frac{1}{\phi} (\partial_\alpha \Lambda_a^{\bar{a}}) \Lambda_c^a \end{aligned}$$

que é totalmente análoga à lei de transformação usual. É importante salientar que a diferença aqui não está na transformação de Lorentz em si, a qual é feita *exatamente*

⁸Dado que a conexão é uma 1-forma invariante de escala, suas componentes ω_μ^{ab} devem se transformar como vetores invariantes de escala, em princípio.

com a prescrição padrão, e portanto tendo a interpretação física usual, mas sim na *conexão de spin* que não é o mesmo objeto encontrado nas teorias de gauge usuais da gravitação (e.g., Teleparalelismo), reduzindo-se àquele somente no limite de $\phi \rightarrow 1$.

Efetuada agora uma mudança de sistema de referência (que incorpora a mudança de ponto na variedade base), temos

$$\nabla_{\bar{\alpha}} e_{\bar{\mu}}^a = \frac{\phi}{\phi} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \frac{\phi}{\phi} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}} \nabla_\alpha e_\mu^a = \frac{\phi}{\phi} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \frac{\phi}{\phi} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}} \left(-e_\mu^b \omega_{\alpha b}^a \right)$$

e portanto

$$\bar{\omega}_{\bar{\alpha} b}^a = \frac{\phi}{\phi} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \omega_{\alpha b}^a$$

conforme esperado.

Outro aspecto interessante da conexão de Lorentz, é que ela pode ser vista como definindo dois novos operadores diferenciais, conhecidos como *derivada de Fock-Ivanenko*⁹,

$$D_\alpha B^a = \frac{1}{\phi} \partial_\alpha B^a + \omega_{\alpha b}^a B^b$$

e *derivada covariante total*,

$$\nabla'_\alpha B_\mu^a = \frac{1}{\phi} \partial_\alpha B_\mu^a - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho B_\rho^a + \omega_{\alpha b}^a B_\mu^b$$

Com estas definições, podemos ver facilmente que

$$\nabla'_\alpha B_\mu^a = \nabla_\alpha B_\mu^a + \omega_{\alpha b}^a B_\mu^b \tag{3.16}$$

$$\nabla'_\alpha B_\mu^a = D_\alpha B^a - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho B_\rho^a \tag{3.17}$$

e também,

$$\nabla'_\alpha e_\mu^a = \frac{1}{\phi} \partial_\alpha e_\mu^a - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho e_\rho^a + \omega_{\alpha b}^a e_\mu^b \equiv 0$$

⁹É importante destacar que essas definições são válidas em variedades SI, ou seja, construídas como extensões naturais das definições conhecidas na literatura.

de forma que a definição da conexão de spin pode ser vista como uma espécie de condição de “paralelismo absoluto” para o campo de tetradas. Se relembrarmos agora da condição de metricidade, escrevendo-a em termos de tetradas, temos que

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 &\Rightarrow \nabla_\alpha \left(\eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b \right) = 0 \\ \eta_{ab} \nabla_\alpha e_\mu^a e_\nu^b + \eta_{ab} e_\mu^a \nabla_\alpha e_\nu^b &= 0\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\eta_{ab} \nabla'_\alpha e_\mu^a e_\nu^b + \eta_{ab} e_\mu^a \nabla'_\alpha e_\nu^b - \left(\eta_{ab} \omega_{\alpha c}^a e_\mu^c e_\nu^b + \eta_{ab} e_\mu^a \omega_{\alpha c}^b e_\nu^c \right) = 0$$

O termo entre parênteses pode ser escrito como

$$\omega_{abc} e_\mu^c e_\nu^b + \omega_{acb} e_\mu^c e_\nu^b = 0$$

devido à simetria de Lorentz:

$$\omega_{abc} = -\omega_{acb}$$

Portanto, vemos que

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla'_\alpha e_\mu^a = 0$$

Dessa maneira, embora, em geral, as condições de metricidade e paralelismo absoluto da tetrada, sejam ligadas por relações do tipo

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha e_\mu^a = 0 &\Rightarrow \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \\ \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 &\not\Rightarrow \nabla_\alpha e_\mu^a = 0\end{aligned}$$

a conexão de spin pode ser vista como um objeto que visa restaurar a correspondência¹⁰

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \nabla'_\alpha e_\mu^a = 0$$

¹⁰Provamos aqui somente a suficiência do paralelismo para a metricidade. A necessidade pode ser também provada de maneira igualmente simples.

ou seja, a conexão de spin pode ser vista como um objeto geométrico definido tal que o paralelismo absoluto da tetrada seja equivalente à metricidade da variedade.

A conexão de spin, tal como qualquer outra conexão, pode ser decomposta numa parte ligada à geometria Riemanniana e outra complementar a esta. Para ver isso, partimos do paralelismo absoluto da tetrada ante à derivada covariante *total*, e empregamos a decomposição (3.8):

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha b}^a &= e_b^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\rho e_\rho^a - \frac{1}{\phi} e_b^\mu \partial_\alpha e_\mu^a \\ \omega_{\alpha b}^a &= e_b^\mu \left(\frac{1}{\phi} \mathring{\Gamma}_{\alpha\mu}^\rho + \Gamma_{[\alpha\mu]}^\rho - g^{\rho\sigma} \Gamma_{[\alpha\sigma]}^\beta g_{\mu\beta} - g^{\rho\sigma} \Gamma_{[\mu\sigma]}^\beta g_{\beta\alpha} \right) e_\rho^a - \frac{1}{\phi} e_b^\mu \partial_\alpha e_\mu^a = \\ &= e_b^\mu \frac{1}{\phi} \mathring{\Gamma}_{\alpha\mu}^\rho e_\rho^a - \frac{1}{\phi} e_b^\mu \partial_\alpha e_\mu^a - K_{\alpha b}^a = \\ &= \frac{1}{\phi} \mathring{\gamma}_{\alpha b}^a - K_{\alpha b}^a\end{aligned}$$

onde definimos as quantidades

$$\begin{aligned}K_{\alpha b}^a &\equiv e^{\sigma a} \Gamma_{[\alpha\sigma]}^\beta e_{\beta b} + e^{\sigma a} \Gamma_{[\mu\sigma]}^\beta g_{\beta\alpha} e_b^\mu - e_b^\mu \Gamma_{[\alpha\mu]}^\rho e_\rho^a \\ \mathring{\gamma}_{\alpha b}^a &\equiv e_b^\mu \left(\mathring{\Gamma}_{\alpha\mu}^\rho \right) e_\rho^a - e_b^\mu \partial_\alpha e_\mu^a = e_b^\mu \left(\mathring{\Gamma}_{\alpha\mu}^\rho - \delta_\mu^\rho \partial_\alpha \right) e_\rho^a\end{aligned}$$

A derivada de Fock-Ivanenko é definida de modo a se transformar covariantemente sob uma transformação de Lorentz local:

$$\begin{aligned}\bar{D}_\alpha B^{\bar{a}} &= \frac{1}{\phi} \partial_\alpha B^{\bar{a}} + \omega_{\alpha \bar{b}}^{\bar{a}} B^{\bar{b}} = \\ &= \frac{1}{\phi} \partial_\alpha \left(\Lambda_{\bar{d}}^{\bar{a}} B^{\bar{d}} \right) + \Lambda_{\bar{b}}^{\bar{a}} \omega_{\alpha a}^b \Lambda_b^a \Lambda_{\bar{d}}^{\bar{b}} B^{\bar{d}} - \frac{1}{\phi} \left(\partial_\alpha \Lambda_{\bar{a}}^{\bar{a}} \right) \Lambda_{\bar{b}}^{\bar{a}} \Lambda_{\bar{d}}^{\bar{b}} B^{\bar{d}} = \\ &= \Lambda_{\bar{d}}^{\bar{a}} \left(\frac{1}{\phi} \partial_\alpha B^{\bar{d}} + \omega_{\alpha a}^d B^a \right) = \Lambda_{\bar{d}}^{\bar{a}} D_\alpha B^{\bar{d}}\end{aligned}$$

Com isso, fica fácil ver das expressões (3.16) e (3.17) que a derivada covariante *total* é covariante tanto por transformações de Lorentz locais quanto por mudanças no sistema

de referência,

$$\begin{aligned}\nabla'_{\bar{\alpha}} B_{\bar{\mu}}^a &= \frac{\phi}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \frac{\phi}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}} \left(\nabla_\alpha B_\mu^a + \omega_{\alpha b}^a B_\mu^b \right) \\ \bar{\nabla}'_{\alpha} B_{\mu}^{\bar{a}} &= \Lambda_{\bar{a}}^{\bar{a}} \left(D_\alpha B_\mu^{\bar{a}} - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho B_\rho^{\bar{a}} \right)\end{aligned}$$

o que justifica a nomenclatura.

3.10 Torção Como uma Medida de Não-Integrabilidade das Translações, ou de Não-Paralelismo

A torção pode ser vista geometricamente como uma medida de não-paralelismo de vetores usuais, quando transportados paralelamente sobre a variedade SI. O conceito de paralelismo está ligado às translações, de maneira análoga ao modo pelo qual a curvatura é ligada às rotações (holonomia). A figura 3.3 ilustra o esquema geométrico a ser desenvolvido.

O elemento crucial para o que pretendemos é descobrir qual a conexão, na variedade SI, que realiza o mesmo papel da conexão da variedade base. Para tanto, lançamos mão do fato de que o deslocamento paralelo é definido como um mapeamento *linear*, de modo que

$$\begin{aligned}\delta_{\phi dx'} (\phi dx^\mu) &= \delta_{\phi dx'} (\phi) dx^\mu + \phi \delta_{\phi dx'} (dx^\mu) \\ \delta_{\phi dx'} (dx^\mu) &= \frac{1}{\phi} \delta_{\phi dx'} (\phi dx^\mu) - \frac{1}{\phi} \delta_{\phi dx'} \phi dx^\mu\end{aligned}$$

onde $\delta_{\phi dx'} (\)$ representa o deslocamento do objeto ao longo da curva gerada por dx' . Da definição (3.2) da conexão SI, vemos que

$$\begin{aligned}\delta_{\phi dx'} (\phi dx^\mu) &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \phi dx^\beta \phi dx'^\alpha \\ \delta_{\phi dx'} (dx^\mu) &= -\left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \frac{1}{\phi^2} \delta_\beta^\mu \partial_\alpha \phi \right) dx^\beta \phi dx'^\alpha\end{aligned}$$

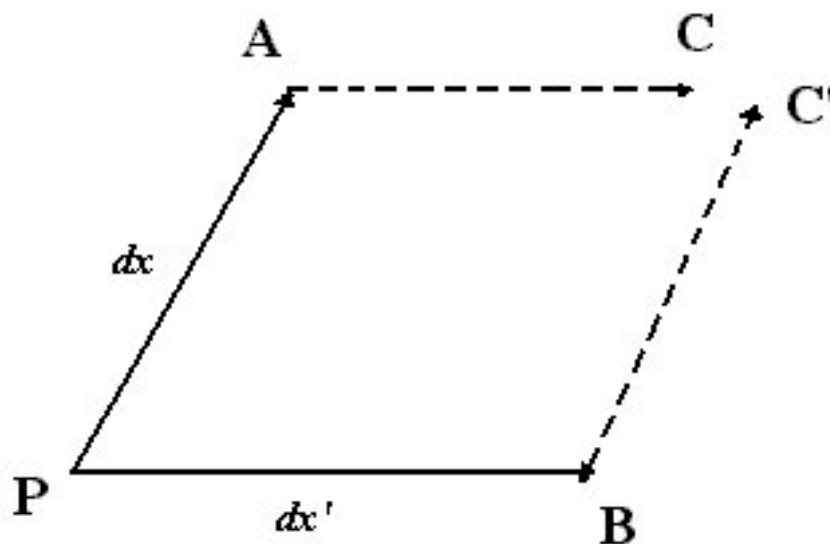


Figura 3.3: *Deslocamento paralelo de vetores não-ST sobre uma variedade ST. O vetor dx é deslocado ao longo de dx' chegando ao ponto C' , enquanto o deslocamento na ordem oposta encontra o ponto C . A diferença entre os vetores C e C' é a anolonomia da variedade.*

de forma que $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \frac{1}{\phi} \delta_{\beta}^{\mu} \partial_{\alpha} \ln \phi$ faz o papel da conexão linear na variedade SI para transporte de vetores de espaço-tempo. Agora, comparamos isso com o efeito de transportar dx' ao longo de dx :

$$\delta_{\phi dx}(dx'^{\mu}) = - \left(\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} + \frac{1}{\phi^2} \delta_{\alpha}^{\mu} \partial_{\beta} \phi \right) dx^{\beta} \phi dx'^{\alpha}$$

A não-integrabilidade (ou não-paralelismo) do transporte paralelo é definida(o) como

a diferença

$$\begin{aligned}\delta_{\phi dx}(dx'^{\mu}) - \delta_{\phi dx'}(dx^{\mu}) &= \left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} + \frac{1}{\phi} \delta_{[\beta}^{\mu} \partial_{\alpha]} \ln \phi - \frac{1}{\phi} \delta_{\alpha}^{\mu} \partial_{\beta]} \ln \phi \right) dx^{\beta} \phi dx'^{\alpha} = \\ &= \tau_{\alpha\beta}{}^{\mu} dx^{\beta} \phi dx'^{\alpha}\end{aligned}$$

$$\tau_{\alpha\beta}{}^{\mu} \equiv 2 \left(\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\mu} + \frac{1}{\phi} \delta_{[\beta}^{\mu} \partial_{\alpha]} \ln \phi \right)$$

Na próxima seção, veremos que esta é exatamente a forma da torção quando expressa em termos de vetores de base da variedade SI (compare com (3.18)), de modo que a torção pode ser interpretada como uma medida da não-integrabilidade das translações numa variedade.

O termo $\frac{1}{\phi} \delta_{[\beta}^{\mu} \partial_{\alpha]} \ln \phi$ na torção constitui os chamados *coeficientes de rotação de Ricci*, que podem ser definidos como as constantes de estrutura da álgebra de Lie dos vetores de base do espaço tangente da variedade. No caso de uma variedade SI, os vetores contravariantes de base são $d\xi = \phi dx$ e seus duais são dados por $\partial_{\xi} = \phi^{-1} \partial_x$, de forma que

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\phi} \partial_{\beta}, \frac{1}{\phi} \partial_{\alpha} \right] &= C_{\beta\alpha}^{\rho} \frac{1}{\phi} \partial_{\rho} = \frac{1}{\phi} \partial_{\beta} \left(\frac{1}{\phi} \right) \partial_{\alpha} + \frac{1}{\phi^2} \partial_{\beta} \partial_{\alpha} - \left[-\frac{1}{\phi} \partial_{\alpha} \ln \phi + \frac{1}{\phi^2} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \right] = \\ &= \left(\frac{1}{\phi} \delta_{[\beta}^{\rho} \partial_{\alpha]} \ln \phi \right) \frac{1}{\phi} \partial_{\rho}\end{aligned}$$

Essa é uma diferença fundamental entre o espaço tangente da variedade SI e o espaço de Minkowski: a base deste é holônoma, enquanto que a daquele *não*.

3.11 Ainda Sobre Curvatura e Torção de Gauge

Podemos agora voltar às expressões (3.14) e (3.15) e tentar reescrevê-las em termos da conexão invariante de escala, fazendo uso então da condição de paralelismo absoluto das tetradas que, como vimos na seção anterior, vincula os valores de tetradas e conexões

uns aos outros, de modo que

$$\frac{1}{\phi} \partial_\nu e_a^\lambda = \omega_{\nu a}{}^b e_b^\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda e_a^\rho$$

Substituindo isso em (3.14), temos

$$\begin{aligned} \tau_{\nu\mu}{}^d &= \Gamma_{\nu\mu}^\rho e_\rho^d - \omega_{\nu b}^d e_\mu^b - \left(\Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^d - \omega_{\mu b}^d e_\nu^b \right) + \omega_{\nu c}^d e_\mu^c - \omega_{\mu c}^d e_\nu^c + \frac{1}{\phi} \partial_\nu \ln \phi e_\mu^d - \frac{1}{\phi} \partial_\mu \ln \phi e_\nu^d = \\ &= 2 \left[\Gamma_{[\nu\mu]}^\rho + \frac{1}{\phi} \delta_{[\mu}^\rho \partial_{\nu]} \ln \phi \right] e_\rho^d \equiv \tau_{\nu\mu}{}^\rho e_\rho^d \end{aligned}$$

Temos portanto que as componentes espaço-temporais da torção de gauge do grupo de Poincaré na geometria invariante de escala são dadas por

$$\tau_{\nu\mu}{}^\rho \equiv 2 \left[\Gamma_{[\nu\mu]}^\rho + \frac{1}{\phi} \delta_{[\mu}^\rho \partial_{\nu]} \ln \phi \right] \quad (3.18)$$

Usando a lei de transformação (3.5), é fácil ver que o último termo da expressão acima compensa exatamente os termos oriundos de $\Gamma_{[\nu\mu]}^\rho$, de tal maneira que a torção se transforma como um tensor SI. Para provar isso, basta ver que a parte antissimétrica da conexão se transforma como

$$\begin{aligned} \Gamma_{[\alpha\beta]}^\rho &= \frac{\bar{\phi}}{\phi} \bar{\Gamma}_{[\lambda\varepsilon]}^\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{1}{\phi} \frac{1}{2} \left(\delta_\beta^\rho \partial_\alpha \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) - \delta_\alpha^\rho \partial_\beta \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \right) = \\ &= \frac{\bar{\phi}}{\phi} \bar{\Gamma}_{[\lambda\varepsilon]}^\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\beta} + \frac{1}{\phi} \frac{1}{2} \left(\delta_\beta^\rho \partial_\alpha \ln \bar{\phi} - \delta_\alpha^\rho \partial_\beta \ln \bar{\phi} \right) - \frac{1}{\phi} \frac{1}{2} \left(\delta_\beta^\rho \partial_\alpha \ln \phi - \delta_\alpha^\rho \partial_\beta \ln \phi \right) \end{aligned}$$

de modo que, até este ponto, a lei de transformação para a torção fica

$$\frac{1}{2} \tau_{\nu\mu}{}^\rho = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\mu} \bar{\Gamma}_{[\lambda\varepsilon]}^\sigma - \frac{1}{\phi} \delta_{[\nu}^\rho \partial_{\mu]} \ln \bar{\phi}$$

Agora, perceba que o último termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} \delta_{[\nu}^\rho \partial_{\mu]} \ln \bar{\phi} &= \frac{1}{\phi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \bar{\delta}_\lambda^\sigma \partial_\mu \ln \bar{\phi} - \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\mu} \bar{\delta}_\varepsilon^\sigma \partial_\nu \ln \bar{\phi} \right) = \\ &= \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\mu} \frac{1}{\bar{\phi}} \frac{1}{2} \left(\bar{\delta}_\lambda^\sigma \bar{\partial}_\varepsilon \ln \bar{\phi} - \bar{\delta}_\varepsilon^\sigma \bar{\partial}_\lambda \ln \bar{\phi} \right) = \\ &= \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\mu} \frac{1}{\bar{\phi}} \bar{\delta}_{[\lambda}^\sigma \bar{\partial}_{\varepsilon]} \ln \bar{\phi} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tau_{\nu\mu}{}^\rho &= \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\mu} \left(\bar{\Gamma}_{[\lambda\varepsilon]}^\sigma - \frac{1}{\bar{\phi}} \bar{\delta}_{[\lambda}^\sigma \bar{\partial}_{\varepsilon]} \ln \bar{\phi} \right) = \\ &= \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\varepsilon}{\partial x^\mu} \frac{1}{2} \bar{\tau}_{\lambda\varepsilon}{}^\sigma \end{aligned}$$

O paralelismo absoluto das tetradas também nos diz que

$$\partial_\nu \partial_\mu e_\alpha^a = \partial_\nu (\phi \Gamma_{\mu\alpha}^\rho e_\rho^a) - \partial_\nu (\phi \omega_\mu^{ac} \eta_{cb} e_\alpha^b)$$

$$\partial_\nu \partial_\mu e_\alpha^a = \partial_\nu (\phi \Gamma_{\mu\alpha}^\rho) e_\rho^a + \phi \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \partial_\nu e_\rho^a - \phi \partial_\nu \omega_\mu^{ac} \eta_{cb} e_\alpha^b - \phi \omega_\mu^{ac} \eta_{cb} \partial_\nu e_\alpha^b - \omega_\mu^{ac} \eta_{cb} e_\alpha^b \partial_\nu \phi$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu \omega_\mu^{ik} &= \frac{1}{\phi} \eta^{gk} e_g^\alpha \left[\partial_\nu (\phi \Gamma_{\mu\alpha}^\rho) e_\rho^i + \phi^2 \Gamma_{\mu\alpha}^\rho (\Gamma_{\nu\rho}^\sigma e_\sigma^i - \omega_\nu^{ic} \eta_{cd} e_\rho^d) - \phi^2 \omega_\mu^{ie} \eta_{eb} (\Gamma_{\nu\alpha}^\rho e_\rho^b - \omega_\nu^{bc} \eta_{cd} e_\alpha^d) + \right. \\ &\quad \left. - \omega_\mu^{ic} \eta_{cb} e_\alpha^b \partial_\nu \phi - \partial_\nu \partial_\mu e_\alpha^i \right] \end{aligned}$$

Substituindo isso em (3.15),

$$\begin{aligned} R_{\nu\mu}{}^{ik} &= \frac{1}{\phi} \left(\frac{1}{\phi} \eta^{gk} e_g^\alpha \left[\partial_\nu (\phi \Gamma_{\mu\alpha}^\rho) e_\rho^i + \phi^2 \Gamma_{\mu\alpha}^\rho (\Gamma_{\nu\rho}^\sigma e_\sigma^i - \omega_\nu^{ic} \eta_{cd} e_\rho^d) - \phi^2 \omega_\mu^{ie} \eta_{eb} (\Gamma_{\nu\alpha}^\rho e_\rho^b - \omega_\nu^{bc} \eta_{cd} e_\alpha^d) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega_\mu^{ic} \eta_{cb} e_\alpha^b \partial_\nu \phi - \partial_\nu \partial_\mu e_\alpha^i \right] + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\phi} \eta^{gk} e_g^\alpha \left[\partial_\mu (\phi \Gamma_{\nu\alpha}^\rho) e_\rho^i + \phi^2 \Gamma_{\nu\alpha}^\rho (\Gamma_{\mu\rho}^\sigma e_\sigma^i - \omega_\mu^{ic} \eta_{cd} e_\rho^d) - \phi^2 \omega_\nu^{ie} \eta_{eb} (\Gamma_{\mu\alpha}^\rho e_\rho^b - \omega_\mu^{bc} \eta_{cd} e_\alpha^d) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega_\nu^{ic} \eta_{cb} e_\alpha^b \partial_\mu \phi - \partial_\mu \partial_\nu e_\alpha^i \right] + \right. \\ &\quad \left. + \phi \omega_{\nu d}^i \omega_\mu^{dk} - \phi \omega_{\mu d}^i \omega_\nu^{dk} + \omega_\mu^{ik} \partial_\nu \ln \phi - \omega_\nu^{ik} \partial_\mu \ln \phi \right) \end{aligned}$$

que após uma pequena álgebra, pode ser escrito como

$$R_{\nu\mu}{}^{ik} = \frac{1}{\phi^2} \{ \partial_\nu (\phi \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma) - \partial_\mu (\phi \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma) + \phi^2 \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \phi^2 \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \} e_\sigma^i e_g^\alpha \eta^{gk}$$

ou ainda,

$$R_{\nu\mu}{}^{ik} = R_{\nu\mu\alpha}^\sigma e_\sigma^i e_g^\alpha \eta^{gk}$$

onde

$$R^\sigma_{\nu\mu\alpha} = \frac{1}{\phi^2} \left\{ \partial_\nu (\phi \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}) - \partial_\mu (\phi \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}) + \phi^2 \Gamma^\rho_{\mu\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \phi^2 \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \right\} \quad (3.19)$$

Comparando com (3.10), vemos que a curvatura pode ser vista não apenas como uma medida de não-integrabilidade de curvas autoparalelas, mas também como um *field strength* associado às rotações de Lorentz vistas como uma simetria *local* da variedade.

A relação (3.18) entre a torção e a parte antissimétrica da conexão pode ser utilizada para reescrever a decomposição (3.8) na forma

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\mu\nu} &= \frac{1}{\phi} \overset{\circ}{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\tau_{\mu\nu}{}^\rho - \tau_{\mu}{}^\rho{}_\nu - \tau_{\nu}{}^\rho{}_\mu) + \frac{1}{\phi} \delta^\rho_{[\mu} \partial_{\nu]} \ln \phi - \frac{1}{\phi} \delta^\alpha_{[\mu} \partial_{\sigma]} \ln \phi g_{\nu\alpha} g^{\rho\sigma} + \\ &\quad - \frac{1}{\phi} \delta^\alpha_{[\nu} \partial_{\sigma]} \ln \phi g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Os últimos três termos podem ser postos na forma:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\phi} \delta^\rho_{[\mu} \partial_{\nu]} \ln \phi - \frac{1}{\phi} \delta^\alpha_{[\mu} \partial_{\sigma]} \ln \phi g_{\nu\alpha} g^{\rho\sigma} - \frac{1}{\phi} \delta^\alpha_{[\nu} \partial_{\sigma]} \ln \phi g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} = \\ &= \frac{1}{\phi} \frac{1}{2} (g_{\sigma\mu} \partial_\nu \ln \phi - g_{\sigma\nu} \partial_\mu \ln \phi - g_{\nu\mu} \partial_\sigma \ln \phi + g_{\nu\sigma} \partial_\mu \ln \phi - g_{\nu\mu} \partial_\sigma \ln \phi + g_{\sigma\mu} \partial_\nu \ln \phi) g^{\rho\sigma} = \\ &= \frac{1}{\phi} (g_{\mu\sigma} \partial_\nu \ln \phi - g_{\mu\nu} \partial_\sigma \ln \phi) g^{\rho\sigma} = \\ &= 2g_{\mu\alpha} \frac{1}{\phi} \delta^\alpha_{[\sigma} \partial_{\nu]} \ln \phi g^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

de modo que a decomposição da conexão seja

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \overset{\circ}{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\tau_{\mu\nu}{}^\rho - \tau_{\nu}{}^\rho{}_\mu + \tau_{\mu}{}^\rho{}_\nu) + 2 \frac{1}{\phi} \delta^\alpha_{[\sigma} \partial_{\nu]} \ln \phi g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} \quad (3.20)$$

Na seção 3.14 veremos que, no caso particular da geometria de Lyra, todas essas expressões ficam bem mais simplificadas.

Podemos calcular o traço da conexão invariante de escala nos seus últimos índices,

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\mu\rho} &= \frac{1}{\phi} \overset{\circ}{\Gamma}^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{[\mu\rho]} - \Gamma^\alpha_{[\mu\sigma]} g_{\rho\alpha} g^{\rho\sigma} - \Gamma^\alpha_{[\rho\sigma]} g_{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{\phi} \overset{\circ}{\Gamma}^\rho_{\mu\rho} = \frac{1}{\phi} \partial_\mu \ln \sqrt{-g} \end{aligned} \quad (3.21)$$

e também o traço entre o índice da derivada covariante (primeiro inferior) e o índice superior:

$$\Gamma^\rho_{\rho\nu} = \frac{1}{\phi} \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{[\rho\nu]} - \Gamma^\alpha_{[\nu\alpha]} = \frac{1}{\phi} \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\nu} + 2\Gamma^\rho_{[\rho\nu]}$$

Usando a definição (3.18) da torção, isto pode ser reexpresso como

$$\Gamma^\rho_{\rho\nu} = \frac{1}{\phi} \partial_\nu \ln(\phi^3 \sqrt{-g}) - \tau_\nu. \quad (3.22)$$

3.12 Anulamento de Curvatura e Torção e o Espaço de Minkowski

Vamos agora tentar analisar sob que condições gerais curvatura e/ou torção se anulam, e se há alguma relação disto com o espaço de Minkowski.

3.12.1 Curvatura Nula

Da expressão (3.19) e usando a decomposição (3.8) temos:

$$\begin{aligned} R^\rho_{\nu\mu\alpha} = & \frac{1}{\phi^2} \left\{ \partial_\nu \left(\dot{\Gamma}^\rho_{\mu\alpha} + \phi \Gamma^\rho_{[\mu\alpha]} - \phi \Gamma^\beta_{[\mu\sigma]} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} - \phi \Gamma^\beta_{[\alpha\sigma]} g_{\beta\mu} g^{\rho\sigma} \right) + \right. \\ & - \partial_\mu \left(\dot{\Gamma}^\rho_{\nu\alpha} + \phi \Gamma^\rho_{[\nu\alpha]} - \phi \Gamma^\beta_{[\nu\sigma]} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} - \phi \Gamma^\beta_{[\alpha\sigma]} g_{\beta\nu} g^{\rho\sigma} \right) + \\ & + \left(\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\alpha} + \phi \Gamma^\lambda_{[\mu\alpha]} - \phi \Gamma^\beta_{[\mu\sigma]} g_{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma} - \phi \Gamma^\beta_{[\alpha\sigma]} g_{\beta\mu} g^{\lambda\sigma} \right) \times \\ & \times \left(\dot{\Gamma}^\rho_{\nu\lambda} + \phi \Gamma^\rho_{[\nu\lambda]} - \phi \Gamma^\theta_{[\nu\zeta]} g_{\lambda\theta} g^{\rho\zeta} - \phi \Gamma^\theta_{[\lambda\zeta]} g_{\theta\nu} g^{\rho\zeta} \right) + \\ & - \left(\dot{\Gamma}^\lambda_{\nu\alpha} + \phi \Gamma^\lambda_{[\nu\alpha]} - \phi \Gamma^\beta_{[\nu\sigma]} g_{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma} - \phi \Gamma^\beta_{[\alpha\sigma]} g_{\beta\nu} g^{\lambda\sigma} \right) \times \\ & \left. \times \left(\dot{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} + \phi \Gamma^\rho_{[\mu\lambda]} - \phi \Gamma^\theta_{[\mu\zeta]} g_{\lambda\theta} g^{\rho\zeta} - \phi \Gamma^\theta_{[\lambda\zeta]} g_{\theta\mu} g^{\rho\zeta} \right) \right\} \end{aligned}$$

Podemos compactar essa expressão usando (3.9):

$$R^\rho_{\nu\mu\alpha} = \frac{1}{\phi^2} \dot{R}^\rho_{\nu\mu\alpha} + \dot{R}^\rho_{\nu\mu\alpha} + \frac{1}{\phi} \left(\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\alpha} Q^\rho_{\nu\lambda} - \dot{\Gamma}^\lambda_{\nu\alpha} Q^\rho_{\mu\lambda} + Q^\lambda_{\mu\alpha} \dot{\Gamma}^\rho_{\nu\lambda} - Q^\lambda_{\nu\alpha} \dot{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} \right) \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned}\dot{R}_{\nu\mu\alpha}^{\rho} &\equiv \partial_{\nu}\dot{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\rho} - \partial_{\mu}\dot{\Gamma}_{\nu\alpha}^{\rho} + \dot{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\lambda}\dot{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\rho} - \dot{\Gamma}_{\nu\alpha}^{\lambda}\dot{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\rho} \\ \tilde{R}_{\nu\mu\alpha}^{\rho} &\equiv \frac{1}{\phi^2} \left\{ \partial_{\nu}(\phi Q_{\mu\alpha}^{\rho}) - \partial_{\mu}(\phi Q_{\nu\alpha}^{\rho}) + \phi^2 Q_{\mu\alpha}^{\lambda} Q_{\nu\lambda}^{\rho} - \phi^2 Q_{\nu\alpha}^{\lambda} Q_{\mu\lambda}^{\rho} \right\}\end{aligned}$$

A expressão (3.23) é interessante por nos mostrar de maneira explícita que caso a parte antissimétrica da conexão SI se anule, então a curvatura SI se reduz, basicamente, a uma transformação de escala do tensor de curvatura construído com base no análogo do símbolo de Christoffel. Por outro lado, lembremos a relação (3.15):

$$R_{\nu\mu}{}^{ik} = \frac{1}{\phi} \left(\partial_{\nu}\omega_{\mu}^{ik} - \partial_{\mu}\omega_{\nu}^{ik} + \phi\omega_{\nu d}^i\omega_{\mu}^{dk} - \phi\omega_{\mu d}^i\omega_{\nu}^{dk} + \omega_{\mu}^{ik}\partial_{\nu}\ln\phi - \omega_{\nu}^{ik}\partial_{\mu}\ln\phi \right)$$

Essa expressão nos mostra que no caso de termos uma conexão de spin identicamente nula, a curvatura do espaço se anula. Em virtude do paralelismo das tetradas com respeito à derivada covariante total, temos que o anulamento da conexão de spin implica que

$$\check{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\rho} = \frac{1}{\phi} e_a^{\rho} \partial_{\alpha} e_{\mu}^a \quad (3.24)$$

que podemos chamar, em analogia ao Teleparalelismo, de conexão de Weitzenböck SI. Um caso ainda mais restrito ocorre se tomarmos a própria conexão de Weitzenböck SI nula¹¹. Nesse espaço a curvatura também se anula, mas a torção adquire a forma simples

$$\tau_{\nu\mu}{}^{\rho} = 2\frac{1}{\phi}\delta_{[\mu}^{\rho}\partial_{\nu]}\ln\phi$$

em que a dependência com a *transformação* da escala¹² foi completamente eliminada.

¹¹O que equivale a admitirmos que as tetradas são constantes.

¹²Os termos que expressam essa dependência são sempre expressos em termos da razão $\frac{\phi}{\phi}$.

3.12.2 Torção Nula

Analisemos agora o caso de um espaço em que a torção seja nula. Pela relação (3.18), isso implica que

$$\check{\Gamma}_{[\mu\nu]}^{\rho} = \frac{1}{\phi} \delta_{[\mu}^{\rho} \partial_{\nu]} \ln \phi \quad (3.25)$$

O objeto (3.9) para essa conexão será

$$\check{Q}_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{\phi} (\delta_{\mu}^{\rho} \partial_{\nu} \ln \phi - g_{\mu\nu} \partial^{\rho} \ln \phi) \quad (3.26)$$

Enquanto que a conexão em si se resume a

$$\check{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\rho} = \frac{1}{\phi} \left(\dot{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\rho} + \delta_{\mu}^{\rho} \partial_{\alpha} \ln \phi - g_{\alpha\mu} \partial^{\rho} \ln \phi \right) \quad (3.27)$$

Vemos aqui que, no caso de tomarmos o limite $\phi \rightarrow 1$ isso se reduz ao espaço riemanniano.

3.12.3 Curvatura e Torção Nulas, ou Espaço Flat

Agora, analisemos o caso em tanto a curvatura quanto a torção se anulam. Pelas condições (3.24) e (3.25), temos

$$\dot{\Gamma}_{[\mu\alpha]}^{\rho} = \frac{1}{\phi} e_a^{\rho} \partial_{[\mu} e_{\alpha]}^a = \frac{1}{\phi} \delta_{[\mu}^{\rho} \partial_{\alpha]} \ln \phi$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} e_{\alpha}^b - \partial_{\alpha} e_{\mu}^b &= e_{\mu}^b \partial_{\alpha} \ln \phi - e_{\alpha}^b \partial_{\mu} \ln \phi \\ \partial_{\mu} (\phi e_{\alpha}^b) &= \partial_{\alpha} (\phi e_{\mu}^b) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Essas equações são equivalentes à condição de integrabilidade para as tetradas “triviais” da geometria usual.

3.12.4 Minkowski-SI

Outro caso interessante é o de um espaço em que a métrica SI possa ser posta numa forma de componentes constantes¹³, de tal sorte que o análogo da conexão de Levi-Civita seja identicamente nulo. Com isso vemos que um espaço, na geometria SI, cujo intervalo é definido por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \phi^2(x) dx^\mu dx^\nu$$

possui *curvatura*

$$R^\rho_{\nu\mu\alpha} = \tilde{R}^\rho_{\nu\mu\alpha}$$

torção,

$$\tau_{\nu\mu}{}^\rho \equiv 2 \left[\Gamma^\rho_{[\nu\mu]} + \frac{1}{\phi} \delta^\rho_{[\mu} \partial_{\nu]} \ln \phi \right] = 2 \left[Q^\rho_{[\nu\mu]} + \frac{1}{\phi} \delta^\rho_{[\mu} \partial_{\nu]} \ln \phi \right]$$

e *conexão*

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\mu\nu} &= Q^\rho_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\rho_{[\mu\nu]} - \Gamma^\alpha_{[\mu\sigma]} \eta_{\nu\alpha} \eta^{\rho\sigma} - \Gamma^\alpha_{[\nu\sigma]} \eta_{\mu\alpha} \eta^{\rho\sigma} \\ Q^\rho_{[\mu\nu]} &= \Gamma^\rho_{[\mu\nu]}, \quad Q^\rho_{(\mu\nu)} = - \left(\Gamma^\alpha_{[\mu\sigma]} \eta_{\nu\alpha} \eta^{\rho\sigma} + \Gamma^\alpha_{[\nu\sigma]} \eta_{\mu\alpha} \eta^{\rho\sigma} \right) \end{aligned}$$

todas não nulas. Perceba, pela última identidade, que a condição de metricidade implica que a parte simétrica e a antissimétrica da conexão são relacionadas, mas não determina uma forma específica para a conexão. Denominamos um espaço desse tipo de Minkowski-SI.

Aqui ficam claros dois casos particulares. No primeiro, se tomarmos $\Gamma^\rho_{[\mu\nu]} \equiv 0$ a curvatura e a conexão se anulam, e a torção se torna

$$\tau_{\nu\mu}{}^\rho = 2 \frac{1}{\phi} \delta^\rho_{[\mu} \partial_{\nu]} \ln \phi$$

¹³Por uma transformação de equivalência, sabemos que essa forma de componentes constantes pode ser posta numa forma diagonal

$$(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

que é um espaço que já tínhamos encontrado antes. O segundo caso, é aquele em que a torção se anula, e portanto a conexão passa a ser (3.26), que difere do espaço mais geral de torção nula apenas pelo anulamento do símbolo de Christoffel¹⁴.

3.13 Isometrias e Simetria Conforme

Nosso intuito nesta seção é estudar, brevemente, as isometrias permitidas numa variedade de geometria SI e estabelecer uma ligação com a simetria conforme. Começaremos por discutir quais são as isometrias gerais da variedade SI, e em seguida discutiremos como transformações conformes na variedade base se refletem na geometria SI e, por fim, qual a equação que determina a simetria conforme da variedade SI.

3.13.1 Isometrias

Considere a transformação da métrica

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(\bar{x})} \right)^2 \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta}$$

ao efetuarmos uma transformação de coordenadas infinitesimal,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \chi(x) \\ \bar{\phi}(\bar{x}) &= \bar{\phi}(x) + \chi^\lambda \partial_\lambda \bar{\phi}(x)\end{aligned}$$

e uma mudança na função de escala. Mantendo apenas termos de primeira ordem em χ , obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\bar{\phi}(\bar{x})} \right)^2 &\approx \left(\frac{1}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \chi^\lambda \partial_\lambda \ln \bar{\phi}(x)} \right)^2 \approx \left(\frac{1}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(1 - 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \bar{\phi}(x) \right) \\ \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \chi^\lambda \partial_\lambda \bar{g}_{\mu\nu}(x) &\approx \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(1 - 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \bar{\phi}(x) \right) \left(g_{\mu\nu}(x) - g_{\alpha\nu}(x) \partial_\mu \chi^\alpha - g_{\mu\beta}(x) \partial_\nu \chi^\beta \right)\end{aligned}$$

¹⁴Esse anulamento também pode ser obtido no caso mais geral, mas apenas *localmente*, equanto que neste exemplo estamos fazendo a exigência de que ele se anule *globalmente*.

Portanto, a variação funcional na métrica é dada por

$$\begin{aligned} \delta_0 g_{\mu\nu} &\equiv \bar{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \\ &= g_{\mu\nu}(x) \left[\left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(1 - 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \bar{\phi}(x) \right) - 1 \right] - \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(g_{\alpha\nu}(x) \partial_\mu \chi^\alpha + g_{\mu\beta}(x) \partial_\nu \chi^\beta \right) + \\ &\quad - \chi^\lambda \partial_\lambda \bar{g}_{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

ou ainda, considerando que em ordem zero

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu}(x) \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2$$

temos

$$\begin{aligned} \delta_0 g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(x) \left[\left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(1 - 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \phi(x) \right) - 1 \right] - \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 (\partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu) + \\ &\quad + \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \chi^\alpha (\partial_\mu g_{\alpha\nu}(x) + \partial_\nu g_{\mu\alpha}(x) - \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x)) \end{aligned}$$

Se lembrarmos agora a definição (3.6), e que este objeto é simétrico nos seus índices inferiores, vemos que

$$\begin{aligned} \delta_0 g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(x) \left[\left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(1 - 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \phi(x) \right) - 1 \right] - \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 (\partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu) + \\ &\quad + \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \chi_\rho (\dot{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \dot{\Gamma}_{\nu\mu}^\rho) \end{aligned}$$

Agora, da relação (3.8), e usando a definição (3.9), temos

$$\begin{aligned} \delta_0 g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(x) \left[\left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(1 - 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \phi(x) \right) - 1 \right] - \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \phi (\nabla_\mu \chi_\nu + \nabla_\nu \chi_\mu) + \\ &\quad + \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 2\phi(x) \chi_\rho Q_{(\mu\nu)}^\rho \end{aligned}$$

ou ainda, em termos do vetor de Killing-SI $\xi_\mu = \phi \chi_\mu$,

$$\begin{aligned} \delta_0 g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}(x) \left[\left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 \left(1 - 2\xi^\lambda \frac{1}{\phi} \partial_\lambda \ln \phi(x) \right) - 1 \right] - \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) + \\ &\quad + \left(\frac{\phi(x)}{\bar{\phi}(x)} \right)^2 2\xi_\rho \left(Q_{(\mu\nu)}^\rho + \frac{1}{\phi} \delta_{(\mu}^\rho \partial_{\nu)} \ln \phi \right) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dada uma métrica $g_{\mu\nu}(x)$ a condição $\delta_0 g_{\mu\nu} = 0$ define uma isometria, cujos geradores infinitesimais são os *vetores de Killing* χ^β . Nesse caso, a equação $\delta_0 g_{\mu\nu} = 0$ é denominada *equação de Killing*,

$$\begin{aligned} & \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu + \\ & - g_{\mu\nu}(x) \left[1 - 2\xi^\lambda \frac{1}{\phi} \partial_\lambda \ln \phi(x) - \left(\frac{\bar{\phi}(x)}{\phi(x)} \right)^2 \right] - 2\xi_\rho \left(Q_{(\mu\nu)}^\rho + \frac{1}{\phi} \delta_{(\mu}^\rho \partial_{\nu)} \ln \phi \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.13.2 Isometrias Conformes em Minkowski-SI

Nosso próximo passo será estudar as isometrias de um espaço-tempo cuja métrica possa ser posta numa forma diagonal idêntica à de Minkowski, mas no qual transformações de escala ainda são permitidas, i.e., um espaço cuja métrica seja

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \eta_{\mu\nu} \\ ds^2 &= \eta_{\mu\nu} \phi^2 dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

Como vimos na seção anterior, este é um espaço SI que possui curvatura e torção dependentes exclusivamente da parte antissimétrica da conexão e da função de escala. Observe também que este tipo de transformação preserva os ângulos entre os vetores tangentes da variedade base, dx^μ , mas não entre os vetores de base SI $d\xi^\mu$. Na próxima seção veremos como construir a equação para transformações que preservem ângulos na base SI.

Neste caso, as equações de Killing serão

$$\left(\eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \chi^\alpha + \eta_{\mu\beta} \partial_\nu \chi^\beta \right) = \eta_{\mu\nu} \left[1 - 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \phi(x) - \left(\frac{\bar{\phi}(x)}{\phi(x)} \right)^2 \right]$$

com uma escolha de coordenadas tais que

$$(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Tomando-se o traço desta equação encontramos

$$2(\partial \cdot \chi) = D \left[1 - 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \phi(x) - \left(\frac{\bar{\phi}(x)}{\phi(x)} \right)^2 \right]$$

de modo que a equação de Killing pode ser reescrita como

$$\partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu = \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu} (\partial \cdot \chi)$$

que *idêntica* à equação de Killing conforme, que pode ainda ser posta na forma

$$\begin{aligned} \square \chi_\nu + \partial_\nu (\partial \cdot \chi) &= \frac{2}{D} \partial_\nu (\partial \cdot \chi) \\ [\eta_{\mu\nu} \square + (D - 2) \partial_\mu \partial_\nu] (\partial \cdot \chi) &= 0 \end{aligned}$$

e cuja solução é

$$\chi^\lambda = \epsilon^\lambda + \omega_\mu^\lambda x^\mu + \rho x^\lambda + (c^\lambda x^2 - 2c \cdot x x^\lambda) \quad (3.31)$$

Uma comparação *ingênua* com a equação de Killing conforme no espaço-tempo de Minkowski, usualmente definida pela relação

$$g_{\mu\nu}(x) = s(x) \eta_{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu = \eta_{\mu\nu} [1 - s(x)]$$

nos indica que o termo

$$s(x) = 2\chi^\lambda \partial_\lambda \ln \phi(x) - \left(\frac{\bar{\phi}(x)}{\phi(x)} \right)^2$$

desempenha aqui um papel análogo ao do fator conforme, onde aparecem claramente separados os termos devidos à anolonomia da base e devido à liberdade de mudança de escala. Entretanto, observe que as soluções (3.31) foram encontradas como *isometrias* da métrica SI g , e não como *transformações conformes* da mesma. A determinação da equação para os vetores de Killing conformes será o assunto da próxima seção.

3.13.3 Transformações Conformes na Geometria SI

Se fizermos

$$\delta_0 g_{\mu\nu}(x) = [s(x) - 1] g_{\mu\nu}(x)$$

vemos que a relação (3.29) se reduz a

$$\begin{aligned} & \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu - g_{\mu\nu}(x) \left[1 - 2\xi^\lambda \frac{1}{\phi} \partial_\lambda \ln \phi(x) - s(x) \left(\frac{\bar{\phi}(x)}{\phi(x)} \right)^2 \right] + \\ & - 2\xi_\rho \left(Q^\rho_{(\mu\nu)} + \frac{1}{\phi} \delta^\rho_{(\mu} \partial_{\nu)} \ln \phi \right) = 0 \end{aligned}$$

que determina os vetores de SI-Killing conformes. Seguindo o mesmo roteiro da seção anterior, tomamos o traço dessa equação,

$$\begin{aligned} & 2\nabla_\mu \xi^\mu - D \left[1 - 2\xi^\lambda \frac{1}{\phi} \partial_\lambda \ln \phi(x) - s(x) \left(\frac{\bar{\phi}(x)}{\phi(x)} \right)^2 \right] + \\ & - 2 \left(\xi_\rho g^{\mu\nu} Q^\rho_{(\mu\nu)} + \frac{1}{\phi} \xi^\nu \partial_\nu \ln \phi \right) = 0 \end{aligned}$$

Definindo,

$$Q^\rho \equiv g^{\mu\nu} Q^\rho_{(\mu\nu)} = g^{\mu\nu} Q^\rho_{\mu\nu}$$

temos

$$\left[1 - 2\xi^\lambda \frac{1}{\phi} \partial_\lambda \ln \phi(x) - s(x) \left(\frac{\bar{\phi}(x)}{\phi(x)} \right)^2 \right] = \frac{2}{D} \left[\nabla_\rho \xi^\rho - 2\xi_\rho \left(Q^\rho + \frac{1}{\phi} \partial^\rho \ln \phi \right) \right]$$

de modo que a equação conforme será

$$\begin{aligned} & \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu + \\ & - \frac{2}{D} g_{\mu\nu}(x) \left[\nabla_\rho \xi^\rho - 2\xi_\rho \left(Q^\rho + \frac{1}{\phi} \partial^\rho \ln \phi \right) \right] - 2\xi_\rho \left(Q^\rho_{(\mu\nu)} + \frac{1}{\phi} \delta^\rho_{(\mu} \partial_{\nu)} \ln \phi \right) = 0 \end{aligned}$$

Um caso particular interessante, consiste em aplicarmos essa equação para um espaço Minkowski-SI, onde Q é a conexão, de modo que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\phi} \partial_\mu \xi_\nu + \frac{1}{\phi} \partial_\nu \xi_\mu + \\ & - \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu}(x) \left[\frac{1}{\phi} \partial_\rho \xi^\rho - Q^\rho_{\rho\nu} \xi^\nu - 2\xi_\rho \left(Q^\rho + \frac{1}{\phi} \partial^\rho \ln \phi \right) \right] - 2\xi_\rho \left(\frac{1}{\phi} \delta^\rho_{(\mu} \partial_{\nu)} \ln \phi \right) = 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo isso em termos dos vetores de Killing para as coordenadas, $\xi = \phi\chi$,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu + \\ & - \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu}(x) [\partial_\rho \chi^\rho - \phi Q^\nu_{\nu\rho} \chi^\rho - 2\phi \chi_\rho Q^\rho - \chi^\rho \partial_\rho \ln \phi] = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, da definição (3.9), vemos que

$$Q^\rho = -2\Gamma^\alpha_{[\alpha\sigma]} \eta^{\rho\sigma}$$

Usando a relação entre torção e conexão (3.18), encontramos

$$\begin{aligned} Q^\rho &= -2 \left(\frac{1}{2} \tau_{\cdot\sigma} + \frac{1}{\phi} \delta^\lambda_{[\lambda} \partial_{\sigma]} \ln \phi \right) \eta^{\rho\sigma} = \\ &= \tau^\rho + (1 - D) \frac{1}{\phi} \partial^\rho \ln \phi \end{aligned}$$

e

$$Q^\nu_{\nu\rho} = \tau_{\cdot\rho} + 2 \frac{1}{\phi} \delta^\lambda_{[\lambda} \partial_{\rho]} \ln \phi$$

Assim, podemos deixar a equação de Killing (3.32), neste caso, com a forma

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu + \\ & - \frac{2}{D} \eta_{\mu\nu}(x) [\partial_\rho \chi^\rho + \phi \chi^\rho \tau_{\cdot\rho} + (D - 2) \chi^\rho \partial_\rho \ln \phi] = 0 \end{aligned}$$

Agora, se tomarmos o traço dessa equação, chegamos a uma relação bastante curiosa:

$$\chi^\rho \left[\tau_{\cdot\rho} + (D - 2) \frac{1}{\phi} \partial_\rho \ln \phi \right] = 0$$

Isso no diz que, *em (1 + 1)-dim, os vetores de Killing conformes são ortogonais ao traço da torção* para uma geometria Minkowski-SI, e que este resultado torna-se *geral* no limite $\phi \rightarrow 1$.

3.14 A Restrição de Lyra

A geometria de Lyra pode ser vista como um caso particular da geometria escalar tensorial desenvolvida até aqui. A restrição é que a variedade base seja *riemanniana*, de modo que a parte antissimétrica da conexão (e conseqüentemente a *torção*) é dada apenas pela função de escala.

A restrição sobre o tipo da variedade base é realizada impondo-se que o efeito de distorção das autoparalelas euclidianas, causado por uma transformação de sistema de referência, seja absolutamente compatível (ou equivalente) à um transporte paralelo. Ou seja, dado um sistema de referência no qual vale

$$\partial_\nu \xi^\mu = 0 \quad (3.33)$$

aplica-se uma transformação

$$\xi^{\bar{\mu}} = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} \xi^\mu$$

e impõe-se que a equação (3.33) transformada, seja equivalente a um transporte paralelo dado por

$$\delta \xi^{\bar{\mu}} = -\tilde{\Gamma}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\mu}} \xi^{\bar{\beta}} \bar{\phi} d\bar{x}^{\bar{\alpha}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\nu}} \xi^{\bar{\mu}} &= \partial_{\bar{\nu}} \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} \xi^\mu + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \partial_{\bar{\nu}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} \right) \xi^\mu + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\mu} \partial_{\bar{\nu}} \xi^\mu = \\ &= \partial_{\bar{\nu}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \xi^{\bar{\mu}} + \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\mu \\ \partial_{\bar{\nu}} \xi^{\bar{\mu}} - \left[\partial_{\bar{\nu}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\mu}} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\lambda} \right) \right] \xi^{\bar{\alpha}} &= 0 \end{aligned}$$

Para que essa expressão seja compatível com o efeito de um transporte paralelo, faz-se necessário que

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}^{\bar{\mu}} = -\frac{1}{\bar{\phi}} \left[\partial_{\bar{\nu}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\mu}} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\lambda} \right) \right]$$

A conexão $\tilde{\Gamma}$ é denominada *conexão de Lyra*. A primeira coisa importante que podemos notar nessa escolha de conexão, é que ela faz com que a parte antissimétrica da conexão dependa somente da função de escala:

$$A_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}^{\bar{\mu}} \equiv -\frac{1}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\lambda} \right)$$

$$A_{\bar{\alpha}\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} = -\frac{1}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\beta} \right) = -\frac{1}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^{\bar{\nu}}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\bar{\mu}}}{\partial x^\beta} \right) = A_{\bar{\nu}\bar{\alpha}}^{\bar{\mu}}$$

Ou seja,

$$\tilde{\Gamma}_{[\nu\alpha]}^\mu = -\frac{1}{\phi} \delta_{[\alpha}^\mu \partial_{\nu]} \ln \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right) \quad (3.34)$$

Substituindo isso na relação geral (3.8), vemos que a conexão de Lyra fica completamente determinada pela restrição sobre o tipo de variedade base,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{\phi} \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{\phi} \left[\partial_\nu \ln \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right) \delta_\mu^\rho - \partial_\sigma \ln \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right) g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} \right] \quad (3.35)$$

que é a forma originalmente proposta por Lyra para a conexão da sua geometria.

Agora, se usarmos essa expressão para calcular as componentes da torção (3.18), obtemos

$$\frac{1}{2} \tilde{\tau}_{\nu\mu}{}^\rho = \frac{1}{\phi} \delta_{[\mu}^\rho \partial_{\nu]} \ln \phi - \frac{1}{\phi} \delta_{[\mu}^\rho \partial_{\nu]} \ln \left(\frac{\phi}{\bar{\phi}} \right) = \frac{1}{\phi} \delta_{[\mu}^\rho \partial_{\nu]} \ln \bar{\phi} \quad (3.36)$$

o que nos mostra que na geometria de Lyra a função de escala pode ser interpretada como uma espécie de *potencial de torção*. Não obstante, outra característica peculiar dessa teoria, é que a torção aparece não apenas por conta da função de escala, mas especialmente por causa da *transformação* da função de escala entre os sistema de referência. Assim, em analogia ao que ocorre com a curvatura e a conexão nas geometrias usuais, é sempre possível encontrar um sistema de referência (e portanto também um *referencial*), *local*, tal que a torção se anule naquele ponto, i.e.,

$$\partial_{\bar{\alpha}} \ln \bar{\phi} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = 0$$

entretanto, a torção *nunca* poderá se anular em todo o espaço, exceto no caso trivial em que a solução da equação de movimento de $\bar{\phi}$ seja¹⁵ $\bar{\phi} = \text{constante}$. essa característica pode ser compreendida de maneira simples através do seguinte argumento: a torção depende exclusivamente da função de escala; se estamos num sistema de referência cuja escala não é constante, e passamos a um sistema no qual a escala é agora constante¹⁶, é natural que a torção se anule, haja vista que um espaço de escala constante é completamente equivalente a um sem nenhuma escala.

A transformação da torção de Lyra, entre sistemas de referência, é peculiar em virtude da sua dependência exclusiva na função de escala:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{\lambda\varepsilon}^{\sigma} &= 2 \left(\bar{\Gamma}_{[\lambda\varepsilon]}^{\sigma} + \frac{1}{\bar{\phi}} \bar{\delta}_{[\varepsilon}^{\sigma} \bar{\partial}_{\lambda]} \ln \bar{\phi} \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{1}{\bar{\phi}} \bar{\delta}_{[\varepsilon}^{\sigma} \bar{\partial}_{\lambda]} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) + \frac{1}{\bar{\phi}} \bar{\delta}_{[\varepsilon}^{\sigma} \bar{\partial}_{\lambda]} \ln \bar{\phi} \right) = 2 \frac{1}{\bar{\phi}} \bar{\delta}_{[\varepsilon}^{\sigma} \bar{\partial}_{\lambda]} \ln \phi\end{aligned}$$

Comparando esse resultado com (3.36) vemos que o efeito final é o mapeamento de uma função de escala na outra mais a transformação do sistema de coordenadas.

Um caso particularmente interessante ocorre se escolhermos manter a mesma função de escala em todos os sistemas de referência, ou seja, se tomarmos a função de escala como um escalar sob transformações gerais de coordenadas,

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x)$$

Neste caso, a torção se torna

$$\frac{1}{2} \bar{\tau}_{\nu\mu}^{\rho} = \frac{1}{\phi} \delta_{[\mu}^{\rho} \partial_{\nu]} \ln \phi$$

O mais interessante aqui é que, dado que a parte antissimétrica da conexão de Lyra depende exclusivamente de uma mudança de escala, se mantivermos a escala fixa, a torção se torna consequência direta da anolonomia do sistema de bases coordenadas.

¹⁵Por exemplo, se escolhermos um sistema de referência onde $\bar{\phi} \equiv 1$, segue imediatamente que $\tau \equiv 0$.

¹⁶E que portanto pode ser absorvida através de uma redefinição global das coordenadas.

Devido à forma extremamente simples, dentro do contexto da geometria invariante de escala, da conexão de Lyra, todas as quantidades calculadas a partir dela são mais simples que o caso geral. Um exemplo disso é o traço da torção (3.36),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tilde{\tau}_{\mu} &= -\frac{3}{2}\frac{1}{\phi}\left(\partial_{\mu}\ln\left(\frac{\phi}{\bar{\phi}}\right) - \partial_{\mu}\ln\phi\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\bar{\phi} \\ \tilde{\tau}_{\mu} &= 3\frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\bar{\phi} \end{aligned}$$

Podemos ainda definir um segundo traço, tomando o primeiro índice inferior da torção:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tilde{\tau}_{\cdot\mu} &= -\frac{1}{\phi}\delta^{\sigma}_{[\sigma}\partial_{\mu]}\ln\bar{\phi} = -\frac{1}{\phi}\frac{1}{2}(\delta^{\sigma}_{\sigma}\partial_{\mu}\ln\bar{\phi} - \delta^{\sigma}_{\mu}\partial_{\sigma}\ln\bar{\phi}) = -\frac{3}{2}\frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\bar{\phi} = -\frac{1}{2}\tilde{\tau}_{\mu} \\ \tilde{\tau}_{\cdot\mu} &= -3\frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\bar{\phi} \end{aligned}$$

Como era de se esperar, esse traço difere do primeiro apenas por um sinal, dado que a torção é antissimétrica em seus índices inferiores.

Usando a forma (3.35) da conexão de Lyra, podemos calcular diretamente o seu traço no índice da derivada covariante:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{\rho}_{\rho\mu} &= \frac{1}{\phi}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\rho\mu} + 3\frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\left(\frac{\phi}{\bar{\phi}}\right) = \frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\sqrt{-g} + 3\frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\left(\frac{\phi}{\bar{\phi}}\right) = \\ &= \frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\left[\left(\frac{\phi}{\bar{\phi}}\right)^3\sqrt{-g}\right] \end{aligned}$$

o que é consistente com a relação (3.22):

$$\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\rho\nu} = \frac{1}{\phi}\partial_{\nu}\ln(\phi^3\sqrt{-g}) - 3\frac{1}{\phi}\partial_{\nu}\ln\bar{\phi} = \frac{1}{\phi}\partial_{\nu}\ln\left[\left(\frac{\phi}{\bar{\phi}}\right)^3\sqrt{-g}\right]$$

Também podemos calcular o traço no segundo índice inferior

$$\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\rho} = \frac{1}{\phi}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\rho} = \frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\ln\sqrt{-g}$$

que também está em acordo com (3.21) obtida no caso de uma geometria SI geral.

Apêndice: Formas Diferenciais¹⁷

Nosso objetivo neste apêndice é fornecer os elementos formais básicos para o trabalho com as estruturas matemáticas conhecidas como formas diferenciais, e estabelecer a partir daí algumas das suas mais importantes aplicações como as generalizações dos teoremas de Gauss, Green e Stokes, além da sua aplicação às Teorias de Gauge. Ao final, indicaremos como esse formalismo se estende naturalmente para o caso de uma geometria *invariante de escala*.

Objetos Básicos

Definição. Seja $K \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto. Uma *0-forma* em K é uma função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k , para algum $k \in \mathbb{N}$ conveniente. Está bem definido o par de operações $(+, \cdot)$ sobre o conjunto das 0-formas. Podemos então formar a soma e o produto entre 0-formas, para tanto, seja f_1 e f_2 0-formas, então podemos determinar $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$.

Exemplo: Sejam $f_1(x, y, z) = xy + yz$ e $f_2(x, y, z) = y \sin xz$, então

$$(f_1 + f_2)(x, y, z) = xy + yz + y \sin xz$$

e

$$(f_1 f_2)(x, y, z) = y^2 x \sin xz + y^2 z \sin xz$$

¹⁷Sou grato ao velho amigo A. J. Maccori pelas elucidativas discussões e pelo apoio na redação deste apêndice.

Definição. Chamamos de *1-formas básicas* as expressões (diferenciais) dx , dy e dz . Considere-as por enquanto, como símbolos formais. Uma *1-forma* ω em um conjunto aberto $K \subset \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de 1-formas básicas

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

ou simplesmente

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

onde $P, Q, R : K \rightarrow \mathbb{R}$. Dadas duas 1-formas, $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$ e $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz$, podemos estabelecer uma nova 1-forma $\omega_1 + \omega_2$ definida por

$$\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy + (R_1 + R_2) dz$$

Por outro lado, dada uma 0-forma f , podemos formar o produto $f\omega_1$ definido por

$$f\omega_1 = (fP_1) dx + (fQ_1) dy + (fR_1) dz$$

Exemplo: Sejam $\omega_1 = (x + y^2) dx + (zy) dy + (e^{xyz}) dz$ e $\omega_2 = \sin y dx + \sin x dy$ 1-formas. Então

$$\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \sin y) dx + (zy + \sin x) dy + (e^{xyz}) dz$$

Se $f(x, y, z) = x$, então

$$f\omega_2 = x \sin y dx + x \sin x dy$$

Definição. Chamamos de *2-formas básicas* as expressões $dx dy$, $dy dz$ e $dz dx$. Por enquanto, podemos pensar nestas expressões como produtos de dx e dy , dy e dz e dz e dx . Sendo assim, uma *2-forma* η em um conjunto aberto $K \subset \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de 2-formas básicas

$$\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$$

ou simplesmente

$$\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$$

onde F, G e H são funções a valores reais definidas em K . É importante observar que os pares $dxdy$, $dxdz$ e $dzdx$ estão em ordem cíclica, uma vez que temos a orientação $dx \rightarrow dy \rightarrow dz \rightarrow dx$ e assim por diante (nessa ordem!). Podemos formar a soma entre 2-formas, para tanto, sejam $\omega_1 = F_1dxdy + G_1dydz + H_1dzdx$ e $\omega_2 = F_2dxdy + G_2dydz + H_2dzdx$ então,

$$\omega_1 + \omega_2 = (F_1 + F_2) dxdy + (G_1 + G_2) dydz + (H_1 + H_2) dzdx$$

Podemos também formar o produto de uma 2-forma por uma 0-forma. Seja então f uma 0-forma e $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$ uma 2-forma, temos então que

$$f\eta = (fF) dxdy + (fG) dydz + (fH) dzdx$$

Exemplo: Sejam $\eta_1 = x^2dxdy + y^3x dydz + \sin z y dz dx$ e $\eta_2 = y dy dz$, então

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2dxdy + (y^3x + y) dydz + \sin z y dz dx$$

Se $f(x, y, z) = xy$, então

$$f\eta_2 = xy^2 dy dz$$

Definição. Uma 3-forma básica é a expressão $dxdydz$ (na ordem cíclica). Uma 3-forma ν em um conjunto aberto $K \subset \mathbb{R}^3$ é uma expressão

$$\nu = F(x, y, z) dxdydz$$

ou simplesmente

$$\nu = Fdxdydz$$

onde F é uma função a valores reais definida em K .

De um modo análogo, podemos somar 3-formas e multiplicar 0-formas por 3-formas. Para tanto, sejam $\nu_1 = F_1(x, y, z) dx dy dz$ e $\nu_2 = F_2(x, y, z) dx dy dz$ 3-formas e f uma 0-forma. Então

$$\nu_1 + \nu_2 = (F_1 + F_2) dx dy dz$$

e

$$f\nu_1 = (fF_1) dx dy dz$$

Exemplo: Sejam $\nu_1 = y dx dy dz$ e $\nu_2 = e^{x^2} dx dy dz$ 3-formas e $f(x, y, z) = xyz$ uma 1-forma. Então

$$\nu_1 + \nu_2 = (y + e^{x^2}) dx dy dz$$

e

$$f\nu_1 = y^2 x z dx dy dz$$

Não definimos a soma de formas diferenciais diferentes, isto é, sejam uma k -forma e uma j -forma, para $k \neq j$, então some a k -forma com a j -forma, este objeto não pretendemos definir. Na realidade queremos explorar a correlação entre uma k -forma em geral com subconjuntos de um subconjunto aberto $K \subset \mathbb{R}^3$. Colocando isso com mais precisão, seja $K \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Distinguiremos 4 tipos de subconjuntos de K que nos interessam:

- (i) pontos em K ,
- (ii) curvas simples orientadas e curvas C fechadas simples orientadas em K ,
- (iii) superfícies orientadas $S \subset K$,
- (iv) subregiões elementares $R \subset K$ que podem assumir qualquer dos tipos anteriores.

Começaremos analisando o caso das 1-formas. Seja

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

uma 1-forma em K e seja C uma curva orientada simples. O número real ω está bem

definido, quando relacionado com a curva C , se colocarmos a já conhecida expressão

$$\int_C \omega = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

Essa integral pode ser reescrita como se segue. Seja $\sigma : [a, b] \rightarrow K$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma parametrização que preserva a orientação de C . Então

$$\begin{aligned} \int_C \omega = \int_{\sigma} \omega = \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + \right. \\ \left. + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] \end{aligned}$$

No caso das 2-formas η em um conjunto aberto $K \subset \mathbb{R}^3$, podemos interpretar de maneira análoga como uma função que associa a cada superfície orientada $S \subset K$ um número real. Isso será feito quando discutirmos integração de 2-formas. Seja

$$\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$$

uma 2-forma em K , e seja $S \subset K$ uma superfície orientada parametrizada por uma transformação

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

etc.

Definição. Se S é uma superfície dada e η é um 2-forma em um aberto $K \subset \mathbb{R}^3$, definimos $\int_S \eta$ pela expressão

$$\begin{aligned} \int_S \overbrace{F dx dy + G dy dz + H dz dx}^{\eta} = \int_D \left[F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \right. \\ \left. + G(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \right. \end{aligned}$$

$$+H(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}] dudv$$

onde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ e } \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Caso S seja composta por diversas superfícies, isto é, $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$, sendo que cada S_i está parametrizada por uma Φ_i correspondente, então

$$\int_S \eta = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \eta$$

Produto Exterior

Se ω é uma k -forma e η é uma l -forma em um aberto $K \subset \mathbb{R}^3$, satisfazendo a condição $0 \leq k+l \leq 3$, então existe um produto chamado de *produto exterior* $\omega \wedge \eta$ de ω e η que é uma $k+l$ -forma em K .

O produto exterior satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Para cada k existe uma k -forma 0 , com a propriedade de que $0 + \omega = \omega$ para toda k -forma ω e $0 \wedge \eta = 0$ para toda l -forma η se $0 \leq k+l \leq 3$.

(ii) (Distributividade) Se f é uma 0 -forma, então

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta)$$

(iii) (Anticomutatividade) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$.

(iv) (Associatividade) Se ω_1, ω_2 e ω_3 são k_1, k_2 e k_3 formas, respectivamente, com $k_1 + k_2 + k_3 \leq 3$, então

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$$

(v) (Homogeneidade com respeito a funções) Se f é uma 0 -forma, então

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta)$$

Note que as propriedades (ii) e (iii) implicam em (v).

(vi) Cumprem-se as seguintes regras de multiplicação para 1-formas

$$dx \wedge dy = dxdy, \quad dy \wedge dx = -dxdy = (-1)(dx \wedge dy)$$

$$dy \wedge dz = dydz = (-1)(dx \wedge dy)$$

$$dz \wedge dx = dzdx = (-1)(dx \wedge dz)$$

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dz \wedge dz = 0$$

$$dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dxdydz$$

(vii) Se f é uma 0-forma e ω uma k -forma qualquer, então $f \wedge \omega = f\omega$.

Usando as propriedades de (i) a (vii) podemos encontrar o produto de quaisquer l -forma η e k -forma ω , se $0 \leq k + l \leq 3$.

Derivação de Formas Diferenciais

É o último passo de nossa teoria, antes de estabelecermos a unificação dos teoremas clássicos em análise vetorial, os teoremas de Green, Gauss e Stokes

A derivada de uma k -forma é uma $(k+1)$ -forma se $k < 3$ e a derivada de uma 3-forma é sempre zero. Se ω é uma k -forma, denotaremos a derivada de ω por $d\omega$.

A operação d goza das seguintes propriedades

(i) Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma 0-forma, então

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

(ii) (Linearidade) Se ω_1 e ω_2 são k -formas, então

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

(iii) (Liebniz) Se ω é uma k -forma e η uma l -forma, então

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k (\omega \wedge d\eta)$$

(iv) (Fechamento) $d(d\omega) = 0$, $d(dx) = 0$, $d(dy) = 0$, $d(dz) = 0$, ou simplesmente $d^2 = 0$.

As propriedades de (i) a (iv) permitem-nos diferenciar, de maneira única, qualquer forma.

Exemplo: Seja $\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy$ uma 1-forma em algum aberto $K \subset \mathbb{R}^3$. Encontre $d\omega$.

$$\begin{aligned} d[P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy] &= d[P(x, y, z) \wedge dx] + d[Q(x, y, z) \wedge dy] = \\ &= (dP \wedge dx) + P \wedge d(dx) + dQ \wedge dy + Q \wedge d(dy) = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy = \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial y} dy dz = \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz. \end{aligned}$$

Exemplo. Se $\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$, obtenha $d\eta$.

$$d\eta = d(F dx dy) + d(G dy dz) + d(H dz dx)$$

Calculemos então $d(F dx dy)$, usando das propriedades já definidas, obtemos

$$\begin{aligned} d(F dx dy) &= d(F \wedge dx dy) = dF \wedge (dx dy) + F \wedge \underbrace{d(dx dy)}_{=0} \\ dF \wedge (dx dy) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \right) \wedge (dx \wedge dy) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} dx \wedge (dx \wedge dy) + \frac{\partial F}{\partial y} dy \wedge (dx \wedge dy) + \frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge (dx \wedge dy). \end{aligned}$$

Mas como,

$$dx \wedge (dx \wedge dy) = (dx \wedge dx) \wedge dy = 0,$$

$$dy \wedge (dx \wedge dy) = -dy \wedge (dy \wedge dx) = -(dy \wedge dy) \wedge dx = 0,$$

$$dz \wedge (dx \wedge dy) = (-1)^2 (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz.$$

Em conseqüência,

$$d(F dx dy) = \frac{\partial F}{\partial z} dx dy dz$$

De forma análoga, temos

$$d(G dy dz) = \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz \text{ e } d(H dz dx) = \frac{\partial H}{\partial y} dx dy dz$$

Portanto,

$$d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy dz.$$

Teoremas da Análise Vetorial (Unificação)

Com a teoria desenvolvida até o presente momento, já somos capazes de enunciar os teoremas de análise vetorial unificados pela linguagem das formas diferenciais.

Teorema (de Green). Seja D uma região elementar do plano xy , com ∂D com orientação anti-horária. Suponha que $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ seja 1-forma em algum aberto $K \subset \mathbb{R}^3$ com $D \subset K$. Então

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

Aqui $d\omega$ é uma 2-forma em K e D , representando uma superfície em \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Teorema (de Stokes). Seja S uma superfície orientada em \mathbb{R}^3 com uma fronteira formada por uma curva fechada simples ∂S orientada segundo a fronteira de S . Suponha que ω seja uma 1-forma em algum aberto $K \subset \mathbb{R}^3$, com $S \subset K$. Então

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

Teorema (de Gauss). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma região elementar com $\partial\Omega$ com orientação exterior. Se η é uma 2-forma em alguma região aberta $K \subset \mathbb{R}^3$ que contenha Ω , então

$$\int_{\partial\Omega} \eta = \int_{\Omega} d\eta$$

O estudo das formas diferenciais nos proporciona agora ferramentas adequadas para o tratamento dos teoremas fundamentais da Análise Vetorial, como pudemos ver. Não é difícil ver como toda a teoria desenvolvida até aqui pode ser estendida ao \mathbb{R}^n , o que é de grande valia no estudo dos sistemas Lagrangeano e Hamiltoniano, que em geral possuem muitas dimensões, e também no da Relatividade Geral, onde trabalhamos com variedades diferenciáveis no \mathbb{R}^4 .

Teoria de Gauge

A generalização dos conceitos enunciados até aqui acerca de formas diferenciais generalizam-se de maneira imediata para o \mathbb{R}^n . Com base nessa generalização, mostraremos nessa seção como o formalismo usual das teorias de gauge *a la* Utiyama [7] pode ser posto na linguagem das formas diferenciais.

Consideremos um grupo de Lie G , cujos geradores satisfazem as regras usuais para uma álgebra de Lie (índices maiúsculos latinos denotam membros do grupo),

$$[t_A, t_B] = f_{AB}^C t_C$$

A passagem desse grupo para um grupo *local* G' é feita introduzindo-se, para cada gerador t_A , um vetor covariante A_μ^A e definindo a seguinte 1-forma (potencial de gauge):

$$A = A_\mu^A t_A dx^\mu$$

que assume valores na álgebra de Lie de G' .

A derivada exterior covariante de gauge é então definida como

$$D = d + A$$

e tomando-se o produto externo de duas derivadas covariantes exteriores, obtemos uma 2-forma F denominada *field-strength* (ou *curvatura*, em alguns textos). O field-strength

é independente de qual tipo de forma (ou campo) está sofrendo a ação da derivada covariante de gauge, de maneira que podemos tomá-lo como escalar φ (0-forma), por simplicidade,

$$\begin{aligned} (D \wedge D) \varphi &= D \wedge (d\varphi + A\varphi) = D \wedge d\varphi + D \wedge A\varphi = \\ &= d \wedge d\varphi + A \wedge d\varphi + d \wedge (A\varphi) + A \wedge A\varphi = \\ &= (dA + A \wedge A) \varphi = \frac{1}{2} F \varphi \\ F &= dA + A \wedge A \end{aligned}$$

Colocando isso em componentes da álgebra, temos

$$\begin{aligned} F^A t_A &= (dA^A) t_A + \frac{1}{2} (A^B t_B \wedge A^C t_C + A^C t_C \wedge A^B t_B) = \\ &= (dA^A) t_A + \frac{1}{2} (A^B \wedge A^C t_B t_C - A^B t_B \wedge A^C t_C) = \\ &= (dA^A) t_A + \frac{1}{2} A^B \wedge A^C [t_B, t_C] = \\ &= \left(dA^A + \frac{1}{2} A^B \wedge A^C f_{BC}^A \right) t_A \end{aligned}$$

Projetando agora em coordenadas da variedade,

$$\begin{aligned} F^A t_A &= F_{\mu\nu}^A t_A dx^\mu dx^\nu = \\ &= (\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + A_\mu^B A_\nu^C f_{BC}^A) t_A dx^\mu dx^\nu \\ F_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + A_\mu^B A_\nu^C f_{BC}^A \end{aligned}$$

que é a forma mais conhecida e utilizada, na Física, para a curvatura de Utiyama-Yang-Mills.

Formas na Variedade Invariante de Escala

Tudo o que foi exposto acima para formas diferenciais pode ser reescrito em termos de vetores SI simplesmente adicionando-se fatores de escala apropriados. Assim, por exemplo, as 1-formas básicas SI são

$$\phi dx \quad \phi dy \quad \phi dz$$

equanto que a derivada exterior de uma 0-forma é dada por

$$df = \frac{1}{\phi} \frac{\partial f}{\partial x} \phi dx + \frac{1}{\phi} \frac{\partial f}{\partial y} \phi dy + \frac{1}{\phi} \frac{\partial f}{\partial z} \phi dz$$

As regras (i) a (vii) para o produto exterior (seção 3.14) não são alteradas, uma vez que a função de escala é uma 0-forma, assim como as propriedades de linearidade, fechamento e a regra de Leibniz. Não obstante, os resultados finais explícitos da diferenciação são, em geral, muito distintos daqueles obtidos usualmente. Tomemos, como estudo de caso, o primeiro exemplo da seção 3.14:

Exemplo: Seja $\omega = P(x, y, z) \phi dx + Q(x, y, z) \phi dy$ uma 1-forma SI em algum aberto¹⁸ $K \subset \mathbb{R}^3$. Calcule $d\omega$.

$$\begin{aligned} d[P(x, y, z) \phi dx + Q(x, y, z) \phi dy] &= d[P(x, y, z) \wedge \phi dx] + d[Q(x, y, z) \wedge \phi dy] = \\ &= dP \wedge \phi dx + dQ \wedge \phi dy + \frac{P}{\phi} \wedge d\phi \wedge \phi dx + \frac{Q}{\phi} \wedge d\phi \wedge \phi dy = \\ &= \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{\phi} \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{P}{\phi} \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \phi dx \wedge \phi dy + \\ &+ \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{P}{\phi} \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \phi dz \wedge \phi dx + \\ &+ \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{Q}{\phi} \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \phi dz \wedge \phi dy \end{aligned}$$

¹⁸Observe que neste exemplo tomamos a variedade base como o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

$$d\omega = \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial P}{\partial y} + Q \frac{1}{\phi} \frac{\partial \ln \phi}{\partial x} - P \frac{1}{\phi} \frac{\partial \ln \phi}{\partial y} \right) \phi dx \phi dy + \\ + \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial P}{\partial z} + P \frac{1}{\phi} \frac{\partial \ln \phi}{\partial z} \right) \phi dz \phi dx + \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{1}{\phi} \frac{\partial \ln \phi}{\partial z} \right) \phi dz \phi dy$$

que é bem diferente do resultado obtido naquela seção, a saber,

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz.$$

mas que se reduz a este no limite de $\phi \rightarrow 1$.

Bibliografia

- [1] Felsager, Bjørn - *Geometry, Particles, and Fields*, Springer-Verlag, New York, (2000).
- [2] Kleinert, Hagen - *Gauge Fields in Condensed Matter Vol. II*, World Scientific, New York, (1989).
- [3] Fpostoel, Theodore - *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press, New York, (1997).
- [4] Pompéia, Pedro José - *Estrutura de Vínculos da Gravitação via Hamilton-Jacobi: Relatividade Geral e Teleparalelismo*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica - UNESP, (2003).
- [5] Lunardi, José Tadeu Teles - *O Campo Esclar no Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau*, Tese de Doutorado, Instituto de Física Teórica - UNESP, (2001).
- [6] Landau, Lev Davidovich & Lifschitz, Eugene - *Teoria do Campo*, Hemus Livraria e Editora, São Paulo.
- [7] Utiyama, Ryoyu - *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).

4. Aplicações

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações das idéias desenvolvidas nos dois capítulos anteriores. A idéia básica é estudar o acoplamento dos diversos campos físicos com a geometria de fundo, descrita aqui por meio do formalismo de tetradas e da conexão afim, além da função de escala ϕ . Todas as aplicações se focam no caso particular da geometria de Lyra, uma vez que a generalização proposta no capítulo 2 ainda precisa ser melhor estudada, especialmente no que tange ao seu conteúdo dinâmico.

Todas as aplicações foram publicadas [1, 2], ou se encontram submetidas [3, 4], a revistas arbitradas, razão pela qual preferimos aqui reproduzi-las na íntegra, tal como foram aceitas/submetidas.

Em geral, nos interessamos em estudar os campos por meio das suas descrições de primeira ordem, seja via equação de DKP ou de Dirac. Além disso, para os casos bosônicos, procuramos também verificar, ou não, a equivalência com as descrições usuais (KGF, Proca e Maxwell) tanto analisando os acoplamentos, quanto em termos da simetria de gauge. No caso de campos massivos foi sugerido que a não-equivalência das duas descrições com respeito aos acoplamentos, pode ser explicada em termos de uma análise dos termos de superfície, segundo o Princípio Variacional de Schwinger. Já para o caso de campos de gauge, mostramos que mesmo na presença de interação com a torção, a simetria de gauge pode ser mantida desde que a transformação seja gerada a partir da função de escala da variedade de Lyra. Para campos de spin 1/2 mostramos que a torção da geometria de Lyra pode ter um conteúdo dinâmico, dado que se acopla

com os conteúdos de spin e energia-momento do campo de Dirac. Mostramos ainda a existência de uma relação de traço análoga àquela encontrada em teorias com simetria conforme, e falaremos mais sobre isso nas nossas considerações finais.

4.1 Campos Escalar e Vetorial Massivos na Variedade de Lyra

Resumo: O problema do acoplamento entre spin e torção é analisado para uma variedade de fundo de Lyra nos casos de campos escalares e vetoriais massivos via teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Mostra-se que a propagação da torção é dinâmica e que o acoplamento mínimo do campo DKP corresponde a um acoplamento não-mínimo nas abordagens padrão de Klein-Gordon-Fock e Proca. A origem desta diferença nos acoplamentos é discutida em termos de equivalência por termos de superfície.



Scalar and Vector Massive Fields in Lyra's Manifold

R. Casana, C. A. M. de Melo* and B. M. Pimentel

*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista
Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil*

*E-mail: casana@ift.unesp.br, cassius@ift.unesp.br,
pimentel@ift.unesp.br*

The problem of coupling between spin and torsion is analysed from a Lyra's manifold background for scalar and vector massive fields using the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) theory. We found the propagation of the torsion is dynamical, and the minimal coupling of DKP field corresponds to a non-minimal coupling in the standard Klein-Gordon-Fock and Proca approaches. The origin of this difference in the couplings is discussed in terms of equivalence by surface terms.

*Fourth International Winter Conference on Mathematical Methods in Physics
09 - 13 August 2004
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF/MCT), Rio de Janeiro, Brazil*

*Speaker.

1. Introduction

After Einstein's approach to gravitation, several others theories have been developed, as part of efforts to cure problems arising when the gravitational field is coupled to matter fields. In particular, the problem of spin coupling to gravitation has a central role in some recent years. The principal path to incorporate spin in geometrical theories of gravitation is the use of so called Riemann-Cartan geometry. This geometry has a nonsymmetric connection, in such a way that a new geometrical concept enters in scene: the torsion. However, analysing the Cauchy data, one can proof the torsion is a nonpropagating entity and therefore must be different of zero only in the interior of matter.

As soon as Einstein presented the General Relativity, Weyl [1] proposed a new geometry in which a new scalar field accompany the metric field and change the scale of length measurements. The aim was to unify gravitation and electromagnetism, but this theory was briefly refuted by Einstein because the nonmetricity had direct consequences over the spectral lines of elements which never has been observed.

After some more years, Lyra [2] has proposed a new geometry, with scalar field for scale changes, that respect the metricity condition. This theory was developed by Scheibe [2], Sen [3] and several others as an alternative to describe the gravitational field, and more recently has been applied to study viscous [4] and higher dimensional [5] cosmological models, domain walls [6], and several others applications. In context of spin-gravitational coupling, the importance of Lyra's geometry resides in the fact that the torsion is propagating.

On the other hand, to study the behaviour of scalar and vector massive fields in non-euclidean manifolds is extremely important in the context of astroparticle physics and unified theories since a great part of our knowledge about cosmological data and fundamental interactions is described by this type of field. A profitable manner of describing these fields is to use the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) theory. In DKP theory, both particles are described by only one field with a linear first order differential equation, very similar to Dirac equation. This similarity can be employed to facilitate the study of interactions between several fields, just as in General Relativity [7, 8] and Einstein-Cartan spacetimes [9, 10]. However, in the last case is found that DKP theory is not equivalent to the correspondent Klein-Gordon-Fock (KGF) and Proca Lagrangians. Notwithstanding, the Harisch-Chandra theory for massless DKP field [11] was extended to Riemann-Cartan manifold in such a way that a complete equivalence with KGF and Maxwell theories can be proved [12]. Therefore, the equivalence between DKP and the more usual theories is not trivial, and the question of what is the most fundamental theory arises. Evidently, only a very accurate experiment could decide.

Here, we propose look for coupling of spin 0 and 1 massive fields and torsion in Lyra manifold via DKP formalism. A good introduction to DKP theory can be found in [13, 14]. In section 2 we present the essential elements of Lyra geometry, and in the subsequent sections the coupling of DKP field with curvature and torsion in this manifold as well as a comparison between the results of the more usual KGF and Proca formalisms. Finally, in the last section we make some comments on the results.

2. The Lyra Geometry

The Lyra manifold [2] is defined given a tensor metric $g_{\mu\nu}$ and a positive definite scalar function ϕ which we call the scale function. In Lyra geometry, one can change scale and coordinate system in an independent way, to compose what is called a *reference system* transformation: let $M \subseteq \mathbb{R}^N$ and U an open ball in \mathbb{R}^n , ($N \geq n$) and let $\chi : U \rightarrow M$. The pair (χ, U) defines a *coordinate system*. Now, we define a reference system by (χ, U, ϕ) where ϕ transforms like

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \bar{\phi}(x(\bar{x}); \phi(x(\bar{x}))), \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\phi}} \neq 0 \quad (2.1)$$

under a reference system transformation.

In the Lyra's manifold, vectors transform as

$$\bar{A}^{\nu} = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \frac{\partial \bar{x}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \quad (2.2)$$

In this geometry, the metric connection is

$$\bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\bar{\phi}} \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{\bar{\phi}} \left[\delta^{\rho}_{\mu} \partial_{\nu} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_{\sigma} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right) \right], \quad \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \quad (2.3)$$

whose transformation law is given by

$$\bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{\bar{\phi}}{\phi} \bar{\Gamma}^{\sigma}_{\lambda\epsilon} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\lambda}} \frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \bar{x}^{\epsilon}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{\bar{\phi}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\sigma}} \frac{\partial^2 \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \frac{1}{\bar{\phi}} \delta^{\rho}_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln \left(\frac{\bar{\phi}}{\phi} \right). \quad (2.4)$$

One can define the covariant derivative for a vector field as

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} \equiv \frac{1}{\phi} \partial_{\mu} A^{\nu} + \bar{\Gamma}^{\nu}_{\mu\alpha} A^{\alpha}, \quad \nabla_{\mu} A_{\nu} \equiv \frac{1}{\phi} \partial_{\mu} A_{\nu} - \bar{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} A_{\alpha}. \quad (2.5)$$

The richness of the Lyra's geometry is demonstrated by the *curvature* [3]

$$\bar{R}^{\rho}_{\beta\alpha\sigma} \equiv \frac{1}{\bar{\phi}^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\phi \bar{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\sigma}) - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\phi \bar{\Gamma}^{\rho}_{\beta\sigma}) + \phi \bar{\Gamma}^{\rho}_{\beta\lambda} \phi \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\sigma} - \phi \bar{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\lambda} \phi \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\beta\sigma} \right) \quad (2.6)$$

and the *torsion* [15]

$$\bar{\tau}_{\mu\nu}{}^{\rho} \equiv \bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^{\rho}_{\nu\mu} - \frac{1}{\phi} (\delta^{\rho}_{\mu} \partial_{\nu} - \delta^{\rho}_{\nu} \partial_{\mu}) \ln \phi \quad (2.7)$$

where the second term is the anholonomic contribution, thus, we get

$$\bar{\tau}_{\mu\nu}{}^{\rho} = -\frac{1}{\phi} (\delta^{\rho}_{\mu} \partial_{\nu} - \delta^{\rho}_{\nu} \partial_{\mu}) \ln \bar{\phi}, \quad \bar{\tau}_{\mu} \equiv \bar{\tau}_{\mu\rho}{}^{\rho} = \frac{3}{\phi} \partial_{\mu} \ln \bar{\phi}. \quad (2.8)$$

3. The Massive DKP Field in Lyra Manifold

In Minkowski space–time the massive DKP theory is given by the following Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^a \partial_a \psi - \frac{i}{2} \partial_a \bar{\psi} \beta^a \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (3.1)$$

where $\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta^0$, $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$, and the β^a are matrices satisfying the massless DKP algebra¹

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \eta^{bc} + \beta^c \eta^{ba}. \quad (3.2)$$

The resulting equation of motion for the DKP field ψ is

$$i\beta^a \partial_a \psi - m\psi = 0. \quad (3.3)$$

The above equations can be generalized to Lyra space–time [2] \mathbb{L} through the formalism of *tetrads* (or *vierbeins*) together the *minimal coupling procedure* [16, 17]. Here we shall simply quote the main results we need. For details, in Riemann and Riemann–Cartan manifolds, we refer respectively to [7, 8] and [9, 10, 12] and references therein.

We consider a Lyra space–time \mathbb{L} with metric $g_{\mu\nu}$, whose point coordinates are labelled x^μ . To each point in \mathbb{L} we attach a Minkowski space–time \mathbb{M} with metric η_{ab} , whose point coordinates are labelled x^a . The DKP fields ψ are *Lorentz group* representations in Minkowski space–time. The projections into \mathbb{L} of all tensor quantities defined on \mathbb{M} are done *via* the tetrad fields $e^\mu_a(x)$:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e_\mu^a(x) e_\nu^b(x), \quad e_\nu^a e^b_\nu = \delta^a_b, \quad e = \det(e_\mu^a) = \sqrt{-g}, \quad (3.4)$$

where $g = \det(g_{\mu\nu})$.

The resulting action for massive DKP fields minimally coupled to Lyra's manifold is

$$S_{DKP} = \int d^4x \phi^4 e \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^a e^\mu_a \nabla_\mu \psi - \frac{i}{2} \nabla_\mu \bar{\psi} e^\mu_a \beta^a \psi - m \bar{\psi} \psi \right), \quad (3.5)$$

where ∇_μ is the Lyra covariant derivative associated to the affine connection $\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\mu}$.

The covariant derivatives of DKP fields are

$$\nabla_\mu \psi = \frac{1}{\phi} \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} S^{ab} \psi, \quad \nabla_\mu \bar{\psi} = \frac{1}{\phi} \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \bar{\psi} S^{ab},$$

where $S^{ab} = [\beta^a, \beta^b]$ and $\omega_{\mu ab}$ is the spin connection.

The Euler-Lagrange equation for the ψ field is

$$i\beta^\mu \left(\nabla_\mu + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\mu \right) \psi - m\psi = 0 \quad (3.6)$$

where we have used the metricity condition, $\nabla_\alpha e_\mu^a = \frac{1}{\phi} \partial_\alpha e_\mu^a - \tilde{\Gamma}^\rho_{\alpha\mu} e_\rho^a + \omega_{\alpha b}^a e_\mu^b \equiv 0$.

¹We choose a representation in which $\beta^{0^\dagger} = \beta^0$, $\beta^{i^\dagger} = -\beta^i$.

3.1 The Scalar Sector

In Minkowski space–time, the “projectors” P and P^a select the spin 0 sector of the theory (see [13, 7]) such that $P\psi$ is a scalar and $P^a\psi$ is a vector field. Thus, from these projectors defined in \mathbb{M} we can construct the projectors in Lyra manifold as $P^\mu = e^\mu_a P^a = e^\mu_a P\beta^a = P\beta^\mu$.

From the definitions above and the properties of P and P^a it is easy to verify that $P^\mu\beta^\nu = Pg^{\mu\nu}$, $PS^{\mu\nu} = 0$, and it can also be seen that $P\nabla_\mu\psi = \nabla_\mu(P\psi)$ and $P^\nu\nabla_\mu\psi = \nabla_\mu(P^\nu\psi)$ due to the metricity condition. Therefore, under general coordinate transformations, $P\psi$ is a scalar and $P^\nu\psi$ is a vector.

By applying the projectors P and P^μ to the equation (3.6), we get respectively,

$$mP\psi = i \left(\nabla_\mu + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\mu \right) P^\mu\psi, \quad mP^\mu\psi = i \left(\nabla^\mu + \frac{1}{2} \tilde{\tau}^\mu \right) P\psi \quad (3.7)$$

by mixing both equation, we obtain the equation of motion for the scalar $P\psi$. We choose a representation where DKP field is a 5-vector column such as $\psi = (\varphi, \psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3)^T$, $P\psi = (\varphi, 0, 0, 0, 0)^T$ and $P^\alpha\psi = (\psi^\alpha, 0, 0, 0, 0)^T$. Thus, we have

$$\left(\nabla_\mu + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\mu \right) \left(\nabla^\mu + \frac{1}{2} \tilde{\tau}^\mu \right) \varphi + m^2\varphi = 0 \quad (3.8)$$

As we can see above, the interaction with torsion does not disappear, even after we selected the spin 0 sector of the DKP field. This interaction is present both in the connection $\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\alpha\mu}$ used in the calculation of the covariant derivative ∇_μ and in the explicit presence of terms containing the trace torsion $\tilde{\tau}_\mu$ in the equation above.

On the other hand, when the Lyra geometry is minimally coupled to the massive Klein-Gordon-Fock field, we get

$$S_{KG}^{\tilde{\tau}} = \int d^4x \phi^4 \sqrt{-g} (\nabla_\mu\phi^* \nabla^\mu\phi - m^2\phi^*\phi), \quad (3.9)$$

where the covariant derivative of the KGF scalar reads $\nabla_\mu\phi = \frac{1}{\phi}\partial_\mu\phi$.

The KGF action (3.9) results in the following equation of motion

$$(\nabla_\mu + \tilde{\tau}_\mu) \nabla^\mu\phi + m^2\phi = 0, \quad (3.10)$$

We can see that there exist interaction with the trace torsion. It is a different situation to what happened in Riemann-Cartan spacetime where the scalar field does not couple with torsion [9]. However, the spin 0 DKP equation (3.8) is different of KGF equation (3.10).

The difference will be better understood if we project the DKP action (3.5) to its spin 0 sector. Thus, by using the equation (3.7) to relate the vector ψ^μ to the scalar φ , and after some integration by parts and a rescaling $\varphi \rightarrow \sqrt{m}\varphi$, the DKP action (3.5) reads as

$$S_{DKP0}^{\tilde{\tau}} = \int d^4x \phi^4 \sqrt{-g} \left(\nabla_\mu\phi^* \nabla^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{2} \nabla_\mu\tilde{\tau}^\mu\phi\phi^* - \frac{1}{4} \tilde{\tau}^\mu\tilde{\tau}_\mu\phi^*\phi \right), \quad (3.11)$$

from this action we can obtain the spin 0 DKP equation given in (3.8). And it has two non minimal coupling which do not appear in the KGF action (3.9).

3.2 The Vectorial Sector

Now we use the Umezawa's "projectors" R^μ and $R^{\mu\nu}$ in order to analyze the spin 1 sector of the theory. We remember that $R^\mu \psi \equiv \psi^\mu$ is a vector and $R^{\mu\nu} \psi \equiv \psi^{\mu\nu}$ is a second rank antisymmetric tensor in a Lyra sense. Applying these operators on the equation of motion (3.3) we get, respectively,

$$m\psi^\mu = i \left(\nabla_\beta + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\beta \right) \psi^{\mu\beta}, \quad m\psi^{\mu\beta} = i \left(\nabla_\alpha + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\alpha \right) \left(g^{\alpha\beta} \psi^\mu - g^{\alpha\mu} \psi^\beta \right) \quad (3.12)$$

by mixing both equations, we found the equation of motion for the vector field ψ^μ

$$\left(\nabla_\beta + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\beta \right) \left(\nabla_\alpha + \frac{1}{2} \tilde{\tau}_\alpha \right) \left(g^{\alpha\beta} \psi^\mu - g^{\alpha\mu} \psi^\beta \right) + m^2 \psi^\mu = 0 \quad (3.13)$$

We project the massive DKP action (3.5) to its spin 1 sector. Then, by using the equation (3.12) which relates the tensor field $\psi^{\mu\nu}$ to the vector ψ^μ and, after some integration by parts and a rescaling $\psi^\mu \rightarrow \sqrt{m} \psi^\mu$ the DKP action (3.5) becomes

$$S_{DKP1}^{\perp} = \int d^4x \phi^4 e \left(-\frac{1}{2\phi^2} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu}^* + m^2 \psi_\mu^* \psi^\mu - \frac{1}{6\phi} (f^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}^* + f_{\mu\nu}^* \Sigma^{\mu\nu}) - \frac{1}{18} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}^* + \right. \quad (3.14) \\ \left. -\frac{1}{3\phi} (f^{*\mu\nu} S_{\mu\nu} + S^{*\mu\nu} f_{\mu\nu}) - \frac{1}{9} (\Sigma^{*\mu\nu} S_{\mu\nu} + S^{*\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}) - \frac{2}{9} S^{*\mu\nu} S_{\mu\nu} \right)$$

where

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu, \quad \Sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\tilde{\tau}_\mu \psi_\nu - \tilde{\tau}_\nu \psi_\mu), \quad S_{\mu\nu} \equiv \frac{3}{2\phi} (\psi_\nu \partial_\mu - \psi_\mu \partial_\nu) \ln(\phi). \quad (3.15)$$

Otherwise, the Proca's lagrangian in Minkowski space-time is given by

$$\mathcal{L}_{PR} = -\frac{1}{2} (\partial_a A_b^* - \partial_b A_a^*) (\partial^a A^b - \partial^b A^a) + m^2 A_a^* A^a \quad (3.16)$$

By making the minimal coupling procedure to the Lyra spacetime, we get

$$S_{PR}^{\perp} = \int d^4x \phi^4 e \left(-\frac{1}{2\phi^2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* + m^2 A_\mu^* A^\mu + \frac{1}{3\phi} (F^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}^* + F_{\mu\nu}^* \Sigma^{\mu\nu}) - \frac{2}{9} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}^* + \right. \quad (3.17) \\ \left. -\frac{1}{3\phi} (F^{*\mu\nu} S_{\mu\nu} + S^{*\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{2}{9} (\Sigma^{*\mu\nu} S_{\mu\nu} + S^{*\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}) - \frac{2}{9} S^{*\mu\nu} S_{\mu\nu} \right)$$

4. Comments

A simple comparison between the Lagrangians and equations of motion shows us the unequivalence of DKP theory with KGF and Proca descriptions of scalar and vector massive particles. However, a more accurated inspection reveals the spin 0 case as a problem of nonminimal coupling. In the spin 1 case the situation is more complicated, because all terms in DKP Lagrangian are also present in the Proca, but with modified coupling constants.

Now, from (3.14) we can see that

$$S_{DKP1}^{M4} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} (\partial_a \psi_b^* - \partial_b \psi_a^*) (\partial^a \psi^b - \partial^b \psi^a) + m^2 \psi_a^* \psi^a \right] \longrightarrow S_{DKP1}^{\perp} \quad (4.1)$$

by the prescription

$$\partial_a \rightarrow D_\mu \equiv \nabla_\mu + \frac{1}{2} \tau_\mu. \quad (4.2)$$

One can see that the prescription (4.2) only changes the strength of the coupling with respect the usual minimal coupling procedure. It can be explicitly observed by analysing the proportion between the coefficients of the interactions in the actions S_{DKP1}^{\pm} (3.14) and S_{PR}^{\pm} (3.17).

In our future perspectives we will do a study of the relationship between Lyra geometry and gauge theories, which is now in course using the Utiyama general theory. At same time, the coupling of Dirac field with this manifold is in preparation. We hope that these studies can clarify if the nonequivalence is restricted to manifolds with torsion *and* curvature, or if it is related to the structure of the field theory used to describe the particles.

Acknowledgements

R. C. and C. A. M. M. thank FAPESP (grants 01/12611-7 and 01/12584-0 respectively) for support. B. M. P. thanks CNPq and FAPESP (grant 02/00222-9) for partial support.

References

- [1] H. Weyl - *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissensch.*, 465 (1918); Reprinted (english version) in: L. O'RaiFeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton Series in Physics (1997).
- [2] G. Lyra, *Math. Z.* **54**, 52 (1951); E. Scheibe, *Math. Z.* **57**, 65 (1952).
- [3] D. K. Sen and J.R. Vanstone, *J. Math. Phys.* **13**, 990 (1972).
- [4] A. Pradhan and H.R. Pandey, available in arXiv: gr-qc/0307038.
- [5] G. S. Khadekar and A.R. Nagpure, available in arXiv: gr-qc/0111096.
- [6] A. Pradhan, I. Iotemshi and G.P. Singh, *Astrophys. Space Sci.* **288**, 315 (2003).
- [7] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, in *Geometrical Aspects of Quantum Fields*, Proceedings of the 2000 Londrina Workshop, Londrina, Brazil; edited by A. A. Bytsenko, A. E. Gonçalves and B. M. Pimentel; World Scientific, Singapore (2001), p. 111. Also available as gr-qc/9909033.
- [8] R. Casana, J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 4197 (2002).
- [9] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 491 (2002).
- [10] R. Casana, J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, *Gen. Rel. Grav.* **34**, 1941 (2002).
- [11] Harish-Chandra, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 186**, 502 (1946).
- [12] R. Casana, V.Ya. Fainberg, J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, *Class. Quantum Grav.* **20**, 2457 (2003).
- [13] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, North-Holland (1956).
- [14] R.A. Krajcik and M.M. Nieto, *Am. J. Phys.* **45**, 818 (1977).
- [15] F. De Felice and C. J. S. Clarke, *Relativity on curved Manifolds*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (1990).
- [16] F.W. Hehl, P. von der Heyde and G.D. Kerlick, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976).
- [17] V. De Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific (1985).

4.2 Campo Eletromagnético na Variedade de Lyra: Uma Abordagem de Primeira Ordem

Resumo: Nós discutimos o acoplamento do campo eletromagnético com uma variedade de Lyra com curvatura e torção usando a teoria de Duffin-Kemmer-Petiau. Mostraremos como obter as equações de movimento e os tensores de densidade de spin e energia-momento por meio do Princípio Variacional de Schwinger.

4.3 Campo DKP sem Massa na Variedade de Lyra

Resumo: Campos escalares e vetoriais sem massa são acoplados à geometria de Lyra por meio da teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Usando o Princípio Variacional de Schwinger, as equações de movimento, leis de conservação e simetria de gauge são implementadas. Nós encontramos que o campo escalar se acopla com a parte não-holônoma da tensor de torção, e a simetria de gauge do campo eletromagnético não é quebrada pelo acoplamento com a torção.

4.4 Campo Espinorial e Geometria de Lyra

Resumo: O campo de Dirac é estudo em um espaço-tempo de fundo de Lyra por meio do Princípio Variacional clássico de Schwinger. Nós obtemos as equações de movimento, estabelecemos as leis de conservação e damos uma relação de escala ligada aos tensores de energia-momento e spin. Essa relação de escala é um propriedade intrínseca dos campos de matéria na geometria de Lyra.

Bibliografia

- [1] Casana, R., de Melo, C. A. M. & Pimentel, B. M. - *Proc.Sci. WC2004* (2004) 013, [hep-th/0501085]; Palestra apresentada na Fourth International Winter Conference on Mathematical Methods in Physics, August 9-23, 2004, Rio de Janeiro, Brazil.

- [2] Casana, R., de Melo, C. A. M. & Pimentel, B. M. - *Braz. J. Phys.* **35**, 1151 (2005); Palestra apresentada na 100 Years of Relativity: International Conference on Classical and Quantum Aspects of Gravity and Cosmology, August 22-24, 2005, São Paulo, Brazil.

- [3] Casana, R., de Melo, C. A. M. & Pimentel, B. M. - *Massless DKP field in Lyra manifold*, [gr-qc/0509117]; Submetido a *Physical Review D*.

- [4] Casana, R., de Melo, C. A. M. & Pimentel, B. M. - *Spinorial Field and Lyra Geometry*, [gr-qc/0509096]; Submetido a *Classical and Quantum Gravity*.

5. Comentários Finais

Faremos a seguir alguns comentários finais acerca de tudo que foi discutido até este ponto, com o intuito de destacar pontos importantes e introduzir outros que não foram contemplados no corpo principal.

Começaremos comentando sobre a geometria invariante de escala. Como citamos na introdução, essa geometria foi construída de modo a ser a generalização métrica afim da geometria de Lyra. Embora tenhamos delineado uma construção do ponto de vista de uma variedade afim pré-existente à qual é adicionada uma função de escala, é fácil ver que essa geometria também poderia ser postulada de princípio através dos mesmos axiomas da geometria afim tracional, suplantada em pontos chave pelas mudanças decorrentes da presença de uma transformação de escala que segue uma lei de transformação de um funcional. Aliás, essa é outra diferença fundamental entre a geometria invariante de escala e a de Lyra, que admite apenas que ϕ se transforme segundo um difeomorfismo com respeito a $\bar{\phi}$. Essa diferença pode ser crucial ao imaginarmos essa geometria como um elemento presente numa abordagem de integração funcional para teorias de campo, pois afeta diretamente a escolha da medida de integração.

As transformações de escala aqui são muito semelhantes às transformações conformes da geometria diferencial usual, porém, como mostramos na seção 3.13, as transformações conformes da geometria invariante de escala encerram uma gama muito mais ampla de casos a serem explorados. Em particular, as aplicações demonstraram, no caso particular da geometria de Lyra, que essas transformações podem ser implemen-

tadas mesmo no caso de campos massivos, o que amplia os horizontes dos métodos matemáticos que podemos aplicar para o estudo da teoria de campos em espaços curvos. Não obstante, mesmo o estudo das transformações conformes ainda se encontra incompleto, pois faz-se necessário derivar os casos particulares análogos às transformações conformes fraca e forte.

Outro ponto a ser explorado futuramente diz respeito ao estudo de modelos homogêneos e isotrópicos. Até o momento, todas as aplicações feitas da geometria de Lyra para modelar o espaço-tempo lançam mão da métrica de Friedmann-Robertson-Walker como a métrica natural representando um espaço homogêneo e isotrópico. Entretanto, dada a presença da função de escala, a noção de homogeneidade precisa ser revista, de modo que essa função possa tomar parte ativa na determinação das componentes do tensor métrico. Naturalmente, um estudo sistemático de tais modelos deve partir da construção de espaços maximalmente simétricos, cuja base de estudo é a solução da equação de Killing (3.30) sob condições de contorno apropriadas.

Também entre as nossas perspectivas futuras está a construção de um modelo gravitacional baseado na geometria invariante de escala com torção propagante. Para isso é fundamental estudar qual o invariante correto a ser colocado como fonte da ação gravitacional, de modo a reproduzir os fenômenos observados e ainda prover as propriedades desejadas (propagação da torção, transformações de escala, etc.). Um método alternativo ao geométrico para essa construção, é o método algébrico das teorias de gauge *a la* Utiyama. Essa abordagem está atualmente em fase de desenvolvimento pelo autor, em conjunto com os colegas Pedro José Pompéia e Rodrigo Rocha Cuzinatto, nos moldes do trabalho exposto no apêndice ??, porém os resultados ainda não são maduros o suficiente para serem incluídos ao corpo desta tese.

Com relação às aplicações da geometria de Lyra à teoria de campos, nosso próximo passo deve ser o desenvolvimento semiclássico da teoria, talvez por meio do Princípio Variacional de Schwinger, dado que funções de Green parecem ser os objetos mais

adaptados para se tratar da propagação dos efeitos da geometria sobre os campos, ainda que as divergências sejam de tratamento extremamente mais difícil.¹ Como passo preliminar nessa direção, pretendemos estudar qual a reação do campo ϕ de fundo a uma dada alteração macroscópica dos campos de matéria. Esse tipo de estudo pode nos fornecer informações tanto do comportamento da função de Green, em primeira ordem de aproximação, quanto da dinâmica da torção.

Para finalizar, gostaria de dizer que acredito que para onde quer que inclinação, acaso ou oportunidade levem o homem, quaisquer que sejam os fenômenos que lhe despertem a atenção e prendam seu interesse, isso sempre trará vantagens à ciência. Pois qualquer relação nova que vem à luz, qualquer nova técnica, mesmo inadequada, e até mesmo o erro são úteis, estimulantes e indispensáveis para o futuro.

Neste sentido, o autor pode rever o seu trabalho com alguma tranqüilidade e, a partir dessas considerações, criar coragem para, num futuro próximo, fazer o que resta. Com confiança, embora não inteiramente satisfeito, pode recomendar o que já realizou e o que resta por realizar àqueles que, agora ou no futuro, venham a se interessar por esses assuntos.

¹Em geral, a melhor método de regularização nesses casos é o da função zeta, por não alterar nem a dinâmica dos campos com a introdução de novas massas (como o método de Pauli-Villars-Rajzinsk), nem a do espaço de fundo pela alteração do número de dimensões (como na regularização dimensional).

Apêndice: Teoria de Gauge de Segunda Ordem

O assunto deste apêndice é quase que totalmente desconectado do restante desta tese. Estamos os incluindo aqui apenas para ilustrar o ponto de vista exposto na introdução. A teoria de gauge de segunda ordem nasceu a partir de uma discussão do autor com dois outros colegas após um seminário como um exercício puramente teórico, porém depois que a teoria estava pronta verificamos que as suas aplicações eram bastante interessantes, seja do ponto de vista fundamental, seja do ponto de vista de uma teoria efetiva.

Em primeiro lugar devemos observar que termos de ordem superior são comuns em aproximações efetivas a partir de expansões em loops de teorias quânticas de campo. Ao regularizarmos a QED_4 a 1-loop, a Lagrangeana efetiva que emerge após a renormalização é a de Podolsky. Em gravitação, sabe-se há muito tempo que os termos quadráticos na curvatura são os primeiros contratermos naturais. Por outro lado, o autor e seus colegas Rodrigo Rocha Cuzinatto e Pedro José Pompéia demonstraram que era possível obter diretamente os mesmos resultados dessas teorias efetivas partindo do ponto de vista de uma teoria de gauge dependente de derivadas de até segunda ordem no potencial de gauge, $L(A, \partial A, \partial^2 A)$. Em particular, pudemos demonstrar por meio dessa abordagem que a Lagrangeana de Podolsky é a única extensão (linear) possível da eletrodinâmica de Maxwell compatível com a invariância local de gauge. Mostramos também que os efeitos da renormalização podem ser entendidos em termos da presença de um modo massivo para o fóton, cuja massa pode ser estimada por meio da corrente

conservada da teoria. Essa corrente difere da corrente de Noether usual pela incorporação de termos topológicos que surgem naturalmente da estrutura de gauge local. No caso da gravitação riemanniana, pudemos também encontrar todos os invariantes possíveis para a teoria de segunda ordem, e mostramos que os contratermos naturais nessa abordagem são todos proporcionais à derivada covariante da curvatura (e suas contrações), o que nos leva a propor um novo ponto de vista para quantização da gravitação, em que o campo base para a quantização passa ser a conexão de Lorentz (potencial de gauge).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)