



MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
ESCOLA DE
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Andréa Regina Dias

ANÁLISE DE PLACAS COM RESTRICÇÕES DE CONTATO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Orientador: Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Convênio USIMINAS/UFOP/FUNDAÇÃO GORCEIX
Ouro Preto, Março de 1998

SILVA, ANDRÉA REGINA DIAS

Análise de Placas com Restrições Unilaterais de Contato [Ouro Preto] 1998

xvi, 126 p. (Escola de Minas/UFOP, MSc., Engenharia Civil, 1998)

Tese – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto

1 – Placas

2 – Contato

3 – Bases Elásticas

4 – Programação Matemática

I – Escola de Minas, UFOP

II – Título (Série)

ANÁLISE DE PLACAS COM RESTRIÇÕES DE CONTATO

Andréa Regina Dias da Silva

Dissertação apresentada ao corpo docente do curso de pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências da Engenharia Civil.

Aprovada por:

Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira
Escola de Minas/UFOP
Presidente

Prof. Francisco Célio de Araújo
Escola de Minas/UFOP

Prof. Luiz Gonzaga de Araújo
Escola de Minas/UFOP

Prof. Paulo Batista Gonçalves
PUC-Rio

Prof. Estevam Barbosa de Las Casas
Escola de Engenharia – UFMG

Ouro Preto – MG, Brasil
Março de 1998

A minha família.

Meus agradecimentos

- A minha mãe e a meu irmão pelo carinho, apoio, confiança e paciência ao longo do desenvolvimento deste trabalho.
- Ao Prof. Ricardo Azoubel da Mota Silveira pelo incentivo, ensinamentos transmitidos, sempre atencioso e disposto a ajudar neste ano de trabalho juntos. Minha eterna gratidão.
- À Silvia pelo apoio e boa vontade.
- À Ana Elisa e ao Élcio pela colaboração e amizade.
- À Roberta e ao Valdenir pela amizade e convívio diário.
- A todos os demais colegas do Mestrado que de alguma forma contribuíram nesta caminhada.
- À Usiminas pela ajuda financeira.

Existem muitos casos onde a inclusão de restrições bilaterais e unilaterais na análise de equilíbrio de elementos estruturais é inevitável. Tais restrições podem alterar substancialmente o comportamento da estrutura. Isto é, em particular, verdadeiro na análise de alguns tipos de fundações, trilhos de ferrovias, na análise de estruturas formadas por compósitos laminados (problemas de delaminação), entre outros.

O objetivo deste trabalho é, então, desenvolver uma metodologia numérica para análise de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato que são impostas por bases elásticas. Nos problemas de contato unilateral, a base elástica oferece reação apenas quando comprimida e, no caso de contato bilateral, a base oferece reação, também, quando tracionada. Desprezam-se, nas formulações, os efeitos decorrentes das forças de atrito entre a placa e a base elástica.

O método dos elementos finitos é usado para discretizar a placa e a base elástica e o problema de contato unilateral é tratado diretamente como um problema de minimização, envolvendo apenas as variáveis originais sujeitas a restrições de desigualdade. A partir daí, o problema de complementaridade linear resultante é resolvido utilizando-se o algoritmo de Lemke.

A eficiência das formulações numéricas propostas são verificadas através de exemplos apresentados no final do trabalho.

Abstract

Many cases exist where the inclusion of bonded and unilateral constraints in the equilibrium analysis of structural elements is unavoidable. Such constraints can change substantially the behavior of the structure. That is particularly true in the analysis of some types of foundations, railway tracks, in the analysis of structures formed by laminate composites (delamination problems), among others.

The objective of this work is, then, to develop a numerical methodology for analysis of plates with contact constraints (bonded and unilateral) imposed by elastic foundations. In the unilateral contact problem, the elastic foundation reacts only when compressed and, in the bilateral contact case, the foundation reacts, also, when tensile stresses are present. The effects of the friction forces between the plate and the elastic foundation are neglected.

Finite elements are used for discretization of the plate and the elastic foundation and the unilateral contact is treated directly as a minimization problem involving only the original variables subjected to inequality constraints. Then, the resulting linear complementarity problem is solved by the Lemke's algorithm.

The efficiency of the numerical formulations proposed is verified through examples presented at the end of the work.

	Página
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	x
Lista de Símbolos	xi
<i>Capítulo 1 – INTRODUÇÃO</i>	1
1.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
1.2 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	2
1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
<i>Capítulo 2 – EQUAÇÕES BÁSICAS PARA PLACA E BASES ELÁSTICAS</i>	8
2.1 – INTRODUÇÃO	8
2.2 – TEORIAS DE PLACAS	9
2.3 – MODELOS DE BASES ELÁSTICAS	17
2.3.1 – Modelo de Molas Discretas	19
2.3.2 – Modelo de Winkler	19
2.3.3 – Modelo de Filonenko-Borodich	20
2.3.4 – Modelo de Pasternak	21
2.3.5 – Modelo de Vlasov	21
2.3.6 – Semi-Espaço Infinito	23
<i>Capítulo 3 – DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS DA PLACA E DAS BASES ELÁSTICAS</i>	26
3.1 – INTRODUÇÃO	26
3.2 – PLACAS	27

3.2.1 – Elemento de Placa de Mindlin.....	27
3.2.2 – Elemento de Placa de Kirchhoff.....	30
3.2.3 – Forças Externas	35
3.3 – BASES ELÁSTICAS	35
<i>Capítulo 4 – FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE CONTATO</i>	39
4.1 – INTRODUÇÃO.....	39
4.2 – FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE CONTATO BILATERAL	40
4.2.1 – Bases Modeladas com Um Parâmetro e Semi-Espaço Infinito	40
4.2.2 – Bases Modeladas com Dois Parâmetros	42
4.3 – FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE CONTATO UNILATERAL	46
4.3.1 – Equações Básicas.....	47
4.3.2 – Solução do Problema de Contato Unilateral.....	50
4.3.2.1 – Formulação 1 – <i>Mista</i>	50
4.3.2.2 – Formulação 2 – <i>Flexível</i>	54
4.3.2.3 – Formulação 3 – <i>Compatível</i>	56
4.4 – O MÉTODO DE LEMKE	57
4.4.1 – Definições.....	58
4.4.2 – Procedimento Inicial.....	59
4.4.3 – Procedimento Principal.....	61
4.4.4 – Finalização do Processo	63
<i>Capítulo 5 – PROGRAMA COMPUTACIONAL</i>	64
5.1 – INTRODUÇÃO.....	64
5.2 – PROGRAMA PRINCIPAL.....	65
5.2.1 – Subrotina SOL	68
5.2.2 – Subrotina SOLCB.....	69
5.2.3 – Subrotina SOLCU	69
<i>Capítulo 6 – EXEMPLOS NUMÉRICOS</i>	72
6.1 – INTRODUÇÃO.....	72
6.2 – PLACA SEM BASE ELÁSTICA	73
6.2.1 – Placa Quadrada Simplesmente Apoiada.....	73

6.2.2 – Placa Retangular com Dois Bordos Apoiados e Dois Bordos Engastados.....	76
6.2.3 – Placa Retangular Simplesmente Apoiada.....	79
6.2.4 – Placa Engastada	81
6.3 – PROBLEMA DE CONTATO BILATERAL.....	83
6.3.1 – Placa Circular Sobre uma Fundação Tipo Winkler	83
6.3.2 – Placa Longa Sobre uma Fundação Tipo Winkler	85
6.3.3 – Placa Retangular em Contato com uma Base Modelada com Dois Parâmetros	88
6.3.4 – Placa Quadrada Sobre um Semi-Espaço Infinito	92
6.3.5 – Placa Retangular Sobre um Semi-Espaço Infinito	96
6.4 – PROBLEMA DE CONTATO UNILATERAL.....	98
6.4.1 – Placa com Momentos Aplicados ao Longo de Dois Bordos	98
6.4.2 – Placa Contínua Apoiada em Uma Direção	103
6.4.3 – Placa Delgada Sobre um Semi-Espaço Infinito.....	106
6.4.4 – Placa Quadrada em Contato com uma Base Tipo Winkler	113
<i>Capítulo 7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES</i>	117
7.1 – CONCLUSÕES	117
7.2 – SUGESTÕES	118
Referências Bibliográficas	120

Lista de Figuras

Página

Capítulo 2

Figura 2.1 – Tensões Atuantes em uma Placa	9
Figura 2.2 – Comportamento da Seção Transversal (Plano x-z) – Hipótese de Kirchhoff.	11
Figura 2.3 – Comportamento da Seção Transversal (Plano x-z) – Hipótese de Mindlin	14
Figura 2.4 – Base Elástica	17
Figura 2.5 – Curvas de Deslocamento da Base Elástica.....	18
Figura 2.6 – Apoios Discretos	19
Figura 2.7 – Modelo de Winkler	20
Figura 2.8 – Modelo de Filonenko-Borodich	20
Figura 2.9 – Modelo de Pasternak	21
Figura 2.10 – Modelo de Vlasov	22
Figura 2.11 – Semi-Espaço Infinito.....	24

Capítulo 3

Figura 3.1 – Elemento Isoparamétrico com Oito Nós	29
Figura 3.2 – Elemento Retangular com Quatro Nós	32
Figura 3.3 – Áreas definidas em torno dos Pontos Nodais do Elemento ((a) Elemento Isoparamétrico com Oito Nós, (b) Elemento Retangular com Quatro Nós)	38

Capítulo 4

Figura 4.1 – Fluxograma Computacional (Bases com Um Parâmetro e Semi-Espaço Infinito e Contato Bilateral).....	41
Figura 4.2 – Deslocamentos da Fundação – Modelos com Dois Parâmetros.....	44
Figura 4.3 – Fluxograma do Processo Iterativo.....	45
Figura 4.4 – Sistema Estrutural	48
Figura 4.5 – Domínio de Validade das Restrições	49

Capítulo 5

Figura 5.1 – Programa Computacional.....	64
Figura 5.2 – Programa Principal.....	65

Capítulo 6

Figura 6.1 – Placa Quadrada Simplesmente Apoiada	73
Figura 6.2 – Placa Retangular com Dois Bordos Apoiados e Dois Engastados.....	76
Figura 6.3 – Placa Retangular Simplesmente Apoiada	79
Figura 6.4 – Distribuição de Momentos M_x na Placa	80
Figura 6.5 – Placa Engastada.....	81
Figura 6.6 – Distribuição de Momentos em uma Placa Engastada	82
Figura 6.7 – Placa Circular em Contato com uma Base Tipo Winkler	83
Figura 6.8 – Malha de Elementos Finitos para o Sistema Estrutural	84
Figura 6.9 – Placa Retangular sobre uma Base Tipo Winkler	85
Figura 6.10 – Modelagem da Placa e da Base Elástica	85
Figura 6.11 – Comportamento da Deflexão Lateral da Placa.....	86
Figura 6.12 – Placa Retangular em Contato com uma Base Modelada com Dois Parâmetros.....	88
Figura 6.13 – Discretização do Sistema Estrutural.....	89
Figura 6.14 – Convergência do Processo Iterativo – Carga Distribuída	90
Figura 6.15 – Convergência do Processo Iterativo – Carga Concentrada	91
Figura 6.16 – Placa Quadrada em Contato com um Semi-Espaço Infinito.....	92
Figura 6.17 – Malha de Elementos Finitos.....	93
Figura 6.18 – Variação da Pressão de Contato nas Posições 1, 2 e 3.....	94
Figura 6.19 – Variação da Pressão de Contato ao Longo do Eixo Central da Placa.....	94
Figura 6.20 – Variação da Pressão de Contato nas Posições 1, 2 e 3.....	95
Figura 6.21 – Variação da Pressão de Contato ao Longo do Eixo Central da Placa.....	95
Figura 6.22 – Placa Retangular em Contato com um Semi-Espaço Infinito.....	96
Figura 6.23 – Discretização do Sistema Estrutural.....	96
Figura 6.24 – Distribuição da Reação da Base Elástica	97
Figura 6.25 – Placa com Momentos Apoiados ao Longo de Dois Bordos.....	98
Figura 6.26 – Discretização do Sistema Estrutural.....	99
Figura 6.27 – Deflexão Lateral da Placa	100
Figura 6.28 – Reação da Base Elástica.....	100

Figura 6.29 – Comportamento da Deflexão da Placa com a Variação do	
Parâmetro de Rigidez da Base Elástica	101
Figura 6.30 – Deflexão da Placa ($K = 7168$).....	102
Figura 6.31 – Placa Contínua Apoiada em uma Direção	103
Figura 6.32 – Discretização por Elementos Finitos.....	103
Figura 6.33 – Deflexão Lateral da Placa	104
Figura 6.34 – Reação da Base Elástica.....	105
Figura 6.35 – Placa Delgada sobre um Semi-Espaço Infinito.....	106
Figura 6.36 – Discretização do Sistema Estrutural.....	107
Figura 6.37 – Deflexão da Placa Submetida a uma Carga Uniformemente Distribuída...	108
Figura 6.38 – Reação Exercida pela Base Elástica – Carga Distribuída	109
Figura 6.39 – Deflexão da Placa Submetida a uma Carga Concentrada	110
Figura 6.40 – Reação Exercida pela Base Elástica – Carga Concentrada.....	111
Figura 6.41 – Região de Contato ($\gamma = 3016$)	112
Figura 6.42 – Região de Contato ($\gamma = 301.6$)	113
Figura 6.43 – Placa Quadrada em Contato com uma Base Tipo Winkler.....	113
Figura 6.44 – Modelagem do Sistema Estrutural	114
Figura 6.45 – Curvas de Contato	115
Figura 6.46 – Deflexão ao Longo do Eixo Central da Placa	115
Figura 6.47 – Deslocamento da Fundação Elástica.....	116

Lista de Tabelas

	Página
Capítulo 4	
Tabela 4.1 – Inicialização do Processo.....	60
Tabela 4.2 – Resultados Obtidos após a Operação de Pivoteamento.....	61
Capítulo 6	
Tabela 6.1 – Placa Quadrada Simplesmente Apoiada ($t = 0.01$).....	74
Tabela 6.2 – Placa Quadrada Simplesmente Apoiada ($t = 0.05$).....	75
Tabela 6.3 – Placa Quadrada Simplesmente Apoiada ($t = 0.1$).....	75
Tabela 6.4 – Placa com Dois Bordos Apoiados e Dois Bordos Engastados ($t = 0.01$).....	77
Tabela 6.5 – Placa com Dois Bordos Apoiados e Dois Bordos Engastados ($t = 0.1$).....	78
Tabela 6.6 – Placa Retangular Simplesmente Apoiada.....	80
Tabela 6.7 – Deflexão Máxima em uma Placa Engastada	82
Tabela 6.8 – Deflexão Máxima e Mínima na Placa	84
Tabela 6.9 – Deflexão Lateral no Centro da Placa.....	86
Tabela 6.10 – Resultados Obtidos – Carga Distribuída.....	90
Tabela 6.11 – Resultados Obtidos – Carga Concentrada	91
Tabela 6.12 – Tempo de Execução do Problema de Contato.....	101
Tabela 6.13 – Tempo de Execução do Problema de Contato.....	104
Tabela 6.14 – Momento M_x no Centro da Placa – Carga Distribuída	108
Tabela 6.15 – Momento M_y Atuante nos Bordos da Placa (Eixo x) – Carga Concentrada	110

Lista de Símbolos

Capítulo 2

$\nabla^2 ()$	Operador diferencial de 2ª ordem representado por : $\frac{\partial^2 ()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial y^2}$.
a, b	Dimensões do retângulo definido ao redor do ponto nodal do elemento finito.
c	Razão entre as dimensões a e b.
D	Rigidez à flexão da placa.
\mathbf{D}_k	Matriz que relaciona esforços solicitantes-curvatura para a teoria de Kirchhoff.
\mathbf{D}_M	Matriz que relaciona esforços solicitantes-curvatura para a teoria de Mindlin.
\mathbf{E}	Matriz que relaciona tensão-deformação.
E	Módulo de elasticidade do material que compõe a placa.
E_b	Módulo de elasticidade do material da fundação elástica.
EI	Rigidez à flexão da viga.
E_o	Módulo de elasticidade determinado a partir de E_b e ν_b .
f_{ii}	Coefficiente de flexibilidade.
G	Parâmetro de rigidez cisalhante de uma camada incompressível.
H	Profundidade da fundação.
\mathbf{k}	Vetor de curvaturas.
K	Parâmetro de rigidez elástico da fundação.
K_1	Parâmetro utilizado para descrever as características da fundação, que leva em conta o efeito das deformações cisalhantes.
m	Dimensão da placa paralela ao eixo x.
\mathbf{M}	Vetor que contém os esforços solicitantes na placa.
M_x, M_y	Momentos fletores em torno dos eixos x e y, respectivamente, por unidade de comprimento.
M_{xy}	Momento de torção por unidade de comprimento.
q	Carga uniformemente distribuída sobre a placa.

Q_x, Q_y	Esforços cortantes por unidade de comprimento, segundo os eixos x e y , respectivamente.
r_b	Reação exercida pela base elástica.
r_n	Distância radial entre dois pontos.
t	Espessura da placa.
T	Intensidade do campo de tração na membrana.
u, v, w	Deslocamentos de um ponto qualquer da placa, na direção dos eixos x, y e z , respectivamente.
w_b	Deslocamento da base elástica.
w_{ii}	Deflexão sofrida por um ponto i qualquer da placa quando uma carga concentrada unitária sobre ele mesmo.
w_{ni}	Deflexão sofrida por um ponto n qualquer da placa quando uma carga concentrada unitária atua no ponto nodal i .
x, y, z	Coordenadas cartesianas.
$\Psi(z)$	Função utilizada para descrever o deslocamento da fundação.
α	Fator que considera o empenamento da seção transversal da placa.
ϵ	Vetor de deformações.
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$	Deformações normais e cisalhante.
γ	Constante que define a razão de decréscimo dos deslocamentos com a profundidade.
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Deformações cisalhantes.
ν	Coefficiente de Poisson do material que compõe a placa.
ν_b	Coefficiente de Poisson do material da fundação elástica.
ν_o	Coefficiente que é função de ν_b .
θ_x, θ_y	Rotações do plano médio da placa, em torno dos eixos x e y , respectivamente.
σ	Vetor que representa o estado de tensões na placa.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensões normais.
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Tensões de cisalhamento transversais nos planos x - y , x - z e y - z , respectivamente.

Capítulo 3

A	Área do elemento finito.
A^e	Matriz definida a partir das coordenadas dos pontos nodais do elemento.
B	Matriz que relaciona deslocamento nodal – deformação.
C	Matriz resultante do produto da matriz N com a matriz A .
d	Vetor que representa o campo de deslocamentos nodais do elemento.
D_k	Matriz que relaciona esforços solicitantes-curvatura para a teoria de Kirchhoff.
D_M	Matriz que relaciona esforços solicitantes-curvatura para a teoria de Mindlin.
F	Carga concentrada na direção z.
F_B	Matriz de flexibilidade para o semi-espaço infinito.
H	Matriz que relaciona os parâmetros ajustáveis com a deformação.
k	Vetor de curvaturas.
K, K₁	Parâmetros de rigidez elástico da fundação.
K₂	Parâmetro que considera as deformações cisalhantes na fundação.
K_B	Matriz de rigidez global da base elástica.
K_b^e	Matriz de rigidez da base elástica para o elemento finito.
K_E	Matriz de rigidez global da placa.
K_E^e	Matriz de rigidez para o elemento finito de placa.
w	Deflexão lateral.
w_b	Deslocamento da base elástica.
N	Matriz que contém as funções de interpolação da geometria e do campo de deslocamentos da placa.
ne	Número de elementos finitos utilizados para modelar a placa.
N_w	Matriz que contém as funções de interpolação para a deflexão lateral da base elástica.
N_{w,x}, N_{w,y}	Derivadas cartesianas da função N_w , em relação aos eixos x e y, respectivamente.
P	Carga concentrada na direção z.
P	Vetor de cargas concentradas.
q_e	Vetor de carga uniformemente distribuída sobre o elemento.
q_l	Vetor de carga uniformemente distribuída ao longo de um bordo do elemento.

r_b	Reação exercida pela base elástica.
\mathbf{r}_b	Vetor de forças nodais reativas.
S_e	Representa um bordo do elemento finito.
U	Energia interna de deformação da placa.
U_b	Energia de deformação da base elástica.
\mathbf{u}	Vetor que representa o campo de deslocamentos para um ponto do elemento.
\mathbf{w}_b	Vetor que define o campo de deslocamentos da base elástica.
$\boldsymbol{\alpha}$	Vetor que contém os parâmetros ajustáveis.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor de deformações nodais da estrutura.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Vetor de deformações nodais do elemento.
θ_x, θ_y	Rotações em torno dos eixos x e y, respectivamente.
ζ, η	Coordenadas naturais que variam de -1 a $+1$.

Capítulo 4

\bar{K}	Sólido onde estão incluídos os valores admissíveis para r_b .
$\nabla^2 ()$	Operador diferencial de 2ª ordem representado por : $\frac{\partial^2 ()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial y^2}$
$\nabla^4 ()$	Operador diferencial de 4ª ordem representado por: $\frac{\partial^4 ()}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 ()}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 ()}{\partial y^4}$
\mathbf{A}	Matriz de acoplamento entre a placa e a base elástica.
C_b	Propriedade da base elástica.
C_{ijkl}	Tensor das propriedades elásticas da estrutura.
D	Rigidez à flexão da placa.
D_b	$1/ C_b$.
\mathbf{e}	Vetor de componentes positivas (Algoritmo de Lemke).
\mathbf{F}	Vetor de forças nodais.
F_i	Componentes do vetor de forças.
\mathbf{H}_b	Matriz que contém as funções de interpolação que definem o comportamento da reação à compressão da base elástica
$J(\mathbf{u}, \mathbf{u}_b)$	Indicador variacional.

J_1	Energia potencial total do sistema.
\mathbf{K}	Matriz de rigidez da estrutura.
K, K_1	Parâmetros de rigidez elástico e cisalhante da fundação, respectivamente.
$\mathbf{K}_B, \mathbf{K}_b$	Matriz de rigidez global da base elástica.
\mathbf{K}_E	Matriz de rigidez global da placa.
l, m	Dimensões de uma placa retangular.
m_c	Número de elementos que definem a região de contato.
$\mathbf{P}, \mathbf{H}, s$	Matriz, vetor e constante utilizados na Formulação 2 do problema de contato unilateral.
$\mathbf{q}, \mathbf{M}, \mathbf{z}$ e \mathbf{w}	Vetores e matrizes que representam o problema de complementaridade linear padrão.
q, q^*	Carga uniformemente distribuída sobre a placa.
Q_l	Reação fictícia distribuída uniformemente ao longo de um bordo, paralelo a y , da placa.
Q_m	Reação fictícia distribuída uniformemente ao longo de um bordo, paralelo a x , da placa.
R	Reação fictícia que aparece nos cantos da placa.
\mathbf{R}	Vetor de forças nodais.
r_b	Reação exercida pela base elástica.
\mathbf{r}_b	Matriz que contém as forças nodais reativas.
S_c	Região na qual os pontos de um determinado corpo, após aplicação das cargas, podem entrar ou não em contato, permanecer em contato ou separar-se do outro corpo
S_f	Região da estrutura na qual as forças de superfície são prescritas.
S_u	Região da estrutura na qual os deslocamentos são prescritos.
\mathbf{T}	Matriz de flexibilidade da base elástica.
\mathbf{u}	Vetor que representa o campo de deslocamentos da placa.
\mathbf{u}_b	Vetor que representa o campo de deslocamentos da placa.
$\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-$	Parte positiva e negativa do vetor \mathbf{u} .
u_i	Componentes de deslocamento.
\mathbf{u}^i	Vetor de deslocamentos nodais obtido na iteração corrente.
\mathbf{u}^{i+1}	Vetor de deslocamentos nodais obtido na iteração $i+1$.
V	Volume da estrutura.
w_b	Deslocamento da fundação elástica.

w_c	Deslocamento vertical da fundação sob os cantos da placa.
w_i, z_i	Par complementar (Algoritmo de Lemke).
w_l	Deslocamento vertical da fundação sob um bordo da placa paralelo a y .
w_m	Deslocamento vertical da fundação sob um bordo da placa paralelo a x .
x_1, x_2, x_3	Eixos cartesianos.
Y', Y	Espaços vetoriais que contêm, respectivamente, as soluções de r_b e φ do problema de contato analisado.
z_0	Variável adicional artificial (Algoritmo de Lemke).
z_1, z_2, z_3	Vetores utilizados para definição do PCL padrão.
α	$\sqrt{K/K_1}$.
ε_{ij}	Componentes de deformações.
φ	Distância entre os dois corpos em contato.
τ_{ij}	Componentes cartesianas do tensor de Cauchy.
ζ	Fator de tolerância.

Capítulo 6

E, E_b	Módulos de elasticidade para o material da placa e da base elástica, respectivamente.
f_p	Índice de flexibilidade da placa.
w_r	Deslocamento para uma placa rígida.
α, β_1, β_2	Coefficientes que aparecem nas equações para se determinar a solução analítica da deflexão w e dos momentos M_x e M_y , respectivamente.
γ	Parâmetro de rigidez relativo entre a placa e o semi-espaço infinito.
ν, ν_b	Coefficientes de Poisson para o material da placa e da base elástica, respectivamente.

INTRODUÇÃO

1.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

A análise do comportamento de elementos estruturais básicos como vigas, placas e cascas é uma das áreas mais importantes da análise estrutural, uma vez que a maioria das estruturas encontradas nos diversos ramos da engenharia é formada a partir da união desses elementos.

Em muitas situações práticas, esses elementos estruturais encontram-se apoiados em outros corpos ou meios que oferecem resistência aos seus movimentos apenas em certas direções. Problemas onde a estrutura pode entrar ou perder o contato com outros corpos, ou mesmo deslizar sobre o seu suporte são, usualmente, encontrados na literatura com a denominação “*Problemas de Contato Unilateral*” (Barbosa, 1986; Silveira e Gonçalves, 1993, 1994; Silveira, 1995).

Entre esses problemas, pode-se destacar, nas engenharias civil e mecânica, a análise de elementos estruturais usados, por exemplo, em estruturas de fundação, pavimentos, estruturas flutuantes, peças de compósitos, cascas de proteção em ambientes agressivos (usinas nucleares) e tubulações em contato com o fundo do mar.

A análise do problema de contato é um dos tópicos mais complexos da Mecânica dos Sólidos devido à dificuldade existente na formulação e solução do problema. Mesmo para os casos onde se consideram pequenos deslocamentos e material com comportamento linear elástico, a inclusão das restrições unilaterais de contato, na análise, torna o problema a ser resolvido uma tarefa realmente difícil.

1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento e a implementação computacional de uma metodologia de solução numérica capaz de resolver problemas de equilíbrio de placas com restrições de contato, considerando pequenos deslocamentos e deformações e material elástico linear. Na formulação proposta, essas restrições de contato são impostas por bases elásticas ou apoios discretos. No caso em que a base elástica reage tanto às solicitações de tração quanto às solicitações de compressão, o contato é denominado *bilateral* e, no caso em que a base reage apenas às solicitações de compressão, o contato é chamado *unilateral*. Desprezam-se, na análise, os efeitos decorrentes das forças de atrito entre a placa e a base elástica, uma vez que, para a classe de problemas estudados esses efeitos não são de grande importância.

É importante destacar que o presente trabalho é parte integrante da linha de pesquisa *Análise Numérica e Computacional em Engenharia*, do Mestrado em Construção Metálica (Deciv/EM/UFOP), que tem como objetivo a aplicação de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e/ou o Método dos Elementos de Contorno (MEC), na determinação das respostas de sistemas de engenharia. A eficiência computacional das estratégias envolvidas e a visualização gráfica dos dados processados e gerados são, também, tópicos de interesse.

Em geral, o primeiro passo para se obter a solução numérica para os problemas de contato consiste em reformulá-los em espaços de aproximação. Para isso, pode-se recorrer geralmente ao MEF, que é uma técnica de discretização muito utilizada na análise de problemas estruturais complexos. Após a discretização, a atenção é voltada para a seleção e escolha das metodologias que possibilitem o tratamento, de forma adequada, da restrição imposta à análise, e que, normalmente, se requer que o problema tenha dimensão finita. Dentre as alternativas encontradas na literatura para tratamento da restrição unilateral, as técnicas de programação matemática são as utilizadas neste trabalho. Essas técnicas, que permitem obter a solução do problema de contato sem que as restrições unilaterais sejam eliminadas explicitamente da análise, mantendo-se, portanto, a filosofia original do problema, dão origem a inequações variacionais, que, ao serem satisfeitas, geram um conjunto de equações e restrições que são resolvidas utilizando-se técnicas de pivoteamento.

Os tópicos necessários para o entendimento e a validação da metodologia de solução proposta são apresentados nos demais capítulos que compõem este trabalho. Na Seção 1.3, ainda neste capítulo, é feita uma revisão bibliográfica onde atenção especial é dada aos

trabalhos que tratam da análise do problema de contato unilateral entre uma placa e uma base elástica.

No Capítulo 2 é feito um estudo sobre placas e são apresentados os modelos de bases elásticas consideradas neste trabalho. Nele são descritas as teorias de Mindlin e de Kirchhoff para análise de placas espessas e delgadas, respectivamente e, ainda, são fornecidas as equações matemáticas que descrevem o comportamento dessas bases elásticas.

Como a técnica de solução adotada para o problema de contato baseia-se na discretização por elementos finitos dos corpos, o Capítulo 3 apresenta os elementos utilizados na modelagem da placa e da base elástica.

O Capítulo 4 fornece as formulações desenvolvidas neste trabalho para solução do problema de contato bilateral e unilateral. Para resolver o problema de contato unilateral são apresentadas três formulações que transformam o problema de minimização com restrição em um problema equivalente de complementaridade linear. Ao final do capítulo, Seção 4.4, é dada atenção particular ao algoritmo adotado para solução do problema de complementaridade linear (PCL).

O Capítulo 5 fornece um resumo dos procedimentos adotados na implementação computacional do modelo numérico proposto no Capítulo 4. Uma descrição do programa principal é fornecida na Seção 5.2, que esclarece os passos mais importantes usados na implementação desse programa.

Exemplos que validam a formulação proposta são apresentados no Capítulo 6. Inicialmente, são fornecidos quatro exemplos de placas com a finalidade de se comprovar a eficiência dos elementos adotados. Com o intuito de se verificar a eficiência computacional das formulações desenvolvidas no Capítulo 4 para solução do problema de contato, são analisados, na Seção 6.3, cinco exemplos de placas em contato bilateral com uma fundação elástica, cujos modelos foram descritos no Capítulo 2. Ainda na Seção 6.4, são apresentados quatro exemplos de placas com restrições unilaterais de contato provocadas por uma base elástica modelada segundo Winkler ou como um semi-espaço infinito.

E, finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e observações sobre o emprego da formulação proposta na solução dos diversos problemas estudados no Capítulo 6. São fornecidas, também, algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Interações de contato entre dois corpos deformáveis, onde um deles é considerado como uma base elástica, são, usualmente, modeladas por meio de condições de contorno bilaterais; ou seja, através de deslocamentos e/ou de forças prescritas em alguma região do corpo. Tais modelos são satisfatórios para algumas aplicações de engenharia, mas deixam de ser confiáveis quando o comportamento dos corpos na região de contato é o assunto de principal interesse e quando há variação na região de contato entre eles. Geralmente, nesses casos, é necessário estabelecer condições de contorno unilaterais (impenetrabilidade entre os corpos, por exemplo) como parte da solução, uma vez que não se conhece a verdadeira área de contato.

Um dos estudos sobre as bases elásticas foi feito por Kerr (1964), que apresentou uma descrição dos modelos de Winkler, Pasternak, Filonenko-Borodich, entre outros, apresentando as equações matemáticas que os representam.

Entre as aplicações envolvendo condições de contorno bilaterais e algum modelo de base elástica, pode-se citar o caso de uma placa circular, submetida a uma carga concentrada, em contato, sem atrito, com uma base elástica modelada segundo Winkler. Nesse modelo, a intensidade da reação exercida pela base elástica é proporcional à deflexão sofrida por ela. Solução analítica para o problema foi dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970).

Utilizando o modelo de base elástica com dois parâmetros para descrever o comportamento da fundação e ainda a hipótese de contato bilateral, Yang (1972) apresenta uma aproximação iterativa que combina as vantagens do método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas para a análise de placas, sobre uma base elástica, sujeita a carregamentos e condições de contorno quaisquer. A aproximação introduzida é aplicável a qualquer elemento de placa e utiliza o modelo de base elástica com dois parâmetros, que leva em conta o efeito das deformações cisalhantes na fundação.

Em 1965, Cheung e Zienkiewicz (1965) fizeram uma análise linear elástica de placas e tanques em contato com um semi-espço infinito, utilizando o método dos elementos finitos. O contato foi considerado, também, como bilateral e o atrito existente entre os corpos foi desprezado. Continuando esse trabalho, Cheung e Nag (1968) resolveram o problema de contato de placas e vigas sobre um semi-espço infinito. Utilizando o mesmo método para modelagem dos corpos, foi feita uma análise dos efeitos que surgem devido à separação dos corpos. Duas características importantes da técnica de solução, utilizada nesses dois trabalhos, são o uso de elementos retangulares de flexão de placas e a consideração da pressão de

contato ser constante em uma área retangular em torno de cada um dos pontos nodais do elemento.

Svec e McNeice (1972) e Svec e Gladwell (1973) resolveram o problema de contato bilateral entre uma placa delgada, de forma retangular, triangular ou circular, e um semi-espaço infinito pelo MEF. Nesses estudos, foi usado um elemento triangular. Uma característica da formulação utilizada é a consideração, agora, da distribuição da pressão de contato contínua em cada elemento triangular.

Em 1969 foi apresentado por Weitsman (1969) um método variacional para o cálculo do raio de contato entre uma placa elástica de extensão infinita e um semi-espaço infinito. A placa estava pressionada contra a região elástica por uma carga concentrada atuando no seu centro. Na ausência de contato, considerou-se que nenhuma tensão de tração poderia ser transmitida através da interface entre a placa e a base elástica, ou seja, o contato foi considerado como unilateral. Os resultados mostraram que a região de contato, para essa situação de carregamento, é definida por um círculo.

Weitsman (1970) apresentou uma formulação variacional para análise de placas e vigas, sujeitas a uma carga concentrada, em contato unilateral com uma base elástica modelada segundo Winkler. O desenvolvimento de regiões de perda de contato é examinado em vários exemplos.

Uma das primeiras formulações do problema de contato unilateral como um problema de programação quadrática é encontrada no trabalho de Conry e Seireg (1971). Usando o método das forças, hipóteses de pequenos deslocamentos e material linear-elástico e, ainda, conhecimento prévio de pontos que entrariam em contato, eles resolveram o problema clássico de contato Hertziano (Johnson, 1982) através do método Simplex modificado.

Seguindo o trabalho feito por Svec e McNeice (1972), Svec (1974) resolveu o mesmo problema considerando, entretanto, que a fundação reagia apenas aos esforços de compressão.

Gladwell e Iyer (1974) estudaram o problema de contato unilateral, sem atrito, entre uma placa circular e um semi-espaço infinito. Nesse estudo, considerou-se a placa delgada, de raio a finito e sujeita, além do seu peso próprio, a uma carga distribuída sobre uma região circular central de raio b .

Chand et al. (1976) formularam o problema de contato unilateral entre dois corpos elásticos como problemas de programação quadrática (PPQ) cujos teoremas foram aplicados para mostrar que a solução de um problema de contato, se existe, é única e pode ser facilmente encontrada pelo método Simplex modificado de programação quadrática. Problemas clássicos de vigas e arcos sobre bases elásticas são apresentados.

O problema estático de contato de placas sobre solos modelados como um semi-espaço infinito ou segundo Winkler foi estudado por Ascione e Grimaldi (1984). O contato foi considerado como unilateral. Algumas formulações variacionais para se obter aproximações numéricas da solução pelo método dos elementos finitos são discutidas e os resultados, para o caso de uma placa circular, são apresentados. Em uma das formulações propostas nesse artigo e utilizada no presente trabalho, chega-se, após a discretização usando o MEF e as condições de Kuhn-Tucker (Luenberger, 1973) a um problema de complementaridade linear (PCL) que é resolvido através do algoritmo de Dantzig (Cottle e Dantzig, 1968).

Em 1985, Ascione e Olivito (1985) apresentaram uma formulação, baseada no método das Penalidades, para resolver o problema de contato unilateral entre uma placa retangular e um semi-espaço infinito. Para se levar em conta os efeitos das tensões cisalhantes, a teoria de Mindlin foi utilizada.

Em 1986, surgem trabalhos que utilizam o método dos elementos de contorno para análise do problema de contato. Puttonen e Varpasuo (1986) examinam a aplicabilidade do método para analisar uma placa sobre uma fundação elástica modelada segundo Winkler ou Pasternak. Katsikadelis e Kallivokas (1986) desenvolvem uma solução para análise de placas delgadas, engastadas, de forma qualquer e submetidas a qualquer tipo de carregamento, em contato com uma fundação elástica modelada segundo Pasternak.

Rajapakse e Selvadurai (1986) fizeram um estudo comparativo sobre a eficiência de alguns elementos de placas baseados na teoria de Mindlin e na técnica de integração reduzida para descrever a interação entre a placa e um semi-espaço infinito.

Li e Dempsey (1988) apresentaram uma solução para o problema de contato unilateral sem atrito entre uma placa quadrada sujeita a uma carga vertical e um semi-espaço infinito. Consideraram, também, o modelo de base elástica proposto por Winkler.

Ainda em 1988, dois trabalhos foram feitos para analisar o problema de contato unilateral sem atrito. Um deles, desenvolvido por Celep (1988) utiliza o método de Galerkin para descrever o comportamento de placas retangulares, submetidas a cargas concentradas e distribuídas, em contato com uma fundação tipo Winkler. O outro, desenvolvido por Celep et al. (1988), estuda o problema de contato unilateral entre uma placa circular e uma base elástica constituída por molas discretas através do método de Ritz.

Tentativas mais modernas de resolução de problemas de contato, além de utilizarem o método dos elementos finitos ou o método dos elementos de contorno, utilizam técnicas de programação matemática para tratamento das restrições unilaterais. Björkman et al. (1995)

utilizaram a programação quadrática seqüencial (SQP) para o estudo de problemas geometricamente não-lineares de contato sem atrito.

Também em 1995, uma solução numérica para resolver problemas de equilíbrio de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato, impostas por bases elásticas que reagem apenas quando comprimidas, foi apresentada por Silveira (1995). Na metodologia de solução foram utilizadas, juntamente com o MEF, técnicas de programação matemática, em particular, o algoritmo de Lemke e o MEF.

Trabalho recente sobre problema de contato unilateral foi apresentado por Akbarov e Kocatürk (1997), que utilizaram o método de Galerkin para estudar a flexão de placas anisotrópicas em contato com bases elásticas, que reagem apenas à compressão. Essas bases são modeladas segundo Winkler ou como um semi-espaço infinito.

EQUAÇÕES BÁSICAS PARA A PLACA E PARA AS BASES ELÁSTICAS

2.1 – INTRODUÇÃO

É importante destacar o caso de placas em contato com uma base elástica deformável como uma das aplicações de grande interesse tanto da engenharia geotécnica quanto da engenharia estrutural, constituindo uma categoria importante de problemas de engenharia.

O objetivo deste capítulo é apresentar as teorias para flexão de placas e os modelos de bases elásticas a serem considerados neste trabalho.

A análise de placas é feita baseando-se na teoria de flexão proposta por Kirchhoff (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1970) e na teoria proposta por Mindlin (Hinton e Owen, 1970; Zienkiewicz e Taylor, 1991), que referem-se a placas delgadas e espessas, respectivamente. Na Seção 2.2 são apresentadas as equações básicas referentes a essas duas teorias.

E, para finalizar este capítulo, a Seção 2.3 apresenta as formas de modelagem das bases elásticas utilizadas na análise do problema de contato.

2.2 – TEORIAS DE PLACAS

Uma placa é uma estrutura plana caracterizada por apresentar uma das dimensões muito pequena quando comparada com as outras duas, considerando um sistema cartesiano de referência.

A placa, assim como a viga, está submetida a esforços de flexão, provocados por carregamentos transversais ao seu plano. A Figura 2.1 ilustra as tensões atuantes na seção transversal de uma placa constituída por um material homogêneo e elástico linear, submetida a uma carga distribuída q . Verifica-se que as tensões normais σ_x e σ_y variam linearmente com a direção z e estão associadas aos momentos fletores M_x e M_y , e a tensão cisalhante τ_{xy} varia linearmente com z e está associada ao momento de torção M_{xy} . As tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} variam quadraticamente em relação à direção z e, a tensão normal σ_z é considerada desprezível em relação à magnitude das tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} .

Uma observação importante a ser feita é quanto à ausência de tensões de membrana na superfície neutra, ou seja, $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ no plano médio $z = 0$. Com exceção da tensão τ_{xy} , o estado de tensões característico do problema de placas pode ser visto como uma extensão da teoria de vigas (unidimensional) para o caso bidimensional.

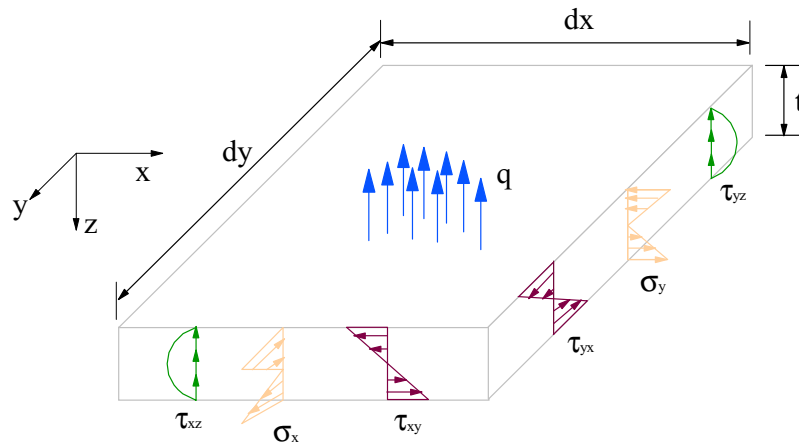


Figura 2.1 – Tensões Atuantes em uma Placa.

Conforme a Figura 2.1, as seguintes equações de equilíbrio podem ser escritas:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (2.1a)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad (2.1b)$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.1c)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (2.1d)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (2.1e)$$

onde M_x e M_y são momentos fletores por unidade de comprimento atuantes em torno dos eixos x e y , respectivamente; M_{xy} refere-se ao momento de torção por unidade de comprimento; Q_x e Q_y são esforços cortantes, também por unidade de comprimento, segundo os eixos x e y , respectivamente.

Na análise de placas, existe a teoria de flexão de placas que considera os efeitos de cisalhamento transversal – *Teoria de Reissner-Mindlin* – e a teoria que despreza tais efeitos – *Teoria de Kirchhoff* (Clássica) – que é utilizada apenas para placas consideradas delgadas.

A teoria de flexão de placas proposta por Kirchhoff considera as seguintes hipóteses:

- (i) as deflexões são pequenas;
- (ii) as normais à superfície média indeformada permanecem normais à superfície média deformada;
- (iii) a tensão normal σ_z é considerada desprezível.

A segunda hipótese é equivalente a desconsiderar o efeito de forças cisalhantes na deflexão de placas. Essa hipótese é usualmente satisfatória, mas, em alguns casos (por exemplo, placa com orifícios), o efeito de cisalhamento torna-se importante e algumas correções na teoria de placas delgadas devem ser introduzidas.

A teoria de Kirchhoff é imposta considerando que a normal à superfície média no estado deformado gira de pequenos ângulos dw/dx e dw/dy . Assim, o campo de deslocamentos de um ponto P qualquer da placa, como mostra a Figura 2.2 a seguir, pode ser aproximado por:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2a)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.2b)$$

$$w = w \quad (2.2c)$$

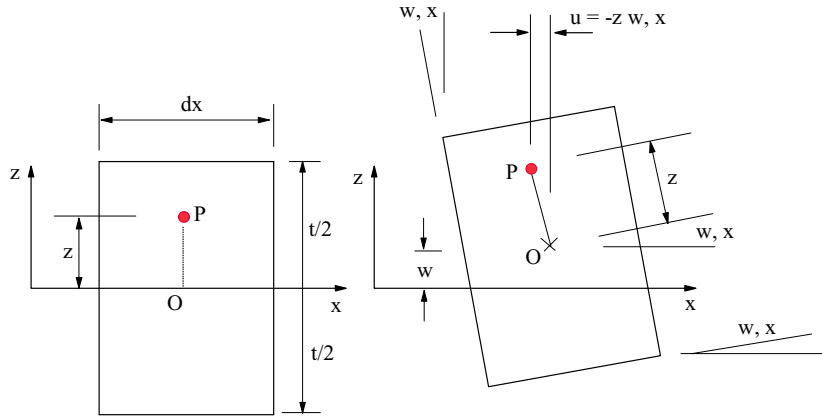


Figura 2.2 – Comportamento da Seção Transversal (Plano x-z) – Hipótese de Kirchhoff.

A partir das Equações (2.2a,b,c), pode-se escrever as relações cinemáticas (deformação - deslocamento) para a formulação baseada na teoria de Kirchhoff:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.3a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.3b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3c)$$

Utilizando a lei de Hooke para tensões planas com $\sigma_z = 0$, as relações constitutivas (tensão – deformação) podem ser expressas, para materiais isotrópicos, por:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.4a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (2.4b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (2.4c)$$

Escrevendo (2.4a,b,c) na forma matricial, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.5)$$

onde:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T \quad (2.5a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.5c)$$

sendo E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson do material que compõe a placa.

Utilizando (2.1a,b,c) e (2.4a,b,c), os esforços solicitantes que atuam ao longo da espessura da placa podem ser escritos, em termos dos deslocamentos, como:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.6a)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.6b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.6c)$$

sendo $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ a rigidez à flexão da placa.

Na forma matricial, as equações anteriores podem ser expressas como

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_k \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.7)$$

onde: \mathbf{M} é o vetor que contém os esforços solicitantes, \mathbf{D}_k é a matriz que relaciona esforços solicitantes e curvaturas, dada por

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)D}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.7a)$$

e $\boldsymbol{\kappa}$ é o vetor de curvaturas, expresso por

$$\boldsymbol{\kappa} = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}^T. \quad (2.7b)$$

As placas espessas são analisadas utilizando-se a teoria de flexão proposta por Mindlin (Hinton e Owen, 1970; Zienkiewicz e Taylor, 1991) que, ao contrário da teoria de Kirchhoff, admite que as normais à superfície média indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais à superfície média deformada. Nesse caso, os ângulos de rotação da normal à superfície média θ_x e θ_y não são tomados iguais à derivada do deslocamento transversal w , ou seja, $\theta_x \neq \partial w / \partial x$ e $\theta_y \neq \partial w / \partial y$.

Dessa forma, o campo de deslocamentos de um ponto qualquer da placa, como ilustrado na Figura 2.3, pode ser representado por:

$$u = -z\theta_x \quad (2.8a)$$

$$v = -z\theta_y \quad (2.8b)$$

$$w = w \quad (2.8c)$$

onde θ_x e θ_y correspondem à rotação da normal à superfície média indeformada em relação aos planos x-z e y-z, respectivamente.

Considerando o campo de deslocamentos baseado na teoria de Mindlin e definido pelas Equações (2.8a,b,c), as relações cinemáticas para o problema de flexão de placas são expressas por:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (2.9a)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (2.9b)$$

$$\gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (2.9c)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad (2.9d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (2.9e)$$

sendo θ_x e θ_y ângulos de rotações pequenos.

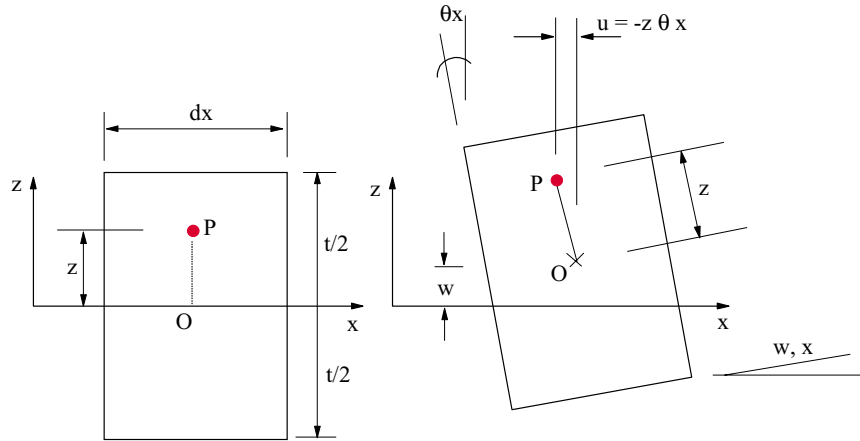


Figura 2.3 – Comportamento da Seção Transversal (Plano x-z) – Hipótese de Mindlin.

De forma análoga à teoria de Kirchhoff, é possível obter as relações cinemáticas para a teoria de Mindlin, ou seja,

$$\sigma_x = -z \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (2.10a)$$

$$\sigma_y = -z \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (2.10b)$$

$$\tau_{xy} = -z \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (2.10c)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \quad (2.10d)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \quad (2.10e)$$

Expressando (2.10a,b,c,d,e) matricialmente tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.11)$$

onde, agora,

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right\}^T \quad (2.11a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.11c)$$

Através das Equações (2.1a,b,c,d,e) e (2.10a,b,c,d,e), os esforços solicitantes são definidos como:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (2.12a)$$

$$M_y = -D \left(\nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \quad (2.12b)$$

$$M_{xy} = -\frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (2.12c)$$

$$Q_x = \alpha \frac{Et}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \quad (2.12d)$$

$$Q_y = \alpha \frac{Et}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \quad (2.12e)$$

O fator de correção α introduzido nas Equações (2.12d,e) é considerado para se levar em conta o empenamento da seção transversal, uma vez que as tensões τ_{xz} e τ_{yz} são admitidas constantes ao longo da espessura da placa. Considera-se, neste trabalho, $\alpha = 5/6$.

As Equações (2.12a,b,c,d,e), na forma matricial, tornam-se:

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_M \boldsymbol{\kappa} \quad (2.13)$$

onde \mathbf{D}_M representa a matriz que relaciona esforços solicitantes-curvatura, ou seja:

$$\mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 \\ & \mathbf{D}_k & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha Et}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha Et}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.13a)$$

e $\boldsymbol{\kappa}$ define o vetor de curvaturas, característico da teoria de Mindlin, definido como:

$$\boldsymbol{\kappa} = -\left\{ \theta_{x,x} \quad \theta_{y,y} \quad \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \quad \theta_x - w_{,x} \quad \theta_y - w_{,y} \right\}^T \quad (2.13b)$$

2.3 – MODELOS DE BASES ELÁSTICAS

O principal objetivo deste trabalho é a investigação de problemas de contato nos quais um dos corpos é considerado como uma base elástica deformável, como ilustrado na Figura 2.4. Como o comportamento real do sistema estrutura-fundação é de difícil descrição, diferentes modelos matemáticos foram desenvolvidos para descrevê-lo simplificadaamente. Além disso, em muitas situações práticas, o interesse da resposta na base elástica limita-se à obtenção das forças na região de contato dessa com a estrutura, no caso uma placa, não importando o campo de deslocamentos ou estado de tensões que se desenvolvem no seu interior. Surge, com isso, também, a necessidade de se buscar modelos matemáticos relativamente simples para descrever, com razoável precisão, o comportamento da base elástica na região de contato.

Antes da existência de modelos matemáticos, a dificuldade de se determinar as pressões de contato era superada adotando-se algumas simplificações arbitrárias como, por exemplo, assumindo a pressão de contato linear.

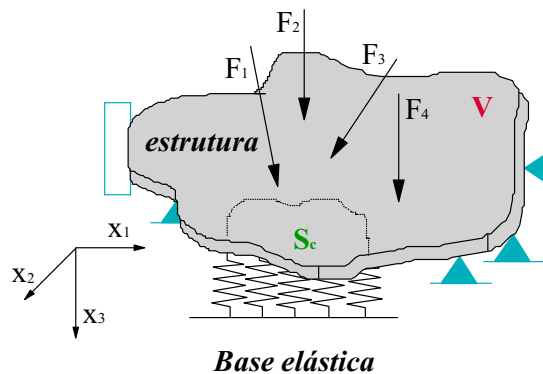


Figura 2.4 – Base Elástica.

Os modelos matemáticos considerados mais simples são aqueles que apresentam apenas um parâmetro definindo as propriedades do material que compõe a fundação elástica. Destacam-se, entre eles, o sistema de molas discretas dispostas ao longo da região de contato e o modelo proposto por Winkler (Hetényi, 1946; Kerr, 1964). Esse último modelo é equivalente a uma camada formada por molas estreitamente espaçadas e independentes entre

si. Esses modelos não consideram as interações entre as molas e, por isso, não representam precisamente as características de muitas fundações práticas.

Em algumas situações práticas, o comportamento dos solos difere consideravelmente da hipótese de Winkler. De acordo com Winkler, uma carga atuando em um dado ponto da fundação causa deflexão apenas nesse ponto, como mostra a Figura 2.5a. Entretanto, o solo é, na realidade, um corpo contínuo e, portanto, uma curva de deflexão contínua deve ser obtida (Figura 2.5b).

Modelos como os de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov (Kerr, 1964; Harr et al., 1969; Yang, 1972; Zhaohua e Cook, 1982; Horvath, 1993), apresentam dois parâmetros definindo o comportamento da base elástica, sendo então chamados modelos de bases com dois parâmetros. Esses modelos assumem, de alguma forma, as interações entre as molas, melhorando, portanto, o modelo proposto por Winkler.

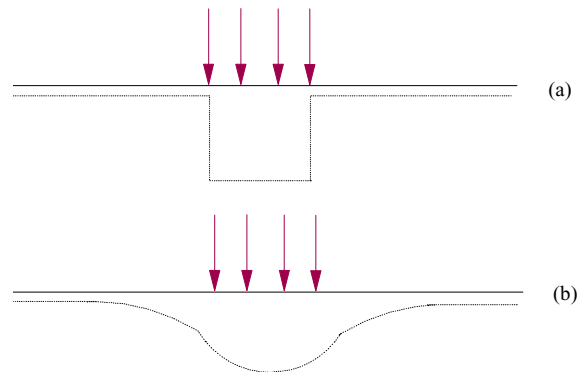


Figura 2.5 – Curvas de Deslocamento da Base Elástica.

A falta de evidência experimental para se verificar se esses modelos fornecem a resposta correta da fundação é comentada no trabalho de Harr et al. (1969). Em Keer (1964), questionam-se algumas metodologias utilizadas na determinação dos parâmetros adotados nos modelos de bases elásticas, uma vez que estabelecer o parâmetro de rigidez de um solo é bastante complicado.

É conveniente, então, modelar alguns solos como um sólido elástico contínuo, homogêneo e isotrópico representado por um semi-espaco infinito (Cheung e Nag, 1968; Cheung, 1977; Timoshenko e Gere, 1980; Silveira, 1995).

Os modelos de bases elásticas citados nesta seção são apresentados, com detalhes, a seguir.

2.3.1 – Modelo de Molas Discretas

Nesse modelo de base elástica de um parâmetro, a fundação é representada por um sistema de apoios discretos constituídos por molas como mostra a Figura 2.6, onde, para a reação da base elástica, tem-se a seguinte expressão:

$$r_b = Kw_b|_{(x_i, y_i)} \quad (2.14)$$

onde r_b e w_b são, respectivamente a reação e o deslocamento da base elástica, K representa o parâmetro de rigidez da mola e (x_i, y_i) caracteriza a posição dos nós da estrutura e da base elástica que estão em contato.

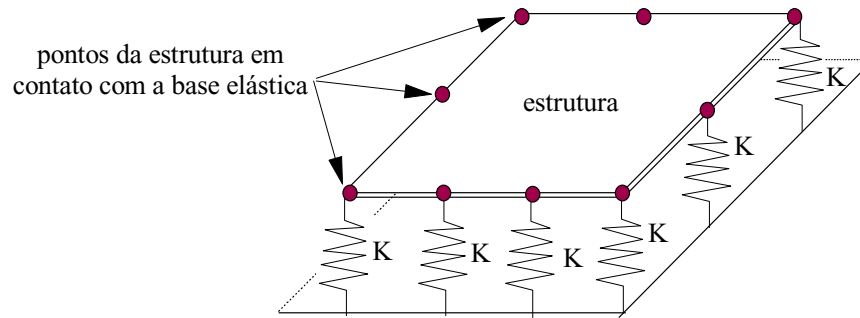


Figura 2.6 – Apoios Discretos.

2.3.2 – Modelo de Winkler

Esse modelo, ilustrado na Figura 2.7, assume que a intensidade da reação normal r_b exercida em um dado ponto da base elástica é diretamente proporcional à deflexão que ocorre nesse ponto, ou seja,

$$r_b = Kw_b \quad (2.15)$$

onde K é o parâmetro de rigidez elástico da fundação.

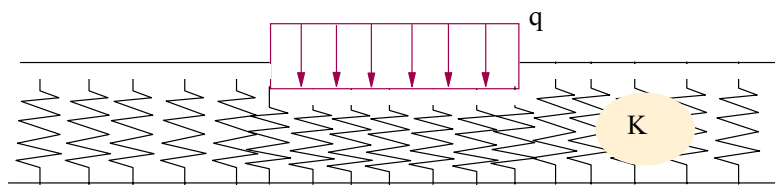


Figura 2.7 – Modelo de Winkler.

Observe que nas Equações (2.14) e (2.15) existe apenas um parâmetro modelando a base elástica. Para melhorar esses modelos, alguns autores assumem interações entre as molas adicionando à Equação (2.15) um segundo parâmetro, gerando, assim, os chamados modelos de bases elásticas com dois parâmetros, definidos a seguir.

2.3.3 – Modelo de Filonenko – Borodich

Para encontrar algum grau de interação entre as molas, esse modelo assume que as molas são conectadas a uma membrana elástica sujeita a um campo constante de tração T , como ilustra a Figura 2.8.

Esse modelo é representado matematicamente através da relação:

$$r_b = Kw_b - T\nabla^2 w_b \quad (2.16)$$

onde T é a intensidade do campo de tração na membrana e K é o parâmetro de rigidez elástico da fundação, como já definido anteriormente.

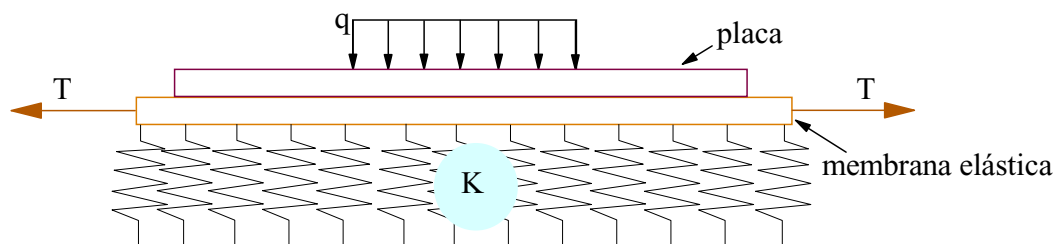


Figura 2.8 – Modelo de Filonenko – Borodich.

2.3.4 – Modelo de Pasternak

No modelo ilustrado na Figura 2.9, assume-se considerando que as molas são interligadas por uma camada incompressível que resiste apenas às deformações cisalhantes.

Tem-se:

$$r_b = Kw_b - G\nabla^2 w_b \quad (2.17)$$

com G representando o parâmetro de rigidez cisalhante da camada.

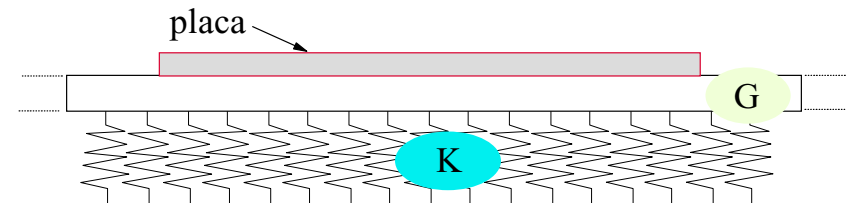


Figura 2.9 – Modelo de Pasternak.

2.3.5 – Modelo de Vlasov

De acordo com o trabalho de Yang (1972), considere uma fundação elástica de espessura H, como ilustra a Figura 2.10. Supõe-se que o deslocamento horizontal seja desprezível e que o campo de deslocamentos e o estado de tensões normais, ao longo da direção z, sejam determinados por uma função $\Psi(z)$.

Considere, também, que a tensão cisalhante na interface entre a camada compressível e a estrutura seja igual a zero. Assim, o deslocamento vertical da fundação pode ser expresso como:

$$w_b(x,y,z) = w(x,y)\Psi(z) \quad (2.18)$$

onde $w(x,y)$ é a deflexão da superfície da fundação e $\Psi(z)$ é a função de distribuição de deslocamentos que depende da natureza da fundação.

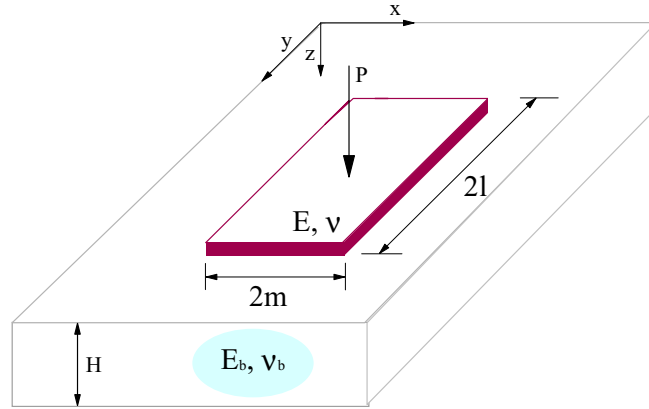


Figura 2.10 – Modelo de Vlasov.

Para uma fundação relativamente rasa, a variação das tensões normais com a profundidade é pequena e, portanto, pode ser considerada constante. Sob essas condições, a função $\Psi(z)$ é representada, segundo Vlasov e Leont'ev (1966), por

$$\Psi(z) = \frac{H - z}{H}. \quad (2.19)$$

Para uma fundação profunda, as tensões normais variam, consideravelmente, com a profundidade e, nesse caso, a função $\Psi(z)$ é definida, segundo os mesmos autores, como

$$\Psi(z) = \frac{\sinh \frac{\gamma(H - z)}{m}}{\sinh \frac{\gamma H}{m}}, \quad (2.20)$$

onde m é uma das dimensões da placa (ver Figura 2.10) e γ é uma constante que define a razão de decréscimo dos deslocamentos com a profundidade.

Baseando-se nas relações tensão-deformação e deformação-deslocamento, com os deslocamentos expressos pela Equação (2.18), a condição de equilíbrio da fundação sujeita a uma pressão distribuída $r_b(x,y)$, segundo Vlasov e Leont'ev (1966), é dada pela equação

$$Kw_b(x,y) - K_1 \nabla^2 w_b(x,y) = r_b(x,y) \Psi(0) \quad (2.21)$$

onde K e K_1 são os parâmetros elásticos da fundação que dependem da função $\Psi(z)$.

Para $\Psi(z)$ dado pela Equação (2.19), os parâmetros K e K_1 são expressos por:

$$K = \frac{E_o}{H(1 - v_o^2)} \quad (2.22a)$$

$$K_1 = \frac{E_o H}{6(1 + v_o)} \quad (2.22b)$$

e, para $\Psi(z)$ representado por (2.20),

$$K = \frac{E_o \gamma}{2m(1 - v_o^2)} \frac{\sinh \frac{\gamma H}{m} \cosh \frac{\gamma H}{m} + \frac{\gamma H}{m}}{\sinh^2 \frac{\gamma H}{m}} \quad (2.23a)$$

$$K_1 = \frac{E_o m}{4\gamma(1 - v_o^2)} \frac{\sinh \frac{\gamma H}{m} \cosh \frac{\gamma H}{m} - \frac{\gamma H}{m}}{\sinh^2 \frac{\gamma H}{m}} \quad (2.23b)$$

onde,

$$E_o = \frac{E_b}{1 - v_b^2} \quad \text{e} \quad v_o = \frac{v_b}{1 - v_b} \quad (2.24)$$

sendo E_b e v_b o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material da fundação elástica, respectivamente.

2.3.6 – Semi-Espaço Infinito

A Figura 2.11 ilustra uma base elástica modelada como um sólido homogêneo e isotrópico, representado por um semi-espaco infinito. Seguem-se, nesse caso, os procedimentos sugeridos nos trabalhos de Cheung e Zienkiewicz (1965) e Cheung (1977).

Conforme esses trabalhos, é conveniente assumir uma pressão constante atuando em uma área retangular ab , ao redor de cada ponto nodal, de intensidade P_i / ab . Essa pressão varia de nó para nó.

A deflexão de qualquer ponto n , devido a uma força de contato vertical F no ponto i , centro da área retangular ab , é dada pela equação de Boussinesq:

$$w_{ni} = \frac{F(1 - \nu_b^2)}{\pi E_b r_n} \quad (2.25)$$

onde E_b e ν_b são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da fundação elástica e r_n é a distância radial entre os pontos i e n .

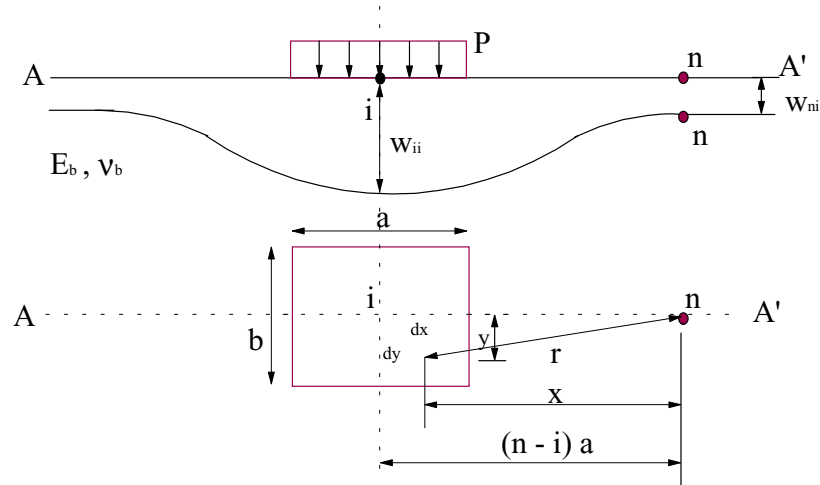


Figura 2.11 – Semi - Espaço Infinito.

A deflexão no centro da área retangular ab , devido a uma carga uniformemente distribuída, é obtida integrando-se (2.25) sobre a área ab , ou seja

$$w_{ii} = 2 \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} \frac{P_i(1 - \nu_b^2)}{ab\pi E_b \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \frac{P_i(1 - \nu_b^2)}{a\pi E_b} f_{ii}, \quad (2.26)$$

sendo f_{ii} o coeficiente de flexibilidade, que é função de a/b , definido por

$$f_{ii} = 2 \left\{ \ln \left[\frac{1}{c} + \sqrt{\left(\frac{1}{c}\right)^2 + 1} \right] c + \ln \left[c + \sqrt{c^2 + 1} \right] \right\} \quad (2.27)$$

com $c = \frac{a}{b}$ (razão entre as dimensões do retângulo definido em torno do ponto i).

DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS DA PLACA E DAS BASES ELÁSTICAS

3.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho, como mencionado no Capítulo 1, é apresentar uma metodologia numérica capaz de solucionar problemas de equilíbrio de placas, considerando pequenos deslocamentos e deformações, em contato com uma fundação elástica, desprezando-se os efeitos decorrentes do atrito existente entre esses corpos.

Para isso, foram apresentadas no Capítulo 2, as equações básicas baseadas nas teorias de flexão existentes para a análise de placas espessas e delgadas e, também, as equações matemáticas que representam o comportamento de cada um dos modelos de bases elásticas utilizados.

Entretanto, como o método de solução numérica do problema de contato se baseia na técnica de discretização por elementos finitos, como será mostrado no Capítulo 4, este capítulo, na Seção 3.2, trata da apresentação dos elementos adotados na análise. Para análise de placas espessas é usado o elemento isoparamétrico com oito pontos nodais baseado na teoria de Mindlin e, para análise de placas delgadas, o elemento retangular com quatro pontos nodais baseado na teoria de Kirchhoff. A eficiência desses elementos é comprovada na primeira parte do Capítulo 6, onde são apresentados alguns exemplos numéricos.

E, ao final deste capítulo, na Seção 3.3, é feita a modelagem das bases elásticas apresentadas no Capítulo 2, em termos de elementos finitos. Os mesmos elementos finitos utilizados para a discretização da placa são usados para discretizar a base elástica. Nesta seção são descritas as expressões para a matriz de rigidez para os modelos de bases elásticas adotados.

3.2 – PLACAS

Esta seção destina-se à apresentação dos elementos utilizados na discretização da placa, sendo fornecidas as expressões para a matriz de rigidez do elemento e para os vetores de cargas externas atuantes. Esses elementos são, também, usados para a modelagem da fundação elástica.

3.2.1 – Elemento de Placa de Mindlin

Os elementos de placa de Mindlin consideram a deformação de flexão e a deformação cisalhante na análise da flexão de uma placa, e podem ser utilizados para modelar placas espessas e delgadas. Entretanto, quando usados para modelar placas delgadas, podem ser menos precisos que os elementos de placa de Kirchhoff, que não consideram as deformações cisalhantes.

O campo de deslocamentos para o elemento de Mindlin é definido por uma deflexão (w) e duas rotações (θ_x e θ_y), que referem-se às rotações da linha que foi normal à superfície média da placa indeformada. Esse campo de deslocamentos é interpolado usando-se os pontos nodais do elemento, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbf{d} = \{ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_n \ \theta_{xn} \ \theta_{yn} \}^T \quad (3.1a)$$

caracteriza o campo de deslocamentos nodais, com n representando o número de pontos nodais do elemento e \mathbf{N} é a matriz que contém as funções de interpolação utilizadas.

O ponto de partida para a obtenção da matriz de rigidez do elemento é a expressão para a energia interna de deformação, ou seja,

$$U = \frac{1}{2} \int_{A-t/2}^{t/2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dz dA \quad (3.2)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz} \}^T$, sendo as deformações expressas em termos dos deslocamentos através das Equações (2.9a,b,c,d,e); \mathbf{E} é a matriz que relaciona tensão-deformação definida na Equação (2.11c) e t é a espessura da placa.

Ao efetuar-se a integração ao longo da espessura da placa, obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_M \boldsymbol{\kappa} dA \quad (3.3)$$

sendo \mathbf{D}_M a matriz que relaciona esforços solicitantes-curvatura e $\boldsymbol{\kappa}$ o vetor de curvaturas para o elemento de Mindlin, definidos nas Equações (2.13a) e (2.13b), respectivamente.

O vetor de curvaturas $\boldsymbol{\kappa}$ do elemento pode, agora, ser definido como

$$\boldsymbol{\kappa} = - \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \\ \theta_x - w_{,x} \\ \theta_y - w_{,y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u}, \quad \text{sendo} \quad \boldsymbol{\Omega} = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Utilizando-se as Equações (3.1) e (3.4), obtém-se:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{\Omega N} = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & \dots & 0 & N_{n,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,y} & \dots & 0 & 0 & N_{n,y} \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} & \dots & 0 & N_{n,y} & N_{n,x} \\ -N_{1,x} & N_1 & 0 & \dots & -N_{n,x} & N_n & 0 \\ -N_{1,y} & 0 & N_1 & \dots & -N_{n,y} & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e \mathbf{d} é o vetor que caracteriza o campo de deslocamentos nodais do elemento, definido na Equação (3.1a).

Finalmente, a partir das Equações (3.3) e (3.5), chega-se à seguinte expressão:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_E^e \mathbf{d} \quad (3.7)$$

na qual \mathbf{K}_E^e define a matriz de rigidez para o elemento de placa, sendo expressa por:

$$\mathbf{K}_E^e = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_M \mathbf{B} \, dA \quad (3.8)$$

A integração, na Equação (3.8), é feita numericamente utilizando-se a Quadratura Gaussiana. A matriz de rigidez global \mathbf{K}_E da placa é obtida somando-se as contribuições de cada um dos elementos finitos utilizados para discretizar a placa.

Para a análise de placas baseada na teoria de flexão de Mindlin, optou-se pelo elemento isoparamétrico com oito pontos nodais como mostrado na Figura 3.1.

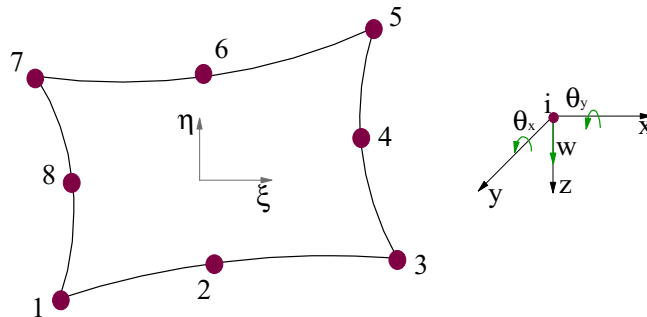


Figura 3.1 – Elemento Finito Isoparamétrico com Oito Nós.

Nesse elemento, os deslocamentos em um dado ponto são aproximados por funções quadráticas utilizando-se os oito pontos nodais. Tais funções são definidas em termos das coordenadas naturais (ξ , η) como:

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (3.9a)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (3.9b)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \quad (3.9c)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (3.9d)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \quad (3.9e)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \quad (3.9f)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \quad (3.9g)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \quad (3.9h)$$

As funções de interpolação, dadas pelas Equações (3.9a,...,h), são utilizadas, também, para interpolar as coordenadas de qualquer ponto do elemento, ou seja,

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta)x_i \quad (3.10a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta)y_i \quad (3.10b)$$

3.2.2 – Elemento de Placa de Kirchhoff

A teoria de Kirchhoff, como definida no Capítulo 2, é aplicável a placas delgadas. A energia de deformação na placa, para esse caso, é determinada por deformações planas ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} , que são funções da deflexão lateral da placa (w).

Como na Seção 3.2.1, a obtenção da matriz de rigidez para o elemento se dá a partir da energia interna de deformação dada pela Equação (3.2) onde, agora,

$\boldsymbol{\varepsilon} = \{ -zw_{,xx} \quad -zw_{,yy} \quad -2zw_{,xy} \}^T$ e \mathbf{E} , matriz que relaciona tensão-deformação, é expressa pela Equação (2.5c).

A integração ao longo da espessura da placa produz:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{\kappa} \, dA \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}}$ é a matriz que relaciona esforços solicitantes e curvaturas conforme Equação (2.7a) e $\boldsymbol{\kappa}$ é o vetor de curvaturas dado pela Equação (2.7b).

A deflexão para o elemento, segundo a teoria de Kirchhoff, é interpolada utilizando-se uma função polinomial cuja ordem depende da forma e do número de pontos nodais do elemento (n). Esse polinômio pode ser representado por uma matriz \mathbf{N} , como segue:

$$\mathbf{w} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.12)$$

onde \mathbf{d} representa o campo de deslocamentos nodais do elemento, sendo expresso por:

$$\mathbf{d} = \{ w_1 \ (w_{,x})_1 \ (w_{,y})_1 \ w_2 \ (w_{,x})_2 \ (w_{,y})_2 \ \dots \ w_n \ (w_{,x})_n \ (w_{,y})_n \}^T \quad (3.12a)$$

O campo de curvaturas é obtido através da diferenciação de w , ou seja:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.11), obtém-se a matriz de rigidez para o elemento, como segue:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K}_{\mathbf{E}}^e \mathbf{d} \quad (3.14)$$

sendo $\mathbf{K}_{\mathbf{E}}^e$ a matriz de rigidez para o elemento de placa de Kirchhoff, que é dada por:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{E}}^e = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{B} \, dA \quad (3.15)$$

A matriz de rigidez global da estrutura é obtida somando-se as contribuições de cada elemento, ou seja,

$$\mathbf{K}_E = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}_E^e \quad (3.16)$$

sendo ne o número de elementos utilizados para discretizar a placa.

O elemento utilizado para a análise de placas delgadas é o elemento retangular com doze graus de liberdade, ilustrado na Figura 3.2. Dessa forma, a função polinomial utilizada para representar a deflexão w para um ponto nodal desse elemento possui doze constantes α_i , como segue:

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 + \alpha_7 x_i^3 + \alpha_8 x_i^2 y_i + \alpha_9 x_i y_i^2 + \alpha_{10} y_i^3 + \alpha_{11} x_i^3 y_i + \alpha_{12} x_i y_i^3 \quad (3.17)$$

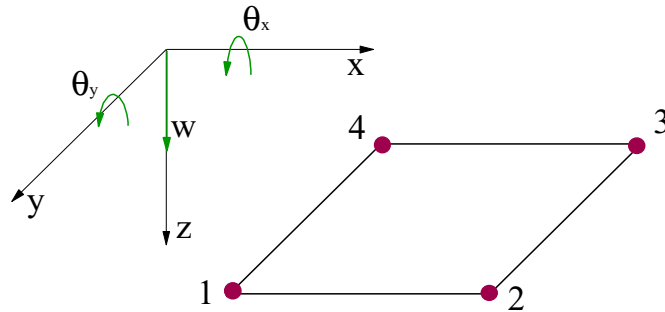


Figura 3.2 – Elemento Finito Retangular com Quatro Nós.

Na forma matricial, a Equação (3.17) é expressa por:

$$w_i^e = [1 \quad x_i \quad y_i \quad x_i^2 \quad x_i y_i \quad y_i^2 \quad x_i^3 \quad x_i^2 y_i \quad x_i y_i^2 \quad y_i^3 \quad x_i^3 y_i \quad x_i y_i^3] \boldsymbol{\alpha} \quad (3.18)$$

na qual $\boldsymbol{\alpha}$ é um vetor que contém as doze constantes α_i .

Similarmente, a rotação θ_x para um ponto nodal i do elemento, sabendo-se que

$$\theta_{x_i}^e = \frac{\partial w}{\partial y}, \text{ é dada por:}$$

$$\theta_{x_i}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.19)$$

e, da mesma forma, mas observando que $\theta_{y_i}^e = -\frac{\partial w}{\partial x}$, tem-se:

$$\theta_{y_i}^e = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 & -2x_i y_i & -y_i^2 & 0 & -3x_i^2 y_i & -y_i^3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.20)$$

Com isso, o campo de deslocamentos para um ponto nodal i do elemento é representado por:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 & -2x_i y_i & -y_i^2 & 0 & -3x_i^2 y_i & -y_i^3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.21)$$

Assim, o campo de deslocamentos do elemento pode ser escrito como:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}^e \boldsymbol{\alpha} \quad (3.22)$$

sendo a matriz \mathbf{A}^e dada por:

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2 y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2 y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2 y_2 & -y_2^2 & 0 & -3x_2^2 y_2 & -y_2^3 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2 y_3 & -y_3^3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

A partir da Equação (3.22), pode-se determinar as constantes α_i , como segue:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{e-1} \mathbf{d} \quad (3.24)$$

Para se obter a matriz \mathbf{B} , utilizada na Equação (3.15) para determinar a matriz de rigidez do elemento, deve-se, primeiramente, relacionar o campo de deformações à matriz $\boldsymbol{\alpha}$, ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.25)$$

Substituindo $\boldsymbol{\alpha}$ na Equação (3.25), usando a Equação (3.24), tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{H} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H} \mathbf{A}^{e-1} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.26)$$

na qual $\mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{A}^{e-1}$.

Conhecidas as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{D}_k , pode-se, facilmente, determinar a matriz de rigidez do elemento. Para se obter a matriz que contém as funções de interpolação \mathbf{N} , parte-se da Equação (3.12), ou seja,

$$w = \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{N} \mathbf{A}^e \boldsymbol{\alpha} \quad (3.27)$$

e, da Equação (3.18), verifica-se que:

$$w = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.28)$$

Comparando-se as Equações (3.27) e (3.28), conclui-se que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{N} \mathbf{A}^e \quad \text{com} \quad \mathbf{N} = \mathbf{C} \mathbf{A}^{e-1} \quad (3.29)$$

3.2.3 – Forças Externas

Na análise por elementos finitos de estruturas pelo método dos deslocamentos, a única forma de carregamento possível é através de cargas concentradas nos pontos nodais do elemento. Consequentemente, o carregamento distribuído atuante sobre o elemento deve ser reduzido a cargas nodais equivalentes.

Os tipos de cargas externas (forças verticais e/ou momentos) consideradas no presente trabalho são cargas concentradas e cargas uniformemente distribuídas na superfície do elemento ou em um ou mais bordos do elemento.

A energia potencial das cargas externas atuantes em um elemento é expressa por:

$$V = \mathbf{P} \mathbf{d} \Big|_{x_i, y_i} + \int_A \mathbf{q}_e \mathbf{d} \, dA + \int_{S_e} \mathbf{q}_l \mathbf{d} \, dS_e \quad (3.30)$$

onde $\mathbf{P} = \{ P_i \ M_{xi} \ M_{yi} \}^T$ define o vetor de cargas concentradas; $\mathbf{q}_e = \{ q \ m_x \ m_y \}^T$ representa o vetor de cargas uniformemente distribuídas ao longo da superfície do elemento, por unidade de área; $\mathbf{q}_l = \{ q_l \ m_x \ m_y \}^T$ indica o vetor de cargas distribuídas ao longo de um bordo S_e do elemento por unidade de comprimento e \mathbf{d} é o vetor que representa o campo de deslocamentos definido segundo as Equações (3.1a) ou (3.12a), conforme o tipo de teoria utilizada para análise da placa.

3.3 – BASES ELÁSTICAS

Os elementos finitos utilizados para discretizar a placa são, também, utilizados para discretizar a base elástica. Com isso, é possível obter a matriz de rigidez para a base que será usada, juntamente com a matriz de rigidez da placa, para análise do problema de contato sem atrito entre a placa e a fundação.

Caso se adote um sistema de apoios discretos constituídos por molas para modelar a fundação, como mostrado na Figura 2.6, a energia de deformação é dada por:

$$U_b = \sum_{i=1}^{nc} \frac{1}{2} K w_b^2 \Big|_{x_i, y_i} \quad (3.31)$$

onde K é o parâmetro de rigidez da mola, (x_i, y_i) caracteriza a posição dos nós da estrutura e da base elástica que estão em contato, como já definidos no Capítulo 2 e n_c indica o número de pontos nodais da estrutura em contato com a base.

A matriz de rigidez global para o modelo de molas discretas é uma matriz diagonal de ordem $n_c \times n_c$, onde os coeficientes da diagonal principal $(\mathbf{K}_B)_{ii}$ são iguais ao parâmetro de rigidez (K_i) da mola sob o ponto nodal i .

Para o modelo de Winkler, apresentado no Capítulo 2, Seção 2.3.2, a energia interna de deformação pode ser escrita como:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_A K w_b^2 dA \quad (3.32)$$

sendo K o parâmetro de rigidez elástico da base.

Sabendo-se que $w_b = \mathbf{N}_w \mathbf{d}_b$, onde \mathbf{N}_w corresponde à matriz que contém as funções de interpolação para a deflexão lateral w_b , ou seja,

$$\mathbf{N}_w = [N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ \dots \ N_n \ 0 \ 0]^T \quad (3.33)$$

com n indicando o número de pontos nodais do elemento, obtém-se:

$$U_b = \frac{1}{2} \mathbf{d}_b^T \mathbf{K}_b^e \mathbf{d}_b \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{d}_b = \{ w_{b1} \ 0 \ 0 \ w_{b2} \ 0 \ 0 \ \dots \ w_{bn} \ 0 \ 0 \}^T$ representa o campo de deslocamentos transversais da base elástica e \mathbf{K}_b^e é matriz de rigidez da base de Winkler para o elemento, dada por

$$\mathbf{K}_b^e = \int_A \mathbf{K} \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w dA \quad (3.35)$$

Para as bases elásticas modeladas com dois parâmetros, como os modelos de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov, escreve-se a energia interna de deformação como segue:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_A K_1 w_b^2 dA - \frac{1}{2} \int_A K_2 \nabla^2 w_b dA \quad (3.36)$$

onde K_1 é o parâmetro de rigidez da base e K_2 é o parâmetro que considera as deformações cisalhantes, definido de acordo com o modelo de base utilizado. Por exemplo, para o modelo de Pasternak, K_2 é parâmetro de rigidez cisalhante da camada incompressível.

Procedendo-se como anteriormente, ou seja, interpolando-se a deflexão da base elástica, a matriz de rigidez da base para o elemento é expressa por:

$$\mathbf{K}_b^e = \int_A K_1 \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w dA - \int_A K_2 (\mathbf{N}_{w,x}^T \mathbf{N}_{w,x} + \mathbf{N}_{w,y}^T \mathbf{N}_{w,y}) dA \quad (3.37)$$

sendo $\mathbf{N}_{w,x}$ e $\mathbf{N}_{w,y}$ as derivadas da função de interpolação \mathbf{N}_w em relação aos eixos x e y , respectivamente.

A matriz de rigidez global da base elástica para os modelos apresentados até agora é obtida somando-se as contribuições de cada elemento.

A Figura 2.11, apresentada no Capítulo 2, ilustra um modelo de base elástica representado por um semi-espaco infinito. Assumindo $F = 1$ e $P = 1$ nas Equações (2.25) e (2.26) e variando-se os pontos i e n de forma a percorrer todos os pontos nodais de contato entre a estrutura e a base elástica, consegue-se, facilmente, montar, já na forma global, a matriz de flexibilidade \mathbf{F}_B da fundação. Assim, para qualquer conjunto de forças nodais reativas \mathbf{r}_b , é possível exprimir os deslocamentos \mathbf{w}_b da base de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathbf{w}_b = \mathbf{F}_B \mathbf{r}_b \quad (3.38)$$

A inversão de \mathbf{F}_B na Equação (3.38) leva a:

$$\mathbf{K}_B \mathbf{w}_b = \mathbf{r}_b \quad (3.39)$$

onde \mathbf{K}_B é a matriz de rigidez da base elástica para o caso de um semi-espaco infinito.

A hipótese estabelecida por Cheung (1977), que assume uma pressão de contato constante, atuando em uma área retangular ao redor de cada um dos pontos nodais da

estrutura, restringe a análise do problema a placas de forma retangular que sejam discretizadas através de elementos finitos retangulares. Na tentativa de contornar esse inconveniente e conseguir analisar placas de forma qualquer, Svec e Gladwell (1973) desenvolveram um elemento triangular de flexão de placas para análise do problema de contato entre uma placa e um semi-espaço infinito. Nesse elemento o campo de deslocamentos é representado por um polinômio do 7º grau e a pressão de contato é caracterizada por uma função polinomial cúbica, contínua em cada elemento triangular.

Embora se consiga modelar placas de forma qualquer com o elemento isoparamétrico com oito nós, as áreas definidas ao redor dos pontos nodais desse elemento não são uniformes, gerando, assim, pressões de contato irreais. Daí a utilização, neste trabalho, do elemento retangular com quatro nós, em coordenadas generalizadas, para análise do comportamento de placas retangulares em contato com esse modelo de base elástica, como será visto nos exemplos apresentados no Capítulo 6. Para esse elemento, as áreas em torno dos pontos nodais são todas iguais e a formulação utilizada fornece bons resultados. A Figura 3.3 mostra essas áreas para o elemento isoparamétrico com oito nós e, também, para o elemento retangular com quatro nós.

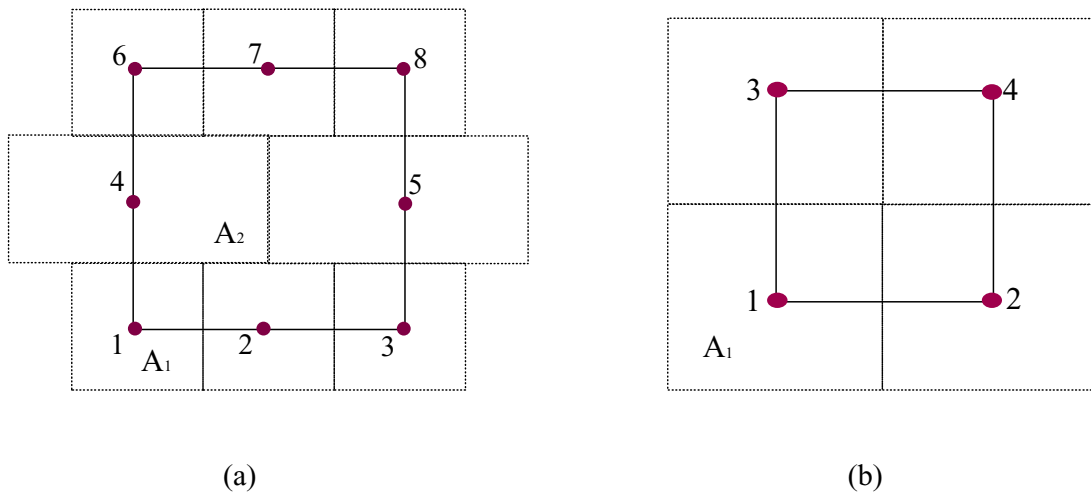


Figura 3.3 – Áreas Definidas em torno dos Pontos Nodais do Elemento.

((a) Elemento Isoparamétrico com Oito Nós, (b) Elemento Retangular com Quatro Nós)

FORMULAÇÕES PARA O PROBLEMA DE CONTATO

4.1 – INTRODUÇÃO

Em muitos problemas referentes a placas em contato com uma base elástica, considera-se que a base reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão, o que caracteriza o contato como bilateral. Entretanto, para muitos tipos de fundação essa hipótese é irreal, sendo necessário, então, considerar o contato como unilateral, ou seja, considerar que a fundação reage apenas às solicitações de compressão.

O problema de contato unilateral é não-linear, uma vez que não se conhece, a priori, a região de contato entre os corpos. Essa não-linearidade é oriunda das condições de contorno impostas, que são dadas em forma de restrições de desigualdades, correspondendo à condição cinemática de não penetração entre os corpos e à condição estática da pressão de contato ser compressiva. Tais restrições são expressas na forma complementar de Kuhn-Tucker (Luenberger, 1973).

Assim, o problema de contato unilateral pode ser formulado como um problema de otimização com restrições impostas por outros corpos ou meios, onde as condições de ótimo do problema são obtidas resolvendo-se as equações de equilíbrio em conjunto com as restrições e com a condição de complementaridade do contato.

Trabalhos recentes que possibilitam o tratamento da restrição unilateral imposta à análise seguem uma das seguintes estratégias:

- (i) adaptações usuais da mecânica estrutural (funcionais diferenciáveis e restrições bilaterais) ao caso do contato envolvendo restrições unilaterais;
- (ii) transformação do problema de contato em um problema de minimização sem restrições, através do método das Penalidades (Ascione e Olivito, 1985; Kanto e Yagawa, 1990;

Ferreira e Roehl, 1997) ou do uso de Multiplicadores de Lagrange (Bathe e Chaudhary, 1985); e
(iii) emprego de métodos de programação matemática (Ascione e Grimaldi, 1984; Barbosa, 1986; Silveira, 1995).

As técnicas de programação matemática permitem obter a solução do problema de contato sem que as restrições unilaterais sejam eliminadas especificamente da análise.

Na Seção 4.2 é apresentada a formulação para análise do problema de contato entre uma placa e uma base elástica, considerando o contato como bilateral.

As formulações utilizadas para análise do contato unilateral entre uma placa e uma base elástica modelada segundo Winkler ou como um semi-espaço infinito são detalhadas na Seção 4.3.

Finalmente, na Seção 4.4, são apresentados os detalhes da técnica de programação matemática (esquema de pivoteamento de Lemke) usada neste trabalho para solução do problema de contato com restrições unilaterais.

4.2 – FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DE CONTATO BILATERAL

O objetivo desta seção é fornecer os procedimentos utilizados para análise do contato entre uma placa e uma fundação elástica, cujos modelos foram apresentados no Capítulo 2. Considera-se o contato, aqui, como bilateral e desprezam-se as forças de atrito existentes entre os corpos. Utiliza-se o método dos elementos finitos como técnica de discretização. Exemplos de placas em contato bilateral com bases elásticas são apresentados no Capítulo 6.

4.2.1 – Bases Modeladas com Um Parâmetro e Semi-Espaço Infinito

A análise, através do método dos elementos finitos, do problema de contato bilateral entre uma placa e uma base elástica modelada com um parâmetro, como os modelos de molas discretas e Winkler, ou bases modeladas como um semi-espaço infinito, é apresentada através de um fluxograma computacional mostrado na Figura 4.1.

Essa análise consiste, basicamente, na montagem das matrizes de rigidez da estrutura e da base elástica, que são somadas de forma a se obter a matriz de rigidez para o sistema estrutura-fundação.

Conhecido o vetor de cargas nodais, obtêm-se os deslocamentos nodais da placa e da base elástica resolvendo-se o seguinte sistema:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_B) \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

onde \mathbf{K}_E e \mathbf{K}_B são as matrizes de rigidez global da placa e da base elástica, respectivamente; \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos e \mathbf{F} é o vetor de carregamento nodal equivalente.

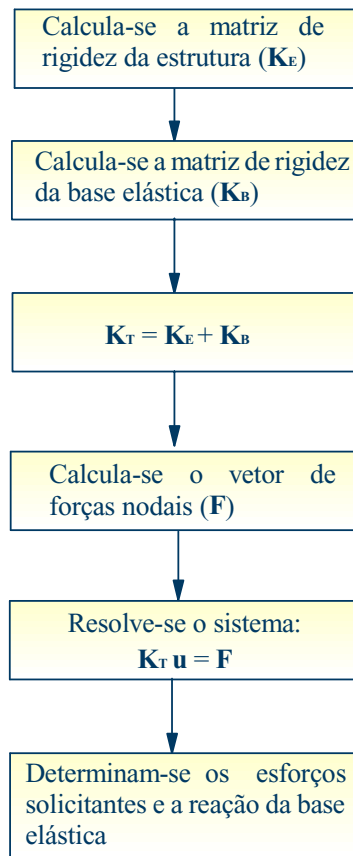


Figura 4.1 – Fluxograma Computacional.

(Bases com um Parâmetro e Semi-Espaço Infinito e Contato Bilateral)

É importante dizer que o processo de obtenção das matrizes de rigidez para os modelos de base elástica com um parâmetro e para o semi-espço infinito são distintos, como apresentado no Capítulo 3. No caso do semi-espço infinito, obtêm-se, primeiramente, a matriz de flexibilidade da fundação e, através da inversão dessa matriz, a matriz de rigidez do

semi-espaço infinito, já na sua forma global, é determinada. Esse processo é detalhado no Capítulo 3.

Uma vez calculados os deslocamentos nodais, é possível obter os esforços solicitantes na estrutura e a pressão de contato exercida pela base elástica de acordo com as equações apresentadas no Capítulo 2.

4.2.2 – Bases Modeladas com Dois Parâmetros

A equação diferencial que rege a flexão de uma placa é dada por:

$$\nabla^4 w = \frac{q^*}{D} \quad (4.2)$$

sendo $q^*(x,y)$ a carga distribuída sobre a placa, D é a rigidez à flexão da placa, definida em

capítulos anteriores e $\nabla^4(\) = \frac{\partial^4(\)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4(\)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4(\)}{\partial y^4}$.

A equação diferencial de equilíbrio de uma base modelada com dois parâmetros, como os modelos de Vlasov, Pasternak e Filonenko-Borodich, como já destacado, é expressa por:

$$Kw_b - K_1\nabla^2 w_b = r_b, \quad (4.3)$$

onde K é o parâmetro de rigidez da base e K_1 é o parâmetro que considera a interação entre as molas.

Considerando que a placa esteja sobre uma fundação elástica, a carga distribuída sobre a fundação consiste na carga de superfície $q(x,y)$ e na pressão exercida pela base elástica $r_b(x,y)$, ou seja,

$$q^*(x,y) = q(x,y) - r_b(x,y) \quad (4.4)$$

Dessa forma, a equação diferencial de equilíbrio de uma placa em contato bilateral com uma base elástica modelada com dois parâmetros, desprezando-se as forças de atrito entre os dois corpos, é definida, substituindo (4.2) e (4.3) em (4.4), como:

$$D\nabla^4 w - K_1 \nabla^2 w_b + K w_b = q \quad (4.5)$$

Examinando a Equação (4.5), vê-se que o primeiro termo depende das tensões de flexão internas na placa, enquanto o segundo e o terceiro termos dependem da reação da fundação elástica, causadas pelas deformações cisalhantes e compressíveis, respectivamente.

Em adição à carga distribuída $q(x,y)$, as reações fictícias Q que atuam ao longo dos bordos livres da placa devem ser consideradas. A não consideração das reações faz com que a base elástica se comporte como a base de Winkler. Essas reações fictícias são introduzidas para que se faça uma análise tridimensional da deformação da fundação ao redor das extremidades da placa. Para o caso de placas poligonais, reações concentradas fictícias R aparecem nos cantos da placa.

Para determinar tais reações, é preciso que se conheça a distribuição de deslocamentos da superfície da fundação. Dependendo da natureza da fundação, muitas expressões analíticas ou experimentais complexas podem ser selecionadas para análise tridimensional dos deslocamentos da fundação.

De acordo com Yang (1972), os deslocamentos da fundação são assumidos de forma a obedecer a seguinte lei exponencial aproximada (Figura 4.2):

Na direção positiva do eixo x :

$$w_b(x,y) = w_1(y)e^{-\alpha(x-m)} \quad (4.6)$$

Na direção positiva do eixo y :

$$w_b(x,y) = w_m(x)e^{-\alpha(y-1)} \quad (4.7)$$

onde $\alpha = \sqrt{K/K_1}$, $w_1(y)$ e $w_m(x)$ são os deslocamentos da fundação sob os bordos paralelos a y e x , respectivamente.

Essa lei é, também, assumida para os deslocamentos da fundação na região $|x| > m$ e $|y| > 1$, como segue:

$$w_b(x,y) = w_c e^{-\alpha(x-m)} e^{-\alpha(y-1)} \quad (4.8)$$

com w_c representando o deslocamento vertical da fundação sob os cantos da placa.

Através das Equações (4.6), (4.7) e (4.8), as condições de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa podem ser estabelecidas através do Princípio dos Trabalhos Virtuais e as reações fictícias de bordo e de canto, segundo Vlasov e Leont'ev (1966), são expressas por:

$$Q_l = K_l \left(\alpha w_l + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_l - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_l \right) \quad (4.9)$$

$$Q_m = K_l \left(\alpha w_m + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_m - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m \right) \quad (4.10)$$

$$R = 0.75 K_l w_c \quad (4.11)$$

onde Q_l e Q_m são as reações fictícias distribuídas uniformemente ao longo de um bordo paralelo a y e a x , respectivamente. As derivadas na Equação (4.9) são tomadas em $x = \pm m$ e na Equação (4.10) em $y = \pm l$.

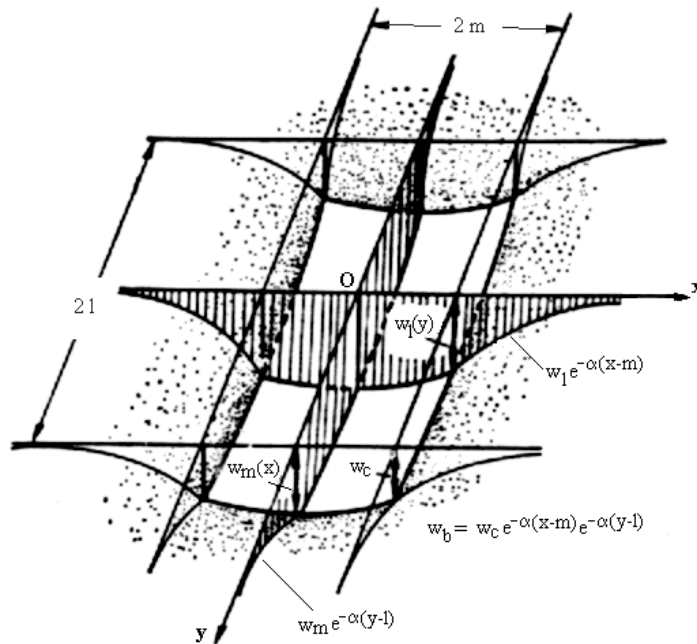


Figura 4.2 – Deslocamentos da Fundação – Modelos com Dois Parâmetros.

(Vlasov e Leont'ev, 1966)

A equação de equilíbrio de uma placa em contato com esse modelo de base elástica, após discretização por elementos finitos, pode ser escrita como:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_B) \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.12)$$

onde \mathbf{F} é o vetor de cargas nodais atuantes na estrutura, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{K}_E e \mathbf{K}_B são as matrizes de rigidez, na forma global, da estrutura e da base elástica, respectivamente, definidas no Capítulo 3.

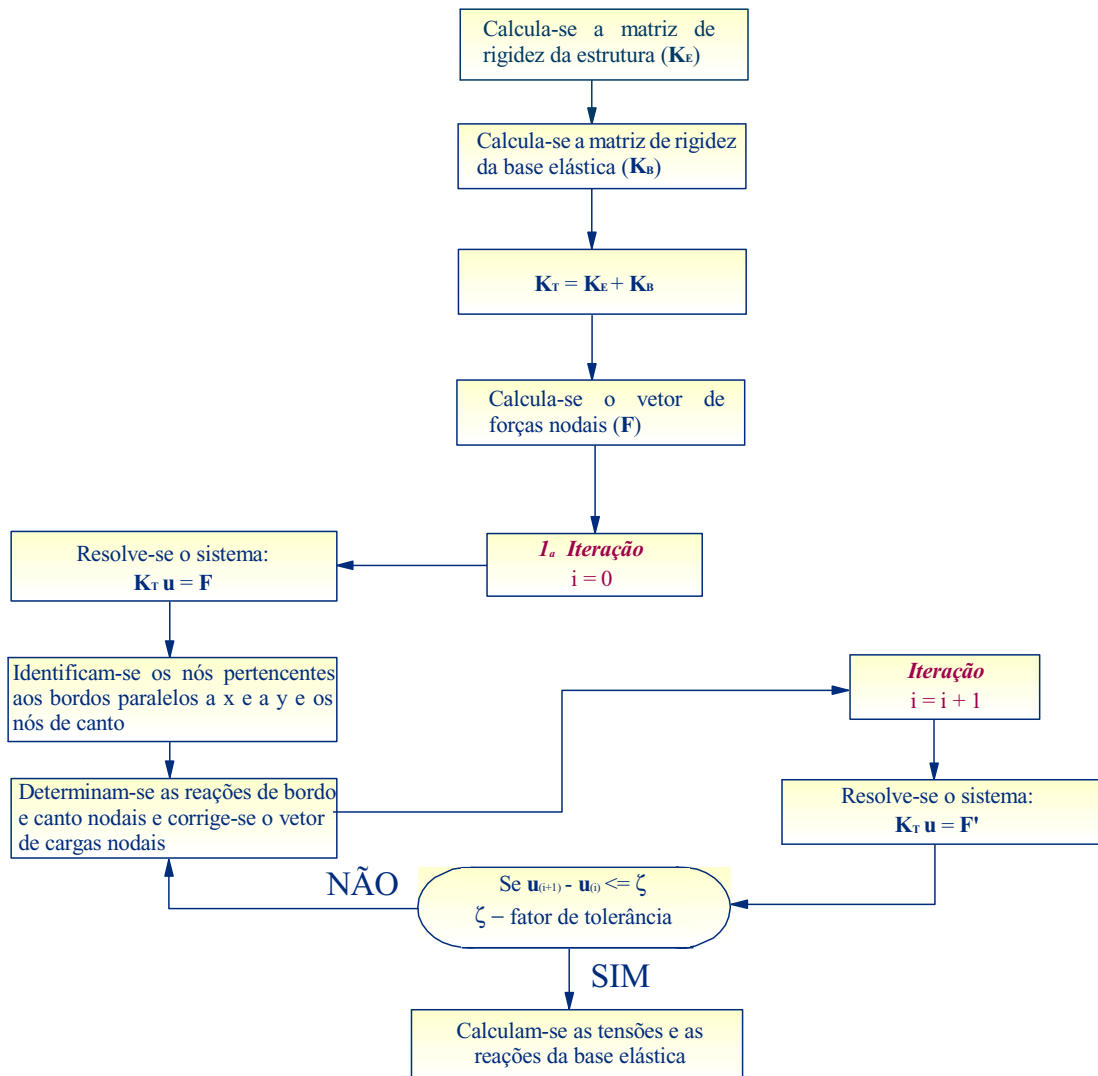


Figura 4.3 – Fluxograma do Processo Iterativo – Modelos com Dois Parâmetros.

A determinação das reações fictícias de bordo e de canto de uma placa carregada sobre uma fundação elástica requer o conhecimento da forma de deflexão da placa, que não pode ser encontrada sem que se conheçam as reações. Para analisar esse problema, as Equações (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) devem ser resolvidas simultaneamente. Utiliza-se, então, neste trabalho, uma aproximação iterativa que é descrita a seguir:

- (i) Desprezam-se as reações fictícias de bordo e de canto dadas pelas Equações (4.9), (4.10) e (4.11). Aplicam-se, então, as cargas externas e resolve-se o sistema de equações definido pela Equação (4.12), a fim de se calcular os deslocamentos nodais;
- (ii) Com base nas deflexões nodais, as reações de bordo podem ser obtidas através da técnica de diferenças finitas em avanço ou atraso, conforme a posição do bordo, utilizando-se a mesma malha de elementos finitos. As reações de canto são obtidas diretamente através da Equação (4.11);
- (iii) Aplicam-se, simultaneamente, a carga externa e as reações fictícias obtidas no passo anterior e resolve-se, novamente, o sistema de equações;
- (iv) Utilizando as deflexões nodais obtidas no item (iii), recalculam-se as reações fictícias e repetem-se os processos (ii) e (iii), até que a convergência seja encontrada, ou seja, $\| \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i \| / \| \mathbf{u}^i \| \leq \zeta$, ou até que se chegue ao número máximo de iterações desejadas.

A Figura 4.3, apresentada anteriormente, mostra esses passos em um fluxograma computacional.

4.3 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO UNILATERAL

Nesta seção, o problema de contato de placas sobre bases elásticas modeladas segundo Winkler ou como um semi-espaço infinito é analisado através de formulações baseadas na utilização de técnicas de discretização e algoritmos de otimização. Inicialmente, são apresentadas as equações que regem o equilíbrio do sistema mecânico em estudo e as condições que caracterizam o contato como unilateral. Em seguida, são descritas as três

formulações propostas para a análise do problema, que caracterizam-se por fornecerem, como resultado, um Problema Linear Complementar (PCL), que é resolvido através da técnica de pivoteamento de Lemke (Lemke, 1968). A eficiência das formulações apresentadas é comprovada nos exemplos apresentados no Capítulo 6.

4.3.1 – Equações Básicas

Considere o sistema estrutural formado por dois corpos deformáveis, estrutura e base elástica, como ilustrado na Figura 4.4. Considere, também, que a base elástica só oferece reação às solicitações de compressão e que os efeitos decorrentes das forças de atrito entre os corpos são desprezados.

A estrutura é definida como um sólido elástico contínuo de domínio V , com o contorno delimitado por três superfícies distintas: S_c , S_u e S_f , e sua superfície S é suposta regular. Como nos problemas estruturais usuais, S_u define a região do sólido onde os deslocamentos são prescritos e S_f é a região do sólido onde as forças de superfície são prescritas. A região do sólido denominada S_c é a região na qual as condições de contorno são “ambíguas”, ou seja, os pontos de S_c de um dado corpo, após aplicação das cargas, podem entrar ou não em contato, permanecer em contato ou separar-se do outro corpo. Essas observações caracterizam a natureza não-linear do problema de contato unilateral.

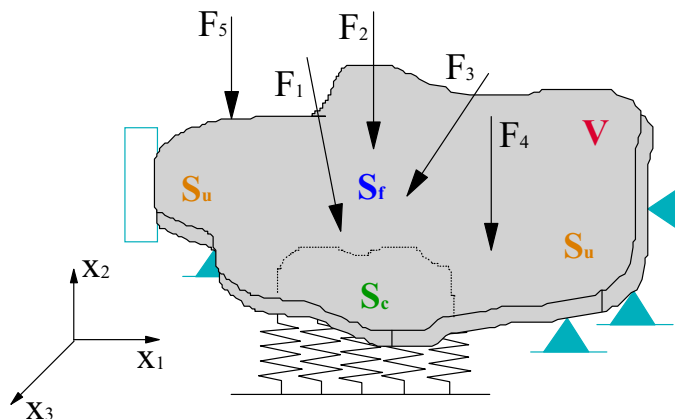


Figura 4.4 – Sistema Estrutural.

Para a estrutura, as equações de equilíbrio interno e as relações cinemáticas e constitutivas são dadas por:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.14)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.15)$$

sendo a notação indicial utilizada com a convenção usual de somatório. Na Equação (4.13), σ_{ij} representa as componentes cartesianas do tensor de Cauchy e u_i representa as componentes dos deslocamentos. Na Equação (4.15), C_{ijkl} representa o tensor das propriedades elásticas da estrutura.

Para as bases elásticas modeladas com um parâmetro ou como um semi-espaço infinito apresentadas no Capítulo 2, pode-se, genericamente, considerar a seguinte relação constitutiva:

$$r_b = C_b u_b, \quad (4.16)$$

onde u_b e r_b indicam o deslocamento e a reação à compressão da base elástica, respectivamente, e C_b caracteriza as propriedades mecânicas da base elástica.

Para o sistema estrutural analisado, as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } S_u \quad (4.17)$$

$$F_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{em } S_f \quad (4.18)$$

$$\varphi = u_b - u \geq 0 \quad \text{em } S_c \quad (4.19)$$

onde a Equação (4.17) representa a condição de contorno essencial do problema e deve ser satisfeita em S_u , a Equação (4.18) caracteriza o equilíbrio das forças que deve existir em S_f e a Inequação (4.19) representa a restrição de contato em S_c , com φ sendo a distância entre os dois corpos após o deslocamento da estrutura. Essa inequação indica a condição de compatibilidade que deve ser satisfeita em S_c e, fisicamente, representa a condição de

impenetrabilidade entre os corpos. Ao se analisar o comportamento de um ponto genérico em S_c , uma das seguintes situações pode ser observada:

I. O ponto está em contato com outro ponto material do sistema estrutural. Para esse estado escreve-se:

$$\varphi = 0 \quad \text{e} \quad r_b \geq 0 \quad (4.20)$$

II. O ponto não coincide com qualquer outro ponto material do sistema. Tem-se, então:

$$\varphi \geq 0 \quad \text{e} \quad r_b = 0 \quad (4.21)$$

A partir dessas observações, conclui-se que as condições que definem de forma completa o contato unilateral são dadas pela Inequação (4.19), pela Inequação (4.22), a seguir:

$$r_b \geq 0 \quad (4.22)$$

e através da relação de complementaridade entre φ e r_b ,

$$\int_{S_c} r_b \varphi \, dS_c = 0 \quad (4.23)$$

A Figura 4.5 fornece o domínio de validade dessas três relações.

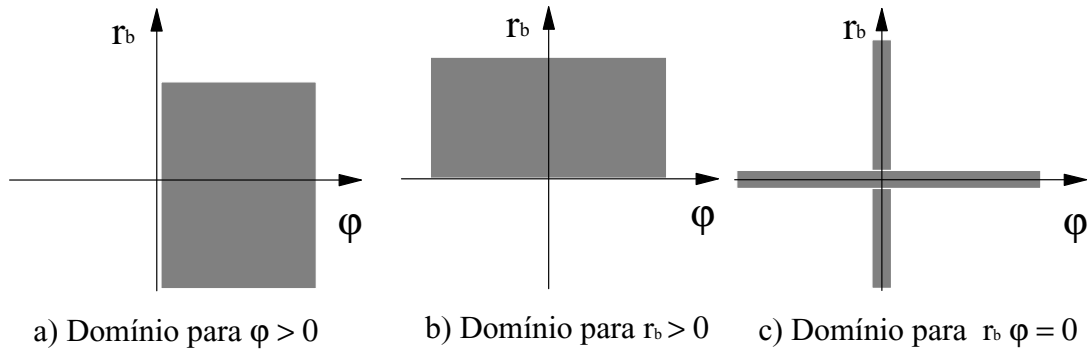


Figura 4.5 – Domínio de Validade das Restrições.

Observa-se, então, que a solução do problema de contato unilateral pode ser obtida através da resolução da Equação (4.13), com o auxílio das Equações (4.14) e (4.15), respeitando-se as condições de contorno (4.17) e (4.18), as Inequações (4.19) e (4.22) e a condição de complementaridade (4.23). A não-linearidade decorrente das condições de contato unilateral torna, entretanto, a solução direta do problema uma tarefa bastante difícil. Dessa forma, é formulado um problema de minimização equivalente para que se possa utilizar uma análise numérica conveniente na sua solução. É demonstrado em Kwak (1986) e em Silveira (1995) que o problema de otimização:

$$\text{Min } J(u, u_b) \quad (4.24)$$

$$\text{Sujeito a: } -\varphi \leq 0, \text{ em } S_c \quad (4.25)$$

onde,

$$J = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} C_b u_b^2 dS_c - \int_{S_f} F_i u_i dS_f \quad (4.26)$$

é equivalente à solução das equações e restrições impostas na formulação do problema anterior.

4.3.2 – Solução do Problema de Contato Unilateral

Três formulações matemáticas para o problema de contato unilateral sem atrito entre os corpos são apresentadas nesta seção. Na primeira formulação, têm-se com incógnitas principais os deslocamentos da estrutura e a reação da base elástica; na segunda formulação, a incógnita principal é a reação da base elástica e, na terceira formulação, têm-se como incógnitas os deslocamentos da base elástica e os deslocamentos relativos entre os corpos.

4.3.2.1 – Formulação 1 – *Mista*

Esse primeiro modelo matemático foi proposto por Ascione e Grimaldi (1984) que, como relatado na Seção 1.3, resolveram o problema de contato unilateral entre uma placa e

uma fundação elástica do tipo Winkler (ou semi-espaço infinito). De acordo com esses pesquisadores, as três restrições (4.19), (4.22) e (4.23), envolvendo r_b e φ , podem ser substituídas pela inequação variacional:

$$\int_{S_c} \sigma \varphi dS_c \geq 0 \quad (4.27)$$

onde σ pertence ao cone \bar{K} , no qual estão incluídos os valores admissíveis para r_b , que é representado por:

$$\bar{K} = \left\{ r_b \in Y', \int_{S_c} r_b w dS_c \geq 0, \forall w \in Y, w \geq 0 \right\} \quad (4.28)$$

onde Y' e Y são os espaços vetoriais que contêm, respectivamente, as soluções de r_b e φ do problema de contato analisado; quando $\sigma = r_b$, a relação de complementaridade dada pela Equação (4.23) é verificada.

A partir daí, elimina-se a restrição (4.19) da análise, escrevendo-se o funcional aumentado:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_{S_c} C_b u_b^2 dS_c - \int_{S_c} r_b \varphi dS_c - \int_{S_f} F_i u_i dS_f \quad (4.29)$$

Calculando-se a primeira variação de J_1 , após eliminar u_b da equação anterior, obtém-se a seguinte inequação variacional:

$$\begin{aligned} \delta J_1 = & \int_V C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_{S_c} C_b (\varphi + u) \delta u dS_c + \int_{S_c} [C_b (\varphi + u) - r_b] \delta \varphi dS_c \\ & - \int_{S_c} \varphi \delta r_b dS_c - \int_{S_f} F_i \delta u_i dS_f \leq 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

uma vez que $\int_{S_c} \varphi \delta r_b dS_c$ tem sempre valor positivo (ver Equação (4.27)).

Eliminando φ da Equação (4.30), usando-se as Equações (4.16) e (4.19), chega-se a uma equação que é função apenas de u e r_b , ou seja:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} dV - \frac{1}{2} \int_{S_c} D_b r_b^2 dS_c + \int_{S_c} r_b u dS_c - \int_{S_f} F_i u_i dS_f \quad (4.31)$$

onde $D_b = 1/C_b$.

As variáveis u e r_b devem ser obtidas de forma que a primeira variação do funcional J_1 satisfaça a inequação $\delta J_1(u, r_b) \leq 0$.

Fazendo-se, então, a discretização do sistema via MEF, verifica-se, para um elemento genérico da estrutura, que os deslocamentos no seu interior estão relacionados aos deslocamentos nodais de acordo com:

$$u = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (4.32)$$

sendo \mathbf{N} a matriz que contém as funções de interpolação do problema.

Para um elemento genérico da base elástica, a reação à compressão está relacionada aos seus valores nodais segundo:

$$r_b = \mathbf{H}_b \mathbf{r}_b \quad (4.33)$$

onde \mathbf{H}_b é a matriz que contém as funções de interpolação que definem o comportamento da reação à compressão da base elástica.

Substituindo as Equações (4.32) e (4.33) em (4.31) e somando-se as contribuições de cada elemento finito, chega-se ao funcional discretizado do problema na forma global, ou seja:

$$\bar{J}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{r}_b^T \mathbf{T} \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_b^T \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{R} \quad (4.34)$$

onde:

1. \mathbf{K} é a matriz de rigidez da estrutura definida no Capítulo 3;

2. \mathbf{T} é a matriz de flexibilidade da base elástica, expressa por:

$$\mathbf{T} = \sum_{m_c} \int_{S_c} \mathbf{H}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{H}_b dS_c \quad (4.35)$$

sendo m_c o número de elementos que definem a região de contato. No caso de uma base modelada como um semi-espaço infinito, a matriz de flexibilidade é obtida realizando-se o procedimento descrito na Seção 3.3. Comparando as Equações (2.15) e (4.16), para uma base modelada segundo Winkler, tem-se que $C_b = K$, sendo K o parâmetro de rigidez da base.

3. \mathbf{A} define a matriz de acoplamento entre a estrutura e a base elástica, dada por:

$$\mathbf{A} = \sum_{m_c} \int_{S_c} \mathbf{H}_b^T \mathbf{N} dS_c \quad (4.36)$$

4. \mathbf{R} é o vetor das cargas nodais.

Em Silveira (1995), é demonstrado que, após a primeira variação do funcional dado pela Equação (4.34), com relação às variáveis nodais \mathbf{u} e \mathbf{r}_b , chega-se ao seguinte Problema de Complementaridade Linear:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{A}^T \mathbf{r}_b - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{T}\mathbf{r}_b \leq \mathbf{0} \quad (4.38a)$$

$$\mathbf{r}_b \geq \mathbf{0} \quad (4.38b)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{T}\mathbf{r}_b)^T \mathbf{r}_b = \mathbf{0} \quad (4.38c)$$

onde a Equação (4.37) define o equilíbrio do sistema mecânico em estudo, devendo ser resolvida respeitando-se as restrições (4.38a,b,c), que caracterizam o contato como sendo unilateral.

A primeira restrição equivale, fisicamente, à condição de impenetrabilidade entre os corpos; a segunda fornece a condição de positividade da reação da base e a terceira caracteriza a complementaridade entre a ausência de contato e a existência de reações.

A solução da Equação (4.37), considerando as restrições, é alcançada através de técnicas de programação matemática, em particular, técnicas de pivoteamento desenvolvidas

para problemas complementares (Lemke, 1968; Cottle & Dantzig, 1968). Antes da utilização desses algoritmos, entretanto, é necessária a redução das relações anteriores a uma forma padrão, através das seguintes definições:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^- \quad (4.39a)$$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{T}\mathbf{r}_b - \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (4.39b)$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{A}^T\mathbf{r}_b - \mathbf{R} \quad (4.39c)$$

$$\mathbf{z}_3 = -\mathbf{z}_2 \quad (4.39d)$$

onde $\mathbf{u}^+ \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u}^- \geq \mathbf{0}$ são explicitamente incluídos na análise como a parte positiva e negativa do vetor \mathbf{u} (Fletcher, 1981).

Com isso, é possível reescrever as Equações (4.37) e (4.38) como segue:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{M}\mathbf{z} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (4.41a)$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (4.41b)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.41c)$$

sendo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} & \mathbf{A}^T \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K} & -\mathbf{A}^T \\ -\mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \\ \mathbf{r}_b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

O problema de complementaridade linear padrão (PCL) é representado pela Equação (4.40), sujeita às restrições (4.41a,b,c) e é resolvido através da técnica de pivoteamento de Lemke.

4.3.2.2 – Formulação 2 – *Flexível*

Analisando-se a Equação (4.37), é verificado que, se a matriz de rigidez for positiva definida, é possível estabelecer a seguinte relação entre \mathbf{u} e \mathbf{r}_b :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{R} - \mathbf{A}^T \mathbf{r}_b) \quad (4.43)$$

Substituindo-se, então, (4.43) em (4.34), chega-se a um indicador variacional, na forma discretizada, função apenas da variável nodal \mathbf{r}_b , ou seja:

$$\bar{J}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{r}_b^T \mathbf{P} \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_b^T \mathbf{H} - s \quad (4.44)$$

onde:

1. \mathbf{P} é uma matriz simétrica e positiva definida representada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{T} \quad (4.45)$$

2. \mathbf{H} é um vetor definido como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R} \quad (4.46)$$

3. s é uma constante escrita como:

$$s = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R} \quad (4.47)$$

Observa-se que a Equação (4.44), com a restrição da condição de positividade da reação, caracteriza um problema de programação quadrática (PPQ). Usando-se as condições de Kuhn-Tucker para problemas de minimização com restrições de desigualdade, chega-se às condições de otimalidade da Equação (4.44). Essas condições podem ser escritas, de acordo com o PCL padrão, como:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{M} \mathbf{z} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (4.49b)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.49c)$$

onde $\mathbf{M} = \mathbf{P}$, $\mathbf{q} = -\mathbf{H}$, $\mathbf{z} = \mathbf{r}_b$ e \mathbf{w} é introduzido na análise como o multiplicador de Lagrange, que representa fisicamente a condição de impenetrabilidade entre os corpos.

O sistema anterior pode ser resolvido através de técnicas de otimização, sendo que, após o cálculo de \mathbf{r}_b , o valor de \mathbf{u} é obtido através da Equação (4.43).

4.3.2.3 – Formulação 3 – *Compatível*

Essa formulação foi, inicialmente, proposta por Vaz (1991) para solução do problema de contato unilateral. Nela, as restrições unilaterais de contato envolvem apenas as variáveis nodais de deslocamentos, ou seja, deslocamentos relativos entre os corpos e os deslocamentos da base elástica.

O ponto de partida para a análise é o funcional dado pela Equação (4.26). Aplicando o método dos elementos finitos na discretização do sistema e somando a contribuição de cada elemento finito, obtém-se o indicador variacional, já na forma global e discretizada, que é expresso por:

$$J_1 = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_b^T \mathbf{K}_b \mathbf{u}_b - \mathbf{u}^T \mathbf{R} \quad (4.50)$$

Estabelecendo a primeira variação do funcional acima em relação aos valores nodais cinematicamente admissíveis de \mathbf{u} e \mathbf{u}_b , encontra-se a seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{K}_b \mathbf{u}_b = \mathbf{R} \quad (4.51)$$

Através de algumas transformações algébricas realizadas na Equação (4.51), ou seja,

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{K}_b \mathbf{u}_b + \mathbf{K} \mathbf{u}_b - \mathbf{K} \mathbf{u}_b = \mathbf{R} \quad \therefore$$

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_b) \mathbf{u}_b - \mathbf{K}(\mathbf{u}_b - \mathbf{u}) = \mathbf{R} \quad \therefore$$

$$\mathbf{u}_b = (\mathbf{K} + \mathbf{K}_b)^{-1} [\mathbf{K}(\mathbf{u}_b - \mathbf{u}) + \mathbf{R}]$$

chega-se à seguinte equação:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{M} \mathbf{z} \quad (4.52)$$

na qual: $\mathbf{M} = (\mathbf{K} + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{K}$; $\mathbf{q} = (\mathbf{K} + \mathbf{K}_b)^{-1} \mathbf{R}$; $\mathbf{z} = \mathbf{u}_b - \mathbf{u}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u}_b$.

Com isso, a Equação (4.52) e as restrições:

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (4.53a)$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (4.53b)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.53c)$$

definem um problema complementar linear padrão que é resolvido através de técnicas de pivoteamento complementar.

É importante dizer que essa formulação é equivalente à anterior no que se refere à ordem das matrizes e vetores resultantes. Entretanto, há a necessidade de se usar procedimentos de subestruturação ou condensação estática para se obter a Equação (4.51).

4.4 – O MÉTODO DE LEMKE

A análise do problema de contato sob o enfoque da programação matemática, equivale à solução do problema de otimização definido pelas Equações (4.24) e (4.25), nas quais a função objetivo J e a condição de impenetrabilidade (φ) entre a estrutura e a base elástica são definidas em função dos deslocamentos nodais da estrutura e da base elástica.

Esse problema de minimização pode ser transformado em um problema de programação quadrática com restrições de desigualdade. Segundo Eboli (1989), a solução de um problema de programação quadrática com restrições de desigualdade pode ser obtida de duas formas: ou empregando métodos de solução de programação quadrática com restrições de igualdade, adotando-se uma estratégia de determinação do conjunto ativo de restrições ($\varphi = 0$), ou usando esquemas de pivoteamento, que são utilizados especificamente para a solução de problemas de complementaridade linear.

O objetivo desta seção é, então, determinar a solução não-negativa do sistema de equações representado, de uma forma geral, por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{M} \mathbf{z} \quad (4.54)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (4.55a)$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (4.55b)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.55c)$$

sendo \mathbf{M} uma matriz quadrada de ordem $p \times p$ e \mathbf{w} , \mathbf{z} e \mathbf{q} vetores de ordem p , na qual \mathbf{w} e \mathbf{z} são as variáveis a serem determinadas.

A Equação (4.54) representa um sistema de equações lineares, sendo que as condições (4.55a) e (4.55b) requerem que sua solução seja não-negativa. As Equações (4.54) e (4.55a,b,c) caracterizam um problema de complementaridade linear (PCL), que é resolvido, neste trabalho, através do esquema de pivoteamento de Lemke.

Uma implementação computacional do método de Lemke é fornecida por Ravindran (1972) e Silveira (1995). Esse último apresenta, também, o significado mecânico ou físico desse método.

4.4.1 – Definições

- (i) um ponto (\mathbf{w}, \mathbf{z}) é solução se obedece à Equação (4.54);
- (ii) se essa solução satisfaz às condições (4.55a,b), ela é denominada solução viável do problema complementar;
- (iii) a solução viável é também complementar se a condição de complementaridade (4.55c) é verificada. Para isso, é necessário que w_i e/ou z_i seja nula, sendo (w_i, z_i) um par complementar com w_i e z_i complementos mútuos;
- (iv) se os elementos do vetor \mathbf{q} são não-negativos, a solução é chamada trivial. Nesse caso, tem-se que $\mathbf{w} = \mathbf{q}$ e $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, não interessando, então, empregar o método de Lemke; caso contrário, ou seja, se pelo menos um elemento de \mathbf{q} é negativo, a solução é dita não-trivial e a solução inicial dada por $\mathbf{w} = \mathbf{q}$ e $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, mesmo obedecendo a condição de complementaridade é inviável;
- (v) sendo o problema de complementaridade não-trivial, são introduzidos, na análise, um vetor \mathbf{e} de componentes positivas e uma variável artificial z_0 , com o objetivo de aumentar o sistema de equações original (4.54), que fica, então, composto de p equações e $p+1$ incógnitas. Esse sistema aumentado é descrito por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{Mz} + \mathbf{ez}_0 \quad (4.56)$$

de forma que as variáveis \mathbf{w} , \mathbf{z} e z_0 , a serem, agora, determinadas, obedeçam à relação anterior e às seguintes condições:

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (4.57a)$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0}, z_0 \geq 0 \quad (4.57b)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.57c)$$

(vi) o ponto de partida para a solução do sistema de equações anterior é obtido fazendo-se $z_0 = \text{mínimo } \{q_i, 1 \leq i \leq p\}$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{e} z_0$. Através de uma seqüência de pivoteamentos, satisfazendo as Equações (4.56) e (4.57a,b,c), tenta-se guiar a variável artificial até zero, obtendo, assim, a solução do problema de complementaridade original;

(vii) uma solução $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$ do sistema definido pelas Equações (4.56) e (4.57a,b,c) é uma solução viável básica complementar se:

- $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$ é uma solução viável básica de (4.57a,b);
- nem w_s e nem z_s são básicas para algum $s \in \{1, 2, \dots, p\}$;
- z_0 é básica, e uma variável do par complementar (w_i, z_i) é básica para $i = 1, 2, \dots, p$ com $i \neq s$;

(viii) a partir dessa solução viável básica complementar $(\mathbf{w}, \mathbf{z}, z_0)$, na qual w_s e z_s são ambas não básicas, obtém-se uma solução viável básica complementar adjacente $(\bar{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{z}_0)$, no caso de se introduzir w_s ou z_s na base, no lugar de uma variável que não seja z_0 . Cada solução viável básica complementar tem, pelo menos, duas soluções viáveis básicas complementares adjacentes, mas, se o aumento de w_s ou z_s ocasionar ou a retirada de z_0 da base ou uma terminação em raio, terá, então, menos de duas soluções viáveis básicas adjacentes.

4.4.2 – Procedimento Inicial

As duas possibilidades de obtenção da solução do problema de complementaridade linear existentes são:

1. o ponto $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$ é solução do PCL (solução trivial) se o vetor $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$;
2. tendo o vetor \mathbf{q} alguma componente negativa, o esquema de pivoteamento proposto por Lemke deve ser iniciado. Como ponto de partida, toma-se a solução inviável $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$. A variável z_0 é, então, aumentada de zero na equação $\mathbf{w} = \mathbf{q} + \mathbf{e} z_0$, até que uma última componente w_s se anule, tornando-se não-básica. Em seguida, substitui-se o valor de z_0 nas outras equações para completar a operação de pivoteamento. Essa operação de pivoteamento inicial fica definida, então, pelo par (w_s, z_0) , sendo:

$$s = \min_{i=1,2,\dots,p} \left\{ \begin{array}{l} q_i \\ e_i \end{array} \right\}, \quad \forall q_i < 0 \quad (4.58)$$

Esse procedimento de obtenção da primeira solução viável básica complementar pode ser organizado de acordo com a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Inicialização do Processo.

<i>Base</i>	w_1	...	w_s	...	w_p	z_1	...	z_s	...	z_p	z_0	q
w_1	1		0		0	$-m_{11}$		$-m_{1s}$		$-m_{1p}$	-1	q_1
:												
w_s	0		1		0	$-m_{s1}$		$-m_{ss}$		$-m_{sp}$	-1	q_s
:												
w_p	0		0		1	$-m_{p1}$		$-m_{ps}$		$-m_{pp}$	-1	q_p

Em substituição a w_s , que é a variável básica de maior valor negativo, a variável artificial z_0 é conduzida à base. Com as seguintes operações de pivoteamento,

$$q'_s = -q_s, \quad e \quad q'_i = q_i - q_s, \quad \text{para } i \neq s \quad (4.59a)$$

$$m'_{sj} = \frac{-m_{sj}}{-1} = m_{sj}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \quad (4.59b)$$

$$m'_{ij} = -m_{ij} + m_{sj}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \quad e \quad i \neq s \quad (4.59c)$$

chega-se à forma apresentada na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Resultados Obtidos após a Operação de Pivoteamento.

<i>Base</i>	w_1	...	w_2	...	w_p	z_1	...	z_s	...	z_p	z_0	q
w_1	1		-1		0	m'_{11}		m'_{1s}		m'_{1p}	0	q_1
:												
z_0	0		-1		0	m'_{s1}		m'_{ss}		m'_{sp}	1	q_s
:												
w_p	0		-1		1	m'_{p1}		m'_{ps}		m'_{pp}	0	q_p

Com esses procedimentos iniciais, tem-se:

(a) $q_i \geq 0$, para $i = 1, 2, \dots, p$;

(b) $w_1 = q_1$, $w_2 = q_2$, $w_{s-1} = q_{s-1}$, $z_0 = q_s$, $w_{s+1} = q_{s+1}, \dots$, $w_p = q_p$, que é a solução básica, e todas as demais variáveis, inicialmente nulas, formam uma solução viável básica complementar;

(c) quando o valor de z_0 for reduzido a zero, a solução viável básica complementar da Equação (4.56) torna-se a solução viável básica complementar do problema original (4.54).

4.4.3 – Procedimento Principal

O esquema de pivoteamento proposto por Lemke continua, obtendo-se uma seqüência de soluções viáveis básicas complementares, até que a variável artificial z_0 se torne zero. A mudança de base, na obtenção de cada solução viável básica complementar, é feita de modo que as seguintes condições sejam obedecidas:

- (i) a condição de complementaridade entre as variáveis ($w_i z_i = 0$, para $i = 1, 2, \dots, p$) deve ser mantida;
- (ii) a solução básica deve permanecer não-negativa, isto é, as constantes do lado direito em todas as tabelas devem ser não-negativas.

Para que a condição (i) seja satisfeita, a variável não-básica a entrar na base da próxima tabela deve ser selecionada de forma adequada. Ao se realizar o procedimento inicial do esquema, as variáveis w_s e z_s tornam-se não-básicas. Caso sejam tomadas como básicas, ainda assim, a condição de complementaridade é mantida. Utilizando, então, a regra da complementaridade – a variável a ser escolhida para entrar na base da próxima tabela é sempre o complemento daquela variável que deixou a base na última tabela – selecionando-se, então, a variável z_s para entrar na base.

Selecionando de forma adequada a variável básica a ser substituída por z_s , a condição (ii) é satisfeita. Essa seleção é feita através do *teste da razão mínima*, similar ao empregado no Método Simplex de programação linear. Assim, para se determinar que variável deixará a base, os seguintes cálculos devem ser feitos:

$$\frac{q_i}{m_{is}}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \text{para } m_{is} > 0 \quad (4.60)$$

Tomando-se:

$$\frac{q_j}{m_{js}} = \underset{m_{is} > 0}{\text{mínimo}} \left(\frac{q_i}{m_{is}} \right) \quad (4.61)$$

significa que a variável básica w_j deve ser substituída por z_s . Com isso, uma nova tabela é obtida, realizando-se as operações de pivoteamento (4.59a,b,c) considerando m_{js} como o elemento pivô.

A variável z_j é, agora, escolhida automaticamente para entrar na base, de acordo com a regra da complementaridade, uma vez que a variável w_j acabou de sair da base. Em seguida, o *teste da razão mínima* é aplicado, a fim de se definir a variável básica a ser substituída por z_j , obtendo-se, após essas operações de pivoteamento, uma nova tabela.

4.4.4 – Finalização do Processo

O processo descrito anteriormente termina quando:

(i) o *teste da razão mínima* indicar que a variável básica z_0 deve deixar a base. Nesse caso, tem-se que a solução viável básica complementar do problema aumentado, após a operação de pivoteamento, é igual à solução viável básica complementar do problema original;

(ii) o *teste da razão mínima* falhar. Isto acontece quando não se encontra nenhum coeficiente positivo na coluna pivô. Portanto, o problema de complementaridade linear não possui solução e diz-se que o problema possui uma “**terminação em raio**”. Geometricamente, significa que a variável não-básica selecionada para entrar na base define uma linha básica que corresponde a um bordo ilimitado de K , sendo K um poliedro convexo (Eboli, 1989) que representa o conjunto de soluções viáveis da Equação (4.56).

PROGRAMA COMPUTACIONAL

5.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo o fornecimento dos procedimentos computacionais utilizados na elaboração do modelo numérico proposto no Capítulo 4.

Escrito em linguagem *Fortran* e seguindo um formato tradicional de um programa de elementos finitos, o programa implementado é capaz de efetuar a análise padrão de placas espessas e delgadas, analisar o contato bilateral entre uma placa e bases modeladas com um ou dois parâmetros ou como um semi-espço infinito. É capaz, ainda, de analisar placas em contato com bases elásticas modeladas segundo Winkler ou como um semi-espço infinito, quando a base não reage às solicitações de tração. A Figura 5.1 apresenta um esquema geral do programa computacional implementado.

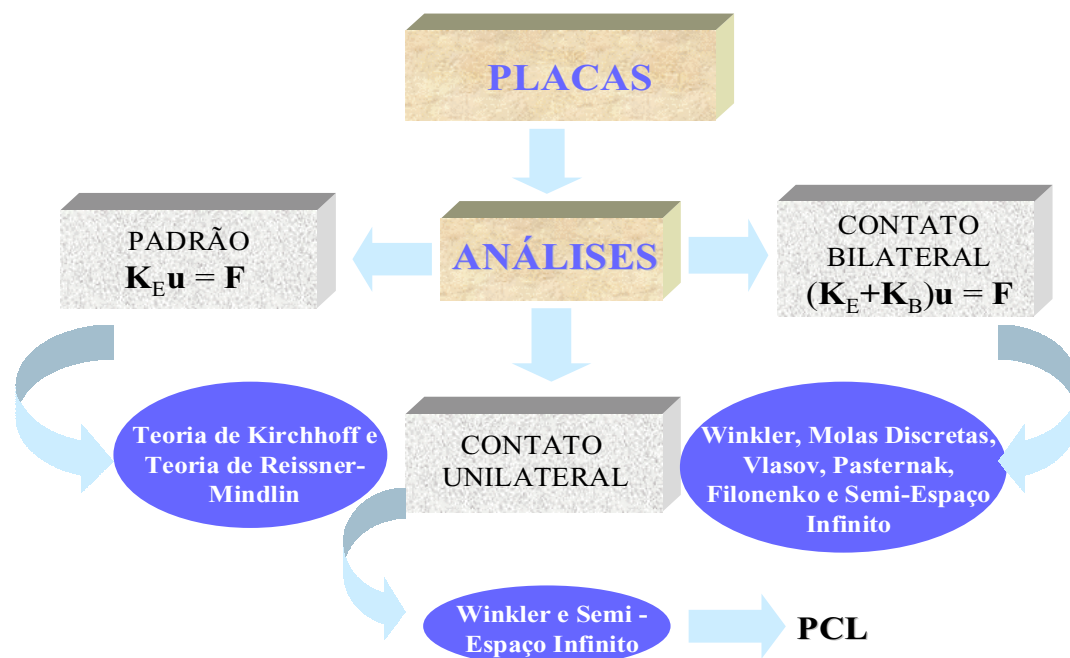


Figura 5.1 – Programa Computacional.

A Seção 5.2 apresenta um algoritmo do programa principal. As subrotinas gerenciadas por ele são apresentadas nas seções seguintes.

5.2 – PROGRAMA PRINCIPAL

A Figura 5.2 apresenta um fluxograma do programa principal, que é responsável pela execução de outros subprogramas. Esses subprogramas (ou subrotinas) serão apresentados nas próximas seções onde se fornecem, resumidamente, os procedimentos envolvidos nas suas implementações.

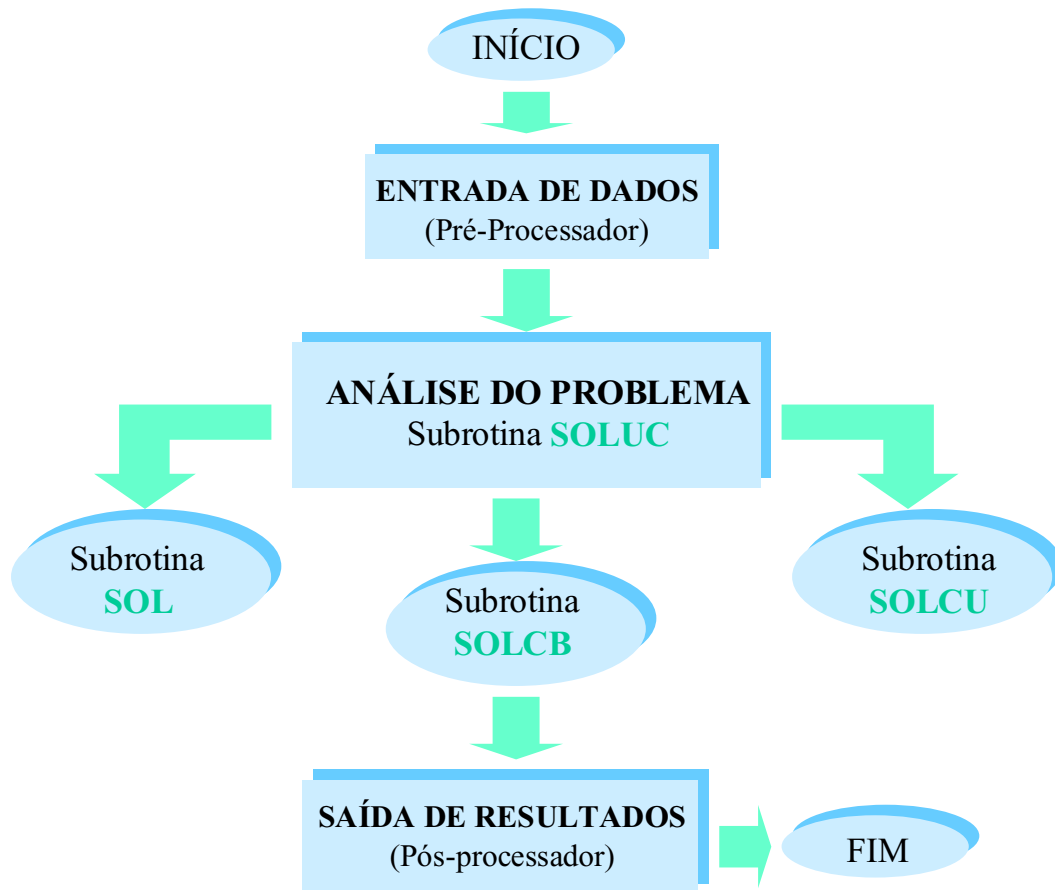


Figura 5.2 – Programa Principal.

O primeiro procedimento a ser realizado pelo programa principal refere-se à leitura dos dados necessários para a análise do problema. Na análise pelo método dos elementos

finitos, esses dados são, basicamente, dados que definem a geometria do sistema estrutural, dados referentes às propriedades do material que compõe a estrutura (como por exemplo, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson) e ao carregamento externo atuante que, neste trabalho, podem ser cargas concentradas e cargas uniformemente distribuídas sobre os elementos e nos bordos da placa. Para a análise do problema de contato, devem ser fornecidas, também, as propriedades físicas do modelo de base elástica adotado, como visto no Capítulo 2.

Esses dados são repassados ao programa através da leitura de dois arquivos, a saber:

(i) Arquivo gerado pelo programa MTOOL – o pré-processador MTOOL (Tecgraf, 1993) gera, automaticamente, um arquivo com formato especial, usualmente denominado “*Arquivo Neutro*”, contendo os seguintes dados referentes à geometria da estrutura:

- coordenadas dos pontos nodais da estrutura;
- incidência dos elementos finitos;
- condições de contorno.

Esse pré-processador é muito útil na geração de malhas de elementos finitos, mas não precisa, necessariamente, ser utilizado. Caso o arquivo neutro gerado pelo MTOOL não seja utilizado, os dados anteriores devem ser fornecidos no arquivo seguinte.

(ii) Em um outro arquivo são armazenados dados do tipo:

- título da análise;
- número de pontos nodais, número de elementos, número de materiais, tipo de análise (padrão, contato bilateral ou contato unilateral), teoria de placa a ser utilizada (definida através do número de componentes de tensões atuantes) e número de pontos de Gauss utilizados para a integração numérica;
- modelo de base elástica a ser utilizado;
- tipo de formulação a ser utilizada, no caso da análise do problema de contato unilateral;
- propriedades físicas da base elástica que, por sua vez, dependem do modelo de base a ser considerado:

(a) K (parâmetro de rigidez da base) – para os modelos de molas discretas e Winkler;

(b) K (parâmetro de rigidez da base) e K_1 (parâmetro que considera as deformações cisalhantes das molas) – para os modelos de Pasternak e Filonenko-Borodich;

(c) módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do material que compõe a fundação, a profundidade da fundação e o valor de γ (constante que define a razão de decréscimo dos deslocamentos com a profundidade) – para o modelo de Vlasov;

(d) módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do material que compõe a fundação – para o semi-espaço infinito;

- forças atuantes na estrutura (localização e magnitude).

O passo seguinte, como mostra o fluxograma ilustrado na Figura 5.2, consiste na análise do problema em questão. O tipo de análise a ser feita é definido, como visto anteriormente, no arquivo de entrada de dados, indicando, então, à subrotina **SOLUC**, qual das subrotinas (**SOL**, **SOLCB** ou **SOLCU**) deverá ser executada. Na subrotina **SOL** é realizada a análise linear padrão de placas, utilizando a teoria de *Kirchhoff* ou a teoria de *Reissner-Mindlin*. Nas subrotinas **SOLCB** e **SOLCU** são feitas, respectivamente, as análises do contato bilateral e unilateral entre a placa e a fundação, desprezando-se o atrito entre esses corpos. Os modelos de bases elásticas que podem ser utilizados para descrever o comportamento do solo, em cada uma dessas análises, são mostrados na Figura 5.1.

Nessas subrotinas, são calculados os deslocamentos da placa e/ou base elástica quando as cargas são aplicadas ao sistema estrutural, os esforços solicitantes na placa, ou seja, momentos fletores e esforços cortantes (esses últimos somente quando se utiliza a teoria de Mindlin) e a reação exercida pela base elástica quando se faz a análise do problema de contato (calculadas utilizando-se as relações entre w_b e r_b apresentadas no Capítulo 2).

A última etapa do programa principal tem como objetivo realizar a impressão dos resultados obtidos nas subrotinas anteriores, em arquivos de saída ou em arquivos neutros. Esses arquivos neutros são lidos pelo programa de pós-processamento MVIEW (Tecgraf, 1993) que é utilizado para visualização da distribuição de tensões na placa e visualização da reação exercida pela base elástica, com a qual se pode ver, no caso de contato unilateral, as regiões de perda de contato. A forma da deflexão da placa pode ser visualizada utilizando-se o programa MATHEMATICA (Wolfram, 1991), que utiliza um arquivo de dados, gerado pelo programa implementado neste trabalho, contendo informações sobre a geometria da placa e os deslocamentos de cada ponto nodal.

5.2.1 – Subrotina SOL

Nessa subrotina, como já mencionado anteriormente, é realizada a análise linear de placas através das teorias de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin. No Capítulo 3 foram apresentados os elementos finitos adotados quando se utiliza cada uma dessas teorias, ou seja, no caso de se usar a teoria de Kirchhoff, adota-se o elemento retangular com quatro pontos nodais e, no caso de se usar a teoria de Mindlin, adota-se o elemento isoparamétrico com oito pontos nodais.

Os passos básicos envolvidos na implementação dessa subrotina são mostrados a seguir:

1^o) A primeira tarefa a ser realizada por essa subrotina consiste na montagem da matriz de rigidez (\mathbf{K}_E^e) para o elemento de placa adotado, utilizando as expressões fornecidas no Capítulo 3. Observando essas expressões, vê-se que, para que essa matriz seja determinada, é necessário que, antes, se conheça a matriz constitutiva \mathbf{D} e a matriz \mathbf{B} que relaciona esforços solicitantes-curvatura. Após calculada, a matriz de rigidez do elemento é armazenada na matriz de rigidez global (\mathbf{K}_E) da estrutura;

2^o) Monta-se o vetor de carregamento nodal (\mathbf{F});

3^o) Com a matriz de rigidez da estrutura e o vetor de cargas conhecidos, o passo seguinte consiste na resolução do sistema de equações $\mathbf{K}_E \mathbf{u} = \mathbf{F}$ para se obter os deslocamentos nodais \mathbf{u} ;

4^o) Imprimem-se, em um arquivo de saída, os deslocamentos nodais obtidos no passo anterior;

5^o) Calculam-se os esforços solicitantes na placa;

6^o) Visualiza-se a deformada de uma dada seção da placa;

7^o) Finaliza-se a subrotina e retorna-se ao programa principal.

5.2.2 – Subrotina SOLCB

A análise do contato bilateral entre uma placa e uma fundação é feita nessa subrotina. Qualquer um dos modelos apresentados no Capítulo 2 pode ser utilizado para representar a fundação, como ilustra a Figura 5.1. A teoria de Kirchhoff é utilizada para analisar a placa apenas quando ela está em contato com uma base modelada como um semi-espaço infinito. A teoria de Mindlin é utilizada nos outros casos.

No Capítulo 4 foram apresentados os procedimentos necessários para esse tipo de análise, como mostrado nas Figuras 4.1 e 4.3. No caso de uma fundação modelada com um parâmetro ou como um semi-espaço infinito, o procedimento computacional é o mesmo. A única particularidade é com relação à montagem da matriz de rigidez para o modelo de base elástica utilizado. Quando se utilizam molas discretas para descrever o comportamento da fundação o procedimento para se obter a matriz de rigidez é apresentado no início da Seção 3.3. Para o modelo de Winkler utiliza-se a Equação (3.35) e para o semi-espaço infinito a matriz é obtida invertendo-se a matriz de flexibilidade (ver Seção 3.3). Já no caso dos modelos com dois parâmetros, como os modelos de Pasternak, Vlasov e Filonenko-Borodich, os deslocamentos da estrutura e da base elástica são obtidos através da resolução das Equações (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12), simultaneamente. Na Seção 4.2.2 é descrito o processo iterativo utilizado para se resolver essas equações.

Após a obtenção dos deslocamentos da placa e da base elástica e das reações nodais da base é possível visualizá-los na tela.

5.2.3 – Subrotina SOLCU

O objetivo dessa subrotina é resolver o problema de contato com restrições unilaterais utilizando uma das formulações (1, 2 ou 3) apresentadas na Seção 4.3. Como visto, essas formulações geram um problema de complementaridade linear que é resolvido através da técnica de pivoteamento de Lemke, descrita na Seção 4.4. Para essa análise, os modelos de base elástica utilizados são o modelo de Winkler e o semi-espaço infinito. Quando se resolve o problema de contato entre a placa e uma fundação tipo Winkler, utiliza-se a teoria de Mindlin para a análise da placa e, quando se utiliza o semi-espaço infinito para modelar a fundação, a teoria de Kirchhoff é usada, como já mencionado anteriormente.

Os procedimentos a serem seguidos, caso se adote a Formulação 1, 2 ou 3, são apresentados abaixo:

1^ª) Monta-se a matriz de rigidez da estrutura;

2^ª) Define-se o tipo de formulação a ser adotada;

3^ª) Para as **Formulações 1 e 2**:

- monta-se a matriz de flexibilidade **T** utilizando a Equação (4.35);
- monta-se a matriz de acoplamento **A**; (Obs.: Para o modelo de Winkler, usa-se a Equação (4.36) e, no caso do semi-espaço infinito, a matriz de acoplamento é uma matriz diagonal, cujos coeficientes A_{ji} são definidos pelo usuário no arquivo de dados.)
- monta-se o vetor de cargas externas;
- **Formulação 1** – obtêm-se a matriz **M** e o vetor **q**, utilizando as expressões dadas na Equação (4.42);
Formulação 2 – calculam-se a matriz **P** e o vetor **H**, através das Equações (4.45) e (4.46), de forma a se obter **M** e **q**;

Para a **Formulação 3**:

- monta-se a matriz de rigidez da base elástica;
- utiliza-se uma subrotina para efetuar a condensação estática a fim de se obter o sistema definido pela Equação (4.51);

4^ª) Utiliza-se o algoritmo de Lemke para resolver o problema de complementaridade linear (PCL) definido pela Equação (4.40) e restrições (4.41a,b,c), onde:

- na **Formulação 1** são obtidos os deslocamentos nodais da estrutura e reação da base elástica;
- na **Formulação 2** é obtida a reação da base elástica;
- na **Formulação 3** são obtidos o deslocamento da base elástica e o deslocamento relativo entre a estrutura e a base elástica.

5^ª) O próximo passo consiste na determinação das outras incógnitas, ou seja:

- para a **Formulação 1**, calculam-se os deslocamentos da base elástica;

- para a **Formulação 2**, calcula-se o deslocamento da estrutura utilizando a Equação (4.43);
- para a **Formulação 3**, calcula-se o deslocamento da estrutura através da relação entre \mathbf{z} e \mathbf{w} e calcula-se a reação da base elástica.

6º) Imprimem-se, no arquivo de saída, os deslocamentos e as reações nodais;

7º) Calculam-se os esforços solicitantes na estrutura;

8º) Utilizam-se rotinas gráficas para visualização da deformada e da reação exercida pela base elástica de uma dada seção da placa;

9º) Finaliza-se a subrotina e retorna-se ao programa principal.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é validar, através de exemplos numéricos, a metodologia proposta nos capítulos anteriores para solução de problemas de equilíbrio de placas com restrições de contato. Com o propósito de se verificar a eficiência dos elementos apresentados no Capítulo 3, utilizados para a modelagem da placa, são analisados, na Seção 6.2, quatro exemplos de placas. Dois exemplos são resolvidos através da teoria de Kirchhoff e, os outros dois através da teoria de Mindlin.

Na Seção 6.3 são abordados cinco exemplos de placas em contato bilateral com uma fundação elástica, nos quais os efeitos decorrentes das forças de atrito existentes entre esses dois corpos são desprezados. Nesse caso, a fundação reage tanto às solicitações de tração quanto às solicitações de compressão. Nos dois primeiros exemplos, a base elástica é modelada segundo Winkler; no terceiro exemplo, a base elástica segue o modelo proposto por Vlasov (modelo com dois parâmetros) e, nos dois últimos exemplos, considera-se a base elástica como um semi-espaço infinito.

Finalmente, na Seção 6.4 são apresentados quatro exemplos a fim de se verificar a eficiência computacional das formulações desenvolvidas no Capítulo 4 para solução de problemas de equilíbrio de placas com restrições unilaterais de contato. Nesses problemas, existe a não linearidade decorrente da mudança da região de contato entre os corpos após a aplicação do carregamento na placa. Como no caso de contato bilateral, considera-se a superfície de contato entre a placa e a fundação livres de atrito. Os modelos de bases elásticas utilizados são o modelo de Winkler e o semi-espaço infinito. Nos problemas de contato, onde a base é modelada como um semi-espaço infinito, os resultados obtidos neste trabalho são comparados com soluções numéricas existentes, uma vez que não foi encontrado na literatura solução analítica para esses problemas.

6.2 – PLACA SEM BASE ELÁSTICA

Nesta seção são analisados quatro exemplos de placas com o intuito de se comprovar a eficiência dos elementos apresentados no Capítulo 3. Os dois primeiros exemplos são analisados utilizando-se a teoria para placas espessas; os outros dois exemplos, utilizando-se a teoria para placas delgadas. Em todos esses exemplos compara-se a solução numérica obtida através do programa computacional desenvolvido com a solução analítica existente.

6.2.1 – Placa Quadrada Simplesmente Apoiada

O primeiro exemplo a ser analisado nesta seção trata de uma placa simplesmente apoiada, como ilustra a Figura 6.1. A placa é quadrada, de seção transversal uniforme, com dimensões $a = b = 2$ e de espessura t , constituída por material isotrópico com propriedades $E = 2.1 \times 10^5$ e $\nu = 0.3$, submetida a uma carga concentrada P no centro.

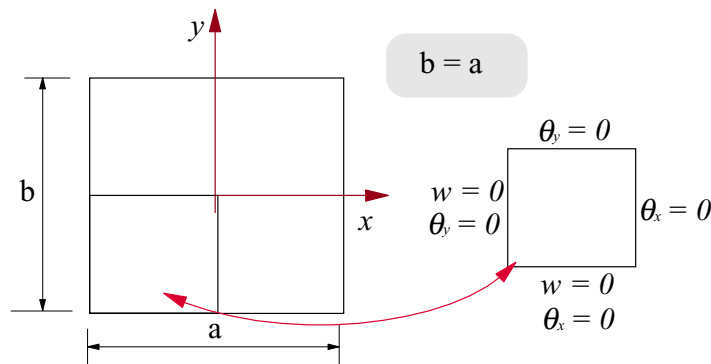


Figura 6.1 – Placa Quadrada Simplesmente Apoiada.

Neste exemplo, a placa é analisada através da teoria de Mindlin, que considera as deformações cisalhantes. Utiliza-se o elemento isoparamétrico com oito nós para a discretização da placa. Dois pontos de Gauss, em cada direção, são usados para efetuar as integrações numéricas necessárias.

Devido à simetria do problema, apenas $1/4$ da placa foi considerado na modelagem. O número de elementos usados na discretização da placa foi aumentado até que se obtivesse um bom resultado numérico, ou seja, até que a solução numérica e a solução analítica fossem

praticamente iguais. A Figura 6.1 apresenta, também, as condições de contorno utilizadas para tornar o modelo compatível.

Duas análises foram feitas: primeiramente, considerou-se a espessura da placa igual a 0.01; depois, igual a 0.05 e, finalmente, igual a 0.1.

A deflexão máxima, que ocorre em $x = 0$ e $y = 0$, para essas condições de contorno e tipo de carregamento atuante é dada, segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970), por:

$$w_{\max} = \alpha \frac{Pa^2}{D} \quad (6.1)$$

sendo $\alpha = 0.01160$.

As Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 apresentam, para espessuras iguais a 0.01, 0.05 e 0.1, respectivamente, o valor obtido para o coeficiente α e o erro encontrado em cada uma das modelagens utilizadas.

Esse erro é calculado através da seguinte expressão:

$$\text{erro}(\%) = 100 \frac{\text{resultado teórico} - \text{resultado numérico}}{\text{resultado teórico}} \quad (6.2)$$

Tabela 6.1 – Placa Simplesmente Apoiada ($t = 0.01$).

<i>Malha de Elementos Finitos</i>	<i>Valores de α</i>	<i>Erro (%)</i>
1 x 1	0.00689	40.5
2 x 2	0.01131	2.50
3 x 3	0.01154	0.54
4 x 4	0.01158	0.15
5 x 5	0.01160	0.00
<i>Solução Analítica</i>		$\alpha = 0.01160$
<i>Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970)</i>		

Tabela 6.2 – Placa Simplesmente Apoiada ($t = 0.05$).

<i>Malha de Elementos Finitos</i>	<i>Valores de α</i>	<i>Erro (%)</i>
1 x 1	0.00863	25.58
2 x 2	0.01156	0.33
3 x 3	0.01166	0.55
4 x 4	0.01170	0.84
5 x 5	0.01171	0.98
<i>Solução Analítica</i> $\alpha = 0.01160$ <i>Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970)</i>		

Tabela 6.3 – Placa Simplesmente Apoiada ($t = 0.1$).

<i>Malha de Elementos Finitos</i>	<i>Valores de α</i>	<i>Erro (%)</i>
1 x 1	0.01027	11.43
2 x 2	0.01190	2.57
3 x 3	0.01202	3.58
4 x 4	0.01207	4.04
5 x 5	0.01210	4.34
<i>Solução Analítica</i> $\alpha = 0.01160$ <i>Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970)</i>		

Os resultados numéricos são comparados com a solução analítica obtida por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970) utilizando a teoria para placas delgadas, mostrada anteriormente.

Observa-se, analisando as Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3, que os erros encontrados, calculados com relação à solução numérica e à solução analítica, são maiores nas placas mais espessas, uma vez que a solução analítica existente não considera os efeitos das tensões cisalhantes, que se tornam importantes nesse tipo de placa.

6.2.2 – Placa Retangular com Dois Bordos Apoiados e Dois Bordos Engastados

A Figura 6.2 ilustra o próximo problema a ser analisado utilizando-se a teoria de Mindlin. Trata-se de uma placa retangular com seção transversal uniforme, submetida a uma carga uniformemente distribuída q , com dois bordos simplesmente apoiados de dimensão b , e com os outros bordos engastados de dimensão a . Considera-se $b = 2a$, com $a = 2$ e a placa com espessura t .

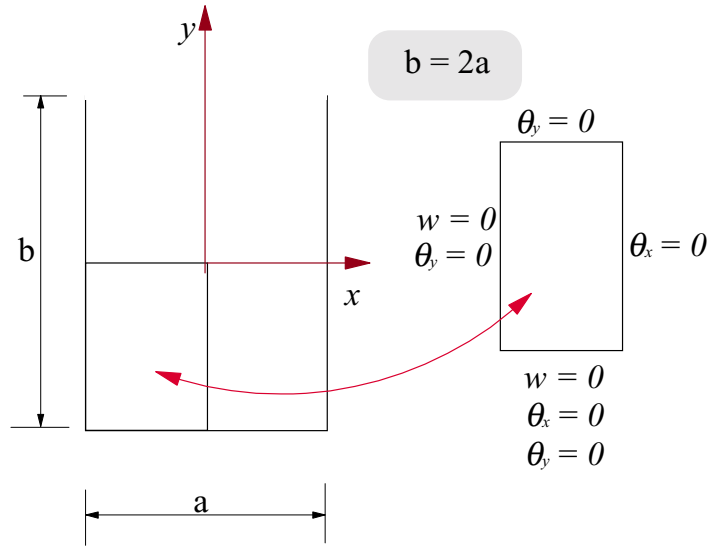


Figura 6.2 – Placa Retangular com Dois Bordos Apoiados e Dois Engastados.

A placa é constituída por um material isotrópico com módulo de elasticidade $E = 2.1 \times 10^5$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

Mais uma vez, devido à simetria do problema, apenas $\frac{1}{4}$ da placa foi considerado na modelagem. As condições de contorno utilizadas no modelo para torná-lo compatível são apresentadas, também, na Figura 6.2.

Como no exemplo anterior, o número de elementos finitos usados na discretização foi variado a fim de se verificar, em cada caso, a eficiência do elemento. Dois pontos de Gauss em cada direção foram utilizados para efetuar as integrações numéricas necessárias.

Para esse problema, a solução analítica, com relação à deflexão máxima que ocorre no centro da placa, segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970), é dada por:

$$w_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad (6.3)$$

onde $\alpha = 0.00844$.

Os momentos M_x e M_y no centro da placa, em torno dos eixos x e y, respectivamente, segundo esses mesmos autores, são expressos por:

$$M_x = \beta_1 qa^2 \quad (6.4)$$

$$M_y = \beta_2 qa^2 \quad (6.5)$$

sendo $\beta_1 = 0.0869$ e $\beta_2 = 0.0474$. As Tabelas 6.4 e 6.5, a seguir, apresentam os resultados obtidos para os coeficientes α , β_1 e β_2 em cada uma das modelagens utilizadas, para as espessuras: $t = 0.01$ e $t = 0.1$. Os erros encontrados, com relação a esses coeficientes e à solução analítica obtida por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970), são calculados de acordo com a Equação (6.2) definida no exemplo anterior. Como no exemplo anterior, à medida que a espessura aumenta, o erro encontrado também aumenta, devido a não consideração das tensões cisalhantes na solução analítica existente.

Tabela 6.4 – Placa com Dois Bordos Apoiados e Dois Bordos Engastados ($t = 0.01$).

<i>Malha de Elementos Finitos</i>	<i>Valores de α</i>	<i>Erro (%)</i>	<i>Valores de β_1</i>	<i>Erro (%)</i>	<i>Valores de β_2</i>	<i>Erro (%)</i>
1 x 1	0.00353	58.18	0.0000	-	0.0000	-
2 x 2	0.00603	28.55	0.05956	31.46	0.03689	22.17
3 x 3	0.00769	8.89	0.07457	14.18	0.04398	7.22
4 x 4	0.00829	1.82	0.08494	2.26	0.04734	0.14
5 x 5	0.00840	0.44	0.08620	0.81	0.04729	0.24
6 x 6	0.00843	0.083	0.08652	0.44	0.04729	0.24
7 x 7	0.00844	0.00	0.08690	0.00	0.04740	0.00
<i>Solução Analítica</i>	$\alpha = 0.00844$		$\beta_1 = 0.0869$		$\beta_2 = 0.0474$	
	<i>Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970)</i>					

Tabela 6.5 – Placa com Dois Bordos Apoiados e Dois Bordos Engastados ($t = 0.1$).

<i>Malha de Elementos Finitos</i>	<i>Valores de α</i>	<i>Erro (%)</i>	<i>Valores de β_1</i>	<i>Erro (%)</i>	<i>Valores de β_2</i>	<i>Erro (%)</i>
1 x 1	0.008530	1.07	0.05450	37.28	0.08225	73.5
2 x 2	0.008410	0.36	0.08368	3.7	0.04571	3.57
3 x 3	0.008540	1.18	0.08617	0.84	0.04698	0.89
4 x 4	0.008547	1.27	0.08660	0.35	0.04710	0.63
5 x 5	0.008548	1.28	0.08678	0.14	0.04716	0.51
6 x 6	0.008548	1.28	0.08690	0.00	0.04720	0.42
7 x 7	0.008548	1.28	0.08470	2.53	0.04579	3.40
<i>Solução Analítica</i>	$\alpha = 0.00844$		$\beta_1 = 0.0869$		$\beta_2 = 0.0474$	
	<i>Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970)</i>					

6.2.3 – Placa Retangular Simplesmente Apoiada

O primeiro problema de placa resolvido através da teoria de Kirchhoff, é ilustrado na Figura 6.3, que apresenta uma placa retangular de dimensões a e b , sendo $b = 3a$, e de espessura t , delgada e submetida a uma carga uniformemente distribuída q . Considera-se a placa com seção transversal uniforme.

O material que compõe a placa é considerado isotrópico, com propriedades físicas E e $\nu = 0.3$.

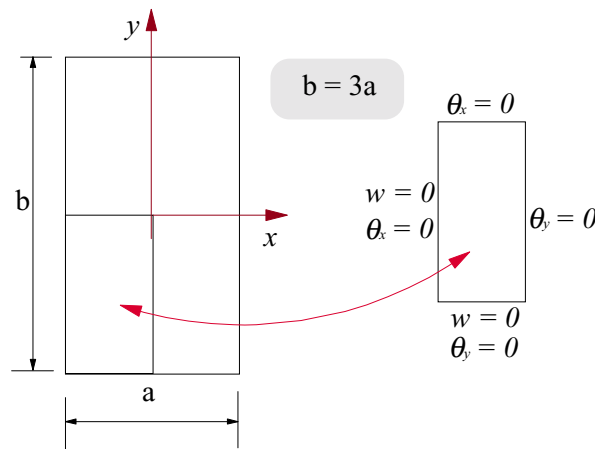


Figura 6.3 – Placa Retangular Simplesmente Apoiada.

Para a modelagem da placa é utilizado o elemento retangular com quatro nós. Como nos dois exemplos anteriores, várias malhas de elementos finitos foram utilizadas, a fim de se obter a melhor resposta para a análise.

A solução analítica para a deflexão máxima e para os momentos M_x e M_y , no centro da placa, são calculados de acordo com as Equações (6.3), (6.4) e (6.5), com coeficientes $\alpha = 0.01223$, $\beta_1 = 0.1189$ e $\beta_2 = 0.04060$, de acordo com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970).

A Tabela 6.6, a seguir, apresenta os valores de α , β_1 e β_2 obtidos em cada uma das análises. Apresenta, também, os erros encontrados, que foram calculados de acordo com a Equação (6.2). A distribuição de momentos fletores M_x na placa, para a malha de elementos finitos com a qual se obteve os melhores resultados, ou seja, 10×10 , é ilustrada na Figura 6.4 obtida através do pós-processador MVIEW (Tecgraf, 1993). Observa-se uma maior concentração de tensões no centro da placa. Somente $\frac{1}{4}$ da placa é ilustrado.

Verifica-se que os resultados obtidos neste trabalho são praticamente iguais aos resultados obtidos por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970) que utilizaram, também, a teoria para placas delgadas.

Tabela 6.6 – Placa Retangular Simplesmente Apoiada.

<i>Malha de Elementos Finitos</i>	<i>Valores de α</i>	<i>Erro (%)</i>	<i>Valores de β_1</i>	<i>Erro (%)</i>	<i>Valores de β_2</i>	<i>Erro (%)</i>
1 x 1	0.01211	-0.98	0.26630	23.97	0.05266	29.70
2 x 2	0.01310	7.12	0.13152	10.61	0.03961	-2.44
3 x 3	0.01261	3.09	0.12425	4.50	0.04056	-0.098
4 x 4	0.01244	1.72	0.12187	2.50	0.04072	0.29
5 x 5	0.01237	1.14	0.12079	1.59	0.04072	0.29
6 x 6	0.01232	0.74	0.12020	1.09	0.04070	0.25
7 x 7	0.01230	0.57	0.11984	0.79	0.04068	0.20
8 x 8	0.01228	0.41	0.11961	0.60	0.04068	0.20
10 x 10	0.01226	0.24	0.11930	0.34	0.04066	0.15
<i>Solução Analítica</i>	$\alpha = 0.01223$		$\beta_1 = 0.11890$		$\beta_2 = 0.04060$	
	<i>Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970)</i>					

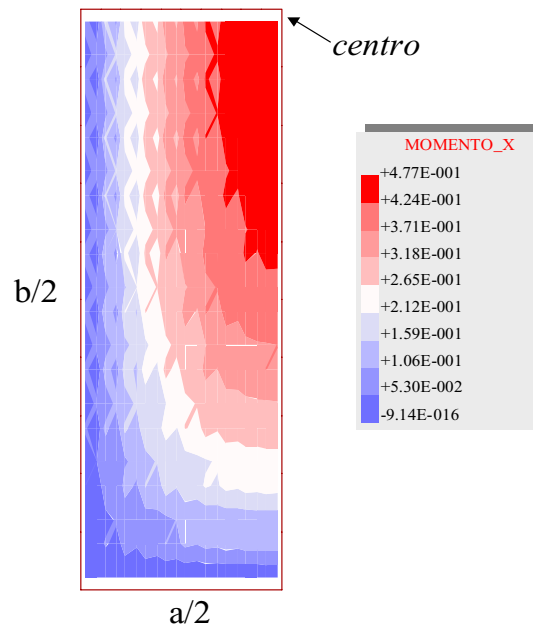


Figura 6.4 – Distribuição de Momentos M_x na Placa.

6.2.4 – Placa Engastada

O próximo problema a ser resolvido com a teoria de flexão de Kirchhoff é mostrado na Figura 6.5, que apresenta uma placa engastada submetida a uma carga uniformemente distribuída $q = 10$.

A placa é quadrada ($b = a = 10$), de espessura $t = 1.0$, constituída por um material isotrópico ($E = 1000.0$ e $\nu = 0.3$) e apresenta seção transversal uniforme.

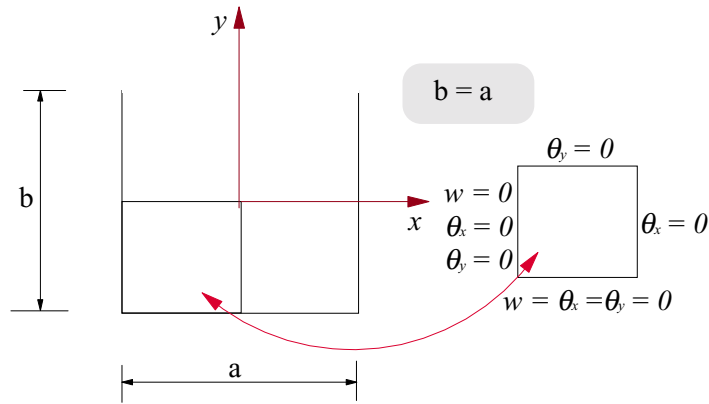


Figura 6.5 – Placa Engastada.

Como o problema é simétrico, $\frac{1}{4}$ da placa foi utilizado para a modelagem. As condições de contorno aplicadas ao modelo para torná-lo compatível são apresentadas na Figura 6.5.

Como nos exemplos anteriores, o número de elementos finitos foi variado e o resultado encontrado para a distribuição de momentos ao longo do eixo central da placa, para cada uma das malhas de elementos finitos utilizadas, é apresentado na Figura 6.6.

A deflexão máxima, que ocorre no centro da placa, é calculada de acordo com a Equação (6.3) sendo o coeficiente $\alpha = 0.01260$, dado por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970).

A Tabela 6.7 apresenta os resultados obtidos para a deflexão no centro da placa para as malhas de elementos finitos utilizadas.

Compara-se aqui, também, os resultados obtidos neste trabalho com a solução analítica encontrada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970) através da teoria para placas delgadas.

Tabela 6.7 – Deflexão Máxima em uma Placa Engastada.

<i>Malha de Elementos Finitos</i>	<i>Valores de α</i>	<i>Erro (%)</i>
1 x 1	0.001469	16.59
2 x 2	0.001393	10.56
3 x 3	0.001327	5.32
6 x 6	0.001281	1.67
8 x 8	0.001261	0.08
Solução Analítica		$\alpha = 0.01260$
<i>Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970)</i>		

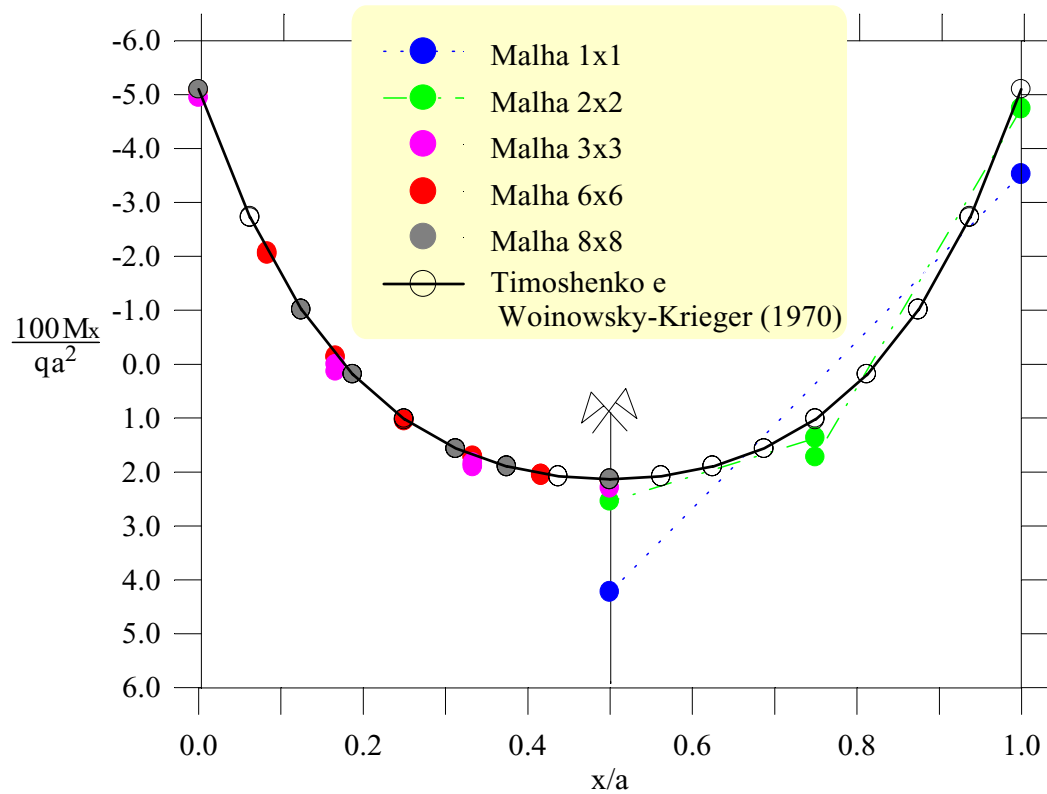


Figura 6.6 – Distribuição de Momentos em uma Placa Engastada.

6.3 – PROBLEMA DE CONTATO BILATERAL

O contato bilateral entre uma placa e uma base elástica é analisado nesta seção, onde são apresentados exemplos numéricos para validar a formulação apresentada no Capítulo 4 para análise desse tipo de problema. A análise, em todos os exemplos, é linear e desprezam-se os efeitos das forças de atrito entre a placa e a base elástica. Os modelos de base elástica utilizados nos exemplos são Winkler, Vlasov (modelo com dois parâmetros) e semi-espaço infinito.

6.3.1 – Placa Circular sobre uma Fundação Tipo Winkler

O primeiro problema de contato bilateral é apresentado nesta seção. Considera-se, aqui, que a base elástica reage tanto às solicitações de tração quanto de compressão e é modelada segundo Winkler. Esse modelo, como mostrado no Capítulo 2, não considera as interações cisalhantes entre as molas.

A Figura 6.7 ilustra o problema a ser analisado. Consiste em uma placa circular de raio $r = 5$ e espessura t , submetida a uma carga concentrada P no centro e em contato com uma base tipo Winkler que apresenta parâmetro de rigidez K .

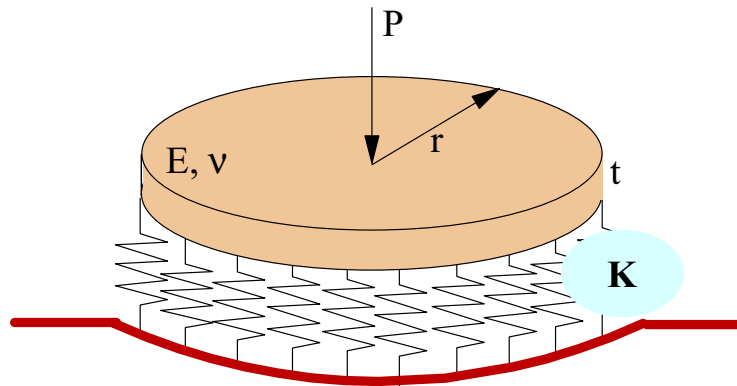


Figura 6.7 – Placa Circular em Contato com uma Base Tipo Winkler.

Consideram-se, nesse exemplo, as seguintes relações:

$$r = 4\sqrt{\frac{D}{K}} \quad (6.6)$$

e,

$$\frac{P}{8\pi Kr^3} = 102 \times 10^{-5} \quad (6.7)$$

A placa é constituída por um material isotrópico que apresenta módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν .

Devido à simetria do problema, apenas $\frac{1}{4}$ do sistema estrutural foi discretizado. A malha de elementos finitos é apresentada na Figura 6.8. Nove elementos finitos isoparamétricos com oito nós foram utilizados. A flexão da placa foi analisada através da teoria de Mindlin.

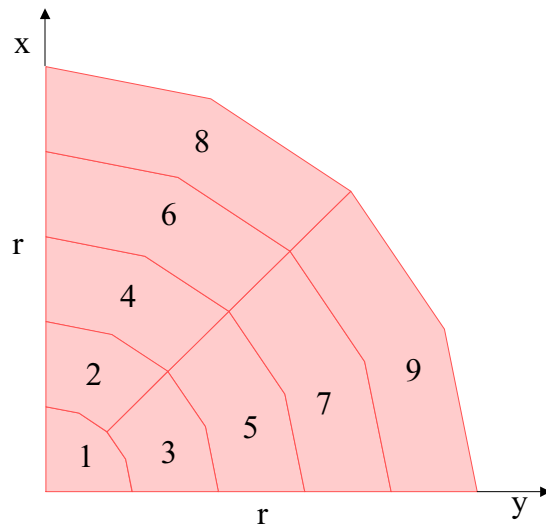


Figura 6.8 – Malha de Elementos Finitos para o Sistema Estrutural.

Os resultados obtidos para a deflexão máxima e mínima na placa são comparados com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970) e apresentados na Tabela 6.8, onde se observa um perfeito acordo entre os dois resultados.

Tabela 6.8 – Deflexões Máxima e Mínima na Placa.

Resultados	$W_{\text{máx}}$	W_{min}
Presente Trabalho	43.15×10^{-3}	39.45×10^{-3}
Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970)	43.00×10^{-3}	39.10×10^{-3}

6.3.2 – Placa Longa sobre uma Fundação Tipo Winkler

A Figura 6.9 ilustra outro exemplo de placa em contato bilateral com uma base modelada de acordo com Winkler. Agora, a placa é retangular, longa, apoiada nos dois bordos menores e submetida a uma carga uniformemente distribuída q .

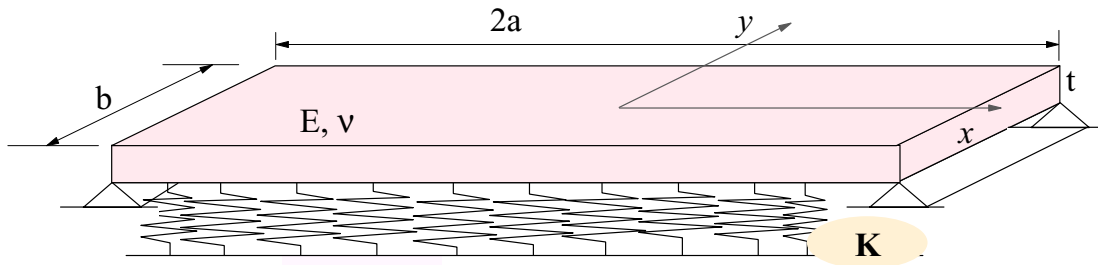


Figura 6.9 – Placa Retangular sobre uma Base Tipo Winkler.

A placa, que é constituída por um material isotrópico com propriedades $E = 10^5$ e $\nu = 0.0$, apresenta dimensões $a = 10$, $b = 1.0$ e $t = 0.1$.

A modelagem usada para a placa e para a base elástica é apresentada na Figura 6.10. Devido à simetria do problema, apenas $1/4$ do sistema estrutural foi discretizado, utilizando-se elementos isoparamétricos com oito nós. As condições de contorno também são apresentadas na Figura 6.10 e são utilizadas para tornar o modelo compatível.

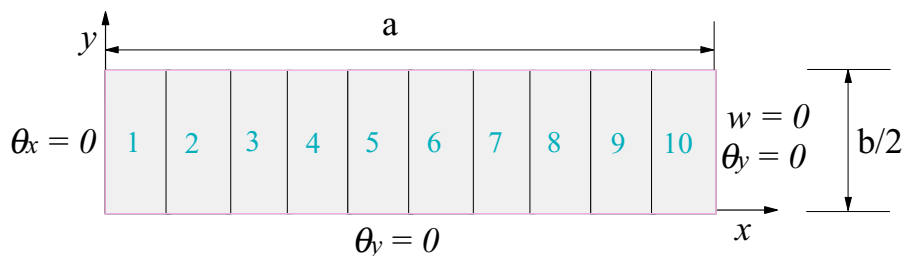


Figura 6.10 – Modelagem da Placa e da Base Elástica.

Com o objetivo de se verificar o comportamento da deflexão lateral com a variação do parâmetro de rigidez (K) da base, esse parâmetro foi variado.

A Figura 6.11 mostra a deflexão ao longo do eixo central da placa para os vários valores de K . Pode-se observar que quanto maior o valor do parâmetro, menor é a deflexão da placa. Isso é devido ao aumento da rigidez do sistema estrutural (placa e base elástica).

Assim, pode-se concluir que para um parâmetro de rigidez infinito, a deflexão lateral da placa é nula.

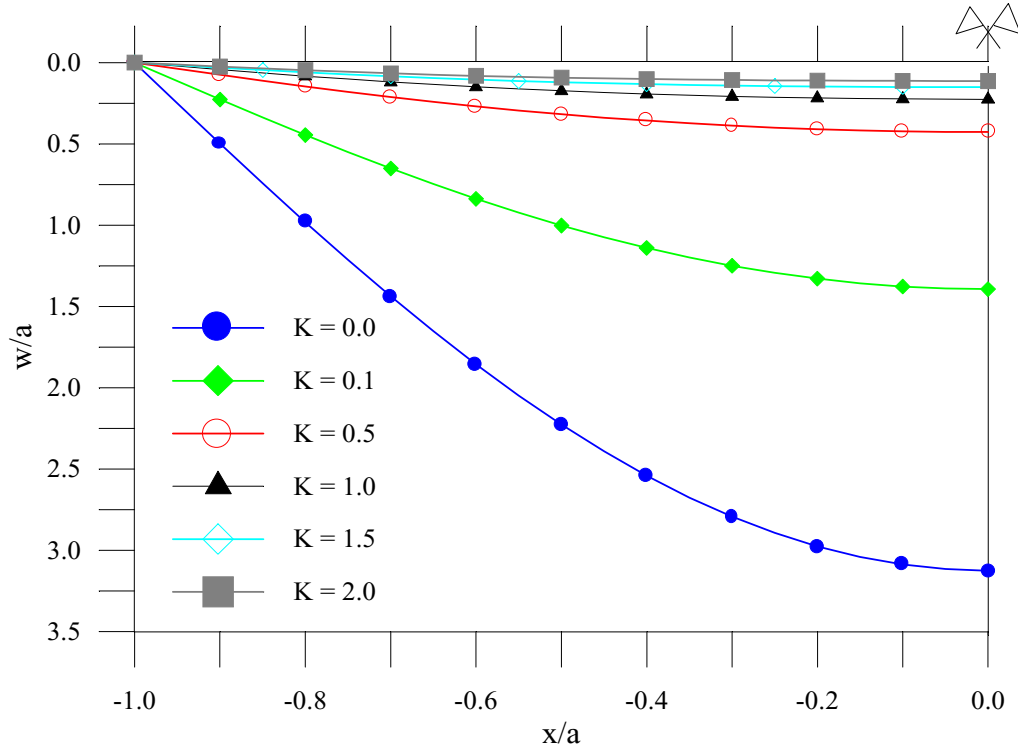


Figura 6.11 – Comportamento da Deflexão Lateral da Placa.

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1970) fornecem a solução analítica para a deflexão lateral no centro da placa. Os resultados obtidos neste trabalho são apresentados na Tabela 6.9 e comparados com essa solução analítica e também com a solução numérica obtida por Holanda (1997) que utilizou o Método dos Elementos Finitos. É possível observar que os resultados numéricos são praticamente idênticos aos resultados obtidos através da solução analítica.

Tabela 6.9 - Deflexão Lateral no Centro da Placa.

<i>Parâmetro de Rigidez da Base</i>	<i>Presente Trabalho</i>	<i>Solução Analítica</i>	<i>Holanda (1997)</i>
0.0	15.6280	15.6250	15.6280
0.1	6.9690	6.9684	6.9691
0.5	2.1351	2.1351	2.1351
1.0	1.1258	1.1258	1.1258
1.5	0.7568	0.7568	0.7568
2.0	0.5664	0.5664	0.5663

6.3.3 – Placa Retangular em Contato com uma Base Modelada com Dois Parâmetros

Considere uma placa retangular com bordos livres e submetida a uma carga uniformemente distribuída q , como ilustra a Figura 6.12. Nesse exemplo, assume-se o coeficiente de Poisson ν , do material da placa, igual a 0.0, o coeficiente ν_0 (ver Equação 2.24) igual a 0.4, $\gamma = 1.5$ e $r = 1.0$. Como definido no Capítulo 2, Seção 2.3.5, γ é o parâmetro que determina a razão de decréscimo dos deslocamentos com a profundidade.

O símbolo f_p é chamado “índice de flexibilidade” da placa e é definido como:

$$f_p = \frac{\pi E_0 l^2 m}{D(1 - \nu_0^2)} \quad (6.8)$$

É considerado, também, que a placa esteja em contato bilateral com uma base modelada segundo Vlasov, que apresenta profundidade infinita ($H = \infty$).

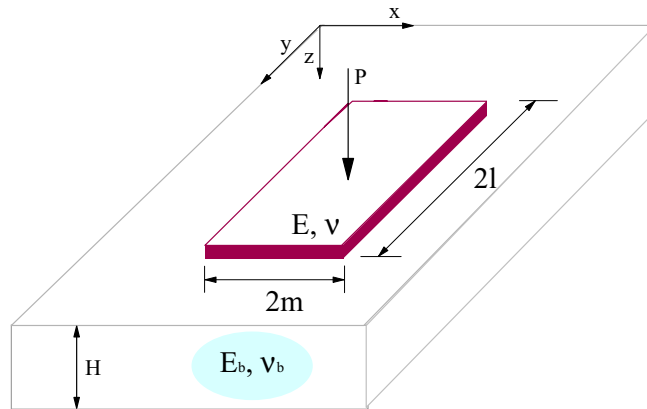


Figura 6.12 – Placa Retangular em Contato com uma Base Modelada com Dois Parâmetros.

Devido à simetria natural do problema, apenas um quadrante da placa é considerado. Esse quadrante é discretizado por 16 elementos finitos isoparamétricos com oito nós, como mostra a Figura 6.13. A mesma malha de elementos finitos é usada para a aproximação por diferenças finitas das Equações (4.9) e (4.10), definidas no Capítulo 4.

Após realizarem-se 17 ciclos iterativos, os resultados das deflexões nodais convergem para um valor que difere em mais ou menos 0.1% do correspondente valor obtido no ciclo

iterativo anterior. Para demonstrar a rápida convergência do processo iterativo apresentado no Capítulo 4, a deflexão central, obtida em cada ciclo, é comparada com a correspondente solução analítica obtida por Vlasov e Leont'ev (1966) e mostrada na Figura 6.14. Comparam-se, nessa figura, os resultados obtidos neste trabalho com aqueles apresentados por Yang (1972).

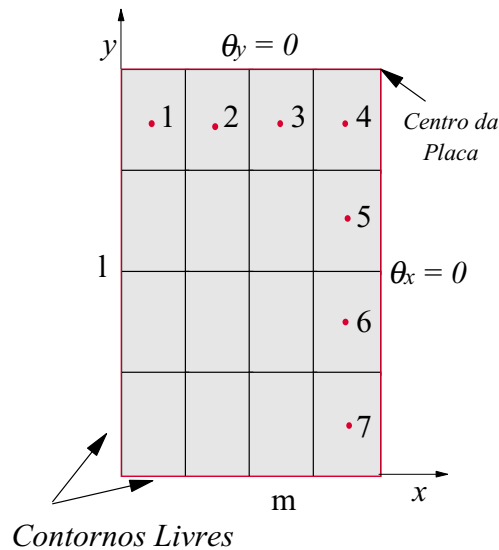


Figura 6.13 – Discretização do Sistema Estrutural.

Os resultados para a deflexão máxima que ocorre no centro da placa, obtida após serem realizados os 17 ciclos iterativos, são mostrados na Tabela 6.10. Os resultados são comparados com a solução analítica obtida por Vlasov e Leont'ev (1966) e com a solução numérica encontrada por Yang (1972). São comparados, também, os momentos M_x e M_y , nas posições 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, mostradas na Figura 6.13, com os respectivos valores obtidos por esses autores.

Outra análise foi feita considerando a placa submetida a uma carga concentrada P atuando no centro da placa. A mesma malha de elementos finitos foi utilizada. A convergência do processo iterativo é ilustrada na Figura 6.14, onde a deflexão central, obtida em cada ciclo, é comparada com a deflexão central obtida na última iteração. Apenas 15 ciclos iterativos foram necessários para a convergência do processo, como mostrado nessa figura.

Novamente, os resultados deste trabalho são comparados com os de Yang (1972).

Tabela 6.10 – Resultados Obtidos – Carga Distribuída.

<i>Resultados</i>	<i>Posição</i>	<i>Vlasov e Leont'ev (1966)</i>	<i>Yang (1972)</i>	<i>Presente Trabalho</i>
$\frac{M_x}{qm^2}$	1	0.02392	0.02290	0.02315
	2	0.06813	0.06902	0.06915
	3	0.10197	0.09992	0.10205
	4	0.12028	0.11601	0.12170
$\frac{M_y}{ql^2}$	4	0.06465	0.06270	0.06613
	5	0.05480	0.05433	0.05512
	6	0.03662	0.03729	0.03591
	7	0.01268	0.01024	0.01194
$\frac{wE_o}{qm}$	Centro da Placa	0.71800	0.71650	0.71580

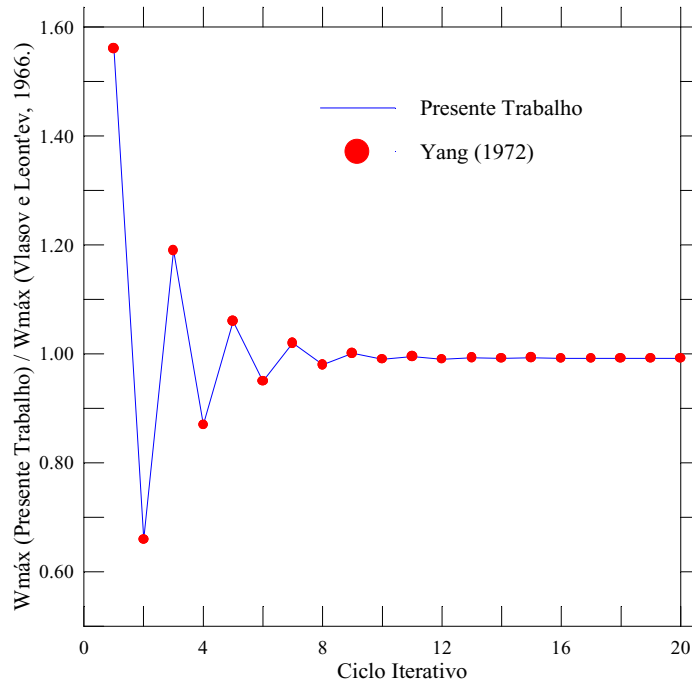


Figura 6.14 – Convergência do Processo Iterativo – Carga Distribuída.

A Tabela 6.11 apresenta os valores obtidos para a deflexão máxima na placa e mostra, também, os valores encontrados para os momentos M_x e M_y em torno dos eixos x e y, respectivamente, nas posições 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Para esse problema, não existe solução

analítica. Portanto, os resultados obtidos são comparados, apenas, com a solução numérica obtida por Yang (1972). Os resultados mostram a boa precisão do método numérico proposto.

Tabela 6.11 – Resultados Obtidos – Carga Concentrada.

<i>Resultados</i>	<i>Posição</i>	<i>Yang (1972)</i>	<i>Presente Trabalho</i>
$\frac{M_x}{P}$	1	-0.00045	-0.00037
	2	0.01128	0.01283
	3	0.04363	0.04382
	4	0.11030	0.10970
$\frac{M_y}{P}$	4	0.23450	0.23350
	5	0.11370	0.12180
	6	0.04840	0.05070
	7	0.00990	0.00958
$\frac{10wE_0m}{P}$	Centro da Placa	0.9919	0.9902

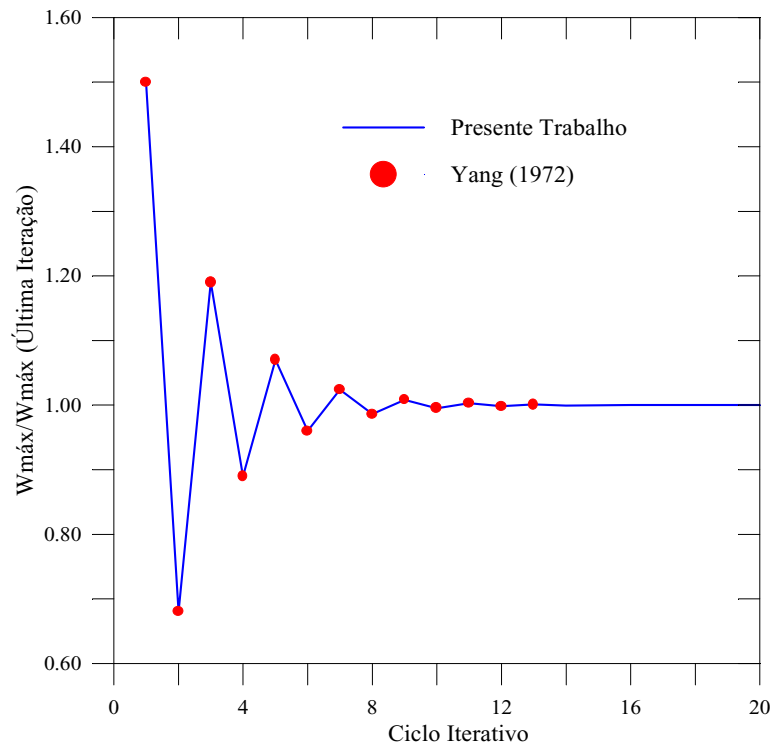


Figura 6.15 – Convergência do Processo Iterativo – Carga Concentrada.

6.3.4 – Placa Quadrada sobre um Semi-Espaço Infinito

O primeiro exemplo de placa sobre um semi-espaço infinito é analisado nesta seção. Considera-se que a base elástica reage tanto às solicitações de tração quanto de compressão e despreza-se o atrito entre os dois corpos. O problema a ser analisado é apresentado na Figura 6.16. Consiste em uma placa delgada, quadrada, submetida a uma carga uniformemente distribuída q e, como já dito, em contato com um semi-espaço infinito.

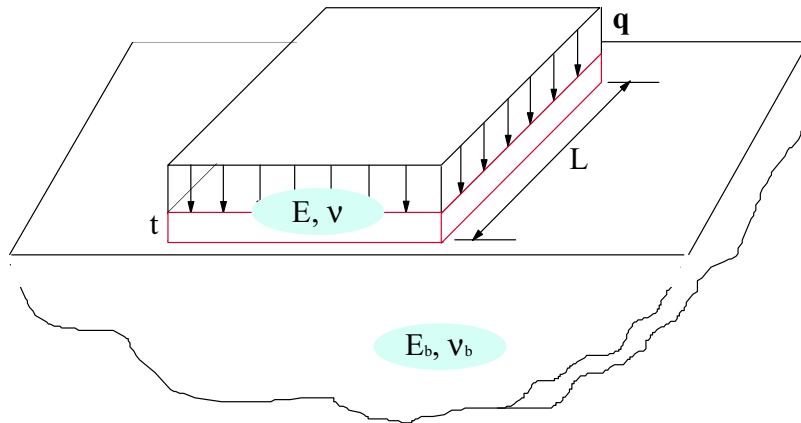


Figura 6.16 – Placa Quadrada em Contato com um Semi-Espaço Infinito.

O material que compõe a placa apresenta propriedades físicas E e ν , referentes ao módulo de elasticidade e ao coeficiente de Poisson, enquanto o material da base elástica apresenta propriedades E_b e ν_b . Considera-se, neste exemplo, $\nu = \nu_b$.

Devido à simetria do problema, apenas $\frac{1}{4}$ do sistema estrutural foi discretizado utilizando-se 9 elementos finitos. Adotou-se, para a análise, o elemento finito retangular com quatro nós. A Figura 6.17 ilustra a malha de elementos finitos utilizada.

Várias situações foram analisadas, variando-se o parâmetro de rigidez relativo, dado por:

$$\gamma = 180\pi \left(\frac{E_b}{E} \right) \left(\frac{a}{t} \right)^3 \quad (6.9)$$

através da variação do módulo de elasticidade da placa (E). Na Equação (6.9), a é a dimensão do elemento.

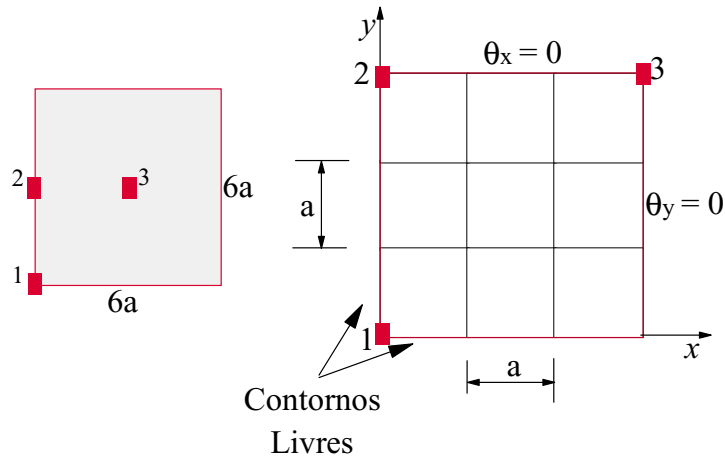


Figura 6.17 – Malha de Elementos Finitos.

As Figuras 6.18 e 6.19 ilustram os resultados obtidos por este trabalho, que são comparados com os resultados numéricos encontrados por Cheung e Zienkiewicz (1965) utilizando essa mesma malha de elementos finitos. A Figura 6.18 apresenta a variação da pressão de contato (ou reação da base elástica) nas posições 1, 2 e 3 (ver Figura 6.17) com a variação do parâmetro γ . A Figura 6.19 ilustra a variação da pressão de contato ao longo do eixo central da placa para diferentes valores de γ (ver Equação 6.9). Na Figura 6.18 é ilustrado, também, o resultado obtido quando se utiliza o modelo de base proposto por Winkler. Como esperado, em qualquer uma das posições 1, 2 ou 3, a pressão de contato tem magnitude igual ao valor da carga distribuída atuante. Observa-se que a pressão de contato se aproxima de um valor elevado (infinito quando se tem a solução exata) nos cantos da placa (posição 1), para o caso de uma placa rígida ($\log \gamma = 0.0$). Entretanto, converge para o mesmo valor, igual ao valor da carga, quando a placa é muito flexível ($\log \gamma = 3.0$).

Considerando a placa submetida a uma carga concentrada P atuando no centro, várias situações foram analisadas através da variação de γ e os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 6.20 e 6.21, mostradas a seguir e que ilustram, respectivamente, a variação da pressão de contato com a variação do parâmetro γ e a variação da pressão de contato ao longo do eixo central da placa. Os resultados mostrados nessas figuras são comparados, também, com os obtidos por Cheung e Zienkiewicz (1965). Observando essas figuras, vê-se que, para o caso de uma placa flexível ($\log \gamma = 2.35$), a pressão de contato no centro tem valor elevado e ocorre um levantamento da placa nos bordos, caracterizando uma região de tração. Para uma placa rígida ($\log \gamma = 0.0$), a pressão de contato é maior nos bordos.

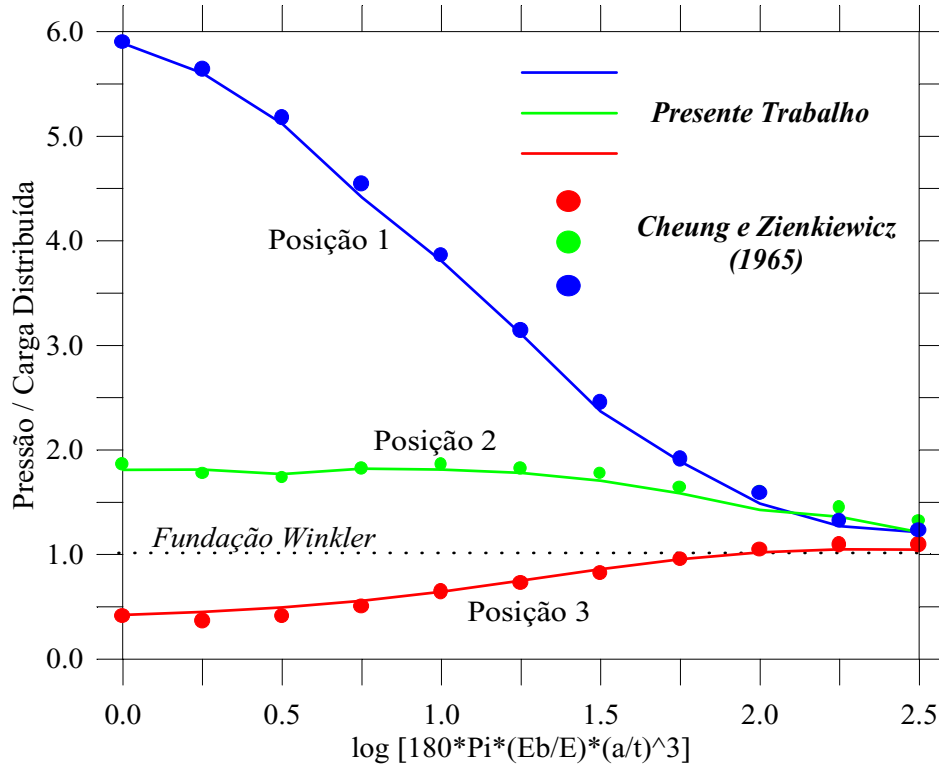


Figura 6.18 – Variação da Pressão de Contato nas Posições 1, 2 e 3.

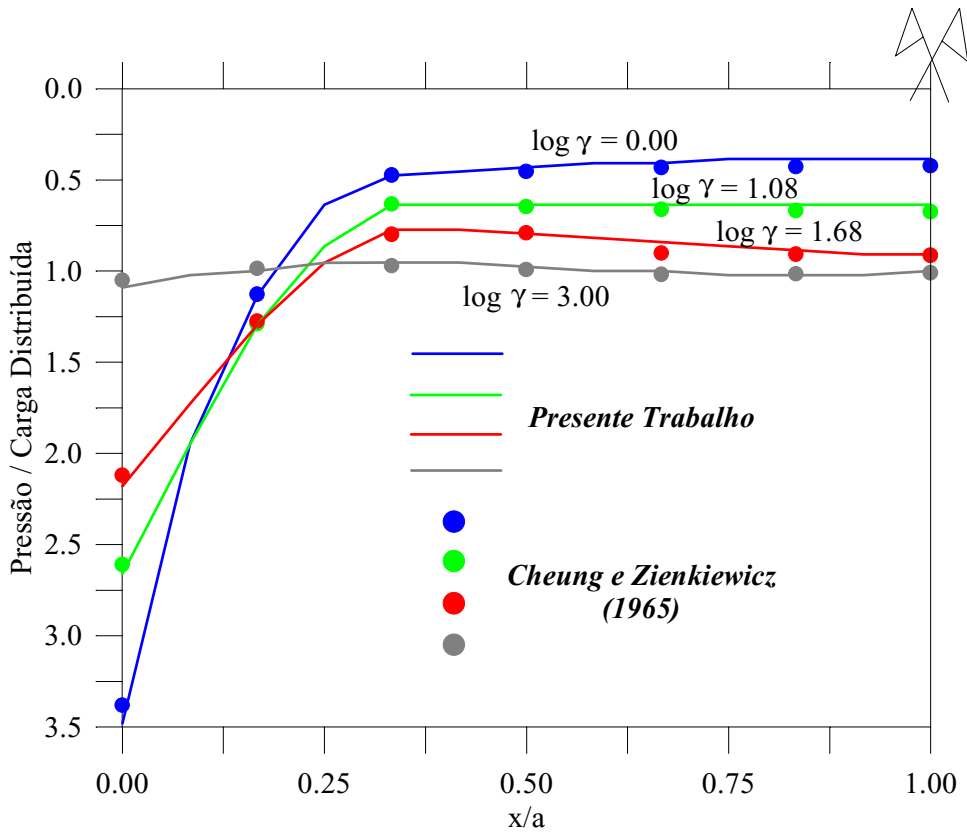


Figura 6.19 – Variação da Pressão de Contato ao Longo do Eixo Central da Placa.

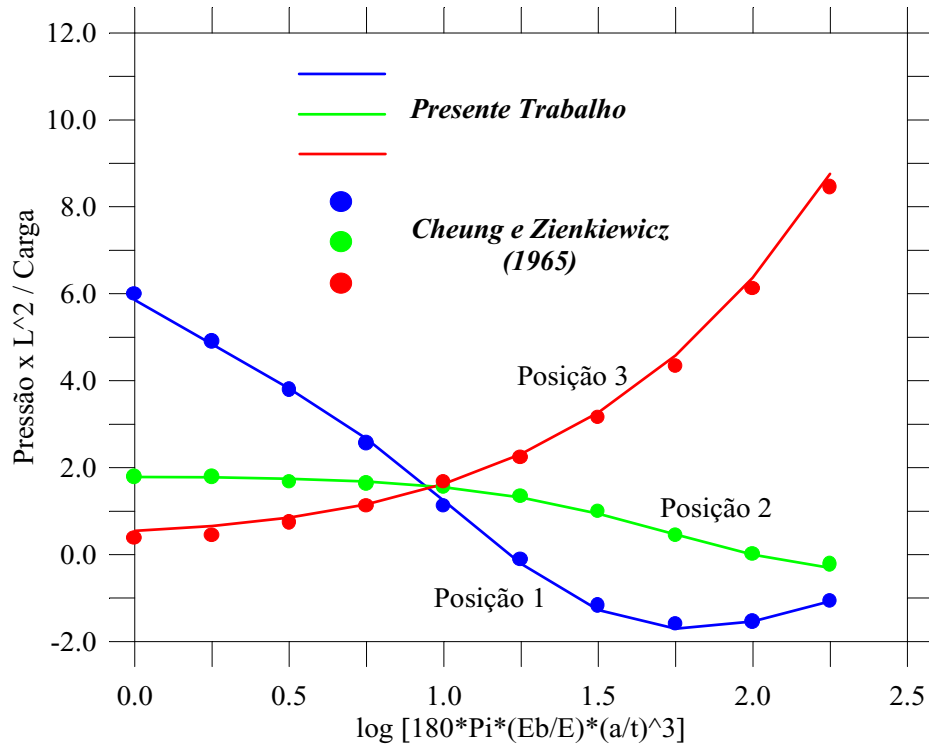


Figura 6.20 – Variação da Pressão de Contato nas Posições 1, 2 e 3.

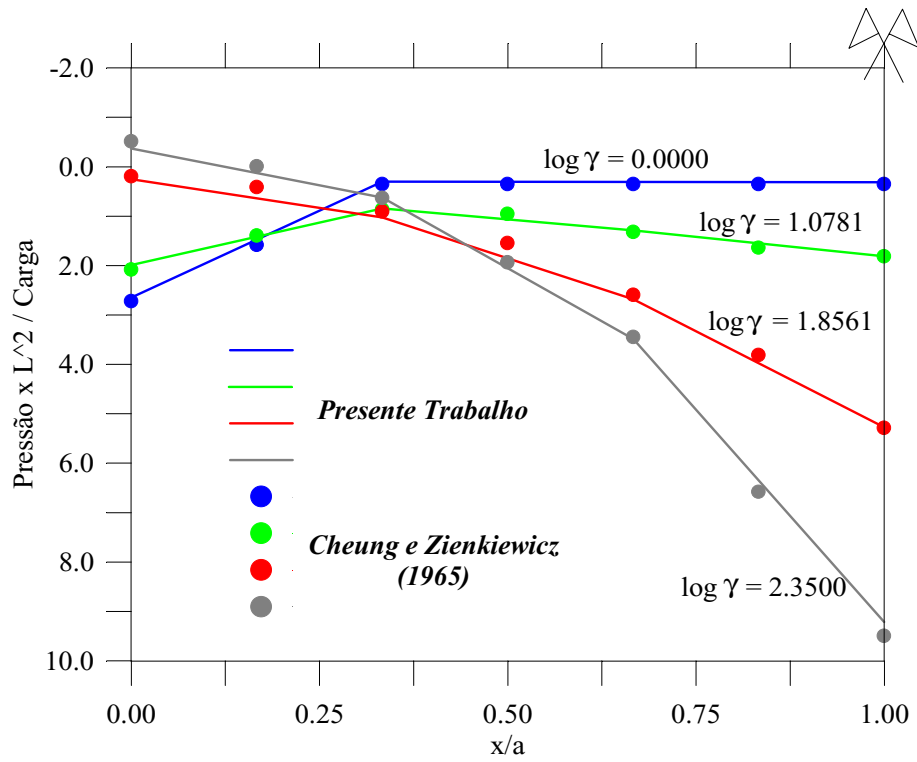


Figura 6.21 – Variação da Pressão de Contato ao Longo do Eixo Central da Placa.

6.3.5 – Placa Retangular sobre um Semi-Espaço Infinito

A Figura 6.22 ilustra o problema de contato bilateral a ser resolvido nesta seção. Trata-se de uma placa de concreto, com propriedades $E = 2.11 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, $\nu = 0.0$ e peso específico $\gamma = 2.4 \text{ t/m}^3$, de seção transversal uniforme, em contato com um semi-espaço infinito que apresenta propriedades $E_b = 1.05 \text{ t/m}^2$ e $\nu_b = 0.0$.

A placa, de dimensão $a = 3.048 \text{ m}$, $b = 0.3048 \text{ m}$ e espessura $t = 0.6096 \text{ m}$, é submetida a uma carga externa $P = 1.814 \text{ t}$ concentrada no centro. Considera-se na análise, o peso próprio da placa.

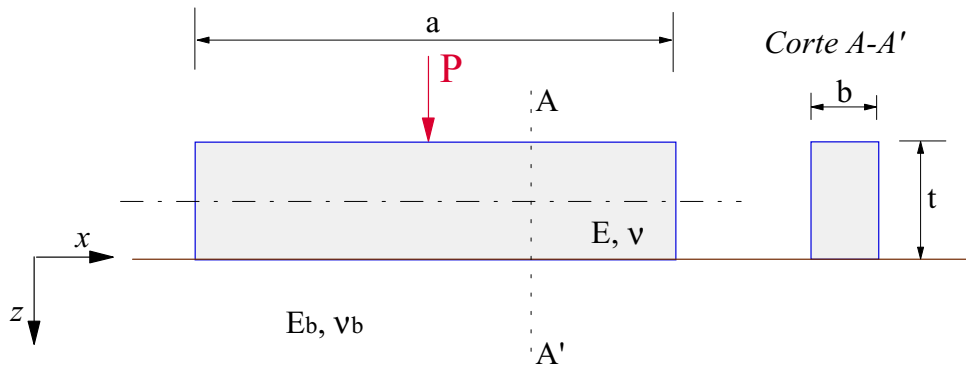


Figura 6.22 – Placa Retangular em Contato com um Semi-Espaço Infinito.

Na discretização do sistema estrutural foram utilizados 20 elementos finitos retangulares com quatro nós, como mostra a Figura 6.23. Apenas $\frac{1}{4}$ do sistema estrutural foi considerado na modelagem. A teoria de Kirchhoff foi utilizada para a análise.

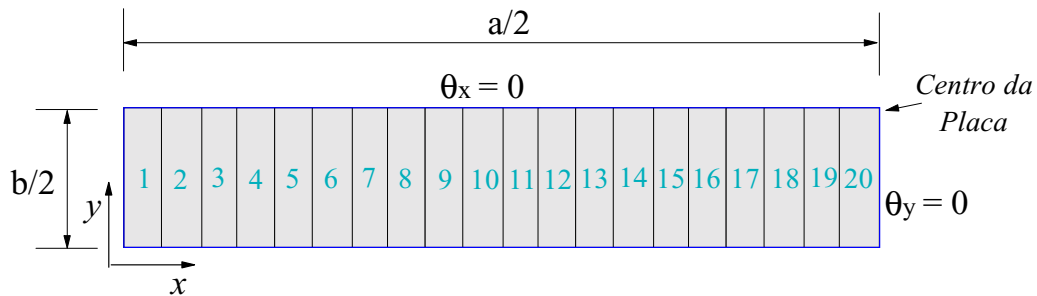


Figura 6.23 – Discretização do Sistema Estrutural.

Neste exemplo, compara-se a distribuição da reação exercida pela base elástica obtida através do programa computacional desenvolvido neste trabalho com a obtida por Cheung (1977). A Figura 6.24 apresenta a reação exercida pela base elástica ao longo do eixo central da placa.

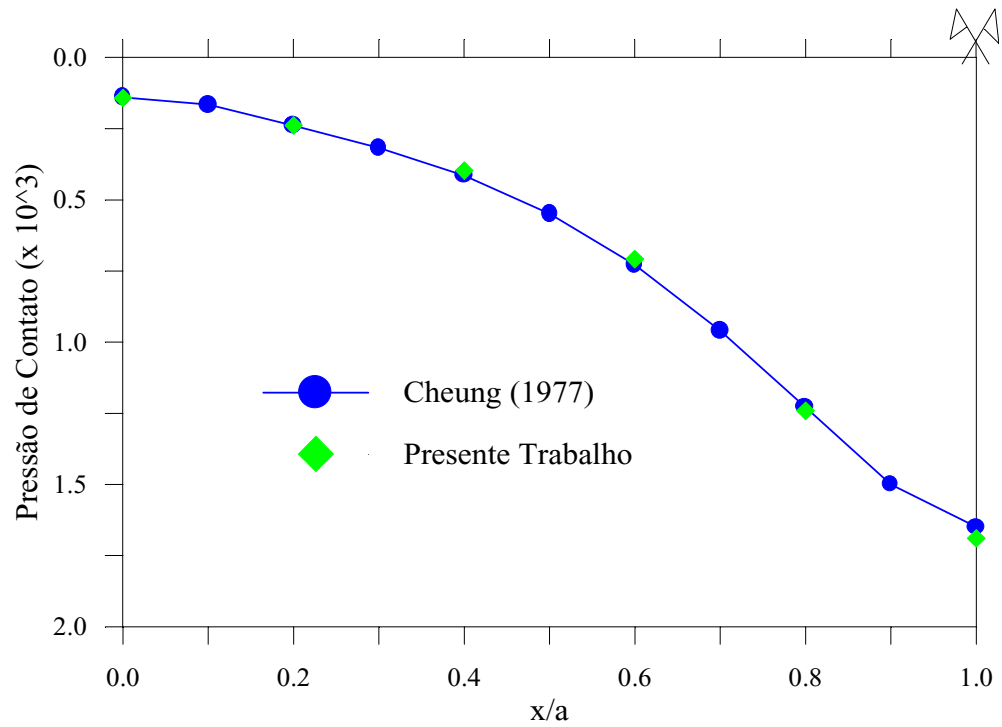


Figura 6.24 – Distribuição da Reação da Base Elástica.

6.4 – PROBLEMA DE CONTATO UNILATERAL

O objetivo desta seção é validar as três formulações apresentadas no Capítulo 4, Seção 4.3, para solução do problema de contato unilateral entre uma placa e uma base elástica, verificando-se, também, a eficiência da técnica de pivoteamento de Lemke utilizada para a solução do problema de complementaridade linear gerado em cada uma das formulações. Nos exemplos apresentados a seguir, o atrito existente entre os dois corpos em contato é desprezado.

6.4.1 – Placa com Momentos Aplicados ao Longo de Dois Bordos

A Figura 6.25 ilustra o primeiro exemplo a ser abordado nesta seção. Refere-se a uma placa apoiada ao longo de dois bordos em contato com uma fundação elástica tipo Winkler que não reage às solicitações de tração. O carregamento atuante nessa placa é representado por momentos fletores de mesma intensidade ($M = 100$), que são aplicados ao longo de dois bordos paralelos. Observa-se que essa forma de carregamento contribui para o surgimento de uma região de contato e de uma região de perda de contato entre a placa e a base elástica. As dimensões da placa são $a = 10$, $b = 0.2$ e $t = 0.4$ (o problema trata-se de uma viga modelada com elementos de placa), o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do material que compõe a placa são, respectivamente 10^6 e 0.0 e, o parâmetro de rigidez elástico K da fundação é igual a 7.168 (base flexível).

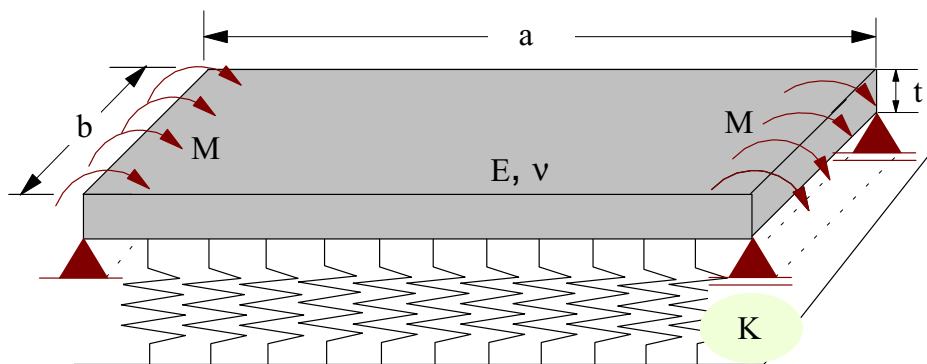


Figura 6.25 – Placa com Momentos Aplicados ao Longo de Dois Bordos.

Na modelagem do sistema estrutural foram utilizados 20 elementos finitos isoparamétricos com oito pontos nodais, onde o campo de deslocamentos em um dado ponto é aproximado por funções quadráticas, utilizando-se todos os pontos nodais do elemento. Porém, a reação da base elástica é aproximada por funções lineares através dos pontos nodais 1, 3, 5 e 7 (ver Figura 2.1). As funções usadas para interpolar a reação da base nesses pontos são:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (6.10a)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (6.10b)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (6.10c)$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (6.10d)$$

A discretização do sistema estrutural é apresentada na Figura 6.26, a seguir.

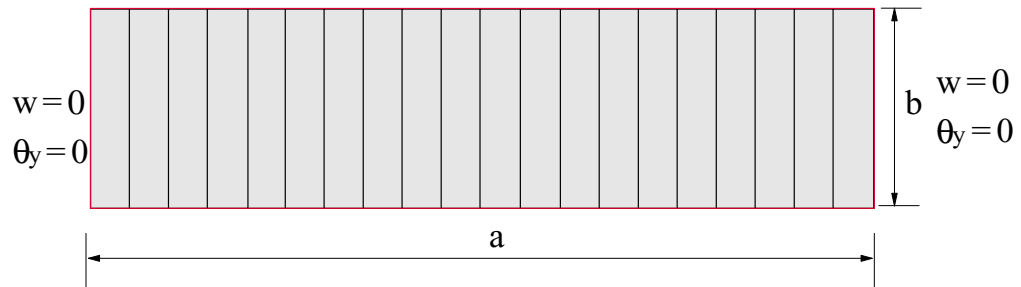


Figura 6.26 – Discretização do Sistema Estrutural.

Para análise da placa é utilizada a teoria de Reissner-Mindlin. Os resultados obtidos nesta análise são mostrados nas Figuras 6.27 e 6.28, onde se comparam as soluções numéricas obtidas através da utilização das Formulações 1, 2 e 3 com a solução modal (formulação semi-analítica) obtida por Silveira e Gonçalves (1993).

As Figuras 6.27 e 6.28 apresentam o comportamento do eixo central da placa, mostrando, respectivamente, a variação da deflexão lateral e a reação da base elástica ao longo desse eixo.

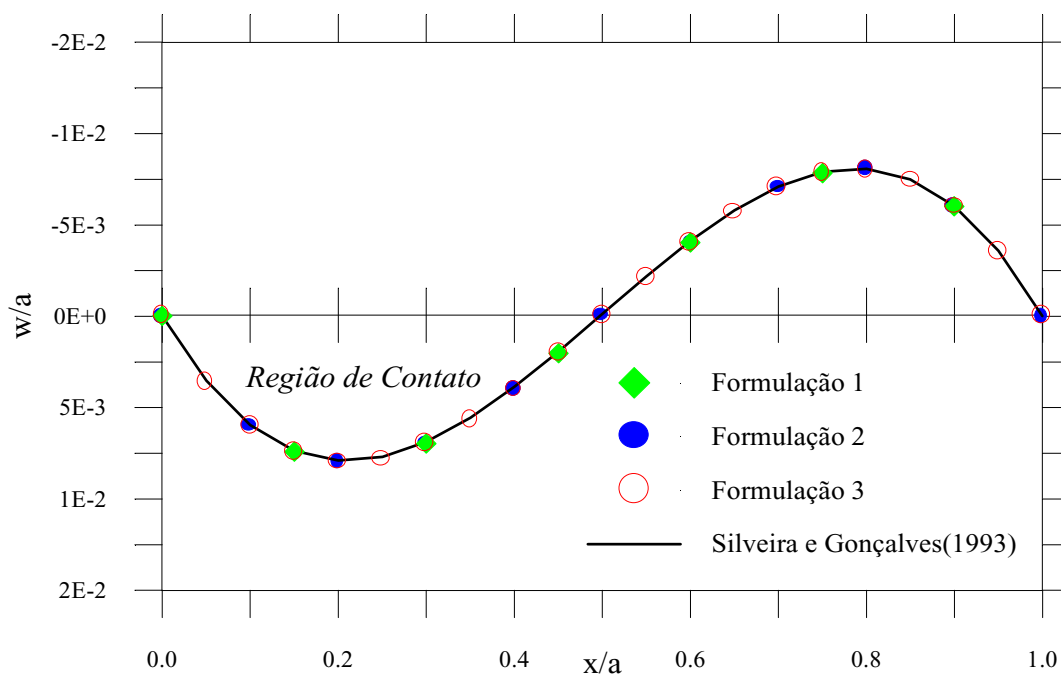


Figura 6.27 – Deflexão Lateral da Placa.

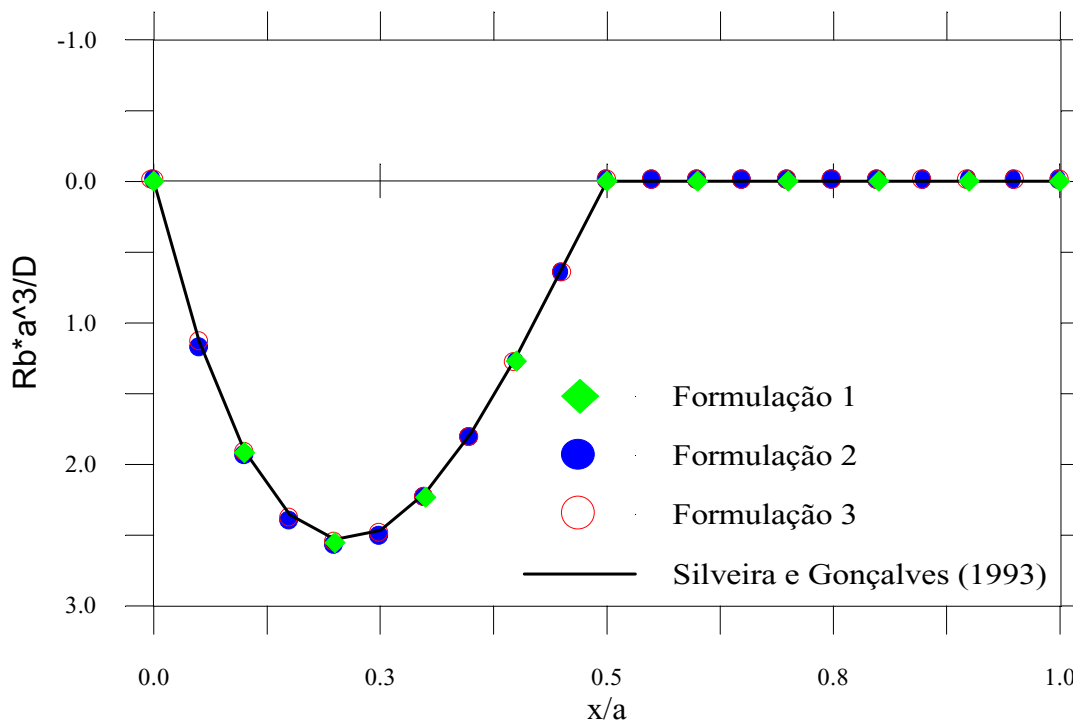


Figura 6.28 – Reação da Base Elástica.

O tempo necessário para execução do problema de contato, utilizando-se cada uma das formulações desenvolvidas no Capítulo 4, é mostrado na Tabela 6.12. Observa-se que o tempo necessário para solução do problema com restrições unilaterais de contato quando se utiliza a Formulação Primal (1) é superior aos demais. Uma razão para isso está na ordem das matrizes e vetores usados nessa formulação. Foi utilizado um processador Pentium 100.

Tabela 6.12 – Tempo de Execução do Problema de Contato.

	<i>Formulação 1</i>	<i>Formulação 2</i>	<i>Formulação 3</i>
<i>Tempo (segundos)</i>	172.40	19.11	5.39

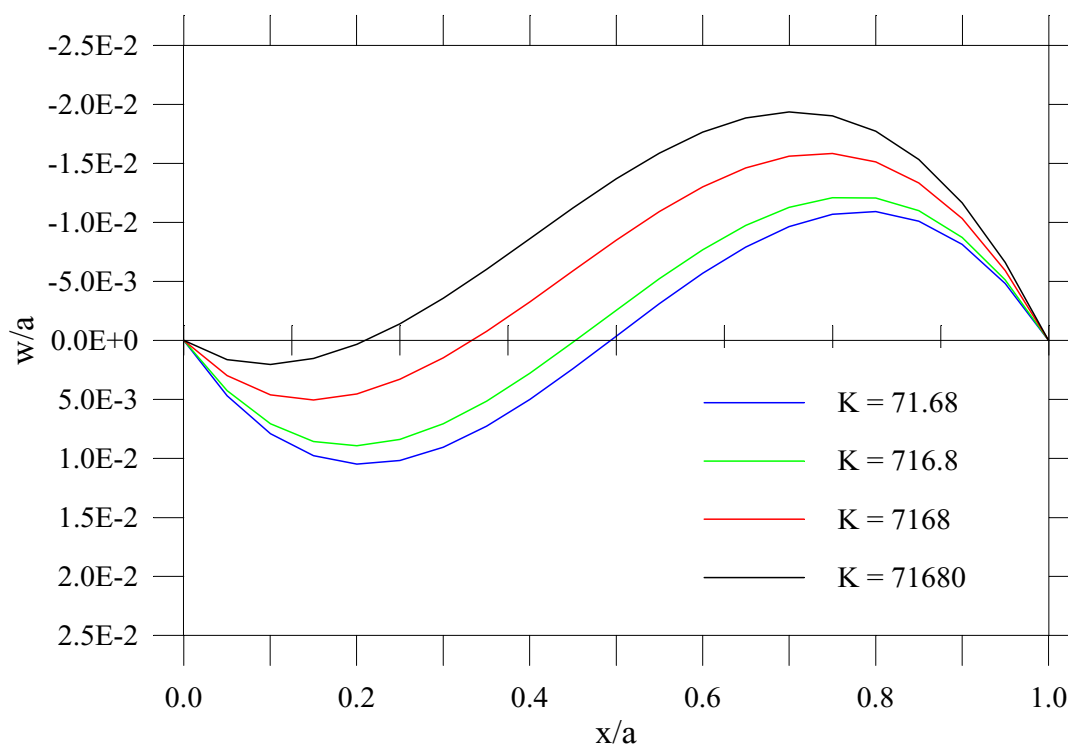


Figura 6.29 – Comportamento da Deflexão da Placa com a Variação do Parâmetro de Rigidez da Base Elástica.

Para finalizar este exemplo, é feita uma análise da influência do parâmetro de rigidez (K) da base elástica no comportamento da placa. Os resultados obtidos, através da Formulação 2, são mostrados na Figura 6.29, apresentada anteriormente, para os seguintes

valores de K : 71.68, 716.8, 7168 e 71680. Nota-se que a região de contato (deslocamentos positivos) entre os corpos diminui com o aumento do parâmetro de rigidez da base.

A Figura 6.30 mostra, para o caso de uma base semi-rígida ($K = 7168$), a deflexão lateral ao longo do eixo central da placa para os casos de contato unilateral, contato bilateral e sem fundação. Nos dois últimos casos, observa-se, como esperado, um comportamento anti-simétrico da placa.

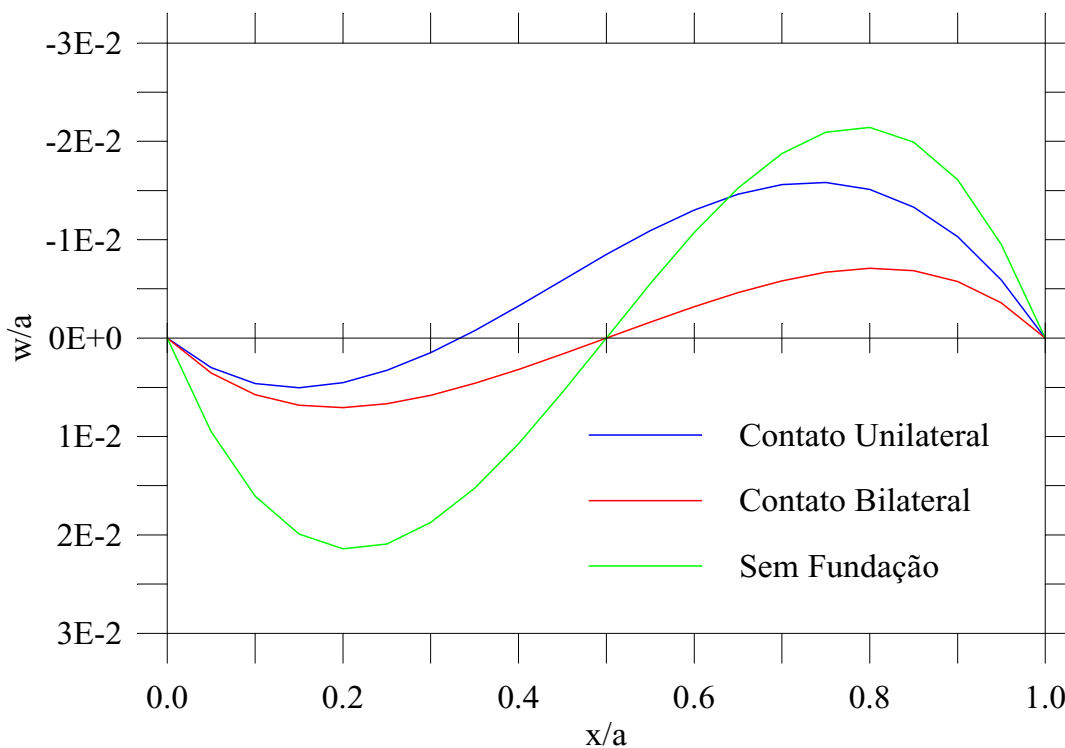


Figura 6.30 – Deflexão da Placa ($K = 7168$).

6.4.2 – Placa Contínua Apoiada em Uma Direção

Um outro exemplo de validação é apresentado na Figura 6.31. Observa-se, como no exemplo anterior, que as condições de contorno da placa e a forma do carregamento atuante contribuem para a geração de uma região de contato e de uma região de perda de contato. Neste exemplo, a base elástica é modelada segundo Winkler e o contato entre a placa e a base elástica é considerado como unilateral.

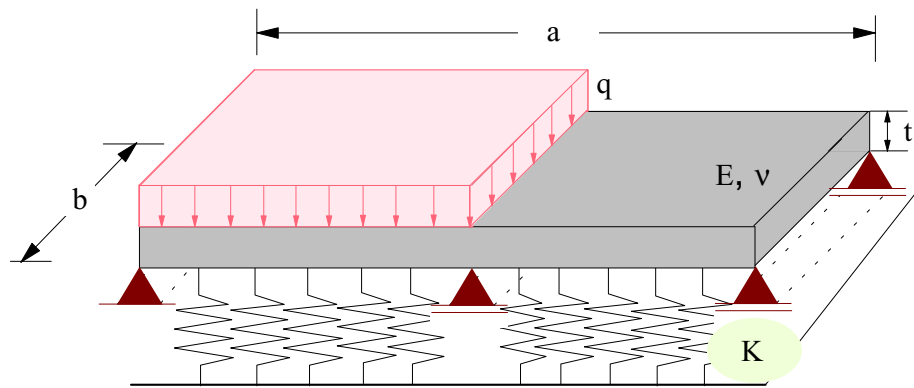


Figura 6.31 – Placa Contínua Apoiada em Uma Direção.

As dimensões da placa são $a = 10$, $b = 0.2$ e $t = 0.4$ (o problema trata-se de uma viga modelada com elementos de placa), o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do material que compõe a placa são, respectivamente 10^6 e 0.0 e, o parâmetro de rigidez elástico K da fundação é igual a 7.168 (base flexível).

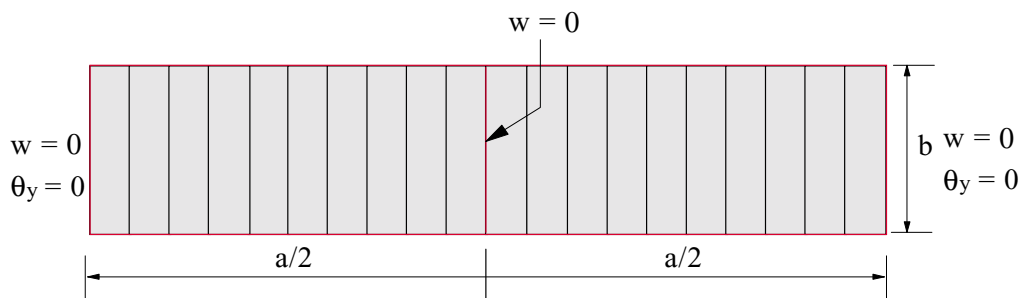


Figura 6.32 – Discretização por Elementos Finitos.

Na discretização do sistema estrutural (placa e base elástica) foram utilizados 20 elementos isoparamétricos com oito nós. A reação da base elástica é interpolada usando-se apenas os pontos nodais do canto do elemento, como no exemplo anterior. A Figura 6.32, apresentada anteriormente, ilustra a discretização do sistema estrutural e as condições de contorno aplicadas ao modelo para este exemplo.

Os resultados obtidos na análise desse problema são mostrados nas Figuras 6.33 e 6.34, onde se compara a solução numérica obtida com as Formulações 1, 2 e 3 com a solução numérica obtida por Silveira e Gonçalves (1994). Nas Figuras 6.33 e 6.34 são apresentados, respectivamente, o comportamento da deflexão lateral e a reação exercida pela base elástica ao longo do eixo central da placa.

Novamente, pode-se verificar, através da Tabela 6.13, uma equivalência, com relação ao tempo computacional usando um processador Pentium 100, entre as Formulações 2 e 3 e uma superioridade dessas em relação à Formulação 1.

Tabela 6.13 – Tempo de Execução do Problema de Contato.

	<i>Formulação 1</i>	<i>Formulação 2</i>	<i>Formulação 3</i>
<i>Tempo (segundos)</i>	183.20	19.50	5.44

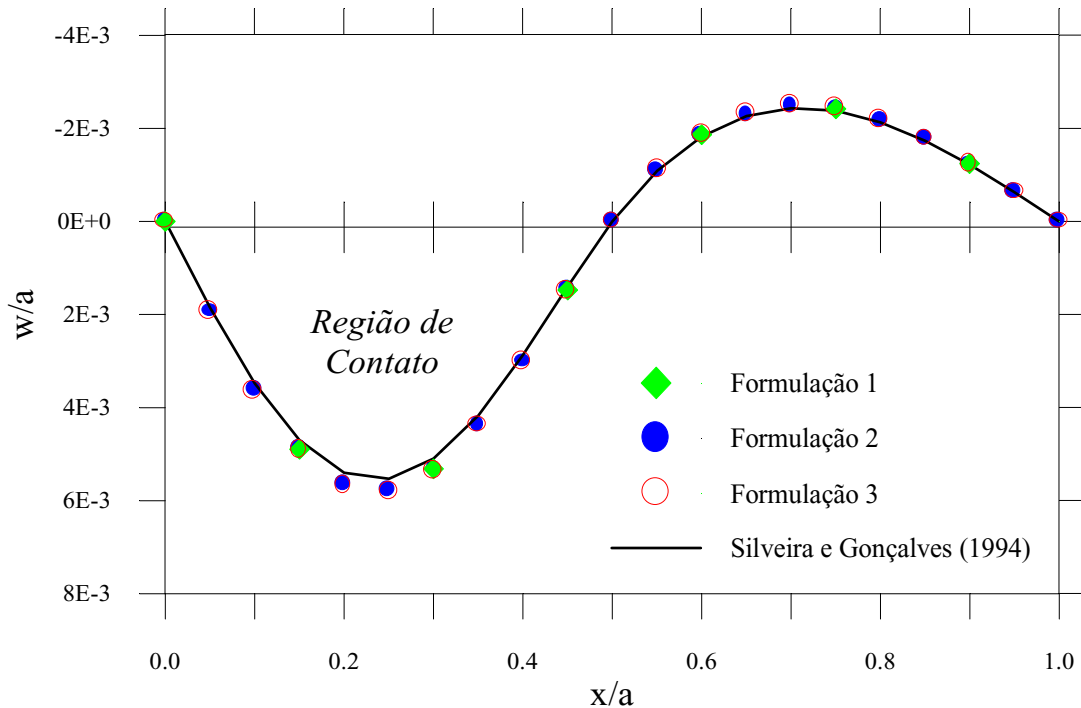


Figura 6.33 – Deflexão Lateral da Placa.

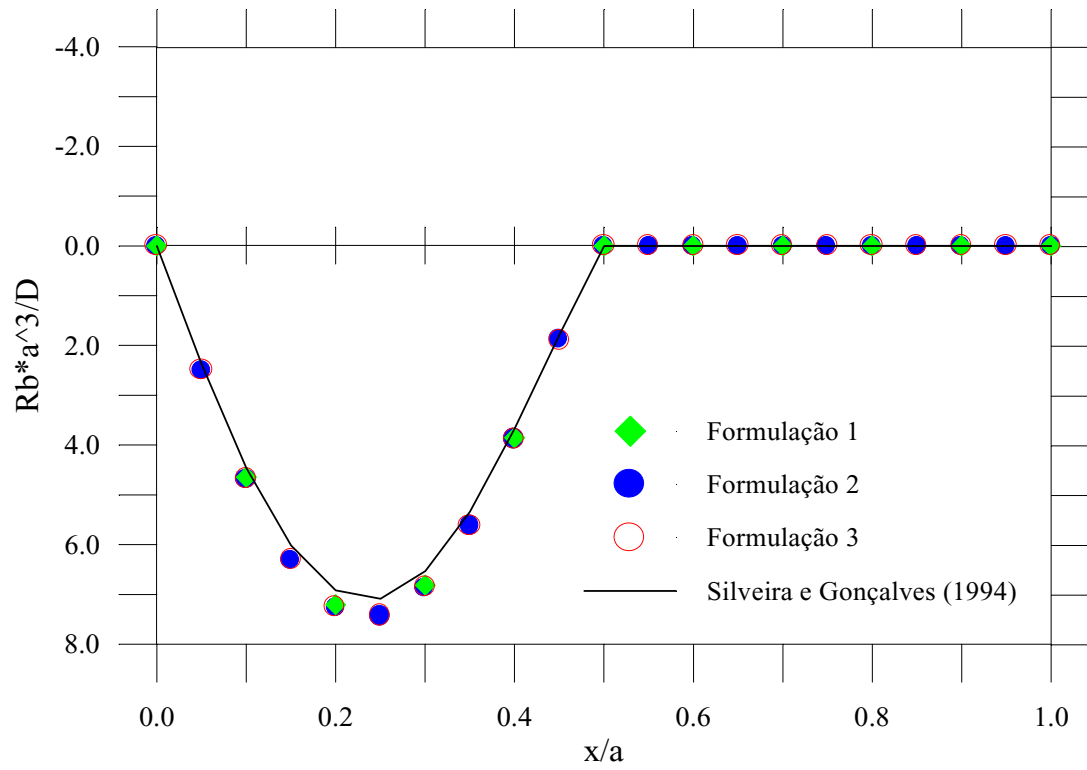


Figura 6.34 – Reação da Base Elástica.

6.4.3 – Placa Delgada sobre um Semi-Espaço Infinito

A Figura 6.35 ilustra o próximo problema a ser resolvido como teste das formulações desenvolvidas no Capítulo 4 para solução do problema de contato unilateral. Trata-se de uma placa, quadrada e delgada, em contato unilateral, sem atrito, com um semi-espaço infinito. A análise da placa é feita, neste exemplo, utilizando-se a teoria de Kirchhoff, na qual se adota o elemento retangular com quatro pontos nodais para a sua discretização.

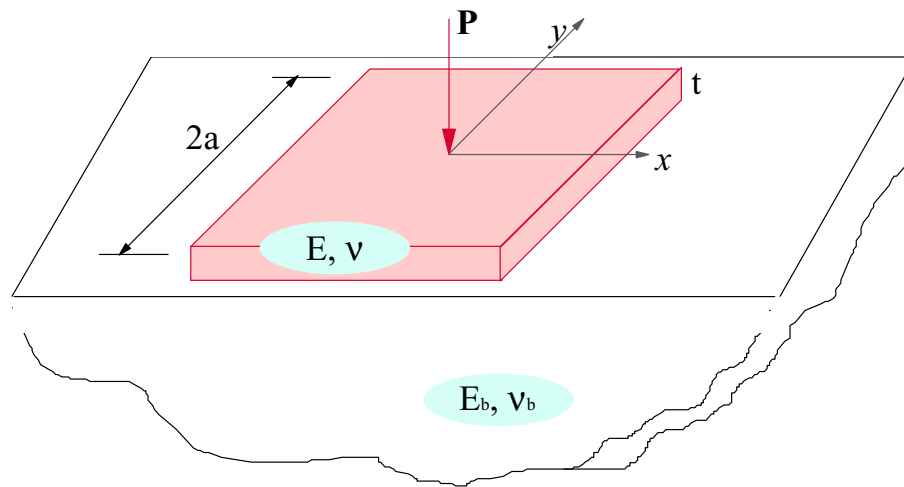


Figura 6.35 – Placa Delgada sobre um Semi-Espaço Infinito.

Nos resultados apresentados a seguir, é utilizado um parâmetro de rigidez relativo entre a placa e o semi-espaço infinito

$$\gamma = \frac{\pi E_b a^3}{D(1 - \nu_b^2)} \quad (6.11)$$

definido por Gorbunov-Possadov e Serebrjanyi (1961). Segundo esses autores, a placa pode ser considerada rígida quando o valor do parâmetro satisfizer $\gamma \leq 8$ (no caso da placa quadrada). Esses autores definem, também, o deslocamento para uma placa quadrada rígida como

$$w_r = \frac{0.913(1 - \nu_b^2)P}{2aE_b} \quad (6.12)$$

na qual P é a magnitude do carregamento vertical total.

Neste exemplo, o sistema estrutural é modelado utilizando-se 36 elementos, como mostra a Figura 6.36. Apenas $\frac{1}{4}$ do sistema é utilizado para a discretização.

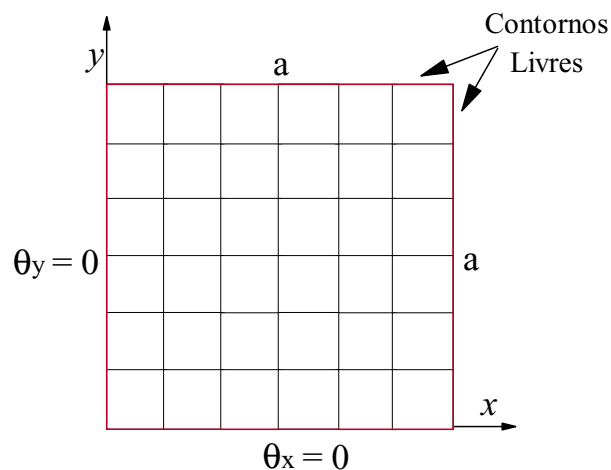


Figura 6.36 – Discretização do Sistema Estrutural.

Os coeficientes de Poisson, tanto para o material da placa quanto para o material que compõe a fundação elástica, são tomados como 0.15.

Primeiramente, a placa é sujeita a uma carga uniformemente distribuída q . O problema de contato é resolvido utilizando-se a Formulação 1. Os resultados numéricos obtidos são apresentados nas Figuras 6.37 e 6.38 e na Tabela 6.14, que mostram, respectivamente, a distribuição da deflexão lateral, a distribuição da pressão de contato ao longo do eixo x e o momento M_x atuante no centro da placa. Esses resultados são comparados com aqueles encontrados por Hu e Hartley (1994), utilizando o Método dos Elementos de Contorno.

A deflexão ao longo do eixo central da placa é apresentada na Figura 6.37 para vários valores do parâmetro γ . Observa-se que a deflexão aproxima-se de uma linha reta para valores de γ menores que 8, correspondendo ao caso de uma placa rígida.

A Figura 6.38 ilustra a distribuição da pressão de contato ao longo do eixo central da placa para a mesma variação do parâmetro de rigidez γ , onde P_0 é a carga vertical total sobre a

placa, dada por $4a^2q$. Em todos os casos, verifica-se que a placa é mantida totalmente em contato com a fundação.

Tabela 6.14 – Momento M_x no Centro da Placa – Carga Distribuída.

Valores de γ	Trabalhos	M_x/P_o
3.016	Presente Trabalho	0.0221
	Hu e Hartley (1994)	0.0215
30.16	Presente Trabalho	0.0147
	Hu e Hartley (1994)	0.0143
3016	Presente Trabalho	0.0002
	Hu e Hartley (1994)	0.0002

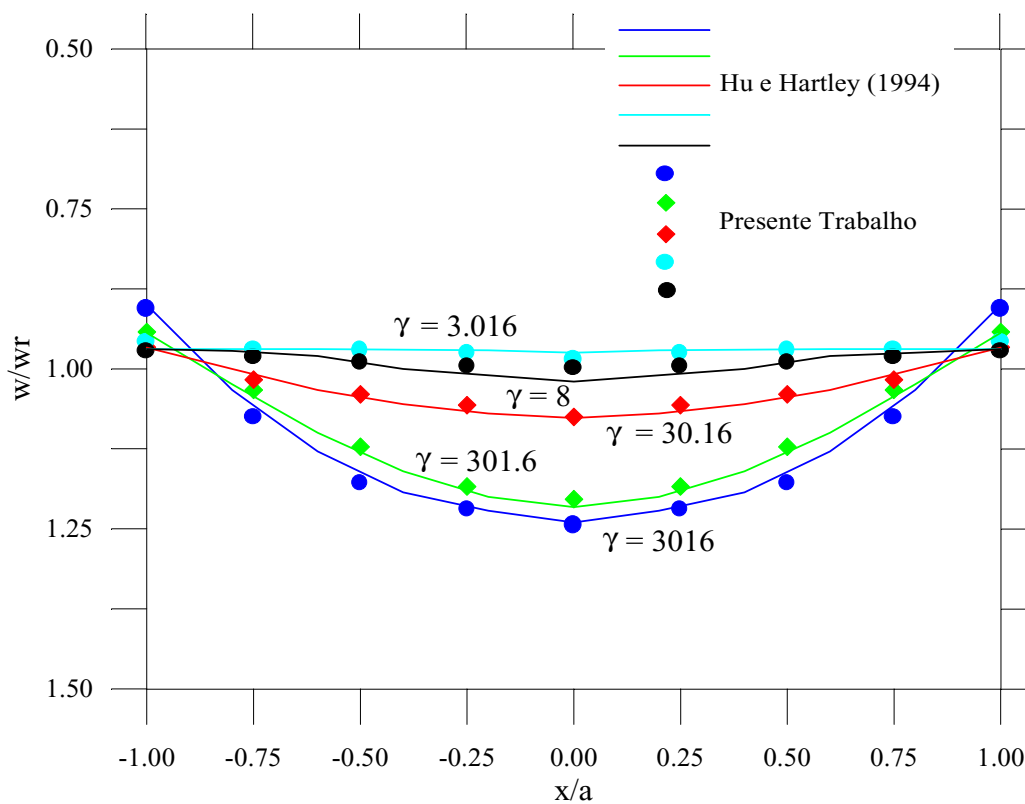


Figura 6.37 – Deflexão da Placa Submetida a uma Carga Uniformemente Distribuída.

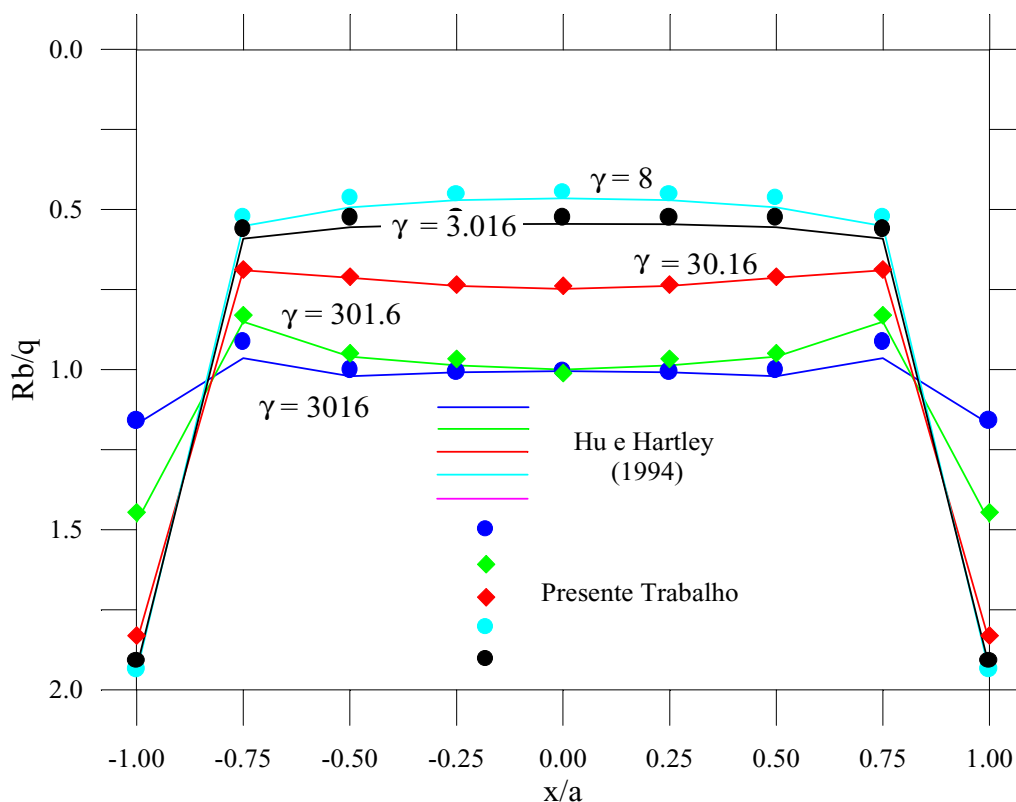


Figura 6.38 – Reação Exercida pela Base Elástica – Carga Distribuída.

Nas Figuras 6.39 e 6.40 e na Tabela 6.15 são fornecidos os resultados obtidos para a deflexão lateral, reação exercida pela base elástica e o momento M_y atuante no eixo x , mas no bordo da placa, considerando, agora, uma carga concentrada atuando no centro. A mesma modelagem para o sistema estrutural é utilizada.

Os resultados apresentados são referentes ao eixo central da placa, para valores do parâmetro de rigidez relativo γ variando de 0.03 a 3016. Esses resultados são, também, comparados com a solução numérica obtida por Hu e Hartley (1994).

Observa-se, na Figura 6.39, que o valor de $\gamma = 0.03$ representa o caso de uma placa praticamente rígida. Na Figura 6.40, pode-se verificar que, quando o parâmetro γ se aproxima de 300, a placa perde contato nos bordos com a fundação e a pressão de contato sob a área central da placa aumenta substancialmente.

Nas Figuras 6.41 e 6.42 pode-se ver as regiões de contato (reação nula) para o caso de $\gamma = 3016$ e $\gamma = 301.6$, respectivamente.

Tabela 6.15 – Momento M_y Atuante no Bordo da Placa (Eixo x) – Carga Concentrada.

Valores de γ	Trabalhos	M_y/P
3.016	Presente Trabalho	0.073
	Hu e Hartley (1994)	0.075
30.16	Presente Trabalho	0.042
	Hu e Hartley (1994)	0.043
3016	Presente Trabalho	0.012
	Hu e Hartley (1994)	0.012

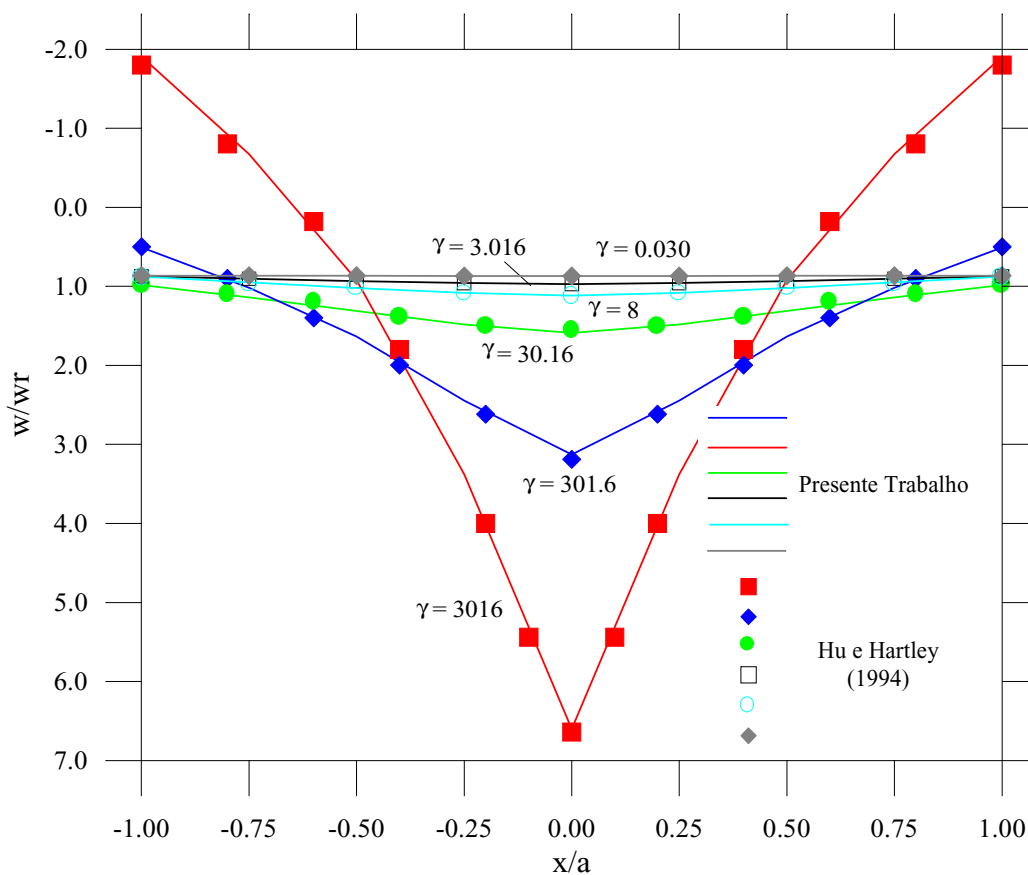


Figura 6.39 – Deflexão da Placa Submetida a uma Carga Concentrada.

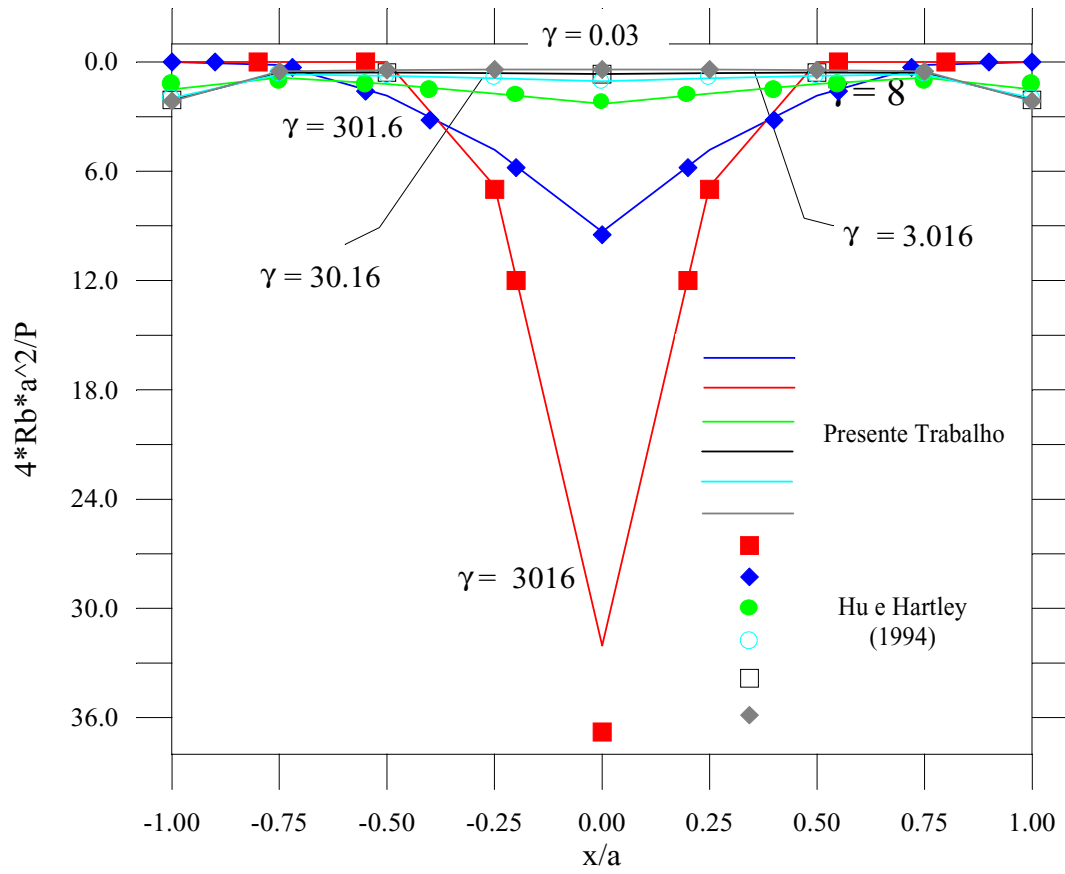


Figura 6.40 – Reação Exercida pela Base Elástica – Carga Concentrada.

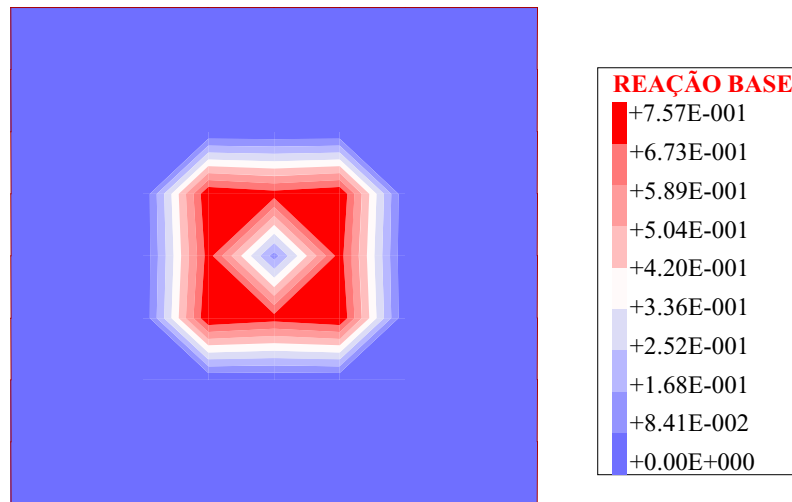


Figura 6.41 – Região de Contato ($\gamma = 3016$).

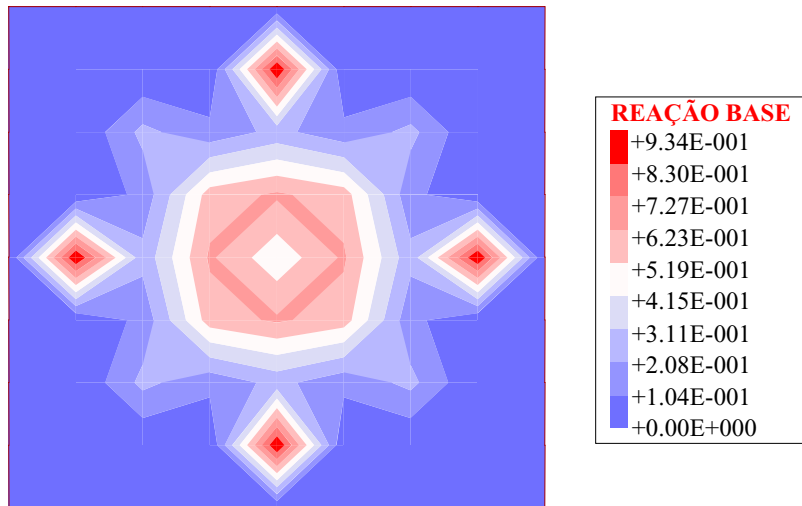


Figura 6.42 – Região de Contato ($\gamma = 301.6$).

6.4.4 – Placa Quadrada em Contato com uma Fundação Tipo Winkler

A Figura 6.43 ilustra o último exemplo a ser apresentado neste capítulo. Trata-se de uma placa quadrada, com seção transversal uniforme, de rigidez à flexão D e em contato unilateral com uma fundação modelada segundo Winkler que apresenta parâmetro de rigidez elástico K .

Considera-se a placa submetida a uma carga concentrada atuando na posição (X_p, Y_p) .

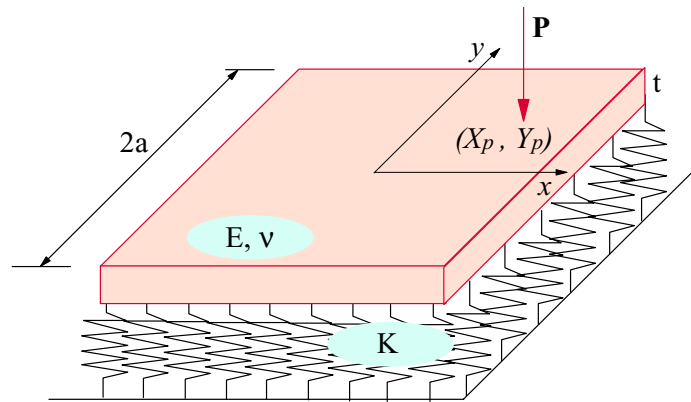


Figura 6.43 – Placa Quadrada em Contato com uma Base Tipo Winkler.

As seguintes relações adimensionais são usadas neste exemplo:

$$k = \frac{Ka^4}{D} \quad (6.13)$$

$$p = \frac{Pa}{D} \quad (6.14)$$

$$x_p = \frac{X_p}{a} \quad (6.15)$$

$$y_p = \frac{Y_p}{a} \quad (6.16)$$

Os resultados encontrados foram obtidos através da Formulação 1 e a discretização do sistema estrutural (metade do sistema, apenas) apresentada na Figura 6.44. Foram usados, na análise, 50 elementos isoparamétricos com oito pontos nodais e a teoria de Mindlin. Essa figura mostra, ainda, as condições de contorno adotadas para tornar o modelo compatível.

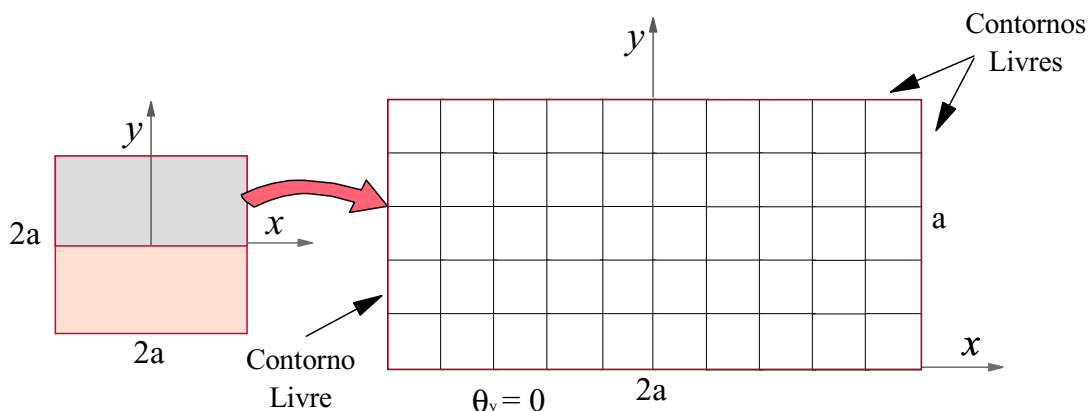


Figura 6.44 – Modelagem do Sistema Estrutural.

Os resultados obtidos neste exemplo são comparados com aqueles obtidos por Celep (1988), que encontrou uma solução semi-analítica para o problema utilizando o método de Galerkin. Como os dados fornecidos por esse autor eram insuficientes para a análise do problema, alguns valores foram estipulados e, por isso, os resultados aqui obtidos apresentaram uma pequena diferença.

Todavia, adota-se, como Celep (1988), $k = 1000$ e $\nu = 0.25$ e, ainda, $E = 10$, $t = 0.018$ e $2a = 1.0$.

A Figura 6.45 mostra as curvas que separam as regiões de contato e de perda de contato entre a placa e a base elástica considerando a carga atuando em várias posições ao longo do eixo x ($y_p = 0.0$). A Figura 6.46 ilustra a deflexão lateral da placa ao longo desse mesmo eixo para a carga nas mesmas posições. Observa-se que, quando a carga atua no centro da placa, a curva de contato aproxima-se de um círculo, tendo raio adimensional de, aproximadamente, 0.484 que coincide com o resultado encontrado por Celep (1988) e, também, por Akbarov e Kocatürk (1997).

Como se observa, a curva de contato sofre uma translação quando a carga se move ao longo do eixo x . Entretanto, quando a carga se aproxima dos bordos da placa, a curva perde a forma circular e a área da região de contato diminui. Conseqüentemente, os deslocamentos aumentam muito rapidamente, como ilustra a Figura 6.46, para a carga, por exemplo, na posição $x_p = 0.9$. Essa é uma das características das fundações que reagem apenas aos esforços de compressão. Para as fundações que reagem, também, aos esforços de tração, os deslocamentos são relativamente menores.

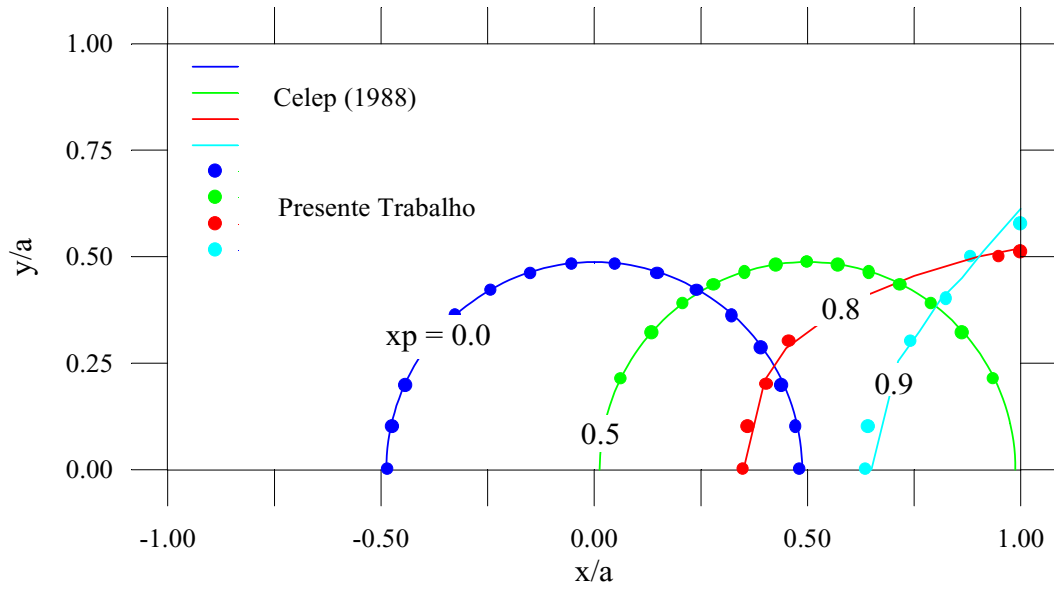


Figura 6.45 – Curvas de Contato.

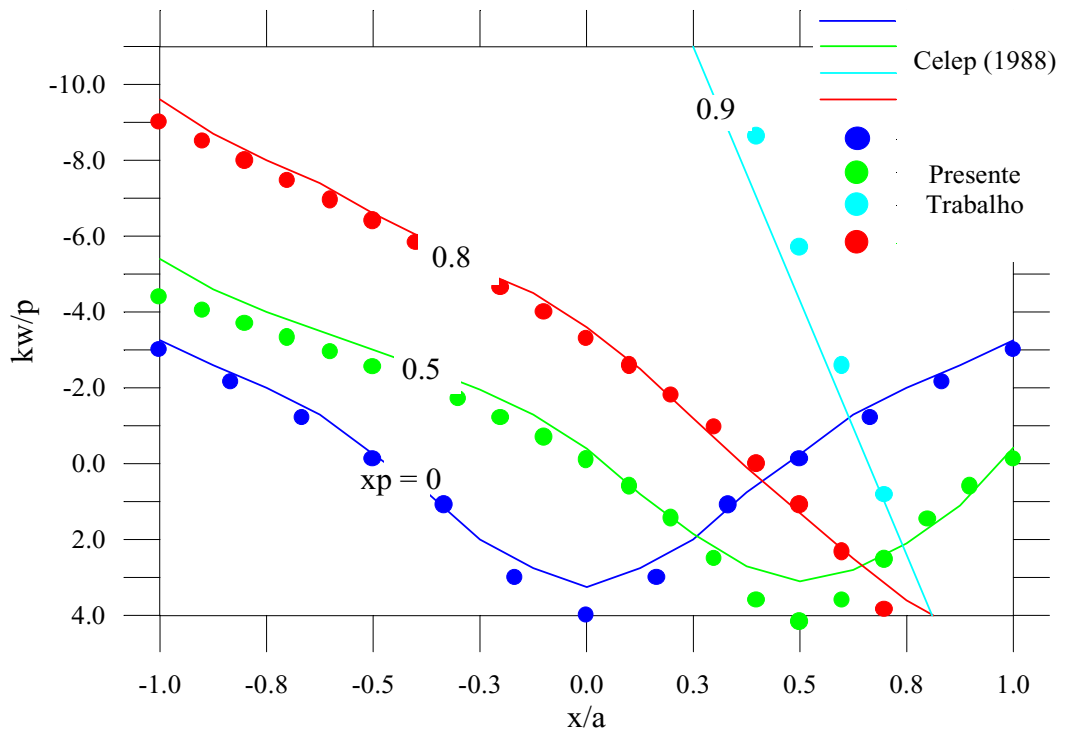


Figura 6.46 – Deflexão ao Longo do Eixo Central da Placa.

As Figuras 6.47a,b,c,d mostram, respectivamente, o deslocamento da fundação para a carga atuando no eixo x (ou seja, $y_p = 0.0$) nas posições $x_p = 0.0$, $x_p = 0.5$, $x_p = 0.8$ e $x_p = 0.9$. Essas figuras estão em escala exagerada para melhor visualização.

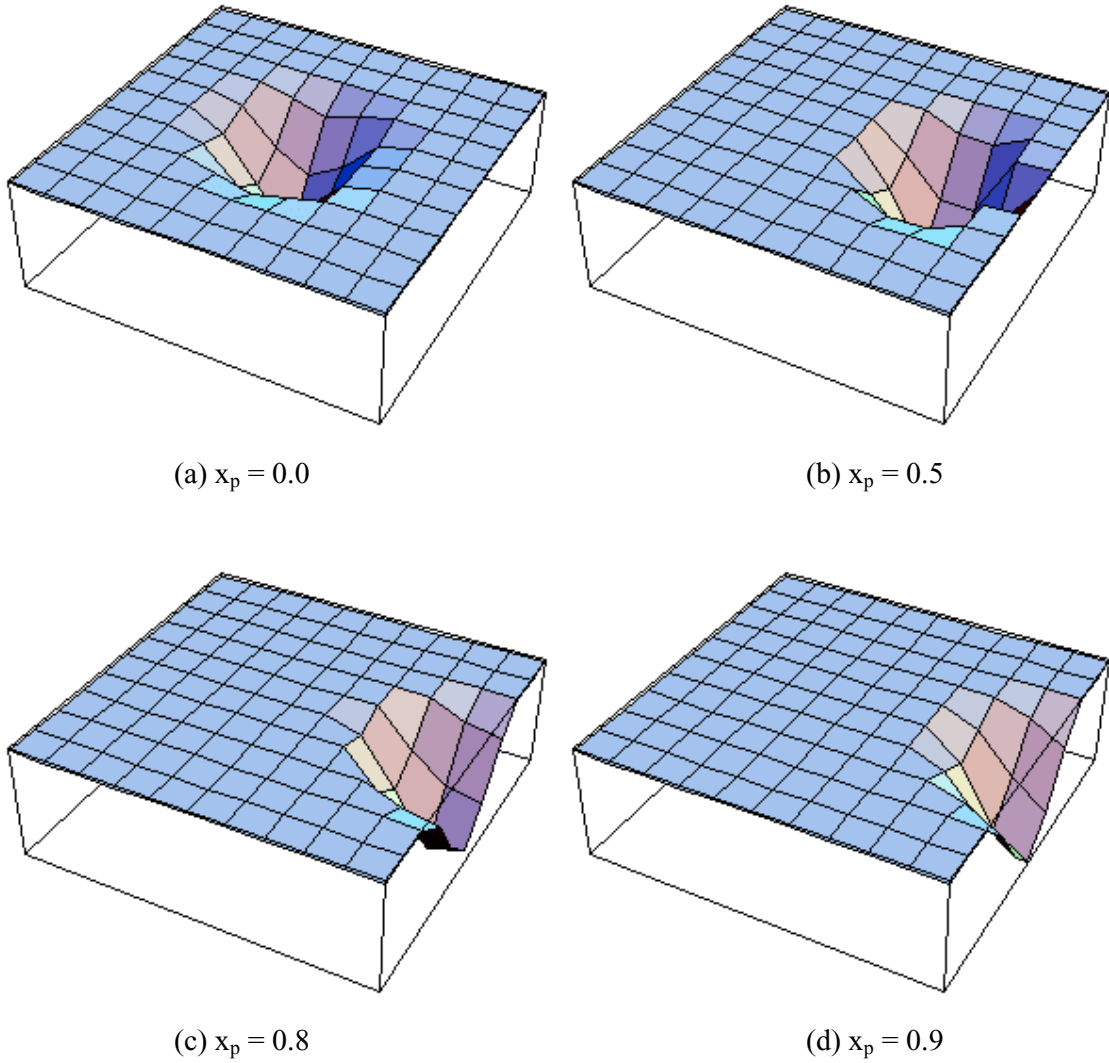


Figura 6.47 – Deslocamento da Fundação Elástica.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 – CONCLUSÕES

Neste trabalho, estudou-se a análise do equilíbrio de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato. Os exemplos analisados no capítulo anterior validam a metodologia de solução numérica proposta que era o principal objetivo do trabalho. A metodologia tem como características principais o emprego do Método dos Elementos Finitos na discretização do sistema estrutural e a utilização de técnicas de programação matemática para resolver o problema de contato unilateral.

O problema de contato unilateral foi resolvido utilizando-se três diferentes formulações matemáticas. Essas formulações caracterizam-se por fornecerem, como resultado, um problema linear complementar (PCL) cuja solução é obtida empregando-se técnicas de programação matemática. A utilização de técnicas de programação matemática é a forma mais natural de tratamento das restrições unilaterais, onde técnicas de otimização permitem que o problema de contato seja tratado diretamente como um problema de minimização envolvendo o funcional de energia e as variáveis originais do problema submetidas a restrições de desigualdade. Neste trabalho, a técnica de otimização utilizada foi o algoritmo de Lemke.

Três formulações foram apresentadas: uma formulação mista, que apresentava como incógnitas o deslocamento da estrutura e a reação da base elástica; uma formulação cuja incógnita era a reação da fundação e uma terceira formulação, desenvolvida apenas em termos dos deslocamentos da estrutura e da base elástica.

Na Seção 6.4 foi comprovado que a Formulação 2 (*Flexível*) e a Formulação 3 (*Compatível*) são mais eficientes, com relação ao tempo computacional, na solução do problema de contato unilateral que a Formulação 1 (*Mista*). Isso pôde ser verificado através

do tempo levado pelas formulações para resolver o problema de contato, ou seja, tempo gasto na alocação e montagem das matrizes utilizadas no algoritmo de Lemke, no emprego desse algoritmo e no cálculo de resultados secundários.

Nos exemplos das Seções 6.4.3 e 6.4.4, apenas a Formulação 1 foi utilizada. A Formulação 2 não pôde ser empregada porque, nesses casos, a matriz de rigidez não era positiva definida e, a Formulação 3 só apresentou resultados satisfatórios para problemas no qual a matriz de rigidez era positiva definida.

Das análises com restrições unilaterais feitas no Capítulo 6, pôde-se verificar a eficiência do algoritmo de Lemke na solução dos problemas de complementaridade linear. Em cada problema, a solução obtida por esse algoritmo sempre indicava que:

- (i) havia uma região de contato, ou seja, a solução viável básica complementar do problema aumentado, após as operações de pivoteamento, era igual à solução viável complementar do problema original; ou
- (ii) o ponto $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (\mathbf{q}, \mathbf{0})$ era solução trivial do PCL original, ou que não existia solução para o problema.

7.2 – SUGESTÕES

Algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Utilizar na análise do problema de contato unilateral uma base elástica modelada com dois parâmetros (Vlasov, Pasternak, entre outras);
- Implementar outros elementos finitos de placas, tais como elementos triangulares e elementos quadrilaterais com nove pontos nodais;
- Para o problema de placas em contato com um semi-espaço infinito, desenvolver a formulação proposta por Svec e Gladwell (1972), que tem como características o uso de um elemento finito triangular (possibilidade de modelar placas circulares) e a consideração de uma pressão contínua em cada elemento finito;
- Consideração, na análise, das não-linearidades geométrica e física. Dentro dessa linha, atualmente está sendo desenvolvido um trabalho na PUC-Rio cujo objetivo é estudar a instabilidade de placas apoiadas em uma base elástica sujeitas a restrições unilaterais de contato (Holanda, 1997). Nos problemas de contato analisados neste trabalho, a placa era

sujeita às restrições de contato desde o início do carregamento. Com a consideração de grandes deslocamentos (não-linearidade geométrica), casos onde as restrições são impostas quando a estrutura já está em processo de flambagem podem ser analisados com precisão;

- Implementar e testar outras técnicas de solução para o problema de complementaridade linear, como por exemplo, o algoritmo de Dantzig (Cottle e Dantzig, 1968), devido à necessidade de se efetuar uma parametrização das grandezas envolvidas para se utilizar o algoritmo de Lemke;

- Este trabalho é uma extensão do trabalho feito por Silveira (1995) para análise de elementos estruturais unidimensionais com restrições unilaterais de contato. Propõe-se, então, estender a formulação, proposta no presente trabalho, para análise, agora, de cascas cilíndricas com restrições unilaterais de contato;

- Implementar soluções semi-analíticas utilizando-se o método de Galerkin para, por exemplo, validar futuras implementações numéricas. O caso de uma placa circular submetida a uma carga concentrada em contato unilateral com um semi-espaço infinito é um bom exemplo;

- Considerar, utilizando as mesmas formulações, a placa anisotrópica, permitindo, assim, a análise de placas fabricadas por compósitos;

- Dar continuidade ao estudo de placas com restrições unilaterais de contato através de análises experimentais.

Referências Bibliográficas

Akbarov, S. D. e Kocatürk, T., “On the Bending Problems of Anisotropic (Orthotropic) Plates Resting on Elastic Foundations that React in Compression Only”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 34, pp. 3673-3689, 1997.

Arora, J. S., *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, Inc., 1989.

Ascione, L. e Grimaldi, A., “Unilateral Contact Between a Plate and an Elastic Foundation”, *Meccanica*, Vol. 19, pp. 223-233, 1984.

Ascione, L. e Olivito, R. S., “Unbonded Contact of a Mindlin Plate on an Elastic Half-Space”, *Meccanica*, Vol. 20, pp. 49-58, 1985.

Barbosa, H. J. C., “Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade”, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1986.

Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.

Bathe, K. J. e Chaudhary, A., “A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 21, pp. 65-88, 1985.

Bazaraa, M. S. e Shetty, C. M., *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

Björkman, G., Klarbring, A., Sjödin, B., Larsson, T. e Rönnqvist, M., “Sequential Quadratic Programming for Non-Linear Elastic Contact Problems”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 38, pp. 137-165, 1995.

Chand, R., Haug, E. J. e Rim, K., “Analysis of Unbonded Contact Problems by Means of Quadratic Programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 20, pp 171-189, 1976.

Celep, Z., “Rectangular Plates Resting on Tensionless Elastic Foundation”, *Journal of Eng. Mech.*, Vol. 114, pp. 2083-2092, 1988.

Celep, Z., Turhan, D. e Al-Zaid, R., Z., “Contact Between a Circular Plate and a Tensionless Edge Support”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol 30, pp. 733-741, 1988.

Cheung, M. S., “A Simplified Finite Element Solution for the Plates on Elastic Foundation”, *Computers & Structures*, Vol. 8, pp. 139-145, 1978.

Cheung, Y. K. e Nag, D. K., “Plates and Beams on Elastic Foundations – Linear and Non-Linear Behavior”, *Geotechnique*, Vol. 18, pp. 250-260, 1968.

Cheung, Y. K., “Beams, Slabs, and Pavements”, In *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, ed. by C. S. Desai and J. T. Christian, McGraw-Hill, New York, Cap. 5, pp. 176-210, 1977.

Cheung, Y., K. e Zienkiewicz, O. C., “Plates and Tanks on Elastic Foundations – An Application of Finite Element Method”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 1, pp 451-461, 1965.

Conry, T. F. e Seirg, A., “A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 387-392, 1971.

Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 1989.

Cottle, R. W. e Dantzig, G. B., “Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming”, *Linear Algebra Appl.*, Vol. 1, pp. 103-125, 1968.

Dym, C. L. e Shames, I. H., *Solid Mechanics — A Variational Approach*, McGraw-Hill, 1985.

Eboli, C. R., “Dimensionamento Ótimo de Seções de Concreto Armado”, Dissertação de Mestrado, DEC - PUC/Rio, 1989.

El-Bayoumy, L., “Buckling of a Circular Elastic Ring Confined to a Uniformly Contracting Circular Boundary”, *Journal of Applied Mecchanics*, No. 72-APM-N, pp. 758-766, 1972.

Endo, T., Oden, J. T., Becker, E. B. e Miller, T., “A Numerical Analysis of Contact and Limit-Point Behavior in a Class of Problems of Finite Elastic Deformation”, *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 5, pp. 899-910, 1984.

Ferreira, K. e Roehl, D., “Análise Não-Linear do Problema de Contato Tridimensional baseada no Método da Penalidade”, *Anais do XVIII Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia (XVIII CILAMCE)*, Vol. IV, pp. 1605-1612, 1997.

Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, Vol. 2, John Wiley & Sons, USA, 1981.

Gladwell, G. M. L. e Iyer, K. R. P., “Unbonded Contact between a Circular Plate and an Elastic Half-Space”, *Journal of Elasticity*, Vol. 4, pp.115-130, 1974.

Harr, M. E., Davidson, J. L., Ho, D-M, Pombo, L. E., Ramaswamy, S. V. e Rosner, J. C., “Euler Beams on Two Parameter Foundation Model”, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 95, No. SM4, pp. 933-948, 1969.

Haug, E. J., Chand, R., e Pan, K., “Multibody Elastic Contact Analysis by Means of Quadratic Programming”, *J. Opt. Theory and Appl.*, Vol. 20, No. 2, pp. 171-189, 1976.

Hetényi, M., *Beams on Elastic Foundation*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1946.

Hinton, E. e Owen, D. R. J., *Finite Element Programming*, Academic Press Limited, 1989.

Holanda, A. S., “Instabilidade de Placas sujeitas a Restrições Unilaterais de Contato”, Proposta de Tese de Doutorado, DEC – PUC-Rio, 1997.

Horvath, J. S., “Beam-Column-Analogy Model for Soil-Structures Interaction Analysis”, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 119, No. 2, pp. 358-364, 1993.

Hu, C. e Hartley, G. A., “Analysis of a Thin Plate on an Elastic Half-Space”, *Computers & Structures*, Vol. 52, pp. 227-235, 1994.

Hung, N. D. e Saxcè, G., “Frictionless Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique”, *Computers & Structures*, Vol. 11, pp. 55-67, 1980.

Johnson, A. R. e Quingley, C. J., “Frictionless Geometrically Non-Linear Contact Using Quadratic Programming”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, pp. 127-144, 1989.

Joo, J. W. e Kwak, B. M., “Analysis and Applications of Elasto-Plastic Contact Problems Considering Large Deformation”, *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 6, pp. 953-961, 1986.

Kanto, Y. e Yagawa, G., “A Dynamic Contact Buckling Analysis by the Penalty Finite Element Method”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 29, pp. 755-774, 1990.

Katsikadelis, J. T. e Kallivokas, L. F., “Clamped Plates on Pasternak-Type Elastic Foundation by the Boundary Element Method”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 909-917, 1986.

Kerr, A. D., “Elastic and Viscoelastic Foundation Models”, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 31, pp. 491-498, 1964.

Kerr, A. D., “On the Determination of Foundation Model Parameters”, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 111, No. 11, pp. 1334-1340, 1985.

Kerr, L. M., Dundurs, J. e Tsai, “Problems Involving a Recending Contact Between a Layer and a Half Space”, *Journal of Applied Mechanics*, pp. 1115-1120, 1972.

Lemke, C. E., “On Complementary Pivot Theory”, *Mathematics of Decision Sciences*, Edts. Dantzig, G. B. e Yenott, A. F., pp. 95-114, 1968.

Li, H. e Dempsey, J. P., “Unbonded Contact of a Square Plate on an Elastic Half-Space or an Winkler Foundation”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 430-436, 1988.

Li, F.S. e Kyriakides, S., “On the Response and Stability of Two Concentric, Contacting Rings Under External Pressure”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, No.1, pp. 1-14, 1991.

Luenberger, D. G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1973.

Panagiotopoulos, P. D., “A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact and Friction - Boundary Value Problem in the Theory of Elasticity”, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 44, pp. 421-432, 1975.

Panagiotopoulos, P. D. e Lazaridis, P. P., “Boundary Minimum Principles for the Unilateral Contact Problems”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 23, pp. 1465-1484, 1987.

Pian, T. H. H., Balmer, H. e Bucciarelli, L. L., “Dynamic Buckling of a Circular Ring Constrained in a Rigid Circular Surface”, In *Dynamic Stability of Structures* (Edited by G. Herrmann), pp. 285-297, Pergamon Press, Oxford, 1967.

Rajapakse, R. K. N. D. e Selvadurai, A. P. S., “On the Performance of Mindlin Plate Elements in Modelling Plate-Elastic Medium Interaction: A Comparative Study”, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol. 23, pp. 1229-1244, 1986.

Puttonen, J. e Varpasuo, P., “Boundary Element Analysis of a Plate on Elastic Foundations”, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol. 23, pp. 287-303, 1986.

Ravindran, A., “A Computer Routine for Quadratic and Linear Programming Problems”, *Commun. ACM*, Vol. 15, No. 9, pp. 818-820, 1972.

Ravindran, A. e Lee, H., “Computer Experiments on Quadratic Programming Algorithms”, *Eur. J. Oper. Res.*, Vol. 8, No. 2, pp. 166-174, 1981.

Reklaitis, G. V., Ravindran, A. e Ragsdell, K. M., *Engineering Optimization – Methods and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1983.

Sapountzakis, E. J. e Katsikadelis, J. T., “Unilaterally Supported Plates on Elastic Foundations by the Boundary Element Method”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 580-586, 1992.

Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B., “Análise Não-Linear de Vigas-Coluna em Contato Unilateral com uma Fundação Elástica”, *Anais do XIV Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia (XIV CILAMCE)*, Vol. 1, pp. 410-419, 1993.

Silveira, R. A. M. e Gonçalves, P. B., “Formulações Variacionais para o Problema de Contato Unilateral”, *Anais do XV Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia (XV CILAMCE)*, Vol. 2, pp. 1812-1821, 1994.

Silveira, R. A. M., “Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato”, Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 1995.

Svec, O. J., "The Unbonded Contact Problem of a Plate on the Elastic Half Space", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, pp. 105-113, 1974

Svec, O. J., e Gladwell, G. M. L., "An Explicit Boussinesq Solution for a Polynomial Distribution of Pressure over a Triangular Region", *Journal of Elasticity*, Vol 1, pp. 167-170, 1971

Svec, O. J., e Gladwell, G. M. L., "A Triangular Plate Bending Element for Contact Problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol 9, pp. 435-446, 1973

Svec, O. J. e McNeice, G. M., "Finite Element Analysis of Finite Sized Plates Bonded to an Elastic Half Space", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 1, pp. 265-277, 1972

Tecgraf, "MTOOL – Bidimensional Mesh Tool", PUC-Rio, CENPES/PETROBRÁS, 1993

Tecgraf, "MVIEW – Bidimensional Pos-Processor", PUC-Rio, CENPES/PETROBRÁS, 1993

Timoshenko e Gere, *Teoria da Elasticidade*, Editora Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro-RJ, 1980.

Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, Second Edition, 1970.

Vaz, L. E., "Otimização Sem Restrição e Otimização Com Restrição", Notas de Aula do Curso Introdução à Programação Matemática, DEC - PUC/Rio, 1991.

Vlasov, V. Z. e Leont'ev, N. N., *Beams, Plates, Shells on Elastic Foundation*. Israel Program for Scientific Translations, 1966.

Weitsman, Y., "On the Unbonded Contact between Plates and an Elastic Half-Space", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.36. 198-202, 1969.

Weitsman, Y., "On Foundations that React on Compression Only", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.37. 1019-1030, 1970.

Wolfram, S., *Mathematica a System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1991.

Yang, T. Y., "A Finite Element Analysis of Plates on Two Parameter Foundation Model", *Computers & Structures*, Vol. 2, pp. 593-614, 1972.

Zhaohua, F. e Cook, R. D., "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundation", *Journal of Eng. Mechanics*, Vol. 109, No. 6, pp. 1390-1402, 1983.

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company (UK), Vol. 2, 4^a edição, 1991.