

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO  
ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
MESTRADO EM CONSTRUÇÃO METÁLICA

FORMULAÇÃO MATRICIAL DA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS  
NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

por

Marcelo Vieira Ribeiro

orientado por

Prof. Antônio Maria Claret de Gouvêia, D.Sc.

CONVÊNIO USIMINAS/ESCOLA DE MINAS/FUNDAÇÃO GORCEIX

# FORMULAÇÃO MATRICIAL DA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

*Marcelo Vieira Ribeiro*

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências da Engenharia Civil.

Aprovada por:

Prof. Antônio Maria Claret de Gouvêia, D. Sc

Escola de Minas, UFOP - Ouro Preto/MG

Presidente, Orientador

Prof. Fernando Venâncio-Filho, Catedrático

COPPE, UFRJ - Rio de Janeiro/RJ

Prof. Gilson Queiroz, D.Sc

EE, UFMG - Belo Horizonte/MG

Prof. Walnório Graça Ferreira, D.Sc.

UFES – Vitória/ES

Ouro Preto - MG – Brasil

JUNHO DE 1998

RIBEIRO, MARCELO VIEIRA

Formulação Matricial da Análise Dinâmica de  
Estruturas no Domínio da Freqüência

[Ouro Preto] 1998

vii, xx p., 29.7 cm (ESCOLA DE MINAS/UFOP, M.Sc.,  
Engenharia Civil, 1998)

Tese - Universidade Federal do Ouro Preto, Escola de  
Minas

1. Dinâmica Estrutural
2. Análise no Domínio da Freqüência
3. Amortecimento Não Proporcional

I. ESCOLA DE MINAS/UFOP

II. Título

(série)

# **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Antônio Maria Claret Gouvêia, pela orientação e apoio prestado na orientação deste trabalho.

A amiga Rosane Trajano de Faria, pela presteza e dedicação, fundamentais para a conclusão deste trabalho.

A amiga Maria Terezinha Vieira, pelo apoio e pela infraestrutura cedida para a execução deste trabalho.

A USIMINAS e à Fundação Gorceix, pelo apoio financeiro.

Aos professores, alunos e funcionários do Mestrado em Construção Metálica.

Aos amigos e familiares.

A Escola de Minas.

Resumo da Tese submetida ao corpo docente de pós-graduação em Engenharia Civil da ESCOLA DE MINAS DE OURO PRETO como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia civil, na área de Estruturas.

**FORMULAÇÃO MATRICIAL DA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS NO  
DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**

**Marcelo Vieira Ribeiro**

Junho de 1998

Orientador: Antônio Maria Claret de Gouvêia

Departamento: Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo estudar uma formulação matricial para a análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência. Por este método as transformadas discretas de Fourier (DTF) diretas e inversas, são resolvidas implicitamente através de operações matriciais. É discutida a relação desta formulação com a formulação tradicional, que resolve as DFT através de algoritmo *Fast Fourier Transform* - FFT. Para os sistemas com vários graus de liberdade, é usada a transformação modal e o método das pseudoforças, combinadas à formulação matricial, para se obter a resposta.

Abstract of the Thesis presented to ESCOLA DE MINAS/UFOP as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

**MATRIX FORMULATION OF DYNAMIC ANALYSIS OF  
STRUCTURAL SYSTEMS IN THE FREQUENCY DOMAIN**

**Marcelo Vieira Ribeiro**

June, 1988

Advisor: Antônio Maria Claret de Gouvêia  
Department: Civil Engineering

The goal of this work is to study a matrix formulation of the dynamic analysis in the frequency domain. By this method the discrete Fourier transforms, direct and inverse, are implicitly solved by matrix operations. In this work it is discussed the relationship between this formulation and the traditional one that solved the DFT by the Fast Fourier Transform algorithm (FFT). For multi-degree-of-freedom systems, is used the modal transformation and the pseudo-force method, combined to the matrix formulation, to obtain the response.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Sistema massa-mola-amortecedor	08
Figura 2.2: Função Impulso Unitário	09
Figura 2.3: Processo de discretização no tempo	14
Figura 2.4: Fenômeno de <i>aliasing</i>	15
Figura 2.5: Transformadas discretas de Fourier	16
Figura 2.6: Convolução de funções periódicas discretas	21
Figura 5.1: Sistema massa-mola-amortecedor	58
Figura 5.2: Carregamento 1	
Figura 5.3: Resposta do sistema com 200 termos no espectro de frequências	60
Figura 5.4: Resposta do sistema com 400 termos no espectro de frequências	61
Figura 5.5: Resposta do sistema com 800 termos no espectro de frequências	61
Figura 5.6: Resposta do sistema com 1000 termos no espectro de frequências	62
Figura 5.7: Resposta do sistema com 400 termos no espectro de frequências	63
Figura 5.8: Resposta do sistema com 600 termos no espectro de frequências	64
Figura 5.9: Resposta do sistema com 1000 termos no espectro de frequências	64
Figura 5.10: Resposta do sistema	65
Figura 5.11: Resposta do sistema	66
Figura 5.12: Resposta do sistema com $S=128$	66
Figura 5.13: Resposta do sistema com $S=256$	67
Figura 5.14: Resposta do sistema com $S=384$	67
Figura 5.15: Resposta do sistema com $S=512$	68
Figura 5.16: <i>Shear Building 1</i>	69
Figura 5.17: Carregamento 2	69
Figura 5.18: Resposta do 1º grau de liberdade	71
Figura 5.19: Resposta do 1º grau de liberdade	72
Figura 5.20: Resposta do 2º grau de liberdade	72

Figura 5.23: Resposta do 2 <sup>o</sup> grau de liberdade	73
Figura 5.23: Resposta do 3 <sup>o</sup> grau de liberdade	73
Figura 5.23: Resposta do 3 <sup>o</sup> grau de liberdade	74
Figura 5.24: <i>Shear Building 2</i>	75
Figura 5.25: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 1 <sup>o</sup> iteração	76
Figura 5.26: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 2 <sup>o</sup> iteração	77
Figura 5.27: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 3 <sup>o</sup> iteração	77
Figura 5.28: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 4 <sup>o</sup> iteração	78
Figura 5.29: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 1 <sup>o</sup> iteração	78
Figura 5.30: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 2 <sup>o</sup> iteração	79
Figura 5.31: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 3 <sup>o</sup> iteração	79
Figura 5.32: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 4 <sup>o</sup> iteração	80
Figura 5.33: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 1 <sup>o</sup> iteração	80
Figura 5.34: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 2 <sup>o</sup> iteração	81
Figura 5.35: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 3 <sup>o</sup> iteração	81
Figura 5.36: 1 <sup>o</sup> grau de liberdade - 4 <sup>o</sup> iteração	82



# ÍNDICE

<b>AGRADECIMENTOS</b>	i
<b>RESUMO</b>	ii
<b>ABSTRACT</b>	iii
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	iv
<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b>	
1.1 Objetivos	01
1.2 Revisão Bibliográfica	02
1.3 Descrição Sumária	05
<b>CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE - FORMULAÇÃO TRADICIONAL</b>	07
2.1 Introdução	07
2.2 Solução da Equação Dinâmica do Movimento no Domínio da Frequência	08
2.3 A Transformada Discreta de Fourier	12
2.4 O Algoritmo FFT	22
<b>CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE - FORMULAÇÃO MATRICIAL</b>	25
3.1 Introdução	25
3.2 Formulação Matricial	26
3.3 Implementação Computacional	34

3.4 Condições Iniciais	43
<b>CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DE SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE</b>	46
4.1 Introdução	46
4.2 Sistemas com Amortecimento Proporcional	47
4.3 Sistemas com Amortecimento Não-Proporcional	53
<b>CAPÍTULO 5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</b>	58
5.1 Introdução	58
5.2 Exemplo 1	58
5.3 Exemplo 2	63
5.4 Exemplo 3	65
5.5 Exemplo 4	69
5.6 Exemplo 5	75
<b>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	83
6.1 Conclusão	83
6.2 Sugestões	84
<b>CAPÍTULO 7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	85

## INTRODUÇÃO

### 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo estudar uma formulação para a análise de sistemas estruturais submetidos a excitações dinâmicas. Esta formulação pode ser considerada uma variação da formulação tradicional para a análise dinâmica no domínio da frequência, que utiliza as transformadas discretas de Fourier (DFT). Nela, através de determinadas operações matriciais, essas transformadas são realizadas implicitamente, levando a uma expressão compacta e elegante para o cálculo da resposta do sistema. Daí o método ser nomeado de formulação matricial para análise estrutural dinâmica, ou ainda, método da transformada implícita de Fourier.

Procurou-se avançar um pouco no embasamento analítico e na compreensão física do método, em relação ao já estabelecido em outros trabalhos. Demonstra-se, por exemplo, que a matriz que opera sobre a excitação produzindo a resposta é uma matriz do tipo Toeplitz, o que facilita sobremaneira a implementação computacional do método. Conclui-se também que essa matriz, à luz do princípio da causalidade que vigora sobre os sistemas fisicamente realizáveis, deve ser triangular inferior. Foi feito um estudo prévio da formulação tradicional para se analisar a pertinência de alguns de seus aspectos com a formulação matricial, tais como procedimentos de discretização e truncamento, extensão de períodos, contaminação do espectro de frequências, entre outros.

O método foi formulado para sistemas com um grau de liberdade e depois estendido para os sistemas com vários graus de liberdade que podem ser desacoplados pela transformação modal. Foi considerado somente o amortecimento do tipo viscoso, isto é, proporcional à velocidade, mas o método pode ser facilmente adaptado para tratar outros tipos de amortecimento como o histerético ou o dependente da frequência. Para os sistemas com amortecimento não-proporcional e, por isso, não factíveis de desacoplamento por aquela transformação, o já bem estabelecido método das pseudo-forças foi empregado para se permitir a aplicação da formulação matricial às equações resultantes.

Para dar suporte aos resultados analíticos, foi desenvolvido um programa em linguagem FORTRAN, que permitiu, além da implementação de exemplos numéricos, a comparação do método proposto com outros já estabelecidos.

## **1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

A análise dinâmica de estruturas pode ser feita no domínio do tempo ou da frequência. A escolha do método mais adequado para um caso específico, depende das propriedades físicas do sistema e da excitação a que ele estiver submetido.

Os métodos no domínio do tempo geralmente utilizam processos de integração passo-a-passo, cuja precisão depende fortemente da grandeza do intervalo de tempo adotado (Bathe, 1982). Entre esses métodos, pode-se citar o método de Newmark- $\beta$  (Newmark, 1959) e o método de Wilson- $\theta$  (Wilson, 1973). Comparações entre as diferentes técnicas de integração numérica no tempo para a solução de

sistemas estruturais dinâmicos podem ser encontradas em diversos livros-texto de dinâmica estrutural como Clough e Penzien, (1996) e Craig, (1982) e também em trabalhos como o de Stefanou, (1994) e Warburton (1990).

Para os casos onde as propriedades físicas do sistema são dependentes da frequência de excitação, a resposta dinâmica deve ser calculada no domínio da frequência. Tal ocorre, por exemplo, em sistemas solo-estrutura ou fluido-estrutura (Humar e Hong Xia, 1993). Também as estruturas modeladas com amortecimento histerético são tratadas mais adequadamente no domínio da frequência (Clough, 1996).

A análise dinâmica no domínio da frequência tornou-se uma realidade com o advento do algoritmo *FFT* (*Fast Fourier Transform*) devido a Cooley e Tukey, (1965), que permitiu a computação extremamente rápida das transformadas discretas de Fourier (DFT). Meek e Veletsos, (1974), propõem um método de se computar as DFT onde o número de termos utilizados nas FFT é menor do que os normalmente necessários. Hall, (1982) propõe uma modificação no algoritmo FFT para uso na dinâmica estrutural, onde o número de termos necessários passa a ser igual a uma potência inteira de 2 multiplicada por 2 ou 3, ao invés de ser uma potência inteira de 2 como no algoritmo original. Humar e Hong Xia, (1993) e Hall e Beck, (1993), analisaram um método onde a função complexa de resposta em frequência original é substituída por uma função mais suave, através do aumento do amortecimento do sistema. Isto permite que se tome um período estendido menor para o cálculo das DFT, com a conseqüente economia computacional.

Venâncio-Filho e Claret, (1991) apresentam a formulação matricial para a análise dinâmica de sistemas lineares de um grau de liberdade no domínio da frequência, onde as transformadas de Fourier, discreta e inversa, são realizadas

implicitamente. Esta abordagem foi posteriormente estendida por Claret, (1991), Venâncio-Filho, (1994), Venâncio-Filho e Claret (1995) e Venâncio-Filho e Claret, (1996), para sistemas com vários graus de liberdade, tanto lineares como não-lineares. Também Ferreira, (1998), aplicou recentemente a formulação matricial para a solução de sistemas não-lineares.

Em sistemas com vários graus de liberdade, quando o amortecimento for considerado distribuído pela estrutura de forma semelhante à da massa e da rigidez, ele é dito ser proporcional. Sistemas com amortecimento proporcional podem ter suas equações de movimento desacopladas pela transformação modal (Caughey e O'Kelly, 1965). Com isso a resposta em coordenadas físicas pode ser obtida pela superposição da resposta em coordenadas modais, tanto no domínio do tempo como no da frequência (Clough, 1996).

Para sistemas estruturais com características mais complexas de amortecimento, as equações do movimento não podem ser desacopladas pela transformação modal e o amortecimento é dito não-proporcional. Foss, (1952) e Hurty e Rubinstein, (1964) sugerem a utilização de modos complexos para desacoplar as equações de movimento de tais sistemas. Porém, o problema de autovalor neste caso é duas vezes maior que o tradicional, e os modos complexos dificultam a interpretação física do problema (Mau, 1988). Mesmo assim, esta solução foi empregada por Singh, (1980), Veletsos e Ventura, (1986), Singh e Ghafory-Ashtiany, (1986), Singh e Suarez, (1986) e Chen e Taylor, (1987), variando entre um e outro autor apenas o processo utilizado na extração dos modos complexos e na sua superposição para cálculo da resposta.

Uma forma de se obter uma solução aproximada de um sistema com amortecimento não-proporcional, apresentada por Thomson *et al*, (1974) e Warburton e Soni, (1977), é desprezar

os termos fora da diagonal da matriz de amortecimento, após a transformação modal.

Outro procedimento que vem sendo empregado para tratar sistemas com amortecimento não-proporcional, e que, na verdade, pode ser empregado para sistemas com todos os tipos de não-linearidades é o conhecido como método das pseudo-forças. Por esse processo, os termos não-lineares são transferidos para o lado direito das equações modais de movimento, e tratados como pseudo-forças. O sistema resultante é resolvido por um processo iterativo, ou no domínio do tempo como o fazem Claret e Venâncio Filho, (1991) e Ibrahimbegovic e Wilson, (1989), ou no domínio da frequência como Jangid e Datta, (1993), ou por um processo misto domínio do tempo-domínio da frequência, como proposto por Ling e Wu, (1987) e Cameron e Griffin, (1989), e depois generalizado por Aprile *et al*, (1994). Dentro desta linha há também os trabalhos de Kawamoto, (1983) e Wolf e Darbre, (1987).

Claret e Venâncio-Filho (1991) fazem um amplo estudo desse método, fornecendo inclusive sua condição de convergência e introduzindo os conceitos de índice de acoplamento e de índice de convergência para caracterizar o grau de não-proporcionalidade do sistema. Chen e Taylor, (1990) utilizam uma base de vetores de Ritz para desacoplar as equações de movimento e utilizar a superposição modal.

Claret (1991) estende a formulação matricial para sistemas não-lineares com vários graus de liberdade, no que é seguido por Venâncio Filho, (1994), Venâncio-Filho e Claret, (1996) e Ferreira, (1998).

### **1.3 DESCRIÇÃO SUMÁRIA**

O capítulo 2 apresenta a formulação tradicional para a

análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência, para sistemas com um grau de liberdade. A partir das integrais de Fourier, chega-se, por um processo de discretização que é explicado graficamente, às transformadas discretas de Fourier, que são resolvidas pelo algoritmo FFT. Discutem-se os erros ocasionados por esse processo e as maneiras de minimizá-los.

O capítulo 3 desenvolve a formulação matricial para a análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência, para sistemas com um grau de liberdade. São deduzidas as propriedades das matrizes de Fourier e da matriz final que vai operar sobre o vetor de cargas conduzindo à resposta do sistema. Prova-se que essa matriz é do tipo Toeplitz e que, para atender ao princípio da causalidade, deve ser triangular inferior. Chega-se também a expressões para o tratamento das condições iniciais pela formulação matricial, o que é fundamental para sua aplicação em sistemas não-lineares.

O capítulo 4 trata de sistemas com vários graus de liberdade, com amortecimento proporcional e não-proporcional. Os primeiros são desacoplados pela transformação modal, com as equações resultantes resolvidas pela formulação matricial. Nos sistemas com amortecimento não-proporcional, é empregado o método das pseudo-forças após a transformação modal, com o sistema resultante sendo resolvido por um processo iterativo, no domínio da frequência, através da formulação matricial.

No capítulo 5 são apresentados vários exemplos numéricos onde se procurou comparar os resultados obtidos com o uso da formulação matricial com os fornecidos por métodos já estabelecidos. Com isso procurou-se comprovar numericamente as expressões analíticas apresentadas no texto, e também validar o programa desenvolvido paralelamente ao trabalho analítico.

O capítulo 6 apresenta as conclusões e sugestões.



## CAPÍTULO 2

---

### ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE - FORMULAÇÃO TRADICIONAL

#### 2.1 INTRODUÇÃO

A análise da resposta de sistemas estruturais submetidos a excitações dinâmicas pode ser feita no domínio do tempo ou no domínio da frequência, com a superioridade da abordagem de uma metodologia sobre a outra dependendo fortemente do problema específico em questão.

Os métodos baseados no domínio do tempo geralmente utilizam processos de integração passo-a-passo, tais como o método de aceleração média constante, o método da aceleração linear ou o método Wilson- $\theta$  (Stefanou, 1994). Estes métodos podem ser aplicados a sistemas com qualquer tipo de não-linearidade, porém, sua estabilidade e a precisão no processo de integração dependem do intervalo de tempo adotado (Bathe, 1982). Com isso, pode ser exigido um esforço computacional muito grande na solução de sistemas onde se necessite de um intervalo de tempo muito pequeno na análise.

Já os métodos baseados no domínio da frequência utilizam como ferramenta matemática as transformadas de Fourier, cuja estabilidade permite que se usem intervalos de tempo maiores que os geralmente utilizados nos processos de integração no domínio de tempo. Além disso, existem situações onde as características físicas do sistema são dependentes da frequência de excitação, o que torna a análise no domínio da

freqüência a única forma efetiva de solução. Sistemas modelados com amortecimento histerético e sistemas que envolvem domínios infinitos, como ocorre em sistemas solo-estrutura, onde o solo tem uma extensão infinita, ou em sistemas barragem-água, onde se considera o reservatório se estendendo para o infinito na direção rio-acima, também só podem ser tratados adequadamente no domínio da freqüência (Hall, 1982).

Este capítulo apresenta a formulação tradicional para a análise dinâmica de sistemas estruturais no domínio da freqüência, com a resposta sendo obtida pelo uso de transformadas discretas de Fourier (DFT) através do algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*). O método é discutido de uma maneira expositiva, sem uma demonstração matemática formal dos conceitos envolvidos

## 2.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DINAMICA DO MOVIMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

O sistema de um grau de liberdade mostrado na figura (2.1) está sujeito a uma carga  $p(t)$  aplicada à massa  $m$ , a partir do tempo  $t = 0$ .

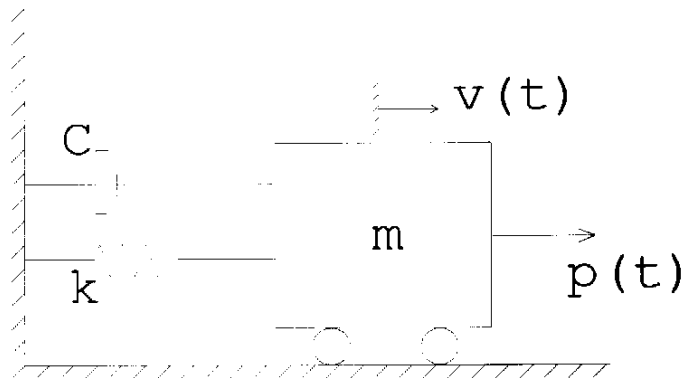


Figura 2.1: Sistema massa-mala-amortecedor.

A equação do movimento é:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t) \quad (2.1)$$

onde  $c$  é o amortecimento viscoso,  $k$  a rigidez, e  $\ddot{v}(t)$ ,  $\dot{v}(t)$  e  $v(t)$  a aceleração, velocidade e deslocamento da massa, respectivamente.

Para sistemas lineares com condições iniciais nulas a resposta  $v(t)$  pode ser determinada no domínio do tempo através da seguinte integral de convolução (Clough e Penzien, 1993).

$$v(t) = \int_0^t p(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.2)$$

onde  $t$  é o tempo,  $\tau$  é a variável de integração, e  $h(t)$  é a função de resposta impulso unitário (nula para  $t < 0$ ), ou seja,  $h(t - \tau)$  é a resposta da massa a um impulso de magnitude unitária aplicado no tempo  $t = \tau$ .

A função impulso unitário, figura (2.2), é definida matematicamente como

$$\delta(t - a) = 0, \text{ para } t \neq a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)dt = 1 \quad (2.3)$$

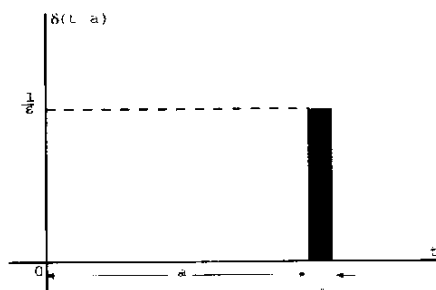


Figura 2.2: Função impulso

unitário

Deve-se observar que, enquanto o intervalo de tempo no qual a função é diferente de zero é, por definição, definição, infinitamente pequeno, isto é,  $\epsilon$  tende a zero no limite, e a amplitude da função neste intervalo de tempo é indefinida, a área sob a curva é bem definida e igual à unidade. Como a integral em (2.3) é adimensional, a unidade da função impulso unitário é  $s^{-1}$ .

Para um sistema sub-amortecido

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_D} \text{sen}[\omega_D(t - \tau)] \exp[-\xi\omega(t - \tau)] \quad (2.4)$$

onde  $\omega$  é a freqüência natural do sistema =  $\sqrt{k/n}$ ,  $\xi$  é a taxa de amortecimento =  $c/2m\omega$ , e  $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ , a freqüência natural amortecida. Em muitos sistemas, tais como os que envolvem domínios infinitos citados na seção anterior, não é possível determinar  $h(t)$ , o que faz com que eles só se resolvam no domínio da freqüência  $\bar{\omega}$

Para se resolver a equação (2.1) no domínio da freqüência, considera-se o sistema submetido a uma excitação harmônica unitária na freqüência

$$p(t) = \exp(i\bar{\omega}t) \quad (2.5)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$ , excitação esta que vai provocar uma resposta da forma:

$$v(t) = H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) \quad (2.6)$$

$$\dot{v}(t) = i\bar{\omega}H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) = i\bar{\omega}v(t) \quad (2.7)$$

$$\ddot{v}(t) = -\bar{\omega}^2 H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) = -\bar{\omega}^2 v(t)$$

(2.8)

onde  $H(\bar{\omega})$  é uma função da frequência de excitação cuja expressão se busca encontrar.

Levando as equações (2.5) a (2.8) em (2.1) resulta

$$(-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k)H(\bar{\omega}) = 1 \quad (2.9)$$

Logo,

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k} \quad (2.10)$$

A função  $H(\bar{\omega})$  é conhecida como a função complexa de resposta em frequência, sendo definida como a resposta do sistema a uma carga harmônica complexa unitária na frequência  $(\bar{\omega})$ . Prova-se que  $h(t)$ , função de resposta impulso unitário, e  $H(\bar{\omega})$  formam um par de transformadas de Fourier, o que permite, caso a primeira seja conhecida, obter a segunda por

$$H(\bar{\omega}) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (2.11)$$

ou vice-versa

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \quad (2.12)$$

A transformada de Fourier do carregamento genérico  $p(t)$  da equação (2.1) é

$$P(\bar{\omega}) = \int_0^{\infty} p(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (2.13)$$

O teorema da convolução (Wilie e Barrett, 1995) estabelece que a convolução no tempo de duas funções e o produto de suas transformadas de Fourier formam um par de transformadas de Fourier, ou, em outras palavras, convolução no tempo equivale a multiplicação na freqüência.

Tendo em vista então (2.2), (2.11) e (2.13) conclui-se, à luz desse teorema, que  $v(t)$  e o produto  $H(\bar{\omega})P(\bar{\omega})$  formam um par de transformadas de Fourier, com o que, por transformação inversa de Fourier chega-se a

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega} \quad (2.14)$$

que é a solução da equação (2.1) através da análise no domínio da freqüência pelo uso das transformadas de Fourier. Em (2.14), a função complexa de resposta em freqüência  $H(\bar{\omega})$  pode ser obtida através da transformada direta de  $h(t)$ , equação (2.11), ou, quando não existir expressão para esta última, através da solução da equação do movimento para uma carga harmônica unitária, conforme as equações (2.9) e (2.10).

As equações (2.10) ou (2.11), (2.13) e (2.14) fornecem a resposta do sistema à excitação genérica  $p(t)$  e são equivalentes à convolução representada pela equação (2.2).

### 2.3 A TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Na maior parte das situações práticas, a carga  $p(t)$  não é tratada de forma contínua, mas sim através de uma série de pontos discretos  $p(t_i)$ . Da mesma forma, a resposta  $v(t)$  também

é obtida nesses pontos, gerando-se um vetor resposta  $v(t_i)$ . Por outro lado, rotinas computacionais também exigem a transformação de dados contínuos em discretos.

Como consequência as equações (2.10), (2.11), (2.13) e (2.14) devem ser modificadas, com as integrais de Fourier sendo substituídas por suas versões discretas, as transformadas discretas de Fourier. Essas transformadas discretas são, pois, uma aproximação das transformadas contínuas de Fourier, e, como em todas as aproximações, estão sujeitas a erros que devem ser reduzidos tanto quanto possível. Esses erros são inerentes ao processo de obtenção de  $N$  pontos discretos da função do tempo original e também de  $N$  pontos discretos de sua transformada de Fourier. Esse processo envolve três passos (Meirovitch, 1986; O'Brigham, 1974): discretização no domínio do tempo, truncamento no domínio do tempo e discretização no domínio da frequência.

A transformação de uma função contínua do tempo em uma função equivalente, discretizada em intervalos iguais a  $T$ , pode ser acompanhada na figura (2.3) (Meirovitch, 1986), onde, por comodidade, se utilizou a frequência cíclica  $f = \omega/2\pi$  no lugar da frequência natural  $\omega$ . No processo descrito pela figura (2.3) também se usou um resultado da teoria das funções generalizadas, segundo o qual o produto de uma função contínua em  $t = T$  e uma função impulso vale

$$f(t) \delta(t - T) = f(T) \delta(t - T) \quad (2.15)$$

A discretização da função original  $f(t)$  da figura (2.3a) é feita multiplicando-a por  $\Delta(t)$ , trem de impulsos unitários espaçados pela distância  $T$ , (figura 2.3b), tendo como resultado uma função discreta do tempo formada por infinitos pontos (figura 2.3c). Sua transformada de Fourier é obtida pelo teorema da convolução na frequência (Wilie e Barrett, 1995), que estabelece que a transformada de Fourier do produto

de duas funções do tempo é igual à convolução das transformadas de Fourier das funções, ou seja, multiplicação no tempo equivale a convolução na frequência. A transformada de Fourier de  $f(t)$ ,  $F(f)$  está representada em (2.3a) e a transformada do trem de impulsos unitários é outro trem de impulsos  $\Delta(f)$  (O'Brigham, 1974), de magnitude igual a  $1/T$ , espaçados pela distância  $1/T$  (figura 2.3b). A convolução dessas duas transformadas se mostra na figura (2.3c), de onde se conclui que a transformada de Fourier da função discretizada a cada intervalo  $T$  é uma função periódica, com período igual a  $1/T$ , igual à função  $F(f)$  exceto pela amplitude, que é dividida por  $T$ .

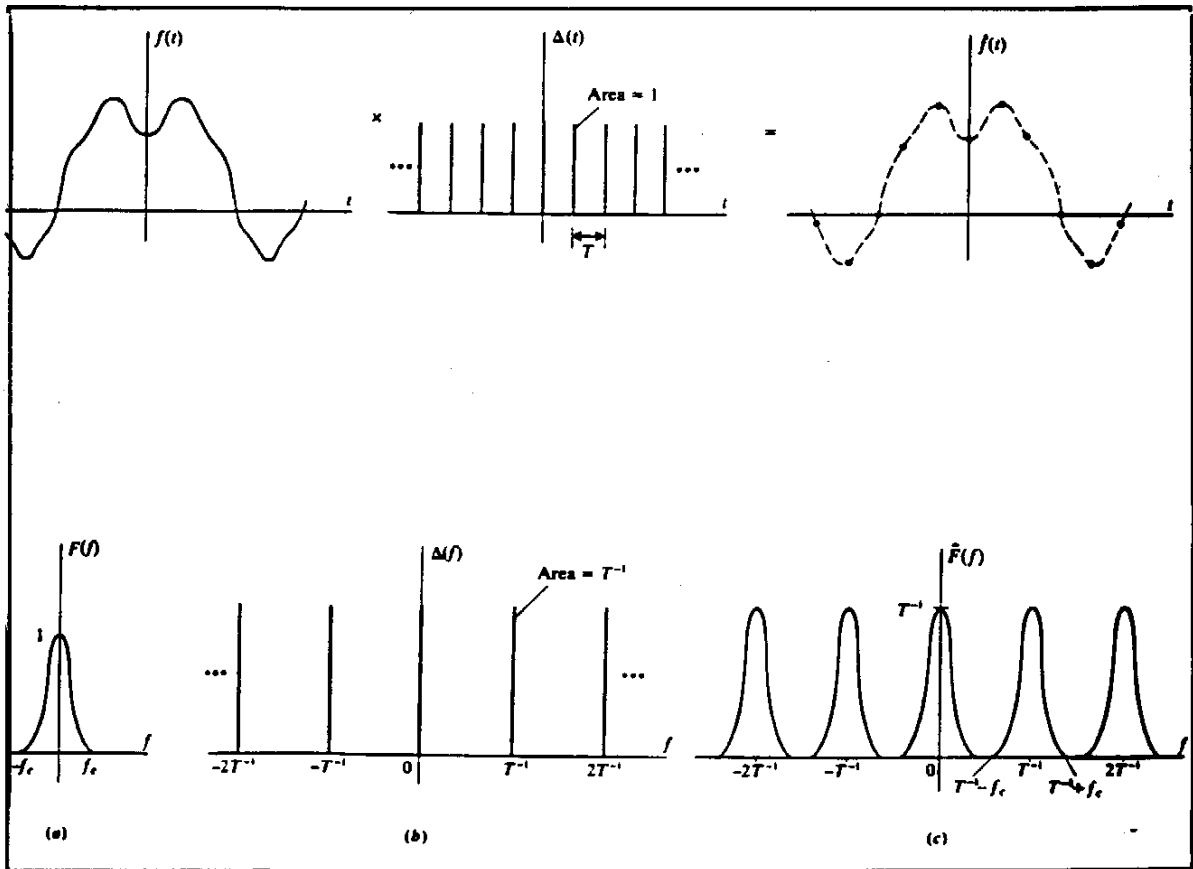


Figura 2.3: Processo de discretização no tempo.

O processo descrito no parágrafo anterior e ilustrado na



figura (2.3) partiu da premissa que o intervalo de discretização  $T$  foi pequeno o bastante para que, na figura (2.3c) um período não se misturasse com o outro. Se, porém, o

Intervalo  $T$  aumenta, os impulsos  $\Delta(f)$  se aproximam, o que pode causar uma superposição nas funções  $F(f)$ , tal como mostrado na figura (2.4) (Meirovitch, 1986).

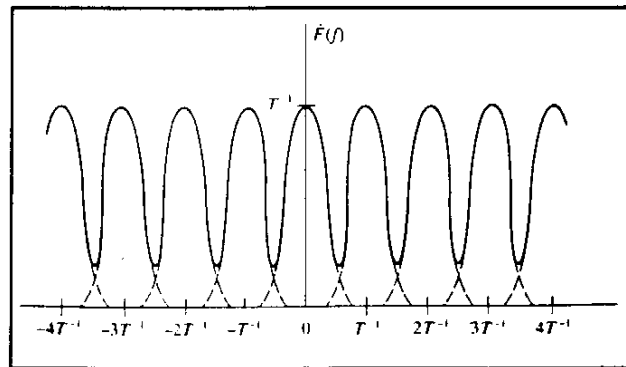


Figura 2.4: Fenômeno de *aliasing*.

Logo, a transformada de Fourier de uma função discretizada com uma taxa de discretização baixa, sofre uma distorção em relação àquelas discretizadas com uma taxa mais alta. Esta distorção é conhecida como *aliasing*, e pode ser entendida como a contaminação do espectro de freqüências de um período por freqüências de outro período. Da figura (2.3c) vê-se que a taxa mínima de discretização para evitar a superposição de freqüências é  $T = 1/(2f_c)$ , onde  $f_c$  é a mais alta freqüência de  $F(f)$ . Assim para evitar esta distorção deve-se ter

$$T < \frac{1}{2f_c} = \frac{\pi}{\omega_{\max}} \quad (2.16)$$

Observe-se que a ausência total de *aliasing* só é possível

se  $F(f) = 0$  para  $|f| > f_c$ .

O processo completo de obtenção do par de transformadas discretas de Fourier a partir do par de integrais de Fourier é mostrado na figura (2.5) (Meirovitch, 1986).

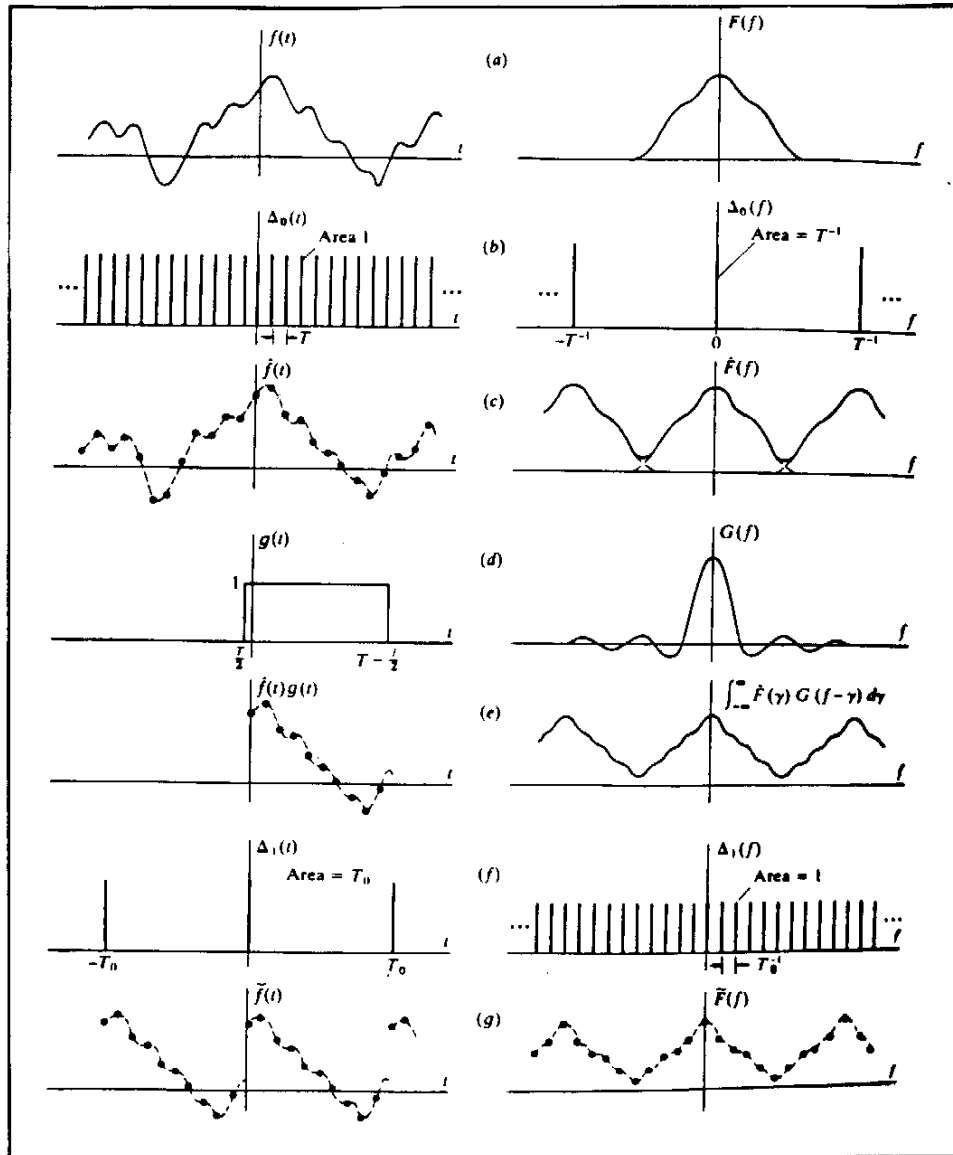


Figura 2.5: Transformadas discretas de Fourier.

O primeiro passo, discretização no domínio do tempo, foi explicado anteriormente, e está ilustrado na seqüência a a c da figura (2.5), onde se pode observar a ocorrência de *aliasing*. O próximo passo é o truncamento da função discretizada no tempo, já que somente  $N$  pontos serão considerados na análise. A função de truncamento e sua

transformada de Fourier estão ilustradas na figura (2.5d). Multiplicando no tempo e fazendo a convolução na freqüência, temos o resultado na figura (2.5e), onde no domínio do tempo tem-se uma função com  $N$  pontos e de magnitude igual à da função original, e no domínio da freqüência tem-se a mesma função da figura (2.5c), mas com algumas ondulações causadas pela sua convolução com a transformada da função de truncamento.

O último passo para se chegar ao par de transformadas de Fourier é a discretização no domínio da freqüência o que é feito através do trem de impulsos unitários na freqüência e sua transformada inversa de Fourier, mostrados na figura (2.5f). Multiplicando na freqüência e fazendo a convolução no tempo chega-se ao resultado da figura (2.5g). Pela figura vê-se que a função de tempo original e sua transformada de Fourier foram aproximadas por  $N$  pontos discretos. Esses  $N$  pontos definem o par de transformadas discretas de Fourier e aproximam o par de transformadas original.

A discretização no domínio do tempo provocou periodicidade no domínio da freqüência e a discretização no domínio da freqüência provocou periodicidade no domínio do tempo. Logo, as transformadas discretas de Fourier implicam em que as funções de tempo e freqüência originais se transformem em funções discretas periódicas, com um período sendo

determinado por  $N$  pontos.

A formalização matemática do que foi graficamente estabelecido até aqui pode ser encontrada em O'Brigham (1974) ou Meirovitch (1986).

Voltando às equações que definem a análise da resposta no domínio da frequência, equações (2.11), (2.13) e (2.14), aqui repetidas por conveniência

$$H(\bar{\omega}) = \int_0^{\infty} h(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (2.11)$$

$$P(\bar{\omega}) = \int_0^{\infty} p(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (2.12)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega})H(\bar{\omega}) \exp(-i\bar{\omega}t) dt \quad (2.13)$$

as transformadas discretas que as substituem serão

$$H(m\Delta\bar{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta t) \exp\left[-2\pi i \left(\frac{mn}{N}\right)\right], m = 0, \dots, N-1 \quad (2.17)$$

$$P(m\Delta\bar{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(n\Delta t) \exp\left[-2\pi i \left(\frac{mn}{N}\right)\right], m = 0, \dots, N-1 \quad (2.18)$$

$$v(m\Delta\bar{\omega}) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(m\Delta\bar{\omega})H(m\bar{\omega}) \exp\left[2\pi i \left(\frac{mn}{N}\right)\right], n = 0, \dots, N-1 \quad (2.19)$$

onde  $H(m\Delta\bar{\omega})$ ,  $P(m\Delta\bar{\omega})$ ,  $v(n\Delta t)$ ,  $h(n\Delta t)$  e  $p(n\Delta t)$  são as versões discretizadas periódicas das funções  $H(\bar{\omega})$ ,  $P(\bar{\omega})$ ,  $v(t)$ ,  $h(t)$  e  $p(t)$ . Por razões já mencionadas,  $H(m\Delta\bar{\omega})$  também pode ser obtida através da solução da equação (2.10) para valores discretos  $m\Delta\bar{\omega}$ .

Nas equações acima os intervalos de discretização  $\Delta t$  e  $\Delta \bar{\omega}$  podem ser expressos em termos do período  $T$  e do número  $N$  de pontos discretos deste período, como

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (2.20)$$

e

$$\Delta \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} \quad (2.21)$$

A expressão  $\exp[2\pi i(mn/N)]$  é a forma discreta de  $\exp(i\bar{\omega}t)$ , já que, sendo  $\bar{\omega} = m\Delta \bar{\omega}$  e  $t = n\Delta T$ , tem-se

$$i\bar{\omega}t = im\Delta \bar{\omega}n\Delta T = im \frac{2\pi}{T} n \frac{T}{N} = 2\pi i \frac{mn}{N}$$

No somatório da equação (2.19) não existem freqüências negativas, o que está aparentemente em desacordo com sua similar contínua, equação (2.14). Porém, assumindo  $N$  par, essas freqüências ocorrem no intervalo  $N/2 < m < N$ , como mostrado na Tabela 2.1, devido à periodicidade das funções  $P(m\Delta \bar{\omega})$  e  $H(m\Delta \bar{\omega})$ .

Tabela 2.1: Relação entre  $m$  e  $m\Delta \bar{\omega}$  para  $N$  par

$m$	Freqüência $m\Delta \bar{\omega}$ correspondente
0	0
1	$\Delta \bar{\omega}$
2	$2\Delta \bar{\omega}$
.	.
$N/2 - 1$	$(N/2 - 1)\Delta \bar{\omega}$

N/2	$(N/2) \Delta \bar{\omega}$
N/2 + 1	$- (N/2 - 1) \Delta \bar{\omega}$
.	.
N - 2	$-2 \Delta \bar{\omega}$
N - 1	$-\Delta \bar{\omega}$

Sendo  $p(n\Delta t)$  e  $h(n\Delta t)$  reais,  $P(m\Delta \bar{\omega})$  e  $H(m\Delta \bar{\omega})$  têm seus valores em  $m = N - j$  como complexos conjugados dos valores em  $m = j$ , para  $j = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ . Para  $m = 0$  os valores são reais e para  $m = N/2$ , aparece um termo imaginário mas, ou ele é desprezado (Claret, 1991), ou apenas a parte real é usada nos cálculos (Hall e Beck, 1993).

A frequência máxima ocorre em  $m = N/2$ , isto é,  $\bar{\omega}_{\max} = (N/2)\Delta \bar{\omega}$  ou

$$\bar{\omega}_{\max} = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (2.22)$$

que é a chamada frequência de Nyquist.

À semelhança do caso contínuo, onde o teorema da convolução estabelece a equivalência entre a equação (2.1) e as equações (2.11), (2.13) e (2.14), as equações (2.17), (2.18) e (2.19) equivalem à seguinte convolução discreta

$$v(n\Delta t) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} p(j\Delta t)h(n\Delta t - j\Delta t), \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (2.23)$$

onde as funções discretas  $v(n\Delta t)$ ,  $p(j\Delta t)$  e  $h(n\Delta t - j\Delta t)$  são periódicas e de período igual a  $N$ , devido à periodicidade

implícita às transformadas discretas de Fourier. Na prática o somatório da equação (2.23) só se efetiva até  $j=n$ , já que, como  $h(n\Delta t)=0$  para  $n<0$ , ter-se-á  $h(n\Delta t - j\Delta t)=0$  para  $j>n$ . Isto reflete o princípio da causalidade, que será comentado no próximo capítulo.

A convolução discreta da equação (2.23) é mostrada na figura (2.6) (Hall, 1982), para um determinado tempo discreto  $n\Delta t$ .

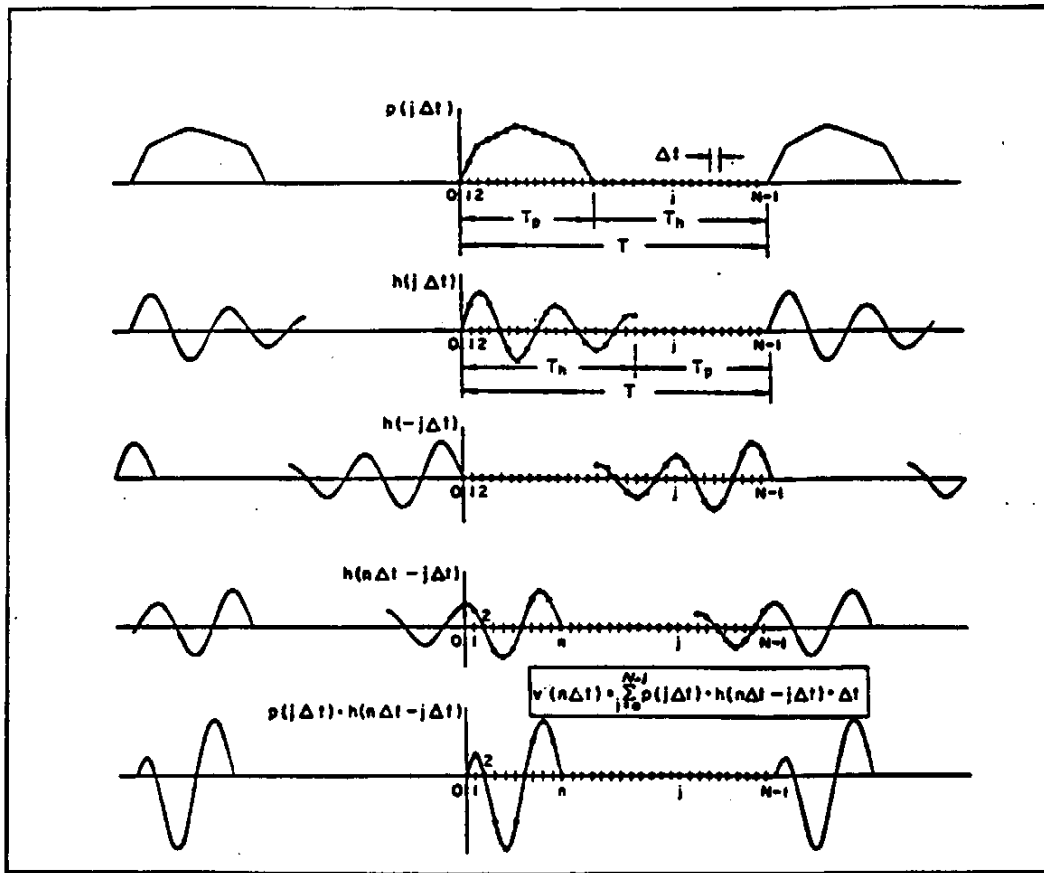


Figura 2.6: Convolução de funções periódicas discretas.

A função  $h(j\Delta t)$  é truncada, tendo a duração  $T_h$ . O período  $T=N\Delta t$  é tomado como a soma da duração  $T_p$  de  $p(j\Delta t)$  mais  $T_h$ , isto é,  $T = T_p + T_h$ . Aumenta-se a seguir  $p(j\Delta t)$  e  $h(j\Delta t)$  com zeros até se atingir o período  $T$ . Com isso elimina-se ou compensa-se a superposição de um período em outro, que ocorre durante o processo de convolução. Em outras palavras, espera-se a resposta decair, até que, no início do segundo período, as condições iniciais do primeiro sejam obedecidas. Observe-se

que se o amortecimento do sistema reduzir  $h(j\Delta t)$  a valores negligíveis para  $t \geq T_h$ , não é necessário o seu truncamento.

Para que (2.23) e, também, (2.17), (2.18) e (2.19), forneçam uma boa aproximação das funções contínuas, devem ser escolhidos valores adequados para  $T$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta\bar{\omega}$  e  $\bar{\omega}_{\max}$ , sendo que, a definição de duas dessas variáveis determinam as outras duas mais  $N$ . Primeiro se seleciona  $T$  como o tempo provavelmente necessário para o decaimento da resposta, o que por si já determina um valor para  $\Delta\bar{\omega}$ . A seguir, escolhe-se um  $\Delta t$  pequeno o bastante para se reduzir os erros causados pela discretização, conduzindo também a um valor adequado para  $\bar{\omega}_{\max}$ . Com isso os erros devido à superposição de períodos (*overlapping*), *aliasing* e ondulações (*ripples*) são minimizados.

Outros procedimentos já foram propostos para eliminar ou compensar os erros citados no fim do parágrafo anterior, tal como o método de superposição de resposta corretiva baseada em condições iniciais (Veletsos e Kumar, 1983), ou o método da superposição de resposta corretiva obtida de um par de pulsos periódicos (Meek e Veletsos, 1972). A descrição desses



procedimentos pode ser encontrada nas referências citadas e também em Humar e Hong Xia, (1993).

## 2.4 O ALGORITMO FFT

O cálculo de uma transformada de Fourier exige  $N^2$  multiplicações, o que, para um valor alto de  $N$ , se torna uma tarefa muito dispendiosa, em termos de tempo e memória computacionais.

Porém, com o surgimento do algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform* ou Transformada Rápida de Fourier) em 1965, (Cooley e Tukey, 1965), que reduziu o número de multiplicações para um valor igual a  $N \log_2 N$ , numerosos processos que eram inviáveis tornaram-se possíveis, provocando um grande avanço em muitos campos científicos (Bracewell, 1990).

A transformada rápida de Fourier (FFT) é, pois, apenas um algoritmo para se calcular mais rapidamente as transformadas discretas de Fourier. Sua eficiência vem do fato dessas últimas conterem o termo  $\exp[i2\pi(mn/N)]$  e de se tomar  $N$  da forma  $N = 2^j$ , com  $j=2,3,\dots$ .

Usando as propriedades harmônicas de  $\exp[i2\pi(mn/N)]$  e a escolha de  $N$  como potência de 2, chega-se a um processo de fatoração, onde as  $N^2$  multiplicações se reduzem a  $N \log_2 N$ . O desenvolvimento completo do algoritmo pode ser encontrado em Cooley e Tukey, (1965) e O'Brigham, (1974).

Para o cômputo da resposta  $v(n\Delta t)$ , eq. (2.19), calcula-se a soma da eq. (2.18) por FFT, obtendo  $P(m\Delta\bar{\omega})$ . Em seguida, ou se repete o processo para o cálculo de  $H(m\Delta\bar{\omega})$ , eq. (2.17), ou, o que é mais comum, calcula-se estes últimos valores pela

equação (2.10). A seguir, faz-se o produto  $P(m\Delta\bar{\omega})H(m\Delta\bar{\omega})$ , aplica-se de novo a FFT, eq. (2.19) e chega-se a  $v(n\Delta t)$ .

Em um processo completo de cálculo da resposta por FFT, são necessários portanto  $N\log_2 N$  multiplicações complexas para o cálculo de cada uma das equações (2.17), (2.18) e (2.19), e  $N$  multiplicações complexas para o cálculo do produto  $P(m\Delta\bar{\omega})H(m\Delta\bar{\omega})$ , totalizando  $(N + 3N\log_2 N)$  multiplicações. Se se calcular  $H(m\Delta\bar{\omega})$  por (2.10), serão necessárias  $(N + 2N\log_2 N)$  multiplicações mais a geração dos  $N$  valores de  $H(m\Delta\bar{\omega})$  por aquela equação.

Desde seu surgimento, várias versões do algoritmo FFT tem sido apresentadas, para adaptá-lo aos seus vários campos de aplicação, tomando partido da forma específica como se mostram os dados de trabalho em cada campo. Dentro da dinâmica estrutural, pode-se citar, por exemplo, o trabalho de Hall, (1982), onde o requerimento de se tomar  $N$  como potência inteira de 2 muda para  $N$  com potência inteira de 2 multiplicada por 2 ou 3.

### ANÁLISE DINÂMICA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE – FORMULAÇÃO MATRICIAL

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Não obstante a otimização do consumo de tempo computacional propiciado pelo algoritmo FFT, ele apresenta duas restrições que podem se transformar em desvantagens quando usado para o cálculo da resposta dinâmica de um sistema estrutural.

A primeira deve-se ao fato de se impor ao número  $N$  de pontos das funções discretizadas a condição de ser uma potência de 2, ou seja,  $N = 2^j$ ,  $j$  inteiro. Assim, a cada aumento de precisão requerido, dobra-se o número de pontos necessários, isto é,  $N_1 = 2^{j+1} = 2N$ , com o conseqüente aumento do esforço computacional e da área de memória exigida.

O outro aspecto refere-se ao fato de que, com o uso da FFT, a resposta é calculada necessariamente em  $N$  pontos, enquanto o comportamento do sistema geralmente pode ser descrito com um número bem menor deles.

Neste capítulo estuda-se uma formulação de análise, na qual não existe a exigência acima sobre o número  $N$  de termos no cálculo das transformadas discretas de Fourier, e na qual a resposta pode ser calculada em um número arbitrário de pontos, desde que este número traduza adequadamente o comportamento do sistema.

Outra vantagem desta formulação é que as transformadas discretas de Fourier, direta e inversa, são calculadas ao mesmo tempo, de forma implícita, no procedimento que leva à resposta no domínio do tempo.

### 3.2 FORMULAÇÃO MATRICIAL

A análise, no domínio da frequência, da resposta de um sistema de um grau de liberdade submetido a uma excitação dinâmica, passa pela avaliação das transformadas de Fourier expressas por (2.18) e (2.19), aqui repetidas

$$P(m\Delta\bar{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(n\Delta t) \exp\left[-2\pi i\left(\frac{mn}{N}\right)\right], \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (2.18)$$

$$v(m\Delta\bar{\omega}) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(m\Delta\bar{\omega})H(m\bar{\omega}) \exp\left[2\pi i\left(\frac{mn}{N}\right)\right], \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2.19)$$

com  $H(m\Delta\bar{\omega})$  aqui sendo calculado por

$$H(m\Delta\bar{\omega}) = \frac{1}{-(m\Delta\bar{\omega})^2 m + i(m\Delta\bar{\omega})c + k}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

e com o carregamento e a resposta em suas formas discretizadas  $p(n\Delta t)$  e  $v(n\Delta t)$ . Para  $N$  par, as frequências se contam de 0 a  $N-1$ , mas equivalem às mostradas na tabela 2.1, repetida adiante, devido à periodicidade implícita às transformadas discretas de Fourier.

Os intervalos  $\Delta t$  e  $\Delta\bar{\omega}$ , como definido anteriormente, valem

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (2.20)$$

$$\Delta\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} \quad (2.21)$$

onde T é o período adotado para o carregamento.

Tabela 2.1: Relação entre m e  $m\Delta\bar{\omega}$  para N par

m	Freqüência $m\Delta\bar{\omega}$ correspondente
0	0
1	$\Delta\bar{\omega}$
2	$2\Delta\bar{\omega}$
.	.
$N/2 - 1$	$(N/2 - 1)\Delta\bar{\omega}$
$N/2$	$(N/2)\Delta\bar{\omega}$
$N/2 + 1$	$-(N/2 - 1)\Delta\bar{\omega}$
.	.
$N - 2$	$-2\Delta\bar{\omega}$
$N - 1$	$-\Delta\bar{\omega}$

Do segundo teorema de Moivre, da teoria números complexos, a raiz enésima primitiva da unidade vale (Wilie e Barrett, 1995)

$$W = \exp\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.2)$$

Logo, com a notação acima a equação (2.18) fica

$$P(m\Delta\bar{\omega}) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} W^{-mn} p(n\Delta t), \quad m = 0, \dots, N - 1 \quad (3.3)$$

Tomando  $P(m\Delta\bar{\omega})$  e  $p(n\Delta t)$  como os vetores

$$P = \{P(m\Delta\bar{\omega})\} = \{P[0], P[\Delta\bar{\omega}], P[2\Delta\bar{\omega}], \dots, P[(N - 1)\Delta\bar{\omega}]\} \quad (3.4)$$

$$p = \{p(n\Delta t)\} = \{p[0], p[\Delta t], p[2\Delta t], \dots, p[(N-1)\Delta t]\} \quad (3.5)$$

e  $W^{-mn}$  como o termo genérico da matriz

$$E^* = [W^{-mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \cdot & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \cdot & W^{-2(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \cdot & W^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

as  $N$  equações expressas por (3.3) podem ser colocadas sob a seguinte forma matricial

$$P = \Delta t E^* p \quad (3.7)$$

Tomando agora  $v(n\Delta t)$  como o vetor

$$v = \{v(n\Delta t)\} = \{v[0], v[\Delta t], v[2\Delta t], \dots, v[(N-1)\Delta t]\} \quad (3.8)$$

e  $H(m\Delta\bar{\omega})$  expresso por (3.1) como a matriz

$$H = [H(m\Delta\bar{\omega})] = \begin{bmatrix} H[0] & & & & 0 \\ & H[\Delta\bar{\omega}] & & & \\ & & H[2\Delta\bar{\omega}] & & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & H[(N-1)\Delta\bar{\omega}] \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

as  $N$  equações expressas por (2.19) podem ser colocadas sob a seguinte forma matricial

$$v = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} EHP \quad (3.10)$$

sendo  $E$  a matriz

$$E^* = [W^{-mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \cdot & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \cdot & W^{-2(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \cdot & W^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Levando (3.7) em (3.10) vem

$$v = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \Delta t EHE^* p \quad (3.12)$$

Tendo em vista (2.20) e (2.21)

$$\frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \Delta t = \frac{1}{N} \quad (3.13)$$

resultado que levado em (3.12) dá

$$v = \frac{1}{N} EHE^* p \quad (3.14)$$

Esta é a equação básica da formulação matricial para a análise dinâmica de sistemas de um grau de liberdade no domínio da frequência, da forma como foi originalmente apresentada por (Venâncio-Filho e Claret, 1991). Nela está representada a transformada de Fourier do carregamento, o produto desta transformada pela função complexa de resposta em frequência e a transformada inversa de Fourier desse produto, gerando a resposta no domínio do tempo. Por isso essa equação foi denominada de ImFT (*Implicit Fourier Transform*) (Venâncio-Filho, 1994).

Fazendo o produto matricial  $E.E^*$ , tem-se, para a linha  $j$  de  $E$  e a coluna  $k$  de  $E^*$

$$\begin{aligned}
& (1, W^j, W^{2j}, \dots, W^{(N-1)j}) (1, W^{-k}, W^{-2k}, \dots, W^{-(N-1)k}) = \\
& = [1 + W^{j-k} + W^{2(j-k)} + \dots + W^{(N-1)(j-k)}] = \sum_{m=0}^{N-1} W^{m(j-k)}
\end{aligned}$$

Mas, uma s\u00e9rie geom\u00e9trica finita tem a seguinte soma (Wilie e Barrett, 1995)

$$1 + Z + Z^2 + \dots + Z^{N-1} = \sum_{m=0}^{N-1} Z^m = \frac{1 - Z^N}{1 - Z}, \quad Z \neq 1 \quad (3.15)$$

Logo, fazendo  $Z = W^{(j-k)} = \exp[(j-k)i \frac{2\pi}{N}]$  para  $j \neq k$  vem

$$\sum_{m=0}^{N-1} W^{m(j-k)} = \frac{1 - W^{(j-k)N}}{1 - W^{(j-k)}}, \quad j \neq k$$

Mas,

$$W^{(j-k)N} = \exp[(j-k)2\pi i] = \cos(j-k)2\pi + i \operatorname{sen}(j-k)2\pi = 1$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{m(j-k)} = 0, \quad j \neq k$$

Para  $j=k$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{m(j-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} W^0 = N$$

Logo, combinando os dois casos, tem-se para o elemento gen\u00e9rico do produto  $EE^*$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{m(j-k)} = \begin{cases} N & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$



(3.16)

Com isso conclui-se que  $E$  e  $(1/N)E^*$  são matrizes inversas, com a equação (3.14) podendo tomar a forma

$$v = EHE^{-1}p \quad (3.17)$$

A equação (3.14) pode ser posta sob uma forma ainda mais compacta (Venâncio-Filho e Claret, 1996)

$$v = \frac{1}{N} ep \quad (3.18)$$

onde

$$e = EHE^*$$

A expressão (3.18) representa em uma forma sintética e elegante o cálculo da resposta, onde o vetor de cargas no domínio do tempo é transformado diretamente no vetor de respostas já no domínio do tempo, com todas as expressões intermediárias embutidas na matriz  $e$ .

O produto matricial em (3.18), ao misturar operações no domínio do tempo com operações no domínio da frequência, deve, porém, ser tomado de maneira a que a equação (3.18) obedeça ao princípio da causalidade, que deve ser seguido por todos os sistemas fisicamente realizáveis e que já foi citado com relação à convolução discreta expressa pela equação (2.23).

A equação (3.18) será causal desde que a resposta  $v(t)$  em um instante  $t$  dependa da história prévia da excitação  $p(\tau)$  para  $\tau < t$  (Crandall, 1969). Para que isso ocorra, a matriz  $e$  deve ter, portanto, todos os seus termos acima da diagonal principal nulos.

O termo genérico de ordem  $(k,l)$  da matriz  $e$  vale,

portanto

$$e_{kl} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N-1} E_{kj} H_{jj} E_{j1}^* = \sum_{j=0}^{N-1} W^{kj} H_{jj} W^{-j1}, & k = 0, \dots, N-1; l = 0, \dots, k \\ 0, & k = 0, \dots, N-2; l = k+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Tomando agora o termo de ordem  $(k+1, l+1)$ , da parte triangular inferior de  $\mathbf{e}$ , vem

$$\begin{aligned} e_{k+1, l+1} &= \sum_{j=0}^{N-1} E_{(k+1)j} H_{jj} E_{j(l+1)}^* = \sum_{j=0}^{N-1} W^{(k+1)j} H_{jj} W^{-j(l+1)} = \sum_{j=0}^{N-1} W^{kj} W^j H_{jj} W^{-j1} W^{-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} W^{kj} H_{jj} W^{-j1}, \quad k = 0, \dots, N-2; \quad l = 0, \dots, k \end{aligned}$$

Logo

$$e_{(k+1)(l+1)} = e_{kl} \quad (3.20)$$

A equação (3.20) indica que a matriz  $\mathbf{e}$  tem seus termos iguais ao longo das diagonais, ou seja, ela apresenta a forma

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{00} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ e_{10} & e_{00} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ e_{20} & e_{10} & e_{00} & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ e_{(N-2)0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ e_{(N-1)0} & e_{(N-2)0} & \cdot & \cdot & e_{20} & e_{10} & e_{00} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A matriz  $\mathbf{e}$ , portanto, é uma matriz do tipo Toeplitz, que é como são conhecidas as matrizes, geralmente cheias, com elementos constantes ao longo das diagonais. Essas matrizes aparecem na modelagem matemática de problemas relacionados a vários campos científicos, onde algum tipo de padrão de deslocamento em termos de espaço ou tempo ocorra. Problemas desse tipo são, por exemplo, os que envolvem análise de séries

temporais, processamento de sinais e processamento de imagens (Bini, 1995).

Por (3.18) e (3.21), a resposta do sistema pode ser calculada por

$$v_i = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^i e_{ij} p_j, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.22)$$

Como se pode ver de (3.21), uma matriz de Toeplitz do tipo da matriz  $\mathbf{e}$  apresenta somente os termos da primeira coluna diferentes entre si. Uma matriz de Toeplitz de ordem  $N \times N$  desse tipo pode, pois, ser definida com apenas os  $N$  termos de sua primeira coluna, ou seja, da coluna de ordem 0. Definindo o vetor  $\mathbf{r}$  como o vetor formado pelos elementos desta coluna, ordenados do último,  $e_{(N-1)0}$ , ao 1º,  $e_{00}$ , o elemento genérico da matriz  $\mathbf{e}$  pode ser referenciado aos elementos desse vetor pela expressão

$$e_{ij} = r_{N-1-i+j} \quad (3.23)$$

Levando então (3.23) em (3.22), chega-se à seguinte expressão

$$v_i = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^i r_{N-1-i+j} p_j, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3.24)$$

onde a resposta é calculada a partir de um vetor que armazena os elementos que não se repetem na matriz  $\mathbf{e}$ .

À semelhança da equação (3.18), o histórico de velocidades pode ser obtido através da expressão matricial

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \dot{\mathbf{e}} \mathbf{p} \quad (3.25)$$

onde

$$\dot{e} = \mathbf{E}\dot{\mathbf{H}}\mathbf{E}^* \quad (3.26)$$

com  $\dot{\mathbf{H}}$  uma matriz diagonal de elemento genérico

$$\dot{H}(m\Delta\bar{\omega}) = \frac{im\Delta\bar{\omega}}{- (m\Delta\bar{\omega})^2 + i(m\Delta\bar{\omega})c + k}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (3.27)$$

Assim, o histórico de velocidades do sistema é calculado por expressões similares às do cálculo dos deslocamentos, a menos do fator  $(im\Delta\bar{\omega})$ . Quando se calcular a resposta de um sistema em processos passo-a-passo ou de segmentação, a resposta e a velocidade no final de um segmento, são usadas como condições iniciais do segmento seguinte.

### 3.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional da equação (3.14) foi feita por Claret (Claret, 1991), em um processo em que as multiplicações matriciais eram feitas uma a uma. Primeiramente o vetor de cargas era transformado para o domínio da frequência, através do produto  $\mathbf{E}^*\mathbf{p}$ . A seguir, pré-multiplicava-se o resultado por  $\mathbf{H}$ , obtendo-se a resposta no domínio da frequência, e finalmente, pré-multiplicava-se essa resposta por  $(1/N)\mathbf{E}$ , chegando-se à resposta no domínio do tempo.

Neste trabalho buscou-se a implementação computacional da equação (3.18), com o cálculo da matriz  $\mathbf{e}$  e a obtenção da resposta no domínio do tempo diretamente do seu produto

pelo vetor de cargas. Na prática isto é feito pela implementação da equação (3.24).

A matriz  $\mathbf{E}$ , conhecida como matriz de Fourier (Wilie e Barrett, 1995), apresenta algumas propriedades, advindas da natureza de seu termo genérico  $W^{mn}$  e da escolha de um valor adequado para  $N$ , que permitem algumas simplificações em sua estrutura, com o conseqüente reflexo na implementação de (3.18).

O termo genérico da matriz  $\mathbf{E}$ , transformado para a forma trigonométrica através da fórmula de Euler, fica

$$\begin{aligned} E_{mn} = W^{mn} &= \exp\left[2\pi i \left(\frac{mn}{N}\right)\right] = \cos\left(2\pi \frac{mn}{N}\right) + \\ &+ i \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{mn}{N}\right), \quad m, n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Fixando-se uma linha  $m$  de  $\mathbf{E}$ , tem-se que o primeiro elemento é igual à unidade enquanto que, para  $N$  par, o elemento  $E_{mN/2}$  vale

$$\begin{aligned} E_{mN/2} = W^{mN/2} &= \exp\left[2\pi i \left(\frac{mN/2}{N}\right)\right] = \\ &= \cos m\pi + i \operatorname{sen} m\pi = (-1)^m \end{aligned} \quad (3.29)$$

Logo, para qualquer linha  $m$ , o primeiro termo e o termo  $E_{mN/2}$  são reais. Os outros termos da linha são tais que

$$E_{m(N-n)} = \operatorname{conjg}(E_{mn}), \quad 0 < n < N/2 \quad (3.30)$$

onde o operador  $\operatorname{conjg}$  retorna o conjugado complexo do seu argumento.

Com efeito

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{m(N-n)} &= W^{m(N-n)} = \exp\left[2\pi i m \frac{(N-n)}{N}\right] = \\
&= \cos\left[m(N-n) \frac{2\pi}{N}\right] + i \operatorname{sen}\left[m(N-n) \frac{2\pi}{N}\right] = \\
&= \cos\left(m2\pi - mn \frac{2\pi}{N}\right) + i \operatorname{sen}\left(m2\pi - mn \frac{2\pi}{N}\right) = \\
&= \cos(m2\pi) \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) + \operatorname{sen}(m2\pi) \operatorname{sen}\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) + \\
&+ \left[ i \operatorname{sen}(m2\pi) \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) - \operatorname{sen}\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) \cos(m2\pi) \right] = \\
&= \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) - i \operatorname{sen}\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) = \operatorname{conjug}(\mathbf{E}_{mn})
\end{aligned}$$

Agregando-se mais uma restrição ao número  $N$  de termos do espectro, qual seja, a de que  $N$  seja múltiplo de 4, chega-se à seguinte expressão para os termos de uma linha  $m$  de  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}_{m(N/2-n)} = (-1)^m \operatorname{conjug}(\mathbf{E}_{mn}) \quad 0 < n < \frac{N}{4} \quad (3.31)$$

De fato

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{m\left(\frac{N}{2}-n\right)} &= W^{m(N-n)} = \exp\left[2\pi i m \left(\frac{N}{2} - n\right) / N\right] = \\
&= \cos\left[m\left(\frac{N}{2} - n\right) \frac{2\pi}{N}\right] + i \operatorname{sen}\left[m\left(\frac{N}{2} - n\right) \frac{2\pi}{N}\right] = \\
&= \cos\left(m\pi - mn \frac{2\pi}{N}\right) + i \operatorname{sen}\left(m\pi - mn \frac{2\pi}{N}\right) = \\
&= \cos(m\pi) \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) + \operatorname{sen}(m\pi) \operatorname{sen}\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) + \\
&+ \left[ i \operatorname{sen}(m\pi) \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) - \operatorname{sen}\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) \cos(m\pi) \right] = \\
&= \cos(m\pi) \left[ \cos\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) - i \operatorname{sen}\left(mn \frac{2\pi}{N}\right) \right] = (-1)^m \operatorname{conjug}(\mathbf{E}_{mn})
\end{aligned}$$

De (3.29), (3.30) e (3.31) conclui-se então que, para

uma linha  $m$  da matriz  $\mathbf{E}$ , gerando-se os  $N/4 + 1$  primeiros termos da

linha, os outros ficam univocamente determinados, a menos do termo  $E_{mN/2}$ , que, como se verá mais tarde, não será usado nos cálculos.

Outra simplificação a ser feita na matriz  $\mathbf{E}$  é a que deriva da relação abaixo:

$$W^{mn} = W^{mn \bmod N} \quad (3.32)$$

onde  $mn \bmod N$  retorna o resto da divisão do produto  $mn$  por  $N$ .

De fato, se  $mn = kN + mn \bmod N$ ,  $k$  inteiro, vem

$$\begin{aligned} W^{mn} &= \exp\left[2\pi i \frac{mn}{N}\right] = \exp\left[2\pi i \frac{(kN + mn \bmod N)}{N}\right] = \\ &= \exp(k2\pi i) \exp\left[2\pi i \frac{(mn \bmod N)}{N}\right] = W^{mn \bmod N} \end{aligned}$$

A relação (3.32) permite que, na matriz  $\mathbf{E}$  de termo genérico  $W^{mn}$ , se substitua cada elemento por seu correspondente dado por aquela expressão. Como, para  $N^2$  produtos  $mn$  existentes na matriz,  $mn \bmod N$  retorna somente  $N$  termos diferentes, tem-se que toda a matriz com  $N^2$  elementos pode ser armazenada em um único vetor com  $N$  elementos.

Tomando como exemplo  $N = 8$ , tem-se

$$E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Aplicando (3.29)

$$\mathbf{E}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W & W^6 & W^3 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^2 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Como se vê comparando (3.30) e (3.31), todos os elementos da matriz podem ser armazenados em um vetor dado pela linha ordem 1.

Para fins de generalidade cumpre dizer que as relações (3.29), (3.30) e (3.31) valem também para a matriz  $\mathbf{E}^*$ . Já quanto a (3.32), para  $\mathbf{E}^*$  vale a similar

$$W^{-mn} = W^{(N-mn \bmod N)} \quad (3.35)$$

De fato, por (3.32)

$$W^{-mn} = W^{-mn \bmod N} = \frac{W^N W^{-mn \bmod N}}{W^N} = W^{N-mn \bmod N}$$

Isto permite que se trabalhe com o mesmo vetor para representar  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{E}^*$ . Exemplificando com  $N=8$

$$\mathbf{E}_8^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3} & W^{-4} & W^{-5} & W^{-6} & W^{-7} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6} & W^{-8} & W^{-10} & W^{-12} & W^{-14} \\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9} & W^{-12} & W^{-15} & W^{-18} & W^{-21} \\ 1 & W^{-4} & W^{-8} & W^{-12} & W^{-16} & W^{-20} & W^{-24} & W^{-28} \\ 1 & W^{-5} & W^{-10} & W^{-15} & W^{-20} & W^{-25} & W^{-30} & W^{-35} \\ 1 & W^{-6} & W^{-12} & W^{-8} & W^{-24} & W^{-30} & W^{-36} & W^{-42} \\ 1 & W^{-7} & W^{-14} & W^{-21} & W^{-28} & W^{-35} & W^{-42} & W^{-49} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$



Aplicando (3.35)

$$E_8^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^7 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W & W^6 & W^3 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^3 & W^6 & W & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Devido porém à forma da matriz  $\mathbf{e}$  mostrada na equação (3~21),  $E^*$  só contribui com os elementos de sua coluna de ordem 0, que são iguais à unidade, para o termo genérico da primeira. Com isto se tornam supérfluas as propriedades da  $E^*$  para a implementação computacional em estudo.

Da expressão (3.1) que dá o termo genérico da matriz  $\mathbf{H}$  e do espectro da frequência para  $N$  par mostrado na tabela 2.1, tem-se que  $H(0)$  é real e vale  $1/k$  e os outros termos, à exceção de  $H(N/2)$ , são tais que

$$H(N - m) = \text{conjg}(H(m)), \quad 0 < m < \frac{N}{2} \quad (3.38)$$

Levando em conta a expressão acima, junto com a expressão (3.29), (3.30) e (3.31) válida para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{E}^*$ , e tendo em vista que, para essas duas matrizes, o que vale para as linhas permanece válido para as colunas, um elemento genérico do triplo produto matricial,  $\mathbf{EHE}^*$ , ou seja, um elemento genérico da matriz  $\mathbf{e}$ , assume a forma

$$e_{mn} = [EHE^*]_{mn} = \left[ \frac{1}{k} + E_{m1}H_{11}E_{1n}^* + E_{m2}H_{22}E_{2n}^* + \dots + E_{mN/2}H_{(N/2)(N/2)}E_{N/2}^* + \dots + \right. \\ \left. + \overline{E}_{m2}\overline{H}_{22}\overline{E}_{2n}^* + \overline{E}_{m1}\overline{H}_{11}\overline{E}_{1n}^* \right]$$

(3.39)

onde a barra superior indica o complexo conjugado do elemento.

Tendo em vista a expressão (3.29) e o que foi dito anteriormente sobre a matriz  $E^*$  esta expressão pode ser

simplificada para

$$e_{mn} = [EHE^*]_{mn} = \left[ \frac{1}{k} + E_{m1}H_{11} + E_{m2}H_{22} + \dots + (-1)^m H_{(N/2)(N/2)} + \dots + \bar{E}_{m2}\bar{H}_{22} + \bar{E}_{m1}\bar{H}_{11} \right] \quad (3.40)$$

A relação (3.40) indica que um elemento genérico de  $e$ , com as premissas estabelecidas anteriormente, é formado pela soma de um termo real, um termo complexo e  $(N/2-1)$  pares de complexos conjugados. Logo, este elemento terá uma parte real e outra imaginária, formada só pela parte imaginária do termo  $(-1)^n H_{N/2N/2}$ , já que as outras partes imaginárias se anulam.

Como a resposta, dada por (3.18), deve ser real, esta parcela imaginária deve ser desprezada, o que pode ser feito, tanto considerando apenas a parte real de  $H_{(N/2)(N/2)}$  (Hall e Beck, 1993), como desprezando o termo inteiro (Claret, 1991). Neste último trabalho demonstra-se que este segundo procedimento não afeta a precisão da resposta e, por isso, vai ser seguido aqui.

Como já foi dito anteriormente, geralmente o comportamento de um sistema dinâmico pode ser descrito com um número bem menor de termos que os necessários para se conseguir um adequado espectro de frequências da excitação.

A formulação matricial permite que se leve em conta esse fato, bastando que se altere as ordens das matrizes e

vetores envolvidos nas expressões (3.18) e (3.19). Assim, se se deseja calcular  $S$  termos da resposta, a implementação computacional da formulação deve ser feita de modo a se chegar a um vetor  $\mathbf{v}$  de ordem  $S \times N$ ,  $\mathbf{H}$  de ordem  $N \times N$ ,  $\mathbf{E}^*$  de ordem  $N \times S$  e o vetor de carga  $\mathbf{p}$  de ordem  $S \times 1$ .

A matriz  $\mathbf{e}$  será, portanto, de ordem  $S \times S$  e apenas os  $S$  elementos de sua primeira coluna precisarão ser gerados, o que, em última instância, é a mais forte característica computacional desta formulação.

Na formulação matricial os erros originados do *overlapping*, *aliasing* e *rippling* também devem ser controlados através de uma escolha adequada dos valores de  $N$ ,  $t$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta w$  e  $W_{\max}$ . Note-se que o procedimento de se tomar apenas  $S$  termos na resposta,  $S < N$ , não tem influência no cômputo desses valores, como pode ser visto das equações (2.20), (2.21) e (2.22), não influenciando, pois, na magnitude daqueles erros. A única consequência de se calcular apenas  $S$  termos na resposta, que talvez pudesse trazer alguma desvantagem na análise, é que se vai conhecer o histórico de resposta apenas durante o intervalo de tempo  $S\Delta t$  e não durante o intervalo máximo possível  $N\Delta t$ . Porém, esse raciocínio não pode ser empregado, já que uma das premissas básicas da formulação matricial é que o comportamento do sistema pode ser descrito com apenas  $S$  termos na resposta, ou seja, até o tempo  $s\Delta t$ .

Quando se toma  $S$  termos na resposta, o cálculo dos elementos do vetor  $\mathbf{r}$ , que armazena os elementos da 1ª coluna de  $\mathbf{e}$ , envolve aproximadamente  $SN/2$  multiplicações complexas, de acordo com (3.36). Antes disso, deve-se gerar os elementos de  $\mathbf{H}$  por (3.1) e o vetor formado pela 2ª linha

de **E**. Como este último vetor necessita de  $N$  multiplicações complexas para ser gerado, o número total de multiplicações complexas requerido é  $(N + SN/2)$ .

Como no cálculo da resposta utilizando-se FFT são feitas  $(N + 2N\log_2 N)$  multiplicações, para que o número dessas seja menor na formulação matricial deve-se ter

$$N + SN/2 < N + 2N\log_2 N \quad (3.41)$$

ou

$$S < 4\log_2 N \quad (3.42)$$

Nos dois métodos o cálculo de **H** segue o mesmo processo, mas na formulação matricial ainda se necessita de um trabalho computacional extra para se resolver o sistema dado por (3.24), que exige  $S(S + 1)/2$  multiplicações reais.

Fazendo uma simulação com  $N=1024$ , vem

$$S < 4\log_2 1024 = 40.$$

Adotando  $S=39$

$$N + 2N\log_2 N = 1024 + 2048\log_2 1024 = 21504$$

$$N + SN/2 = 1024 + 39(1024/2) = 20992$$

$$(20992 - 21504) = 512$$

$$S(S+1)/2 = 39(39 + 1)/2 = 780.$$

Logo, pela formulação matricial se farão 512 multiplicações complexas a menos e 780 multiplicações reais a mais. Como cada multiplicação complexa equivale a 4 multiplicações reais, as 780 multiplicações reais podem ser tomadas como 195 multiplicações complexas, restando um

saldo de 317 multiplicações complexas a favor da formulação matricial.

### 3.4 CONDIÇÕES INICIAIS

Seja agora um sistema de um grau de liberdade, submetido a uma excitação dinâmica, e com condições iniciais não nulas. As condições iniciais são um deslocamento  $v_0$  e uma velocidade  $\dot{v}_0$ .

A resposta do sistema a um deslocamento  $v_0$  pode ser encontrada deslocando-se a origem dos eixos para  $v_0$  e empregando-se (3.18) para uma força igual a  $-kv_0$ .

Por (3.18)

$$v_d = \frac{1}{N} e(-kv_0 1) + v_0 1 \quad (3.43)$$

onde  $1$  é o vetor com 1 em todas as posições.

Já uma expressão para a resposta devido à velocidade inicial  $v_0$ , pode ser encontrada do fato de a resposta  $h(t)$  de um sistema a um impulso unitário  $\delta(t)$  ser igual à resposta do mesmo sistema a uma velocidade inicial igual a  $(1/m)$  (Meirovitch, 1986).

Logo, a resposta a uma velocidade inicial igual a  $\dot{v}_0 = m\dot{v}_0(1/m)$  vale

$$v(t) = m\dot{v}_0 h(t) \quad (3.44)$$

sendo equivalente à resposta à força

$$f(t) = m\dot{v}_0\delta(t)$$

com  $\delta(t)$  a função impulso unitário aplicada em  $t=0$  e que para ser utilizada na equação (3.18) deve ser posta sob a forma (vide figura 2.2)

$$\delta(t) \equiv \frac{1}{\Delta t} \delta \quad (3.46)$$

onde  $\delta$  é um vetor com o primeiro elemento igual a 1 e os outros nulos.

Logo, por (3.18), com  $p$  dado por (3.45) com a modificação mostrada em (3.46), a resposta à velocidade inicial vale

$$v_v = \frac{1}{N} [e(m\dot{v}_0) / \Delta t] \delta \quad (3.47)$$

A resposta total do sistema a uma carga  $p$ , deslocamento inicial  $v_0$  e velocidade inicial  $\dot{v}_0$ , fica então sob a forma

$$v = \frac{1}{N} e\{p - kv_0 1 + [(m\dot{v}_0) / \Delta t] \delta\} + v_0 1 \quad (3.48)$$

A expressão (3.48) pode ser usada na análise dinâmica de sistemas não-lineares com um grau de liberdade, com a resposta obtida por segmentação, como fez Ferreira, (1998). A resposta de cada segmento é calculada do carregamento e das condições iniciais (deslocamento e velocidade) existentes no início do segmento. Para isso avalia-se o deslocamento e a velocidade no final do segmento anterior.

A equação matricial para o cálculo do histórico de velocidades, similar à equação (3.48) é

$$\dot{v} = \frac{1}{N} e\{p - kv_01 + [(m\dot{v}_0) / \Delta t]\delta\} + v_01 \quad (3.49)$$

onde

$$\dot{e} = E\dot{H}E^* \quad (3.50)$$

com  $\dot{H}$  dado por (3.27).

# CAPÍTULO 4

---

## ANÁLISE DE SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

### 4.1 INTRODUÇÃO

A análise dinâmica de estruturas com vários graus de liberdade envolve a solução do sistema de equações de movimento resultantes de sua discretização em elementos finitos.

Este sistema de equações pode ser resolvido diretamente através de métodos no domínio do tempo ou da frequência, ou pode ser primeiramente transformado em um sistema desacoplado, cujas equações possam ser resolvidas independentemente, uma a uma.

Neste capítulo será empregada esta última metodologia, onde, partindo-se do problema de autovalor para a vibração não-amortecida do sistema, chega-se às suas frequências naturais e aos seus modos de vibração, que serão usados para desacoplar as equações de movimento através da transformação modal. As equações independentes, assim obtidas, serão resolvidas pela formulação matricial desenvolvida no capítulo 3.

Serão estudados também os sistemas que apresentam amortecimento não-proporcional e, por isso, não podem ser desacoplados pela transformação modal. Tais sistemas serão resolvidos pela formulação matricial, através de um método conhecido como método das pseudo-forças. Por esse método os termos responsáveis pelo acoplamento das equações modais de movimento são transferidos para o lado direito das equações, e



depois tratados como pseudo-forças. A seguir, através de um processo iterativo, resolve-se o sistema resultante via formulação matricial.

#### 4.2 SISTEMAS COM AMORTECIMENTO PROPORCIONAL

As equações de movimento de um sistema linear com  $N$  graus de liberdade, em coordenadas físicas, são dadas por

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + k = p(t) \quad (4.1)$$

onde  $m$ ,  $c$  e  $k$  são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, de ordem  $N \times N$ ,  $\ddot{v}(t)$ ,  $\dot{v}(t)$  e  $v(t)$ , são, respectivamente, os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, de ordem  $N \times 1$ , e  $p(t)$  é o vetor de carga de ordem  $N \times 1$ .

As equações (4.1) representam um sistema acoplado de  $N$  equações com  $N$  incógnitas, com o acoplamento sendo causado termos de fora das diagonais das matrizes  $m$ ,  $k$  e  $c$ . Este sistema pode ser resolvido diretamente, através de métodos de integração numérica passo-a-passo, como por exemplo o método (Wilson et al, 1973). Outra maneira de se resolver (4.1) é através de uma adequada transformação de coordenadas, que desacople o sistema em  $N$  equações independentes de um grau Liberdade. Neste trabalho, se seguirá esta Segunda metodologia, com as equações resultantes sendo resolvidas pelo o descrito no capítulo 3.

A transformação de coordenadas usual é da forma

$$v(t) = \Phi Y(t) \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{Y}(t)$  é o valor de coordenadas generalizadas e  $\Phi$  uma matriz  $N \times N$  cujas colunas são os modos normais de vibração  $\phi_i$  do sistema.

A vibração livre não-amortecida do sistema é dada por

$$m\ddot{\mathbf{v}}(t) + k\mathbf{v} = 0. \quad (4.3)$$

Pode-se tomar  $\mathbf{Y}(t)$  como

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y} \text{sen}(\omega t - \alpha) \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{Y}$  é a amplitude e  $\alpha$  a fase.

Logo, por (4.2) a (4.4) chega-se ao problema de autovalor

$$k\phi_i - \omega_i^2 m\phi_i = 0 \quad (4.5)$$

de onde se obtém os modos  $\phi_i$  e também as frequências naturais de vibração  $\omega_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ .

Cada um dos modos de vibração  $\phi_i$  constitui uma configuração de deslocamento do sistema, com suas amplitudes podendo ser usadas como coordenadas generalizadas para descrever os deslocamentos físicos  $\mathbf{v}(t)$ .

A matriz modal  $\Phi$  possui as seguintes propriedades de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e rigidez (Clough e Penzien, 1996)

$$\Phi^T m \Phi = \mathbf{I} \quad (4.6)$$

$$\Phi^T k \Phi = \Lambda \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem  $N \times N$ , com elementos com a dimensão da massa e  $\mathbf{\Lambda}$  é a matriz diagonal formada pelas frequências naturais de vibração elevadas ao quadrado.

Para que o sistema seja desacoplado, também a matriz de amortecimento deve ser ortogonal à matriz modal  $\Phi$ . Assume-se então a seguinte relação

$$\Phi^T \mathbf{c} \Phi = \mathbf{C} \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento modal, diagonal, e com os elementos da forma

$$C_{ii} = 2\xi_i \omega_i \quad (4.9)$$

sendo  $\xi_i$  a taxa de amortecimento modal correspondente ao modo  $i$  e  $\omega_i$  a frequência natural de vibração associada a este modo.

Dessa forma o amortecimento do sistema é determinado pela taxa de amortecimento de cada modo e não através da avaliação dos coeficientes da matriz  $\mathbf{c}$ . Este procedimento se justifica face a que, na maioria das estruturas, os mecanismos de perda de energia ainda não são totalmente compreendidos, enquanto que as taxas de amortecimento podem ser determinadas experimentalmente ou estimadas com razoável precisão em muitos casos.

Se se necessitar, no entanto, de uma expressão explícita para a matriz de amortecimento  $\mathbf{c}$ , que atenda as expressões (4.8) e (4.9), pode-se adotar um conceito, proposto primeiramente por Rayleigh (1945) e depois estendido por Caughey (1960) e Caughey e O'Kelly (1965), de se tomar uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, chegando-se a

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (4.10)$$

Dessa forma, o amortecimento é considerado como distribuído proporcionalmente por toda semelhança da massa e da rigidez. Daí a denominação de amortecimento proporcional, que é dada a esse tipo de amortecimento.

De (4.8) e (4.10)

$$C_{ii} = \phi_i^T c \phi_i = a_0 \phi_i^T m \phi_i + a_1 \phi_i^T k \phi_i \quad (4.11)$$

Levando em conta (4.6), (4.7) e (4.9)

$$2\xi_i \omega_i = a_0 + a_1 \omega_i^2 \quad (4.12)$$

Logo,

$$\xi_i = \frac{a_0}{2\omega_i} + \frac{a_1 \omega_i}{2} \quad (4.13)$$

A partir, então, da estimativa de duas taxas de amortecimento  $\xi_m$  e  $\xi_n$ , e de duas frequências  $\omega_m$  e  $\omega_n$ , determinam-se as constantes  $a_0$  e  $a_1$  e, por (4.10), chega-se a uma expressão para a matriz de amortecimento  $\mathbf{c}$ , proporcional e ortogonal à matriz modal  $\Phi$ .

Levando-se então (4.2) em (4.1), pré-multiplicando-se os dois lados por  $\Phi^T$ , e tendo em conta (4.6), (4.7) e

(4.8), chega-se às seguintes equações em coordenadas modais

$$I\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + \Lambda Y(t) = P(t) \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{P}(t)$  é o vetor de cargas generalizadas, dado por

$$P(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (4.15)$$

A equação (4.14) representa um sistema de  $N$  equações desacopladas da forma

$$\ddot{Y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{Y}_i(t) + \omega_i^2 Y_i(t) = P_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.16)$$

que podem ser resolvidas independentemente uma a uma, através dos processos descritos nos capítulos anteriores.

Depois de encontrada a resposta para cada coordenada modal, a resposta em coordenadas físicas é obtida pela superposição dos deslocamentos modais através da equação (4.2), isto é,

$$v(t) = \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \dots + \phi_N Y_N(t) \quad (4.17)$$

razão pela qual este procedimento é conhecido como método da superposição modal ou, mais precisamente, método do deslocamento modal.

Para a maior parte dos carregamentos, a contribuição dos deslocamentos modais para a resposta dada em (4.17) é maior para os primeiros modos e decresce para os modos superiores. Deste modo, aquela equação pode ser truncada, desprezando-se a contribuição dos modos superiores para a resposta total. Para  $\tilde{N}$  modos,  $\tilde{N} < N$ ,  $v(t)$  seria então aproximado por

$$v(t) = \phi_1 Y_1(t) + \phi_2 Y_2(t) + \dots + \phi_{\tilde{N}} Y_{\tilde{N}}(t) \quad (4.18)$$

Voltando agora às equações (4.16), a resposta para uma determinada coordenada modal  $j$ , por (3.18), é dada por

$$Y_j = \frac{1}{N} e_j P_j \quad (4.19)$$

onde

$$e_j = E H_j E^* \quad (4.20)$$

e

$$H(m\Delta\bar{\omega})_j = [-(m\Delta\bar{\omega})^2 + i m\Delta\bar{\omega} C_{jj} + \omega_j^2]^{-1}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (4.21)$$

com

$$\omega_j^2 = \Lambda_{jj} \quad (4.22)$$

Aplicando (4.19) para todos os  $N$  modos, ou em caso de truncamento modal, para os  $\tilde{N}$  modos envolvidos na análise, e levando-se os resultados em (4.17) ou (4.18), conforme o caso, chega-se à resposta em coordenadas físicas.

A importância relativa da contribuição de determinado modo para a resposta total depende basicamente da relação de sua forma com a distribuição espacial do carregamento e da razão entre as frequências de excitação e a frequência modal. É sempre importante incluir todos os modos cujas frequências naturais estejam na vizinhança de qualquer frequência de excitação. Além disso, se for preciso calcular as forças elásticas na estrutura a partir do vetor de deslocamentos, pode ser necessário incluir mais modos do que os que foram necessários para definir os deslocamentos (Clough e Penzien, 1996).

Um processo de superposição mais elaborado, que possui uma convergência mais rápida e que permite tomar um número menor de modos no truncamento é o método da aceleração

modal. Uma explanação deste método junto com uma comparação de algumas de suas versões encontra-se em Soriano e Venâncio Filho (1988). No presente trabalho, porém, será usado o método do deslocamento modal.

#### **4.3 SISTEMAS COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL**

Na seção anterior foi encontrada a resposta de sistemas estruturais com vários graus de liberdade, onde as forças de amortecimento foram consideradas como uniformemente distribuídas ao longo da estrutura, a exemplo das forças inerciais e elásticas. Isto levou à obtenção de uma matriz de amortecimento proporcional, ortogonal à matriz modal, e que permitiu o desacoplamento das equações de movimento do sistema.

Existem porém determinadas situações estruturais onde o amortecimento do sistema não pode ser modelado como anteriormente, levando a uma matriz de amortecimento não ortogonal à matriz modal. Estruturas compostas por mais de um material, como edifícios em que os andares superiores são construídos em estrutura metálica e os inferiores em concreto, estruturas onde existe interação solo-estrutura ou fluido-estrutura, estruturas com absorvedores de energia ou mecanismos de isolamento de vibrações, são alguns exemplos onde as matrizes de amortecimento resultantes não satisfazem as condições de ortogonalidade em relação à matriz modal.

O amortecimento desses sistemas estruturais é dito, por isso, ser não-proporcional. Quando se aplica a transformação modal a tais sistemas, da forma como foi feito na seção anterior, a matriz modal de amortecimento resultante não é diagonal, apresentando termos fora da diagonal devido ao amortecimento não-proporcional. Com

isso, o sistema permanece acoplado por esses termos e o método da superposição modal em sua forma clássica não pode ser usado.

A resposta dinâmica de sistemas dotados de amortecimento não-proporcional pode ser obtida através da integração direta passo-a-passo das equações do movimento em coordenadas modais, usando-se os modos normais não-amortecidos para a transformação de coordenadas, com a vantagem de se poder utilizar o truncamento modal (Clough e Mojtahedi, 1976). Porém, como todo método de integração direta, este processo exige pequenos intervalos de tempo no caminhamento passo-a-passo para assegurar a estabilidade do sistema.

Outra maneira de se obter a resposta seria calcular os autovetores complexos do sistema completo, que são então usados para transformar o sistema em um conjunto desacoplado de equações modais complexas, como foi originalmente proposto por Hurty e Rubinstem, (1964), e aperfeiçoado por, entre outros, Veletsos e Ventura, (1976), Chen e Taylor, (1987) e Mau (1998). Estes métodos, no entanto, exigem grande esforço computacional, além de dificultarem a compreensão física do sistema.

Outra possibilidade de se obter uma solução aproximada para o sistema acoplado de equações modais é se desprezar os termos de fora da diagonal na matriz de amortecimento não-proporcional, e se resolver o sistema pelo método da superposição modal clássico. Este processo porém pode levar resultados pouco exatos para frequências de excitação próximas à de ressonância (Warburton e Soni, 1977).

Neste trabalho, o amortecimento não-proporcional vai ser ratado pelo método conhecido como de pseudo-forças. Por este método, os termos da matriz de amortecimento responsáveis pelo acoplamento das equações modais são transferidos para o segundo membro das equações e tratados como pseudo-forças, deixando o



primeiro membro desacoplado como ocorre nos sistemas dotados de amortecimento proporcional. O sistema é então resolvido por um processo iterativo, onde em cada iteração as equações são resolvidas pela formulação matricial desenvolvida no capítulo 3, até que se atinja a convergência requerida.

O método das pseudo-forças tem sido utilizado em muitos trabalhos, com a solução do sistema sendo feita tanto no domínio de tempo quanto no da frequência, como também por um processo misto. No domínio do tempo podem ser citados os trabalhos de Ibrahimbegovic e Wilson, (1989), Claret e Venâncio Filho, (1991) e Rodrigues (1994); no domínio da frequência Jangid e Datta, (1993) e Ferreira, (1998); processos mistos domínio tempo-domínio da frequência, Kawamoto (1983) e Aprile *et al* (1994).

Voltando agora às equações do movimento (4.1)

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + k = p(t) \quad (4.1)$$

a transformação modal (4.2), levando em conta (4.6), (4.7), (4.8) e (4.15), permite chegar a

$$I\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + \Lambda Y(t) = P(t) \quad (4.14)$$

onde, agora, a matriz  $\mathbf{C}$  é cheia. Esta matriz pode ser colocada como a soma de duas matrizes, da forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_D + \mathbf{C}_F \quad (4.23)$$

com  $\mathbf{C}_D$  sendo a matriz diagonal formada pelos elementos da diagonal de  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{C}_F$  a matriz com elementos nulos na diagonal e com os outros elementos iguais aos de  $\mathbf{C}$ .

Levando (4.23) em (4.14) vem

$$I\ddot{Y}(t) + (C_D + C_F)\dot{Y}(t) + \Lambda Y(t) = P(t) \quad (4.24)$$

ou

$$I\ddot{Y}(t) + C_D\dot{Y}(t) + \Lambda Y(t) = P(t) - C_F\dot{Y}(t) \quad (4.25)$$

Na equação (4.25) o acoplamento devido ao amortecimento não-proporcional é considerado como um vetor de pseudo-forças no segundo membro, enquanto que o primeiro membro é desacoplado como nos sistemas dotados de amortecimento proporcional.

A equação (4.25) é resolvida por um processo iterativo, no qual o k-ésimo passo é dado por

$$I\dot{Y}^k(t) + C_D\dot{Y}^k(t) + \Lambda Y^k(t) = P(t) - C_F\dot{Y}^{k-1}(t) \quad (4.26)$$

Para o j-ésimo modo, tem-se portanto

$$\dot{Y}_j^k(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{Y}_j^k(t) + \omega_j^2 Y_j^k(t) = P(t) - \sum_{p=1}^N C_{Fjp} \dot{Y}_p^{k-1}(t) \quad (4.27)$$

Na primeira iteração  $\dot{Y}_j^0(t) = 0$  e, nas próximas, a resposta e a velocidade modal são dadas por

$$Y_j = (1/N)e_j (P_j - \sum_{p=1}^N C_{Fjp} \dot{Y}_p^{k-1}(t)) \quad (4.28)$$

e

$$\dot{Y}_j = (1/N)\dot{e}_j (P_j - \sum_{p=1}^N C_{Fjp} \dot{Y}_p^{k-1}(t)) \quad (4.29)$$

com  $e_j$  dado por (4.20) e

$$\dot{e}_j = (1/N)\dot{E}H_jE^* \quad (4.30)$$

onde

$$\dot{H}(m\Delta\bar{\omega})_j = i(m\Delta\bar{\omega}) [-(m\Delta\bar{\omega})^2 + i(m\Delta\bar{\omega})C_{jj} + \omega_j^2]^{-1}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (4.30)$$

Para o término do processo de iteração, pode-se adotar como critério de convergência para o  $j$ -ésimo modo

$$\left| \frac{Y_j^k(t_n) - Y_j^{k-1}(t_n)}{Y_j^k(t_n)} \right| \leq \varepsilon \quad (4.31)$$

onde  $\varepsilon$  é o erro máximo adotado e  $t_n$  ( $n=0,1,\dots$ ) são os tempos discretos onde a resposta é calculada.

Pode-se usar também um critério mais relaxado (Claret e Venâncio Filho, 1991), onde se verifica a convergência apenas dos valores máximos das coordenadas modais, podendo este critério ser empregado somente nos modos mais significativos. Assim, tem-se

$$\left| \frac{Y_{j \max}^k - Y_{j \max}^{k-1}}{Y_{j \max}^k} \right| \leq \varepsilon \quad (4.32)$$

Maiores esclarecimentos sobre a convergência dos processos iterativos implícitos ao método das pseudo-forças podem ser encontrados em Claret e Venâncio Filho, (1991) e Jangid e Datta, (1993).

# CAPÍTULO 5

---

## EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 5.1 INTRODUÇÃO

Foram feitos vários exemplos numéricos com o fim de se comprovar os resultados analíticos obtidos no trabalho, e para se validar o programa desenvolvido em linguagem FORTRAN.

Para comprovação dos resultados usou-se como comparação o de integração direta Wilson- $\theta$ .

Os exemplos foram escolhidos tendo em vista mais a possibilidade de se ilustrar as características da formulação representar casos práticos concretos.

Foram analisados problemas com um e com vários graus de liberdade, procurando-se cobrir toda a extensão do texto.

### 5.2 EXEMPLO 1

O sistema estrutural de um grau de liberdade mostrado na figura 5.1, tem como propriedades físicas uma massa de 18.000 kg, uma rigidez de 18 MN/m e uma taxa de amortecimento estimada em 5%, e está submetido a uma excitação da forma da figura 5.2.

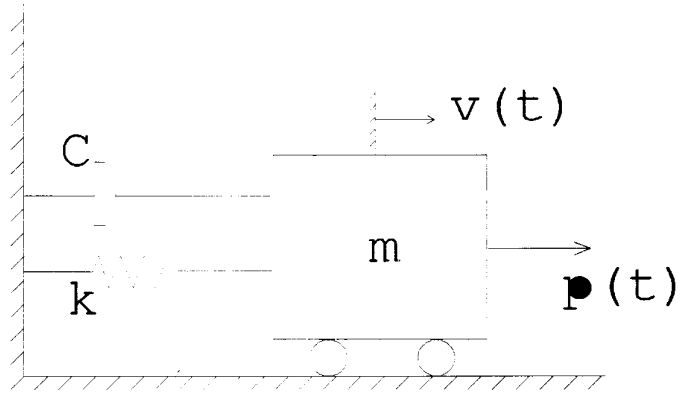


Figura 5.1 Sistema massa-mola-amortecedor.

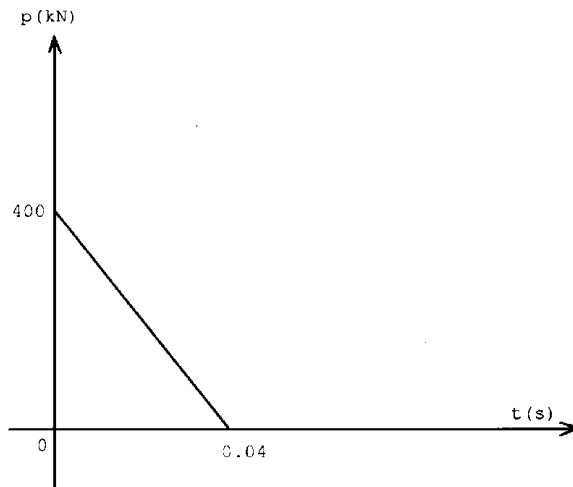


Figura 5.2: Carregamento 1.

A resposta do sistema foi calculada através da equação e comparada com a resposta obtida pelo método Wilson- $\theta$ .

A frequência natural e o período de vibração do sistema são:

$$\omega = \sqrt{k} / m = \sqrt{18000} / 18 = 31.62 \text{ rad/s}$$

Selecionando-se o intervalo de tempo  $\Delta t$  como 0.0025 s, foram calculadas as respostas utilizando-se 200, 400, 800 e 1000 termos no espectro de freqüências.

Assim, os períodos estendidos,  $T_p = N\Delta t$ , ficaram iguais a 0.5 s, 1.0 s, 2.0 s e 2.5 s, respectivamente.

As respostas estão nas figuras 5.3 a 5.6.

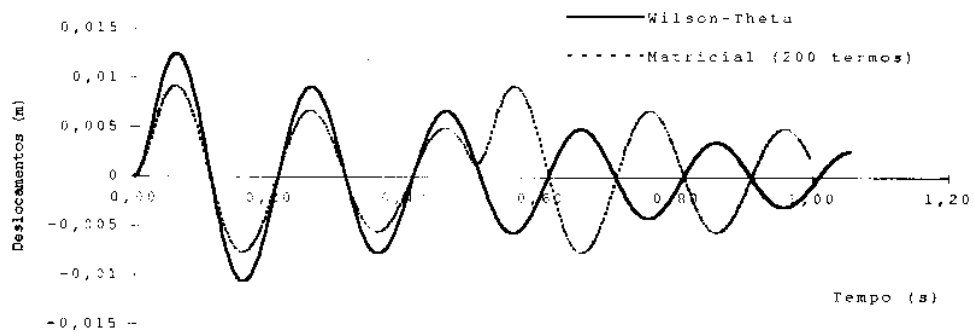


Figura 5.3: Resposta do sistema com 200 termos no espectro de freqüências.

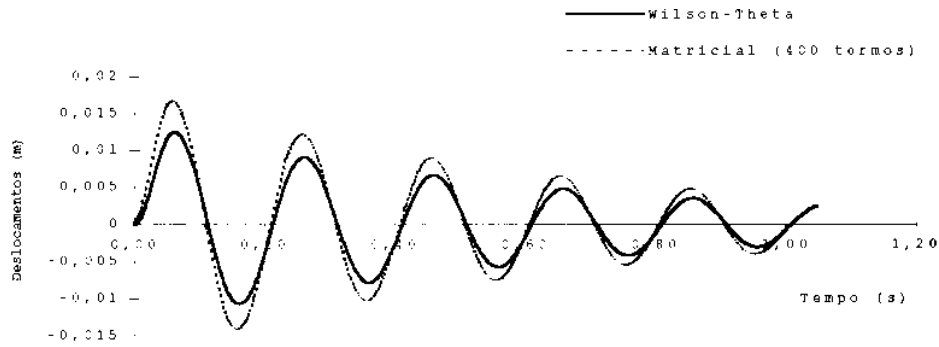


Figura 5.4: Resposta do sistema com 400 termos no espectro de frequências.

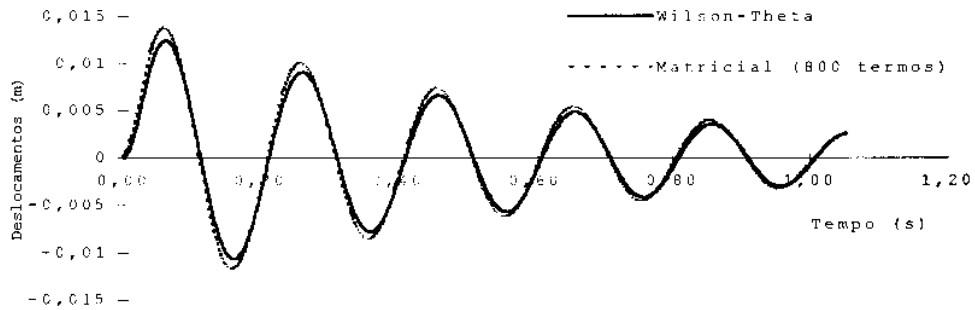


Figura 5.5: Resposta do sistema com 800 termos no espectro de frequências.

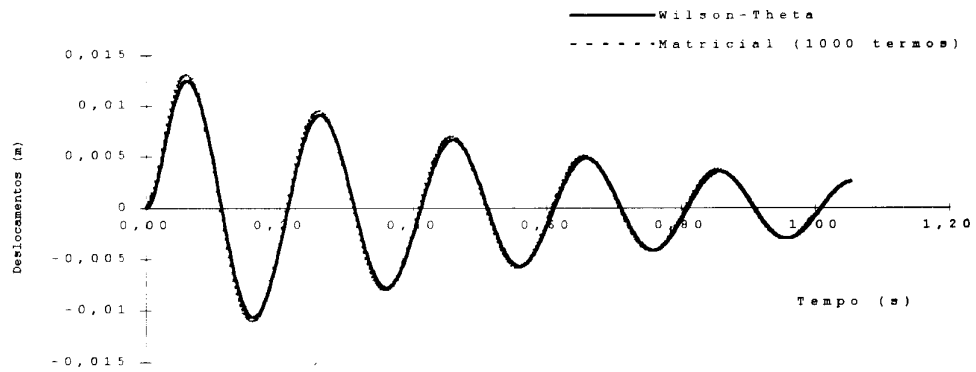


Figura 5.5: Resposta do sistema com 800 termos no espectro de freqüências.



### 5.3 EXEMPLO 2

Para verificar a exatidão do exposto na seção 3.4, o sistema do exemplo 1 foi submetido, juntamente com a excitação da figura 5.2, a um deslocamento inicial de 0.01 m e a uma velocidade inicial de 0.2 m/s.

As respostas para 400, 600 e 1000 termos no espectro de frequências estão nas figuras 5.7 a 5.9, respectivamente, comparadas com a resposta dada pelo método Wilson- $\theta$ .

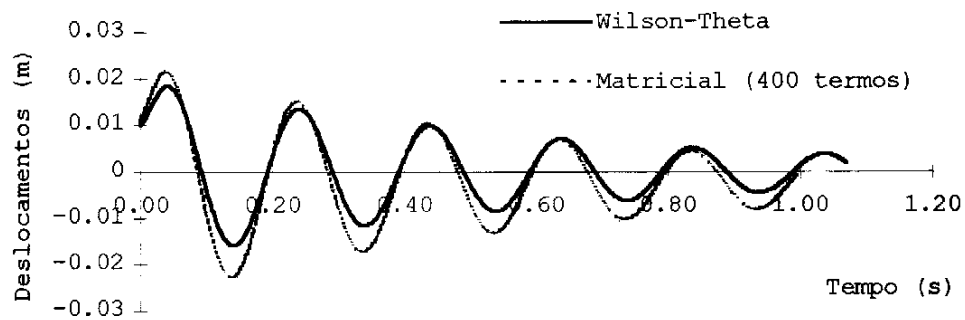


Figura 5.7: Resposta do sistema com 400 termos no espectro de frequências.

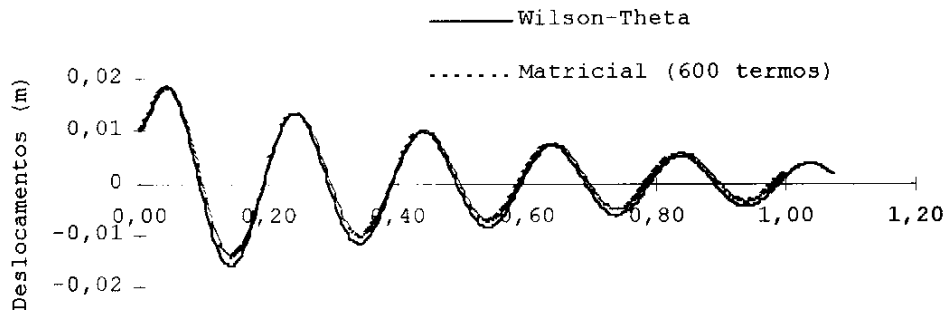


Figura 5.8: Resposta do sistema com 600 termos no espectro de frequências.

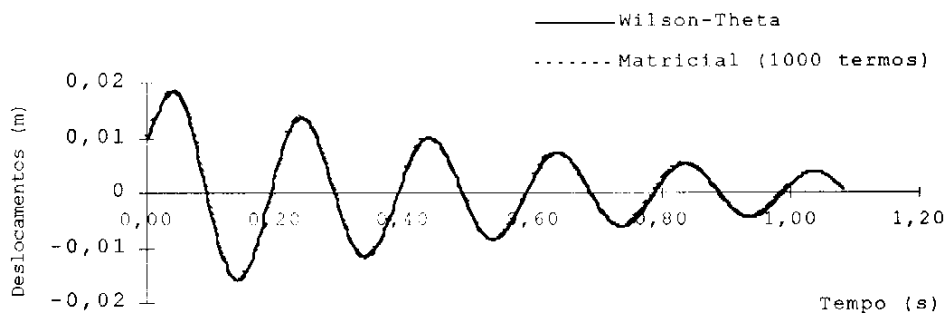


Figura 5.9: Resposta do sistema com 1000 termos no espectro de frequências.

#### 5.4 EXEMPLO 3

Para ilustrar as considerações feitas no final da seção 3.3 sobre o fato da escolha de apenas  $S$  termos na resposta, não, exercer nenhuma influência sobre a precisão dos resultados, o sistema do exemplo 1 foi analisado através de FFT, com 1024 termos. A resposta está mostrada nas figuras 5.10, comparada com a resposta fornecida pelo método Wilson- $\theta$  e pela formulação matricial com 1024 termos.

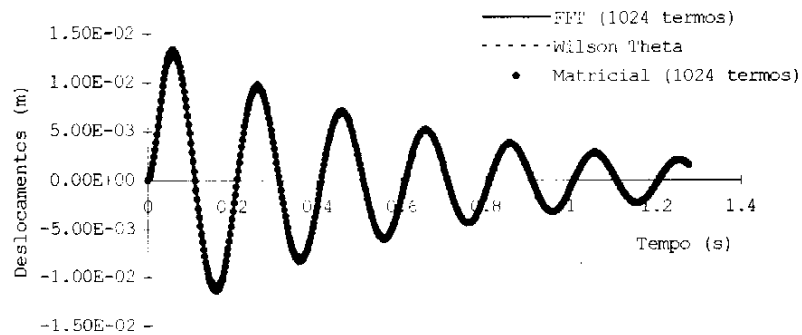


Figura 5.10: Resposta do sistema.

A seguir a resposta foi calculada por FFT com 512 termos e ela formulação matricial também com 512 termos no espectro de frequências e com 128, 256, 384 e 512 termos na resposta

conforme as figuras 5.11 a 5.15.

Pelos gráficos vê-se que a FFT e a formulação matricial fornecem os mesmos resultados, desde que se tome o mesmo número de termos no espectro de freqüências. Como já mencionado na seção 3.3, a formulação matricial apenas calcula a resposta nos S primeiros termos dos N calculados pela FFT.

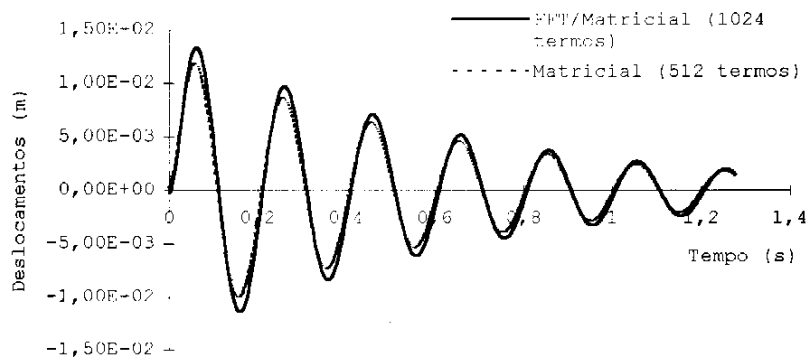
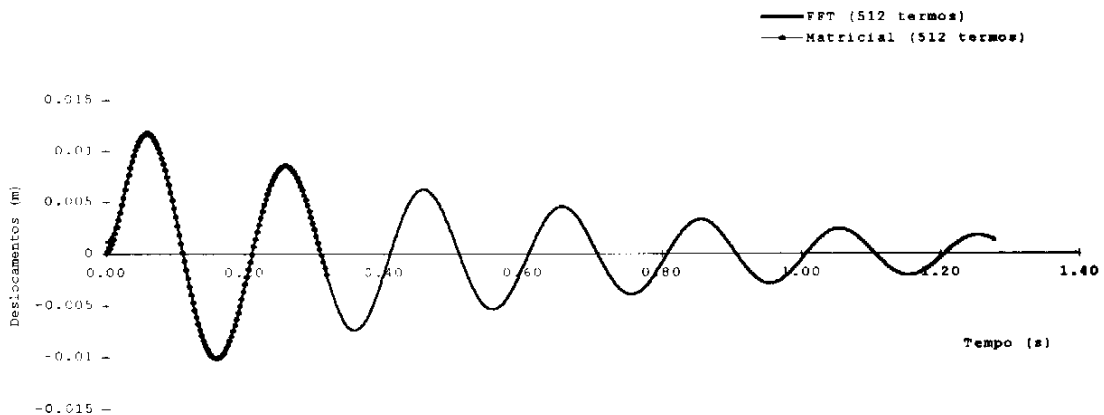


Figura 5.11: Resposta do sistema.



0

Figura 5.12: Resposta do sistema com S=128.

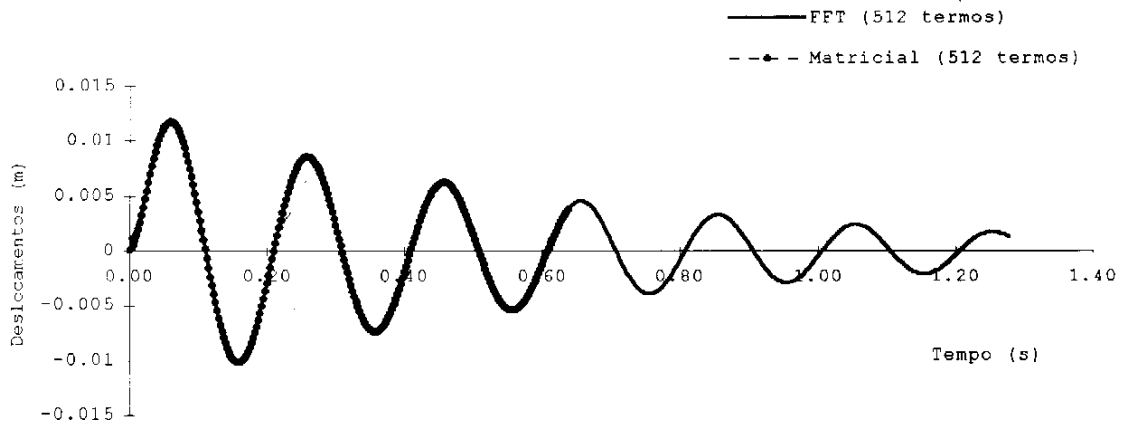


Figura 5.13: Resposta do sistema com S=256.

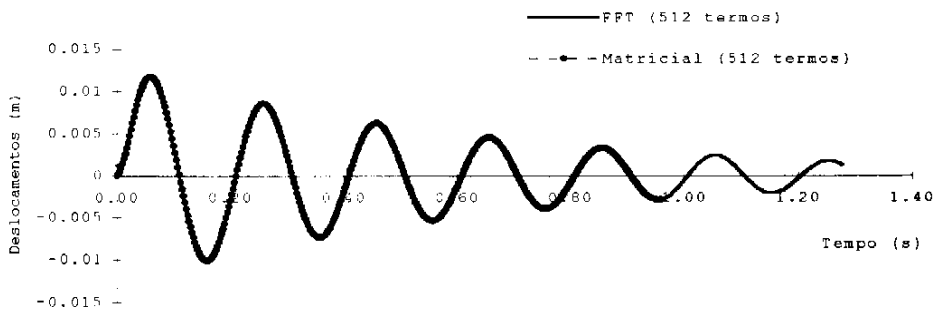


Figura 5.14: Resposta do sistema com S=384.

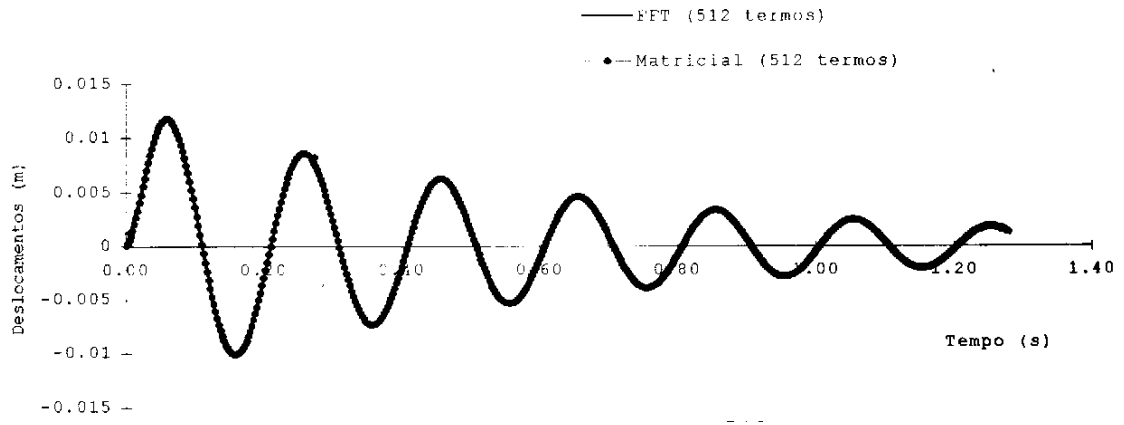


Figura 5.14: Resposta do sistema com S=512.

## 5.5 EXEMPLO 4

O *shear building* da figura (5.17) foi analisado por Clough e Penzien (1996) e aqui será submetido à excitação mostrada na figura (5.18), aplicada no piso mais elevado, que é tomado como o primeiro grau de liberdade. Foi mantido o sistema de unidades utilizado naquele trabalho, para fins de comparação.

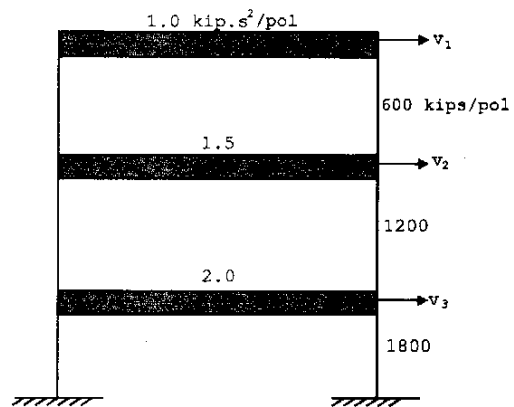


Figura 5.16: *Shear building 1.*

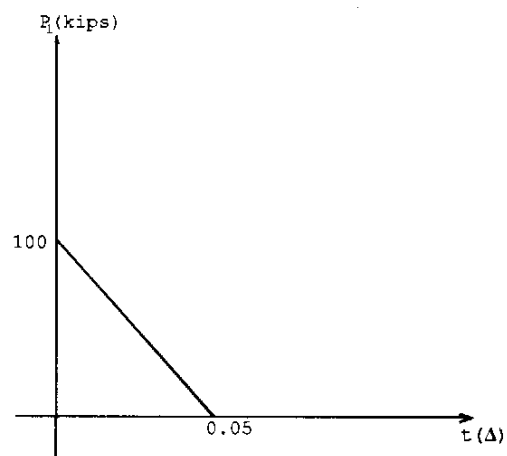


Figura 5.17: Carregamento 2.

A resposta foi calculada pela metodologia descrita na seção 4.2, isto é, desacoplando-se o sistema pela transformação modal e resolvendo-se as equações resultantes pela formulação matricial.

As matrizes de massa e rigidez em coordenadas físicas são

$$m = (1 \text{ kips}\cdot\text{s}^2 / \text{pol}) \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$k = (600 \text{ kips/pol}) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Adotando-se uma taxa de amortecimento de 5% para o primeiro e terceiro graus de liberdade, por (4.8) chega-se à matriz de amortecimento em coordenadas físicas

$$c = \begin{bmatrix} 2.09 & -0.99 & 0 \\ -0.99 & 4.63 & -1.98 \\ 0 & -1.98 & 7.16 \end{bmatrix} \text{ kips}\cdot\text{s} / \text{pol}$$

Resolvendo-se o problema de autovalor, determina-se a matriz modal (autovetores) e os quadrados das frequências naturais (autovalores) do sistema

$$\phi = \begin{bmatrix} 0.743 & -0.636 & 0.211 \\ 0.482 & 0.386 & -0.535 \\ 0.224 & 0.432 & 0.513 \end{bmatrix}$$

70

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 210.88 \\ 963.96 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.52 \\ 31.05 \end{Bmatrix} \text{ rad / s}$$



Fazendo a transformação modal, as matrizes modais de massa, rigidez e amortecimento ficam

$$M = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 210.88 & 0 & 0 \\ 0 & 963.96 & 0 \\ 0 & 0 & 4.61 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.45 & 0 & 0 \\ 0 & 2.69 & 0 \\ 0 & 0 & 4.61 \end{bmatrix}$$

A resposta dos três graus de liberdade até o tempo  $t = 1s$  foi calculada para 600 e 1000 termos no espectro de frequências e comparada com a fornecida pelo método Wilson- $\theta$ .

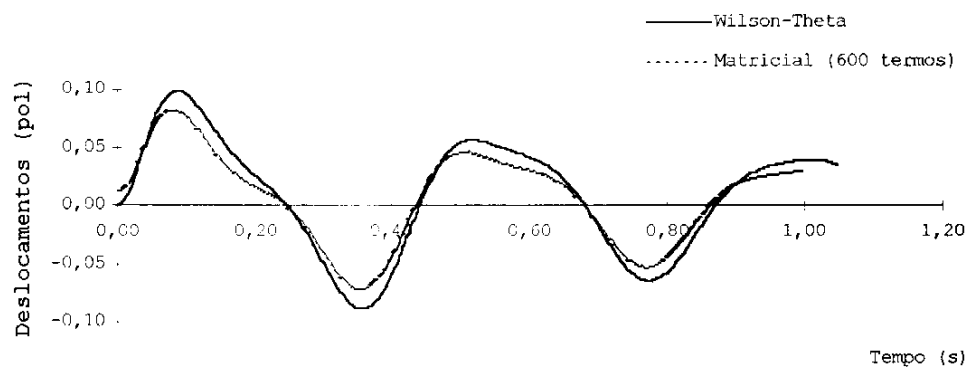


Figura 5.18: Resposta do 1º grau de liberdade.

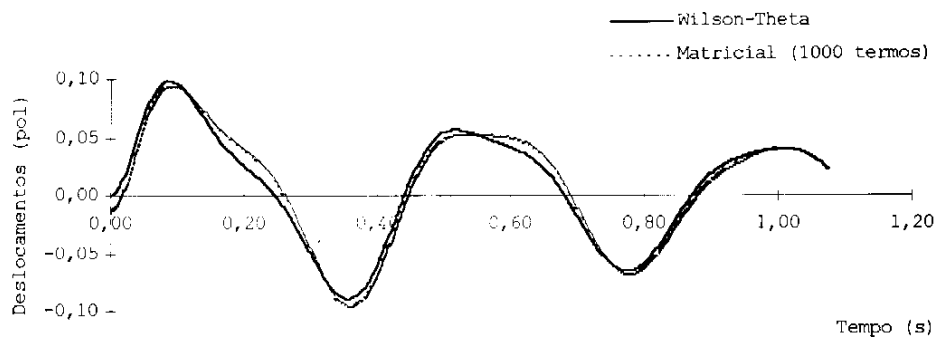


Figura 5.19: Resposta do 1º grau de liberdade.

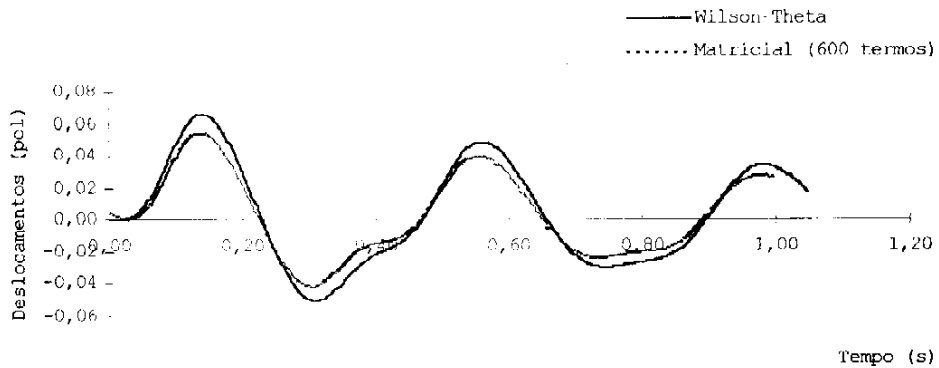


Figura 5.20: Resposta do 2º grau de liberdade.

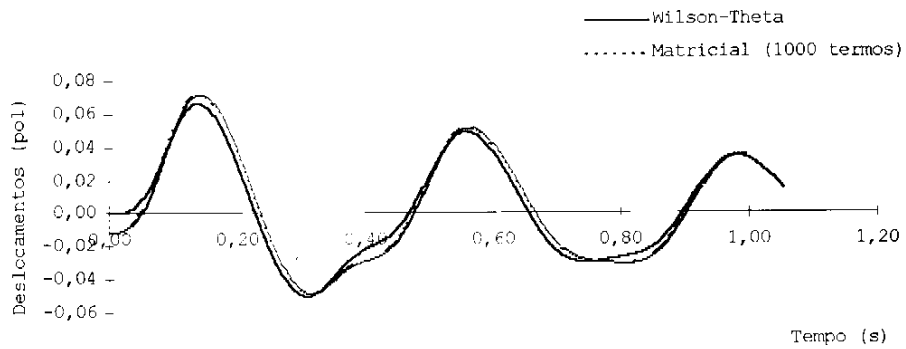


Figura 5.21: Resposta do 2º grau de liberdade.

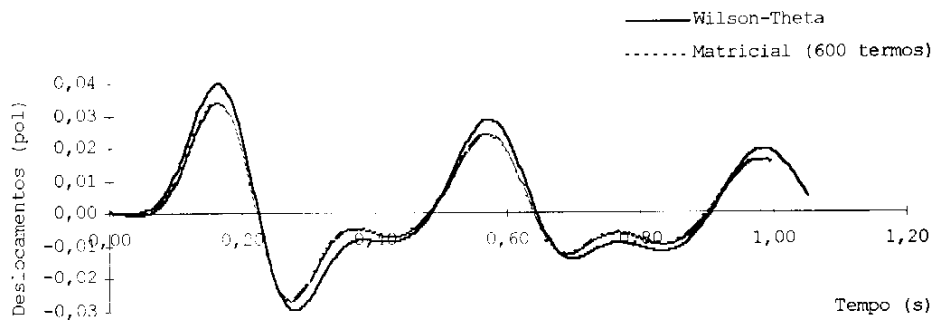


Figura 5.22: Resposta do 3° grau de liberdade.

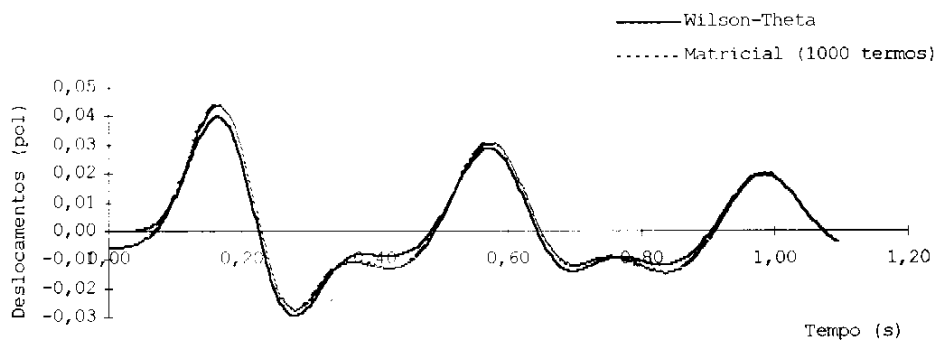


Figura 5.23: Resposta do 3° grau de liberdade.

### 5.6 EXEMPLO 5

Para se testar a precisão da formulação matricial para tratar com sistemas com amortecimento não-proporcional (seção 4.3), ao primeiro grau de liberdade do *shear building* do exemplo 3 foi acrescentado um amortecedor discreto (figura 5.25), cuja constante de amortecimento,  $c$ , vale 20 kips.s/pol.

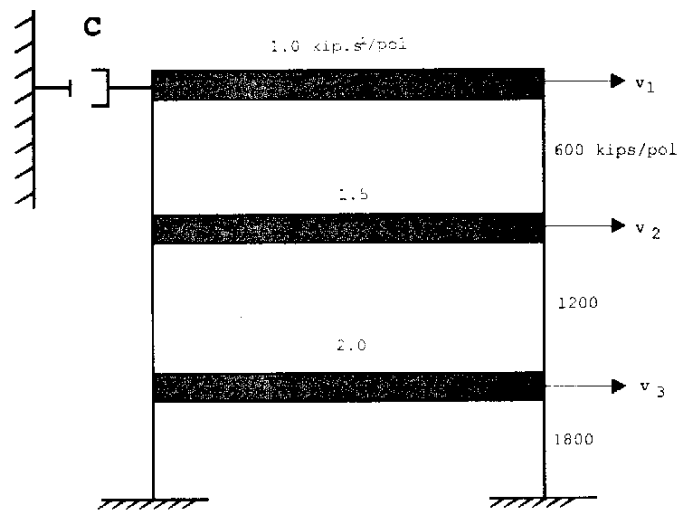


Figura 5.24: *Shear Building 2*.

Isto equivale a se somar o valor de  $c$  ao termo (1,1) da matriz de amortecimento  $c$  do exemplo 4, resultando em

$$c_1 = \begin{bmatrix} 22.09 & -0.99 & 0 \\ -0.99 & 4.63 & -1.98 \\ 0 & -1.98 & 7.16 \end{bmatrix} \text{ kips / pol}$$

Com isso, o produto  $\phi^T C_1 \phi$  conduziu à seguinte matriz de amortecimento modal.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 12.48 & -9.44 & 3.12 \\ -9.44 & 10.78 & -2.67 \\ 3.12 & -2.67 & 5.49 \end{bmatrix}$$

cujos termos de fora da diagonal causam o acoplamento do sistema de equações modais do movimento.

O método das pseudo-forças, com um erro máximo  $\epsilon$  de 1%, precisou de 4 iterações para convergir, com os resultados abaixo:

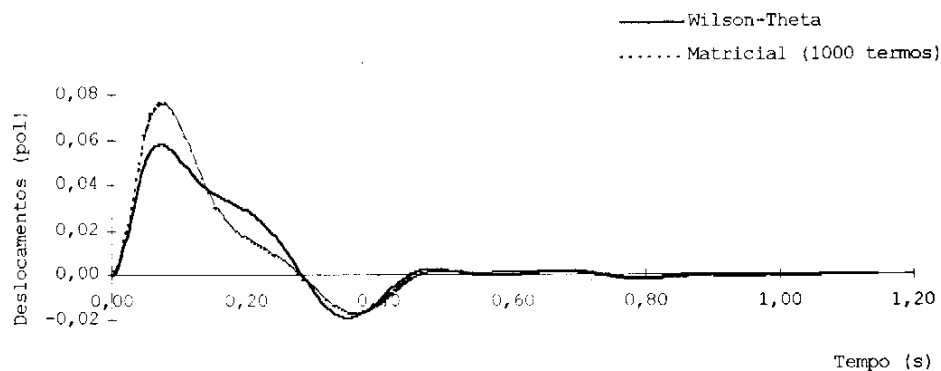


Figura 5.25: 1º grau de liberdade - 1º iteração

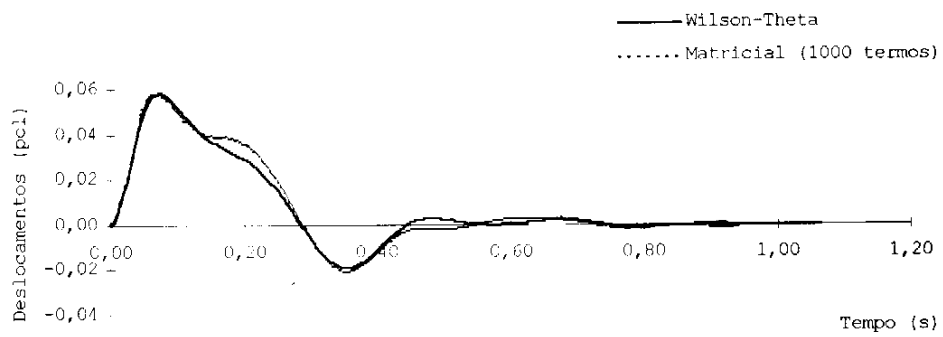


Figura 5.26: 1º grau de liberdade - 2º iteração

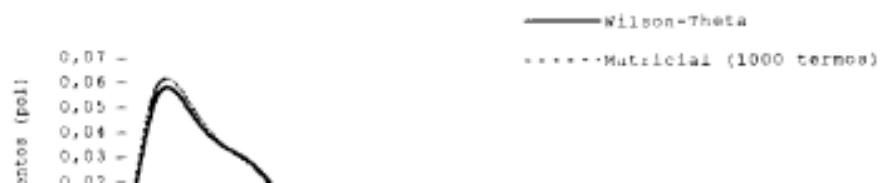


Figura 5.27: 1º grau de liberdade - 3º iteração

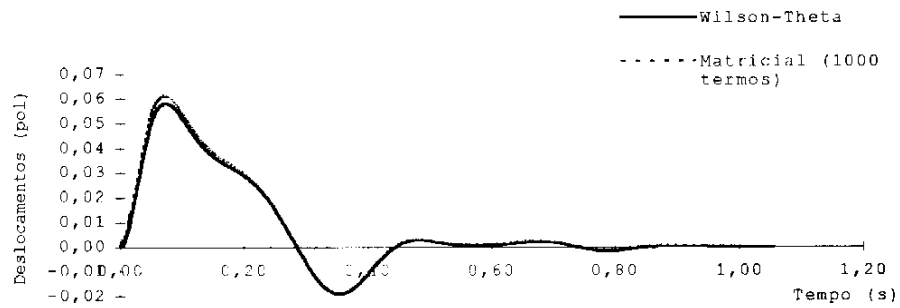


Figura 5.28: 1º grau de liberdade - 4º iteração



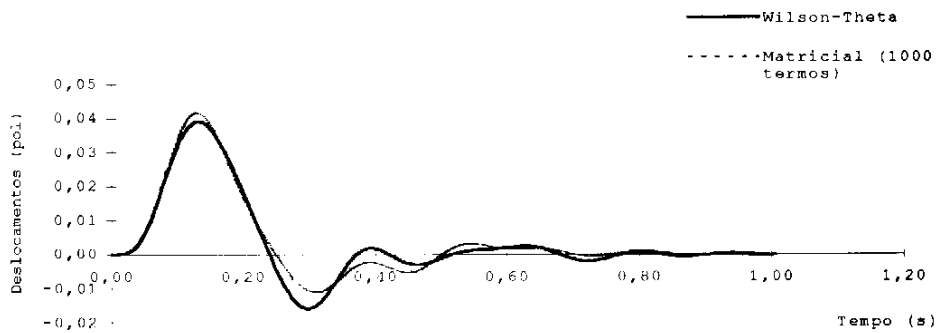


Figura 5.29: 2° grau de liberdade - 1° iteração

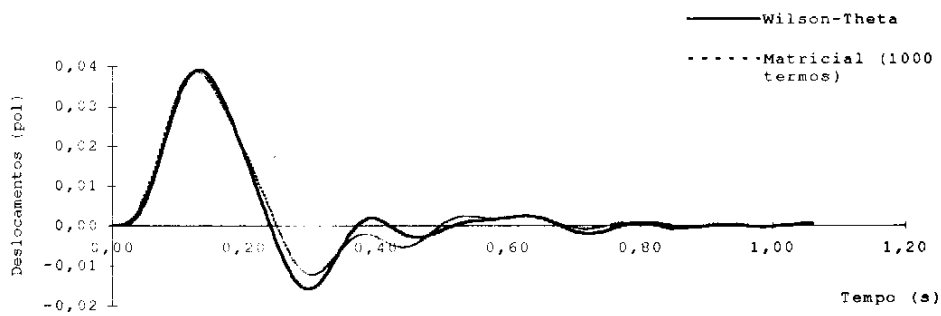


Figura 5.30: 2° grau de liberdade - 2° iteração

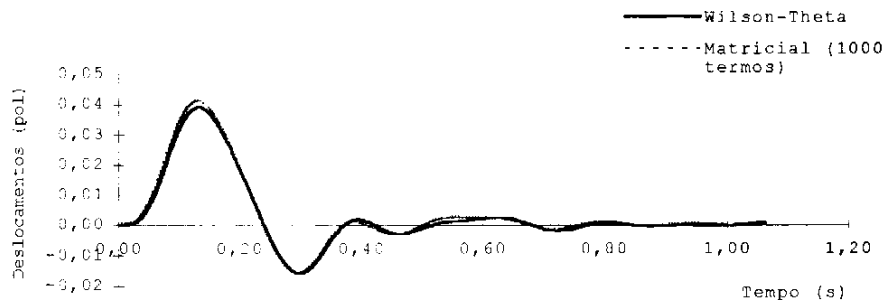


Figura 5.31: 2º grau de liberdade - 3º iteração

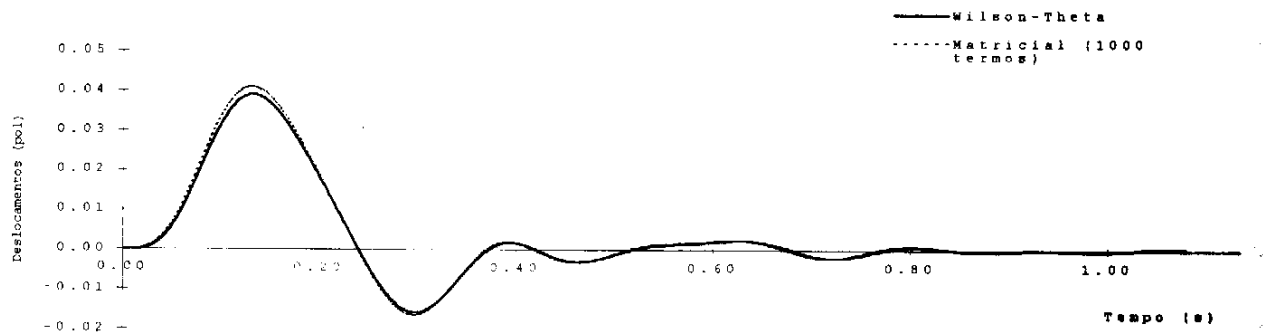


Figura 5.33: 2º grau de liberdade - 4º iteração

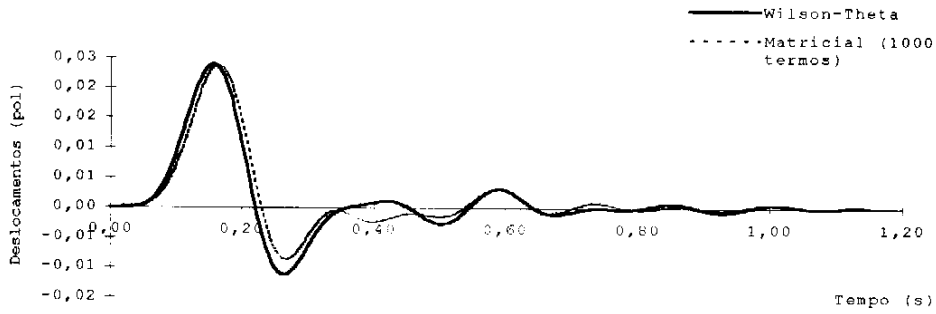


Figura 5.33: 3º grau de liberdade - 1º iteração

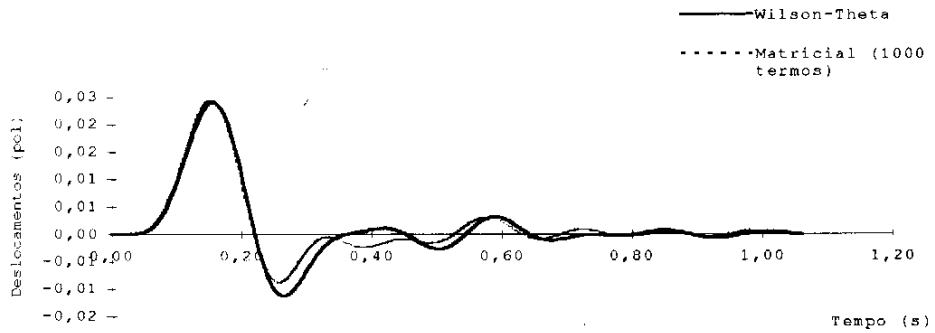


Figura 5.34: 3º grau de liberdade - 2º iteração

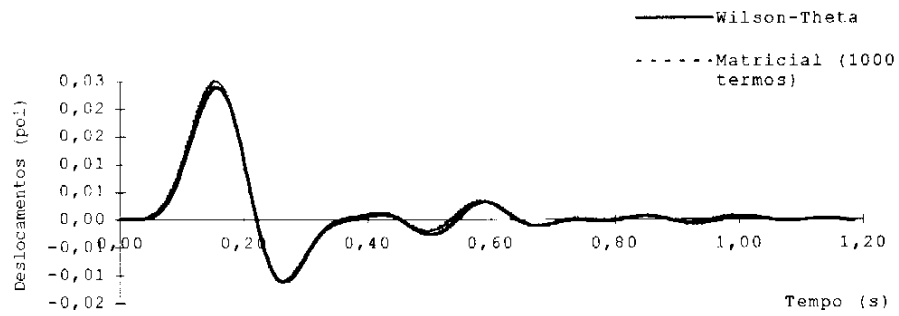


Figura 5.35: 3° grau de liberdade - 3° iteração

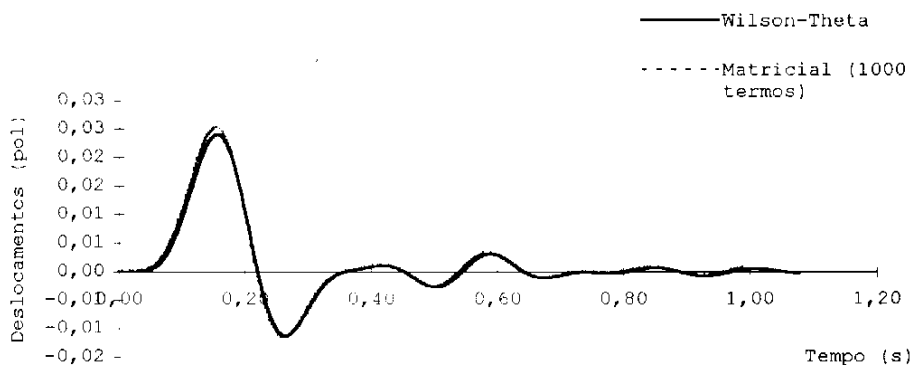


Figura 5.36: 3° grau de liberdade - 4° iteração



## CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1 CONCLUSÕES

A análise dinâmica no domínio da frequência tornou-se uma realidade com o surgimento do algoritmo FFT, que permitiu uma redução drástica no esforço computacional necessário para se calcular transformadas discretas de Fourier (DFT). Ao longo dos anos este algoritmo foi sendo otimizado e adaptado para os vários campos científicos onde é utilizado, entre os quais a dinâmica estrutural.

A formulação matricial surge como uma alternativa ao algoritmo FFT, ao permitir uma maior flexibilidade na escolha do número de termos onde a resposta vai ser calculada. Em sistemas cujo comportamento, quando sujeito a solicitações dinâmicas, pode ser descrito com poucos termos, a formulação matricial mostra ser mais eficiente em termos computacionais do que a FFT. Para outros sistemas, onde se necessita de um histórico de respostas mais longo, a implementação computacional da formulação matricial precisa ser otimizada para fazer frente à FFT, cujas rotinas de cálculo foram evoluindo ao longo dos anos.

Como a FFT e a formulação matricial podem ser considerados como processos para se computar as DFT, mesmo com a segunda o fazendo de maneira implícita e de forma dirigida à dinâmica estrutural, procurou-se neste trabalho relacionar os dois métodos através dos aspectos teóricos e práticos envolvidos na obtenção e cálculo daquelas transformadas. Conclui-se então que

a precisão dos resultados dos dois métodos dependem dos mesmos fatores, não tendo relação com o número de termos adotado na formulação matricial para o cálculo da resposta.

A formulação matricial mostrou-se adequada para tratar sistemas com um ou vários graus de liberdade, estes últimos pelo uso da superposição modal e do método das pseudo-forças, conforme desenvolvimento analítico apresentado no trabalho.

Os exemplos numéricos apresentados procuraram validar o programa desenvolvido durante a elaboração do trabalho, bem como comprovar os resultados obtidos analiticamente.

Em especial pôde-se constatar a precisão dos resultados fornecidos pela formulação matricial, a igualdade desses resultados com os obtidos pela FFT e a rápida convergência do processo iterativo de pseudo-forças.

## **6.2 SUGESTÕES**

O estudo da formulação matricial deve avançar simultaneamente em duas frentes, a analítica e a computacional.

Na primeira deve-se estender o método para tratar de outros problemas relacionados com a dinâmica estrutural, como os vários tipos de não-linearidades que podem estar presentes nas estruturas, o truncamento modal, as excitações provenientes de terremotos, etc.

Na segunda, a implementação computacional do método deve ser otimizada para que ele possa fazer frente a outros algoritmos já estabelecidos.

## CAPÍTULO 7

---

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARILE, A., BENEDETTI, A., TROMBETTI, T., 1994, "On non-linear dynamic analysis in the frequency domain: algorithm and applications". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 23, pp. 363-388.
- BATHE, K.J., 1982, *Emite element procedures in engineering analysis*. New Jersey, Prentice-Hall.
- BINI, D., 1995, "Toeplitz matrices, algorithms and applications". *ERCIM News online edition*, n<sup>o</sup> 22, pp. 1-3.
- BRACEWELL, R. N., 1990, "Numerical transforms". *Science*, v. 248, pp.637-784.
- CAUGHEY, T. K., 1960, "Classical normal modes in damped linear dynamic systems". *Journal of Applied Mechanics*, ASME v. 27, 269-271.
- CAUGHEY, T. K., O'KELLY, M.E.J., 1965, "Classical normal modes in damped linear dynamic systems", *Journal of Applied Mechanics*, ASME v. 32, pp. 583-588.
- CAMERON, T.M., GRIFFIN, J.H., 1989, "An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of non-linear dynamic systems". *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 56, 149-154.
- CHEN, T., TAYLOR, R.L., 1990, "Solutions of viscous damped



linear systems using a set of load-dependent vectors", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 19, pp. 653-665.

CLARET, A.M., 1991, *Solução de sistemas estruturais dinâmicos não-lineares com amortecimento não-proporcional e dependente da frequência*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CLARET, A.M., VENÂNCIO-FILHO, F., 1991, "A modal superposition pseudo-force method for dynamic analysis of structural systems with non-proportional damping". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 20, pp. 303-315.

CLOUGH, R.W., MOJTAHEDI, 1976, "Earthquake response analysis considering non-proportional damping". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 4, pp. 489-496.

CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., 1993, *Dynamics of structures*. 2 ed. New York, McGraw-Hill.

COOLEY, J.W., TUKEY, 1965, "An algorithm for machine calculation of complex Fourier series". *Mathematical Computations*, v. 19, pp. 297-301.

CRAIG, R. R. Jr., 1981, *Structural dynamics - an introduction to computer methods*. 1° ed., New York, John Wiley & Sons, Inc., 527 p.

CRANDALL, S. H., 1970, "The role of damping in vibration theory". *Journal of Sound and Vibration*, v.11, n° 1, pp.3-18.

FERREIRA, W.G., 1998, *Análise dinâmica não-linear no domínio*

*da frequência de sistemas estruturais com amortecimento não-proporcional* . Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

FERREIRA, W.G., CLARET, A. N., VENANCIO-FILHO, F., MANSUR, W.J., RIBEIRO, M.V., 1996, "Interpolation procedure for dynamic analysis in frequency domain". *Join Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering*, Padova, Italy, September.

HALL, J.F., 1982, "An FFT algorithm for structural dynamics". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 10, pp.797-811.

HALL, J. F, BECK, J. L., 1993, "Linear system response by the DFT: analysis of recent modified method". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 22, pp. 599-615.

HUMAR, J. L., XIA, H., 1993, "Dynamic response analysis in the frequency domain". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 22, pp. 1-12.

HURTY, w. c., RUBINSTEIN, M.F., 1964, *Dynamics of structures*. New Jersey, Prentice-Hall.

IBRAHIMBEGOVIC, A., WILSON, E.L., 1989, "Simple numerical algorithms for the mode superposition analysis of linear structural systems with non-proportional damping". *Computers & Structures*, v. 33, 523-531.

JANGID, R. S., DATTA, T. K., 1993, "Spectral analysis of systems with non-classical damping using classical mode superposition technique". *Earthquake Engineering and*

*Structural Dynamics*, v. 22, pp. 723-735.

KAWAMOTO, J.D., 1983, *Solution of the nonlinear dynamic structural systems by a hybrid frequency-time domain approach*. MIT Research Report R83-5, Dept. of Civil Engineering, Cambridge.

LING, F.H., WU, X.X., 1987, "Fast Galerkin method and its application to determine periodic solution of non-linear oscillators", *Int. J. Non-Linear Mech.*, v. 22, 89-98.

LIN, J., SHEN, W., WILLIAMS, F. W., 1995, "A high precision direct integration scheme for structures subjected to transient dynamic loading". *Computers & Structures*, v. 56, n<sup>o</sup> 1, pp. 103-120.

MAU, S.T., 1988, "A subspace modal superposition method for non-classically damped systems". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 16, pp. 931-942.

MEEK, J.W., VELETOS, A.S., 1972, "Dynamic analysis by extra fast Fourier transform". *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, v.98, pp. 367-384.

MEIROVITCH, L., 1986, *Elements of vibration analysis*. 2<sup>o</sup> ed. Singapore, McGraw-Hill, 560p.

NEWMARK, N, M, 1959, "Methods of computation of structural dynamics". *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, v.85, pp ....

O'BRIGHAM, E., 1974, *The East Fourier transform*. 1<sup>o</sup> ed. New Jersey, Prentice-Hall, mc. 252p.

- PAZ, M., 1980, "*Structural dynamics tTheory and computation*".  
1° ed,.....Van Nostrand Reinhold Environmental Engineering  
Series.
- RAO, S. S., 1995, "*Mechanical vibrations*". 3° ed., New York,  
Addison-Wesley Publishing Company, mc. 912 p.
- RAYLEIGH, L., 1945, "*Theory of sound*". New York, Dover  
Publication, v.1.
- RODRIGUES, A. G., 1994, "*Análise dinâmica de sistemas  
fundação-estrutura metálica com amortecimento não-  
proporcional e não-linearidade física*". Tese de M.Sc.,  
ESCOLA DE MINAS/UFOP, Ouro Preto, MC, Brasil.
- SINGH, M.P., GHAFORY-ASHTIANY, M., 1986, "Modal time history  
analysis of non-classically damped structures for seismic  
motions". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*,  
v. 14, pp. 797-811.
- SORIANO, H. L., VENÂNCIO FILHO, F., 1988, "On the modal  
acceleration method in structural dynamics. Mode truncation  
and static correction". *Computers & Structures*, v.29, n<sup>o</sup>5,  
pp. 777-782.
- STEFANOU, G. D., 1995, "Dynamic response analysis of nonlinear  
structures using step-by-step integration techniques".  
*Computers & Structures*, v.57, n<sup>o</sup>6, pp.1062-1070.
- THOMSON, W. T., CALKINS, T., CARAVANI, p., 1974, "A numerical  
study of damping". *Earthquake Engineering and Structural  
Dynamics*, v.3, pp.97-103.
- VELETOS, A. S., VENTURA, C. E., 1976, "Modal analysis of non-

classically damped linear systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 14, pp. 217-243.

VELETOS, A. S., KUMAR, A., 1983, "Steady state of linear structures", *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE*, v.109, 1215-1230.

VENÂNCIO-FILHO, F., 1994, "Análise dinâmica no domínio da frequência". *Conferência de Concurso para Professor Titular da COPPE/UFRJ*, pp. 1-3

VENANCIO-FILHO F. , CLARET, A.M., 1991, "An implicit Fourier transform method for nonlinear dynamic analysis with frequency dependent damping". *Damping 91 Conference*, (Proceedings), San Diego, CA, USA, 16 pp.

VENANCIO-FILHO F. , CLARET, A.M., 1992, "Matrix formulation of the dynamic analysis of SDOF in the frequency domain", *Computers & Structures*, v. 14, pp. 217-243.

VENANCIO-FILHO F. , CLARET, A.M., 1995, "Frequency domain analysis of MDOF systems: nodal and modal coordinates formulations", *Computers & Structures*, v. 56, n. 1, pp. 189-191.

VENANCIO-FILHO F., CLARET, A.M., 1996, "Frequency domain dynamic analysis with application to soil-structure interaction: linear and nonlinear systems". *Advances in Computational Methods for Simulation*, edited by B.H.V. Topping, Edinburgh, UK.

WARBURTON, G. B., SONI, S. R., 1977, "Errors in response calculations for non-classically damped structures".

*Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 5, pp. 365-376.

WARBURTON, G. B., 1990, "Assessment of errors in the Newmark methods in structural dynamics". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 19, pp. 457-467.

WILSON, E. L., FARHOOMAND, I., BATHE, K. J., 1973, "Nonlinear dynamic analysis of complex structures". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 1, pp. 241-252.

WYLIE, C. R., BARRETT, J. L. 1995, "Advanced engineering mathematics". 6<sup>o</sup> ed., New York, McGraw-Hill, 1362p.

WOLF, J.P., 1987, "Nonlinear soil-structure interaction analysis based on hybrid frequency-time domain formulation. Zurich: *Electrowatt Engineering Services*, pp.25-32.