

“Geração de soluções analíticas em
sistemas quânticos com massa
dependente da posição e funções de
distribuição com limite clássico”

JULIANO ANTÔNIO DE OLIVEIRA

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

JULIANO ANTÔNIO DE OLIVEIRA

GERAÇÃO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS EM SISTEMAS
QUÂNTICOS COM MASSA DEPENDENTE DA POSIÇÃO E
FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO COM LIMITE CLÁSSICO

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do
Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual
Paulista, como requisito parcial para a obtenção
do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá

2009

Oliveira, Juliano Antônio de
O482g Geração de soluções analíticas em sistemas quânticos com massa dependente da posição e funções de distribuição com limite clássico. / Juliano Antônio de Oliveira - Guaratinguetá : [s.n.], 2009.
106f. : il.
Bibliografia: f. 101-106

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2009.
Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

1. Mecânica quântica I. Título

CDU 530.145

JULIANO ANTONIO DE OLIVEIRA

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"DOUTOR EM FÍSICA"

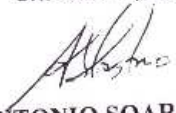
PROGRAMA: FÍSICA


APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Marcelo Batista Hott
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ALVARO DE SOUZA DUTRA
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. ANTONIO SOARES DE CASTRO
Unesp-Feg


Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Unesp-Feg


Prof. Dr. FABRICO AUGUSTO BARONE RANGEL
UNIFEI


Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL
UNESP/RioClaro

Julho de 2009

Dados Curriculares

JULIANO ANTÔNIO DE OLIVEIRA

NASCIMENTO 15.09.1980 - Divinópolis - MG

FILIAÇÃO Antônio Sílvio de Oliveira
Helena Maria da Costa Oliveira

2003 - 2005 Mestrado em Física
Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Guaratinguetá
Departamento de Física e Química

1999 - 2002 Graduação em Matemática
Universidade do Estado de Minas Gerais - UEMG - Campus de Divinópolis
Instituto Superior de Educação de Divinópolis - ISED

de modo especial, aos meus tios Francisco (Chiquinho) e Elvira (Virica) in memórium.

Agradecimentos

Para tornar nossos sonhos realidade, há contribuições que não podem deixar de ser realçadas. Desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

A Deus por demonstrar-se presente ao longo desta caminhada.

Aos meus pais Antônio e Helena, aos meus irmãos Adriano, Cássia, José Maria e ao meu querido sobrinho Vinícius que durante meus momentos de ausências e limitações apoiaram-me com a compreensão e cumplicidade.

A toda família do Odezir (Dézio) e da Aurora de Guaratinguetá pela amizade e confiança ao me receberem em sua casa.

Aos meus tios Francisco (Chico) e Hidalva, à minha prima Rosa, aos meus familiares, afilhados e amigos.

Ao meu orientador professor Dr. Alvaro pela confiança, orientação e dedicação.

Aos professores, funcionários e amigos desta Universidade.

Este trabalho contou com o apoio da entidade CAPES.

*If I have seen further than others it was by standing
upon the shoulders of Giants.*

Issac Newton

de OLIVEIRA, J. A. **Geração de soluções analíticas em sistemas quânticos com massa dependente da posição e funções de distribuição com limite clássico.** 106 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

Resumo

A busca por soluções exatas para sistemas quânticos vem despertando o interesse de muitos autores ao longo das décadas. Em particular para soluções que apresentam limite clássico. Nesta tese buscamos fazer um estudo sistemático da geração de soluções analíticas para uma classe de sistemas quânticos exatamente solúveis com massa dependente da posição. Analisamos o efeito da presença de campos magnéticos sobre alguns sistemas, discutimos o problema da ambiguidade de ordenamento quântico e apresentamos possíveis limite clássico para os sistemas em estudo.

Palavras-chave: Massa dependente da posição, função de distribuição de Wigner, estados coerentes $SU(2)$ e campo magnético uniforme.

de OLIVEIRA, J. A. **Generation of analytic solutions in quantum systems with position-dependent masses and distribution functions with limit classical.** 106 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

Abstract

The search for exact solutions of quantum systems has been raising the interest of many authors along the decades. Particularly for finding solutions that present classical limit. In this thesis we make a systematic study of the generation of analytic solutions for a class of quantum exactly solvable systems with position-dependent masses. We analyze the effect of the presence of magnetic fields on some of those systems. We discuss the problem of the ordering quantum ambiguity and present possible classical limit for the systems considered.

Keywords: Position dependent mass, distribution of Wigner functions, coherent states $SU(2)$ and uniform magnetic field.

Lista de Figuras

2.1	<i>Chen e Chen (2006). Potencial com $\sigma = 1$. Em linha $\omega = 0.5$, tracejado $\omega = 1$ e pontilhado $\omega = 1.5$.</i>	20
2.2	<i>Chen e Chen (2006). Distribuição de Wigner para o estado fundamental com $\sigma = 2$. $\omega = 0,5$ em a e b, $\omega = 1,5$ em c e d.</i>	22
2.3	<i>Chen e Chen (2006). Distribuição de Wigner para os estados excitados com $\sigma = 2$ e $\omega = 0,5$. $n = 1$ em a e b, $n = 4$ em c e d.</i>	23
2.4	<i>Potencial para o caso da massa $M(r) = \left(\frac{\omega+r^2}{1+r^2}\right)^2$. $\omega = 0.5$ em linha, $\omega = 1$ em tracejado e $\omega = 1.5$ em pontilhado.</i>	30
2.5	<i>Distribuição de Wigner para o estado fundamental com massa $M(r) = \left(\frac{\omega+r^2}{1+r^2}\right)^2$. Consideramos $m_0 = \hbar = 1$, $\omega = 0,5$ em a e b e, $\omega = 1,5$ em c e d.</i>	31
2.6	<i>Distribuição de Wigner para os estados excitados com massa $M(r) = \left(\frac{\omega+r^2}{1+r^2}\right)^2$. Atribuímos $m_0 = \hbar = 1$, $\omega = 0,5$, $n = 1$ em a e b e, $n = 3$ em c e d.</i>	32
2.7	<i>Potencial com massa $M(r) = cr^2$. Consideramos $c = 8$ e em linha $\omega = 1$, tracejado $\omega = 4$ e pontilhado $\omega = 10$.</i>	33
2.8	<i>Distribuição de Wigner para o estado fundamental com massa $M(r) = cr^2$. Consideramos diferentes valores para ω. $\omega = 0,5$ em a e b e, $\omega = 1,5$ em c e d.</i>	34
2.9	<i>Distribuição de Wigner para os estados excitados com massa $M(r) = cr^2$. Consideramos $\omega = 0,5$, $c = 8$ e diferentes valores para n. $n = 1$ em a e b e, $n = 4$ em c e d.</i>	35
2.10	<i>Potencial com massa $M(r) = \frac{m_0}{1+(\lambda r)^2}$. Consideramos $\hbar = m_0 = \lambda = 1$, em linha $\omega = 0.5$, tracejado $\omega = 3$ e pontilhado $\omega = 6$.</i>	36
2.11	<i>Distribuição de Wigner para o estado fundamental com massa $M(r) = \frac{1}{1+(\lambda r)^2}$. Consideramos $\hbar = m_0 = \lambda = 1$ e diferentes frequências. $\omega = 0.5$ em a e b e, $\omega = 2$ em c e d.</i>	37
2.12	<i>Distribuição de Wigner para os estados excitados com massa $M(r) = \frac{1}{1+(\lambda r)^2}$. Consideramos $\omega = 0,5$, $m_0 = \hbar = \lambda = 1$ e diferentes valores para n. $n = 1$ em a e b e, $n = 4$ em c e d.</i>	38

3.1	<i>Densidade de probabilidade com os parâmetros $A = 1, \phi = \pi/2, L = 20$ e diferentes frequências. $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$ em a , $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em b, $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em c e, finalmente $\omega_1 = p = 4$ e $\omega_2 = q = 3$ em d.</i>	42
3.2	<i>Figuras clássicas na forma Lissajous com diferentes frequências. $\omega_1 = \omega_2 = p = q = 1$ em a, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em b, $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em c e, finalmente $\omega_1 = p = 4$ e, $\omega_2 = q = 3$ em d.</i>	43
3.3	<i>Densidade de probabilidade para o caso de soluções polinomiais. Consideramos as seguintes frequências e números inteiros. $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 1$ em a e b, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em c e d, e $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em e e f.</i>	49
3.4	<i>Densidade de probabilidade para o caso de soluções polinomiais. Consideramos os seguintes parâmetros: $d_2 = 4$ em a e b, $d_2 = 5$ em c e d, e $d_2 = 7$ em e e f.</i>	50
3.5	<i>Densidade de probabilidade para o caso de soluções em coordenadas parabólicas cilíndricas. Consideramos os parâmetros $d_1 = d_2 = c_1 = 0, c_2 = 1$ e as seguintes frequências e números inteiros. $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 1$ em a e b, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em c e d, e $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em e e f. .</i>	52
3.6	<i>Densidade de probabilidade para o caso de soluções em coordenadas cilíndricas elípticas. Consideramos as seguintes frequências e números inteiros. $\omega_1 = p = 1$, e $\omega_2 = q = 1$ em a e b, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em c e d, e $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em e e f.</i>	55
3.7	<i>Densidade de probabilidade para o caso de soluções em coordenadas bipolares. Consideramos as seguintes frequências e números inteiros. $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 1$ em a, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em b, e $\omega_1 = p = 2$, e $\omega_2 = q = 3$ em c.</i>	58
3.8	<i>Densidade de probabilidade com $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$. Notemos que o máximo de probabilidade continua apresentando a forma de uma circunferência.</i>	64
3.9	<i>Densidade de probabilidade para o caso de soluções polinomiais. Consideramos os seguintes parâmetros: $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1, d_2 = 1$ em a, $d_2 = 4$ em b e $d_2 = 7$ em c.</i>	70
3.10	<i>Densidade de probabilidade para o caso de soluções polinomiais. Consideramos os parâmetros $d_1 = d_2 = c_1 = 0, c_2 = 1, \omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$.</i>	71
3.11	<i>Densidade de probabilidade para o caso de funções de transformação na forma de coordenadas cilíndricas elípticas. Consideramos $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$.</i>	73
3.12	<i>Densidade de probabilidade para o caso de funções de transformação na forma de coordenadas bipolares. Consideramos $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$.</i>	76

4.1	<i>Comportamento da energia em que aumentamos o número quântico n. Aqui, $\omega_2 = 2\omega_1, \omega_1 = 10, g = M_0 = \hbar = 1$ e $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (os pontos ficam mais grossos à medida que vai aumentando m.)</i>	87
4.2	<i>Potencial $V(x, y) = \frac{\omega^2 x^2 + \omega^2 y^2}{2[1 + \frac{g}{2}(x^2 + y^2)]}$ com $\omega = 1$ e $g = 1$.</i>	88
4.3	<i>Densidade de probabilidade com $\omega = 1$.</i>	89
4.4	<i>Densidade de probabilidade com $\omega = 1$</i>	96

Sumário

1	Introdução	16
2	Distribuição de Wigner para uma classe de sistemas isoespectrais unidimensionais com massa dependente da posição	18
2.1	Introdução	18
2.2	Equação de Schrödinger em que a massa depende da posição e função de Wigner	19
2.3	Classe de sistemas quânticos com massa dependente da posição	23
2.4	Função de Wigner para sistemas com massa dependente da posição que são isoespectrais ao oscilador harmônico	26
2.5	Comentários	36
3	Estados coerentes $SU(2)$ para sistemas bidimensionais com massa dependente da posição	39
3.1	Introdução	39
3.2	Estados coerentes $SU(2)$	40
3.3	Mudança de variáveis e sistemas com massa dependente da posição	42
3.3.1	Funções de transformação polinomiais	46
3.3.2	Funções de transformação em coordenadas elípticas cilíndricas	52
3.3.3	Funções de transformação em coordenadas bipolares	55
3.4	Campo homogêneo no calibre de Coulomb simétrico	58
3.4.1	Estados coerentes $SU(2)$ para a partícula com massa constante	60
3.4.2	Transformação nas variáveis espaciais e massa dependente da posição	65
3.5	Comentários	76
4	Ambiguidade de ordenamento na equação de Schrödinger com massa dependente da posição no caso bidimensional na presença de um campo magnético: um modelo exato	78
4.1	Introdução	78
4.2	Equação de Schrödinger efetiva bidimensional em coordenadas cartesianas	79

4.3	Partícula com massa dependente da posição em um campo magnético . . .	90
4.4	Comentários	96
5	Comentários Finais	98

Capítulo 1

Introdução

Desde o início dos estudos de sistemas quânticos, a procura por soluções exatas para sistemas com massa dependente da posição tem despertado o interesse de muitos autores. Uma característica importante deste tipo de sistema é que eles se tornam ambíguos no nível quântico. Contudo, são muito importantes para descrever alguns problemas experimentais como impurezas em cristais [1, 2] e o estudo de hetero-estruturas de semicondutores [3, 4].

A ambiguidade de ordenamento quântico e suas propriedades definem um foco de grande interesse nos sistemas em que a massa de uma partícula depende da posição, dada sua importância na Física teórica. Há alguns anos foram discutidas soluções exatas de uma classe de sistemas hamiltonianos unidimensionais com ambiguidade de ordenamento quântico, conforme foi mostrado pelos autores de Souza Dutra e Almeida [5]. Naquele trabalho os autores propuseram analisar alguns exemplos de massa em função da variável espacial para determinar as soluções exatas para o sistema analisado. Ademais, os autores demonstraram que os operadores com dependência linear no momento não são ambíguos. Posteriormente, de Souza Dutra, Hott e Almeida [6] fizeram uma análise supersimétrica e mostraram uma conexão destes sistemas com aqueles com massa constante. Depois, de Souza Dutra [7] mostrou uma dependência da ambiguidade de ordenamento quântico com relação à representação escolhida.

Por outro lado, um outro problema importante no ponto de vista da mecânica quântica é aquele associado ao seu limite clássico, sobretudo para sistemas hamiltonianos tais que a massa de uma partícula depende da posição e está confinada em um poço de potencial. Uma proposta interessante para realizar a correspondência clássica-quântica foi mostrada por Chen e Chen [8]. A proposta deles consistiu em calcular a função de distribuição de Wigner para um sistema unidimensional do tipo que obedece a uma equação de Schrödinger com massa dependente da posição, isoespectral ao correspondente sistema com massa constante. Naquele trabalho, a equação de Schrödinger foi escrita a

partir de um determinado ordenamento. A função de distribuição de Wigner foi obtida analiticamente e foi mostrado que ela apresenta a forma de uma gaussiana.

Um outro caminho bastante interessante para mostrar a correspondência clássico-quântica foi mostrado no trabalho de Chen e Huang [9]. Os autores buscaram a conexão entre as soluções da equação de Schrödinger no caso do oscilador harmônico bidimensional e as órbitas clássicas do sistema correspondente, usando a representação dos estados coerentes $SU(2)$. A partir da construção das autofunções os resultados mostrados naquele trabalho foram analisados associando as propriedades de densidade de probabilidade com a correspondente órbita clássica periódica, sendo ela representada pela figura de Lissajous. Outros trabalhos também foram realizados usando a representação dos estados coerentes $SU(2)$. Por exemplo, Chen e Huang [10] usaram os estados coerentes $SU(2)$ na análise da formação de vórtices associados a órbitas clássicas periódicas em um bilhar quântico equivalente a um triângulo equilátero. Outro trabalho interessante é aquele em que é feita a observação experimental do formalismo dos padrões transversais em um laser com um alto grau de frequências degeneradas, conforme foi mostrado por Chen et al [11]. Mais recentemente Chen et al [12] usaram os estados coerentes $SU(2)$ para explicar as trajetórias geométricas periódicas em uma cavidade semi-confocal de um laser.

Nesta tese apresentamos os trabalhos de Souza Dutra e de Oliveira [13, 14], que nortearam o nosso projeto de pesquisa e que estuda a geração de soluções analíticas em sistemas quânticos exatamente solúveis com massa dependente da posição e funções de distribuição com limite clássico. Inicialmente atacamos estes problemas gerando soluções analíticas. Em seguida procuramos determinar o limite clássico para os sistemas em discussão.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2 propomos construir uma classe de sistemas exatamente solúveis unidimensionais com massa dependente da posição, e em particular, consideramos o caso que são isoespectrais ao oscilador harmônico. Construimos as distribuições de Wigner para analisar o limite clássico. No Capítulo 3 estendemos nossos estudos ao caso de sistemas exatamente solúveis bidimensionais. Fazemos uma mudança nas variáveis espaciais para obter as soluções exatas e verificamos o efeito de um campo magnético uniforme sobre o sistema. Construimos os estados coerentes $SU(2)$ para analisar o limite clássico. No Capítulo 4 fazemos o estudo da ambiguidade de ordenamento quântico em um sistema exatamente solúvel bidimensional. Verificamos o efeito de um campo magnético uniforme sobre o sistema e construimos os estados coerentes $SU(2)$. Finalmente no Capítulo 5 fazemos os comentários finais.

Capítulo 2

Distribuição de Wigner para uma classe de sistemas isoespectrais unidimensionais com massa dependente da posição

Neste Capítulo vamos mostrar a generalização de uma classe de sistemas quânticos exatamente solúveis com massa dependente da posição, os quais são isoespectrais a um dado sistema com massa constante. Construimos as distribuições de Wigner para três exemplos de massa que são isoespectrais ao oscilador harmônico. Finalmente, discutimos um possível comportamento geral para estes sistemas.

2.1 Introdução

Desde o início dos estudos da mecânica quântica a comparação entre previsões quânticas com as clássicas tem sido importante. Uma ferramenta muito interessante que tem despertado o interesse de vários autores com a finalidade de executar esta tarefa é chamada função de distribuição de Wigner [15], uma vez que o valor esperado de operadores podem ser comparados com a órbita clássica de um sistema. A investigação da função de Wigner em equações quânticas não relativísticas usuais com massa constante tem sido feita em um grande número de trabalhos na literatura [16]-[19]. Além disso, nos últimos anos um grande número de trabalhos vem desenvolvendo o estudo da distribuição de Wigner em sistemas com massa dependente da posição [6]-[8],[20]-[41]. As aplicações de sistemas com massa dependente da posição são várias. Eles podem descrever, por exemplo, a dinâmica quântica de elétrons em semicondutores [3]. Em particular, Chen e Chen [8] analisaram a distribuição de Wigner para um caso especial da equação de Shroedinger com massa

dependente da posição.

Propomos estender os estudos de Chen e Chen [8], construindo a generalização de uma classe de sistemas com massa dependente da posição, tais que são isoespectrais a um potencial exatamente solúvel com massa constante. Como exemplo, vamos aplicar o método ao problema do oscilador harmônico, uma vez que este problema nos permite construir as funções de Wigner para uma grande classe de sistemas. Vamos analisar nossos resultados em relação aos obtidos no trabalho de Chen e Chen [8] e vamos comentar algumas diferenças em relação ao resultado deles, relacionados a ambiguidade de ordenamento quântico [5, 6].

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 2.2 vamos fazer uma breve revisão do trabalho de Chen e Chen [8]. Na seção 2.3 propomos construir o mapeamento para uma classe de sistemas quânticos exatamente solúveis com massa dependente da posição isoespectrais ao oscilador harmônico. Na seção 2.4 vamos estudar alguns casos especiais de massas dependentes da posição que foram estudadas na literatura, particularmente em um dos casos considerados vamos analisar a massa usada nos estudos de Chen e Chen [8] para construir as distribuições de Wigner. Em todos os exemplos, consideramos o caso dos potenciais isoespectrais ao oscilador harmônico. Finalmente na seção 2.5 fazemos os comentários.

2.2 Equação de Schrödinger em que a massa depende da posição e função de Wigner

Os estudos de Chen e Chen [8] iniciaram com uma equação de Schrödinger para o problema de uma partícula com massa dependente da posição descrita através de uma determinada escolha de ordenamento quântico [5, 6]. Neste caso a equação de Schrödinger foi definida como

$$-\frac{\hbar^2}{2m(x)} \left[\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{m'(x)}{m(x)} \frac{d\psi(x)}{dx} \right] + V(x) \psi(x) = E \psi(x), \quad (2.1)$$

onde $m(x)$ é a massa e $V(x)$ é o potencial exatamente solúvel. Considerando o caso da massa analisada nos trabalhos de Souza Dutra e colaboradores [6] e Plastino e colaboradores [29], escrita como

$$m(x) = \left(\frac{\omega + x^2}{1 + x^2} \right)^2, \quad (2.2)$$

eles mostraram que existem soluções exatas para o potencial

$$V(x) = \frac{\sigma^2}{4} [x + (\omega - 1) \arctan(x)]^2 + \frac{\omega - 1}{2(\omega + x^2)^4} [3x^4 + (4 - 2\omega)x^2 - \omega], \quad (2.3)$$

onde ω é a frequência e σ é uma constante arbitrária. Foi observado que fazendo $\omega = 1$ o potencial acima fica reescrito como

$$V(x) = \frac{\sigma^2}{4}x^2, \quad (2.4)$$

onde podemos ver que este sistema corresponde ao oscilador harmônico. A Figura 2.1 mostra o potencial em que Chen e Chen [8] escolheram o parâmetro $\sigma = 1$ e diferentes valores para a frequência.

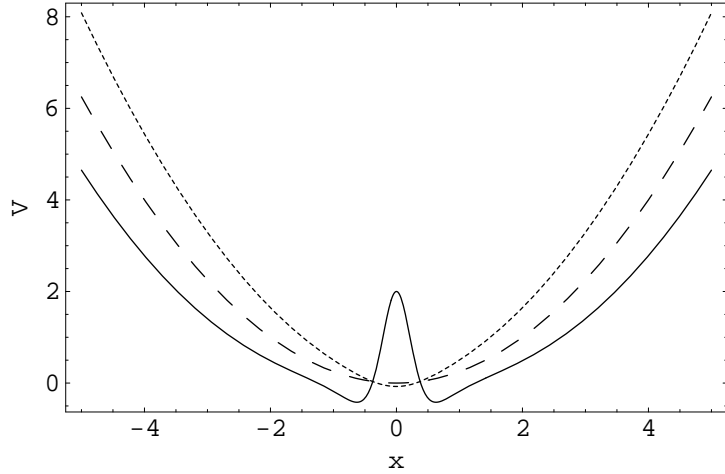


Figura 2.1: *Chen e Chen (2006)*. Potencial com $\sigma = 1$. Em linha $\omega = 0.5$, tracejado $\omega = 1$ e pontilhado $\omega = 1.5$.

Fazendo a mudança na variável espacial na forma

$$u = \int^x \sqrt{2m(z)} dz, \quad (2.5)$$

e redefinindo as autofunções

$$\psi(u) = m(u)^{1/4} \varphi(u), \quad (2.6)$$

os autores [8] mostraram que a equação de Schrödinger pode ser reescrita como

$$-\frac{d^2 \varphi(u)}{du^2} + U(u) \varphi(u) = E \varphi(u). \quad (2.7)$$

onde o potencial efetivo é dado por

$$U(u) = V(u) - \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right]. \quad (2.8)$$

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.5) foi mostrado que

$$u = x + (\omega - 1) \arctan(x), \quad (2.9)$$

e o potencial efetivo pode reescrito como

$$U(u) = \frac{\sigma^2}{4} u^2. \quad (2.10)$$

Para o potencial efetivo dado na equação (2.10), os autovalores são

$$E_n = \frac{\sigma}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.11)$$

e as autofunções são

$$\varphi_n(u) = \left(\frac{\sqrt{\sigma/2}}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2} e^{-\sigma u^2/4} H_n \left(\sqrt{\frac{\sigma}{2}} u \right), \quad (2.12)$$

onde H_n são polinômios de Hermite de ordem n . Em particular, fazendo $n = 0$ podemos escrever as autofunções do estado fundamental

$$\varphi_0(u) = \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/4} e^{-\sigma u^2/4}. \quad (2.13)$$

Assim, a função de distribuição de Wigner no espaço de fase (u, p) pode ser calculada usando a definição [15]

$$W(u, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \varphi^*(u - z) e^{2ipz} \varphi(u + z). \quad (2.14)$$

Chen e Chen [8] usaram a função de distribuição de Wigner a fim de determinar regiões de maior probabilidade. Neste caso, substituindo a equação (2.13) na equação acima, a distribuição de Wigner para o estado fundamental, é escrita como

$$W(u, p) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\sigma}{2}(u^2 + 4p^2/\sigma^2)}, \quad (2.15)$$

que pode ser reescrita na variável x substituindo a equação (2.9) na equação (2.15) de forma que

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\sigma}{2} \{ [x + (\omega - 1) \arctan(x)]^2 + 4p^2/\sigma^2 \}}. \quad (2.16)$$

Podemos ver a distribuição de Wigner para o estado fundamental na Figura 2.2, em que Chen e Chen [8] escolheram diferentes valores para ω e $\sigma = 2$. As figuras da direita

são projeções das figuras da esquerda. Foi observado que a distribuição de Wigner tem a forma de uma Gaussiana. Os resultados deles mostraram também que aumentando a frequência, a distribuição de Wigner se estende na direção do momento p .

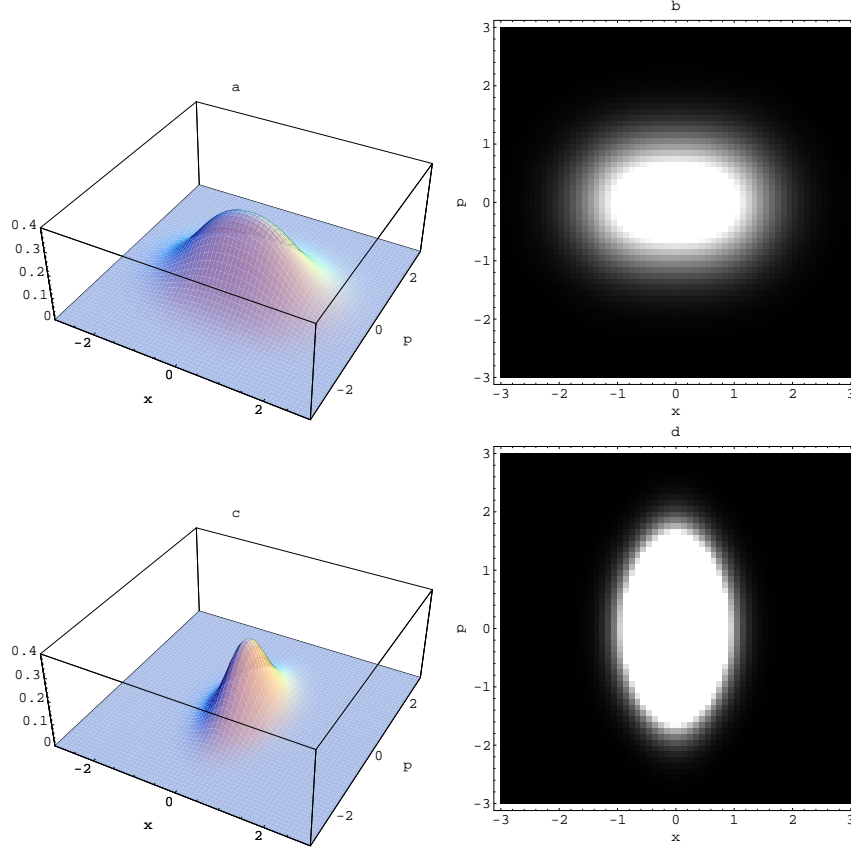


Figura 2.2: *Chen e Chen (2006)*. Distribuição de Wigner para o estado fundamental com $\sigma = 2$. $\omega = 0,5$ em a e b, $\omega = 1,5$ em c e d.

Para os estados excitados, a função de Wigner é escrita substituindo a equação (2.12) na equação (2.14), de modo que ficamos com

$$W(u, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-(\alpha^2 u^2 + p^2/\alpha^2)} L_n \left[2 \left(\alpha^2 u^2 + \frac{p^2}{\alpha^2} \right) \right], \quad (2.17)$$

onde L_n são polinômios de Laguerre. A equação (2.17) pode ser reescrita na variável x substituindo a equação (2.9) na equação acima. Assim

$$W(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-\alpha^2 \{ [x + (\omega - 1) \arctan(x)]^2 - p^2/\alpha^2 \}} \times \\ \times L_n \left\{ 2\alpha^2 [x + (\omega - 1) \arctan(x)]^2 + \frac{2p^2}{\alpha^2} \right\}. \quad (2.18)$$

A Figura 2.3 mostra os estados excitados em que Chen e Chen [8] escolheram o conjunto

de parâmetros $\omega = 0,5$, $\sigma = 2$ e diferentes valores para n . Foi observado para os estados excitados que aumentado o valor de n o pacote de ondas não modifica sua forma, porém diminui seu tamanho.

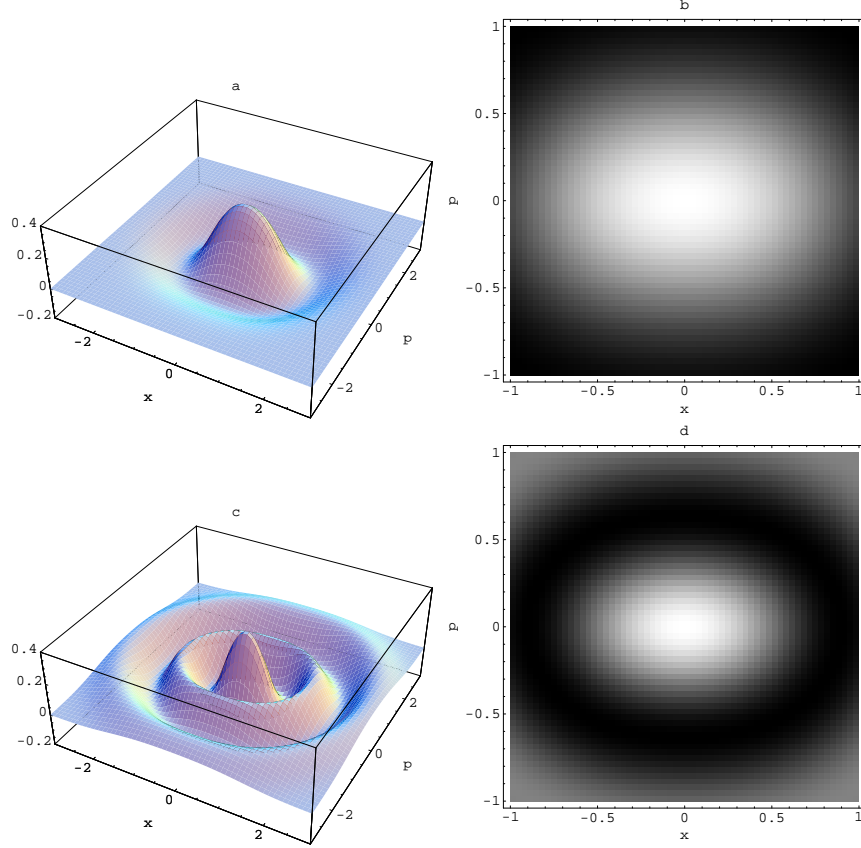


Figura 2.3: *Chen e Chen (2006)*. Distribuição de Wigner para os estados excitados com $\sigma = 2$ e $\omega = 0,5$. $n = 1$ em a e b, $n = 4$ em c e d.

2.3 Classe de sistemas quânticos com massa dependente da posição

A abordagem que usamos para introduzir a nossa proposta consiste em considerar um sistema Schrödinger exatamente solúvel com massa constante. Neste caso temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi. \quad (2.19)$$

Neste ponto é importante ressaltar que a equação acima é diferente da equação de Schrödinger definida por Chen e Chen [8]. A equação de Schrödinger considerada por eles contém o termo com derivada primeira. A diferença da equação em estudo com a equação considerada no trabalho de Chen e Chen [8], é basicamente devido à escolha do ordenamento

quântico. Vamos fazer uma discussão mais detalhada da ambiguidade de ordenamento quântico nos próximos capítulos. No caso em estudo, vemos que fazendo a transformação na variável espacial x na forma

$$x = f(r), \quad (2.20)$$

temos

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{f'} \frac{d}{dr}. \quad (2.21)$$

Substituindo as equações (4.59) e (2.21) na equação de Schrödinger, vemos que

$$\begin{aligned} & - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{f'} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{f'} \frac{d\psi}{dr} \right) + V(f) \psi = \\ & = - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{f'^2} \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{f''}{f'^3} \frac{d\psi}{dr} + V(f) \psi = E \psi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Fazendo a redefinição das autofunções de onda na equação (2.22), na forma

$$\psi(r) = e^{g(r)} \chi(r), \quad (2.23)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \psi' &= e^g (\chi' + g' \chi), \\ \psi'' &= e^g \{ \chi'' + 2g' \chi' + [g'' + (g')^2] \chi \}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Substituindo as equações (2.23) e (2.24) na equação (2.22), temos

$$\begin{aligned} & - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{f'^2} \frac{d^2\chi}{dr^2} + \left[- \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{g'}{f'^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{f''}{f'^3} \right] \frac{d\chi}{dr} + \\ & + \left\{ - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{f'^2} \left(g'' + (g')^2 - \frac{g' f''}{f'} \right) + V(f) \right\} \chi = E \chi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para eliminar o termo em $d\chi/dr$ na equação acima, uma vez que queremos recuperar a equação na forma Schrödinger usual, devemos impor que

$$- \frac{\hbar^2}{m_0} \frac{g'}{f'^2} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{f''}{f'^3} = 0, \quad (2.26)$$

e assim, para a constante arbitrária de normalização na autofunção, temos

$$g' = \frac{1}{2} \frac{f''}{f'} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (\ln f'), \quad (2.27)$$

$$g'' = \frac{1}{2} \left[\frac{f'''}{f'} - \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right], \quad (2.28)$$

e portanto, integrando a equação (2.27) concluímos que

$$g(r) = \ln \sqrt{f'} + c, \quad (2.29)$$

onde c é uma constante arbitrária de integração. Por conseguinte, substituindo a equação (2.29) na equação (2.23) obtemos as autofunções escritas na seguinte forma

$$\psi(r) = e^{\ln \sqrt{f'}} e^c \chi(r) = K \sqrt{f'(r)} \chi(r), \quad (2.30)$$

onde K é constante. Deste modo, chegamos à equação diferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{(f')^2} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{(f')^2} \left[g'' + (g')^2 - \frac{g' f''}{f'} \right] + V(f) \right\} \chi = E \chi, \quad (2.31)$$

de modo que substituindo as equações (2.27) e (2.28) na equação acima, temos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{f'^2} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{f'^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{f'''}{f'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + V(f) \right\} \chi = \\ & = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{f'^2} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left\{ \frac{\hbar^2}{4m_0} \frac{1}{f'^2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - \frac{f'''}{f'} \right] + V(f) \right\} \chi = E \chi. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Aqui vemos então que se definirmos a seguinte relação

$$f'(r) = \sqrt{\frac{M(r)}{m_0}}, \quad (2.33)$$

onde $M(r)$ é a massa dependente da posição e m_0 é um parâmetro com dimensão de massa e substituir na equação (2.32) temos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2M(r)} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \left\{ \frac{\hbar^2}{4M(r)} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} [M(r)]^{-\frac{1}{2}} M'(r)}{\sqrt{M(r)}} \right) - \frac{1}{\sqrt{M(r)}} \left(\frac{1}{2} \right) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(-\frac{1}{2} [M(r)]^{-\frac{3}{2}} [M'(r)]^2 + [M(r)]^{-\frac{1}{2}} M''(r) \right) \right] + V \left(\int^r dz \sqrt{M(z)} \right) \right\} \chi = \\ & = E \chi, \end{aligned} \quad (2.34)$$

de forma que terminamos com a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2M(r)} \frac{d^2\chi}{dr^2} + V(r)\chi = E\chi, \quad (2.35)$$

onde

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{4M(r)} \left\{ \frac{3}{4} \left[\frac{M'(r)}{M(r)} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{M'(r)}{M(r)} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{M''(r)}{M(r)} \right] + V \left(\int^r dz \sqrt{M(z)} \right) \right\}, \quad (2.36)$$

é o potencial efetivo. Assim, podemos ver que finalizamos com uma equação de Schrödinger de um sistema em que o potencial efetivo depende da escolha da massa dependente da posição. Entretanto, ele será isoespectral com relação ao potencial original. Por exemplo, no caso onde escolhermos o potencial do oscilador harmônico como o potencial original, o espectro de energia será o usual

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (2.37)$$

e as autofunções serão escritas substituindo a equação (2.33) na equação (2.30), de forma que temos

$$\chi_n(r) = \frac{1}{K\sqrt{f'(r)}} \psi(r) = N_n \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/4} e^{-(m_0 \omega / 2\hbar) f(r)^2} H_n[f(r)], \quad (2.38)$$

onde N_n é a constante de normalização, n são números quânticos e H_n são polinômios de Hermite. Em nossos estudos usamos a constante de normalização escrita como

$$N_n = \left(\frac{\sqrt{(m_0 \omega / \hbar)}}{n! 2^n \sqrt{\pi}} \right)^{1/2}. \quad (2.39)$$

2.4 Função de Wigner para sistemas com massa dependente da posição que são isoespectrais ao oscilador harmônico

Neste ponto, para começar discutir um exemplo particular, nos restringimos ao caso do oscilador harmônico quântico, o qual foi motivo de interesse no cálculo da distribuição de Wigner como foi feito no trabalho de Chen e Chen [8]. A função de Wigner pode ser

obtida a partir de

$$W(r, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \chi^*[f(r) - z] e^{2ipz} \chi[f(r) + z]. \quad (2.40)$$

Aqui é importante ressaltar que temos algumas diferenças em relação ao caso estudado por Chen e Chen [8], uma vez que eles trabalharam com o ordenamento [6] diferente do ordenamento escolhido neste Capítulo. Porém, como vamos ver a seguir, o comportamento principal da função de Wigner é basicamente o mesmo mostrado no caso estudado por Chen e Chen [8]. Em nosso caso, vemos que levando as autofunções da equação (2.38) na função de distribuição de Wigner a equação (2.40) temos

$$\begin{aligned} W(r, p) &= \frac{N_n^2}{\pi} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-2(m_0 \omega / 2\hbar) [f(r)^2 + z^2]} e^{2ipz} \times \\ &\times H_n \left[\sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} f(r) - z \right] H_n \left[\sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} f(r) + z \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Inicialmente, vamos analisar o caso do estado fundamental. Assim, substituindo a constante de normalização dada na equação (2.39) a função de distribuição de Wigner acima adquire a forma

$$W(r, p) = \frac{(m_0 \omega / \hbar)}{\pi^2} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(m_0 \omega / \hbar) [f(r)^2 + z^2]} e^{2ipz}, \quad (2.42)$$

fazendo $\eta = m_0 \omega / \hbar$, obtemos

$$\begin{aligned} W(r, p) &= \frac{\eta}{\pi^2} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\eta z^2} e^{2ipz} = \\ &= \frac{\eta}{\pi^2} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2 - (p^2/\eta)} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\eta [z - (ip/\eta)]^2}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

considerando $\mu = z - (ip/\eta)$, temos

$$\begin{aligned} W(r, p) &= \frac{\eta}{\pi^2} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2 - (p^2/\eta)} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-\eta \mu^2} = \\ &= \frac{\eta}{\pi^2} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2 - (p^2/\eta)} \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

sabendo que $\eta = m_0 \omega / \hbar$, a função de Wigner acima pode ser reescrita como

$$W(r, p) = \frac{\sqrt{m_0 \omega}}{(\hbar \pi)^{3/2}} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-[(m_0 \omega / \hbar) f(r)^2 + (p^2 \hbar / m_0 \omega)]}. \quad (2.45)$$

Já para o caso da função de Wigner dos estados excitados podemos partir da equação (2.41) em que considerando $\eta = m_0 \omega / \hbar$, temos

$$\begin{aligned}
W(r, p) &= \frac{N_n^2}{\pi} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\eta z^2} e^{2ipz} H_n [\sqrt{\eta} f(r) - z] \times \\
&\quad \times H_n [\sqrt{\eta} f(r) + z] = \\
&= \frac{N_n^2}{\pi} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2 - p^2/\eta} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\eta [z - (ip/\eta)]^2} H_n [\sqrt{\eta} f(r) - z] \times \\
&\quad \times H_n [\sqrt{\eta} f(r) + z], \tag{2.46}
\end{aligned}$$

usando $\mu^2 = \eta (z - ip/\eta)^2$, obtemos

$$\mu = \left(z - \frac{ip}{\eta} \right) \sqrt{\eta}, \tag{2.47}$$

de forma que

$$z = \frac{\mu}{\sqrt{\eta}} + \frac{ip}{\eta}, \quad \mu > 0. \tag{2.48}$$

Substituindo a equação (2.48) na equação (2.46), temos

$$\begin{aligned}
W(r, p) &= \frac{N_n^2}{\pi} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2 - p^2/\eta} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-\mu^2} H_n \left[f(r) - \left(\frac{\mu}{\sqrt{\eta}} + \frac{ip}{\eta} \right) \right] \times \\
&\quad \times H_n \left(f(r) + \frac{\mu}{\sqrt{\eta}} + \frac{ip}{\eta} \right). \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Usando a relação $H_n(-\mu) = (-1)^n H_n(\mu)$, obtemos

$$\begin{aligned}
W(r, p) &= \frac{(-1)^n N_n^2}{\pi} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2 - p^2/\eta} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-\mu^2} H_n \left[\frac{\mu}{\sqrt{\eta}} + \frac{ip}{\eta} - \sqrt{\eta} f(r) \right] \times \\
&\quad \times H_n \left[\frac{\mu}{\sqrt{\eta}} + \frac{ip}{\eta} + \sqrt{\eta} f(r) \right]. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Notemos que a resolução da integral na função de Wigner acima é obtida através de uma relação integral entre os polinômios de Hermite e os de Laguerre [42], de forma que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-\mu^2} H_n \left(\frac{\mu}{\sqrt{\eta}} + \frac{ip}{\eta} - x \right) H_n \left(\frac{\mu}{\sqrt{\eta}} + \frac{ip}{\eta} + x \right) = \\
&= \sqrt{\pi} 2^n n! L_n \left[2 \left(x^2 + \frac{p^2}{\eta^2} \right) \right], \tag{2.51}
\end{aligned}$$

onde L_n são polinômios de Laguerre. Assim, chega-se a

$$W(r, p) = \frac{(-1)^n N_n^2}{\pi} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-\eta f(r)^2 - p^2/\eta} \sqrt{\pi} 2^n n! L_n \left[2 \left(\eta f(r)^2 + \frac{p^2}{\eta^2} \right) \right]. \quad (2.52)$$

Substituindo a constante de normalização dada na equação (2.39) e lembrando que $\eta = m_0 \omega / \hbar$, finalizamos com a função de distribuição de Wigner para o caso em análise, a qual é dada por

$$W(r, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} \sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} \left[\frac{M(r)}{m_0} \right]^{-1/2} e^{-(m_0 \omega / \hbar) f(r)^2 - (p^2 \hbar / m_0 \omega)} \times \\ \times L_n \left[2 \left(\frac{m_0 \omega}{\hbar} f(r)^2 + \frac{p^2 \hbar^2}{m_0^2 \omega^2} \right) \right]. \quad (2.53)$$

Neste ponto, podemos estudar alguns exemplos particulares fixando uma dependência espacial na massa. Como primeiro exemplo vamos estudar o caso de massa dependente da posição considerada por de Souza Dutra et al [6] na análise supersimétrica de sistemas unidimensionais com ambiguidade de ordenamento quântico, Chen e Chen [8] para solucionar o problema do oscilador harmônico com massa dependente da posição e também usada por Plastino [29] na análise supersimétrica de sistemas quânticos, em que

$$M(r) = \left(\frac{\omega + r^2}{1 + r^2} \right)^2, \quad (2.54)$$

onde

$$M'(r) = \frac{(\omega - 1) [-4r(r^2 + \omega)]}{(1 + r^2)^3}, \quad (2.55)$$

$$M''(r) = \frac{4 [(\omega - 1)(5\omega - 3)r^2 + 3r^4(\omega - 1) - \omega(\omega - 1)]}{(1 + r^2)^4}. \quad (2.56)$$

Integrando a equação (2.33), temos

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \int \frac{\omega + r^2}{1 + r^2} dr = \frac{1}{\sqrt{m_0}} [r + (\omega - 1) \arctan(r)]. \quad (2.57)$$

Deste modo, levando as equações (2.54), (2.55), (2.56) e (2.57) no potencial efetivo mostrado na equação (2.36), temos o seguinte potencial efetivo isopectral

$$V(r) = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \frac{1}{m_0} [r + (\omega - 1) \arctan(r)]^2 \right\} + \frac{\hbar^2 (1 + r^2)^2}{4(\omega + r^2)^2} (\omega - 1) \times \\ \times \left\{ \frac{-3r(\omega + r^2) + 4r^2(\omega - 1) - 2[r(5\omega - 3) + 3r^4 - \omega]}{(1 - r^2)^2 (\omega + r^2)^2} \right\}. \quad (2.58)$$

Podemos ver na Figura 2.4 a ilustração do potencial, em que consideramos $m_0 = 1$ e diferentes valores de ω . Observe na equação (2.58) que para o parâmetro $\omega = 1$ temos o potencial do oscilador harmônico. Notemos na figura que aumentando a frequência o potencial fica mais confinante. Esta característica do potencial também será observada nos próximos potenciais em que analisamos outros exemplos de massa dependente da posição.

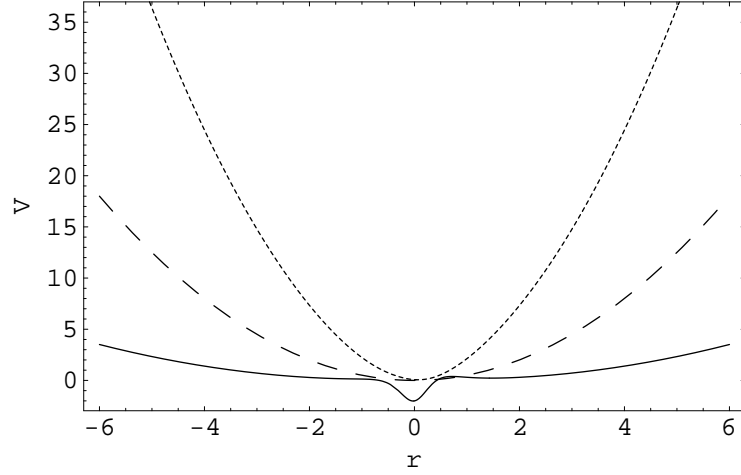


Figura 2.4: Potencial para o caso da massa $M(r) = \left(\frac{\omega+r^2}{1+r^2}\right)^2$. $\omega = 0.5$ em linha, $\omega = 1$ em tracejado e $\omega = 1.5$ em pontilhado.

A função de Wigner para o estado fundamental pode ser escrita substituindo as equações (2.54) e (2.57) na equação (2.45), de modo que

$$W(r, p) = \frac{\sqrt{m_0 \omega}}{(\hbar \pi)^{3/2}} \left[\frac{(\omega + r^2)^2}{m_0 (1 + r^2)^2} \right]^{-1/2} e^{-(m_0 \omega / \hbar) \left\{ \frac{1}{\sqrt{m_0}} [r + (\omega - 1) \arctan(r)]^2 \right\} - (p^2 \hbar / m_0 \omega)}. \quad (2.59)$$

A Figura 2.5 mostra a distribuição de Wigner para diferentes valores de ω e fazendo $m_0 = \hbar = 1$. As figuras da direita são projeções das figuras da esquerda. Notemos que aumentando o valor da frequência ω a distribuição de Wigner aumenta na direção do momento p . Neste caso ocorreu o mesmo comportamento apresentado no ordenamento usado por Chen e Chen [8]. No caso dos estados excitados temos que substituindo as equações (2.54) e (2.57) na função de distribuição de Wigner dada na equação (2.53), obtemos

$$W(r, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} \sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} \left[\frac{(\omega + r^2)^2}{m_0 (1 + r^2)^2} \right]^{-1/2} e^{-(m_0 \omega / \hbar) \left\{ \frac{1}{\sqrt{m_0}} [r + (\omega - 1) \arctan(r)] \right\}^2 - (p^2 \hbar / m_0 \omega)} \times \\ \times L_n \left\{ 2 \left[\frac{m_0 \omega}{\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{m_0}} [r + (\omega - 1) \arctan(r)] \right)^2 + \frac{p^2 \hbar^2}{m_0^2 \omega^2} \right] \right\}. \quad (2.60)$$

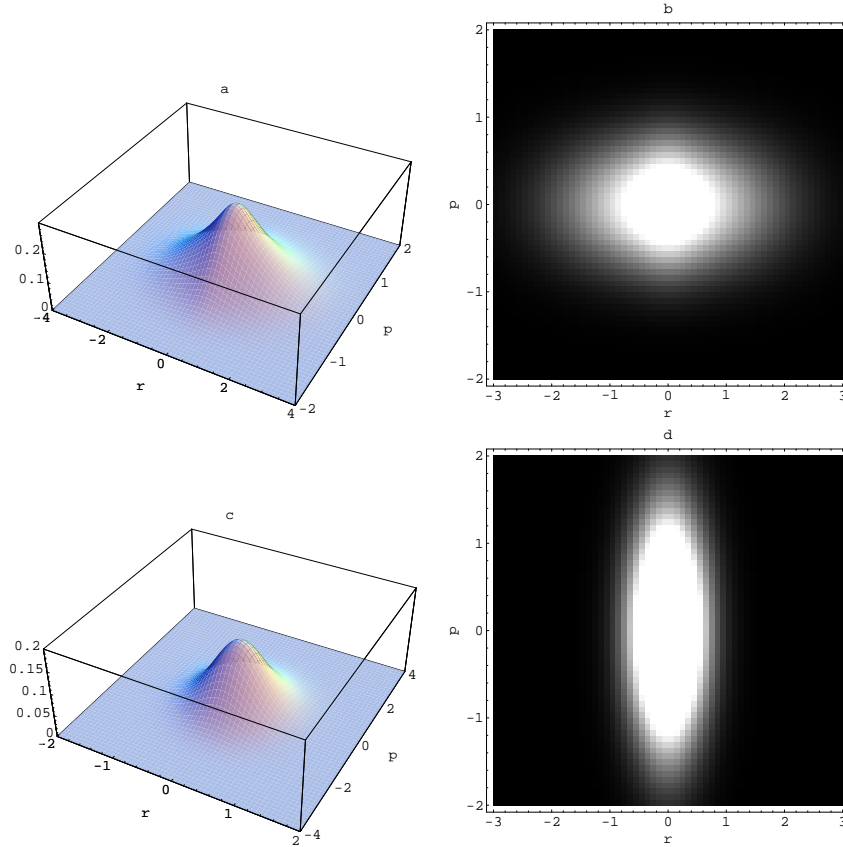


Figura 2.5: *Distribuição de Wigner para o estado fundamental com massa $M(r) = \left(\frac{\omega+r^2}{1+r^2}\right)^2$. Consideramos $m_0 = \hbar = 1$, $\omega = 0,5$ em a e b e, $\omega = 1,5$ em c e d.*

Este caso está ilustrado na Figura 2.6 . Consideramos os seguintes parâmetros $\omega = 0,5$, $m_0 = \hbar = 1$ e diferentes valores para n . Agora, porém, vemos algumas diferenças com relação ao caso analisado por Chen e Chen [8]. No caso do ordenamento que escolhemos, podemos ver algumas regiões onde a densidade de distribuição de Wigner é maior do que em sua vizinhança, ao contrário do que ocorreu no caso do ordenamento usado por Chen e Chen [8]. Este tipo de dependência de ordenamento é comum e pode ser usado em alguns casos, apontados para a escolha de um ordenamento privilegiado [5, 22, 25, 27].

Como segundo exemplo analisamos uma massa dependente da posição considerada no trabalho de Souza Dutra e Almeida [5]. Naquele trabalho a massa dependente da posição foi usada para exemplificar o problema da ambiguidade de ordenamento quântico em sistemas exatamente solúveis unidimensionais. Neste caso a massa aumenta quadraticamente de forma que temos

$$M(r) = cr^2, \quad (2.61)$$

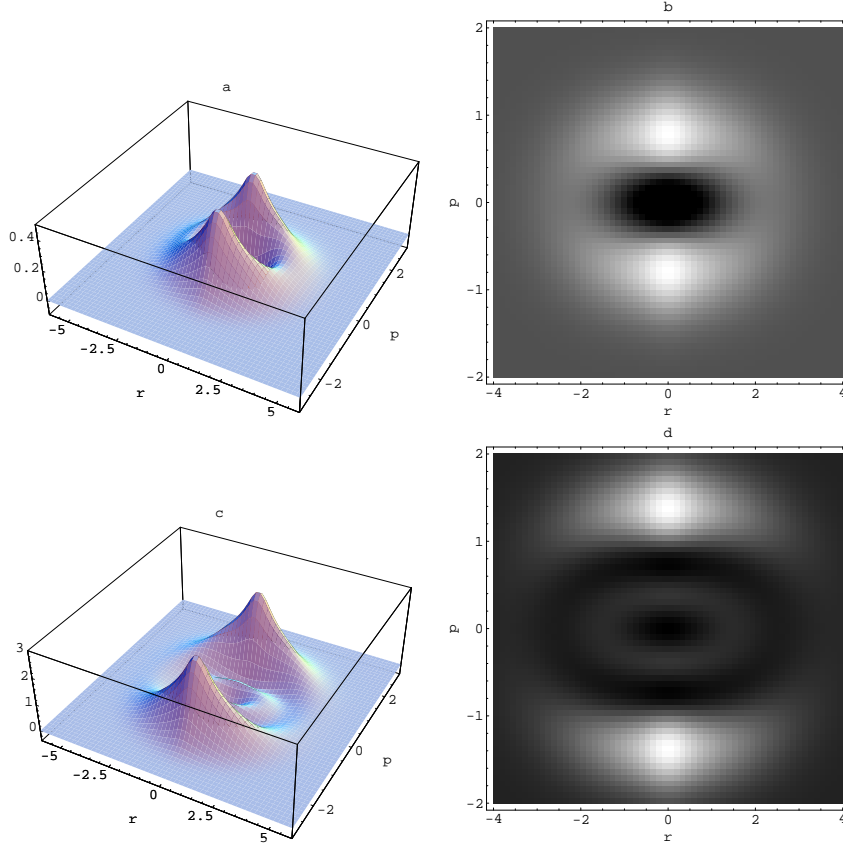


Figura 2.6: *Distribuição de Wigner para os estados excitados com massa $M(r) = \left(\frac{\omega+r^2}{1+r^2}\right)^2$. Atribuímos $m_0 = \hbar = 1$, $\omega = 0,5$, $n = 1$ em a e b e, $n = 3$ em c e d.*

onde c é uma constante arbitrária positiva. Neste caso temos

$$f(r) = \int \sqrt{\frac{cr^2}{m_0}} dr = \frac{r^2}{2} \sqrt{\frac{c}{m_0}}. \quad (2.62)$$

Assim, o potencial efetivo neste exemplo é escrito como

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{r^2}{2} \sqrt{\frac{c}{m_0}}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{4cr^2} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{2cr}{cr^2}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{2cr}{cr^2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2c}{cr^2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{8m_0}\omega^2 cr^4 + \frac{3}{8} \frac{\hbar^2}{cr^3}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

A Figura 2.7 ilustra o potencial efetivo em que consideramos os parâmetros $\hbar = m_0 = 1$, $c = 8$ e diferentes valores para ω . Notemos que neste caso existe uma singularidade na origem. Como pode ser vista na equação (2.63). Neste caso a distribuição de Wigner para o estado fundamental é obtida substituindo as equações (2.61) e (2.62) na equação (2.45).

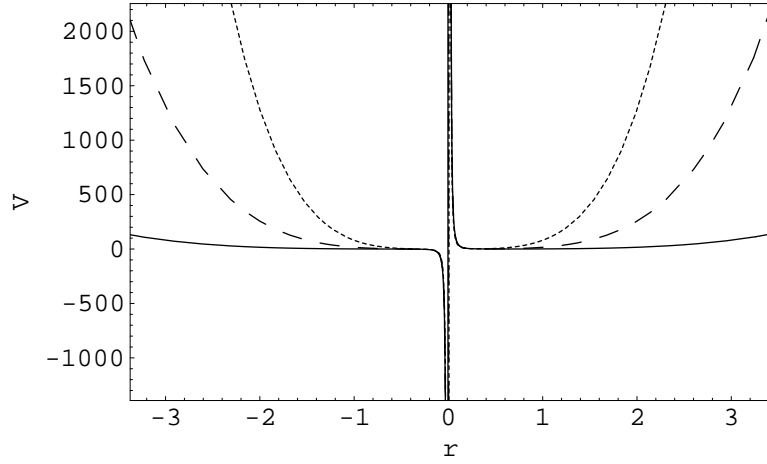


Figura 2.7: *Potencial com massa $M(r) = cr^2$. Consideramos $c = 8$ e em linha $\omega = 1$, tracejado $\omega = 4$ e pontilhado $\omega = 10$.*

Deste modo temos

$$W(r, p) = \frac{\sqrt{m_0 \omega}}{(\hbar \pi)^{3/2}} \left(\frac{cr^2}{m_0} \right)^{-1/2} e^{-(m_0 \omega / \hbar) \left[(r^2/2) \sqrt{c/m_0} \right]^2 - p^2 \hbar / m_0 \omega}, \quad (2.64)$$

e podemos ver na Figura 2.8 em que consideramos os parâmetros $\hbar = m_0 = 1$ e $c = 8$. Notemos na equação (2.64) que a constante $c > 0$. Podemos observar novamente que o pacote de ondas de densidade aumenta na direção do momento quando a frequência aumenta, assim repete-se o comportamento observado no caso anterior, mas agora com uma massa dependente da posição muito diferente com respeito a variável espacial.

Podemos calcular os correspondentes estados excitados substituindo as equações (2.61) e (2.62) na equação (2.53), de forma que obtemos a seguinte função de Wigner

$$W(r, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} \sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} \left(\frac{cr^2}{m_0} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-(m_0 \omega / \hbar) \left(\frac{r^2}{2} \sqrt{c/m_0} \right)^2 - (p^2 \hbar / m_0 \omega)} \times \\ \times L_n \left\{ 2 \left[\frac{m_0 \omega}{\hbar} \left(\frac{r^2}{2} \sqrt{\frac{c}{m_0}} \right)^2 + \frac{p^2 \hbar^2}{m_0^2 \omega^2} \right] \right\}. \quad (2.65)$$

A Figura 2.9 mostra a distribuição de Wigner para os estados excitados para a escolha dos parâmetros $m_0 = \hbar = 1$, $\omega = 0,5$, $c = 8$ e diferentes valores para os números quânticos n . As regiões com maior concentração de densidade também são observadas neste caso, confirmando um aparente comportamento semelhante da distribuição de Wigner, indiferentemente da escolha da dependência espacial da massa.

Como terceiro e último exemplo, analisamos o caso recente considerado por Cruz y Cruz e colaboradores [24] para exemplificar o problema clássico e quântico do oscilador

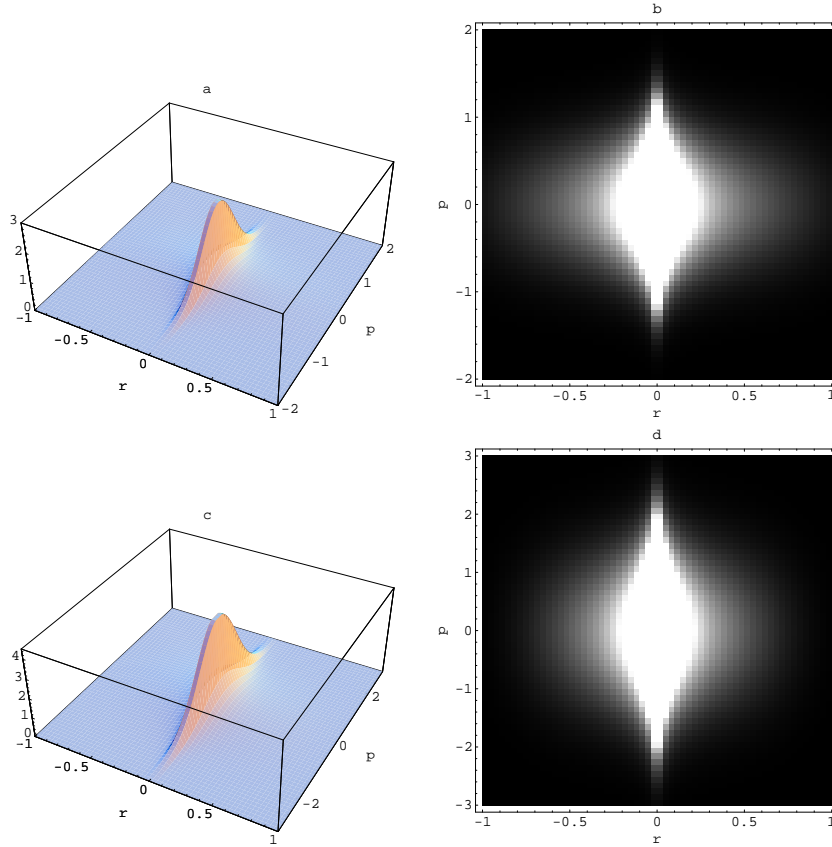


Figura 2.8: *Distribuição de Wigner para o estado fundamental com massa $M(r) = cr^2$. Consideramos diferentes valores para ω . $\omega = 0,5$ em a e b e, $\omega = 1,5$ em c e d.*

harmônico com massa dependente da posição. Neste caso a massa é dada por

$$M(r) = \frac{m_0}{1 + (\lambda r)^2}, \quad (2.66)$$

onde λ é uma constante real arbitrária. Repetindo o procedimento usado até agora, temos

$$M'(r) = -\frac{2r\lambda^2}{(1 + \lambda r)^2}, \quad (2.67)$$

$$M''(r) = \frac{8r^2\lambda^4 [1 + (\lambda r)^2] - 2\lambda^2 [1 + (\lambda r)^2]^2}{[1 + (\lambda r)^2]^4}. \quad (2.68)$$

Assim, obtemos

$$f(r) = \int dr \sqrt{\frac{1}{1 + (\lambda r)^2}} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsenh}(\lambda r). \quad (2.69)$$

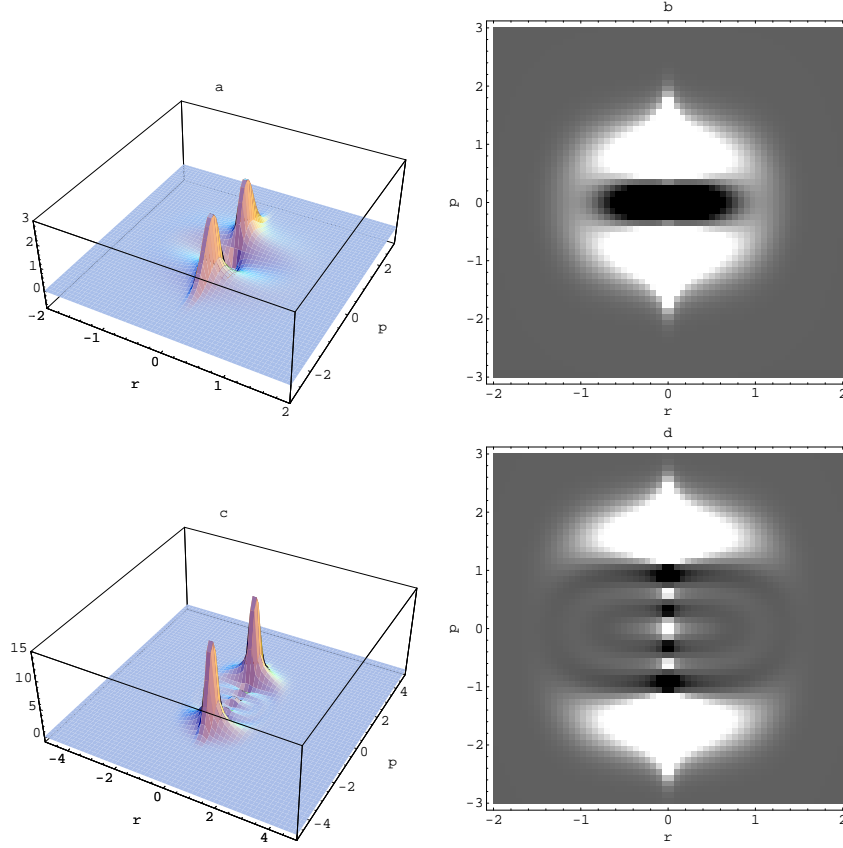


Figura 2.9: *Distribuição de Wigner para os estados excitados com massa $M(r) = cr^2$. Consideramos $\omega = 0,5$, $c = 8$ e diferentes valores para n . $n = 1$ em a e b e, $n = 4$ em c e d.*

Neste caso, o potencial efetivo é reescrito como

$$V(r) = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsenh}(\lambda r) \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4} \left\{ -\frac{3r\lambda^2}{2} + \frac{r^2\lambda^4}{1+(\lambda r)^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{8r^2\lambda^4 - 2\lambda^2 [1 + (\lambda r)^2]}{1 + (\lambda r)^2} \right] \right\}, \quad (2.70)$$

que podemos ver ilustrado na Figura 2.10, onde consideramos o conjunto de parâmetros $\hbar = m_0 = \lambda = 1$ e diferentes valores para a frequência.

A distribuição de Wigner para o estado fundamental para este exemplo pode ser obtida substituindo as equações (2.66) e (2.69) na equação (2.45). Assim, temos

$$W(r, p) = \frac{\sqrt{m_0 \omega}}{(\hbar \pi)^{3/2}} \left[\frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsenh}(\lambda r) \right]^{-1/2} e^{-\frac{m_0 \omega}{\hbar} \left[\frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsenh}(\lambda r) \right]^2 - p^2 \hbar / m_0 \omega}. \quad (2.71)$$

A Figura 2.11 ilustra o comportamento desta distribuição. Neste último exemplo, consideramos os parâmetros $\hbar = m_0 = \lambda = 1$ e diferentes valores para a frequência. Mais uma vez, observamos que aumentando a frequência a distribuição de Wigner vai ampliando na direção do momento. Neste ponto é importante ressaltarmos que a escolha do parâmetro

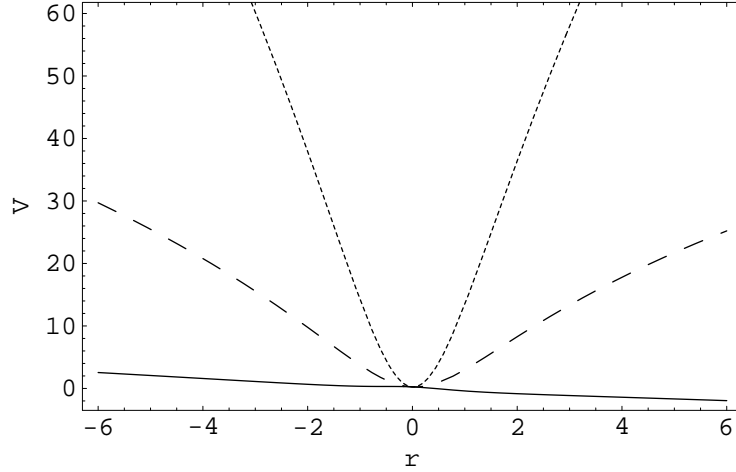


Figura 2.10: Potencial com massa $M(r) = \frac{m_0}{1+(\lambda r)^2}$. Consideramos $\hbar = m_0 = \lambda = 1$, em linha $\omega = 0.5$, tracejado $\omega = 3$ e pontilhado $\omega = 6$.

$\lambda = 1$ implica na concentração da distribuição de Wigner em uma única região. Entretanto, para valores de $\lambda > 1$ a distribuição de Wigner concentra-se em duas regiões que se afastam uma da outra a medida que aumenta a frequência. Finalmente, a distribuição de Wigner para os estados excitados para este terceiro e último exemplo pode ser obtida substituindo as equações (2.66) e (2.69) na equação (2.53), de modo que

$$\begin{aligned}
 W(r,p) = & \frac{(-1)^n}{\pi} \sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} \left(\frac{1}{1+(\lambda r)^2} \right)^{-1/2} e^{-(m_0 \omega / \hbar) \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsenh}(\lambda r) \right)^2 - p^2 \hbar / m_0 \omega} \times \\
 & \times L_n \left\{ 2 \left[\frac{m_0 \omega}{\hbar} \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{arcsenh}(\lambda r) \right)^2 + \frac{p^2 \hbar^2}{m_0^2 \omega^2} \right] \right\}. \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

A Figura 2.12 mostra o comportamento da distribuição de Wigner para os estados excitados em que consideramos $\omega = 0,5$, $m_0 = \hbar = \lambda = 1$ e diferentes valores para n . Neste caso, duas regiões com maior concentração da distribuição de Wigner também aparecem.

2.5 Comentários

Neste Capítulo, introduzimos um método para a geração de uma classe de modelos exatamente solúveis isoespectrais com massa dependente da posição. Para verificar o poder da técnica, decidimos estudar o caso em que nos restringimos ao oscilador harmônico, uma vez que, o oscilador harmônico foi motivo de estudos por Chen e Chen [8] na construção da distribuição de Wigner. O procedimento permite a construção da distribuição de Wigner. No primeiro exemplo analisado, discutimos o caso recentemente considerado por Chen e

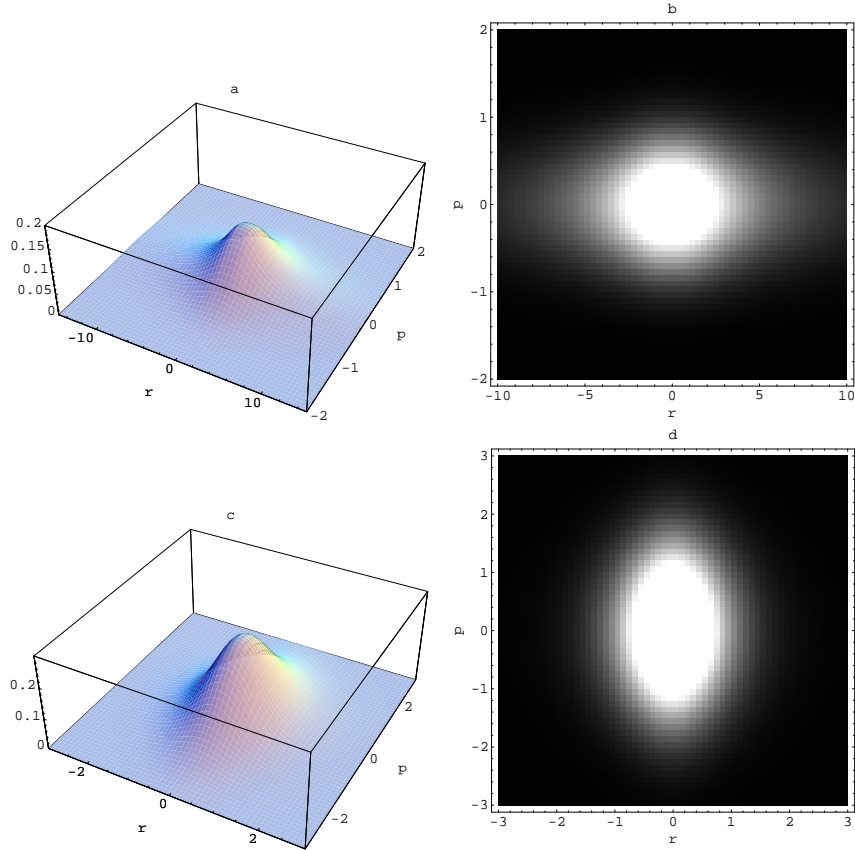


Figura 2.11: *Distribuição de Wigner para o estado fundamental com massa $M(r) = \frac{1}{1+(\lambda r)^2}$. Consideramos $\hbar = m_0 = \lambda = 1$ e diferentes frequências. $\omega = 0.5$ em a e b e, $\omega = 2$ em c e d.*

Chen [8] e fizemos algumas considerações relativas a diferença do ordenamento usado no trabalho deles em relação ao nosso caso. Uma observação interessante que pode ser feita a partir dos casos analisados neste Capítulo é que mudando drasticamente a dependência da massa na variável espacial o comportamento da distribuição de Wigner aparenta ser semelhante. Em todos os casos analisados para o estado fundamental, a distribuição de Wigner aumenta na direção do momento quando aumenta a frequência, e os correspondentes estados excitados das distribuições de Wigner apresentam algumas regiões com maior concentração. No último exemplo estudado, uma pequena diferença foi observada. Existem duas regiões com comportamentos semelhantes. Entretanto, dependendo dos valores dos parâmetros do potencial isto não acontece. Finalmente, analisamos ainda o caso em que a massa

$$M(r) = \left(\frac{\omega + r^2}{1 + r^2} \right)^4, \quad (2.73)$$

para a qual Jia e colaboradores [20] resolveram a equação de Schrödinger, encontrando seus autovalores e suas autofunções. A conclusão para este caso é que a distribuição de Wigner é semelhante ao primeiro exemplo de massa dependente da posição considerado

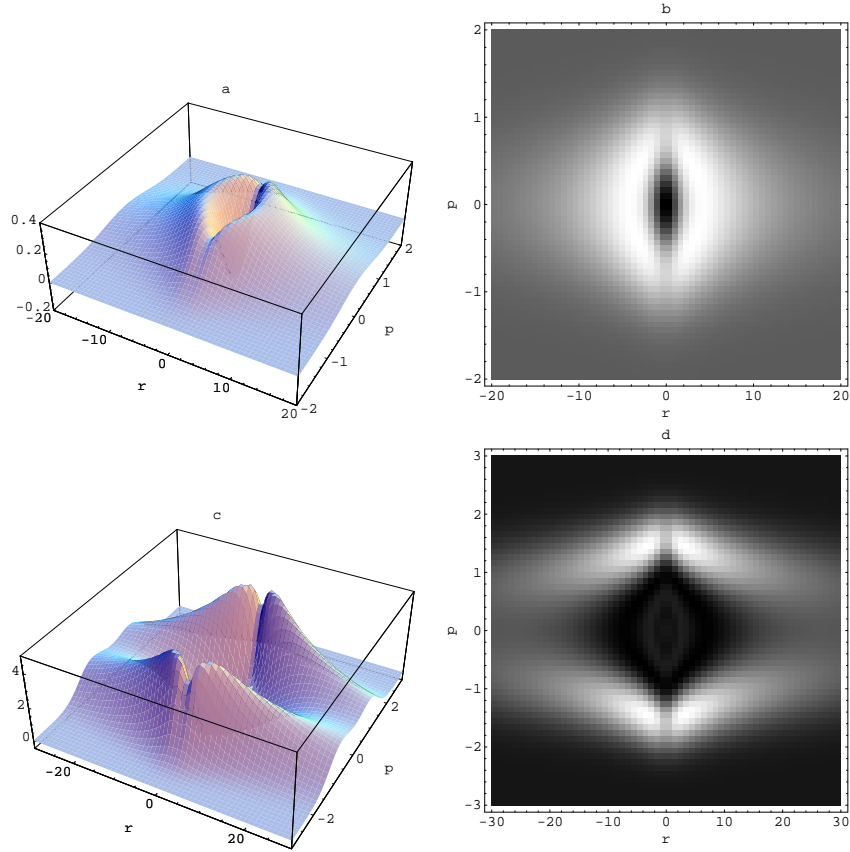


Figura 2.12: *Distribuição de Wigner para os estados excitados com massa $M(r) = \frac{1}{1+(\lambda r)^2}$. Consideramos $\omega = 0,5$, $m_0 = \hbar = \lambda = 1$ e diferentes valores para n . $n = 1$ em a e b e, $n = 4$ em c e d .*

neste Capítulo. Portanto, decidimos não apresentá-lo aqui. Os resultados apresentados neste Capítulo foram discutidos no trabalho [13].

Capítulo 3

Estados coerentes $SU(2)$ para sistemas bidimensionais com massa dependente da posição

Neste Capítulo buscamos estender os estudos do Capítulo 2 ao caso bidimensional. Analisamos o efeito de um campo magnético sobre o sistema e obtemos analiticamente as soluções exatas da equação de Schrödinger. Aqui, construímos os estados coerentes $SU(2)$ para analisar o limite clássico para os problemas estudados.

3.1 Introdução

A ideia neste Capítulo é estender os estudos do Capítulo 2 ao caso bidimensional. Neste caso iniciamos o estudo da equação de Schrödinger com massa constante em que uma partícula está delimitada por um poço de potencial. Propomos fazer uma mudança nas variáveis espaciais a fim de determinarmos um sistema em que a massa depende da posição. Como soluções para o problema, consideramos três exemplos de funções de transformação, sendo eles: i) na forma polinomial, ii) em coordenadas elípticas cilíndricas e iii) em coordenadas bipolares. No caso em que consideramos as funções de transformação na forma polinomial veremos que para a escolha de determinados coeficientes recaímos no caso das coordenadas parabólicas cilíndricas. Estendemos nossos estudos ao problema de uma partícula no poço de potencial de um oscilador sob a influência de um campo magnético uniforme. Vamos construir as soluções exatas da equação de Schrödinger com massa constante no sistema de coordenadas cartesianas fazendo uma transformação nas variáveis via rotação dependente do tempo. Em seguida vamos fazer uma mudança nas variáveis espaciais para escrever a equação de Schrödinger com massa dependente da posição. No caso que fazemos uma mudança nas variáveis espaciais consideramos os três

exemplos de funções de transformação analisados sem a presença do campo magnético uniforme. Conhecidas as soluções exatas da equação de Schrödinger, construímos os estados coerentes $SU(2)$ para analisar o limite clássico para os sistemas estudados.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 3.2 fazemos uma breve revisão do trabalho de Chen e Huang [9] em que foi construído os estados coerentes $SU(2)$ para o problema do oscilador harmônico. Na seção 3.3 definimos a equação de Schrödinger para sistemas bidimensionais, e fazemos uma mudança nas variáveis espaciais. Obtemos as soluções exatas para a equação de Schrödinger e construímos os estados coerentes $SU(2)$ para analisar o limite clássico para os exemplos estudados. Na seção 3.4 analisamos o efeito de um campo magnético sobre o comportamento de uma partícula com massa dependente da posição submetida a um potencial. Nos restringimos ao problema de um oscilador isotrópico e construímos os estados coerentes $SU(2)$. Finalmente na seção 3.5 fazemos os comentários.

3.2 Estados coerentes $SU(2)$

A representação dos estados coerentes $SU(2)$ foi estudada por Chen e Huang [9] com a finalidade de mostrar a correspondência clássico-quântica entre soluções da equação de Schrödinger e as trajetórias clássicas do oscilador harmônico anisotrópico bidimensional. Os autores mostraram que os estados coerentes $SU(2)$ tem a característica interessante de determinar o máximo de probabilidade ao longo da trajetória clássica do sistema correspondente. Para mostrar a eficácia destes estados, os autores iniciaram os estudos deles partindo da hamiltoniana para o problema de um oscilador harmônico bidimensional com massa constante escrita como

$$H = \frac{p_x^2}{2 m_0} + \frac{p_y^2}{2 m_0} + \frac{m_0 \omega_x^2 x^2}{2} + \frac{m_0 \omega_y^2 y^2}{2}, \quad (3.1)$$

onde x e y são as variáveis espaciais, m_0 é a massa constante, p_x e p_y são momentos lineares, e ω_x e ω_y são as frequências.

As autofunções usuais do oscilador harmônico descrito acima podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi n! m! X Y}} H_m \left(\frac{\sqrt{2} x}{X} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2} y}{Y} \right) \times \\ &\times \exp \left[- \left(\frac{x}{X} \right)^2 - \left(\frac{y}{Y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $X = \sqrt{2\hbar/(m_0 \omega_x)}$ e $Y = \sqrt{2\hbar/(m_0 \omega_y)}$. Os autovalores associados com as autofunções acima são dados por

$$E_{m,n} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_x + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_y. \quad (3.3)$$

Considerando um oscilador harmônico bidimensional com a razão das frequências $\omega_x/\omega_y = q/p$, onde p e q são números inteiros, os autovalores podem ser reescritos na forma

$$E_{m,n} = \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) q + \left(n + \frac{1}{2}\right) p \right] \hbar \omega, \quad (3.4)$$

onde ω é um fator comum das frequências ω_x e ω_y . Assim, como na representação Schwinger da algebra $SU(2)$, podemos expressar os estados coerentes $SU(2)$ para a razão q/p usando a definição mostrada por Chen e Huang [9] na forma

$$\Phi(x, y, \tau) = \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{\frac{L}{2}}} \sum_{K=0}^L \binom{L}{K}^{1/2} \tau^K \psi_{nm}(x, y), \quad (3.5)$$

onde os números quânticos $n = pK$, $m = q(L-K)$, $K = 0, 1, 2, \dots, L$ e p e q são números inteiros. Aqui vemos que $L = n + m$. O parâmetro complexo $\tau = A \exp(i\phi)$, onde $\phi = \pi/2$, escrito em termos de coordenadas polares é usado para fazer a conexão com a trajetória clássica e as autofunções usuais do oscilador harmônico que estão escritas na equação (3.2). Podemos observar na equação (3.5) que os estados coerentes $SU(2)$ são superposições de autoestados degenerados, dados no binômio de Newton. Para fazer a conexão com as órbitas clássicas periódicas o pacote de ondas $|\Phi(x, y, \tau)|^2 = \Phi(x, y, \tau)^* \Phi(x, y, \tau)$ foi empregado com a finalidade de obter as órbitas clássicas na forma das figuras de Lissajous. Neste caso Chen e Huang [9] mostraram que

$$x(t) = \sqrt{2 \langle x^2 \rangle} \cos \left(q \omega t - \frac{\phi}{p} \right), \quad (3.6)$$

e

$$y(t) = \sqrt{2 \langle y^2 \rangle} \cos(p \omega t), \quad (3.7)$$

onde os valores esperados quadráticos são dados por

$$\langle x^2 \rangle = \left(\frac{A^2}{1 + A^2 p} L + \frac{1}{2} \right) \frac{X^2}{2}, \quad (3.8)$$

e

$$\langle y^2 \rangle = \left(\frac{1}{1 + A^2 q} L + \frac{1}{2} \right) \frac{Y^2}{2}. \quad (3.9)$$

A Figura 3.1 mostra os resultados dos estados coerentes $SU(2)$ com os parâmetros $A = 1$, $\phi = \pi/2$ e $L = 20$ e diferentes razões de frequências relacionadas aos números inteiros p e q . Para comparação, as correspondentes figuras de Lissajous são mostradas na Figura 3.2.

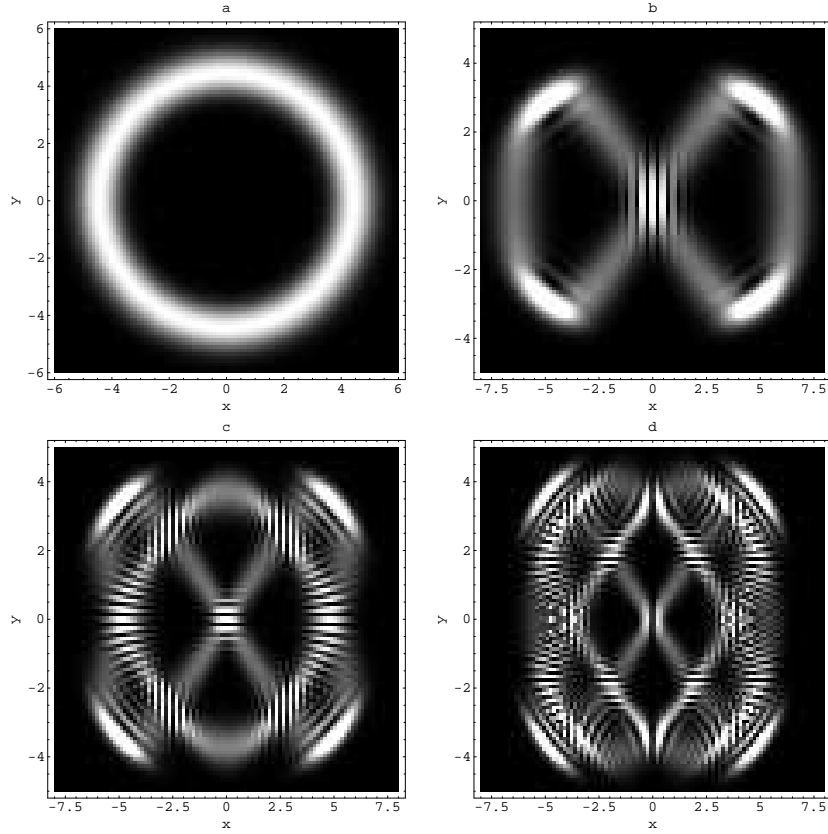


Figura 3.1: *Densidade de probabilidade com os parâmetros $A = 1, \phi = \pi/2, L = 20$ e diferentes frequências. $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$ em a, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em b, $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em c e, finalmente $\omega_1 = p = 4$ e $\omega_2 = q = 3$ em d.*

Podemos ver a semelhança entre as densidades de probabilidade construídas na Figura 3.1 em relação as órbitas clássicas construídas na Figura 3.2 com as mesmas razões de frequências respectivamente. Deste modo, Chen e Huang [9] analisaram o limite clássico para o problema do oscilador harmônico.

3.3 Mudança de variáveis e sistemas com massa dependente da posição

Nesta seção iniciamos a nossa proposta com a discussão de sistemas exatamente solúveis bidimensionais com massa constante. Veremos que fazendo uma mudança nas variáveis espaciais chegamos em um sistema com massa dependente da posição. A hamiltoniana que descreve a dinâmica deste sistema é definida como

$$H = \frac{1}{2m_0} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y), \quad (3.10)$$

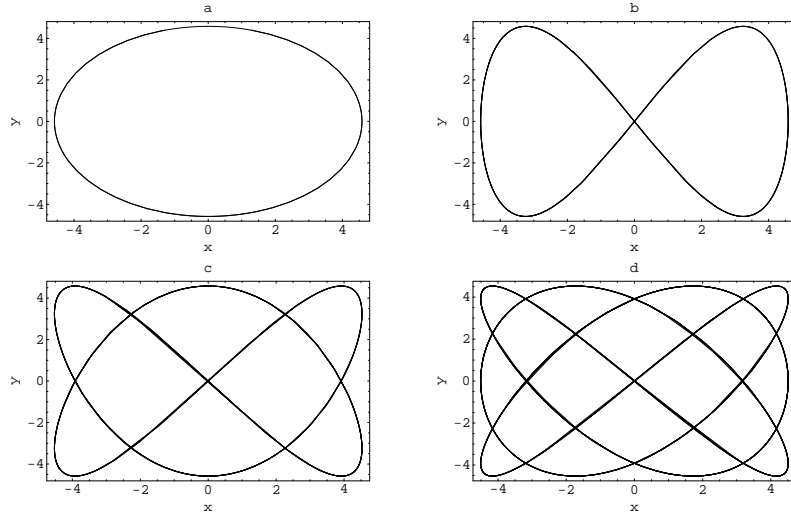


Figura 3.2: Figuras clássicas na forma Lissajous com diferentes frequências. $\omega_1 = \omega_2 = p = q = 1$ em a, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em b, $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em c e, finalmente $\omega_1 = p = 4$ e, $\omega_2 = q = 3$ em d.

onde a constante m_0 é a massa da partícula, x e y são as variáveis espaciais, p_x e p_y são os momentos lineares. Neste caso a equação de Schrödinger é

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \psi(x, y) + V(x, y) \psi(x, y) = E \psi(x, y). \quad (3.11)$$

Fazendo a transformação nas variáveis espaciais na forma

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad (3.12)$$

temos

$$\partial_u = \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} = f_u \partial_x + g_u \partial_y, \quad (3.13)$$

$$\partial_v = \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} = f_v \partial_x + g_v \partial_y. \quad (3.14)$$

Na forma matricial ficamos com

$$\begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde $M = \begin{pmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{pmatrix}$ é a matriz jacobiana. Deste modo, podemos ver que

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

onde a matriz inversa $M^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} g_v & -g_u \\ -f_v & f_u \end{pmatrix}$ e o jacobiano $J = f_u g_v - g_u f_v$ é o determinante da matriz M , de tal forma que temos

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{g_v}{J} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{g_u}{J} \frac{\partial}{\partial v}, \quad (3.17)$$

$$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{f_v}{J} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{f_u}{J} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (3.18)$$

Portanto, no laplaciano da equação (3.11) temos

$$\begin{aligned} \partial_x^2 &= \frac{1}{J} (g_v \partial_u - g_u \partial_v) \left(\frac{g_v}{J} \partial_u - \frac{g_u}{J} \partial_v \right) = \\ &= \frac{1}{J^2} (g_v^2 \partial_u^2 + g_u^2 \partial_v^2 - 2g_u g_v \partial_{uv}^2) + \frac{1}{J} \left[g_v \partial_u \left(\frac{g_v}{J} \right) - g_u \partial_v \left(\frac{g_v}{J} \right) \right] \partial_u + \\ &\quad + \frac{1}{J} \left[g_u \partial_v \left(\frac{g_u}{J} \right) - g_v \partial_u \left(\frac{g_u}{J} \right) \right] \partial_v, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \partial_y^2 &= \frac{1}{J} (-f_v \partial_u + f_u \partial_v) \left(-\frac{f_v}{J} \partial_u + \frac{f_u}{J} \partial_v \right) = \\ &= \frac{1}{J^2} (f_v^2 \partial_u^2 + f_u^2 \partial_v^2 - 2f_u f_v \partial_{uv}^2) + \frac{1}{J} \left[f_v \partial_u \left(\frac{f_v}{J} \right) - f_u \partial_v \left(\frac{f_v}{J} \right) \right] \partial_u + \\ &\quad + \frac{1}{J} \left[-f_v \partial_u \left(\frac{f_u}{J} \right) + f_u \partial_v \left(\frac{f_u}{J} \right) \right] \partial_v, \end{aligned} \quad (3.20)$$

de tal forma que terminamos com um laplaciano nas variáveis u e v escrito como

$$\begin{aligned} \nabla_{uv}^2 &= \partial_x^2 + \partial_y^2 = \frac{1}{J^2} [(g_v^2 + f_v^2) \partial_u^2 + (g_u^2 + f_u^2) \partial_v^2 - 2(g_u g_v + f_u f_v) \partial_{uv}^2] + \\ &\quad + \frac{1}{J} \left[g_v \partial_u \left(\frac{g_v}{J} \right) - g_u \partial_v \left(\frac{g_v}{J} \right) + f_v \partial_u \left(\frac{f_v}{J} \right) - f_u \partial_v \left(\frac{f_v}{J} \right) \right] \partial_u + \\ &\quad + \frac{1}{J} \left[g_u \partial_v \left(\frac{g_u}{J} \right) - g_v \partial_u \left(\frac{g_u}{J} \right) + f_u \partial_v \left(\frac{f_u}{J} \right) - f_v \partial_u \left(\frac{f_u}{J} \right) \right] \partial_v. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A fim de chegarmos a um sistema do tipo Schrödinger em que a massa depende da posição no caso de duas dimensões, devemos impor inicialmente no laplaciano acima que

$$g_u g_v + f_u f_v = 0, \quad (3.22)$$

de forma a eliminar o termo misto e devemos impor ainda que

$$g_v^2 + f_v^2 = g_u^2 + f_u^2, \quad (3.23)$$

para trabalhar com a mesma razão de massa. Notemos na equação (3.22) que se

$$f_u = -\frac{g_u g_v}{f_v}, \quad (3.24)$$

onde $f_v \neq 0$, temos uma solução

$$g_v^2 + f_v^2 = g_u^2 + g_u^2 \left(\frac{g_v}{f_v}\right)^2 = g_u^2 \left(1 + \frac{g_v^2}{f_v^2}\right) = g_u^2 \left(\frac{f_v^2 + g_v^2}{f_v^2}\right). \quad (3.25)$$

Podemos ver na equação acima que

$$f_v = \pm g_u. \quad (3.26)$$

Substituindo a equação (3.26) na equação (3.24), obtemos

$$f_u = -\frac{g_u g_v}{\pm g_u} = \mp g_v. \quad (3.27)$$

Neste ponto, devemos analisar alguns exemplos de funções de transformação nas variáveis u e v . Contudo, os exemplos discutidos serão completos somente quando tivermos definido o potencial sob o qual a partícula com massa dependente da posição está se movendo. Entretanto, este será isoespectral para a escolha do potencial original. Por exemplo, se escolhermos o potencial do oscilador harmônico anisotrópico como potencial original, o espectro de energia será o usual dado por

$$E_{nm} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_2. \quad (3.28)$$

Deste modo, podemos escrever o potencial nas variáveis u e v na forma

$$V(u, v) = \frac{1}{2}m_0 [\omega_1^2 f(u, v)^2 + \omega_2^2 g(u, v)^2], \quad (3.29)$$

e, neste caso ficamos com as soluções exatas escritas a partir da equação (3.2) de modo que

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1}\pi} n! m! P_1 P_2} H_m \left[\frac{\sqrt{2} f(u, v)}{P_1} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2} g(u, v)}{P_2} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ - \left[\frac{f(u, v)}{P_1} \right]^2 - \left[\frac{g(u, v)}{P_2} \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $P_1 = \sqrt{2\hbar/(m_0 \omega_1)}$ e $P_2 = \sqrt{2\hbar/(m_0 \omega_2)}$. Como primeiro exemplo de funções de transformação, na subseção 3.3.1 escolhemos as funções na forma polinomial, na subseção

3.3.2 tratamos das funções na forma de coordenadas elípticas cilíndricas e na subseção 3.3.3 escolhemos as funções na forma de coordenadas bipolares. Assim, podemos identificar o termo de massa dependente da posição como

$$M(u, v) = \frac{m_0 J^2}{g_v^2 + f_v^2}. \quad (3.31)$$

3.3.1 Funções de transformação polinomiais

Como primeiro exemplo de funções de transformação, escolhemos um caso geral de funções na forma polinomial. Neste caso, vamos supor que

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{1}{2}a_1u^2 + \frac{1}{2}b_1v^2 + c_1uv + d_1, \\ g(u, v) &= \frac{1}{2}a_2u^2 + \frac{1}{2}b_2v^2 + c_2uv + d_2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Derivando as funções acima, temos

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{\partial f}{\partial u} = a_1u + c_1v, \\ f_v &= \frac{\partial f}{\partial v} = b_1v + c_1u, \\ g_u &= \frac{\partial g}{\partial u} = a_2u + c_2v, \\ g_v &= \frac{\partial g}{\partial v} = b_2v + c_2u. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Substituindo as equações acima na equação (3.22), obtemos

$$g_u g_v + f_u f_v = (a_2c_2 + a_1c_1) u^2 + (c_2b_2 + c_1b_1) v^2 + (a_2b_2 + c_2^2 + a_1b_1 + c_1^2) u = 0, \quad (3.34)$$

somente se

$$\begin{aligned} a_2c_2 + a_1c_1 &= 0, \\ c_2b_2 + c_1b_1 &= 0, \\ a_2b_2 + c_2^2 + a_1b_1 + c_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Uma outra maneira de se obter as soluções para as condições dadas nas equações (3.22) e (3.23), pode ser feita associando as equações (3.33) com as equações (3.26) e (3.27) de forma que

$$b_1 v + c_1 u = \pm a_2 u \pm c_2 v, \quad (3.36)$$

onde vemos facilmente que $a_2 = \pm c_1$ e $b_1 = \pm c_2$, e

$$a_1 u + c_1 v = \mp b_2 v \mp c_2 u, \quad (3.37)$$

onde $a_1 = \mp c_2$ e $b_2 = \mp c_1$. Assim, podemos ver que eliminamos quatro constantes arbitrárias das funções de transformação polinomiais de forma que ficamos com

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \mp \frac{1}{2} c_2 u^2 \pm \frac{1}{2} c_2 v^2 + c_1 u v + d_1, \\ g(u, v) &= \pm \frac{1}{2} c_1 u^2 \mp \frac{1}{2} c_1 v^2 + c_2 u v + d_2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

restando quatro constantes arbitrárias no modelo. Neste caso temos

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{\partial f}{\partial u} = \mp c_2 u + c_1 v, \\ f_v &= \frac{\partial f}{\partial v} = \pm c_2 v + c_1 u, \\ g_u &= \frac{\partial g}{\partial u} = \pm c_1 u + c_2 v, \\ g_v &= \frac{\partial g}{\partial v} = \mp c_1 v + c_2 u. \end{aligned} \quad (3.39)$$

de modo que as equações (3.22) e (3.23) podem ser reescritas como

$$f_u^2 + g_u^2 = f_v^2 + g_v^2 = (c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2), \quad (3.40)$$

e

$$g_u g_v + f_u f_v = (c_2 u + c_1 v)(c_1 u - c_2 v) + (c_2 u + c_1 v)(-c_1 u + c_2 v) = 0. \quad (3.41)$$

Ainda no laplaciano dado na equação (3.21) vemos que o jacobiano é escrito como

$$\begin{aligned} J &= f_u g_v - g_u f_v = (c_2 u + c_1 v)(c_1 v + c_2 u) - (-c_1 u + c_2 v)(-c_2 v + c_1 u) = \\ &= (c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Já o termo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{J} \left[g_v \partial_u \left(\frac{g_v}{J} \right) - g_u \partial_v \left(\frac{g_v}{J} \right) + f_v \partial_u \left(\frac{f_v}{J} \right) - f_u \partial_v \left(\frac{f_v}{J} \right) \right] \partial_u = \\ &= \frac{1}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)} \left\{ -\frac{(c_2 u + c_1 v) [2c_1 u v + c_2 (u^2 - v^2)]}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(c_1 u - c_2 v) [c_1 (u^2 - v^2) - 2c_2 u v]}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)^2} - \frac{(c_1 u - c_2 v) [c_1 (u^2 - v^2) - 2c_2 u v]}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(c_2u + c_1v) [2c_1uv + c_2(u^2 - v^2)]}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)} \Big\} \partial_u = 0, \quad (3.43)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \left[g_u \partial_v \left(\frac{g_u}{J} \right) - g_v \partial_u \left(\frac{g_u}{J} \right) + f_u \partial_v \left(\frac{f_u}{J} \right) - f_v \partial_u \left(\frac{f_u}{J} \right) \right] \partial_v = \\ &= \frac{1}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)} \left\{ - \frac{(c_1u - c_2v) [2c_1uv + c_2(u^2 - v^2)]}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)^2} + \right. \\ & - \frac{(c_1v + c_2u) [c_1(u^2 - v^2) - 2c_2uv]}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)^2} + \frac{(c_2u + c_1v) [-2c_2uv + c_1(u^2 - v^2)]}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)^2} + \\ & \left. + \frac{(c_1u - c_2v) [c_2(u^2 - v^2) + 2c_1uv]}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)} \right\} \partial_v = 0. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Portanto, ficamos com o laplaciano

$$\nabla_{uv}^2 = \frac{1}{J^2} [(g_u^2 + f_v^2) \partial_u^2 + (g_v^2 + f_u^2) \partial_v^2] = \frac{1}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)} (\partial_u^2 + \partial_v^2), \quad (3.45)$$

sendo então a massa $M(u, v) = m_0 (u^2 + v^2) (c_1^2 + c_2^2)$. Neste caso, ficamos com o potencial anisotrópico na forma

$$V(u, v) = \frac{1}{2} m_0 \left[\left(\frac{1}{2} c_2 u^2 - \frac{1}{2} c_2 v^2 + c_1 u v + d_1 \right)^2 \omega_1^2 + \left(-\frac{1}{2} c_1 u^2 + \frac{1}{2} c_1 v^2 + c_2 u v + d_2 \right)^2 \omega_2^2 \right]. \quad (3.46)$$

e as autofunções são escritas como

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi} n! m! P_1 P_2} H_m \left[\frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} c_2 u^2 - \frac{1}{2} c_2 v^2 + c_1 u v + d_1 \right)}{P_1} \right] \times \\ & \times H_n \left[\frac{\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} c_1 u^2 + \frac{1}{2} c_1 v^2 + c_2 u v + d_2 \right)}{P_2} \right] \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{\frac{1}{2} c_2 u^2 - \frac{1}{2} c_2 v^2 + c_1 u v + d_1}{P_1} \right)^2 \right] \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{-\frac{1}{2} c_1 u^2 + \frac{1}{2} c_1 v^2 + c_2 u v + d_2}{P_2} \right)^2 \right]. \quad (3.47) \end{aligned}$$

A partir das soluções exatas mostradas acima, podemos construir os estados coerentes $SU(2)$, que neste caso podem ser escritos como

$$\Phi(u, v, \tau) = \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{\frac{L}{2}}} \sum_{K=0}^L \binom{L}{K}^{1/2} \tau^K \psi_{nm}(u, v). \quad (3.48)$$

A Figura 3.3 mostra a construção dos estados coerentes $SU(2)$. Aqui consideramos o seguinte conjunto de parâmetros: $L = 20$, $\tau = A \exp(i\phi)$, onde $\phi = \pi/2$, $A = \hbar = m_0 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 1$ e diferentes frequências ω_1 e ω_2 e números inteiros p e q . Fazendo os

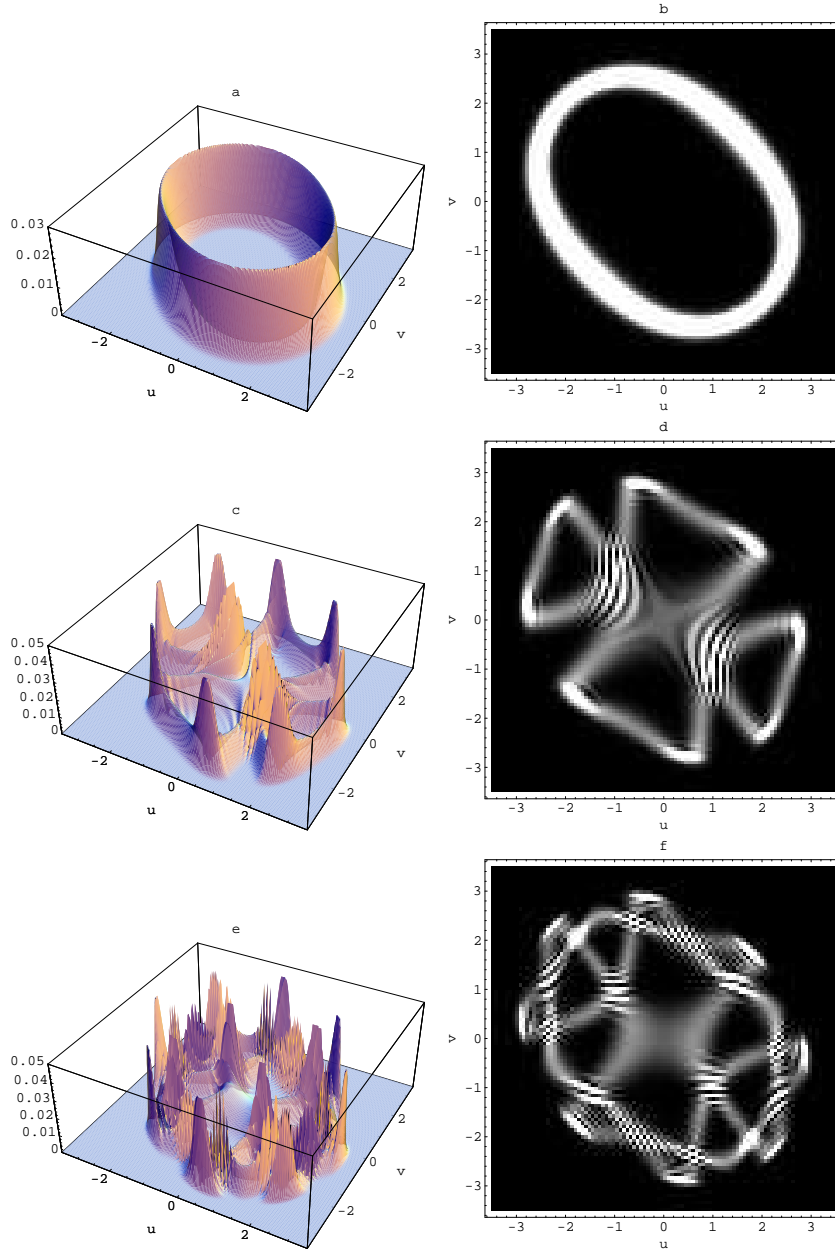


Figura 3.3: *Densidade de probabilidade para o caso de soluções polinomiais. Consideramos as seguintes frequências e números inteiros. $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 1$ em a e b, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em c e d, e $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em e e f.*

parâmetros $\omega_1 = q = \omega_2 = p = 1$ e mudando o parâmetro d_2 podemos ver a construção dos estados coerentes $SU(2)$ na Figura 3.4. Notemos que o máximo de probabilidade divide-se em duas regiões. Neste ponto é importante ressaltar que as duas regiões de maior probabilidade se afastam uma da outra à medida que o parâmetro d_2 aumenta.

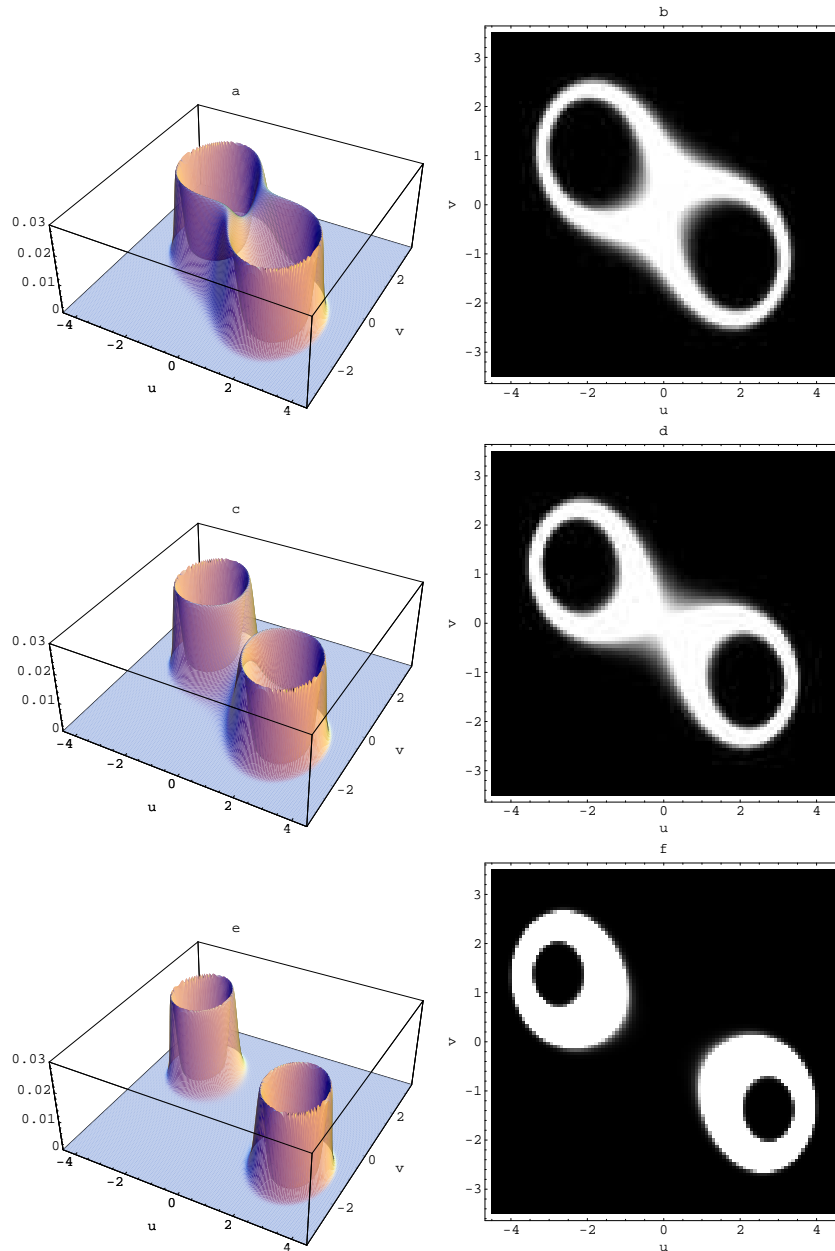


Figura 3.4: *Densidade de probabilidade para o caso de soluções polinomiais. Consideramos os seguintes parâmetros: $d_2 = 4$ em a e b, $d_2 = 5$ em c e d, e $d_2 = 7$ em e e f.*

Neste ponto, é importante salientar que se considerar na equação acima o conjunto de parâmetros $d_1 = d_2 = c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, ou ainda, $d_1 = d_2 = c_2 = 0$ e $c_1 = 1$, nos restringimos ao caso das funções de transformação em coordenadas parabólicas cilíndricas [43]. No caso de escolhermos $d_1 = d_2 = c_2 = 0$ e $c_1 = 1$, temos

$$f(u, v) = v u,$$

$$g(u, v) = \pm \frac{1}{2}(u^2 - v^2). \quad (3.49)$$

Deste modo, terminamos com o laplaciano na forma

$$\nabla_{uv}^2 = \frac{1}{J^2} [(g_v^2 + f_v^2) \partial_u^2 + (g_u^2 + f_u^2) \partial_v^2] = \frac{1}{(u^2 + v^2)} (\partial_u^2 + \partial_v^2). \quad (3.50)$$

Neste caso, ficamos com o potencial do oscilador anisotrópico, escrito como

$$V(u, v) = \frac{1}{2}m_0 \left[(v u)^2 \omega_1^2 + \frac{1}{4} (u^2 - v^2)^2 \omega_2^2 \right]. \quad (3.51)$$

e as autofunções do oscilador na forma

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi} n! m! P_1 P_2} H_m \left[\frac{\sqrt{2} v u}{P_1} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2} (u^2 - v^2)}{4P_2} \right] \times \\ &\times \exp \left[- \left(\frac{v u}{P_1} \right)^2 - \left(\frac{u^2 - v^2}{P_2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A partir das soluções determinadas acima, construímos os estados coerentes $SU(2)$ escritos na equação (3.48). A Figura 3.5 mostra os estados coerentes $SU(2)$ onde consideramos diferentes frequências ω_1 e ω_2 e números inteiros p e q .

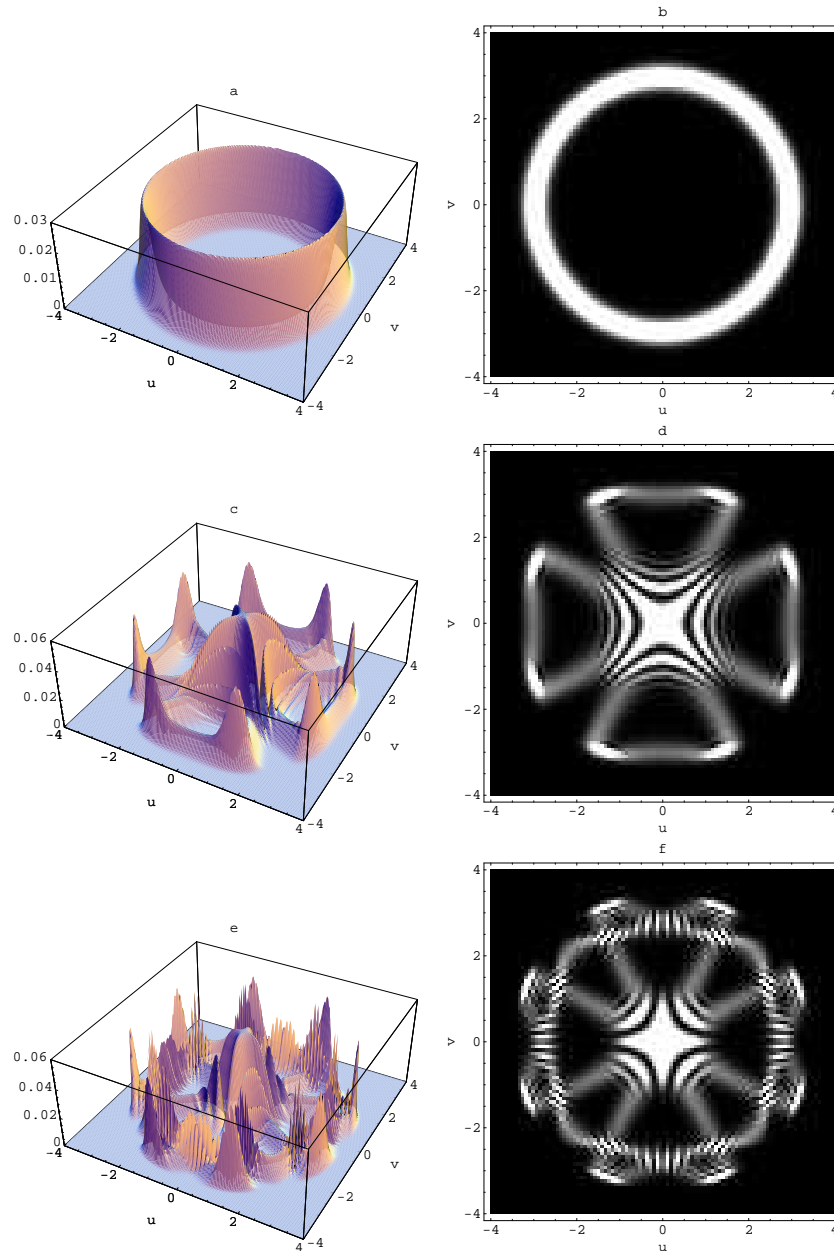


Figura 3.5: Densidade de probabilidade para o caso de soluções em coordenadas parabólicas cilíndricas. Consideramos os parâmetros $d_1 = d_2 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$ e as seguintes frequências e números inteiros. $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 1$ em a e b, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em c e d, e $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em e e f.

3.3.2 Funções de transformação em coordenadas elípticas cilíndricas

Como segundo exemplo, vamos considerar as funções de transformação em coordenadas elípticas cilíndricas [43]. Neste caso, temos

$$f(u, v) = a \operatorname{senh}(u) \operatorname{sen}(v),$$

$$g(u, v) = a \cosh(u) \cos(v). \quad (3.53)$$

Assim, vemos que

$$\begin{aligned} f_u &= a \cosh(u) \operatorname{sen}(v), \\ f_v &= a \operatorname{senh}(u) \cos(v), \\ g_u &= a \cosh(u) \cos(v), \\ g_v &= -a \cosh(u) \operatorname{sen}(v). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Substituindo as equações (3.53) e (3.54) no laplaciano dado na equação (3.21), temos

$$\begin{aligned} g_u g_v + f_u f_v &= a^2 \cos(v) \cosh(u) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u) + \\ &\quad -a^2 \cos(v) \cosh(u) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u) = 0, \end{aligned} \quad (3.55)$$

e

$$\begin{aligned} f_u^2 + g_u^2 &= f_v^2 + g_v^2 = a^2 \cosh^2(u) \operatorname{sen}^2(v) + \cos^2(v) \operatorname{senh}^2(u) = \\ &= -\frac{1}{2} a^2 [\cos(2v) - \cosh(2u)]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Já o jacobiano será expresso por

$$J = a^2 \cosh^2(u) \operatorname{sen}^2(v) - a^2 \operatorname{senh}^2(u) \cos^2(v) = \frac{1}{2} a^2 [\cos(2v) - \cosh(2u)], \quad (3.57)$$

e os termos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{J} \left[g_v \partial_u \left(\frac{g_v}{J} \right) - g_u \partial_v \left(\frac{g_v}{J} \right) + f_v \partial_u \left(\frac{f_v}{J} \right) - f_u \partial_v \left(\frac{f_v}{J} \right) \right] \partial_u = \\ &= \frac{2}{a^2 [\cos(2v) - \cosh(2u)]} \left\{ \frac{[2 + \cos(2v) + \cosh(2u)] \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{senh}(2u)}{[\cos(2v) - \cosh(2u)]^2} + \right. \\ &\quad - \frac{\cos^2(v) [-2 + \cos(2v) + \cosh(2u)] \operatorname{senh}(2u)}{[\cos(2v) - \cosh(2u)]^2} + \\ &\quad + \frac{\cos^2(v) [-2 + \cos(2v) + \cosh(2u)] \operatorname{senh}(2u)}{[\cos(2v) - \cosh(2u)]^2} + \\ &\quad \left. - \frac{[2 + \cos(2v) + \cosh(2u)] \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{senh}(2u)}{[\cos(2v) - \cosh(2u)]^2} \right\} \partial_u = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

e

$$\frac{1}{J} \left[g_u \partial_v \left(\frac{g_u}{J} \right) - g_v \partial_u \left(\frac{g_u}{J} \right) + f_u \partial_v \left(\frac{f_u}{J} \right) - f_v \partial_u \left(\frac{f_u}{J} \right) \right] \partial_v =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{a^2[\cos(2v) - \cosh(2u)]} \left\{ \frac{[2 + \cos(2v) + \cosh(2u)] \operatorname{sen}(2v) \operatorname{senh}^2(u)}{[\cos(2v) - \cosh(2u)]^2} + \right. \\
&- \left[\frac{\cosh^2(u) [-2 + \cos(2v) + \cosh(2u)] \operatorname{sen}(2v)}{[\cos(2v) - \cosh(2u)]^2} \right] + \\
&- \frac{\cosh^2(u) [-2 + \cos(2v) + \cosh(2u)] \operatorname{sen}(2v)}{[\cos(2v) - \cosh(2u)]^2} + \\
&- \left. \frac{[2 + \cos(2v) + \cosh(2u)] \operatorname{sen}(2v) \operatorname{senh}^2(u)}{[\cos(2v) - \cosh(2u)]^2} \right\} \partial_v = 0. \quad (3.59)
\end{aligned}$$

Deste modo, o laplaciano pode ser reescrito na forma

$$\nabla_{uv}^2 = \frac{1}{J^2} [(g_v^2 + f_v^2) \partial_u^2 + (g_u^2 + f_u^2) \partial_v^2] = -\frac{2}{a^2[\cos(2v) - \cosh(2u)]} (\partial_u^2 + \partial_v^2), \quad (3.60)$$

de modo que ficamos com a massa $M(u, v) = a^2[\cos(2v) - \cosh(2u)]/2m_0$. Neste caso, o potencial anisotrópico será

$$V(u, v) = \frac{1}{2} m_0 \{ [a \operatorname{senh}(u) \operatorname{sen}(v)]^2 \omega_1^2 + [a \cosh(u) \cos(v)]^2 \omega_2^2 \}. \quad (3.61)$$

e as autofunções são escritas como

$$\begin{aligned}
\psi_{nm}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi n! m! P_1 P_2}} H_m \left[\frac{\sqrt{2} [a \operatorname{senh}(u) \operatorname{sen}(v)]}{P_1} \right] \times \\
&\times H_n \left[\frac{\sqrt{2} [a \cosh(u) \cos(v)]}{P_2} \right] \exp \left\{ - \left[\frac{[a \operatorname{senh}(u) \operatorname{sen}(v)]}{P_1} \right]^2 + \right. \\
&- \left. \left[\frac{[a \cosh(u) \cos(v)]}{P_2} \right]^2 \right\}. \quad (3.62)
\end{aligned}$$

A partir das autofunções construídas acima, podemos construir os estados coerentes $SU(2)$ definidos na equação (3.48). Podemos ver os estados coerentes $SU(2)$ na Figura 3.6. Consideramos o seguinte conjunto de parâmetros: $L = 20$, $\tau = A \exp(i\phi)$, onde $\phi = \pi/2$, $\hbar = m_0 = 1$, $a = 5$ e diferentes frequências ω_1 e ω_2 e números inteiros p e q . Neste caso, notamos uma diferença nos estados coerentes $SU(2)$ em relação ao caso das funções de transformação na forma polinomial. Aqui, podemos ver uma sequência de regiões iguais na direção da variável v e, notemos também a simetria na direção da variável u que determina a maior probabilidade para cada par de frequências. Observamos que a sequência de regiões iguais ocorrem devido as funções de transformação que escolhemos serem periódicas na variável v . Vamos observar este fato novamente no próximo exemplo de funções de transformação.

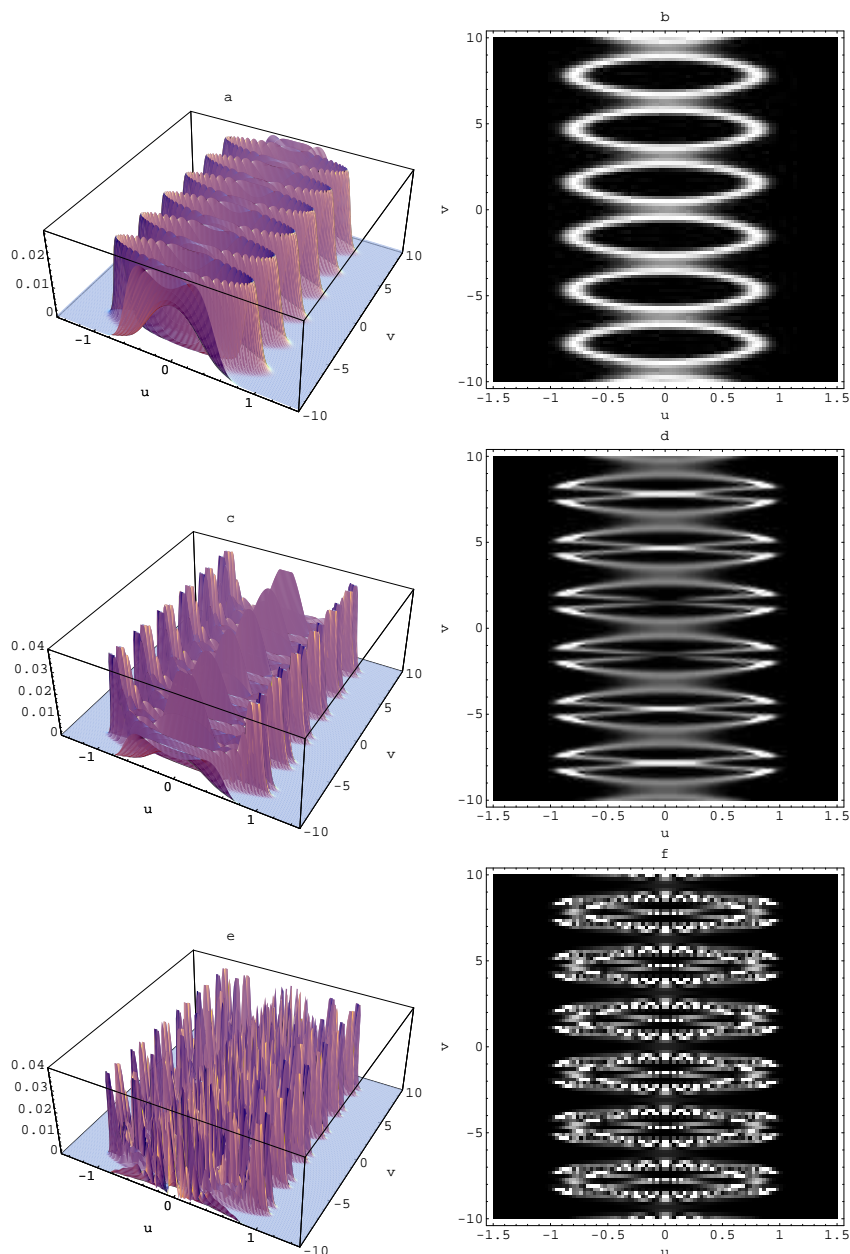


Figura 3.6: Densidade de probabilidade para o caso de soluções em coordenadas cilíndricas elípticas. Consideramos as seguintes frequências e números inteiros. $\omega_1 = p = 1$, e $\omega_2 = q = 1$ em a e b, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em c e d, e $\omega_1 = p = 2$ e $\omega_2 = q = 3$ em e e f.

3.3.3 Funções de transformação em coordenadas bipolares

Finalmente, como terceiro e último exemplo, vamos considerar as funções de transformação em coordenadas bipolares [43]. Neste caso, temos

$$f(u, v) = \frac{a \operatorname{senh}(u)}{\cosh(u) - \cos(v)},$$

$$g(u, v) = \frac{a \operatorname{sen}(v)}{\cosh(u) - \cos(v)}, \quad (3.63)$$

logo temos

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{a \cosh(u)}{\cosh(u) - \cos(v)} - \frac{a \operatorname{senh}^2(u)}{[\cosh(u) - \cos(v)]^2} = \\ &= \frac{a - a \cos(v) \cosh(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}, \\ f_v &= -\frac{a \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}, \\ g_u &= -\frac{a \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}, \\ g_v &= \frac{a \cosh(v)}{[\cosh(u) - \cos(v)]} - \frac{a \operatorname{sen}^2(v)}{[\cosh(u) - \cos(v)]^2} = \\ &= \frac{[-a + a \cos(v) \cosh(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Neste caso temos

$$\begin{aligned} g_u g_v + f_u f_v &= -\frac{a^2 [-1 + \cos(v) \cosh(u) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^4} + \\ &+ \frac{a^2 [-1 + \cos(v) \cosh(u) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^4} = 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

e

$$\begin{aligned} f_u^2 + g_u^2 &= f_v^2 + g_v^2 = \frac{a^2 [-1 + \cos(v) \cosh(u)]^2}{[\cos(v) - \cosh(u)]^4} + \frac{a^2 \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{senh}^2(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^4} = \\ &= \frac{a^2}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

O jacobiano é dado por

$$\begin{aligned} J &= \frac{-a + a \cos(v) \cosh(u)(a - a \cos(v) \cosh(u))}{[\cos(v) - \cosh(u)]^4} - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{senh}^2(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^4} = \\ &= -\frac{a^2}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

e vemos também que

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \left[g_v \partial_u \left(\frac{g_v}{J} \right) - g_u \partial_v \left(\frac{g_v}{J} \right) + f_v \partial_u \left(\frac{f_v}{J} \right) - f_u \partial_v \left(\frac{f_v}{J} \right) \right] \partial_u &= \\ = -\frac{a^2}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} \left\{ -\frac{\cos(v) \operatorname{senh}(u) [-1 + \cos(v) \cosh(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cosh(u) \operatorname{sen}^2(u) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} - \frac{\cosh(u) \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} + \\
& + \frac{\cos(v) \operatorname{senh}(u)[-1 + \cos(v) \cosh(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} \Big\} \partial_u = 0, \tag{3.68}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{J} \left[g_u \partial_v \left(\frac{g_u}{J} \right) - g_v \partial_u \left(\frac{g_u}{J} \right) + f_u \partial_v \left(\frac{f_u}{J} \right) - f_v \partial_u \left(\frac{f_u}{J} \right) \right] \partial_v = \\
& = - \frac{a^2}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} \left\{ - \frac{\cos(v) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}^2(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} + \right. \\
& - \frac{\cosh(u) \operatorname{sen}(v) [-1 + \cos(v) \cosh(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} + \frac{\cosh(u) \operatorname{sen}(v) [-1 + \cos(v) \cosh(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} + \\
& \left. + \frac{\cos(v) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}^2(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} \right\} \partial_v = 0. \tag{3.69}
\end{aligned}$$

Deste modo, terminamos com o laplaciano na forma

$$\nabla_{uv}^2 = \frac{1}{J^2} [(g_v^2 + f_v^2) \partial_u^2 + (g_u^2 + f_u^2) \partial_v^2] = \frac{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}{a^2} (\partial_u^2 + \partial_v^2), \tag{3.70}$$

de modo que a massa $M(u, v) = \frac{a^2 m_0}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}$. Neste caso, o potencial anisotrópico será

$$V(u, v) = \frac{1}{2} m_0 \left\{ \left[\frac{a \operatorname{senh}(u)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right]^2 \omega_1^2 + \left[\frac{a \operatorname{sen}(v)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right]^2 \omega_2^2 \right\}, \tag{3.71}$$

e finalizamos com as autofunções

$$\begin{aligned}
\psi_{nm}(u, v) & = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi n! m! P_1 P_2}} H_m \left[\frac{\sqrt{2}}{P_1} \left(\frac{a \operatorname{senh}(u)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right) \right] \times \\
& \times H_n \left[\frac{\sqrt{2}}{P_2} \left(\frac{a \operatorname{sen}(v)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right) \right] \exp \left\{ - \left[\frac{1}{P_1} \left(\frac{a \operatorname{senh}(u)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right) \right]^2 + \right. \\
& \left. - \left[\frac{1}{P_2} \left(\frac{a \operatorname{sen}(v)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right) \right]^2 \right\}. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

A partir das soluções exatas obtidas acima, construímos os estados coerentes $SU(2)$ definidos na equação (3.48). A Figura 3.7 mostra os estados coerentes $SU(2)$ onde consideramos os parâmetros $L = 20$, $\tau = A \exp(i\phi)$, onde $\phi = \pi/2$, $\hbar = m_0 = a = 1$ e diferentes frequências ω_1 e ω_2 e números inteiros p e q . Neste exemplo, podemos ver que a construção dos estados coerentes $SU(2)$ mostram novamente uma sequência de regiões iguais na direção da variável v para cada par de frequências e números inteiros p e q . Deste

modo, ocorreu o esperado, uma vez que as funções na forma de coordenadas bipolares também são periódicas.

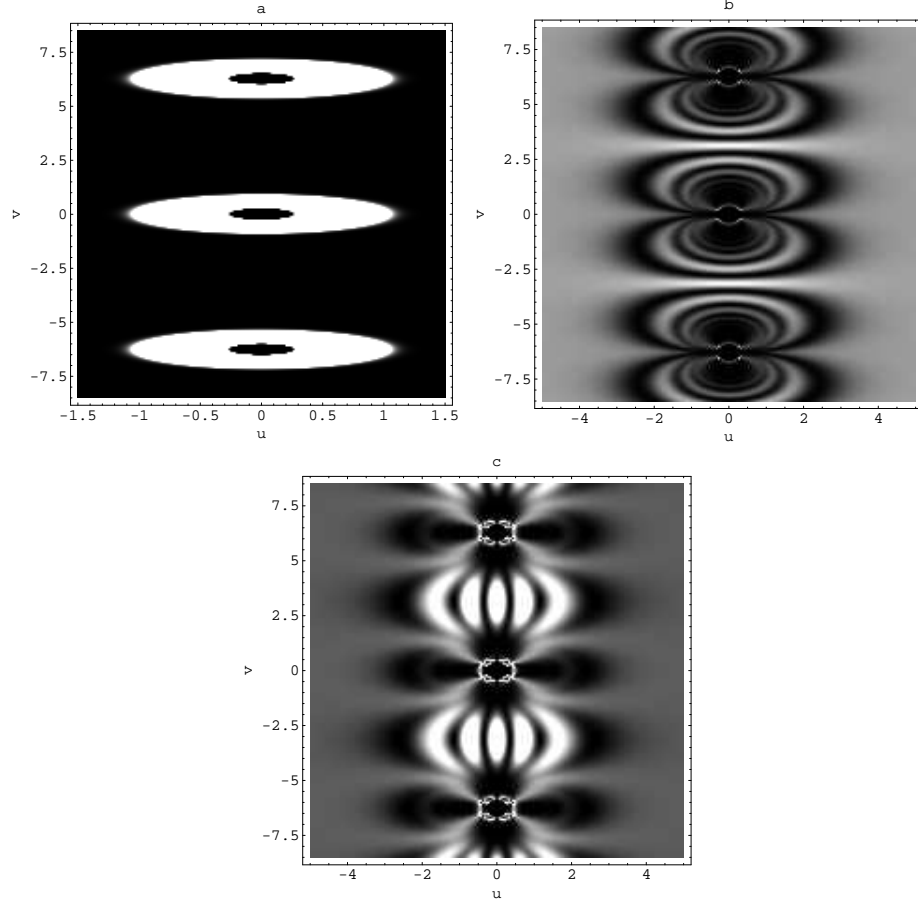


Figura 3.7: *Densidade de probabilidade para o caso de soluções em coordenadas bipolares. Consideramos as seguintes frequências e números inteiros. $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 1$ em a, $\omega_1 = p = 1$ e $\omega_2 = q = 2$ em b, e $\omega_1 = p = 2$, e $\omega_2 = q = 3$ em c.*

3.4 Campo homogêneo no calibre de Coulomb simétrico

Nesta seção vamos analisar o efeito de um campo magnético uniforme sobre o comportamento de uma partícula com massa dependente da posição delimitada por um potencial. Para isto vamos iniciar uma discussão sobre este problema em geral com massa constante e em seguida considerar o caso particular de um campo magnético uniforme no calibre de Coulomb. Nesta situação a hamiltoniana clássica é dada por [44]

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2 m_0} \left(\vec{p} - e \vec{A} \right)^2 + V(x, y) = \\
 &= \frac{1}{2 m_0} \vec{p}^2 - \frac{e}{2 m_0} \left(\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A} \right) + \frac{e^2}{2 m_0} \vec{A}^2 + V(x, y), \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

onde e é a carga elétrica, m_0 é a massa constante e $\vec{A}(x, y)$ é o potencial vetor. Recorrendo ao procedimento de quantização usual, sabemos que o operador $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$. Neste caso, vemos que o termo de energia cinética será dado por $\vec{p}^2 = -\hbar^2 \nabla_{x,y}^2 \psi$. Já para o termo linear em \vec{p} temos

$$\begin{aligned} (\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) \psi &= \frac{\hbar}{i} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \psi) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \psi) \right] = \\ &= \frac{\hbar}{i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + 2 \vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \psi. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Escolhemos trabalhar com o calibre de Coulomb em que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Neste caso ficamos com

$$(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) \psi = \frac{2 \hbar}{i} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi. \quad (3.75)$$

Agora, supomos que temos um campo magnético uniforme na direção de z , sendo ele expresso na forma, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, que pode ser obtido a partir do potencial vetor no chamado calibre simétrico na forma [45]

$$\vec{A} = \frac{B_0}{2} (-y \hat{i} + x \hat{j}), \quad (3.76)$$

e

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\hbar}{i} [B_0 (-y \hat{i} + x \hat{j})] \cdot \vec{\nabla} = -i \hbar B_0 (x \partial_y - y \partial_x). \quad (3.77)$$

Assim, podemos concluir que partindo da hamiltoniana clássica definida na equação (3.73) e usando o processo de quantização usual chegamos à equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2 m_0} \nabla^2 \psi + \frac{i \hbar B_0 e}{2 m_0} (x \partial_y - y \partial_x) \psi + \left[\frac{e^2 B_0^2}{8 m_0} (x^2 + y^2) + V(x, y) \right] \psi = E \psi. \quad (3.78)$$

Aqui, vamos nos restringir ao caso do potencial do oscilador anisotrópico a fim de determinar as soluções exatas da equação diferencial. Neste caso a equação diferencial acima será reescrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2 m_0} \nabla^2 \psi + \frac{i \hbar B_0 e}{2 m_0} (x \partial_y - y \partial_x) \psi + \left[\frac{e^2 B_0^2}{8 m_0} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m_0 (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) \right] \psi = E \psi, \quad (3.79)$$

onde ω_1 e ω_2 são as frequências do oscilador. A seguir vamos analisar um possível caminho que pode ser seguido para desacoplar a equação diferencial acima e determinar as soluções exatas. Neste caso, vamos permanecer no sistema de coordenadas cartesianas e realizar uma transformação de variáveis via rotação dependente do tempo [46]. Em seguida, vamos fazer uma mudança nas variáveis espaciais e usar as funções de transformação discutidas

na seção anterior.

3.4.1 Estados coerentes $SU(2)$ para a partícula com massa constante

Na busca pelas soluções exatas da equação de Schrödinger na equação (3.79), no caso de manter as variáveis espaciais x e y , notemos que fazendo a redefinição das autofunções na forma

$$\sigma = \exp[-(i/\hbar)Et] \psi(x, y), \quad (3.80)$$

podemos trabalhar com a correspondente equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2 m_0} \nabla^2 \sigma + \frac{i \hbar B_0 e}{2 m_0} (x \partial_y - y \partial_x) \sigma + \\ & + \left[\frac{e^2 B_0^2}{8 m_0} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m_0 (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) \right] \sigma = i \hbar \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Um procedimento que pode ser usado para desacoplar a equação (3.81) via transformação de variáveis [46], consiste em nos restringir ao problema do oscilador isotrópico em que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ e, escrever a matriz de rotação dependente do tempo na forma

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) & \sen\alpha(t) \\ -\sen\alpha(t) & \cos\alpha(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

obtendo as variáveis espaciais transformadas na forma

$$X_1 = \cos\alpha(t) x + \sen\alpha(t) y, \quad (3.83)$$

e

$$Y_1 = -\sen\alpha(t) x + \cos\alpha(t) y. \quad (3.84)$$

Com $t = T$. Como consequência vemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\alpha(t) \frac{\partial}{\partial X_1} - \sen\alpha(t) \frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sen\alpha(t) \frac{\partial}{\partial X_1} + \cos\alpha(t) \frac{\partial}{\partial Y_1}. \quad (3.86)$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) & -\sen\alpha(t) \\ \sen\alpha(t) & \cos\alpha(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

que nos leva a variáveis espaciais na forma

$$x = \cos\alpha(t) X_1 - \operatorname{sen}\alpha(t) Y_1, \quad (3.88)$$

e

$$y = \operatorname{sen}\alpha(t) X_1 + \cos\alpha(t) Y_1. \quad (3.89)$$

Para as equações (3.88) e (3.89), temos que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= [\cos\alpha(t)X_1 - \operatorname{sen}\alpha(t)Y_1]^2 + [\operatorname{sen}\alpha(t)X_1 + \cos\alpha(t)Y_1]^2 = \\ &= X_1^2 + Y_1^2. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Assim, podemos ver que a equação (3.90) é covariante sob estas rotações dependentes do tempo, ou seja, não muda a forma da operação mostrada acima. Já o operador momento linear em relação ao eixo x , será

$$p_x = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\hbar}{i} \left(\cos\alpha(t) \frac{\partial}{\partial X_1} - \operatorname{sen}\alpha(t) \frac{\partial}{\partial Y_1} \right),$$

e o operador momento linear em relação ao eixo y

$$p_y = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\hbar}{i} \left(\operatorname{sen}\alpha(t) \frac{\partial}{\partial X_1} + \cos\alpha(t) \frac{\partial}{\partial Y_1} \right), \quad (3.91)$$

assim, obtemos o quadrado do operador momento linear como

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 &= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \left[\left(\cos\alpha(t) \frac{\partial}{\partial X_1} - \operatorname{sen}\alpha(t) \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^2 + \left(\operatorname{sen}\alpha(t) \frac{\partial}{\partial X_1} + \cos\alpha(t) \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^2 \right] = \\ &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} \right). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Podemos ver que para o operador momento linear também temos uma expressão covariante

$$p_x^2 + p_y^2 = P_x^2 + P_y^2 = \nabla^2. \quad (3.93)$$

Logo, a partir das equações (3.85) e (3.87), temos

$$x \frac{\partial}{\partial y} = \cos^2\alpha(t) X_1 \frac{\partial}{\partial Y_1} - \operatorname{sen}^2\alpha(t) Y_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \operatorname{sen}\alpha(t) \frac{\partial}{\partial X_1} \cos\alpha(t) X_1 - \cos\alpha(t) \frac{\partial}{\partial Y_1} \operatorname{sen}\alpha(t) Y_1, \quad (3.94)$$

e a partir das equações (3.86) e (3.88), temos

$$y \frac{\partial}{\partial x} = \text{sen}\alpha(t) X_1 \text{cos}\alpha(t) \frac{\partial}{\partial X_1} - \text{sen}^2\alpha(t) X_1 \frac{\partial}{\partial Y_1} + \text{cos}^2\alpha(t) Y_1 \frac{\partial}{\partial X_1} - \text{cos}\alpha(t) Y_1 \text{sen}\alpha(t) \frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (3.95)$$

Assim, pode ser verificado que

$$x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = X_1 \frac{\partial}{\partial Y_1} - Y_1 \frac{\partial}{\partial X_1}. \quad (3.96)$$

Portanto, podemos observar que o operador acima também é covariante. Como a rotação é dependente do tempo, ainda temos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial X_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y_1}. \quad (3.97)$$

Derivando as equações (3.83) e (3.84) e substituindo-as na equação (3.97), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + [-\dot{\alpha} \text{sen}\alpha(t)x + \dot{\alpha} \text{cos}\alpha(t)y] \frac{\partial}{\partial X_1} + [-\dot{\alpha} \text{cos}\alpha(t)x - \dot{\alpha} \text{sen}\alpha(t)y] \frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (3.98)$$

ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} + \dot{\alpha} \left(Y_1 \frac{\partial}{\partial X_1} - X_1 \frac{\partial}{\partial Y_1} \right) = \frac{\partial}{\partial T} - \dot{\alpha} \left(X_1 \frac{\partial}{\partial Y_1} - Y_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \right), \quad (3.99)$$

Portanto, voltando à equação de Schrödinger original (3.81) onde fizemos $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ e substituindo as equações (3.90), (3.93), (3.96) e (3.99), obtemos

$$\begin{aligned} & - \frac{\hbar^2}{2 m_0} \nabla^2 \sigma + \frac{i \hbar B_0 e}{2 m_0} \left(X_1 \frac{\partial}{\partial Y_1} - Y_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \right) \sigma + \left[\left(\frac{e^2 B_0^2}{8 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \right) (X_1^2 + Y_1^2) \right] \sigma = \\ & = i \hbar \frac{\partial \sigma}{\partial T} - i \hbar \dot{\alpha} \left(X_1 \frac{\partial}{\partial Y_1} - Y_1 \frac{\partial}{\partial X_1} \right) \sigma. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Agora, definindo $\alpha(t)$, de forma a anular o termo cruzado das coordenadas, temos

$$\frac{i \hbar e B_0}{2 m_0} = -i \hbar \dot{\alpha}, \quad (3.101)$$

onde vemos que

$$\dot{\alpha} = -\frac{e B_0}{2 m_0}, \quad (3.102)$$

integrando a equação acima, temos

$$\alpha(T) = -\frac{e B_0}{2 m_0} T + c, \quad (3.103)$$

onde c é uma constante arbitrária de integração. Assim, somos levados à equação de um oscilador isotrópico bidimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\sigma + \left[\left(\frac{e^2 B_0^2}{8m_0} + \frac{1}{2}m_0\omega^2 \right) (X_1^2 + Y_1^2) \right] \sigma = i\hbar \frac{\partial\sigma}{\partial T}. \quad (3.104)$$

Então, o espectro de energia do modelo é escrito como

$$E_{n,m} = \hbar \sqrt{\frac{e^2 B_0^2}{4m_0^2} + \omega^2} (n+m+1). \quad (3.105)$$

Recorrendo a separação de variáveis usual como

$$\sigma(X_1, Y_1, T) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E T\right) \chi(X_1, Y_1), \quad (3.106)$$

temos que a equação diferencial acima reescrita na forma

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\nabla^2\chi) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E T\right) + \left[\left(\frac{e^2 B_0^2}{8m_0} + \frac{1}{2}m_0\omega^2 \right) (X_1^2 + Y_1^2) \right] \chi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E T\right) = \\ & = i\hbar\chi \left(-\frac{i}{\hbar} E T\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E T\right), \end{aligned} \quad (3.107)$$

de modo que a equação acima pode ser expressa para os estados estacionários como

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\chi + \left[\left(\frac{e^2 B_0^2}{8m_0} + \frac{1}{2}m_0\omega^2 \right) (X_1^2 + Y_1^2) \right] \chi = E\chi, \quad (3.108)$$

onde $\chi = \chi(X_1, Y_1)$. Usando a separação de variáveis usual, obtemos as autofunções

$$\begin{aligned} \chi(X_1, Y_1) &= \phi(X_1)\psi(Y_1) = \phi[\cos(\alpha)x + \text{sen}(\alpha)y] \psi[-\text{sen}(\alpha)x + \cos(\alpha)y] = \\ &= \frac{1}{R\sqrt{2^{m+n-1}\pi} n! m!} H_m\left(\frac{\sqrt{2}[\cos(\alpha)x + \text{sen}(\alpha)y]}{R}\right) \times \\ &\quad \times H_n\left(\frac{\sqrt{2}[-\text{sen}(\alpha)x + \cos(\alpha)y]}{R}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left[-\left(\frac{\cos(\alpha)x + \text{sen}(\alpha)y}{R}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{-\text{sen}(\alpha)x + \cos(\alpha)y}{R}\right)^2\right], \end{aligned} \quad (3.109)$$

onde o parâmetro α está definido na equação (3.103) e $R = \sqrt{2\hbar/(m_0 \omega)}$. Conhecidas as autofunções podemos construir os estados coerentes $SU(2)$ definidos na equação (3.48) que neste caso será reescrita como segue

$$\Phi(x, y, \tau) = \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{\frac{L}{2}}} \sum_{K=0}^L \binom{L}{K}^{1/2} \tau^K \phi[\cos(\alpha)x + \text{sen}(\alpha)y] \times \psi[-\text{sen}(\alpha)x + \cos(\alpha)y]. \quad (3.110)$$

A Figura 3.8 mostra a densidade de probabilidade onde consideramos $L = 20$ e o conjunto de parâmetros: $\tau = A \exp(i\phi)$, onde $\phi = \pi/2$, $A = \hbar = m_0 = B_0 = e = \omega_1 = \omega_2 = p = q = c = 1$ e $T = \pi/4$. Neste caso, ressaltamos que considerando diferentes valores para o parâmetro T a densidade de probabilidade se mantém a forma circular. Isto significa que, apesar de termos um pacote de ondas estacionário, o comportamento da trajetória da partícula não depende do tempo. Podemos verificar este fato, diferenciando as equações

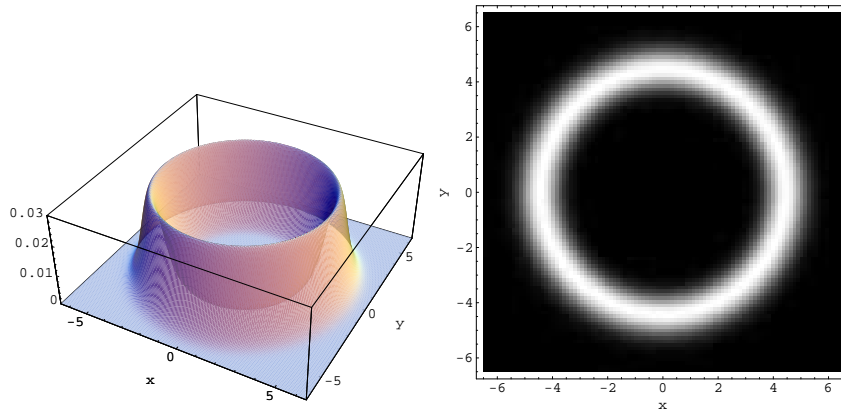


Figura 3.8: Densidade de probabilidade com $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$. Notemos que o máximo de probabilidade continua apresentando a forma de uma circunferência.

(3.88) e (3.89) de forma que temos

$$dx = \cos(\alpha) dX_1 - \text{sen}(\alpha) dY_1, \quad (3.111)$$

$$dy = \text{sen}(\alpha) dX_1 + \cos(\alpha) dY_1. \quad (3.112)$$

Na notação matricial temos

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dX_1 \\ dY_1 \end{pmatrix}, \quad (3.113)$$

onde a matriz jacobiana de transformação é

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.114)$$

O determinante da matriz jacobiana é $[J] = 1$. Notemos que o determinante do jacobiano não depende do tempo. Neste caso, podemos ver que a transformação de uma região no plano xy para outra região no plano X_1Y_1 pode ser representada como sendo a integral de uma função $f(x, y)$ relacionada a integral de uma função $f(X_1, Y_1)$ na seguinte forma

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \int [J] f(X_1, Y_1) dX_1 dY_1 \quad (3.115)$$

de modo que

$$\int \int f(x, y) dx dy = \int \int f(X_1, Y_1) dX_1 dY_1. \quad (3.116)$$

Assim, concluímos que os estados coerentes $SU(2)$ também são independentes do tempo, apesar das autofunções $\chi(X_1, Y_1)$ serem dependentes do tempo.

3.4.2 Transformação nas variáveis espaciais e massa dependente da posição

No caso de escolhermos fazer uma mudança nas variáveis espaciais, na forma $x = f(u, v)$ e $y = g(u, v)$, já vimos na seção (3.3) o efeito da mudança sobre o operador quântico correspondente ao termo de energia cinética da hamiltoniana. Entretanto, agora precisamos discutir a quantização do termo linear em \vec{p} . Fazendo a mudança de variáveis a equação de Schrödinger será escrita na forma vetorial como

$$-\frac{\hbar^2}{2M(u, v)} \nabla_{uv}^2 \psi + \left[\frac{i\hbar e}{2M(u, v)} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{\vec{A}^2 e^2}{2M(u, v)} + V(u, v) \right] \psi = E\psi, \quad (3.117)$$

onde escolhemos o potencial original na forma de um oscilador escrito como

$$V(u, v) = \frac{1}{2} m_0^2 \omega^2 [f(u, v)^2 + g(u, v)^2] - \frac{e^2 \vec{A}^2}{2M(u, v)}. \quad (3.118)$$

Neste ponto é importante ressaltar que o termo de diferença no potencial original é dado a fim de eliminá-lo na equação diferencial uma vez que queremos recuperar as soluções exatas do problema com massa constante. Na seção anterior vimos que em coordenadas

cartesianas o operador $\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = -i\hbar B_0 (x \partial_y - y \partial_x)$. Agora temos

$$\begin{aligned} x \partial_y - y \partial_x &= f(u, v) \left(-\frac{1}{J} f_v \partial_u + \frac{1}{J} f_u \partial_v \right) - g(u, v) \left(\frac{1}{J} g_v \partial_u - \frac{1}{J} g_u \partial_v \right) = \\ &= \frac{1}{J} \{ [f(u, v) f_u + g(u, v) g_u] \partial_v + \\ &\quad - [f(u, v) f_v + g(u, v) g_v] \partial_u \}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Assim a equação de Schrödinger pode ser escrita nas variáveis espaciais u e v na forma

$$\begin{aligned} - \frac{\hbar^2}{2M(u, v)} \nabla_{uv}^2 \psi + \frac{i\hbar B_0 e}{2M(u, v)} [S(u, v) \partial_v - R(u, v) \partial_u] \psi + \\ + \left\{ \frac{1}{2} m_0^2 \Omega^2 [f(u, v)^2 + g(u, v)^2] \right\} \psi = E\psi, \end{aligned} \quad (3.120)$$

onde $\Omega^2 = \omega^2 + \frac{e^2 B_0^2}{4m_0}$. Aqui vemos que o potencial vetor é escrito como

$$\vec{A} = \frac{B_0}{2} [-R(u, v)\hat{i} + S(u, v)\hat{j}]. \quad (3.121)$$

Neste caso, as soluções exatas podem ser escritas a partir da equação (3.109) nas variáveis u e v de forma que ficamos com

$$\begin{aligned} \psi_{nm}(u, v) &= \frac{1}{R\sqrt{2^{m+n-1}\pi n! m!}} H_m \left[\frac{\sqrt{2} [\cos(\alpha) f(u, v) + \text{sen}(\alpha) g(u, v)]}{R} \right] \times \\ &\times H_n \left[\frac{\sqrt{2} [-\text{sen}(\alpha) f(u, v) + \cos(\alpha) g(u, v)]}{R} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ - \left[\frac{f(u, v)}{R} \right]^2 - \left[\frac{g(u, v)}{R} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

O divergente do potencial vetor é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{B_0}{2} \left[\frac{-\partial R(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} \right] = 0, \quad (3.123)$$

o módulo do potencial vetor é

$$|\vec{A}| = \frac{B_0}{2} \sqrt{R(u, v)^2 + S(u, v)^2}, \quad (3.124)$$

e o campo magnético é calculado da seguinte forma

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{B_0 R}{2} & \frac{B_0 S}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{B_0}{2} \frac{\partial S}{\partial w} \vec{i} + \frac{B_0}{2} \frac{\partial R}{\partial w} \vec{j} + \frac{B_0}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial v} \right) \vec{k}. \quad (3.125)$$

A seguir vamos considerar os três exemplos de funções de transformação nas variáveis espaciais u e v que foram analisados no problema sem a presença do campo magnético uniforme. Assim, podemos construir os estados coerentes $SU(2)$, analisando deste modo o limite clássico.

Funções de transformação polinomiais

Como primeiro exemplo vamos supor as funções de transformação na forma polinomial escritas na equação (3.38) sendo elas definidas como: $f(u, v) = \mp \frac{1}{2} c_2 u^2 \pm \frac{1}{2} c_2 v^2 + c_1 u v + d_1$ e $g(u, v) = \pm \frac{1}{2} c_1 u^2 \mp \frac{1}{2} c_1 v^2 + c_2 u v + d_2$. Neste caso, obtivemos o laplaciano sem a presença de um campo magnético uniforme escrito na equação (3.45), sendo ele dado por $\nabla_{uv}^2 = \frac{1}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)} (\partial_u^2 + \partial_v^2)$. Já o termo de campo magnético será escrito na forma

$$\begin{aligned} x \partial_y - y \partial_x &= \frac{1}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)} \left\{ \left[\frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) u^3 + \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) u v^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (c_2 d_1 - c_1 d_2) u + (c_1 d_1 + c_2 d_2) v \right] \partial_v - \left[\frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) v^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) u^2 v + (c_1 d_1 + c_2 d_2) u + (c_1 d_2 - c_2 d_1) v \right] \partial_u \right\} = \\ &= \frac{1}{(c_1^2 + c_2^2)(u^2 + v^2)} \left\{ \left[\frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) (u^3 + u v^2) + (c_2 d_1 - c_1 d_2) u + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (c_1 d_1 + c_2 d_2) v \right] \partial_v - \left[\frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) (v^3 + u^2 v) + (c_1 d_1 + c_2 d_2) u + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (c_1 d_2 - c_2 d_1) v \right] \partial_u \right\}. \quad (3.126) \end{aligned}$$

Deste modo, vemos que

$$\begin{aligned} M(u, v) &= m_0 (c_1^2 + c_2^2) (u^2 + v^2), \\ R(u, v) &= -\frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) (v^3 + u^2 v) - (c_1 d_1 + c_2 d_2) u - (c_1 d_2 - c_2 d_1) v, \\ S(u, v) &= \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) (u^3 + u v^2) + (c_2 d_1 - c_1 d_2) u + (c_1 d_1 + c_2 d_2) v. \quad (3.127) \end{aligned}$$

Neste caso, o divergente do potencial vetor é

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{B_0}{2} [-u v (c_1^2 + c_2^2) - (c_1 d_1 + c_2 d_2) + \\ &\quad + u v (c_1^2 + c_2^2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2)] = 0, \end{aligned} \quad (3.128)$$

o módulo do potencial vetor é

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \frac{B_0}{2} \left\{ \frac{1}{4} (c_1^2 + c_2^2) [(u^3 + u v^2)^2 + (v^3 + u^2 v)^2] + \right. \\ &\quad + (c_1^2 + c_2^2) u [(c_1 d_1 + c_2 d_2) (v^3 + u^2 v) + (c_2 d_1 - c_1 d_2) (u^3 + u v^2)] + \\ &\quad + (c_1^2 + c_2^2) v [(c_1 d_2 + c_2 d_1) (v^3 + u^2 v) + (c_1 d_1 - c_2 d_2) (u^3 + u v^2)] + \\ &\quad + [(c_1 d_2 + c_2 d_1)^2 + (c_2 d_1 - c_1 d_2)^2] u^2 + \\ &\quad \left. + [(c_1 d_2 + c_2 d_1)^2 + (c_1 d_1 - c_2 d_2)^2] v^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.129)$$

e para o o campo magnético temos

$$\frac{\partial S}{\partial w} = \frac{\partial R}{\partial w} = 0, \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) (3u^2 + v^2) + (c_2 d_1 - c_1 d_2), \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial R}{\partial v} = -\frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) (3v^2 + u^2) - (d_2 c_1 - c_2 d_1), \quad (3.132)$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{B_0}{2} \left[\frac{(c_1^2 + c_2^2) (3u^2 + v^2) + (c_1^2 + c_2^2) (3v^2 + u^2)}{2} \right] \vec{k} = \\ &= B_0 (c_1^2 + c_2^2) (u^2 + v^2) \vec{k}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Neste caso, vemos ainda que o potencial é escrito como

$$\begin{aligned} V(u, v) &= \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \left[\left(\frac{1}{2} c_2 u^2 - \frac{1}{2} c_2 v^2 + c_1 u v + d_1 \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} c_1 u^2 + \frac{1}{2} c_1 v^2 + c_2 u v + d_2 \right)^2 \right] + \\ &\quad - \frac{e^2 B_0 F}{4m_0 (c_1^2 + c_2^2) (u^2 + v^2)}, \end{aligned} \quad (3.134)$$

onde

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \frac{1}{4} (c_1^2 + c_2^2) [(u^3 + u v^2)^2 + (v^3 + u^2 v)^2] + \right. \\ &\quad \left. + (c_1^2 + c_2^2) u [(c_1 d_1 + c_2 d_2) (v^3 + u^2 v) + (c_2 d_1 - c_1 d_2) (u^3 + u v^2)] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (c_1^2 + c_2^2) v [(c_1 d_2 + c_2 d_1) (v^3 + u^2 v) + (c_1 d_1 - c_2 d_2) (u^3 + u v^2)] + \\
& + [(c_1 d_2 + c_2 d_1)^2 + (c_2 d_1 - c_1 d_2)^2] u^2 + \\
& + [(c_1 d_2 + c_2 d_1)^2 + (c_1 d_1 - c_2 d_2)^2] v^2 \}^{1/2}. \tag{3.135}
\end{aligned}$$

Escolhendo as funções de transformação na forma polinomial, podemos escrever as autofunções na forma

$$\begin{aligned}
\psi_{nm}(u, v) = & \frac{1}{R\sqrt{2^{m+n-1}\pi n! m!}} \times \\
& \times H_m \left\{ \frac{\sqrt{2} [\cos(\alpha) (\frac{1}{2}c_2u^2 - \frac{1}{2}c_2v^2 + c_1uv + d_1)]}{R} + \right. \\
& \left. + \frac{\text{sen}(\alpha) (-\frac{1}{2}c_1u^2 + \frac{1}{2}c_1v^2 + c_2uv + d_2)]}{R} \right\} \times \\
& \times H_m \left\{ \frac{\sqrt{2} [-\text{sen}(\alpha) (\frac{1}{2}c_2u^2 - \frac{1}{2}c_2v^2 + c_1uv + d_1)]}{R} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos(\alpha) (-\frac{1}{2}c_1u^2 + \frac{1}{2}c_1v^2 + c_2uv + d_2)]}{R} \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ - \left[\frac{(\frac{1}{2}c_2u^2 - \frac{1}{2}c_2v^2 + c_1uv + d_1)}{R} \right]^2 + \right. \\
& \left. - \left[\frac{(-\frac{1}{2}c_1u^2 + \frac{1}{2}c_1v^2 + c_2uv + d_2)}{R} \right]^2 \right\}, \tag{3.136}
\end{aligned}$$

onde $\alpha(T) = -\frac{eB_0}{2m_0}T + c$, conforme vimos na seção anterior. A partir das soluções exatas mostradas acima, podemos construir os estados coerentes $SU(2)$ definidos na equação (3.48), escritos como $\Phi(u, v, \tau) = \frac{1}{(1+|\tau|^2)^{\frac{L}{2}}} \sum_{K=0}^L \binom{L}{K}^{1/2} \tau^K \psi_{nm}(u, v)$. A Figura 3.9 mostra a construção dos estados coerentes $SU(2)$. Aqui consideramos o seguinte conjunto de parâmetros: consideramos $L = 20$ e o conjunto de parâmetros: $\tau = A \exp(i\phi)$, onde $\phi = \pi/2$, $A = \hbar = m_0 = B_0 = e = \omega_1 = \omega_2 = p = q = c = c_1 = c_2 = d_1 = 1$, $T = \pi/4$ diferentes valores para d_2 . Notemos que mudando o parâmetro d_2 o máximo de probabilidade divide-se em duas regiões. Salientamos que estas regiões afastam-se cada vez mais uma da outra a medida que o parâmetro d_2 aumenta. Neste ponto é importante ressaltar que para diferentes valores do parâmetro T a forma dos estados coerentes $SU(2)$ não muda ocorrendo o esperado conforme discutimos na subseção 3.4.1. Este fato também ocorre nos próximos exemplos de funções de transformação que vamos considerar.

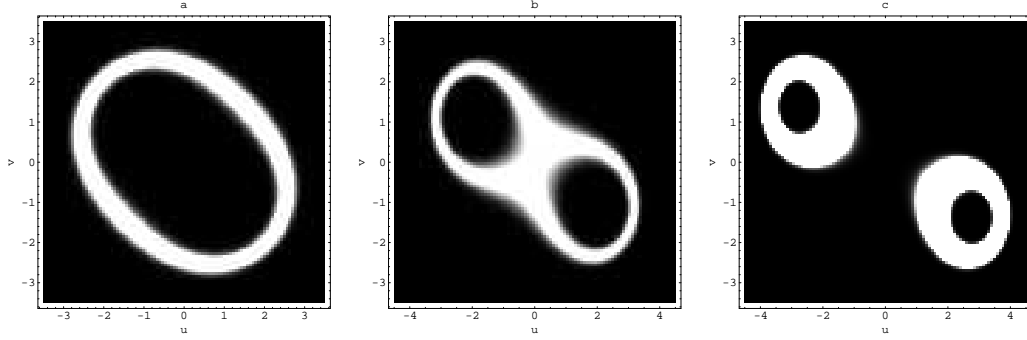


Figura 3.9: *Densidade de probabilidade para o caso de soluções polinomiais. Consideramos os seguintes parâmetros: $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$, $d_2 = 1$ em a, $d_2 = 4$ em b e $d_2 = 7$ em c.*

Usando os parâmetros $d_1 = d_2 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$, nos restringimos ao caso das coordenadas parabólicas cilíndricas. Neste caso, temos

$$M(u, v) = m_0(u^2 + v^2), \quad (3.137)$$

$$R(u, v) = -\frac{1}{2}v (u^2 + v^2), \quad (3.138)$$

e

$$S(u, v) = \frac{1}{2}u (u^2 + v^2). \quad (3.139)$$

O divergente do potencial vetor é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{B_0}{2} (-u v + u v) = 0, \quad (3.140)$$

o módulo do potencial vetor é

$$|\vec{A}| = \frac{B_0}{4} \sqrt{u^2(u^2 + v^2)^2 + v^2(u^2 + v^2)^2}, \quad (3.141)$$

e o campo magnético é dado por

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{B_0}{2} \left[\frac{1}{2}(3u^2 + v^2) + \frac{1}{2}(u^2 + 3v^2) \right] \vec{k} = (u^2 + v^2) \vec{k}. \quad (3.142)$$

Aqui, determinamos o potencial do oscilador escrito como

$$V(u, v) = \frac{1}{2}m_0\omega \left[(v u)^2 + \frac{1}{4}(u^2 - v^2)^2 \right] + \frac{e^2 B_0 \sqrt{u^2(u^2 + v^2)^2 + v^2(u^2 + v^2)^2}}{8(u^2 + v^2)}, \quad (3.143)$$

e vemos que as autofunções são escritas como

$$\begin{aligned}
\psi_{nm}(u, v) = & \frac{1}{R\sqrt{2^{m+n-1}\pi n! m!}} H_m \left\{ \frac{\sqrt{2} \left[\frac{\cos(\alpha)}{2} (u^2 - v^2) + \text{sen}(\alpha) (uv) \right]}{R} \right\} \times \\
& \times H_n \left\{ \frac{\sqrt{2} \left[-\frac{\text{sen}(\alpha)}{2} (u^2 - v^2) + \cos(\alpha) (uv) \right]}{R} \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ -\left[\frac{\frac{1}{2}(u^2 - v^2)}{R} \right]^2 - \left[\frac{(uv)}{R} \right]^2 \right\}. \tag{3.144}
\end{aligned}$$

A partir das soluções exatas mostradas acima, podemos construir os estados coerentes $SU(2)$ definidos na equação (3.48). Neste caso, a Figura 3.10 mostra a densidade de probabilidade. Podemos observar a semelhança dos estados coerentes $SU(2)$ para o problema isotrópico sem a presença de campos magnéticos sobre o sistema com os estados coerentes $SU(2)$ contruídos para o problema na presença de campos magnéticos. Notamos que este fato ocorre uma vez que recuperamos as soluções exatas para o problema com massa constante e consideramos a rotação nas variáveis. Esta semelhança nos estados coerentes $SU(2)$ também será observada a seguir nos próximos exemplos de funções de transformação.

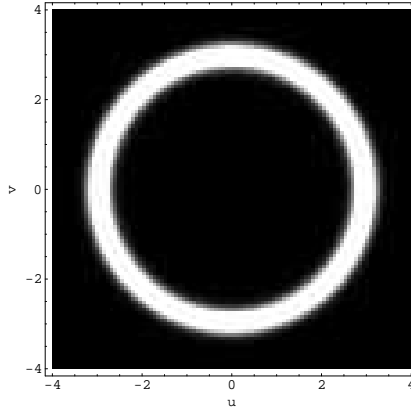


Figura 3.10: *Densidade de probabilidade para o caso de soluções polinomiais. Consideramos os parâmetros $d_1 = d_2 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$.*

Funções de transformação em coordenadas elípticas cilíndricas

Como segundo exemplo vamos supor as funções de transformação em coordenadas elípticas cilíndricas definidas na equação (3.53), sendo elas escritas como: $f(u, v) = a \text{senh}(u) \text{sen}(v)$ e $g(u, v) = a \text{cosh}(u) \cos(v)$. Neste caso, obtivemos o laplaciano para o problema sem a influência do campo magnético escrito na equação (3.60) como

$\nabla_{uv}^2 = -\frac{2}{a^2[\cos(2v) - \cosh(2u)]} (\partial_u^2 + \partial_v^2)$. Já o termo vindo do campo magnético será

$$\begin{aligned} x \partial_y - y \partial_x &= \frac{2}{a^2[\cos(2v) - \cosh(2u)]} \{ [a^2 \cos^2(v) \cosh(u) \operatorname{senh}(u) + \\ &+ a^2 \cosh(u) \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{senh}(u)] \partial_v - [-a^2 \cos(v) \cosh^2(u) \operatorname{sen}(v) + \\ &+ a^2 \cos(v) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}^2(u)] \partial_u \} = \frac{2}{a^2[\cos(2v) - \cosh(2u)]} \times \\ &\times \{ [a^2 \cosh(u) \operatorname{senh}(u)] \partial_v - [-a^2 \cos(v) \operatorname{sen}(v)] \partial_u \}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

logo, podemos ver que

$$M(u, v) = \frac{a^2 [\cos(2v) - \cosh(2u)]}{2 m_0}, \quad (3.146)$$

$$R(v) = a^2 \cos(v) \operatorname{sen}(v), \quad (3.147)$$

e

$$S(u) = a^2 \cosh(u) \operatorname{senh}(u). \quad (3.148)$$

Neste caso, o divergente do potencial vetor é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{B_0}{2} \left(\frac{\partial R(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} \right) = 0, \quad (3.149)$$

o módulo do potencial vetor é

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \frac{B_0}{2} \sqrt{[a^4 \cos^2(v) \operatorname{sen}^2(v) + a^4 \cosh^2(u) \operatorname{senh}^2(u)]} = \\ &= \frac{B_0 a^2}{2} \sqrt{[-\cos(4v) + \cosh(4u)]}, \end{aligned} \quad (3.150)$$

e o campo magnético é dado por

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{B_0}{2} \{ [a^2 \cosh^2(u) + a^2 \operatorname{senh}^2(u)] + \\ &- [a^2 \cos^2(v) - a^2 \operatorname{sen}^2(v)] \} \vec{k} = \frac{B_0 a^2}{2} [\cosh(2u) - \cos(2v)] \vec{k}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Neste exemplo de funções de transformação o potencial será escrito como

$$\begin{aligned} V(u, v) &= \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \{ [a \operatorname{senh}(u) \operatorname{sen}(v)]^2 + [a \cosh(u) \cos(v)]^2 \} + \\ &- \frac{e^2 B_0 m_0 \sqrt{[-\cos(4v) + \cosh(4u)]}}{2 [a \cos(2v) - \cosh(2u)]}, \end{aligned} \quad (3.152)$$

e podemos escrever as autofunções na forma

$$\begin{aligned}
\psi_{nm}(u, v) = & \frac{1}{R\sqrt{2^{m+n-1}\pi n! m!}} \times \\
& \times H_m \left\{ \frac{\sqrt{2} [\cos(\alpha) (a \sinh(u) \sen(v)) + \sen(\alpha) (a \cosh(u) \cos(v))]}{R} \right\} \times \\
& \times H_n \left\{ \frac{\sqrt{2} [-\sen(\alpha) (a \sinh(u) \sen(v)) + \cos(\alpha) (a \cosh(u) \cos(v))]}{R} \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ - \left[\frac{[a \sinh(u) \sen(v)]}{R} \right]^2 - \left[\frac{[a \cosh(u) \cos(v)]}{R} \right]^2 \right\}, \quad (3.153)
\end{aligned}$$

onde $\alpha(T) = -\frac{eB_0}{2m_0}T + c$. Usando as autofunções mostradas acima, podemos construir os estados coerentes $SU(2)$ definidos na equação (3.48). Podemos ver os estados coerentes $SU(2)$ na Figura 3.11. Consideramos o seguinte conjunto de parâmetros: $L = 20$, $\tau = A \exp(i\phi)$, onde $\phi = \pi/2$, $\hbar = A = m_0 = B_0 = e = \omega_1 = \omega_2 = p = q = c = 1$, $a = 5$ e $T = \pi/4$. Neste caso, podemos notar uma sequência de regiões iguais que determinam a maior probabilidade. Observamos que isto ocorre devido ao fato que as funções de transformação que escolhemos são periódicas.

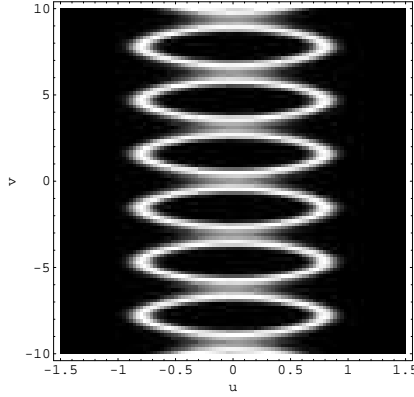


Figura 3.11: *Densidade de probabilidade para o caso de funções de transformação na forma de coordenadas cilíndricas elípticas. Consideramos $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$.*

Funções de transformação na forma de coordenadas bipolares

Finalmente, como terceiro e último exemplo supomos as funções de transformação na forma das coordenadas bipolares dadas na equação (3.63), sendo elas escritas como: $f(u, v) = [a \sinh(u)] / [\cosh(u) - \cos(v)]$ e $g(u, v) = [a \sen(v)] / [\cosh(u) - \cos(v)]$. Neste caso, obtivemos o laplaciano escrito na equação (3.70) na forma $\nabla_{uv}^2 = \frac{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}{a^2} (\partial_u^2 +$

∂_v^2). Para este caso o termo de campo magnético é escrito como

$$\begin{aligned}
x \partial_y - y \partial_x &= -\frac{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}{a^2} \left\{ \left[\frac{a^2 [1 - \cos(v) \cosh(u) \operatorname{senh}(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2 [-\cos(v) + \cosh(u)]} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2 [-\cos(v) + \cosh(u)]} \right] \partial_v + \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{a^2 [1 - \cos(v) \cosh(u) \operatorname{senh}(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2 [-\cos(v) + \cosh(u)]} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2 [-\cos(v) + \cosh(u)]} \right] \partial_u \right\} = \\
&= -\frac{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}{a^2} \times \\
&\quad \times \left\{ \left[-\frac{a^2 \cos(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} \right] \partial_v - \left[-\frac{a^2 \cosh(u) \operatorname{sen}(v)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} \right] \partial_u \right\} \quad (3.154)
\end{aligned}$$

Com isso, ficamos com

$$M(u, v) = \frac{a^2 m_0}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}, \quad (3.155)$$

$$R(u, v) = \frac{a^2 \cosh(u) \operatorname{sen}(v)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}, \quad (3.156)$$

e

$$S(u, v) = -\frac{a^2 \cos(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2}. \quad (3.157)$$

Neste caso, o divergente do potencial vetor é

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{B_0}{2} \left[-\frac{2 a^2 \cos(v) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^3} + \frac{2 a^2 \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 a^2 \cosh(u) \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^3} \right] = 0, \quad (3.158)
\end{aligned}$$

com o módulo do potencial vetor

$$\begin{aligned}
|\vec{A}| &= \frac{B_0}{2} \sqrt{\left\{ \frac{a^4 \cosh^2(u) \operatorname{sen}^2(v)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^4} + \frac{a^4 \cos^2(v) \operatorname{senh}^2(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^4} \right\}} = \\
&= \frac{B_0}{2} \sqrt{-\left\{ \frac{a^4 [\cos(v) + \cosh(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^3} \right\}}, \quad (3.159)
\end{aligned}$$

e o campo magnético escrito como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{B_0}{2} \left\{ \left[-\frac{a^2 \cos(v) \cosh(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} - \frac{2 a^2 \cos(v) \operatorname{senh}^2(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^3} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{a^2 \cos(v) \cosh(u)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} + \frac{2 a^2 \cosh(u) \operatorname{sen}^2(v)}{[\cos(v) - \cosh(u)]^3} \right] \vec{k} = \\
& = \frac{B_0}{2} \left\{ \frac{a^2 \cos(v) [-\cos(v) \cosh(u) + \cosh^2(u) - 2 \operatorname{sen}^2(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^3} + \right. \\
& \quad \left. - \frac{a^2 \cosh(u) [\cos^2(v) - \cos(v) \cosh(u) + 2 \operatorname{sen}^2(v)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^3} \right\} \vec{k} = \\
& = \frac{B_0 a^2}{[\cos(v) - \cosh(u)]^2} \vec{k}. \tag{3.160}
\end{aligned}$$

Para este terceiro e último exemplo de funções de transformação, finalizamos com o potencial

$$\begin{aligned}
V(u, v) = & \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \left\{ \left[\frac{a \operatorname{sen}h(u)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right]^2 + \left[\frac{a \operatorname{sen}(v)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right]^2 \right\} + \\
& - \frac{e^2 B_0 [\cos(v) - \cosh(u)]^2 \sqrt{- \left\{ \frac{a^4 [\cos(v) + \cosh(u)]}{[\cos(v) - \cosh(u)]^3} \right\}}}{4 m_0 a^2}, \tag{3.161}
\end{aligned}$$

e ficamos com as autofunções nas variáveis espaciais u e v escritas na forma

$$\begin{aligned}
\psi_{nm}(u, v) = & \frac{1}{R \sqrt{2^{m+n-1} \pi n! m!}} \times \\
& \times H_m \left\{ \frac{\sqrt{2}}{R} \left[\cos(\alpha) \left(\frac{a \operatorname{sen}h(u)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right) + \operatorname{sen}(\alpha) \left(\frac{a \operatorname{sen}(v)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right) \right] \right\} \times \\
& \times H_n \left\{ \frac{\sqrt{2}}{R} \left[-\operatorname{sen}(\alpha) \left(\frac{a \operatorname{sen}h(u)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right) + \cos(\alpha) \left(\frac{a \operatorname{sen}(v)}{\cosh(u) - \cos(v)} \right) \right] \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ - \left[\frac{a \operatorname{sen}h(u)}{R (\cosh(u) - \cos(v))} \right]^2 - \left[\frac{a \operatorname{sen}(v)}{R (\cosh(u) - \cos(v))} \right]^2 \right\}, \tag{3.162}
\end{aligned}$$

onde $\alpha(T) = -\frac{e B_0}{2 m_0} T + c$. Podemos construir os estados coerentes $SU(2)$ definidos na equação (3.48) usando as autofunções mostradas acima. Neste caso, a Figura 3.12 mostra os estados coerentes $SU(2)$. Consideramos os parâmetros $L = 20$, $\tau = A \exp(i \phi)$, onde $\phi = \pi/2$, $\hbar = A = m_0 = B_0 = e = \omega_1 = \omega_2 = p = q = c = a = 1$ e $T = \pi/4$. Neste exemplo, podemos ver que a construção dos estados coerentes $SU(2)$ são semelhantes ao que mostramos no segundo exemplo de soluções. Aqui, observamos novamente uma sequência de regiões iguais ao longo da variável espacial v . Notamos que isto ocorre por causa das funções de transformação também serem periódicas.

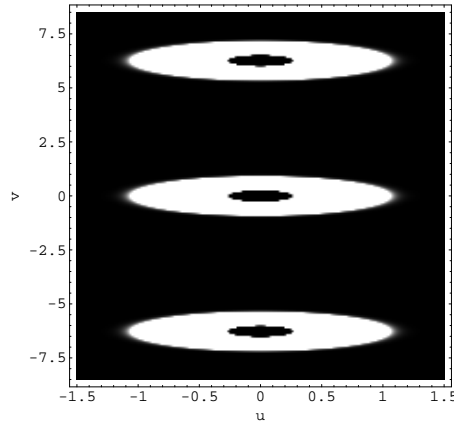


Figura 3.12: *Densidade de probabilidade para o caso de funções de transformação na forma de coordenadas bipolares. Consideramos $\omega_1 = p = \omega_2 = q = 1$.*

3.5 Comentários

Neste Capítulo iniciamos o estudo do problema de sistemas bidimensionais em que uma partícula com massa constante está delimitada por um potencial. Usando mudança nas variáveis espaciais determinamos sistemas com massa dependente da posição. Para isto propusemos três exemplos de funções de transformação, sendo eles: polinomiais, em coordenadas elípticas cilíndricas e em coordenadas bipolares. No caso em que escolhemos as funções de transformação na forma polinomial vimos que para a escolha de determinados parâmetros nos restringimos ao caso das funções na forma de coordenadas parabólicas cilíndricas. Para os três exemplos construímos os estados coerente $SU(2)$ a fim de fazer uma possível análise limite clássica. Para o caso em que consideramos as funções de transformação na forma polinomial mostramos que mudando o coeficiente no termo de grau zero, o máximo de probabilidade dividiu-se em duas regiões que se afastaram uma da outra à medida que aumentamos o valor do parâmetro d_2 . Finalmente, para os casos em que escolhemos trabalhar com as funções de transformação na forma de coordenadas elípticas cilíndricas e na forma de coordenadas bipolares mostramos que os estados coerentes $SU(2)$ determinam uma sequência de regiões com maior probabilidade de encontrar a partícula. Observamos que este fato ocorreu por causa das funções serem periódicas. Estendemos nossos estudos analisando o efeito de um campo magnético uniforme sobre o sistema em estudo. Neste caso, nos restringimos ao problema do oscilador para determinar as soluções exatas da equação de Schrödinger com massa constante. Para determinar as soluções exatas fizemos uma transformação nas variáveis via rotação dependente do tempo, e em seguida, construímos os estados coerentes $SU(2)$. Vimos que apesar das soluções exatas dependerem do tempo os estados coerentes $SU(2)$ não mudam a forma para valores diferentes de T . Neste caso, a trajetória da partícula apresentou o máximo de probabilidade

na forma de um círculo. Em seguida fizemos uma mudança nas variáveis espaciais de modo que escrevemos a equação de Schrödinger com massa dependente da posição. Neste problema supusemos os três exemplos de funções de transformação que consideramos no problema sem a influência do campo magnético uniforme. Conhecidas as soluções exatas da equação de Schrödinger construímos os estados coerentes $SU(2)$ para analisar o limite clássico dos sistemas. Observamos que os estados coerentes $SU(2)$ construídos para os problemas na presença de campos magnéticos são semelhantes aos estados coerentes $SU(2)$ construídos para os problemas isotrópicos sem a presença de campos magnéticos. Notamos que este fato ocorreu porque recuperamos as soluções exatas do problema com massa constante considerando a rotação nas variáveis.

Capítulo 4

Ambiguidade de ordenamento na equação de Schrödinger com massa dependente da posição no caso bidimensional na presença de um campo magnético: um modelo exato

Neste Capítulo vamos estudar o problema de uma partícula com massa dependente da posição num poço de potencial bidimensional finito, sob a influência de um campo magnético uniforme. Consideramos a ambiguidade de ordenamento quântico. Obtemos as autofunções e as energias para um conjunto de auto-estados e mostramos que considerando um poço de potencial finito, o sistema possui um conjunto infinito de estados quânticos.

4.1 Introdução

Desde o início da fabricação de nanodispositivos como, por exemplo, pontos quânticos, fios e poços de potencial, vem aumentando o interesse em soluções exatas de sistemas bidimensionais confinados [47]. Além disso, para levar em conta a variação espacial de um semicondutor, algumas hamiltonianas efetivas foram propostas incluindo uma massa dependente da variável espacial [30, 48]-[52]. Uma consequência importante deste tipo de sistema é que eles se tornam ambíguos no nível quântico. Lamentavelmente a ambiguidade de ordenamento quântico ainda é uma das questões não solucionadas para problemas da mecânica quântica. Todavia, sistemas desse tipo são importantes para modelar algumas situações experimentais como impurezas em cristais [1, 2, 53], a dependência de forças nucleares na velocidade relativa de dois núcleos [54, 55], e mais recentemente o estudo de

hetero-estruturas de semicondutores [3, 4]. Algum tempo atrás, foram discutidas soluções exatas de uma classe de sistemas hamiltonianos unidimensionais com ambiguidade de ordenamento quântico [5] e uma dependência da ambiguidade de ordenamento quântico [7]. O fato é que o estudo de sistemas com massa dependente da posição vem despertando um grande interesse de vários autores ao longo dos últimos anos [5]-[41],[56]-[64]. Entretanto, a maioria dos trabalhos dedicados ao estudo de sistemas com massa dependente da posição trata de problemas unidimensionais. Embora, existam sistemas unidimensionais na presença de um campo magnético [65]-[67], sentimos a necessidade da análise de tais sistemas no caso bidimensional.

Neste Capítulo propomos iniciar o estudo do caso de um sistema com massa dependente da posição bidimensional sob a influência de um poço de potencial usando coordenadas cartesianas. Obtemos as soluções exatas da equação de Schrödinger correspondente e construímos os estados coerentes $SU(2)$. Discutimos o problema da ambiguidade de ordenamento quântico, e como consequência escolhemos um ordenamento particular para forma do potencial a fim de determinar soluções exatas. Estendemos nossa proposta a análise do efeito de um campo magnético uniforme sob o comportamento de uma partícula carregada com massa dependente da posição confinada no poço de potencial. Restringimos nosso estudo ao caso particular em que consideramos o campo magnético uniforme no calibre de Coulomb simétrico.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: Na seção 4.2 vamos fazer uma breve revisão do trabalho de Souza Dutra e Almeida [5] em que foi discutido o problema da ambiguidade de ordenamento quântico para um sistema unidimensional. Estendemos os estudos de Souza Dutra e Almeida [5] ao sistema bidimensional em que obtemos as soluções exatas da correspondente equação de Schrödinger e construímos os estados coerentes $SU(2)$. Na seção 4.3 iniciamos o estudo de um sistema bidimensional em que a massa de uma partícula depende da posição sob a influência de um campo magnético uniforme. Escrevemos a equação de Schrödinger efetiva, obtemos as soluções exatas, e em seguida construímos os estados coerentes $SU(2)$. Finalmente na seção 4.4 fazemos os comentários finais.

4.2 Equação de Schrödinger efetiva bidimensional em coordenadas cartesianas

Para iniciar nossa proposta usamos o ordenamento definido por von Ross [64] utilizado por Souza Dutra e Almeida [5], para o operador hamiltoniano que no caso do problema

unidimensional é escrito como

$$\hat{H} = \frac{1}{4} (M^\alpha \hat{p} M^\beta \hat{p} M^\gamma + M^\gamma \hat{p} M^\beta \hat{p} M^\alpha) + V(x), \quad (4.1)$$

onde o operador momento na representação diferencial é descrito como $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$, $M = M(x)$ é a massa efetiva dependente da posição e $V(x)$ é o potencial. α, β e γ são constantes arbitrárias de ordenamento tais que satisfazem a relação

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \quad (4.2)$$

para garantir o limite clássico.

Para escrever a hamiltoniana efetiva usamos as propriedades da relação canônica de comutação no operador de energia cinética $M^\alpha \hat{p} M^\beta \hat{p} M^\gamma + M^\gamma \hat{p} M^\beta \hat{p} M^\alpha$. Deste modo, operador hamiltoniano efetivo pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\hat{p}^2}{M} - i\hbar(\beta + 2\gamma) \frac{M'}{M^2} \hat{p} - \hbar^2 \gamma(\beta + \gamma - 1) \frac{(M')^2}{M^3} - \hbar^2 \gamma \frac{M''}{M^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{p}^2}{M} - i\hbar(\beta + 2\alpha) \frac{M'}{M^2} \hat{p} - \hbar^2 \alpha(\beta + \alpha - 1) \frac{(M')^2}{M^3} - \hbar^2 \alpha \frac{M''}{M^2} \right] + V(x) = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 2 \frac{p^2}{M} - 2i\hbar(\alpha + \beta + \gamma) \frac{M'}{M^2} \hat{p} - \hbar^2 \frac{(M')^2}{M^3} [\gamma(\beta + \gamma - 1) + \alpha(\beta + \alpha - 1)] + \right. \\ &\quad \left. - \hbar^2 \frac{M''}{M^2} (\alpha + \gamma) \right\} + V(x). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Considerando a relação $\alpha + \beta + \gamma = -1$ vemos que podemos escrever $\beta = -(\alpha + \gamma + 1)$. Deste modo, chegamos no operador hamiltoniano efetivo na forma [5]

$$H = \frac{1}{2M} \hat{p}^2 + \frac{i\hbar M'}{2M^2} \hat{p} + U(\alpha, \gamma, x) + V(x), \quad (4.4)$$

onde $U(\alpha, \gamma, x)$ é o potencial efetivo expresso por

$$U(\alpha, \gamma, x) = -\frac{\hbar^2}{4M^3} \left[(\alpha + \gamma) M \frac{d^2 M}{dx^2} - 2(\alpha + \gamma + \alpha\gamma) \left(\frac{dM}{dx} \right)^2 \right]. \quad (4.5)$$

Neste caso, a correspondente equação diferencial pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2M(x)} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{dM/dx}{M^2} \right) \frac{d\psi}{dx} + [V(x) + U(\alpha, \gamma, x) - E] \psi = 0. \quad (4.6)$$

Propomos, estender os resultados do trabalho de de Souza Dutra e Almeida [5] ao caso bidimensional em coordenadas cartesianas, onde a massa $M = M(x, y)$. Neste caso,

obtemos a seguinte expressão para o operador hamiltoniano efetivo

$$H = \frac{1}{2M(x,y)}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial x} \hat{p}_x + \frac{\partial M}{\partial y} \hat{p}_y}{M^2} \right) + [U(\alpha, \gamma, x, y) + V(x, y)], \quad (4.7)$$

onde $V(x, y)$ é o potencial do sistema original, $U(\alpha, \gamma, x, y)$ é o potencial efetivo expresso por

$$U(\alpha, \gamma, x, y) = -\frac{\hbar^2}{4M} \left\{ (\alpha + \gamma) \frac{M_{xx} + M_{yy}}{M} - 2(\alpha + \gamma + \alpha\gamma) \left[\left(\frac{M_x}{M} \right)^2 + \left(\frac{M_y}{M} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.8)$$

com $M_x = \partial M / \partial x$ e onde $M_y = \partial M / \partial y$. Assim, a hamiltoniana efetiva na equação (4.7) pode ser reescrita na notação vetorial na forma

$$H = \frac{1}{2M(x,y)} \vec{p}^2 + \frac{i\hbar}{2} \frac{1}{M^2} \left(\vec{\nabla} M \right) \cdot \vec{p} + [U(\alpha, \gamma, x, y) + V(x, y)], \quad (4.9)$$

onde o potencial efetivo

$$U(\alpha, \gamma, x, y) = -\frac{\hbar^2}{4M} \left[(\alpha + \gamma) \frac{\nabla^2 M}{M} - 2(\alpha + \gamma + \alpha\gamma) \left(\frac{\vec{\nabla} M}{M} \right)^2 \right]. \quad (4.10)$$

Por outro lado, partindo da equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2M(x,y)} \nabla^2 \chi + V_{eff}(x, y) \chi = E \chi, \quad (4.11)$$

e fazendo a redefinição

$$\chi(x, y) = e^{\sigma(x,y)} \psi(x, y), \quad (4.12)$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= e^{\sigma(x,y)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \sigma_x \psi \right), \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= e^{\sigma(x,y)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \sigma_y \psi \right), \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= e^{\sigma(x,y)} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\sigma_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + (\sigma_{xx} + \sigma_x^2) \psi \right], \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} &= e^{\sigma(x,y)} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2\sigma_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + (\sigma_{yy} + \sigma_y^2) \psi \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Assim, obtemos a equação diferencial (4.11) transformada reescrita como

$$\begin{aligned}
& - \frac{\hbar^2}{2M(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2M(x,y)} \left(2\sigma_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2\sigma_y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \\
& - \frac{\hbar^2}{2M(x,y)} (\sigma_{xx} + \sigma_x^2 + \sigma_{yy} + \sigma_y^2) \psi + V(x,y)\psi = E\psi,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
& - \frac{\hbar^2}{2M(x,y)} \nabla^2 \psi - \frac{\hbar^2}{M(x,y)} \left[(\vec{\nabla} \sigma) \cdot \vec{\nabla} \psi \right] + \\
& + \left\{ V(x,y) - \frac{\hbar^2}{2M(x,y)} \left[\nabla^2 \sigma + (\vec{\nabla} \sigma)^2 \right] \right\} \psi = E\psi,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

tal que o operador hamiltoniano correspondente é dado por

$$H = \frac{1}{2M(x,y)} \vec{p}^2 - \frac{\hbar^2 i}{M(x,y) \hbar} (\vec{\nabla} \sigma) \cdot \vec{p} + V - \frac{\hbar^2}{2M(x,y)} \left[\nabla^2 \sigma + (\vec{\nabla} \sigma)^2 \right]. \tag{4.16}$$

Agora, para que a hamiltoniana acima possa ser igual à hamiltoniana das equações (4.9), devemos impor a seguinte condição

$$- \frac{\hbar^2 i}{M \hbar} \vec{\nabla} \sigma \cdot \vec{p} = \frac{i\hbar}{2} \frac{1}{M^2} \vec{\nabla} M \cdot \vec{p}. \tag{4.17}$$

Assim, temos

$$\frac{\vec{\nabla} M}{M} = -2 \vec{\nabla} \sigma. \tag{4.18}$$

Se a solução para a igualdade acima é dada por

$$\sigma = \ln(M^{-1/2}), \tag{4.19}$$

mostramos que

$$-2 \vec{\nabla} \sigma = -2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \vec{y} \right) = -2 \left(-\frac{M_x}{2M} - \frac{M_y}{2M} \right) = \frac{\vec{\nabla} M}{M}. \tag{4.20}$$

Neste caso, temos na equação (4.16) que os termos

$$(\vec{\nabla} \sigma)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\vec{\nabla} M}{M} \right)^2, \tag{4.21}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla^2\sigma &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\sigma = -\frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\nabla}M}{M} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\nabla^2M}{M} - \left(\frac{\vec{\nabla}M}{M}\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\nabla}M}{M}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\nabla^2M}{M}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Substituindo as equações (4.21) e (4.22) na equação (4.16), finalmente terminamos com a hamiltoniana

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2M(x,y)}\vec{p}^2 + \frac{i\hbar}{2M^2}(\vec{\nabla}M) \cdot \vec{p} + \left\{V - \frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\vec{\nabla}M}{M}\right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{\nabla}M}{M}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\nabla^2M}{M}\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{2M}\vec{p}^2 + \frac{i\hbar}{2M}\frac{\vec{\nabla}M}{M} \cdot \vec{p} + \left\{V - \frac{\hbar^2}{4M}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\vec{\nabla}M}{M}\right)^2 - \frac{\nabla^2M}{M}\right]\right\},\end{aligned}\quad (4.23)$$

sendo que a partir das equações (4.12) e (4.19), obtemos a relação entre funções de onda,

$$\psi = M^{\frac{1}{2}}\chi.\quad (4.24)$$

Assim, podemos verificar que, partindo da hamiltoniana efetiva dada na equação (4.9), chegamos na equação de Schrödinger efetiva escrita como

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + [U(\alpha, \gamma, x, y) + V(x, y)]\psi - E\psi + \frac{i\hbar}{2M^2}(\vec{\nabla}M) \cdot \vec{p}\psi = \\ = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + [U(\alpha, \gamma, x, y) + V(x, y)]\psi - E\psi + \frac{\hbar^2}{2M^2}(\vec{\nabla}M) \cdot (\vec{\nabla}\psi) = 0\end{aligned}\quad (4.25)$$

de forma que

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\chi + \left\{V(x, y) + U(\alpha, \gamma, x, y) + \frac{\hbar^2}{4M}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\vec{\nabla}M}{M}\right)^2 - \frac{\nabla^2M}{M}\right]\right\}\chi = E\chi.\quad (4.26)$$

Com isso, concluímos que se partirmos da equação de Schrödinger efetiva

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + \frac{\hbar^2}{2M^2}\vec{\nabla}M \cdot \vec{\nabla}\psi + [U(\alpha, \gamma, x, y) + V(x, y)]\psi = E\psi,\quad (4.27)$$

somos levados à equação de Schrödinger efetiva apresentada na equação (4.11), onde o

potencial efetivo é

$$V_{eff}(x, y) = V(x, y) + \frac{\hbar^2}{4M} \left[2 \left(\alpha + \gamma + \alpha\gamma + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{\vec{\nabla} M}{M} \right)^2 - (\alpha + \gamma + 1) \frac{\nabla^2 M}{M} \right]. \quad (4.28)$$

Para trabalhar com um sistema equivalente com massa constante, podemos escrever a equação (4.11) como

$$-\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \chi + U_{eff} \chi = \xi \chi, \quad (4.29)$$

onde

$$U_{eff} - \xi = M(x, y) V(x, y) + \frac{\hbar^2}{4} \left[2 \left(\alpha + \gamma + \alpha\gamma + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{\vec{\nabla} M}{M} \right)^2 + (\alpha + \gamma + 1) \frac{\nabla^2 M}{M} \right] - E M(x, y), \quad (4.30)$$

com ξ constante.

Vejam agora a análise de um exemplo exatamente solúvel. Tendo em mente a solução exata, escolhamos trabalhar com o caso em que a massa varia harmonicamente como

$$M(x, y) = M_0 \left[1 + \frac{g}{2} (x^2 + y^2) \right], \quad (4.31)$$

tal que

$$\left(\frac{\vec{\nabla} M}{M} \right)^2 = M_0 [g^2 (x^2 + y^2)], \quad (4.32)$$

e

$$\nabla^2 M = 2 g M_0. \quad (4.33)$$

Assim, obtemos

$$U_{eff} - \xi = M_0 \left[1 + \frac{g}{2} (x^2 + y^2) \right] V(x, y) - E M_0 \left[1 + \frac{g}{2} (x^2 + y^2) \right] + \frac{\hbar^2}{4} \left\{ 2 \left(\alpha + \gamma + \alpha\gamma + \frac{3}{4} \right) g^2 \left[\frac{x^2 + y^2}{1 + \frac{g}{2} (x^2 + y^2)} \right] + (\alpha + \gamma + 1) \frac{2g}{\left[1 + \frac{g}{2} (x^2 + y^2) \right]} \right\}. \quad (4.34)$$

Para garantir que este exemplo seja exatamente solúvel, nos restringimos ao caso em que escolhamos o ordenamento tal que

$$\alpha + \gamma + 1 = 0, \quad (4.35)$$

e

$$\alpha + \gamma + \alpha\gamma + \frac{3}{4} = 0. \quad (4.36)$$

Neste caso obtemos

$$\alpha + \gamma = -1, \quad (4.37)$$

e

$$-1 + \frac{3}{4} + \alpha(-1 - \alpha) = -\alpha(\alpha + 1) - \frac{1}{4} = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} = 0, \quad (4.38)$$

Portanto, podemos concluir que a raiz do polinômio da equação (4.38) é

$$\alpha = -\frac{1}{2}. \quad (4.39)$$

Substituindo a equação (4.39) nas equações (4.36) e (4.37), obtemos

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad (4.40)$$

e

$$\beta = 0. \quad (4.41)$$

Assim, ficamos com o ordenamento

$$\frac{1}{2M} \vec{p}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \vec{p} \right) \cdot \left(\vec{p} \frac{1}{\sqrt{M}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{M}} (\vec{p})^2 \frac{1}{\sqrt{M}}. \quad (4.42)$$

Neste caso, podemos reescrever o potencial efetivo na forma

$$U_{eff} - \xi = M_0 \left[1 + \frac{g}{2}(x^2 + y^2) \right] V(x, y) - EM_0 - \frac{EM_0g}{2}(x^2 + y^2). \quad (4.43)$$

Entretanto, o exemplo será completo somente quando tivermos definido o potencial sob o qual a partícula com massa dependente da posição está se movendo. Então, escolhemos um potencial anisotrópico representando por

$$V(x, y) = \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2}{2 \left[1 + \frac{g}{2}(x^2 + y^2) \right]}, \quad (4.44)$$

logo obtemos

$$\begin{aligned} U_{eff} - \xi &= \frac{1}{2} M_0 (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) - EM_0 - \frac{EM_0g}{2} g(x^2 + y^2) = \\ &= \frac{1}{2} M_0 [(\omega_1^2 - Eg)x^2 + (\omega_2^2 - Eg)y^2] - EM_0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

então se

$$\xi = EM_0, \quad (4.46)$$

logo temos a relação do espectro de energia

$$EM_0 = \hbar\sqrt{(\omega_1^2 - Eg)M_0} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\sqrt{(\omega_2^2 - Eg)M_0} \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad (4.47)$$

onde $n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ e devemos impor que $Eg < \omega_1^2$ e $Eg < \omega_2^2$ para garantir que o espectro de energia seja real e as autofunções normalizadas. A expressão analítica para o espectro de energia neste caso é bastante complicada. Contudo, a simulação numérica pode ser feita facilmente. Podemos ver um exemplo deste caso na Figura 4.1 em que apresentamos os níveis de energia como função do número quântico n , com $m = 0, \dots, 5$, para o caso onde $\omega_2 = 2 \omega_1$ e $\omega_1 = 10$. Notemos que aumentando o valor do número quântico o autovalor de energia aproxima-se de um valor limite. Além disso, existe um limite do número quântico associado ao aumento da frequência (ω_2 neste exemplo). Podemos verificar que a energia converge assintoticamente em n para ω_1^2/g . O limite do número quântico m pode ser escrito a partir da equação (4.47) de modo que para $Eg \cong \omega_1^2$ e, vemos que $E \cong \omega_1^2/g$. Assim, temos

$$\frac{\omega_1^2 M_0}{g} = \hbar\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)M_0} \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad (4.48)$$

que nos leva a

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\omega_1^2 M_0}{\hbar g \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)M_0}}, \quad (4.49)$$

de forma que

$$m_{\max} = \text{Int} \left[\frac{\omega_1^2 M_0}{\hbar g \sqrt{M_0 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}} - \frac{1}{2} \right], \quad (4.50)$$

onde $\text{Int}[\cdot]$ é a parte inteira da quantidade entre colchetes. Neste caso, podemos entender porque a frequência do potencial efetivo depende da energia, e para os números quânticos depois do valor máximo a frequência será imaginária redefinindo uma função de onda não normalizável. Além disso, quando as frequências são iguais, nos restringimos ao caso do potencial isotrópico. Neste caso, os números quânticos são ilimitados e o sistema apresenta degenerescência. Além disso, podemos notar que quando $E \rightarrow \omega^2/g$, o termo $\sqrt{\omega^2 - Eg}$ torna-se assintoticamente pequeno, de forma que o número quântico pode aumentar arbitrariamente, de modo que o produto $\sqrt{\omega^2 - Eg}(n + \frac{1}{2})$ permaneça limitado. Este comportamento será confirmado analiticamente abaixo quando nos restringimos ao

caso do oscilador isotrópico.

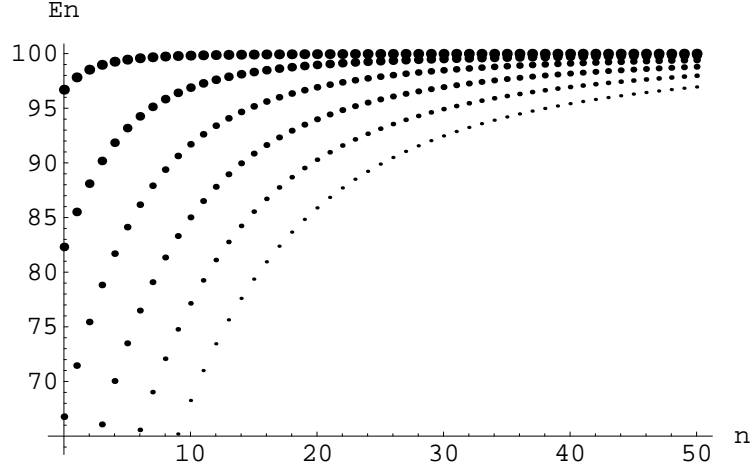


Figura 4.1: *Comportamento da energia em que aumentamos o número quântico n . Aqui, $\omega_2 = 2\omega_1, \omega_1 = 10, g = M_0 = \hbar = 1$ e $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (os pontos ficam mais grossos à medida que vai aumentando m .)*

Neste Capítulo também analisamos os estados coerentes $SU(2)$, inicialmente estudados por Chen et al. [9]-[12]. Para isso, nos restringimos ao caso do potencial isotrópico em que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Deste modo, teremos o potencial

$$V(x, y) = \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2 \left[1 + \frac{g}{2}(x^2 + y^2)\right]}, \quad (4.51)$$

A Figura 4.2 mostra a energia potencial do oscilador isotrópico em que consideramos os parâmetros $\omega = 1$ e $g = 1$. Neste caso, o espectro de energia será

$$E^2 M_0^2 = \hbar(n + m + 1)^2(\omega^2 - Eg)M_0, \quad (4.52)$$

ou ainda

$$M_0 E^2 + Q_{nm} g E - Q_{nm} \omega^2 = 0, \quad (4.53)$$

onde $Q_{nm} = \hbar(n + m + 1)^2$. Assim, obtemos finalmente que

$$E_{nm} = \frac{1}{2M_0} \left(-Q_{nm} g + \sqrt{Q_{nm}^2 g^2 + 4M_0 \omega^2 Q_{nm}} \right). \quad (4.54)$$

Analisando o espectro de energia acima, podemos observar que existe uma infinidade de estados, mostrando que pelo fato da massa crescer quadraticamente, garante-se que um poço de potencial finito possua um número arbitrário de estados quânticos, o que geralmente é incompatível com este tipo de potencial no caso da massa constante. Isto pode ser verificado observando que no limite em que os números quânticos tendem a infinito,

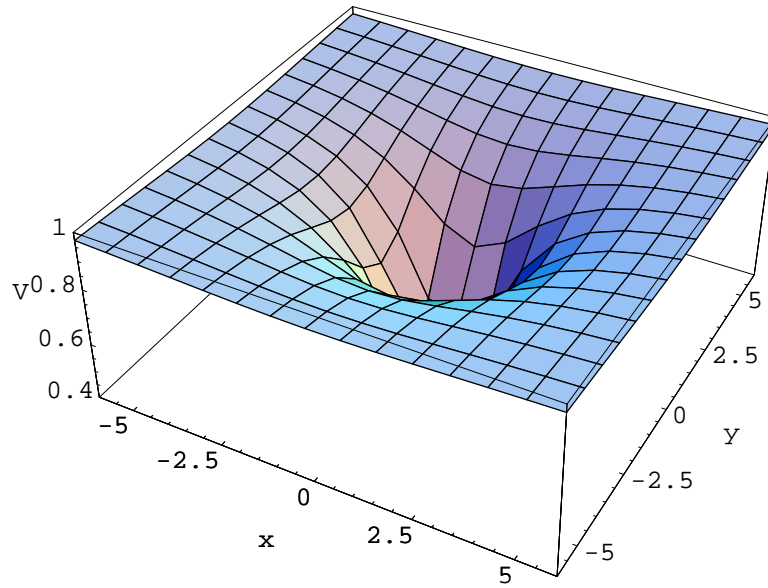


Figura 4.2: Potencial $V(x, y) = \frac{\omega^2 x^2 + \omega^2 y^2}{2[1 + \frac{g}{2}(x^2 + y^2)]}$ com $\omega = 1$ e $g = 1$.

temos

$$\lim_{L \rightarrow \infty} E_L \rightarrow \frac{\omega^2}{g}, \quad (4.55)$$

onde $L = n + m$. Este é precisamente o limite da profundidade do poço de potencial. Assim, concluímos que um conjunto infinito de estados quânticos são permitidos neste arranjo.

Finalmente, construímos os estados coerentes $SU(2)$ [9]-[12]. Como vimos no Capítulo anterior, estes estados apresentam a característica interessante de possuir a mais alta probabilidade de encontrar a partícula precisamente sobre a trajetória clássica do sistema correspondente. Além disso, estes estados são estacionários, bem como as autofunções usuais para os osciladores hamônicos. Então, decidimos apresentar aqui os estados coerentes $SU(2)$ em vez das autofunções usuais. Vamos ver que estes estados conduzem à conclusão de que o comportamento deles é muito semelhante ao que acontece com o oscilador harmônico em duas dimensões, onde o máximo de probabilidade tem uma forma circular. Esta característica dos estados coerentes $SU(2)$ não é trivial, porque construções semelhantes no caso da distribuição de Wigner para o sistema unidimensional em que a massa da partícula depende da posição, apresentaram um comportamento muito diferente quando comparados com a distribuição original do oscilador hamônico, conforme vimos no Capítulo anterior. Os estados coerentes $SU(2)$ podem ser escritos usando a definição

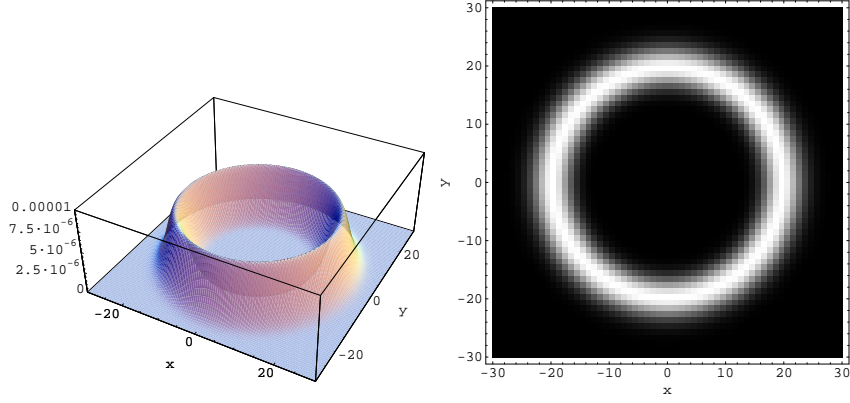


Figura 4.3: *Densidade de probabilidade com $\omega = 1$.*

[9]-[12]

$$\Phi(x, y, \tau) = \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{\frac{L}{2}}} \sum_{K=0}^L \binom{L}{K}^{1/2} \tau^K \chi_{nm}(x, y), \quad (4.56)$$

onde os números quânticos $n = pK$, $m = q(L - K)$, em que $K = 0, 1, 2, \dots, L$ e p e q são números inteiros. Assim, as autofunções são degeneradas para os L inteiros e positivos. O parâmetro complexo $\tau = Ae^{i\phi}$, onde $\phi = \pi/2$, expresso em termos de coordenadas polares é usado para fazer a conexão com a trajetória clássica. Podemos observar na equação (4.56) que os estados coerentes $SU(2)$ são superposições de autoestados degenerados. As autofunções podem ser obtidas a partir da equação (4.24) de forma que

$$\begin{aligned} \chi_{nm}(x, y) = & \frac{M(x, y)^{-1/2}}{R \sqrt{2^{m+n-1} \pi n! m!}} H_m \left(\frac{\sqrt{2} x}{R} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2} y}{R} \right) \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{x}{R} \right)^2 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde $R = \sqrt{2\hbar / (M_0 \sqrt{(\omega^2 - Eg) M_0})}$.

A Figura 4.3 mostra a densidade de probabilidade para o caso em que consideramos os parâmetros $L = 20$ e $p = q = 1$, como foram definidos por Chen e Huang [9]. Usamos o conjunto de parâmetros: $\hbar = M_0 = A = \omega = g = 1$ de modo que a energia na equação (4.54) seja menor que a frequência na equação (4.47). A figura da direita é a projeção da que aparece na esquerda.

4.3 Partícula com massa dependente da posição em um campo magnético

Nesta seção analisamos o efeito de um campo magnético uniforme sobre o comportamento de uma partícula carregada com massa dependente da posição no poço de potencial introduzido na seção anterior. Para isso, começamos fazendo uma discussão deste problema em geral, então consideramos o caso do campo magnético uniforme no calibre de Coulomb. Nesta situação, a hamiltoniana clássica é dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2M(x,y)} \left(\vec{p} - e \vec{A} \right)^2 + V(x,y) = \\ &= \frac{1}{2M} \vec{p}^2 - \frac{e}{2M} \left(\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A} \right) + \frac{e^2}{2M} \vec{A}^2 + V(x,y), \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde e é a carga elétrica e $\vec{A}(x,y)$ é o potencial vetor. Definindo

$$\vec{A} = \frac{\vec{A}}{M}, \quad (4.59)$$

temos a hamiltoniana reescrita como

$$H = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 - \frac{e}{2} \left(\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A} \right) + \frac{e^2}{2} \vec{A}^2 + V(x,y). \quad (4.60)$$

Para a hamiltoniana escrita na equação (4.60) já sabemos que o termo de energia cinética tem o ordenamento visto no caso sem a presença do campo magnético $\vec{A}(x,y)$. Por outro lado, o termo linear em \vec{p} é tal que

$$\vec{A} \cdot \vec{p} = \tilde{A}_x p_x + \tilde{A}_y p_y. \quad (4.61)$$

Assim, este termo é equivalente a dois operadores unidimensionais do tipo $f(x) p_x$, que foram analisados nos trabalhos dos autores de Souza Dutra e Almeida [5] e de Souza Dutra [7], onde podemos ver que o ordenamento de um termo unidimensional como

$$\hat{O} = \frac{1}{2} [f^\alpha(x) \hat{p} f^\beta(x) + f^\beta(x) \hat{p} f^\alpha(x)], \quad (4.62)$$

pode ser feito usando a relação e comutação entre o momento e a variável espacial e considerando a relação $\alpha + \beta = 1$, obtemos o operador

$$\hat{O} = f(x) \hat{p} - \frac{i \hbar}{2} \frac{df(x)}{dx} \quad (4.63)$$

Portanto, podemos concluir que nas coordenadas cartesianas bidimensionais, o ordenamento para o termo linear em \vec{p} na equação (4.60), adquire a forma

$$\hat{O} = \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_x^\alpha \hat{p}_x \tilde{A}_x^\beta + \tilde{A}_y^\alpha \hat{p}_y \tilde{A}_y^\beta + \tilde{A}_x^\beta \hat{p}_x \tilde{A}_x^\alpha + \tilde{A}_y^\beta \hat{p}_y \tilde{A}_y^\alpha \right), \quad (4.64)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \hat{O} &= \tilde{A}_x \hat{p}_x + \tilde{A}_y \hat{p}_y - \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\partial \tilde{A}_x}{dx} + \frac{\partial \tilde{A}_y}{dy} \right) = \vec{A} \cdot \hat{\vec{p}} - \frac{i\hbar}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \\ &= \frac{\hbar}{i} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} - \frac{i\hbar}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Substituindo a equação (4.59) na equação (4.65), finalizamos com

$$\begin{aligned} \hat{O} &= \frac{\hbar}{i} \frac{\vec{A}}{M} \cdot \vec{\nabla} - \frac{i\hbar}{2} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{A}}{M} = \frac{\hbar}{i} \frac{\vec{A}}{M} \cdot \vec{\nabla} - \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{M} - \frac{\vec{\nabla} M \cdot \vec{A}}{M^2} \right) = \\ &= \frac{\hbar}{i} \frac{\vec{A}}{M} \cdot \vec{\nabla} - \frac{i\hbar}{2M} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{i\hbar}{2M^2} \vec{\nabla} M \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Escolhemos trabalhar com o calibre de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Portanto, ficamos simplesmente com

$$\hat{O} = \frac{\hbar}{i} \frac{\vec{A}}{M} \cdot \vec{\nabla} + \frac{i\hbar}{2M^2} \vec{\nabla} M \cdot \vec{A}.$$

Vamos supor agora que temos um campo magnético homogêneo na direção z , sendo o campo expresso na forma $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, que pode ser obtido a partir, por exemplo, do potencial vetor no chamado calibre simétrico [45]

$$\vec{A} = \frac{B_0}{2} (-y\hat{i} + x\hat{j}). \quad (4.67)$$

Neste caso, temos

$$\vec{\nabla} M \cdot \vec{A} = \frac{\partial M}{\partial x} A_x + \frac{\partial M}{\partial y} A_y = \frac{B_0}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial x} (-y) + \frac{\partial M}{\partial y} x \right). \quad (4.68)$$

Considerando um caso particular para a massa apresentada com mesma dependência espacial que estudamos na seção anterior, definida como

$$M(x, y) = M_0 \left[1 + \frac{g}{2} (x^2 + y^2) \right], \quad (4.69)$$

temos

$$M_x = \frac{\partial M}{\partial x} = M_0 g x, \quad (4.70)$$

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = M_0 g y, \quad (4.71)$$

isto implica que

$$\vec{\nabla} M \cdot \vec{A} = M_0[-y(gx) + x(gy)] = 0. \quad (4.72)$$

Neste caso, ficamos com

$$\hat{O} = \frac{\hbar}{i} \frac{\vec{A}}{M} \cdot \vec{\nabla} = -\frac{i \hbar B_0}{M} (x \partial_y - y \partial_x). \quad (4.73)$$

Vejamos o que ocorre com esse operador quando ele é aplicado em uma função do tipo $M^{1/2} \chi$. Assim

$$\begin{aligned} (x \partial_y - y \partial_x) (M^{1/2} \chi) &= \frac{x}{2 M^{1/2}} M_y \chi - \frac{y}{2 M^{1/2}} M_x \chi + M^{1/2} (x \partial_y - y \partial_x) \chi = \\ &= \frac{x M_y - y M_x}{2 M^{1/2}} \chi + M^{1/2} (x \partial_y - y \partial_x) \chi. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Substituindo as equações (4.70) e (4.71) na equação (4.74), teremos

$$\frac{x M_y - y M_x}{2 M^{1/2}} = 0, \quad (4.75)$$

e portanto

$$(x \partial_y - y \partial_x) (M^{1/2} \chi) = M^{1/2} (x \partial_y - y \partial_x) \chi. \quad (4.76)$$

Assim, podemos concluir que partindo da hamiltoniana dada na equação (4.58), somos levados à equação de Schrödinger efetiva

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2M(x,y)} \nabla^2 \psi + \frac{\hbar^2}{2M(x,y)^2} \left[\vec{\nabla} M(x,y) \right] \cdot \vec{\nabla} \psi + V_{eff}(\alpha, \gamma, x, y) \psi + \\ + \frac{i \hbar B_0}{M(x,y)} (x \partial_y - y \partial_x) \psi + \frac{e^2 B_0^2 (x^2 + y^2)}{8M(x,y)} \psi = E \psi, \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde

$$V_{eff} = V(x, y) + \frac{\hbar^2}{4M} \left[2 \left(\alpha + \gamma + \alpha\gamma + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{\vec{\nabla} M}{M} \right)^2 - (\alpha + \gamma + 1) \frac{\nabla^2 M}{M} \right], \quad (4.78)$$

de modo a terminarmos em um modelo do tipo

$$-\frac{\hbar^2}{2M(x,y)} \nabla^2 \chi + \frac{i \hbar B_0 e}{2M(x,y)} (x \partial_y - y \partial_x) \chi + V_{eff}(\alpha, \gamma, x, y) \chi = E \chi, \quad (4.79)$$

ou ainda

$$-\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2\chi + \frac{i\hbar B_0 e}{2}(x\partial y - y\partial x)\chi + U_{eff}(\alpha, \gamma, x, y)\chi = \xi\chi, \quad (4.80)$$

onde o potencial efetivo é

$$U_{eff} - \xi = V(x, y)M(x, y) + \frac{\hbar^2}{4}\left[2\left(\alpha + \gamma + \alpha\gamma + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\vec{\nabla}M}{M}\right)^2 + (\alpha + \gamma + 1)\frac{\nabla^2 M}{M}\right] + \frac{e^2 B_0^2}{8}(x^2 + y^2) - EM(x, y). \quad (4.81)$$

Agora, a fim de trabalhar com um modelo com soluções exatas, consideramos o caso particular para a massa definida na equação (4.69) e o ordenamento usado no caso sem interação magnética. Assim

$$\alpha + \gamma + 1 = 0, \quad e \quad \alpha + \gamma + \alpha\gamma + \frac{3}{4} = 0. \quad (4.82)$$

Deste modo

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \beta = 0. \quad (4.83)$$

Com isso, temos

$$U_{eff} - \xi = M_0\left[1 + \frac{g}{2}(x^2 + y^2)\right]V(x, y) - EM_0 - \frac{EM_0g}{2}(x^2 + y^2) + \frac{e^2 B_0^2}{8}(x^2 + y^2). \quad (4.84)$$

Escolhendo o potencial anisotrópico como o que apresentamos na equação (4.44), escrito na forma $V(x, y) = \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2}{2[1 + \frac{g}{2}(x^2 + y^2)]}$, obtemos

$$U_{eff} - \xi = \frac{1}{2}M_0\left[\left(\omega_1^2 - Eg + \frac{e^2 B_0^2}{4M_0}\right)x^2 + \left(\omega_2^2 - Eg + \frac{e^2 B_0^2}{4M_0}\right)y^2\right] - EM_0. \quad (4.85)$$

onde vemos que

$$U_{eff} = \frac{1}{2}M_0\left[\left(\omega_1^2 - Eg + \frac{e^2 B_0^2}{4M_0}\right)x^2 + \left(\omega_2^2 - Eg + \frac{e^2 B_0^2}{4M_0}\right)y^2\right], \quad (4.86)$$

e

$$\xi = EM_0. \quad (4.87)$$

Portanto, podemos reescrever a equação diferencial (4.80) como

$$-\frac{\hbar^2}{2M_0}\nabla^2\chi + \frac{i\hbar B_0 e}{2M_0}(x\partial y - y\partial x)\chi + \frac{1}{M_0}U_{eff}\chi = E\chi. \quad (4.88)$$

Neste ponto, duas alternativas de caminhos de soluções podem ser seguidas para obter as soluções exatas. Uma delas é trabalhar com coordenadas polares. O outro caminho é o que vamos seguir aqui em que mantemos as mesmas coordenadas e usamos uma rotação via transformação dependente do tempo [46]. Assim, concluímos que usando a relação $\sigma = e^{-(i/\hbar)Et}\chi(x, y)$, podemos trabalhar com a correspondente equação de Schrödinger dependente do tempo na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2M_0}\nabla^2\sigma + \frac{i\hbar B_0 e}{2M_0}(x\partial y - y\partial x)\sigma + \frac{1}{M_0}U_{eff}\sigma = i\hbar\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \quad (4.89)$$

onde o potencial efetivo U_{eff} está escrito na equação (4.86). Um procedimento que pode ser usado para desacoplar a equação (4.89) via transformação dependente do tempo foi discutido no Capítulo anterior. Então, considerando o caso do potencial isotrópico e, fazendo procedimento análogo, chegamos na equação diferencial de um oscilador isotrópico bidimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2M_0}\nabla^2\sigma + U_{eff}\sigma = i\hbar\frac{\partial\sigma}{\partial T}. \quad (4.90)$$

Agora, determinamos o espectro de energia de uma partícula na presença de um campo magnético uniforme no calibre simétrico na forma

$$EM_0 = \hbar(n+m+1)\sqrt{\left(\omega^2 - Eg + \frac{e^2 B_0}{4M_0}\right)M_0}, \quad (4.91)$$

onde devemos impor que $Eg < \omega^2 + \frac{e^2 B_0}{4M_0}$ para garantir que o espectro de energia seja real. Neste caso, temos

$$M_0E^2 + Q_{nm}gE - Q_{nm}\left(\omega^2 + \frac{e^2 B_0}{4M_0}\right) = 0, \quad (4.92)$$

onde $Q_{nm} = \hbar(n+m+1)^2$. Assim obtemos espectro de energia para o modelo escrito como

$$E_{nm} = \frac{1}{2M_0}\left(-Q_{nm}g + \sqrt{Q_{nm}^2g^2 + 4M_0\omega^2Q_{nm} + \frac{e^2 B_0}{4M_0}}\right), \quad (4.93)$$

que pode ser reescrito na forma

$$EM_0 = \hbar(n+m+1)\sqrt{(\Omega^2 - Eg)M_0}, \quad (4.94)$$

onde $\Omega^2 = \omega^2 + \frac{e^2 B_0}{4 M_0}$. Devemos impor que $Eg < \Omega^2$ para garantir que o espectro de energia seja real. Neste caso, podemos ver que este sistema obedece a equação (4.54) com ω reescrito como Ω . Assim, podemos verificar que o caso com massa constante é obtido quando levamos o limite onde $g = 0$, recuperando o espectro de energia do oscilador harmônico em um campo magnético homogêneo.

Recorrendo a separação de variáveis usual como

$$\sigma(X_1, Y_1, T) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E T\right) \chi(X_1, Y_1), \quad (4.95)$$

temos

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2M_0} (\nabla^2 \chi) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E T\right) + U_{eff} \chi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E T\right) = \\ & = i \hbar \chi \left(-\frac{i}{\hbar} E T\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E T\right). \end{aligned} \quad (4.96)$$

de modo que a equação acima pode ser expressa para os estados estacionários na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2M_0} \nabla^2 \chi + U_{eff} \chi = E \chi, \quad (4.97)$$

onde $\chi = \chi(X_1, Y_1)$. Usando a separação de variáveis usual, podemos escrever as autofunções a partir da equação (4.24), de forma que

$$\begin{aligned} \chi_{nm}(X_1, Y_1) &= \phi(X_1) \psi(Y_1) = \\ &= \phi[\cos(\alpha)x + \text{sen}(\alpha)y] \psi[-\text{sen}(\alpha)x + \cos(\alpha)y] = \\ &= \frac{(M[\cos(\alpha)x + \text{sen}(\alpha)y, -\text{sen}(\alpha)x + \cos(\alpha)y])^{-1}}{R \sqrt{2^{m+n-1} \pi n! m!}} \times \\ &\times H_m\left(\frac{\sqrt{2}[\cos(\alpha)x + \text{sen}(\alpha)y]}{R}\right) \exp\left[-\left(\frac{\cos(\alpha)x + \text{sen}(\alpha)y}{R}\right)^2\right] \times \\ &\times H_n\left(\frac{\sqrt{2}[-\text{sen}(\alpha)x + \cos(\alpha)y]}{R}\right) \times \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{-\text{sen}(\alpha)x + \cos(\alpha)y}{R}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (4.98)$$

onde $\alpha(T) = -\frac{eB_0}{2M_0}T + c$, c é constante arbitrária de integração e $R = \sqrt{2\hbar/(M_0\sqrt{(\Omega^2 - Eg)M_0})}$. Assim, podemos construir os estados coerentes $SU(2)$ que para este caso que podem ser

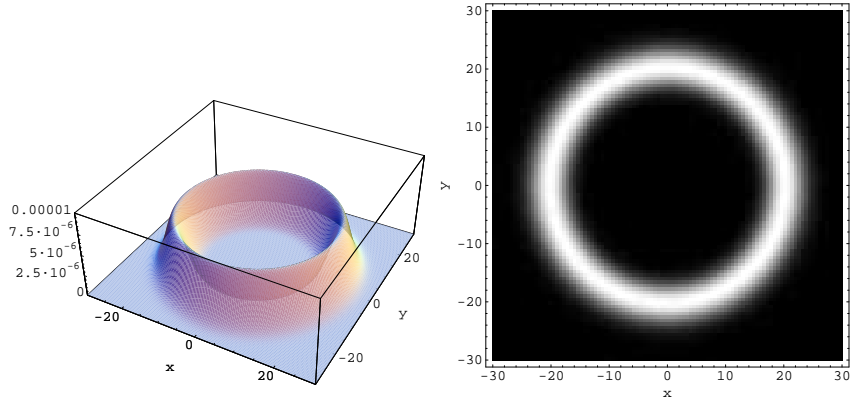


Figura 4.4: *Densidade de probabilidade com $\omega = 1$*

escritos usando a definição [9]-[12] na forma

$$\Theta(x, y, \tau) = \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{\frac{L}{2}}} \sum_{K=0}^L \binom{L}{K}^{1/2} \tau^K \chi_{nm}(X_1, Y_1). \quad (4.99)$$

Podemos ver na Figura 4.4 a densidade de probabilidade para o caso em que consideramos os parâmetros $L = 20$ e $p = q = 1$. Usamos o conjunto de parâmetros: $\hbar = M_0 = A = \omega = g = c = e = B_0 = 1$, $\tau = Ae^{i\phi}$, onde $\phi = \pi/2$ e $T = \pi/4$. Notemos neste caso que o máximo de probabilidade também apresenta uma forma circular e que mesmo as autofunções sendo dependentes do tempo, os estados coerentes $SU(2)$ são independentes do tempo. Neste caso, vemos que considerando diferentes valores para o parâmetro T o máximo de probabilidade mantém a forma circular ocorrendo deste modo o esperado conforme discutimos no Capítulo anterior.

4.4 Comentários

Neste Capítulo apresentamos uma construção geral de uma classe de sistemas bidimensionais com massa dependente da posição em coordenadas cartesianas, analisando um caso exatamente solúvel e discutimos a ambiguidade de ordenamento quântico e algumas propriedades delas. Em particular, construímos os estados coerentes $SU(2)$ e verificamos que eles correspondem aos estados estacionários onde a maior probabilidade está sobre uma circunferência. Verificamos o efeito de um campo magnético sobre o comportamento da partícula no poço de potencial. Uma característica interessante que observamos é que o sistema com massa dependente da posição possui infinitos estados quânticos no poço de potencial, o que não acontece no caso de sistemas com massa constante. Construímos os estados coerentes $SU(2)$ e mostramos que mesmo as autofunções sendo dependentes do

tempo, os estados coerentes $SU(2)$ não dependem do tempo e o máximo de probabilidade preserva a forma circular. Observamos que os estados coerentes $SU(2)$ construídos para o problema sob a presença de campos magnéticos são semelhantes aos estados coerentes $SU(2)$ construídos para o problema isotrópico sem a presença de campos magnéticos. Vimos que este fato ocorreu uma vez que procuramos recuperar as soluções exatas do correspondente problema com massa constante considerando a rotação. Os resultados apresentados neste Capítulo podem ser encontrados na referência [14].

Capítulo 5

Comentários Finais

Motivados por vários trabalhos presentes na literatura que discutem o problema de sistemas quânticos em que massa da partícula depende da posição e o problema de sistemas com limite clássico, efetuamos nesta tese um estudo sistemático a respeito de geração de soluções analíticas em sistemas quânticos exatamente solúveis em que a massa da partícula depende da posição. Por conseguinte, através das soluções que obtivemos, construímos as distribuições para analisar o limite clássico para os sistemas estudados.

Nossa ideia central no Capítulo 2, foi gerar uma classe de sistemas quânticos unidimensionais com massa dependente da posição, isoespectrais ao correspondente sistema com massa constante. Para isto, iniciamos nossos estudos fazendo uma breve revisão do trabalho de Chen e Chen [8]. No trabalho deles vimos que podemos fazer a correspondência clássico-quântica calculando analiticamente a função de distribuição de Wigner para um sistema com massa dependente da posição isoespectral ao correspondente sistema com massa constante. A equação de Schrödinger considerada por eles foi escrita a partir de um determinado ordenamento quântico. Eles construíram a distribuição de Wigner e mostraram que ela tem uma forma gaussiana. Foi verificado que aumentando a frequência do sistema para o caso do estado fundamental, a distribuição de Wigner aumenta na direção no momento linear. No caso dos estados excitados eles mostraram que aumentando os números quânticos a distribuição de Wigner diminui o tamanho, porém a região central mantém a forma gaussiana.

Propusemos estender os estudos de Chen e Chen [8] pela generalização de uma classe de sistemas quânticos exatamente solúveis unidimensionais com massa dependente da posição, isoespectrais ao oscilador harmônico. Escrevemos a equação de Schrödinger com um ordenamento diferente do ordenamento escolhido no caso do trabalho deles. Em nossos estudos, escolhemos alguns exemplos de massa recentemente discutidas na literatura para determinar as soluções exatas para os sistemas considerados. Nossos resultados mostraram que o aumento da frequência no potencial efetivo faz com que o mesmo fique mais con-

finante. Construimos analiticamente as funções de distribuição de Wigner e verificamos que para o caso do ordenamento que escolhemos, as distribuições de Wigner preservam a forma gaussiana, que aumenta na direção do momento quando aumenta a frequência. Já os estados excitados, mostraram diferenças em relação aos resultados mostrados no trabalho de Chen e Chen [8]. Um fato surpreendente nesta situação foi o aparecimento de regiões com maior concentração da distribuição de Wigner do que em volta delas. Notamos um comportamento universal da distribuição de Wigner mesmo quando mudamos drasticamente a massa com dependência na variável espacial.

Pretendemos dar continuidade neste trabalho e o próximo passo consiste em construir uma classe de sistemas exatamente solúveis unidimensionais com massa dependente da posição, isoespectrais ao átomo de hidrogênio e ao potencial de Morse. Pretendemos construir analiticamente as funções de distribuição de Wigner para fazer a correspondência clássico-quântica.

Por outro lado, no Capítulo 3 estendemos nossa proposta ao problema de sistemas quânticos bidimensionais em que a massa da partícula depende da posição. Neste caso, iniciamos nossos estudos a partir de uma equação de Schrödinger com massa constante. Através de uma mudança nas variáveis espaciais determinamos um sistema em que a massa depende da posição. Consideramos alguns exemplos de funções de transformação, sendo eles: na forma polinomial, em coordenadas elípticas cilíndricas e em coordenadas bipolares para obter as soluções exatas para o sistema em estudo. Obtida as soluções exatas escolhemos construir os estados coerentes $SU(2)$ a fim de analisar o limite clássico para o sistema. Para isto, fizemos uma breve revisão do trabalho de Chen e Huang [9]. Vimos que os autores mostraram a eficácia dos estados coerentes $SU(2)$ para fazer a conexão clássico-quântica entre as funções de ondas e a trajetória clássica do oscilador harmônico bidimensional. Para a nossa proposta, mostramos que os estados coerentes $SU(2)$ determinam diferentes regiões com maior probabilidade de encontrar a partícula. No caso que escolhemos as funções de transformação na forma polinomial vimos que a escolha de alguns coeficientes nos restringiram ao caso das soluções em coordenadas parabólicas cilíndricas. Ainda neste exemplo de funções de transformação mostramos que mudando o coeficiente do termo de grau zero (d_2), o máximo de probabilidade dividiu-se em duas regiões que se afastam uma da outra à medida que aumentamos o valor do parâmetro. Vimos que escolhendo as soluções reais na forma de coordenadas elípticas cilíndricas ou coordenadas bipolares mostramos que os estados coerentes $SU(2)$ determinam uma sequência de regiões com maior probabilidade. Neste caso, notamos que isto ocorreu devido ao fato de que as funções de transformação eram periódicas. Procuramos estender nossos estudos analisando o efeito de um campo magnético uniforme sob o comportamento de uma partícula com massa dependente da posição no poço de potencial mapeável no os-

cilador. Neste caso, obtivemos as soluções exatas da equação de Schrödinger com massa constante fazendo uma transformação nas variáveis espaciais via rotação dependente do tempo. A partir das soluções exatas construímos os estados coerentes $SU(2)$. Vimos que a trajetória da partícula apresentou o máximo de probabilidade na forma de um círculo. Em seguida, procuramos fazer uma mudança nas variáveis espaciais e usamos os mesmos exemplos de funções de transformação escolhidas no estudo do problema sem a influência de um campo magnético. Conhecidas as soluções exatas da equação de Schrödinger para o problema sob a influência de um campo magnético, escolhemos construir os estados coerentes $SU(2)$. Vimos que apesar das autofunções serem dependentes do tempo, os estados coerentes $SU(2)$ não dependem do tempo.

Finalmente no Capítulo 4 encerramos nossos estudos e propusemos a análise da ambiguidade de ordenamento quântico para sistemas exatamente solúveis bidimensionais com massa dependente da posição. Iniciamos este Capítulo com uma breve revisão do trabalho de Souza Dutra e Almeida [5] em que foi discutido o problema do ordenamento quântico para sistemas exatamente solúveis unidimensionais com massa dependente da posição. Estendemos os resultados obtidos pelos autores ao problema bidimensional. Verificamos o efeito de um campo magnético sobre o sistema e construímos os estados coerentes $SU(2)$. Nossos resultados mostraram que os estados coerentes determinam o máximo de probabilidade da forma circular e que mesmo o pacote de ondas sendo estacionário os estados coerentes $SU(2)$ não dependem do tempo, ocorrendo deste modo o esperado conforme mostramos no Capítulo anterior.

Pretendemos dar continuidade neste trabalho. O próximo passo consiste em analisar o efeito do potencial de Morse sobre o sistema em estudo e construir os estados coerentes $SU(2)$.

Referências Bibliográficas

- [1] LUTTINGER, J. M.; KOHN, W. Motions of electrons and holes in perturbed periodic fields. **Physical Review**. v.97, n. 4, p.869-883, 1955.
- [2] SLATER, J. C. Electrons in perturbed periodic lattices. **Physical Review**. v.76, p.1592-1601, 1949.
- [3] BASTARD, G. **Wave mechanics applied to semiconductor heterostructure**. New York: Halsted, 1988.
- [4] WEISBUCH, C.; VINTER, B. **Quantum Semiconductor Heterostructures**. New York: Academic Press, 1993.
- [5] de SOUZA DUTRA, A.; ALMEIDA, C. A. S. Exact solvability of potentials with spatially dependent effective masses. **Physics Letters A**. v.275, p. 25-30, 2000.
- [6] de SOUZA DUTRA, A.; HOTT, M.; ALMEIDA, A. S. Remarks on supersymmetry of quantum systems with position-dependent effective masses. **Europhysics Letters**, v.62, p. 8-13, 2003.
- [7] de SOUZA DUTRA, A. Ordering ambiguity versus representation. **Journal of Physics A: mathematical and general**. v.39, p.203-208, 2006.
- [8] CHEN, Z.; CHEN, G. Wigner function on the position-dependent effective Schroedinger equation. **Physica Scripta**. v.73, p.354-358, 2006.
- [9] CHEN, Y. F.; HUANG, K. F. Vortex structure of quantum eigenstates and classical periodic orbits in two-dimensional harmonic oscillators. **Journal of Physics A: mathematical and general**. v.36, p.7751-7760, 2003.
- [10] CHEN, Y. F.; HUANG, K. F. Vortex formation of coherent waves in nonseparable mesoscopic billiards. **Physical Review E**. v.68, p. 066207, 2003.
- [11] CHEN, Y. F. et al. Observation of quantum-classical correspondence from high-order transverse patterns. **Physical Review A**. v.68, p.043803, 2003.

- [12] CHEN, Y. F. et al. Wave representation of geometrical laser beam trajectories in a hemiconfocal cavity. **Physical Review A**, v.69, p. 053807, 2004.
- [13] de SOUZA DUTRA, A.; de OLIVEIRA, J. A. Wigner distribution for a class of isospectral position-dependent mass systems. **Physica Scripta**. v.78, p.035009, 2008.
- [14] de SOUZA DUTRA, A.; de OLIVEIRA, J. A. Two-dimensional position-dependent massive particles in the presence of magnetic fields. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**. v.42, p.025304, 2009.
- [15] WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. **Physical Review**. v.40, p.749-759, 1932.
- [16] HILLERY, M. et al. Distribution functions in physics: Fundamentals. **Physics Reports**. v.106, p. 121-167, 1984.
- [17] GALVÃO, E. F. Discrete Wigner functions and quantum computational speedup. **Physical Review A**. v.71, p.042302, 2005 .
- [18] TERRANEO, M. et al. Quantum computation and analysis of Wigner and Husimi functions: toward a quantum image treatment. **Physical Review E**. v.71, p. 066215, 2005.
- [19] CHRUCINSKI, D.; MLODAWSKI, K. Wigner function and Schrödinger equation in phase-space representation. **Physical Review A**. v.71, p.052104, 2005.
- [20] JIA, C. S. et al. Position-dependent effective mass Schrödinger equations for PT-symmetric potentials. **Journal of Mathematical Chemistry** . v. 43, no.2, p. 435-446, 2008.
- [21] JIA, C. S.; de Souza Dutra, A. Extension of PT-symmetric quantum mechanics to the Dirac theory with position-dependent mass. **Annals of Physics**. v.323, p.566-579, 2008.
- [22] SCHMIDT, A. G. et al. Quantum wave packet revival in two-dimensional circular quantum wells with position-dependent mass. **Physics Letters A**. v.372, p.2774-2781, 2008.
- [23] BAGCHI, B. Position-dependent mass models and their nonlinear characterization. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**. v.40, p.F1041-F1045, 2007.

- [24] CRUZ y CRUZ, S. C. et al. Classical and quantum position-dependent mass harmonic oscillators. **Physics Letters A**. v.369, p. 400-406, 2007.
- [25] SCHMIDT, A. G. Wave-packet revival for the Schrödinger equation with position-dependent mass. **Physics Letters A**. v.353, p.459-462, 2006.
- [26] QUESNE, C. First-order intertwining operators and position-dependent mass Schrödinger equations in d dimensions. **Annals of Physics**. v.321, p.1221-1239, 2006.
- [27] JIA, C. S.; de SOUZA DUTRA, A. Position-dependent effective mass Dirac equations with PT-symmetric and non-PT-symmetric potentials. **Journal of Physics A: mathematical and general**. v.39, p.11877-11887, 2006.
- [28] de SOUZA DUTRA, A.; JIA, C. S. Classes of exact Klein-Gordon equations with spatially dependent masses: regularizing the one-dimensional inversely linear potential. **Physics Letters A**. v.352, p.484-487, 2006.
- [29] PLASTINO, A. R. et al. Supersymmetric approach to quantum systems with position-dependent effective mass. **Physical Review A**. v.60, n.6, p. 4318-4325, 1999.
- [30] CAVALCANTE, F. S. A. et al. Form of the quantum kinetic-energy operator with spatially varying effective mass. **Physical Review B**. v.55, p.1326-1328, 1997.
- [31] CHEN, G.; CHEN, Z. D. Exact solutions of the position-dependent mass Schrödinger equation in D dimensions. **Physics Letters A**. v.331, p.312-315, 2004.
- [32] STAHLHOFEN, A. A. Susy, Gauss, Heun and physics: a magic square? **Journal of Physics A: mathematical and general**. v.37, p.10129-10138, 2004.
- [33] BAGCHI, B. et al. A general scheme for the effective-mass Schrodinger equation and the generation of the associated potentials. **Modern Physics Letters A**. v.19, no. 37, p.2765-2775, 2004.
- [34] BENCHEIKH, K. et al. The extended Thomas-Fermi kinetic energy density functional with position-dependent effective mass in one dimension. **Journal of Physics A: mathematical and general**. v.37, p.10719-10725, 2004.
- [35] YU, J. A; DONG, S. H. Exactly solvable potentials for the Schrödinger equation with spatially dependent mass. **Physics Letters A**, v.325, p.194-198, 2004.

- [36] QUESNE, C.; TKACHUK, V. M. More on a SUSYQM approach to the harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in position and/or momentum. **Journal of Physics A: mathematical and general**. v.37, p.10095-10113, 2004.
- [37] OU, Y. C. et al. Energy eigenvalues for the systems with position-dependent effective mass. **Journal of Physics A: mathematical and general**. v.35, p.4283-4288, 2004.
- [38] KOC, R.; TUTUNCULER, H. Exact solution of position dependent mass Schrödinger equation by supersymmetric quantum mechanics **Annalen der Physik**. v.12, p.684-691, 2003.
- [39] ALHAIDARI, A. D. Solutions of the nonrelativistic wave equation with position-dependent effective mass. **Physical Review A**. v.66, p. 042116, 2002.
- [40] ROY, B.; ROY, P. A Lie algebraic approach to effective mass Schrödinger equations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**. v.35, p.3961-3969, 2002.
- [41] de SOUZA DUTRA, A. et al. Time-dependent non-Hermitian Hamiltonians with real energies. **Europhys Letters**. v.71, p.166-171, 2005.
- [42] GRADSHTEYN, I. S; RYZHIK, I. M. **Table of integrals: series and products**. New York: Academic, 1980.
- [43] ARFKEN, G. **Mathematical methods for physicists**. 2.ed. New York: Academic press, 1970.
- [44] LANDAU, L.; LIFSCHITZ, E. **Física teórica**. vol.3, tomo 1. Moscou: Mir, 1985.
- [45] SAKURAI, J. J. **Advanced quantum mechanics**. Redwood: Addison-Wesley, 1967.
- [46] de SOUZA DUTRA, A.; CHEN, B. K. Feynmans propagator for a charged particle with time-dependent mass in a crossed time-varying electromagnetic field. **Physical Review A**. v.39, p.5897-5902, 1989.
- [47] ALHASSID, Y. The statistical theory of quantum dots. **Reviews of Modern Physics**. v.72, n. 4, p.895-968, 2000.
- [48] BENDANIEL, D. J.; DUKE, C. B. Space-charge effects on electron tunneling. **Physical Review B**. v.152, p.683-692, 1966.

- [49] ZHU, Q. G.; KROEMER, H. Interface connection rules for effective-mass wave functions at an abrupt heterojunction between two different semiconductors. **Physical Review B**. v.27, n.6, p.3519-3527, 1983.
- [50] GORA, T.; WILLIAMS, F. Theory of electronic states and transport in graded mixed semiconductors. **Physical Review**. v.177, p.1779-1182, 1969.
- [51] BASTARD, G. Superlattice band structure in the envelope-function approximation. **Physical Review B**. v.24, p.5693-5697, 1981.
- [52] LI, T. L.; KUHN, K. J. Band-offset ratio dependence on the effective-mass Hamiltonian based on a modified profile of the GaAs-Al_xGa_{1-x}As quantum well. **Physical Review B**. v.47. p.12760-12770, 1993.
- [53] WANNIER, G. H. The structure of electronic excitation levels in insulating crystals. **Physical Review**. v.52, p.191-197, 1957.
- [54] ROJO, O.; LEVINGER, J. S. Integrated cross section for a velocity-dependent potential. **Physical Review**. v.123, p.2177-2179, 1961.
- [55] RAZAVY, M. et al. Analytical solutions for velocity-dependent nuclear potentials. **Physical Review**. v.125, p.269-272, 1962.
- [56] QUESNE, C. Oscillator-Morse-Coulomb mappings and algebras for constant or position-dependent mass. **Journal of Mathematical Physics**. v.49, p.022106, 2008.
- [57] QUESNE, C. Spectrum generating algebras for position-dependent mass oscillator Schrödinger equations. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**. v.40, p.13107-13120, 2007.
- [58] CARINENA, J. F. et al. A quantum exactly solvable non-linear oscillator with quasi-harmonic behaviour. **Annals of Physics**. v.322, p. 2249, 2007.
- [59] GANGULY, A.; NIETO, L. M. Shape-invariant quantum Hamiltonian with position-dependent effective mass through second-order supersymmetry. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**. v.40, p.7265-7281, 2007.
- [60] MUSTAFA, O.; MAZHARIMOUSAVI, S. H. Complexified von Roos Hamiltonians η -weak-pseudo-Hermiticity, isospectrality and exact solvability. **Journal of Physics A: mathematical and theoretical**. v.41, p.244020, 2008.

- [61] TANAKA, T. N-fold supersymmetry in quantum systems with position-dependent mass. **Journal of Physics A: mathematical and general**. v.39, p.219-234, 2006.
- [62] KOC, R. et al. Scattering in abrupt heterostructures using a position dependent mass Hamiltonian. **European Physical Journal B**. v.48, p.583-586, 2005.
- [63] KUZEMSKY, A. L. Works by D. I. Blokhintsev and the Development of Quantum Physics. **Physics of particles and nuclei**. v.39, p.137-172, 2008.
- [64] von ROSS, O. Position-dependent effective masses in semiconductor theory. **Physical Review B**. v.27, no.12, p.7547-7552, 1983.
- [65] CHENG, B. K.; de SOUZA DUTRA, A. Propagator for a harmonically bound charged particle in a constant magnetic field and with the vector potential of a solenoid. **Physics Letters A**. v.123, p.105-109, 1987.
- [66] de SOUZA DUTRA, A.; de SOUZA, C. F.; de ALBUQUERQUE, L. C. The propagator for a charged oscillator with a time-dependent mass in a time-varying electromagnetic field. **Physics Letters A**. v.156, p.371-376, 1991.
- [67] ABDALLA, M. S.; CHOI, J. R. Propagator for the time-dependent charged oscillator via linear and quadratic invariants. **Annals of Physics**. v.322, p.2795-2810, 2007.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)