RESSALVA

Alertamos para ausência da figura 5.1, não enviada pelo autor no arquivo original.

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.005/05

Supersimetria e o Modelo Mínimo Supersimétrico

Sergio Andrés Holguín Cardona

Orientador

Fernando Luiz de Campos Carvalho

Co-orientador

Rogerio Rosenfeld

Março de 2005

Agradecimentos

Agradeço em particular ao Prof. Fernando de Campos e ao Prof. Rogerio Rosenfeld pela a ajuda e o apoio recebido nos últimos dois anos.

Devo agradecer a meus colegas do IFT Fernando G. Gardim, Celso N. Nishi e Oscar A. Bedoya pela a ajuda e seus sugestões para com o trabalho. Também a meus colegas da sala Cassius A. M. de Melo, Rodrigo R. Cusinatto, Lucio C. Costa, Pedro Pompéia, German E. Ramos e David M. Schmidt por gerar um apropriado espaço do trabalho. Em geral ao pessoal do IFT, algums diretamente, outros indiretamente contribuiran na realização deste trabalho.

Por último, devo agradecer muito especialmente à fundação CAPES, sem sua ajuda, não só o trabalho, também a minha permanência no IFT não houvesse sido possível.

Resumo

A supersimetria é um tópico importante na física teórica atual. Em particular, tem-se dedicado grande esforço no estudo das extensões supersimétricas do Modelo Padrão (SM) desde a década de 80. A incorporação da supersimetria no SM resulta em uma grande quantidade de modelos. O modelo com o conteúdo mínimo de partículas, assim como de interações é chamado o Modelo Mínimo Supersimétrico (MSSM). Devido à supersimetria, todos os modelos supersimétricos apresentam diferenças com relação ao SM. A principal delas, além do conteúdo de partículas, está no setor de Higgs. Em particular, o setor de Higgs do modelo MSSM contém cinco graus de liberdade (cinco bósons de Higgs), diferentemente do SM, que contem apenas um bóson de Higgs. Outra diferença importante no caso do MSSM devese à mistura dos estados associados pela supersimetria aos bósons de gauge e aos bósons de Higgs, chamados gauginos e higgsinos respectivamente, cujos autoestados de massa são conhecidos como charginos e neutralinos. Estas partículas desempenham um papel fundamental na possível descoberta da supersimetria na escala de energia de TeV's.

Palavras Chaves: Supercampos; superpotencial; potencial escalar; Modelo Mínimo Supersimétrico; neutralinos; charginos.

Áreas do conhecimento: Física de Partículas Elementares.

Abstract

Supersymmetry is a fundamental topic in the actual theoretical physics. In particular, since the 80's, huge efforts have been done studying the supersymmetric extensions of the Standard Model (SM). Including supersymmetry in the SM generates a great amount of models. Among all of these, there is one that involves the minimum number of particles and interactions. This model is known as the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM). Due to the incorporation of supersymmetry, all the extensions have differences in relation with the SM. The most remarkable one, beyond the particles content, lies in the Higgs sector. Particularly, in the MSSM Higgs's sector there are five degrees of freedom (five Higgs bosons), in contrast with the SM (just one). Another difference is related with the higgsino and gaugino mixture. This results in the presence of mass eigenstates known as charginos and neutralinos. The later particles play a fundamental role in the possible test of supersymmetry at the TeV's scales.

Índice

Capítulo 1

Introdução

A supersimetria apareceu no começo da década de 70 [1], e desde então tem-se dedicado grande esforço no estudo de tópicos teóricos a ela associados. (Para se ter uma idéia, nos ultimos 20 anos, a base de dados do "SLAC Spires" registra aproximadamente 10.000 artigos relacionados a teorias de campos supersimétricas). A supersimetria é relevante nas áreas teóricas de física como cosmologia, física de partículas e teoria de cordas. Por outro lado, apesar dos esforços consideráveis para se tentar verificar diretamente a supersimetria, em especial, no Fermilab desde os anos 90, e no CERN (o LHC, está projetado para operar no ano de 2007), não há qualquer evidência experimental direta da mesma até o momento.

O formalismo desenvolvido para representar a supersimetria no contexto de teorias de campos, estabelece que partículas de diferentes spin são colocadas no mesmo multipleto, o que tem implicações físicas fundamentais. Existem razões tanto formais quanto fenomenológicas para se considerar a supersimetria importante no panorama atual da física. Vamos mencionar brevemente as principais, que sugerem a sua importância na escala de energia da ordem de TeV's.

1.1 Grande Unificação

Uma das motivações para se considerar a supersimetria na escala de energia da ordem de TeV's é a *unificação* [2, 3, 4]. As constantes de acoplamento do grupo de gauge SU(3) $\otimes$ SU(2) $\otimes$ U$(1)_Y$ denotadas por α_3, α_2 e α_1 respectivamente, dependem da energia em que são medidas, como também do conteúdo de partículas do modelo. No caso do modelo padrão, denotado genericamente pela sigla SM, as três constantes não se "unificam", isto é, não se encontram em nenhuma escala de energia. Porém, quando a extensão supersimétrica mínima do SM é considerada, as constantes assumem o mesmo valor em uma escala próxima de 10^{15} GeV. Esta escala é chamada de *escala de unificação* e geralmente é denotada por M_X (ou M_{GUT}). A unificação constitui uma forte motivação para considerarmos o efeito da supersimetria a escalas de energias da ordem de TeV's.

1.2 O Problema da Hierarquia

Este problema aparece no contexto do modelo padrão. Na Lagrangeana do SM todos os quarks, léptons e bósons de gauge requeridos pela simetria de gauge SU(3) $\otimes$ SU(2) $\otimes$ U$(1)_Y$, são definidos inicialmente com massa nula. As massas destas partículas a nível árvore estão relacionadas com o mecanismo de quebra da simetria eletrofraca, gerado através de um campo escalar conhecido como bóson de Higgs. O ponto fundamental do problema da hierarquia é que os campos escalares, ao contrário dos bósons de gauge e dos léptons, não estão "protegidos" de sofrerem grandes correções radiativas para suas massas por nenhuma simetria do SM. As correções radiativas, δm_H, para a massa do bóson de Higgs divergem quadraticamente. Porém, esta divergência não deveria ser física, já que é esperado que o SM apresente uma escala de energia, Λ, na qual o modelo não constitua uma descrição da natureza. Se consideramos $\Lambda \sim M_X$, a massa física do bóson de Higgs, na ordem mais baixa em teoria de perturbações será [5]:

$$m_H^2 = m^2 + \delta m_H^2 \;\sim\; m^2 - g^2\Lambda^2\,, \tag{1.1}$$

onde m é a massa nua (que aparece na Lagrangeana) para o bóson de Higgs, e g é uma constante adimensional da ordem de unidade na escala de energia. Para não violar unitariedade, m_H não deve ser maior que alguns 10^2 GeV. Assim, se Λ é da ordem de M_X, os dois termos em (1.1) são da ordem de $10^{30}\,\mathrm{GeV}^2$ e é necessário um ajuste "preciso" tal que

$$m_H^2 \leq 10^6\,\mathrm{GeV}^2\,.$$

Este tipo de sensibilidade no valor dos parâmetros leva o nome do *problema da hierarquia*, e é em geral característico de qualquer campo escalar.

Por outro lado, se pensarmos que não deveria existir razão para tal ajuste nos parâmetros (também chamado de "*fine-tuning*"), deveríamos concluir que:

$$\Lambda \sim 10^3\,\mathrm{GeV}\,.$$

Desta forma, novos efeitos físicos não incluídos no SM, deveriam se manifestar em colisões de partículas na ordem de TeV's na escala de energia. Até agora, a solução ao problema da hierarquia, constitui a principal motivação para considerarmos a supersimetria a baixas energias. É importante mencionar que o problema da hierarquia é apresentado de várias formas. Uma delas é dizer que não se compreende qual é a razão da diferença entre a escala de unificação, M_X, e a escala da quebra da simetria eletrofraca da ordem de 300 GeV.

1.3 Álgebra Supersimétrica

As extensões da álgebra de Poincaré são fortemente limitadas pelo teorema de Coleman-Mandula [6]. Exceções a tal teorema surgem se permitirmos que apareçam anticomutadores, e não só comutadores. A ideia é, basicamente extender a álgebra de Poincaré, cujos geradores são denotados por X, X' e X'', e incluir também a posibilidade de geradores que anticomutem, denotados por Q, Q' e Q''. A estrutura geral seria

$$[X, X'] = X''\,, \qquad [Q, X] = Q''\,, \qquad \{Q, Q'\} = X''\,. \tag{1.2}$$

O teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius [7] limita ainda mais a parte que depende dos Q's à forma:

$$\{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta},B}\} = 2\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}} P_m \delta^A_B\,,$$
$$\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} Z^{AB}\,, \quad [Q^A_\alpha, P_m] = 0\,. \tag{1.3}$$

Os índices $A, B = 1, 2, \ldots .N$ se referem a quantos operadores de tipo Q são considerados. As matrizes σ^m são as matrizes de Pauli (para detalhes da notação ver Apêndice A). Os operadores Z^{AB} são antisimétricos nos índices A, B, como conseqüência também do teorema. O caso mais simples ocorre com $N = 1$ (isto é, com apenas uma família de geradores Q's); tem-se o que chamamos de supersimetria$[N = 1]$. A álgebra, neste caso apresenta a estrutura:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}} P_m \,,$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 \,, \quad [Q_\alpha, P_m] = 0 \,. \tag{1.4}$$

No texto vamos utilizar o formalismo baseado na idéia de superespaço para as representações da álgebra (1.4), que foi introduzido por A. Salam e J. Strathdee[1]. No Capítulo 2 definimos supercampos, diretamente relacionados ao superespaço, e estudamos com detalhe dois tipos de supercampos que descrevem escalares, espinores, e bósons de gauge, pois o objetivo é construir Lagrangeanas ultilizando os mesmos. No Capítulo 3 introduzimos a idéia de invariância de gauge, que nos permite escrever a Lagrangeana mais geral que representa as interações entre escalares, bósons de gauge e férmions. Estes dois capítulos constituem uma breve revisão dos aspectos necessários para se construir a estrutura geral das Lagrangeanas dos modelos supersimétricos. No Capítulo 4 o objetivo é estabelecer com detalhe, como são definidas as extensões supersimétricas do SM, em especial do modelo mínimo. Vários aspectos diferenciam este modelo do SM, como por exemplo, a necessidade de dois dubletos de Higgs. No modelo mínimo aparece também uma simetria discreta e global chamada paridade-R, de grande importância para o estudo fenomenológico destas teorias. Dedicamos então especial atenção à estrutura do setor de Higgs, e à definição dos charginos e neutralinos. No capítulo seguinte finalizamos apresentando um exemplo ilustrativo da seção de choque para a produção de neutralinos e charginos no Tevatron.

Capítulo 2

Formalismo de Supercampos

O formalismo criado por A. Salam e J. Strathdee [1] para as representações da álgebra supersimétrica é especialmente útil, pois permite simplificar as somas e multiplicações das mesmas e construir as Lagrangeanas de uma forma simples. Para definir os supercampos primeiro devemos introduzir a noção de *superespaço*. Pontos do superespaço são definidos como tripletos $(x, \theta, \bar{\theta})$ onde $x = x^m$ representam as coordenadas usuais do espaço-tempo, θ e $\bar{\theta}$ são variáveis de Grassmann (contraídas com espinores de duas componentes, ver Apêndice A). *Supercampos* são funções do superespaço, que devem ser interpretadas como séries de potências nas variáveis θ e $\bar{\theta}$

$$\begin{aligned} U(x,\theta,\bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) \\ &\quad + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x)\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Estruturas assim definidas são representações lineares da álgebra supersimétrica (somas e produtos das mesmas, são outra vez supercampos). Porém, estas representações são, em geral, redutíveis. É possível eliminar algumas de suas componentes impondo vínculos ou *constraints*. Por exemplo $\bar{D}\Phi = 0$ ou $F = F^\dagger$, como veremos adiante, podem ser considerados como vínculos. É importante reconhecer que o objetivo é reduzir o supercampo, mas não sua dependência de x. Porém, é possível expressar qualquer Lagrangeana supersimétrica e renormalizável em termos de supercampos que satisfaçam estes dois *constraints*. É por esta razão que dedicamos especial atenção a supercampos que satisfazem estes *constraints* no que resta do capítulo.

2.1 Supercampos Quirais

Definamos primeiro as coordenadas $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$. Usando as derivadas no superespaço

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\alpha}} y^m &= (-\partial_{\dot{\alpha}} - i(\theta\sigma^n)_{\dot{\alpha}}\partial_n)\,(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}) \\ &= -i(\theta\sigma^n)_{\dot{\alpha}}\partial_n x^m + i(\theta\sigma^m)_{\dot{\beta}}\partial_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = 0\,. \end{aligned}$$

Similarmente $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0$. Portanto qualquer função Φ das variáveis y, θ satisfaz naturalmente a mesma condição

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0\,. \tag{2.2}$$

Isto é, deve ter a seguinte estrutura

$$\Phi = \Phi(y,\theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)\,, \tag{2.3}$$

(note que são necessários apenas três campos A, ψ, e F para definir o supercampo, diferente do supercampo definido em (2.1), que necessitava de um número bem maior de campos). Supercampos Φ que satisfazem esta condição são chamados *supercampos quirais* ou *escalares*. Podemos escrever o supercampo em termos das coordenadas x simplesmente expandindo em série de potências suas componentes

$$\theta\theta F(x + i\theta\sigma\bar{\theta}) = \theta\theta[F(x) + \mathcal{O}(\theta)] = \theta\theta F(x)\,, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \theta\psi(x + i\theta\sigma\bar{\theta}) &= \theta[\psi(x) + i(\theta\sigma^m\bar{\theta})\partial_m\psi(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] \\ &= \theta\psi(x) + i(\theta\sigma^m\bar{\theta})\theta\partial_m\psi(x)\,. \end{aligned}$$

Note que termos tipo $\theta\theta\mathcal{O}(\theta)$ ou $\theta\mathcal{O}(\theta^2)$ são naturalmente equivalentes ao termos $\mathcal{O}(\theta^3)$, que são iguais a zero. O segundo termo da igualdade, por outro lado, pode ser escrito na forma

$$i(\theta\sigma^m\bar{\theta})\theta\partial_m\psi = -\frac{i}{2}\theta\theta(\partial_m\psi\sigma^m\bar{\theta})\,. \tag{2.5}$$

Por último, da componente A temos três termos, que podem ser simplificados utilizando-se propriedades do Apêndice A. Assim

$$\begin{aligned} A(x+i\theta\sigma\bar{\theta}) &= A(x) + i(\theta\sigma^m\bar{\theta})\partial_m A(x) + \frac{1}{2!} i(\theta\sigma^m\bar{\theta}) i(\theta\sigma^n\bar{\theta})\partial_m\partial_n A(x) \\ &= A(x) + i(\theta\sigma^m\bar{\theta})\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn}\partial_m\partial_n A(x)\,. \end{aligned}$$

Portanto, o supercampo (2.3) nas coordenadas $(x, \theta, \bar{\theta})$ tem a forma

$$\begin{aligned} \Phi(x,\theta,\bar{\theta}) &= \Phi(x+i\theta\sigma\bar{\theta},\theta) \\ &= A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x)\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Podemos escrever o conjugado de (2.3) conjugando a função e a variável de forma independente

$$\Phi^\dagger = \Phi^\dagger(y^+,\bar{\theta}) = A^*(y^+) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^+) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^+)\,, \tag{2.7}$$

onde definimos $y^+ = x - i\theta\sigma\bar{\theta}$. Da mesma forma que $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\, y = 0$, se obtém $D_\alpha\, y^+ = 0$. Então $\Phi^\dagger$ satisfaz manifestamente a condição

$$D_\alpha \Phi^\dagger = 0\,. \tag{2.8}$$

Podemos agora expandir em série (2.7), ou conjugar diretamente (2.6) para obtermos $\Phi^\dagger$ em termos de $(x, \theta, \bar{\theta})$, assim

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}) &= \Phi^\dagger(x-i\theta\sigma\bar{\theta},\bar{\theta}) \\ &= A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A^*(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x)\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Vemos então que as condições utilizadas para definir os supercampos quirais realmente reduzem os graus de liberdade. (Evidentemente (2.6) ou (2.9) tem um número menor de componentes independentes que (2.1), por exemplo, as componentes v_m e d são respectivamente $i\partial_m A$ e $\Box A/4$, e assim dependentes da componente escalar.)

Produtos de supercampos quirais são novamente supercampos quirais:

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j &= (A_i+\sqrt{2}\theta\psi_i+\theta\theta F_i)(A_j+\sqrt{2}\theta\psi_j+\theta\theta F_j)\\ &= A_iA_j+\sqrt{2}\theta\left[\psi_iA_j+A_i\psi_j\right]+\theta\theta\left[A_iF_j+A_jF_i-\psi_i\psi_j\right].\end{aligned}$$

Similarmente, para o produto de três supercampos $\Phi_i\Phi_j\Phi_k = (\Phi_i\Phi_j)\Phi_k$ podemos usar o resultado para dois, recursivamente, e obter:

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j\Phi_k &= A_iA_jA_k+\sqrt{2}\theta\left[(\psi_iA_j+\psi_jA_i)A_k+A_iA_j\psi_k\right]\\ &\quad+\theta\theta\left[F_kA_iA_j+A_k(A_iF_j+A_jF_i-\psi_i\psi_j)-(\psi_iA_j+A_i\psi_j)\psi_k\right]\\ &= A_iA_jA_k+\sqrt{2}\theta\left[\psi_iA_jA_k+\psi_jA_kA_i+\psi_kA_iA_j\right]\\ &\quad+\theta\theta[F_iA_jA_k+F_jA_kA_i+F_kA_iA_j-\psi_i\psi_jA_k-\psi_j\psi_kA_i-\psi_k\psi_iA_j].\end{aligned}$$

(Na última equação escrevemos os termos numa ordem específica que deixa explícita a simetria nos índices i, j, k.) Da mesma forma que produtos de Φ's verificam a condição (2.2), produtos $\Phi^\dagger\Phi^\dagger$ ou $\Phi^\dagger\Phi^\dagger\Phi^\dagger$ verificam a condição (2.8). É natural pensar em produtos da forma $\Phi^\dagger\Phi$, em termos da variável x, apos algumas manipulações (para detalhes ver Apêndice B) obtemos

$$\begin{aligned}\Phi_i^\dagger\Phi_j &= A_i^*A_j+\sqrt{2}\theta\psi_jA_i^*+\sqrt{2}\bar\theta\bar\psi_iA_j+\theta\theta A_i^*F_j+\bar\theta\bar\theta F_i^*A_j\\ &\quad+\theta^\alpha\bar\theta^{\dot\alpha}\Big[i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}(A_i^*\partial_mA_j-\partial_mA_i^*A_j)-2\bar\psi_{i\dot\alpha}\psi_{j\alpha}\Big]\\ &\quad+\theta\theta\bar\theta^{\dot\alpha}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}(A_i^*\partial_m\psi_j^\alpha-\partial_mA_i^*\psi_j^\alpha)-\sqrt{2}F_j\bar\psi_{i\dot\alpha}\right]\\ &\quad+\bar\theta\bar\theta\theta^\alpha\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}(\bar\psi_i^{\dot\alpha}\partial_mA_j-\partial_m\bar\psi_i^{\dot\alpha}A_j)+\sqrt{2}F_i^*\psi_{j\alpha}\right]\\ &\quad+\theta\theta\bar\theta\bar\theta\left[F_i^*F_j+\frac{1}{4}A_i^*\Box A_j+\frac{1}{4}\Box A_i^*A_j-\frac{1}{2}\partial_mA_i^*\partial^mA_j\right]\\ &\quad+\theta\theta\bar\theta\bar\theta\left[\frac{i}{2}\partial_m\bar\psi_i\bar\sigma^m\psi_j-\frac{i}{2}\bar\psi_i\bar\sigma^m\partial_m\psi_j\right].\end{aligned}$$

O supercampo $\Phi_i^\dagger \Phi_j$ não é quiral (que pode ser visto se o comparamos com (2.6) e (2.9)). Porém, é possível mostrar que sob uma transformação de supersimetria (ver Apêndice A), sua componente $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ trasforma-se como derivada [8, 3]. Da mesma forma, as componentes $\theta\theta$ dos produtos $\Phi_i\Phi_j$ e $\Phi_i\Phi_j\Phi_k$ se transformam como derivada. Assim, temos uma idéia do tipo de termos que devem aparecer na Lagrangeana. Por exemplo, somando sobre os índices, e considerando um número arbitrário de supercampos, uma estrutura como

$$\mathcal{L} = \Phi_i{}^\dagger \Phi_i \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left[\left(\lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \Big|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \right] \tag{2.10}$$

seria supersimétrica. Realmente, esta é a estrutura mais geral que se pode construir, que contém apenas supercampos quirais, supersimétrica e renormalizável (as constantes são simétricas nos índices, já que os produtos de supercampos também são simétricos). Esta Lagrangeana é "manifestamente" supersimétrica já que suas componentes são escolhidas das componentes de ordem mais alta em θ e $\bar{\theta}$ que se transformam como derivadas, e é renormalizável por não conter constantes com dimensão de potência negativa na massa. De fato, as unidades para λ_i, m_{ij} e g_{ijk} são determinadas diretamente a partir das componentes $\theta\theta$. Especificamente

$$[\lambda_i] = (\text{massa})^2\,, \quad [m_{ij}] = (\text{massa})\,, \quad [g_{ijk}] = 1\,.$$

Portanto, termos do tipo $\Phi\Phi\Phi\Phi$ ou potências de ordem mais alta não deveriam ser considerardas, pois deveriam ter constantes com dimensão de potências negativas na massa, o que apresentaria problema na renormalização. Termos do tipo $\Phi\Phi^\dagger\Phi^\dagger$ ou $\Phi\Phi\Phi^\dagger$ são construídos com supercampos quirais, mas também apresentam, em geral, o mesmo problema de renormalização (da mesma forma que produtos de quatro supercampos, têm dimensão de $(\text{massa})^5$, já que termos deste tipo devem aparecer como componentes $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$). Essa é a razão para excluí-los desde o começo numa estrutura expressa em termos de supercampos quirais. Porém, é importante reconhecer que termos deste tipo poderiam ser considerados; ainda que com uma dimensionalidade maior, alguns desses termos contribuiriam apenas com correções pequenas para processos que violam o número bariônico e leptônico [2].

Por último, é importante notar que a Lagrangeana escolhida dessa forma não se modifica se mudarmos as coordenadas de x para y ou y^+ (que é novamente uma consequência de termos escolhido componentes de ordem mais alta).

2.2 Supercampos Vetoriais

Supercampos que satisfazem a condição $V = V^\dagger$ sao chamados *supercampos vetoriais*. Podemos utilizar inicialmente combinações arbitrárias dos campos como coeficentes de $\theta\theta\bar{\theta}, \bar{\theta}\bar{\theta}\theta$ e $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ (desde que seja respeitada a condição de hermiticidade). Entretanto, há motivos para a escolha de combinações especiais para as componentes de V; a razão é que $\Phi + \Phi^\dagger$ é um supercampo vetorial. Em termos das componentes e usando (2.6) e (2.9) temos:

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi^\dagger &= A + A^* + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi}) + \theta\theta F + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* \\ &+ i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(A - A^*) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box(A + A^*)\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Isto sugere uma forma de definir as componentes do supercampo. Escolhemos as componentes de V nas coordenadas x da seguinte forma

$$\begin{aligned} V &= C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta\theta[M + iN] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M - iN] \\ &- \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\right] \\ &- i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D + \frac{1}{2}\Box C\right]\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

A Equação (2.11) contém um gradiente como coeficente de $\theta\sigma\bar{\theta}$; isto sugere a generalização supersimétrica para uma transformação de gauge

$$V \longrightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger\,. \tag{2.13}$$

Em termos das componentes, podemos escrever esta transformação

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow C + A + A^*\,, \\ \chi &\longrightarrow \chi - i\sqrt{2}\psi\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M + iN &\longrightarrow M + iN - 2iF\,, \\ v_m &\longrightarrow v_m - i\partial_m(A - A^*)\,, \\ \lambda &\longrightarrow \lambda\,, \\ D &\longrightarrow D\,. \end{aligned}$$

A escolha específica das componentes em (2.12) induz diretamente à invariância de gauge das componentes λ e D. (Isto é, se as componentes $\theta\theta\bar{\theta}, \bar{\theta}\bar{\theta}\theta$ e $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ fossem escolhidas sem conexão com os espinores χ e com o campo escalar C, estas componentes se transformariam como:

$$\begin{aligned} \lambda &\longrightarrow \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^m\partial_m\bar{\psi}\,, \\ D &\longrightarrow D + \frac{1}{2}\Box(A + A^*)\,, \end{aligned}$$

as outras equações permaneceriam inalteradas. Isto mostra porque é conveniente definir as componentes de V nos termos de (2.12)).

Claramente a transformação (2.13) ou sua versão em componentes permitem escolher C, χ, N e M iguais a zero. Neste caso estamos fixando um gauge, conhecido como o *gauge de Wess-Zumino* (ou *gauge* W-Z). A importância do mesmo está na simplicidade de se calcular potências de V. De fato, apenas duas potências de V são diferentes de zero

$$\begin{aligned} V &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D\,, \\ V^2 &= (-\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m)(-\theta\sigma^n\bar{\theta}v_n) = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m v^m\,, \\ V^3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Já que o supercampo V contém um campo vetorial v_m, ele é uma generalização supersimétrica do *campo de Yang-Mills.* Para construir o termo cinético devemos notar que as componentes de V de ordem mais baixa, invariantes de gauge, são precisamente λ_α e $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$. Estas são também as componentes de ordem mais baixa nos campos

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V\,, \tag{2.14}$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V\,. \tag{2.15}$$

A quiralidade destes supercampos segue diretamente da estrutura das derivadas (ver Apêndice B). As condições que evidenciam sua estrutura quiral (que naturalmente devem ser especificadas com respeito a outro índice) podem ser expressas na seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot\beta} W_\alpha &= 0\,, \\ D_\beta \bar{W}_{\dot\alpha} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

A invariância de gauge também é simples de se verificar:

$$\begin{aligned} W_\alpha \longrightarrow -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(V+\Phi+\Phi^\dagger) &= W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha\Phi \\ &= W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\{\bar{D},D_\alpha\}\Phi \\ &= W_\alpha\,, \end{aligned} \tag{2.17}$$

(lembrando que $\bar{D}\Phi = 0 = D\Phi^\dagger$ e que $\{\bar{D}, D_\alpha\} \sim \partial$, que comuta com $\bar{D}$, o termo que contém o anticomutador deveria ser identicamente nulo). Portanto, é especialmente conveniente que a componente $\theta\theta$ seja a parte cinética do V, isto é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\left(W^\alpha W_\alpha\Big|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}\Big|_{\bar\theta\bar\theta}\right) \tag{2.18}$$

deve ser a generalização supersimétrica da Lagrangeana para um supercampo vetorial livre. Finalmente podemos adicionar um termo de massa m^2V^2 na Lagrangeana (2.18). Um termo como esse não é invariante de gauge, assim *não se pode usar o gauge W-Z numa teoria em que apareça um termo explícito de massa para V*. Isto é, deveriamos expressá-lo usando a forma geral (2.12) (para detalhes ver Apêndice B)

$$\begin{aligned} V^2\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} &= \frac{1}{2}C\Box C + CD - \frac{1}{2}v_m v^m - \chi\lambda - \bar\chi\bar\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2}(M^2+N^2) - \frac{i}{2}\chi\sigma^m\partial_m\bar\chi - \frac{i}{2}\bar\chi\bar\sigma^m\partial_m\chi\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

O termo não só define uma massa para v_m, como introduz dois graus de liberdade a mais C e χ. As Lagrangeanas (2.18) e (2.19) juntas descrevem uma teoria com um campo vetorial v_m, dois espinores χ e λ, e um campo escalar C, todos com a mesma massa. A razão pela qual não se faz referência aos campos M, N e D como novos graus de liberdade é porque são campos auxiliares, isto é, não têm dinâmica descrita da Lagrangeana formada de (2.19) e (2.18). Porém, λ obtém a dinâmica de (2.18) (ver Apêndice C) e constitui um grau de liberdade a mais. A Lagrangeana, explicitamente, deveria apresentar a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\left(W^{\alpha} W_{\alpha}\Big|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}\Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} \right) + m^2 V^2\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} . \tag{2.20}$$

Capítulo 3

Invariância de Gauge

Uma vez identificados os supercampos que contêm campos escalares, espinorais e vetoriais como componentes, nosso interesse volta-se à forma de multiplicar os mesmos, de maneira conveniente, para representar as interações. O objetivo principal deste capítulo é identificar estruturas que contenham supercampos quirais e vetoriais, que sejam renormalizáves, supersimétricas e invariantes de gauge (no sentido geral definido no Capítulo 2). No final, definiremos o potencial escalar, que será importante para entender a quebra de simetria nos modelos supersimétricos.

3.1 Caso Abeliano

Analisemos inicialmente as *rotações globais* sobre os supercampos quirais. Isto corresponde a transformações sob o grupo Abeliano $U(1)$. Se Φ_i representa um supercampo genérico, sob rotações a transformação pode ser escrita:

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi_i^{'} = e^{-iq_i\lambda}\Phi_i \, . \tag{3.1}$$

As quantidades q_i e λ são definidas como constantes reais, q_i é chamada a carga para o campo Φ_i, λ é interpretado como o ângulo de rotação , o mesmo para todos os supercampos.

Termos constantes são naturalmente supercampos quirais (satisfazem trivialmente a condição $D_\alpha\lambda = 0 = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\lambda$), e como foi mostrado no capítulo anterior, produtos de supercampos quirais são novamente quirais. Portanto, $\Phi_i^{'}$, o campo transformado, é novamente um supercampo quiral. Naturalmente uma Lagrangeana como (2.10) é invariante sempre que as constantes tenham valores específicos, propriamente λ_i, m_{ij} ou g_{ijk} iguais a zero, no caso em que q_i, q_i+q_j ou $q_i+q_j+q_k$ sejam diferentes de zero respectivamente. Isto garante que os termos na Lagrangeana sejam neutros (note que esta é realmente uma condição imposta "a priori" quando escrevemos a Lagrangeana em componentes). Assim

$$\mathcal{L} = \Phi_i^\dagger \Phi_i \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \Big|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \right] \tag{3.2}$$

é invariante sob a trasformação (3.1), impondo as condições correspondentes sobre m_{ij} e g_{ijk}. O termo que depende apenas dos campos Φ's e seu h.c. é usualmente chamado de *superpotencial*, contém essencialmente termos de massa, interações tipo Yukawa e termos que dependem dos campos F e D. Estes últimos podem ser escritos de forma compacta, como se verá mais adiante.

Se tentamos extender a idéia para o caso de *rotações locais*, isto é, onde λ dependa de x, o parâmetro deve ser extendido para um supercampo quiral Λ, já que a idéia é garantir novamente que o produto seja quiral. Portanto, a transformação deve ser:

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi_i^{'} = e^{-iq_i\Lambda}\Phi_i\,, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0\,. \tag{3.3}$$

Como consequência temos uma transformação para $\Phi_i^\dagger$, isto é

$$\Phi_i^\dagger \longrightarrow \Phi_i^{\dagger'} = e^{iq_i\Lambda^\dagger}\Phi_i^\dagger\,, \quad D_\alpha\Lambda^\dagger = 0\,. \tag{3.4}$$

Porém, é evidente que (3.2) nao é mais invariante sob a transformação (3.4). De fato, o problema aparece no termo cinético, que se transforma (não somamos sobre o índice i no momento) como

$$\Phi_i^\dagger\Phi_i \longrightarrow \Phi_i^{\dagger'}\Phi_i^{'} = \Phi_i^\dagger\Phi_i\, e^{iq_i(\Lambda^\dagger-\Lambda)}\,. \tag{3.5}$$

Neste ponto é importante lembrarmos do Capítulo 2: Note que a forma da última transformação é semelhante a uma transformação de gauge (basta identificar $i\Lambda = \Phi$ em (2.13)). Assim, temos uma idéia de como o campo V deve se transformar

$$V \longrightarrow V^{'} = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger)\,. \tag{3.6}$$

Com esta transformação subtraímos o efeito da variação nos campos quirais. Como conseqüência, a Lagrangeana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}\left(W^\alpha W_\alpha\Big|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}\Big|_{\bar\theta\bar\theta}\right) + \sum_i \Phi_i^\dagger e^{q_i V}\Phi_i|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Big|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right] \qquad (3.7)\end{aligned}$$

será invariante sob transformações de gauge locais.

É importante notar que o termo que contém V e Φ_i aparentemente sugere um problema com a renormalização (devido ao termo exponencial). Mas, na realidade não existe problema algum. Podemos escrever este termo em componentes usando o gauge W-Z (para detalhes ver Apêndice C)

$$\begin{aligned}\Phi_i^\dagger e^{q_i V}\Phi_i|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} &= F_i^* F_i + A_i^*\Box A_i + i\partial_n\bar\psi_i\bar\sigma^n\psi_i \\ &+ \frac{q_i}{2}v^n\left(\bar\psi_i\bar\sigma_n\psi_i + iA_i^*\partial_n A_i - i\partial_n A_i^* A_i\right) \\ &- \frac{iq_i}{\sqrt{2}}\left(\bar\psi_i\bar\lambda A_i - A_i^*\lambda\psi_i\right) \\ &+ \frac{q_i}{2}\left(D - \frac{q_i}{2}v_n v^n\right)A_i^* A_i\,. \qquad (3.8)\end{aligned}$$

Da estrutura em componentes é claro que (3.8) contém apenas termos de dimensionalidade $(\text{massa})^4$, que não apresentam problemas com renormalização.

Neste ponto já podemos fazer a primeira extensão de um modelo realista, a QED. Sua versão supersimétrica está definida atraves de um supercampo vetorial V e dois supercampos quirais Φ_+ e Φ_-, que se transformam como

$$\Phi'_+ = e^{-ie\Lambda}\Phi_+\,, \quad \Phi'_- = e^{ie\Lambda}\Phi_-\,. \qquad (3.9)$$

Onde definimos $q_i = e, -e$ para Φ_+, Φ_- respectivamente. A Lagrangeana da QED supersimétrica deve ter uma parte cinética para os dois supercampos, uma parte cinética para o campo V, e não pode ter (devido a sua carga) um termo tipo Yukawa nos supercampos. Desse modo podemos escrevê-la como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \frac{1}{4}\left(WW\Big|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}\Big|_{\bar\theta\bar\theta}\right) + \left(\Phi_+^\dagger e^{eV}\Phi_+ + \Phi_-^\dagger e^{-eV}\Phi_-\right)\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \\ &+ m\left(\Phi_+\Phi_-\Big|_{\theta\theta} + \Phi_+^\dagger\Phi_-^\dagger\Big|_{\bar\theta\bar\theta}\right)\,. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Utilizando (3.8) e escrevendo a parte cinética para W, também em componentes (ver Apêndice C), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - i\lambda\sigma^n\partial_n\bar{\lambda} + F_+^*F_+ + F_-^*F_- \\ &+ A_+^*\Box A_+ + A_-^*\Box A_- + i\left(\partial_n\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ + \partial_n\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_-\right) \\ &+ \frac{e}{2}v^n\Big[\bar{\psi}_+\bar{\sigma}_n\psi_+ - \bar{\psi}_-\bar{\sigma}_n\psi_- + iA_+^*\partial_nA_+ - i\partial_nA_+^*A_+ \\ &- iA_-^*\partial_nA_- + i\partial_nA_-^*A_-\Big] \\ &- \frac{ie}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_+\bar{\lambda}A_+ - A_+^*\lambda\psi_+ - \bar{\psi}_-\bar{\lambda}A_- + A_-^*\lambda\psi_-\right) \\ &+ \frac{e}{2}D\left[A_+^*A_+ - A_-^*A_-\right] - \frac{e^2}{4}v_nv^n\left[A_+^*A_+ + A_-^*A_-\right] \\ &+ m\left[A_+F_- + A_-F_+ - \psi_+\psi_- + A_+^*F_-^* + A_-^*F_+^* - \bar{\psi}_+\bar{\psi}_-\right].\end{aligned}$$

Da expressão em componentes para $\mathcal{L}_{QED}$ é possível identificar imediatamente um termo de massa para um espinor de Dirac. Se definirmos o espinor de 4-componentes $\psi^{\mathrm{T}} = \left(\psi_-, \bar{\psi}_+\right)$ e utilizarmos a representação de Dirac para as matrizes γ^m (ver Apêndice A)

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 = -(\bar{\psi}_-, \psi_+)\begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_+, \bar{\psi}_-)\,,$$

podemos expressar o termo de massa em função de espinores de Dirac na forma

$$-m\left(\psi_+\psi_- + \bar{\psi}_+\bar{\psi}_-\right) = -m\bar{\psi}\psi\,.$$

O espinor de Dirac ψ corresponderia ao elétron, com suas duas componentes de Weyl, esquerda ψ_-, e direita $\bar{\psi}_+$.

Naturalmente podemos usar qualquer uma das expressões para a $\mathcal{L}_{QED}$; a expressão escolhida dependerá do objetivo do cálculo (por exemplo, para estudar as interações ou as regras de Feynman usuais é mais conveniente uma estrutura em componentes). Porém, é mais cômodo manter a expressão em termos de supercampos e escrevê-la em componentes apenas quando for necessário. De fato, é conveniente manter a estrutura simples de supercampos até estabelecer a forma da Lagrangeana mais geral que é invariante de gauge.

3.2 Caso não Abeliano

Uma vez estudada a invariância para o caso U(1), a generalização para o caso não Abeliano SU(N) é imediata. Denotando por Λ_a os vários supercampos quirais, $a = 1, 2, ...N$, a trasformação é escrita como:

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi \,, \tag{3.11}$$

onde $\Lambda_{ij} = T^a_{ij}\Lambda_a$, os T^a são geradores hermitianos do grupo de gauge na representação definida pelo supercampo Φ. Naturalmente a transformação anterior implica em outra para o adjunto

$$\Phi^\dagger \longrightarrow \Phi^{\dagger'} = \left[\Phi'\right]^\dagger = \Phi^\dagger e^{i\Lambda^\dagger} \,. \tag{3.12}$$

Por outro lado, na representação adjunta podemos normalizar os geradores na forma

$$\mathrm{Tr}(T^aT^b) = k\delta^{ab} \,, \qquad k > 0 \,,$$

portanto

$$\mathrm{Tr}\left(T^a[T^b, T^c]\right) = if^{bcd}k\delta^{ad} = ikf^{bca} \,.$$

O traço é cíclico e anti-simétrico nos índices b, c; assim é completamente anti-simétrico, o que significa que podemos considerar as constantes de estrutura completamente anti-simétricas.

Um termo como $\Phi^\dagger e^V \Phi$ é invariante sob a transformação (3.11) se V se transforma conjuntamente como:

$$e^V \longrightarrow e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \,, \tag{3.13}$$

(onde V é uma matriz, $V_{ij} = T^a_{ij}V_a$). Usando a relação de Hausdorff e a relação de comutação para os geradores

$$\left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c \tag{3.14}$$

podemos reescrever os termos exponenciais da transformação (3.13) e conseguimos expressar V' em termos dos geradores

$$V' = T^a V'_a \,.$$

Note que na lei de transformação o primeiro termo é independente de V, especificamente

$$V' - V = i\left(\Lambda - \Lambda^{\dagger}\right) + \cdots ,$$

assim em teorias não Abelianas podemos utilizar o gauge W-Z. Naturalmente precisamos definir o supercampo W^{α} correspondente. É possível ter uma idéia de como fazê-lo usando o gauge W-Z. De fato, neste gauge

$$\begin{aligned} e^{-V} D_\alpha e^{V} &= e^{-V}\left[D_\alpha V + \frac{1}{2!} D_\alpha V^2\right] \\ &= D_\alpha V - V D_\alpha V + \frac{1}{2} V^2 D_\alpha V + \frac{1}{2} D_\alpha V^2 - \left(V - \frac{1}{2}V^2\right)\frac{1}{2!} D_\alpha V^2 , \end{aligned}$$

embora tenhamos escrito termos que são identicamente nulos. Devido a que $D_\alpha V$, $D_\alpha V^2$ contém termos de ordem $\bar{\theta}$ e $\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ respectivamente, o termo $V^2 D_\alpha V$ e o último termo são zero, pois são equivalentes a ordem $(\bar{\theta})^3$. Por outro lado

$$\frac{1}{2} D_\alpha V^2 = \frac{1}{2}\left[(D_\alpha V)V + V D_\alpha V\right] ,$$

assim

$$e^{-V} D_\alpha e^{V} = D_\alpha V - \frac{1}{2}\left[V, D_\alpha V\right] . \tag{3.15}$$

No caso Abeliano o comutador se anula. Desta forma temos uma idéia de como definir W_α,

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\, e^{-V} D_\alpha e^{V} , \tag{3.16}$$

que se transforma (para detalhes ver Apêndice C)

$$W_\alpha \longrightarrow W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} . \tag{3.17}$$

Assim, o traço do produto WW é invariante de gauge. Podemos então escrever uma estrutura supersimétrica invariante de gauge e renormalizável. A Lagrangeana deve apresentar a forma final:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4k(2g)^2}\mathrm{Tr}\left(WW\Big|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}\Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right) + \Phi^{\dagger} e^{V}\Phi\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Big|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right] . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Faremos algums comentários com relação a esta estrutura e sua generalidade ao definirmos os primeiros modelos supersimétricos.

Por último, é importante mencionar que, de forma similar ao caso Abeliano (especificamente na extensão supersimétrica da QED), podemos também escrever a Lagrangeana em termos de suas componentes para o caso geral não Abeliano. Algumas abreviações nos termos cinéticos são necessárias. Por exemplo, como Φ representa um multiplete Φ_i (com $i = 1, 2, ...N$), podemos escrever também abreviadamente A, ψ, e F representando as quantidades A_i, ψ_i, e F_i respectivamente. Desta forma, considerando a redefinição do supercampo vetorial $V \to 2gV$, a estrutura pode ser expressa (para detalhes ver Apêndice C) na forma a seguir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4} v_{mn}^{(a)} v^{(a)mn} - i\bar{\lambda}^{(a)} \bar{\sigma}^m D_m \lambda^{(a)} + \frac{1}{2} D^{(a)} D^{(a)} \\
& - D_m A^\dagger D^m A - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m D_m \psi + F^\dagger F \\
& + i\sqrt{2}g \left[A^\dagger T^{(a)} \psi \lambda^{(a)} - \bar{\psi} T^{(a)} A \bar{\lambda}^{(a)} \right] + g D^{(a)} A^\dagger T^{(a)} A \\
& + \frac{1}{2} m_{ij} \left[A_i F_j + A_j F_i - \psi_i \psi_j + A_i^* F_j^* + A_j^* F_i^* - \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \right] \\
& + \frac{1}{3} g_{ijk} \Big[F_i A_j A_k + F_j A_k A_i + F_k A_i A_j - \psi_i \psi_j A_k - \psi_j \psi_k A_i - \psi_k \psi_i A_j \\
& + F_i^* A_j^* A_k^* + F_j^* A_k^* A_i^* + F_k^* A_i^* A_j^* - \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j A_k^* - \bar{\psi}_j \bar{\psi}_k A_i^* - \bar{\psi}_k \bar{\psi}_i A_j^* \Big] .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Onde definimos

$$\begin{aligned}
D_m A &= \partial_m A + igv_m^{(a)} T^{(a)} A \,, \\
D_m \psi &= \partial_m \psi + igv_m^{(a)} T^{(a)} \psi \,, \\
D_m \lambda^{(a)} &= \partial_m \lambda^{(a)} - gf^{abc} v_m^{(b)} \lambda^{(c)} \,, \\
v_{mn}^{(a)} &= \partial_m v_n^{(a)} - \partial_n v_m^{(a)} - gf^{abc} v_m^{(b)} v_n^{(c)} \,.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

O fator 2 não é imprescindível, mas simplifica a forma final das derivadas covariantes. Caso não tivéssemos escrito a Lagrangeana ficaria idêntica, mas as derivadas apresentariam um fator 1/2 adicional. Em algumas ocasiões na redefinição inclui-se um sinal negativo [3]. (Note que utilizamos sempre letras como $n, m, ...$ para índices do tipo Lorentz, assim a *derivada covariante* D^m não deve ser confundida com $D^{(a)}$, que se refere à componente de ordem mais alta para V^a. Para evitar confusão escrevemos entre parêntesis os últimos índices).

Os primeiros seis termos da Lagrangeana (3.19) contêm os termos cinéticos para W e Φ assim como múltiplas interações: as conhecidas para uma teoria não Abeliana entre bósons de gauge (triplas e quárticas) que surgem do termo contendo v_{mn}; novas, entre bósons de gauge e seus parceiros, chamados *gauginos* que aparecem no termo em $D_m\lambda^{(a)}$; interações entre campos escalares A e bósons de gauge devido a termos em $D^m A$; e entre férmions e bósons de gauge provenientes do termo em $D_m\psi$. O sétimo e oitavo termo contêm as interações restantes entre os supercampos vetorial e quiral. Note em especial que estes termos contêm interações tipo Yukawa entre férmions ψ, gauginos $\lambda^{(a)}$ e escalares A. Na hora da construção de modelos SSM é importante reconhecer que tais férmions não são necessariamente *quarks* ou *leptons* (poderiam ser também os parceiros do bóson de Higgs, chamados *higgsinos*). Os termos restantes são provenientes do superpotencial e contêm interações tipo Yukawa entre férmions e escalares da parte quiral, e termos de massa para férmions ψ. Estão excluídos, como foi sugerido já no caso Abeliano, termos de massa para o supercampo vetorial. Porém, como mostraremos no capítulo seguinte, termos de massa para gauginos são importantes na forma como se pensa a quebra da supersimetria a baixas energias (no caso de uma análise fenomenológica de modelos SSM, termos como estes são chamados *soft*).

Finalmente, não fizemos referência aos termos na Lagrangeana que dependem dos campos F e D. A razão para tal é que os mesmos não têm dinâmica (nenhum termo de $\mathcal{L}$ contém derivadas para estes campos, i.e. são campos auxiliares). Podemos usar as equações de movimento para os mesmos, e escrevê-los como um termo que constituirá o ponto de partida no estudo da quebra da simetria.

3.3 Potencial Escalar

Como já comentamos, da Lagrangeana (3.19) é evidente que os campos F_i e $D^{(a)}$ são auxiliares, e portanto, podemos expressar os mesmos em termos dos outros campos usando as equações de movimento. Assim para $D^{(a)}$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D^{(a)}} = D^{(a)} + gA^\dagger T^{(a)} A \,,$$

isto é,

$$D^{(a)} = -gA^\dagger T^{(a)} A \,, \tag{3.21}$$

introduzindo esta solução na Lagrangeana obtemos

$$\frac{1}{2} D^{(a)} D^{(a)} + gD^{(a)} A^\dagger T^{(a)} A = -\frac{1}{2}\left(gA^\dagger T^{(a)} A\right)^2 = -\frac{1}{2} D^{(a)} D^{(a)} \,.$$

Da mesma forma para F_i

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} = F_i^* + m_{ij} A_j + g_{ijk} A_j A_k \,,$$

ou analogamente

$$F_i = -(m_{ij} A_j^* + g_{ijk} A_j^* A_k^*) \,. \tag{3.22}$$

Portanto o termo que depende de F_i no superpotencial pode ser expresso simplesmente na forma:

$$(m_{ij} A_j + g_{ijk} A_j A_k) F_i + (m_{ij} A_j^* + g_{ijk} A_j^* A_k^*) F_i^* = -F_i^* F_i - F_i F_i^* = -2F^\dagger F \,.$$

Definimos então o *potencial escalar* como menos a contribução total dos campos auxiliares na Lagrangeana, que pode ser escrito de forma resumida

$$V_{\text{esc}} = F^\dagger F + \frac{1}{2} D^{(a)} D^{(a)} \,, \tag{3.23}$$

(onde naturalmente F e D são expressos como as soluções (3.21) e (3.22)). Na literatura é usual fazer-se referência [4, 9] ao primeiro termo do potencial escalar como *termo-$\mathcal{F}$*, e expressá-lo como

$$F^\dagger F = \sum_i \left| \frac{\partial f(\Phi)}{\partial A_i} \right|^2 ,$$

onde $f(\Phi)$ representa o superpotencial; o segundo é usualmente chamado *termo-$\mathcal{D}$*. A Lagrangeana com referência a (3.23) apresentaria uma forma mais simples:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4}v_{mn}^{(a)}v^{(a)mn} - i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma}^m D_m\lambda^{(a)} - D_m A^\dagger D^m A - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m D_m\psi - V_{\text{esc}} \\ & + i\sqrt{2}g\left[A^\dagger T^{(a)}\psi\lambda^{(a)} - \bar{\psi}T^{(a)}A\bar{\lambda}^{(a)}\right] - \frac{1}{2}m_{ij}\left[\psi_i\psi_j + \bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\right] \\ & - \frac{1}{3}g_{ijk}\left[\psi_i\psi_j A_k + \psi_j\psi_k A_i + \psi_k\psi_i A_j + \bar{\psi}_i\bar{\psi}_j A_k^* + \bar{\psi}_j\bar{\psi}_k A_i^* + \bar{\psi}_k\bar{\psi}_i A_j^*\right].\end{aligned} \tag{3.24}$$

O potencial escalar está intimamente ligado à quebra de simetria, já que seu valor esperado no vácuo define precisamente a energia do vácuo, que é limitada pela própria álgebra. O Hamiltoniano pode ser escrito em termos dos geradores fermiônicos como:

$$H = \frac{1}{4}\left(\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2\bar{Q}_2\right). \tag{3.25}$$

A equação (3.25) implica que qualquer estado $|\Psi\rangle$ da teoria verifica

$$\langle\Psi|H|\Psi\rangle \geq 0\,, \tag{3.26}$$

assim, estados $|\Omega\rangle$ para os quais o valor esperado de H seja igual a zero são vácuos supersimétricos da teoria. São vácuos pois (3.26) mostra que não existem estados com energia negativa; são supersimétricos pois

$$\langle\Omega|H|\Omega\rangle = 0$$

implica que $Q, \bar{Q}$ aniquilam ao vácuo. Assim, *apenas vácuos com energia zero preservarão a supersimetria.* A conexão com o potencial escalar é devido a que, no vácuo,

$$\langle\Omega|H|\Omega\rangle = \langle\Omega|V_{\text{esc}}|\Omega\rangle\,. \tag{3.27}$$

Voltaremos a esta relação no próximo capítulo, ao estudarmos os modelos supersimétricos.

Capítulo 4

Versões Supersimétricas do Modelo Padrão

Vamos definir o conteúdo mínimo de supercampos que as versões supersimétricas do *modelo padrão* -SSM's devem ter. A supersimetria, por si, impõe novas condições na Lagrangeana que limitam a estrutura básica de supercampos. Por outro lado, quantidades conservadas no SM podem indicar limitações em termos de interação. Uma das restrições fundamentais do SM é a conservação do *número bariônico e leptônico*. A manuntenção dessa restrição nos modelos supersimétricos nos leva naturalmente à conservação da paridade-R. Porém, como veremos mais adiante, existem outras formas de conservar o número bariônico e leptônico que não conduz à paridade-R.

4.1 Supercampos para SSM's

Comecemos analisando as limitações básicas devido à supersimetria. No SM os quarks e léptons não pertencem à representação adjunta do grupo $\mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)_Y$. Assim, os mesmos não podem ser parceiros dos bósons de gauge conhecidos e devemos introduzir supercampos quirais para aqueles. Definimos $U_i, D_i, \bar{U}_i, \bar{D}_i, N_i, E_i$ e $\bar{E}_i$ como supercampos quirais, cujas componentes fermiônicas representam as partes esquerdas dos quarks de carga $2e/3, -e/3$; de antiquarks com carga $-2e/3, e/3$; de léptons de carga $0, -e$; e de antiléptons de carga $+e$; respectivamente. Neste caso $i = 1, 2, 3$ é o índice para as gerações (por exemplo: U_1, U_2, U_3 contém as componentes esquerdas dos quarks u, c, t; e os supercampos N_1, N_2, N_3 contém as componentes esquerdas dos neutrinos $\nu_{\mathrm{e}}, \nu_\mu, \nu_\tau$). Dentre os supercampos definidos anteriormente, U_i, D_i e N_i, E_i, formam dubletos de SU(2), os demais são singletos. Os supercampos para quarks e antiquarks formam tripletos e antitripletos de SU(3) respectivamente. As partículas asociadas às componentes escalares destes supercampos são chamados *squarks, antisquarks, sleptons* e *antisleptons.*

Por outro lado, como foi mostrado no Capítulo 2, devemos introduzir supercampos vetoriais para os bósons de gauge, cujas componentes fermiônicas são chamadas *gauginos* (o nome se deve a que os mesmos seriam os parceiros supersimétricos dos bósons de gauge. Também chamados *gluinos, winos* e *bino*).

Devemos introduzir um mecanismo que produza a quebra de $SU(2)\otimes U(1)_Y$ e, conseqüentemente gere a massa do W^+, W^- e Z^0; e de todos os quarks e léptons. A possibilidade mais simples é supor a existência de exatamente dois supercampos quirais como dubletos de SU(2)

$$H_1^{\mathrm{T}} = \left(H_1^0, H_1^-\right)\ , \quad H_2^{\mathrm{T}} = \left(H_2^+, H_2^0\right)\ , \tag{4.1}$$

os quais devem aparecer na Lagrangeana na forma:

$$\left[\left(D_i H_1^0 - U_i H_1^-\right) \bar{D}_j\right]_{\theta\theta}\ , \quad \left[\left(E_i H_1^0 - N_i H_1^-\right) \bar{E}_j\right]_{\theta\theta}\ , \tag{4.2}$$

$$\left[\left(D_i H_2^+ - U_i H_2^0\right) \bar{U}_j\right]_{\theta\theta}\ . \tag{4.3}$$

Assim, valores esperados no vácuo diferentes de zero para as componentes escalares de H_1^0 irão gerar as massas para os léptons cargados e dos quarks com carga $-e/3$. Valores esperados no vácuo distintos de zero para a componente escalar de H_2^0 serão os responsáveis pela geração de massa dos quarks de carga $+2e/3$. Os mesmos valores esperados definem massas para W^+, W^- e Z^0. Devido à supersimetria, um valor esperado para a componente escalar de H_1^0 não pode gerar massa para os quarks com carga $2e/3$, e um valor esperado para a componente escalar de H_2^0 não pode gerar massa para os quarks com carga $-e/3$ ou léptons cargados. Esta é a razão para iniciarmos com um mínimo de dois dubletos de Higgs.

Por outro lado, podemos ter mais de um dubleto H_1 e/ou H_2. Porém, a quantidade de dubletos estará limitada parcialmente por condições como o *cancelamento das anomalias* [2]. Não se discutirá este assunto aqui, basta citar como resultado geral que apenas com um número igual de dubletos de Higgs de tipo H_1 e de tipo H_2 é possível cancelar as anomalias. Portanto, qualquer SSM deve ter um número par de dubletos (metade com hipercarga Y positiva, e metade com hipercarga negativa). Por outro lado, existem motivações mais gerais para estudarmos os modelos com exatamente dois dubletos de Higgs. Quantidades como a *escala de unificação*, M_X, ou *ângulo de Weinberg*, $\sin^2\theta_W$, dependem da quantidade de dubletos de Higgs no modelo [2]. Apenas o valor $n_H = 2$ para o número de dubletos de Higgs resulta em concordância com $\sin^2\theta_W = 0.23$, experimentalmente observado. O valor $n_H = 4$ não só conduz a um valor diferente do observado para $\sin^2\theta_W$, como também, o valor obtido para M_X permitirá o decaimento do próton. Estes argumentos sugerem fortemente um modelo com dois dubletos. Porém, não se têm limites definidos com relação ao número de singletos de Higgs [10, 11].

4.2 Número Bariônico e Leptônico

Uma teoria construída de acordo com as interações (4.2) e (4.3) no superpotencial apresenta uma das características mais significativas do SM. Estas interações conservam o número bariônico e o número leptônico (definidos na forma usual, com respeito às componentes fermiônicas e asociando-se o mesmo número para o supercampo como veremos a seguir). Porém, para se chegar de forma natural a esta definição é importante estudar com algum detalhe as posibilidades de atribuição destes números quânticos.

Para tentarmos definir o número bariônico e leptônico diretamente em termos de supercampos, devemos voltar à relação (4.2). Note que além de H_1, existe um outro dubleto com componentes de carga $(0, -e)$, este é $L_i^{\mathrm{T}} = (N_i, E_i)$. Assim, interações como

$$\left[(D_i N_j - U_i E_j)\,\bar{D}_k\right]_{\theta\theta}, \quad \left[(E_i N_j - N_i E_j)\,\bar{E}_k\right]_{\theta\theta} \tag{4.4}$$

poderiam ser consideradas válidas (estão de acordo com a invariância de gauge). Além disso, poderíamos ter interações apenas entre os quarks, o que nos leva a termos tipo:

$$\left[\bar{D}_i \bar{D}_j \bar{U}_k\right]_{\theta\theta}. \tag{4.5}$$

Vamos supor a conservação do *número bariônico*. Definindo para os supercampos U_i, D_i um número bariônico $B = 1/3$; para $\bar{U}_i, \bar{D}_i$ um número bariônico $B = -1/3$; e para os demais supercampos, $L_i, \bar{E}_i, H_1$ e H_2 um número bariônico $B = 0$, excluímos imediatamente as interações (4.5), mas não (4.4). Estas interações podem não violar o número leptônico, sempre que as componentes escalares dos supercampos tenham números leptônicos apropriados. Isto pode ocorer se definirmos para os supercampos L_i, H_1 e H_2 um número leptônico $L = 0$; para $U_i, D_i, \bar{U}_i, \bar{D}_i$ um número leptônico $L = -1$; e para $\bar{E}_i$ um número leptônico $L = -2$. Finalmente associamos às variáveis θ e $\bar{\theta}$, $L = -1$ e $L = 1$ respectivamente. Desta forma todos os quarks e léptons apresentam os números leptônicos convencionais (as componentes fermiônicas de N_i, E_i, as quais denotamos por ν_i, e_i respectivamente, têm $L = 0 + 1 = 1$; a componente fermiônica de $\bar{E}_i$, que denotamos por $\bar{e}_i$, tem $L = -2 + 1 = -1$. As componentes fermiônicas de quarks e antiquarks têm $L = -1 + 1 = 0$, como se esperava. Para os higgsinos $L = 0 + 1 = 1$). Entretanto, as componentes escalares dos supercampos adquirem o mesmo número leptônico que o supercampo, o que é não convencional.

As interações (4.4) contém coeficentes de $\theta\theta$, e assim apresentam $L = -1 + 0 - 1 + 2 = 0$ e $L = 0 + 0 - 2 + 2 = 0$. As interações (4.2) apresentam $L = -1 + 0 - 1 + 2 = 0$ e $L = 0 + 0 - 2 + 2 = 0$. Porém, (4.5) têm $L = -3 + 2 = -1$ e deve ser excluída. Também é importante lembrar que as componentes escalares de H_1 e H_2 têm $L = 0$, e assim, valores esperados para estas componentes não violam número leptônico. Com estas atribuições a conservação do número leptônico significa excluir qualquer interação *renormalizável* que viole número bariônico. Isto é, a conservação de L implica na conservação de B, sempre e quando se considerem interações renormalizáveis. (Havíamos comentado no Capítulo 2 que interações tipo $\Phi\Phi\Phi\Phi$ apresentariam problemas com renormalização e por esta razão não seriam consideradas como termos do superpotencial.)

As interações em (4.4) podem gerar um mecanismo "alternativo" para a quebra de SU(2)$\otimes$U(1)$_Y$ e como consequência gerar as massas dos léptons e dos quarks com carga $-e/3$ (a componente escalar para N_i poderá ter um valor esperado no vácuo distinto de zero, pois $L = 0$ para este supercampo). Porém, ainda precisamos de H_2

para gerar as massas dos quarks com carga $2e/3$.

Usualmente, o problema das interações (4.4) é discutida de outra forma. Supõe-se que deva existir alguma simetria que proíba as interações (4.4) e (4.5). Esta simetria pode estar associada à conservação do L e B. Utilizamos então uma definição convencional de *número leptônico*: Para os supercampos de quarks U_i, D_i, de antiquarks $\bar{U}_i, \bar{D}_i$, e dos Higgs H_1, H_2 um número leptônico $L = 0$; para os supercampos L_i e $\bar{E}_i$ um $L = 1$ e $L = -1$ respectivamente (aqui as variáveis θ e $\bar{\theta}$ não têm número leptônico). Deste modo, ambas, (4.4) e (4.5) são excluídas desde o início.

4.3 Paridade-R

Existem sérias dúvidas sobre a simetria que proíbe (4.4) e (4.5). Uma possível alternativa é supor uma simetria discreta e global chamada *paridade-R*, definida diretamente para as componentes dos supercampos. A todos os quarks, léptons, Higgs e bósons de gauge do SM é atribuída uma paridade $+1$, e para qualquer companheiro supersimétrico é atribuída uma paridade -1. A paridade-R pode ser diretamente associada ao número bariônico e leptônico:

$$\Pi_R = (-1)^F (-1)^{3(B-L)}\,, \tag{4.6}$$

onde $(-1)^F$ é chamada *paridade fermiônica*, definida para as componentes na forma:

$$(-1)^F = \begin{cases} -1 & \text{para férmions,} \\ +1 & \text{para bósons.} \end{cases}$$

(A paridade fermiônica é equivalente a uma rotação de 2π, e assim é uma grandeza conservada na Lagrangeana). Por outra parte, $(-1)^{3(B-L)}$ têm um valor definido para os supercampos,

$$(-1)^{3(B-L)} = \begin{cases} -1 & \text{para supercampos de quarks e léptons,} \\ +1 & \text{para qualquer outro supercampo.} \end{cases}$$

Assim, a conservação da paridade-R seria equivalente a impor invariância sob uma transformação que multiplica todos os supercampos de quarks e léptons por -1, sem fazer modificações nos demais. Esta forma de introduzir a paridade-R foi inicialmente proposta por S. Dimopoulos e H. Georgi [12].

Em alguns casos a paridade-R é definida de forma ligeramente diferente [13], a paridade fermiônica aparece assosiada ao "spin" como $(-1)^{2S}$ e o expoente restante se coloca na forma $3B - L$. Desse modo, a paridade-R ficaria expressa como:

$$\Pi_R = (-1)^{3B-L+2S} \tag{4.7}$$

(naturalmente as duas expressões, (4.6) e (4.7) são equivalentes). Segundo (4.6), apenas as "novas" partículas (squarks, sléptons, gauginos, e higgsinos) devem ter $\Pi_R = -1$. Assim, a conservação da paridade leva a dois resultados importantes: *se a paridade-R é exata, a mais leve das novas partículas requeridas pela supersimetria,* LSP, *deve ser absolutamente estável.* Mais ainda, *partindo de estados que contém apenas partículas do SM, as partículas supersimétricas são produzidas sempre ao pares.* Grande parte da fenomenologia dos modelos supersimétricos está associada a estes resultados, em particular a escolha da partícula LSP constitui um ponto fundamental dos modelos.

Supondo a paridade-R como uma possível simetria, a Lagrangeana mais geral, supersimétrica e renormalizável deve conter termos cinéticos para cada supercampo de lépton, quark e Higgs, termos cinéticos para cada um dos bósons de gauge asociados aos grupos SU(3), SU(2) e $\mathrm{U}(1)_Y$, um termo (correspondente ao superpotencial) onde aparecem as interações (4.2) e (4.3) e um termo que dependa apenas dos supercampos de Higgs. Isto é, deve apresentar a forma:

$$\mathcal{L} = \sum \Phi^\dagger e^V \Phi\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \sum \mathrm{Tr}\left[WW|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right] + \mathcal{L}_Y \tag{4.8}$$

Onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y &= \sum_{ij}\left[(h_D)_{ij}\left(D_iH_1^0 - U_iH_1^-\right)\bar{D}_j + (h_E)_{ij}\left(E_iH_1^0 - N_iH_1^-\right)\bar{E}_j\right]_{\theta\theta} \\ &+ \sum_{ij}\left[(h_U)_{ij}\left(D_iH_2^+ - U_iH_2^0\right)\bar{U}_j\right]_{\theta\theta} + \mu\left[H_2^+H_1^- - H_2^0H_1^0\right]_{\theta\theta} + \mathrm{h.c.}\end{aligned}$$

O termo que contém apenas os Higgs, usualmente chamado de "μ-*term*", contém o único parâmetro com dimensão de massa que aparece em $\mathcal{L}_Y$. O μ-*term* pode ser excluído se utilizamos uma definição não convencional do número leptônico (neste caso o termo teria $L = 2$), ou supondo uma simetria discreta conhecida como *simetria Peccei-Quinn* [14] na qual os supercampos $\bar{U}_i, \bar{D}_i$, e $\bar{E}_i$ apresentam um número quântico de Peccei-Quinn igual a -1, os supercamos U_i, D_i, e L_i um número quântico 0, e os supercampos H_1 e H_2 um $+1$. Considerando a conservação desta simetria apenas (4.2) e (4.3) são permitidas como interações. No entanto, existem razões fenomenológicas para manter o *μ-term* no MSSM, que serão discutidas adiante.

4.4 O Modelo Mínimo-MSSM

Como havíamos mencionado no Capítulo 1, a supersimetria deve ser quebrada. Porém, a origem fundamental da quebra da supersimetria ainda é desconhecida. A questão é se a quebra é espontânea e a baixas energias (da ordem de algums TeV's), como ocorre com o grupo SU(2) $\otimes$U(1)$_Y$ no SM. Entretanto, há um teorema proposto por S. Dimopoulos e H. Georgi [12] que estabelece que: *a supersimetria não pode ser quebrada espontaneamente em nenhuma extensão supersimétrica do SM a baixa escala de energia.* Os mesmos autores mostraram que a quebra pode ser explícita, por termos de dimensão 2 ou 3 na massa, que são "super-renormalizáveis", e assim, deveriam gerar, no pior dos casos, divergências logarítmicas. Desta forma, o problema da naturalidade permanece sob controle. Os termos escolhidos para quebrar supersimetria e que geram apenas divergências logarítmicas, são chamados *termos soft.* Deste modo parametrizamos a quebra adicionando à Lagrangeana supersimétrica (4.8) termos que violem explícitamente a supersimetria, invariantes de gauge e que conservem paridade-R. A classificação dos mesmos foi estudada desde o início dos anos 80 por S. Dimopoulos e H. Georgi [12]. A forma mais geral de termos soft permitidos pela simetria SU(3)$\otimes$SU(2)$\otimes$U(1)$_Y$ é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{soft}} &= -\sum_{ij}\Big[(M_Q^2)_{ij}(\tilde{q}_i^\dagger\tilde{q}_j) + (M_{\bar{U}}^2)_{ij}(\tilde{u}_i^{c\dagger}\tilde{u}_j^c) + (M_{\bar{D}}^2)_{ij}(\tilde{d}_i^{c\dagger}\tilde{d}_j^c) \\
&\quad + (M_L^2)_{ij}(\tilde{l}_i^\dagger\tilde{l}_j) + (M_{\bar{E}}^2)_{ij}(\tilde{e}_i^{c\dagger}\tilde{e}_j^c)\Big] \\
&\quad - \sum_{ij}\Big[A_{ij}^D(h_D)_{ij}\left(\tilde{d}_i h_1^0 - \tilde{u}_i h_1^-\right)\tilde{d}_j^c + A_{ij}^E(h_E)_{ij}\left(\tilde{e}_i h_1^0 - \tilde{\nu}_i h_1^-\right)\tilde{e}_j^c \\
&\quad + A_{ij}^U(h_U)_{ij}\left(\tilde{d}_i h_2^+ - \tilde{u}_i h_2^0\right)\tilde{u}_j^c + \text{h.c.}\Big]
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left[M_3\lambda_g^{(c)}\lambda_g^{(c)} + M_2\lambda_W^{(a)}\lambda_W^{(a)} + M_1\lambda_b\lambda_b + \text{h.c.}\right]$$
$$- m_1^2(h_1^\dagger h_1) - m_2^2(h_2^\dagger h_2) - \frac{1}{2}\left(B\mu\left[h_2^+ h_1^- - h_2^0 h_1^0\right] + \text{h.c.}\right) . \qquad (4.9)$$

(Onde denotamos, as componentes escalares dos supercampos quirais com um til e as componentes escalares de $\bar{U}, \bar{D}$ e $\bar{E}$ com um conjugado a mais; ver Tabela 4.1) Os campos h's são componentes escalares dos H's, isto é, os bósons de Higgs. As constantes para os termos de massa (tanto de squarks e sleptons com dimensão 2, como dos gauginos com dimensão 3) são escolhidas, convenientemente, como M^2 e M respectivamente, o que deixa explícita a dimensão destas constantes. Com excessão do último termo, $B\mu$, que deve ter unidades de (massa)^2 (como as unidades de μ estão fixadas em (4.8), B deve ter unidades de massa também). As quantidades A_{ij}^D, A_{ij}^E e A_{ij}^U são coeficientes que multiplicam as respectivas matrizes. Os índices no termo de massa para os gauginos são correspondentes aos grupos SU(3) e SU(2) respectivamente, e assumem os valores $c = 1, 2, ..., 8$ e $a = 1, 2, 3$.

Se os coeficentes em $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ fossem apenas limitados pela simetria de gauge e paridade-R, a teoria resultante da união de (4.8) e (4.9) teria 124 parâmetros livres [13]. Por esta razão o modelo é algumas vezes chamado MSSM-124. O caráter mínimo deste modelo não está asociado ao número de parâmetros livres, mas com a idéia de que o conteúdo de supercampos é o mínimo possível.

Mesmo na ausência de uma teoria fundamental da quebra da supersimetria, dificilmente é concebível o modelo MSSM-124 como uma teoria fundamental. Em particular, uma vez que seja descoberta a supersimetria a baixas energias uma das principais tarefas experimentais será a medida da maior quantidade de parâmetros possível. Na maior parte do espaço de parâmetros associados ao MSSM-124, o modelo não é viável fenomenologicamente; mesmo assim, o modelo é teoricamente deficiente, já que não há uma explicação para a origem destes parâmetros, e tampouco uma explicação para a origem da quebra da simetria eletrofraca, isto é, do grupo SU(2)$\otimes$U(1)$_Y$. Porém, existe uma razão para estudarmos os modelos MSSM's. Teorias supersimétricas cuja quebra é espontânea a "altas energias" (da ordem da escala de Planck, 10^{18}GeV) são naturalmente descritas a baixas energias pelos modelos

MSSM's. Portanto, podemos explorar as implicações fenomenológicas destes modelos considerando tais resultados como relevantes quando comparados com modelos com quebra espontânea de supersimetria na escala de unificação.

A sigla MSSM é reservada para o caso em que os coeficentes em (4.9) obedeçam ás seguintes condições na escala de unificação M_{X}

$$(M^2_{\tilde{Q}})_{ij} = (M^2_{\tilde{D}})_{ij} = (M^2_{\tilde{U}})_{ij} = (M^2_{\tilde{L}})_{ij} = (M^2_{\tilde{E}})_{ij} = m^2_{l}\delta_{ij} = m^2_0\delta_{ij}\,, \tag{4.10}$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = m_{1/2}\,, \qquad A^D_{ij} = A^E_{ij} = A^U_{ij} = A_0\delta_{ij}\,. \tag{4.11}$$

Fazendo uma contagem dos parâmetros encontra se que o modelo apresenta 23 graus de liberdade, dos quais 18 são devidos ao SM. Assim, apenas 5 novos parâmetros são adicionados a esta extensão supersimétrica do modelo padrão. O modelo também é chamado de MSSM-23, ou CMSSM, onde C refere-se ao termo *constrained* [13]. Na literatura [16, 17] também é comun citar o mesmo como um modelo de supergravedade, especificamente como o modelo mSUGRA. De (4.10) e (4.11) obtemos os parâmetros $m^2_0, m_{1/2}$, e A_0. Os outros dois associam-se diretamente ao Higgs, e mostraremos como aparecem na próxima seção.

4.5 O Setor de Higgs

Segundo as definições convencionais adotadas para B e L, os únicos supercampos que apresentam um valor nulo para ambos operadores são os supercampos asociados aos Higgs. No caso do MSSM temos apenas dois dubletos. Uma análise para o caso da inclusão de singletos (denotados pelas siglas (M + n)SSM's) segue um procedimento similar. O caso com um singleto apresenta grande semelhança com o mínimo de dois dubletos e foi exposto com detalhe por J. Gunion e H. Haber [11] no início da década de 80. O ponto importante é que a presença do singleto, que pode ser escolhido sem massa, sem perda de generalidade, e tendo um vev nulo, tem um efeito nas massas do Higgs, devido a uma mistura com os dubletos de Higgs. O potencial V_{esc} recebe uma contribuição devido aos bósons Higgs que estará diretamente relacionada às posibilidades de quebra de simetria. Vamos então descrever o potencial para os bósons de Higgs no MSSM.

Supercampos	Férmions	Escalares
U_i, D_i	u_i, d_i	$\tilde{u}_i, \tilde{d}_i$
$\bar{U}_i, \bar{D}_i$	u_i^c, d_i^c	$\tilde{u}_i^c, \tilde{d}_i^c$
E_i, N_i	e_i, ν_i	$\tilde{e}_i, \tilde{\nu}_i$
$\bar{E}_i, \bar{N}_i$	e_i^c, ν_i^c	$\tilde{e}_i^c, \tilde{\nu}_i^c$
H_1^0, H_2^0	$\tilde{h}_1^0, \tilde{h}_2^0$	h_1^0, h_2^0
H_1^-, H_2^+	$\tilde{h}_1^-, \tilde{h}_2^+$	h_1^-, h_2^+

Tabela 4.1: Notação utilizada no texto para os supercampos quirais e suas componentes. O índice $i = 1, 2, 3$ representa as gerações de quarks e léptons no MSSM.

No potencial (3.23) os termos F e D são as soluções (3.22) e (3.21). Portanto, o potencial depende diretamente dos campos de Higgs do SM:

$$h_1^{\mathrm{T}} = (h_1^0, h_1^-) \,, \qquad h_2^{\mathrm{T}} = (h_2^+, h_2^0) \,. \tag{4.12}$$

Correspondente aos fatores D temos

$$D^a = \frac{g}{2}\left(h_1^\dagger \sigma^a h_1\right) + \frac{g}{2}\left(h_2^\dagger \sigma^a h_2\right) \,, \tag{4.13}$$

$$D_Y = \frac{g'}{2}\left(h_2^\dagger h_2\right) - \frac{g'}{2}\left(h_1^\dagger h_1\right) \,. \tag{4.14}$$

(Onde $T^a = \sigma^a/2$ são os geradores para SU(2), e as matrizes σ^a com $a = 1, 2, 3$, são as matrizes de Pauli. A partir de agora não escrevemos mais entre parêntesis os índices associados ao grupo de gauge, como no capítulo anterior.) É importante notar que o sinal em (4.14) depende da definição da *hipercarga* Y. Adotamos aqui a definição

$$Y = 2(Q - T_3) \,. \tag{4.15}$$

Na literatura, Y pode aparecer sem o fator 2, ou com o sinal contrário [15]. Porém, com esta definição as hipercargas de h_1, h_2 são $-1, +1$ respectivamente, que correspondem às cargas de uma de suas componentes. A contribuição para o potencial devido a (4.13) e (4.14) pode ser expressa

$$\begin{aligned} V_{D-\text{term}} &= \frac{1}{2}D^a D^a + \frac{1}{2}D_Y^2 \\ &= \frac{g^2}{8}\left[(h_1^\dagger \sigma^a h_1) + (h_2^\dagger \sigma^a h_2)\right]^2 + \frac{g'^2}{8}\left[(h_2^\dagger h_2) - (h_1^\dagger h_1)\right]^2 . \end{aligned}$$

A relação anterior pode ser escrita de forma conveniente utilizando propriedades das matrizes σ (para detalhes ver Apêndice D). Dessa forma, a contribuição devido ao termo D fica escrita como

$$V_{D-\text{term}} = \frac{g^2}{2}\left|(h_1^\dagger h_2)\right|^2 + \frac{g^2+g'^2}{8}\left[(h_2^\dagger h_2) - (h_1^\dagger h_1)\right]^2 . \tag{4.16}$$

Por outro lado, voltando à Lagrangeana (4.8) reconhecemos um fator associado ao potencial escalar proveniente dos termos F (mais precisamente devido ao μ-term). Assim, temos também uma contribução

$$V_{\mu-\text{term}} = \sum_i \left|\frac{\partial f(\Phi)}{\partial h_{1i}}\right|^2 + \left|\frac{\partial f(\Phi)}{\partial h_{2i}}\right|^2 = |\mu|^2\left[(h_2^\dagger h_2) + (h_1^\dagger h_1)\right] . \tag{4.17}$$

(Do mesmo modo que no capítulo anterior, a função $f(\Phi)$ representa o superpotencial da Lagrangeana (4.8), excluída a parte "soft").

Para $\mu \neq 0$ o potencial $V_{D-\text{term}} + V_{\mu-\text{term}}$ apresenta um valor mínimo zero, num único ponto, $h_1 = h_2 = 0$. Conseqüentemente com estes dois termos no potencial escalar, nem SU(2)⊗U(1)$_Y$ nem a supersimetria podem ser quebradas. Este é um exemplo da dificuldade na tentativa de quebrar supersimetria espontaneamente a partir de generalizações mínimas do SM.

Devido aos termos soft, temos ainda outra contribuição para o potencial escalar, que pode ser escrita como:

$$V_{m-\text{soft}} = m_1^2(h_1^\dagger h_1) + m_2^2(h_2^\dagger h_2) + \text{Re}\left(B\mu[h_2^+ h_1^- - h_2^0 h_1^0]\right) . \tag{4.18}$$

O potencial escalar finalmente é constituido pela soma de (4.16), (4.17) e (4.18). Explicitamente a contribuição devida a estes termos fica expressa em função dos bósons de Higgs na forma:

$$
\begin{aligned}
V &= V_{D-\text{term}} + V_{\mu-\text{term}} + V_{m-\text{soft}} \\
&= \frac{g^2}{2}\left|(h_1^\dagger h_2)\right|^2 + \frac{g^2+g'^2}{8}\left[(h_2^\dagger h_2) - (h_1^\dagger h_1)\right]^2 \\
&\quad + (m_1^2 + |\mu|^2)(h_1^\dagger h_1) + (m_2^2 + |\mu|^2)(h_2^\dagger h_2) + B\mu\,\mathrm{Re}\left[h_2^+ h_1^- - h_2^0 h_1^0\right] .
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Onde escolhemos a constante $B\mu$ positiva definida. Na expressão anterior as quantidades $|\mu|, m_1^2$ e m_2^2 só aparecem em combinações específicas: $m_i^2 + |\mu|^2$. Além disso, o potencial escalar contém uma primeira limitação para os parâmetros soft m_i^2. A condição surge da imposição de que V esteja limitado inferiormente. Uma vez que os campos escalares podem adquirir valores arbitrariamente grandes, a contribuição principal em (4.19) aparece nos termos quárticos $V_{D-\text{term}}$. Existem valores especiais para os quais $V_{D-\text{term}}$ é zero. Especificamente

$$
h_1^{\mathrm{T}} = (\phi, 0)\,, \qquad h_2^{\mathrm{T}} = (0, \phi)\,, \tag{4.20}
$$

onde ϕ pode assumir valores complexos, anulam $V_{D-\text{term}}$ e resultam em valores para o potencial

$$
V = (2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2)|\phi|^2 - B\mu\,\mathrm{Re}\,\phi^2\,. \tag{4.21}
$$

Como $B\mu$ é positivo definido em (4.9), para que V não seja arbitrariamente negativo quando $\phi \to +\infty$, é necessário que em (4.21) o primeiro termo seja dominante. Conseqüentemente

$$
2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2 \geq B\mu\,. \tag{4.22}
$$

(Isto que dizer que as massas m_i^2, estão relacionadas com os outros parâmetros soft μ e B).

Para encontrar o ponto estacionário, basta analizar o potencial como função das componetes neutras dos Higgs (4.12), h_1^0, h_2^0. Definimos esta contribuição como $V^{(\mathrm{N})}$. Segundo (4.19)

$$
\begin{aligned}
V^{(\mathrm{N})} &= \frac{g^2+g'^2}{8}\left[|h_2^0|^2 - |h_1^0|^2\right]^2 + (m_1^2 + |\mu|^2)|h_1^0|^2 + (m_2^2 + |\mu|^2)|h_2^0|^2 \\
&\quad - B\mu\,\mathrm{Re}(h_1^0 h_2^0)\,.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Para encontrar o ponto estacionário expandimos $V^{(\mathrm{N})}$, definindo os h_i^0 com relação a novos campos ϕ_i, e constantes v_i

$$h_i^0 = v_i + \phi_i\,. \tag{4.24}$$

Para que os v_i sejam pontos estacionários, os termos lineares em ϕ_i devem ser zero. Estas duas condições resultam nas equações (para detalhes ver Apêndice D)

$$(m_1^2 + |\mu|^2)v_1 + \frac{g^2+g'^2}{4}(v_1^2 - v_2^2)v_1 - \frac{1}{2}B\mu\, v_2 = 0\,, \tag{4.25}$$

$$(m_2^2 + |\mu|^2)v_2 + \frac{g^2+g'^2}{4}(v_2^2 - v_1^2)v_2 - \frac{1}{2}B\mu\, v_1 = 0\,. \tag{4.26}$$

As condições anteriores são utilizadas para escrever os parâmetros de massa em termos de quantidades "convenientes" (associadas a quantidades físicas). Definimos para tal

$$\tan\beta = v_2/v_1\,, \quad m_Z^2 = \frac{1}{2}(g^2+g'^2)(v_1^2+v_2^2)\,, \tag{4.27}$$

$$m_A^2 = 2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2\,. \tag{4.28}$$

(O parâmetro m_Z é a massa do bóson Z, e como veremos, m_A é a massa de um escalar). Multiplicando as eq's (4.25) e (4.26) por v_2 e v_1 respectivamente, somando e subtraindo consecutivamente obtemos:

$$B\mu = m_A^2 \sin 2\beta\,, \tag{4.29}$$

$$m_1^2 - m_2^2 = -(m_A^2 + m_Z^2)\cos 2\beta\,. \tag{4.30}$$

Utilizando a definição para m_A^2 obtem-se

$$m_1^2 + |\mu|^2 = \frac{1}{2}m_A^2 - \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\cos 2\beta\,, \tag{4.31}$$

$$m_2^2 + |\mu|^2 = \frac{1}{2}m_A^2 + \frac{1}{2}(m_A^2 + m_Z^2)\cos 2\beta\,. \tag{4.32}$$

Uma vez estabelecidas as condições para o ponto estacionário, o potencial apresentará (desconsiderando os termos constantes e de ordem superior), apenas termos quadráticos. Utilizando (4.29), (4.31) e (4.32) é possível escrever o potencial (para detalhes ver Apêndice D)

$$\begin{aligned} V^{(\mathrm{N})}_{\mathrm{quad}} &= m_Z^2\,[\mathrm{Re}(\cos\beta\,\phi_1 - \sin\beta\,\phi_2)]^2 + \frac{1}{2}m_A^2\left(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}m_A^2\cos 2\beta\left(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2\right) - m_A^2\sin 2\beta\,\mathrm{Re}(\phi_1\phi_2)\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Da expresão anterior escrevemos diretamente as matrizes de massa para as partes imaginária e real dos ϕ_i's

$$M^2_{\mathrm{Im}\,\phi} = \frac{1}{2} m_A^2 \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & 1 + \cos 2\beta \end{pmatrix} .$$

O determinante desta matriz é zero, assim um de seus autovalores é zero e, o outro é igual a seu traço m_A^2. Assim, como comentamos anteriormente, este valor corresponde à massa de um dos escalares neutros e deve ser positivo se $\phi_i = v_i$ são mínimos locais do potencial. Como m_A^2 é associada à parte imaginaria, chamamos o escalar A de pseudo-escalar. As relações (4.29) e (4.22) implicam que $0 \leq \beta \leq \pi/2$. Similarmente para a parte real

$$M^2_{\mathrm{Re}\,\phi} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} ,$$

onde definimos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} m_A^2 (1 - \cos 2\beta) + \frac{1}{2} m_Z^2 (1 + \cos 2\beta) , \\ B &= -\frac{1}{2} (m_A^2 + m_Z^2) \sin 2\beta , \\ C &= \frac{1}{2} m_A^2 (1 + \cos 2\beta) + \frac{1}{2} m_Z^2 (1 - \cos 2\beta) . \end{aligned}$$

A equação secular pode ser resolvida de forma simples (ver Apêndice D), e obtemos dois autovalores

$$m_H^2 = \frac{1}{2} \left[m_A^2 + m_Z^2 + \sqrt{(m_A^2 - m_Z^2)^2 + 4 m_A^2 m_Z^2 \sin^2 2\beta} \right] , \tag{4.34}$$

$$m_h^2 = \frac{1}{2} \left[m_A^2 + m_Z^2 - \sqrt{(m_A^2 - m_Z^2)^2 + 4 m_A^2 m_Z^2 \sin^2 2\beta} \right] . \tag{4.35}$$

Ainda sem conhecer m_A e β, estas soluções estabelecem magnitudes relativas para as massas dos escalares. De (4.34) é claro que a massa do escalar neutro maior, m_H, é maior que m_Z e m_A. Similarmente, m_h é menor que m_Z e m_A. Porém, tal relação entre as massas é afetada por correções radiativas.

Por último, devemos calcular as massas dos escalares carregados, que pode ser feito considerando, na parte neutra, apenas os valores esperados,

$$h_1^{\mathrm{T}} = (v_1, h_1^-) , \qquad h_2^{\mathrm{T}} = (h_2^+, v_2) , \tag{4.36}$$

utilizando as definições para m_Z^2, as relações (4.31), (4.32) e definindo

$$m_W^2 = \frac{1}{2} g^2 (v_1^2 + v_2^2) \tag{4.37}$$

se obtém de (4.19) a parte quadrática do potencial para os escalares carregados (para detalhes ver Apêndice D)

$$\begin{aligned} V_{\text{quad}}^{(\text{C})} &= \frac{1}{2}(m_W^2 + m_A^2)\left[(1-\cos 2\beta)|h_1^-|^2 + (1+\cos 2\beta)|h_2^+|^2\right] \\ &\quad + (m_W^2 + m_A^2)\sin 2\beta\, \text{Re}(h_1^- h_2^+)\,. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Da expressão anterior temos associadas matrizes para as partes reais e imaginarias de h_1^- e h_2^+. No caso das componentes reais a matriz é

$$M_{\text{Re}\,h^\pm}^2 = \frac{1}{2}(m_W^2 + m_A^2)\begin{pmatrix} 1-\cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & 1+\cos 2\beta \end{pmatrix}.$$

(A matriz para a parte imaginaria é praticamente idêntica, a única diferença é um sinal negativo na antidiagonal, devido ao sinal relativo em $\text{Re}(h_1^- h_2^+)$ para as componentes reais e imaginárias. Assim o determinante é idêntico). O determinante de $M_{\text{Re}\,h^\pm}^2$ é zero, ou seja, o valor de uma das massas é zero, conseqüentemente a outra é igual ao traço, isto é

$$m_C^2 = m_W^2 + m_A^2\,. \tag{4.39}$$

Esta relação nos indica que a massa dos escalares carregados é maior que m_W e m_A. Porém, novamente tais relações recebem contribuições devido às correções radiativas. Ainda assim, constituem uma indicação da ordem de grandeza das massas dos escalares.

Como comentamos antes, no setor do Higgs aparecem os dois parâmetros livres restantes no MSSM. Um deles é o valor de $\tan\beta$ definido em (4.27). O parâmetro B pode ser determinado em função de β, μ e a massa m_0 utilizando a relação (4.29) na escala de unificação, e não constitui um grau de liberdade do MSSM. Também é possível determinar o valor absoluto de μ utilizando (4.31) ou (4.32) na escala de unificação. Assim, do parâmetro μ apenas o sinal de μ representa um grau de liberdade. Tal fato é comumente utilizado na fenomenologia [5, 16].

4.6 Interação entre Gauginos e Higgsinos

No modelo supersimétrico os higgsinos e gauginos não são autoestados de massa. Entretanto, combinações lineares destes campos têm massa definida, são chamados *charginos* e *neutralinos*. Ambos têm um papel fundamental na fenomenologia dos modelos supersimétricos, em especial no MSSM. Nesta seção descrevemos com algum detalhe como aparecem os autoestados de massa, e partindo dos termos da Lagrangeana que geram as contribuções relacionadas aos neutralinos e charginos, deduzimos as respectivas matrizes de massa.

Mostramos no final do Capítulo 3 que termos do tipo $\Phi^\dagger e^V \Phi$ contêm interações entre a parte gauge e a parte quiral do modelo. No caso em que o campo Φ é igual a H_1 e H_2, estes termos contêm interações entre bósons de gauge, gauginos, Higgs e higgsinos. As interações entre os três últimos surgem do termo:

$$-i\sqrt{2}\left[\bar{\psi}\bar{\lambda}A - A^\dagger\lambda\psi\right] = i\sqrt{2}\left[A^\dagger T^{(a)}\lambda^{(a)}\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}^{(a)}T^{(a)}A\right]. \tag{4.40}$$

Os geradores $T^{(a)} = g\sigma^a/2$, onde as matrizes σ^a com $a = 1,2,3$, são as matrizes de Pauli, e $T^{(a)} = g'Y/2$ para $a = 0$, correspondem aos geradores do grupo SU(2)⊗U(1)$_Y$. Definindo $\sqrt{2}\lambda^\pm = \lambda^1 \mp i\lambda^2$ é possível escrever

$$T^{(a)}\lambda^{(a)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g'\lambda'Y + g\lambda^3 & \sqrt{2}g\lambda^+ \\ \sqrt{2}g\lambda^- & g'\lambda'Y - g\lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Uma expressão similar é obtida para $\bar{\lambda}^{(a)}T^{(a)}$. No caso em que os supercampos $\Phi = H_1, H_2$, as componentes escalares $A = h_1, h_2$ são os higgs, onde

$$h_1^{\mathrm{T}} = (h_1^0, h_1^-)\,, \quad h_2^{\mathrm{T}} = (h_2^+, h_2^0)\,. \tag{4.41}$$

Conseqüentemente $\psi = \tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ são os higgsinos, que podem ser expressos também na forma de dubletos como:

$$\tilde{h}_1^{\mathrm{T}} = (\tilde{h}_1^0, \tilde{h}_1^-)\,, \quad \tilde{h}_2^{\mathrm{T}} = (\tilde{h}_2^+, \tilde{h}_2^0)\,. \tag{4.42}$$

Devido aos valores esperados para os bósons de Higgs, termos de massa não diagonais para higgsinos e gauginos aparecem de forma natural em (4.40), que pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{L}_{h\lambda\tilde{h}} = i\sqrt{2}\sum_{i=1}^{2}\left[h_i^{\dagger}T^{(a)}\lambda^{(a)}\tilde{h}_i - \bar{\tilde{h}}_i\bar{\lambda}^{(a)}T^{(a)}h_i\right] . \tag{4.43}$$

Por outro lado, uma parte de $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ contém termos de massa para os gauginos, em particular para os "winos" e "binos". A contribuição é do tipo

$$\mathcal{L}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}\left[M_2\lambda_W^{(a)}\lambda_W^{(a)} + M_1\lambda_b\lambda_b + \text{h.c.}\right] . \tag{4.44}$$

(Neste caso $a = 1, 2, 3.$ são os índices da parte não abeliana de grupo). Também aparece uma mistura devido apenas a higgsinos no μ-term

$$\mu\left[H_2^+H_1^- - H_2^0H_1^0\right]_{\theta\theta} = -\mu\left[\tilde{h}_2^+\tilde{h}_1^- - \tilde{h}_2^0\tilde{h}_1^0\right] . \tag{4.45}$$

Assim, temos que levar em conta uma contribuição a mais

$$\mathcal{L}_{\tilde{h}\tilde{h}} = -\mu\left[\tilde{h}_2^+\tilde{h}_1^- - \tilde{h}_2^0\tilde{h}_1^0\right] + \text{h.c.} \tag{4.46}$$

Os autoestados de massa aparecem diretamente de (4.43), (4.44) e (4.46) quando substituimos os bósons de Higgs por seus valores esperados, v_i. Existem dois tipos de mistura: uma devido apenas a campos carregados, que define a matriz de massa dos charginos; e outra devido somente a campos neutros, que define a matriz de massa dos neutralinos.

4.7 Charginos

O termo de mistura em (4.43) que contém apenas campos carregados, pode ser identificado tomando os bósons de Higgs e higgsinos na forma:

$$h_1^{\mathrm{T}} = (v_1, 0)\,, \quad h_2^{\mathrm{T}} = (0, v_2)\,, \tag{4.47}$$

$$\tilde{h}_1^{\mathrm{T}} = (0, \tilde{h}_1^-)\,, \quad \tilde{h}_2^{\mathrm{T}} = (\tilde{h}_2^+, 0)\,. \tag{4.48}$$

Assim, de (4.43) temos uma contribuição devido a H_1

$$h_1^{\dagger}T^{(a)}\lambda^{(a)}\tilde{h}_1 = \frac{1}{2}(v_1, 0)\begin{pmatrix} g'\lambda'Y + g\lambda^3 & \sqrt{2}g\lambda^+ \\ \sqrt{2}g\lambda^- & g'\lambda'Y - g\lambda^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h}_1^- \end{pmatrix} ,$$

o termo diferente de zero pode ser expresso utilizando as definições de m_W e $\tan\beta$ como

$$h_1^\dagger T^{(a)} \lambda^{(a)} \tilde{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 g\,(\lambda^+ \tilde{h}_1^-) = m_W \cos\beta\,(\lambda^+ \tilde{h}_1^-)\,. \tag{4.49}$$

De forma similar,

$$\bar{\tilde{h}}_1 \bar{\lambda}^{(a)} T^{(a)} h_1 = \frac{1}{2}(0, \tilde{h}_1^{-*}) \begin{pmatrix} g'\bar{\lambda}'Y + g\bar{\lambda}^3 & \sqrt{2}g\bar{\lambda}^+ \\ \sqrt{2}g\bar{\lambda}^- & g'\bar{\lambda}'Y - g\bar{\lambda}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que pode ser escrito na forma

$$\bar{\tilde{h}}_1 \bar{\lambda}^{(a)} T^{(a)} h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 g\,(\bar{\lambda}^- \tilde{h}_1^{-*}) = m_W \cos\beta\,(\bar{\lambda}^- \tilde{h}_1^{-*})\,. \tag{4.50}$$

(Note que (4.50) é o hermitiano conjugado de (4.49), o que também pode ser reconhecido diretamente de (4.40) para um supercampo qualquer) De maneira idêntica obtemos para H_2

$$h_2^\dagger T^{(a)} \lambda^{(a)} \tilde{h}_2 = m_W \sin\beta\,(\lambda^- \tilde{h}_2^+)\,, \tag{4.51}$$

$$\bar{\tilde{h}}_2 \bar{\lambda}^{(a)} T^{(a)} h_2 = m_W \sin\beta\,(\tilde{h}_2^{+*} \bar{\lambda}^+)\,. \tag{4.52}$$

Utilizando (4.49)-(4.52) obtemos uma contribuição devido a (4.43) no caso das componentes carregadas. Esta contribuição, junto com (4.44) e (4.46) completam a expressão para a matriz de massa dos charginos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\chi}} \;=\; & -\sqrt{2}\, m_W \left[\cos\beta\,(-i\lambda^+ \tilde{h}_1^-) + \sin\beta\,(-i\lambda^- \tilde{h}_2^+)\right] \\ & + \frac{1}{2} M_2 \left[\lambda^+\lambda^- + \lambda^-\lambda^+\right] - \mu\, \tilde{h}_2^+ \tilde{h}_1^- + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{4.53}$$

Definindo

$$\psi^{+\mathrm{T}} = (-i\lambda^+, \tilde{h}_2^+)\,, \quad \psi^{-\mathrm{T}} = (-i\lambda^-, \tilde{h}_1^-)\,, \tag{4.54}$$

a expressão (4.53) pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}} = -\frac{1}{2}\left[\psi^{-\mathrm{T}} X \psi^+ + \psi^{+\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} \psi^-\right] + \text{h.c.} \tag{4.55}$$

onde a matriz

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}\, m_W \sin\beta \\ \sqrt{2}\, m_W \cos\beta & \mu \end{pmatrix}.$$

Como na expressão (4.55) aparecem dois tipos de espinores, precisamos de duas matrizes independentes para diagonalizar X. Definindo as combinações apropriadas

$$\chi^+ = V\psi^+ \,, \qquad \chi^- = U\psi^- \,, \tag{4.56}$$

onde V, U são matrizes unitárias, é possível diagonalizar X e escrever (4.53) na forma final (para detalhes ver Apêndice E)

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}} = -m_{\tilde{\chi}_1}\, \tilde{\chi}_1^\dagger \gamma_0 \tilde{\chi}_1 - m_{\tilde{\chi}_2}\, \tilde{\chi}_2^\dagger \gamma_0 \tilde{\chi}_2 \,. \tag{4.57}$$

Nesta expressão definimos os espinores de 4-componentes, $\tilde{\chi}_i$, utilizando os espinores de 2-componentes (4.56) na forma:

$$\tilde{\chi}_1^{\mathrm{T}} = (\chi_1^+, \bar{\chi}_1^-) \,, \qquad \tilde{\chi}_2^{\mathrm{T}} = (\chi_2^+, \bar{\chi}_2^-) \,. \tag{4.58}$$

Estes espinores são os charginos, apresentam uma carga positiva e suas massas, $m_{\tilde{\chi}_i}$, são os autovalores de X, que dependem dos parâmetros soft M_2, μ e do valor de $\tan\beta$. Utilizando a notação usual para espinores de Dirac $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$, a expressão (4.57) também pode ser escrita numa forma compacta:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}} = -\sum_{i=1}^{2} m_{\tilde{\chi}_i}\, \bar{\tilde{\chi}}_i \tilde{\chi}_i \,. \tag{4.59}$$

4.8 Neutralinos

Da mesma forma que no caso dos charginos, da mistura entre gauginos e higgsinos neutros obtemos autoestados de massa, chamados *neutralinos*. Para encontrá-los é suficente escolher os bósons de Higgs iguais a seus valores esperados no vácuo, v_i, e os higgsinos na forma:

$$\tilde{h}_1^{\mathrm{T}} = (\tilde{h}_1^0, 0) \,, \quad \tilde{h}_2^{\mathrm{T}} = (0, \tilde{h}_2^0) \,. \tag{4.60}$$

Deste modo o termo

$$h_1^\dagger T^{(a)} \lambda^{(a)} \tilde{h}_1 = \frac{1}{2}(v_1, 0) \begin{pmatrix} g'\lambda' Y + g\lambda^3 & \sqrt{2} g \lambda^+ \\ \sqrt{2} g \lambda^- & g'\lambda' Y - g\lambda^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

contribui apenas com um termo, e como a hipercarga de h_1 é $Y = -1$ o resultado se escreve:

$$h_1^\dagger T^{(a)} \lambda^{(a)} \tilde{h}_1 = \frac{1}{2} v_1 (-g'\lambda' + g\lambda^3) \tilde{h}_1^0 \,. \tag{4.61}$$

Similarmente, para h_2

$$h_2^\dagger T^{(a)}\lambda^{(a)}\tilde{h}_2 = \frac{1}{2}(0, v_2)\begin{pmatrix} g'\lambda' Y + g\lambda^3 & \sqrt{2}g\lambda^+ \\ \sqrt{2}g\lambda^- & g'\lambda' Y - g\lambda^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h}_2^0 \end{pmatrix},$$

como a hipercarga de h_2 é contrária à de h_1, o produto anterior adquire a forma:

$$h_2^\dagger T^{(a)}\lambda^{(a)}\tilde{h}_2 = \frac{1}{2}v_2(g'\lambda' - g\lambda^3)\tilde{h}_2^0 . \tag{4.62}$$

Os demais termos que aparecem devido a (4.43), como foi comentado anteriormente, são os hermitianos conjugados de (4.61) e (4.62). Reunindo estas contribuções, com as de (4.44) e (4.46) escrevemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0} &= \frac{i}{2}\sqrt{2}\left[v_1(-g'\lambda' + g\lambda^3)\tilde{h}_1^0 + v_2(g'\lambda' - g\lambda^3)\tilde{h}_2^0\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[M_2\lambda^3\lambda^3 + M_1\lambda'\lambda'\right] + \mu(\tilde{h}_1^0\tilde{h}_2^0) + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{4.63}$$

(Onde identificamos λ^3 e λ' com λ_W^3 e λ_b respectivamente) Definindo o multipleto

$$\psi^{0^{\mathrm{T}}} = (-i\lambda', -i\lambda^3, \tilde{h}_1^0, \tilde{h}_2^0), \tag{4.64}$$

é possível escrever $\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0}$ na forma:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0} = -\frac{1}{2}\psi^{0^T}X^0\psi^0 + \text{h.c.}, \tag{4.65}$$

onde a matriz X^0 apresenta a forma

$$X^0 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\frac{v_1}{\sqrt{2}}g' & \frac{v_2}{\sqrt{2}}g' \\ 0 & M_2 & \frac{v_1}{\sqrt{2}}g & -\frac{v_2}{\sqrt{2}}g \\ -\frac{v_1}{\sqrt{2}}g' & \frac{v_1}{\sqrt{2}}g & 0 & -\mu \\ \frac{v_2}{\sqrt{2}}g' & -\frac{v_2}{\sqrt{2}}g & -\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Da mesma maneira que no caso dos charginos, as entradas da matriz X^0 podem ser diretamente definidas em termos de $\tan\beta$ e m_Z. Do SM temos a relação entre as massas $m_W = m_Z\cos\theta_{\mathrm{W}}$, onde

$$\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \tag{4.66}$$

fazendo uso de tal relação é possível expressar as componentes de X^0como:

$$v_1 g = \sqrt{2}\, m_Z \cos\theta_\mathrm{W} \cos\beta\,, \quad v_1 g' = \sqrt{2}\, m_Z \sin\theta_\mathrm{W} \cos\beta\,,$$

$$v_2 g = \sqrt{2}\, m_Z \cos\theta_\mathrm{W} \sin\beta\,, \quad v_2 g' = \sqrt{2}\, m_Z \sin\theta_\mathrm{W} \sin\beta\,.$$

Que é a forma como foi apresentada a matriz de massa dos neutralinos por J.F. Gunion and H. Haber [11] em meados dos anos 80. A matriz X^0 pode ser diagonalizada por uma matriz unitária, que denotamos por N_{ij}. Definindo $\chi_i^0 = N_{ij}\psi_j^0$, e os espinores de majorana

$$\tilde{\chi}_i^{0\,\mathrm{T}} = (\chi_i^0, \bar{\chi}_i^0)\,, \qquad i = 1, ..., 4. \tag{4.67}$$

é possível escrever (4.65) na forma

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_{\tilde{\chi}_i^0}\, \tilde{\chi}_i^{0\dagger}\gamma_0\tilde{\chi}_i^0\,. \tag{4.68}$$

Analogamente ao caso dos charginos, poderíamos ter denotado $\tilde{\chi}^\dagger\gamma_0$ por $\bar{\tilde{\chi}}$. As massas $m_{\tilde{\chi}_i^0}$ são os autovalores de X^0. Novamente, estes autovalores não estão fixos, e dependem dos valores soft M_2, M_1, μ, e de $\tan\beta$.

Capítulo 5

Produção e Decaimento de Charginos e Neutralinos: Um exemplo

Existem importantes implicações dos resultados obtidos no Capítulo 4 que são amplamente estudados com o objetivo de se verificar a existência da supersimetria. Este capítulo está destinado a apresentar, de forma resumida, aspectos fenomenológicos do MSSM.

Uma das diferenças importantes entre o MSSM e o SM é a necessidade de se introduzir dois dubletos de supercampos para os bóson de Higgs, gerando três estados neutros, A, h, e H, e dois carregados h^+ e h^-. Outra diferença importante surge dos parceiros supersimétricos dos bóson de Higgs, que aparecem misturados com os winos e binos em três contribuições da Lagrangeana. Esta mistura permite definir os charginos e neutralinos, denotados como $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$ e $\tilde{\chi}_i^0$, respectivamente (com $i = 1, 2, 3, 4.$). Na literatura estes estados também podem aparecer denotados numa forma diferente, a saber os charginos aparecem como $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2$ e os neutralinos como $\tilde{Z}_i$ [5, 16]. Por convenção é escolhido $\tilde{W}_1$ como o chargino de menor massa, e $\tilde{Z}_1$ como o neutralino de menor massa. Por outro lado, como a partícula supersimétrica mais leve deve ser neutra [2], é sugerido que seja um dos neutralinos. Assim, como conseqüência da paridade R, $\tilde{Z}_1$ deve ser uma partícula estável, denotada pela sigla LSP (uma abreviação de seu nome em inglês *lightest supersymmetric particle*).

5.1 Forma Numérica das Matrizes de Mistura dos Charginos e Neutralinos

Na última seção do Capítulo 4, vimos de forma esquemática como diagonalizar as matrizes para charginos, X, e neutralinos, X^0. Porém não escrevemos as matrizes que diagonalizam as mesmas, em termos dos parâmetros M_1, M_2, μ, e $\tan\beta$. A razão para tal é que existem programas que calculam estes parâmetros, assim como as entradas das matrizes V, U e N. Um dos programas existentes que calcula, além destes parâmetros, as massas das partículas para o MSSM, é chamado SuSpect (um abreviação de *Susy Spectrum*). O programa, na sua versão SusSpect 2.1 [17] utiliza o grupo de renormalização (RGE) para calcular a evolução dos parâmetros da escala M_X a uma escala de energia de TeV's. O valor definido no programa para a escala de unificação é $M_X = 2 \times 10^{16}\,\text{GeV}$. Em particular, o programa utiliza o RGE a 1-loop para calcular as massas dos escalares e os acoplamentos trilineares, e utiliza o RGE a 2-loops para calcular as massas dos gauginos.

Para efeito de comparação com resultados conhecidos [5], consideramos os valores dos parâmetros na escala M_X e utilizamos no programa SuSpect 2.1 $\tan\beta = 2$, $\mu < 0$ e os valores dos parâmetros *soft*

$$m_0 = 200\,\text{GeV}\,, \quad m_{1/2} = 165\,\text{GeV}\,, \quad A_0 = 0\,. \tag{5.1}$$

Obtivemos os valores para as massas dos charginos e neutralinos:

$$M_{\tilde{W}_1} = 140.2 \text{ GeV}\,, \tag{5.2}$$

$$M_{\tilde{Z}_1} = 69.02 \text{ GeV}\,, \tag{5.3}$$

assim como os valores numéricos para as matrizes que diagonalizam a matriz de charginos

$$U = \begin{pmatrix} 0.9674 & 0.2533 \\ 0.2533 & -0.9674 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0.9990 & 0.04476 \\ -0.04476 & 0.9990 \end{pmatrix},$$

e para a matriz que diagonaliza a matriz de neutralinos

$$N = \begin{pmatrix} 0.9921 & 0.08560 & -0.08624 & 0.03085 \\ 0.06708 & -0.9791 & -0.1898 & 0.02910 \\ 0.04746 & -0.1097 & 0.6918 & 0.7121 \\ 0.09468 & -0.1484 & 0.6913 & -0.7008 \end{pmatrix}.$$

Estes resultados nos permitem ter uma idéia da forma como são misturados os higgsinos e gauginos para formar autoestados de massa, quando são escolhidos valores típicos dos parâmetros do modelo. De fato, neste caso $\tilde{\chi}_1$ é essencialmente composto de gauginos, e $\tilde{\chi}_2$ é essencialmente constituído de higgsinos. No caso dos neutralinos, $\tilde{\chi}_1^0$ e $\tilde{\chi}_2^0$ são também principalmente compostos de gauginos. Os dois neutralinos restantes são principalmente misturas de higgsinos.

Ainda que os resultados das misturas dependam dos valores escolhidos em (5.1), e constituam apenas um exemplo, valores dos parâmetros na escala de unificação sugerem resultados similares, isto é, permitem prever quais interações (via gauge, ou via setor de Higgs) são mais relevantes nos processos que contém charginos e neutralinos.

Dentre os possíveis sinais estudados com o objetivo de se verificar a supersimetria, um dos mais promissores é aquele cujo estado final contém léptons carregados. Estudaremos a seguir, de forma introdutória, o caso da produção de três léptons no acelerador Tevatron-Fermilab, comparando os nossos resultados com resultados conhecidos [5].

5.2 Produção de Charginos e Neutralinos

Os charginos e neutralinos são de grande importância na fenomenologia do MSSM, e podem ser produzidos em colisões de próton-próton e próton-antipróton a escalas de energia de TeV's. Por exemplo, no acelerador Tevatron-Fermilab, para a energia do centro de massa de 2 TeV, devido a que nessa escala de energia apresenta o maior valor da seção de choque [5], é

$$p\,\bar{p} \longrightarrow \tilde{W}_1 \tilde{Z}_2 \,. \tag{5.4}$$

No contexto do MSSM, charginos e neutralinos podem se desintegrar em charginos e neutralinos de menor massa, bósons de gauge, bósons Higgs, ou em pares de férmion-antiférmion. Caso os decaimentos a dois corpos não sejam cinematicamente permitidos, os charginos e neutralinos podem decair em processos de três corpos, como por exemplo:

$$\tilde{W}_2 \longrightarrow f'\bar{f}\tilde{Z}_j\,, \quad \tilde{W}_2 \longrightarrow f\bar{f}\tilde{W}_1\,, \tag{5.5}$$

$$\tilde{W}_1 \longrightarrow f'\bar{f}\tilde{Z}_j\,, \tag{5.6}$$

$$\tilde{Z}_i \longrightarrow f'\bar{f}\tilde{W}_1\,, \quad \tilde{Z}_i \longrightarrow f\bar{f}\tilde{Z}_j\,, \tag{5.7}$$

onde $f', \bar{f}$ representam férmions e antiférmions respectivamente. Em particular, segundo (5.6) e (5.7) são permitidos os decaimentos no LSP

$$\tilde{W}_1 \longrightarrow f'\bar{f}\tilde{Z}_1\,, \tag{5.8}$$

$$\tilde{Z}_2 \longrightarrow f\bar{f}\tilde{Z}_1\,. \tag{5.9}$$

Para calcular a *largura do decaimento* de tais processos utilizamos o programa CalcHEP 2.1 [18]. Este programa é uma continuação do CompHEP e permite calcular seções de choque e larguras de decaimento em ordem mais baixa em teoria de perturbações (*tree level*). A versão CalcHEP 2.1 contém o SM, o MSSM e permite a modificação dos parâmetros do modelo. O programa é dividido em duas partes, uma simbólica, na qual é possível escrever todos os diagramas para um processo; e uma parte numérica, que permite calcular seções de choque e larguras de decaimento. Entretanto, para processar os dados, o CalcHEP utiliza valores definidos para os parâmetros na escala de TeV's. Em particular para os processos (5.8) e (5.9), o CalcHEP 2.1 utiliza, além do valor de $m_{\tilde{g}}$ da Tabela 1, valores para $\tan\beta$, M_1, M_2 e M_3; como também valores para as massas dos squarks e sléptons. Todos estes valores são saídas do SuSpect. Com o CalcHEP 2.1 obtemos as larguras

$$\mathrm{BR}(\tilde{W}_1) = \frac{\Gamma(\tilde{W}_1 \longrightarrow l'\bar{l}\tilde{Z}_1)}{\Gamma_{\mathrm{tot}}} \simeq 0.35\,, \tag{5.10}$$

$$\mathrm{BR}(\tilde{Z}_2) = \frac{\Gamma(\tilde{Z}_2 \longrightarrow l\bar{l}\tilde{Z}_1)}{\Gamma_{\mathrm{tot}}} \simeq 0.17\,, \tag{5.11}$$

onde $\bar{l}$ representa antiléptons cargados ($l = e, \mu, \tau$), e l' representam os respectivos neutrinos.

Por outro lado, a massa dos gluínos e os bósons de Higgs dependem dos valores *soft* $m_0, m_{1/2}$ e A_0, como também do valor de $\tan\beta$ e μ. Valores para os parâmetros *soft*, da massa de gluínos, $m_{\tilde{g}}$, e da massa do bóson Higgs mais leve, m_h, são apresentados em unidades de GeV, na tabela a seguir

n	m_0	$m_{1/2}$	$\tan\beta$	$m_{\tilde{g}}$	m_h
1	200	165	2	428.2	73.0
2	200	200	2	506.5	76.1
3	200	300	2	724.6	81.9
4	200	450	2	1648.0	87.3
5	200	300	5	722.5	107.0
6	200	300	10	722.5	112.0

Tabela 5.1: Massa do gluíno, $m_{\tilde{g}}$, e do bóson de Higgs mais leve, m_h, para diferentes valores dos parâmetros $m_0, m_{1/2}$ e $\tan\beta$. Escolhemos $A_0 = 0$ e $\mu < 0$. O valor de n representa os diferentes casos calculados.

Análises desse tipo são bastante úteis para excluir regiões do espaço de parâmetros (em particular, valores de m_h suficientemente baixos são excluídos experimentalmente). Note que o valor da massa do bóson de Higgs mais leve é mais fortemente influenciada pelo parâmetro $\tan\beta$, enquanto a massa do gluíno, $m_{\tilde{g}}$, depende fortemente de $m_{1/2}$. Utilizando o programa CalcHEP e os dados da tabela anterior é possível encontrar a seção de choque, σ, para o processo (5.4), e a seção total, σ_{tot}, que representa o processo

$$p\,\bar{p} \longrightarrow 3l + X\,. \tag{5.12}$$

Para o cálculo é necessário especificar funções de estrutura para o próton e antipróton, em particular ultilizamos as funções CTEQ5M que aparecem por definição no programa CalcHEP 2.1. Os resultados são escritos na tabela abaixo

n	σ (pb)	$\sigma_{\rm tot}$ (pb)
1	1.43×10^{-1}	8.96×10^{-3}
2	6.51×10^{-2}	3.98×10^{-3}
3	7.98×10^{-3}	4.88×10^{-4}
4	4.12×10^{-4}	2.52×10^{-5}
5	9.11×10^{-3}	5.50×10^{-4}
6	1.03×10^{-2}	6.30×10^{-4}

Tabela 5.2: Seções de choque para a produção de $\tilde{W}_1\tilde{Z}_2$, σ, e três léptons, $\sigma_{\rm tot}$, no Tevatron, com $\sqrt{s} = 2$ TeV. Os valores dos parâmetros utilizados correspondem aos apresentados na tabela anterior.

O processo completo (5.12) é o resultado do processo (5.4) e os decaimentos subseqüentes, apenas em léptons carregados ((5.8) e (5.9)). Ou seja, o mesmo ocorre através da seqüência

$$p\,\bar{p} \longrightarrow \tilde{W}_1\tilde{Z}_2 \longrightarrow l'\,\bar{l}\tilde{Z}_1 + l\,\bar{l}\tilde{Z}_1\,. \tag{5.13}$$

No processo (5.12) X representam jatos, neutrinos e neutralinos LSP. Estes últimos são neutros e estáveis e, portanto, não apareceriam no detetor. Estão associados sempre a uma "energia perdida" (*missing energy*) no processo.

Como exemplo, apresentamos na figura 5.1 o gráfico da seção de choque para o processo (5.4) em função da massa do gluíno $m_{\tilde{g}}$. O gráfico foi obtido a partir das tabelas com $\tan\beta = 2$. A seção de choque se reduz drasticamente quando a massa do gluíno varia entre 500 GeV e 800 GeV. A ordem de magnitude de σ pode ser comparada com resultados apresentados na referência [5] com o mesmo valor de $\tan\beta$ e $\sqrt{s}$. Assim por exemplo, para $m_{\tilde{g}}$ entre 400 GeV e 500 GeV, obtemos valores para σ da ordem de 0.1 pb, em concordância com [5]. Para uma energia maior, $\sqrt{s} = 14$ TeV, energia típica para o LHC [16], e ainda que utilizando funções de estrutura diferentes (CTEQ2L), é observado um crescimento significativo na seção de choque. Para os mesmos valores de $m_{\tilde{g}}$ ($400 - 500$ GeV), o valor de σ atinge

Figura 5.1: Seção de choque para produção de $\tilde{W}_1\tilde{Z}_2$ *versus* massa do gluíno, $m_{\tilde{g}}$ no Tevatron, com $\sqrt{s} = 2$ TeV, para os casos $n = 1, ..., 4$.

valores da ordem de 100 pb [16], o que tornaria a detecção desse sinal todavia mais promissora.

É importante notar que contribuições ao processo completo (5.12) existem sem a criação de partículas supersimétricas. De fato, o processo existe no SM com a criação de quarks e bósons W e Z. Todas as contribuições devido ao SM são chamadas de fundo ou *background* do processo. Neste caso, a principal contribuição decorre da produção de WZ, onde $Z \longrightarrow \tau\bar{\tau}$ e o τ decai leptonicamente, e o W também decai leptonicamente. Este *background* deve ser subtraído para se ter a contribuição devido apenas à supersimetria.

Utilizando cortes em variáveis cinemáticas associadas às partículas do estado final, tais como momento, momento transversal e energia transversal é possível prever o número de eventos produzidos caso a supersimetria se manifeste. Um estudo completo, incluindo características do acelerador, simulação e cortes nas variáveis é deixado como perspectiva de continuidade do presente trabalho.

Capítulo 6

Considerações Finais

Na primera parte deste trabalho introduzimos o formalismo de supercampos, e tentamos mostrar que, com tal formalismo, é relativamente simples escrever suas componentes representando campos escalares, férmions e bósons de gauge. De fato, precisamos apenas de dois tipos de supercampos. Nos Capítulos 2 e 3, vimos como "traduzir" uma estrutura de supercampos em termos de suas componentes, o que facilita a identificação das interações entre os campos.

O formalismo é bastante útil para se construir as Lagrangeanas em modelos supersimétricos, como foi mostrado no exemplo da QED, e depois no caso geral não Abeliano. Também é importante mencionar que a idéia de transformação de gauge pode ser escrita numa forma simples em termos de supercampos.

Por outro lado, as interações entre o setor de gauge e o setor quiral da teoria são representadas de maneira simples, por produtos de supercampos vetoriais e quirais. Um exemplo de uma teoria com interações é a QED, na qual aparecem apenas dois supercampos quirais e um supercampo vetorial. O caso não Abeliano tem um tratamento análogo. A análise destes produtos permite, de forma simples, a identificação das interações entre gauginos e higgsinos.

No final da primeira parte do trabalho mostramos como, de forma natural, para qualquer modelo supersimétrico, aparece uma contribução conhecida como potencial escalar, que surge ao somarmos as contribuções dos campos auxiliares. Tal potencial é fundamental para o estudo da quebra espontânea da supersimetria, em particular para o estudo do setor de Higgs no caso do MSSM.

Na segunda parte do trabalho, uma vez estabelecida a estrutura geral das Lagrangeanas, dirigimos a nossa atenção para o conteúdo de supercampos e a estrutura mínima de interações, viável fenomenologicamente, para extendermos o Modelo Padrão. Este é o ponto de partida para estabelecermos os modelos denotados como (M+n)SSM (com essencialmente dois dubletos de bósons de Higgs, e um número n de singletos). Tais modelos não foram descritos no trabalho. Consideramos apenas o caso mais simples, o MSSM (que não apresenta singletos). A descrição de como definir tal modelo para que o mesmo englobe o SM, constitui a parte principal do trabalho. Vimos no final do Capítulo 4 que, uma vez estabelecido o conteúdo mínimo de supercampos, a necesidade de se excluir certas interações permitidas pela supersimetria resultou na definição de uma simetria discreta e global, a paridade R. Mesmo depois de imposta a conservação da paridade R, o fato de haver mais de 100 parâmetros livres no modelo, em grande parte devido aos termos *soft*, indicava a necesidade de vínculos adicionais; assim consideramos que numa escala suficientemente alta de energia, tais parametros *soft* se reduziriam a apenas três.

Nas últimas seções do Capítulo 4 descrevemos com algum detalhe vários aspectos deste modelo mínimo. O primeiro aspecto estudado foi o setor de Higgs, cuja diferença com relação ao caso do SM é a necessidade da introdução de dois dubletos de Higgs, que implica na existência de dois escalares neutros H, h, um pseudoescalar A, e dois escalares carregados C_+ e C_- (também denotados por h_+ e h_- respectivamente). Um segundo aspecto estudado se associa à interação entre gauginos e higgsinos, cujas misturas permitiram definir autoestados de massa: dois charginos $\tilde{\chi}_1$ e $\tilde{\chi}_2$ (também denotados por $\tilde{W}_1$ e $\tilde{W}_2$) e quatro neutralinos $\tilde{\chi}_i^0$ (denotados também como $\tilde{Z}_i$). O neutralino de menor massa, denotado por $\tilde{Z}_1$ é, por conseqüência da conservação da paridade R, uma partícula estável, denotada pela sigla LSP.

Por fim consideramos, de forma introdutória, uma análise fenomenológica do modelo MSSM através do estudo da produção e decaimento dos charginos e neutralinos. Mostramos valores típicos para as massas das partículas, por exemplo massas de gauginos e bósons de Higgs, utilizando o programa SusSpect. Também foram apresentadas as matrizes de massa dos charginos e neutralinos para um valor específico dos parâmetros do modelo, o que permite termos uma idéia da forma como são compostos e porque na literatura é usual a referência aos mesmos como essencialmente gauginos ou higgsinos. Na última seção foi descrito, esquematicamente, uma forma de se produzir charginos e neutralinos num colisionador tipo próton antipróton como o Tevatron. Como neutralinos e charginos decaem, o sinal final seria composto de partículas do SM e o LSP. Em particular, apresentamos o resultado para o sinal com três léptons como uma forma de se verificar a supersimetria, ou excluí-la numa região do espaço de parâmetros.

Apêndice A

Notação

Apresentamos a seguir propriedades das matrizes de Pauli e dos espinores utilizadas no texto. Para maiores detalhes ver referências [8, 2, 3]. A notação utilizada é a mesma do texto J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity [8].

A.1 Notação e Convenções

A matriz ϵ é definida como:

$$\epsilon = \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por definição $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\beta\alpha}$, e similarmente para os índices com ponto, estes assumem os valores $1, 2$. Com $\psi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ denotando um espinor de Weyl e seu conjugado, definimos

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta\,, \quad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta\,, \tag{A.1}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\,, \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\,. \tag{A.2}$$

Com ψ, χ denotando espinores e/ou variáveis de Grassmann

$$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha\,, \quad \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\,, \tag{A.3}$$

desta forma, expressões como $\theta\psi, \bar{\theta}\bar{\lambda}$ utilizadas na definição dos supercampos no Capítulo 2, são entendidas de acordo com (A.3). Com estas convenções

$$\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi\,,$$

$$\bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}\,.$$

As matrizes de Pauli, denotadas por σ^m, com $m = 0, ..., 3$, são definidas como:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definimos $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0$, e $\bar{\sigma}^i = -\sigma^i$. Em termos dos índices pode-se escrever

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^m_{\beta\dot{\beta}}.$$

As matrizes γ^m de Dirac são definidas por

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}.$$

De forma similar escrevemos as contrações que contêm matrizes σ^m,

$$\theta\sigma^n\bar{\theta} = (\theta\sigma^n)_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \theta^\alpha\sigma^n_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}, \tag{A.4}$$

$$\bar{\theta}\bar{\sigma}^n\theta = (\bar{\theta}\bar{\sigma}^n)^\beta\theta_\beta = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\beta}\theta_\beta. \tag{A.5}$$

Finalmente, utilizamos como métrica do espaço-tempo

$$\eta = \eta^{mn} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1). \tag{A.6}$$

A.2 Propriedades

Com $\theta, \bar{\theta}$ denotando variáveis de Grassmann, e ψ, ϕ espinores

$$2\,\theta^\alpha\theta^\beta = -\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta, \quad 2\,\theta_\alpha\theta_\beta = \epsilon_{\alpha\beta}\theta\theta, \tag{A.7}$$

$$2\,\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}, \quad 2\,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}. \tag{A.8}$$

$$(\theta\phi)(\theta\psi) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\phi\psi), \quad (\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\phi}\bar{\psi}), \tag{A.9}$$

$$\phi\sigma^n\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\phi, \quad (\phi\sigma^n\bar{\psi})^\dagger = \psi\sigma^n\bar{\phi}. \tag{A.10}$$

$$\theta\sigma^m\bar{\theta}\theta\sigma^n\bar{\theta} = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn}, \tag{A.11}$$

$$(\sigma^m\bar{\sigma}^n + \sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha^{\ \beta} = -2\,\eta^{mn}\delta_\alpha^\beta, \tag{A.12}$$

$$(\bar{\sigma}^m\sigma^n + \bar{\sigma}^n\sigma^m)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = -2\,\eta^{mn}\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,, \tag{A.13}$$

$$\mathrm{Tr}[\sigma^m\bar{\sigma}^n] = -2\,\eta^{mn}\,, \quad \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\dot{\beta}\beta}_m = -2\,\delta^\beta_\alpha\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\,. \tag{A.14}$$

As derivadas com relação à variáveis de Grassmann são denotadas por:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} = \partial_\alpha\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} = \partial^{\dot{\alpha}}\,,$$

com as abreviações

$$\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\theta\theta = 4\,, \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^{\dot{\alpha}}\partial^{\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} = 4\,. \tag{A.15}$$

A.3 Transformação de Supersimetria

Com η denotando uma variável de Grassmann e em termos das componentes do supercampo Φ, a transformação de supersimetria pode ser escrita na forma:

$$\delta_\eta A = \sqrt{2}\,\eta\psi\,, \tag{A.16}$$

$$\delta_\eta\psi_\alpha = \sqrt{2}\,\eta_\alpha F + i\sqrt{2}\,(\sigma^m\bar{\eta})_\alpha\partial_m A\,, \tag{A.17}$$

$$\delta_\eta F = i\sqrt{2}\,\bar{\eta}\,\bar{\sigma}^m\partial_m\psi\,. \tag{A.18}$$

Aplicando a transformação diretamente nas componentes $\theta\theta$ e $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ de produtos de supercampos quirais, são obtidos termos na forma de derivadas totais [8, 3].

Apêndice B

Supercampos Quiral e Vetorial

Apresentamos a seguir cálculos detalhados referentes ao Capítulo 2.

B.1 Cálculo do produto $\Phi^\dagger\Phi$

Segundo as definições para o supercampo quiral, podemos organizar os termos do produto com respeito a sua ordem em θ e $\bar{\theta}$, portanto (omitindo as variáves por simplicidade)

$$\begin{aligned}
\Phi_i^\dagger\Phi_j &= A_i^* A_j + \sqrt{2}\theta\psi_j A_i^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i A_j + \theta\theta F_j A_i^* + \bar{\theta}\bar{\theta} F_i^* A_j \\
&+ \left(-i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A_i^* A_j + i\theta\sigma^n\bar{\theta}A_i^*\partial_n A_j + 2\,\bar{\theta}\bar{\psi}_i\theta\psi_j\right) \\
&+ \left(\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i\theta\theta F_j - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A_i^*\sqrt{2}\theta\psi_j - \frac{i}{\sqrt{2}}A_i^*\theta\theta\partial_n\psi_j\sigma^n\bar{\theta}\right) \\
&+ \left(\bar{\theta}\bar{\theta}F_i^*\sqrt{2}\theta\psi_j + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(i\theta\sigma^n\bar{\theta})\partial_n A_j + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i A_j\right) \\
&+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(F_i^* F_j + \frac{1}{4}\Box A_i^* A_j + \frac{1}{4}A_i^*\Box A_j\right) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A_i^*(i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n A_j) \\
&+ i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i\theta\psi_j - \bar{\theta}\bar{\psi}_i\, i\theta\theta\partial_n\psi_j\sigma^n\bar{\theta}\,.
\end{aligned}$$

Podemos simplificar vários termos utilizando propriedades do Apêndice A; por exemplo, o sexto, sétimo e oitavo termo, que contem exatamente um θ e um $\bar{\theta}$ se escreve:

$$\mathcal{O}(\theta,\bar{\theta}) = \theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left[i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\left(A_i^*\partial_m A_j - \partial_m A_i^* A_j\right) - 2\bar{\psi}_{i\dot{\alpha}}\psi_{j\alpha}\right]. \tag{B.1}$$

Da mesma forma termos de ordem $\mathcal{O}(\theta\theta,\bar{\theta})$ podem ser tratados independentemente, assim

$$\begin{aligned}
-i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A_i^*\sqrt{2}\theta\psi_j &= -i\theta^\alpha(\sigma^m\bar{\theta})_\alpha\,\partial_m A_i^*\,\sqrt{2}\theta^\beta\psi_{j\beta} \\
&= i\theta^\alpha\theta^\beta(\sigma^m\bar{\theta})_\alpha\partial_m A_i^*\sqrt{2}\psi_{j\beta} \\
&= -\frac{i}{2}\theta\theta(\sigma^m\bar{\theta})_\alpha\partial_m A_i^*\sqrt{2}\epsilon^{\alpha\beta}\psi_{j\beta} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}}\,\theta\theta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m A_i^*\psi_j^\alpha\,,
\end{aligned}$$

por outro lado

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}A_i^*\theta\theta\partial_n\psi_j\sigma^n\bar{\theta} = \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}A_i^*\partial_m\psi_j^\alpha\,.$$

Portanto, o nono, décimo e décimo primeiro termo podem ser escritos como:

$$\mathcal{O}(\theta\theta,\bar{\theta}) = \theta\theta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\left(A_i^*\partial_m\psi_j^\alpha - \partial_m A_i^*\psi_j^\alpha\right) - \sqrt{2}\bar{\psi}_{i\dot{\alpha}}F_j\right]\,. \tag{B.2}$$

Com um procedimento similar ao anterior pode-se mostrar para os termos $\bar{\theta}\bar{\theta}\theta$ que

$$\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(i\theta\sigma^n\bar{\theta})\partial_n A_j = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}\partial_m A_j\,.$$

Assim, nessa ordem

$$\mathcal{O}(\bar{\theta}\bar{\theta},\theta) = \bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha\left[\sqrt{2}F_i^*\psi_{j\alpha} - \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}\partial_m A_j - \partial_m\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}A_j\right)\right]\,. \tag{B.3}$$

Finalmente, os três últimos termos precisam ser modificados, isto é

$$\begin{aligned}
-i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A_i^*(i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n A_j) &= (\theta\sigma^m\bar{\theta}\theta\sigma^n\bar{\theta})\partial_m A_i^*\partial_n A_j \\
&= -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn}\partial_m A_i^*\partial_n A_j
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a propriedade $\chi\sigma^n\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\chi$ para espinores

$$\begin{aligned}
i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}_i\theta\psi_j &= i\bar{\theta}\bar{\theta}\left[-\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\theta\right]\theta\psi_j = -i\bar{\theta}\bar{\theta}\left(\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\right)^\alpha\theta_\alpha\theta^\beta\psi_{j\beta} \\
&= i\bar{\theta}\bar{\theta}\left(\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\right)_\alpha\theta^\alpha\theta^\beta\psi_{j\beta} \\
&= i\bar{\theta}\bar{\theta}\left(\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\right)_\alpha\left[-\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta\right]\psi_{j\beta} \\
&= -\frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\right)_\alpha\psi_j^\alpha = \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_j\,.
\end{aligned}$$

Um procedimento similar permite modificar o último termo

$$-\bar{\theta}\bar{\psi}_i\, i\theta\theta\partial_n\psi_j\sigma^n\bar{\theta} = -\frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_j\,.$$

Então, finalmente o termo de ordem mais alta no produto pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\theta\theta,\bar{\theta}\bar{\theta}) &= \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Big[F_i^*F_j + \frac{1}{4}A_i^*\Box A_j + \frac{1}{4}\Box A_i^*A_j - \frac{1}{2}\partial_m A_i^*\partial^m A_j \\ &\quad + \frac{i}{2}\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_j - \frac{i}{2}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_j\Big]\,. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Reunindo (B.1), (B.2), (B.3) e (B.4) obtemos a expresão do Capítulo 2 para o produto $\Phi^\dagger\Phi$.

B.2 Supercampo quiral na forma $\bar{D}\bar{D}U$

Na seção do supercampo vetorial, usamos o fato de que o supercampo W_α é por definição um campo quiral. Esta é uma propriedade geral: partindo de qualquer supercampo e derivando-o duas vezes sempre obtemos um supercampo quiral. Nesta seção apresentamos uma prova simples para este resultado.

Segundo as definições adotadas desde o início, a derivada $\bar{D}$ nas coordenadas (y,θ) apresenta uma forma simples

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \equiv -\partial_{\dot{\alpha}}\,, \quad \bar{D}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\beta}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \equiv \partial^{\dot{\alpha}}\,.$$

Sem perda de generalidade, um supercampo pode ser expresso, independente das coordenadas, na seguinte forma

$$U = f + \theta\phi + \bar{\theta}\bar{\chi} + \theta\theta m + \bar{\theta}\bar{\theta}n + \theta\sigma^n\bar{\theta}v_n + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d\,,$$

o resultado de aplicar o operador $\bar{D}\bar{D}$ anula qualquer termo que não dependa de $\bar{\theta}\bar{\theta}$, assim

$$\bar{D}\bar{D}U = (\bar{D}\bar{D}\bar{\theta}\bar{\theta})n + (\bar{D}\bar{D}\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\psi + (\bar{D}\bar{D}\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\theta d\,.$$

Porém, da definição nas coordenadas (y,θ)

$$\bar{D}\bar{D} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}} = -\partial_{\dot{\alpha}}\partial^{\dot{\alpha}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^{\dot{\alpha}}\partial^{\dot{\beta}}\,,$$

(onde utilizamos novamente, do mesmo modo que para a definição de $\bar{D}^{\dot{\alpha}}$, a propriedade $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^{\dot{\beta}} = -\partial_{\dot{\alpha}}$, note que o sinal é contrário para o caso dos espinores usuais), por outro lado, das propriedades do Apêndice A,

$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^{\dot{\alpha}}\partial^{\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} = 4\,,$$

então $\bar{D}\bar{D}\bar{\theta}\bar{\theta} = -4$, é simplesmente uma constante e portanto o supercampo adquire a forma

$$\bar{D}\bar{D}U = -4n + \sqrt{2}\theta(-2\sqrt{2}\psi) + \theta\theta(-4d)\,,$$

que apresenta a forma esperada para um supercampo quiral.

B.3 Componente de maior ordem para V^2

De acordo com o Capítulo 2, podemos considerar um termo de massa para o supercampo vetorial. Um termo deste tipo não é invariante de gauge, portanto não podemos fazer uso do gauge W-Z e devemos calculá-lo usando uma forma geral para V. Segundo as convenções adotadas

$$\begin{aligned} V &= C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta\theta[M+iN] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M-iN] \\ &- \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\right] \\ &- i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D + \frac{1}{2}\Box C\right]\,. \end{aligned}$$

Vários termos são de ordem $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$. Um termo que depende da componente vetorial é

$$(-\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m)(-\theta\sigma^n\bar{\theta}v_n) = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m v^m\,.$$

Também contribui para esta ordem um termo que contém os campos D e C

$$\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}C\left[D + \frac{1}{2}\Box C\right] = \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[CD + \frac{1}{2}C\Box C\right]\,,$$

além dos termos que dependem apenas dos espinores

$$\begin{aligned} 2i\theta\chi\left[-i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right)\right] &= 2\theta^\alpha\chi_\alpha\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\beta\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right)_\beta \\ &= \left(-2\theta^\alpha\theta^\beta\right)\bar{\theta}\bar{\theta}\chi_\alpha\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right)_\beta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta\right)\bar{\theta}\bar{\theta}\chi_\alpha\left(\lambda+\frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right)_\beta \\
&= -\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\chi\left(\lambda+\frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right).
\end{aligned}
$$

Há outro termo que depende dos espinores, porém não precisamos calculá-lo pois sabemos de antemão que deve ser simplesmente o conjugado do anterior, isto é

$$
-2i\bar{\theta}\bar{\chi}\left[i\theta\theta\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}+\frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\right)\right] = -\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\chi}\left(\bar{\lambda}+\frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\right),
$$

onde utilizamos na expressão anterior a identidade

$$
(\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi})^\dagger = \partial_m\chi\sigma^m\bar{\chi} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\,.
$$

Por último, temos o termo que contém M e N

$$
2\left(\frac{i}{2}\theta\theta[M+iN]\right)\left(-\frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M-iN]\right) = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[M^2+N^2\right].
$$

Reunindo estas componentes obtemos

$$
\begin{aligned}
V^2\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \frac{1}{2}C\Box C + CD - \frac{1}{2}v_m v^m - \chi\lambda - \bar{\chi}\bar{\lambda} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[M^2+N^2\right] - \frac{i}{2}\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} - \frac{i}{2}\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\,,
\end{aligned}
$$

expressão utilizada no Capítulo 2.

Apêndice C

Cálculos associados à Invariância de Gauge

Apresentamos cálculos referentes ao Capítulo 3. Os resultados são utilizados no texto para escrever as Lagrangeanas em termos de seus campos componentes, o que é util para analizar aspectos relacionados à fenomenologia.

C.1 Termo Cinético de Φ no caso Abeliano

Quando estudamos a invariância de gauge, escrevemos uma expresão relativamente simples para o termo cinético de Φ_i. Porém, várias considerações deveriam ter sido feitas anteriormente a fim de se obter essa expressão. Esta seção é basicamente destinada a explicar, com algum detalhe, os cálculos omitidos.

No gauge W-Z, considerando as coordenadas $(x, \theta, \bar{\theta})$

$$\begin{aligned} e^{q_i V} - 1 &= q_i \left[V + \frac{q_i}{2} V^2 \right] \\ &= q_i \left[-\theta\sigma^m\bar{\theta} v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D - \frac{q_i}{2} v_m v^m \right) \right] \end{aligned} \tag{C.1}$$

(note que esta expressão contém no mínimo θ e $\bar{\theta}$). Usando as mesmas coordenadas

$$\Phi_i = A_i + i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n A_i + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_n\psi_i\sigma^n\bar{\theta} + \theta\theta F_i \,.$$

O resultado do produto de Φ_i com o termo exponencial (C.1) é relativamente simples, já que vários termos contêm ordens superiores em θ e $\bar{\theta}$. O produto é reduzido à forma:

$$\frac{1}{q_i}\left(e^{q_i V} - 1 \right)\Phi_i \;=\; -\theta\sigma^m\bar{\theta} v_m \left(A_i + i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i \right) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} A_i$$

$$- i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda\left(A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i\right) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D - \frac{q_i}{2}v_m v^m\right]A_i\,. \tag{C.2}$$

Da mesma maneira

$$\Phi_i^\dagger = A_i^* - i\theta\sigma^r\bar{\theta}\partial_r A_i^* + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A_i^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^r\partial_r\bar{\psi}_i + \bar{\theta}\bar{\theta}F_i^*\,.$$

Do produto de $\Phi_i^\dagger$ com a expressão (C.2) consideramos apenas a componente de ordem $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$. Assim (para um i fixo)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_i}\Phi_i^\dagger\left(e^{q_iV} - 1\right)\Phi_i\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \sim\ & A_i^*(-\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m)i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n A_i - A_i^*(-i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda)\sqrt{2}\theta\psi_i \\
& + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}A_i^*\left[D - \frac{q_i}{2}v_m v^m\right]A_i \\
& + i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n A_i^*(\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m)A_i \\
& - \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m)\sqrt{2}\theta\psi_i + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i(i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda})A_i\,.
\end{aligned}$$

Como já visto anteriormente, necessitamos realizar modificações nas componentes para escrever as variáveis θ e $\bar{\theta}$ contraídas. Por exemplo, precisamos usar no penúltimo termo as seguintes modificações

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}\bar{\psi}_i(\theta\sigma^m\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(\theta\sigma^m\bar{\psi}_i)\,, \\
(\theta\sigma^m\bar{\psi}_i)\theta\psi_i &= -\frac{1}{2}\theta\theta\psi_i\sigma^m\bar{\psi}_i\,.
\end{aligned}$$

Considerando modificações óbvias para os outros termos e aquelas definidas acima, o termo em $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ tem como resultado

$$\begin{aligned}
\Phi_i^\dagger\left(e^{q_iV} - 1\right)\Phi_i\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} =\ & \frac{q_i}{2}v^m\left[\bar{\psi}_i\bar{\sigma}_m\psi_i + iA_i^*\partial_m A_i - i\partial_m A_i^* A_i\right] \\
& - i\frac{q_i}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}_i\bar{\lambda}A_i - A_i^*\lambda\psi_i\right] + \frac{q_i}{2}A_i^*\left[D - \frac{q_i}{2}v_m v^m\right]A_i\,.
\end{aligned}$$

Por outro lado, o resultado para o produto $\Phi^\dagger\Phi$ foi calculado no segundo capítulo,

$$\Phi_i^\dagger\Phi_i\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = F_i^* F_i + \frac{1}{4}\left(A_i^*\Box A_i + \Box A_i^* A_i - 2\partial_m A_i^*\partial^m A_i\right)$$

$$+\frac{i}{2}\left(\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_i - \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\partial_m\psi_i\right)$$

$$= F_i^*F_i + A_i^*\Box A_i + i\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_i \tag{C.3}$$

(onde eliminamos os termos de superfície). Somando os dois últimos resultados se obtém

$$\begin{aligned}\Phi_i^\dagger e^{q_iV}\Phi_i\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F_i^*F_i + A_i^*\Box A_i + i\partial_m\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^m\psi_i \\ &+\frac{q_i}{2}v^m\left[\bar{\psi}_i\bar{\sigma}_m\psi_i + iA_i^*\partial_mA_i - i\partial_mA_i^*A_i\right] \\ &-i\frac{q_i}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}_i\bar{\lambda}A_i - A_i^*\lambda\psi_i\right] + \frac{q_i}{2}A_i^*\left[D - \frac{q_i}{2}v_mv^m\right]A_i\,,\end{aligned} \tag{C.4}$$

que é o resultado apresentado no Capítulo 3. O resultado não só é interessante do ponto de vista do estudo da renormalizabilidade, como ilustra uma estrutura de interações. Além disso, indica as generalizações necessárias para se escrever o termo cinético em Φ no caso não Abeliano.

C.2 Produto WW no caso Abeliano

Como a derivada $\bar{D}$ apresenta uma forma simples nas coordenadas y, é conveniente escolher essas coordenadas desde o ínicio. A outra derivada, D_α, e o campo vetorial podem ser escritos

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^n} \equiv \partial_\alpha + 2i(\sigma^n\bar{\theta})_\alpha\partial_n\,,$$

$$V = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\lambda - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D - i\partial_mv^m\right]\,.$$

Desse modo, a derivada pode ser dividida em duas partes

$$D_\alpha V = \partial_\alpha V + 2i(\sigma^n\bar{\theta})_\alpha\partial_nV \tag{C.5}$$

(note que o termo $\partial_\alpha V$ apresenta no mínimo um $\bar{\theta}$). Como queremos aplicar $\bar{D}\bar{D}$, apenas os termos em (C.5) que tenham exatamente dois $\bar{\theta}$, precisam ser considerados, portanto

$$\bar{D}\bar{D}\partial_\alpha V = \bar{D}\bar{D}\bar{\theta}\bar{\theta}\left(-i\lambda_\alpha + \theta_\alpha[D - i\partial_mv^m]\right)\,, \tag{C.6}$$

$$\bar{D}\bar{D}[2i(\sigma^n\bar{\theta})_\alpha\partial_n V] = 2i\bar{D}\bar{D}\left[(\sigma^n\bar{\theta})_\alpha(-\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_n v_m + i\theta\theta\bar{\theta}\partial_n\bar{\lambda})\right]. \qquad \text{(C.7)}$$

Para obtermos o fator $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ da relação anterior é necessário modificar ambos termos, assim

$$\begin{aligned}
(\sigma^n\bar{\theta})_\alpha(-\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_n v_m) &= \sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma^m_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_n v_m \\
&= \sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma^m_{\beta\dot{\beta}}\left[\frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}\right]\partial_n v_m \\
&= \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left[\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\beta\gamma}\sigma^m_{\beta\dot{\beta}}\right]\theta_\gamma\partial_n v_m \\
&= \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left[\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\left(-\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\gamma}\right)\right]\theta_\gamma\partial_n v_m \\
&= -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left(\sigma^n\bar{\sigma}^m\right)_\alpha^{\ \gamma}\theta_\gamma\partial_n v_m\,.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
(\sigma^n\bar{\theta})_\alpha i\theta\theta(\bar{\theta}\partial_n\bar{\lambda}) &= i\theta\theta\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(-\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_n\bar{\lambda}_{\dot{\beta}}\right) = -i\theta\theta\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\left[\frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}\right]\partial_n\bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \\
&= -\frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial_n\bar{\lambda}_{\dot{\beta}} = -\frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(\sigma^n\partial_n\bar{\lambda})_\alpha\,.
\end{aligned}$$

Então (C.7) pode ser expressa na forma

$$\bar{D}\bar{D}\left[2i(\sigma^n\bar{\theta})_\alpha\partial_n V\right] = \bar{D}\bar{D}\bar{\theta}\bar{\theta}\left[-i(\sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha^{\ \beta}\partial_n v_m\theta_\beta + \theta\theta(\sigma^n\partial_n\bar{\lambda})_\alpha\right]. \qquad \text{(C.8)}$$

Das relações (C.5), (C.6), (C.8) e escrevendo

$$\left[D - i\partial_m v^m\right]\theta_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta D - i\eta^{mn}\partial_n v_m\delta_\alpha^\beta\right]\theta_\beta\,,$$

podemos obter uma expressão para W

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha + \left[\delta_\alpha^\beta D - i\left((\sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha^{\ \beta} + \eta^{mn}\delta_\alpha^\beta\right)\partial_n v_m\right]\theta_\beta + \theta\theta(\sigma^n\partial_n\bar{\lambda})_\alpha\,.$$

(utilizamos na expressão anterior o resultado $\bar{D}\bar{D}\bar{\theta}\bar{\theta} = -4$, note também que a estrutura corresponde de fato a um supercampo quiral). De acordo com as propriedades do Apêndice A podemos expressar

$$(\sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha^{\ \beta} + \eta^{mn}\delta_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\left(\sigma^n\bar{\sigma}^m - \sigma^m\bar{\sigma}^n\right)_\alpha^{\ \beta}\,,$$

desta manera é possível modificar parte do segundo termo de W, isto é

$$\begin{aligned}
-i\left((\sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha^{\ \beta} + \eta^{mn}\delta_\alpha^\beta\right)\partial_n v_m &= -\frac{i}{2}\left(\sigma^n\bar{\sigma}^m - \sigma^m\bar{\sigma}^n\right)_\alpha^{\ \beta}\partial_n v_m \\
&= -\frac{i}{2}(\sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha^{\ \beta}(\partial_n v_m - \partial_m v_n)\,.
\end{aligned}$$

Obtemos assim uma forma final para W

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha + \left[\delta_\alpha^\beta D - \frac{i}{2}(\sigma^n\bar{\sigma}^m)_\alpha^{\ \beta}\, v_{nm}\right]\theta_\beta + \theta\theta(\sigma^n\partial_n\bar{\lambda})_\alpha\,.$$

Onde definimos $v_{nm} = \partial_n v_m - \partial_m v_n$ por simplicidade. Desta expressão (utilizando propriedades das matrizes σ's) podemos escrever a componente $\theta\theta$ do produto

$$WW\Big|_{\theta\theta} = -2i(\lambda\sigma^n\partial_n\bar{\lambda}) - \frac{1}{2}v_{mn}v^{mn} + D^2 + \frac{i}{4}v^{mn}v^{lk}\mathcal{E}_{mnlk}$$

(Onde $\mathcal{E}_{mnlk}$ é o tensor completamente antisimétrico, com $\mathcal{E}_{0123} = 1$). Não é necessário calcular $\bar{W}\bar{W}$, já que o mesmo é o conjugado de WW, então

$$\frac{1}{4}\left(WW\Big|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}\Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right) = \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - i\lambda\sigma^n\partial_n\bar{\lambda}\,, \tag{C.9}$$

que é a expressão para o termo cinético de V no caso Abeliano.

C.3 Transformação de Gauge para W

A inversa para o produto de exponenciais pode ser expressa como:

$$\left(e^{-i\Lambda^\dagger}e^V e^{i\Lambda}\right)^{-1} = (e^{i\Lambda})^{-1}(e^V)^{-1}(e^{-i\Lambda^\dagger})^{-1} = e^{-i\Lambda}e^{-V}e^{i\Lambda^\dagger}\,,$$

então, a transformação de gauge para W é escrita diretamente na forma

$$W_\alpha \longrightarrow W'_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\left[e^{-i\Lambda}e^{-V}e^{i\Lambda^\dagger}D_\alpha\, e^{-i\Lambda^\dagger}e^V e^{i\Lambda}\right]\,.$$

Porém Λ é um supercampo quiral, portanto $D_\alpha\Lambda^\dagger = 0$ e assim

$$D_\alpha\, e^{-i\Lambda^\dagger}e^V e^{i\Lambda} = e^{-i\Lambda^\dagger}D_\alpha\, e^V e^{i\Lambda}\,, \tag{C.10}$$

o que nos permite simplificar o produto de exponenciais, isto é,

$$e^{-i\Lambda}e^{-V}e^{i\Lambda^\dagger}D_\alpha\, e^{-i\Lambda^\dagger}e^V e^{i\Lambda} = e^{-i\Lambda}e^{-V}D_\alpha\, e^V e^{i\Lambda}\,.$$

Da mesma forma $\bar{D}\Lambda = 0$, portanto é possível simplificar ainda mais a expressão para W'

$$\begin{aligned} W'_\alpha &= -\frac{1}{4}e^{-i\Lambda}\left[\bar{D}\bar{D}e^{-V}D_\alpha\, e^V e^{i\Lambda}\right] \\ &= -\frac{1}{4}e^{-i\Lambda}\left[\bar{D}\bar{D}e^{-V}\left[(D_\alpha\, e^V)e^{i\Lambda} + e^V D_\alpha\, e^{i\Lambda}\right]\right] \\ &= e^{-i\Lambda}W_\alpha\, e^{i\Lambda} - \frac{1}{4}e^{-i\Lambda}\left[\bar{D}\bar{D}D_\alpha\, e^{i\Lambda}\right]\,. \end{aligned} \tag{C.11}$$

Na realidade, o último termo em (C.11) é identicamente nulo, pois da álgebra

$$\bar{D}\bar{D}D_\alpha e^{i\Lambda} = \bar{D}\{\bar{D}, D_\alpha\}e^{i\Lambda} = \{\bar{D}, D_\alpha\}\bar{D}e^{i\Lambda} = 0\,.$$

Deste modo, obtemos a lei de transformação para W

$$W_\alpha \longrightarrow W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda}\,.$$

C.4 Lagrangeana no caso não Abeliano

Como visto do Capítulo 3, é possível escrever a Lagrangeana (3.18) em componentes. Para isso é conveniente "re-definir" o campo V como $2gV$. O procedimento é similar ao caso Abeliano, porém devemos ser cuidadosos com a ordem dos termos, já que agora v_m, λ, e D são matrizes e os campos Φ apresentam uma estrutura em componentes Φ_i, com $i = 1, 2, ...N$. Entretanto, ainda podemos utilizar uma notação compacta. No gauge W-Z, em analogia com (C.4), podemos expressar o termo cinético na forma:

$$\begin{aligned}
\left(\Phi^\dagger e^{2gV}\Phi\right)\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F^\dagger F + A^\dagger \Box A + i\partial_n\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi \\
&+ \frac{(2g)}{2}\left[\bar{\psi}\bar{\sigma}_n v^n \psi + i\left(A^\dagger v^n \partial_n A - \partial_n A^\dagger v^n A\right)\right] \\
&- i\frac{(2g)}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}\bar{\lambda}A - A^\dagger\lambda\psi\right) + \frac{(2g)}{2}A^\dagger\left[D - \frac{(2g)}{2}v_n v^n\right]A\,.
\end{aligned}$$

Podemos reunir vários termos que dependem de A na expressão anterior e definir a derivada covariante

$$D^m A_i = \partial^m A_i + igv^{m(a)}T^{(a)}_{ij}A_j\,,$$

que geralmente é escrita numa forma compacta como:

$$D^m A = (\partial^m + igv^m)A\,.$$

Multiplicando $D^m A$ por seu conjugado obtemos

$$\begin{aligned}
(D_m A)^\dagger D^m A &= (\partial_m A^\dagger - igA^\dagger v_m)(\partial^m A + igv^m A) \\
&= \partial_m A^\dagger \partial^m A - igA^\dagger v_m \partial^m A + ig\partial_m A^\dagger v^m A + g^2 A^\dagger v_m v^m A \\
&= -\left[A^\dagger \Box A + igA^\dagger v_m \partial^m A - ig\partial_m A^\dagger v^m A - g^2 A v_m v^m A\right]\,.
\end{aligned}$$

Todos os termos na última equação aparecem no termo cinético com o sinal contrário. Por outro lado, podemos rescrever

$$i\partial_m\bar{\psi}\bar{\sigma}^m\psi + g\bar{\psi}\bar{\sigma}_n v^n\psi = -i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m\left[\partial_m\psi + igv_m\psi\right] = -i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m D_m\psi\,,$$

e conseqüentemente, é possível escrever o termo cinético na forma:

$$\begin{aligned}\left(\Phi^\dagger e^{2gV}\Phi\right)\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F^\dagger F - (D_m A)^\dagger(D^m A) - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m D_m\psi \\ &\quad + i\sqrt{2}g\left[A^\dagger T^{(a)}\lambda^{(a)}\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}^{(a)}T^{(a)}A\right] + gD^{(a)}A^\dagger T^{(a)}A\,,\end{aligned}$$

que corresponde à segunda e terceira linhas na Lagrangeana (3.19). Os termos restantes correspondem ao superpotencial e estão calculados no segundo capítulo, exceto a primeira linha da Lagrangeana (3.19), que corresponde ao termo cinético para V. Para escrever este termo utilizamos o resultado (3.15)

$$\begin{aligned}e^{-V}D_\alpha e^V &= D_\alpha V - \frac{1}{2}[V, D_\alpha V] \\ &= D_\alpha V^{(c)}T^{(c)} - \frac{1}{2}V^{(a)}D_\alpha V^{(b)}\left[T^{(a)}, T^{(b)}\right] \\ &= \left(D_\alpha V^{(c)} - \frac{i}{2}f^{abc}V^{(a)}D_\alpha V^{(b)}\right)T^{(c)} \equiv W_\alpha^{(c)}T^{(c)}\,.\end{aligned}$$

Assim, obtemos o termo correspondente ao traço

$$\mathrm{Tr}\left(W^\alpha W_\alpha\Big|_{\theta\theta}\right) = \mathrm{Tr}\left(T^{(c)}T^{(d)}\right)\left(W^{\alpha(c)}W_\alpha^{(d)}\right)\Big|_{\theta\theta} = k\left(W^{\alpha(c)}W_\alpha^{(c)}\right)\Big|_{\theta\theta}.$$

Da mesma forma como foi calculado WW para o caso Abeliano, é possível calcular o produto $W^{\alpha(c)}W_\alpha^{(c)}$. O resultado final apresentará uma forma similar,

$$\frac{1}{4k(2g)^2}\mathrm{Tr}\left(W^\alpha W_\alpha\Big|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right) = \frac{1}{2}D^{(a)}D^{(a)} - \frac{1}{4}v_{mn}^{(a)}v^{(a)mn} - i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma}^m D_m\lambda^{(a)}$$

(que coincide com a expressão para a parte cinética de W). $v_{mn}^{(a)}$ contém agora um termo quadrático (como é comum nas teorias não Abelianas),

$$v_{mn}^{(a)} = \partial_m v_n^{(a)} - \partial_n v_m^{(a)} - gf^{abc}v_m^{(b)}v_n^{(c)}\,,$$

e a derivada covariante para $\lambda^{(a)}$ é definida na representação adjunta

$$D_m\lambda^{(a)} = \partial_m\lambda^{(a)} - gf^{abc}v_m^{(b)}\lambda^{(c)}\,.$$

Apêndice D

Potenical Escalar

Este apêndice é dedicado a cálculos omitidos no Capítulo 4.

D.1 Potencial $V_{D-\text{term}}$

Para obtermos a expressão (4.16) é necessário uma manipulação no termo em D^a,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}D^aD^a &= \frac{g^2}{8}\left[h_1^\dagger\sigma^a h_1 + h_2^\dagger\sigma^a h_2\right]^2 \\
&= \frac{g^2}{8}\left[(h_1^\dagger\sigma^a h_1)^2 + 2(h_1^\dagger\sigma^a h_1)(h_2^\dagger\sigma^a h_2) + (h_2^\dagger\sigma^a h_2)^2\right] \\
&= \frac{g^2}{8}\left[h_{1i}^* h_{1l} h_{1k}^* h_{1j} + 2h_{1i}^* h_{1l} h_{2k}^* h_{2j} + h_{2i}^* h_{2l} h_{2k}^* h_{2j}\right](\sigma^a)_{il}(\sigma^a)_{kj}\,.
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

Utilizando a propriedade das matrizes σ's

$$
(\sigma^a)_{il}(\sigma^a)_{kj} = 2\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{il}\delta_{kj}\,, \tag{D.2}
$$

é possível escrever (D.1) numa forma diferente,

$$
\begin{aligned}
\left[h_1^\dagger\sigma^a h_1 + h_2^\dagger\sigma^a h_2\right]^2 &= 2(h_1^\dagger h_1)^2 + 4(h_1^\dagger h_2)(h_2^\dagger h_1) + 2(h_2^\dagger h_2)^2 \\
&\quad - (h_1^\dagger h_1)^2 - 2(h_1^\dagger h_1)(h_2^\dagger h_2) - (h_2^\dagger h_2)^2 \\
&= 4\left|(h_1^\dagger h_2)\right|^2 + \left[(h_2^\dagger h_2) - (h_1^\dagger h_1)\right]^2\,.
\end{aligned}
$$

Assim, o termo no potencial dependente de D^a será escrito

$$
\frac{1}{2}D^aD^a = \frac{g^2}{2}\left|(h_1^\dagger h_2)\right|^2 + \frac{g^2}{8}\left[(h_2^\dagger h_2) - (h_1^\dagger h_1)\right]^2\,, \tag{D.3}
$$

somando este resultado à contribuição devido a D_Y, se obtem a relação (4.16).

D.2 Potencial $V_{\text{quad}}^{(\mathrm{N})}$

Segundo as definições do capítulo 4

$$\begin{aligned} |h_2^0|^2 &= |v_2+\phi_2|^2 = |v_2|^2+|\phi_2|^2+v_2^*\phi_2+v_2\phi_2^* \\ &= |v_2|^2+|\phi_2|^2+2\,\mathrm{Re}(v_2^*\phi_2)\,, \end{aligned} \tag{D.4}$$

similarmente h_1^0 pode ser expresso da mesma forma, portanto

$$\left[|h_2^0|^2-|h_1^0|^2\right]^2 = \left[|v_2|^2-|v_1|^2+|\phi_2|^2-|\phi_1|^2+2\,\mathrm{Re}(v_2^*\phi_2-v_1^*\phi_1)\right]^2 . \tag{D.5}$$

Para efetuar o produto na expressão anterior, é conveniente agrupar os termos constantes. O termo dependente de ϕ_i, até segunda ordem no produto é escrito como:

$$\begin{aligned} \left[|h_2^0|^2-|h_1^0|^2\right]^2 &= 2\left(|v_2|^2-|v_1|^2\right)\left[2\,\mathrm{Re}(v_2^*\phi_2-v_1^*\phi_1)+|\phi_2|^2-|\phi_1|^2\right] \\ &\quad +4\left[\mathrm{Re}(v_2^*\phi_2-v_1^*\phi_1)\right]^2+\mathrm{cte}\,. \end{aligned}$$

De manera análoga

$$h_1^0h_2^0 = v_1v_2+v_1\phi_2+v_2\phi_1+\phi_1\phi_2\,. \tag{D.6}$$

Assim, mantendo indicados os termos constantes no final, a expressão para $V^{(\mathrm{N})}$ até ordem quadrática é:

$$\begin{aligned} V^{(\mathrm{N})} &= \frac{g^2+g'^2}{4}\left(|v_2|^2-|v_1|^2\right)\left[2\,\mathrm{Re}(v_2^*\phi_2-v_1^*\phi_1)+|\phi_2|^2-|\phi_1|^2\right] \\ &\quad +\frac{g^2+g'^2}{2}\left[\mathrm{Re}\left(v_2^*\phi_2-v_1^*\phi_1\right)\right]^2 \\ &\quad +(m_1^2+|\mu|^2)\left[2\,\mathrm{Re}\,v_1^*\phi_1+|\phi_1|^2\right]+(m_2^2+|\mu|^2)\left[2\,\mathrm{Re}\,v_2^*\phi_2+|\phi_2|^2\right] \\ &\quad -B\mu\,\mathrm{Re}(v_1\phi_2+v_2\phi_1+\phi_1\phi_2)\;+\;\mathrm{cte}\,. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Para que os v_i's sejam valores estacionários, os termos lineares em ϕ_i devem ser zero, assim,

$$2(m_1^2+|\mu|^2)\mathrm{Re}\,v_1^*\phi_1-\frac{g^2+g'^2}{2}\left(|v_2|^2-|v_1|^2\right)\mathrm{Re}\,v_1^*\phi_1-B\mu\,\mathrm{Re}\,v_2\phi_1=0\,,$$

$$2(m_2^2+|\mu|^2)\mathrm{Re}\,v_2^*\phi_2+\frac{g^2+g'^2}{2}\left(|v_2|^2-|v_1|^2\right)\mathrm{Re}\,v_2^*\phi_2-B\mu\,\mathrm{Re}\,v_1\phi_2=0\,.$$

Note que as condições anteriores são equações para as partes $\mathrm{Re}\,\phi_i$ e $\mathrm{Im}\,\phi_i$, o que equivale a escrever

$$2(m_1^2+|\mu|^2)v_1^* - \frac{g^2+g'^2}{2}\left(|v_2|^2-|v_1|^2\right)v_1^* - B\mu\, v_2 = 0\,, \tag{D.8}$$

$$2(m_2^2+|\mu|^2)v_2^* + \frac{g^2+g'^2}{2}\left(|v_2|^2-|v_1|^2\right)v_2^* - B\mu\, v_1 = 0\,. \tag{D.9}$$

Poderíamos simplesmente escolher os dois valores v_i reais. Porém é suficiente escolher v_1 (ou v_2) como real, e o outro será obtido de (D.8) ou (D.9). Por exemplo, escolhendo uma fase para h_1^0 é possível obter v_1 real. Assim, em (D.8), já que $B\mu$ foi definido como real, será necessario que v_2 também seja real. Desse modo, a exigência de que as partes reais sejam nulas resulta nas eq's (4.25) e (4.26) do Capítulo 4.

Uma vez que os valores v_i correspondem a mínimos locais para V, o potencial apresentará uma forma um pouco mais simples. Ignorando o termo constante, de (D.7) obtemos

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{quad}}^{(\mathrm{N})} &= \frac{g^2+g'^2}{4}(v_1^2-v_2^2)\left[|\phi_1|^2-|\phi_2|^2\right] + \frac{g^2+g'^2}{2}\left[\mathrm{Re}(v_1\phi_1-v_2\phi_2)\right]^2 \\ &\quad + (m_1^2+|\mu|^2)|\phi_1|^2 + (m_2^2+|\mu|^2)|\phi_2|^2 - B\mu\,\mathrm{Re}(\phi_1\phi_2)\,. \end{aligned}$$

Utilizando as definições de $\tan\beta, m_Z^2$ e m_A^2 podemos reescrever o potencial na forma:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{quad}}^{(\mathrm{N})} &= \frac{1}{2}m_Z^2\cos 2\beta\left[|\phi_1^2|-|\phi_2|^2\right] + m_Z^2\left[\mathrm{Re}(\cos\beta\,\phi_1-\sin\beta\,\phi_2)\right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_A^2(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2) - \frac{1}{2}(m_A^2+m_Z^2)\cos 2\beta\left[|\phi_1|^2-|\phi_2|^2\right] \\ &\quad - m_A^2\sin 2\beta\,\mathrm{Re}(\phi_1\phi_2)\,. \end{aligned}$$

O potencial pode ser simplificado um pouco mais,

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{quad}}^{(\mathrm{N})} &= m_Z^2\left[\mathrm{Re}(\cos\beta\,\phi_1-\sin\beta\,\phi_2)\right]^2 + \frac{1}{2}m_A^2\left[|\phi_1|^2+|\phi_2|^2\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}m_A^2\cos 2\beta\left[|\phi_1|^2-|\phi_2|^2\right] - m_A^2\sin 2\beta\,\mathrm{Re}(\phi_1\phi_2)\,, \end{aligned}$$

desse modo obtemos a expressão (4.33), utilizada no Capítulo 4 para escrevermos as matrizes de massa.

D.3 Autovalores de $M^2_{\mathrm{Re}\,\phi}$

Segundo as definições adotadas, a matriz

$$M^2_{\mathrm{Re}\,\phi} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

tem como autovalores as soluções da equação secular

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 = 0\,,$$

isto é

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[A + C \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC - B^2)}\right]\,.$$

Das definições de A, B, e C, obtemos $A + C = m_A^2 + m_Z^2$, e o produto

$$\begin{aligned}
4AC &= (m_A^4 + m_Z^4)(1 - \cos^2 2\beta) + m_A^2 m_Z^2 \left((1 + \cos 2\beta)^2 + (1 - \cos 2\beta)^2\right) \\
&= (m_A^4 + m_Z^4)(1 - \cos^2 2\beta) + 2\, m_A^2 m_Z^2 (1 + \cos^2 2\beta) \\
&= (m_A^2 + m_Z^2)^2 - \cos^2 2\beta (m_A^2 + m_Z^2)^2 + 4\, m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta\,.
\end{aligned}$$

Onde somamos e subtraímos o termo $2m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta$. Conseqüentemente o produto pode ser escrito

$$AC = \frac{1}{4}(m_A^2 + m_Z^2)^2 (1 - \cos^2 2\beta) + m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta\,.$$

Por outro lado

$$B^2 = \frac{1}{4}(m_A^2 + m_Z^2)^2 \sin^2 2\beta\,.$$

Note que o primeiro termo do produto AC coincide com B^2, assim a diferença, que é o fator que aparece na raiz corresponde ao segundo termo do produto AC. Portanto

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 \pm \sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta}\right]\,.$$

O resultado anterior também pode ser escrito na forma

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[m_A^2 + m_Z^2 \pm \sqrt{(m_A^2 - m_Z^2)^2 + 4m_A^2 m_Z^2 \sin^2 2\beta}\right]\,,$$

que foi o resultado utilizado no Capítulo 4 para compararmos as massas dos escalares.

D.4 Potencial $V_{\text{quad}}^{(\mathrm{C})}$

Do Capítulo 4, o potencial escalar tem a forma:

$$\begin{aligned} V &= \frac{g^2}{2}\left|(h_1^\dagger h_2)\right|^2 + \frac{g^2+g'^2}{8}\left[(h_2^\dagger h_2)-(h_1^\dagger h_1)\right]^2 \\ &\quad + (m_1^2+|\mu|^2)(h_1^\dagger h_1) + (m_2^2+|\mu|^2)(h_2^\dagger h_2) + B\mu\,\mathrm{Re}(h_1^- h_2^+ - h_1^0 h_2^0)\,. \end{aligned}$$

Utilizando (4.36) obtemos

$$(h_1^\dagger h_1) = |h_1^-|^2 + v_1^2\,, \quad (h_1^\dagger h_2) = v_2(h_1^-)^* + v_1 h_2^+\,,$$

portanto

$$\begin{aligned} \left[(h_2^\dagger h_2)-(h_1^\dagger h_1)\right]^2 &= \left[|h_2^+|^2 - |h_1^-|^2 + v_2^2 - v_1^2\right]^2 \\ &= 2(v_2^2-v_1^2)\left[|h_2^+|^2 - |h_1^-|^2\right] + \cdots\,, \end{aligned}$$

$$\left|v_2(h_1^-)^* + v_1 h_2^+\right|^2 = v_2^2|h_1^-|^2 + v_1^2|h_2^+|^2 + 2\,\mathrm{Re}(v_1 v_2 h_1^- h_2^+)\,.$$

(Na primera expressão escrevemos apenas a parte quadrática, que será importante para determinarmos as massas) Assim, a contribução dos termos de ordem 2 para os campos $h^\pm$ pode ser expressa como

$$\begin{aligned} V_{\text{quad}}^{(\mathrm{C})} &= \left[\frac{g^2}{2}v_2^2 - \frac{g^2+g'^2}{4}(v_2^2-v_1^2) + m_1^2 + |\mu|^2\right]|h_1^-|^2 \\ &+ \left[\frac{g^2}{2}v_1^2 + \frac{g^2+g'^2}{4}(v_2^2-v_1^2) + m_2^2 + |\mu|^2\right]|h_2^+|^2 \\ &+ \left[B\mu + g^2 v_1 v_2\right]\mathrm{Re}(h_1^- h_2^+)\,. \end{aligned} \tag{D.10}$$

A expressão anterior pode ser simplificada se utilizarmos os resultados (4.31) e (4.32) para $m_i^2 + |\mu|^2$, e a definição de m_W^2. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{2}v_2^2 - \frac{g^2+g'^2}{4}(v_2^2-v_1^2) &= \frac{g'^2}{4}(v_1^2-v_2^2) + \frac{g^2}{4}(v_1^2+v_2^2) \\ &= \frac{g'^2}{4}\cos 2\beta\,(v_1^2+v_2^2) + \frac{1}{2}m_W^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{g^2}{2}v_2^2 - \frac{g^2+g'^2}{4}(v_2^2-v_1^2) + m_1^2 + |\mu|^2\right] &= \left(\frac{g'^2}{4}(v_1^2+v_2^2) - \frac{1}{2}m_Z^2\right)\cos 2\beta \\ &\quad + \frac{1}{2}m_W^2 + \frac{1}{2}m_A^2(1-\cos 2\beta) \\ &= \frac{1}{2}(m_W^2+m_A^2)(1-\cos 2\beta)\,. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\left[\frac{g^2}{2}v_1^2 + \frac{g^2+g'^2}{4}(v_2^2 - v_1^2) + m_2^2 + |\mu|^2\right] = \frac{1}{2}(m_W^2 + m_A^2)(1+\cos 2\beta)\,.$$

Por último

$$\begin{aligned}(B\mu + g^2 v_1 v_2) &= B\mu + g^2 \sin\beta\cos\beta\,(v_1^2+v_2^2) = B\mu + \frac{g^2}{2}(v_1^2+v_2^2)\sin 2\beta \\ &= B\mu + m_W^2 \sin 2\beta = (m_A^2 + m_W^2)\sin 2\beta\,.\end{aligned}$$

Substituindo estes resultados em (D.10) obtemos finalmente a expressão (4.38).

Apêndice E

Diagonalização das Matrizes de Massa do Chargino e Neutralino

E.1 Diagonalização da Matriz de massa X

De acordo com o Capítulo 4, a mistura devido a gauginos e higgsinos carregados fica resumida numa estrutura da forma:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}} = -\frac{1}{2}\left[\psi^{-\,\mathrm{T}} X \psi^{+} + \psi^{+\,\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} \psi^{-}\right] + \mathrm{h.c.} \tag{E.1}$$

Denotamos por V e U as matrizes unitárias tal que

$$U^{*} X V^{\dagger} = M_{\tilde{\chi}}\,,$$

onde $M_{\tilde{\chi}}$ é diagonal. É possível escolher U e V para que a matriz tenha autovalores positivos [11]. Como foi mencionado no texto, definimos $\chi^{+} = V\psi^{+}$ e $\chi^{-} = U\psi^{-}$. Assim as componentes em (E.1) podem ser reescritas na forma:

$$\psi^{-\,\mathrm{T}} X \psi^{+} = \left[U^{-1}\chi^{-}\right]^{\mathrm{T}} X V^{-1}\chi^{+} = \chi^{-\,\mathrm{T}} U^{*} X V^{-1} \chi^{+} = \chi^{-\,\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}\,\chi^{+}\,, \tag{E.2}$$

$$\psi^{+\,\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} \psi^{-} = \left[\psi^{-\,\mathrm{T}} X \psi^{+}\right]^{\mathrm{T}} = \left[\chi^{-\,\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}\,\chi^{+}\right]^{\mathrm{T}} = \chi^{+\,\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}\,\chi^{-}\,. \tag{E.3}$$

Os termos correspondentes ao hermitiano conjugado em (E.1) seriam

$$\left[\psi^{-\,\mathrm{T}} X \psi^{+}\right]^{*} = \left[\chi^{-\,\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}\,\chi^{+}\right]^{*} = \bar{\chi}^{+\,\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}^{\mathrm{T}}\,\bar{\chi}^{-} = \bar{\chi}^{+\,\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}\,\bar{\chi}^{-}\,, \tag{E.4}$$

e o conjugado de (E.3), isto é

$$\left[\psi^{+\,\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} \psi^{-}\right]^{*} = \bar{\chi}^{-\,\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}\,\bar{\chi}^{+}\,. \tag{E.5}$$

A matriz $M_{\tilde{\chi}}$, de acordo con a notação utilizada no texto, fica escrita com respeito a seus autovalores como:

$$M_{\tilde{\chi}} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_1} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\chi}_2} \end{pmatrix},$$

Desta forma a soma de (E.2) com (E.4) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \chi^{-\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}\, \chi^{+} + \bar{\chi}^{+\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}}\, \bar{\chi}^{-} &= \sum_{i=1}^{2} m_{\tilde{\chi}_i} \left(\chi_i^{-}, \bar{\chi}_i^{+}\right) \begin{pmatrix} \chi_i^{+} \\ \bar{\chi}_i^{-} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{2} m_{\tilde{\chi}_i}\, \tilde{\chi}_i^{\dagger} \gamma_0 \tilde{\chi}_i \,. \end{aligned} \tag{E.6}$$

Somando (E.3) com (E.5) obtemos novamente o resultado anterior (já que (E.3) e (E.5) são exatamente os transpostos de (E.2) e (E.4), o resultado seria o transposto de (E.6), e já que ${\gamma_0}^{\dagger} = \gamma_0$ é obtido o mesmo resultado). Portanto, o fator 1/2 global em (E.1) desaparece. Assim,

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}} = -\sum_{i=1}^{2} m_{\tilde{\chi}_i}\, \tilde{\chi}_i^{\dagger} \gamma_0 \tilde{\chi}_i \,, \tag{E.7}$$

que coincide com a expressão utilizada no texto para os charginos se denotamos $\tilde{\chi}_i^{\dagger}\gamma_0 = \bar{\tilde{\chi}}_i$ como é usual para espinores de 4-componentes.

E.2 Diagonalização da Matriz de massa X^0

De acordo com as definições adotadas, a mistura entre higgsinos e gauginos neutros pode ser expressa na forma:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0} = -\frac{1}{2}(\psi^0)^{\mathrm{T}} X^0 \psi^0 + \mathrm{h.c.} \tag{E.8}$$

De forma similar ao caso dos charginos, é possível diagonalizar X^0. Para isto, denotamos a matriz unitaria N, tal que:

$$N^* X^0 N^{\dagger} = M_{\tilde{\chi}^0} \tag{E.9}$$

seja uma matriz diagonal e com autovalores positivos. Com esta definição

$$\psi^{0\mathrm{T}} X^0 \psi^0 = \left[N^{-1}\chi^0\right]^{\mathrm{T}} X^0 N^{-1} \chi^0 = \chi^{0\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}^0}\, \chi^0 \,, \tag{E.10}$$

somando o hermitiano conjugado da relação anterior, denotando as entradas da matriz diagonal convenientemente como $m_{\tilde{\chi}_i^0}$ e, escrevendo em componentes utilizando (E.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{\chi}^0} &= -\frac{1}{2}\left[{\chi^0}^{\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}^0}\, \chi^0 + (\bar{\chi}^0)^{\mathrm{T}} M_{\tilde{\chi}^0} \bar{\chi}^0\right] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_{\tilde{\chi}_i^0}\,(\chi_i^0, \bar{\chi}_i^0)\begin{pmatrix} \chi_i^0 \\ \bar{\chi}_i^0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Desta maneira, os quatro espinores de Majorana na expressao anterior correspondem a autoestados de massa.

Referências

[1] A. Salam and J. Strathdee, *Phys. Lett.* 51B, 353 (1974). A referência aparece em: Supersymmetry, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapoure, 1987).

[2] S. Weinberg, The Quantum Field Theory - vol 3, Supersymmetry, Cambridge University press, 2002.

[3] G. Ross, Grand Unified Theories, Frontiers in physics/1985.

[4] R. N. Mohapatra, Unification and Supersymmetry, The Frontiers of Quarks and Lepton Physics, Second edition, Springer-Verlag/1992.

[5] X. Tata, Proceedings of the IXth Swieca Summer School. World Scientific, 1998.

[6] S. Coleman and J. Mandula, *Phys. Rev.* 159, 1251 (1967).

[7] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, *Nucl. Phys.* B88, 257 (1975). A referência aparece também em: Supersymmetry, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapoure, 1987).

[8] J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity, Second edition, Princeton University Press.

[9] M. Drees, An Introduction to Supersymmetry, APCTP-5, KEK-TH-501/nov. 1996.

[10] S.W. Ham et al arXiv: hep-ph/0406070 v1 (7 jun 2204).

[11] J.F. Gunion and H. Haber, *Nucl. Phys.* B272 (1986), 1-76.

[12] S. Dimopoulos and H. Georgi, *Nucl. Phys.* B193, 150 (1981). A referência aparece em: Supersymmetry, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapoure, 1987).

[13] H. Haber, *Nucl. Phys.* Proc. Suppl. 62, 469 (1998).

[14] R.D. Peccei and H. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* 38, 1440 (1977), *Phys. Rev.* D16. 1791 (1977).

[15] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, D26 (1982) 287-302. A referência aparece em: Supersymmetry, S. Ferrara, ed. (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapoure, 1987).

[16] H. Baer, Chih-hao Chen, F. Paige and X. Tata *Phys. Rev.* D Volume 52, Number 5, 1 sep. 1995. H. Baer, Chih-hao Chen, Chung Kao and X. Tata arXiv:hep-ph/9504234 v1 5 Apr. 1995.

[17] A. Djouadi, J.-L. Kneur and G. Moultaka. arXiv:hep-ph/0211331 v1 Nov. 2002.

[18] A. Pukhov et al. Preprint INP MSU 98-41/542, arXiv:hep-ph/9908288.