

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

**Dinâmicas Autoregressivas em
Econofísica**

Guilherme Martinatti Favaro

São Carlos

2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Dinâmicas Autoregressivas em Econofísica

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física de São Carlos, da Universidade
de São Paulo, para obtenção do título de
Mestre em Ciências: Física Básica.

Guilherme Martinatti Favaro

Orientador: Prof. Dr. Roberto Nicolau Onody

São Carlos

2007

*Aos meus pais, Geraldo e Fátima
por seu apoio, carinho e amor incondicional.*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Roberto Nicolau Onody, meu orientador, por sua presteza e constante apoio durante este trabalho.

Ao Prof. Dr. Gerson Francisco, pelo comparecimento na defesa dessa dissertação e pelas diversas sugestões de correção.

À Profa. Dra. Tereza Cristina da Rocha Mendes, pelo comparecimento na defesa dessa dissertação e por contribuir com diversas sugestões.

À minha família, por todo apoio e compreensão.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Aos meus amigos da pós graduação do IFSC.

Aos meus amigos da graduação da UNESP - Rio Claro.

Aos companheiros de sala Paulo (Pac) e Erike.

À Lígia, pela revisão gramatical.

Ao Prof. Dr. Esmerindo de Sousa Bernardes, pelo incentivo no início desta jornada.

Em fim, agradeço a todos aqueles que de um jeito ou de outro acabei conhecendo e que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

*A sutileza do pensamento consiste em descobrir a semelhança
das coisas diferentes e a diferença das coisas semelhantes.*

Montesquieu

Resumo

Neste trabalho, fazemos uma breve introdução à Econofísica e às grandezas estatísticas relevantes para o estudo de um ativo financeiro. Estas grandezas são estudadas detalhadamente para o índice NYSE Composto. Determinamos o tempo de autocorrelação e o espectro de potência, cujos resultados indicam a presença de uma correlação de curto alcance. Através do expoente de Hurst, investigamos o tipo de correlação presente e detectamos a presença de multifractalidade. A volatilidade do índice NYSE mostrou-se análoga a um processo de Wiener. Por outro lado, a função densidade de probabilidade do índice NYSE foi ajustada por uma distribuição de Lévy simétrica com $\alpha = 1,47$.

Apresentamos os modelos de variância autoregressiva ARCH e GARCH. Em particular, focalizamos o modelo Markoviano GARCH(1,1). Este modelo tem três parâmetros de controle. Mostramos que, para o índice NYSE, o uso do tempo de autocorrelação na determinação deste conjunto de parâmetros de controle não é a melhor escolha. Resultados muito mais satisfatórios são obtidos se utilizarmos o sexto momento padronizado, uma vez que o ganho no ajuste da função de autocorrelação temporal é muito mais expressivo. A proposta de utilização do sexto momento é robusta e se aplica tanto ao modelo GARCH Gaussiano quanto ao modelo GARCH Exponencial. Desenvolvemos uma técnica de expansão em série para obter o sexto momento padronizado em função dos três parâmetros de controle. Obtivemos uma expressão analítica exata para a curtose do modelo GARCH Exponencial.

Ambas as versões Gaussiana e Exponencial apresentam um desempenho equivalente na descrição da função densidade de probabilidade e da função de autocorrelação temporal. Porém, no que tange às leis de escala temporal, medidas através da probabilidade de retorno à origem, o modelo Exponencial tem, clara e inequivocamente, um melhor desempenho que o modelo Gaussiano, pois apresenta um expoente da lei de escala temporal em bom acordo com o expoente do índice NYSE.

Abstract

In this thesis, we briefly give an introduction to Econophysics and discuss some important statistical quantities used in the study of a financial asset. These quantities are meticulously studied for the NYSE Composite Index. For its time series, we determine the time autocorrelation and the power spectrum, which show the presence of a short range correlation. By means of the Hurst exponent, we investigate the kind of autocorrelation which is present and we detected the presence of multifractality. The volatility of the NYSE Index shows a behavior analogous to a Wiener process. On the other hand, the probability density function was adjusted by a symmetric Lévy distribution with $\alpha = 1.47$.

We present the variance autoregressive ARCH and GARCH models. More specifically, we focus on the Markovian GARCH(1,1) model. This model has three control parameters. We show that, for the NYSE Index, the use of the time autocorrelation to determine the set of control parameters is not the best choice. Instead, results much more reasonable are obtained if the standardized sixth moment is used, as can be seen by the adjustment of the time autocorrelation function. The proposal of the sixth moment is robust and applies for both the Gaussian and the Exponential GARCH models. We developed a series expansion technique to get the standardized sixth moment as a function of the three control parameters. We found an exact analytic expression for the kurtosis of the Exponential GARCH model.

Both the Gaussian and the Exponential versions exhibit an equivalent performance in the description of the probability density function and the time autocorrelation function. However, with respect to the time scaling laws (measured by the probability of return to the origin) the Exponential model shows, in a clear and unequivocal way, a better performance than the Gaussian model, since it gives a time horizon exponent much more close to the real NYSE exponent.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Introdução Histórica	1
2	Distribuições Estáveis e Leis de Escala	6
2.1	Distribuições Estáveis	6
2.2	Distribuição de Lévy	9
2.3	Distribuição de Lévy e Econofísica	10
2.3.1	A Curtose	10
2.3.2	Lévy Truncado	13
2.4	Leis de Escala	14
3	Propriedades Estatísticas	17
3.1	Autocorrelação Temporal	18
3.2	Espectro de Potência	19
3.3	Volatilidade	22
3.4	Expoente de Hurst	24
3.4.1	Rescaled Range Analysis - R/S	24
3.4.2	Caracterização do Expoente de Hurst	26

3.4.3	Modificações na técnica R/S	28
3.4.4	Detrended Fluctuation Analysis - DFA	28
3.5	Multifractalidade	30
3.6	Probabilidade de Persistência	31
4	Movimento Browniano	33
4.1	Movimento Browniano Unidimensional	34
4.1.1	Propriedades de Escala para o Movimento Browniano Unidimensional	36
4.1.2	Movimento Browniano e Economia	38
4.2	Movimento Browniano Fracionário	40
5	Econofísica do Índice NYSE	43
5.1	Índice NYSE	43
5.2	Distribuição de Probabilidade	44
5.3	Lei de Escala Temporal	45
5.4	Autocorrelação Temporal	45
5.5	Volatilidade	47
5.6	Expoente de Hurst	47
5.7	Probabilidade de Persistência	48
5.8	Multifractalidade	50
6	Dinâmicas Autoregressivas	51
6.1	Processos estocásticos ARCH/GARCH	51
6.2	GARCH Gaussiano	53
6.2.1	Dinâmica GARCH Padrão	53

6.2.2 Nova proposta	58
6.3 GARCH Exponencial	62
6.4 GARCH Gaussiano versus GARCH Exponencial	66
6.5 Lei de Escala Temporal	67
7 Conclusões	69
A Função de Autocorrelação Temporal para o GARCH Gaussiano	71
Referências	78

Lista de Figuras

2.1	Gaussiana	10
2.2	Lorentziana	10
2.3	Lévy-Smirnov	10
2.4	$\alpha = 1.4, \beta = 0$	10
2.5	$\alpha = 1.4, \beta = 1$	10
2.6	$\alpha = 1.4, \beta = -1$	10
2.7	Tipos de Curtose: A-leptocurtose, B- mesocurtose, C- platicurtose	11
2.8	Distribuição de probabilidades para o índice <i>S&P500</i>	12
2.9	Probabilidade de retorno à origem em função do intervalo de tempo Δt	16
2.10	Funções densidade de probabilidade para diversos Δt	16
2.11	Funções densidade de probabilidade reescaladas.	16
3.1	Evolução dos preços	20
3.2	Variação dos retornos	20
3.3	Autocorrelação temporal	21
3.4	Espectro de potência	22

3.5	Volatilidade	23
3.6	$H = 0.1$	27
3.7	$H = 0.5$	27
3.8	$H = 0.9$	28
4.1	Passos independentes do movimento Browniano	35
4.2	Posição da partícula Browniana	35
4.3	Correlação do movimento Browniano fracionário	41
4.4	FBM com $H = 0.3$	42
4.5	FBM com $H = 0.7$	42
5.1	Evolução Temporal do Índice NYSE Composto	44
5.2	Evolução Temporal dos Retornos Logarítmicos do Índice NYSE Composto	44
5.3	Histograma dos Retornos Logarítmicos do Índice NYSE Composto	45
5.4	Probabilidade de Retorno a Origem	45
5.5	Função de Autocorrelação Temporal	46
5.6	Espectro de Potências	46
5.7	Volatilidade	47
5.8	Expoente de Hurst via R/S	48
5.9	Expoente de Hurst via DFA	48
5.10	Probabilidade de Persistência Positiva e Negativa	49
5.11	Probabilidade de Persistência e Hurst	49
5.12	Família de expoentes H_q	50

-
- 6.1 A linha cheia é a solução da equação da curtose $k_G = 38.507$.
As linhas pontilhadas são as soluções da seqüência do sexto momento padronizado para $T = 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30$ 59
- 6.2 Os pontos de intersecção entre o sexto momento padronizado e a curtose geram a seqüência $\alpha_1(T)$ 60
- 6.3 Função densidade de probabilidade para os 10.088 pontos do índice NYSE Composto e o modelo GARCH Gaussiano com os parâmetros de controle s_1 e s_2 61
- 6.4 Função de autocorrelação temporal $F(\tau)$ contra o tempo τ .
Ambos os conjuntos de dados GARCH foram obtidos após uma média de ensemble com 10.000 ensaios. 62
- 6.5 Linha cheia é a solução da equação da curtose $k_E = 38.507$.
As linhas pontilhadas são as soluções para o sexto momento padronizado para $T = 8, 10, 12, 14, 16, 18$ 63
- 6.6 Os pontos de intersecção entre as curvas da curtose e do sexto momento padronizado geram uma seqüência $\alpha_1(T)$ 64
- 6.7 Função densidade de probabilidade para os 10.088 pontos do índice NYSE Composto, em conjunto com o modelo GARCH Exponencial com os parâmetros de controle ss_1 e ss_2 65
- 6.8 Função de autocorrelação temporal $F(\tau)$ contra o tempo τ .
Ambos os conjuntos GARCH foram obtidos após uma média de ensemble com 10.000 ensaios. 65
- 6.9 Função densidade de probabilidade dos retornos Z 66

6.10	Função de autocorrelação temporal $F(\tau)$ contra o tempo τ para o índice NYSE e para os processos GARCH Gaussiano e Exponencial.	67
6.11	Probabilidade de retorno à origem contra o horizonte temporal Δt para o índice NYSE e para os processos GARCH Gaussiano e Exponencial.	68

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução Histórica

Para rotular as aplicações da física estatística à economia em geral, cunhou-se o termo “econophysics”, ou econofísica, um híbrido de “economia” e “física”.

Na década passada, o assunto econofísica começou a circular nos meios acadêmicos. Em julho de 1997, organizou-se a primeira conferência na área, intitulada “Workshop on Econophysics” [1], seguida por vários outros encontros relacionados ao assunto. A área amadureceu e ganhou destaque com a publicação dos primeiros livros dedicados ao tema [2, 3].

Apesar da aplicação de métodos estatísticos similares aos utilizados por matemáticos financeiros, os físicos se concentraram na análise dos dados experimentais, utilizando-se para isso das ferramentas e técnicas usualmente aplicadas na análise de sistemas complexos [4, 5, 6].

Existem vários exemplos de entrelaçamento da física, economia e ma-

temática. Alguns casos bem conhecidos são [1]:

- o fracasso nas previsões dos preços das ações por Isaac Newton, e como consequência, sua enorme perda de 20.000 libras na bolha de especulação de South Sea, em 1720;
- a administração bem sucedida de um Fundo para viúvas de professores de Goetingen, feito por Carl Friedrich Gauss;
- a explicação do movimento Browniano e a formulação da condição de Chapman-Kolmogorov para processos Markovianos, por Louis Bachelier, na sua tese de doutorado em teoria de especulação, a qual foi apresentada 5 anos antes dos trabalhos em difusão de Smoluchowski e Einstein, tendo como base a variação dos preços na bolsa de valores de Paris.

Estudos realizados nos séculos XVIII e XIX, em física clássica, causaram um grande impacto na economia. Como um primeiro exemplo, citaremos o pai da economia clássica, Adam Smith. No seu trabalho “*The principles which lead and direct philosophical enquires: illustrated by the history of astronomy*”, Smith exemplifica a metodologia da ciência reforçando o papel da observação das regularidades e, a partir delas, construir teorias capazes de reproduzi-las. Tomar a astronomia como ponto de referência não foi algo accidental. Pelo contrário, foi a mecânica celeste e sua quantidade impressionante de dados, que fizeram a astronomia ter um papel importante em diversas culturas.

No fim do século XVIII e no século XIX, as teorias de Newton foram tratadas numa linguagem mais moderna através dos trabalhos em mecânica

analítica de Lagrange, Hamilton e outros. A beleza e o poder do mecanismo analítico não escapou à atenção dos economistas. Em particular, os conceitos da mecânica foram considerados a ferramenta ideal para a formalização matemática da economia. Alguns economistas como Walras, Jevons, Fisher e Pareto tentaram transferir o formalismo da física para a economia, substituindo pontos materiais por agentes financeiros, fazendo uma analogia entre a energia potencial e o conceito de “utilidade”, e então evoluindo o sistema através de análogos do princípio de mínima ação. Por outro lado, sugestões visionárias feitas por Majorana [7] nos anos 30, ao utilizar física estatística em ciências sociais, não foram exploradas nem por economistas nem por físicos.

Quase meio século após a defesa de sua tese “Jeu de speculation” [8] (cujo orientador, Henri Poincaré, não apreciou muito), as idéias de Bachelier foram redescobertas em departamentos de Economia das maiores universidades americanas. Uma pequena modificação no processo estocástico de Bachelier levou Osborne e Samuelson à equação estocástica fundamental que governa a evolução dos preços de ações e serve como base da famosa teoria de Black, Scholes e Merton, para o cálculo do valor correto de uma opção. Tecnicamente, a formula de Black-Scholes é apenas a solução da equação de calor com condições de contorno peculiares.

Nos anos 60, Mandelbrot apontou a presença de certa auto similaridade no comportamento dos preços das commodities de algodão em diferentes escalas de tempo. Este resultado foi interpretado como a presença de uma lei de potência. Hoje, para os físicos familiarizados com fenômenos críticos, o conceito de lei de potência e grandes flutuações é de grande importância.

Um fator muito importante que alterou o acesso aos dados econômicos foi

a utilização crescente e inapelável de computadores. Primeiro, a velocidade das transações econômicas mudou drasticamente. Segundo, as economias passaram a ser observadas mais de perto, uma vez que o computador possibilita armazenar uma quantidade enorme de dados.

Em geral, um sistema econômico apresenta efeitos não lineares. Poincaré estudou sistemas dinâmicos não lineares, estabelecendo as bases de um possível comportamento caótico.

Hoje, graças ao armazenamento digital de dados, os mercados coletam uma quantidade inacreditável de dados, registrando praticamente cada transação feita, impulsionando o surgimento de novos métodos que sejam capazes de lidar com tantas informações.

No capítulo 02, apresentamos um estudo sobre a estabilidade das funções densidade de probabilidade, descrevendo as distribuições de Lévy. Também, neste mesmo capítulo, estudamos as propriedades de escala temporal a partir do cálculo da probabilidade de retorno à origem.

No capítulo 03, definimos uma ampla gama de conceitos e grandezas essenciais para um estudo das propriedades estatísticas da evolução temporal de um ativo financeiro. Entre elas, citamos a função de autocorrelação temporal, a volatilidade, o expoente de Hurst, etc.

No capítulo 04, desenvolvemos o formalismo do movimento Browniano, e sua generalização - o movimento Browniano fracionário, introduzido por B. B. Mandelbrot. Apresentamos também o movimento Browniano geométrico, base teórica do famoso modelo de Black Scholes para o mercado de opções.

No capítulo 05, fazemos um estudo completo do índice NYSE Composto, da Bolsa de Valores de Nova York.

No capítulo 06, apresentamos os modelos autoregressivos ARCH e GARCH, e propomos modificações em suas dinâmicas.

Finalmente, no capítulo 07, apresentamos os resultados e conclusões de nosso trabalho.

Capítulo 2

Distribuições Estáveis e Leis de Escala

2.1 Distribuições Estáveis

Considere a soma S_n de n variáveis aleatórias x_i ($i = 1, \dots, n$) descorrelacionadas, oriundas de uma mesma distribuição de probabilidade. Essas variáveis são identicamente distribuídas e independentes, ou seja, variáveis aleatórias i.i.d..

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (2.1)$$

Seja $P(x_i)$ a densidade de probabilidade da variável aleatória x_i . Em quais situações a densidade de probabilidade $\bar{P}(S_n)$, da nova variável aleatória S_n é *estável*? Uma densidade de probabilidade é dita *estável* se $P(x_i)$ e $\bar{P}(S_n)$ possuírem a mesma forma funcional. Exemplos desse tipo de densidades

estáveis são a Lorentziana e a Gaussiana.

Para variáveis aleatórias com distribuição Lorentziana, a função densidade de probabilidade (pdf) é dada por

$$P(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + x^2} \quad (2.2)$$

A transformada de Fourier da pdf é denominada *função característica*. Para a Lorentziana, obtemos

$$\phi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{iqx} dx = e^{-\gamma|q|} \quad (2.3)$$

Antes de continuarmos, precisamos lembrar do teorema da Convolução [9]. Seja $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, com transformadas de Fourier $F(t)$ e $G(t)$, respectivamente. A convolução de $f(x)$ e $g(x)$ é definida por

$$f \otimes g = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{-itx} dt \quad (2.4)$$

Ou seja, a transformada de Fourier inversa de um produto de transformadas de Fourier é igual à convolução das funções originais.

Consideremos agora a soma de 2 variáveis aleatórias i.i.d., com distribuição Lorentziana, $S_2 = x_1 + x_2$. A função densidade de probabilidade é dada pela convolução das funções densidade de probabilidade de cada variável aleatória

$$P_2(S_2) = P \otimes P \quad (2.5)$$

Aplicando-se o teorema da convolução, determinamos a função característica $\phi_2(q)$ de S_2

$$\phi_2(q) = [\phi(q)]^2 \quad (2.6)$$

Generalizando para uma soma de n variáveis i.i.d.

$$\bar{P}(S_n) = P(x_1) \otimes P(x_2) \otimes \dots \otimes P(x_n) \quad (2.7)$$

a função característica será

$$\phi_n(q) = [\phi(q)]^n = e^{-n\gamma|q|} \quad (2.8)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, obtemos a pdf

$$\bar{P}(S_n) = \frac{n\gamma}{\pi} \frac{1}{n^2\gamma^2 + x^2} \quad (2.9)$$

A forma funcional $\bar{P}(S_n)$ é uma Lorentziana. Basta fazer $\gamma \Rightarrow n\gamma$ em 2.2, que obtemos 2.9. Portanto, conclui-se que a distribuição Lorentziana é uma distribuição de probabilidade estável.

Consideremos agora variáveis aleatórias com distribuição Gaussiana. A função densidade de probabilidade é dada por

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (2.10)$$

Novamente, seja $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. A função característica correspon-

dente, que também é uma Gaussiana, é

$$\phi_n(q) = e^{-\frac{n\sigma^2 q^2}{2}} \quad (2.11)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, temos

$$\bar{P}(S_n) = \frac{1}{\sqrt{n\pi\sigma^2}} e^{-x^2/n\sigma^2} \quad (2.12)$$

Portanto, a distribuição Gaussiana também é uma distribuição estável.

2.2 Distribuição de Lévy

Na seção anterior, verificamos a existência de duas distribuições estáveis. As funções características de ambas possuem a mesma forma funcional, dada por

$$\phi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha}, \quad (2.13)$$

onde $\alpha = 1$ para a Lorentziana e $\alpha = 2$ para a Gaussiana.

A. Ya. Khintchine e P. Lévy [10] obtiveram toda a classe de distribuições estáveis. Eles encontraram a forma mais geral da função característica de um processo estável, que é dada por

$$\ln \phi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma|q|^\alpha \{1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan \frac{\pi\alpha}{2}\}, & \text{se } \alpha \neq 1 \\ i\mu q - \gamma|q| \{1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln |q|\}, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

onde $0 < \alpha \leq 2$, γ é um fator de escala positivo, μ é um número real qualquer e β é um parâmetro de assimetria no intervalo $[-1, 1]$.

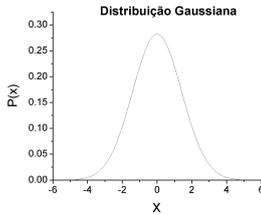


Figura 2.1: Gaussiana

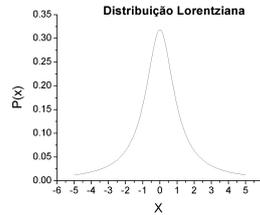


Figura 2.2: Lorentziana

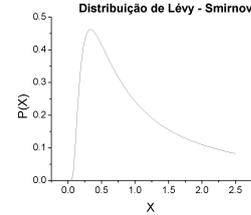


Figura 2.3: Lévy-Smirnov

Só se conhece expressão analítica para as distribuições estáveis de Lévy com $\alpha = 2$ (Figura 2.1), $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ (Figura 2.2) e $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$ (Figura 2.3).

A seguir, apresentamos outros exemplos para alguns valores dos parâmetros α e β .

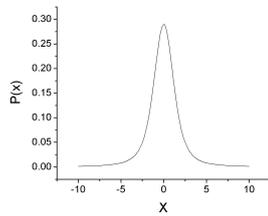


Figura 2.4: $\alpha = 1.4$,
 $\beta = 0$

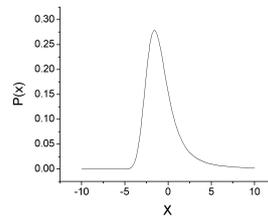


Figura 2.5: $\alpha = 1.4$,
 $\beta = 1$

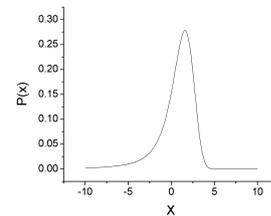


Figura 2.6: $\alpha = 1.4$,
 $\beta = -1$

2.3 Distribuição de Lévy e Econofísica

2.3.1 A Curtose

A curtose é uma medida do grau de achatamento de uma distribuição,

em relação à distribuição Gaussiana. A curtose k é definida pela razão entre o quarto momento e o quadrado da variância

$$k = \frac{\langle x^4 \rangle}{\sigma^4}, \quad (2.14)$$

com $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

A distribuição Gaussiana possui curtose $k = 3$, denominada mesocúrtica. Se $k > 3$, a distribuição possui um pico mais agudo do que a Gaussiana e é chamada de leptocúrtica. Se $k < 3$, a distribuição possui um platô na região central, sendo denominada platicúrtica, conforme ilustra a figura 2.7.

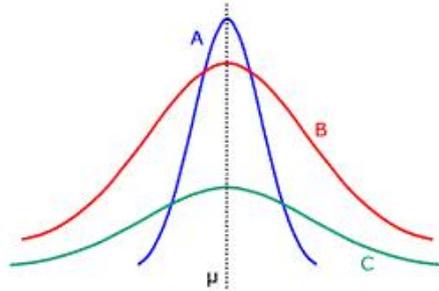


Figura 2.7: Tipos de Curtose: A-leptocurtose, B- mesocurtose, C-platicurtose

Estamos interessados na distribuição do *retorno logarítmico* dos preços $Z_{\Delta t}(t)$, definido por

$$Z_{\Delta t}(t) = \ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t) \quad (2.15)$$

com $Y(t)$ o preço do ativo financeiro. O logaritmo é utilizado para suavizar possíveis flutuações presentes em dados de baixa frequência. Para dados com maior frequência, o uso do logaritmo é opcional, não interferindo nos resultados (veja referência [2], capítulo 5).

As primeiras tentativas de modelar o mercado financeiro assumiam que a distribuição dos *retornos* de um ativo financeiro, $y(t+1) - y(t)$, eram Gaussianas [2, 11], inspiradas pelo trabalho pioneiro de Bachelier [8]. Porém, na prática, verificou-se que a distribuição de um ativo financeiro é mais leptocúrtica do que uma Gaussiana.

O primeiro modelo a considerar, explicitamente, a leptocurtose observada empiricamente foi proposto por Mandelbrot, em 1963, na sua modelagem do logaritmo dos preços do algodão $\ln Y(t)$. Mandelbrot assumiu que os *retornos logarítmicos* $Z(t)$ poderiam ser modelados a partir de uma distribuição de Lévy estável não-Gaussiana [12]. Sua descoberta foi corroborada pelos trabalhos de Fama em 1965 [13], a partir dos preços das ações da bolsa de valores de Nova Iorque (NYSE-New York Stock Exchange).

Stanley [14] utilizou a distribuição de Lévy para modelar a distribuição dos retornos do índice S&P500 (Standard and Poor).

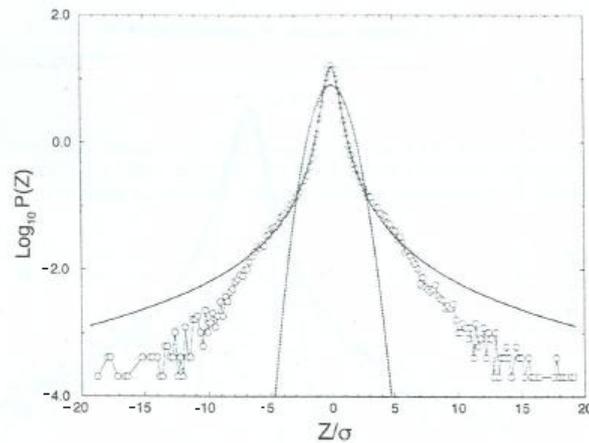


Figura 2.8: Distribuição de probabilidades para o índice *S&P500*

Como podemos ver na figura 2.8, a distribuição de Lévy fornece um bom ajuste para a região central da distribuição dos retornos, mas superestima o

valor nos extremos da distribuição. Esta divergência pode ser explicada se compararmos os momentos da distribuição dos retornos do ativo financeiro com os de uma distribuição de Lévy.

O comportamento assintótico de uma distribuição de Lévy $P(x)$, para grandes valores de $|x|$, é dada por [2, 15]

$$P(x) \approx |x|^{-(1+\alpha)} \quad (2.16)$$

Para as distribuições de Lévy, $\langle x^\mu \rangle$ diverge para $\mu \geq \alpha$, quando $\alpha < 2$. No que tange os momentos dos dados experimentais, todos são finitos. Portanto, a distribuição de Lévy não fornece um bom ajuste para valores grandes do retorno. Para resolver este dilema, fez-se necessária uma modificação nas distribuições de Lévy, de modo a reproduzir tanto as propriedades de leptocurtose das distribuições empíricas, como também a finitude dos momentos. Nesse espírito, foram propostas as distribuições de Lévy truncadas.

2.3.2 Lévy Truncado

Uma densidade de probabilidade leptocúrtica, porém com momentos finitos, é a distribuição de Lévy-Truncada (TLF) [16], definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > l \\ cP_L(x), & \text{se } -l \leq x \leq l \\ 0, & \text{se } x < -l \end{cases}$$

onde $P_L(x)$ é a distribuição simétrica de Lévy ($\beta = 0$) de índice α e fator de escala γ , e c é uma constante de normalização.

Foram propostas diversas outras formas de truncagem, na tentativa de se obter uma distribuição com variância finita e que forneça um ajuste ótimo para os dados experimentais. Entre elas, citamos o processo de Lévy Gradualmente Truncado [17] e o processo de Lévy Exponencialmente Truncado [18].

Um dos principais inconvenientes dos processos truncados de Lévy é exatamente a escolha correta do ponto de truncagem. Assim, embora essas distribuições, por vezes, forneçam um bom ajuste entre os dados teóricos e o modelo, a escolha arbitrária do ponto de truncagem prejudica uma formalização completa do modelo.

2.4 Leis de Escala

Para verificarmos a existência e as características das leis de escala para as distribuições de Lévy, vamos considerar a probabilidade de retorno à origem $P(S_n = 0)$.

A função característica, para uma distribuição de Lévy estável, com média zero $\mu = 0$, simétrica $\beta = 0$, é dada por

$$\phi_n(q) = e^{-n\gamma|q|^\alpha} \quad (2.17)$$

Efetuada a transformada inversa de Fourier, obtemos a função densidade

de probabilidade

$$P(S_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-n\gamma|q|^\alpha} \cos(qS_n) dq \quad (2.18)$$

assim, para $S_n = 0$

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-n\gamma|q|^\alpha} dq = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha(\gamma n)^{1/\alpha}} \quad (2.19)$$

A distribuição $P(S_n)$ é propriamente reescalada por

$$\tilde{P}(\tilde{S}_n) = P(S_n)n^{1/\alpha} \quad (2.20)$$

A normalização da distribuição reescalada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\tilde{S}_n) d\tilde{S}_n = 1 \quad (2.21)$$

só é assegurada se

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \quad (2.22)$$

Dessa maneira, obtemos a lei de escala da distribuição de Lévy, a partir da probabilidade de retorno à origem $P_{\Delta t}(Z = 0)$ para diversos intervalos de tempo Δt , com $Z_{\Delta t}(t)$ o retorno logarítmico (equação 2.15). O resultado dessa operação é exemplificado no gráfico 2.9, no estudo feito por Stanley do índice *S&P500* [14].

Tomando o inverso negativo da inclinação da reta obtida no gráfico da

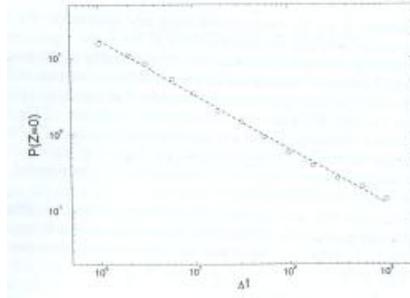


Figura 2.9: Probabilidade de retorno à origem em função do intervalo de tempo Δt

probabilidade de retorno à origem, obtemos o expoente α da distribuição de Lévy. A partir dele, podemos reescalar corretamente a função densidade de probabilidade da forma

$$\tilde{Z} = \frac{Z}{(\Delta t)^{1/\alpha}} \quad (2.23)$$

$$\tilde{P}(\tilde{Z}) = \frac{P(Z)}{(\Delta t)^{-1/\alpha}} \quad (2.24)$$

Utilizando as variáveis escaladas acima, as distribuições empíricas dos retornos, para diversos intervalos de tempo Δt , colapsarão sobre uma única distribuição, como vemos nas figuras 2.10 e 2.11

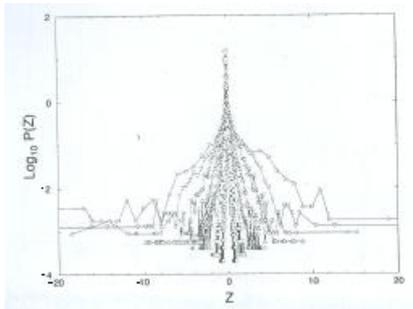


Figura 2.10: Funções densidade de probabilidade para diversos Δt

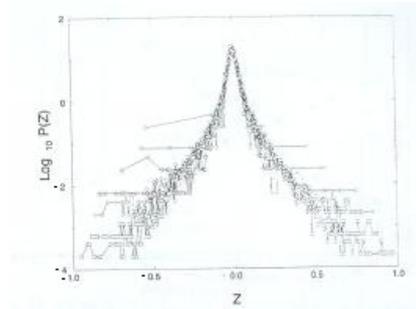


Figura 2.11: Funções densidade de probabilidade reescaladas.

Capítulo 3

Propriedades Estatísticas

Existem diversas grandezas relevantes para um processo estocástico. Uma delas é a determinação dos *momentos de ordem m*

$$\langle x^m(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^m(t) f(x, t) dx, \quad (3.1)$$

onde $f(x, t)$ é a densidade de probabilidade. Podemos calcular também a *função de autocorrelação de n pontos*, dada por

$$\langle x(t_1) \dots x(t_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_n f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.2)$$

onde $f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ é a densidade de probabilidade conjunta que a variável aleatória x assumo o valor x_i no tempo t_i . Além das densidades de probabilidade, outras grandezas importantes são: o *espectro de potência*, que remete o estudo do espaço temporal para o espaço das frequências; a *volatilidade*, a qual fornece o comportamento do desvio padrão da variável

aleatória $x(t)$ com o tempo; o *expoente de Hurst*, que fornece uma medida do tipo de correlação presente na série temporal $\{x(t)\}$, etc.

3.1 Autocorrelação Temporal

Um processo estocástico é considerado estacionário *strictus-sensus* se sua pdf for invariante por translação temporal. Porém, podemos ser menos restritivos na definição de estacionaridade. Denomina-se um processo estocástico *assimptoticamente estacionário* quando as propriedades de suas variáveis aleatórias $x(t_1 + \zeta), \dots, x(t_n + \zeta)$ não dependem de ζ , para ζ grande.

No regime estacionário, a função de autocorrelação temporal é definida por

$$R(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)x(t + \tau) \quad (3.3)$$

A escala de tempo típica de um processo estocástico, o chamado tempo de autocorrelação, pode ser obtido a partir do cálculo da área sob a curva da autocorrelação temporal, ou então, determinando-se o instante de tempo τ^* no qual a função de autocorrelação temporal se anula pela primeira vez. Se a área sob a curva for infinita, o processo possui correlação de longo alcance. Caso contrário, a correlação é de curto alcance. Uma alternativa para o cálculo do tempo de autocorrelação foi proposta por Sokal [19], denominada autocorrelação integrada. Porém, esta estimativa enfrenta algumas dificuldades, tais como a variância do estimador divergir e uma grande quantidade

de dados ser necessária (no mínimo 1000 vezes mais dados do que o tempo de autocorrelação).

A função de autocorrelação temporal normalizada [20, 21] é dada por

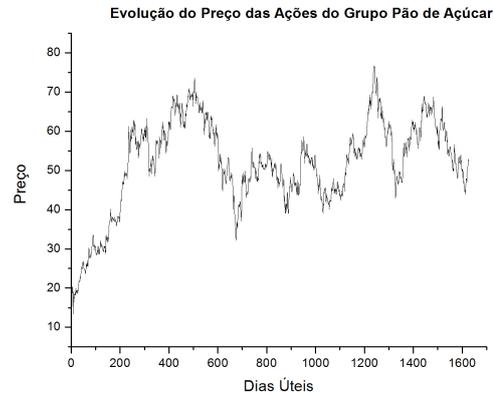
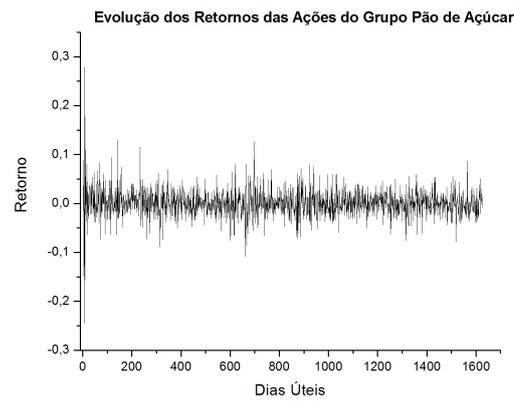
$$R(\tau) = \frac{\langle Z(t)Z(t+\tau) \rangle - \langle Z(t) \rangle^2}{\langle Z^2(t) \rangle - \langle Z(t) \rangle^2}, \quad (3.4)$$

Em econofísica, a variável aleatória $Z(t)$ é usualmente definida como sendo a diferença dos logaritmos do preço $Y(t)$ de um ativo financeiro, isto é, $Z(t) = \ln Y(t+\tau) - \ln Y(t)$.

Apresentamos na figura 3.3, a autocorrelação temporal para os retornos logarítmicos (figura 3.2) das ações do Grupo Pão de Açúcar na BOVESPA. Estes dados se referem ao período de janeiro de 1999 à julho de 2005, e correspondem a um banco de dados com aproximadamente 1600 pontos (figura 3.1). De acordo com a figura 3.3, vemos que os retornos possuem correlação de curto alcance, da ordem de 1 dia útil. É importante destacar que a unidade de tempo utilizada não é o tempo físico usual. Marca-se o tempo apenas enquanto o mercado financeiro está aberto, excluindo-se feriados e fins de semana. A este intervalo de tempo denomina-se 1 dia útil (veja capítulo 05, referência [2]).

3.2 Espectro de Potência

As propriedades de autocorrelação temporal de um processo estocástico podem ser estudadas no espaço das frequências, através do espectro de

**Figura 3.1:** Evolução dos preços**Figura 3.2:** Variação dos retornos

potência [20, 22]. O espectro de potência $S(f)$ de uma variável aleatória $x(t)$ é o módulo quadrado de sua transformada de Fourier. Portanto,

$$S(f) = |F(f)|^2 = F(f) \times F^*(f), \quad (3.5)$$

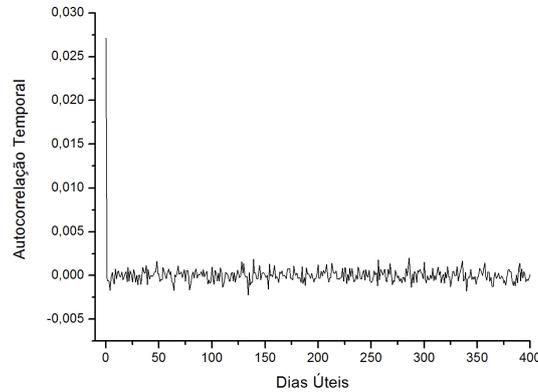


Figura 3.3: Autocorrelação temporal

onde $F(f)$ é a transformada de Fourier discreta, dada por

$$F(f) = \sum_{t=1}^N x(t)e^{-2\pi ift} \quad (3.6)$$

e $F^*(f)$ denota o complexo conjugado de $F(f)$.

Destacaremos dois espectros de potência: o de um ruído branco, e o de um processo de Wiener.

Seja $x(t)$ um ruído branco, definido da seguinte forma: $\langle x(t) \rangle = 0$ (média nula), e $\langle x(t)x(t') \rangle = \delta(t - t')$ (descorrelacionado). O espectro de potência de $x(t)$ é da forma $S(f) \approx C$, com C uma constante.

Um processo de Wiener $x_w(t)$, ou movimento Browniano, pode ser definido como a soma de um ruído branco

$$x_w(t) = \sum_{(i=1)}^t x(i). \quad (3.7)$$

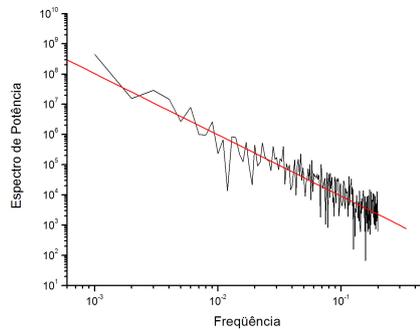


Figura 3.4: Espectro de potência

O espectro de potência de um processo de Wiener $x_w(t)$, decai da forma

$$S(f) \approx 1/f^2 \quad (3.8)$$

Na figura 3.4, apresentamos o espectro de potência dos preços das ações do Grupo Pão de Açúcar. Pode-se ver um decaimento do tipo $1/f^2$, análogo ao espectro de potência de um processo de Wiener.

3.3 Volatilidade

A volatilidade representa uma medida da magnitude das flutuações do mercado, em um certo intervalo de tempo T . É uma propriedade de grande interesse, pois quantifica o risco relacionado a um ativo financeiro, estando relacionada com a quantidade de informação que chega ao mercado num dado intervalo de tempo. A volatilidade pode ser determinada a partir do cálculo do desvio padrão dos preços $Y(t)$ em uma janela temporal T , ou então

calculando-se o módulo da variação dos preços $|Z(t)|$ [2, 20, 23].

Aqui, definimos a volatilidade como o desvio padrão σ dos preços $Y(t)$ em uma janela temporal T . Assim,

$$\sigma(T) = \frac{\sum_{t=1}^T \sqrt{\langle Y^2(t) \rangle - \langle Y(t) \rangle^2}}{T} \quad (3.9)$$

Em geral, a volatilidade obedece a uma lei de potências [2]

$$\sigma(T) \approx T^\nu \quad (3.10)$$

com $\nu = 1/2$ para um processo de Wiener.

Na figura 3.5, apresentamos o cálculo da volatilidade para o preço das ações do Grupo Pão de Açúcar. Vemos que a volatilidade cresce com o expoente $\nu = 0.517$.

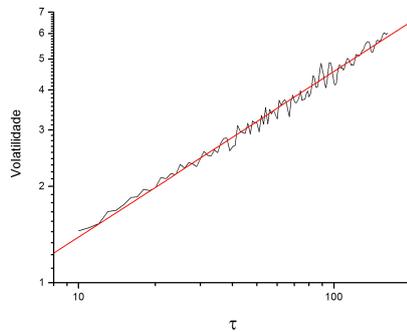


Figura 3.5: Volatilidade

A evolução do preço de um ativo financeiro não pode ser considerada estacionária, pois a variância depende do tempo, ou seja, há volatilidade. Acredita-se, entretanto, que os dados financeiros possam ser as-

simptoticamente estacionários. Em outras palavras, para uma série temporal suficientemente longa, a função densidade de probabilidade assintótica converge e, a partir dela, caracterizar-se-ia o processo estocástico. No entanto, essa ainda é uma questão sem uma resposta definitiva.

3.4 Expoente de Hurst

Harold Edwin Hurst, engenheiro inglês, dedicou grande parte da sua vida ao estudo do fluxo das águas do rio Nilo e respectivos afluentes. Hurst se deparou com o problema de como construir um reservatório ideal, o qual nunca transbordaria ou secaria. Para resolver esta questão, Hurst estudou os mais de 800 anos de registros das cheias anuais do rio Nilo e, a partir deles, propôs um modelo para a política de controle da vazão do reservatório [24, 25].

3.4.1 Rescaled Range Analysis - R/S

Hurst criou um novo método estatístico para analisar os dados de entrada e saída de água do reservatório em função do tempo, denominando-o Análise de Reescalamento R/S (Rescaled Range Analysis).

Considerando um determinado ano t , o reservatório recebe uma quantidade de água $\xi(t)$. A entrada de água média durante n anos é

$$\langle \xi(t) \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \xi(t), \quad (3.11)$$

quantidade média esta que deve ser liberada anualmente, de modo a manter o nível do reservatório. A água acumulada no reservatório em função do valor médio liberado e da quantidade de entrada é

$$X(t, n) = \sum_{m=1}^t [\xi(m) - \langle \xi \rangle_n] \quad (3.12)$$

A diferença entre o valores acumulados máximo e mínimo é chamada de amplitude, ou range, e representa a capacidade necessária para manter uma saída média $\langle \xi \rangle_n$ em função da entrada anual $\xi(t)$.

Portanto, para que um reservatório nunca transborde ou seque, o range deve ser

$$R(n) = X_{max}(t, n) - X_{min}(t, n) \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq n \quad (3.13)$$

Hurst tornou a relação acima adimensional, dividindo-a pelo desvio padrão

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\xi(t) - \langle \xi \rangle_t]^2} \quad (3.14)$$

Hurst aplicou seu método estatístico para diversas grandezas naturais, como: a vazão de rios, a quantidade de sedimentos após as cheias dos rios, o tamanho dos anéis dos troncos de árvores; e encontrou, empiricamente, que a razão R/S era proporcional ao tempo de observação elevado a um expoente k . Posteriormente, B. Mandelbrot rebatizou o expoente k por expoente de

Hurst, denotado pela letra H . Assim

$$\frac{R}{S} = Cn^H \quad C = \text{constante} \quad (3.15)$$

Hurst chegou à conclusão de que existia um efeito de memória nas séries temporais estudadas. A cheia do ano x_{n+1} dependia da cheia do ano anterior x_n . Aplicando o método R/S para as cheias do rio Nilo, Hurst encontrou o valor $H \approx 0.7$ [24].

Feller [26], demonstrou que, para uma série composta de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com variância finita, o valor da razão R/S é dado por

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\pi}{2}n\right)^{0.5} \quad (3.16)$$

Na análise dos dados do nível do rio Nilo, Hurst encontrou $H = 0.7$, mostrando que existe uma correlação entre os dados. Ou seja, a cheia de um determinado ano influencia a cheia do ano seguinte.

3.4.2 Caracterização do Expoente de Hurst

O expoente de Hurst H se encontra no intervalo $(0, 1)$ [27]. Para $H = 0.5$ (Figura 3.7), os valores da série temporal são independentes e não há correlação, como por exemplo, para um processo de Wiener. Para $H > 0.5$ (Figura 3.8), a série é chamada persistente, ou seja, seus incrementos futuros são similares aos incrementos passados. Para $H < 0.5$ (Figura 3.6), a série é denominada anti-persistente, com incrementos positivos no passado,

implicando incrementos negativos no futuro. Portanto, há uma inversão nos incrementos com maior frequência.

Pode-se associar o expoente de Hurst H ao risco de um determinado ativo financeiro. Séries temporais persistentes ($H > 0.5$) são consideradas mais seguras, com um menor risco, uma vez que existe uma certa tendência na evolução temporal dos seus incrementos. Já os ativos caracterizados como anti-persistentes ($H < 0.5$), possuem incrementos oscilantes e imprevisíveis. Portanto, apresentam um risco maior para o investidor.

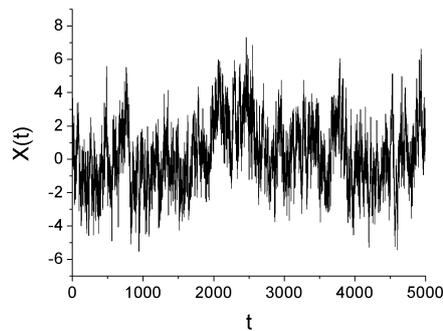


Figura 3.6: $H = 0.1$

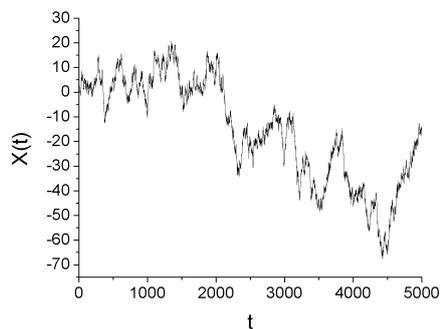


Figura 3.7: $H = 0.5$

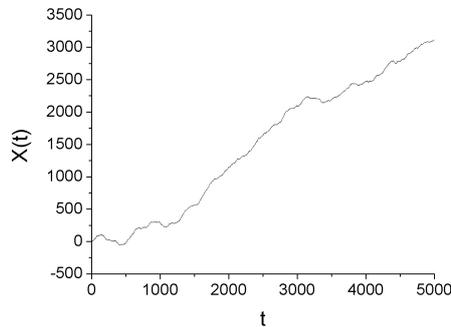


Figura 3.8: $H = 0.9$

3.4.3 Modificações na técnica R/S

Mandelbrot e Wallis [28] notaram que a análise R/S possuía uma tendência de superestimar o expoente H para $H < 0.72$ e subestimar H para $H > 0.72$. Desde então, várias modificações à técnica foram propostas [29, 30, 31, 32, 33]. Além de, eventualmente, introduzir novos parâmetros de escolha difícil e arbitrária, estas modificações não foram capazes de eliminar completamente esta tendência, inerente à técnica. Uma nova técnica para estimar o expoente de Hurst, muito mais robusta e eficiente, foi proposta por Peng et al [34] - a Detrended Fluctuation Analysis (DFA), a qual é o objeto de estudo da próxima subseção.

3.4.4 Detrended Fluctuation Analysis - DFA

A DFA foi proposta originalmente em 1994 [34], e possui a capacidade de detectar correlação de longo alcance em séries temporais não estacionárias. A ideia do método é subtrair possíveis tendências determinísticas da série temporal original e então analisar a flutuação da série “destendenci-

ada" (detrended).

O primeiro passo na implementação da DFA é integrar a série temporal original $Z(t)$, com $t = 1, \dots, T$, para obter a série temporal cumulativa $X(t)$

$$X(t) = \sum_{t'=1}^t (Z_{t'} - \bar{Z}) \quad t = 1, \dots, T \quad (3.17)$$

onde

$$\bar{Z} = \frac{1}{T} \sum_{t'}^T Z_{t'} \quad (3.18)$$

O segundo passo consiste em dividir a série $\{X(t)\}$ em N intervalos temporais não superpostos I_n , de tamanho τ (N é a parte inteira de T/τ). Seja I_n o n -ésimo intervalo ($n = 1, \dots, N$). Nós introduzimos a função de tendência local Y_τ , definida por

$$Y_\tau(t) = a_n + b_n t \quad \text{para} \quad t \in I_n, \quad (3.19)$$

com os coeficientes a_n e b_n representando o ajuste de mínimos quadrados de $X(t)$ no intervalo I_n . Existem variações da técnica DFA, nas quais se consideram ajustes polinomiais de ordem mais alta (η), sendo rotulados por DFA- η . Nos restringiremos à abordagem usual, na qual o ajuste é feito pela reta $Y_\tau(t)$.

No próximo passo, calculamos a função de flutuação $F(\tau)$, definida como

o desvio médio quadrático de $X(t)$ com respeito a função de tendência $Y_\tau(t)$

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [X(t) - Y_\tau(t)]^2} \quad (3.20)$$

O expoente de Hurst H é obtido diretamente das propriedades de escala da função de flutuação, pois $F(\tau) \approx \tau^H$ [35].

3.5 Multifractalidade

Uma das propriedades dos ativos financeiros é a presença de um possível comportamento multifractal [36, 37].

A função de correlação generalizada de ordem q é definida como [38]

$$G_q(t) = \langle |Y(t_0 + t) - Y(t_0)|^q \rangle^{1/q}, \quad (3.21)$$

com $Y(t)$ sendo o preço do ativo financeiro e a média $\langle \rangle$ feita sobre todos os tempos iniciais t_0 . A função $G_q(t)$ possui o comportamento de lei de potências

$$G_q(t) \approx t^{H_q}, \quad (3.22)$$

a qual define a hierarquia dos expoentes H_q , também chamados expoentes de Hurst generalizados. A evolução do preço é multifractal, se a hierarquia dos expoentes H_q variar com q . Caso contrário, é fractal. Em particular, para $q = 2$, recupera-se o expoente de Hurst tradicional, $0 < H_2 < 1$.

Uma forma simples de se detectar a presença de multifractalidade num processo estocástico é analisando o espectro multifractal

$$\tau_q = qH_q - 1 \quad (3.23)$$

Para fractais, τ_q depende linearmente de q . Um comportamento não-linear de τ_q contra q é considerado uma manifestação de multifractalidade [39].

3.6 Probabilidade de Persistência

Uma possibilidade para o estudo da evolução temporal de um processo estocástico, tal como a flutuação do preço de um ativo financeiro $Y(t)$, é através da medida da probabilidade de persistência $P_p(t)$. Esta é a probabilidade de que a variável aleatória $Y(t)$ não adquira seu valor original, $Y(t_0)$, até um tempo posterior $t_0 + t$. Este conceito tem sido implementado com sucesso em fenômenos de crescimento de superfícies [40], e também é utilizado para a determinação da classe de universalidade e das propriedades não lineares de um processo dinâmico, através do expoente θ . Associa-se este expoente com o decaimento em lei de potência $P_p(t) \approx t^{-\theta}$, da probabilidade de persistência para tempos longos.

Em termos da variável aleatória preço do ativo financeiro $Y(t)$, caracterizada por um valor particular $Y(t_0)$, no tempo inicial t_0 , a probabilidade de sempre termos valores acima do valor de referência, até o tempo $t_0 + t$, isto

é, persistência positiva, é dada por

$$P_{p+}(t) = \text{Prob}\{Y(t_0 + t') > Y(t_0), \forall t' < t\} \quad (3.24)$$

e, de maneira similar, a probabilidade de persistência negativa é

$$P_{p-}(t) = \text{Prob}\{Y(t_0 + t') < Y(t_0), \forall t' < t\} \quad (3.25)$$

Em vários estudos de modelos lineares de crescimento de superfícies, caracterizados por probabilidades de persistência positiva e negativa idênticas, mostra-se que $P_p(t)$ decai como uma lei de potência para tempos longos, $P_p(t) \approx t^{-\theta}$, com o expoente de persistência θ obedecendo a seguinte relação

$$\theta = 1 - H_2 \quad (3.26)$$

Devemos enfatizar que essa relação é válida somente para processos estacionários, nos quais a variável aleatória possui valor médio nulo, e que a correlação cresça assintoticamente com o tempo de acordo com uma lei de potência [40, 41].

Capítulo 4

Movimento Browniano

A aleatoriedade é uma característica inerente a todos os fenômenos naturais. Mesmo o mais perfeito cristal possui divesas impurezas e outros defeitos, localizados aleatoriamente em sua estrutura. De fato, mesmo para um cristal perfeito idealizado, há um elemento estocástico na determinação da posição de seus átomos, causado pela agitação térmica.

O estudo das propriedades do *movimento Browniano* é de fundamental importância, graças as suas extraordinárias aplicações em física, química, biologia e até mesmo em economia. Apresentaremos também sua generalização, o *movimento browniano fracionário* (fbm), introduzido por Mandelbrot, e sua outra variante, o *movimento Browniano Geométrico*, base teórica para o famoso modelo de Black-Scholes, de grande importância no mercado de opções.

4.1 Movimento Browniano Unidimensional

Em 1828, Roberto Brown foi o primeiro a notar que o movimento errático dos grãos de pólen era de natureza física, e não biológica [42]. Tudo está sujeito à flutuações térmicas e moléculas, vírus, partículas e quaisquer outros elementos estão em eterno movimento, sofrendo colisões aleatórias causadas pela agitação térmica. Uma partícula à temperatura T possui, em média, a energia cinética de $\frac{3}{2}kT$, com k a constante de Boltzmann. Esta expressão é válida para qualquer tamanho de partícula, como demonstrado por Einstein, em 1905.

Considere a situação na qual uma partícula se move em 1 dimensão, com passos de tamanho ξ dados pela densidade de probabilidade Gaussiana

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}} \quad (4.1)$$

Para intervalos de tempo τ , um passo de tamanho ξ é escolhido aleatoriamente de modo que a probabilidade de encontrarmos ξ no intervalo entre ξ e $\xi + d\xi$ seja $p(\xi, \tau)d\xi$. A seqüência de passos $\{\xi_i\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias Gaussianas independentes. A variância do processo é

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2D\tau, \quad (4.2)$$

uma vez que $\langle \xi \rangle = 0$.

O parâmetro D é o coeficiente de difusão. Segue de 4.2 que o coeficiente

de difusão é dado pela relação de Einstein

$$D = \frac{1}{2\tau} \langle \xi^2 \rangle \quad (4.3)$$

Obtemos um processo estocástico Gaussiano normalizado, isto é, com variância igual a 1, fazendo a seguinte substituição

$$\xi \rightarrow \frac{\xi}{\sqrt{2D\tau}}, \quad (4.4)$$

tal que o novo ξ possui média zero e variância $\langle \xi^2 \rangle = 1$. A posição da partícula é a soma dos passos ξ_i , dada por

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (4.5)$$

É importante destacar que no movimento Browniano, os deslocamentos são independentes e não as posições.

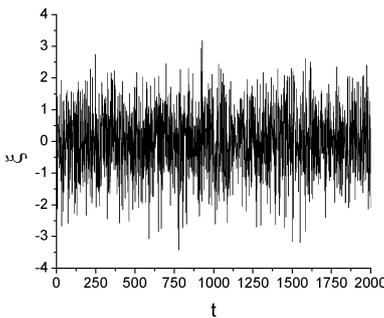


Figura 4.1: Passos independentes do movimento Browniano

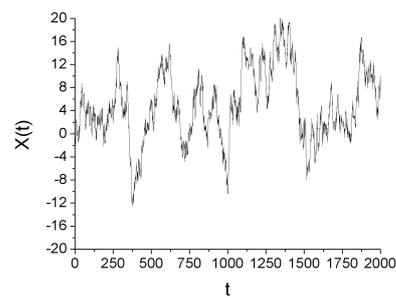


Figura 4.2: Posição da partícula Browniana

Na figura 4.1, apresentamos uma seqüência de passos $\{\xi\}$, e na figura 4.2,

exemplificamos uma trajetória $X(t)$ de uma partícula Browniana.

A posição da partícula Browniana $X(t)$ é uma função randômica do tempo, com média nula e variância

$$\langle [X(t) - X(t_0)]^2 \rangle = 2D|t - t_0| \quad (4.6)$$

Em 1923, Wiener [43] desenvolveu o formalismo matemático para o movimento Browniano. De acordo com Wiener, os incrementos da posição de uma partícula Browniana são dados por

$$X(t) - X(t_0) \approx \xi|t - t_0|^{1/2}, \quad (4.7)$$

para quaisquer dois tempos t e t_0 , ξ é um ruído branco Gaussiano e \approx significa igualdade em distribuição. Frequentemente, acrescenta-se a condição de que $X(t_0) = 0$, mas esta não é uma condição necessária.

4.1.1 Propriedades de Escala para o Movimento Browniano Unidimensional

Na prática, não é possível observar o movimento Browniano com uma resolução infinita. Temos que considerar o caso em que a posição da partícula é observada em intervalos de tempo discretos $b\tau$, onde b é um número inteiro. Considere, por exemplo, $b = 2$. O incremento ξ da posição da partícula é agora a soma dos incrementos independentes ξ' e ξ'' . Assim, a probabilidade conjunta $p(\xi'; \xi'', \tau) d\xi' d\xi''$ de que o primeiro incremento ξ' esteja no intervalo $[\xi', \xi' + d\xi']$, e que o segundo incremento ξ'' esteja no intervalo $[\xi'', \xi'' + d\xi'']$

é dada por

$$p(\xi'; \xi'', \tau) = p(\xi', \tau)p(\xi'', \tau) \quad (4.8)$$

A distribuição de probabilidade conjunta é o produto das duas densidades de probabilidade para cada uma das variáveis, pois os incrementos são estatisticamente independentes. A soma dos dois incrementos deve ser ξ . Assim, se integrarmos sobre todas as possíveis configurações de ξ' e ξ'' , encontramos a densidade de probabilidade para o incremento ξ , dada por

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' p(\xi - \xi', \tau)p(\xi', \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D 2\tau}} e^{-\xi^2/4D 2\tau} \quad (4.9)$$

Estendendo o argumento para $b\tau$ intervalos temporais entre as observações, temos

$$p(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D b\tau}} e^{(-\frac{\xi^2}{4Db\tau})} \quad (4.10)$$

Conclui-se que para qualquer número b de passos entre as observações da partícula, sempre encontramos um processo estocástico Gaussiano com incrementos independentes, média nula $\langle \xi \rangle = 0$ e variância $\langle \xi^2 \rangle = 2Dt$, para $t = b\tau$.

As propriedades de escala do movimento Browniano podem ser expressas, de uma maneira explícita, transformando a equação 4.1 através da seguinte

substituição:

$$\begin{aligned}\hat{\xi} &= b^{1/2}\xi \\ \hat{\tau} &= b\tau\end{aligned}$$

O resultado dessa transformação nos fornece a relação de escala para a densidade de probabilidade

$$p(\hat{\xi} = b^{1/2}\xi, \hat{\tau} = b\tau) = b^{-1/2}p(\xi, \tau) \quad (4.11)$$

Aqui, o pré-fator $b^{-1/2}$ nos assegura a correta normalização da função densidade de probabilidade.

4.1.2 Movimento Browniano e Economia

Um dos paradigmas aceitos entre os economistas é a eficiência do mercado na determinação do preço mais justo de um dado ativo financeiro. A hipótese de eficiência de mercado foi originalmente proposta na década de 60 [44], e ganhou bases matemáticas através do trabalho de Samuelson, em 1965 [45]. Um mercado é considerado eficiente, se todas as informações disponíveis são instantaneamente absorvidas e automaticamente refletidas no preço dos ativos. Ou seja, a *mudança de preço* de um ativo no tempo t é independente do seu valor em tempos anteriores.

A motivação teórica para a hipótese de eficiência de mercado teve origem no trabalho pioneiro de Bachelier [8]. No começo do século 20, Bachelier propôs que os ativos de um mercado especulativo poderiam ser descritos

por um processo estocástico, cujos incrementos possuíam uma distribuição Gaussiana. Assim, por vários anos, utilizou-se o movimento Browniano para modelar a dinâmica dos preços dos ativos financeiros. Contudo, há um desacordo entre teoria e dados empíricos. A função densidade de probabilidade da variação dos preços, considerada Gaussiana pela hipótese de mercado eficiente, é mais leptocúrtica e com um decaimento mais lento nas pontas [14, 11, 2]. Portanto, a evolução de preço de um ativo financeiro não é análoga ao movimento Browniano.

Uma das mais importantes aplicações do movimento Browniano em Economia está no modelo de Black Scholes para o mercado de opções [46, 47]. Black e Scholes deduziram uma equação para a determinação do preço racional e justo $Y(t)$ de uma opção no instante t , $C(Y, t)$. Como o preço do ativo financeiro é uma variável aleatória, o preço racional da opção $C(Y, t)$ é uma função de uma variável aleatória. Assim, Black and Scholes assumiram que o preço do ativo poderia ser descrito como um processo de Ito [48], definido pela equação diferencial estocástica

$$dY = a(Y, t)dt + b(Y, t)dW \quad (4.12)$$

De uma maneira mais específica, eles assumiram que o preço da opção segue um *movimento Browniano geométrico*, dado por

$$dY = \mu Y dt + \sigma Y dW, \quad (4.13)$$

onde μ é o retorno esperado por unidade de tempo, σ^2 é a variância por

unidade de tempo, e W é um processo de Wiener.

Esta hipótese implica numa distribuição Gaussiana para o logaritmo das variações dos preços ou, em outras palavras, numa *distribuição log-normal* para a variação dos preços.

4.2 Movimento Browniano Fracionário

Mandelbrot introduziu o conceito de *movimento Browniano fracionário* [49, 50], como uma generalização da função randômica $X(t)$ proposta por Wiener. Mais especificamente, Mandelbrot alterou o expoente $1/2$ na equação (4.7), para qualquer número real no intervalo $0 < H < 1$ (H é o expoente de Hurst) de forma que

$$X(t) - X(t_0) \approx \xi |t - t_0|^H, \quad (4.14)$$

com \approx denotando igualdade em distribuição.

O processo Browniano fracionário possui as seguintes propriedades [49]

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0 \quad (4.15)$$

$$\langle [B_H(t) - B_H(t_0)]^2 \rangle \approx |t - t_0|^{2H} \quad (4.16)$$

Segundo Peitgen [51] e Campanha [52], a correlação entre os incrementos do movimento Browniano fracionário, $B_H(t)$, é dada por

$$C_B(t) = \frac{\langle -B_H(-t)B_H(t) \rangle}{\langle B_H(t)^2 \rangle} = 2(2^{2H-1} - 1) \quad (4.17)$$

Note que a correlação de um movimento Browniano fracionário (4.17) não depende do tempo, mas apenas do expoente de Hurst H .

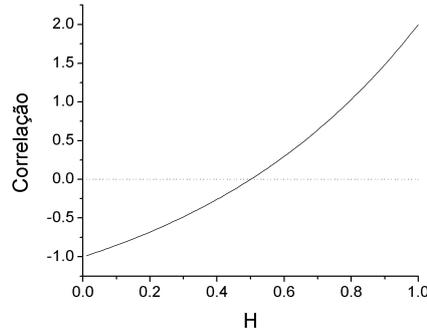


Figura 4.3: Correlação do movimento Browniano fracionário

Analisando a figura 4.3, podemos notar claramente os diferentes comportamentos do movimento Browniano fracionário com expoentes H distintos. Para $H = 1/2$, a correlação é zero. Portanto, os valores da série temporal são independentes. Recupera-se o movimento Browniano tradicional. Para $H > 1/2$, a correlação é positiva, ou persistente. Finalmente, para $H < 1/2$, a correlação é negativa, ou anti-persistente.

Existem diversos algoritmos geradores do movimento Browniano fracionário [27, 52, 53]. Optamos pelo algoritmo descrito por Feder [27]. Dessa maneira, os incrementos do movimento Browniano, na sua forma discreta, são dados por

$$\begin{aligned}
 B_H(t) - B_H(t-1) &= \frac{n^{-H}}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \sum_{i=1}^n (i)^{H-1/2} \xi_{(1+n(M+t)-i)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n(M-1)} ((n+1)^{H-1/2} - i^{H-1/2}) \xi_{(1+n(M-1+t)-i)} \right\} \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Aqui, $\{\xi_i\}$, com $i = 1, \dots, M$, é um conjunto de variáveis aleatórias Gaussianas, com média zero e variância unitária, e n é a unidade de discretização do tempo. Através desse procedimento, podemos gerar uma seqüência de incrementos de $B_H(t)$ a partir de uma seqüência de variáveis randômicas Gaussianas. Note que esta aproximação é uma média por janelas de um processo Gaussiano, com uma função peso do tipo lei de potências.

Nas figuras 4.4 e 4.5 a seguir, apresentamos alguns ensaios de FBM com diferentes expoentes de Hurst.

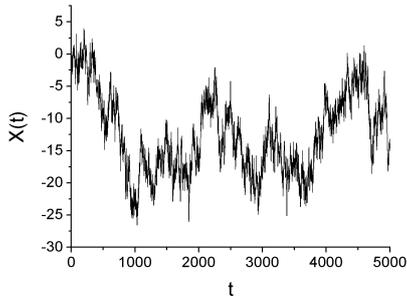


Figura 4.4: FBM com $H = 0.3$

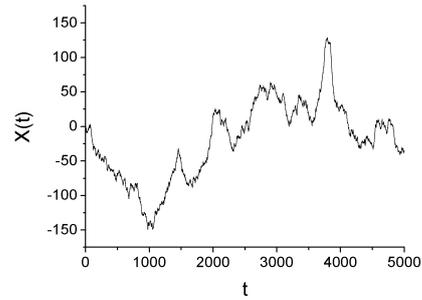


Figura 4.5: FBM com $H = 0.7$

Capítulo 5

Econofísica do Índice NYSE

5.1 Índice NYSE

O índice NYSE Composto (NYSE Composite Index) foi criado para medir a performance das companhias mais líquidas e proeminentes. O índice consiste das ações de aproximadamente 2.000 empresas, incluindo mais de 1.600 companhias americanas, e cerca de 360 companhias não-americanas. Com um valor de mercado de cerca de 18 trilhões de dólares, é uma referência para investidores que desejam acompanhar as projeções do mercado global através de um único índice.

Na figura 5.1, apresentamos a evolução temporal diária do índice, denotado pela variável $Y(t)$, no período entre 31 de dezembro de 1965 a 31 de janeiro de 2006 (10088 dias úteis). Na figura 5.2, apresentamos os retornos logarítmicos $Z(t)$ no mesmo período.

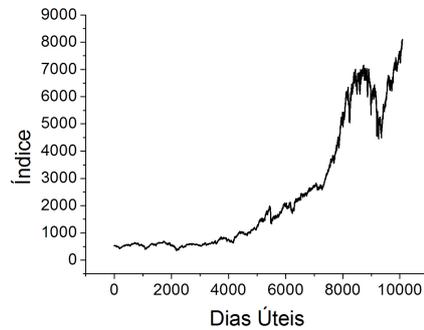


Figura 5.1: Evolução Temporal do Índice NYSE Composto

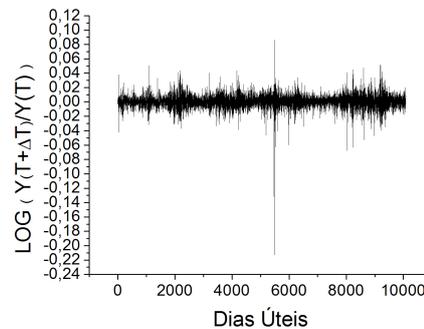


Figura 5.2: Evolução Temporal dos Retornos Logarítmicos do Índice NYSE Composto

5.2 Distribuição de Probabilidade

Conforme visto nos capítulos anteriores, acreditava-se que os retornos de um ativo financeiro se distribuissem de acordo com uma Gaussiana. Como podemos ver na figura 5.3, essa hipótese é falha, pois a distribuição dos retornos é mais leptocúrtica do que a Gaussiana. Um melhor ajuste é fornecido por uma distribuição estável simétrica de Lévy (veja seção 2.2), com $\alpha = 1.47 \pm 0.06$.

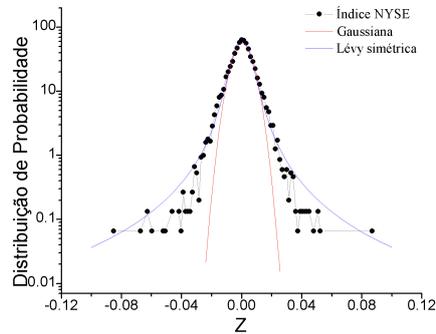


Figura 5.3: Histograma dos Retornos Logarítmos do Índice NYSE Composto

5.3 Lei de Escala Temporal

A Lei de escala temporal (vide seção 2.4) para o índice NYSE pode ser obtida através da probabilidade de retorno à origem (figura 5.4). Obtemos uma lei de potências do tipo $P(0) \approx \Delta t^\lambda$, com $\lambda = 0.68 \pm 0.06$.

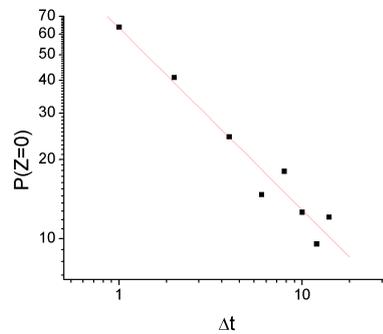


Figura 5.4: Probabilidade de Retorno a Origem

5.4 Autocorrelação Temporal

O tempo de autocorrelação temporal dos retornos é uma propriedade de grande interesse em econofísica, pois fornece uma medida da eficiência do

mercado (vide seção 3.1). Na figura 5.5 vemos que o tempo de autocorrelação temporal dos retornos diários do índice NYSE Composto é de menos de um dia de mercado.

Além da análise no espaço temporal, também podemos fazer a análise correspondente no espaço de frequências. Na figura 5.6, calculamos o espectro de potências do índice (conforme seção 3.2), o qual possui um decaimento do tipo lei de potência $1/f^2$, análogo portanto a um processo de Wiener.

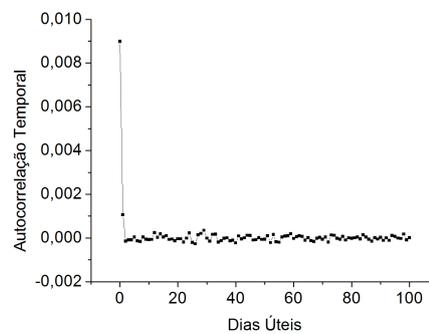


Figura 5.5: Função de Autocorrelação Temporal

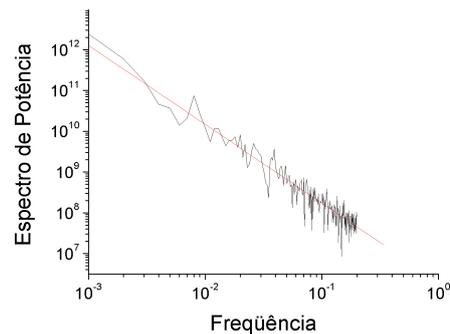


Figura 5.6: Espectro de Potências

Conseqüentemente, para dados de baixa frequência, a evolução dos retornos do índice é praticamente decorrelacionada.

5.5 Volatilidade

Investigamos também a volatilidade do índice NYSE Composto (veja seção 3.3). De acordo com o resultado apresentado na figura 5.7, a volatilidade possui um comportamento do tipo lei de potências, $\sigma(t) \sim t^\vartheta$, com $\vartheta = 0.57 \pm 0.01$.

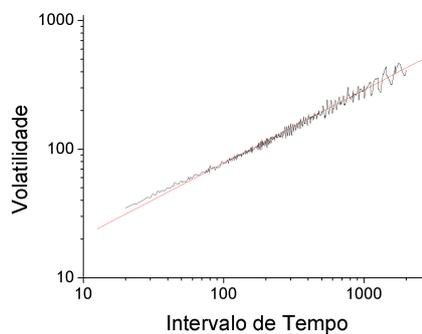


Figura 5.7: Volatilidade

5.6 Expoente de Hurst

Através do expoente de Hurst, podemos determinar não apenas a existência de correlação na série temporal, mas também caracterizá-la como persistente ou anti-persistente (veja seção 3.4). Nas figuras a seguir (5.8,5.9), calculamos o expoente de Hurst a partir de dois métodos distintos: a técnica R/S (figura 5.8) e a técnica DFA (figura 5.9). Há um desacordo entre os valores dos expoentes. O método R/S apresenta a tendência de superestimar o valor do expoente H para $H < 0.72$. Em ambas as técnicas, a escolha arbitrária do tamanho das janelas temporais e a desconsideração dos pontos

finais da série histórica, para tamanhos de janela não múltiplos do tamanho total da série, tem influência direta na estimativa do expoente.

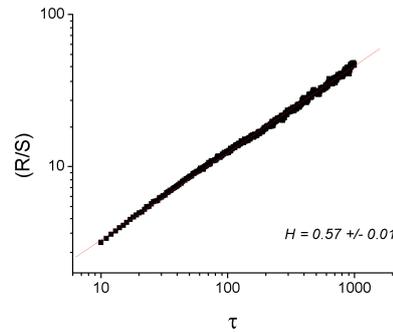


Figura 5.8: Expoente de Hurst via R/S

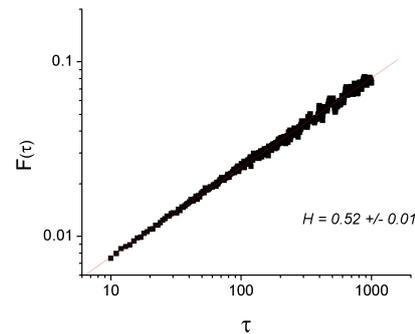


Figura 5.9: Expoente de Hurst via DFA

5.7 Probabilidade de Persistência

Na figura 5.10, mostramos as probabilidades de persistência positiva e negativa do índice NYSE (conforme a seção 3.6).

Podemos relacionar a probabilidade de persistência com o expoente de

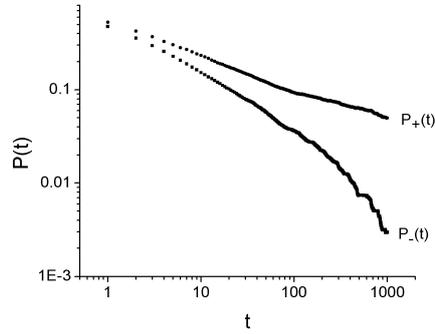


Figura 5.10: Probabilidade de Persistência Positiva e Negativa

Hurst, através da relação

$$P_p(t) = \frac{P_{p+} + P_{p-}}{2} \approx t^{-\theta} \quad (5.1)$$

com $H = 1 - \theta$.

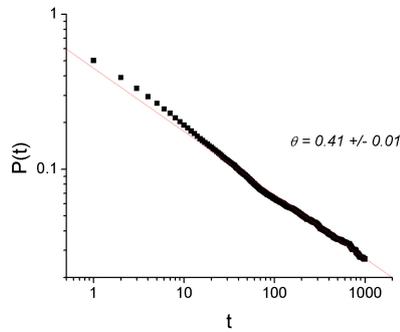


Figura 5.11: Probabilidade de Persistência e Hurst

Obtemos o valor para o expoente $\theta = 0.41 \pm 0.01$ (figura 5.11), o que implica num expoente de Hurst $H = 0.59 \pm 0.01$.

5.8 Multifractalidade

Investigamos a presença de multifractalidade (vide seção 3.5) na série temporal do índice NYSE, calculando o espectro multifractal. Notamos um claro comportamento não-linear no espectro, o que indica a presença de multifractalidade [36, 37]. Portanto, não há um único expoente de Hurst, mas sim, toda uma família de expoentes de Hurst H_q (figura 5.12).

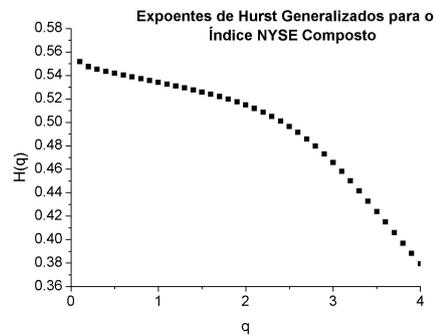


Figura 5.12: Família de expoentes H_q

Capítulo 6

Dinâmicas Autoregressivas

6.1 Processos estocásticos ARCH/GARCH

O processo autoregressivo ARCH foi introduzido por Engle¹, em 1982 [54]. Os modelos ARCH são capazes de descrever processos estocásticos localmente não-estacionários, mas que possuam uma estacionariedade assintótica. Portanto, os parâmetros que controlam a função densidade de probabilidade $P_t(x)$, num tempo t , flutuam. Contudo, tal dependência local não impede que o processo estocástico possua uma pdf assintótica $P(x)$ razoavelmente bem definida.

Um processo estocástico com heteroscedasticidade² condicional autore-

¹Ganhador do prêmio Nobel de Economia em 2003.

²Uma série de variáveis aleatórias possui heteroscedasticidade se sua variância variar com o tempo. Quando a variância é constante, o processo possui homoscedasticidade.

gressiva ARCH(p) é definido pela equação

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p x_{t-p}^2, \quad (6.1)$$

onde os parâmetros $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ são constantes positivas e x_t é uma variável randômica, com média zero e variância σ_t^2 , gerada a partir de uma função densidade de probabilidade $P_t(x_t)$ prévia e arbitrariamente escolhida. Uma vez escolhidos os parâmetros α 's e a forma de $P_t(x_t)$, o processo ARCH(p) está definido. Itera-se a equação (6.1) e a distribuição assintótica $P(x)$ é determinada. Compara-se esta distribuição de probabilidades com a função densidade de probabilidade real do ativo financeiro em questão. Infelizmente, para que se consiga obter bons resultados, o modelo ARCH(p) requer uma memória muito longa, ou seja, um valor grande de p . Por esta razão, Bollerslev [55] propôs, em 1986, a generalização da dinâmica ARCH - os processos GARCH(p,q).

Um processo GARCH(p,q) é definido por

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p x_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 \quad (6.2)$$

Aqui, os parâmetros de controle α 's e β 's são constantes reais positivas e x_t são variáveis randômicas com zero de média e variância obtida a partir da probabilidade condicional prévia e arbitrariamente escolhida $P_t(x_t)$. A densidade de probabilidade usualmente escolhida é a Gaussiana. Limitaremos nosso estudo ao processo GARCH(1,1) (Markoviano) dado por

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (6.3)$$

o qual possui somente três parâmetros α_0 , α_1 e β_1 . A condição inicial comumente escolhida é $\sigma_0^2 = 0$.

6.2 GARCH Gaussiano

Na próxima subseção, apresentaremos o procedimento padrão para o cálculo dos parâmetros de controle α_0 , α_1 e β_1 da dinâmica GARCH(1,1), com distribuição de probabilidade condicional Gaussiana [56, 57].

6.2.1 Dinâmica GARCH Padrão

A forma padrão de se determinar os parâmetros de controle da dinâmica GARCH(1,1) é a partir do cálculo da variância, da curtose, e do tempo de autocorrelação, obtidos *diretamente* da série temporal de um ativo financeiro.

A dinâmica GARCH(1,1) é dada por

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \quad (6.4)$$

com α_0 , α_1 e β_1 constantes reais positivas.

Para $t = 1$ temos

$$\sigma_2^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1^2 + \beta_1 \sigma_1^2 \quad (6.5)$$

Supondo que a densidade de probabilidade $P(x_t, \sigma_t^2)$ seja tal que $\langle x_t \rangle = 0$, teremos portanto $\langle x_t^2 \rangle = \langle \sigma_t^2 \rangle$.

Calculando-se a média de (6.5) obtemos:

$$\langle \sigma_2^2 \rangle = \alpha_0 + \alpha_1 \langle x_1^2 \rangle + \beta_1 \langle \sigma_1^2 \rangle = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \langle \sigma_1^2 \rangle \quad (6.6)$$

Iterando-se mais uma vez a equação (6.4)

$$\sigma_3^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_2^2 + \beta_1 \sigma_2^2 \quad (6.7)$$

Tomando a média

$$\langle \sigma_3^2 \rangle = \alpha_0 + \alpha_1 \langle x_2^2 \rangle + \beta_1 \langle \sigma_2^2 \rangle = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \langle \sigma_2^2 \rangle \quad (6.8)$$

De maneira análoga

$$\langle \sigma_4^2 \rangle = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \langle \sigma_3^2 \rangle \quad (6.9)$$

e assim sucessivamente. Substituindo a equação (6.5) em (6.7):

$$\langle \sigma_3^2 \rangle = \alpha_0(1 + (\alpha_1 + \beta_1)) + (\alpha_1 + \beta_1)^2 \langle \sigma_1^2 \rangle \quad (6.10)$$

Substituindo 6.10 em (6.9), obtemos

$$\langle \sigma_4^2 \rangle = \alpha_0(1 + (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1)^2) + (\alpha_1 + \beta_1)^3 \langle \sigma_1^2 \rangle \quad (6.11)$$

Generalizando para N iterações

$$\langle \sigma_N^2 \rangle = \alpha_0 \left[\frac{1}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \right] + (\alpha_1 + \beta_1)^{N-1} \langle \sigma_1^2 \rangle \quad (6.12)$$

Para $N \rightarrow \infty$ e $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$, a variância final do processo GARCH (6.4) será:

$$\langle \sigma_\infty^2 \rangle = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad (6.13)$$

É importante ressaltar que este resultado é *independente* da escolha da distribuição de probabilidade condicional da dinâmica GARCH(1,1).

Para o cálculo da curtose, partimos da distribuição Gaussiana

$$P(x, \sigma^2) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (6.14)$$

com média zero, $\langle x^2 \rangle = \sigma^2$ e $\langle x^4 \rangle = 3\sigma^4$.

Após 3 iterações da dinâmica GARCH(1,1) temos

$$\sigma_2^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1^2 + \beta_1 \sigma_1^2 \quad (6.15)$$

$$\sigma_3^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_2^2 + \beta_1 \sigma_2^2 \quad (6.16)$$

$$\sigma_4^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_3^2 + \beta_1 \sigma_3^2 \quad (6.17)$$

Dessa maneira, o quarto momento $\langle x^4 \rangle^{(3)}$ após 3 iterações vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x_1^2/2\sigma_1^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x_2^2/2\sigma_2^2}}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x_3^2/2\sigma_3^2}}{\sigma_3\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x_4^2/2\sigma_4^2}}{\sigma_4\sqrt{2\pi}} x_4^4 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (6.18)$$

Integrando em x_4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x_1^2/2\sigma_1^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x_2^2/2\sigma_2^2}}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x_3^2/2\sigma_3^2}}{\sigma_3\sqrt{2\pi}} 3\sigma_4^4 dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.19)$$

Utilizando 6.17 e integrando em x_3 , temos

$$3 \int \int \frac{e^{-(x_1^2+x_2^2)/(2(\sigma_1+\sigma_2))}}{\sigma_1\sigma_2 2\pi} \times \{(\alpha_0 + \beta_1\sigma_3^2)^2 + 2(\alpha_0 + \beta_1\sigma_3^2)\alpha_1\sigma_3^2 + 3\alpha_1^2\sigma_3^4\} dx_1 dx_2 \quad (6.20)$$

Utilizando 6.16 e integrando em x_2 , obtemos

$$\begin{aligned} & 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x_1^2/2\sigma_1^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} [\alpha_0^2[1 + 2(\alpha_1 + \beta_1) + (\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^3)]] \\ & + 2(\alpha_1 + \beta_1)\alpha_0[(\alpha_1 + \beta_1) + (\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2)][\alpha_0 + \alpha_1x_1^2 + \beta_1\sigma_1^2] \\ & + [\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2]^2[(\alpha_0 + \beta_1\sigma_1^2)^2 \\ & + 2(\alpha_0 + \beta_1\sigma_1^2)\alpha_1x_1^2 + \alpha_1^2x_1^4]] dx_1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

E, finalmente, fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= \gamma \\ \Delta &= \beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2 = \gamma^2 + 2\alpha_1^2 \end{aligned} \quad (6.22)$$

E, integrando em x_1 ($\alpha_0 = \sigma_1^2(1 - \alpha_1 - \beta_1) = \sigma_1^2(1 - \gamma)$), temos

$$\begin{aligned} \langle x^4 \rangle^{(3)} &= 3[\sigma_1^4(1 - \gamma)^2[1 + 2\gamma + \Delta] + 2\gamma\sigma_1^4(1 - \gamma)(\gamma + \Delta) \\ &+ \Delta^2\sigma_1^4[(1 - \gamma)^2 + 2\gamma(1 - \gamma)]] \end{aligned} \quad (6.23)$$

Dividindo os dois lados da equação por σ_1^4 e reagrupando os termos

$$\frac{\langle x^4 \rangle^{(3)}}{\sigma_1^4} = 3[1 - \gamma^2 + (1 - \gamma^2)\Delta + (1 - \gamma^2)\Delta^2 + \Delta^3] \quad (6.24)$$

Utilizando o fato que $\gamma^2 = \Delta - 2\alpha_1^2$

$$k_G^{(3)} = \frac{\langle x^4 \rangle^{(3)}}{\sigma_1^4} = 3 + \frac{6\alpha_1^2(1 - \Delta^3)}{1 - \Delta} \quad (6.25)$$

Por indução, $k_G^{(N)} = 3 + \frac{6\alpha_1^2(1 - \Delta^N)}{1 - \Delta}$. Se $\Delta < 1$ e $N \rightarrow \infty$, então

$$k_G = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2} \quad (6.26)$$

De acordo com Bollerslev [55], a autocorrelação temporal da variável x_t^2 decai exponencialmente (veja Apêndice)

$$\langle x_t^2 x_{t+\tau}^2 \rangle \approx e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} \quad (6.27)$$

com o tempo de autocorrelação dado por

$$\tau_c = |\ln(\alpha_1 + \beta_1)|^{-1} \quad (6.28)$$

Definimos a função de autocorrelação temporal normalizada $F(\tau)$ de x_t^2

$$F(\tau) = \frac{\langle x_t^2 x_{t+\tau}^2 \rangle - \langle x_t^2 \rangle \langle x_{t+\tau}^2 \rangle}{\langle x_t^4 \rangle - \langle x_t^2 \rangle^2} \quad (6.29)$$

A determinação do tempo de autocorrelação é muito difícil e imprecisa, pois não é possível fazer um ensemble com os dados de um ativo financeiro, posto que a série temporal real é única.

Para o índice NYSE Composto, a variância e a curtose podem ser facilmente determinadas: $\sigma_{\text{NYSE}} = 8.084 \times 10^{-5}$ e $k_{\text{NYSE}} = 38.507$. Uma forma de

se determinar o tempo de autocorrelação é procurando pelo primeiro zero da função de autocorrelação temporal. Desta maneira, obtemos $\tau_C^{\text{NYSE}} = 143$. Substituindo estes valores nas equações 6.13, 6.26 e 6.28, determinamos o conjunto s_1 dos parâmetros de controle da dinâmica GARCH(1,1), na sua forma padrão

$$s_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (5.63 \times 10^{-7}, 5.12 \times 10^{-2}, 0.94185) \quad (6.30)$$

6.2.2 Nova proposta

Propomos, aqui, o uso do sexto momento padronizado, em vez do tempo de autocorrelação, para o cálculo dos parâmetros de controle da dinâmica GARCH(1,1) [58]. O sexto momento padronizado Θ é definido por

$$\Theta = \frac{\langle x^6 \rangle}{\sigma^6} \quad (6.31)$$

Utilizando-se a equação 6.13, esta quantidade pode ser escrita como uma função de somente dois parâmetros, isto é, $\Theta = \Theta(\alpha_1, \beta_1)$. Infelizmente, não existe uma expressão analítica para o sexto momento padronizado. Mas, a partir de

$$\langle x^n \rangle = \int \dots \int \prod_{t=1}^{T-1} P_t(x_t) dx_t \int P_T(x_T) x_T^n dx_T \quad (6.32)$$

podemos escrever uma expansão em série de duas variáveis para $\Theta(\alpha_1, \beta_1)$, onde T é o número de iterações de 6.32.

O ponto fundamental é que esta série é *exata* em $\alpha_1^m \beta_1^n$ até a ordem

$(m + n) = 2T - 1$, isto é, os coeficientes de $\alpha_1^m \beta_1^n$ não se alteram em um número maior de iterações (inclusive no limite termodinâmico).

O sexto momento padronizado pode ser obtido tomando o limite $T \rightarrow \infty$, ou seja

$$\Theta(\alpha_1, \beta_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Theta(\alpha_1, \beta_1, T) \quad (6.33)$$

Utilizando o software Maple ³, conseguimos iterar até $T = 30$. Portanto, há uma seqüência de $\Theta(\alpha_1, \beta_1, T)$, com $T = 1, \dots, 30$, a qual pode ser explorada por técnicas de extrapolação. Para o índice NYSE Composto, temos $k_{\text{NYSE}} = 38.507$ e $\Theta_{\text{NYSE}} = 17717.37$. Resolvendo a equação da curtose e a seqüência do sexto momento padronizado, obtemos as curvas $\beta_1(\alpha_1)$ (figura 6.1)

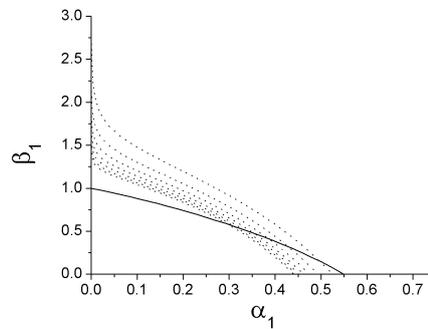


Figura 6.1: A linha cheia é a solução da equação da curtose $k_G = 38.507$. As linhas pontilhadas são as soluções da seqüência do sexto momento padronizado para $T = 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30$.

Nos pontos onde estas curvas interceptarem a curva da curtose, teremos uma seqüência de soluções $\alpha_1(T)$ (figura 6.2). Estes pontos são muito bem

³Maple is a registered trademark of Waterloo Maple Inc.

ajustados pela exponencial

$$\alpha_1(T) = Be^{-T/\Gamma} + C, \quad (6.34)$$

onde $B = 0.82 \pm 0.04$, $\Gamma = 9.47 \pm 0.52$ e $C = 0.26391 \pm 0.00574$. Portanto, o valor extrapolado do parâmetro α_1 é 0.26391.

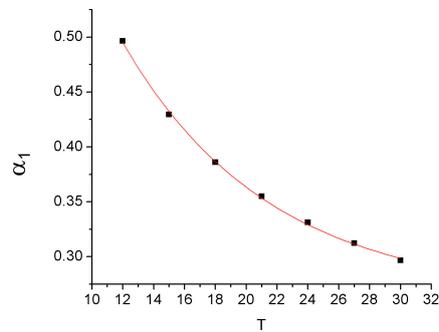


Figura 6.2: Os pontos de intersecção entre o sexto momento padronizado e a curtose geram a seqüência $\alpha_1(T)$.

Usando as equações da variância (6.13) e da curtose (6.26), obtemos o conjunto s_2 para os parâmetros de controle

$$s_2 = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (7.81 \times 10^{-6}, 0.26391, 0.63947) \quad (6.35)$$

Portanto, podemos simular o processo GARCH(1,1) Gaussiano, a partir dos dois conjuntos de parâmetros. Na figura 6.3, plotamos a função densidade de probabilidade dos retornos do índice NYSE Composto juntamente com os 10.088 pontos gerados pela dinâmica GARCH a partir dos conjuntos s_1 e s_2 .

Vemos que as pdf's obtidas com as dinâmicas GARCH são menos leptocúrticas que as do índice NYSE.

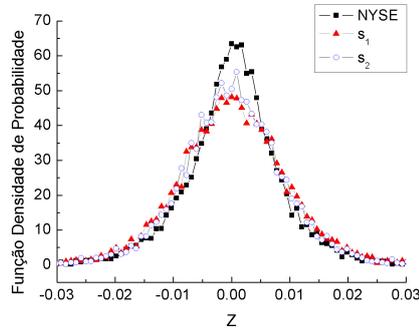


Figura 6.3: Função densidade de probabilidade para os 10.088 pontos do índice NYSE Composto e o modelo GARCH Gaussiano com os parâmetros de controle s_1 e s_2 .

Denotemos por $P(i)$ o valor da pdf no ponto i . Com o intuito de medirmos, numericamente, o quanto que as pdf's geradas com a dinâmica GARCH estão distantes da pdf dos dados reais, calculamos o desvio médio quadrático

$$\Delta P_s = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (P_{nyse}(i) - P_s(i))^2}, \quad (6.36)$$

onde M é o número total de pontos no gráfico e s é um dos conjuntos de parâmetros.

Encontramos $\Delta P_{s_1} = 5.33$ e $\Delta P_{s_2} = 4.27$. Portanto, o conjunto s_2 fornece um melhor resultado do que s_1 .

Para a função de autocorrelação $F(\tau)$ (figura 6.4), o conjunto s_2 dá resultados claramente muito superiores ao conjunto s_1 .

Concluimos que, ao contrário do uso comum, o conjunto s_1 não é o melhor conjunto de parâmetros GARCH. Nossa proposta - a utilização do sexto momento padronizado em vez do tempo de autocorrelação - produz um conjunto de parâmetros s_2 , o qual fornece um ajuste muito melhor tanto para a

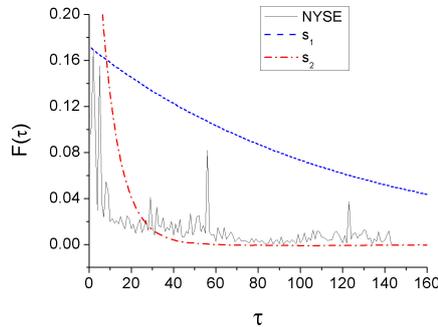


Figura 6.4: Função de autocorrelação temporal $F(\tau)$ contra o tempo τ . Ambos os conjuntos de dados GARCH foram obtidos após uma média de ensemble com 10.000 ensaios.

função densidade de probabilidade quanto para a função de autocorrelação temporal.

6.3 GARCH Exponencial

Em vez de escolhermos uma probabilidade condicional Gaussiana, como visto na seção anterior, nós propomos uma distribuição exponencial com a forma

$$P_t(x_t) = \frac{\exp(-\frac{\sqrt{2}|x_t|}{\sigma_t})}{\sigma_t\sqrt{2}}, \quad (6.37)$$

De maneira análoga ao caso Gaussiano, calcularemos o segundo, quarto e sexto momentos, os quais podem ser obtidos de 6.32. Como visto na seção anterior, a equação da variância não se altera, uma vez que sua dedução independe da função densidade de probabilidade condicional escolhida. Assim,

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad (6.38)$$

Utilizando 6.32, nós deduzimos a seguinte expressão analítica para a curtose de um processo GARCH Exponencial

$$k_E(\alpha_1, \beta_1) = \frac{\langle x^4 \rangle}{\sigma^4} = 6 + \frac{30\alpha_1^2}{1 - 6\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2} \quad (6.39)$$

A partir da variância (equação 6.38), da curtose (equação 6.39) e do tempo de autocorrelação (equação 6.28), encontramos o seguinte conjunto para os parâmetros de controle

$$ss_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (5.63 \times 10^{-7}, 0.04842, 0.94461) \quad (6.40)$$

Para determinarmos o sexto momento padronizado $\Theta(\alpha_1, \beta_1)$, calculamos uma expansão em série usando simultaneamente as equações 6.38, 6.32 e 6.37. Mais uma vez, esta série é *exata* até a ordem $2T - 1$. Utilizando o software Maple⁴, conseguimos iterar até $T = 18$ (figura 6.5).

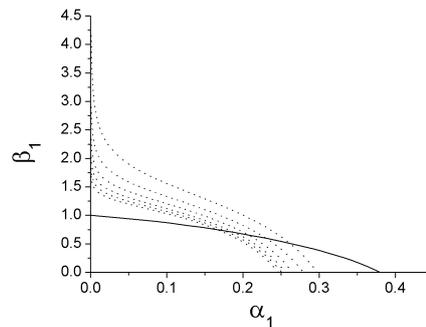


Figura 6.5: Linha cheia é a solução da equação da curtose $k_E = 38.507$. As linhas pontilhadas são as soluções para o sexto momento padronizado para $T = 8, 10, 12, 14, 16, 18$.

A seqüência de soluções $\alpha_1(T)$ é muito bem ajustada por uma exponencial

⁴Maple is a registered trademark of Waterloo Maple Inc.

(figura 6.6)

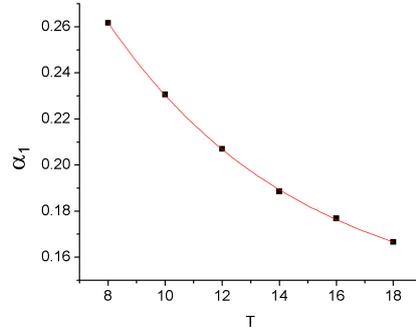


Figura 6.6: Os pontos de intersecção entre as curvas da curtose e do sexto momento padronizado geram uma seqüência $\alpha_1(T)$.

$$\alpha_1(T) = Be^{-T/\Gamma} + C, \quad (6.41)$$

com $B = 0.40 \pm 0.01$, $\Gamma = 6.77 \pm 0.26$ e $C = 0.13847 \pm 0.00251$. Portanto, o valor extrapolado de α_1 é 0.13847.

A partir das equações 6.38 e 6.39, encontramos o novo conjunto ss_2 para os parâmetros de controle

$$ss_2 = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (4.73 \times 10^{-6}, 0.13847, 0.80303) \quad (6.42)$$

Da mesma forma que na seção anterior, simularemos o processo GARCH Exponencial a partir dos dois conjuntos de parâmetros ss_1 e ss_2 . Na figura 6.7, calculamos a pdf do índice NYSE em conjunto com as pdf's geradas pelas dinâmicas GARCH.

Ao contrário do caso Gaussiano, as funções densidade de probabilidade

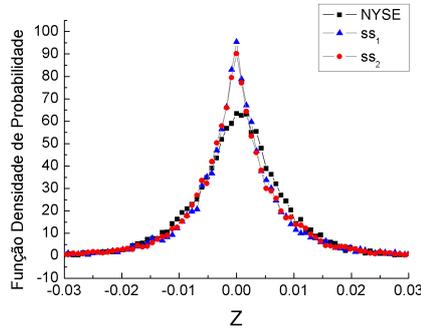


Figura 6.7: Função densidade de probabilidade para os 10.088 pontos do índice NYSE Composto, em conjunto com o modelo GARCH Exponencial com os parâmetros de controle ss_1 e ss_2 .

para o GARCH Exponencial são mais leptocúrticas do que a pdf do índice NYSE. A partir do cálculo do desvio médio quadrático, encontramos os seguintes resultados: $\Delta P_{ss_1} = 6.14$ e $\Delta P_{ss_2} = 5.47$. Novamente, o conjunto de parâmetros obtidos a partir do sexto momento padronizado fornece um melhor ajuste aos dados reais.

A diferença é bem mais nítida quando analisamos a função de autocorrelação temporal $F(\tau)$, como podemos ver claramente na figura 6.8

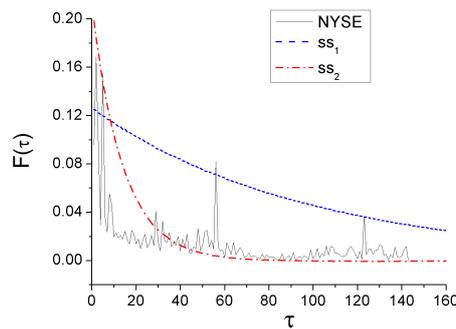


Figura 6.8: Função de autocorrelação temporal $F(\tau)$ contra o tempo τ . Ambos os conjuntos GARCH foram obtidos após uma média de ensemble com 10.000 ensaios.

Portanto, independente da escolha da distribuição de densidade de probabilidade condicional Gaussiana ou Exponencial, o uso do sexto momento padronizado fornece, sem sombra de dúvida, resultados melhores do que o uso do tempo de autocorrelação. Vale a pena destacar quão distantes estão os parâmetros β_1 obtidos por nossa proposta ($\beta_1 = 0.64$ e $\beta_1 = 0.80$ para a Gaussiana e a Exponencial, respectivamente) daqueles sugeridos pela literatura, $\beta_1 > 0.90$ [56, 2].

6.4 GARCH Gaussiano versus GARCH Exponencial

Vamos comparar quão próximos os processos GARCH Gaussiano e Exponencial estão do índice NYSE Composto, utilizando a nossa prescrição.

Na figura 6.9, apresentamos as funções densidade de probabilidade dos processos GARCH, em conjunto com a pdf do índice NYSE. O cálculo do desvio médio quadrático fornece $\Delta P_{s_2} = 4.27$ e $\Delta P_{ss_2} = 5.47$. Portanto, o GARCH Gaussiano está mais próximo da pdf do índice NYSE Composto.

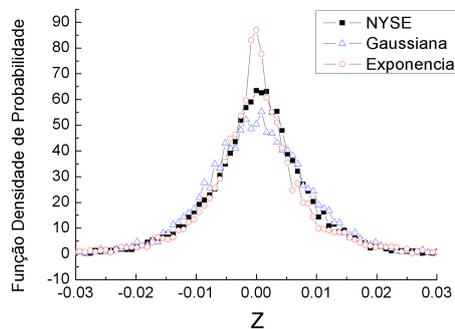


Figura 6.9: Função densidade de probabilidade dos retornos Z .

Na figura 6.10, apresentamos as funções de autocorrelação temporal $F(\tau)$. Calculando-se, novamente, o desvio médio quadrático, obtemos $\Delta F_{s_2} = 0.049$ e $\Delta F_{ss_2} = 0.028$. Aqui, o comportamento é oposto: a dinâmica GARCH Exponencial está mais próxima da função de autocorrelação temporal do índice NYSE. Para decidir esta disputa, investigaremos as propriedades de escala temporal de ambos os processos.

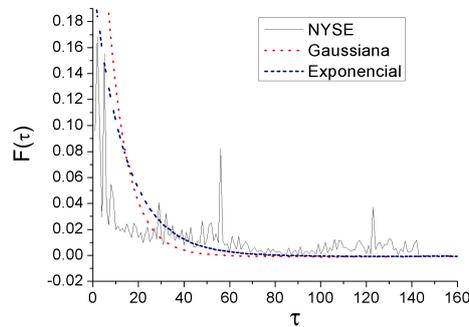


Figura 6.10: Função de autocorrelação temporal $F(\tau)$ contra o tempo τ para o índice NYSE e para os processos GARCH Gaussiano e Exponencial.

6.5 Lei de Escala Temporal

A probabilidade de retorno à origem $P(0)$ escala como uma lei de potência

$$P(0) \approx (\Delta t)^{-\lambda} \quad (6.43)$$

Alterando-se o horizonte temporal Δt , pode-se responder qual das dinâmicas Gaussiana ou Exponencial - com a nossa prescrição - fornece o expoente mais próximo do índice NYSE Composto. Na figura 6.11, estimamos os expoentes λ . Como esperado, o processo GARCH Gaussiano fornece

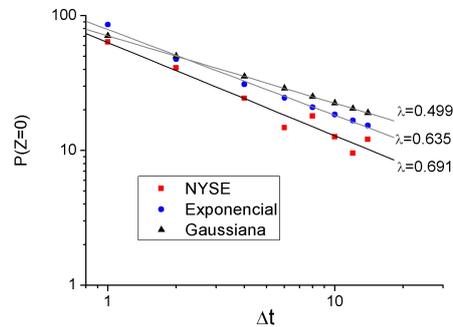


Figura 6.11: Probabilidade de retorno à origem contra o horizonte temporal Δt para o índice NYSE e para os processos GARCH Gaussiano e Exponencial.

o expoente Gaussiano $\lambda = 0.499 \pm 0.001$, o qual está bem distante do expoente real do índice NYSE $\lambda = 0.691 \pm 0.062$. No entanto, o modelo GARCH Exponencial resulta no expoente $\lambda = 0.635 \pm 0.022$. Este valor é bem próximo ao valor do expoente do índice NYSE e está dentro das barras de erro.

Capítulo 7

Conclusões

Mostramos que o uso do tempo de autocorrelação, para determinar o melhor conjunto de parâmetros de controle para a dinâmica GARCH, não é uma boa escolha. Resultados muito mais satisfatórios são obtidos se utilizarmos o sexto momento padronizado, junto com a variância e a curtose. Muito embora a função densidade de probabilidade assintótica esteja somente um pouco mais próxima da pdf real, se adotarmos o sexto momento padronizado, o ganho no ajuste da função de autocorrelação temporal é muito mais expressivo. Este resultado é robusto e se aplica tanto ao modelo GARCH Gaussiano quanto ao modelo GARCH Exponencial. Apesar de não ser possível a obtenção de uma expressão analítica para o sexto momento, desenvolvemos uma técnica de expansão em série para o seu cálculo. Por outro lado, fomos capazes de obter uma expressão analítica exata para a curtose do modelo GARCH Exponencial.

Uma comparação entre as formas Gaussiana e Exponencial mostra que o modelo GARCH Gaussiano ajusta melhor a função densidade de probabili-

dade, enquanto que o modelo GARCH Exponencial ajusta melhor a função de autocorrelação temporal. Contudo, quando analisamos a probabilidade de retorno à origem, o modelo GARCH Exponencial tem clara e inequivocamente um melhor desempenho que o modelo Gaussiano. A estimativa do expoente de escala temporal no modelo GARCH Exponencial está em bom acordo com o expoente obtido a partir dos dados reais do índice NYSE Composto.

Além da nossa nova proposta para a dinâmica GARCH, estudamos diversas propriedades do índice NYSE Composto, tais como o tempo de autocorrelação e o espectro de potência, cujos resultados indicam a presença de uma correlação de curto alcance. Examinamos também o comportamento da volatilidade, a qual evoluiu de maneira muito similar a um processo de Wiener.

Para os retornos do índice NYSE Composto, investigamos o tipo de correlação presente, calculando o expoente de Hurst através da técnica DFA; detectamos a presença de multifractalidade; calculamos a probabilidade de persistência e, finalmente, estudamos a função densidade de probabilidade via distribuição de Lévy simétrica.

Apêndice A

Função de Autocorrelação Temporal para o GARCH Gaussiano

Seja

$$\begin{aligned} \langle x^2(t)x^2(t + \Delta t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^t P(x_i, \sigma_i^2) x_t^2 \\ &\quad \prod_{j=t+1}^{t+\Delta t} P(x_j, \sigma_j^2) x_{t+\Delta t}^2 \prod_{k=1}^{t+\Delta t} dx_k \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$P(x_i, \sigma_i^2) = \frac{e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma_i^2}}}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \quad (\text{A.2})$$

Em $t + \Delta t$, integrando em $x_{t+\Delta t}$, temos

$$x_{t+\Delta t}^2 \rightarrow \sigma_{t+\Delta t}^2 \quad (\text{A.3})$$

Em $t + \Delta t - 1$, integrando em $x_{t+\Delta t} - 1$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{t+\Delta t}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t+\Delta t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+\Delta t-1}^2 \\ \sigma_{t+\Delta t}^2 &\rightarrow \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{t+\Delta t-1}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Em $t + \Delta t - 2$, integrando em $x_{t+\Delta t-2}$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{t+\Delta t-1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t+\Delta t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t+\Delta t-2}^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{t+\Delta t-2}^2 \quad \text{e} \\ \sigma_{t+\Delta t}^2 &\rightarrow \alpha_0 [1 + (\alpha_1 + \beta_1)] + (\alpha_1 + \beta_1)^2 \sigma_{t+\Delta t-2}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Em $t + \Delta t - 3$, integrando em $x_{t+\Delta t-3}$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{t+\Delta t-2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t+\Delta t-3}^2 + \beta_1 \sigma_{t+\Delta t-3}^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{t+\Delta t-3}^2 \quad \text{e} \\ \sigma_{t+\Delta t}^2 &= \alpha_0 [1 + (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1)^2] + (\alpha_1 + \beta_1)^3 \sigma_{t+\Delta t-3}^2 \\ &= \alpha_0 \left[\frac{1 - \gamma^3}{1 - \gamma} \right] + \gamma^3 \sigma_{t+\Delta t-3}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Em $t + \Delta t - (\Delta t - 1)$, integrando em x_{t+1} , temos

$$\begin{aligned}\sigma_{t+2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t+1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \gamma \sigma_{t+1}^2 \\ \text{e} \quad \sigma_{t+\Delta t}^2 &= \alpha_0 \frac{1 - \gamma^{\Delta t - 1}}{1 - \gamma} + \gamma^{\Delta t - 1} \sigma_{t+1}^2\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Em t , temos

$$\begin{aligned}& \int P(x_t) x_t^2 \left[\frac{\alpha_0 (1 - \gamma^{\Delta t - 1})}{1 - \gamma} + \gamma^{\Delta t - 1} \sigma_{t+1}^2 \right] dx_t = \\ & \int P(x_t) x_t^2 \left[\frac{\alpha_0 (1 - \gamma^{\Delta t - 1})}{1 - \gamma} + \gamma^{\Delta t - 1} (\alpha_0 + \alpha_1 x_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2) \right] dx_t = \\ & = \sigma_t^2 \left[\frac{\alpha_0 (1 - \gamma^{\Delta t - 1})}{1 - \gamma} \right] + \gamma^{\Delta t - 1} [\alpha_0 \sigma_t^2 + \alpha_1 3\sigma_t^4 + \beta_1 \sigma_t^4] = \\ & = \sigma_t^2 \alpha_0 \left[\frac{1 - \gamma^{\Delta t - 1}}{1 - \gamma} + \gamma^{\Delta t - 1} \right] + \gamma^{\Delta t - 1} \sigma_t^4 [3\alpha_1 + \beta_1] = \\ & = \alpha_0 \sigma_t^2 \left[\frac{1 - \gamma^{\Delta t}}{1 - \gamma} \right] + (3\alpha_1 + \beta_1) \gamma^{\Delta t - 1} \sigma_t^4 = m \sigma_t^2 + n \sigma_t^4\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

com

$$m = \alpha_0 \left[\frac{1 - \gamma^{\Delta t}}{1 - \gamma} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$n = (3\alpha_1 + \beta_1) \gamma^{\Delta t - 1} \quad (\text{A.10})$$

Em $t - 1$, integrando em x_{t-1} , temos

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \rightarrow \sigma_t^2 = \alpha_0 + \gamma \sigma_{t-1}^2 = \\ \sigma_t^4 &= (\alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2 + 2(\alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2) \alpha_1 x_{t-1}^2 + \alpha_1^2 x_{t-1}^4 \rightarrow \\ \sigma_t^4 &= (\alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2 + 2(\alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2) \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + 3\alpha_1^2 \sigma_{t-1}^4 = \\ & \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \gamma \sigma_{t-1}^2 + (\beta_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 + 3\alpha_1^2) \sigma_{t-1}^4\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Rotulando $\Delta = \beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 = \gamma^2 + 2\alpha_1^2$. Portanto

$$\sigma_t^2 \rightarrow \alpha_0 + \gamma\sigma_{t-1}^2 \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_t^4 \rightarrow \alpha_0^2 + 2\alpha_0\gamma\sigma_{t-1}^2 + \Delta\sigma_{t-1}^4 \quad (\text{A.13})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} m[\alpha_0 + \gamma\sigma_{t-1}^2] + n[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\gamma\sigma_{t-1}^2 + \Delta\sigma_{t-1}^4] &= \\ m[\alpha_0 + \gamma\sigma_{t-1}^2] + n[\alpha_0^2 + 3\alpha_0\gamma\sigma_{t-1}^2 + (\gamma^2 + 2\alpha_1^2)\sigma_{t-1}^4] &= \\ m[\alpha_0 + \gamma\sigma_{t-1}^2] + n[(\alpha_0 + \gamma\sigma_{t-1}^2)^2 + 2\alpha_1^2\sigma_{t-1}^4] & \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Em $t - 2$, temos

$$\sigma_{t-1}^2 \rightarrow \alpha_0 + \gamma\sigma_{t-2}^2 \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_{t-1}^4 \rightarrow \alpha_0^2 + 2\alpha_0\gamma\sigma_{t-2}^2 + \Delta\sigma_{t-2}^4 \quad (\text{A.16})$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} \sigma_{t-1}^4 &\rightarrow (\alpha_0 + \gamma\sigma_{t-2}^2)^2 + 2\alpha_1^2\sigma_{t-2}^4 = \\ & \quad m[\alpha_0 + \alpha_0\gamma + \gamma^2\sigma_{t-2}^2] + \\ n[(\alpha_0 + \alpha_0\gamma + \gamma^2\sigma_{t-2}^2)^2 + 2\alpha_1^2(\alpha_0 + \gamma\sigma_{t-2}^2)^2 + (2\alpha_1^2)^2\sigma_{t-2}^4] & \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Em $t - 3$, temos

$$\sigma_{t-2}^2 \rightarrow \alpha_0 + \gamma\sigma_{t-3}^2 \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_{t-2}^4 \rightarrow \alpha_0^2 + 2\alpha_0\gamma\sigma_{t-3}^2 + \Delta\sigma_{t-3}^4 \quad (\text{A.19})$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sigma_{t-2}^2 &= m[\alpha_0 + \alpha_0\gamma + \alpha_0\gamma^2 + \gamma^3\sigma_{t-3}^2] + \\ n[(\alpha_0 + \alpha_0\gamma + \alpha_0\gamma^2 + \gamma^3\sigma_{t-3}^2)^2 &+ (2\alpha_0)^2(\alpha_0 + \alpha_0\gamma + \gamma^2\sigma_{t-3}^2)^2 \\ &+ (2\alpha_1^2)^2[(\alpha_0 + \gamma\sigma_{t-3}^2)^2] + (2\alpha_1^2)^3\sigma_{t-3}^4] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Continuando

$$\begin{aligned} m \left[\frac{\alpha_0(1-\gamma^3)}{(1-\gamma)} + \gamma^3\sigma_{t-3}^2 \right] + n \left[\left(\frac{\alpha_0(1-\gamma^3)}{(1-\gamma)} + \gamma^3\sigma_{t-3}^2 \right)^2 + (2\alpha_1^2) \left(\frac{\alpha_0(1-\gamma^2)}{(1-\gamma)} \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma^2\sigma_{t-3}^2 \right)^2 + (2\alpha_1^2)^2(\alpha_0 + \gamma\sigma_{t-3}^2)^2 + (2\alpha_1^2)^3\sigma_{t-3}^4 \right] = m \left[\frac{\alpha_0(1-\gamma^3)}{(1-\gamma)} + \frac{\gamma^3}{\sigma_{t-3}^2} \right] \\ + n \left[\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\alpha_0(1-\gamma^j)}{(1-\gamma)} + \gamma^j\sigma_{t-3}^2 \right)^2 (2\alpha_1^2)^{3-j} + (2\alpha_1^2)^3\sigma_{t-3}^4 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Em $t - t'$ temos

$$\begin{aligned} m \left[\frac{\alpha_0(1-\gamma^{t'})}{1-\gamma} + \gamma^{t'}\sigma_{t-t'}^2 \right] + \\ n \left[\sum_{j=1}^{t'} \left(\frac{\alpha_0(1-\gamma^j)}{1-\gamma} + \gamma^j\sigma_{t-t'}^2 \right)^2 (2\alpha_1^2)^{t'-j} + (2\alpha_1^2)^{t'}\sigma_{t-t'}^4 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Fazendo $t' = t - 1$, temos

$$m\left[\frac{\alpha_0(1 - \gamma^{t-1})}{1 - \gamma} + \gamma^{t'}\sigma_1^2\right] + n\left[\sum_{j=1}^{t-1}\left(\frac{\alpha_0(1 - \gamma^j)}{1 - \gamma}\right) + \gamma^j\sigma_1^2\right]^2(2\alpha_1^2)^{t-1-j} + (2\alpha_1^2)^{t-1}\sigma_1^4 \quad (\text{A.23})$$

Como $\sigma_1^2 = 0$, temos

$$g(t) = \frac{m\alpha_0}{1 - \gamma}[1 - \gamma^{t-1}] + n\left[\frac{\alpha_0^2}{(1 - \gamma)^2} \sum_{j=1}^{t-1} (1 - \gamma^j)^2 (2\alpha_1^2)^{t-1-j}\right] \quad (\text{A.24})$$

Tomando o limite $T \rightarrow \infty$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(t) = \frac{m\alpha_0}{1 - \gamma} \quad (\text{A.25})$$

pois

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \gamma^{t-1} = \frac{1}{T\gamma} \sum_{t=1}^T \gamma^t = \frac{1 - \gamma^{T+1}}{T\gamma(1 - \gamma)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{A.26})$$

De maneira análoga

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{j=1}^{t-1} (1 - \gamma^j)^2 (2\alpha_1^2)^{t-1-j} = (2\alpha_1^2)^{t-1} \sum_{j=1}^{t-1} \left[\left(\frac{1}{2\alpha_1^2}\right)^j + 2\left(\frac{\gamma}{2\alpha_1^2}\right)^j + \left(\frac{\gamma^2}{2\alpha_1^2}\right)^j \right] \\ &= (2\alpha_1^2)^{t-1} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2\alpha_1^2}\right)^t}{1 - \left(\frac{1}{2\alpha_1^2}\right)} + 2 \frac{1 - \left(\frac{\gamma}{2\alpha_1^2}\right)^t}{1 - \left(\frac{\gamma}{2\alpha_1^2}\right)} + \frac{1 - \left(\frac{\gamma^2}{2\alpha_1^2}\right)^t}{1 - \left(\frac{\gamma^2}{2\alpha_1^2}\right)} \right] \\ &= \frac{1 - (2\alpha_1^2)^t}{1 - 2\alpha_1^2} + 2 \frac{[(2\alpha_1^2)^t - \gamma^t]}{[2\alpha_1^2 - \gamma]} + \frac{(2\alpha_1^2)^t - \gamma^{2t}}{[2\alpha_1^2 - \gamma^2]} \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

Tomando o limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(t) = 1 \quad (\text{A.28})$$

Logo

$$\langle x^2(t)x^2(t + \Delta t) \rangle = \frac{m\alpha_0}{1 - \gamma} + \frac{n\alpha_0^2}{(1 - \gamma)^2} \quad (\text{A.29})$$

Como $m = \alpha_0 \frac{1 - \gamma^{\Delta t}}{(1 - \gamma)}$ e $n = (3\alpha_1 + \beta_1)\gamma^{\Delta t - 1}$, temos

$$\begin{aligned} \langle x^2(t)x^2(t + \Delta t) \rangle &= \frac{\alpha_0^2}{(1 - \gamma)^2} [1 - \gamma^{\Delta t} + (3\alpha_1 + \beta_1)\gamma^{\Delta t - 1}] = \\ &= \frac{\alpha_0^2}{(1 - \gamma)^2} [1 + \gamma^{\Delta t} (\frac{3\alpha_1 + \beta_1}{\gamma} - 1)] = \sigma^4 [1 + \frac{2\alpha_1}{\gamma} \gamma^{\Delta t}] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

pois $\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \gamma}$. Portanto

$$\langle x^2(t)x^2(t + \Delta t) \rangle - \langle x^2 \rangle^2 = \frac{2\alpha_1 \sigma^4 \gamma^{\Delta t}}{\gamma} \quad (\text{A.31})$$

Então, finalmente, temos

$$\frac{\langle x^2(t)x^2(t + \Delta t) \rangle - \langle x^2 \rangle^2}{\langle x^4 \rangle - \langle x^2 \rangle^2} = \gamma^{\Delta t} = e^{\Delta t \ln \gamma} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \quad (\text{A.32})$$

com $\tau = \frac{1}{|\ln \gamma|}$, e $\gamma = \alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Referências

- [1] KONDOR, I.; KERTESZ, J. *Econophysics, An Emerging Science*. Dordrecht: Kluwer, 1999.
- [2] MANTEGNA, R.; STANLEY, H. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [3] BOUCHAUD, J.; POTTERS, M. *Theory of Financial Risks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [4] STANLEY, H. E. et al. Similarities and differences between physics and economics. *Physica A*, v. 299, p. 1–15, 2001.
- [5] MANTEGNA, R. N.; PALÁGYI, Z.; STANLEY, H. E. Applications of statistical mechanics to finance. *Physica A*, v. 274, p. 216–221, 1999.
- [6] STANLEY, H. E. Exotic statistical physics: Applications to biology, medicine and economics. *Physica A*, v. 285, p. 1–17, 2000.
- [7] MAJORANA, E. *Scientia*, v. 58, 1942.
- [8] BACHELIER, L. *Jeu de la Speculation*. Tese (Doutorado), Paris, 1900.

-
- [9] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. United States of America: Harcourt Academic Press, 2001.
- [10] KHINTCHINE, A. Y.; LÉVY, P. Sur les loi stables. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 202, p. 374–376, 1936.
- [11] SKJELTORP, J. A. Scaling in the norwegian stock market. *Physica A*, v. 283, p. 486–528, 2000.
- [12] MANDELBROT, B. B. The variation of certain speculative prices. *J. Business*, v. 36, p. 394–419, 1963.
- [13] FAMA, E. F. The behavior of stock market prices. *J. Business*, v. 38, p. 34–105, 1965.
- [14] MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Scaling behavior in the dynamics of an economic index. *Nature*, v. 376, p. 46–49, 1995.
- [15] JAROSZEWICZ, S.; MARIANI, M. C.; FERRARO, M. Long correlations and truncated levy walks applied to the study latin-american market indices. *Physica A*, v. 355, p. 461–474, 2005.
- [16] MANTEGNA, R.; STANLEY, H. Stochastic process with ultraslow convergence to a gaussian: the truncated lévy flight. *Phys. Rev. Letters*, v. 73, p. 2946–2949, 1994.
- [17] GUPTA, H. M.; CAMPANHA, J. R. The gradually truncated lévy flight for systems with power-law distributions. *Physica A*, v. 268, p. 231–239, 1999.

-
- [18] MATSUSHITA, R.; RATHIE, P.; SILVA, S. D. Exponentially damped lévy flights. *Physica A*, v. 326, p. 544–555, 2003.
- [19] SOKAL, A. Monte carlo methods in statistical mechanics: Foundations and new algorithms. *Escola de verão Functional Integration: Basics and Applications*, 1996.
- [20] LIU, Y. et al. Statistical properties of the volatility of price fluctuations. *Physical Review E*, v. 60, p. 1390–1400, 1999.
- [21] GOPIKRISHNAN, P. et al. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, v. 60, p. 5305–5316, 1999.
- [22] SATO, A. H. Characteristic time scales of tick quotes of foreign currency markets: an empirical study and agent-based model. *European Physical Journal B*, v. 50, p. 137–140, 2006.
- [23] PAGAN, A. The econometrics of financial markets. *J. Empirical Finance*, v. 3, p. 15–102, 1996.
- [24] HURST, H. E. Long term storage capacity of reservoirs. *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, v. 116, p. 770–808, 1951.
- [25] HURST, H.; BLACK, R.; SIMAIKA, Y. *Long-term Storage*. London: Constable, 1965.
- [26] FELLER, W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent variables. *Ann. Math. Stat.*, v. 22, p. 427–432, 1951.
- [27] FEDER, J. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.

-
- [28] MANDELBROT, B.; WALLIS, J. R. Robustness of the rescaled range r/s in the measurement of non-cyclic long run statistical dependence. *Water Resour. Res.*, v. 5, 1969.
- [29] PETERS, E. E. *Fractal Market Analysis*. New York: Wiley, 1994.
- [30] ANIS, A. A.; LLOYD, E. H. The expected value of the adjusted rescaled hurst range of independent normal summands. *Biometrika*, v. 63, 1976.
- [31] WERON, R. Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. *Physica A*, v. 312, 2002.
- [32] ELLIS, C. The mis-especification of the expected rescaled adjusted range. *Physica A*, v. 363, 2006.
- [33] COUILLARD, M.; DAVISON, M. A comment on measuring the hurst exponent of financial time series. *Physica A*, v. 348, 2005.
- [34] PENG, C. K. et al. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical Review E*, v. 49, p. 1685–1689, 1994.
- [35] COSTA, R. L.; VASCONCELOS, G. L. Long range correlations and nonstationarity in the brazilian stock market. *Physica A*, ver, p. ver, 2003.
- [36] VANDEWALLE, N.; AUSLOOS, M. Multi-affine analysis of typical currency exchange rates. *European Physical Journal B*, v. 4, p. 257 – 261, 1998.
- [37] BOUCHAUD, J.; POTTERS, M.; MEYER, M. Apparent multifractality in financial time series. *European Physical Journal B*, v. 13, 2000.

-
- [38] BARABÁSI, A. L.; VICSEK, T. Multifractality of self-affine fractals. *Physical Review A*, v. 44, 1991.
- [39] CONSTANTIN, M.; SARNA, S. D. Volatility, persistence and survival in financial markets. *Physical Review E*, v. 72, p. 051106, 2005.
- [40] KRUG, J. et al. Persistence exponents for fluctuating interfaces. *Physical Review E*, v. 56, 1997.
- [41] CONSTANTIN, M. et al. Persistence in nonequilibrium surface growth. *Physical Review E*, v. 69, 2004.
- [42] BROWN, R. On the existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Phil. Mag.*, v. 4, p. 162–173, 1828.
- [43] WIENER, N. Differential-space. *J. Math. Phys.*, v. 2, p. 131–174, 1923.
- [44] FAMA, E. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *J. Finance*, p. 383–417, 1970.
- [45] SAMUELSON, P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, v. 6, p. 41–45, 1965.
- [46] BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, v. 81, p. 637–654, 1973.
- [47] MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econ. Management Sci.*, v. 4, p. 141–183, 1973.
- [48] ITO, K. On stochastic differential equations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, v. 4, p. 1–51, 1951.

-
- [49] MANDELBROT, B. B.; NESS, J. W. V. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, v. 10, p. 422–437, 1968.
- [50] MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman, 1982.
- [51] PEITGEN, H. O.; JURGENS, H.; SAUPE, D. *Chaos and Fractals: new frontiers of science*. New York: Springer Verlag, 1992.
- [52] CAMPANHA, J. R. *Sistemas Complexos e Aplicações*. 102 p. Tese (Livro docência em Física) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
- [53] VOSS, R. F. *Fractals in Nature: from characteriation to simulation*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [54] ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, v. 50, 1982.
- [55] BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, 1986.
- [56] MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Modeling of financial data: Comparison of the truncated lévy flight and the arch(1) and garch(1,1) processes. *Physica A*, v. 254, p. 77–84, 1998.
- [57] TAYLOR, S. *Modeling Financial Time Series*. New York: Wiley, 1986.
- [58] ONODY, R. N.; FAVARO, G. M.; CAZAROTO, E. R. Gaussian and exponential garch models. *submetido à European Physical Journal B*, 2006.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)