



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/08

Dinâmica de uma população em fragmentos unidimensionais

Daniel Juliano Pamplona da Silva

Orientador

Roberto André Kraenkel

Maio de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

*Dedico esta tese ao Deus Único
Ao Deus Pai
Ao Deus Filho
Ao Deus Espírito Santo*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, Criador do mundo e autor da vida, sem o qual nada seria possível.

Ao professor Roberto Kraenkel quem, com muita sabedoria, orientou esta tese sem limitar seus horizontes. Um ótimo orientador, sem ressalvas.

Ao professor Edmundo Capelas, meu mentor intelectual durante a graduação, agradeço com respeito e admiração.

Aos demais professores que tive, desde minha alfabetização, até a data presente. Todos tiveram papel fundamental em minha formação, tanto os que nunca esquecerei, como aqueles que tentarei nunca mais lembrar.

A minha mãe, Ana Maria, porque Mãe é Mãe e vice-versa, em particular pela fé que sempre procurou me transmitir. Ao Meu pai Salomão, quem muito se esforçou em me ensinar a driblar as maldades do mundo. Ao Meu irmão Salomão Júnior, companheiro de copo, de lágrimas, alegrias e financiador dos períodos entre bolsas.

À CAPES que financiou este trabalho.

Às demais agências financiadoras durante graduação, SAE-Unicamp e CNPq.

Aos amigos: Maurício, assessor para assuntos interpessoais. Vagner pelas longas e empolgantes discussões sobre nossos trabalhos. Franciane, ou Fran, como a conhecemos, pela vibração a cada gráfico, a cada resultado novo sempre me motivando, mesmo que o resultado não fosse motivador. A Sheila Holz pelos dois anos de convivência no início do trabalho, muitas vezes ouvindo lamúrias próprias da época; obrigado por seus ouvidos. Ana Carolina pela releitura desta tese e suas cordiais sugestões.

Aos funcionários do IFT: Jô, Dona Ana, Seu Jorge, Luzinete, Rosane, Meire, Vilma, José Francisco, Marcelo e Marcela. Pessoas muito agradáveis que foram imprescindíveis, pois graças a elas sempre tive banheiros limpos, café quente e auxílio burocrático quando precisei.

Por fim, e nem por isso menos importante, agradeço a todos os meus colegas e pessoas de meu convívio social, sem o quais a vida não faria sentido e conseqüentemente não faria sentido qualquer titulação.

“Aquilo que você mais sabe ensinar, é o que você mais precisa aprender...”

Richard Bach - Ilusões

Resumo

Esta tese tem como foco central o estudo da dinâmica populacional de um ou mais fragmentos, regiões favoráveis à vida, imersas em uma região desfavorável, mais especificamente estamos interessados nas condições mínimas para existência de vida no(s) mesmo(s). Inicialmente reproduzimos um resultado conhecido na literatura, o tamanho mínimo para existência de vida em um fragmento isolado. Posteriormente extendemos nosso modelo para um fragmento não isolado, dois e infinitos fragmentos; isolados, não isolados, de mesmo tamanho, de tamanhos diferentes, com condições à vida iguais ou diferentes dentro deles. Um aspecto que valida nosso modelo é que sempre podemos reduzir suas extensões ao caso mais simples e eles o reproduzem fielmente. Aplicamos nosso estudo na predição do menor tamanho que precisa ser plantado no reflorestamento de uma região desmatada de modo que uma dada espécie possa se restabelecer.

Palavras Chaves: Fragmentos populacionais; equação de Fisher; modelo difusivo.

Áreas do conhecimento: Fenômenos não lineares; Física-matemática; dinâmica de populações.

Abstract

The main subject of this thesis is the study of population dynamics in one or more fragments. Fragments are favorable regions to life immersed in an unfavorable region. Our problem is found the minimum life conditions. The first step is reproduce a known result at the literature; the minimum life existence size in an isolated fragment. After we extend our model to one no isolate fragment. The second extension is explore two fragments; isolated and not isolated, with same size and different sizes, with equals or different life conditions inside them. The last extension consist in resolve the problem to infinite fragments, with same size and different sizes. One point that validate our extensions is the reproduce of single case when the life difficult between the fragments go to infinite. We apply our results to preview the necessary planted size to reforest a deforested region, that possibility the life restoration of one specie at this region.

Índice

| | |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Equação de Fisher - 1 dimensão | 6 |
| 1.1 $a(x)$ constante | 8 |
| 1.2 Coeficientes Variáveis | 9 |
| 2 Um Fragmento Isolado | 11 |
| 3 Dois fragmentos - Sistema Isolado | 15 |
| 3.1 Mesmo fator de crescimento | 18 |
| 3.2 Fatores de crescimento diferentes | 22 |
| 4 Fontes e Sorvedouros | 26 |
| 4.1 Perfis populacionais | 27 |
| 5 Um Fragmento Não Isolado | 31 |
| 6 Dois Fragmentos - Sistema não isolado | 35 |
| 6.1 Mesmo fator de crescimento | 39 |
| 6.2 Sobre as Simulações | 44 |
| 6.3 Fatores de Crescimento Diferentes | 44 |
| 7 Infinitos Fragmentos - Caso Periódico | 46 |
| 8 Infinitos fragmentos - Caso estocástico | 49 |
| 8.1 Modelo | 49 |
| 8.2 Aproximação computacional | 50 |
| 8.3 Resultado para uma realização - análise preliminar | 51 |
| 8.4 Média sobre várias realizações - análise quantitativa | 52 |
| 9 Aplicação - Viabilidade à vida em um reflorestamento | 58 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Conclusão | 62 |
| Perspectivas | 64 |
| A Equação de Fisher a coeficientes constantes - Solução do tipo onda viajante | 65 |
| A.1 $v = 0$ | 65 |
| A.2 $v = 5/\sqrt{6}$ | 66 |
| B Generalização da Solução analítica para não linearidade polinomial de qualquer ordem | 70 |
| C Dois fragmentos idênticos - Sistema Isolado | 73 |
| D Obtendo uma margem de segurança | 75 |
| Referências | 79 |

Introdução

O estudo de fragmentos populacionais tem despertado interesse na área de dinâmica de populações [6, 41], tanto em biologia [13, 22, 33] observacional como em modelos teóricos [27], os quais podem utilizar ferramentas matemáticas em sua descrição. Chamamos de fragmento, ilha populacional ou mancha, uma região propícia à vida imersa em uma região não propícia. São exemplos de populações vivendo em um fragmento: pessoas em um oásis no meio do deserto, uma ilha oceânica, peixes dentro de uma lagoa ou de um aquário, dentre outros.

Muitas são as diferenças entre os poucos exemplos que citamos, dentre elas uma que nos chama a atenção é quanto o tipo de fronteira, pois pessoas podem andar pelo deserto, ou nadar nas proximidades de uma ilha, ou seja, não há um isolamento total, uma vez que os indivíduos embora não possam viver indefinidamente na região fora do fragmento podem ficar lá por algum tempo, havendo eventualmente a possibilidade de migrar para outro fragmento que esteja a uma distância aceitável. Já no caso da lagoa ou do aquário, os peixes não podem avançar além da fronteira do fragmento, pois não têm como transpor a barreira física e caso o façam podem morrer em um tempo muito curto*.

Especificamente estamos interessados em encontrar uma condição para que possa haver vida em um dado fragmento em termos de parâmetros que caracterizam a população. De forma geral essas condições são muitas, tais como quantidade de alimento disponível, as condições ambientais a que essa população está submetida e relação de cada espécie com essas condições, a quantidade de membros da população que competem por alimento e espaço, o tamanho do fragmento em estudo. Em particular nesse trabalho estaremos interessados no tamanho mínimo de um fragmento ou de um conjunto deles, tal que seja viável a existência de vida. Biologicamente estaremos assumindo que o espaço disponível pode ser um fator limitante para a dada população.

Em 1951 Skellam [38] propôs a existência de um tamanho mínimo para uma ilha populacional que proporcionasse viabilidade à vida, tamanho esse abaixo do qual uma dada população inicial não pode prosperar, tendendo a zero no tempo. Em

*Muito curto se comparado ao tempo de vida médio da espécie.

outras palavras a população de equilíbrio estável é zero. Vide fig.(1)

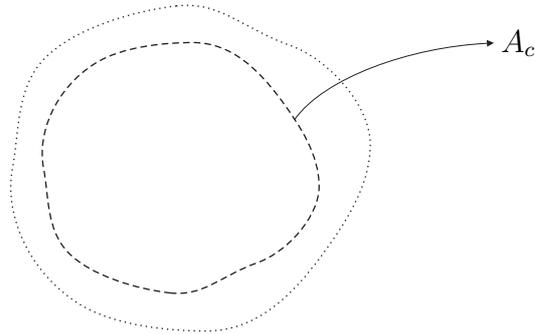


Figura 1: Esquema de um fragmento e seu tamanho mínimo para que haja vida.

Nosso intuito foi inicialmente mostrar que dado um fragmento de área γ , menor que a limite A_c (vide fig.(2)), a população não é viável neste fragmento, tal como proposto por Skellam, sem que para isso precisemos resolver a equação não linear completa, bastando-nos investigar a parte linear da mesma, como discutiremos a seguir.

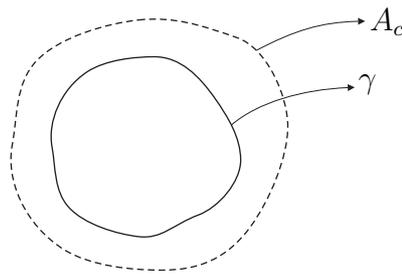


Figura 2: Esquema de uma região onde é impossível a vida.

Uma vez reproduzido o resultado de Skellam, introduzimos próximo ao fragmento de área γ , um fragmento de área γ_1 , também menor que L_c (vide fig.(3)), mas de modo que possa haver migração (difusão) entre os dois fragmentos. Pode existir vida no sistema $\gamma + \gamma_1$? Se sim, em que condições?

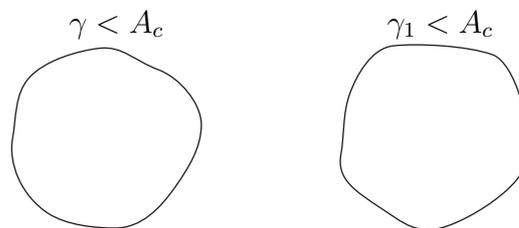


Figura 3: Esquema de duas regiões suficientemente próximas, em cada uma das quais, isoladamente não existiria vida.

Ao obter uma solução para o problema de dois fragmentos passamos a investigar como se comportam, três, quatro, ..., infinitos fragmentos. Haverá alguma diferença qualitativa entre o caso de n e o de $n + 1$ fragmentos para $n \gg 1$? Ou há um limite acima do qual o número de fragmentos não é mais importante?

As perguntas acima e suas respectivas respostas podem ser uma contribuição para o debate[†][20] conhecido por SLOSS, pois esse debate foi muito intenso nos anos 80 e versava sobre qual era a escolha mais viável visando a biodiversidade: um único fragmento grande ou um sistema formado por vários pequenos que representassem a mesma área. Essa discussão inspirou muitos trabalhos sobre tamanhos de fragmentos ou ilhas populacionais, não necessariamente ligados apenas à biodiversidade [11] dos mesmos. Nosso trabalho, embora trate de uma única espécie e não possua a condição de mesma área, também se preocupa com qual a melhor solução; um fragmento grande ou vários pequenos. Nos preocupamos ainda se é melhor vários pequenos de mesmo tamanho ou de tamanhos diferentes e quão grandes e/ou quão pequenos estes devem ser. Grandes ou pequenos em relação a que? Será que a população do sistema possui um estado de equilíbrio estável? Este estado seria um atrator global? Haveria mais de um estado estável? Este dependeria da condição inicial? Estas são mais algumas das muitas questões que motivam o nosso trabalho.

De maneira bastante objetiva, podemos dizer que nosso problema se resume a encontrar uma condição para que a vida seja possível, sem necessariamente encontrar a solução analítica do problema. Matematicamente isto se reduz a calcular o menor autovalor da equação de Fisher linearizada. Isto pode e vai nos introduzir algumas simplificações, dando nos a possibilidade de estudar casos para os quais talvez não seja possível encontrar a solução analítica da equação não linear, tal como os sistemas de dois ou mais fragmentos. Para tanto iniciaremos pela descrição da Equação de Fisher e procuraremos justificar porque ela é um bom modelo para descrever nosso sistema.

É importante ressaltar que nosso modelo não apresenta efeito Allee [39], efeito no qual a população precisa ser maior que um certo valor crítico para que possa prosperar, de modo que se introduzíssemos inicialmente uma população muito pequena em nosso fragmento essa diminuiria até sua total extinção independente das condições do meio. O que não acontece, em nosso modelo, no qual qualquer densidade populacional não nula pode evoluir para um estado estável com a população vivendo em equilíbrio com o meio.

Este trabalho este organizado como se segue.

No capítulo 1 apresentamos a equação de Fisher, assim como algumas soluções

[†]SLOSS é uma sigla: Single Large Or Several Small (um único grande ou vários pequenos).

conhecidas na literatura para coeficientes constantes e sua adequabilidade para nosso modelo. Traçamos os gráficos de dois casos particulares ilustrando frentes de invasão que se difundem pelo espaço ao longo do tempo. Para o caso de coeficientes variáveis identificamos seus parâmetros com as respectivas grandezas biológicas que descrevem o fragmento e suas vizinhanças e apresentamos argumentos que viabilizam o estudo da equação linearizada.

O caso mais simples conhecido na literatura, o de um único fragmento isolado, foi reproduzido no capítulo 2. O resultado obtido é exatamente igual ao existente na literatura.

O capítulo 3 conta com a introdução de mais um fragmento próximo ao primeiro. De maneira geral, ele não precisa ser de mesmo tamanho nem proporcionar as mesmas condições à vida, embora esses dois casos sejam de fundamental importância, pois reduzem o número de variáveis em nosso problema, o que permite uma abordagem mais ampla dos demais parâmetros.

Ainda tratando de dois fragmentos isolados do meio externo a eles, no capítulo 4, fazemos uma breve discussão sobre o problema conhecido por sistema de “fonte sorvedouro”. Uma fonte é um fragmento no qual isoladamente, ou seja, sem a presença do segundo fragmento, é viável a existência de vida em seu interior. Já o sorvedouro, contrariamente a isto, sem a presença do segundo fragmento, ou seja, isoladamente, não seria capaz de proporcionar condições à vida. Um resultado interessante que surge nessa análise é a viabilidade à vida num sistema composto por dois fragmentos que isoladamente seriam dois sorvedouros, desde que a conexão entre ambos seja suficientemente forte.

No capítulo 5 voltamos ao problema de um fragmento, considerando agora suas vizinhanças como um lugar hostil à vida porém não totalmente, em outras palavras o fragmento não está isolado, de modo que há vida nas regiões hostis vizinhas a ele, ainda que por uma distância limitada do mesmo. O novo tamanho crítico para o fragmento depende de quão hostil são suas vizinhanças.

Uma generalização é introduzida no capítulo 6, a qual reúne o sistema de dois fragmentos do capítulo 3 e a interação com o meio externo (capítulo 5). A região entre os fragmentos e o ambiente externo ao sistema não precisam ter as mesmas condições à vida, porém a igualdade delas é uma particularidade bastante interessante à medida que representa dois fragmentos inseridos numa região homogênea.

Infinitos fragmentos idênticos são tratados no capítulo 7. A periodicidade deste perfil introduz simplificações teóricas e numéricas. Uma aplicação deste modelo poderia ser a predição do tamanho mínimo de cada fragmento de floresta em um reflorestamento que proporcionasse a existência de vida. O fato de ser um reflorestamento possibilita a introdução da vegetação de uma espécie desejada.

Um caso ainda mais geral é apresentado no capítulo 8 no qual se estudam infinitos fragmentos de tamanhos diferentes seguindo uma distribuição estocástica. Aproximações e inferências são utilizadas para tratamento dos resultados obtidos. A comparação com o capítulo 7 é inevitável e as diferenças são notavelmente interessantes, tal como apresentado no capítulo 9.

Por fim no capítulo 9 utilizamos os resultados obtidos nos capítulos 7 e 8 para construirmos um modelo hipotético de um reflorestamento, modelo este segundo o qual é melhor termos fragmentos de tamanhos diferentes, uma vez que este perfil exige uma área plantada menor que o perfil em que todos possuem o mesmo tamanho.

Capítulo 1

Equação de Fisher - 1 dimensão

O estudo de modelos dinâmicos compostos por muitos elementos, pode ser interpretado tanto do ponto de vista de cada elemento, como do efeito coletivo destes. Uma característica bastante notória é que muitas vezes o efeito coletivo de movimentos individuais totalmente aleatórios pode ser bem comportado. Um exemplo disto é o movimento browniano que resulta coletivamente na difusão gaussiana ou fickiana.

Em nosso modelo utilizaremos este pressuposto de que cada elemento de nossa população se move aleatoriamente com distribuição de probabilidade isotrópica, gerando um efeito coletivo de difusão.

Um bom exemplo de difusão é a propagação do calor através de uma chapa (2 dimensões) ou um fio (1 dimensão!) metálico. Assim sendo seria plausível iniciarmos a descrição de nosso modelo a partir da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D\nabla^2 u. \quad (1.1)$$

onde D é o coeficiente de difusão e u a densidade populacional, t a variável tempo e ∇ é o operador laplaciano convencional que representa as derivadas segundas (difusão) no espaço.

Porém a eq.(1.1) não descreve o aumento nem a diminuição da quantidade de elementos de nosso modelo, mas apenas a difusão destes. Como o escopo deste trabalho é o estudo de populações biológicas, onde cada elemento é um indivíduo e o conjunto deles forma uma população, a eq.(1.1) não descreveria o nascimento nem a morte de indivíduos. Podemos contornar este problema somando ao lado direito da equação um termo de fonte, o que nos fornece

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = D\nabla^2 u + f(u) \quad (1.2)$$

Esta é conhecida na literatura por Equação de Fisher*, como o próprio nome diz,

*De forma mais geral esta equação é conhecida como equação de Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-

foi proposta por R. A. Fisher no ano de 1937 em um artigo intitulado “The wave of advance of advantageous genes” [7].

Logo para cada função $f(u)$, temos uma equação diferente, das quais encontramos alguns casos particulares discutidos em livros e artigos [2, 5, 16], sempre associados a problemas envolvendo algum tipo de difusão.

O problema mais simples que poderíamos tratar seria com uma função linear, ou seja, introduzir $f(u)$ proporcional a u , porém essa não resultaria uma boa equação para descrever uma população em equilíbrio uma vez que, ou a densidade populacional cresceria indefinidamente, ou diminuiria até a extinção. Em nossa modelagem utilizaremos a equação de Fisher com uma função $f(u)$ não linear no intuito de descrever a dinâmica de uma densidade populacional [32] estável, evitando esse crescimento ilimitado com a introdução de um termo de saturação ($-u^2$), pois para baixas populações $u > u^2$ e para altos valores de densidade populacional $u < u^2$. Logo, havendo condições para o desenvolvimento de população ela cresce ou decresce até um ponto e estabiliza. Por simplicidade trabalharemos apenas em uma dimensão[†] espacial, escolhido como y , de modo que nossa equação possui a forma

$$u_\tau = Du_{yy} + cu - bu^2 \quad (1.3)$$

onde D é o coeficiente de difusão, b é um parâmetro de competição intra-específica e c é um parâmetro de crescimento.

Assumir que cada coeficiente (c, b ou D) da eq.(1.3) é uma função de y e/ou τ pode gerar problemas interessantes. É comum encontrarmos na literatura modelos com $b = b(y)$ [27] ou ainda $D = D(y)$ [18].

Em nosso trabalho assumimos b e D constantes e $c = c(y)$, para representar as heterogeneidades espaciais.

Podemos introduzir mudanças de variáveis na eq.(1.3) de modo a eliminar algumas constantes, simplificando assim a manipulação algébrica, sem perder a generalidade. Iniciemos dividindo toda a equação por b , o que nos fornece

$$\frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{D}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{c(y)}{b} u - u^2.$$

onde introduzindo $t = b\tau$, $x = y\sqrt{b/D}$ e $a(x) = c(x\sqrt{D/b})/b$ temos

$$u_t = u_{xx} + a(x)u - u^2 \quad (1.4)$$

Piskunov (FKPP), a qual é corriqueiramente chamada na literatura de Fisher-Kolmogorov, ou simplesmente equação de Fisher, como faremos nesta tese.

[†]Em duas dimensões espaciais teríamos uma população que se difunde sobre uma área, porém de forma análoga ao caso unidimensional, o que não introduziria nenhum fenômeno físico novo, exceto se as taxas de difusão fossem diferentes nas duas direções ou funções das variáveis espaciais, o que é uma boa sugestão para expansão deste trabalho.

1.1 $a(x)$ constante

Mesmo para o caso $a(x)$ constante, ou seja, todos coeficientes constantes não se conhece uma solução geral para a eq.(1.4). O que se tem na literatura [25, 26, 40] são soluções para valores específicos que permitem alguns métodos que a simplifique. Um exemplo é o caso $a(x) = 1$, para o qual a eq.(1.4) assume a forma

$$u_t = u_{xx} + u - u^2. \quad (1.5)$$

Esta possui uma solução do tipo onda viajante, dada pela expressão abaixo [1], vide apêndice A.

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + e^{(x-5t)/\sqrt{6}}/\sqrt{6})^2} \quad (1.6)$$

A solução acima pode ser generalizada para qualquer não linearidade do tipo u^p com $p \in N$ tal como descrito no apêndice B.

Como dito, a função da eq.(1.6) representa uma onda viajante. Veja no gráfico da fig.(1.1) as soluções para vários valores do tempo t .

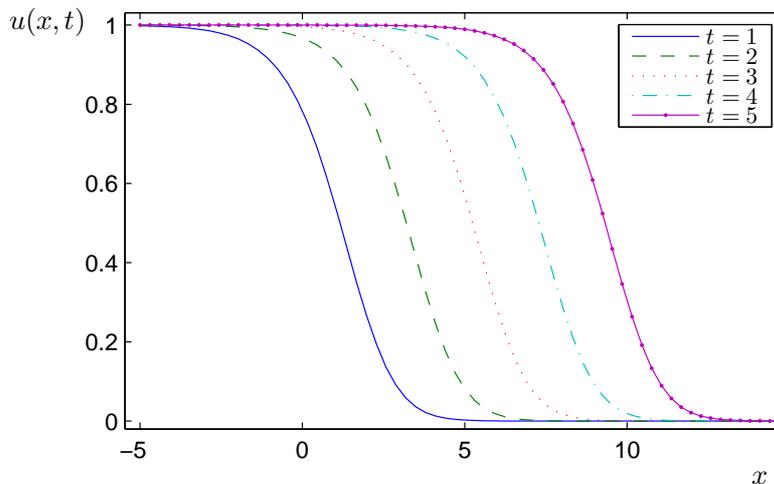


Figura 1.1: Solução da equação de Fisher com coeficientes constantes, do tipo onda viajante com velocidade $v = 5/\sqrt{6}$.

Podemos obter também uma solução muito similar para uma onda viajante com velocidade $v = -5/\sqrt{6}$. Portanto a evolução temporal vai depender da condição inicial dada. Se dermos uma condição inicial com $u(-\infty, t) = 1$ e $u(\infty, t) = 0$, teremos uma solução do tipo onda viajante com velocidade positiva. Se introduzirmos uma

condição inicial com $u(-\infty, t) = 0$ e $u(\infty, t) = 1$, teremos uma frente de invasão com velocidade negativa. Porém se introduzirmos uma condição inicial simétrica, podemos ter um pacote que se abre nas duas direções. Um exemplo biológico disso pode ser uma população inicialmente localizada que se difunde pelo espaço caso não haja nada que a impeça. A fig.(1.2) apresenta soluções numéricas da eq.(1.5) dadas condições iniciais simétricas para alguns valores do tempo e da amplitude inicial A .

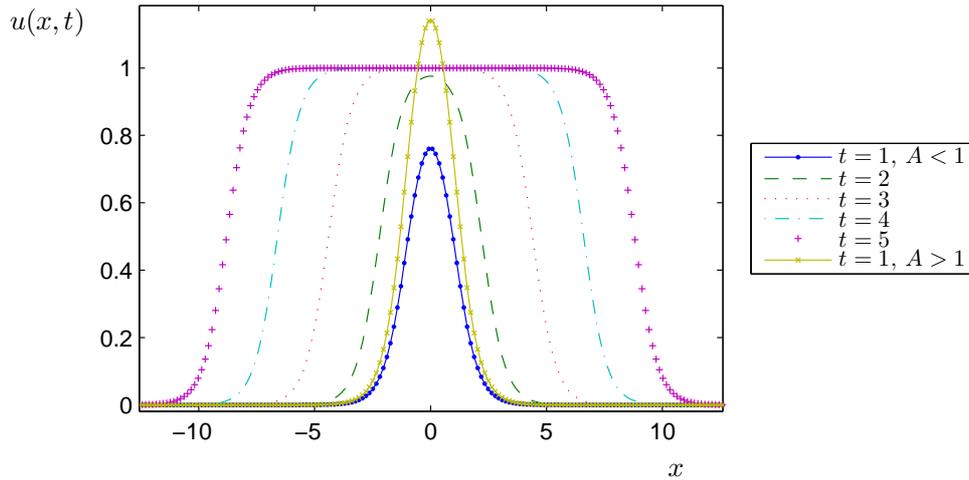


Figura 1.2: Solução da equação de Fisher com coeficientes constantes, do tipo onda viajante com $|v| = 5/\sqrt{6}$ e condição inicial simétrica.

Na fig(1.2) observamos que a amplitude final independe da condição inicial. Ou seja, qualquer condição inicial não nula evolui para a mesma amplitude final, passado um período transiente.

1.2 Coeficientes Variáveis

Em uma rápida análise da dinâmica do problema, o qual é modelado pela eq.(1.4), constatamos[‡] que o termo linear em $u(x, t)$ representa o crescimento populacional e o termo quadrático em $u(x, t)$ a competição intra-específica (saturação), o qual favorece a diminuição do aumento populacional à medida que a população cresce.

Nosso interesse é encontrar uma condição para que uma população pequena prospere. Isto nos permite negligenciar a parte não linear da eq.(1.4). Se a equação

[‡]O termo difusivo (derivada segunda no espaço) é responsável pela “invasão” populacional, não contribuindo no crescimento ou diminuição da população.

linear associada a ela descrever uma população que se extingue, certamente esta também se extinguirá para a equação completa. Caso contrário, a população crescerá ilimitadamente, mas com isso não precisamos nos preocupar, pois esse crescimento será freado pelo termo não linear da equação completa, à medida que a população crescer e se aproximar do ponto de saturação. Logo, concluímos ser esta uma boa tática para encontrarmos uma condição de viabilidade à vida. Tomemos então a equação

$$u_t = u_{xx} + a(x)u \quad (1.7)$$

a qual pode ser classificada como uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem parabólica [29]. O princípio da superposição [28] e o método de separação de variáveis [3] nos garante sempre existir uma solução na forma

$$u(x, t) = \sum c_n \Phi_n(x) e^{\lambda_n t} \quad (1.8)$$

onde $\Phi(x)$ satisfaz

$$\mathcal{L}\Phi_n = \lambda\Phi_n, \quad \text{sendo} \quad \mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(x). \quad (1.9)$$

Por simplicidade tomaremos somente funções $a(x)$ constantes por partes, essa simplificação nos diz que uma região ou é propícia à vida ou não propícia à vida, o que ainda nos deixa a liberdade de fixarmos os graus de favorabilidade e desfavorabilidade à vida dentro e fora dos fragmentos respectivamente.

Se $a(x)$ for constante por partes sempre será possível resolver analiticamente o problema, por mais trabalhoso que possa ser encontrar os autovalores λ_n .

Uma outra consideração importante é a impossibilidade da densidade populacional $u(x, t)$ ser negativa. Isto introduzirá algumas escolhas a serem feitas ao longo das manipulações algébricas. A esta propriedade de nosso modelo damos o nome de “positividade”.

Assim, o que nos interessa é resolver a equação de Fisher linearizada em diversos casos importantes para aplicações biológicas tendo em mente que $u(x, t) > 0$.

Em suma, neste capítulo introduzimos a equação de Fisher, exploramos algumas de suas soluções conhecidas na literatura para coeficientes constantes e sua viabilidade para nosso modelo. Construimos dois casos particulares que representam frentes de invasão que se difundem pelo espaço no decorrer do tempo, uma analítica e uma numérica. Para o caso de coeficientes variáveis identificamos seus parâmetros com as respectivas grandezas biológicas do fragmento e de suas vizinhanças. Apresentamos argumentos que viabilizam o estudo da equação linear associada a equação de Fisher, bem como a forma de sua solução.

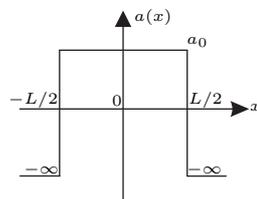
Capítulo 2

Um Fragmento Isolado

Iniciamos nossa abordagem linear pelo caso mais simples que conhecemos, o qual constitui-se de um único fragmento isolado, sem interação com o meio externo. Este problema foi resolvido por Kenkre [17] de maneira completa, ou seja, utilizando a equação de Fisher com não linearidade quadrática. Em seu trabalho ele encontrou a solução analítica do problema e a partir desta obteve um tamanho mínimo para o fragmento abaixo do qual é impossível a existência de vida. O resultado encontrado por Kenkre é compatível com o de Skellam [38].

Nosso intuito é reproduzir a condição encontrada por Skellam, sem procurar a solução da Equação de Fisher (eq.(1.4)), ou seja, usando a propriedade da parte linear anteriormente apresentada encontrarmos uma condição mínima para a existência de vida. O motivo que nos leva a estudar esse problema já bastante conhecido na literatura é validar nosso modelo para posteriormente estendê-lo a casos que os métodos já conhecidos não podem prever.

Como dito anteriormente, o meio (fragmento e suas vizinhanças) é descrito pela função $a(x)$ e uma função que apresenta um ambiente com um único fragmento, dentro do qual a vida é viável e fora do qual ela é totalmente impossível, pode ser dada por


$$a(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x < -L/2 & I \\ a_0, & \text{se } -L/2 < x < L/2 & II \\ -\infty, & \text{se } L/2 < x & III \end{cases} \quad (2.1)$$

Levando $a(x)$ na eq.(1.9) temos nas regiões I e III a condição $\Phi(x) = 0$. Logo somente há vida na região II , onde a eq.(1.9) assume a forma

$$\Phi_{xx} + a_0\Phi = \lambda_n\Phi$$

na qual introduzindo $\alpha^2 = a_0 - \lambda_n$ temos

$$\Phi(x) = A \operatorname{sen} \alpha x + B \cos \alpha x \quad (2.2)$$

Ao admitirmos uma solução dentro do fragmento com a forma dada pela eq.(2.2), assumimos $\alpha^2 > 0$, ou seja, impomos a condição $a_0 > \lambda_n$. A veracidade dessa relação poderia ser matéria de discussão, porém estamos interessados apenas em $\lambda_n = \lambda_0 = 0$, como discutiremos a seguir. Logo para todo $a_0 > 0$ teremos nossa relação satisfeita. Essa consideração será utilizada várias vezes ao longo dessa tese.

Utilizando as condições de contorno temos

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(-L/2) = 0 \\ \Phi(L/2) = 0 \end{array} \right\} + \text{positividade} + \text{simetria} \Rightarrow A = 0$$

e

$$\cos \pm \alpha \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \alpha \frac{L}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

Aqui a positividade limita nosso interesse ao estado fundamental ($n = 0$), pois para $n > 0$ sempre haverá valores negativos de $\Phi(x)$ entre $-L/2$ e $L/2$, logo

$$\alpha L = \pi \Rightarrow L = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Para $u(x, t)$ não ir a zero quando $t \rightarrow \infty$, é necessário $\lambda_0 \geq 0$, vide eq.(1.8), isto nos fornece

$$\lambda_0 \geq 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{a_0 - \lambda_0} \leq \sqrt{a_0} \Rightarrow L \geq \frac{\pi}{\sqrt{a_0}}$$

no limite $\lambda_0 = 0$, temos um valor crítico para L , ao qual chamaremos* de L_{si} dado por

$$L_{si} = \frac{\pi}{\sqrt{a_0}}. \quad (2.3)$$

Portanto para $L < L_{si}$ não é viável à vida no fragmento (região II), resultado este que reproduz o obtido por Skellam. Um valor útil em futuras comparações é obtido fixando $a_0 = 1$, pois em fragmentos não isolados, será útil apenas a razão entre a favorabilidade dentro dos fragmentos e a desfavorabilidade fora destes, o que nos permite fixar uma destas grandezas, portanto

*Os sub índices *si* significam simples e infinito, simples por se tratar de um único fragmento e infinito se refere a dificuldade à vida fora do sistema. O intuito de introduzir essa notação é evitar a confusão entre os vários valores críticos para L que ainda aparecerão nesta tese.

$$L_{si} = \pi. \quad (2.4)$$

Observe como o trabalho para encontrar o resultado acima foi ínfimo, principalmente se compararmos com as manipulações algébricas necessárias para obtermos os mesmo resultado a partir da solução da equação completa [17].

Na fig.(2.1) apresentamos um perfil da densidade populacional inicial $u(x, 0)$ e assintótica $u(x, \infty)$ em um fragmento bem maior que o fragmento crítico. Este perfil foi obtido a partir da simulação da equação completa, a qual inclui o termo não linear. A solução assintótica é única, ou seja, passado um período transiente, todas as condições iniciais evoluem para o mesmo perfil final.

As referidas simulações foram realizadas no software Matlab utilizando o método de diferenças finitas no tempo e FFT (Fast Fourier Transform) para a derivada segunda no espaço. Para as condições duras ($-\infty$) nas bordas do fragmento foi introduzido o valor -10^5 , cuja justificativa será apresentada na seção 3.1.

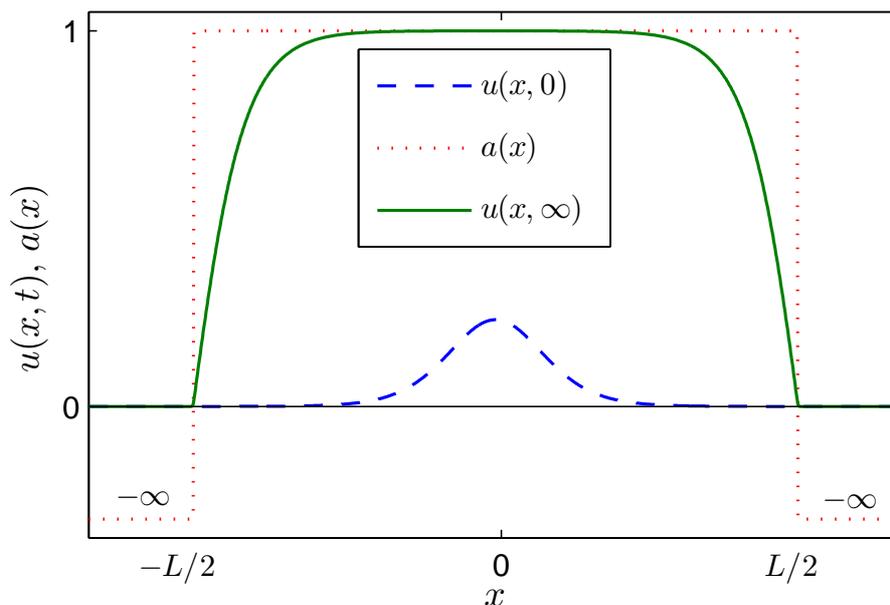


Figura 2.1: Perfil da densidade populacional de um fragmento isolado com $L > L_{si}$, obtido através da simulação da equação de Fisher não linear, para uma condição inicial localizada e menor que o fator de crescimento.

Nota se que $u(x, t) = 0$ nas bordas, onde sua derivada é descontínua como era de se esperar para um fragmento com condições duras ($-\infty$) nas bordas. Se tomarmos

um fragmento com tamanho pouco maior que o crítico, teremos uma densidade população estável cujo maior valor ainda será menor que a unidade, porém não há casos de densidades estáveis que não ocupem todo o espaço do fragmento.

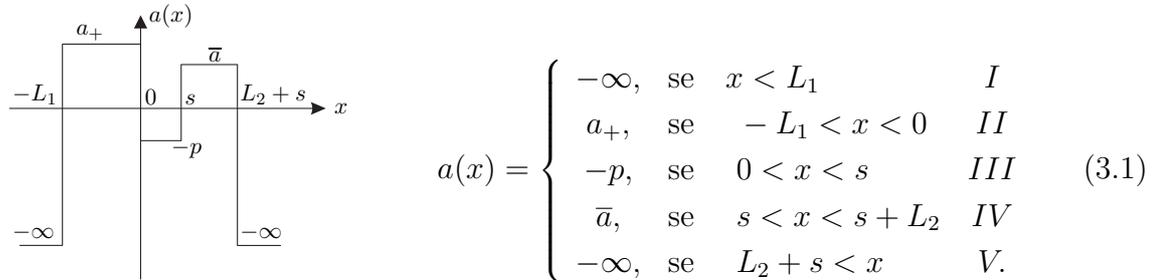
Portanto podemos concluir a partir dos resultados acima que a aproximação linear e nosso programa numérico são compatíveis com o resultado da literatura pois o reproduz com a máxima fidelidade exigindo uma manipulação algébrica bastante simples, uma vez que para obtermos a condição crítica, podemos trabalhar apenas com a equação linearizada sem a necessidade de procurar a solução da equação completa.

Capítulo 3

Dois fragmentos - Sistema Isolado

No capítulo anterior notamos que nosso modelo reproduz o resultado da literatura e isto nos motiva a expandi-lo para sistemas com mais estrutura. Um exemplo ainda simples é introduzir mais um fragmento que interaja com o primeiro. Este nos fornecerá uma primeira impressão da relação existente entre dois fragmentos interagentes. Particularmente se os fragmentos forem não interagentes, isto é, separados por uma região onde a vida seja impossível, o problema se reduz ao mesmo do capítulo anterior e tratamos cada fragmento isoladamente. Pelo mesmo motivo, a região entre os fragmentos será tomada como desfavorável ao crescimento populacional, pois em caso contrário teremos um único fragmento com diferentes graus de propiedade à vida e não dois fragmentos como é o nosso propósito.

Veja abaixo uma função $a(x)$ que descreve um meio com dois fragmentos tal como apresentado acima



onde L_1 e L_2 são os tamanhos de cada um dos fragmentos, p é o grau de dificuldade à vida na região inóspita entre eles, s é o tamanho da região inóspita e a_+ e \bar{a} são os graus de favorabilidade à vida dentro dos fragmentos, aos quais daremos o nome de fator de crescimento.

Substituindo a função da eq.(3.1) acima na eq.(1.9), podemos resolvê-la em cada uma das regiões separadamente, utilizando as condições de contorno e continuidade para “colarmos” as funções nos pontos de descontinuidade de $a(x)$ e estas nos darão as condições de viabilidade da população que estamos interessados, tal como veremos a seguir.

Regiões I e V

As condições duras ($-\infty$) nas bordas do sistema nos garante que a solução é nula nas regiões além fronteiras, inclusive nos pontos de descontinuidade ($x = -L_1$ e $x = L_2 + s$); nos fornece, ainda, que a derivada é descontínua nesses pontos. Portanto

$$\Phi_I(x) = \Phi_V(x) = 0$$

Região II

$$(\Phi_I)_{xx} = -\mu_n^2 \Phi_I, \quad \text{onde } -\mu_n^2 = \lambda_n - a_+$$

$$\Phi_I(x) = A \cos \mu_n x + B \operatorname{sen} \mu_n x$$

Região III

$$(\Phi_{II})_{xx} = \nu_n^2 \Phi_{II}, \quad \text{onde } \nu_n^2 = \lambda_n + p$$

$$\Phi_{II}(x) = C e^{\nu_n x} + D e^{-\nu_n x}$$

Região IV

$$(\Phi_{III})_{xx} = -k_n^2 \Phi_{III}, \quad \text{onde } -k_n^2 = \lambda_n - \bar{a}$$

$$\Phi_{III}(x) = E \cos k_n x + F \operatorname{sen} k_n x$$

Utilizando agora as condições de contorno e continuidade podemos “colar” as funções, tal como previsto anteriormente.

Da continuidade de $\Phi(x)$

- em $x = -L_1$, temos

$$\Phi_I(-L_1) = \Phi_{II}(-L_1) = 0 \Rightarrow A \cos \mu_n L_1 - B \operatorname{sen} \mu_n L_1 = 0 \Rightarrow A = B \tan \mu_n L_1$$

$$\Rightarrow \Phi_I(x) = B[\tan \mu_n L_1 \cos \mu_n x + \operatorname{sen} \mu_n x]$$

- e em $x = L_2 + s$ temos

$$\Phi_{III}(L_2 + s) = 0 \Rightarrow E \cos k_n(L_2 + s) + F \operatorname{sen} k_n(L_2 + s) = 0 \Rightarrow E = -F \tan k_n(L_2 + s)$$

$$\Rightarrow \Phi_{III}(x) = F[\operatorname{sen} k_n x - \tan k_n(L_2 + s) \cos k_n x]$$

- em $x = 0$

$$B \tan \mu_n L_1 = (C + D) \quad (3.2)$$

- em $x = s$

$$-F \sin k_n L_2 = (C e^{\nu_n s} + D e^{-\nu_n s}) \cos k_n (L_2 + s) \quad (3.3)$$

Analogamente da continuidade da derivada de $\Phi(x)$

- em $x = 0$

$$B \mu_n = \nu (C - D) \quad (3.4)$$

- em $x = s$

$$F k \cos k_n L_2 = (C e^{\nu_n s} - D e^{-\nu_n s}) \nu \cos k_n (L_2 + s) \quad (3.5)$$

Substituindo a eq.(3.2) na eq.(3.4) e a eq.(3.3) na eq.(3.5), podemos eliminar B e F e escrever um sistema para C e D , o qual na forma matricial é dado por

$$\begin{pmatrix} \nu_n - \frac{\mu_n}{\tan \mu_n L_1} & -\nu_n - \frac{\mu_n}{\tan \mu_n L_1} \\ \left(\nu_n + \frac{k_n}{\tan k_n L_2} \right) e^{\nu_n s} & \left(\nu_n - \frac{k_n}{\tan k_n L_2} \right) e^{-\nu_n s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Com o objetivo de obtermos uma solução não trivial para o sistema da eq.(3.6), impomos que o determinante da matriz seja nulo, isto nos gera a equação secular a seguir

$$\begin{aligned} - \left(\nu_n - \frac{\mu_n}{\tan \mu_n L_1} \right) \left(\nu_n - \frac{k_n}{\tan k_n L_2} \right) e^{-\nu_n s} \\ + \left(\nu_n + \frac{\mu_n}{\tan \mu_n L_1} \right) \left(\nu_n + \frac{k_n}{\tan k_n L_2} \right) e^{\nu_n s} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

efetuando todas as multiplicações, e agrupando os coeficientes das exponenciais convenientemente temos

$$\left(\nu_n^2 + \frac{\mu_n k_n}{\tan \mu_n L_1 \tan k_n L_2} \right) (e^{-\nu_n s} - e^{\nu_n s}) = \left(\frac{\mu_n \nu_n}{\tan \mu_n L_1} + \frac{k_n \nu_n}{\tan k_n L_2} \right) (e^{-\nu_n s} + e^{\nu_n s}) \quad (3.8)$$

dividindo a equação acima por $(e^{-\nu_n s} + e^{\nu_n s})$, reconhecendo a função $\tan(\nu_n s) = (e^{\nu_n s} - e^{-\nu_n s}) / (e^{\nu_n s} + e^{-\nu_n s})$ e reagrupando os termos de forma conveniente obtemos a expressão

$$\nu_n \tan \mu_n L_1 [\nu_n \tanh \nu_n s \tan k_n L_2 + k_n] + \mu_n [k_n \tanh \nu_n s + \nu_n \tan k_n L_2] = 0 \quad (3.9)$$

Esta expressão depende dos parâmetros L_1, L_2, p, s e a_0 . No momento estamos interessados em calcular o valor mínimo para os tamanhos dos fragmentos L_1 e L_2 e em estudar como o grau de resistência à vida, p , na região entre os fragmentos, influencia esses parâmetros. Fixaremos, portanto, os valores de s (separação entre os fragmentos) e a_+ (favorabilidade à vida dentro do fragmento 1), a saber fixaremos $s = 0.8$ e $a_+ = 1$, por serem valores da ordem do tamanho crítico do fragmento isolado.

Assim como no caso de um único fragmento, estamos interessados apenas no menor autovalor λ_n não negativo, o qual chamaremos de λ_0 . Logo no caso crítico $\lambda_0 = 0$, teremos valores críticos para L_1 e L_2 , aos quais daremos os rótulos* L_{1di} e L_{2di} estes satisfazem a equação, retornando aos parâmetros originais, dada por:

$$\sqrt{p} \tan L_{1di} [\sqrt{p} \tan L_{2di} \tanh 0.8\sqrt{p+\bar{a}}] + \sqrt{\bar{a}} \tanh 0.8\sqrt{p+\bar{a}} + \sqrt{p} \tan \sqrt{\bar{a}} L_{2di} = 0 \quad (3.10)$$

Como dito anteriormente, podemos a partir da equação acima, encontrar os valores mínimos L_{1di} e L_{2di} , porém isso não pode ser feito de maneira analítica visto que não é possível isolar L_{1di} como função de L_{2di} ou vice versa. Logo utilizamos um método numérico para encontrar as raízes da mesma. Por se tratar de uma equação simples, com funções bem comportadas, não precisamos nos preocupar com o método numérico. Utilizamos então o método da bissecção por sua simplicidade, uma vez que o tempo computacional para o mesmo é ínfimo.

3.1 Mesmo fator de crescimento

Começamos com o caso mais simples de dois fragmentos com mesma , o que consiste em introduzir $a_+ = \bar{a} = 1$ na eq.(3.10). Inicialmente analisemos como L_{1di} se comporta com relação a L_{2di} para um dado valor de p tal como apresentado no gráfico da fig.(3.1), o qual é formado por linhas que dividem a região viável à vida (acima das curva) da região inviável à vida (abaixo das curva) para cada caso. Nele podemos constatar uma menor dependência entre L_{1di} e L_{2di} a medida que p aumenta, ou seja, quanto mais inóspita se torna a região entre os dois fragmentos, menor a relação entre os tamanhos destes. Este resultado esta em pleno acordo com o previsto, pois se $p \rightarrow \infty$ teremos dois fragmentos independentes onde pelo menos um deles necessita ser maior que L_{si} (vide eq.(2.4)) para que haja vida no sistema. Nesse caso limite reduzimos nosso problema ao caso anterior e ele o reproduz, como era de se esperar.

*Aqui os sub índices di significam duplo e infinito, duplo por se tratar de um sistema de dois fragmentos e infinito se refere a dificuldade à vida fora do sistema.

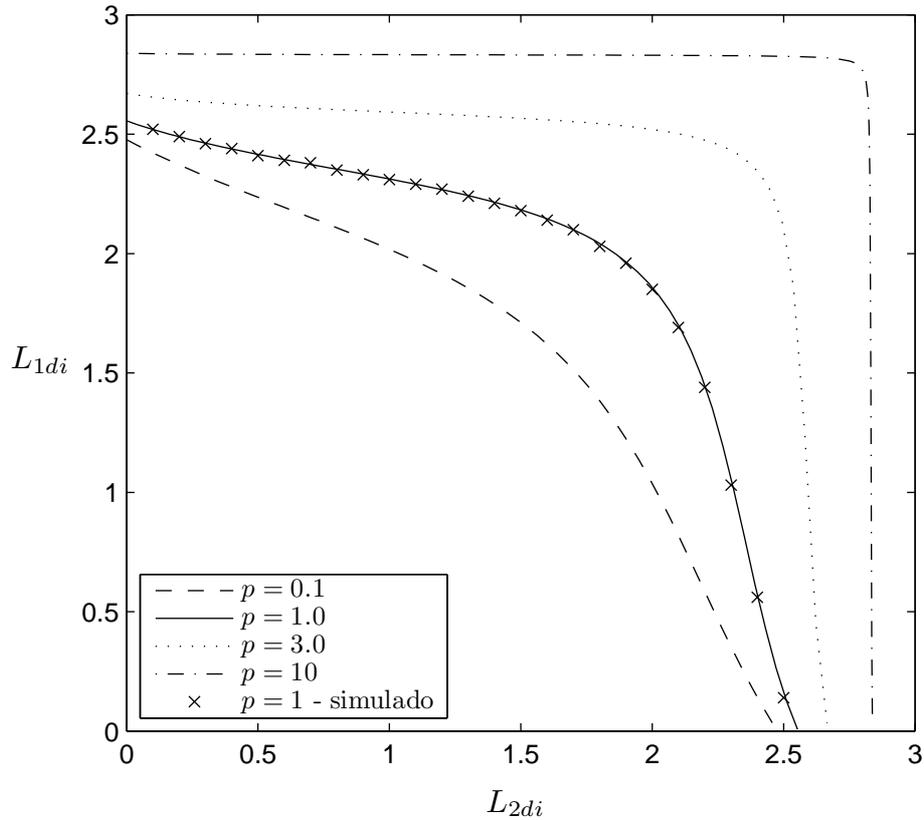


Figura 3.1: Relação entre os tamanhos limites de cada refúgio (L_1 e L_2) e a dificuldade à vida entre eles.

Como verificação dos resultados obtidos fizemos algumas simulações da equação completa, incluindo o termo não linear, tal como podemos observar nos gráficos das figs.(3.1 e 3.3) e notamos uma boa concordância entre a simulação numérica e a previsão analítica. Para as condições duras ($-\infty$) nas bordas dos fragmentos foi introduzido o valor -10^5 . Como as variáveis e os parâmetros de nosso problema são da ordem de 10^0 , o valor assumido é 5 ordens de grandeza maior que as mesmas, sendo que para um valor 3 ordens de grandeza maior havíamos obtido uma discrepância notável entre a simulação e a previsão analítica. Estas simulações não somente validam nossa previsão analítica como também nos fornecem um bom valor numérico para $-\infty$ em futuras simulações onde as ordens de grandezas do problema sejam as mesmas aqui apresentadas. Obviamente que os valores de a_+ e s , são os mesmos que os utilizados para a previsão analítica, a saber $a_+ = 1$ e $s = 0.8$.

Outra análise que se apresenta bastante motivadora é a de como variam os ta-

manhos críticos dos fragmentos (L_{1di} e L_{2di}) com o grau de desfavorabilidade à vida entre os fragmentos (p). Porém não faz mais sentido tratarmos o tamanho crítico de um ou de outro fragmento, mas sim na soma deles. Essa análise pode se tornar bastante difícil se tivermos dois fragmentos variando de tamanho, logo fixamos o valor de um deles L_{1di} e encontramos o valor L_{2di} que satisfaça a eq.(3.9). Repetimos então esse processo para vários valores de L_{1di} com o intuito de obter maior completude em nossa análise. Vide no gráfico a fig.(3.2) as curvas com estes resultados.

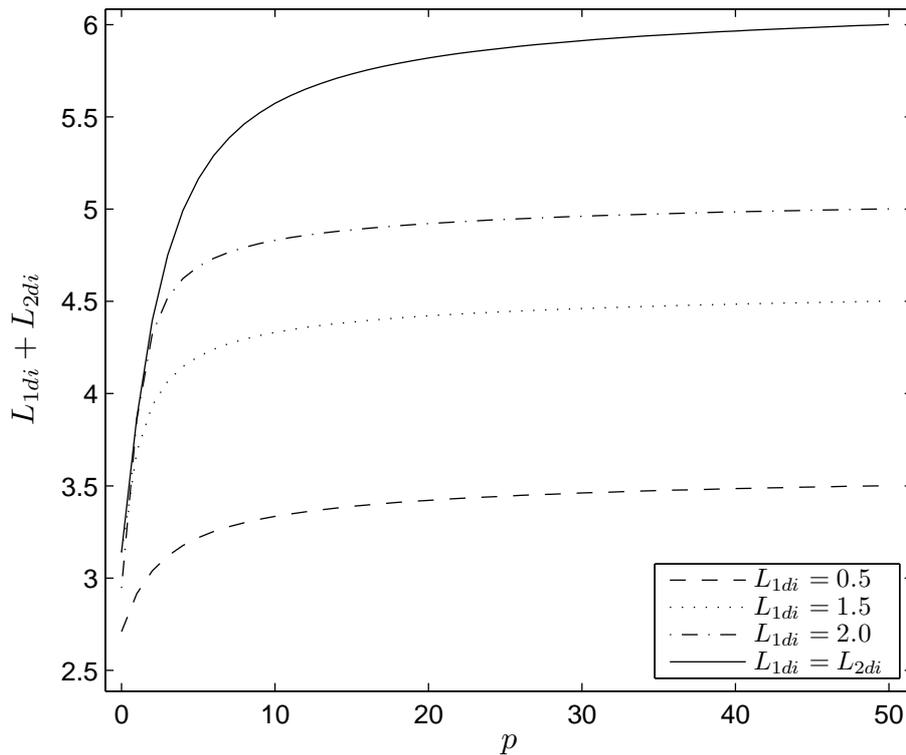


Figura 3.2: Previsão do tamanho total correspondente à soma dos refúgios ($L_{1di} + L_{2di}$) em função da dificuldade à vida entre eles (p).

A fig.(3.2) nos fornece a soma $L_{1di} + L_{2di}$ máxima quando $L_{1di} = L_{2di}$, independentemente do valor de p . Em termos biológicos, um fragmento suficientemente grande permite que o outro seja substancialmente pequeno, perfazendo uma soma inferior à de dois fragmentos iguais. Isto é validado pela predição do problema de um único fragmento, pois se tivermos um dos fragmentos maior que L_{si} (eq.2.4), haverá vida no sistema, independente do tamanho do outro. Isto justifica também que a partir de um certo valor de p , L_{2di} não varia quando L_{1di} aumenta.

Nota-se que para p pequeno $L_{1di} + L_{2di} < L_{si}$, pois neste caso a região entre os dois fragmentos é fracamente desfavorável à vida de modo que ela se soma a região dos fragmentos e propicia à vida no sistema, ou seja, para valores pequenos de p existe $L_{1di} + L_{2di} < L_{si} < L_{1di} + L_{2di} + s$, onde s é o tamanho da separação entre os fragmentos. Pode parecer anti intuitivo, mas neste caso a região desfavorável à vida é o que propicia à vida no sistema.

Uma particularidade interessante, a qual podemos destacar é a de dois fragmentos idênticos ($L_{1di} = L_{2di} = L_{di}$), pois esta além de introduzir uma simplificação na forma analítica, vide apêndice C, torna a simulação numérica mais simples, poupando tempo computacional. Logo é um bom exemplo para se avaliar a qualidade da predição analítica através da simulação numérica.

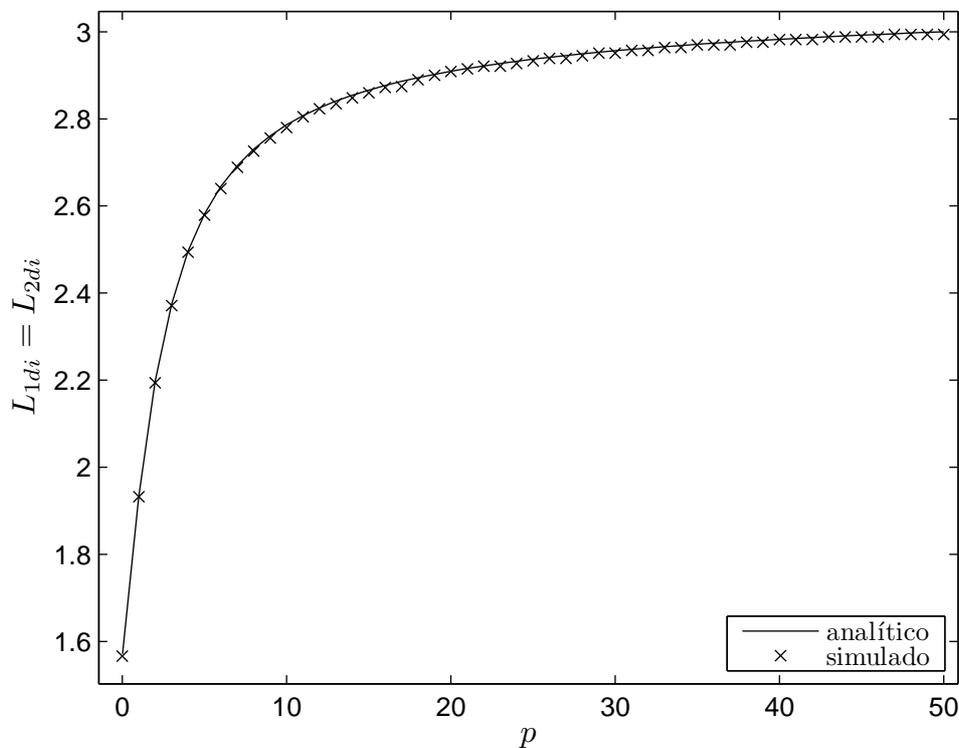


Figura 3.3: Comparação entre os resultados numéricos e a predição analítica do tamanho crítico de dois fragmentos idênticos em função da dificuldade à vida entre eles.

Além da boa concordância entre a predição analítica e a simulação numérica, o gráfico da fig.(3.3) ainda nos mostra que para altos valores de p o valor de L_{di} converge assintoticamente para o valor de $L_{si} = \pi/\sqrt{a_0}$ dado pela eq.(2.4), tal como

era de se esperar pois no limite de p indo para infinito precisamos reproduzir o caso de dois fragmentos totalmente isolados. Extraímos ainda desta figura que para baixos valores de p a divergência entre a simulação numérica e a predição analítica é mínima, e a medida que p aumenta essa divergência também aumenta, pois os maiores valores de p apresentados são da ordem de 10^2 e isto vai piorando nossa aproximação de infinito nas bordas do sistema, pois reduz a razão do nosso infinito numérico de 10^5 para 10^3 e como dissemos anteriormente essa não é mais uma aproximação suficientemente boa.

3.2 Fatores de crescimento diferentes

Passemos agora ao estudo do caso mais genérico em que temos dois fragmentos com fatores de crescimento diferentes. Começemos observando o comportamento L_{1di} em função de L_{2di} para vários valores de \bar{a} . Para isto façamos um gráfico com os resultados extraídos da eq.(3.10), o qual apresentamos na fig.(3.4).

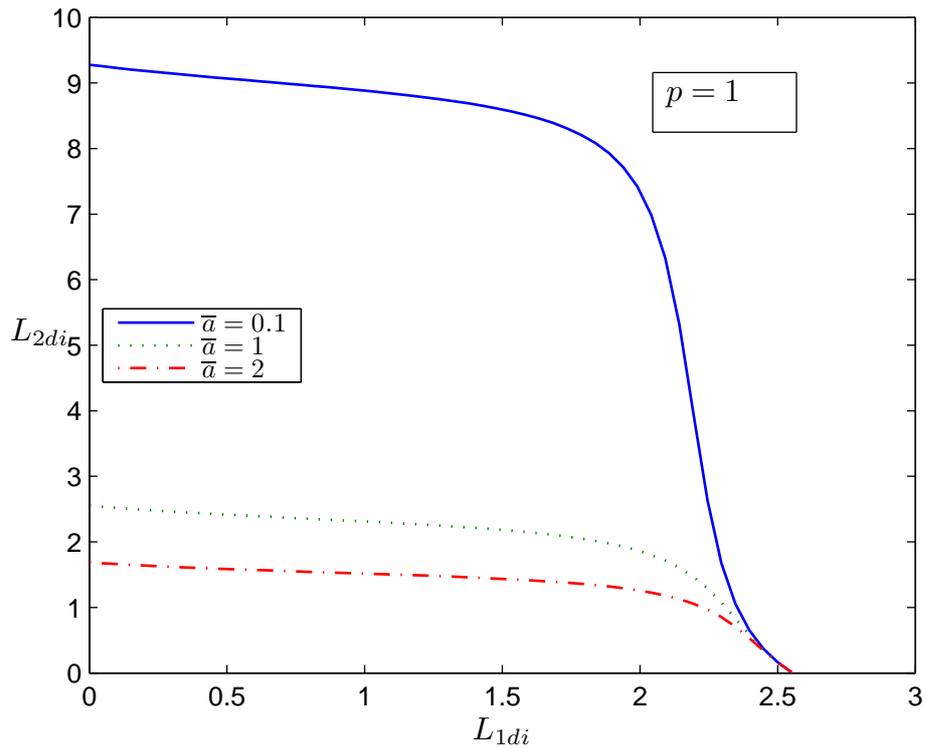


Figura 3.4: Relação entre os tamanhos críticos de dois fragmentos com fatores de crescimento diferentes.

Neste gráfico podemos notar que para pequenos valores de \bar{a} , necessitamos de um tamanho muito grande[†] no fragmento L_2 para que haja vida no sistema, a menos que L_1 seja grande o suficiente para que sozinho proporcione a vida. Em outras palavras para valores pequenos de L_1 e \bar{a} , necessitamos de valores muito grandes de L_2 para que a vida se estabeleça.

Outra análise que pode ser bastante interessante é como varia o tamanho do segundo fragmento L_{2di} com o fator de crescimento \bar{a} , dado que há difusão entre este e um outro fragmento de tamanho L_{1di} próximo a ele. Veja na fig.(3.5) um gráfico desta variação para vários valores de L_{1di} .

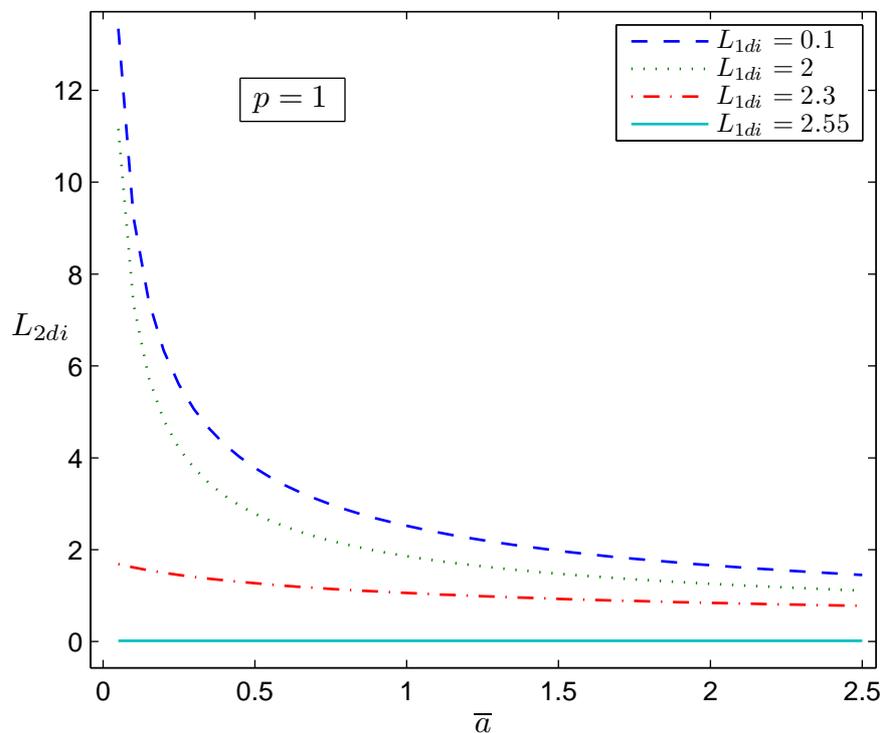


Figura 3.5: Relação entre o tamanho crítico de um fragmento o seu fator de crescimento dada a presença de um outro fragmento próximo a ele.

A fig.(3.5) confirma o que já evidenciamos na fig.(3.4); para o fragmento 1 pequeno, se o fator de crescimento do fragmento 2 também o for, seu tamanho necessita ser grande para proporcionar a vida no conjunto, assim como para o fragmento 1 grande, há vida independente do fator de crescimento e do tamanho do fragmento

[†]muito grande se comparado com L_{si} , vide eq.(2.4).

2.

Este caso é interessante pois confirma que dois são os motivos que podem levar um fragmento a se tornar um ambiente inviável à vida; o tamanho insuficiente e a baixa favorabilidade à vida dentro do mesmo ou ainda uma conjunção dos dois fatores.

Por último analisemos como varia o tamanho dos refúgios com a dificuldade à vida entre eles. Criamos um vínculo entre os tamanhos dos fragmentos, a saber $L_{1di} = L_{2di} = L_{di}$, pois em caso contrário teríamos quatro parâmetros, o que complicaria o traçado de um gráfico. Veja fig.(3.6).

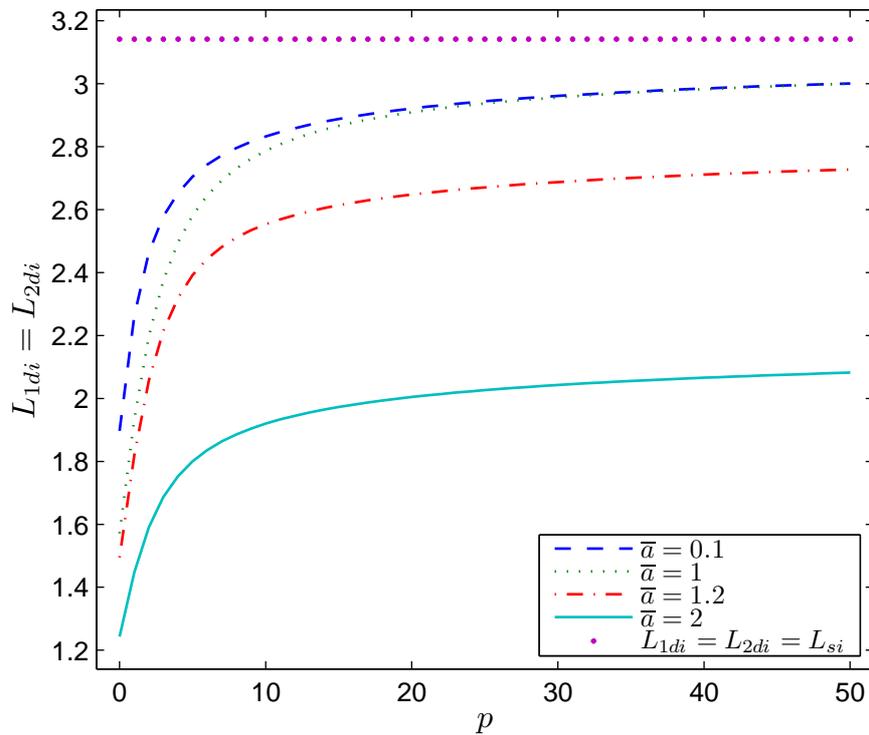


Figura 3.6: Tamanho crítico para dois refúgios de mesmo tamanho em função da resistência à vida entre eles para fatores de crescimento diferentes.

Como podemos notar, o comportamento de L_{di} para fatores de crescimento iguais, fig.(3.3), é bastante parecido com o seu comportamento para fatores de crescimento diferentes, fig.(3.6), salvo que no segundo caso, o limite assintótico de L_{di} não é necessariamente o mesmo valor que no primeiro, pois o fato de introduzirmos um fator de crescimento maior que a unidade no fragmento 2, torna seu tamanho limite menor que π , e conseqüentemente esse será o valor para que haja vida no sistema

quando $p \rightarrow \infty$.

Logo concluímos que a difusão entre dois fragmentos vizinhos cria uma dependência entre eles, e esta é mais acentuada para pequenos valores da dificuldade à vida p , principalmente quando os dois fragmentos, ou pelo menos um deles não é capaz de isoladamente propiciar a vida em seu interior. Em outras palavras quanto mais próximo do limite para existência de vida esteja o conjunto, maior a vulnerabilidade da população a variações dos parâmetros do problema.

Capítulo 4

Fontes e Sorvedouros

Um dos problemas centrais na biologia de populações é a descrição da dinâmica no espaço e no tempo de uma *população teórica*, consistindo de apenas uma espécie. Em situações como as que estudamos nesta tese, estamos interessados nesta dinâmica num espaço heterogêneo.

Dois tipos de modelos principais existem no que respeita a questão acima. De um lado, modelos espacialmente explícitos, como os que temos estudado. Por outro lado há os modelos inspirados na teoria da metapopulações [12], que se valem do fato de muitos ambientes terem características fragmentárias, tomando em conta o espaço de forma resumida, como uma variável indexadora de fragmentos [14]. A população passa a ser descrita pelo número de indivíduos habitando um dado fragmento.

No caso de modelos explícitos, a evolução espacial se dá por difusão, cujo balanço com a evolução temporal pode levar o sistema a uma situação de equilíbrio. Já em modelos baseados em metapopulações a evolução temporal é induzida pela dinâmica de emigração/imigração, fazendo-nos encarar o sistema como uma rede.

Apesar das diferenças, as duas abordagens devem estar conectadas. De fato, o trabalho desenvolvido nesta tese pode ser encarado neste contexto: os fragmentos são vistos como regiões onde o fator de crescimento tem um certo valor constante, diferente do valor fora dos fragmentos, as regiões de migração.

Um dos sistemas clássicos estudado no espírito da teoria das metapopulações é o sistema chamado de fonte-sorvedouro. Antes de iniciarmos uma análise quantitativa deste problema, vamos definir o que passaremos a chamar de fonte e o que passaremos a chamar de sorvedouro. Fonte é um fragmento que, isolado, (vide cap.(2)) permite a população subsistir, enquanto sorvedouro é um fragmento que, isolado é inviável a subsistência da população, seja por falta condições dentro do mesmo, por tamanho insuficiente ou por qualquer outro motivo. Nas condições do capítulo 2, podemos dizer que para $a_0 = 1$ todo fragmento menor que π é um sorvedouro e todo fragmento maior que este valor é uma fonte. Ou ainda, podemos dizer, que para

$L = \pi$, todo fragmento com fator de crescimento maior que 1 é uma fonte e todo fragmento com fator de crescimento menor que este valor é um sorvedouro.

O que nos interessa neste ponto é acoplar sistemas. Uma fonte com um sorvedouro, ou dois sorvedouros. Dentro do contexto que nos colocamos, foi exatamente isto que fizemos no último capítulo. Em particular, encontramos uma explicação de um fato conhecido observacionalmente: uma fonte acoplada a diferentes sorvedouros faz com que possamos ter a população estabelecida também nos sorvedouros. Mais, vamos mostrar que dois sorvedouros acoplados podem ser um sistema viável [15, 34].

4.1 Perfis populacionais

Façamos agora algumas análises de caso com o perfil da densidade populacional em função do espaço, já na solução estacionária, a qual é única, como já apresentado no cap.(2) e será elucidado a seguir.

Iniciemos com o caso de uma fonte-sorvedouro (fig(4.1)), onde L_1 é uma fonte

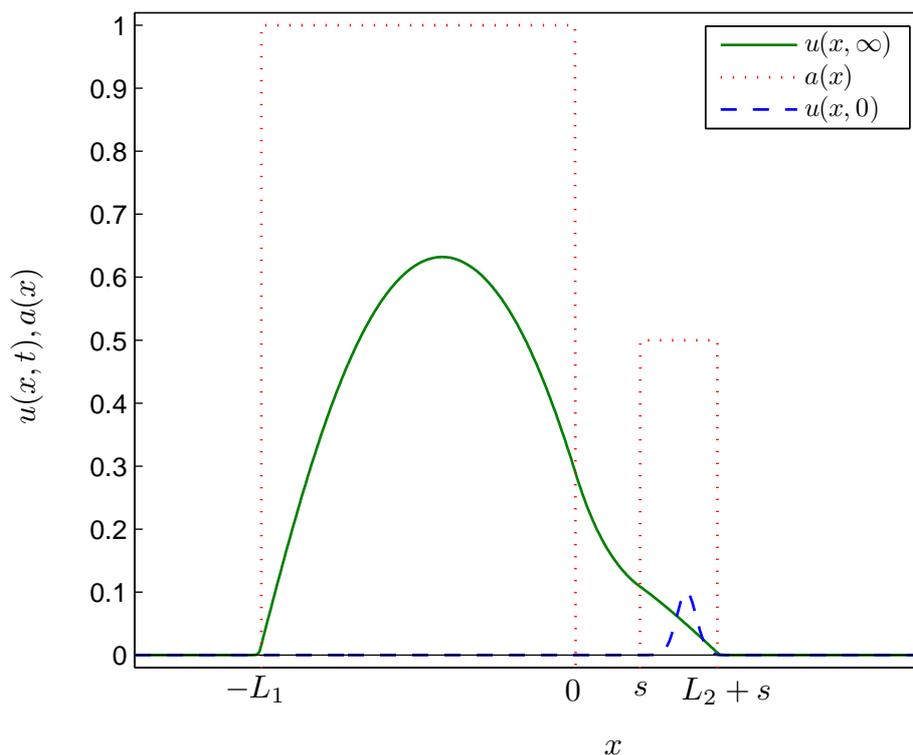


Figura 4.1: Fonte-sorvedouro, para $4 = L_1 > L_2 = 1$, $\bar{a} = 0.5 < 1$ e $p = 2$

com fator de crescimento igual a um e largura maior que o tamanho crítico (vide

eq.(2.4)), enquanto L_2 é um sorvedouro, o qual possui tanto largura, quanto fator de crescimento insuficientes*.

Note ainda que a condição inicial foi uma pequena população colocada dentro do sorvedouro e isto não interfere no perfil final de $u(x, t)$, pois como dissemos anteriormente a solução não nula é única e estável.

Algo interessante a ser notado na fig.(4.1) é que a vida no sorvedouro é mantida pela fonte, ou seja, um fragmento onde a vida antes não era possível, agora pode ser um ambiente viável a esta devido a proximidade de um fragmento com boas condições à vida.

Outro exemplo de fonte-sorvedouro, que possui uma aplicação biológica interessante é o caso no qual o sorvedouro possui condições muito pouco favorável à vida, em nossa terminologia matemática equivale a ter um baixo valor para seu fator de crescimento, tal como apresentado na fig.(4.2).

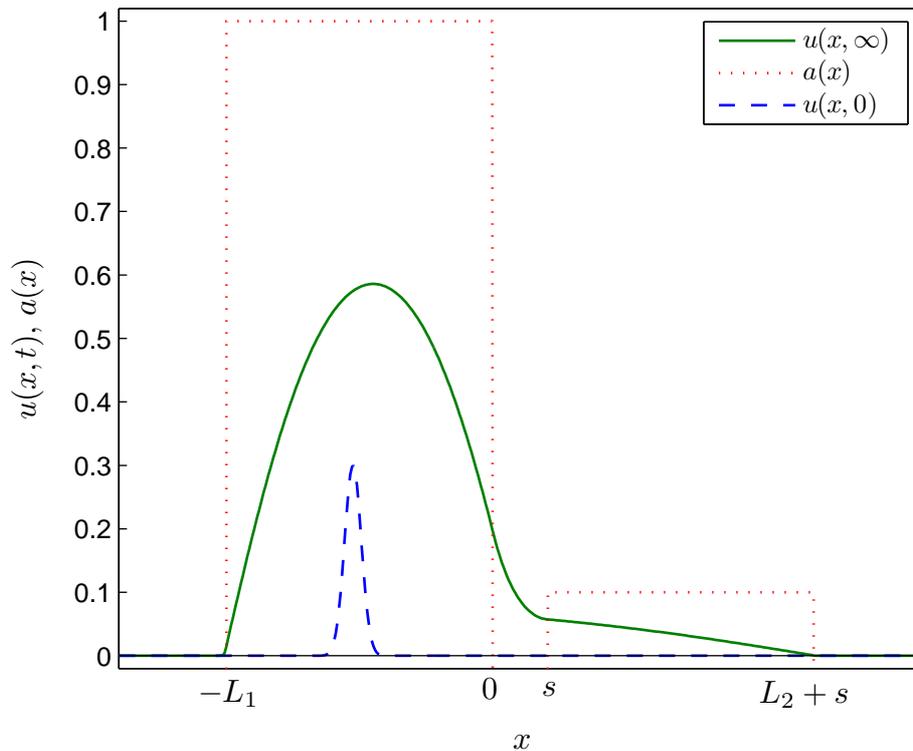


Figura 4.2: Fonte-sorvedouro, para $L_1 = L_2 = 4$ e $\bar{a} = 0.1 \ll 1$ e $p = 5$

Neste exemplo temos uma densidade populacional pequena dentro do sorvedouro,

*Se comparado com o caso estudado no capítulo 2, o qual temos utilizado como referência ao longo de todo nosso trabalho.

pois embora a fonte possa manter a vida no sorvedouro não é capaz de mantê-la com alta densidade, a menos que a região entre elas tenha uma desfavorabilidade pequena ao ponto de ser pouco notada como uma região desfavorável à vida.

Note que muitos podem ser os casos de fonte-sorvedouro, que podem ser gerados colocando os parâmetros adequados na eq.(3.10), encontrando suas raízes, plotando o perfil e extraindo informações úteis entre outros. É importante notar que as condições encontradas pela predição analítica feita com a equação linear é sempre confirmada pela simulação da equação completa. Um bom exercício é encontrar o perfil da densidade populacional para dois fragmentos idênticos, o qual será simétrico, independentemente da condição inicial.

A seguir passaremos ao estudo de um caso que diferentemente dos acima, não possui uma fonte e um sorvedouro, mas sim dois sorvedouros, ou seja dois fragmentos nos quais não haveria vida isoladamente, porém devido à interação entre eles pode existir, vide fig.(4.3). Interação esta que é feita através da difusão de um para outro.

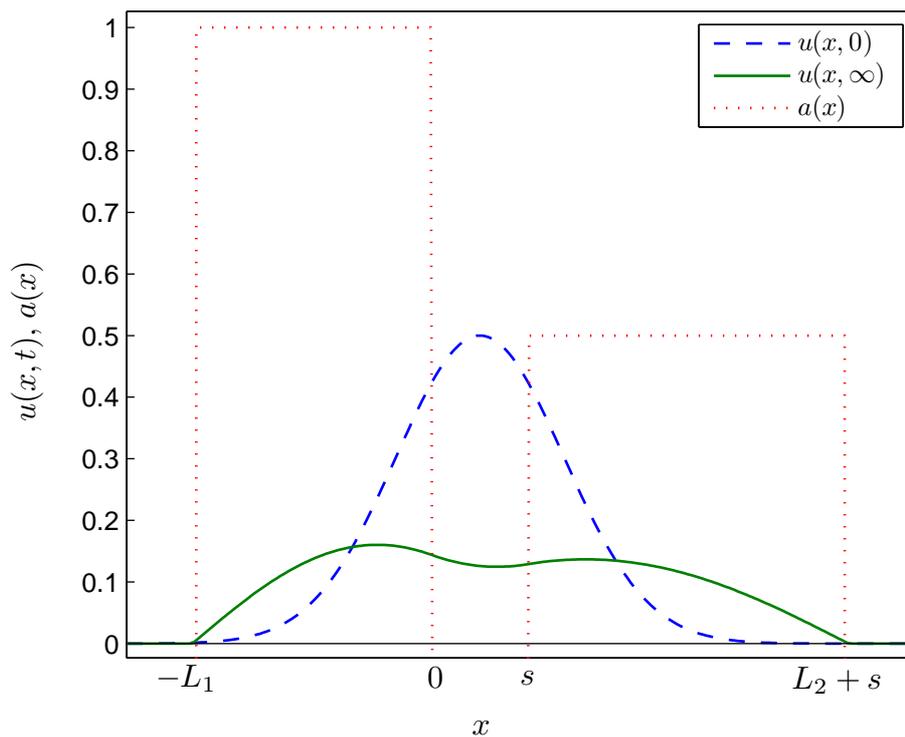


Figura 4.3: Sorvedouro-sorvedouro, $L_1 = 2$, $L_2 = 2.7$ e $\bar{a} = 0.5$ e $p = 1$.

Exploramos o perfil de dois sorvedouros de tamanhos e fatores de crescimento diferentes, tal como apresentado na fig.(4.3). Neste exemplo podemos ver clara-

mente que ambos os fragmentos isoladamente seriam sorvedouros, o fragmento 2 em particular tem tamanho e fator de crescimento insuficientes[†], porém a vida pode ser mantida no sistema devido à difusão entre eles.

Na fig.(4.3) notamos que a densidade populacional no sistema é pequena, pois estamos próximos do caso limite do sistema, ou seja, se diminuirmos um pouco o fator de crescimento ou o tamanho de um dos fragmentos, ou ainda aumentarmos um pouco dificuldade à vida entre eles, teremos a extinção total da vida no conjunto. Nesse limite o máximo da densidade populacional possui alta dependência com os parâmetros do sistema.

[†]Se comparado com o do capítulo 2

Capítulo 5

Um Fragmento Não Isolado

Uma vez estudados os casos de um e dois fragmentos isolados, a tendência natural é procurarmos entender os mesmos problemas, se esse(s) fragmento(s) não fosse(m) isolado(s) do meio externo, isto é, se pudesse existir vida fora do(s) fragmento(s), ainda que de forma limitada.

Começamos então pelo caso mais simples, o de um único fragmento [24]. Para estudarmos esse problema, precisamos introduzir uma função $a(x)$ que o descreva. Nesse intuito basta tomarmos a função descrita pela eq.(2.1), substituindo o $-\infty$ fora do fragmento por um parâmetro $-h$ finito.

$$a(x) = \begin{cases} -h, & \text{se } x < -L/2 & I \\ a_0, & \text{se } -L/2 < x < L/2 & II \\ -h, & \text{se } L/2 < x & III \end{cases} \quad (5.1)$$

Podemos novamente resolver a eq.(1.9) em cada região separadamente e utilizar as condições de contorno e continuidade nas fronteiras do fragmento, tal como fizemos para os outros casos. Porém aqui a função densidade populacional $\Phi(x)$ não é nula nas fronteiras, ademais a função é contínua, bem como a sua derivada em $\pm L/2$, sendo a condição de contorno colocada no infinito $\Phi(\pm\infty) = 0$. Matematicamente o problema a se colocar será definido abaixo.

Regiões I e III

$$\Phi_{xx} = (\lambda_n + h)\Phi = \alpha^2\Phi \quad \text{onde } \alpha = \sqrt{\lambda_n + h}$$

donde temos

$$\Phi_I(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad \text{e} \quad \Phi_{III}(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$$

Região II

$$\Phi_{xx} - \beta^2 \Phi = 0 \quad \text{onde} \quad \beta = \sqrt{a_0 - \lambda_n}$$

donde resulta

$$\Phi(x) = E \operatorname{sen} \beta x + F \operatorname{cos} \beta x$$

Utilizando as condições de contorno e continuidade podemos determinar relações sobre os parâmetros de modo que estes as satisfaçam.

Das condições de contorno $\Phi(-\infty) = \Phi(\infty) = 0$, temos

$$\Phi_I(x) = Ae^{\alpha x} \quad \text{e} \quad \Phi_{III}(x) = De^{-\alpha x}$$

A continuidade de Φ em $x = -L/2$ e $x = L/2$ nos gera as seguintes relações

$$Ae^{-\alpha L/2} = -E \operatorname{sen} \beta L/2 + F \operatorname{cos} \beta L/2 \quad (I)$$

$$De^{-\alpha L/2} = E \operatorname{sen} \beta L/2 + F \operatorname{cos} \beta L/2 \quad (II)$$

A continuidade de Φ_x em $x = \pm L/2$ nos fornece as duas relações abaixo

$$\alpha Ae^{-\alpha L/2} = \beta E \operatorname{cos} \beta L/2 + \beta F \operatorname{sen} \beta L/2 \quad (III)$$

$$-\alpha De^{-\alpha L/2} = \beta E \operatorname{cos} \beta L/2 - \beta F \operatorname{sen} \beta L/2 \quad (IV)$$

Somando I com II , subtraindo IV de III e comparando as equações resultantes obtemos que, se $A \neq -D$ e $F \neq 0$, então

$$\beta \tan \beta L/2 = \alpha \quad \text{condição 1}$$

Analogamente somando III com IV , subtraindo I de II e comparando as equações resultantes obtemos, desde que $A \neq D$ e $E \neq 0$, a relação

$$\beta \cot \beta L/2 = -\alpha \quad \text{condição 2}$$

As duas condições não podem ser satisfeitas simultaneamente, pois, se dividirmos a condição 1 pela condição 2, teremos $\tan^2 \beta L/2 = -1$, o que implicaria em $\tan \beta L/2$ imaginária.

Se aceitarmos que $A = -D$ e $F = 0$, estaremos ferindo a condição de positividade, logo nos sobra somente assumir que $A = D$, $E = 0$ e $F \neq 0$ e por conseguinte $\beta \tan \beta L/2 = \alpha$, donde extraímos

$$L = \frac{2}{\beta} \arctan \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.2)$$

Novamente estamos interessados somente no menor autovalor λ_0 , o qual deve ser não negativo, o que fornece $\beta \leq \sqrt{a_0}$ e $\alpha \geq \sqrt{h} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \geq \sqrt{\frac{h}{a_0}}$, ou seja,

$$L \geq \frac{2}{\sqrt{a_0}} \arctan \sqrt{\frac{h}{a_0}}. \quad (5.3)$$

No limite $\lambda_0 = 0$, temos o valor crítico* (L_{sf}), o qual para $a_0 = 1$ é dado por

$$L_{sf} = 2 \arctan \sqrt{h} \quad (5.4)$$

Este resultado gera o gráfico da fig.(5.1).

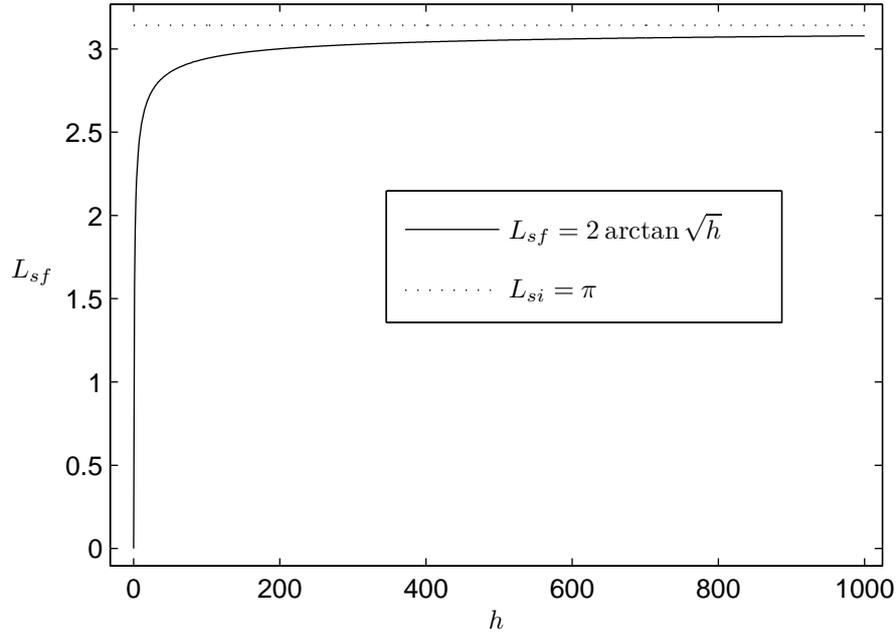


Figura 5.1: Tamanho crítico de um fragmento não isolado em função da resistência à vida fora do mesmo.

*Os sub índices sf significam simples e finito, simples por um único fragmento e finito se refere as condições nas regiões além fragmento.

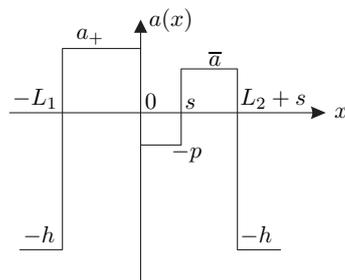
Analisando a fig.(5.1), evidenciamos quando $h \rightarrow \infty$ a reprodução de um fragmento isolado (vide eq.(2.4)), pois nesse limite $L_{sf} \rightarrow L_{si}$. Notamos ainda que temos uma região de transição bem acentuada, pois para valores de h maiores que 10^2 temos L_{sf} grande com pequena variação, aproximando-se assintoticamente de π .

Assim sendo, este capítulo nos leva a concluir que para um fragmento não isolado, seu tamanho mínimo para existência de vida é sempre menor que para o caso isolado. A seqüência natural deste trabalho é o estudo de dois fragmentos, com condições permissivas nas bordas, em outras palavras, um sistema de dois fragmentos não isolados de sua vizinhança, tal como discutiremos no capítulo seguinte.

Capítulo 6

Dois Fragmentos - Sistema não isolado

Solucionado o problema de um fragmento não isolado, temos como a continuação natural do trabalho, o estudo de dois fragmentos, separados por uma região não propícia à vida e imerso também em uma região não propícia, porém não totalmente imprópria. A priori assumiremos que os graus de dificuldade à vida na região fora do sistema e entre os fragmentos não é o mesmo, deste modo uma função para descrever esse sistema pode ser obtida a partir da eq.(3.1), introduzindo um parâmetro $-h$ na região fora do sistema. Desta maneira, para valores finitos de h , pode haver vida ao longo de uma distância fora do fragmento. Logo nossa função $a(x)$ pode ser dada por



$$a(x) = \begin{cases} -h, & \text{se } x < -L_1 & I \\ a_+, & \text{se } -L_1 < x < 0 & II \\ -p, & \text{se } 0 < x < s & III \\ \bar{a}, & \text{se } s < x < s + L_2 & IV \\ -h, & \text{se } L_2 + s < x & V \end{cases} \quad (6.1)$$

Utilizamos aqui o mesmo método dos capítulos anteriores, ou seja, resolvemos a eq.(1.9) região por região, aplicando posteriormente as devidas condições de contorno e continuidade para determinar os parâmetros que tornam nossa função contínua e diferenciável em todos os pontos. Assim sendo*

Regiões I e V

$$(\Phi)_{xx} = k^2 \phi, \quad \text{onde } k^2 = \lambda_0 + h$$

cujas soluções são respectivamente

*Neste capítulo utilizamos apenas λ_0 , pois assim como nos casos anteriores, estamos interessados apenas no menor autovalor.

$$\Phi_I(x) = Ae^{kx}$$

$$\Phi_V(x) = Be^{-kx}$$

Região II

$$(\Phi)_{xx} = -\alpha^2\phi, \quad \text{onde } \alpha^2 = a_+ - \lambda_0$$

Assumindo $\alpha^2 > 0$, temos as soluções

$$\Phi_{II}(x) = C \operatorname{sen} \alpha x + D \operatorname{cos} \alpha x$$

Região III

$$(\Phi)_{xx} = \gamma^2\phi, \quad \text{onde } \gamma^2 = \lambda_0 + p$$

a qual resulta

$$\Phi_{III}(x) = Ge^{\gamma x} + He^{-\gamma x}$$

Região IV

$$(\Phi)_{xx} = -\beta^2\phi, \quad \text{onde } \beta^2 = \bar{a} - \lambda_0$$

tomando $\beta^2 > 0$, podemos escrever

$$\Phi_{IV}(x) = E \operatorname{sen} \beta x + F \operatorname{cos} \beta x$$

Podemos ter então relações entre os parâmetros da solução a partir

da continuidade de Φ

- em $x = -L_1$

$$Ae^{-kL_1} = -C \operatorname{sen} \alpha L_1 + D \operatorname{cos} \alpha L_1 \quad (6.2)$$

- em $x = 0$

$$D = (G + H) \quad (6.3)$$

- em $x = s$

$$Ge^{\gamma s} + He^{-\gamma s} = E \operatorname{sen} \beta s + F \operatorname{cos} \beta s \quad (6.4)$$

- em $x = L_2 + s$

$$E \operatorname{sen} \beta(L_2 + s) + F \operatorname{cos} \beta(L_2 + s) = Be^{-k(L_2+s)} \quad (6.5)$$

e da continuidade de Φ'

- em $x = -L_1$

$$kAe^{-kL_1} = \alpha C \operatorname{cos} \alpha L_1 + \alpha D \operatorname{sen} \alpha L_1 \quad (6.6)$$

- em $x = 0$

$$\alpha C = \gamma(G - H) \quad (6.7)$$

- em $x = s$

$$\gamma Ge^{\gamma s} - \gamma He^{-\gamma s} = \beta E \operatorname{cos} \beta s - \beta F \operatorname{sen} \beta s \quad (6.8)$$

- em $x = L_2 + s$

$$\beta E \operatorname{cos} \beta(L_2 + s) - \beta F \operatorname{sen} \beta(L_2 + s) = -kBe^{-k(L_2+s)} \quad (6.9)$$

Multiplicando a eq.(6.2) por k e comparando com a eq.(6.6), temos

$$C(\alpha \operatorname{cos} \alpha L_1 + k \operatorname{sen} \alpha L_1) = D(k \operatorname{cos} \alpha L_1 - \alpha \operatorname{sen} \alpha L_1) \quad (6.10)$$

Introduzindo

$$R(\theta, y) = \frac{k \operatorname{cos} \theta y - \theta \operatorname{sen} \theta y}{\theta \operatorname{cos} \theta y + k \operatorname{sen} \theta y}$$

podemos escrever a eq.(6.10) na forma compacta

$$C = R(\alpha, L_1)D \quad (6.11)$$

Multiplicando a eq.(6.3) por γ e posteriormente somando e subtraindo a eq.(6.7) resulta

$$2\gamma G = \alpha C + \gamma D \quad \text{e} \quad 2\gamma H = \gamma D - \alpha C$$

substituindo a eq.(6.11) nas duas últimas equações temos:

$$2\gamma G = (\gamma + \alpha R(\alpha, L_1))D \quad (6.12)$$

$$2\gamma H = (\gamma - \alpha R(\alpha, L_1))D \quad (6.13)$$

Multiplicando a eq.(6.5) por k e substituindo a equação resultante na eq.(6.9), nos gera após algumas manipulações

$$E = -R(\beta, L_2 + s)F \quad (6.14)$$

Multiplicando a eq.(6.4) por γ , temos uma equação, a qual somando e subtraindo a eq.(6.8) fornece

$$2\gamma G = [E(\gamma \sen \beta s + \beta \cos \beta s) + F(\gamma \cos \beta s - \beta \sen \beta s)]e^{-\gamma s} \quad (6.15)$$

e

$$2\gamma H = [E(\gamma \sen \beta s - \beta \cos \beta s) + F(\gamma \cos \beta s + \beta \sen \beta s)]e^{-\gamma s} \quad (6.16)$$

substituindo a eq.(6.14) nas eqs.(6.15 e 6.16) e

$$\text{introduzindo} \left\{ \begin{array}{l} -m_1 = \beta \cos \beta s + \gamma \sen \beta s \\ m_2 = \gamma \cos \beta s + \beta \sen \beta s \\ m_3 = \beta \cos \beta s - \gamma \sen \beta s \\ m_4 = \gamma \cos \beta s + \beta \sen \beta s \end{array} \right. \quad (6.17)$$

nas equações resultantes temos

$$2\gamma G = (m_1 R(\beta, L_2 + s) + m_2)e^{-\gamma s} F \quad (6.18)$$

$$2\gamma H = (m_3 R(\beta, L_2 + s) + m_4)e^{\gamma s} F \quad (6.19)$$

Utilizando as eqs.(6.12), (6.13), (6.18) e (6.19), podemos eliminar G e H e escrever um sistema para F e D , apresentado abaixo na forma matricial

$$\begin{pmatrix} (m_1 R(\beta, L_2 + s) + m_2) e^{-\gamma s} & -(\alpha R(\alpha, L_1) + \gamma) \\ (m_3 R(\beta, L_2 + s) + m_4) e^{\gamma s} & \alpha R(\alpha, L_1) - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

cuja condição para a existência de uma solução não trivial gera a equação secular

$$[m_1 R(\beta, L_2 + s) + m_2][\alpha R(\alpha, L_1) - \gamma] e^{-\gamma s} + [m_3 R(\beta, L_2 + s) + m_4][\alpha R(\alpha, L_1) + \gamma] e^{\gamma s} = 0 \quad (6.21)$$

Assim como no caso de um sistema isolado de dois fragmentos, temos aqui uma equação em termos dos parâmetros L_1 , L_2 , p , s , a_+ , \bar{a} e h , a qual não pode ser escrita na forma explícita, uma vez que, é impossível isolar L_1 como função de L_2 ou vice versa. Porém, assim como a eq.(3.10), a eq.(6.21) também pode ser resolvida utilizando um método numérico simples para encontrar raízes de funções. Utilizamos o método da bissecção, pois devido a sua facilidade de programação e a simplicidade da equação, este demanda um tempo computacional ínfimo.

Com o objetivo de comparar os resultados aqui obtidos com os do problema isolado (cap.3), fixamos os mesmos parâmetros, com os mesmos valores do referido caso, a saber, $a_+ = 1$ e $s = 0.8$, de modo que matematicamente falando, a única diferença entre os dois casos é a existência do parâmetro h finito. Também aqui estamos interessados apenas no caso $\lambda_0 \geq 0$, cujo caso crítico $\lambda_0 = 0$, fornece[†] L_{1df} e L_{2df} os tamanhos mínimos dos fragmentos para os quais existe vida. Por conveniência não apresentaremos a versão da eq.(6.21) nas variáveis iniciais do problema.

6.1 Mesmo fator de crescimento

A priori introduziremos a condição $h = p$ e $a_+ = \bar{a}$, não por simplificação, mas sim por estarmos interessados em descrever o caso em que tanto na região além fronteiras como na região entre fragmentos a condição seja a mesma, o que descreve o caso de dois fragmentos similares inseridos no meio de uma região não propícia à vida, tal como dois oásis ou duas ilhas oceânicas, entre outros exemplos.

Feitas as considerações acima e levando-as na eq.(6.21), podemos traçar um gráfico de $L_{1df} \times L_{2df}$, apresentado na fig.(6.1) a seguir.

Se compararmos as figs.(3.1) e (6.1), as quais representam a mesma análise, porém respectivamente para o caso de $h = \infty$ e $h = p$, veremos que as curvas para os mesmos valores de p possuem comportamentos similares, sendo possível ressaltar

[†]Utilizando a mesma lógica dos capítulos anteriores, os sub índices *df* significam duplo e finito.

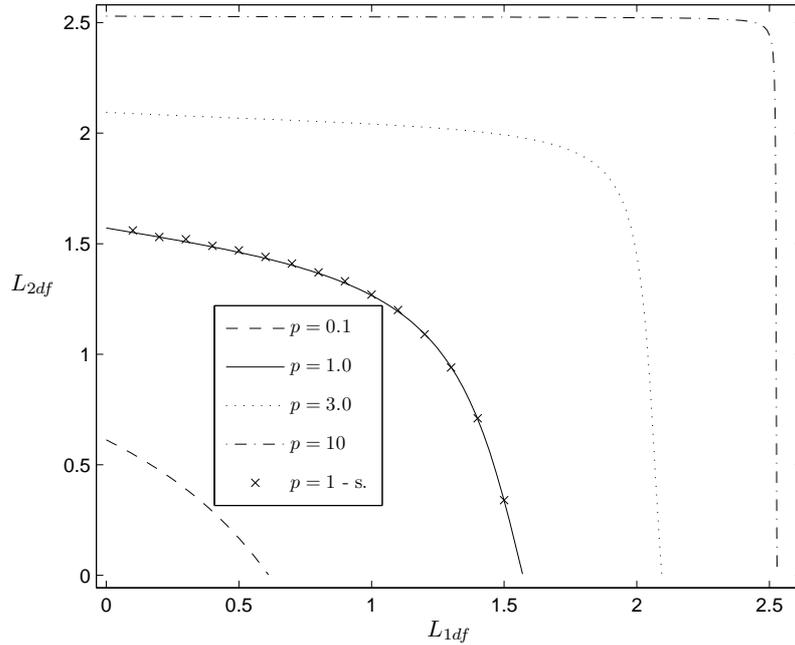


Figura 6.1: Relação entre os tamanhos críticos de dois fragmentos não isolados para vários valores da dificuldade vida entre eles.

algumas diferenças. Dentre essas, a necessidade de fragmentos maiores para caso $h = \infty$ que para o caso $h = p$, diferença esta que se torna maior a medida em que tomamos valores menores de p , vide por exemplo o valor $p = 0.1$ nos dois gráficos. À proporção que p cresce esta diferença se torna menos acentuada, como era de se esperar, pois quando $p \rightarrow \infty$, ambos se reduzem a fragmentos isolados, nos quais a condição para a viabilidade da vida é a mesma do caso mais simples (eq.(2.4)). Isto é bastante intuitivo, pois se colocarmos condições mais amenas de resistência à vida nas bordas dos fragmentos, a população poderá adentrar a “região proibida” e conseqüentemente precisará de um fragmento menor para sobreviver.

Seguindo o mesmo raciocínio comparativo com o problema de dois fragmentos isolados, passemos agora a explorar o que acontece quando mantemos um fragmento L_{1df} fixo e observamos como se comporta o outro L_{2df} como função de p . Porém aqui não faz muito sentido falarmos em tamanho de L_{1df} ou de L_{2df} isoladamente, visto que o tamanho de um sempre depende do tamanho do outro. Logo a grandeza física relevante nessa análise é o tamanho total do dois fragmentos $L_{1df} + L_{2df}$. Veja no gráfico da fig.(6.2) como varia essa grandeza com relação a p .

Analisando a fig.(6.2), podemos ver que a soma $L_{1df} + L_{2df}$ é máxima quando

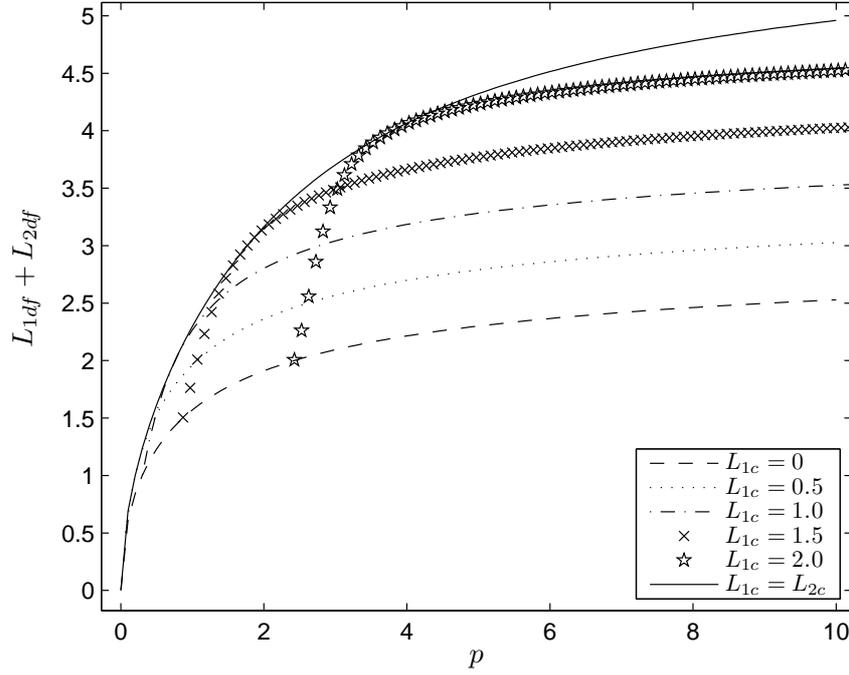


Figura 6.2: Soma dos tamanhos dos fragmentos como função da dificuldade à vida entre eles, dado o tamanho de um deles constante.

$L_{1df} = L_{2df}$, qualquer que seja o valor de p , pois, assim como no caso isolado, para um dado valor de p , a existência de um fragmento grande[‡] permite ao outro ter tamanho substancialmente menor, de modo à soma deles ser inferior ao caso em que ambos são iguais. Isto está de acordo com a predição dos problemas de um único fragmento e de dois fragmentos isolados, anteriormente discutidos.

Nota-se ainda para p substancialmente pequeno, $L_{1df} + L_{2df} < L_{si}$, pois neste caso não somente a região entre os dois fragmentos é fracamente desfavorável à vida como também as regiões além das fronteiras ($x < L_1$ e $x > L_2 + s$), logo se no caso isolado tínhamos uma região desfavorável à vida que se somava às regiões favoráveis para permitir a vida no sistema, aqui temos três regiões que fazem isso, o que possibilita a existência de vida numa região favorável ($L_{1df} + L_{2df}$) ainda menor que no conjunto isolado.

No capítulo 3 apresentamos como verificação da predição analítica, para o sistema isolado de dois fragmentos, a simulação com a equação completa (eq.1.4) para o caso particular $(L_{1di} = L_{2di}) \times p$ e obtivemos o resultado apresentado no gráfico da

[‡]Grande, porém ainda menor que L_{si} , vide eq.(2.4).

fig.(3.3). Neste notamos boa concordância entre a simulação e a previsão analítica, como discutido anteriormente. Uma vez resolvido o problema com bordas finitas, repetimos então essa comparação com $h = 1000$ e obtivemos o gráfico da fig.(6.3). Como pode ser observado, a previsão analítica é tão próxima quanto se queira da simulação, ao ponto de se confundirem.

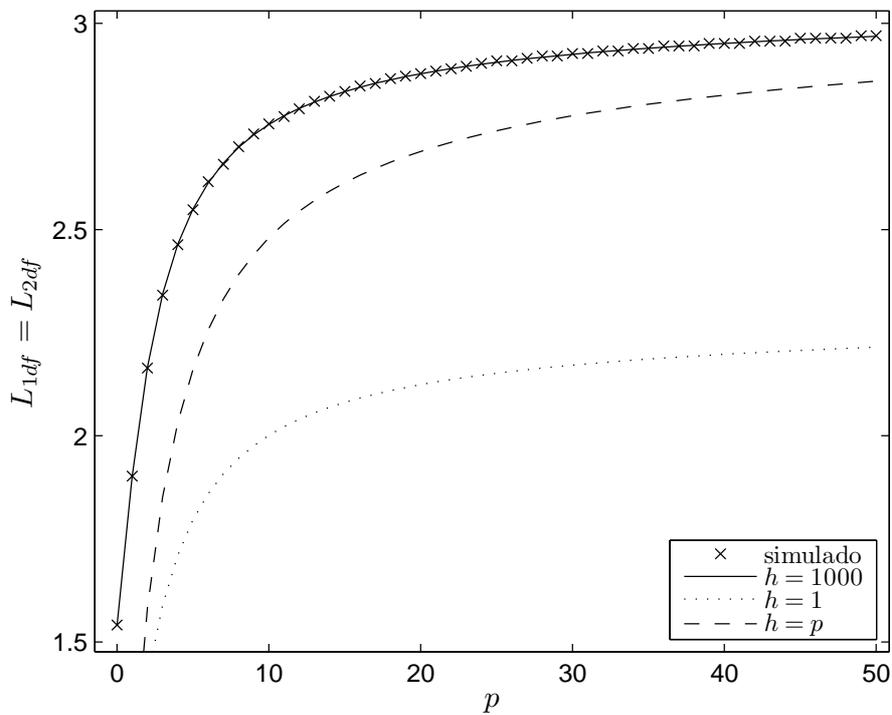


Figura 6.3: Tamanho de dois fragmentos idênticos em função da dificuldade à vida fora deles, suposta igual entre eles e na região além fronteiras.

Ainda no gráfico da fig.(6.3), apresentamos outras duas curvas. A curva inferior ($h = 1$), mostra uma diminuição do tamanho dos fragmentos à medida que diminuimos os valores de h , porém sem alterar o perfil do gráfico. Já no caso em que $h = p$ (curva intermediária) notamos uma maior dependência do tamanho dos fragmentos com p , ou seja, conforme p cresce, aumenta mais rapidamente o tamanho mínimo dos fragmentos que no caso de h constante, pois se h aumenta juntamente com p , a inospitabilidade à vida aumenta fora dos fragmentos tanto quanto na região entre eles, o que justifica um aumento mais acentuado no tamanho destes.

Acima discutimos sobre a dependência dos tamanhos mínimos dos fragmentos com p quando h é constante e quando $h = p$. A seguir discutiremos como varia o tamanho limite dos fragmentos com o grau de dificuldade à vida fora dos fragmento

h , mantendo fixo p . No gráfico da fig(6.4) mostramos este comportamento para vários valores de h , mantendo fixo $p = 1$.

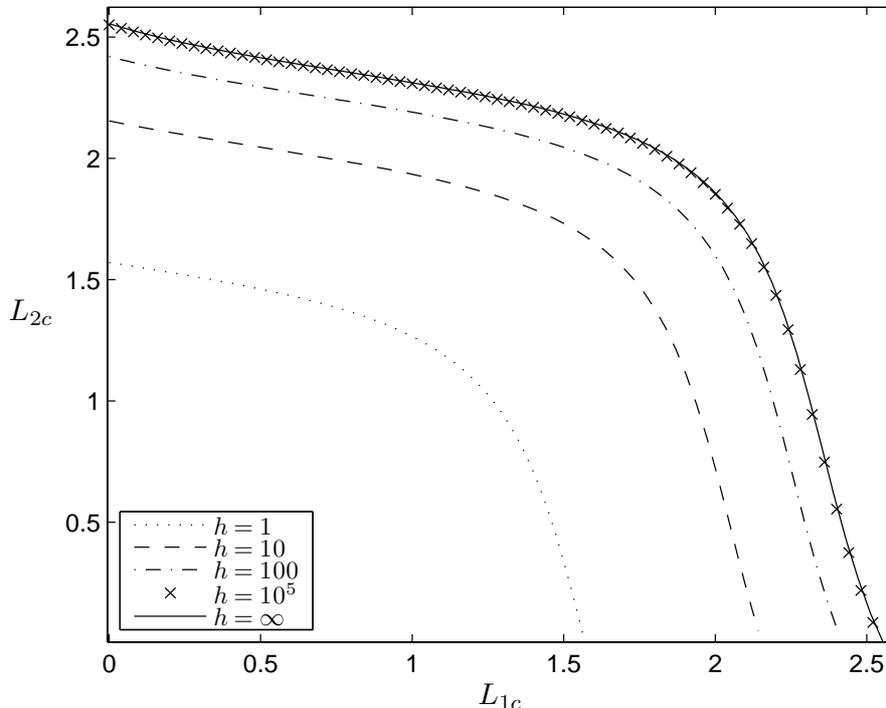


Figura 6.4: Relação entre os tamanhos críticos de dois fragmentos não isolados para vários valores da dificuldade à vida fora deles.

Se compararmos o gráfico da fig.(6.1) com o da fig.(6.4) notaremos primeiramente uma diferença nas extremidades das curvas, uma pequena inflexão quando L_{1df} ou L_{2df} se aproxima de seu valor máximo. Porém se compararmos a fig.(6.4) com a fig.(3.1), notaremos uma concordância deste comportamento. Isto pode ser explicado pela mesma razão pela qual a curva intermediária da fig.(6.3) tem uma dependência mais acentuada com $p = h$ que a curva superior e a inferior da mesma figura nas quais variam somente h , tal como discutido no parágrafo anterior.

Nota-se, ainda na fig.(6.4), à medida que h aumenta as curvas vão se aproximando do limite $h = \infty$, ao ponto de para 10^5 a diferença com $h = \infty$ se torne praticamente imperceptível, validando nossa simulação para o caso isolado, onde utilizamos esse valor nas regiões $x < -L_1$ e $x > L_2 + s$. Não colocamos aqui uma previsão analítica para $h = 10^5$, porque essa se superporia à curva simulada e à de $h = \infty$.

Não apresentamos a discussão nem os gráficos que representam $(L_{1df} + L_{2df}) \times h$

e $(L_{1df} = L_{2df}) \times h$ por serem estes respectivamente muito semelhantes aos $(L_{1di} + L_{2di}) \times p$ e $(L_{1di} = L_{2di}) \times p$ e qualitativamente não introduzirem nenhuma informação nova a nossa análise, pois teríamos apenas a necessidade de fragmentos menores.

6.2 Sobre as Simulações

Todas as simulações apresentadas ao longo do texto acima são estáveis e independentes da condição inicial, sendo assim uma forte evidência de que o estado final da simulação é a única solução estável do problema, além de ser um atrator global, para qualquer condição inicial não nula, pois repetimos à exaustão as simulações com condições iniciais tanto maiores quanto muito menores que a solução estável e em todos os casos esta evoluiu para a mesma solução final com o passar do tempo.

Procuramos apresentar simulações para valores diversificados de p e h , visto que seria inviável apresentar simulações correspondentes a todos os casos para os quais fizemos as predições analíticas devido ao grande esforço computacional necessário para obtê-las.

6.3 Fatores de Crescimento Diferentes

A introdução de um fator de crescimento genérico no fragmento 2 já foi discutida no capítulo 3 e a introdução de condições finitas na região externa ao sistema já foi discutida na seção anterior. A superposição destes dois casos não traz nenhum fenômeno novo, logo não se faz necessária longa demora na discussão do mesmo.

É pertinente aqui apresentarmos um gráfico do perfil da densidade populacional para o sistema não isolado pelo fato de não conter exemplar desse nos capítulos anteriores. Na fig.(6.5) apresentamos um perfil para um sistema de duas fontes de tamanhos diferentes no qual colocamos um fator de crescimento no fragmento 2 maior que a unidade e este fator de crescimento é atingido pelo máximo da função dentro do mesmo. Este gráfico ilustra, ainda, que pode haver maior densidade em um fragmento menor desde que as condições dentro do mesmo sejam mais propícias à vida.

Notamos ainda que a densidade populacional adentra a região além fragmentos, pois como já dissemos anteriormente, aqui essa região não é proibida à vida, embora impropícia.

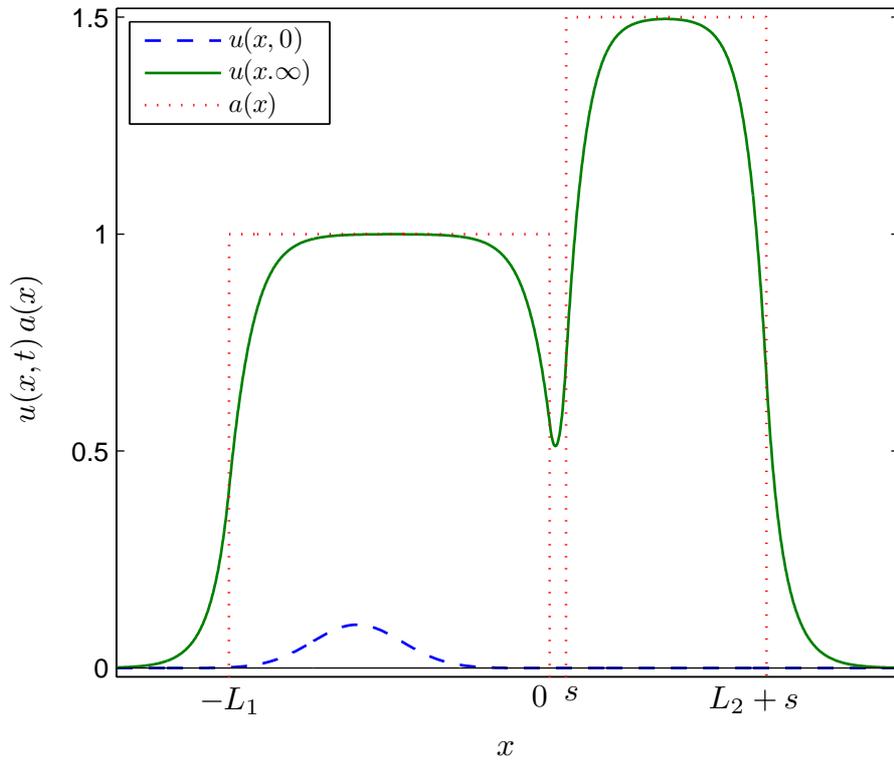


Figura 6.5: Fonte-fonte, $L_1 = 16$, $L_2 = 10$, $\bar{a} = 1.5$ e $p = 2$.

Em resumo, o estudo de dois fragmentos não isolados do meio externo traz um aspecto fenomenológico novo e bastante realista a nosso problema, visto que com ele podemos modelar fragmentos cercados por regiões inóspitas, porém não perfeitamente, tal como um oásis, uma ilha fluvial ou oceânica.

Outra conclusão é que fragmentos não isolados do meio externo possuem tamanhos críticos menores, ou seja, fragmentos menores que no caso não isolado podem ser viáveis à vida.

Por fim confirmamos que a solução para tempos grandes[§] é estável e independe da condição inicial, sendo desta um atrator global do sistema, assim como nos casos anteriores.

[§]Suficientemente grandes para que se passem todos os transientes.

Capítulo 7

Infinitos Fragmentos - Caso Periódico

O estudo de dois fragmentos não isolados nos fomenta uma questão: qual a consequência de acrescentarmos mais fragmentos ao problema do capítulo anterior? Porém não parece ser um caso interessante trabalhar com três, quatro ou n fragmentos, pois como veremos ao final deste capítulo, não há aspecto qualitativo que os diferenciem do de dois fragmentos. Um problema que se apresenta bastante interessante é o de infinitos fragmentos idênticos, o qual pode ser introduzido por uma periodicidade na função $a(x)$, tal como mostrado na fig.(7.1) abaixo.

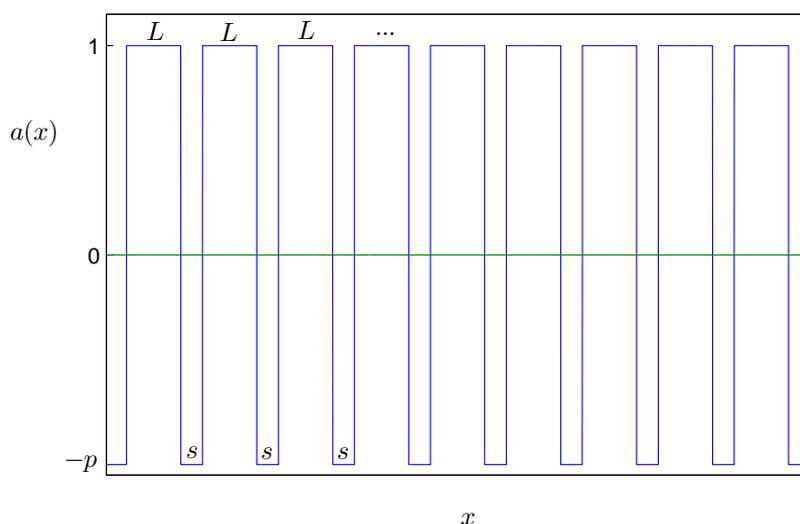


Figura 7.1: Perfil $a(x)$ para infinitos fragmentos idênticos.

Inserir infinitos fragmentos de mesmo tamanho em nosso programa numérico não é impossível nem inviável, uma vez que nesse programa trabalhamos com Transformada Rápida de Fourier (FFT), a qual já pressupõe condições periódicas. Basta, portanto, resolvermos para um fragmento e replicarmos a solução para os demais.

Numa primeira leitura, podemos ter a impressão que o parágrafo anterior reduz o problema numérico deste capítulo ao de um único não fragmento isolado, porém no problema do capítulo 5, integramos a eq.(1.4) ao longo da variável espacial por uma extensão muito maior que a do fragmento, mantendo nesta a condição desfavorável à vida. Já no caso periódico, nosso espaço de integração é composto apenas por um fragmento e uma separação.

Resolvendo então a Equação de Fisher para este perfil $a(x)$, podemos ter a relação de cada parâmetro com a viabilidade ou não da vida, que a saber são s e p , porém ao longo de todo nosso trabalho mantivemos fixo $s = 0.8$, logo se levantássemos uma curva $L \times s$, não teríamos com que compará-la, o que não nos motiva a gastar tempo humano e computacional com a mesma*. Optamos então por mapear apenas a variação de tamanho do fragmento L com o grau de propiedade à vida p , mapeamento este que apresentamos no gráfico abaixo (fig.(7.2)).

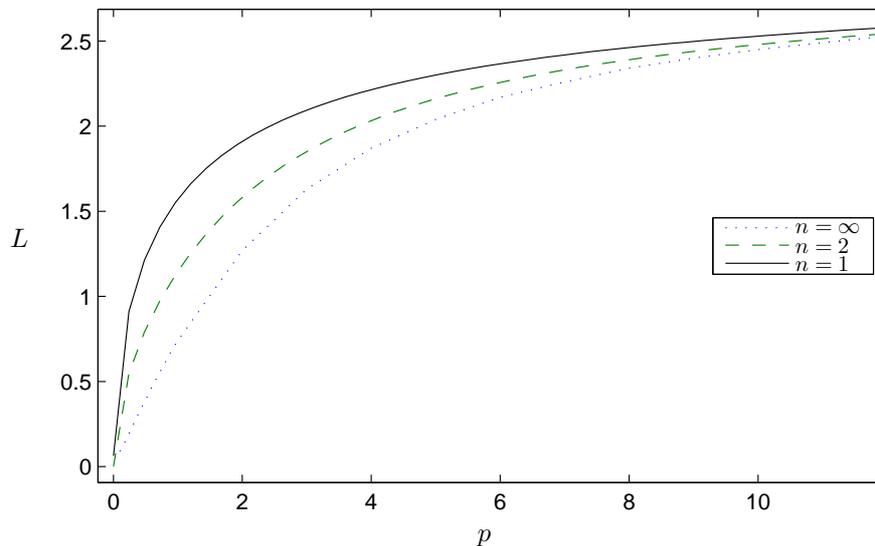


Figura 7.2: Tamanho crítico de cada fragmento em função da dificuldade à vida fora deste(s) para um, dois e infinitos fragmentos idênticos.

O gráfico acima traz apenas uma confirmação do que já esperávamos, pois para um fragmento não isolado (cap.5) tínhamos um tamanho mínimo $L_{sf}(p)$. A introdução de um outro fragmento idêntico e próximo a este (cap.6) gera uma difusão entre eles, de modo a termos o tamanho mínimo de cada um deles menor que o caso em que temos apenas um ($L_{df}(p) < L_{sf}(p)$). Isto nos leva a intuir que a introdução

*Pela mesma razão introduzimos $a(x)$ com o fator de crescimento unitária, uma vez que esta é igual em todos os fragmentos.

de infinitos fragmentos próximos a estes permita um tamanho mínimo $L_{if}(p)$ ainda menor, de modo que $L_{if}(p) < L_{df}(p) < L_{sf}(p)$ e isto realmente ocorre, salvo quando $p \rightarrow \infty$, pois neste limite, todos os casos se reduzem ao de um fragmento isolado, ou seja, $L_{if}(\infty) = L_{df}(\infty) = L_{sf}(\infty) = L_{si}$.

De acordo com os resultados acima concluímos que quanto maior o número de fragmentos, menor o tamanho mínimo de cada um deles. No capítulo seguinte discutiremos o problema de infinitos fragmentos de tamanhos diferentes, assim como a equivalência entre muitos e infinitos fragmentos.

Capítulo 8

Infinitos fragmentos - Caso estocástico

O objetivo deste capítulo é o estudo de um sistema com infinitos fragmentos de tamanhos diferentes. Note-se que teremos um problema para definir tamanhos mínimos, devido a impossibilidade de quantificar infinitos fragmentos um a um. O que faremos é trabalhar com o tamanho médio dos fragmentos.

Veremos a seguir aproximações e considerações que viabilizam o trabalho computacional do problema em questão.

8.1 Modelo

Assim como nos capítulos anteriores, nosso problema consiste em encontrar uma condição mínima para viabilidade da vida no sistema. Porém, no caso de infinitos fragmentos de tamanhos diferentes, não trataremos mais de tamanhos mínimos, propriamente. Neste caso, grandezas interessantes seriam o tamanho médio dos fragmentos e o quanto estes podem variar. Isto leva a uma formulação em que os tamanhos dos fragmentos obedecem a uma distribuição estocástica, ou seja, assumem valores aleatórios, porém com média μ e variância σ bem definidas. Com isso podemos ter controle sobre o tamanho médio destes, assim como ter domínio sobre a variação seus tamanhos, sem contudo perder a generalidade do problema.

Como dito anteriormente, nosso sistema é modelado matematicamente pela equação de Fisher, a qual em uma dimensão já adimensionalizada é dada pela eq.(1.4). Esta requer uma função $a(x)$ que represente o perfil de distribuição espacial das condições do meio em estudo. Tendo em vista as considerações acima podemos gerar tal função, como descrito na fig.(8.1) a seguir. Aqui p é o grau de dificuldade à vida nas regiões entre os fragmentos, s é a separação entre eles e $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n, \dots$, seus tamanhos, os quais doravante representaremos de maneira genérica por L_n .

O passo seguinte é eleger uma distribuição com média e variância bem definidas para gerar os L_n . Para evitar a geração de distâncias negativas vamos utilizar uma

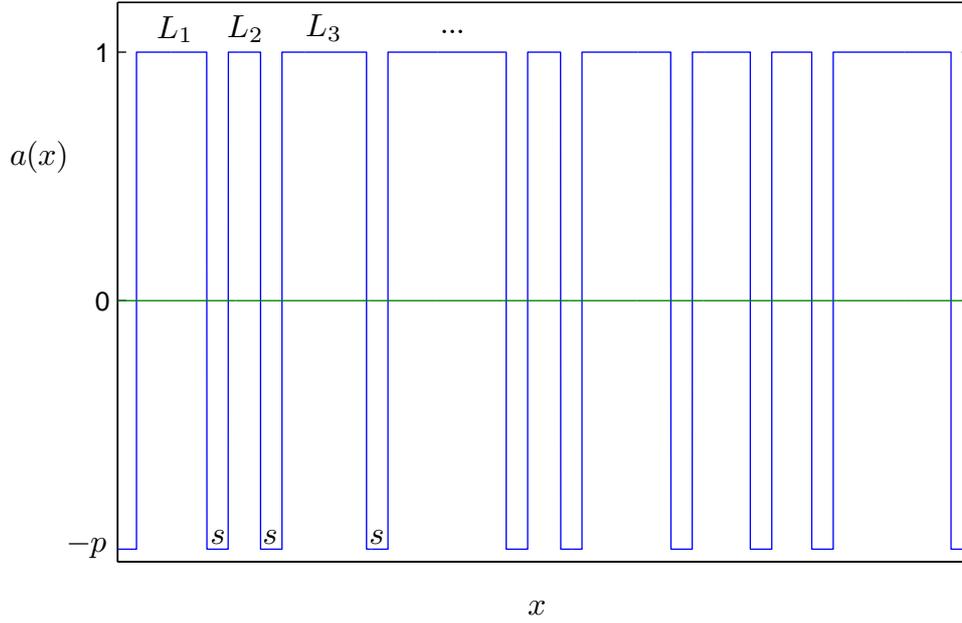


Figura 8.1: Função $a(x)$ que descreve um perfil estocástico para infinitos fragmentos.

distribuição lognormal, pois esta gera apenas números positivos.

A saber, a distribuição lognormal é dada por:

$$f(y|\mu, \sigma) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - \ln \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (8.1)$$

onde μ é a média e σ é a variância da distribuição.

Para encontrarmos uma relação entre a média, a variância e a existência de vida fizemos uma varredura no espectro destas variáveis observando para cada par (μ, σ) se houve ou não vida. A cada ponto fizemos um novo sorteio para os L_n de modo que não esperamos um resultado determinístico. Os demais parâmetros h , a_0 e s foram mantidos fixos em todos os sorteios.

8.2 Aproximação computacional

A impossibilidade de introduzir “infinitos” em uma simulação numérica nos leva sempre a fazer uma aproximação que torne o cálculo viável, ou seja, uma aproximação que descreva de maneira convincente o modelo físico em questão sem adicionar um número de parâmetros demasiadamente grande ao ponto de inviabilizar os cálculos. Em nosso problema se introduzirmos uma condição localizada em uma região inicial

muito menor que nosso intervalo de integração, teremos sobre esta o efeito de infinitos fragmentos e caso o perfil inicial evolua e saia dessa aproximação, já teremos evidenciado o que queríamos.

Nossa aproximação computacional poderia claramente ser suprimida se estudássemos apenas o caso de muitos fragmentos. Este em particular seria mais realista, uma vez que, sempre aplicaremos nosso modelo a uma região finita. A motivação de estudarmos “infinitos fragmentos” surge ao observarmos que a partir de um certo número de fragmentos os resultados, a média e a variância críticas, não se alteram. Logo nosso modelo independe de n , se este for suficientemente grande, o que permite diretamente a comparação dos resultados aqui obtidos com os do capítulo anterior.

8.3 Resultado para uma realização - análise preliminar

Inicialmente exploramos os efeitos qualitativos sobre uma única realização, para isto fixamos os valores $a_0 = 1$, $h = 1$ e $s = 0.8$ sem perda de generalidade, uma vez que a alteração destes valores não introduzem nenhuma mudança qualitativa na descrição de nosso fenômeno físico.

Os resultados das simulações podem ser apresentados num gráfico tal como abaixo na fig.(8.2), o qual descreve o limite para existência de vida, tendo como parâmetros a média μ e a variância σ da distribuição lognormal dos L_n .

Para afirmarmos se houve ou não vida no sistema, para um dado ponto (σ, μ) , utilizamos o seguinte critério. Introduzimos inicialmente uma população muito menor que qualquer população estável possível e localizada em uma região muito menor que nosso intervalo de integração. Se essa diminuir no tempo passo a passo extinguindo se, atribuímos a este ponto o rótulo “morte”. Por outro lado se ao longo da evolução temporal essa pequena população inicial evoluir para um estado estável e se difundir ao longo do espaço de integração do problema, atribuímos a este ponto o rótulo “vida”. Cabe lembrar que quando a população inicial se difunde algumas ordens de grandeza no espaço, a aproximação numérica de infinitos fragmentos deixa de ser boa, o que poderia comprometer os resultados, porém nosso intuito, a viabilidade da vida, já terá sido evidenciado.

No gráfico da fig.(8.2), a região verde (superior) representa os pares (μ, σ) correspondentes à vida, enquanto que a região vermelha (inferior), representa os pares (μ, σ) correspondentes a morte.

Podemos notar alguns pontos nos quais houve a extinção (morte), imersos na região onde é predominante a vida. Isto ocorre por estarmos usando um gerador estocástico, pois embora controlemos a média e a variância da distribuição, para cada ponto fizemos um novo sorteio, no qual mesmo a média e a variância sendo

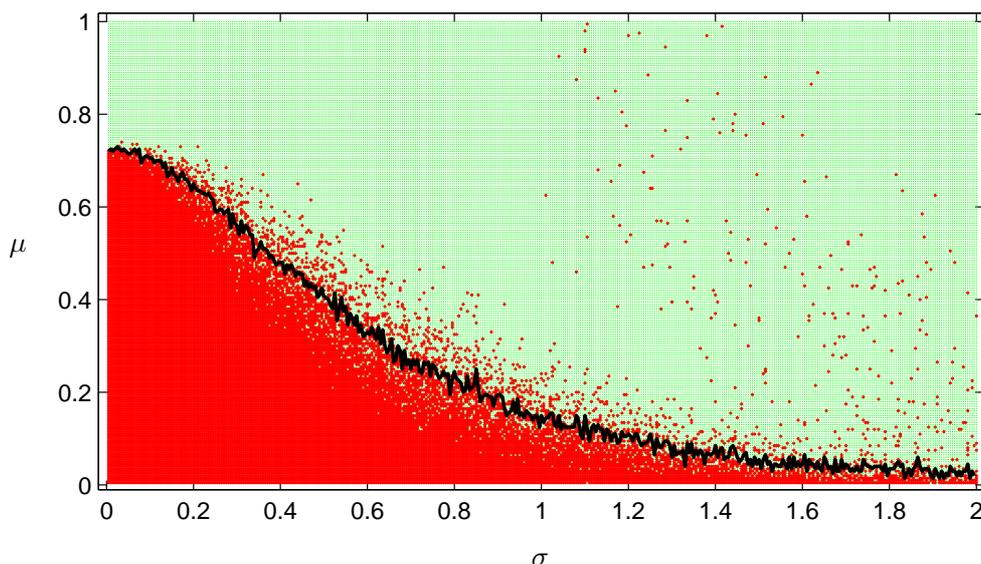


Figura 8.2: Relação entre a viabilidade da vida, a média μ e a variância σ da distribuição estocástica que gera os tamanhos dos infinitos fragmentos.

favoráveis à vida, o sorteio pode não ser. Notamos ainda que estes pontos tornam-se mais comuns à medida que a variância aumenta, o que era esperado pois quanto maior a variância, maior a chance do sorteio não ser bem comportado.

A linha contínua que divide as duas regiões do gráfico é uma média ponderada de seus pontos para cada valor de σ . Podemos ver que os “pontos de morte” imersos na região de vida são muito pouco relevantes, o que faz sentido uma vez que estes pontos estão na razão de um para sessenta em média. No gráfico, aumentamos o tamanho da representação destes pontos para que pudessem ser vistos com maior nitidez.

8.4 Média sobre várias realizações - análise quantitativa

No gráfico da fig.(8.2) temos uma boa descrição qualitativa de como se comporta a viabilidade à vida em um conjunto de fragmentos em termos da média e da variância da distribuição estocástica que os gera. A pergunta agora é, se repetirmos esse processo várias vezes, quantas destas haverá vida e quantas haverá morte para cada ponto? Em outras palavras estamos interessados em uma análise quantitativa do problema cuja estocasticidade sugere a média sobre muitas realizações.

Nos propomos então a fazer 20 realizações, porém esse número de realizações exigiria um esforço computacional que inviabilizaria o trabalho. Para contornar esse

problema, utilizamos uma grade com menos pontos e com σ variando de 0 a 1 e não de 0 a 2 como havíamos feito inicialmente. Estas simplificações não interferem nos resultados do problema.

Fizemos então as vinte simulações e para cada ponto contamos quantas vezes ele recebeu o rótulo vida e quantas vezes ele recebeu o rótulo morte. Com esses dados fizemos um *degradé* de cores de vermelho para verde usando o padrão RGB do matlab, onde verde representa a vida e vermelho a morte. O resultado está exposto na fig.(8.3).

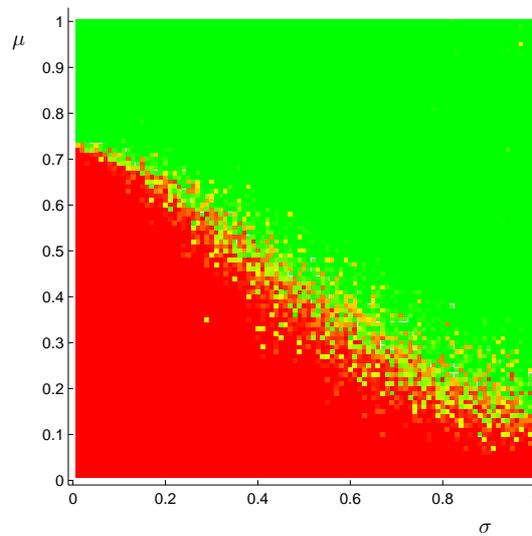


Figura 8.3: Probabilidade de haver vida em um sistema formado por infinitos fragmentos em função da média e da variância dos tamanhos destes.

Nesta contagem, atribuímos vida o valor 1, a morte o valor 0 e somamos ponto a ponto. Feito isto normalizamos esta contagem, de modo a termos um número entre 0 e 1 que representa a probabilidade de haver vida.

A esta grandeza demos o nome de probabilidade de vida (pV). Construimos então para cada valor de σ , uma função de μ , que respresenta esta probabilidade de vida e traçarmos o gráfico $pV(\mu) \times \mu$. Neste gráfico evidenciamos que a distribuição dos pontos possui a forma de uma função sigmoideal, pois para baixos valores de μ a probabilidade de haver vida é nula e para altos valores de μ é um. Há ainda alguns valores entre zero e um, em uma região intermediária, localizada ao redor do ponto que divide as regiões de morte e vida. Estes proporcionam uma transição suave entre os dois valores (0 e 1) e podem ser ajustados pela função tangente hiperbólica.

A saber, a tangente hiperbólica ajustada para cada valor da variância possui a forma

$$pV = \frac{1 + \tanh \alpha(\mu - \mu_0)}{2}$$

onde μ_0 é o ponto de separação entre as regiões de morte e vida descrito no gráfico da fig.(8.5). Deste modo o único parâmetro a ser ajustado é o α .

Veja na fig.(8.4a) as curvas ajustadas para alguns valores de σ .

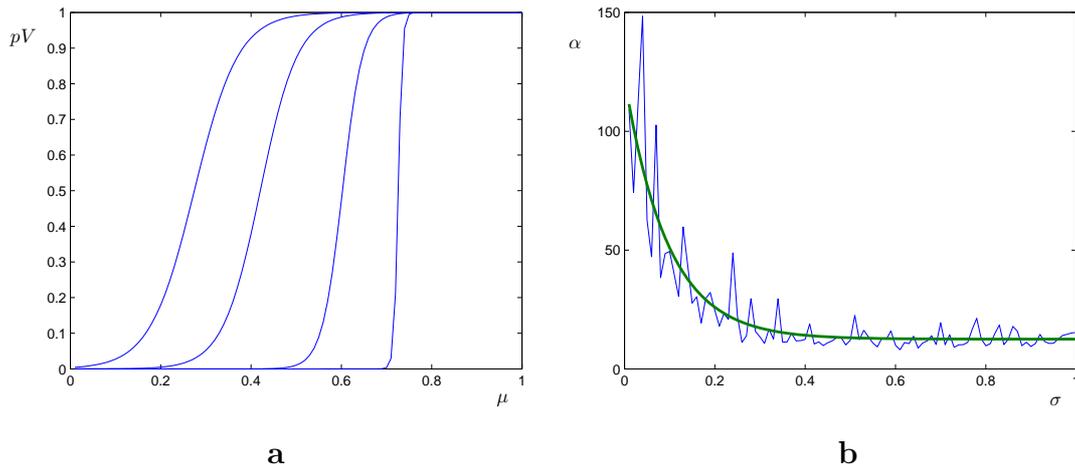


Figura 8.4: **a**; Perfil das tangentes hiperbólicas ajustadas para alguns valores de σ , a saber $\sigma = 0.01$, $\sigma = 0.25$, $\sigma = 0.50$, $\sigma = 0.75$, os quais correspondem respectivamente a $\alpha = 109$, $\alpha = 22$, $\alpha = 12$, $\alpha = 10$. **b**; Gráfico do inverso da dispersão pela variância

Este ajuste foi obtido utilizando o método dos mínimos quadrados [8, 21, 23], uma técnica de otimização matemática que procura encontrar os melhores parâmetros que ajustam uma curva dada a um conjunto de dados. Para isto procuramos minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os pontos da curva que se está ajustando e os dados numéricos (tais diferenças são chamadas resíduos). Em outras palavras consiste em minimizar a soma

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i^0 - y_i)^2 \quad (8.2)$$

onde y_i^0 é o vetor de dados e y_i o vetor obtido com os correspondentes valores numéricos da função que se está ajustando.

Como podemos ver na fig.(8.4b), α diminui com o aumento de σ e o perfil desta diminuição nos sugere ajustá-la por uma curva exponencial, cuja forma mais geral pode ser dada por

$$\alpha(\sigma) = a + be^{-c\sigma}$$

aqui temos dois parâmetros a serem ajustados a e b , para os quais utilizamos o mesmo método anterior (mínimos quadrados).

É razoável tomar $1/\alpha$ como a largura da dispersão, deste modo, à medida que α diminui a dispersão aumenta, ou ainda, à medida que σ aumenta, a dispersão também aumenta. Veja na fig.(8.5a), as curvas das simulações estocásticas e seus respectivos ajustes polinomiais, que correspondem a média ponderada dos pontos que separam a região de viabilidade e inviabilidade à vida e as que representam a média $+1/\alpha$ e a média $-1/\alpha$.

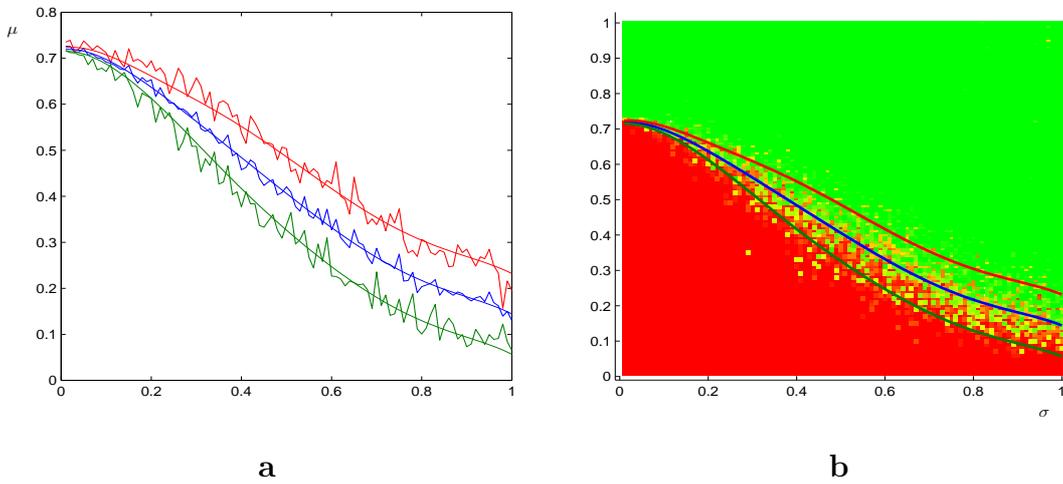


Figura 8.5: Curva média de separação entre as regiões onde é viável e inviável à vida e a respectiva região de transição.

O ajuste das simulações estocásticas da fig.(8.5a) foram feitas por funções polinomiais, visto que suas formas não sugerem nenhuma função conhecida. Ajustamos as mesmas por uma função polinomial do sétimo grau, pois testes numéricos [35] utilizando o método dos mínimos quadrados mostraram ser este grau de polinômios os que minimizavam a soma dos resíduos, vide eq.(8.2).

Esboçando as curvas que representam os ajustes na fig.(8.5a) sobre a fig.(8.3), teremos então uma média que separa a região de vida da região de morte, assim como uma região de transição entre elas. Vide fig.(8.5b).

Uma breve análise da fig.(8.5b) nos fornece que abaixo da curva inferior a probabilidade de haver um sorteio que seja viável a existência de vida é muito pequena,

assim como acima da curva superior é baixa a probabilidade de um sorteio que leve a população à extinção.

Podemos ver que essas curvas descrevem bem uma região onde a vida ou a morte não é total, a esta região passaremos a chamar de região de transição e aos seus pontos de pontos de transição. Para obtermos uma estimativa da porcentagem destes pontos que estão dentro da região delimitada pelas curvas utilizamos um método muito similar ao utilizado em estatística para obter o primeiro, segundo e terceiro desvios padrões, vide apêndice D. Nas figs.(8.6a e 8.6b) apresentamos as curvas para os análogos do segundo e terceiro desvio padrão respectivamente.

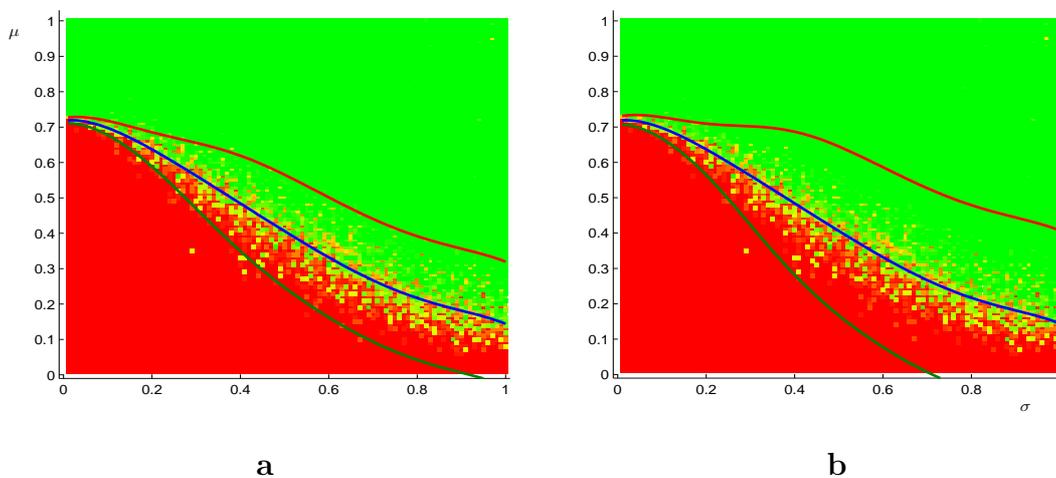


Figura 8.6: Curva média de separação das regiões onde é viável e inviável à vida e a respectiva região de transição para o análogo do segundo e terceiro desvios padrões.

A esta porcentagem dos pontos localizados na região de transição, daremos o nome de margem de segurança MS , ou seja, se utilizarmos este método para prever se um dado perfil é viável ou não a vida, qual a probabilidade de obtermos sucesso. Numericamente, este valor é uma constante dada por MS_1 , MS_2 e MS_3 , análogos respectivamente ao primeiro, segundo e terceiro desvios padrão (apêndice D).

$$MS_1 = 82.7\% \quad MS_2 = 97.4\% \quad MS_3 = 99.6\% \quad (8.3)$$

Nos gráficos da fig.(8.6) embora tenhamos uma área de transição bem maior que para o caso análogo a um desvio padrão fig.(8.5b), ainda temos uma região satisfatória de vida e por outro lado uma margem de segurança maior.

A partir dos resultados acima, concluimos que é possível prever com uma margem de segurança, qual a condição mínima para a existência de vida em um sistema

composto por “infinitos” fragmentos de tamanhos diferentes satisfazendo uma distribuição estocástica lognormal. Este resultado aumenta consideravelmente a abrangência de nosso modelo, principalmente se conjugado com os resultados dos capítulos anteriores, tal como teremos uma pequena amostra no capítulo 9.

Capítulo 9

Aplicação - Viabilidade à vida em um reflorestamento

Uma aplicação interessante para nosso problema é a otimização de um reflorestamento que vise repovoá-lo de uma certa espécie da fauna, ou seja, qual a melhor maneira de se reflorestar uma área devastada de modo que a espécie possa ser reintroduzida utilizando o mínimo possível de área plantada. Nosso intuito é encontrar uma maneira eficaz de distribuir árvores no território devastado que possa tornar essa região novamente viável a existência de vida, ou seja, se reintroduzirmos uma pequena densidade populacional de uma certa espécie, esta população aumente e atinja um ponto de equilíbrio com o meio. Em particular procuramos um limite inferior para a área plantada, abaixo, do qual essa mesma população se extinguiria. Como veremos a seguir, esse limite depende não somente da área total plantada mas também da distribuição desta ao longo do território devastado.

Uma maneira de reflorestarmos uma área devastada é plantando árvores nela toda, o que possibilitaria que uma espécie reintroduzida nessa área aí permanecesse. Isto é, porém despendioso, visto que a vegetação é perfeitamente capaz de preencher algumas lacunas não inicialmente arborizadas. Por outro lado a maneira mais simples de reintroduzirmos a vida na referida região é criando uma única mancha de tamanho suficiente para que a vida se estabeleça, vide cap.5. Porém essa configuração não restabeleceria a vida em toda a área desmatada, mas sim em uma região isolada da mesma. Logo se quisermos a fauna ocupando toda a área desmatada precisamos de alguma maneira espalhar árvores por toda ela. A forma de espalhar estas árvores em menor número possível, que ainda proporcione o restabelecimento da espécie, será discutida a seguir.

Não estamos aqui preocupados com a distância mínima entre uma árvore e outra, a qual consideraremos constante, de modo que a única forma de plantarmos mais menos árvores é aumentar ou diminuir a distância entre as manchas, seja de maneira constante ou não. Logo o nosso estudo se reduz basicamente a duas configurações.

A de várias manchas idênticas igualmente espaçadas e a de muitas manchas de tamanhos diferentes, também igualmente espaçadas, cujos tamanhos obedecem uma distribuição bem comportada. Note que estamos falando de muitas e não infinitas manchas como descrito nos capítulos 7 e 8, o que torna nosso modelo exato para o caso de muitas manchas de tamanhos diferentes e exige a introdução de uma aproximação para o caso de várias manchas idênticas. Aproximação esta que não se constitui em um problema, pois assim como no capítulo anterior, a partir de um número de fragmentos, o resultado não se altera, vide seção(8.2).

Façamos agora uma comparação entre o caso estocástico e o periódico. No caso periódico temos como a área plantada A_L o produto do número de manchas N pelo tamanho de cada uma L e área não plantada A_s como sendo o produto do número de regiões não plantadas pelo tamanho de cada uma delas s . Considerando ainda o número de manchas e o de regiões não plantadas como sendo iguais, pois se intercalam, temos

$$A_L = NL \quad \text{e} \quad A_s = Ns$$

logo a área total A_T pode expressa como sendo a soma da área plantada com a não plantada, a qual pode ser expressa por

$$A_T = N(L + s)$$

Podemos obter a fração de área plantada $A_{\%L}$, dividindo essa pela área total, o que nos fornece a relação abaixo

$$A_{\%L} = \frac{A_L}{A_T} = \frac{NL}{N(L + s)} = \frac{L}{L + s} \quad (9.1)$$

Para muitas manchas de tamanhos diferentes podemos proceder de forma análoga, porém aqui a grandeza tamanho das manchas deve ser expressa por μ , a média do tamanho destes, de modo que

$$A_\mu = N\mu \quad \text{e} \quad A_T = N(\mu + s)$$

Logo, a fração de área plantada neste caso pode ser expressa por

$$A_{\%\mu} = \frac{A_\mu}{A_T} = \frac{N\mu}{N(\mu + s)} = \frac{\mu}{\mu + s} \quad (9.2)$$

Das expressões acima extraímos que a porcentagem de área plantada independe da área total desmatada, desde que esta seja suficientemente grande para o tamanho mínimo ser invariante.

Traduzindo em números, temos para configuração de muitas manchas idênticas o seguinte resultado.

$$A_{\%L} = \frac{0.74}{0.74 + 0.8} = 0.48 = 48\% \quad (9.3)$$

No caso de muitas manchas de tamanhos diferentes, não temos um único valor para a fração de área plantada, pois para cada valor de σ temos um μ mínimo, de modo que $A_{\% \mu} = A_{\% \mu}(\sigma)$. Porém podemos construir uma curva que represente a variação de $A_{\% \mu}(\sigma)$ com σ , vide fig.(9.1).

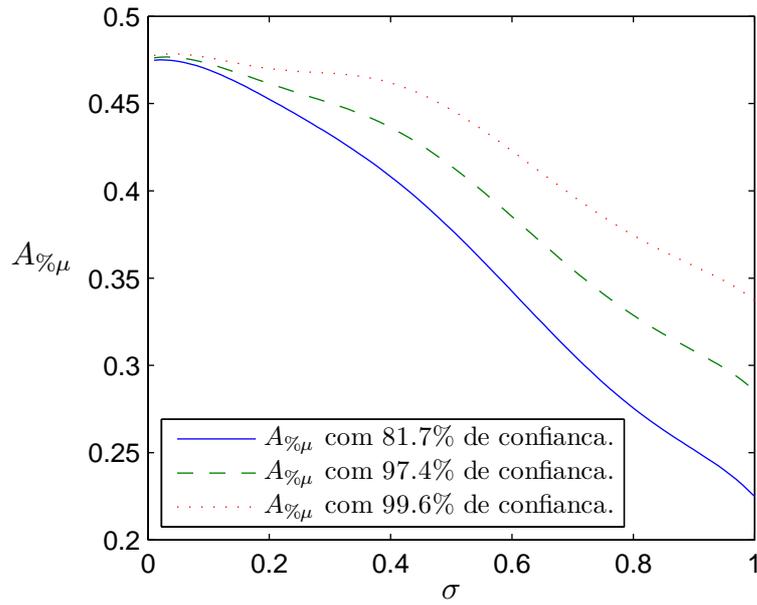


Figura 9.1: Área plantada em função da variância.

A fig.(9.1) foi construída com os valores máximos da região de transição figs.(8.5b, 8.6a e 8.6b) com o intuito de obtermos a porcentagem de área plantada que com uma margem de segurança possa proporcionar a vida. E mesmo com essa margem podemos observar valores inferiores ao caso de manchas idênticas. O gráfico ainda nos mostra que os valores mínimos da média se tornam menores a medida que σ aumenta. O menor valor que encontramos corresponde a $\sigma = 1$,

$$A_{\% \mu}^{81.7\%}(1) = 0.22 = 22\% \quad (9.4)$$

$$A_{\% \mu}^{97.4\%}(1) = 0.28 = 28\% \quad (9.5)$$

$$A_{\% \mu}^{99.6\%}(1) = 0.34 = 34\% \quad (9.6)$$

Finalmente, concluímos este último capítulo com um resultado interessante, pois a área plantada diminui à medida que os tamanhos das manchas possuem maior variação entre si. Isto nos permite proceder um reflorestamento utilizando uma área plantada menor que no caso de uma distribuição homogênea das manchas, com uma margem de segurança alta. Uma distribuição viável em um reflorestamento é a introdução de uma mancha “mãe”, grande suficiente para sozinha manter a vida da espécie em questão, tendo ao seu redor uma infinidade de manchas pequenas dos mais variados tamanhos. Esta distribuição não só é viável, como também elimina o risco de extinção, visto que a mancha maior garante a vida no sistema. Se a área for muito extensa, podemos ainda ter mais de uma mancha mãe e a distribuição destas pode ser feita através de uma análise de caso. Logo nossa contribuição para o SLOSS debate é: neither a “Single Large”, nor “Several Small”; a mix of both.

Como já dissemos na introdução desta tese, SLOSS é uma sigla; Single Large Or Several Small (um único grande ou vários pequenos). Este debate foi muito intenso nos anos 80 e seu intuito explorar, qual a melhor configuração para a biodiversidade, se uma única mancha grande ou várias pequenas que representassem a mesma área. Ainda hoje esse assunto é tema de discussão, nem sempre conservando a mesma área, nem necessariamente visando a maior biodiversidade.

Conclusão

Nesta tese nos ocupamos em estudar fragmentos populacionais, mais especificamente as condições mínimas sobre propriedades dos fragmentos para que a vida de uma determinada espécie seja viável nos mesmos. Estas condições podem ser o(s) tamanho(s) do(s) fragmento(s), o grau de resistência à vida entre eles ou fora deles e as condições de vida dentro do fragmento.

Inicialmente apresentamos a equação de Fisher, a qual descreve nosso modelo, assim como alguns exemplos simples com coeficientes constantes, para os quais conhecemos as soluções analíticas. Esses exemplos fornecem o comportamento da solução para casos específicos, comportamento este que pode sempre ser utilizado para verificar a compatibilidade de solução obtida em nosso modelo, a qual no limite deve reproduzir o caso mais simples.

Em seguida introduzimos uma aproximação linear (cap.1) na equação de Fisher. Esta simplificação fornece uma equação para a qual podemos encontrar uma solução analítica, solução ésta, válida apenas para pequenas populações. No entanto é exatamente o que necessitamos para determinar condições de viabilidade de uma população. Às condições encontradas através da solução analítica da equação linear atribuímos o nome de predição analítica.

Encontramos inicialmente a predição analítica para o tamanho mínimo de um fragmento isolado (cap.2) que permita a vida. Para este obtivemos exatamente o mesmo resultado encontrado por Kenkre [17] utilizando a equação completa, o que evidencia que a aproximação é coerente.

Uma das expansões de nosso modelo foi feito para um fragmento não isolado (cap.5), o qual consiste em uma região favorável à vida, imersa numa região desfavorável, porém na qual a extinção não seja completa nas vizinhanças do fragmento. Para este encontramos que dadas condições muitíssimo amenas fora dos fragmentos, ele pode ser muito menor que seria no caso isolado, enquanto que para a impossibilidade total da vida fora do mesmo reproduz-se o resultado válido para o caso de um fragmento isolado, o que mais uma vez confirma a coerência da aproximação. Um exemplo de população vivendo em um fragmento não isolado pode ser pássaros vivendo em uma pequena área arborizada imersa numa região desmatada.

Um outro ramo de nosso trabalho foi explorar a existência de vida em um sistema composto por dois fragmentos, tanto para o sistema isolado (cap.3), quanto para o não isolado (cap.6). Em ambos, os fragmentos são conectados por uma região desfavorável à vida, porém sem extinção total. Os dois sistemas possuem características muito similares. Os fragmentos podem ser tanto menores quanto menor a resistência à vida entre eles, nos dois casos cada fragmento pode ser menor que um único fragmento isolado e ambos os sistemas reproduzem um fragmento isolado no limite em que o grau de restrição à vida entre os fragmentos e fora do sistema tende ao infinito. A única peculiaridade do sistema não isolado é que este permite vida em fragmentos ainda menores que no caso isolado. O principal resultado destes sistemas é a viabilidade da vida de uma determinada espécie em fragmentos que isoladamente não proporcionariam a mesma, ou seja, a difusão entre os fragmentos permite a existência de vida em fragmentos com piores condições que as exigidas pelos fragmentos que não possuem difusão de um outro próximo a ele, ou que não tenha um outro próximo a ele. Uma particularidade interessante é a existência de vida em um sistema isolado, onde o tamanho total mínimo correspondente aos dois fragmentos somados é menor que o tamanho mínimo de um único fragmento isolado com nas mesmas condições.

Ainda para dois fragmentos fizemos simulações numéricas para vários casos acima citados e obtivemos uma concordância muito boa entre a simulação e a previsão analítica. Por fim ressaltamos que se aumentarmos o fator de crescimento de um fragmento, ou seja, se melhorarmos as condições à vida dentro dele, pode existir vida em fragmentos menores e vice-versa, como era de se esperar. Logo podemos concluir que há um vínculo entre o tamanho do fragmento e suas condições à vida, o qual não nos aprofundamos nesse trabalho.

Expandimos então nosso modelo para muitos fragmentos, e fazendo alguns testes numéricos notamos que após um certo número destes, não há mais alteração no tamanho mínimo dos mesmos. Logo, resolver para muitos equivale a resolver para infinitos. Iniciamos com todos idênticos (cap.7) e posteriormente partimos para tamanhos diferentes (cap.8). Notamos então que a inserção de mais fragmentos diminui o tamanho mínimo de cada um deles para que haja vida no sistema e se estes forem de tamanhos diferentes eles podem em média ser ainda menores.

Podemos aplicar nossos resultados a populações difusivas tais como pássaros em um reflorestamento. Quando temos uma área desmatada, para podermos reintroduzir a fauna no sistema necessitamos restabelecer a flora. Para fazer isso temos várias opções; podemos reflorestar a área toda, porém isso é um desperdício, visto que a área não plantada pode ser ocupada pela flora da área plantada. O outro extremo é plantarmos uma única mancha com tamanho suficiente para manter a

vida, porém neste caso não repovoariamos todo o território. Logo, sobram-nos dois casos o de plantar muitas manchas idênticas ou muitas manchas de tamanhos diferentes. Nosso modelo prevê que a maneira que utiliza menor área plantada que torne a região viável à vida é plantar várias manchas de tamanhos aleatórios.

Concluimos por fim que todos estes resultados são uma contribuição para o estudo de fragmentos populacionais e podem ter outras aplicações além das citadas no texto desta tese. Podem ainda ser conjugados com outros trabalhos ou expandidos. A seguir apresentamos algumas continuações naturais desse trabalho.

Perspectivas

- Considerando os perfis da densidade populacional que apresentamos, notamos que eles possuem valores máximos diferentes para vários valores do tamanho e do fator de crescimento do sistema. Uma pergunta natural é como este máximo se comporta com o tamanho crítico ou com o fator de crescimento crítico?
- Ao longo de todo nosso trabalho, mantivemos a separação entre os fragmentos fixa. Em algumas simulações não apresentadas nesta tese, observamos uma dependência entre a separação dos fragmentos e o grau de dificuldade à vida nessa região. Qual é essa dependência?
- Para sistemas não isolados, seja de um ou dois fragmentos, notamos que a densidade populacional avança pela região fora do fragmento por uma distância. Que distância é esta? Qual a sua dependência com os parâmetros do problema? Quais parâmetros influenciam neste “comprimento de penetração”?
- Todo nosso trabalho foi desenvolvido em uma dimensão espacial. O que introduziria o estudo em duas variáveis [31] espaciais? Haveriam fenômenos novos?
- A introdução de efeito Allee, mudaria a dinâmica do problema? Como poderíamos introduzi-lo?
- Estudos sobre como se comporta a velocidade de invasão [19] da frente de onda podem ser introduzidos em nosso modelo. Seria interessante saber se velocidades diferentes poderiam mudar o tamanho crítico.

Apêndice A

Equação de Fisher a coeficientes constantes - Solução do tipo onda viajante

Como dito anteriormente a equação de Fisher não possui solução analítica geral para quaisquer coeficientes mesmo que estes sejam constantes. Porém há alguns casos particulares para os quais podemos encontrá-la. Um caso particular foi estudado por Ablowitz e Zeppetella [1], trata-se de uma solução do tipo onda viajante para uma velocidade específica. É este caso particular que mostraremos abaixo em detalhes.

O caso particular sobre o qual discorreremos assume $a(x) = 1$, tal como apresentado na eq.(1.5), na qual introduzimos um vínculo bastante conhecido entre as variáveis espacial e temporal na intenção de procurarmos uma solução do tipo onda viajante [36]

$$z = x - vt \tag{A.1}$$

a qual nos gera a partir da equação diferencial parcial uma equação diferencial ordinária na variável z dada por

$$u_{zz} + vu_z + u - u^2 = 0 \tag{A.2}$$

que também não pode ser resolvida de forma analítica para qualquer velocidade v , porém isto é possível para algumas velocidades específicas.

A.1 $v = 0$

A solução trivial é para $v = 0$, pois neste caso a eq.(A.2) assume a forma

$$u_{zz} + u - u^2 = 0 \tag{A.3}$$

Esta equação é integrável, basta introduzirmos $w = \frac{du}{dz}$, donde temos

$$\int_0^w w dw = \int_0^u (u^2 - u) du \quad (\text{A.4})$$

resolvendo a integral acima obtém-se

$$w = \left[2 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

a qual pode ser resolvida voltando para a variável dependente inicial $w = \frac{du}{dz}$. O que fornece após algumas manipulações simples

$$\int z dz = \int \frac{du}{u \sqrt{\frac{2}{3}u - 1}} \quad (\text{A.6})$$

A integral da equação acima é conhecida e tabelada [9].

$$z = 2 \arctan \sqrt{\frac{2}{3}u - 1} + c \quad (\text{A.7})$$

onde c é uma constante de integração. Invertendo a função acima de modo a deixá-la na forma explícita $u(z)$, temos

$$u(z) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \left[\tan \left(\frac{z - c}{2} \right) \right] \quad (\text{A.8})$$

A equação acima é uma solução para a equação de Fisher do tipo onda viajante com velocidade igual a zero, ou seja, é uma solução estacionária. Pois se olharmos para eq.(A.3) veremos que é exatamente igual a equação de Fisher independente do tempo com coeficientes constantes.

A.2 $v = 5/\sqrt{6}$

Para velocidades não nulas, a solução não é tão simples e dentre os muitos métodos [3, 30] que poderíamos utilizar para procurar sua solução, uma boa tentativa é procurá-la sob a forma de uma série de Laurent. Com esse intuito, devemos inicialmente determinar o tipo de pólo existente na equação; para isso, introduzimos a hipótese $u \sim k(z - z_0)^{-\alpha}$ e para que possamos ter um polo é necessário* que u_{zz} e u^2 se compensem, o que nos gera.

$$u_{zz} \sim -\alpha(-\alpha - 1)k(z - z_0)^{-\alpha-2} = k^2(z - z_0)^{-2\alpha} \sim u^2$$

*Note que u e u_z não podem produzir um α determinado que balanceie os termos gerados por u'' , sendo esta a única possibilidade.

da igualdade dos expoentes temos

$$-\alpha - 2 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = 2 \quad (\text{A.9})$$

e da igualdade dos coeficientes, já com $\alpha = 2$ temos

$$-\alpha(-\alpha - 1)k = k^2 \Rightarrow k = 0 \text{ ou } k = \alpha(\alpha + 1) = 6 \quad (\text{A.10})$$

Dado que temos um pólo de ordem dois e que podemos sempre fazer uma mudança de variável do tipo $y = (z - z_0)$, podemos sempre resolver a equação em torno do ponto $z_0 = 0$ sem perda de generalidade, logo

$$u(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 \dots \quad (\text{A.11})$$

e os demais termos da eq.(A.2) possuem a forma

$$vu_z = -\frac{2a_{-2}}{z^3}v - \frac{a_{-1}}{z^2}v + a_1v + 2a_2vz + 3a_3vz^2 + \dots \quad (\text{A.12})$$

$$u_{zz} = \frac{6a_{-2}}{z^4} + \frac{2a_{-1}}{z^3} + 2a_2 + 6a_3z + 12a_4z^2 + \dots \quad (\text{A.13})$$

$$u^2 = \frac{a_{-2}^2}{z^4} + \frac{2a_{-2}a_{-1}}{z^3} + \frac{a_{-1}^2 + 2a_{-2}a_0}{z^2} + \frac{2a_{-2}a_1 + 2a_{-1}a_0}{z} + 2a_{-2}a_3 + 2a_{-1}a_2 + 2a_0a_1 + (2a_{-2}a_2 + 2a_{-1}a_3 + a_0^2)z + (2a_{-2}a_4 + 2a_{-1}a_3 + 2a_0a_2)z^2 \quad (\text{A.14})$$

Tomando então como nula a soma algébrica dos coeficientes de cada ordem polinomial obtemos

$$z^{-4} : 6a_{-2} - a_{-2}^2 = 0 \Rightarrow a_{-2} = 6 \quad (\text{A.15})$$

$$z^{-3} : 6a_{-2} - 12v - a_{-1} = 0 \Rightarrow a_{-1} = -\frac{6v}{5} \quad (\text{A.16})$$

$$z^{-2} : -a_{-1}v + 6 - a_{-1}^2 - 12a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{v}{5} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{A.17})$$

$$z^{-1} : a_{-1} - 12a_{-1} - 2a_{-1}a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{v}{5} \right)^3 \quad (\text{A.18})$$

$$z^0 : 2a_2 - a_{-1}v + a_0 - 12a_2 - 2a_{-1}a_1 - a_0^2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{-35}{40} \left(\frac{v}{4} \right)^4 + \frac{1}{40} \quad (\text{A.19})$$

$$z^1 : 6a_3 + a_2v + a_1 - 12a_3 - 2a_{-1}a_2 - 2a_0a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{-79}{24} \left(\frac{v}{5}\right)^5 + \frac{11}{120} \left(\frac{v}{5}\right) \quad (\text{A.20})$$

$$z^2 : 12a_4 + 3a_3v + a_2 - 12a_4 - 2a_{-1}a_3 - 2a_0a_2 - a_0^2 = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ ou } v = \pm \frac{5}{\sqrt{6}} \quad (\text{A.21})$$

A eq.(A.15) apenas confirma a eq.(A.10), já a eq.(A.21) fornece três valores para a velocidade da frente de onda; $v = 0$ que torna a eq.(A.2) é integrável, tal como já discutido anteriormente, $v < 0$ que pode ser resolvido levando x em $-x$ e $v = \frac{5}{\sqrt{6}}$ que nos ocuparemos a seguir em encontrar a solução.

Tomando a equação linear associada a eq.(A.2)

$$u_{zz} + vu_z + u = 0 \quad (\text{A.22})$$

temos uma EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução pode ser facilmente encontrada [4] e possui a forma

$$u = ae^{\lambda_1 z} + be^{\lambda_2 z} \quad (\text{A.23})$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 - 4}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-v - \sqrt{v^2 - 4}}{2}$$

como $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow (0, 0)$ é um nó estável no plano de fase [10]. Isto sugere uma solução com forma.

$$\sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ m + n \geq 1}} a_{mn} e^{(m\lambda_1 + n\lambda_2)z}$$

Para $v = \frac{5}{\sqrt{6}}$, temos $\lambda_1 = -\frac{3}{\sqrt{6}}$ e $\lambda_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, o que nos gera

$$u(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-nz/\sqrt{6}} \quad (\text{A.24})$$

Substituindo a eq.(A.24) na eq.(A.2) e tomando os coeficientes de cada potência de z , temos:

$$a_n \left(\frac{(n-2)(n-1)}{6} \right) = \sum_{j=2}^{n-2} a_j a_{n-j} \quad (n \geq 4)$$

ou ainda

$$a_n = \frac{6 \sum_{j=2}^{n-2} a_j a_{n-j}}{(n-2)(n-1)} \quad (n \geq 4)$$

onde a_2 e a_3 são constantes arbitrárias e os demais a_n para $n \geq 4$ dependentes destes. Fazendo então uma escolha conveniente de $a_2 = 1$ e $a_3 = -2$, teremos $a_4 = 3$ e por indução finita $a_n = (-1)^n(n-1)$. Logo

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) e^{-nz/\sqrt{6}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+1) e^{-(n+2)z/\sqrt{6}} \\ &= e^{-2z/\sqrt{6}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) e^{-nz/\sqrt{6}} \end{aligned}$$

onde utilizando a identidade para $0 < y < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n (n+1) e^{-yz} = 1 \mp 2y + 3y^2 \mp 4y^3 + \dots = (1 \mp y)^{-2}$$

e lembrando que para $z > 0 \Rightarrow 0 < e^{-nz/\sqrt{6}} < 1$, temos:

$$u(z) = \frac{e^{-2z/\sqrt{6}}}{(1 + e^{-z/\sqrt{6}})^2}$$

ou ainda em uma forma mais compacta temos

$$u(z) = \frac{1}{(1 + e^{z/\sqrt{6}})^2} \quad (\text{A.25})$$

a qual nas variáveis iniciais pode ser escrita como

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + e^{(x-5t/\sqrt{6})/\sqrt{6}})^2} \quad (\text{A.26})$$

que é uma solução específica da eq.(1.5). Fizemos algumas simulações numéricas e notamos que ela é um atrator, vide cap.(1). Não analisamos se ela é um atrator global pois isto demandaria um certo tempo que não julgamos relevante perder em algo que não faz parte do objetivo específico de nosso trabalho.

Apêndice B

Generalização da Solução analítica para não linearidade polinomial de qualquer ordem

Dentre os casos específicos para os quais conhecemos a solução analítica da equação de Fisher, um bastante interessante é proposto por Murray [26] para uma não linearidade na forma de um monômio de ordem q . De modo que a equação resultante é uma generalização da eq.(1.5) com forma

$$u_t = u_{xx} + u - u^{q+1} \quad (\text{B.1})$$

para a qual procuraremos uma solução na forma de uma onda viajante introduzindo a mudança de variável da eq.(A.1), qual nos fornece

$$u_{zz} + vu_z + u - u^{q+1} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Murray propõe uma solução do tipo

$$u(z) = \frac{1}{(1 + ae^{bz})^s} \quad \text{com } b, s > 0 \quad \text{e } a \neq 0 \quad (\text{B.3})$$

a qual ajustando os parâmetros pode satisfazer a eq.(B.2). O apêndice A, reforça essa hipótese, visto que a semelhança das equações (A.2 e B.2), sugere uma semelhança entre as soluções (A.25 e B.3).

Levando a eq.(B.3) na eq.(B.2) obtemos após alguns passos algébricos intediantes, porém simples

$$\frac{1}{(1 + ae^{bz})^{s+2}} \left\{ [s(s+1)b^2 - sb(b+c) + 1] a^2 e^{2bz} + [2 - sb(b+c)] ae^{bz} + 1 - [1 + ae^{bz}]^{2-sq} \right\} \quad (\text{B.4})$$

para que a eq.(B.4) possa ser satisfeita qualquer que seja z é necessário que os coeficientes de todos as potências de e^z sejam identicamente nulos. Note ainda que

se $2 - sq > 2$ o último colchete nos obrigará a impor $a = 0$, que esta fora do nos interesse. Portanto

$$2 - sq = 0, 1 \text{ ou } 2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{q}, \frac{1}{q} \quad \text{ou} \quad sq = 0 \quad (\text{B.5})$$

- podemos ver claramente que $sp = 0$ não é possível visto que s e q são constantes positivas. Consideremos então as outras duas possibilidades

- $s = 1/q$

$$\left. \begin{array}{l} e^0 : \text{satisfeito} \\ e^z : 2 - sb(b+c) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad sb(b+c) = 1 \\ e^{2z} : s(s+1)b^2 - sb(b+c) + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow s(s+1)b^2 = 0$$

o que implica em $s = 0$, $s = -1$ ou $b = 0$, como nenhuma das possibilidades é válida só sobra o último caso.

- $s = 2/q$

$$\begin{aligned} e^0 : & \text{satisfeito} \\ e^z : & sb(b+c) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad sb(b+c) = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{sb} - b \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$e^{2z} : s(s+1)b^2 - sb(b+c) + 1 \quad (\text{B.7})$$

Substituindo a eq.(B.7) na eq.(B.6) temos

$$b = \frac{1}{\sqrt{s(s+1)}} \quad (\text{B.8})$$

Se fizermos algumas manipulações simples nas eqs.(B.6 e B.8) podemos escrever s , b e c como função exclusivamente de q .

$$s = \frac{2}{q}, \quad b = \frac{q}{\sqrt{2(q+2)}}, \quad c = \frac{q+4}{\sqrt{2(q+2)}} \quad (\text{B.9})$$

Para $q = 1$, temos

$$s = 2, \quad b = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad c = \frac{5}{\sqrt{6}} \quad (\text{B.10})$$

que reproduz resultado do apêndice A.

Por fim apresentamos um resultado similar para o qual também se conhece a solução analítica [26], trata-se da equação.

$$u_t = u_{xx} + u^{q+1} - u^{2q+1} \quad (\text{B.11})$$

para a qual procurando uma solução do tipo onda viajante e procedendo exatamente da mesma forma que procedemos para a eq.(B.1), teremos

$$\frac{1}{(1 + ae^{bz})^s}, \quad s = \frac{1}{q}, \quad b = \frac{q}{\sqrt{q+1}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{q+1}}. \quad (\text{B.12})$$

Apêndice C

Dois fragmentos idênticos - Sistema Isolado

O problema que apresentamos aqui é um caso particular do problema resolvido no cap.(3) e a motivação de apresentar a discussão do mesmo é o fato deste caso particular possuir uma solução que pode ser expressa com uma forma explícita de L em função dos demais parâmetros do problema, o que não pode ser feito no caso geral, tal como já foi dito no capítulo 3. Esta função pode ser muito útil se quisermos obter rapidamente o comportamento de L como função de uma variável, pois, embora seja um caso particular, isso pode ser feito muito rapidamente, enquanto que no caso geral temos que alterar o programa numérico para gerar novos resultados.

Poderíamos obter esse resultado substituindo $a_0 = \bar{a}$ e $L_1 = L_2$ na eq.(3.9 ou 3.10), porém obter uma função explícita para L a partir desta seria mais exaustivo que resolver o problema novamente. Logo partiremos da eq.(3.6) na qual fazendo as substituições citadas*, temos

$$\begin{pmatrix} \nu - \frac{\mu}{\tan \mu L} & -\nu - \frac{\mu}{\tan \mu L} \\ \nu e^{\nu s} + \frac{\mu e^{\nu s}}{\tan \mu L} & \frac{\mu e^{-\nu s}}{\tan \mu L} - \nu e^{-\nu s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Com o objetivo de obtermos uma solução não trivial para o sistema da eq.(C.1), impomos que o determinante da matriz seja nulo, o que nos gera a equação a equação secular a seguir

$$-\left(\nu - \frac{\mu}{\tan \mu L}\right)^2 e^{-\nu s} + \left(\nu + \frac{\mu}{\tan \mu L}\right)^2 e^{\nu s} = 0. \quad (\text{C.2})$$

*Por simplicidade de notação eliminamos os índices n de todos os termos, uma vez que já sabemos que nosso interesse é somente sobre o menor autovalor λ não negativo, o qual no caso limite será nulo.

Passando o segundo termo para o segundo membro da igualdade, multiplicando a equação por (-1) e extraindo a raiz de ambos os lados, temos

$$\left(\nu - \frac{\mu}{\tan \mu L}\right) e^{-\nu s/2} = e^{\nu s/2} \left(\nu + \frac{\mu}{\tan \mu L}\right) \quad (\text{C.3})$$

Reagrupando os termos de forma conveniente, obtemos

$$\nu(e^{-\nu s/2} - e^{\nu s/2}) = \frac{\mu}{\tan \mu L}(e^{-\nu s/2} + e^{\nu s/2}) \quad (\text{C.4})$$

ou, ainda, numa forma mais compacta:

$$\mu \cot \mu L = -\nu \tanh\left(\frac{\nu s}{2}\right) \quad (\text{C.5})$$

cuja forma explícita de L já nos parâmetros iniciais do problema é dada por

$$L(p, s) = \pi - \cot^{-1}\left(\sqrt{p} \tanh\left(\frac{\sqrt{p} s}{2}\right)\right) \quad (\text{C.6})$$

a parcela π na equação acima apenas nos fornece $0 < L < \pi$, uma pequena correção que se deve da cotangente ser uma função periódica.

Apêndice D

Obtendo uma margem de segurança

Para obtermos uma margem de segurança para as curvas da fig.(8.5b), precisamos estimar que porcentagem dos pontos de transição estão dentro do envelope formado pela curva superior e a inferior da mesma figura.

Para isto vamos proceder de forma similar a um método bastante conhecido na literatura [42] para encontrar qual a porcentagem dos pontos que se encontram sob uma curva normal a uma distância s de seu valor médio. Tal como descrito na fig.(D.1).

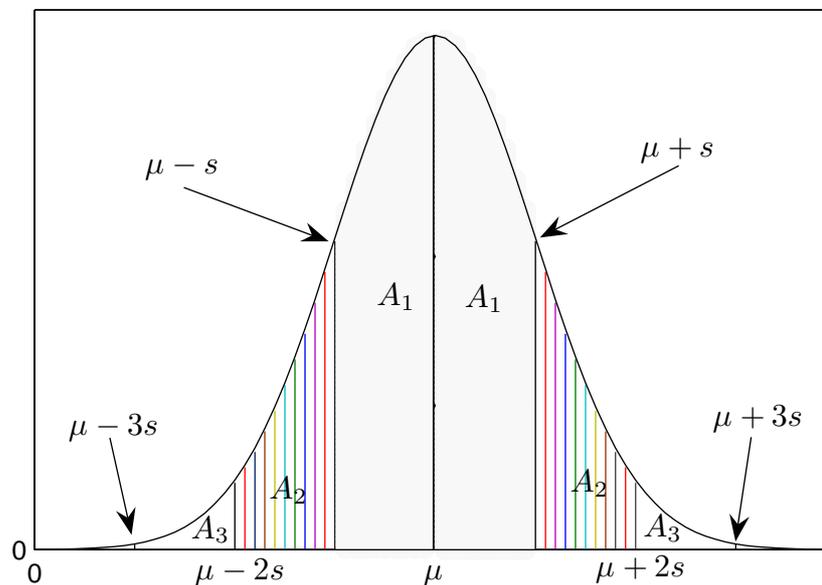


Figura D.1: Esquema de uma distribuição normal e as áreas compreendidas sob ela a um, dois e três desvios padrões da média.

Neste método, para se encontrar qual a porcentagem dos pontos que estão a sob a curva a uma distância s da média μ , divide-se a área que se estende de $\mu - s$ a $\mu + s$ pela área total sob a curva. A este número dá-se o nome de primeiro desvio padrão [42], o qual na gaussiana corresponde a 68%. Logo se dividirmos a área que se estende de $\mu - 2s$ a $\mu + 2s$ e de $\mu - 3s$ a $\mu + 3s$ pela área total sob a curva teremos respectivamente o segundo e o terceiro desvios padrões cujos valores são respectivamente 95% e 99.7%.

Para a distribuição gaussiana estes valores são conhecidos e tabelados; porém, se precisássemos encontrá-los poderíamos utilizar a simetria da distribuição e obtermos o mesmo valor pela razão da área sob a curva de $\mu - s$ a μ pela metade da área total. De maneira resumida

$$\begin{aligned}
& 1 \text{ desvio padrão, } \frac{2A_1}{A_T} = \frac{A_1}{A_T/2} = 68\% \\
& 2 \text{ desvios padrões, } \frac{2(A_1 + A_2)}{A_T} = \frac{A_1 + A_2}{A_T/2} = 95\% \\
& 3 \text{ desvios padrões, } \frac{2(A_1 + A_2 + A_3)}{A_T} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_T/2} = 99.6\%
\end{aligned} \tag{D.1}$$

onde A_T é a área total sob a curva gaussiana, a qual em teoria se estende de $-\infty$ a ∞ . Na prática, para obtermos essa área, integramos a curva ao longo de um espaço correspondente a vários desvios padrões. Assim como a metade da área total ($A_T/2$), é obtida integrando a curva de $\mu - s_\infty$ a μ , com $s_\infty \gg s$.

Em nosso problema utilizaremos o método anteriormente descrito para prever qual a porcentagem dos pontos de transição (cap.9) estão dentro da região de transição e com isso estabelecer uma margem de segurança para nosso modelo. Para tanto, precisamos encontrar qual porcentagem da área sob a curva $\tanh \alpha(\mu - \mu_0)$ está a $1/\alpha$ de μ_0 . Veja no gráfico da fig.(D.2), a seguir, um esquema com as áreas correspondentes ao análogo a um e dois desvios padrões. Não apresentamos nesta figura a área A_3 por uma questão de estética, pois seria difícil representá-la sem introduzir uma nova figura com uma ampliação desta região, o que não julgamos necessário, uma vez que não é difícil imaginar que esta corresponde à área sob a curva $\tanh \alpha(\mu - \mu_0)$ entre $\mu_0 - 3/\alpha$ e μ_0 .

A esta razão entre as áreas, que representam nossa margem de segurança daremos os rótulos MS_1 , MS_2 e MS_3 , análogos ao primeiro, segundo e terceiro desvios padrões, cujos valores calculamos e apresentamos a seguir na eq.(D.2). Para obtermos os valores das áreas A_1 , A_2 e A_3 sob a curva, integramos a mesma nas regiões

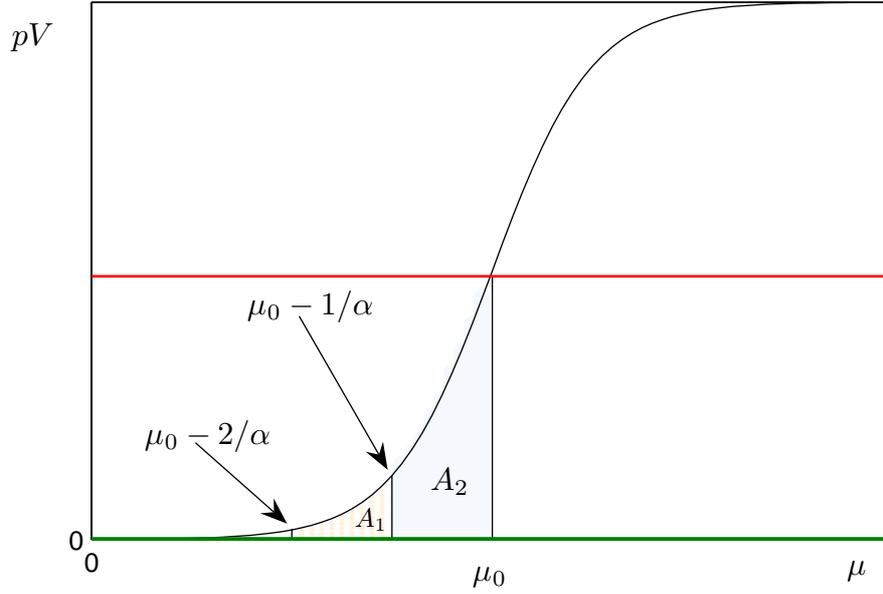


Figura D.2: Curva média e curvas de dispersão.

de $\mu_0 - 1/\alpha$ a μ_0 , $\mu_0 - 2/\alpha$ a $\mu_0 - 1/\alpha$ e $\mu_0 - 3/\alpha$ e $\mu_0 - 2/\alpha$ respectivamente, assim como para obtermos o valor de $A_T/2$ integramos $\tanh \alpha(\mu - \mu_0)$ na região que se estende de $\mu_0 - s_\infty$ a μ_0 , com $s_\infty \gg s$.

$$\text{análogo ao 1 desvio padrão, } MS_1 = \frac{A_1}{A_T/2} = 81.7\%$$

$$\text{análogo a 2 desvios padrões, } MS_2 = \frac{A_1 + A_2}{A_T/2} = 97.4\% \quad (\text{D.2})$$

$$\text{análogo a 3 desvios padrões, } MS_3 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_T/2} = 99.6\%$$

note que a nossa margem de segurança é maior que na gaussiana para o primeiro e o segundo desvio padrão e menor que o terceiro desvio padrão, o que não apresenta nenhuma contradição, apenas evidencia que a tangente hiperbólica cai mas rapidamente a zero que a gaussiana próximo da média e vice versa à medida que nos afastamos deste mesmo valor.

Estes valores são compatíveis com os resultados de nosso modelo e aumentam

a aplicabilidade deste na medida que podemos avaliar qual a chance de que uma previsão seja bem sucedida. Voltando ao capítulo 9, veremos que mesmo com uma margem de segurança de 99.6% ainda temos uma boa eficiência do modelo estocástico, uma vez que o intuito é encontrar o mínimo de área plantada que viabilize a restituição da vida em um reflorestamento.

Referências

- [1] Ablowitz M.J. and Zeppetella A., *Explicit solution of Fisher's equation for a special wave speed* Bull. Math. Biol. **41**, pp. 835-840 (1979).
- [2] Abramsom G., Bishop A.R. and Kenkre V.M., *Effects of transport memory and nonlinear damping in a generalized Fisher's equation* Phys. Rev. E **64**, 066615 (2001).
- [3] Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, London, 1985.
- [4] Boyce, W. E. and Di prima, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro, 1994.
- [5] Cantrell R.S., Cosner C. and Hutson V., *The effects of spatial heterogeneity in population dynamics* J. Math. Biol. **29**, 315-338, 1991.
- [6] Cantrell, R.S., Cosner, C. and Hutson, V., *Spatially Explicit Models for the Population Dynamics of a Species Colonizing an Island*, Math. Biosci. **136**, 65-107, 1996.
- [7] Fisher, R.A., *The wave of advance of advantageous genes* Ann. Eugen. **7**, 355 (1937).
- [8] Gauss C.F., *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum*, Göttingen, 205-226, 1809.
- [9] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. *Table of Integrals Series and Products*, Academic Press, New York, 1965.
- [10] Guidão Gomes, A. e Varriale, M. C. *Modelagem de Ecossistemas: Uma introdução*, Editora UFSM, Santa Maria, 2001.
- [11] Groeneveld, R., *Economic consideration in the optimal size and number of reserve sites*, Ecological Economics **52**, 219-228, 2005.

- [12] Hanski, I. *Metapopulation ecology*, Oxford Univ. Press (1999).
- [13] Honnay, O., Verheyen, K., Butaye, J., et al., *Possible effects of habitat fragmentation and climate change on the range of forest plant species*, Ecology Letters, **5**, 252-530, 2002.
- [14] Jansen V.A, e Vitalis, R. *The evolution of dispersal in a Levin's type metapopulation model*, Evolution **61**, 2386-2397 (2007).
- [15] Jansen, V.A. e Yoshimura, J. *Populations can persist in an environment consisting of sink habitats only*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **95**, 3696-3698, (1998),
- [16] Kraenkel R.A., Senthilvelan, M., *Symmetry analysis of an integrable reaction-diffusion equation*, Chaos & Solitons and Fractals, **12** 463-474, 2001.
- [17] Kenkre, V.M. and Kuperman, M.N., *Applicability of the Fisher equation to bacterial population dynamics*, Phis. Rev. E **67**, 051921, 2003.
- [18] Kinezaki N., Kawasaki K. and Shigesada N., *Spatial dynamics of invasion in sinusoidally varying environments*, Population Ecology **48**, 263-270, 2006.
- [19] Kinezaki N., Kawasaki K., Takasu F. and Shigesada N., *Modeling biological invasion into periodically fragmented environments*, Theor. Popul. Biol. **64**, 291-302, 2003.
- [20] Lahti, T. and Ranta, E., *The SLOSS principle and conservation practice: an example*, Oikos, 44, 369-370, 1985.
- [21] Laplace, P.S., *Théorie Analytique des Probabilités*, Paris, 1812.
- [22] Laurance, W.F., Laurance, S.G., Ferreira, L.V., et al., *Biomass collapse in Amazonian forest fragments*, Science, **278**, 1117, 1997.
- [23] Legendre, P.S., *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris, 1806.
- [24] Ludwig, D., Aronson, D.G., Weinberger, H.F., *Spatial patterning of the spruce budworm*. J. Math. Biol. **8**, 217-258, 1979.

- [25] Ma W.X. and Fuchssteiner B., *Explicit and exact solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation*, Int. J. Non-Linear Mech. **31**, 329-338, 1996.
- [26] Murray, J.D., *Mathematical Biology: I. An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [27] Artiles, W., Carvalho, P.G.S. e Kraenkel, R.A. *Patch-size and isolation effects in the Fisher-Kolmogorov equation*, aceito por J. Math. Biol.
- [28] Pamplona da Silva, D.J., *Sobre as soluções polinomiais da equação de Laplace generalizada*, Relatório técnico, SAE-Unicamp, 2000.
- [29] Pamplona da Silva, D.J., *Sobre um tipo de equação diferencial parcial*, Relatório técnico, PIBIC-CNPq, 2001.
- [30] Pamplona da Silva, D.J., *A equação de D'Alambert projetiva*, Relatório técnico, PIBIC-CNPq, 2002.
- [31] Petrovskii, S., Shigesada, N., *Some exact solutions of a generalized Fisher equation related to the problem of biological invasion*, Mathematical Biosciences, **172**, 73-94, 2001 .
- [32] Peixoto, I.D., Giuggioli, L. and Kenkre V.M., *Arbitrary nonlinearities in convective population dynamics with small diffusion*, Phys. Rev. E **72**, 041902, 2005.
- [33] Robinson, S.K., Thompson, F.R., Donovan, T.M., Whitehead, D.R., Faaborg, J.R., *Regional forest fragmentation and the nesting success of migratory birds*, Science, **267** 1987-1990, 1995.
- [34] Roy, M., Holt, R.D. e Barfield, M *Temporal Autocorrelation Can Enhance the Persistence and Abundance of Metapopulations Comprised of Coupled Sinks* , Amer. Nat. **166**, 246-261 (2005).
- [35] Ruggiero, M.A.G. e Lopes, V.L.R., *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*, Makron Books, São Paulo, 2ª ed. 1996.
- [36] Scott, A., *Nonlinear Science: emergence and dynamics of coherent structures*, Oxford University Press, New York, 1999.

- [37] Shikesada, N. and Kawasaki, K., *Biological Invasions: Theory and Practice*, Oxford University press, New York, 2001.
- [38] Skellam J.G., *Random Dispersal in Theoretical Populations*, *Biometrika*, **38**, 196-218, New york, 1951.
- [39] Stephens, P.A., Sutherland, W.J. and Freckleton, R.P., *What is the Allee effect?*, *Oikos* **87**, 185-190, 1999.
- [40] Tana, Y., Xua, H. and Liao, S.J., *Explicit series solution of travelling waves with a front of Fisher equation*, *Chaos Solitons and Fractals* **31**, 462-472, 2007
- [41] Thomas C.D. and Jones, T.M., *Partial recovery of a Skipper Butterfly (*Hesperia comma*) from Population Refuges: Lessons for Conservation in a Fragmented Landscape*, *The Journal of Animal Ecology* **62**, 472-481, 1993.
- [42] Triola M.F., *Introdução à Estatística*, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2005.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)