HECTOR FLORES CALLISAYA

PRINCIPIO DO MÁXIMO PARA SOLUÇÕES DE VISCOSIDADE

Dissertação apresentada por Hector Flores Callisaya ao Curso de Mestrado em Matemática - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais.

Orientador: Detang Zhou

Niterói

2009

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

C162

Callisaya, Hector Flores
Principio do máximo para soluções de viscosidade
Hector Flores Callisaya. - Niterói, RJ: [s.n.], 2009.
44f.

Orientador: Prof. Dr. Detang Zhou.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, 2009.

1. Equação diferencial parcial. 2. Equação elíptica.
3. Soluções fracas. 4. Principio do máximo (Matemática).
I. Titulo.

CDD: 515.353

HECTOR FLORES CALLISAYA

PRINCIPIO DO MÁXIMO PARA SOLUÇÕES DE VISCOSIDADE

Dissertação apresentada por Hector Flores Callisaya ao Curso de Mestrado em Matemática - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais.

Aprovada em: 18/02/2009

Banca Examinadora

Prof. Detang Zhou - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Xu Cheng - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Francisco Fontenele Neto - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Fabiano Brito - Membro
Doutor - Universidade São Paulo

DEDICATÓRIAS

A Ramona Callisaya minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dinamérico Pombo Jr. director do Instituto de Matemática.

Ao professor Detang Zhou, pela orientação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

Resumo

A teoria de soluções de viscosidade, foi introduzida nos anos 80 por M. Crandall e P. L. Lions, particularmente de natureza elíptica ou parabólica. Nesta monografia, apresentamos o conceito de soluções de viscosidade, algumas propriedades, unicidade de soluções através de princípios de comparação para o problema de Dirichlet, e consideramos o seguinte problema:

PROBLEMA. *Seja o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ ou uma variedade Riemanniana e f uma função suave limitada inferiormente sobre $\mathbb{R}^n$. Em que condições vale: para cada $k > 0$ existe $x_k \in \Omega$ tal que (i) $f(x_k) \leq \inf(f) + \frac{1}{k}$, (ii) $|\nabla f(x_k)| < \frac{1}{k}$, e (iii) $\Delta f(x_k) > -\frac{1}{k}$?*

O princípio do máximo de Omori - Yau, muito utilizado na solução de diversos problemas geométricos, por exemplo na prova do lema de Schwarz para aplicações holomorfas entre variedades de Kähler com curvatura de Ricci limitada inferiormente, fornece uma resposta afirmativa ao problema acima no caso de variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Apresentamos uma nova versão de princípio do máximo de Omori-Yau no sentido de solução de viscosidade e uma nova prova no caso de Ω ser um espaço Euclideano, que é um caso especial de um recente trabalho do Peng e Zhou.

Introdução

Esta monografia consiste em uma introdução à noção de solução de viscosidade. A definição de solução de viscosidade que vamos apresentar é uma elaboração da definição introduzida nos anos 80, por M. Crandall e P. L. Lions, (Medalha Field em 1994) [2], um trabalho pioneiro na direção de solubilidade de equações parciais não lineares, particularmente de natureza elíptica ou parabólica.

As equações de Hamilton-Jacobi são equações de primeira ordem do tipo $F(x, u, \nabla u) = 0$, que aparecem em Mecânica Clássica, em Teoria de Controle Determinístico e em Teoria dos Jogos. Além de fornecer o ponto de partida histórico para o desenvolvimento da teoria de soluções de viscosidade, as equações de Hamilton-Jacobi são um contexto natural para uma introdução a esta teoria. Veja [5].

A aplicação em Teoria de Controle Ótimo Estocástico desempenha um papel importante no desenvolvimento da Teoria de Viscosidade, dando origem a algumas das idéias centrais e fornecendo uma classe interessante de problemas modelos.

Uma pergunta natural é, como generalizar esta teoria a Variedades Riemannianas? Alguns trabalhos recentes tratam dessa questão (veja [9]). Até agora, pouco se conhece sobre as equações diferenciais de segunda ordem. Recentemente, Azagra, Ferrera e Sanz em obtiveram em [1] uma estimativa para a Hessiana da a função distância e generalizaram alguns resultados de [4] para variedades Riemannianas compactas com algumas condições sobre a curvatura.

O paper de S. Peng, D. Zhou, [6] trata do princípio do máximo sobre uma variedade Riemanniana compacta com bordo ou em variedades Riemannianas completas, no qual é generalizada o conceito de subsolução e supersolução de viscosidade para qualquer variedade Riemanniana.

O material desenvolvido nestas notas, no que diz respeito às soluções de viscosidade, apareceu entre os anos 1983 e 1986. Os pioneiros desta teoria foram M. Crandall, P.- L. Lions. L. C. Evans e Hishii. Os resultados sobre solução de viscosidade que apresentamos aqui são devidos a estes autores e as referências básicas que utilizamos na elaboração deste trabalho são: [4],[5] e [6].

Estudaremos o principio do máximo para equações diferencias parciais de segunda ordem da forma

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0,$$

onde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função e Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$.

No Capítulo 1 introduzimos a noção de solução de viscosidade para equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares, e provamos algumas das propriedades básicas. O Capítulo 2 é dedicado à unicidade de solução de viscosidade caso elíptico e uniformemente elíptico; No Capítulo 3 apresentamos o teorema (4.3) de [6] e como aplicação damos uma nova demonstração do principio do máximo de Omori - Yau.

Em [6] todos os resultados anteriores, são generalizados a variedades Riemannianas compactas ou completas.

Capítulo 1

SOLUÇÃO DE VISCOSIDADE

O objetivo deste capítulo é introduzir a noção de viscosidade de M. Crandall e P.- L. Lions para equações diferencias parciais de segunda ordem. As nossas referencias básicas nesta parte são os textos [4], [5].

1.1 Método de viscosidade

A principal dificuldade em definir solução fraca de uma equação de Hamilton-Jacobi é a ausência de estrutura divergente. O procedimento usual para definir solução fraca de equações não-lineares em forma divergente consiste em multiplicar a equação por uma função teste suave e fazer as derivadas que aparecem na equação incidirem sobre as funções teste. Entretanto, este procedimento será não-linear, em contraste com o procedimento linear de integração por partes. A definição de solução de viscosidade é inspirada no princípio do máximo para equações elípticas e parabólicas (veja [3]).

1.2 Soluções de viscosidade para EDP's de Segunda Ordem Não Lineares

Ao longo destas notas Ω sempre denotará um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ isto é, um subconjunto aberto e conexo e limitado de $\mathbb{R}^n$. A fronteira de Ω será denotado por $\partial\Omega := (\overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega))$.

A forma mais geral de uma equação diferencial parcial de segunda ordem é:

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0, \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

onde $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada e $S(n)$ é o conjunto das matrizes simétricas. Costuma-se usar a notação

$$F = F(x, r, p, X)$$

onde r é a variável que será substituída pela solução u, $p \in \mathbb{R}^n$ a variável que será substituída pelo gradiente $Du(x)$ e $X \in S(n)$ a variável que será substituída pela hessiana $D^2u(x)$ de u. Vamos em seguida definir solução de viscosidade para o problema (1.1).

Definição. 1.2.1. *Uma função $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada* elíptica degenerada *se*

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, r, p, Y)$$

para todo $(x, r, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e todos $X, Y \in S(n)$ tais que $Y \leq X$.

Definição. 1.2.2. *Uma função $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamado* própria *se*

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y) \quad (x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

para todos X, Y em $S(n)$ tais que $Y \leq X$ e todos $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $r \leq s$.

Exemplo. 1.2.1.

A Equação de Laplace.

$$-\Delta u + c(x)\, u = f(x).$$

pode ser escrita na forma (1.1), onde

$$F(x, r, p, X) = -tr(X) + c(x)r - f(x)$$

e $tr(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{i,i}$. é fácil verificar que F é própria.

Exemplo. 1.2.2.

A equação

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\,u(x) = f(x),$$

onde à matriz $A(x) = (a_{i,j}(x))$ é simétrica pode ser escrita na forma (1.1) com

$$F(x, r, p, X) = -tr(A(x)\,X) + \sum_{i=1}^{n} b(x)\,p_i + c(x)\,r - f(x).$$

É fácil verificar que a função F é elíptica degenerada se e solo se $A(x) \geq 0$ e propria se $c(x) \geq 0$.

Definição. 1.2.3. *Seja F propria, e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função.*

1. *Diz-se que u é uma subsolução de viscosidade da equação (1.1) se $u \in USC(\Omega)$ e para todo $x \in \Omega$ e cada $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $(u - \varphi)$ tem máximo local em x e vale:*

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq 0.$$

2. *Diz-se que u é uma supersolução de viscosidade da equação (1.1) se $u \in LSC(\Omega)$ e para todo $x \in \Omega$ e cada $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $(u - \varphi)$ tem mínimo local em x e vale:*

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \geq 0.$$

3. *Diz-se que u é uma solução de viscosidade se u for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade.*

As funções φ utilizadas na caracterização das soluções viscosas são chamadas *funções teste.*

Na definição podemos usar como funções teste $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, ao invés de $C^2(\Omega; \mathbb{R})$ e ainda assim, obter o mesmo conceito de solução.

É fácil mostrar que uma solução clássica de (1.1) é uma solução de viscosidade.

Proposição. 1.2.1. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *u é uma subsolução de viscosidade (resp., supersolução) de (1.1)*

2. *se $0 = (u - \varphi)(\hat{x}) \geq (u - \varphi)(x)$ (resp., $\leq (u - \varphi)(\hat{x})$) para $\hat{x} \in \Omega$ e $x \neq \hat{x}$ em uma vizinhança de $\hat{x}$, então $F(\hat{x}, \varphi(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0$ (resp.,≥ 0).*

Demonstração. A implicação (1) $\Rightarrow$ (2) é imediato.

Para a recíproca, suponhamos u uma subsolução e que $u-\varphi$ atinge seu máximo em $\hat{x} \in \Omega$. Definimos agora

$$\varphi_\delta(x) = \varphi(x) + \delta\, |x-\hat{x}|^4 + (u-\varphi)(\hat{x}).$$

Note que $0 = (u-\varphi_\delta)(\hat{x}) > (u-\varphi_\delta)(x)$ para $x \in \Omega \setminus \{\hat{x}\}$. (2) implica

$$F(\hat{x}, \varphi_\delta(\hat{x}), D\varphi_\delta(\hat{x}), D^2\varphi_\delta(\hat{x})) \leq 0.$$

1.3 Definições Alternativas de Solução de Viscosidade

Do ponto de vista prático, de estudar soluções de viscosidade, veremos que, é útil estar de posse de uma definição alternativa, porem equivalente, de solução de viscosidade que prescinde do uso de funções teste. Contudo essa definição alternativa se apóia no conceito de semi-jatos de uma função.

Definição. 1.3.1. *O subjato e o superjato em $x \in \Omega$ de uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ são definidos por:*

$$J^{2,+}u(x) = \left\{ (p,X) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(y) \leq u(x) + \langle p, y-x\rangle \\ +\frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + o(|y-x|^2) \\ \textit{com} \quad y \in \Omega \to x \end{array} \right\}.$$

$$J^{2,-}u(x) = \left\{ (p,X) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(y) \geq u(x) + \langle p, y-x\rangle \\ +\frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + o(|y-x|^2) \\ \textit{com} \quad y \in \Omega \to x \end{array} \right\}.$$

O Jato de u em $x \in \Omega$ é definido por

$$J^2u(x) = J^{2,+}u(x) \cap J^{2,-}u(x).$$

Note que

$$J^{2,+}u(x) = -J^{2,-}(-u)(x). \tag{1.2}$$

Se u for de classe C^2, então $J^{2,-}u(x) = \{(Du(x), D^2u(x))\}$.

As definições acima são motivadas pela tentativa de recuperar o conceito de derivada para aplicações não suaves.

Introduzimos os conjuntos $USC(\Omega)$ e $LSC(\Omega)$ definidos da seguinte forma.

$$USC(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} | u \quad \text{é semicontínua superiormente em} \quad \Omega\},$$

$$LSC(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} | u \quad \text{é semicontínua inferiormente em} \quad \Omega\}.$$

Proposição. 1.3.1. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função temos:*

1. *Se $J^{2,+}u(x) \cap J^{2,-}u(x) \neq \emptyset$, então $Du(x), D^2u(x)$ existem e*

$$J^2u(x) = J^{2,+}u(x) \cap J^{2,-}u(x) = \{(Du(x), D^2u(x))\}$$

2. *Se $u \in USC(\Omega)$ (resp.,$u \in LSC(\Omega)$) então*

$$\Omega = \{x \in \Omega : \exists x_k \in \Omega \quad \text{tal que} \quad J^{2,+}u(x_k) \neq \emptyset, \lim_{k\to\infty} x_k = x\}$$

$$(resp., \Omega = \{x \in \Omega : \exists x_k \in \Omega \quad \text{tal que} \quad J^{2,-}u(x_k) \neq \emptyset, \lim_{k\to\infty} x_k = x\}).$$

Demonstração.

1. Se $J^{2,+}u(x) \cap J^{2,-}u(x) \neq \emptyset$ então existe $(p, X) \in J^{2,+}u(x)$ e $(p, X) \in J^{2,-}u(x)$, seja $p(y) = u(y) - u(x) + \langle p, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y - x), (y - x)\rangle$, então

$$\limsup_{y\to x} \frac{p(y)}{|y - x|^2} \leq 0 \leq \liminf_{y\to x} \frac{p(y)}{|y - x|^2},$$

assim $\lim_{y\to x} \frac{p(y)}{|y-x|^2} = 0$ o que mostra que p é o polinômio de Taylor, então u é diferenciável e por unicidade da serie de Taylor temos $p = Du(x)$ e $X = D^2u(x)$.

2. Seja $x \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, para cada $\epsilon > 0$ escolhemos $x_\epsilon \in \overline{B_r(x)}$ tal que

$$u(x_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - x|}{\epsilon} = \max_{y\in\overline{B_r(x)}} \left(u(y) - \frac{|y - x|}{\epsilon}\right),$$

então

$$u(x_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - x|}{\epsilon} \geq u(x),$$

$$|x_\epsilon - x|^2 \leq \epsilon(u(x_\epsilon) - u(x)) \leq 2\,\epsilon \max_{y \in \overline{B_r(x)}} |u(y)|,$$

assim para ϵ pequeno podemos supor que $x_\epsilon \in B_r(x)$.

Como x_ϵ é um máximo local em $B_r(x)$ temos

$$u(x_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - x|}{\epsilon} \geq \left(u(y) - \frac{|y-x|}{\epsilon}\right), \quad \forall y \in \overline{B_r(x)},$$

então

$$u(y) \leq u(x_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}(|y-x|^2 - |x_\epsilon - x|^2), \quad \forall y \in \overline{B_r(x)},$$

e

$$|y-x|^2 - |x_\epsilon - x|^2 = 2\langle x_\epsilon - x, y - x_\epsilon\rangle + \langle y - x_\epsilon, y - x_\epsilon\rangle,$$

assim

$$u(y) \leq u(x_\epsilon) + \langle p, y - x_\epsilon\rangle + \langle I(y - x_\epsilon), y - x_\epsilon\rangle,$$

onde $p = 2\,\frac{x_\epsilon - x}{\epsilon}$, o que mostra que $(2\,\frac{x_\epsilon - x}{\epsilon}, I) \in J^{2,+}u(x)$.

Definição. 1.3.2. *O fecho do subjato $J^{2,+}u(x)$ é*

$$\overline{J^{2,+}}u(x) = \left\{ (p,X) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists x_k \in \Omega \quad e \quad \exists (p_k, X_k) \in J^{2,+}u(x_k) \\ tal\ que \quad (x_k, u(x_k), p_k, X_k) \to (x, u(x), p, X) \\ com \quad k \to \infty \end{array} \right\}.$$

O fecho do superjato $J^{2,-}u(x)$ é

$$\overline{J^{2,-}}u(x) = \left\{ (p,X) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists x_k \in \Omega \quad e \quad \exists (p_k, X_k) \in J^{2,-}u(x_k) \\ tal\ que \quad (x_k, u(x_k), p_k, X_k) \to (x, u(x), p, X) \\ com \quad k \to \infty \end{array} \right\}.$$

Proposição. 1.3.2. *Para $u : \Omega \to \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *u é uma subsolução de viscosidade (resp., supersolução) de (1.1).*

2. *Para cada $x \in \Omega$ e $(p,X) \in J^{2,+}u(x)$ (resp., $J^{2,-}u(x)$) temos $F(x, u(x), p, X) \leq 0$. (resp., ≥ 0)*

3. *Para cada $x \in \Omega$ e $(p,X) \in \overline{J^{2,+}}u(x)$ (resp., $\overline{J^{2,-}}u(x)$) temos $F(x, u(x), p, X) \leq 0$. (resp., ≥ 0)*

Demonstração.

- (2) $\Rightarrow$ (3) Para $x \in \Omega$ e $(p, X) \in \overline{J^{2,+}}u(x)$ então existe $x_k \in \Omega$ e $(p_k, X_k) \in J^{2,+}u(x)$ tal que $(x_k, u(x_k), p_k, X_k) \to (x, u(x), p, X)$ e pela continuidade de F temos $F(x, u(x), p, X) \leq 0$.

- (3) $\Rightarrow$ (1) Seja $x \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que x é máximo local de $u - \varphi$, isto é:
$$u(y) - \varphi(y) \leq u(x) - \varphi(x),$$
ou seja
$$u(y) \leq u(x) + \varphi(y) - \varphi(x)$$
Pela expansão de Taylor temos
$$u(y) \leq u(x) + \langle D\varphi(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x)(y-x), (y-x)\rangle + o(|y-x|^2),$$
com $y \to x$, assim, temos que $(D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \in J^{2,+}u(x) \subset \overline{J^{2,+}}u(x)$, logo (3) implica
$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq 0.$$

- (1) $\Rightarrow$ (2). Seja $x \in \Omega$ e $(p, X) \in J^{2,+}u(x)$, então existe uma função não decrescente, contínua $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\omega(0) = 0$ e
$$u(y) \leq u(x) + \langle p, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), (y-x)\rangle + |y-x|^2\omega(|y-x|^2), \tag{1.3}$$
com $y \to x$. De fato, para $r > 0$ definimos
$$\omega_0(r) := \sup_{|y-x|=r}\left\{\frac{u(y) - u(x) - \langle p, y-x\rangle - \frac{1}{2}\langle X(y-x), (y-x)\rangle}{r^2}\right\}, \tag{1.4}$$
e $\omega_1(r) := \sup_{0\leq t\leq r} w_0(t)$ satisfaz (1.3), pois
$$\begin{aligned}\omega_1(r) &\geq \omega_0(r)\\ &\geq \frac{u(y) - u(x) - \langle p, y-x\rangle - \frac{1}{2}\langle X(y-x), (y-x)\rangle}{|y-x|^2}.\end{aligned}$$
Daí
$$|y-x|^2\,\omega_1(r) \geq u(y) - u(x) - \langle p, y-x\rangle - \frac{1}{2}\langle X(y-x), (y-x)\rangle$$
Seja $\phi(y) := u(x) + \langle p, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), (y-x)\rangle + \psi(|y-x|)$ onde
$$\psi(y) := \int_t^{2t}\left(\int_s^{2s}\omega(r)dr\right)ds \geq t^2\omega(t).$$

É fácil ver que

1. $\phi \in C^2$. De fato,

$$\psi'(t) = 2\int_{2t}^{4t} \omega(s)ds - \int_{t}^{2t} \omega(s)ds \quad \text{e,}$$

$$\psi''(t) = 8\omega(4t) - 4\omega(2t) + \omega(t).$$

2. $(D\phi(x), D^2\phi(x)) = (p, X) \in J^{2,+}u(x)$, e $(u-\phi)(x) \geq (u-\phi)(y)$ para $y \in \Omega \to x$. como $u(y) \leq \phi(y)$ para $y \in \Omega \to x$, por (1) temos

$$F(x, u(x), p, X) = F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0,$$

portanto, completamos a prova.

Tendo em conta a prova da etapa 3 acima, verificamos que

$$J^{2,+}u(x) = \left\{ (D\phi, D^2\phi) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \phi \in C^2(\Omega) \quad \text{tal que} \\ u - \phi \quad \text{atinge seu} \\ \text{máximo em} \quad \text{x} \end{array} \right\}.$$

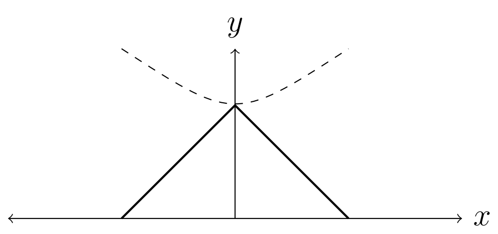
$$J^{2,-}u(x) = \left\{ (D\phi, D^2\phi) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \phi \in C^2(\Omega) \quad \text{tal que} \\ u - \phi \quad \text{atinge seu} \\ \text{mínimo em} \quad \text{x} \end{array} \right\}.$$

Assim conhecemos intuitivamente $J^{2,\pm}u(x)$ por seu gráfica.

Exemplo. 1.3.1. *Seja $u \in C([-1,1])$ dada por $u(x) = 1 - |x|$, a partir do gráfico de u, podemos concluir que*

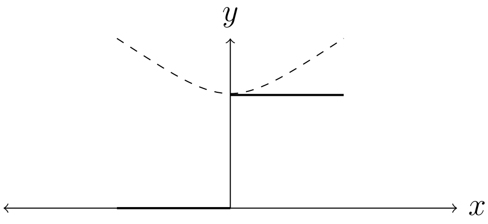
$$J^{2,-}u(0) = \emptyset \quad e$$

$$J^{2,+}u(0) = (\{1\} \times [0,\infty)) \cup (\{-1\} \times [0,\infty)) \cup ((-1,1) \times \mathbb{R})$$



Exemplo. 1.3.2. *Seja $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & para \quad x \geq 0 \\ 0 & para \quad x < 0. \end{cases}$$



vemos que

$$J^{2,-}u(0) = \emptyset \quad e$$

$$J^{2,+}u(0) = (\{0\} \times [0, \infty)) \cup ((0, \infty) \times \mathbb{R}).$$

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ não necessariamente aberto, definimos o subjato, superjato e o fecho de semijatos de $u : K \to \mathbb{R}$ em $x \in K$ por

$$J_K^{2,+}u(x) = \left\{ (p, X) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(y) \leq u(x) + \langle p, y - x\rangle \\ +\frac{1}{2}\langle X(y - x), y - x\rangle + o(|y - x|^2) \\ \text{com} \quad y \in K \to x \end{array} \right\}.$$

$$J_K^{2,-}u(x) = \left\{ (p, X) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} u(y) \geq u(x) + \langle p, y - x\rangle \\ +\frac{1}{2}\langle X(y - x), y - x\rangle + o(|y - x|^2) \\ \text{com} \quad y \in K \to x \end{array} \right\}.$$

e

$$\overline{J_K^{2,\pm}}u(x) = \left\{ (p, X) \in \mathbb{R}^n \times S(n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists x_k \in \Omega \quad \text{e} \quad \exists (p_k, X_k) \in J^{2,\pm}u(x_k) \\ \text{tal que} \quad (x_k, u(x_k), p_k, X_k) \to (x, u(x), p, X) \\ \text{com} \quad k \to \infty \end{array} \right\}.$$

note que se $K = \Omega$ e $x \in \Omega$ temos

$$J_\Omega^{2,\pm}u(x) = J_{\overline{\Omega}}^{2,+}u(x) \quad \text{e} \quad \overline{J_\Omega^{2,\pm}}u(x) = \overline{J_{\overline{\Omega}}^{2,+}}u(x)$$

Exemplo. 1.3.3. *Seja* $u : K \to \mathbb{R}$ *onde* $K = [0,1]$*, então* $J_K^{2,\pm}u(x) = J^{2,\pm}u(x) = \{0\} \times [0,\infty)$ *se* $x \in (0,1)$ *e que*

$$J_K^{2,+}u(0) = (\{0\} \times [0,\infty)) \cup ((0,\infty) \times \mathbb{R}).$$

e

$$J_K^{2,-}u(0) = (\{0\} \times [-\infty,0)) \cup ((-\infty,0) \times \mathbb{R}).$$

Proposição. 1.3.3. *Sejam* $u : K \to \mathbb{R}, \quad \psi \in C^2(K)$ *e* $x \in K$ *então*

$$J_K^{2,+}(u+\psi)(x) = (D\psi(x), D^2\psi(x)) + J_K^{2,+}(u)(x)$$

e

$$\overline{J_K^{2,+}}(u+\psi)(x) = (D\psi(x), D^2\psi(x)) + \overline{J_K^{2,+}}(u)(x)$$

Demonstração. Aplicar definição.

1.4 Origem do termo viscosidade

Concluímos este capitulo fazendo uma referencia à origem do termo *viscosidade*, utilizado na definição (1.2.3).

Exemplo. 1.4.1.

Considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} u_t + H(x, \nabla_x u) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{sobre} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.5}$$

onde o dado inicial $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Chamamos a H de *Hamiltoniana* da equação. Uma solução clássica de (1.5) é uma função $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, de classe $C^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ que satisfaz o problema (1.5).

Uma vez formulado o problema (1.5), considere o seguinte problema auxiliar (do tipo elíptico):

$$\begin{cases} -\epsilon\, \Delta u_\epsilon + (u_\epsilon)_t + H(x, \nabla_x u_\epsilon) = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u_\epsilon(x,0) = g(x) & \text{sobre} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.6}$$

Com hipóteses relativamente fracas sobre a regularidade de H e g é possível garantir, para cada $\epsilon > 0$, a existência de uma solução suave u_ϵ, a estratégia de aproximar a solução de (1.5) introduzindo o termo de viscosidade artificial $-\epsilon\,\Delta u_\epsilon$ e fazendo $\epsilon \to 0$ é conhecida como *método da viscosidade esvanescente*.

Defina u como o limite (localmente uniforme) da seqüencia u_ϵ. Dada uma função teste $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ tal que $u-\varphi$ possui um máximo local no ponto (x_0, t_0), então $u_\epsilon - \varphi$ possuem máximos locais nos pontos (x_ϵ, t_ϵ) e ainda $\lim_{\epsilon\to 0} t_\epsilon = t_0, \lim_{\epsilon\to 0} x_\epsilon = x_0$. Daí segue que

$$\partial_t u_\epsilon(x_\epsilon, t_\epsilon) = \partial_t \varphi(x_\epsilon, t_\epsilon), \quad \partial_x u_\epsilon(x_\epsilon, t_\epsilon) = \partial_x \varphi(x_\epsilon, t_\epsilon),$$
$$-\epsilon\,\Delta u_\epsilon(x_\epsilon, t_\epsilon) \geq -\epsilon\,\Delta\varphi(x_\epsilon, t_\epsilon),$$

de onde obtemos

$$\partial_t \varphi + H(x, \nabla_x \varphi) = \epsilon\,\Delta u_\epsilon \leq \epsilon\,\Delta\varphi.$$

Como conseqüência da convergência uniforme $u_\epsilon \to u$,

$$\partial_t \varphi + H(x, \nabla_x \varphi) \leq 0.$$

Exemplo. 1.4.2.

Seja $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, Considere o problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega = \{-1, 1\}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Considere o problema auxiliar. (tipo elíptico):

$$\begin{cases} -\epsilon\, u_\epsilon'' + |u_\epsilon'| - 1 = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u_\epsilon = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega = \{-1, 1\}. \end{cases} \tag{1.8}$$

A estratégia também é aproximar a solução de (1.7) por uma solução de (1.8), fazendo $\epsilon \to 0$.

Uma solução de (1.8) é

$$u_\epsilon(x) = -\epsilon\, \ln\left(\frac{\cosh \frac{x}{\epsilon}}{\cosh \frac{1}{\epsilon}}\right).$$

a qual converge uniformemente a $u(x) = 1 - |x|$ em (-1,1), isto é $u_\epsilon \to u$.

Capítulo 2

PRINCÍPIO DE COMPARAÇÃO E UNICIDADE

O objetivo deste capítulo é estudar o problema de unicidade de soluções de viscosidade. Isto será feito através de princípios de comparação.

Lions foi o primeiro a mostrar a unicidade de solução de viscosidade para EDP's elípticas em problemas de controle estocástico (isto é, Equação de Bellman). Os resultados foram estendidos para EDP's de segunda ordem por Robert Jensen em 1988.

Consideremos a seguinte EDP

$$\nu\, u + F(x, Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.1}$$

onde ν é uma função não negativa.

$$\nu \geq 0, \tag{2.2}$$

e

$$F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times S(n) \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

é contínua.

2.1 Princípios de comparação

Consideremos o caso onde é u é uma subsolução de viscosidade e v uma supersolução clássica de (2.1).

2.2 EDP elíptico degenerado I

Consideremos o caso onde F é elíptica (degenerada).

Proposição. 2.2.1. *Suponhamos que $\nu > 0$ e que F seja continua e elíptica. Seja $u \in USC(\overline{\Omega})$ (resp., $v \in LSC(\overline{\Omega})$) uma subsolução de viscosidade (resp., supersolução) de (2.1) e $v \in LSC(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ (resp., $u \in USC(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$) uma supersolução clássica (res., sub-solução) de (2.1).*

$$\text{Se } u \leq v \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ então } u \leq v \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Demonstração. Suponhamos que u é uma subsolução de viscosidade de (2.1), o caso onde u é uma supersolução é similar.

Seja $\theta = \max_{\overline{\Omega}}(u - v)$ e $\hat{x} \in \overline{\Omega}$ tal que $(u - v)(\hat{x}) = \theta$.

Afirmação: $\theta \leq 0$.

De fato, se $\theta \geq 0$ então $\hat{x} \in \Omega$ pois $u - v \leq 0$, e $\hat{x}$ é um máximo local de $u - v$, por hipótese u é uma solução de viscosidade e $v \in C^2$ uma supersolução clássica então

$$\nu\, u(\hat{x}) + F(\hat{x}, Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})) \leq 0 \leq \nu\, v(\hat{x}) + F(\hat{x}, Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})),$$

então

$$\nu\, u(\hat{x}) \leq \nu\, v(\hat{x})$$

Daí segue que

$$\nu\, \theta = \nu\, (u(\hat{x}) - v(\hat{x})) \leq 0,$$

obtemos finalmente a contradição $\nu\, \theta \leq 0$. ■

2.3 EDP uniformemente elíptico I

Mostramos para o caso: u uma subsolução de viscosidade e v uma supersolução clássica, e $\nu \geq 0$.

Sejam λ, Λ tais que $0 < \lambda < \Lambda$. Para $X \in S(n)$ definimos

$$\mathcal{P}^{+}(X) = \max\{-Tr(AX) | \lambda I \leq A \leq \Lambda I \quad \text{para} \quad A \in S(n)\}$$

$$\mathcal{P}^{-}(X) = \min\{-Tr(AX) | \lambda I \leq A \leq \Lambda I \quad \text{para} \quad A \in S(n)\}$$

Proposição. 2.3.1. *Para $X, Y \in S(n)$ temos:*

1. $\mathcal{P}^{+}(X) = -\mathcal{P}^{-}(-X)$,

2. $\theta \mathcal{P}^{+}(X) = \theta \mathcal{P}^{+}(X)$ *para* $\theta \geq 0$,

3. $\mathcal{P}^{+}$ *é convexo,*

4. $\begin{cases} \mathcal{P}^{-}(X) + \mathcal{P}^{-}(Y) \leq \mathcal{P}^{-}(X+Y) \leq \mathcal{P}^{-}(X) + \mathcal{P}^{+}(Y) \\ \mathcal{P}^{-}(X) + \mathcal{P}^{-}(Y) \leq \mathcal{P}^{+}(X+Y) \leq \mathcal{P}^{+}(X) + \mathcal{P}^{+}(Y) \end{cases}$

Demonstração. Só aplicar definição. ∎

Definição. 2.3.1. *Dizemos que $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times S(n) \to \mathbb{R}$ é uniformemente elíptico (com constante de elipticidade $0 < \lambda < \Lambda$) se*

$$\mathcal{P}^{-}(X - Y) \leq F(x, p, X) - F(x, p, Y) \leq \mathcal{P}^{+}(X - Y)$$

para $x \in \Omega$, $\quad p \in \mathbb{R}^n$ e $X, Y \in S(n)$.

Suponhamos que F seja μ-Lipschitz na segunda variável p isto é existe $\mu > 0$ tal que

$$|F(x, p, X) - F(x, p', X)| \leq \mu |p - p'| \tag{2.4}$$

para $x \in \Omega$, $\quad p \in \mathbb{R}^n$ e $X \in S(n)$.

Proposição. 2.3.2. *Suponhamos (2.2),(2.3) e (2.4), suponhamos também F uniformemente elíptica. Seja $u \in USC(\overline{\Omega})$ (resp., $v \in LSC(\overline{\Omega})$) uma subsolução de de viscosidade (resp., supersolução) de (2.1) e $v \in LSC(\overline{\Omega} \cap C^2(\Omega)))$ uma supersolução clássica (resp., subsolução) de* (2.1).

$$\textit{Se } u \leq v \textit{ sobre } \partial\Omega, \textit{ então } u \leq v \textit{ em } \overline{\Omega}.$$

Demonstração. Suponhamos u uma subsolução de viscosidade e v uma supersolução clássica de (2.1).

Seja $\theta = \max_{\overline{\Omega}}(u - v)$.

Afirmação: $\theta \leq 0$.

De fato, se $\max_{\overline{\Omega}}(u - v) = \theta > 0$, definimos para cada $\epsilon > 0$ a aplicação $\phi_\epsilon(x) = \epsilon\, e^{\delta\, x_1}$ onde $\delta := \max\left\{\frac{\mu+1}{\lambda}, \nu + 1\right\} > 0$, ($\mu > 0$ é a constante Lipschitz de F com respeito a p, e $\lambda > 0$ à constante de elipticidade uniforme). Escolhemos $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon \max_{\overline{\Omega}} e^{\delta x_1} \leq \frac{\theta}{2}$$

Seja $\hat{x} \in \overline{\Omega}$ tal que

$$(u - v + \phi_\epsilon)(\hat{x}) = \max_{\overline{\Omega}}(u - v + \phi_\epsilon) \geq \theta$$

De onde obtemos que

$$(u - v)(\hat{x}) + \phi_\epsilon(\hat{x}) \geq \theta$$

Daí

$$\theta - \phi_\epsilon(\hat{x}) \leq (u - v)(\hat{x}) \tag{2.5}$$

como $\epsilon > 0$ e $u \leq v$ sobre $\partial\Omega$ então $\hat{x} \in \Omega$. Assim

$$\nu\, u(\hat{x}) + F(\hat{x}, D(v - \phi_\epsilon)(\hat{x}), D^2(v - \phi_\epsilon)(\hat{x})) \leq 0.$$

Pois $v - \phi_\epsilon \in C^2$ e

$$\nu\, u(\hat{x}) + F(\hat{x}, Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})) + \mathcal{P}^-(-D^2\phi_\epsilon(\hat{x})) - \mu|D\phi_\epsilon(\hat{x})| \leq 0.$$

Note que $|D\phi_\epsilon(\hat{x})| \leq \delta\epsilon e^{\delta\hat{x_1}}$ e $\mathcal{P}^-(-D\phi_\epsilon(\hat{x})) \geq \delta^2\epsilon\lambda e^{\delta\hat{x_1}}$, assim

$$\nu\, u(\hat{x}) + F(\hat{x}, Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})) + \delta\epsilon(\lambda\delta - \mu)e^{\delta\hat{x_1}} \leq 0 \tag{2.6}$$

v é uma supersolução clássica de (2.1), por (2.6) temos

$$\nu(u - v)(\hat{x}) + \delta\epsilon e^{\delta\hat{x_1}} \leq 0.$$

finalmente por (2.5)

$$\nu\,(\theta - \phi_\epsilon(\hat{x})) + \delta\epsilon e^{\delta\hat{x_1}} \leq 0$$

Daí
$$\delta\,\phi_\epsilon(\hat{x}) \leq \nu\,\theta + \delta\,\phi_\epsilon(\hat{x}) \leq \nu\,\phi_\epsilon(\hat{x}),$$
pois $\nu\,\theta \geq 0$, e ainda $\phi_\epsilon(\hat{x}) > 0$, assim obtemos finalmente a contradição $\delta \leq \nu < \nu+1 \leq \delta$. ■

Para mostrar o principio de comparação, quando u e v são subsolução e supersolução de viscosidade respectivamente, precisamos do seguinte lema.

Teorema. 2.3.1 (Lema de Ishii). *Seja Ω_i um subconjunto localmente compacto de $\mathbb{R}^{n_i}$ para $i = 1, \ldots, k$,*
$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k,$$
$u_i \in USC(\Omega_i)$, e φ duas vezes diferenciável contínua em uma vizinhança de Ω.

Se
$$w(x) = u_1(x_1) + \cdots + u_k(x_k) \quad para \quad x = (x_1, ..., x_k) \in \Omega,$$
e suponhamos que $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k) \in \Omega$ é um máximo local de $w - \varphi$ em Ω, então para cada $\epsilon > 0$ existem $X_i \in S(n_i)$ tal que
$$(D_{x_i}\varphi(\hat{x}), X_i) \in \overline{J^{2,+}_{\Omega}}u_i(\hat{x}_i) \quad para \quad i = 1, \ldots, k$$
e a matriz diagonal por blocos com estradas X_i satisfazendo
$$-\left(\frac{1}{\epsilon} + ||A||\right) I \leq \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_k \end{pmatrix} \leq A + \epsilon\,A^2 \tag{2.7}$$
onde $A = D^2\varphi(\hat{x}) \in S(n)$, $n = n_1 + \cdot + n_k$.

Demonstração. A demonstração deste resultado requer um pouco mais de teoria de medida do que a assumida aqui. Veja, [4] Teorema 3.2. ■

Note que se
$$\phi(x, y) := \frac{|x - y|^2}{2\,\epsilon}$$
então

$$A := D^2\phi(x,y) = \frac{1}{\epsilon}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad ||A|| = \frac{2}{\epsilon}. \tag{2.8}$$

2.4 EDP elíptico degenerado II

Definição. 2.4.1 (Condição de Estrutura)**.** *Seja F uma função contínua, se existe $\omega_F : [0,\infty) \to [0,\infty)$ contínua tal que $\omega(0) = \omega(0+) = 0$ e se satisfaz para $X, Y \in S(n)$, e $\mu > 1$*

$$-3\,\mu\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3\,\mu\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

então

$$F(y,\mu\,(x-y),Y) - F(y,\mu\,(x-y),X) \leq \omega_F(|x-y|\,(1+\mu\,|x-y|)) \quad \textit{para} \quad x,y \in \Omega.$$

Nesta subseção mostraremos que se à condição de estrutura é satisfeita por uma função contínua F então F em elíptico degenerado.

Primeiro mostramos o principio de comparação quando F satisfaz a condição de estrutura (2.4.1).

Teorema. 2.4.1. *Suponhamos $\nu > 0$ e (2.4.1). Sejam $u \in USC(\overline{\Omega})$ e $v \in LSC(\overline{\Omega})$ subsolução e supersolução de viscosidade respectivamente.*

$$\textit{Se } u \leq v \textit{ sobre } \partial\Omega, \textit{ então } u \leq v \textit{ em } \overline{\Omega}$$

Demonstração.

Seja $\theta := \max_{\overline{\Omega}}(u-v)$ e suponha por absurdo que $\theta > 0$, para $\epsilon > 0$ definimos uma aplicação $\Phi_\epsilon : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi_\epsilon(x,y) = u(x) - v(y) - \frac{|x-y|}{2\,\epsilon}.$$

Seja $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ um ponto tal que

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(x_\epsilon,y_\epsilon) &= \max_{x,y\in\overline{\Omega}} \Phi_\epsilon(x,y), \\ &\geq \max_{x\in\overline{\Omega}} \Phi_\epsilon(x,x), \\ &= \max_{x\in\overline{\Omega}} (u-v), \\ &= \theta, \end{aligned}$$

ou seja

$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{2\,\epsilon} \geq \theta. \tag{2.9}$$

Como $\overline{\Omega}$ é compacto existe uma seqüencia $(x_{\epsilon_k}, y_{\epsilon_k})$ tal que $(x_{\epsilon_k}, y_{\epsilon_k}) \to (\hat{x}, \hat{y})$ onde $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüencia tal que $\epsilon_k \to 0$ e $(\hat{x}, \hat{y}) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$

Seja $M := \max_\Omega u - \min_\Omega v$ então

$$\begin{aligned} \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{2\,\epsilon} &\leq u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \theta, \\ &\leq M - \theta, \\ &\leq M, \end{aligned}$$

isto é

$$|x_\epsilon - y_\epsilon|^2 \leq 2\,\epsilon\, M \to 0, \quad \text{se} \quad \epsilon \to 0.$$

Assim temos que $\hat{x} = \hat{y}$.

Segue de (2.9)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{2\,\epsilon}, \\ &\leq \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{2\,\epsilon}, \\ &\leq \limsup_{\epsilon\to 0} u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) - \theta, \\ &\leq (u - v)(\hat{x}) - \theta, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon} = 0, \tag{2.10}$$

e

$$\theta \leq \liminf_{\epsilon\to 0} (u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon)). \tag{2.11}$$

Como $u \leq v$ sobre $\partial\Omega$ temos que $\hat{x} \in \Omega$, pois $(u - v)(\hat{x}) = \theta > 0$ assim temos que para ϵ pequeno $x_\epsilon \in \Omega$. No lema de Ishii se $u_1 = u, \quad u_2 = -v, \quad \mu = \frac{1}{\epsilon}$ e $\phi(x, y) = \frac{|x-y|^2}{2\,\epsilon}$, então pelo lema de Ishii existem X, Y tais que

$$\left(\frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, X\right) \in \overline{J^{2,+}}u(x_\epsilon), \quad \left(\frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, Y\right) \in \overline{J^{2,-}}v(y_\epsilon),$$

e

$$-\frac{3}{\epsilon}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{3}{\epsilon}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

Assim pela proposição (1.3.2) temos que

$$\nu\, u(x_\epsilon) + F(x_\epsilon, \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, X) \leq 0 \leq \nu\, v(x_\epsilon) + F(y_\epsilon, \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, Y).$$

Daí obtemos que

$$\nu\, u(x_\epsilon) - \nu\, v(x_\epsilon) \leq F(y_\epsilon, \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, Y) - F(x_\epsilon, \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, X).$$

Segue do (2.4.1) com $\mu = \frac{1}{\epsilon}$

$$\nu\,(u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon)) \leq \omega_F\left(|x_\epsilon - y_\epsilon| + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon}\right). \tag{2.12}$$

Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, isto é $\epsilon \to 0$, e (2.10), (2.11) obteremos o absurdo

$$\nu\,\theta \leq 0. \tag{2.13}$$

■

Proposição. 2.4.1. *Seja F uma função contínua então:*

1. *A definição (2.4.1) implica elíptico degenerado.*
2. *Suponha que F é uniformemente elíptico, se existe um $\overline{\omega} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ contínua tal que $\omega(0) = \omega(0+) = 0$,*

$$\sup_{r \geq 0} \frac{\overline{\omega}(r)}{r+1} < \infty,$$

e

$$|F(x,p,X) - F(y,p,X)| \leq \overline{\omega}(|x-y|(||X|| + |p| + 1)) \tag{2.14}$$

para todo $x, y \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \in S(n)$ então a definição (2.4.1) é certo.

Demonstração. (1) Suponhamos (2.4.1), isto é existe $\omega_F : [0,\infty) \to [0,\infty)$ contínua tal que $\omega(0) = \omega(0+) = 0$, se $X, Y \in S(n)$, $\mu > 1$ e satisfaz

$$-3\,\mu\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3\,\mu\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

então,

$$F(y, \mu\,(x-y), Y) - F(y, \mu\,(x-y), X) \leq \omega_F(|x-y|\,(1+\mu\,|x-y|)), \quad \text{para} \quad x, y \in \Omega.$$

Afirmação: $X \leq Y$.

De fato, para $\xi \in \mathbb{R}^n$ por (2.15) a segunda desigualdade temos que

$$\left\langle \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \right\rangle \leq 3\,\mu \left\langle \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \right\rangle,$$

Daí, podemos concluir que

$$\langle X\xi, \xi \rangle - \langle Y\xi, \xi \rangle \leq 0,$$

logo $X \leq Y$.

Seja $\epsilon > 0$, e $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ então

$$\begin{aligned} \langle X\,\xi, \xi \rangle - \langle Y\,\eta, \eta \rangle\,, &= \langle Y\,\xi, \xi \rangle - \langle Y\,\eta, \eta \rangle\,, \\ &= 2\,\langle Y\,\eta, \xi-\eta \rangle + \langle Y\,(\xi-\eta), \xi-\eta \rangle\,, \\ &\leq \frac{\epsilon}{||Y||^2}\,||Y||^2|\eta|^2 + \frac{||Y||^2}{\epsilon}|\xi-\eta|^2 + ||Y||\,|\xi-\eta|^2, \\ &= \epsilon\,|\eta|^2 + \left(1 + \frac{||Y||^2}{\epsilon}\right)\,||Y||\,|\xi-\eta|^2, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -(Y+\epsilon\,I) \end{pmatrix} \leq \left(1 + \frac{||Y||^2}{\epsilon}\right)\,||Y||\,\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

assim se

$$\mu > \frac{1}{3}\max\left\{||X||, ||Y||, \left(1 + \frac{||Y||^2}{\epsilon}\right)\,||Y||\right\},$$

e para ϵ pequeno tal que $X, Y+\epsilon\,I$ satisfaz

$$-3\,\mu \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -(Y+\epsilon\,I) \end{pmatrix} \leq 3\,\mu \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

fixamos x, p onde $p = \mu\,(x-y)$ em (2.4.1) temos que

$$y = x - \frac{p}{\mu}$$

logo por (2.4.1)

$$F(x-\frac{p}{\mu},p,Y+\epsilon\, I)-F(x,p,X)\le \omega_F\left(\frac{1}{\mu}(|p|^2+|p|)\right).$$

Agora, fazendo $\mu\to\infty$ e $\epsilon\to 0$, segue que

$$F(x,p,Y)-F(x,p,X)\le 0.$$

(2) Seja $X,Y\in S(n)$ satisfazendo (2.4.1), então pelo mesmo argumento anterior temos $X\le Y$.

Multiplicando ambos lados de

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -(Y+\epsilon\, I)\end{pmatrix}\le 3\,\mu\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I\end{pmatrix},$$

por $\begin{pmatrix} -I & -I \\ -I & I\end{pmatrix}$, logo obtemos

$$\begin{pmatrix} X-Y & X+Y \\ X+Y & X-Y\end{pmatrix}\le 12\,\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

de fato

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -I & -I \\ -I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & -I \\ -I & I\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -X & Y \\ -Y & -Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & -I \\ -I & I\end{pmatrix},\\ &= \begin{pmatrix} X-Y & X+Y \\ X+Y & X-Y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -I & -I \\ -I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I & -I \\ -I & I\end{pmatrix} &= 3\,\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4\,I\end{pmatrix},\\ &= 12\,\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Suponhamos que $|\xi|=|\eta|=1$, então

$$\begin{aligned}\left\langle\begin{pmatrix} X-Y & X+Y \\ X+Y & X-Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ s\,\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \xi \\ s\,\eta\end{pmatrix}\right\rangle &= s^2\,\langle (X-Y)\eta,\eta\rangle+2\,\langle (X+Y)\eta,\xi\rangle\\ &\quad +\langle (X-Y)\xi,\xi\rangle,\end{aligned}$$

e

$$\left\langle 12\,\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ s\,\eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ s\,\eta \end{pmatrix} \right\rangle = 2\,\mu\, s^2.$$

Então

$$0 \leq (12\,\mu + \langle (Y-X)\eta, \eta\rangle)\, s^2 - 2\,\langle (X+Y)\xi, \eta\rangle\, s + \langle (Y-X)\xi, \xi\rangle,$$

assim

$$|\langle (X+Y)\xi, \eta\rangle|^2 \leq\; (12\,\mu + \langle (Y-X)\eta, \eta\rangle)\,\langle (Y-X)\xi, \xi\rangle,$$

segue que

$$||X+Y|| \leq ||X-Y||^{\frac{1}{2}}\,(12\,\mu + ||X-Y||)^{\frac{1}{2}}.$$

Como,

$$\begin{aligned} 2||X|| &= ||X+X||, \\ &\leq ||X-Y|| + ||Y+X||, \\ &\leq ||X-Y|| + ||X-Y||^{\frac{1}{2}}\;(12\,\mu + ||X-Y||)^{\frac{1}{2}}\,, \\ &= ||X-Y||^{\frac{1}{2}}\;\left(||X-Y||^{\frac{1}{2}} +\; (12\,\mu + 2\,||X-Y||)^{\frac{1}{2}}\right), \\ &\leq ||X-Y||^{\frac{1}{2}}\,2\,(6\,\mu + ||X-Y||)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

isto é

$$||X|| \leq ||X-Y||^{\frac{1}{2}}\,(6\,\mu + ||X-Y||^{\frac{1}{2}}).$$

Na ultima desigualdade usamos a desigualdade $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

Como $X \leq Y$, implica que

$$F(y,p,X) - F(y,p,Y) \geq \mathcal{P}^-(X-Y) \geq \lambda\,||X-Y||. \tag{2.17}$$

De fato $X \leq Y$ se e solo se $Y - X \geq 0$ então $Tr(Y-X) \geq ||Y-X||$ e para $A \geq \lambda\, I$ temos $-Tr(A\,(X-Y)) \geq \lambda\,||X-Y||$, isto é

$$\mathcal{P}(X-Y) \geq \lambda\,||Y-X||.$$

Para todo $\epsilon > 0$, existe $M_\epsilon > 0$ tal que

$$\overline{\omega}(r) \leq \epsilon + M_\epsilon r,$$

e

$$\overline{\omega}(r) = \inf_{\epsilon>0}(\epsilon + M_\epsilon\, r), \quad \text{para} \quad r \geq 0,$$

Por (2.14) e (2.17), como $||X|| \leq 3\,\mu$, e $||Y|| \leq 3\,\mu$ temos

$$\begin{aligned}
F(y,p,Y) - F(x,p,X) &= F(y,p,X) - F(x,p,X) - (F(y,p,X) - F(y,p,Y)), \\
&\leq \overline{\omega}\,(|x-y|(||X|| + |p| + 1)) - \lambda\,||X - Y||, \\
&\leq \epsilon + M_\epsilon\,(|x-y|(||X|| + |p| + 1)) - \lambda\,||X - Y||, \\
&= \epsilon + M_\epsilon|x-y|(|p|+1) + \\
&\quad + M_\epsilon\,|x-y|\,||X|| - \lambda\,||X-Y||, \\
&= \epsilon + M_\epsilon|x-y|(|p|+1) + \\
&\quad + \sup_{0 \leq t \leq 6\mu}\{M_\epsilon|x-y|t^{\frac{1}{2}}(6\mu+t)^{\frac{1}{2}} - \lambda t\},
\end{aligned}$$

onde $t = ||X - Y||$.

Afirmação: Existe $C > 0$ tal que

$$M_\epsilon|x-y|t^{\frac{1}{2}}(6\mu+t)^{\frac{1}{2}} - \lambda\,t \leq \begin{cases} C\,M_\epsilon\,\sqrt{\mu\,|x-y|^2} & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ C\,M_\epsilon^2\,\mu\,|x-y|^2 & \text{se} \quad 1 < t \leq 6\,\mu, \end{cases}$$

De fato, para $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned}
M_\epsilon\,|x-y|t^{\frac{1}{2}}(6\mu+t)^{\frac{1}{2}} - \lambda\,t &\leq M_\epsilon|x-y|(12\,\mu)^{\frac{1}{2}} \\
&= M_\epsilon\,C_1\,\sqrt{\mu\,|x-y|^2},
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \sqrt{12}$ e para $1 < t \leq 6\,\mu$,

$$\begin{aligned}
M_\epsilon\,|x-y|t^{\frac{1}{2}}(6\mu+t)^{\frac{1}{2}} - \lambda\,t &= 2\,\frac{M_\epsilon\,|x-y|t^{\frac{1}{2}}(6\mu+t)^{\frac{1}{2}}}{2} - \lambda\,t, \\
&\leq \frac{1}{\lambda\,t}\frac{|M_\epsilon\,|x-y|t^{\frac{1}{2}}(6\mu+t)^{\frac{1}{2}}|^2}{4} + \lambda\,t - \lambda\,t, \\
&\leq \frac{1}{\lambda\,t}\frac{M_\epsilon^2\,|x-y|^2 t(12\mu)}{4}, \\
&= \frac{3\,\mu\,M_\epsilon^2\,|x-y|^2}{\lambda}, \\
&= C_2\,\mu\,M_\epsilon^2\,|x-y|^2,
\end{aligned}$$

onde $C_2 = \frac{3}{\lambda}$,

Se $C = \max\{C_1, C_2\}$, então é satisfeita a afirmação.

Segue que

$$\begin{aligned} F(y,\mu\,(x-y),Y)-F(x,\mu\,(x-y),X) &\leq \epsilon + M_\epsilon|x-y|(|p|+1)+ \\ &\quad +C\,M_\epsilon\,\sqrt{\mu\,|x-y|^2}+C\,M_\epsilon^2\,\mu\,|x-y|^2 \end{aligned}$$

logo a equação acima transforma-se em

$$F(y,\mu\,(x-y),Y)-F(x,\mu\,(x-y),X) \leq \omega_F(|x-y|\,(1+\mu\,|x-y|)) \quad \text{para} \quad x,y\in\Omega.$$

■

2.5 EDP uniformemente elíptico II

Apresentamos o principio de comparação para uma aplicação F uniformemente elíptico e $\nu > 0$

Teorema. 2.5.1. *Suponhamos (2.2), (2.3),(2.4) e (2.4.1), suponhamos também F é uniformemente elíptica, Sejam $u \in USC(\overline{\Omega})$ e $v \in LSC(\overline{\Omega})$ uma sub-solução e super-solução de viscosidade de (2.1) respectivamente.*

$$\textit{Se } u \leq v \textit{ sobre } \partial\Omega, \textit{ então } u \leq v \textit{ em } \overline{\Omega}$$

Demonstração. Seja

$$\theta := \sup_{x\in\overline{\Omega}}(u-v)(x). \tag{2.18}$$

Afirmação: $\theta \leq 0$.

De fato, suponha por contradição, isto é $\sup_{\overline{\Omega}}(u-v) =: \theta > 0$, seja $\sigma := \frac{\mu+1}{2\,\lambda}$, escolhemos $\delta > 0$ tal que

$$\delta \sup_{x\in\overline{\Omega}} e^{\sigma\,x_1} \leq \frac{\theta}{2}$$

então $\tau := \sup_{x\in\overline{\Omega}}(u(x)-v(x)+\delta\ e^{\sigma\,x_1}) \geq \theta > 0$.

Defina

$$\phi(x,y) := \frac{|x-y|^2}{2\,\epsilon} - e^{\sigma\,x_1}.$$

Seja $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ um ponto máximo de $u(x)-v(y)-\phi(x,y)$, isto é

$$u(x_\epsilon)-v(y_\epsilon)-\phi(x_\epsilon,y_\epsilon) = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}(u(x)-v(y)-\phi(x,y))$$

sobre $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ pela compacidade de $\overline{\Omega}$ podemos supor que $(x_\epsilon, y_\epsilon)\to(\hat{x},\hat{y})\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ quando $\epsilon\to 0$

Como

$$\begin{aligned}
u(x_\epsilon)-v(y_\epsilon)-\phi(x_\epsilon,y_\epsilon) &= \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}}(u(x)-v(y)-\phi(x,y)),\\
&\geq \max_{x\in\overline{\Omega}}(u(x)-v(x)-\phi(x,x)),\\
&\geq \max_{x\in\overline{\Omega}}(u(x)-v(x)+\delta\, e^{\sigma\, x_1}),\\
&\geq \max_{x\in\overline{\Omega}}(u(x)-v(x)),\\
&\geq \theta,\\
&> 0.
\end{aligned}$$

Logo

$$u(x_\epsilon)-v(y_\epsilon)>\phi(x_\epsilon,y_\epsilon),$$

Daí, pela definição de ϕ

$$\begin{aligned}
\frac{|x_\epsilon-y_\epsilon|^2}{2\,\epsilon} &\leq u(x_\epsilon)-v(y_\epsilon)+\delta\, e^{\sigma\, x_1},\\
&\leq \max_{\overline{\Omega}} u-\min_{\overline{\Omega}} v+\frac{\theta}{2},
\end{aligned}$$

logo

$$|x_\epsilon-y_\epsilon|^2\leq 2\,\epsilon(\max_{\overline{\Omega}} u-\min_{\overline{\Omega}} v+\frac{\theta}{2}).$$

Tomando o limite $\epsilon\to 0$, obtemos

$$\hat{x}=\hat{y}.$$

De onde segue

$$u(\hat{x})-v(\hat{x})+\delta\, e^{\sigma\,\hat{x}_1}\geq\tau.$$

A qual implica que $\hat{x}\in\Omega$, logo podemos supor que $(x_\epsilon,y_\epsilon)\in\Omega\times\Omega$ para ϵ pequeno, além de isso obtemos que,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{|x_\epsilon-y_\epsilon|^2}{\epsilon}=0. \tag{2.19}$$

Aplicando o lema de Ishii a $u_1(x):=u(x)+\delta\, e^{\sigma\, x_1}$ e $u_2(x):=-v(x)$, existem $X,Y\in S(n)$ tal que

$$\left(\frac{x_\epsilon-y_\epsilon}{\epsilon},X\right)\in\overline{J^{2,+}}u_1(x_\epsilon),\quad \left(\frac{x_\epsilon-y_\epsilon}{\epsilon},Y\right)\in\overline{J^{2,-}}v(y_\epsilon),$$

e

$$-\frac{3}{\epsilon}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{3}{\epsilon}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

Pela proposição (1.3.3) temos

$$\left(\frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon} - \delta\,\sigma e^{\sigma\, e_1}, X - 2\,\delta\,\sigma e^{\sigma\, x_1\, I_1}\right) \in \overline{J^{2,+}}u(x),$$

onde $e_1 \in \mathbb{R}$, $I_1 \in S(n)$ definidos como

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $r := \delta\,\sigma\,e^{\sigma\,x_1}$, e pela definição de u e v temos

$$0 \leq F\left(y, \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, Y\right) - F\left(x_\epsilon, \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon} - r\,e_1, X - 2\,\sigma\,r\,I_1\right).$$

Da hipótese sobre F (uniformemente elíptica) e (2.4) temos

$$0 \leq r\,\mu + 2\,\sigma\,r\,\mathcal{P}^+(I_1) + F\left(y_\epsilon, \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, Y\right) - F\left(x_\epsilon, \frac{x_\epsilon - y_\epsilon}{\epsilon}, X\right).$$

De (2.4.1) e pela definição de $\mathcal{P}^+$, temos

$$0 \leq r\,(\mu - 2\,\sigma\,\lambda) + \omega_F\left(|x_\epsilon - y_\epsilon| + \frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon}\right),$$

Tomando agora o limite $\epsilon \to 0$ e por (2.19) temos

$$0 \leq r\,(\mu - 2\,\sigma\,\lambda).$$

a qual implica $\mu > 2\,\sigma\,\lambda = \mu + 1$, obtemos finalmente uma contradição $\mu > \mu + 1$. ■

Capítulo 3

PRINCIPIO DO MÁXIMO.

O principio do máximo para funções de classe C^2 em variedade Riemanniana completas, devido Omori [7] e Yau [8], tem muitas aplicações em Geometria diferencial, equações diferencias etc. Apresentamos neste capitulo uma nova demonstração desse principio devido a S. Peng e D. Zhou em [6], usando a teoria de viscosidade.

Apresentamos uma nova versão de princípio do máximo de Omori-Yau no sentido de solução de viscosidade e uma nova prova no caso de Ω ser um espaço Euclideano que é um caso especial de um recente trabalho de Peng e Zhou. Nossa referência básica é [6].

3.1 Princípio do Máximo.

Os teoremas seguintes podem ser estendidos a variedades riemannianas completas.

Teorema. 3.1.1. *Sejam $u \in USC(\mathbb{R}^n)$ e $v \in LSC(\mathbb{R}^n)$ duas funções, suponhamos que u e v são limitados por acima e por baixo respectivamente e existe uma função crescente $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ com $\omega(0) = \omega(0+) = 0$ tal que*

$$u(x) - u(y) \leq \omega(|x - y|) \quad \textit{para todos} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Então

$$\mu_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u(x) - v(x)) < +\infty. \tag{3.2}$$

temos para cada $\epsilon > 0$*, existem* $x_\epsilon, y_\epsilon, p_\epsilon, q_\epsilon \in \mathbb{R}^n$ *e* $X_\epsilon, Y_\epsilon \in S(n)$*, tais que* $(p_\epsilon, X_\epsilon) \in \overline{J^{2,+}}u(x_\epsilon)$*,* $\quad (q_\epsilon, Y_\epsilon) \in \overline{J^{2,-}}v(y_\epsilon)$*,*

$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \geq \mu_0 - \epsilon,$$

e

$$|x_\epsilon - y_\epsilon| < \epsilon, \quad |p_\epsilon - q_\epsilon| < \epsilon, \quad X_\epsilon \leq Y_\epsilon + \epsilon\, I.$$

Demonstração. Dividimos em duas partes.

Parte I. Sem perder generalidade podemos supor que $\mu_0 > 0$, no outro caso substituímos u por $u - \mu_0 + 1$. Para $\alpha > 0$ temos que $\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}) > 0$ e por definição de supremo temos que existe $\hat{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u(\hat{x}_\alpha) - v(\hat{x}_\alpha) \geq \mu_0 - \omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}).$$

Agora definimos

$$\lambda_\alpha = -\frac{1}{\ln(\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}))},$$

e

$$\sigma_\alpha = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n} \left\{ u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2 - \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x|^2 - \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y|^2 \right\}. \tag{3.3}$$

Escolhendo α grande podemos supor que existe $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Omega$ tal que

$$\sigma_\alpha = u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 - \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x_\alpha|^2 - \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y_\alpha|^2. \tag{3.4}$$

Seja

$$\sigma_\alpha^\circ = \sup_{x\in\Omega}\{u(x) - v(x) - \lambda_\alpha|\hat{x}_\alpha - x|^2\}, \tag{3.5}$$

Então

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha &= u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 - \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x_\alpha|^2 - \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y_\alpha|^2, \\
&= \sup_{x,y\in\Omega} \left\{ u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2 - \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x|^2 - \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y|^2 \right\}, \\
&\geq \sup_{x\in\Omega}\left\{u(x) - v(x) - \lambda_\alpha|\hat{x}_\alpha - x|^2\right\}, \\
&= \sigma_\alpha^\circ, \\
&\geq u(\hat{x}_\alpha) - v(\hat{x}_\alpha), \\
&> \mu_0 - \omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}),
\end{aligned}$$

Daí

$$\sigma_\alpha \geq \sigma_\alpha^\circ \geq \mu_0 - \omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}). \tag{3.6}$$

$\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}})$ é limitado para α grande, pois para $\frac{\mu_0}{2} > 0$ existe $\alpha_1 > 0$ tal que $\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}) < \frac{\mu_0}{2}$ para $\alpha > \alpha_1$, assim $-\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}) > -\frac{\mu_0}{2}$.

Isto é, existe σ_* tal que

$$\sigma_\alpha \geq \sigma_\alpha^\circ \geq \mu_0 - \omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}) > \sigma_*. \tag{3.7}$$

para $\alpha > \alpha_1$.

Como conseqüência temos

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 &\leq \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y_\alpha|^2, \\
&\leq u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \sigma_\alpha, \\
&\leq \sup(u) - \inf(v) - \sigma_\alpha, \\
&\leq \sup(u) - \inf(v) - \sigma_*,
\end{aligned}$$

Seja $C = \sup(u) - \inf(v) - \sigma_*$, então

$$\frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 \leq C. \tag{3.8}$$

Tomando o limite $\alpha \to \infty$, obtemos

$$\frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 \to 0 \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y_\alpha|^2 \leq \\
\leq\ & u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \sigma_\alpha, \\
\leq\ & u(x_\alpha) - u(y_\alpha) + u(y_\alpha) - v(y_\alpha) - \mu_0 + \omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}), \\
\leq\ & \omega(|x_\alpha - y_\alpha|) + u(y_\alpha) - v(y_\alpha) - \mu_0 + \omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}), \\
\leq\ & \omega(|x_\alpha - y_\alpha|) + \omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}) \to 0.
\end{aligned}$$

Por (3.9), para $\frac{\mu_0}{2} > 0$ temos que existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$\frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 < \frac{\mu_0}{2}$$

se $\alpha > \alpha_2$.

Daí
$$|x_\alpha - y_\alpha| < \sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}.$$
Da hipótese ω é não decrescente, logo
$$\omega(|x_\alpha - y_\alpha|) < \omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}).$$
Assim e por o mesmo processo podemos mostrar que
$$\frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y_\alpha|^2 \leq 2\,\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}),$$

logo
$$|x_\alpha - y_\alpha|^2 \leq 4\,\frac{\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}})}{\alpha} \to 0. \tag{3.10}$$
$$|x_\alpha - \hat{x}_\alpha|^2 + |y_\alpha - \hat{x}_\alpha|^2 \leq 4\,\frac{\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}})}{\lambda_\alpha} \to 0. \tag{3.11}$$
pois

$$-4\,\frac{\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}})}{\lambda_\alpha} = -4\,\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}})\ \ln(\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}})),$$
e
$$\lim_{y\to 0} y\ \ln(y) = 0.$$

Parte II.

Sejam $u_1 = u, u_2 = -v$ e
$$\varphi_\alpha(x,y) = \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y_\alpha|^2.$$
Daí φ_α é de classe C^2. Por (3.4) temos que existe $(x_\alpha, y_\alpha) \in$
re^n e
$$\max_{x,y\in\Omega}(u(x) - v(y) - \varphi_\alpha(x,y)) = u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \varphi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha),$$
Do Teorema (2.3.1) (lema de Ishii), concluímos que para cada $\delta > 0$ pequeno tal que $\frac{1}{\delta} > 1$, existem $X_\alpha \in S(n)$ e $Y_\alpha \in S(n)$ tais que

$$(D_x\varphi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha), X_\alpha) \in \overline{J^{2,+}}u(x_\alpha), \quad (-D_y\varphi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha), Y_\alpha) \in \overline{J^{2,-}}v(y_\alpha),$$

e

$$-(\frac{1}{\delta}+||A_\alpha||)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_\alpha & 0 \\ 0 & -Y_\alpha \end{pmatrix} \leq A_\alpha + \delta\, A_\alpha^2, \tag{3.12}$$

onde $A_\alpha = D^2\varphi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$.

Denotamos

$$P_\alpha = \frac{\alpha}{2} D^2 p(x_\alpha, y_\alpha), \quad Q_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2} D^2 q(x_\alpha, y_\alpha),$$

onde

$$p(x,y) = |x-y|^2, \quad q(x,y) = |\hat{x}_\alpha - x|^2 + |\hat{x}_\alpha - y|^2.$$

Daí

$$A_\alpha = P_\alpha + Q_\alpha.$$

Obtemos facilmente

$$P_\alpha = \frac{\alpha}{2} D^2 p(x,y) = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}, \quad ||P_\alpha|| = \alpha,$$

e

$$Q_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2} D^2 q(x,y) = \frac{\lambda_\alpha}{2}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad ||Q_\alpha|| = \frac{\lambda_\alpha}{2},$$

Seja $V = (\xi, \xi)^t \in \mathbb{R}^{2\,n}$, de (3.12) obtemos

$$\langle X_\alpha \xi, \xi\rangle - \langle Y_\alpha \xi, \xi\rangle \quad \leq \quad \left\langle (A_\alpha + \delta\, A_\alpha^2)V, V\right\rangle.$$

Note que

$$P_\alpha V = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{3.13}$$

e

$$\begin{aligned} A_\alpha + \delta\, A_\alpha^2 &= (P_\alpha + Q_\alpha) + \delta\,(P_\alpha + Q_\alpha)^2, \\ &= P_\alpha + Q_\alpha + \delta\,(P_\alpha + Q_\alpha)(P_\alpha + Q_\alpha), \\ &= P_\alpha + Q_\alpha + \delta\,(P_\alpha\,(P_\alpha + Q_\alpha) + Q_\alpha\,(P_\alpha + Q_\alpha)), \\ &= P_\alpha + Q_\alpha + \delta P_\alpha^2 + \delta\, Q_\alpha^2 + \delta P_\alpha Q_\alpha + \delta Q_\alpha P_\alpha. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\langle X_\alpha\xi,\xi\rangle - \langle Y_\alpha\xi,\xi\rangle &\leq \left\langle (A_\alpha + \delta\, A_\alpha^2)V, V\right\rangle.\\ &= \left\langle (P_\alpha + Q_\alpha + \delta P_\alpha^2 + \delta\, Q_\alpha^2 + \delta P_\alpha Q_\alpha + \delta Q_\alpha P_\alpha)V, V\right\rangle,\\ &= \langle Q_\alpha V, V\rangle + \delta\,\left\langle Q_\alpha^2 V, V\right\rangle,\\ &= \lambda_\alpha\,|\xi|^2 + \delta\,\lambda_\alpha^2\,|\xi|^2,\\ &= (\lambda_\alpha + \delta\,\lambda_\alpha^2)\,|\xi|^2.\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = \frac{1}{\lambda_\alpha}$, temos

$$\langle X_\alpha\xi,\xi\rangle - \langle Y_\alpha\xi,\xi\rangle \leq \frac{\epsilon}{2}|\xi|^2,$$

isto é

$$X_\alpha \leq Y_\alpha + \epsilon\, I. \tag{3.14}$$

Como

$$\nabla_x\varphi_\alpha(x,y) = \alpha\,(x-y) - \lambda_\alpha\,(\hat{x}_\alpha - x), \tag{3.15}$$

e

$$\nabla_y\varphi_\alpha(x,y) = -(\alpha\,(x-y) + \lambda_\alpha\,(\hat{x}_\alpha - y)), \tag{3.16}$$

Por (3.11) temos que

$$|\nabla_x\varphi_\alpha(x_\alpha,y_\alpha) + \nabla_y\varphi_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)| \;=\; |\lambda_\alpha|\,|\hat{x}_\alpha - x_\alpha| + |\lambda_\alpha|\,|\hat{x}_\alpha - y_\alpha| \to 0,$$

finalmente

$$\begin{aligned}u(x_\alpha) - v(y_\alpha) &= \sigma_\alpha + \frac{\alpha}{2}|y_\alpha - x_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - x_\alpha|^2 + \frac{\lambda_\alpha}{2}|\hat{x}_\alpha - y_\alpha|^2,\\ &\geq \mu_0 - \omega\Big(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}\Big),\\ &> \mu_0 - \epsilon\end{aligned}$$

onde ϵ é tal que $\omega(\sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}}) < \epsilon$, finalmente

$$u(x_\alpha) - v(y_\alpha) > \mu_0 - \epsilon.$$

∎

Teorema. 3.1.2. *Sejam $u \in USC(\mathbb{R}^n)$ e $v \in LSC(\mathbb{R}^n)$ duas funções Suponhamos que u e v são limitados por acima e por baixo respectivamente e existe uma função crescente $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ com $\omega(0) = \omega(0+) = 0$ tal que*

$$u(x) - u(y) \leq \omega(|x - y|) \quad \textit{para todos} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.17}$$

Então

$$\mu_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u(x) - v(x)) < +\infty. \tag{3.18}$$

para cada $\epsilon > 0$, existem $x_\epsilon, y_\epsilon, p_\epsilon, q_\epsilon \in \mathbb{R}^n$ e $X_\epsilon, Y_\epsilon \in S(n)$, tais que $(p_\epsilon, X_\epsilon) \in \overline{J^{2,+}}u(x_\epsilon)$, $\quad (q_\epsilon, Y_\epsilon) \in \overline{J^{2,-}}v(y_\epsilon)$,

$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \geq \mu_0 - \epsilon,$$

e

$$|x_\epsilon - y_\epsilon| < \epsilon, \quad |p_\epsilon - q_\epsilon| < \epsilon, \quad tr(X_\epsilon) \leq tr(Y_\epsilon) + \epsilon.$$

Demonstração. A prova desde teorema é a mesma que a anterior, com exceção de $tr(X_\epsilon) \leq tr(Y_\epsilon) + \epsilon$,

Por (3.14) e por a linearidade da tr temos

$$tr(X_\epsilon) \leq tr(Y_\epsilon) + \epsilon,$$

■

3.2 Principio do máximo de Omori-Yau

O famoso Principio do Máximo de Omori-Yau pode ser obtido como uma conseqüência do teorema acima:

Corolário. 3.2.1. *Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ limitada inferiormente sobre $\mathbb{R}^n$, então para cada $\epsilon > 0$ existe um ponto x_ϵ em $\mathbb{R}^n$ tal que*

1. $f(x_\epsilon) \leq \inf(f) + \epsilon$,
2. $|\nabla f(x_\epsilon)| < \epsilon$,
3. $\Delta f(x_\epsilon) > -\epsilon$.

Demonstração. Da hipótese, f é limitado inferiormente, isto é, existe o ínfimo de f em $\mathbb{R}^n$. Definimos as funções u e v por

$$u(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.19}$$

e

$$v(x) = f(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.20}$$

segue imediatamente das definições de u e v que

$$u(x) \leq v(y) \quad \text{para} \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.21}$$

e

$$\mu_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (u(x) - v(x)) = 0 < \infty. \tag{3.22}$$

Definindo

$$\omega(r) := r \quad \text{para} \quad r \in [0, \infty),$$

tem-se (3.21)

$$u(x) - u(y) \leq 0 \leq \omega(|x - y|). \tag{3.23}$$

Do Teorema (3.1.2), concluímos que, para cada $\epsilon > 0$, existem $x_\epsilon, y_\epsilon \in \mathbb{R}^n$, $\quad (p_\epsilon, X_\epsilon) \in \overline{J^{2,+}}u(x_\epsilon)$, $\quad (q_\epsilon, Y_\epsilon) \in \overline{J^{2,-}}v(y_\epsilon)$ tais que

$$u(x_\epsilon) - v(y_\epsilon) \geq \mu_0 - \epsilon, \tag{3.24}$$

tais que

$$|x_\epsilon - y_\epsilon| < \epsilon, \tag{3.25}$$

$$|p_\epsilon - q_\epsilon| < \epsilon, \tag{3.26}$$

$$tr(X_\epsilon) \leq tr(Y_\epsilon) + \epsilon\, n. \tag{3.27}$$

Como, $f = v$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$ e u uma função constante, temos

$$\overline{J^{2,\pm}}v(x) = \left\{ (\nabla f(x), \nabla^2 f(x)) \right\}. \tag{3.28}$$

$$\overline{J^{2,\pm}}u(x) = \{(0, 0_{n\times n})\}. \tag{3.29}$$

Daí, $p_\epsilon = 0, \quad q_\epsilon = \nabla f(y_\epsilon), \quad X_\epsilon = 0_{n\times n}, \quad$ e $\quad Y_\epsilon = \nabla^2 f(y_\epsilon)$.

Temos assim por (3.26), (3.27), (3.22) e (3.24) que

$$\inf(f) - f(y_\epsilon) \geq -\epsilon,$$

$$|\nabla f(y_\epsilon)| = |-q_\epsilon| < \epsilon,$$

$$0 \leq tr(Y_\epsilon) + n\,\epsilon = tr(\nabla^2 f(y_\epsilon)) + n\,\epsilon = \Delta f(y_\epsilon) + n\,\epsilon,$$

isto é, se $\varepsilon = n\,\epsilon$

- $f(y_\varepsilon) \leq \inf(f) + \varepsilon,$
- $|\nabla f(y_\varepsilon)| < \varepsilon,$
- $\Delta f(y_\varepsilon) > -\varepsilon.$

Este resultado, conhecido com o princípio do Máximo de Omori-Yau, é muito útilizado na solução de problemas geométricos, por exemplo na prova do Lema de Schwarz para aplicações homomorfos entre variedades de Kähler com curvatura de Ricci limitado inferiormente.

Referências Bibliográficas

[1] D. Azagra, J. Ferrera, B. Sanz, Viscosity solutions to second order partial differential equations I, J. Differential Equations 245 (2008).

[2] M. Crandall e P.- L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Trans. of the A.M.S., **277**, 1-42.

[3] F. John, Partial Differential Equations, 4th ed., Springer- Verlag 1984

[4] M. Crandall, H. Ishii e P.- Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial diferential equations, Bull. A.M.S.,**27**, 1 (1992), 1-67.

[5] H. J. Nussenzveig, M. C. Lopes Uma introdução a Soluções de viscosidade para Equações de Hamilton- Jacobi Publicações Matematica. IMPA 2006.

[6] S. Peng, D. Zhou, Maximum principle for viscosity solutions on Riemannian manifolds, `arXiv:0806.4768v2 [math.DG]`. October 3, 2008.

[7] H. Omori, Isometric immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 205-214. MR 35:6101.

[8] S.T. Yau, Harmonic funtion on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 201-228. MR 55:4042.

[9] B. Chow, S. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, p. Lu, F. Luo, L. Ni, Ricci flow: techniques and applications, Part I: geometric aspects. Mathematical Surveys and Monographs, 135, AMS, Providence, RJ, 2007.