IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.007/2007

Radiação Cósmica de Fundo em Universos Estatisticamente Anisotrópicos

Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi

Orientador

Dr. Helio Vasconcelos Fagundes

Co-orientador

Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer

Agosto de 2007

Agradecimentos

- Aos meus pais, irmãos e toda minha família por me darem tantas dores de cabeça.
- Aos meus amigos Wanderson Wanzeller, Paulo de Carvalho, Gian de Castro, Genilson de Melo, Aldo Arroyo e Vera do Carmo.
- Ao Prof. Hélio por me dar a ampla liberdade de pesquisar nos temas do meu interesse.
- Ao Germán Gomero, pela orientação não apenas no sentido acadêmico senão também em outros sentidos da vida.
- À Lourdes, por me mostrar que o amor não é simplesmente conexo.
- Ao Márcio de Menezes quem me ensinou programar em C++.
- Ao Armando Bernui pela sua ajuda com o IDL.
- A subcultura *subterrânea* de Lima, onde após muito tempo achei meu lugar.
- À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Diferentemente do acontecido com céus estatisticamente isotrópicos, o estudo dos céus estatisticamente anisotrópicos não têm concentrado muitos esforços no passado. Este fato levou a que os cálculos de observáveis, testes e medidas de parâmetros de modelos cosmológicos estatisticamente anisotrópicos usando a Radiação Cósmica de Fundo (RCF), não atingiram o nível de sofisticação dos modelos de Universo que incluem a hipótese de isotropia estatística. Motivada pelas chamadas *anomalias* que a RCF apresenta em grandes escalas angulares, esta tese estuda o comportamento das flutuações da RCF em Universos onde a hipótese de isotropia estatística não é mais válida. Após a realização de testes estatísticos onde dados medidos pelo WMAP questionam, em certo grau, a isotropia estatística, desenvolvemos um método que permitirá no futuro fazer cálculos rápidos de quantidades associadas às flutuações de temperatura no cenário de topologias não triviais. Estes cálculos permitirão que modelos com este tipo de anisotropia estatística sejam estudados sistematicamente do mesmo modo que é feito no caso de Universos estatisticamente isotrópicos.

Palavras Chaves: Cosmologia; Radiação Cósmica de Fundo; Anisotropia Estatística; Confronto com dados.

Áreas do conhecimento: Cosmologia

Abstract

Differently from statistically isotropic skies, in the past, there have not been many efforts for understanding statistically anisotropic skies. This is the reason why the computations of observables, tests and parameters measurements of statistically anisotropic cosmological models using Cosmic Microwave Background Radiation (CMB), are not as sophisticated as models of the Universe which include the statistical isotropic hypothesis. Motivated by the so-called anomalies observed at large angular scales in CMB, this thesis studies the behavior of the CMB fluctuations in Universes where the statistical isotropic hypothesis has been dropped. After performing statistical tests where WMAP data do not support, up to a certain level, statistical isotropy hypothesis, we develop a method which should allow in the future to perform fast calculations of quantities associated to temperature fluctuations in non-trivial topology scenarios. This calculations will allow that models with this kind of statistical anisotropy to be studied sistematically as statistically isotropic Universes are done.

Índice

Capítulo 1

Introdução

A Radiação Cósmica de Fundo (RCF) é formada por fótons que viajam desde a era da *recombinação**. No seu percurso até sua detecção, essa radiação sofreu diferentes processos que deixaram marcas, em forma de flutuações†, em duas das suas propriedades: a temperatura e a polarização. Tais processos estão relacionados à existência de perturbações gravitacionais no Universo e à existência de espalhamento Compton no Universo primordial.

Enquanto que as flutuações de temperatura são geradas por (i) perturbações presentes na SUE (efeito Sachs-Wolfe [1]), (ii) diferença de densidade entre as diferentes regiões da SUE [2], (iii) existência de velocidades peculiares nos bárions na SUE [3], e (iv) interação com perturbações gravitacionais dependentes do tempo presentes no percurso da RCF desde a SUE até sua detecção (efeito Sachs-Wolfe integrado [1]), as flutuações de polarização são geradas por espalhamento Compton apenas se a radiação de fótons possue momento quadrupolar não nulo [4]-[6]. Como os dois tipos de flutuações são gerados de formas diferentes, elas tornam-se complementares no estudo do Universo.

Nos últimos 40 anos, medidas cada vez mais precisas das flutuações da RCF vêm sendo feitas nas frequências das microondas. No caso da temperatura, vários balões estratosféricos e experimentos situados em terra foram usados para medir flutuações em pequenas escalas angulares [7]-[13]. Em 1992, o satélite COBE obteve medidas de temperatura da RCF em grandes escalas angulares confirmando a existência de anisotropias em escalas cosmológicas [14]-[17]. No caso da polarização,

*A era da *recombinação* do Universo é aquela onde elétrons e prótons se combinaram para formar átomos de hidrogêneo neutro. Ao final da recombinação, a quantidade de elétrons livres era tão pequena que o caminho livre médio para os fótons sofrerem espalhamento Compton tornou-se grande, e como resultado, começaram a viajar quase livremente. A região na qual a RCF começou viajar livremente é chamada de *superfície de último espalhamento* (SUE).

†Ao longo desta tese, usaremos o termo *flutuações da RCF* quando nos referirmos às suas flutuações de temperatura e polarização.

observações foram feitas também em pequenas escalas angulares usando balões e experimentos situados em terra [18]-[20]. Mais recentemente, de 2003 a 2006, medidas de temperatura e polarização com precisão nunca antes vista em grandes, médias e pequenas escalas angulares foram feitas pelo satélite WMAP possibilitando não só a confirmação de várias predições teóricas sobre o Universo, senão também, o teste dos vários modelos cosmológicos e a medição de seus parâmetros [21]-[28].

Com tudo isso, os dados do WMAP deixam ainda várias questões em aberto. Nos próximos anos, uma grande quantidade de experimentos usando balões e instrumentos situados em terra, terão como objetivo fazer medidas mais precisas de polarização [29]. Além deles, o satélite PLANCK que está na fase final de construção e que tem previsão de ser lançado no próximo ano, fará medidas de temperatura e polarização com maior precisão do que o WMAP [30]. Finalmente, existem outros projetos para que nas próximas décadas se realizem estudos mais precisos sobre a RCF (um exemplo disto é a proposta do satélite CMBPOL que tem previsão de lançamento para 2018 [31]).

Para confrontar as predições teóricas com as observações é preciso algum observável (ou observáveis) e seu estimador associado. Testes estatísticos entre o estimador, extraido dos dados, e a observável, calculada teoricamente, levam a aceitar ou rejeitar uma família de modelos cosmológicos. Outros processos, também estatísticos, são necessários para medir os parâmetros e decidirmos por um modelo específico da família.

A observável escolhida desde o início dos experimentos das flutuações de temperatura é o espectro angular de potência, o qual é definido como[‡]:

$$\langle C_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle |a_{lm}|^2 \rangle \,, \tag{1.1}$$

onde os a_{lm}'s são os coeficientes multipolares da expansão

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}) \,, \tag{1.2}$$

sendo $\frac{\delta T}{T}(\hat{n})$ a flutuação de temperatura na direção $\hat{n}$ do céu, $Y_{lm}(\hat{n})$ os harmônicos esféricos avaliados na mesma direção, e onde o símbolo $\langle\ \rangle$ indica um média sobre o *ensemble* de Universos.

Na suposição de que as perturbações gravitacionais são totalmente adiabáticas, um modelo com seis parâmetros: (i) a densidade de matéria $\Omega_m h^2$, (ii) a densidade bariônica $\Omega_b h^2$, (iii) a constante de Hubble H_o, (iv) a amplitude das pertubações

[‡]Nesta tese usamos $\langle C_l \rangle$ para denotar o espectro angular de potência teórico (que é uma média no *ensemble*) e C_l para denotar o espectro angular de potência de cada realização.

Parâmetro	Valor medido
$\Omega_m h^2$	$0.1277^{+0.0080}_{-0.0079}$
$\Omega_b h^2$	0.02229 ± 0.00073
h	$0.732^{+0.031}_{-0.032}$
σ_8	0.958 ± 0.016
n_s	0.089 ± 0.030
τ	$0.761^{+0.049}_{-0.048}$

Tabela 1.1: Valores dos parâmetros do ΛCDM obtidos no melhor ajuste dos dados dos três anos do WMAP [25].

σ_8, (v) o índice espectral das perturbações escalares n_s e (vi) a profundidade ótica τ, ajusta o espectro angular de potência derivado das medidas do WMAP com um alto grau de confiabilidade [25]. Este modelo é chamado *power-law flat* ΛCDM e é atualmente considerado como sendo o modelo padrão da Cosmologia. A partir daqui nos referiremos a ele apenas como ΛCDM.

Segundo o ΛCDM, nosso Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, possui curvatura espacial nula e é composto de matéria (bariônica, e matéria escura em quantidades predominantes quando comparada à matéria bariônica), e em maior quantidade, de energia escura, a qual estaria acelerando a expansão do Universo. De acordo com o ΛCDM, no passado o Universo teria sofrido uma outra fase de expansão violenta chamada fase inflacionária, onde perturbações adiabáticas e invariantes em escala se amplificaram e, por evolução gravitacional, geraram as diferentes estruturas hoje observadas. Na Tabela 1.1 mostram-se os valores dos parâmetros cosmológicos obtidos usando os três anos de dados do WMAP e, na Fig. 1.1, mostra-se o espectro angular de potência obtido usando os mesmos dados comparado ao espectro angular de potência esperado do ΛCDM.

Apesar de que o grau de concordância entre os dados do WMAP e o ΛCDM é alto, estes mesmos dados apresentam comportamentos que caem fora das predições do modelo. Por exemplo:

- Abrem a possibilidade da existência de um certo grau de perturbações de isocurvatura além das adiabáticas (ver por exemplo [32]-[34] e suas referências).

- Aceitam um certo grau de desvio da invariância de escala (ver por exemplo [25, 35]-[37] e suas referências).

- Aceitam a possível existência de não gaussianidade em escalas grandes e pe-

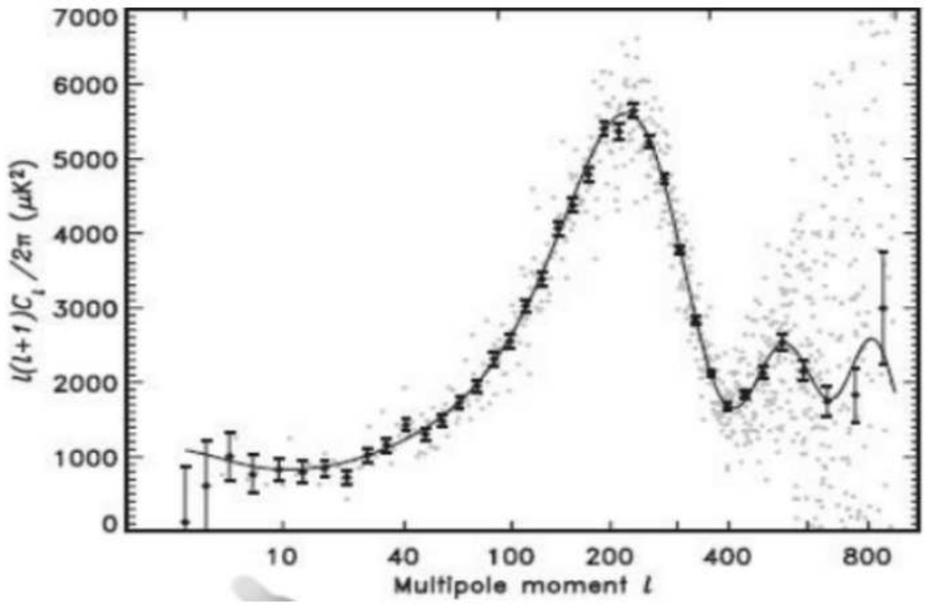


Figura 1.1: Espectro angular de potência do ΛCDM (linha contínua), comparada com os três anos de medidas do WMAP (figura tomada de [25]).

quenas (ver por exemplo [38]-[40, 54] e suas referências).

- Apresentam comportamentos curiosos nas flutuações de temperatura da RCF em grandes escalas angulares (*anomalias*) [24, 41]-[77]

Embora estes comportamentos possam ser interpretados como sendo efeitos de aplicações inadequadas de tratamento de dados, de fontes de contaminação e/ou *foregrounds* residuais pouco ou nada conhecidas, também é possível que alguns deles se devam a causas cosmológicas. Um exemplo disto é a inclusão de modelos inflacionários que produzem desvios da invariância de escala (ver por ex. [78]-[80] e suas referências) e pequenas não gaussianidades (ver por ex. [80]-[82] e suas referências).

Particularmente, se as anomalias das flutuações de temperatura da RCF em grandes escalas angulares têm uma origem cosmológica, poderiamos estar presenciando um sinal de violação do Princípio Cosmológico. O Princípio Cosmológico postula que em grandes escalas o Universo é homogêneo e isotrópico. Ou seja, a distribuição de matéria e energia no Universo é, estatisticamente, a mesma em todos os pontos e em todas as direções. Uma aplicação deste princípio ao campo da RCF, implica que suas anisotropias sejam flutuações aleatórias extraídas de um *ensemble* estatístico isotrópico. Simplificando, pelo Princípio Cosmológico, o Universo seria estatisticamente homogêneo e isotrópico, as funções de correlação medidas nele seriam invariantes por translações e rotações, e não deveriamos observar direções preferenciais nas flutuações da RCF.

Assim, de acordo com o Princípio Cosmológico, o campo da RCF deve ser estatisticamente isotrópico. Este corolario é chamado de Príncipio de Isotropia Estatística (IE) e, se diz que existe anisotropia estatística (AE) se a IE é violada. Tem-se vários possíveis cenários para violação da IE: topologia não trivial do Universo [84]-[87], campos magnéticos primordiais [88]-[91], anisotropia estatística intrínseca às perturbações primordiais [92], Universos localmente anisotrópicos [93]-[96], entre outros (ver por ex. [97]-[100]).

A presente tese é desenvolvida dentro deste contexto com o objetivo de abrirmos caminho no estudo de Universos estatisticamente anisotrópicos como cenário natural para a existência das anomalias da RCF. Ela é organizada da seguinte maneira: no capítulo 2 apresenta-se uma discussão sobre as anomalias conhecidas até hoje e como elas entram em conflito com a familia ΛCDM. No capítulo 3, estuda-se a estatística do campo da RCF em Universos estatisticamente anisotrópicos e suas caracteristicas, assim como discute-se sua diferença com Universos estatisticamente isotrópicos. No capítulo 4, realizam-se testes para ver se os dados do WMAP aceitam ou não o Princípio de IE. No capítulo 5 é feito o cálculo das equações das flutuações de temperatura e, baseando-nos no método da *linha de visão* apresentamos uma solução para os coeficientes multipolares e sua matriz de correlação. No capítulo 6, introduz-se a topologia não trivial como fonte de AE na RCF e apresenta-se um método para calcular a matriz de correlação dos coeficientes multipolares neste cenário. No capítulo 7, escolhemos um *toy model* (um Universo cilíndrico) para reproduzir as anomalias nele usando o método do capítulo 6. Também é sugerido o uso das medidas de AE na RCF como método para detectar a topologia do Universo.

Capítulo 2

Anomalias nas flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo

Desde a liberação dos dados do primeiro ano do WMAP em 2003 [21]-[24] até o presente, vêm aparecendo reportes de comportamentos anômalos dos dados em grandes escalas angulares, isto é, comportamentos que não são compatíveis com o ΛCDM [24, 41]-[77]. Historicamente a primeira destas anomalias, a falta de potência nos baixos multipolos (ver Figura 1.1), já era conhecida desde os tempos do COBE e foi confirmada pelo grupo do WMAP [24]. Justamente estudando esta anomalia, o grupo de Tegmark *et. al.* [41] achou uma curiosa concentração de potência ao redor de um certo eixo no quadrupolo ($l = 2$) e, similarmente, ao redor deum eixo próximo do anterior, para o octupolo ($l = 3$) (ver Figura 2.1). Posteriormente diferentes grupos reanalisaram os dados do COBE e do WMAP, resultando não apenas na confirmação dos reportes anteriores senão também na descoberta de outros tipos de comportamentos anômalos.

As análises dos mapas de CMB têm-se concentrado tradicionalmente no seu espectro angular de potência, no entanto várias das anomalias não se manifestam nesta observável. Por este motivo, vem sendo feito um esforço para procurar novas estatísticas, estimadores e observáveis, e assim extrair informações adicionais às contidas no espectro de potência ([41]-[77],[118]-[121]). Porém, o resultado está sendo uma enorme quantidade de estatísticas que trazem como consequência diferentes graus de significância para as anomalias como é mostrado no capítulo 4.

No presente capítulo discute-se sobre os diferentes comportamentos anômalos conhecidos até hoje e de como eles entram em conflito com o ΛCDM.

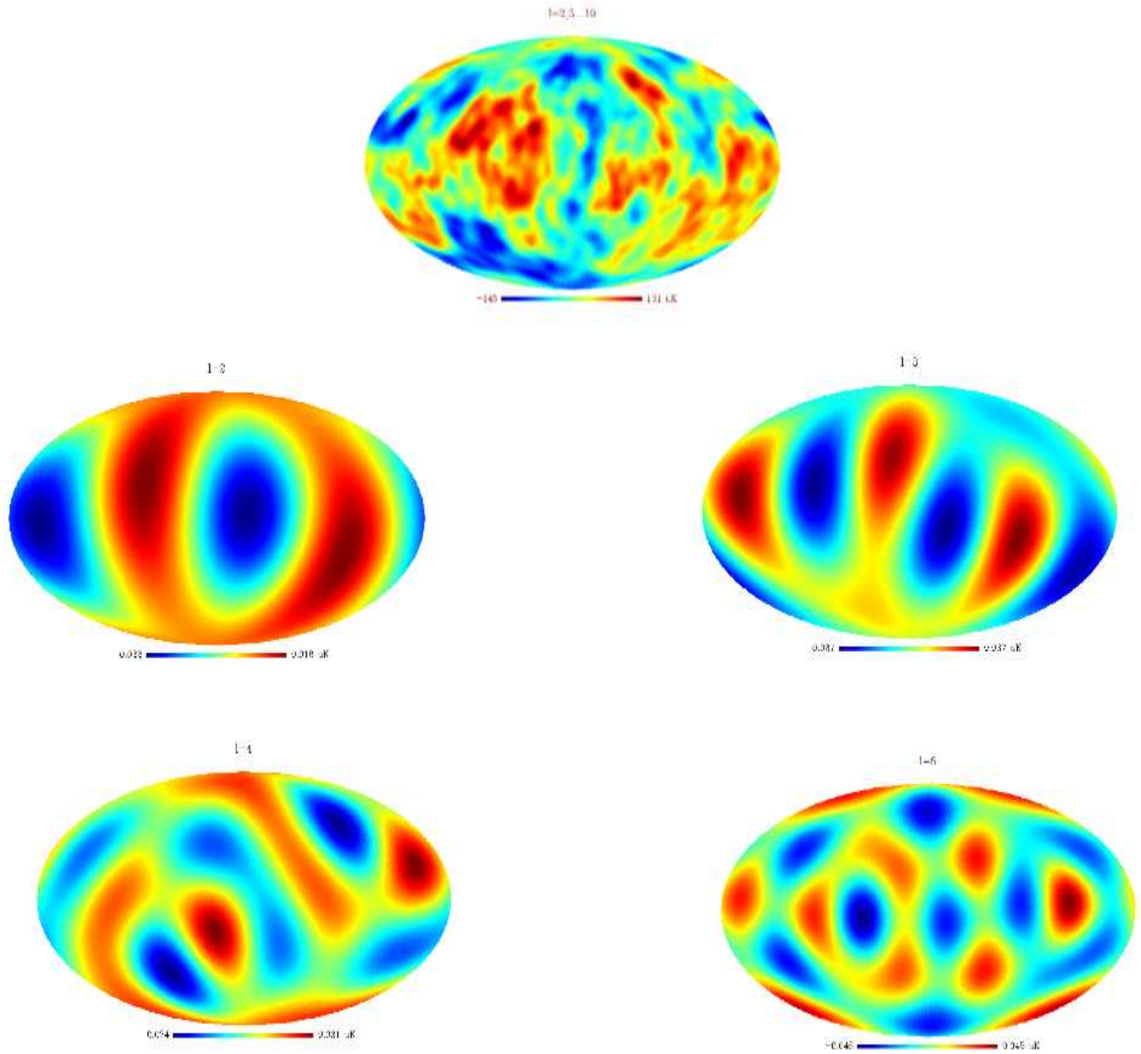


Figura 2.1: Mapas dos multipolos individuais para $l = 2, 3, 4$ até $l = 10$ e da soma de todos eles (parte superior). O alinhamento entre os máximos e mínimos do quadrupolo e octupolo pode ser ver por simples inspecção. Os dados usados para fazer esta figura pertencem ao mapa ILC dos 3 anos do WMAP e foram tomados de [101].

2.1 Caracterização da isotropia estatística

A observável fundamental no estudo das anisotropias de temperatura da RCF é a função de correlação de dois pontos

$$C(\hat{n}, \hat{n}') = \langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\delta T}{T}(\hat{n}') \rangle \,, \tag{2.1}$$

onde $\hat{n}$ e $\hat{n}'$ são pontos na esféra unitária. Substituindo (1.2) em (2.1) obtemos

$$C(\hat{n}, \hat{n}') = \sum_{lm} \sum_{l'm'} \langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle Y_{lm}(\hat{n}) Y^*_{l'm'}(\hat{n}') \,, \tag{2.2}$$

onde usamos o fato de que $\frac{\delta T}{T}(\hat{n})$ é uma função real e portanto igual a sua conjugada complexa. Desta expressão vemos que uma observável equivalente à função de correlação de dois pontos é a matriz de correlação $\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle$. A condição de IE se expressa dizendo que para qualquer rotação de eixos $R \in SO(3)$ vale

$$C(R\hat{n}, R\hat{n}') = C(\hat{n}, \hat{n}') \,. \tag{2.3}$$

isto é, a função de correlação de dois pontos é invariante por rotações.

O nome de IE vem do fato de que $C(\hat{n}, \hat{n}')$ é um valor médio sobre um *ensemble* de universos e portanto a condição de isotropia (2.3) é uma exigência estatística. Cada realização do *ensemble*, em geral não vai satisfazer (2.3), mas as propriedades estatísticas de todo o *ensemble* são isotrópicas.

Como $C(\hat{n}, \hat{n}')$ é invariante por rotações, temos que esta função só pode depender do ângulo entre $\hat{n}$ e $\hat{n}'$, ou seja, do produto escalar $\hat{n} \cdot \hat{n}'$. De esta maneira, podemos expandir $C(\hat{n}, \hat{n}')$ em termos de polinômios de Legendre na forma

$$C(\hat{n}, \hat{n}') = \sum_l B_l P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') = 4\pi \sum_l \frac{1}{2l+1} B_l Y_{lm}(\hat{n}) Y^*_{l'm'}(\cdot \hat{n}') \,, \tag{2.4}$$

onde usamos a fórmula (B.13).

Comparando (2.2) e (2.4), e utilizando a independência linear dos harmônicos esféricos obtemos que a condição de IE em termos da matriz de correlação dos $a'_{lm}s$ é

$$\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle = \langle C_l \rangle \delta_{ll'} \delta_{mm'} \,, \tag{2.5}$$

onde $\langle C_l \rangle = \frac{4\pi}{2l+1} B_l$ é o espectro angular de potência teórico (1.1). Observe que no caso de IE temos que para quaisquer $-l \leq m \,, m' \leq l$ vale

$$\langle |a_{lm}|^2 \rangle = \langle |a_{lm'}|^2 \rangle \,, \tag{2.6}$$

e portanto neste caso podemos escrever

$$\langle C_l \rangle = \langle |a_{lm}|^2 \rangle \,, \qquad -l \leq m \leq l \,. \tag{2.7}$$

A função de correlação de dois pontos toma então a forma

$$C(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) \langle C_l \rangle P_l(cos\theta) \,, \tag{2.8}$$

onde $\theta = \hat{n} \cdot \hat{n}'$. A condição (2.3) pode ser verificada directamente usando as matrizes de Wigner para transformar os harmônicos esféricos segundo (B.24).

A função

$$C(\theta) \equiv \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) \langle C_l \rangle P_l(cos\theta) \tag{2.9}$$

é chamada de função de correlação angular. Esta função é equivalente à função de correlação de dois pontos apenas no caso de IE, da mesma forma que o espectro angular de potência $\langle C_l \rangle$ é equivalente à matriz de correlação $\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle$ apenas nesse tipo de modelos. Temos então que num Universo com IE toda a informação relevante sobre as anisotropias de temperatura da RCF se encontra no seu espectro angular de potência, ou equivalentemente, na sua função de correlação angular. Uma generalização deste fato incluindo polarização será feito no capítulo seguinte.

2.2 Falta de potência nos baixos multipolos

No contexto de Universos com IE existêm duas formas de ver esta anomalia. Uma, usando o espectro angular de potência e a outra, a função de correlação angular. No espectro de potência, a falta de potência é vista quando seu valor no multipolo em questão é menor que o previsto pelo modelo levando em conta a variância cósmica. Comparando os dados com o ΛCDM, achou-se que existe um valor baixo para o quadrupolo ($l = 2$), octupolo ($l = 3$) [24], [41]-[43], e em menor grau para o hexadecupolo $l = 4$ [42].

O desencontro entre as observações e o ΛCDM para esta anomalia parece ser mais crítico na função de correlação angular. Existe uma relação entre as escalas angulares de $C(\theta)$ e as escalas multipolares l's do C_l (ver por ex. [134])

$$\theta \sim \frac{180^o}{l} \,. \tag{2.10}$$

Por exemplo, $l = 2$, $l = 3$ e $l = 4$ correspondem a escalas angulares de $\theta = 90^o$, $\theta = 60^o$ e $\theta = 45^o$ respectivamente. Da figura 2.2 ve-se que para estes ângulos existe maior correlação que a esperada, sugirindo assim, que uma perda de potência nos

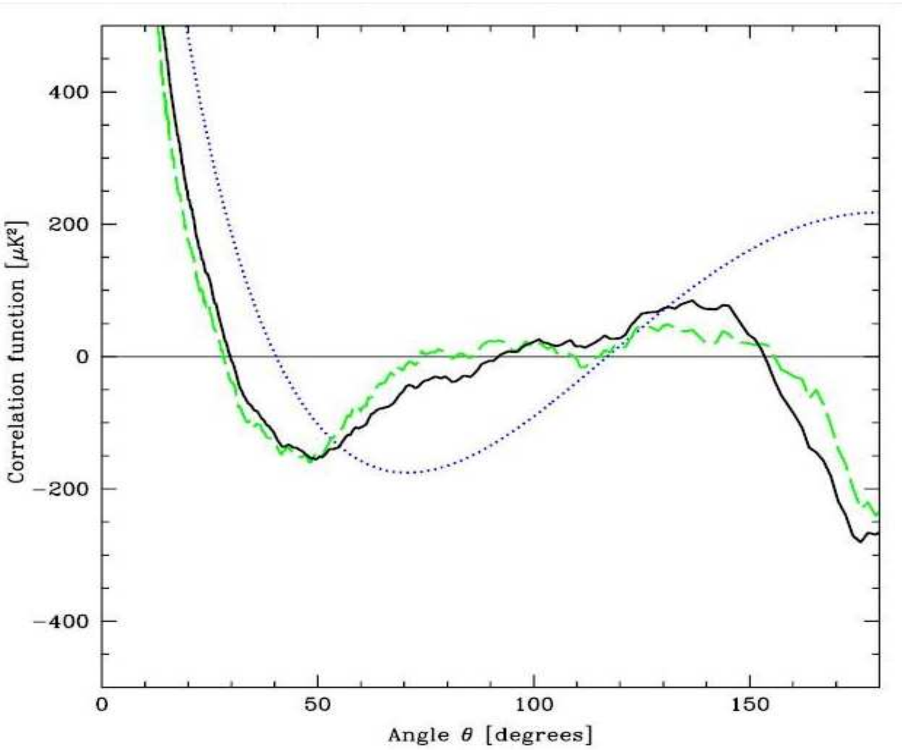


Figura 2.2: Função de correlação angular extraida dos dados do WMAP. A linha contínua (negra) corresponde ao mapa TOH [102], a linha pontilhada (azul) corresponde ao ΛCDM e a linha tracejada (verde) corresponde ao mesmo mapa [102] mas com cortes galácticos (figura tomada de [41]).

baixos multipolos implicaria uma maior correlação entre flutuações de temperaturas em sua escala angular respectiva.

Quando os baixos valores do espectro angular de potência foram observados na década passada pelo COBE, foram atribuidos a possíveis erros sistemáticos no experimento. Porém, a confirmação feita pelo WMAP nestes três últimos anos descartou essa possibilidade. Outra associação que se faz é que contaminações no plano galáctico estariam causando esta falta de potência, mas diversos estudos usando o espectro angular de potência [24, 41, 43] e a função de correlação angular [42] concluem que embora os valores dos multipolos baixos dependem destas contaminações, ainda continuam por de baixo das esperadas.

Simulações mostram que a probabilidade disto acontecer é de 0.0015, ou seja apenas 0.15% de realizações de Universos ΛCDM teriam um valor tão baixo para quadrupolo e octupolo [24]. Esta probabilidade, assim como os valores dos C_l's medidos, variam dependendo do tipo de método e estimador usado. Na tabela 2.1 apresentam-se os valores máximos e mínimos reportados até agora para o caso do

	Valor máximo	Fonte	Valor mínimo	Fonte
C_2 (μK^2)	211.12	grupo TOH [41]	129.22	grupo WMAP [22]
C_3 (μK^2)	551.56	grupo WMAP [22]	320.34	grupo WMAP [22]

Tabela 2.1: Valores máximos e mínimos do espectro de potência para o quadrupolo e octupolo reportados até agora. O valor dos mesmos no ΛCDM são $C_2 = 1278.94\,\mu K^2$ e $C_3 = 590.91\,\mu K^2$.

quadrupolo (C_2) e octupolo (C_3).

2.3 Eixos preferenciais e alinhamentos

Sendo que no ΛCDM as flutuações da RCF são realizações de um campo aleatório isotrópico e gaussiano, os coeficientes multipolares a_{lm}'s são variáveis aleatórias estatisticamente independentes entre si. Ou seja, para uma escala l_o dada, as realizações não dependem nem das outras escalas (l's) e nem das direções (m's). Esta característica de Universos com IE é vista na forma diagonal da matriz de correlação dos $a'_{lm}s$ dada pela expressão (2.5), e têm como consequência que os máximos e mínimos de cada multipolo estejam distribuídos isotropicamente em todo o céu.

No entanto, os dados do WMAP não mostram este comportamento e, de fato, tem-se observado uma supressão de certos coeficientes multipolares $a'_{lm}s$ (ver Tabela 2.2). Esta supressão leva a um alinhamento dos máximos e mínimos em torno de eixos preferenciais e, o que é mais intrigante ainda, no caso do quadrupolo e octupolo, estes dois eixos estão quase na mesma direção apresentando um alinhamento entre eles (ver por ex. [41, 43, 73] e suas referências). Marginalmente, alinhamentos entre outros multipolos também foram reportados, por exemplo entre $l = 3$ e $l = 4$ [73] ou entre $l = 3$ e $l = 5$ [64].

A diferença da falta de potência no C_l, os alinhamentos não têm uma observável definida para quantificá-los. Até o presente têm sido estudados usando duas abordagens: multipolos vetoriais (veja por exemplo [44, 65, 73], entre outros) e coeficientes multipolares (veja por exemplo [41, 43, 72], entre outros). Os resultados dos estudos utilizando as duas abordagens confirmam a existência de direções prefereciais e alinhamentos. Como acontece com todas as anomalias, os valores associados aos alinhamentos dependem do método, do estimador e da observável usada, mas o valores aproximados indicam que o quadrupolo tem um eixo preferencial na direção $\sim(-0.1113, -0.5055, 0.8556)$ e o octupolo na direção $\sim(-0.2459, -0.3992, 0.8833)$.

Multipolo	m	$Re(a_{lm})$ (μK)	$Im(a_{lm})$ (μK)
$l = 2$	0	11.48	0
	1	-0.53	4.86
	2	-14.41	-18,80
$l = 3$	0	-5.99	0
	1	-13.05	2.45
	2	22.03	0.7
	3	-11.24	33.46

Tabela 2.2: Valores dos coeficientes multipolares para o quadrupolo e octupolo extraídos do mapa ILC dos tês anos de dados do WMAP [101].

O ângulo de alinhamento entre eles é de $\sim 10^o$ e a probabilidade disto acontecer se o Universo for ΛCDM é de ~ 0.015 (ver por ex. [41, 43, 57, 72]).

2.4 Simetrias nos multipolos baixos

As simetrias nos multipolos observam-se quando para um dado multipolo l, os coeficientes a_{lm} têm certas características. Por exemplo, a planaridade acontece quando os coeficientes tipo $a_{l|l|}$ são dominantes e a simetria cilíndrica aparece quando a potência está concentrada no multipolo a_{l0}. Foi reportado a existência de planaridade no octupolo com probabilidade associada de 0.07 no ΛCDM [43, 64, 72]. Porém, análises usando multipolos vetoriais não confirmam esta anomalias para $l = 3$, mas acham planaridade em $l = 4$ e $l = 5$ [73]. Marginalmente, planaridade em $l = 6$ também tem sido reportada [49].

2.5 Assimetrias entre hemisférios

Assim como estuda-se o céu inteiro, pode-se também estudar apenas regiões limitadas do céu. Quantidades como o espectro angular de potência e a função de correlação angular podem ser calculadas nestas regiões. Estudando o céu desta forma, encontrou-se que a potência no hemisfério galáctico sul é maior do que a do norte (ver por ex. [48, 50, 74, 70]). Esta assimetria parece ser máxima num sistema de coordenadas com o polo norte em $(\theta, \phi) = (80^o, 57^o)$ em coordenadas galácticas e apenas $\sim 0.5\%$ das realizações de um Universo tipo ΛCDM teriam esta característica [48, 50, 52, 66, 63]. Também existêm reportes de existência de diferença de medidas de não gaussianidade entre hemisférios norte e sul (Ver por ex. [40, 50, 55, 63]).

2.6 Comentários

Os primeiros estudos que levaram a reportar as anomalias [24, 41]-[74] foram feitos usando os dados do primeiro ano do WMAP [21]-[24]. As análises dos dados dos três anos [25]-[28] obtiveram basicamente os mesmos resultados [75]-[77].

Os dados analisados foram extraídos de mapas de temperatura que passaram por um processo de limpeza para tirar o ruído dos *foregrounds*. Na atualidade existem quatro grupos que disponibilizam seus mapas do céu inteiro (limpados por métodos diferentes): a equipe do WMAP (ILC) [21, 101], o grupo de Tegmark *et. al.* (TOH) [41, 102], o de Eriksen *et.al.* (QILC)[49, 103] e o de Park *et. al.* [67]. Todos eles, exceto o terceiro, têm versões para os três anos de medidas do WMAP. Apesar de que estes dados foram tratados, podem ainda ter contaminações residuais no plano galáctico, para evitar estas contaminações residuais são aplicadas máscaras que tiram parte do céu nessas regiões.

Estudos da sensibilidade aos diferentes mapas, máscaras e possíveis fontes residuais de contaminação, concluem que embora exista uma dependência no aspecto quantitativo, esta é subdominante, e que a morfologia e as características dos multipolos baixos são quase inalteradas [41]-[43],[57, 72, 104]. Além disto, as anomalias foram observadas também nos dados do COBE [57], o que sugiere fortemente que elas não se devem a erros sistemáticos dos experimentos.

Considerando cada anomalia estatisticamente independente entre si, acha-se que a probabilidade de todas elas acontecerem no ΛCDM é da ordem de $\sim 10^{-8}$. Porém, existe a possibilidade que elas estejam correlacionadas, ou que, sejam assinaturas diferentes de uma mesma causa. As pesquisas para entender melhor estas anomalias, suas causas e a existência de correlações entre elas são, e devem ser, de natureza estatística. O fato de vivermos apenas numa única realização de um *ensemble* de universos faz que precisemos de simulações para estudar as propriedades estatísticas da RCF.

Para fazer simulações de Universos que apresentem comportamentos anômalos é necessário supor *a priori* uma causa (ou causas). Existem várias hipóteses para as causas: tratamentos inadequados dos dados [45, 51, 60, 142], fontes de contaminação pouco ou nada conhecidas (ex. emissão Sunyaev-Zel'dovich do halo galático ou do *supercluster* local [43], ou fontes extragalácticas [60]), causas astrofísicas [98]-[100] e causas cosmológicas [78]-[97].

As causas cosmológicas levam à existência de direções preferencias e com elas à existência de AE. No seguinte capítulo estudaremos comportamentos genéricos das flutuações da RCF em Universos com violação da IE, sua diferença com o caso estatisticamente isotrópico e as assinaturas que a AE deixaria na RCF. O objetivo desse estudo é situar qualitativamente os Universos estatisticamente anisotrópicos como cenários para a existência das anomalias discutidas neste capítulo.

Capítulo 3

Estatística da Radiação Cósmica de Fundo

As flutuações da RCF são descritas por campos aleatórios na superfície de uma esfera (SUE). Vários modelos inflacionários predizem que sua distribuição é gaussiana (ver por ex. [105]-[107] e suas referências). Porém, algumas evidências de pequenos desvios de gaussianidade têm sido reportadas ([38]-[40],[54] entre outros). Como nesta tese estamos interessados apenas na violação de IE da RCF, vamos considerar que suas flutuações são completamente gaussianas.

Utilizando a conhecida expansão em modos E e B da polarização, as quantidades estatísticas mais comuns nas análises dos mapas de RCF são revisadas para o caso de modelos estatisticamente anisotrópicos. Desta maneira, chega-se a alguns comportamentos genéricos das flutuações do campo da RCF que são característicos apenas deste tipo de modelos e não estão presentes em Universos com IE. Por exemplo, a variância cósmica cresce quanto maior o grau de AE e é sempre maior ou igual que nos modelos estatisticamente isotrópicos. Eventualmente, aparecem também comportamentos padrões similares em diferentes escalas e direções no espaço harmônico, assim como direções preferenciais. Finalmente, correlações entre o modo de temperatura T e o modo de polarizaçso B, e entre os modos de polarização E e B podem existir em modelos com AE.

Uma questão importante a notar é que todos os resultados deste capítulo são obtidos de forma genérica, apenas diferenciando modelos com e sem IE.

3.1 Expansão harmônica da polarização

Para estudar as propriedades das flutuações de campo da RCF é usado o formalismo dos parâmetros de Stokes*. Neste formalismo um feixe de radiação é caracterizado completamente por quatro parâmetros I, Q, U e V. O parâmetro I indica a inten-

*Uma revisão do formalismo de Stokes para estudar radiação polarizada é apresentada no apêndice A, assim como também, as propriedades dos parâmetros de Stokes usadas neste capítulo.

sidade total da radiação, enquanto que os outros parâmetros indicam a intensidade da radiação polarizada de cada tipo. Se a radiação for linearmente polarizada, o parâmetro V é nulo, mas se for circularmente polarizada, os paramêtros Q e U são nulos. Em qualquer outro caso de polarização, os três parâmetros são não nulos.

No contexto da RCF os parâmetros de Stokes denotam flutuações e assim pode-se falar de intensidade ou temperatura indistintamente[†]. As anisotropias de temperatura presentes na era de recombinação fazem que a RCF sofra polarização por espalhamento Compton e, como resultado deste processo aparece uma polarização que é apenas linear ($V = 0$) [4]-[6]. Como é mostrado em (A.12) do apêndice A, a intensidade I é invariante por rotações, não depende do sistema de coordenadas e a expansão em harmônicos esféricos (1.2) pode ser feita. Também de (A.12) ve-se que no caso dos parâmetros Q e U não acontece a mesma coisa, pois eles não são invariantes por rotações. De fato, dada uma rotação R de um ângulo α em torno do eixo de propagação do feixe temos

$$\begin{aligned} Q^R &= Q\, cos2\alpha + U\, sen2\alpha\,, \\ U^R &= -Q\, sen2\alpha + U\, cos2\alpha\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

e portanto os parâmetros Q e U dependem do sistema de coordenadas escolhido. Esta dependência faz com que um estudo do céu completo envolvendo Q e U seja complicado. Porém, existem dois formalismos, que são equivalentes, para evitar este problema: o formalismo dos modos E e B (ver por ex. [108, 109]) e o formalismo dos modos $Curl$ e $Grad$ (ver por ex. [110]). Nesta tese, usaremos o primeiro.

O sistema de coordenadas escolhido para medir Q e U é $(\hat{n}, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$, onde $\hat{n}$ é uma direção do céu e $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$ são vetores ortogonais a $\hat{n}$ na SUE. A partir deles se costroem as quantidades $Q \pm i\, U$ que, por rotações, se transformam como

$$(Q \pm i\, U)^R = e^{\mp 2\, i\alpha}(Q \pm i\, U)\,. \tag{3.2}$$

Estas quantidades têm a forma de funções de peso de spin ± 2. Diz-se que uma função $f(\hat{n})$ definida sobre uma esfera tem peso de spin s se sua lei de transformação por uma rotação R de um ângulo α em torno de $\hat{n}$ é $f^R(\hat{n}) = e^{-i\, s\, \alpha} f(\hat{n})$. Note que apenas as funções de spin $s = 0$ são invariantes por rotações.

Como toda função de spin s pode ser expandida em termos de harmônicos esféricos de spin s da mesma forma que em (B.5)[‡] [111, 112], temos expansões para

[†]Numa radiação, a intensidade e a temperatura estão relacionados por $I \propto T^4$, enquanto que suas flutuações estão relacionadas por $\delta I \propto \delta T$.

[‡]No apêndice B apresentam-se as propriedades das funções e harmônicos esféricos de peso de spin s usadas nesta tese.

$Q \pm i\,U$, a saber

$$
\begin{aligned}
Q(\hat{n}) + i\,U(\hat{n}) &= \sum_{lm} a^{2}_{lm}\ {}_{2}Y_{lm}(\hat{n})\,, \\
Q(\hat{n}) - i\,U(\hat{n}) &= \sum_{lm} a^{-2}_{lm}\ {}_{-2}Y_{lm}(\hat{n})\,. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

${}_{\pm 2}Y_{lm}(\hat{n})$ são os harmônicos esféricos de spin ± 2. Os índices superiores nos a_{lm} indicam que são coeficientes de expansões multipolares em harmônicos esféricos de spin 2 e -2. Observe que de (3.3) e (B.7) mostra-se que $a^{\pm 2\,*}_{lm} = (-1)^m a^{\pm 2}_{l-m}$.

No contexto das funções de peso de spin s, existem operadores que aumentam ($\eth$) e diminuem ($\eth^*$) o spin de funções numa esfera. Estes operadores estão definidos em (B.2) e são usados em (3.3) para construir quantidades de spin 0. As funções de spin 0 resultantes podem ser expandidas nos conhecidos harmônicos esféricos de spin 0,

$$
\begin{aligned}
(\eth^*)^2 (Q + i\,U) &= \sum_{lm} a_{2\,,lm} Y_{lm}(\hat{n})\,, \\
(\eth)^2 (Q - i\,U) &= \sum_{lm} a_{-2\,,lm} Y_{lm}(\hat{n})\,. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Note que agora os coeficientes multipolares correspondem a uma expansão em harmônicos esféricos de spin 0, o índice inferior apenas indica que foram construidos a partir de funções de spin ± 2.

Usando (B.6) em (3.3) e (3.4), acha-se uma relação entre os coeficientes a_{lm} de (3.3) e (3.4)

$$
a^{\pm 2}_{lm} = \left[\frac{(l \pm 2)!}{(l \mp 2)!} \right]^{\frac{1}{2}} a_{\pm 2\,,lm}\,. \qquad (3.5)
$$

Por outro lado, usando (B.7) e (3.4) mostra-se que $[(\eth^*)^2 (Q + i\,U)]^* = (\eth)^2 (Q - i\,U)$, o que permite combinar estas duas quantidades para separar sua parte real (que é chamado de modo E) e sua parte imaginária (que é chamado de modo B)

$$
\begin{aligned}
E(\hat{n}) = \frac{1}{2}[(\eth^*)^2 (Q + i\,U) + (\eth)^2 (Q - i\,U)] &= \sum_{lm} a^{E}_{lm} Y_{lm}(\hat{n})\,, \\
B(\hat{n}) = \frac{1}{2i}[(\eth^*)^2 (Q + i\,U) - (\eth)^2 (Q - i\,U)] &= \sum_{lm} a^{B}_{lm} Y_{lm}(\hat{n})\,, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
a^{E}_{lm} &= \frac{1}{2}(a_{2\,,lm} + a_{-2\,,lm})\,, \\
a^{B}_{lm} &= -\frac{i}{2}(a_{2\,,lm} - a_{-2\,,lm})\,. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Como os modos $E(\hat{n})$ e $B(\hat{n})$ são combinações das quantidades de spin 0, as quantidades $(\eth^*)^2(Q+i\,U)$ e $(\eth)^2(Q-i\,U)$ não dependem do sistema de coordenadas escolhido. Como consequência, uma expansão do mesmo tipo que (1.2) pode ser feita para cada modo.

Por outro lado, como pode ser visto em (A.13), U não é invariante por transformações de paridade. Com ajuda deste resultado e com (3.6) encontra-se a lei de transformação dos modos elétrico e magnético da polarização,

$$\begin{aligned} E(\hat{n}) &= E(\hat{n})\,, \\ B(\hat{n}) &= -B(\hat{n})\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Com isto, a partir de agora usaremos os modos T, E e B para caracterizar completamente a RCF em todo o céu.

3.2 Gaussianidade, função de correlação de dois pontos e matriz de correlação

Segundo vários modelos inflacionários as flutuações primordiais são gaussianas (ver por ex. ([105]-[107] e suas referências). Porém, algumas evidências de não gaussianidade têm sido reportadas ([38]-[40],[54] entre outros). Nesta tese, estamos interessados nas assinaturas que a AE deixaria na RCF e por esta razão, vamos supor que as flutuações da RCF são completamente gaussianas.

Escrevemos as flutuações do campo da RCF em notação matricial como

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} T \\ E \\ B \end{pmatrix}\,, \tag{3.9}$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz com três elementos X no espaço das flutuações ($X = T, E, B$), e cada elemento X é um vetor de, em princípio infinitos elementos, mas que na prática tem N_{pix} elementos, sendo N_{pix} o número de pixels na qual a SUE é dividida. Assim, $\mathbf{I}$ é uma matriz de $3N_{pix} \times 1$ que tem uma distribuição multinormal do tipo

$$P(\mathbf{I}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3N_{pix}} det(\mathbf{M})}}\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{I}^\dagger\,\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{I}}\,, \tag{3.10}$$

onde $\mathbf{M} = \langle \mathbf{I}\,\mathbf{I}^\dagger \rangle$ é a matriz de correlação entre os elementos da matriz $\mathbf{I}$ [113]. Como já tinhamos visto, $\langle\ \rangle$ significa uma média de todas as possíveis realizações do campo aleatório, isto é, do *ensemble*. A forma explícita desta matriz de correlação é

$$\langle \mathbf{I}\,\mathbf{I}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle T(\hat{n})T(\hat{n}')\rangle & \langle T(\hat{n})E(\hat{n}')\rangle & \langle T(\hat{n})B(\hat{n}')\rangle \\ \langle E(\hat{n})T(\hat{n}')\rangle & \langle E(\hat{n})E(\hat{n}')\rangle & \langle E(\hat{n})B(\hat{n}')\rangle \\ \langle B(\hat{n})T(\hat{n}')\rangle & \langle B(\hat{n})E(\hat{n}')\rangle & \langle B(\hat{n})B(\hat{n}')\rangle \end{pmatrix}\,. \tag{3.11}$$

Cada elemento

$$C^{XX'}(\hat{n},\hat{n}') \equiv \langle X(\hat{n})X(\hat{n}')\rangle \tag{3.12}$$

de (3.11) é uma matriz $N_{pix} \times N_{pix}$ que no contexto da RCF é chamada de função de correlação de dois pontos dos modos XX' ($X, X' = T, E, B$). Note que a matriz de (3.11) leva informação sobre dois tipos de correlações, as correlações entre os diferentes modos da RCF e as correlações entre as diferentes direções no céu.

Como o campo $\mathbf{I}$ é suposto gaussiano, suas propriedades estatísticas são dadas apenas pela função de correlação de dois pontos. Suas funções de correlação de $2N+1$ pontos são nulas e, suas funções de correlação de $2N$ pontos são expressas como combinações de funções de dois pontos (teorema de Wick). Em geral, num campo gaussiano y

$$\langle y_{n_1}y_{n_2}y_{n_3}...y_{n_{2N}}\rangle = \sum_{p_1,p_2,...p_{2N}=n_1,n_2,...n_{2N}} \langle y_{p_1}y_{p_2}\rangle\langle y_{p_3}y_{p_4}\rangle...\langle y_{p_{2N-1}}y_{p_{2N}}\rangle\,. \tag{3.13}$$

Por exemplo, a função de correlação de quatro pontos expressa como combinação das funções de correlação de dois pontos é

$$\langle y_{n_1}y_{n_2}y_{n_3}y_{n_4}\rangle = \langle y_{n_1}y_{n_2}\rangle\langle y_{n_3}y_{n_4}\rangle + \langle y_{n_1}y_{n_3}\rangle\langle y_{n_2}y_{n_4}\rangle + \langle y_{n_1}y_{n_4}\rangle\langle y_{n_2}y_{n_3}\rangle\,. \tag{3.14}$$

O estudo da RCF geralmente é feito no espaço harmônico, o qual é relacionado ao espaço das posições pela expansão

$$X(\hat{n}) = \sum_{lm} a^X_{lm} Y_{lm}(\hat{n})\,, \tag{3.15}$$

com

$$a^X_{lm} = \int d\Omega Y^*_{lm}(\hat{n})X(\hat{n})\,. \tag{3.16}$$

Com isto, as propriedades estatísticas de $X(\hat{n})$ são herdadas pelos coeficientes multipolares a^X_{lm}. Da mesma forma que no caso de $\mathbf{I}$, escrevemos em notação matricial

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^T_{lm} \\ a^E_{lm} \\ a^B_{lm} \end{pmatrix}\,. \tag{3.17}$$

onde cada elemento a^X_{lm} de $\mathbf{a}$, é um vetor de, em princípio infinitos elementos, mas que na prática tem $(l_{max}+1)^2$[§] elementos, sendo l_{max} a escala mínima que quer se estudar. Assim, $\mathbf{a}$ também obedece uma distribuição gaussiana

$$P(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3(l_{max}+1)^2} det(\mathbf{M})}}\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{a}^\dagger\,\mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{a}}\,, \tag{3.18}$$

[§]Para cada escala l tem-se $2l+1$ elementos. Até uma escala l_{max} tem-se $\sum_{l=0}^{l_{max}}(2l+1) = (l_{max}+1)^2$ elementos.

com matriz de correlação $\mathbf{M} = \langle \mathbf{a}\,\mathbf{a}^\dagger \rangle$ cuja forma explícita é

$$\langle \mathbf{a}\,\mathbf{a}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle a^T_{lm} a^{*\,T}_{l'm'} \rangle & \langle a^T_{lm} a^{*\,E}_{l'm'} \rangle & \langle a^T_{lm} a^{*\,B}_{l'm'} \rangle \\ \langle a^E_{lm} a^{*\,T}_{l'm'} \rangle & \langle a^E_{lm} a^{*\,E}_{l'm'} \rangle & \langle a^E_{lm} a^{*\,B}_{l'm'} \rangle \\ \langle a^B_{lm} a^{*\,T}_{l'm'} \rangle & \langle a^B_{lm} a^{*\,E}_{l'm'} \rangle & \langle a^B_{lm} a^{*\,B}_{l'm'} \rangle \end{pmatrix} . \tag{3.19}$$

Cada elemento $\langle a^X_{lm} a^{*\,X'}_{l'm'} \rangle$ da matriz da eq. (3.19) é uma matriz $(l_{max}+1)^2 \times (l_{max}+1)^2$ que no contexto da RCF é chamada de matriz de correlação dos modos XX'. A matriz de correlação $\langle \mathbf{a}\,\mathbf{a}^\dagger \rangle$ indica as correlações entre diferentes escalas l e direções m do espaço harmônico, além das correlações entre os modos da RCF.

Por definição, a matriz $\mathbf{M}$ é simétrica no espaço das posições e hermitiana no espaço harmônico, e também é positiva definida em ambos espaços. Desta forma no espaço harmônico temos $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{a} > 0$ para todo $\mathbf{a} \neq 0$ e assim, é sempre possível fazer uma decomposição de Cholesky de $\mathbf{M}$, tal que

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^\dagger\, \mathbf{L}\,, \tag{3.20}$$

onde $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular superior não singular e $\mathbf{L}^\dagger$ sua matriz adjunta [113]. Se usamos (3.20) em (3.18) e o fato de que $det(\mathbf{M}) = |det(\mathbf{L})|^2$ temos que

$$P(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3(l_{max}+1)^2}}\,|det(\mathbf{L})|}\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^\dagger\, \mathbf{z}}\,, \tag{3.21}$$

com

$$\mathbf{a} = \mathbf{L}\,\mathbf{z}\,, \tag{3.22}$$

sendo $\mathbf{z}$ uma matriz do mesmo tipo que $\mathbf{a}$

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z^T_{lm} \\ z^E_{lm} \\ z^B_{lm} \end{pmatrix} . \tag{3.23}$$

Comparando (3.21) com (3.18) observamos que as variáveis $\mathbf{z}$ obedecem uma lei de distribuição normal com matriz de correlação $\langle \mathbf{z}\,\mathbf{z}^\dagger \rangle = \mathbf{1}$, e isto implica em que os elementos de $\mathbf{z}$ não estão correlacionados entre si. Isto pode ser visto na forma explícita do produto $\mathbf{z}^\dagger\, \mathbf{z}$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^\dagger\, \mathbf{z} = {} & |z^T_{00}|^2 + |z^T_{1-1}|^2 + |z^T_{10}|^2 + |z^T_{11}|^2 \ldots\ldots |z^T_{l'_{max} l'_{max}-1}|^2 + |z^T_{l'_{max} l'_{max}}|^2 + \\ & |z^E_{00}|^2 + |z^E_{1-1}|^2 + |z^E_{10}|^2 + |z^E_{11}|^2 \ldots\ldots |z^E_{l'_{max} l'_{max}-1}|^2 + |z^E_{l'_{max} l'_{max}}|^2 + \\ & |z^B_{00}|^2 + |z^B_{1-1}|^2 + |z^B_{10}|^2 + |z^B_{11}|^2 \ldots\ldots |z^B_{l'_{max} l'_{max}-1}|^2 + |z^B_{l'_{max} l'_{max}}|^2\,, \end{aligned} \tag{3.24}$$

pois, dado um l_o, m_o, cada elemento $z^X_{l_o m_o}$ é um número complexo com distribuição normal e que não está correlacionado com os outros elementos de $\mathbf{z}$. Isto é, introduzindo (3.24) em (3.21) encontra-se que cada elemento de $\mathbf{z}$ tem uma distribuição normal da forma

$$P(z^X_{l_o m_o}) \propto e^{-\frac{1}{2}|z^X_{l_o m_o}|^2} . \tag{3.25}$$

A não correlação dos z^X_{lm}'s, nos permitirá reconhecer algumas propriedades genéricas em Universos com e sem IE e será explorada nas seções 3.6 e 3.7.

3.3 Isotropia e anisotropia estatística

A hipótese de IE postula que a função de correlação de N pontos é invariante por rotações. Para campos aleatórios gaussianos, correlações de N pontos são expressas como combinações da função de correlação de dois pontos como em (3.13). Portanto, no caso gaussiano a hipótese de IE implica em que

$$C^{XX'}(R\hat{n}, R\hat{n}') = C^{XX'}(\hat{n}, \hat{n}') , \tag{3.26}$$

onde $R \in SO(3)$ é uma rotação na esfera. Reciprocamente, a condição de AE é

$$C^{XX'}(R\hat{n}, R\hat{n}') \neq C^{XX'}(\hat{n}, \hat{n}') . \tag{3.27}$$

As condições (3.26) e (3.27) têm seus equivalentes no espaço harmônico. Rotações tridimensionais neste espaço são representadas pelas funções D de Wigner (ver apêndice B). Uma rotação em torno de $\hat{n}$ deixa os harmônicos esféricos transformados como [114]

$$Y_{lm}(R\hat{n}) = \sum_{m_1} D^l_{mm_1}(R) Y_{lm_1}(\hat{n}) . \tag{3.28}$$

Usando (3.15) e (3.28), mostra-se que os coeficientes multipolares no sistema de coordenadas rotacionado são

$$a^{X,R}_{lm} = \sum_{m_1} D^{*l}_{mm_1}(R) a^X_{lm_1} . \tag{3.29}$$

Introduzindo (3.28), (3.29) e (3.15) em (3.26), chega-se a seguinte condição de IE no espaço harmônico

$$\langle a^X_{lm} a^{*X'}_{l'm'} \rangle = \sum_{m_3 m_4 m_1 m_2} D^{*l}_{m_3 m_1}(R) D^{l'}_{m_2 m_4}(R) \langle a^X_{lm_1} a^{*X'}_{l'm_2} \rangle D^l_{m_3 m}(R) D^{*l'}_{m_4 m'}(R) , \tag{3.30}$$

a qual, usando (B.25) do apêndice B, também pode ser escrito como

$$\sum_{mm'} \langle a^X_{lm} a^{*X'}_{l'm'} \rangle D^l_{m_1 m}(R) D^{*l'}_{m'm_2}(R) = \sum_{m'm} D^l_{m_1 m}(R) D^{*l'}_{m'm_2}(R) \langle a^X_{lm} a^{*X'}_{l'm'} \rangle \, . \qquad (3.31)$$

Como esta última expressão vale para todo $D(R)$, segue-se que as matrizes de correlação $\langle a^X_{lm} a^{X'}_{l'm'} \rangle$ num Universo com IE, são diagonais no espaço harmônico e não dependem de m, isto é, têm a forma¶

$$\langle a^X_{lm} a^{*X'}_{l'm'} \rangle = \langle C^{XX'}_l \rangle \delta_{mm'} \delta_{ll'} \, , \qquad (3.32)$$

com $X, X' = T, E, B$. Reciprocamente, em Universos estatisticamente anisotrópicos as matrizes de correlação $\langle a^X_{lm} a^{X'}_{l'm'} \rangle$ são não diagonais no espaço harmônico e dependem de m.

3.4 Espectro angular de potência e variância cósmica

Dado um conjunto finito de realizações de um *ensemble*, a matriz de correlação $\mathbf{M}$ é estimada tomando a média de todas essas realizações. Porém, quando estudamos o Universo temos apenas uma única realização para tirar informação e estimar as propriedades estatísticas de $\mathbf{M}$. No caso de IE, de acordo com a condição (3.32), apenas existem elementos na diagonal de $\mathbf{M}$ e assim, um estimador $C^{XX'}_l$ definido como

$$C^{XX'}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m a^X_{lm} a^{X'}_{lm} \qquad (3.33)$$

contem toda a informação relevante desta matriz de correlação.

Como é bem conhecido, o estimador $C^{XX'}_l$ é chamado de espectro angular de potência dos modos XX' e, não é nada mais do que a média nos índices m da dispersão dos coeficientes multipolares. Sua média no *ensemble*, dado por

$$\langle C^{XX'}_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a^X_{lm} a^{*X'}_{lm} \rangle \qquad (3.34)$$

estima o espectro angular de potência do modelo. No caso de modelos com AE o estimador $C^{XX'}_l$ pode continuar sendo usado, porém, ao não incluir os elementos fora da diagonal da matriz de correlação, não brinda uma informação completa da AE. Uma característica do espectro angular de potência que será usada posteriormente é sua invariância por rotações. Esta propriedade é mostrada usando (B.25) e (3.33).

¶Sejam as matrizes A e B, se $AB = BA$ para qualquer B, então A é diagonal [115]

Por outro lado, quando fazemos estimativas de quantidades estatísticas existe sempre uma margem de erro, uma limitação por estimar as quantidades a partir de um número finito de realizações. Este erro é quantificado pela variância, a qual é definida como a raiz quadrada da dispersão $(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$. No contexto da RCF, a variância é chamada de *variância cósmica*, que não é nada mais do que a raiz quadrada da dispersão média em torno da média da quantidade estimada. No caso do espectro angular de potência a variância cósmica é a raiz quadrada de

$$(\Delta C_l^{XX'})^2 = \langle (C_l^{XX'} - \langle C_l^{XX'} \rangle)^2 \rangle \,. \tag{3.35}$$

Esta variância cósmica escrita em função da matriz de correlação $\langle a_{lm}^X a_{lm'}^{*X'} \rangle$ tem a forma[‖]

$$\Delta C_l^{XX'} = \frac{1}{(2l+1)} \sqrt{\sum_{mm'} (\langle a_{lm}^X a_{lm'}^{*X'} \rangle \langle a_{lm}^{*X'} a_{lm'}^{X} \rangle) + \langle a_{lm}^X a_{lm'}^{*X} \rangle \langle a_{lm}^{*X'} a_{lm'}^{X'} \rangle)} \,. \tag{3.36}$$

A proporcionalidade inversa em l implica que o erro de estimativa do $C_l^{XX'}$ é maior para baixos multipolos e limita fortemente a quantidade de informação que podemos extrair dos dados em grandes escalas angulares. Introduzindo (3.32) em (3.36), se reproduzem as formas conhecidas para a variância cósmica do $C_l^{XX'}$ em Universos com IE [108]-[110]

$$\begin{aligned}
\Delta C_l^{XX} &= \sqrt{\frac{2}{(2l+1)}} \langle C_l^{XX} \rangle \,, \\
\Delta C_l^{TE} &= \sqrt{\frac{1}{2l+1} (\langle C_l^{TE} \rangle^2 + \langle C_l^{EE} \rangle \langle C_l^{TT} \rangle)} \,, \\
\Delta C_l^{TB} &= \sqrt{\frac{1}{2l+1} \langle C_l^{TT} \rangle \langle C_l^{BB} \rangle} \,, \\
\Delta C_l^{EB} &= \sqrt{\frac{1}{2l+1} \langle C_l^{EE} \rangle \langle C_l^{BB} \rangle} \,.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Para chegar a estas expressões, foi usado antecipadamente, o fato de que quando existe IE os C_l^{TB} e C_l^{EB} são nulos. Uma demostração deste fato será encontrada na próxima seção.

3.5 Simetria de paridade na matriz de correlação

As leis de transformação de coordenadas dos modos T, E e B e a não invariância por estas transformações dos harmônicos esféricos, levam a que os coeficientes multipolares também mudem ao sofrer tais transformações. Um exemplo disto é (3.29) que mostra seu comportamento quando o sistema de coordenadas é rotacionado.

[‖] Ver apêndice C, em particular o cálculo da expressão (C.7)

Considera-se agora, as consequências que uma transformação de paridade $P : \hat{n} \rightarrow -\hat{n}$ traz para os coeficientes multipolares e para a matriz de correlação. Pela transformação P, os harmônicos esféricos se trasformam como

$$Y_{lm}^{P}(\hat{n}) = (-1)^{l} Y_{lm}(\hat{n})\,. \tag{3.38}$$

Por outro lado, as expressões (3.8) e (A.13) mostram que uma transformação P deixa invariante os modos T e E mas não o modo B. Portanto, os coeficientes da expansão (3.15) também têm regras de transformação diferentes para este modo

$$a_{lm}^{X,P} = (-1)^{l} a_{lm}^{X,P}\,, \qquad a_{lm}^{B,P} = (-1)^{l+1} a_{lm}^{B,P}\,, \tag{3.39}$$

onde $X = T, E$. A matriz de correlação XX' então é transformada como

$$\begin{aligned} \langle a_{lm}^{X,P} a_{l'm'}^{*X\,P} \rangle &= (-1)^{l+l'} \langle a_{lm}^{X} a_{l'm'}^{*X} \rangle \\ \langle a_{lm}^{X',P} a_{l'm'}^{*B\,P} \rangle &= (-1)^{l+l'+1} \langle a_{lm}^{X'} a_{l'm'}^{*B} \rangle\,, \end{aligned} \tag{3.40}$$

com $X = T, E, B$ e $X' = T, E$.

Nos modelos cosmológicos que têm simetria de paridade, a eq. (3.40) leva a condição

$$\begin{aligned} \langle a_{lm}^{X} a_{l'm'}^{*X} \rangle &= (-1)^{l+l'} \langle a_{lm}^{X} a_{l'm'}^{*X} \rangle\,, \\ \langle a_{lm}^{X'} a_{l'm'}^{*B} \rangle &= (-1)^{l+l'+1} \langle a_{lm}^{X'} a_{l'm'}^{*B} \rangle\,. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Se consideramos agora o espectro angular de potências, que toma apenas os elementos diagonais da matriz de correlação, tem-se

$$\begin{aligned} \langle C_{l}^{XX} \rangle &= \langle C_{l}^{XX} \rangle\,, \\ \langle C_{l}^{X'B} \rangle &= -\langle C_{l}^{X'B} \rangle\,, \end{aligned} \tag{3.42}$$

esta última igualdade só é válido quando $\langle C_{l}^{X'B} \rangle = 0$.

A simetria de paridade é sempre respeitada em Universos com IE. Porém, em modelos com AE que respeitem simetria de paridade, a existência de elementos fora da diagonal na matriz de correlação e a condição (3.41) abrem a possibilidade de correlações do tipo $\delta_{l\,l_o}$ com $l_o = l + 2n + 1$ em $\langle a_{lm}^{X'} a_{lm'}^{*B} \rangle$. Assim em tais modelos com AE, existe ainda um grau de correlação entre os modos T e B e, E e B.

Por outro lado, existem alguns cenários de AE onde tem-se violação de paridade e portanto a condição (3.41) não é mais válida, fazendo que correlações de tipo TB e EB sejam possíveis. Exemplos destes cenários se encontram em certos modelos com topologia não trivial ou modelos anisotrópicos estudados em [140, 141].

3.6 Céus estatisticamente isotrópicos

Como vimos na seção 3.3 no caso de Universos com IE, a matriz de correlação e o espectro angular de potência são equivalentes. Segue-se que, em modelos estatisticamente isotrópicos, o espectro angular de potência carrega toda a informação das flutuações de campo da RCF. Portanto, os quatro $C_l^{XX'}$'s não nulos são suficientes para comparar os dados observacionais com os diversos modelos cosmológicos e seus parâmetros.

A matriz $\mathbf{M}$ no espaço harmônico neste tipo de céus, toma a forma particular

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger \rangle = \begin{pmatrix} \langle C_l^{TT} \rangle & \langle C_l^{TE} \rangle & 0 \\ \langle C_l^{TE} \rangle & \langle C_l^{EE} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle C_l^{BB} \rangle \end{pmatrix} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \, . \tag{3.43}$$

Sua decomposição de Cholesky resulta em

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{\langle C_l^{TT} \rangle} & \frac{\langle C_l^{TE} \rangle}{\sqrt{\langle C_l^{TT} \rangle}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\langle C_l^{EE} \rangle - \frac{\langle C_l^{TE} \rangle^2}{\langle C_l^{TT} \rangle}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\langle C_l^{BB} \rangle} \end{pmatrix} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \, . \tag{3.44}$$

Com ajuda de (3.44), o produto (3.22)

$$a_{lm}^X = \sum_{X'l'm'} L_{lml'm'}^{XX'} z_{l'm'}^{X'} \, , \tag{3.45}$$

toma a forma

$$\begin{aligned} a_{lm}^T &= \sqrt{\langle C_l^{TT} \rangle} \, z_{lm}^T + \frac{\langle C_l^{TE} \rangle}{\sqrt{\langle C_l^{TT} \rangle}} \, z_{lm}^E \, , \\ a_{lm}^E &= \sqrt{\langle C_l^{EE} \rangle - \frac{\langle C_l^{TE} \rangle^2}{\langle C_l^{TT} \rangle}} \, z_{lm}^E \, , \\ a_{lm}^B &= \sqrt{\langle C_l^{BB} \rangle} \, z_{lm}^B \, . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Como nos diz (3.25), os coeficientes multipolares z_{lm}^X são independentes entre si no espaço harmônico e no espaço das flutuações. No espaço harmônico, de (3.46) pode-se ver que os coeficientes a_{lm}^X's com $X = T, E, B$ não misturam $z_{l\,m}^X$'s de diferentes escalas l's e nem de diferentes direções m's. Ou seja, em céus com IE, os a_{lm}^X's não estão correlacionados ente si harmonicamente.

No espaço das flutuações, também de (3.46) pode-se ver que a_{lm}^T e a_{lm}^E misturam dois modos diferentes (z_{lm}^T e z_{lm}^E). Isto faz que os coeficientes multipolares de T e E

estejam correlacionados entre si. Esta correlação no espaço das flutuações é modulada pelos coeficientes que acompanham a z^T_{lm} e a z^E_{lm}. Por outro lado voltando a (3.46), pode-se ver que neste mesmo espaço, os coeficientes a^B_{lm} não estão correlacionados com os outros modos.

A correlação entre os modos T e E, tem como consequência que não pode-se fazer um estudo completo das flutuações de temperatura sem incluir estudos das flutuações dos modos E da polarização e vice-versa. No entanto numa primeira aproximação, a correlação TE pode não ser levada em conta por ter uma contribuição de $\sim 10\%$ nos coeficientes a^T_{lm}'s. Nesta aproximação, os a^T_{lm}'s são variáveis independentes entre si moduladas pela raiz quadrada do espectro angular de potência TT

$$a^T_{lm} \;=\; \sqrt{\langle C^{TT}_l \rangle}\, z^T_{lm} \,. \tag{3.47}$$

O fato dos coeficientes multipolares a^X_{lm}'s não estarem correlacionados no espaço harmônico permite aliviar o problema de termos apenas uma única realização de nosso Universo. Nesta única realização, dados dois modos X, X' e para cada escala l, existem $2l+1$ coeficientes a^X_{lm} que por não estarem correlacionados são considerados estatisticamente independentes . Assim, o espectro de potências $C^{XX'}_l$ é estimado como se tivessemos $2l+1$ medidas da potência $a^X_{lm}a^{X'}_{lm}$ em l. Naturalmente, quanto menor o valor de l, existêm menos coeficientes a^X_{lm} e portanto a variância cósmica (3.37) é maior nos baixos multipolos.

Para comparar modelos teóricos com as observações, é necessário realizar uma grande quantidade de simulações de céus de RCF. Nos modelos com IE, um mapa até um l_{max} pode ser simulado como segue: (i) calcular os $\langle C^{XX'}_l \rangle$ do modelo, para este passo geralmente são usados programas como o CMBFAST [116] e o CMBEASY [117], (ii) gerar $3(l_{max}+1)^2$ números complexos aleatórios distribuidos normalmente, estes são os z^X_{lm}'s e (iii) e usar (3.46) para calcular os a^X_{lm}'s.

3.7 Céus estatisticamente anisotrópicos

À diferença dos cenários estatisticamente isotrópicos, as matrizes de correlação $\langle a^X_{lm} a^{*X'}_{l'm'} \rangle$ em modelos com AE não são diagonais, podem ter dependências de l e m e a expressão (3.22) para cada elemento de $\mathbf{a}$ é a mais geral possível

$$a^X_{lm} = \sum_{X'l'm'} L^{XX'}_{lml'm'} z^{X'}_{l'm'} \,. \tag{3.48}$$

Desta forma para cada par (l, m), os coeficientes a^X_{lm} são combinações de todos os $z^{X'}_{l'm'}$, aparecendo assim correlações no espaço harmônico e no espaço das flutuações.

Estas correlações são moduladas pelos coeficientes $L^{XX'}_{lml'm'}$ que por sua vez misturam os diferentes l's, m's, l''s e m''s e os diferentes modos de polarização e temperatura.

Correlações em l's indicam que os comportamentos nas diferentes escalas estão relacionados, correlações em m's indicam que os comportamentos nas diferentes direções do espaço harmônico estão relacionados e correlações em X's indicam que os comportamentos nos diferentes modos da RCF estão relacionados. O grau da correlação entre estes comportamentos é dado pelos coeficientes $L^{XX'}_{lml'm'}$ e assim, a detecção de correlações nas diferentes escalas, m's e modos de polarização e temperatura constituiria um sinal de que o Universo é estatisticamente anisotrópico.

Outra consequência da não diagonalidade da matriz de correlação é que o espectro angular de potência $\langle C_l^{XX'}\rangle$ já não contêm toda a informação estatística das flutuações e, para obter mais informação da AE, é necessário capturar aquela que estaria contida nos elementos fora da diagonal da matriz de correlação. Estimadores e observáveis que incluam estas informações não presentes no espectro de potência, são necessários para a realização de testes de concordância com modelos estatisticamente anisotrópicos. Porém, atualmente não contamos com tais quantificadores e apenas tem-se alguns candidatos (um exemplo é o espectro de potência bipolar-Bips [118]-[121]).

Outra característica de modelos estatisticamente anisotrópicos vem do fato de que para cada escala l, alguns dos $2l+1$ coeficientes a^X_{lm} podem estar correlacionados. Como consequência, existêm menos coeficientes estatisticamente independientes e assim, o valor da variância cósmica aumenta em relação ao caso de IE. Este efeito pode ser visto separando o lado direito de (3.36) na parte diagonal e na parte não diagonal da matriz de correlação, por exemplo para o caso $X = X'$

$$\Delta C_l^{XX} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}\langle C_l^{XX}\rangle^2 + \frac{1}{(2l+1)^2}\sum_{m\neq m'} |\langle a^X_{lm} a^{*X}_{lm'}\rangle|^2}\,, \tag{3.49}$$

que com ajuda da eq. (3.37) leva a

$$(\Delta C_l^{XX})^{IE} \leq (\Delta C_l^{XX})^{AE}\,. \tag{3.50}$$

Ou seja os elementos fora da diagonal que levam às correlações entre diferentes m's fazem que a variância cósmica aumente. Finalmente outra eventual assinatura de alguns modelos com AE e da não diagonalidade da sua matriz de correlação é a existência de correlações entre os modos $T\,B$ e $E\,B$ (seção 3.5).

A intensidade de todas estas assinaturas de AE depende da matriz de correlação via sua decomposição de Cholesky como pode ser visto em (3.48). Assim, é necessária calcula-la para depois usá-la nas simulações para os estudos estatísticos. Nos modelos com AE, um mapa até um l_{max} pode ser simulado como segue: (i) calcular as matrizes $\langle a^X_{lm} a^{X'}_{l'm'} \rangle$ do modelo (ii) realizar sua decomposição de Cholesky (iii) gerar $3(l_{max}+1)^2$ números complexos aleatórios distribuidos normalmente, estes são os z^X_{lm}'s e (iv) realizar a multiplicação (3.46) para obter os a^X_{lm}'s correspondentes.

3.8 Anisotropia ou isotropia?

Abandonar a hipótese de IE do Universo, traz consequências que em princípio podem ser observadas e medidas. No contexto de modelos com IE e mais especificamente do ΛCDM, os comportamentos anômalos nos mapas de temperatura medidos pelo WMAP e COBE [24], [41]-[77] pertencem a uma porcentagem pequena de realizações do céu de um *ensemble* estatisticamente isotrópico. Grosseiramente, combinando todas as anomalias e supondo que são independentes entre si apenas $\sim 0.000001\%$ apresentam estas características [122].

Porém no contexto de Universos estatisticamente anisotrópicos, as anomalias podem ser comportamentos mais naturais. Por exemplo, o problema da falta de potência nos baixos multipolos pode não existir já que os valores medidos têm uma variância cósmica maior

$$(\Delta C^{TT}_l)^{IE} \leq (\Delta C^{TT}_l)^{AE} . \tag{3.51}$$

Por outro lado, a dependência de m nos coeficientes $L^{XX'}_{lml'm'}$ pode ser tal que, dada uma escala l, favoreça alguns m's mais do que outros, aparecendo assim supressões dos a^X_{lm}'s menos favorecidos e direções preferenciais. Da mesma forma, correlações entre l e l', e entre m e m' podem existir dando origem a comportamentos padrões similares em escalas e direções diferentes.

Todas estas características fazem que Universos com AE estejam bem situados como cenários para a existência das anomalias de temperatura da RCF. No entanto, é importante resaltar que estas são características muito genéricas e que, para obter resultados conclusivos é necessário um estudo mais detalhado incluindo análises estatísticas. Conscientes de que para fazer estas análises é preciso contar com índices estatísticos sensíveis às direções do céu que possam ser usados no teste de modelos com AE, no capítulo 4 propomos duas formas de procurar sinais de AE nos mapas de flutuações do campo da RCF. Uma aplicação ao teste da hipótese de IE usando estes índices e considerando apenas as flutuações de temperatura, também é feito.

Capítulo 4

Testando isotropia estatística

O modelo ΛCDM tem como uma de suas hipóteses que o Universo é estatisticamente isotrópico. Porém, a existência das anomalias nas flutuações de temperatura da RCF em grandes escalas angulares, motiva a que Universos estatisticamente anisotrópicos sejam considerados como cenários onde estas anomalias são mais prováveis. Desta maneira, estudos mais detalhados e testes estatísticos de modelos com e sem IE são necessários.

Para a realização de testes de concordância entre os modelos e dados observacionais, medições de parâmetros e testes de hipóteses estatísticas é preciso contar com índices que capturem as características a serem testadas. Neste capítulo, introduzimos dois índices estatísticos novos que carregam informação sobre as flutuações da RCF. Por um lado, a *m-dispersão* que leva informação do espaço harmônico e por outro, os *mapas de m-dispersão* que levam informação do espaço real.

Aproveitando as medidas do WMAP e como em geral, estas duas estatísticas têm informação sobre a IE e a AE, as usamos junto com o espectro angular de potência para testar a hipótese de IE do ΛCDM. A complicação de que existe apenas uma única realização a qual corresponde ao nosso Universo, é parcialmente resolvida realizando simulações de céus com IE (ver seção 3.6). Para testar a hipótese de IE, estudamos o comportamento estatístico das flutuações de temperatura simuladas e o comparamos com o dos dados do WMAP.

Embora os resultados e o grau de significância dos nossos testes dependam da estatística usada ao igual que nos diferentes reportes das anomalias [24, 41]-[77], os testes mostram sinais de que os dados do WMAP não suportam a hipótese de IE.

4.1 Teste de hipóteses estatísticas

No espaço harmônico, a natureza aleatória das flutuações da RCF está contida no vetor $\mathbf{a}$ dado por (3.17). Este vetor é uma realização duma variável aleatória que chamaremos de $\mathbf{A}$.

Quando falamos que tem-se apenas uma única realização do Universo, nos referimos a que existe um único conjunto de valores $\mathbf{a}$ para os elementos de $\mathbf{A}$ que pode ser medido e usado para tirar informações sobre a RCF. Dado um modelo com um conjunto de parâmetros $\mathbf{P}$, os valores medidos de $\mathbf{A}$ e uma *função de inferência* $\mathcal{T}(\mathbf{A}, \mathbf{P})$ são usados para realizar testes de concordância, medições de parâmetros e testes de hipóteses relativas aos dados e modelos. Se $\mathcal{T}$ depende apenas de $\mathbf{A}$, ela é chamada de função *não paramétrica* mas se além, tem dependência de $\mathbf{P}$ é chamada de função *paramétrica*. Por exemplo, a média $\langle \mathbf{A} \rangle$ é uma função de inferência não paramétrica típica enquanto que a função de distribuição de $\mathbf{A}$ é uma função de inferência paramétrica típica.

No contexto das funções de inferência não paramêtricas, o valor $T = \mathcal{T}(\mathbf{a})$ resultante da amostra é uma estimativa de $\mathcal{T}$ e, neste sentido, $\mathcal{T}$ é chamado de *estimador*. Quando o estimador é calculado para várias amostras $\mathbf{a}$, origina diferentes valores de T e gera-se uma distribuição estatística. Neste outro sentido, $\mathcal{T}$ é também uma variável aleatória e carrega as propriedades estatísticas de $\mathbf{a}$, e assim é chamado de *estatística*. Algumas vezes, propriedades de $\mathbf{a}$ podem ser melhor vistas em seus estimadores e estatísticas do que nelas mesmas. Sendo assim, a escolha de um estimador é de crucial importância para a correta realização e interpretação dos testes estatísticos [123]. Uma vez escolhido o estimador, o teste da hipótese estatística pode ser realizado. A hipótese estatística, que é mais restringida que uma hipótese científica geral, envolve postulados acerca do comportamento da variável aleatória que podem ser capturados por estimadores. Este tipo de hipóteses são testadas fazendo medidas das realizações e estudando o comportamento dos postulados nestas medidas (ver por ex. [113, 123, 124]).

4.2 Estatísticas para os testes

A partir de agora vamos considerar a matriz $\mathbf{a}$ de (3.17) para estudar as propriedades das flutuações da RCF. Desta forma, as estatísticas definidas para realizar os testes têm de ser funções desta matriz, ou mais especificamente, de suas componentes a_{lm}^X's. As estatísticas usadas para os testes foram três: o espectro angular de potência, a *m-dispersão* e os *mapas de m-dispersão*, todas elas acompanhadas de suas respectivas variâncias cósmicas.

Informações sobre AE podem ser tiradas no espaço harmônico ou no espaço das posições. Para extrair informação no espaço harmônico, a estatística deve incluir todos os elementos da matriz de correlação incluindo os elementos fora da diagonal. Para extrair a informação no espaço de posições, a estatística deve ser sensível a rotações e assim capturar informação sobre direções preferenciais. A continuação, descrevemos cada uma das três estatísticas usadas para os nossos testes.

4.2.1 Espectro angular de potência

Como foi dito nos capítulos anteriores, o espectro angular de potência tem contribuição apenas da diagonal da matriz de correlação. No caso de Universos estatisticamente isotrópicos, esta estatística é suficiente e pode ser usada para testar IE. No entanto no caso de Universos com AE, o espectro angular de potência não carrega a informação completa sobre as flutuações, pois pode ainda existir informação adicional nos elementos fora da diagonal da matriz de correlação. A variância cósmica do espectro de potência (3.36) se possui contribuição dos elementos não diagonais e assim tem mais informação de AE no espaço harmônico.

Por outro lado no espaço das posições, a invariância por rotações do espectro de potência e de sua variância cósmica faz que não possam ser usadas para extrair informações sobre direções preferenciais. Assim, esta estatística é adequada para testar IE mas não muito adequada para testar modelos com AE. Como nesta tese testamos apenas IE, o espectro angular de potências é usado.

4.2.2 m-Dispersão

Dado um $C_l^{XX'}$, pode-se medir quanta potência $a_{lm}^{X}a_{lm}^{*X'}$ perde-se ou ganha-se ao levar em conta apenas a média delas no $C_l^{XX'}$. Um quantificador desta perda ou ganho para cada escala l, é a *m-dispersão* definida por

$$(\sigma_l^{XX'})^2 = \frac{1}{2l+1}\sum_m (a_{lm}^{X}a_{lm}^{*X'} - C_l^{XX'})^2 \,. \tag{4.1}$$

Este é o estimador para cada realização do valor esperado pela teoria $\langle(\sigma_l^{XX'})^2\rangle$. Usando (3.13) acha-se que para um *emsemble*, este valor esperado da m-dispersão é (ver apêndice C)

$$\begin{aligned}\langle(\sigma_l^{XX'})^2\rangle = \frac{1}{2l+1}\sum_m (|\langle a_{lm}^{X}a_{lm}^{*X'}\rangle|^2 + |\langle a_{lm}^{X}a_{l-m}^{*X'}\rangle|^2 + \langle a_{lm}^{X}a_{lm}^{*X}\rangle\langle a_{lm}^{*X'}a_{lm}^{X'}\rangle) \\ -\langle C_l^{XX'}\rangle^2 - (\Delta C_l^{XX'})^2 \,.\end{aligned} \tag{4.2}$$

O segundo termo e o termo $(\Delta C_l^{XX'})^2$ (eq. (3.36)) indicam que a m-dispersão média recebe contribuições dos elementos fora da diagonal da matriz de correlação, carregando assim informação sobre AE no espaço hamônico. Usando a propriedade (B.25) em (4.1), mostra-se que a m-dispersão não é invariante por rotações e pode portanto capturar informação sobre AE no espaço real.

Por outro lado, a variância cósmica da m-dispersão é dada por

$$(\Delta(\sigma_l^{XX'})^2)^2 = \langle((\sigma_l^{XX'})^2 - \langle(\sigma_l^{XX'})^2\rangle)^2\rangle \, . \tag{4.3}$$

Um cálculo desta quantidade é tedioso e leva a uma expresão que não tem informação adicional ao que pode-se extrair de (4.2), de onde ve-se que a variância cósmica recebe contribuições dos elementos não diagonais da matriz de correlação e não é invariante por rotações.

No caso particular de IE, a m-dispersão esperada se reduz a forma (ver apêndice C)

$$\begin{aligned}
\langle(\sigma_l^{XX})^2\rangle &= l(\Delta C_l^{XX})^2 = \frac{2l}{2l+1}\langle C_l^{XX}\rangle^2 \, , \\
\langle(\sigma_l^{TE})^2\rangle &= \frac{2l}{2l+1}\langle C_l^{TT}\rangle\langle C_l^{EE}\rangle \\
\langle(\sigma_l^{TB})^2\rangle &= \frac{2l}{2l+1}\langle C_l^{TT}\rangle\langle C_l^{BB}\rangle \\
\langle(\sigma_l^{EB})^2\rangle &= \frac{2l}{2l+1}\langle C_l^{EE}\rangle\langle C_l^{BB}\rangle \, .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Com variância cósmica que no caso de correlações TT* é

$$(\Delta(\sigma_l^{TT})^2)^2 = \frac{8}{2l+1}(4 + \frac{5}{2l+1} + \frac{3}{(2l+1)^2})\langle C_l\rangle^4 \, . \tag{4.5}$$

Assim em modelos com IE, a m-dispersão e sua variância cósmica são invariantes por rotações e, sua dependência do espectro angular de potência faz que carregue toda a informação sobre as flutuações da RCF. Desta maneira, pode-se usar a m-dispersão e sua variância cósmica para realizar testes de IE.

4.2.3 Mapas de m-dispersão

Como a m-dispersão nâo é invariante por rotações, resulta interessante considerar seu comportamento com respecto às diferentes direções no céu. Se expressamos a rotação R em termos dos ângulos de Euler α, β, γ, as funções D de Wigner tomam a forma mostrada em (B.17). Usando esta expressão e (3.29) em (4.1), encontra-se que a m-dispersão rotacionada tem dependência explícita dos angulos de Euler γ e β. A dependência em α é eliminada porque $(\sigma_l^{XX})^2$ inclue produtos de coeficientes mutlipolares e seus conjugados complexos e aparecem produtos do tipo $D^{*l}_{mm_1} D^l_{mm_2}$, de esta maneira os exponenciais em α se cancelam mutuamente.

*Outra vez, o cálculo desta variância cósmica incluindo polarização é tediosa e não é feito porque nossos testes apenas levam em consideração a temperatura.

A dependência de apenas dois ângulos indica que $(\sigma_l^{XX'})^2(\beta,\gamma)$ é uma função na esfera e possibilita que fazendo rotações da esfera celeste, a m-dispersão seja mapeada nas diferentes direções do céu e ajude a procurar por direções preferenciais e possível AE. Estas direções preferenciais se manifestariam nos extremos da função $(\sigma_l^{XX'})^2$. Rotações em (θ,ϕ) da esfera celeste estão relacionados aos ângulos de Euler por $\beta = -\theta$ e $\gamma = -\phi$. Assim dado um mapa de flutuações da RCF, para cada rotação $R(0,-\theta,-\phi)$ terá-se um valor de $(\sigma_l^{XX'})^2(\theta,\phi)$. O *mapa de m-dispersão* é definido como o conjunto de valores $(\sigma_l^{XX'})^2(\theta,\phi)$ para toda a esfera celeste.

Para caracterizar cada mapa de m-dispersão aproveitamos o fato de que $(\sigma_l^{XX'})^2$ é uma função na esfera e a expandimos em harmônicos esféricos

$$(\sigma_{l_0}^{XX'})^2(\theta,\phi) = \sum_{lm} b_{lm}^{l_0\,XX'} Y_{lm}(\theta,\phi)\,, \tag{4.6}$$

com

$$b_{lm}^{l_0\,XX'} = \int (\sigma_{l_0}^{XX'})^2(\theta,\phi) Y_{lm}^*(\theta,\phi) d\Omega\,. \tag{4.7}$$

Relembre que a m-dispersão é definida para cada escala e que o índice inferior de $(\sigma_l^{XX'})^2$ indica a escala da flutuação da RCF estudada. Para não confundir este índice com as escalas l's relativas à expansão da m-dispersão introduzimos o índice l_o. Desta maneira, os coeficientes $b_{lm}^{l_0\,XX'}$, ou quaisquer estatística extraída dos mapas de dispersão tem informação sobre direções preferenciais e AE na escala l_o. Para realizar o teste com os mapas de m-dispersão utilizamos seu espectro de potências $D_l^{l_0,\,XX'}$ definido como

$$D_l^{l_0,\,XX'} = \frac{1}{2l+1} \sum_{lm} |b_{lm}^{l_0,\,XX'}|^2\,. \tag{4.8}$$

A variância cósmica associada aos mapas de dispersão se manifestará na estatística escolhida para sua caracterização. Neste caso, a manifestação será na variância cósmica do espectro angular de potências $D_l^{l_0,\,XX'}$.

No caso particular de IE, é importante notar que embora cada realização individual de um céu com IE tem flutuações de m-dispersão para as diferentes direções ($(\sigma_l^{XX'})^2$ não é constante), estas flutuações estão limitadas pela variância cósmica e portanto, todos os espectros $D_l^{l_0,\,XX'}$do *ensemble* estatisticamente isotrópico estão no intervalo $[x_o - n\delta, x_o + n\delta]$, onde δ é a variância cósmica, $x_o = \langle D_l^{l_0,\,XX'}\rangle$ o valor médio do espectro angular de potência $D_l^{l_0,\,XX'}$ no caso com IE, e $n = 1, 2, 3...$ indica o grau de confidênça desejado para o teste.

4.3 Testando isotropia estatística

A hipótese estatística a testar neste capítulo é que as flutuações da RCF são realizações de uma variável aleatória estatisticamente isotrópica. Com isto pretendemos saber se os dados existentes da RCF suportam ou não a hipotése de IE e com que grau de confiabilidade isto acontece. Para realizar os testes, usamos as estatísticas definidas na seção anterior aplicadas ao caso de existência de IE. Os testes são realizados por comparação das estatísticas extraídas de um conjunto de dados que satisfazem a hipótese de IE e os estimadores extraídos dos dados medidos pelo WMAP. Note que os nossos testes apenas consideram as flutuações de temperatura da RCF.

Para obter o conjunto de dados que satisfazem a hipótese de IE, simulamos 5000 mapas usando o espectro angular de potências do ΛCDM. As simulações foram feitas como descritas na seção 3.6 e o espectro de potências do ΛCDM foi previamente caculado com o CMBEASY [117] usando os valores da tabela 1.1. Seguidamente calculamos as três estatísticas descritas no capítulo anterior para este conjunto dos dados simulados.

Os dados usados para nossos testes correspondem aos três anos de medidas do WMAP e pertencem aos mapas de temperatura do céu inteiro tratados pelo mesmo time do WMAP (ILC-3anos). A partir destes mapas tomados do *Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis* (LAMBDA) [101], a matriz **a** foi extraída e os estimadores para fazer o teste foram calculados e comparados com as estatísticas das simulações. Nas simulações e nos dados observacionais, o monopolo e o dipolo foram retirados e as análises são apenas para escalas $2 \leq l \leq 10$, a exceção do teste usando mapas de m-dispersão que apenas foi realizado para $2 \leq l \leq 5$.

4.4 Resultados do teste usando o espectro de potência

Os histogramas de distribuição normalizados dos espectros de potência para cada escala $l = 2, 3...10$ são mostrados nas figuras 4.1 e 4.2. As áreas limitadas por linhas indicam a região de confiabilidade a 1σ e as linhas tracejadas correspondem aos dados do mapa ILC-3 anos. Nossos resultados indicam que com exceção das escalas $l = 3$, $l = 5$ e $l = 7$, as medidas dos três anos do WMAP não se encontram nestas regiões. Ou seja, a um nível de confiabilidade de $\sim 68\%$ os dados usados não aceitam a IE. Um fato curioso é que, na maioria dos casos, apenas os multipolos ímpares estão dentro destas regiões a 1σ. No entanto, se consideramos um grau de confiabilidade de 2σ ($\sim 95.4\%$) os dados do WMAP usados aceitam perfeitamente a hipótese de IE. Falando em probabilidades, isto significa que a probabilidade de ter estes valores tão baixos a 1σ para os espectros de potência é aproximadamente 0.32.

Os resultados de que o 32% de realizações estatisticamente isotrópicas têm valores do espectro de potência tão baixos como os dos dados do WMAP e de que o grau de confiabilidade do teste seja apenas 1σ, não são o suficientemente críticos como para abandonar a IE. No entanto, abre a possibilidade de estudar outros modelos cosmológicos que concordem em maior grau com as observações.

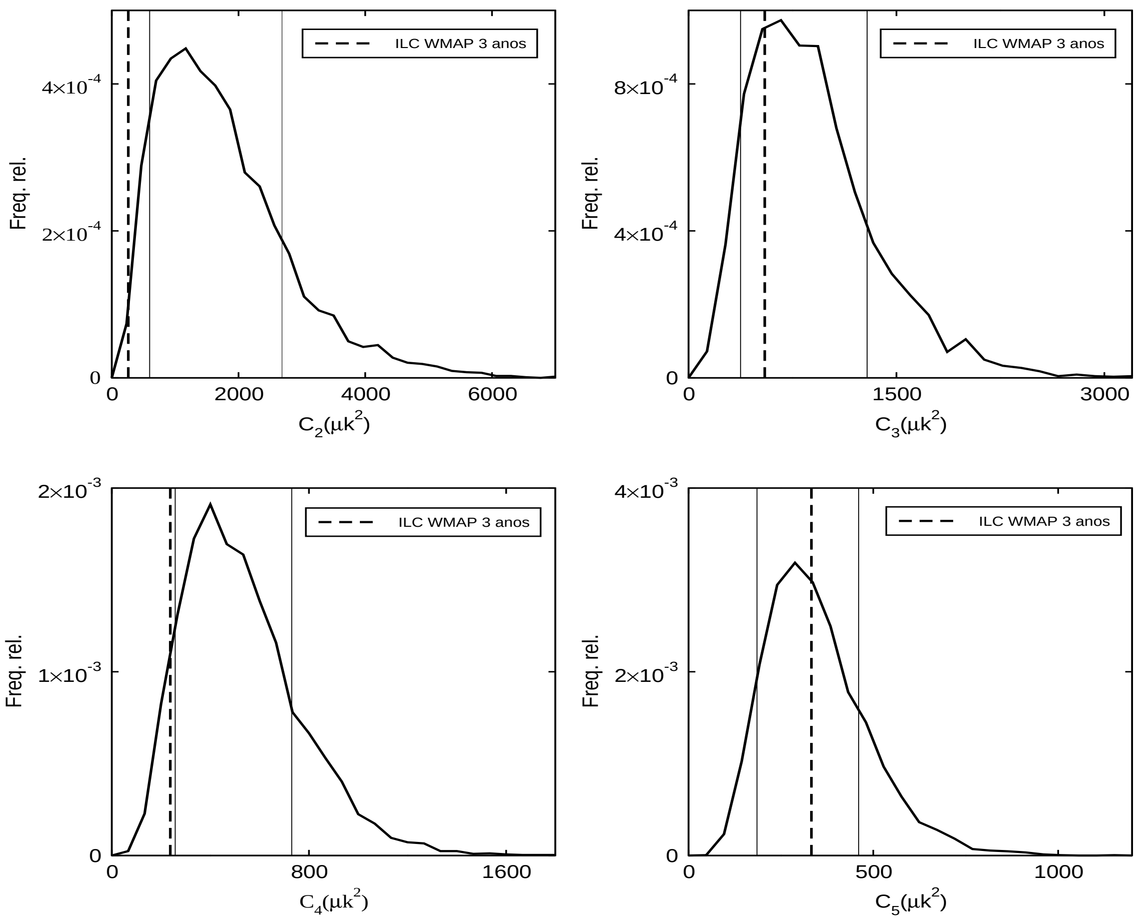


Figura 4.1: Histogramas normalizados dos espectros angulares de potência para as escalas $l = 2, 3, 4\, e\, 5$ comparados com os espectros angulares de potência dos dados do terceiro ano do WMAP. Em $l = 3$ e $l = 5$ os dados caem dentro dos valores a 1σ, nos outros dois casos, os valores observacionais caem fora desta região. Os índices XX' foram retirados de $C_l^{XX'}$ porque estamos considerando apenas temperatura.

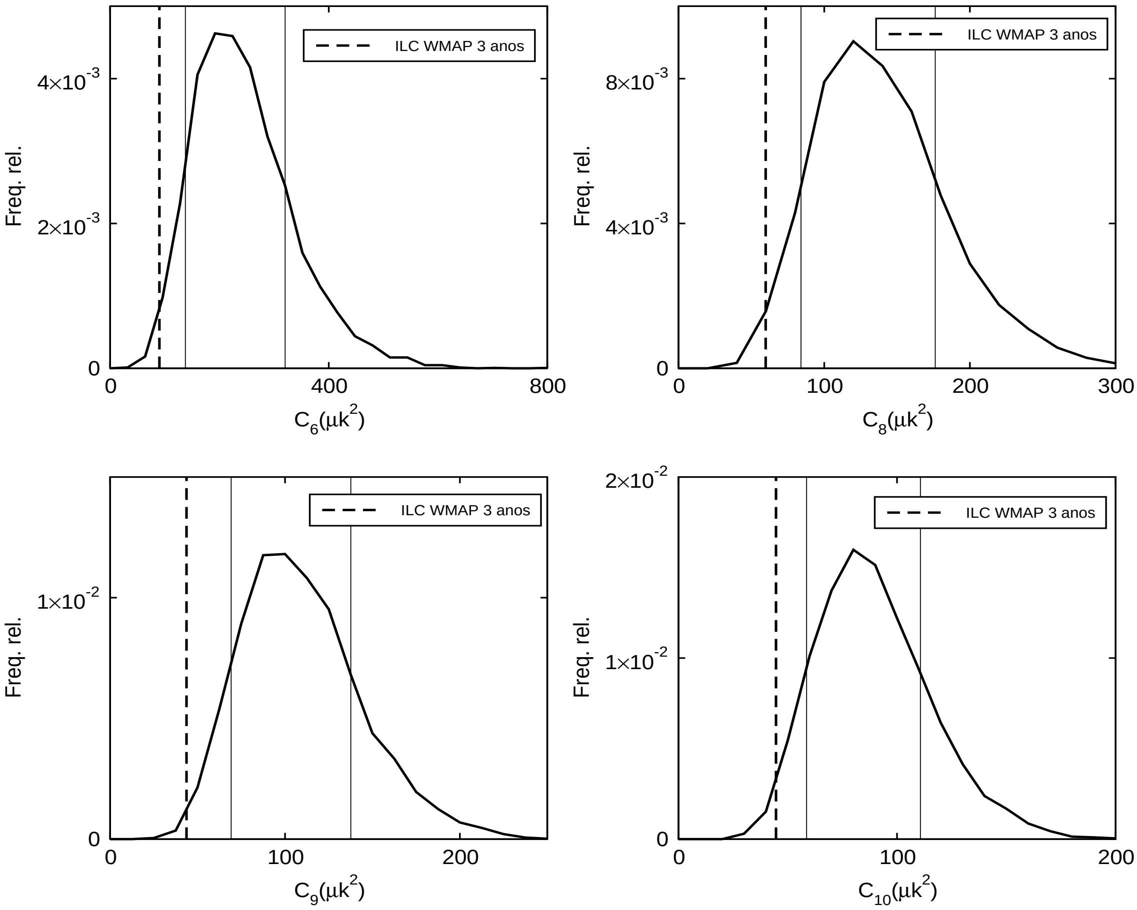


Figura 4.2: Histogramas normalizados dos espectros angulares de potência para as escalas $l = 6, 8, 9\,e\,10$ comparados com os espectros angulares de potência dos dados do terceiro ano do WMAP. Em todas estas escalas os dados caem fora do intervalo a 1σ. Apenas o caso do multipolo $l = 7$ (que não é mostrado aqui) cai dentro do intervalo. Os índices XX' foram retirados de $C_l^{XX'}$ porque estamos considerando apenas temperatura.

4.5 Resultados do teste usando a m-dispersão

O resultado é apresentado na figura 4.3 em forma de histogramas normalizados para cada escala que são comparados com os valores da m-dispersão dos dados do WMAP. As áreas limitadas por linhas indicam a região de confiabilidade a 1σ e as linhas tracejadas correspondem aos dados do mapa ILC-3 anos. Na figura são apresentados apenas os casos para $l = 2, 8, 9\,e\,10$, os resultados para os outros multipolos são similares. Pode ser visto nas figuras que os valores da m-dispersão dos dados sempre caem dentro da região de 1σ. A conclusão usando esta estatística é que os dados são compatíveis com a hipótese de que as flutuações de temperatura da RCF são estatisticamente isotrópicas.

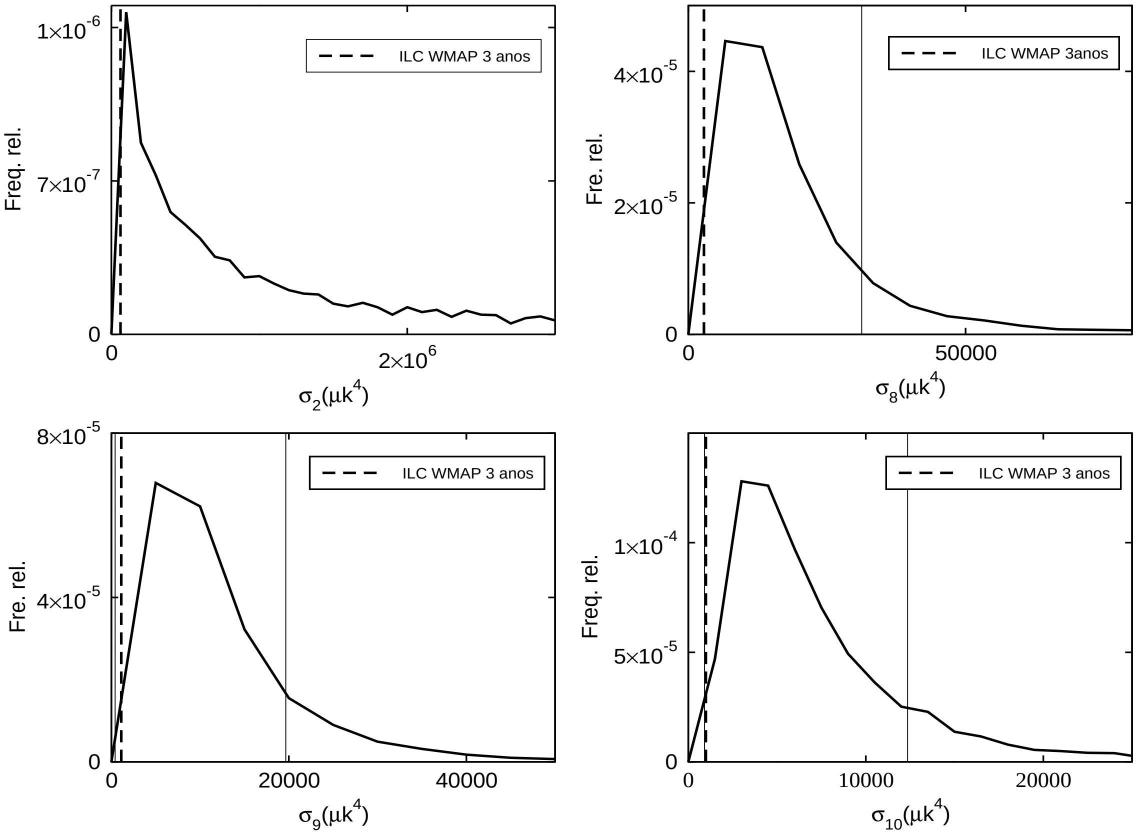


Figura 4.3: Histogramas normalizados da m-dispersão dos multipolos $l = 2, 8, 9\,e\,10$ comparadas com as m-dispersões dos dados do terceiro ano do WMAP. Os resultados nas outras escalas são similares e por isso não são mostrados. Pode-se ver que em todos os casos, os dados caem dentro do intervalo a 1σ e concordam com a hipotése de isotropia estatística. Note que a linha que indica o menor valor do intervalo a 1σ para $l = 2$ e $l = 8$ é $\sigma_l = 0$. Os índices XX' foram retirados de $(\sigma_l^{XX'})^2$ porque estamos considerando apenas temperatura.

4.6 Resultados do teste usando mapas de m-dispersão

Neste ponto foi necessário implementar um programa que calcule as funções D de Wigner e rote a esfera celeste. Usando este programa, os mapas de m-dispersão foram calculados para as quatro escalas de temperatura consideradas nos testes ($2 \leq l_o \leq 5$). Desta forma, cada mapa de temperatura estatisticamente isotrópico simulado originou 4 mapas de m-dispersão, sendo analisados em total 20000 mapas deste tipo, 5000 para cada escala.

Para o cálculo dos mapas de m-dispersão tivemos que fazer uma pixelização da esfera celeste. A pixelização consiste em dividir a superfície duma esfera em pequenas áreas, o centro de cada área é o ponto onde o $(\sigma_{l_o}^{XX'})^2(\theta,\phi)$ é calculado. Existêm várias formas de pixelizar uma esfera, a mais conhecida é o método de Górski *et. al.* [126] que pode ser feito usando o pacote HEALPix [127]. Este é o tipo de pixelização adotado pelo equipe do WMAP.

Outra forma de pixelização é a chamada de tipo *igloo*, criada por Turok *et. al.* [128] e adotada pela equipe do PLANCK [30]. Nesta tese usamos a pixelização *igloo* e nos ajudando de um programa desenvolvido em [129], dividimos a esfera celeste em 12288 pixels. Depois de calcular os mapas de m-dispersão, usamos a rotina ANAFAST do HEALPix [127] para extrair seus espectros angulares de potência. Finalmente, calculamos o espectro angular de potência esperado junto com o desvio padrão da amostra para fazer a comparação com os estimadores extraídos dos mapas de m-dispersão dos dados.

Os mapas de m-dispersão resultantes dos dados são mostrados na figura 4.4 e o resultado do teste é apresentando nas figuras 4.5 e 4.6. Nestas duas últimas figuras, as linhas indicam as regiões a 3σ do ΛCDM para cada l, os quadrados escuros indicam os valores do espectro de potência esperado e os símbolos "$\times$" indicam o espectro de potência do mapa de m-dispersão dos dados.

Como é visto nas figuras 4.5 e 4.6 dois comportamentos interessantes são observados, o primeiro é que para l's ímpares os valores extraídos dos dados estão totalmente fora da região a 3σ e o segundo, é que este mesmo comportamento se repete para todos os multipolos l_o associados à temperatura. Assim segundo este teste, os dados do WMAP não aceitam a IE com um grau de confiabilidade de 3σ. Equivalentemente, no caso de que o nosso Universo for ΛCDM, estes comportamentos exóticos que os dados apresentam pertenceriam apenas ao $\sim 0.5\%$ das realizações da variável aleatória estatisticamente isotrópica.

4.7 Comentários

Das três estatísticas usadas, uma delas aceitou a hipótese de IE, as outras duas que não a aceitaram, o fizeram com diferentes graus de confiabilidade. Este resultado verifica o já reportado até agora, que a confiabilidade e os resultados dos testes de IE dependem da estatística usada [24, 41]-[77].

É importante enfatizar que nenhum teste estabelece uma verdade absoluta, cada um deles apenas nos diz se a amostra considerada aceita ou não uma hipótese dada. Porém, o fato de chegarmos a resultados diferentes nos nosssos três testes, leva a considerar a necessidade de pesquisas mais profundas em dois sentidos:

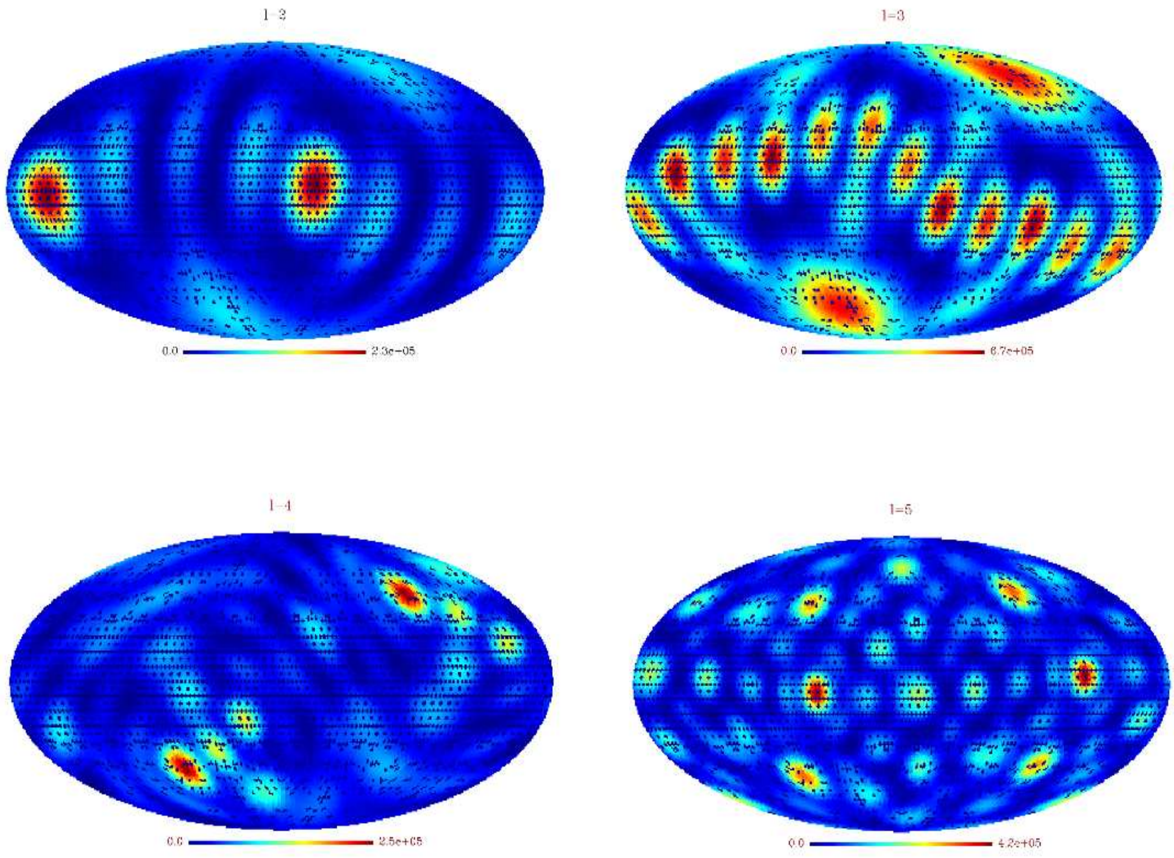
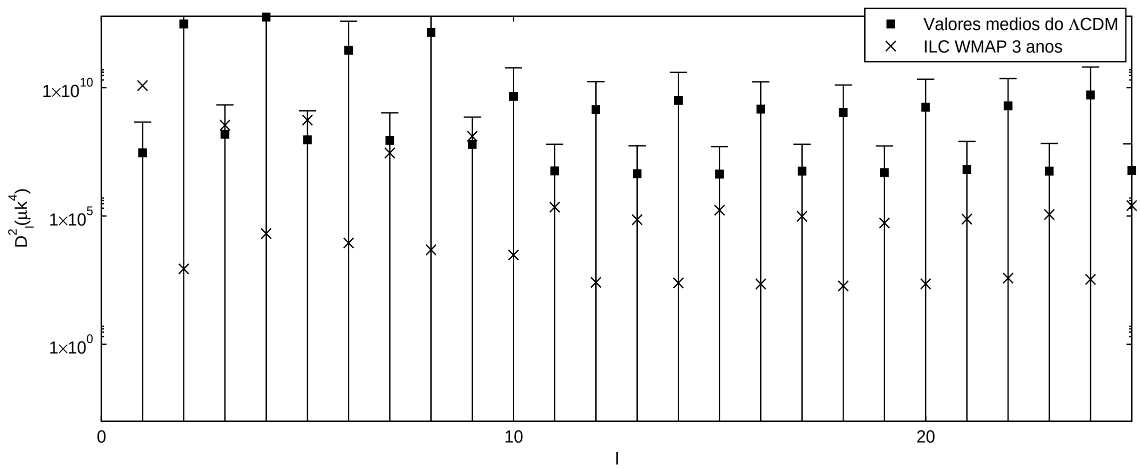


Figura 4.4: Mapas de m-dispersão dos dados do WMAP (ILC-3 anos) para cada multipolo individual $2 \leq l_o \leq 5$. Note que existem regiões onde a m-dispersão é maior do que outras. Assim, mapas deste tipo podem ser caracterizados por seu espectro angular de potências $D_l^{l_o}$.



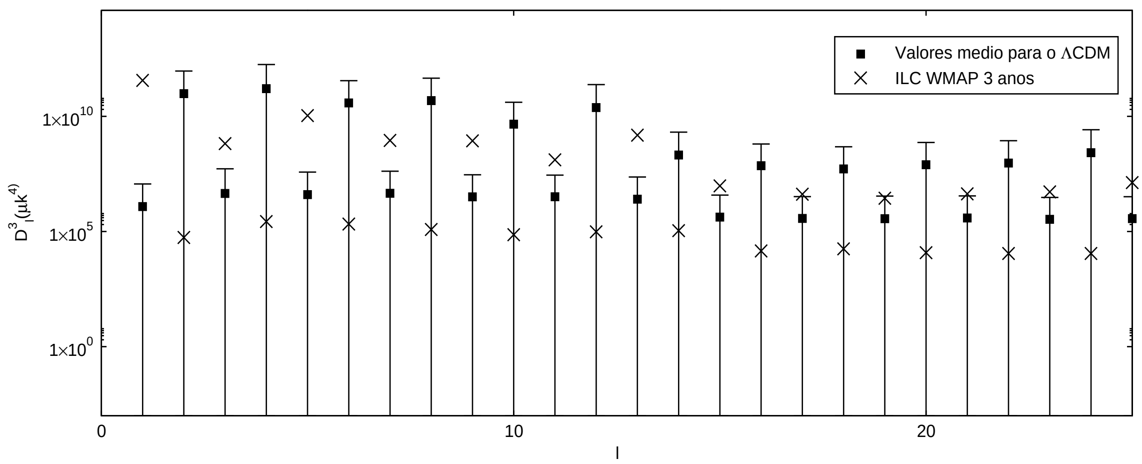


Figura 4.5: Espectros angulares de potência dos mapas de m-dispersão para o quadrupolo $l_o = 2$ (parte superior) e para o octupolo $l_o = 3$ (parte inferior) comparado com os espectros de potência resultantes dos dados. Note como os valores medidos do mapa ILC dos 3 anos do WMAP têm comportamentos que não são esperados num Universo ΛCDM. Esta não concordância é a um nível de 3σ e curiosamente acontece apenas nos valores ímpares de l. Leve em conta que l (coordenada horizontal) indica as escalas da expansão harmônica da m-dispersão e não da temperatura. Para uma melhor visualização, a coordenada vertical é mostrada em escala logarítmica.

(i) procura de melhores estatísticas para termos testes coerentes e (ii) estudo da possibilidade de que as flutuações da RCF não sejam estatisticamente isotrópicas e (iii) testes de robusteça.

Este segundo ítem, abre a possibilidade de considerar Universos com AE, mas para chegar a conclusões sobre este tipo de modelos usando as ferramentas da inferência estatística, é necessário realizar simulações. Para podermos simular Universos com AE (ver seção 3.7), o primeiro passo é calcular de forma rápida, efetiva e com alto grau de aproximação a principal quantidade estatística desse tipo de

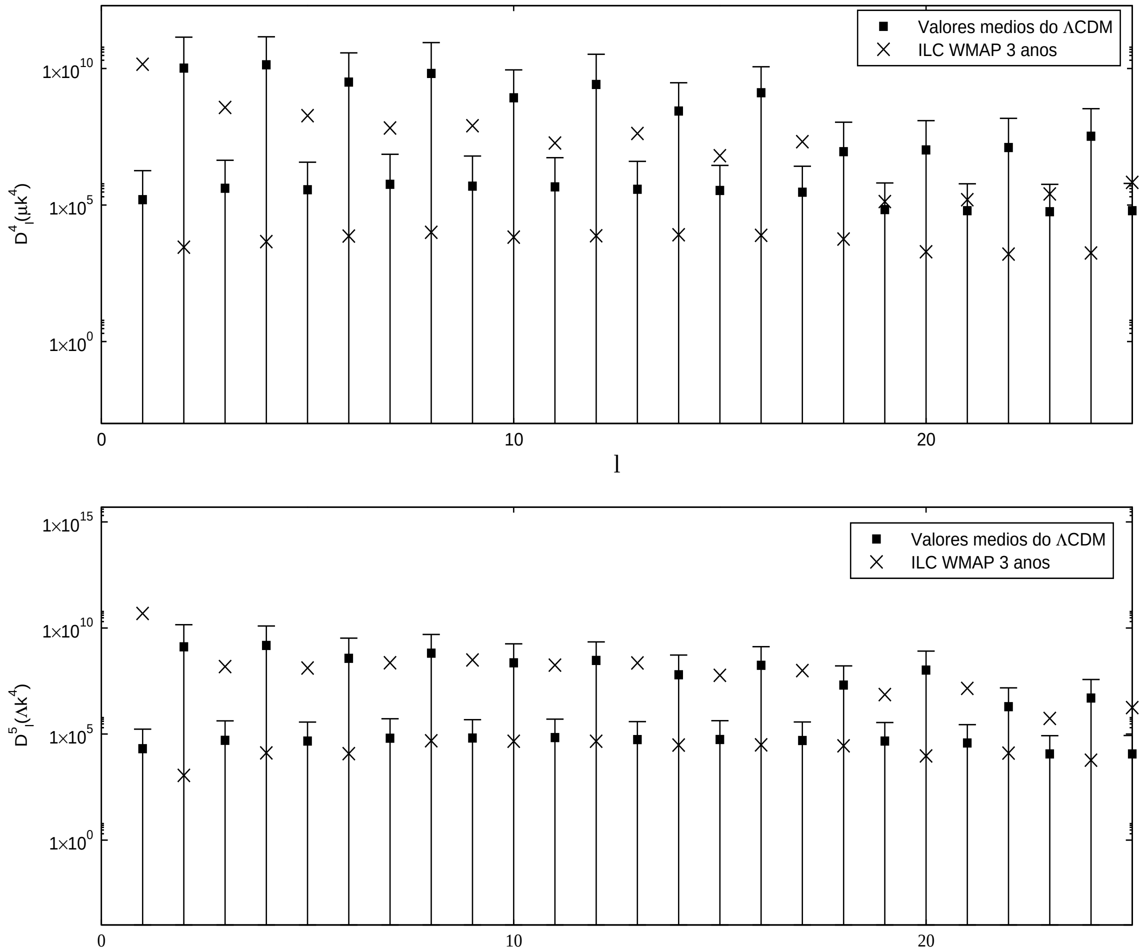


Figura 4.6: Espectros angulares de potência para $l_0 = 4$ (parte superior) e $l_0 = 5$ (parte inferior) comparados com seus equivalentes extraídos dos dados. Os dados se comportam similarmente que no caso octupolo da figura 4.5.

modelos: a matriz de correlação dos a^X_{lm}. Neste sentido, para que a m-dispersão e os mapas de dispersão sejam testados como indicadores de AE, precisam aguardar que simulações de céus estatisticamente anisotrópicos sejam possíveis.

Por outro lado, quando o grau de desenvolvimento no cálculo da matriz de correlação em Universos com AE tenha atingido o nível de seu equivalente no caso de IE, testar modelos e calcular parâmetros dos modelos com AE serão possíveis e teremos um melhor conhecimento deste tipo de Universos. Este conhecimento ajudará também a entender melhor os Universos com IE e suas diferenças com o caso de AE. Assim, uma discriminação entre estas duas familias de modelos estará melhor situada e sustentada do que é possível no presente.

No seguir desta tese, o esforço é concentrado em achar formas eficientes de calcular a matriz de correlação dos a_{lm}'s no cenário particular onde a AE é induzida pela topologia do Universo.

Capítulo 5

Evolução da Radiação Cósmica de Fundo

O papel central do Princípio Cosmológico, embora muitas vezes implícito no pensamento da comunidade científica, faz que modelos cosmológicos com AE não sejam objeto de estudo sistemático. Por esta razão, o grau de desenvolvimento no cálculo de observáveis e estatísticas neste tipo de modelos ainda não chegou ao nível do caso de IE. Como acontece no contexto de Universos estatisticamente isotrópicos, uma ferramenta indispensável para o estudo de AE, suas assinaturas, testes de modelos, medições de parâmetros e assuntos relacionados, é um algoritmo (ou um código computacional) que permita calcular as previsões teóricas sobre as flutuações da RCF e transformá-las em informação estatística.

O enorme esforço coletivo dirigido a compreender as flutuações da RCF em modelos com IE e que originou o método da *linha de visão* e o conhecido código CMBFAST [116, 130, 131], pode ser aproveitado até certo ponto quando consideramos Universos com AE. Assim sendo, o objetivo deste capítulo é adaptar o já conhecido em Universos com IE para o caso de modelos com AE. Embora parte do conteúdo seja conhecido, a forma como é desenvolvido nesta tese permite: (i) ver como os diferentes cenários de AE influenciariam nos cálculos e, (ii) explorar até que ponto os algoritmos e códigos númericos existentes para o caso de IE, podem ser aproveitados no caso estatisticamente anisotrópico, pois nesta última década, estes códigos mostraram ser altamente eficientes e potentes.

Como foi discutido nos capítulos anteriores, a quantidade mais importante do ponto de vista teórico para o estudo das flutuações da RCF é a função de correlação de dois pontos ou equivalentemente, a matriz de correlação dos a_{lm}'s. A parte central deste capítulo é escrever as equações Boltzmann-Einstein que governam a evolução dos fótons da RCF, e resolve-las até chegar ao cálculo dos coeficientes multipolares e sua matriz de correlação. A partir deste ponto, consideraremos apenas flutuações de temperatura.

5.1 Equações de evolução da Radiação Cósmica de Fundo

No Universo primordial, aconteceram interações entre fótons, elétrons e prótons. Os fótons interagiram com os elétrons (espalhamento Compton) e com os prótons, os elétrons e prótons sofreram interação Coulombiana e por sua vez, todos estes processos foram afetados pela gravidade. A métrica que determinou a interação gravitacional, também está ligada à matéria escura e aos neutrinos e está evoluindo com o tempo. O resultado deste sistema complexo é um conjunto de equações acopladas que determinam a evolução da métrica e de cada uma das componentes do Universo. Estas equações são derivadas da equação de Boltzmann e das equações de Einstein e para um estudo completo todo o sistema deve ser considerado. Porém, num primeiro momento, apenas são necessárias a equação de Boltzmann para os fótons e a equação de evolução da métrica.

5.1.1 Equação de Bolztmann para fótons

A equação de Boltzmann governa a evolução da função de distribuição $f(x,p)$ no espaço de fase (x,p), de um sistema de partículas de uma espécie dada,

$$\frac{d}{dt}f(x,p) = C[f(x,p)]\,. \tag{5.1}$$

O termo da direita $C[f(x,p)]$ indica o chamado termo de colisões e nele estão incluídos todos os processos sofridos pelas partículas do sistema. A eq. (5.1) nos diz que o número de partículas num elemento de fase dado muda com as interações nesse elemento. Vamos agora escrever separadamente as duas partes de (5.1) e juntá-las no final.

O lado esquerdo é escrito em função das derivadas parciais em relação às variáveis $x = (\eta, x^i)$ e ao seu momento conjugado $p = (\omega, p^i)$

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{d\omega}{d\eta}\frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{dn^i}{d\eta}\frac{\partial f}{\partial n^i}\,, \tag{5.2}$$

onde η é o tempo conforme definido como $a(\eta)d\eta = dt$, $a(\eta)$ é o fator de escala do Universo e como para o fóton $p^2 = 0$, fizemos $p^i = \omega n^i$, sendo n^i a direção de propagação do fóton.

Por outro lado, a evolução do momento p num espaço-tempo qualquer é dado pela equação da geodésica

$$\frac{dp^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = 0\,, \tag{5.3}$$

onde o espaço-tempo em questão é caracterizado por $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$.

No caso do nosso Universo, os fótons são afetados por uma métrica de tipo Friedmann-Robertson-Walker com uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$, tal que pode ser desprezada para ordens maiores que um,

$$g_{\mu\nu} = -a^2(\eta)[\gamma_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}]\,, \tag{5.4}$$

com

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= -1\,, \\ \gamma_{0i} &= \gamma_{i0} = 0\,, \\ \gamma_{ij} &= \left(1 + \frac{K}{4}(x^2+y^2+z^2)\right)^{-2}\delta_{ij}\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

e sendo $K = 0, \pm 1$ a curvatura espacial do Universo. Assim, usando (5.4) em (5.3) tem-se que o módulo do momento do fóton evolui segundo a equação (Ver apêndice **??**)

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{d\eta} = -\frac{a'}{a} - \frac{1}{2}h_{00,i}n^i + h'_{0i}n^i - \frac{1}{2}h'_{ij}n^i n^j\,, \tag{5.6}$$

onde $'$ indica derivada total com respeito ao tempo conforme.

No caso do Universo não perturbado, todas as quantidades são homogêneas e isotrópicas. Portanto, a função de distribuição pode se escrever como

$$f(x,p) = f_0(\eta,\omega) + f_1(x,p)\,, \tag{5.7}$$

onde $f_0(\eta,\omega)$ é a solução de (5.1) a ordem zero. Assim, o quarto termo do lado direito de (5.2) é de segunda ordem e pode ser desprezado a primeira ordem, pois (5.3) para a componente espacial de p mostra que o termo $dn^i/d\eta$ é também de primeira ordem (Ver apêndice **??**).

Finalmente, introduzindo (5.6) e (5.7) em (5.2), o lado esquerdo da equação de Boltzmann (5.1) na aproximação de ordem zero toma a forma

$$\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \omega\frac{a'}{a}\frac{\partial f_0}{\partial \omega} = a\, C_0[f(x,p)]\,, \tag{5.8}$$

e para a primeira ordem tem-se

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta} + n^i\frac{\partial f_1}{\partial x^i} - \left(\frac{1}{2}h_{00,i}n^i - h'_{0i}n^i + \frac{1}{2}h'_{ij}n^i n^j\right)\omega\frac{\partial f_0}{\partial \omega} = a\, C_1[f(x,p)]\,, \tag{5.9}$$

sendo $C_0[f(x,p)]$ e $C_1[f(x,p)]$, os termos de colissões de ordem zero e um respectivamente.

Como foi dito, o termo de colisões inclue todas as interações sofridas, isto é, $C[f(x,p)]$ para o caso dos fótons deveria incluir a interação fóton-elétron e a do fóton com os outros bárions. Porém, a probabilidade de espalhamento é proporcional a inversa do quadrado da massa e assim, o processo dominante é o espalhamento Compton [5]

$$e^-(q') + \gamma(p') \longrightarrow e^-(q) + \gamma(p)\,. \tag{5.10}$$

Se $p = (\omega, \vec{p})$, $q = (E_q, \vec{q})$, $p' = (\omega\,', \vec{p}\,')$ e $q' = (E_{q\,'}, \vec{q}\,')$, o termo de colissões para este processo binário é dado por [132]

$$\begin{aligned} C[f(x,p)] = \frac{1}{\omega} \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2\omega\,'} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2E_q} \int \frac{d^3\vec{q}'}{(2\pi)^3 2E_{q'}} (2\pi)^4 \times \\ \delta(p + q - p' - q') \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 [g(q')f(p') - g(q)f(p)]\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

A média nos momentos incidente e espalhado do elétron ($\vec{q}'$ e $\vec{q}$), e no momento incidente do fóton $\vec{p}'$, indica que a informação obtida corresponde ao fóton espalhado. O delta indica conservação de energia, $\sum_{spins} |\mathcal{M}|^2$ é a média nos spins da amplitude de espalhamento Compton e g é a função de distribuição do elétron.

A energia dos fótons na era da recombinação foi de $\sim 0.4\,eV$, valorl pequeno comparado à massa do eletron $(0,5MeV)$, portanto a aproximação do espalhamento Compton a baixas energias é válida . Desta forma, a média nos spins da amplitude de espalhamento Compton nesta aproximação é [133]

$$\sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = 4A(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}')^2\,, \tag{5.12}$$

sendo $\vec{\epsilon}$ a polarização do fóton, $A = (4\pi)^2 \frac{\alpha^2}{m^2}$, onde α é a constante de estructura fina e m a massa do elétron. Se considerarmos apenas temperatura, uma boa aproximação é $\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}' \sim 1$ (espalhamento Thomson) [134].

Usando (5.12), fazendo expansões de Taylor de E_q e $g(q)$, considerando termos até primeira ordem e integrando, tem-se que o termo de colissões toma a forma*

$$\begin{aligned} C[f(x,p)] = \frac{An_e}{\pi^2 m^2 \omega} \int \frac{d^3\vec{p}'}{\omega\,'} [\delta(\omega - \omega')\,(f_1(\eta, \vec{x}, \vec{p}') - f_1(\eta, \vec{x}, \vec{p})) + \\ (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{v_b} \frac{\partial}{\partial \omega'} \delta(\omega - \omega')\,(f_o(\omega') - f_o(\omega))]\,, \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde $\vec{v_b}$ indica a velocidade dos barions. Note que (5.13) é de primeira ordem pois f_1 e $\vec{v_b}$ são de primeira ordem e assim $C_0[f(x,p)] = 0$. As eqs. (5.8), (5.9) e (5.13) formam o conjunto das equações de Bolztmann para os fótons da RCF.

*No apêndice D são apresentados os passos para chegar a (5.13).

5.1.2 Equação das flutuações de temperatura da RCF

A partir de (5.8), (5.9) e (5.13), chega-se as equações que governam as flutuações de temperatura da RCF. Para isto nos apoiamos na solução de (5.8) [132]

$$f_0 = \frac{1}{e^{\omega/T_e} - 1}\,. \tag{5.14}$$

Fazendo a expansão de Taylor de f em T_e e usando nela a solução (5.14), encontra-se que f_1 tem a forma [135]

$$f_1(x,p) = -\omega\frac{\partial f_0}{\partial\omega}T(\vec{x},\eta,n^i)\,. \tag{5.15}$$

A função T indica as flutuações de temperatura da RCF em torno de T_o. Introduzindo (5.15) em (5.9) e (5.13) e integrando tem-se (ver apêndice D)

$$\frac{\partial T}{\partial\eta} + n^i\frac{\partial T}{\partial x^i} = -\frac{1}{2}h_{00,i}n^i + h'_{0i}n^i - \frac{1}{2}h'_{ij}n^in^j + an_e\sigma_T\left(\frac{1}{4}\delta\epsilon_b - T + n^iv_i^b\right), \tag{5.16}$$

σ_T é a seção de choque do espalhamento Thomson, n_e a densidade de elétrons e $\delta\epsilon_b$ a densidade dos bárions. Note que (5.16) é a equação das flutuações de temperatura considerando apenas os efeitos a primer ordem.

5.2 Equações de evolução das perturbações

Segundo (5.16) as flutuações de temperatura estão acopladas às perturbações métricas e à velocidade e densidade de barions. Agora temos que considerar as equações que governam estas quantidades para continuar o estudo das anisotropias de temperatura. Consideremos primeiro a equação de Einstein $G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - g^\mu_\nu R = 8\pi T^\mu_\nu$, onde G^μ_ν é o tensor de Einstein, R^μ_ν o tensor de Ricci, R o escalar de Ricci e T^μ_ν o tensor energia-momento total do Universo. O tensor de Einstein tem que ser calculado para a métrica (5.4), porém existem duas questões a discutir antes de realizar o cálculo: a classificação das perturbações e a liberdade de *gauge* no contexto da relatividade geral.

5.2.1 Classificação das perturbações cosmológicas

A perturbação $h_{\mu\nu}$ é definida numa variedade tetradimensional de curvatura espacial constante, onde a componente h_{oo} da métrica (5.4) não recebe contribuição vetorial nem tensorial e a componente h_{oi} não recebe contribuição tensorial. Assim sendo, usamos o chamado teorema da decomposição para escrever [137]

$$h_{oi} = \nabla_i\varphi + F_i\,, \qquad \nabla^iF_i = 0\,, \tag{5.17}$$

e

$$h_{ij} = \gamma_{ij}\psi + (\nabla_i\nabla_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2)\chi + \nabla_i E_j + \nabla_j E_i + w_{ij}\,, \qquad \nabla^2 = \nabla_i\nabla^i\,, \quad (5.18)$$

com

$$\nabla_i E^i = 0\,, \qquad \gamma_{ij}w^{ij} = \nabla_i\, w^{ij} = 0, \quad (5.19)$$

onde ∇_i é a derivada covariante na i-ésima coordenada numa hipersuperfície tridimensional a um tempo constante e γ^{ij} é a métrica desta hipersuperfície. As quantidades ϕ, φ, ψ e χ são chamadas de *perturbações escalares*, F_i e E_i são chamadas de *perturbações vetoriais* e w^{ij} de *perturbações tensoriais*. Cada um destes tipos de perturbações evolui independentemente, ou seja que qualquer efeito causado por um tipo perturbação não influencia nos outros tipos. Por simplicidade nos cálculos, nesta tese apenas consideraremos as perturbações escalares. Assim sendo, $h_{\mu\nu}$ toma a forma

$$\begin{aligned} h_{00} &= \phi\ , \\ h_{0i} &= \nabla_i\varphi\ , \\ h_{ij} &= \gamma_{ij}\psi + (\nabla_i\nabla_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2)\chi\ . \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.2.2 Liberdade de gauge

Enquanto que a Relatividade Geral é uma teoria covariante por transformações de coordenadas, as perturbações cosmológicas não são invariantes. Uma quantidade perturbada é definida como

$$\overline{Q}(\overline{x}) = Q_o(x) + \delta Q(x)\,. \quad (5.21)$$

onde as quantidades com $(\_)$ pertencem a variedade perturbada $\overline{M}$ e as sem este símbolo às sem perturbar M. A quantidade δQ é chamada de *perturbação* e não é invariante por transformações de coordenadas de tipo $\widetilde{x} \longrightarrow x + \xi(x)$, pois [137]

$$\Delta\delta Q = \delta\widetilde{Q} - \delta Q = \mathcal{L}_\xi Q_o\,, \quad (5.22)$$

onde $\mathcal{L}$ é a derivada de Lie e Q_o é a quantidade sem perturbar (quantidade de *fundo*).

De (5.22) oberserva-se que δQ é invariante ($\Delta\delta Q = 0$), apenas se Q_o é zero, constante ou uma combinação de produtos e somas de δ^μ_ν com coeficientes constantes. No entanto, δQ sempre depende de x e portanto em geral não é invariante. Se escrevemos $\xi(x) = (T, \nabla_i L + L_i)$, sendo que usamos o teorema da decomposição para a parte espacial de $\xi(x)$, e usando a métrica (5.5) como fundo, a decomposição

(5.20) e (5.22) nos levam às seguintes leis de transformações para as perturbações escalares

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi} - \phi &= \mathcal{H}T + T' \\
\widetilde{\varphi} - \varphi &= T - L' \\
\widetilde{\psi} - \psi &= \frac{1}{3}\nabla^2 L + \mathcal{H}T \\
\widetilde{\chi} - \chi &= L\,.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

o símbolo $\widetilde{}$ indica que as quantidades estão no sistema $\widetilde{x}$. Como pode ser visto, a transformação das perturbações depende de ξ, o qual pode ser escolhido livremente, ou seja, existe uma *liberdade de gauge*.

Uma escolha particular de ξ é chamada de *escolha de gauge*. Existem dois *gauges* onde as flutuaçcões da RCF são estudadas: o *gauge síncrono* ([2, 138, 144] e suas referências) e o *gauge longitudinal* ([137, 145, 146] e suas referências). Neste trabalho usaremos o segundo, onde se faz a escolha de $T = L' - \varphi$ e $L = -\chi$. Assim, neste gauge, (5.23) toma a forma

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi} &= \phi + \mathcal{H}(L' - \varphi) + L'' - \varphi') \\
\widetilde{\varphi} &= 0 \\
\widetilde{\psi} &= \psi + \mathcal{H}(L' - \varphi) - \frac{1}{3}\nabla^2\chi \\
\widetilde{\chi} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Pode ser mostrado que as quantidades (5.24) são invariantes de *gauge*, e assim qualquer quantidade expressa em função delas será também invariante. A quantidade $\widetilde{\phi}$ comumente é denotado por Φ, e $\widetilde{\psi}$ é denotado por Ψ. Φ e Ψ são chamados de potencias de Bardeen e no seu limite clássico, representam campos gravitacionais newtonianos [145]. Devido a invariância de Φ e Ψ o *gauge* longitudinal é chamado também de *gauge* invariante. A forma particular que toma a métrica (5.4) para perturbações escalares neste *gauge* é

$$ds^2 = a^2(\eta)\left((1 + 2\Phi)d^2\eta - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j\right)\,. \tag{5.25}$$

Os fatores 2 que multiplicam os potenciais Φ e Ψ são adicionados apenas por conveniência nos cálculos. A mesma análise pode ser feita para as perturbações vetoriais, encontrando uma forma particular de (5.4) que depende apenas de quantidades invariantes (ver por exemplo [137, 145, 147] e suas referências). As perturbações tensoriais são sempre invariantes de *gauge*.

5.2.3 Perturbação do tensor energia-momento

Seja o tensor de energia-momento perturbado

$$T^{\mu}_{\nu} = \theta^{\mu}_{\nu} + t^{\mu}_{\nu}\,, \tag{5.26}$$

com

$$\begin{aligned} \theta^0_0 &= \epsilon\,, \\ \theta^0_i &= \theta^i_0 = 0\,, &(5.27) \\ \theta^i_j &= -p\,, &(5.28) \end{aligned}$$

onde t^{μ}_{ν} é uma perturbação e onde ϵ é a densidade de energia total e p a sua pressão. De acordo com o teorema da decomposição t^{μ}_{ν} também pode ser escrito em termos de perturbações escalares, vetoriais e tensoriais. Levando em conta apenas perturbações escalares e usando (5.22) acha-se que no *gauge* longitudinal ($T = L' - \varphi \;\; , L = -\chi$) o tensor energia momento perturbado é

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \epsilon + \delta\epsilon\,, \\ T^0_i &= -(\epsilon + p)a\nabla_i u\,, \\ T^i_j &= -(p + \delta p)\delta^i_j\,, \end{aligned} \tag{5.29}$$

onde $\delta\epsilon$ é a perturbação da densidade de energia, δp é a pertubação da pressão e $\nabla_i u$ é a velocidade peculiar que as componentes do Universo ganham na presença de perturbações.

5.2.4 Equações de Einstein

O tensor de Einstein foi calculado usando as fórmulas [136]

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})\,, \tag{5.30}$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\,, \tag{5.31}$$

e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e a métrica (5.25) no *gauge* longitudinal. Logo, junto com o tensor de energia-momento perturbado (5.29) no mesmo *gauge*, foram usados para calcular as equações de Einstein. O resultado em ordem 0 é

$$\begin{gathered} 3(\mathcal{H}^2 + K) = 8\pi G\epsilon\,, \\ \mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' + K = -8\pi G p \end{gathered} \tag{5.32}$$

com $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$, e o resultado a primeira ordem é: para a componente $0-0$

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi + 3K\Psi = 4\pi G\delta\epsilon\,, \tag{5.33}$$

para a componente $0-i$

$$\nabla_i(\mathcal{H}\Phi + \Psi') = 4\pi Ga(\epsilon + p)\nabla_i u\,, \tag{5.34}$$

e para a componente $i-j$

$$\begin{aligned}\left((2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - K\Psi + \frac{1}{2}\nabla^2(\Phi - \Psi)\right)\delta^i_j \\ +\frac{1}{2}\gamma^{ik}\nabla_k\nabla_j(\Phi - \Psi) \quad = \quad 4\pi G\delta p\delta^i_j\,.\end{aligned} \tag{5.35}$$

A solução de (5.35) no caso que $i \neq j$ é nula ou aceita forma linear para $(\Phi - \Psi)$. Mas a solução linear é descartada já que cresceria infinitamente com a posição e tomaria a amplitudes perturbação Φ e Ψ infinitas. Assim a única solução que fica é a nula e com isso $\Phi = \Psi$. Desta forma o conjunto (5.33)-(5.35) toma a forma

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') + (\nabla^2 + 3K)\Phi = 4\pi G\delta\epsilon\ , \tag{5.36}$$

$$\nabla_i(\mathcal{H}\Phi + \Phi') = 4\pi Ga(\epsilon + p)v_i\ , \tag{5.37}$$

$$(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - K)\Phi + 3\mathcal{H}\Phi' + \Phi'' = 4\pi G\delta p \tag{5.38}$$

onde fizemos $v_i = \nabla_i u$.

5.3 Solução das equações de evolução das perturbações

O conjunto de equações (5.36)-(5.38) governam a evolução das perturbações cosmológicas escalares no tempo e no espaço. A solução destas equações na sua dependência espacial não é complicada e nos permitirá simplicar a análise das flutuações da RCF. Continuando com o tratamento, consideremos que as flutuações de densidade de energia e pressão num fluido estão relacionados pela equação [146]

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial\epsilon}\right)|_S\delta\epsilon + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)|_\epsilon\delta S = c_s^2\delta\epsilon + \sigma\delta S\,, \tag{5.39}$$

onde $|_S$ significa que na variação mantem-se a entropia S constante e $|_\epsilon$ significa que na variação mantem-se ϵ constante, c_s^2 é a velocidade do som no fluido e σ

um parâmetro termodinámico [146]. Assim, manipulando (5.39), (5.36) e (5.38) obtem-se a equação

$$\Phi'' + \left(2\mathcal{H}' + (1+3c_s^2)(\mathcal{H}^2 - K) - c_s^2\nabla^2\right)\Phi + 3\mathcal{H}(1+c_s^2)\Phi' = 4\pi G\tau\delta S\,. \tag{5.40}$$

Para o caso que as perturbações sejam adiabáticas $\delta S = 0$, podemos fazer uma separação de variáveis da parte temporal e espacial. Assim (5.40), tem como solução

$$\Phi(\eta,\vec{x}) = \int F(\eta,k)\xi(\vec{k},\vec{x})d^3\vec{k}\,, \tag{5.41}$$

onde a parte temporal de (5.41) é solução da equação

$$F''(\eta,k) + \left(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}(1+c_s^2)F'(\eta,k) + (1+3c_s^2)(\mathcal{H}^2 - K + c_s^2k^2)\right)F = 0\,, \tag{5.42}$$

e a parte espacial é solução da equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\xi(\vec{k},\vec{x}) = 0\,, \tag{5.43}$$

As soluções de (5.43) formam uma base ortonormal, isto é [115]

$$\int \xi^*(\vec{k},\vec{x})\xi(\vec{k}\,',\vec{x})d^3\vec{x} = \delta(\vec{k}\,' - \vec{k})\,, \tag{5.44}$$

e por outro lado introduzindo (5.41) em (5.37), tem-se a solução formal para v_i

$$v_i(\eta,\vec{x}) = \int v(\eta,k)\nabla_i\xi(\vec{k},\vec{x})d^3\vec{k}\,, \tag{5.45}$$

com

$$v(\eta,k) = \frac{\mathcal{H}F(\eta,k) + F'(\eta,k)}{4\pi Ga(\epsilon + p)}\,. \tag{5.46}$$

Mas $v_i(\eta,\vec{x})$ é a soma das velocidades peculiares de todos os componentes do Universo, isto é $v_i = \sum_x v_i^x$, onde $x = b$ para barions, $x = c$ para matéria escura e $x = n$ para neutrinos. Assim de acordo com a indepêndencia linear das soluções de (5.43), a velocidade de cada componente é

$$v_i^x(\eta,\vec{x}) = \int v^x(\eta,k)\nabla_i\xi(\vec{k},\vec{x})d^3\vec{k}\,, \tag{5.47}$$

e

$$v^b(\eta,k) + v^c(\eta,k) + v^n(\eta,k) = v(\eta,k)\,. \tag{5.48}$$

De forma parecida, introduzindo (5.41) em (5.36), tem-se a solução formal para $\delta\epsilon$

$$\delta\epsilon(\vec{k},\vec{x}) = \int \delta(\eta,k)\xi(\vec{k},\vec{x})d^3\vec{k}\,, \tag{5.49}$$

com

$$\delta(\eta,k)=\frac{1}{4\pi G}\left(-3\mathcal{H}(\mathcal{H}F(\eta,k)+F'(\eta,k))+F(\eta,k)(k^2+3K)\right)\,. \tag{5.50}$$

Do mesmo modo que a velocidade, a densidade de energia $\delta\epsilon$ é a total do Universo, ou seja $\delta\epsilon=\sum_x\delta\epsilon^x$. Também por independência linear das soluõçs de (5.43) tem-se que para cada componente

$$\delta\epsilon^x(\eta,\vec{x})=\int\delta^x(\eta,k)\xi(\vec{k},\vec{x})d^3\vec{k}\,, \tag{5.51}$$

com

$$\delta^b(\eta,k)+\delta^c(\eta,k)+\delta^n(\eta,k)=\delta(\eta,k)\,. \tag{5.52}$$

5.4 Solução da equação das flutuações de temperatura da RCF

Existem duas formas de calcular as flutuações da RCF, uma delas é baseado na expressão de formas integrais como (5.41), (5.47) e (5.51) (ver por exemplo [131]-[148] e suas referências) e a outra, usando as chamadas *equações de hierarquia* (ver por exemplo [152]-[138] e suas referências). Para a construção de códigos numéricos é usada uma mistura das duas, mas no nosso caso onde ainda estamos na parte teórica do tratamento, serão mais úteis as formas integrais.

A equação que governa às flutuações considerando todos os efeitos a primeira ordem (5.16) com métrica no gauge longitudinal (5.25) é escrita como

$$\frac{\partial T}{\partial\eta}+n^i\frac{\partial T}{\partial x^i}-\tau'T=\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}n^i-\Phi'-\tau'\left(\frac{1}{4}\delta\epsilon_b+n^iv_i^b\right)\,, \tag{5.53}$$

com

$$\tau(\eta)=\int_\eta^{\eta_o}d\eta n_e\sigma_T a\,, \tag{5.54}$$

sendo a profundidade óptica. Note que no tempo atual η_o, a densidade de elétrons n_e é pequena e $\tau\ll 1$, e para tempos primordiais n_e é muito grande e $\tau\gg 1$. Portanto

$$\tau'=-n_e\sigma_T a\,. \tag{5.55}$$

Introduzindo (5.41), (5.47) e (5.51) em (5.53) tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial\eta}+n^i\frac{\partial T}{\partial x^i}-\tau'T=\int\mathcal{F}(\eta,k,n^i)\xi(\vec{k},\vec{x})d^3\vec{k}\,, \tag{5.56}$$

onde

$$\mathcal{F}(\eta, k, n^i) = F(\eta, k)n^i\nabla_i - F'(\eta, k) - \tau'(\frac{1}{4}\delta^b(\eta, k) + v^b(\eta, k)n^i\nabla_i) \tag{5.57}$$

Para obedecer a independência liear das soluções (5.43), T tem de ser da forma

$$T(\eta, \vec{x}) = \int \widetilde{T}(\eta, k, n^i)\xi(\vec{k}, \vec{x})d^3\vec{k}\,, \tag{5.58}$$

onde $\widetilde{T}$ é solução da equação operacional

$$\widetilde{T}\,' + (n^i\nabla_i - \tau')\widetilde{T} = \mathcal{F}(\eta, k, n^i)\,. \tag{5.59}$$

que pode ser formalmente escrita da forma

$$\frac{d}{d\eta}[\widetilde{T}\,e^{(\eta n^i\nabla_i - \tau)}] = \mathcal{F}(\eta, k, n^i)e^{(\eta n^i\nabla_i - \tau)} \tag{5.60}$$

A solução desta equação para o tempo atual η_o é

$$\widetilde{T}(\eta_o, k, n^i) = \int_0^{\eta_0} d\eta\mathcal{F}(\eta, k, n^i)e^{((\eta-\eta_o)n^i\nabla_i - \tau)}\,, \tag{5.61}$$

onde se usaram as aproximações e $\tau \gg 1$ e $\tau \ll 1$ para tempos primordiais e tempos atuais respectivamente. Para continuar, apenas por simplicidade nos cálculos desta tese, vamos incluir somente o caso de Universos com geometria plana $K = 0$. Desta forma, as soluções de (5.43) são da forma

$$\xi(\vec{k}, \vec{x}) = \widehat{\xi}(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}}\,. \tag{5.62}$$

Substituindo (5.62) em (5.59) e avaliando os operadores ∇_i obtemos que

$$\widetilde{T}(\eta_o, \vec{k}, \hat{n}) = \int_0^{\eta_0} d\eta\mathcal{E}(\eta, \vec{k}, \hat{n})e^{i(\eta-\eta_o)\vec{k}.\hat{n} - \tau}\,, \tag{5.63}$$

com

$$\mathcal{E}(\eta, \vec{k}, \hat{n}) = i\vec{k}\cdot\hat{n}\,F(\eta, k) - F'(\eta, k) - \tau'(\frac{1}{4}\delta^b(\eta, k) + i\vec{k}\cdot\hat{n}v^b(\eta, k)) \tag{5.64}$$

onde trocamos n^i por $\hat{n}$ apenas para escrever os produtos escalares.

5.5 Flutuações na linha de visão

A função (5.64) tem uma dependencia do produto $\vec{k}.\hat{n}$ que complicariam os cálculos no capíulo seguinte. Porém esta dependencia pode ser eliminada e para isso usamos o método de sinal de visão proposto por Seljak e Zaldarriaga [130, 131].

Se chamarmos μ à variável associada à direção $\hat{n}$ do fóton tal que $k\mu = \hat{k} \cdot \hat{n}$, temos que (5.64) reescreve-se como

$$\mathcal{E}(\eta, k, \mu) = ik\mu\, F(\eta, k) - F'(\eta, k) - \tau'(\frac{1}{4}\delta^b(\eta, k) + ik\mu v^b(\eta, k))\,. \qquad (5.65)$$

A integração por partes de (5.63) permite separar a dependencia de $\mathcal{E}(\eta, k, \mu)$ em μ num termo conhecido. Esta integral tem quatro termos, o primeiro termo é por exemplo

$$ik\int_0^{\eta_0} d\eta\mu F e^{ik\mu(\eta-\eta_0)-\tau} = \int_0^{\eta_0} d\eta F e^{-\tau}\frac{d}{d\eta}(e^{ik\mu(\eta-\eta_0)}) =$$
$$-\int_0^{\eta_0} d\eta(e^{-\tau}F' - \tau' e^{-\tau}F)e^{ik\mu(\eta-\eta_0)}\,, \qquad (5.66)$$

onde para o termo de superfície adotamos as aproximações conechidas para τ nos tempos primordiais e atuais. Realizando a integração completa chega-se a

$$\widetilde{T}(\eta_o, k, \mu) = \int_0^{\eta_0} d\eta\mathcal{S}(\eta, k)e^{ik\mu(\eta-\eta_o)}\,, \qquad (5.67)$$

com

$$\mathcal{S}(\eta, k) = -g[F(\eta, k) - \frac{1}{4}\delta^b(\eta, k) + v'^b(\eta, k)] - 2e^{-\tau}F' + g'v^b(\eta, k)\,, \qquad (5.68)$$

sendo $g(\eta) = -\dot{\tau}e^{-\tau}$ a chamada função de visibilidade que está associada a duração da era de recombinação, por exemplo, para recombinação instantânea g é uma delta. Alguns térmos de (5.68) são reconhecíveis, as duas primeiras contribuições no primeiro termo são as anisotropias intrínsecas devido as flutuações de densidade de fótons e a existência de perturbações gravitacionais na SUE (efeito Sachs-Wolfe), enquanto que a terceira contribuição deste termo junto com o último termo, formam a contribuição por efeito Doppler. O quarto termo é o chamado efeito Sachs-Wolfe Integrado. Finalmente, de (5.58), (5.62) e (5.67), as flutuações de temperatura podem ser escritas como

$$T(\eta, \vec{x}) = \int \widetilde{T}(\eta_o, k, \mu)\widehat{\xi}(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}}d^3\vec{k}\,. \qquad (5.69)$$

e usando a expansão multipolar (1.2) tem se que os coeficientes multipolares tomam a forma

$$a_{lm} = \int\int \widetilde{T}(\eta_o, k, \mu)\widehat{\xi}(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}}d^3\vec{k}\,)Y^*_{lm}(\hat{n})d\Omega d^3\vec{k}\,. \qquad (5.70)$$

Todas as contribuições as anisotropias estão na função $\widetilde{T}(\eta_o, k, \mu)$ e a natureza aleatória das flutuações de temperatura estão no coeficiente $\widehat{\xi}(\vec{k})$. Finalmente usando (1.2) e

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = (4\pi)\sum_{lm} i^l j_l(kx)Y^*_{lm}(\hat{n}_k)Y_{lm}(\hat{n})\,, \qquad (5.71)$$

onde $\hat{n}_k$ representa ás coordenadas angulares de $\vec{k}$ e $j_l(x)$ são as funções esféricas de Bessel, temos que a matriz de correlação é:

$$\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle = (4\pi)^2 i^{l-l'} \int d^3\vec{k} d^3\vec{k}\,' G_l(\eta_o, k, \mu) G_{l'}(\eta_o, k'\mu) \langle \widehat{\xi}(\vec{k}) \widehat{\xi}^*(\vec{k}\,') \rangle \,) \times \\ Y^*_{lm}(\hat{n}_k) Y_{l'm'}(\hat{n}_k) \,. \quad (5.72)$$

com

$$G_l(\eta_o, k, \mu) = \widetilde{T}(\eta, k, \mu) j_l(k R_{SUE}) \,, \quad (5.73)$$

onde R_{SUE} é o raio da esféra de último espalhamento. No seguinte capítulo, usaremos esta aproximação para implementar o cálculo da matriz de correlação no cenário de topologias não trivias.

Capítulo 6

Cenário de topologias não triviais

Nosso Universo é modelado matematicamente por uma variedade tetradimensional $\mathcal{M}$ *difeomorfa* a $R \times M$, onde R é topologicamente uma reta e corresponde à coordenada temporal, e M é uma variedade tridimensional que corresponde às coordenadas espaciais. No contexto da Cosmologia Relativista, as propriedades locais do Universo são caracterizadas pela métrica e mais precisamente por soluções das equações de Einstein. Por outro lado, as propriedades globais são ditadas por sua topologia.

As equações de Einstein nada dizem a respeito da topologia ou das propriedades globais do Universo e dada uma solução, existe um número grande de variedades com diferentes topologias que têm as mesmas propriedades locais. Assim a métrica (5.4) usada no capítulo anterior para estudar a evolução dos fótons da RCF suporta várias topologias distintas [83]. Destas topologias, em apenas três, nas chamadas *simplesmente conexas ou triviais*, as flutuações da RCF são estatisticamente isotrópicas*. No restante das possibilidades, nas chamadas variedades *multiplamente conexas ou não triviais*, estas flutuações são estatisticamente anisotrópicas. Surge então, o cenário de Universos com topologia não trivial para introduzir AE na RCF.

No presente capítulo estudam-se as flutuações de temperatura da RCF neste cenário e é mostrado explicitamente que a topologia do Universo imprime sua assinatura na RCF em forma de AE. A AE produto de topologias não triviais é quantificável e pode, potencialmente, ser procurada nos dados observacionais. Exemplos desta procura são: a distorção do espectro angular de potências com respeito ao do caso simplesmente conexo [84], [159]-[169], a existência dos chamados *"círculos no céu"* [85, 170]-[177], existência de Biespectro de potências não nulo [118]-[121], e alinhamentos dos multipolos baixos [41, 43, 44, 46, 63]-[64, **?**, 84, 87, 178]. Estas duas últimas assinaturas forma ainda pouco exploradas.

*A única exceção é o espaço projetivo, que tem curvatura positiva e topologia não trivial, mas apresenta um campo de RCF estatisticamente isotrópico.

Como resultado dos estudos nesta parte da tese, desenvolvemos um formalismo eficiente para calcular matrizes de correlação e assim, simular mapas de anisotropias de temperatura que ajudarão a realizar estudos e testes em áreas como RCF e Topologia Cósmica†. Usando estas simulações, problemas como a existência de AE e direções preferênciais na RCF, assim como também problemas como a detectabilidade da topologia do Universo poderão ser estudados de forma sistemática.

6.1 Topologia

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos de topologia que serão necessários para a leitura dos próximos dois capítulos. Estes conceitos dão lugar aos termos técnicos usados no contexto da Topologia Cósmica e serão apresentados aqui de uma forma mais intuitiva. Formas mais rigorosas são apresentados em textos sobre topologia (ver por exemplo [153, 154, 155]).

6.1.1 Homeomorfismos e isometrias

Homeomorfismos

Se diz que dois objetos geométricos são *homeomorfos*, se é possível deformar um no outro de maneira contínua. Dados dois espaços topológicos X_1, X_2 e um mapa $f : X_1 \longrightarrow X_2$, se diz que f é um *homeomorfismo* se ele é contínuo e tem inversa $f^{-1} : X_2 \longrightarrow X_1$ que também é contínua. Então, dizemos que X_1 é *homeomórfico* a X_2. Se f for um homeomorfismo entre X_1 e X_2, e além disso f e sua inversa forem funções diferenciáveis, chamamos f de *difeomorfismo* e se diz que X_1 e X_2 são *difeomorfas*.

Isometrias

Dada uma variedade M e sua métrica, um difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ é uma *isometria*, se preserva a métrica. O difeomorfismo identidade, a inversa de uma isometria e a composição de isometrias, são também isometrias. Todas elas formam um grupo que é chamado de *grupo de isometrias* G.

6.1.2 Variedade quociente

Muitas vezes pode-se encontrar uma relação entre os elementos de um conjunto ou de um espaço $\widetilde{M}$. Se esta relação é refletiva, simétrica e transitiva, chama-se *relação de equivalência* $\sim$ entre dois elementos do conjunto e escrevemos $p \sim q$ (p

†Area cujo objeto de estudo são as propriedades globais do Universo.

é equivalente a q). Mediante essa relação, podemos dividir $\widetilde{M}$ em subconjuntos mutuamente disjuntos chamados *classes de equivalência* $[p]$. O conjunto de todas as classes de equivalência chama-se *espaço quociente* $\widetilde{M}/\sim$.

Para visualizar melhor o espaço quociente vejamos o exemplo da Fig. 6.1. Nela se x e $y \in R$, $y \sim x$ se $y = x + 2\pi n$, com $n \in Z$. Na Fig. 6.1(a), a classe de equivalência é $[x] = \{..., x - 2\pi, x, x + 2\pi, ...\}$. Na Fig. 6.1(b), vemos que a classe de equivalência $[x]$ pode ser representada pelo intervalo $[0, 2\pi)$, o qual é homeomórfico a um círculo S^1(notemos que $0 \sim 2\pi$). Portanto, o espaço quociente $R/\sim$ de R é um círculo S^1.

No caso das variedades, a relação de equivalência pode ser dada por um grupo G com elementos g, tais que $q \sim p$ se e somente $q = gp$, para algum $g \in G$. Podemos então escrever que a classe de equivalência é:

$$[p] = \{q \in \widetilde{M}; q = gp, g \in G\}\,, \tag{6.1}$$

e o espaço quociente será:

$$\widetilde{M}/G = \{[p]; p \in \widetilde{M}\}\,. \tag{6.2}$$

O espaço quociente não é necessariamente uma variedade. Existe um teorema, cuja prova encontra-se em [154], que diz que a condição para que o espaço quociente seja uma variedade, é que G atue de maneira livre (sem pontos fixos) e propriamente discontínua em $\widetilde{M}$.

6.1.3 Homotopia, grupo fundamental: espaços multiplamente e simplesmente conexos

Existe um conjunto de invariantes topológicos, que podem ser usados para reconhecer certas classes de equivalência dos espaços. Alguns deles são os *grupos de homotopia*, e em particular o *grupo fundamental*. Imaginemos um ponto p na variedade M ($p \in M$), e uma curva γ que começa e termina no ponto p, que é chamada de *loop*. Existem alguns loops que podem ser deformados continuamente em outros, formando assim classes de loops. Imaginemos dois loops no ponto p: $\gamma_1 : I \to M$ e $\gamma_2 : I \to M$ ‡. Dizemos que eles são homotópicos se existe um mapa contínuo $F : I \times I \to M$, tal que:

$$F(s, 0) = \gamma_1(s)\,, F(s, 1) = \gamma_2(s)\,, \qquad s \in I\,, \tag{6.3}$$

$$F(0, t) = F(1, t) = p\,, \qquad t \in I\,. \tag{6.4}$$

‡ I é o intervalo $[0, 1]$

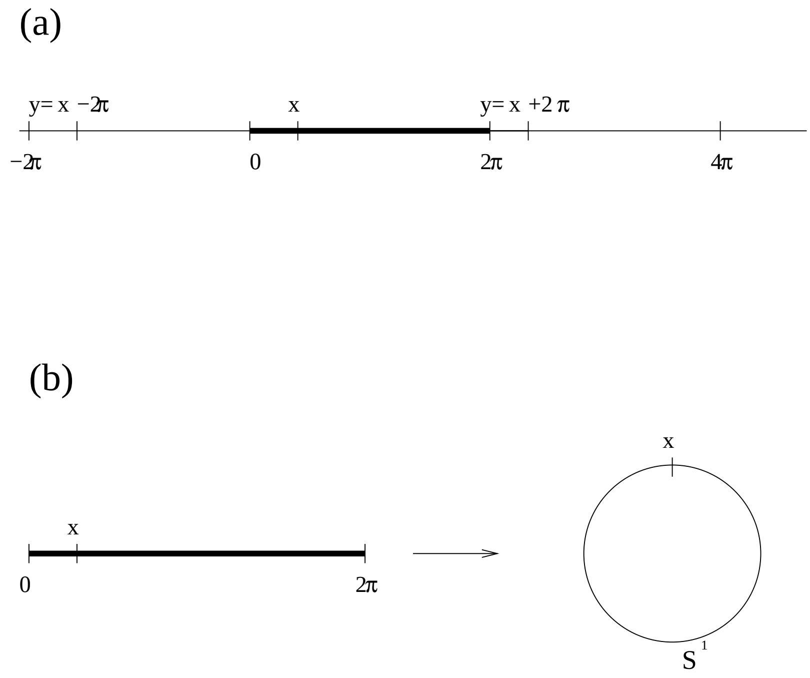


Figura 6.1: Variedades quociente

O mapa F é chamado de homotopia entre γ_1 e γ_2. Temos então, que γ_1 pode ser continuamente deformada até γ_2 mediante F. Estas homotopias servem para juntar os loops em certas classes que são chamadas de classes de homotopia. Ao conjunto de classes de homotopias num ponto $p \in M$ chama-se grupo fundamental ou primeiro grupo de homotopia de M em p. O grupo fundamental tem várias propriedades que podem ser encontradas em [153] e [156]. Destas, duas são as mais importantes para nós: (i) ele é invariante por homeomorfismos, ou seja, ele é um invariante topológico e pode ser usado para diferenciar duas variedades topologicamente não equivalêntes e (ii) ele é isomorfo[§] ao grupo de holonomia G de um espaço quociente $\widetilde{M}/G$. Usando as homotopias ou o grupo fundamental, podemos classificar as variedades em duas classes:

- **Variedades Simplesmente Conexas** ou com **Topologia Trivial**: Aquelas onde para todo ponto $p \in M$, cada loop é homotópico a um ponto. Ou

[§]Sejam dois conjuntos X e Y com estruturas algébricas. Se existe um mapa $f : X \to Y$ que preserva a estrutura algébrica, f é chamado de homomorfismo. Se f é bijetivo, então é chamado de isomorfismo.

equivalentemente, aquelas cujo grupo fundamental é o grupo trivial.

- **Variedades Multiplamente Conexas** ou com **topologia não trivial**: Quando não são simplesmente conexas.

6.1.4 Espaço de recobrimento e grupo de holonomia

Espaço de Recobrimento: Dizemos que $\widetilde{M}$ é um espaço de recobrimento da variedade M se existe um mapa contínuo $f : \widetilde{M} \rightarrow M$, tal que: (i)$f$ seja sobrejetor e (ii) para cada $p \in M$ exista uma vizinhança $U \subset M$ que contém p, tal que $f^{-1}(U)$ seja uma união disjunta de vizinhanças em $\widetilde{M}$, as quais são mapeadas homeomorficamente em M por f. Por construção $\widetilde{M}$ é localmente indistinguivel de M mas globalmente não [157]. Se $\widetilde{M}$ é simplesmente conexo é chamado de **Espaço de Recobrimento Universal**.

Grupo de Holonomia: Seja um ponto x na variedade M. No espaço de recobrimento universal, x gera um ponto $\tilde{x}_0 \in \widetilde{M}$. Se existem pontos adicionais $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$... dizemos que estes são homólogos a $\tilde{x}_0$ e que as transformações que levam $\tilde{x}_0 \rightarrow \tilde{x}_i$ são isometrias que formam o grupo de holonomia Γ em $\widetilde{M}$. Se este grupo é discontínuo e os geradores do grupo não têm ponto fixo, dizemos que o grupo de holonomia atua livre e discontinuamente em $\widetilde{M}$. Pode ser mostrado que o grupo de holonomia é isomorfo ao grupo fundamental da variedade quociente $\widetilde{M}/\Gamma$ [153]. Para ilustrar os conceitos de grupo de holonomia e espaço de recobrimento, na Fig. 6.2 apresentamos como se constrói o espaço de recobrimento $\widetilde{M} = E^2$ do toro $T^2 = E^2/\Gamma$, com grupo de holonomia $\Gamma = \{g_1^m g_2^n\}$, onde m e $n \in Z$ e os geradores do grupo são:

$$g_1(x_1, x_2) = (x_1 + L, x_2)\,, \qquad g_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + L)\,. \tag{6.5}$$

6.1.5 Poliedro fundamental

Nas subseções anteriores vimos que o conceito do grupo de holonomia Γ é usado para, a partir de uma variedade quociente M, reproduzir o espaço de recobrimento $\widetilde{M}$. Na prática, M é descrita pelo maior domínio simplesmente conexo em $\widetilde{M}$, que contenha os pontos que pertencem a M. Este domínio é chamado de Poliedro Fundamental (PF) da variedade M. Um tipo particular de PF é denominado poliedro fundamental de Dirichlet, que é definido para um *ponto base* $x \in \widetilde{M}$ como:

$$PF = \{y \in \widetilde{M}, d(x, y) \leq d(y, g(x)), \forall g \in \Gamma\}\,, \tag{6.6}$$

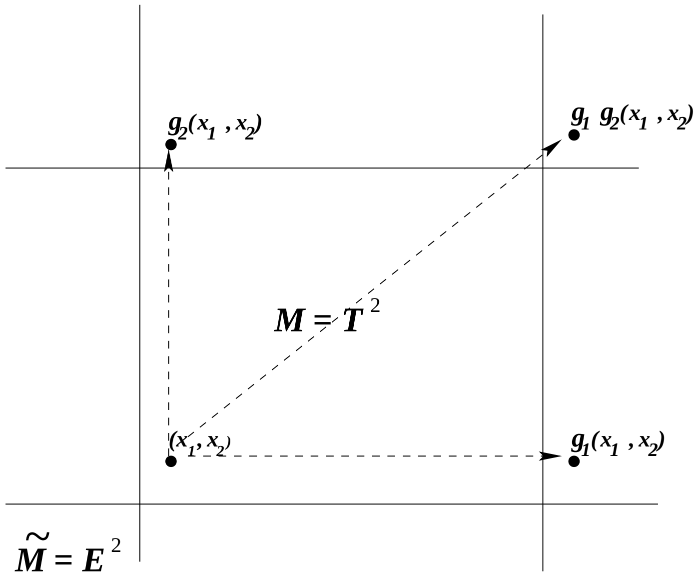


Figura 6.2: A ação do grupo de holonomia do toro.

onde $d(a, b)$ é a distância entre dois pontos a e b. Se a variedade é compacta, o PF de Dirichlet é um poliedro convexo e compacto que tem um número finito de faces devido a que Γ é discreto [158]. As faces do PF são análogas por pares isto é, a cada face $\mathcal{F}$ corresponde uma outra face $\mathcal{F}'$ tal que, para cada ponto $x \in \mathcal{F}$ existe outro ponto $x' \in \mathcal{F}'$ homólogo a x. Os deslocamentos que levam de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}'$ são os geradores do grupo de holonomia Γ. Assim, podemos considerar as faces do PF identificadas. Na Fig. 6.3 é apresentado um caso ilustrativo, o toro em duas dimensões $T^2 = R^2/\Gamma$, onde as faces AD e BC estão identificadas por g_1 e as faces AB e DC estão identificadas por g_2. Os domínios de Dirichlet dependem do ponto que é escolhido como ponto base.

6.2 RCF em Universos com topologia não trivial

O sistema de equações Einstein-Boltzmann apresentado no capítulo anterior foi derivado usando as propriedades locais do Universo, isto é usando a métrica (5.4) que no *gauge* longitudinal tomou a forma (5.25) com $\Phi = \Psi$. Por outro lado, dois resultados importantes do capítulo anterior foram: (i) a introdução de todos os efeitos que contribuem em primer ordem às flutuações de temperatura da RCF dentro dos coeficientes multipolares a_{lm} e (ii) a determinação formal da matriz de correlação num formato adequado para a implementação dos diferentes cenários de AE. Nesta seção, mostramos como implementar a AE no cálculo da matriz de correlação usando

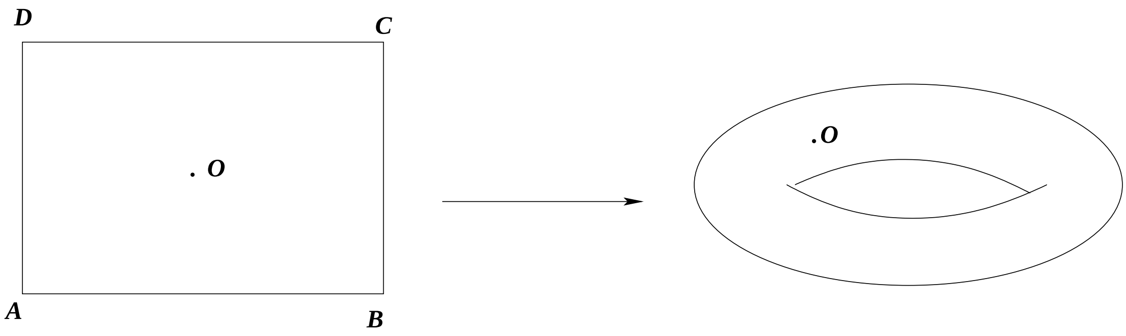


Figura 6.3: O poliedro fundamental do toro, com as identificações $AB \longrightarrow DC$ e $AD \longrightarrow BC$.

o cenário de topologia não trivial.

Dada uma variedade quociente $M = \widetilde{M}/\Gamma$, toda função escalar $\Phi(\eta, \vec{x})$ pode ser escrita em termos das autofunções do laplaciano em M na forma

$$\Phi(\eta, \vec{x}) = \int F(\eta, \vec{k})\xi(\vec{k}, \vec{x})d^3\vec{k}\,, \tag{6.7}$$

onde as funções $\xi(\vec{k}, \vec{x})$ são soluções da equação de Helmholtz (5.43) em M, e portanto são aquelas soluções em $\widetilde{M}$ invariantes sob o grupo de holonomia Γ, isto é, aquelas que satisfazem a condição de invariância

$$\xi(\vec{k}, g\vec{x}) = \xi(\vec{k}, \vec{x})\,, \tag{6.8}$$

para todo $g \in \Gamma$. A condicão (6.8) implica em que nem toda autofunção do Laplaciano no espaço de recobrimento universal $\widetilde{M}$ é também uma autofunção no espaço quociente M. As soluções de (5.41) na variedade M são apenas um subconjunto das soluções de $\widetilde{M}$. Este subconjunto está formado pelas soluções que satisfazem (6.8).

Se o campo escalar $\Phi(\eta, \vec{x})$ tem natureza aleatória, (6.7) faz que sua função de correlação para η fixo seja

$$\langle \Phi(\eta, \vec{x})\, \Phi(\eta, \vec{x}')\rangle \;=\; \int d^3\vec{k}\, d^3\vec{k}\,'F(\eta, \vec{k})\, F(\eta, \vec{k}\,')\langle \xi(\vec{k}, \vec{x})\, \xi^*(\vec{k}\,', \vec{x}\,')\rangle\,, \tag{6.9}$$

onde a natureza aleatória de $\Phi(\vec{x})$ foi herdada por $\xi(\vec{k}, \vec{x})$.

Do mesmo modo que no capítulo anterior, por simplicidade nos cálculos, vamos nos restringir apenas às topologias planas. Nestes espaços euclidianos, a solução mais geral da eq. (5.43) é escrita como

$$\xi(q, \vec{x}) = \int d^3k\, \delta(q - k)\, \widehat{\xi}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,, \tag{6.10}$$

o termo $\delta(q-k)$ é para indicar que, em geral apenas alguns k da variável contínua q são considerados. Assim introduzindo (6.10) em (6.7) obtemos

$$\Phi(\eta,\vec{x}) = \int d^3k\, F(\eta,k)\, \widehat{\xi}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \,, \tag{6.11}$$

e introduzindo esta equação em (6.9) se tem

$$\langle\Phi(\eta,\vec{x})\,\Phi(\eta,\vec{x}')\rangle \;=\; \int d^3k\, d^3k' F(\eta,k)\, F(\eta,k')\langle\widehat{\xi}(\vec{k})\,\widehat{\xi}^*(\vec{k}')\rangle\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\vec{k}'\cdot\vec{x}')} \,. \tag{6.12}$$

De esta forma, para um espaço quociente com grupo de holonomia Γ dado, precisamos conhecer as correlações $\langle\widehat{\xi}(\vec{k})\,\widehat{\xi}^*(\vec{k}')\rangle$ neste espaço. Estas correlações geralmente são calculadas resolvendo numéricamente (5.43) modo a modo. Porém, continuando com o tratamento teórico consideramos que a funcão de correlação de 2 pontos de $\Phi(\eta,\vec{x})$ na variedade quociente, está relacionada à função de correlação de 2 pontos de $\Phi(\eta,\vec{x})$ no recombirmento universal por [180]

$$\langle\Phi(\eta,\vec{x})\Phi(\eta,\vec{x}')\rangle^{\Gamma} = \sum_{g\in\Gamma} |g|\,\langle\Phi(\eta,\vec{x})\Phi(\eta,g\vec{x}')\rangle^{s.c.} \,, \tag{6.13}$$

onde $|g| = 1$ se preserva a orientação, e -1 se não preserva a orientação. Na expressão (6.13), Γ indica o grupo de holonomia que caracteriza o espaço quociente M e o índice superior $s.c$ indica que a função de correlação é no recombrimento universal que é sempre simplesmente conexo.

Usando (6.13) em (6.12) e considerando que qualquer simetria e euclidiana pode sempre ser escrita como combinações de rotações e translações, ou seja $g = (R,\vec{r})$, onde R é uma transformação ortogonal e $\vec{r}$ é um vetor euclidiano e desta maneira g atua sobre um vetor $\vec{x}$ como $g\vec{x} = R\vec{x} + \vec{r}$, tem-se que

$$\langle\widehat{\xi}(\vec{k})\,\widehat{\xi}^*(\vec{k}')\rangle^{\Gamma} = \sum_{g\in\Gamma}\langle\widehat{\xi}(\vec{k})\,\widehat{\xi}^*(R\vec{k}')\rangle^{s.c}\, e^{-iR\vec{k}'\cdot\vec{r}} \,. \tag{6.14}$$

Para continuar o tratamento, precisamos fazer a hipótese de que as soluções de (5.43) são homogêneas e isotrópicas. Esta hipótese concorda com as predições da inflação (ver por ex. [105]-[107] e suas referências). Esta suposição faz com que a função de correlação das funções aleatórias $\widehat{\xi}(\vec{k})$ no espaço de recombrimento seja

$$\langle\widehat{\xi}(\vec{k})\,\widehat{\xi}^*(\vec{k}')\rangle^{s.c} = \frac{P_\Phi(k)}{k^3}\delta(k-k') \,, \tag{6.15}$$

onde P_Φ é o espectro de potência inicial das soluções de (5.43).

Introduzindo (6.15) em (6.14) obtemos a relação

$$\langle\widehat{\xi}(\vec{k})\widehat{\xi}^*(\vec{k}')\rangle^{\Gamma} = \frac{P_\Phi(k)}{k^3}\sum_{g\in\Gamma}\delta(\vec{k}-R\vec{k}')\, e^{-iR\vec{k}'\cdot\vec{r}} \,, \tag{6.16}$$

para a matriz de correlação dos modos $\vec{k}$ no espaço quaciente $M = \widetilde{M}/\Gamma$. Substituindo esta eq. na (5.72) obtemos a forma final

$$\langle a_{\ell m}\, a^*_{\ell' m'} \rangle^\Gamma \;=\; (4\pi)^2\, i^{\ell-\ell'} \int \frac{d^3k}{k^3}\, \Psi_{\ell\ell'}(k) \Upsilon^\Gamma_{\ell' m'}(\vec{k})\, Y^*_{\ell m}(\hat{n}_{\vec{k}}) \,, \qquad (6.17)$$

onde a física e a geometria estão contidas em

$$\Psi_{\ell\ell'}(k) = P_\Phi(k)\, G_\ell(k)\, G_{\ell'}(k) \,, \qquad (6.18)$$

e a informação topológica em

$$\Upsilon^\Gamma_{\ell m}(\vec{k}) = \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, Y_{\ell m}(\hat{n}_{R^T\vec{k}}) \,. \qquad (6.19)$$

Notemos que a integração em (6.17) é sobre todo o espaço $\vec{k}$. A informação topológica encontra-se em (6.19), a qual automáticamente seleciona os autovalores do Laplaciano em M. Isto pode ser visto no capítulo seguinte, onde $\Upsilon^\Gamma_{lm}(\vec{k})$ é expressa em termos de funções deltas de Dirac centradas nos autovalores do operador Laplaciano no correspondente espaço quociente.

6.3 Decomposição de Γ em subgrupos cíclicos

Nesta seção vamos usar uma decomposição de Γ em subgrupos cíclicos para tornar mais rápidos os cálculos em topologias complexas. Usando esta decomposição, definiremos a *assinatura topologica* de qualquer quantidade associada a função de correlação de dois pontos de funções escalares com natureza aleatória. Para simplificar a notação usaremos a variável $\mathcal{X}$, a qual pode representar por exemplo funções de correlação de dois pontos, matrizes de correlação, funções de correlação angular ou espectros angulares de potência.

6.3.1 Assinatura topológica

Como mostra (6.13), dados os elementos g que pertencem ao grupo de holonomia Γ tem-se que

$$\mathcal{X}^\Gamma = \sum_{g\in\Gamma} \mathcal{X}^g \,. \qquad (6.20)$$

Uma decomposição apropriada do grupo Γ em dois subconjuntos, onde um é a identidade id e o outro é $\widehat{\Gamma} = \Gamma - id$ divide a quantidade $\mathcal{X}$, em duas partes

$$\mathcal{X}^\Gamma = \mathcal{X}^{s.c.} + \mathcal{X}^{\widehat{\Gamma}} \,. \qquad (6.21)$$

O primeiro termo corresponde à contribuição simplesmente conexa e o segundo termo contém a informação da topologia, e introduzimos o termo *assinatura topológica* para nos referirmos a esta contribuição. A assinatura topológica da quantidade $\mathcal{X}$ é nula no caso do Universo for simplesmente conexo. Desta forma, como será mostrado posteriormente, o segundo termo de (6.21) é a que introduz a AE na RCF. O fato de definirmos a assinatura topológica ajudará a que usando as simetrias do espaço quociente se observem suas manifestações nos mapas de temperatura da RCF.

Se agora em vez de pegarmos apenas a identidade como no caso anterior, pegarmos um subconjunto de isometrias S do espaço de recobrimento $\widetilde{M}$, a quantidade $\mathcal{X}$ associada a este subconjunto será

$$\mathcal{X}^S = \sum_{g \in S} \mathcal{X}^g \, . \tag{6.22}$$

Por outro lado, se $G_1 \subset \Gamma$ é algum subconjunto do grupo de recobrimento, pode-se escrever

$$\mathcal{X}^\Gamma \;=\; \mathcal{X}^{G_1} + \mathcal{X}^{\Gamma \backslash G_1} \, . \tag{6.23}$$

No caso de termos dois subconjuntos G_1 e G_2, ambos no grupo de recobrimento Γ, não disjuntos e tais que $G_1 \cap G_2 = G_3$, temos

$$\mathcal{X}^\Gamma \;=\; \mathcal{X}^{G_1} + \mathcal{X}^{G_2} - \mathcal{X}^{G_3} + \mathcal{X}^{\Gamma \backslash (G_1 \cup G_2)} \, . \tag{6.24}$$

Considerando os subconjuntos $G_1, \ldots, G_n \subset \Gamma$ tais que para qualquer $i \neq j$, $G_i \cap G_j = H$, generaliza-se (6.24) e por indução tem-se

$$\mathcal{X}^\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}^{G_i} - (n-1)\mathcal{X}^H + \mathcal{X}^{\Gamma \backslash G} \, , \tag{6.25}$$

com $G = \cup G_i$.

6.3.2 Subgrupos cíclicos

Se agora $G_1 = \langle g_1 \rangle$ and $G_2 = \langle g_2 \rangle$ são dois subgrupos cíclicos de Γ e $\vec{0} \in \widetilde{M}$ um deslocamento para $\widetilde{M}$ da posição do observador em M, diremos que g_1 e g_2 são conjugados por uma isometria que *não move o observador* se existe uma isometria ζ fixando $\vec{0}$, tal que $g_1 = \zeta^{-1} g_2 \zeta$. Como consequência disto tem-se que $d(\vec{0}, g_1\vec{0}) = d(\vec{0}, g_2\vec{0})$, onde $d(\vec{x}, \vec{y})$ é a distância entre dois pontos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ em $\widetilde{M}$. Por extensão, diremos também que os grupos G_1 e G_2 são conjugados por uma isometria que não move observador. Também diremos que g_1 é um gerador de distancia mínima de G_1 (com respeito ao observador) se $d(\vec{0}, g_1\vec{0}) \leq d(\vec{0}, \gamma\vec{0})$ para algum outro gerador $\gamma \in G_1$.

Agora consideremos as isometrias $g_1, \ldots, g_n \in \Gamma$ que geram os grupos cíclicos $G_i = \langle g_i \rangle$, tais que se $i \neq j$ então $G_i \cap G_j = \{id\}$. Usando a eq. (6.25) obtem-se que a assinatura topológica da quantidade $\mathcal{X}$ é descomposta como [87].

$$\mathcal{X}^{\widehat{\Gamma}} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}^{\widehat{G}_i} + X^{\Gamma \backslash G} \, . \tag{6.26}$$

Particularmente, estamos interessados no caso onde os g_i's são os geradores de distância mínima dos G_i's, onde estes formam um conjunto completo de grupos mutuamente conjugados por isometrias que não movem o observador. O símbolo $\widehat{}$ sobre as letras que denotam os subconjuntos indicam que a identidade foi extraída dos mesmos.

Se agora $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in \Gamma$ são geradores de distância mínima dos grupos $G_i = \langle g_i \rangle$ e $H_j = \langle h_j \rangle$, dado $G = \cup G_i$ e $H = \cup H_j$ e além disso, supomos que os G_i's e os H_j's formam dois conjuntos completos de grupos mutuamente conjugados por isometrias que não movem o observador, tais que $G \cap H = \{id\}$ e $d(\vec{0}, g_1\vec{0}) \leq d(\vec{0}, h_1\vec{0})$. Então a assinatura topológica é decomposta como

$$\mathcal{X}^{\widehat{\Gamma}} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}^{\widehat{G}_i} + \sum_{i=1}^{m} \mathcal{X}^{\widehat{H}_i} + \mathcal{X}^{\Gamma \backslash (G \cup H)} \, . \tag{6.27}$$

Continuando este processo várias vezes, obtem-se a decomposição em subgrupos cíclicos do grupo de recombrimento Γ [87]

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_i} \Gamma_{ij} \, , \tag{6.28}$$

onde $g_{ij} \in \Gamma$ é um gerador de distância mínima do grupo cíclico Γ_{ij}, tal que

1. Para cada $i \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{\Gamma_{i1}, \ldots, \Gamma_{ik_i}\}$ é um conjunto completo de grupos mutuamente conjugados por isometrias que não movem o observador.

2. Se $i \neq i'$, os conjuntos $\cup_{j=1}^{k_i} \Gamma_{ij}$ e $\cup_{j=1}^{k_{i'}} \Gamma_{i'j}$ têm apenas a identidade como único elemento comum.

3. Se $i < i'$, então $d(\vec{0}, g_{i1}\vec{0}) \leq d(\vec{0}, g_{i'1}\vec{0})$.

Portanto, a assinatura topologica da quantidade $\mathcal{X}$ é escrita como

$$\mathcal{X}^{\widehat{\Gamma}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_i} \mathcal{X}^{\widehat{\Gamma}_{ij}} \, , \tag{6.29}$$

e assim para calcular a assinatura topológica da quantidade $\mathcal{X}$ para uma variedade com grupo de holonomia Γ, é suficiente conhecer como calculá-la para variedades cujos grupos de recobrimento são os grupos cíclicos $\widehat{\Gamma}_{ij}$. Esta decomposição é útil para calcular $\mathcal{X}$ para qualquer variedade com topologia não trivial a partir das variedades mais simples. No caso de variedades euclidianas as mais simples são os cilindros torcidos, no caso de variedades esféricas são os espaçes lente, e variedades simples hiperbólicas no caso hiperbólico.

6.3.3 Simetrias do espaço quociente

Agora veremos como a decomposição (6.28) descreve as simetrias do espaço quociente M. Esta decomposição contém as simetrias do poliedro fundamental de Dirichlet de M centrado na posição do observador $\vec{0} \in \widetilde{M}$. O poliedro fundamental de Dirichlet centrado em $\vec{0} \in \widetilde{M}$ é o conjunto $\mathcal{D}_{\vec{0}} \subset \widetilde{M}$ definido por [189]

$$\mathcal{D}_{\vec{0}} = \{\vec{x} \in \widetilde{M} : d(\vec{0}, \vec{x}) \leq d(g\vec{0}, \vec{x}) \text{ para quaisquer } g \in \Gamma\} \,. \tag{6.30}$$

A primeira coisa a notar é que apesar de todo o grupo de recobrimento entrar nesta definição são necessários apenas os geradores de distância mínima (e talvez as primeiras potências positivas) de alguns grupos cíclicos Γ_{ij} e suas inversas. Para ver isto, para cada $g \in \Gamma$ consideremos o semi–espaço

$$H_g = \{\vec{x} \in \widetilde{M} \ : \ d(\vec{0}, \vec{x}) \leq d(g\vec{0}, \vec{x})\} \,. \tag{6.31}$$

De (6.30) se observa que o poliedro fundamental é a interseção de todos os semi–espaços de tipo (6.31). No entanto, existe um alto grau de redundância, já que para uma potência positiva n suficientemente grande, temos

$$\bigcap_{k=1}^{n-1} H_{g_{ij}^k} \subset H_{g_{ij}^n} \,, \tag{6.32}$$

e portanto potências grandes de g_{ij} não contribuem efetivamente ao poliedro $\mathcal{D}_{\vec{0}}$. Além disso, se algum H_g contribui efetivamente ao poliedro, $H_{g^{-1}}$ também contribui, assim o mesmo argumento vale para as inversas dos geradores de distancia mínima. Finalmente da condição 3 no ítem anterior e para algum i suficientemente grande, pode ser que o semi–spaço $H_{g_{ij}}$ não contribua efetivamente ao poliedro.

As faces do poliedro de Dirichlet são subconjuntos dos planos de fronteira dos semi–espaços (6.31) que contribuem efetivamente a ele. Portanto, para cada H_g que contribua efetivamente, a correspondente face é ortogonal a geodésica que une $\vec{0}$ e $g\vec{0}$ e assim a corta no ponto medio. É por esta razão que à decomposição (6.28) descreve as simetrias do poliedro fundamental de Dirichlet M centrado no observador.

6.4 Considerações de simetria

Algumas consequências das simetrias da variedade quociente sobre a estrutura da matriz de correlação dos a_{lm}'s podem ser deduzidas diretamente das leis de transformação dos harmônicos esféricos sobre transformações de coordenadas, isto é, sem necessidade da decomposição (6.28). As características consideradas desta forma não dependem da geometria do espaço de recobrimento universal.

6.4.1 Simetrias de rotação

Consideremos como se comporta $\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'}\rangle^\Gamma$ por rotações em torno do eixo z. Por uma rotação $R_z(\alpha) : \varphi \to \varphi + \alpha$, a função $Y_{lm}(\hat{n})$ transforma-se como

$$Y_{lm}(R_z(\alpha)\hat{n}) = e^{im\alpha} Y_{lm}(\hat{n}) \, . \tag{6.33}$$

Como consequência destas leis de transformação os coeficiente multipolares do mapa de temperatura da RCF tomam a forma $\widetilde{a}_{lm} = e^{-im\alpha} a_{lm}$ e a matriz de correlação $\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'}\rangle^\Gamma$ se transforma com a seguinte lei

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'}\rangle^\Gamma_{R_z(\alpha)} = e^{i(m'-m)\alpha} \langle a_{lm}\, a^*_{l'm'}\rangle^\Gamma \, . \tag{6.34}$$

Duas consequências podem se observar de (6.34), primeiro que se o espaço quociente M é invariante por uma rotação de $\alpha = 2\pi/s$ em torno do eixo z, os coeficientes a_{lm} e $a_{l'm'}$ não são correlaciondos a menos que $m = m' \bmod s$. Segundo, que se o espaço quociente é invariante para um α abritrário, não existe correlação entre a_{lm} e $a_{l'm'}$ a menos que $m = m'$. Na prática, se tomarmos um sistema de coordenadas tal que o poliedro fundamental da variedade quociente esteja orientada de forma que seja invariante por rotações $2\pi/s$ em torno do eixo polar, a matriz de correlação apresentará um fator $\delta^{\mathrm{mod(s)}}_{mm'}$ e a AE induzida pela topologia se manisfestará como correlações entre os diferentes m's. Correspondentemente, se a orientação é tal que o poliedro é invariante por rotações arbitrárias em torno do eixo z, a matriz de correlação apresentará um fator $\delta_{mm'}$ e neste caso não existirão correlações entre m's.

6.4.2 Simetrias de paridade

Vejamos o que acontece quando existe invariância por transformações de paridade $P : \hat{n} \to -\hat{n}$. Por estas transformações os harmônicos esféricos se transformam como

$$Y_{lm}(P\hat{n}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{n}) \, , \tag{6.35}$$

e assim os coeficientes multipolares a_{lm} se transformam como $\widetilde{a}_{lm} = (-1)^l a_{lm}$. Como consequência disto a lei de transformação da matriz de correlação é

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^\Gamma_P = (-1)^{l+l'} \langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^\Gamma \; . \tag{6.36}$$

Portanto, se o poliedro fundamental está orientado de modo que exista uma invariância por transformações de paridade, os coeficientes multipolares não estarão correlacionados a menos que $l = l' \bmod 2$, isto é, a matriz de correlação apresentará um fator $\delta^{\mathrm{mod}(2)}_{ll'}$ e a AE induzida pela topologia não manifestará correlações entre l's com diferente paridade. Se o poliedro fundamental não ´ invariante por transformacções de paridade existirão correlações entre l's de diferente paridade.

6.4.3 Simetrias de reflexão

Consideremos agora uma transformação de reflexão no plano $y = 0$. Esta transformação muda o ângulo azimutal como $P_y : \varphi \to -\varphi$ e isto faz que os harmônicos esféricos se transformem como

$$Y_{lm}(P_y \hat{n}) = Y^*_{lm}(\hat{n}) \; , \tag{6.37}$$

e os coeficientes multipolares a_{lm} mudem como $\widetilde{a}_{lm} = a^*_{lm}$. Estas leis de transformação levam que a matriz de correlação se transforme da seguinte forma:

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^\Gamma_{P_y} = \langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{*\Gamma} \; . \tag{6.38}$$

De onde segue que se o poliedro fundamental é orientado tal que seja invariante por reflexões no plano $y = 0$, a matriz de correlação é sempre real.

6.5 Comentários

Embora alguns procedimentos para cálculos das matrizes de correlação no contexto das topologias não triviais já existam [166]-[169], [179]-[181], [182]-[184], quase todos eles precisam resolver (5.43) explicitamente. O único método que não faz isto, tem problemas de regularização [179]-[181].

Para finalizar este capítulo citaremos algumas das vantagens do nosso formalismo [87]:

- À diferença da maioria dos métodos conhecidos para o cálculo da matriz de correlação em topologias não triviais, nosso método não precisa de soluções explícitas de (5.43) pois a integral (6.17) seleciona automaticamente os modos que sobrevivem na variedade quociente em questão.

- À diferença do único método que não resolve explicitamente (5.43), no nosso formalismo não são necessárias regularizações. O problema da regularização aparece porque as integrais (6.17) contém deltas pois como se observa em (6.8) um espaço com topologia não trivial discretiza os modos k. Um correto tratamento destas integrais de deltas, originado pela forma em que eles dependem do grupo de recobrimento Γ faz que esta regularização não seja necessária pois as quantidades que obtemos são todas finitas.

- A separação mostrada em (6.21) permite observar uma relação direta entre a topologia $\widehat{\Gamma}$ e o grau de AE no cenário de topologias não triviais e, permite explorar formalmente as simetrias do espaço quociente e como elas se manifestariam nos mapas de temperatura da RCF. De esta forma, no caso de que a AE seja devida à topologia do Universo, medidas de AE permitiriam conhecer mais acerca da forma global do nosso Universo.

- Num sentido mais prático, como mostra (6.17), conseguimos separar as contribuições da topologia na função (6.19) e as contribuições da física e da geometria na função (6.18). Esta separação é importante pois fixada a física e a geometria de um modelo, a função (6.18) é calculada uma única vez para diferentes topologias e fixada uma topologia, a função (6.19) é calculada uma única vez para diferentes modelos, com isto o gasto computacional é diminuido. Adicionalmente o método de linha de visão misturada com nosso formalismo, permite por primeira vez, introduzir todas as contribuições às anisotropias de temperatura no cálculo da matriz de correlação.

- Também num sentido mais prático, a decomposição em subgrupos cíclicos permite que qualquer quantidade associada a função de correlação de 2 pontos das flutuações de temperatura da RCF em topologias complexas pode ser expressa, e portanto calculada, em termos de quantidades correspondentes em topologias mais simples.

Para ilustrar o método apresentado nesta parte da tese, no seguinte capítulo faremos uma aplicação para o caso da topologia não trivial mais simples, o cilindro.

Capítulo 7

Universo cilíndrico

No capítulo anterior vimos que para calcular a assinatura topológica das anisotropias de temperatura da RCF numa variedade dada, é necessário apenas conhecer como calcular esta assinatura em variedades cíclicas que a recobrem maximalmente. No caso das variedades orientáveis planas as variedades cíclicas são os cilindros torcidos, isto é, aqueles gerados por uma translação e uma rotação.

Para o caso das chamadas *variedades homogêneas planas*, que são os conhecidos 3–torus ou variedades tipo T^3 (geradas por três translações linearmente independentes), as *chimenés* ou variedades tipo T^2 (geradas por duas translações linearmente independentes), e os cilindros ou variedades tipo T^1 (geradas por uma única translação), apenas é necessário conhecer a matriz de correlação do cilindro. A partir dela podem-se construir as matrizes de correlação de todas estas variedades homogêneas planas. Por esta razão, neste capítulo final da tese, faremos um estudo exaustivo das flutuações de temperatura da RCF em Universos cilíndricos e, a modo de ilustração, apresentamos as idéias básicas de como a matriz de correlação neste tipo de Universos, seria usada para calcular as matrizes de correlação em variedades mais complexas.

As características do método apresentado no capítulo anterior são mostradas explícitamente neste capítulo. Como estamos interessados na AE gerada pela topologia do Universo, para que os cálculos númericos sejam mais rápidos, o modelo usado foi o de Einstein-de Sitter. Embora esta suposição não seja real, ela é útil para ilustrar nosso formalismo e conhecer mais acerca das características de flutuações estatisticamente anisotrópicas.

7.1 RCF em Universos cilíndricos

Consideremos o cilindro como espaço quociente do recobrimento universal simplesmente conexo $K = 0$. Vamos impor que seu poliedro fundamental esteja orientado de tal forma que seja ortogonal ao eixo z. Desta maneira, seu grupo de recobrimento terá um gerador g que incluirá apenas uma translação $g = (I, \vec{a})$, com $\vec{a} = L\hat{e}_z$, onde a distância de compactificação L está medida em unidades de R_{SUE}. Esta escolha de sistemas de coordenadas é conveniente porque nela o cilindro é invariante por (i) transformações arbitrárias em torno do eixo z, (ii) transformações de paridade, e (iii) transformações de reflexão no plano $y = 0$. Assim, com as considerações de simetria descritas no capítulo anterior, a matriz de correlação num Universo cilíndrico com esta orientação será real, não existirão correlações entre os m's, mas sim entre duas escalas l e l', no caso de que as duas sejam pares ou ímpares.

O grupo de recobrimento do cilindro é parametrizado por inteiros $n \in \mathbb{Z}$ tais que cada elementro de Γ seja $g^n = (I, n\vec{a})$. Introduzindo esta forma de Γ em (6.19), a função que leva a informação topológica toma a forma

$$\Upsilon^{\Gamma}_{lm}(\vec{k}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ink_z L} \, Y_{lm}(\vec{n}_{\vec{k}}) \; , \tag{7.1}$$

e assim, a matriz de correlação dos a_{lm}'s num Universo cilídrico é

$$\langle a_{lm} \, a^*_{l'm'} \rangle^{\Gamma} = (4\pi)^2 \, i^{l-l'} \int \frac{d^3k}{k^3} \, \Psi_{ll'}(k) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ink_z L} \right) Y_{l'm'}(\vec{n}_{\vec{k}}) \, Y^*_{lm}(\vec{n}_{\vec{k}}) \; . \tag{7.2}$$

Para calcular esta integral pode-se usar a identidade

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ink_z L} = 2\pi \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta(k_z L - 2\pi p) \; , \tag{7.3}$$

ou a identidade

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-ink_z L} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nk_z L) \; . \tag{7.4}$$

A primeira identidade leva a que a matriz de correlação seja expressa em termos dos autovalores do operador laplaciano no cilindro. A segunda identidade, ainda usa a parametrização em termos do grupo de recobrimento, e assim, pode ser usada para isolar a assinatura topológica. Usando (7.4) para avaliar (7.2), e integrando em coordenadas esféricas, tem-se

$$\langle a_{lm} \, a^*_{l'm'} \rangle^{\Gamma} = \langle a_{lm} \, a^*_{l'm'} \rangle^{s.c.} + \langle a_{lm} \, a^*_{l'm'} \rangle^{\widehat{\Gamma}} \; , \tag{7.5}$$

onde a parte simplesmente conexa tem a forma usual

$$\langle a_{lm} \, a^*_{l'm'} \rangle^{s.c.} = C^{s.c.}_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \; , \tag{7.6}$$

com o espectro de potências simplesmente conexo dado por

$$C^{s.c.}_l = (4\pi)^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \, \Psi_{ll}(x) \; , \tag{7.7}$$

e a assinatura topológica da matriz de correlação dada por

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{\widehat{\Gamma}} = (4\pi)^2\, i^{l-l'} \delta^{\mathrm{mod}(2)}_{ll'}\, \delta_{mm'} \int_0^\infty \frac{dx}{x}\, \Psi_{ll'}\left(\frac{x}{L}\right) F^m_{ll'}(x)\;, \tag{7.8}$$

com

$$F^m_{ll'}(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} dy\; \cos(nxy) \mathcal{P}^m_l(y) \mathcal{P}^m_{l'}(y)\;, \tag{7.9}$$

onde $\mathcal{P}^m_l(y)$ são as funções associadas de Legendre normalizadas (ver apêndice B). Note que, como esperado das considerações de simetria, a matriz de correlação dos coeficientes multipolares possui os fatores $\delta^{\mathrm{mod}(2)}_{ll'}$ e $\delta_{mm'}$ e é sempre real.

Após avaliar as series em (7.9) (ver apêndice E), chega-se a

$$F^m_{ll'}(x) \;=\; \sum_{q\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^m_{ll'}(x,q)\, \Theta(x-2\pi q)\Theta(2\pi(q+1)-x)\;, \tag{7.10}$$

onde $\Theta(x)$ é a função de Heaviside. Desta equação, pode se ver que $F^m_{ll'}(x)$ é uma função continua por partes. De fato, em cada intervalo $[2\pi q, 2\pi(q+1)]$, é um polinomio de grau $(l+l'+1)$ em π/x. A forma do polinômio $\mathcal{F}^m_{ll'}(x,q)$ no q–ésimo intervalo de comprimento 2π é

$$\mathcal{F}^m_{ll'}(x,q) \;=\; 4\sum_{k=0}^{\frac{l+l'}{2}} (-1)^k \mathcal{P}^{(2k)}_{ll'm}(0) g_{2k+1}(q) \left(\frac{\pi}{x}\right)^{2k+1} - \delta_{ll'}\;. \tag{7.11}$$

Aqui $g_k(q)$ são polinômios de grau k em q, e $\mathcal{P}^{(k)}_{ll'm}(0)$ é a k–ésima derivada do polinômio

$$\mathcal{P}_{ll'm}(x) = \mathcal{P}^m_l(x)\mathcal{P}^m_{l'}(x)\,, \tag{7.12}$$

avaliada no origem. No apêndice E são apresentadas expressões explícitas para os polinômios $g_k(q)$, assim como também os pasos técnicos que levam de (7.9) a (7.10).

A integral que aparece na assinatura topológica (7.8), agora pode ser calculada numericamente de uma forma simples já que os integrandos decaem rapidamente. Esta característica pode ser vista nas figs. 7.1 e 7.2, onde mostra-se os integrandos para $l = l' = 2$ e $l = l' = 5$. Nesta figuras, por simplicidade nos cálculos numéricos, adotamos o modelo Einstein–de Sitter com espectro de escala invariante, assim

$$\Psi_{ll'}(x) \propto j_l(x) j_{l'}(x)\;. \tag{7.13}$$

O bom comportamente dos integrandos em (7.8) não é uma consequência de uma escolha particular do modelo cosmológico ($\Psi_{ll'}(x)$). O integrando em (7.8) sempre decae rápido porque $\Psi_{ll'}(x)$ e $F^m_{ll'}(x)$ são funções que decaem rapidamente, assim a avaliação da assinatura topológica é sempre eficiente.

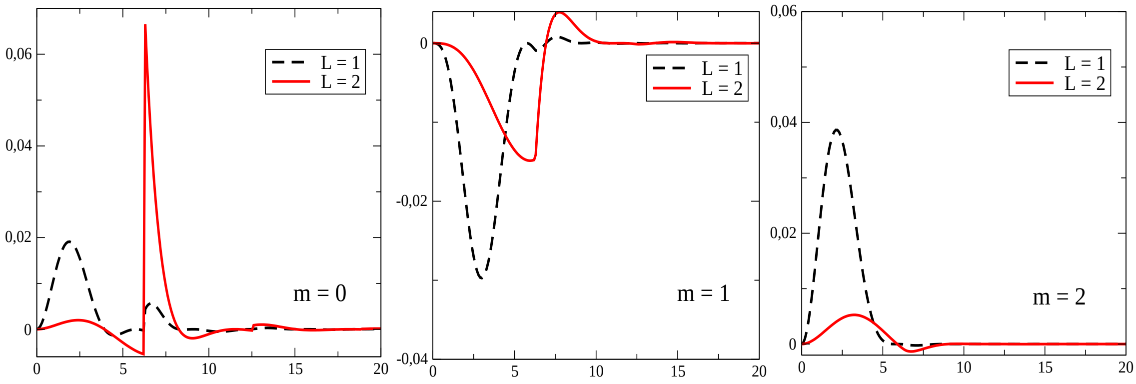


Figura 7.1: Forma dos integrandos dentro das integrais do tipo em (7.8) para $l = l' = 2$, e com escalas de compactificação $L = 1$ e $L = 2$ em unidades de R_{SUE}.

No caso da assinatura topológica do espectro de potência, a integral reduz-se a

$$C_l^{\widehat{\Gamma}} = (4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x}\, \Psi_{ll}\left(\frac{x}{L}\right) f_l(x) \,, \tag{7.14}$$

com

$$f_l(x) = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} F_{ll}^m(x) \tag{7.15}$$

Usando (7.9) e o Teorema da Adição dos harmônicos esféricos (ver apêndice B), a soma (7.15) é calculada e toma a forma

$$C_l^{\widehat{\Gamma}} = 2(4\pi)^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\, \Psi_{ll}\left(\frac{x}{L}\right) \varphi_1(x) \,, \tag{7.16}$$

onde $\varphi_1(x)$ são as funções de Clausen de primeira classe dadas no apêndice E.

Na fig.7.3 (a) mostra-se a assinatura topológica do espectro de potência num Universo cilíndrico para baixos l's, normalizado com respecto a $C_l^{s.c.}$, como função do tamanho de compactificação L. A matriz de correlação dada por (7.5)–(7.11) corresponde a um cilindro para o qual a direção de compactificação é paralela ao eixo z. A matriz de correlação correspondente a um cilindro com uma orientação diferente, pode ser obtido do caso anterior , rotacionando a esféra celeste. Assim, usando as funções de Wigner parametrizadas com os ângulos de Euler para uma rotação $R(\alpha, \beta, \gamma) \in SO(3)$, a matriz de correlação para um cilindro pode ser calculado usando (3.29) e (B.17) (ver apêndice B)

$$\langle a_{lm}\, a_{l'm'}^* \rangle_R^\Gamma = e^{i(m'-m)\alpha} \sum_{m_1} d_{mm_1}^l(\beta)\, d_{m'm_1}^{l'}(\beta)\, \langle a_{lm_1}\, a_{l'm_1}^* \rangle^\Gamma \,, \tag{7.17}$$

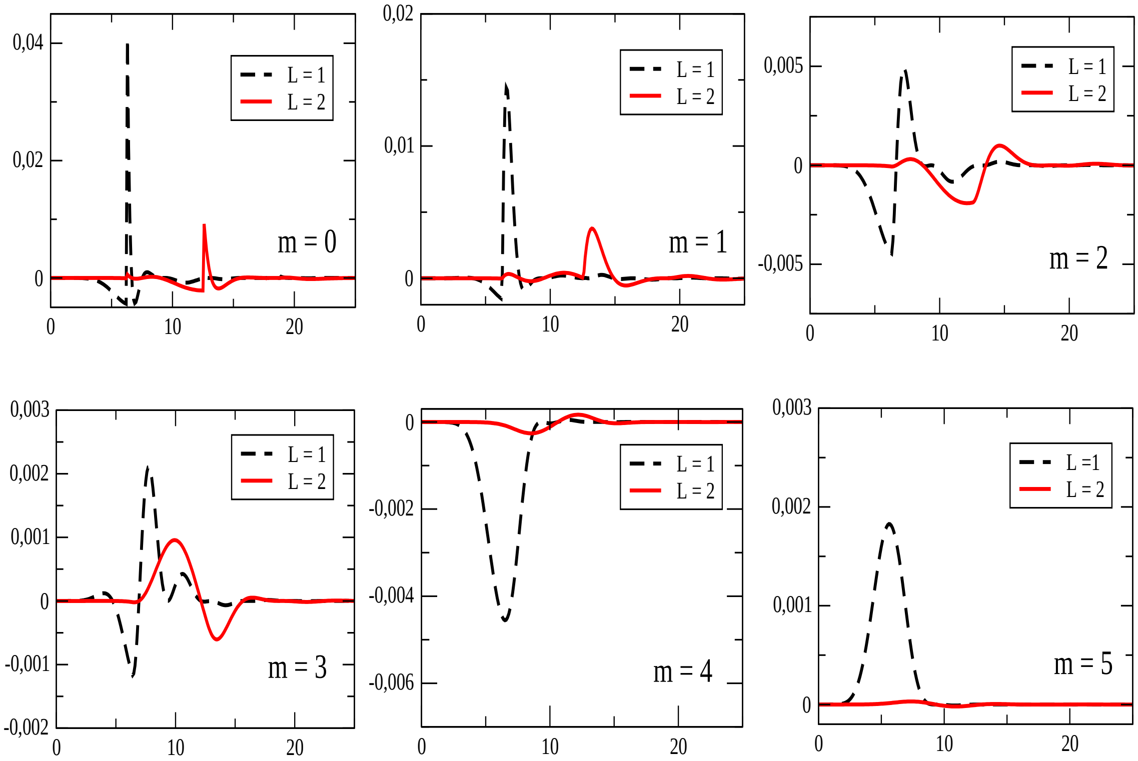


Figura 7.2: Formas dos integrandos dentro das integrais do tipo em (7.8) para $l = l' = 5$, e escalas de compactificação $L = 1$ and $L = 2$ em unidades de R_{SUE}.

o ângulo γ não é relevante porque a rotação $R_z(\gamma)$ em (B.16) não move o eixo z, e $\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{\Gamma}$ é invariante por rotações em torno deste eixo. Além, como $\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{s.c.}$ é rotacionalmente invariante, $\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{\Gamma}_{R}$ pode ser decomposta como em (7.5), com a assinatura topológica satisfazendo uma relação idêntica a (7.17).

Uma coisa a ser notada é que, sem importar a orientação, o cilindro sempre é invariante por transformações de paridade, assim sua matriz de correlação sempre conservará o fator $\delta^{\text{mod}(2)}_{ll'}$. Por outro lado, a matriz de correlação continuará sendo real já que fazemos rotações com $\alpha = 0$, pois neste caso não rotacionemos o cilindro em torno do eixo z, e assim permanece invariante por reflexões no plano $y = 0$. No entanto, qualquer rotação com execção de $\beta = \pi$, fará que o cilindro não seja mais invariante por rotações azimutais, assim a matriz de correlação de um cilindro arbitrariamente orientado tem correlações que dependem de m. Todas estas caracteristicas podem ser vistas explícitamente em (7.17).

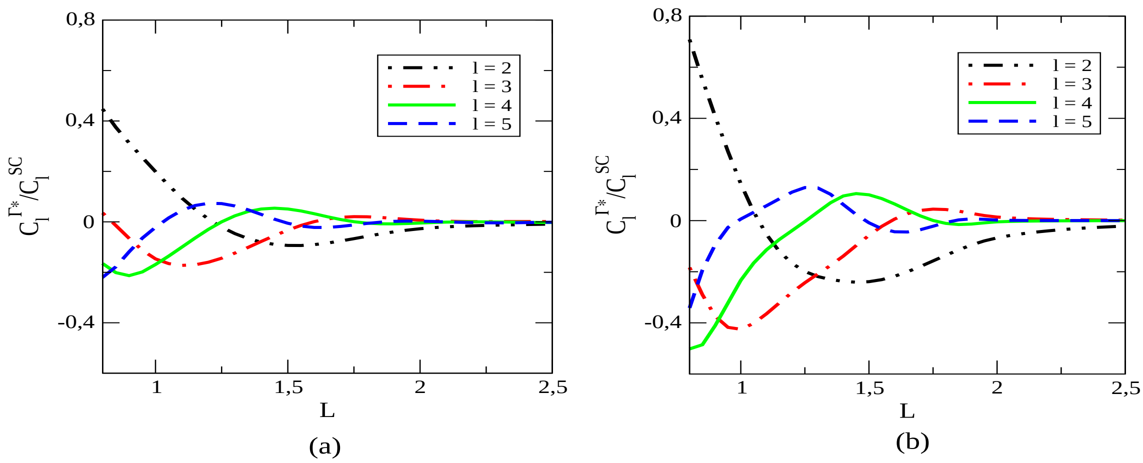


Figura 7.3: Assinatura topológica do espectro de potências de (a) um Universo cilíndrico, e (b) uma chimené com base quadrada, para multipolos $l \leq 5$, normalizados com respeito a $C_l^{s.c.}$, e como função da escala de compactificação L. Note que para cada multipolo pode-se ter supressão ou excesso de potência dependendo do valor de L. Por razões tipográficas, aqui escrevemos Γ^* ao invés de $\widehat{\Gamma}$.

7.2 RCF em Universos homogêneos planos

As variedades homogêneas planas são 3–torus ou variedades tipo T^3 (geradas por três translações linearmente independentes), chimenes ou variedades tipo T^2 (geradas por duas translações linearmente independentes), e cilindros ou variedades tipo T^1 (geradas por uma única transalação). Assim, é necessário calcular primeiro a matriz de correlação $\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^\Gamma$ para cilindros, e depois mostrar como a decomposição (6.29) é usada para calcular a assinatura topologica nesta matriz para os toros bi e tri–dimensionais. Veremos também como o cálculo do espectro de potências no toro é enormemente simplificado por esta decomposição.

7.2.1 Toros

Para calcular a matriz de correlação dos a_{lm}'s para bi e tri-toros usamos a decomposição (6.28) de seu grupo de recobrimento em subgrupos cíclicos, como indicado no capítulo anterior. Se $\Gamma_{ij} = \langle g_{ij} \rangle$ é o grupo de recobrimento do cilindro gerado pelo elemento $g_{ij} \in \Gamma$, denotamos $L_i = d(\vec{0}, g_{ij}\vec{0})$, $g_i = (I, L_i \hat{e}_z)$, e $\Gamma_i = \langle g_i \rangle$. No caso euclideano , as isometrias que não movem o observador são rotações , assim dado um $R_{ij} \in SO(3)$ ela será uma rotação tomando $\hat{e}_z$ como um vetor unitário ao longo de $g_{ij}\vec{0}$.

Usando a decomposição (6.29), escrevemos a assinatura topológica para o toro como uma superposição de assinaturas topológicas de cilindros rotacionados

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{\widehat{\Gamma}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_i} \langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{\widehat{\Gamma}_i}_{R_{ij}} \,, \tag{7.18}$$

onde as matrizes de correlação dos cilindros rotacionados são escritos em termos das funções de Wigner e angulos de Euler da mesma forma que (7.17), como

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{\widehat{\Gamma}_i}_{R_{ij}} = e^{i(m'-m)\alpha_{ij}} \sum_{m_1} d^l_{mm_1}(\beta_{ij})\, d^{l'}_{m'm_1}(\beta_{ij})\, \langle a_{lm_1}\, a^*_{l'm_1} \rangle^{\widehat{\Gamma}_i} \,, \tag{7.19}$$

$(\beta_{ij}, \alpha_{ij})$ são as coordenadas angulares do vetor $g_{ij}\vec{0}$, e k_i é o número de cilindros de tamanho L_i. Como qualquer grupo de translações é invariante por transformações de paridade, dos resultados do capítulo anterior, enxerga-se a que a matriz de correlação de variedades planas homogêneas também terá o fator $\delta^{\mathrm{mod}(2)}_{ll'}$. Esta afirmação é evidente da forma explícita da matriz de correlação do cilindro e da soma (7.18) de matrizes de correlação de cilindros. Correlações entre m's também aparecem e são complicadas na medida da orientação de cada cilindro da soma.

A invariância rotacional do espectro de potências, faz com que as expressões neste caso sejam simplificadas. De (7.18) acha-se a forma da assinatura topológica do espectro de potências do toro como superposição de assinaturas topológicas dos espectros de potência de cilindros

$$C^{\widehat{\Gamma}}_l = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\, C^{\widehat{\Gamma}_i}_l \,. \tag{7.20}$$

7.2.2 Bi-toros

Para uma melhor ilustração, consideremos uma chimené com base quadrada com tamanho de compactificação L. É conveniente orientar a chimené tal que seu grupo de recobrimento consista em translações no plano horizontal. Desta maneira, os geradores do grupo de recobrimento são as translações $g_1 = (I, \vec{a})$ e $g_2 = (I, \vec{b})$, com $\vec{a} = L\hat{e}_x$ e $\vec{b} = L\hat{e}_y$.

O grupo cíclico será parametrizado por um par de números inteiros (p, q) tal que $G_{pq} = \langle g_2^q g_1^p \rangle$. Se o menor divisor comum de (p, q) é r, então

$$G_{pq} < G_{\frac{p}{r}\frac{q}{r}} \,, \tag{7.21}$$

onde '$<$' significa *subgrupo de*. Assim, vamos restringir os *labels* para pares (p, q) que sejam números co-primos.

As únicas execções são quando (i) $p = \pm 1$ e $q = 0$ e vice-versa, e (ii) quando $p = \pm 1$ e $q = \pm 1$. Desta forma, os primeiros dois conjuntos completos de subgrupos cíclicos conjugados por uma rotação são $\{G_{1,0}, G_{0,1}\}$ e $\{G_{1,1}, G_{-1,1}\}$. Nos dois casos, a conjugação é feita por uma rotação de $\pi/2$ em torno do eixo $\hat{z}$. As longitudes de compactificação dos cilindros correspondentes são $L_{1,0} = L_{0,1} = L$ e $L_{1,1} = L_{-1,1} = \sqrt{2}L$ respectivamente. Os ângulos de Euler (β, α) para rotar estes cilindros correspondentes desde o eixo z até sua orientação na chimené, de acordo a (7.19), são $\beta = \pi/2$ em todos os casos, e $\alpha_{1,0} = 0$, $\alpha_{0,1} = \pi/2$, $\alpha_{1,1} = \pi/4$ e $\alpha_{-1,1} = 3\pi/4$, respectivamente.

Para escrever os conjuntos completos faltantes de subrgrupos cíclicos conjugados por uma rotação, definimos, para um para de números naturais coprimos (p, q), com $p > q \geq 1$, os grupos

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{pq} &= G_{pq} = \langle g_2^q g_1^p \rangle \quad , \quad G^{(3)}_{pq} = G_{-q,p} = \langle g_2^p g_1^{-q} \rangle \ , \\ G^{(2)}_{pq} &= G_{qp} = \langle g_2^p g_1^q \rangle \quad , \quad G^{(4)}_{pq} = G_{-p,q} = \langle g_2^q g_1^{-p} \rangle \ . \end{aligned}$$

As longitudes de compactificação são todas iguais a $L_{pq} = \sqrt{p^2 + q^2}L$, e os ângulos de Euler (β, α) para rotar os cilindros do eixo z até sua orientação na chimené, de acordo com (7.19), são $\beta = \pi/2$ em todos os casos, e

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}_{pq} &= \arctan\frac{q}{p} \quad , \quad \alpha^{(3)}_{pq} = \frac{\pi}{2} + \alpha^{(1)}_{pq} \ , \\ \alpha^{(2)}_{pq} &= \frac{\pi}{2} - \alpha^{(1)}_{pq} \quad , \quad \alpha^{(4)}_{pq} = \pi - \alpha^{(1)}_{pq} \ , \end{aligned}$$

respectivamente.

Se denotamos como Γ_{pq} o grupo de recobrimento de um cilindro com escala de compactificação L_{pq} e orientação ao longo do eixo z. Então, colocando tudo isto junto, usando (7.18) e (7.19), e levando em conta as propriedades de invariância derivadas no capítulo anterior, a assinatura topológica da chimené com base quadrada é

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle^{\widehat{\Gamma}} \;=\; \delta^{\mathrm{mod}(4)}_{mm'} \sum_{m_1} d^l_{mm_1}(\pi/2) d^{l'}_{m'm_1}(\pi/2)\, \mathcal{W}^{m'-m}_{ll'm_1} \ , \tag{7.22}$$

com

$$\mathcal{W}^m_{ll'm_1} = 2\left(\langle a_{lm_1}\, a^*_{l'm_1} \rangle^{\widehat{\Gamma}_{1,0}} + (-1)^{m/4} \langle a_{lm_1}\, a^*_{l'm_1} \rangle^{\widehat{\Gamma}_{1,1}} \right) + 4 \sum_{(p,q)} \cos m\alpha^{(1)}_{pq}\, \langle a_{lm_1}\, a^*_{l'm_1} \rangle^{\widehat{\Gamma}_{pq}} \ , \tag{7.23}$$

onde a soma (p, q) é avaliada apenas para pares de números naturais co-primos (p, q) tais que $p > q \geq 1$.

De (7.22) acha-se que o sinal topológico do espectro de potência da chimené com base quadrada é

$$C_l^{\widehat{\Gamma}} = 2\left(C_l^{\widehat{\Gamma}_{1,0}} + C_l^{\widehat{\Gamma}_{1,1}}\right) + 4\sum_{(p,q)} C_l^{\widehat{\Gamma}_{pq}} \ . \tag{7.24}$$

Como a assinatura topológica do espectro de potência de um cilindro converge rapidamente a zero com a escala de compactificação (ver fig.7.3 a), segue-se que a soma em (7.24) também converge rapidamente.

Ainda mais, a assinatura topológica do espectro de potências da chimené é maior que a de uma cilindro. Isto é porque o modo l-ésimo da assinatura topológica do espectro angular do cilídro oscila lentamente. Assim, de (7.24) esta assinatura é um pouco maior na chimené, como pode ser visto na fig.7.3 (b). onde calculamos a assinatura topológica do espectro de potências para a chimené como função da distancia de compactificação L, a partir dos valores do espectro de potência da fig.7.3 (a), usando a eq. (7.24).

7.3 Sinais de anisotropia estatística

Das eqs. (6.17) e (6.19) pode ser visto como a topologia introduz anisotropia estatística nas flutuações de temperatura da RCF. O caráter não diagonal da assinatura topológica da matriz de correlação e sua dependência em l, m ,l' e m' são manifestações da natureza estatisticamente anisotrópica de Universos multiplamente conexos. Uma forma explícita das correlações e dependências de l e m, pode ser visto nas eqs (7.5)–(7.8), de onde é claro ver que a distribuição das flutuações aleatórias de temperatura depende de m e que existem correlações entre diferentes escalas l .

.

7.3.1 Simulando mapas de temperatura de RCF com AE induzida pela topologia não-trivial do Universo

Agora que foi desenvolvido o contexto teórico para calcular assinatura de anisotropia estatística no cenário de topologias não triviais. Simulações de céus estatisticamente anisotrópicos neste cenário podem ser analisados e testados. Os passos seguidos são os seguintes

1. Dado um modelo cosmológico, usando o sistema de equações Boltzmann-Einstein, apresentado no cap. 5, obtem-se as funções $\Psi_{ll'}(x)$. Com esta função calcula-se a parte estatisticamente isotrópica da matriz de correlação. Neste cenário ela é a parte simplesmente conexa.

2. Calcula-se a parte que introduz a AE na matriz de correlação para a variedade base. Neste cenário ela é a assinatura topológica. No caso das variedades homogênas planas, a variedade base é o cilindro e a partir daí se constroem as matrizes de correlação para as outras variedades mais complexas. Nesta parte calcula-se a função $F^m_{ll'}(x)$ para depois calcular a integral (7.8). Somando este resultado à quantidade do item anterior, tem-se a matriz de correlação estatisticamente anisotropica para a variedade base.

3. Usando a decomposição cíclica e o resultado do item 2., calcula-se a matriz de correlação da variedade que pretende ser estudada.

4. Faz-se a decomposição de Cholesky, eq. (3.20), da matriz de correlação.

5. Gera-se números complexos aleatórios complexos de media 0 e variância 1. Estes serão os x_{lm} do produto (3.22). Finalmente se realiza o produto (3.22) para obter os coeficientes multipolares do mapa (a_{lm}'s).

7.3.2 Analisando mapas de temperatura de RCF com AE induzida pela topologia não-trivial do Universo

Para estudar a possibilidade de implementação computacional do método que é apresentado aqui, assim como a forma de simular céus estatisticamente anisotrópicos, fizemos uma aplicação para o caso do cilindro. Os resultados são mapas como as da figura fig. 7.4. Por simplicidade consideramos o modelo Einstein–de Sitter, assim em toda esta subseção tomaremos (7.13) para fazer os nossos cálculos.

A característica que queremos chamar a atenção é a AE, e que ela estaria produzindo alinhamentos existentes nos mapas dos multipolos individuais da anisotropia de temperatura, neste caso, a AE é induzida pela topologia não trivial do Universo. Na fig.7.4 apresentam-se uma realização a baixa resolução dos mapas de temperatura para um cilindro com $L = 2$ (em unidades de R_{USE}), junto com os mapas correspondentes para os primeiros l–modos. Pode se ver que estes l–mapas apresentam alinhamentos entorno do eixo z, o qual, neste caso é a única direção de compactificação do espaço.

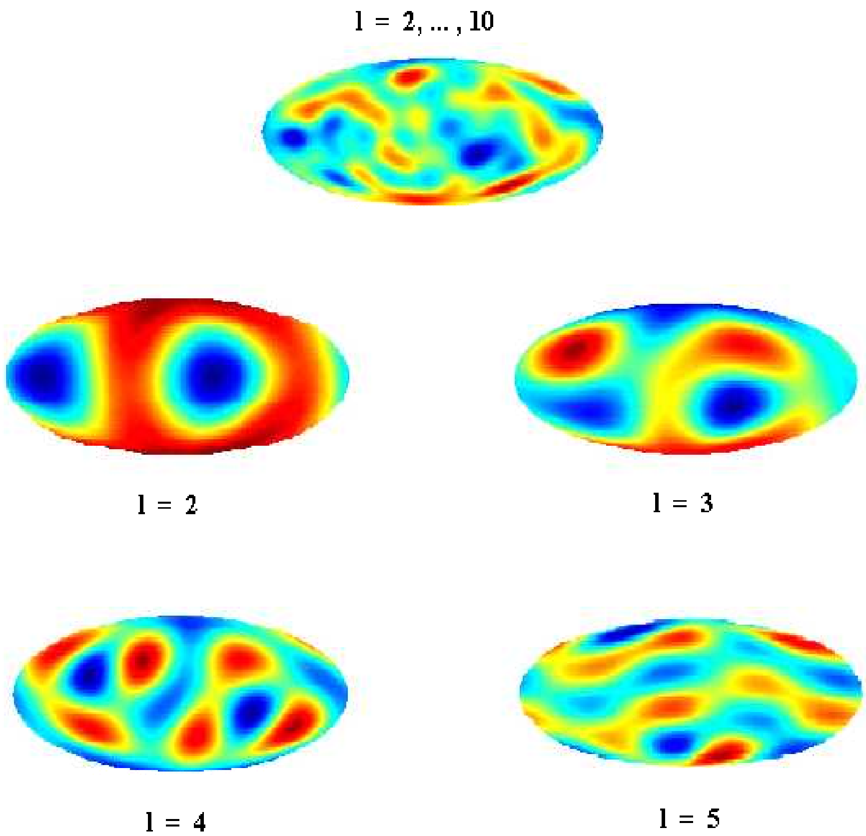


Figura 7.4: Mapa simulado de anisotropias de temperatura de RCF estatisticamente anisotrópico no cenário de topologia não trivial. A topologia considerada é a do cilindro com escala de compactificação $L = 2$. O mapa apresentado é a baixa resolução ($2 \leq l \leq 10$), também são mostrados os mapa para multipolod individuais para o svalores mais baixo de l.

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas futuras

A motivação principal para estudar as flutuações da RCF em modelos cosmológicos com AE, foi o desejo de explorar a idéia de que as anomalias reportadas em inúmeros trabalhos e por parte de diversos grupos [24, 41]-[77], são de origem cosmológico. Muitos destes reportes sugerem que tais anomalias são manifestações de AE, e portanto de uma violação do Princípio Cosmológico. No entanto, para chegar a resultados conclusivos em relação a esta hipótese são necessários estudos sistemáticos das propriedades da RCF nesta classe de universos, de modo que seja possível a determinação dos tipos de anomalias presentes em cada cenário de AE, assim como de uma caracterização robusta das anomalias presentes nos dados observacionais.

O que podemos afirmar no presente, com algum grau de certeza, é que as anomalias nos mapas de temperatura do WMAP e COBE são *pouco prováveis* de acontecerem num Universo estatisticamente isotrópico. Grosso modo, combinando todas as anomalias e supondo que são mutuamente independentes, as chances de que flutuações de temperatura da RCF num Universo com IE apresentem estes comportamentos anômalos é de aproximadamente 0.000001%. De fato, eis o motivo de usarmos o termo *anomalias* para nos referirmos a características como a falta de potência nos multipolos baixos nos mapas de temperatura, os alinhamentos do quadrupolo e octopolo, as assimetrias no espectro angular de potência entre os hemisférios norte e sul galácticos e supressões de certos coeficientes multipolares (simetrias nos baixos multipolos).

A construção de mapas de flutuações de temperatura apresenta diversas complicações de ordem prática. Algumas delas são (i) a baixa relação sinal/ruído em experimentos deste tipo, e por conseguinte a necessidade de eliminar o ruído instrumental, (ii) a determinação e tratamento de diversos erros sistemáticos nos experimentos, assim como de (iii) ruídos de fundo conhecidos como *foregrounds*, e que podem ter sua origem no sistema solar, em outras partes na nossa galáxia, ou fora dela. Estas fontes de sinais não desejadas comprometem a qualidade dos dados, e portanto comprometem também as conclusões a que cheguemos usando–os.

A eliminação do ruído instrumental é um complicado problema de engenharia que sai do escopo desta tese, e por esta razão não é discutida aqui. O tratamento dos erros sistemáticos dependem de cada experimento e é em princípio impossível determinar e eliminar todos eles. No entanto, tem se encontrado as mesmas anomalias tanto nos dados do COBE como nos do WMAP, sendo que pela sua própria concepção estes dois experimentos possuem erros sistemáticos completamente diferentes. Podemos portanto confiar que os erros sistemáticos não representam um problema grave no estudo das anomalias da RCF. Esta hipótese de trabalho poderá ser reforzada ou eliminada no futuro pelas observações do satélite PLANCK.

Os *foregrounds* são eliminados seguindo geralmente um dos dois procedimentos seguintes. O primeiro método é o mais elaborado, produz mapas do céu inteiro, e é baseado no fato que as observações das flutuações de temperatura são realizadas em várias frequências diferentes (3 no caso do COBE e 5 no WMAP). Se conhecemos o comportamento espectral de cada componente de *foreground*, estes mapas podem ser combinados para construir filtros que resultem em mapas de temperatura *limpos*. No entanto, nada garante que tenham sido levadas em conta todas as componentes de *foreground*, e portanto pode existir ainda uma componente apreciável de ruído residual. Este é o motivo pelo qual muitos pesquisadores preferem utilizar o segundo método que consiste simplesmente em usar máscaras para eliminar as partes do céu que apresentam *foregrounds* muito altos. Estas máscaras geralmente correspondem a regiões perto do equador galáctico. De qualquer modo, diversos estudos sugerem que a existência das anomalias da RCF é em grande medida independente dos procedimentos usados para limpar os diferentes tipos de *foreground* conhecidos [41]-[43],[57, 72, 104].

Em conclusão, podemos afirmar com certo grau de confiança que a existência das anomalias da RCF está bem estabelecida observacionalmente, e é incompatível com o Princípio Cosmológico via a manifestação de uma AE nos mapas de tempertura da RCF. A presente tese surgiu de uma tentativa de encontrar uma explicação cosmológica para estas anomalias. Na primeira parte (caps. 2, 3 e 4) discutimos como detectar e avaliar uma possível violação à IE em mapas de temperatura da RCF, e encontramos que um dos testes propostos nesta tese não aceita IE com um nível de confiabilidade de 3σ. Na segunda parte (caps. 5, 6 e 7) desenvolvemos a teoria necessária para descrever as flutuações de temperatura da RCF em universos com AE, implementamos este formalismo para cenários com topologia não trivial, e mostramos que mesmo topologias muito simples apresentam anomalias similares às observadas no COBE e WMAP.

Devemos observar que os testes de AE realizados até o presente são quase na totalidade empíricos, no sentido de que carecem de uma adequada fundamentação teórica que permita uma comparação quantitativa entre dados e modelos cosmológicos estatisticamente anisotrópicos. Numa tentativa de resolver esta deficiência, os testes realizados nesta tese correspondem às primeiras etapas no processo de desenvolvimento de uma bateria de testes de AE fundamentada teoricamente. A conexão entre a teoria e os testes estatísticos se realiza a través da matriz de correlação dos coeficientes multipolares a_{lm}.

Por um lado definimos testes estatísticos cuja formulação é baseada exclussivamente na matriz de correlação e na hipótese que as flutuações respondem a uma distribuição gaussiana, e pelo outro lado, determinamos teoricamente a forma desta matriz de correlação para modelos localmente isotrópicos mas que apresentam AE. Uma importante limitação deste trabalho é que nos restringimos apenas ao tratamento das flutuações de temperatura da RCF. No entanto, como foi mostrado no capítulo 3, um estudo completo das propriedades da RCF requer a inclusão das flutuações de polarização. A este respeito devemos esclarecer que, embora tenhamos realizado o tratamento teórico das flutuações de polarização em Universos com AE, não chegamos a implementar a parte numérica e nem realizar nenhum teste de IE usando esta propriedade da RCF e portanto, decidimos não incluir este tópico por uma questão de completitude e para não deixar a tese ainda mais dispersa. Neste sentido, estudos complementares usando os mapas de m-dispersão para testar IE com os dados de polarização e estudos de robusteça dos testes do capítulo 4 estão sendo desenvolvidos atualmente [190].

Entre os resultados obtidos nesta tese podemos citar os seguintes:

1. Uma prova direta de que em Universos com AE a variancia cósmica é maior do que em Universos com IE. Das distribuições do espectro angular de potência obtidas nas simulações realizadas sobre Universos com IE (figs. 4.1 e 4.2) podemos observar que existe uma preferência nos dados de universos com valores baixos de C_l. De ser verificada a AE em nosso Universo, a pouca potência nos multipolos baixos seria explicada de modo muito natural usando este resultado.

2. Uma prova de que a isotropia estatística é equivalente a uma matriz de correlação diagonal e independente do parâmetro m. Isto implica no seguinte resultado fundamental: *qualquer correlação entre as componentes harmônicas das flutuações do campo da RCF origina AE nos mapas de temperatura e polarização e vice-versa.*

3. A apresentação do método dos mapas de m-dispersão. As análises preliminares

realizadas com este método e apresentadas nesta tese, sugerem que esses mapas podem ser usados na detecção de AE. Quando usados para o caso do ΛCDM, os dados das flutuações de temperatura não aceitam a hipótese de IE a um nivel de 3σ.

4. Uma extensão do método da *linha de visão* para calcular a matriz de correlação dos a_{lm} em universos com AE. A extensão deste método foi realizada para universos com isotropia local, e portanto precisa da solução das mesmas equações que no caso usual de IE. Deste modo, grande parte do *software* existente para realizar simulações das flutuações da temperatura da RCF pode ser aproveitado também para o caso de AE.

5. Uma implementação do método mencionado acima para o cenário de AE devido a uma topologia não trivial do Universo. A matriz de correlação dos $a_{\ell m}$ neste cenário é decomposta em duas partes, uma contém a informação topológica e a outra é idêntica ao caso de IE. O termo que contém toda a informação topológica é chamado de *assinatura topológica* da matriz de correlação e é escrito em termos do grupo de holonomia da variedade de modela nosso Universo, evitando assim a tediosa tarefa de calcular as soluções da equação de Helmholtz nestes espaços. Por outro lado, conseguimos realizar uma decomposição da assinatura topológica de Universos com topologia complicada em termos de assinaturas topológicas correspondentes a topologias simples, acelerando deste modo o processo de cálculo da matriz de correlação.

6. A apresentação, pela primeira vez, de simulações que mostram explicitamente que certas anomalias observadas nos dados do COBE e do WMAP podem ser reproduzidas neste cenário.

Para finalizar, mencionemos alguns pontos que não foram desenvolvidos nem apresentados nesta tese, mas que consideramos interessantes como temas de pesquisa futura.

1. Uma assimetria entre hemisférios antipodas pode ser interpretada como uma violação da paridade em escalas cosmológicas. A violação da paridade em escalas cosmológicas se manifesta como correlações entre os multipolos com número l de diferente paridade (entre l's pares e ímpares). Uma análise da matriz de correlação dos a_{lm} para universos com topologia não trivial evidencia que este tipo de correlações não acontece em variedades globalmente homogêneas, portanto uma confirmação da hipótese de violação da paridade em escalas cosmológicas descartaria de maneira decisiva a posibilidade que a

topologia do Universo seja, por exemplo, um toro. Um problema interessante então é o desenvolvimento de indicadores estatísticos que determinem se um dado mapa de flutuações com AE apresenta ou não violação da paridade.

2. A violação da paridade também se manifesta como uma correlação entre os modos T e B, e E e B nas flutuações do campo da RCF. Deste modo, a detecção de uma correlação nos espectros de potência entre estes modos também indicaria uma violação da paridade a nível cosmológico. Surge então a necessidade de descrever teoricamente estas correlações em diferentes cenários de AE, como topologia não trivial ou a presença de campos magnéticos em escala cosmológica.

Durante o desenvolvimento desta tese rotinas e programas foram implementados. Um exemplo disto é o programa que calcula os mapas de m-dispersão e que inclue a rotina das funções de Wigner. Porém, nenhum deles está ainda disponível pois consideramos que ainda podem ser melhor optimizados.

Apêndice A

Parâmetros de Stokes

Neste apêndice, apresenta-se o formalismo dos parâmetros de Stokes para estudar radiação polarizada, assim como o comportamento sobre tranformações de rotação e paridade destes parâmetros.

A.1 Ondas eletromagnéticas planas e polarização

O conjunto de equações de Maxwell para o campo electromagnético no vácuo, tem soluções de tipo ondulatório que se propagam a velocidade da luz c^*

$$\vec{E}(\vec{r},t) \;=\; \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \vec{\mathcal{E}}^*\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})\,, \tag{A.1}$$

sendo $\vec{E}$ o campo elétrico, $\vec{\mathcal{E}}$ um vetor constante e complexo, $\vec{k}$ um vetor real constante na direção de propagação $\hat{n}$ ($\vec{k} = k\hat{n}$) e $\omega = c\,|\vec{k}| = c\,k$, a frequência angular da onda.

As equações de Maxwell restringem ainda mais os campos $\vec{E}$, $\vec{B}$ e o vetor $\hat{n}$, fazendo que as condições $\hat{n}\cdot\vec{E}$, $\hat{n}\cdot\vec{B} = 0$ e $\vec{B} = \hat{n}\times\vec{E}$ devam ser satisfeitas. Em outras palavras, ambos campos propagam-se ortogonalmente à direção $\hat{n}$ e são sempre ortogonais entre si. Portanto, pode-se definir um sistema de coordenadas $(\hat{n}, \hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)$, sendo que $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2$ estejam no plano que formam os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (plano ortogonal a $\hat{n}$).

No sistema de coordenadas escolhido, a eq. (A.1) escreve-se como $\vec{E}(\vec{r},t) = E_1(\vec{r},t)\,\hat{\epsilon}_1 + E_2(\vec{r},t)\,\hat{\epsilon}_2$, onde

$$E_1(\vec{r},t) = |\xi_1|cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_1) \qquad E_2(\vec{r},t) = |\xi_2|cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_2)\,. \tag{A.2}$$

Para isso, fizemos

$$\vec{\mathcal{E}} = |\xi_1|e^{i\delta_1}\,\hat{\epsilon}_1 + |\xi_2|e^{i\delta_2}\,\hat{\epsilon}_2\,. \tag{A.3}$$

*Consideraremos apenas o campo eléctrico, a análise do campo magnético é exatamente igual

Para cada $\vec{k} \cdot \vec{r}$ constante, as componentes do campo elétrico respeitam a curva

$$(\frac{E_1(\vec{r},t)}{|\xi_1|})^2 + (\frac{E_2(\vec{r},t)}{|\xi_2|})^2 - 2\frac{E_1(\vec{r},t)E_2(\vec{r},t)cos\delta}{|\xi_1||\xi_2|} = sen^2\delta\,, \tag{A.4}$$

com $\delta = \delta_1 - \delta_2$. É daqui que se definem os tipo de polrização.

- Se $\delta = 0$ ou $\delta = \pm\pi$, (A.4) é a equação de uma reta. Se diz que a onda está polarizada linearmente, com imclinação $\frac{|\xi_2|}{|\xi_1|}$ respeito ao eixo $\hat{\epsilon}_1$.
- Se $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ e $|\xi_1| = |\xi_2|$, (A.4) é a equação de um círculo. Se diz então que a onda está polarizada circularmente à direita ($+\frac{\pi}{2}$) ou à esquerda ($-\frac{\pi}{2}$). Se $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ e $|\xi_1| \neq |\xi_2|$, (A.4) é a equação de uma elípse com os eixos menor e maior nas direções $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)$ respectivamente. Se diz que a onda está polarizada elipticamente à direita ($+\frac{\pi}{2}$) ou à esquerda ($-\frac{\pi}{2}$).
- Em qualquer outro caso, (A.4) é a equação de uma elípse. Se diz que a onda está polarizada elípticamente à direita ($\delta > 0$) ou à esquerda ($\delta > 0$). Nestes casos, nenhum dos eixos está nas direções $\hat{\epsilon}_1$ ou $\hat{\epsilon}_2$.

Uma outra forma de caracterizar ondas electromagnéticas é usando a intensidade E_0^2, a exentricidade χ da elípse e a inclinação 2ψ que tem o eixo maior com $\hat{\epsilon}_1$. Estes dois conjuntos de parâmetros estão relacionados pelas equações

$$|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = E_0^2\,, \quad |\xi_1||\xi_2|sen\delta = E_0^2\, sin2\chi\,, \quad tg\delta = sen2\psi\,. \tag{A.5}$$

A.2 Parâmetros de Stokes

O formalismo dos parâmetros de Stokes é usado para descrever as propriedades da radiação electromagnética polarizada. Os parâmetros de Stokes consistem num conjunto de quatro quantidades que dependem das amplitudes dos componentes nos eixos do sistema de coordenadas escolhido, e da diferença de fase entre estas amplitudes [143]

$$\begin{aligned} I = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\,, &\quad Q = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 \\ U = 2|\xi_1||\xi_2|cos\delta\,, &\quad V = 2|\xi_1||\xi_2|sen\delta\,. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Q, U e V levam a informação sobre tipos de polarização da onda. Por exemplo, no caso da polarização linear, $\delta = 0$ ou $\delta = \pm\pi$. Portanto, $V = 0$ e $Q \neq U \neq 0$ diz que os parâmetros Q e U medem polarização linear. No caso da polarização circular $Q = U = 0$ e $V \neq 0$, assim o parâmetros V mede polarização circular. No caso de polarização elíptica, todo os parâmetros são não nulos.

De (A.5) tem-se que a forma dos parâmetros de Stokes em função de (E_0, χ, ψ) é

$$\begin{aligned}
I &= E_0^2 \\
Q &= I\, cos2\chi\, cos2\psi \\
U &= I\, cos2\chi\, sen2\psi \\
V &= I\, cos2\psi\, .
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Porém, na prática não se tem apenas uma única onda plana, mas sim, um feixe de radiação incoerente formada por um conjunto de ondas eletromagnéticas planas com diferentes amplitudes e fases entre elas. Como as intenstidades associadas às ondas são aditivas, temos que os parâmetros de Stokes para um feixe de n ondas é †

$$\begin{aligned}
I &= \sum_n |E_o^n|^2 \\
Q &= \sum_n |E_o^n|^2 cos2\beta_n cos2\chi_n \\
U &= \sum_n |E_o^n|^2 cos2\beta_n sin2\chi_n \\
V &= \sum_n |E_o^n|^2 sin2\beta_n\, ,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

o que leva a que os quatro parâmetros estão relacionados pela desigualdade

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2\, . \tag{A.9}$$

A desigualdade (A.9), indica a existência de uma parte não polarizada e de outra parte polarizada no feixe. Para medir a parte com polarização resultante, define-se uma quantidade P tal que, para a porcentagem polarizada

$$(IP)^2 = Q^2 + U^2 + V^2\, . \tag{A.10}$$

P é chamado de grau de polarização e $0 \leq P \leq 1$. Assim, (A.10) é a equação de uma esféra com

$$\begin{aligned}
Q &= I\, P\, cos\, 2\beta'\; cos\, 2\chi' \\
U &= I\, P\, cos\, 2\beta'\; sen\, 2\chi' \\
V &= I\, P\, sin2\beta' \\
tg\, 2\chi' = \frac{U}{Q} \quad &, \quad sen\, 2\beta' = \frac{V}{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}\, .
\end{aligned} \tag{A.11}$$

† Considerando un feixe quase monocromático

A similitude entre as eqs. (A.11) e (A.7), faz que que os ângulos β' e χ' sejam interpretados como parâmetros de uma polarização resultante no feixe. Polarização resultante que também pode ser estudada usando os parâmetros de Stokes. Neste caso, Q e U medem o grau de polarização linear resultante e V a polarização circular resultante, sendo que a intensidade da parte polarizada do feixe é $I\,P$. Se o feixe não tiver nenhuma polarização resultante se diz que ele é totalmente não polarizado e $Q = U = V = P = 0$ (luz natural). No caso de que $P = 1$ se diz que a radiação é totalmente polarizada.

A.3 Transformações de coordenadas e os parâmetros de Stokes

A não invariancia por certo de tipo de transformações de coordenadas de alguns parâmetros de Stokes, leva a consequências importantes para a RCF e por este motivo, iremos apresentá-las aqui. Por exemplo, uma rotação dos eixos $\hat{\epsilon}_1$ e $\hat{\epsilon}_2$ de um ângulo α entorno de $\hat{n}$ leva a que $\hat{\epsilon}_1^R = cos\alpha\,\hat{\epsilon}_1 + sen\alpha\,\hat{\epsilon}_2$ e $\hat{\epsilon}_2^R = -sen\alpha\,\hat{\epsilon}_1 + cos\alpha\,\hat{\epsilon}_2$. Usando estas equações e a eq. (A.3) acha-se que

$$\begin{aligned} I^R &= I \\ Q^R &= Q\,cos\,2\alpha + U\,sen\,2\alpha \\ U^R &= -Q\,sen\,2\alpha + U\,cos\,2\alpha \\ V^R &= V\,, \end{aligned} \tag{A.12}$$

assim, fica claro que Q e U dependem do sistema de coordenadas escolhido. Se agora considerarmos uma transformação de paridade os vetores unitários do sistema se transformam como $\hat{\epsilon}_1^P = -\hat{\epsilon}_1$ e $\hat{\epsilon}_2^P = \hat{\epsilon}_2$, que junto com a eq. (A.3) nos levam a

$$\begin{aligned} I^P &= I \\ Q^P &= Q \\ U^P &= -U \\ V^P &= -V\,. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Note que as leis de transformação (A.12) e (A.13) são intrínsecas ao formalismo de Stokes e não têm nada a ver com a natureza e nem características da radiação.

1

Apêndice B

Funções na esfera

Este apêndice apresenta várias definições e formulas sobre funções de peso spin s, harmônicos esféricos de peso de spin 0 [111], [112] e matrizes de rotação de Wigner [114], usadas nesta tese.

B.1 Funções com peso de spin sobre uma esfera

Dada uma direção $\hat{n} = (\theta, \phi)$ numa esféra, pode-se definir três vetores ortogonais sendo um deles $\hat{n}$ e os outros dois tangenciais à esféra $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)$.

Uma função ${}_sf(\hat{n})$ definida sobre numa esféra é dita que tem peso de spin s, se sua lei de transformação por uma rotação ψ entorno de $\hat{n}$ do sistema de coordenas é

$$f^R(\hat{n}) = e^{-i\,s\,\psi} f(\hat{n})\,, \tag{B.1}$$

Uma característica interesante das funções de peso de spin s é que existem operadores que aumentam ($\eth$) ou diminuem ($\eth^*$) o s operador ∂

$$\begin{aligned}
\eth_s f(\hat{n}) &= -sen^s\,\theta \left(\frac{\partial}{\partial\,\theta} + \frac{i}{sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) sen^{-s}\,(\theta)_s f(\hat{n}) \\
\eth^*_s f(\hat{n}) &= -sen^{-s}\,\theta \left(\frac{\partial}{\partial\,\theta} - \frac{i}{sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) sen^{s}\,(\theta)_s f(\hat{n})\,.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Aplicando os operadores (B.2) na função ${}_sf(\hat{n})$ ve-se que como eles aumentam ou diminuem o s.

$$\begin{aligned}
(\eth_s f(\hat{n}))^R &= e^{-i\,(s+1)\,\psi}\eth_s f(\hat{n}) \\
(\eth^*_s f(\hat{n}))^R &= e^{-i\,(s-1)\,\psi}\eth^*_s f(\hat{n})
\end{aligned} \tag{B.3}$$

e assim como existem harmônicos esféricos $Y_{lm}(\hat{n})$ que servem como base para a expansão de funções na esféra, existem também os chamados harmônicos esféricos de peso de spin s (${}_sY_{lm}(\hat{n})$), que sirvem como base para a expansão de funções de peso de spin s. Os ${}_sY_{lm}(\hat{n})$ são auntofunções do operador $\eth\eth^*$ [111] e formam uma base ortonormal

$$\int d\Omega_s Y_{lm}(\hat{n})_s Y^*_{l'm'}(\hat{n}) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \,, \tag{B.4}$$

que pode ser usada para expandir funções tipo ${}_sf(\hat{n})$ numa esfera

$${}_sf(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{s,lm}\, {}_sY_{lm}(\hat{n}) \tag{B.5}$$

Usando os operadores (B.2), os ${}_sY_{lm}(\hat{n})$ são expressados em função dos $Y_{lm}(\hat{n})$

$$\begin{aligned} {}_sY_{lm}(\hat{n}) &= \sqrt{\frac{(l-s)!}{(l+s)!}}\,\eth^s Y_{lm}(\hat{n}) \;\; (0 \le s \le l) \\ {}_sY_{lm}(\hat{n}) &= (-1)^s\sqrt{\frac{(l+s)!}{(l-s)!}}\,\eth^{*\,-s} Y_{lm}(\hat{n}) \;\; (0 \le s \le l)\,. \end{aligned} \tag{B.6}$$

De onde tem-se que

$${}_sY^*_{lm}(\hat{n}) = (-1)^{m+s}\, {}_{-s}Y_{l-m}(\hat{n}) \tag{B.7}$$

B.2 Harmônicos esféricos

Os harmônicos esféricos de peso de spin 0 são definidos como

$$Y_{lm}(\hat{n}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \,, \tag{B.8}$$

com

$$P_l^m(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \,, \tag{B.9}$$

onde $P_l^m(x)$ são as funções asocciados de Legendre com indice possitivo $0 \le m \le l$, e com

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l \tag{B.10}$$

sendo os polinomios de Legendre. As funções associadas de Legendre com indice negativo m estão definidas por

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \,. \tag{B.11}$$

Para o capítulo 6 , é conveniente introduzir as funccões associadas de Legendre normalizadas

$$\mathcal{P}_l^m(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(x)\,. \tag{B.12}$$

Uma formula muito útil é o chamado teorema da adição para

$$P_l(\hat{n}\cdot\hat{n}') = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{n})Y^*_{lm}(\hat{n}')\,, \tag{B.13}$$

e que se $\hat{n} = \hat{n}'$ tem-se

$$\sum_{m=-l}^{l} [\mathcal{P}_l^m(x)]^2 = 2l+1\,. \tag{B.14}$$

De (B.13) mostra-se que dado dois vetores unitários $\hat{k}$ e $\hat{n}$ tem-se

$$\int P_l(\hat{k}\cdot\hat{n})Y_{lm}(\hat{k})d\Omega_k = \frac{4\pi}{2l+1}Y^*_{lm}(\hat{n}) \tag{B.15}$$

B.3 Rotações no espaço harmônico: matrizes de Wigner

Uma rotação R em $SO(3)$ pode ser feito usando as matrizes de Wigner, estas matrizes tem formas simples quando a R é expressada em termos de seus ângulos de Euler

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)\cdot R_y(\beta)\cdot R_z(\gamma)\,. \tag{B.16}$$

Assim, as funções D de Wigner tomam a forma explícita

$$D^l_{mm'}(R(\alpha,\beta,\gamma)) = e^{i(m\alpha+m'\gamma)}d^l_{mm'}(\beta)\,, \tag{B.17}$$

onde $d^l_{mm'}(\beta)$ é uma matriz real

$$d^l_{mm'}(\beta) = N_{lmm'}\sum_k (-1)^k \frac{\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l-2k+m-m'}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2k-m+m'}}{k!(l+m-k)!(l-m'-k)!(m'-m+k)!}\,, \tag{B.18}$$

e

$$N_{lmm'} = \sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+m')!(l-m')!}\,. \tag{B.19}$$

com a soma em k é avaliada até ter argumentos negativos nos factoriais. $d^l_{mm'}(\beta)$ tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} d^l_{mm'}(\beta) &= (-1)^{m-m'}d^l_{m'm}(\beta)\,, & \text{(B.20)}\\ d^l_{mm'}(\beta) &= d^l_{-m',-m}(\beta)\,, & \text{(B.21)}\\ d^l_{mm'}(\pi-\beta) &= (-1)^{l-m'}d^l_{-m,m'}(\beta)\,, & \text{(B.22)}\\ d^l_{mm'}(-\beta) &= (-1)^{m'-m}d^l_{m,m'}(\beta)\,. & \text{(B.23)} \end{aligned}$$

Usando as matrizes de Wigner, os hamônicos esféricos se transformam como [114]

$$Y_{lm}(R\hat{n}) = \sum_{m_1} D^l_{mm_1}(R)\, Y_{lm_1}(\hat{n})\,. \tag{B.24}$$

Uma propriedade bastante usada no desenvolvimento desta tese foi

$$\sum_m D^{*\,l}_{mm_1}(R) D^l_{mm_2}(R) = \delta_{m_1 m_2}\,. \tag{B.25}$$

Mais propriedades dos $D^l_{mm_1}$ podem ser achados em [114]. As formulas recursivas que foram usadas para as rotinas desenvolvidas para esta tese foram tomadas de [125].

Apêndice C

Cálculo da variância

É apresentado o cálculo da variância cósmica e da m-dispersão média e sua variância.

C.1 Variância cósmica

A variância é mede até quanto como máximo, o valor estimado x é igual que o teórico $\langle x \rangle$

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \,, \tag{C.1}$$

Para cada $C_l^{XX'}$ é:

$$(\Delta C_l^{XX'})^2 = \langle (C_l^{XX'})^2 \rangle - \langle C_l^{XX'} \rangle^2 \tag{C.2}$$

Mas

$$C_l^{XX'} = \frac{1}{2l+1} \sum_m a_{lm}^X a_{lm}^{*X'} \,, \tag{C.3}$$

$$\langle C_l^{XX'} \rangle^2 = \frac{1}{(2l+1)^2} \sum_{mm'} \langle a_{lm}^X a_{lm}^{*X'} \rangle \langle a_{lm'}^{X'} a_{lm'}^{*X} \rangle \,. \tag{C.4}$$

Por outro lado

$$\langle (C_l^{XX'})^2 \rangle = \frac{1}{(2l+1)^2} \sum_{mm'} \langle a_{lm}^X a_{lm}^{*X'} a_{lm'}^{X'} a_{lm'}^{*X} \rangle \tag{C.5}$$

Usando as propriedades das variáveis gaussianas (Eq. (3.13))

$$\begin{aligned}\langle (C_l^{XX'})^2 \rangle = \frac{1}{(2l+1)^2} \sum_{mm'} (\langle a_{lm}^X a_{lm}^{*X'} \rangle \langle a_{lm'}^{X'} a_{lm'}^{*X} \rangle + \langle a_{lm}^X a_{lm'}^{X'} \rangle \langle a_{lm}^{*X'} a_{lm'}^{*X} \rangle \\ + \langle a_{lm}^X a_{lm'}^{*X} \rangle \langle a_{lm}^{*X'} a_{lm'}^{X'} \rangle) \,.\end{aligned} \tag{C.6}$$

De (C.4) e (C.6), usando $a^X_{lm} = (-1)^m a^X_{l-m}$ e renomeando indices da soma em m', escrevemos a variância em função das matrizes de correlação

$$\Delta C_l^{XX'} = \frac{1}{(2l+1)}\sqrt{\sum_{mm'}(\langle a^X_{lm}a^{*X'}_{lm'}\rangle\langle a^{*X'}_{lm}a^X_{lm'}\rangle) + \langle a^X_{lm}a^{*X}_{lm'}\rangle\langle a^{*X'}_{lm}a^{X'}_{lm'}\rangle)} \tag{C.7}$$

e para o caso particular em que $X = X'$

$$\Delta C_l^{XX} = \frac{1}{(2l+1)}\sqrt{2\sum_{mm'}|\langle a^X_{lm}a^{*X}_{lm'}\rangle|^2}\,. \tag{C.8}$$

Usando (**??**), achamos as variâncias cósmicas no caso IE

$$\begin{aligned}
\Delta C_l^{XX} &= \sqrt{\frac{2}{(2l+1)}}\langle C_l^{XX}\rangle\,,\\
\Delta C_l^{TE} &= \sqrt{\frac{1}{2l+1}(\langle C_l^{TE}\rangle^2 + \langle C_l^{EE}\rangle\langle C_l^{TT}\rangle)}\,,\\
\Delta C_l^{TB} &= \sqrt{\frac{1}{2l+1}\langle C_l^{TT}\rangle\langle C_l^{BB}\rangle}\,,\\
\Delta C_l^{EB} &= \sqrt{\frac{1}{2l+1}\langle C_l^{EE}\rangle\langle C_l^{BB}\rangle}\,.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

C.2 Calculo da m-dispersão e sua variância cósmica

A m-dispersão é definida como

$$(\sigma_l^{XX'})^2 = \frac{1}{2l+1}\sum_m (a^X_{lm}a^{*X'}_{lm} - C_l^{XX'})^2 = \frac{1}{2l+1}\sum_m (a^X_{lm}a^{*X'}_{lm})^2 - (C_l^{XX'})^2\,. \tag{C.10}$$

Usando (C.3)

$$(\sigma_l^{XX'})^2 = \frac{1}{2l+1}\sum_m (a^X_{lm}a^{*X'}_{lm})^2 - (C_l^{XX'})^2\,. \tag{C.11}$$

com valor esperado

$$\langle(\sigma_l^{XX'})^2\rangle = \frac{1}{2l+1}\sum_m \langle(a^X_{lm}a^{*X'}_{lm})^2\rangle - \langle(C_l^{XX'})^2\rangle\,. \tag{C.12}$$

O primeiro termo usando o fato que são os coeficientes são gaussianos (eq. 3.13) é

$$\sum_m \langle(a^X_{lm}a^{*X'}_{lm})^2\rangle = \sum_m \langle a^X_{lm}a^{*X'}_{lm}a^{X'}_{lm}a^{*X}_{lm}\rangle =$$

$$\sum_m (\langle a^X_{lm}a^{*X'}_{lm}\rangle\langle a^{X'}_{lm}a^{*X}_{lm}\rangle + \langle a^X_{lm}a^{X'}_{lm}\rangle\langle a^{*X'}_{lm}a^{*X}_{lm}\rangle + \langle a^X_{lm}a^{*X}_{lm}\rangle\langle a^{*X'}_{lm}a^{X'}_{lm}\rangle) \tag{C.13}$$

Usando usando $a^X_{lm} = (-1)^m a^X_{l-m}$ e renomeando indices da soma em m', escrevemos a variância em função das matrizes de correlação

$$\sum_m \langle (a^X_{lm} a^{*X'}_{lm})^2 \rangle = \sum_m (|\langle a^X_{lm} a^{*X'}_{lm} \rangle|^2 + |\langle a^X_{lm} a^{*X'}_{l-m} \rangle|^2 + \langle a^X_{lm} a^{*X}_{lm} \rangle \langle a^{*X'}_{lm} a^{X'}_{lm} \rangle) \quad \text{(C.14)}$$

Usando esta eq e (C.2)

$$\langle (\sigma^{XX'}_l)^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_m (|\langle a^X_{lm} a^{*X'}_{lm} \rangle|^2 + |\langle a^X_{lm} a^{*X'}_{l-m} \rangle|^2 + \langle a^X_{lm} a^{*X}_{lm} \rangle \langle a^{*X'}_{lm} a^{X'}_{lm} \rangle)$$
$$- \langle C^{XX'}_l \rangle^2 - (\Delta C^{XX'}_l)^2 \quad \text{(C.15)}$$

e para o caso de $X = X'$

$$\langle (\sigma^{XX}_l)^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_m (2|\langle a^X_{lm} a^{*X}_{lm} \rangle|^2 + |\langle a^X_{lm} a^{*X}_{l-m} \rangle|^2) - \langle C^{XX'}_l \rangle^2 - (\Delta C^{XX'}_l)^2 \quad \text{(C.16)}$$

De (**??**) e C.9 para o caso da IE

$$\begin{aligned} \langle (\sigma^{XX}_l)^2 \rangle &= l(\Delta C^{XX}_l)^2 = \frac{2l}{2l+1} \langle C^{XX}_l \rangle^2 , \\ \langle (\sigma^{TE}_l)^2 \rangle &= \frac{2l}{2l+1} \langle C^{TT}_l \rangle \langle C^{EE}_l \rangle \\ \langle (\sigma^{TB}_l)^2 \rangle &= \frac{2l}{2l+1} \langle C^{TT}_l \rangle \langle C^{BB}_l \rangle \\ \langle (\sigma^{EB}_l)^2 \rangle &= \frac{2l}{2l+1} \langle C^{EE}_l \rangle \langle C^{BB}_l \rangle \end{aligned} \quad \text{(C.17)}$$

só que desta vez teremos 7 termos na soma (C.6). O resultado deste cálculo tedioso é uma expresão que não leva informação adicional ao que se tem na eq. (4.3), de onde ve-se que a variância cósmica carrega informação sobre anisotropia estatística já que recebe contribuições dos elementos fora da diagonal e não é invariante por rotações. No caso de isotropia estatística, da eq. (**??**), encontra-se que a m-dispersão é

$$\begin{aligned} \langle (\sigma^{XX}_l)^2 \rangle &= l(\Delta C^{XX}_l)^2 = \frac{2l}{2l+1} \langle C^{XX}_l \rangle^2 , \\ \langle (\sigma^{TE}_l)^2 \rangle &= \frac{2l}{2l+1} \langle C^{TT}_l \rangle \langle C^{EE}_l \rangle \\ \langle (\sigma^{TB}_l)^2 \rangle &= \frac{2l}{2l+1} \langle C^{TT}_l \rangle \langle C^{BB}_l \rangle \\ \langle (\sigma^{EB}_l)^2 \rangle &= \frac{2l}{2l+1} \langle C^{EE}_l \rangle \langle C^{BB}_l \rangle . \end{aligned} \quad \text{(C.18)}$$

cujo resultado final no caso de correlações TT é

$$(\Delta(\sigma^{TT}_l)^2)^2 = \frac{8}{2l+1}(4 + \frac{5}{2l+1} + \frac{3}{(2l+1)^2}) \langle C_l \rangle^4 . \quad \text{(C.19)}$$

Apêndice D

Termo de colisões para o espalhamento Compton

A iteração dominante durante a recombinação foi o espalhamento Compton

$$e^-(q') + \gamma(p') \longrightarrow e^-(q) + \gamma(p)\,. \tag{D.1}$$

Se $p = (\omega, \vec{p})$, $q = (E_q.\vec{q})$, $p' = (\omega\,', \vec{p}\,')$ e $q = (E_{q\,'}.\vec{q}\,')$, o termo de colisão para este processo binário é dado por [132]

$$\begin{aligned} C[f(x,p)] = \frac{1}{\omega}\int \frac{d^3\vec{p}\,'}{(2\pi)^3 2\omega\,'}\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2E_q}\int \frac{d^3\vec{q}\,'}{(2\pi)^3 2E_{q'}}(2\pi)^4 \times \\ \delta(p+q-p'-q')\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2[g(q')f(p') - g(q)f(p)]\,. \end{aligned} \tag{D.2}$$

O promedio nos momentos incidente e espalhado do electron ($\vec{q}\,'$ e $\vec{p}\,'$), e no momento incidente do foton $\vec{p}\,'$, indica que a informação que quere-se obter é apenas do foton espalhado. O delta indica conservação de energia,$\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2$ é a amplitude de espalhamento Compton promediado nos spins dos electrons, g é a função de distribuição do electron e I_i é a função de distribuição do foton polarizado. A amplitude de espalhamento Compton no sistema do centro de masas [133] promediado nos spins dos electrons é

$$\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2_{SE} = A\left(\frac{\omega_{SE}}{\omega'_{SE}} + \frac{\omega'_{SE}}{\omega_{SE}} + 4(\epsilon'_{SE}\epsilon_{\,SE})^2 - 2\right) \tag{D.3}$$

sendo $\epsilon_{SE} = (0, \vec{\epsilon})$ a polarização no gauge especial. Para obter a amplitude no sistema onde o electron está se movendo, fazemos uma tranformação de Lorentz à eq (D.3) ($p^\mu_{SE} = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$ e $\epsilon^\mu_{SE} = \Lambda^\mu_\nu \epsilon^\nu$). Além, á epoca de recombinação é válida a aproximação $q << m$ e $p << m$ ($\frac{q^2}{m^2} << 1$), sendo m a massa do electron. Finalmente no sistema desejando (D.3) toma a forma

$$\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2 = 4A(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}\,')^2\,, \tag{D.4}$$

onde $A = (4\pi)^2 \frac{\alpha^2}{m^2}$, sendo α a constante de estructura fina. Usando o fato de que $\delta(p+q-p'-q') = \delta(\omega + E_q - \omega' - E_{q'})\delta(\vec{p}+\vec{q}-\vec{p}\,'-\vec{q}\,')$ e a eq. (D.4), integramos (D.2) em $\vec{q}\,'$

$$C[f(x,p)] = \frac{2A\pi}{\omega}\int \frac{d^3\vec{p}\,'}{(2\pi)^3\omega\,'}\int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 E_q E_{q'}}\delta(\omega + E_q - \omega' - E_{q'}) \times \\ (\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}\,')^2[g(\vec{p}+\vec{q}+\vec{p}\,')(f(\vec{p}\,') - g(\vec{q})f(\vec{p})] \,. \tag{D.5}$$

Como a estas energias e por $E_q = \sqrt{q^2+m^2}$ e

$$g(\vec{q}) = (2\pi)^3 x_e n_e (2\pi m_e T_e)^{-3/2} e^{-(\frac{\vec{q}-m\vec{v}_b}{2m_e T_e})^2} \tag{D.6}$$

fazemos as expansões seguintes

$$\frac{1}{E_q E_{q'}} = \frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(\vec{p}-\vec{p}\,')^2}{m^2} - \frac{\vec{q}\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')}{m^2} + ...\right) \tag{D.7}$$

$$g(\vec{p}+\vec{q}-\vec{p}\,') = g(\vec{q})\left(1 - \frac{(\vec{q}-\vec{v}_b)\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')}{m_e T_e} - \frac{(\vec{p}-\vec{p}\,')^2}{4m^2 T_e^2} + ...\right) \tag{D.8}$$

$$\delta(\omega + E_q - \omega' - E_{q'}) = \delta(\omega-\omega') + (E_q - E_{q'})\frac{\partial}{\partial\omega'}\delta(\omega-\omega') + ... \tag{D.9}$$

com

$$E_q - E_{q'} = \frac{(\vec{p}-\vec{p}\,')}{2m} - \frac{\vec{q}\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')}{m} \tag{D.10}$$

e com $f = f_o(\eta,\omega) + f_1(\eta,\vec{x},\vec{p})$ Com as (D.7)-(D.10) em (D.6) obtemos que a primer ordem

$$C[f(x,p)] = \frac{An_e}{\pi^2 m^2\omega}\int \frac{d^3\vec{p}\,'}{\omega\,'}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\epsilon}\,')^2[\delta(\omega-\omega')\left(f_1(\eta,\vec{x},\vec{p}\,') - f_1(\eta,\vec{x},\vec{p})\right) + \\ (\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{v}_b\frac{\partial}{\partial\omega'}\delta(\omega-\omega')\left(f_o(\omega') - f_o(\omega)\right)] \,. \tag{D.11}$$

onde se usou também $n_e = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}g(\vec{q})$ e mas $f = f_o + f_1$, onde

$$f_1(\eta,\vec{x},\vec{p}) = -ap\frac{\partial f_o}{\partial p}T(\eta,\vec{x},n^i) \tag{D.12}$$

Portanto

$$C[f(x,p)] = \frac{An_e}{\pi^2 m^2\omega}\int d\omega'\omega\,'[\delta(\omega-\omega')\left(-p'\frac{\partial f_o}{\partial p'}T_0(\eta,\vec{x}) + p\frac{\partial f_o}{\partial p}T(\eta,\vec{x},n^i)\right) + \\ \frac{\partial}{\partial\omega'}\delta(\omega-\omega')\left(f_o(\omega') - f_o(\omega)\right)\int\frac{\Omega'}{4\pi}(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{v}_b] \tag{D.13}$$

$$T_0(\eta, \vec{x}) = \int \frac{\Omega'}{4\pi} T(\eta, \vec{x}, n^{i\,\prime}) \tag{D.14}$$

Finalmente, integrando em ω'

$$C[f(x,p)] = \frac{An_e}{\pi^2 m^2}[-p\frac{\partial f_o}{\partial p}T_0(\eta, \vec{x}) + p\frac{\partial f_o}{\partial p}T(\eta, \vec{x}, n^i) - p\frac{\partial}{\partial \omega}f_o(\omega)n^i \cdot \vec{v_b}]\,. \tag{D.15}$$

ou

$$C[f(x,p)] = -pa\frac{\partial f_o}{\partial p}n_e\sigma_T[T_0(\eta, \vec{x}) - T(\eta, \vec{x}, n^i) + n^i \cdot \vec{v_b}]\,. \tag{D.16}$$

A eq. de Bolztmann é:

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} + n^i \cdot \frac{\partial T}{\partial x^i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - n^i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \dot{\tau}[T_0(\eta, \vec{x}) - T(\eta, \vec{x}, n^i) + n^i \cdot \vec{v_b}]\,. \tag{D.17}$$

Chamamos $\dot{\tau}(\eta) = -n_e\sigma_T a(\eta)$ com

$$T_0(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega T(n^i, \vec{x}, \eta)\,, \tag{D.18}$$

Também pode-se mostrar que [134]

$$\frac{1}{4}\delta_b = \int d\Omega T(n^i, \vec{x}, \eta) \tag{D.19}$$

Apêndice E

Funções de Clausen e o termo topológico do cilíndro

E.1 Funções de Clausen

Neste apêndice, apresentamos alguns aspectos necessários da teoria das funções de Clausen, que foram necessários para nossos cálculos. As funções de Clausen são funções periodicas cujo periodo é 2π. Existem duas classes deste tipo de funções especiais, as assim chamadas, de tipo φ as de tipo ψ. As funções de Clausen de tipo φ, podem ser expressadas em termos de polinomios, no entanto que as funções de Clausen de tipo ψ, envolvem funções transcendentais, as assim chamadas integrais de Clausen. No nosso caso, estamos interessados exclussivamente nas funções de Clausen de tipo φ, por isto apresentaremos os detalhes de teoria, somente deles. As funções de Clausen de tipo φ estão definidas como

$$\begin{aligned} \varphi_{2s-1}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{2s-1}} \\ \varphi_{2s}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{2s}} \end{aligned} \tag{E.1}$$

para $s = 1, 2, \ldots$, e podem ser calculadas recursivamente com as formulas,

$$\begin{aligned} \varphi_{2s}(x) &= \zeta(2s) - \int_0^x \varphi_{2s-1}(y)\, dy \\ \varphi_{2s+1}(x) &= \int_0^x \varphi_{2s}(y)\, dy \ , \end{aligned} \tag{E.2}$$

onde

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{E.3}$$

é a função Zeta de Riemann. Estas relações de recorrência estão complementadas pelas condições iniciais

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2} \sum_{q \in \mathbb{Z}} [(2q+1)\pi - x] \Theta(x - 2\pi q)\, \Theta(2\pi(q+1) - x)\ , \tag{E.4}$$

onde $\Theta(x)$ é a função de Heaviside. A fórmula (E.4) pode ser verificada calculando as series de Fourier do segundo termo do lado direito.

Como as funções de Clausen son funções periódicas de periodo 2π, podemos escrever

$$\varphi_s(x) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} f_s(x - 2\pi q) \Theta(x - 2\pi q)\, \Theta(2\pi(q+1) - x)\ ,$$

com $f_1(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$. As formulas de recorrência (E.2) levam às seguintes expressões para as funções de Clausen no periodo de $[0, 2\pi]$,

$$f_{2s+1}(x) \;=\; \sum_{r=0}^{s-1} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} \zeta(2(s-r))\, x^{2r+1} + \frac{(-1)^s}{2} \left(\frac{\pi x^{2s}}{(2s)!} - \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} \right) \tag{E.5}$$

para $s = 0, 1, 2, \ldots$, e

$$f_{2s}(x) \;=\; \sum_{r=0}^{s-1} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \zeta(2(s-r))\, x^{2r} + \frac{(-1)^s}{2} \left(\frac{\pi x^{2s-1}}{(2s-1)!} - \frac{x^{2s}}{(2s)!} \right) \tag{E.6}$$

para $s = 1, 2, 3, \ldots$.

Das definições (E.1) acha-se que $f_{2s+1}(\pi) = 0$, o qual pode ser usado para obter a fórmula de recorrência para a função Zeta de Riemann de argumento par

$$\zeta(2s) = \sum_{r=1}^{s-1} \frac{(-1)^{r+1}}{(2r+1)!} \zeta(2(s-r))\, \pi^{2r} - \frac{(-1)^s\, s}{(2s+1)!}\, \pi^{2s}\ . \tag{E.7}$$

Escrevendo $\zeta(2s) = g_{2s}(0)\pi^{2s}$, e substituindo isto em (E.7) temos

$$g_{2s}(0) = \sum_{r=1}^{s-1} \frac{(-1)^{r+1}}{(2r+1)!}\, g_{2(s-r)}(0) - \frac{(-1)^s\, s}{(2s+1)!}\ . \tag{E.8}$$

A conveniencia de introduzir esta notação será aparente depois.

Agora generalizaremos as fórmulas (E.5) e (E.6), é dizer, procuraremos por expressões explícitas para as funções de Clausen no q–ésimo intervalo $[2\pi q, 2\pi(q+1)]$. Como estas funcç oes de Clausen satifazem as condições de periodicidade $\varphi_{2s-1}(2\pi q) = 0$ e $\varphi_{2s}(2\pi q) = \zeta(2s)$, as relações de recorrência (E.2) podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\varphi_{2s}(x) &= \zeta(2s) - \int_{2\pi q}^{x} \varphi_{2s-1}(y)\,dy \\ \varphi_{2s+1}(x) &= \int_{2\pi q}^{x} \varphi_{2s}(y)\,dy\,,\end{aligned} \tag{E.9}$$

Definindo os polinomios $f_s^q(x) = f_s(x - 2\pi q)$, notamos que $\varphi_s(x)$ coincide com $f_s^q(x)$ no intervalo $[2\pi q, 2\pi(q+1)]$. Este fato, e as expressões (E.9), nos levam a escrever formulas de recorrência analogas a (E.2) para os polinomios $f_s^q(x)$

$$\begin{aligned}f_{2s}^q(x) &= g_{2s}(q)\pi^{2s} - \int_0^x f_{2s-1}^q(y)\,dy\,, \\ f_{2s+1}^q(x) &= g_{2s+1}(q)\pi^{2s+1} + \int_0^x f_{2s}^q(y)\,dy\,,\end{aligned} \tag{E.10}$$

onde

$$\begin{aligned}g_{2s}(q) &= g_{2s}(0) + \frac{1}{\pi^{2s}} \int_0^{2\pi q} f_{2s-1}^q(y)\,dy\,, \\ g_{2s+1}(q) &= -\frac{1}{\pi^{2s+1}} \int_0^{2\pi q} f_{2s}^q(y)\,dy\,,\end{aligned} \tag{E.11}$$

com condições iniciais, dadas pela primeira função de Clausen, $f_1^q(x) = g_1(q)\pi - \frac{x}{2}$ e $g_1(q) = q + \frac{1}{2}$. Note que as expressões (E.10) podem ser escritas unificadamente como

$$f_s^q(x) = g_s(q)\pi^s - (-1)^s \int_0^x f_{s-1}^q(y)\,dy\,. \tag{E.12}$$

Usando esta expressão, obtem-se uma forma explícita que será a generalização de (E.5) e de (E.6)

$$f_s^q(x) = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{(-1)^{\mu(r,s)}}{r!}\, g_{s-r}(q)\pi^{s-r}x^r - \frac{(-1)^{\mu(s,1)}}{2}\,\frac{x^s}{s!}\,, \tag{E.13}$$

com

$$\mu(r,s) = \left\lfloor \frac{r}{2} + \frac{1+(-1)^s}{4} \right\rfloor\,, \tag{E.14}$$

e $\lfloor x \rfloor$ é a função máximo inteiro de x, é dizer, o maior inteiro menor que x.

As expressões (E.11) podem também ser escritas deuma forma unificada como

$$g_s(q) = g_s(0) + \frac{(-1)^s}{\pi^s} \int_0^{2\pi q} f_{s-1}^q(y)\,dy\,, \tag{E.15}$$

onde

$$g_s(0) = \begin{cases} \frac{\zeta(s)}{\pi^s} & \text{if } s \text{ is even} \\ 0 & \text{if } s > 1 \text{ is odd .} \end{cases} \tag{E.16}$$

Desta eq. escrevemos uma expressão analoga to (E.13)

$$g_s(q) = g_s(0) + (-1)^s \left[\sum_{r=1}^{s-1} (-1)^{\mu(r-1,s-1)} \frac{2^r}{r!} \, g_{s-r}(q) \, q^r - (-1)^{\mu(s-1,1)} \frac{2^{s-1}}{s!} \, q^s \right] . \tag{E.17}$$

Assim, os polinomias $g_s(q)$ podem ser escritos também como

$$g_s(q) = \sum_{k=0}^{s} A_k^s q^k \, , \tag{E.18}$$

onde seus coeficientes estão dados por $A_0^s = g_s(0)$,

$$A_n^s = (-1)^s \sum_{r=1}^{n} (-1)^{\mu(r-1,s-1)} \frac{2^r}{r!} \, A_{n-r}^{s-r} \tag{E.19}$$

para $0 < n < s$, e

$$A_s^s \;=\; (-1)^s \left[\sum_{r=1}^{s-1} (-1)^{\mu(r-1,s-1)} \frac{2^r}{r!} \, A_{s-r}^{s-r} - (-1)^{\mu(s-1,1)} \frac{2^{s-1}}{s!} \right] \, ,$$

com condições iniciais $A_0^1 = \frac{1}{2}$ e $A_1^1 = 1$. Estes coeficientes são obtidos introducindo (E.18) em (E.17) e fatorando termos.

E.2 Termo topológico $F_{\ell\ell'}^m(x)$

Nesta parte do apêndice, avaliamos a função $F_{ll'}^m(x)$ dada por (7.9). Primeiro obsevemos que a função $\mathcal{P}_{ll'm}(x)$, dadapor (7.12), é um polinomio par de grau $(l + l')$. Assim, começamos considerando a integral

$$I(\alpha) = \int_{-1}^{1} P(y) \cos \alpha y \, dy \, ,$$

onde $P(y)$ é uma função par e analítica. Integrando succesivamente por partes tem-se

$$I(\alpha) \;=\; 2 \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\alpha^{2s}} P^{(2s)}(1) + \frac{\cos \alpha}{\alpha^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\alpha^{2s}} P^{(2s+1)}(1) \right] \, , \tag{E.20}$$

onde $P^{(k)}(x)$ é a k–éssima derivada de $P(x)$.

Fazendo $\alpha = nx$ e $P(x) = \mathcal{P}_{l\,l'm}(x)$ em (E.20), substituindo (E.20) em (7.9), em somando em n temos

$$F^m_{l\,l'}(x) = 4\sum_{s=0}^{\frac{l+l'}{2}} (-1)^s \left[\frac{\mathcal{P}^{(2s)}_{l\,l'm}(1)}{x^{2s+1}}\,\varphi_{2s+1}(x) + \frac{\mathcal{P}^{(2s+1)}_{l\,l'm}(1)}{x^{2s+2}}\,\varphi_{2s+2}(x) \right] , \qquad \text{(E.21)}$$

onde $\varphi_k(x)$ é o k–éssimo função de Clausen de tipo φ defina na subseção anterior.

Como as funções de Clausen são funções de periodo 2π, analíticas em cada periodo, se segue que $F^m_{l\,l'}(x)$ é uma função continua por partes, também analítica em cada periodo. Assim agora mostrará-se como aparece a expressão explícita de $F^m_{\ell\ell'}(x)$, no q–éssimo intervalo $[2\pi q, 2\pi(q+1)]$, dado em (7.11).

Introduzindo a forma explícita da função de Clausen de tipo φ (E.13), na soma de (E.21) leva a uma expressão que revela ser um polinomio em π/x. O termo independente é simplesmente

$$-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{\frac{l+l'}{2}} \frac{(-1)^s}{(s+1)!}\,\mathcal{P}^{(s)}_{l\,l'm}(1) = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathcal{P}_{l\,l'm}(x)\,dx = -\frac{1}{4}\,\delta_{\ell\ell'} ,$$

onde a primeira igualdade foi deduzida usando a expansão de Taylor do integrando do lado direito, e integrando. Por outro lado, somando todos os coeficientes de $(r+1)$–éssimo termo ímpar, e fazendo o mesmo que antes, temos que este termo é igual a

$$(-1)^r\,\mathcal{P}^{(2r)}_{\ell\ell'm}(0)\,g_{2r+1}(q)\left(\frac{\pi}{x}\right)^{2r+1} ,$$

No entanto que o $(r+1)$–éssimo termo par é igual a

$$(-1)^r\,\mathcal{P}^{(2r+1)}_{l\,l'm}(0)\,g_{2r+2}(q)\left(\frac{\pi}{x}\right)^{2r+2} ,$$

o qual por paridade de $\mathcal{P}_{l\,l'm}(x)$ é zero. Somando todos os termos, finalmente chegamos a (7.10) e (7.11).

Referências

[1] R.K. Sachs and A.M. Wolfe, *Astrophys. J.*, **147**, 73 (1967).

[2] P.J.E. Peebles and J.T. Yu, *Astrophys. J.*, **162**, 815 (1970).

[3] R.A. Sunyaev and Y.B. Zel'dovich, *ApSS*, **9**, 368 (1970).

[4] R. Crittenden, D. Coulson and N.G. Turok, *Phys. Rev. D*, **52**, 5402 (1995).

[5] A. Kosowsky, *Ann. Phys.*, **246**, 49 (1996).

[6] A. Kosowsky and A. Loeb, *Astrophys. J.*, **469**, 1 (1996).

[7] P. De Bernardis *et. al.*, *Nature*, **404**, 955 (2000).

[8] S. Hanany *et. al.*, *Astrophys. J.*, **545**, L5 (2000).

[9] N.W. Halverson *et. al.*, *Astrophys. J.*, **568**, 38 (2002).

[10] J.E. Ruhl *et. al.*, *Astrophys. J.*, **599**, 786 (2003).

[11] A.C.S. Readhead *et. al.*, *Astrophys. J.*, **609**, 498 (2004).

[12] C. Dickinson *et. al.*, *MNRAS*, **353**, 732 (2004).

[13] C.-I. Kuo *et. al.*, *Astrophys. J.*, **600**, 32 (2004).

[14] G.F. Smoot *et. al.*, *Astrophys. J.*, **396**, L1 (1992).

[15] C.L. Bennett *et. al.*, *Astrophys. J.*, **396**, L7 (1992).

[16] A. Gould *et. al.*, *Astrophys. J.*, **403**, L51 (1993).

[17] Ph. B. Stark *et. al.*, *Astrophys. J.* , **408**, L73 (1993).

[18] J.M. Kovac *et. al.*, *Nature*, **420**, 772 (2002).

[19] E.M. Leitch *et. al.*, *Astrophys. J.*, **624**, 10 (2005).

[20] C.J. MacTavish *et. al.*, *Astrophys. J.*, **647** 799 (2006).

[21] C.L. Bennett *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.* , **148**, 1 (2003).

[22] G. Hinshaw *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.*, **148**, 135 (2003).

[23] A. Kogut *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.*, **148**, 161 (2003).

[24] D.N. Spergel *et. al.*, *Astrophys. J. Suppl.*, **148**, 175 (2003).

[25] D.N. Spergel *et. al.*, arXiv:astro-ph/0603449.

[26] L. Page *et. al.* arXiv:astro-ph/0603450.

[27] G. Hinshaw *et. al.*, arXiv:astro-ph/0603451.

[28] N. Jarosik *et. al.*, arXiv:astro-ph/0603452.

[29] A. Balbi, P. Natoli and N. Vittorio, arXiv:astro-ph/0606511.

[30] Planck Collaboration, arXiv:astro-ph/0604069. http://www.rssd.esa.int.

[31] J. Bock *et. al.*, arXiv:astro-ph/0604101.

[32] A.P.A. Andrade, C.A. Wuensche and A.L.B. Ribeiro, *Phys. Rev.*, **D 71**, 043501 (2005).

[33] D. Parkinson, S. Tsujikawa, B.A. Bassett and L. Amendola,*Phys. Rev.*, **D 71**, 063524 (2005).

[34] R. Trotta, *MNRAS*, **375** L26 (2007).

[35] U. Seljak *et. al.*, *Phys. Rev.*, **D 71**, 103515 (2005).

[36] S. Cole *et. al.*, *MNRAS*, **362**, 505 (2005).

[37] A.G. Sanchez *et. al.*, *MNRAS*, **366**, 189 (2006).

[38] L.Y.Chiang, P.D. Naselsky and P.Coles, *Astrophys. J.*, **602**, 1 (2004).

[39] P. Mukherjee and Y. Wang, *Astrophys. J.*, **613**, 51 (2004).

[40] P. Vielva, E.M. Gonzalez, R.B.Barreiro, J.L.Sanz and L.Cayon, *Astrophys. J.*, **609**, 222 (2004).

[41] M. Tegmark, A.de Oliveira-Costa and A.J.S.Hamilton, *Phys. Rev.* , **D 68** 123523 (2003).

[42] E. Gaztañaga, J.Wagg, T.Multamäki, A.Montaña and D.H.Huges, *MNRAS*, **346** 47 (2003).

[43] A. de Oliveira-Costa, M.Tegmark, M.Zaldarriaga and A.Hamilton, *Phys. Rev.*, **D 69** 063516 (2004).

[44] C.J. Copi, D.Huterer and G.D. Starkman, *Phys. Rev.*, **D 70** 043515 (2004).

[45] A. Slosar, U. Seljak and A. Makarov, *Phys. Rev.*, **D 69**, 123003 (2004).

[46] D. Schwarz *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 221301 (2004).

[47] J. Ralston and P. Jain, *Int. J. Mod Phys*, **D13**, 1857 (2004).

[48] H.K. Eriksen, F.K. Hansen, A.J.Banday, K.M.Goski and P.B.Lilje, *Astrophys. J.*, **605** 14 (2004).

[49] H.K. Eriksen, A.J. Banday, K.M. Goski and P.B. Lilje, *Astrophys. J.*, **612** 633 (2004).

[50] H.K. Eriksen *et. al.*, *Astrophys. J.*, **612**, 64 (2004).

[51] G. Efstathiou, *MNRAS*, **348** 885 (2004).

[52] F.K. Hansen *et. al.*, *Astrophys. J.*, **607**, L67 (2004).

[53] P. Vielva *et. al.*, *Astrophys. J.*, **607**, 22 (2004).

[54] D.L. Larson and B.D. Wandelt, Astrophys. J. Lett., **613**, L85 (2004).

[55] C.-G.Park, *MNRAS*, **349** 313 (2004).

[56] A.Bernui, T.Villela and I.Ferreira, *Int. J. Mod. Phys.* , **D 13**, 1189 (2004).

[57] P. Bielewicz, K.M. Gorski and A.J. Banday *MNRAS* , **355**, 1238 (2004).

[58] D.L. Larson and B.D. Wandelt, arXiv:astro-ph/0505046

[59] A.Bernui, *Braz. J. Phys.*, **35**, 1185 (2005).

[60] S. Prunet, J.-P. Uzan, F. Bernardeau and T. Brunier, *Phys. Rev. D*, **71**, 083508 (2005).

[61] H. Eriksen *et. al.*, *Astrophys. J.*, **622**, 58 (2005).

[62] F.K. Hansen, A.J. Banday and K.M. Górski, *MNRAS*, **354**, 641 (2005).

[63] K.Land and J.Magueijo, *MNRAS*, **357** 994 (2005).

[64] K. Land and J. Magueijo, *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 071301 (2005).

[65] P. Bielewicz, H.K. Eriksen, A.J. Banday, K.M. Górski and P.B. Lilje, *Astrophys. J.* **635**, 750 (2005).

[66] E. Donoghue and J. Donoghue, *Phys. Rev.*, **D 71**, 043002 (2005).

[67] C.-G. Park, C. Park and J.R Gott III, *Astrophys.J.*, **660** 975 (2007).

[68] A.Bernui and T.Villela, *Astron.Astrophys.*, **445**, 795 (2006).

[69] A.Bernui, C.Tsallis and T.Villela, *Phys. Lett. A* , **356**, 426 (2006).

[70] astroph/0601593

[71] C. J. Copi *et. al.*, *MNRAS*, **367**, 79 (2006).

[72] A. de Oliveira-Costa and M. Tegmark, *Phys. Rev.*, **D 74**, 023005 (2006).

[73] L.R. Abramo, A. Bernui, I. Ferreira, T. Villela and C.A. Wuensche, *Phys. Rev.*, **D 74**, 063506 (2006).

[74] A.Bernui, B.Mota, M.J.Rebouças and R.Tavakol, *Astron.Astrophys.*, **464**, 479 (2007).

[75] K. Land and J. Magueijo, *MNRAS*, **378**, 158 (2007).

[76] C. Copi, D. Huterer, D. Schwarz and G. Starkman, *Phys.Rev.*, **D 75**, 023507 (2007).

[77] H.K. Heriksen, A.J. Banday, K.M. Gorski, F.K. Hansen and P.B. Lilje, *Astrophys.J.*, **660**, L84 (2007).

[78] L. Alabidi and D.H. Lyth, *JCAP*, **0605**, 016 (2006).

[79] R. Easther and L. McAllister, *JCAP*, **0605**, 018 (2006).

[80] S.A. Kim and A.R. Liddle, *Phys. Rev.*, **D 74**, 023513 (2006).

[81] N.Bartolo, S.Matarrese and A.Riotto, *JHEP*, **0404**, 006 (2004).

[82] F. Vernizzi and D. Wands, *JCAP*, **0605**, 019 (2006).

[83] H.V. Fagundes, *GRG*, **24**, 199 (1992) -

[84] J. Weeks, J.-P. Luminet, A. Riazuelo and R. Lehoucq, *MNRAS*, **352**, 258 (2004).

[85] B.F. Roukema, B. Lew, M. Cechowska, A. Marecki and S. Bajtlik, *Astron. Astrophys.*, **423**, 821 (2004).

[86] Cornish *et. al. Phys. Rev. Lett.,* **92**, 201302 (2004).

[87] W.S. Hipolito-Ricaldi and G.I. Gomero, *Phys. Rev.*, **D 72**, 103008 (2005).

[88] R. Durrer, T. Kahniashvili and A. Yates, *Phys. Rev.*, **D 58**, 3004 (1998).

[89] G. Chen *et. al.*, *Astrophys J.*, **611**, 655 (2004).

[90] A. Berera, R Buniy and T. Kephart, *JCAP*, **0410**, 016 (2004).

[91] T. Kahniashvili, *New Astr. Rev.*, **49**, 79 (2005).

[92] C. Armendariz-Picon, *JCAP*, **0603**, 002 (2006).

[93] A. Kogut, G. Hinshaw and A. J. Banday, *Phys. Rev.* , **D 55**, 1901 (1997).

[94] T. Jaffe *et. al*, *Astrophys J.*, **629**, L1 (2005).

[95] J. Moffat, *JCAP*, **0510**, 012 (2005).

[96] M. Bridges, J.D. McEwen, A.N. Lasenby and M.P. Hobson, *MNRAS*, **377**, 1473 (2007)

[97] M. Liguori, S. Matarrese, M.A. Musso and A. Riotto, *JCAP*, **0408**, 011(2004).

[98] C. Gordon, W. Hu, D. Huterer and T. Crawford, *Phys. Rev.*, **D 72**, 103002 (2005).

[99] K.T. Inoue and J. Silk, arXiv:astro-ph/0612347.

[100] R. Abramo, L. Jr. Sodr and C.A. Wuensche,*Phys. Rev.*, **D 74**, 083515 (2006).

[101] http://lambda.gsfc.nasa.gov.

[102] Disponível em http://www.hep.upen.esu/max/wmap.html.

[103] Dispoível http://www.astro.uio.no/hke/cmbdata/WMAPILC.lagrange.fits.

[104] M.Tegmark and G.Efstathiou, *MNRAS*, **281**, 1297 (1996).

[105] D.S.Salopek and J.R. Bond, *Phys. Rev. D*, **D**, 3936 (1990).

[106] A. Gangui, F. Lucchin, S. Matarrese and S. Mollerach, *Astrophys. J.*, **430**, 447 (1994).

[107] D. Seery and J.E. Lidsey, *JCAP*, **0506**, 003 (2005).

[108] M.Zaldarriaga and U.Seljak, *Phys. Rev.*, **D 55**, 1830 (1997).

[109] A.Lewis, A.Challinor and N. Turok, *Phys.Rev.*, **D 65**, 023505 (2002).

[110] M.Kamionkowski, A.Kosowsky and A.Stebbins, *Phys. Rev.*, **D 55**, 7368 (1997).

[111] E.Newman and R.Penrose, *J. Math. Phys.*, **7**, 863 (1966).

[112] J.N.Goldberg *et. al*, *J. Math. Phys.*, **8**, 2155 (1966).

[113] A.C.Rencher, *Methods of Multivariate Analysis* (Jhon Wiley & Sons, New York, segunda edição, 2002).

[114] D.A.Varshalovich, A.N.Moskalev and V.K.Khersinskii, *Quantum Theory of a Angular Momentum*, (World Scientific, 1988).

[115] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press INC., San Diego, quarta edição, 1995).

[116] M. Zaldarriaga and U. Seljak, http://www.cmbfast.org.

[117] M. Doran, G. Robbers and C.M. Muller , http://www.cmbeasy.org.

[118] A.Hajian and T. Souradeep, *Astrophys. J. Lett.*, **597**, L5 (2003).

[119] A.Hajian, T. Souradeep and N. Cornish, *Astrophys.J.*, **618**, L63 (2004).

[120] T. Souradeep and A. Hajian, *astro-ph/0502248*.

[121] A.Hajian and T. Souradeep, *Phys.Rev.*, **D 74**, 123521 (2006).

[122] C.J. Copi, D. Huterer, D.J. Schwarz and G.D. Starkman, *Phys.Rev.*, **D 75**, 023507 (2007). .

[123] K. V. Bury, *Statistical Models in Applied Science* (John Wiley & Sons, New York, 1975)

[124] S. Wellek, *Testing Statistical Hyphotheses of Equivalence* (Chapman & Hall/CRC Press. Company, Boca Raton, 2003)

[125] M.A.Blanco, M.Flórez and M.Bermejo, *J. Mol. Struct.*, **419**, 19 (1997).

[126] K. Górski *et. al.*, *Astrophys. J,*, **622**, 771 (2005).

[127] http://healpix.jpl.nasa.gov/healpixSoftwareDocumentation.shtml.

[128] http://www.cita.utoronto.ca/ crittend/pixel.html

[129] C.P. Camilo "Simulação e Anãlise Computacional das Anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo usando o modelo de Einstein-de Sitter", dissertação defendida no INPE em 2004.

[130] U.Seljak and M.Zaldarriaga, *Astrophys. J.*, **469** 437(1996).

[131] M.Zaldarriaga, U.Seljak and E.Bertschinger, *Astrophys. J.*, **494** 491(1998).

[132] J. Bernstein, *Kinetic Theory in the Expanding Universe* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988).

[133] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory* (John Wiley& Sons, Englad , 2003).

[134] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, San Diego, 2003).

[135] S.Dodelson and J.M.Jubas, *Astrophys. J.*, **439** 503 (1995).

[136] J.N. Islam, *An Introduction to Mathematical Cosmology*, (Cambridge Univ. Press,Cambridge, 1992).

[137] J.M.Stewart, *Class. Quantum Grav.*, **7** 1169 (1990).

[138] M.L.Wilson and J.Silk, *Astrophys. J.*, **243** 14 (1981).

[139] E.Komatsu *et al*, *Astrophys. J. Supp.*, **148** 119 (2003).

[140] A.Lue, L.Wang and M.Kamionkowski, *Phys. Rev. Lett.*, **83** 1506 (1999).

[141] D.Maity, P.Majumdar and S.SenGupta, *JCAP*, **0406** 005 (2004).

[142] G.Efstathiou *MNRAS*, **343** L95 (2003).

[143] G. Smith, *An Introduction to Classical Electromagnetic Radiation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[144] J.R.Bond and A.Szalay, *Astrophys. J.*, **274** 443 (1983).

[145] J.M.Bardeen, *Phys.Rev.*, **D 22**, 1882(1980).

[146] V.F.Mukhanov, H.A.Feldman and R.H.Brandenberger, *Phys. Rep.*, **215** 203 (1992).

[147] H. Kodama and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl. No.*, 78 (1984).

[148] N. Kaiser, *MNRAS*, **202** 1169 (1983).

[149] U.Seljak, *Astrophys. J.*, **435** L87(1994).

[150] M.Zaldarriaga and D.Harari, *Phys. Rev.*, **D52** 3276 (1995).

[151] J.R.Bond and G.Efstathiou, *MNRAS*, **285** L45(1984).

[152] C.-P. Ma and E.Bertschinger, *Astrophys J.*, **455** 7(1995).

[153] W.S.Massey, *A Basic Course in Algebric Topology*, (Springer-Verlag,1991).

[154] W.P.Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology Vol. I*, (Princeton University Press, 1991)

[155] J.A.Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, (Perish Inc.,1984, 5th ed.).

[156] M.Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, (Taylor & Francis Group, New York, 2003, second ed.).

[157] Marc Lachize-Rey and Jean-Pierre Luminet, *Physics Reports*, **254**, 214 (1995).

[158] G.I.Gomero, *Busca da Topologia do Universo usando Fontes Cósmicas Discretas*, Tese de doutorado, (CBPF, 2000).

[159] L.Z. Fang and M. Houjun, *Mod. Phys. Lett. A*, **2**, 229 (1987).

[160] I.Yu. Sokolov, *JETP Lett.* **57**, 617 (1993).

[161] A. de Oliveira–Costa, G.F. Smoot and A.A. Starobinsky, *Astrophys. J.* **468**, 457 (1996).

[162] N.J. Cornish, D.N. Spergel and G.D. Starkman, *Phys. Rev.*, **D 57**, 5982 (1998).

[163] K.T. Inoue, K. Tomita and N. Sugiyama, *MNRAS*, **314**, L21 (2000).

[164] J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq and J.-P. Uzan, *Nature*, **425**, 593 (2003).

[165] K.T. Inoue and N. Sugiyama, *Phys. Rev.*, **D 67**, 043003 (2003).

[166] R. Aurich, *Astrophys. J.*, **524**, 497 (1999).

[167] R. Aurich and F. Steiner, *MNRAS*, **323**, 1016 (2001).

[168] R. Aurich, S. Lustig, F. Steiner and H. Then, *Class. Quantum Grav.*, **21**, 4901 (2004).

[169] R. Aurich, S. Lustig and F. Steiner, *Class. Quantum Grav.* , **22**, 2061 (2005).

[170] N.J. Cornish, D.N. Spergel and G.D. Starkman, *Class. Quantum Grav.*, **15**, 2657 (1998).

[171] J.R. Weeks, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2599 (1998).

[172] B.F. Roukema, *Class. Quantum Grav.* **17**, 3951 (2000).

[173] B.F. Roukema, *MNRAS*, **312**, 712 (2000)

[174] G.I. Gomero, astro-ph/0310749.

[175] J. Levin, astro-ph/0403036.

[176] M.O. Calvão, G.I. Gomero, B. Mota and M.J. Rebouças, *Class. Quantum Grav.*, **22**, 1991 (2005).

[177] S.D.P. Vitenti, W.S. Hipólito-Ricaldi and G.I. Gomero, *"An efficient method to look for Circles in the Sky"*, em preparação.

[178] G. Katz and J.R. Weeks, *Phys. Rev.*, **D 70**, 063527 (2004).

[179] J.R. Bond, D. Pogosyan and T. Souradeep, *Class. Quantum Grav.*, **18**, 2671 (1998).

[180] J.R. Bond, D. Pogosyan and T. Souradeep, *Phys. Rev.*, **D 62**, 043005 (2000)

[181] J.R. Bond, D. Pogosyan and T. Souradeep, *Phys. Rev.*, **62**, 043006 (2000).

[182] J. Levin, J.D. Barrow, E.F. Bunn and J. Silk, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 974 (1997).

[183] J. Levin, E. Scannapieco, G. de Gasperis, J. Silk and J.D. Barrow, *Phys. Rev.*, **D 58**, 123006 (1998).

[184] J. Levin, E. Scannapieco and J. Silk, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2689 (1998).

[185] G.I. Gomero, M.J. Reboucas and A.F.F. Teixeira, *Phys. Lett. A* **275**, 355 (2000).

[186] G.I. Gomero, A.F.F. Teixeira, M.J. Reboucas and A. Bernui, *Int. J. Mod. Phys.*, **D 11**, 869 (2002).

[187] G.I. Gomero, M.J. Reboucas and A.F.F. Teixeira, *Class. Quantum Grav.* **18**, 1885 (2001).

[188] J.-P. Uzan, A. Riazuelo, R. Lehoucq and J. Weeks,*Phys. Rev.*, **D 69**, 043003 (2004).

[189] A.F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups* (Springer, New York, 1983), GTM 91.

[190] W.S. Hipólito-Ricaldi, *"Do WMAP data support statistical isotropy?"*, em preparação.