

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE TORRES
METÁLICAS ELEVADAS SOB CARGA LATERAL**

por

Eng^a Wanderlene Urbana Novais

orientada por

Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia

Maio, 1998.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE TORRES
METÁLICAS ELEVADAS SOB CARGA LATERAL**

por

Eng^a Wanderlene Urbana Novais

orientada por

Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia

Maio, 1998.

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE TORRES METÁLICAS ELEVADAS
SOB CARGA LATERAL**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Mestrado em Construção Metálica do Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia
Orientador, EM/UFOP

Prof. Dr. Arlene Maria Sarmanho Freitas
EM/UFOP

Prof. Dr. Francisco Carlos Rodrigues

EE/UFMG

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia, pela dedicação e confiança ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço às pessoas que me apoiaram, em especial a Helenice, Analúcia, Marcelo, Hisashi, Pedro Paulo, Júlio e a minha família.

Agradeço à USIMINAS pelo apoio e incentivo à pesquisa.

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE TORRES METÁLICAS ELEVADAS
SOB CARGA LATERAL**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Mestrado em Construção Metálica do Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia
Orientador, EM/UFOP

Prof. Dr. Arlene Maria Sarmanho Freitas
EM/UFOP

Prof. Dr. Francisco Carlos Rodrigues

EE/UFMG

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Maria Claret de Gouvêia, pela dedicação e confiança ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço às pessoas que me apoiaram, em especial a Helenice, Analúcia, Marcelo, Hisashi, Pedro Paulo, Júlio e a minha família.

Agradeço à USIMINAS pelo apoio e incentivo à pesquisa.

1 - INTRODUÇÃO

Os tanques elevados são usados em sistemas de abastecimento de água, principalmente em regiões planas onde a atividade agrícola é intensa. Nesses lugares, as torres de sustentação dos tanques freqüentemente são estruturas de altura entre 10 e 25m, com cargas totais entre 100 e 500 toneladas. Tem-se também amplo emprego de tanques elevados no armazenamento de petróleo e derivados, e as torres de sustentação são estruturas de altura entre 12 e 15m. No Brasil, estas estruturas estão sujeitas a cargas verticais próprias e a cargas laterais decorrentes dos ventos.

Tradicionalmente, as torres elevadas para o suporte de caixas d'água são feitas de concreto armado e, no caso das de menor altura, de madeira. O concreto armado utilizado para esse fim não é um material adequado já que essas torres são, em geral, construídas em lugares remotos em função da captação de água e das estações de elevação. A construção de torres elevadas aperticadas em concreto armado, ao contrário das torres tubulares, que podem usar formas deslizantes, é consideravelmente lenta e exige mão-de-obra significativa.

Apesar das dificuldades inerentes ao uso do concreto armado, os reservatórios e as estruturas de torres elevadas sempre foram feitos desse material por causa dos problemas de corrosão do aço comum. Com o surgimento dos aços resistentes à corrosão atmosférica, os tanques metálicos adquiriram grande aceitação no mercado, porque são leves e podem ser montados com relativa rapidez. A estrutura da torre pode ser feita em aço, mesmo quando o tanque é de concreto armado.

1.1 - Objetivos

Com o intuito de gerar tecnologia visando o desenvolvimento do uso do aço, discute-se aqui a utilização de um método simplificado para a análise de esforços solicitantes em torres elevadas metálicas. O cálculo rigoroso das torres elevadas é feito pelo método de elementos finitos, considerando-as pórticos espaciais, o que exige programas de computador específicos, com maior consumo de tempo. O método simplificado, sendo suficientemente preciso, atua a favor da popularização do uso do aço, já que o projeto, a fabricação e a montagem das torres elevadas metálicas podem ser interiorizados no País. Sendo assim, pretende-se, neste trabalho,

a) formular um método aproximado para o cálculo de torres elevadas e verificar sua aplicabilidade;

(b) formular um método para análise de anel de fechamento;

(c) desenvolver um programa para análise de torres metálicas elevadas de base poligonal e de anel de sustentação sob cargas laterais.

1.2 - Revisão Bibliográfica

Apresenta-se, neste trabalho, uma abordagem específica da análise e do projeto de torres metálicas elevadas, pouco freqüente na literatura técnica.

Biezeno e Grammel [1] apresentaram a formulação analítica que permite calcular os esforços solicitantes no anel de

sustentação do tanque. O anel de sustentação é modelado como uma barra de grande curvatura sobre a qual atuam cargas horizontais e verticais. Em 1971, **Ruggeri** [2], seguindo os passos de Biezeno e Grammel, apresentou um método numérico para o cálculo dos esforços no anel de sustentação em seções que correspondem aos limites de setores circulares previamente escolhidos.

Stamato [3] descreveu a distribuição de cargas de vento entre painéis de contraventamento, o que é importante na conceituação do método simplificado de **Sameer e Jain** [4] que será discutido aqui pormenorizadamente.

Recentemente, **Guimarães** [5] estudou, em sua dissertação de mestrado, o dimensionamento de reservatórios de concreto armado, com ênfase para o controle da fissuração.

A resistência a esforços laterais é a condição mais importante na análise de cargas e no dimensionamento de torres metálicas elevadas para o suporte de tanques. Nos países onde há atividade sísmica considerável, o estudo de métodos de análise específicos para esse tipo de estrutura é freqüente. Citam-se os trabalhos de **Blume et al.** [6] e **McLeod** [7] que apresentam métodos aproximados de análise de pórticos planos cuja aplicação em torres elevadas somente pode ser feita com elevado grau de imprecisão. A partir de 1970, os métodos analíticos tenderam a ser mais exatos quanto aos modelos físicos, mas podem oferecer simplificações decorrentes da geometria das torres.

Diversos trabalhos tratam as torres metálicas elevadas como estruturas aporticadas, mas adotam as seguintes hipóteses simplificadoras:

- (a) a força axial nas colunas é proporcional à sua distância até o eixo de flexão;
- (b) o ponto de inflexão nas colunas e o das vigas situam-se no meio da altura e do vão, respectivamente;
- (c) o cortante lateral é igualmente distribuído por todas as colunas.

Entre os trabalhos que utilizam essas hipóteses simplificadoras, citam-se o de **Ramaiah e Gupta** [8], **Hilal** [9], **Handa** [10] e **Dayaratnam** [11]. Ainda que a hipótese (a) seja aceitável, a hipótese (b) não é adequada aos painéis da base e do topo. Esse fato leva a uma distribuição não uniforme do cortante entre as colunas, invalidando a hipótese (c).

Algumas análises rigorosas feitas por elementos finitos mostram que a rigidez na torção das vigas influi muito pouco sobre a distribuição do cortante nas colunas. **Krishna e Jain** [12] tratam a torre como uma viga em balanço e distribuem o cortante nas vigas como se fosse na seção transversal de uma viga. Demonstrou-se que isso é válido para torres com muitas colunas, mas muito conservador no caso de poucas.

O cálculo impreciso das forças cortantes nas colunas leva a erros consideráveis no cálculo das forças axiais e dos momentos nas colunas. Para contornar esta dificuldade, **Sameer e Jain** [4] propõem um método para o cálculo de torres poligonais em que as colunas são engastadas na base e as forças axiais nas colunas são calculadas com base na hipótese (a). Entretanto, a força cortante nas vigas é obtida por equilíbrio vertical de cada painel considerado isoladamente e as forças cortantes nas colunas por equilíbrio de momentos no plano de flexão.

O método aproximado de **Sameer e Jain** [4] é particularmente considerado nessa dissertação e os seus resultados são comparados com resultados obtidos por meio do Método de Elementos Finitos e do Método da Viga Engastada. A sua formulação matemática é apresentada integralmente. Desenvolveu-se um programa de computador para sua aplicação em casos reais.

1.3 - Classificação das Estruturas

As estruturas aporricadas de base poligonal para a sustentação de tanques elevados usualmente têm número par de colunas, N_c . Neste trabalho, classificam-se essas estruturas em dois grupos, a saber:

(a) grupo 1 - quando $N_c / 2$ é ímpar;

(b) grupo 2 - quando $N_c / 2$ é par.

Para qualquer uma das classes de estrutura, o eixo de flexão, devido à carga lateral pode ser escolhido entre dois casos:

(a) caso 1 - passando pelo meio do vão de duas vigas paralelas ;

(b) caso 2 - passando através de colunas diametralmente opostas.

Para ambos os grupos, a força cortante de projeto e, conseqüentemente, o momento fletor de projeto nas vigas são críticos quando o eixo de flexão passa pelo meio do vão de duas vigas paralelas opostas. Esses mesmos esforços nas colunas são críticos, quando o eixo de flexão passa por duas colunas diametralmente opostas. Para o grupo 1, as forças

axiais nas colunas são críticas quando o eixo de flexão passa por duas vigas paralelas opostas, e, para o grupo 2, quando o eixo de flexão passa por duas colunas diametralmente opostas. Na Figura 1, indicam-se os casos em que se tem direção crítica para

(a) força cortante nas vigas e força axial nas colunas;

(b) força cortante nas colunas;

(c) força cortante nas vigas;

(d) força cortante e força axial nas colunas.

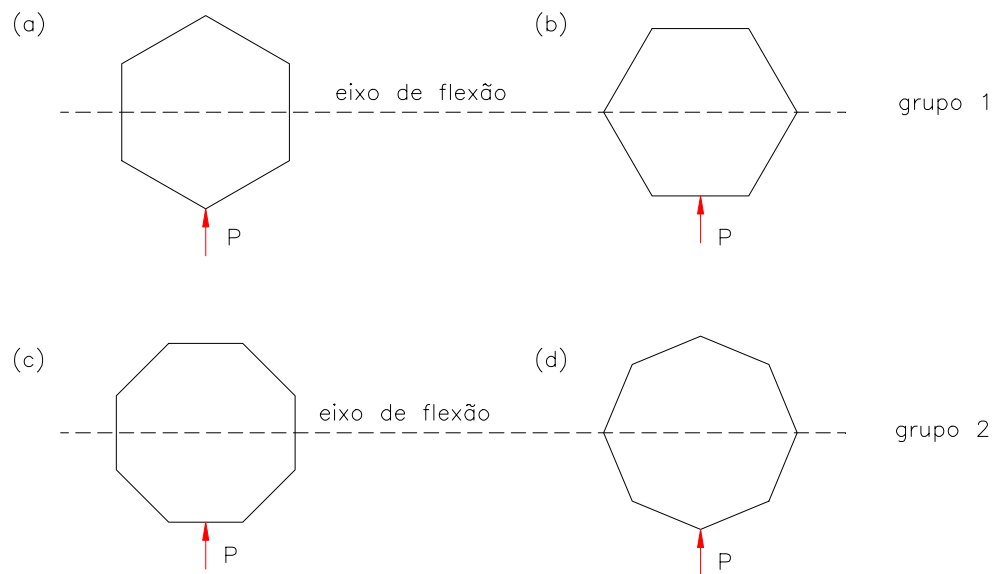


Figura 1 - Classificação da estrutura.

2- MÉTODOS ANALÍTICOS

2.1 - Método de Elementos Finitos

A aplicação do Método de Elementos Finitos em torres elevadas para sustentação de tanques pode ser feita com o emprego de um elemento de pórtico espacial com 6 graus de liberdade por nó. O carregamento, nesse caso, pode ser qualquer um e, a não ser pelo esforço computacional, não há limitação de uso do método.

A análise do tanque pode ser incluída por meio de programas que permitam o acoplamento de diferentes elementos.

O Método de Elementos Finitos não será detalhado nesta dissertação, pois existe extensa bibliografia sobre o assunto. O programa SAP-90 foi utilizado para a geração de resultados que servem de termo de comparação para aqueles gerados pelo método aproximado aqui abordado.

A interiorização da construção metálica como meio de expansão do seu consumo exige a disponibilidade de escritórios de projeto e cálculo, fábricas e empresas montadoras. Para empreendimentos de pequeno porte, em que a interiorização é numerosa, o projeto e o cálculo, em geral, são feitos por elementos não especializados da mesma equipe de fabricação e montagem. Nesse caso, métodos aproximados e seguros são a ferramenta básica, razão pela qual, apesar da existência de métodos precisos como o de Elementos Finitos, ainda se justifica a pesquisa de métodos aproximados.

2.2 - Método Portal

Neste método têm-se as seguintes suposições:

(a) o ponto de inflexão está localizado no meio das vigas e colunas; e

(b) a força cortante nas colunas é distribuída de modo racional.

Com relação ao item b, alguns engenheiros consideram a força cortante nas colunas externas igual à metade da força cortante em uma coluna interna, enquanto outros consideram-na distribuída proporcionalmente à largura da área de influência. Para vãos diferentes, a suposição anterior resulta em tensões diretas nas colunas internas iguais à diferença das forças cortantes nas vigas em cada lado da coluna. A última suposição mantém as colunas internas livres de tensões diretas.

2.3 - Método da Viga Engastada

Neste método, a análise do pórtico sujeito à carga horizontal é feita considerando que:

(a) o ponto de inflexão está no meio do vão de cada viga e no meio da altura de cada coluna;

(b) as tensões diretas nas colunas variam com a distância até o eixo central do pórtico e todas as colunas no mesmo pavimento têm área igual.

Usando estas suposições, o pórtico fica estaticamente determinado, e as forças diretas, forças cortantes e momentos, são determinados por considerações de equilíbrio.

3 - MÉTODO APROXIMADO PROPOSTO

3.1- Indeterminação Estática

As estruturas de tanques discutidas neste trabalho são estruturas aporticadas, tendo um número par de colunas verticais igualmente espaçadas ao longo do perímetro de um círculo. As colunas adjacentes são conectadas por vigas horizontais, que são cordas do círculo, a um ou mais níveis. Neste trabalho, os painéis são numerados a partir da base, isto é, o painel da base é o primeiro e o j -ésimo nível de contraventamento é o que está entre o j -ésimo e o $(j+1)$ -ésimo painéis.

As colunas são consideradas engastadas no nível do terreno, em face da rigidez da fundação, e restringidas contra rotação no nível superior, uma vez que o tanque atua como um bloco rígido. Os graus de indeterminação da estrutura podem ser eliminados fazendo cortes em cada viga e, assim, reduzindo a estrutura aporticada, originalmente indeterminada, para um número de unidades estruturais determinadas. Como cada corte libera seis forças generalizadas internas desconhecidas, então o total de graus indeterminados é igual a seis vezes o número de cortes necessários para tornar o pórtico determinado.

Considerando que a força cortante e o momento fletor das vigas no plano horizontal são insignificantes, comparados com os das vigas no plano vertical, e que a torção nestas é desprezível, o número de forças desconhecidas em cada corte reduz-se para três: força axial, força cortante e momento fletor no plano vertical (Figura 2).

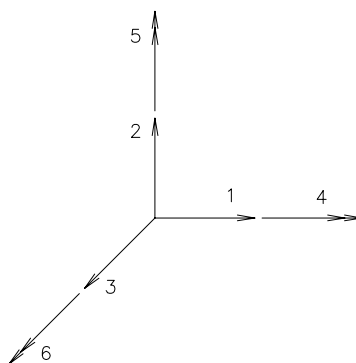


Figura 2 - Forças generalizadas eliminadas: momento de torção(4), força cortante (3), momento fletor (5).

Logo, para uma plataforma com N_c colunas e N_p painéis, o grau de indeterminação é $3N_pN_c$. São obtidas $2N_pN_c$ equações adicionais, considerando a posição do ponto de inflexão nas vigas e colunas, restando assim N_cN_p equações, que são obtidas supondo que a força axial nas colunas seja proporcional à distância da coluna até o eixo de flexão da estrutura. Assim, o pórtico estaticamente indeterminado fica reduzido a uma estrutura determinada e as forças internas podem ser determinadas por simples equações de equilíbrio estático.

3.2 - Força Axial nas Colunas

A força axial nas colunas pode ser determinada usando o método da viga em balanço, que considera a tensão axial na coluna proporcional à distância do ponto de aplicação da carga ao eixo de flexão da estrutura. Como a estrutura tem colunas de seção constante, simetricamente posicionadas, tem-se:

$$F_{ij} = c_j X_i \quad (1)$$

em que: F_{ij} é a força na i -ésima coluna no j -ésimo painel; c_j é a constante de proporcionalidade para o j -ésimo painel que depende da força lateral e da configuração da estrutura; X_i é a distância da i -ésima coluna medida ao longo da direção da força lateral até o eixo de flexão da estrutura.

O momento de tombamento devido a forças laterais em relação ao ponto de inflexão em cada painel é igual ao momento resistente desenvolvido por forças axiais nas colunas. Assim:

$$PH_j = \sum_{i=1}^{N_c} F_{ij}X_i = c_j \sum_{i=1}^{N_c} X_i \quad (2)$$

em que: P é a força lateral atuando no centro de massa do tanque; H_j é igual a distância do ponto de aplicação da força lateral até o ponto de inflexão no j -ésimo painel; N_c é igual ao número de colunas. Substituindo c_j de (2) em (1), tem-se

$$F_{ij} = \frac{PH_jX_i}{\sum_{i=1}^{N_c} X_i^2} \quad (3)$$

Como todas as colunas são localizadas nos vértices de um polígono regular de N_c lados, inscrito em um círculo de raio R , Churchill [12], vale a seguinte relação:

$$\sum_{i=1}^{N_c} X_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^{N_c} \cos^2\beta_i \quad (4)$$

em que β_i é o ângulo que a linha radial da coluna faz com o eixo de flexão.

Consideram-se duas situações:

(a) o eixo de flexão passa através de colunas diametralmente opostas. Nesse caso, analisando a Figura 3a, tem-se

$$\beta_i = k \frac{2\pi}{N_c} \quad (5)$$

em que $k = 0, 1, 2, \dots, N_c - 1$ e $i = k + 1$;

b) o eixo de flexão passa através de duas vigas paralelas opostas. Nesse caso, analisando a Figura 3b, tem-se

$$\beta_i = \frac{\pi}{N_c} + k \frac{2\pi}{N_c} \quad (6)$$

em que $k = 0, 1, 2, \dots, N_c - 1$ e $i = k + 1$.

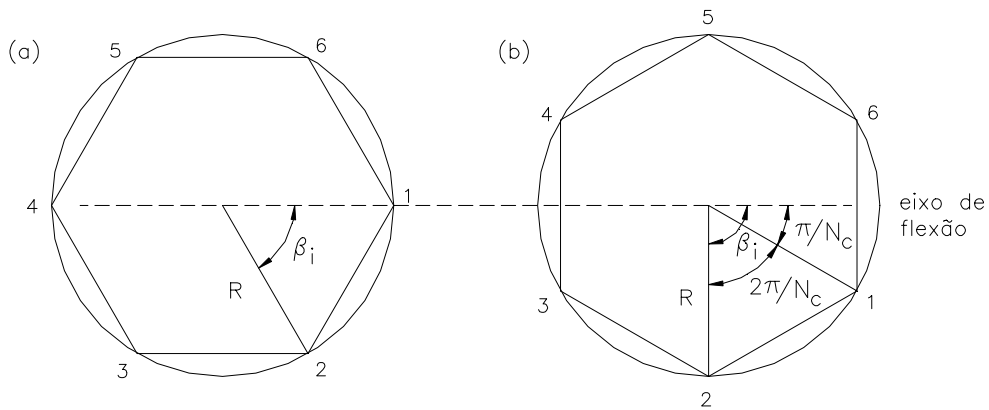


Figura 3 - Eixo de flexão passando através das colunas (a); através de duas vigas (b).

Segundo Churchill [12], no plano complexo, as raízes enésimas do número complexo $Z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, em sua forma polar, sendo $\rho = |Z|$, são os vértices do polígono regular de N_c lados, inscrito no círculo de raio R e valem

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) \right] \quad (7)$$

em que $\sqrt[n]{\rho} = R$, e θ , que é chamado argumento de Z , vale $\theta = 0$ para o caso a e $\theta = \pi$ para o caso b. Logo,

$$\sqrt[n]{Z} = R(\cos \beta_i + i \operatorname{sen} \beta_i) \quad (8)$$

em que β_i é dado na Eq. (5) ou (6).

A 1ª fórmula de Moivre é

$$Z^m = \rho^m (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta) \quad (9)$$

Aplicando-a em (8) tem-se

$$\sqrt[n]{Z^m} = R^m (\cos m\beta_i + i \operatorname{sen} m\beta_i) \quad (10)$$

Para $m=2$ e considerando que o somatório das raízes de um número complexo é nulo, Churchill [12], tem-se

$$\sum_{i=1}^{N_c} \sqrt[n]{Z^2} = R^2 \left(\sum_{i=1}^{N_c} \cos 2\beta_i + i \sum_{i=1}^{N_c} \operatorname{sen} 2\beta_i \right) = 0 \quad (11)$$

e, conseqüentemente,

$$\sum_{i=1}^{N_c} \cos 2\beta_i = 0 \quad (12)$$

Usando a relação trigonométrica

$$\cos 2\beta_i = 2 \cos^2 \beta_i - 1 \quad (13)$$

tem-se

$$\cos^2 \beta_i = \frac{1 + \cos 2\beta_i}{2} \quad (14)$$

Aplicando Σ em todos os termos da Eq. (14), o resultado é

$$\sum_{i=1}^{N_c} \cos^2 \beta_i = \sum_{i=1}^{N_c} \left(\frac{1 + \cos 2\beta_i}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N_c} 1 + \sum_{i=1}^{N_c} \cos 2\beta_i \right) \quad (15)$$

Substituindo a Eq. (12) na Eq. (15), tem-se

$$\sum_{i=1}^{N_c} \cos^2 \beta_i = \frac{N_c}{2} \quad (16)$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{N_c} X_i^2 = \frac{N_c R^2}{2} \quad (17)$$

Substituindo a Eq. (17) na Eq. (3), chega-se a

$$F_{ij} = \frac{2PH_j X_i}{N_c R^2} \quad (18)$$

Observa-se que a força axial máxima ocorre na coluna mais distante do eixo de flexão, quando $X_i = R$. Portanto, a força axial máxima de projeto no j -ésimo painel para ambos os tipos de estrutura mostrados na Figura 2 é obtida por

$$F_j = \frac{2PH_j}{N_c R} \quad (19)$$

Nota-se, a partir da Eq. (18), que a exatidão da força axial nas colunas depende somente da precisão de H_j . A localização do ponto de inflexão é diferente em diferentes colunas num mesmo painel, devido a variação dos graus de restrição lateral em diferentes colunas no nível das vigas. Em painéis intermediários é razoável considerar o ponto de inflexão no meio do vão. Em painéis extremos, da base e do topo, o ponto de inflexão está acima e abaixo do meio do vão, respectivamente. Para esses painéis, calcula-se, Sameer e Jain [4], a posição aproximada do ponto de inflexão pelo método esboçado no item a seguir.

3.3 - Localização do ponto de inflexão em painéis extremos

O método usado para a localização do ponto de inflexão em painéis extremos consiste em modelar o painel do topo e da base como uma coluna equivalente, restringida em um extremo e apoiada por uma mola rotacional na outra extremidade (Figura 4).

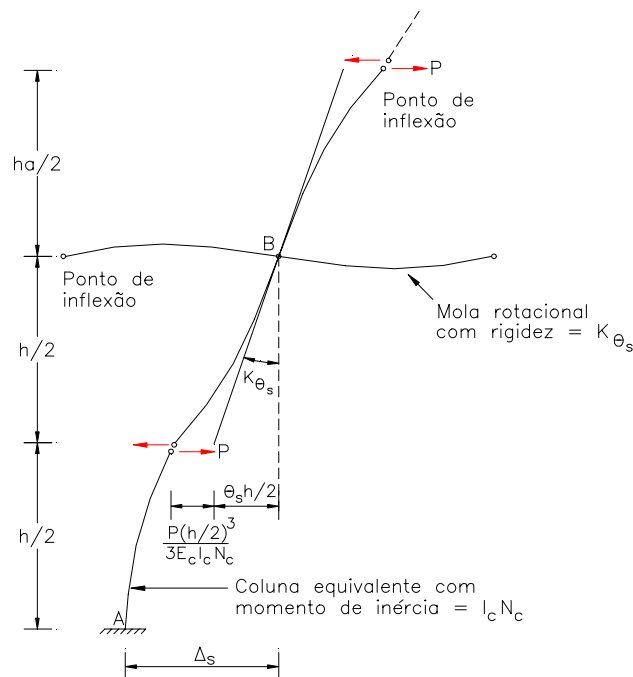


Figura 4 - Determinação do ponto de inflexão para os painéis do topo e da base.

Esta coluna equivalente é tal que o seu momento de inércia é igual à soma dos momentos de inércia de todas as colunas no painel, e a rigidez rotacional da mola é igual à soma das rigidezes rotacionais de um nó no nível das vigas. A rigidez rotacional do nó pode ser obtida somando-se as rigidezes rotacionais no plano de flexão das duas vigas encontradas naquele nó. De início, supõe-se que o ponto de inflexão da coluna equivalente esteja no meio da altura. Obtém-se subsequentemente melhor aproximação para a localização. Devem-se determinar inicialmente Δ_s e θ_s , que são, respectivamente, o deslocamento lateral da estrutura na extremidade contraventada do painel extremo e a rotação da extremidade contraventada da coluna (Figura 5).

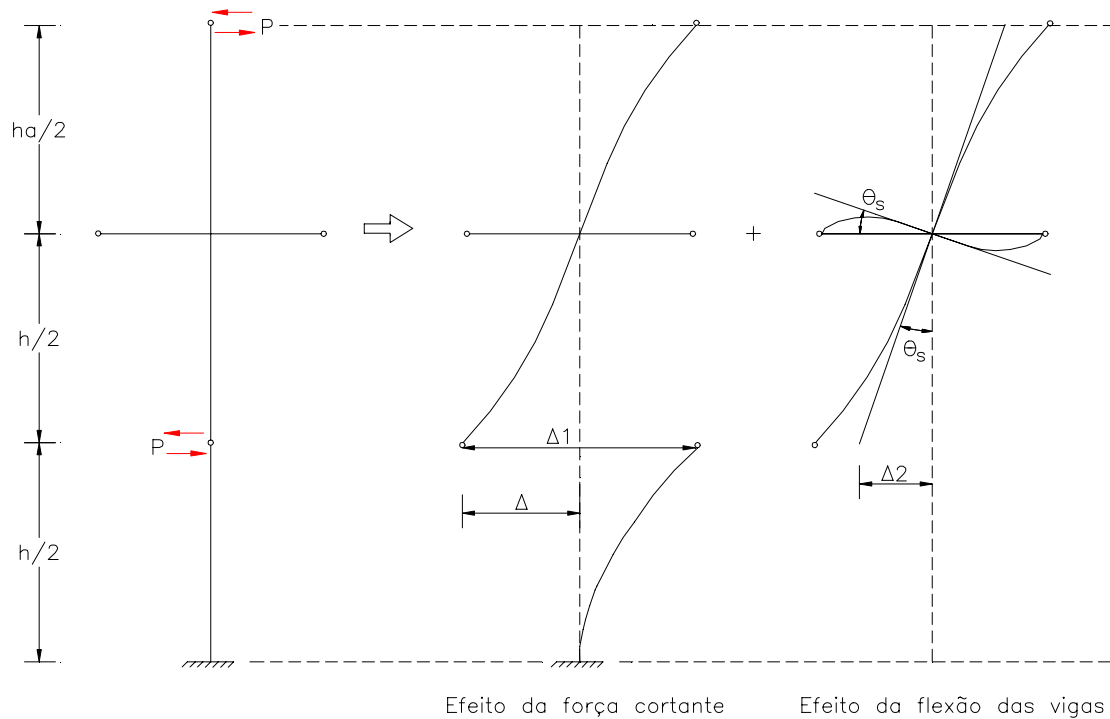


Figura 5 - Efeito da força cortante e flexão das vigas nas

colunas extremas.

3.3.1 Determinação de Δ_s e θ_s

Como se observa na Figura 5, Δ_s é devido à superposição dos efeitos da força cortante sobre as colunas, Δ_1 , e da flexão das vigas, Δ_2 , ou seja,

$$\Delta_s = \Delta_1 + \Delta_2 \quad (20)$$

A parte inferior da coluna no painel da base é modelada como uma barra reta engastada-rotulada, Figura 6. A extremidade rotulada dessa viga equivalente tem um deslocamento Δ , Figura 5, que vale

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{2} \quad (21)$$

Usando o Método das Forças para o cálculo do deslocamento Δ , escolhe-se a reação em B (Figura 6) como a redundante estática o que gera a estrutura estaticamente determinada da Figura 7.

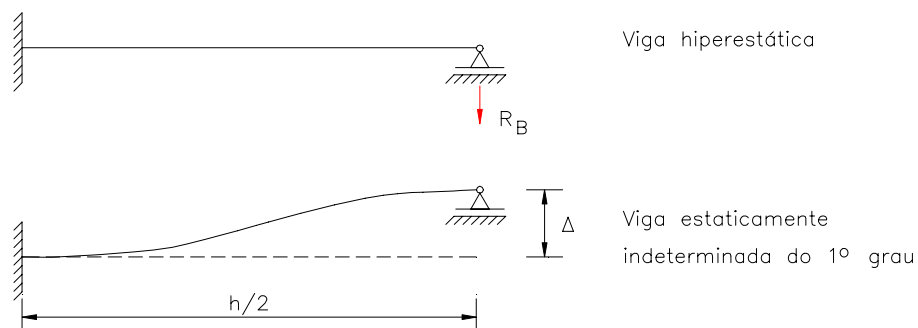


Figura 6 - Viga equivalente às colunas das extremidades.



Figura 7 - Sistema principal correspondente à primeira parte da coluna do painel de base.

Então, a condição de compatibilidade de deslocamentos horizontais no ponto de inflexão da coluna é

$$D_Q = FQ \quad (22)$$

em que D_Q é o deslocamento real correspondente à força cortante e F é a flexibilidade da primeira parte da coluna correspondente à ação redundante Q . Logo

$$D_Q = \Delta \quad (23)$$

Substituindo a Eq. (22) na Eq. (23), tem-se:

$$\Delta = FQ \quad (24)$$

Usando a analogia de Mohr para determinar F (Figura 8), tem-se

$$F = \left(\frac{h}{2EI} \times \frac{h}{2} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{h}{3} = \left(\frac{h}{2} \right)^3 \frac{1}{3EI} \quad (25)$$

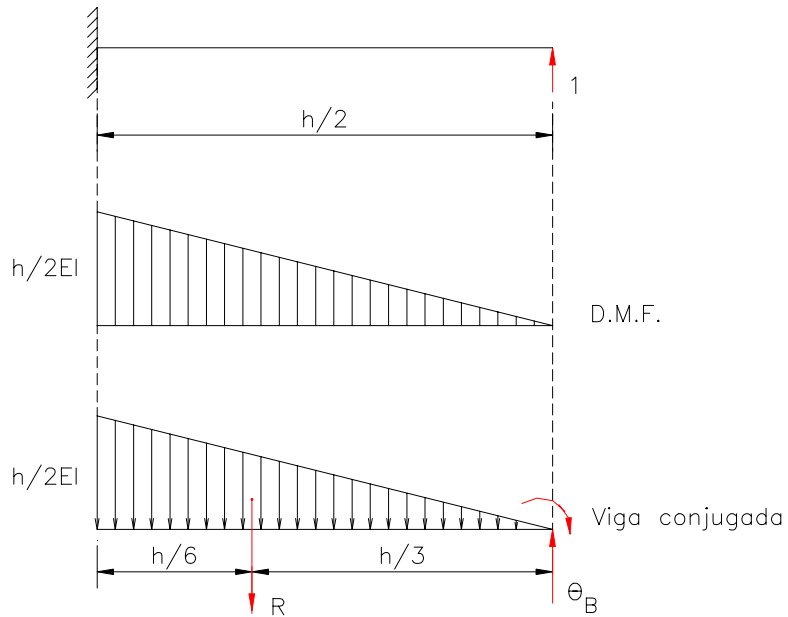


Figura 8 - Analogia de Mohr aplicada à primeira parte da coluna do painel de base.

Fazendo $Q = P$ e substituindo a Eq. (25) na Eq. (24), tem-se

$$\Delta = \frac{P \left(\frac{h}{2} \right)^3}{3EI} \quad (26)$$

Como a estrutura desloca-se como um todo, somam-se as rigidezes das N_c colunas, isto é,

$$\Delta = \frac{P \left(\frac{h}{2} \right)^3}{3E_c I_c N_c} \quad (27)$$

Substituindo a Eq. (27) na Eq. (21) vê-se que o deslocamento devido ao efeito da força cortante vale

$$\Delta_1 = 2 \left[\frac{P \left(\frac{h}{2} \right)^3}{3E_c I_c N_c} \right] = \frac{Ph^3}{12E_c I_c N_c} \quad (28)$$

O deslocamento Δ_2 é devido à flexão da viga conforme ilustra a Figura 5. Na hipótese de pequenas deformações, Figura 9, vale

$$\theta_s = \text{tg}(\theta_s) = \frac{\Delta_2}{\frac{h}{2}} \quad (29)$$

Logo, o deslocamento devido ao efeito da flexão das vigas é

$$\Delta_2 = \theta_s \frac{h}{2} \quad (30)$$

em que θ_s é a rotação da extremidade contraventada da coluna e h é a altura do painel.

O momento fletor na coluna vale

$$M = K_{\theta_s} \times \theta_s \quad (31)$$

em que K_{θ_s} é a rigidez rotacional da estrutura no nível da viga e no plano de flexão. Então

$$\theta_s = \frac{M}{K_{\theta_s}} \quad (32)$$

Da Figura 4 deduz-se que:

$$M = P \left(\frac{h}{2} + \frac{h_a}{2} \right) = \frac{P}{2} (h + h_a) \quad (33)$$

em que h é a altura do painel e h_a é a altura do painel adjacente. Substituindo a Eq.(33) na Eq.(32), tem-se

$$\theta_s = \frac{P(h + h_a)}{2K_{\theta_s}} \quad (34)$$

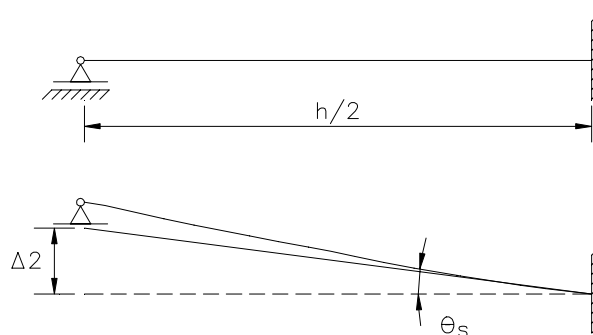


Figura 9 - Relação entre a rotação e a deflexão horizontal no ponto de inflexão da coluna do painel de base.

K_{θ_s} é definido como a rigidez rotacional da estrutura na direção do eixo de flexão, portanto, para determiná-lo, vamos dar um giro unitário na direção da carga e projetá-la na direção de cada viga. Logo, a viga que faz um ângulo α_{ij} , com a direção da carga vai girar $\cos(\alpha_{ij})$ (Figura 10).

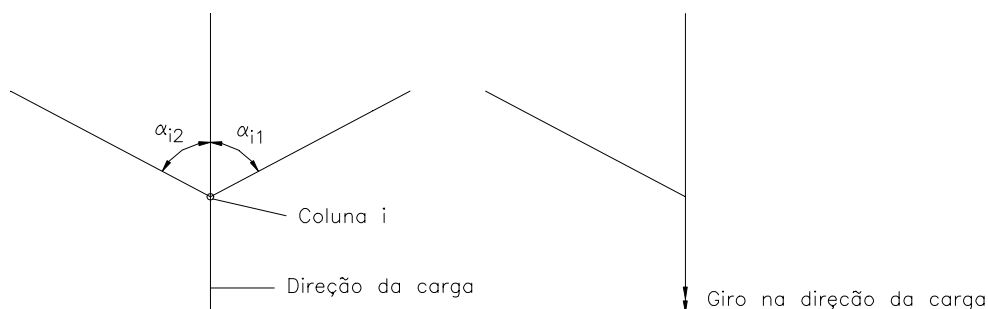


Figura 10 - Conceito de K_{θ_s} .

Para a situação mostrada na Figura 11 e usando a analogia de Mohr, tem-se:

$$M = \frac{6EI}{L} \theta \quad (35)$$

em que M é o momento necessário para dar um giro unitário no engaste. Logo,

$$M = \frac{ML}{6EI} \quad (36)$$

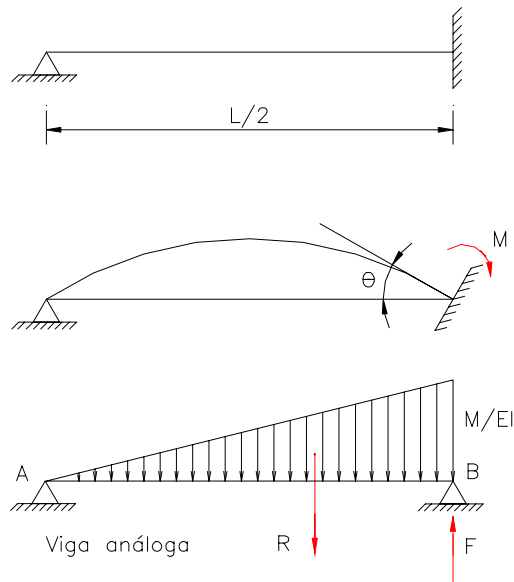


Figura 11 - Cálculo de K_{θ_s} .

Para cada viga vem:

$$M = \frac{6EI}{L} \cos \alpha_{ij} \quad (37)$$

em que α_{ij} é o ângulo que a j -ésima viga conectada à i -ésima coluna faz com a força lateral. Projetando M na direção do eixo de flexão e considerando que o ângulo do vetor momento com o eixo de flexão é o mesmo da viga com a carga, tem-se, para todos os nós,

$$K_{\theta_s} = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^2 \frac{6E_v I_v}{L} \cos^2 \alpha_{ij} \quad (38)$$

em que: E_v é o módulo de elasticidade das vigas, I_v é o momento de inércia das vigas; e L é o vão das vigas.

Como E_v , I_v e L são constantes,

$$K_{\theta_s} = \frac{6E_v I_v}{L} \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^2 \cos^2 \alpha_{ij} = \frac{6E_v I_v}{L} \sum_{i=1}^{N_c} \cos^2 \alpha_{i1} + \sum_{i=1}^{N_c} \cos^2 \alpha_{i2} \quad (39)$$

Como as colunas são localizadas ao longo da periferia de um círculo, segundo a identidade de Moivre, demonstrada no item 3.3, tem-se

$$\sum_{i=1}^{N_c} \cos^2 \alpha_{i1} = \sum_{i=1}^{N_c} \cos^2 \alpha_{i2} = \frac{N_c}{2} \quad (40)$$

pois pode-se dizer que

$$\sum_{i=1}^{N_c} \cos^2 \alpha_{i1} = \sum_{i=1}^{N_c} \cos^2 \beta_i = \frac{N_c}{2} \quad (16, \text{repetida})$$

porque os ângulos α_{ij} também formam uma progressão aritmética

que começa com $\frac{\theta}{n}$ e tem razão $\frac{2\pi}{n}$. Logo, a rigidez rotacional da estrutura na direção do eixo de flexão vale

$$K_{\theta_s} = \frac{6E_v I_v}{L} N_c \quad (41)$$

Substituindo a Eq.(41) na Eq. (34), obtém-se

$$\theta_s = \frac{P(h + h_a)}{12E_v I_v N_c} L \quad (42)$$

e levando para a Eq. (30), obtém-se

$$\Delta_2 = \frac{P(h + h_a)Lh}{24E_v I_v N_c} \quad (43)$$

Substituindo as Eqs. (28) e (43) na Eq. (20), finalmente encontra-se o deslocamento lateral da estrutura na extremidade contraventada do painel extremo:

$$\Delta_s = \frac{Ph^3}{12E_c I_c N_c} + \frac{P(h + h_a)Lh}{24E_v I_v N_c} \quad (44)$$

Calculados os valores de Δ_s e θ_s , será determinado y , que é a distância do ponto de inflexão até a extremidade restringida (Figura 12).

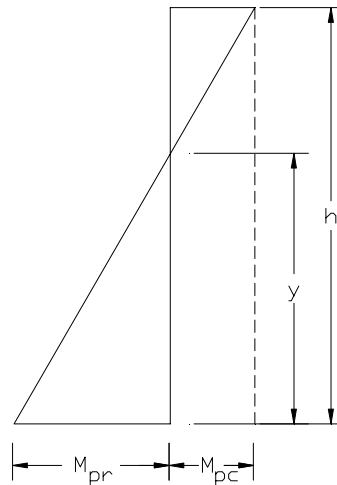


Figura 12 - Determinação da altura do ponto de inflexão nos painéis do topo e da base.

$$y = \frac{M_{pr}}{M_{pr} + M_{pc}} h \quad (45)$$

em que M_{pr} e M_{pc} são os momentos nas extremidades restringidas e contraventadas, respectivamente, dos painéis extremos, que serão calculados a seguir.

Seja a coluna da Figura 4 representada pela barra horizontal biengastada da Figura 13(a). Trata-se de determinar as rigidezes dos nós A e B, determinando o momento M_B que deve ser aplicado em B para produzir a rotação $\varphi=1$, Figura 13(b), e para produzir um deslocamento vertical unitário conforme a Figura 13(c).

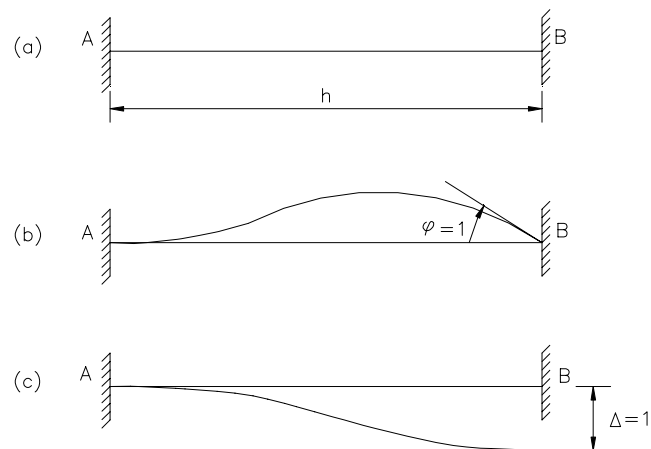


Figura 13 - Momentos nas extremidades da coluna do topo ou da base.

Resolve-se a viga bi-engastada AB para o recalque angular $\varphi=1$, indicado na Figura 14(a). Supondo a barra com inércia constante I e módulo de elasticidade E , pode-se obter o diagrama de momento fletor, pelo processo de Mohr (Figura 14b), o que resulta, Figura 14(c), em

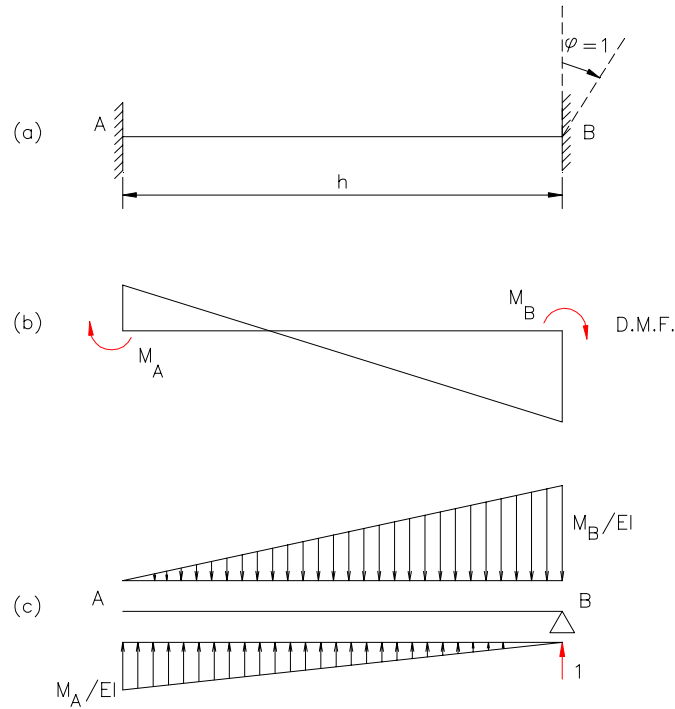


Figura 14 - Cálculo dos momentos nas extremidades das colunas do topo ou da base: parcela devida à rotação θ_s .

Sendo o aspecto do diagrama de momentos fletores o indicado na Figura 14(b), e a viga conjugada, carregada com M/EI , a indicada na Figura 14(c), impondo a esta última as condições de equilíbrio, tem-se

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \left(\frac{M_A}{EI} \frac{h}{2} \right) \frac{2h}{3} - \left(\frac{M_B}{EI} \frac{h}{2} \right) \frac{h}{3} = 0 \quad (46)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow \frac{M_B}{EI} \frac{h}{2} = \frac{M_A}{EI} \frac{h}{2} + 1 \quad (47)$$

Desenvolvendo as Eqs. (46) e (47), chega-se às equações seguintes

$$M_A = \frac{2EI}{h} \quad (48)$$

e

$$M_B = \frac{4EI}{h} \quad (49)$$

Aplicando um deslocamento vertical unitário em B, Figura 15(a), e seguindo o mesmo desenvolvimento anterior, Figuras 15(b) e 15(c), chega-se às Eqs. 50 e 51:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \left(\frac{M_B}{EI} \frac{h}{2} \right) \frac{h}{3} - \left(\frac{M_A}{EI} \frac{h}{2} \right) \frac{2h}{3} + 1 = 0 \quad (50)$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow \frac{M_B}{EI} \frac{h}{2} = \frac{M_A}{EI} \frac{h}{2} \quad (51)$$

que resultam em

$$M_A = M_B = \frac{6EI}{h^2} \quad (52)$$

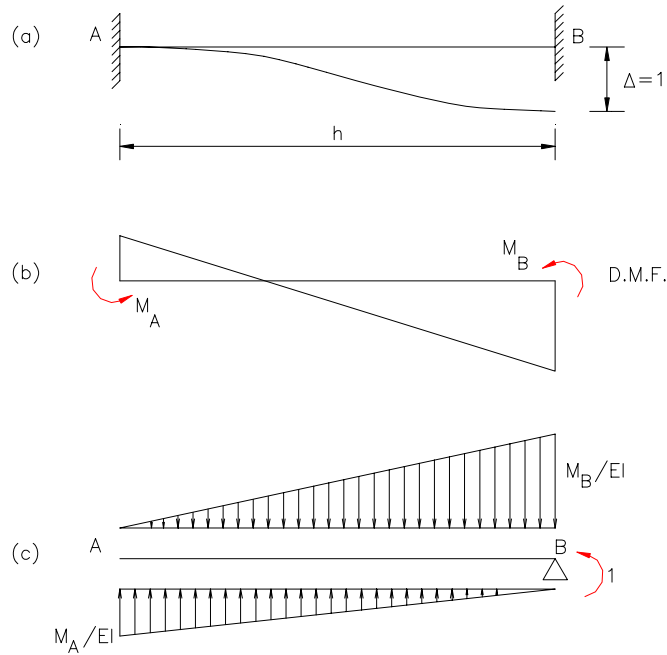


Figura 15 - Cálculo dos momentos de engastamento nas colunas de base e de topo: parcela devida a Δ_s .

Como há um deslocamento lateral igual a Δ_s e uma rotação θ_s , M_{pc} e M_{pr} , momentos na extremidade contraventada e restringida, respectivamente, do painel extremo da estrutura, valem em A

$$M_{pr} = \frac{6E_c I_c N_c \Delta_s}{h^2} - \frac{2E_c I_c N_c \theta_s}{h} \quad (53)$$

e em B

$$M_{pc} = \frac{6E_c I_c N_c \Delta_s}{h^2} - \frac{4E_c I_c N_c \theta_s}{h} \quad (54)$$

em que E_c é o módulo de elasticidade das vigas; I_c é o momento de inércia das vigas; e h é a altura do painel.

Substituindo as Eqs. (53) e (54) na Eq. (45), obtém-se a altura do ponto de inflexão

$$y = \frac{(3\Delta_s - h\theta_s)}{3(2\Delta_s - h\theta_s)} h \quad (55)$$

Substituindo as Eqs. (42) e (44) na Eq. (55), resulta

$$y = \frac{\frac{3E_v I_v}{L} + \frac{E_c I_c}{h} \frac{(h + h_a)}{2h}}{\frac{6E_v I_v}{L}} h \quad (56-a)$$

ou

$$y = \frac{6h^2 E_v I_v + E_c I_c L (h + h_a)}{12E_v I_v h} \quad (56-b)$$

Se os painéis têm alturas iguais, a Eq. (56-a) ou (56-b) se reduz à equação

$$y = \frac{\frac{3E_v I_v}{L} + \frac{E_c I_c}{h}}{\frac{6E_v I_v}{L}} h \quad (57-a)$$

ou

$$y = \frac{3E_v I_v h + E_c I_c L}{6E_v I_v} \quad (57-b)$$

Ainda se pode determinar rigorosamente a posição do ponto de inflexão das colunas de extremidade pelo processo iterativo:

passo inicial

$$y^{(1)} = h / 2$$

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{passo } j, j = 1, \dots, J \\
 K_{\theta_s}^{(j)} = \frac{6E_v I_v}{h - y^{(j)}} N_c \\
 \theta_s^{(j)} = \frac{P \left(\frac{2h + h_a}{2} \right) - P y^{(j)}}{K_{\theta_s}^{(j)}} \\
 \Delta_1^{(j)} = \frac{2P y^{(j)3}}{3E_c I_c N_c} \\
 \Delta_2^{(j)} = \theta_s^{(j)} (h - y^{(j)}) \\
 \Delta_s^{(j)} = \Delta_1^{(j)} + \Delta_2^{(j)} \\
 M_{pr}^{(j)} = \frac{6E_c I_c N_c}{h^2} \Delta_s^{(j)} - \frac{2E_c I_c N_c}{h} \theta_s^{(j)} \\
 M_{pc}^{(j)} = \frac{6E_c I_c N_c}{h^2} \Delta_s^{(j)} - \frac{4E_c I_c N_c}{h} \theta_s^{(j)} \\
 y^{(j+1)} = \frac{M_{pr}^{(j)}}{M_{pr}^{(j)} + M_{pc}^{(j)}} h
 \end{array} \right. \quad (58)$$

em que j indica a iteração; $K_{\theta_s}^{(j)}$ é a rigidez rotacional da estrutura no nível da viga e no plano de flexão; $\theta_s^{(j)}$ é a rotação da extremidade contraventada da coluna; $\Delta_s^{(j)}$ é o deslocamento lateral da extremidade contraventada do painel extremo; $M_{pr}^{(j)}$ é o momento na extremidade restringida; e $M_{pc}^{(j)}$ é o momento na extremidade contraventada.

Os valores convergidos de y , encontrados pelo método iterativo, são muito próximos dos valores encontrados pela fórmula (56-a), pois esta fornece uma boa estimativa de localização do ponto de inflexão, podendo, assim, ser calculado o momento de tombamento para determinação da força axial nas colunas dos painéis do topo e da base pelo método da viga em balanço.

3.4 - Força Cortante e Momento nas Vigas

Considere um plano vertical normal à direção de uma força lateral e passando através de duas vigas quaisquer. Em qualquer nível de contraventamento, este plano está sujeito a uma força cortante vertical igual à diferença entre a soma das forças axiais nas colunas em um lado do plano, nos painéis superiores e inferiores. O cortante na viga é máximo se o plano passa através do eixo de flexão com metade das colunas de um lado do plano (Figura 16).

Então

$$V_{vj} = \sum_{i=1}^{0,5N_c} \frac{F_{ij} - F_{ij+1}}{2} \quad (59)$$

em que: V_{vj} é o cortante de projeto na viga no j -ésimo nível de contraventamento; F_{ij}, F_{ij+1} é a força axial na i -ésima coluna no j -ésimo e $(j+1)$ -ésimo painel, respectivamente. Substituindo a Eq. (18) em (59), tem-se o cortante de projeto na viga no j -ésimo nível de contraventamento, isto é:

$$V_{vj} = \frac{P(H_j - H_{j+1})}{N_c R^2} \sum_{i=1}^{0,5N_c} X_i = \frac{P Y_j}{N_c R^2} \sum_{i=1}^{0,5N_c} X_i \quad (60)$$

em que: $(H_j - H_{j+1}) = Y_j$ é a distância entre pontos de inflexão no j -ésimo e $(j+1)$ -ésimo painéis. Além disso, $X_i = R \text{sen } \beta_i$. Portanto, a Eq. (60) pode ser expressa como

$$V_{vj} = \frac{P Y_j}{N_c R} \sum_{i=0}^{(0,5N_c - 1)} \text{sen} \left(\frac{\pi}{N_c} + i \frac{2\pi}{N_c} \right) \quad (61)$$

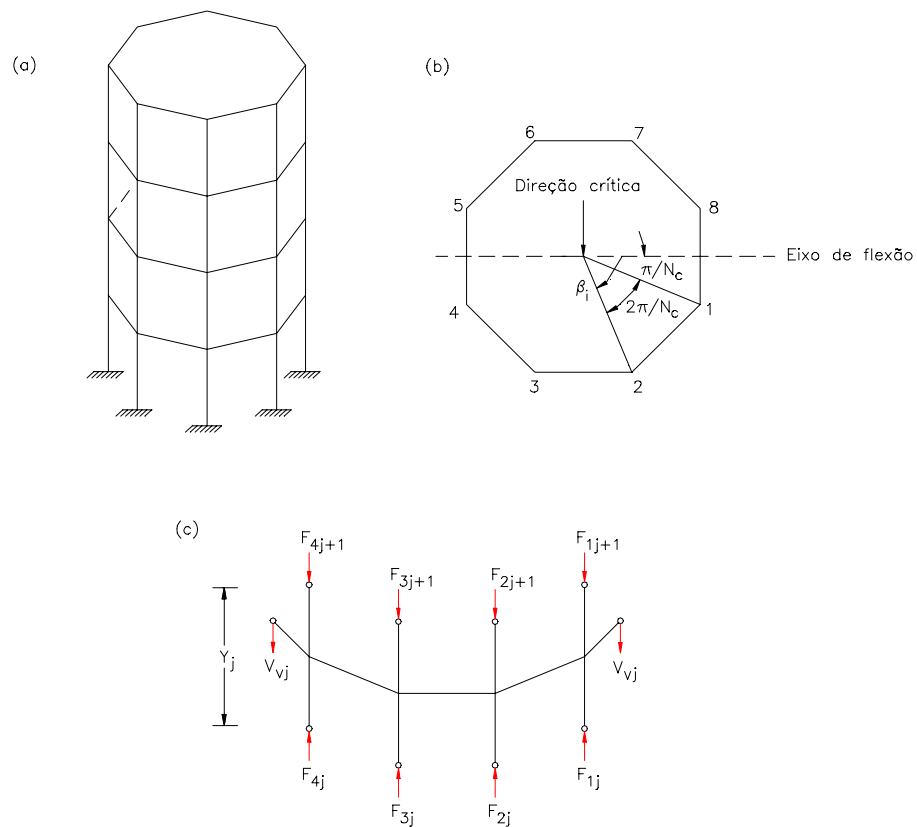


Figura 16 - Determinação da força cortante de projeto nos contraventamentos: a) vista global da estrutura; b) direção crítica de carga; c) diagrama de corpo livre.

Para simplificar a Eq. (61), seja o número complexo Z na forma polar:

$$Z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad (62)$$

Sendo a 1ª e a 2ª fórmulas de Moivre dadas por

$$Z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \quad (63)$$

e

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right) \right] \quad (64)$$

e sendo a unidade na forma complexa escrita por

$$1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 \quad (65)$$

as raízes da unidade são

$$\sqrt[n]{1} = \cos k \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{n} \quad (66)$$

em que $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Fazendo $k = 1$ e chamando esta raiz de w , vem:

$$w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \quad (67)$$

e as raízes acima tornam-se $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$. Se Z_r é uma raiz qualquer do complexo Z , então as raízes n -ésimas de Z são $Z_r, Z_r w, Z_r w^2, \dots, Z_r w^{n-1}$.

A fórmula para a soma de uma série geométrica finita é dada da seguinte maneira:

$$1 + Z + Z^2 + \dots + Z^n = \frac{1 - Z^{n+1}}{1 - Z}, \quad (Z \neq 1) \quad (68)$$

Calculando a soma das $n/2$ primeiras raízes de Z , usando a Eq. (68), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{0,5n-1} Z_k &= Z_r + Z_r w + Z_r w^2 + \dots + Z_r w^{0,5n-1} = \\ &= Z_r (1 + w + w^2 + \dots + w^{0,5n-1}) \end{aligned} \quad (69)$$

Sendo

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{0,5n-1} = \frac{1 - w^{0,5n}}{1 - w} \quad (70)$$

a substituição das Eqs. (65) e (67) na Eq. (70), resulta em

$$\frac{1 - w^{0,5n-1}}{1 - w} = \frac{1 - \left(\cos \frac{n}{2} \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{n}{2} \frac{2\pi}{n} \right)}{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 - \cos \frac{2\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}} \quad (71)$$

Usando algumas relações da trigonometria e simplificando a Eq. (71), chega-se a

$$\frac{1 - w^{0,5n-1}}{1 - w} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} - i \cos \frac{\pi}{n} \right)} \quad (72)$$

Substituindo a Eq. (72) na Eq. (69), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{0,5n-1} Z_k &= \frac{Z_r \cos \operatorname{sec} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} - i \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{Z_r \cos \operatorname{sec} \frac{\pi}{n}}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) - i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right)} = \\ &= \frac{Z_r \cos \operatorname{sec} \frac{\pi}{n}}{\cos \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right) - i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right)} \end{aligned} \quad (73)$$

Escolhendo Z_r convenientemente como Z_0 dado por

$$Z_0 = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \quad (74)$$

e levando em consideração que, neste caso, $\theta = \pi$ e substituindo a Eq. (74) na Eq. (73), vem:

$$\sum_{k=0}^{0,5n-1} Z_k = \frac{\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right)} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \quad (75)$$

Sabendo que o quociente dos números complexos vale

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]; \quad r_2 \neq 0 \quad (76)$$

então,

$$\sum_{k=0}^{0,5n-1} Z_k = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \sqrt[n]{\rho} i \quad (77)$$

Aplicando a 2ª fórmula de Moivre, a Eq. (77) simplifica-se resultando

$$\sum_{k=0}^{0,5n-1} Z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\sum_{k=0}^{0,5n-1} \cos \left(\frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right] \quad (78)$$

Igualando as partes imaginárias das Eqs. (77) e (78), tem-se:

$$\sum_{k=0}^{0,5n-1} \sqrt[n]{\rho} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right] = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \sqrt[n]{\rho} \quad (79)$$

Simplificando a Eq. (79), finalmente chega-se a:

$$\sum_{k=0}^{0,5n-1} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \quad (80)$$

Substituindo a Eq. (80) na Eq. (61), a força cortante de projeto para a viga no j-ésimo nível de contraventamento é obtida por:

$$V_{vj} = \frac{PY_j}{N_c R} \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{N_c} \right) \quad (81)$$

Nota-se que a precisão do cortante de projeto depende somente de Y_j , que é a precisão com a qual o ponto de inflexão pode ser localizado. Uma vez que as vigas críticas estão dispostas ao longo da direção da força lateral, a forma deflexionada é anti-simétrica e o ponto de inflexão em tais diagonais está exatamente no meio do vão. Logo

$$M_{vj} = V_{vj} \frac{L}{2} \quad (82)$$

em que: M_{vj} é o momento fletor de projeto na viga no j -ésimo nível de contraventamento e L é o comprimento do vão da viga.

3.5 - Força Cortante e Momento nas Colunas

Uma vez que as condições de contorno das colunas dos painéis da extremidade são diferentes daquelas dos painéis intermediários, processos diferentes são adotados para os dois casos.

3.5.1 - Colunas dos Painéis Intermediários

As forças cortantes nas colunas dos painéis intermediários podem ser obtidas considerando o equilíbrio de momentos dos nós no plano de flexão. A direção crítica da força lateral e a coluna que carrega a maior força cortante são mostradas na Figura 17.

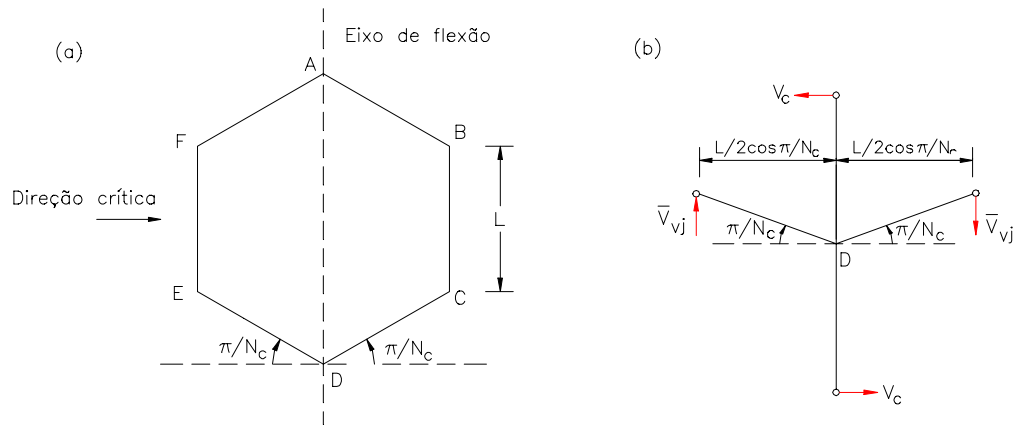


Figura 17 - Determinação da força cortante de projeto em colunas de painéis intermediários: a) direção crítica para as colunas A e D; b) diagrama de corpo livre.

As vigas que encontram a coluna crítica fazem um ângulo de (π/N_c) com a direção da força lateral, isto é, com o plano de flexão. Devido à simetria, estas vigas suportam forças cortantes \bar{V}_{vj} iguais. Para dada coluna, o grau de restrição relativa da extremidade em relação a outras colunas é o mesmo em todos os painéis intermediários. Assim, o cortante em uma coluna particular em todos os painéis intermediários é o mesmo. Considerando equilíbrio de momento no plano de flexão referente ao nó onde a coluna crítica encontra a viga, tem-se

$$\frac{V_c(h_j + h_{j+1})}{2} = 2\bar{V}_{vj} \frac{L}{2} \cos\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (83)$$

Logo,

$$V_c = \frac{2\bar{V}_{vj}L}{(h_j + h_{j+1})} \cos\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (84)$$

em que: V_c = cortante de projeto em colunas de painéis intermediários; h_j, h_{j+1} = altura do j -ésimo e $(j+1)$ -ésimo painéis, respectivamente.

A força cortante na viga no j -ésimo nível de contraventamento, \bar{V}_{vj} , pode ser determinada seguindo um processo similar ao que foi usado para determinar a força cortante de projeto nas vigas. Assim tem-se

$$\bar{V}_{vj} = \frac{PY_j}{N_c R} \sum_{i=1}^{(0,5N_c-1)} \text{sen}\left(i \frac{\pi}{N_c}\right) \quad (85)$$

A identidade de Moivre fornece

$$\sum_{i=1}^{(0,5N_c-1)} \text{sen}\left(i \frac{2\pi}{N_c}\right) = \cot g\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (86)$$

Então a Eq. (85) se reduz a

$$\bar{V}_{vj} = \frac{PY_j}{N_c R} \cot g\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (87)$$

Substituindo a Eq. (87) na Eq. (84) e usando as relações $L = 2R\text{sen}(\pi/N_c)$ e $Y_j = (h_j + h_{j+1}) / 2$, a Eq. (84) se reduz a

$$V_c = \frac{2P}{N_c} \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (88)$$

A Eq. (88) indica que a força cortante de projeto na coluna depende somente do número de colunas da estrutura e que todas as colunas distribuem igual força cortante somente quando $N_c = 4$. Para $N_c = 6$, a força cortante de projeto nas colunas é igual a $1,5P / N_c$; assim, os processos baseados em forças cortantes iguais nas colunas tende a ser não conservador. Quando o número de colunas aumenta, a força cortante de

projeto nestas tende a $2P/ N_c$, a qual é também obtida tratando a estrutura como uma viga circular, esbelta, vazada, Krishna e Jain [13]. O ponto de inflexão nas colunas de painéis intermediários está perto do meio da altura, logo o momento fletor de projeto pode ser obtido multiplicando o cortante de projeto por metade da altura do painel, ou seja,

$$M_c = V_c \frac{h}{2} = \frac{Ph}{N_c} \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (89)$$

3.5.2 - Colunas dos Painéis Extremos

Nos painéis da extremidade todas as colunas têm igual restrição na extremidade fixada, enquanto a restrição nas extremidades contraventadas depende da configuração do contraventamento. Assim a rigidez relativa das colunas nos painéis extremos é diferente em relação à dos painéis intermediários, e uma redistribuição da força cortante na coluna ocorre entre um painel extremo e o painel intermediário adjacente por meio da força axial nas vigas.

Como esta força axial nas vigas não é conhecida, a força cortante nas colunas dos painéis extremos não pode ser determinada considerando o equilíbrio do diagrama de corpo livre, como foi feito para os painéis intermediários.

O momento fletor na coluna crítica na extremidade contraventada pode ser obtido considerando o equilíbrio de momentos no plano de flexão (Figura 18). Então:

$$M_{cc} = \bar{V}_{vj} L \cos\left(\frac{\pi}{N_c}\right) - V_c \frac{h_a}{2} \quad (90)$$

em que M_{cc} é o momento na extremidade contraventada da coluna crítica; e h_a é a altura do painel adjacente.

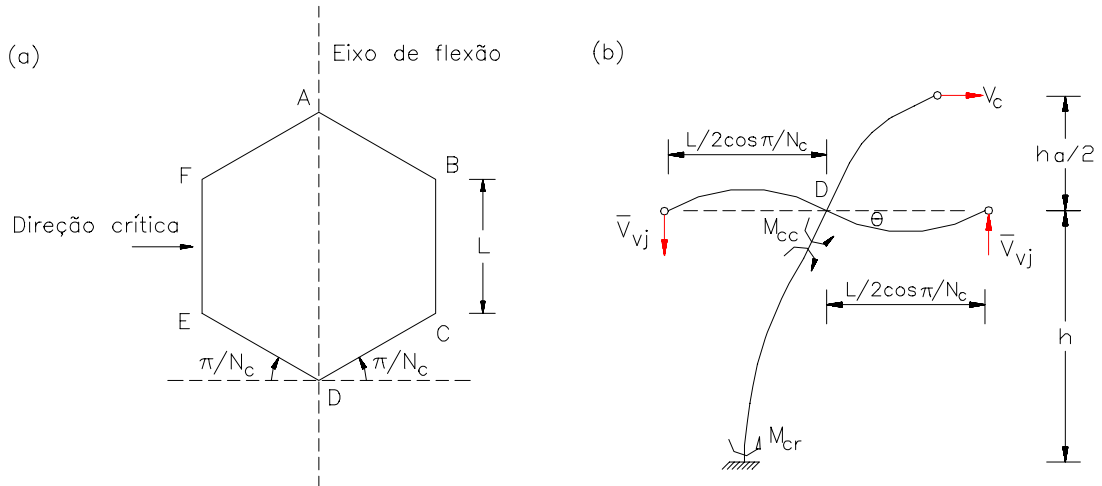


Figura 18 - Determinação do momento fletor de projeto nas colunas dos painéis extremos: a) direção crítica para as colunas A e D; b) deflexões e forças.

Substituindo as Eqs. (87) e (88) na Eq. (90) e fazendo $L = 2R\text{sen}(\pi/N_c)$, tem-se

$$M_{cc} = \frac{2P}{N_c} \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right) Y_j - 0,5h_a \quad (91)$$

em que $Y_j = 0,5h_a + \bar{y}$ e \bar{y} é a distância do ponto de inflexão do painel extremo até a extremidade contraventada. Assim, a Eq. (91) se reduz a

$$M_{cc} = \frac{2P\bar{y}}{N_c} \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (92)$$

Apesar de M_{cc} dado pela Eq. (92) ser o produto do cortante de projeto das colunas dos painéis intermediários (V_c) pela distância do ponto de inflexão do painel extremo até a extremidade contraventada (\bar{y}), o momento na extremidade restringida (M_{cr}) não pode ser escrito como $\left[\frac{2P(h - \bar{y})}{N_c} \right] \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right)$, pois o cortante na coluna nos painéis intermediário e extremo é diferente, e o ponto de inflexão do painel global não é ponto de inflexão para a coluna crítica no painel extremo.

Os momentos, M_{cc} e M_{cr} , podem ser expressos como

$$M_{cc} = \frac{6E_c I_c \Delta_c}{h^2} - \frac{4E_c I_c \theta_c}{h} \quad (93)$$

$$M_{cr} = \frac{6E_c I_c \Delta_c}{h^2} - \frac{2E_c I_c \theta_c}{h} \quad (94)$$

$$M_{cr} = M_{cc} + \frac{2E_c I_c \theta_c}{h} \quad (95)$$

em que E_c é o módulo de elasticidade da coluna; I_c é o momento de inércia da coluna; h é a altura do painel considerado; Δ_c é o deslocamento lateral da coluna; e θ_c é a rotação da coluna no nível do contraventamento.

θ_c pode ser obtido dividindo o momento que causa rotação do nó, M_θ , pela rigidez rotacional do nó, k_θ . Assim:

$$\theta_c = \frac{M_\theta}{k_\theta} \quad (96)$$

$$M_{\theta} = \bar{V}_{v_j} L \cos\left(\frac{\pi}{N_c}\right) = \frac{2PY_j}{N_c} \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (97)$$

A rigidez rotacional do nó é igual à soma das rigidezes rotacionais no plano de flexão de duas vigas que encontram o nó. Assim,

$$k_{\theta} = \frac{12E_v I_v}{L} \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right) \quad (98)$$

em que E_v é o módulo de elasticidade das vigas; I_v é o momento de inércia das vigas.

Substituindo as Eqs. (97) e (98) na Eq. (96) tem-se

$$\theta_c = \frac{PY_j L}{6N_c E_v I_v} \quad (99)$$

Substituindo as Eqs. (92) e (99) na Eq. (95), o momento fletor de projeto na coluna do painel extremo é

$$M_{ce} = M_{cr} = \frac{P}{N_c} \left[2\bar{Y} \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right) + \frac{Y_j E_c I_c L}{3E_v I_v h} \right] \quad (100)$$

O cortante de projeto na coluna crítica em painéis extremos pode agora ser obtido usando as Eqs. (92) e (99):

$$V_{ce} = \frac{M_{cc} + M_{cr}}{h} = \frac{P}{N_c h} \left[4\bar{Y} \cos^2\left(\frac{\pi}{N_c}\right) + \frac{Y_j E_c I_c L}{3E_v I_v h} \right] \quad (101)$$

em que M_{ce} é o momento fletor de projeto nas colunas do painel extremo; V_{ce} é a força cortante de projeto nas colunas do painel extremo; Y_j é a distância entre pontos de inflexão; e \bar{y} é a distância do ponto de inflexão do painel extremo até a extremidade contraventada.

4 - ESFORÇOS NO ANEL DE SUSTENTAÇÃO

4.1 - Introdução

Este capítulo apresenta a formulação do cálculo dos esforços internos no anel que serve de base ao reservatório cilíndrico. O método de cálculo é bastante facilitado pelo emprego da notação vetorial e é bem apresentado por Biezeno e Grammel [1] e Ruggeri [2].

A carga vertical sobre o anel é decorrente da ação do reservatório cilíndrico e supõe-se que seja distribuída continuamente e aplicada ao seu eixo. Hipoteticamente, o plano do anel contém um dos eixos principais de inércia da seção; o segundo eixo principal de inércia deve pertencer ao plano tangente ao anel.

4.2 - Esforços Internos nos Eixos de Simetria entre Apoios

Considere o segmento do anel representado na Figura 19 onde há três eixos de simetria: OO' - que passa por um apoio; OA e OB - que passam pela bissetriz do arco definido por dois apoios consecutivos. O segmento é, então, dividido em duas partes que correspondem aos arcos AO' e BO' . Para posicionar o centro de gravidade de uma seção qualquer do anel emprega-se o ângulo φ , medido positivamente de OA para OO' ou de OB para OO' .

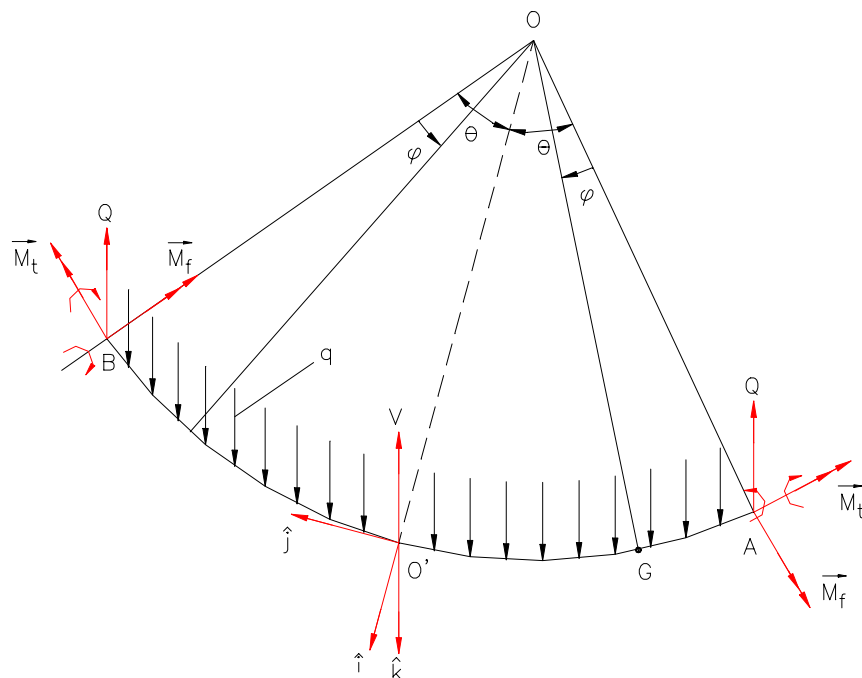


Figura 19 - Sistema auto-equilibrado de esforços relativos a um trecho de anel definido por três eixos de simetria consecutivos.

O segmento de anel está em equilíbrio sob a ação da reação vertical \bar{V} no apoio O' , as forças cortantes \bar{Q} nos pontos A e B, os momentos fletores \bar{M}_f , os momentos de torção \bar{M}_t e a carga distribuída q . A convenção de sinais adotada é: (a) as cargas e as reações são positivas quando atuam no sentido vertical descendente; (b) os momentos fletores são positivos quando tracionam as fibras inferiores do anel; (c) os momentos de torção têm a direção da tangente ao anel e é positivo quando provoca giro da seção no sentido horário. Conforme a Eq. (5) e observando as Figuras 3(a) e 3(b), pode-se dizer que o ângulo entre dois eixos de simetria quaisquer vale

$$\theta = \frac{\pi}{N_c} \quad (102)$$

A condição de equilíbrio de forças verticais resulta na reação de apoio

$$\bar{V} = -2qR\theta\bar{k} \quad (103)$$

O equilíbrio de forças verticais no segmento representado na Figura 19 permite calcular as forças cortantes \bar{Q} , ou seja,

$$(-V - 2Q + 2qR\theta)\bar{k} = 0 \quad (104)$$

o que, considerando a Eq. (103), resulta em

$$\bar{Q} = 0 \quad (105)$$

No segmento AO' o momento da carga distribuída em um arco elementar AG de comprimento $Rd\varphi$, \bar{M}_{pA} , é

$$\bar{M}_{pA} = \int_0^\theta (G - O') \otimes qRd\varphi\bar{k} \quad (106)$$

em que $(G-O')$ é o vetor de posição de G em relação a O', que vale

$$G - O' = -R[1 - \cos(\theta - \varphi)]\bar{i} - R \operatorname{sen}(\theta - \varphi)\bar{j} \quad (107)$$

Substituindo a Eq. (107) na Eq. (106), tem-se

$$\bar{M}_{pA} = qR^2[-(1 - \cos \theta)\bar{i} + (\theta - \operatorname{sen} \theta)\bar{j}] \quad (108)$$

No segmento BO', encontra-se, de modo análogo,

$$\bar{M}_{pB} = qR^2[(1 - \cos \theta)\bar{i} + (\theta - \operatorname{sen} \theta)\bar{j}] \quad (109)$$

Portanto, o momento resultante das cargas em O' é

$$\vec{M}_p = \vec{M}_{pA} + \vec{M}_{pB} = 2qR^2(\theta - \text{sen } \theta)\vec{j} \quad (110)$$

Se no ponto O' atuam os momentos \vec{M}_f e \vec{M}_t (Figura 20), o momento resultante em O' vale

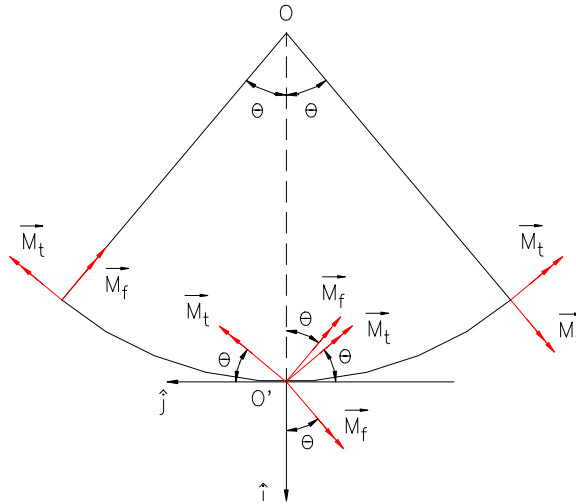


Figura 20 - Propagação dos momentos \vec{M}_f e \vec{M}_t .

$$\vec{M}_M = 2\vec{M}_t \text{sen } \theta \vec{i} - 2\vec{M}_f \text{sen } \theta \vec{j} \quad (111)$$

A condição de equilíbrio de momentos em O' fornece

$$-2M_t \text{sen } \theta \vec{i} + [-2M_f \text{sen } \theta + 2qR^2(\theta - \text{sen } \theta)]\vec{j} = 0 \quad (112)$$

donde conclui-se que

$$M_t = 0 \quad (113)$$

e

$$M_f = qR^2 \left(\frac{\theta}{\text{sen } \theta} - 1 \right) \quad (114)$$

4.3 - Esforços na Seção Genérica

Os esforços na seção genérica G do segmento AO', definida pelo ângulo φ medido em relação a OA, são

$$N = 0 \quad (115)$$

$$Q = qR\varphi \quad (116)$$

O momento resultante no arco AG é \vec{M}_G , decorrente da soma vetorial dos momentos devidos à carga distribuída \vec{M}_p e da propagação dos momentos \vec{M}_f e \vec{M}_t em O' para a seção G considerada, isto é,

$$\begin{aligned} \vec{M}_G = & [M_f \cos \varphi - qR^2(1 - \cos \varphi)]\vec{i} + \\ & + [-M_f \text{sen } \varphi + qR^2(\varphi - \text{sen } \varphi)]\vec{j} \end{aligned} \quad (117)$$

Denominando de $\vec{M}_{f\varphi}$ e $\vec{M}_{t\varphi}$ os momentos de flexão e de torção, respectivamente, na seção G, resulta

$$\vec{M}_G = M_{t\varphi}\vec{i} + M_{f\varphi}\vec{j} \quad (118)$$

Considerando a Eq. (114),

$$M_{f\varphi} = qR^2 \left(\frac{\cos \varphi}{\frac{\text{sen } \theta}{\theta}} - 1 \right) \quad (119)$$

e

$$M_{L\varphi} = qR^2\varphi \left(1 - \frac{\frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \theta}}{\theta} \right) \quad (120)$$

5 - EXEMPLOS E COMPARAÇÕES

O método proposto foi aplicado à análise de estruturas de torres típicas com o objetivo de se avaliar a precisão dos resultados obtidos em relação àqueles produzidos pelo método de elementos finitos. O programa SAP-90 é utilizado e as estruturas são calculadas como pórticos espaciais com compatibilização dos deslocamentos do anel superior.

São analisadas as seis estruturas descritas abaixo sob carga horizontal aplicada na coluna e no meio do vão da viga.

5.1- Estrutura de Base Hexagonal com Três Painéis

A estrutura é composta por 3 painéis de altura constante de 4m. As colunas estão dispostas na periferia de um círculo de raio $R=2.50\text{m}$ e são tubos de diâmetro externo $\phi_{\text{ext.}}=152.4\text{mm}$ e espessura $e=8\text{mm}$ enquanto que as vigas são tubos de diâmetro externo $\phi_{\text{ext.}}=127.0\text{mm}$ e espessura $e=8.0\text{mm}$. A carga lateral $P=40\text{KN}$ está aplicada no topo da coluna, Figura 21(a) ou no meio do vão da viga, Figura 21(b). Também é analisado separadamente um anel de sustentação, cujo raio é o mesmo da estrutura, sob ação de uma carga normal distribuída $q = 7\text{KN/m}$.

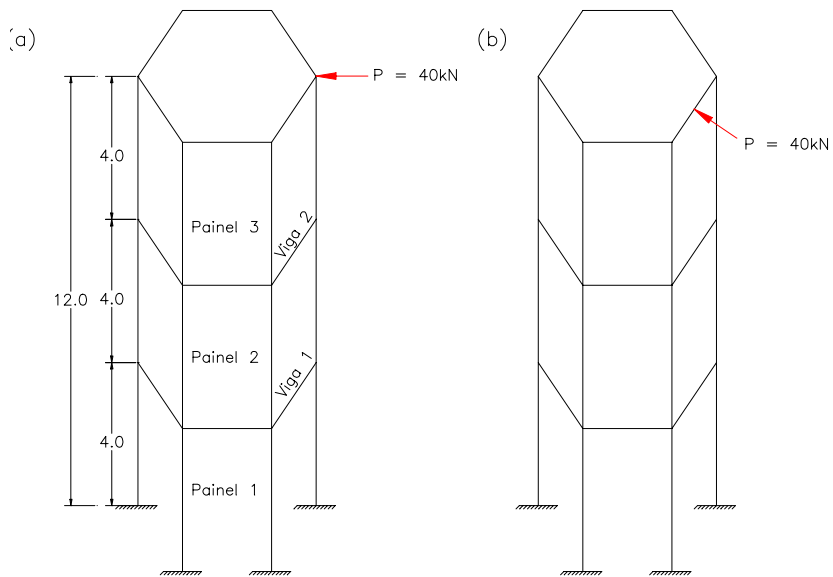


Figura 21 - Torre de base hexagonal com 3 painéis submetida a carga lateral: a) carga aplicada na coluna e b) carga aplicada no meio do vão da viga.

5.2- Estrutura de Base Hexagonal com Doze Painéis

A estrutura é composta por 12 painéis de altura constante de 3,0m. Os perfis das colunas e das vigas, a carga e o raio do círculo onde a estrutura está inscrita são os mesmos da estrutura anterior, item 5.1. A carga lateral está aplicada no topo da coluna, Figura 22(a) ou no meio do vão da viga, Figura 23(b).

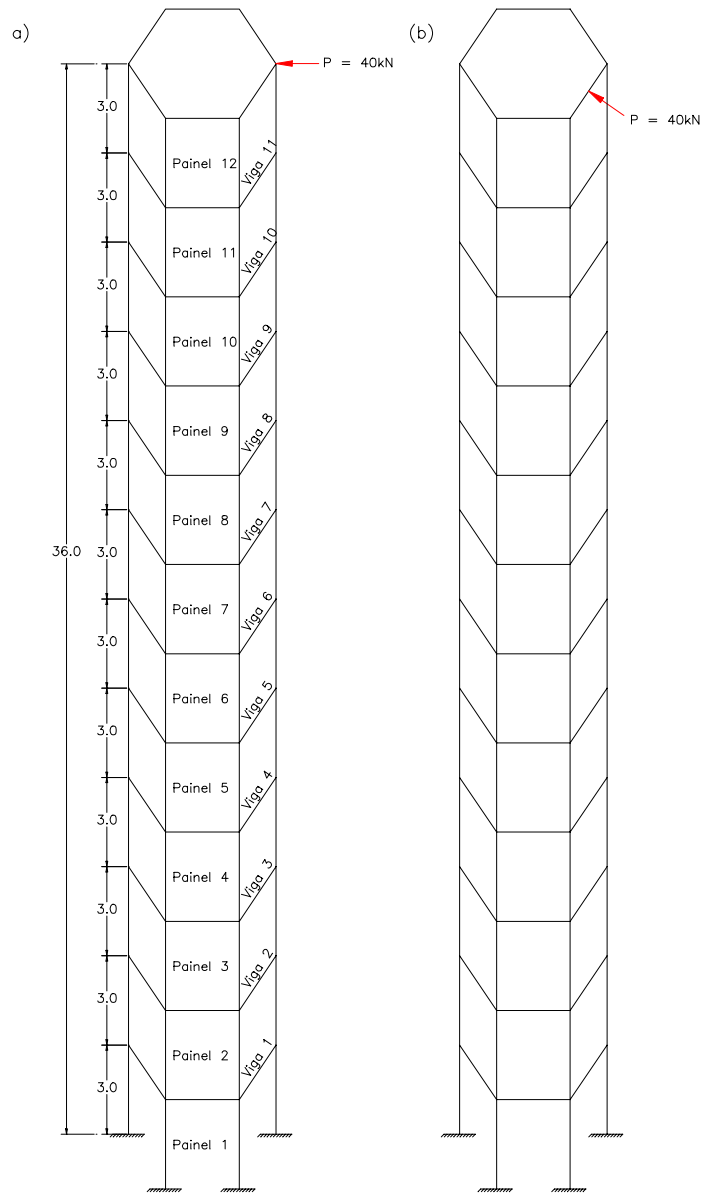


Figura 22 - Torre de base hexagonal com 12 painéis submetida a carga lateral: a) carga aplicada na coluna e b) carga aplicada no meio do vão da viga.

5.3- Estrutura de Base Octogonal com Quatro Painéis

A estrutura tem quatro painéis, sendo que os três primeiros têm altura de 4,0m e o último altura de 5,0m. O raio do

círculo periférico da base, é $R=4,50\text{m}$. As colunas são tubos de diâmetro externo $\phi_{\text{ext.}}=152.4\text{mm}$ e espessura $e=8\text{mm}$ e as vigas são tubos de diâmetro externo $\phi_{\text{ext.}}=127.0\text{mm}$ e espessura $e=8.0\text{mm}$. A carga lateral $P=50\text{KN}$ está aplicada no topo da coluna, Figura 23(a) ou no meio do vão da viga, Figura 23(b). Também é analisado separadamente um anel de sustentação, cujo raio é o mesmo da estrutura, sob ação de uma carga normal distribuída $q=10\text{KN/m}$.

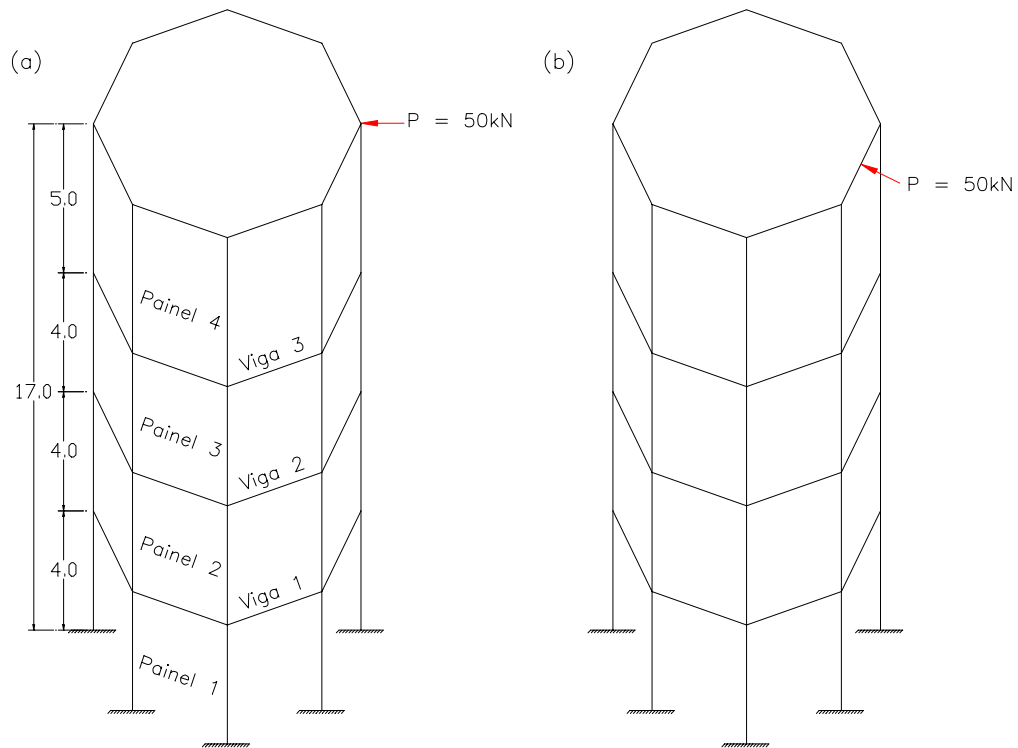


Figura 23 - Torre de base octogonal com 4 painéis submetida a carga lateral: a) carga aplicada na coluna e b) carga aplicada no meio do vão da viga.

5.4- Estrutura de Base Octogonal com Doze Painéis

A estrutura é composta por 12 painéis de altura constante de 2,8m. Os perfis das colunas e das vigas , a carga e o raio do

círculo onde a estrutura está inscrita são os mesmos da estrutura anterior, item 5.3. A carga lateral está aplicada no topo da coluna, Figura 24(a) ou no meio do vão da viga, Figura 24(b).

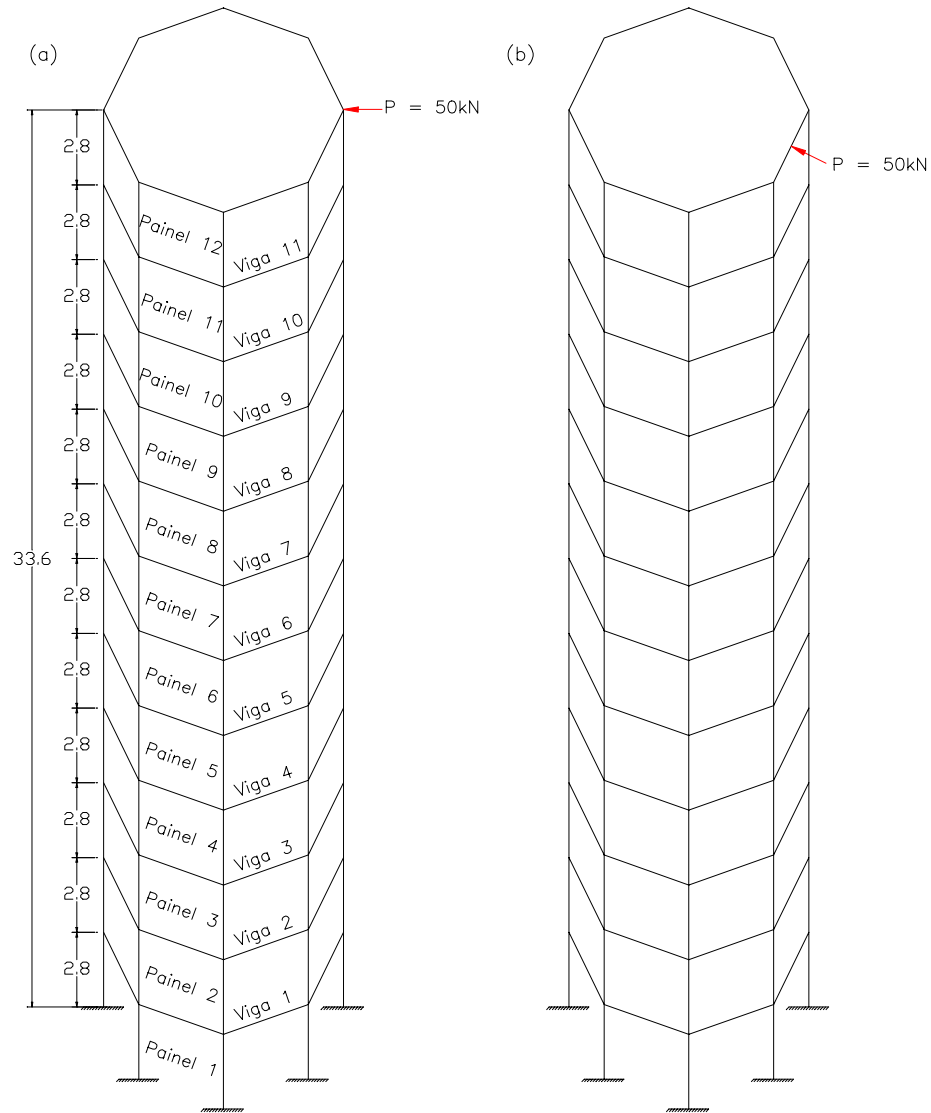


Figura 24 – Torre de base octogonal com 12 painéis submetida a carga lateral: a) carga aplicada na coluna e b) carga aplicada no meio do vão da viga.

5.5- Estrutura de Base Decagonal com Quatro Painéis

A estrutura tem quatro painéis, sendo que os três primeiros têm altura de 5m e o último, altura de 5,50m. O raio do círculo periférico da base é $R=4,50m$. As colunas são tubos de diâmetro externo $\phi_{ext.} = 152,4mm$ e espessura $e=8mm$ e as vigas são tubos de diâmetro externo $\phi_{ext.} = 127,0mm$ e espessura $e=8mm$. A carga lateral $P=60kN$ está aplicada no topo da coluna, Figura 25(a) ou no meio do vão da viga, Figura 25(b). Também é analisado separadamente um anel de sustentação, cujo raio é o mesmo da estrutura, sob ação de uma carga normal distribuída $q = 12kN/m$.

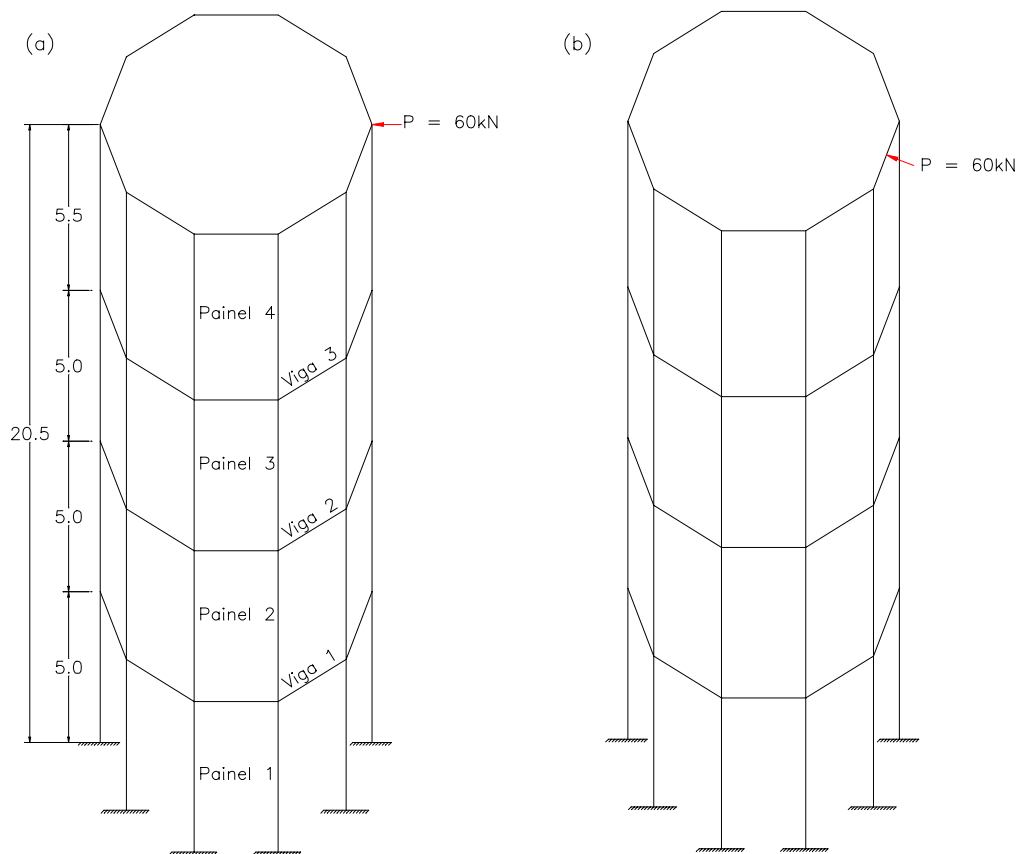


Figura 25 - Torre de base decagonal com 4 painéis submetida a carga lateral: a) carga aplicada na coluna e b) carga aplicada no meio do vão da viga.

5.6- Estrutura de Base Decagonal com Doze Painéis

A estrutura é composta por 12 painéis de altura constante de 2,8m. Os perfis das colunas e das vigas, a carga e o raio do círculo onde a estrutura está inscrita são os mesmos da estrutura anterior, item 5.5. A carga lateral está aplicada no topo da coluna, Figura 26(a) ou no meio do vão da viga, Figura 26(b).

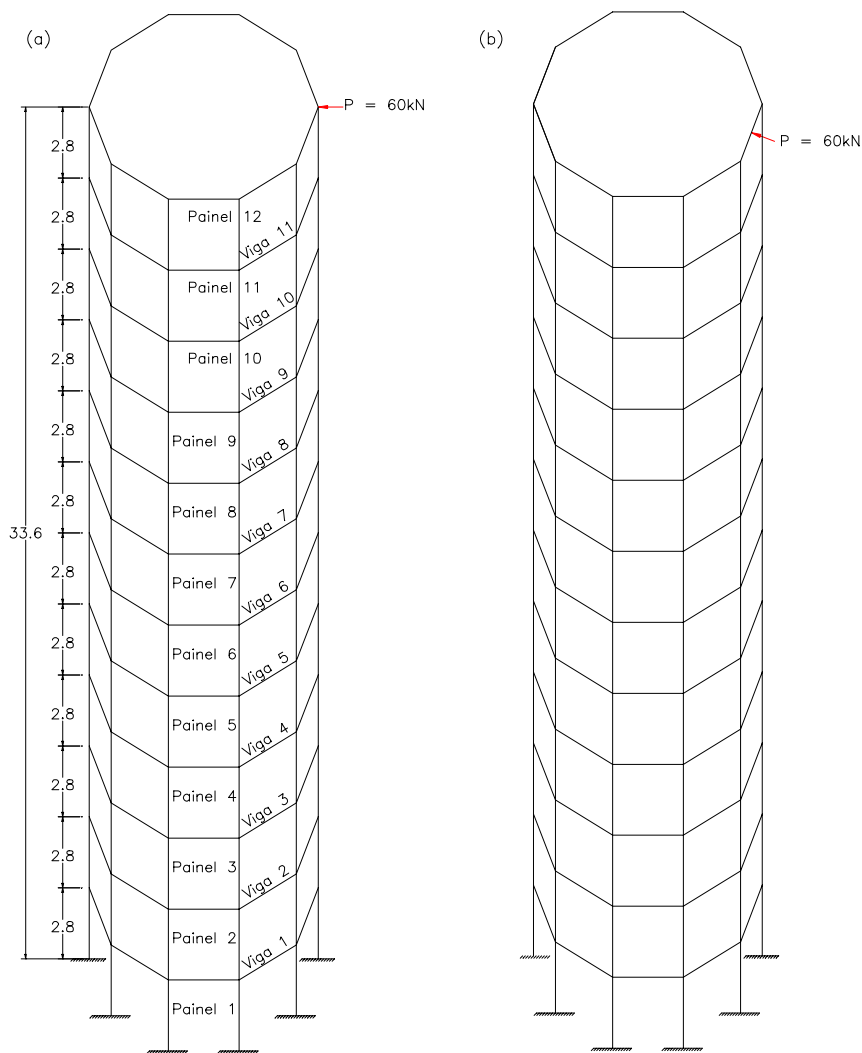


Figura 26 - Torre de base decagonal com 12 painéis submetida a carga lateral: a) carga aplicada na coluna e b) carga aplicada no meio do vão da viga.

5.7 - Análise de Resultados

As Tabelas 1,2 e 3 apresentam as forças axiais nas colunas para os diferentes painéis das seis estruturas analisadas com o carregamento aplicado na coluna. Verifica-se que, nos painéis intermediários, os resultados obtidos pelo método descrito e o Método de Elementos Finitos são praticamente idênticos, com erros de no máximo 1.0%. No painel da base, a força axial nas colunas apresenta erros do método proposto para o método dos elementos finitos de no máximo 5.46%. No painel superior, o método proposto apresenta erros elevados de cálculo das forças axiais: acima de 21.92% e inferiores a 65.45%.

Nas Tabelas 4,5 e 6 figuram as forças cortantes nas colunas, para as seis estruturas calculadas com o carregamento aplicado nas colunas para as de base octogonal e com o carregamento aplicado no meio do vão das vigas para as de bases hexagonais e bases decagonais. O erro médio das forças cortantes nas colunas calculadas pelo método proposto para as forças cortantes previstas pelo método de elementos finitos é de 13% nos painéis intermediários; e nos painéis superiores, é de 16%. Nos painéis da base, o erro varia entre 1.32% e 27.77%.

Nas Tabelas 7,8 e 9 figuram os momentos fletores nas colunas para as seis estruturas calculadas com os casos de carregamentos iguais aos das forças cortantes nas colunas. Observa-se um erro médio de 13% do método descrito em relação ao Método de Elementos Finitos para os momentos nas colunas.

As Tabelas 10,11 e 12 listam as forças cortantes nas vigas calculados pelo método descrito e pelo Método de Elementos Finitos. Verifica-se que, nos painéis intermediários, os resultados obtidos pelo método descrito e o Método de

Elementos Finitos são muito próximos, com um erro máximo 2.33%. Nos painéis superiores os erros variam entre 11.78% e 35.1%, enquanto que nos painéis da base os erros variam entre 2.8% e 32.01%.

As Tabelas 13,14 e 15 listam os momentos fletores nas vigas calculados pelo método descrito e pelo Método de Elementos Finitos. Verifica-se um erro máximos de 2.29% nos painéis intermediários. Nos painéis superiores, os erros no cálculo desses esforços variam entre 11.78% e 35.09%, enquanto que nos painéis da base estes variam entre 2.82% e 32.03%.

As Tabelas 16,17,18 mostram os valores dos esforços no anel de sustentação para as estruturas de base hexagonal, octogonal e decagonal, respectivamente. Estes valores foram calculados usando a formulação apresentada no Capítulo 4.

Força Axial nas Colunas (KN)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.1	1	49,57	49,37	-0,40
	2	31,69	32,00	0,98
	3	12,00	14,63	21,92
5.2	1	183,27	180,00	-1,78
	2	167,86	168,00	0,08
	3	151,87	152,00	0,09
	4	135,89	136,00	0,08
	5	119,90	120,00	0,08
	6	103,91	104,00	0,09
	7	87,93	88,00	0,08
	8	71,94	72,00	0,08
	9	55,95	56,00	0,09
	10	39,97	40,00	0,08
	11	23,98	24,00	0,08
	12	8,24	11,96	45,15

Tabela 1 - Valores das forças axiais nas colunas das estruturas 5.1 e 5.2.

Força Axial nas Colunas (KN)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.3	1	41,06	38,82	-5,46
	2	30,56	30,56	0,00
	3	19,34	19,44	0,52
	4	7,10	9,50	33,80
5.4	1	88,90	86,60	-2,59
	2	81,65	81,67	0,02
	3	73,87	73,89	0,03
	4	66,09	66,11	0,03
	5	58,38	58,33	-0,09
	6	50,54	50,56	0,04
	7	42,77	42,78	0,02
	8	34,99	35,00	0,03
	9	27,21	27,22	0,04
	10	19,44	19,44	0,00
	11	11,67	11,67	0,00
	12	4,07	6,73	65,45

Tabela 2 - Valores das forças axiais nas colunas das estruturas 5.3 e 5.4.

Força Axial nas Colunas (KN)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.5	1	47,29	45,79	-3,17
	2	34,68	34,67	-0,03
	3	21,27	21,33	0,28
	4	7,54	9,44	25,17
5.6	1	85,31	83,66	-1,93
	2	78,39	78,40	0,01
	3	70,91	70,93	0,03
	4	63,45	63,47	0,03
	5	55,99	56,00	0,02
	6	48,52	48,53	0,02
	7	41,06	41,07	0,02
	8	33,59	33,60	0,03
	9	26,13	26,13	0,00
	10	18,66	18,67	0,05
	11	11,20	11,20	0,00
	12	3,90	5,94	52,28

Tabela 3 - Valores das forças axiais nas colunas das estruturas 5.5 e 5.6.

Força Cortante nas Colunas(KN)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.1	1	8,18	8,30	1,47
	2	9,48	10,00	5,49
	3	9,59	8,30	-13,45
5.2	1	7,63	7,53	-1,32
	2	8,53	10,00	17,23
	3	8,47	10,00	18,06
	4	8,48	10,00	17,92
	5	8,48	10,00	17,92
	6	8,48	10,00	17,92
	7	8,48	10,00	17,92
	8	8,48	10,00	17,92
	9	8,48	10,00	17,92
	10	8,47	10,00	18,06
	11	8,49	10,00	17,79
	12	8,19	7,529	-8,07

Tabela 4 - Valores das forças cortantes nas colunas das estruturas 5.1 e 5.2.

Força Cortante nas Colunas (KN)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.3	1	7,79	7,59	-2,61
	2	9,18	10,67	16,23
	3	9,40	10,67	13,51
	4	8,31	8,57	3,10
5.4	1	7,98	5,76	-27,77
	2	9,54	10,67	11,84
	3	9,44	10,67	13,03
	4	9,45	10,67	12,91
	5	9,45	10,67	12,91
	6	9,45	10,67	12,91
	7	9,45	10,67	12,91
	8	9,45	10,67	12,91
	9	9,45	10,67	12,91
	10	9,45	10,67	12,91
	11	9,46	10,67	12,79
	12	9,11	5,76	-36,73

Tabela 5 - Valores das forças cortantes nas colunas das estruturas 5.3 e 5.4.

Força Cortante nas Colunas (KN)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.5	1	7,64	8,92	16,75
	2	9,15	10,85	18,58
	3	9,20	10,85	17,93
	4	8,44	9,20	9,03
5.6	1	7,98	6,94	-13,03
	2	9,77	10,85	11,05
	3	9,65	10,85	12,44
	4	9,66	10,85	12,32
	5	9,66	10,85	12,32
	6	9,66	10,85	12,32
	7	9,66	10,85	12,32
	8	9,66	10,85	12,32
	9	9,66	10,85	12,32
	10	9,66	10,85	12,32
	11	9,67	10,85	12,20
	12	9,30	6,94	-25,38

Tabela 6 - Valores das forças cortantes nas colunas das estruturas 5.5 e 5.6.

Momento Fletor nas Colunas (KNm)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.1	1	20,06	20,64	2,89
	2	19,49	20,00	2,62
	3	21,05	20,64	-1,95
5.2	1	11,88	15,02	26,43
	2	13,00	15,00	15,38
	3	12,86	15,00	16,64
	4	12,86	15,00	16,64
	5	12,84	15,00	16,82
	6	12,82	15,00	17,00
	7	12,81	15,00	17,10
	8	12,79	15,00	17,28
	9	12,77	15,00	17,46
	10	12,75	15,00	17,65
	11	12,75	15,00	17,65
	12	12,43	15,02	20,84

Tabela 7 - Valores dos momentos fletores nas colunas das estruturas 5.1 e 5.2.

Momento Fletor nas Colunas (KNm)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.3	1	15,91	19,94	25,33
	2	18,44	21,34	15,73
	3	18,80	21,34	13,51
	4	20,95	26,00	24,11
5.4	1	11,58	12,13	4,75
	2	13,47	14,94	10,91
	3	13,25	14,94	12,75
	4	13,27	14,94	12,58
	5	13,27	14,94	12,58
	6	13,26	14,94	12,67
	7	13,26	14,94	12,67
	8	13,25	14,94	12,75
	9	13,25	14,94	12,75
	10	13,24	14,94	12,84
	11	13,25	14,94	12,75
	12	12,99	12,13	-6,62

Tabela 8 - Valores dos momentos fletores nas colunas das estruturas 5.3 e 5.4.

Momento Fletor nas Colunas (KNm)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.5	1	19,34	26,44	36,71
	2	22,80	27,14	19,04
	3	23,01	27,14	17,95
	4	23,36	29,33	25,56
5.6	1	11,50	13,21	14,87
	2	13,77	15,20	10,38
	3	13,47	15,20	12,84
	4	13,57	15,20	12,01
	5	13,56	15,20	12,09
	6	13,56	15,20	12,09
	7	13,55	15,20	12,18
	8	13,55	15,20	12,18
	9	13,54	15,20	12,26
	10	13,54	15,20	12,26
	11	13,54	15,20	12,26
	12	13,21	13,21	0,00

Tabela 9 - Valores dos momentos fletores nas colunas das estruturas 5.5 e 5.6.

Força Cortante nas Vigas (KN)				
Estrutura	Viga	Elem Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.1	1	17,87	17,37	-2,80
	2	19,69	17,37	-11,78
5.2	1	15,41	12,04	-21,87
	2	15,99	16,00	0,06
	3	15,99	16,00	0,06
	4	15,99	16,00	0,06
	5	15,99	16,00	0,06
	6	15,99	16,00	0,06
	7	15,99	16,00	0,06
	8	15,99	16,00	0,06
	9	15,99	16,00	0,06
	10	15,99	16,00	0,06
	11	15,74	12,04	-23,51

Tabela 10 - Valores das forças cortantes nas vigas das estruturas 5.1 e 5.2.

Força Cortante nas Vigas (KN)				
Estrutura	Viga	Elem Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.3	1	11,64	10,80	-7,22
	2	14,19	14,52	2,33
	3	15,22	12,99	-14,65
5.4	1	9,48	6,45	-32,01
	2	10,16	10,16	0,00
	3	10,16	10,16	0,00
	4	10,16	10,16	0,00
	5	10,16	10,16	0,00
	6	10,16	10,16	0,00
	7	10,16	10,16	0,00
	8	10,16	10,16	0,00
	9	10,16	10,16	0,00
	10	10,15	10,16	0,10
	11	9,93	6,45	-35,10

Tabela 11 - Valores das forças cortantes nas vigas das estruturas 5.3 e 5.4.

Força Cortante nas Vigas (KN)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.5	1	20,40	18,01	-11,72
	2	21,70	21,57	-0,60
	3	22,22	19,25	-13,37
5.6	1	11,20	8,51	-23,99
	2	12,10	12,08	-0,17
	3	12,07	12,08	0,08
	4	12,08	12,08	0,00
	5	12,08	12,08	0,00
	6	12,08	12,08	0,00
	7	12,08	12,08	0,00
	8	12,08	12,08	0,00
	9	12,08	12,08	0,00
	10	12,07	12,08	0,08
	11	11,82	8,51	-27,98

Tabela 12 - Valores das forças cortantes nas vigas das estruturas 5.5 e 5.6.

Momento Fletor nas Vigas (KNm)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.1	1	22,34	21,71	-2,82
	2	24,61	21,71	-11,78
5.2	1	19,27	15,04	-21,95
	2	19,98	20,00	0,10
	3	19,98	20,00	0,10
	4	19,98	20,00	0,10
	5	19,98	20,00	0,10
	6	19,98	20,00	0,10
	7	19,98	20,00	0,10
	8	19,98	20,00	0,10
	9	19,98	20,00	0,10
	10	19,98	20,00	0,10
	11	19,67	15,04	-23,54

Tabela 13 - Valores dos momentos fletores nas vigas das estruturas 5.1 e 5.2.

Momento Fletor nas Vigas (KNm)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.3	1	20,05	18,60	-7,23
	2	24,44	25,00	2,29
	3	26,20	22,36	-14,66
5.4	1	16,33	11,10	-32,03
	2	17,50	17,50	0,00
	3	17,49	17,50	0,06
	4	17,50	17,50	0,00
	5	17,50	17,50	0,00
	6	17,50	17,50	0,00
	7	17,50	17,50	0,00
	8	17,50	17,50	0,00
	9	17,49	17,50	0,06
	10	17,49	17,50	0,06
	11	17,10	11,10	-35,09

Tabela 14 - Valores dos momentos fletores nas vigas das estruturas 5.3 e 5.4.

Momento Fletor nas Vigas (KNm)				
Estrutura	Painel	Elementos Finitos	Método Proposto	Erro (%)
5.5	1	28,37	25,04	-11,74
	2	30,18	30,00	-0,60
	3	30,89	26,76	-13,37
5.6	1	15,59	11,84	-24,05
	2	16,82	16,80	-0,12
	3	16,79	16,80	0,06
	4	16,80	16,80	0,00
	5	16,80	16,80	0,00
	6	16,80	16,80	0,00
	7	16,80	16,80	0,00
	8	16,80	16,80	0,00
	9	16,80	16,80	0,00
	10	16,79	16,80	0,06
	11	16,43	11,84	-27,94

Tabela 15 - Valores dos momentos fletores nas vigas das estruturas 5.5 e 5.6.

Esforços no Anel de Sustentação				
Estrutura	Seção	Força Cortante (KN)	Momento Fletor (KNm)	Momento de Torção (KNm)
5.1 / 5.2	1	0,00	2,07	0,00
	2	0,92	2,00	-0,11
	3	1,83	1,81	-0,21
	4	2,75	1,50	-0,29
	5	3,67	1,06	-0,36
	6	4,58	5,04	-0,40
	7	5,50	-0,18	-0,41
	8	6,41	-0,98	-0,38
	9	7,33	-1,90	-0,31
	10	8,25	-2,93	-0,18
	11	9,16	-4,07	0,00

Tabela 16 - Valores dos esforços no anel de sustentação das estruturas 5.1 e 5.2.

Esforços no Anel de Sustentação				
Estrutura	Seção	Força Cortante (KN)	Momento Fletor (KNm)	Momento de Torção (KNm)
5.3 / 5.4	1	0,00	5,30	0,00
	2	1,77	5,14	-0,21
	3	3,53	4,66	-0,40
	4	5,30	3,86	-0,57
	5	7,07	2,74	-0,70
	6	8,84	1,31	-0,78
	7	1,06	-0,44	-0,80
	8	1,24	-2,50	-0,74
	9	1,41	-4,87	-0,60
	10	1,59	-7,54	-0,35
	11	1,77	-10,52	0,00

Tabela 17 - Valores dos esforços no anel de sustentação das estruturas 5.3 e 5.4.

Esforços no Anel de Sustentação				
Estrutura	Seção	Força Cortante (KN)	Momento Fletor (KNm)	Momento de Torção (KNm)
5.5 / 5.6	1	0,00	4,04	0,00
	2	1,70	3,92	-0,13
	3	3,39	3,55	-0,24
	4	5,09	2,95	-0,35
	5	6,88	2,10	-0,43
	6	8,48	1,00	-0,48
	7	10,18	-0,33	-0,49
	8	11,88	-1,91	-0,45
	9	13,57	-3,72	-0,36
	10	15,27	-5,77	-0,22
	11	16,96	-8,05	0,00

Tabela 18 - Valores dos esforços no anel de sustentação das estruturas 5.5 e 5.6.

6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 - Conclusões

[1] O método descrito revela-se adequado à análise de estruturas aperticadas de torres elevadas. A simplificação introduzida reduz significativamente o esforço computacional exigido na análise.

[2] O cálculo de forças axiais nas colunas pelo método proposto mostrou-se muito preciso nos painéis intermediários, levando a erros menores do que 1% em relação ao valores obtidos na análise por elementos finitos.

[3] As forças cortantes nas colunas apresentam erros em relação ao método de elementos finitos da ordem de 20% para as colunas do painel superior e do painel de base e na ordem de 15% nas colunas dos demais painéis.

[4] Os momentos fletores nas colunas foram calculados pelo método proposto com erros médios da ordem de 20% em relação aos resultados obtidos pelo método de elementos finitos.

[5] As forças cortantes e os momentos fletores nas vigas foram calculadas com erros médios da ordem de 20% nos painéis extremos e valores quase exatos nos painéis intermediários em relação aos resultados obtidos pelo método de elementos finitos.

[6] À medida em que o número de colunas da torre aumenta, os erros no cálculo das forças axiais e dos momentos fletores

nas colunas, das forças cortantes e dos momentos fletores nas vigas tendem a diminuir.

[7] O método proposto se aplica ao pré-dimensionamento de estruturas metálicas de torres para suporte de caixas d'água, uma vez que os esforços calculados nos painéis intermediários têm boa aproximação com aqueles obtidos pelo método de elementos finitos.

6.2 - Sugestões

[1] Desenvolver a formulação do método aproximado proposto para torres elevadas de colunas inclinadas.

[2] Desenvolver um software integrado para a análise e dimensionamento de torres elevadas considerando os efeitos superpostos das cargas laterais na torre e das cargas verticais no anel.

[3] Desenvolver um estudo intensivo para verificar a influência do número de colunas na precisão do método aproximado.

7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Biezeno, C. B. e Grammel, R. (1956). "Elastic Problems of Single Machine Elements", Engineering Dynamics, Vol. II.
- [2] - Ruggeri, E. R. F. (1971), "Método Vetorial para Cálculo dos Esforços Solicitantes, Oficinas Gráficas da Escola de Minas de Ouro Preto - Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP.
- [3] - Stamato, M. C. (1966), "Distribuição das Cargas do Vento entre os Painéis de Contraventamento", Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- [4] - Jain, S. k.; Sameer, U. S. (1994). "Lateral-Load Analysis of Frame Stangings for Elevated Water Tanks", Journal of Structural Engineering, ASCE, 120(5), 1375-1394.
- [5] - Guimarães, A. E. P. (1995). "Indicações para Projeto e Execução de Reservatórios Cilíndricos em Concreto Armado", Escola de Engenharia de São Carlos - USP (Dissertação de Mestrado).
- [6] - Blume, A. J., Newmark, N. M., e Corning, L. H. (1961). "Design of Multistorey Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions", Portland Cement Association, Skokie, III.
- [7] - Macleod, I. A. (1971), "Shear Wall - Frame Interaction, a Design Aid", Portland Cement Association, Skokie, III.

- [8] - Ramaiah, B. K. Gupta, D. S. R. M. (1966). "Factors Affecting Seismic Design of Water Towers", J. Struct. Div., ASCE, 92(4), 13-30.
- [9] - Hilal, M. (1980). "Theory and Design of Reinforced Concrete Tanks", J. Marcou and Co., Cairo, Egypt.
- [10] - Handa, I. J. (1982). "Handbook of Worked Examples in Structural Engineering", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- [11] - Dayaratnam, P. (1986). "Design of Reinforced Concrete Structures", Oxford and IBH Publishing Co., Pvt. Ltd., New Delhi, India.
- [12] - Churchill, R. V. (1975). "Variáveis Complexas e suas Aplicações", Mc Graw Hill.
- [13] - Krishna, J., e Jain, O. P. (1980). "Plain and Reforced Concrete, Vol. 2, Nem Chand and Bros., Roorkee, India.
- [14] - Taranath, B. S. (19xx). "Structural Analysis and Design of Tall Buildings", McGraw-Hill.
- [15] - Bowles, J. E. (1989) , "Diseño de Acero Estructural", Noriega Editores, México.
- [16] - Timoshenko, S. P., e Gere, J. E. (1983), "Mecânica dos Sólidos", Livros Técnicos e Científicos Editora, Vol. I e II.
- [17] - Gere, J. M., e Weaver, W., (1981), "Análise de Estruturas Reticuladas", Editora Guanabara Dois S. A.
- [18] - Queiroz, G. (1993), "Elementos das Estruturas de Aço".

[19] - Hehl, M. E. (1986), "Linguagem de Programação Estruturada: FORTRAN 77", McGraw-Hill.