

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA

ANÁLISE DA DEFLEXÃO LATERAL DE EDIFÍCIOS
TUBULARES METÁLICOS DE MÉDIA ALTURA

por

Eng^a. Helenice A. de Aguiar

Orientada por

Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia

Maio, 1998

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA

ANÁLISE DA DEFLEXÃO LATERAL DE EDIFÍCIOS
TUBULARES METÁLICOS DE MÉDIA ALTURA

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado em Construção Metálica do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia
Orientador

Prof. Dr. Francisco Carlos Rodrigues
EE/UFMG

Prof. Dr. Orlando Ferreira Gomes
EEC/UFMG

AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas com quem convivi durante o desenvolvimento desta dissertação, pela paciência, confiança, compreensão e principalmente pela amizade.

Ao Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia que, com experiência e capacidade, orientou este trabalho.

À USIMINAS pelo apoio e incentivo à pesquisa.

SUMÁRIO

RESUMO	iii
LISTA DE FIGURAS	iv
1- INTRODUÇÃO	1
1.1- Sistema tubular aporticado	3
1.2- Comportamento do tubo aporticado	6
1.3- Fenômeno <i>shear lag</i>	8
1.4- Objetivos	10
1.5- Revisão Bibliográfica	12
2- MÉTODOS DE ANÁLISE	14
2.1- Método de elementos finitos	14
2.2- Método portal	14
2.3- Método da viga em balanço	15
3- MÉTODO APROXIMADO	16
3.1- Introdução	16
3.2- Hipóteses básicas	18
3.3- Formulação	20
3.4- Método aproximado de solução	31
3.5- Propriedades elásticas da membrana ortotrópica equivalente.	50
3.5.1- Rigidez axial	51
3.5.2- Rigidez ao cortante	51
4- DEFLEXÃO LATERAL.	61
4.1- Introdução	61
4.2- Determinação das deflexões laterais.	61

5- EXEMPLOS E COMPARAÇÕES	64
6- CONCLUSÕES E SUGESTÕES	79
6.1- Conclusões	79
6.2- Sugestões	80
7- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81

RESUMO

No presente trabalho, um método simples foi implementado para o cálculo da deflexão lateral de estruturas tubulares aporticadas através da técnica da membrana ortotrópica equivalente, considerando os efeitos *shear lag* e as distribuições dos deslocamentos axiais nos painéis de alma e de flange independentes. Exemplos numéricos foram fornecidos e os resultados foram comparados com os obtidos através da solução com Elementos Finitos para demonstrar a exatidão do método proposto.

ABSTRACT

In the present work, a simple method for calculation of lateral deflexion in framed tubular structures is implemented. The equivalent orthotropic membrane approach is used considering the shear lag effect. The distribution of axial displacements in the web and flange pannels are supposed independent. Numerical examples are given and the results are compared with the results of Finite Element Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Edifício tubular aporticado: (a) planta esquemática; (b) vista isométrica	6
Figura 2 - Distribuição da tensão axial no tubo quadrado.	7
Figura 3 - Efeitos do <i>shear lag</i> em estruturas tubulares: (a) Estrutura tubular em balanço, sujeita a cargas laterais; (b) distribuição de tensão cisalhante; (c) distorção do elemento de flange causada pelas tensões cisalhantes.	9
Figura 4 - Distribuição da tensão axial	10
Figura 5 - Estrutura tubular aporticada	16
Figura 6 - Distribuição de tensões axiais na estrutura tubular aporticada	18
Figura 7 - Analogia tubular de membrana ortotrópica	19
Figura 8 - Distribuições admitidas para deslocamentos axiais	20
Figura 9 - Distribuição de deslocamentos sem considerar o <i>shear lag</i>	22
Figura 10 - Distribuição cúbica de deslocamentos, Considerando o <i>shear lag</i>	22

Figura 11 - Distribuição uniforme de deslocamentos, sem considerar o <i>shear lag</i>	23
Figura 12 - Distribuição parabólica de deslocamentos, considerando o <i>shear lag</i>	23
Figura 13 - Elemento do painel de alma sob cisalhamento puro	27
Figura 14 - Estrutura tubular em balanço sujeita a carga concentrada no topo.	34
Figura 15 - Estrutura tubular em balanço sujeita a carga uniformemente distribuída.	37
Figura 16 - Estrutura tubular em balanço sujeita a carga triangular distribuída	39
Figura 17 - Valores de α e β para os casos de carga. . . .	48
Figura 18 - Analogia de membrana para unidade básica de pórtico.	50
Figura 19 - Efeito do deslocamento em uma unidade básica de pórtico	52
Figura 20 - Efeito da rotação em uma unidade básica de pórtico	54
Figura 21 - Efeitos do momento fletor e da força cortante.	56
Figura 22 - Relação entre os deslocamentos dos pontos de inflexão na viga e na coluna	58
Figura 23 - Estrutura tubular: (a) estrutura analisada de	

35 andares; (b) perfil adotado	65
Figura 24 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aporticada de 35 andares - Exemplo 1 .	67
Figura 25 - Estrutura tubular analisada de 15 andares. . .	68
Figura 26 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aporticada de 15 andares - Exemplo 2. .	71
Figura 27 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aporticada de 35 andares - Exemplo 3. .	73
Figura 28 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aporticada de 25 andares - Exemplo 4. .	76
Figura 29 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aporticada de 20 andares - Exemplo 5. .	78

1- INTRODUÇÃO

Grandes monumentos estruturais e arquitetônicos da Antiguidade, as pirâmides do Egito, os templos da Grécia, os viadutos de Roma, foram executados em pedra ou em algum tipo de alvenaria. Arquitetos e engenheiros atuais têm materiais de construção que são de qualidade superior. O aço estrutural é um material que vem sendo usado por longo tempo. Seu uso como material de construção econômico e versátil está em crescimento. Nas últimas décadas, os produtores de aço têm produzido para os arquitetos e engenheiros estruturais grande variedade de aço e grande quantidade de perfis estruturais, muitos deles de alta resistência.

Aços resistentes à corrosão, como os da linha SAC-USIMINAS, estão sendo crescentemente usados em muitas aplicações em que a estrutura é exposta. Técnicas aperfeiçoadas de segurança contra incêndios e novos métodos de fabricação e montagem são algumas das razões para a utilização do aço em grande variedade de estruturas, desde áreas de estacionamento até arranha-céus.

Novos sistemas estruturais de aço têm sido propostos para resistência aos esforços laterais. Em muitos casos, a estrutura metálica aparente é parte da estética do projeto.

Embora a aplicação do aço em estruturas possa ser observada desde 1856, quando o processo de fabricação do aço de Bessemer foi primeiramente realizado, sua aplicação em estruturas altas recebeu estímulos a partir da Torre Eiffel, de 320 m, que foi construída em 1889. Depois, no início do século XX, diversos edifícios altos, desde o Edifício Flatiron (87 m), em 1902, até o Edifício Chrysler (319 m), em 1929, foram construídos nas áreas centrais de Chicago e Manhattan. Esta altura recorde foi quebrada pela construção do Empire State Building (381 m) em 1931, as torres gêmeas do World Trade Center (412 m), em 1972,

seguida quase imediatamente pelo Sears Tower (442 m) em Chicago, em 1974.

Entre as propriedades do aço como material estrutural, que o tornam especialmente indicado na construção de edifícios, citam-se:

(a) *Alta resistência.* A sua alta resistência por unidade de peso significa que o peso final da estrutura será pequeno em relação às suas dimensões. Este fato é de grande importância para pontes com grandes vãos, edifícios altos e estruturas com fundações desfavoráveis.

(b) *Uniformidade.* As suas propriedades não mudam apreciavelmente com o tempo, como acontece com uma estrutura de concreto armado.

(c) *Elasticidade.* O aço comporta-se de acordo com as hipóteses de projeto melhor que a maioria dos outros materiais, porque ele segue as leis de Hooke até tensões bem altas. Os momentos de inércia de uma estrutura de aço podem ser calculados exatamente enquanto os valores obtidos para uma estrutura de concreto armado são indefinidos.

(d) *Durabilidade.* Com adequada manutenção, as estruturas de aço conservam-se em bom estado indefinidamente. Alguns tipos de aço, como o USI-SAC 51 (aço patinável), não precisam de pintura em condições normais ou até relativamente severas de utilização.

(e) *Ductilidade.* Propriedade de um material pela qual ele pode resistir a grande deformação sem rompimento sob altas tensões de tração. Quando uma barra de aço com baixo teor de carbono é testada à tração, redução considerável da seção transversal e grande alongamento ocorrem no ponto de rompimento antes que ocorra a fratura. Um material que não tem esta propriedade é

provavelmente duro e frágil, podendo quebrar-se quando sujeito a um impacto súbito.

Em elementos estruturais sob cargas normais, concentrações de tensões desenvolvem-se em vários pontos. A natureza dúctil dos aços estruturais usuais permite-lhes escoar localmente nestes pontos, prevenindo, assim, falhas prematuras. Uma outra vantagem das estruturas dúcteis é que, quando elas são submetidas a um carregamento excessivo, como em incêndio, suas grandes deflexões servem para indicar uma falha iminente.

(f) *Tenacidade*. Propriedade que faz com que o material absorva grande quantidade de energia. Os aços estruturais são também tenazes, isto é, eles possuem ao mesmo tempo resistência e tenacidade. Um elemento estrutural metálico carregado até atingir grandes deformações deve ser ainda capaz de resistir a grandes cargas. Esta é uma propriedade muito importante, pois significa que elementos de aço podem ser submetidos a grandes deformações durante as etapas de fabricação e montagem sem fratura, ou seja, podem ser fletidos, cortados, puncionados, etc., sem danos visíveis.

O uso do aço como material estrutural confere à edificação propriedades importantes, entre as quais facilidade e rapidez de montagem, possibilidade de industrialização, facilidade de ampliação e possibilidade de reutilização do material após a desmontagem. Nesse último caso, o aço tem a grande vantagem de não gerar entulho, porque pode ser reutilizado como sucata.

1.1- Sistema Tubular Aporticado

Em termos simples, o sistema tubular aporticado é definido como um sistema estrutural que induz o edifício a se comportar como um tubo equivalente. O sistema tubular pode ser construído de

concreto armado, aço estrutural ou uma combinação dos dois, chamada construção mista, em vários graus. O sistema tubular difundiu-se como o sistema mais adequado de construção de edifícios altos, porque ele minimiza o peso do material estrutural para resistir aos esforços laterais e obter um nível necessário de rigidez e, simultaneamente, aceita mudanças na forma arquitetônica.

Atualmente, quatro dos cinco edifícios mais altos do mundo são tubulares: o Sears Tower, de 110 andares, o John Hancock Building, de 100 andares, o Standard Oil Building, de 83 andares, todos em Chicago, e as torres do World Trade Center, com 110 andares em Nova York. A primeira aplicação do conceito tubular é confiada ao Dr. Fazlur Khan, da empresa Skidmore, Owings & Merrill, que utilizou o sistema em um edifício de apartamentos de 43 andares em Chicago.

Os sistemas tubulares são tão eficientes que, em muitos casos, a quantidade de material estrutural usado é comparável com aquela usada em edifícios aporricados convencionais, com metade da altura. Seu desenvolvimento é o resultado da contínua pesquisa da Engenharia Estrutural em busca do sistema estrutural mais econômico, mais seguro e funcional para o projeto de edifícios altos. Até o aparecimento do tubo aporricado, que se tornou o sistema mais difundido em edifícios altos, muitos edifícios foram projetados como pórticos. As cargas laterais eram resistidas alternativamente pelas várias ligações viga-coluna, por painéis-parede verticais, treliças de grande altura, núcleos centrais contraventados e vários tipos de contraventamentos.

Evolutivamente, mais economia na estrutura foi conseguida ligando os pórticos exteriores entre si e com o núcleo central do tipo treliçado por meio de dois sistemas distintos. O sistema *belt truss*¹, como o próprio nome diz, consiste em

¹ Escrito na língua original.

envolver o perímetro do edifício com uma treliça de grande altura e o sistema de *outriggers* situados em vários níveis, o que força a participação das colunas externas na resistência às cargas laterais. O comportamento tubular parcial resultante estendeu o campo de aplicação dos sistemas pórtico e núcleo treliçado, e o sistema tubular passou a existir apenas quando a estrutura do perímetro foi modificada para se comportar como uma viga em balanço tridimensional. Esse conceito levou à otimização das dimensões planas máximas, aumentando muito a eficiência dos sistemas estruturais.

A introdução do sistema tubular para resistência das cargas laterais representa um marco importante no projeto de edifícios altos. Atualmente, quase todos os edifícios altos, acima de 35 andares, empregam o conceito tubular. Em síntese, o sistema consiste em criar uma estrutura que se assemelhe ao máximo à parede rígida na parte externa do edifício. A carga lateral total é resistida pelo perímetro do pórtico, por isso o plano do piso interior é mantido livre do núcleo e das grandes colunas, aumentando, assim, a área útil do edifício. Em contrapartida, as visões do interior para o exterior do edifício ficam um pouco limitadas pela presença das colunas externas.

A condição necessária para se criar uma estrutura que se aproxime de uma parede rígida contínua é posicionar as colunas externas relativamente próximas umas das outras e usar vigas de grande altura para ligá-las entre si. A otimização desse sistema consiste em examinar diferentes espaçamentos de colunas e proporções dos membros. Na prática, o comportamento tubular é obtido colocando as colunas espaçadas entre 1,50 e 3m até o máximo de 4,50m, com a altura da viga variando de 0,90 a 1,50m [2].

O método de obtenção do comportamento tubular usando colunas próximas conectadas por vigas de grande altura é o mais usado,

porque janelas retangulares podem ser dispostas na fachada. Uma abordagem diferente, que permite espaçamentos maiores de colunas, é chamada tubo contraventado, com o emprego de contraventamentos diagonais ou do tipo K.

1.2- Comportamento do tubo aporticado

Para entender o comportamento do tubo aporticado, considera-se um edifício com área de forma quadrada, como mostrado na Figura 1, consistindo de colunas externas pouco espaçadas entre si. Admitindo que as colunas internas são projetadas apenas para resistir ao carregamento vertical, sua contribuição para a resistência à carga lateral é desprezível. O sistema de piso, como em outros tipos de sistemas de contraventamento lateral, é considerado como um diafragma rígido para esforços horizontais, com a função de distribuir a carga de vento para vários elementos de acordo com sua rigidez; sua contribuição para a resistência lateral em função de sua ação fora do plano é considerada desprezível. O sistema resistente à carga lateral, conseqüentemente, inclui apenas as colunas do perímetro e as ligações viga-coluna.

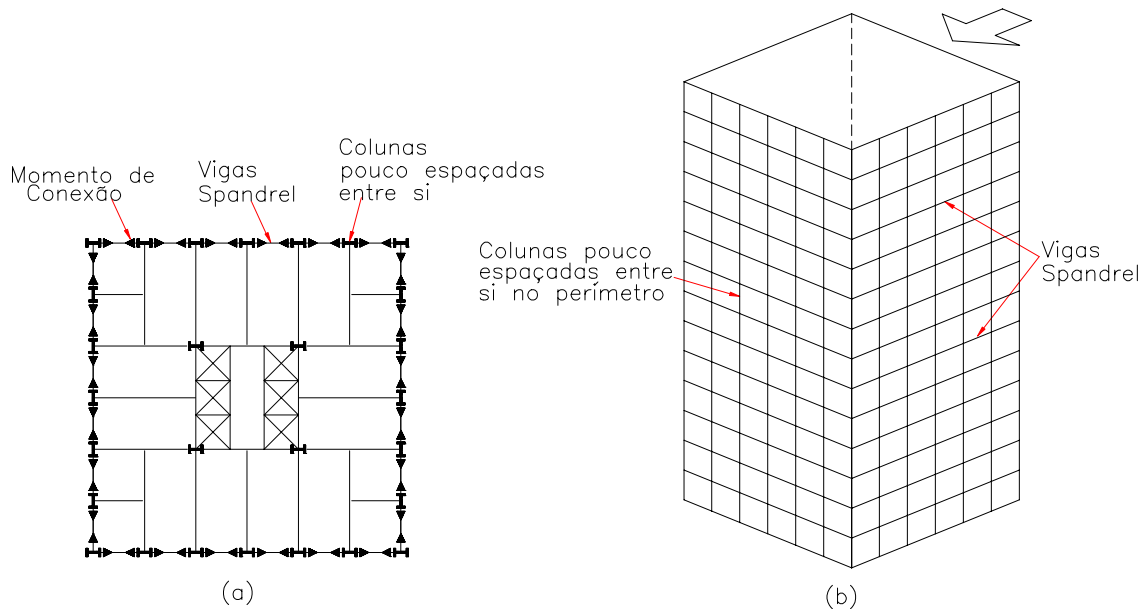


Figura 1 - Edifício tubular aporticado: (a) planta esquemática;
(b) vista isométrica.

Em um tubo bem dimensionado, a resistência principal à carga lateral é fornecida pela flexão global do tubo, que introduz forças de tração e compressão nas faces a barlavento e a sotavento do tubo. As colunas e vigas *spandrel*, distintas no perímetro, podem ser consideradas como um elemento contínuo de parede. O modelo matemático é, portanto, equivalente a um tubo retangular, o qual, quando sujeito às forças laterais, comporta-se como uma viga em balanço. A distribuição de tensão, típica do comportamento à flexão, é mostrada na Figura 2.

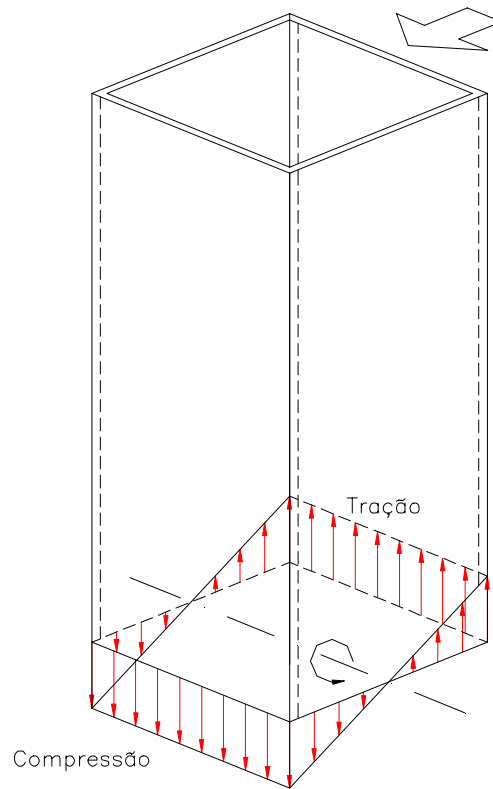


Figura 2 - Distribuição de tensão axial no tubo quadrado.

O conhecimento do comportamento tubular tem permitido liberdade considerável no projeto arquitetônico dos edifícios sem redução da eficiência estrutural. A planta baixa típica do sistema convencional de pórticos espaciais, criada de maneira que os pórticos sejam transversais para obter o centro de torção

coincidente com o centro geométrico, não é mais necessária. O único requisito essencial para o comportamento tubular é que a estrutura no exterior do edifício seja contínua e fechada. A eficiência desse sistema é diretamente relacionada com a geometria do edifício, medida através das relações altura/largura e profundidade/largura [15].

Embora o comportamento do tubo possa ser simplificado comparado com o de uma viga em balanço, na realidade sua resposta às cargas laterais é proporcionada pela combinação de dois tipos de deformação: uma sob tensões normais axiais, em que as colunas trabalham como fibras que se alongam a barlavento e se encurtam a sotavento, e outra sob tensões tangenciais, com a deformação ao cortante de vigas e colunas. Os sistemas tubulares mais eficientes são projetados com contraventamentos, de modo que se eliminem ou minimizem as deformações ao cortante para que a estrutura, como um todo, se comporte essencialmente como uma viga em balanço. Neste contexto, uma estrutura tubular aporticada pode ser visualizada como uma grande viga-caixão metálica, em que os pórticos situados transversalmente à direção do vento funcionam como flanges à compressão e tração, enquanto os paralelos à direção do vento funcionam como almas.

1.3- Fenômeno *Shear Lag*

Um edifício de estrutura tubular tem um comportamento sob a ação de cargas laterais que se aproxima de uma viga de seção fechada como mostra a Figura 3(a). Em comparação com as dimensões da planta de um edifício, a espessura da parede externa dessa viga é, em geral, relativamente pequena, levando-a a um comportamento típico de viga de parede fina. Neste tipo de viga, as tensões e deformações cisalhantes são muito maiores que aquelas de uma viga de seção cheia, o que resulta em grandes deformações ao cortante, Figura 3(b), havendo então uma

perturbação significativa do diagrama típico de tensões à flexão. Por causa das grandes deformações ao cortante, a hipótese de Bernoulli não é aplicável. Na estrutura tubular oca, o elemento E na face de barlavento, Figura 3(a), se distorce como mostrado na Figura 3(c). O resultado final, devido ao efeito acumulado de distorção de todos esses elementos, é que sob carga lateral a superfície originalmente plana da seção transversal se distorce, como mostrado na Figura 4.

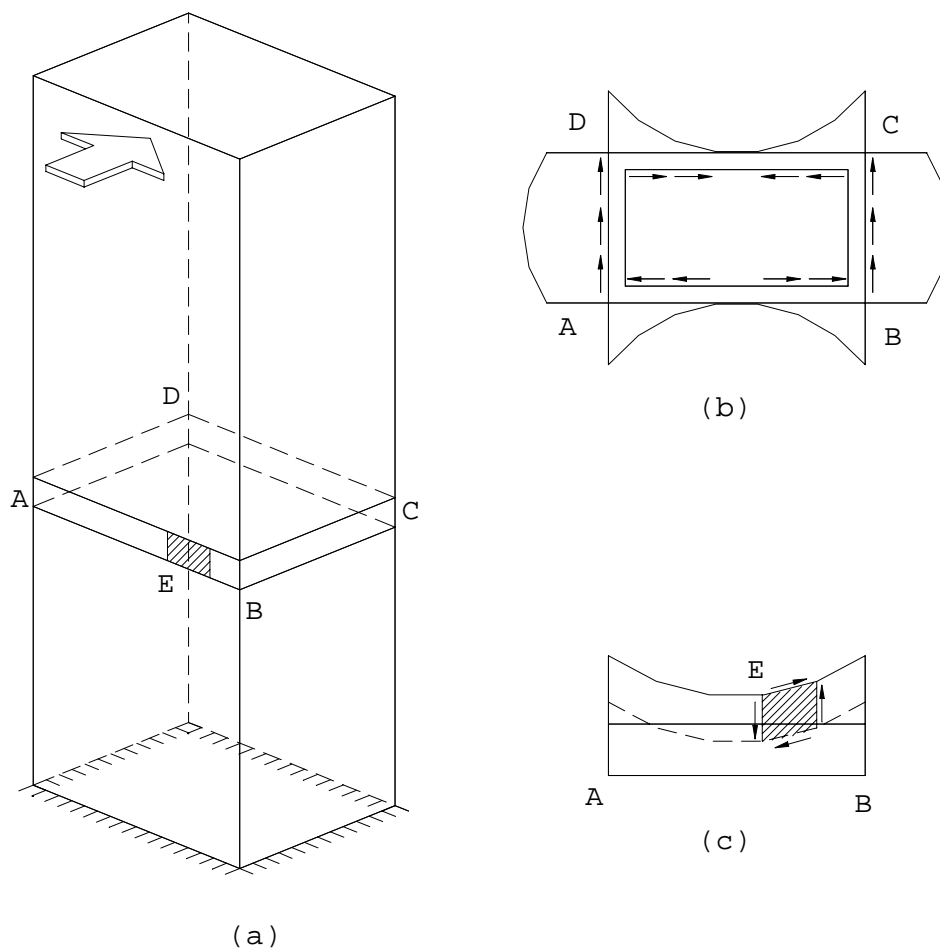


Figura 3 - Efeitos do *shear lag* em estruturas tubulares: (a) Estrutura tubular em balanço, sujeita a cargas laterais; (b) distribuição de tensão cisalhante; (c) distorção de elemento de flange causada pelas tensões cisalhantes.

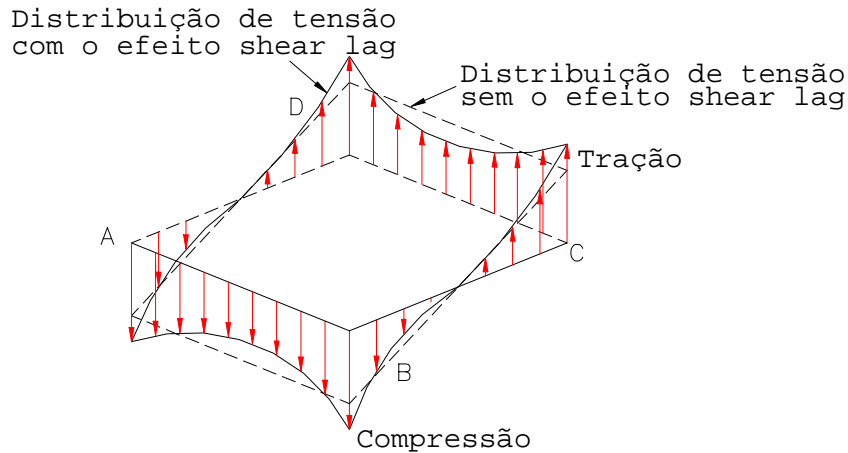


Figura 4 - Distribuição da tensão axial.

Por causa dessas distorções, a distribuição da tensão simples dada pela teoria de flexão não é mais aplicável. As tensões de flexão não são proporcionais à distância da fibra até o eixo neutro da seção. A tensão no centro dos flanges "atrasa" em relação às tensões próximas da alma por causa da necessidade de rigidez ao cortante do painel-parede [15]. Este fenômeno é conhecido como *shear lag* e exerce um papel muito importante no projeto de estruturas altas tubulares. As tensões de flexão nas almas são também afetadas de maneira similar.

1.4- Objetivos

Tradicionalmente a estrutura tubular tem sido empregada em todo o mundo para edifícios altos, acima de 35 andares. Os engenheiros de estruturas têm o hábito de pensar nesta solução, quando se espera que a obtenção da estabilidade dos esforços horizontais seja difícil de outro modo. Além da grande estabilidade a esforços laterais, os edifícios tubulares possuem outras vantagens que, potencialmente, podem justificar o seu emprego em faixas médias de alturas, por exemplo entre 15 e 35 andares. Citam-se duas como principais:

(a) a estabilidade em situação de incêndio, uma vez que os elementos responsáveis pela estabilidade lateral situam-se perifericamente no edifício e podem ser considerados exteriores em função do projeto arquitetônico;

(b) a grande economia, conseguida por meio de maiores áreas livres internas, já que as colunas interiores são dimensionadas apenas para as cargas verticais.

Edifícios de altura média e de grande altura não são comuns no Brasil. Com o desenvolvimento do uso do aço, espera-se que os de média altura progressivamente sejam construídos nos grandes centros onde os terrenos são muito valorizados. Porém, sendo esta uma faixa em que o emprego da estrutura metálica é indicado, o desenvolvimento de tecnologia nacional para projeto, montagem e construção para esse fim é uma necessidade.

No momento, a Método Engenharia S.A. de São Paulo, estuda a possibilidade de uso de estrutura tubular de aço em um edifício residencial de 22 andares com o objetivo de viabilizar o custo de proteção passiva contra incêndio. A estrutura tubular permitirá que vigas e colunas internas tenham suas dimensões reduzidas [as cargas laterais serão resistidas pelo tubo] e possam ser envolvidas por lajes e alvenarias, reduzindo o perímetro exposto ao fogo.

Para investigar a possibilidade do emprego de estruturas metálicas tubulares em edifícios de faixa média de altura (15 a 35 andares), instalou-se no curso de Mestrado em Construção Metálica uma linha de pesquisa que deverá gerar comparações de custos e métodos de projeto aplicáveis a esse tipo de edifício. No caso particular da presente dissertação, os objetivos pretendidos são:

(a) discutir os fundamentos matemáticos e físicos do processo analítico, denominado *analogia da membrana ortotrópica equivalente*;

(b) verificar a aplicabilidade desse método em edifícios de média altura por meio de comparações das deflexões laterais calculadas por ele e pelo método de elementos finitos;

(c) sugerir o desenvolvimento futuro da linha de pesquisa [vide Capítulo 6].

1.5- Revisão Bibliográfica

Vários métodos simplificados de análise têm sido desenvolvidos para estudar os tubos apertados, que são essencialmente estruturas de pórtico espacial. Coull e Subedi [1] e Khan e Amin [2], considerando que as deformações fora do plano dos painéis de pórtico são insignificantes e as interações entre os painéis de alma e de flange consistem principalmente de forças cortantes verticais, propõem um método simples, que consiste em analisar o sistema tridimensional como um pórtico plano equivalente, desprezando as ações fora do plano e usando elementos de pórtico fictícios em cada nível de piso, cujo único propósito é transferir as forças cortantes verticais entre os dois níveis do pórtico. Consegue-se, assim, reduzir a quantidade de dados e cálculos necessários.

Khan e Amin [2] relatam que, para propósitos preliminares de projeto, o efeito *shear lag* pode ser considerado, tratando a estrutura tubular como um par de canais equivalentes com uma largura efetiva de flange menor que a metade da largura do painel de alma. Chan *et al.* [3] propõem avaliar o efeito *shear lag* em vigas-caixão em balanço com paredes sólidas como painéis de alma e pórticos de viga-coluna, rigidamente ligados como painéis de flange, admitindo a distribuição de deslocamentos axiais pela largura dos painéis de forma parabólica ou cosseno-

hiperbólica. Coull e Bose [4] e Coull e Ahmed [5] desenvolveram uma analogia de membrana ortotrópica, transformando os painéis da estrutura em membranas ortotrópicas equivalentes, cada uma com propriedades elásticas escolhidas de modo a representar o comportamento axial e cisalhante da estrutura real. Eles admitem que a distribuição das tensões à flexão é da forma de uma parábola cúbica nos painéis de alma e de parábola quadrática nos painéis de flange, respectivamente, usando uma formulação de energia para obter as equações diferenciais governantes. Khan e Smith [6] desenvolveram também uma analogia de membrana ortotrópica para análise simplificada dos painéis da estrutura, usando o método de elementos finitos para determinar as propriedades elásticas equivalentes das membranas. Ha *et al.* [7] desenvolveram a analogia de membrana ortotrópica para incluir as deformações ao cortante dos membros de pórtico e as deformações das junções viga-coluna na obtenção das propriedades elásticas equivalentes. Sua analogia é mais refinada que as outras e apresenta, portanto, maior precisão. Mancini [8] e Fakury [9] usaram a Técnica do Meio Contínuo para a obtenção dos esforços nas barras das estruturas tubulares, submetidas a carregamento lateral centrado, e dos deslocamentos nodais. Esta técnica consiste fundamentalmente na substituição das vigas e lajes que conectam os pilares aos andares, por respectivos meios contínuos de rigidezes equivalentes, uniformemente distribuídos ao longo da altura do edifício.

Kwan [10] utilizou a metodologia de modelagem dos painéis da estrutura como membranas ortotrópicas equivalentes para que os tubos aporticados pudessem ser analisados como estruturas contínuas. Esse método de análise difere dos métodos anteriores por apresentar distribuições independentes de deslocamentos axiais para painéis de alma e de flange. Desse modo, o *shear lag* em cada painel é individualmente permitido; e isto é mais razoável porque o *shear lag* em um painel está mais bem relacionado com as propriedades deste do que com aquelas de outros painéis.

2- MÉTODOS DE ANÁLISE

2.1 - Método de Elementos Finitos

Entre os métodos analíticos aplicáveis às estruturas espaciais de edifícios, o Método de Elementos Finitos é o que fornece maiores possibilidades de aproximação com o modelo físico, porque permite a discretização de elementos construtivos contínuos e em barra. A literatura técnica, Bathe [11], Hinton e Owen [12], Zienkiewics [13], sobre esse método é particularmente extensa e foge ao escopo desse trabalho a sua exposição, ainda que de forma sintética.

Os edifícios tubulares são modelados pelo Método de Elementos Finitos como pórticos espaciais com 6 graus de liberdade por nó o que resulta em problemas de engenharia estrutural com grande número de equações. Os carregamentos horizontal e vertical podem ser quaisquer. Os resultados em tensões e em deslocamentos são precisos.

Nessa dissertação, os resultados de análise pelo Método de Elementos Finitos (Programa SAP90) foram utilizados como termo de comparação para os resultados obtidos como o método da analogia da membrana ortotrópica.

2.2 - Método Portal

O Método do Portal é um método aproximado pouco indicado para aplicações em edifícios de média e grande altura. Neste método têm-se as seguintes suposições:

a) o ponto de inflexão está localizado no meio das vigas e colunas; e

b) a força cortante nas colunas é distribuída de modo racional.

Com relação ao item b, alguns engenheiros consideram a força cortante nas colunas externas igual à metade da força cortante em uma coluna interna, enquanto outros consideram-na distribuída proporcionalmente na largura da área de influência. Para vãos diferentes, a suposição anterior resulta em tensões diretas nas colunas internas iguais à diferença das forças cortantes nas vigas em cada lado da coluna. A última suposição mantém as colunas internas livres de tensões diretas.

2.3 - Método da Viga em Balanço

Trata-se de um método aproximado com aplicação em edifícios de pequena ou de média altura. Neste método, a análise do pórtico sujeito à carga horizontal é feita considerando que:

a) o ponto de inflexão está no meio do vão de cada viga e no meio da altura de cada coluna;

b) as tensões nas colunas variam com a distância de seu centróide até o eixo de flexão do pórtico;

c) todas as colunas no mesmo pavimento têm área igual.

Usando estas suposições, o pórtico espacial original fica estaticamente determinado, e as forças verticais, cortantes e momentos são determinados por considerações de equilíbrio.

3- MÉTODO APROXIMADO

3.1- Introdução

A estrutura tubular aporticada, mostrada na Figura 5, pode ser entendida como composta de dois painéis de alma paralelos à direção da carga lateral, dois painéis de flange normais à direção da carga lateral e quatro colunas de canto. Estes componentes estruturais são interconectados ao longo das junções dos painéis e conectados com as lajes em cada nível de piso. A alta rigidez no plano das lajes restringirá qualquer tendência dos painéis de se deformarem fora dele. Portanto, pode-se admitir que as ações fora do plano são insignificantes, comparadas com as ações primárias nele. Por essa razão, apenas as ações no plano devem ser consideradas em cada painel.

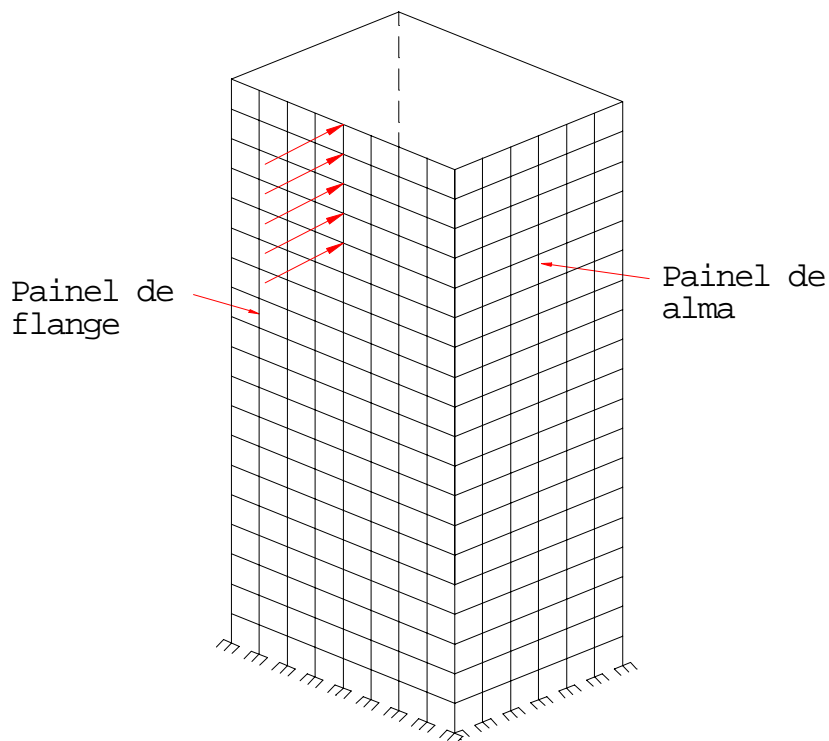


Figura 5 - Estrutura tubular aporticada.

Inicialmente, admite-se que as dimensões e os espaçamentos dos membros de pórtico são uniformes, como é usual na prática. Cada painel da estrutura pode ser substituído por uma membrana ortotrópica uniforme e equivalente, e suas propriedades elásticas são escolhidas de modo a representarem o comportamento axial e ao cortante da estrutura real. A formulação usada neste trabalho para determinação das propriedades da membrana equivalente é apresentada no item 3.5, onde algumas correções são feitas no texto original de Kwan [10].

O sistema tubular aporticado, como visto no início deste trabalho, comporta-se, sob a ação de carga lateral, como uma viga-caixão em balanço. O momento de tombamento da carga lateral é resistido pelas tensões axiais nas colunas dos quatro painéis de pórtico, enquanto o esforço cortante, também proveniente da carga lateral, é principalmente resistido pela flexão no plano das vigas e colunas dos dois pórticos da estrutura, paralelos à direção da carga lateral. Se os membros de pórtico são muito rígidos, então as tensões axiais nas colunas, devido ao momento de tombamento, podem ser determinadas pela hipótese normal de Navier-Bernoulli, como mostrado na Figura 6. Entretanto, por causa da necessidade das disposições de janelas, há limites práticos para as dimensões e, conseqüentemente, rigidezes dos membros de pórtico. Como um resultado das deformabilidades à flexão e ao cortante dos membros de pórtico, a ação básica da viga à flexão do tubo aporticado é complicada pelo fenômeno *shear lag*, que tem os efeitos de aumentar as tensões axiais nas colunas de canto e de reduzir as tensões nas colunas internas, como ilustrado na Figura 6, reduzindo, assim, a rigidez lateral da estrutura. O fenômeno *shear lag* produz também torção nas lajes de piso e deformações nas estruturas secundárias.

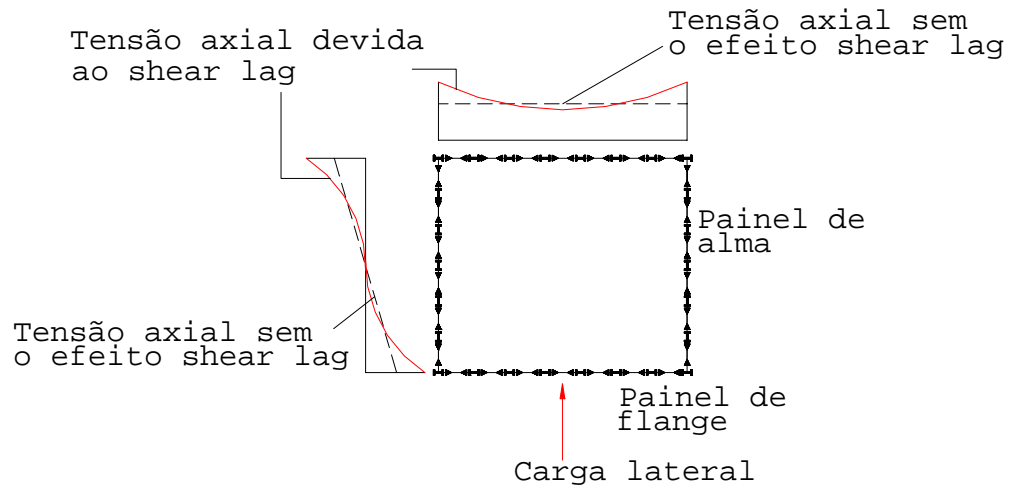


Figura 6 - Distribuição de tensões axiais na estrutura tubular aporticada.

3.2- Hipóteses Básicas

O fenômeno *shear lag* ocorre nos painéis de alma e de flange. Conseqüentemente, as distribuições das tensões normais não são lineares nos painéis de alma ou uniformes nos painéis de flange, como mostra a Figura 6. O método de análise aqui proposto tem a característica de considerar independentes as distribuições de deslocamentos em painéis de alma e de flange, ao contrário de outros métodos. As tensões devidas ao *shear lag* em um painel são individualmente calculadas, o que é mais razoável porque a intensidade desse fenômeno é obviamente mais dependente das propriedades desse painel do que das propriedades dos painéis vizinhos. Será visto que isso pode, de fato, conduzir também a uma formulação mais simples.

Nesta formulação empregam-se distribuições independentes para deslocamentos normais nos painéis de alma e de flange. Essas distribuições são admitidas de forma cúbica nos painéis de alma e de forma parabólica nos painéis de flange. Emprega-se também o princípio da energia potencial total mínima.

Considere a estrutura tubular equivalente da Figura 7, em que E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young, G é o módulo de elasticidade transversal e t é a espessura do painel.

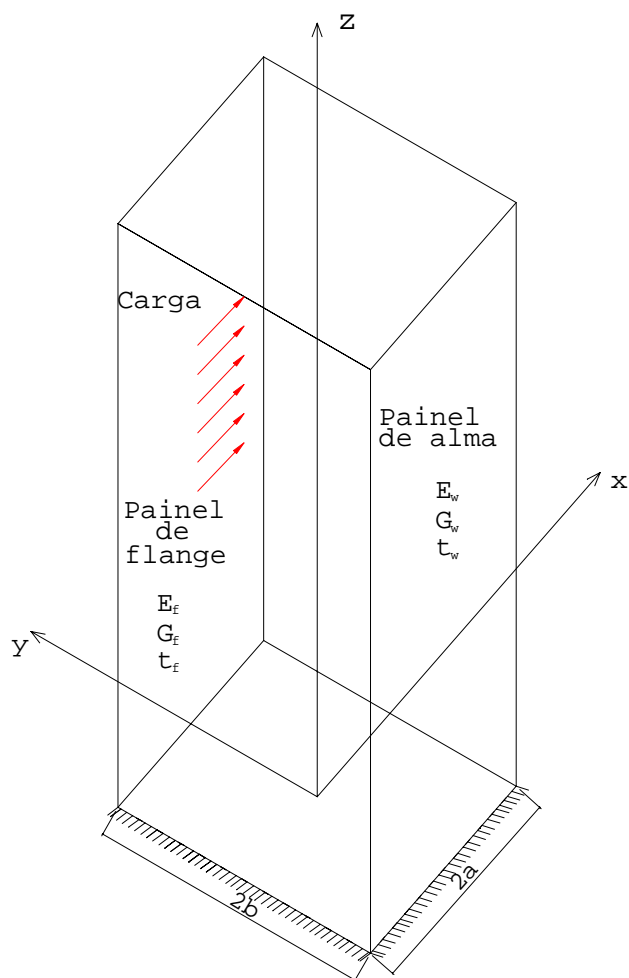


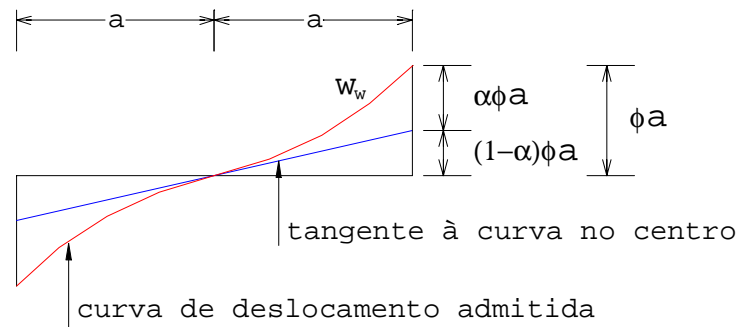
Figura 7 - Analogia tubular de membrana ortotrópica.

As propriedades correspondentes aos painéis de alma terão um subscrito w e as propriedades correspondentes aos painéis de flange terão um subscrito f . A metade da largura e a do comprimento da estrutura estão aqui representadas por a e b , respectivamente.

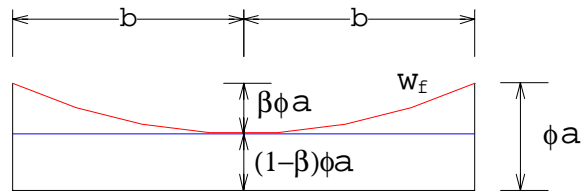
Devido ao efeito *shear lag*, as seções planas não permanecerão planas depois de a estrutura ser carregada.

3.3- Formulação

Os deslocamentos axiais nos painéis de alma e de flange estão representados, na Figura 8, por w_w e w_f , respectivamente; ϕ é a rotação da seção plana que liga as quatro extremidades da estrutura tubular, as quais inicialmente ficam no mesmo plano horizontal; α e β são os coeficientes adimensionais de *shear lag*, que representam os graus desse efeito nos painéis de alma e de flange, respectivamente.



(a) Pannel de alma



(b) Pannel de flange

Figura 8 - Distribuições admitidas para deslocamentos axiais.

A distribuição de deslocamentos no painel de alma é linear, quando se considera apenas o efeito de flexão simples do painel com a validade da hipótese de Navier-Bernoulli (Figura 9) e cúbica, considerando o efeito de *shear lag* (Figura 10). Para a distribuição linear de deslocamentos, têm-se as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow w_{w1} = 0 \\ x = a \rightarrow w_{w1} = (1 - \alpha)\phi a \\ w_{w1} = (1 - \alpha)\phi a \frac{x}{a} \end{cases} \quad (1)$$

e para a distribuição cúbica tem-se as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow w_{w2} = 0 \\ x = a \rightarrow w_{w2} = \alpha\phi a \\ w_{w2} = \alpha\phi a \left(\frac{x}{a}\right)^3 \end{cases} \quad (2)$$

O deslocamento axial resultante no painel de alma é obtido pela superposição das parcelas linear e cúbica, ou seja,

$$w_w = w_{w1} + w_{w2} = (1 - \alpha)\phi a \frac{x}{a} + \alpha\phi a \left(\frac{x}{a}\right)^3 \quad (3)$$

o que resulta em

$$w_w = \phi a \left[(1 - \alpha) \frac{x}{a} + \alpha \left(\frac{x}{a}\right)^3 \right] \quad (4)$$

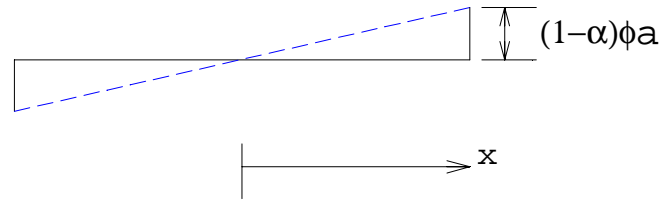


Figura 9 - Distribuição de deslocamentos sem considerar o *shear lag*.

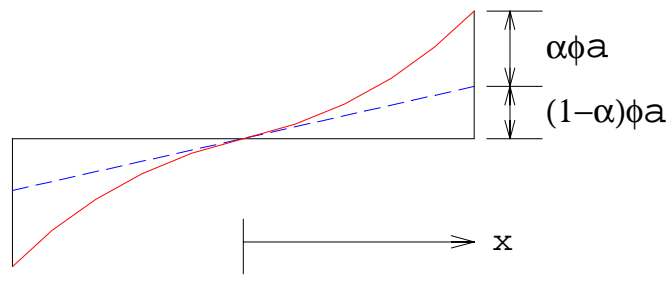


Figura 10 - Distribuição cúbica de deslocamentos, considerando o *shear lag*.

A distribuição dos deslocamentos no painel de flange é uniforme, quando se considera a flexão simples com validade da hipótese de Navier-Bernoulli (Figura 11) e parabólica, considerando o efeito de *shear lag* (Figura 12). No primeiro caso, a condição de contorno é

$$w_{f1} = (1 - \beta)\phi a \quad (5)$$

e, no segundo caso, as condições de contorno são

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow w_{f2} = 0 \\ y = b \rightarrow w_{f2} = \beta\phi a \\ w_{f2} = \beta\phi a \left(\frac{y}{b}\right)^2 \end{cases} \quad (6)$$

O deslocamento resultante no painel de flange, devido à superposição das duas parcelas, é

$$w_f = w_{f1} + w_{f2} = (1 - \beta)\phi a + \beta\phi a \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad (7)$$

o que resulta em

$$w_f = \phi a \left[(1 - \beta) + \beta \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right] \quad (8)$$

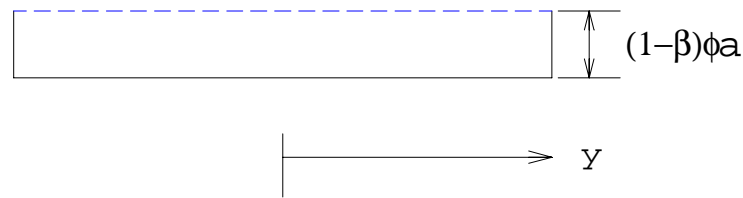


Figura 11 - Distribuição uniforme de deslocamentos, sem considerar o *shear lag*.

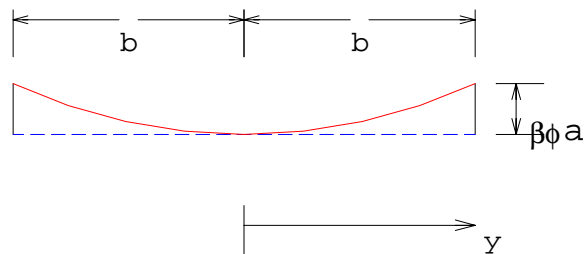


Figura 12 - Distribuição parabólica de deslocamentos, considerando o *shear lag*.

As deformações axiais nos painéis de alma e de flange são dadas pelas derivadas dos deslocamentos correspondentes em relação à coordenada do eixo vertical, respectivamente:

$$\varepsilon_{wz} = \frac{\partial w_w}{\partial z} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{fz} = \frac{\partial w_f}{\partial z} \quad (10)$$

As deformações angulares, devidas ao cortante, são, no painel de alma,

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w_w}{\partial x} \quad (11)$$

e no painel de flange

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w_f}{\partial y} \quad (12)$$

sendo u e v as deflexões laterais nas direções dos eixos Ox e Oy , respectivamente. Mas,

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

então

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w_f}{\partial y} \quad (14)$$

A energia potencial total na estrutura é a soma da energia potencial devida às cargas externas aplicadas com a energia potencial de deformação devida às tensões internas. A minimização do potencial de energia da estrutura resulta em

quatro equações diferenciais parciais que formam um sistema com as incógnitas u , ϕ , α e β .

A energia potencial de deformação devida às tensões normais no painel de alma é

$$\Pi_{e1} = 2 \int_V U_0 dV \quad (15)$$

sendo U_0 a energia de deformação por unidade de volume que é dada por

$$\Pi_{e1} = 2 \int_V \left[\int_0^\varepsilon \sigma_z d\varepsilon_{wz} \right] dV \quad (16)$$

A lei constitutiva é

$$\sigma_z = E_w \varepsilon_{wz} \quad (17)$$

Levando a Eq. (17) na Eq. (16) e considerando as Eqs. (9) e (10), obtem-se

$$\Pi_{e1} = 2 \int_V \int_0^\varepsilon E_w \varepsilon_{wz} d\varepsilon_{wz} dV = 2 \int_V \frac{E_w \varepsilon_{wz}^2}{2} dV = \int_V E_w \varepsilon_{wz}^2 dV \quad (18)$$

Considerando que

$$dV = t_w dx dz \quad (19)$$

e substituindo a Eq.(19) na Eq.(18), tem-se a energia de deformação referente à força normal nos painéis de alma:

$$\Pi_{e1} = \int_0^H \int_{-a}^a t_w E_w \varepsilon_{wz}^2 dx dz \quad (20)$$

Nos painéis de flange, uma expressão análoga à Eq. (18) é obtida, isto é,

$$\Pi_{e2} = \int_V 2 \frac{E_f \varepsilon_{fz}^2}{2} dV = \int_V E_f \varepsilon_{fz}^2 dV \quad (21)$$

Sendo o volume elementar dado por

$$dV = t_f dy dz \quad (22)$$

e substituindo a Eq.(22) na Eq.(21), obtém-se a energia de deformação devida às forças normais nos painéis de flange:

$$\Pi_{e2} = \int_0^H \int_{-b}^b t_f E_f \varepsilon_{fz}^2 dy dz \quad (23)$$

Nas colunas de canto, a energia de deformação é

$$\Pi_{e3} = \int_V \frac{F^2}{A_k^2 2E_k} dV \times 4 \quad (24)$$

sendo a força axial F função apenas da coordenada z. Então,

$$dV = A_k dz \quad (25)$$

obtém-se

$$\Pi_{e3} = \int_0^H \frac{2F^2 A_k}{A_k^2 E_k} dz \quad (26)$$

Mas ,

$$\frac{F}{A_k} = \sigma_k = \varepsilon_k E_k \quad (27)$$

Então, substituindo a Eq.(27) na Eq.(26), obtém-se a energia de deformação referente à força normal nas colunas de canto:

$$\Pi_{e3} = \int_0^H 2E_k \epsilon_k^2 A_k dz \quad (28)$$

Para calcular a energia de deformação devida às tensões de cisalhamento, considera-se o elemento do painel de alma, mostrado na Figura 13, sob a ação de um estado de cisalhamento puro. Então,

$$\gamma = \frac{\delta}{dz} \quad (29)$$

ou seja,

$$\delta = \gamma dz \quad (30)$$

sendo δ o deslocamento elementar devido à tensão tangencial τ e γ é a deformação angular. Supondo o carregamento aplicado estaticamente, a energia acumulada no elemento de volume é

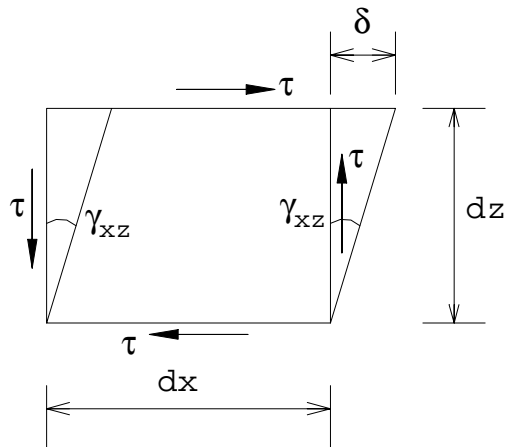


Figura 13 - Elemento do painel de alma sob cisalhamento puro.

$$d\Pi_{e4} = \frac{F\delta}{2} \times 2 = F\delta \quad (31)$$

A espessura do elemento é dada por

$$\Delta y = t_w \quad (32)$$

Logo, a força

$$F = \tau_{xz} t_w dx \quad (33)$$

A deformação angular e o deslocamento por cortante estão relacionados por

$$\delta = \gamma_{xz} dz \quad (34)$$

Levando as Eqs.(33) e (34) para a Eq.(31), encontra-se

$$d\Pi_{e4} = \tau_{xz} t_w dx \gamma_{xz} dz = \tau_{xz} \gamma_{xz} t_w dx dz \quad (35)$$

Como a lei de Hooke no cisalhamento é

$$\tau_{xz} = G_w \gamma_{xz} \quad (36)$$

a substituição da Eq.(36) na Eq.(35) resulta

$$d\Pi_{e4} = t_w G_w \gamma_{xz}^2 dx dz \quad (37)$$

e, finalmente,

$$\Pi_{e4} = \int_0^H \int_{-a}^a t_w G_w \gamma_{xz}^2 dx dz \quad (38)$$

Nos painéis de flange, obtém-se uma expressão inteiramente análoga

$$\Pi_{e5} = \int_0^H \int_{-b}^b t_f G_f \gamma_{yz} dy dz \quad (39)$$

Então, a energia de deformação do tubo apertado é

$$\Pi_e = \Pi_{e1} + \Pi_{e2} + \Pi_{e3} + \Pi_{e4} + \Pi_{e5} \quad (40)$$

Logo, considerando as equações (20), (23), (28), (38) e (39) obtém a expressão final do potencial da energia de deformação que é

$$\begin{aligned} \Pi_e = & \int_0^H \int_{-a}^a t_w [E_w \epsilon_{wz}^2 + G_w \gamma_{zz}^2] dx dz + \int_0^H \int_{-b}^b t_f [E_f \epsilon_{fz}^2 + G_f \gamma_{yz}^2] dy dz + \\ & + \int_0^H 2E_k \epsilon_k^2 A_k dz \end{aligned} \quad (41)$$

A energia potencial da carga lateral aplicada é dada pela equação

$$\Pi_p = -\iiint_V F_i u_i dV - \iint_S T_i u_i dS \quad (42)$$

sendo T_i as componentes das forças de superfície e F_i as forças de massa, distribuídas no domínio por unidade de volume e $u(z)$ é o deslocamento lateral da estrutura. Nos casos estudados em seguida, forças verticais não são consideradas, ou seja,

$$\iiint_V F_i u_i dV = 0 \quad (43)$$

Conforme os casos de carregamento, a energia potencial da carga lateral vale:

(a) Caso 1: carga concentrada P no topo do edifício de altura H :

$$\Pi_p = -\iint_S T_i u_i dS = -Pu|_{z=H} \quad (44)$$

isto é,

$$\Pi_p = -Pu(H) \quad (45)$$

(b) Caso 2: carga uniformemente distribuída de intensidade q por unidade de comprimento (altura):

$$\Pi_p = -\int_0^H qu(z)dz \quad (46)$$

(c) Caso 3: carga triangular distribuída por unidade de comprimento (altura) de intensidade T no topo e zero na base.

$$\Pi_p = -\int_0^H T \frac{z}{H} u(z)dz \quad (47)$$

A energia potencial total é:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_p \quad (48)$$

Obtida a expressão para a energia potencial total, as equações diferenciais podem, então, ser deduzidas minimizando a energia potencial total com relação às funções de deslocamento desconhecidas, ϕ e u , e com relação aos coeficientes de *shear lag*, α e β , isto é,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = 0 \quad (52)$$

Porém, o conjunto de equações assim obtido, que consiste de quatro equações diferenciais parciais de primeira ou segunda ordem, é muito difícil de resolver o que justifica a pesquisa de um método aproximado de solução. Para isto, algumas simplificações são introduzidas e descritas no item seguinte.

3.4- Método Aproximado de Solução

A minimização da energia potencial total com relação a ϕ produz uma equação que pode ser interpretada como a condição de equilíbrio de momento e expressa na seguinte forma

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial z} = M \quad (53)$$

em que EI é a rigidez efetiva à flexão da estrutura tubular e M é o momento de tombamento devido à carga lateral. Em geral, EI varia com a altura e é dependente de outras incógnitas, então, a Eq. (53) é de difícil solução. Porém, se o efeito da variação de EI com a altura na rotação ϕ for desprezível, então ϕ pode ser calculada por integração direta, como a seguir:

$$\phi = \frac{1}{EI} \int_0^z M dz \quad (54)$$

Do mesmo modo, minimizando a energia potencial total com relação a u, obtém-se a equação de equilíbrio do cortante horizontal que é

$$4G_w t_w a \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \phi \right) = V \quad (55)$$

sendo V a força cortante devida à carga lateral. Então, u pode ser determinado por integração direta, como a seguir:

$$u = \int_0^z \left(\frac{V}{4G_w t_w a} - \phi \right) dz \quad (56)$$

Pode-se calcular α e β , substituindo os valores de ϕ e u na Eq.(48) da energia potencial total e tomando a condição de mínimo em relação a esses parâmetros, Kwan [10]. Nesse caso, verifica-se que, embora EI seja ainda um valor desconhecido, as equações para α e β não dependem dele. Um método simplificado consiste em aproximar α e β como funções polinomiais expressas em termos de um certo número de coeficientes desconhecidos a serem determinados. Limitando as funções polinomiais à ordem quadrática e aplicando as condições de contorno, pode ser demonstrado que elas se expressam em termos de apenas dois coeficientes desconhecidos. As condições de contorno para $z=H$ são:

$$M = 0 \quad (57)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (58)$$

$$\sigma'_z = 0 \quad (59)$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{d\beta}{dz} = 0 \quad (61)$$

Então,

$$\alpha = \alpha_1 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 + \alpha_2 \left[2 \frac{z}{H} - \left(\frac{z}{H}\right)^2\right] \quad (62)$$

$$\beta = \beta_1 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 + \beta_2 \left[2 \frac{z}{H} - \left(\frac{z}{H}\right)^2\right] \quad (63)$$

sendo α_1 , β_1 , α_2 e β_2 os coeficientes a determinar. Observa-se que α_1 e β_1 são exatamente os valores de α e β na base, enquanto α_2 e β_2 são os valores correspondentes no topo. Substituindo as Eqs.(62) e (63) na Eq.(48) da energia potencial total, minimizando com relação a α_1 , β_1 , α_2 , β_2 , e resolvendo o sistema de equações obtido, os coeficientes *shear lag* são determinados para cada caso de carga.

Para a determinação dos coeficientes do *shear lag* referentes aos painéis de alma, no caso α_1 e α_2 , considera-se a estrutura carregada. Como o momento de tombamento (M) e o cortante (V) variam de acordo com o caso de carregamento aplicado sobre a estrutura, tem-se

(a) Caso 1: carga concentrada no topo, Figura 14. O momento de tombamento e o cortante para este caso de carga são

$$M = -P(H - z) \quad (64)$$

$$V = P \quad (65)$$

Substituindo a Eq.(64) na Eq.(54), obtém-se

$$\phi = \frac{1}{EI} \int_0^z -P(H - z) dz \quad (66)$$

Substituindo as Eqs.(62) e (66) na Eq.(4), obtém-se w_w e encontra-se

$$\varepsilon_{wz} = \frac{\partial w_w}{\partial z} \quad (67)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_w}{\partial x} \quad (68)$$

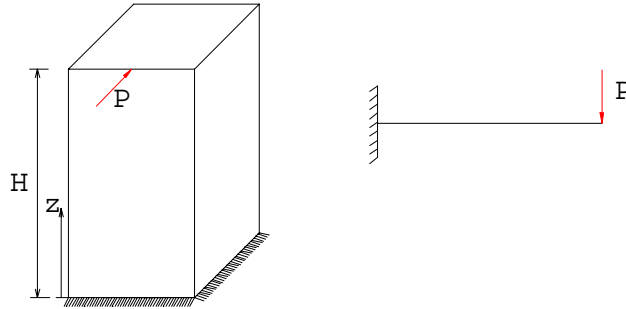


Figura 14 - Estrutura tubular em balanço sujeita a carga concentrada no topo.

em que u_1 é obtido substituindo as Eqs.(65) e (66) na Eq.(56), ou seja,

$$u_1 = \frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} Hz^2 - \frac{1}{6} z^3 \right) + \frac{P}{4G_w t_w a} z \quad (69)$$

Chamando de Π_{11} a parcela da energia potencial total referente aos painéis de alma para o caso de carga 1, tem-se

$$\Pi_{11} = \int_0^H \int_{-a}^a t_w (E_w \varepsilon_{wz}^2 + G_w \gamma_{xz}^2) dx dz \quad (70)$$

Então, substituindo as Eqs.(67) e (68) na Eq.(70), chega-se a

$$\Pi_{11} = \int_0^H \int_{-a}^a t_w \left[E_w \left(\frac{\partial w_w}{\partial z} \right)^2 + G_w \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dz \quad (71)$$

Resolvendo a Eq.(71), obtém-se

$$\Pi_{11} = \Pi_{11}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (72)$$

Esta parcela Π_{11} é a única que contém os coeficientes α_1 e α_2 , pois estes só interferem nos painéis de alma. Portanto, para obtê-los, pode-se extremizar Π_{11} com relação às incógnitas α_1 e α_2 , obtendo assim duas equações com as quais determinam-se os valores dos coeficientes, ou seja,

$$\delta\Pi_{11}^{(1)} = \frac{\partial\Pi_{11}}{\partial\alpha_1} \delta\alpha_1 + \frac{\partial\Pi_{11}}{\partial\alpha_2} \delta\alpha_2 = 0 \quad (73)$$

Como $\delta\alpha_1$ e $\delta\alpha_2$ são arbitrários, as condições de extremo que são

$$\frac{\partial\Pi_{11}}{\partial\alpha_1} = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial\Pi_{11}}{\partial\alpha_2} = 0 \quad (75)$$

resolvendo as Eqs.(74) e (75), encontram-se

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{7a^2E_w(6a^2E_w + 7H^2G_w)}{212a^4E_w^2 + 56a^2E_wH^2G_w + 21H^4G_w^2} = \\ &= \frac{42a^4E_w^2 + 49a^2E_wH^2G_w}{24a^4E_w^2 + 112a^2E_wH^2G_w + 42H^4G_w^2} \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{7a^2E_w(24a^2E_w + 7H^2G_w)}{812a^4E_w^2 + 56a^2E_wH^2G_w + 21H^4G_w^2} = \\ &= \frac{168a^4E_w^2 + 49a^2E_wH^2G_w}{96a^4E_w^2 + 448a^2E_wH^2G_w + 168H^4G_w^2} \end{aligned} \quad (77)$$

Dividindo toda a Eq.(76) por $42a^4E_w^2$, tem-se

$$\alpha_1 = \frac{1 + 1,17 \frac{H^2 G_w}{a^2 E_w}}{0,57 + 2,67 \frac{H^2 G_w}{a^2 E_w} + \frac{H^4 G_w^2}{a^4 E_w^2}} \quad (78)$$

Considerando

$$\frac{G_w H^2}{E_w a^2} = m_w, \quad (79)$$

tem-se

$$\alpha_1 = \frac{1,17m_w + 1}{m_w^2 + 2,67m_w + 0,57} \quad (80)$$

sendo m_w o parâmetro de rigidez relativa ao cortante no painel de alma.

Dividindo toda a Eq. (77) por $168a^4E_w^2$:

$$\alpha_2 = \frac{1 + 0,29 \frac{H^2 G_w}{a^2 E_w}}{0,57 + 2,67 \frac{H^2 G_w}{a^2 E_w} + \frac{H^4 G_w^2}{a^4 E_w^2}} \quad (81)$$

e procedendo analogamente, obtém-se

$$\alpha_2 = \frac{0,29m_w + 1}{m_w^2 + 2,67m_w + 0,57} \quad (82)$$

(b) Caso 2: carga uniformemente distribuída, Figura 15. O momento de tombamento e o cortante para o caso de carga em questão valem

$$M = -q(H - z) \frac{(H - z)}{2} = -q \frac{(H - z)^2}{2} \quad (83)$$

$$V = q(H - z) \quad (84)$$

Substituindo a Eq.(83) na Eq.(54), tem-se

$$\phi = \frac{1}{EI} \int_0^z \frac{-q(H - z)^2}{2} dz \quad (85)$$

Levando as Eqs.(62) e (85) na Eq.(4), obtém-se w_w necessário para o cálculo da energia potencial e também

$$\epsilon_{wz} = \frac{\partial w_w}{\partial z} \quad (86)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_w}{\partial x} \quad (87)$$

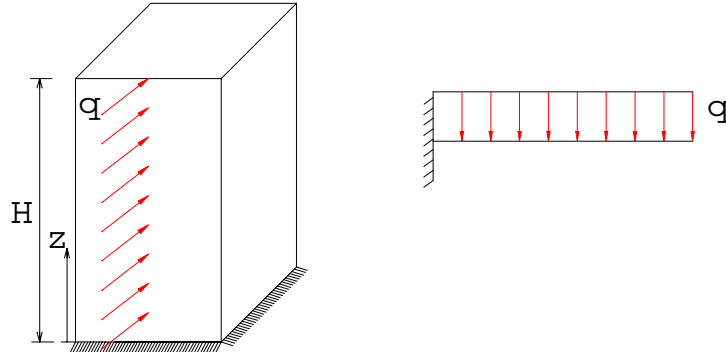


Figura 15 - Estrutura tubular em balanço sujeita a carga uniformemente distribuída.

A deflexão lateral u_2 é obtida substituindo os valores de ϕ e V , determinados para o caso de carga 2, na Eq.(56). Logo,

$$u_2 = \frac{q}{EI} \left(\frac{1}{4} H^2 z^2 - \frac{1}{6} H z^3 + \frac{1}{24} z^4 \right) + \frac{q}{4G_w t_w a} \left(H z - \frac{1}{2} z^2 \right) \quad (88)$$

Chamando Π_{12} a parcela da energia potencial total referente aos painéis de alma para o caso de carga 2, tem-se

$$\Pi_{12} = \int_0^H \int_{-a}^a t_w (E_w \varepsilon_{wz}^2 + G_w \gamma_{xz}^2) dx dz \quad (89)$$

Substituindo as Eqs.(86) e (87) na Eq.(89), obtém-se

$$\Pi_{12} = \Pi_{12}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (90)$$

De maneira análoga ao caso de carga 1, obtém-se os valores de α_1 e α_2 extremizando Π_{12} . Logo,

$$\delta \Pi_{12}^{(1)} = \frac{\partial \Pi_{12}}{\partial \alpha_1} \delta \alpha_1 + \frac{\partial \Pi_{12}}{\partial \alpha_2} \delta \alpha_2 = 0 \quad (91)$$

Como $\delta \alpha_1$ e $\delta \alpha_2$ são arbitrários, as condições de extremização são:

$$\frac{\partial \Pi_{12}}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (92)$$

$$\frac{\partial \Pi_{12}}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (93)$$

Assim, de modo semelhante ao procedimento adotado no caso de carga 1, são obtidas duas equações para as duas incógnitas α_1 e α_2 :

$$\alpha_1 = \frac{2,57m_w + 1,12}{m_w^2 + 2,94m_w + 0,64} \quad (94)$$

$$\alpha_2 = \frac{0,03m_w + 1,12}{m_w^2 + 2,94m_w + 0,64} \quad (95)$$

(c) **Caso 3:** carga triangular distribuída, Figura 16. O momento de tombamento e o cortante para este caso de carga são dados, Timoshenko e Gere [16], a seguir:

$$M = -\frac{\mathbb{T}(H^2 - z^2)}{2H} \times \left[\frac{2H^2}{3(H+z)} - \frac{z}{3} \right] \quad (96)$$

$$V = \frac{\mathbb{T}(H^2 - z^2)}{2H} \quad (97)$$

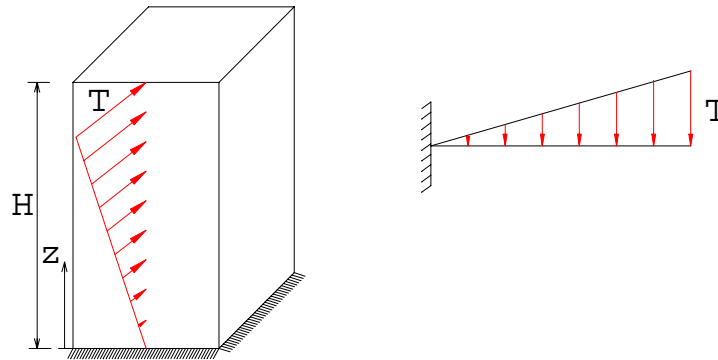


Figura 16 - Estrutura tubular em balanço sujeita a carga triangular distribuída.

Levando as Eqs.(96) e (97) para a Eq.(54), chega-se a

$$\phi = \frac{1}{EI} \int_0^z \frac{-\mathbb{T}(H^2 - z^2)}{2H} \times \left[\frac{2H^2}{3(H+z)} - \frac{z}{3} \right] dz \quad (98)$$

Substituindo as Eqs.(62) e (98) na Eq.(4), obtém-se w_w , necessário para o cálculo da energia potencial e também

$$\varepsilon_{wz} = \frac{\partial w_w}{\partial z} \quad (99)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial w_w}{\partial x} \quad (100)$$

A deflexão lateral u_3 é obtida substituindo os valores de ϕ e V , determinados para o caso de carga 3, na Eq.(56):

$$u_3 = \frac{T}{EI} \left(\frac{1}{6} H^2 z^2 - \frac{1}{12} Hz^3 + \frac{1}{120} \frac{z^5}{H} \right) + \frac{T}{4G_w t_w a} \left(\frac{1}{2} Hz - \frac{1}{6} \frac{z^3}{H} \right) \quad (101)$$

Chamando Π_{13} a parcela da energia potencial total referente aos painéis de alma para o caso de carga 3, tem-se

$$\Pi_{13} = \int_0^H \int_{-a}^a t_w (E_w \epsilon_z^2 + G_w \gamma_{xz}^2) dx dz \quad (102)$$

Substituindo as Eqs.(99) e (100) na Eq.(102) e resolvendo, obtém-se

$$\Pi_{13} = \Pi_{13}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (103)$$

De maneira análoga ao caso de carga 1, obtém-se os valores de α_1 e α_2 extremizando Π_{13} . Logo,

$$\delta \Pi_{13}^{(1)} = \frac{\partial \Pi_{13}}{\partial \alpha_1} \delta \alpha_1 + \frac{\partial \Pi_{13}}{\partial \alpha_2} \delta \alpha_2 = 0 \quad (104)$$

Como $\delta \alpha_1$ e $\delta \alpha_2$ são arbitrários, as condições de mínimo são:

$$\frac{\partial \Pi_{13}}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (105)$$

$$\frac{\partial \Pi_{13}}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (106)$$

Resolvendo, então, as Eqs. (105) e (106) e simplificando a expressão resultante de modo semelhante ao procedimento adotado no caso de carga 1, encontram-se os valores dos coeficientes α_1 e α_2 :

$$\alpha_1 = \frac{2,22m_w + 1,09}{m_w^2 + 2,86m_w + 0,62} \quad (107)$$

$$\alpha_2 = \frac{0,10m_w + 1,09}{m_w^2 + 2,86m_w + 0,62} \quad (108)$$

Para a determinação dos coeficientes do *shear lag* referentes aos painéis de flange, β_1 e β_2 , considera-se a estrutura carregada. De modo similar ao cálculo dos coeficientes α_1 e α_2 , estes são determinados para cada caso de carga.

(a) Caso 1: carga concentrada no topo, Figura 14. Substituindo as Eqs.(63) e (66) na Eq.(8), obtém-se w_f necessário para o cálculo da energia potencial e também

$$\varepsilon_{fz} = \frac{\partial w_f}{\partial z} \quad (109)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w_f}{\partial y} \quad (110)$$

Chamando de Π_{21} a parcela da energia potencial total referente aos painéis de flange para o caso de carga 1, tem-se

$$\Pi_{21} = \int_0^H \int_{-b}^b t_f (E_f \varepsilon_{fz}^2 + G_f \gamma_{yz}^2) dy dz \quad (111)$$

Levando as Eqs.(109) e (110) para a Eq.(111), tem-se

$$\Pi_{21} = \Pi_{21}(\beta_1, \beta_2) \quad (112)$$

Esta parcela Π_{21} é a única que contém β_1 e β_2 , pois estes coeficientes só interferem nos painéis de flange. Portanto, para a obtenção dos valores destes coeficientes, extremiza-se Π_{21} com relação às incógnitas β_1 e β_2 , e são obtidas duas equações:

$$\delta\Pi_{21}^{(1)} = \frac{\partial\Pi_{21}}{\partial\beta_1} \delta\beta_1 + \frac{\partial\Pi_{21}}{\partial\beta_2} \delta\beta_2 = 0 \quad (113)$$

Como $\delta\beta_1$ e $\delta\beta_2$ são arbitrários, as condições de extremo são:

$$\frac{\partial\Pi_{21}}{\partial\beta_1} = 0 \quad (114)$$

$$\frac{\partial\Pi_{21}}{\partial\beta_2} = 0 \quad (115)$$

que resultam nos coeficientes β_1 e β_2 :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{35b^2E_f(18b^2E_f + 5H^2G_f)}{2(252b^4E_f^2 + 280b^2E_fH^2G_f + 25H^4G_f^2)} = \\ &= \frac{630b^4E_f^2 + 175H^2G_fb^2E_f}{504b^4E_f^2 + 560b^2E_fH^2G_f + 50H^4G_f^2} \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{35b^2E_f(72b^2E_f + 5H^2G_f)}{8(252b^4E_f^2 + 280b^2E_fH^2G_f + 25H^4G_f^2)} = \\ &= \frac{2520b^4E_f^2 + 175H^2G_fb^2E_f}{2016b^4E_f^2 + 2240b^2E_fH^2G_f + 200H^4G_f^2} \end{aligned} \quad (117)$$

Dividindo toda a Eq.(116) por $50b^4E_f^2$, vem:

$$\beta_1 = \frac{12,6 + 3,5 \frac{H^2 G_f}{b^2 E_f}}{10,08 + 11,2 \frac{H^2 G_f}{b^2 E_f} + \frac{H^4 G_f^2}{b^4 E_f^2}} \quad (118)$$

Considerando

$$\frac{G_f H^2}{E_f b^2} = m_f \quad (119)$$

e substituindo na Eq.(118), tem-se

$$\beta_1 = \frac{3,5m_f + 12,6}{m_f^2 + 11,2m_f + 10,08} \quad (120)$$

sendo m_f o parâmetro de rigidez relativa ao cortante no painel de flange.

Analogamente, dividindo toda a Eq.(117) por $200b^4E_f^2$, obtêm-se

$$\beta_2 = \frac{12,6 + 0,88 \frac{H^2 G_f}{b^2 E_f}}{10,08 + 11,2 \frac{H^2 G_f}{b^2 E_f} + \frac{H^4 G_f^2}{b^4 E_f^2}} \quad (121)$$

Substituindo a Eq.(119) na Eq.(121), tem-se

$$\beta_2 = \frac{0,88m_f + 12,6}{m_f^2 + 11,2m_f + 10,08} \quad (122)$$

(b) Caso 2: carga uniformemente distribuída, Figura 15. Substituindo as Eqs.(85) e (63) na Eq.(8), obtêm-se w_f e, conseqüentemente, ϵ_{fz} e γ_{yz} . Levando os valores de ϵ_{fz} e γ_{yz} para a parcela da energia potencial referente aos painéis de flange, para o caso de carga 2, e extremizando-a com relação a β_1 e β_2 ,

são geradas duas expressões, que se resolvidas com as mesmas considerações feitas para o caso de carga 1, tem-se

$$\beta_1 = \frac{7,72m_f + 14,15}{m_f^2 + 12,35m_f + 11,32} \quad (123)$$

$$\beta_2 = \frac{0,08m_f + 14,15}{m_f^2 + 12,35m_f + 11,32} \quad (124)$$

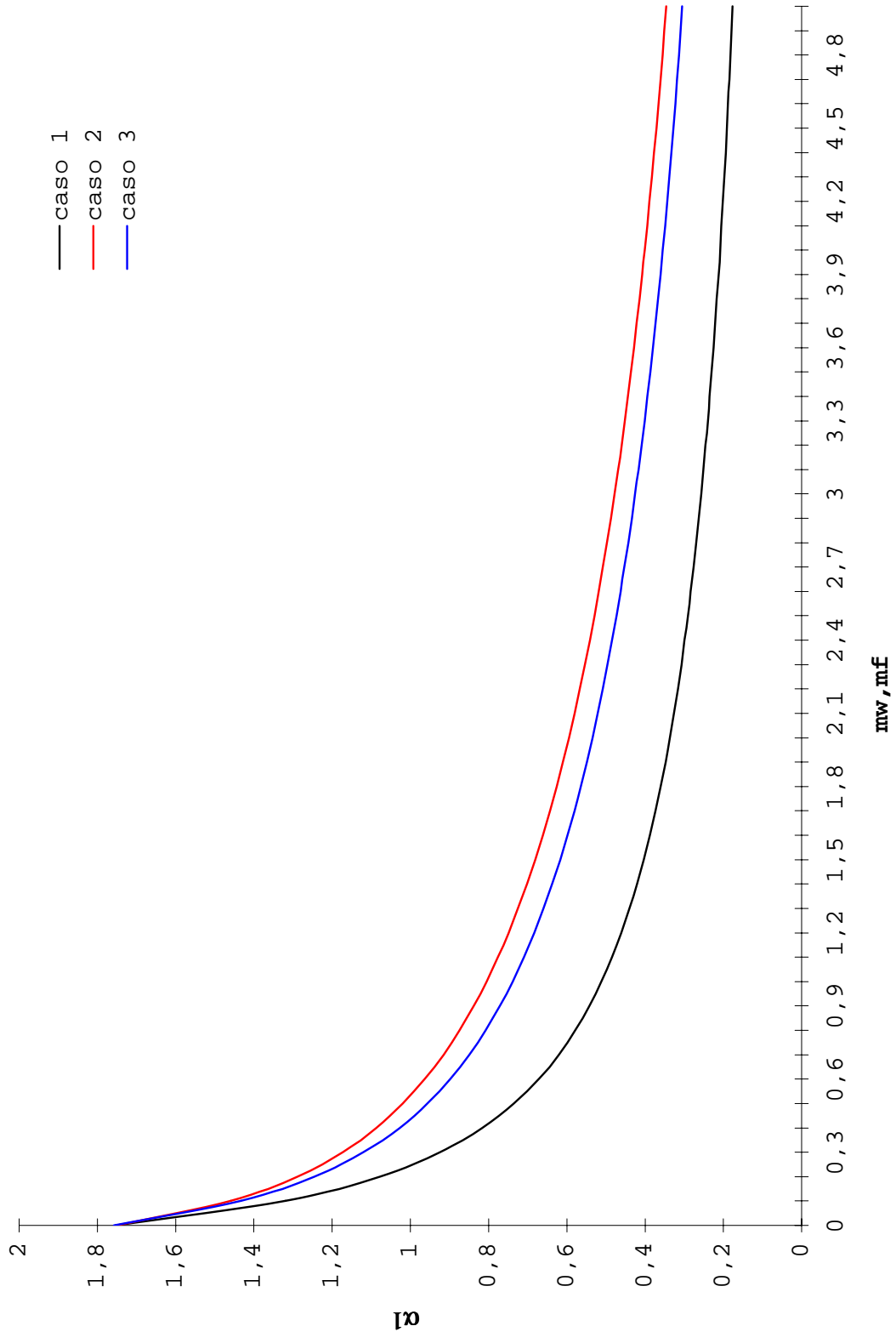
(c) Caso 3: carga triangular distribuída, Figura 16. Substituindo as Eqs.(98) e (63) na Eq.(8), obtêm-se w_f e, conseqüentemente, ε_{fz} e γ_{yz} . Levando os valores de ε_{fz} e γ_{yz} na parcela da energia potencial referente aos painéis de flange, para o caso de carga 3, e extremizando-a com relação a β_1 e β_2 , são geradas duas expressões que, se resolvidas de modo análogo aos casos de carga 1 e 2, tem-se

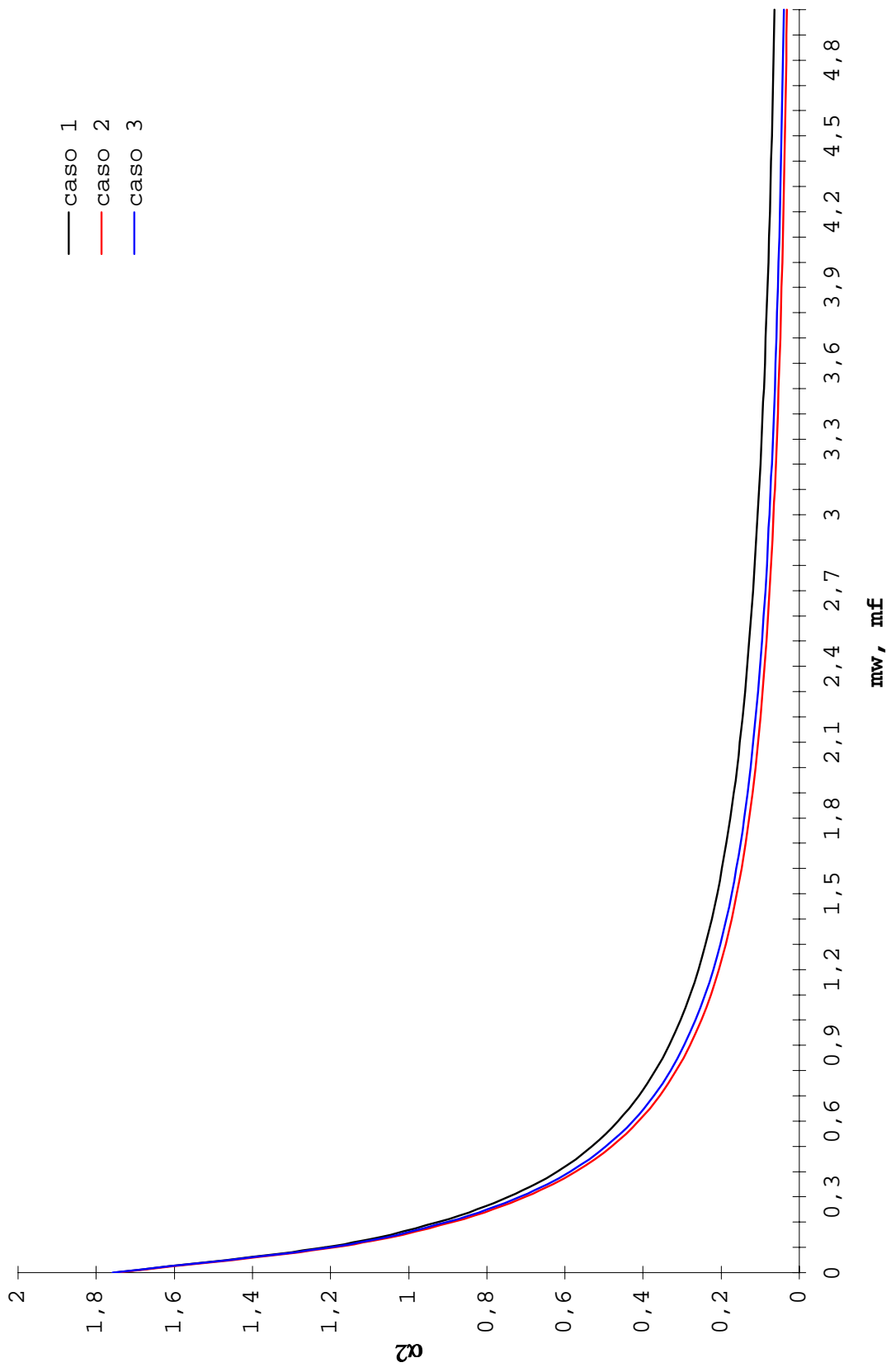
$$\beta_1 = \frac{6,67m_f + 13,71}{m_f^2 + 12,01m_f + 10,97} \quad (125)$$

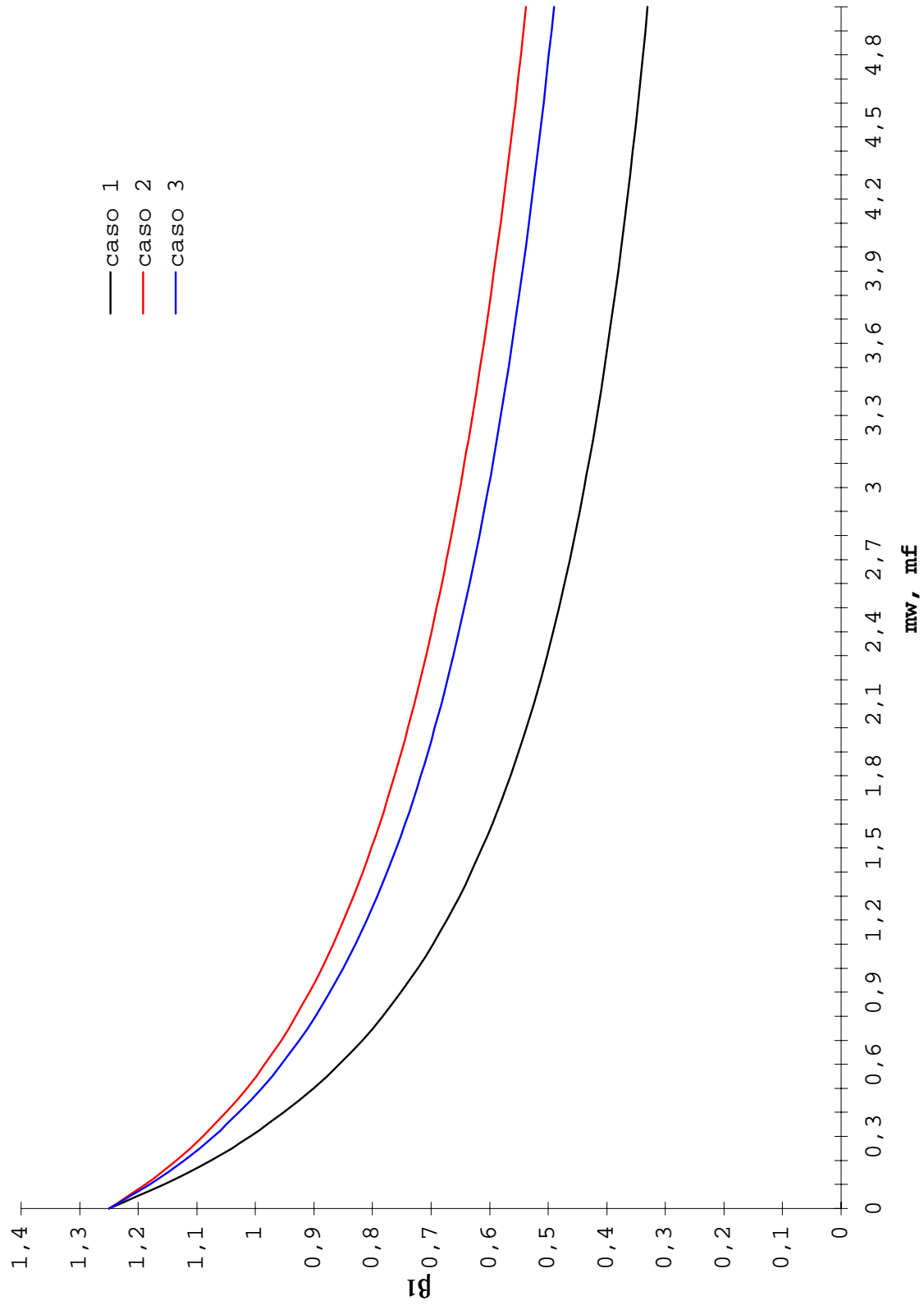
$$\beta_2 = \frac{0,29m_f + 13,71}{m_f^2 + 12,01m_f + 10,97} \quad (126)$$

Deve ser observado, nas fórmulas obtidas, que o coeficiente *shear lag* de um painel de pórtico é dependente apenas das propriedades elásticas daquele painel particular e não das propriedades de quaisquer outros painéis.

Os valores de α e β para cada caso de carga são apresentados na Figura 17, em que os parâmetros de rigidez relativa ao cortante m_w e m_f são definidos pelas Eqs.(79) e (119), respectivamente.







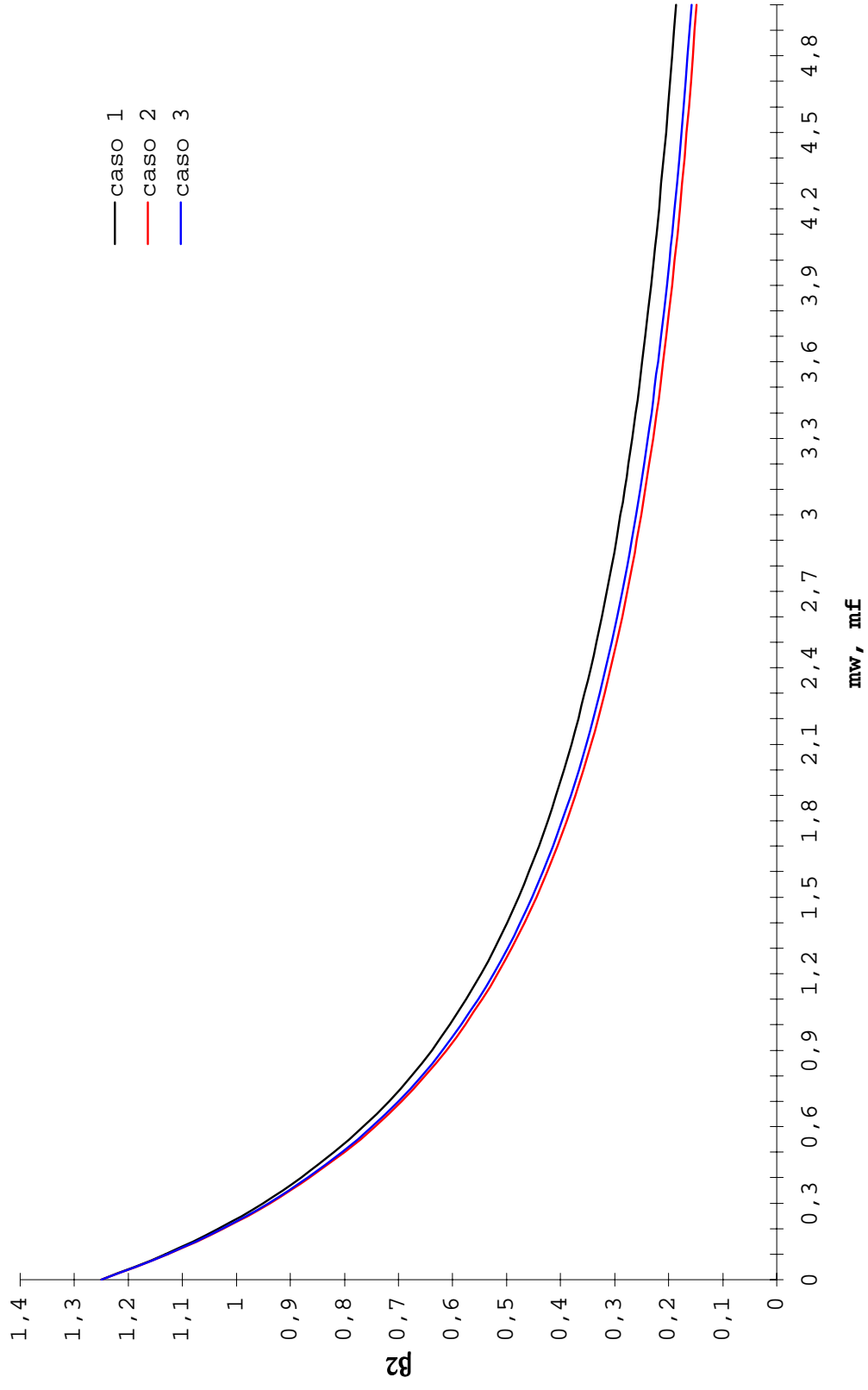


Figura 17 - Valores de α e β para os casos de carga.

Observam-se, então, os seguintes efeitos:

a) Em todos os casos de carga $\alpha_1 > \alpha_2$ e $\beta_1 > \beta_2$, ou seja, os efeitos do *shear lag* são geralmente maiores na base da estrutura do que em níveis mais elevados;

b) os graus de *shear lag* são dependentes da distribuição das cargas laterais, e, na base da estrutura, os graus aumentam com a seguinte ordem de casos de carga: carga concentrada no topo, carga triangular distribuída e carga uniforme distribuída, ao passo que, no topo da estrutura, os graus de *shear lag* diminuem na mesma ordem de casos de carga;

c) como os coeficientes do *shear lag* diminuem com os parâmetros de rigidez relativa ao cortante dos painéis, eles podem ser reduzidos aumentando-se as dimensões dos membros de pórtico. Além disso, como esses efeitos são maiores quando os parâmetros de rigidez relativa ao cortante são pequenos, conclui-se que os valores dos coeficientes do *shear lag* são mais significantes em edifícios mais baixos;

d) verifica-se, por fim, que o grau de *shear lag* em um painel de pórtico é determinado pelos parâmetros de rigidez relativa ao cortante dados pelas Eqs.(79) e (119).

Quando houver mudanças nas dimensões dos membros do pórtico, os efeitos podem ser avaliados simplesmente calculando os novos valores dos parâmetros de rigidez relativa ao cortante e usando os gráficos da Figura 17. Este método é mais conveniente para estimativas iniciais das dimensões dos elementos da estrutura principal.

3.5- Propriedades Elásticas da Membrana Ortotrópica Equivalente

Um segmento típico de pórtico limitado pelos centros dos membros adjacentes constitui uma unidade básica do pórtico, Figura 18, e pode ser modelado como uma membrana sólida de mesma área (mostrada pelas linhas tracejadas do contorno), desde que as propriedades elásticas da membrana representem o comportamento axial e ao cortante da estrutura real.

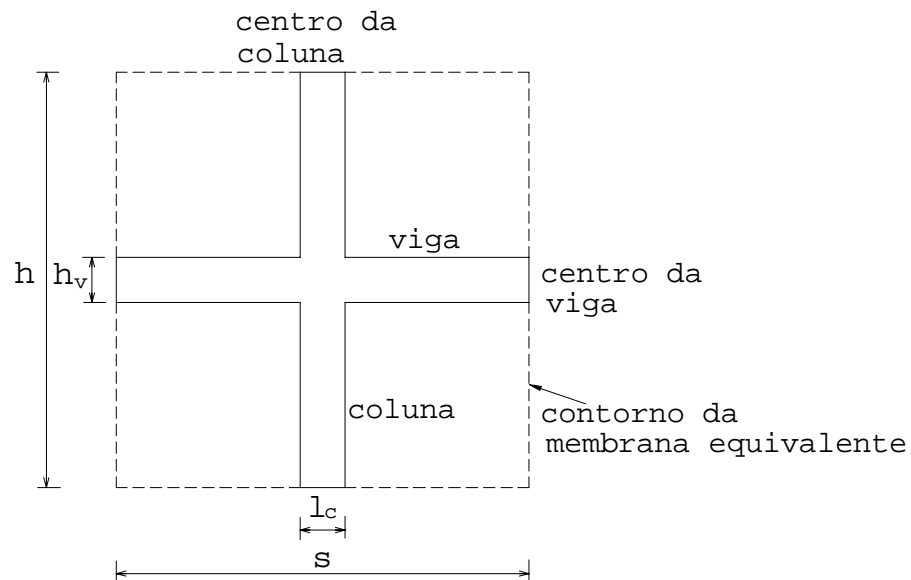


Figura 18 - Analogia de membrana para unidade básica de pórtico.

O método para avaliação das propriedades equivalentes da membrana é apresentado a seguir. Ele é aplicável aos painéis de alma e de flange.

3.5.1- Rigidez Axial

Sob a ação de forças axiais verticais, as relações carga-deformação para pórtico e membrana equivalente serão iguais se

$$Est = E_m A_c \quad (127)$$

sendo E o módulo elástico da membrana, s a largura da membrana, t a espessura da membrana, E_m o módulo elástico do material e A_c a área da seção transversal da coluna.

Usualmente, fixa-se o valor de t de modo que a área da membrana seja igual à área da seção transversal da coluna, isto é,

$$st = A_c \quad (128)$$

e a tensão axial na coluna seja igual à tensão axial na membrana. Conseqüentemente, tem-se

$$t = \frac{A_c}{s} \quad (129)$$

$$E = E_m \quad (130)$$

3.5.2- Rigidez ao cortante

Considere agora o caso da unidade básica de pórtico, Figura 18, sujeita a uma força cortante V . A deflexão lateral pode ser calculada como sendo a soma das parcelas devida à flexão Δ_b e devida ao cortante Δ_v .

a) Cálculo de Δ_p

A parcela da deflexão lateral devida à flexão da unidade básica de pórtico é constituída pelo efeito da força cortante na coluna superposto ao efeito do momento fletor na viga.

A relação entre a força cortante na coluna V e o deslocamento horizontal Δ_0 , Figura 19(a), é calculado com o emprego do Método das Forças. Para isso, a coluna é modelada como uma barra reta engastada-apoiada cujo apoio sofre um deslocamento vertical Δ_0 , Figura 19(b). O coeficiente de flexibilidade correspondente à direção de Δ_0 é

$$F = \frac{h^3}{24EI} \quad (131)$$

ou

$$F = \frac{(h/2)^3}{3EI} \quad (132)$$

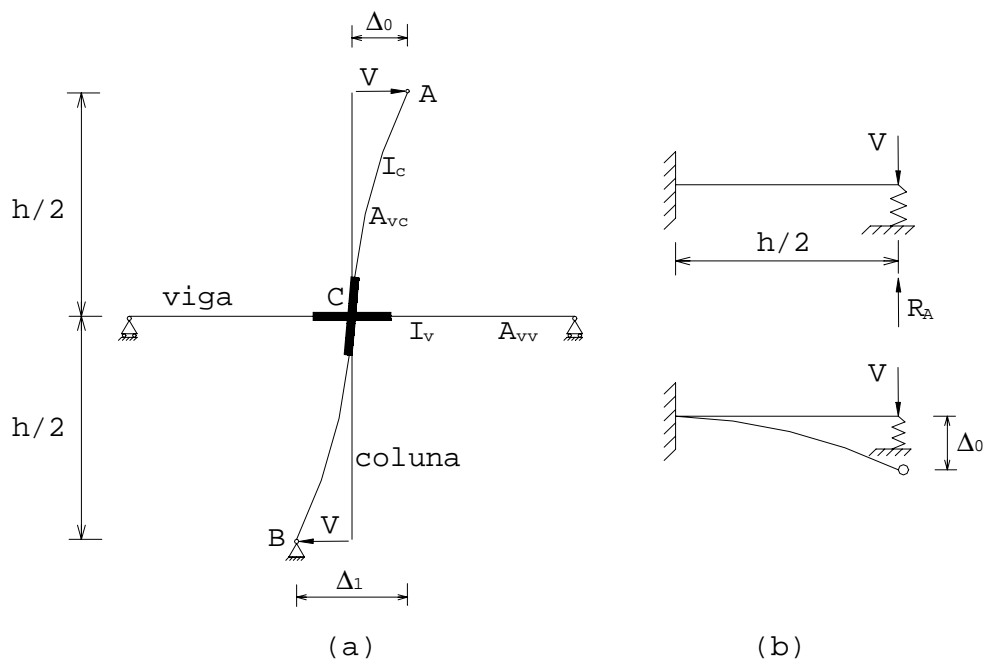


Figura 19 - Efeito do deslocamento em uma unidade básica de pórtico.

Então, a compatibilidade de deslocamentos no ponto de inflexão da coluna resulta em

$$\Delta_0 = FV \quad (133)$$

Mas, substituindo a Eq.(132) na Eq.(133), tem-se

$$\Delta_0 = \frac{h^3V}{24EI} \quad (134)$$

Portanto, como se trata do deslocamento relativo entre A e B, tem-se

$$\Delta_1 = 2\Delta_0 = 2 \frac{h^3V}{24EI} = \frac{Vh^3}{12EI} \quad (135)$$

Lembrando que h deve ser corrigido pela altura da viga, isto é,

$$\frac{\Delta_1}{V} = \frac{(h - l_c)^3}{12E_m I_c} \quad (136)$$

A rotação θ da viga na ligação viga-coluna resulta no deslocamento Δ_2' , Figura 20, que é

$$\Delta_2' = \theta \frac{h}{2} \quad (137)$$

Novamente, usando o Método das Forças, determina-se a relação entre a força cortante na viga V' e a rotação θ , ou seja,

$$\theta = \frac{V's^2}{12EI} \quad (138)$$

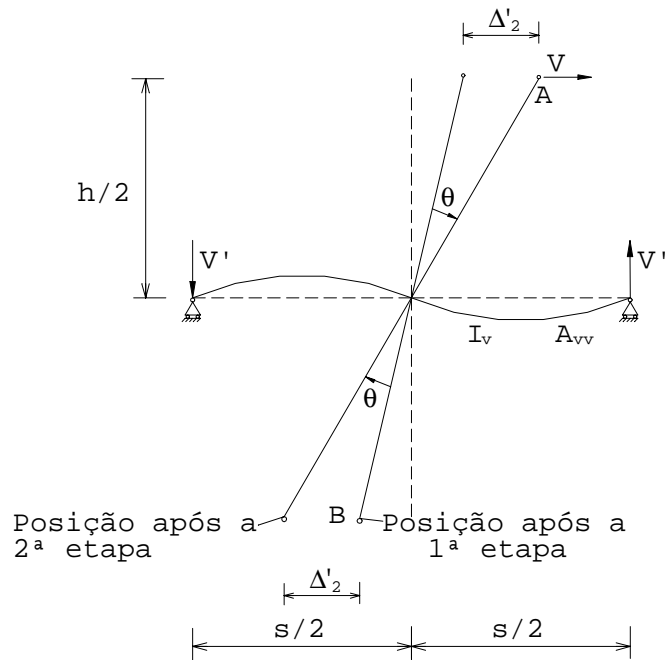


Figura 20 - Efeito da rotação em uma unidade básica de pórtico.

Portanto,

$$\Delta'_2 = \theta \frac{h}{2} = \frac{V's^2}{12EI} \frac{h}{2} \quad (139)$$

Então,

$$\Delta'_2 = \frac{V' s^2}{12EI} \frac{h}{2} \quad (140)$$

Mas, pela condição de equilíbrio estático,

$$V' \frac{s}{2} = V \frac{h}{2} \quad (141)$$

ou seja,

$$V' = V \frac{h}{s} \quad (142)$$

Substituindo a Eq.(142) na Eq.(140), tem-se

$$\Delta'_2 = \frac{Vs^2}{12EI} \frac{h^2}{2s} \quad (143)$$

Multiplicando a Eq.(143) por s/s, tem-se

$$\Delta'_2 = \frac{Vs^3}{24EI} \left(\frac{h}{s}\right)^2 \quad (144)$$

Logo, o deslocamento relativo entre A e B é

$$\Delta_2 = 2\Delta'_2 = \frac{Vs^3}{12EI} \left(\frac{h}{s}\right)^2 \quad (145)$$

Mas, s deve ser corrigido pela largura da coluna, isto é,

$$\frac{\Delta_2}{V} = \frac{(s - l_c)^3}{12E_m I_v} \left(\frac{h}{s}\right)^2 \quad (146)$$

No termo h/s, s não foi corrigido, admitindo que h/(s-l_c) seja aproximadamente igual a h/s. Portanto, a deflexão devida à flexão Δ_b é dada pela soma das Eqs.(136) e (146), isto é,

$$\Delta_b = \Delta_1 + \Delta_2 \quad (147)$$

$$\frac{\Delta_b}{V} = \frac{(h - h_v)^3}{12E_m I_c} + \frac{(s - l_c)^3}{12E_m I_v} \left(\frac{h}{s}\right)^2 \quad (148)$$

sendo I_v e I_c os momentos de inércia da viga e coluna, respectivamente.

b) Cálculo de Δ_v

Geralmente existem tanto forças cortantes quanto momentos fletores que atuam nas seções transversais de uma viga. Por exemplo, a uma distância x do apoio engastado da viga em balanço haverá um momento fletor M (Figura 21).

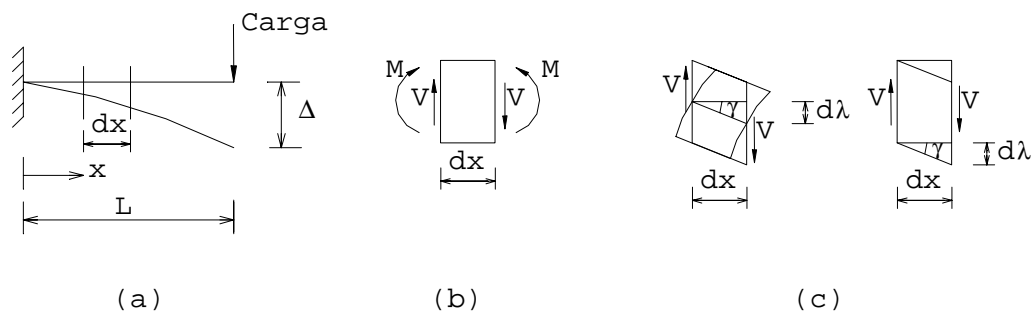


Figura 21 - Efeitos do momento fletor e da força cortante.

A direção positiva para M está mostrada na Figura 21(b). A força cortante V é constante ao longo do comprimento da viga. Em um caso mais geral, a força cortante V , bem como o momento fletor M , variarão ao longo do comprimento da viga.

No presente trabalho, só serão levadas em consideração as deformações produzidas por forças cortantes V . Estas deformações consistem em um deslocamento relativo $d\lambda$ de um lado do elemento em relação ao outro, Figura 21(c).

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{d\lambda}{dx} \quad (149)$$

Mas,

$$\frac{d\lambda}{dx} = f \frac{V}{AG} \quad (150)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal e f o fator de forma. Então,

$$d\lambda = \frac{fV}{GA} dx \quad (151)$$

Se V, G e A são constantes, logo

$$\lambda = f \frac{VL}{GA} \quad (152)$$

ou

$$\frac{\lambda}{V} = f \frac{L}{GA} \quad (153)$$

Definindo

$$\frac{A}{f} = A_e \quad (154)$$

em que A_e é a área efetiva ao cortante, tem-se

$$\frac{\lambda}{V} = \frac{L}{GA_e} \quad (155)$$

Na coluna, pela Figura 19, vem

$$\Delta_1 = \frac{V(h - l_c)}{G_m A_{vc}} \quad (156)$$

A deformação devida ao cortante na coluna fornece diretamente o deslocamento relativo entre A e B. Conforme a Figura 22, a relação geométrica entre Δ_2 e λ é

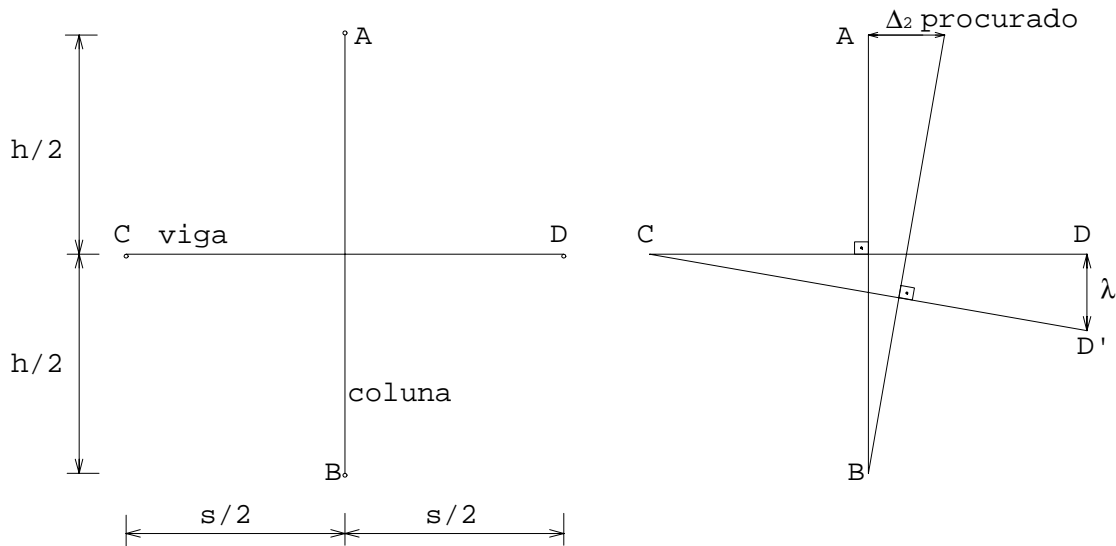


Figura 22 - Relação entre os deslocamentos dos pontos de inflexão na viga e na coluna.

$$\frac{\lambda}{s} = \frac{\Delta_2}{h} \quad (157)$$

ou seja,

$$\Delta_2 = \frac{h}{s} \lambda \quad (158)$$

sendo λ dado pela Eq.(155), vem

$$v = v' \quad (159)$$

e sendo

$$L = s - l_c \quad (160)$$

vem

$$\lambda = \frac{V(s - l_c)}{G_m A_{vv}} \quad (161)$$

Logo,

$$\Delta_2 = \frac{V(s - l_c) h}{G_m A_{vv} s} \quad (162)$$

Substituindo a Eq.(142) na Eq.(162), obtém-se

$$\Delta_2 = \frac{V(s - l_c)}{G_m A_{vv}} \left(\frac{h}{s} \right)^2 \quad (163)$$

Portanto, Δ_v será

$$\Delta_v = \Delta_1 + \Delta_2 \quad (164)$$

$$\Delta_v = \frac{V(h - h_v)}{G_m A_{vc}} + \frac{V(s - l_c)}{G_m A_{vv}} \left(\frac{h}{s} \right)^2 \quad (165)$$

ou

$$\frac{\Delta_v}{V} = \frac{(h - h_v)}{G_m A_{vc}} + \frac{(s - l_c)}{G_m A_{vv}} \left(\frac{h}{s} \right)^2 \quad (166)$$

sendo A_{vc} e A_{vv} as áreas efetivas ao cortante da coluna e viga, respectivamente, e G_m o módulo de elasticidade ao cisalhamento do material.

Igualando a deflexão lateral total da unidade de pórtico com a deflexão devida ao cortante da membrana, a seguinte equação é obtida:

$$V \frac{h}{Gst} = \Delta_b + \Delta_v \quad (167)$$

em que G é o módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente da membrana. Então, o valor de G é determinado como a seguir:

$$G = \frac{h}{\text{st} \left[\left(\frac{\Delta_b}{V} \right) + \left(\frac{\Delta_v}{V} \right) \right]} \quad (168)$$

4- DEFLEXÃO LATERAL

4.1- Introdução

A deflexão lateral u da estrutura pode ser calculada obtendo inicialmente o valor de ϕ na Eq.(54), que é dependente de EI , e substituindo, em seguida, o resultado obtido na Eq.(56) para se calcular u . Visto que o valor de EI varia com a altura, as expressões resultantes para ϕ e u são mais complexas. Porém, como as deformações à flexão mais significativas ocorrem próximas da base e os valores exatos de EI próximos do topo não afetam significativamente os valores de ϕ e u , a variação de EI com a altura pode ser desprezada e o seu valor em toda a altura tomado como o valor na base. Isto é equivalente a admitir que a estrutura comporta-se como uma viga em balanço com uma rigidez à flexão constante. Segundo Kwan [10], EI é dado pela seguinte equação:

$$EI = \frac{4}{3} E_w t_w a^3 \left(1 - \frac{2}{5} \alpha\right) + 4E_f t_f a^2 b \left(1 - \frac{2}{3} \beta\right) + 4E_m A_k a^2 \quad (169)$$

4.2- Determinação das Deflexões Laterais

Depois de tais simplificações, a deflexão lateral u para cada caso de carga é obtida da seguinte maneira:

(a) Caso 1: carga concentrada no topo. Resolvendo a Eq.(66), tem-se:

$$\phi = \frac{-Pz(z - 2H)}{2EI} \quad (170)$$

Substituindo as Eqs.(65) e (66) na Eq.(56) e resolvendo a integral resultante, obtém-se

$$u_1 = \frac{-Pz(2aG_w t_w z^2 - 6aHG_w t_w z - 3EI)}{12aEIG_w t_w} \quad (176)$$

ou

$$u_1 = \frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} Hz^2 - \frac{z^3}{6} \right) + \frac{Pz}{4G_w t_w a} \quad (177)$$

(b) Caso 2: carga uniformemente distribuída. Resolvendo a Eq.(85), tem-se

$$\phi = \frac{-qz(z^2 - 3Hz + 3H^2)}{6EI} \quad (178)$$

Levando as Eqs.(84) e (178) na Eq.(56) e resolvendo, encontra-se a deflexão lateral para o caso de carga 2:

$$u_2 = \frac{qz[aG_w t_w z^3 - 4aHG_w t_w z^2 + 3z(2aH^2G_w t_w - EI) + 6HEI]}{24aEIG_w t_w} \quad (179)$$

ou

$$u_2 = \frac{q}{EI} \left(\frac{1}{4} H^2 z^2 - \frac{1}{6} Hz^3 + \frac{1}{24} z^4 \right) + \frac{q}{4G_w t_w a} \left(Hz - \frac{1}{2} z^2 \right) \quad (180)$$

(c) Caso 3: carga triangular distribuída. Para obter o valor da rotação ϕ para o caso de carga 3, resolve-se a Eq.(98). Então,

$$\phi = \frac{-Tz(z^3 - 6H^2z + 8H^3)}{24EIH} \quad (181)$$

Substituindo as Eqs.(97) e (181) na Eq.(56) e resolvendo a integral resultante, obtém-se

$$u_3 = \frac{Tz}{120aHEIG_w t_w} [aG_w t_w z^4 - 5z^2(2aH^2G_w t_w + EI) + 20aH^3G_w t_w z + 15H^2EI] \quad (182)$$

ou

$$u_3 = \frac{T}{EI} \left(\frac{1}{6} H^2 z^2 - \frac{1}{12} H z^3 + \frac{1}{120} \frac{z^5}{H} \right) + \frac{T}{4G_w t_w a} \left(\frac{1}{2} H z - \frac{1}{6} \frac{z^3}{H} \right) \quad (183)$$

5- EXEMPLOS E COMPARAÇÕES

Exemplo 1

Uma estrutura tubular aporticada de 35 andares, construída com aço estrutural, é analisada. Para todas as vigas e colunas foi usado o perfil CVS 800x500x357 kg/m, padrão da Usiminas Mecânica, com as seguintes propriedades e dimensões: $I_x=528700\text{cm}^4$, $I_y=65670\text{cm}^4$, $A=455\text{cm}^2$, $A_{vc}=A_{vv}=140,03\text{cm}^2$, $d=800\text{mm}$, $t_f=31,5\text{mm}$, $b_f=500\text{mm}$, $t_w=19\text{mm}$, $h=737\text{mm}$, sendo I_x e I_y os momentos de inércia relativos aos eixos x e y, respectivamente, A a área total do perfil, A_{vc} e A_{vv} são as áreas efetivas ao cortante da coluna e viga, respectivamente e d , t_f , b_f , t_w , h estão mostrados na Figura 23. A altura de cada andar é de 3,0m e os espaçamentos entre as colunas é de 2,5m. Os módulos de Young e cisalhante do material são 210GPa e 80GPa, respectivamente. As dimensões da estrutura estão representadas na Figura 23. Uma carga lateral de 100kN/m uniformemente distribuída é aplicada no painel de flange da estrutura.

As propriedades elásticas equivalentes, calculadas pelo método apresentado no item 3.5, são:

$$E_w = E_f = 210\text{GPa}$$

$$t_w = t_f = 0,0182\text{m}$$

Os valores do módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente da membrana, dos parâmetros de rigidez relativa ao cortante, assim como dos coeficientes *shear lag*, obtidos através da Figura 17, para os painéis de alma e de flange empregando os métodos da membrana ortotrópica (MMO) estão mostrados na Tabela 1, a seguir

Tabela 1 - Valores do módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente da membrana, dos parâmetros de rigidez relativa ao cortante, dos coeficientes *shear lag* para os painéis da alma e de flange.

Métodos	$G_w=G_f$ (GPa)	m_w	m_f	α_1	α_2	β_1	β_2
MMO I e II	12,03	2,81	1,58	0,50	0,07	0,79	0,43
MMO III e IV	6,86	1,60	0,90	0,66	0,15	0,91	0,61

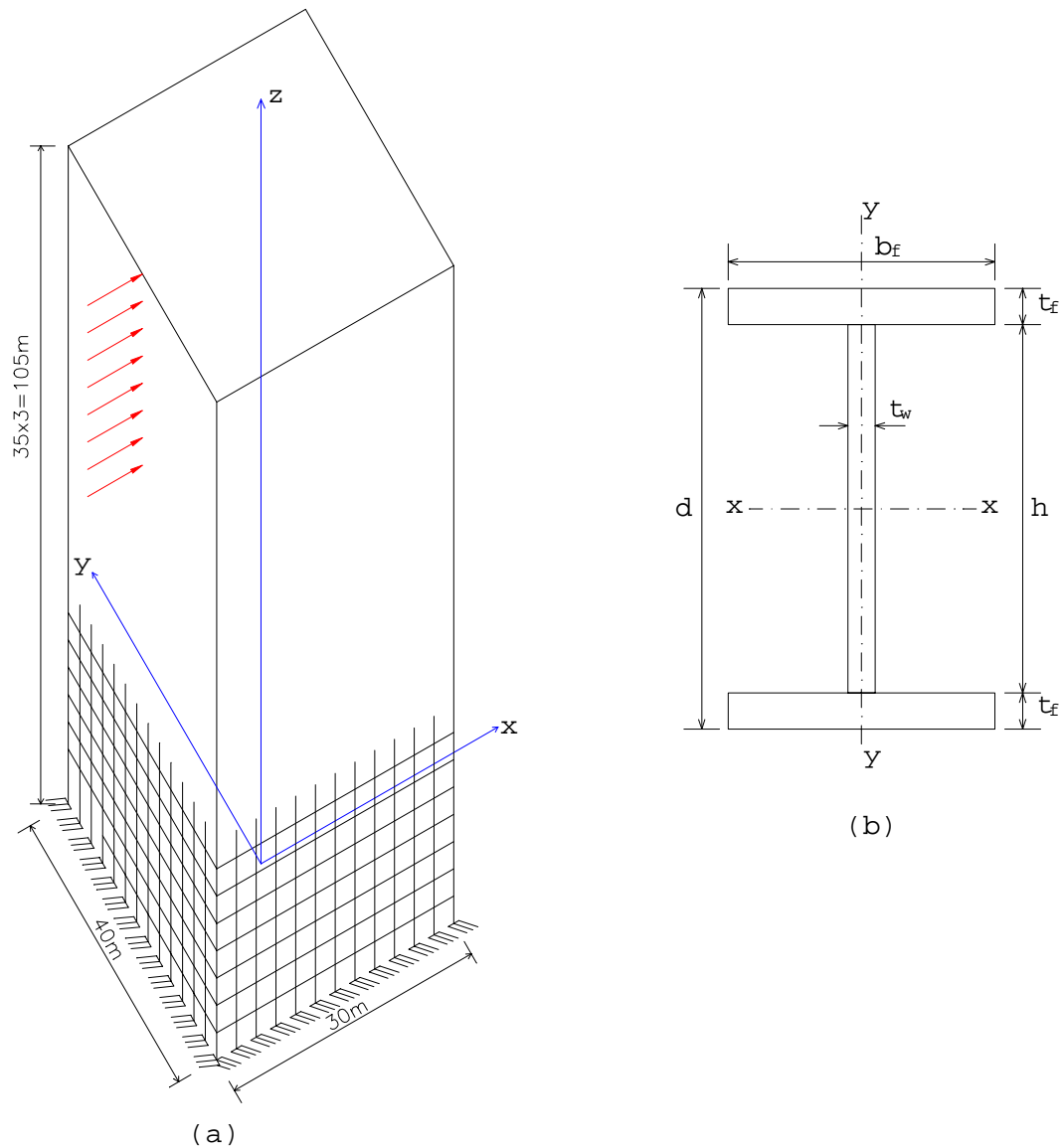


Figura 23 - Estrutura tubular: (a) estrutura analisada de 35 andares; (b) perfil adotado.

As deflexões laterais da estrutura são, então, calculadas pela Eq. (180) e estão plotadas na Figura 24.

Pelo método da membrana ortotrópica, têm-se quatro resultados: o primeiro considera a largura da coluna e a altura da viga no cálculo do módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente e não considera a área da coluna da extremidade, ou seja, $A_k=0$ (MMO I). O segundo também considera a largura da coluna e altura da viga e ainda a área da seção da coluna da extremidade (MMO II). O terceiro método proposto não considera a largura da coluna e a altura da viga no cálculo do módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente e considera as colunas das extremidades dos painéis (MMO III). Finalmente, o quarto método proposto não considera a largura da coluna, a altura da viga e as colunas das extremidades dos painéis (MMO IV).

Na Figura 24 também estão representados dois resultados obtidos a partir da análise de pórtico espacial usando elementos finitos. O primeiro foi obtido utilizando-se os nós do diafragma com restrição para a translação em z e, rotações em x e z (MEF I - CR). Com relação a este resultado, o MMO I subestimou a deflexão lateral máxima em aproximadamente 5%, o MMO II subestimou em 11%, o MMO III superestimou a deflexão lateral máxima em 33% e o MMO IV a superestimou em 41%. O segundo foi obtido usando os nós do diafragma sem restrição (MEF II - SR). Para este resultado, o MMO I subestimou a deflexão lateral máxima em 13%, o MMO II a subestimou em aproximadamente 19%, o MMO III a superestimou em 20% e o MMO IV a superestimou em 28%.

Tabela 2 - Valores da deflexão lateral obtidos pelos métodos da membrana ortotrópica e elementos finitos para estrutura de 35 andares.

Altura (m)	Deflexão Lateral (mm)					
	MEF I - CR	MEF II - SR	MMO I	MMO II	MMO III	MMO IV
0	0	0	0	0	0	0
15	15	16	12	12	21	21
24	25	26	20	19	33	33
30	31	33	25	24	40	41
39	40	42	32	31	51	53
51	50	54	42	40	65	67
54	53	57	44	42	68	70
66	61	66	53	50	79	83
75	67	73	59	56	87	91
90	74	81	68	63	97	103
105	79	87	75	70	105	112

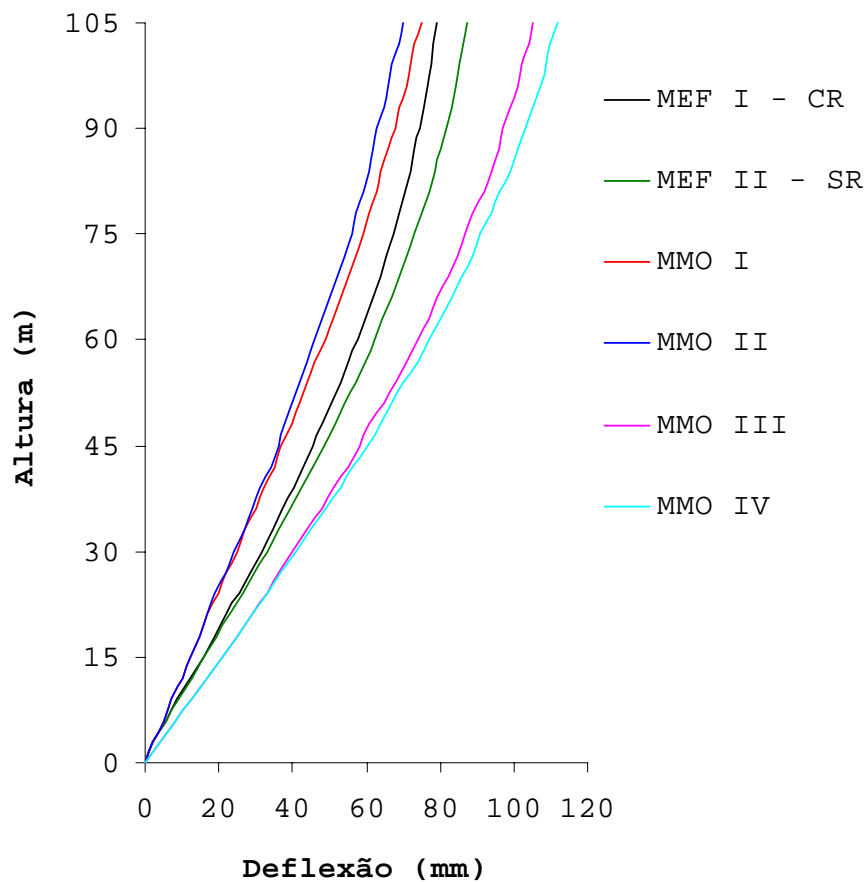


Figura 24 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aperticada de 35 andares - Exemplo 1.

Exemplo 2

Uma estrutura tubular aperticada de 15 andares, construída com aço estrutural, é analisada. Para todas as vigas e colunas foi usado o perfil CVS 550x400x220 kg/m, padrão da Usiminas Mecânica, com as seguintes propriedades e dimensões: $I_x=154600\text{cm}^4$, $I_y=26680\text{cm}^4$, $A=280\text{cm}^2$, $A_{vc}=A_{vv}=80\text{cm}^2$, $d=550\text{mm}$, $t_f=25\text{mm}$, $b_f=400\text{mm}$, $t_w=16\text{mm}$, $h=500\text{mm}$. A altura de cada andar é de 3,0m e os espaçamentos entre as colunas é de 2,5m. Os módulos de Young e cisalhante do material são 210GPa e 80GPa, respectivamente. Uma carga lateral concentrada no topo igual a 2000kN é aplicada no painel de flange da estrutura, na direção x. As dimensões da estrutura estão mostradas na Figura 25.

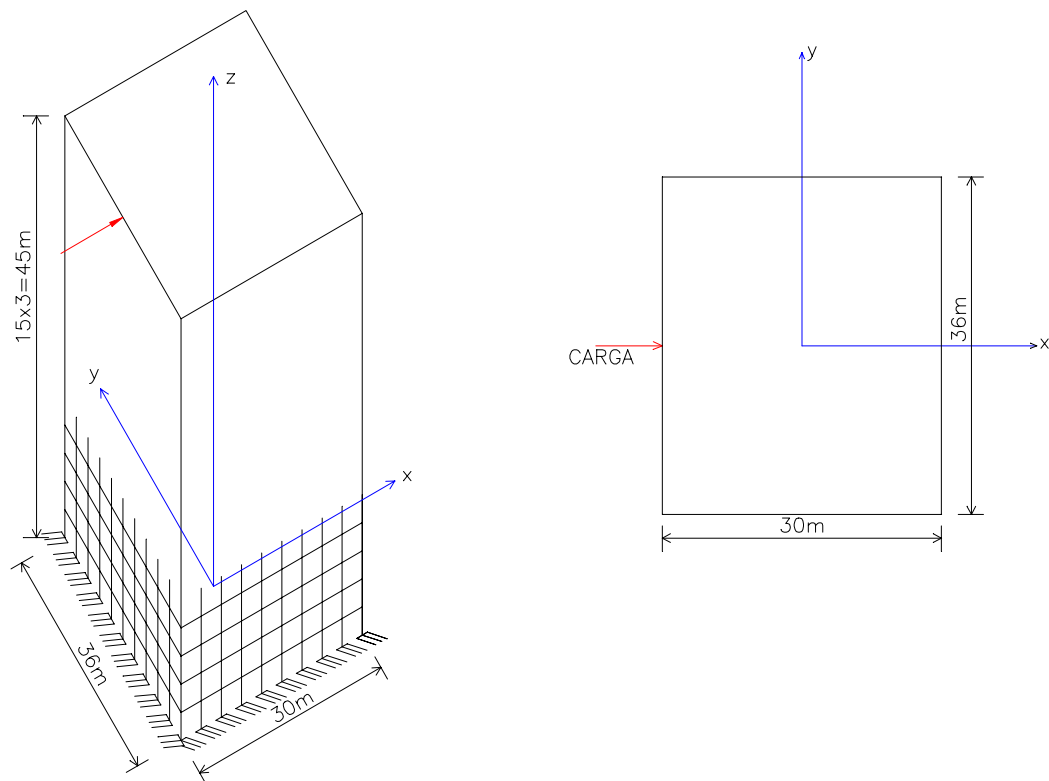


Figura 25- Estrutura tubular analisada de 15 andares.

As propriedades elásticas equivalentes, obtidas usando o método dado no item 3.5, são

$$E_w = E_f = 210\text{GPa}$$

$$t_w = t_f = 0,0112\text{m}$$

Os valores do módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente da membrana, dos parâmetros de rigidez relativa ao cortante, assim como dos coeficientes *shear lag*, obtidos através da Figura 17, para os painéis de alma e de flange empregando os métodos da membrana ortotrópica estão mostrados na Tabela 3, a seguir

Tabela 3 - Valores do módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente da membrana, dos parâmetros de rigidez relativa ao cortante, dos coeficientes *shear lag* para os painéis da alma e de flange.

Métodos	$G_w=G_f$ (GPa)	m_w	m_f	α_1	α_2	β_1	β_2
MMO I e II	7,05	0,21	0,30	1,06	0,90	1,00	0,95
MMO III e IV	4,61	0,14	0,20	1,21	1,09	1,08	1,03

As deflexões laterais da estrutura são calculadas pela Eq.(177) e estão plotadas na Figura 26. Pelo método proposto, têm-se quatro resultados: o primeiro considera a largura da coluna e a altura da viga no cálculo do módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente e não considera as colunas das extremidades dos painéis, ou seja, $A_x=0$ (MMO I). O segundo também considera a largura da coluna e altura da viga e ainda a área da seção da coluna da extremidade (MMO II). O terceiro método proposto não considera a largura da coluna e a altura da viga no cálculo do módulo de elasticidade ao cisalhamento equivalente e considera as colunas das extremidades dos painéis (MMO III). Finalmente, o quarto método proposto não considera a

largura da coluna, a altura da viga e as colunas das extremidades dos painéis (MMO IV). Nessa figura estão representados dois resultados obtidos a partir da análise de pórtico espacial usando elementos finitos. O primeiro foi obtido utilizando-se os nós do diafragma com restrição para a translação em z e, rotações em x e z (MEF I - CR). Com relação a este resultado, o MMO I subestimou a deflexão lateral máxima em aproximadamente 15%, o MMO II subestimou em 19%, o MMO III superestimou a deflexão lateral máxima em 19% e o MMO IV a superestimou em 23%. O segundo método foi obtido usando os nós do diafragma sem restrição (MEF II - SR). Para este resultado, o MMO I subestimou a deflexão lateral máxima em 8%, o MMO II a subestimou em aproximadamente 12,5%, o MMO III a superestimou em 29% e o MMO IV a superestimou em 33%.

Tabela 4 - Valores da deflexão lateral obtidos pelos métodos da membrana ortotrópica e elementos finitos para a estrutura de 15 andares.

Altura (m)	Deflexão Lateral (mm)					
	MEF I-CR	MEF II-SR	MMO I	MMO II	MMO III	MMO IV
0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	2	2
6	3	2	3	3	4	4
9	4	4	4	4	6	6
15	8	7	7	7	10	10
21	12	11	10	9	14	14
24	13	12	11	11	16	17
30	17	16	14	14	21	21
36	21	19	17	17	25	26
42	25	24	20	20	29	30
45	26	24	22	21	31	32

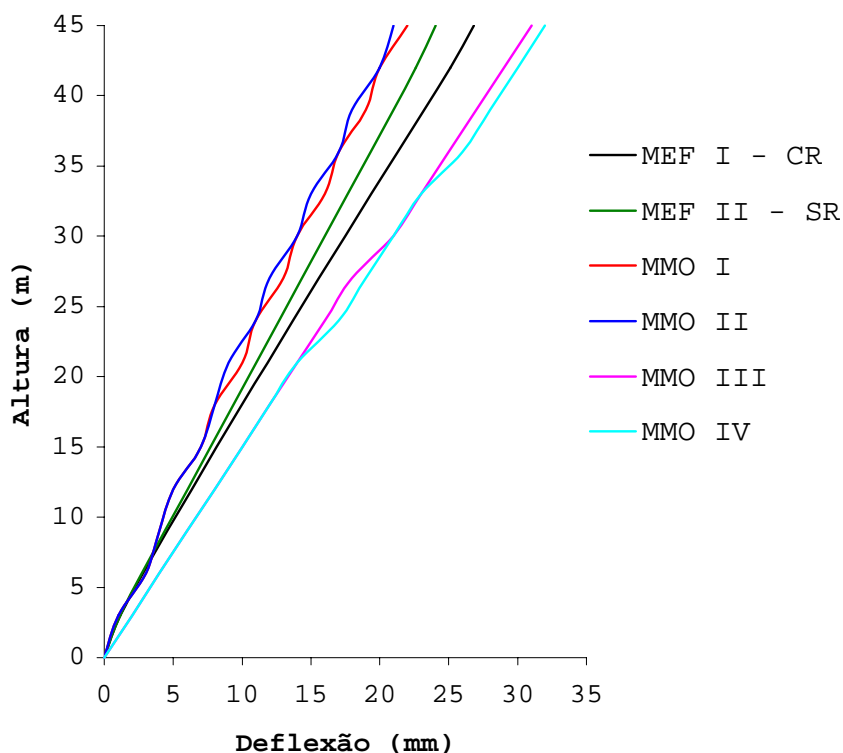


Figura 26 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aperticada de 15 andares - Exemplo 2.

Os demais exemplos foram calculados usando o MEF I - CR e o MMO I, descritos acima. A comparação dos resultados foi feita apenas com estes dois métodos porque eles apresentaram melhores resultados, em relação aos outros estudados.

Exemplo 3

Uma estrutura tubular aperticada de 35 andares, construída com aço estrutural, é analisada. Para as vigas foi usado o perfil CVS 1000x600x377 kg/m, padrão da Usiminas Mecânica, com as seguintes propriedades e dimensões: $I_x=848900\text{cm}^4$, $I_y=90050\text{cm}^4$, $A=481\text{cm}^2$, $A_{vv}=180,5\text{cm}^2$, $d=1000\text{mm}$, $t_f=25\text{mm}$, $b_f=600\text{mm}$, $t_w=19\text{mm}$, $h=950\text{mm}$. Para as colunas foi usado o perfil CVS 800x500x357 kg/m, padrão da Usiminas Mecânica, com as seguintes

propriedades e dimensões: $I_x=528700\text{cm}^4$, $I_y=65670\text{cm}^4$, $A=455\text{cm}^2$, $A_{vc}=140,03\text{cm}^2$, $d=800\text{mm}$, $t_f=31,5\text{mm}$, $b_f=500\text{mm}$, $t_w=19\text{mm}$, $h=737\text{mm}$. A altura de cada andar é de 3,0m e os espaçamentos entre as colunas é de 2,5m. Os módulos de Young e cisalhante do material são 210GPa e 80GPa, respectivamente. Uma carga lateral de 100kN/m uniformemente distribuída é aplicada no painel de flange da estrutura, na direção x. As dimensões dos painéis de alma e de flange são as mesmas mostradas na Figura 23. As propriedades elásticas equivalentes, obtidas usando o método dado no item 3.5, são

$$E_w = E_f = 210\text{GPa}$$

$$G_w = G_f = 14,94\text{GPa}$$

$$t_w = t_f = 0,0182\text{m}$$

Para essas propriedades, os parâmetros de rigidez relativa ao cortante são

$$m_w = 3,487, \quad m_f = 1,962$$

Os coeficientes *shear lag* são então determinados através da Figura 17:

$$\alpha_1 = 0,44 \quad \alpha_2 = 0,05$$

$$\beta_1 = 0,75 \quad \beta_2 = 0,36$$

As deflexões laterais da estrutura são, então, calculadas pela Eq. (180). Os resultados obtidos pelos métodos MMO I e MEF I - CR, estão plotados na Figura 27. Comparando os dois métodos, verificou-se que o MMO I subestimou a deflexão lateral máxima calculada por MEF I - CR em aproximadamente 6%. A tabela 5 mostra, resumidamente, os valores obtidos pelos dois métodos, em diferentes alturas.

Tabela 5 - Valores da deflexão lateral obtidos pelos métodos da membrana ortotrópica e elementos finitos para a estrutura de 35 andares.

Altura (m)	Deflexão Lateral (mm)	
	MMO I	MEF I - CR
0	0	0
9	6	8
18	12	16
27	19	24
36	25	32
45	31	39
54	37	46
63	43	51
75	50	58
81	54	61
90	58	64
96	61	66
105	65	69

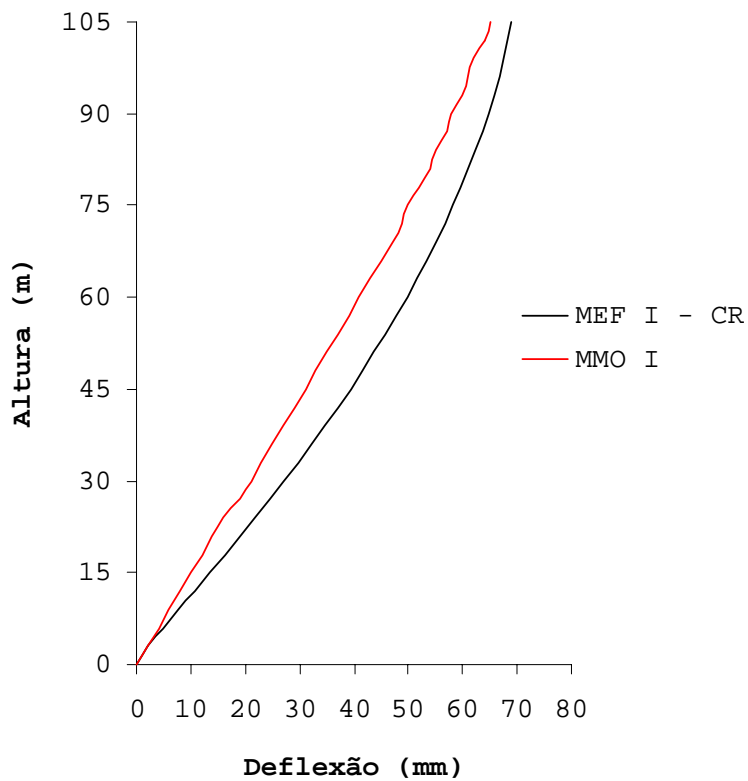


Figura 27 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aperticada de 35 andares - Exemplo 3.

Exemplo 4

Uma estrutura tubular aporticada de 25 andares, construída com aço estrutural foi analisada. Para as vigas foi usado o perfil CVS 700x450x318 kg/m, padrão da Usiminas Mecânica, com as seguintes propriedades e dimensões: $I_x=357900\text{cm}^4$, $I_y=47880\text{cm}^4$, $A=405\text{cm}^2$, $A_{vv}=121,03\text{cm}^2$, $d=700\text{mm}$, $t_f=31,5\text{mm}$, $b_f=450\text{mm}$, $t_w=19\text{mm}$, $h=637\text{mm}$. Para as colunas foi usado o perfil CVS 750x500x350 kg/m, padrão da Usiminas Mecânica, com as seguintes propriedades geométricas: $I_x=458100\text{cm}^4$, $I_y=65660\text{cm}^4$, $A=446\text{cm}^2$, $A_{vc}=130,53\text{cm}^2$, $d=500\text{mm}$, $t_f=31,5\text{mm}$, $b_f=500\text{mm}$, $t_w=19\text{mm}$, $h=687\text{mm}$. A altura de cada andar é de 3,0m e os espaçamentos entre as colunas é de 2,5m. Os módulos de Young e cisalhante do material são 210GPa e 80GPa, respectivamente. Uma carga lateral de 120kN/m uniformemente distribuída é aplicada no centro do painel de flange da estrutura, na direção x. As dimensões dos painéis de alma e de flange são 25m e 30m, respectivamente. As propriedades elásticas equivalentes, obtidas usando o método dado no item 3.5, são

$$E_w = E_f = 210\text{GPa}$$

$$G_w = G_f = 80\text{GPa}$$

$$t_w = t_f = 0,0178\text{m}$$

Para essas propriedades, os parâmetros de rigidez relativa ao cortante são

$$m_w = 1,717$$

$$m_f = 1,193$$

Os coeficientes *shear lag* são então determinados através da Figura 17:

$$\alpha_1 = 0,65 \quad \alpha_2 = 0,14$$

$$\beta_1 = 0,85 \quad \beta_2 = 0,52$$

As deflexões laterais da estrutura são, então, calculadas pela Eq. (180). Os resultados obtidos pelos métodos MMO I e MEF I - CR, estão plotados na Figura 28. Comparando os dois métodos, verificou-se que o MMO I subestimou a deflexão lateral máxima calculada por MEF I - CR em aproximadamente 15%. A tabela 6 mostra, resumidamente, os valores obtidos pelos dois métodos, em diferentes alturas.

Tabela 6 - Valores da deflexão lateral obtidos pelos métodos da membrana ortotrópica e elementos finitos para a estrutura de 25 andares.

Altura (m)	Deflexão Lateral (mm)	
	MMO I	MEF I - CR
0	0	0
9	9	10
18	18	23
27	27	34
36	35	44
45	42	52
51	46	57
54	48	59
69	56	67
72	58	68
75	59	69

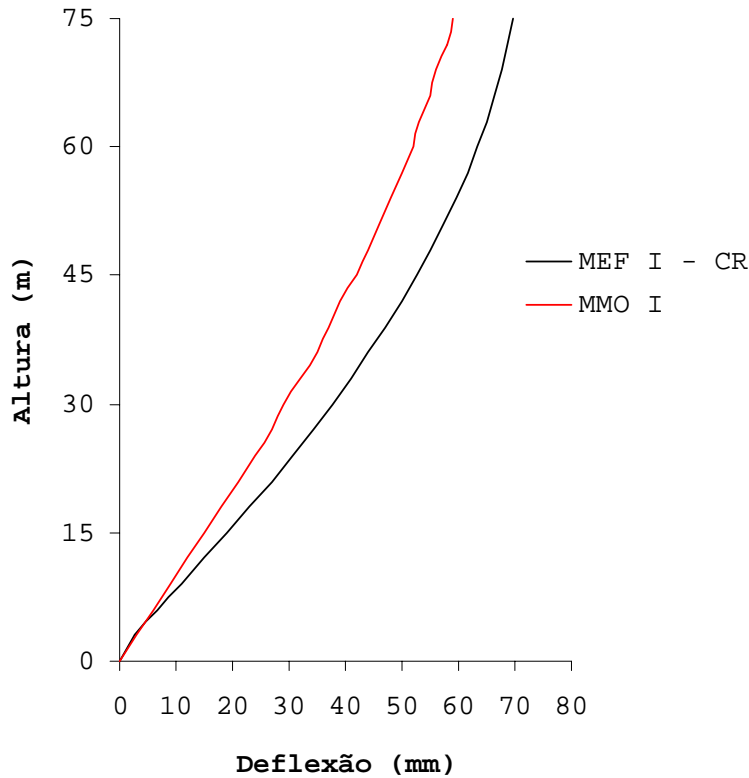


Figura 28 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aperticada de 25 andares - Exemplo 4.

Exemplo 5

Uma estrutura tubular aperticada de 20 andares, construída com aço estrutural, é analisada. Para todas as vigas e colunas foi usado o perfil CVS 650x450x326 kg/m, padrão da Usiminas Mecânica, com as seguintes propriedades e dimensões: $I_x=309100\text{cm}^4$, $I_y=47900\text{cm}^4$, $A=415\text{cm}^2$, $A_{vv}=A_{vc}=131,49\text{cm}^2$, $d=650\text{mm}$, $t_f=31,5\text{mm}$, $b_f=450\text{mm}$, $t_w=22,4\text{mm}$, $h=637\text{mm}$. A altura de cada andar é de 3,0m e os espaçamentos entre as colunas é de 2,4m. Os módulos de Young e cisalhante do material são 210GPa e 80GPa, respectivamente. Uma carga lateral de 200kN/m triangular distribuída é aplicada no centro do painel de flange da estrutura. As dimensões dos painéis de alma e de flange são 24m e 28,80m, respectivamente.

As propriedades elásticas equivalentes, obtidas usando o método dado no item 3.5, são

$$E_w = E_f = 210\text{GPa}$$

$$G_w = G_f = 9,54\text{GPa}$$

$$t_w = t_f = 0,0173\text{m}$$

Para essas propriedades, os parâmetros de rigidez relativa ao cortante são

$$m_w = 1,136, \quad m_f = 0,789$$

Os coeficientes *shear lag* são então determinados através da Figura 17:

$$\alpha_1 = 0,70 \quad \alpha_2 = 0,23$$

$$\beta_1 = 0,90 \quad \beta_2 = 0,66$$

As deflexões laterais da estrutura são, então, calculadas pela Eq. (183). Os resultados obtidos pelos métodos MMO I e MEF I - CR, estão plotados na Figura 29. Comparando os dois métodos, verificou-se que o MMO I subestimou a deflexão lateral máxima calculada por MEF I - CR em aproximadamente 20%. A tabela 7 mostra, resumidamente, os valores obtidos pelos dois métodos, em diferentes alturas.

Tabela 7 - Valores da deflexão lateral obtidos pelos métodos da membrana ortotrópica e elementos finitos para a estrutura de 20 andares.

Altura (m)	Deflexão Lateral (mm)	
	MMO I	MEF I -CR
0	0	0
9	7	9
15	12	16
21	18	23
27	23	30
30	25	33
36	30	39
42	34	44
48	38	49
54	41	52
60	43	54

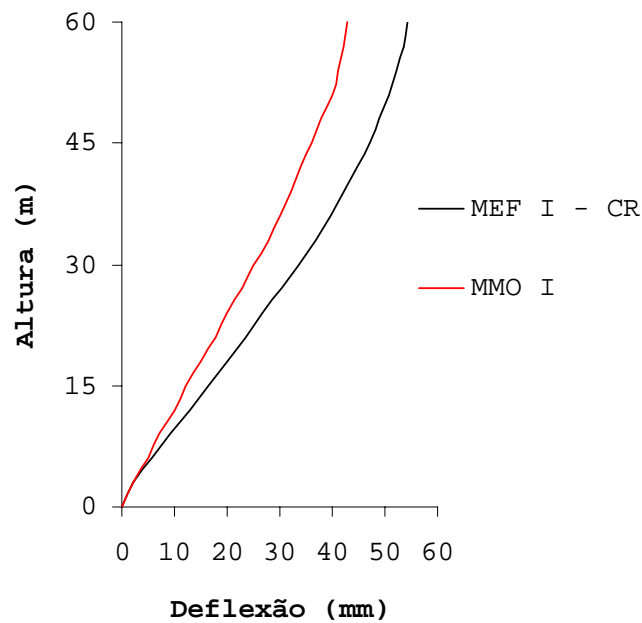


Figura 29 - Análise da deflexão lateral da estrutura tubular aperticada de 20 andares - Exemplo 5.

6- CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1- Conclusões

Os exemplos numéricos efetuados permitem concluir que o método proposto aplica-se ao cálculo da deflexão lateral de edifícios de aço de média altura com precisão aceitável em relação ao Método de Elementos Finitos.

O método proposto foi avaliado em quatro situações distintas, considerando painéis ortotrópicos equivalentes à estrutura aporticada original com e sem as colunas de canto e com módulos de elasticidade transversal com e sem a correção da altura da viga e da largura da coluna [métodos MMO I, II, III e IV - vide Capítulo 5].

Os modelos dos edifícios pelo método de elementos finitos consideram duas hipóteses: com restrição para translação em z e rotações em x e z nos nós dos diafragmas, de modo a simular uma "viga em balanço" [MEF I - CR], e sem restrição [MEF II - SR].

Os resultados numéricos da análise da deflexão lateral de um edifício de 35 andares indicam que a maior proximidade entre as deflexões laterais existe para os valores calculados pelo MEF I - CR e pelo MMO I. Nesse caso, o erro máximo na deflexão lateral foi de 5%. No caso do edifício de 15 andares analisado, o erro do MMO I em relação ao MEF I - CR foi de 15% e em relação ao MEF II - SR foi de apenas 8%, indicando que a precisão do método MMO I diminui com a altura do edifício em relação ao MEF I - CR, mas aumenta em relação ao MEF II - SR.

A consideração de edifícios de altura superior a 15 andares e inferior a 35 andares indica que o MMO I apresenta erros médios da deflexão lateral calculada da ordem de 12,5%.

6.2- Sugestões

Tendo em vista as conclusões acima, sugere-se prosseguir a pesquisa do método da membrana ortotrópica equivalente com o estudo dos seguintes tópicos:

[a] análise de tensões em vigas e colunas calculadas pelo método proposto;

[b] formulação do método para considerar faixas de alturas distintas, permitindo a variação das propriedades geométricas das colunas e das vigas em função da altura;

[c] análise da viabilidade econômica da estrutura tubular para edifícios de média altura.

7- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Coull, A. & Subedi, N. K. (1971). "Framed-tube structures for high-rise buildings." *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 97(8), 2097-2105.
- [2] - Khan, F. R. & Amin, N. R. (1973). "Analysis and design of frame tube structures for all concrete buildings." *Struct. Eng.*, 51(3), 85-92.
- [3] - Chan. P. C. K., Tso. W. K., & Heidebrecht, A. C. (1974). "Effect of normal frames on shear walls." *Building Sci.*, Vol. 9,197-209.
- [4] - Coull, A. & Bose, B. (1975). "Simplified analysis of frame-tube structures. " *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 101(11), 2223-2240. "Torsion of frame-tube structures. " *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 102(12), 2366-2370.
- [5] - Coull, A. & Ahmed, A. A. (1978). "Deflections of frame-tube structures." *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 104(5), 857-862.
- [6] - Khan, A. H., & Stafford Smith, B. (1976). "A simple method of analysis for deflection and stresses in wall-frame structures." *Building and Envir.*, Vol.11, 69-78.
- [7] - Ha, K. H., Fazio, P. & Moselhi, O. (1978). "Orthotropic membrane for tall building analysis." *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 104(9), 1495-1505.
- [8] - Mancini, E. (1980). "Estrutura tubular de edifícios altos." São Carlos, Escola de Engenharia de São

Carlos-USP.

- [9] - Fakury, R. H. (1986). "Comportamento das estruturas tubulares de edifícios altos sob carregamento lateral." São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.(Dissertação de Mestrado).

- [10] - Kwan, A. K. H. (1994). "Simple method for approximate analysis of framed tube structures." Journal of Structural Engineering, ASCE, 120(4), 1221-1239.

- [11] - Bathe, Klaus-Jürgen (1982). "Finite element procedures in engineering analysis." Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

- [12] - Hinton, E., Owen, D.R.J. (1977). "Finite element programming." United States Edition, San Diego.

- [13] - Zienkiewics, O. C., Taylor, R. L. (1989). "The finite element method." McGraw-Hill International Editions, Vol.I.

- [14] - Bowles, J. E.(1989). Diseño de acero estructural. Noriega Editores, México.

- [15] - Taranath, Bungale. S. (1988). "Structural analysis and design of tall buildings." McGraw-Hill International Editions.

- [16] - Timoshenko, Stephen P., Gere, James E. (1984). "Mecânica dos Sólidos." Livros Técnicos e Científicos Editora - Vol. I e II.

- [17] - Hart, F., Henn, W., Santag, H. (1976). "El atlas de la construcción metálica. " Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona.

- [18] - Gere, James M., Weaver, William, Jr. (1981). "Análise de estruturas reticuladas." Editora Guanabara Dois S.A.
- [19] - McCormac, Jack C. (1992). "Structural Steel Design - ASD Method." Harper Collins Publishers, Inc.
- [20] - Hehl, M. E. (1986). "Linguagem de Programação Estruturada: FORTRAN 77" McGraw Hill.