

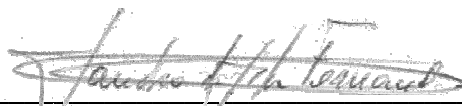
Tese apresentada à Divisão de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência no Curso de Engenharia Aeronáutica e Mecânica, Área de Sistemas Aeroespaciais e Mecatrônica.

Carlos Roberto Silveira Filho

Determinação de Trajetórias Espaciais Ótimas para Sistemas Propulsivos a Baixo Empuxo Utilizando o Método da Variação

Segunda

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Sanjuro da Silva Fernandes
Orientador

Prof. Dr. Homero Santiago Maciel
Chefe da Divisão de Pós-Graduação

Campo Montenegro
São José dos Campos, SP – Brasil
2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Divisão Biblioteca Central do ITA/CTA

Silveira Filho, Carlos Roberto.

Determinação de Trajetórias Espaciais Ótimas para Sistemas Propulsivos a Baixo Empuxo Utilizando o Método da Variação Segunda / Carlos Roberto Silveira Filho.

São José dos Campos, 2005.

278f.

Tese de mestrado – Curso de Engenharia Aeronáutica e Mecânica, Área de Sistemas Aeroespaciais e Mecatrônica.

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2005. Orientador: Sandro da Silva Fernandes D.C.

1. Otimização. 2. Controle Ótimo. 3. Transferências espaciais. I. Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Ensino Fundamental. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVEIRA FILHO, Carlos Roberto. **Determinação de Trajetórias Espaciais Ótimas para Sistemas Propulsivos a Baixo Empuxo Utilizando o Método da Variação Segunda.** 2005. 278f. Tese de mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Carlos Roberto Silveira Filho

TÍTULO DO TRABALHO: Determinação de Trajetórias Espaciais Ótimas para Sistemas Propulsivos a Baixo Empuxo Utilizando o Método da Variação Segunda

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2005.

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Carlos Roberto Silveira Filho

Rua Engenheiro João Fonseca dos Santos, 123 ap. 141. São José dos Campos – SP.

Determinação de Trajetórias Espaciais Ótimas para Sistemas Propulsivos a Baixo Empuxo Utilizando o Método da Variação

Segunda

Carlos Roberto Silveira Filho

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes	Presidente - ITA
Prof. Dr. Sandro da Silva Fernandes	Orientador (ITA)
Prof ^a . Dr ^a . Tânia Nunes Rabello	ITA
Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes	FEG - UNESP
Prof. Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado	INPE

ITA

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe, por ter sempre orientado minha formação acadêmica, profissional e pessoal, mesmo nos momentos mais difíceis.

AGRADECIMENTO

Agradeço ao professor e amigo Sandro da Silva Fernandes, pela excelente orientação e extremas paciência e dedicação durante os mais de seis anos de trabalho em conjunto.

RESUMO

O propósito desta tese é estudar um método numérico indireto para a solução de problemas de otimização de trajetórias espaciais em campo gravitacional central Newtoniano. Neste método, a resolução do problema de valor de contorno em dois pontos é baseada no conceito de variação segunda, motivo pelo qual ele é denominado de método da variação segunda.

Inicialmente, este trabalho apresenta alguns fundamentos e resultados matemáticos da Teoria de Controle Ótimo. Estes conceitos são então utilizados no desenvolvimento matemático e formulação do método da variação segunda, incluindo sua extensão para problemas com restrições nas variáveis de controle e a descrição do algoritmo final. Este algoritmo é então aplicado a problemas de transferências espaciais ótimas entre órbitas circulares coplanares próximas, considerando dois modelos clássicos de sistemas propulsivos: sistemas a velocidade de ejeção constante (VEC) e empuxo limitado; e sistemas com velocidade de ejeção modulável e potência limitada (PL).

Para o sistema PL, há grande concordância entre os resultados obtidos através do método da variação segunda e os resultados analíticos, provenientes de uma teoria linear, e os numéricos, obtidos através de outros métodos. Para o sistema VEC, os resultados obtidos estão em acordo com a teoria geral de transferências orbitais ótimas, e, verifica-se que as duas formulações utilizadas, linearizada e não-linearizada, fornecem resultados bastante próximos, para problemas de transferência entre órbitas próximas.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study an indirect numerical method for solving space trajectories optimization problems in a central Newtonian gravitational field. In this method, the resolution of the two point boundary value problem is based on the concept of second variation, reason for which it is named second variation method.

Initially, this work presents some fundamentals and mathematical results of Optimal Control Theory. These concepts are then used in the mathematical development and formulation of the second variation method, including its extension to problems with constraints in the control variables and the description of the final algorithm. This algorithm is then applied to optimal space transfers problems between near circular coplanar orbits, considering two classical models for the propulsive system: constant ejection velocity (CEV) and limited thrust; and modulatable ejection velocity and limited power (LP).

For the LP system, there is a close agreement between the results obtained through the second variation method and the analytical results, proceeding from a linear theory, and the numerical ones, obtained through other methods. For the CEV system, the results agree with the general theory of optimal orbital transfers, and, it can be verified that both formulations employed, linearized and nonlinearized, provide very close results, for transfer problems between near orbits.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	10
CAPÍTULO I	13
INTRODUÇÃO	13
I.1 – HISTÓRICO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	14
I.1.1 Otimização, Cálculo Variacional e Controle Ótimo	15
I.1.2 Métodos Numéricos	17
I.1.3 O Problema de Otimização de Transferências Espaciais	20
I.2 – OBJETIVOS	24
CAPÍTULO II	25
FUNDAMENTOS DA TEORIA DE CONTROLE ÓTIMO	25
II.1 – INTRODUÇÃO	26
II.2 – PROBLEMA DE BOLZA SEM RESTRIÇÕES.....	26
II.3 – CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O PROBLEMA DE BOLZA SEM RESTRIÇÕES	28
II.4 – PROBLEMA DE BOLZA COM RESTRIÇÕES NO CONTROLE.....	32
II.4.1 Problemas com Restrições de Igualdade.....	32
II.4.2 Problemas com Restrições de Desigualdade	33
II.5 – CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O PROBLEMA DE BOLZA COM RESTRIÇÕES	35
II.5.1 Problemas com Restrições de Igualdade.....	35
II.5.2 Problemas com Restrições de Desigualdade	38
II.6 – PROBLEMA LINEAR QUADRÁTICO.....	39
II.6.1 Formulação do Problema de Controle Ótimo	39
II.6.2 Problema de Valor de Contorno em Dois Pontos	40
II.6.3 Resolução do Problema de Valor de Contorno em Dois Pontos	43
II.7 – CONCLUSÃO	45
CAPÍTULO III	46
MÉTODO DA VARIAÇÃO SEGUNDA	46
III.1 – INTRODUÇÃO	47
III.2 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO.....	47
III.3 – PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO EM DOIS PONTOS.....	49
III.4 – TRAJETÓRIAS EXTREMAIS VIZINHAS	50
III.4.1 Linearização do Problema de Otimização	50
III.4.2 Minimização do Funcional Linearizado.....	53
III.4.3 Trajetórias Extremas Vizinhas	55
III.5 – RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO LINEAR	56
III.6 – DESCRIÇÃO DO ALGORITMO.....	58
III.7 – DETERMINAÇÃO DIRETA DAS EQUAÇÕES DO ALGORITMO	59

III.8 – APLICAÇÃO A PROBLEMAS SEM RESTRIÇÕES	61
III.8.1 Problema de Zermelo com Velocidade de Correnteza Constante	62
III.8.2 Problema de Zermelo com Velocidade de Correnteza Variável	66
III.9 – EXTENSÃO DO ALGORITMO PARA PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES ..	69
III.9.1 Índice de Performance Aumentado	69
III.9.2 Aproximação para o Controle	70
III.10 – APLICAÇÃO A PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES	71
III.10.1 Problema de Tempo Mínimo – Trajetórias Parabólicas	72
III.10.2 Problema de Tempo Mínimo – Trajetórias Circulares	78
III.11 – CONCLUSÃO	81
CAPÍTULO IV	83
TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS CIRCULARES PRÓXIMAS.....	83
IV.1 – INTRODUÇÃO	84
IV.2 – HISTÓRICO E MOTIVAÇÃO.....	84
IV.3 – O PROBLEMA GERAL DE OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS ESPACIAIS	85
IV.4 – MODELAMENTO MATEMÁTICO DOS SISTEMAS PROPULSIVOS	86
IV.5 – RESULTADOS GERAIS DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIAS	
ESPACIAIS ÓTIMAS.....	88
IV.5.1 Problema de Controle Ótimo.....	88
IV.5.2 Lei de Controle Ótimo.....	90
IV.5.2.1 Sistema de Potência Limitada (PL).....	90
IV.5.2.2 Sistema a Velocidade de Ejeção Constante.....	92
IV.5.3 Campo Gravitacional.....	93
IV.6 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE	
TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS CIRCULARES COPLANARES	94
IV.6.1 Problema Geral de Controle Ótimo.....	95
IV.6.2 Sistema de Potência Limitada (PL).....	96
IV.6.3 Sistema a Velocidade de Ejeção Constante (VEC).....	99
IV.6.3.1 Sistema Linearizado	101
IV.6.3.2 Sistema Não-Linearizado	107
IV.7 – TRANSFERÊNCIAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA.....	111
IV.8 – TRANSFERÊNCIAS A VELOCIDADE DE EJEÇÃO CONSTANTE	126
IV.8.1 Sistema Linearizado	128
IV.8.2 Sistema Não-Linearizado	149
IV.9 – CONCLUSÕES.....	164
CAPÍTULO V	167
CONCLUSÕES FINAIS	167
CAPÍTULO VI	172
REFERÊNCIAS.....	172
CAPÍTULO VII.....	179
APÊNDICE.....	179
VII.1 – INTRODUÇÃO	180
VII.2 – TRANSFERÊNCIAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA	180
VII.3 - TRANSFERÊNCIAS A VELOCIDADE DE EJEÇÃO CONSTANTE.....	233
VII.3.1 Sistema Linearizado.....	233
VII.3.2 Sistema Não-Linearizado	254

APRESENTAÇÃO

Esta tese propõe-se a estudar um método indireto para a solução de problemas de otimização de trajetórias espaciais em campo central Newtoniano, envolvendo as transferências entre órbitas circulares coplanares próximas. Consideram-se dois modelos clássicos de sistemas propulsivos: sistemas a velocidade de ejeção constante (VEC) e empuxo limitado; e sistemas com velocidade de ejeção modulável e potência limitada (PL). O método procura resolver o problema de valor de contorno em dois pontos resultante da aplicação do Princípio de Máximo ao problema de otimização. Sua conceituação teórica e formulação matemática envolvem, além de conhecimentos de Cálculo Variacional, o importante conceito de trajetórias extremais vizinhas, que se relaciona à variação segunda do funcional a ser minimizado e, conseqüentemente, às derivadas segundas da Hamiltoniana do problema. Por este motivo, o método é aqui chamado de método da variação da segunda.

A organização deste trabalho pode ser dividida em três partes. Na primeira, são apresentados alguns fundamentos e resultados matemáticos da Teoria de Controle Ótimo. Na segunda, estes conceitos são utilizados para desenvolver o método da variação segunda, incluindo sua extensão para problemas com restrições nas variáveis de controle e a descrição do algoritmo final. Esta parte apresenta, ainda, os resultados da aplicação do método a problemas clássicos de controle ótimo. Na terceira, o método é aplicado a problemas de otimização de trajetórias espaciais, considerando especificamente o caso de transferências entre órbitas circulares coplanares próximas.

Inicialmente, o CAPÍTULO I introduz o trabalho desenvolvido nesta tese, apresentando um breve histórico do problema de otimização de transferências espaciais e dos métodos numéricos que têm sido empregados para resolvê-los. Ele apresenta, também, uma revisão bibliográfica das referências utilizadas e descreve os objetivos desta tese.

Em seguida, no CAPÍTULO II, são enunciados os fundamentos matemáticos da Teoria de Controle Ótimo, incluindo a formulação do problema, com e sem restrições, as condições necessárias e a resolução do problema de valor de contorno obtido a partir da aplicação do Princípio de Máximo. Esta resolução, obtida via matriz de transição de estados, é apresentada para o chamado Problema Linear Quadrático, no qual o índice de performance possui uma forma linear quadrática.

O CAPÍTULO III apresenta o método da variação segunda propriamente dito, incluindo toda a formulação do método e descrição do algoritmo. Inicialmente, o capítulo traz a formulação do problema de controle ótimo e a obtenção do problema de valor de contorno não-linear associado a ele. Em seguida, este problema é linearizado em torno de uma solução nominal, sobre a qual correções são aplicadas iterativamente. Este processo envolve o conceito de trajetórias extremas vizinhas, também discutido no CAPÍTULO III, e relaciona-se com o Problema Linear Quadrático, apresentado no CAPÍTULO II. Em seguida, o CAPÍTULO III apresenta a extensão do algoritmo para tratar problemas com restrições nas variáveis de controle, através do uso de funções de penalidade e de técnicas de perturbações. Por fim, com o propósito de testar o método, ele é aplicado a dois tipos de problemas clássicos de controle ótimo, sendo um com e outro sem restrições.

O CAPÍTULO IV trata especificamente do problema de trajetórias espaciais ótimas, para transferências realizadas entre órbitas circulares coplanares próximas em campo central Newtoniano. Inicialmente, o capítulo apresenta a formulação do problema de otimização de trajetórias espaciais e o modelamento matemático dos dois sistemas propulsivos clássicos

considerados: sistema a velocidade de ejeção constante (VEC) e empuxo limitado; e sistema com velocidade de ejeção modulável e potência limitada (PL). Em seguida, são apresentados alguns resultados gerais do problema de transferências espaciais ótimas, para ambos sistemas propulsivos. Estes resultados são então utilizados para formular o caso particular de transferências entre órbitas circulares coplanares, para o qual o método da variação segunda é aplicado. Os resultados obtidos são apresentados nas últimas seções do CAPÍTULO IV, para os dois sistemas propulsivos.

Completando o desenvolvimento do trabalho, o CAPÍTULO V resume os assuntos abordados nesta tese e apresenta as conclusões finais obtidas; enquanto o CAPÍTULO VI relaciona as referências bibliográficas utilizadas.

Por fim, o CAPÍTULO VII traz, como apêndice, outros resultados obtidos para os problemas analisados ao longo deste trabalho e não apresentados nos capítulos anteriores.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta um breve histórico do problema de otimização de transferências espaciais e dos métodos numéricos que têm sido empregados para resolvê-los. Ele apresenta, também, uma revisão bibliográfica das referências utilizadas no desenvolvimento deste trabalho e, por fim, descreve os objetivos desta tese.

I.1 – HISTÓRICO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Ao longo dos muitos séculos de desenvolvimento das ciências, diversos problemas enfrentados pela Humanidade envolveram, de alguma forma, a maximização ou minimização de algum parâmetro. Como exemplos simples, pode-se mencionar os problemas de determinar a menor rota para uma travessia e a distribuição adequada para maximizar a quantidade de alimentos estocada.

Nos últimos séculos e, especialmente nas últimas décadas, estes problemas evoluíram para formas mais complexas, envolvendo a otimização dos controles da dinâmica de sistemas, de forma a obter o máximo ou mínimo de algum parâmetro. Como exemplos de aplicações práticas destes problemas, pode-se mencionar diversas realizações humanas, tais como os lançamentos de mísseis e satélites, os vôos de aeronaves não-tripuladas e a exploração espacial de uma forma geral, incluindo o envio de sondas e missões tripuladas.

Dentro do estudo da dinâmica de veículos aeroespaciais, tais como satélites e sondas, uma área de grande interesse tem sido a determinação de trajetórias, ditas ótimas, ao longo das quais o cumprimento de missões leva à obtenção do melhor valor possível para um dado parâmetro, comumente chamado de índice de performance. O veículo é mantido na trajetória determinada controlando-se a ação das forças propulsivas, em módulo ou direção. O estudo deste tipo de problema, chamado de problema de otimização de trajetórias, utiliza a moderna Teoria de Controle Ótimo, envolvendo a aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin [53], cuja origem está diretamente ligada aos conceitos do Cálculo Variacional clássico [22].

As próximas seções apresentam mais detalhes dos aspectos históricos do Cálculo Variacional e dos problemas de otimização, bem como dos métodos utilizados em sua resolução e sua aplicação a problemas de transferências espaciais.

I.1.1 Otimização, Cálculo Variacional e Controle Ótimo

Os problemas de otimização têm sido estudados há séculos pela Humanidade e remontam, no mínimo, aos tempos da Grécia antiga. Foi lá que surgiu um dos mais antigos deles: o chamado problema isoperimétrico, também conhecido como problema de Dido, que consiste em determinar a curva plana fechada de comprimento especificado que engloba a maior área possível. Os gregos antigos sabiam que a solução deste problema era o círculo, e utilizavam esta forma em diversas de suas construções. No entanto, uma demonstração matemática formal da solução, de acordo com os padrões atuais de rigor, foi apresentada apenas no século XIX, por Jakob Steiner, justamente durante o período de grande desenvolvimento do Cálculo Variacional.

Diversos autores associam a origem do Cálculo Variacional e do Controle Ótimo ao famoso problema da braquistócrona, que consiste em determinar a trajetória entre dois pontos ao longo da qual a descida de um corpo sujeito a um campo gravitacional constante é a mais rápida possível. Este problema foi proposto por Johann Bernoulli, professor de matemática na universidade de Groningen, em 1696. Sagan [56] aponta esta data como sendo o surgimento do cálculo de variações e Sussmann e Willems [57] apontam o ano seguinte, 1697, como o nascimento do controle ótimo. Foi neste ano que o próprio Bernoulli, seguido por outros 5 importantes matemáticos da época, publicou a solução para o seu problema da braquistócrona.

A partir desta época, diversos outros problemas surgiram e foram fundamentais no desenvolvimento do Cálculo Variacional, que teve grande progresso teórico ao longo dos séculos XVIII a XX. Para maiores referências sobre o assunto, recomenda-se a leitura de Elsgolts [22], Hestenes [31] e Sagan [56].

Entretanto, apesar deste grande desenvolvimento, durante a maior parte deste tempo o emprego prático da teoria do cálculo de variações esteve restrito a problemas mais simples.

Isto se deve ao fato de que a aplicação desta teoria resulta, salvo raras exceções, em problemas envolvendo sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares, com condições de contorno em dois pontos, comumente conhecidos pela sigla TPBVP – *Two-Point Boundary-Value Problem*. A solução analítica destes problemas só é possível em casos especiais e o tratamento através de métodos numéricos tornou-se viável somente após o surgimento dos computadores digitais. Desta forma, o Cálculo Variacional só se tornou plenamente aplicável à resolução de problemas de otimização nas últimas décadas.

Além disto, foi também durante as últimas décadas que o desenvolvimento teórico do Cálculo Variacional levou ao surgimento de uma outra forma de abordar os problemas de otimização. Tal forma corresponde à moderna Teoria de Controle Ótimo, cujas bases foram definidas em 1956, quando Pontryagin [52] enunciou o seu Princípio de Máximo [24]. Esta nova abordagem, que ainda está em processo de desenvolvimento, tanto em profundidade quanto em abrangência (Sagan [56]), é mais rica e mais facilmente adaptável a requisitos tecnológicos práticos.

Sendo assim, pode-se dizer que, nas últimas décadas, o desenvolvimento teórico e tecnológico levou ao surgimento das ferramentas atualmente utilizadas na análise de problemas de otimização. É justamente esta abordagem mais moderna, além de outras como a Teoria de Contenso (Contenso [12], 1962), que, em conjunto com métodos numéricos, tem sido amplamente utilizada no estudo de problemas de otimização, incluindo os de transferências espaciais.

As próximas seções discutem com mais detalhes os métodos numéricos e os aspectos da otimização de trajetórias espaciais, ambos fundamentais no escopo deste trabalho.

I.1.2 Métodos Numéricos

Os métodos numéricos compõem-se de procedimentos iterativos, iniciados por uma estimativa arbitrária, que buscam obter a solução do problema de otimização dentro de uma determinada precisão, estabelecida *a priori*. De forma geral, eles podem ser classificados em dois grupos: diretos e indiretos.

Os métodos diretos caracterizam-se por buscar a solução ótima minimizando diretamente o índice de performance, evitando, assim, as dificuldades associadas à resolução do TPBVP. Ou seja, estes métodos procuram, a cada iteração, determinar uma nova solução do problema de tal forma que o valor do índice de performance associado a ela seja menor que o da solução anterior. Pode-se citar como exemplos clássicos os métodos do gradiente de primeira ordem (Bryson e Denham [8], Kelley [34]), gradiente de segunda ordem (Bryson e Ho [9] e Golfetto [27]), gradiente combinado (Da Silva Fernandes e Golfetto [16,17]) e gradiente conjugado (Lasdon, Mitter e Waren [36], Leondes e Wu [42,43]).

Os métodos indiretos, por outro lado, propõem-se a resolver o problema de valor de contorno em dois pontos (TPBVP) resultante da aplicação do Princípio de Máximo ao problema de otimização. Como este Princípio corresponde a um conjunto de condições necessárias, o que estes métodos procuram, na verdade, é determinar uma solução que satisfaça, simultaneamente, as condições necessárias para um extremo e as condições de contorno do problema, sem se preocupar com o valor do índice de performance associado a esta solução, ao contrário dos métodos diretos. Como exemplos clássicos dos indiretos, pode-se citar os métodos da quasilinearização (McCue [49], Lewallen [44], McGill e Kenneth [50]), das diferenças finitas e da variação segunda (Breakwell, Speyer e Bryson [7], Longmuir e Bohn [45], Da Silva Fernandes e Silveira Filho [18]). Pode-se mostrar que, se convergirem para a solução, esta convergência é quadrática.

Uma grande variedade dos dois tipos de métodos tem sido aplicada à solução de problemas de otimização de trajetórias espaciais e os estudos têm sido desenvolvidos através das poderosas técnicas da teoria de controle ótimo. A maioria destes estudos considera a hipótese de campo central Newtoniano.

O presente trabalho aborda o método da variação segunda, que recebe este nome porque a resolução do TPBVP associado ao problema de otimização é baseada no conceito de variação segunda. Por se tratar de um método indireto, a região de convergência é consideravelmente menor que a dos métodos diretos, requerendo uma melhor escolha do valor inicial das incógnitas que definem o problema. Apesar disto, os resultados obtidos são bastante bons, inclusive para problemas com restrições nas variáveis de controle. Resultados fornecidos pelo gradiente combinado (Da Silva Fernandes e Golfetto [16,17]) e pela teoria analítica (Edelbaum [19], Marec [47,48]) são comparados com os fornecidos pela variação segunda para os problemas de trajetórias espaciais ótimas utilizando sistema de potência limitada. Observa-se boa concordância entre os resultados.

Nos parágrafos seguintes são apresentados, em ordem cronológica, outros artigos de interesse no estudo do método da variação segunda aplicado a transferências espaciais.

Um dos primeiros trabalhos envolvendo a aplicação da variação segunda a problemas de otimização e controle de sistemas não-lineares deve-se a Breakwell, Speyer e Bryson [7]. Em um artigo de 1963, os autores apresentam um esquema de controle em *feedback* para maximizar uma quantidade terminal, satisfazendo condições terminais pré-especificadas, na presença de pequenas perturbações. Este esquema é obtido através da aplicação da variação segunda ao problema, utilizando o conceito de trajetórias extremas vizinhas. Dentro deste conceito, os autores propõem, ao invés de tentar corrigir todo o erro da estimativa inicial em uma única iteração, fazê-lo através de sucessivas pequenas correções, de forma a obter uma trajetória extremal vizinha à anterior, suficientemente próxima para garantir a hipótese de

linearidade. Formulações semelhantes foram utilizadas por outros autores (Lewallen [44]) e uma delas, na qual as correções baseiam-se no conceito de trajetórias extremas vizinhas, é empregada na obtenção dos resultados apresentados neste trabalho.

Em 1967, McCue [49] publica um trabalho em que o método da quasilinearização é utilizado para resolver o TPBVP. Apesar de não abordar diretamente o método da variação segunda, o artigo apresenta aspectos associados aos métodos indiretos, tais como a importância da precisão numérica para atingir bons resultados e o uso de uma função de comutação para tratar arcos propulsivos/balísticos, metodologia também empregada neste trabalho.

Também em 1967, Lewallen [44] apresenta uma extensão do método da quasilinearização proposto por McGill e Kenneth [50]. Esta versão modificada torna a determinação do tempo final parte integrante do processo iterativo e permite especificar as restrições sobre as condições terminais em termos de uma função geral das variáveis do problema.

Ainda em 1967, Lasdon, Waren e Rice [35] apresentam uma formulação que utiliza funções de penalidade para tratar problemas de controle ótimo com restrições de desigualdade. Formulação semelhante é utilizada no tratamento dos problemas com restrições deste trabalho, conforme apresentado nos próximos capítulos.

Uma referência fundamental para o estudo do método da variação segunda foi publicada por Longmuir e Bohn [45], em 1969. Neste trabalho, os autores apresentam e descrevem o método, partindo da formulação de um problema de otimização com restrições nas condições terminais e tempo final fixo. Após formular o problema, eles calculam a primeira e a segunda variações do funcional aumentado a ser minimizado e determinam os incrementos das correções, o que consiste basicamente em resolver o TPBVP resultante da aplicação das condições necessárias. Esta solução do TPBVP é obtida utilizando a

transformação generalizada de Riccati. Todo este método é bastante semelhante ao utilizado neste trabalho, diferindo, basicamente, na resolução do TPBVP: ao invés da transformação de Riccati, utiliza-se a matriz de transição de estados, conforme será apresentado nos próximos capítulos.

Um artigo de Hussu [33], que trata do método do gradiente conjugado, apresenta uma nova formulação para resolver problemas com instante final livre. Esta nova proposta introduz um componente adicional no vetor de controle e transforma o problema em tempo final fixo. Uma formulação semelhante é utilizada neste trabalho.

Conforme já foi mencionado, diversos métodos numéricos, incluindo o da variação segunda, têm sido aplicados na resolução de problemas de otimização de transferências espaciais. A próxima seção apresenta mais detalhes dos aspectos destes problemas e de como os métodos numéricos têm sido utilizados para resolvê-los.

I.1.3 O Problema de Otimização de Transferências Espaciais

Dentre os diversos problemas de otimização abordados pelas engenharias e ciências aplicadas, os de trajetórias espaciais envolvendo transferências simples e *rendez-vous* são fundamentais em Mecânica Espacial. Eles têm sido tema de diversos estudos analíticos e numéricos desde o início dos anos 1950, com o estabelecimento dos fundamentos da moderna navegação espacial através do Cálculo de Variações clássico (Lawden [37,38]).

Um dos primeiros trabalhos sobre o assunto foi publicado em 1960, por Faulders [23]. Apesar de não tratar diretamente sobre transferências espaciais, o artigo considera diversos aspectos importantes sobre o assunto, tais como determinação da tração ótima, veículos com baixo nível de aceleração e movimentação em um campo gravitacional.

O artigo de McCue [49] emprega o método da quasilinearização para resolver problemas de transferências nos quais o veículo espacial possui tração de magnitude limitada e de direção controlável. Além disto, o trabalho faz uma comparação entre os resultados fornecidos pela quasilinearização e os obtidos considerando transferência impulsiva. Este tipo de transferência já havia sido estudado por Hohmann em 1925 (Hohmann [32]).

Em 1967, Lewallen [44], além de estender o método da quasilinearização proposto por McGill e Kenneth [50], aplica-o a um problema de tempo mínimo entre as órbitas circulares da Terra e de Marte.

No ano seguinte, Bell [2] publica um excelente artigo que apresenta um histórico dos trabalhos publicados até o momento, incluindo apenas artigos sobre controle ótimo que apresentam alguma correlação direta com otimização de trajetórias espaciais. Como o próprio artigo menciona, não se trata de uma pesquisa extensiva, mas apresenta um panorama geral muito bom.

Nos últimos 20 anos, percebe-se um interesse do meio acadêmico pelo estudo de transferências espaciais utilizando sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada. Este interesse tem-se mostrado particularmente renovado nos últimos 10 anos, quando foram lançadas, com sucesso, duas missões espaciais envolvendo sondas movidas a propulsão iônica: a Deep Space One, da NASA-JPL, em 1998; e a SMART 1, da Agência Espacial Européia, em 2003. Dentro deste contexto, diversos artigos relacionados de alguma forma ao tema têm sido publicados. Sendo assim, nos parágrafos seguintes são apresentados, em ordem cronológica, trabalhos relacionados a transferências espaciais envolvendo sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada.

Um artigo de Breakwell e Chanal [6], de 1986, apresenta um tratamento analítico para problemas de transferências orbitais com acelerações muito baixas e impulso específico constante, considerando a otimização do consumo de combustível com duração especificada.

Em 1991, Broucke [10] apresenta uma formulação analítica, em coordenadas canônicas polares, para resolver problemas de otimização de trajetórias com baixa tração, em um campo cuja força é inversamente proporcional ao quadrado da distância. O índice de performance a ser maximizado é o valor final do raio, para um tempo final especificado.

Em 1992, Haissig, Mease e Vinh [30] publicam um artigo que apresenta dois métodos aproximados para obter trajetórias de mínimo consumo para transferências entre órbitas elípticas coplanares, utilizando sistema de potência limitada. A metodologia é baseada no método de média e em transformações canônicas.

Em 1991 e 1992, Enright e Conway [20,21] publicam dois artigos que abordam o problema de trajetórias espaciais ótimas utilizando métodos diretos e programação não-linear. Em um deles, utilizam colocação e, no outro, transcrição direta. Ambos trazem exemplos de aplicações práticas. O sistema propulsivo considerado é de tração finita.

Betts [3,4] também utiliza transcrição direta para resolver problemas de otimização de trajetórias espaciais. Esta formulação, diferente da de Enright e Conway [20,21], combina um algoritmo de programação não-linear esparsa com uma discretização da dinâmica da trajetória. As transferências consideradas utilizam baixa tração. No segundo artigo ([4], 1994), em particular, o autor considera a influência gravitacional de diversos outros planetas durante a transferência, o que torna os resultados bastante ricos.

Coverstone-Carrol e Williams [13] também apresentam um método direto baseado em discretização do intervalo de integração que resulta em um problema de programação não-linear. Neste caso, porém, os autores utilizaram conceitos de inclusão diferencial para eliminar explicitamente a dependência com o controle, reduzindo a dimensão do vetor de estados. Este método foi aplicado a três exemplos de transferências espaciais, considerando sistemas propulsivos a baixa tração.

Um artigo publicado por Guelman [29] em 1995 discute o problema de transferência de um veículo espacial de uma órbita em torno da Terra para outra em torno da Lua, utilizando um motor com potência limitada (PL) e baixo empuxo. O campo gravitacional considerado é central e Newtoniano. A lei de controle ótima é obtida analiticamente, como uma solução particular do caso de transferência com tempo final livre.

Um estudo unificado de transferências espaciais ótimas com baixa tração, baseado no uso de técnicas de média, é apresentado por Geffroy e Epenoy [25]. Os critérios de otimização considerados são os de tempo mínimo, para sistemas com tração limitada, e consumo mínimo, para sistemas com velocidade de ejeção constante (VEC). Diferentes restrições são também consideradas: achatamento da Terra, sombreamento da trajetória e limitações na direção da tração.

Já no ano 2000, Betts [5] publica outro artigo em que utiliza transcrição direta, resultando em um problema de programação não-linear com discretização da dinâmica da trajetória. O nível de tração considerado é muito baixo.

Em 2002, Da Silva Fernandes e Golfetto [16] publicam um artigo em que utilizam um algoritmo baseado nos métodos do gradiente para determinação de trajetórias espaciais ótimas, considerando sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada.

Outro trabalho dos mesmos autores [17], publicado em 2004, combina os métodos do gradiente de primeira e segunda ordem na aplicação a problemas de transferência simples para sistemas a potência limitada e baixo empuxo, considerando órbitas circulares coplanares.

É dentro deste cenário de renovada pesquisa sobre otimização de trajetórias espaciais envolvendo sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada que surge a motivação para o desenvolvimento desta tese. A próxima seção apresenta os principais objetivos deste estudo.

I.2 – OBJETIVOS

Este trabalho propõe-se a estudar um método indireto para a resolução de problemas de otimização de trajetórias espaciais envolvendo sistemas propulsivos a baixo empuxo em campo central Newtoniano. Este método é aqui chamado de método da variação segunda, pois a resolução do problema de valor de contorno em dois pontos associado ao problema de otimização é baseada no conceito de variação segunda. Os principais objetivos do trabalho são:

- Implementar o algoritmo do método da variação segunda e aplicá-lo a problemas de controle ótimo sem restrições;
- Estender o método a problemas com restrições nas variáveis de controle, através do método das funções de penalidade;
- Aplicar o método a problemas clássicos de controle, cujos resultados são conhecidos na literatura, para fins de teste;
- Aplicar o método na análise de trajetórias espaciais realizadas por sistemas propulsivos a baixo empuxo: potência limitada (PL) e velocidade de ejeção constante (VEC);
- Comparar os resultados obtidos com os fornecidos pela teoria analítica e/ou aproximados, obtidos por outros métodos.

O próximo capítulo apresenta os fundamentos matemáticos da Teoria de Controle Ótimo, utilizada no desenvolvimento do trabalho.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS DA TEORIA DE CONTROLE ÓTIMO

Este capítulo apresenta os fundamentos matemáticos da Teoria de Controle Ótimo, incluindo a formulação do problema, as condições necessárias e a resolução do problema de valor de contorno obtido. Toda esta formulação é utilizada no restante do desenvolvimento deste trabalho.

II.1 – INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta alguns conceitos e resultados matemáticos da Teoria de Controle Ótimo.

Primeiramente, escreve-se o enunciado geral do problema de controle ótimo na forma de Bolza [9,39,40,53]. Em seguida, são apresentadas as condições necessárias, sintetizadas no Princípio de Máximo de Pontryagin [53], que o controle ótimo deve satisfazer, considerando problemas com e sem restrições.

Por fim, apresentam-se a formulação e resolução do problema linear quadrático, que apresenta grande aplicação em métodos numéricos e cujo conhecimento da solução é bastante útil no método da variação segunda [9,45,51].

Notamos que a linguagem adotada na formulação do problema de controle ótimo e no enunciado das condições necessárias se baseia em uma formulação clássica do Cálculo de Variações e é voltada para aplicações em engenharia; de forma que não apresenta todo rigor matemático.

II.2 – PROBLEMA DE BOLZA SEM RESTRIÇÕES

Esta seção apresenta o enunciado geral do problema de controle ótimo, formulado como um problema de Bolza sem restrições nas variáveis de controle.

Seja um sistema descrito pelas equações de estado:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (\text{II.1})$$

onde f e $\partial f/\partial x$ são contínuas com respeito a x e u em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$. O vetor x representa o estado do sistema e u é o controle. Ambos são definidos como vetores colunas:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{II.2})$$

Supõe-se que a lei de controle $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, seja conhecida.

Seja, também, o estado inicial $x(t_0)$ em t_0 tal que:

$$\varphi(x(t_0), t_0) = 0, \quad (\text{II.3})$$

onde $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p < n+1$. Desta forma, segue, do teorema de existência e unicidade [54], que existe uma trajetória bem definida que é assumida ser capaz de conduzir o sistema do estado inicial em (II.3) acima para um estado final $x(t_f)$ em t_f tal que:

$$\psi(x(t_f), t_f) = 0, \quad (\text{II.4})$$

onde $\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $q < n+1$. O controle $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, satisfazendo (II.1), (II.3) e (II.4) é dito ser admissível (Sagan [56]).

Além disto, supõe-se também que a esta trajetória é associado um funcional da forma geral:

$$IP[u] = g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u) dt. \quad (\text{II.5})$$

Este funcional é denominado índice de performance, pois representa uma medida do desempenho do sistema.

Nas equações acima as funções L e $\partial L/\partial x$ são supostas contínuas em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, e as funções φ , ψ e g , contínuas, com derivadas primeiras contínuas com respeito a todos os argumentos ($L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

Supondo a existência de várias leis de controle que conduzem o sistema do estado inicial (II.3) para o estado final (II.4), o problema de otimização consiste em determinar, dentre essas várias leis, aquela que fornece um mínimo/máximo para o índice de performance (II.5).

Problemas de otimização que envolvem índices de performance da forma geral (II.5) acima são denominados Problemas de Bolza. Os casos particulares de $L(x,u)=0$ e $g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f))=0$ são denominados, respectivamente, Problemas de Mayer e de Lagrange. As condições necessárias apresentadas a seguir referem-se ao Problema de Bolza.

II.3 – CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O PROBLEMA DE BOLZA SEM RESTRIÇÕES

O Problema de Bolza descrito na seção anterior é um problema variacional com condições subsidiárias (Eq. II.1), envolvendo curvas com extremidades condicionadas (Eqs. II.3 e II.4). Desta forma, segue do Cálculo Variacional clássico [22,40] que:

Condições necessárias:

Se $u^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, é um controle ótimo para o Problema de Bolza definido anteriormente, então as seguintes condições são satisfeitas:

i) Existe um vetor $\lambda^*(t)$, contínuo, denominado vetor adjunto, tal que o terno (x^*, λ^*, u^*) é um extremal, i.e., satisfaz as equações de Euler:

$$\begin{aligned}\dot{x}^{*T} &= H_{\lambda}^* \\ \dot{\lambda}^{*T} &= -H_x^* , \\ H_u^* &= 0 ,\end{aligned}\tag{II.6}$$

onde H^* é a chamada função Hamiltoniana, definida por:

$$H^* = H(x^*, \lambda^*, u^*) = -L(x^*, u^*) + \lambda^{*T} f(x^*, u^*).\tag{II.7}$$

De acordo com a notação utilizada, as derivadas da Hamiltoniana são vetores linhas:

$$H_{\lambda} = \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \quad \dots \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_n} \right]; \quad H_x = \left[\frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial H}{\partial x_n} \right].\tag{II.8}$$

ii) Existem multiplicadores de Lagrange v_0 e v_f , de dimensões p e q respectivamente, tais que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}g_{t_0} + H^*(t_0) + v_0^T \phi_{t_0} &= 0 \\ g_{t_f} - H^*(t_f) + v_f^T \Psi_{t_f} &= 0 \\ g_{x_0} - \lambda^{*T}(t_0) + v_0^T \phi_{x_0} &= 0 \\ g_{x_f} + \lambda^{*T}(t_f) + v_f^T \Psi_{x_f} &= 0,\end{aligned}\tag{II.9}$$

com,

$$\begin{aligned}\varphi(x(t_0), t_0) &= 0, \\ \psi(x(t_f), t_f) &= 0.\end{aligned}\tag{II.10}$$

As Eqs. (II.9) são denominadas condições de transversalidade, sendo v_0 e v_f multiplicadores associados às restrições terminais, Eqs. (II.10). É importante mencionar, também, que as condições de transversalidade podem ser apresentadas de forma implícita [31], do seguinte modo:

$$\left[-H^* \delta t + \lambda^{*T} \delta x \right]_{t_0}^{t_f} + \delta g = 0,\tag{II.11}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}\delta \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \delta x(t_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} \delta t_0 = 0 \\ \delta \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x_f} \delta x(t_f) + \frac{\partial \psi}{\partial t_f} \delta t_f = 0,\end{aligned}\tag{II.12}$$

onde

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial x_0} \delta x(t_0) + \frac{\partial g}{\partial t_0} \delta t_0 + \frac{\partial g}{\partial x_f} \delta x(t_f) + \frac{\partial g}{\partial t_f} \delta t_f.\tag{II.13}$$

A escolha da forma das condições de transversalidade a ser empregada (II.9-II.10 ou II.11-II.12) depende do problema analisado. Aqui o símbolo δ é utilizado para indicar a variação. Para maiores detalhes, recomenda-se consultar as referências [9, 22, 31, 39 e 40].

iii) Para todo $t \in [t_0, t_f]$, a função Hamiltoniana $H(x^*(t), \lambda^*(t), u)$ atinge o seu máximo em $u^*(t)$, i.e.,

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}^m} H(x^*(t), \lambda^*(t), u), \quad (\text{II.14})$$

ou, de modo equivalente, a Condição Necessária de Weierstrass deve ser satisfeita:

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \geq H(x^*(t), \lambda^*(t), u), \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (\text{II.15})$$

$$u \in \mathbb{R}^m.$$

A equação (II.15) apresenta um resultado muito importante: a minimização do índice de performance IP corresponde à maximização da função Hamiltoniana H com respeito ao controle.

iv) A Hamiltoniana máxima,

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \quad (\text{II.16})$$

é uma integral primeira do sistema canônico (II.6).

É interessante observar que as condições necessárias acima são válidas para a classe de variações fortes, i.e., exige-se apenas a proximidade das trajetórias. Quando se considera a classe das variações fracas, i.e., a proximidade das trajetórias e velocidades, a Condição Necessária de Weierstrass pode ser substituída pela Condição de Clebsch-Legendre,

$$\mu^T H_{uu}^* \mu \leq 0, \quad (\text{II.17})$$

onde μ denota a variação fraca do controle u .

As condições *i* a *iv* acima estão associadas ao chamado Princípio de Máximo de Pontryagin [53], estabelecido por Pontryagin e seus colaboradores para condições mais gerais.

II.4 – PROBLEMA DE BOLZA COM RESTRIÇÕES NO CONTROLE

Esta seção estende o problema apresentado na seção II.2, introduzindo restrições nas variáveis de controle. O enunciado do problema é bastante semelhante, diferindo apenas na especificação do controle $u(t)$, que agora deve satisfazer determinadas restrições. Tais restrições podem ser de dois tipos: igualdade e desigualdade. Eles são apresentados separadamente.

II.4.1 Problemas com Restrições de Igualdade

Os problemas com restrições de igualdade são aqueles nos quais o controle $u(t)$ está sujeito a restrições do tipo $\Phi(u) = 0$, como no Problema de Bolza enunciado a seguir.

Seja o sistema dinâmico:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (\text{II.18})$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$, com

$$\Phi(u) = 0, \quad (\text{II.19})$$

sendo $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$, $r < m$. O problema de controle ótimo consiste em transferir este sistema do estado inicial $x(t_0)$ em t_0 , definido por:

$$\varphi(x(t_0), t_0) = 0, \quad (\text{II.20})$$

$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p < n+1$, para o estado final $x(t_f)$ em t_f , definido por:

$$\psi(x(t_f), t_f) = 0, \quad (\text{II.21})$$

$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$, $q < n+1$, de forma a minimizar (ou maximizar) o índice de performance:

$$\text{IP} = g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u) dt. \quad (\text{II.22})$$

As funções Φ_i em (II.19) são supostas de classe C^1 e a matriz $\partial\Phi/\partial u$ é suposta possuir posto r . Os controles admissíveis, neste caso, são as funções $u_j(t)$ que satisfazem (II.19) e são contínuas por partes no intervalo $[t_0, t_f]$ (Sagan [56], Leitmann [39,40]). As funções φ_i , ψ_j são, de acordo com a seção II.2, supostas serem de classe C^1 com respeito a todos os argumentos.

II.4.2 Problemas com Restrições de Desigualdade

Os problemas com restrições de desigualdade são aqueles nos quais o controle $u(t)$, ao invés de restrições da forma (II.19), está sujeito a restrições do tipo:

$$\Phi_i(u) \leq 0, i = 1, \dots, r, \quad (\text{II.23})$$

onde $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$, $r < m$, e o domínio de controle $U \subset \mathbb{R}^m$ é uma região fechada do \mathbb{R}^m . O caso mais simples, e que apresenta interesse prático, é aquele no qual U é um hiperparalelepípedo de \mathbb{R}^m , ou seja,

$$u_k^{\min} \leq u_k \leq u_k^{\max}, k = 1, \dots, m. \quad (\text{II.24})$$

Neste caso, as restrições apresentadas na forma (II.23) podem ser transformadas para a forma (II.19). Para tanto, define-se:

$$\Phi_k(u_k) = (u_k - u_k^{\min})(u_k - u_k^{\max}), k = 1, \dots, m. \quad (\text{II.25})$$

Deste modo, as restrições (II.24) podem ser expressas na forma geral (II.23) como:

$$\Phi_k(u_k) \leq 0, k = 1, \dots, m. \quad (\text{II.26})$$

As restrições (II.26), por sua vez, podem ser transformadas para restrições de igualdade. Para isto, definem-se $u_{m+j}(t)$, $j = 1, \dots, r$ variáveis de controle auxiliares tais que:

$$\Phi_k(u_k) + u_{m+k}^2 = 0, k = 1, \dots, r. \quad (\text{II.27})$$

Desta forma, obtém-se um problema exatamente análogo ao da seção II.4.1. As condições necessárias a serem satisfeitas pelos dois problemas, essencialmente as mesmas, são apresentadas na próxima seção.

II.5 – CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O PROBLEMA DE BOLZA COM RESTRIÇÕES

O Problema de Bolza descrito na seção anterior, semelhante ao apresentado na seção II.2, é um problema variacional com condições subsidiárias (Eq. II.18), envolvendo curvas com extremidades condicionadas (Eqs. II.20 e II.21). As condições necessárias a serem satisfeitas por este problema novamente são derivadas estendendo-se os resultados do Cálculo Variacional clássico [22,40]. Neste caso, no entanto, a forma da função Hamiltoniana que deve ser considerada é um pouco diferente: utilizam-se Multiplicadores de Lagrange de forma a construir uma função Hamiltoniana aumentada [9]. Por simplicidade, inicialmente são enunciadas as condições para problemas com restrições de igualdade. Essas condições são, então, estendidas de forma a considerar problemas com restrições de desigualdade. Esta forma de apresentação dos resultados para problemas envolvendo restrições é muito útil em aplicações práticas envolvendo algoritmos numéricos.

II.5.1 Problemas com Restrições de Igualdade

De forma a introduzir as restrições sobre o controle no enunciado das condições necessárias, deve-se considerar a seguinte função Hamiltoniana aumentada:

$$\bar{H}(x, \lambda^*, u, \mu) = -L(x, u) + \lambda^{*T} f(x, u) + \mu^T \Phi(u), \quad (\text{II.28})$$

ou

$$\bar{H}(x, \lambda^*, u, \mu) = H(x, \lambda^*, u) + \mu^T \Phi(u), \quad (\text{II.29})$$

com $\mu(t) \in \mathbb{R}^r$ e

$$H(x, \lambda^*, u) = -L(x, u) + \lambda^{*\top} f(x, u). \quad (\text{II.30})$$

As condições necessárias podem, então, ser enunciadas da forma como se segue.

Condições necessárias:

Se $u^*(t)$, $t_0^* \leq t \leq t_f^*$, é um controle ótimo para o Problema de Bolza com restrições de igualdade sobre as variáveis de controle (Eqs. II.18 a II.22), então:

i) Existe um vetor $\lambda^*(t)$ contínuo, denominado vetor adjunto, e Multiplicadores de Lagrange $\mu(t)$ tal que a quádrupla $(x^*, \lambda^*, u^*, \mu)$ é um extremal, i.e., verifica as condições:

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= \bar{H}_\lambda^{*\top} \\ \frac{d\lambda^*}{dt} &= -\bar{H}_x^{*\top} \\ \bar{H}_u^* &= 0 \\ \bar{H}_\mu^* &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

onde,

$$\bar{H}^* = \bar{H}(x^*, \lambda^*, u^*, \mu). \quad (\text{II.32})$$

ii) Existem Multiplicadores de Lagrange v_0 e v_f , $v_0 \in \mathbb{R}^p$ e $v_f \in \mathbb{R}^q$, tais que as condições de transversalidade são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
 g_{t_0} + \bar{H}^*(t_0^*) + v_0^T \varphi_{t_0} &= 0 \\
 g_{t_f} - \bar{H}^*(t_f^*) + v_f^T \Psi_{t_f} &= 0 \\
 g_{x_0} - \lambda^{*T}(t_0^*) + v_0^T \varphi_{x_0} &= 0 \\
 g_{x_f} + \lambda^{*T}(t_f^*) + v_f^T \Psi_{x_f} &= 0.
 \end{aligned} \tag{II.33}$$

iii) Para todo $t \in [t_0^*, t_f^*]$, a função Hamiltoniana $\bar{H}(x^*(t), \lambda^*(t), u, \mu(t))$ atinge o seu máximo em $u^*(t)$, onde

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in U} \bar{H}(x^*(t), \lambda^*(t), u, \mu(t)), \tag{II.34}$$

sendo o domínio de controle U definido pelas restrições de igualdade

$$\Phi(u) = 0. \tag{II.35}$$

Ou, de modo equivalente, a condição necessária de Weierstrass deve ser satisfeita:

$$\bar{H}(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), \mu(t)) \geq \bar{H}(x^*(t), \lambda^*(t), u, \mu(t)), \forall t \in [t_0^*, t_f^*], \tag{II.36}$$

$$u \in U.$$

iv) A função Hamiltoniana $\bar{H}(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), \mu(t))$ é uma integral primeira do sistema canônico (II.31).

É interessante observar que quando se considera a classe das variações fracas, a Condição Necessária de Weierstrass pode ser substituída pela Condição de Clebsch-Legendre,

$$\zeta^T \frac{\partial^2 \bar{H}^*}{\partial u^2} \zeta \leq 0, \quad (\text{II.37})$$

onde ζ são as variações admissíveis.

II.5.2 Problemas com Restrições de Desigualdade

Conforme apresentado na seção II.4.2, os problemas com restrições de desigualdade podem ser transformados em problemas com restrições de igualdade. Desta forma, as condições necessárias a serem satisfeitas são as mesmas apresentadas na seção anterior, com a diferença que, neste caso, a função Hamiltoniana aumentada é dada por:

$$\bar{H}(x, \lambda^*, u, \bar{u}, \mu) = -L(x, u) + \lambda^{*T} f(x, u) + \mu^T \bar{\Phi}(u, \bar{u}), \quad (\text{II.38})$$

onde $\bar{\Phi} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ é tal que

$$\bar{\Phi}_k(u, \bar{u}) = \Phi_k(u_k) + \bar{u}_{m+k}^2 = 0, \quad k = 1, \dots, r, \quad (\text{II.39})$$

onde

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{m+1}(t) \\ \vdots \\ u_{m+r}(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{II.40})$$

II.6 – PROBLEMA LINEAR QUADRÁTICO

Conforme apresentado nas seções anteriores deste capítulo, a aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin, ou as condições necessárias equivalentes, ao Problema de Bolza, com ou sem restrições sobre as variáveis de controle, conduz a um problema de valor de contorno em dois pontos, que deve ser resolvido para obter a solução ótima. Este processo está diretamente relacionado à formulação matemática do TPBVP, o que, por sua vez, depende da forma do Problema de Bolza que o originou.

Dentre as diversas formas que o problema de otimização pode assumir, o chamado problema linear quadrático apresenta grande aplicação em métodos numéricos, e o conhecimento de sua solução é bastante útil no método da variação segunda [9,45,51]. Esta seção apresenta sua formulação e resolução.

II.6.1 Formulação do Problema de Controle Ótimo

Seja o sistema de equações diferenciais definido por:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (\text{II.41})$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, A é uma matriz $n \times n$ e B é uma matriz $n \times m$, ambas a coeficientes variáveis no tempo.

Seja também o índice de performance da forma geral:

$$IP = \frac{1}{2} x^T(t_f) G x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T C x + 2x^T D u + u^T E u] dt, \quad (\text{II.42})$$

onde G é uma matriz simétrica $n \times n$ a coeficientes constantes, C é uma matriz simétrica $n \times n$, D é uma matriz $n \times m$ e E é uma matriz simétrica $m \times m$ (suposta definida positiva), todas a coeficientes variáveis no tempo.

O problema de otimização consiste em transferir o sistema definido por (II.41) do estado inicial fixado

$$x(t_0) = x_0, \quad (\text{II.43})$$

t_0 fixado, para o estado final definido por:

$$\Psi x(t_f) = \varphi_f, \quad (\text{II.44})$$

de forma a minimizar o índice de performance definido por (II.42). O instante t_f é fixado e não existem restrições sobre as variáveis de controle. Na Eq. (II.44), Ψ é uma matriz $q \times n$ a coeficientes constantes e φ_f é um vetor $q \times 1$ de constantes conhecidas, $q < n$.

II.6.2 Problema de Valor de Contorno em Dois Pontos

Para o problema linear quadrático definido acima, é possível formular o problema de valor de contorno em dois pontos que caracteriza a solução ótima (extremal). Isto é feito a

partir da aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin. A partir das Eqs. (II.41) e (II.42), tem-se que a função Hamiltoniana é dada por:

$$H(x, \lambda^*, u) = -\frac{1}{2} [x^T Cx + 2x^T Du + u^T Eu] + \lambda^{*T} (Ax + Bu). \quad (\text{II.45})$$

Aplicando as condições necessárias, expressas pelo Princípio de Máximo de Pontryagin, obtém-se:

$$\frac{dx^*}{dt} = Ax^* + Bu^*, \quad \rightarrow \text{Eqs. de estado} \quad (\text{II.46})$$

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = Cx^* + Du^* - A^T \lambda^*, \quad \rightarrow \text{Eqs. adjuntas} \quad (\text{II.47})$$

$$D^T x^* + Eu^* - B^T \lambda^* = 0. \quad \rightarrow \text{Eqs. de controle} \quad (\text{II.48})$$

Isolando $u^*(t)$ na Eq. (II.48), substituindo nas Eqs. (II.46) e (II.47) e reescrevendo estas equações na forma matricial, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & -A_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}, \quad (\text{II.49})$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 &= A - BE^{-1}D^T \\ B_1 &= BE^{-1}B^T \\ C_1 &= C - DE^{-1}D^T. \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

Como a matriz Ψ não é necessariamente inversível, o estado final $x(t_f)$ em (II.44) não é necessariamente fixado, mesmo que φ_f seja conhecida. Desta forma, torna-se necessária a aplicação das condições de transversalidade. Utilizando sua forma implícita (Eqs. II.11 e II.12), obtém-se:

$$\lambda^T(t_f)\delta x(t_f) + x^T(t_f)G\delta x(t_f) = 0, \quad (\text{II.51})$$

$$\Psi\delta x(t_f) = 0. \quad (\text{II.52})$$

Introduzindo q multiplicadores de Lagrange $v_f \in \mathbb{R}^q$ e somando (II.51) e (II.52), obtém-se:

$$\left(\lambda^T(t_f) + x^T(t_f)G + v_f^T\Psi\right)\delta x(t_f) = 0. \quad (\text{II.53})$$

Como a expressão (II.53) é sempre verdadeira (os q multiplicadores garantem isso) e o estado final não é necessariamente nulo, a expressão entre parênteses deve ser nula. Assim:

$$\lambda^{*T}(t_f) = -x^{*T}(t_f)G - v_f^T\Psi, \quad (\text{II.54})$$

ou

$$\lambda^*(t_f) = -G^T x^*(t_f) - \Psi^T v_f. \quad (\text{II.55})$$

Assim, o problema de valor de contorno em dois pontos que caracteriza a solução ótima (extremal) do problema linear quadrático é dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & -A_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}, \quad (\text{II.56})$$

com condições de contorno:

$$x^*(t_0) = x_0 \quad (\text{II.57})$$

$$\Psi x^*(t_f) = \varphi_f \quad (\text{II.58})$$

$$\lambda^*(t_f) = -G^T x^*(t_f) - \Psi^T v_f. \quad (\text{II.59})$$

II.6.3 Resolução do Problema de Valor de Contorno em Dois Pontos

A seguir, é apresentada a resolução do problema de valor de contorno em dois pontos obtido na seção anterior, utilizando o método da matriz de transição de estados [9].

A solução geral da Eq. (II.56) obtida pela matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$, é da seguinte forma geral:

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} = \Phi(t, t_0) \begin{bmatrix} x^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{bmatrix} = \Phi(t, t_0) \begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0^* \end{bmatrix}, \quad (\text{II.60})$$

com

$$\frac{d\Phi}{dt} = M\Phi, \quad (\text{II.61})$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I, \quad (\text{II.62})$$

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & -A_1^T \end{bmatrix}. \quad (\text{II.63})$$

Expressando a matriz de transição de estados Φ , por:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (\text{II.64})$$

tem-se a partir de (II.60) que:

$$\mathbf{x}^*(t) = \Phi_{11}(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi_{12}(t, t_0)\lambda_0^*, \quad (\text{II.65})$$

$$\lambda^*(t) = \Phi_{21}(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi_{22}(t, t_0)\lambda_0^*. \quad (\text{II.66})$$

Combinando as Eqs. (II.58), (II.59), (II.65) e (II.66), obtém-se o seguinte sistema linear algébrico:

$$\Psi\Phi_{12}(t_f, t_0)\lambda_0^* = \varphi_f - \Psi\Phi_{11}(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 \quad (\text{II.67})$$

$$[\Phi_{22}(t_f, t_0) + \mathbf{G}^T\Phi_{12}(t_f, t_0)]\lambda_0^* + \Psi^T\mathbf{v}_f = -[\Phi_{21}(t_f, t_0) + \mathbf{G}^T\Phi_{11}(t_f, t_0)]\mathbf{x}_0, \quad (\text{II.68})$$

que pode ser reescrito como:

$$\mathbf{T}\lambda_0^* = \mathbf{U}\mathbf{x}_0 + \varphi_f \quad (\text{II.69})$$

$$\mathbf{V}\lambda_0^* + \Psi^T\mathbf{v}_f = \mathbf{W}\mathbf{x}_0, \quad (\text{II.70})$$

onde:

$$T = \Psi \Phi_{12}(t_f, t_0) \quad (\text{II.71})$$

$$U = -\Psi \Phi_{11}(t_f, t_0) \quad (\text{II.72})$$

$$V = \Phi_{22}(t_f, t_0) + G^T \Phi_{12}(t_f, t_0) \quad (\text{II.73})$$

$$W = -[\Phi_{21}(t_f, t_0) + G^T \Phi_{11}(t_f, t_0)]. \quad (\text{II.74})$$

A integração de (II.61), sujeita à condição inicial (II.62), fornece a matriz Φ . Como Ψ e G são conhecidas, T , U , V e W podem ser calculadas e o sistema linear definido por (II.69) e (II.70) pode então ser resolvido, por métodos numéricos. A solução deste sistema fornece $\lambda^*(t_0)$ e v_f (os quais, pela própria construção do problema, satisfazem (II.58) e (II.59)). De posse de $\lambda^*(t_0)$, e conhecendo $x^*(t_0)$ (Eq.(II.43)) e $\Phi(t, t_0)$, a solução final $x^*(t)$, $\lambda^*(t)$ é obtida por (II.60).

II.7 – CONCLUSÃO

A aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin ao Problema de Bolza, com ou sem restrições sobre as variáveis de controle, conduz a um problema de valor de contorno em dois pontos, que deve ser resolvido para obter a solução ótima do problema de otimização.

Dentre estes problemas, o chamado Problema Linear Quadrático apresenta grande aplicação prática. A resolução do TPBVP associado a ele utilizando a matriz de transição de estados, conforme apresentado acima, é utilizada no método da variação segunda. O estudo deste problema é, portanto, de grande interesse no escopo deste trabalho.

O capítulo seguinte apresenta o método da variação segunda, incluindo sua formulação matemática, as particularidades da utilização da matriz de transição de estados em sua resolução, o algoritmo numérico e alguns exemplos de aplicações a problemas com e sem restrições.

CAPÍTULO III

MÉTODO DA VARIAÇÃO SEGUNDA

Este capítulo descreve o método da variação segunda, utilizado neste trabalho para analisar problemas de transferências espaciais a baixo empuxo. Além da formulação do método e descrição do algoritmo, são apresentados alguns exemplos de aplicação a problemas com e sem restrições no controle.

III.1 – INTRODUÇÃO

O chamado método da variação segunda é um método numérico de segunda ordem utilizado na resolução de problemas de valor de contorno que surgem na resolução de problemas de otimização [7,45,51], após a aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin. O desenvolvimento deste método é o principal objetivo deste capítulo.

Inicialmente, é apresentada a formulação do problema de controle ótimo, enunciado como um Problema de Bolza, para o qual o método será desenvolvido. Em seguida, aplica-se o Princípio de Máximo e obtém-se o problema de valor de contorno não-linear associado ao problema de otimização. Este problema de valor de contorno é então linearizado em torno de uma solução nominal, sobre a qual correções são aplicadas iterativamente, na forma de modificações dos valores iniciais das variáveis adjuntas e dos multiplicadores de Lagrange.

Estas correções baseiam-se no conceito de trajetórias extremais vizinhas [51], que utiliza termos de segunda ordem de uma série de Taylor para minimizar uma aproximação linear quadrática do índice de performance e, ao mesmo tempo, satisfazer as restrições terminais do TPBVP. Ao empregar este procedimento, obtém-se um problema de valor de contorno linear cujas incógnitas são as correções procuradas. Este problema é então resolvido utilizando o método da matriz de transição de estados.

Todas estas etapas do método são apresentadas em uma das seções deste capítulo, na forma de um algoritmo. Por fim, são apresentados exemplos de aplicação deste algoritmo final a problemas com e sem restrições nas variáveis de controle.

III.2 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

O problema de controle ótimo associado ao método da variação segunda desenvolvido neste trabalho é o Problema de Bolza enunciado a seguir.

Seja um sistema descrito pelas equações:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (\text{III.1})$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ (controle sem restrições). O problema de otimização consiste em transferir o sistema definido por (III.1) do estado inicial fixado

$$x(t_0) = x_0, \quad (\text{III.2})$$

t_0 fixado, para o estado final definido por:

$$\Psi(x(t_f)) = 0, \quad (\text{III.3})$$

$\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $q < n$, t_f fixado, de forma a minimizar o índice de performance definido por:

$$\text{IP} = g(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u) dt. \quad (\text{III.4})$$

As funções g , L e Ψ_i , $i = 1, \dots, q$, satisfazem as hipóteses enunciadas no CAPÍTULO II. A função vetorial Ψ não deve ser confundida com a matriz de coeficientes definida na Eq. (II.44).

III.3 – PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO EM DOIS PONTOS

Conforme apresentado no capítulo anterior, a resolução de problemas de otimização é feita a partir da aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin, o que conduz a um problema de valor de contorno em dois pontos.

Desta forma, seja H a função Hamiltoniana associada ao problema de controle ótimo da seção anterior:

$$H(x, \lambda^*, u) = -L(x, u) + \lambda^{*T} f(x, u). \quad (\text{III.5})$$

Aplicando o Princípio de Máximo, obtém-se o seguinte problema de valor de contorno em dois pontos:

$$\frac{dx^*}{dt} = H_\lambda^T \quad (\text{III.6})$$

Sistema canônico

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = -H_x^T \quad (\text{III.7})$$

$$H_u = 0 \quad (\text{III.8})$$

Equação de controle

$$\lambda^T(t_f) + \frac{\partial g}{\partial x_f} + v_f^T \frac{\partial \Psi}{\partial x_f} = 0 \quad (\text{III.9})$$

Condições de transversalidade

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{III.10})$$

$$\Psi(x(t_f)) = 0, \quad (\text{III.11})$$

Condições de contorno

onde $v_f \in \mathbb{R}^q$. Este problema de valor de contorno caracteriza a solução ótima (extremal) do problema de Bolza enunciado na seção anterior.

III.4 – TRAJETÓRIAS EXTREMAIS VIZINHAS

A próxima etapa da resolução do problema de otimização seria determinar a solução do problema de valor de contorno obtido na seção anterior, Eqs. (III.6) a (III.11). Esta solução pode, em princípio, ser obtida integrando-se (III.6) e (III.7), supondo que a lei de controle ótimo $u^*(t)$ possa ser obtida em função de $x(t)$ e $\lambda(t)$, a partir de (III.8). No entanto, para integrar (III.6) e (III.7), são necessários os valores não só de $x(t_0)$, dados por (III.10), mas também de $\lambda(t_0)$, que é desconhecido *a priori*. Como as Eqs. (III.9) e (III.11) também devem ser satisfeitas, é preciso conhecer também v_f .

Para determinar as incógnitas $\lambda(t_0)$ e v_f , o método da variação segunda utiliza um procedimento que lineariza o sistema em torno de uma trajetória nominal extremal, i.e., satisfaz as condições necessárias (Equação de Euler-Lagrange), mas não necessariamente as restrições terminais. Ele determina, então, correções iterativas que devem ser aplicadas a esta trajetória de forma a satisfazer as condições de contorno no instante final.

Todo este procedimento envolve o conceito de trajetórias extremas vizinhas [51], que é apresentado nesta seção.

III.4.1 Linearização do Problema de Otimização

Para o problema de controle ótimo apresentado acima, definido pelas Eqs. (III.1) a (III.4), tem-se da teoria do Cálculo Variacional que minimizar o funcional (III.4), sujeito a (III.1) e (III.3), é equivalente a minimizar o seguinte funcional:

$$J = \overline{IP} = g(x(t_f)) + \Psi^T(x(t_f))v_f + \int_{t_0}^{t_f} [-H(x, \lambda, u) + \lambda^T \dot{x}] dt, \quad (III.12)$$

onde H é a função Hamiltoniana definida em (III.5):

$$H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}) = -L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \lambda^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (\text{III.13})$$

Conforme mencionado, os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange, $\lambda_i(t_0)$, $i = 1, \dots, n$, são desconhecidos. Seja λ_{0i} , então, uma estimativa inicial destes valores, e seja J_1 o valor correspondente do funcional J em (III.12). Expandindo J em série de Taylor em torno de J_1 , até os termos de segunda ordem, tem-se:

$$J \cong J_1 + \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J, \quad (\text{III.14})$$

onde δJ e $\delta^2 J$ correspondem, respectivamente, à primeira e segunda variações do funcional, e são dadas por:

$$\delta J = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_f} + \mathbf{v}_f^T \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_f} \right) \delta \mathbf{x}_f + \Psi^T d\mathbf{v}_f + \int_{t_0}^{t_f} \left(\lambda^T \delta \dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \delta \lambda + \delta \lambda^T \dot{\mathbf{x}} \right) dt, \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \delta \mathbf{x}_f^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_f^2} + \mathbf{v}_f^T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{x}_f^2} \right) \delta \mathbf{x}_f + 2 \delta \mathbf{x}_f^T \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_f} d\mathbf{v}_f + \int_{t_0}^{t_f} \left(-\delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} - \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \delta \mathbf{u} - \right. \\ & \left. \delta \lambda^T \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} \delta \lambda - 2 \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - 2 \delta \lambda^T \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} - 2 \delta \lambda^T \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + 2 \delta \lambda^T \delta \dot{\mathbf{x}} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Nas expressões acima, as derivadas segundas da Hamiltoniana são matrizes, como, por exemplo:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \lambda \partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \lambda_1 \partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \lambda_n \partial \mathbf{x}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \lambda_1 \partial \mathbf{x}_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \lambda_n \partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.17})$$

As demais derivadas são análogas à expressão em (III.17).

A substituição de (III.15) e (III.16) em (III.14) fornece a expansão até segunda ordem do funcional (III.12), em torno de uma trajetória arbitrária, associada ao valor J_1 . Para garantir que esta trajetória seja extremal, as condições necessárias de otimização, Eqs. (III.6) a (III.8), devem ser satisfeitas. Desta forma, substituindo (III.15) e (III.16) em (III.14), atribuindo as condições (III.6)-(III.8) e observando que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (-L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \lambda^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = 0, \quad (\text{III.18})$$

resulta:

$$\begin{aligned} J - J_1 = & \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_f} + \mathbf{v}_f^T \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_f} \right) \delta \mathbf{x}_f + \Psi^T \mathbf{d} \mathbf{v}_f + \frac{\delta \mathbf{x}_f^T}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_f^2} + \mathbf{v}_f^T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{x}_f^2} \right) \delta \mathbf{x}_f + \delta \mathbf{x}_f^T \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_f} \mathbf{d} \mathbf{v}_f + \\ & (\lambda_f^T + \delta \lambda_f^T) \delta \mathbf{x}_f - \int_{t_0}^{t_f} \left[\delta \mathbf{x}^T \delta \dot{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}^2} \delta \mathbf{u} \right) + \right. \\ & \left. \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \delta \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \lambda \partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \delta \lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \lambda \partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \right] dt \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

A Eq. (III.19) corresponde à expansão até segunda ordem, em torno de uma trajetória nominal extremal, do funcional associado ao problema de otimização definido por (III.1)-

(III.4). É interessante observar que esta expansão está associada a uma forma linear quadrática, como no problema discutido na seção II.6.

III.4.2 Minimização do Funcional Linearizado

Como se trata de um problema de otimização, agora definido por (III.19), deve-se procurar obter um mínimo para este funcional. Ou seja, deve-se determinar os valores das grandezas $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \lambda(t)$, δx_f e dv_f de forma que esta aproximação de segunda ordem seja mínima. Matematicamente, isto corresponde a fazer nulas a primeira variação do funcional (III.19) com respeito as funções $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \lambda(t)$, δx_f e aos parâmetros dv_f . Das condições necessárias do Cálculo de Variações – Equações de Euler-Lagrange, obtêm-se as seguintes equações:

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \lambda} \delta \lambda, \quad (\text{III.20})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} \delta \lambda = 0, \quad (\text{III.21})$$

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial x} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial u} \delta u, \quad (\text{III.22})$$

$$\lambda_f^T + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_f} + \mathbf{v}_f^T \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_f} + \delta \lambda_f^T + \delta \mathbf{x}_f^T \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_f^2} + \mathbf{v}_f^T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{x}_f^2} \delta \mathbf{x}_f + d\mathbf{v}_f^T \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_f} = 0, \quad (\text{III.23})$$

$$\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_f} \delta \mathbf{x}_f = 0. \quad (\text{III.24})$$

Notamos que esta última equação resulta da condição necessária para o mínimo de funções de n variáveis do Cálculo Diferencial, uma vez que dv_f são parâmetros.

Em seguida, supondo que a condição de Clebsch-Legendre forte, $\mu^T H_{uu} \mu < 0$, é satisfeita, ou seja, ao longo da trajetória nominal inicial (associada a J_1), tem-se:

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right| \neq 0, \quad (\text{III.25})$$

é possível expressar δu a partir de (III.21):

$$\delta u = - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} \delta \lambda \right\}. \quad (\text{III.26})$$

Substituindo (III.26) em (III.20) e (III.22) e reorganizando, obtém-se o sistema linear:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \lambda \end{bmatrix}, \quad (\text{III.27})$$

onde

$$F_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} = H_{\lambda x} - H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{ux}, \quad (\text{III.28})$$

$$F_{12} = - \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda \partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} = -H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda}, \quad (\text{III.29})$$

$$F_{21} = - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} = -H_{xx} + H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux}, \quad (\text{III.30})$$

$$F_{22} = - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \lambda} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda} = -H_{x\lambda} + H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda}. \quad (\text{III.31})$$

O sistema (III.27), em conjunto com as Eqs. (III.23) e (III.24) e a variação da Eq. (III.10):

$$\delta x_0 = 0, \quad (III.32)$$

formam um novo problema de valor de contorno linear. A resolução deste problema, apresentada a seguir na seção III.5, fornece as correções procuradas e é feita através da matriz de transição de estados, conforme discutido na seção II.6.3. Antes, porém, a próxima seção discute o conceito por trás da idéia de determinar estas correções.

III.4.3 Trajetórias Extremais Vizinhas

Ao expandir J em série de Taylor em torno de J_1 , significa que os valores de J passam a ser obtidos a partir de alterações no valor de J_1 . Em outras palavras, isto significa que as variações $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \lambda(t)$, δx_f e δv_f , ao serem aplicadas a seus respectivos valores da primeira estimativa, fornecem novos valores destas grandezas, associados a um novo J . Ou seja, os valores de $x(t)$, $u(t)$, $\lambda(t)$, x_f e v_f obtidos a partir de

$$x(t) = x_1(t) + \delta x, \quad (III.33)$$

$$u(t) = u_1(t) + \delta u, \quad (III.34)$$

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \delta \lambda, \quad (III.35)$$

$$x_f = x_{f_1} + \delta x_f, \quad (III.36)$$

$$v_f = v_{f_1} + \delta v_f, \quad (III.37)$$

correspondem a um novo valor de J .

Além disto, ao expandir em série de Taylor, está-se implicitamente assumindo que as variações $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \lambda(t)$, δx_f e dv_f são pequenas, de forma que a hipótese de linearidade subentendida na expansão permaneça válida.

É aqui que surge o conceito de trajetórias extremais vizinhas. A nova trajetória associada a $x(t)$, $u(t)$, $\lambda(t)$, x_f e v_f , obtidos a partir das variações em (III.33)-(III.37), é próxima, ou vizinha, àquela associada à primeira estimativa. Além disto, como ela é determinada de forma a minimizar (III.19), implica que deve satisfazer esta equação e, portanto, também corresponde a uma trajetória extremal.

A determinação das variações $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \lambda(t)$, δx_f e dv_f corresponde, portanto, à determinação de correções da trajetória extremal inicial. A nova trajetória obtida, também extremal, é próxima (vizinha) à anterior e corresponde a uma nova estimativa da trajetória ótima. A próxima seção trata da determinação destas correções e da nova trajetória, a partir do sistema obtido na seção anterior.

III.5 – RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO LINEAR

A solução do problema de valor de contorno linear definido por (III.23), (III.24), (III.27) e (III.32) pode ser obtida via matriz de transição de estados, análogo à resolução do problema linear quadrático apresentado no capítulo anterior (seção II.6.3). Neste caso, em vista das equações (II.60) a (II.66), tem-se:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\lambda x} - H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{ux} & -H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} \\ -H_{xx} + H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux} & -H_{x\lambda} + H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} \end{bmatrix} \Phi, \quad (\text{III.38})$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I. \quad (\text{III.39})$$

e, conseqüentemente,

$$\delta x(t) = \Phi_{11}(t, t_0)\delta x_0 + \Phi_{12}(t, t_0)\delta \lambda_0, \quad (\text{III.40})$$

$$\delta \lambda(t) = \Phi_{21}(t, t_0)\delta x_0 + \Phi_{22}(t, t_0)\delta \lambda_0. \quad (\text{III.41})$$

Introduzindo (III.40) na Eq. (III.24) e (III.40) e (III.41) na Eq. (III.23), e utilizando a notação simplificada de derivação parcial da Eq. (III.38), obtém-se o seguinte sistema algébrico nas incógnitas $\delta \lambda_0$ e dv_f :

$$\Psi_{x_f} \Phi_{12}(t_f, t_0)\delta \lambda(t_0) = -\Psi - \Psi_{x_f} \Phi_{11}(t_f, t_0)\delta x_0, \quad (\text{III.42})$$

$$\begin{aligned} & \left[\Phi_{22}(t_f, t_0) + \left(\mathbf{g}_{x_f x_f}^T + \mathbf{v}_f^T \Psi_{x_f x_f} \right) \Phi_{12}(t_f, t_0) \right] \delta \lambda_0 + \Psi_{x_f}^T dv_f = \\ & - \left(\mathbf{g}_{x_f}^T + \Psi_{x_f}^T \mathbf{v}_f + \lambda_f \right) - \left[\Phi_{21}(t_f, t_0) + \left(\mathbf{g}_{x_f x_f}^T + \mathbf{v}_f^T \Psi_{x_f x_f} \right) \Phi_{11}(t_f, t_0) \right] \delta x_0. \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

A partir da Eq. (III.32), este sistema pode ser simplificado para:

$$\mathbf{T} \delta \lambda_0 = -\Psi \quad (\text{III.44})$$

$$\mathbf{U} \delta \lambda_0 + \mathbf{V} dv_f = - \left(\mathbf{g}_{x_f}^T + \Psi_{x_f}^T \mathbf{v}_f + \lambda_f \right), \quad (\text{III.45})$$

onde,

$$\mathbf{T} = \Psi_{x_f} \Phi_{12}(t_f, t_0), \quad (\text{III.46})$$

$$\mathbf{U} = \Phi_{22}(t_f, t_0) + \left(\mathbf{g}_{x_f x_f}^T + \mathbf{v}_f^T \Psi_{x_f x_f} \right) \Phi_{12}(t_f, t_0), \quad (\text{III.47})$$

$$\mathbf{V} = \Psi_{x_f}^T. \quad (\text{III.48})$$

A resolução, através de métodos numéricos, do sistema formado por (III.44) e (III.45) fornece as variações $\delta \lambda_0$ e dv_f procuradas. A partir daí, determina-se uma nova estimativa para os multiplicadores de Lagrange, da seguinte forma:

$$\lambda_{0_2} = \lambda_{0_1} + \delta\lambda_0 \quad (\text{III.49})$$

$$v_{f_2} = v_{f_1} + \delta v_f. \quad (\text{III.50})$$

Estes novos valores, em conjunto com o conhecido x_0 , são utilizados para integrar novamente o sistema dinâmico e obter uma nova estimativa da trajetória ótima. Este procedimento é repetido até que as condições terminais sejam satisfeitas, dentro de uma certa precisão. A próxima seção apresenta uma descrição completa de todo este procedimento, na forma de um algoritmo.

III.6 – DESCRIÇÃO DO ALGORITMO

O algoritmo final do método da variação segunda é descrito a seguir:

1. Estabelecer uma estimativa inicial para λ_0 e v_f (λ_{0_1} e v_{f_1});
2. A partir da estimativa inicial para λ_0 e do conhecido x_0 , integrar (III.6) e (III.7), numericamente. A solução obtida irá satisfazer (III.8) e (III.10);
3. Verificar se a solução obtida satisfaz (III.9) e (III.11). Caso satisfaça, esta é a solução do problema;
4. Caso não satisfaça, integrar (III.38) numericamente, sujeito à condição (III.39), e obter Φ ;
5. Determinar T, U e V (Eqs. (III.46)–(III.48));

6. Resolver numericamente o sistema linear formado por (III.44) e (III.45) e obter as variações $\delta\lambda_0$ e dv_f . A estimativa inicial de v_f é necessária nesta etapa.
7. Corrigir os valores de λ_0 e v_f (Eqs. (III.49) e (III.50));
8. Integrar (III.6) e (III.7), utilizando os novos valores de λ_0 e v_f ;
9. Voltar à etapa 3.

III.7 – DETERMINAÇÃO DIRETA DAS EQUAÇÕES DO ALGORITMO

Conforme apresentado na seção III.4, a maneira utilizada pelo método da variação segunda para resolver o TPBVP associado ao problema de otimização baseia-se no conceito de trajetórias extremas vizinhas. Tal conceito envolve a expansão em série de Taylor de um funcional aumentado (Eq. (III.14)), até os termos de segunda ordem. Em outras palavras, ele envolve o cálculo da segunda variação do funcional (Eq. (III.16)), e é por isto que o método recebe este nome.

É interessante observar que esta variação segunda do funcional gera termos com derivadas parciais de segunda ordem da Hamiltoniana. Na verdade, a partir do algoritmo apresentado acima, percebe-se que, para utilizar o método da variação segunda na resolução de um problema de controle ótimo, não basta aplicar o Princípio de Máximo e obter o problema de valor de contorno em dois pontos associado. É preciso, também, obter a matriz M , dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\lambda x} - \mathbf{H}_{\lambda u} \mathbf{H}_{uu}^{-1} \mathbf{H}_{ux} & -\mathbf{H}_{\lambda u} \mathbf{H}_{uu}^{-1} \mathbf{H}_{u\lambda} \\ -\mathbf{H}_{xx} + \mathbf{H}_{xu} \mathbf{H}_{uu}^{-1} \mathbf{H}_{ux} & -\mathbf{H}_{x\lambda} + \mathbf{H}_{xu} \mathbf{H}_{uu}^{-1} \mathbf{H}_{u\lambda} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.51})$$

de forma a poder integrar (III.38) numericamente, sujeito à condição (III.39), e obter Φ (etapa 4 do algoritmo). Esta matriz corresponde apenas a termos de segunda ordem da Hamiltoniana.

É importante mencionar que, além da maneira apresentada acima de se obter as equações que caracterizam o método da variação segunda, Eqs. (III.44) a (III.48) e (III.51), existe uma outra, mais direta. Ela envolve a linearização das Eqs. (III.6) a (III.11), considerando as variações $\delta x(t)$, $\delta u(t)$, $\delta \lambda(t)$, δx_f e dv_f em (III.33)-(III.37). Introduzindo estas variações em (III.6)-(III.11) obtém-se, após um processo de linearização, que:

$$\frac{d\delta x}{dt} = \mathbf{H}_{\lambda x} \delta x + \mathbf{H}_{\lambda u} \delta u, \quad (\text{III.52})$$

$$\frac{d\delta \lambda}{dt} = -\mathbf{H}_{xx} \delta x - \mathbf{H}_{xu} \delta u - \mathbf{H}_{x\lambda} \delta \lambda, \quad (\text{III.53})$$

$$\mathbf{H}_{uu} \delta u + \mathbf{H}_{ux} \delta x + \mathbf{H}_{u\lambda} \delta \lambda = 0, \quad (\text{III.54})$$

$$\delta \lambda_f^T = -\left\{ \lambda_f^T + \mathbf{g}_{x_f} + \mathbf{v}_f^T \Psi_{x_f} + \delta x_f^T \mathbf{g}_{x_f x_f} + \mathbf{v}_f^T \Psi_{x_f x_f} \delta x_f + d\mathbf{v}_f^T \Psi_{x_f} \right\}, \quad (\text{III.55})$$

$$\delta x_0 = 0, \quad (\text{III.56})$$

$$\Psi_{x_f} \delta x_f = -\Psi. \quad (\text{III.57})$$

É interessante observar que as Eqs. (III.52) a (III.55) e (III.57) correspondem, justamente, às Eqs. (III.20) a (III.24). Desta forma, utilizando o mesmo procedimento apresentado nas seções acima, estas equações resultam exatamente no sistema formado pelas Eqs. (III.44) a (III.48), o que corresponde a parte das equações do algoritmo. Para finalizar, resta apenas obter a matriz \mathbf{M} de uma forma mais direta.

Para tanto, supõe-se que a lei de controle $u^*(t)$ possa ser obtida em função de $x(t)$ e $\lambda(t)$, a partir de (III.8), tornando o sistema definido por (III.6) e (III.7) dependente apenas de $x(t)$ e $\lambda(t)$, da seguinte forma:

$$\frac{dx^*}{dt} = H_{\lambda}^T(x(t), \lambda(t), u(x(t), \lambda(t))) = \Lambda(x(t), \lambda(t)), \quad (\text{III.58})$$

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = -H_x^T(x(t), \lambda(t), u(x(t), \lambda(t))) = -\Xi(x(t), \lambda(t)). \quad (\text{III.59})$$

Com isto, a matriz M pode ser obtida linearizando-se diretamente as Eqs. (III.58) e (III.59) e passa a ser dada por:

$$M = \begin{bmatrix} \Lambda_x & \Lambda_{\lambda} \\ -\Xi_x & -\Xi_{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.60})$$

Na próxima seção, são mostradas algumas aplicações do método a problemas de controle ótimo conhecidos, sem restrições. Nestas aplicações, são descritas as etapas de implementação do método.

III.8 – APLICAÇÃO A PROBLEMAS SEM RESTRIÇÕES

A fim de mostrar a validade do método da variação segunda, são apresentados resultados de sua aplicação a diversos problemas simples de controle ótimo. Como as soluções analíticas destes problemas são conhecidas, é possível analisar a exatidão das soluções obtidas com o método. Nesta seção, em particular, consideram-se problemas sem restrições nas variáveis de controle.

III.8.1 Problema de Zermelo com Velocidade de Correnteza Constante

O Problema de Zermelo é bastante clássico em controle ótimo e corresponde a um problema de navegação em tempo mínimo [9,39,40].

Seja um barco que se desloca com velocidade constante V em relação a uma correnteza de velocidade também constante S em relação às margens do rio. Considerando S na direção x_1 , as equações que descrevem a dinâmica do barco são:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= V \sin \theta + S \\ \frac{dx_2}{dt} &= V \cos \theta,\end{aligned}\tag{III.61}$$

onde θ é ângulo que a velocidade do barco faz com a direção perpendicular às margens do rio, como ilustrado na Figura 5.3.

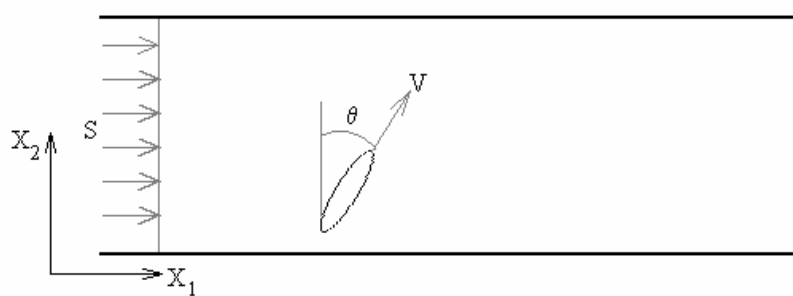


Figura III.1. Ilustração do Problema de Zermelo com velocidade de correnteza constante.

Como se trata de um problema de tempo mínimo, o índice de performance é dado por:

$$IP = t_f.\tag{III.62}$$

Para aplicar o algoritmo desenvolvido, é necessário transformar este problema de tempo final livre em um problema de tempo fixo [33,44]. Isto pode ser feito utilizando a seguinte transformação:

$$\begin{aligned}x_3 &= t_f \\ t &= x_3 \tau,\end{aligned}\tag{III.63}$$

com $\tau \in [0,1]$. Assim, o sistema definido em (III.61) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= x_3(V\text{sen}\theta + S) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_3 V \cos \theta \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= 0,\end{aligned}\tag{III.64}$$

e o índice de performance é modificado para

$$IP = x_3(1).\tag{III.65}$$

Com essas modificações, o intervalo de integração é fixo entre os instantes 0 e 1, e o parâmetro a ser minimizado é uma das próprias variáveis de estado (Problema de Mayer).

Novamente, para aplicar o Princípio de Máximo de Pontryagin é preciso construir a função Hamiltoniana:

$$H = \lambda_1 x_3 (S + V\text{sen}\theta) + \lambda_2 x_3 V \cos \theta,\tag{III.66}$$

e aplicar a condição de estacionaridade, obtendo:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = H_{\theta} = 0 \Rightarrow \lambda_1 x_3 \cos \theta - \lambda_2 x_3 \sin \theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (\text{III.67})$$

De (III.67), é possível expressar $\sin \theta$ e $\cos \theta$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\pm \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \\ \cos \theta &= \frac{\pm \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

Da condição de Clebsch-Legendre,

$$\begin{aligned} \mu^T H_{uu} \mu &\leq 0 \\ \Downarrow \\ \mu^2 (-\lambda_1 x_3 V \sin \theta - \lambda_2 x_3 V \cos \theta) &\leq 0 \\ \Downarrow \\ \pm \lambda_1^2 &\geq -(\pm \lambda_2^2), \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

verifica-se que o sinal “+” deve ser escolhido em (III.68). Deste modo, obtém-se o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\tau} &= x_3 \left(S + V \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right) \\
\frac{dx_2}{d\tau} &= x_3 \left(V \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right) \\
\frac{dx_3}{d\tau} &= 0 \\
\frac{d\lambda_1}{d\tau} &= 0 \\
\frac{d\lambda_2}{d\tau} &= 0 \\
\frac{d\lambda_3}{d\tau} &= - \left(S\lambda_1 + V\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.70}$$

com condições de contorno:

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= x_{1_0}; & x_2(0) &= x_{2_0}, \\
x_1(1) &= x_{1_f}; & x_2(1) &= x_{2_f}.
\end{aligned} \tag{III.71}$$

A matriz M é obtida diretamente a partir do sistema (III.70):

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S + \frac{V\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} & \frac{Vx_3\lambda_2^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{3/2}} & -\frac{V\lambda_1\lambda_2x_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} & -\frac{V\lambda_1\lambda_2x_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{3/2}} & \frac{Vx_3\lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(S + \frac{V\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right) & -\frac{V\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{III.72}$$

Os resultados obtidos são apresentados a seguir, na Figura III.2, e são válidos para o caso em que $x_{1_0} = x_{2_0} = 0$, $x_{1_f} = 10$, $x_{2_f} = 5$, $V = 1$ e $S = 0,02$. A trajetória ótima é o segmento de reta unindo os pontos terminais. O valor obtido para o tempo de navegação, parâmetro a ser minimizado, é 10,98428638. Este resultado está em acordo com o resultado analítico conhecido da literatura [40], segundo o qual $t_f = 10,98428637951$.

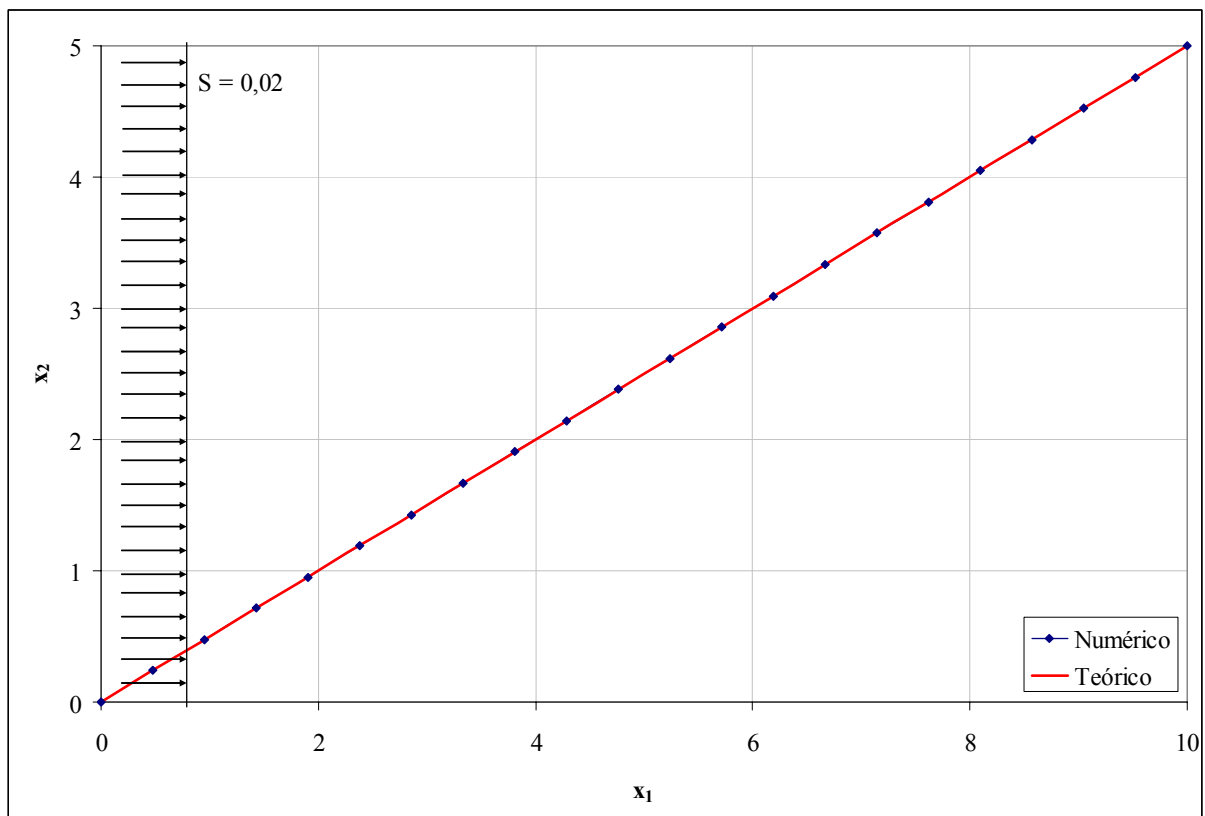


Figura III.2. Trajetória ótima obtida e teórica para o Problema de Zermelo com velocidade de correnteza constante.

III.8.2 Problema de Zermelo com Velocidade de Correnteza Variável

Este problema é exatamente análogo ao anterior, sendo que a única modificação a ser feita é alterar S , tornando-o variável. Seja, por exemplo, o seguinte perfil parabólico, ilustrado a seguir:

$$S = ax_2^2 + bx_2 + c. \quad (\text{III.73})$$

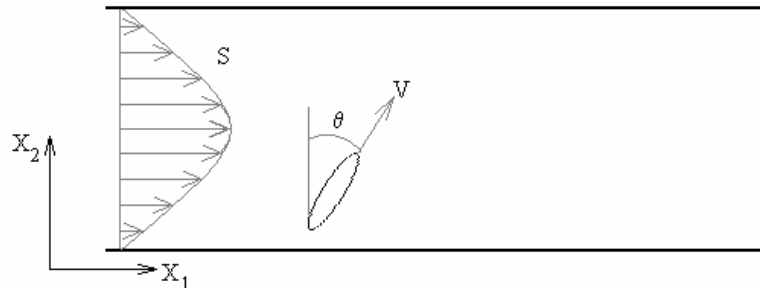


Figura III.3. Problema de Zermelo com perfil de velocidade de correnteza parabólico.

Com isto, as derivadas de Hamiltoniana que fornecem as equações dinâmicas do sistema se modificam. O novo problema de valor de contorno é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_3 \left(S + V \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_3 \left(V \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d\lambda_1}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d\lambda_2}{d\tau} &= -\lambda_1 x_3 (2ax_2 + b) \\ \frac{d\lambda_3}{d\tau} &= -\left(S\lambda_1 + V\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

com as mesmas condições de contorno (III.71). A matriz M , novamente, é obtida diretamente a partir do sistema (III.74):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & x_3(2ax_2 + b) & S + \frac{V\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} & \frac{Vx_3\lambda_2^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{3/2}} & -\frac{V\lambda_1\lambda_2x_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} & -\frac{V\lambda_1\lambda_2x_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{3/2}} & \frac{Vx_3\lambda_1^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a\lambda_1x_3 & -\lambda_1(2ax_2 + b) & -x_3(2ax_2 + b) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1(2ax_2 + b) & 0 & -\left(S + \frac{V\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\right) & -\frac{V\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

(III.75)

Os resultados obtidos são apresentados a seguir, na Figura III.4, e são válidos para o caso em que $x_{1_0} = x_{2_0} = 0$, $x_{1_f} = 10$, $x_{2_f} = 5$, $V = 1$ e S é o seguinte perfil parabólico:

$$S = -\frac{x_2^2 - 5x_2}{2,5}, \tag{III.76}$$

ou seja, $a = -0,4$; $b = 2$ e $c = 0$. O valor obtido para o tempo de navegação, parâmetro a ser minimizado, é 5,178076872.

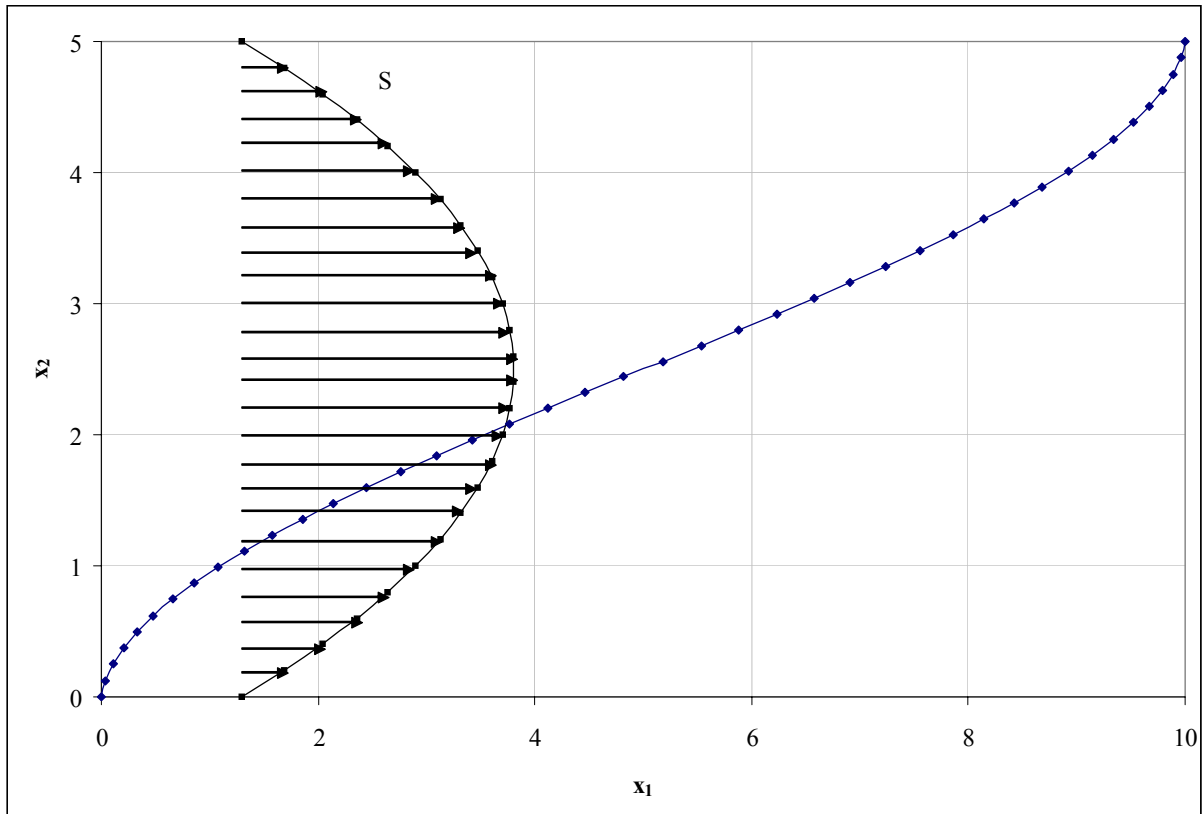


Figura III.4. Trajetória ótima obtida para o Problema de Zermelo com velocidade de correnteza variável.

III.9 – EXTENSÃO DO ALGORITMO PARA PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES

É importante observar que todo desenvolvimento apresentado nas seções anteriores deste capítulo, incluindo os exemplos de aplicação, considera um controle sem restrições. A fim de aplicar o método da variação segunda a problemas com restrições, é necessário estender o algoritmo apresentado, de forma a considerar tais restrições. Esta seção apresenta o tratamento utilizado para problemas deste tipo.

III.9.1 Índice de Performance Aumentado

Para poder aplicar o método a problemas com vínculo, inicialmente, transforma-se a restrição de desigualdade do controle em uma restrição de igualdade, do tipo:

$$\Phi(u) = 0, \quad (\text{III.77})$$

conforme descrito na seção II.4.2. Em seguida, é possível reescrever o índice de performance da seguinte forma:

$$\bar{IP} = IP + K \int_0^1 \|\Phi(u)\|^2 dt, \quad (\text{III.78})$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana. A integral na expressão acima é chamada de função de penalidade [55]. Como ela é positiva, e considerando que IP também o seja, minimizar o novo índice de performance aumentado corresponde a fazer $\|\Phi(u)\|$ o mais próximo possível de zero, satisfazendo a condição (III.77), dentro de uma certa precisão. O valor de K é fornecido, e quanto maior ele for, tanto mais próximo de zero o integrando deve ser para minimizar \bar{IP} . Desta forma, ao resolver este problema com o código implementado, utilizam-se valores de K cada vez maiores, melhorando os resultados obtidos.

III.9.2 Aproximação para o Controle

Após obter o índice de performance aumentado, escreve-se a função Hamiltoniana associada ao problema, considerando o novo IP, e aplica-se o Princípio de Máximo de Pontryagin. Como a Hamiltoniana envolve K, as equações obtidas da aplicação da condição de estacionaridade vão apresentar um parâmetro da forma $1/K$, que denotaremos por ε . Como o caso limite $K \rightarrow \infty$ (ou, analogamente, $\varepsilon \rightarrow 0$) nunca é alcançado em termos práticos (numéricos), e estas equações têm de ser satisfeitas, é preciso encontrar uma aproximação

para o valor do controle ótimo u^* , que deve ser empregada a cada iteração. Esta aproximação é da forma:

$$u^* = u_{\text{real}}^* + \alpha \varepsilon, \quad (\text{III.79})$$

onde $\alpha = \alpha(x, \lambda)$ e u_{real}^* denota o valor real do controle, obtido da aplicação do Princípio de Máximo ao problema original (sem o uso da função de penalidade).

Como o controle é agora dado a cada iteração como função do estado e de suas adjuntas, de acordo com (III.79), no processo de linearização do sistema para obter a matriz M , que define a equação diferencial para a matriz de transição de estados, irão aparecer naturalmente termos envolvendo a variação do controle δu expressos em função das variações, δx e $\delta \lambda$, através de $\varepsilon \alpha(x, \lambda)$, tal como ocorre para problemas sem restrições em que $u^* = u^*(x, \lambda)$.

A próxima seção mostra algumas aplicações do método a problemas conhecidos de controle ótimo com restrições, utilizando o tratamento apresentado acima. Novamente, as etapas de implementação do método são descritas.

III.10 – APLICAÇÃO A PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES

Nesta seção são apresentados mais alguns resultados da aplicação do método da variação segunda a problemas de controle ótimo cujas soluções são conhecidas. Neste caso, porém, os problemas considerados possuem restrições nas variáveis de controle.

III.10.1 Problema de Tempo Mínimo – Trajetórias Parabólicas

Seja o sistema dinâmico definido pelas equações de estado:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u.\end{aligned}\tag{III.80}$$

O problema consiste em determinar a trajetória ótima que transfere este sistema de uma dada condição inicial (x_0, y_0) , em $t_0 = 0$, para a origem do plano de fase, no menor tempo possível [53]. Considera-se que a variável de controle está sujeita ao vínculo de desigualdade

$$|u| \leq 1.\tag{III.81}$$

Por também se tratar de um problema de tempo mínimo, como o de Zermelo, é conveniente utilizar a mesma transformação empregada naquele caso e modificar este problema para tempo fixo. Assim, considerando as Equações (III.63), o sistema acima pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= x_3 x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_3 u_1 \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= 0,\end{aligned}\tag{III.82}$$

sendo $u_1 = u$ e $x_3(0) = 0$. O novo índice de performance a ser minimizado é:

$$IP = x_3(1). \quad (\text{III.83})$$

Para poder aplicar o método da variação segunda, é preciso considerar a restrição de desigualdade no controle. Este tipo de restrição pode ser transformada em uma de igualdade, através da introdução de uma variável de controle auxiliar, da seguinte forma:

$$|u_1| \leq 1 \Rightarrow u_1^2 \leq 1 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 1 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 - 1 = 0. \quad (\text{III.84})$$

Introduzindo a função de penalidade apresentada na seção anterior (Eq. (III.78)), é possível reescrever o índice de performance como:

$$IP = x_3(1) + K \int_0^1 (u_1^2 + u_2^2 - 1)^2 dt. \quad (\text{III.85})$$

A função Hamiltoniana associada a este problema, considerando este novo IP, é:

$$H = x_3(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u_1) - K(u_1^2 + u_2^2 - 1)^2. \quad (\text{III.86})$$

Aplicando a condição de estacionaridade, resulta:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow x_3 \lambda_2 - 2K(u_1^2 + u_2^2 - 1)2u_1 = 0, \quad (\text{III.87})$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow -2K(u_1^2 + u_2^2 - 1)2u_2 = 0. \quad (\text{III.88})$$

De (III.87) segue que, com $u_2 = 0$ obtido de forma a satisfazer (III.88), que:

$$\begin{aligned} x_3 \lambda_2 - 4K u_1 (u_1^2 - 1) &= 0 \\ \Downarrow \\ u_1^3 - u_1 - \frac{1}{4K} x_3 \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

No caso limite $K \rightarrow \infty$, que corresponde ao problema original, tem-se de (III.89) que:

$$u_1 (u_1^2 - 1) = 0 \Rightarrow u_1 \neq 0 \Rightarrow u_1 = \pm 1. \quad (\text{III.90})$$

Notamos que a outra possibilidade de se satisfazer (III.88) não convém, pois no caso limite, $K \rightarrow \infty$, não conduz à lei de controle ótimo $u(t) = \pm 1$ para o problema original.

Considere, então, uma aproximação para o valor de u_1 conforme discutido na seção III.9.2. Seja o caso $u_1 = 1$, considerando uma correção da forma $\alpha\varepsilon$, onde α deve ser determinado e

$$\varepsilon = \frac{1}{4K}, \quad (\text{III.91})$$

tem-se de (III.89) que

$$\begin{aligned} u_1 (u_1^2 - 1) - \varepsilon x_3 \lambda_2 &= 0 \\ \Downarrow \\ (1 + \alpha\varepsilon) \left((1 + \alpha\varepsilon)^2 - 1 \right) - \varepsilon x_3 \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

Desprezando os termos de segunda ordem em (III.92), obtém-se a seguinte expressão para α :

$$\alpha = \frac{x_3 \lambda_2}{2}. \quad (\text{III.93})$$

No caso $u_1 = -1$, obtém-se o mesmo valor de α .

O problema de valor de contorno é obtido a partir das condições necessárias, e é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_3 x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_3 u_1 \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d\lambda_1}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d\lambda_2}{d\tau} &= -x_3 \lambda_1 \\ \frac{d\lambda_3}{d\tau} &= -(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u_1). \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

Como o controle a cada iteração é função das variáveis de estado e adjuntas através de α , ao se linearizar este sistema para obter a matriz M aparecem os termos do tipo δu_1 . Estes termos podem ser obtidos diferenciando-se a Equação (III.89), com a correção de u_1 dada a partir de (III.93), pois

$$u_1 = \pm 1 + \varepsilon \alpha = \pm 1 + \varepsilon \frac{x_3 \lambda_2}{2}. \quad (\text{III.95})$$

A matriz M é então dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 + \frac{\epsilon x_3 \lambda_2}{3u_1^2 - 1} & 0 & \frac{\epsilon x_3^2}{3u_1^2 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & -\frac{\epsilon \lambda_2^2}{3u_1^2 - 1} & -x_2 & -\left(u_1 + \frac{\epsilon x_3 \lambda_2}{3u_1^2 - 1}\right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.96})$$

Os resultados obtidos para a trajetória e para o controle são ilustrados a seguir nas Figuras III.5 e III.6. O ponto inicial é (2,2) e o valor de ϵ é tomado como 0,001. Observando os gráficos apresentados nas Figuras III.5 e III.6, percebe-se a excelente proximidade entre os resultados numérico e teórico, tanto para a trajetória ótima quanto para o controle ótimo. É interessante notar também o valor encontrado para o tempo final: 5,998376366. O teórico é 6 exato, ou seja, há um desvio de apenas 0,03%, ou ainda, o erro cometido com a aproximação é da ordem de ϵ .

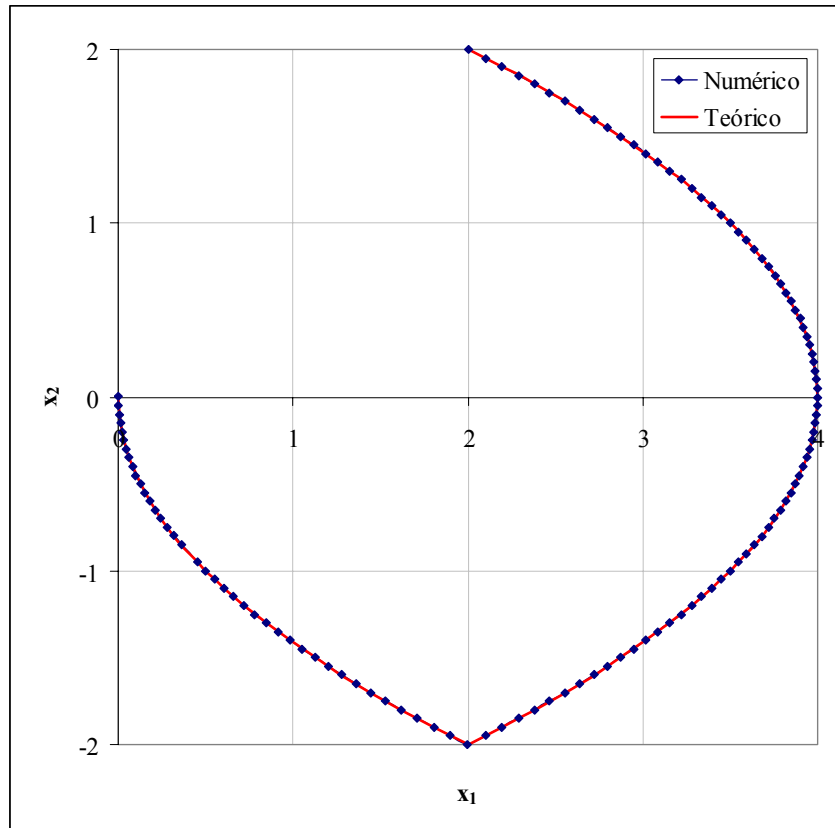


Figura III.5. Trajetória ótima obtida e teórica para o Problema de Tempo Mínimo – Trajetórias Parabólicas.

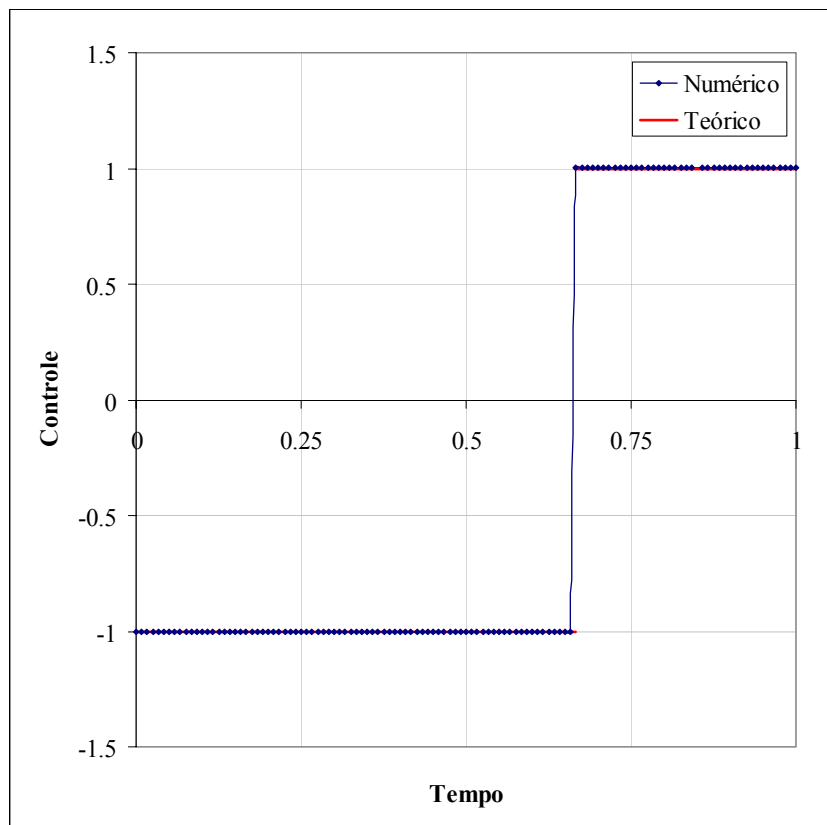


Figura III.6. Controle ótimo obtido e teórico para o Problema de Tempo Mínimo – Trajetórias Parabólicas.

III.10.2 Problema de Tempo Mínimo – Trajetórias Circulares

Este problema é exatamente análogo ao anterior: as condições iniciais e finais, o índice de performance e a restrição no controle são os mesmos. A diferença está no sistema dinâmico, que neste caso é dado por [53]:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + u.\end{aligned}\tag{III.97}$$

Devido a esta analogia, as transformações utilizadas no caso anterior também se aplicam neste. Assim, considerando as Equações (III.63), o sistema se reescreve:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= x_3 x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_3 (-x_1 + u_1) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= 0,\end{aligned}\tag{III.98}$$

sendo $u_1 = u$ e $x_3(0) = 0$. O índice de performance é o mesmo dado em (III.85) e a função Hamiltoniana é modificada para:

$$H = x_3 [\lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-x_1 + u_1)] - K(u_1^2 + u_2^2 - 1)^2,\tag{III.99}$$

de forma que a condição de estacionaridade não é alterada, sendo expressa por (III.87) e (III.88), e resultando na aproximação de u_1 dada a partir de (III.93).

Assim, o problema de valor de contorno é dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\tau} &= x_3 x_2 \\
 \frac{dx_2}{d\tau} &= x_3 (u_1 - x_1) \\
 \frac{dx_3}{d\tau} &= 0 \\
 \frac{d\lambda_1}{d\tau} &= x_3 \lambda_2 \\
 \frac{d\lambda_2}{d\tau} &= -x_3 \lambda_1 \\
 \frac{d\lambda_3}{d\tau} &= -[\lambda_1 x_2 + \lambda_2 (u_1 - x_1)]
 \end{aligned} \tag{III.100}$$

A matriz M, mais uma vez, é obtida diretamente a partir do sistema acima:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & \left(u_1 - x_1 + \frac{\varepsilon x_3 \lambda_2}{3u_1^2 - 1} \right) & 0 & \frac{\varepsilon x_3^2}{3u_1^2 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & -x_3 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & -\frac{\varepsilon \lambda_2^2}{3u_1^2 - 1} & -x_2 & \left(x_1 - u_1 - \frac{\varepsilon x_3 \lambda_2}{3u_1^2 - 1} \right) & 0 \end{bmatrix} \tag{III.101}$$

O ponto de partida, neste caso, é o (-3,-3), e $\varepsilon = 0,001$. Os resultados obtidos são apresentados a seguir nas Figuras III.7 e III.8. Também neste caso, percebe-se uma ótima proximidade entre as curvas teóricas e fornecidas pelo método. Nota-se, ainda, que o valor calculado para o tempo final (mínimo), 6,9112, é bastante aceitável, uma vez que o esperado é 6,9266, ou seja, um desvio de apenas 0,2%.

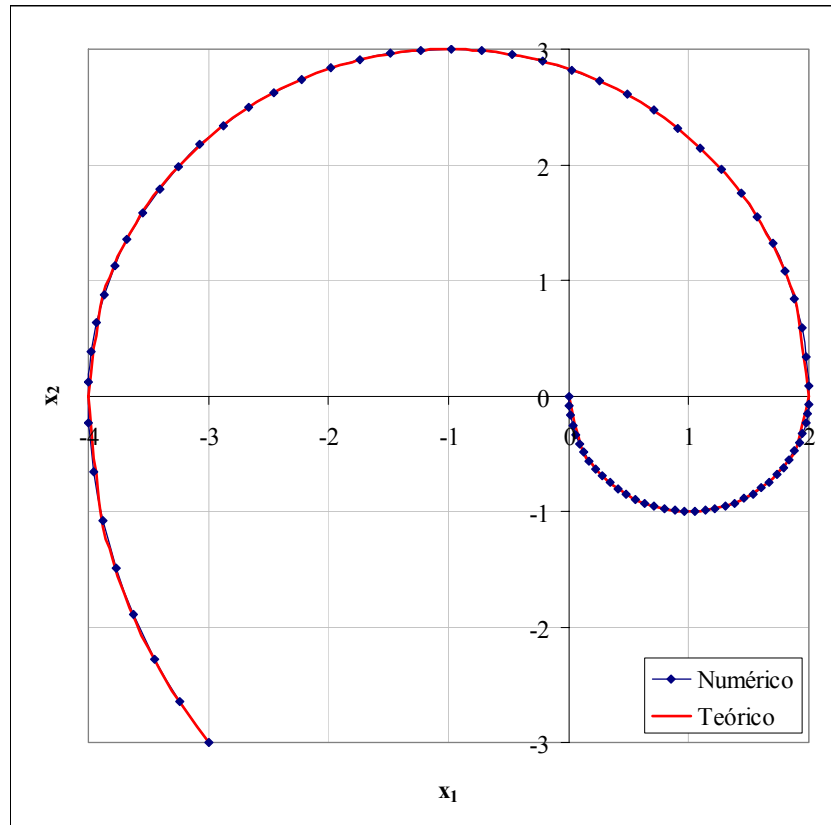


Figura III.7. Trajetória ótima obtida e teórica para o Problema de Tempo Mínimo – Trajetórias Circulares.

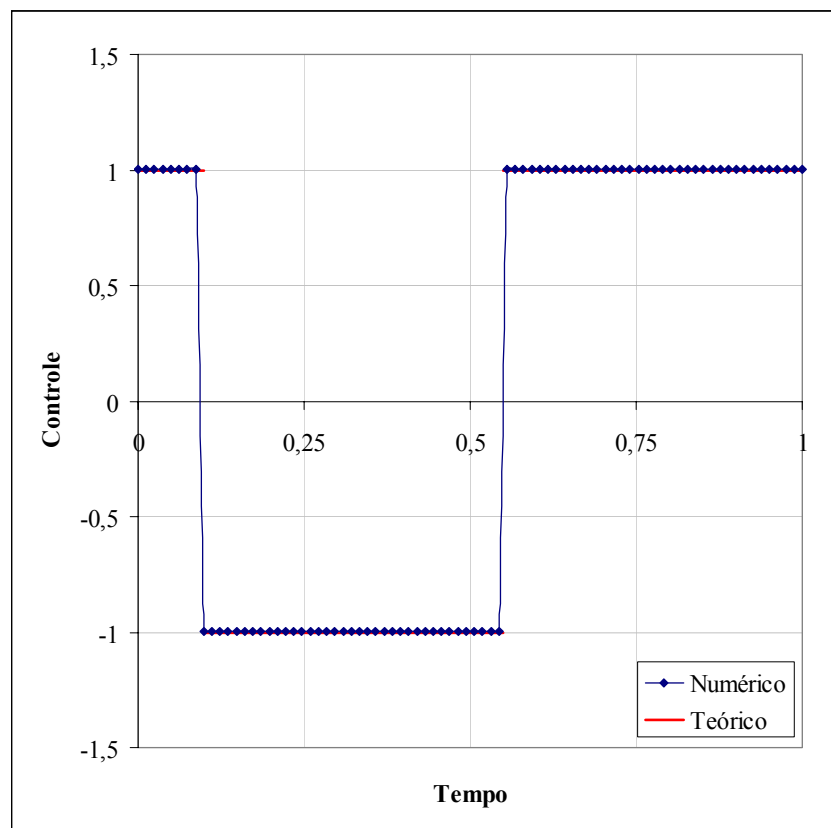


Figura III.8. Controle ótimo obtido e teórica para o Problema de Tempo Mínimo – Trajetórias Circulares.

III.11 – CONCLUSÃO

O método da variação segunda é um método numérico utilizado para resolver o problema de valor de contorno resultante da aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin a problemas de controle ótimo. Seu desenvolvimento matemático envolve o conceito de trajetórias extremas vizinhas, que está associado à expansão em série de Taylor de um funcional aumentado, até os termos de segunda ordem. Em outras palavras, este conceito envolve o cálculo da segunda variação do funcional, e é por isto que o método recebe este nome.

Na verdade, a partir do algoritmo apresentado acima, percebe-se que, para utilizar o método da variação segunda na resolução de um problema de controle ótimo, não basta aplicar o Princípio de Máximo e obter o problema de valor de contorno em dois pontos associado. É preciso, também, obter a matriz M , dada por:

$$M = \begin{bmatrix} H_{\lambda x} - H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{ux} & -H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} \\ -H_{xx} + H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{ux} & -H_{x\lambda} + H_{xu} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.102})$$

Esta matriz corresponde apenas a termos de segunda ordem da Hamiltoniana.

Este método foi aplicado com sucesso a dois problemas conhecidos de controle ótimo sem restrições sobre o controle. Observando os resultados obtidos e comparando-os com os teóricos, pode-se verificar a validade do método para problemas deste tipo. É interessante observar que além dos dois problemas apresentados, alguns outros (como os de menor distância entre ponto e parábola e entre ponto e circunferência e o problema da braquistócrona), apesar de não apresentados, também foram analisados e forneceram resultados muito bons.

Para problemas com restrições nas variáveis de controle, a aplicação do método da variação segunda não é tão imediata. A forma utilizada para tratar o vínculo no controle é a introdução da função de penalidade e conseqüente modificação do índice de performance e da Hamiltoniana. Este procedimento produz uma certa complicação na análise, pois, como o controle varia a cada iteração, na linearização do sistema surgem termos do tipo δu , que devem ser expressos em função das outras variações do problema e faz com que a matriz M tenha menos termos não-nulos e/ou termos maiores. O método se mostrou, contudo, eficaz, já que os resultados fornecidos estão bastante próximos do esperado.

O capítulo seguinte apresenta resultados da aplicação do método da variação segunda a problemas de transferências espaciais. Apenas órbitas coplanares circulares próximas são tratadas, considerando dois tipos de sistemas propulsivos: potência limitada e velocidade de ejeção constante. Com o propósito de fornecer um melhor entendimento do problema tratado, o próximo capítulo apresenta, também, resultados gerais do problema de otimização de trajetórias espaciais, incluindo o modelamento dos sistemas propulsivos, a formulação do problema e um breve histórico do assunto.

CAPÍTULO IV

TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS CIRCULARES PRÓXIMAS

Este capítulo trata do problema de transferências espaciais, considerando especificamente o caso de órbitas circulares coplanares próximas em campo central Newtoniano. Além da definição e formulação matemática do problema, incluindo o modelamento dos sistemas propulsivos e resultados gerais, são apresentados alguns resultados obtidos com a aplicação do método da variação segunda, desenvolvido no capítulo anterior. O capítulo traz, ainda, um breve histórico do assunto.

IV.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo, o método da variação segunda é aplicado a problemas de transferências espaciais ótimas, considerando especificamente o caso de órbitas circulares coplanares próximas, para diferentes tamanhos das órbitas terminais.

Inicialmente, o capítulo traz um breve histórico sobre o problema de trajetórias espaciais ótimas, a partir do qual surge naturalmente a motivação para este trabalho. Em seguida, são apresentados alguns resultados gerais sobre o problema de otimização de trajetórias espaciais [47,48], incluindo a definição do problema e o modelamento matemático dos sistemas propulsivos.

Estes resultados são utilizados para formular o problema de otimização de transferências entre órbitas circulares coplanares próximas, aos quais o método da variação segunda é aplicado. Para tanto, dois sistemas propulsivos são considerados: a baixo empuxo e potência limita; e a velocidade de ejeção constante. Alguns resultados numéricos fornecidos pelo método são apresentados para ambos os casos. Estes resultados são, por fim, analisados qualitativamente, utilizando os resultados gerais sobre o problema de otimização.

IV.2 – HISTÓRICO E MOTIVAÇÃO

Nos últimos 20 anos, o meio acadêmico tem mostrado um grande interesse pelo estudo de transferências espaciais utilizando sistemas propulsivos a baixo empuxo. Este interesse tem-se mostrado particularmente renovado nos últimos dez anos, quando foram lançadas, com sucesso, duas missões espaciais envolvendo sondas movidas a propulsão iônica: a Deep Space One, da NASA-JPL, em 1998; e a SMART 1, da Agência Espacial Européia, em 2003.

Dentro deste contexto, diversos trabalhos relacionados de alguma forma ao tema têm sido realizados e publicados. Estes estudos envolvem desde tratamentos analíticos para os

problemas até métodos numéricos diversos, incluindo programação não-linear. As hipóteses adotadas e os exemplos considerados variam bastante entre os artigos, mas todos os estudos relacionam-se ao problema de transferências espaciais.

A motivação para o desenvolvimento desta tese surge justamente dentro deste cenário de renovada pesquisa sobre o problema de otimização de trajetórias espaciais, envolvendo sistemas propulsivos a baixo empuxo. A próxima seção apresenta a definição geral deste problema.

IV.3 – O PROBLEMA GERAL DE OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS ESPACIAIS

Esta seção apresenta a definição do problema geral de otimização de trajetórias espaciais. Para tanto, seja um veículo espacial M , sujeito à atração gravitacional e à ação de uma força propulsiva. Seu movimento em um sistema inercial é descrito por:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}, \quad (\text{IV.1})$$

onde m é a massa instantânea do veículo, \mathbf{r} é o raio vetor, \mathbf{F} é a força propulsiva resultante da ejeção de massa, e \mathbf{g} é a aceleração da gravidade. Nos problemas de transferência aqui considerados, admite-se que \mathbf{F} é livremente orientável. Restrições sobre sua magnitude, no entanto, dependem do sistema propulsivo considerado, conforme explicado adiante.

Considera-se uma transferência espacial ótima como sendo a passagem de um veículo espacial de uma órbita inicial O_0 para uma órbita final O_f , realizada mediante a aplicação da força propulsiva \mathbf{F} , e com o menor consumo de combustível. Este critério de minimização de combustível, apesar de não ser o único, é o mais utilizado na prática. A duração da transferência pode ser fixada ou não. Nos casos em que a posição do veículo na órbita final

for prescrita, a manobra é chamada de *rendez-vous*, caso contrário, é denominada transferência simples ou, apenas, transferência [47,48].

Observando a Eq. (IV.1), fica evidente que, para tratar o problema de transferência espacial ótima acima definido, é necessário saber como a força propulsiva F varia ao longo do tempo ou como expressá-la em função das variáveis do problema. Neste último caso, o mais interessante na prática, o modelamento matemático da força F depende do sistema propulsivo considerado. A próxima seção apresenta uma breve discussão deste assunto.

IV.4 – MODELAMENTO MATEMÁTICO DOS SISTEMAS PROPULSIVOS

Conforme apresentado na seção anterior, o sistema propulsivo do veículo espacial é um elemento de fundamental importância na teoria das trajetórias espaciais ótimas [46,47,48].

Um sistema propulsivo genérico funciona dentro de um domínio de operação que pode variar no tempo apresentando, inclusive, descontinuidades, como no caso de separação de estágios. Os estudos de manobras orbitais são limitados ao caso de sistemas propulsivos com domínio de operação fixado, ou seja, a maioria dos sistemas de um único estágio. O desempenho destes sistemas é caracterizado basicamente por dois parâmetros: o impulso específico máximo, $I_{sp,max}$; e a razão entre a força propulsiva máxima, F_{max} , e o peso do sistema propulsivo no solo ou, equivalentemente, entre a aceleração máxima, γ_{max} , e a gravidade no solo. Em relação a tais parâmetros, os sistemas propulsivos são classificados, quanto à magnitude, em:

- Sistemas de alto empuxo (propulsão química convencional) – caracterizados por elevado nível de aceleração ($\gamma_{max}/g_0 \approx 10$ a 100) e baixo impulso específico ($I_{sp} \approx 300$ a 1.000 s), de forma que os arcos propulsivos são de curta duração (quasi-impulsos);

- Sistemas de baixo empuxo (por exemplo, propulsão elétrica) – caracterizados por pequeno nível de aceleração ($\gamma_{\max}/g_0 \approx 10^{-4}$ a 10^{-2}) e alto impulso específico ($I_{sp} \approx 3.000$ a 10.000 s), de forma que os arcos propulsivos são de longa duração.

Apesar desta classificação quanto à magnitude ser bastante importante, sob o ponto de vista de formulação matemática do problema de otimização é mais conveniente classificar os sistemas propulsivos quanto ao modo de funcionamento, de acordo com a modulação da velocidade de ejeção dos gases. Neste caso, distinguem-se basicamente dois modelos:

- Sistemas a velocidade de ejeção constante (VEC) e empuxo limitado ($0 \leq \gamma \leq \gamma_{\max}$). Tais sistemas podem ser de alto ou baixo impulso, e para medida de seu desempenho introduz-se a velocidade característica C ,

$$\frac{dC}{dt} = \gamma. \quad (\text{IV.2})$$

- Sistemas com velocidade de ejeção modulável e potência limitada (PL). Tais sistemas são apenas de baixo empuxo, e como medida de seu desempenho utiliza-se a grandeza J ,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \gamma^2. \quad (\text{IV.3})$$

É importante observar que as grandezas C e J são funções monotonicamente decrescentes da massa do veículo. Desta forma, a minimização de seus valores finais, C_f e J_f ,

corresponde à minimização do consumo de combustível. É este o critério utilizado no estudo dos problemas apresentados neste capítulo.

Na próxima seção são apresentados alguns resultados gerais do problema de otimização de trajetórias espaciais [47,48] definido na seção IV.3, considerando os dois sistemas propulsivos modelados acima.

IV.5 – RESULTADOS GERAIS DO PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIAS ESPACIAIS ÓTIMAS

Nesta seção são apresentados alguns resultados gerais do problema de otimização de trajetórias espaciais. Para tanto, o problema formulado na seção IV.3 é inicialmente transcrito para a formulação clássica de controle ótimo, empregando a forma de Mayer. Os vetores posição e velocidade e a grandeza C ou J são utilizados como variáveis de estado.

IV.5.1 Problema de Controle Ótimo

Seja um veículo espacial M , sujeito à atração gravitacional e à ação de uma força propulsiva, conforme apresentado na seção IV.3. Em um instante t , o estado do veículo pode ser definido pelas seguintes grandezas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad - \quad \text{vetor posição} \quad (\text{IV.4})$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) \quad - \quad \text{vetor velocidade} \quad (\text{IV.5})$$

$$\left. \begin{array}{l} C = C(t) \\ J = J(t) \end{array} \right\} \cdot - \quad \begin{array}{l} \text{grandeza caracterizando a} \\ \text{massa do veículo} \end{array} \quad (\text{IV.6})$$

Desta forma, em vista das Eqs. (IV.1) a (IV.6), tem-se que o problema de controle ótimo consiste em transferir o sistema definido por:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + \gamma \mathbf{D} \end{aligned} \tag{IV.7}$$

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \gamma, & 0 \leq \gamma \leq \gamma_{\max}, & \text{VEC} \\ \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \gamma^2, & & \text{PL} \end{cases}$$

do estado (órbita) inicial

$$\mathbf{O}_0 : (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, 0), \tag{IV.8}$$

em t_0 , para o estado final:

$$\mathbf{O}_f : (\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f, C_f \text{ ou } J_f), \tag{IV.9}$$

em t_f , de forma a minimizar o índice de performance:

$$\text{IP} = \begin{cases} C_f : \text{VEC} \\ J_f : \text{PL} \end{cases}. \tag{IV.10}$$

Em (IV.7), $\gamma = F/m$ é a magnitude da aceleração da força propulsiva e \mathbf{D} é sua direção (vetor unitário), de forma que:

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma \mathbf{D}. \quad (\text{IV.11})$$

IV.5.2 Lei de Controle Ótimo

A seguir, utiliza-se o Princípio de Máximo de Pontryagin para determinar a lei de controle ótimo (aceleração ótima) associada a cada um dos sistemas propulsivos mencionados. Ela é utilizada para expressar a Hamiltoniana máxima para cada caso.

IV.5.2.1 Sistema de Potência Limitada (PL)

Introduzindo as variáveis e vetores adjuntos, expressa-se a função Hamiltoniana da seguinte forma:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \gamma \mathbf{D} + \frac{1}{2} \gamma^2 \lambda_J, \quad (\text{IV.12})$$

ou,

$$H = H_0 + \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \gamma \mathbf{D} + \frac{1}{2} \gamma^2 \lambda_J, \quad (\text{IV.13})$$

onde H_0 independe do controle e sua definição é evidente a partir de (IV.12) e (IV.13). O ponto “.” denota o produto escalar.

Da aplicação do Princípio de Máximo de Pontryagin [53], tem-se que a direção ótima é dada por:

$$\mathbf{D}^* = \frac{\lambda_v}{\lambda_J}. \quad (\text{IV.14})$$

Substituindo (IV.14) em (IV.13) e aplicando a condição de estacionaridade, obtém-se a magnitude ótima:

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma^*} = 0 \Rightarrow \lambda_v + \gamma^* \lambda_J = 0 \Rightarrow \gamma^* = -\frac{\lambda_v}{\lambda_J}. \quad (\text{IV.15})$$

Por outro lado, das equações adjuntas tem-se que:

$$\frac{d\lambda_J}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial J} = 0 \Rightarrow \lambda_J = \text{cte}. \quad (\text{IV.16})$$

E das condições de transversalidade, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\lambda_J + 1)\delta J_f &= 0 \Rightarrow \lambda_J = -1 \\ [\lambda_r \cdot \delta \mathbf{r} + \lambda_v \cdot \delta \mathbf{v}]_{t_0}^{t_f} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

Portanto:

$$\gamma^* = \lambda_v, \quad (\text{IV.18})$$

ou seja, a aceleração ótima é o próprio vetor adjunto à velocidade e, como não há restrições sobre sua magnitude, ela é modulável. Além disto, a Hamiltoniana máxima é dada por:

$$H^* = \lambda_r \cdot v + \lambda_v \cdot g(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \lambda_v^2. \quad (\text{IV.19})$$

IV.5.2.2 Sistema a Velocidade de Ejeção Constante

Analogamente ao caso do sistema de potência limitada, tem-se que a função Hamiltoniana pode ser expressa como:

$$H = H_0 + \lambda_v \cdot \gamma \mathbf{D} + \gamma \lambda_c, \quad (\text{IV.20})$$

Aplicando o Princípio de Máximo de Pontryagin, obtém-se a seguinte forma para a direção da aceleração ótima:

$$\mathbf{D}^* = \frac{\lambda_v}{\lambda_v}, \quad (\text{IV.21})$$

e a magnitude ótima, γ^* , é dada pela seguinte lei de controle ótimo:

i) Se $\Theta > 0 \Rightarrow \gamma^* = \gamma_{\max}$: Arco de Tração Máxima

ii) Se $\Theta < 0 \Rightarrow \gamma^* = 0$: Arco de Tração Nula (Arco Balístico) (IV.22)

iii) Se $\Theta \equiv 0$, durante um intervalo de tempo finito: tem-se um caso singular,

onde a função

$$\Theta(t) = \lambda_v + \lambda_c, \quad (\text{IV.23})$$

é denominada função de comutação. O caso singular em (IV.22) não pode ser obtido pelo Princípio de Máximo de Pontryagin [47].

Substituindo a lei de controle ótimo definida por (IV.21)-(IV.23), obtém-se a seguinte expressão para a Hamiltoniana máxima:

$$H^* = \lambda_r \cdot \mathbf{v} + \lambda_v \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + \gamma_{\max} V(\lambda_v + \lambda_c), \quad (\text{IV.24})$$

onde

$$V(\lambda_v + \lambda_c) = \begin{cases} 0, & \text{se } \Theta < 0 \\ (\lambda_v + \lambda_c), & \text{se } \Theta > 0 \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

Nota-se que a lei de controle definida em (IV.22) é do tipo *bang-bang*, ou seja, alterna arcos de tração máxima ($\gamma^* = \gamma_{\max}$) com arcos balísticos ($\gamma^* = 0$), à exceção do caso singular. Este resultado geral é importante na análise dos resultados obtidos nas seções seguintes para algumas manobras particulares.

IV.5.3 Campo Gravitacional

Nas expressões das Hamiltonianas máximas apresentadas acima (Eqs. (IV.19) e (IV.24)), a aceleração da gravidade \mathbf{g} deriva de uma função potencial U , cuja forma depende da hipótese adotada. Considerando a hipótese clássica de campo gravitacional central Newtoniano, na qual a aceleração é inversamente proporcional ao quadrado da distância radial r , as equações (IV.19) e (IV.24) podem ser reescritas como:

$$H^* = H_0^* + H_\gamma^*, \quad (\text{IV.26})$$

onde H_0^* , dada por

$$H_0^* = \lambda_r \cdot \mathbf{v} - \lambda_v \cdot \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad (\text{IV.27})$$

denota a Hamiltoniana não-perturbada, que descreve o movimento em campo central Newtoniano, e H_γ^* é a parcela da Hamiltoniana relativa à aceleração propulsiva ótima, cuja forma depende do sistema propulsivo considerado (Eq. (IV.19) ou (IV.24)).

Na próxima seção, o problema de controle ótimo definido acima, associado ao problema de otimização de trajetórias espaciais, é particularizado para o caso de transferências entre órbitas circulares coplanares. Ambos os sistemas propulsivos apresentados são analisados.

IV.6 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE TRANSFERÊNCIAS ENTRE ÓRBITAS CIRCULARES COPLANARES

Nesta seção, os resultados das seções anteriores são utilizados para formular o caso particular de transferências entre órbitas circulares coplanares. Para tanto, os dois sistemas propulsivos apresentados são considerados: potência limitada e velocidade de ejeção constante.

A formulação é apresentada de forma adequada para permitir a aplicação do método da variação segunda a este problema particular. Desta forma, o desenvolvimento é realizado de acordo com o CAPÍTULO III, até a obtenção da matriz M.

IV.6.1 Problema Geral de Controle Ótimo

Inicialmente, introduzem-se as equações de estado que caracterizam o problema geral de controle ótimo, sem distinguir os sistemas propulsivos. A partir dos conceitos básicos de Astronáutica [1], tem-se que a dinâmica do problema de transferência entre órbitas coplanares é caracterizada pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + R \\
 \frac{dv}{dt} &= -\frac{uv}{r} + S \\
 \frac{dr}{dt} &= u \\
 \left\{ \begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \gamma : \text{VEC}, \\ \frac{dJ}{dt} &= \frac{1}{2} \gamma^2 : \text{PL}, \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{IV.28}$$

onde C e J são as grandezas introduzidas nas seções anteriores, associadas ao desempenho de cada um dos sistemas propulsivos. Como se trata de uma transferência coplanar, as variáveis de estado (IV.4) e (IV.5) foram reduzidas a apenas três: o raio da órbita, r, e as componentes radial e circunferencial da velocidade, u e v, respectivamente. As funções R e S correspondem às componentes radial e circunferencial da aceleração propulsiva, i.e.,

$$\begin{aligned}
 R &= \gamma \sin \theta \\
 S &= \gamma \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{IV.29}$$

sendo γ a magnitude do vetor aceleração e θ o ângulo medido a partir da horizontal local, no sentido do movimento. Observa-se que:

$$\gamma^2 = R^2 + S^2. \quad (\text{IV.30})$$

O restante do desenvolvimento do problema é apresentado separadamente para cada sistema propulsivo.

IV.6.2 Sistema de Potência Limitada (PL)

Para o sistema propulsivo de potência limitada, o problema de otimização consiste em transferir um veículo espacial do estado inicial em $t_0 = 0$ definido por:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ v(0) &= 1 \\ r(0) &= 1 \\ J(0) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

para o estado final no instante prescrito t_f definido por:

$$\begin{aligned} u(t_f) &= 0 \\ v(t_f) &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \\ r(t_f) &= r_f, \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

de forma a minimizar o índice de performance dado por:

$$\text{IP} = J(t_f), \quad (\text{IV.33})$$

sendo que a dinâmica deste veículo é caracterizada pelo sistema (IV.28), considerando a segunda das equações de consumo. Assume-se que não há restrições sobre os controles θ e γ .

É interessante observar que os estados inicial e final definidos acima correspondem a órbitas circulares, e são justamente estas condições que caracterizam este aspecto do problema. Além disto, é importante mencionar que, na formulação apresentada acima, as variáveis de estado são consideradas adimensionais, de forma que $\mu = 1$.

No caso do sistema PL, é interessante utilizar a aceleração propulsiva na forma de suas coordenadas radial e circunferencial. Com isto, a função Hamiltoniana é dada por:

$$H = \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + R \right) + \lambda_v \left(-\frac{uv}{r} + S \right) + \lambda_r u + \frac{\lambda_J}{2} (R^2 + S^2). \quad (\text{IV.34})$$

Aplicando a condição de estacionaridade, obtém-se as expressões para as acelerações ótimas:

$$\frac{\partial H}{\partial R} = 0 \Rightarrow R = -\frac{\lambda_u}{\lambda_J}, \quad (\text{IV.35})$$

$$\frac{\partial H}{\partial S} = 0 \Rightarrow S = -\frac{\lambda_v}{\lambda_J}. \quad (\text{IV.36})$$

O problema de valor de contorno é obtido a partir das condições necessárias, e é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{\lambda_u}{\lambda_J} \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{uv}{r} - \frac{\lambda_v}{\lambda_J} \\
\frac{dr}{dt} &= u \\
\frac{dJ}{dt} &= \frac{1}{2\lambda_J^2} (\lambda_u^2 + \lambda_v^2) \\
\frac{d\lambda_u}{dt} &= \frac{v}{r} \lambda_v - \lambda_r \\
\frac{d\lambda_v}{dt} &= -2\frac{v}{r} \lambda_u + \frac{u}{r} \lambda_v \\
\frac{d\lambda_r}{dt} &= \left(\frac{v^2}{r^2} - 2\frac{\mu}{r^3} \right) \lambda_u - \frac{uv}{r^2} \lambda_v \\
\frac{d\lambda_J}{dt} &= 0,
\end{aligned} \tag{IV.37}$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0 \\
v(0) &= 1 \\
r(0) &= 1 \\
J(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{IV.38}$$

e

$$\Psi(x_{t_f}) = \begin{bmatrix} u(t_f) \\ v(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \\ r(t_f) - r_f \end{bmatrix} = 0. \tag{IV.39}$$

A matriz M é obtida diretamente a partir do sistema (IV.37) e é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2v}{r} & -A & 0 & -\frac{1}{\lambda_J} & 0 & 0 & \frac{\lambda_u}{\lambda_J^2} \\ -\frac{v}{r} & -\frac{u}{r} & \frac{uv}{r^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_J} & 0 & \frac{\lambda_v}{\lambda_J^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_u}{\lambda_J^2} & \frac{\lambda_v}{\lambda_J^2} & 0 & -\frac{C}{\lambda_J^3} \\ 0 & \frac{\lambda_v}{r} & -\frac{v\lambda_v}{r^2} & 0 & 0 & \frac{v}{r} & -1 & 0 \\ \frac{\lambda_v}{r} & -\frac{2\lambda_u}{r} & B & 0 & -\frac{2v}{r} & \frac{u}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{v\lambda_v}{r^2} & B & D & 0 & A & -\frac{uv}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.40})$$

onde

$$A = \frac{v^2}{r^2} - 2\frac{\mu}{r^3}, \quad (\text{IV.41})$$

$$B = \frac{2v}{r^2}\lambda_u - \frac{u}{r^2}\lambda_v, \quad (\text{IV.42})$$

$$C = \lambda_u^2 + \lambda_v^2, \quad (\text{IV.43})$$

$$D = \left(-\frac{2v^2}{r^3} + \frac{6\mu}{r^4} \right) \lambda_u + \frac{2uv}{r^3} \lambda_v. \quad (\text{IV.44})$$

IV.6.3 Sistema a Velocidade de Ejeção Constante (VEC)

Para o sistema propulsivo a velocidade de ejeção constante, o problema de otimização é essencialmente o mesmo do sistema a potência limitada. Ele consiste em transferir um veículo espacial do estado inicial em $t_0 = 0$ definido por:

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0 \\
v(0) &= 1 \\
r(0) &= 1 \\
C(0) &= 0,
\end{aligned}
\tag{IV.45}$$

para o estado final no instante prescrito t_f definido por:

$$\begin{aligned}
u(t_f) &= 0 \\
v(t_f) &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \\
r(t_f) &= r_f,
\end{aligned}
\tag{IV.46}$$

de forma a minimizar o índice de performance dado por:

$$IP = C(t_f), \tag{IV.47}$$

sendo que a dinâmica deste veículo novamente é caracterizada pelo sistema (IV.28), mas neste caso considerando a primeira das equações de consumo. Para este sistema, assume-se que a tração é livremente orientável, i.e., θ é livre, mas a magnitude da tração está sujeita à restrição:

$$0 \leq \gamma \leq \gamma_{\max}. \tag{IV.48}$$

É interessante observar que, assim como no sistema PL, os estados inicial e final definidos acima correspondem a órbitas circulares, e são justamente estas condições que caracterizam este aspecto do problema. É importante mencionar, ainda, que a formulação apresentada acima também utiliza variáveis de estado adimensionais, de forma que $\mu = 1$.

A partir deste ponto, duas formulações diferentes são consideradas para aplicação do método da variação segunda. A primeira, mais simples, corresponde a linearizar o sistema (IV.28) em torno de uma órbita de referência, assumindo órbitas próximas. A segunda, mais exigente computacionalmente, é utilizar diretamente as equações não-lineares em (IV.28). A motivação para utilização destas duas análises foi verificar se a forma linearizada, muito mais tratável numericamente, principalmente em vista da restrição no controle, fornece bons resultados para o caso de órbitas próximas. As duas formulações são apresentadas a seguir.

IV.6.3.1 Sistema Linearizado

Nesta formulação, assume-se que as órbitas inicial e final são próximas, de modo que é possível linearizar o sistema em torno de uma órbita de referência, usualmente a inicial. Sendo r_0 , u_0 e v_0 as variáveis de estado que caracterizam esta órbita, utiliza-se a seguinte linearização:

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \xi \\ u &= u_0 + \eta \\ v &= v_0 + \zeta. \end{aligned} \tag{IV.49}$$

Considerando a linearização (IV.49), as equações de estado (IV.28) se reduzem a:

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta}{dt} &= \xi + 2\zeta + \gamma \operatorname{sen} \theta \\
\frac{d\zeta}{dt} &= -\eta + \gamma \cos \theta \\
\frac{d\xi}{dt} &= \eta \\
\frac{dC}{dt} &= \gamma,
\end{aligned}
\tag{IV.50}$$

e as condições de contorno se modificam para:

$$\begin{aligned}
\eta(0) &= 0 \\
\zeta(0) &= 0 \\
\xi(0) &= 0 \\
C(0) &= 0,
\end{aligned}
\tag{IV.51}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta(t_f) &= 0 \\
\zeta(t_f) &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - v_0 \\
\xi(t_f) &= r_f - r_0 \\
C(t_f) &= C_f,
\end{aligned}
\tag{IV.52}$$

onde C_f , o consumo de combustível, é justamente o índice de performance que se deseja minimizar (Eq. (IV.47)).

Utilizando a metodologia descrita no CAPÍTULO III para problemas com restrições nas variáveis de controle, inicialmente transformam-se as restrições de desigualdade do controle, Eq. (IV.48), para restrições de igualdade, do seguinte modo:

$$0 \leq \gamma \leq \gamma_{\max} \Rightarrow (\gamma - \gamma_{\max})\gamma \leq 0 \Rightarrow \gamma^2 - \gamma\gamma_{\max} + \delta^2 = 0. \quad (\text{IV.53})$$

Introduz-se, então, uma função de penalidade e reescreve-se o índice de performance (IV.47) :

$$\text{IP} = C(t_f) + K \int_{t_0}^{t_f} (\gamma^2 - \gamma\gamma_{\max} + \delta^2)^2 dt. \quad (\text{IV.54})$$

A função Hamiltoniana associada a este problema, considerando este novo IP, é dada por:

$$H = [\lambda_{\eta}(\xi + 2\zeta + \gamma \sin \theta) + \lambda_{\zeta}(-\eta + \gamma \cos \theta) + \lambda_{\xi}\eta + \lambda_C\gamma] - K(\gamma^2 - \gamma\gamma_{\max} + \delta^2)^2. \quad (\text{IV.55})$$

Aplicando a condição necessária de estacionaridade, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{\lambda_{\eta}}{\lambda_{\zeta}} \quad (\text{IV.56})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow -2K(\gamma^2 - \gamma\gamma_{\max} + \delta^2)(2\gamma - \gamma_{\max}) + \lambda_{\eta} \sin \theta + \lambda_{\zeta} \cos \theta + \lambda_C = 0 \quad (\text{IV.57})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \delta} = 0 \Rightarrow -2K(\gamma^2 - \gamma\gamma_{\max} + \delta^2)2\delta = 0. \quad (\text{IV.58})$$

De (IV.57) segue, para $\delta = 0$ (a solução de $\gamma^2 - \gamma\gamma_{\max} + \delta^2 = 0$, com $\delta \neq 0$, não é de interesse, conforme visto no CAPÍTULO III), que:

$$2\gamma^3 - 3\gamma^2\gamma_{\max} + \gamma\gamma_{\max}^2 - \frac{1}{2K}(\sqrt{\lambda_{\eta}^2 + \lambda_{\zeta}^2} + \lambda_C) = 0. \quad (\text{IV.59})$$

No caso limite $K \rightarrow \infty$, tem-se de (IV.59) que

$$\gamma(2\gamma^2 - 3\gamma\gamma_{\max} + \gamma_{\max}^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 & \text{Arco balístico} \\ \gamma = \gamma_{\max}, & \text{Arco de tração máxima} \end{cases} \quad (\text{IV.60})$$

pois

$$2\gamma^2 - 3\gamma\gamma_{\max} + \gamma_{\max}^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \gamma_{\max}/2 \\ \gamma = \gamma_{\max} \end{cases} \quad (\text{IV.61})$$

e toma-se $\gamma = \gamma_{\max}$, de forma a maximizar a Hamiltoniana. A condição $\gamma = \gamma_{\max}/2$ não corresponde a uma solução do problema original, de forma que é descartada.

Seja, então, uma aproximação para o valor de γ conforme discutido na seção III.9.2.

Considerando uma correção da forma $\alpha\varepsilon$, onde α deve ser determinado, e

$$\varepsilon = \frac{1}{2K}, \quad (\text{IV.62})$$

tem-se das Eqs. (IV.59) e (IV.62), tanto para $\gamma = 0$ quanto para $\gamma = \gamma_{\max}$, que

$$\begin{aligned} 2\gamma^3 - 3\gamma^2\gamma_{\max} + \gamma\gamma_{\max}^2 &= \varepsilon \left(\sqrt{\lambda_{\eta}^2 + \lambda_{\zeta}^2} + \lambda_c \right) = \varepsilon A \\ \Downarrow \\ 2(0 + \alpha\varepsilon)^3 - 3(0 + \alpha\varepsilon)^2\gamma_{\max} + (0 + \alpha\varepsilon)\gamma_{\max}^2 &= \varepsilon A. \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

Desprezando os termos de segunda ordem em (IV.63), obtém-se a seguinte expressão para α :

$$\alpha = \frac{A}{\gamma_{\max}^2} = \frac{\sqrt{\lambda_{\eta}^2 + \lambda_{\zeta}^2} + \lambda_C}{\gamma_{\max}^2}, \quad (\text{IV.64})$$

onde a definição de A é clara:

$$A = \sqrt{\lambda_{\eta}^2 + \lambda_{\zeta}^2} + \lambda_C. \quad (\text{IV.65})$$

O problema de valor de contorno é obtido a partir das condições necessárias, e é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \xi + 2\zeta + \gamma \operatorname{sen} \theta \\ \frac{d\zeta}{dt} &= -\eta + \gamma \operatorname{cos} \theta \\ \frac{d\xi}{dt} &= \eta \\ \frac{dC}{dt} &= \gamma \\ \frac{d\lambda_{\eta}}{dt} &= \lambda_{\zeta} - \lambda_{\xi} \\ \frac{d\lambda_{\zeta}}{dt} &= -2\lambda_{\eta} \\ \frac{d\lambda_{\xi}}{dt} &= -\lambda_{\eta} \\ \frac{d\lambda_C}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.66})$$

Como o controle varia a cada iteração, ao linearizar-se este sistema para poder obter a matriz M, aparecem termos do tipo $\delta\gamma$ e $\delta\theta$. Eles podem ser obtidos diferenciando-se as Eqs. (IV.59) e (IV.56), respectivamente, com a correção de γ dada por (IV.64). M é então dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & (\alpha_1 \alpha_3 \sin \theta + a \alpha_2 \gamma \cos \theta) & (\alpha_2 \alpha_3 \sin \theta - a \alpha_1 \gamma \cos \theta) & 0 & \alpha_3 \sin \theta \\ -1 & 0 & 0 & 0 & (\alpha_1 \alpha_3 \cos \theta - a \alpha_2 \gamma \sin \theta) & (\alpha_2 \alpha_3 \cos \theta + a \alpha_1 \gamma \sin \theta) & 0 & \alpha_3 \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \alpha_3 & \alpha_2 \alpha_3 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (IV.67)$$

onde

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\eta^2 + \lambda_\zeta^2}}, \quad (IV.68)$$

$$\alpha_1 = a \lambda_\eta, \quad (IV.69)$$

$$\alpha_2 = a \lambda_\zeta, \quad (IV.70)$$

$$\alpha_3 = \frac{\varepsilon}{6\gamma^2 - 6\gamma\gamma_{\max} + \gamma_{\max}^2}. \quad (IV.71)$$

Nas equações acima, as expressões de $\sin \theta$ e $\cos \theta$ em função das variáveis do problema podem ser obtidas a partir de (IV.56):

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\pm \lambda_\eta}{\sqrt{\lambda_\eta^2 + \lambda_\zeta^2}} \\ \cos \theta &= \frac{\pm \lambda_\zeta}{\sqrt{\lambda_\eta^2 + \lambda_\zeta^2}}. \end{aligned} \quad (IV.72)$$

E da condição de Clebsch-Legendre tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \mu^T H_{uu}^T \mu \leq 0 \\
& \Downarrow \\
& -\mu_1^2 (\lambda_\eta \sin \theta - \lambda_\zeta \cos \theta) - 2\mu_2^2 (6\gamma^2 - 6\gamma\gamma_{\max} - \gamma_{\max}^2 + 2\delta^2) \leq 0 \\
& \Downarrow \\
& \lambda_\eta \sin \theta + \lambda_\zeta \cos \theta \geq 0.
\end{aligned} \tag{IV.73}$$

Logo,

$$\pm \frac{\lambda_\eta^2 + \lambda_\zeta^2}{\sqrt{\lambda_\eta^2 + \lambda_\zeta^2}} \geq 0, \tag{IV.74}$$

de onde verifica-se que o sinal “+” deve ser escolhido em (IV.72).

IV.6.3.2 Sistema Não-Linearizado

Nesta formulação, mais exigente computacionalmente em comparação com a anterior, utiliza-se diretamente as equações não-lineares em (IV.28), ao invés de linearizá-las em torno de uma órbita de referência. Desta forma, a dinâmica do sistema é caracterizada pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + R \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{uv}{r} + S \\
\frac{dr}{dt} &= u \\
\frac{dC}{dt} &= \gamma.
\end{aligned} \tag{IV.75}$$

A partir deste ponto, a formulação é bastante semelhante à do sistema linearizado. O tratamento para problemas com restrições é exatamente o mesmo, de modo que as restrições de desigualdade (IV.48) são transformadas nas restrições de igualdade (IV.53) e o índice de performance (IV.47) é reescrito como (IV.54), introduzindo uma função de penalidade. A função Hamiltoniana, por outro lado, modifica-se para:

$$H = \left[\lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \gamma \sin \theta \right) + \lambda_v \left(-\frac{uv}{r} + \gamma \cos \theta \right) + \lambda_r u + \lambda_c \gamma \right] - K(\gamma^2 - \gamma \gamma_{\max} + \delta^2)^2. \quad (\text{IV.76})$$

Aplicando a condição necessária de estacionaridade, obtêm-se resultados semelhantes às equações (IV.56)-(IV.58):

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \tan \theta = \frac{\lambda_u}{\lambda_v} \quad (\text{IV.77})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow -2K(\gamma^2 - \gamma \gamma_{\max} + \delta^2)(2\gamma - \gamma_{\max}) + \lambda_u \sin \theta + \lambda_v \cos \theta + \lambda_c = 0 \quad (\text{IV.78})$$

$$\frac{\partial H}{\partial \delta} = 0 \Rightarrow -2K(\gamma^2 - \gamma \gamma_{\max} + \delta^2)2\delta = 0. \quad (\text{IV.79})$$

Devido à semelhança das Eqs. (IV.56)-(IV.58) e (IV.77)-(IV.79), é possível concluir diretamente as seguintes expressões:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2} + \lambda_c}{\gamma_{\max}^2}, \quad (\text{IV.80})$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{\lambda_u}{\sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{\lambda_v}{\sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}}.\end{aligned}\tag{IV.81}$$

O problema de valor de contorno é obtido a partir das condições necessárias, e é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \gamma \operatorname{sen} \theta \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{uv}{r} + \gamma \operatorname{cos} \theta \\ \frac{dr}{dt} &= u \\ \frac{dC}{dt} &= \gamma \\ \frac{d\lambda_u}{dt} &= \lambda_v \frac{v}{r} - \lambda_r \\ \frac{d\lambda_v}{dt} &= -2\lambda_u \frac{v}{r} + \lambda_v \frac{u}{r} \\ \frac{d\lambda_r}{dt} &= \lambda_u \left(\frac{v^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3} \right) - \lambda_v \frac{uv}{r^2} \\ \frac{d\lambda_C}{dt} &= 0,\end{aligned}\tag{IV.82}$$

com condições de contorno (IV.45) e (IV.46).

Como o controle varia a cada iteração, ao linearizar-se este sistema para poder obter a matriz M , aparecem termos do tipo $\delta\gamma$ e $\delta\theta$. Eles podem ser obtidos diferenciando-se a Equação (IV.78), para $\delta = 0$, com a correção de γ dada por (IV.80). M é então dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
 0 & \frac{2v}{r} & -\left(\frac{v^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3}\right) & 0 & (\alpha_1\alpha_3 \text{sen } \theta + \alpha_2\gamma \cos \theta) & (\alpha_2\alpha_3 \text{sen } \theta - \alpha_2\gamma \cos \theta) & 0 & \alpha_3 \text{sen } \theta \\
 -\frac{v}{r} & -\frac{u}{r} & \frac{uv}{r^2} & 0 & (\alpha_1\alpha_3 \cos \theta - \alpha_2\gamma \text{sen } \theta) & (\alpha_2\alpha_3 \cos \theta + \alpha_2\gamma \text{sen } \theta) & 0 & \alpha_3 \cos \theta \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 & 0 & \alpha_3 \\
 0 & \frac{\lambda_v}{r} & -\frac{\lambda_v v}{r^2} & 0 & 0 & \frac{v}{r} & -1 & 0 \\
 \frac{\lambda_v}{r} & -\frac{2\lambda_u}{r} & \frac{2\lambda_u v - \lambda_v u}{r^2} & 0 & -\frac{2v}{r} & \frac{u}{r} & 0 & 0 \\
 -\frac{\lambda_v v}{r^2} & \left(\frac{2\lambda_u v}{r^2} - \frac{\lambda_v u}{r^2}\right) & \left(-\frac{2\lambda_u v^2}{r^3} + \frac{6\mu}{r^4} + \frac{2\lambda_v uv}{r^3}\right) & 0 & \left(\frac{v^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3}\right) & \frac{uv}{r^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

(IV.83)

onde

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}}, \quad (\text{IV.84})$$

$$\alpha_1 = a\lambda_u, \quad (\text{IV.85})$$

$$\alpha_2 = a\lambda_v, \quad (\text{IV.86})$$

$$\alpha_3 = \frac{\varepsilon}{6\gamma^2 - 6\gamma\gamma_{\max} + \gamma_{\max}^2}, \quad (\text{IV.87})$$

e ε é dado por (IV.62).

IV.7 – TRANSFERÊNCIAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos através do algoritmo do método da variação segunda para o problema de transferência espacial a baixo empuxo e potência limitada, formulado na seção IV.6.2. Consideram-se diversos valores da razão de raios das órbitas terminais $\rho = r_f / r_0$ e diversas durações da manobra $t_f - t_0$.

Conforme já comentado em seções anteriores, a convergência de métodos indiretos está bastante relacionada a boas estimativas para os multiplicadores de Lagrange e variáveis adjuntas. Nos casos analisados utilizando o método da variação segunda, estas estimativas foram escolhidas de forma a garantir a convergência, mesmo que várias iterações fossem necessárias. Além disto, também com o objetivo de obter convergência, mas desta vez garantindo a validade da hipótese de linearidade, utilizou-se uma matriz de pesos para controlar o tamanho das correções a cada iteração.

Utilizou-se uma tolerância de convergência de $1,0 \times 10^{-12}$ tanto para os multiplicadores de Lagrange quanto para as variáveis adjuntas. Ou seja, o processo iterativo foi encerrado quando as condições:

$$\begin{aligned} \|\delta\lambda_{0_i}\| &\leq 1,0 \times 10^{-12} \\ \|\mathbf{dv}_f\| &\leq 1,0 \times 10^{-12}, \end{aligned} \quad (\text{IV.88})$$

foram simultaneamente satisfeitas. A norma em (IV.88) corresponde à norma euclidiana para o vetor correspondente, ou seja:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (\text{IV.89})$$

onde x_i é a i -ésima componente do vetor n -dimensional \mathbf{x} .

As Tabelas IV.1 a IV.4 a seguir apresentam os valores fornecidos pelo método da variação segunda para a variável de consumo J . Elas apresentam, também, os valores desta variável fornecidos por três outros métodos: teoria linear [47,14], algoritmo combinado [16,17] e o próprio método da variação segunda, mas utilizando transformação de Riccati ao invés de matriz de transição de estados para resolver o TPBVP [28,45]. As tabelas apresentam, ainda, as diferenças relativas entre diversos resultados, da seguinte forma:

$$\mathbf{d}_{\text{rel}} = \left| \frac{\mathbf{J}_a - \mathbf{J}_b}{\mathbf{J}_b} \right| \times 100\%. \quad (\text{IV.90})$$

Tabela IV.1. Variável de consumo J e desvios relativos entre vários métodos para o problema de transferência com sistema de potência limitada – manobras com $\rho < 1$ e de curta duração.

ρ	$t_r - t_0$	J				$d_{rel} (\%)$				
		Teoria Analítica	Gradiente Combinado	Variação Seg Riccati	Variação Seg Matriz Trans	Grad/Anal	Ricat/Analít	Matr/Anal	Matr/Grad	Matr/Ricat
0,7270	2,0	3,765451E-02	3,777781E-02	3,729766E-02	3,729812E-02	0,33	0,95	0,95	1,27	0,00
	3,0	8,926982E-03	9,709937E-03	9,025479E-03	9,025912E-03	8,77	1,10	1,11	7,04	0,00
	4,0	4,048203E-03	4,461201E-03	4,215418E-03	4,213152E-03	10,20	4,13	4,07	5,56	0,05
	5,0	2,894188E-03	3,325080E-03	3,064597E-03	3,057170E-03	14,89	5,89	5,63	8,06	0,24
0,8000	2,0	2,095182E-02	2,092074E-02	2,084164E-02	2,084171E-02	0,15	0,53	0,53	0,38	0,00
	3,0	4,904019E-03	5,053224E-03	4,916779E-03	4,917178E-03	3,04	0,26	0,27	2,69	0,01
	4,0	2,070390E-03	2,196835E-03	2,104899E-03	2,104586E-03	6,11	1,67	1,65	4,20	0,01
	5,0	1,383857E-03	1,505942E-03	1,422692E-03	1,419650E-03	8,82	2,81	2,59	5,73	0,21
0,9000	2,0	5,474046E-03	5,477794E-03	5,467172E-03	5,467087E-03	0,07	0,13	0,13	0,20	0,00
	3,0	1,277144E-03	1,313377E-03	1,276881E-03	1,277098E-03	2,84	0,02	0,00	2,76	0,02
	4,0	5,006396E-04	5,196754E-04	5,017412E-04	5,019810E-04	3,80	0,22	0,27	3,40	0,05
	5,0	3,049656E-04	3,203318E-04	3,068545E-04	3,065240E-04	5,04	0,62	0,51	4,31	0,11
0,9500	2,0	1,395891E-03	1,396823E-03	1,395513E-03	1,395463E-03	0,07	0,03	0,03	0,10	0,00
	3,0	3,264941E-04	3,302046E-04	3,263644E-04	3,264720E-04	1,14	0,04	0,01	1,13	0,03
	4,0	1,245127E-04	1,265439E-04	1,244044E-04	1,245780E-04	1,63	0,09	0,05	1,55	0,14
	5,0	7,258595E-05	7,378935E-05	7,264732E-05	7,266700E-05	1,66	0,08	0,11	1,52	0,03
0,9750	2,0	3,522595E-04	3,527534E-04	3,522552E-04	3,522330E-04	0,14	0,00	0,01	0,15	0,01
	3,0	8,255547E-05	8,258122E-05	8,249872E-05	8,255400E-05	0,03	0,07	0,00	0,03	0,07
	4,0	3,112006E-05	3,120254E-05	3,102507E-05	3,112400E-05	0,27	0,31	0,01	0,25	0,32
	5,0	1,776590E-05	1,784648E-05	1,772556E-05	1,777100E-05	0,45	0,23	0,03	0,42	0,26

Tabela IV.2. Variável de consumo J e desvios relativos entre vários métodos para o problema de transferência com sistema de potência limitada – manobras com $\rho > 1$ e de curta duração.

ρ	$t_r - t_0$	J				$d_{rel} (\%)$				
		Teoria Analítica	Gradiente Combinado	Variação Seg Riccati	Variação Seg Matriz Trans	Grad/Anal	Ricat/Analít	Matr/Anal	Matr/Grad	Matr/Ricat
1,0250	2,0	3,585643E-04	3,593212E-04	3,585162E-04	3,585390E-04	0,21	0,01	0,01	0,22	0,01
	3,0	8,445904E-05	8,486076E-05	8,450878E-05	8,445600E-05	0,48	0,06	0,00	0,48	0,06
	4,0	3,122686E-05	3,142976E-05	3,134791E-05	3,123000E-05	0,65	0,39	0,01	0,64	0,38
	5,0	1,713865E-05	1,731427E-05	1,724075E-05	1,714300E-05	1,02	0,60	0,03	0,99	0,57
1,0500	2,0	1,446336E-03	1,454199E-03	1,445890E-03	1,445933E-03	0,54	0,03	0,03	0,57	0,00
	3,0	3,416927E-04	3,454512E-04	3,417471E-04	3,416450E-04	1,10	0,02	0,01	1,10	0,03
	4,0	1,253353E-04	1,262316E-04	1,256259E-04	1,253730E-04	0,72	0,23	0,03	0,68	0,20
	5,0	6,754112E-05	6,894566E-05	6,783503E-05	6,759800E-05	2,08	0,44	0,08	1,95	0,35
1,1000	2,0	5,877822E-03	5,926844E-03	5,871576E-03	5,871613E-03	0,83	0,11	0,11	0,93	0,00
	3,0	1,397767E-03	1,404534E-03	1,397076E-03	1,396873E-03	0,48	0,05	0,06	0,55	0,01
	4,0	5,061973E-04	5,086380E-04	5,072041E-04	5,066360E-04	0,48	0,20	0,09	0,39	0,11
	5,0	2,637445E-04	2,680018E-04	2,651133E-04	2,645080E-04	1,61	0,52	0,29	1,30	0,23
1,2000	2,0	2,418758E-02	2,439812E-02	2,409684E-02	2,409671E-02	0,87	0,38	0,38	1,24	0,00
	3,0	5,837020E-03	5,887873E-03	5,820330E-03	5,819915E-03	0,87	0,29	0,29	1,15	0,01
	4,0	2,081399E-03	2,093900E-03	2,085521E-03	2,084351E-03	0,60	0,20	0,14	0,46	0,06
	5,0	1,026057E-03	1,047825E-03	-	1,034491E-03	2,12	N/A	0,82	1,27	N/A
1,5236	2,0	1,774350E-01	1,755412E-01	1,743395E-01	1,743366E-01	1,07	1,74	1,75	0,69	0,00
	3,0	4,494734E-02	4,426941E-02	4,406809E-02	4,406624E-02	1,51	1,96	1,96	0,46	0,00
	4,0	1,605125E-02	1,597075E-02	1,589325E-02	1,588932E-02	0,50	0,98	1,01	0,51	0,02
	5,0	7,249877E-03	7,453021E-03	7,335654E-03	7,335122E-03	2,80	1,18	1,18	1,58	0,01

Tabela IV.3. Variável de consumo J e desvios relativos entre vários métodos para o problema de transferência com sistema de potência limitada – manobras com $\rho < 1$ e de longa duração.

ρ	$t_f - t_0$	J				d_{rel} (%)				
		Teoria Analítica	Gradiente Combinado	Variação Seg Riccati	Variação Seg Matriz Trans	Grad/Anal	Ricat/Analít	Matr/Anal	Matr/Grad	Matr/Ricat
0,7270	10,0	1,447094E-03	1,599191E-03	1,503572E-03	1,503570E-03	10,51	3,90	3,90	5,98	0,00
	20,0	7,235467E-04	7,810726E-04	7,485637E-04	7,485620E-04	7,95	3,46	3,46	4,16	0,00
	30,0	4,823642E-04	5,346828E-04	4,986151E-04	4,986210E-04	10,85	3,37	3,37	6,74	0,00
	40,0	3,617729E-04	3,990824E-04	3,738282E-04	3,738380E-04	10,31	3,33	3,33	6,33	0,00
	50,0	2,894181E-04	2,991211E-04	2,989753E-04	2,990100E-04	3,35	3,30	3,31	0,04	0,01
0,8000	10,0	6,916309E-04	7,030562E-04	7,024192E-04	7,024200E-04	1,65	1,56	1,56	0,09	0,00
	20,0	3,452852E-04	3,544736E-04	3,501032E-04	3,501050E-04	2,66	1,40	1,40	1,23	0,00
	30,0	2,297279E-04	2,395380E-04	2,331120E-04	2,331150E-04	4,27	1,47	1,47	2,68	0,00
	40,0	1,719580E-04	1,934098E-04	1,746512E-04	1,746550E-04	12,48	1,57	1,57	9,70	0,00
	50,0	1,373554E-04	1,544228E-04	1,395909E-04	1,395930E-04	12,43	1,63	1,63	9,60	0,00
0,9000	10,0	1,510289E-04	1,524400E-04	1,514856E-04	1,514870E-04	0,93	0,30	0,30	0,63	0,00
	20,0	7,386158E-05	7,483326E-05	7,414444E-05	7,414600E-05	1,32	0,38	0,39	0,92	0,00
	30,0	4,866308E-05	4,897649E-05	4,885032E-05	4,885200E-05	0,64	0,38	0,39	0,25	0,00
	40,0	3,646686E-05	3,680876E-05	3,658720E-05	3,658900E-05	0,94	0,33	0,33	0,60	0,00
	50,0	2,921781E-05	2,973474E-05	2,931361E-05	2,931600E-05	1,77	0,33	0,34	1,41	0,01
0,9500	10,0	3,545073E-05	3,592092E-05	3,547617E-05	3,547800E-05	1,33	0,07	0,08	1,23	0,01
	20,0	1,702348E-05	1,741817E-05	1,703835E-05	1,704000E-05	2,32	0,09	0,10	2,17	0,01
	30,0	1,123987E-05	1,146517E-05	1,124724E-05	1,124900E-05	2,00	0,07	0,08	1,89	0,02
	40,0	8,456854E-06	8,467131E-06	8,462007E-06	8,464000E-06	0,12	0,06	0,08	0,04	0,02
	50,0	6,751905E-06	6,866932E-06	6,756130E-06	6,758000E-06	1,70	0,06	0,09	1,59	0,03
0,9750	10,0	8,587724E-06	8,639339E-06	8,587279E-06	8,589000E-06	0,60	0,01	0,01	0,58	0,02
	20,0	4,085846E-06	4,157534E-06	4,084704E-06	4,087000E-06	1,75	0,03	0,03	1,70	0,06
	30,0	2,707476E-06	2,709207E-06	2,705929E-06	2,708000E-06	0,06	0,06	0,02	0,04	0,08
	40,0	2,036059E-06	2,036850E-06	2,034890E-06	2,036000E-06	0,04	0,06	0,00	0,04	0,05
	50,0	1,623040E-06	1,631725E-06	1,621549E-06	1,623000E-06	0,54	0,09	0,00	0,53	0,09

Tabela IV.4. Variável de consumo J e desvios relativos entre vários métodos para o problema de transferência com sistema de potência limitada – manobras com $\rho > 1$ e de longa duração.

ρ	$t_f - t_0$	J				d_{rel} (%)				
		Teoria Analítica	Gradiente Combinado	Variação Seg Riccati	Variação Seg Matriz Trans	Grad/Anal	Ricat/Analít	Matr/Anal	Matr/Grad	Matr/Ricat
1,0250	10,0	8,053843E-06	8,104915E-06	8,053874E-06	8,056000E-06	0,63	0,00	0,03	0,60	0,03
	20,0	3,772244E-06	3,797155E-06	3,771424E-06	3,773000E-06	0,66	0,02	0,02	0,64	0,04
	30,0	2,522073E-06	2,527413E-06	2,520899E-06	2,523000E-06	0,21	0,05	0,04	0,17	0,08
	40,0	1,885499E-06	1,889275E-06	1,884134E-06	1,886000E-06	0,20	0,07	0,03	0,17	0,10
	50,0	1,506611E-06	1,511940E-06	1,504863E-06	1,507000E-06	0,35	0,12	0,03	0,33	0,14
1,0500	10,0	3,117128E-05	3,129865E-05	3,119698E-05	3,119900E-05	0,41	0,08	0,09	0,32	0,01
	20,0	1,452026E-05	1,455939E-05	1,453064E-05	1,453300E-05	0,27	0,07	0,09	0,18	0,02
	30,0	9,741079E-06	9,788293E-06	9,745992E-06	9,748000E-06	0,48	0,05	0,07	0,41	0,02
	40,0	7,259897E-06	7,280739E-06	7,263628E-06	7,266000E-06	0,29	0,05	0,08	0,20	0,03
	50,0	5,815827E-06	5,873686E-06	5,818198E-06	5,820000E-06	0,99	0,04	0,07	0,91	0,03
1,1000	10,0	1,165029E-04	1,192110E-04	1,169459E-04	1,169470E-04	2,32	0,38	0,38	1,90	0,00
	20,0	5,400693E-05	5,472621E-05	5,416471E-05	5,416700E-05	1,33	0,29	0,30	1,02	0,00
	30,0	3,627824E-05	3,701527E-05	3,638752E-05	3,638900E-05	2,03	0,30	0,31	1,69	0,00
	40,0	2,700332E-05	2,728721E-05	2,707683E-05	2,707800E-05	1,05	0,27	0,28	0,77	0,00
	50,0	2,165307E-05	2,251619E-05	2,171578E-05	2,171800E-05	3,99	0,29	0,30	3,54	0,01
1,2000	10,0	4,040267E-04	4,151455E-04	4,106123E-04	4,106110E-04	2,75	1,63	1,63	1,09	0,00
	20,0	1,898030E-04	1,942958E-04	1,915370E-04	1,915380E-04	2,37	0,91	0,91	1,42	0,00
	30,0	1,254266E-04	1,308003E-04	1,269293E-04	1,269300E-04	4,28	1,20	1,20	2,96	0,00
	40,0	9,441638E-05	9,649434E-05	9,538986E-05	9,539100E-05	2,20	1,03	1,03	1,14	0,00
	50,0	7,515727E-05	7,807295E-05	7,592743E-05	7,592800E-05	3,88	1,02	1,03	2,75	0,00
1,5236	10,0	1,735705E-03	1,917587E-03	1,915032E-03	1,914953E-03	10,48	10,33	10,33	0,14	0,00
	20,0	8,659130E-04	9,395731E-04	9,315807E-04	9,315140E-04	8,51	7,58	7,58	0,86	0,01
	30,0	5,753695E-04	6,160046E-04	6,107298E-04	6,107140E-04	7,06	6,15	6,14	0,86	0,00
	40,0	4,299078E-04	4,555974E-04	4,529847E-04	4,529610E-04	5,98	5,37	5,36	0,58	0,01
	50,0	3,427296E-04	3,645799E-04	3,609544E-04	3,609310E-04	6,38	5,32	5,31	1,00	0,01

Os resultados apresentados graficamente abaixo correspondem ao locus (polar) da aceleração e à evolução temporal do estado, todos para as razões de raios $\rho = 0,727$ e $\rho = 1,5236$, associados, respectivamente, aos casos de transferência entre as órbitas da Terra e de Vênus e entre as órbitas da Terra e de Marte. A polar (Marec [47]) corresponde à curva descrita pela ponta do vetor aceleração no sistema móvel. Os resultados para as demais razões de raios são apresentados no Apêndice.

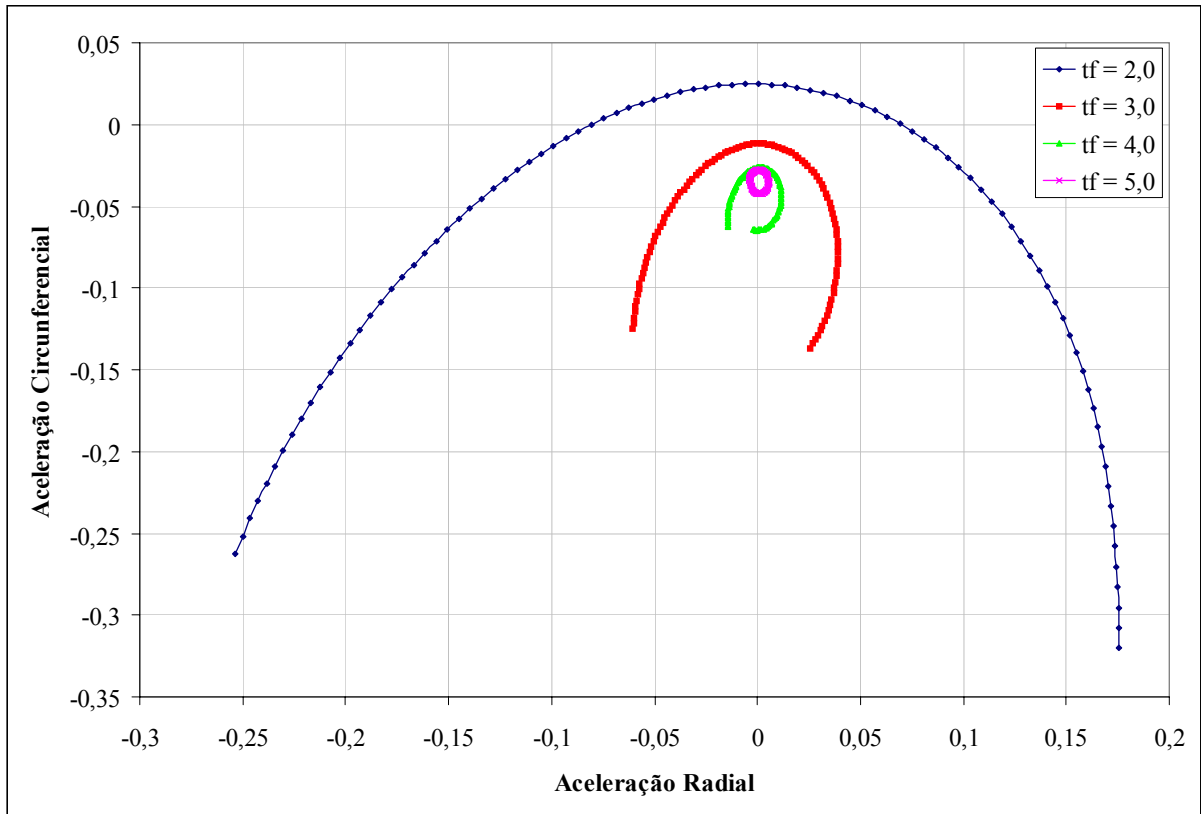


Figura IV.1. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e curta duração.

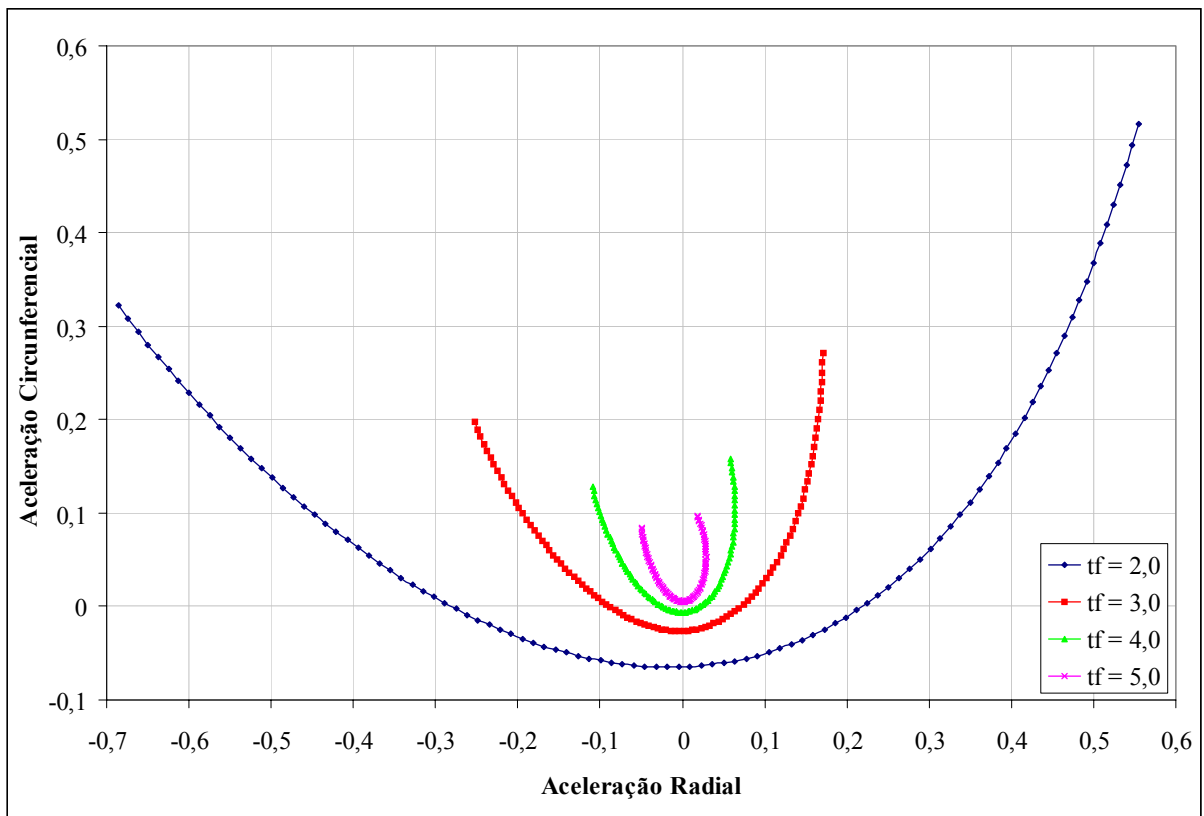


Figura IV.2. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e curta duração.

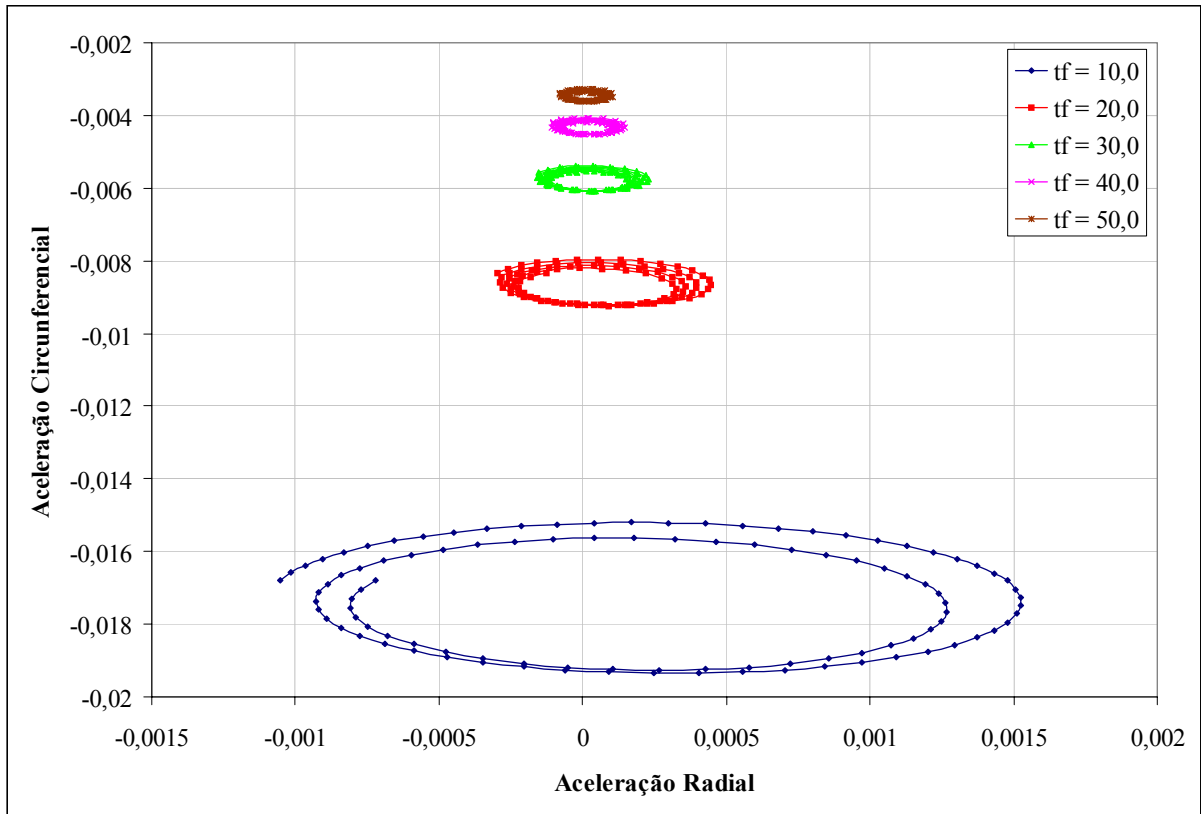


Figura IV.3. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e longa duração.

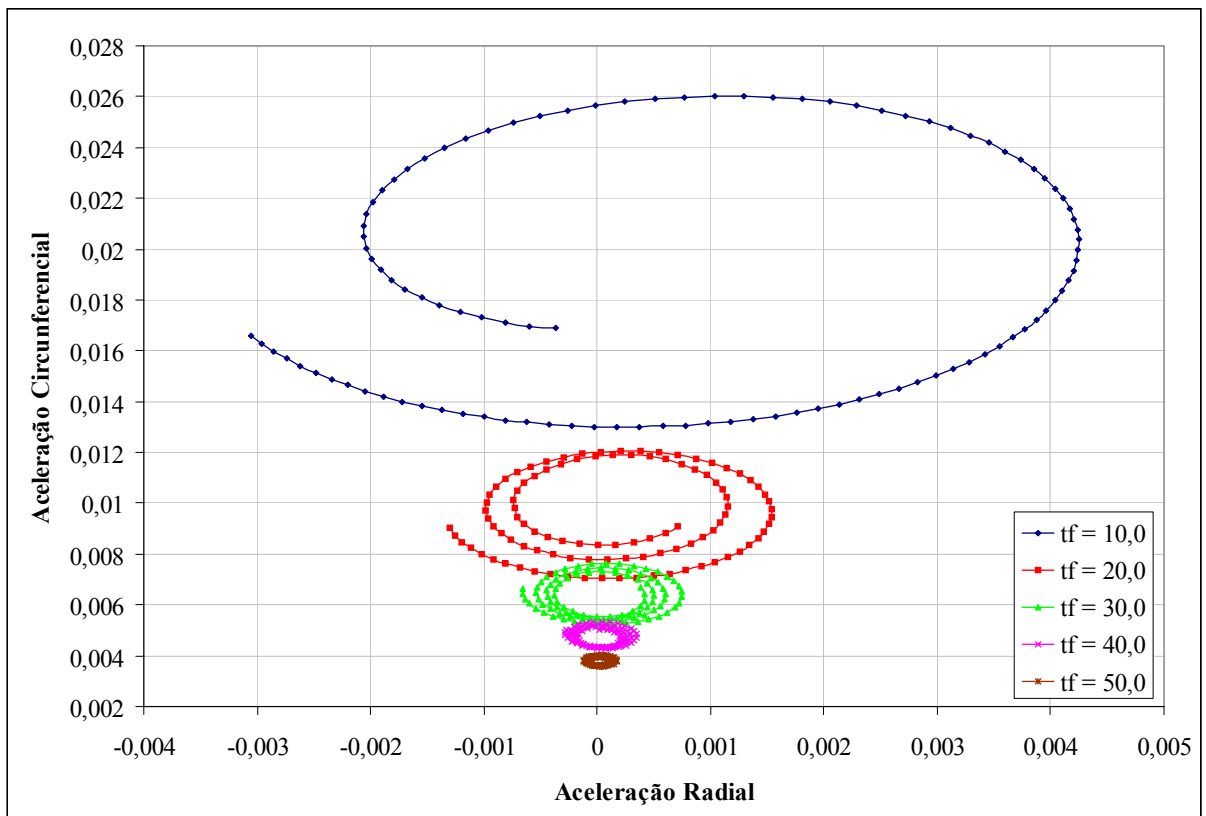


Figura IV.4. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e longa duração.

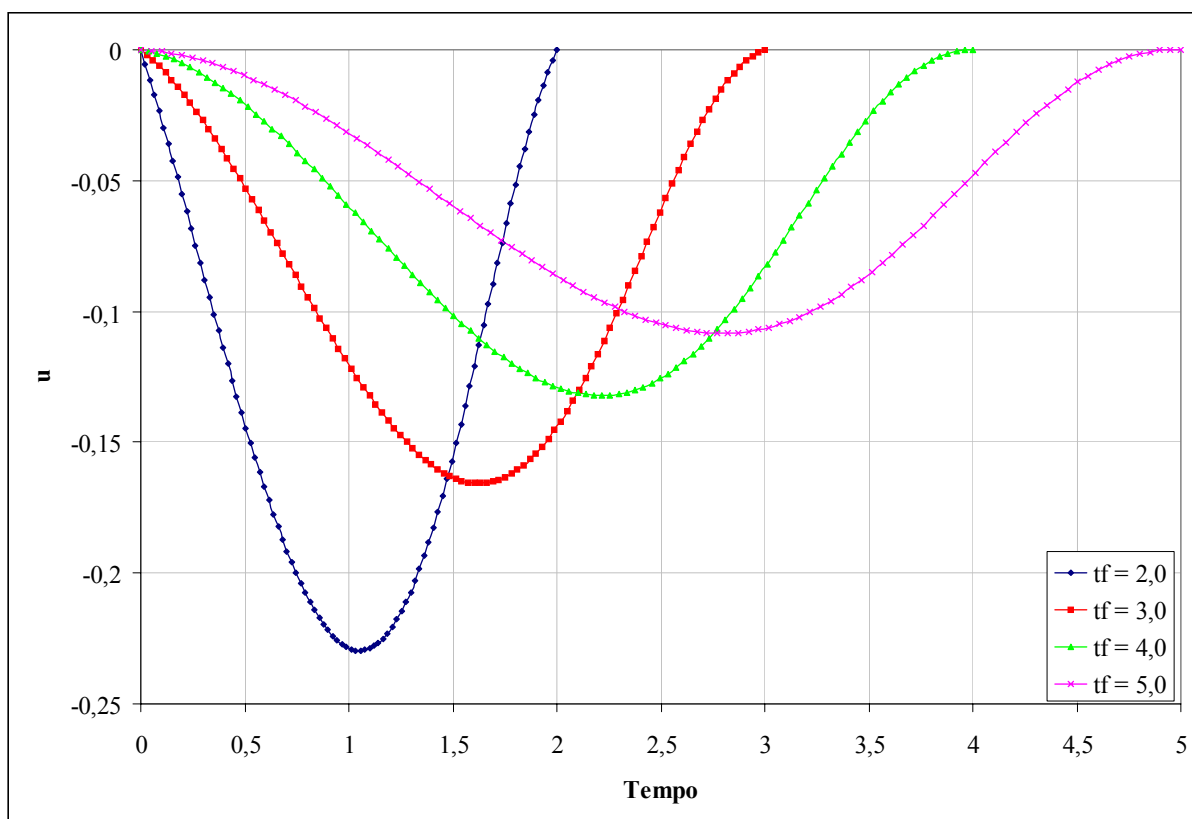


Figura IV.5. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e curta duração.

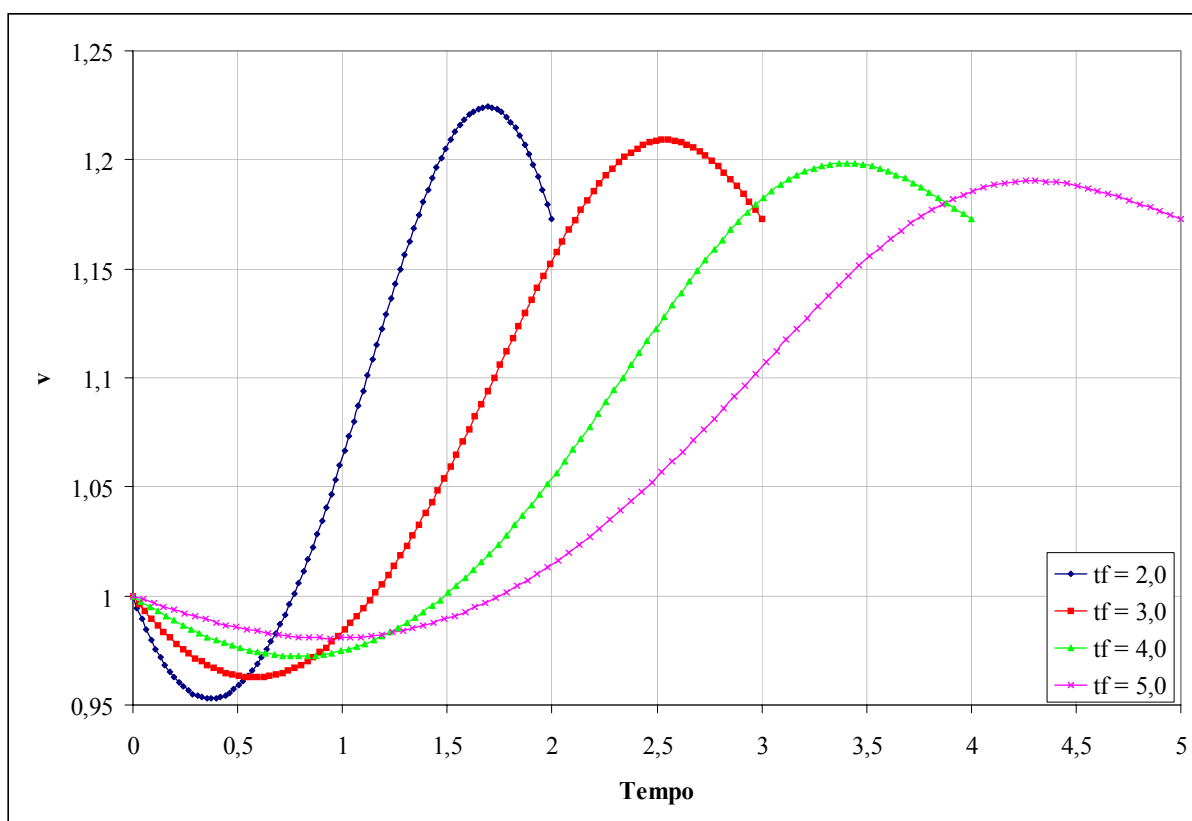


Figura IV.6. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e curta duração.

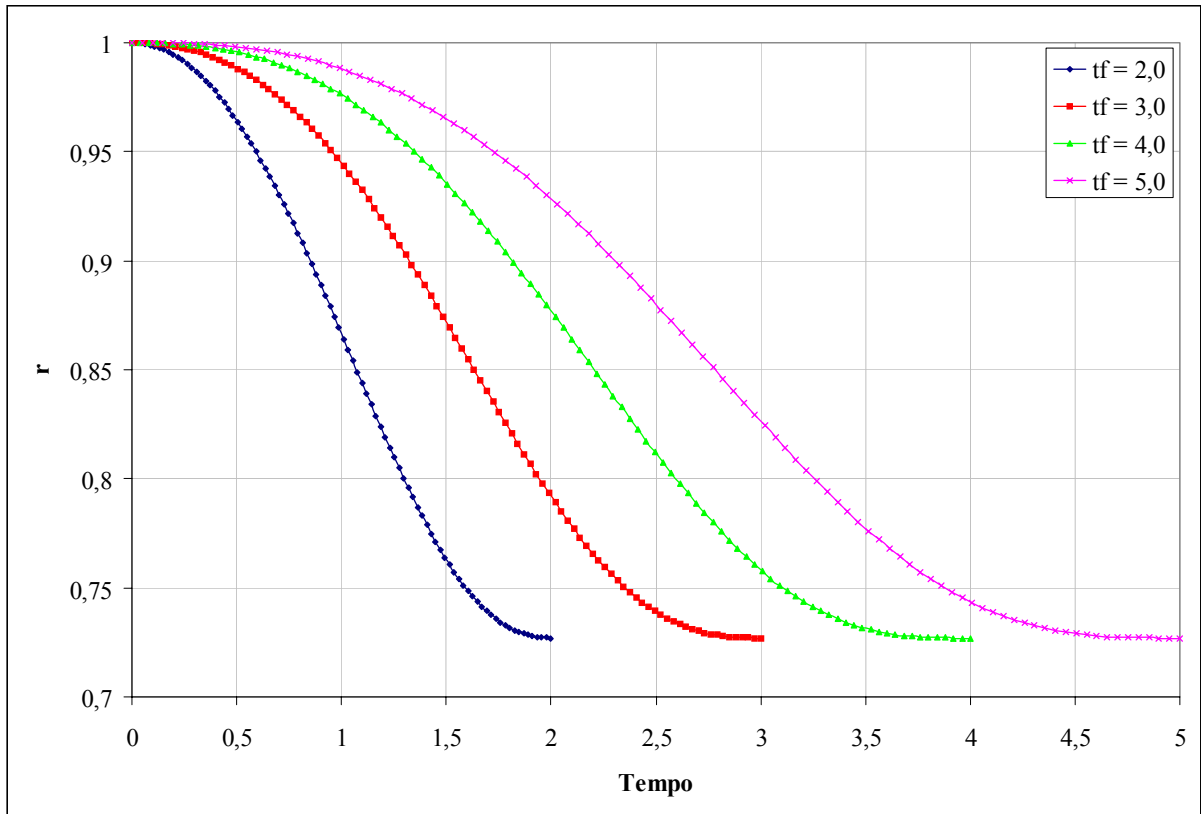


Figura IV.7. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e curta duração.

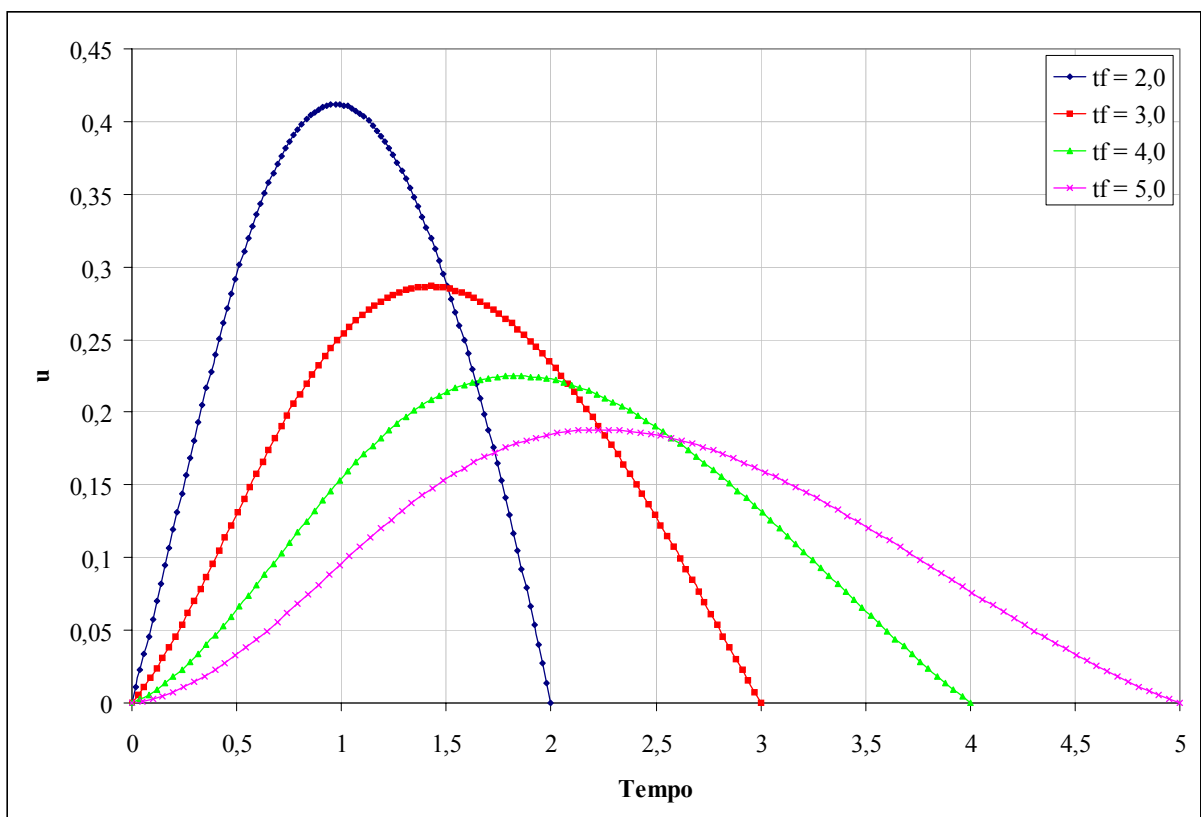


Figura IV.8. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e curta duração.

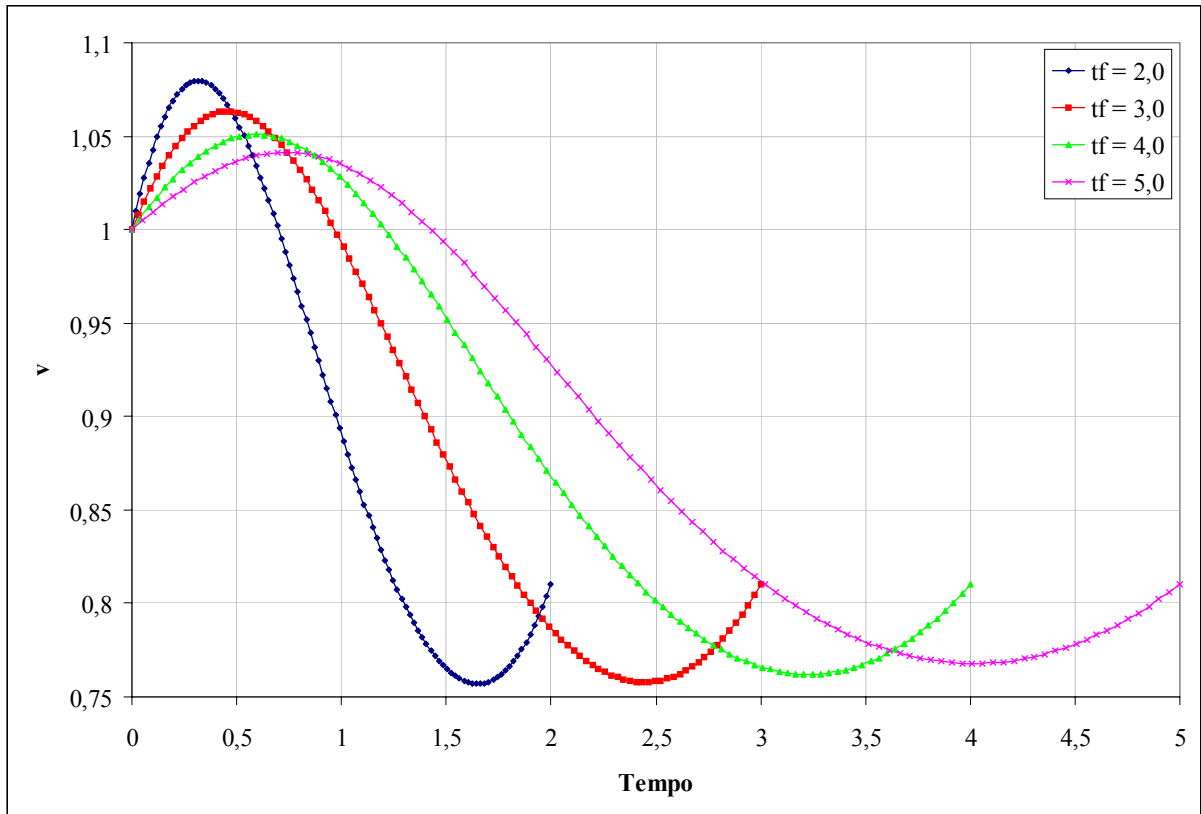


Figura IV.9. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e curta duração.

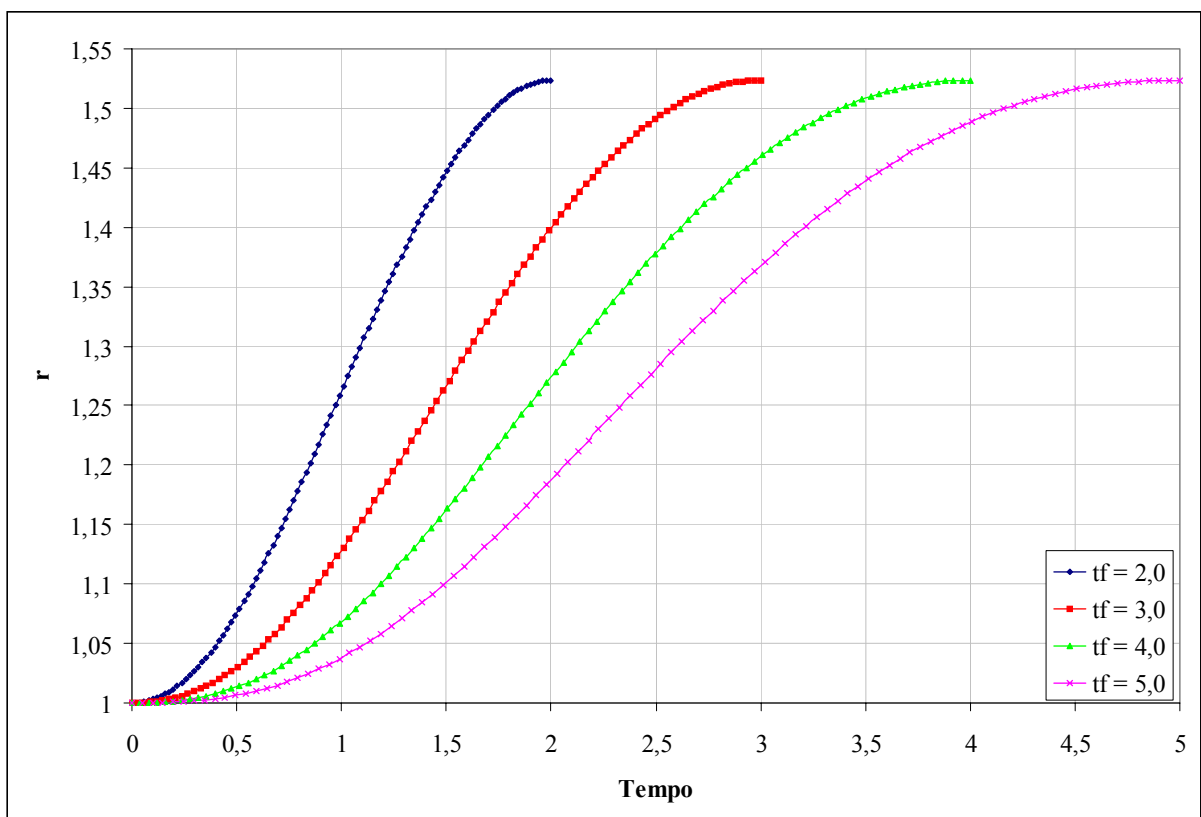


Figura IV.10. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e curta duração.

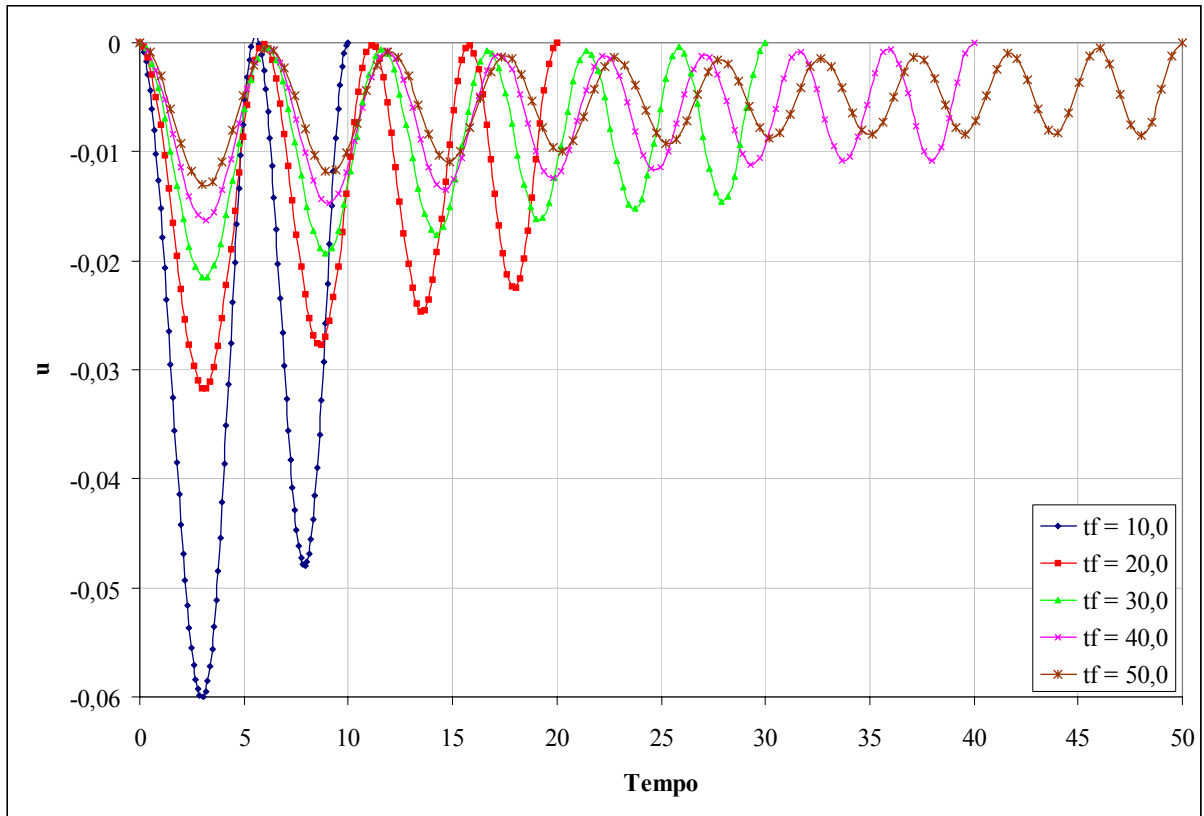


Figura IV.11. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e longa duração.

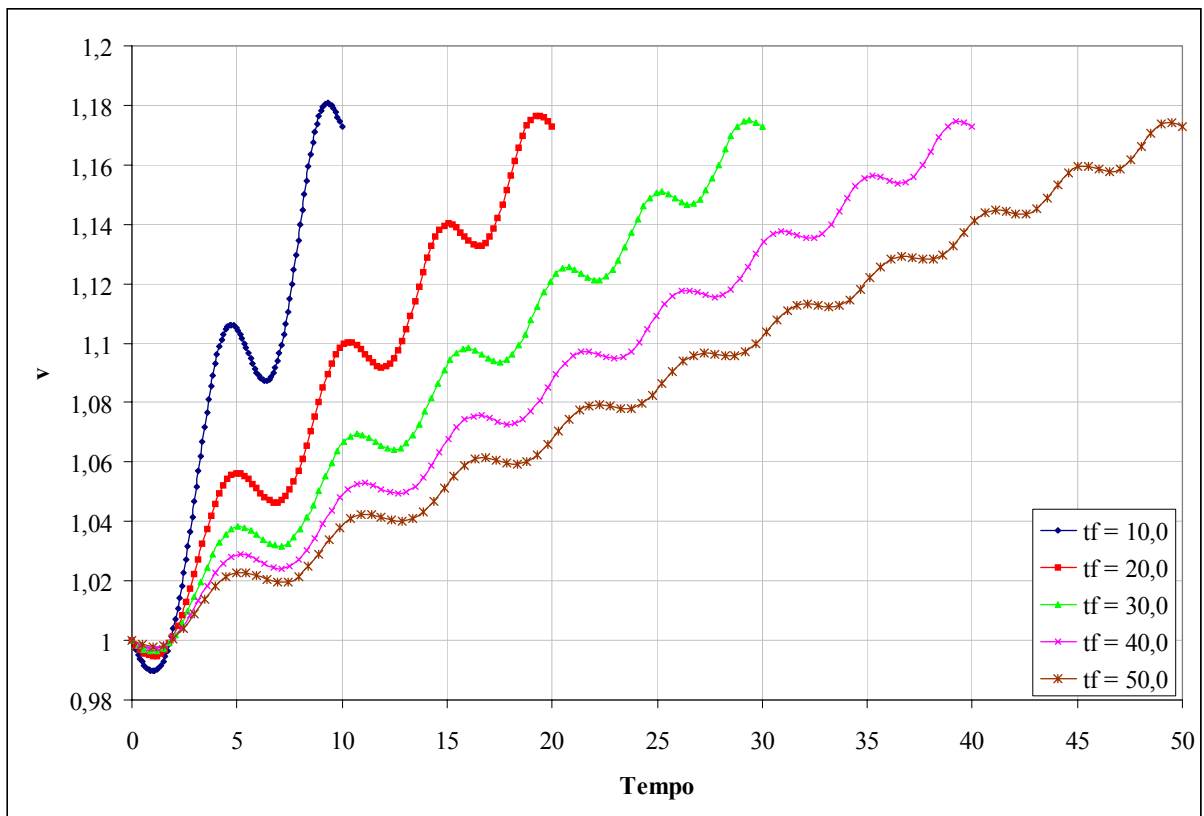


Figura IV.12. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e longa duração.

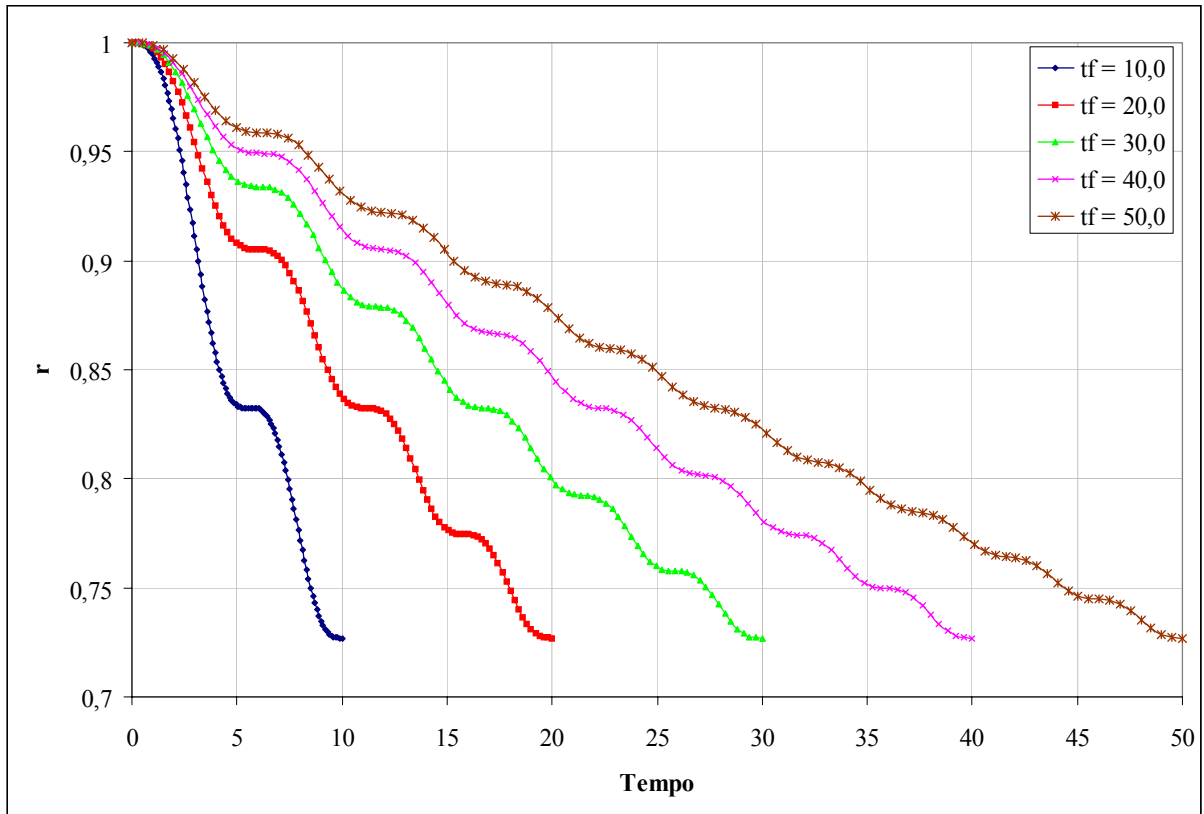


Figura IV.13. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e longa duração.

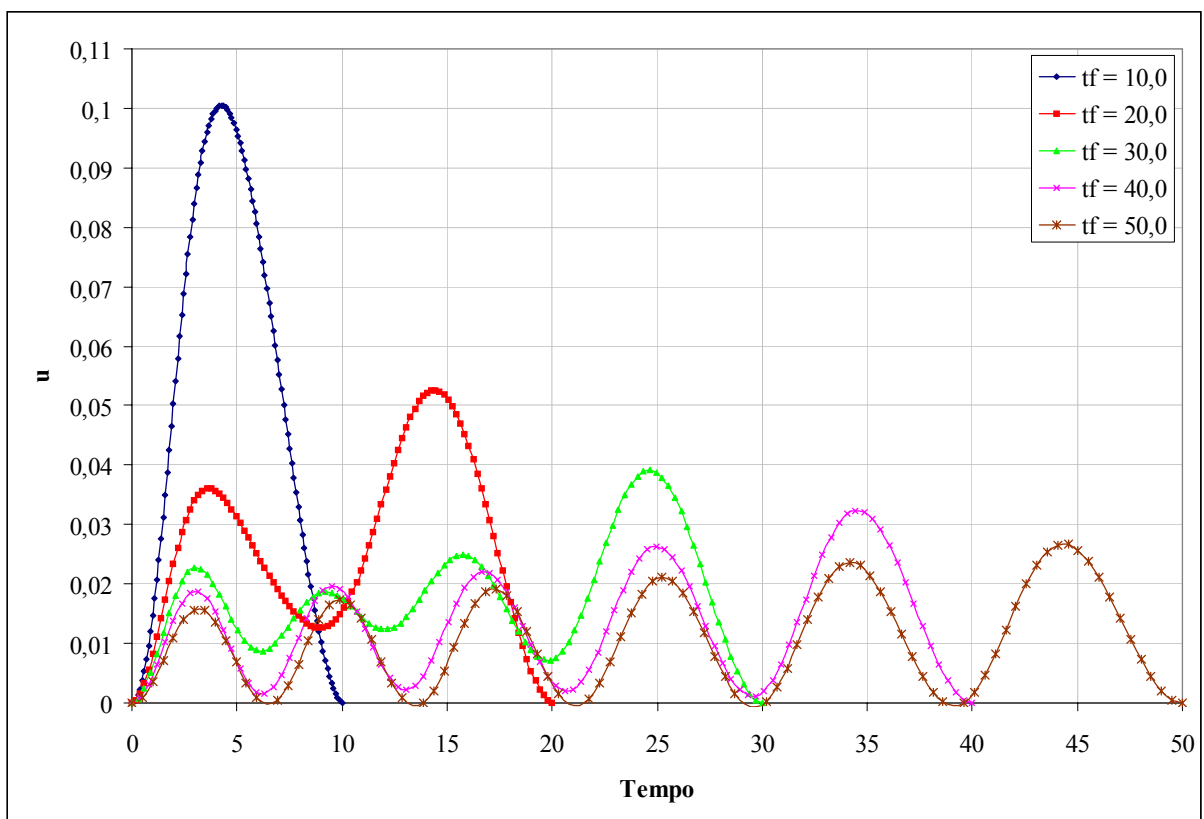


Figura IV.14. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e longa duração.

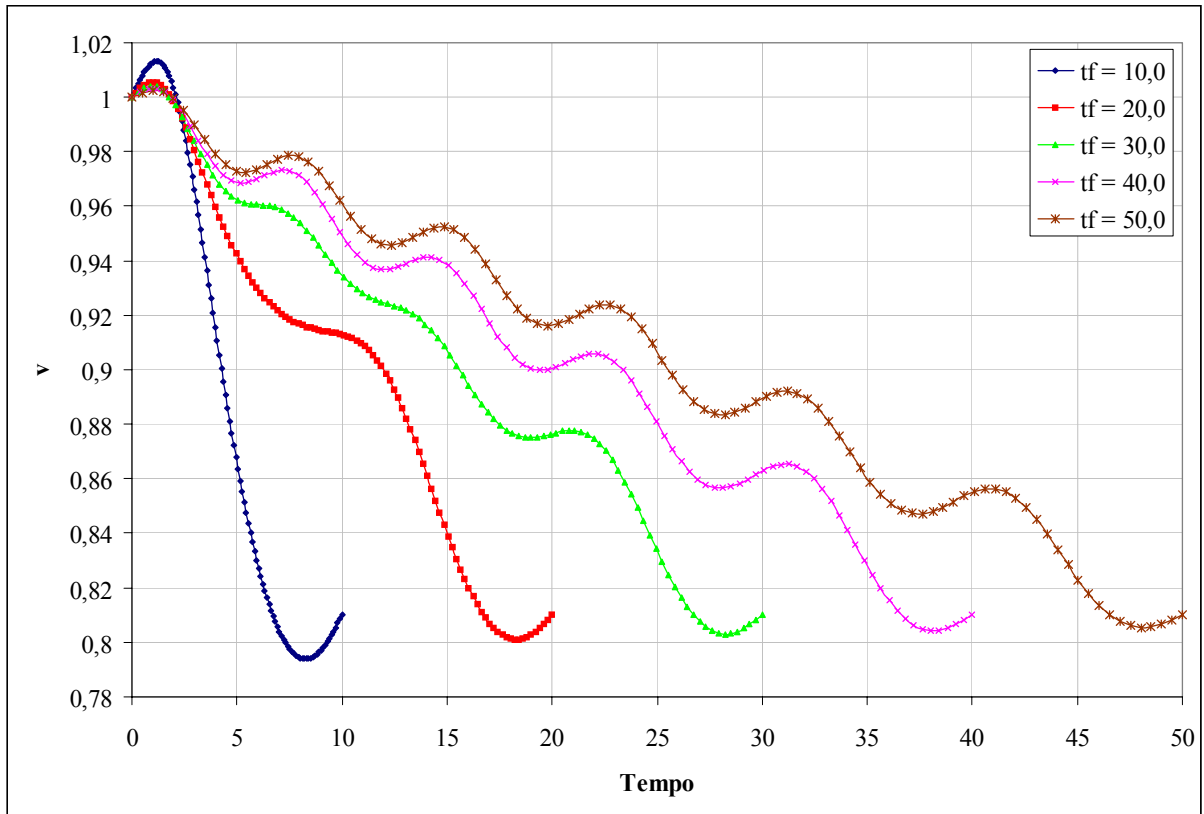


Figura IV.15. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e longa duração.

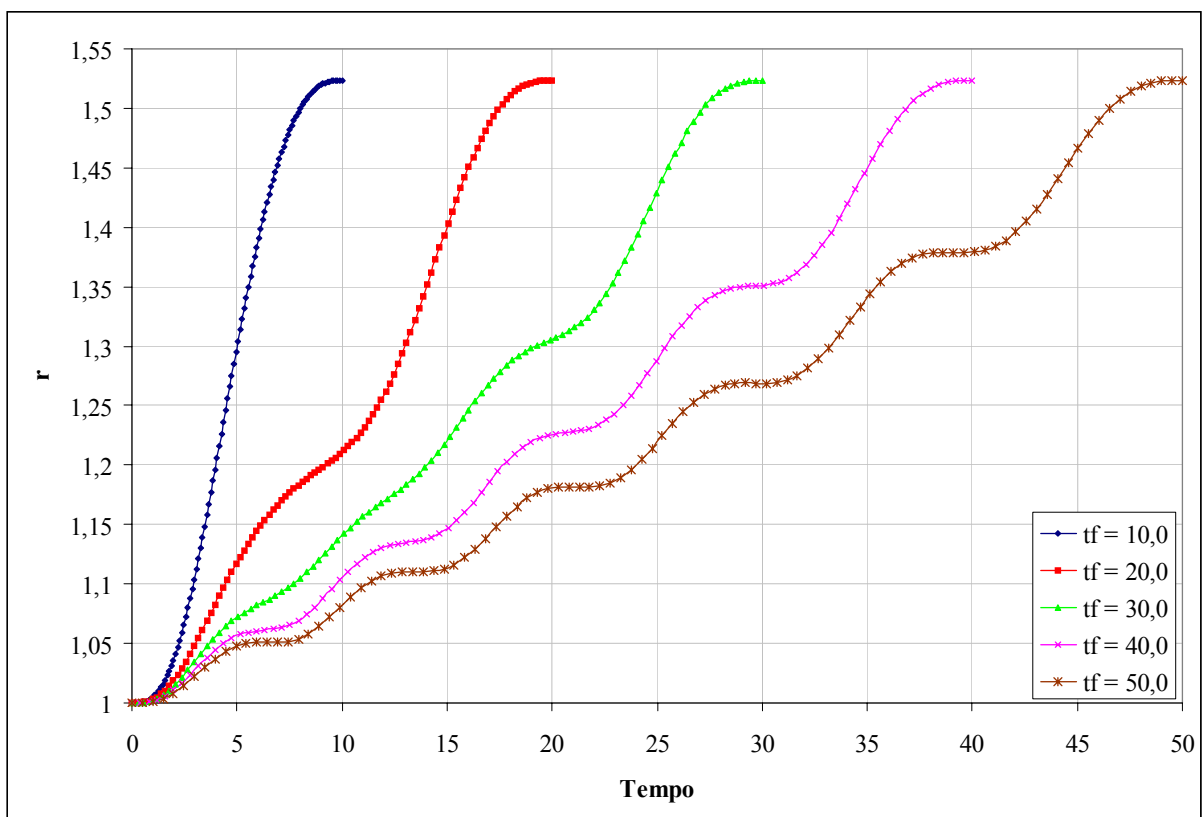


Figura IV.16. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e longa duração.

Os valores apresentados nas Tabelas IV.1 a IV.4 mostram a grande concordância entre os resultados analíticos (teoria linear) e numéricos (variação segunda com matriz de transição de estados). Em praticamente todos os casos, os desvios são inferiores a 6%. As exceções são as manobras de transferências de longa duração entre Terra e Marte ($\rho = 1,5236$ e t_f maior que 10,0). Para estes casos, há desvios em torno de 10%, o que ainda é um resultado bastante aceitável. De modo geral, verifica-se que a teoria analítica fornece uma boa aproximação para a solução de problemas de transferências espaciais ótimas entre órbitas circulares coplanares próximas, utilizando sistema de potência limitada e baixo empuxo.

É interessante observar, ainda, que os desvios entre os valores de J fornecidos pelos dois métodos da variação segunda – matriz de transição e transformação de Riccati – são praticamente nulos. Este resultado sugere que a maneira utilizada para resolver numericamente o problema de valor de contorno linear, definido por (III.23), (III.24), (III.27) e (III.32), tem pouca influência sobre os resultados finais. Isto indica que a principal parte da formulação do método corresponde, justamente, àquela associada à segunda variação do funcional e ao conceito de trajetórias extremais, conforme discutido na seção III.7.

Outro aspecto interessante dos resultados obtidos pode ser observado a partir das polares e das evoluções temporais dos estados, nas Figuras IV.1 a IV.16. Estes gráficos mostram a concordância entre os valores de diferentes tempos de manobras, para uma mesma razão de raio. Constata-se, a partir das polares, que tempos de duração maiores requerem níveis de aceleração cada vez menores, o que é bastante coerente. Além disto, nota-se, a partir das evoluções temporais, que quanto maior o tempo de transferência, mais suave é a transição para o estado final, o que também é esperado, pois, com mais tempo disponível, o sistema propulsivo é menos solicitado para realizar a manobra.

Os resultados obtidos mostram, ainda, uma característica bastante importante com respeito ao comportamento da magnitude da aceleração, γ , para manobras de longa duração.

Nota-se, a partir das Figuras VII.85, VII.87, VII.89, VII.91, etc., que à medida que o tempo da manobra aumenta, γ torna-se praticamente constante. Este resultado está em acordo com o estabelecido por uma teoria analítica baseada em teoria de perturbações (método de Hori, mais precisamente). Para maiores referências, recomenda-se a leitura de Carvalho [11] e Da Silva Fernandes [15].

IV.8 – TRANSFERÊNCIAS A VELOCIDADE DE EJEÇÃO CONSTANTE

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos através do algoritmo do método da variação segunda para o problema de transferência espacial a baixo empuxo e velocidade de ejeção constante, formulado na seção IV.6.3. Consideram-se diversos valores da razão de raios das órbitas terminais $\rho = r_f / r_0$ e diversas durações da manobra $t_f - t_0$. Além disto, como se trata de um problema com restrições, consideram-se diversas magnitudes da aceleração máxima γ_{\max} .

Conforme já comentado, a convergência de métodos indiretos está bastante relacionada a boas estimativas para os multiplicadores de Lagrange e variáveis adjuntas. Nos casos analisados utilizando o método da variação segunda, estas estimativas foram escolhidas de forma a garantir a convergência, mesmo que várias iterações fossem necessárias. Além disto, também com o objetivo de obter convergência, mas desta vez garantindo a validade da hipótese de linearidade, utilizou-se uma matriz de pesos para controlar o tamanho das correções a cada iteração.

A precisão de convergência foi ajustada para cada problema já que alguns casos, em especial os de maior variação entre os raios inicial e final, apresentaram maior dificuldade de satisfazer os valores escolhidos. Apesar disto, em todos os casos a tolerância de convergência

foi igual ou menor que $5,0 \times 10^{-9}$, tanto para os multiplicadores de Lagrange quanto para as variáveis adjuntas. Ou seja, o processo iterativo foi encerrado apenas quando as condições:

$$\begin{aligned} \|\delta\lambda_{0_i}\| &\leq 5,0 \times 10^{-9} \\ \|\mathrm{d}v_f\| &\leq 5,0 \times 10^{-9}, \end{aligned} \quad (\text{IV.91})$$

ou outras mais restritivas, foram simultaneamente satisfeitas. A norma em (IV.91) corresponde à mesma norma euclidiana definida em (IV.89).

Além da precisão de convergência, outro parâmetro importante na execução do método para este tipo problema, que apresenta restrições, é o valor do termo:

$$\varepsilon = \frac{1}{2K}. \quad (\text{IV.92})$$

Conforme mencionado anteriormente, quanto menor for o valor de ε , tanto mais próxima de zero a função de penalidade deve ser para minimizar o índice de performance e melhores serão os resultados obtidos. Por outro, valores muito pequenos de ε podem impor uma restrição muito forte ao algoritmo numérico, dificultando ou até mesmo impossibilitando a convergência. Nos problemas analisados, verificou-se que $\varepsilon = 1,0 \times 10^{-5}$ fornece um bom compromisso entre facilidade de convergência e qualidade dos resultados obtidos.

É interessante observar que os problemas tipo VEC, de forma geral, necessitaram de um número de iterações bastante elevado, em comparação com os problemas do tipo PL da seção anterior. Este fato deve-se, justamente, à restrição sobre a magnitude do vetor aceleração. Foi possível observar que o número de iterações torna-se tanto mais elevado quanto menores forem os arcos propulsados, o que torna a solução ótima mais sensível.

Os resultados fornecidos pelo método da variação segunda foram obtidos para as duas formulações apresentadas na seção IV.6.3, i.e., sistema linearizado e não-linearizado. Eles são apresentados nas seções abaixo.

IV.8.1 Sistema Linearizado

As Tabelas IV.5 a IV.7 a seguir apresentam os valores fornecidos pelo método da variação segunda para a velocidade característica C , utilizando a formulação com sistema linearizado apresentada na seção IV.6.3.1. Estes resultados são apresentados graficamente em seguida, nas Figuras IV.17 a IV.19.

Tabela IV.5. Velocidade característica C para diferentes tempos de manobra, $t_f - t_0$, e acelerações máximas, γ_{\max} – transferência entre Terra e Vênus ($\rho = 0,7270$).

$t_f - t_0$	γ_{\max}	C_f
2,00	0,220	0,383046
	0,250	0,319021
	0,300	0,281812
	0,400	0,252385
	0,500	0,239095
2,50	0,120	0,286272
	0,150	0,214201
	0,200	0,181253
	0,300	0,160663
3,00	0,070	0,191345
	0,080	0,173109
	0,090	0,154573
	0,100	0,142483
	0,150	0,119332
	0,200	0,112623
	0,300	0,107802

Tabela IV.6. Velocidade característica C para diferentes tempos de manobra, $t_f - t_0$, e acelerações máximas, γ_{\max} – transferência entre Terra e Marte ($\rho = 1,5236$).

$t_f - t_0$	γ_{\max}	C_f
2,00	0,520	1,046346
	0,525	1,017476
	0,530	0,958846
	0,550	0,861578
	0,600	0,761426
	0,650	0,709230
	0,700	0,674840
	0,800	0,630782
	0,850	0,615575
	0,950	0,592780
	1,050	0,576428
	1,150	0,564084
1,300	0,550329	
2,50	0,330	0,840851
	0,340	0,798908
	0,350	0,716706
	0,400	0,587211
	0,500	0,504543
3,00	0,230	0,708241
	0,235	0,698513
	0,240	0,652365
	0,280	0,490375
	0,300	0,460890
	0,350	0,419382
	0,380	0,404861
	0,400	0,397480
	0,420	0,391392
	0,450	0,384044
	0,500	0,375039

Tabela IV.7. Velocidade característica C para diferentes tempos de manobra, $t_f - t_0$, e aceleração máxima, γ_{\max} , igual a 0,10 – transferência intermediárias entre Terra-Vênus e Terra-Marte ($0,7270 < \rho < 1,5236$).

ρ	$t_f - t_0$	C_f
0,9000	1,75	0,193662
	2,00	0,121987
	2,25	0,088318
0,9250	1,75	0,111095
	2,00	0,078639
	2,25	0,060958
0,9500	1,75	0,060606
	2,00	0,047002
	2,25	0,037811
0,9750	1,75	0,026473
	2,00	0,021363
	2,25	0,017538
1,0250	1,75	0,026766
	2,00	0,021676
	2,25	0,017882
1,0500	1,75	0,062358
	2,00	0,048639
	2,25	0,039475
1,0750	1,75	0,119005
	2,00	0,083751
	2,25	0,065521
1,1000	1,75	0,201487
	2,00	0,137721
	2,25	0,098857

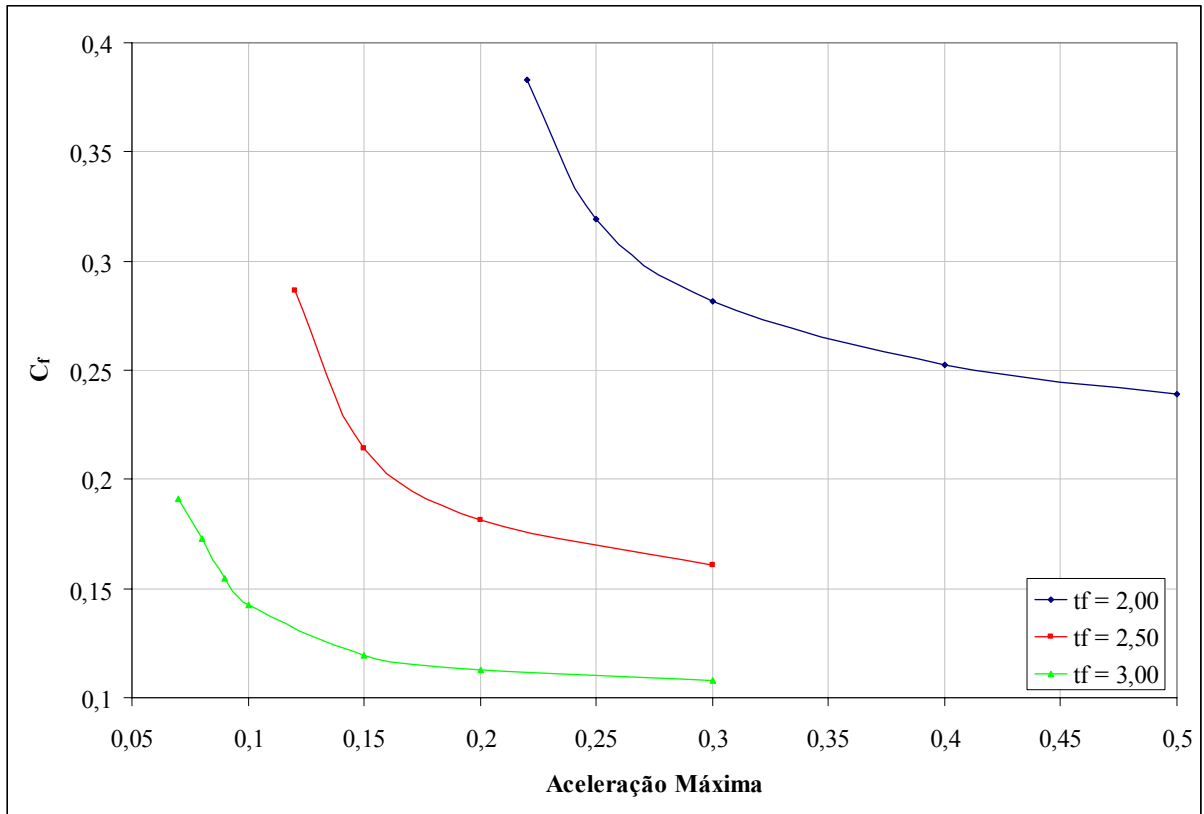


Figura IV.17. Variação da velocidade característica final C_f com o nível de aceleração máxima γ_{\max} , para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$.

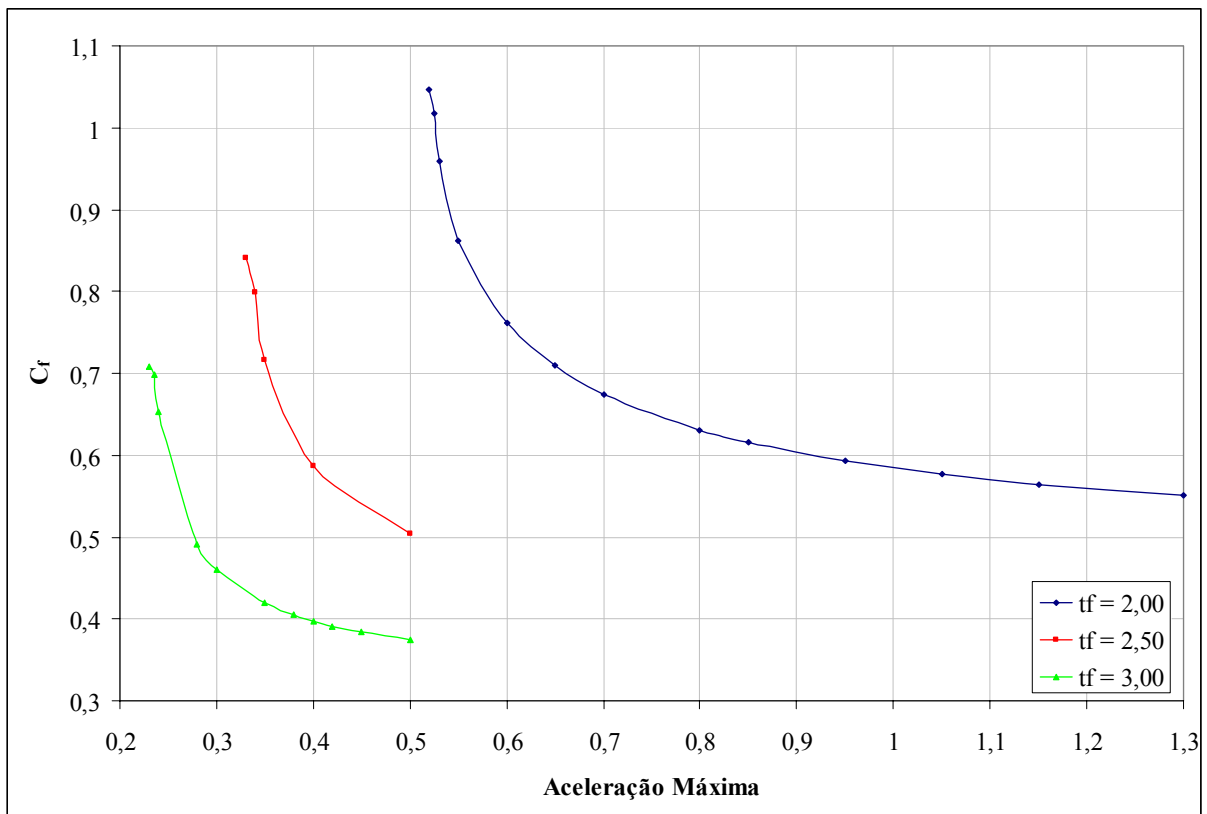


Figura IV.18. Variação da velocidade característica final C_f com o nível de aceleração máxima γ_{\max} , para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$.

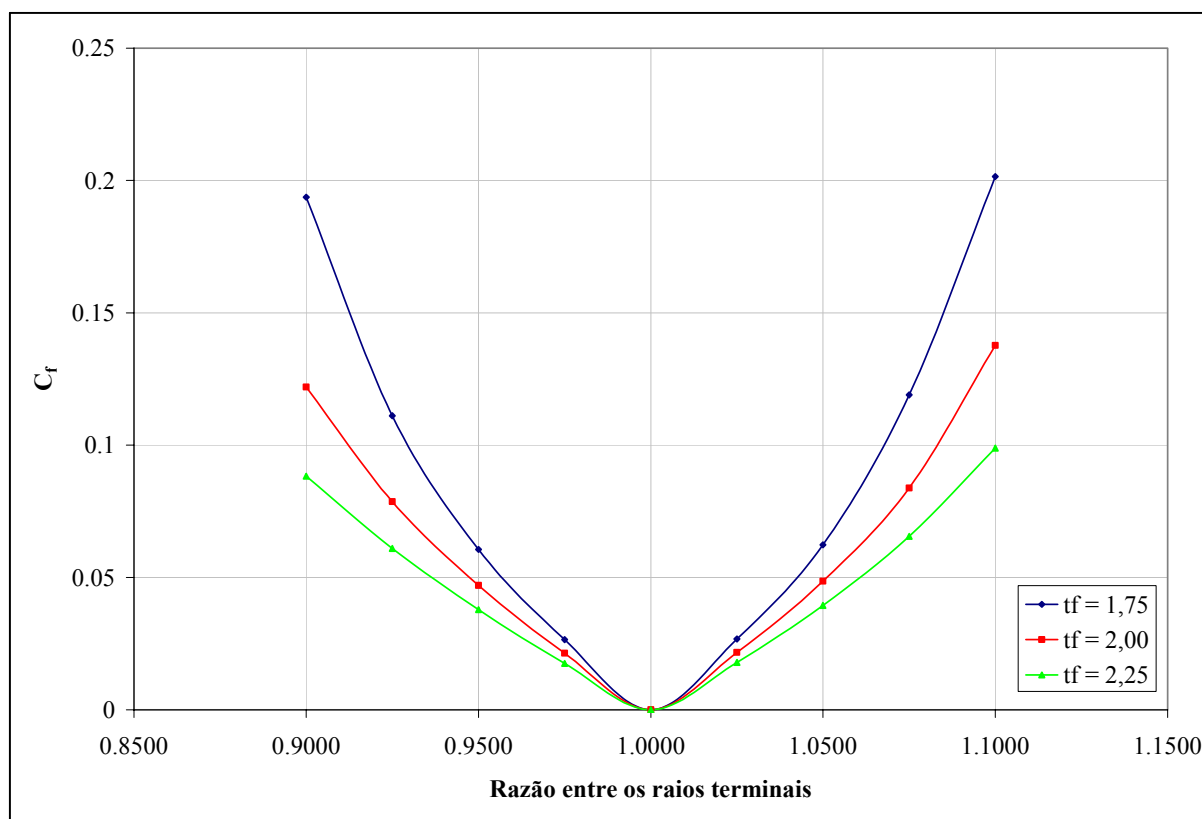


Figura IV.19. Variação da velocidade característica final C_f com a razão entre os raios das órbitas terminais ρ , para diferentes tempos de transferência e $\gamma_{\max} = 0,10$ – sistema VEC linearizado – $0,9000 \leq \rho \leq 1,1000$.

A seguir, são apresentados graficamente os resultados correspondentes às evoluções temporais do controle e do estado, todos para as razões de raios $\rho = 0,727$ e $\rho = 1,5236$, associados, respectivamente, aos casos de transferência Terra–Vênus e Terra–Marte. Os resultados para razões de raios intermediárias são apresentados no Apêndice. É importante observar que, conforme indicado nas Tabelas IV.5 a IV.7 acima, as transferências com $\rho = 0,727$ e $\rho = 1,5236$ foram analisadas para diferentes valores da aceleração máxima, γ_{\max} . O objetivo disto era verificar a influência do nível de aceleração sobre os resultados obtidos. As transferências com razões de raio intermediárias (ρ entre 0,7270 e 1,5236), por outro lado, foram analisadas apenas para $\gamma_{\max} = 0,10$. Os resultados são comentados a seguir.

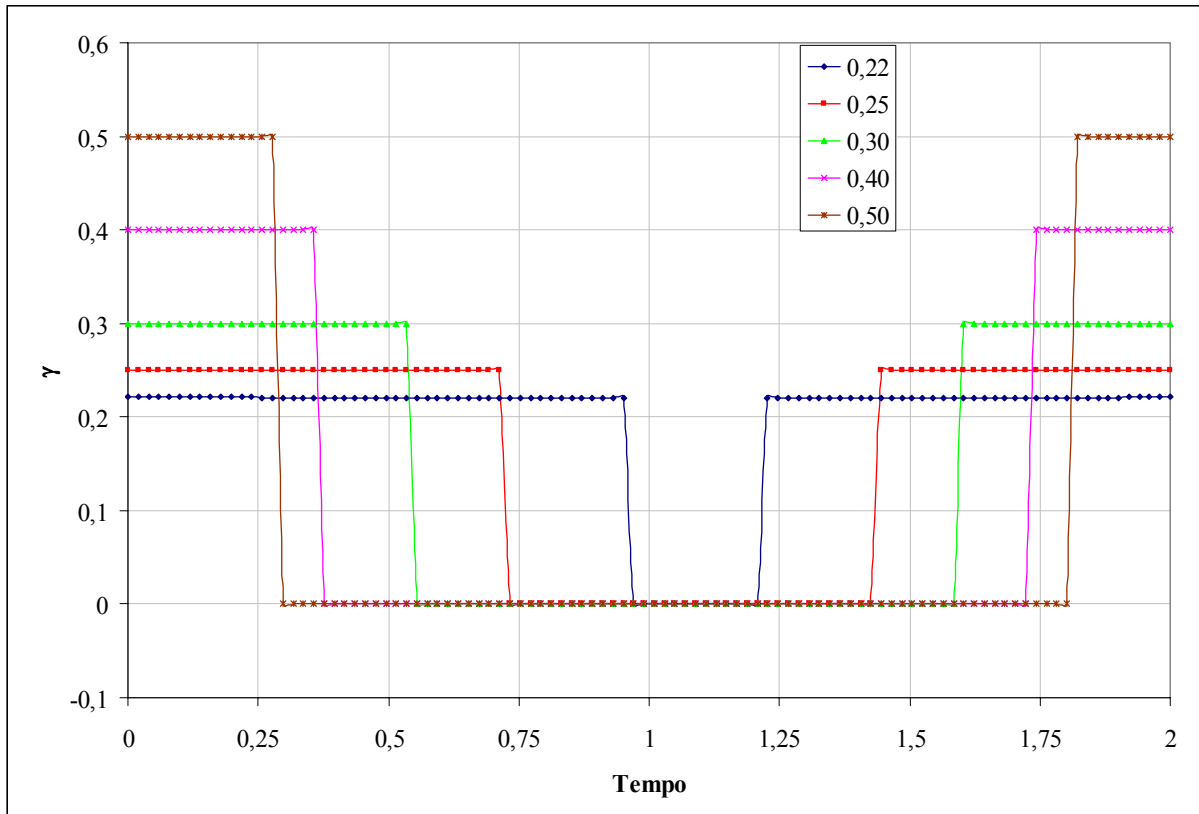


Figura IV.20. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes valores de γ_{max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,0$.

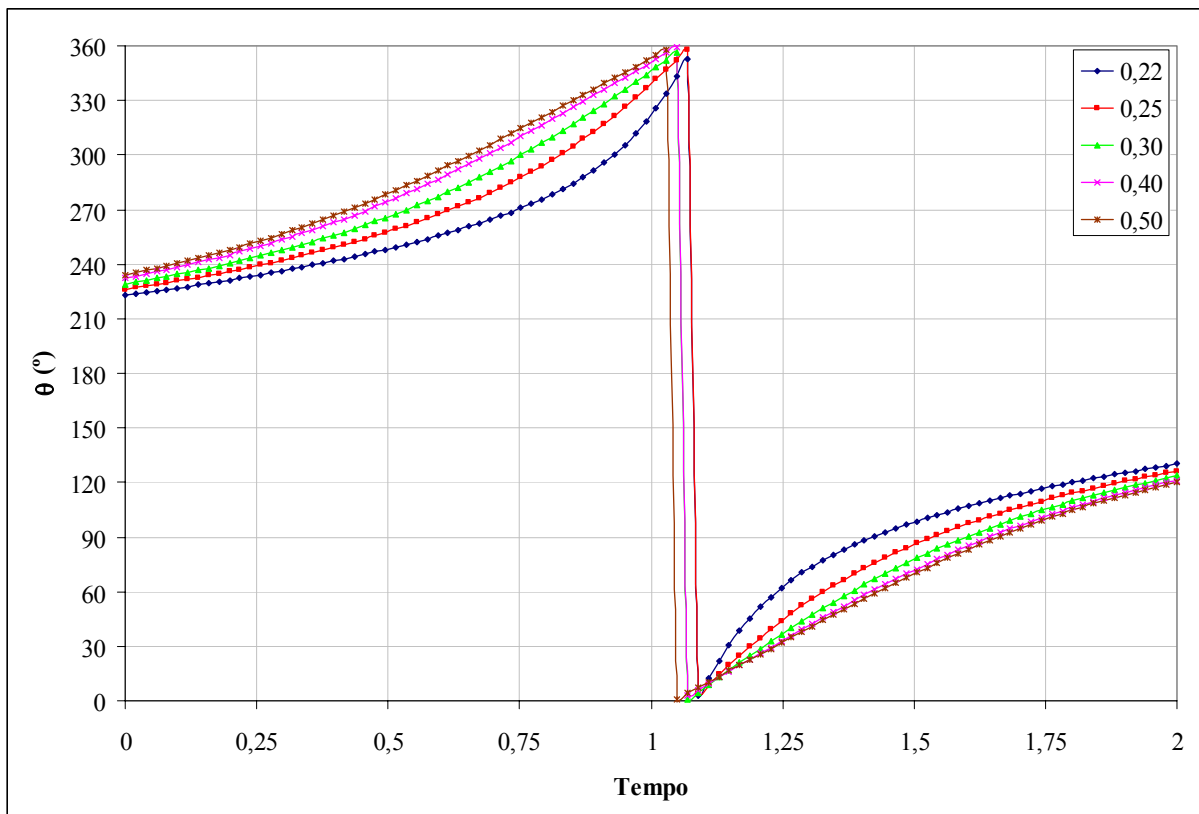


Figura IV.21. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes valores de γ_{max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,0$.

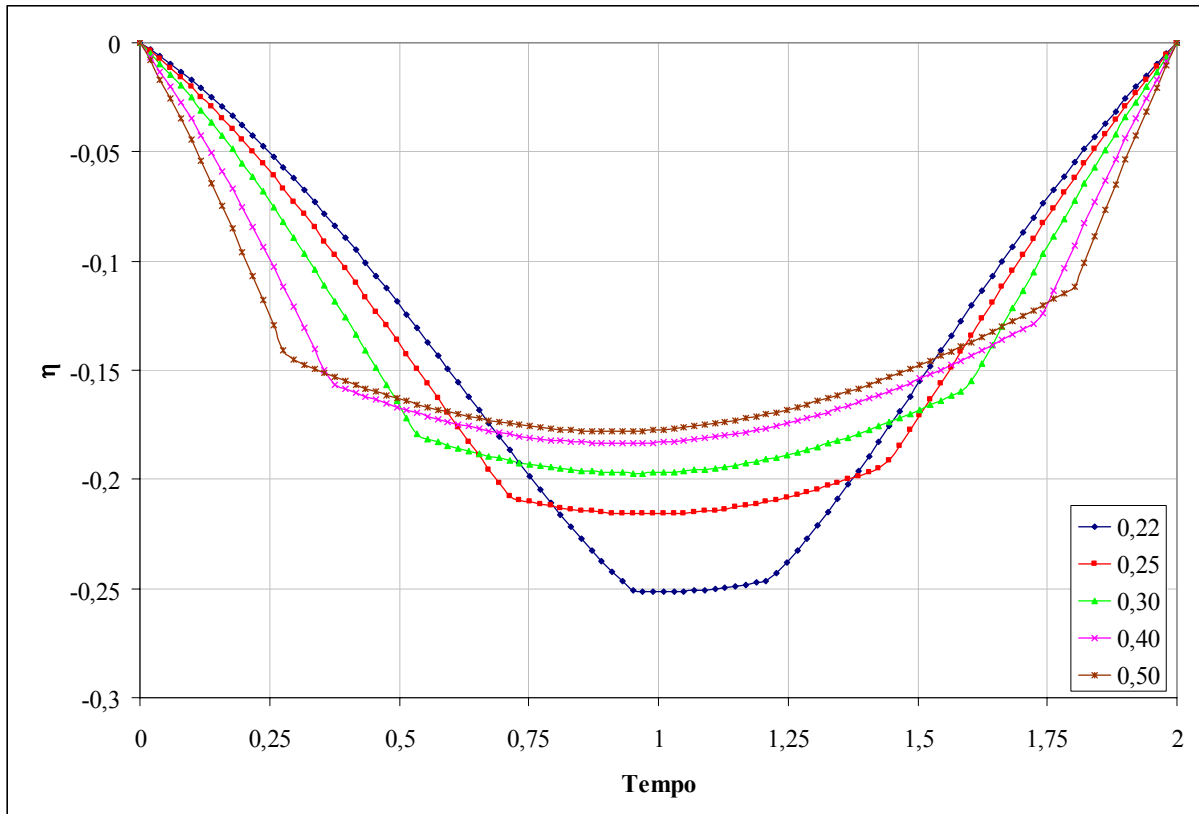


Figura IV.22. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,0$.

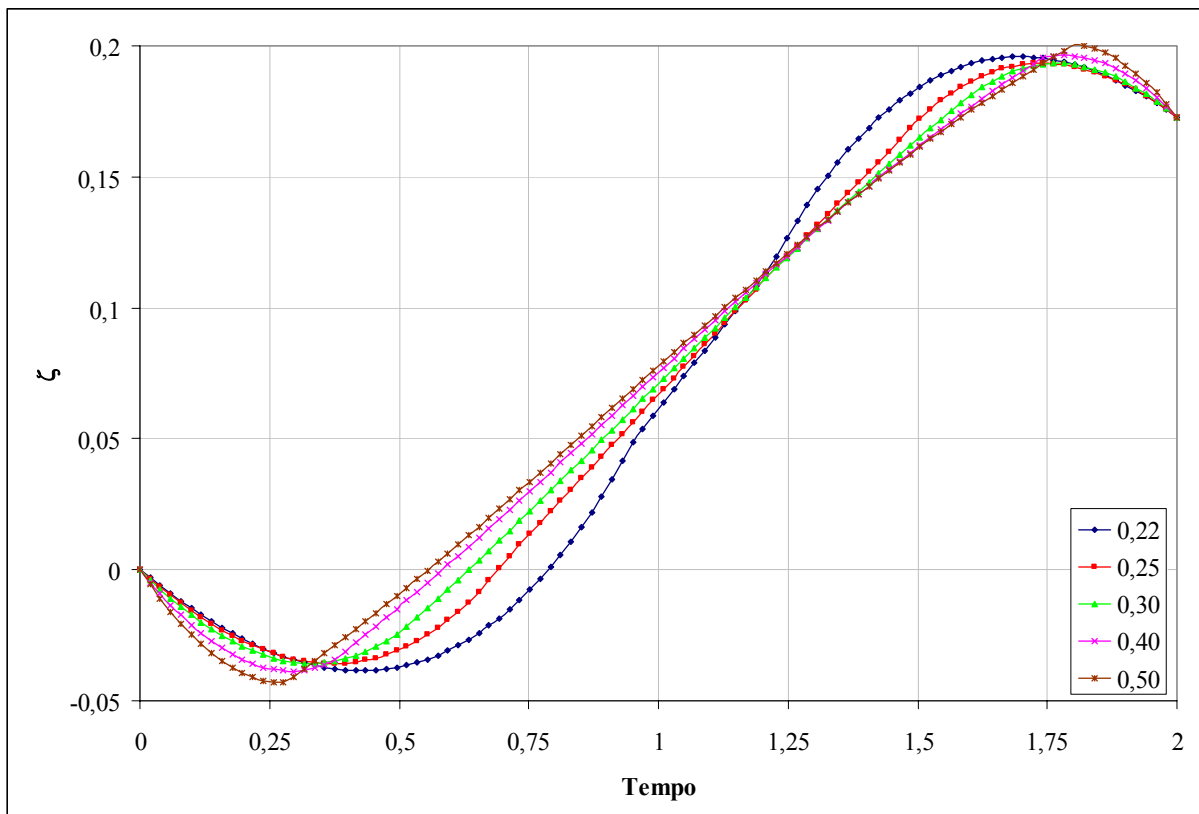


Figura IV.23. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,0$.

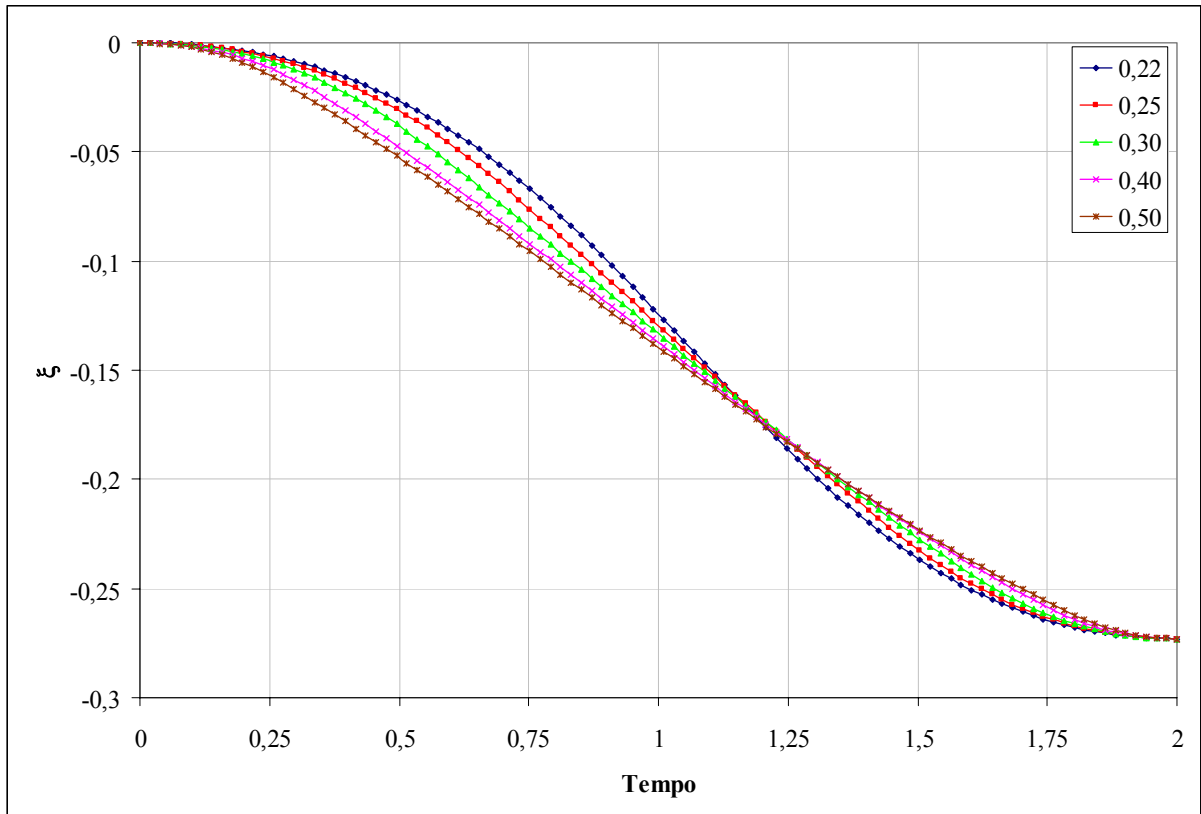


Figura IV.24. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,0$.

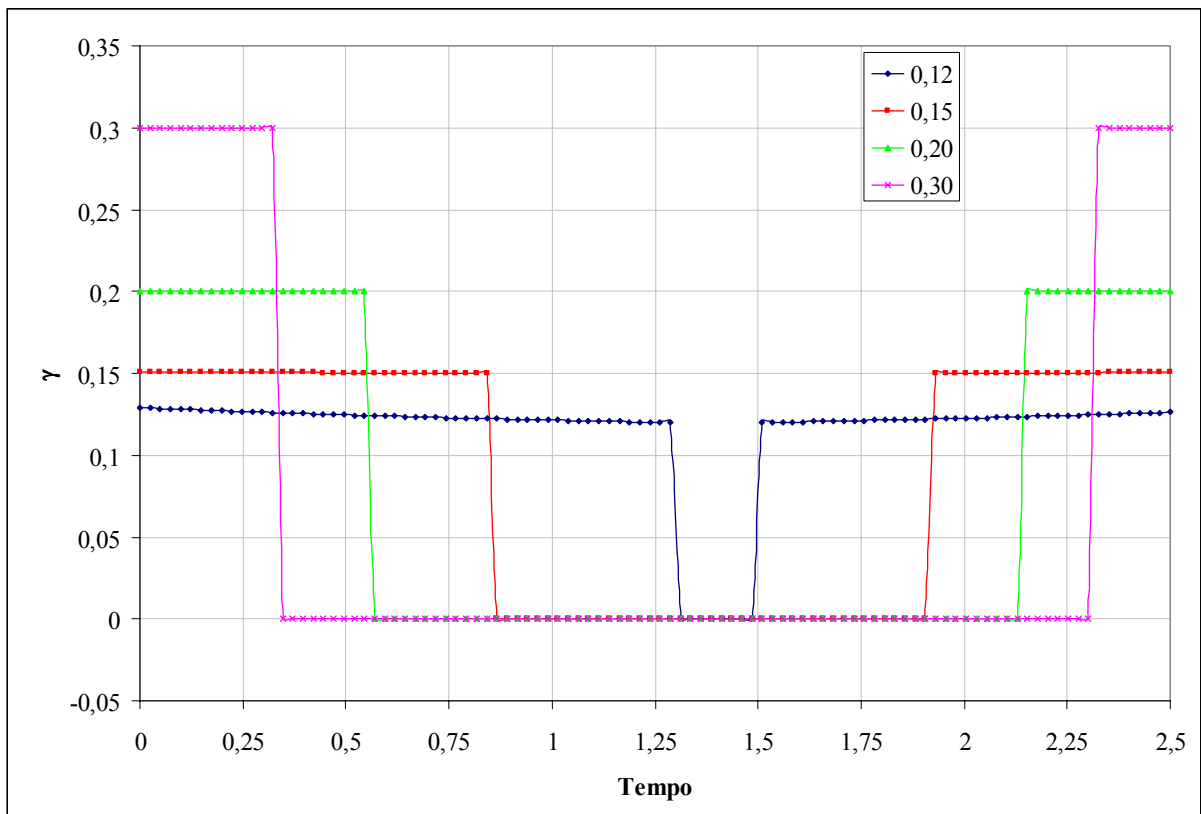


Figura IV.25. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,5$.

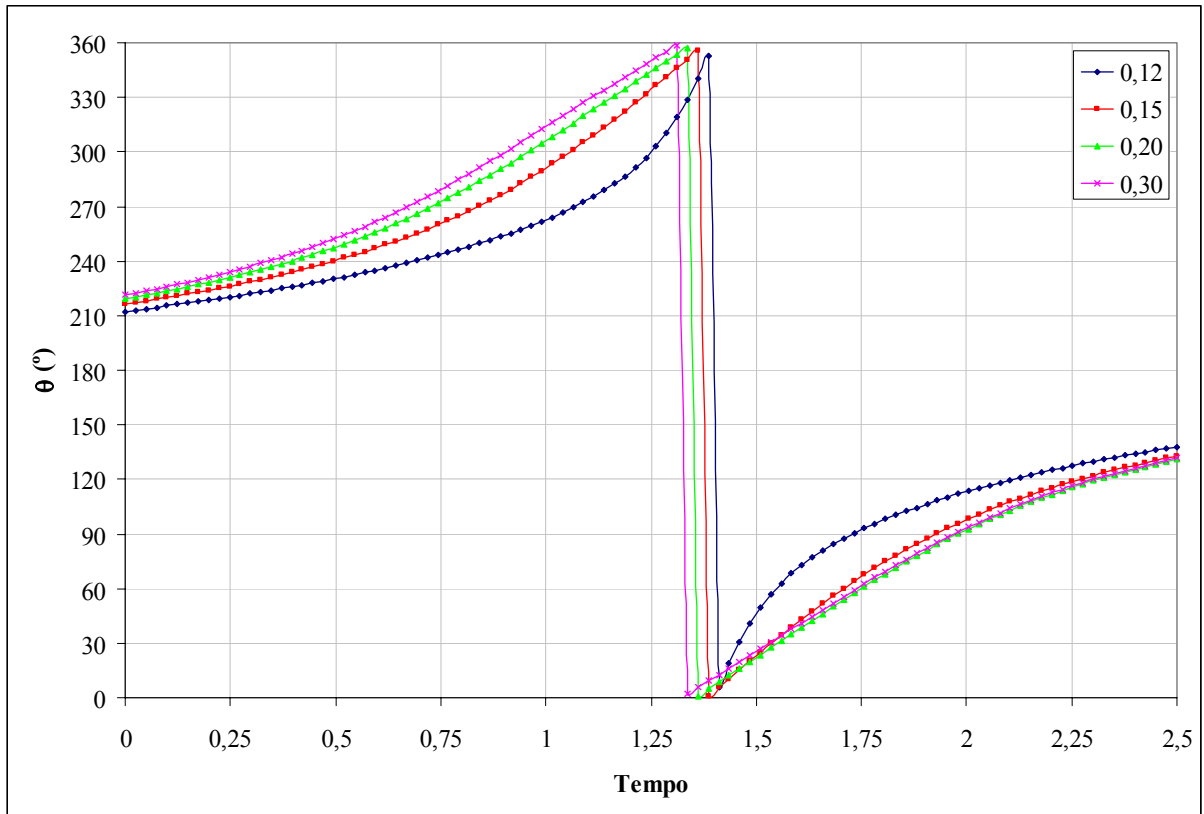


Figura IV.26. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,5$.

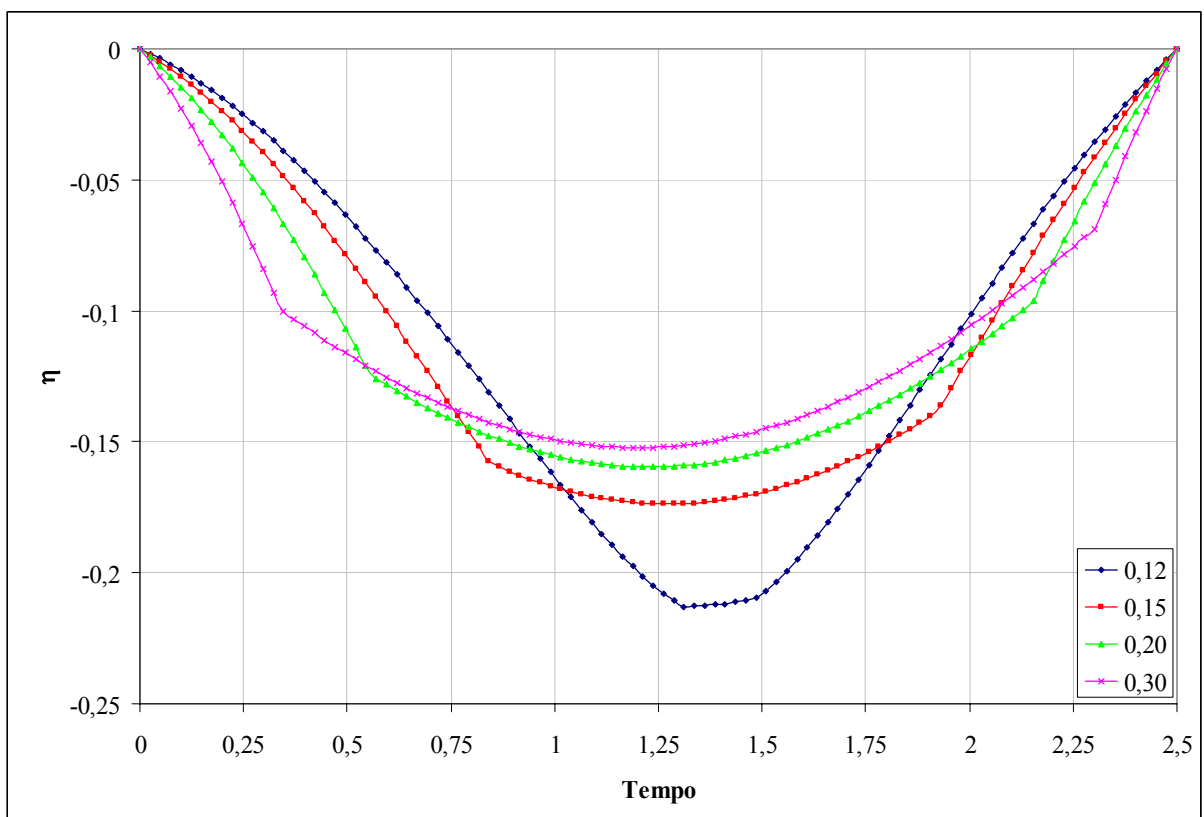


Figura IV.27. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,5$.

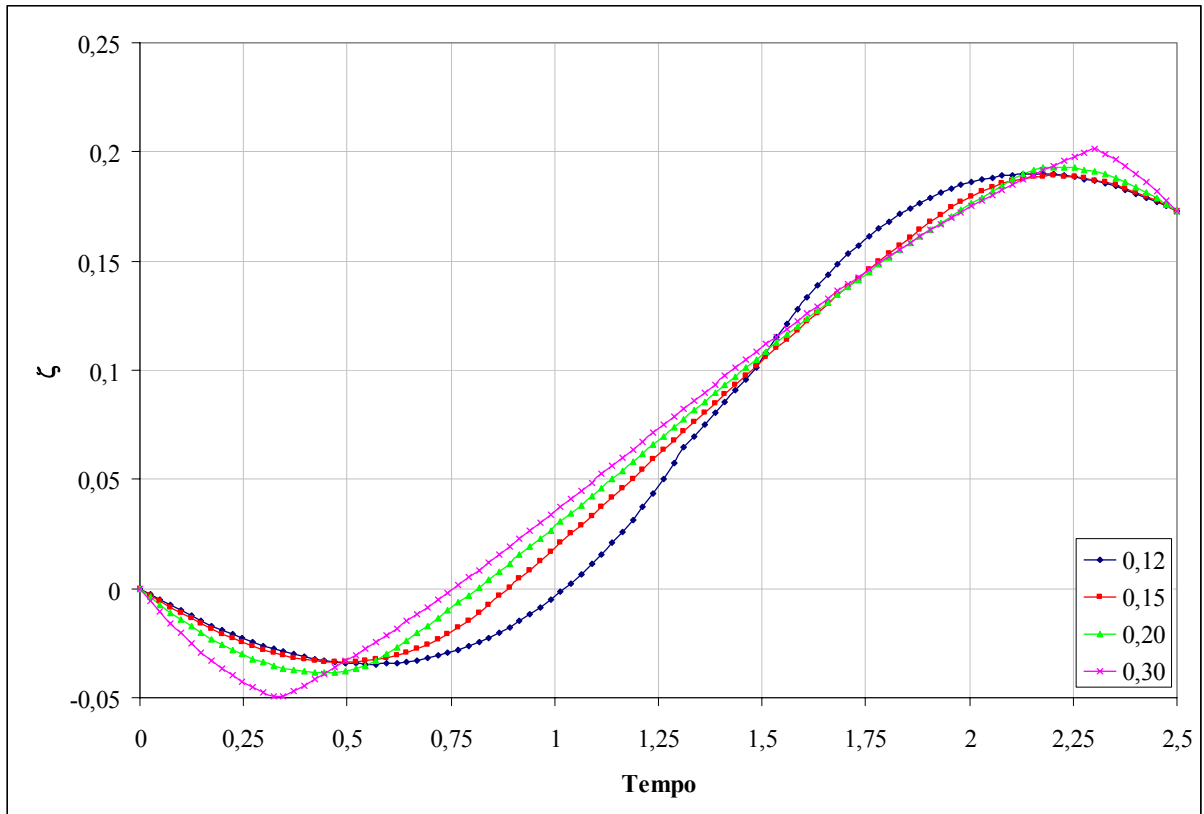


Figura IV.28. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,5$.

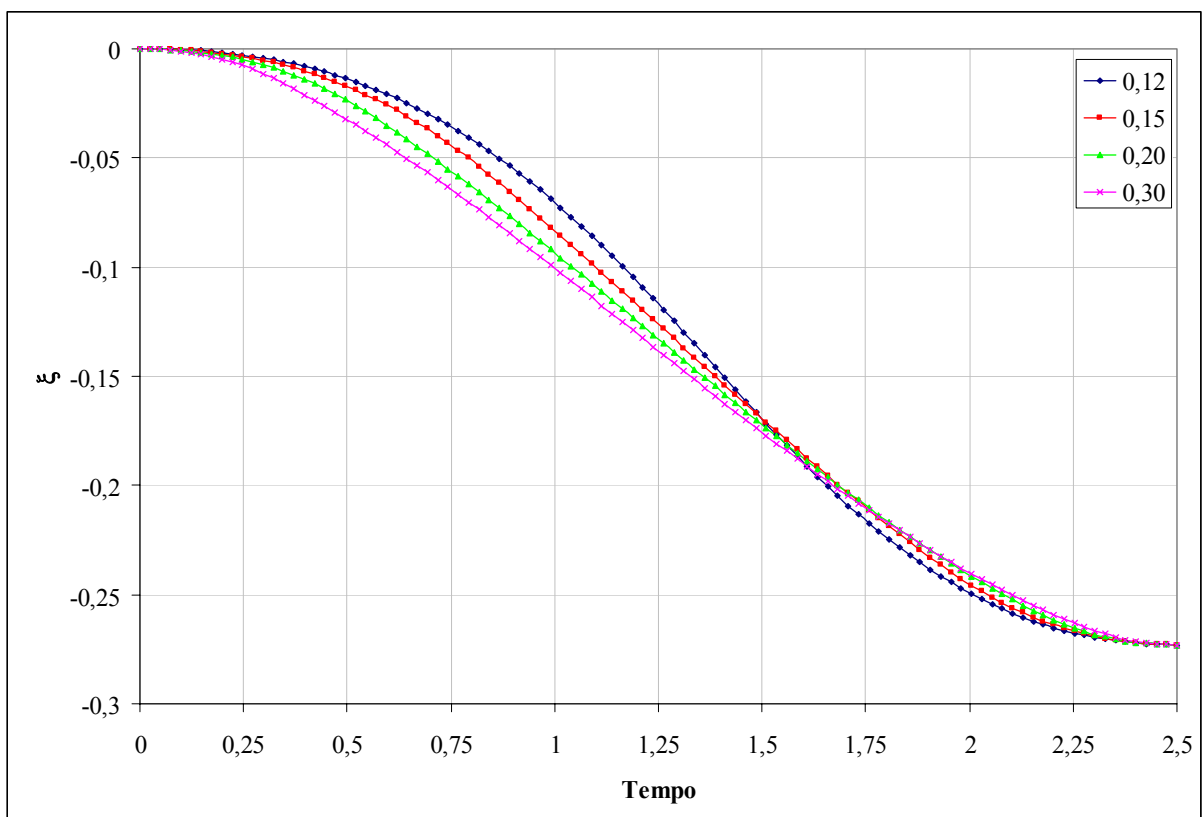


Figura IV.29. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 2,5$.

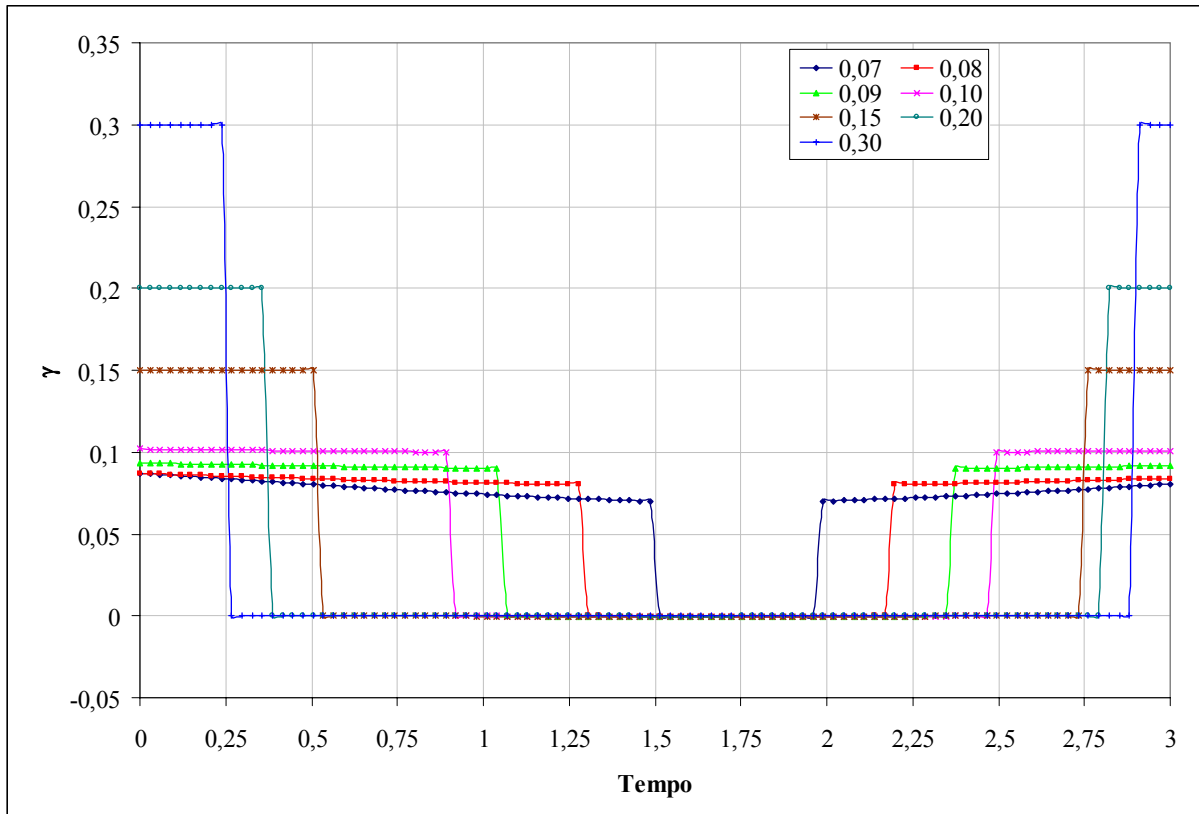


Figura IV.30. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes valores de γ_{max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 3,0$.

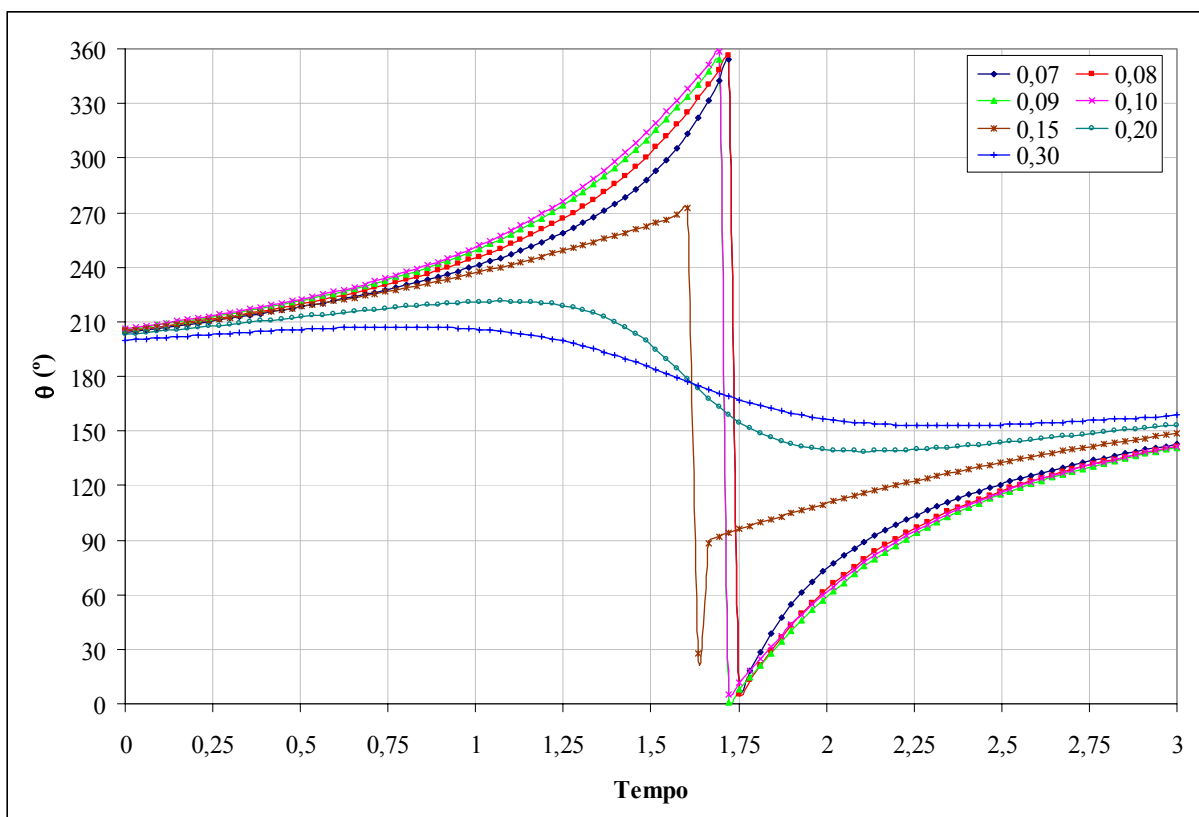


Figura IV.31. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes valores de γ_{max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 3,0$.

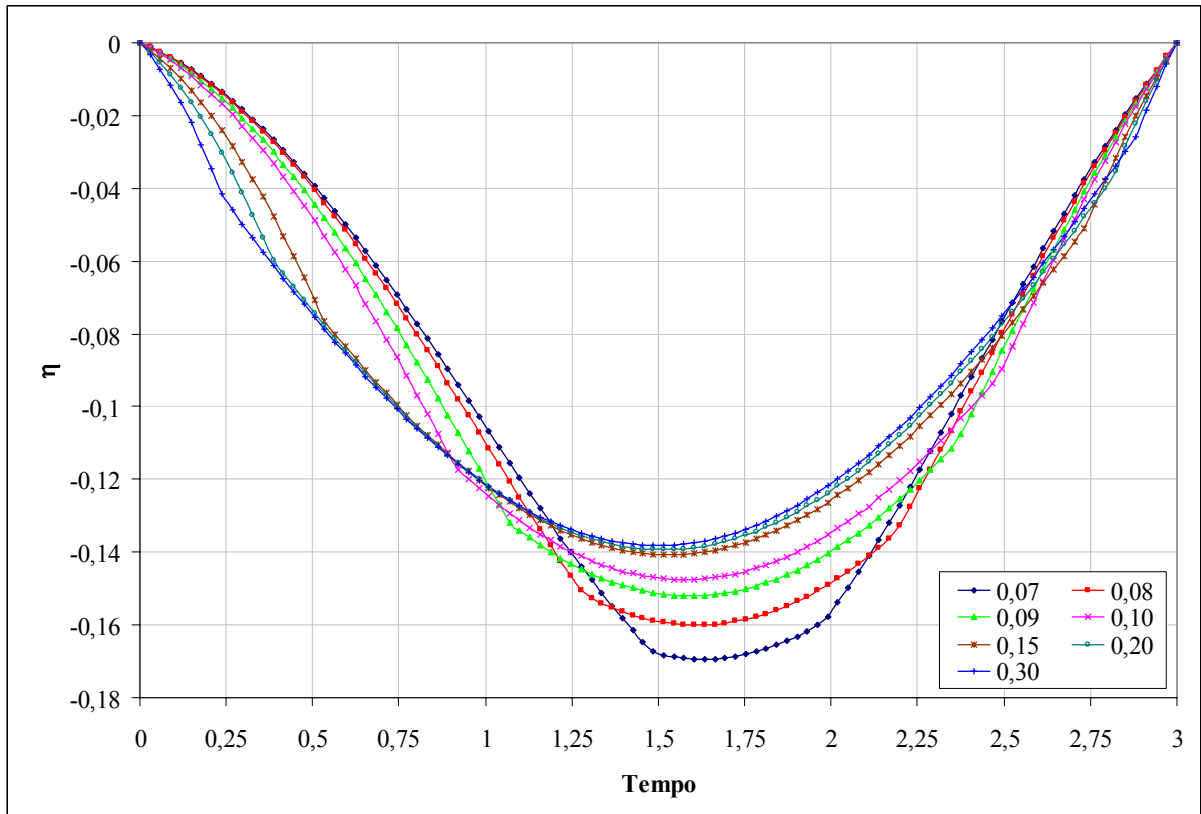


Figura IV.32. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 3,0$.

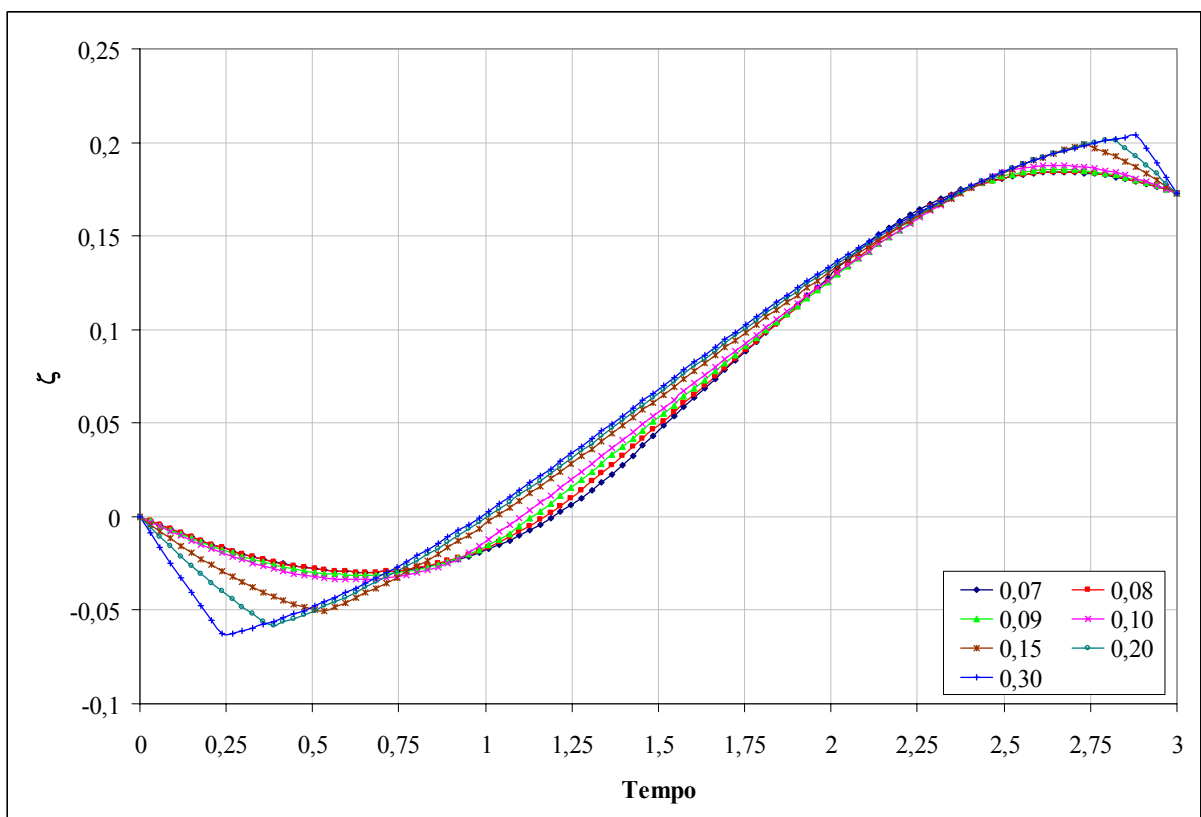


Figura IV.33. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 3,0$.

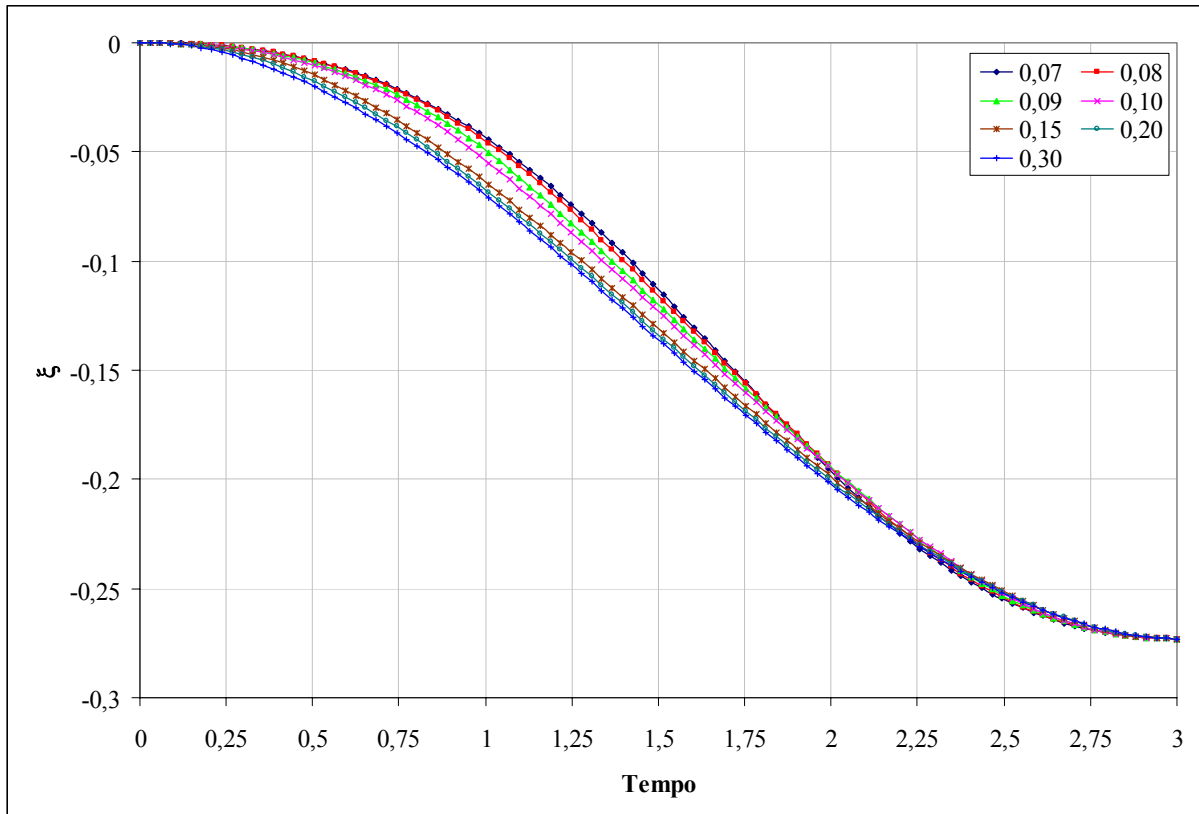


Figura IV.34. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,7270$ e $t_f = 3,0$.

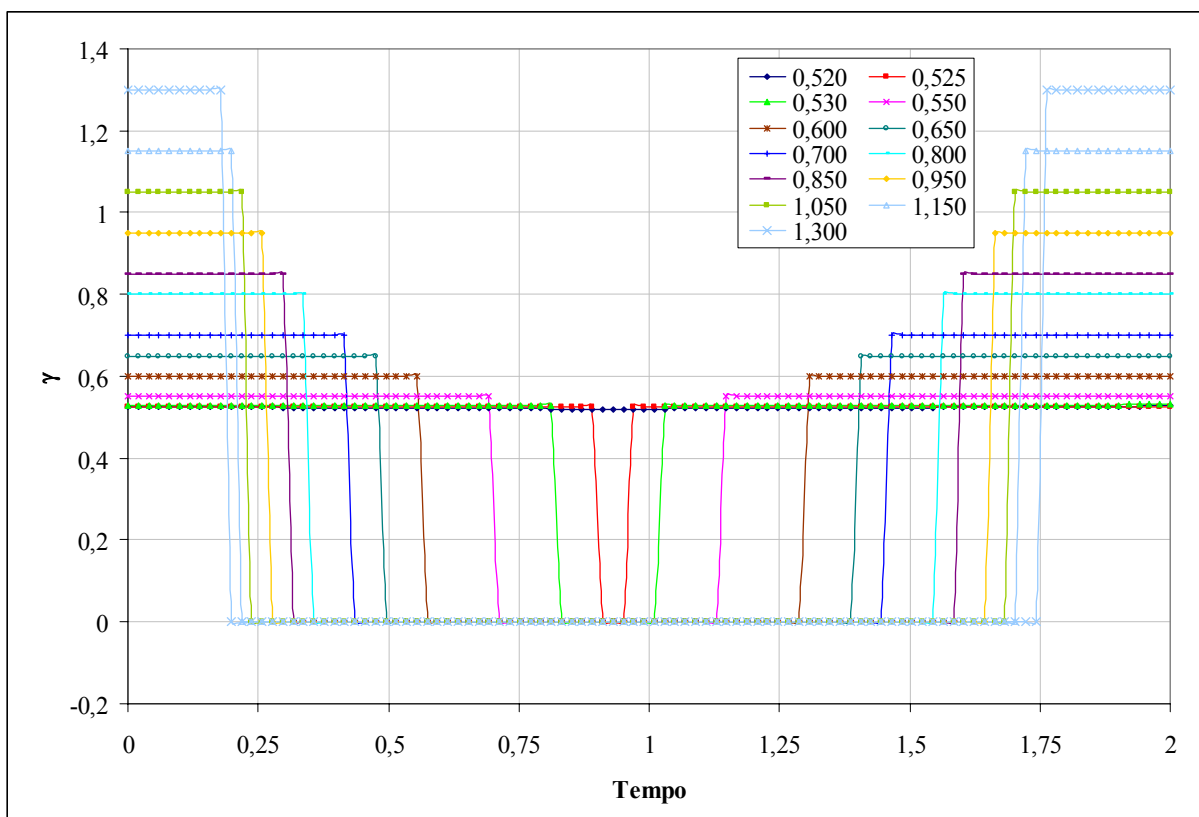


Figura IV.35. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,0$.

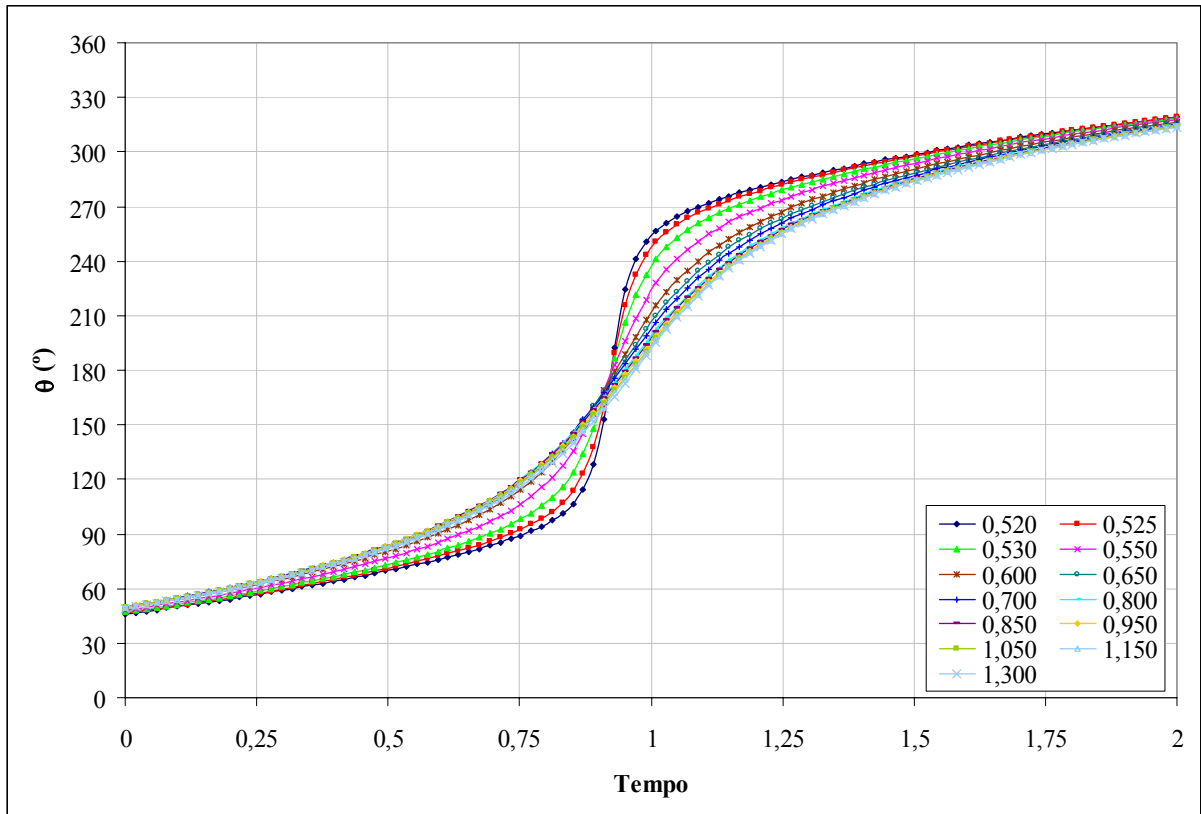


Figura IV.36. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,0$.

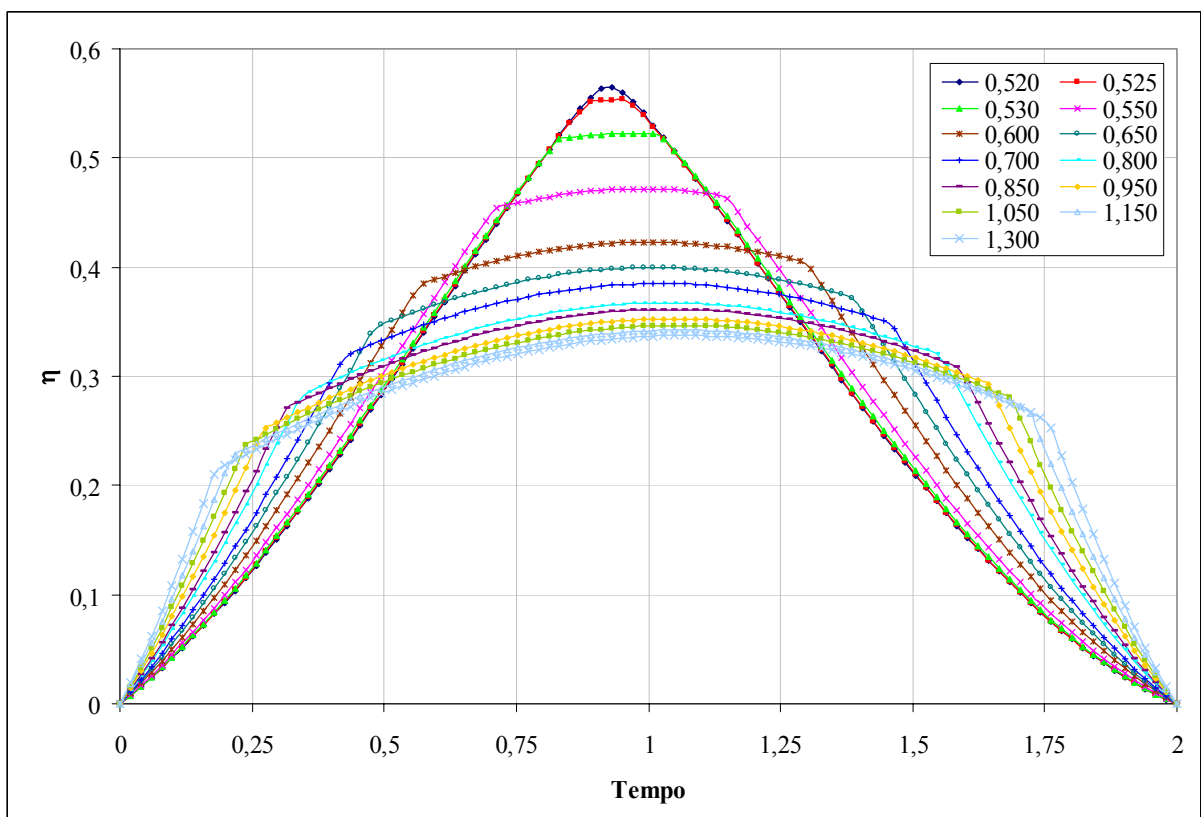


Figura IV.37. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,0$.

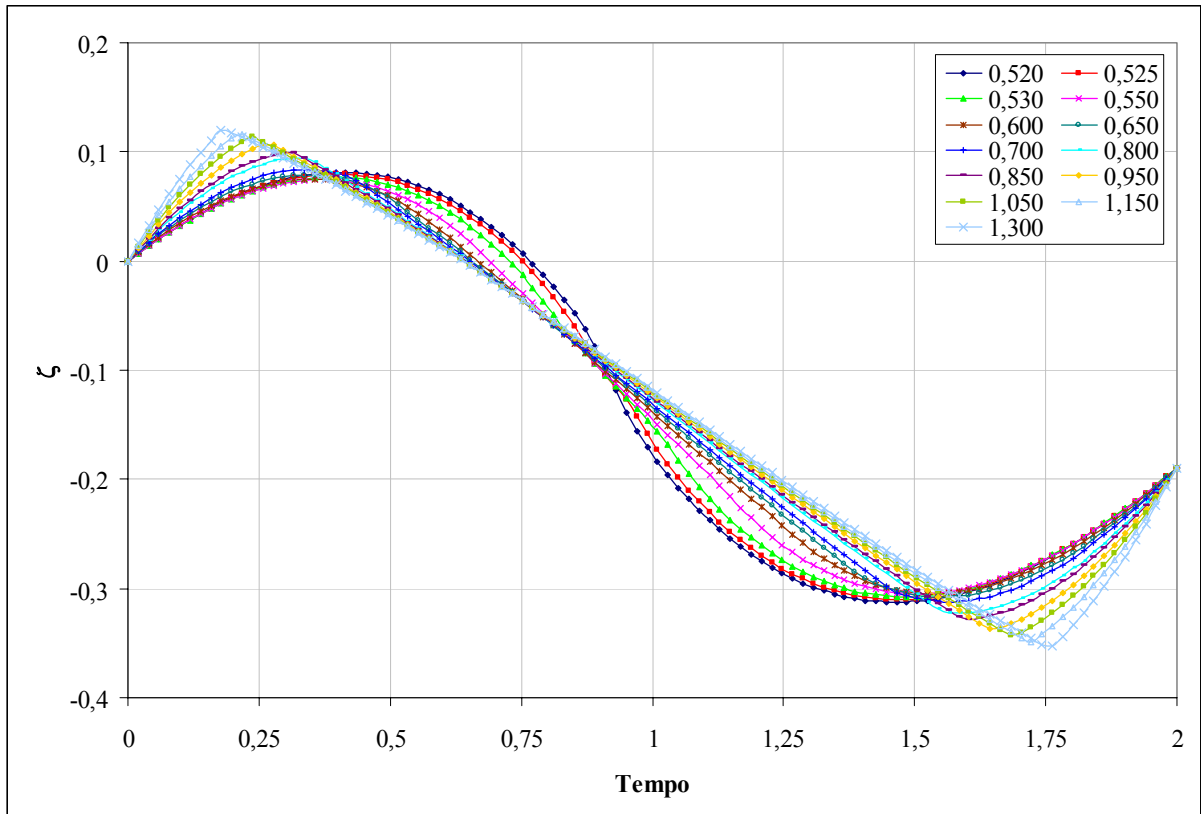


Figura IV.38. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,0$.

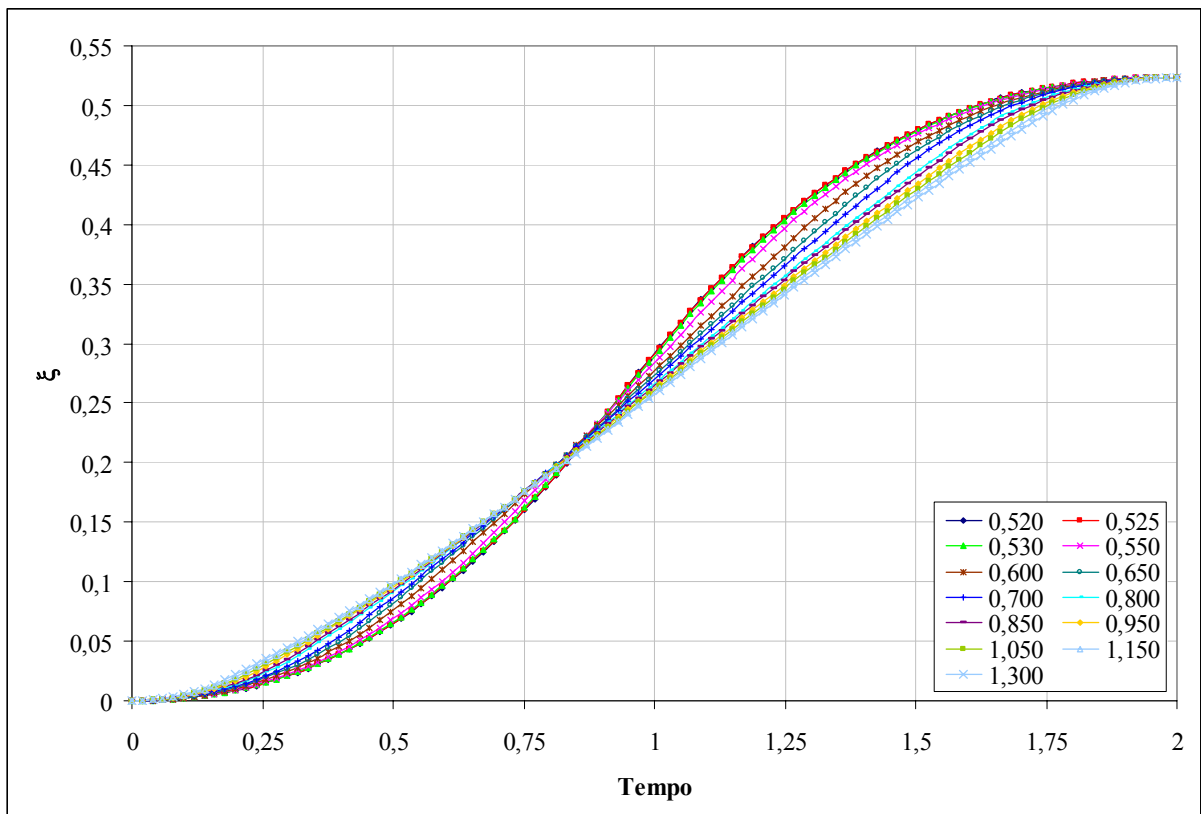


Figura IV.39. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,0$.

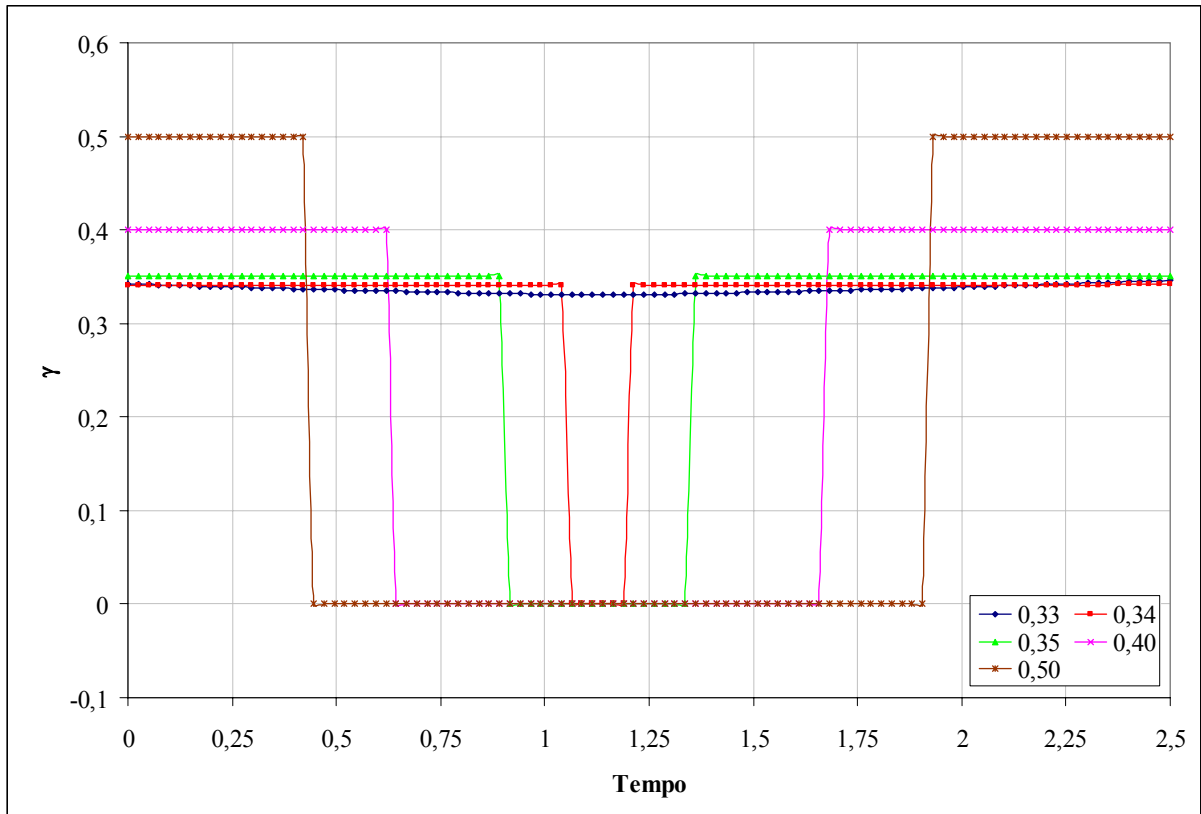


Figura IV.40. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,5$.

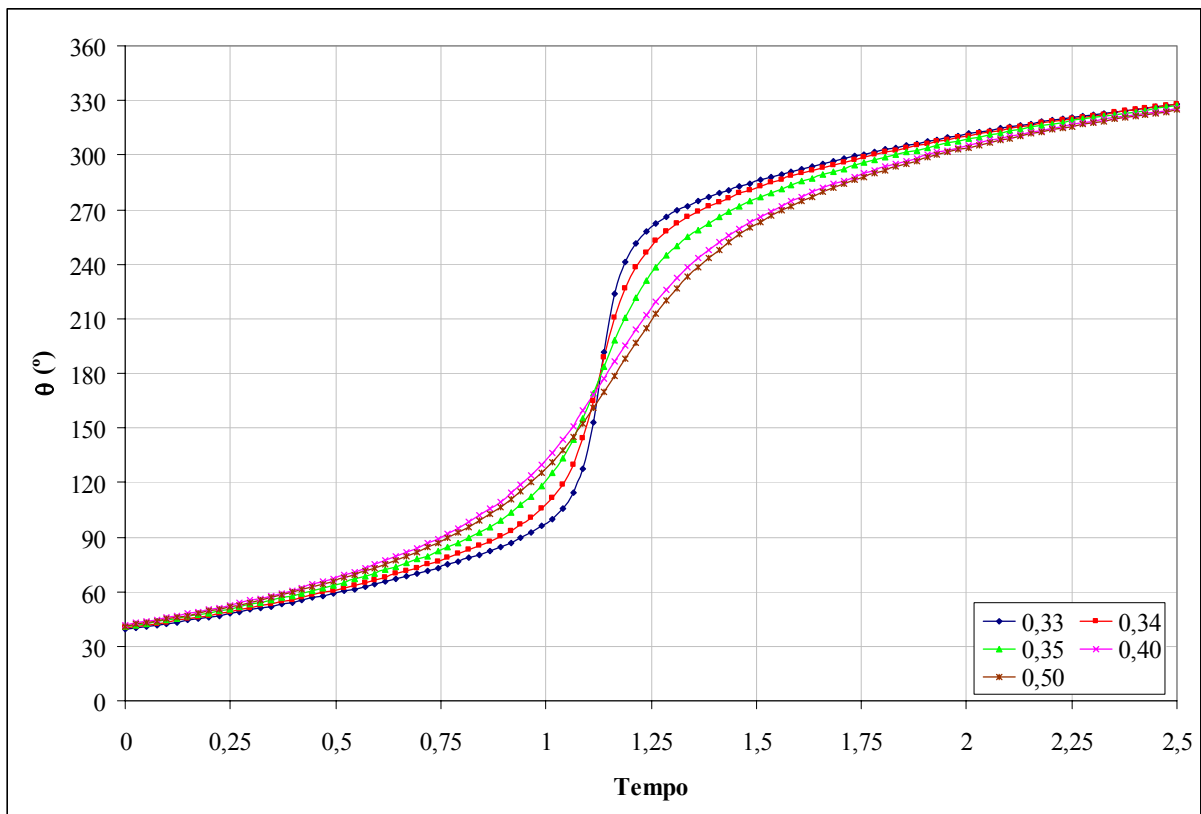


Figura IV.41. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,5$.

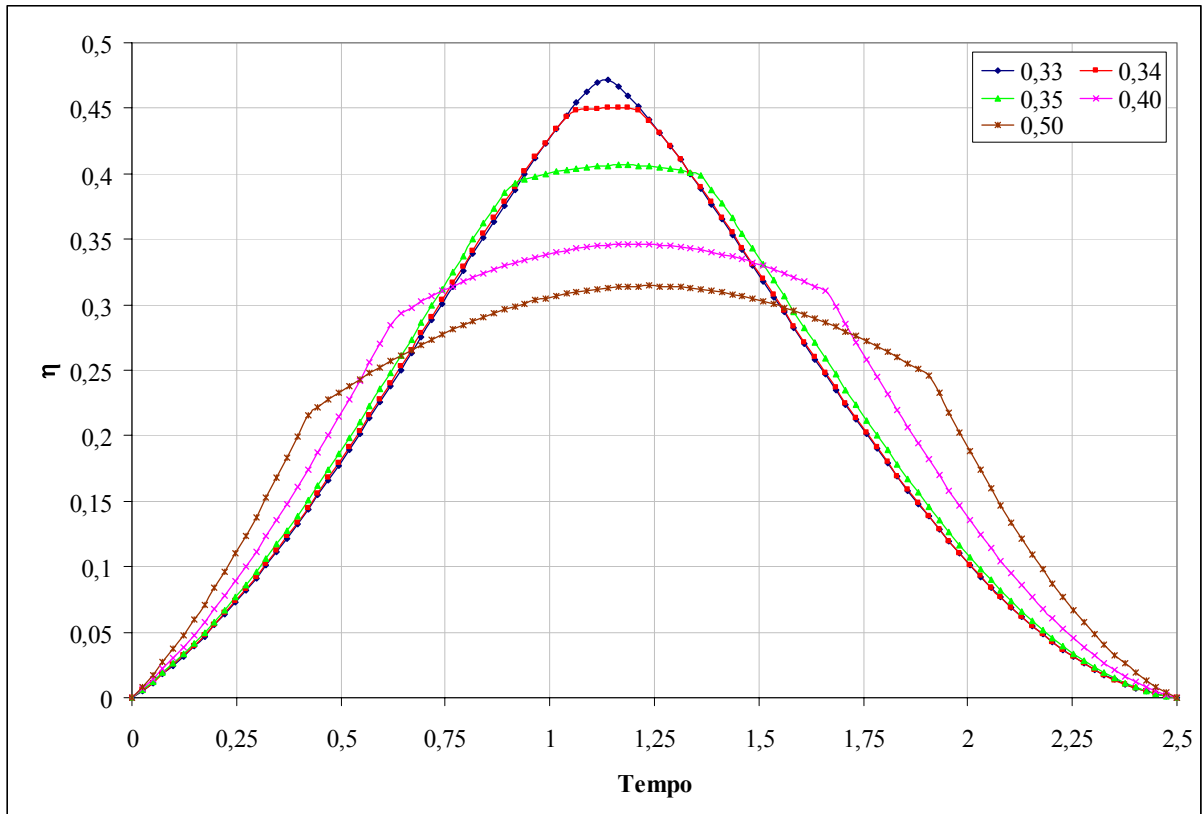


Figura IV.42. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,5$.

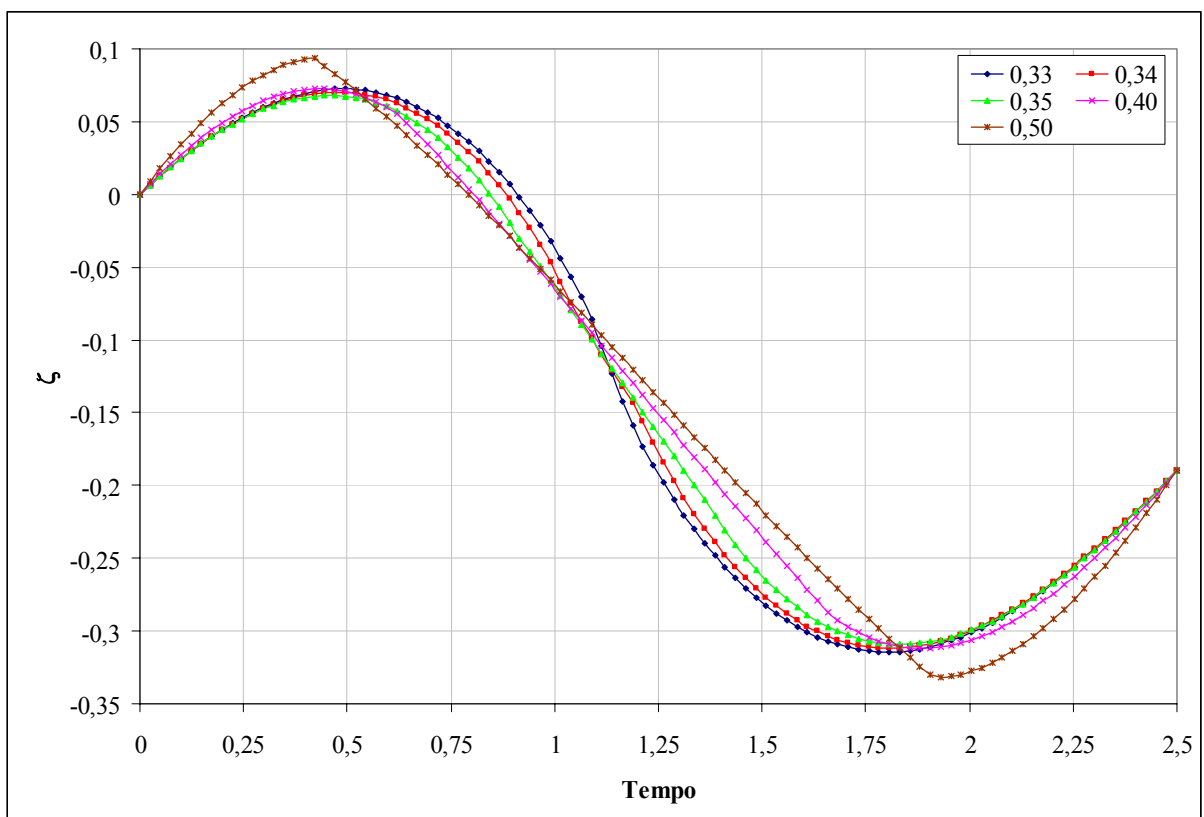


Figura IV.43. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,5$.

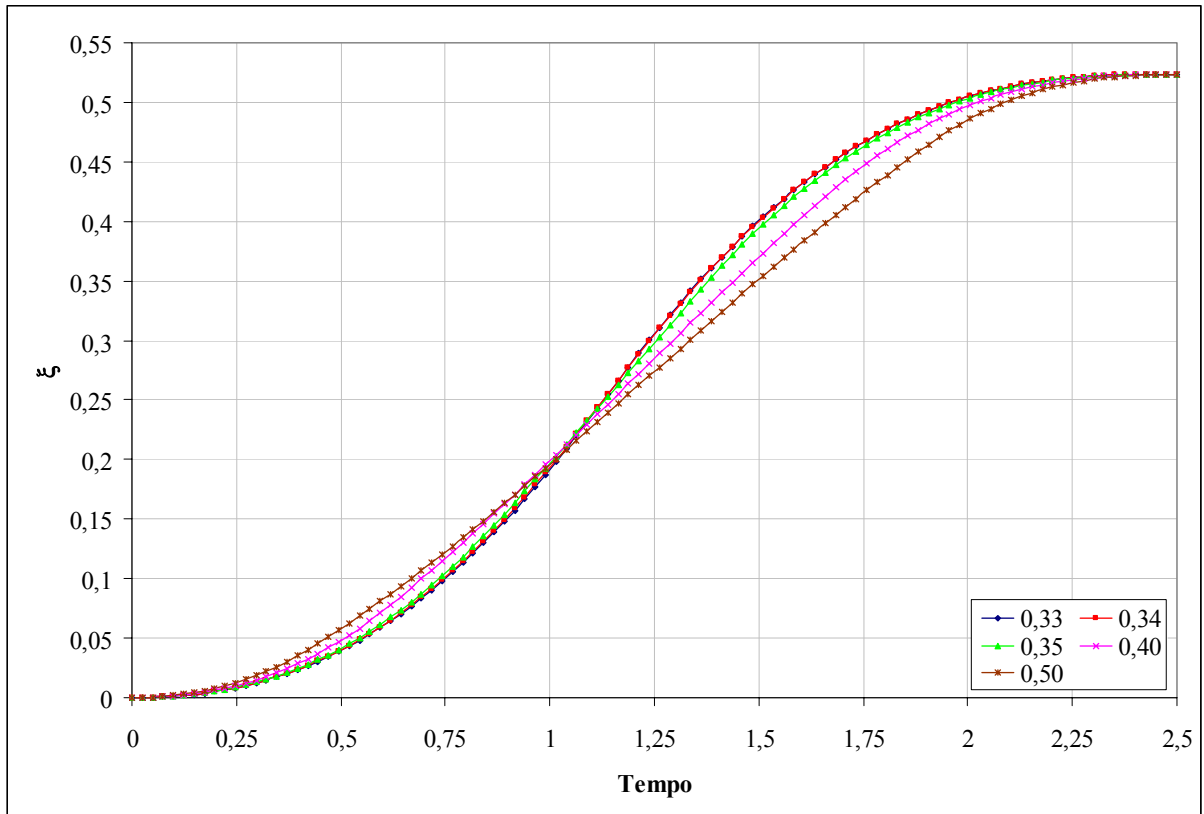


Figura IV.44. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 2,5$.

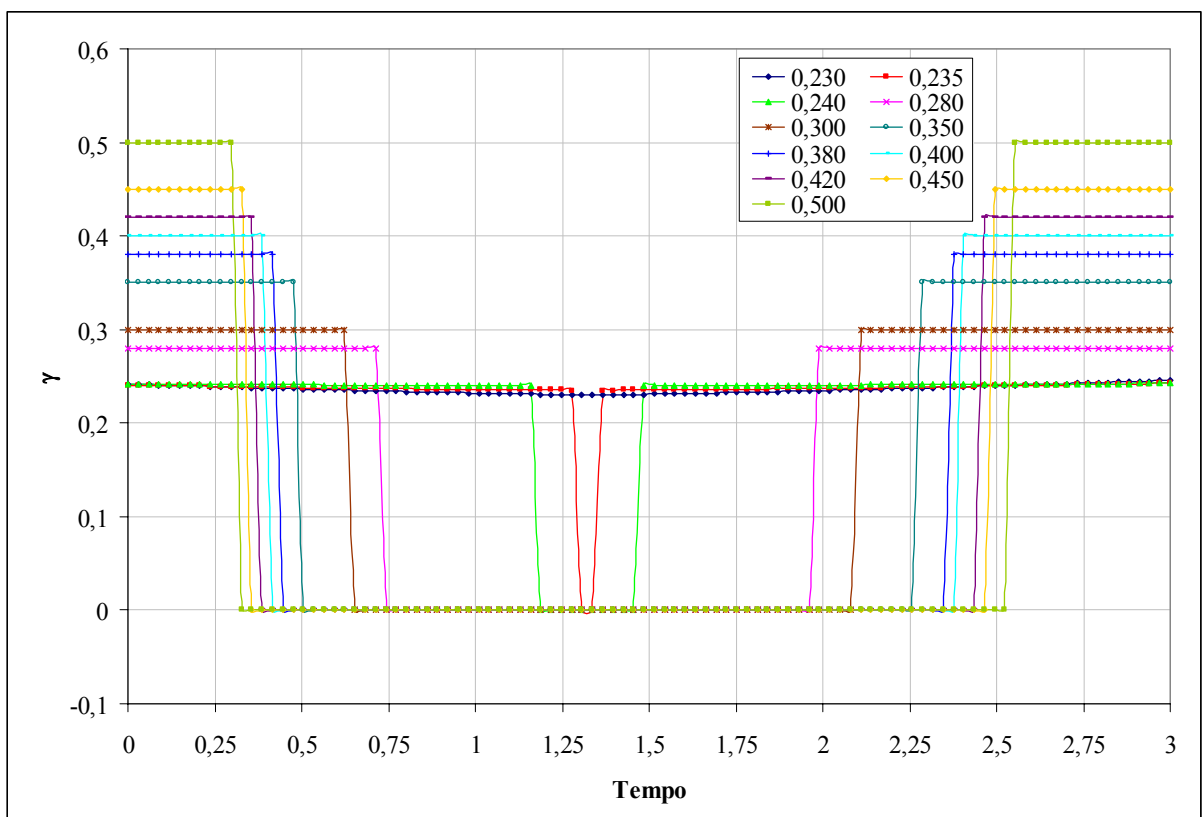


Figura IV.45. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 3,0$.

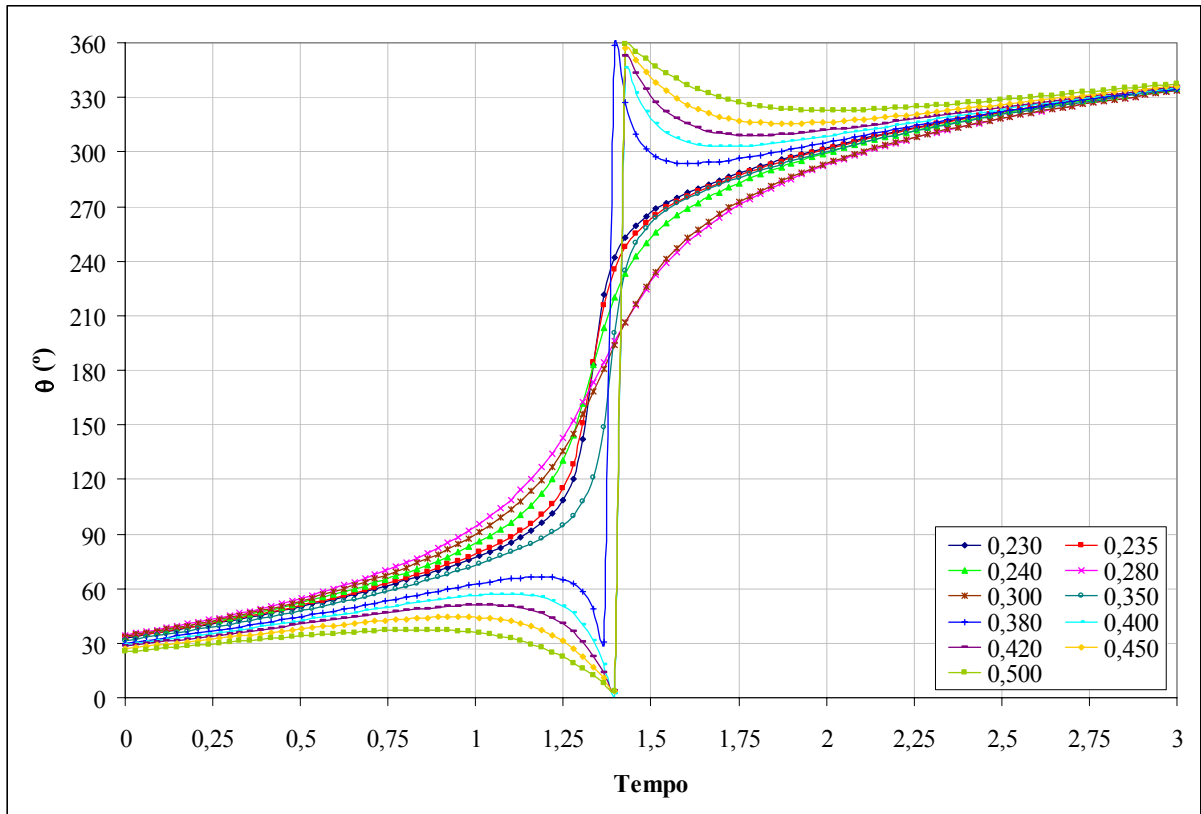


Figura IV.46. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 3,0$.

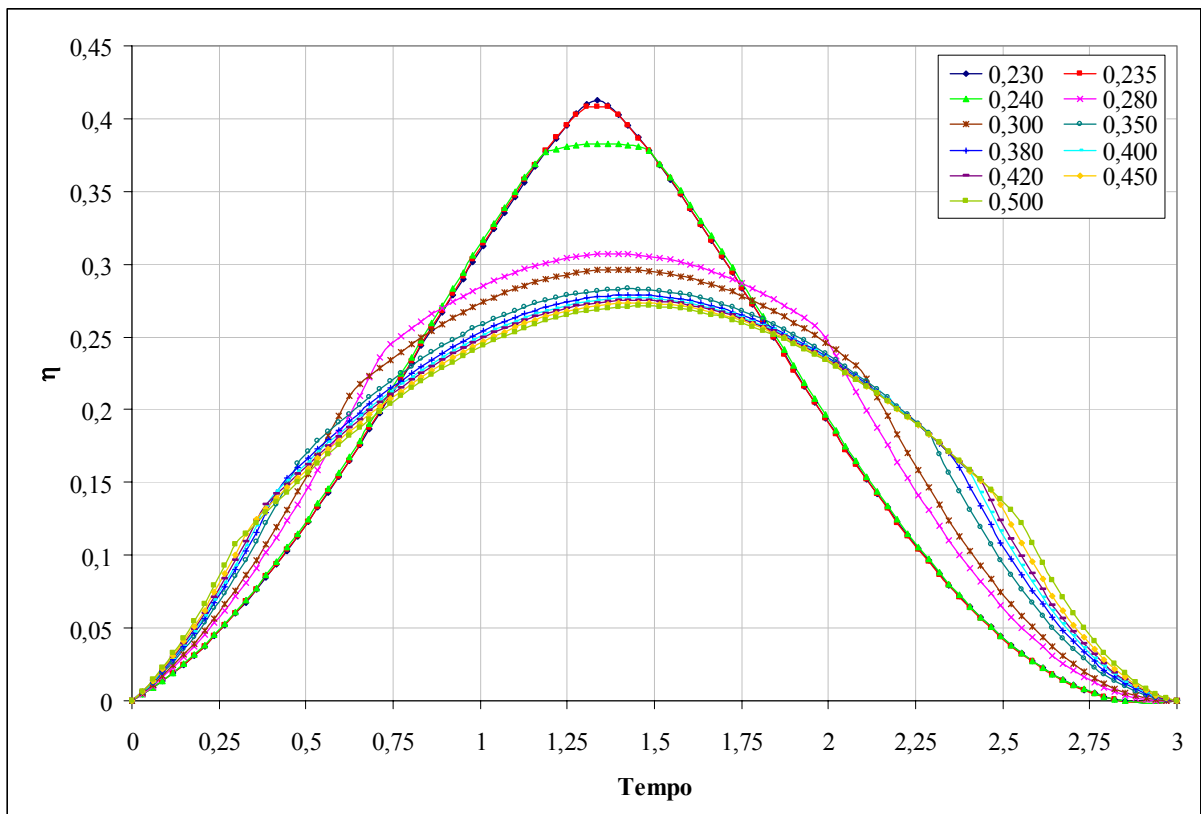


Figura IV.47. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 3,0$.

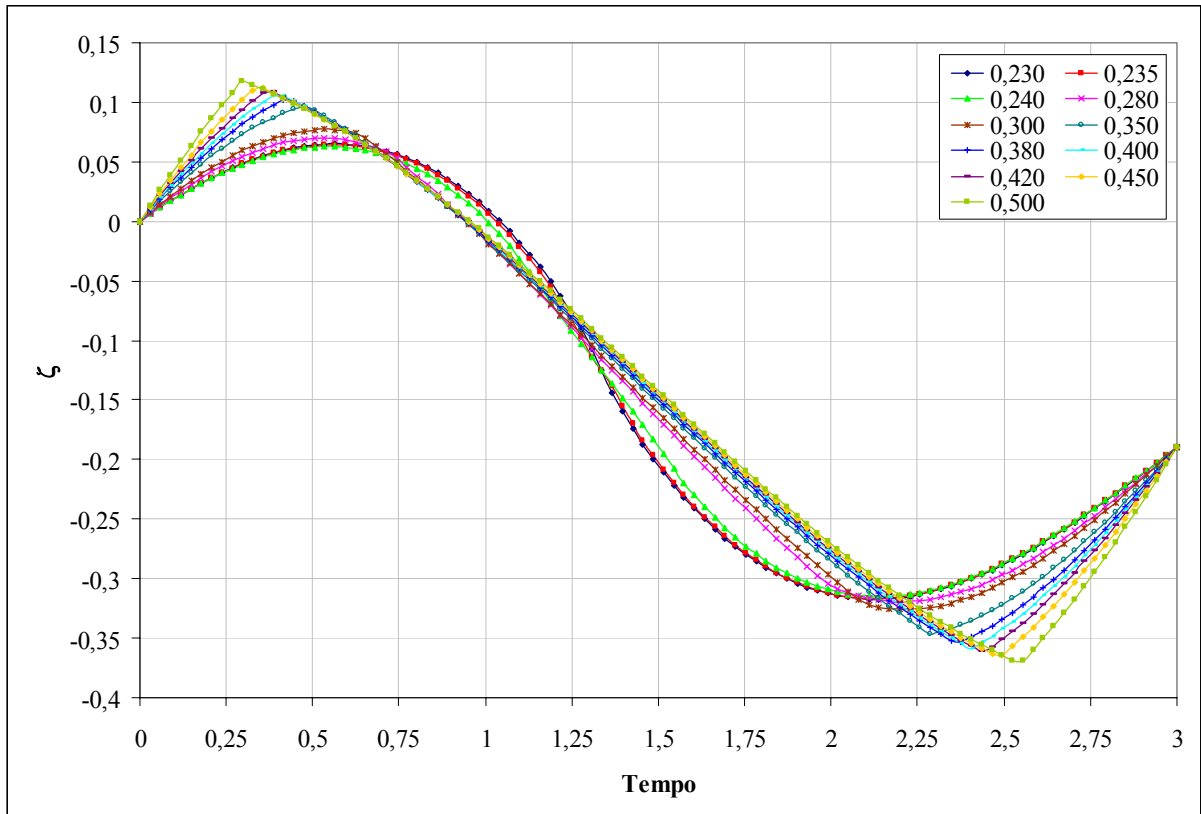


Figura IV.48. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 3,0$.

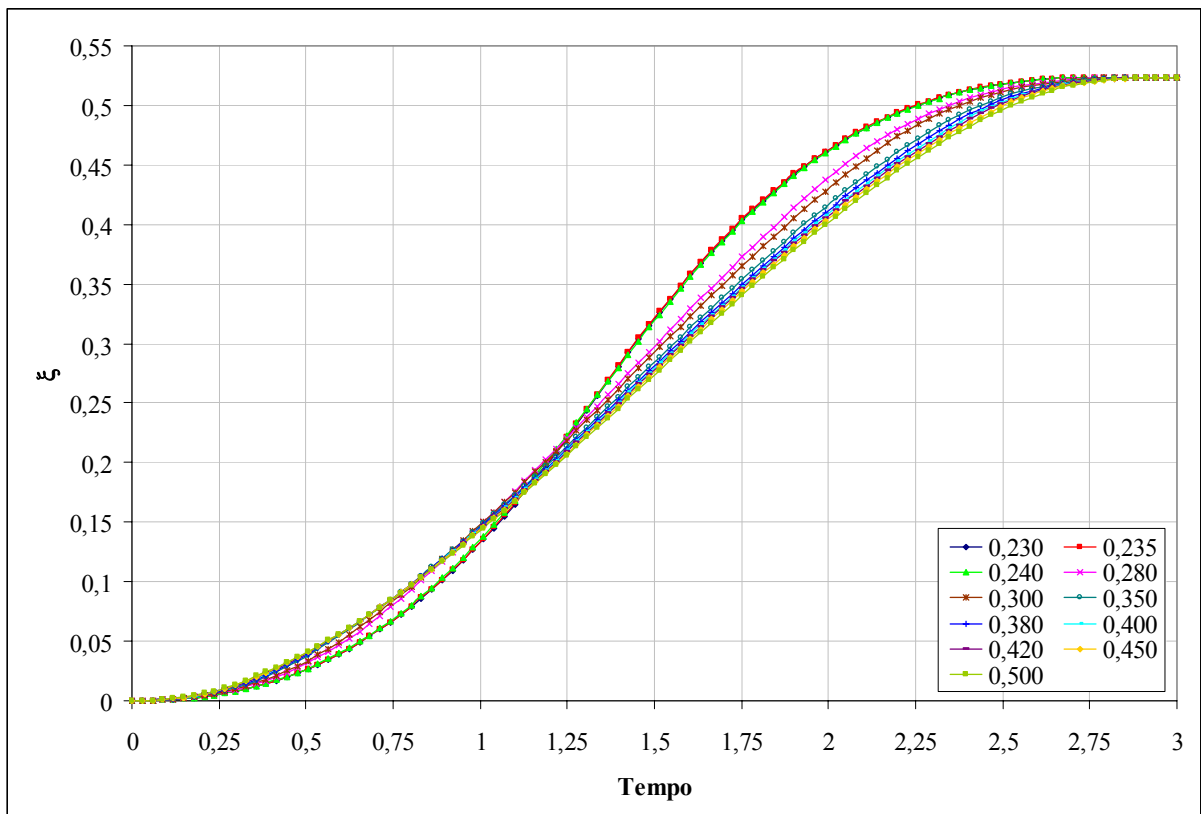


Figura IV.49. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes valores de γ_{\max} – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,5236$ e $t_f = 3,0$.

Observando os gráficos acima, Figuras IV.17 a IV.49, e os dados das Tabelas IV.5 a IV.7, constata-se que à medida que o nível de aceleração máxima do sistema propulsivo aumenta, tanto mais fácil para ele é executar a manobra de transferência. Este fato pode ser constatado por dois aspectos dos resultados. O primeiro é a diminuição contínua da velocidade característica final, e conseqüente redução do consumo, à medida que γ_{\max} aumenta, conforme observado nas Tabelas IV.5 e IV.6 e nas Figuras IV.17 e IV.18. O segundo, diretamente relacionado ao primeiro, é a duração cada vez menor dos arcos propulsados à medida que o nível de aceleração máximo aumenta (Figuras IV.20, IV.25, IV.30, IV.35, IV.40 e IV.45). Para este aspecto, é interessante observar que, se o nível de aceleração não for suficientemente alto, não ocorrem arcos balísticos durante a manobra. Para valores ainda menores de aceleração, insuficientes para executar a transferência, os resultados obtidos mostram que o algoritmo implementado, na tentativa de resolver o problema e satisfazer as restrições terminais, rompe o vínculo sobre o controle e descaracteriza a solução fornecida. Dois exemplos claros deste tipo de situação são os casos $\rho = 1,1000$ e $\rho = 0,9000$, ambos para $t_f = 1,75$ e $\gamma_{\max} = 0,10$, mostrados nas Figs. VII.105 e VII.140, onde se observa que não há comutações no controle e o vínculo sobre a magnitude da aceleração máxima não é satisfeito. Outros exemplos desta situação, mas com desvios menores nos valores de aceleração, são mostrados nas Figuras IV.30 e IV.40, para os menores valores de γ_{\max} .

Outro aspecto bastante interessante dos resultados obtidos são as descontinuidades nas derivadas das evoluções temporais das velocidades radial e circunferencial, conforme se observa, por exemplo, nas Figuras IV.22, IV.23, IV.27, IV.28, etc. Comparando estas figuras com as respectivas evoluções temporais da magnitude da aceleração (Figs. IV.20, IV.25, etc.), percebe-se que estas descontinuidades estão associadas, justamente, aos instantes em que ocorrem as comutações no controle, iniciando ou encerrando um arco balístico. Este resultado descontínuo é, portanto, coerente.

IV.8.2 Sistema Não-Linearizado

Para o sistema não-linearizado apresentado na seção IV.6.3.2, o objetivo principal foi comparar os resultados obtidos e verificar se a forma linearizada, numericamente mais simples, fornece boas soluções para o problema, no caso de órbitas próximas. Desta forma, um número menor de casos tem sido analisado, em comparação com a forma linearizada.

A Tabela IV.8 a seguir apresenta os valores fornecidos pelo método da variação segunda para a velocidade característica C , utilizando a formulação com sistema não-linearizado apresentada na seção IV.6.3.2. Ela apresenta, também, os valores desta grandeza obtidos com o sistema linearizado (Tabelas IV.5 a IV.7), para os casos correspondentes de transferências, bem como as diferenças relativas entre os resultados, da seguinte forma:

$$d_{\text{rel}} = \left| \frac{C_{\text{linear}} - C_{\text{não-linear}}}{C_{\text{não-linear}}} \right| \times 100\% . \quad (\text{IV.93})$$

Tabela IV.8. Velocidade característica no instante final, C_f , e desvios relativos entre as formulações linearizada e não-linearizada – diferentes tempos de manobra, $t_f - t_0$, acelerações máximas, γ_{max} , e razões entre os raios das órbitas terminais, ρ .

ρ	$t_f - t_0$	γ_{max}	C_f - Linear	C_f - Não-linear	d_{rel} (%)
0,7270	2,00	0,30	0,281812	0,294483	4,3
	3,00	0,10	0,142483	0,203493	30,0
0,9500	2,00	0,10	0,047002	0,047108	0,2
	2,25	0,10	0,037811	0,037974	0,4
0,9750	2,00	0,10	0,021363	0,021354	0,0
	2,25	0,10	0,017538	0,017547	0,1
1,0250	2,00	0,10	0,021676	0,021679	0,0
	2,25	0,10	0,017882	0,017872	0,1
1,0500	2,00	0,10	0,048639	0,048493	0,3
	2,25	0,10	0,039475	0,039305	0,4
1,5236	2,00	0,60	0,761426	0,675491	12,7
	3,00	0,28	0,490375	0,382922	28,1

Os resultados da Tabela IV.8 acima são apresentados graficamente na Figura IV.50 abaixo. São considerados apenas os valores intermediários de ρ ($0,9500 \leq \rho \leq 1,0500$), para os quais a magnitude da aceleração máxima coincide ($\gamma_{\max} = 0,10$).

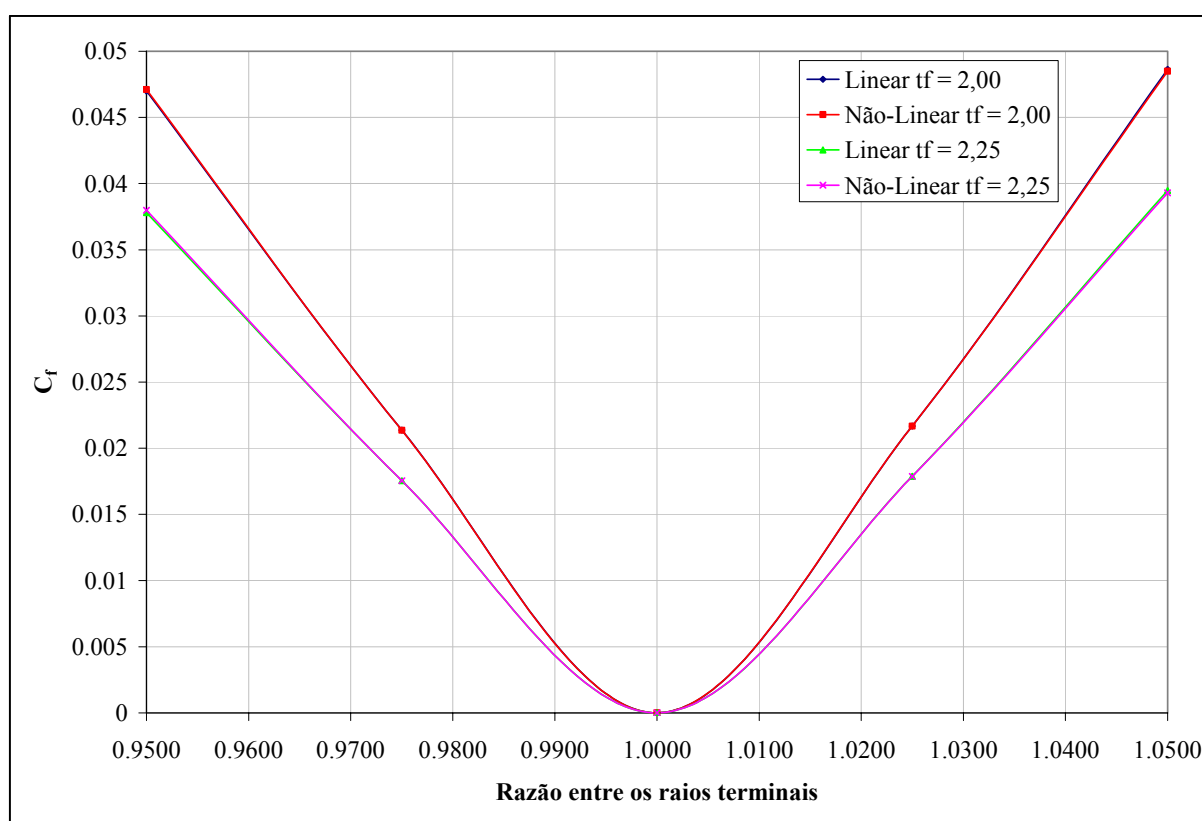


Figura IV.50. Variação da velocidade característica final C_f com a razão entre os raios das órbitas terminais ρ , para as formulações linearizada e não-linearizada, diferentes tempos de transferência e $\gamma_{\max} = 0,10$ – sistema VEC – $0,9500 \leq \rho \leq 1,0500$.

Observando os dados da Tabela IV.8, percebe-se que para razões de raios próximas de 1 exato (ρ entre 0,9500 e 1,0500), com $\gamma_{\max} = 0,10$, os desvios relativos entre as formulações linear e não-linear são bastante pequenos e tornam-se menores quando ρ se aproxima de 1 exato. Este fato é ainda mais evidente na Figura IV.50: não se observa distinção entre as curvas das formulações linearizada e não-linearizada. Por outro lado, para as transferências com maior variação do raio da órbita ($\rho = 0,7270$ e $\rho = 1,5236$), observa-se desvios relativos de até 30,0%. Este resultado evidencia que, para problemas de transferências analisados nos

quais as órbitas inicial e final são próximas, a formulação linearizada, numericamente mais fácil, fornece bons resultados, comparados à formulação não-linearizada. Por outro lado, à medida que as órbitas se distanciam, a hipótese de linearidade tende a perder sua validade, e os resultados obtidos com esta formulação não são mais necessariamente comparáveis aos da não-linearizada.

No entanto, esta maior não-proximidade dos resultados à medida que as órbitas inicial e final se distanciam não ocorre sempre, o que fica evidente ao observar a transferência entre Terra e Vênus ($\rho = 0,7270$). Para este caso, com $t_f - t_0 = 2,0$ e $\gamma_{\max} = 0,30$, há um desvio relativo de apenas 4,3%; por outro lado, para $t_f - t_0 = 3,0$ e $\gamma_{\max} = 0,10$, há um desvio de 30,0%. Ou seja, para duas transferências com grande variação no raio da órbita (quase 30% do valor original), as modificações do tempo de transferência e da aceleração máxima disponível fazem com que os resultados das formulações linearizada e não-linearizada tornem-se próximos ou não. Este fato sugere que a proximidade destas formulações depende não só da distância entre as órbitas, mas também dos outros elementos que caracterizam a transferência.

As figuras apresentadas a seguir, para as razões $\rho = 0,7270$ e $\rho = 1,5236$, e as apresentadas no Apêndice, para as razões intermediárias, correspondem às evoluções temporais do controle, da velocidade característica e do estado, obtidos com as duas formulações: linearizada e não-linearizada. É interessante observar que para as razões intermediárias as curvas linear e não-linear são praticamente coincidentes (Figuras VII.145 a VII.192). Por outro lado, para razões maiores, isto não é necessariamente verdadeiro, conforme comentado acima e observado nas Figuras IV.51 e IV.57, para $\rho = 0,7270$.

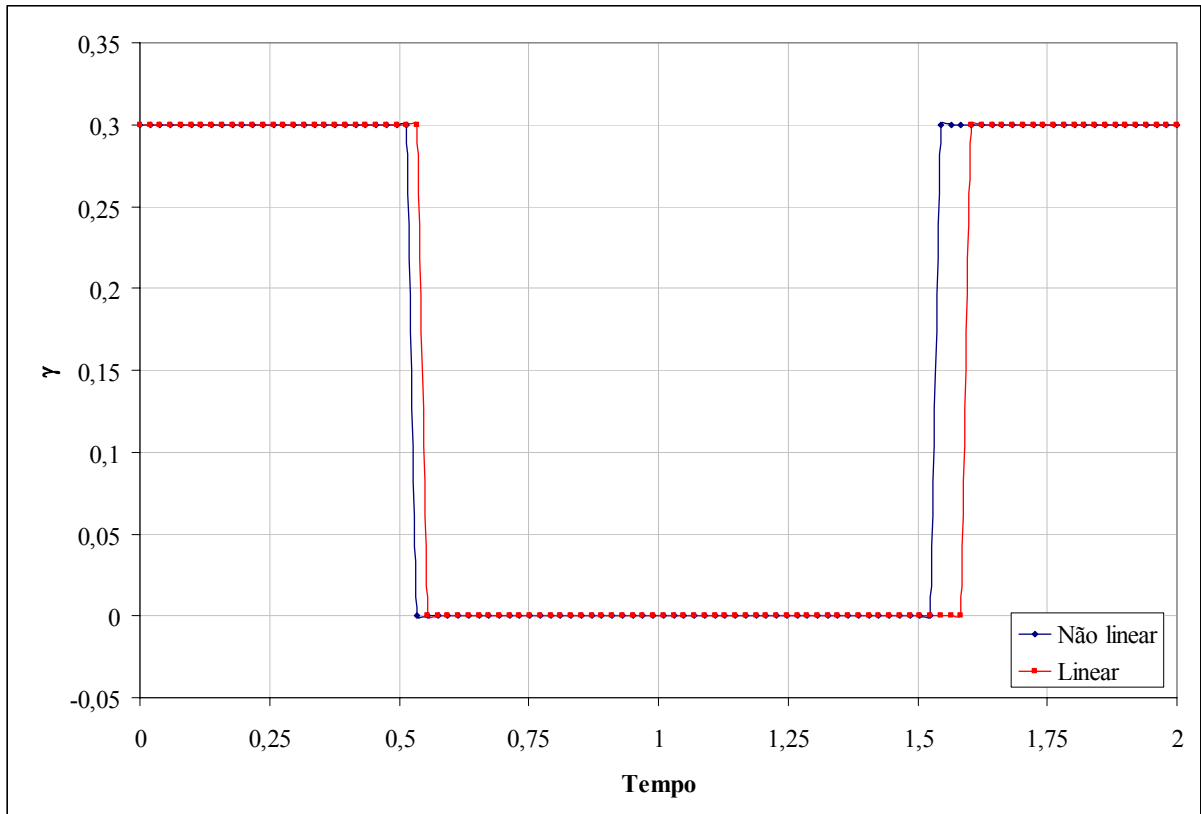


Figura IV.51. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,30$ e $t_f = 2,0$.

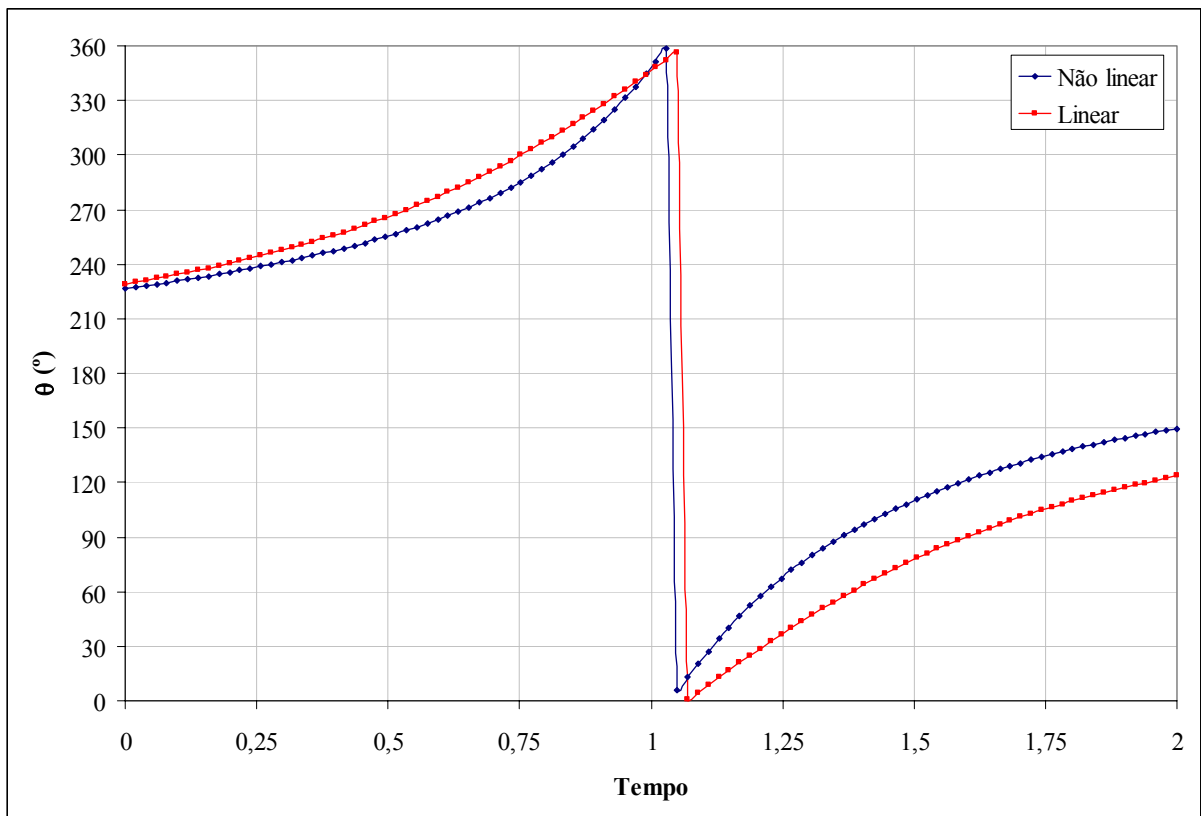


Figura IV.52. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,30$ e $t_f = 2,0$.

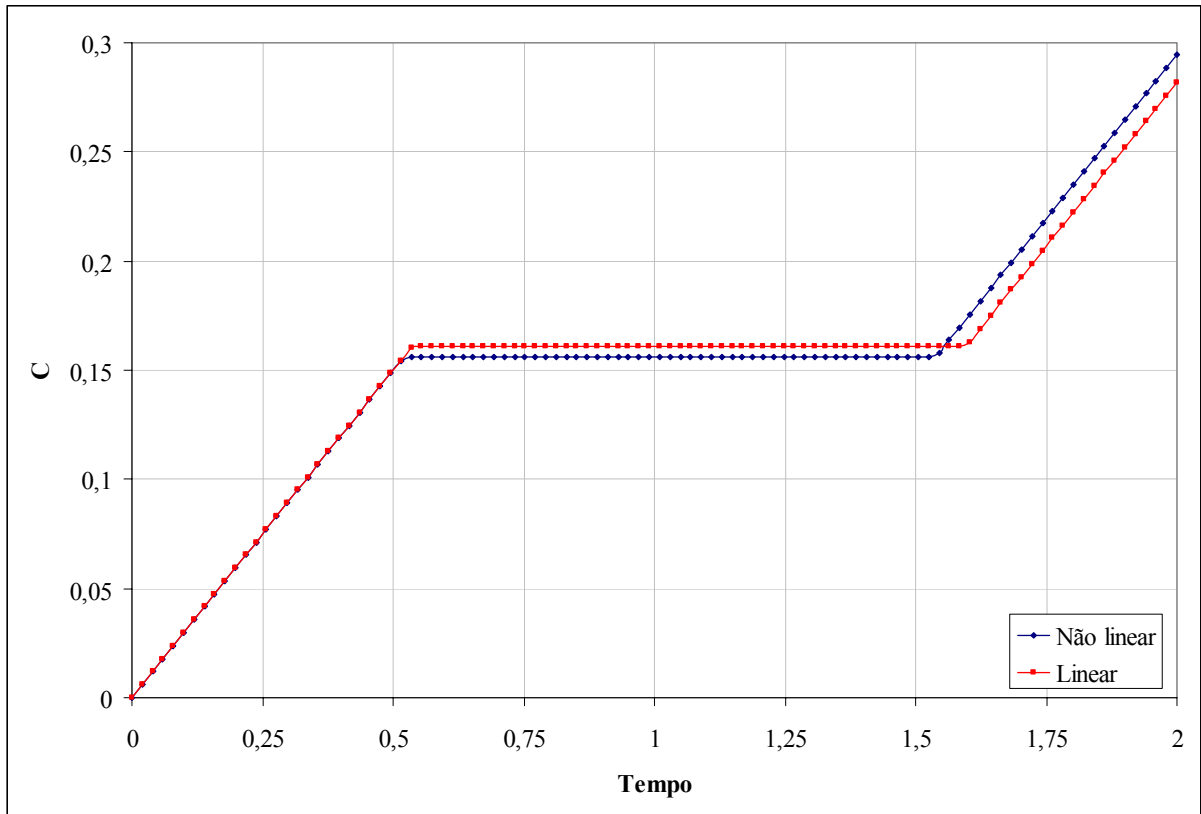


Figura IV.53. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,30$ e $t_f = 2,0$.

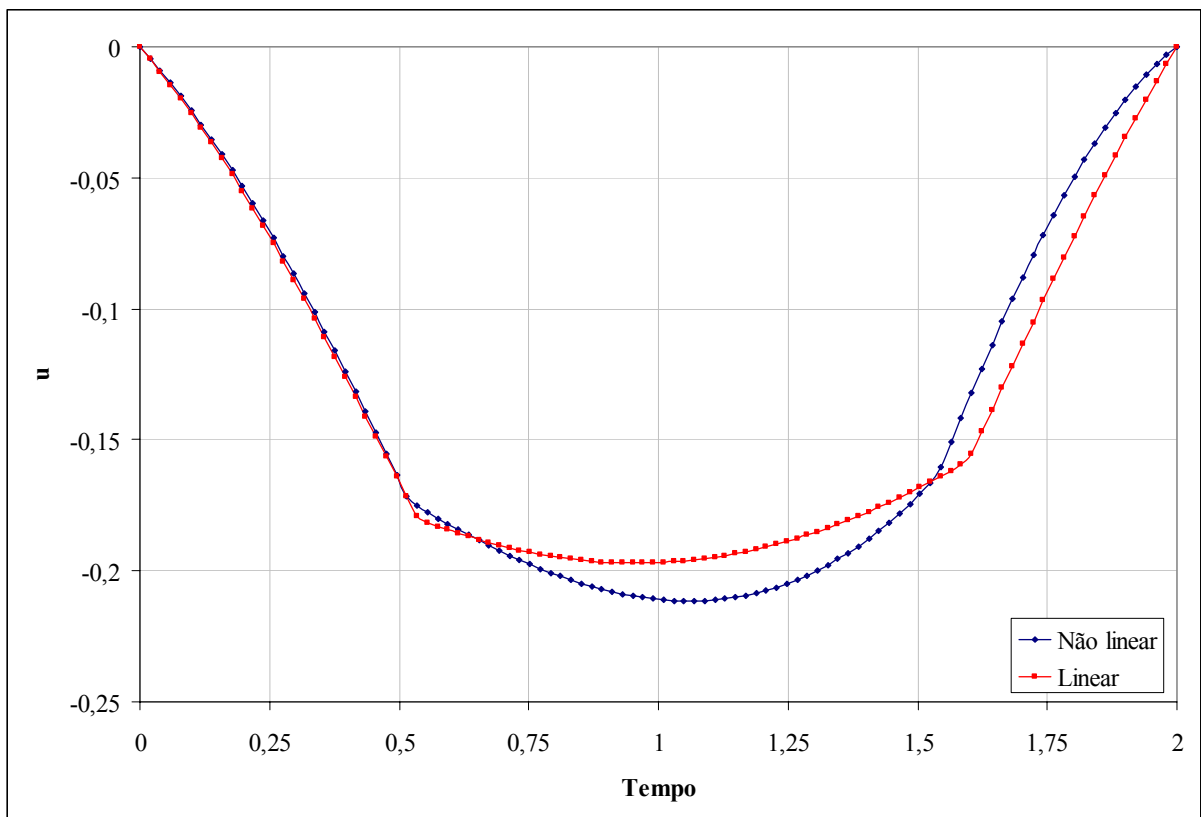


Figura IV.54. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,30$ e $t_f = 2,0$.

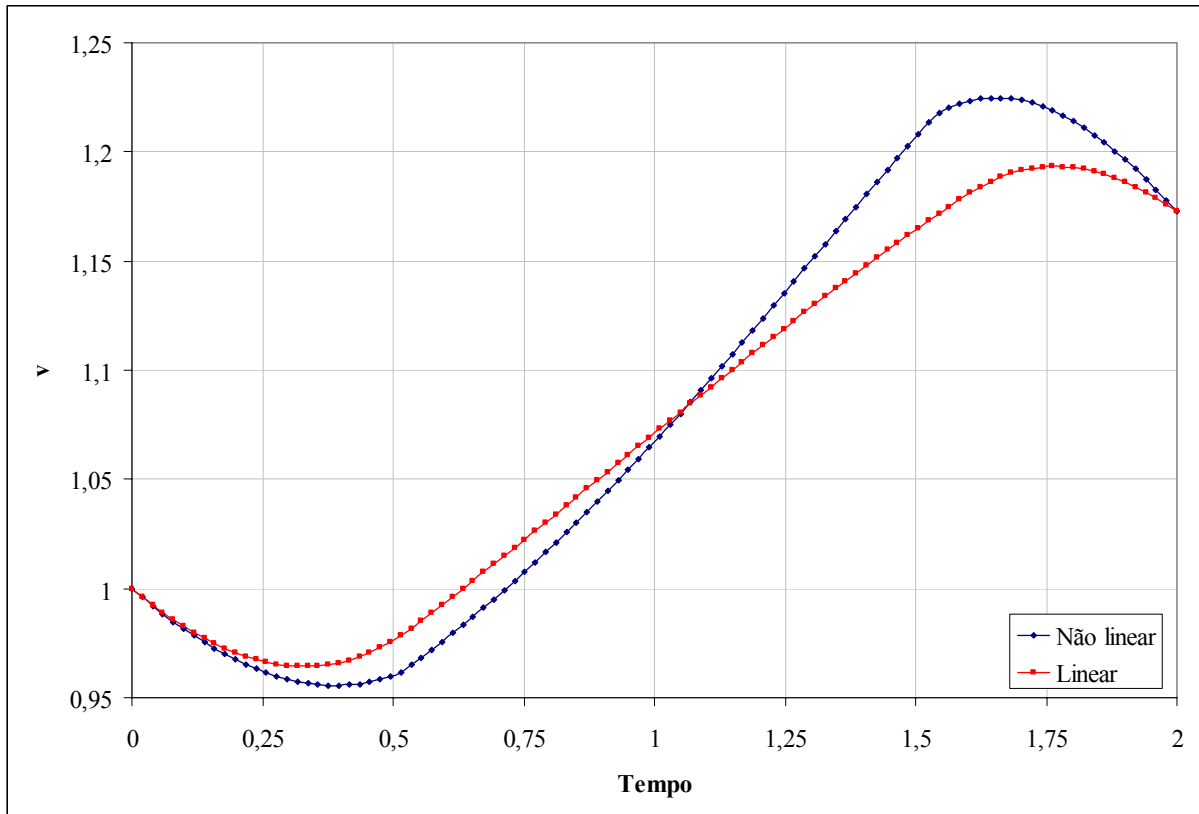


Figura IV.55. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,30$ e $t_f = 2,0$.

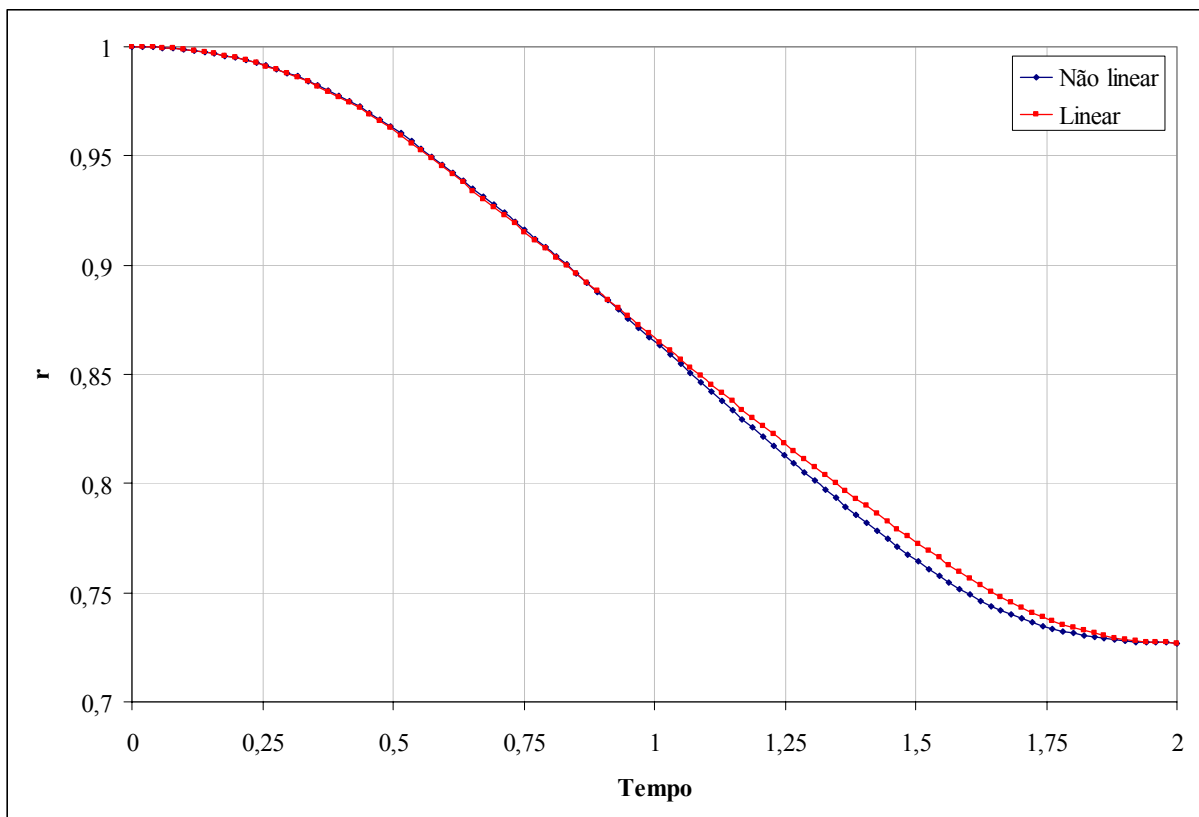
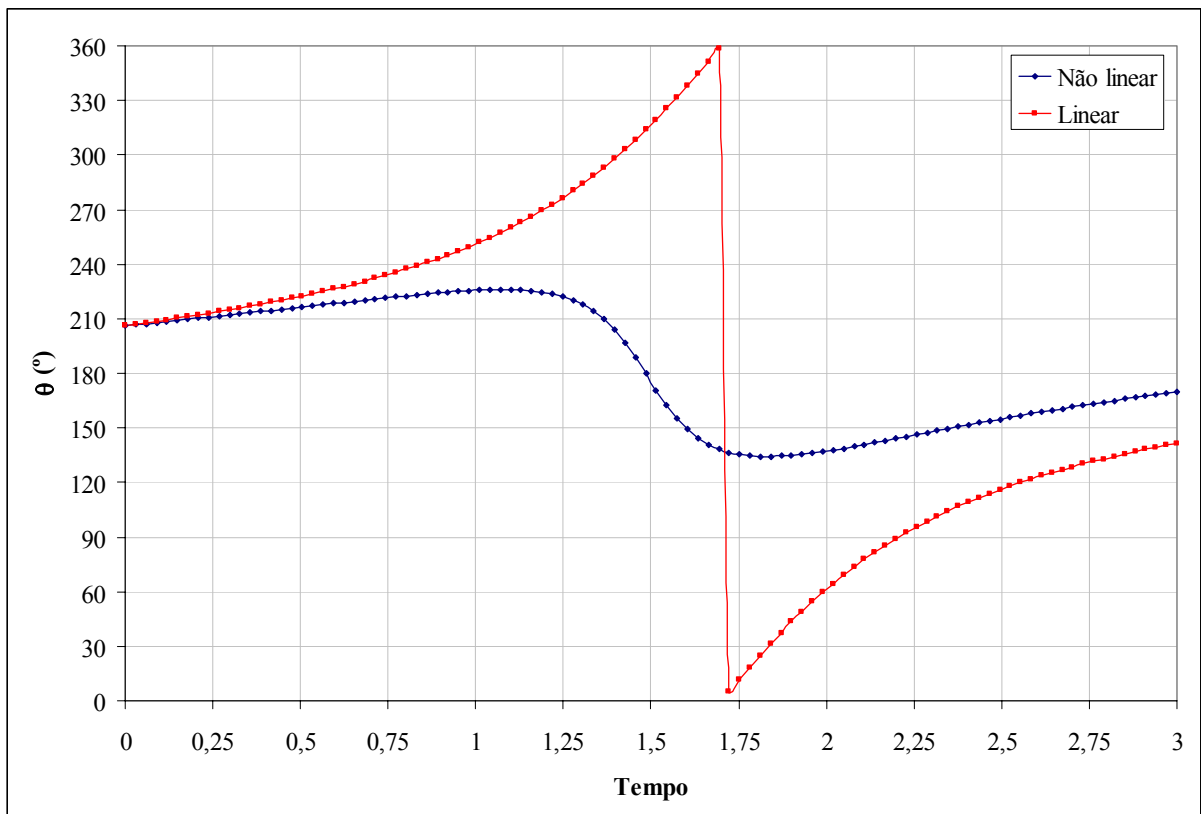
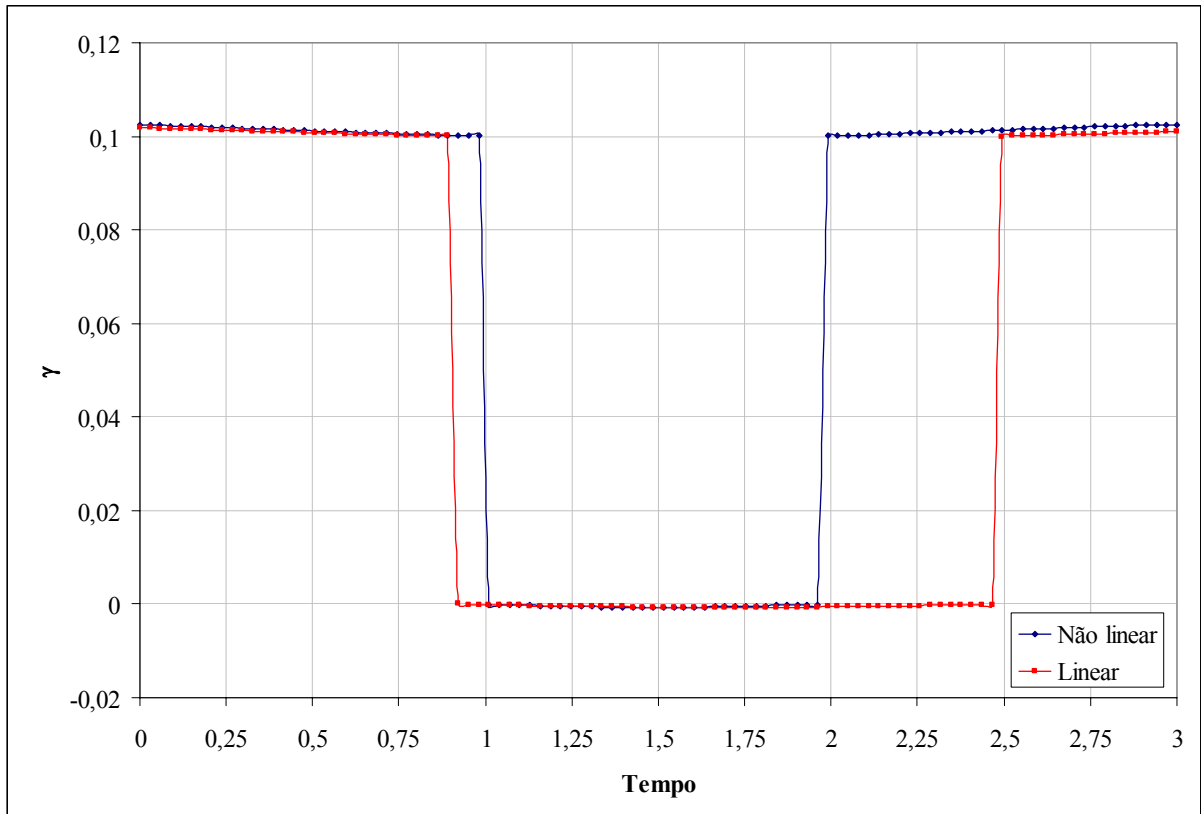


Figura IV.56. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,30$ e $t_f = 2,0$.



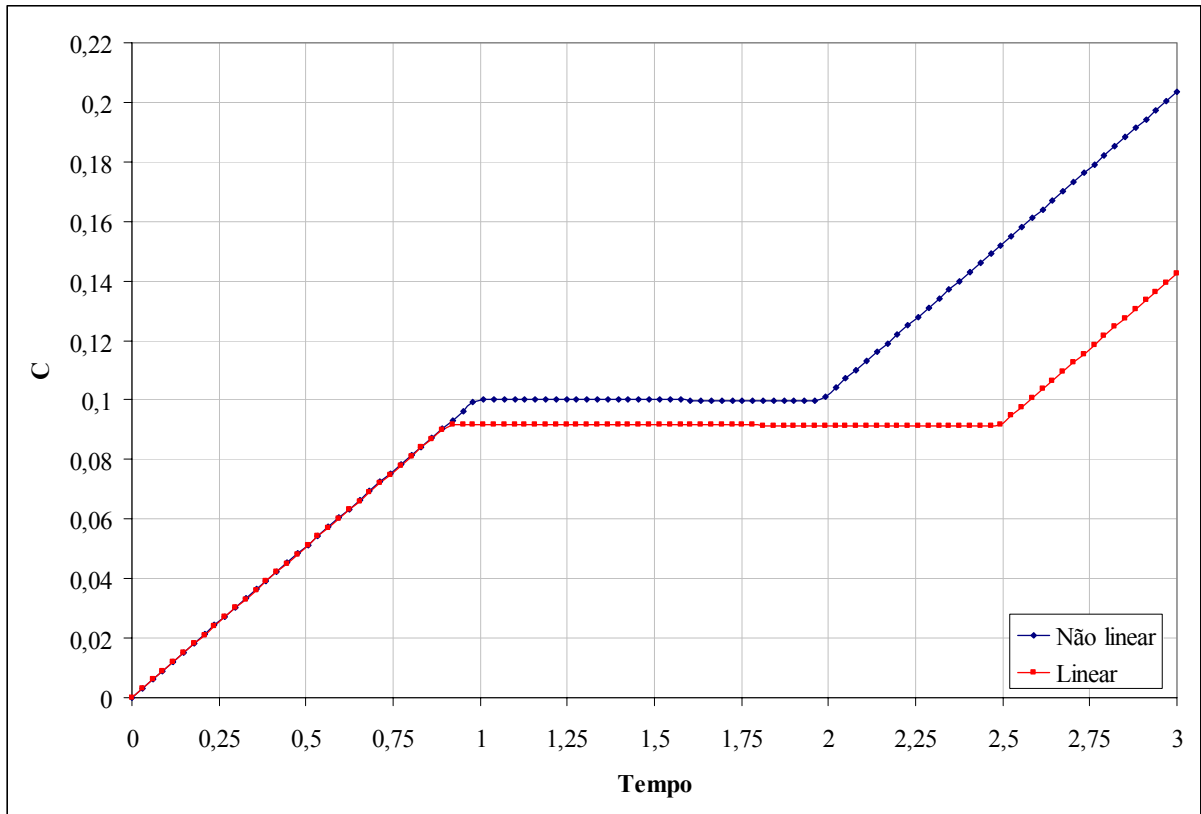


Figura IV.59. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 3,0$.

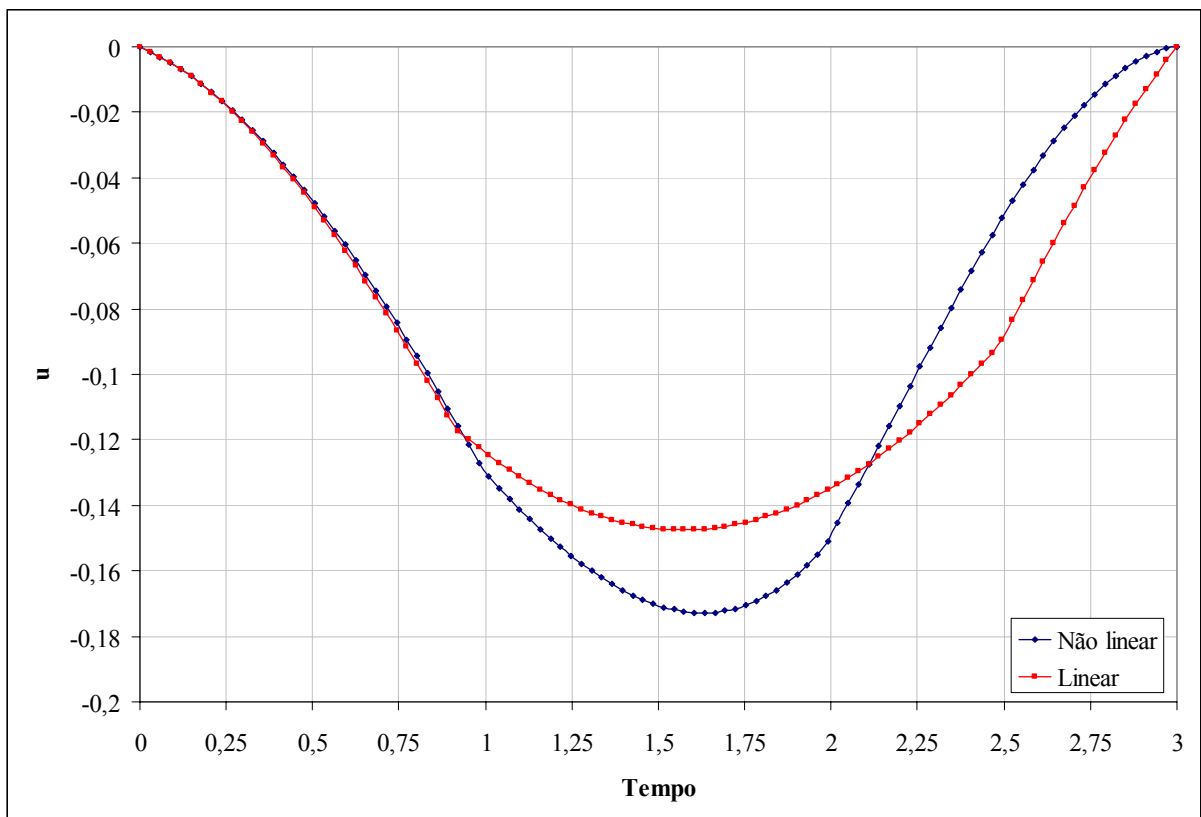


Figura IV.60. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 3,0$.

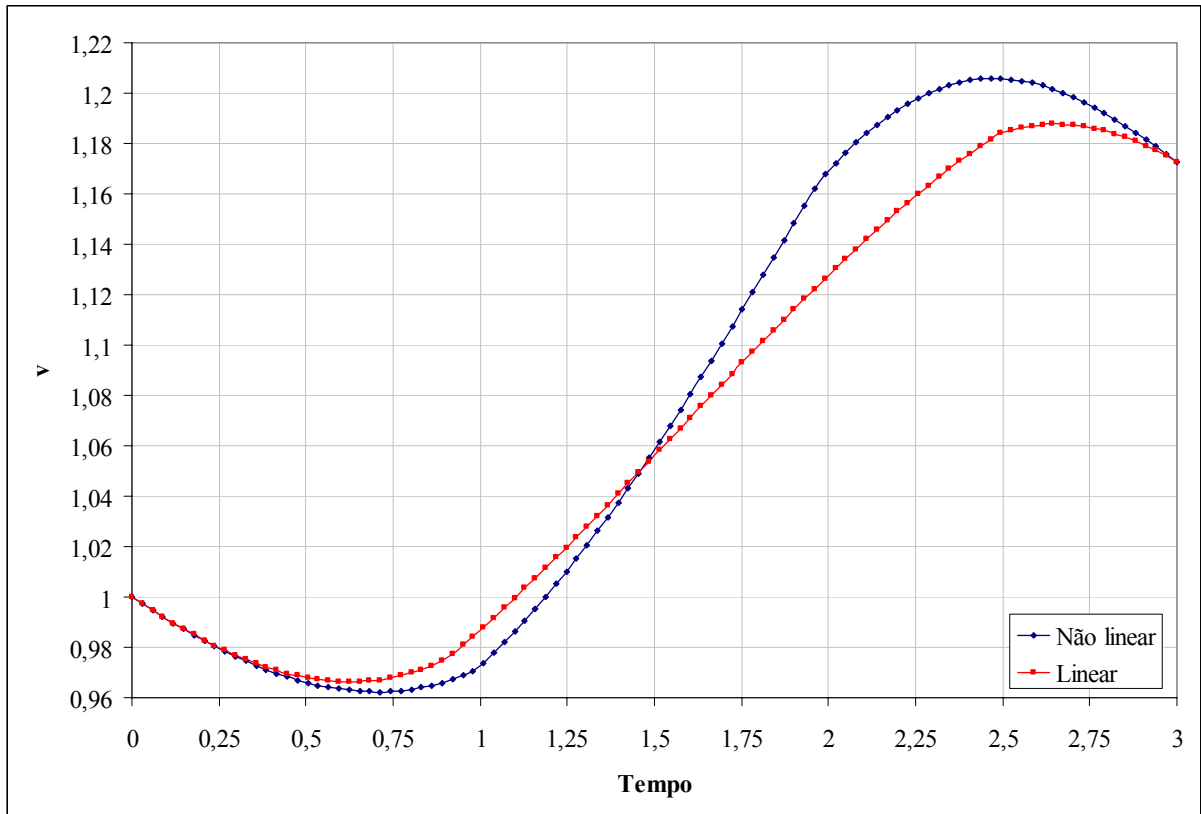


Figura IV.61. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 3,0$.

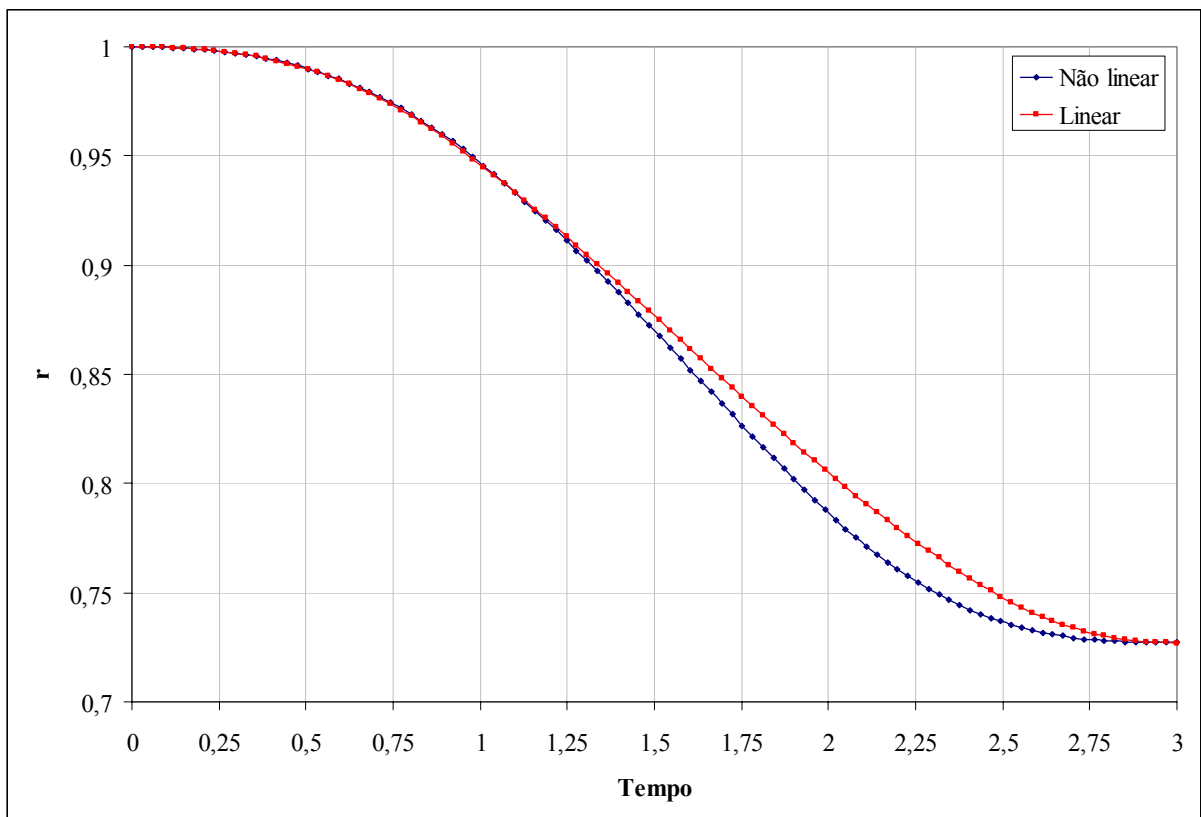


Figura IV.62. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,7270$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 3,0$.

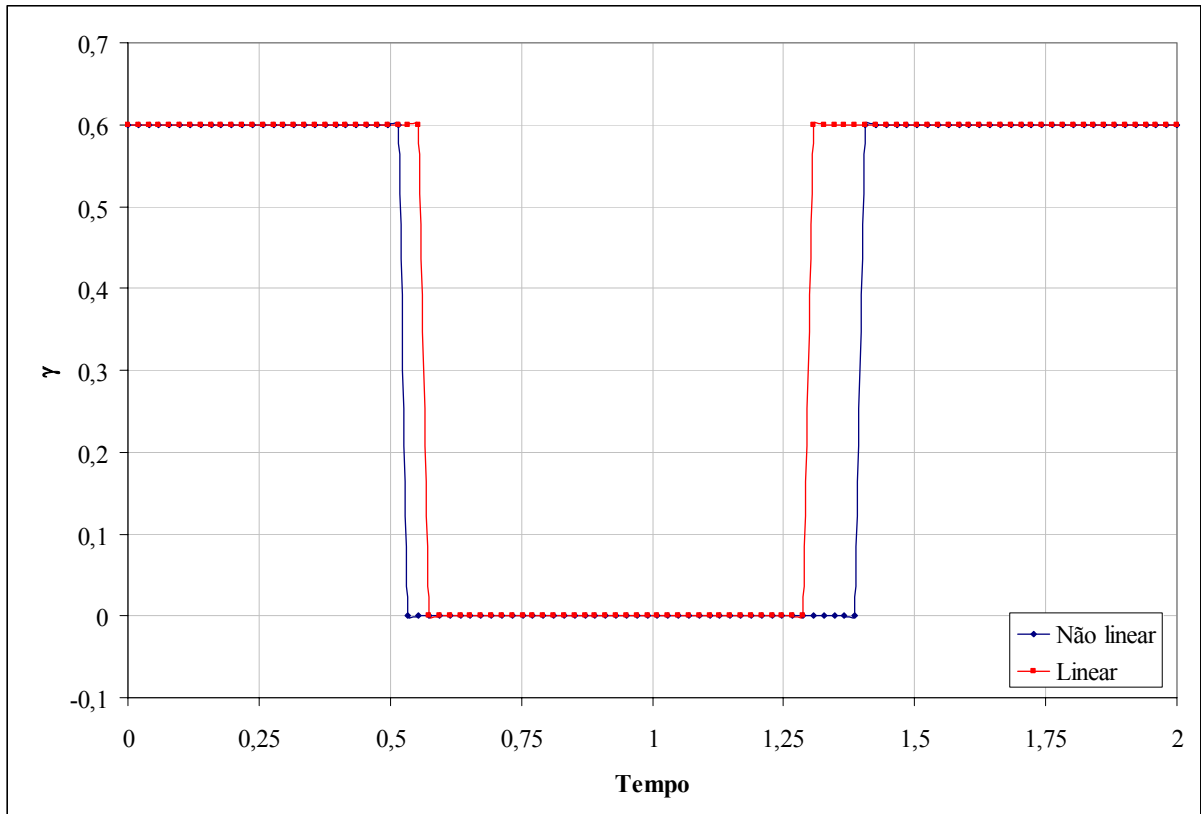


Figura IV.63. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,60$ e $t_f = 2,0$.

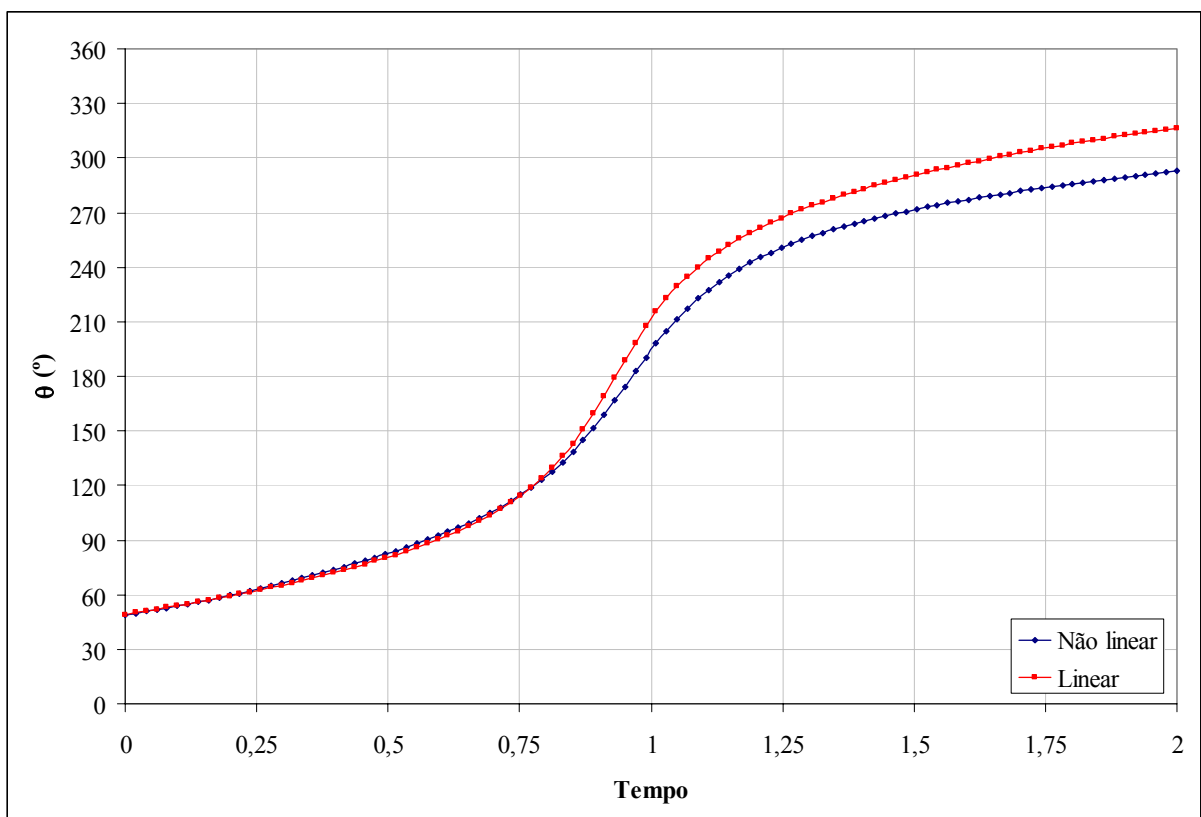


Figura IV.64. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,60$ e $t_f = 2,0$.

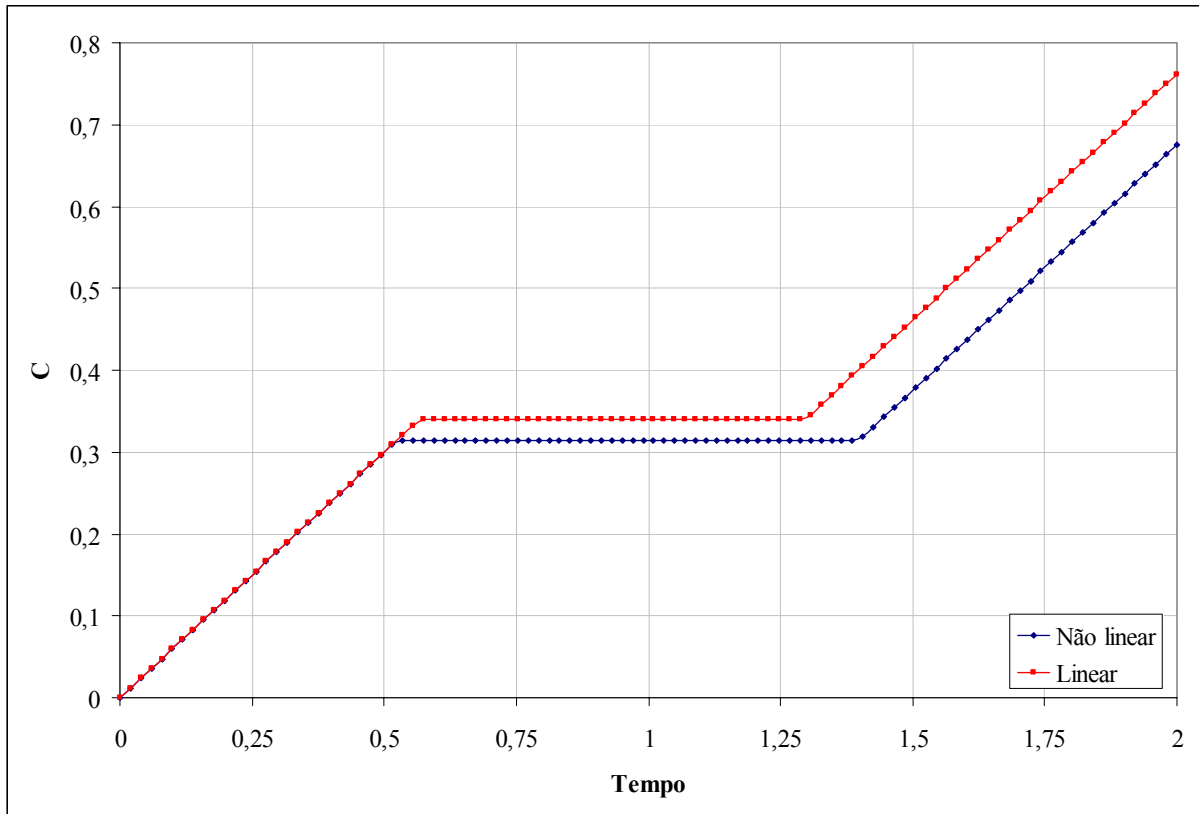


Figura IV.65. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,60$ e $t_f = 2,0$.

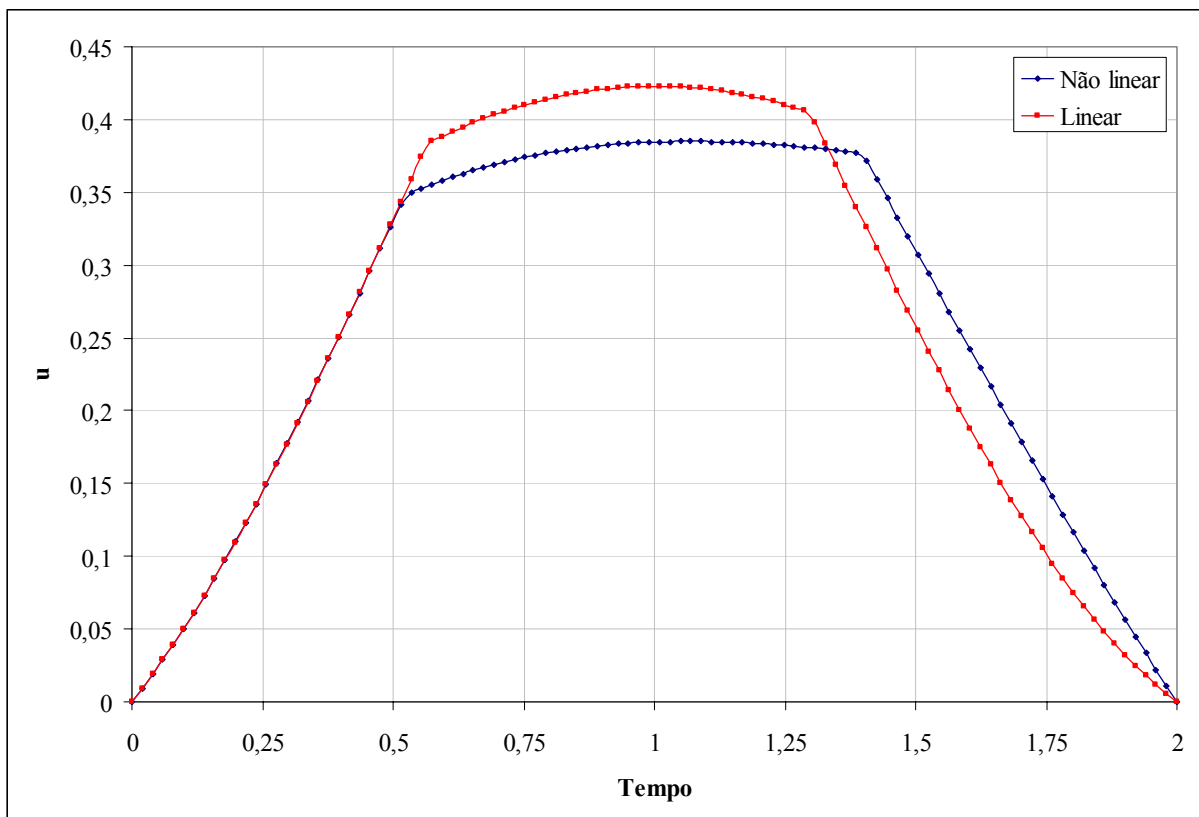


Figura IV.66. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,60$ e $t_f = 2,0$.

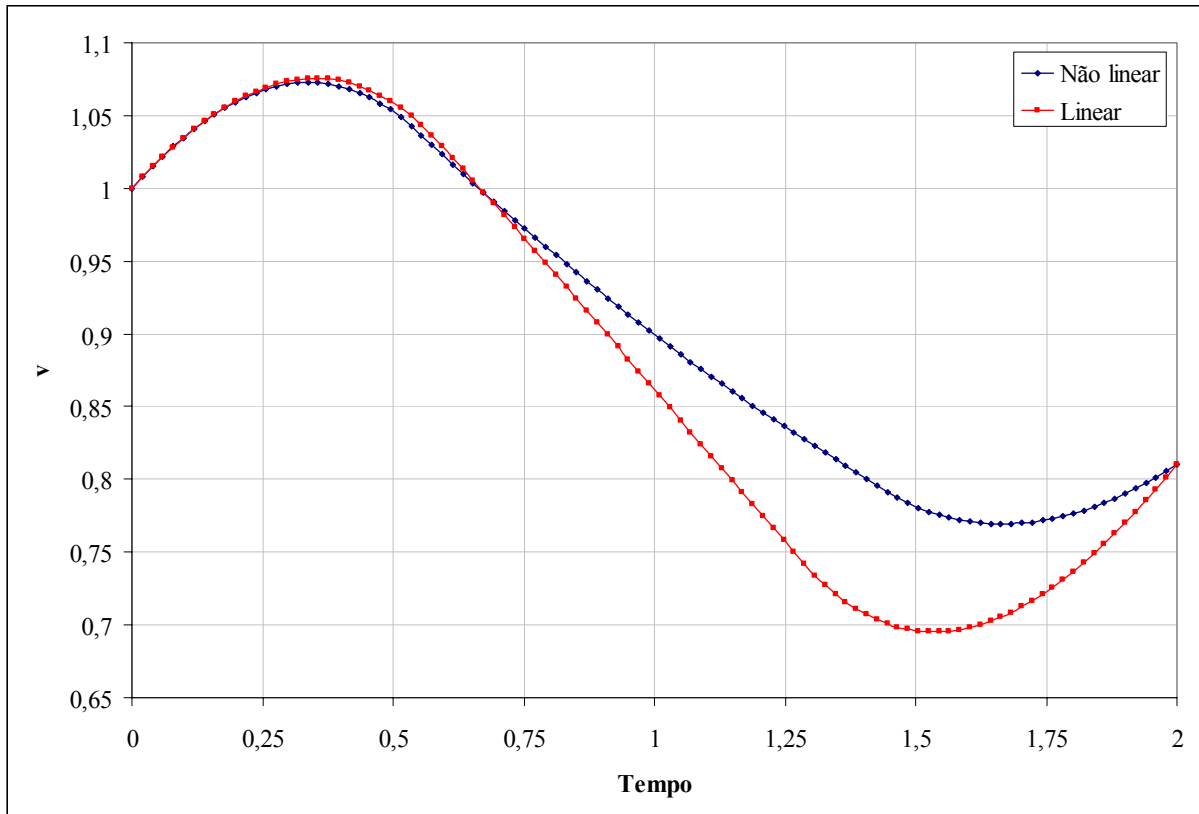


Figura IV.67. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,60$ e $t_f = 2,0$.

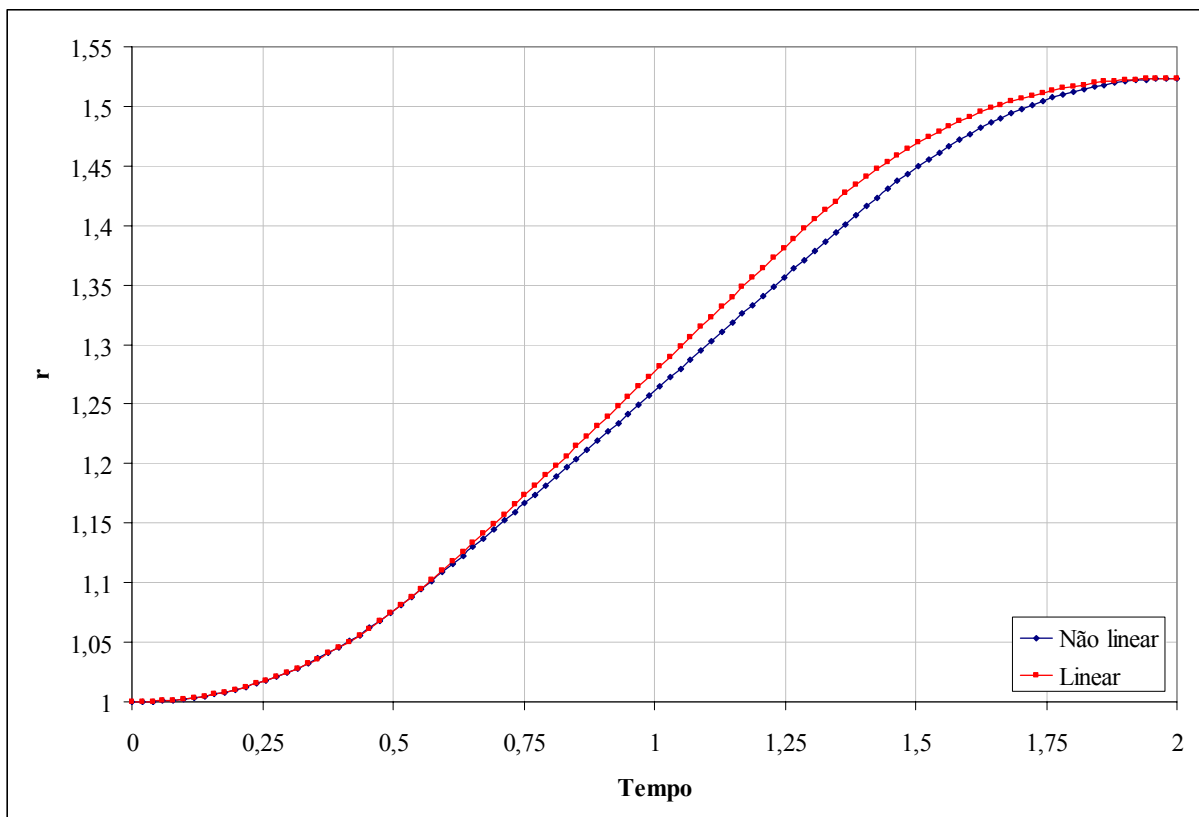


Figura IV.68. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,60$ e $t_f = 2,0$.

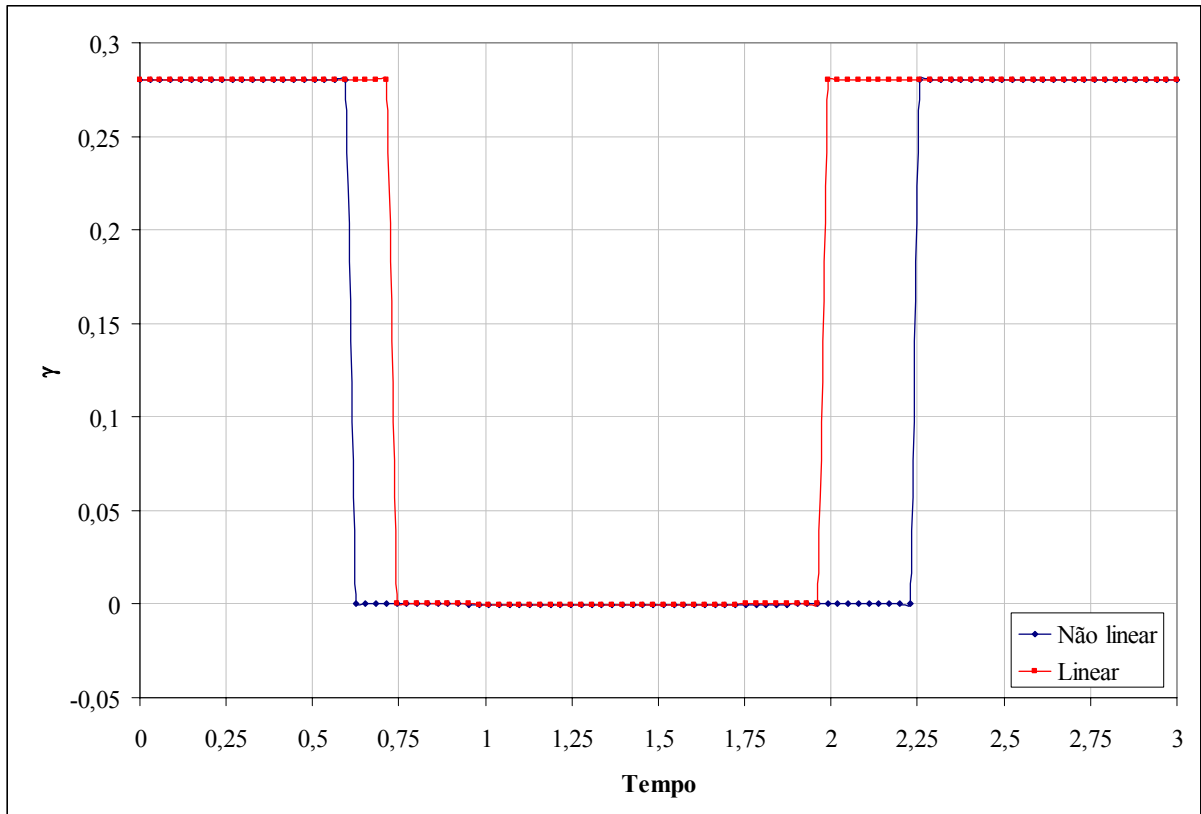


Figura IV.69. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,28$ e $t_f = 3,0$.

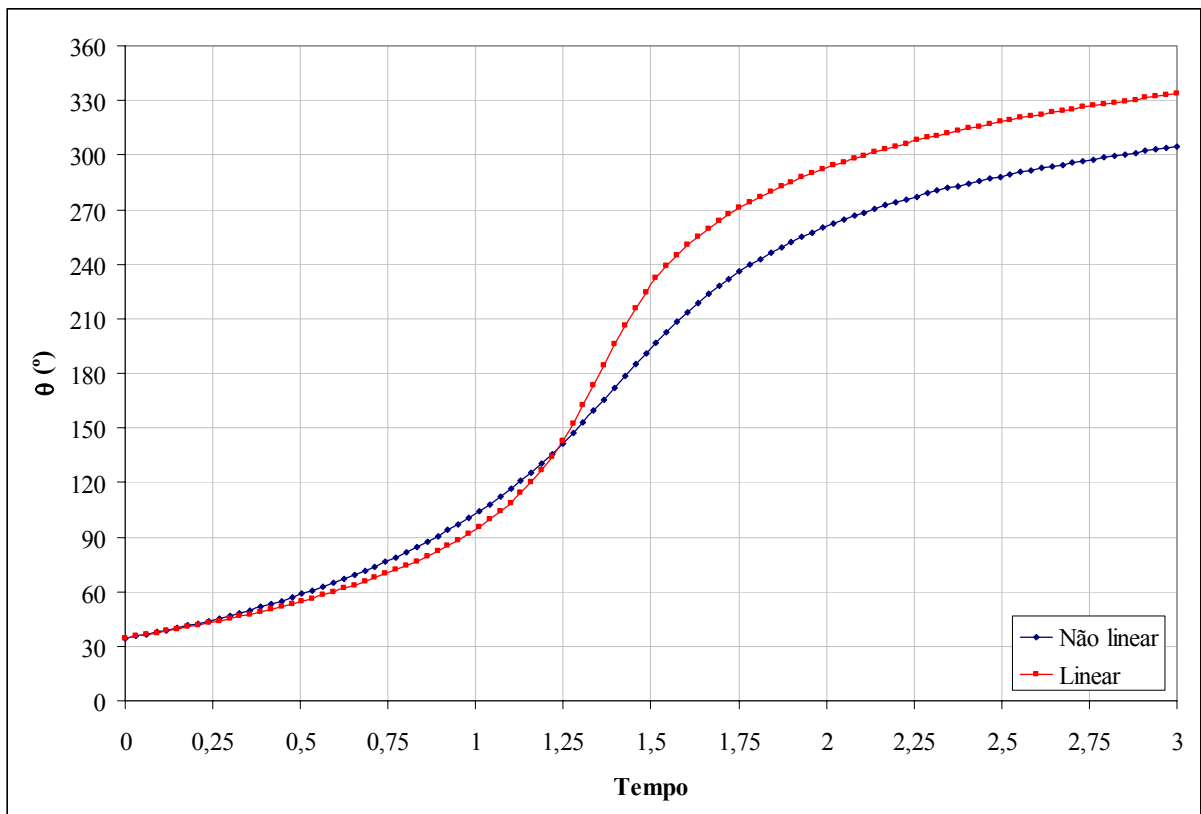


Figura IV.70. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,28$ e $t_f = 3,0$.

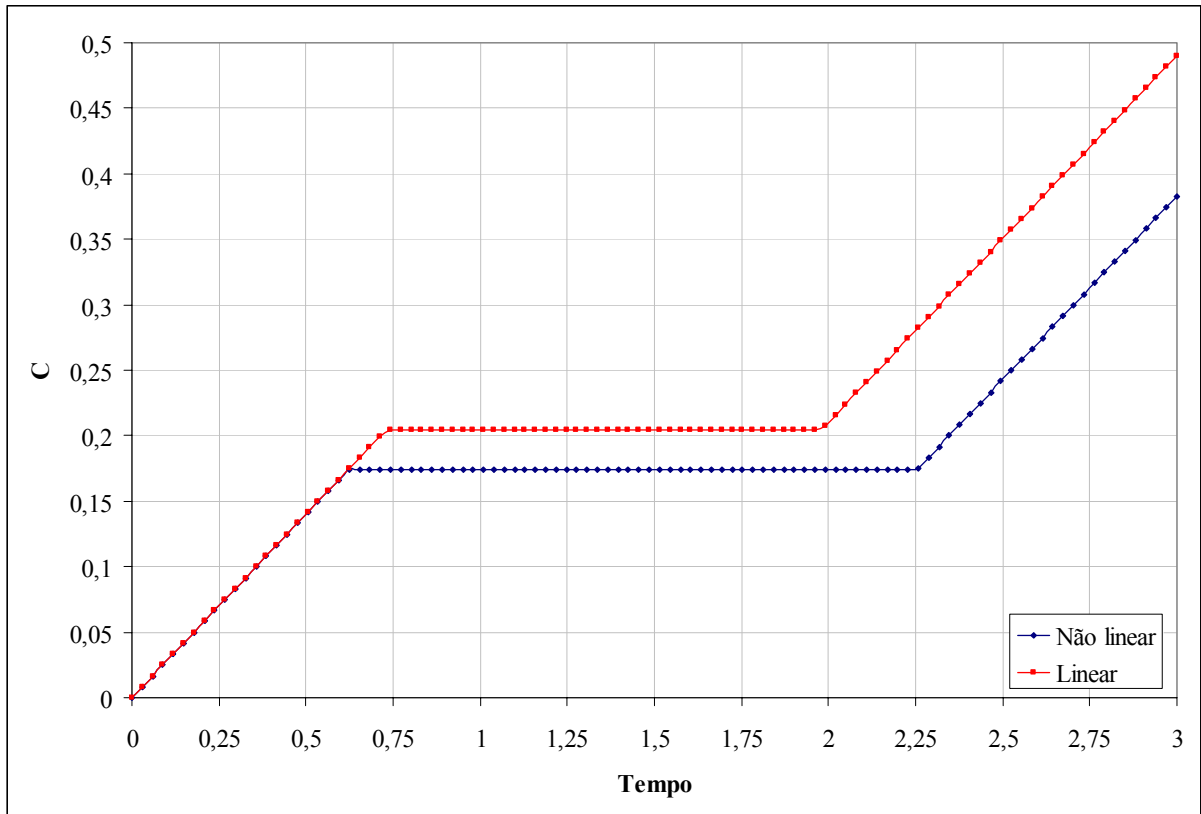


Figura IV.71. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,28$ e $t_f = 3,0$.

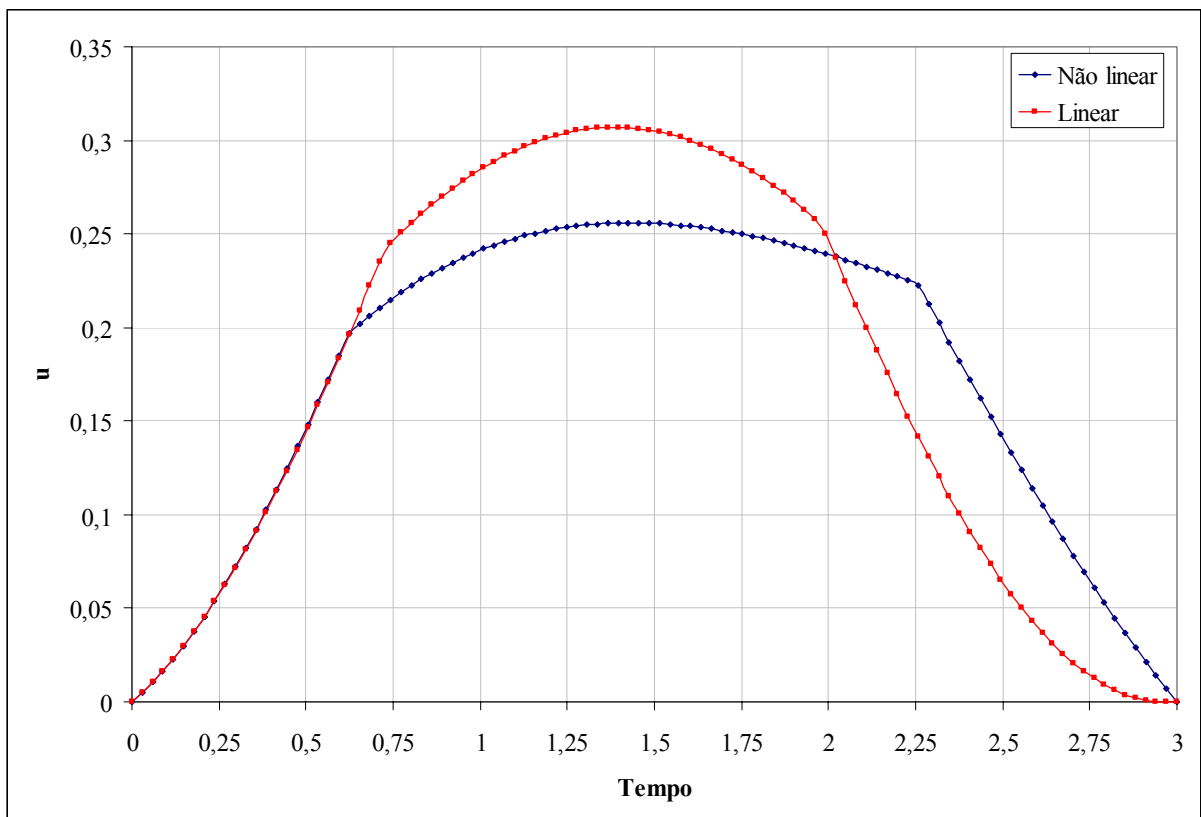


Figura IV.72. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,28$ e $t_f = 3,0$.

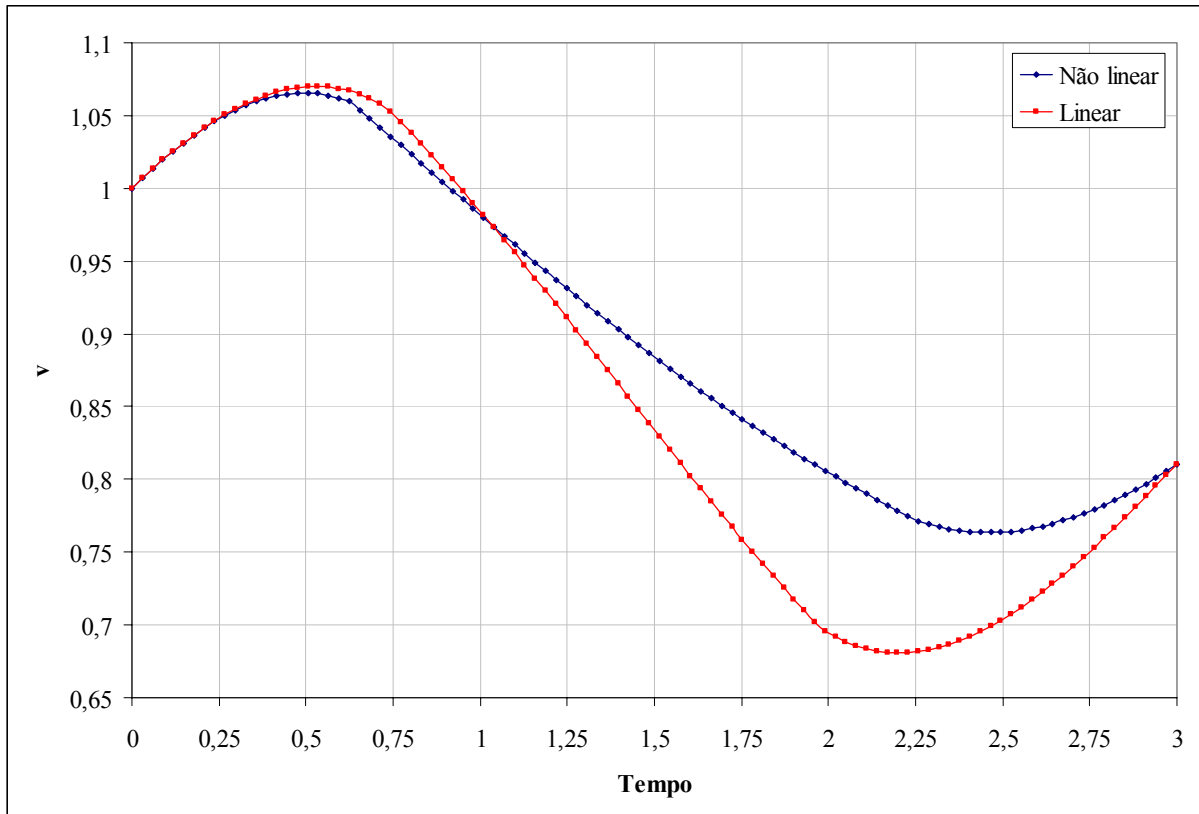


Figura IV.73. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,28$ e $t_f = 3,0$.

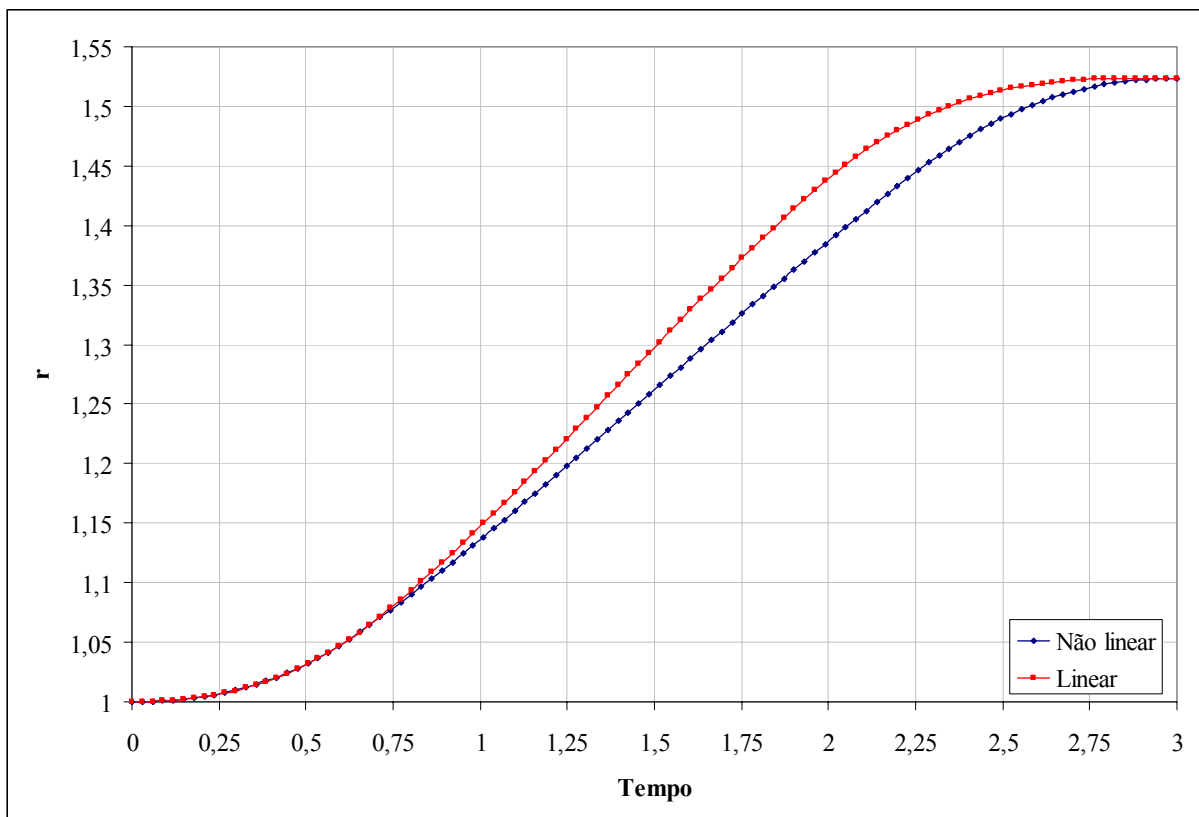


Figura IV.74. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,5236$, $\gamma_{\max} = 0,28$ e $t_f = 3,0$.

É interessante observar, a partir das Figuras IV.51, IV.57, IV.63 e IV.69, além das figuras do Apêndice, que todas as transferências simuladas têm como resultado um controle propulsivo do tipo *bang-bang*, ou seja, alternaram arcos de tração máxima com arcos balísticos. Este resultado é previsto pela teoria geral de transferências orbitais ótimas para o sistema VEC, conforme apresentado na seção IV.5.2.2.

Um outro aspecto dos resultados obtidos que merece ser comentado está relacionado à velocidade característica C . Observando as evoluções temporais destas grandezas, percebe-se que algumas apresentaram ligeira variação de valor durante os intervalos de tempo associados aos arcos balísticos, como se pode constatar, por exemplo, nas Figuras VII.147, VII.153, VII.159, VII.165, etc. Este resultado não condiz com o previsto, uma vez que, por se tratar de um arco balístico, o sistema propulsivo não está funcionando, de forma que a velocidade característica, associada ao consumo de combustível, deveria permanecer constante. A explicação para este comportamento está na precisão numérica. Para os casos que apresentaram discrepância, é possível constatar, observando os gráficos correspondentes da magnitude da aceleração, Figuras VII.145, VII.151, VII.157, VII.163, etc., que os arcos balísticos na verdade apresentam um valor ligeiramente negativo de aceleração, devido à precisão numérica. Estes valores negativos, ao serem integrados no tempo, fornecem uma evolução decrescente da velocidade característica, o que condiz com os resultados obtidos. Além disto, por se tratar de um efeito integral, a variação da velocidade característica torna-se tão maior quanto maior for a duração do arco balístico.

IV.9 – CONCLUSÕES

O problema geral de otimização de trajetórias espaciais está relacionado à transferência de um veículo de uma órbita inicial O_0 para uma órbita final O_f , realizada mediante a aplicação de uma força propulsiva F , e com o menor consumo de combustível, que

é o critério de minimização mais usual. Esta força F varia com o tempo, de modo que ela precisa ser expressa em função das variáveis do problema para poder tratá-lo. Este modelamento matemático depende do sistema propulsivo considerado, sendo que dois modelos clássicos são considerados neste trabalho: sistemas a velocidade de ejeção constante (VEC) e empuxo limitado; e sistemas com velocidade de ejeção modulável e potência limitada (PL).

Neste capítulo, o problema de transferência espacial ótima foi apresentado e formulado como um problema de controle ótimo, para os dois modelos de sistemas propulsivos. Em seguida, o método da variação segunda apresentado no CAPÍTULO III foi utilizado para resolver diversos casos deste problema, considerando os sistemas propulsivos PL e VEC e particularizando a formulação para transferências entre órbitas circulares coplanares próximas.

Os resultados obtidos para o sistema PL mostraram grande concordância com os resultados analíticos, provenientes de uma teoria linear, e os numéricos, obtidos através de outros métodos, mesmo para transferências com grande variação de raio e de longa duração. De modo geral, verifica-se que a teoria analítica fornece uma boa aproximação para a solução de problemas de transferências espaciais ótimas entre órbitas circulares coplanares próximas, utilizando sistema de potência limitada e baixo empuxo.

Para o sistema VEC, percebe-se que todas as transferências simuladas têm como resultado o controle propulsivo do tipo *bang-bang*, ou seja, alternaram arcos de tração máxima com arcos balísticos de modo a minimizar o consumo de combustível na manobra. Este resultado é previsto pela teoria geral de transferências orbitais ótimas com sistema propulsivo de velocidade de ejeção constante. Além disto, este problema foi analisado utilizando duas formulações diferentes: uma com sistema linearizado, mais simples, e outra com o sistema não-linearizado, mais exigente computacionalmente. Verifica-se que, para

problemas analisados nos quais as órbitas inicial e final são próximas, a formulação linearizada fornece bons resultados e corresponde a uma boa aproximação para a formulação não-linearizada. Por outro lado, à medida que as órbitas se distanciam, a hipótese de linearidade perde sua validade e os resultados obtidos não são mais necessariamente próximos aos da formulação não-linearizada. Para o caso $\rho = 0,7270$, por exemplo, com $t_f - t_0 = 2,0$ e $\gamma_{\max} = 0,30$, há um desvio relativo de apenas 4,3%; por outro lado, para $t_f - t_0 = 3,0$ e $\gamma_{\max} = 0,10$, há um desvio de 30,0%. Isto sugere que a proximidade dos resultados fornecidos pelas duas formulações depende não só da distância entre as órbitas, mas também dos outros elementos que caracterizam a transferência.

De modo geral, pode-se dizer que os resultados apresentados neste capítulo são bons, devido à proximidade e concordância com outros resultados. Além disto, eles mostram que o método da variação segunda, segundo a metodologia apresentada no CAPÍTULO III e utilizada para resolver os problemas de transferência, é uma ferramenta bastante útil no estudo de trajetórias espaciais ótimas. O próximo capítulo apresenta uma síntese das conclusões obtidas no desenvolvimento deste trabalho.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES FINAIS

Este capítulo sintetiza os assuntos abordados no desenvolvimento deste trabalho e apresenta as conclusões finais obtidas.

Dentre os diversos problemas de otimização abordados pelas engenharias e ciências aplicadas, os de trajetórias espaciais envolvendo transferências simples e *rendez-vous* são fundamentais em Mecânica Espacial. Eles têm sido tema de diversos estudos analíticos e numéricos desde o início dos anos 1950, com o estabelecimento dos fundamentos da moderna navegação espacial através do Cálculo de Variações clássico, cuja origem remonta ao século XVII. Nos últimos 10 anos, em especial, percebe-se um renovado interesse do meio científico e acadêmico pelo estudo de transferências espaciais utilizando sistemas propulsivos a baixo empuxo e potência limitada.

Na análise de tais problemas, diversas teorias foram amplamente utilizadas, tais como o Cálculo Variacional clássico e sua versão mais moderna, a Teoria de Controle Ótimo, fundamentada no Princípio de Máximo de Pontryagin [53]. Apesar destas teorias, em especial o Princípio de Máximo, constituírem ferramentas poderosas na análise de problemas de otimização, seu emprego prático esteve durante muitos anos restrito a problemas mais simples. O motivo disto é que a aplicação delas aos problemas leva, em quase todos os casos, a um problema de valor de contorno em dois pontos (TPBVP) envolvendo equações diferenciais ordinárias não-lineares. A solução analítica destes problemas só é possível em casos especiais e o tratamento através de métodos numéricos tornou-se viável somente após o surgimento dos computadores digitais. Desta forma, estas teorias só se tornaram plenamente aplicáveis à resolução de problemas de otimização nas últimas décadas.

Percebe-se, portanto, que os métodos numéricos constituem uma ferramenta fundamental na análise dos problemas de otimização e, por isso, têm sido objeto de diversos estudos. Eles constituem-se de procedimentos iterativos, iniciados por uma estimativa arbitrária, que buscam obter a solução do problema de otimização dentro de uma determinada precisão, estabelecida *a priori*. De forma geral, eles podem ser classificados em dois grupos: diretos e indiretos.

Este trabalho refere-se justamente ao estudo de um método numérico, chamado de método da variação segunda, na análise de problemas de trajetórias espaciais ótimas. Ele corresponde a um método indireto, que busca resolver o problema de valor de contorno resultante da aplicação do Princípio de Máximo. Sua conceituação teórica envolve conhecimentos de Cálculo Variacional e do chamado Problema Linear Quadrático. Ela envolve, ainda, o importante conceito de trajetórias extremas vizinhas, que se relaciona à variação segunda do funcional a ser minimizado, e conseqüentemente às derivadas segundas da Hamiltoniana do problema, dando origem, desta forma, ao nome do método.

Neste trabalho é apresentada a formulação teórica do método da variação segunda para problemas sem restrições, desenvolvida a partir dos fundamentos da Teoria de Controle Ótimo e envolvendo o conceito de trajetórias extremas vizinhas. Esta formulação matemática é modificada de forma a considerar uma função de penalidade no índice de performance, permitindo o tratamento de problemas com restrições nas variáveis de controle. Esta forma final do método é sintetizada na forma de um algoritmo para aplicação numérica. Este algoritmo final é então testado para dois tipos de problemas de otimização cujas soluções analíticas são conhecidas, sendo um com e outro sem restrições no controle. Os resultados obtidos são muito bons.

Após a validação do método da variação segunda para problemas de solução conhecida, este trabalho apresenta o problema geral de transferências espaciais ótimas e formula-o como um problema de controle ótimo. O método da variação segunda é então aplicado a diversos casos deste problema, considerando os sistemas propulsivos com velocidade de ejeção modulável e potência limitada (PL) e a velocidade de ejeção constante (VEC) e empuxo limitado. A formulação é particularizada para transferências entre órbitas circulares coplanares próximas.

Os resultados obtidos para o sistema PL mostraram grande concordância com os resultados analíticos, provenientes de uma teoria linear, e os numéricos, obtidos através de outros métodos, mesmo para transferências com grande variação de raio e de longa duração.

Para o sistema VEC, os resultados obtidos para o controle são do tipo *bang-bang* e estão em acordo com a teoria geral de transferências orbitais ótimas. Além disto, verifica-se que as duas formulações utilizadas para o sistema VEC (linearizada e não-linearizada) fornecem resultados próximos para problemas nos quais as órbitas inicial e final são próximas. Para grandes variações no raio da órbita, no entanto, isto não é necessariamente verdadeiro, conforme se pode observar ao analisar a transferência entre Terra e Vênus ($\rho = 0,7270$). Este caso sugere que a proximidade entre os resultados das duas formulações depende não só da variação do raio, mas também do tempo de transferência e da aceleração máxima.

De modo geral, pode-se concluir que os resultados obtidos através do método da variação segunda para os problemas de transferências espaciais são bons, devido à proximidade e concordância com outros resultados. Além disto, eles mostram que o método, na formulação apresentada neste trabalho e utilizada para resolver os problemas, constitui uma ferramenta bastante útil no estudo de trajetórias espaciais ótimas.

Além disto, todas estas conclusões sugerem fortemente que o método da variação segunda pode ser aplicado com sucesso a diversos outros tipos de problemas. Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se mencionar, dentre outros:

- Análise mais aprofundada da proximidade entre os resultados das formulações linearizada e não-linearizada para o sistema VEC;
- Análise de transferências entre órbitas elípticas coplanares e coaxiais diretas;
- Análise de transferências entre órbitas circulares não-coplanares;

- Análise de transferências entre órbitas elípticas não-coplanares;
- Análise de transferências de muito longa duração, envolvendo dezenas ou, até mesmo, centenas de revoluções;
- Aplicação na análise preliminar de trajetórias lunares envolvendo o conceito de esfera de influência;
- Análise de transferências em campo não-central, incluindo o achatamento da Terra.

CAPÍTULO VI

REFERÊNCIAS

Este capítulo apresenta as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

1. BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. **Fundamentals of Astrodynamics**. New York: Dover Publications, 1971. 455 p.
2. BELL, D. J. Optimal Space Trajectories - A Review of Published Work. **The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society**, [S.l.], v. 72, p. 141-146, Feb. 1968.
3. BETTS, J. T. Using Sparse Nonlinear Programming to Compute Low Thrust Orbit Transfers. **The Journal of the Astronautical Sciences**, [S.l.], v. 41, n. 3, p. 349-371, July/Sept. 1993.
4. BETTS, J. T. Optimal Interplanetary Orbit Transfers by Direct Transcription. **The Journal of the Astronautical Sciences**, [S.l.], v. 42, n. 3, p. 247-268, July/Sept. 1994.
5. BETTS, J. T. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], n. 120, p. 27-40, 2000.
6. BREAKWELL, J. V.; CHANAL, B. Orbit transfer with very low acceleration. **Acta Astronautica**, [S.l.], v. 13, n. 6/7, p. 285-290, 1986.
7. BREAKWELL, J. V.; SPEYER, J. L.; BRYSON, A. E. Optimization and Control of Nonlinear Systems Using the Second Variation. **J.S.I.A.M. Control**, [S.l.], Ser. A, v. 1, n. 2, p. 193-223, Jan. 1963.
8. BRYSON, A. E.; DENHAM, W. F. A steepest-ascent method for solving optimum programming problems. **Journal of Applied Mechanics**, [S.l.], v. 84, n. 3, p. 247-257, June 1962.
9. BRYSON Jr., A. E. B.; HO, Y. C. **Applied Optimal Control**. New York: John Wiley & Sons, 1975. 481 p.
10. BROUCKE, R. A. Low-Thrust Trajectory Optimization in an Inverse Square Force Field. In: AAS/AIAA SPACEFLIGHT MECHANICS MEETING, 1991, Houston. **Proceedings...**Houston: AAS Publications Office, Feb. 1991. 22 p, paper AAS 91-159.
11. CARVALHO, F. C. **Transferências Ótimas a Baixo Empuxo e Potência Limitada entre Órbitas Elípticas Quaisquer**. 2004. Dissertação (Doutorado em Ciências) - INPE, São José dos Campos, 2004.

12. CONTENSOU, P. Etude Théorique des Trajectoires Optimales dans un Champ de Gravitation. Application au Cas d'un Centre d'Attraction Unique. **Acta Astronautica**, [S.l.], v. VIII, p. 134-150, 1962.
13. COVERSTONE-CARROLL, V.; WILLIAMS, S. N. Optimal Low Thrust Trajectories Using Differential Inclusion Concepts. The **Journal of the Astronautical Sciences**, [S.l.], v. 42, n. 4, p. 379-393, Oct./Dec. 1994.
14. DA SILVA FERNANDES, S. Optimal Low-Thrust Transfer between Neighboring Quasi-Circular Orbits around an Oblate Planet. **Acta Astronautica**, [S.l.], v. 19, p. 933-939, 1989.
15. DA SILVA FERNANDES, S. Aplicação da Teoria de Transformações Canônicas na Análise de Transferências Espaciais Ótimas. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE APLICAÇÕES DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC 2, 2003, São José dos Campos. **Anais...São José dos Campos: SBMAC, 2003.**
16. DA SILVA FERNANDES, S.; GOLFETTO, W. A. Um algoritmo baseado nos métodos do gradiente para determinação de trajetórias espaciais ótimas. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE APLICAÇÕES DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC 1, 2002, São José do Rio Preto. **Anais...São José do Rio Preto: SBMAC, 2002.**
17. DA SILVA FERNANDES, S.; GOLFETTO, W. A. Numerical Computation of Optimal Low-Thrust Limited-Power Trajectories - Transfers Between Coplanar Circular Orbits. **Journal of Brazilian Society of Mechanical Sciences Engineering**, em fase de publicação.
18. DA SILVA FERNANDES, S.; SILVEIRA FILHO, C. R. Aplicação do método da variação segunda na resolução de problemas de controle ótimo com restrições. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE APLICAÇÕES DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC 1, 2002, São José do Rio Preto. **Anais...São José do Rio Preto: SBMAC, 2002.**
19. EDELBAUM, N. T. Optimum low-thrust rendezvous and station keeping. **AIAA Journal**, [S.l.], v.2, n. 7, p. 1196-1201, 1964.
20. ENRIGHT, P. J.; CONWAY, B. A. Optimal Finite-Thrust Spacecraft Trajectories Using Collocation and Nonlinear Programming. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, [S.l.], v.14, n. 5, p. 981-985, Sept./Oct. 1991.

21. ENRIGHT, P. J.; CONWAY, B. A. Discrete Approximations to Optimal Trajectories Using Direct Transcription and Nonlinear Programming. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, [S.l.], v. 15, n. 4, p. 994-1002, July/Aug. 1992.
22. ELSGOLTS, L. **Differential Equations and the Calculus of Variations**. Moscow: Mir Publishers, 1977. 440 p.
23. FAULDERS, C. R. Optimum Thrust Programming of Electrically Powered Rocket Vehicles in a Gravitational Field. **ARS Journal**, [S.l.], p. 954-960, Oct. 1960.
24. GAMKRELIDZE, R. V. Discovery of the Maximum Principle. **Journal of Dynamical and Control Systems**, [S.l.], v. 5, n. 4, p. 437-451, 1999.
25. GEFFROY, S.; EPENOY, R. Optimal Low-Thrust Transfers with Constraints - Generalization of Averaging Techniques. **Acta Astronautica**, [S.l.], v. 41, n. 3, p. 133-149, 1997.
26. GELFAND, I. M. & FOMIN, S. V. **Calculus of Variations**. New Jersey: Prentice-Hall, 1963. 232 p.
27. GOLFETTO, W. A. **Otimização de Trajetórias pelo Método do Gradiente de Segunda Ordem – Aplicação a Trajetórias Espaciais**. 1998. Dissertação (Mestrado em Ciências) - ITA, São José dos Campos, 1998.
28. GOLFETTO, W. A. **Aplicações de Métodos de Segunda Ordem para a Otimização de Trajetórias Espaciais**. 2004. 270 f. Dissertação (Doutorado em Ciências) - ITA, São José dos Campos, 2004.
29. GUELMAN, M. Earth-to-Moon Transfer with a Limited Power Engine. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, [S.l.], v. 18, n. 5, p. 1133-1138, Sept./Oct. 1995.
30. HAISSIG, C. M.; MEASE, K. D.; VINH, N. X. Minimum-Fuel, Power-Limited Transfers between Coplanar Elliptical Orbits. **Acta Astronautica**, [S.l.], v. 29, n. 1, p. 1-15, 1993.
31. HESTENES, M. R. **Calculus of Variations and Optimal Control Theory**. New York: John Wiley & Sons, 1966. 405 p.

32. HOHMANN, W. **The Attainability of Heavenly Bodies**. [S.l.: s.n.], 1960. (NASA Technical Translation F-44).
33. HUSSU, A. The conjugate-gradient method for optimal control problems with undetermined final times. **International Journal of Control**, [S.l.], v. 15, n. 1, p. 79-82, 1972.
34. KELLEY, H. J. Gradient theory of optimal flight paths. In: ARS SEMI-ANUAL MEETING, 1960, Los Angeles. **Proceedings**...Los Angeles: [s.n.], 1960. p. 947-953.
35. LASDON, L. S.; WAREN, A. D.; RICE, R. K. An Interior Penalty Method for Inequality Constrained Optimal Control Problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v. AC-12, n. 4, p. 388-395, Aug. 1967.
36. LASDON, L. S.; MITTER, S. K.; WAREN, A. D. The conjugate gradient method for optimal control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v. AC-12, n. 2, p. 132-138, 1967.
37. LAWDEN, D. F. Fundamentals of Space Navigation. **Journal of British Interplanetary Society**, [S.l.], v. 13, p. 87-101, 1954.
38. LAWDEN, D. F. **Optimal Trajectories for Space Navigation**. London: Butterworths Mathematical Texts, 1963.
39. LEITMANN, G. **An Introduction to Optimal Control**. New York: McGraw-Hill, 1966. 163 p.
40. LEITMANN, G. **The Calculus of Variations and Optimal Control: An Introduction**. New York: Plenum, 1986. 311 p.
41. LEONDES, C. T.; PAINE, G. Computational Results for Extensions in Quasilinearization Techniques for Optimal Control. **Journal of Optimization Theory and Applications**, [S.l.], v. 2, n. 6, p. 395-405, 1968.
42. LEONDES, C. T.; WU, C. A. The Conjugate Gradient Method and its Application to Aerospace Vehicle Guidance and Control – I. Basic Results in the Conjugate Gradient Method. **Acta Astronautica**, [S.l.], v. 17, p. 871-880, 1972.

43. LEONDES, C. T.; WU, C. A. The Conjugate Gradient Method and its Application to Aerospace Vehicle Guidance and Control – II. Mars Entry Guidance and Control. **Acta Astronautica**, [S.l.], v. 17, p.881-890, 1972.
44. LEWALLEN, J. M. A Modified Quasi-Linearization Method for Solving Trajectory Optimization Problems. **AIAA Journal**, [S.l.], v. 5, n. 5, p. 962-965, May 1967.
45. LONGMUIR, A. G.; BOHN, E. V. Second-Variation Methods in Dynamic Optimization. **Journal of Optimization Theory and Applications**, [S.l.], v. 3, n. 3, p. 164-173, 1969.
46. MARCHAL, C. **Optimization of Space Trajectories**. [S.l.: s.n.], 1976. 11 p. (ONERA TP n° 1976-107).
47. MAREC, J. P. **Optimal Space Trajectories**. New York: Elsevier, 1979. 329 p.
48. MAREC, J. P. **Trajectoires Spatiales Optimales**. [S.l.: s.n.], 1984. 18 p. (ONERA TP n° 1984-7).
49. McCUE, G. A. Quasilinearization Determination of Optimum Finite-Thrust Orbital Transfers. **AIAA Journal**, [S.l.], v. 15, n. 4, p. 755-763, Apr. 1967.
50. MCGILL, R.; KENNETH, P. Solution of Variational Problems by Means of a Generalized Newton-Raphson Operator. **AIAA Journal**, [S.l.], v. 2, n. 10, p. 1761-1766, Oct. 1964.
51. McINTYRE, J. E. **Guidance, Flight Mechanics and Trajectory Optimization. Vol. XIII – Numerical Optimization Methods**. Downey: NASA, 1968. 105 p. (NASA CR – 1012).
52. PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII, V. G.; GAMKRELIDZE, R. V. On the Theory of Optimal Processes. Tradução J. H. Jones. **Technical Library, Space Technology Laboratories, Inc**, St. Louis, p. 171-176, 1956. Tradução de: Reports of the Academy of Sciences of the USSR. v. 110, n. 1, p. 7-10.
53. PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII, V. G.; GAMKRELIDZE, R. V.; MISHCHENKO, E. F. **The Mathematical Theory of Optimal Processes**. New York: John Wiley & Sons, 1962. 357 p.

54. PONTRYAGIN, L. S. **Ordinary Differential Equations**. Tradução Leonas Kacinskas e Walter B. Counts. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1962. 298 p. (Adiwes International Series in Mathematics).
55. RAGHAVENDRA, V.; RAO, K.S.P. A Note on Optimization Using the Augmented Penalty Function. **Journal of Optimization Theory and Applications**, [S.l.], v. 12, n. 3, p. 320-324, 1973.
56. SAGAN, H. **Introduction to the Calculus of Variations**. New York: Dover, 1969. 449 p.
57. SUSSMANN, H. J.; WILLEMS, J. C. 300 Years of Optimal Control: From The Brachystochrone to the Maximum Principle. **IEEE Control Systems**, [S.l.], p. 32-44, June 1997.

CAPÍTULO VII

APÊNDICE

Este capítulo apresenta outros resultados obtidos para os problemas apresentados ao longo deste trabalho.

VII.1 – INTRODUÇÃO

Nas seções IV.7 e IV.8 são apresentados os resultados obtidos pelo método da variação para problemas de transferências espaciais ótimas, considerando dois sistemas propulsivos: potência limitada e velocidade de ejeção constante. Conforme mencionado nestas seções, os resultados nelas apresentados referem-se apenas aos problemas de transferência entre Terra e Vênus e entre Terra e Marte, i.e., referem-se apenas às razões entre os raios das órbitas, ρ , iguais a 0,7270 e 1,5236, respectivamente. Neste apêndice são apresentados resultados associados a valores intermediários de ρ , para cada sistema propulsivo. Além disto, são apresentadas também as evoluções temporais do controle para todas as razões de raios analisadas, no caso do sistema PL.

VII.2 – TRANSFERÊNCIAS A BAIXO EMPUXO E POTÊNCIA LIMITADA

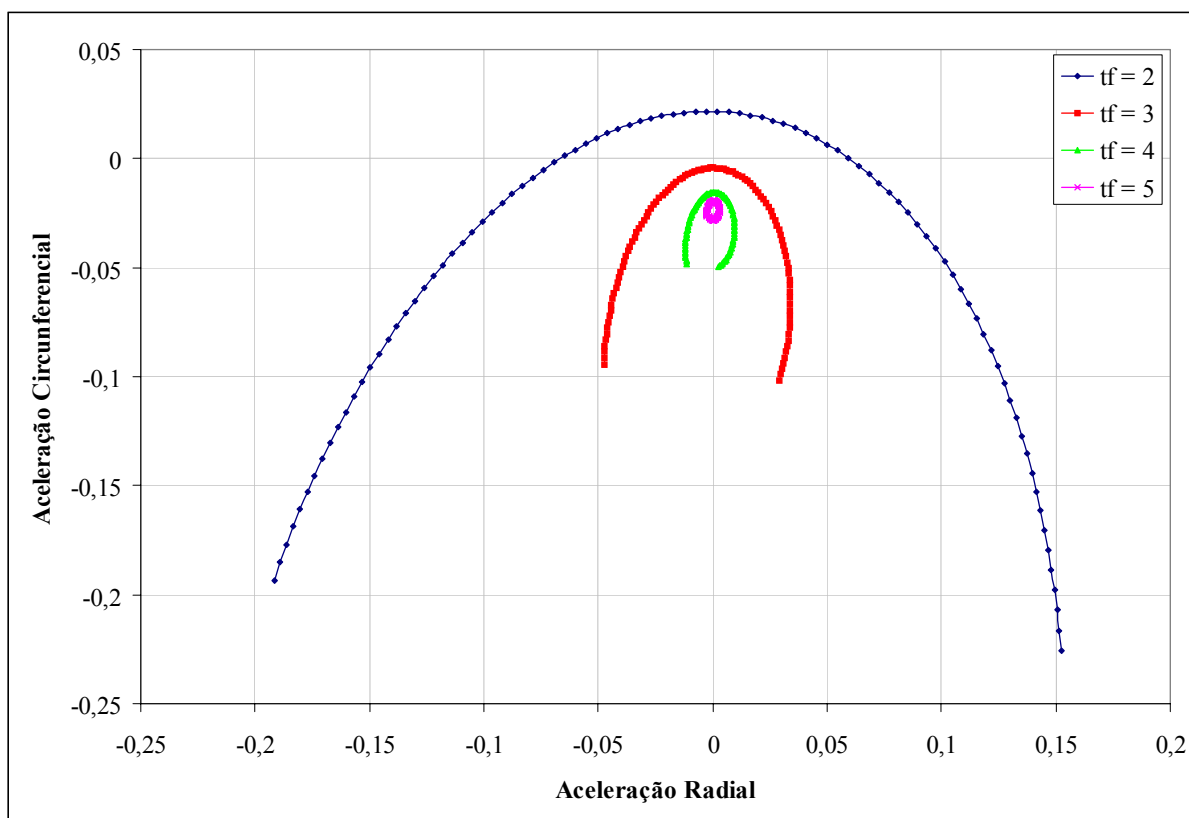


Figura VII.1. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e curta duração.

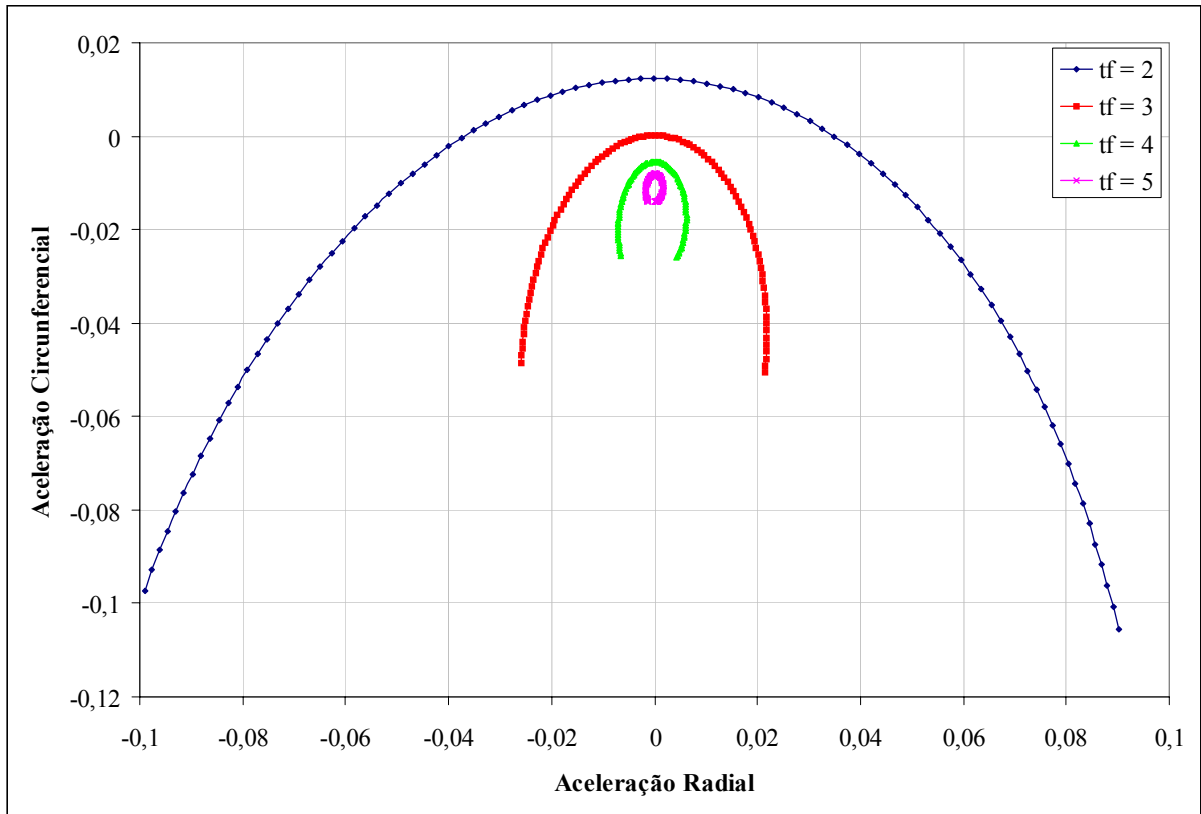


Figura VII.2. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e curta duração.

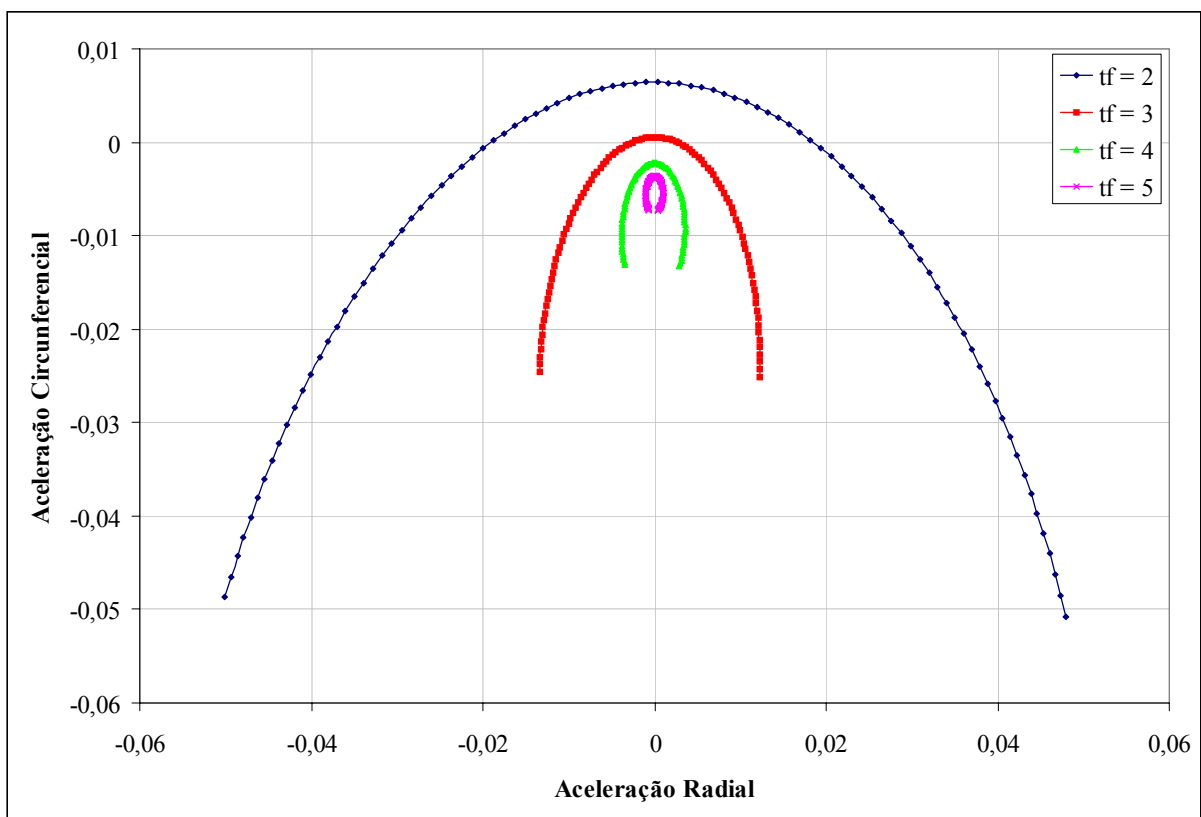


Figura VII.3. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e curta duração.

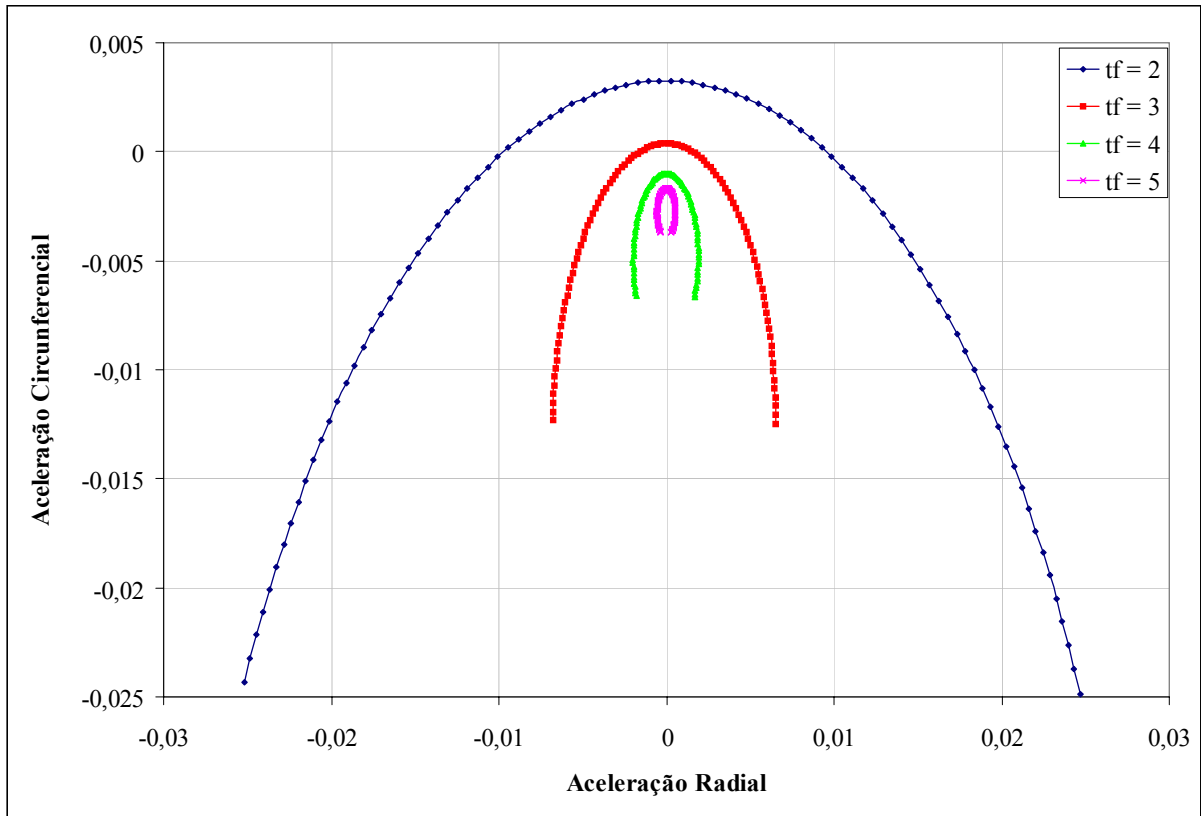


Figura VII.4. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e curta duração.

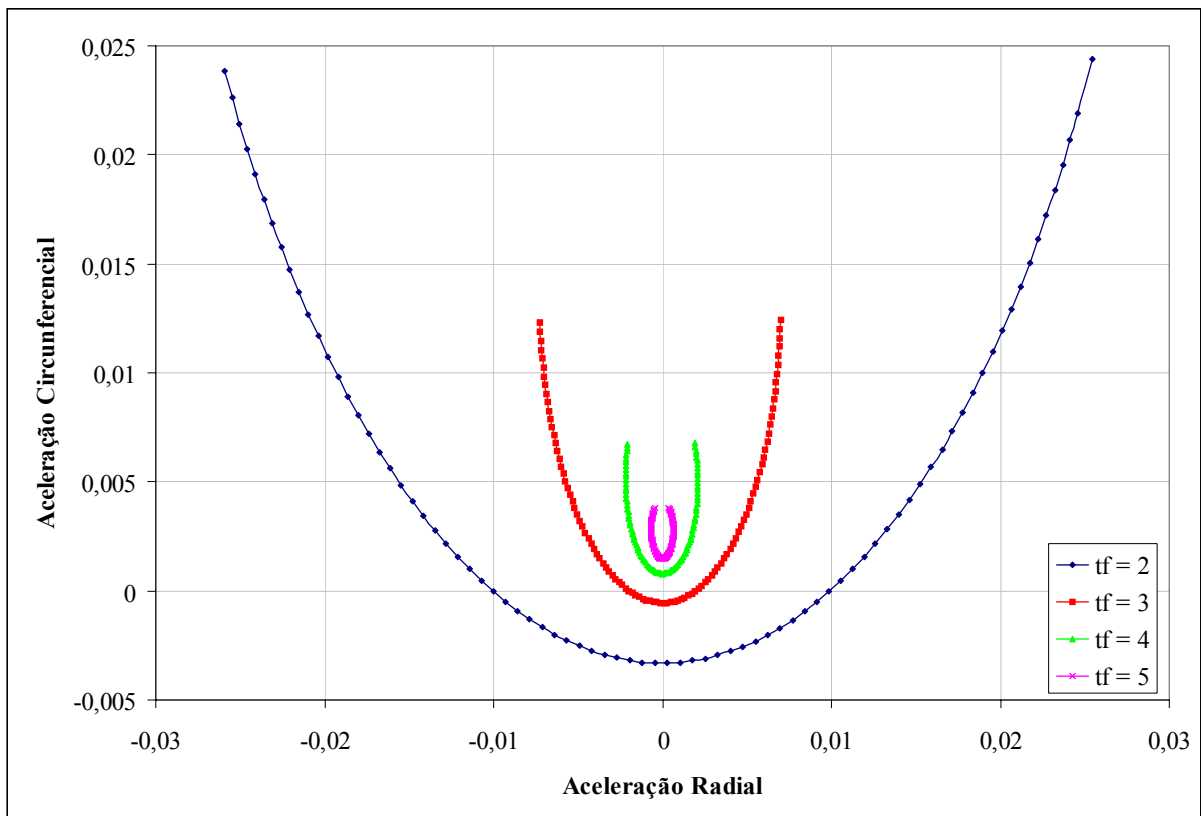


Figura VII.5. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e curta duração.

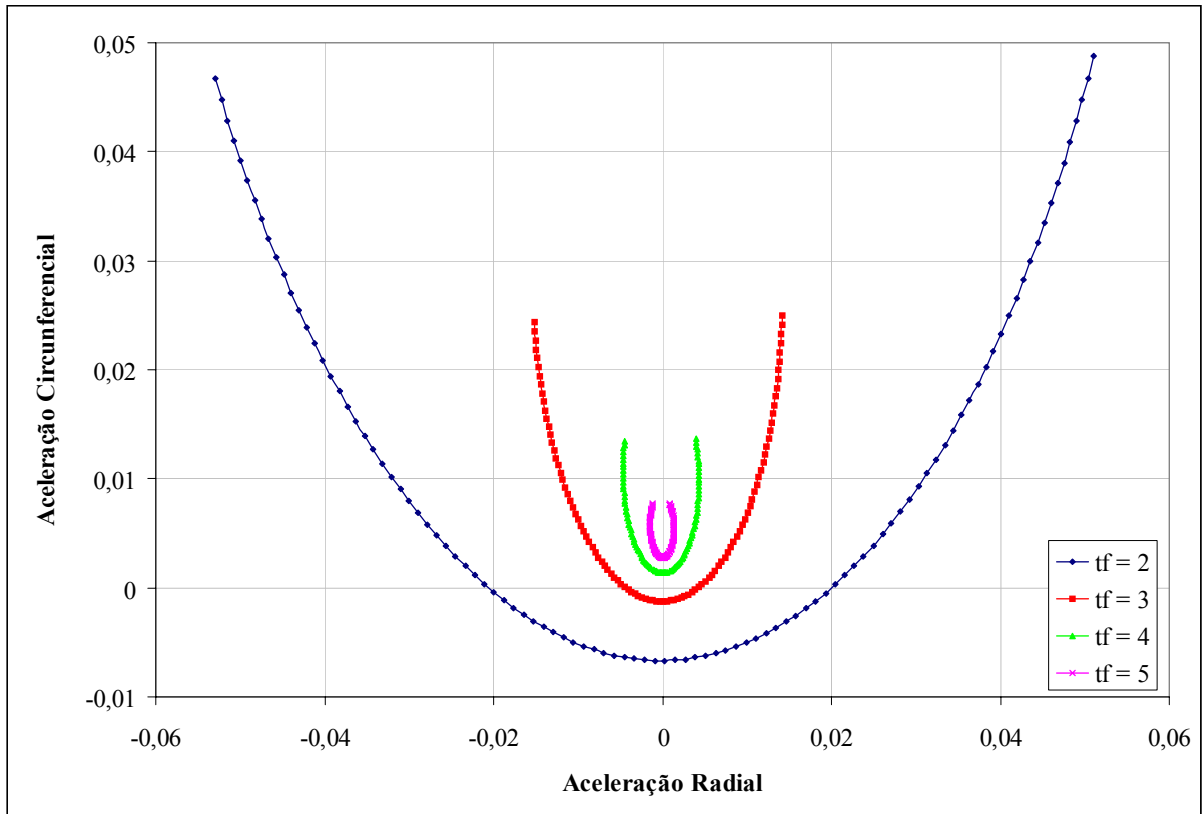


Figura VII.6. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e curta duração.

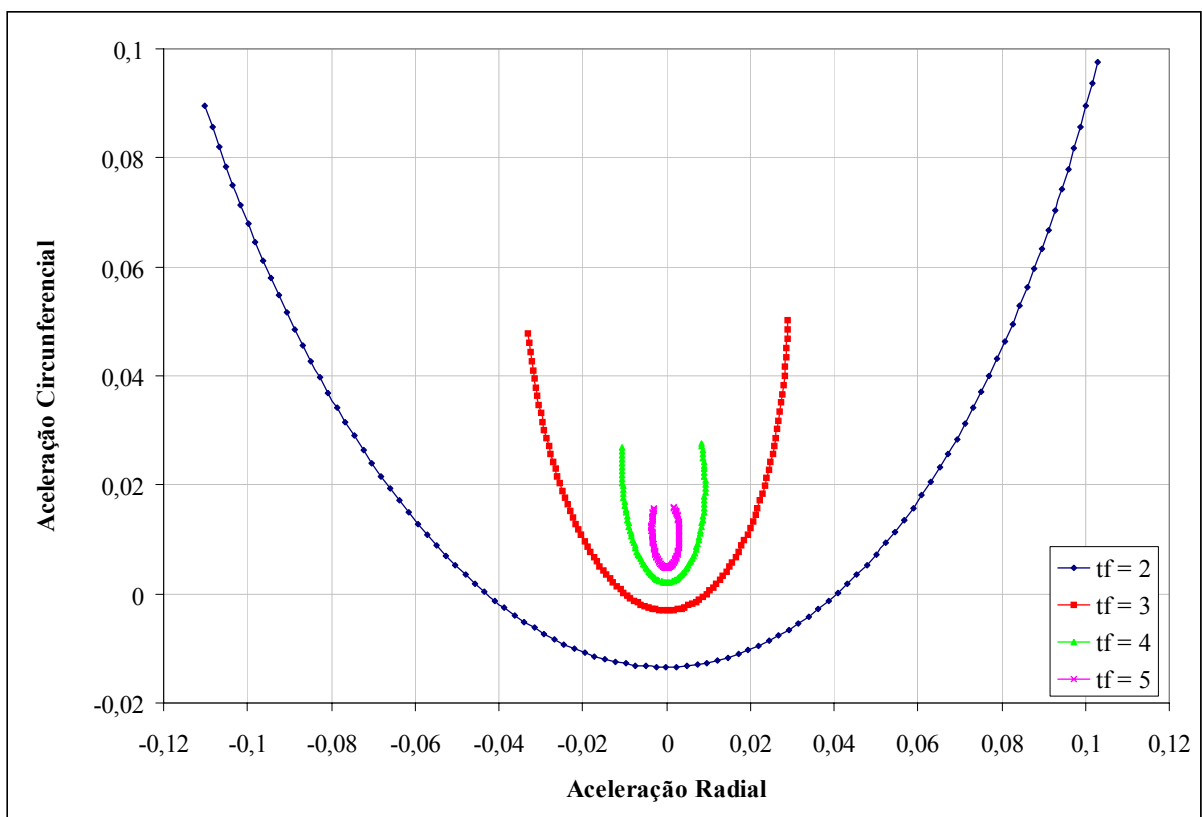


Figura VII.7. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e curta duração.

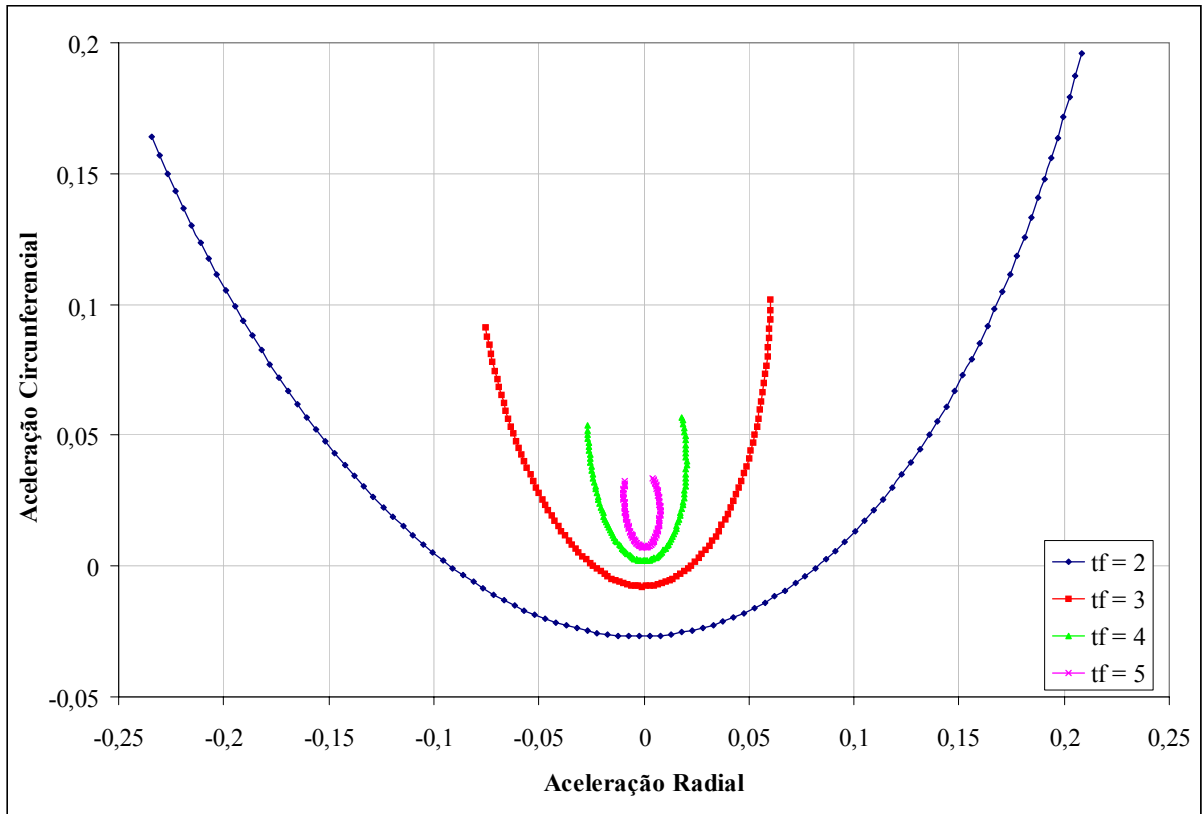


Figura VII.8. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e curta duração.

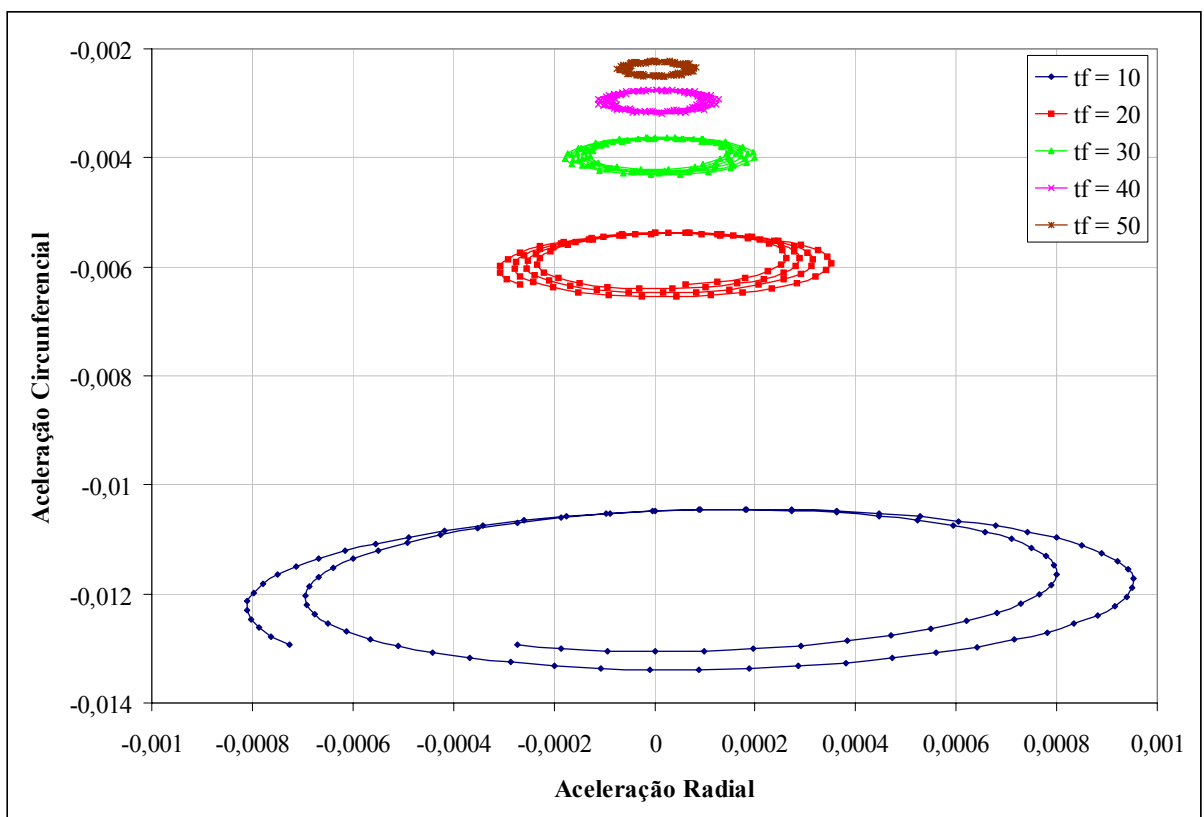


Figura VII.9. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e longa duração.

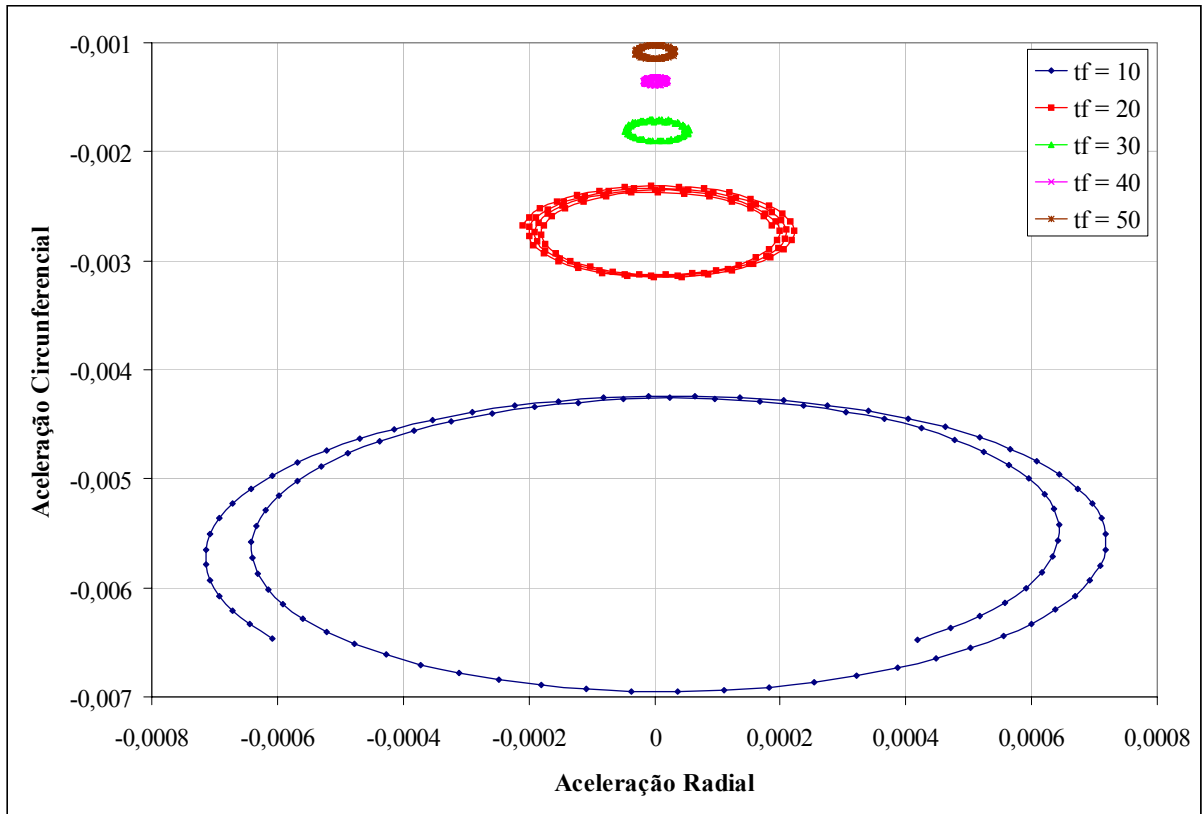


Figura VII.10. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e longa duração.

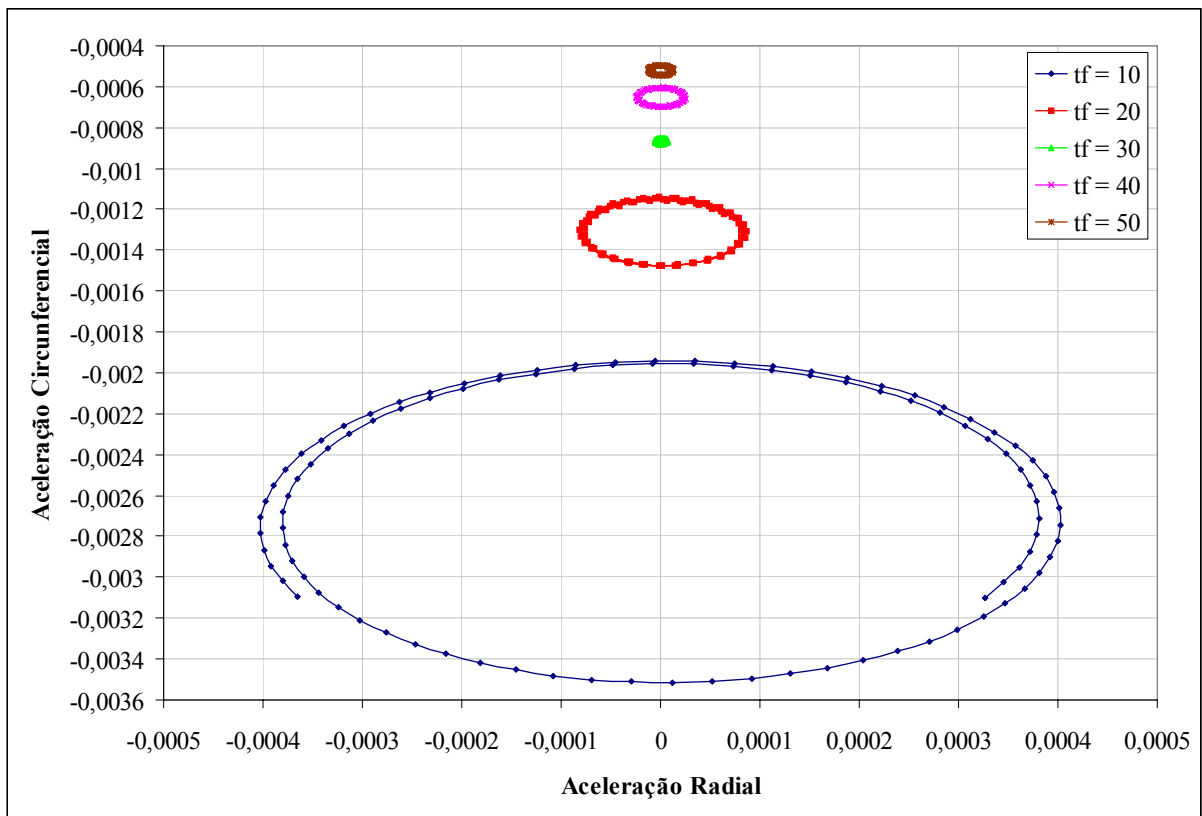


Figura VII.11. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e longa duração.

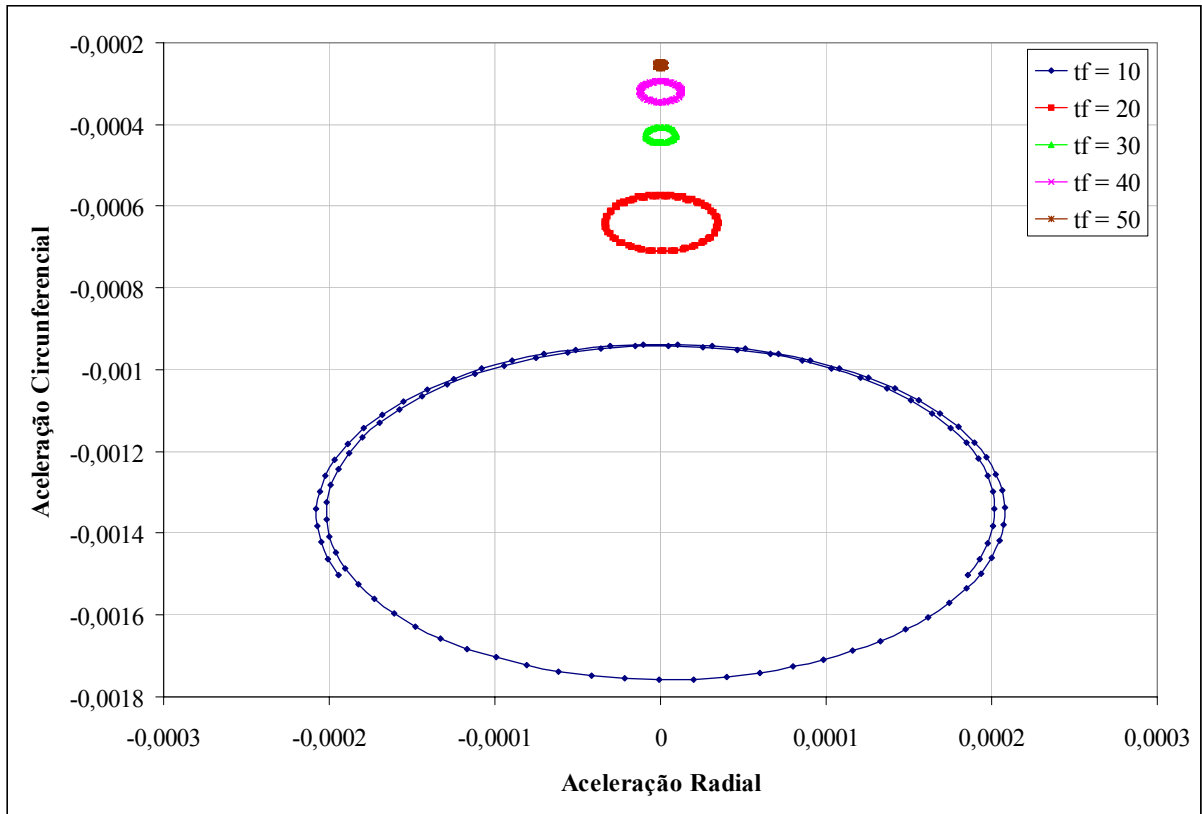


Figura VII.12. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e longa duração.

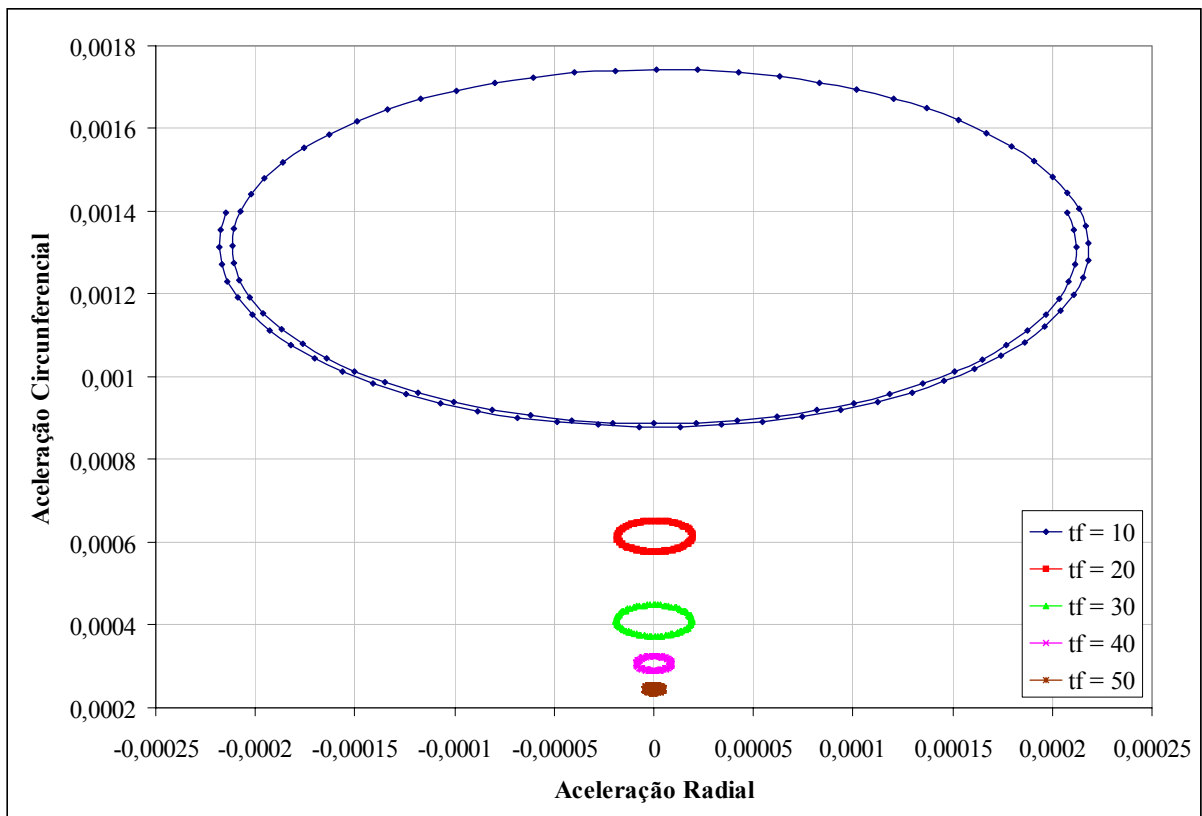


Figura VII.13. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e longa duração.

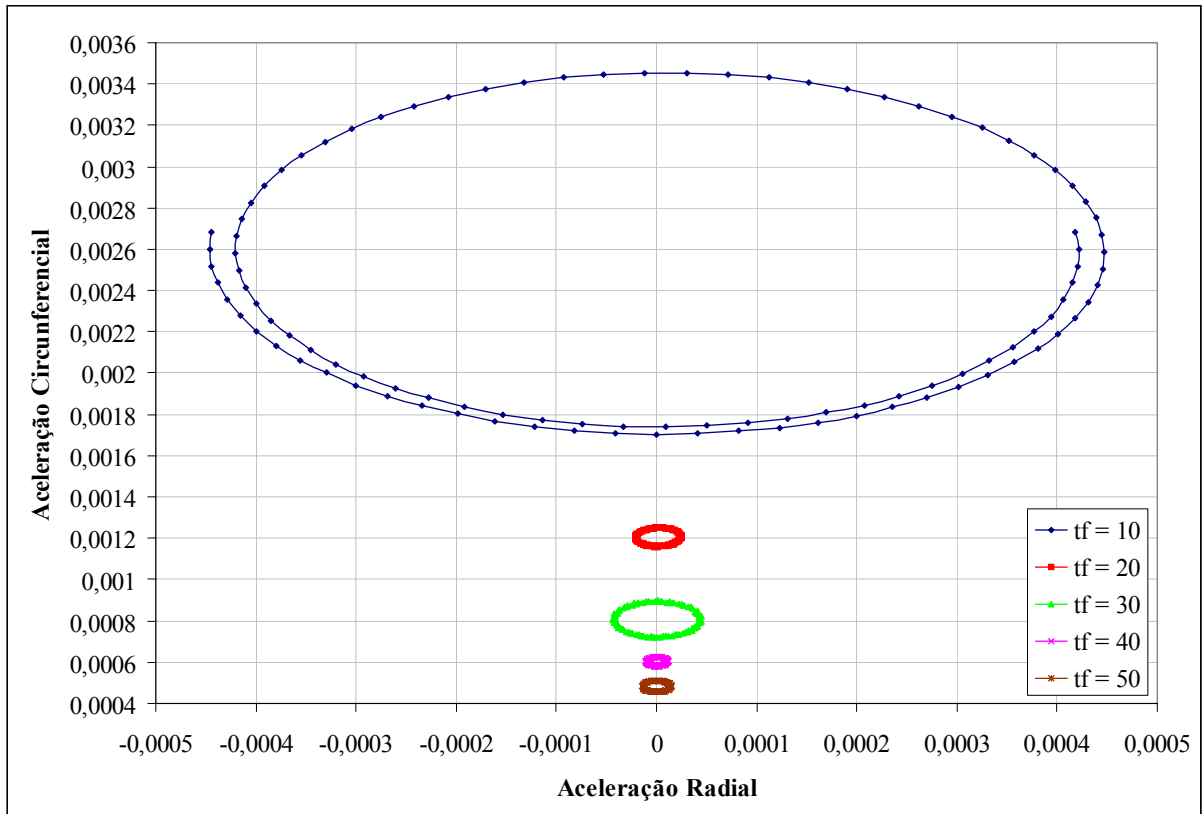


Figura VII.14. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e longa duração.

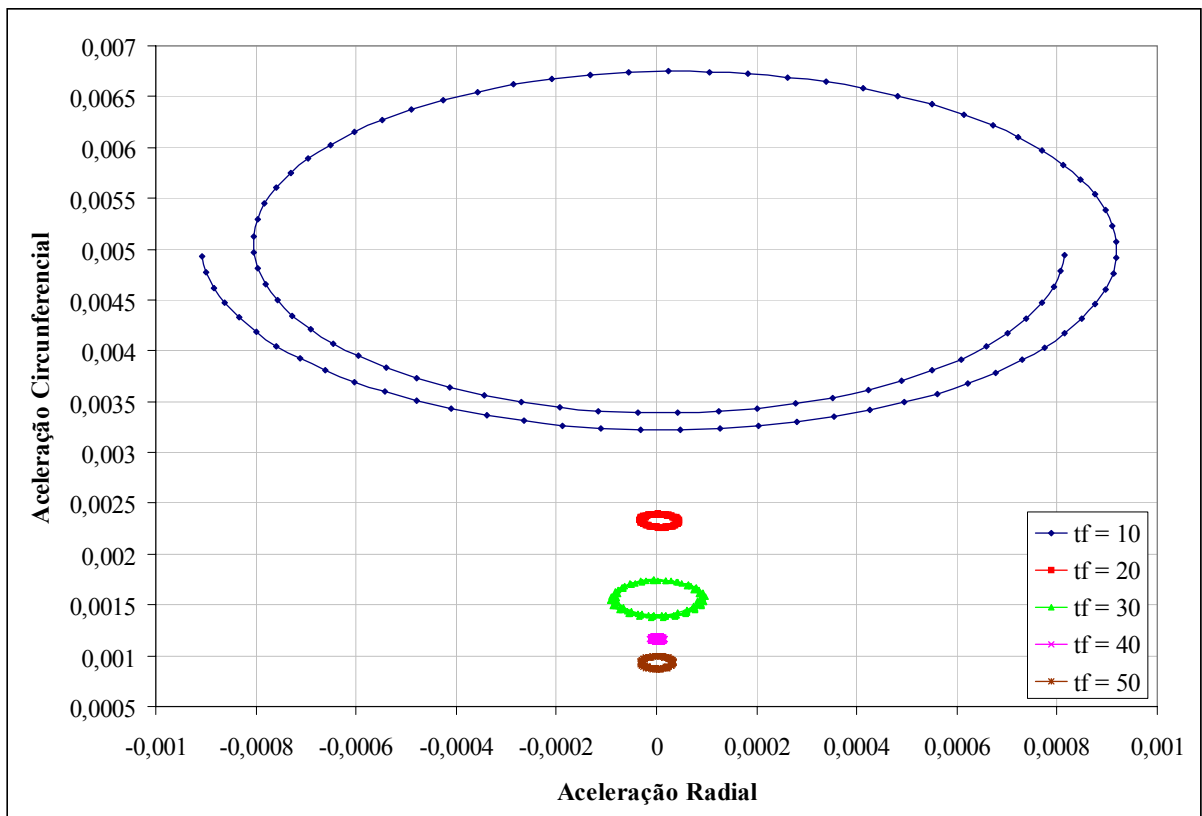


Figura VII.15. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e longa duração.

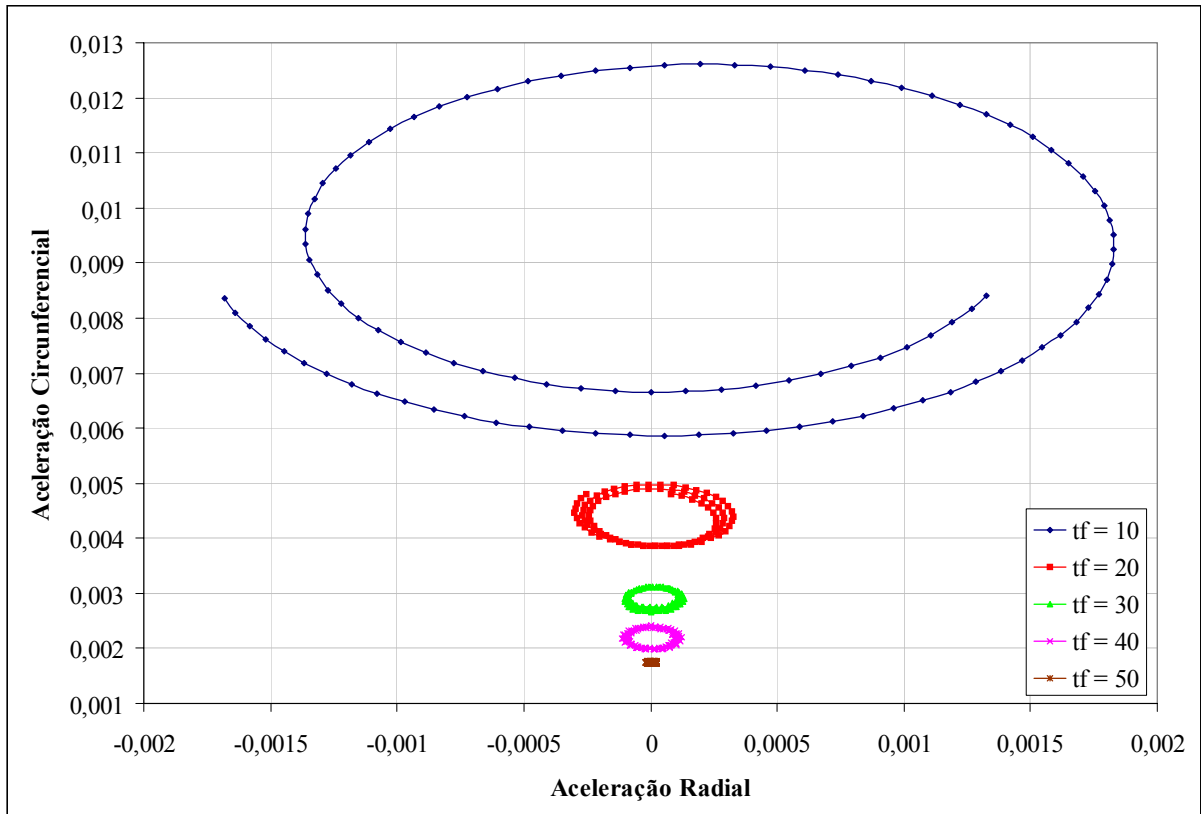


Figura VII.16. Polar de aceleração para o problema de transferência – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e longa duração.

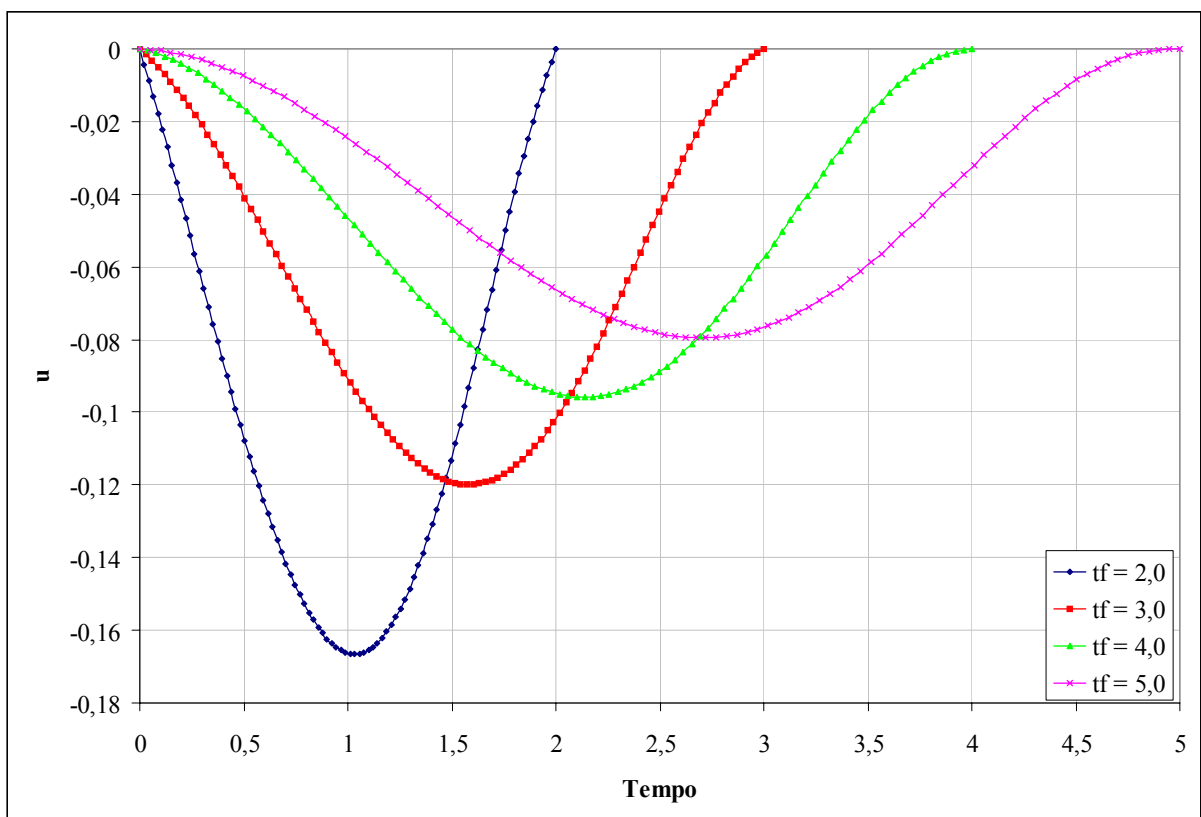


Figura VII.17. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e curta duração.

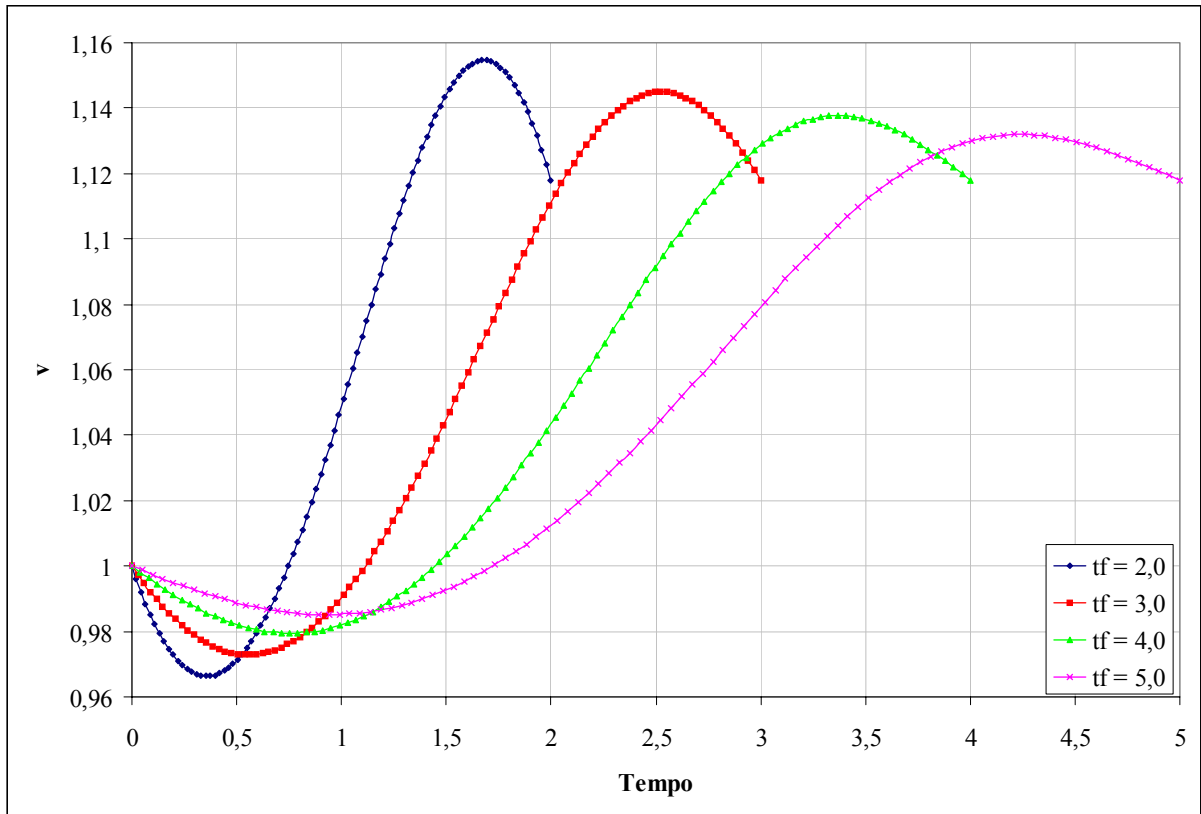


Figura VII.18. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e curta duração.

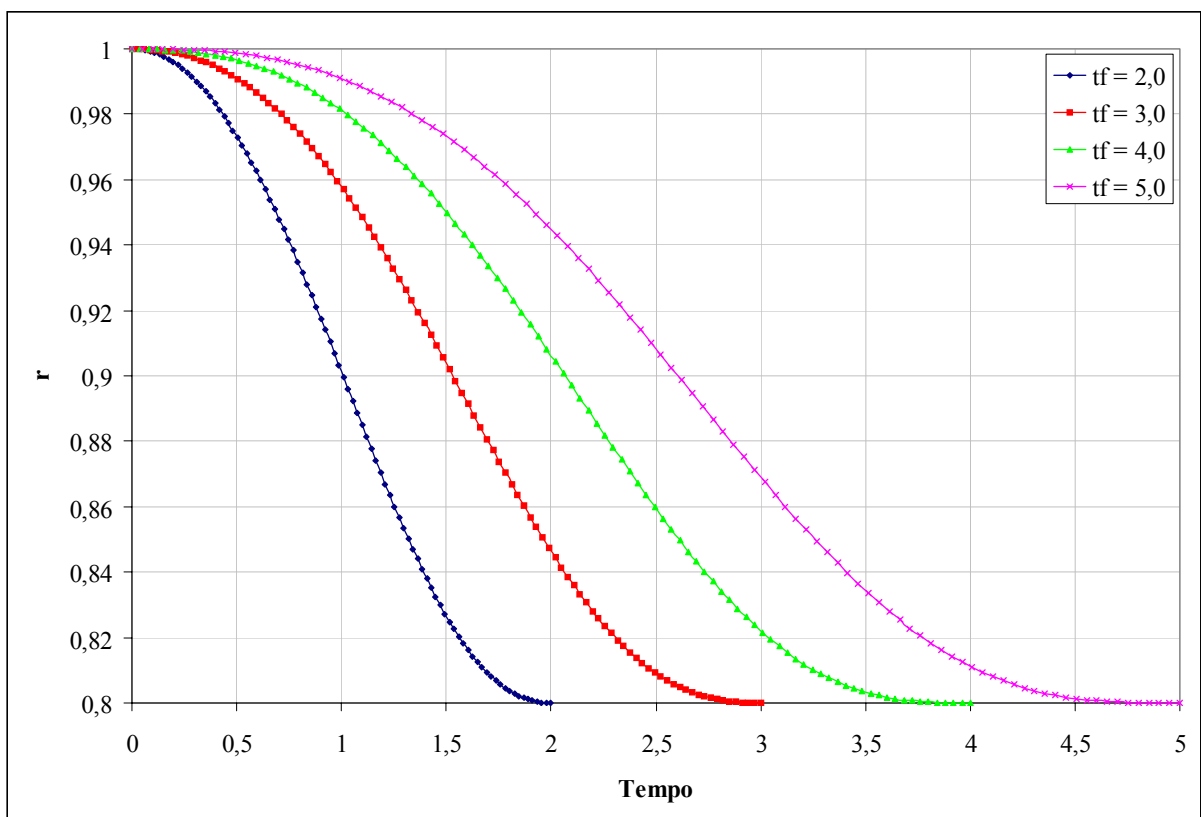


Figura VII.19. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e curta duração.

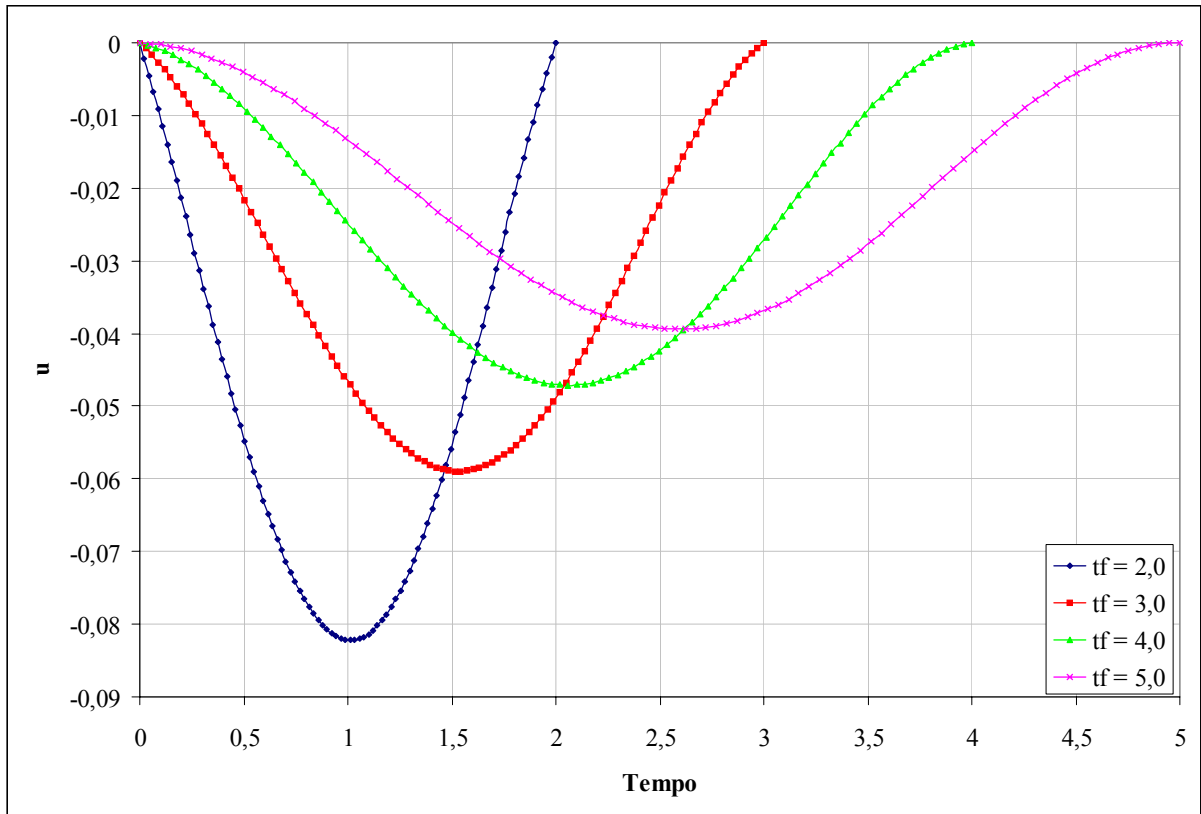


Figura VII.20. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e curta duração.

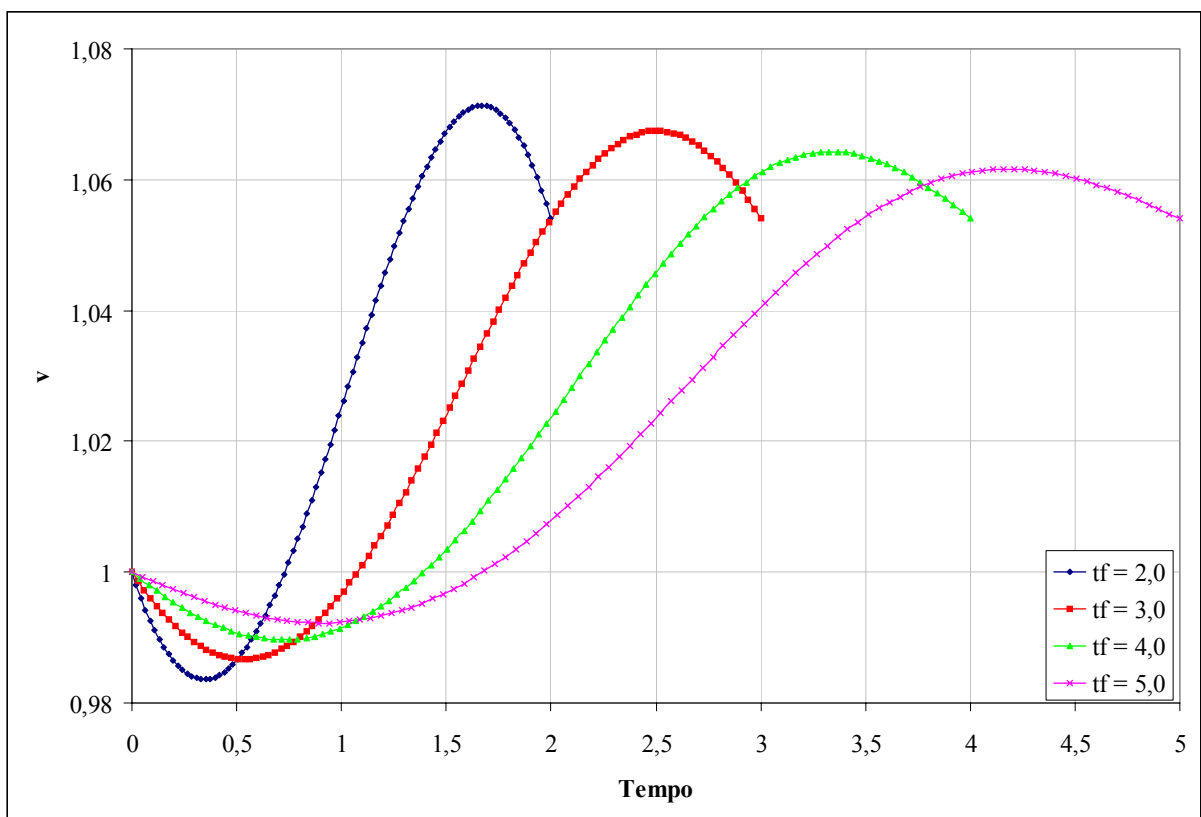


Figura VII.21. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e curta duração.

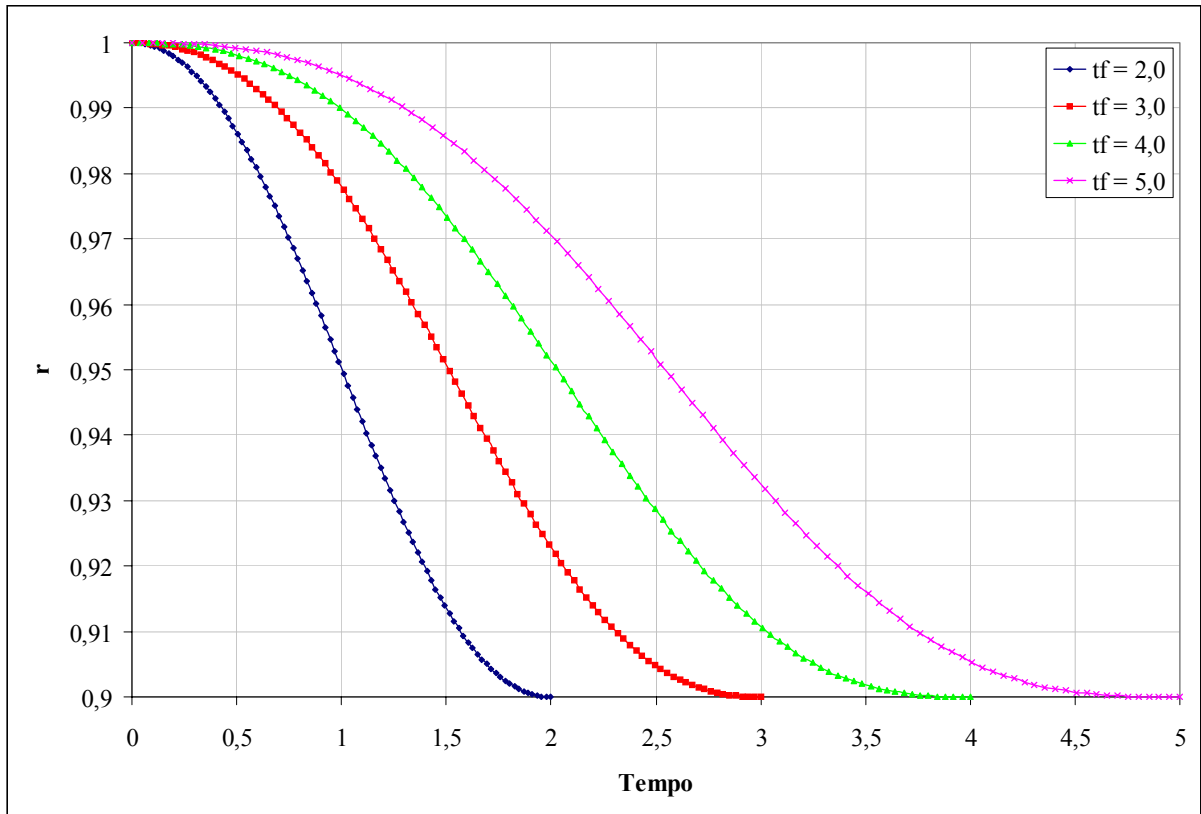


Figura VII.22. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e curta duração.

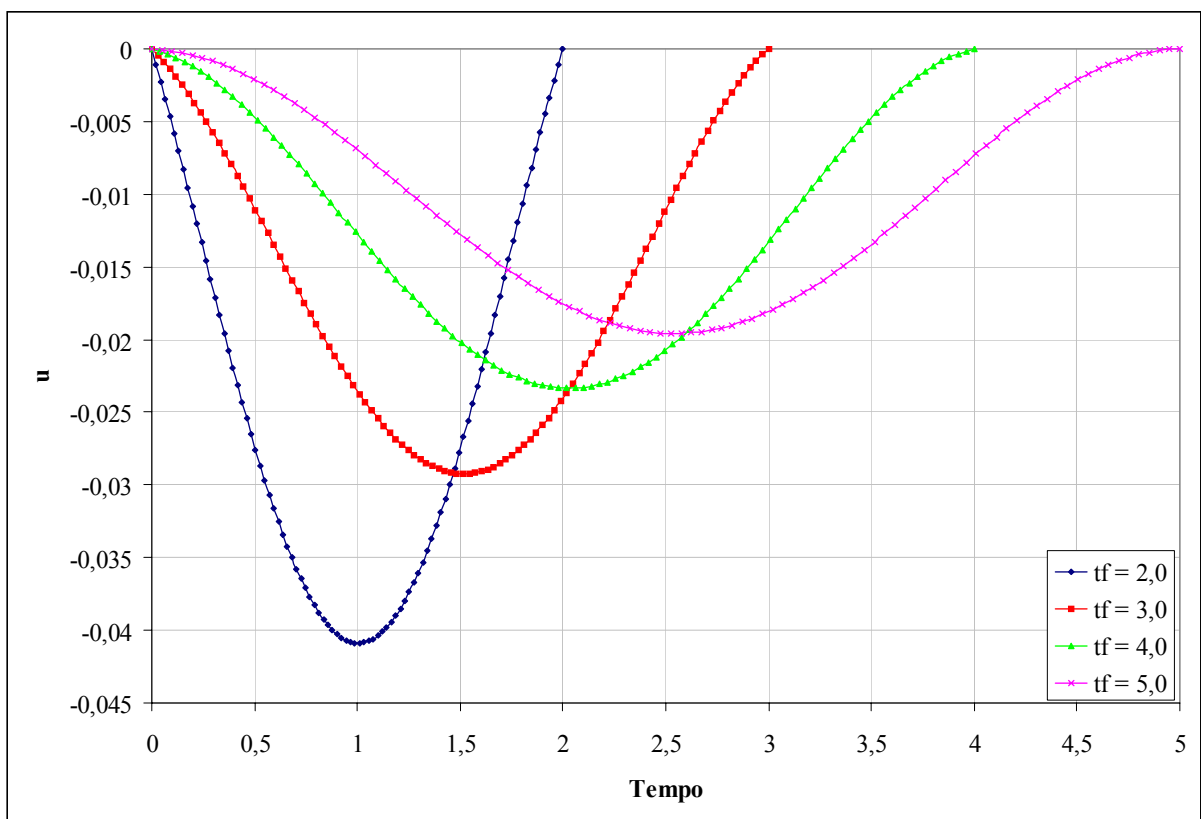


Figura VII.23. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e curta duração.

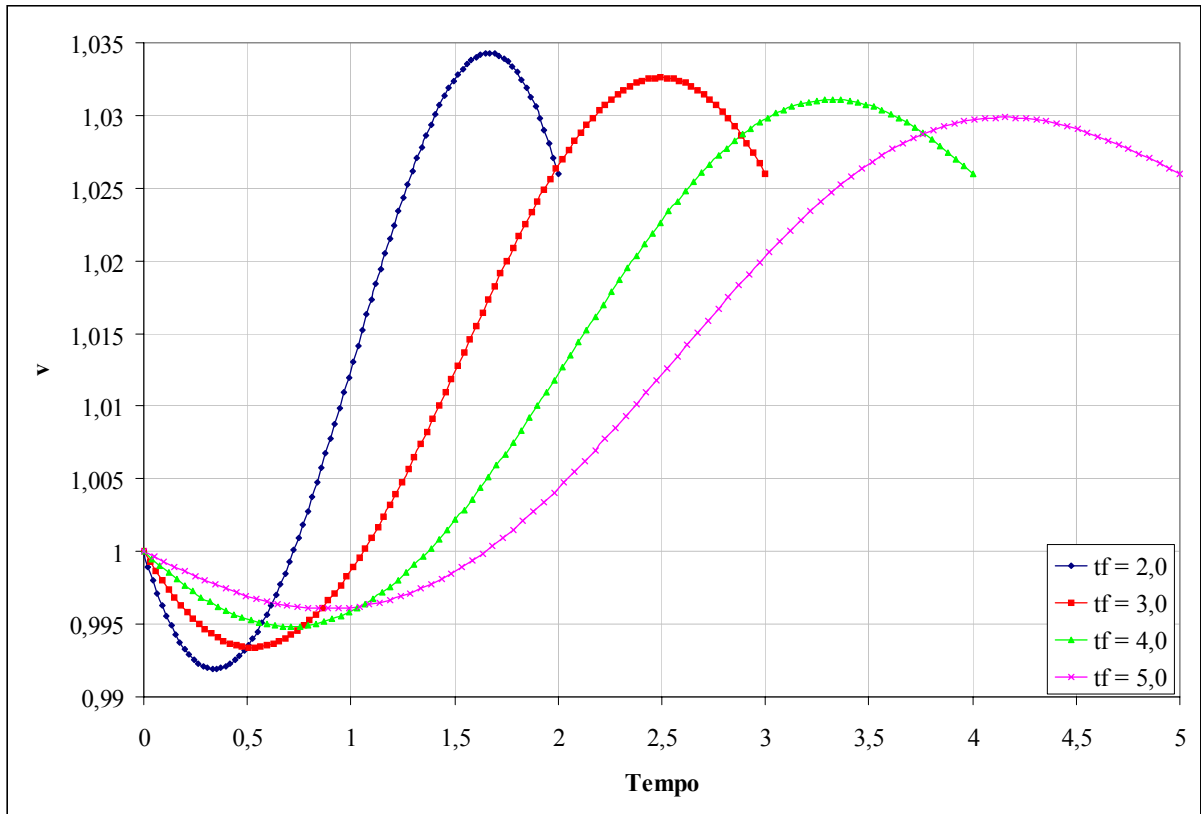


Figura VII.24. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e curta duração.

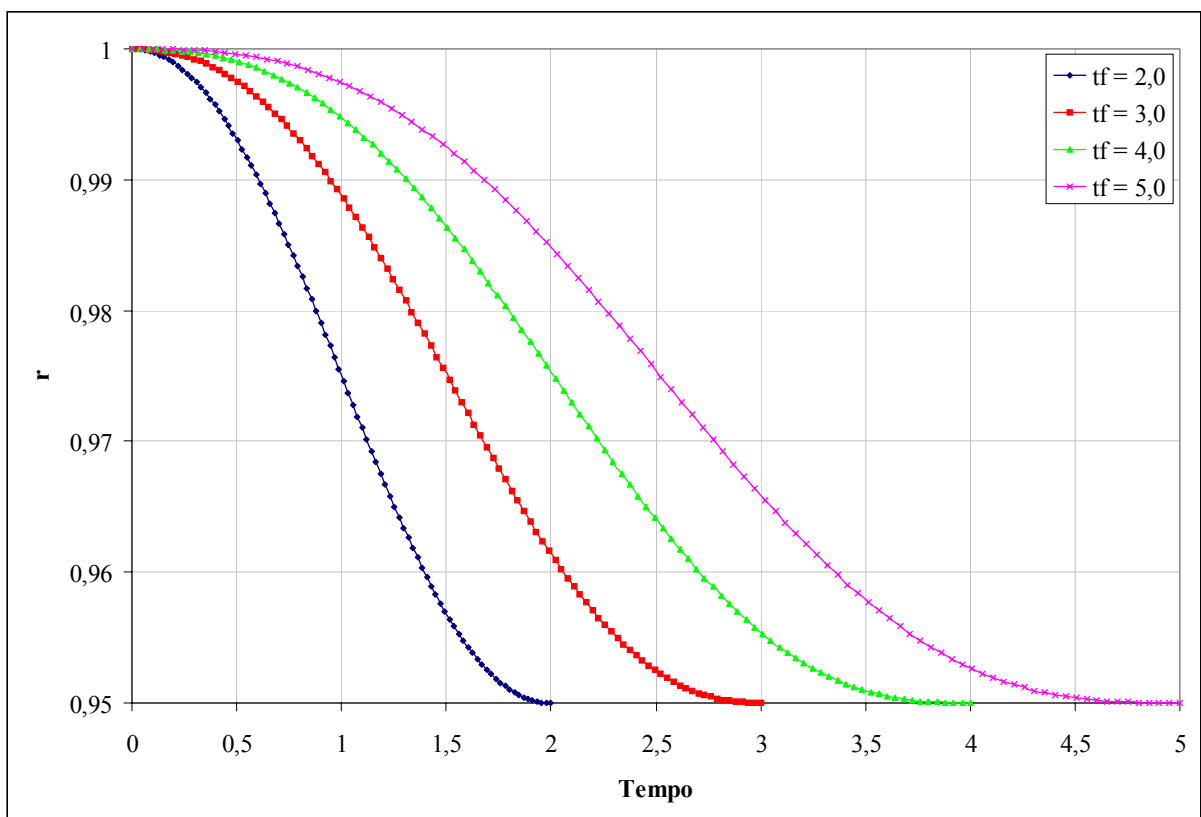


Figura VII.25. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e curta duração.

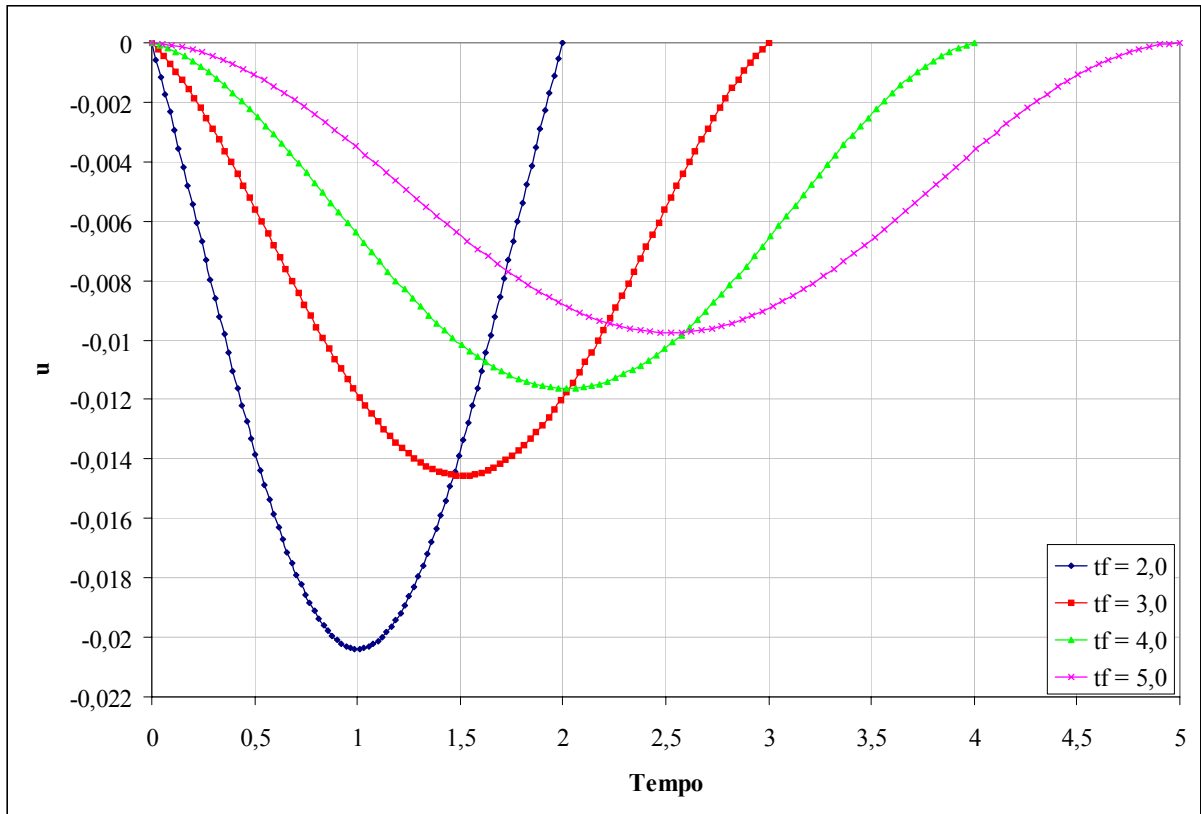


Figura VII.26. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e curta duração.

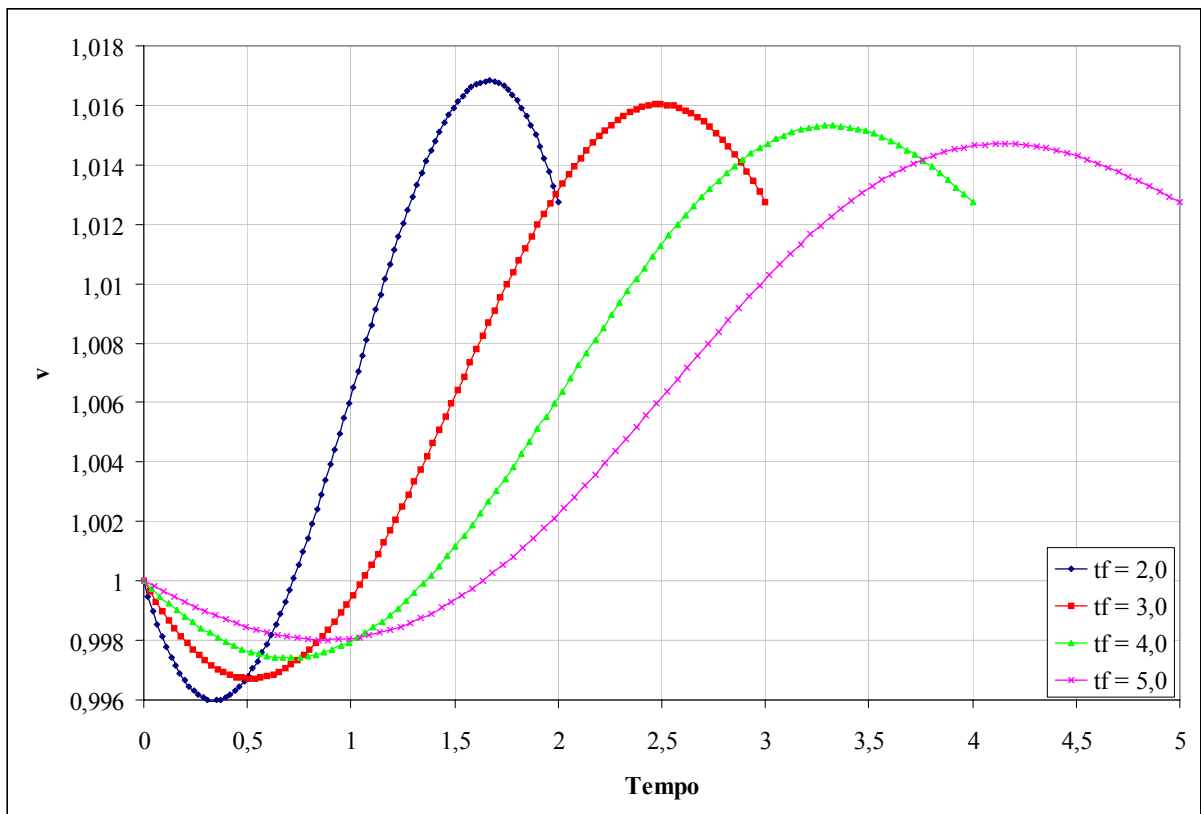


Figura VII.27. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e curta duração.

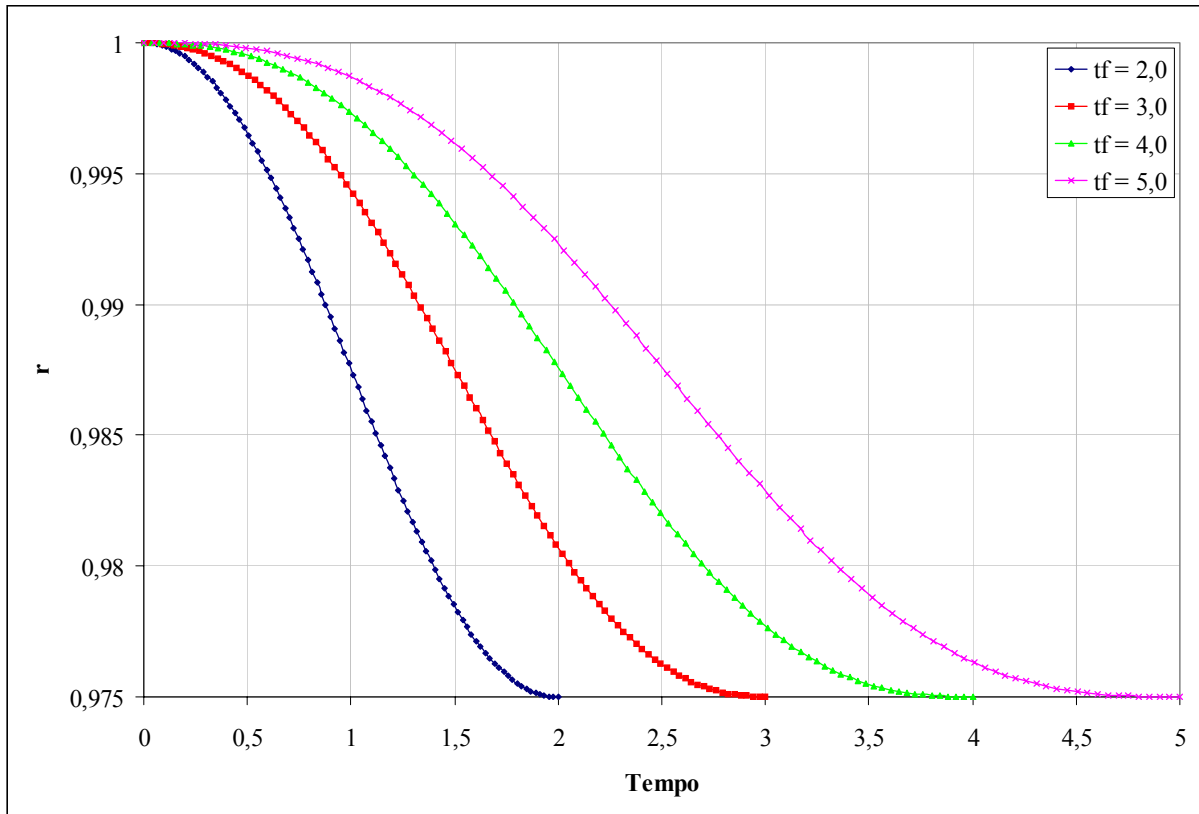


Figura VII.28. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e curta duração.

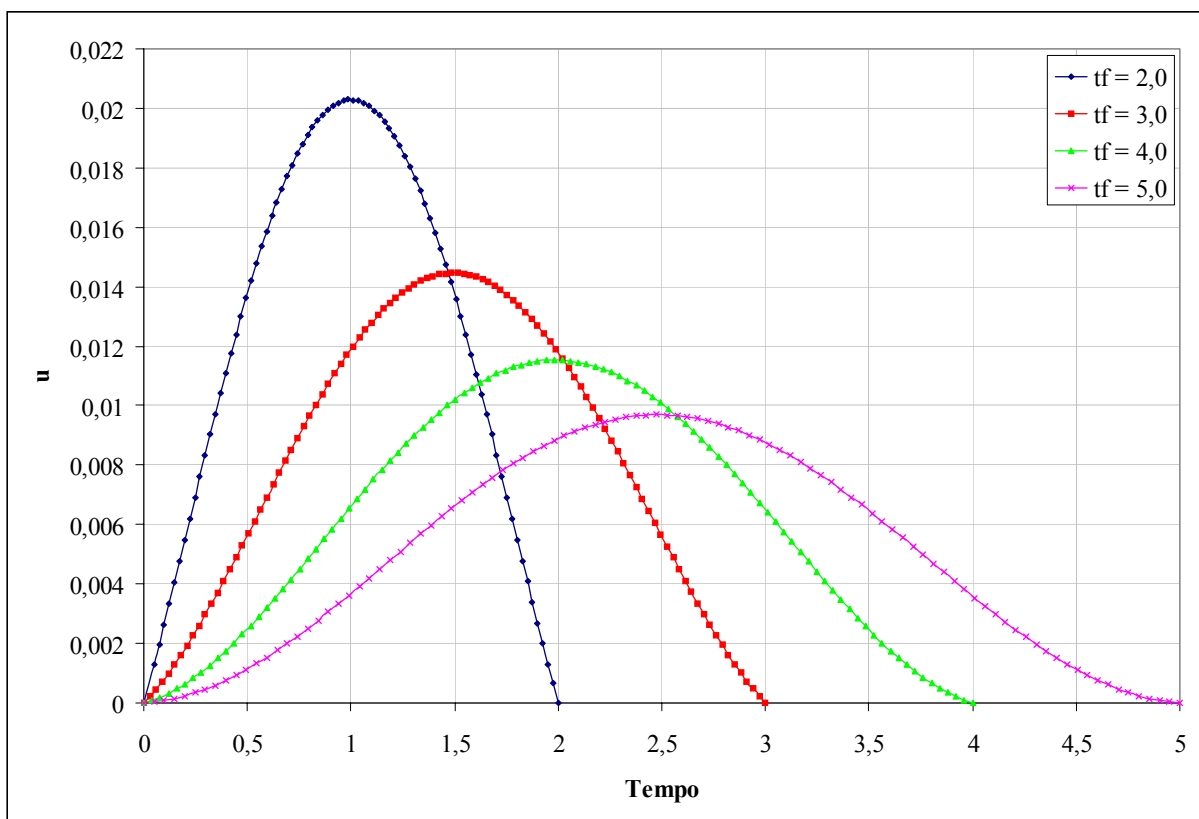


Figura VII.29. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e curta duração.

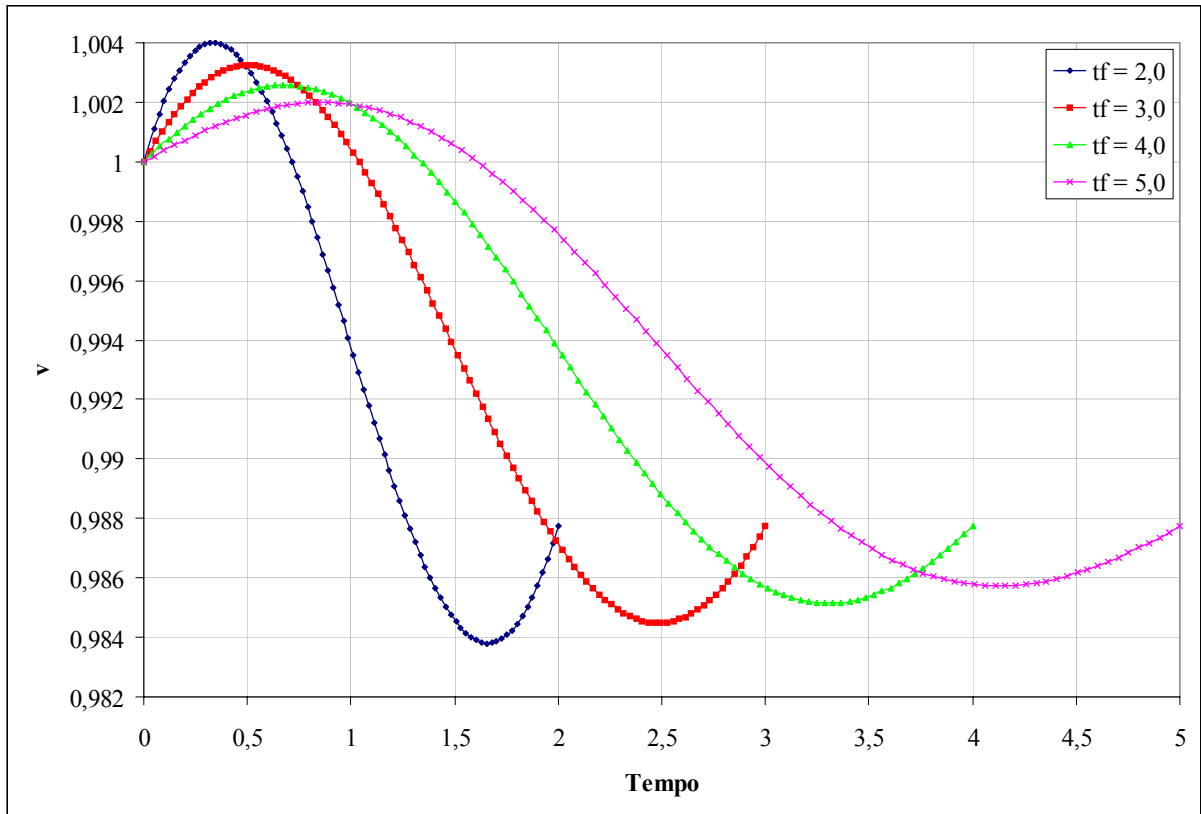


Figura VII.30. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e curta duração.

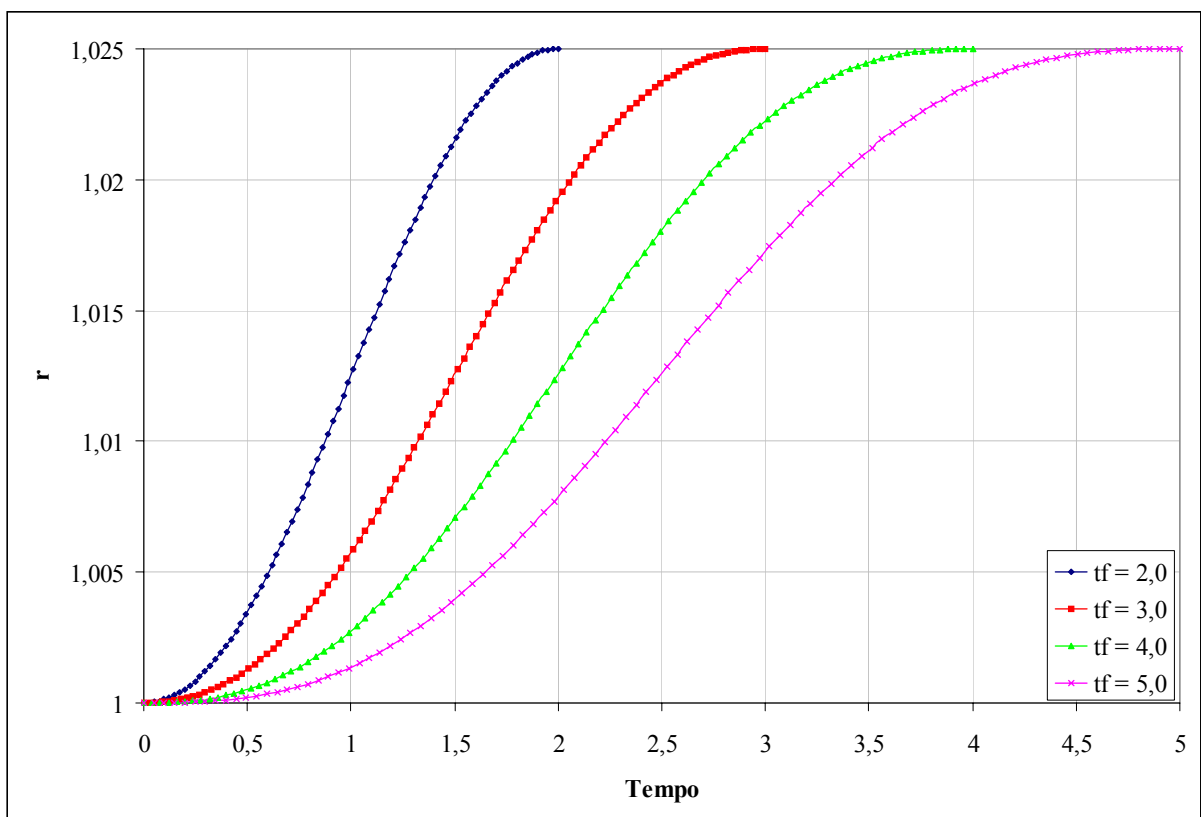


Figura VII.31. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e curta duração.

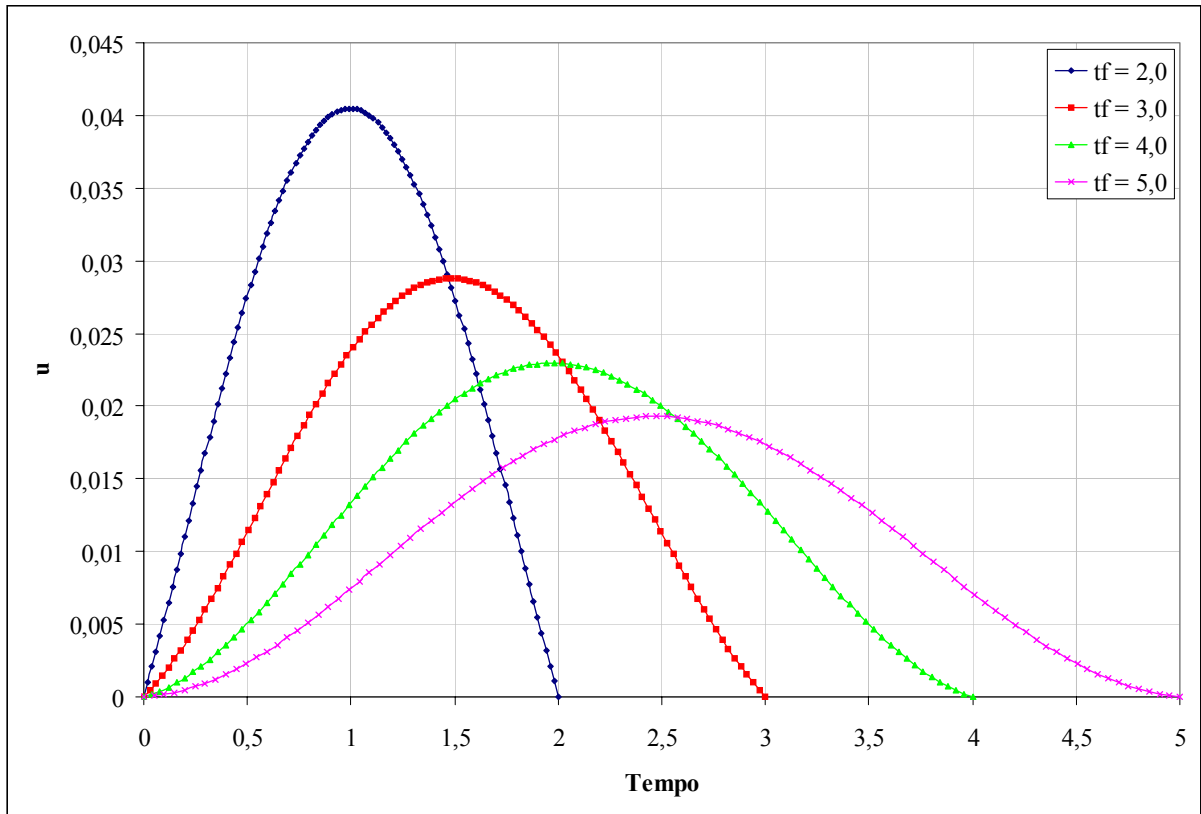


Figura VII.32. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e curta duração.

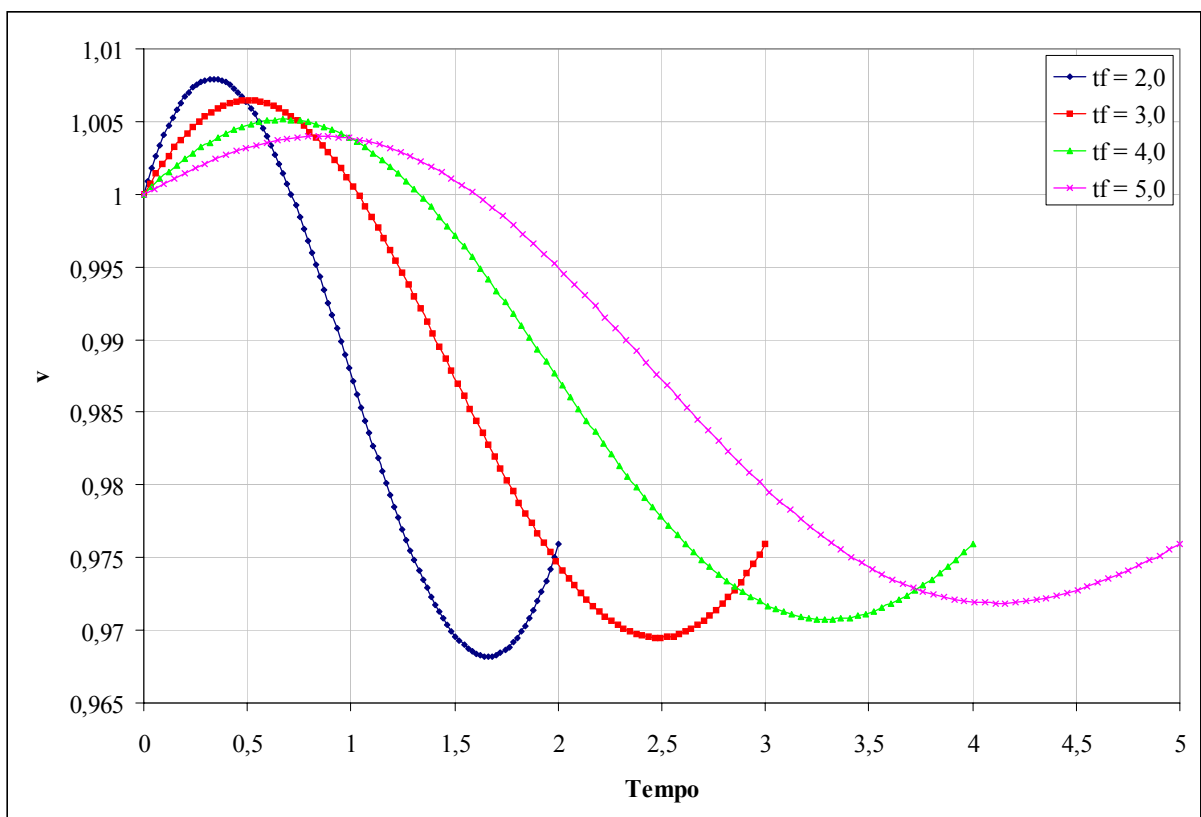


Figura VII.33. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e curta duração.

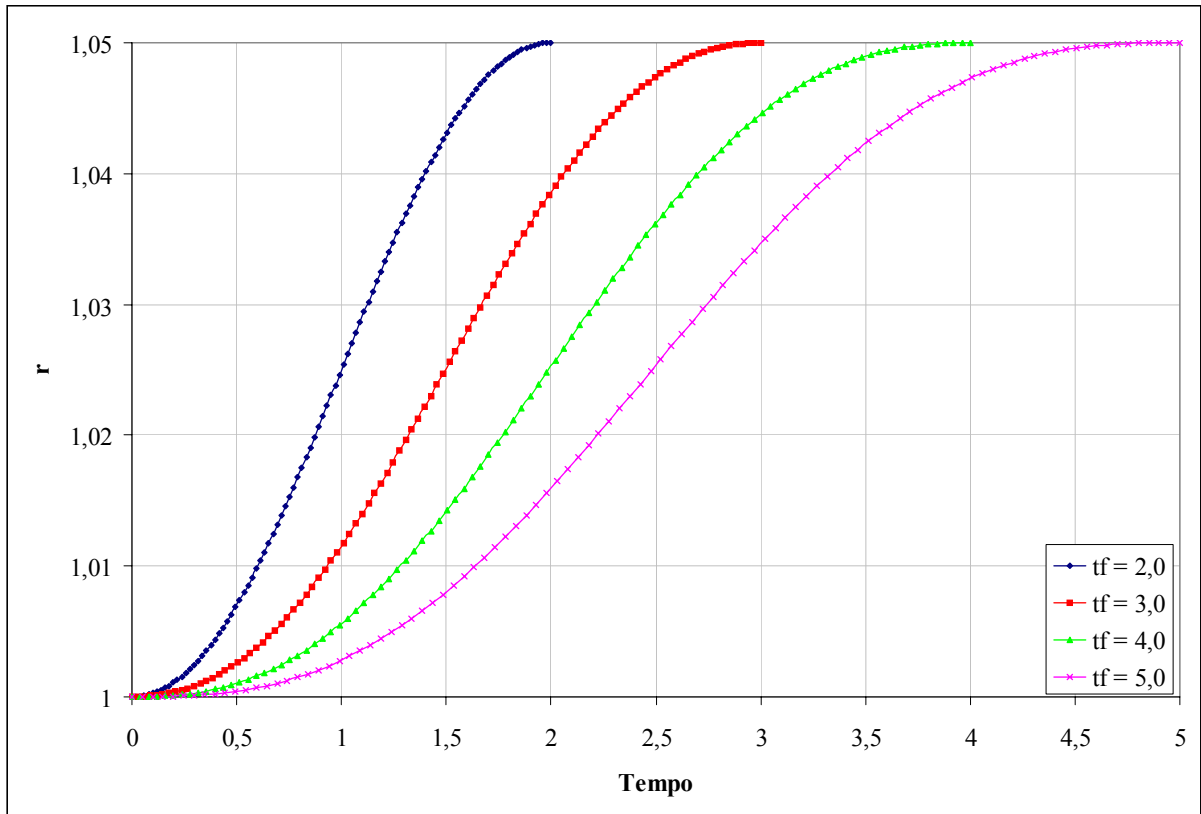


Figura VII.34. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e curta duração.

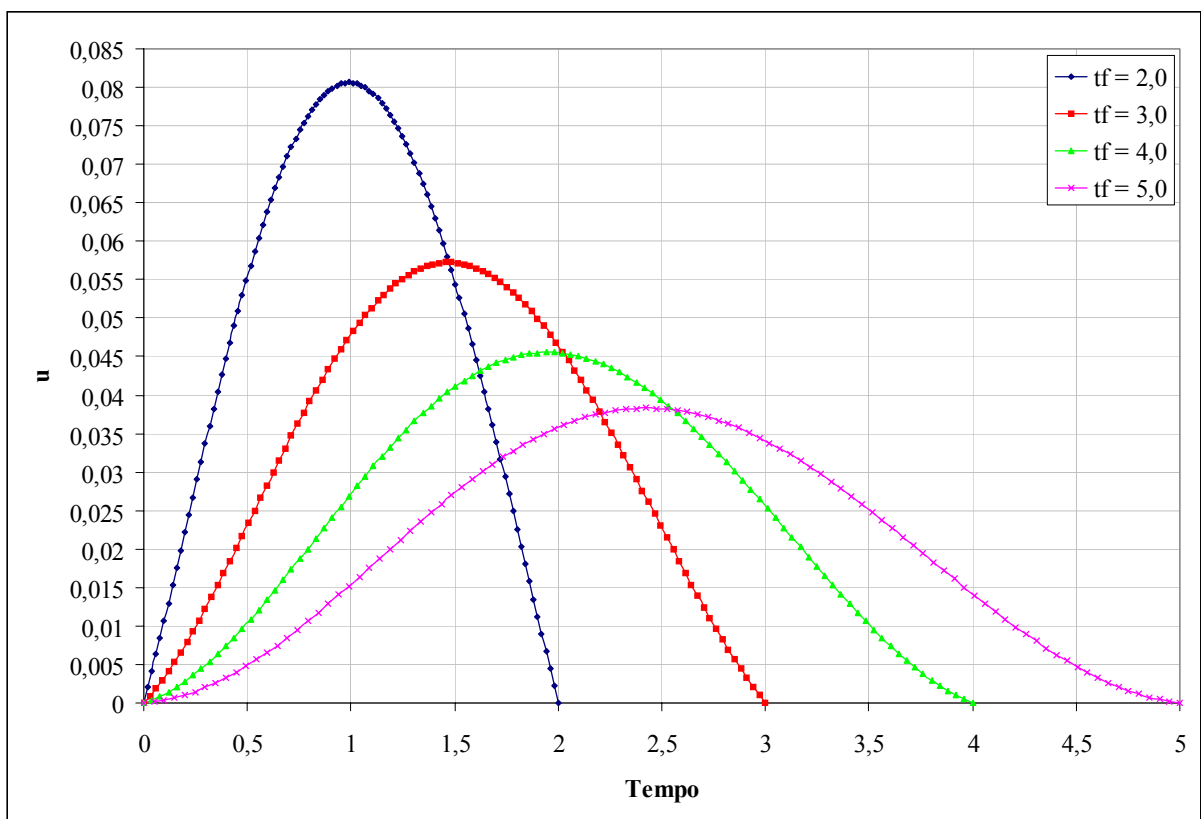


Figura VII.35. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e curta duração.

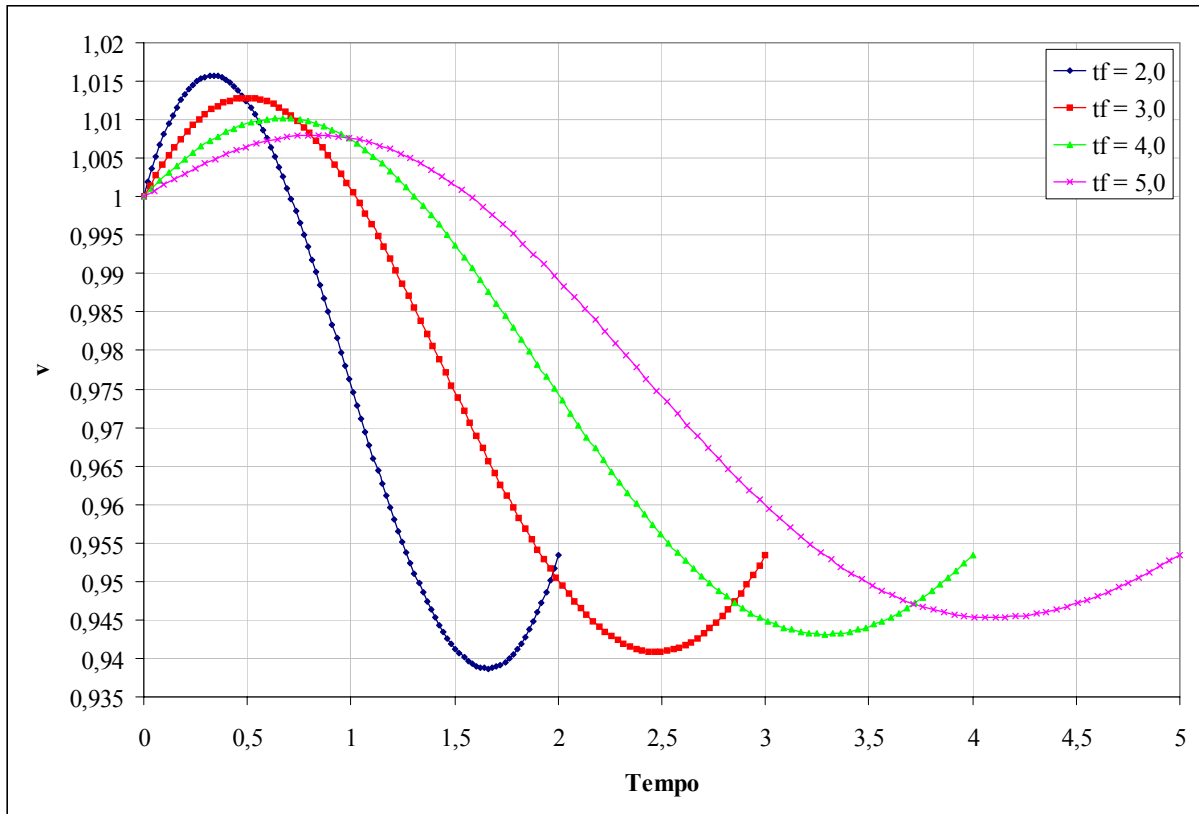


Figura VII.36. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e curta duração.

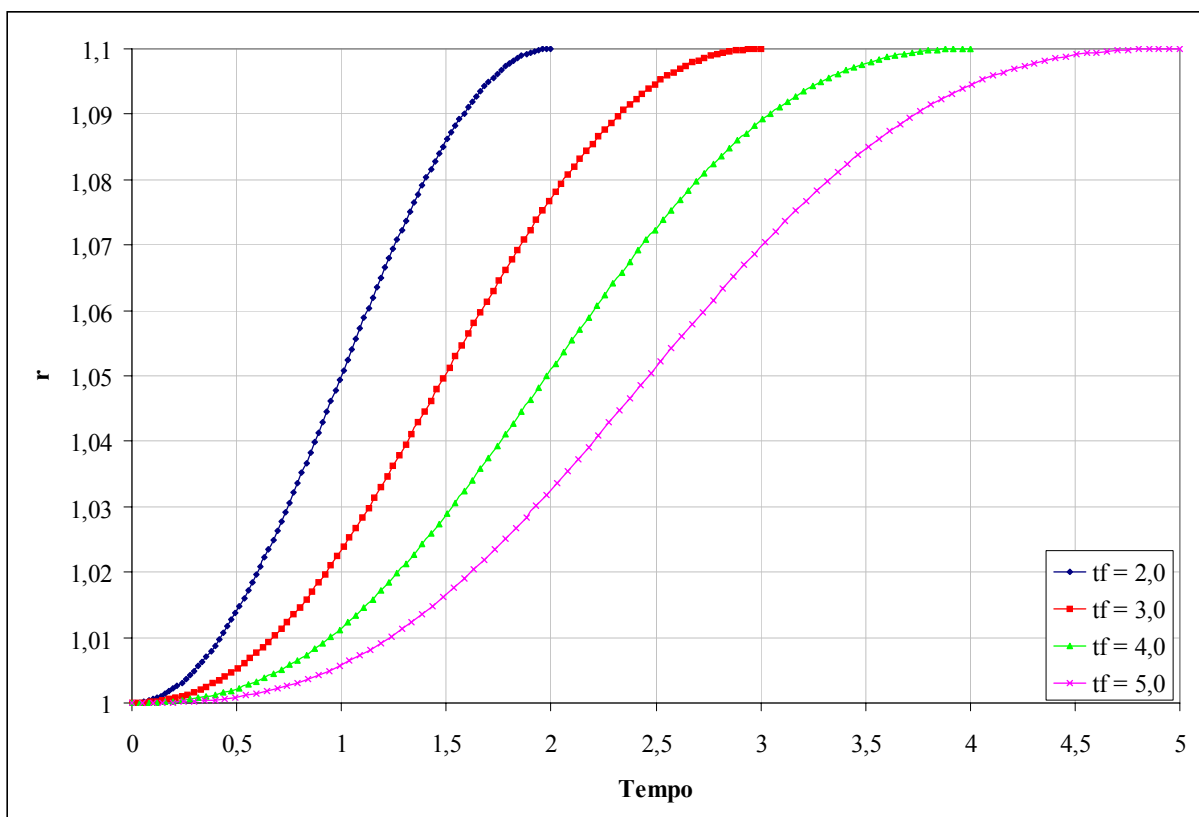


Figura VII.37. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e curta duração.

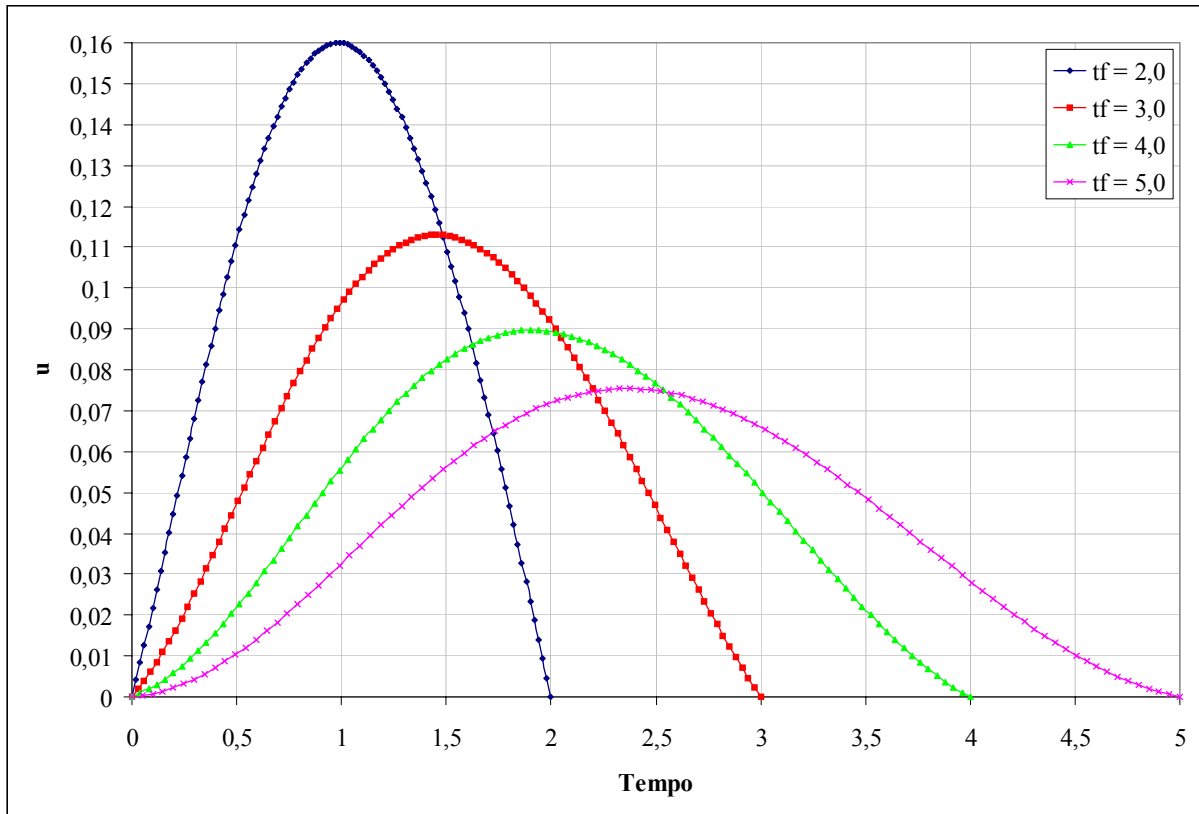


Figura VII.38. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e curta duração.

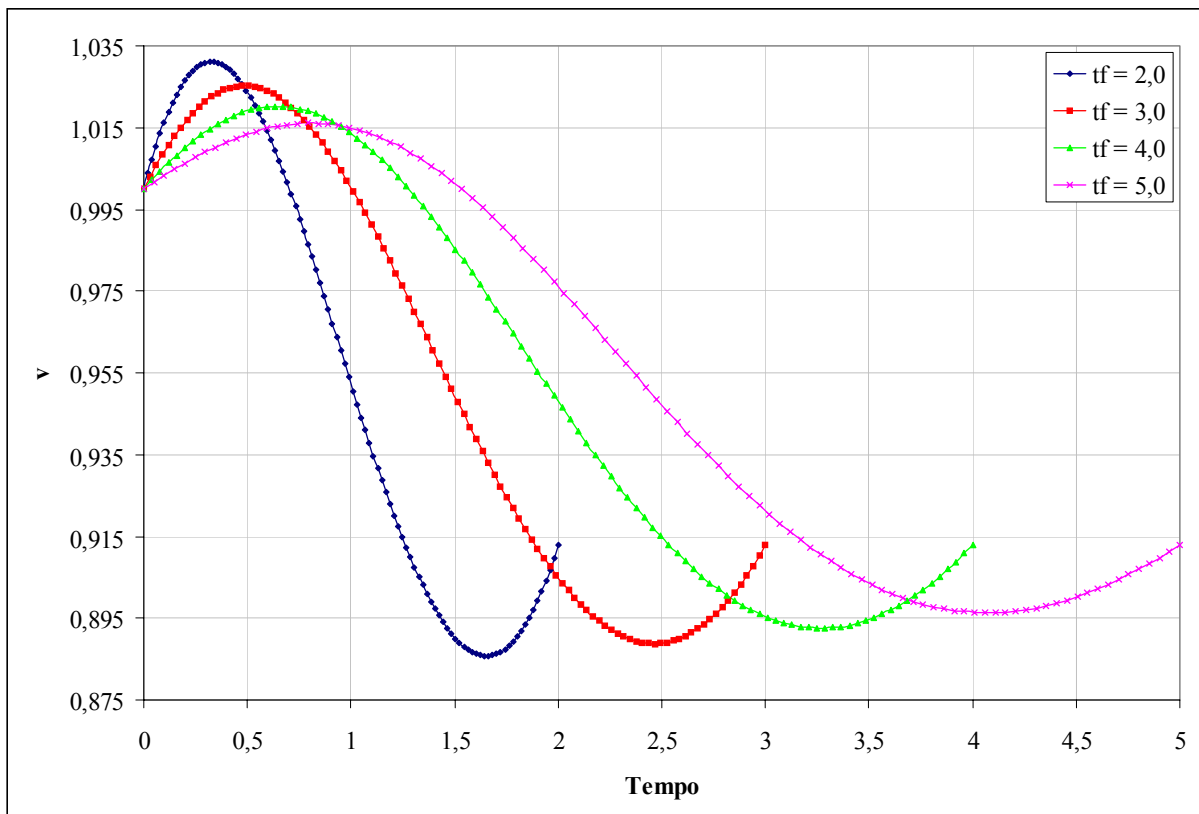


Figura VII.39. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e curta duração.

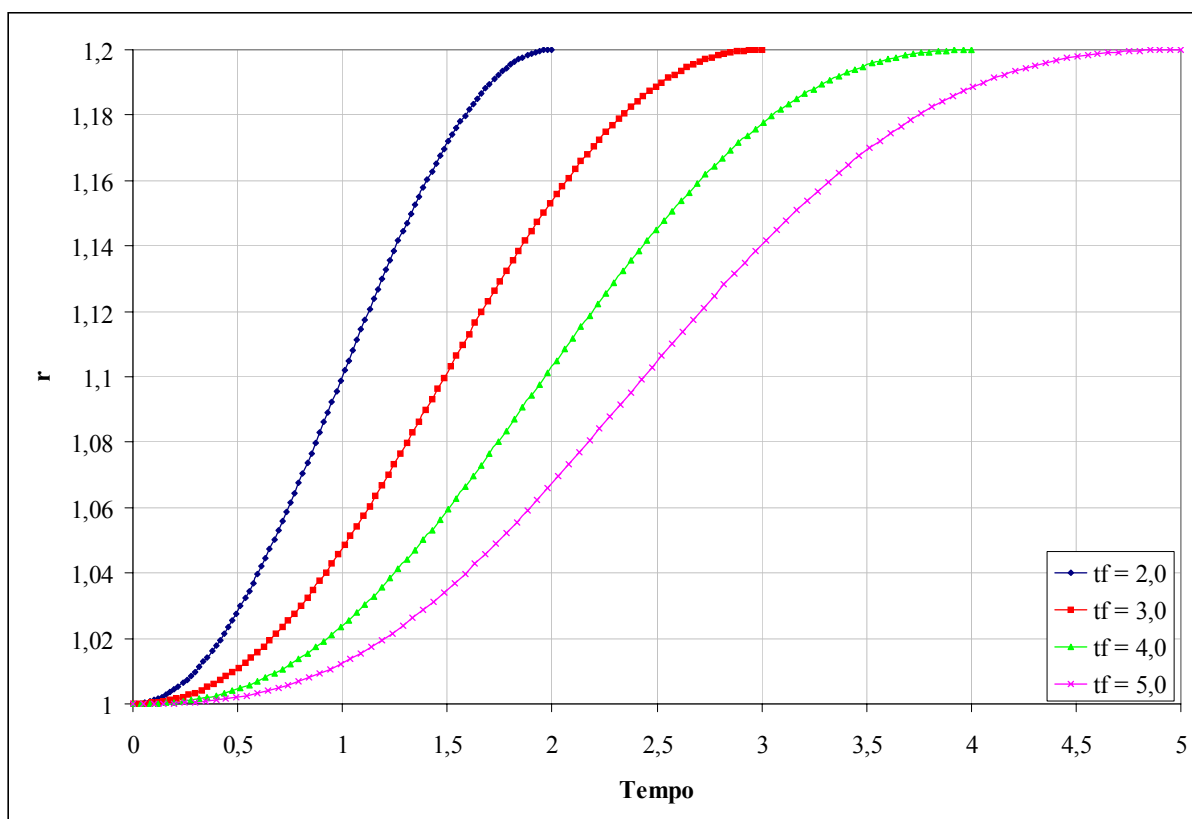


Figura VII.40. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e curta duração.

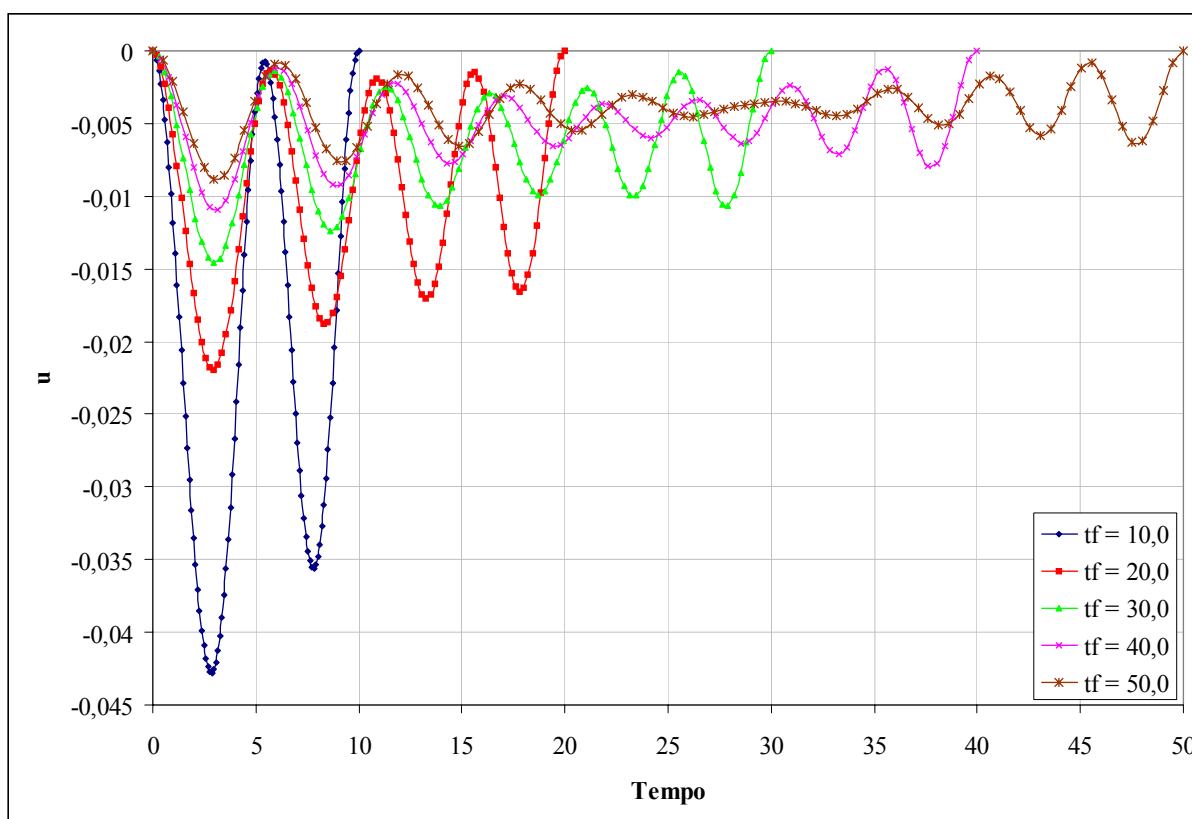


Figura VII.41. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e longa duração.

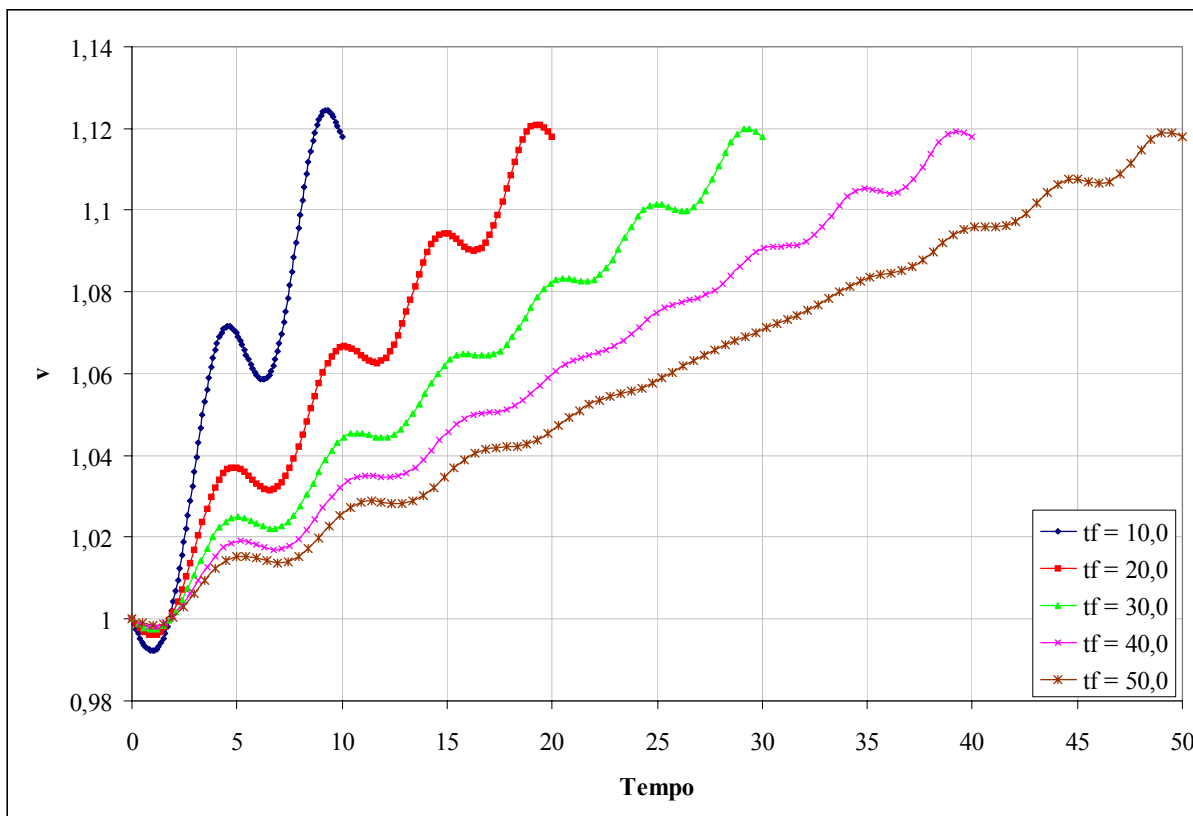


Figura VII.42. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e longa duração.

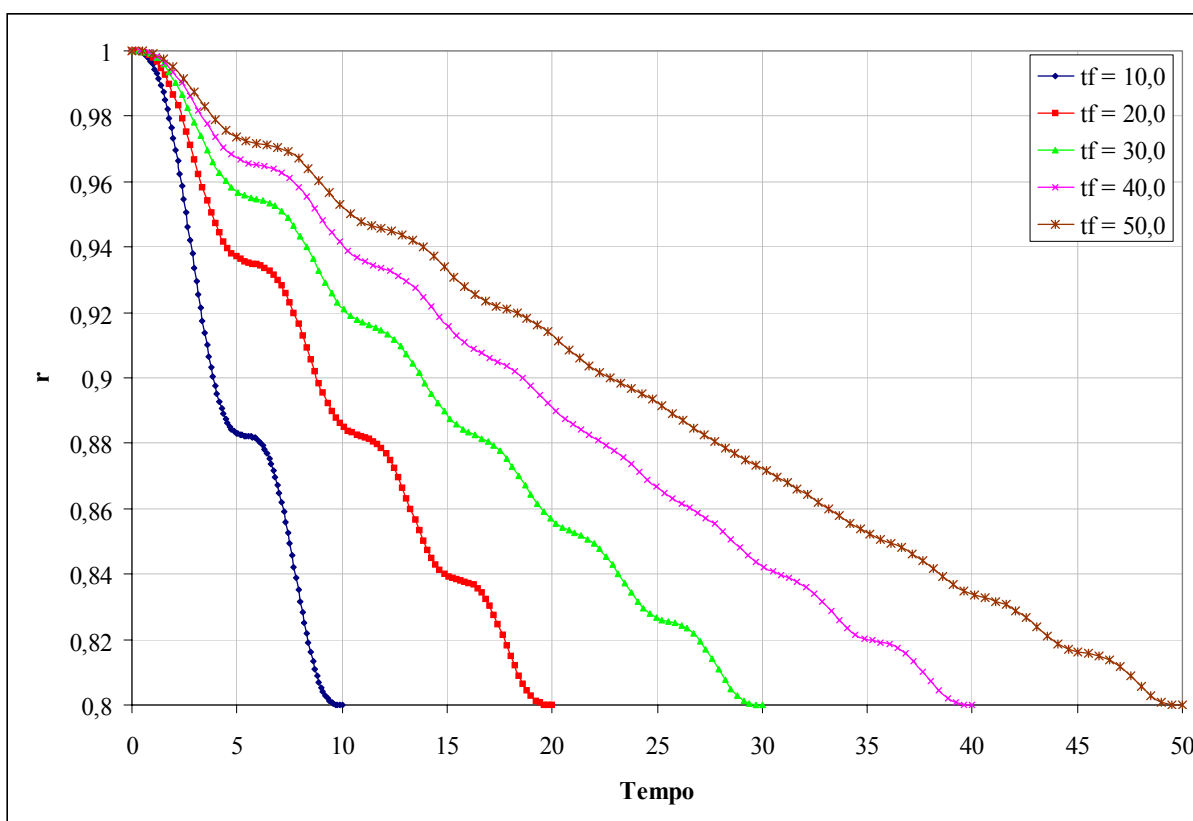


Figura VII.43. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e longa duração.

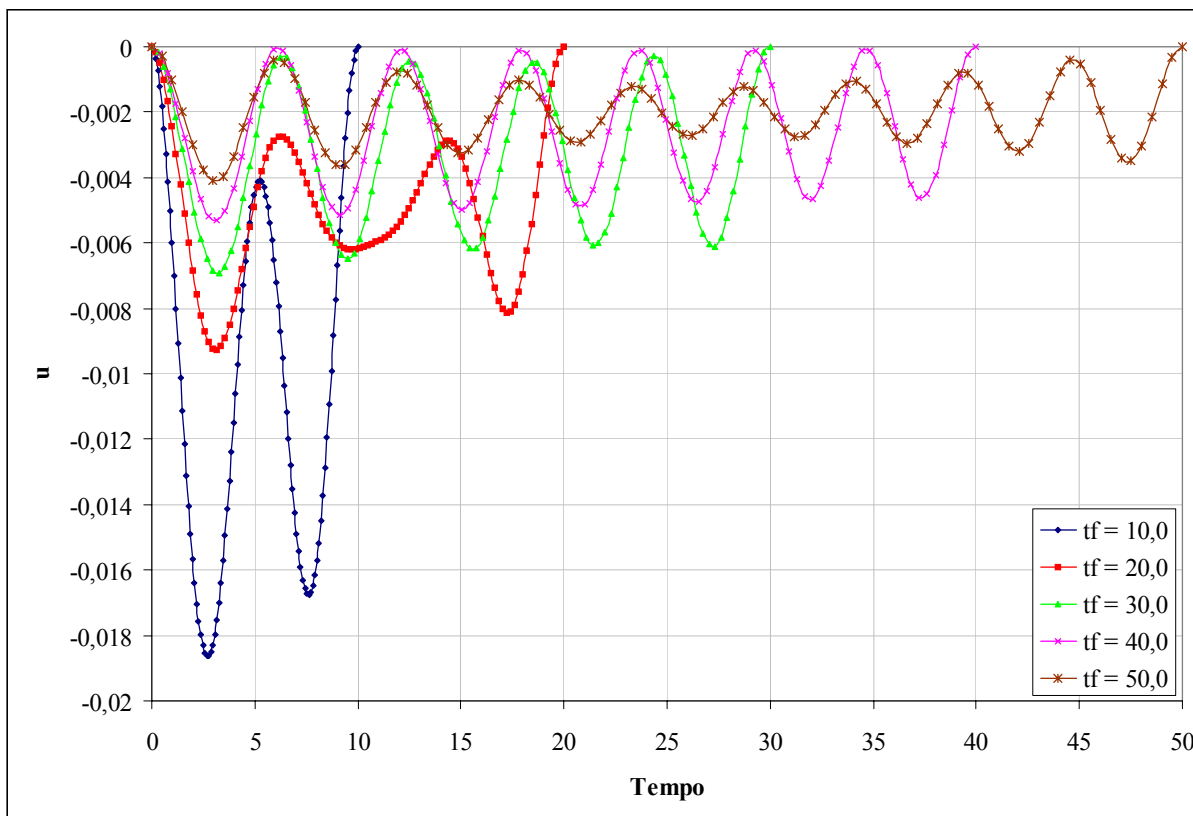


Figura VII.44. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e longa duração.

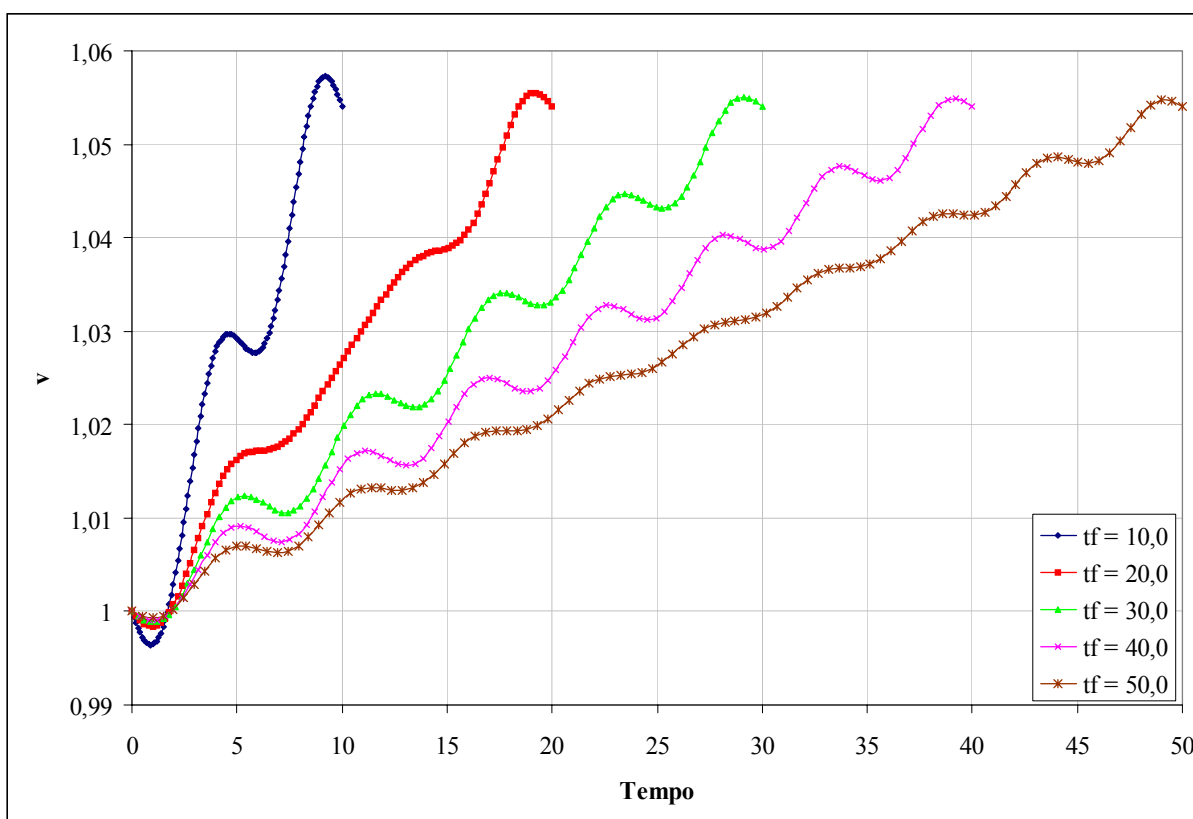


Figura VII.45. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e longa duração.

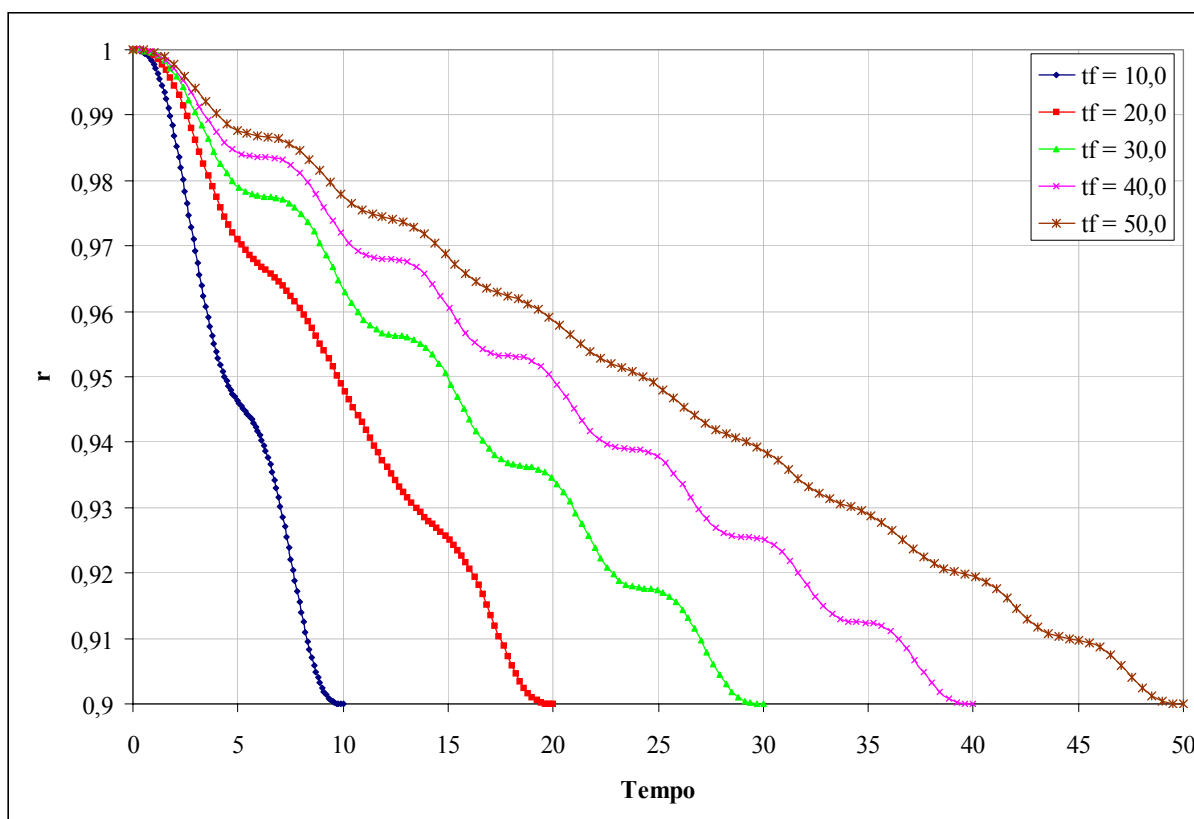


Figura VII.46. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e longa duração.

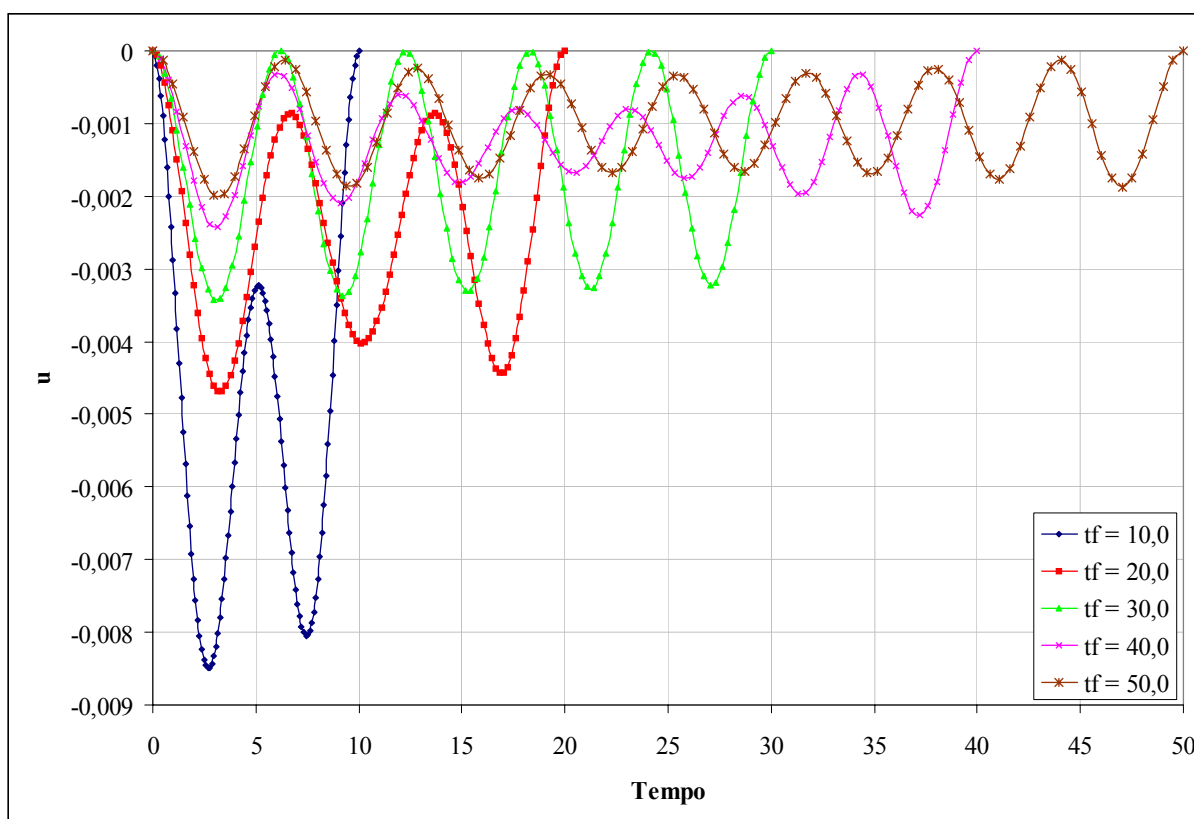


Figura VII.47. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e longa duração.

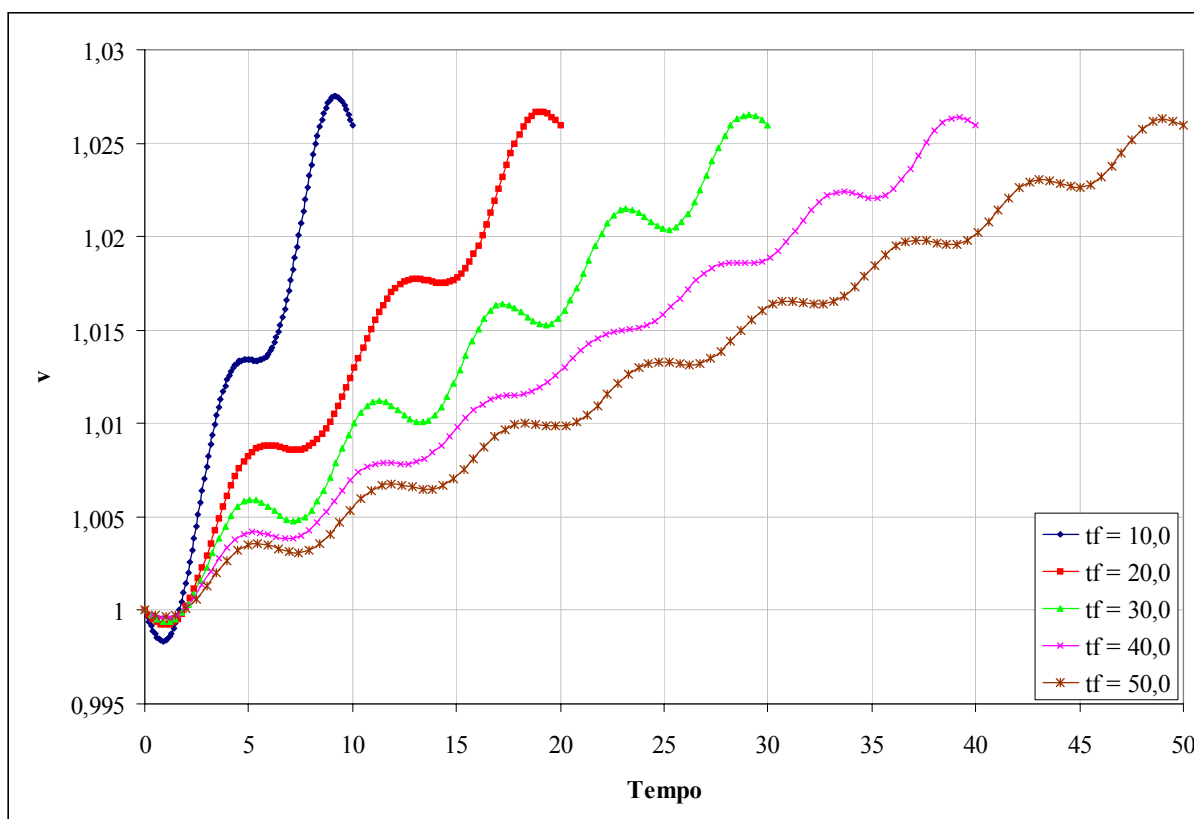


Figura VII.48. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e longa duração.

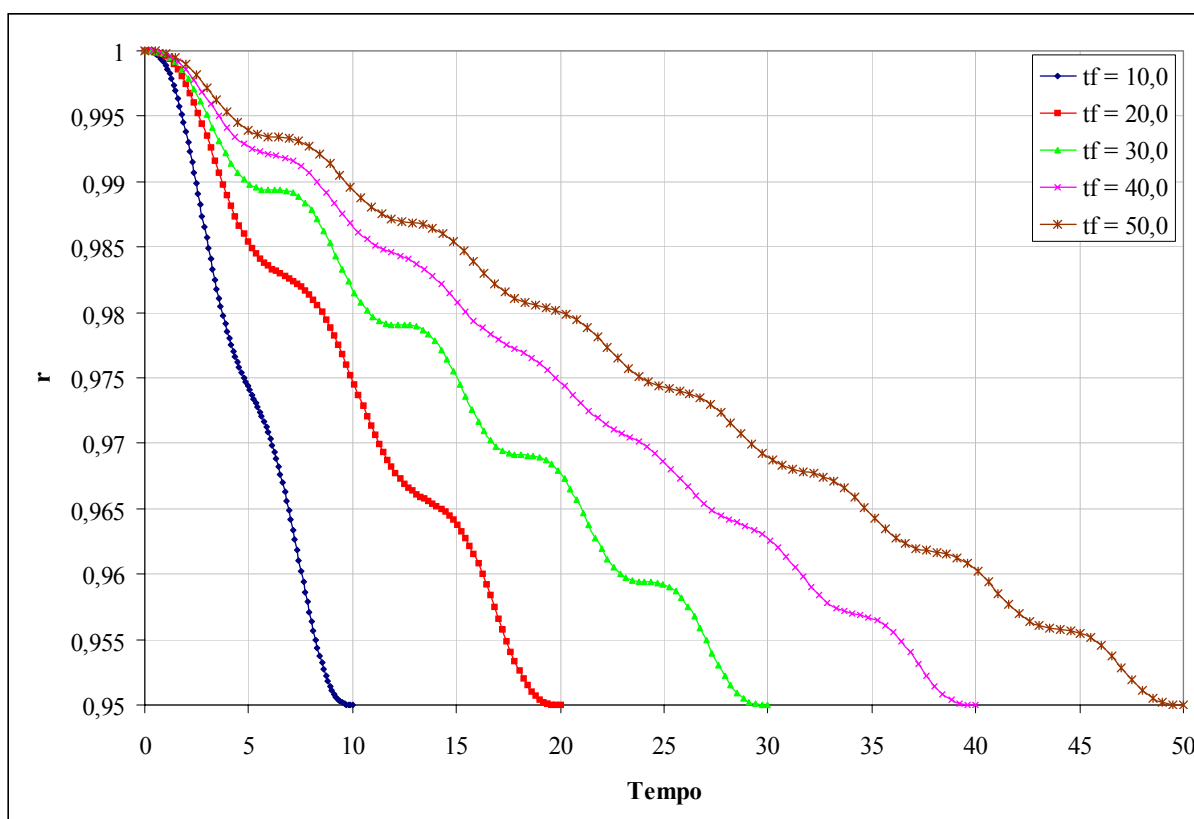


Figura VII.49. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e longa duração.

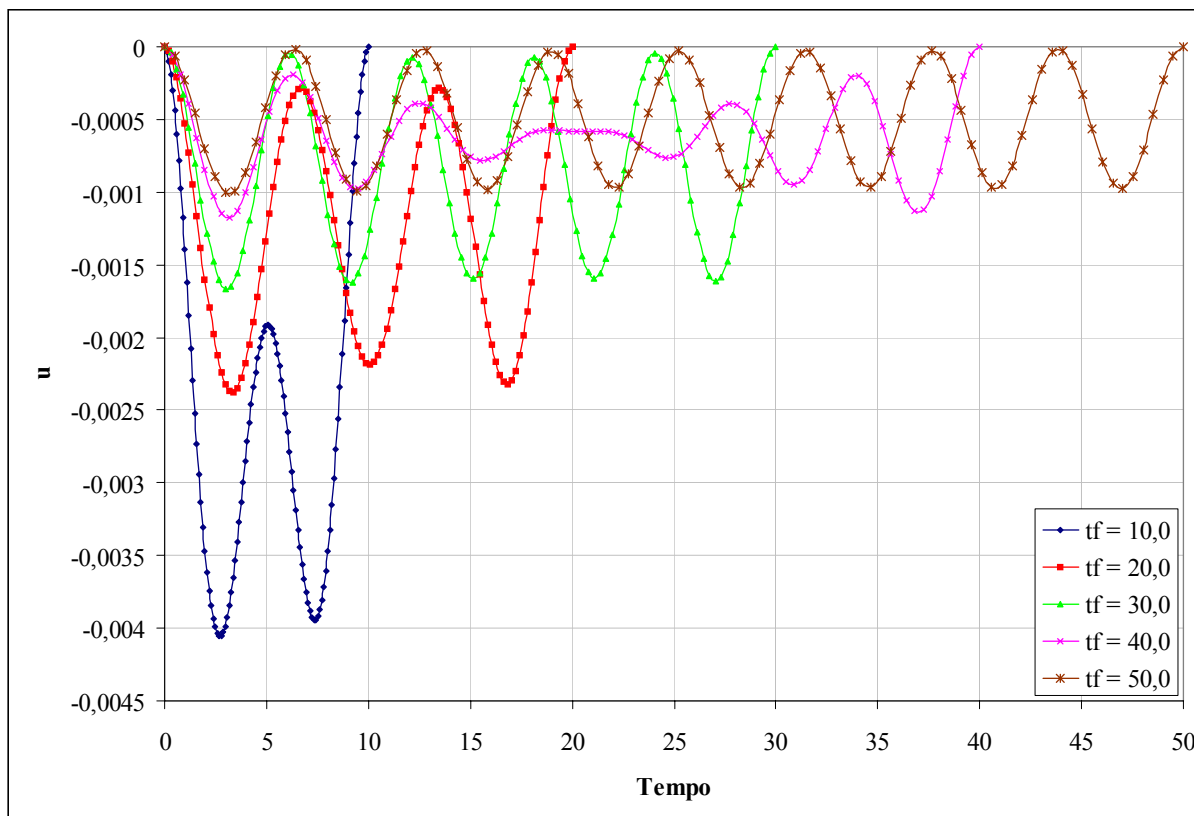


Figura VII.50. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e longa duração.

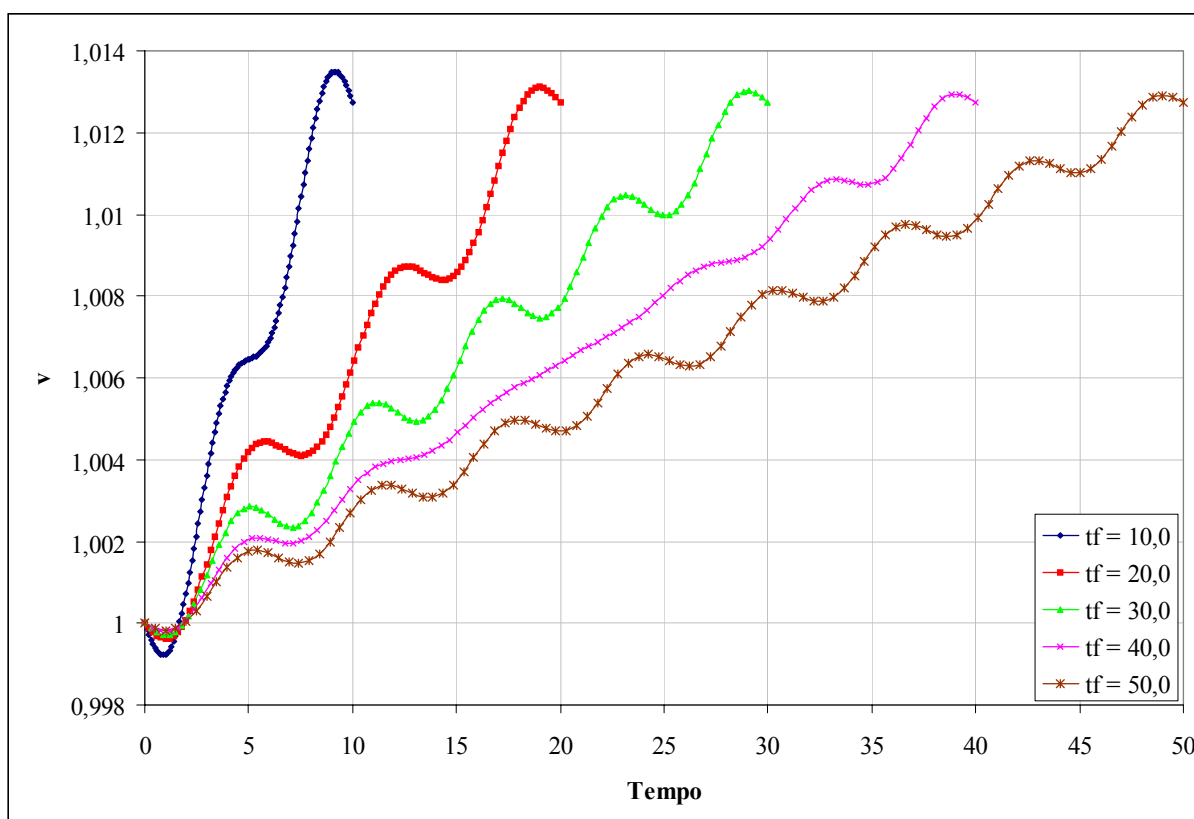


Figura VII.51. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e longa duração.

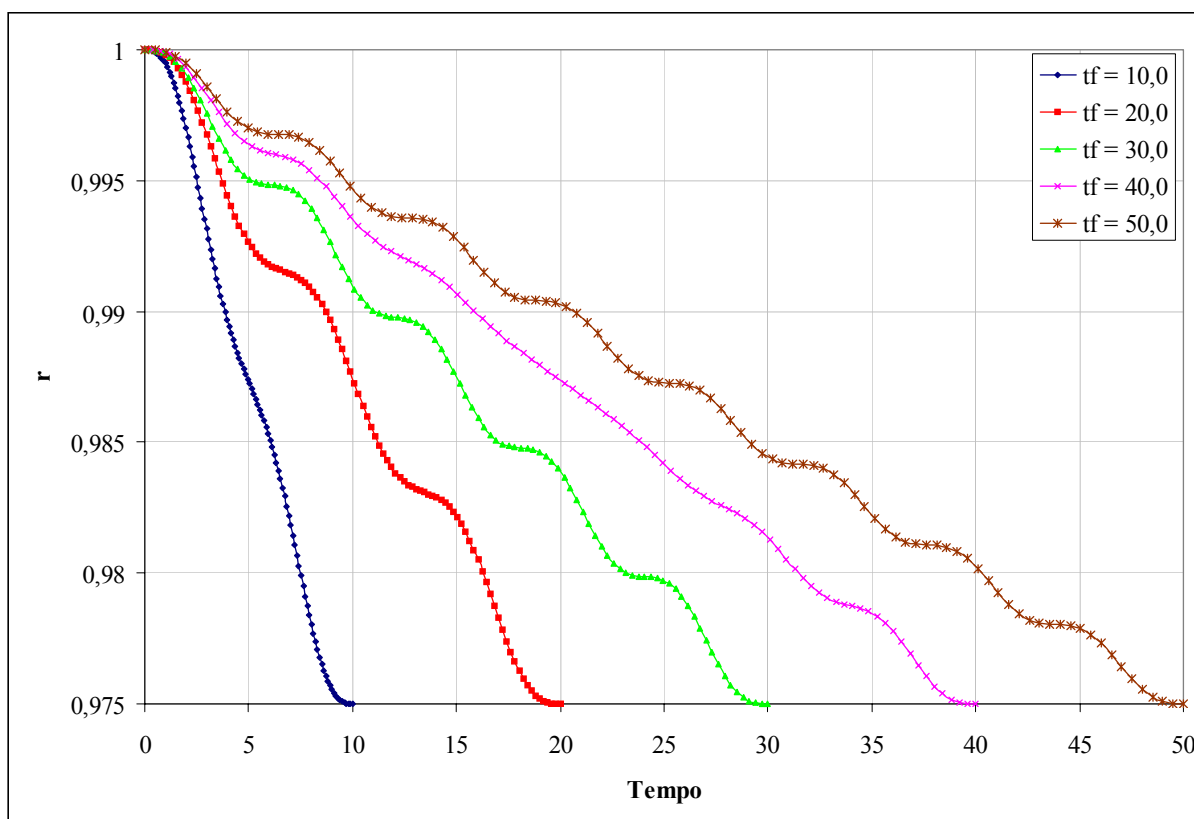


Figura VII.52. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e longa duração.

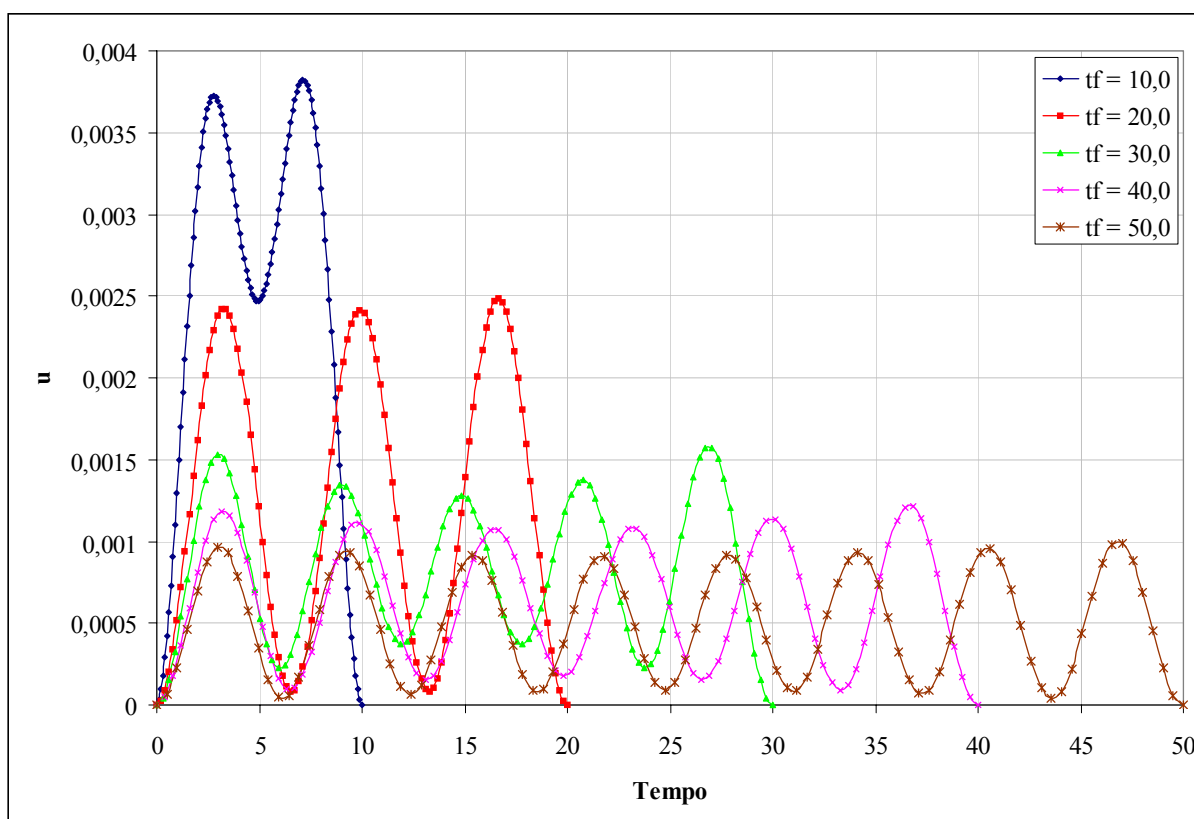


Figura VII.53. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e longa duração.

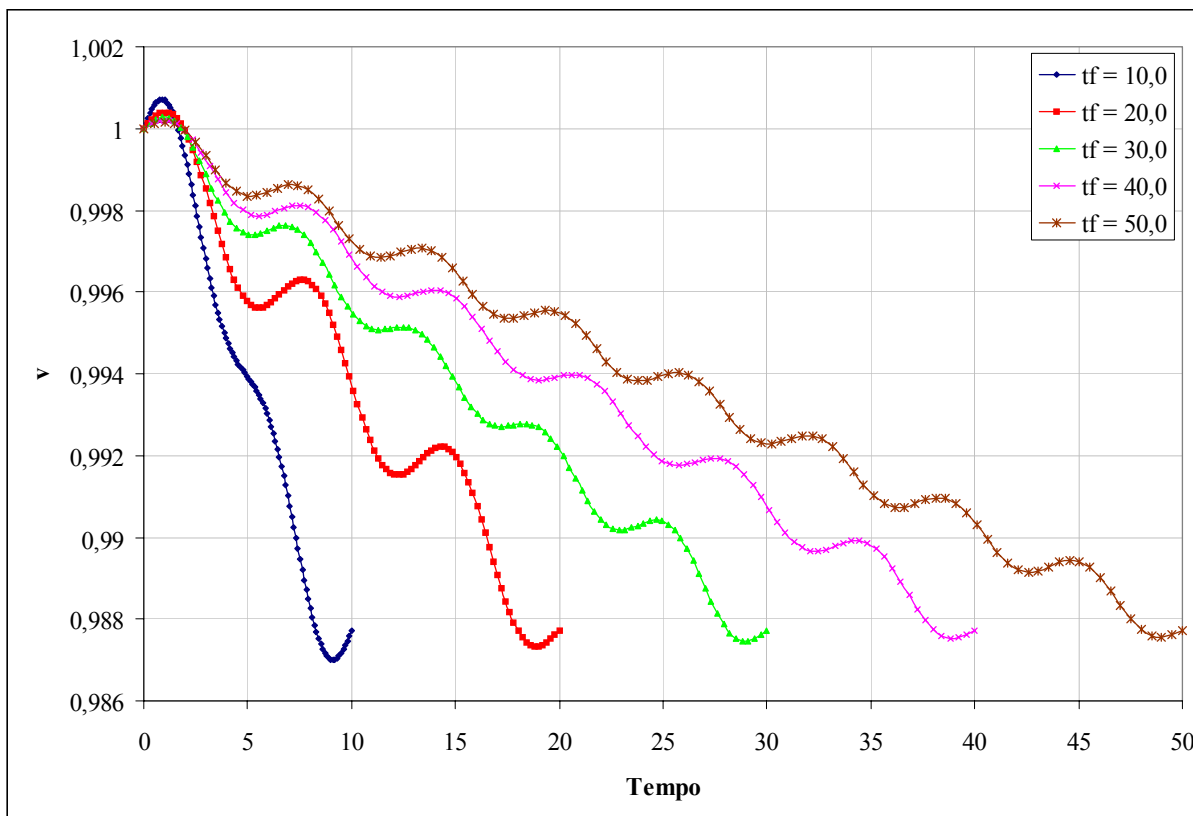


Figura VII.54. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e longa duração.

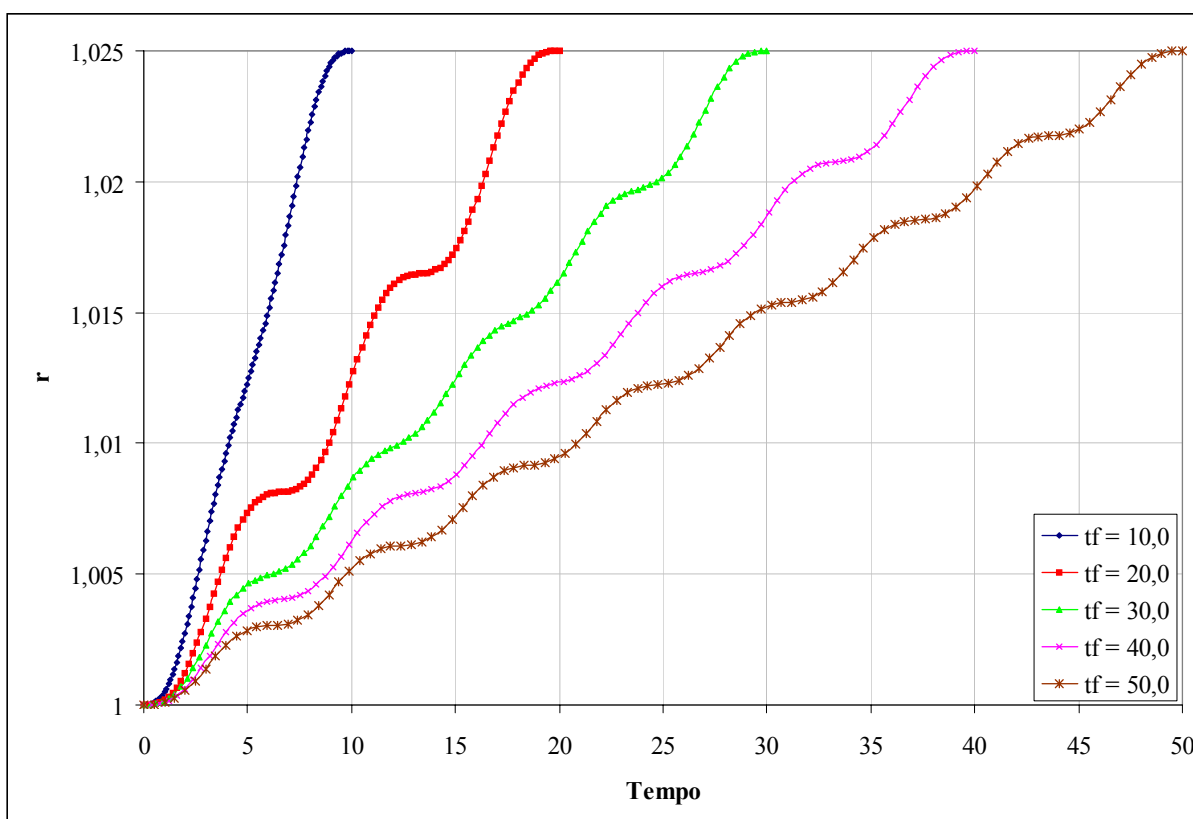


Figura VII.55. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e longa duração.

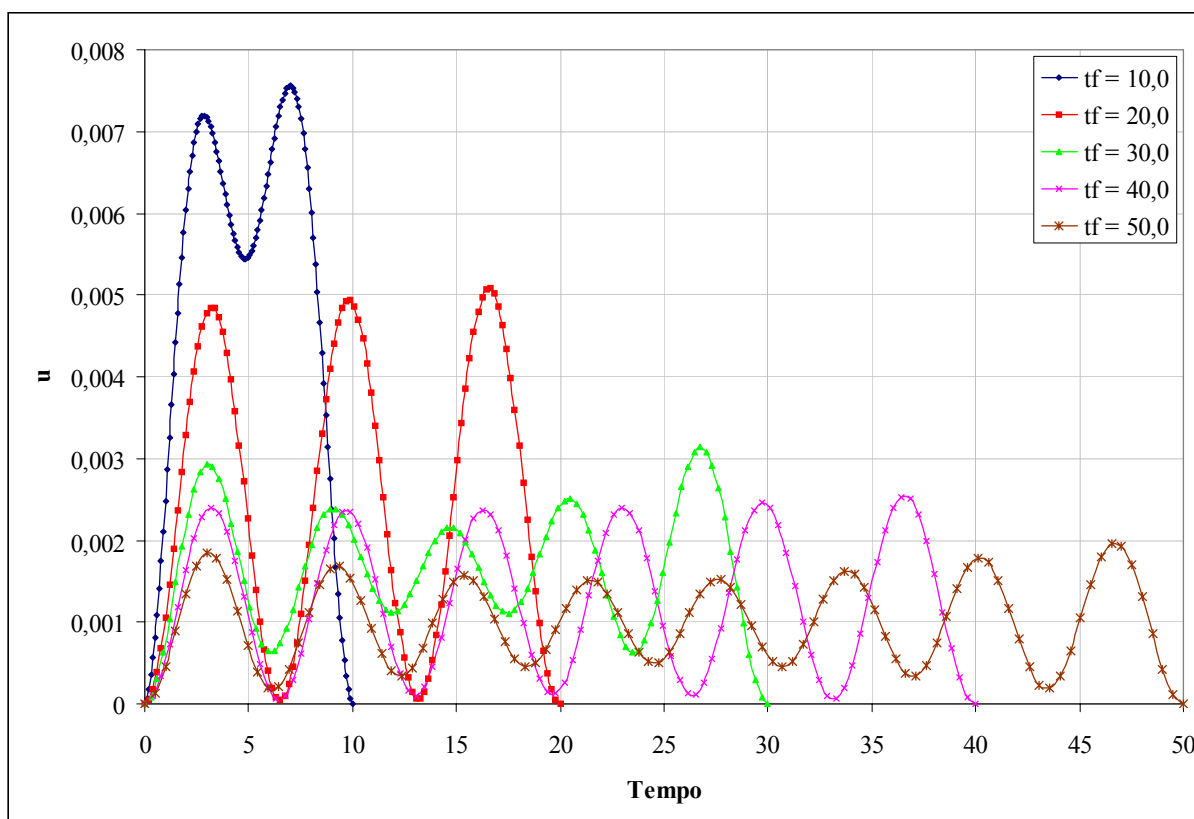


Figura VII.56. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e longa duração.

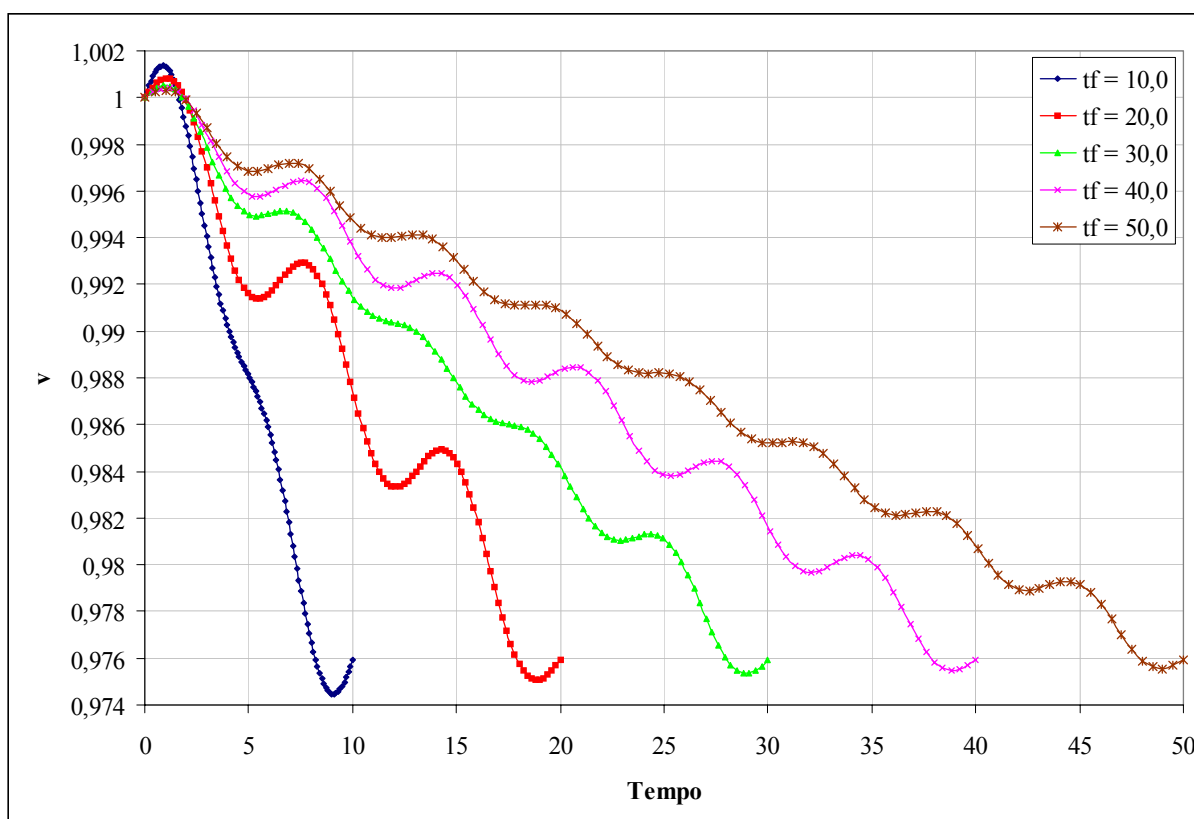


Figura VII.57. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e longa duração.

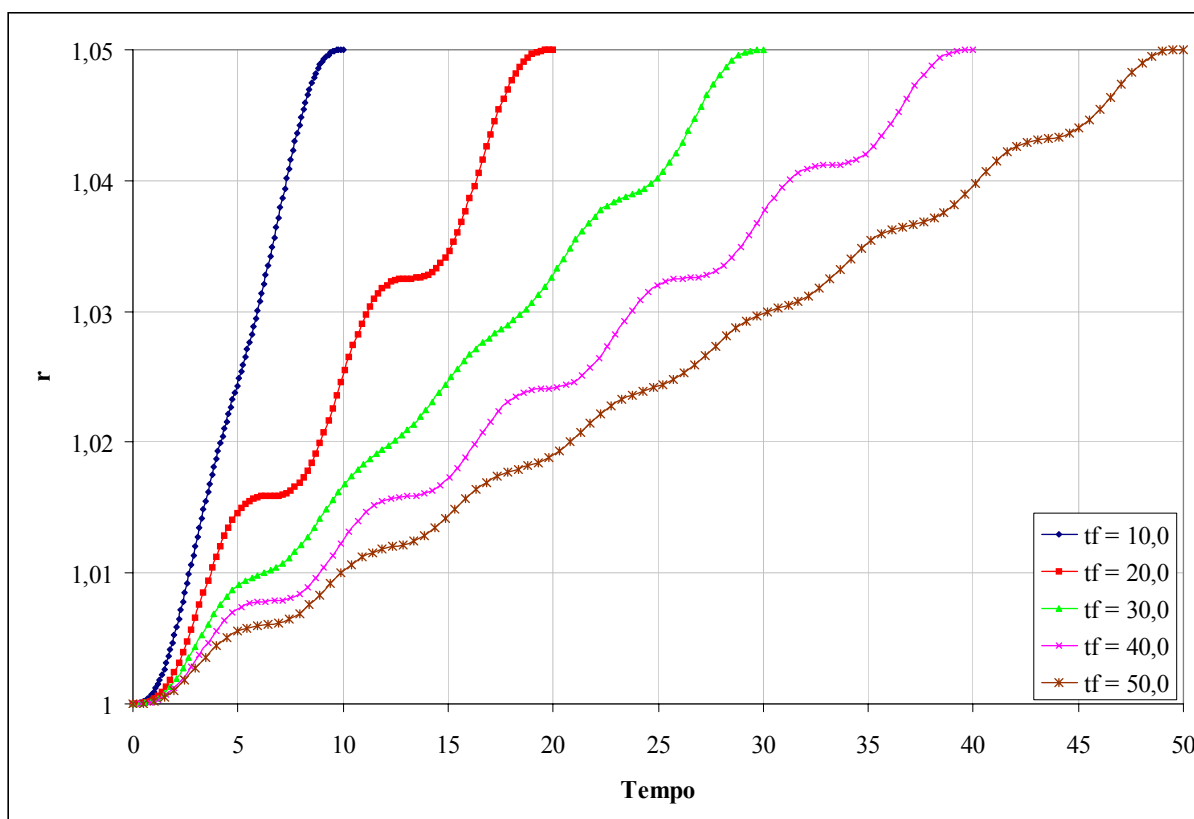


Figura VII.58. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e longa duração.

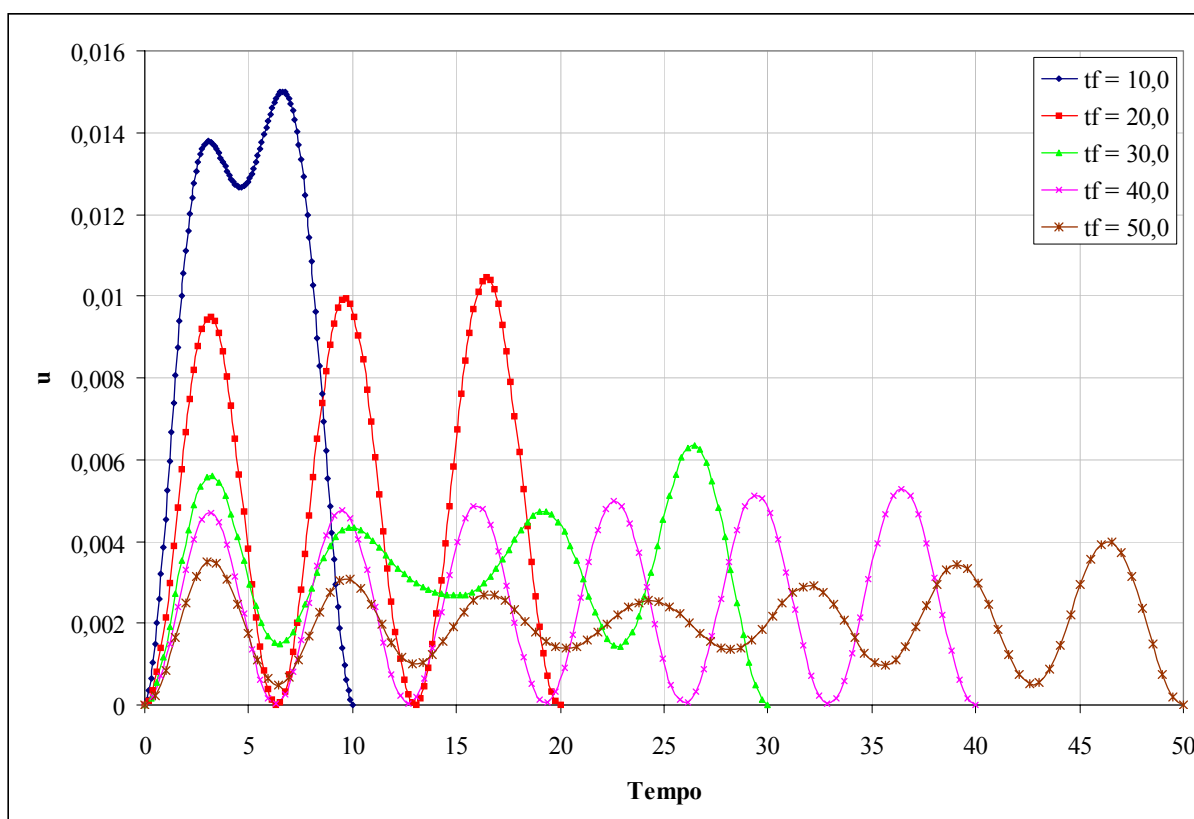


Figura VII.59. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e longa duração.

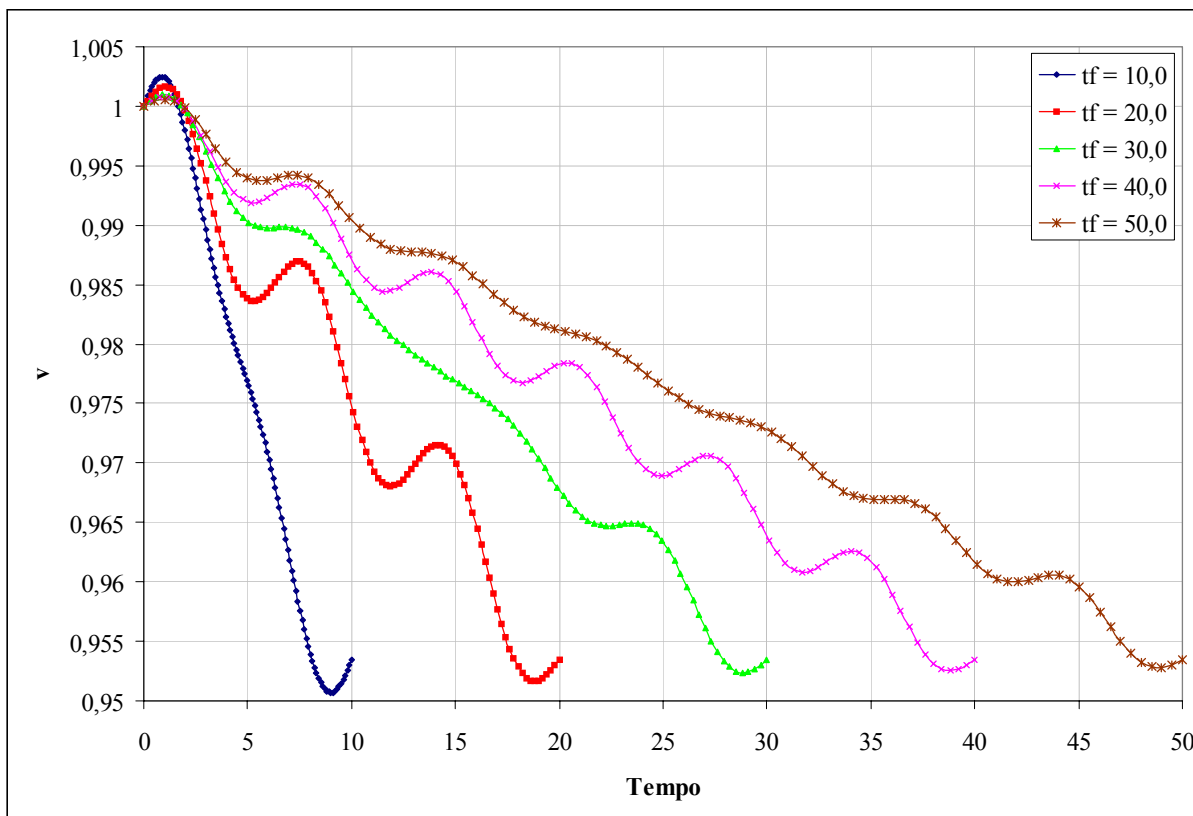


Figura VII.60. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e longa duração.

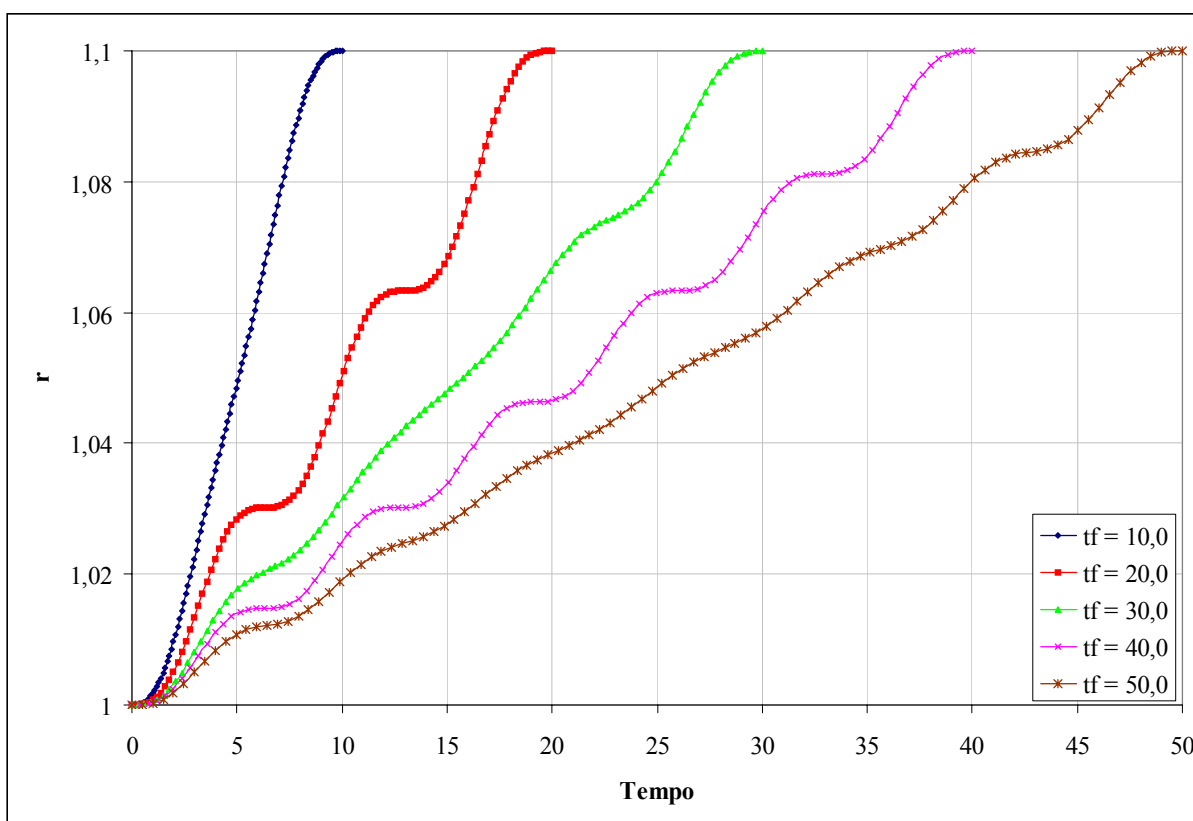


Figura VII.61. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e longa duração.

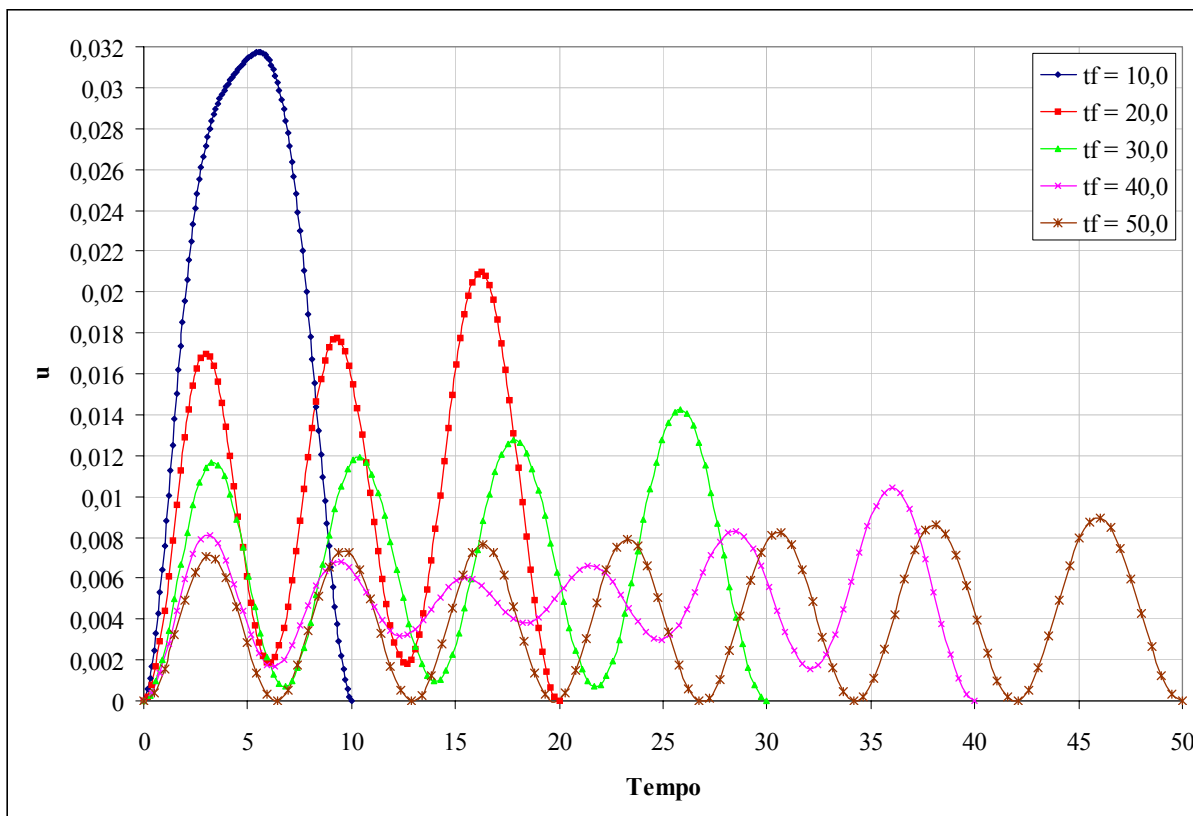


Figura VII.62. Evolução temporal da velocidade radial u – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e longa duração.

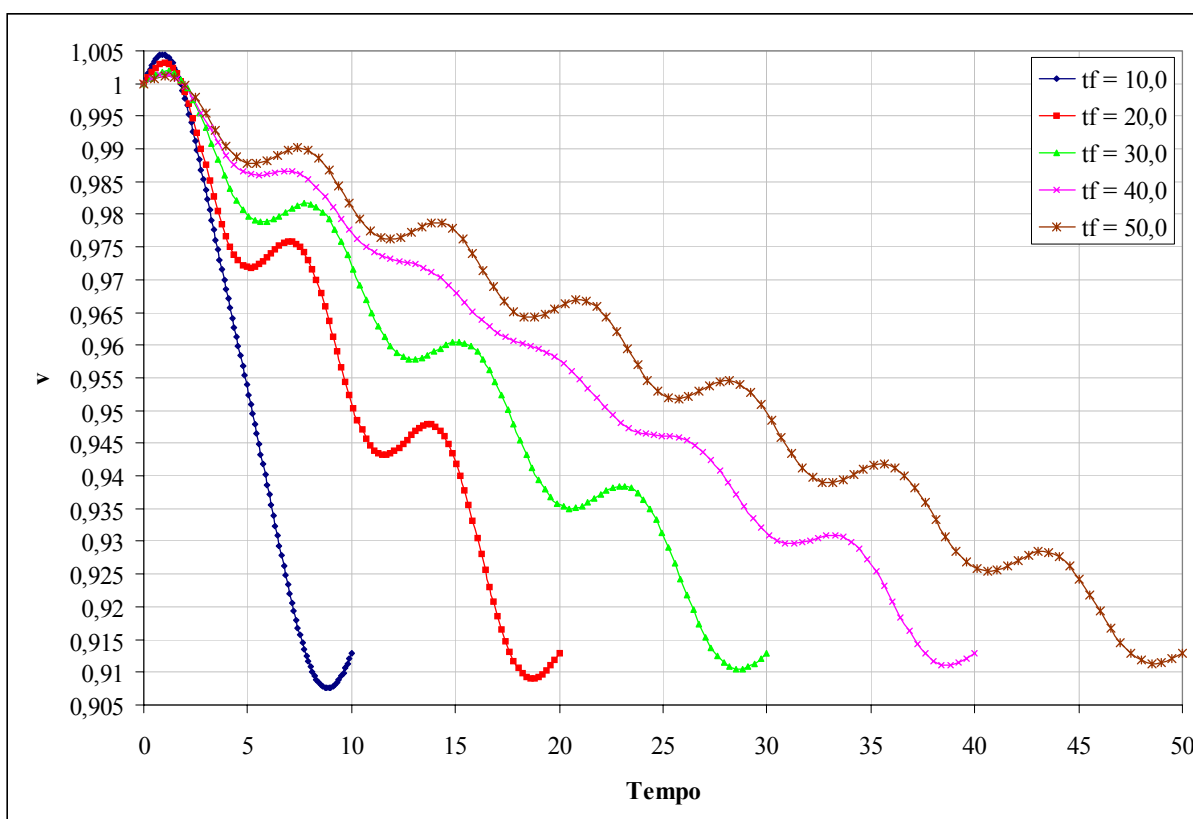


Figura VII.63. Evolução temporal da velocidade circunferencial v – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e longa duração.

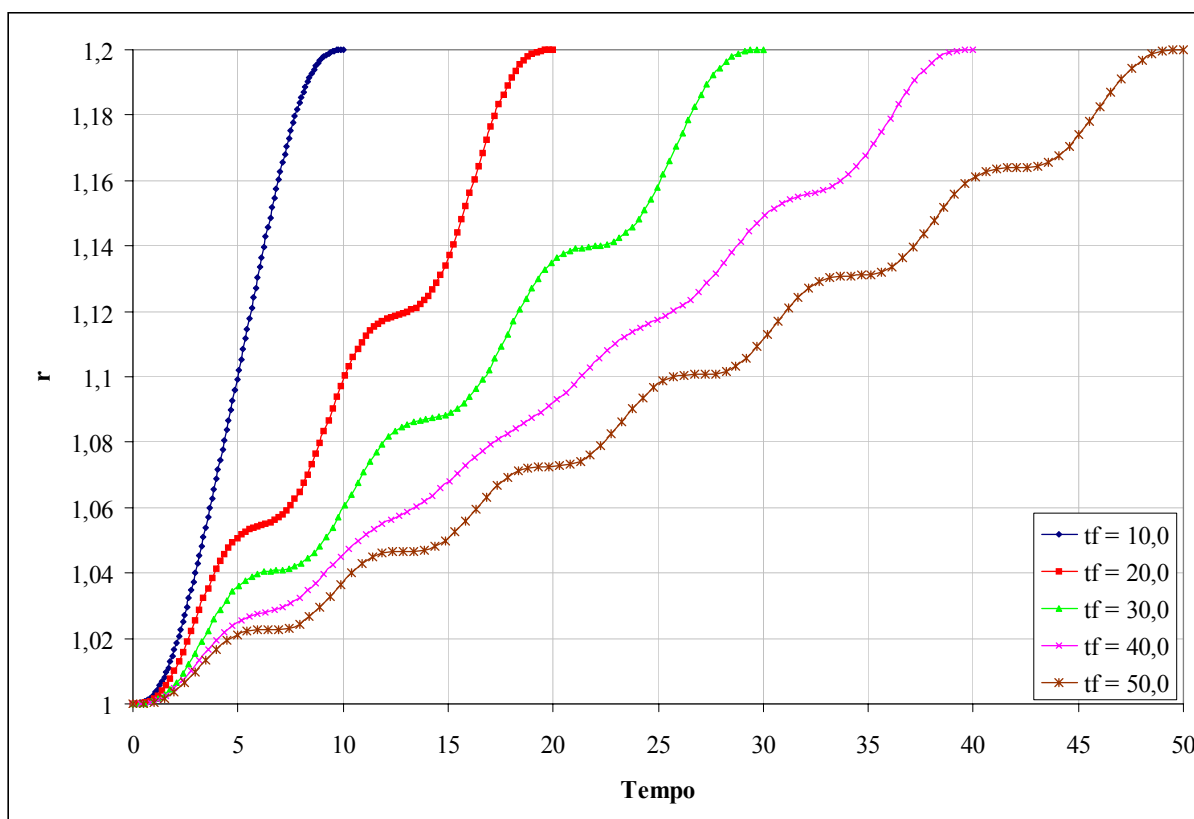


Figura VII.64. Evolução temporal da distância radial r – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e longa duração.

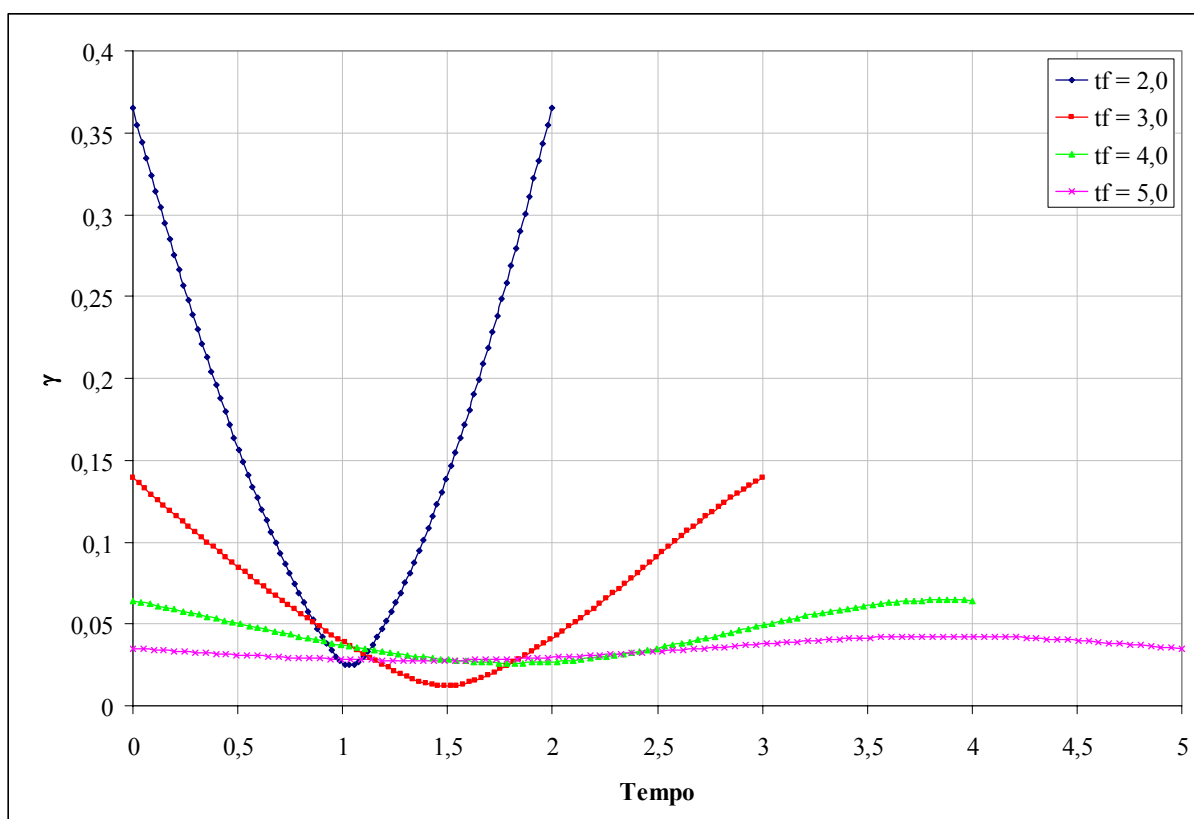


Figura VII.65. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e curta duração.

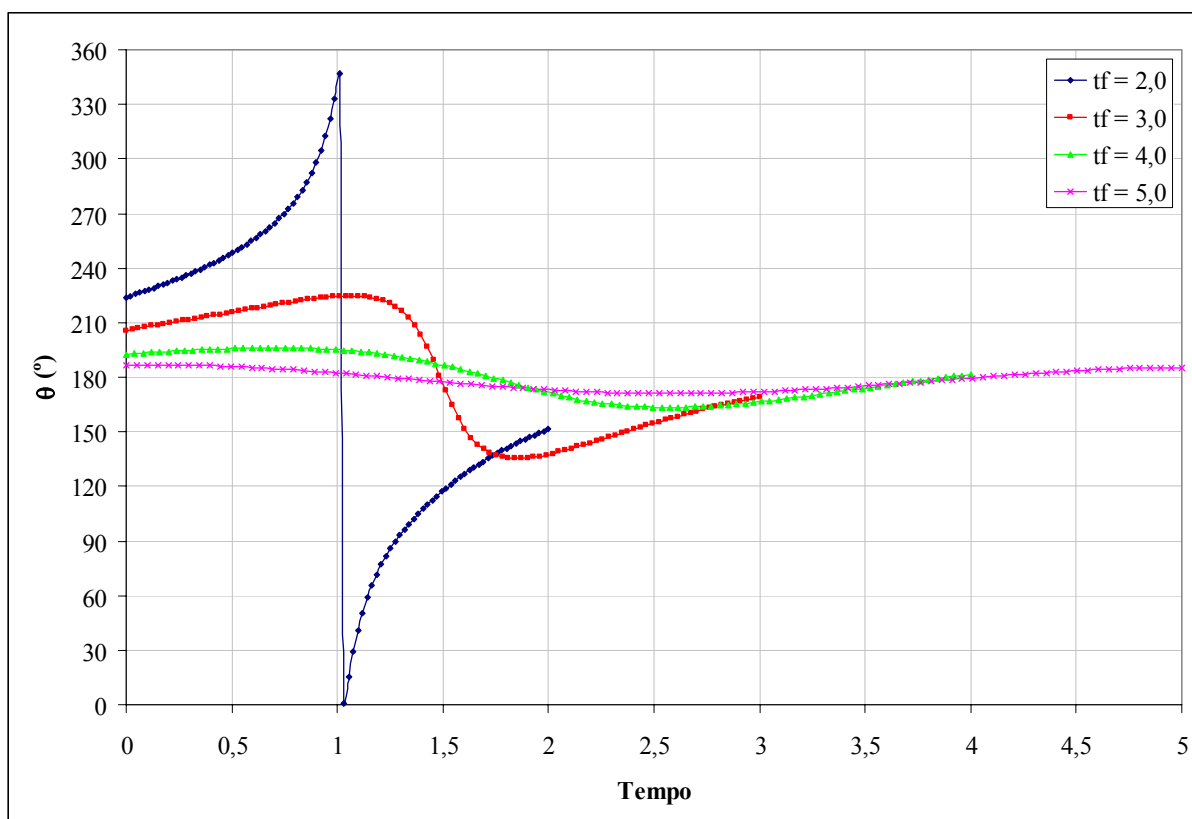


Figura VII.66. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e curta duração.

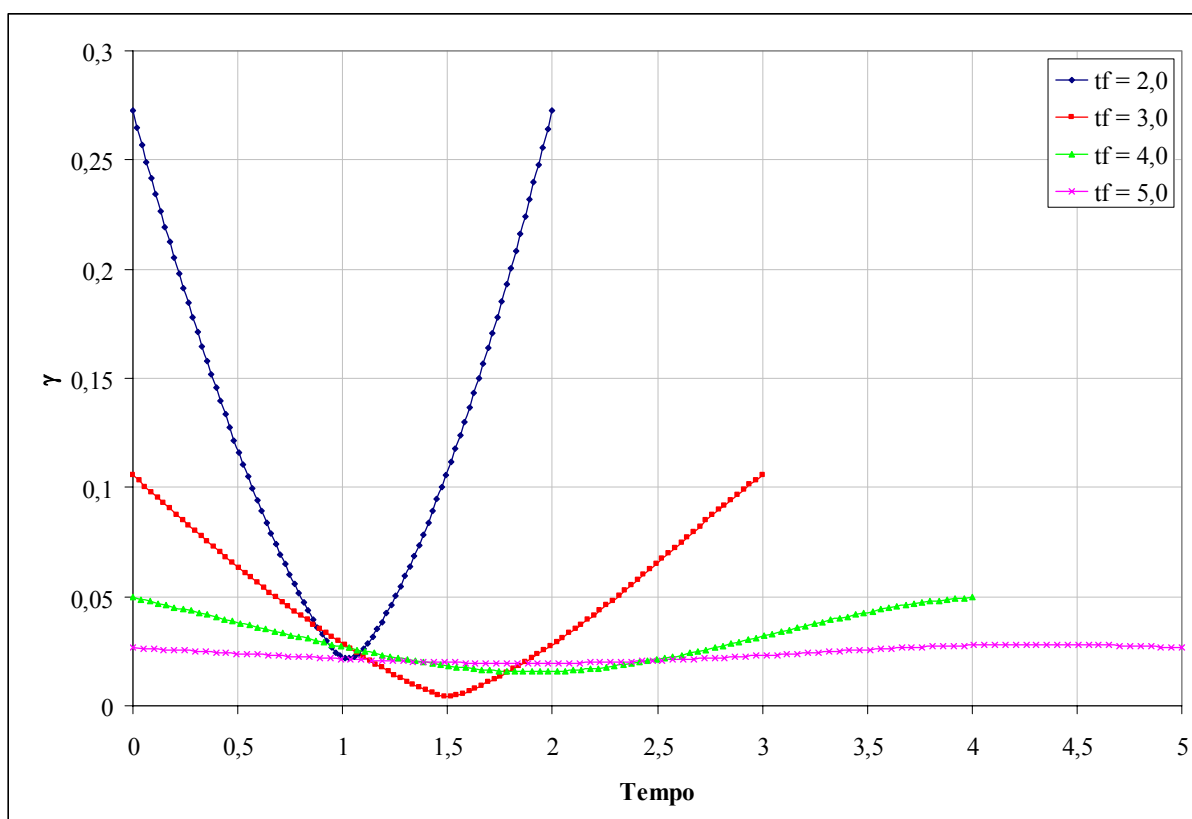


Figura VII.67. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e curta duração.

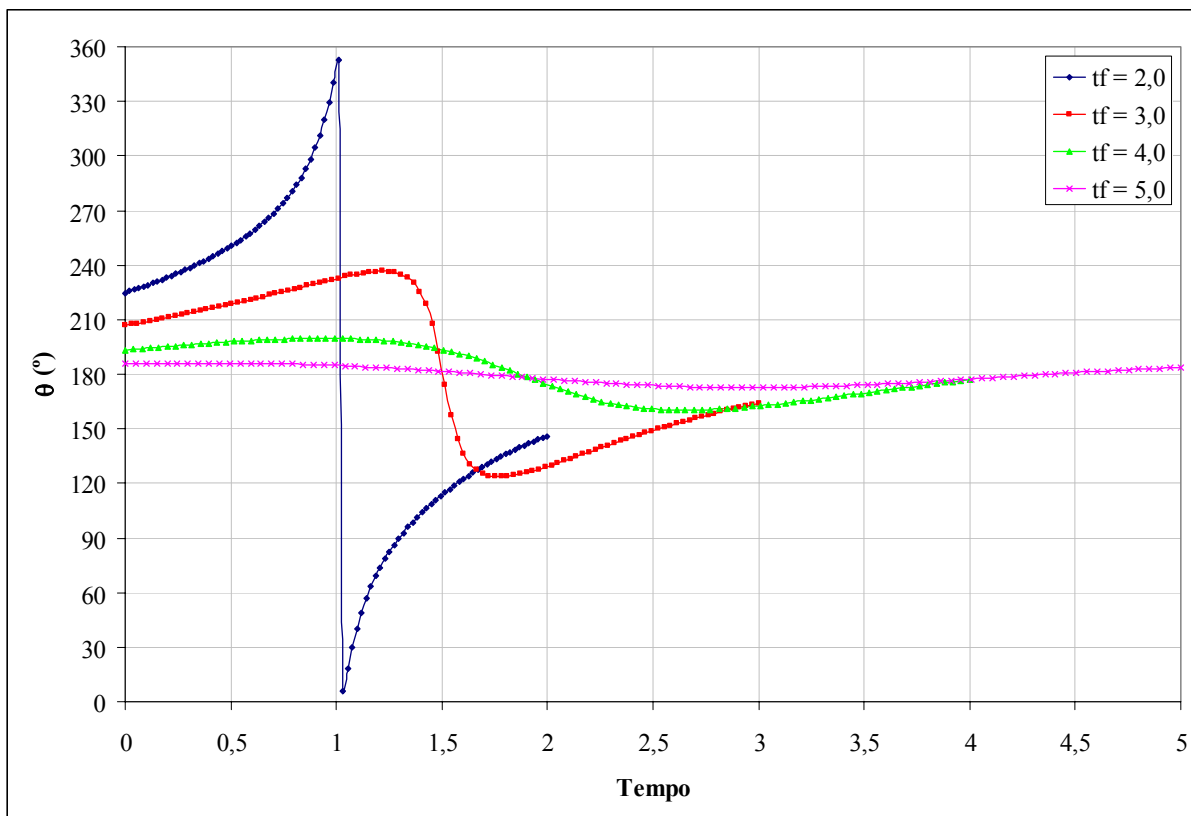


Figura VII.68. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e curta duração.

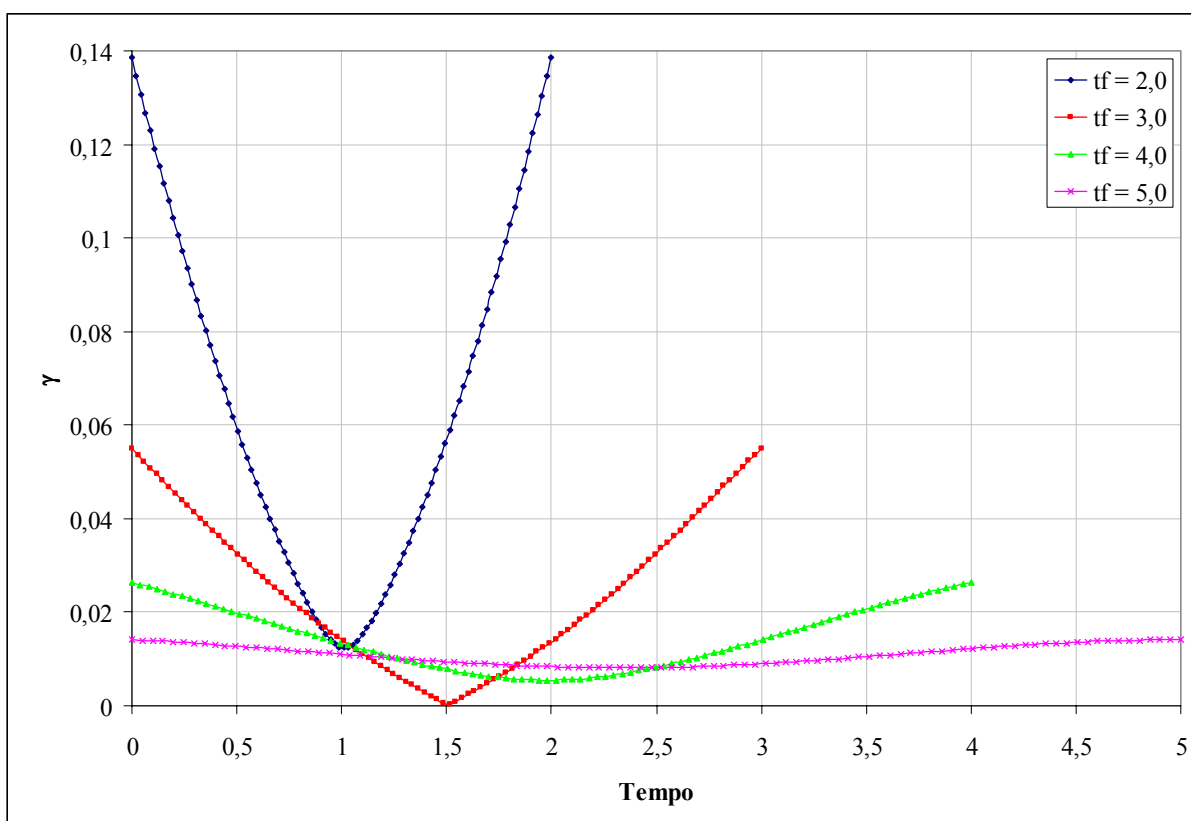


Figura VII.69. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e curta duração.

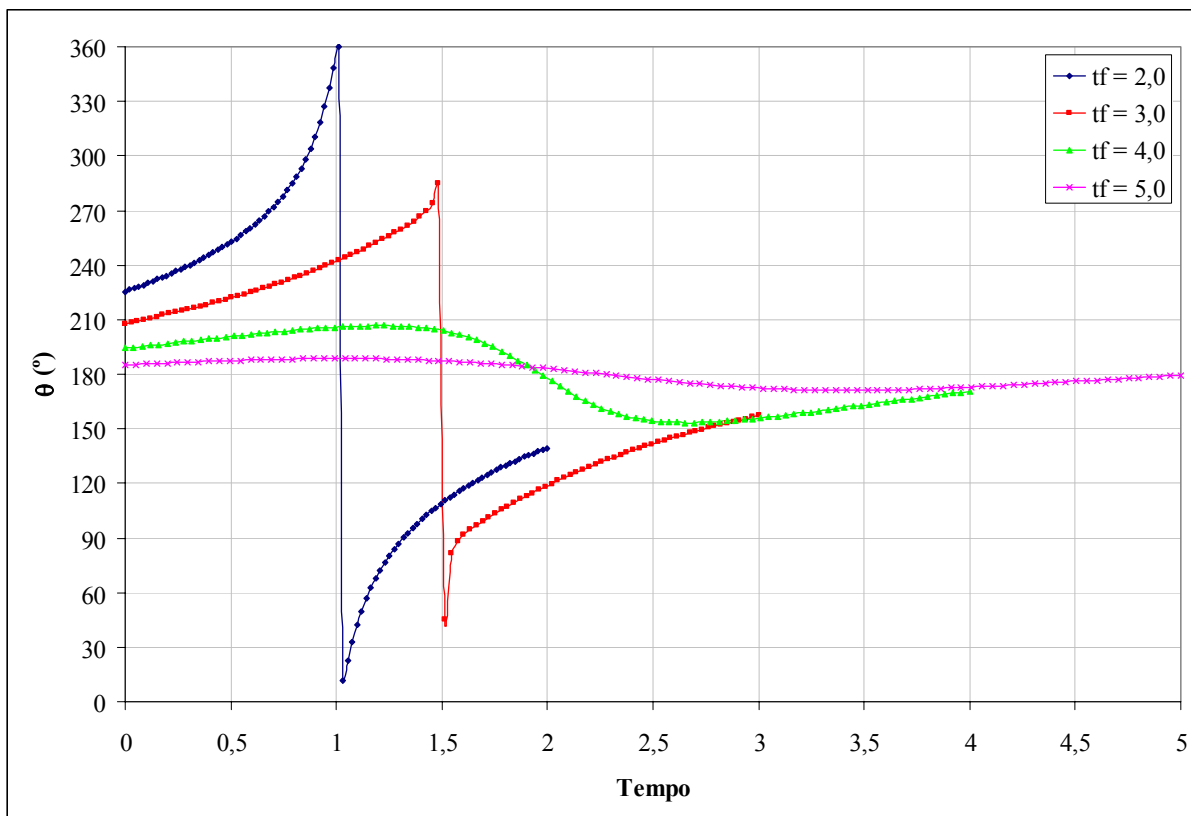


Figura VII.70. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e curta duração.

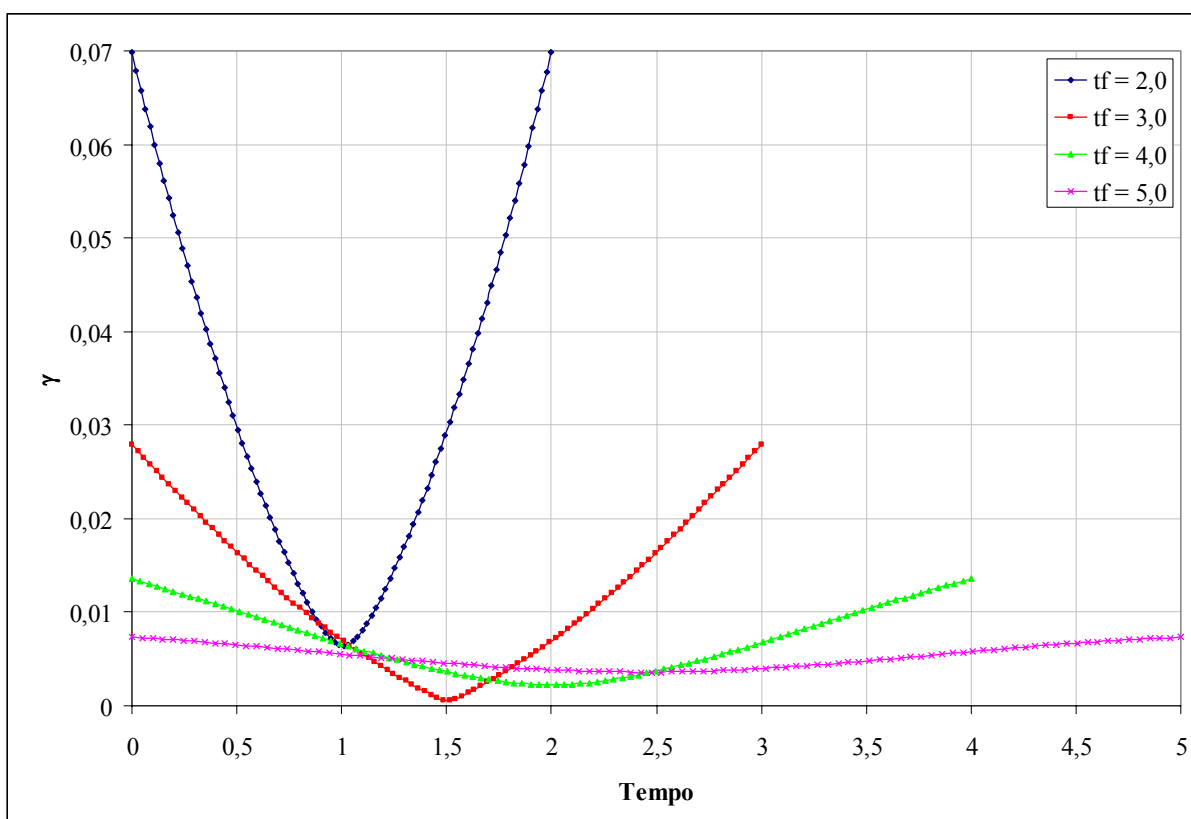


Figura VII.71. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e curta duração.

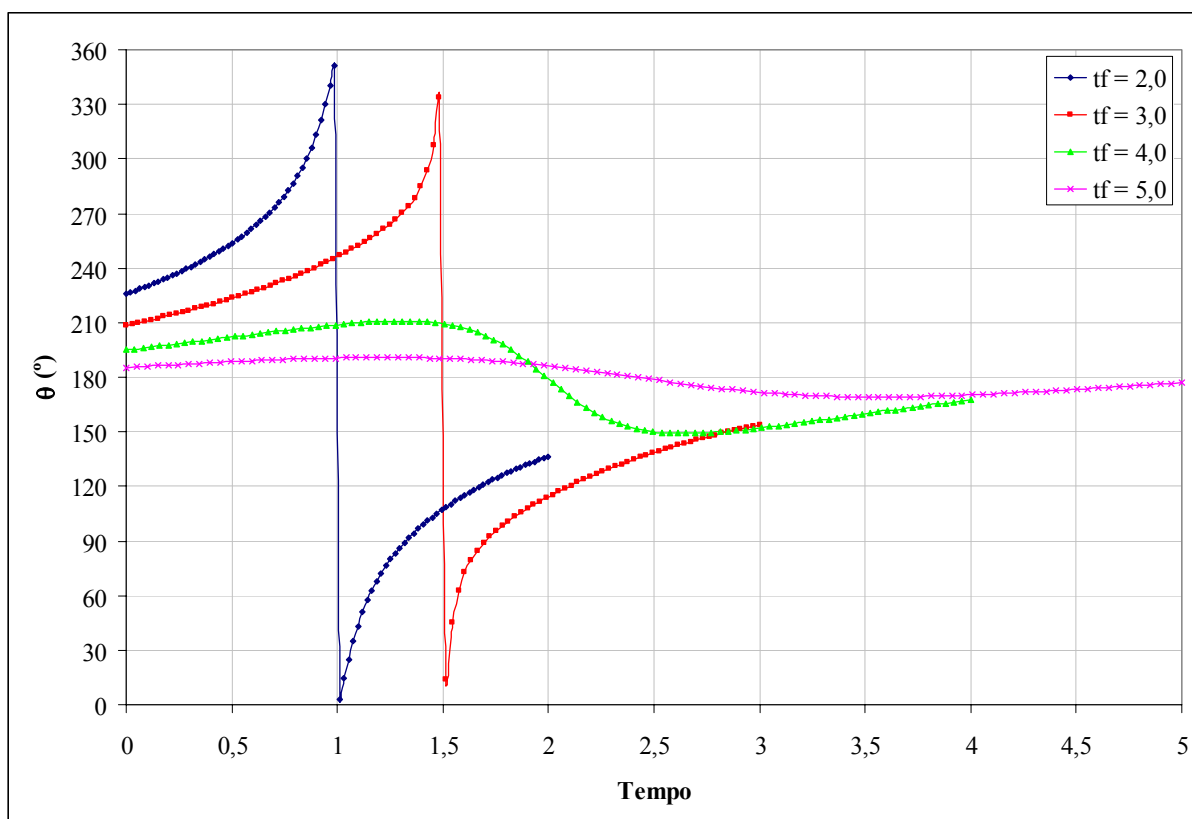


Figura VII.72. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e curta duração.

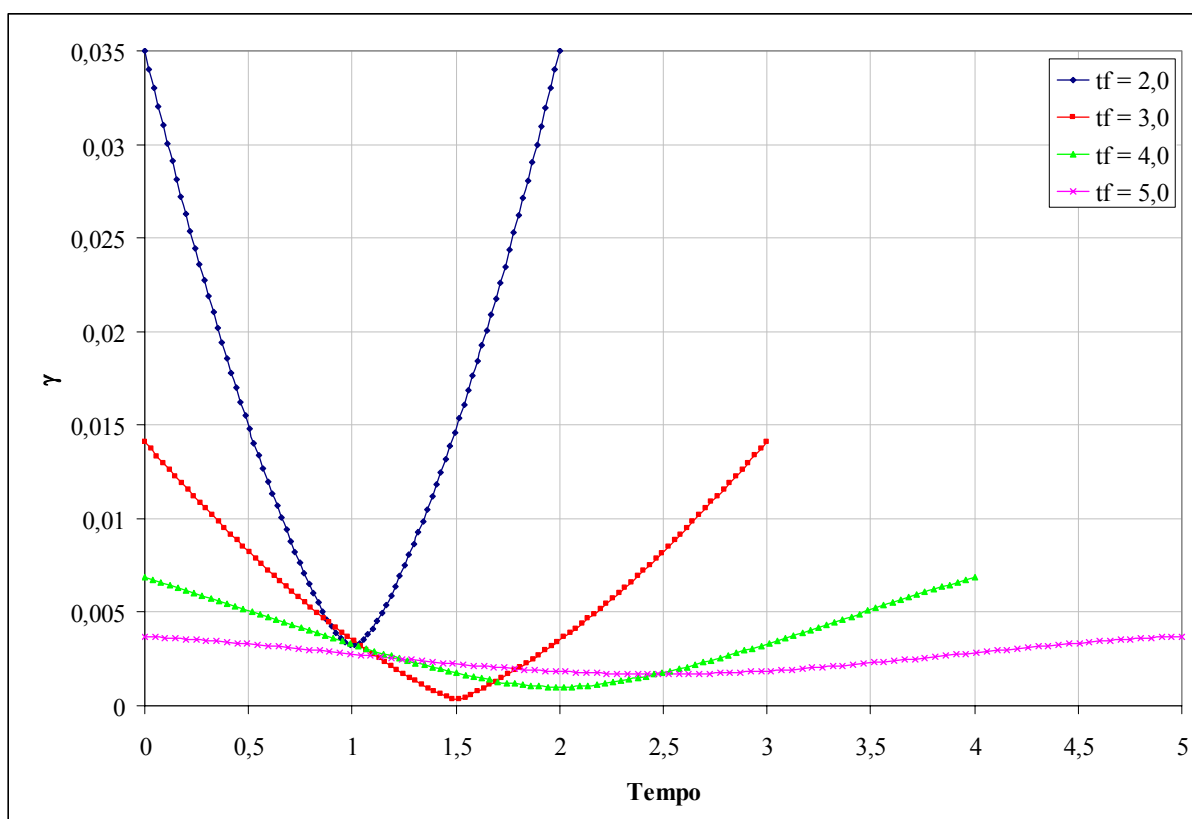


Figura VII.73. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e curta duração.

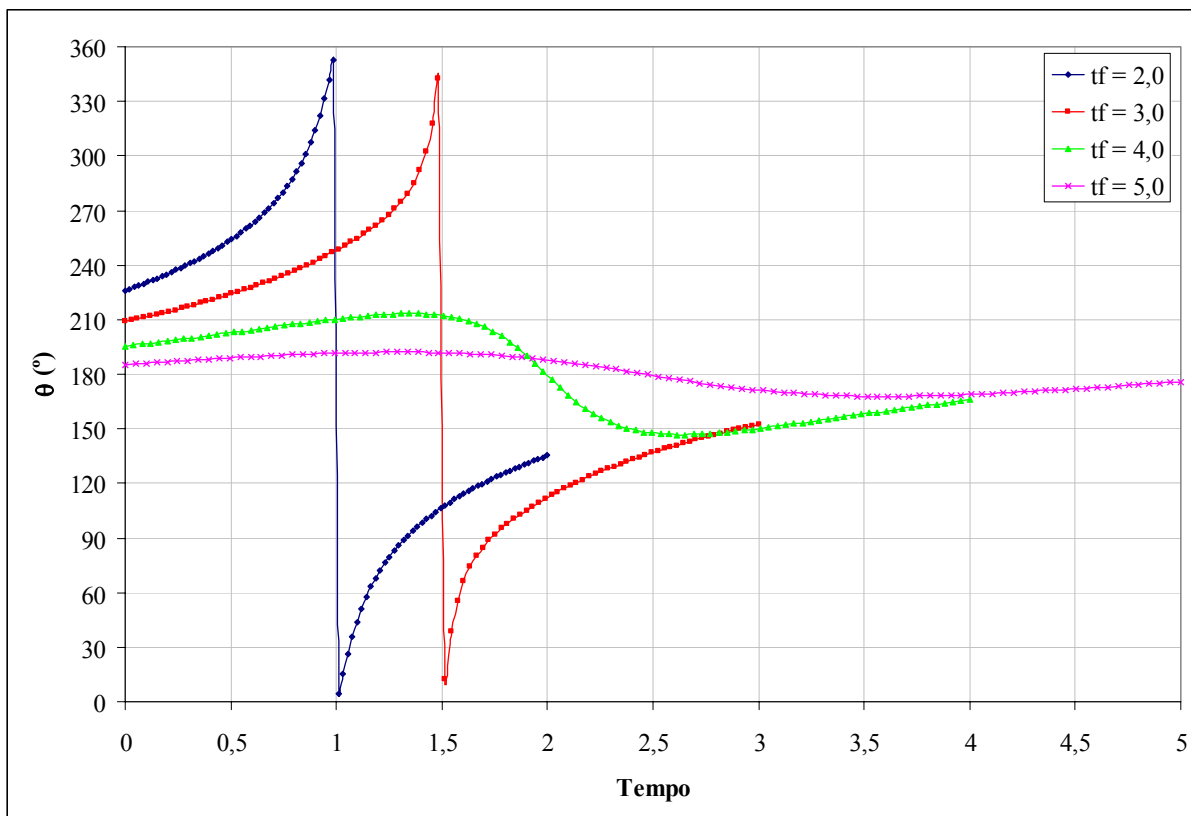


Figura VII.74. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e curta duração.

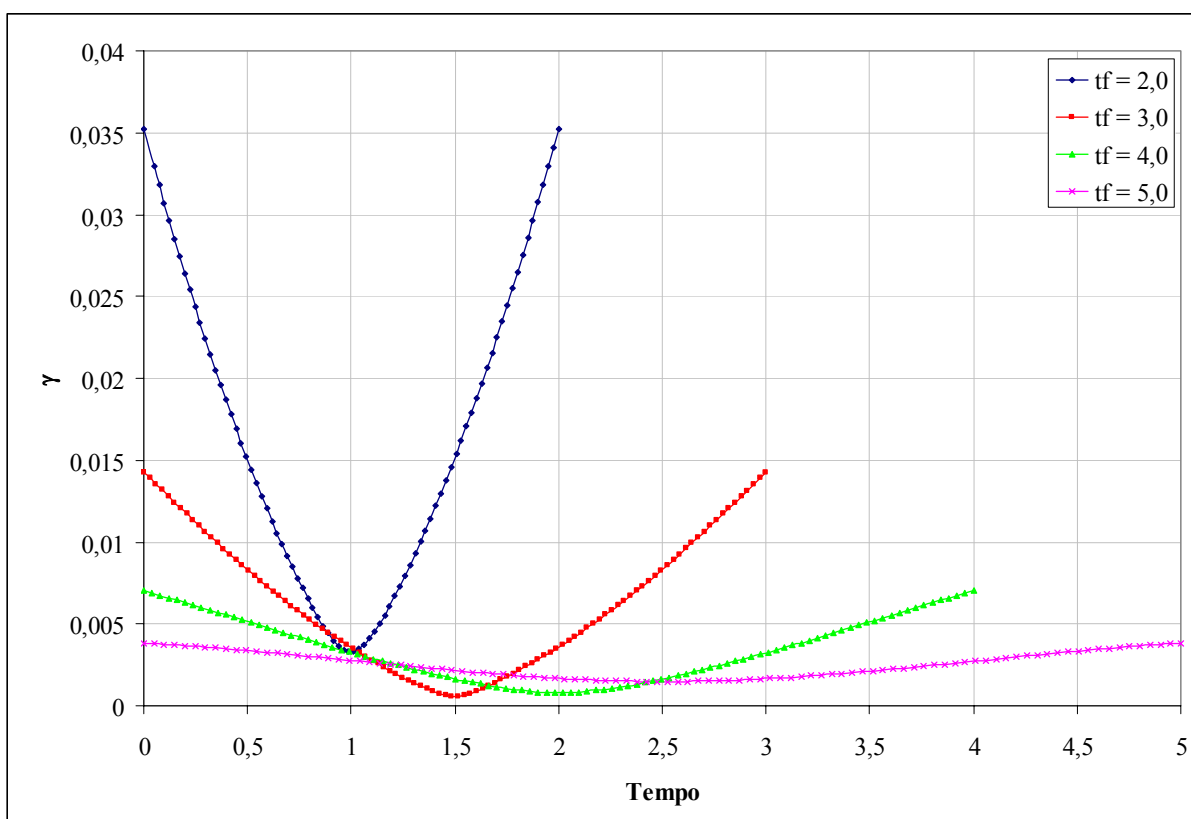


Figura VII.75. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e curta duração.

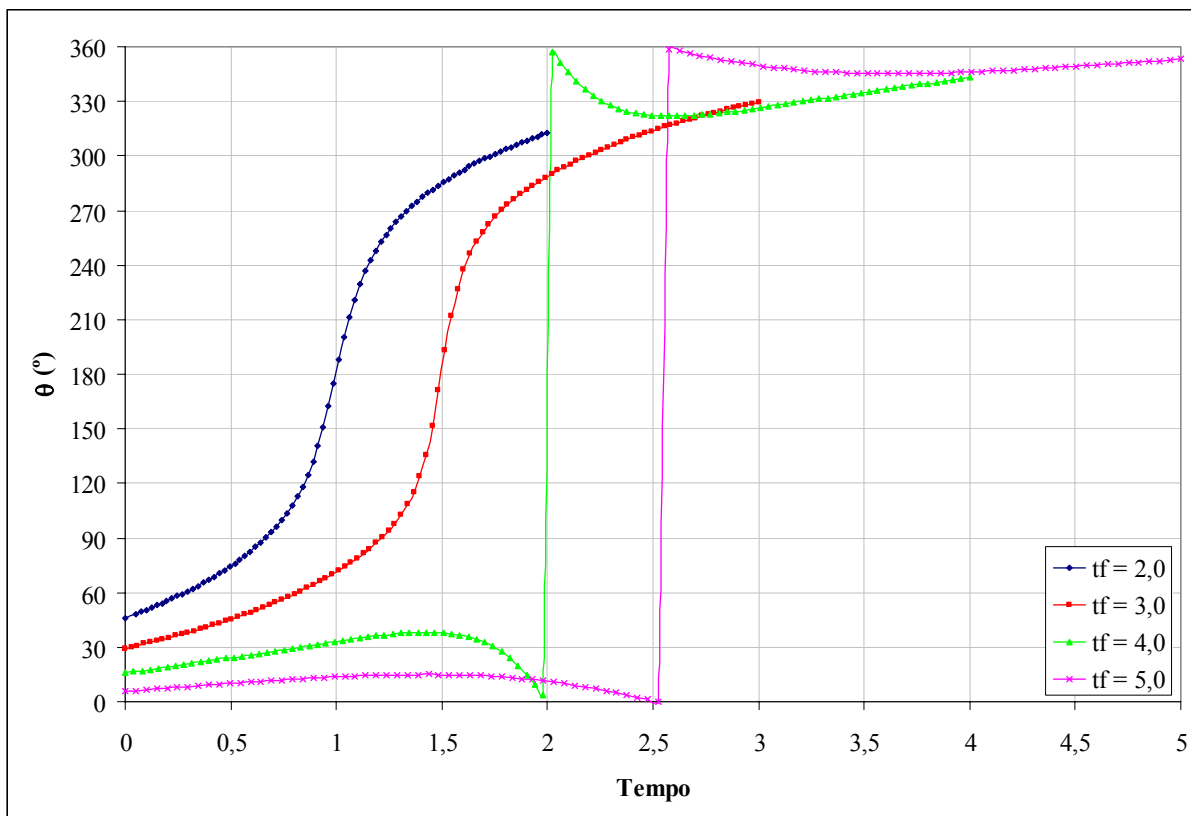


Figura VII.76. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e curta duração.

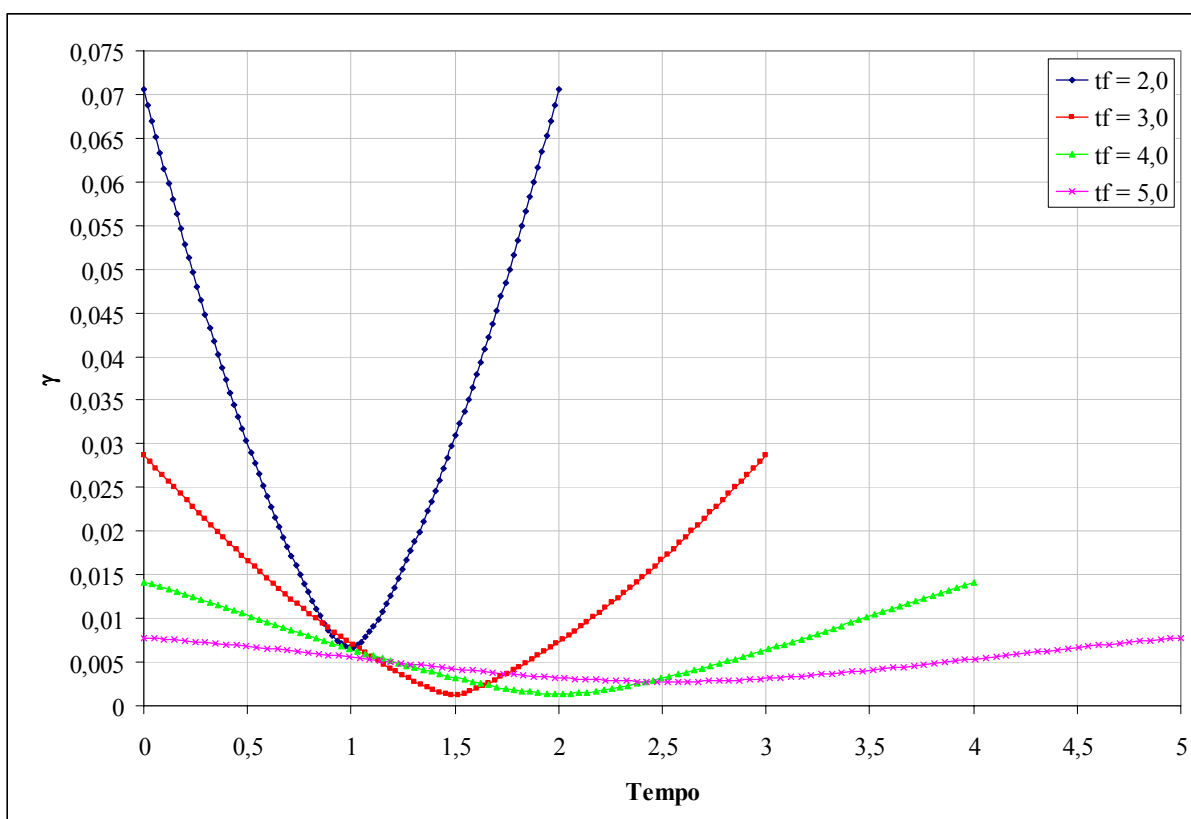


Figura VII.77. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e curta duração.

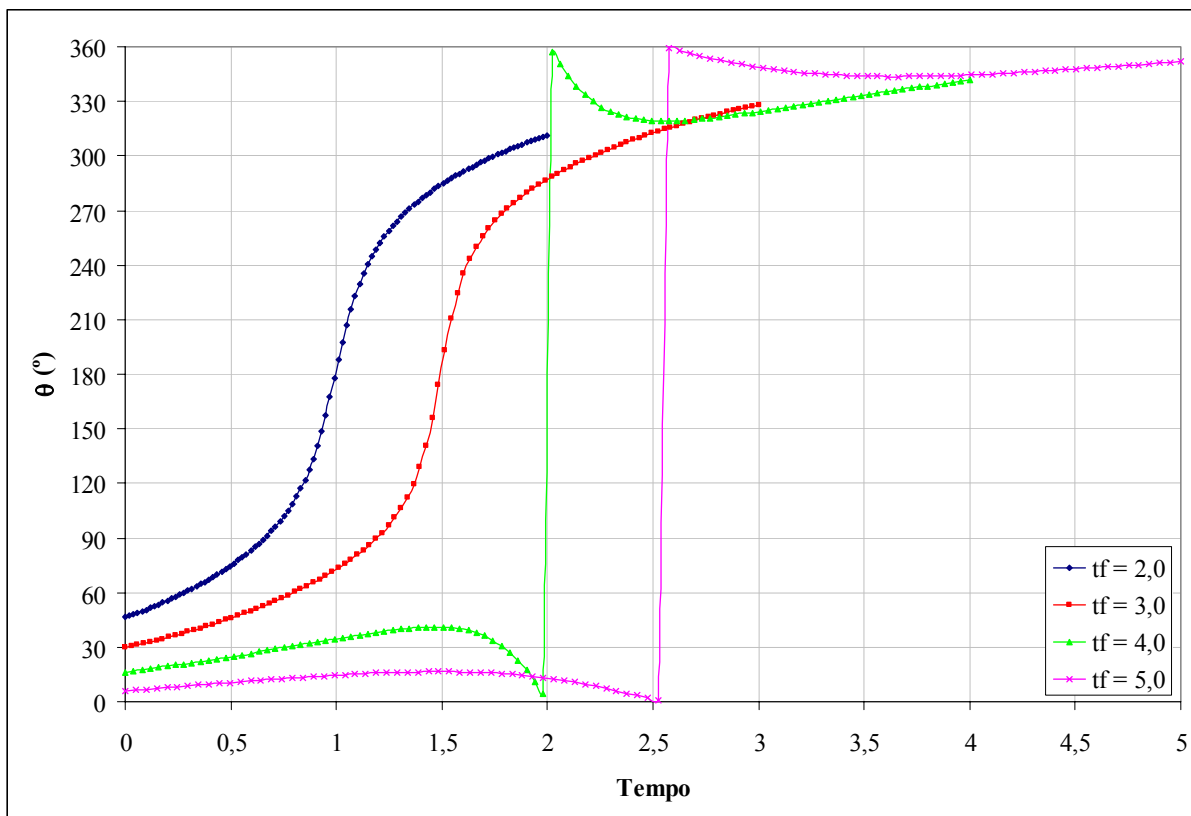


Figura VII.78. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e curta duração.

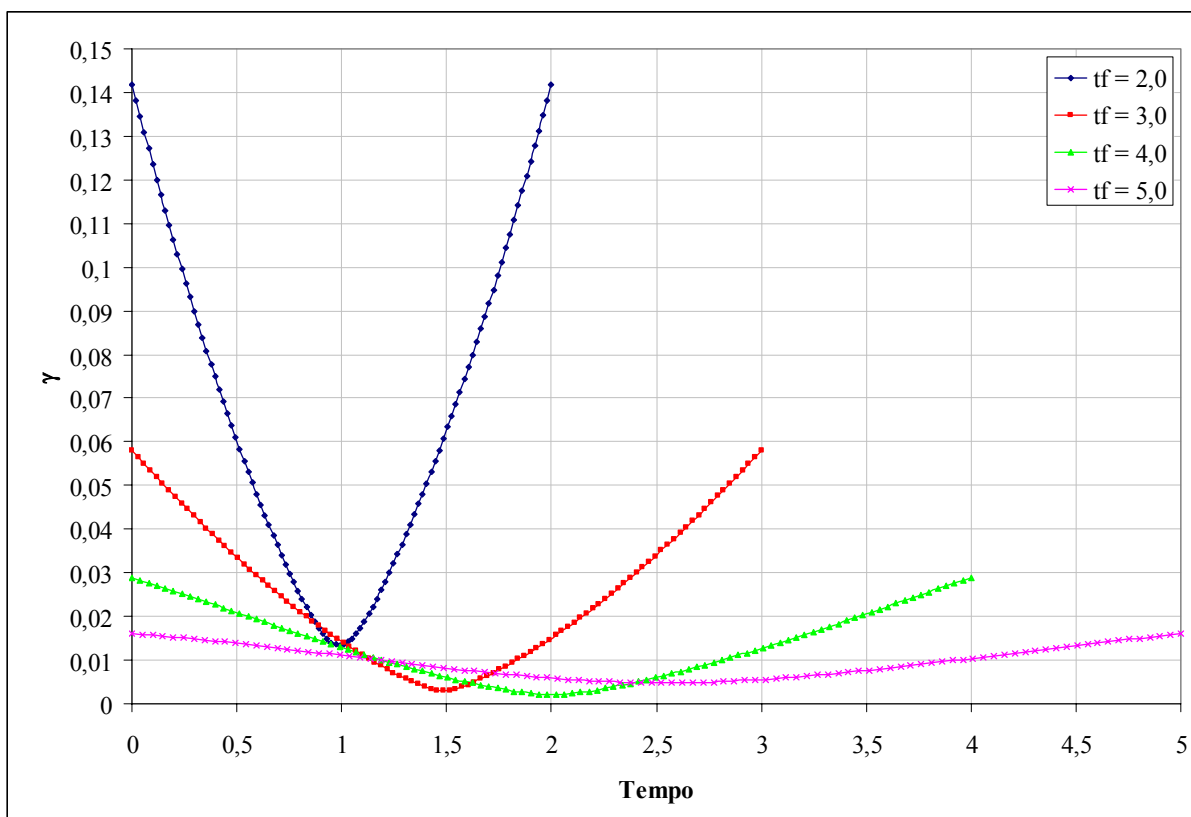


Figura VII.79. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e curta duração.

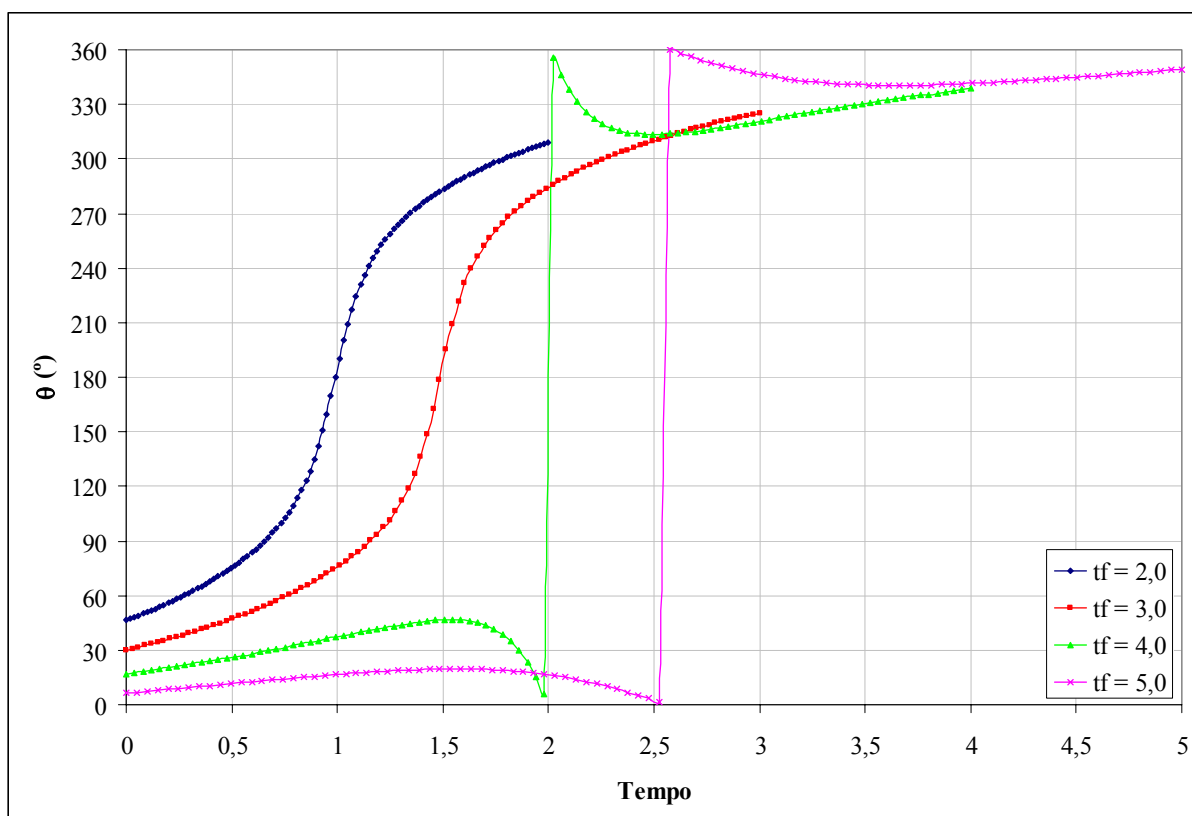


Figura VII.80. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e curta duração.

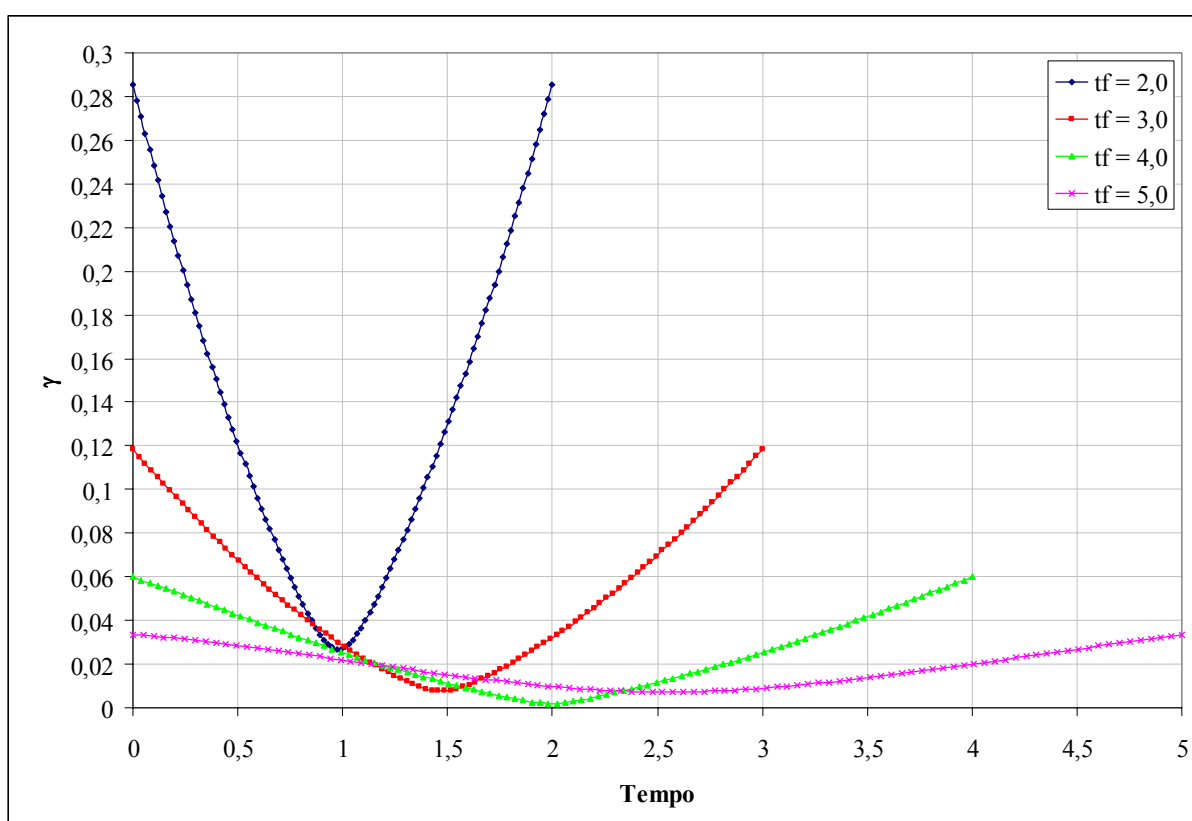


Figura VII.81. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e curta duração.

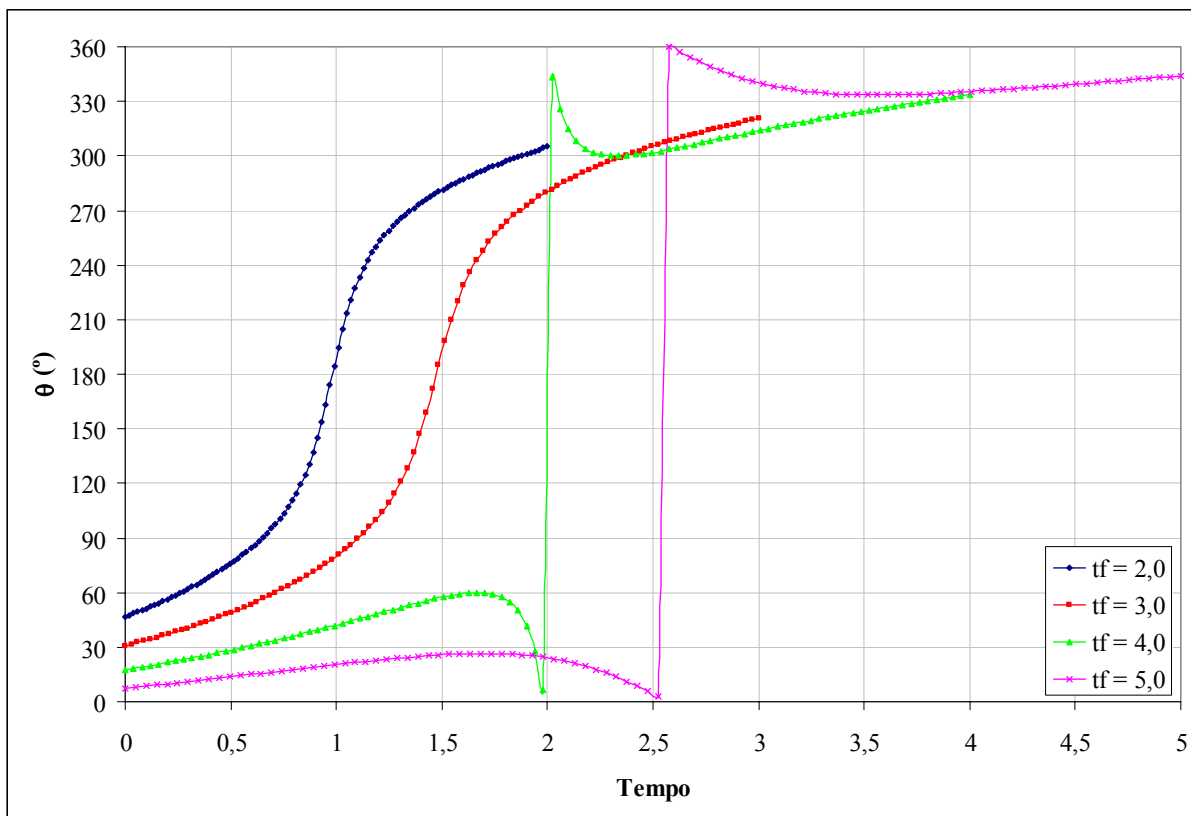


Figura VII.82. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e curta duração.

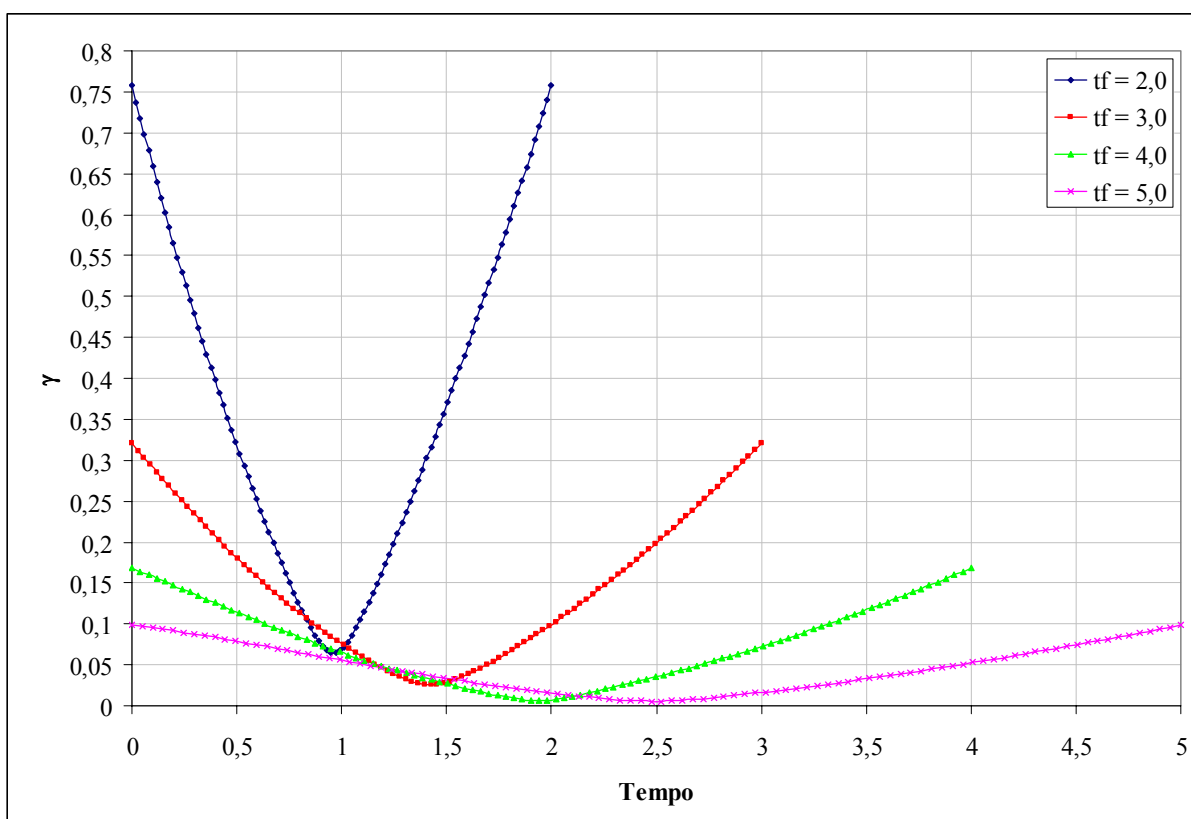


Figura VII.83. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e curta duração.

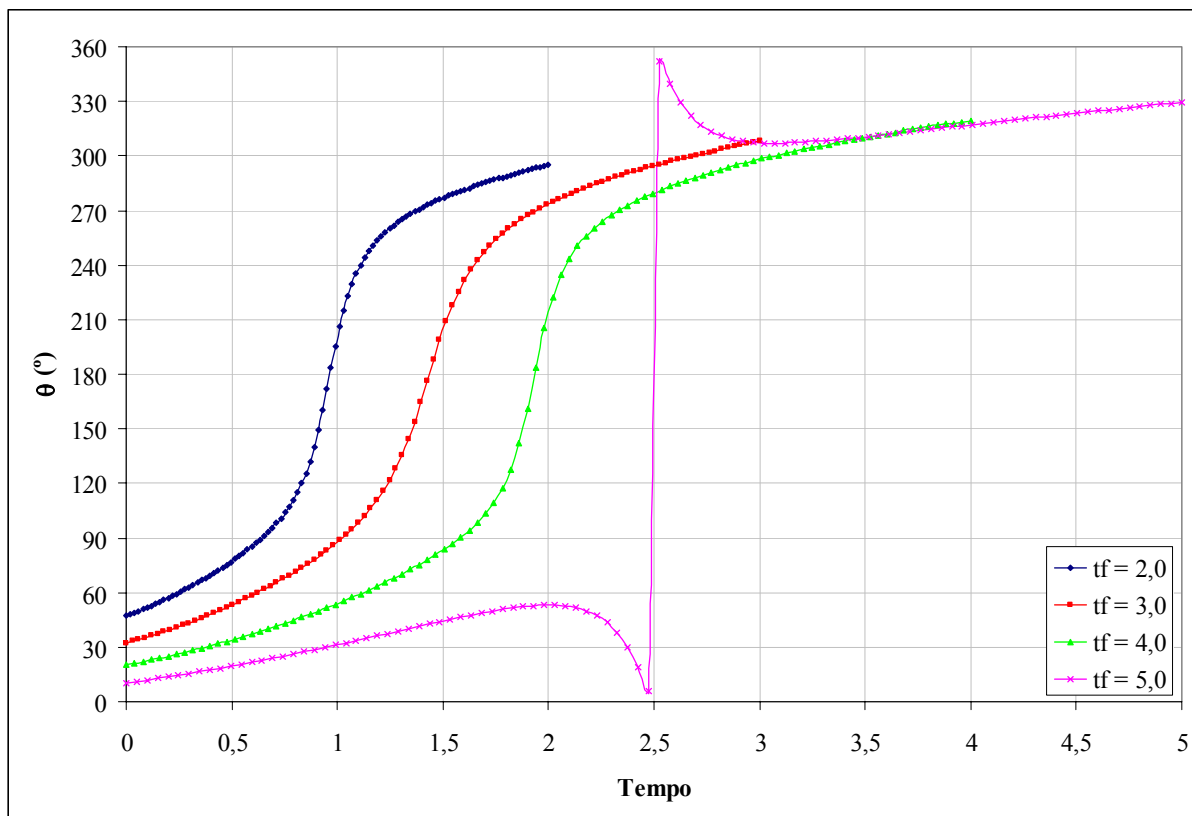


Figura VII.84. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e curta duração.

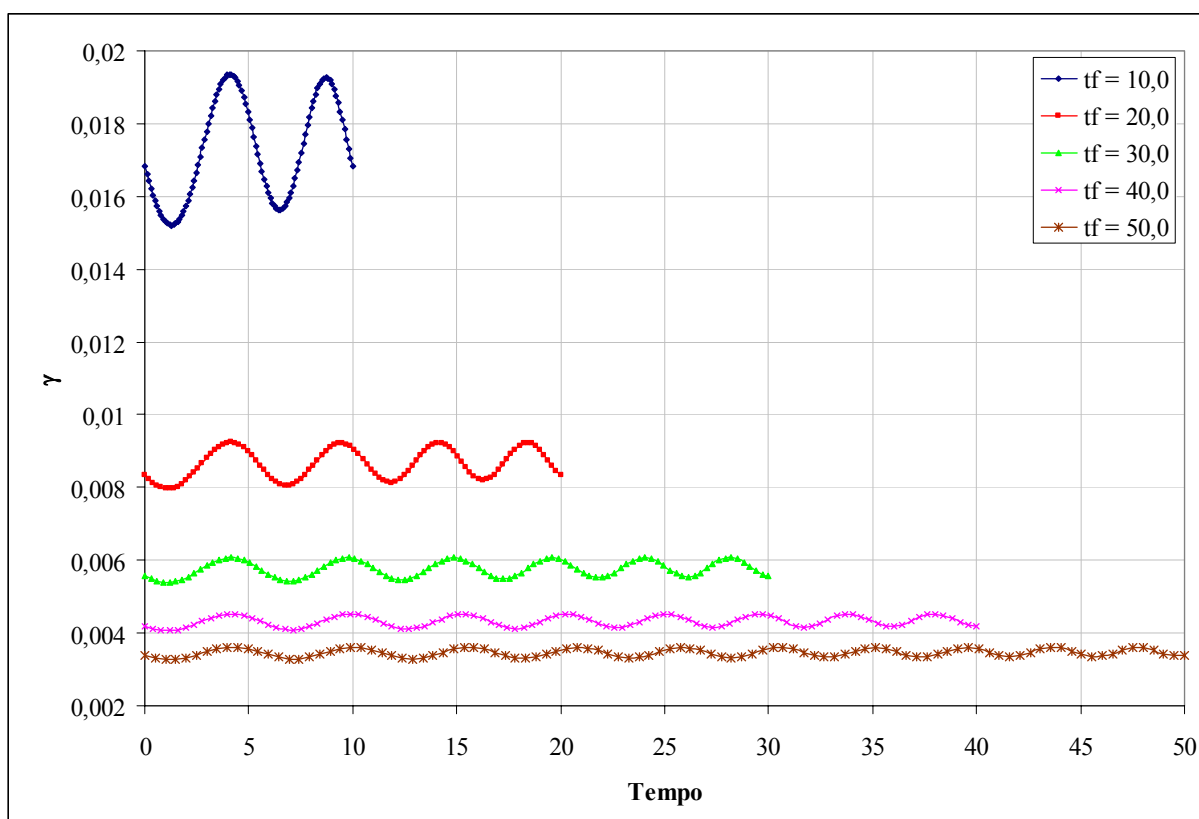


Figura VII.85. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e longa duração.

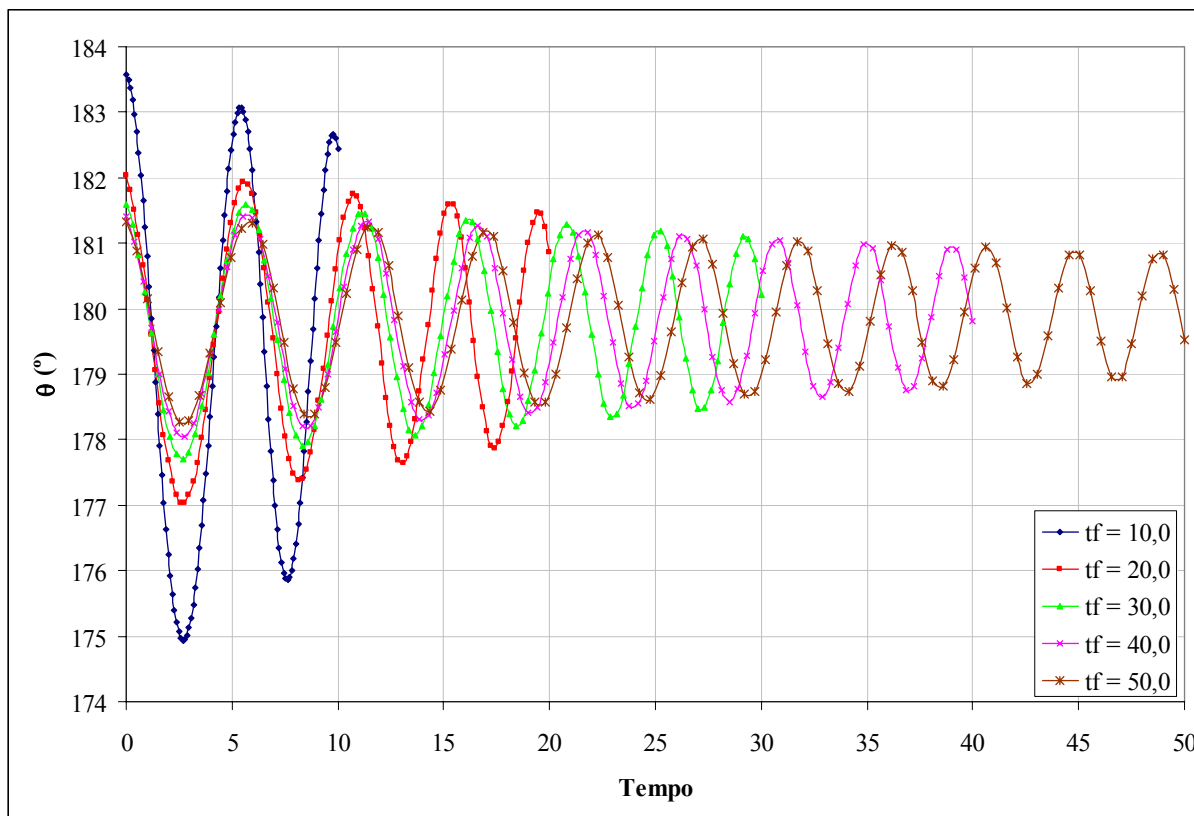


Figura VII.86. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,7270$ e longa duração.

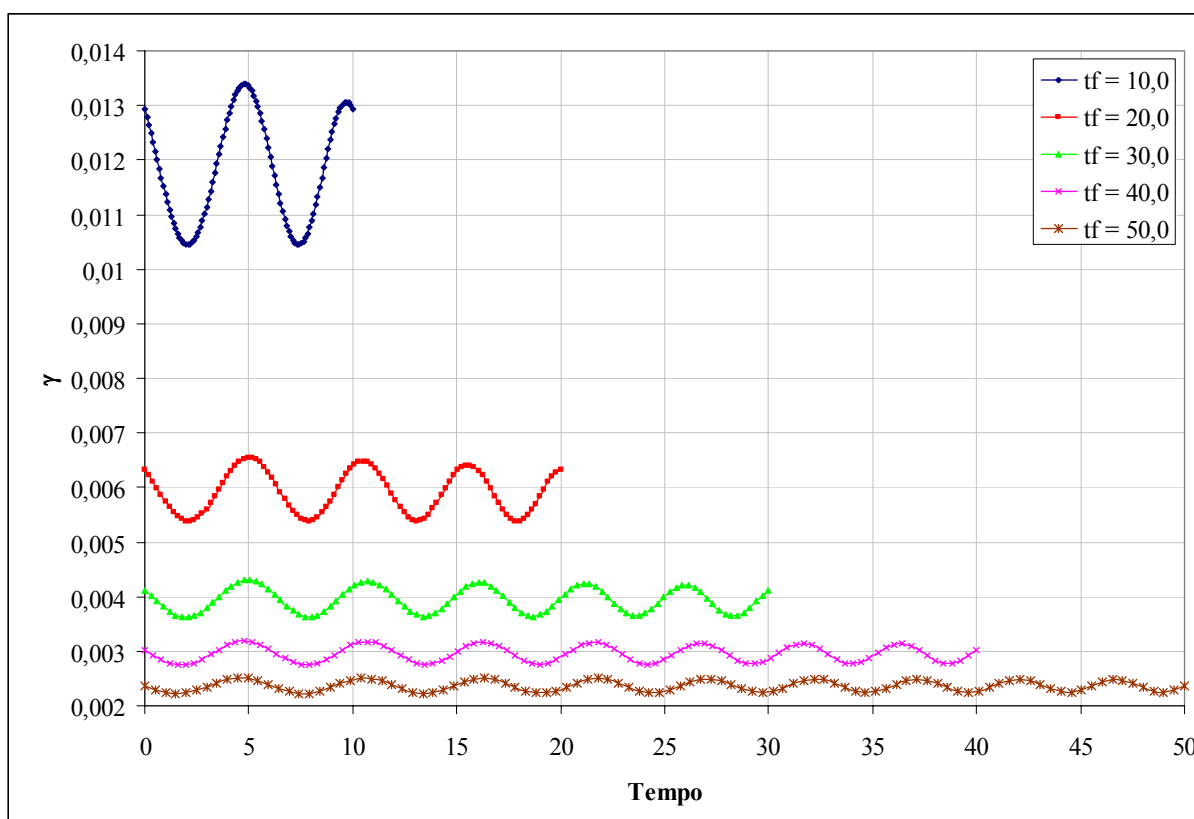


Figura VII.87. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e longa duração.

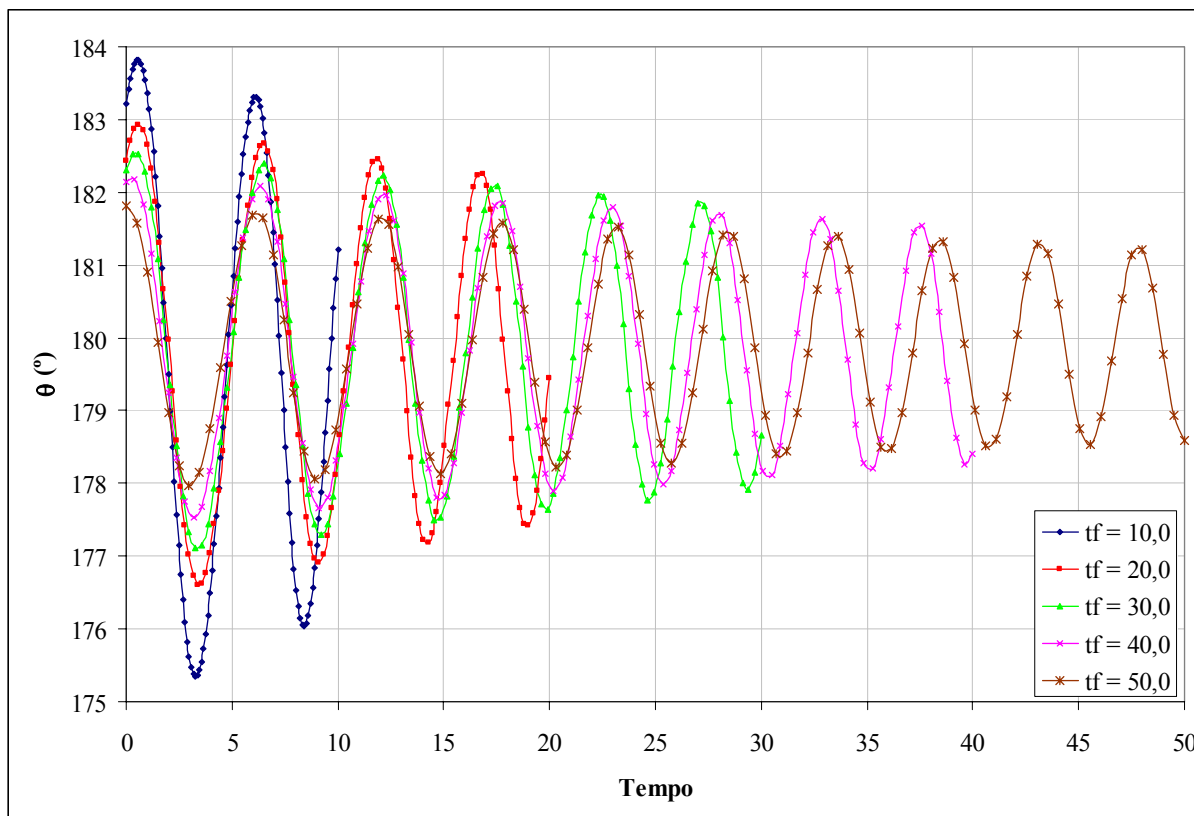


Figura VII.88. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,8000$ e longa duração.

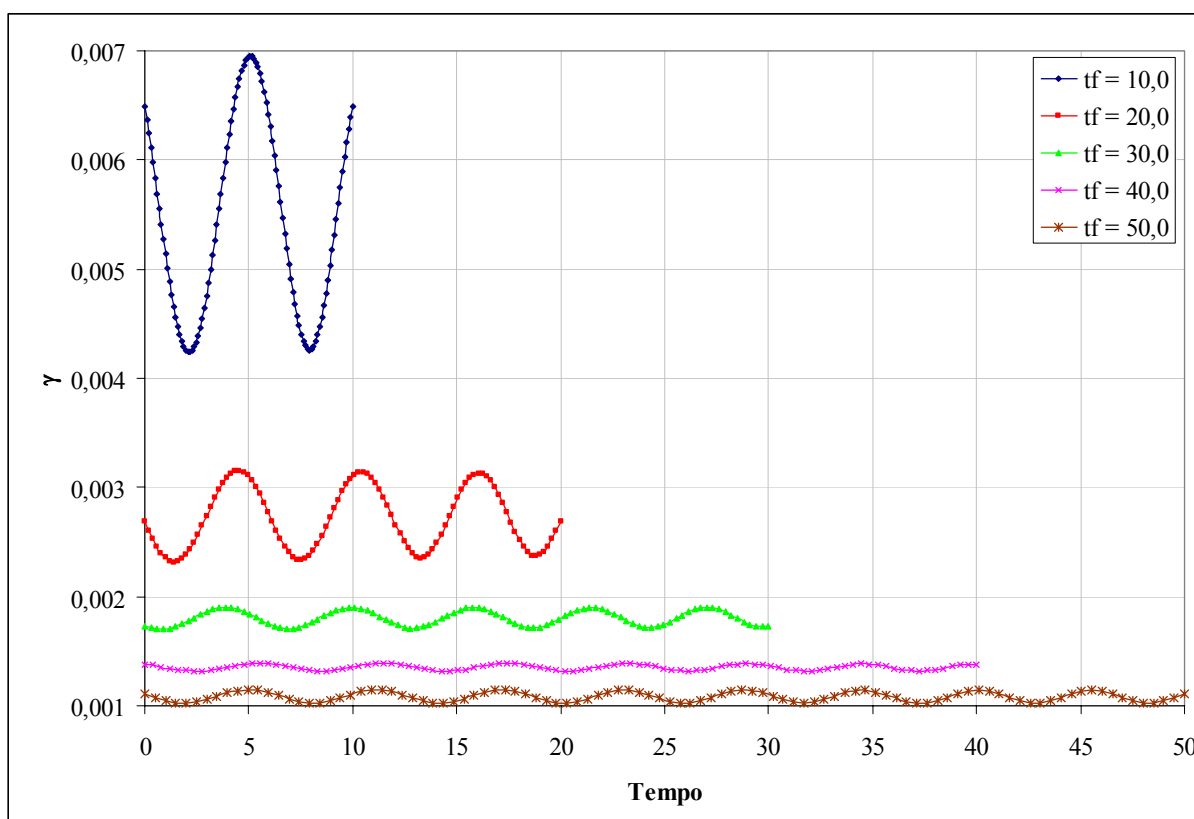


Figura VII.89. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e longa duração.

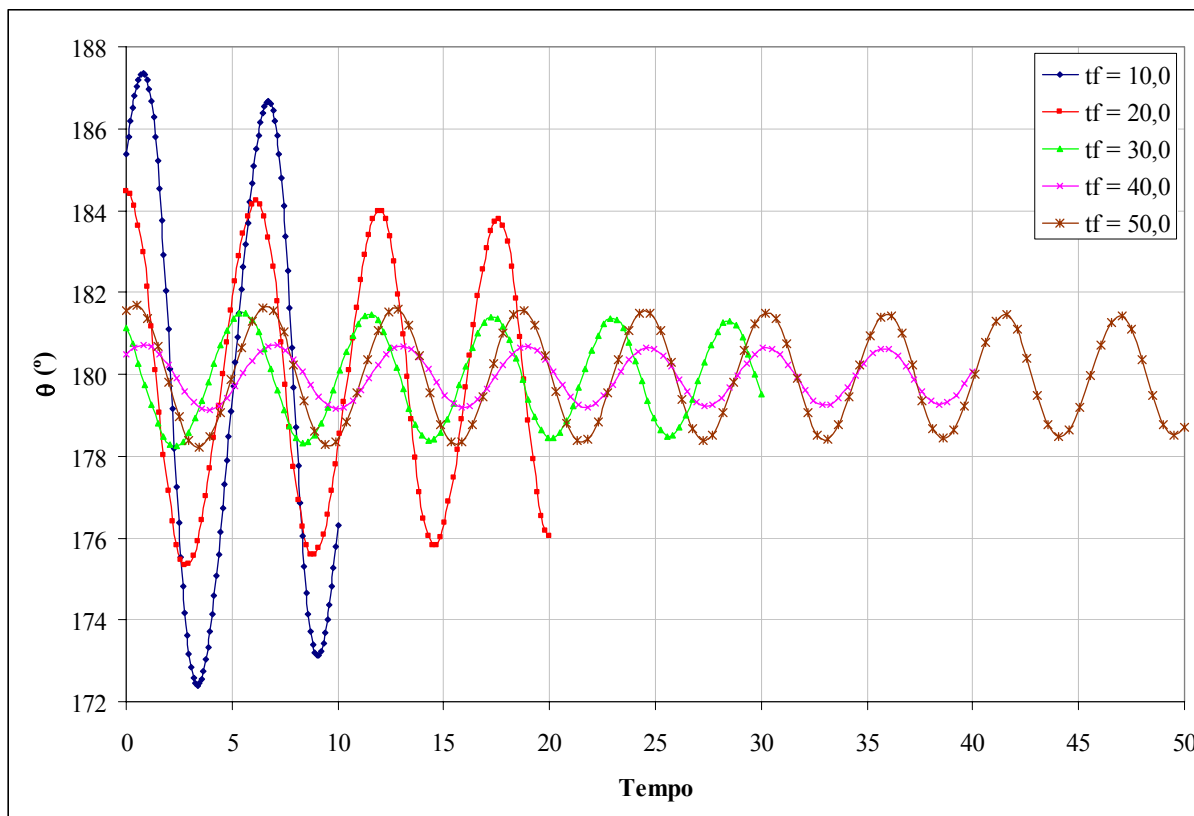


Figura VII.90. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,9000$ e longa duração.

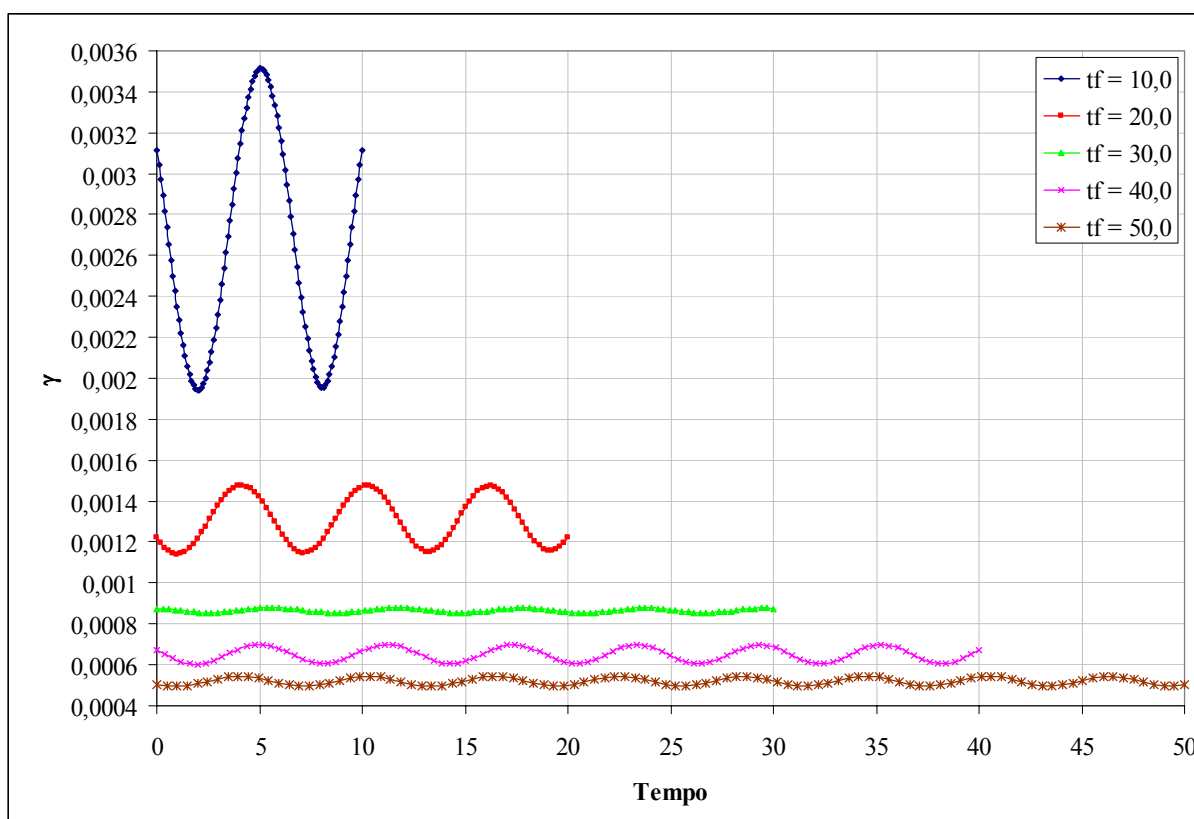


Figura VII.91. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e longa duração.

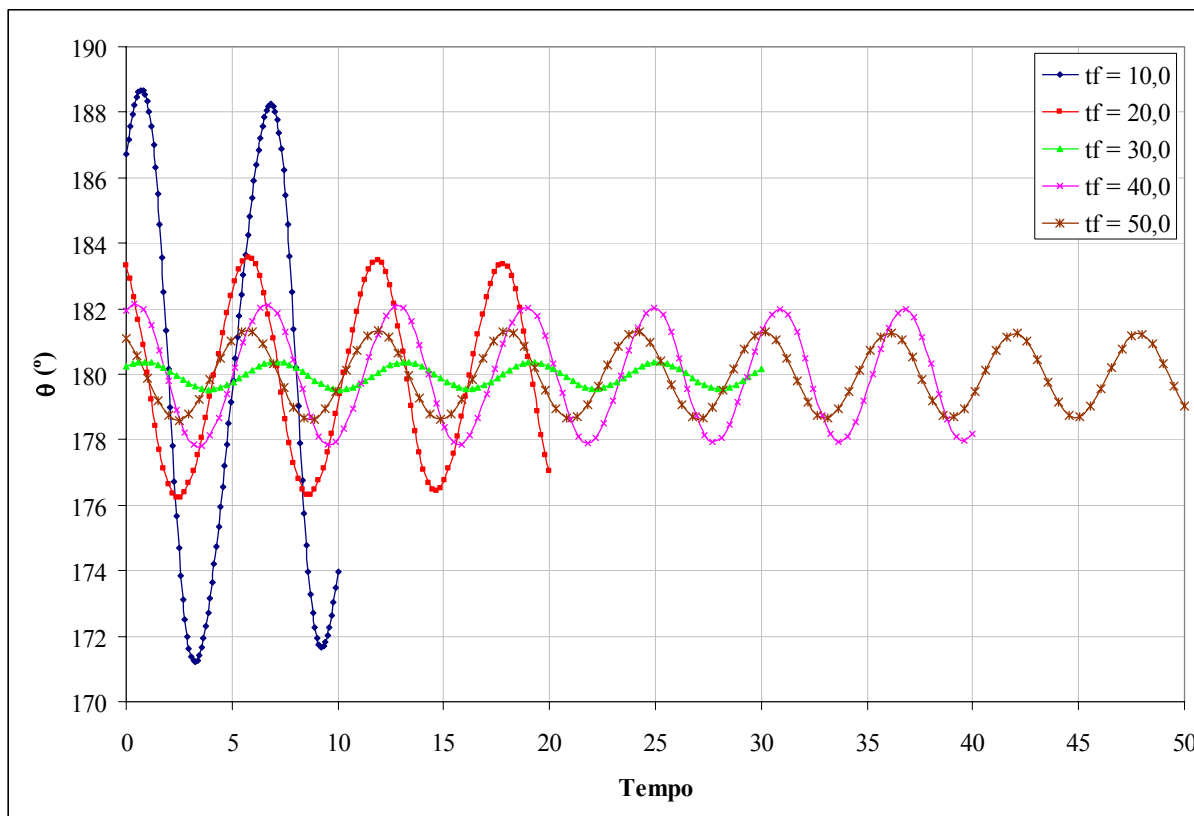


Figura VII.92. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,9500$ e longa duração.

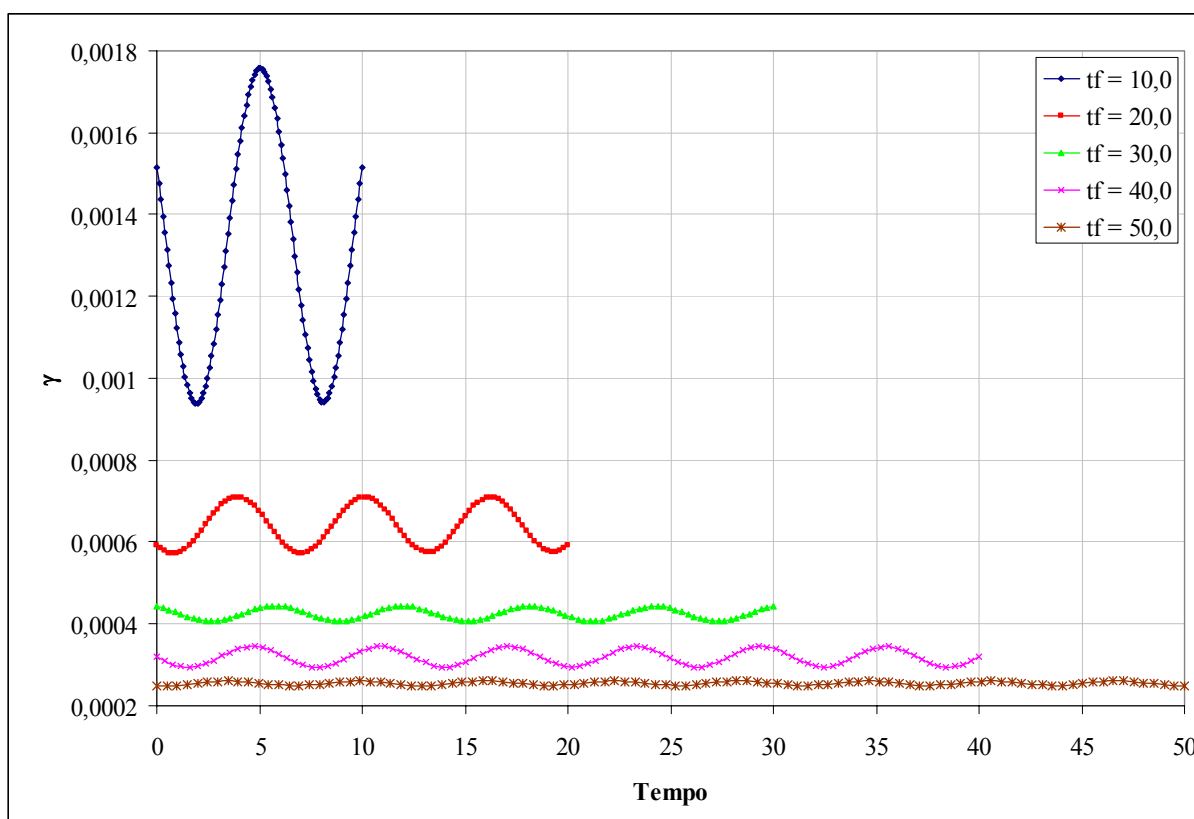


Figura VII.93. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e longa duração.

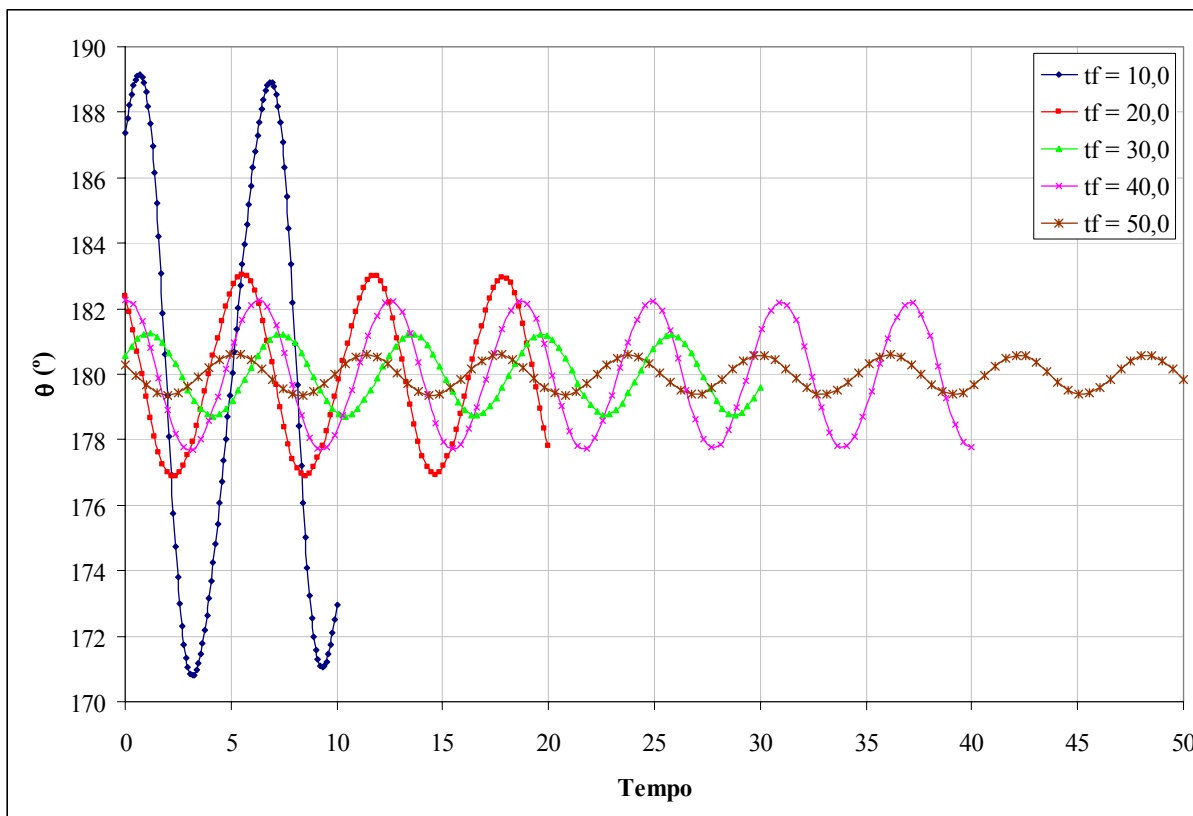


Figura VII.94. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 0,9750$ e longa duração.

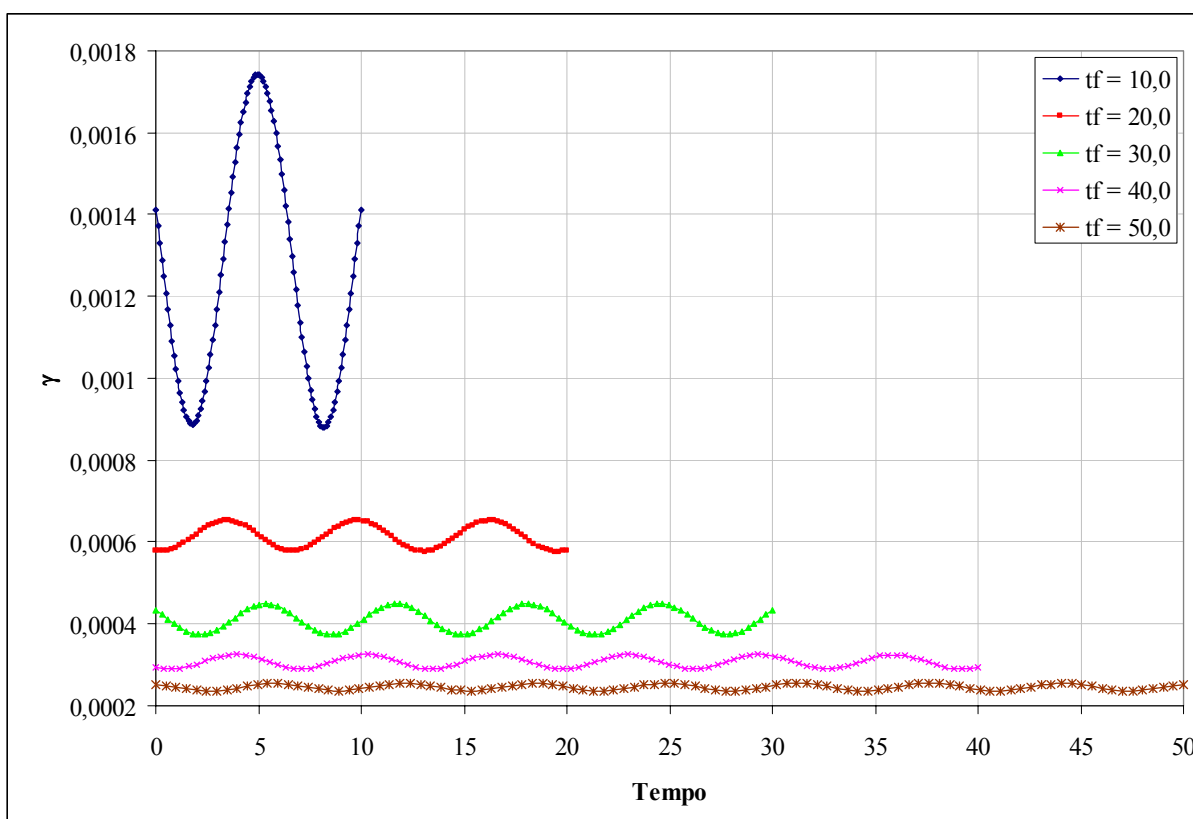


Figura VII.95. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e longa duração.

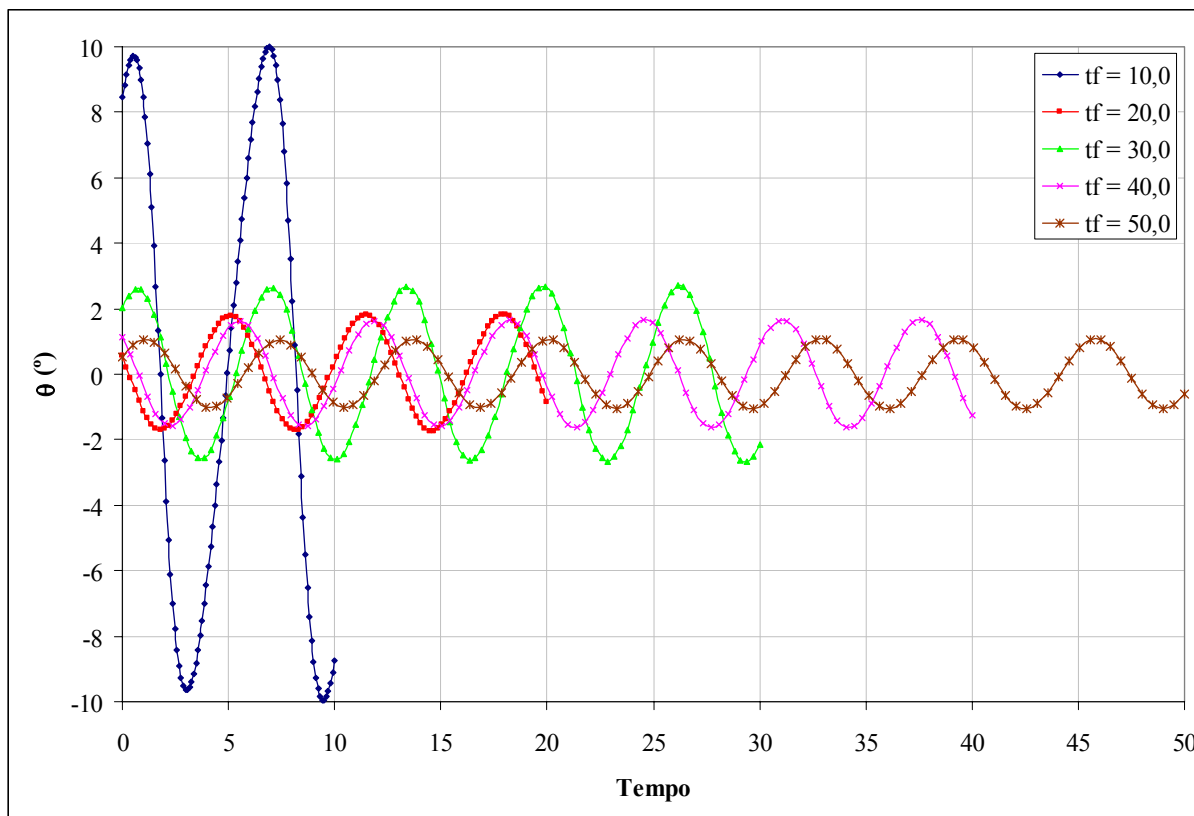


Figura VII.96. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,0250$ e longa duração.

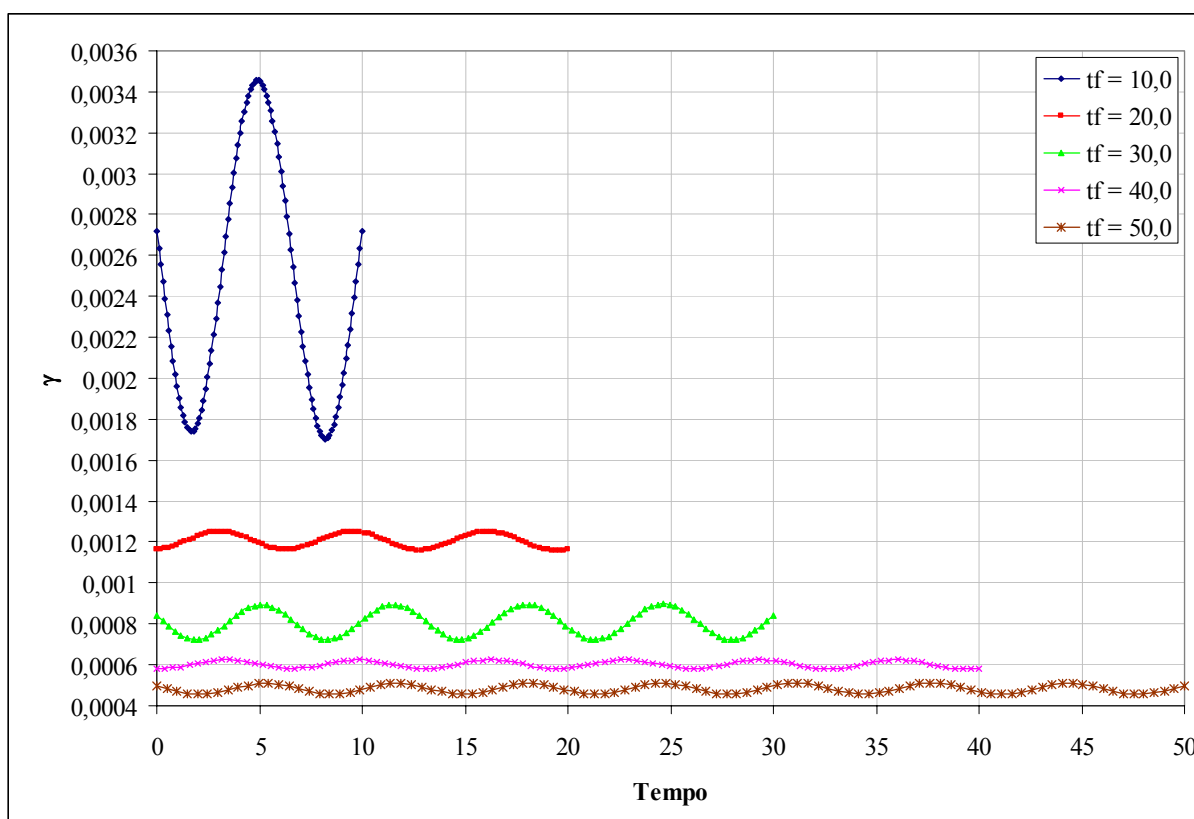


Figura VII.97. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e longa duração.

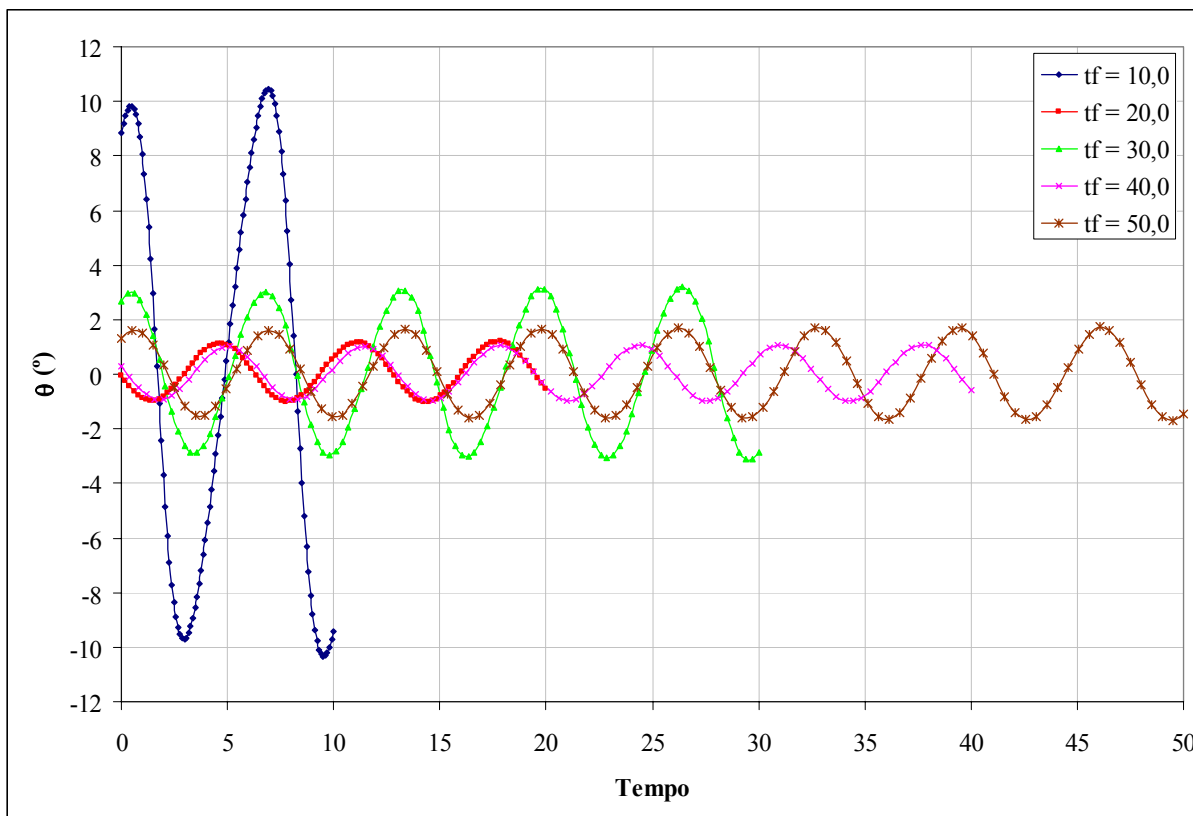


Figura VII.98. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,0500$ e longa duração.

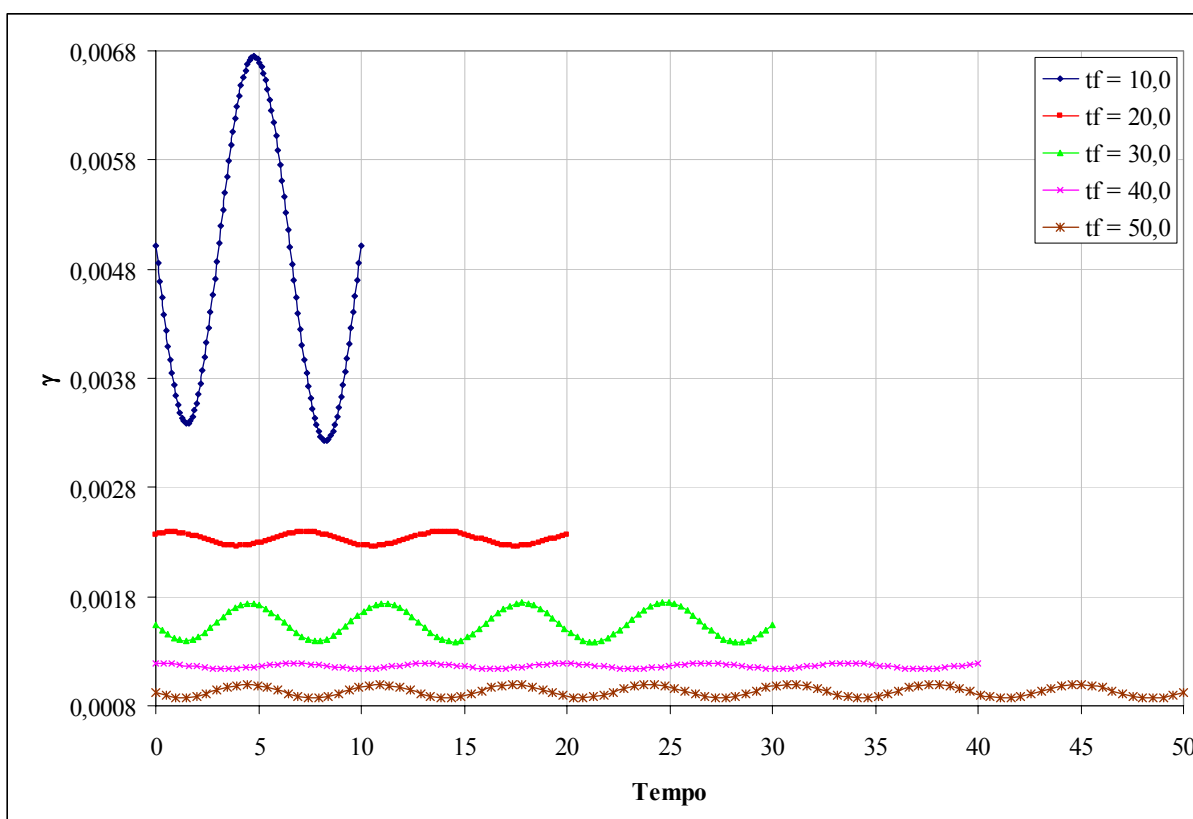


Figura VII.99. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e longa duração.

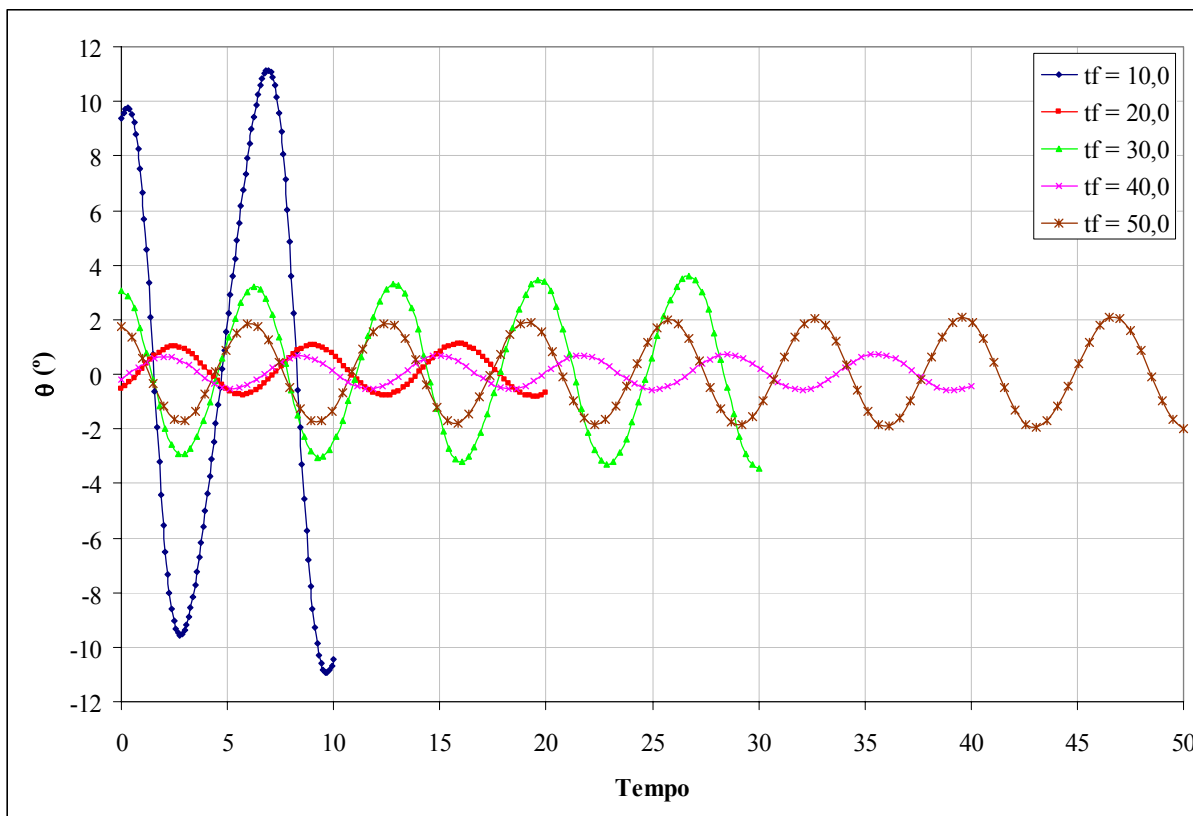


Figura VII.100. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,1000$ e longa duração.

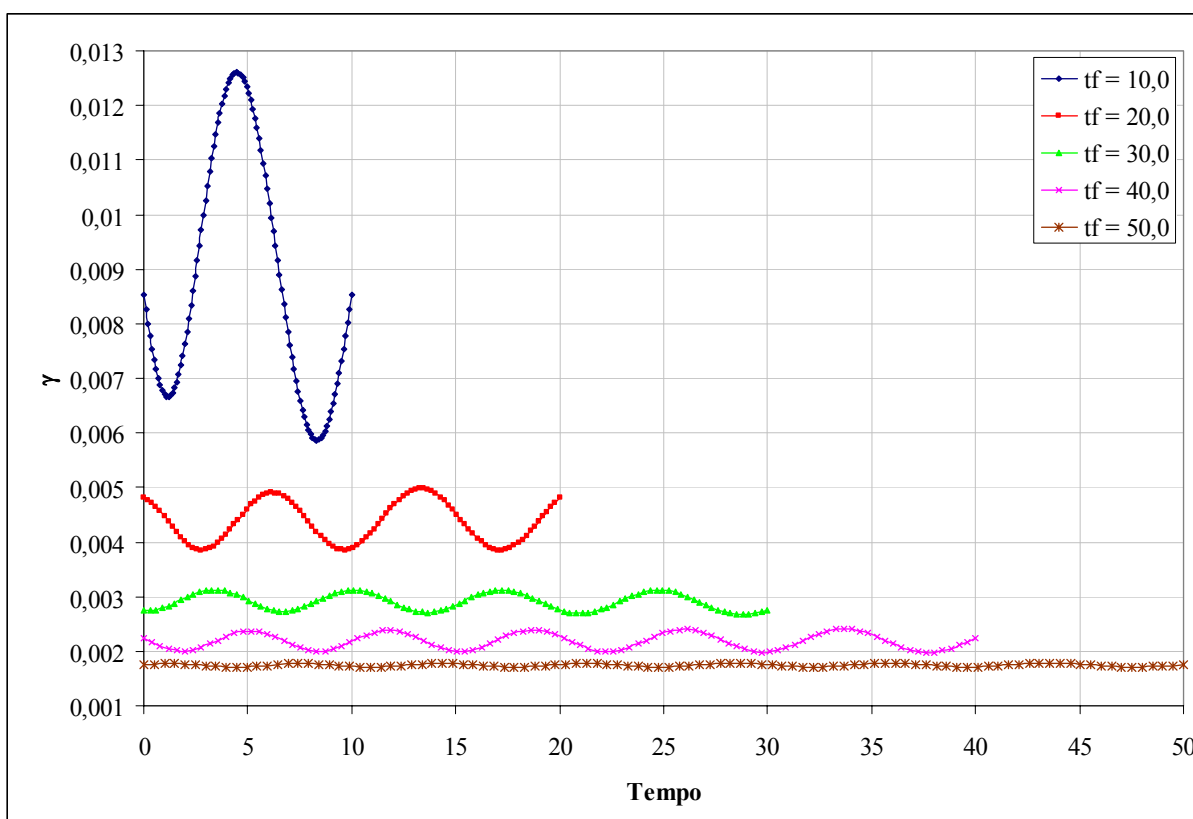


Figura VII.101. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e longa duração.

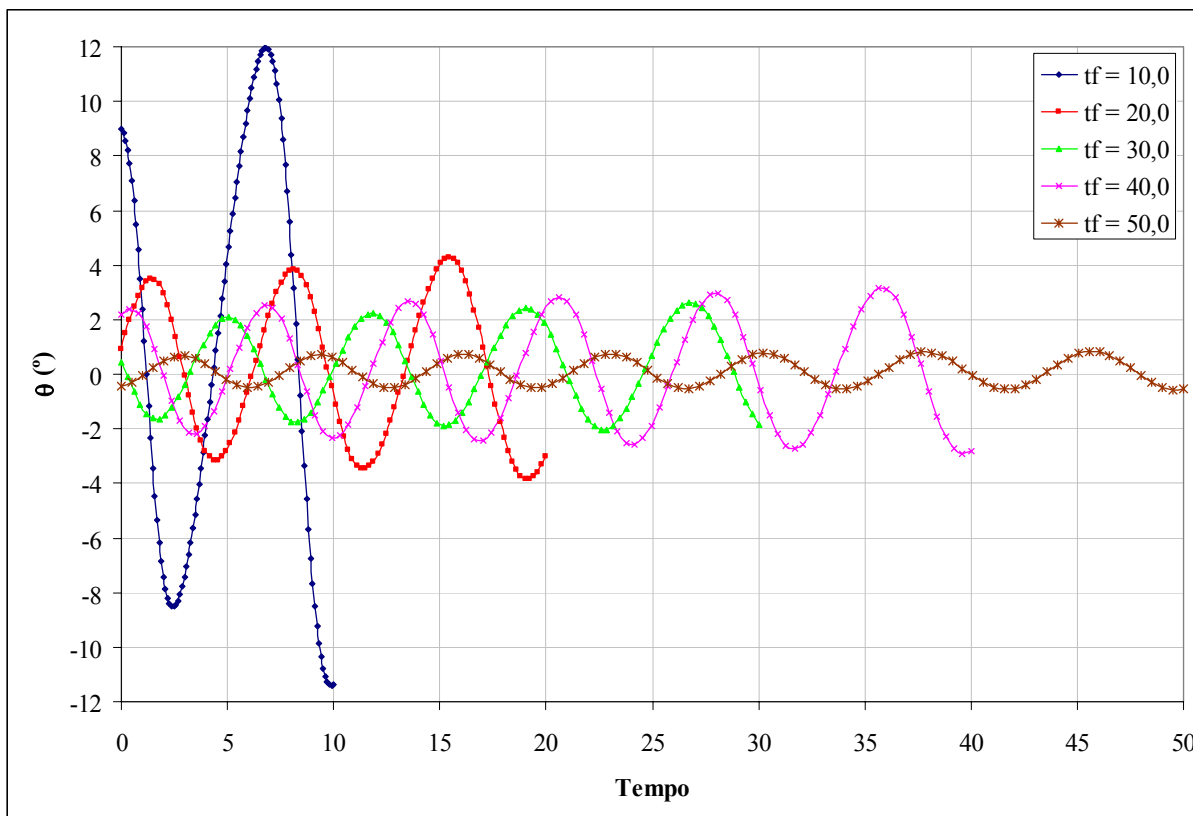


Figura VII.102. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,2000$ e longa duração.

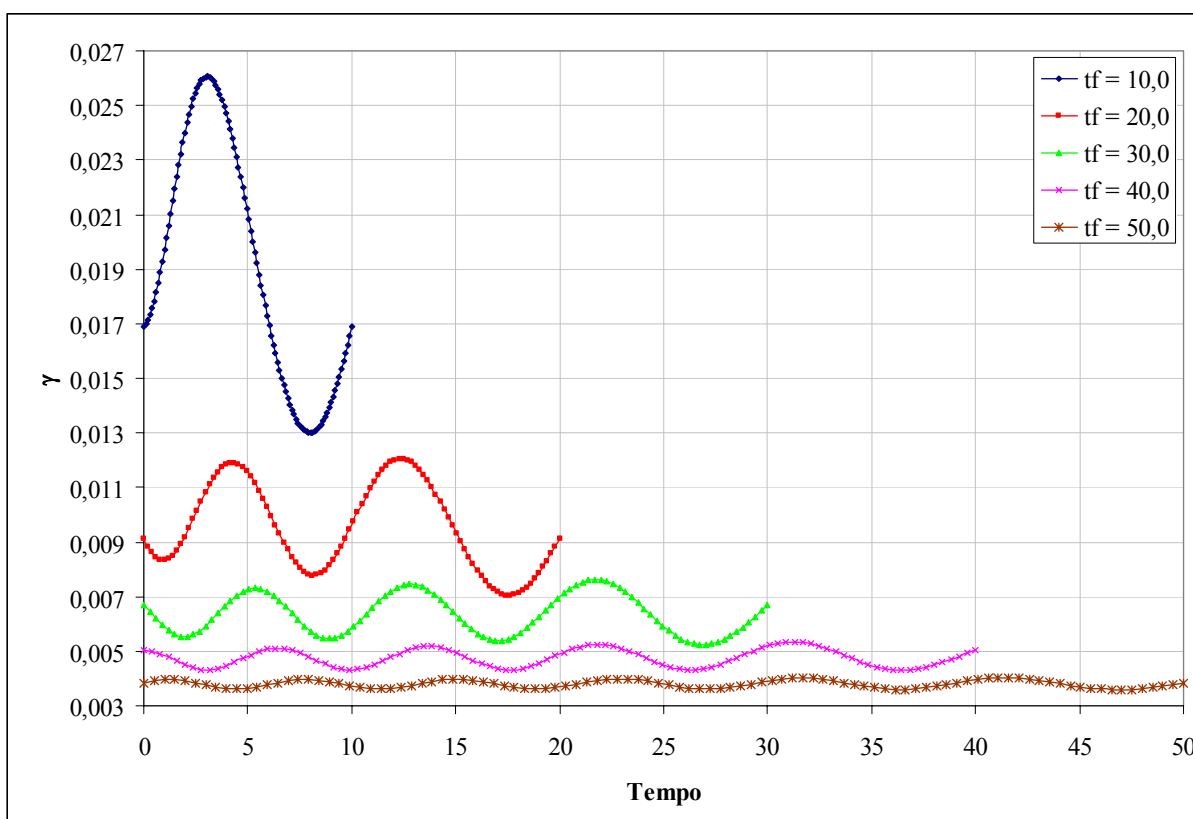


Figura VII.103. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e longa duração.

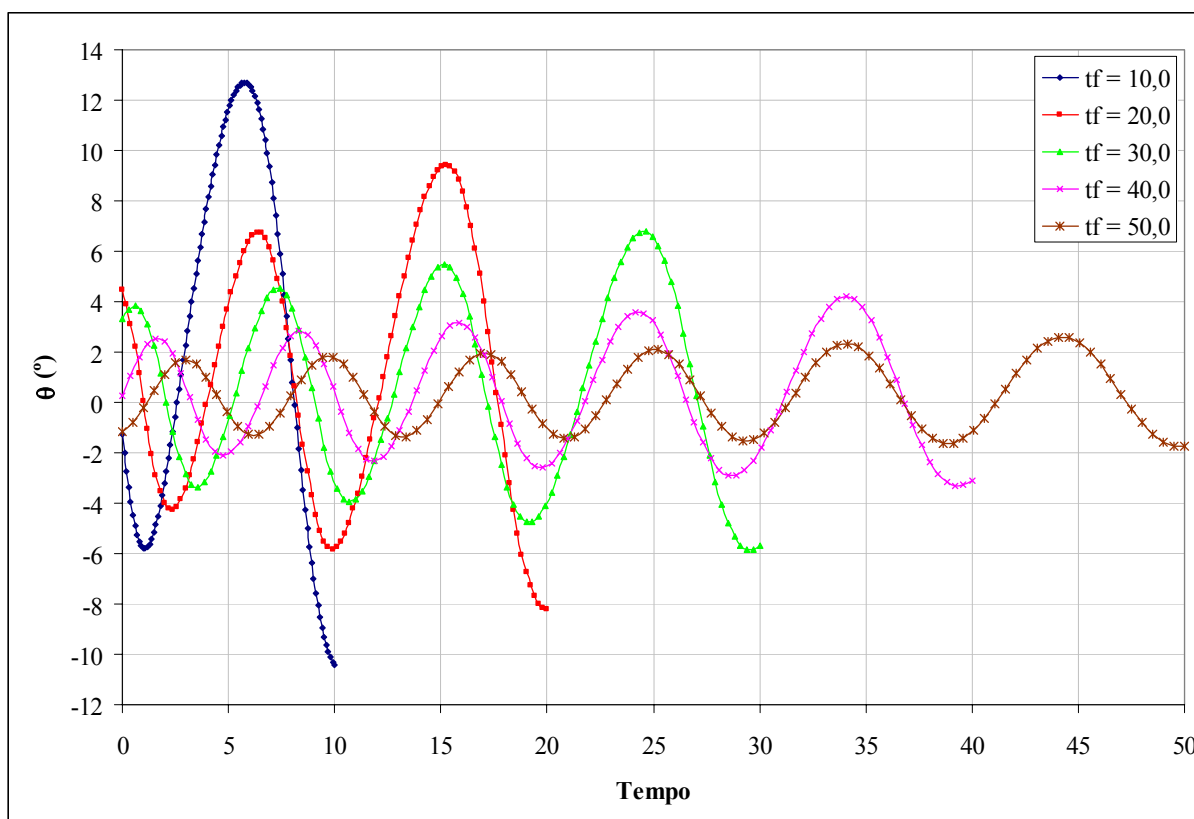


Figura VII.104. Evolução temporal da direção da aceleração θ – sistema PL – $\rho = 1,5236$ e longa duração.

VII.3 - TRANSFERÊNCIAS A VELOCIDADE DE EJEÇÃO CONSTANTE

VII.3.1 Sistema Linearizado

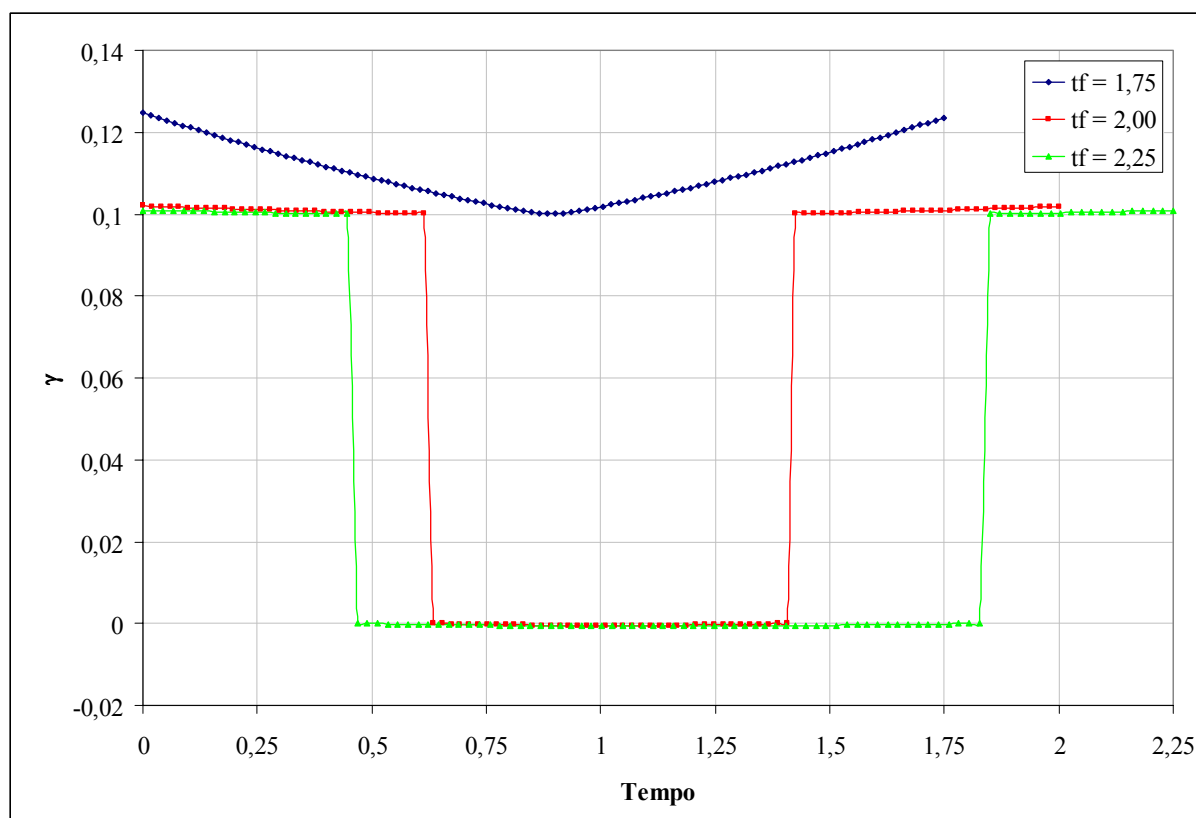


Figura VII.105. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

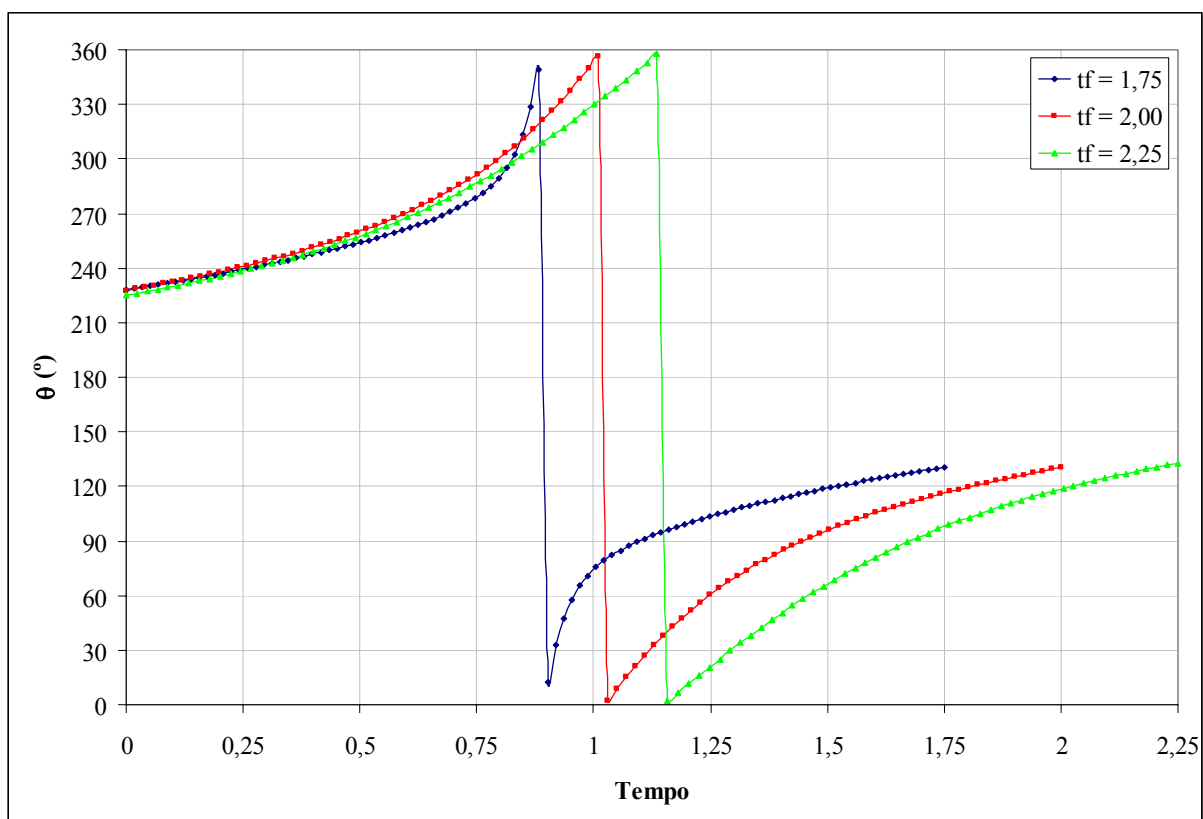


Figura VII.106. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

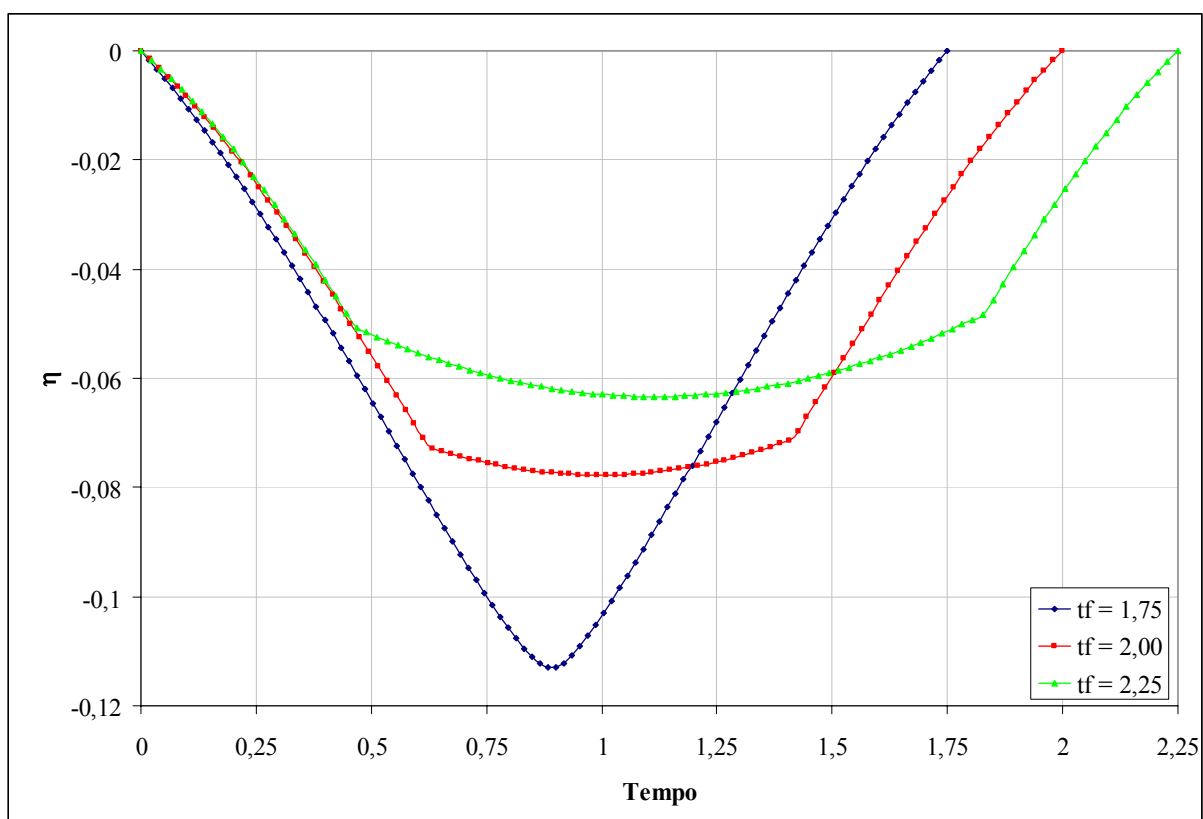


Figura VII.107. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

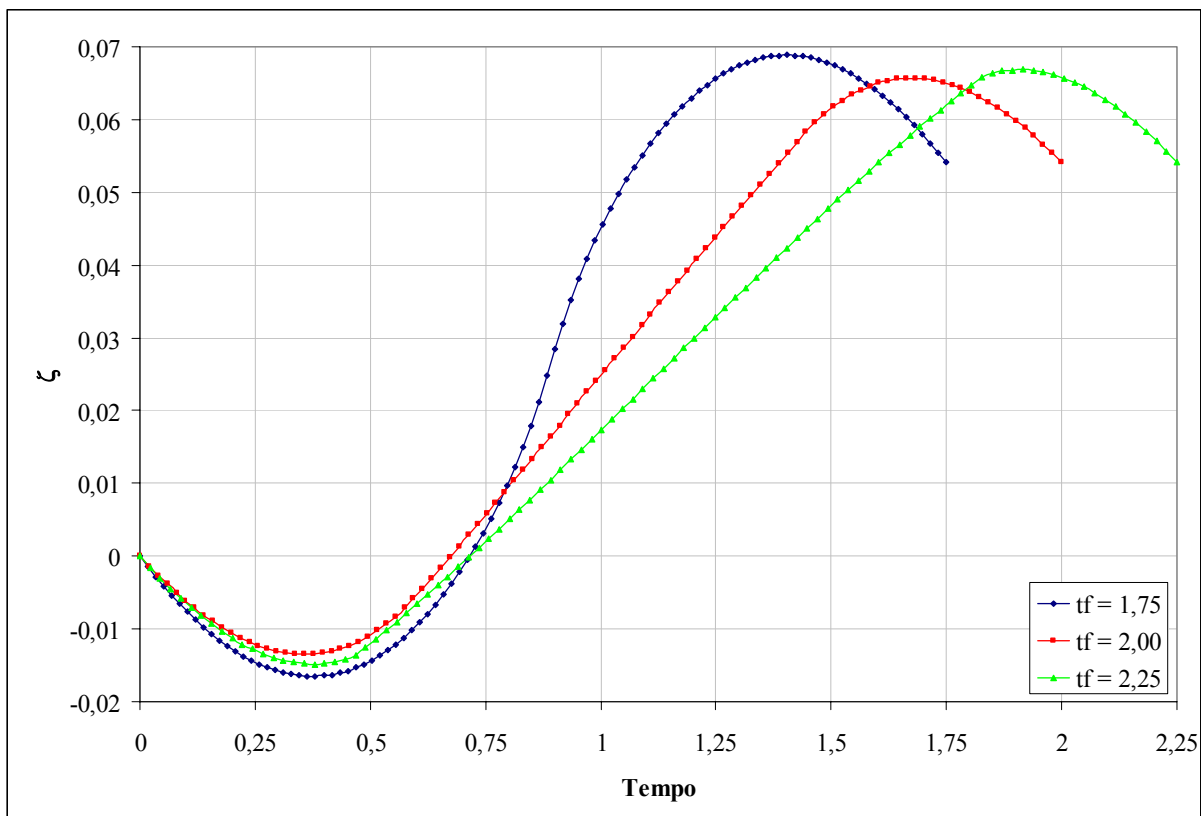


Figura VII.108. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

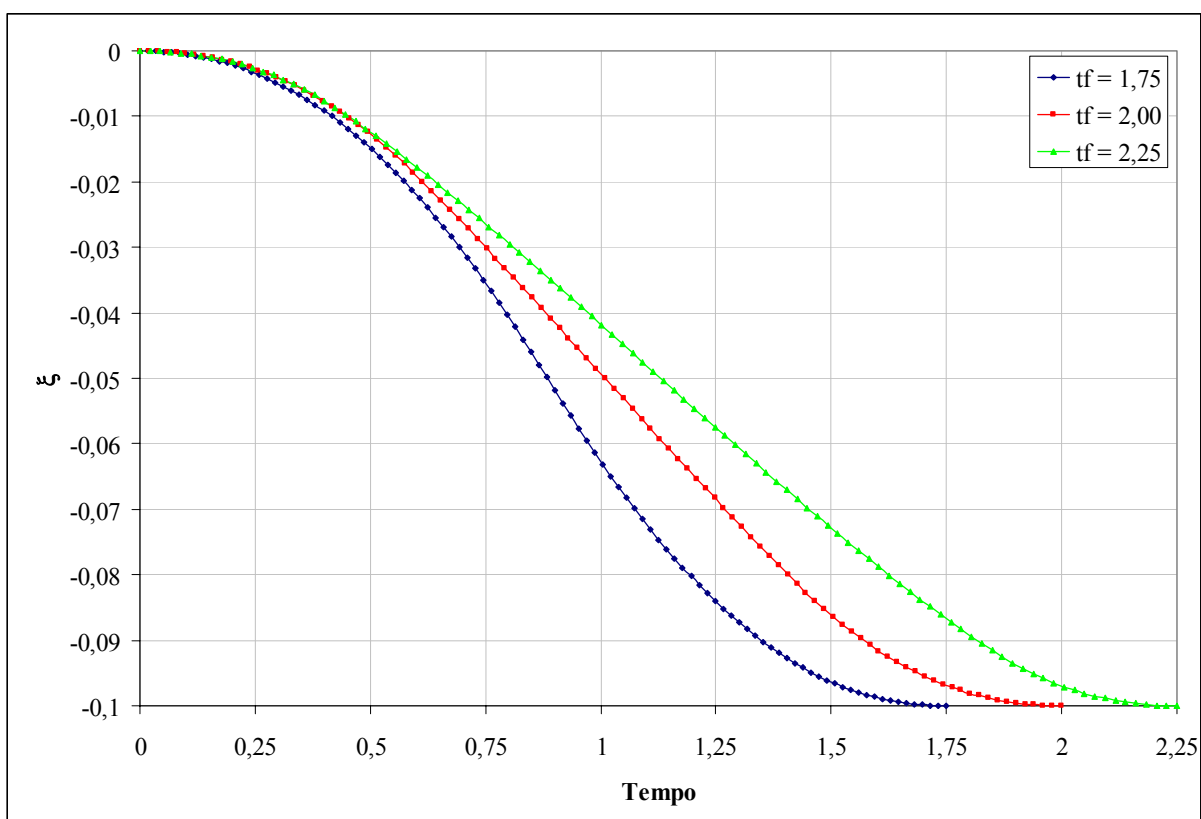


Figura VII.109. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

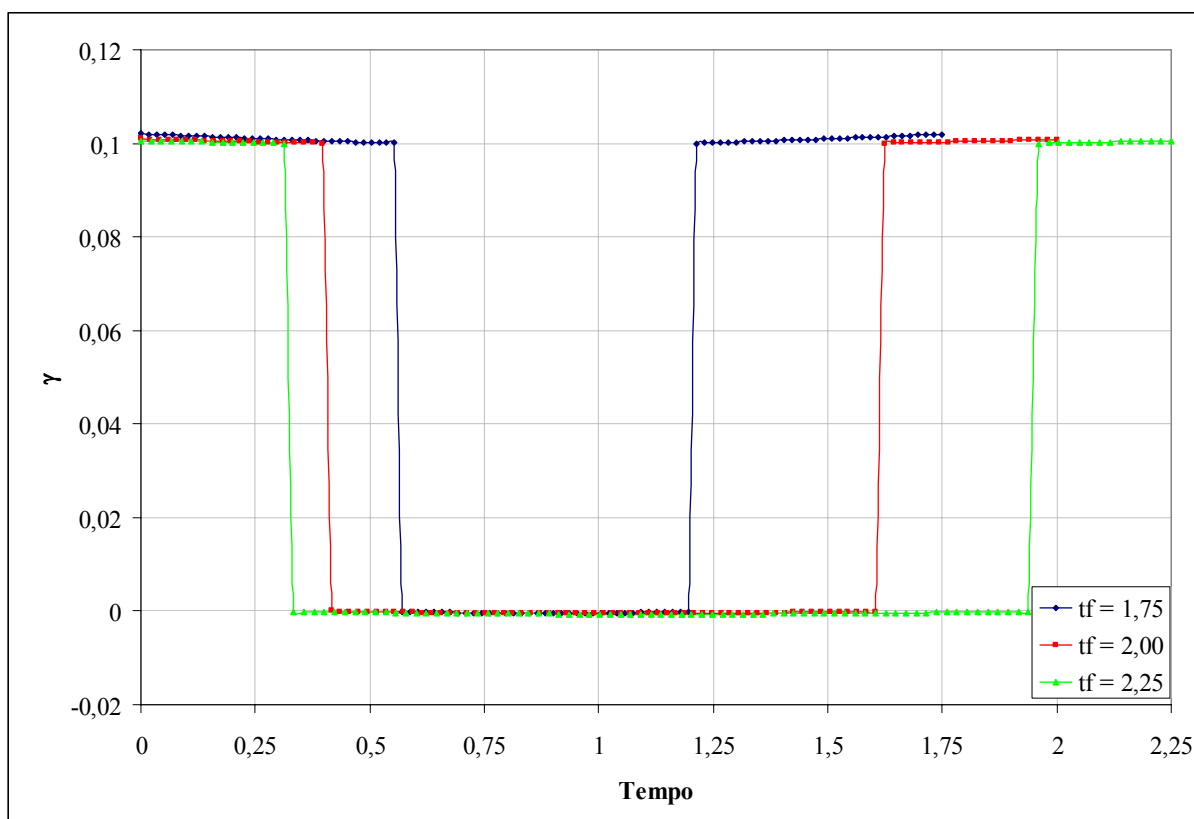


Figura VII.110. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

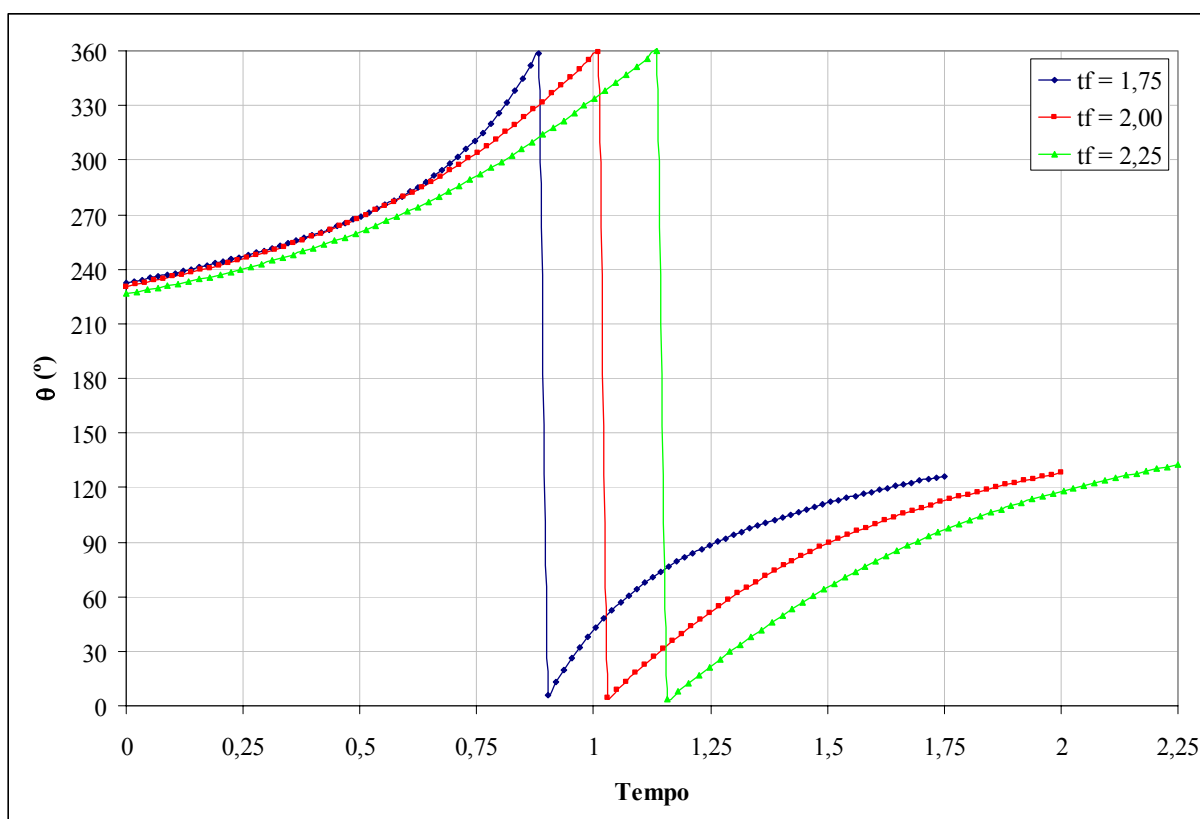


Figura VII.111. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

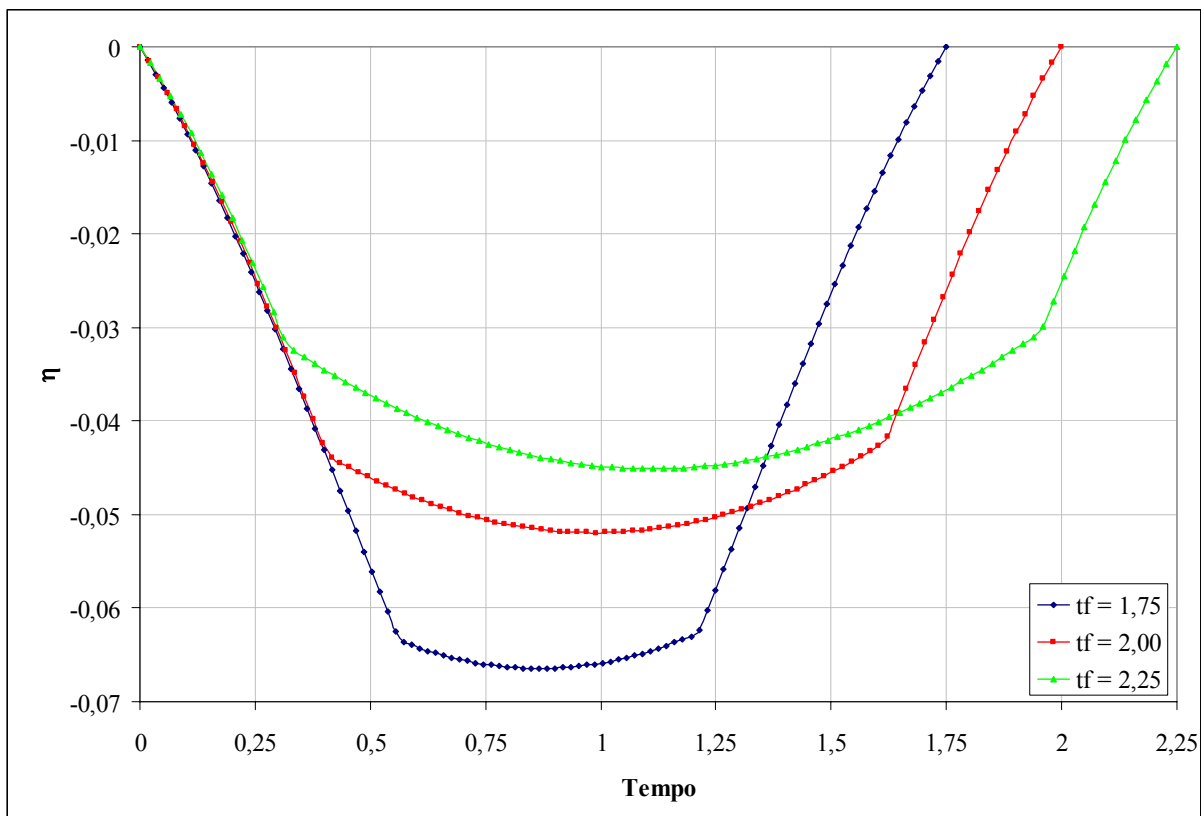


Figura VII.112. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

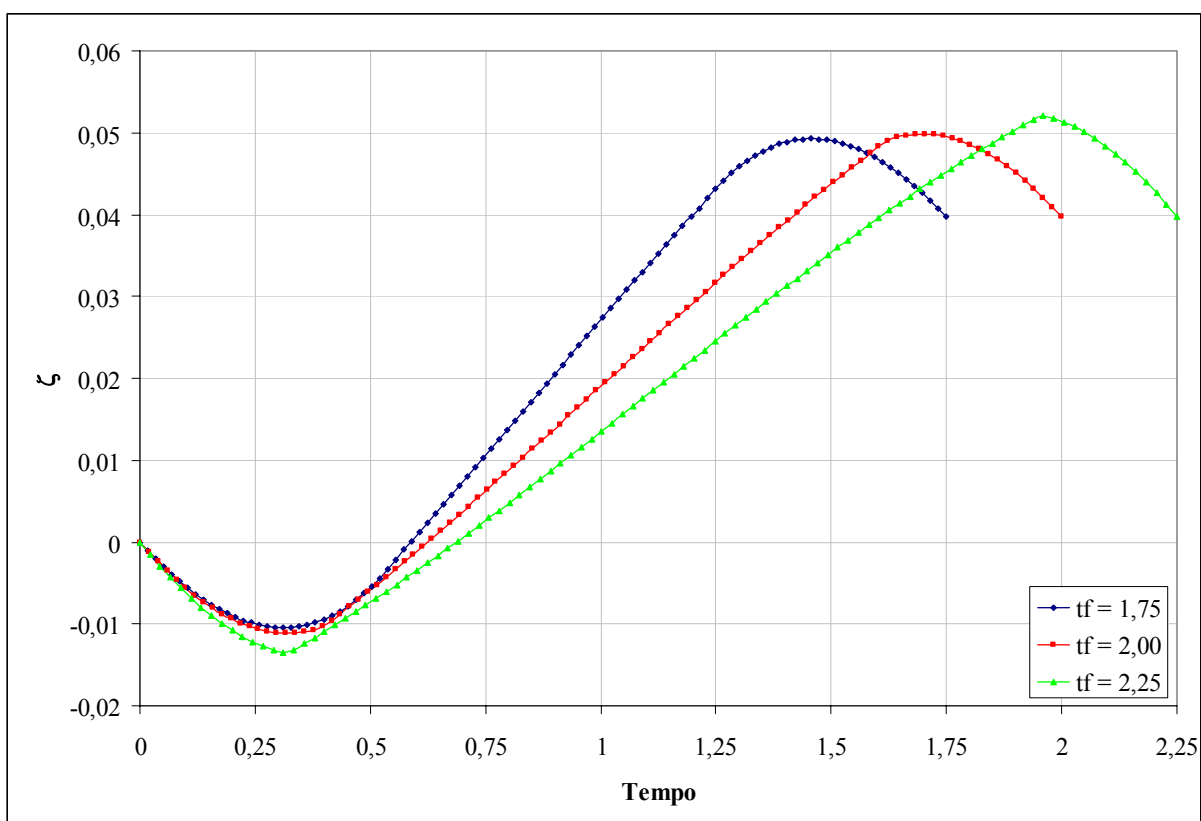


Figura VII.113. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

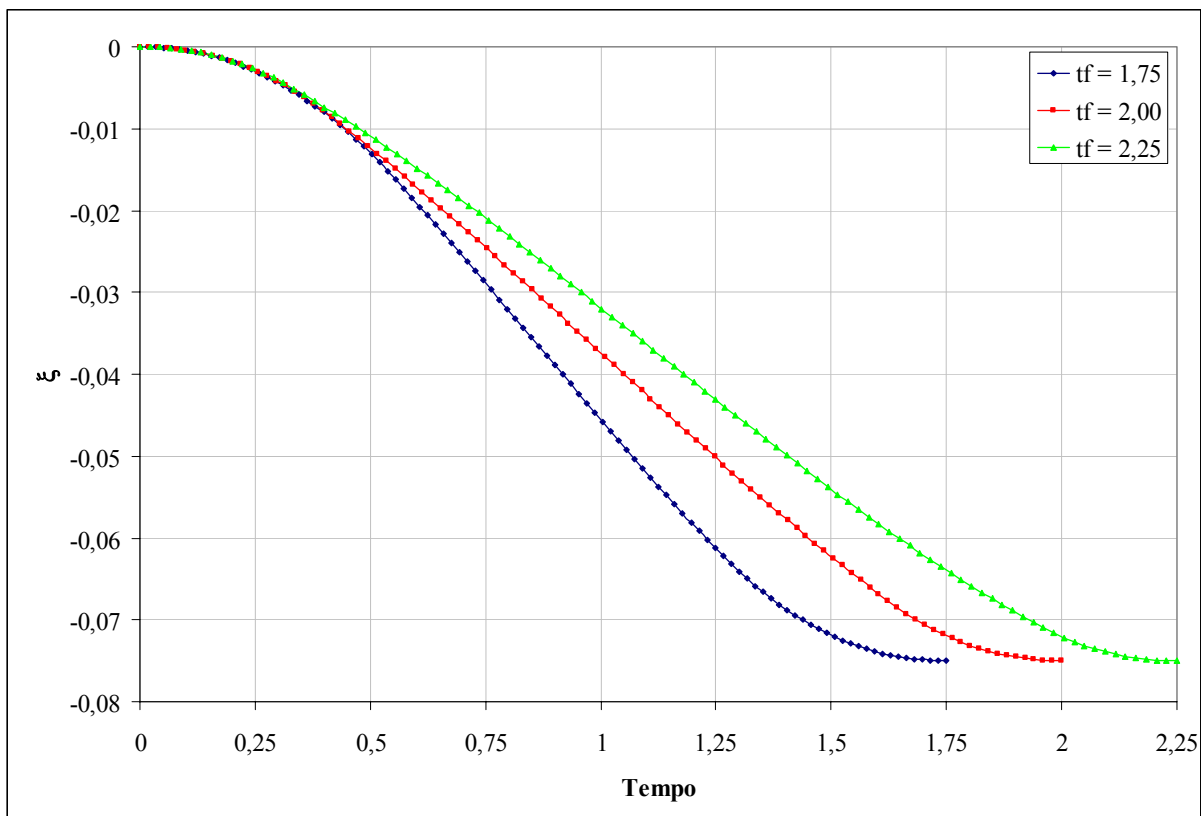


Figura VII.114. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

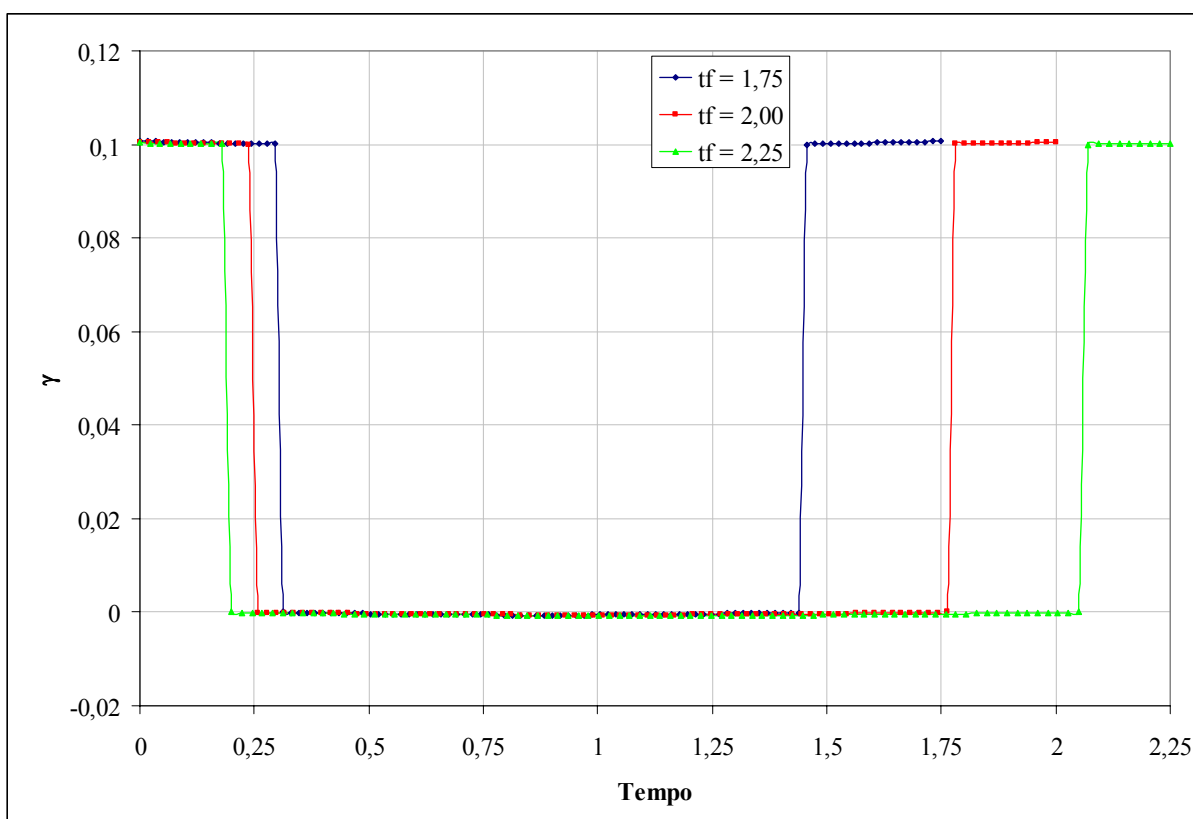


Figura VII.115. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

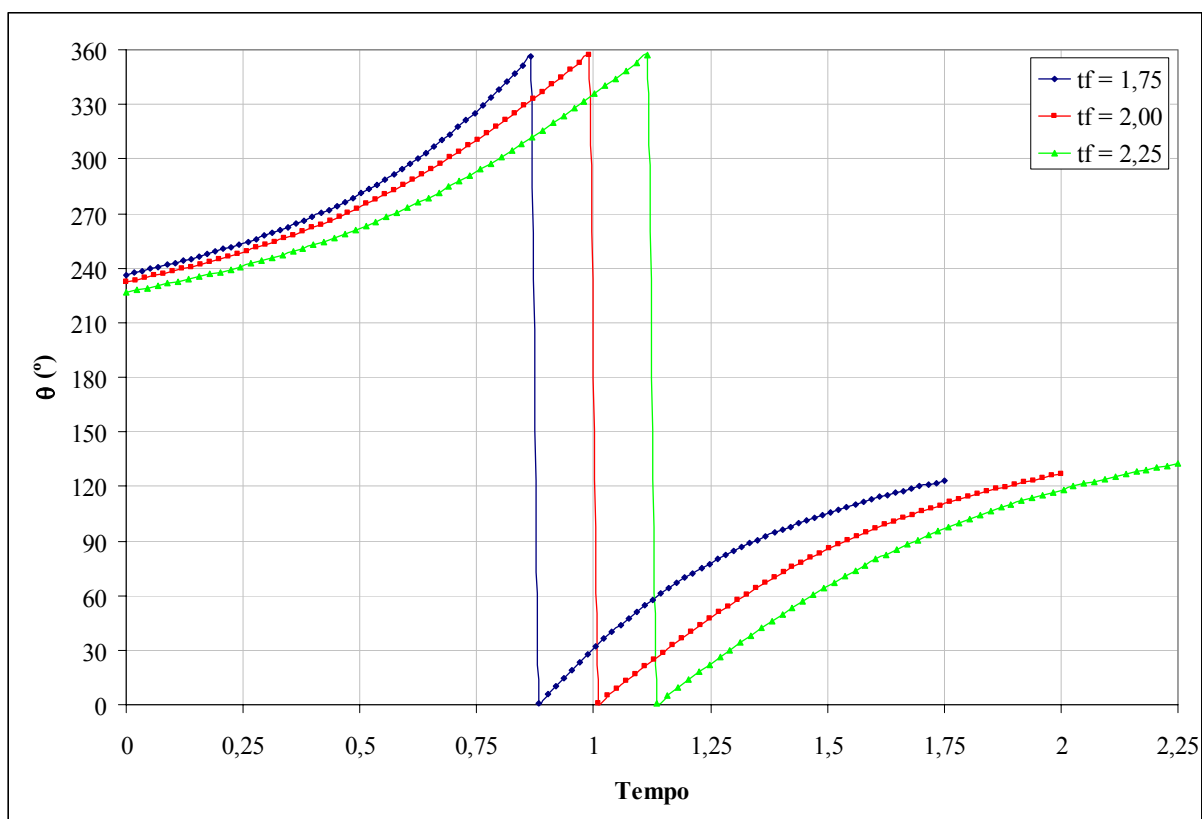


Figura VII.116. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

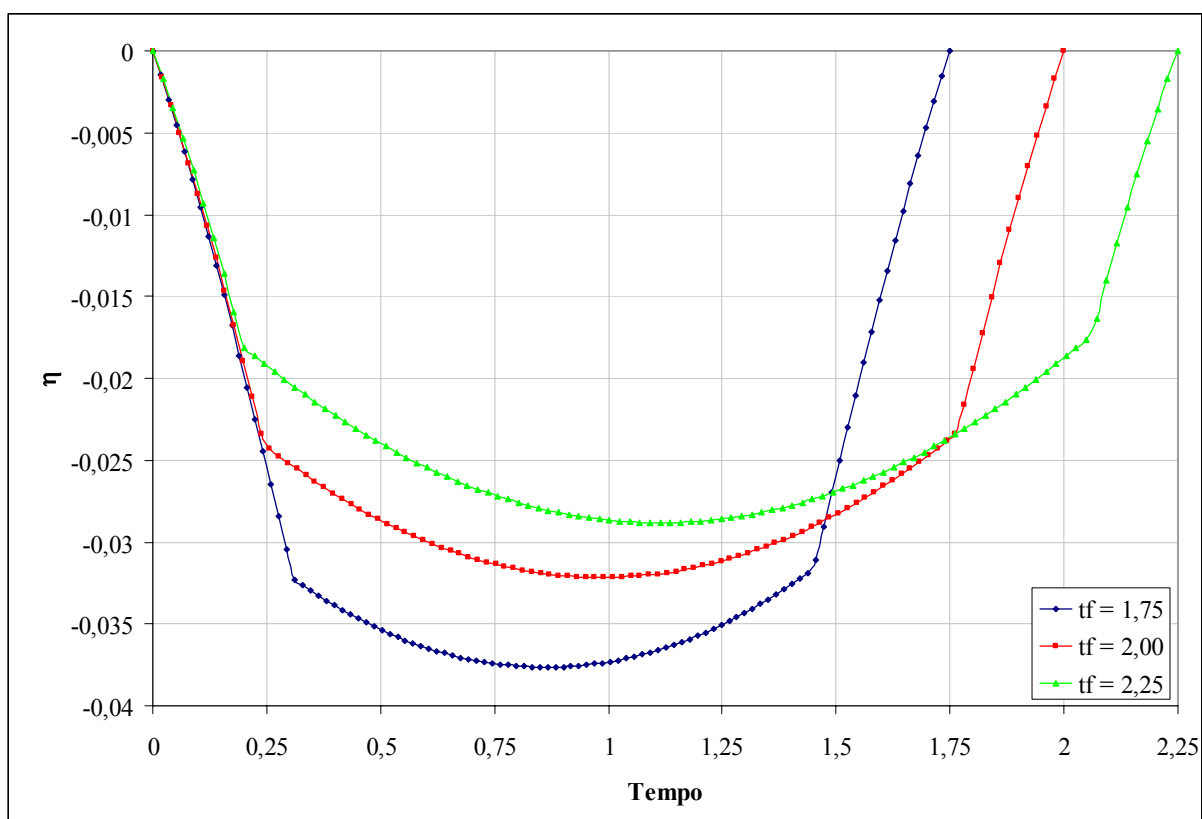


Figura VII.117. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

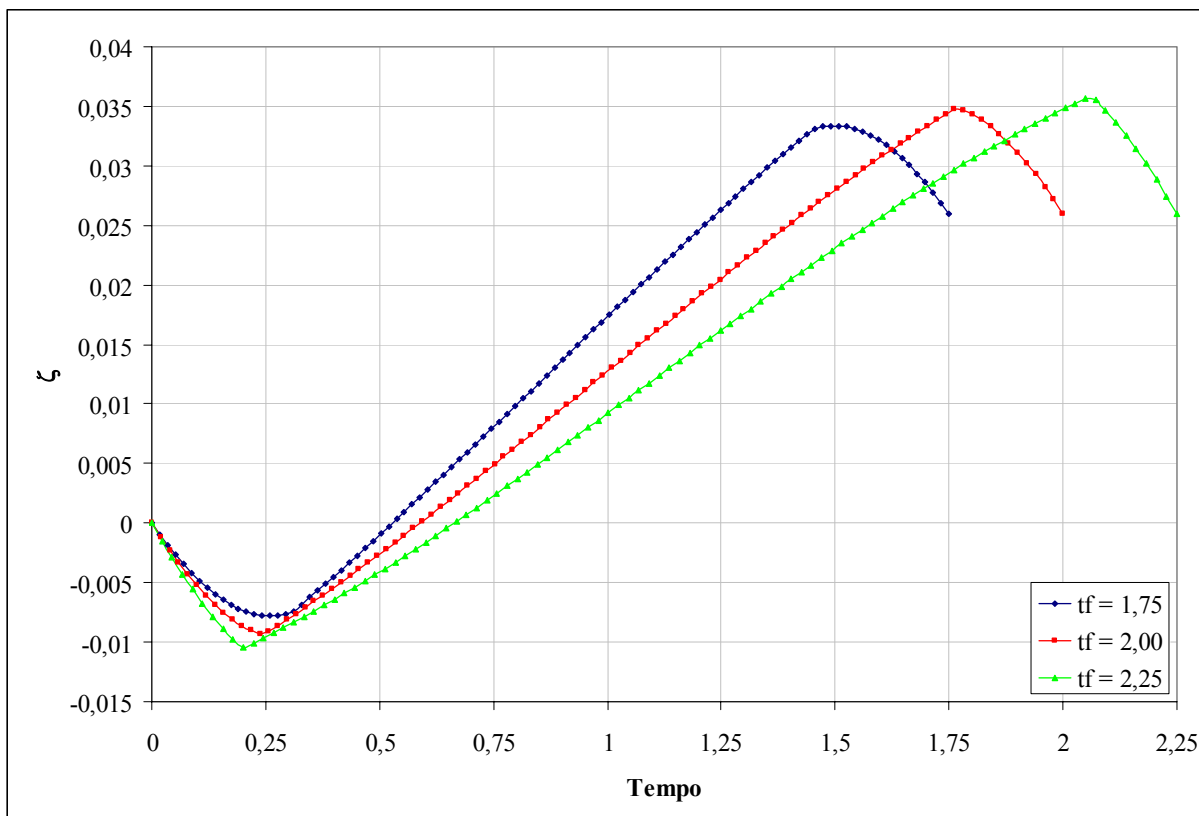


Figura VII.118. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

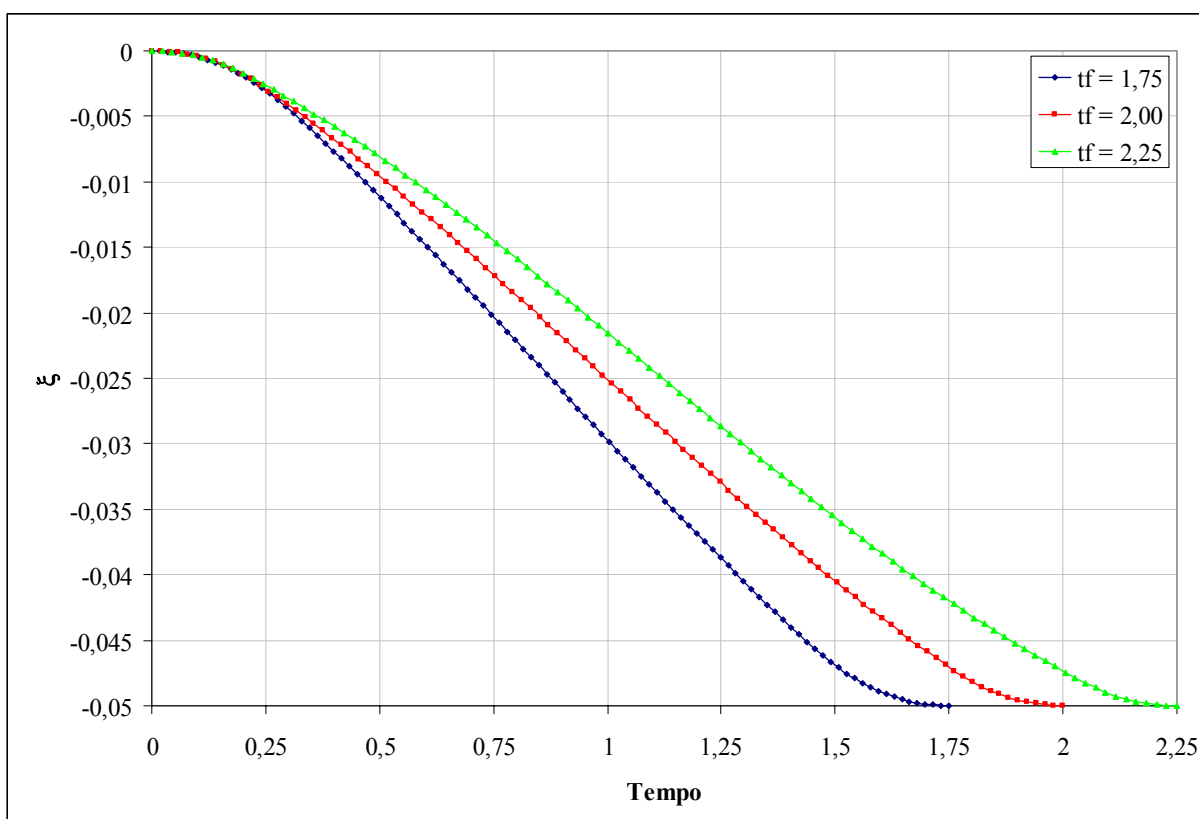


Figura VII.119. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

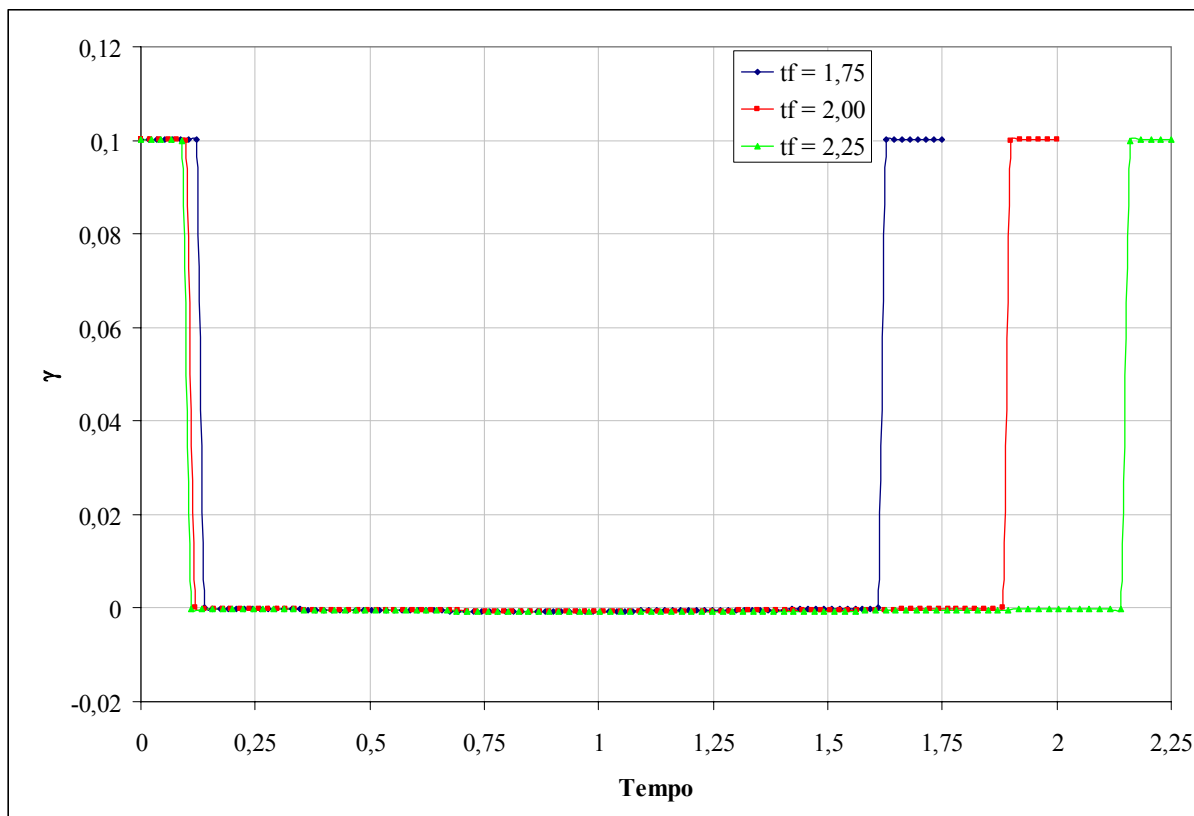


Figura VII.120. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

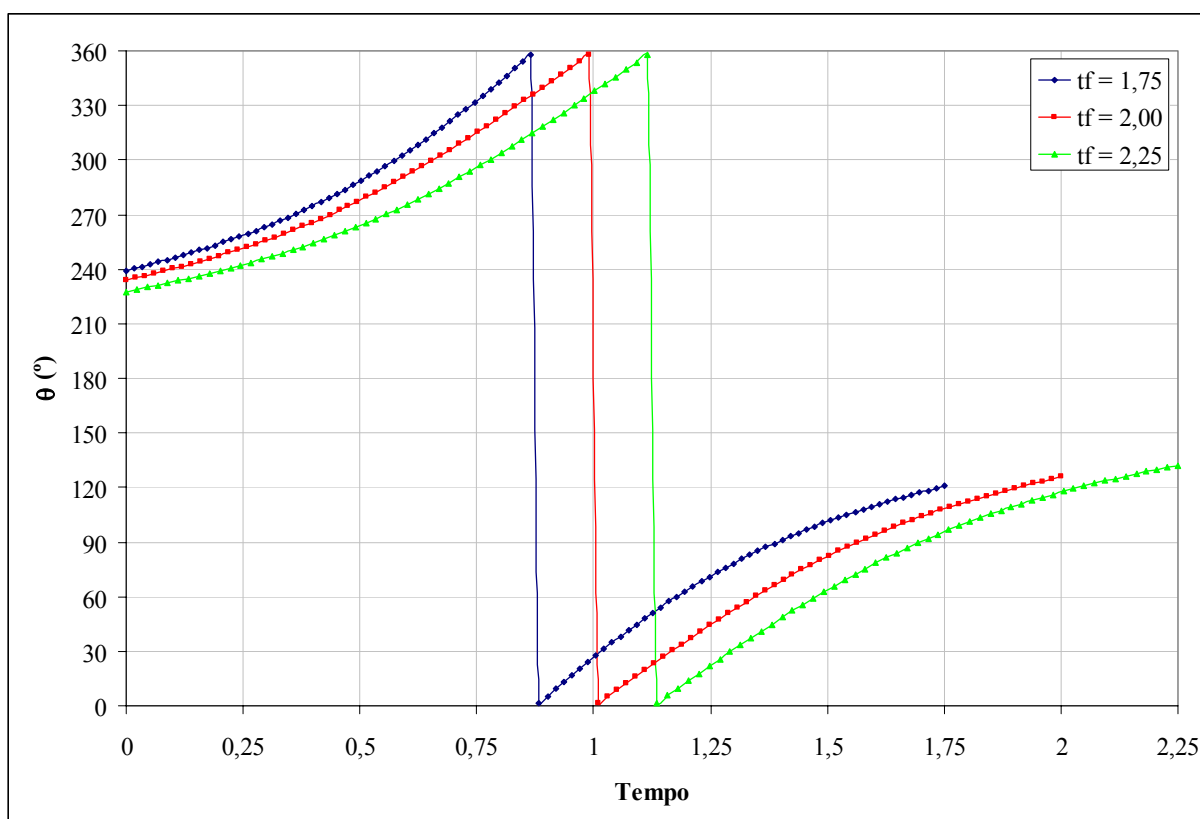


Figura VII.121. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

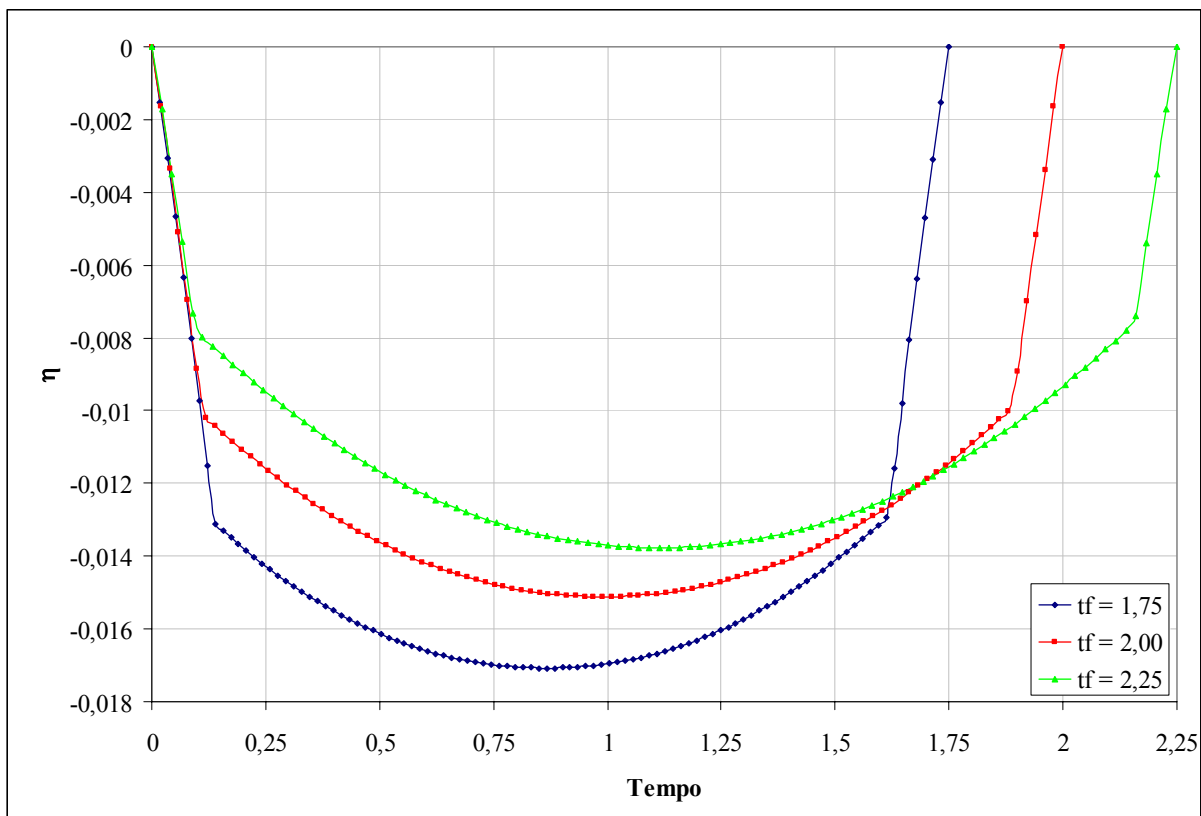


Figura VII.122. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

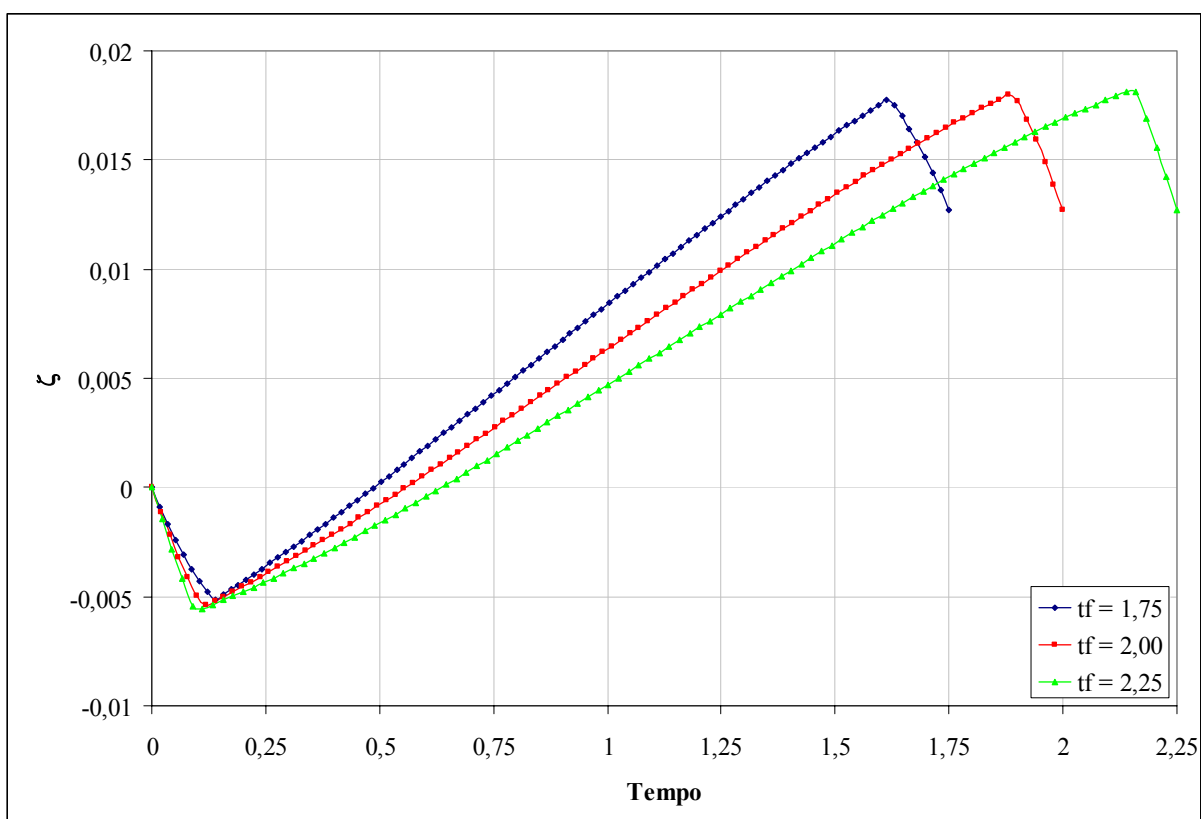


Figura VII.123. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

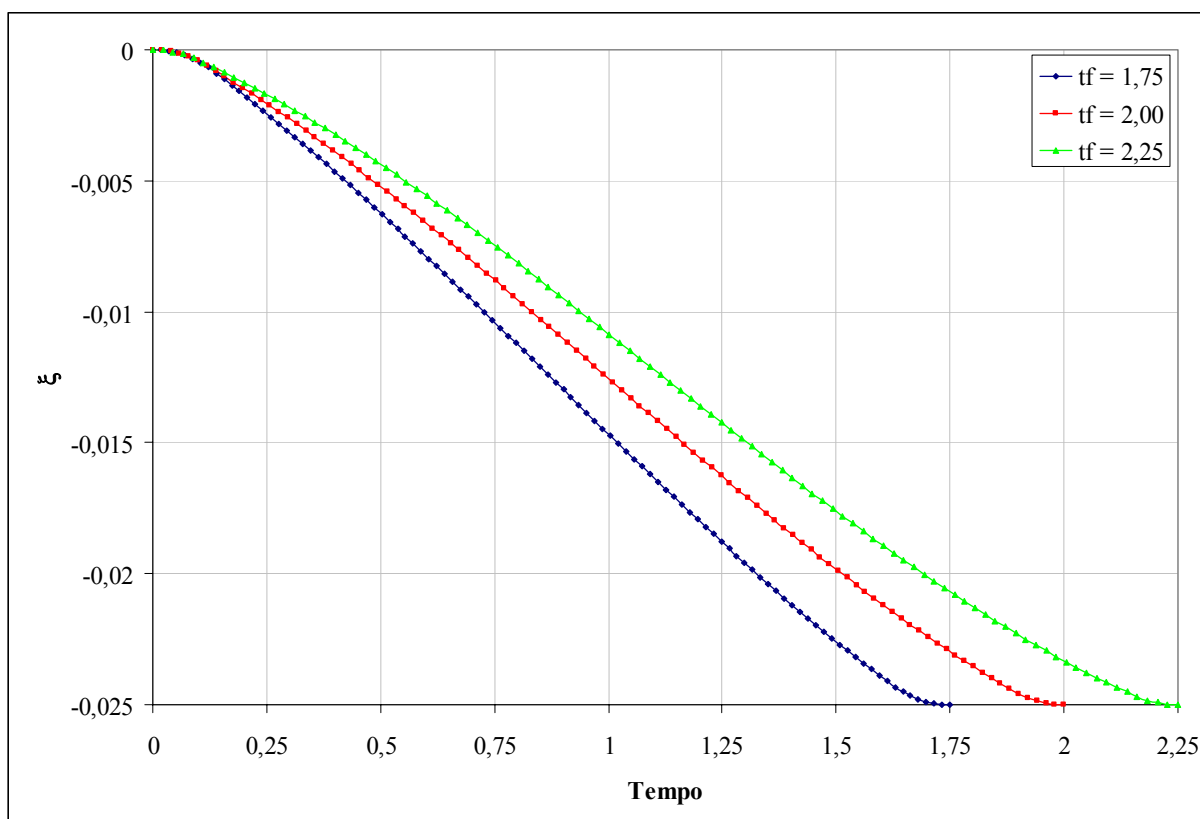


Figura VII.124. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 0,9750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

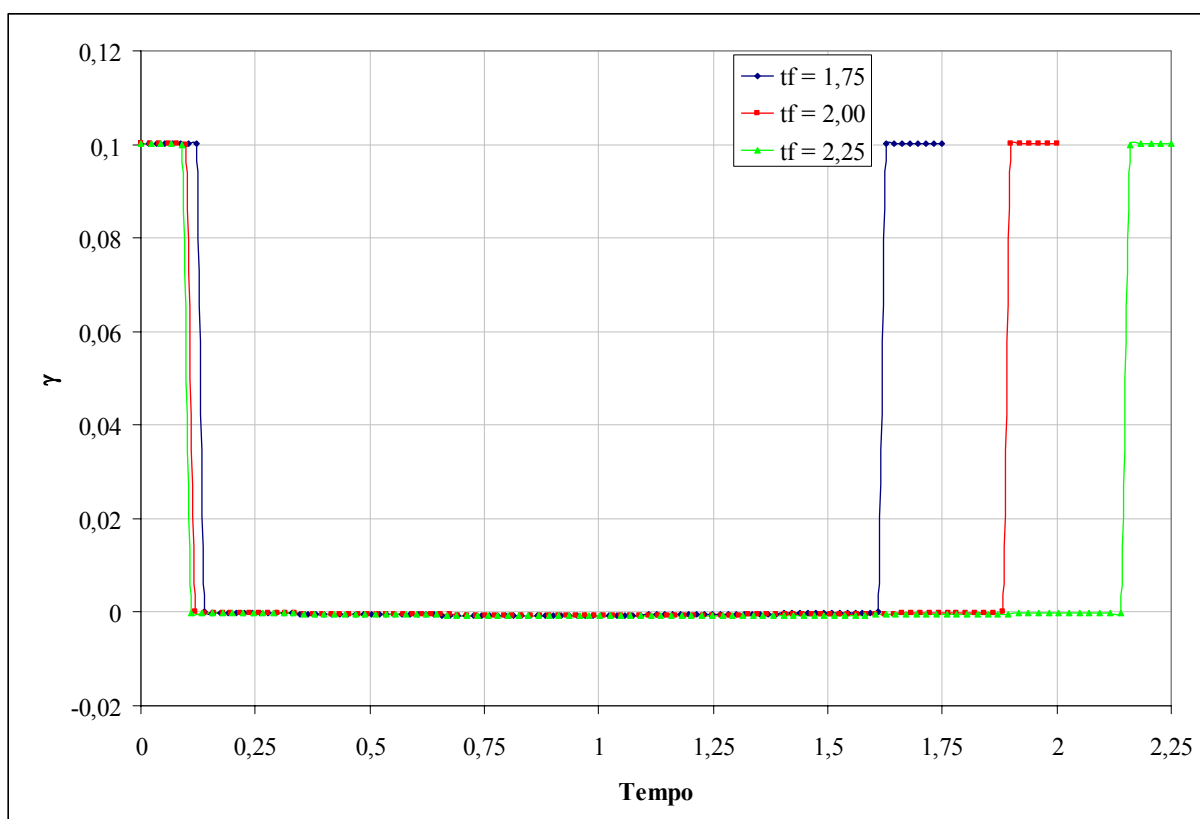


Figura VII.125. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

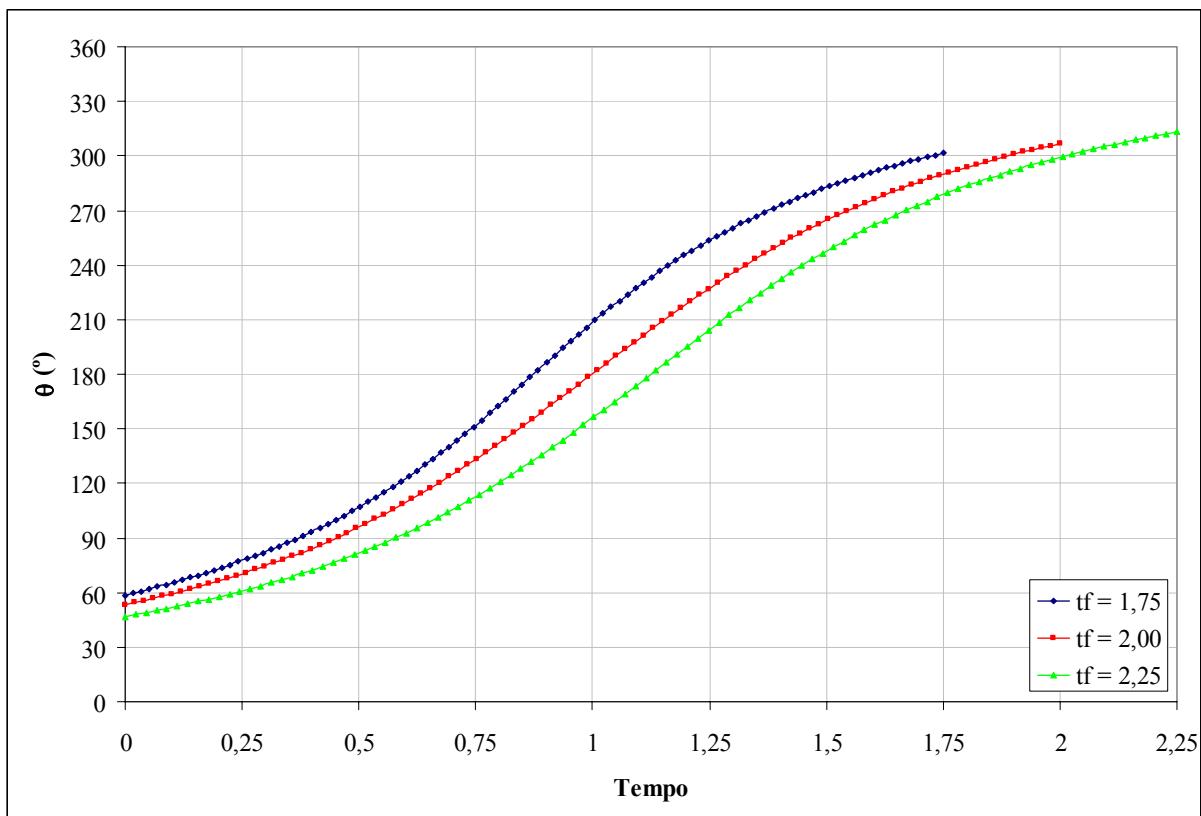


Figura VII.126. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

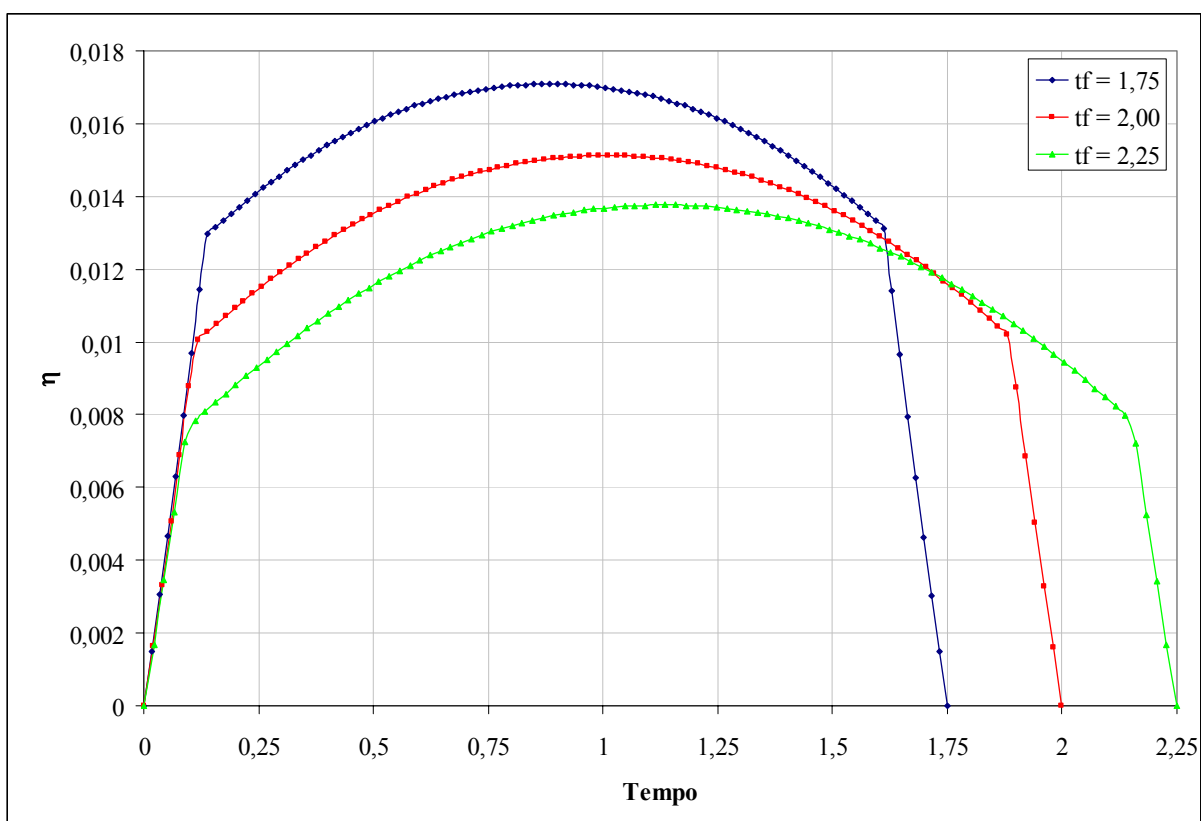


Figura VII.127. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

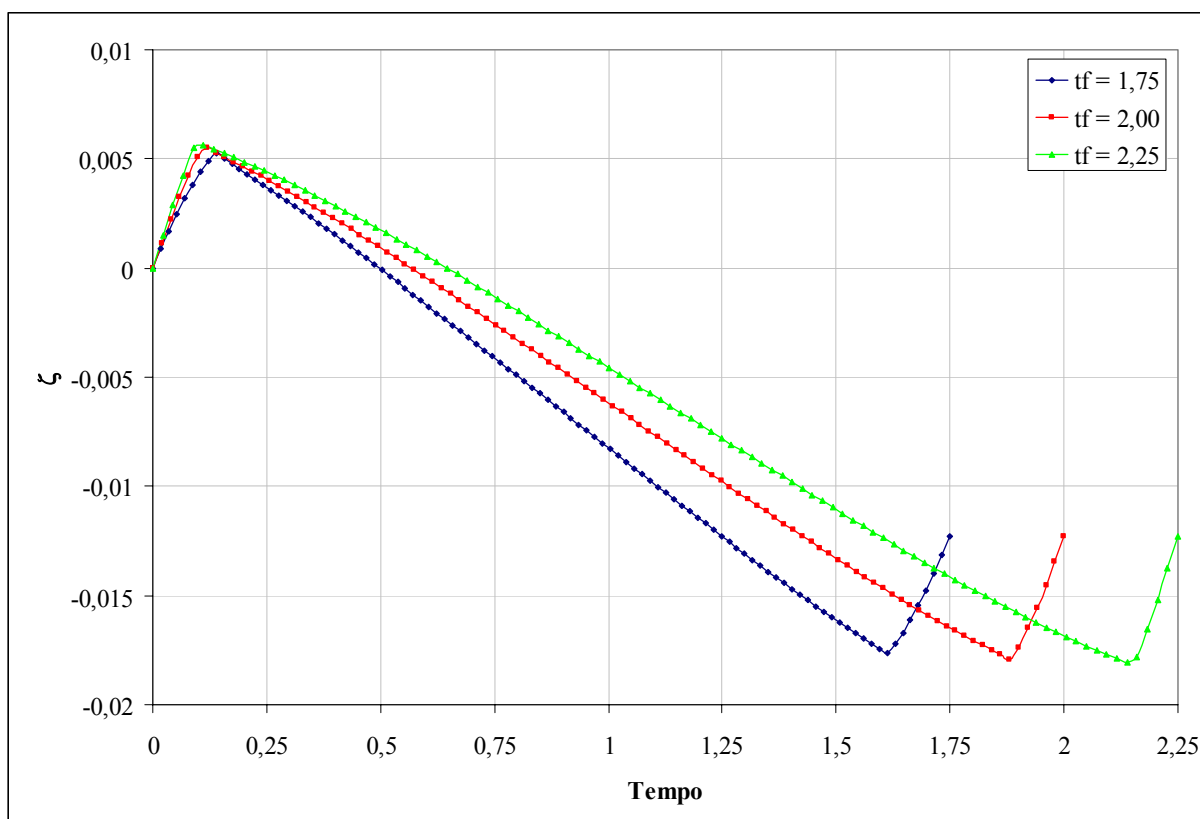


Figura VII.128. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

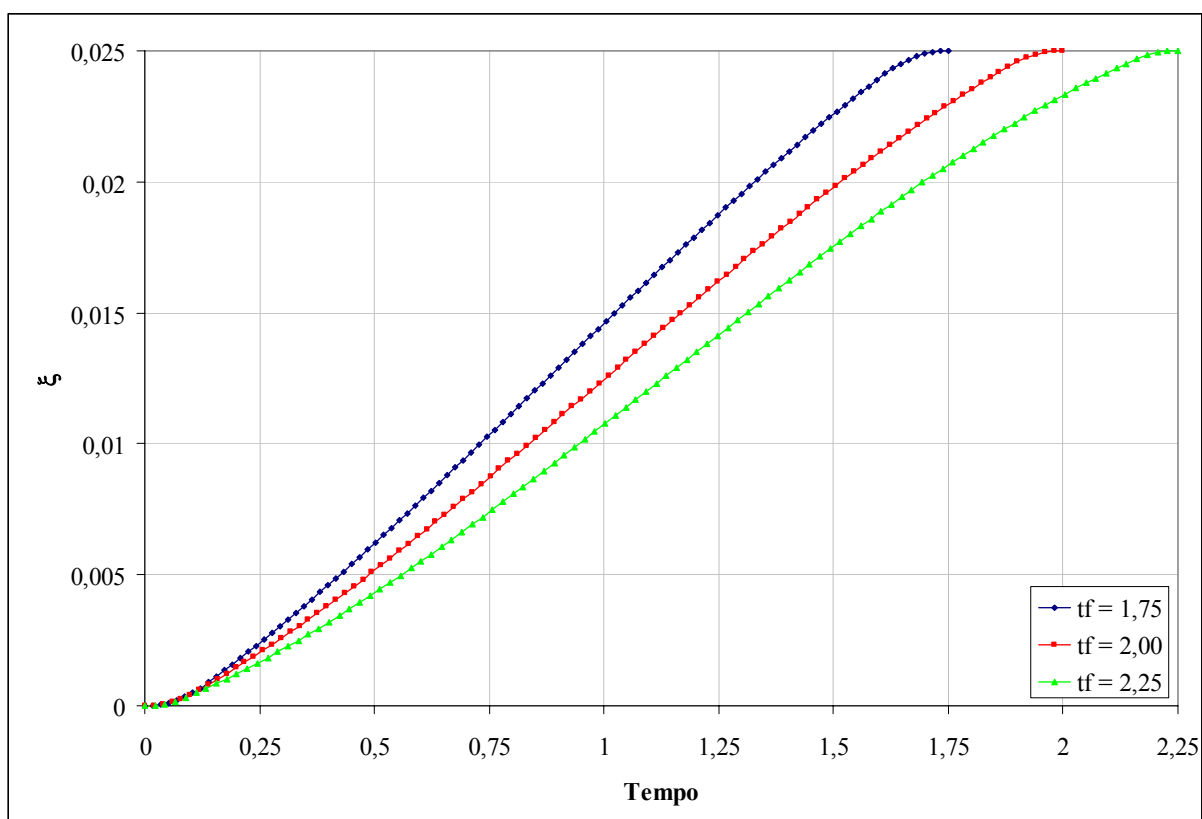


Figura VII.129. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0250$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

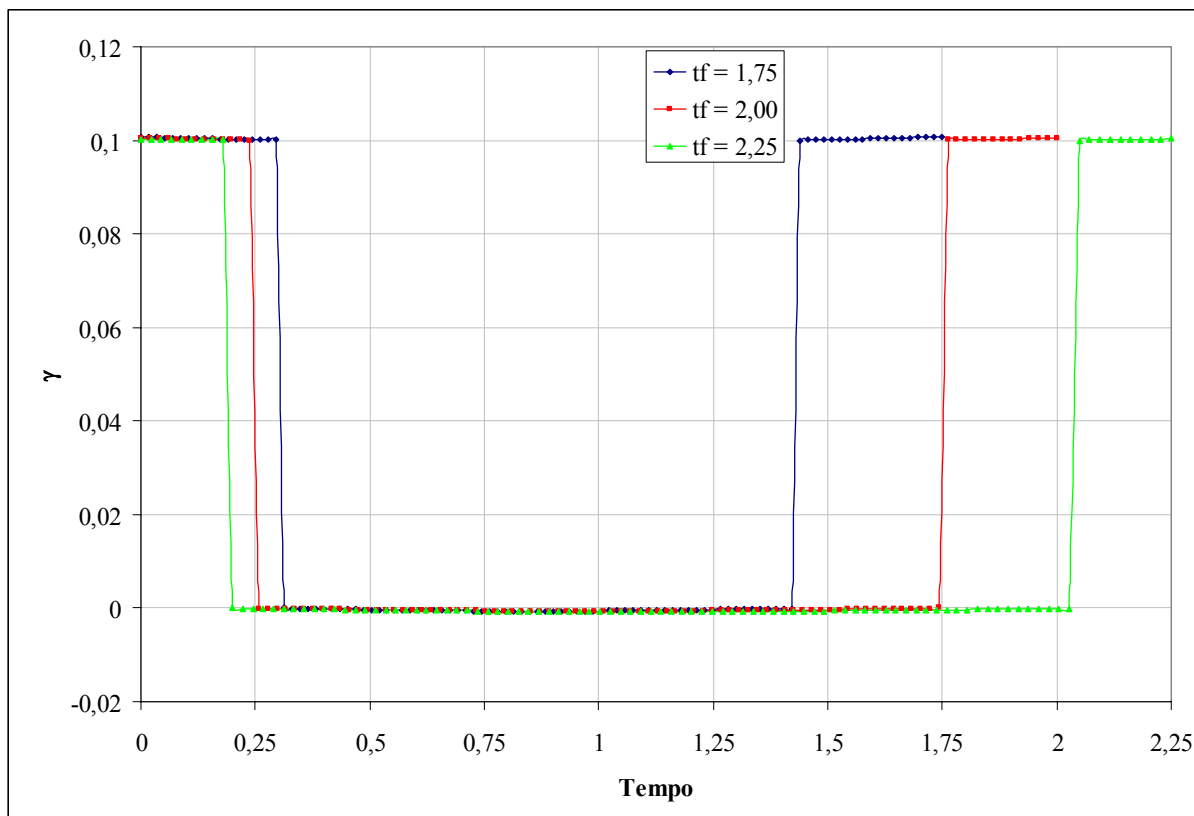


Figura VII.130. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

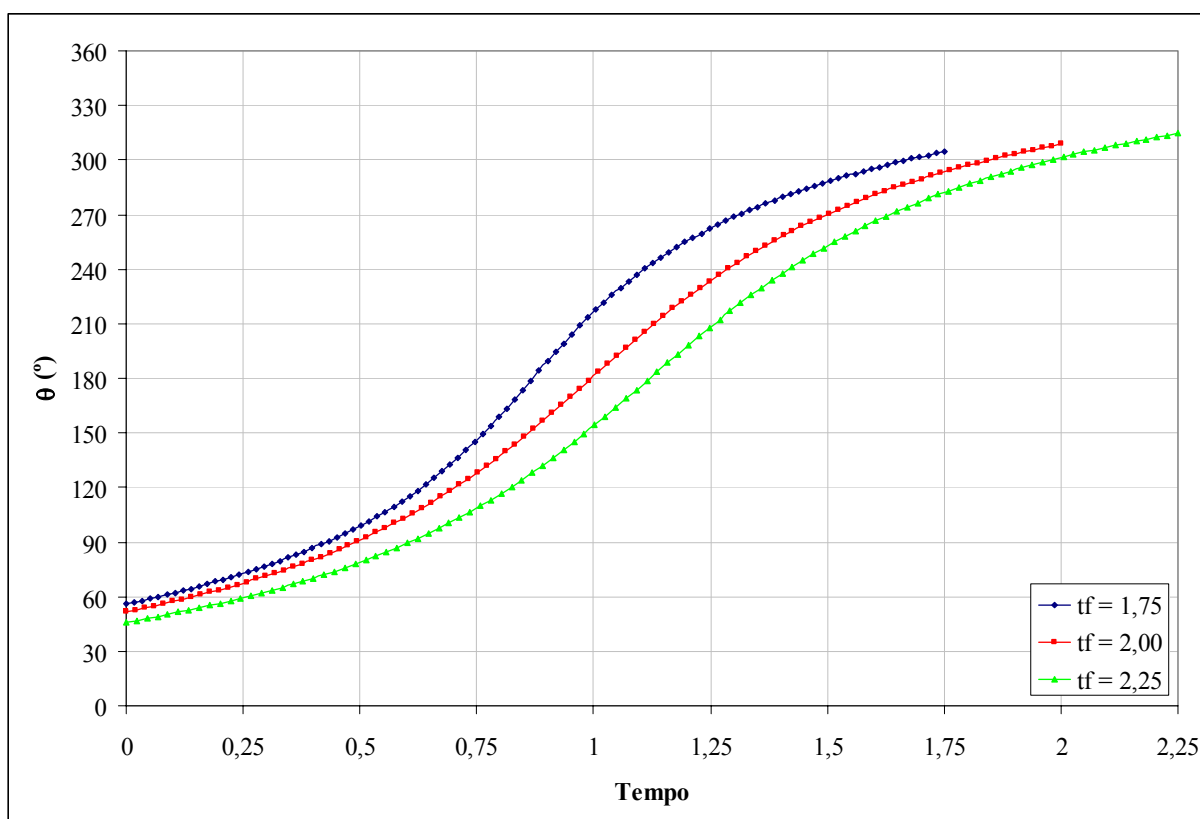


Figura VII.131. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

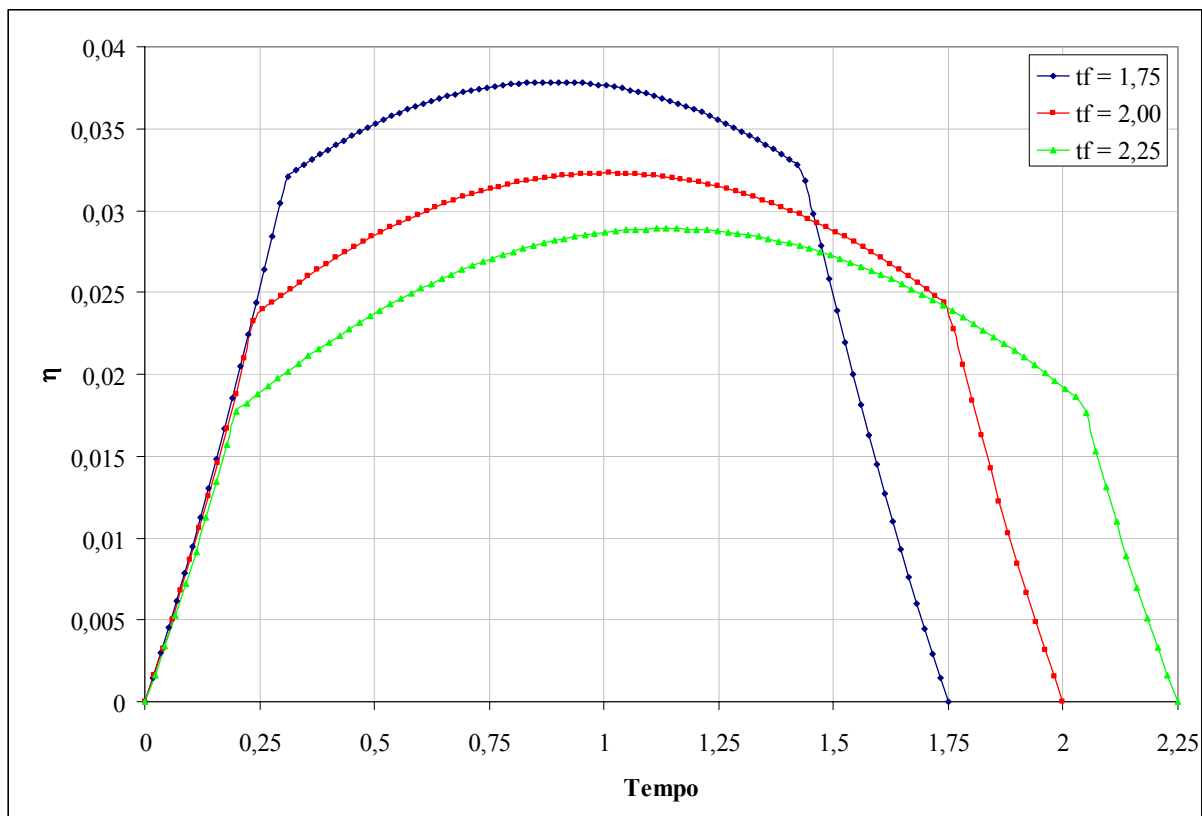


Figura VII.132. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

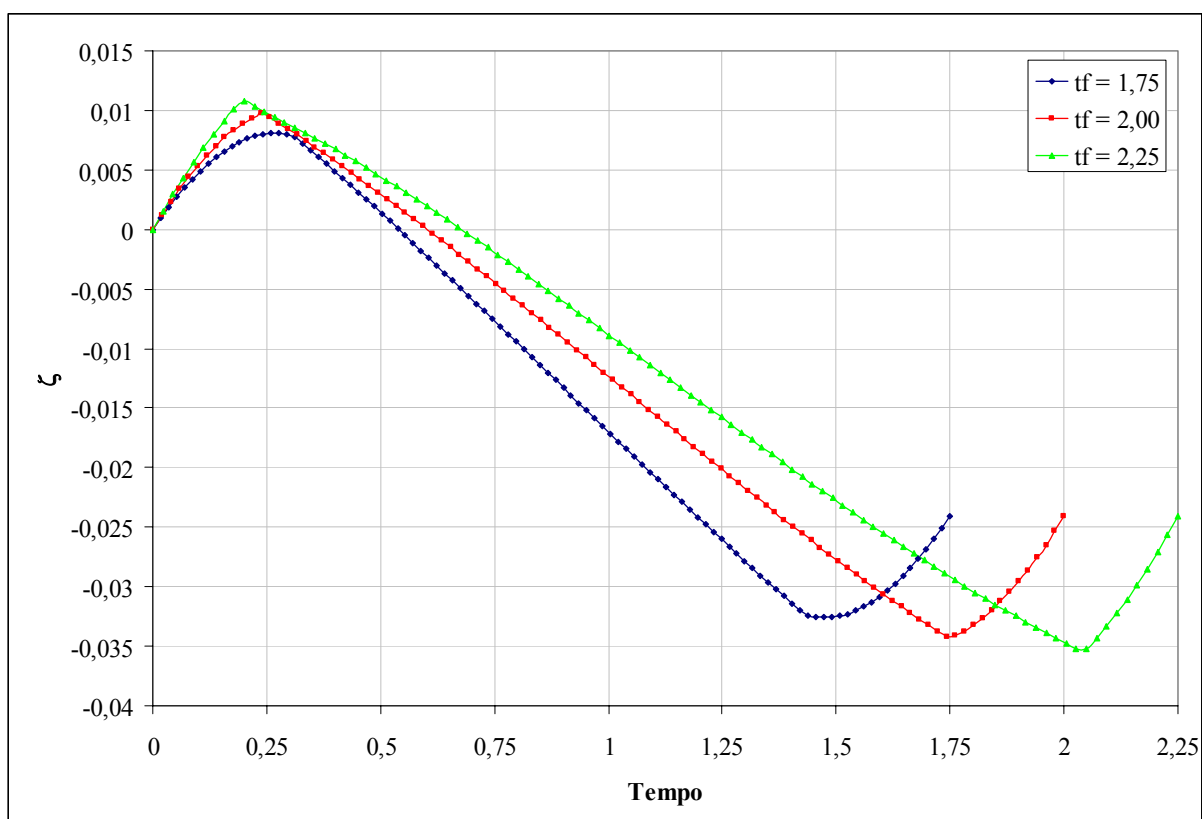


Figura VII.133. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

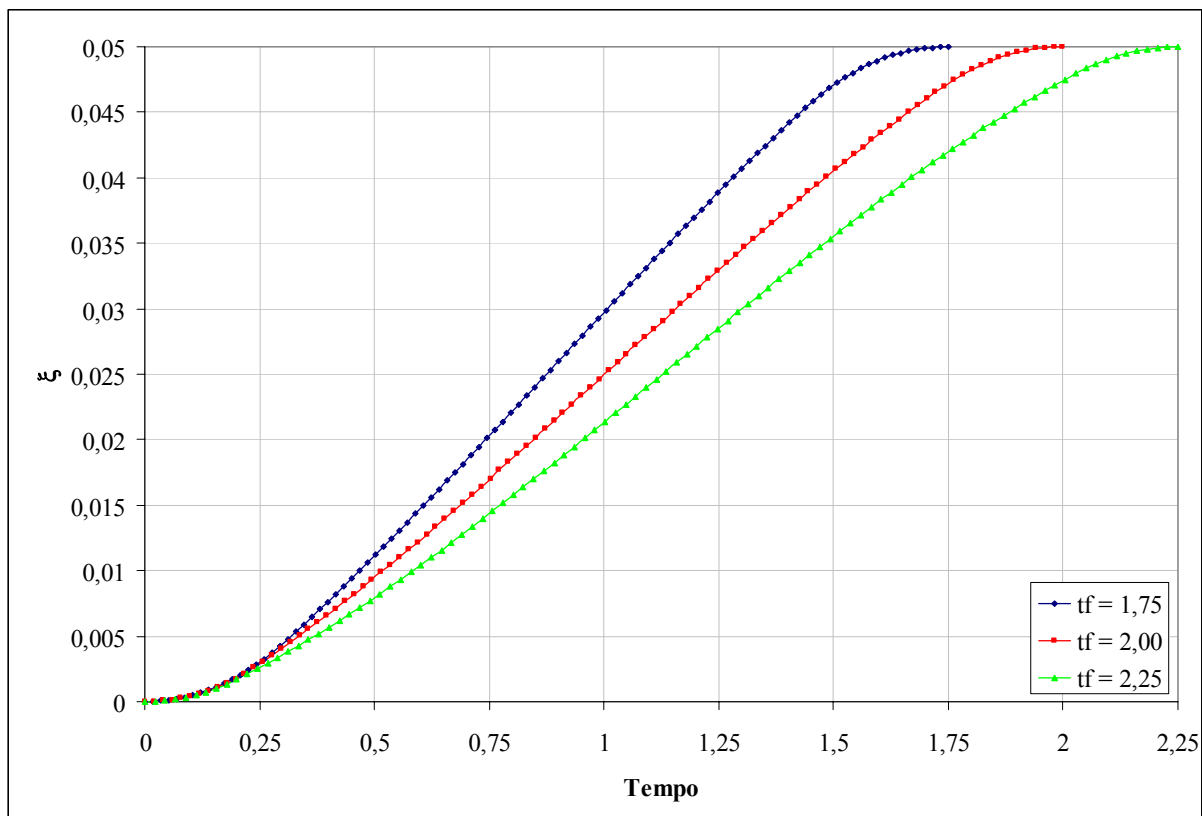


Figura VII.134. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0500$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

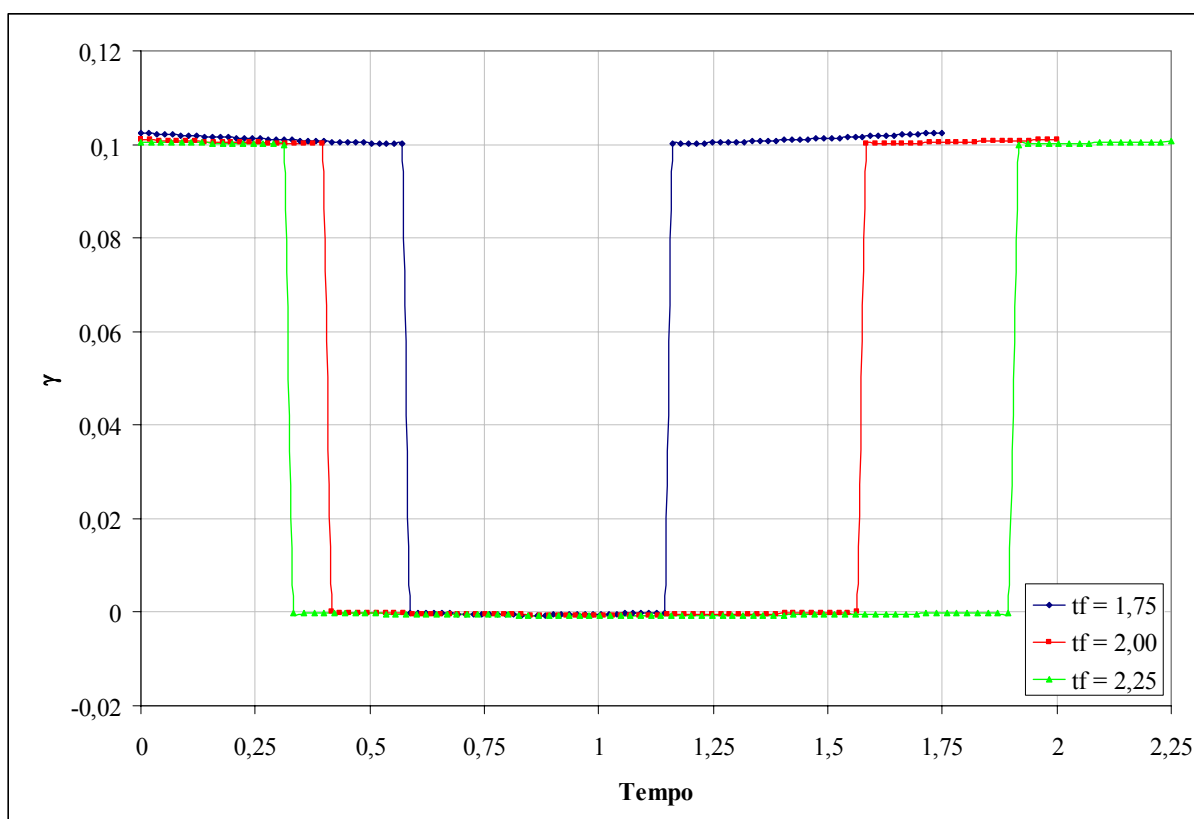


Figura VII.135. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

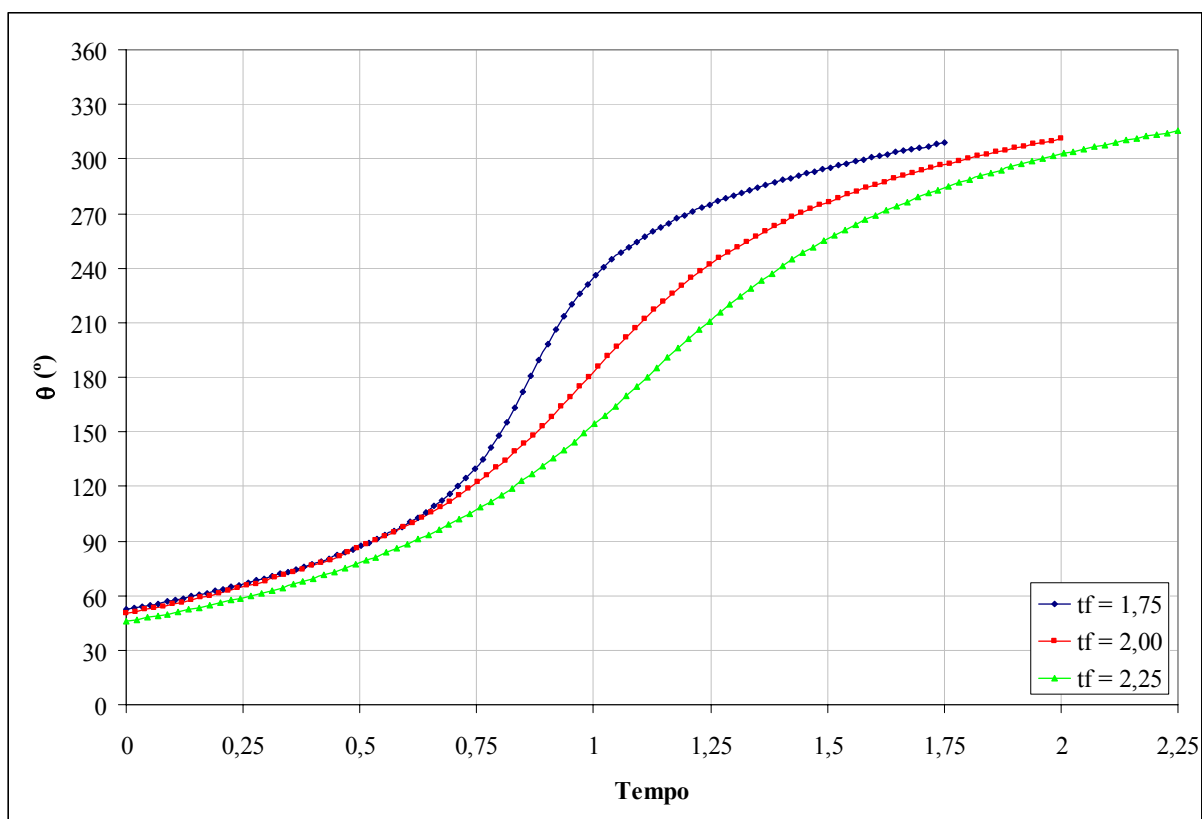


Figura VII.136. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

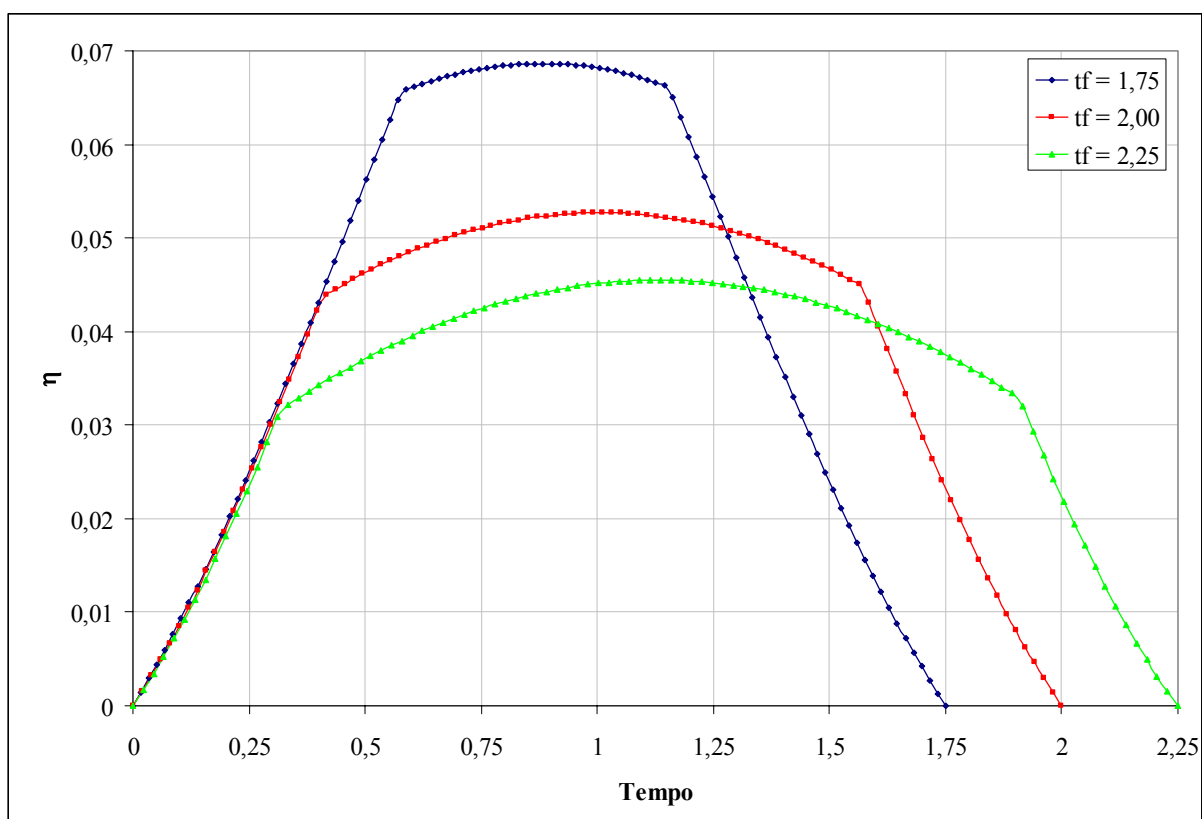


Figura VII.137. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

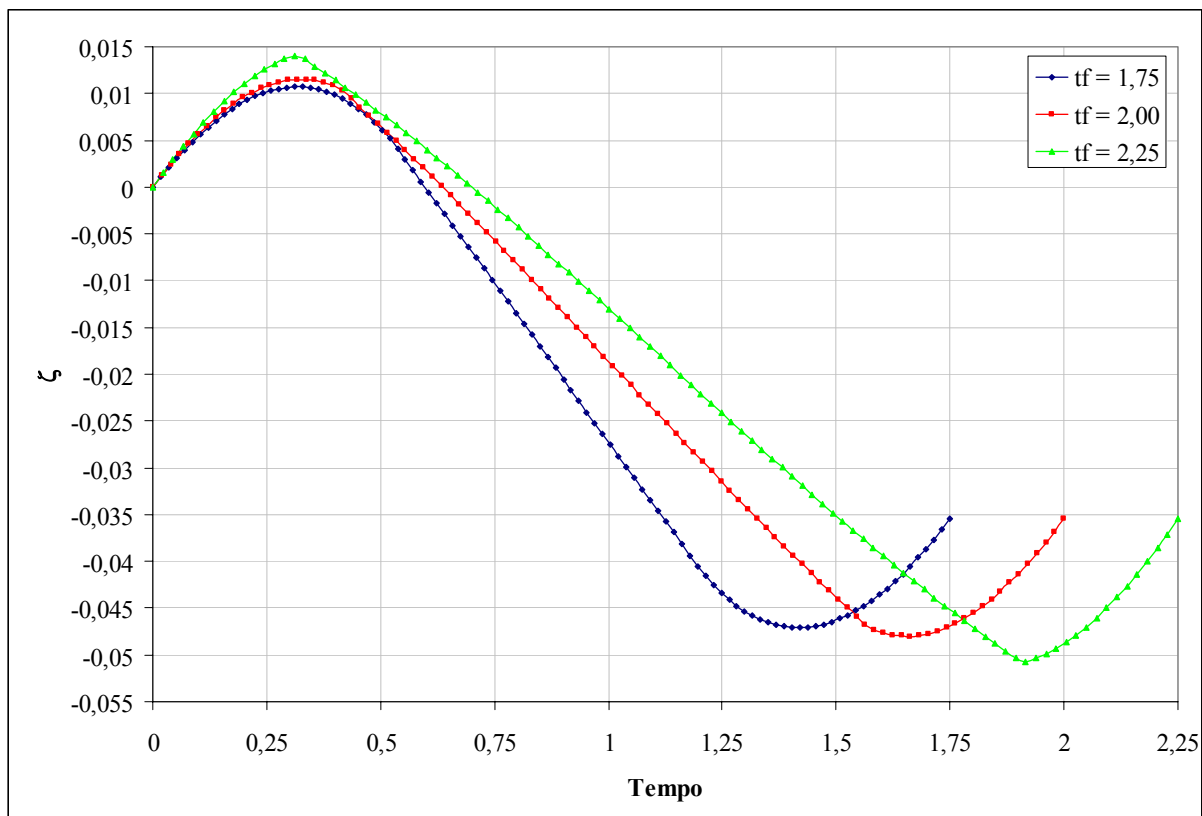


Figura VII.138. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

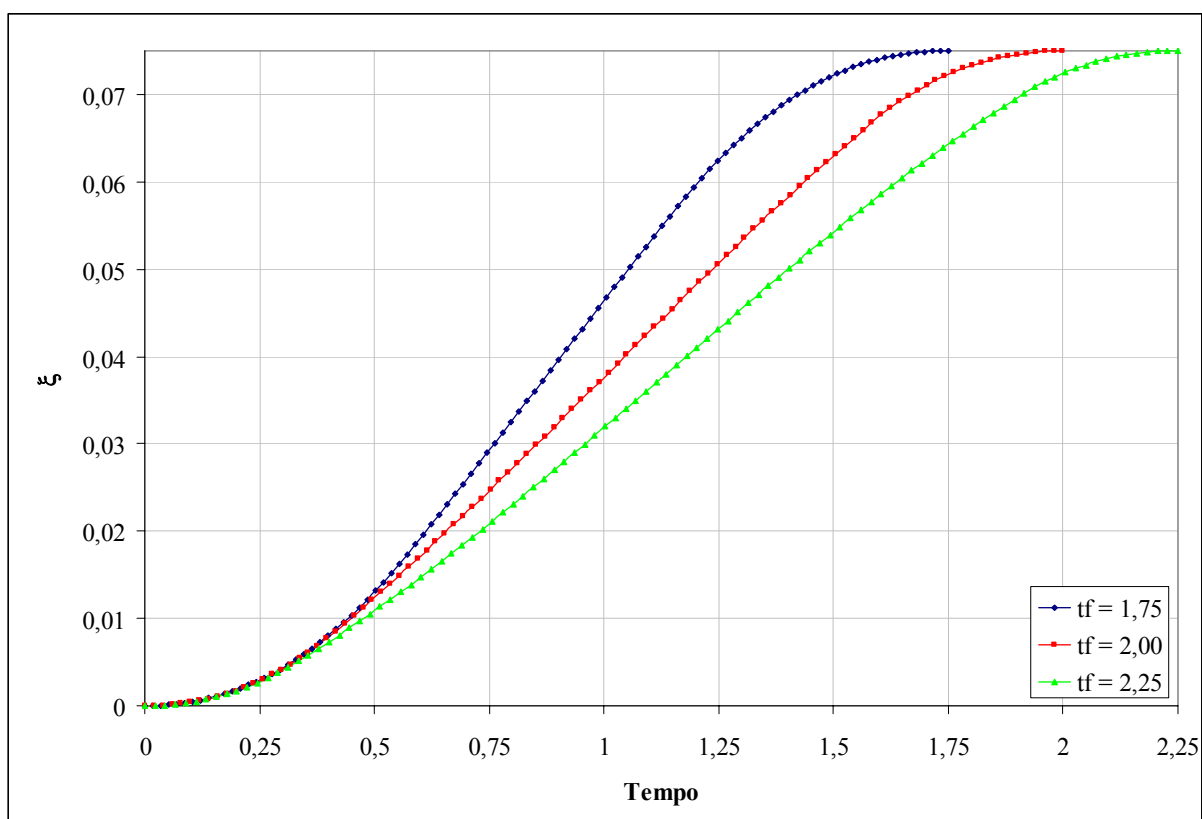


Figura VII.139. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,0750$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

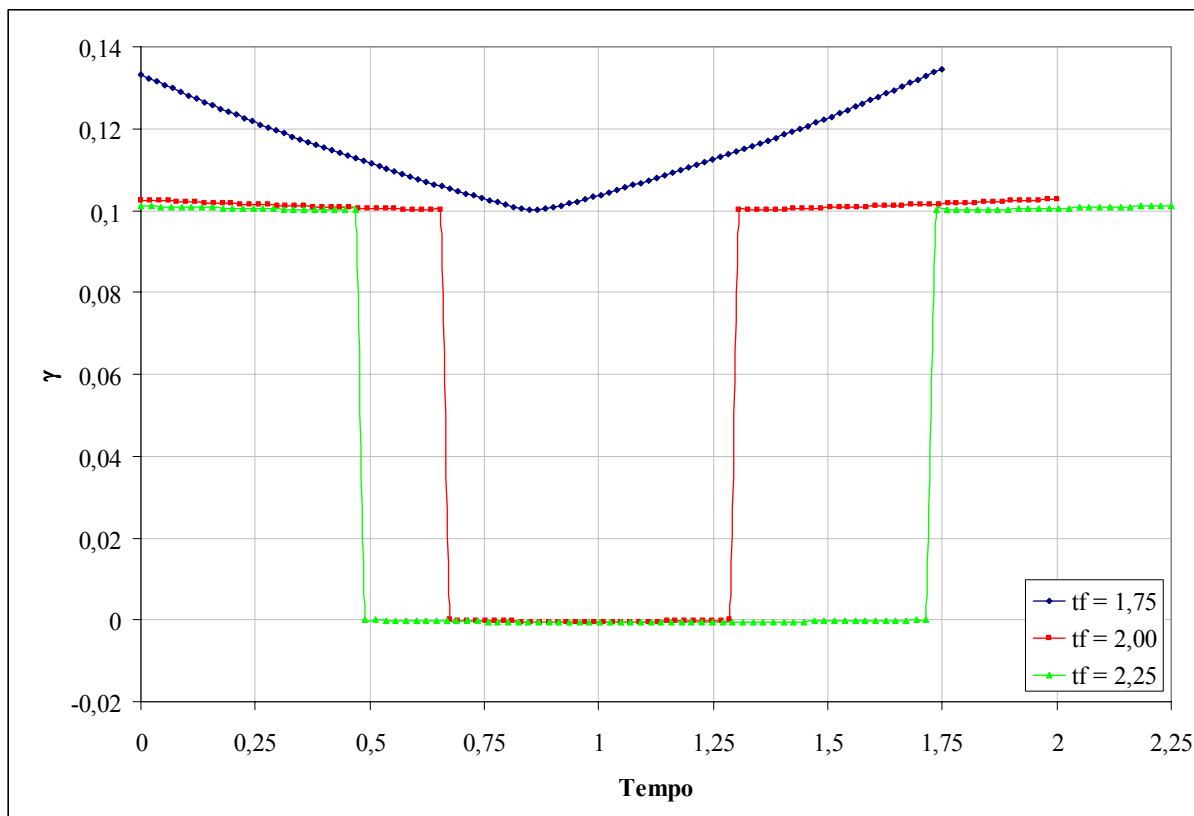


Figura VII.140. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,1000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

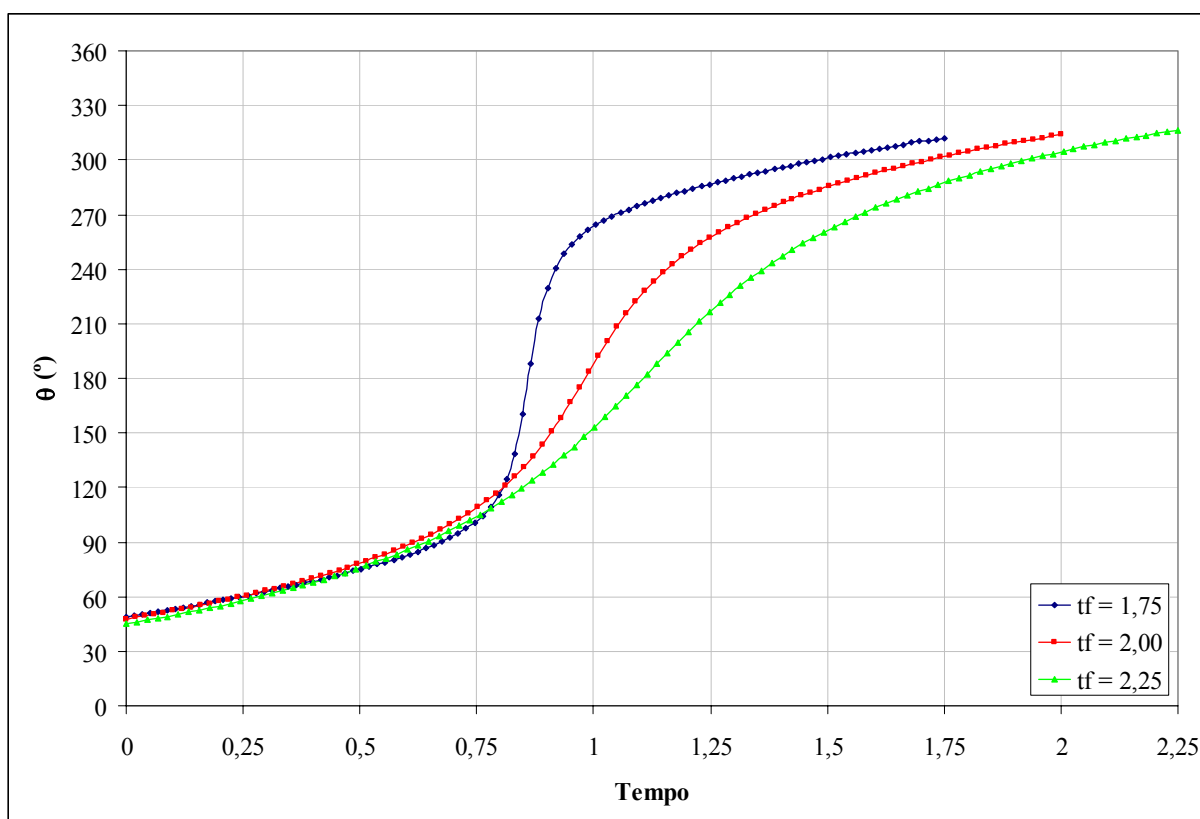


Figura VII.141. Evolução temporal da direção da aceleração θ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,1000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

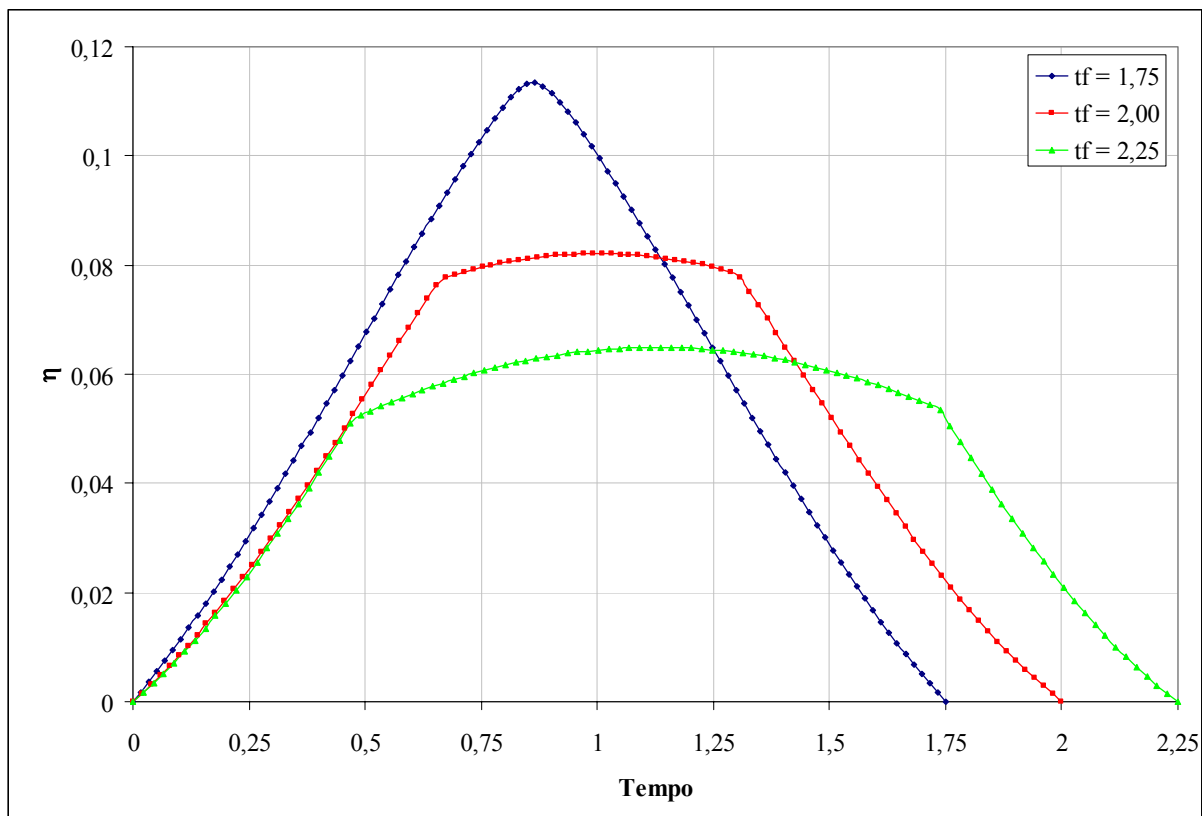


Figura VII.142. Evolução temporal da velocidade radial linearizada η para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,1000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

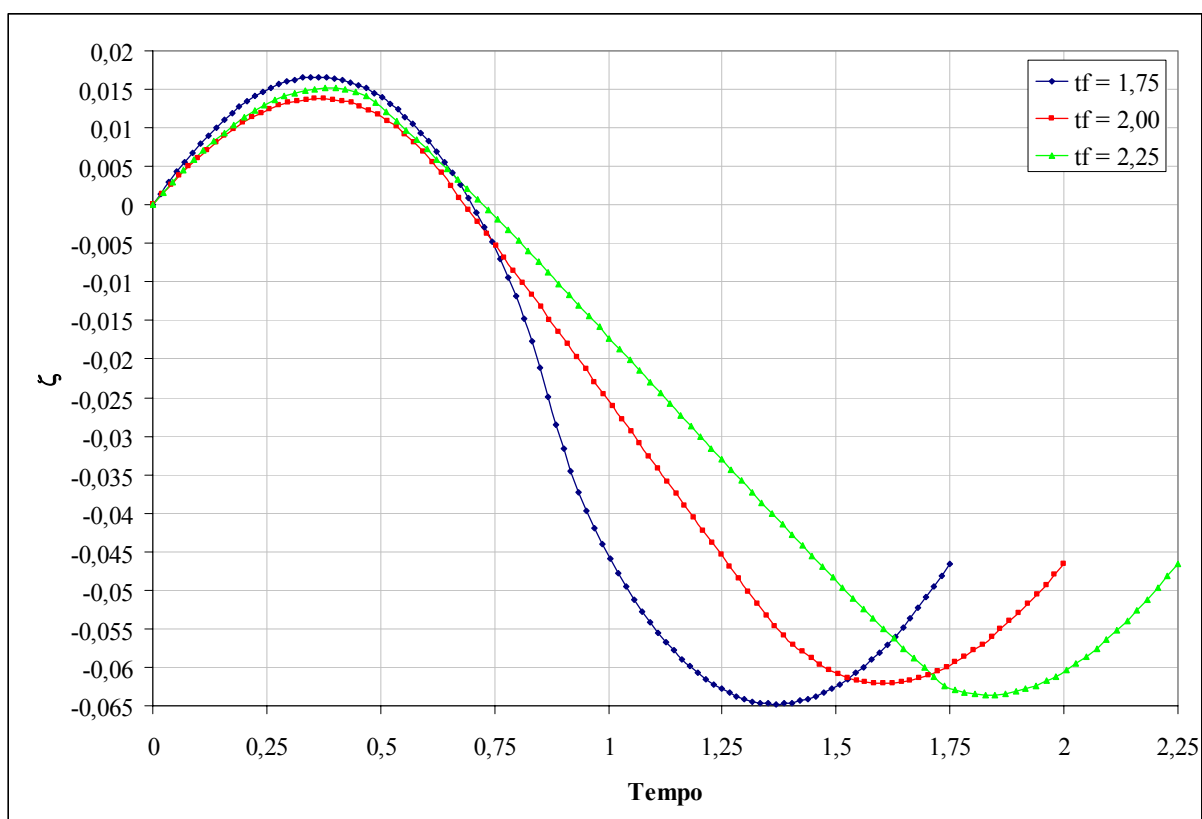


Figura VII.143. Evolução temporal da velocidade circunferencial linearizada ζ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,1000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

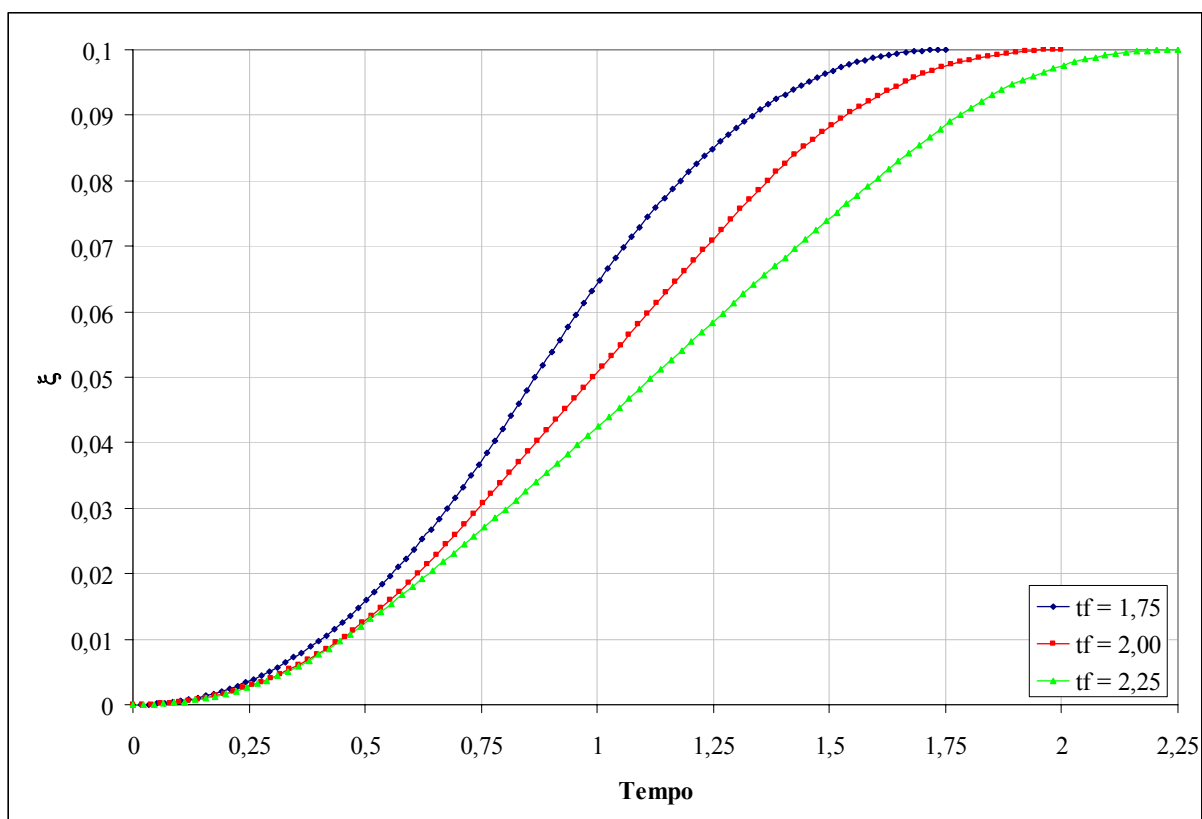


Figura VII.144. Evolução temporal da distância radial linearizada ξ para diferentes tempos de transferência – sistema VEC linearizado – $\rho = 1,1000$ e $\gamma_{\max} = 0,10$.

VII.3.2 Sistema Não-Linearizado

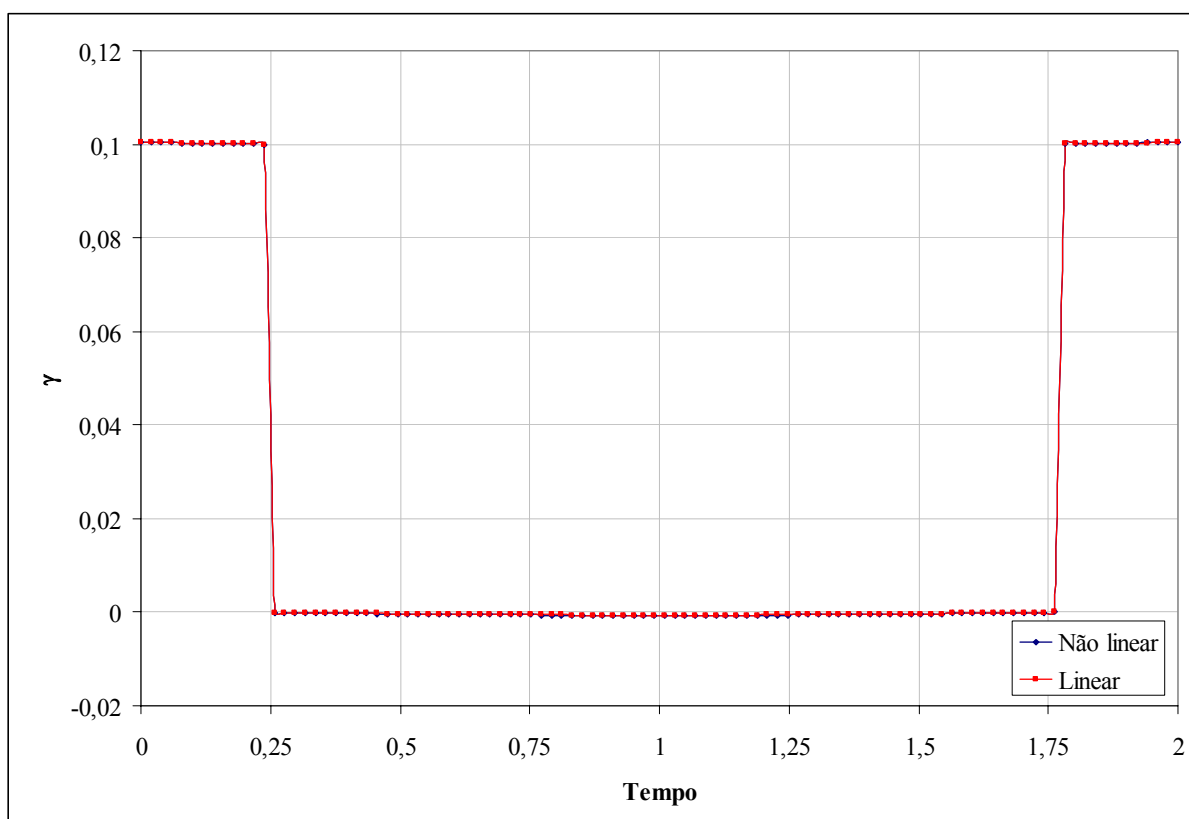


Figura VII.145. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

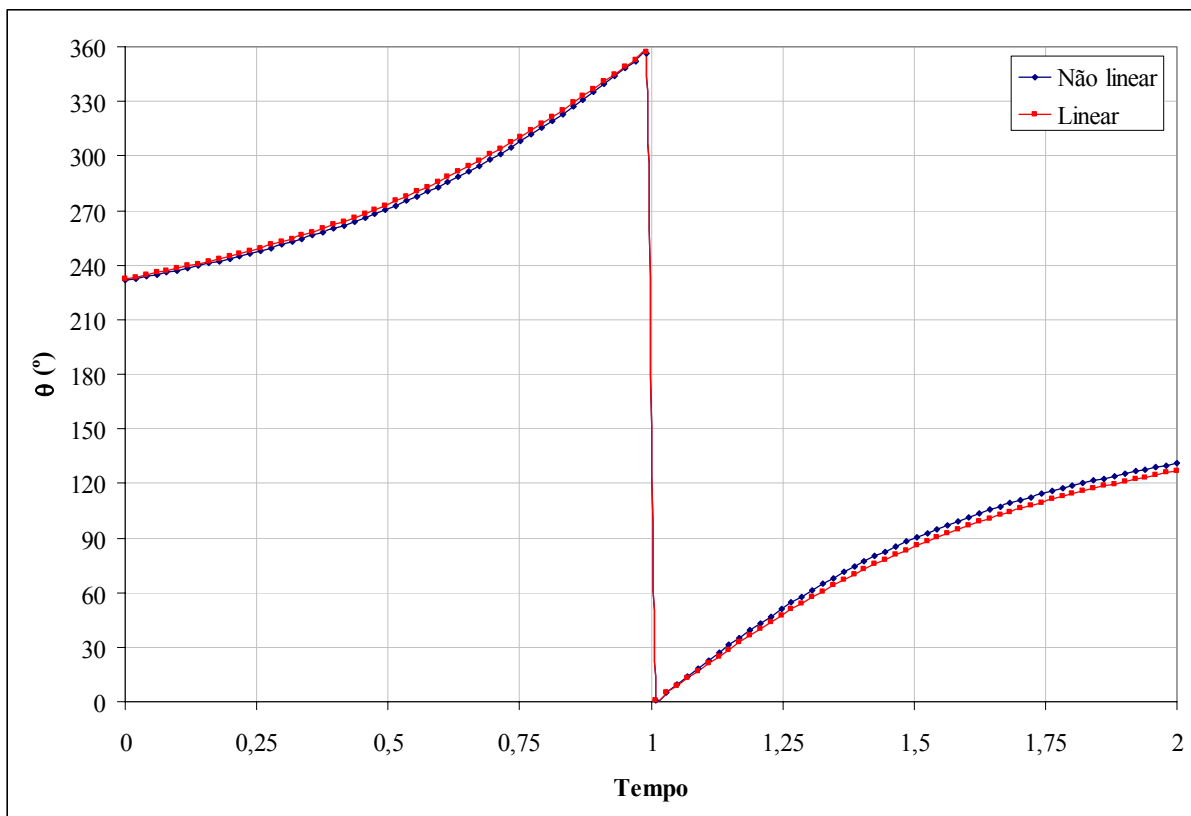


Figura VII.146. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

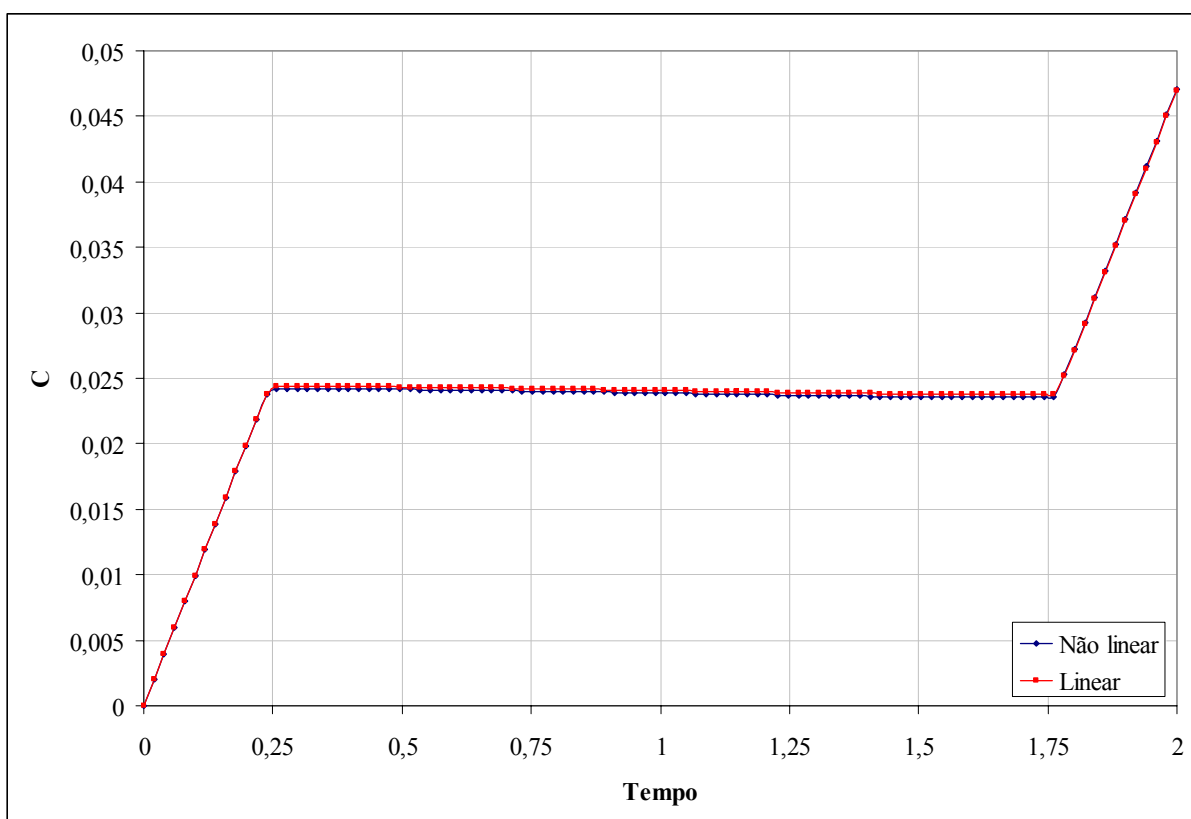


Figura VII.147. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

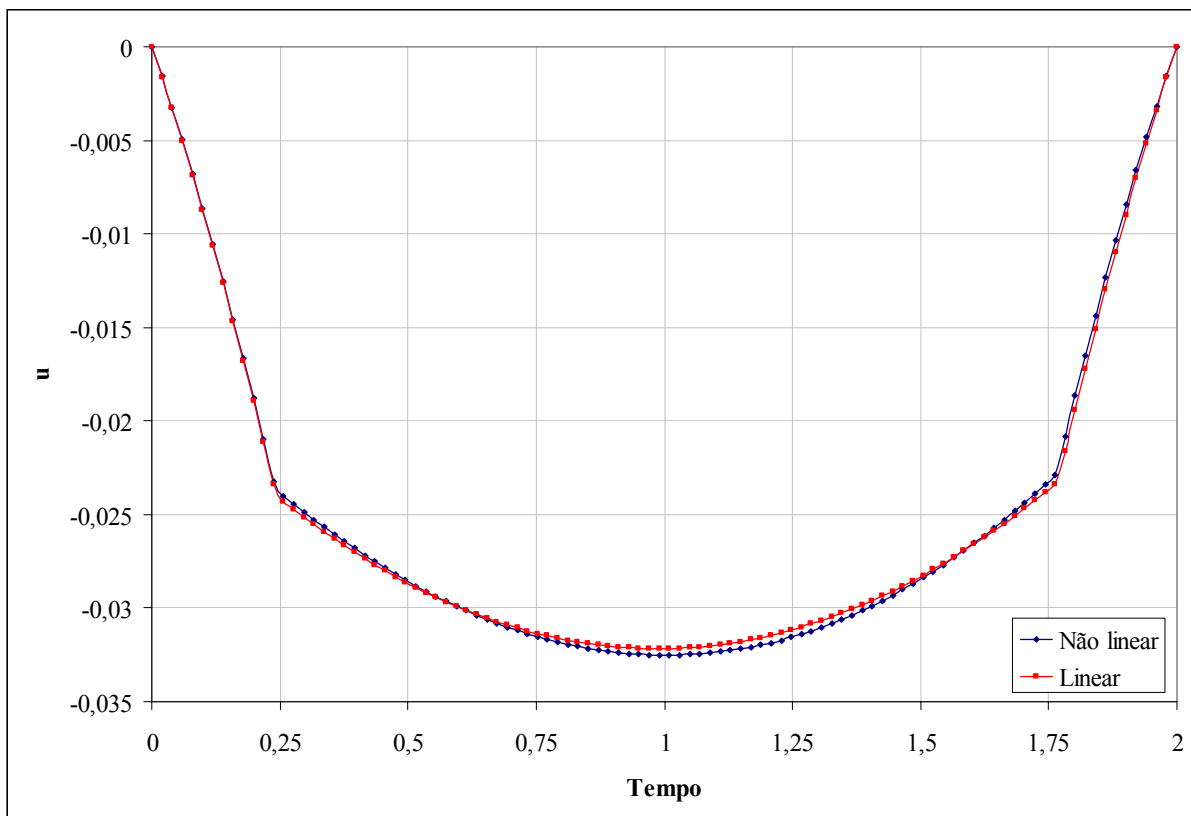


Figura VII.148. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

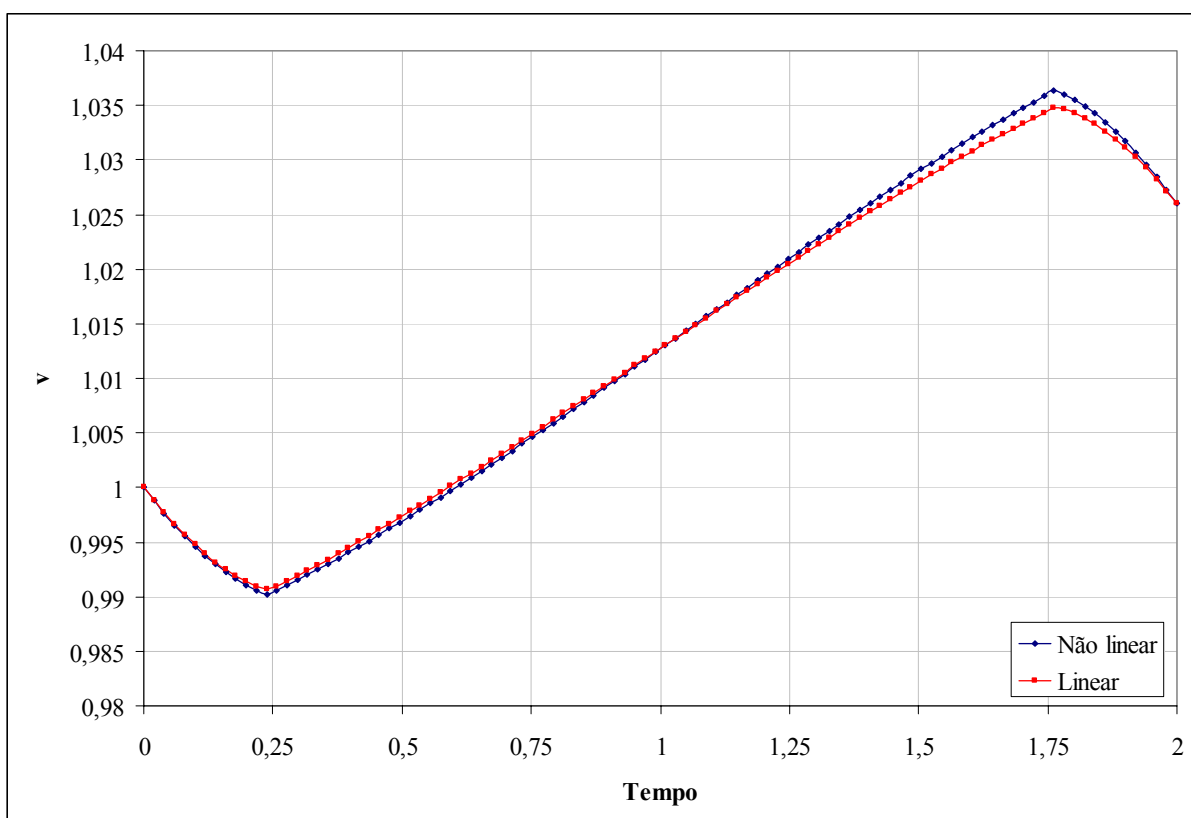


Figura VII.149. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

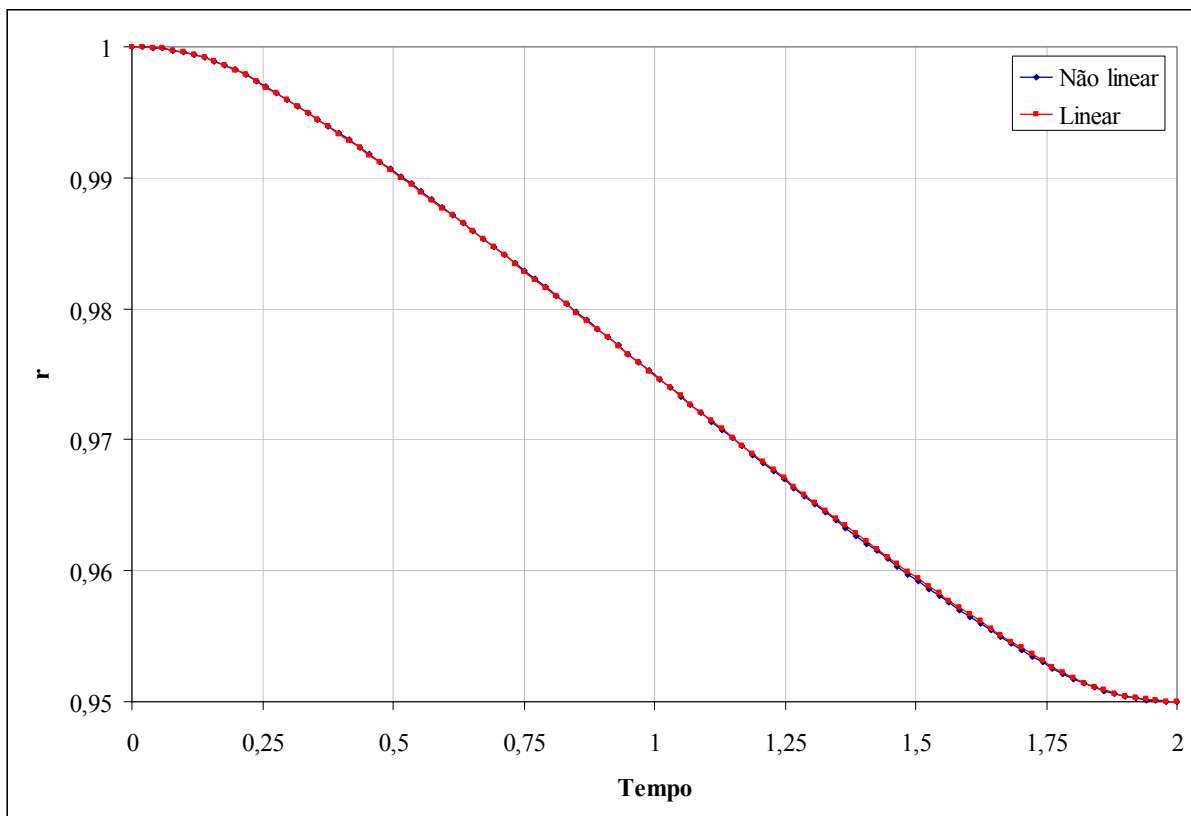


Figura VII.150. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

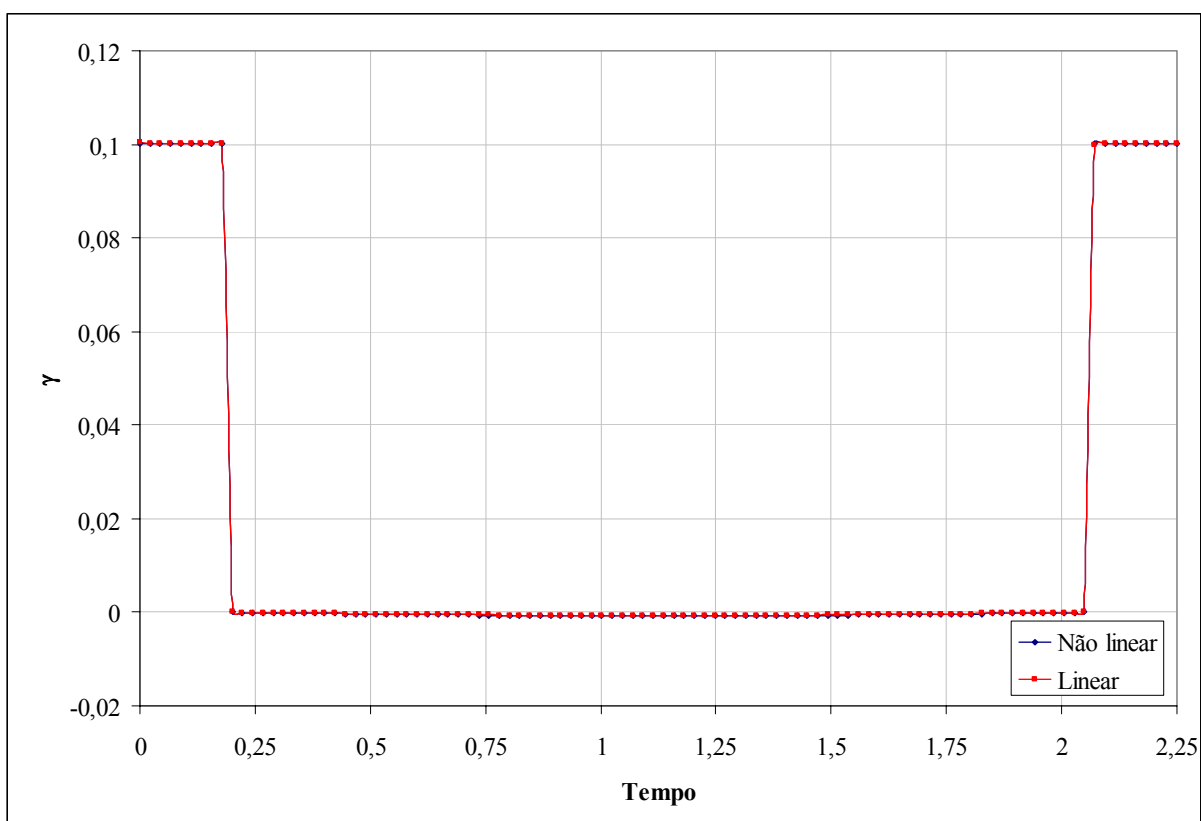


Figura VII.151. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

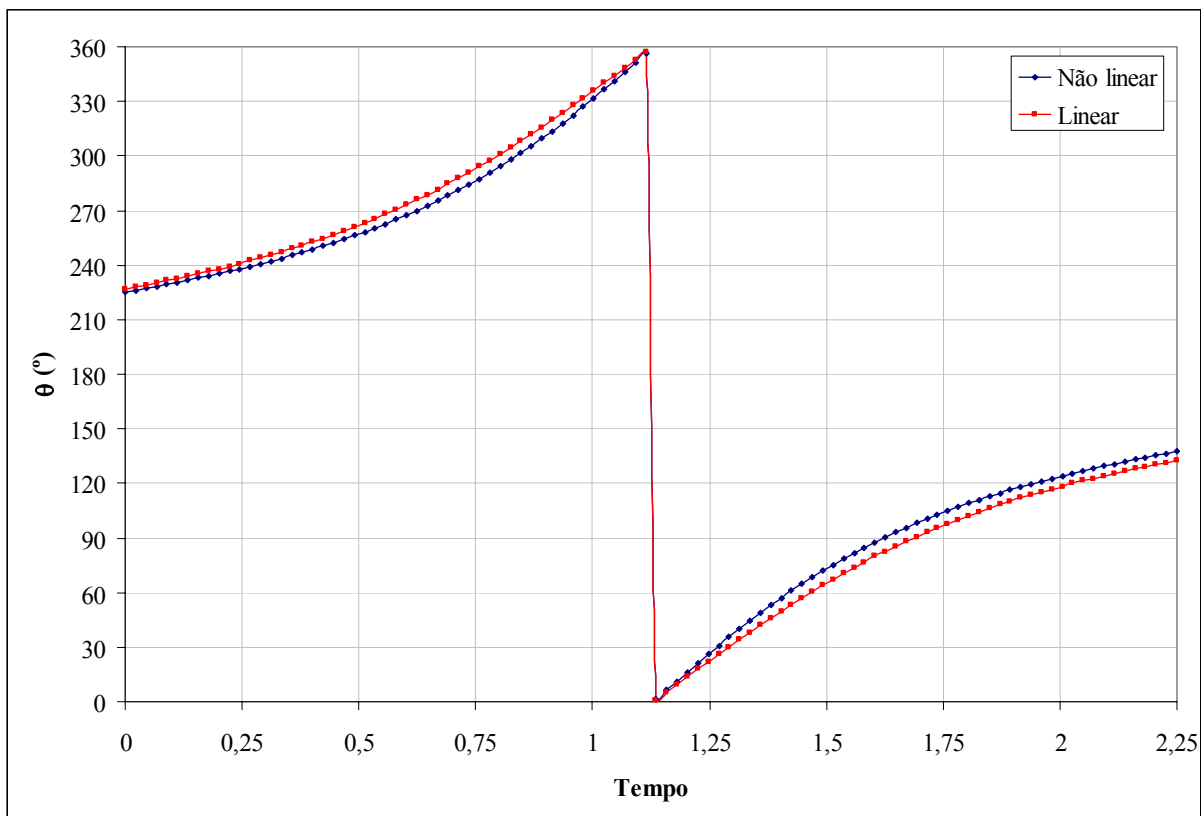


Figura VII.152. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

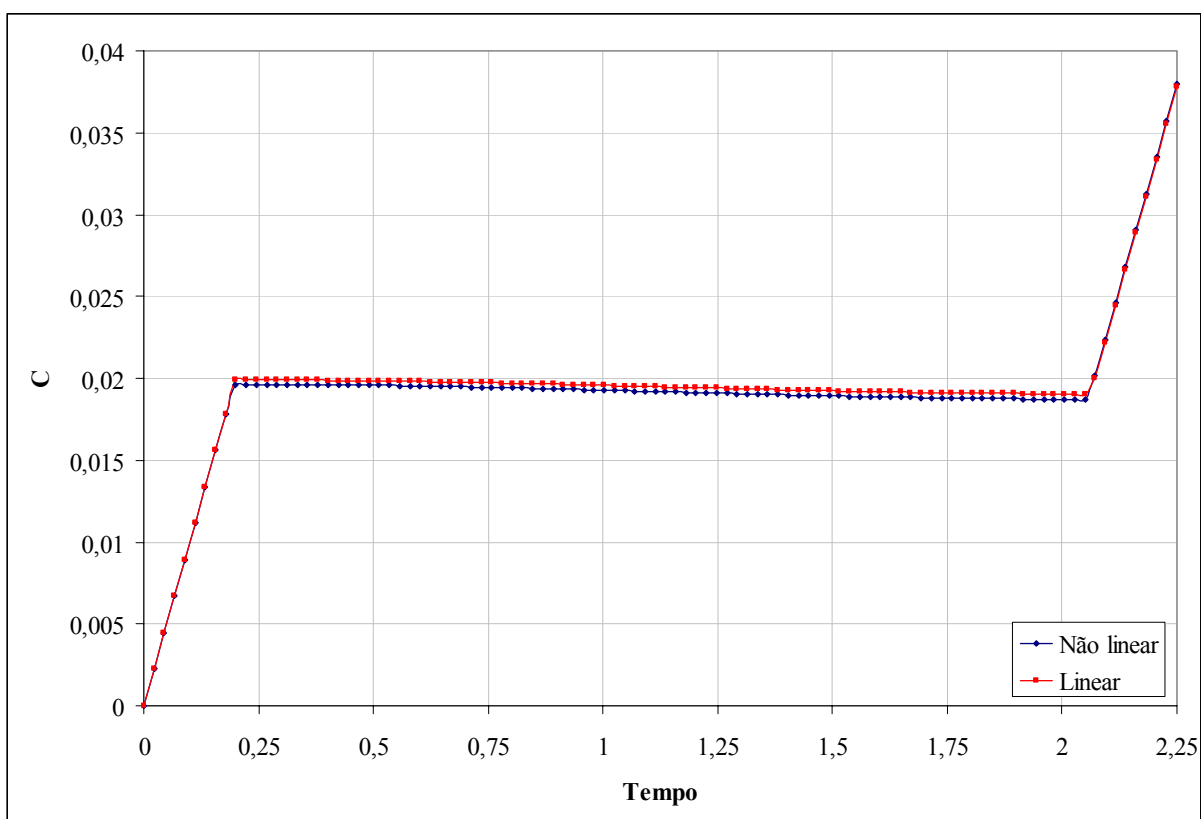


Figura VII.153. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

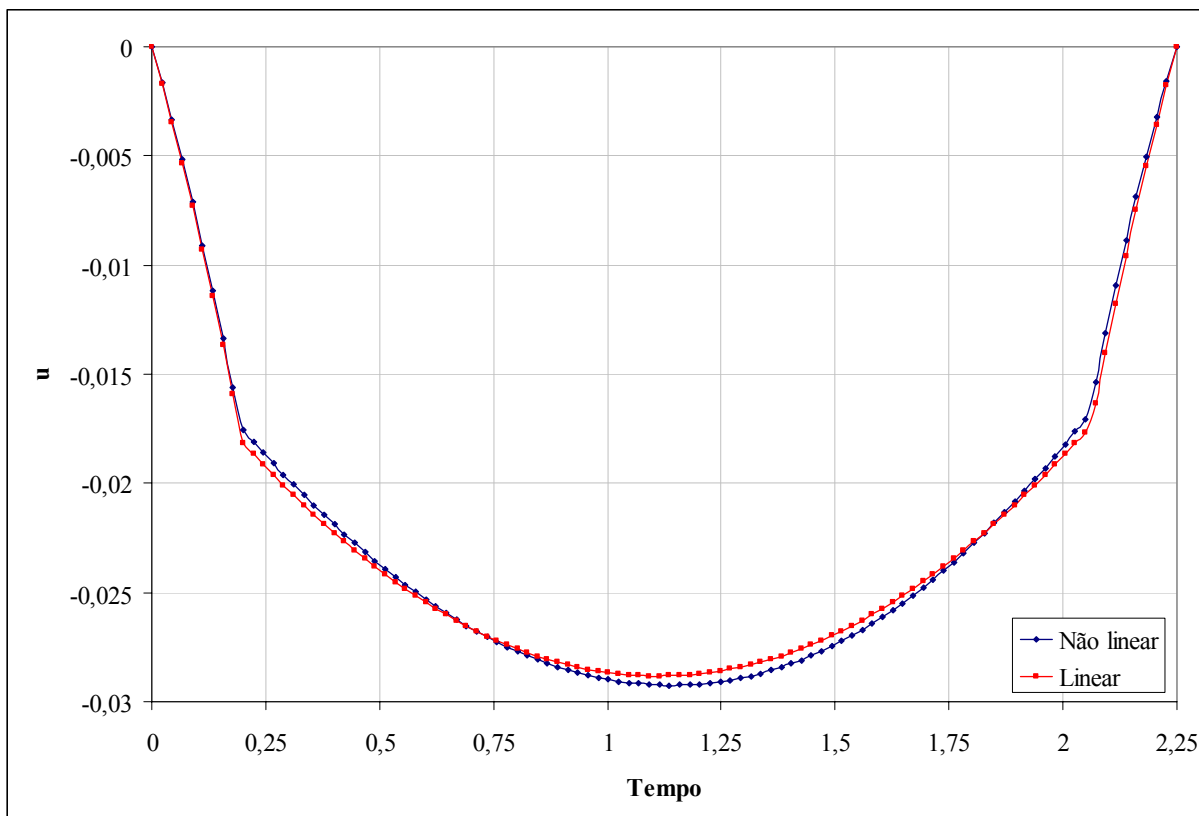


Figura VII.154. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

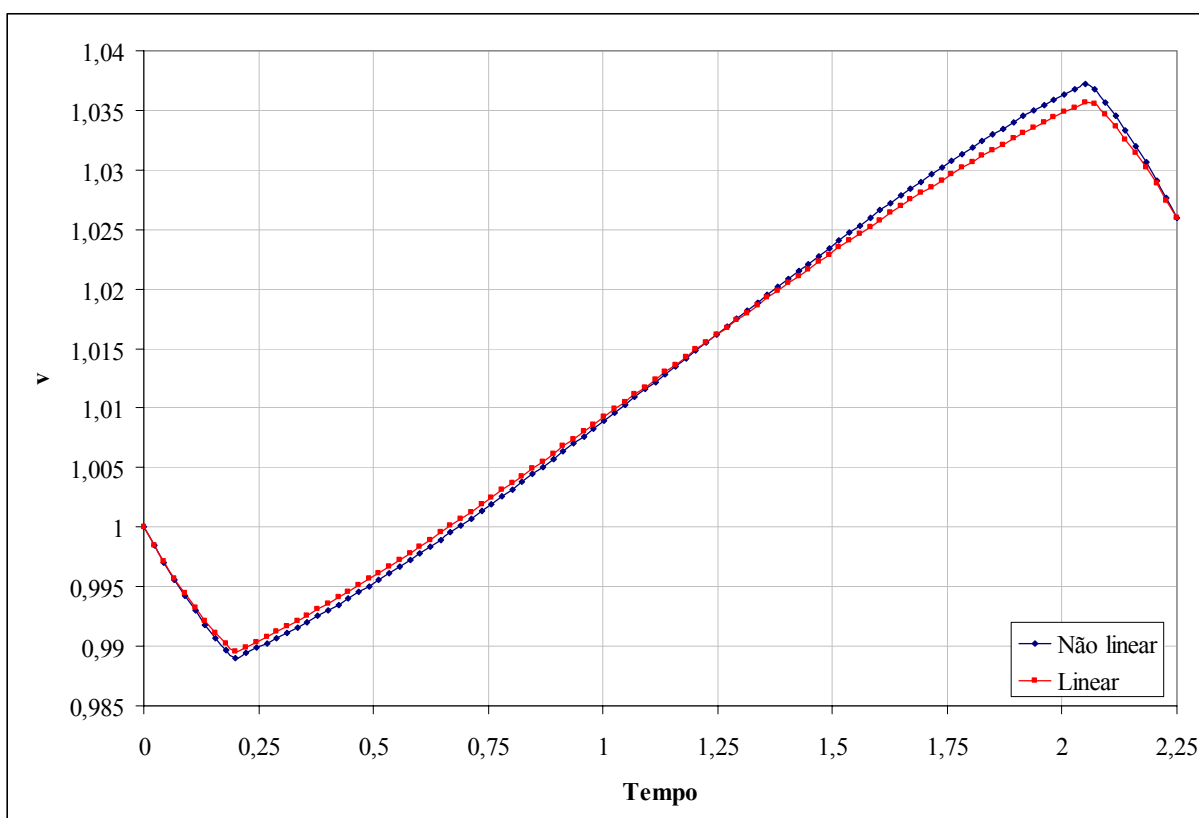


Figura VII.155. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

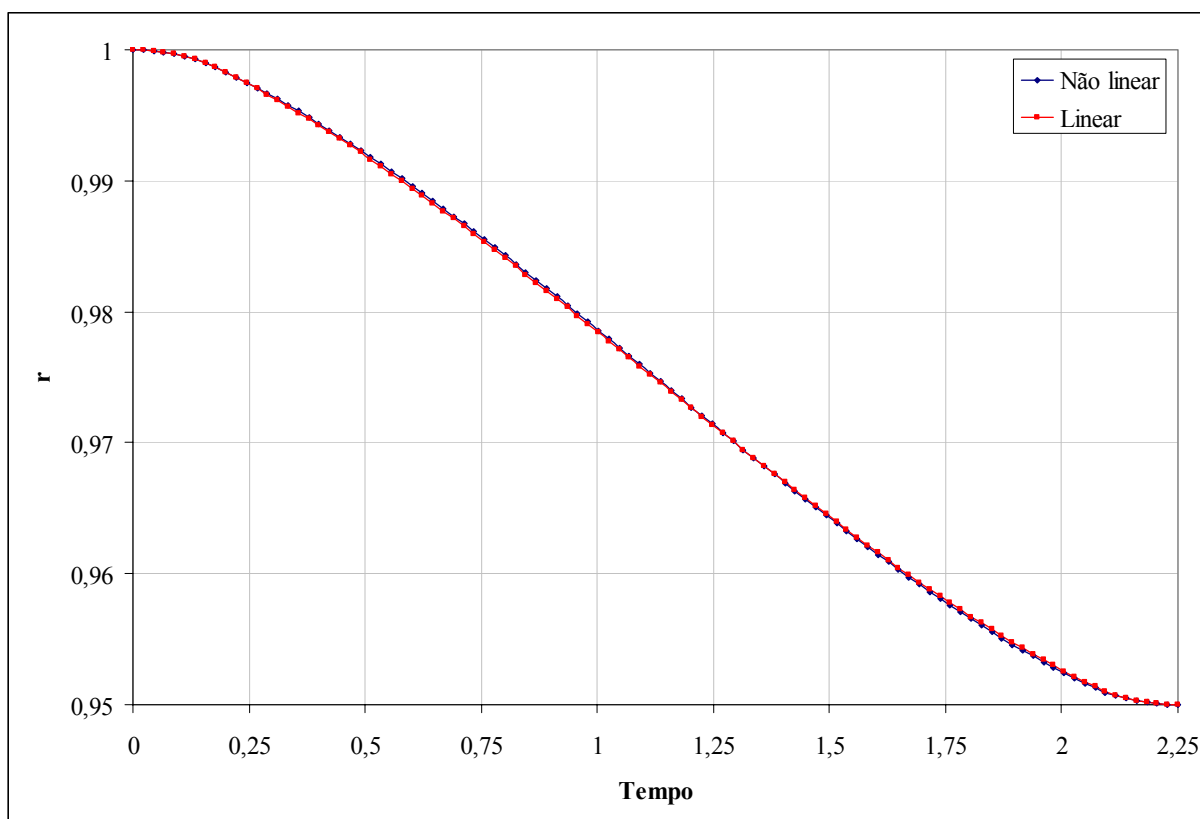


Figura VII.156. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

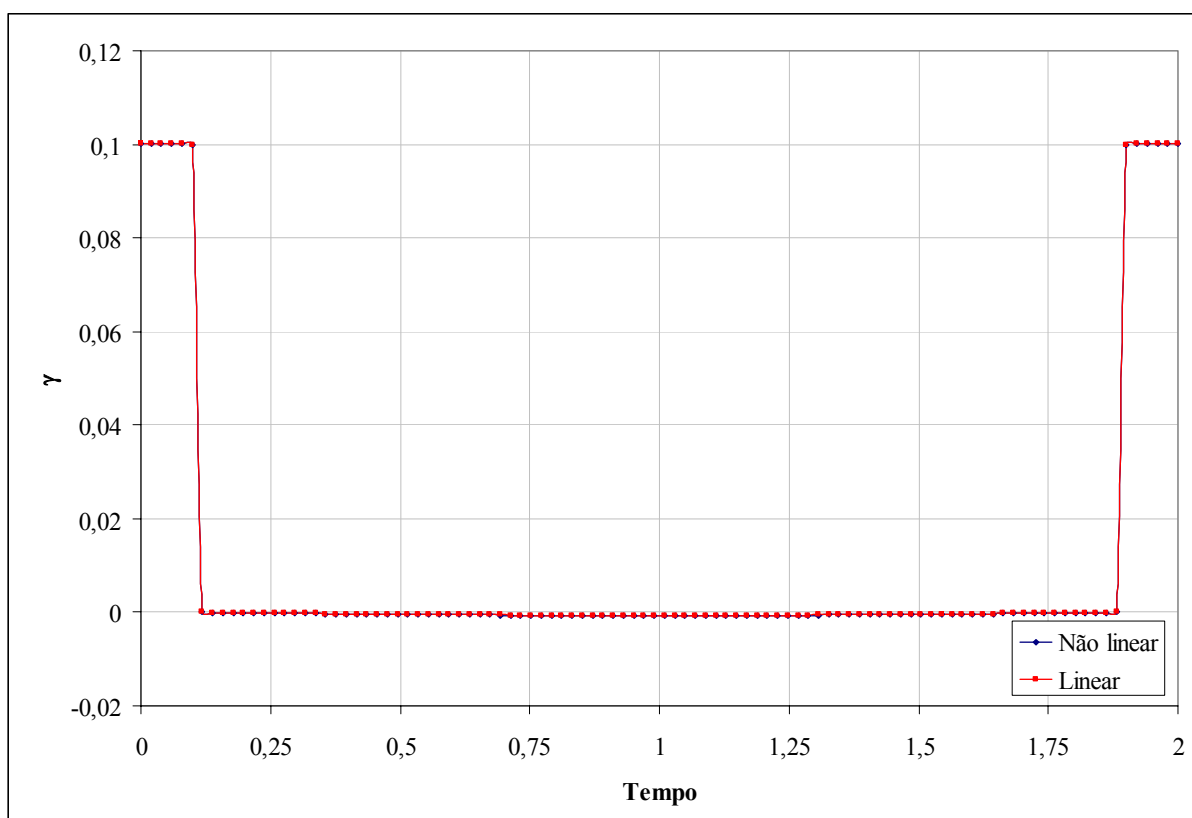


Figura VII.157. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

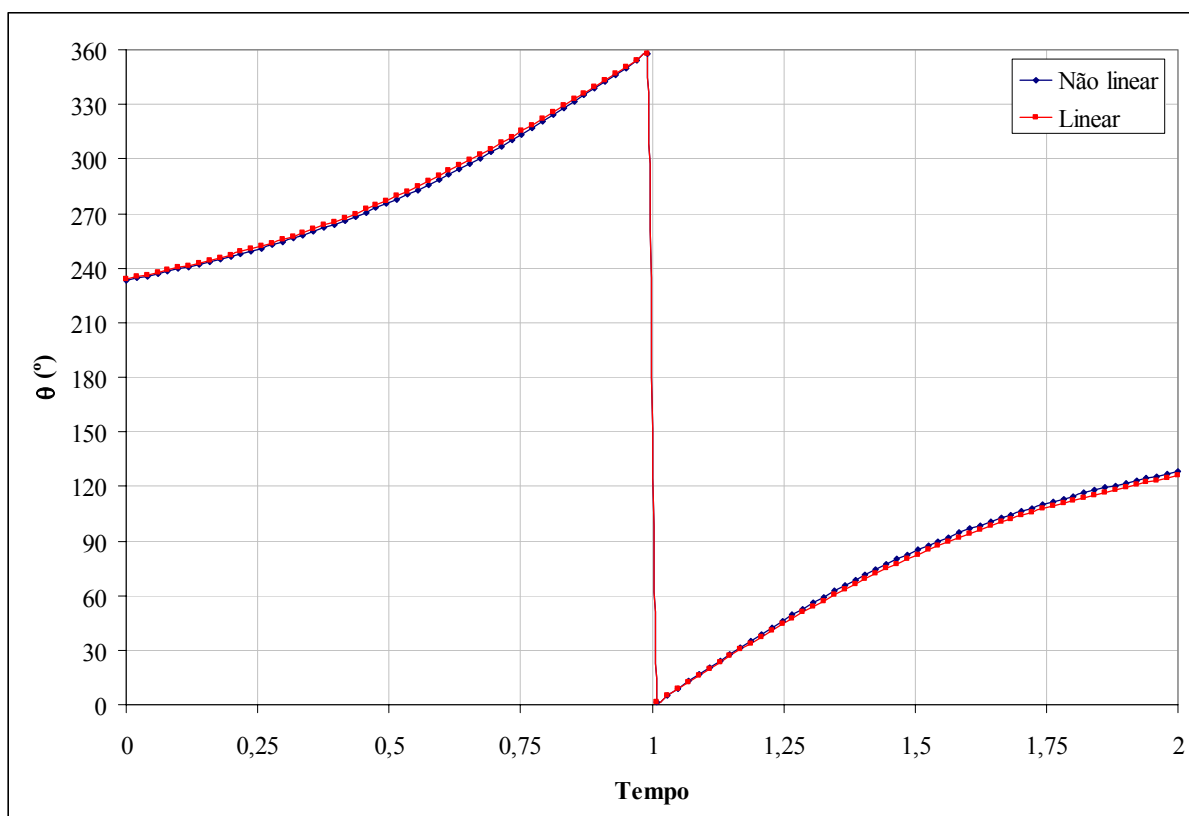


Figura VII.158. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

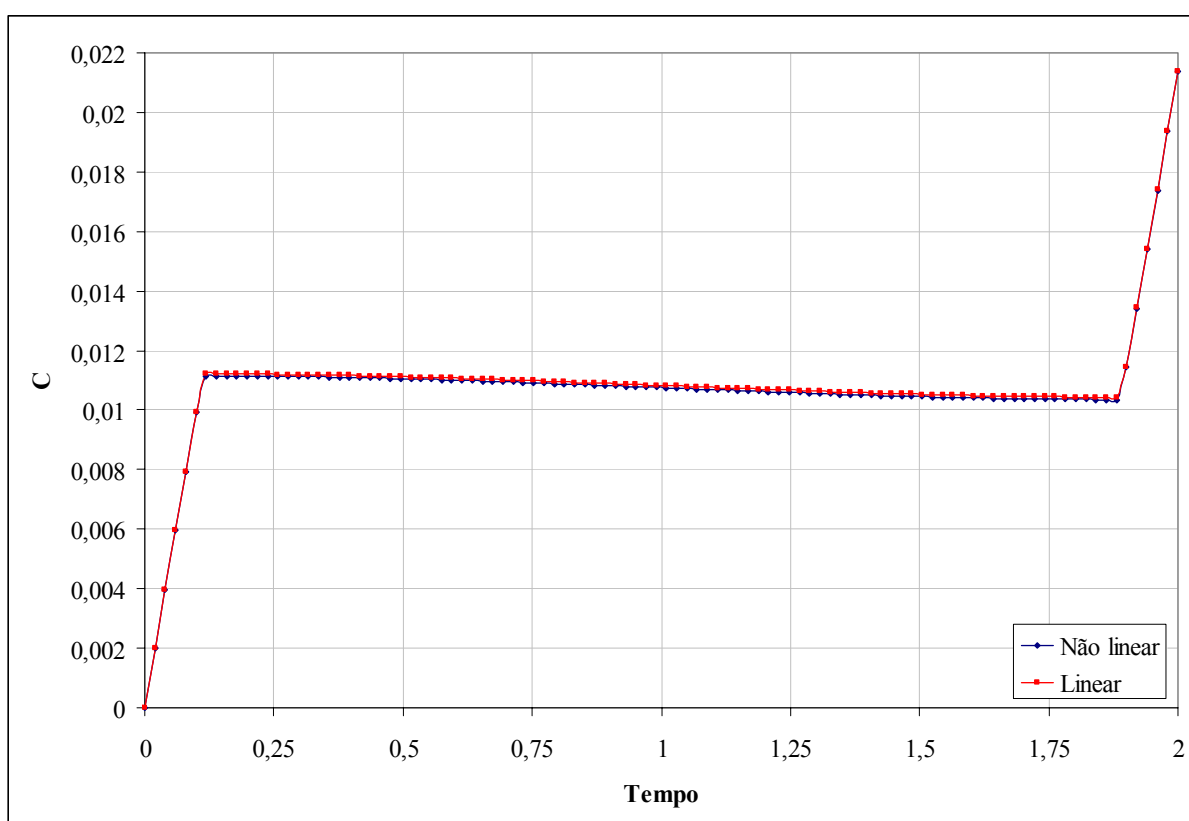


Figura VII.159. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

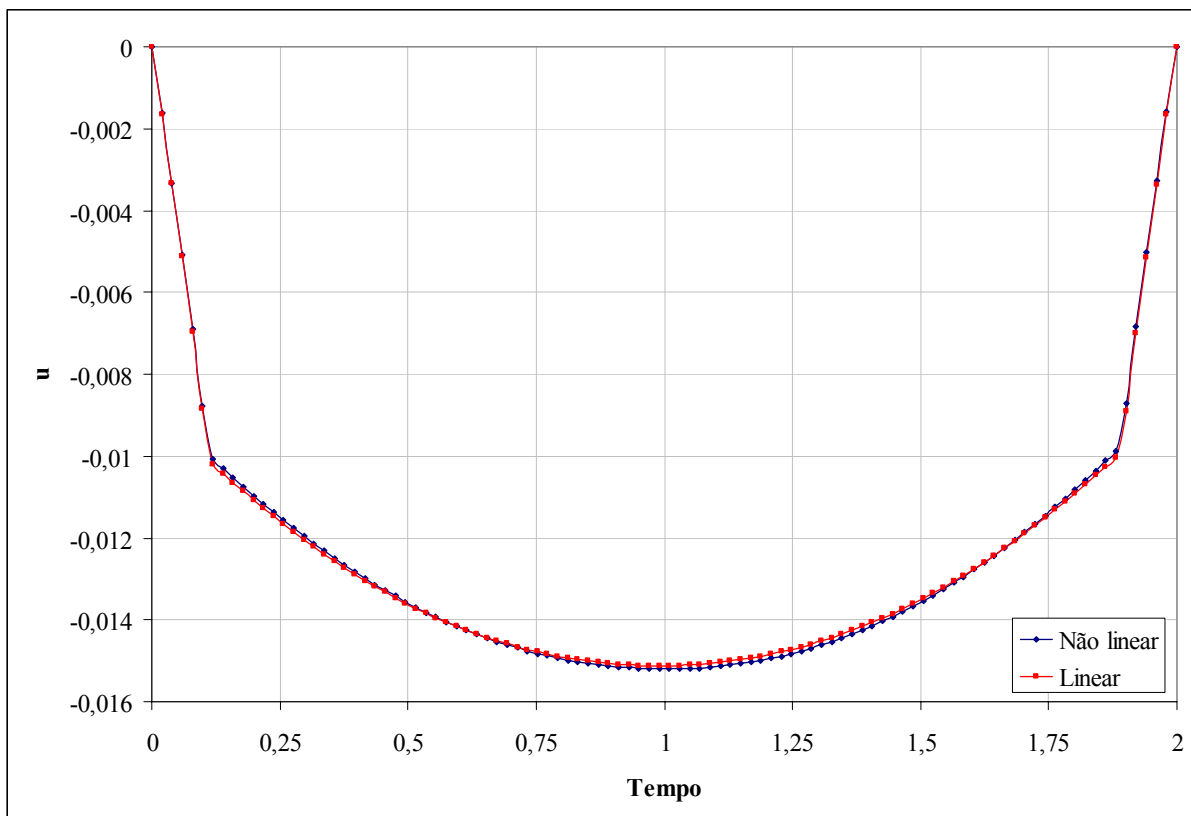


Figura VII.160. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

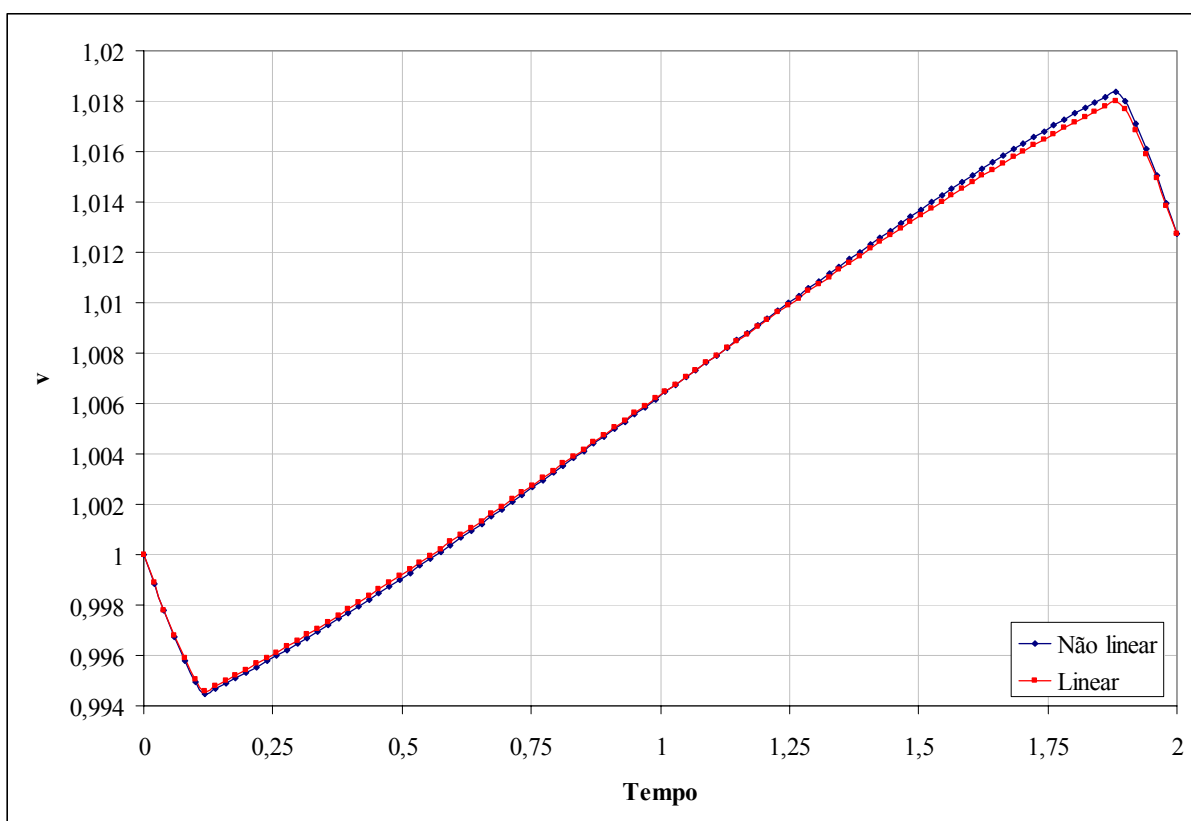


Figura VII.161. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

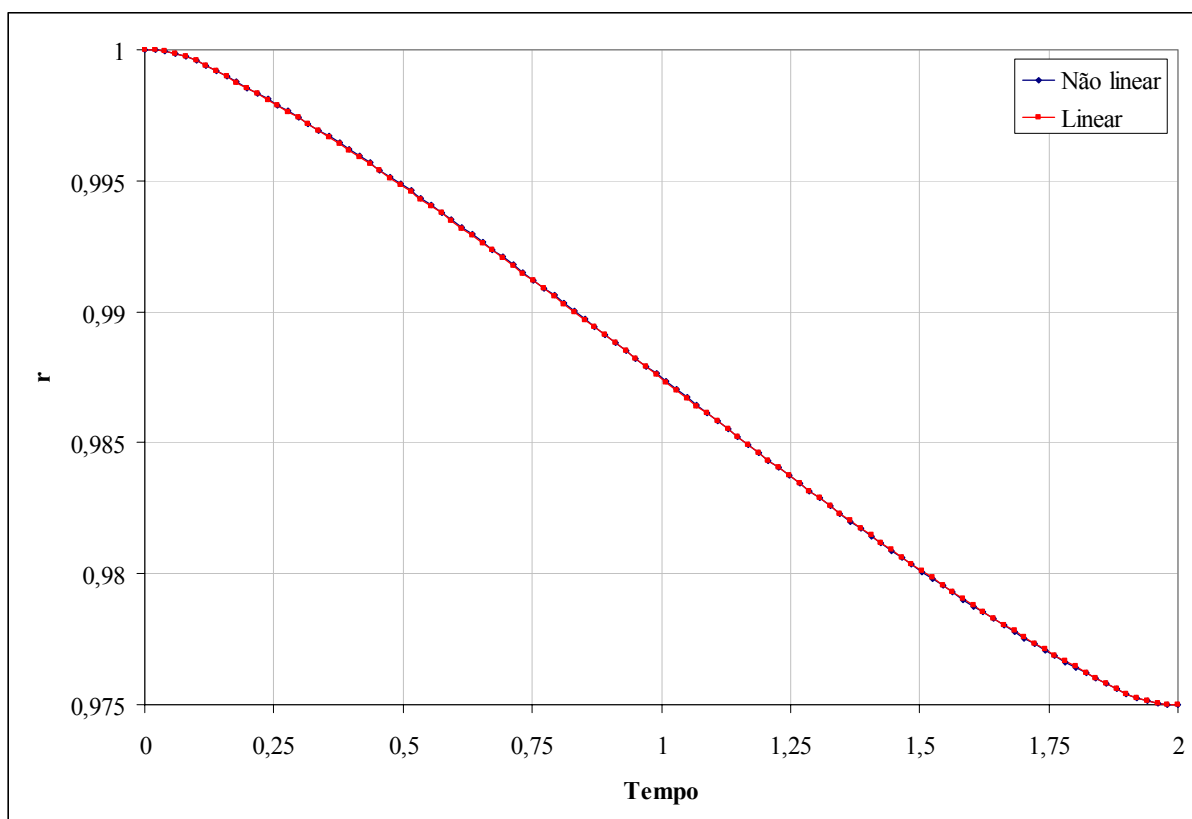


Figura VII.162. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

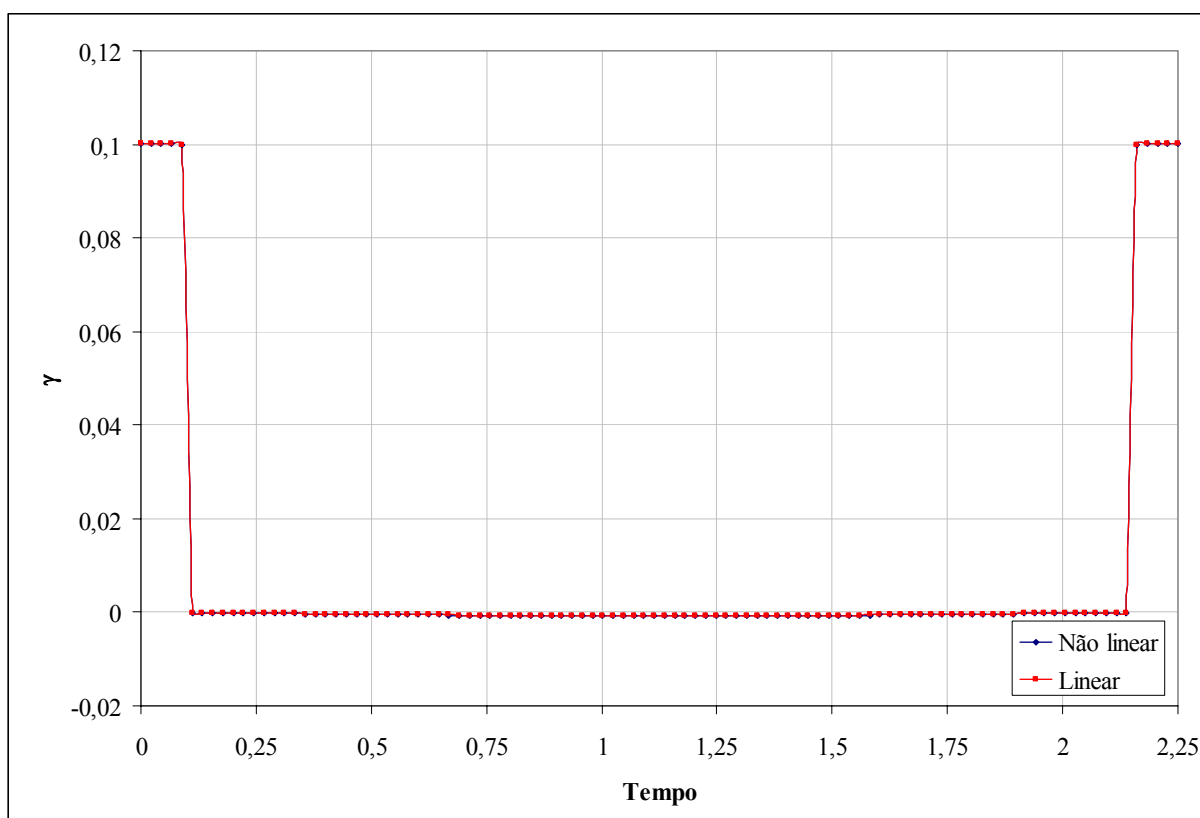


Figura VII.163. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

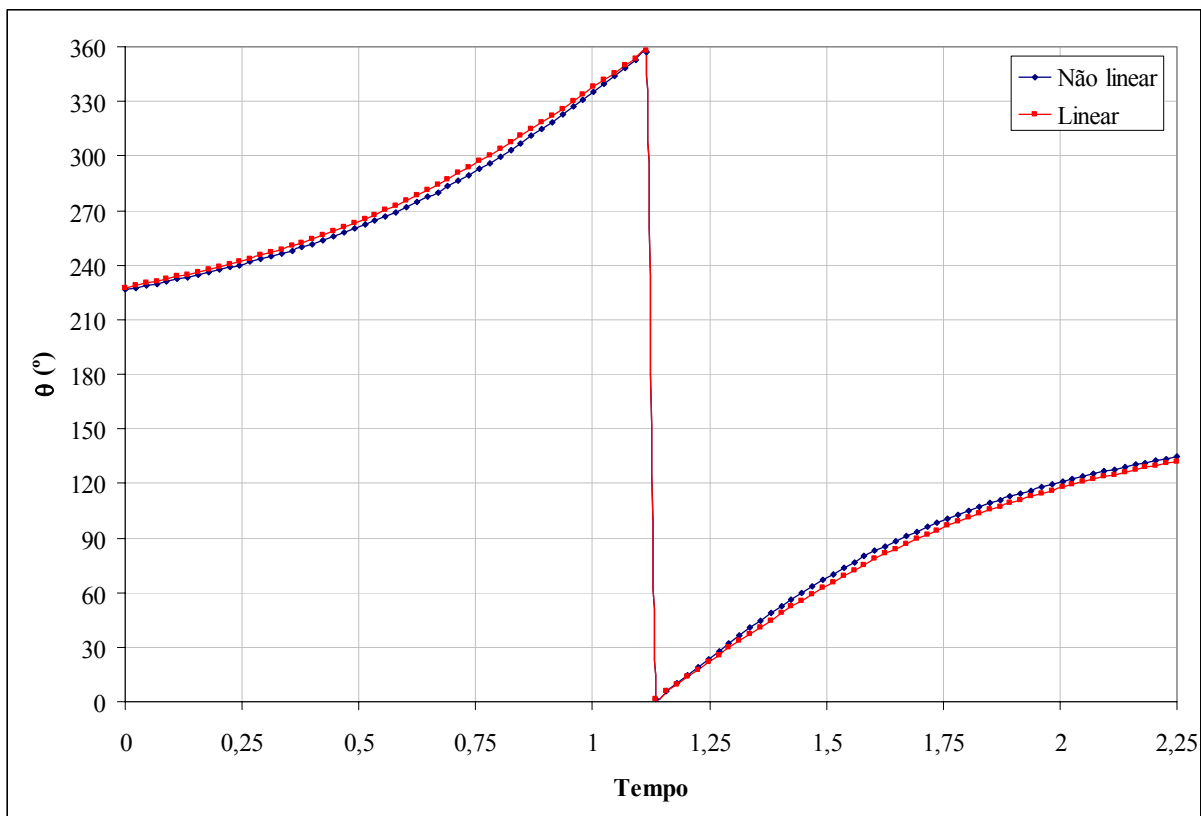


Figura VII.164. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

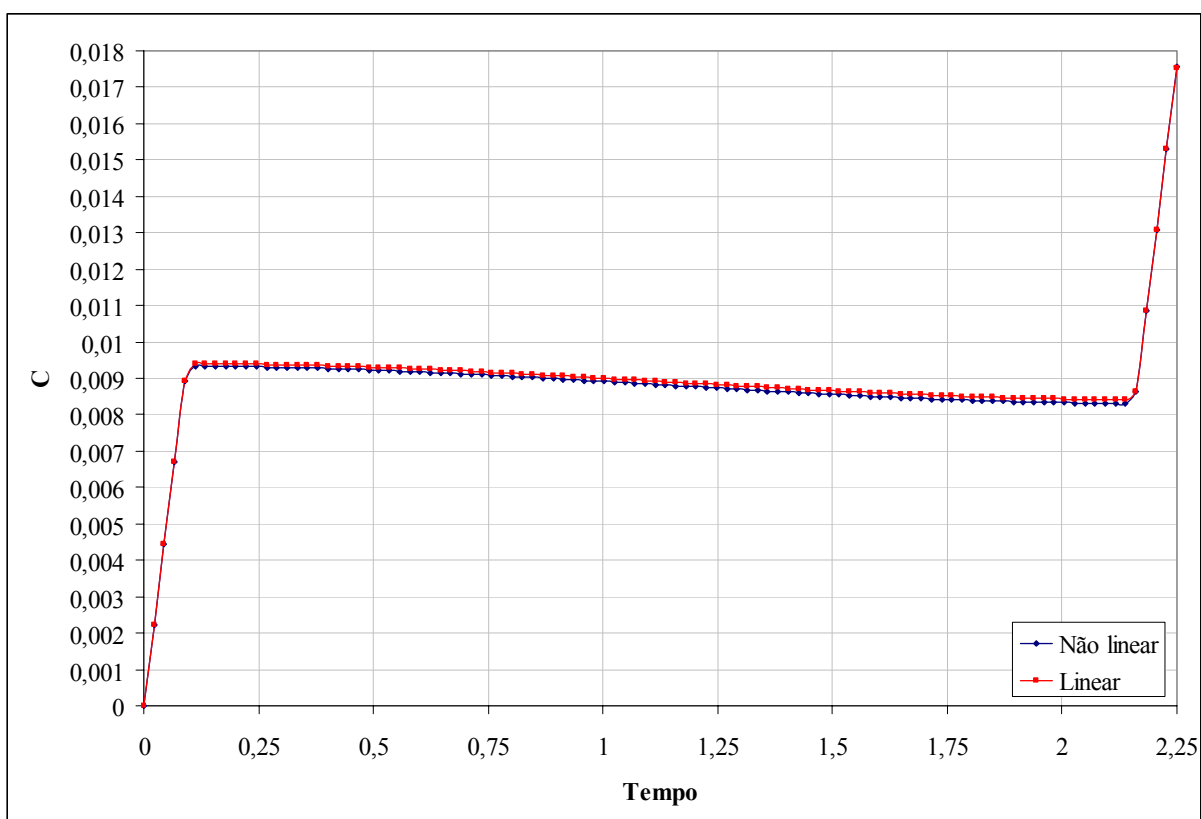


Figura VII.165. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

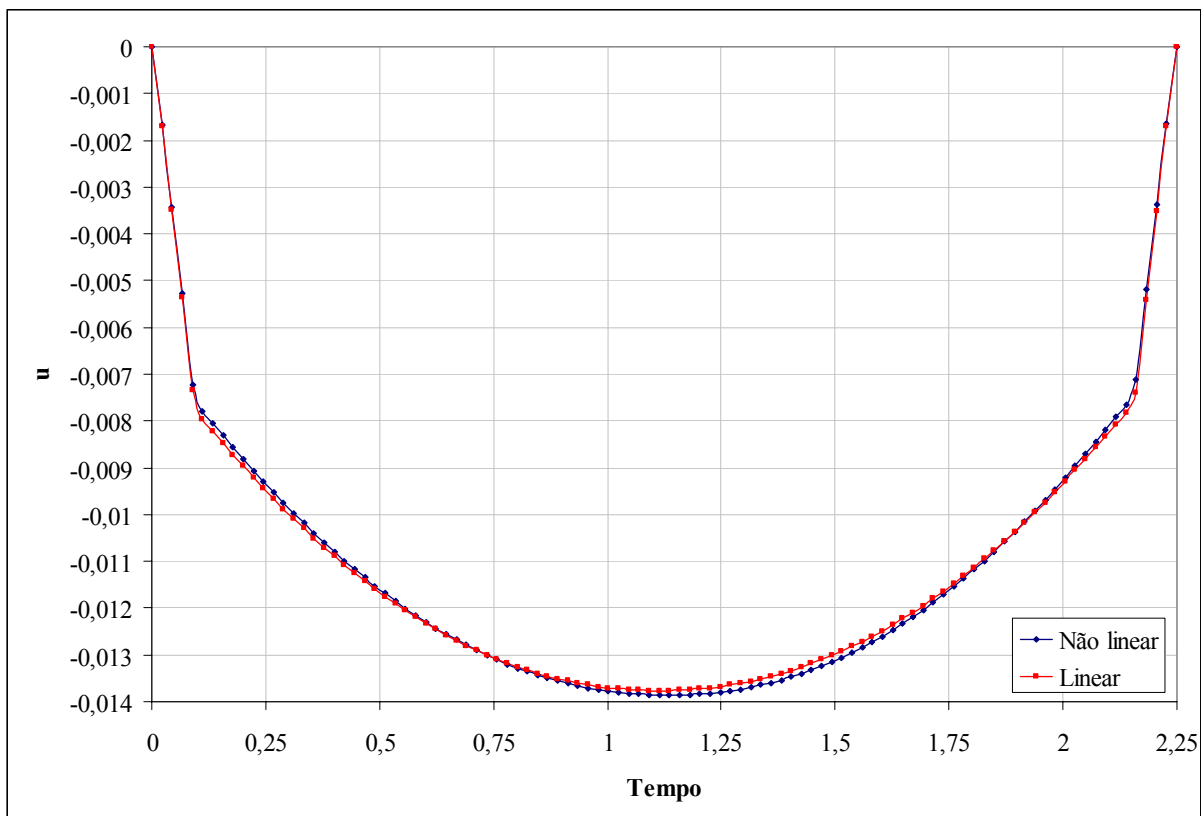


Figura VII.166. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

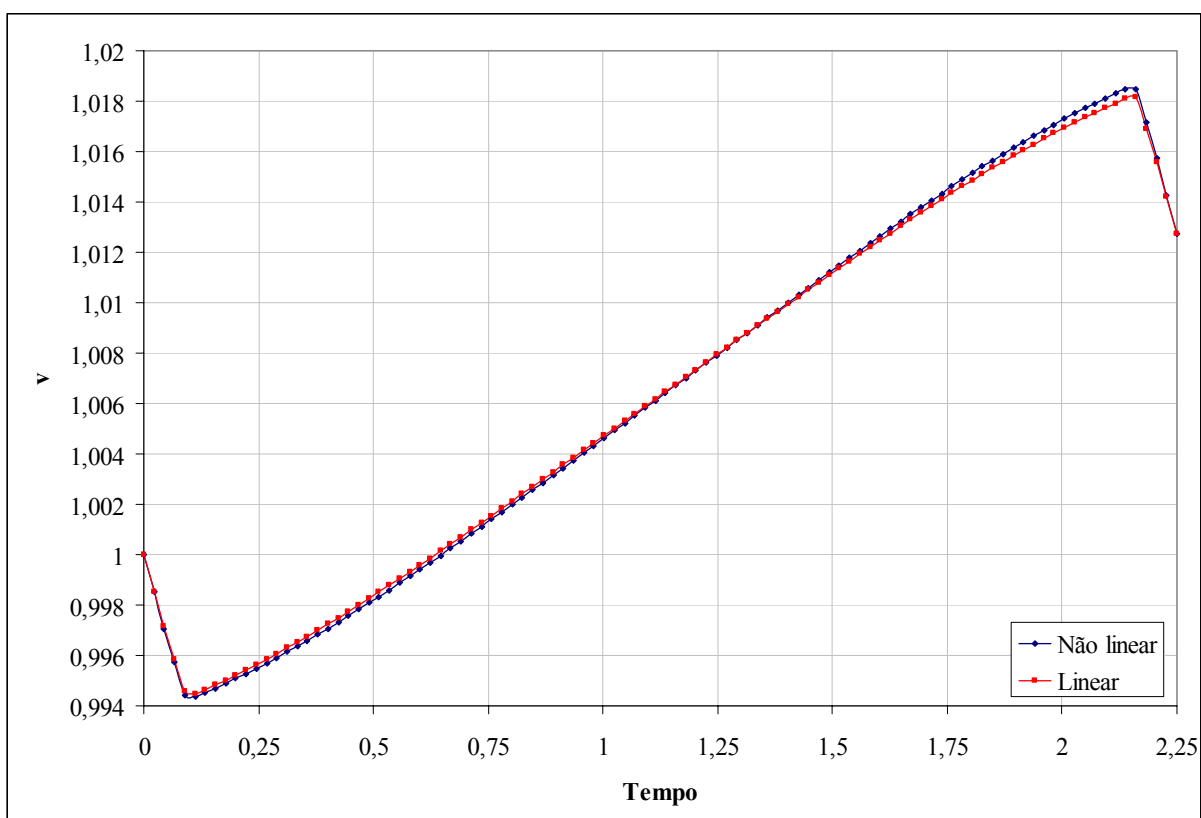


Figura VII.167. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

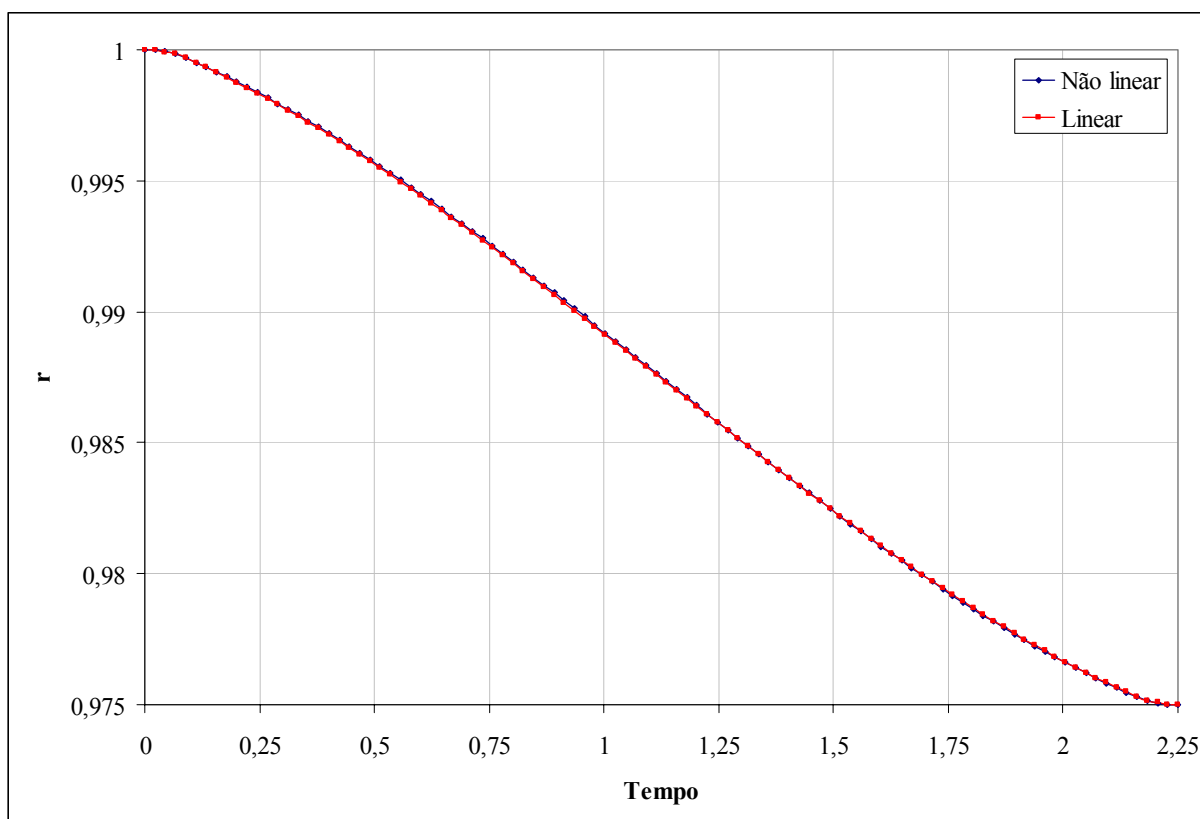


Figura VII.168. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 0,9750$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

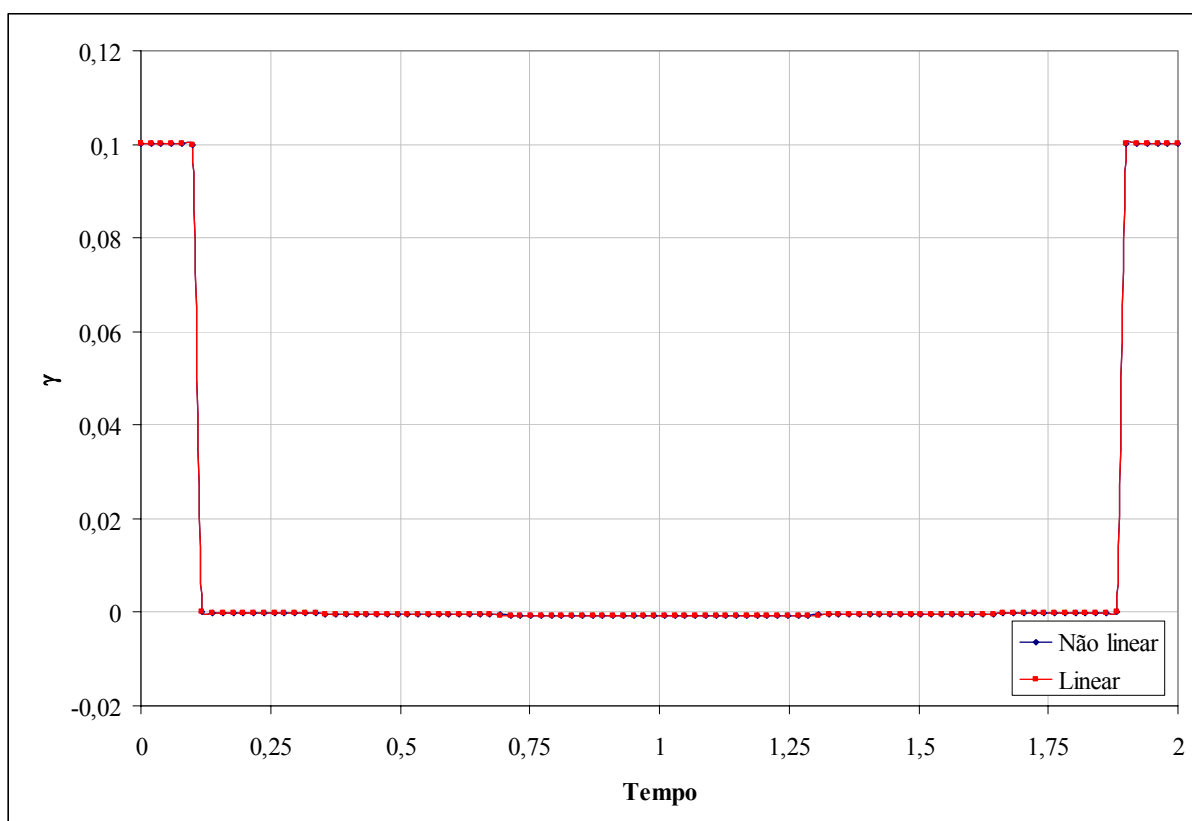


Figura VII.169. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

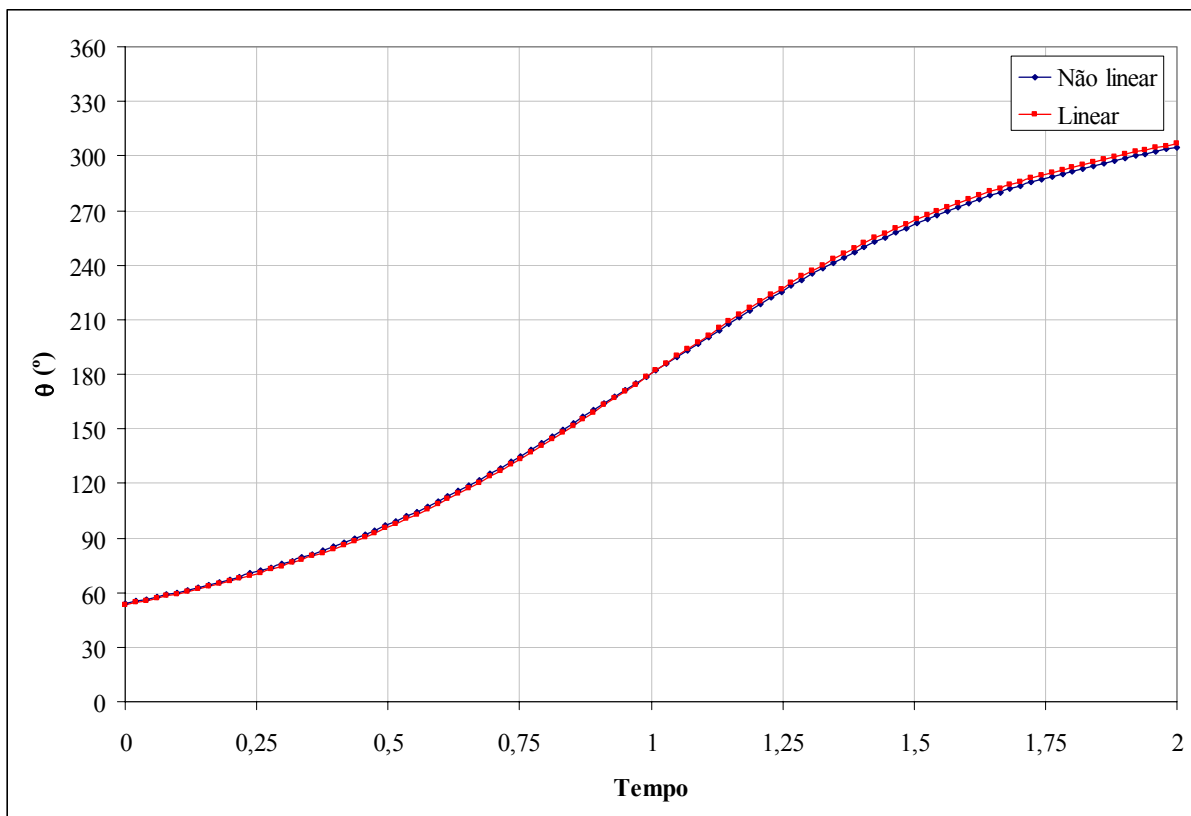


Figura VII.170. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

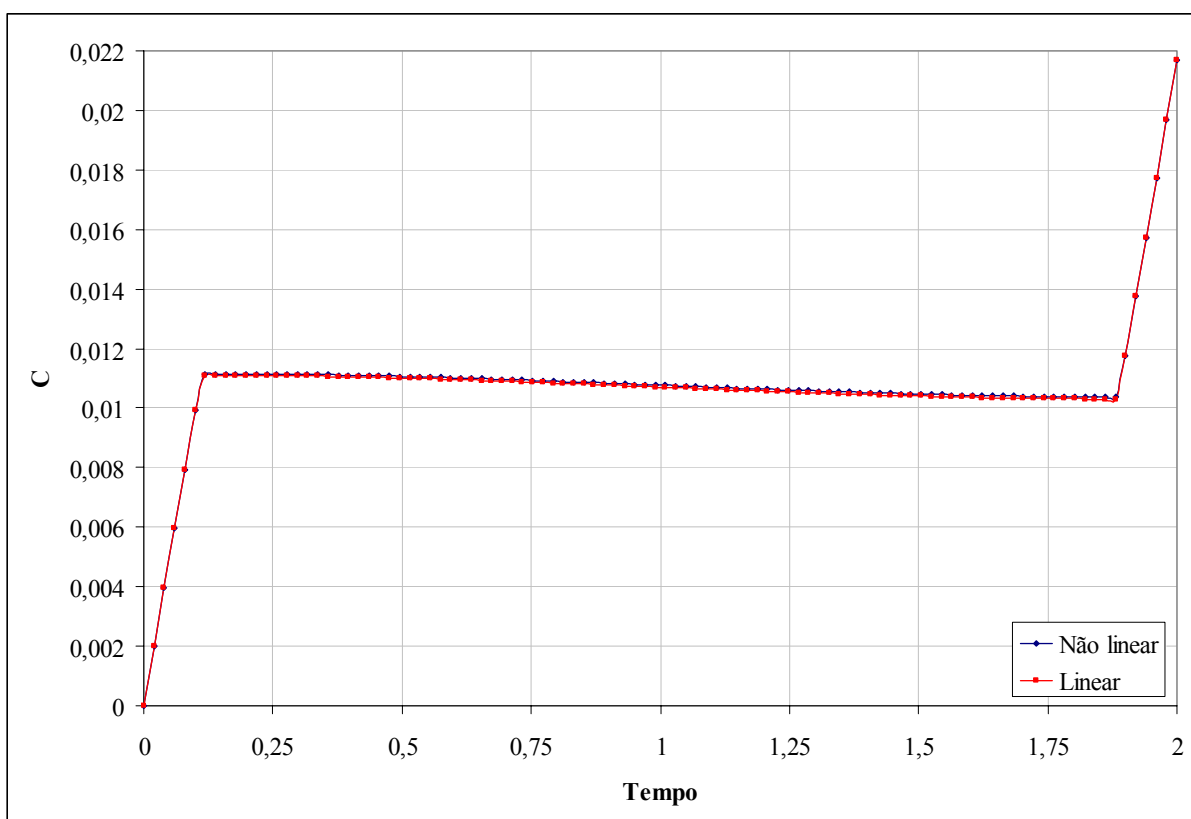


Figura VII.171. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

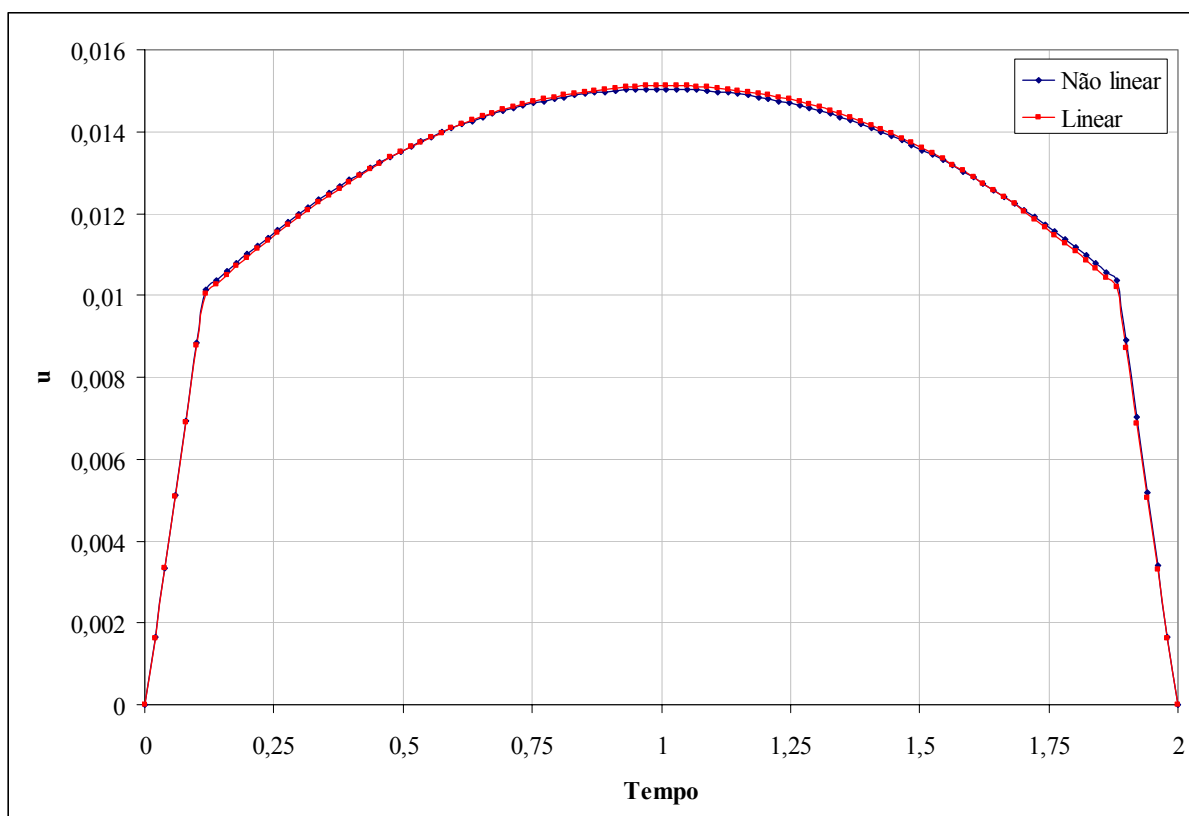


Figura VII.172. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

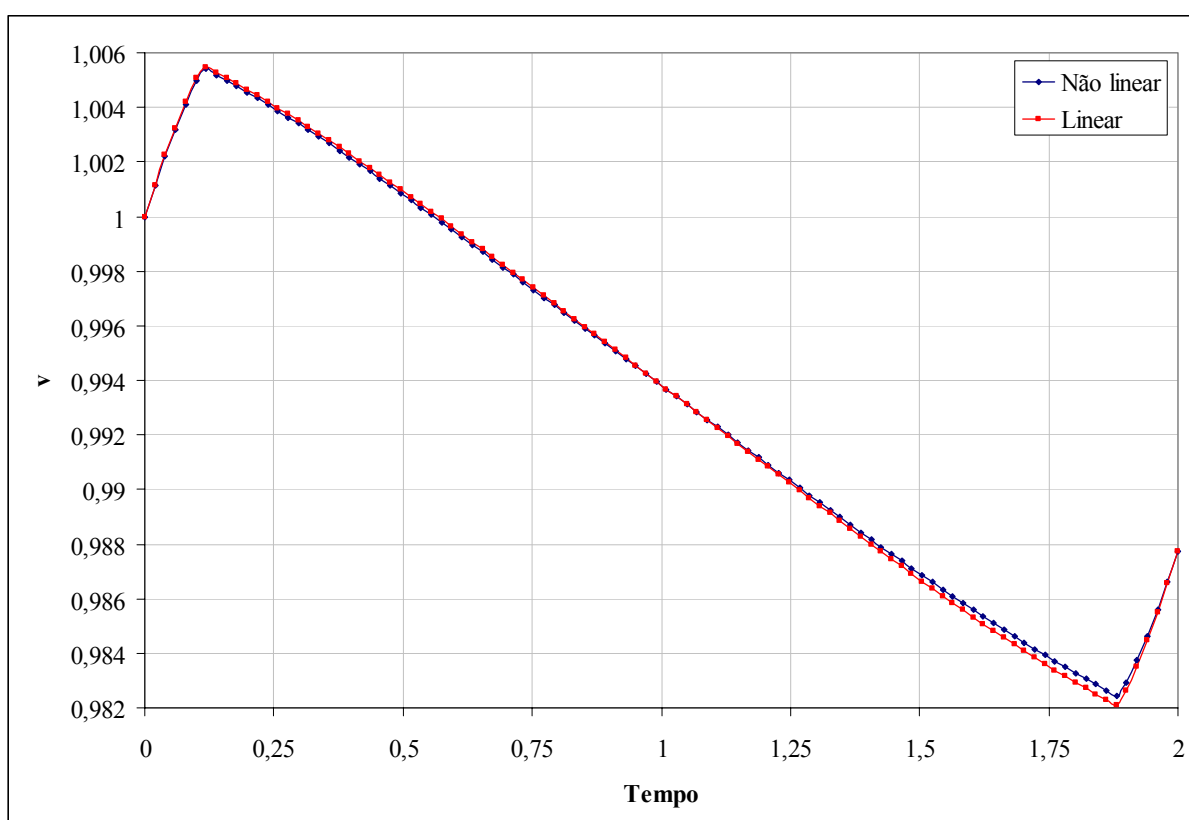


Figura VII.173. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

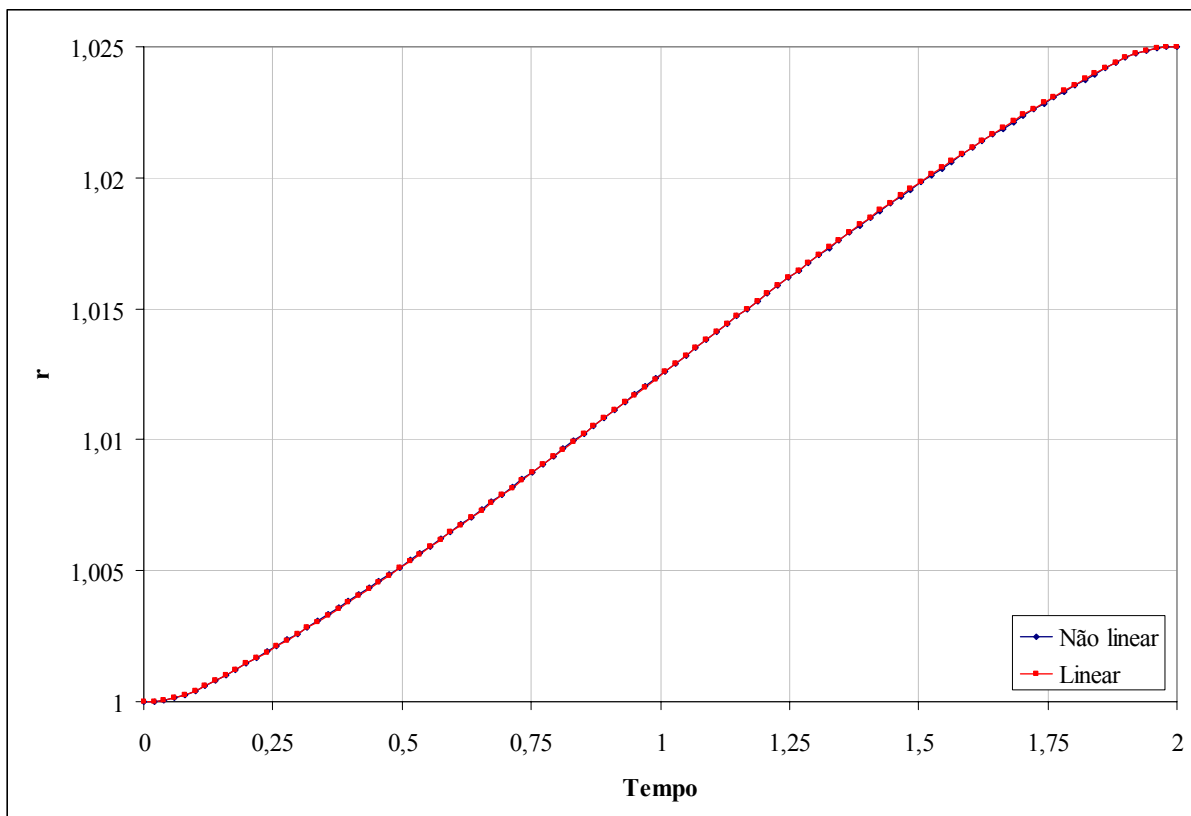


Figura VII.174. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

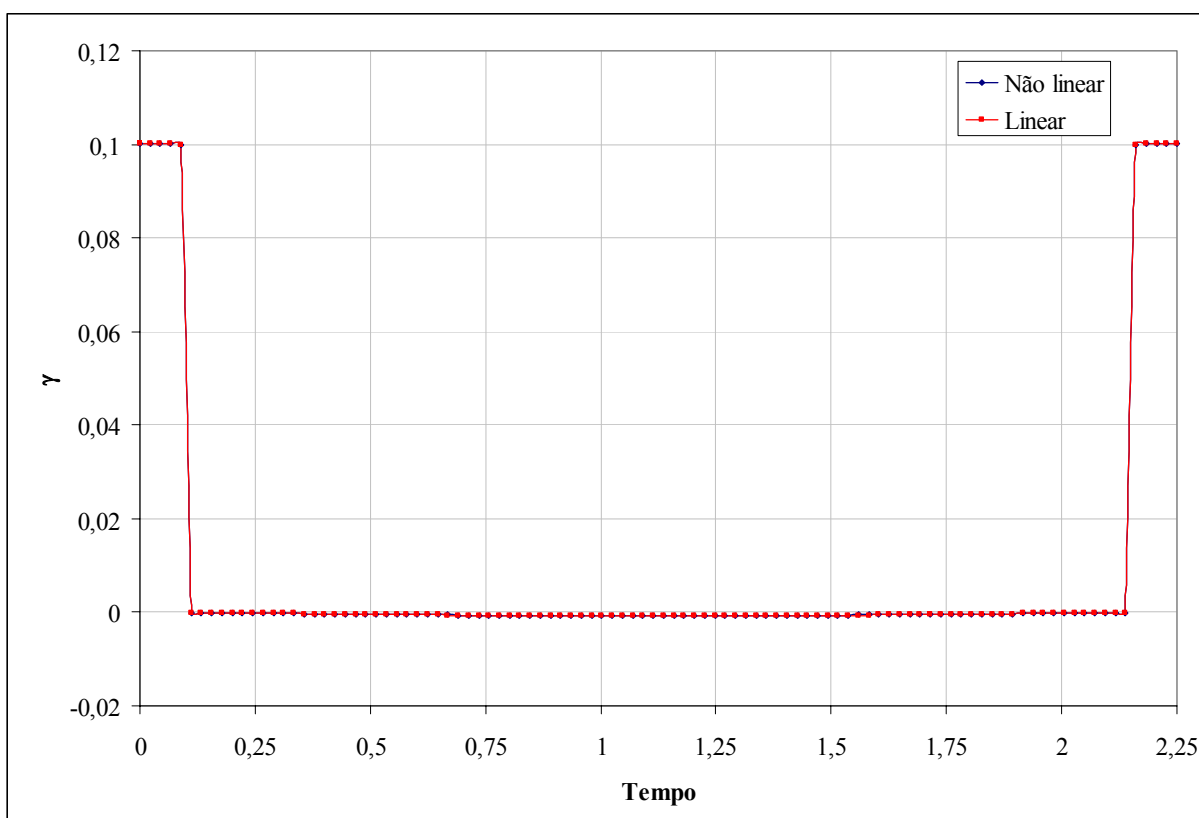


Figura VII.175. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

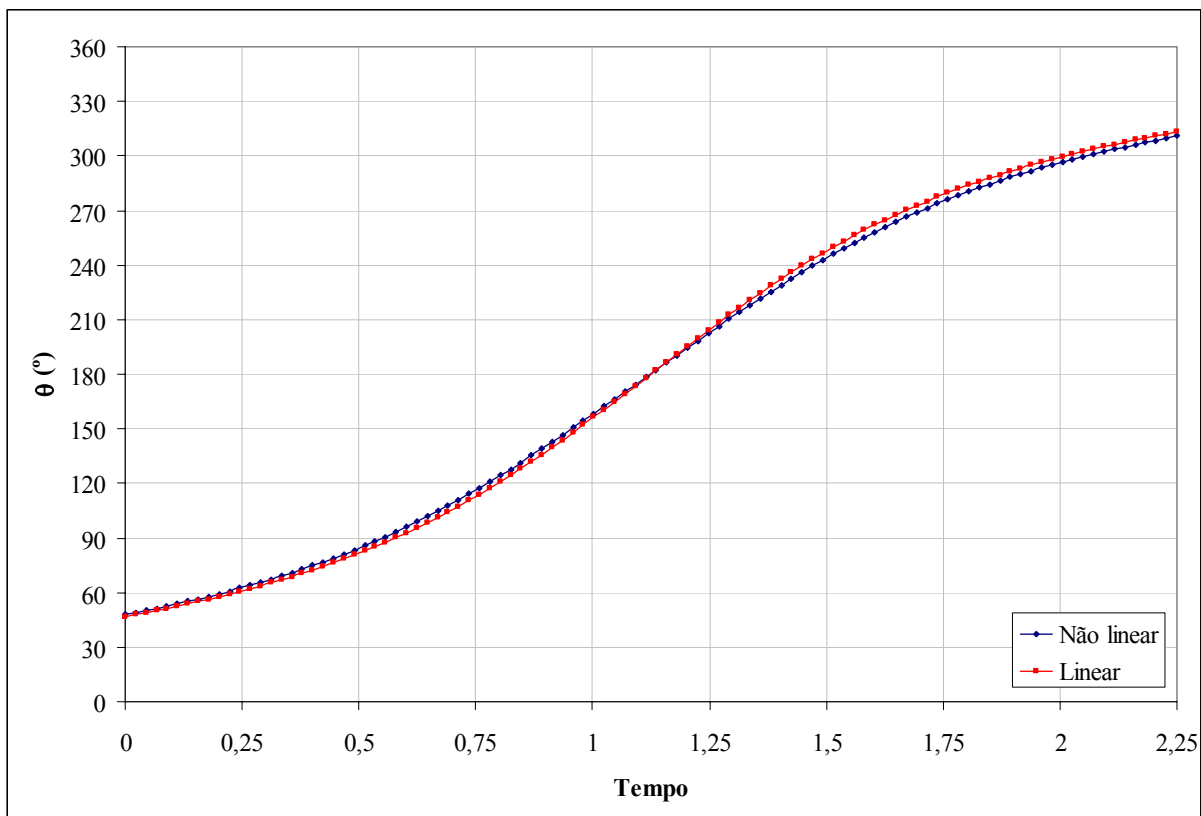


Figura VII.176. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

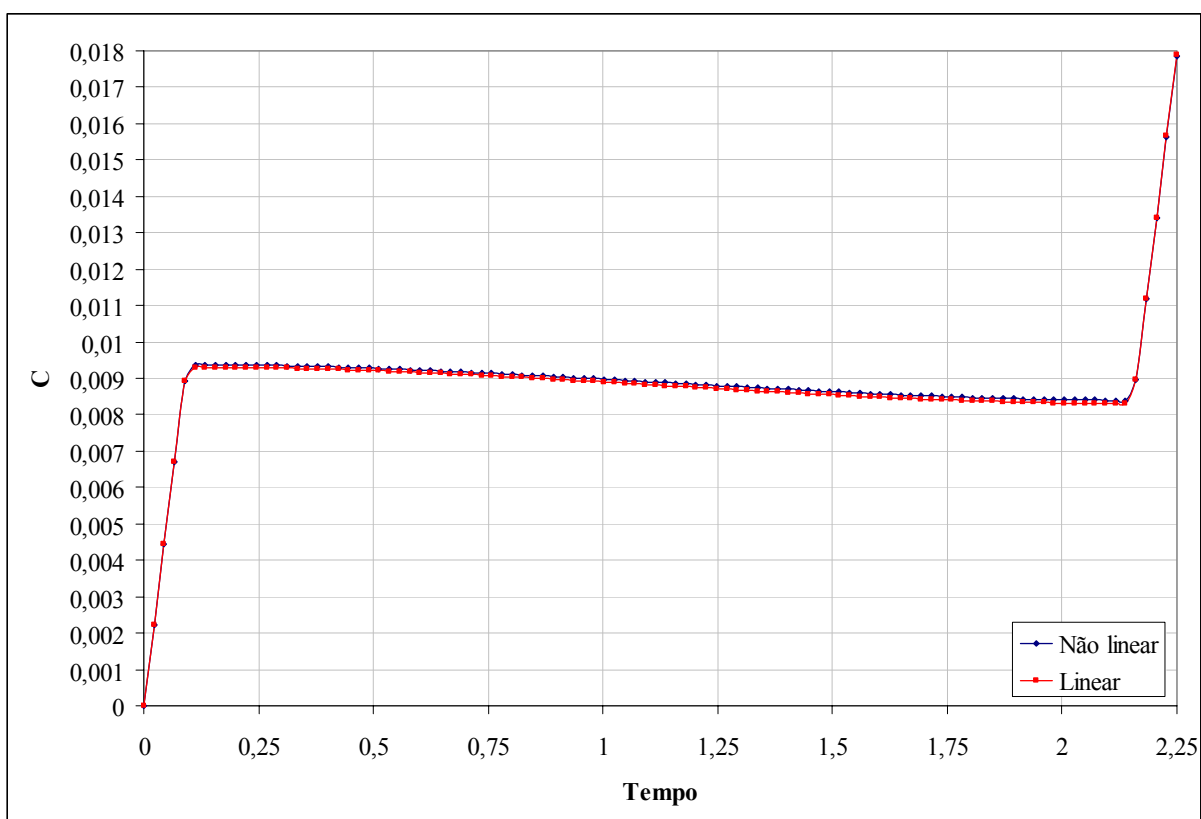


Figura VII.177. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

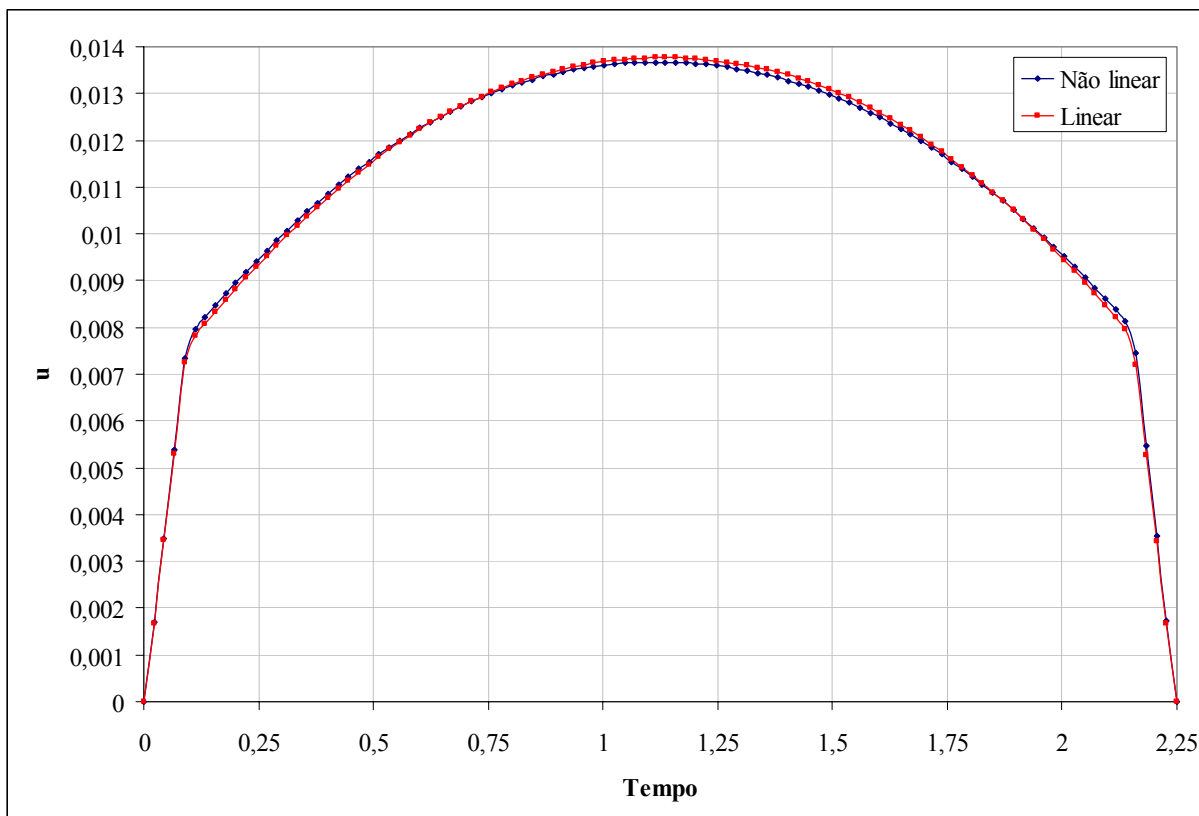


Figura VII.178. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

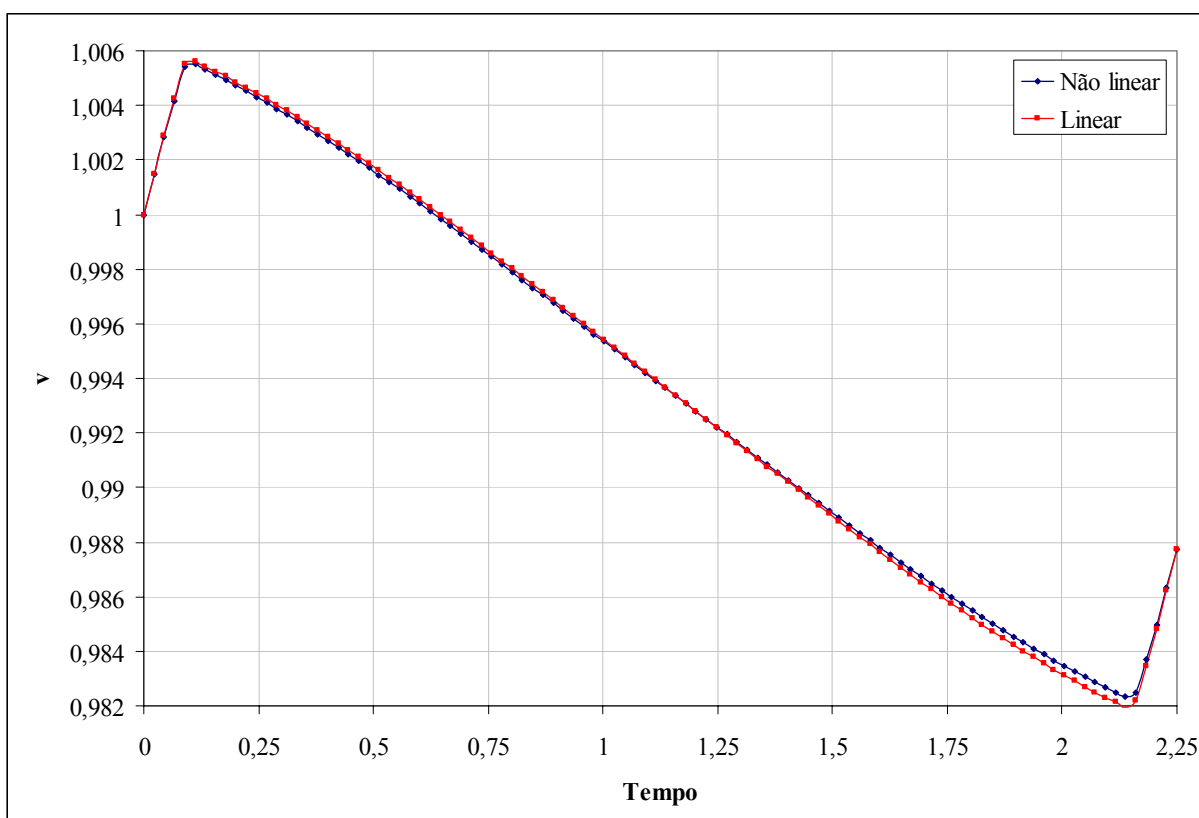


Figura VII.179. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

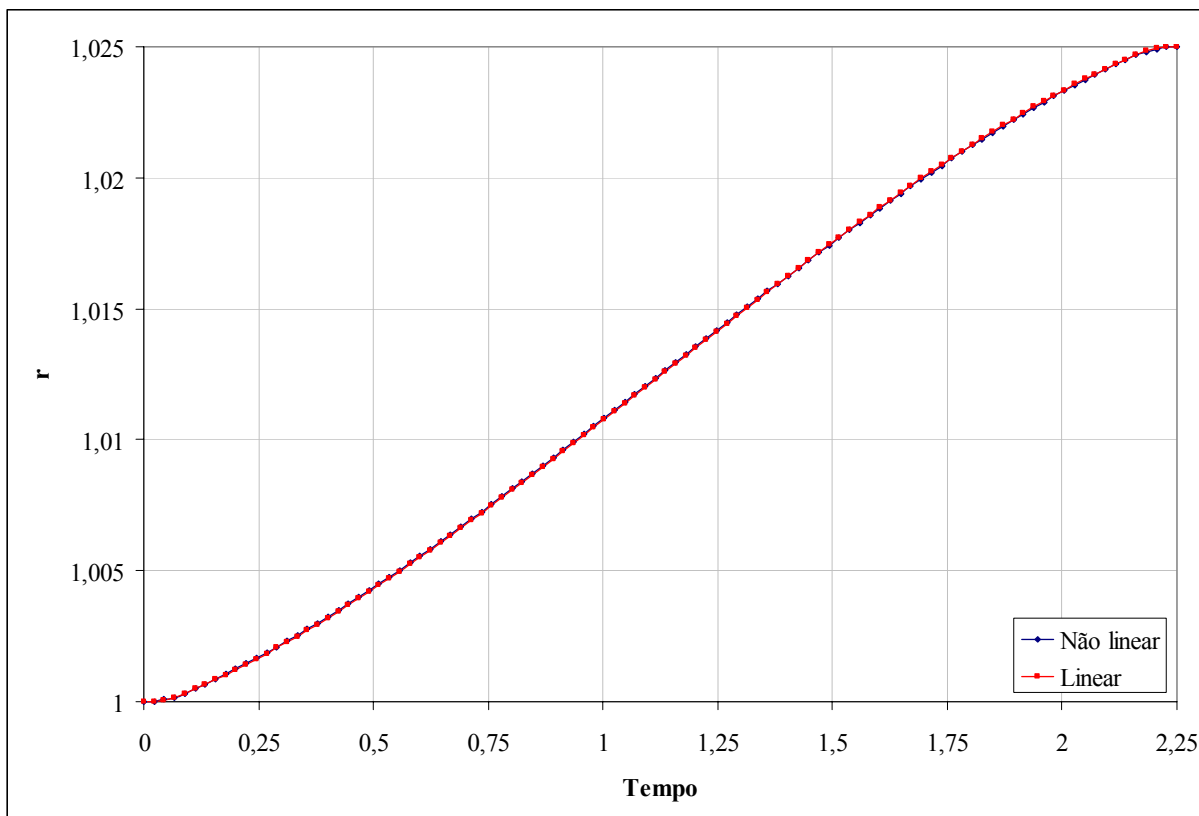


Figura VII.180. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0250$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

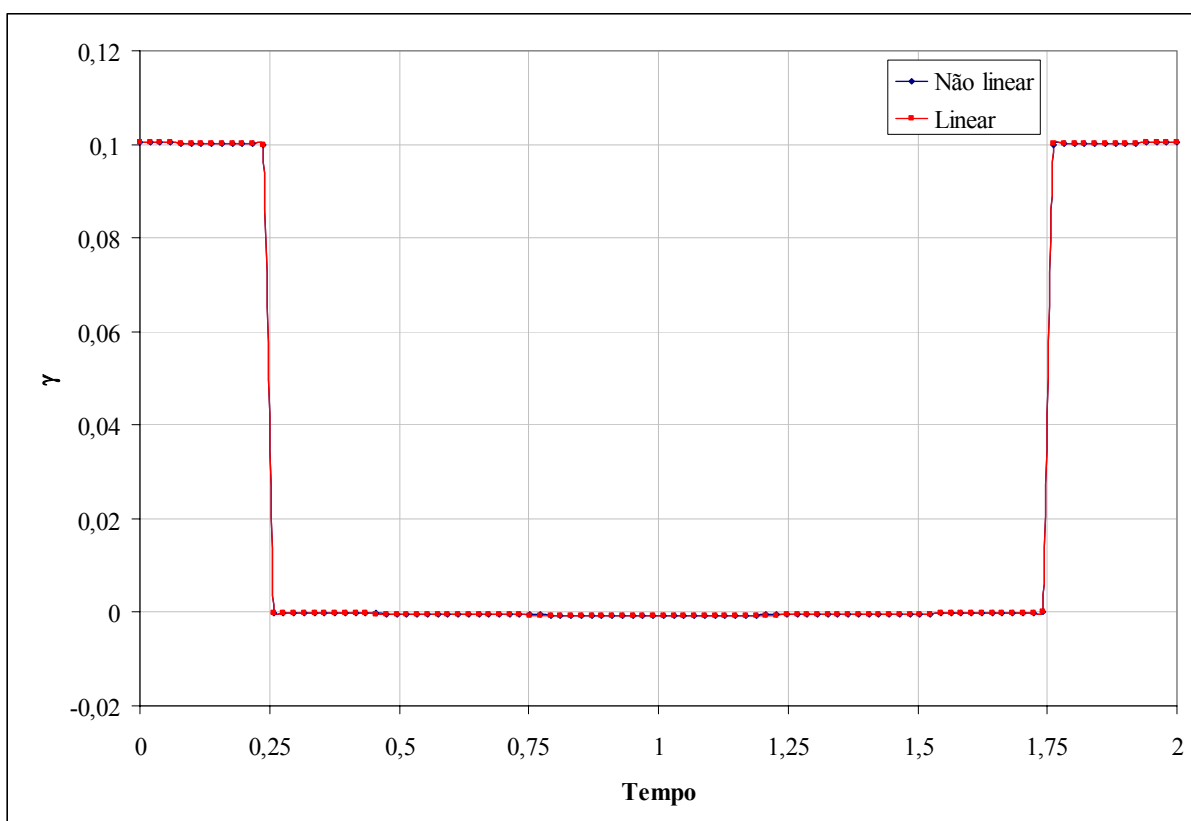


Figura VII.181. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

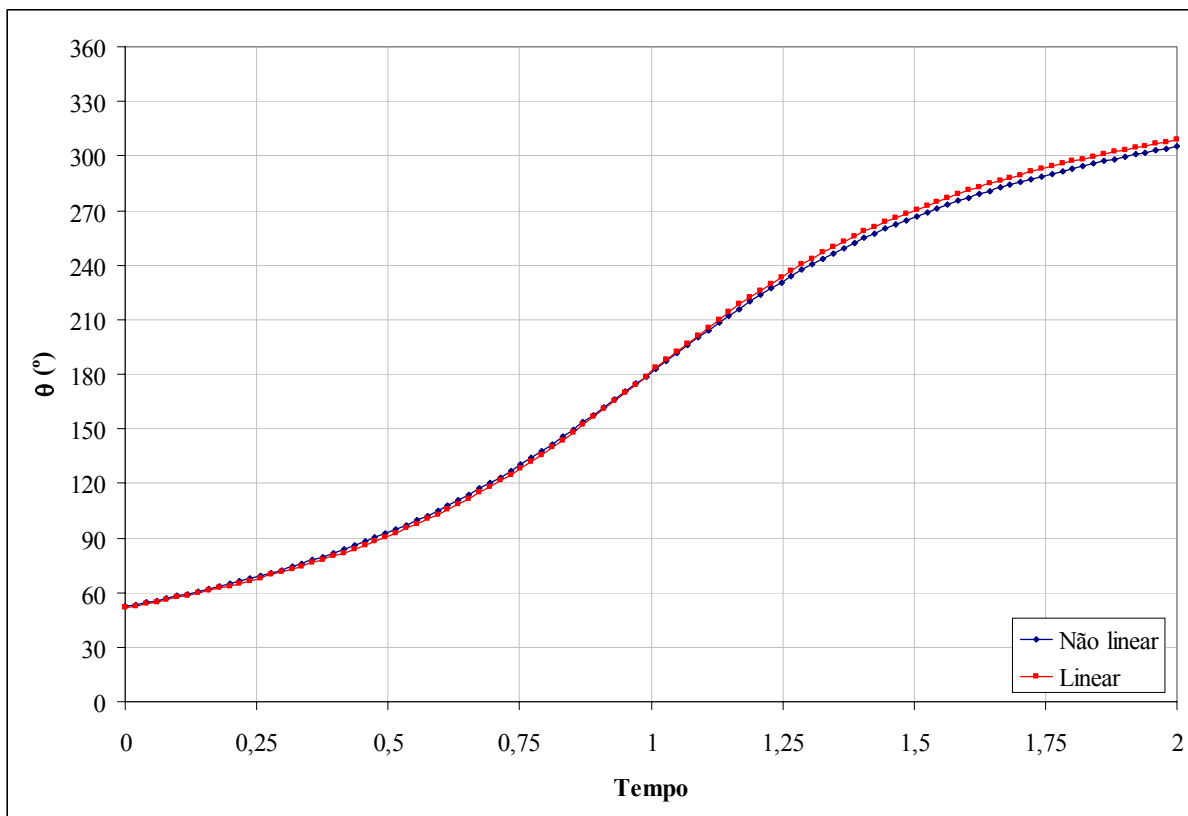


Figura VII.182. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

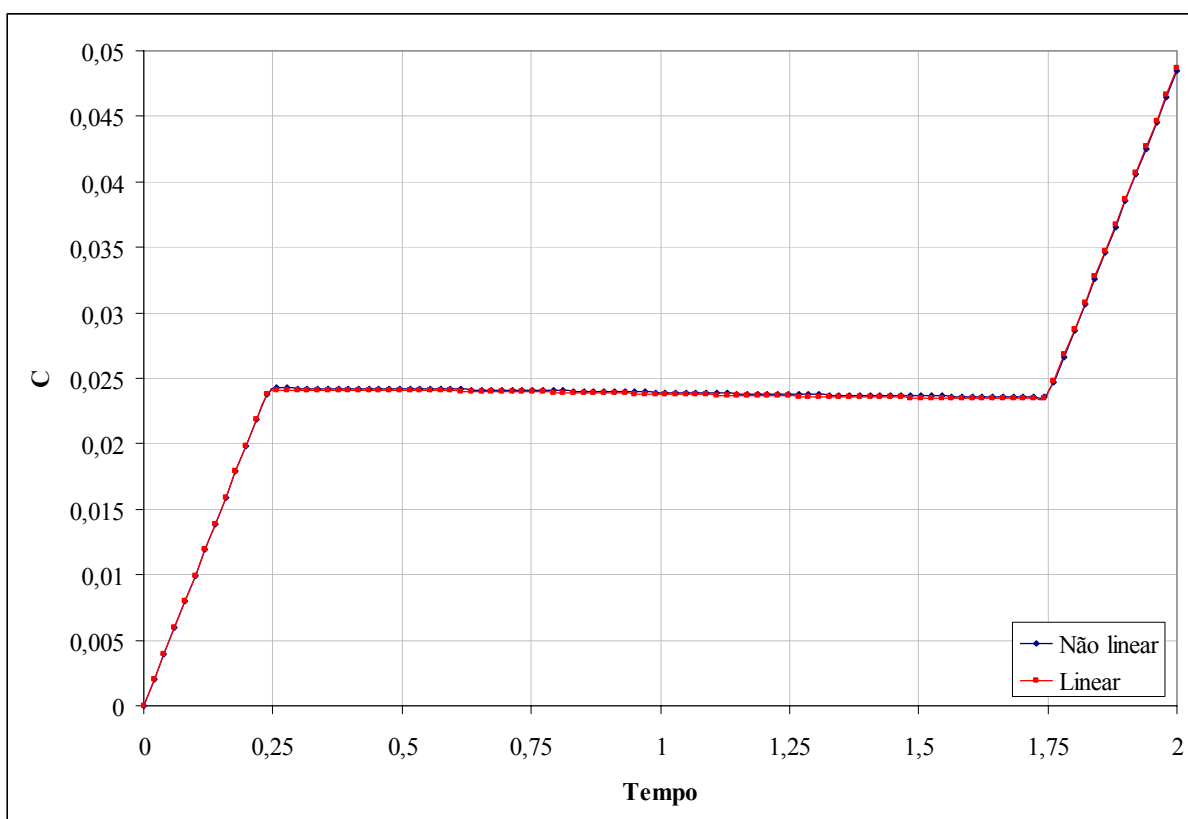


Figura VII.183. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

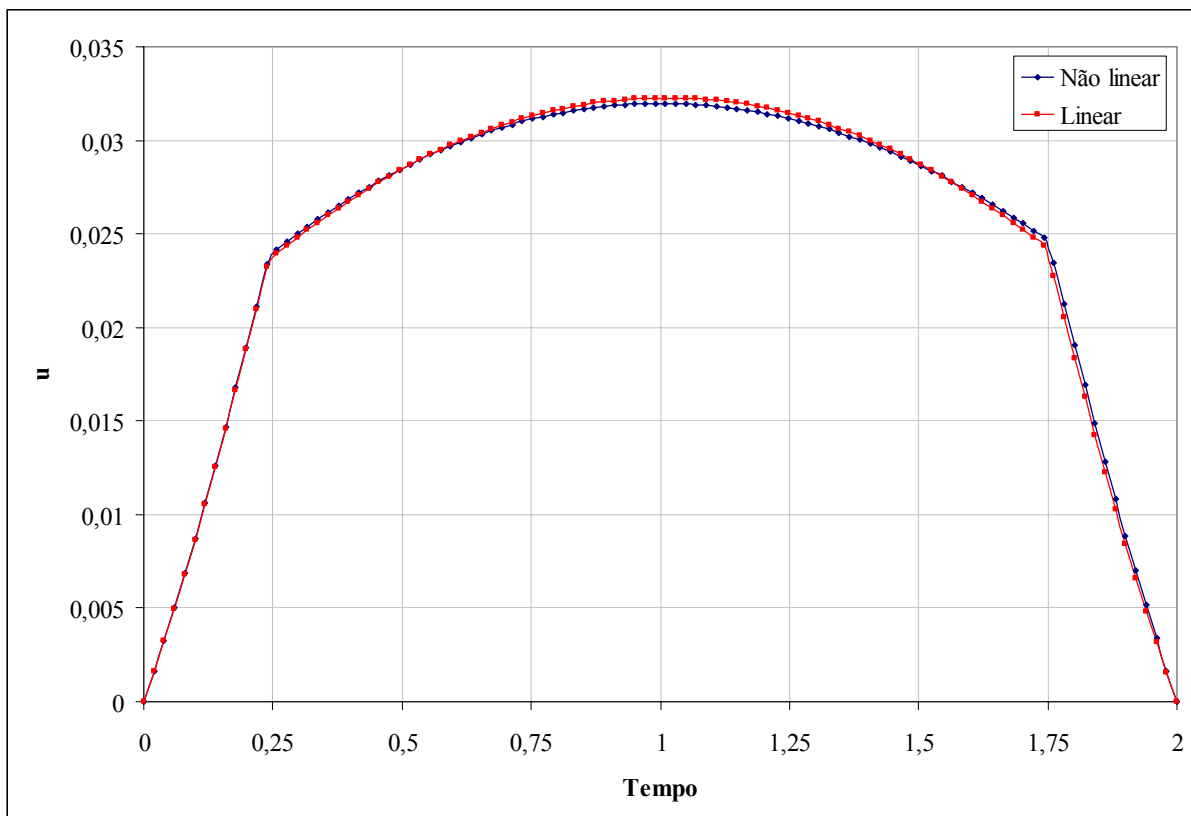


Figura VII.184. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

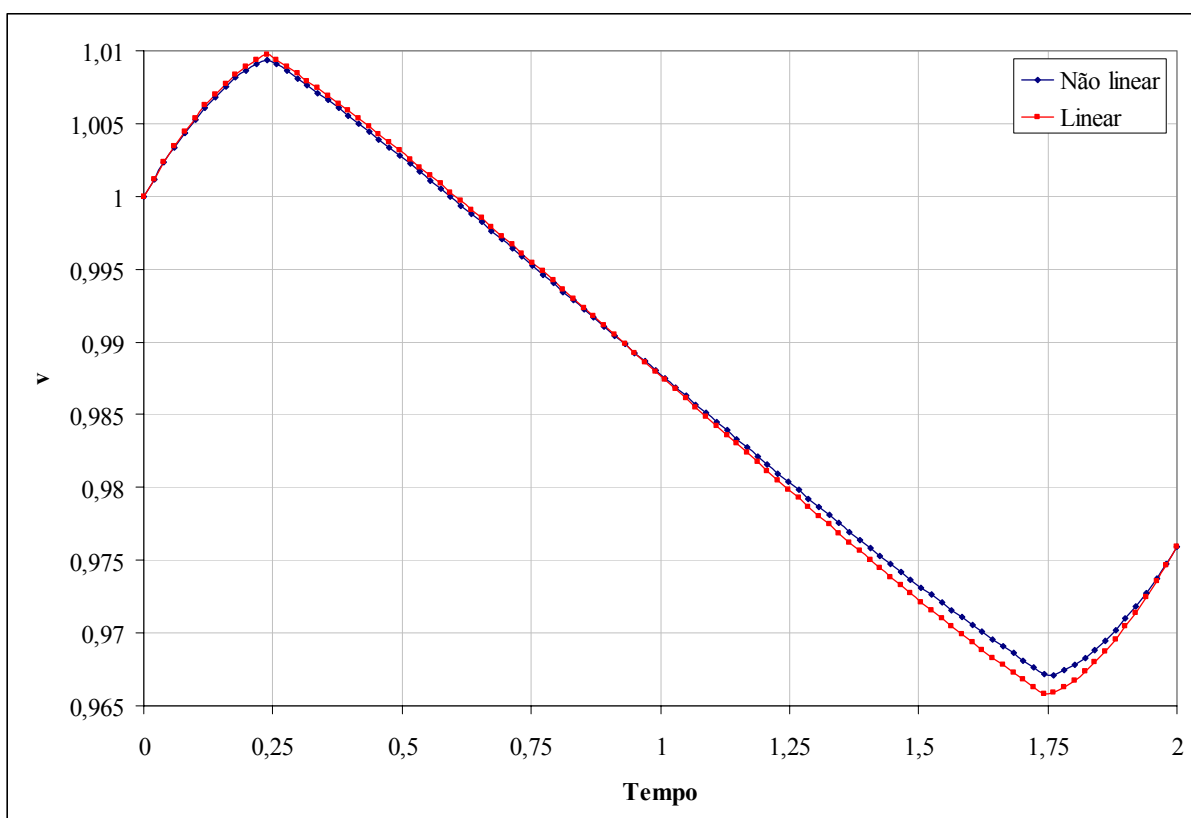


Figura VII.185. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

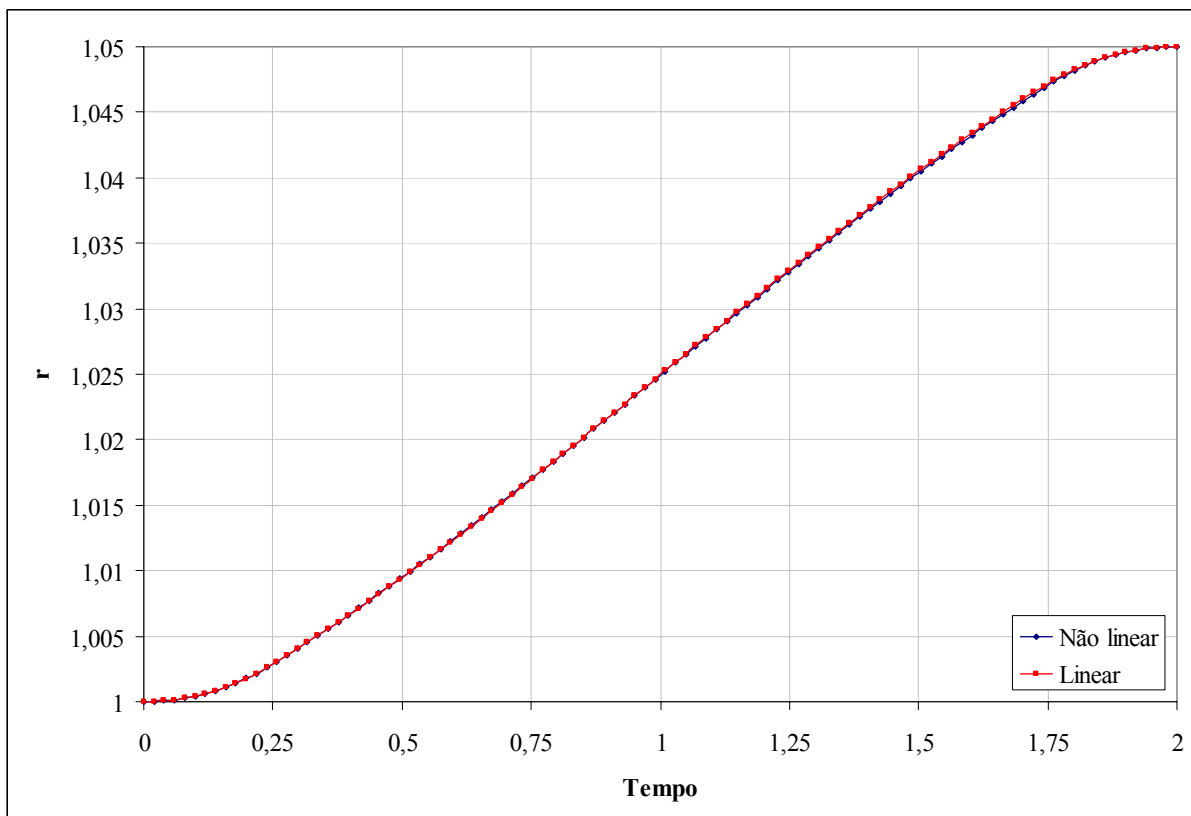


Figura VII.186. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,0$.

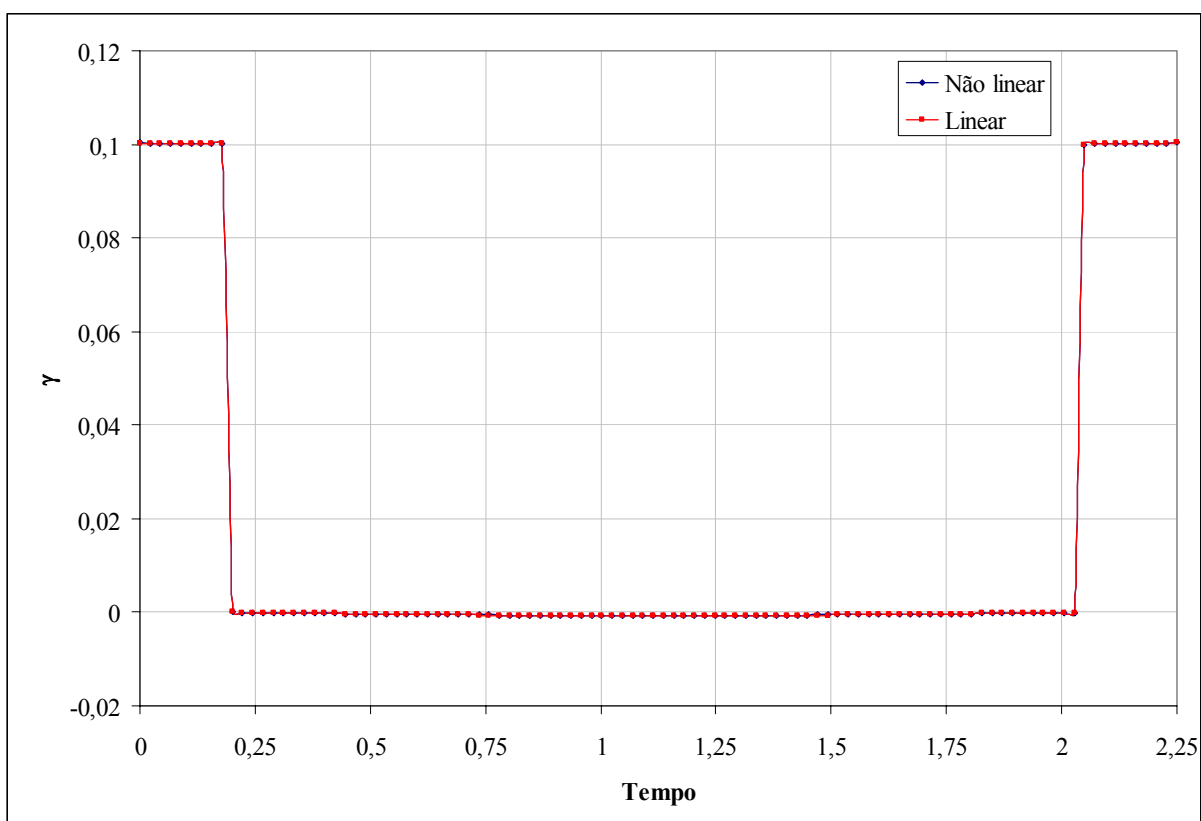


Figura VII.187. Evolução temporal da magnitude da aceleração γ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

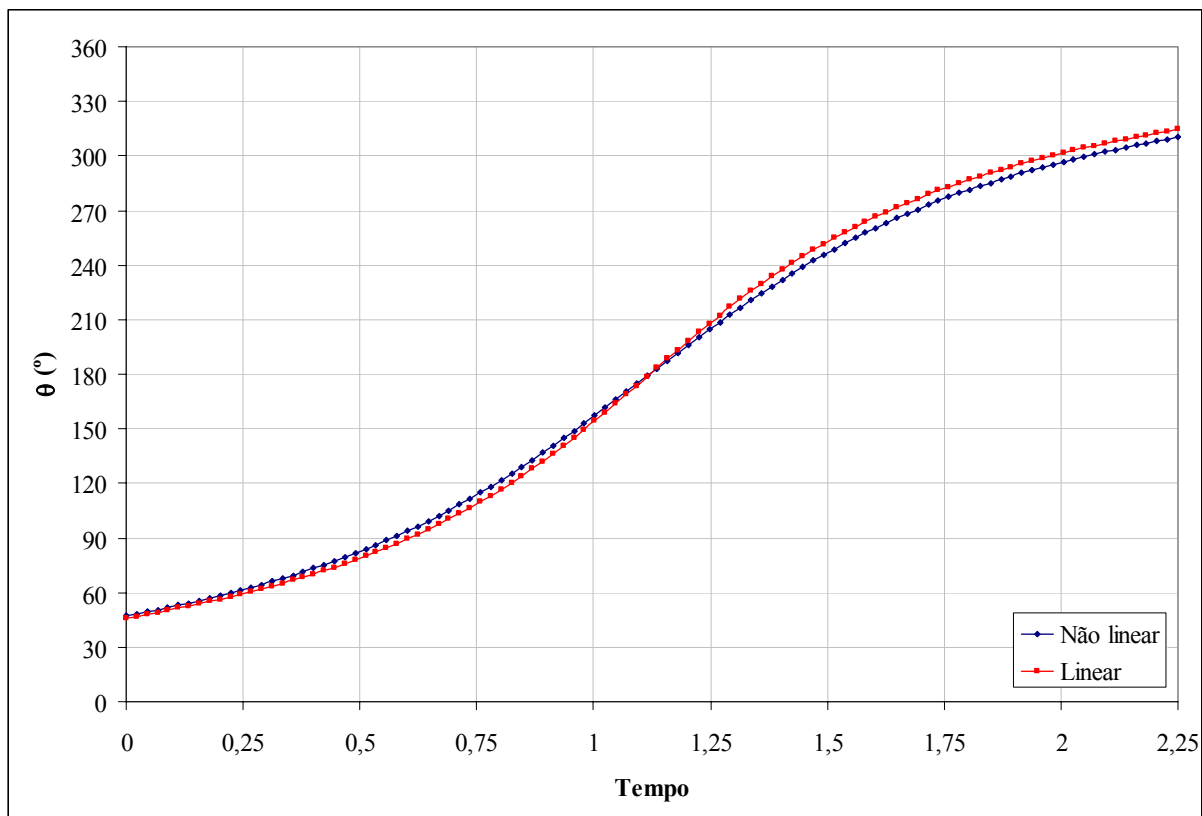


Figura VII.188. Evolução temporal da direção da aceleração θ para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

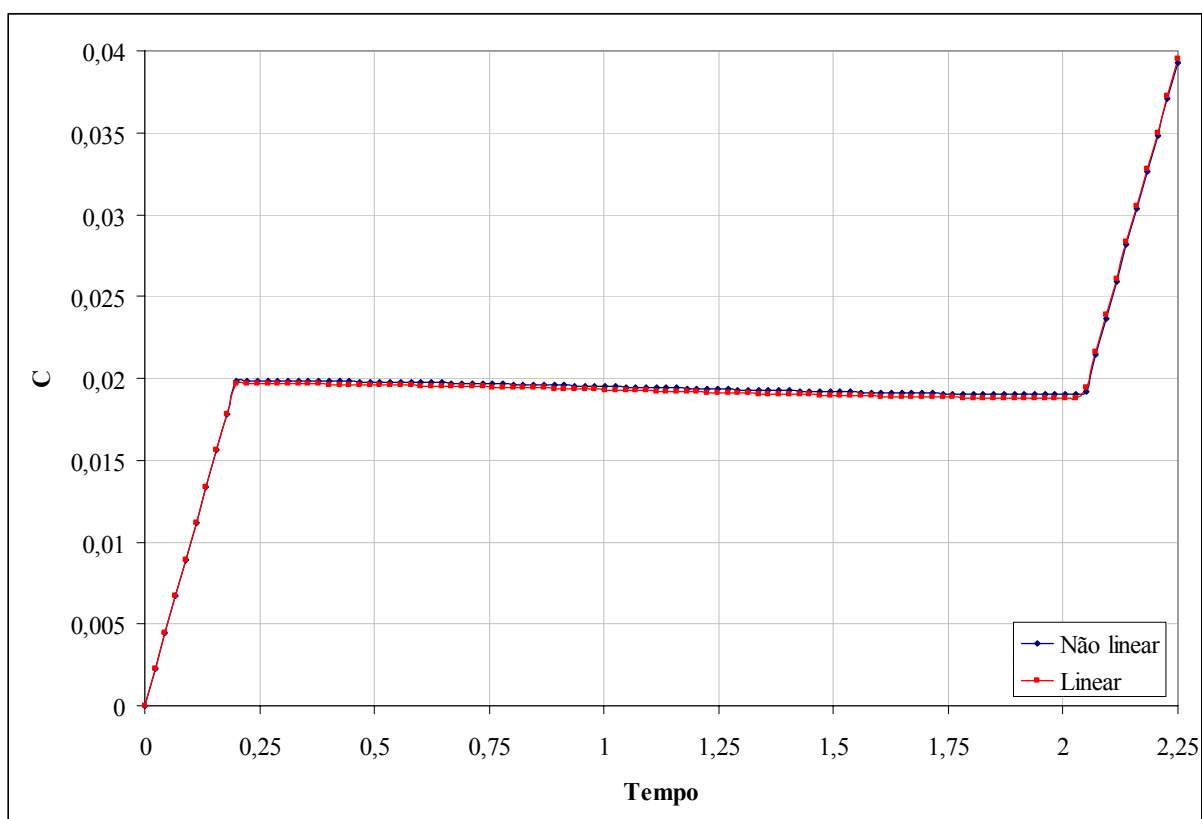


Figura VII.189. Evolução temporal da velocidade característica C para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

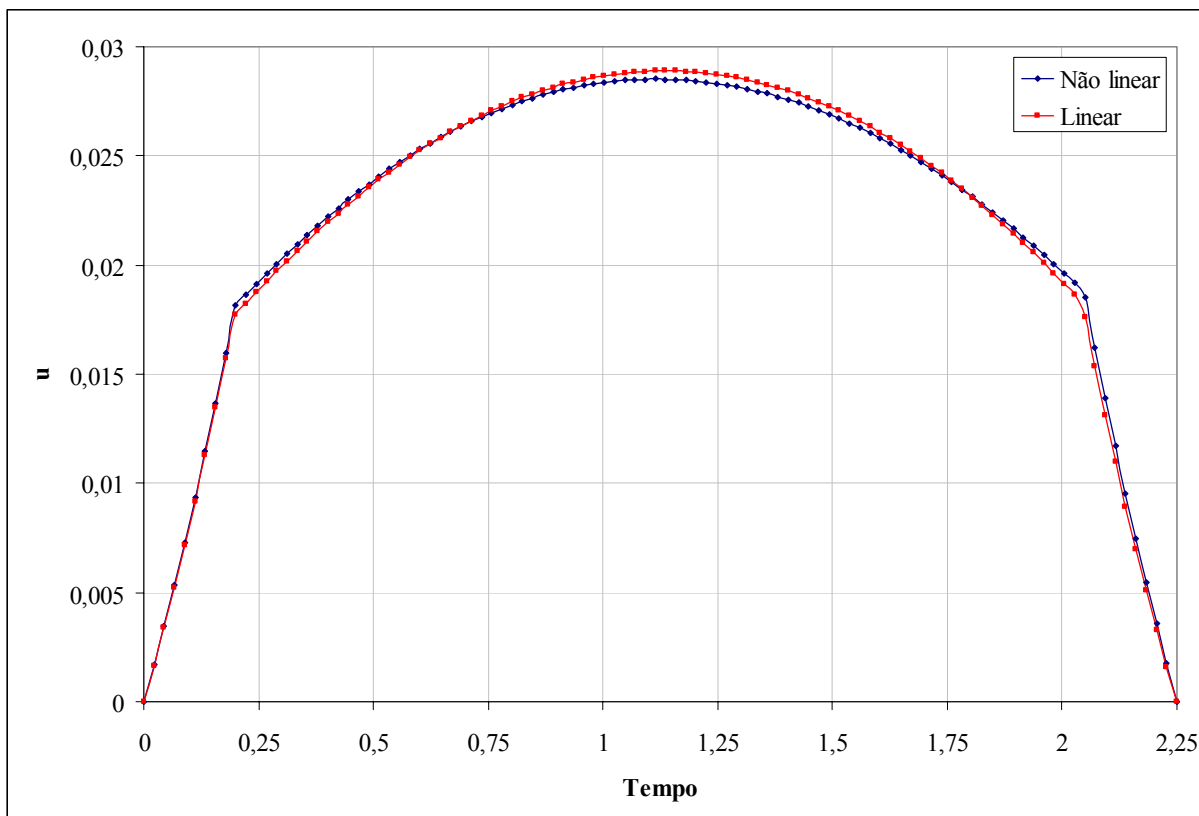


Figura VII.190. Evolução temporal da velocidade radial u para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

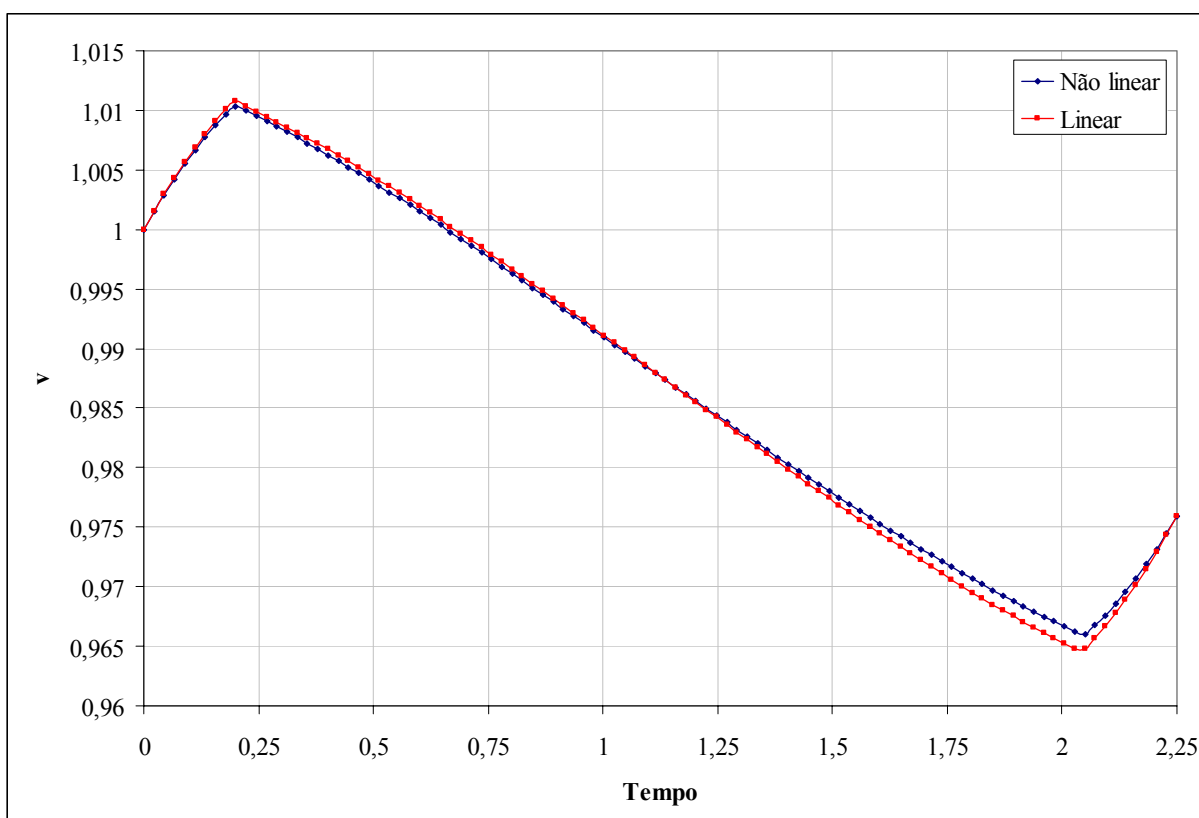


Figura VII.191. Evolução temporal da velocidade circunferencial v para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

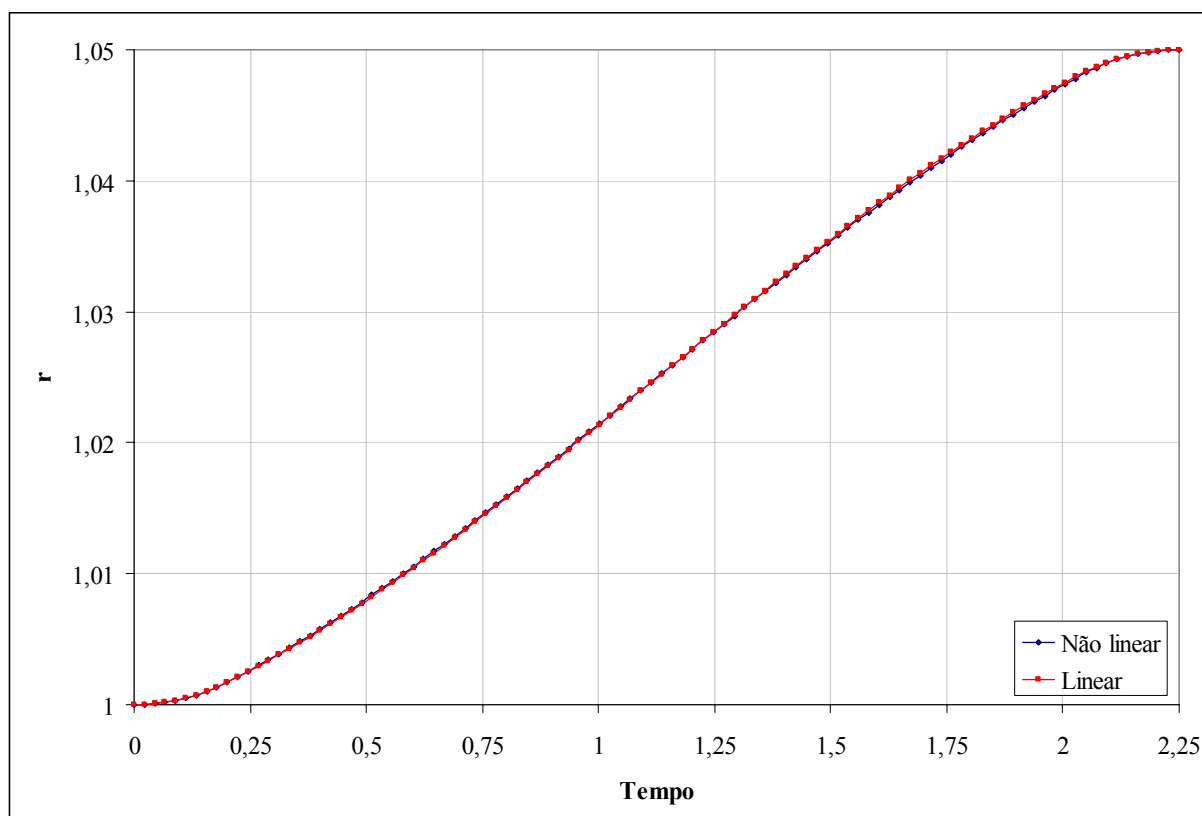


Figura VII.192. Evolução temporal da distância radial r para as formulações linearizada e não-linearizada – sistema VEC – $\rho = 1,0500$, $\gamma_{\max} = 0,10$ e $t_f = 2,25$.

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO <p style="text-align: center;">TM</p>	2. DATA <p style="text-align: center;">19 de julho de 2005</p>	3. DOCUMENTO N° <p style="text-align: center;">CTA/ITA-IEF/TM-004/2005</p>	4. N° DE PÁGINAS <p style="text-align: center;">278</p>
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Determinação de Trajetórias Espaciais Ótimas para Sistemas Propulsivos a Baixo Empuxo Utilizando o Método da Variação Segunda			
6. AUTOR(ES): Carlos Roberto Silveira Filho			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Ensino Fundamental – ITA/IEF			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: controle ótimo, otimização de trajetórias, dinâmica orbital, métodos numéricos, princípio de máximo de Pontryagin.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: Controle ótimo; Otimização de trajetória; Mecânica orbital; Análise numérica; Princípio de Pontryagin; Cálculo das variações; Sistemas de propulsão; Aerodinâmica; Engenharia aeroespacial.			
10. APRESENTAÇÃO: ITA, São José dos Campos, 2005, 278 páginas			
		X Nacional	Internacional
11. RESUMO: <p>O propósito desta tese é estudar um método numérico indireto para a solução de problemas de otimização de trajetórias espaciais em campo gravitacional central Newtoniano. Neste método, a resolução do problema de valor de contorno em dois pontos é baseada no conceito de variação segunda, motivo pelo qual ele é denominado de método da variação segunda.</p> <p>Inicialmente, este trabalho apresenta alguns fundamentos e resultados matemáticos da Teoria de Controle Ótimo. Estes conceitos são então utilizados no desenvolvimento matemático e formulação do método da variação segunda, incluindo sua extensão para problemas com vínculos nas variáveis de controle e a descrição do algoritmo final. Este algoritmo é então aplicado a problemas de transferências espaciais ótimas entre órbitas circulares coplanares próximas, considerando dois modelos clássicos de sistemas propulsivos: sistemas a velocidade de ejeção constante (VEC) e empuxo limitado; e sistemas com velocidade de ejeção modulável e potência limitada (PL).</p> <p>De modo geral, os resultados obtidos para os problemas são muito bons. Para o sistema PL, há grande concordância deles com resultados analíticos, provenientes de uma teoria linear, e numéricos, obtidos através de outros métodos. Para o sistema VEC, os resultados estão em acordo com a teoria de transferências orbitais ótimas e verifica-se que as duas formulações utilizadas, linearizada e não-linearizada, fornecem resultados bastante próximos, para problemas de transferência entre órbitas próximas.</p>			
12. GRAU DE SIGILO: <p>(X) OSTENSIVO () RESERVADO () CONFIDENCIAL () SECRETO</p>			

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)