IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.002/08

Modelo de Thirring com Simetria de Gauge: Uma Análise Funcional

Rodrigo Santos Bufalo

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Co-Orientador

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Fevereiro de 2008

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Bruto Max Pimentel Escobar, por ter sido uma pessoa disposta a novas idéias e sugestões, pela participação, discussão em todas as partes do trabalho, e principalmente pela paciência no começo da orientação. Por me mostrar novos caminhos, abrir novos horizontes a trilhar. Agradeço, pelas várias reuniões na gemel, cafés, vitaminas e pela amizade durante a minha estadia no Instituto.

Ao meu co-orientador Rodolfo Alván Casana Sifuentes, pela grande contribuição no desenvolver desse trabalho, por sempre estar disposto a discussões, e reuniões quando possíveis. Apesar da distância tivemos conversas via e-mail que foram muito importantes para o meu desenvolvimento. E também agradeço no momento das correções as sugestões e comentários finais.

Aos meus pais, José Carlos e Valdeniz, aos quais devo tudo, pois sem eles nada disso seria possível, tanto pela ajuda financeira e apoio incondicional nos momentos cruciais em minha caminhada. Aos familiares pelo apoio.

Aos grandes amigos que fiz no instituto, pelas discussões e apoio. Principalmente ao Tilles pela ajuda logo que cheguei ao Instituto, e a grande amizade que foi construída nesse período. Ao German e Bonin pelas discussões e ajuda sobre física, e a "galera"que sempre bate cartão as sextas no Bar do Jorge, Genilson, Hiroshi, Leandro, Caco, para tomar aquela "breja gelada", jogar conversa fora e descansar um pouco da rotina dos trabalhos, e à todos agradeço pela amizade.

Aos amigos que fiz pela cidade nas gigs e "zuação", principalmente ao Denito, Bonga, Getúlio, Sarah e o resto da "corvaiada".

À CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Realizamos um estudo da Teoria Quântica de Campos num espaço-tempo de $(1+1)$-dimensões em modelos exatamente solúveis via o formalismo de integração funcional; em que a estrutura Hamiltoniana dos modelos é construída segundo a abordagem de Dirac para sistemas vinculados. Além disso, implementamos as equações de Schwinger-Dyson e as identidades de Ward-Takahashi. Damos enfâse na estrutura de gauge do modelo de Thirring com simetria de gauge e analisamos os limites fortes das suas constantes de acoplamento.

Palavras chaves: Sistemas Vinculados, Teoria Quântica de Campos, Modelos Bi-dimensionais

Áreas do conhecimento: Teoria Quântica de Campos (1.05.03.01-3).

Abstract

We study the quantum field theory in $(1+1)$-dimensional space-time in exactly solvable models via the functional integral formalism. The Hamiltonian structure of the models is studied following the Dirac's procedure for constrained systems and the generating functional for the Green's functions is implemented into the functional integral technique. Also, we implement the Schwinger-Dyson equations and the Ward-Takahashi identities. We made emphasize in the gauge structure of Gauged Thirring Model and study the strong limits of their coupling constants.

Keywords: Constrained System, Quantum Field Theory, Bidimensional models.

Knowledged area: Quantum Field Theory (1.05.03.01-3).

Índice

INTRODUÇÃO

Há vários anos, teorias de gauge têm atraído muita atenção na física de partículas elementares. A razão é o seu grande progresso na solução de problemas, em particular, na construção de modelos de unificação e na teoria de interações fortes. Quando se constrói teorias usando simetrias correspondendo a grupos locais, ou seja, impondo que as teorias sejam localmente invariantes, novos campos devem ser introduzidos, referentes aos campos de gauge que possuem caráter tensorial, como, por exemplo, no caso das interações eletromagnéticas, fraca e forte em que são campos vetoriais; já no caso da interação gravitacional é um campo tensorial de ordem dois. A invariância de gauge junto com a quebra espontânea de simetria e a renormalizabilidade são a base para modelos que pretendem unificar diferentes interações. Nesse contexto, um dos métodos mais úteis para o estudo de teorias de gauge é a formulação de integração funcional [1, 2], cuja estrutura foi solidificada nos anos 60 e 70 quando foi incorporada a ela a análise de vínculos [3, 4], o que se permite ter uma medida de Liouville bem definida, invariância de Lorentz, etc.

Apesar do ímpeto das teorias de gauge vir das novas descobertas da física de partículas, as idéias básicas por detrás da simetria de gauge têm aparecido em outras áreas que se pensava não ter nenhuma correlação tais, como física da matéria condensada, fenômenos ondulatórios não-lineares e inclusive na matemática pura. Essa diversidade de ramos da física interessada nas propriedades das teorias de gauge indica que de fato ela é um área de estudo muito geral e que não é simplesmente limitada ao estudo das partículas elementares.

O formalismo de integração funcional, que será utilizado nesse trabalho, teve muito sucesso em teorias de gauge, tendo mostrado ser um método mais simples de tratar teorias mais complicadas, como teorias de gauge não-abelianas. Mas devemos lembrar que isso é possível, uma vez que grande parte da estrutura das teorias de gauge, ou melhor, das teorias quânticas de campos já havia sido formulada na abordagem operatorial. O desenvolvimento de integração funcional também mostrou ser capaz de esclarecer algumas idéias como a relação de quantização e processos estocásticos assim como a descoberta da chamada simetria BRST na teoria quântica de campos de gauge e chegar a ser a formulação mais natural da teoria de cordas, etc.

Uma questão interessante surge quando queremos efetuar o cálculo da matriz-S [5]. Se a calculamos via formalismo canônico a sua unitariedade é explícita e, se quisermos calculá-la via integração funcional a invariância por Lorentz é manifesta. Mas em nenhum dos dois formalismos a invariância por Lorentz e a unitariedade estão presentes simultaneamente como é desejável que a matriz-S tenha essas duas características manifestas, devemos então derivar o formalismo de integração funcional a partir do formalismo canônico.

Existem dois tipos de abordagem que podemos estudar as teorias de gauge em $(3 + 1)$-dimensões: a abordagem perturbativa e a não-perturbativa. Dentre os vários métodos que podem ser aplicados, em geral, nenhum deles permite resolver qualquer modelo exatamente. Uma questão interessante surge quando diminuímos a dimensão do espaço-tempo, como $(1 + 1)$ e $(2 + 1)$-dimensões. Modelos como a eletrodinâmica quântica e a teoria de interação quártica entre férmions se tornam exatamente solúveis em $(1 + 1)$-dimensões, e um dos pesquisadores pioneiros nessa área foi W. Thirring. A proposta de W.

Thirring em 1958 [6] de modelos de campos quânticos no espaço-tempo de (1+1)-dimensões revelou um campo da física ainda desconhecido, mas com uma estrutura riquíssima que chamou muito a atenção de vários físicos da época. Desde então, uma vasta literatura foi desenvolvida sobre esses modelos [7]. Porém, o que torna tais modelos tão interessantes? A resposta é o fato deles exibirem mecanismos e características que não foram vistos antes devido a abordagem perturbativa da teoria quântica de campos. Esses modelos podem auxiliar com informações sobre a origem e possíveis caminhos para soluções de alguns problemas que parecem ser ou são inacessíveis em $(3 + 1)$-dimensões. Um exemplo desses problemas é o confinamento de férmions que ocorre na eletrodinâmica quântica de Schwinger que possui uma estrutura similar ao confinamento de quarks na cromodinâmica quântica (QCD_4). Portanto, modelos bi-dimensionais possuem uma rica estrutura que pode ser estudada de maneira não-perturbativa. Assim, por esses e outros fatores, tais modelos se tornaram um laboratório de testes de teorias mais fundamentais e também de estudo fenomenológico.

Hoje em dia o que proporciona um grande interesse em modelos com (1+1) e (2+1)-dimensões no espaço-tempo é o estudo de propriedades de materiais na área de matéria condensada, e desenvolvimento de novas tecnologias em que pode-se usar um formalismo muito similar ao desenvolvido para a teoria de campos, que é o formalismo de teoria de campos à temperatura finita.

Um dos trabalhos pioneiros na área de modelos bi-dimensionais, foi o de J. Schwinger em 1962 [8], a eletrodinâmica quântica no espaço-tempo de (1+1)-dimensões (QED_2), que descreve um campo fermiônico não-massivo interagindo com um campo de gauge. Nesse trabalho Schwinger mostrou que em (1+1)-dimensões a invariância de gauge do modelo não implicava necessariamente num campo de gauge não-massivo. Ele também mostrou que o bóson de gauge adquire massa gerada dinamicamente e torna-se um bóson livre, enquanto os férmions são confinados. O confinamento é explicado usando o fato da dependência linear do potencial coulombiano com a distância em uma dimensão espacial. E também apresenta o fenômeno da blindagem da carga eletrônica. Algumas questões que ficaram em aberto no trabalho de Schwinger foram respondidas por Lowenstein e Swieca em seu trabalho de 1971 [9] utilizando uma abordagem operatorial para dar a solução completa do modelo. Mostraram a existência de quebra da simetria quiral, que é responsável pela origem da massa do campo de gauge (mecanismo de Higgs), vácuo - θ e também fizeram a bosonização do modelo.

Posteriormente, um fato foi levantado por Jackiw e Rajaramam [10], o processo de regularização das divergências ultravioletas presentes no determinante fermiônico que dá contribuição à ação efetiva do campo de gauge permite uma prescrição que não seja invariante de gauge e essa prescrição generalizada é caracterizada pela introdução de um parâmetro a que revela as ambigüidades do processo de regularização do determinante fermiônico. Por exemplo, isso acarreta uma arbitrariedade no espectro da massa bosônica do modelo de Schwinger [11]. A motivação do trabalho de Jackiw e Rajaraman surgiu do fato de que em nível quântico, ou é conservado a simetria de gauge local ou a simetria quiral, e como já era conhecido na época, havia a quebra dinâmica de simetria quiral no modelo de Schwinger. Mas estudando um campo fermiônico quiral e tendo a quebra de simetria de gauge no processo de regularização, será que a invariância quiral era preservada? A resposta obtida por eles é que em nível quântico ambas simetrias são quebradas não existindo uma regularização que preserve ao menos uma delas. Tal modelo ficou conhecido como modelo de Schwinger quiral, ou eletrodinâmica quântica quiral. O modelo apresenta divergências ultravioletas nas funções de correlação fermiônica, geração dinâmica de massa, blindagem da carga eletrônica, mas diferente do modelo de Schwinger, ele não apresenta confinamento de férmions, exibindo estados assintóticos fermiônicos. Se considerarmos uma prescrição não invariante de gauge no caso do modelo de Schwinger (o valor de $a = 1$ preserva a invariância de gauge em nível quântico) o modelo obtido é conhecido como modelo de Schwinger anômalo e possui divergências ultravioletas com estrutura muito similar ao caso do modelo quiral.

Um outro modelo de grande importância tanto histórica quanto fenomenológica é o modelo de Thirring, que descreve uma auto-interação de um campo fermiônico não-massivo (interação corrente-corrente) no espaço-tempo (1+1)-dimensional, tal interação caracteriza a velha teoria de Fermi das interações fracas, proposto por W. Thirring [6], cuja intenção era estudar um modelo relativístico de campos que fosse exatamente solúvel. Em seu trabalho Thirring demonstrou a solubilidade do modelo e construiu os auto-estados da Hamiltoniana, enquanto Glaser [12] resolveu as equações de campo, contudo, ambos autores usaram manipulações formais, o que levava a certas contradições. Johnson [13] tomou mais cuidado na definição da corrente (ordenamento dos operadores de campo) e das equações de campo e resolveu o sistema de equações acopladas. Klaiber apresentou dois trabalhos sobre o modelo de Thirring [14, 15]. No primeiro, calculou as funções de n-pontos corretas, e no segundo deu a solução completa e estudou algumas propriedades do modelo, dentre elas a sua bosonização, além de estabelecer as relações entre a sua solução com outras soluções encontradas na literatura. Em ambos trabalhos Klaiber utilizou a abordagem operatorial. Hagen [16] também obteve uma solução exata do modelo de Thirring por meio da introdução de um campo auxiliar e calculou explicitamente as funções de correlação fermiônicas.

Como o modelo de Thirring não apresenta simetria de gauge, é interessante uma análise usando o parâmetro a que caracteriza a ambigüidade da regularização do determinante fermiônico, pois como foi demonstrado em [17] existe um valor do parâmetro a dependente da constante de acoplamento do modelo (g), que indica a existência de simetria de gauge local em nível quântico na ação efetiva para a corrente fermiônica. Uma das características mais interessantes do modelo de Thirring é a possibilidade de bosonização a qual permite extrair várias informações não-perturbativas do sistema. A bosonização permite que quando o campo fermiônico do modelo de Thirring se torna massivo existe a equivalência dele com um setor do modelo de Sine-Gordon quântico, especificamente, foi conjecturado que o sóliton quântico é o férmion fundamental do modelo de Thirring massivo; esse fato foi levantado por S. Coleman [18] e S. Mandelstam [19] quase que simultaneamente. Uma revisão do processo de bosonização do modelo de Thirring e Schwinger ambos massivos via integração funcional é encontrada em [20]. O termo de interação da equação de Sine-Gordon é proporcional a $\alpha\beta^{-2}\cos\beta\varphi$, onde β é um parâmetro real. Também, Coleman no seu trabalho mostrou que o modelo é dividido em três setores, o primeiro para $\beta^2 < 8\pi$ a teoria é equivalente ao setor de carga zero do modelo de Thirring massivo, o segundo para $\beta^2 = 4\pi$ a teoria é equivalente ao setor de carga zero da teoria de um campo fermiônico massivo livre, e o terceiro para $\beta^2 > 8\pi$ a teoria não tem um estado fundamental, a energia não é limitada inferiormente. Essa equivalência só é possível pelo fato de não existir spin em (1+1)-dimensões, pois não existe rotação em uma dimensão espacial, o spin é apenas uma convenção nesse espaço-tempo, melhor dizendo, o spin é um contínuo, não possui valores discretos. Ele é definido como um rótulo das propriedades da transformação de Lorentz e, também podemos dizer que ele é um parâmetro arbitrário que caracteriza a realização do grupo conforme em termos dos campos. Essa é a base da dualidade bóson-férmion em (1+1) dimensões.

Um fato que merece destaque são os trabalhos de N. Nakanishi [21, 22], nos quais ele discute as soluções operatoriais encontradas para o modelo de Thirring por B. Klaiber e para o modelo de Schwinger por Lowenstein e Swieca. Ambas soluções são expressas em termos de campos fermiônicos não-massivos e livres, e como já era conhecido na época, a função de Green fermiônica de ambos os modelos não possuíam espectro discreto não-massivo, isto é, os operadores de Heisenberg fermiônicos não possuem campos assintóticos correspondentes. E ainda mais, usando um princípio geral da teoria quântica de campos, em que todos os operadores de Heisenberg devem ser expressos em termos de campos assintóticos, ele conclui que as soluções obtidas anteriormente não seriam as corretas, e que as soluções corretas não deveriam ser expressas em termos dos campos fermiônicos. E nesses dois trabalhos Nakanishi descreve as soluções operatoriais dos modelos de Thirring e Schwinger em termos de campos assintóticos bosônicos e mostra, explicitamente, que suas soluções possuem as propriedades de transformações de gauge e de Lorentz, localidade e estatística corretas.

Uma continuação natural do modelo de Thirring seria a implementação da simetria de gauge local, tendo em vista que existe um setor do modelo que permite tal possibilidade. O modelo de Thirring com simetria de gauge foi proposto por Itoh et al. [23] utilizando o método de "*Hidden Local Symmetry*". Nessa reformulação, o campo vetorial auxiliar A_μ é identificado como o campo de gauge com constante de acoplamento q, para implementar a simetria de gauge em nível clássico, se faz a seguinte mudança no termo de massa do campo eletromagnético $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \theta$. A vantagem da simetria de gauge manifesta é deixar várias abordagens não-perturbativas tratáveis e fornecer um método consistente para estudá-las. Um fato interessante a ser notado no modelo é que devemos usar o gauge não-local R_ξ para que exista a conservação da corrente da simetria global $U(1)$ no modelo de Thirring original. Uma outra proposta para o modelo foi sugerida por Kondo [24]. Em seu trabalho, Kondo analisou inicialmente outro modelo com interação quártica entre férmions, o modelo de Nambu-Jona-Lasinio que descreve com sucesso a dinâmica quiral, mas não é renormalizável perturbativamente e não possui simetria de gauge, mas mesmo assim possui um papel importante na descrição de alguns aspectos fenomenológicos de baixa energia da QCD_4 se a considerarmos como uma teoria de campos efetiva. Nesse modelo, a interação de gauge é incorporada *a priori*, cuja motivação foram considerações do grupo de renormalização da teoria de gauge fortemente acoplada, e o modelo de Nambu-Jona-Lasinio original é recuperado no limite da constante de acoplamento fraca. Com essa descrição, Kondo argumentou que também seria interessante uma generalização invariante de gauge do modelo de Thirring. Ele estudou o modelo como um sistema vinculado, utilizando o método de Batalin-Fradkin. Um dos diferenciais desse trabalho foi a introdução do termo cinético do campo de gauge que esta presente via correções radiativas no modelo de Thirring original quando o campo fermiônico é massivo. Com esse termo, é possível analisar o comportamento do modelo no limite das constantes de acoplamentos (q e g) fortes, pois pode-se recuperar em nível clássico o modelo de Thirring, modelo de Schwinger se a teoria for abeliana e, se a teoria não for abeliana a QCD_2. Devido a grande contribuição de Kondo no desenvolvimento do modelo de Thirring com simetria de gauge, algumas vezes tal modelo é chamado de modelo de Kondo. Essa versão do modelo de Thirring com simetria de gauge tem sido usada para estudar a geração dinâmica de massa para férmions, pois a geração de massa é fortemente dependente do esquema de regularização adotado e a simetria de gauge pode restringir os possíveis esquemas.

A proposta de nosso trabalho é iniciar um estudo em teoria de campos via integração funcional. Com uma descrição geral das características mais relevantes de certos modelos, queremos mostrar o porque do nosso interesse em estudá-los, por possuírem uma rica estrutura que pode servir como um primeiro contato com teorias de gauge. Vários fenômenos interessantes de teoria campos surgem no decorrer do nosso estudo. E o mais atrativo de todos é a solubilidade desses modelos em duas dimensões.

Entendemos que para uma construção clara nessa abordagem que escolhemos para quantizar tais sistemas exigem certos cuidados, um estudo clássico dos sistemas via o formalismo canônico de Dirac se fez necessário, pois desde o trabalho de L.D. Faddeev [3] ficou claro que para uma construção correta da medida de integração da amplitude de transição no espaço de fase é necessário implementar o conceito de vínculos. Esperamos que com esses devidos cuidados o nosso tratamento de sistemas vinculados tenha possibilitado uma compreensão clara de todos os pontos importantes.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira. Os dois primeiros capítulos tratam dos modelos de Schwinger e Thirring, respectivamente. Desde a análise da estrutura clássica até o cálculo das funções de correlação, identidades de Ward-Takahashi, etc. No estudo do modelo de Thirring duas peculiaridades surgiram, primeiro o estudo do modelo utilizando o parâmetro a para analisar que efeito ele tem sobre suas funções de Green e identidades de Ward-Takahashi. E segundo, a regularização das divergências ultravioletas presentes nas funções de Green fermiônicas e a posterior renormalização.

No capítulo 3, estudamos o modelo de Thirring com simetria de gauge local. Da mesma maneira como fizemos para os dois primeiros modelos, inicialmente realizamos a análise clássica para posterior construção da amplitude de transição das funções de Green do modelo. Seguindo a proposta de Kondo, analisamos o comportamento das funções de correlação do modelo no gauge R_ξ onde o campo escalar θ se desacopla dos outros campos. E, estudamos os limites fortes das constantes de acoplamento, para verificar se realmente os limites analisados em nível clássico, implicam na equivalência dos modelos em nível quântico.

Detalhes adicionais quanto à notação e cálculos são dados nos apêndices e estão distribuídos da seguinte forma: No apêndice A, estabelecemos as convenções e identidades utilizadas no decorrer do trabalho. No apêndice B, deduzimos de maneira explícita o determinante fermiônico e no apêndice C, derivamos importantes relações funcionais.

Referências

[1] M. Chaichian and N.F. Nelipa, *Introduction to Gauge Field Theory* (Springer-Verlag, 1984)

[2] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer (Revised Printing)* (Addison-Wesley, 1989)

[3] L.D. Faddeev, Teoret. i Mat. Fiz. **1** (1969) 3 [Trans. Theoret. Math. Phys. **1** (1970) 1]

[4] P. Senjanovic, Ann. Phys. **100** (1976) 227, Erratum by Y.-G. Miao Annals of Physics 209 (1991) 248

[5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge Univ. Press,1996), Volume 1

[6] W. Thirring, Ann. Phys. **3** (1958) 91

[7] E. Abdalla, M.C.B. Abdalla and K. D. Rothe, *Nonpertubative Methods in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, 2nd ed.(World Scientific, Singapure, 2001)

[8] J. Schwinger, Phys. Rev. **128** (1962) 2425

[9] J. Lowenstein and J. Swieca, Ann. Phys. **68** (1971) 172

[10] R. Jackiw and R. Rajaramam, Phys. Rev. Let. **54** (1985) 1219

[11] R. Jackiw, *Topological Investigations of Quantized Gauge Theories*, in Relativity, Groups and Topology II (Les Houches 1983), eds. B.S. DeWitt and R. Stora, North Holland, Amsterdam, 1984.

[12] W. Glaser, Nuovo Cimento **9** (1958) 990

[13] K. Johnson, Nuovo Cimento **20** (1961) 773

[14] B. Klaiber, in *Lectures in Theorethical Physics 1967*, eds. A. Barut and W. Britten (Gordon and Breach, New York, 1968), p.141

[15] B. Klaiber, Helv. Phys. Acta **37** (1964) 554

[16] C.R. Hagen, Nuovo Cimento **51B** (1967) 169

[17] R. Casana, Int. J. Mod. Phys. **20A** (2005) 7129

[18] S. Coleman, Phys. Rev. **11D** (1975) 2088

[19] S. Mandelstam, Phys. Rev. **11D** (1975) 3026

[20] C.M. Naón, Phys. Rev. **31D** (1985) 2035

[21] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 580

[22] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 1025

[23] T. Itoh, Y. Kim, M. Sugiura and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **93** (1995) 417

[24] K. Kondo, Prog. Theor. Phys. **98** (1997) 211

Capítulo 1

MODELO DE SCHWINGER

Neste capítulo iremos abordar o modelo de Schwinger [1.1, 1.2] também conhecido como QED_2 não massiva, que trata de um campo fermiônico de Dirac sem massa acoplado minimamente com o campo de gauge num espaço-tempo $(1 + 1)$-dimensional. A intenção de Schwinger ao propôr esse modelo era de demonstrar que a invariância de gauge não necessariamente implicava em se ter um campo vetorial não-massivo, pois neste modelo o campo de gauge ganha massa via quebra dinâmica de simetria, fato este levantado posteriormente por Lowenstein e Swieca [1.3], em que suas soluções eram expressas em termos de campos fermiônicos livres e somente válidas no gauge de Landau. Contudo, uma solução geral em termos de campos assintóticos válida para qualquer gauge covariante linear foi dada por Nakanishi [1.4]. E, pelo fato do modelo apresentar simetria de gauge, tem sido usado exaustivamente como base para estudo e desenvolvimento de teorias de gauge. O modelo apresenta algumas propriedades interessantes, tais como, geração dinâmica de massa, blindagem e confinamento de férmions [1.1, 1.2], quebra dinâmica de simetria quiral e uma estrutura de vácuo não trivial [1.3].

No decorrer do capítulo, procuraremos de maneira sistemática analisar todos os detalhes da construção do formalismo de integração funcional. Inicialmente, faremos uma análise à la Dirac [1.5, 1.6, 1.7, 1.8] por ser um sistema com simetria de gauge, como tal, um sistema com vínculos: obtenção de vínculos, classificação e escolha de gauge não-covariante. Com esse estudo e obtenção de vínculos construímos a amplitude de transição de forma correta no espaço de fase. Objeto importante que nos permitirá calcular as funções de correlação do modelo e as identidades de Ward-Takahashi satisfeitas pelas funções irredutíveis de uma partícula $(I1P)$.

1.1 Estudo Clássico

O modelo de Schwinger é definido pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\not\partial}\psi + q\bar{\psi}\not{A}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

onde $q = \pm e$, e dependendo da escolha; por conveniência, utilizaremos q em todo o trabalho. Tal densidade Lagrangiana foi simetrizada garantindo que ela seja explicitamente real e afim de obtermos uma melhor análise dos vínculos no setor fermiônico. Um fato interessante foi levantado por K. Sundermeyer [1.6], em sua discussão sobre QED_4, na qual ele introduz um parâmetro arbitrário α no termo cinético dos campos ψ e $\bar{\psi}$, cuja motivação é pela confusão que algumas vezes surge sobre os resultados obtidos da Lagrangiana de Dirac serem dependentes da sua forma inicial. Para $\alpha = 0$ recupera-se a mesma Lagrangiana que utilizamos aqui, e para $\alpha = 1$ recupera-se a Lagrangiana de Dirac padrão. E, por final Sundermeyer demonstra que as quantidades relevantes da teoria são independentes de α.

As equações de movimento são

$$
\begin{aligned}
\left(i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/ (x)\right)\psi(x) &= 0, && (1.2)\\
\bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - qA\!\!\!/ (x)\right) &= 0, && (1.3)
\end{aligned}
$$

$$
\partial_\mu F^{\mu\nu} = -q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = -j^\nu. \quad (1.4)
$$

Em nível clássico a densidade Lagrangiana apresenta simetria sob as transformações globais de fase e quiral

$$
\psi'(x) = e^{i\lambda}\psi(x), \qquad \psi'(x) = e^{-i\beta\gamma_5}\psi(x), \quad (1.5)
$$

e também sob as transformações locais de gauge

$$
\psi'(x) = e^{i\lambda(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\lambda(x)}, \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu\lambda(x). \quad (1.6)
$$

Os colchetes de Berezin (BB's) [1.9] fundamentais da teoria (a tempos iguais) são

$$
\begin{aligned}
\left\{\psi^\lambda(x), \bar{p}_\alpha(y)\right\}_B &= -\delta^\lambda{}_\alpha\delta\left(x^1-y^1\right), && (1.7)\\
\left\{\bar{\psi}^\lambda(x), p_\alpha(y)\right\}_B &= -\delta^\lambda{}_\alpha\delta\left(x^1-y^1\right), && (1.8)\\
\left\{A_\lambda(x), \pi^\alpha(y)\right\}_B &= \delta_\lambda{}^\alpha\delta\left(x^1-y^1\right). && (1.9)
\end{aligned}
$$

Os momentos canônicos são

$$
\begin{aligned}
\bar{p}^\alpha &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\psi_\alpha\right)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha}, && (1.10)\\
p^\alpha &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\bar{\psi}_\alpha\right)} = -\frac{i}{2}\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta}\psi_\beta, && (1.11)\\
\pi^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)} = F^{\mu 0}. && (1.12)
\end{aligned}
$$

Como na derivação das equações de movimento e dos momentos canônicos tratamos com variáveis Grassmannianas $(\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha)$, devemos tomar cuidado ao efetuarmos as derivadas; aqui e no resto do trabalho usaremos o conceito de derivada esquerda [1.9]. Os momentos canônicos implicam nos seguintes vínculos primários

$$
\begin{aligned}
\phi^\alpha &= p^\alpha + \frac{i}{2}\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta}\psi_\beta \approx 0, && (1.13)\\
\bar{\phi}^\alpha &= \bar{p}^\alpha + \frac{i}{2}\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \approx 0, && (1.14)\\
\varphi_1 &= \pi^0 \approx 0, && (1.15)
\end{aligned}
$$

o sinal $\approx$ (fracamente nulo) enfatiza que as quantidades são numericamente restritas a zero, mas não são identicamente nulas em todo o espaço de fase; significando que possuem BB's não-nulos com as variáveis canônicas. E, da Eq.(1.12) obtemos a relação dinâmica

$$
\pi^1 = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0. \quad (1.16)
$$

Podemos definir a densidade Hamiltoniana canônica através de uma transformação de Legendre ou pelo tensor energia-momento simétrico que contém todas as informações sobre as simetrias do modelo. Uma característica importante das transformações de Legendre é que elas preservam todas as simetrias presentes na função original. Definindo-a através de

$$
\mathcal{H}_\mathcal{C} = p^i v_i - \mathcal{L} = \pi^\mu\left(\partial_0 A_\mu\right) + \left(\partial_0\bar{\psi}_\alpha\right)p^\alpha + \left(\partial_0\psi_\alpha\right)\bar{p}^\alpha - \mathcal{L}.
$$

Deve-se notar que as variáveis e seus correspondentes momentos canônicos fermiônicos são ordenados de acordo com a nossa definição de derivada. Portanto, a expressão resultante

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\left(\pi^1\right)^2 + \pi^1\left(\partial_1 A_0\right) - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^1 \overleftrightarrow{\partial}_1 \psi - q\bar{\psi}A\!\!\!/\psi. \tag{1.17}$$

Para resolver o problema de que as variações entre as coordenadas e momentos canônicos não são independentes umas das outras, e serem restritas pelos vínculos Eqs.(1.13)-(1.15), utilizaremos o método de multiplicadores de Lagrange. Adicionando todos os vínculos primários à Hamiltoniana canônica, obtemos a Hamiltoniana primária, que é responsável pela dinâmica do sistema vinculado. Com ela podemos calcular a equação de movimento de qualquer observável. Para cada vínculo incluído na Hamiltoniana introduzimos um multiplicador de Lagrange (*a priori* indeterminado)

$$H_P = H_C + \int dz^1 \left(\bar{\phi}^\alpha \lambda_\alpha + \bar{\lambda}_\alpha \phi^\alpha + v_1 \varphi_1\right).$$

Os BB's não-nulos entre os vínculos primários são

$$\left\{\phi^\lambda(x), \bar{\phi}^\alpha(y)\right\}_B = -i\left(\gamma^0\right)^{\lambda\alpha}\delta\left(x^1 - y^1\right). \tag{1.18}$$

Pelo fato dos vínculos não possuírem dinâmica e apenas cinemática, e que devem ser consistentes com as equações de movimento, as suas variações no tempo devem ser nulas, ou seja, devem ter BB's nulos com a Hamiltoniana primária. Impondo as condições de consistência dos vínculos primários obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\phi}}^\alpha &= \left\{\bar{\phi}^\alpha, H_P\right\}_B = \left\{\bar{\phi}^\alpha, H_C\right\}_B - \int dz^1 \bar{\lambda}_\beta \left\{\bar{\phi}^\alpha, \phi^\beta\right\}_B + \int dz^1 \left\{\bar{\phi}^\alpha, \bar{\lambda}_\beta\right\}_B \phi^\beta, \\
\dot{\phi}^\alpha &= \left\{\phi^\alpha, H_C\right\}_B + \int dz^1 \left\{\phi^\alpha, \bar{\phi}^\beta\right\}_B \lambda_\beta - \int dz^1 \bar{\phi}^\beta \left\{\phi^\alpha, \lambda_\beta\right\}_B, \\
\dot{\varphi}_1 &= \left\{\varphi_1, H_C\right\}_B + \int dz^1 \left\{\varphi_1, v_1\right\}_B \varphi_1,
\end{aligned}$$

onde os últimos termos de cada equação são fracamente nulos por serem proporcionais aos vínculos. Os BB's dos vínculos primários com a Hamiltoniana canônica

$$\left\{\bar{\phi}^\alpha, H_C\right\}_B = i\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha} - q\bar{\psi}_\beta\left(A\!\!\!/\right)^{\beta\alpha}, \tag{1.19}$$

$$\left\{\phi^\alpha, H_C\right\}_B = i\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma + q\left(A\!\!\!/\right)^{\alpha\lambda}\psi_\lambda, \tag{1.20}$$

$$\left\{\varphi_1, H_C\right\}_B = \partial_1\pi^1 + q\bar{\psi}\gamma^0\psi. \tag{1.21}$$

Dessa forma

$$\dot{\bar{\phi}}^\alpha = i\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha} - q\bar{\psi}_\beta\left(A\!\!\!/\right)^{\beta\alpha} + i\bar{\lambda}_\beta\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \approx 0,$$

permite obter o multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda}_\sigma = -\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha}\left(\gamma^0\right)_{\alpha\sigma} - iq\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^\mu\right)^{\beta\alpha}\left(\gamma^0\right)_{\alpha\sigma}A_\mu. \tag{1.22}$$

O outro multiplicador de Lagrange é determinado a partir de

$$\dot{\phi}^\alpha = i\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma + q\left(A\!\!\!/\right)^{\alpha\lambda}\psi_\lambda - i\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta}\lambda_\beta \approx 0,$$

e é dado por

$$\lambda_\varsigma = \left(\gamma^0\right)_{\varsigma\alpha}\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma - iq\left(\gamma^0\right)_{\varsigma\alpha}\left(\gamma^\mu\right)^{\alpha\lambda}\psi_\lambda A_\mu. \tag{1.23}$$

Finalmente, a condição de consistência do vínculo bosônico

$$\dot{\varphi}_1 = \partial_1\pi^1 + q\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0,$$

gera um vínculo secundário

$$M = \partial_1\pi^1 + q\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0, \tag{1.24}$$

cuja condição de consistência é automaticamente satisfeita $\dot{M} = \{M, H_P\}_B = 0$, e portanto, não existem mais vínculos na teoria. O vínculo M é a lei de Gauss com distribuição de densidade de carga $j_0 = q\bar{\psi}\gamma_0\psi$.

1.1.1 Classificação dos Vínculos

A distinção entre vínculos primários e secundários é baseada no formalismo Lagrangiano, o que não é natural do ponto de vista Hamiltoniano, por isso buscou-se uma nova terminologia que permitisse uma melhor análise entre as quantidades que aparecem na teoria. O que faremos nesta seção é prosseguir com a abordagem proposta por Dirac [1.5], sendo necessário definir o conjunto máximo de vínculos de primeira e segunda classe, cuja definição é a seguinte: quando um vínculo possui BB's fracamente nulos com todos os outros vínculos da teoria, ele é denominado vínculo de primeira classe, e os demais de segunda classe.

Temos os seguintes vínculos primários e secundários

$$\phi^{\alpha} = p^{\alpha} + \frac{i}{2}\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \approx 0, \tag{1.25}$$

$$\bar{\phi}^{\alpha} = \bar{p}^{\alpha} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\beta}\left(\gamma^{0}\right)^{\beta\alpha} \approx 0, \tag{1.26}$$

$$\varphi_{1} = \pi^{0} \approx 0, \tag{1.27}$$

$$M = \partial_{1}\pi^{1} + q\bar{\psi}\gamma^{0}\psi \approx 0. \tag{1.28}$$

Verificamos facilmente que o vínculo bosônico, $\varphi_1 = \pi^0$, comuta com todos os outros vínculos. Portanto, ele é de primeira classe. E os BB's dos demais vínculos

$$\left\{\phi^{\lambda}(x), \bar{\phi}^{\alpha}(y)\right\}_{B} = -i\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\alpha}\delta\left(x^{1}-y^{1}\right),$$

$$\left\{\bar{\phi}^{\lambda}(x), M(y)\right\}_{B} = q\bar{\psi}_{\beta}(y)\left(\gamma^{0}\right)^{\beta\lambda}\delta\left(x^{1}-y^{1}\right),$$

$$\left\{\phi^{\lambda}(x), M(y)\right\}_{B} = -q\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\alpha}\psi_{\alpha}(y)\,\delta\left(x^{1}-y^{1}\right).$$

Portanto, os vínculos restantes são, em princípio, de segunda classe. Montando a matriz de vínculos de segunda classe

$$C(x,y) = \begin{array}{c} \\ M \\ \bar{\phi}^{\alpha} \\ \phi^{\alpha} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & \bar{\phi}^{\beta} & \phi^{\beta} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & -q\bar{\psi}_{\lambda}\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\beta} & q\left(\gamma^{0}\right)^{\beta\rho}\psi_{\rho} \\ q\bar{\psi}_{\lambda}\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\alpha} & 0 & -i\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\beta} \\ -q\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\rho}\psi_{\rho} & -i\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\beta} & 0 \end{array}\right] \end{array}\delta\left(x^{1}-y^{1}\right).$$

Pela proposta de Dirac [1.5] tal matriz não deve ser singular. Calculando o posto da matriz, obtemos que ela possui posto 2, mostrando que esse conjunto de vínculos de segunda classe não é um conjunto irredutível, ou seja, não são linearmente independentes. Isso nos permite determinar uma combinação linear entre os vínculos de segunda classe que forneça um vínculo de primeira classe. Para isso, vamos calcular os autovetores com autovalores nulos da matriz de vínculos $C(x,y)$

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & -q\bar{\psi}_{\lambda}\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\beta} & q\left(\gamma^{0}\right)^{\beta\rho}\psi_{\rho} \\ q\bar{\psi}_{\lambda}\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\alpha} & 0 & -i\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\beta} \\ -q\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\rho}\psi_{\rho} & -i\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\beta} & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} V_{1} \\ \left(V_{2}\right)_{\alpha} \\ \left(V_{3}\right)_{\beta} \end{array}\right] = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\lambda}\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\beta}\left(V_{2}\right)_{\alpha} - \left(\gamma^{0}\right)^{\beta\rho}\psi_{\rho}\left(V_{3}\right)_{\beta} &= 0, \\ q\bar{\psi}_{\lambda}\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\alpha}V_{1} - i\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\beta}\left(V_{3}\right)_{\beta} &= 0, \\ q\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\rho}\psi_{\rho}V_{1} + i\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\beta}\left(V_{2}\right)_{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

A combinação linear que irá fornecer um vínculo de primeira classe é

$$\varphi_{2} = \Phi^{\lambda}V_{\lambda}, \tag{1.29}$$

onde $\left(\Phi^{\lambda}\right) = \left(M, \bar{\phi}, \phi\right)$. Devemos frizar um ponto importante que é levado em conta na escolha de tal combinação. O vínculo M torna-se o vínculo da teoria de Maxwell livre no limite da constante de acoplamento nula (lei de Gauss sem fonte). Em tal teoria ele é um vínculo de primeira classe. Desse modo, se M pertencer ao conjunto de vínculos de segunda classe, o limite da constante de acoplamento nula não será possível. Abaixo citamos outros fatores que corroboram com essa escolha, portanto, o outro vínculo de primeira classe é

$$\varphi_2 = \partial_1 \pi^1 + iq\left(\bar{p}^{\alpha}\psi_{\alpha} + \bar{\psi}_{\beta}p^{\beta}\right). \tag{1.30}$$

Dessa forma, concluímos que o conjunto de vínculos φ_1 e φ_2 é de primeira classe e o conjunto ϕ e $\bar{\phi}$ é de segunda classe. Se voltarmos ao momento que calculamos as condições de consistência dos vínculos primários, e notarmos que apenas os multiplicadores de Lagrange de $\bar{\phi}$ Eq.(1.22) e ϕ Eq.(1.23) foram determinados, já tínhamos indícios de que eles seriam vínculos de segunda classe, pois os multiplicadores de Lagrange de vínculos de primeira classe são determinados apenas com condições subsidiárias.

1.1.2 Equações de Movimento

A seguir calcularemos as equações de movimento via colchetes de Dirac (DB's), o que permite calcular a dinâmica Hamiltoniana correta. Essa escolha implica que iremos trabalhar apenas com os vínculos de primeira classe, e todos os vínculos de segunda classe são eliminados, pelo fato de que o DB de qualquer variável canônica com um vínculo de segunda classe é nulo. Portanto, o procedimento de Dirac faz os vínculos de segunda classe fortemente nulos. No final da seção comparamos as equações obtidas com as equações de movimento Eqs.(1.2)-(1.4) obtidas via Euler-Lagrange. Uma das vantagens em trabalharmos com DB's ao invés dos BB's é que ele nos permite formular a dinâmica de um sistema com vínculos de segunda classe analogamente à dinâmica de um sistema não-vinculado. No caso da teoria de campos os DB's entre duas variáveis canônicas quaisquer são definidos por

$$\left\{A(x), B(y)\right\}_D \equiv \left\{A(x), B(y)\right\}_B - \int du dv \left\{A(x), \theta_r(u)\right\}_B \left[\Delta^{rs}(u,v)\right]^{-1} \left\{\theta_s(v), B(y)\right\}_B,$$

onde $\Delta^{rs}(u,v) = \left\{\theta_r(u), \theta_s(v)\right\}_B$ é a matriz de vínculos de segunda classe. Em nosso caso

$$\left(\Delta^{rs}(u,v)\right) = \begin{bmatrix} 0 & -i\left(\gamma^0\right)^{rs} \\ -i\left(\gamma^0\right)^{rs} & 0 \end{bmatrix} \delta\left(u^1 - v^1\right),$$

e

$$\left(\Delta^{rs}(u,v)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & i\left(\gamma^0\right)^{rs} \\ i\left(\gamma^0\right)^{rs} & 0 \end{bmatrix} \delta\left(u^1 - v^1\right). \tag{1.31}$$

Dirac [1.5] conjecturou que a Hamiltoniana responsável pela evolução temporal das variáveis canônicas da teoria é dada pela adição de todos os vínculos de primeira classe à Hamiltoniana canônica, e também que os vínculos de primeira classe são os geradores das transformações de gauge. A transformação gerada por um vínculo de primeira classe preserva todos os demais vínculos e assim mapeia um estado permitido em outro estado permitido, isto é, tais transformações não alteram o estado físico do sistema. Assim, a Hamiltoniana extendida do modelo de Schwinger

$$H_E = H_C + \int dx^1 \left(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\right),$$

$$H_E = \int dx^1 \left[\frac{1}{2}\left(\pi^1\right)^2 + \pi^1\partial_1\left(A_0 - \lambda_2\right) - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^1 \overleftrightarrow{\partial}_1 \psi - q\bar{\psi}\not{A}\psi + \lambda_1\pi^0 + iq\lambda_2\left(\bar{p}^{\alpha}\psi_{\alpha} + \bar{\psi}_{\beta}p^{\beta}\right)\right]. \tag{1.32}$$

Podemos calcular as equações de movimento fermiônicas

$$\left(i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/\,(x)\right)\psi(x) = q\lambda_2\left(\gamma^0\psi(x)\right), \tag{1.33}$$

$$\bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - qA\!\!\!/\,(x)\right) = -q\lambda_2\left(\bar{\psi}(x)\gamma^0\right), \tag{1.34}$$

e as bosônicas

$$\dot{A}_0(x) = \lambda_1(x), \tag{1.35}$$

$$\dot{A}_1(x) = \pi^1(x) + \partial_1\left(A_0(x) - \lambda_2(x)\right), \tag{1.36}$$

$$\dot{\pi}_0(x) = \partial_1\pi^1(x) + q\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) = M \approx 0, \tag{1.37}$$

$$\dot{\pi}_1(x) = q\bar{\psi}(x)\gamma^1\psi(x). \tag{1.38}$$

A Eq.(1.35) mostra que o vínculo $\varphi_1 = \pi_0$ tem efeito apenas sobre A_0 como já era de se esperar, por causa da violação dos BB's fundamentais. O vínculo φ_2 atua nas duas equações de movimento fermiônicas e sobre A_1. Conforme comentamos no final da seção anterior, para determinarmos completamente os multiplicadores de Lagrange dos vínculos de primeira classe λ_1 e λ_2 necessitamos de condições subsidiárias. Devemos escolher um bom conjunto de condições de gauge que permitam que as equações de movimento obtidas aqui sejam consistentes com as equações de Euler-Lagrange e também permita que as relações dinâmicas sejam preservadas quando calculadas via DB's, pois se observamos pela Eq.(1.36) a relação dinâmica Eq.(1.16) não está sendo preservada pois temos um termo proporcional ao multiplicador λ_2.

Para cada vínculo de primeira classe devemos ter uma condição de gauge χ_a. Contudo, é conveniente escolhermos as funções χ_a de tal modo que $\{\chi_a, \chi_b\} = 0$. Aqui usaremos o gauge de radiação

$$\chi_1 = A_0 \approx 0, \tag{1.39}$$

$$\chi_2 = \partial_1 A_1 \approx 0. \tag{1.40}$$

Como as condições de gauge se tornam vínculos, elas também devem ser conservadas no tempo. Portanto, impondo a condição de consistência em χ_1 e χ_2

$$\dot{\chi}_1(x) = \{\chi_1(x), H_E\}_D = \{A_0(x), H_E\}_D = \lambda_1 \approx 0, \tag{1.41}$$

dessa forma determinamos $\lambda_1 = 0$. E

$$\dot{\chi}_2(x) = \{\chi_2(x), H_E\}_D = \{\partial_1 A_1(x), H_E\}_D = \partial_1\pi^1(x) + (\partial_1)^2\left(A_0(x) - \lambda_2(x)\right) \approx 0, \tag{1.42}$$

usando a Eq.(1.36) encontramos que $(\partial_1)^2\lambda_2 = 0$ (solução harmônica), e para que as equações de movimento obtidas via DB's sejam as mesmas que as obtidas via Euler - Lagrange λ_2 deve ser nulo, ou seja, ele deve assumir tal valor para que as condições de gauge sejam atingíveis. Com isso vemos que a ambigüidade das equações de movimento é removida.

O nosso intuito não é utilizar o método de Dirac para a quantização do modelo, e sim para fazermos a classificação dos vínculos da teoria e determinar as condições de fixação de gauge que são de grande importância para a formulação correta de integração funcional.

Podemos tentar entender melhor o que é uma fixação de gauge num contexto mais amplo. Uma classe de campos relacionada por transformações de gauge para todos os parâmetros de transformação $\lambda(x)$ é chamada de órbita do grupo de gauge. Uma órbita pode ser descrita esquematicamente como uma linha de pontos, que são fisicamente equivalentes, e que pode ser convertida em uma outra por meio de transformações de gauge. Quando fazemos uma fixação de gauge estamos escolhendo um representante de cada classe dos campos fisicamente equivalentes. Podemos representar uma condição de gauge com uma superfície que cruza cada órbita apenas uma vez. O que entendemos por invariância de gauge, é o fato de campos relacionados por uma transformação de gauge descreverem o mesmo estado físico.

1.2 Amplitude de Transição

Pelo fato do modelo de Schwinger ser um sistema vinculado, antes de proceder devemos tomar vários cuidados no processo de quantização via integração funcional. Para termos uma descrição correta da teoria devemos trabalhar no espaço físico (espaço de fase reduzido [num caso geral $2(n-m-p)-dimensional$, onde 2n é a dimensão do espaço de fase completo, m é o número de vínculos de primeira classe da teoria e para cada vínculo temos uma condição de gauge, por isso $2m$, e $2p$ é o número de vínculos de segunda classe da teoria] que contém os graus de liberdade corretos), sendo mais conveniente continuarmos trabalhando no espaço de fase completo levando em conta as mudanças que ocorrem na estrutura do gerador funcional, ou mais especificamente na medida de integração. Quem desenvolveu o método para incorporar vínculos na noção de integral funcional foi L.D. Faddeev [1.10], mas ele limitou-se apenas a sistemas com vínculos de primeira classe. P. Senjanovic [1.11] foi quem generalizou o trabalho de Faddeev, incluindo sistemas com vínculos de segunda classe. Esses resultados também podem ser encontrados de maneira detalhada em [1.6] [1.12] e nos apêndices C e D do capítulo 2 da tese [1.14]. No presente caso, o modelo de Schwinger, tratamos de um sistema com vínculos de primeira e segunda classe. Dessa forma, a amplitude de transição vácuo-vácuo na forma Hamiltoniana é escrita da seguinte maneira

$$Z=\int D\mu\left(\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right)\exp\left(i\int d^{2}x\left[\pi^{\mu}\left(\partial_{0}A_{\mu}\right)+\left(\partial_{0}\psi\right)\bar{p}+\left(\partial_{0}\bar{\psi}\right)p-\mathcal{H}_{\mathcal{C}}\right]\right), \tag{1.43}$$

definimos aqui o ordenamento das variáveis grassmannianas da mesma maneira que fizemos na definição da Hamiltoniana canônica, onde a medida de integração é dada por

$$\begin{aligned}D\mu\left(\psi,\bar{\psi},A_{\mu}\right)=D\pi^{\mu}DA_{\mu}D\bar{\psi}D\psi D\bar{p}Dp\det\left|\{\chi_{\alpha},\varphi_{\beta}\}_{B}\right|\det\left|\left\{\phi_{\alpha},\bar{\phi}_{\beta}\right\}_{B}\right|^{-1/2}\times\\ \times\delta\left(\varphi_{\alpha}\right)\delta\left(\chi_{\alpha}\right)\delta\left(\phi_{\alpha}\right)\delta\left(\bar{\phi}_{\alpha}\right).\end{aligned} \tag{1.44}$$

A amplitude de transição possui as seguintes propriedades:

- ser invariante sob transformações canônicas;
- ser invariante em relação à escolha de um conjunto equivalente de vínculos e
- ser independente da escolha das condições de fixação de gauge.

Temos que

$$\det\{\chi_{\alpha},\varphi_{\beta}\}_{B}=\det\left|-\left(\partial_{1}\right)^{2}\right|, \tag{1.45}$$

e

$$\det\left\{\phi_{\alpha},\bar{\phi}_{\beta}\right\}_{B}=\det 1. \tag{1.46}$$

Com esses resultados

$$\begin{aligned}Z=\int D\pi^{\mu}DA_{\mu}D\bar{\psi}D\psi D\bar{p}Dp\det\left|-\left(\partial_{1}\right)^{2}\right|\delta\left(\pi_{0}\right)\delta\left(\partial_{1}\pi^{1}+q\bar{\psi}\gamma^{0}\psi\right)\delta\left(A_{0}\right)\delta\left(\partial_{1}A_{1}\right)\delta\left(\bar{p}_{\alpha}+\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{0}\right)_{\alpha}\right)\times\\ \times\delta\left(p^{\alpha}+\frac{i}{2}\left(\gamma^{0}\psi\right)^{\alpha}\right)\exp\left(i\int d^{2}x\left[\pi^{\mu}\left(\partial_{0}A_{\mu}\right)+\left(\partial_{0}\psi\right)^{\alpha}\bar{p}_{\alpha}+\left(\partial_{0}\bar{\psi}\right)^{\alpha}p_{\alpha}-\mathcal{H}_{\mathcal{C}}\right]\right),\end{aligned}$$

pela última equação vemos que algumas integrações serão facilmente resolvidas graças as funções delta de Dirac, outras no entanto, serão um pouco mais difíceis e será necessário utilizar algumas propriedades da função delta.

Integrando nos momentos fermiônicos p, $\bar{p}$ e em seguida nas variáveis de integração π_0, A_0 e usando a representação integral para a função delta

$$\delta\left(\partial_1\pi^1 + q\bar{\psi}\gamma^0\psi\right) = \int d\lambda \exp\left[i\int d^2y\lambda\left(\partial_1\pi^1 + q\bar{\psi}\gamma^0\psi\right)\right], \tag{1.47}$$

obtemos

$$\begin{aligned} Z &= \int D\pi^1 DA_1 D\bar{\psi} D\psi D\lambda \det\left|-\left(\partial_1\right)^2\right| \delta\left(\partial_1 A_1\right) \times \\ &\times \exp\left(i\int d^2x\left[\pi^1\left(\partial_0 A_1\right) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}_0\psi - \frac{1}{2}\left(\pi^1\right)^2 + q\bar{\psi}\gamma^1 A_1\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^1\overleftrightarrow{\partial}_1\psi + \lambda\left(\partial_1\pi^1 + q\bar{\psi}\gamma^0\psi\right)\right]\right). \end{aligned}$$

Finalmente integrando no campo π^1, e renomeando $\lambda \to A_0$, escrevemos a amplitude de transição vácuo-vácuo como

$$Z = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det\left|-\left(\partial_1\right)^2\right| \delta\left(\partial_1 A_1\right) \exp\left(i\int d^2x\left[\frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\not\partial}\psi + q\bar{\psi}\not{A}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\right). \tag{1.48}$$

O ansatz de Faddeev-Popov [1.13] nos permite passar de um gauge não-covariante para um covariante e também restringe a medida DA_μ de tal modo que ela contenha apenas uma única familia de gauge (e na linguagem matemática, a determinação da medida de Haar), ou seja, isso corresponde a retirar as contribuições redundantes da integração funcional. O ponto importante dessa transição é que, se utilizarmos a amplitude de transição vácuo-vácuo explicitamente covariante, em geral, os cálculos se tornam simples. Usaremos aqui o gauge de Lorenz

$$f = \partial_\mu A^\mu. \tag{1.49}$$

Do ponto de vista geométrico, o ansatz de Faddeev-Popov permite transferir a medida da integração funcional definida na superfície especificada pelo gauge de Coulomb para a superfície especificada pelo gauge de Lorenz. Com essa sutileza, a amplitude de transição vácuo-vácuo é expressa como

$$Z = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det\Box\delta\left(f - \partial_\mu A^\mu\right) \exp\left(i\int d^2x\left[\bar{\psi}\left(i\not\partial + q\not{A}\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\right).$$

Como a forma inicial da amplitude de transição vácuo-vácuo não depende da função $f(x)$, podemos integrar sobre $f(x)$ com o peso $\exp\left(-\frac{i}{2\xi}\int d^2x f^2(x)\right)$, obtendo a seguinte expressão

$$Z = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det\Box \exp\left(i\int d^2x\left[\bar{\psi}\left(i\not\partial + q\not{A}\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2\right]\right), \tag{1.50}$$

podemos reescrevê-la da seguinte maneira

$$Z = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp\left(i\int d^2x\ \mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}_\mu}\right), \tag{1.51}$$

onde definimos

$$\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}_\mu} \equiv \bar{\psi}\left(i\not\partial + q\not{A}\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2. \tag{1.52}$$

O termo $\det\Box$ na Eq.(1.50) pode ser escrito como uma integral sobre variáveis grassmannianas complexas e são conhecidos como os fantasmas de Faddeev-Popov, e que no modelo de Schwinger eles são desacoplados do resto dos campos (teoria abeliana), e dessa forma o determinante pode ser absorvido na constante de normalização, mas existem casos em que o determinante depende do campo de gauge A_μ (teoria não-abeliana), nessas teorias esse termo é de suma importância e deve ser levado em conta, e a integração se torna mais complicada devido aos fantasmas.

1.3 Funções de Correlação

Em teoria de campos um dos objetos mais importantes a se calcular são as funções de $n-pontos$, pois nelas estão contidas informações sobre o sistema analisado. Portanto, nessa seção iremos calcular todas as funções de correlação de dois e três pontos dos campos do modelo. O conceito básico para obter informação sobre um sistema é analisar seu comportamento (ou resposta) na presença de fontes externas. A partir desse conceito introduzido por Schwinger (teorias das fontes), vemos que é necessário introduzir para cada variável dinâmica uma corrente que corresponda a uma fonte não-física que permita calcular as funções de correlação e escrever a amplitude de transição vácuo-vácuo Eq.(1.51) como

$$Z\left(\eta,\bar{\eta},J^{\mu}\right)=\int DA_{\mu}D\bar{\psi}D\psi\exp\left(i\int d^{2}x\left[\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+J_{\mu}A^{\mu}\right]\right), \tag{1.53}$$

sendo J_{μ} a fonte do campo de gauge, e η e $\bar{\eta}$ são as fontes dos campos fermiônicos e são variáveis Grassmannianas. Integrando nos campos fermiônicos

$$\begin{aligned}Z\left(\eta,\bar{\eta},J^{\mu}\right)=\int DA_{\mu}\det\left(i\partial\!\!\!/+qA\!\!\!/\right)\exp\left(i\int d^{2}x\left[\frac{1}{2}A^{\alpha}\left(\eta_{\alpha\beta}\Box-\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\right)A^{\beta}+J_{\mu}A^{\mu}\right]\right)\times\\ \times\exp\left(-i\int d^{2}x\left[\bar{\eta}\left(i\partial\!\!\!/+qA\!\!\!/\right)^{-1}\eta\right]\right).\end{aligned} \tag{1.54}$$

O determinante fermiônico que aparece no gerador funcional Eq.(1.54) é dado pela Eq.(B.13) com $a=1$, ou seja, consideramos uma regularização invariante de gauge para o determinante fermiônico. Como já discutimos na introdução existe o caso $a\neq 1$; em [1.15] é considerado tal caso para os modelos de Schwinger com férmions e férmions quirais, e essa arbitrariedade induz a vários fenômenos interessantes que não ocorrem em nosso caso. Nesse ponto vê-se uma das principais motivações no estudo de modelos bi-dimensionais, o determinante fermiônico, peça fundamental no cálculo das funções de correlação é calculado exatamente.

Utilizaremos a seguinte expressão do gerador funcional no decorrer deste capítulo para calcular as funções de correlação do modelo

$$Z\left(\eta,\bar{\eta},J^{\mu}\right)=N\int DA_{\mu}\exp\left(i\int d^{2}x\left[\frac{1}{2}A_{\mu}D_{\xi}^{\mu\nu}A_{\nu}+J_{\mu}A^{\mu}-\int d^{2}y\bar{\eta}\left(x\right)G\left(x,y;A\right)\eta\left(y\right)\right]\right), \tag{1.55}$$

onde o fator de normalização é escolhido tal que $Z\left(0,0,0\right)=1$, e definimos o operador diferencial

$$\begin{aligned}D_{\xi}^{\mu\nu} &\equiv \frac{q^{2}}{\pi}\left(\eta^{\mu\nu}-\frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{\Box}\right)+\left(\eta^{\mu\nu}\Box-\partial^{\mu}\partial^{\nu}\right)+\frac{1}{\xi}\partial^{\mu}\partial^{\nu},\\ &= \left(\frac{q^{2}}{\pi}+\Box\right)T^{\mu\nu}+\frac{1}{\xi}\Box L^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{1.56}$$

com os projetores $T^{\mu\nu}$ e $L^{\mu\nu}$ definidos pela Eq.(A.18) e, $G\left(x,y;A\right)$ é a função de Green fermiônica de 2-pontos Eq.(B.9).

1.3.1 Propagador do Campo de Gauge

Temos que o propagador bosônico é definido por

$$J_{\mu\nu}^{\xi}\left(x-y\right)\equiv\left\langle 0\left|TA_{\mu}\left(x\right)A_{\nu}\left(y\right)\right|0\right\rangle=-\left.\frac{\delta^{2}Z\left(\eta,\bar{\eta},J_{\mu}\right)}{\delta J^{\nu}\left(y\right)\delta J^{\mu}\left(x\right)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_{\mu}=0} \tag{1.57}$$

Fazendo as fontes fermiônicas $\eta=\bar{\eta}=0$ no gerador funcional Eq.(1.55) e efetuando a integração no campo A_{μ}, obtemos que o propagador é

$$J_{\mu\nu}^{\xi}\left(x-y\right)=i\left[D_{\xi}^{-1}\right]_{\mu\nu}\delta\left(x-y\right), \tag{1.58}$$

e calculamos a inversa do operador diferencial $D_\xi^{\mu\nu}$

$$\left[D_\xi^{-1}\right]_{\mu\nu} = \frac{1}{\left(\frac{q^2}{\pi} + \Box\right)} T_{\mu\nu} + \frac{\xi}{\Box} L_{\mu\nu}. \tag{1.59}$$

Portanto, o propagador escrito no espaço dos momentos é

$$i\tilde{J}_{\mu\nu}^{\xi}(k) = \frac{1}{k^2 - \frac{q^2}{\pi}} \eta_{\mu\nu} + f^{\xi}(k) k_\mu k_\nu, \tag{1.60}$$

onde $f^{\xi}(k)$ é uma função que irá aparecer nas demais funções de correlação

$$f^{\xi}(k) = \frac{\xi}{k^4} - \frac{1}{k^2\left(k^2 - \frac{q^2}{\pi}\right)} = \frac{\xi}{k^4} + \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_s^2}\right]\frac{1}{m_s^2}. \tag{1.61}$$

Podemos observar da Eq.(1.60) que a componente transversal do propagador bosônico possui um pólo em $m_s^2 \equiv \frac{q^2}{\pi}$, e isso mostra que o "fóton" adquire massa via geração dinâmica devido a quantização do campo fermiônico. O surgimento da massa no pólo do propagador bosônico elimina a possível divergência infravermelha. E também, podemos ver pela Eq.(1.60) que no espaço de Fourier o propagador bosônico é livre de divergências ultravioletas, pois o surgimento da massa m_s^2 no pólo do propagador faz com que tudo fique finito. Isso pode ser observado através da segunda igualdade da Eq.(1.61), na qual a geração dinâmica de massa gera um termo que atua como um "regularizador natural" que torna o modelo finito.

1.3.2 Propagador do Campo Fermiônico

Calculando o propagador fermiônico a partir do gerador funcional Eq.(1.55) com $J_\mu = 0$

$$\begin{aligned} G^{\xi}(x-y) &\equiv \left\langle 0 \left| T\psi(x)\bar{\psi}(y)\right| 0\right\rangle = - \left.\frac{\delta^2 Z(\eta,\bar{\eta})}{\delta\eta(y)\,\delta\bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= i\int DA_\mu \exp\left(i\int d^2x\left[\frac{1}{2}A_\mu D_\xi^{\mu\nu} A_\nu\right]\right) G(x,y;A), \end{aligned} \tag{1.62}$$

sendo $G(x,y;A)$ a função de Green da equação de Dirac dada pela Eq.(B.9). Calculando a integral do campo de gauge A_μ, chegamos à seguinte expresso

$$G^{\xi}(x-y) = i\exp\left(iq^2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2} f^{\xi}(k)\left(1 - e^{-ik(x-y)}\right)\right) G_F(x-y). \tag{1.63}$$

com $f^{\xi}(k)$ dada pela Eq.(1.61). E, tem um bom comportamento ultravioleta (vai com k^{-4} quando $k \to +\infty$), dessa forma, vemos que o propagador fermiônico é livre de divergências ultravioletas. Já, para $a \neq 1$, o propagador fermiônico dos modelos de Schwinger e Schwinger Quiral possui divergências logarítmicas (ultravioletas) [1.15], sendo necessário a regularização e renormalização da função de onda fermiônica.

1.3.3 Função de Vértice

A função de vértice é definida da seguinte maneira

$$G_\mu^{\xi}(x,y;z) \equiv \left\langle 0\left|T\psi(x)\bar{\psi}(y)A_\mu(z)\right|0\right\rangle = i\left.\frac{\delta^3 Z(\eta,\bar{\eta},J_\mu)}{\delta J^\mu(z)\,\delta\eta(y)\,\delta\bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} \tag{1.64}$$

A partir do gerador funcional Eq.(1.55) fazemos as derivadas funcionais em relação às fontes fermiônicas η e $\bar{\eta}$ e em seguida às fazemos nulas, com isso chegamos na expressão

$$G_{\mu}^{\xi}\left(x,y;z\right) = \frac{\delta}{\delta J^{\mu}\left(z\right)}\left(\int DA_{\mu}\exp\left(i\int d^{2}x'\left[\frac{1}{2}A_{\mu}D_{\xi}^{\mu\nu}A_{\nu}+J^{\mu}A_{\mu}\right]\right)G\left(x,y;A\right)\right)\Bigg|_{J_{\mu}=0} \tag{1.65}$$

Usaremos a representação Eq.(B.9) para a função de Green $G\left(x,y;A\right)$. Para derivarmos, funcionalmente, em relação à J^{μ} devemos realizar primeiro a integração no campo de gauge A_{μ}, portanto, obtemos, após certo cálculo, que a função de vértice é dada por

$$G_{\mu}^{\xi}\left(x,y;z\right) = i\int\frac{d^{2}k}{\left(2\pi\right)^{2}}h_{\mu}(k)\left(e^{-ik(z-x)}-e^{-ik(z-y)}\right)G^{\xi}\left(x-y\right), \tag{1.66}$$

onde $G^{\xi}\left(x-y\right)$ é o propagador fermiônico Eq.(1.63) e $h_{\mu}(k)$ é a seguinte função

$$h_{\mu}(k) = -\frac{q}{k^{2}}\left[\frac{\xi}{k^{2}}k_{\mu}+\frac{1}{k^{2}-\frac{q^{2}}{\pi}}\gamma_{5}\tilde{k}_{\mu}\right]. \tag{1.67}$$

Reescrevendo a função de vértice Eq.(1.66) no espaço dos momentos conforme a Eq.(C.36)

$$\tilde{G}_{\mu}^{\xi}\left(p,m;k\right) = i\left(2\pi\right)^{2}h_{\mu}(k)\left(\tilde{G}^{\xi}\left(p+k\right)-\tilde{G}^{\xi}\left(p\right)\right)\delta\left(m+p+k\right), \tag{1.68}$$

ou

$$\tilde{G}_{\mu}^{\xi}\left(p,-p-k;k\right) = i\left(2\pi\right)^{2}h_{\mu}(k)\left(\tilde{G}^{\xi}\left(p+k\right)-\tilde{G}^{\xi}\left(p\right)\right). \tag{1.69}$$

Como era de se esperar, existe uma relação natural entre o propagador fermiônico e a função de vértice devido ao acoplamento mínimo entre o campo eletromagnético e os campos fermiônicos. Uma relação similar existe entre as funções $I1P$ correspondentes que ficará mais clara quando deduzirmos a identidade de Ward-Takahashi da função $I1P$ da função de vértice.

1.3.4 Identidades de Ward-Takahashi

Nesta seção deduziremos algumas equações funcionais satisfeitas pelo gerador funcional das funções irredutíveis de uma partícula ($I1P$), e a partir delas extrairemos relações entre as funções $I1P$, conhecidas como identidades de Ward-Takahashi. Essas identidades são extremamente importantes para a prova da renormalizabilidade das teorias quânticas de gauge. Mesmo que nesse modelo não seja necessário a renormalização, é interessante derivarmos tais identidades para verificar se a invariância de gauge é preservada em nível quântico. Como a ação possui invariância de gauge local em nível clássico, nem todas as funções de Green geradas pelo gerador funcional Eq.(1.53) são independentes, como podemos ver na função de vértice Eq.(1.66), por causa do termo de *gauge-fixing* na densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_{\psi,A_{\mu}}$ Eq.(1.52) e pelos termos de fonte, o gerador funcional (1.53) não é mais invariante pelas transformações de gauge Eq.(1.6). A técnica que usaremos para derivar as identidades consiste no seguinte: Primeiro fazemos a transformação local de gauge nos campos fermiônicos

$$\psi'\left(x\right) = e^{i\lambda(x)}\psi\left(x\right), \quad \bar{\psi}'\left(x\right) = \bar{\psi}\left(x\right)e^{-i\lambda(x)},$$

do gerador funcional Eq.(1.53). A medida fermiônica é invariante sob tal transformação, pois usamos uma prescrição invariante de gauge ($a = 1$). O jacobiano da transformação é dado por

$$J[A_{\mu},\lambda] = \frac{\det\left(i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/\right)}{\det\left(i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/ - \partial\!\!\!/\lambda\right)} = 1, \tag{1.70}$$

onde o determinante fermiônico é dado pela Eq.(B.13). Agora, fazemos a transformação no campo de gauge

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu\lambda(x).$$

No próximo passo da derivação fazemos a hipótese de que o parâmetro de transformação de gauge $\lambda(x)$ seja uma função infinitesimal. Isso justifica o fato de considerarmos apenas os termos lineares em $\lambda(x)$. Com essa hipótese o gerador funcional é escrito como

$$\begin{aligned} Z(\eta,\bar{\eta},J^\mu) &= \int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi \exp\left(i\int d^2x\left[\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu +\right]\right)\times \\ &\times \exp\left(i\int d^2x\lambda(x)\left[-\frac{\Box}{\xi}(\partial_\mu A^\mu) + i\bar{\eta}\psi - i\bar{\psi}\eta - \partial_\mu J^\mu\right]\right). \end{aligned}$$

Seguindo com a nossa hipótese, expandimos a exponencial que contém $\lambda(x)$ e consideramos novamente apenas termos lineares em $\lambda(x)$. Obtemos então que

$$\begin{aligned} Z(\eta,\bar{\eta},J^\mu) &= \int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi \exp\left(i\int d^2x\left[\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu\right]\right)\times \\ &\times\left[1 + i\int d^2x\lambda(x)\left[i\bar{\eta}\psi - i\bar{\psi}\eta - \frac{\Box}{\xi}(\partial_\mu A^\mu) - \partial_\mu J^\mu\right]\right]. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Usando a representação funcional para os campos podemos reescrever a Eq.(1.71) como

$$\left[\bar{\eta}(x)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} - \eta(x)\frac{\delta}{\delta\eta(x)} + i\frac{\Box}{\xi}\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - \partial_\mu J^\mu(x)\right] Z(\eta,\bar{\eta},J^\mu) = 0. \tag{1.72}$$

Definindo o gerador funcional das funções de Green conexas $W(\eta,\bar{\eta},J_\mu)$ como $W = -i\ln Z$ ou pela Eq.(C.2), podemos usar a representação funcional para os campos Eq.(C.3) e reescrever a Eq.(1.72) como

$$i\bar{\eta}(x)\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}(x)} - i\eta(x)\frac{\delta W}{\delta\eta(x)} - \frac{\Box}{\xi}\partial_\mu\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} - \partial_\mu J^\mu(x) = 0. \tag{1.73}$$

A última expressão ainda não possui a forma desejável, contudo, se introduzirmos o gerador funcional das funções de Green irredutíveis de uma partícula ($I1P$) $\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)$ (ação efetiva) através de uma transformação de Legendre

$$\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right) = W(\eta,\bar{\eta},J_\mu) - \int d^2x\left(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + A_\mu J^\mu\right), \tag{1.74}$$

conseguiremos reescrever a Eq.(1.73) em termos de Γ, ou seja, em termos dos campos fundamentais da teoria e, também em termos da representação funcional das fontes Eq.(C.8). Substituindo esses resultados na Eq.(1.73), obtemos a equação geral para as identidades de Ward-Takahashi em termos de Γ

$$i\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x) - i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}\bar{\psi}(x) - \frac{\Box}{\xi}\partial^\mu A_\mu(x) + \partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)} = 0. \tag{1.75}$$

A primeira identidade que iremos derivar é a para o campo de gauge A_μ. Para isso, derivamos funcionalmente a Eq.(1.75) em relação a $A_\nu(y)$ e fazemos todos os campos irem a zero. Portanto, obtemos a função $I1P$ 2-pontos para o campo de gauge

$$\partial_\mu\Gamma^{\mu\nu}(x-y) - \frac{\Box}{\xi}\partial^\nu\delta(x-y) = 0, \tag{1.76}$$

escrevendo-a no espaço dos momentos

$$k_\mu\tilde{\Gamma}^{\mu\nu}(k) = -\frac{k^2}{\xi}k^\nu, \tag{1.77}$$

a Eq.(1.77) expressa a transversalidade do propagador do campo de gauge, dependendo apenas do parâmetro de gauge ξ.

A próxima identidade de Ward-Takahashi relaciona a função $I1P$ 3-pontos de vértice com a função $I1P$ 2-pontos fermiônica, derivando funcionalmente a Eq.(1.75) em relação a $\psi(y)$ e $\bar{\psi}(z)$

$$i\Gamma(x-z)\,\delta(x-y)+i\Gamma(x-y)\,\delta(z-x)+\partial_\mu\Gamma^\mu(z,y;x)=0, \tag{1.78}$$

e escrita no espaço dos momentos conforme a Eq.(C.42)

$$\tilde{\Gamma}^\xi_\mu(p;k)=q\frac{1}{k^2}\left(k_\mu+\gamma_5\tilde{k}_\mu\right)\left(\tilde{\Gamma}^\xi(p)-\tilde{\Gamma}^\xi(p+k)\right), \tag{1.79}$$

ou

$$\frac{1}{q}k^\mu\tilde{\Gamma}^\xi_\mu(p;k)=\tilde{\Gamma}^\xi(p)-\tilde{\Gamma}^\xi(p+k)\,. \tag{1.80}$$

Com a Eq.(1.80) vemos, explicitamente, a dependência da função de vértice com o propagador fermiônico e dado que ambos são quantidades finitas, garantem que a carga não renormaliza. Como veremos no próximo capítulo, a identidade de Ward-Takahashi para a função de vértice é de grande importância no estudo da renormalizabilidade do modelo de Thirring, pois, a partir dela, podemos determinar a origem da divergência ultravioleta que ocorre no modelo.

Referências

[1.1] J. Schwinger, Phys. Rev. **128** (1962) 2425

[1.2] J. Schwinger, Phys. Rev. **125** (1962) 397

[1.3] J. Lowenstein and J. Swieca, Ann. Phys. **68** (1971) 172

[1.4] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **57** (1977) 580

[1.5] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Dover Publications, New York, 2001)

[1.6] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol. 169* (Springer, New York, 1974)

[1.7] M. Henneux and C. Teiltelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, New Jersey, 1992)

[1.8] A. Hanson, T. Regge and C. Teiltelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976)

[1.9] R. Casalbuoni, Nuovo Cim. **A33** (1976) 389

[1.10] L.D. Faddeev, Teoret. i Mat. Fiz. **1** (1969) 3 [Trans. Theoret. Math. Phys. **1** (1970) 1]

[1.11] P. Senjanovic, Ann. Phys. **100** (1976) 227, Erratum by Y.-G. Miao (Annals of Physics 209 (1991) 248

[1.12] M. Chaichian and A. Demichev, *Path Integrals in Physics; Volume II: Quantum Field Theory, Statistical Physics and Other Modern Applications* (Institute of Physics Publishing, 2001)

[1.13] L.D.Faddeev and V.N. Popov, Phys. Lett. **25B** (1967) 29

[1.14] R. Oliveira, *Modelos de Schwinger, Thirring e Kondo à Temperatura Finita: Um Estudo* Ph.D thesis, UNESP-IFT-D.004/07,2007

[1.15] R. Casana and S.A. Dias, Int. J. of Mod. Phys.**15A** (2000) 4603

Capítulo 2

MODELO DE THIRRING

Neste capítulo abordaremos o modelo de Thirring, que trata da auto-interação (corrente-corrente) de um campo fermiônico não-massivo, proposto por W.Thirring em 1958 [2.1], com intuito de estudar um modelo relativístico de campos que fosse exatamente solúvel. A solução completa do modelo via formalismo operatorial foi mostrada, alguns anos depois por, Hagen [2.2] e Klaiber [2.3]. O modelo não apresenta simetria de gauge local em nível clássico e, como veremos durante o decorrer do trabalho, mais especificamente na seção 2.3.5, a existência de simetria de gauge local em nível quântico para um certo valor do parâmetro a [2.4]. Uma característica interessante do modelo de Thirring é que quando o campo fermiônico é massivo existe a equivalência do modelo com um setor do modelo de Sine-Gordon [2.5] em nível quântico, onde o campo fermiônico é reconhecido como a solução tipo sóliton do modelo de Sine-Gordon. O atrativo dessa dualidade entre férmions e bósons (bosonização), é a possibilidade de extrair várias informações não-perturbativas do sistema.

Procederemos aqui da mesma maneira que no capítulo anterior, fazendo a análise clássica do modelo, cálculo das funções de correlação, equação de Schwinger-Dyson e das identidades de Ward-Takahashi. Mostraremos que a identidade de Ward-Takahashi para a função $I1P$ 2-pontos da corrente fermiônica é transversa para um determinado valor do parâmetro a e isso implica na existência de simetria de gauge local em nível quântico nesse setor. E, no final do capítulo, realizaremos o processo de regularização e renormalização do propagador fermiônico que apresenta divergências ultravioletas.

2.1 Estudo Clássico

A dinâmica do modelo é descrita pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial\!\!\!/}\psi - \frac{g}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right)\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right). \tag{2.1}$$

As equações de movimento obtidas são

$$\begin{aligned} i\partial\!\!\!/\psi(x) - g\gamma_\mu\psi(x)\left(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right) &= 0, & (2.2)\\ i\bar{\psi}(x)\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + g\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\left(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right) &= 0. & (2.3)\end{aligned}$$

No nível clássico a densidade Lagrangiana é invariante sob as transformações globais do grupo quiral

$$\psi'(x) = e^{i(\alpha-\beta\gamma_5)}\psi(x). \tag{2.4}$$

Os colchetes de Berezin fundamentais da teoria (a tempos iguais) são

$$\begin{aligned} \left\{\psi^\lambda(x), \bar{p}_\alpha(y)\right\}_B &= -\delta^\lambda{}_\alpha\delta\left(x^1-y^1\right), & (2.5)\\ \left\{\bar{\psi}^\lambda(x), p_\alpha(y)\right\}_B &= -\delta^\lambda{}_\alpha\delta\left(x^1-y^1\right). & (2.6)\end{aligned}$$

Os momentos canonicamente conjugados a ψ_α e $\bar{\psi}_\alpha$ são, respectivamente

$$\bar{p}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \psi_\alpha\right)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha}, \quad (2.7)$$

$$p^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 \bar{\psi}_\alpha\right)} = -\frac{i}{2}\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad (2.8)$$

e deles obtemos os seguintes vínculos primários

$$\varphi^{\alpha} = p^{\alpha} + \frac{i}{2}\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta}\psi_\beta \approx 0, \quad (2.9)$$

$$\bar{\varphi}^{\alpha} = \bar{p}^{\alpha} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \approx 0. \quad (2.10)$$

No formalismo canônico, o modelo de Thirring é caracterizado pela densidade Hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = p^i v_i - \mathcal{L} = \left(\partial_0 \bar{\psi}_\alpha\right) p^\alpha + \left(\partial_0 \psi_\alpha\right)\bar{p}^\alpha - \mathcal{L},$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^1 \overleftrightarrow{\partial}_1 \psi + \frac{g}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right)\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right). \quad (2.11)$$

A Hamiltoniana primária é escrita

$$H_P = H_C + \int dz^1\Big(\bar{\varphi}^\alpha\lambda_\alpha + \bar{\lambda}_\alpha\varphi^\alpha\Big).$$

Os BB's não-nulos entre os vínculos primários são

$$\left\{\varphi^\lambda(x), \bar{\varphi}^\alpha(y)\right\}_B = -i\left(\gamma^0\right)^{\lambda\alpha}\delta\left(x^1 - y^1\right). \quad (2.12)$$

Impondo a condição de consistência dos vínculos primários

$$\dot{\bar{\varphi}}^\alpha = \left\{\bar{\varphi}^\alpha, H_P\right\}_B = \left\{\bar{\varphi}^\alpha, H_C\right\}_B - \int dz^1\bar{\lambda}_\beta\left\{\bar{\varphi}^\alpha, \varphi^\beta\right\}_B + \int dz^1\left\{\bar{\varphi}^\alpha, \bar{\lambda}_\beta\right\}_B\varphi^\beta,$$

$$\dot{\varphi}^\alpha = \left\{\varphi^\alpha, H_C\right\}_B + \int dz^1\left\{\varphi^\alpha, \bar{\varphi}^\beta\right\}_B\lambda_\beta - \int dz^1\bar{\varphi}^\beta\left\{\varphi^\alpha, \lambda_\beta\right\}_B.$$

Os BB's dos vínculos primários com a Hamiltoniana canônica são:

$$\left\{\bar{\varphi}^\alpha, H_C\right\}_B = i\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha} + g\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\right)^\alpha\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right), \quad (2.13)$$

$$\left\{\varphi^\alpha, H_C\right\}_B = i\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma - g\left(\gamma_\mu\psi\right)^\alpha\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right). \quad (2.14)$$

Dessa forma, as condições de consistência fornecem os seguintes resultados

$$\dot{\bar{\varphi}}^\alpha = i\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha} + g\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\right)^\alpha\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) + i\bar{\lambda}_\beta\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \approx 0,$$

permitindo que o multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}$ seja determinado

$$\bar{\lambda}_\sigma = -\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha}\left(\gamma^0\right)_{\alpha\sigma} + ig\bar{\psi}_\beta\left(\gamma_\mu\right)^{\beta\alpha}\left(\gamma^0\right)_{\alpha\sigma}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right), \quad (2.15)$$

e, que o outro multiplicador de Lagrange possa ser obtido através de

$$\dot{\varphi}^\alpha = i\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma - g\left(\gamma_\mu\psi\right)^\alpha\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) - i\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta}\lambda_\beta \approx 0,$$

cuja expressão é a seguinte

$$\lambda_\varsigma = \left(\gamma^0\right)_{\varsigma\alpha}\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma + ig\left(\gamma^0\right)_{\varsigma\alpha}\left(\gamma^\mu\right)^{\alpha\lambda}\psi_\lambda\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right). \quad (2.16)$$

Como podemos ver as duas condições de consistência permitem que todos os multiplicadores de Lagrange da teoria fossem determinados Eq.(2.15) e Eq.(2.16). E, também vemos que nenhum vínculo secundário foi gerado.

Pelo fato de que o BB entre os vínculos primários não é nulo e que seus multiplicadores de Lagrange foram determinados, podemos concluir que o conjunto de vínculos φ_α e $\bar{\varphi}_\alpha$ é de segunda classe e, como não existem mais multiplicadores para determinarmos, não há necessidade de condições subsidiárias. Nesse ponto torna-se claro a não presença de simetria de gauge. Como citamos no capítulo anterior, uma das conjecturas de Dirac para sistemas vinculados é a de que os vínculos de primeira classe são os geradores das transformações de gauge e, como vemos, o modelo de Thirring não possui vínculos de primeira classe, apenas vínculos de segunda classe.

2.2 Amplitude de Transição

Como o modelo de Thirring possui apenas vínculos de segunda classe, a construção da amplitude de transição vácuo-vácuo será mais simples do que a do modelo de Schwinger. Mesmo assim, seguiremos o mesmo roteiro apresentado anteriormente. Portanto, a expressão da amplitude de transição vácuo-vácuo do modelo de Thirring na forma Hamiltoniana é

$$Z = \int D\mu\left(\psi, \bar{\psi}\right) \exp\left(i \int d^2x \left[\left(\partial_0 \psi\right) \bar{p} + \left(\partial_0 \bar{\psi}\right) p - \mathcal{H}_{\mathcal{C}}\right]\right),$$

onde a medida de integração é

$$D\mu\left(\psi, \bar{\psi}\right) = D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp \det\left|\left\{\varphi_\alpha, \bar{\varphi}_\beta\right\}_B\right|^{-1/2} \delta\left(\varphi_\alpha\right) \delta\left(\bar{\varphi}_\alpha\right). \tag{2.17}$$

Calculando o determinante dos vínculos de segunda classe chegamos no mesmo resultado obtido na Eq.(1.46) e substituindo a forma explícita dos vínculos nas funções delta, obtemos

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp \delta\left(\bar{p}_\alpha + \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^0\right)_\alpha\right) \delta\left(p^\alpha + \frac{i}{2}\left(\gamma^0\psi\right)^\alpha\right) \exp\left(i \int d^2x \left[\left(\partial_0 \psi\right)^\alpha \bar{p}_\alpha + \left(\partial_0 \bar{\psi}\right)^\alpha p_\alpha - \mathcal{H}_{\mathcal{C}}\right]\right).$$

As integrações são facilmente resolvidas se usarmos as funções delta, portanto, integrando nos momentos fermiônicos p e $\bar{p}$

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi \exp\left(i \int d^2x \left[\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial\!\!\!/} \psi - \frac{g}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right)\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\right]\right), \tag{2.18}$$

obtemos a amplitude de transição vácuo-vácuo do modelo de Thirring. Não é possível resolver exatamente a integração fermiônica da amplitude de transição Eq.(2.18) da maneira como ela se encontra, para contornar esse problema introduzimos um campo vetorial auxiliar A_μ (que não possui dinâmica) para linearizar o termo de interação da corrente fermiônica. Portanto, reescrevemos a amplitude de transição vácuo-vácuo Eq.(2.18) da seguinte maneira

$$Z = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp\left(i \int d^2x \left[\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/\right)\psi + \frac{1}{2g} A_\mu A^\mu\right]\right). \tag{2.19}$$

No estudo clássico do modelo de Thirring vimos a não necessidade de fazer uma fixação de gauge; o termo de *gauge-fixing* que surge naturalmente na ação do modelo de Schwinger aqui não está presente. Portanto, é importante uma análise clássica cuidadosa do modelo, tendo em vista que na estrutura da construção da amplitude de transição todas as informações relevantes da teoria estão presentes.

2.3 Funções de Correlação

Iniciamos o processo de quantização a partir da amplitude de transição vácuo-vácuo Eq.(2.19) incluindo uma fonte externa para cada variável dinâmica. Devemos ter em mente que os campos fundamentais da teoria são $\left(\psi, \bar{\psi}\right)$, e que as fontes devem ser introduzidas na Eq.(2.18) e não na Eq.(2.19), pois o campo A_μ é introduzido meramente como uma ferramenta matemática. Para introduzir uma fonte auxiliar para a corrente fermiônica utilizamos o conceito de operadores compostos, que nos permite calcular o efeito da corrente fermiônica no resto da teoria. Dessa forma, a amplitude de transição vácuo-vácuo definido a partir da Eq.(2.19) é escrito como o gerador funcional

$$Z\left(\eta, \bar{\eta}, C_\mu\right) = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp\left(i \int d^2x \left[\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/ + C\!\!\!/\right)\psi + \frac{1}{2g} A_\mu A^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right]\right). \tag{2.20}$$

Integrando nos campos fermiônicos surge o $\det(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/ + C\!\!\!/)$ que é dado pela Eq.(B.13) e a função de Green $G(x, y; A + C)$ pela Eq.(B.9). O que muda nas expressões do determinante e da função de Green de Dirac é somente a adição de um novo campo vetorial. A expressão que obtemos para o gerador funcional é

$$\begin{aligned} Z(\eta, \bar{\eta}, C_\mu) &= \int DA_\mu \exp\left(i \int d^2x \Big[\frac{1}{2g} A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (A_\mu(x) + C_\mu(x)) \left[\frac{a+1}{2\pi} \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box} \right] \times \right. \\ &\left. \times (A_\nu(x) + C_\nu(x)) \Big] \right) \exp\left(-i \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(x, y; A + C) \eta(y) \right). \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3.1 Propagador da Corrente Fermiônica

O propagador é definido da seguinte maneira

$$J_{\mu\nu}(x - y) \equiv \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = - \left. \frac{\delta^2 Z(\eta, \bar{\eta}, C_\mu)}{\delta C^\nu(y) \delta C^\mu(x)} \right|_{\eta = \bar{\eta} = C_\mu = 0} \tag{2.22}$$

No gerador funcional Eq.(2.21) tomamos os limites de $\eta = \bar{\eta} = 0$ e integramos no campo A_μ. E isso resulta na seguinte expressão para o propagador

$$J_{\mu\nu}(x - y) = -i \left[\frac{1}{g + \frac{2\pi}{a+1}} T^{\mu\nu} + \frac{1}{g + \frac{2\pi}{a-1}} L^{\mu\nu} \right] \delta(x - y), \tag{2.23}$$

com os projetores $T^{\mu\nu}$ e $L^{\mu\nu}$ definidos pela Eq.(A.18). Reescrevendo o propagador no espaço dos momentos

$$i\tilde{J}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{g + \frac{2\pi}{a+1}} T^{\mu\nu}(k) + \frac{1}{g + \frac{2\pi}{a-1}} L^{\mu\nu}(k). \tag{2.24}$$

No espaço das momentos o propagador é livre de divergências ultravioletas, ou seja, quando integramos a Eq.(2.24) em k ela não apresenta infinitos. A representação dos projetores $T^{\mu\nu}(k)$ e $L^{\mu\nu}(k)$ quer dizer que eles estão escritos no espaço dos momentos.

2.3.2 Propagador Fermiônico

A partir do gerador funcional Eq.(2.21) com $C_\mu = 0$ calculamos o propagador

$$\begin{aligned} G(x - y) &\equiv \langle 0 | T\psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = - \left. \frac{\delta^2 Z(\eta, \bar{\eta})}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} \right|_{\eta = \bar{\eta} = 0} \\ &= i \int DA_\mu \exp\left(i \int d^2x \frac{1}{2} A_\mu D^{\mu\nu} A_\nu \right) G(x, y; A), \end{aligned} \tag{2.25}$$

sendo a função de Green $G(x, y; A)$ é dada pela Eq.(B.9), e o operador diferencial $D^{\mu\nu}$ por

$$D^{\mu\nu} \equiv \frac{b}{\pi} T^{\mu\nu} + \frac{1}{\pi} (b - 1) L^{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

onde introduzimos o seguinte parâmetro

$$b = \frac{\pi}{g} + \frac{a+1}{2}. \tag{2.27}$$

Integrando no campo auxiliar A_μ, obtemos a seguinte expressão para o propagador

$$G(x - y) = i \exp\left(i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) \left(1 - e^{-ik(x-y)} \right) \right) G_F(x - y), \tag{2.28}$$

onde a função $f(k)$

$$f(k) = - \frac{\pi}{b(b-1)k^2} = \frac{\pi}{b} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi}{b-1} \frac{1}{k^2}. \tag{2.29}$$

Dessa forma, vemos que propagador fermiônico apresenta divergência logarítmica (ultravioleta); o que indica a necessidade da regularização e renormalização da função de onda fermiônica. Será mostrado adiante o processo para tornar a teoria finita.

2.3.3 Função de Vértice

Define-se a função de vértice como

$$G^{\mu}(x,y,z) \equiv \left\langle 0 \left| T\psi(x)\bar{\psi}(y)j^{\mu}(z)\right| 0\right\rangle = i\left.\frac{\delta^3 Z(\eta,\bar{\eta},C_\mu)}{\delta C_\mu(z)\,\delta\eta(y)\,\delta\bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=C_\mu=0} \tag{2.30}$$

Efetuando as derivadas funcionais em relação às fontes fermiônicas η e $\bar{\eta}$ e logo às fazendo nulas no gerador funcional Eq.(2.21) obtemos

$$G^{\mu}(x,y,z) = \frac{\delta}{\delta C_\mu(z)}\Big(\int DA_\mu \exp\left(i\int d^2x\frac{1}{2}\left[A_\mu D^{\mu\nu}A_\nu + 2A_\mu K^{\mu\nu}C_\nu + C_\mu K^{\mu\nu}C_\nu\right]\right)\times$$
$$\left.\times G(x,y;A+C)\Big)\right|_{C_\mu=0}$$

com $D^{\mu\nu}$ dado pela Eq.(2.26) e o operador diferencial $K^{\mu\nu}$

$$K^{\mu\nu} = \frac{a+1}{2\pi}\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}.$$

Usando a Eq.(B.9) para a função de Green de Dirac $G(x,y;A+C)$ e integrando no campo auxiliar A_μ, chegamos numa expressão na qual fazemos a derivada em relação a fonte C_μ e, com um pouco de álgebra simples obtemos a função de vértice

$$G^{\mu}(x,y,z) = i\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}h_\mu(k)\left(e^{-ik(z-x)} - e^{-ik(z-y)}\right)G(x-y), \tag{2.31}$$

onde $G(x-y)$ é o propagador fermiônico Eq.(2.28) e a função $h_\mu(k)$ é dada por

$$h_\mu(k) = -\frac{1}{k^2}\left(\frac{\pi}{g(b-1)}k^\mu + \frac{\pi}{gb}\gamma_5\tilde{k}^\mu\right). \tag{2.32}$$

Reescrevendo a função de vértice no espaço dos momentos conforme a Eq.(C.36)

$$\tilde{G}^{\mu}(p,m,k) = i(2\pi)^2 h_\mu(k)\left(\tilde{G}(p+k) - \tilde{G}(p)\right)\delta(m+p+k), \tag{2.33}$$

ou

$$\tilde{G}^{\mu}(p,-p-k,k) = i(2\pi)^2 h_\mu(k)\left(\tilde{G}(p+k) - \tilde{G}(p)\right), \tag{2.34}$$

sendo $\tilde{G}(p)$ a transformada de Fourier do propagador fermiônico Eq.(2.38). A expressão Eq.(2.33) nos garante que as divergências ultravioletas dessas funções de Green provenham somente do propagador fermiônico.

2.3.4 Equação de Schwinger-Dyson

Integrando o gerador funcional Eq.(2.20) no campo auxiliar A_μ obtemos

$$Z(\eta,\bar{\eta},C_\mu) = \int D\bar{\psi}D\psi\exp\left(i\int d^2x\left[\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + C\!\!\!/)\psi - \frac{g}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right)\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right]\right). \tag{2.35}$$

Agora derivando, o gerador funcional Eq.(2.35) em relação ao campo fermiônico $\bar{\psi}$, e usando a representação funcional dos campos Eq.(C.3) (somente mudando os campos $A_\mu \to j_\mu$ e as fontes $J_\mu \to C_\mu$), encontramos a expressão

$$\left(\partial\!\!\!/_x\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} - iC\!\!\!/\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} + g\gamma^\mu\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta C^\mu(x)} + \eta(x)\right)Z(\eta,\bar{\eta},C_\mu) = 0. \tag{2.36}$$

Derivando a equação funcional Eq.(2.36) em relação à $\eta(y)$ e fazendo as fontes externas irem zero, obtemos a equação de Schwinger-Dyson para o propagador fermiônico no espaço de configuração

$$i\partial\!\!\!/_x G(x-y) = i\delta(x-y) + g\gamma^\mu G_\mu(x,y;x)\,. \tag{2.37}$$

A divergência ultravioleta do propagador fermiônico também é constatada quando escrevemos a equação de Schwinger-Dyson no espaço dos momentos Eq.(2.38). Reescrevendo a equação de Schwinger-Dyson para o propagador fermiônico Eq.(2.37) no espaço dos momentos

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p\!\!\!/} - i\frac{1}{p\!\!\!/}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k)\, k\!\!\!/ \tilde{G}(p-k)\,, \tag{2.38}$$

com a função $f(k)$ dada pela Eq.(2.29). Iterando a Eq.(2.38) geramos uma expansão que pode ser escrita da seguinte maneira

$$\tilde{G}(p) = \tilde{G}_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(p)\,, \tag{2.39}$$

onde os primeiros termos da série são

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_1(p) &= \frac{1}{p\!\!\!/}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k)\, k\!\!\!/ \frac{1}{p\!\!\!/ - k\!\!\!/}, && (2.40)\\
\tilde{G}_2(p) &= -i\frac{1}{p\!\!\!/}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{d^2s}{(2\pi)^2} f(k)\, k\!\!\!/ \frac{1}{p\!\!\!/ - k\!\!\!/} f(s)\, s\!\!\!/ \frac{1}{p\!\!\!/ - k\!\!\!/ - s\!\!\!/}. && (2.41)
\end{aligned}$$

Se fizermos a contagem de potências na série, vemos claramente ordem a ordem a existência da divergência logarítmica (UV). Tal propriedade da série garante que o modelo seja uma teoria de campos totalmente renormalizável.

2.3.5 Identidades de Ward-Takahashi

Nesta seção derivaremos relações importantes entre as funções de Green, que nos permitirão observar a existência de simetria de gauge local em nível quântico e confirmar a origem da divergência ultravioleta fermiônica. Para deduzirmos as identidades, primeiramente, faremos as seguintes transformações nos campos fermiônicos do gerador funcional Eq.(2.20)

$$\psi'(x) = e^{i\lambda(x)}\psi(x)\,, \qquad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\, e^{-i\lambda(x)}. \tag{2.42}$$

A medida fermiônica do modelo de Thirring não é invariante sob tais transformações, pois estamos trabalhando numa prescrição não invariante de gauge ($a \neq 1$) na regularização do determinante fermiônico. Então, a medida fermiônica é alterada da seguinte forma

$$D\bar{\psi}' D\psi' = J(A,\lambda)\, D\bar{\psi} D\psi, \tag{2.43}$$

onde o jacobiano da transformação $J(A,\lambda)$ é

$$J(A,\lambda) = \frac{\det\left(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/ + C\!\!\!/\right)}{\det\left(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/ + C\!\!\!/ - \partial\!\!\!/\lambda\right)} = \exp\left(i\frac{a-1}{2\pi}\int d^2x \frac{1}{2}\left[2\left(A_\mu + C_\mu\right)\partial^\mu\lambda - \partial_\mu\lambda\partial^\mu\lambda\right]\right). \tag{2.44}$$

Faremos agora a transformação local $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\lambda$ para assim integrar o campo auxiliar A_μ, com isso obtemos

$$\begin{aligned}
Z(\eta,\bar{\eta},C_\mu) = &\int D\bar{\psi} D\psi \exp\left(i\int d^2x\left[\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + C\!\!\!/\right)\psi + \bar{\eta}e^{i\lambda}\psi + \bar{\psi}e^{-i\lambda}\eta - \frac{g}{2}j_\mu j^\mu\right]\right)\times\\
&\times\exp\left(i\int d^2x\left[\left(\frac{a-1}{2\pi}C_\mu - g\frac{b-1}{\pi}j_\mu\right)\partial^\mu\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{b-1}{\pi} - g\frac{(b-1)^2}{\pi^2}\right)\left(\partial^\mu\lambda\right)^2\right]\right).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Neste ponto tomamos a hipótese de que o parâmetro de transformação de gauge $\lambda(x)$ seja uma função infinitesimal, e que apenas os termos lineares são relevantes. Com isso, o gerador funcional (2.45) é escrito

$$\begin{aligned} Z(\eta,\bar{\eta},C_\mu) &= \int D\bar{\psi}D\psi \exp\left(i\int d^2x\left[\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + C\!\!\!/\right)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta - \frac{g}{2}j_\mu j^\mu\right]\right)\times \\ &\times \exp\left(i\int d^2x\lambda(x)\left[i\bar{\eta}\psi - i\bar{\psi}\eta - \frac{a-1}{2\pi}\partial^\mu C_\mu + g\frac{b-1}{\pi}\partial^\mu j_\mu\right]\right). \end{aligned}$$

Seguindo com a nossa hipótese sobre $\lambda(x)$ expandimos a segunda exponencial. Com isso

$$\begin{aligned} Z(\eta,\bar{\eta},C_\mu) &= \int D\bar{\psi}D\psi \exp\left(i\int d^2x\left[\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + C\!\!\!/\right)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta - \frac{g}{2}j_\mu j^\mu\right]\right)\times \\ &\times \left[1 + i\int d^2x\lambda(x)\left(i\bar{\eta}\psi - i\bar{\psi}\eta - \frac{a-1}{2\pi}\partial^\mu C_\mu + g\frac{b-1}{\pi}\partial^\mu j_\mu\right)\right]. \end{aligned}$$

Usando a representação funcional dos campos escrevemos o último termo da expressão acima como

$$\left[\bar{\eta}(x)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} - \eta(x)\frac{\delta}{\delta\eta(x)} - \frac{a-1}{2\pi}\partial_\mu C^\mu(x) - ig\frac{b-1}{\pi}\partial_\mu\frac{\delta}{\delta C_\mu(x)}\right]Z(\eta,\bar{\eta},J^\mu) = 0. \tag{2.46}$$

Introduzindo o gerador funcional das funções de Green conexas $W(\eta,\bar{\eta},J_\mu)$ através da Eq.(C.2) e usando a representação funcional para os campos Eq.(C.3) reescrevemos a Eq.(2.46) como

$$i\bar{\eta}\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}} - i\eta\frac{\delta W}{\delta\eta} - \frac{a-1}{2\pi}\partial^\mu C_\mu + g\frac{b-1}{\pi}\partial^\mu\frac{\delta W}{\delta C^\mu} = 0. \tag{2.47}$$

Introduzindo o gerador funcional das funções $I1P$ $\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},j^\mu\right)$

$$\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},j^\mu\right) = W(\eta,\bar{\eta},C_\mu) - \int d^2x\left(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + C_\mu j^\mu\right), \tag{2.48}$$

para termos uma representação para as fontes como a da QED_2 Eq.(C.8) (somente mudando os campos $A_\mu \to j_\mu$ e as fontes $J_\mu \to C_\mu$) e dessa forma, escrevermos a Eq.(2.47) em termos de Γ. Com essas relações obtemos a expressão geral para as identidades de Ward-Takahashi

$$i\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x) - i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}\bar{\psi}(x) + \frac{a-1}{2\pi}\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta j^\mu(x)} + g\frac{b-1}{\pi}\partial^\mu j_\mu(x) = 0. \tag{2.49}$$

A primeira identidade que calcularemos é a função I1P de 2-pontos para a corrente fermiônica. Derivando funcionalmente a Eq.(2.49) em relação a $j^\nu(y)$ e fazendo todos os campos irem a zero, obtemos

$$\frac{a-1}{2}\partial^\mu\Gamma_{\mu\nu}(x-y) + g(b-1)\partial_\nu^x\delta(x-y) = 0, \tag{2.50}$$

reescrevendo-a no espaço dos momentos

$$k^\mu\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}(k) = -\left(g + \frac{2\pi}{a-1}\right)k_\nu. \tag{2.51}$$

A não-transversalidade do propagador da corrente fermiônica e sua dependência com o parâmetro a indicam um fato interessante que deve ser explorado. A transversalidade é recuperada para o valor $a = 1 - \frac{2\pi}{g}$ e isso mostra que mesmo que em nível clássico o modelo não apresente simetria de gauge local, em nível quântico a simetria $U(1)$ está presente num setor. O parâmetro a permite separar o modelo em dois setores em nível quântico: um que possui simetria de gauge local (componente transversal) e outro que não possui.

A principal motivação para a dedução da identidade (2.51) é mostrar que o modelo de Thirring, mesmo que seja apenas em nível quântico, apresenta simetria de gauge local. Como sabemos da existência dessa simetria, podemos implementá-la desde o início dos cálculos. Faremos essa abordagem no próximo capítulo.

A segunda identidade a ser derivada é a que expressa a função I1P de 3-pontos de vértice em termos da função $I1P$ de 2-pontos fermiônica. Derivando funcionalmente a Eq.(2.49) em relação a $\psi(y)$ e $\bar{\psi}(z)$, resulta a expressão

$$i\Gamma(x-z)\,\delta(x-y)+i\Gamma(x-y)\,\delta(z-x)+\frac{a-1}{2\pi}\partial^{\mu}\Gamma_{\mu}(z,y;x)=0, \tag{2.52}$$

e reescrevendo-a no espaço dos momentos conforme a Eq.(C.42)

$$q_{\mu}\Gamma(p,q)^{\mu}=\frac{2\pi}{a-1}\left(\tilde{\Gamma}(p)-\tilde{\Gamma}(p+q)\right), \tag{2.53}$$

podemos concluir que todas as divergências provém do propagador fermiônico.

Um fato a ser comentado é sobre a existência da identidade de Ward-Takahashi Eq.(2.52) da função de vértice apenas no caso em que $a \neq 1$, como podemos ver na Eq.(2.49). Se utilizarmos $a = 1$ na regularização do determinante fermiônico, o modelo continua apresentando divergências ultravioletas no propagador fermiônico, mas não disporemos de uma expressão como a Eq.(2.52) para creditar a origem das divergências das funções fermiônicas somente ao propagador fermiônico. Nessa situação teríamos que regularizar e renormalizar o propagador fermiônico e a função de vértice.

2.4 Regularização e Renormalização das divergências UV

Nessa seção iremos estudar a estrutura da divergência ultravioleta da função de Green fermiônica Eq.(2.28). Como mostramos na seção anterior, a divergência das funções fermiônicas provém somente do propagador fermiônico. Portanto, a regularização e renormalização do propagador fermiônico é suficiente para que todas as funções de Green da teoria tornem-se finitas. Para o processo de regularização é interessante escrevermos o campo auxiliar A_μ em termos de suas componentes. A razão dessa escolha ficará clara mais a frente. Para isso utilizaremos o teorema de Helmholtz que permite decompor o campo vetorial A_μ em suas componentes longitudinal (ρ) e transversal (ϕ) em $(1+1)$-dimensões na forma

$$A_{\mu}=\partial_{\mu}\rho-\tilde{\partial}_{\mu}\phi, \tag{2.54}$$

Antes de prosseguirmos, devemos analisar a estrutura da divergência. Por um breve momento voltemos para a expressão da função $f(k)$ Eq.(2.29). Vemos dela que seus dois termos possuem comportamento que originam as divergências ultravioletas (logarítmicas) do propagador fermiônico. Essa identificação é importante para sabermos quantos campos reguladores serão necessários para tornar o propagador finito. O esquema de regularização que usaremos no gerador funcional será não-perturbativo. Começaremos o processo de regularização a partir do gerador funcional Eq.(2.20) com $C_\mu = 0$, pois somente o setor puramente fermiônico possui divergências, sendo as funções de Green da corrente fermiônica finitas não precisamos incluí-la no processo de regularização. Com isso obtemos

$$Z(\eta,\bar{\eta})=\int DA_{\mu}D\bar{\psi}D\psi\exp\left(i\int d^{2}x\left[\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/+A\!\!\!/\right)\psi+\frac{1}{2g}A_{\mu}A^{\mu}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right]\right). \tag{2.55}$$

Fazendo a transformação nos campos fermiônicos

$$\psi'=e^{i(\rho-\gamma_{5}\phi)}\psi,\quad \bar{\psi}'=\bar{\psi}e^{-i(\rho+\gamma_{5}\phi)}, \tag{2.56}$$

e a medida fermiônica do gerador funcional Eq.(2.55) não é invariante por essa transformação, sendo alterada pelo jacobiano

$$J(\rho,\phi)=\frac{\det(i\partial\!\!\!/+\partial\!\!\!/\rho-\tilde{\partial\!\!\!/}\phi)}{\det(i\partial\!\!\!/)}=\exp\left(i\int d^2x\left[\frac{a-1}{4\pi}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho-\frac{a+1}{2\pi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right]\right). \qquad (2.57)$$

Podemos ver pela expressão do jacobiano Eq.(2.57) que mesmo para uma prescrição invariante de gauge ($a=1$) a medida não seria invariante (contribuição quiral) [2.7]. Decompondo o campo vetorial A_μ em suas componentes Eq.(2.54) escrevemos o gerador funcional Eq.(2.55) como

$$\begin{aligned}Z(\eta,\bar{\eta})=\int D\rho D\phi D\bar{\psi}D\psi\exp\Big(i\int d^2x\Big[&\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi+\frac{b-1}{2\pi}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho-\frac{b}{2\pi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+\\&+\bar{\eta}e^{i(\rho-\gamma_5\phi)}\psi+\bar{\psi}e^{-i(\rho+\gamma_5\phi)}\eta\Big]\Big). \qquad (2.58)\end{aligned}$$

Nesse ponto terminamos os ”preparativos”e começamos efetivamente o processo de regularização. Utilizaremos aqui o método de Pauli-Villars-Rayski de regularização [2.8, 2.9, 2.10], que consiste em adicionar campos reguladores, sendo que o número de campos necessários é relacionado com o tipo de divergência que a teoria apresenta. Sobre as massas e coeficientes dos campos existem condições necessárias e suficientes para retirar a divergência do problema. Como foi discutido no começo da seção, dois termos são responsáveis pela divergência logarítmica, portanto, serão necessários dois campos reguladores α e β com massas Λ_α e Λ_β ($\Lambda^2\to\infty$), respectivamente, para tornar a teoria finita. Eles são introduzidos no gerador funcional Eq.(2.58). Os termos cinéticos dos campos reguladores são iguais aos dos campos originais, mas possuem métrica negativa e os termos de interação de ρ e ϕ são mudados por $\rho\to\rho+\alpha$ e $\phi\to\phi+\beta$. Mas devemos nos perguntar o porque somente os campos ρ e ϕ são alterados. Se calcularmos o propagador fermiônico do gerador funcional escrito em termos dessas campos, obtemos que cada um dos campos é responsável por um termo divergente, os mesmos presentes na função $f(k)$ Eq.(2.29). Isso justifica o porque dos campos reguladores serem introduzidos como mostramos acima. Dessa forma, o gerador funcional regularizado é escrito como

$$\begin{aligned}Z^\Lambda(\eta,\bar{\eta}) &= \int D\rho D\phi D\bar{\psi}D\psi D\alpha D\beta\exp\left(i\int d^2x\left[\frac{b-1}{2\pi}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho-\frac{b-1}{2\pi}\left(\partial_\mu\alpha\partial^\mu\alpha-\Lambda_\alpha^2\alpha^2\right)\right]\right)\times\\&\times\exp\left(i\int d^2x\left[-\frac{b}{2\pi}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+\frac{b}{2\pi}\left(\partial_\mu\beta\partial^\mu\beta-\Lambda_\beta^2\beta^2\right)\right]\right)\times\\&\times\exp\left(i\int d^2x\left[\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi+\bar{\eta}e^{i(\rho+\alpha-\gamma_5(\phi+\beta))}\psi+\bar{\psi}e^{-i(\rho+\alpha+\gamma_5(\phi+\beta))}\eta\right]\right). \qquad (2.59)\end{aligned}$$

Para integrarmos em α e β primeiro fazemos a translação nos campos $\rho\to\rho-\alpha$ e $\phi\to\phi-\beta$. Dessa forma, obtemos a expressão para o gerador funcional regularizado

$$\begin{aligned}Z^\Lambda(\eta,\bar{\eta}) &= \int D\rho D\phi D\bar{\psi}D\psi\exp\left(i\int d^2x\left[\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi+\bar{\eta}e^{i(\rho-\gamma_5\phi)}\psi+\bar{\psi}e^{-i(\rho+\gamma_5\phi)}\eta\right]\right)\times\\&\times\exp\left(i\int d^2x\left[\frac{b}{2\pi\Lambda_\beta^2}\phi\Box\left(\Box+\Lambda_\beta^2\right)\phi-\frac{b-1}{2\pi\Lambda_\alpha^2}\rho\Box\left(\Box+\Lambda_\alpha^2\right)\rho\right]\right). \qquad (2.60)\end{aligned}$$

Com o processo de regularização concluído, expressamos o gerador funcional regularizado Eq.(2.60) em termos dos campos originais da teoria para que, desse modo, vejamos como a ação foi modificada pelo processo de regularização. Fazendo a transformação fermiônica inversa da Eq.(2.56), que gera uma mudança na medida fermiônica e, também, escrevendo os campos ρ e ϕ em termos do campo vetorial auxiliar A_μ, obtemos que o gerador funcional regularizado pode ser escrito como

$$\begin{aligned}Z^\Lambda(\eta,\bar{\eta})=\int DA_\mu D\bar{\psi}D\psi\exp\Big(i\int d^2x\Big[&\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/+A\!\!\!/\right)\psi+\frac{1}{2g}A_\mu A^\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+\\&+\frac{b}{2\pi\Lambda_\beta^2}\left(\tilde{\partial}_\mu A^\mu\right)^2-\frac{b-1}{2\pi\Lambda_\alpha^2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2\Big]\Big). \qquad (2.61)\end{aligned}$$

Comparando as ações que aparecem nos geradores funcionais Eq.(2.55) e Eq.(2.61), vemos que o processo de regularização dá origem a dois termos que dependem explicitamente das massas Λ_α e Λ_β. Veremos a seguir que esses novos termos serão suficientes para tornar o modelo de Thirring finito.

2.4.1 Propagador Fermiônico Regularizado e Renormalizado

Fazendo a integração nos campos fermiônicos do gerador funcional Eq.(2.61) e, calculando as derivadas funcionais em relação a η e $\bar{\eta}$ obtemos o propagador fermiônico regularizado

$$G^{\Lambda}(x-y) = i\int DA_\mu \exp\left(i\int d^2x\frac{1}{2}A_\mu\left[\frac{b}{\pi\Lambda_\beta^2}\left(\Box+\Lambda_\beta^2\right)T^{\mu\nu}+\frac{b-1}{\pi\Lambda_\alpha^2}\left(\Box+\Lambda_\alpha^2\right)L^{\mu\nu}\right]A_\nu\right)G(x,y;A).$$

A função de Green $G(x,y;A)$ é dada pela Eq.(B.9) e os projetores pela Eq.(A.18). Resolvendo as integrais e com um pouco de álgebra, obtemos a seguinte expressão para o propagador fermiônico regularizado

$$G^{\Lambda}(x-y) = i\exp\left(i\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}f^{\Lambda}(k)\left(1-e^{-ik(x-y)}\right)\right)G_F(x-y), \tag{2.62}$$

onde a função $f^{\Lambda}(k)$

$$\begin{aligned} f^{\Lambda}(k) &= \frac{\pi\Lambda_\alpha^2}{(b-1)}\frac{1}{k^2\left(k^2-\Lambda_\alpha^2\right)} - \frac{\pi\Lambda_\beta^2}{b}\frac{1}{k^2(k^2-\Lambda_\beta^2)}, \\ &= \frac{\pi}{b}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2-\Lambda_\beta^2}\right]-\frac{\pi}{b-1}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2-\Lambda_\alpha^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Quando comparamos a Eq.(2.63) com a Eq.(2.29) vemos claramente como os termos de massa (reguladores) agem no propagador. Podemos ver explicitamente que os dois termos de massa são suficientes para tornar o modelo finito.

Agora, usando os resultados que se encontram no Apêndice A Eqs.(A.15), (A.16) e (A.17) para resolver a integração no espaço dos momentos do propagador Eq.(2.62) e, dessa forma, obter que o propagador fermiônico regularizado possui a seguinte expressão no espaço de configuração

$$G^{\Lambda}(x-y) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\not{x}-\not{y}}{(x-y)^2-i\epsilon}\left(\frac{M^2}{\tilde{\Lambda}_\alpha^2}\right)^{\frac{1}{4(b-1)}}\left(\frac{\tilde{\Lambda}_\beta^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{4b}}\left(-M^2(x-y)^2+i\epsilon\right)^{-\frac{1}{4b(b-1)}} \tag{2.64}$$

com a definição $\tilde{\Lambda}^2 = \frac{1}{4}\Lambda^2 e^{2\gamma}$, e M sendo a escala de massa arbitrária.

Isso nos permite renormalizar exatamente no espaço de configuração. o processo de renormalização estabelece a seguinte relação entre os campos fermiônicos nús e renormalizados, $\psi_{nú} = Z_\psi^{1/2}\psi_R$, sendo Z_ψ a constante de renormalização da função de onda fermiônica. Da Eq.(2.66) escolhemos a constante de renormalização da função de onda fermiônica para ser

$$Z_\psi = \left(\frac{M^2}{\tilde{\Lambda}_\alpha^2}\right)^{\frac{1}{4(b-1)}}\left(\frac{\tilde{\Lambda}_\beta^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{4b}} \tag{2.65}$$

Finalmente obtemos o propagador fermiônico renormalizado do modelo de Thirring não-massivo no espaço de configuração

$$G^{R}(x-y) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\not{x}-\not{y}}{(x-y)^2-i\epsilon}\left(-M^2(x-y)^2+i\epsilon\right)^{-\frac{1}{4b(b-1)}} \tag{2.66}$$

no limite da constante de acoplamento $g \to 0$ recuperamos o propagador de um campo fermiônico livre não-massivo.

2.4.2 Função de Vértice Regularizada

Introduzindo a fonte C_μ relacionada com a corrente fermiônica j_μ no gerador funcional Eq.(2.61) para que possamos calcular a função de vértice e constatar que o processo de regularização realmente retirou todas as divergências nas funções de correlação fermiônicas. Dessa forma, o funcional é escrito

$$Z^\Lambda(\eta,\bar\eta,C_\mu) = \int DA_\mu D\bar\psi D\psi \exp\Big(i\int d^2x\Big[\bar\psi\left(i\not\partial + \not A + \not C\right)\psi + \frac{1}{2g}A_\mu A^\mu + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta +$$
$$+\frac{b}{2\pi\Lambda_\beta^2}\left(\tilde\partial_\mu A^\mu\right)^2 - \frac{b-1}{2\pi\Lambda_\alpha^2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2\Big]\Big).$$

A função de vértice regularizada é dada por

$$G_\mu^\Lambda(x,y,z) = \frac{\delta}{\delta C_\mu(z)}\Big(\int DA_\mu \exp\Big(i\int d^2x\frac{1}{2}\left[A_\mu M^{\mu\nu}A_\nu + 2A_\mu K^{\mu\nu}C_\nu + C_\mu K^{\mu\nu}C_\nu\right]\Big)\times$$
$$\times G(x,y;A+C)\Big)\Big|_{C_\mu=0}$$

Integrando o campo vetorial A_μ e, derivando em relação a fonte C_μ obtemos o resultado, que após um pouco de álgebra é escrito como

$$G^\Lambda_{\mu(x,y,z)} = i\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}h_\mu^\Lambda(k)\left(e^{-ik(z-x)} - e^{-ik(z-y)}\right)G^\Lambda(x-y), \tag{2.67}$$

sendo $G^\Lambda(x-y)$ o propagador fermiônico regularizado dado pela Eq.(2.62) e, a função $h_\mu^\Lambda(k)$

$$h_\mu^\Lambda(k) = -\left[\frac{1}{(b-1)}\left(\frac{\pi}{g}\frac{1}{k^2} + \frac{(a-1)}{2}\frac{1}{(k^2-\Lambda_\alpha^2)}\right)k_\mu + \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{g}\frac{1}{k^2} + \frac{(a+1)}{2}\frac{1}{\left(k^2-\Lambda_\beta^2\right)}\right)\gamma_5\tilde k_\mu\right].$$

Reescrevendo a Eq.(2.67) no espaço de Fourier

$$\tilde G_\mu^\Lambda(p,m,k) = i(2\pi)^2 h_\mu^\Lambda(k)\left(\tilde G^\Lambda(p+k) - \tilde G^\Lambda(p)\right)\delta(m+p+k),$$

ou

$$\tilde G_\mu^\Lambda(p,-p-k,k) = i(2\pi)^2 h_\mu^\Lambda(k)\left(\tilde G^\Lambda(p+k) - \tilde G^\Lambda(p)\right).$$

Como podemos ver, a função de 3-pontos está regularizada já que a função $h_\mu^\Lambda(k)$ é finita.

Referências

[2.1] W. Thirring, Ann. Phys. **3** (1958) 91

[2.2] C.R. Hagen, Nuovo Cimento **51B** (1967) 169

[2.3] B. Klaiber, in *Lectures in Theorethical Physics 1967*, eds. A. Barut and W. Britten (Gordon and Breach, New York, 1968), p.141

[2.4] R. Casana, Int. J. of Mod. Phys. **20A** (2005) 7129

[2.5] S. Coleman, Phys. Rev. **11D** (1975) 2088

[2.6] R. Casana and B. M. Pimentel, Mod. Phys. Let. **20A** (2005) 1933

[2.7] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1195

[2.8] J. Rayski, Phys. Rev. **75** (1949) 1961

[2.9] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 434

[2.10] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 3rd ed. (Oxford Science Publishers, 1996), p.177

Capítulo 3

MODELO DE THIRRING COM SIMETRIA DE GAUGE

Como já foi comentado, o modelo de Thirring original não apresenta simetria de gauge. No capítulo anterior, mostramos a existência da simetria de gauge local no setor transversal do modelo, através do cálculo da identidade de Ward-Takahashi para a função $I1P$ 2-pontos da corrente fermiônica Eq.(2.51). O modelo com simetria de gauge foi proposto inicialmente pelo grupo de Itoh et al. [3.1] em *d-dimensões*, utilizando o método de *Hidden Local Simmetry* (HLS). Quando fixa-se o gauge de *HLS* para o gauge unitário, obtém-se o modelo de Thirring original escrito em termos do campo vetorial auxiliar. Nessa reformulação do modelo de Thirring, o campo vetorial auxiliar A_μ do modelo de Thirring é identificado como o campo de gauge com constante de acoplamento q; com essa identificação do campo A_μ é feito a mudança $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\theta$ para que o modelo se torne invariante de gauge em nível clássico. Em seguida, Kondo [3.2, 3.3] propôs uma nova versão para o modelo, estudando-o como um sistema vinculado. Também introduziu o termo cinético do campo eletromagnético e com isso sugeriu analisar o comportamento do modelo para certos limites das constantes de acoplamento q e g. Nos limites das constantes de acoplamento fortes, recupera-se os modelos de Thirring e Schwinger se a teoria de gauge é abeliana. O campo θ é conhecido como campo escalar de Stückelberg, mas também é identificado como o campo de Batalin-Fradkin no formalismo Hamiltoniano canônico geral de *Batalin-Fradkin-Vilkovisky* (BFV) para sistemas vinculados. Essa versão do modelo de Thirring com simetria de gauge tem sido utilizada para estudar a geração dinâmica de massa para os férmions.

Da mesma maneira que nos capítulos anteriores, neste capítulo tomaremos o mesmo roteiro, fazendo o estudo clássico do modelo e construção correta da amplitude de transição, cálculo das funções de correlação e das identidades de Ward-Takahashi. Dada a equivalência do modelo em nível clássico com os de Thirring e Schwinger nos limites das constantes de acoplamento fortes, analisaremos as funções de correlação e identidade de Ward-Takahashi nos limites das constantes de acoplamento fortes para estudar o comportamento do modelo em nível quântico e, confirmar se a equivalência manifesta em nível clássico é preservada em nível quântico.

3.1 Estudo Clássico

A dinâmica do modelo de Thirring com simetria de gauge é definida pela seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\not\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\not{A}\psi + \frac{1}{2g}\left(A_\mu - \partial_\mu\theta\right)^2 - \frac{1}{4q^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

onde os campos de gauge A_μ e escalar θ foram reescalonados por q^{-1}, a fim de termos um bom limite em nossa análise. O campo θ, é um campo escalar neutro, conhecido como campo de Stückelberg.

As equações de movimento são

$$\left(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/ (x) - m\right) \psi (x) = 0, \tag{3.2}$$

$$\bar{\psi} (x) \left(i \overleftarrow{\partial\!\!\!/} - A\!\!\!/ (x) + m \right) = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{q^2} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (x) \gamma^\nu \psi (x) + \frac{1}{g} \left(A^\nu (x) - \partial^\nu \theta (x) \right) = 0, \tag{3.4}$$

$$\partial_\mu A^\mu (x) - \Box \theta (x) = 0. \tag{3.5}$$

A Lagrangiana em nível clássico possui invariância sob o grupo de gauge $U(1)$ local

$$\psi' (x) = e^{i\lambda(x)} \psi (x), \quad \bar{\psi}' (x) = \bar{\psi} (x) e^{-i\lambda(x)}, \quad A'_\mu (x) = A_\mu (x) + \partial_\mu \lambda (x), \quad \theta' (x) = \theta (x) + \lambda (x). \tag{3.6}$$

Observando as equações de movimento, identificamos os seguintes limites que são interessantes para a análise no gauge unitário $\theta = 0$

1. $q \to \infty$, com esses limites recuperamos as equações de movimento do modelo de Thirring massivo, isto é, $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_{TM}$.

2. $g \to \infty$, com esses limites recuperamos as equações de movimento do modelo de Schwinger massivo, isto é, $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_{SM}$.

Os colchetes de Berezin fundamentais (a tempos iguais) são

$$\left\{ \psi^\lambda (x), \bar{p}_\alpha (y) \right\}_B = -\delta^\lambda{}_\alpha \delta \left(x^1 - y^1 \right), \tag{3.7}$$

$$\left\{ \bar{\psi}^\lambda (x), p_\alpha (y) \right\}_B = -\delta^\lambda{}_\alpha \delta \left(x^1 - y^1 \right), \tag{3.8}$$

$$\left\{ A^\lambda (x), \pi_\alpha (y) \right\}_B = \delta^\lambda{}_\alpha \delta \left(x^1 - y^1 \right), \tag{3.9}$$

$$\left\{ \theta (x), \pi_\theta (y) \right\}_B = \delta \left(x^1 - y^1 \right). \tag{3.10}$$

As expressões dos momentos canônicos são

$$\bar{p}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_\alpha)} = -\frac{i}{2} \bar{\psi}_\beta \left(\gamma^0 \right)^{\beta\alpha}, \tag{3.11}$$

$$p^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_0 \bar{\psi}_\alpha \right)} = -\frac{i}{2} \left(\gamma^0 \right)^{\alpha\beta} \psi_\beta, \tag{3.12}$$

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = \frac{1}{q^2} F^{\mu 0}, \tag{3.13}$$

$$\pi_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \theta)} = -\frac{1}{g} A^0 + \frac{1}{g} \partial_0 \theta, \tag{3.14}$$

e elas implicam nos seguintes vínculos primários

$$\phi^\alpha = p^\alpha + \frac{i}{2} \left(\gamma^0 \right)^{\alpha\beta} \psi_\beta \approx 0, \tag{3.15}$$

$$\bar{\phi}^\alpha = \bar{p}^\alpha + \frac{i}{2} \bar{\psi}_\beta \left(\gamma^0 \right)^{\beta\alpha} \approx 0, \tag{3.16}$$

$$\varphi_1 = \pi^0 \approx 0, \tag{3.17}$$

e nas duas relações dinâmicas

$$\partial_0 A_1 = q^2 \pi^1 + \partial_1 A_0, \tag{3.18}$$

$$\partial_0 \theta = g \pi_\theta + A_0. \tag{3.19}$$

Definindo a densidade Hamiltoniana canônica

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{C}} &= -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^1\overleftrightarrow{\partial}_1\psi + m\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\not{A}\psi + \frac{g}{2}(\pi_\theta)^2 + \frac{q^2}{2}\left(\pi^1\right)^2 + \pi^1\left(\partial_1 A_0\right) + A_0\pi_\theta + \\ &+ \frac{1}{2g}(A_1)^2 + \frac{1}{2g}(\partial_1\theta)^2 - \frac{1}{g}A_1(\partial_1\theta),\end{aligned} \tag{3.20}$$

e por conseguinte a Hamiltoniana primária

$$H_P = H_C + \int dz^1\left(\bar{\phi}^\alpha\lambda_\alpha + \bar{\lambda}_\alpha\phi^\alpha + v_1\varphi_1\right).$$

O BB's não-nulos entre os vínculos primários são

$$\left\{\phi^\lambda(x), \bar{\phi}^\alpha(y)\right\}_B = -i\left(\gamma^0\right)^{\lambda\alpha}\delta\left(x^1 - y^1\right). \tag{3.21}$$

Impondo a condição de consistência dos vínculos primários

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\phi}}^\alpha &= \left\{\bar{\phi}^\alpha, H_P\right\}_B = \left\{\bar{\phi}^\alpha, H_C\right\}_B - \int dz^1\bar{\lambda}_\beta\left\{\bar{\phi}^\alpha, \phi^\beta\right\}_B + \int dz^1\left\{\bar{\phi}^\alpha, \bar{\lambda}_\beta\right\}_B\phi^\beta, \\ \dot{\phi}^\alpha &= \left\{\phi^\alpha, H_C\right\}_B + \int dz^1\left\{\phi^\alpha, \bar{\phi}^\beta\right\}_B\lambda_\beta - \int dz^1\bar{\phi}^\beta\left\{\phi^\alpha, \lambda_\beta\right\}_B, \\ \dot{\varphi}_1 &= \left\{\varphi_1, H_C\right\}_B + \int dz^1\left\{\varphi_1, v_1\right\}_B\varphi_1.\end{aligned}$$

Os BB's dos vínculos primários com a Hamiltoniana canônica

$$\begin{gathered}\left\{\bar{\phi}^\alpha, H_C\right\}_B = i\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha} + m\bar{\psi}^\alpha - \bar{\psi}_\beta(\not{A})^{\beta\alpha}, \\ \left\{\phi^\alpha, H_C\right\}_B = i\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma - m\psi^\alpha + (\not{A})^{\alpha\lambda}\psi_\lambda, \\ \left\{\varphi_1, H_C\right\}_B = \partial_1\pi^1 + \bar{\psi}\gamma^0\psi - \pi_\theta.\end{gathered}$$

Dessa forma, com as condições de consistência fermiônicas

$$\dot{\bar{\phi}}^\alpha = i\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha} + m\bar{\psi}^\alpha - \bar{\psi}_\beta(\not{A})^{\beta\alpha} + i\bar{\lambda}_\beta\left(\gamma^0\right)^{\beta\alpha} \approx 0,$$

determinamos o multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}$

$$\bar{\lambda}_\sigma = -\partial_1\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^1\right)^{\beta\alpha}\left(\gamma^0\right)_{\alpha\sigma} + im\left(\bar{\psi}\gamma^0\right)_\sigma - iq\bar{\psi}_\beta\left(\gamma^\mu\right)^{\beta\alpha}\left(\gamma^0\right)_{\alpha\sigma}A_\mu, \tag{3.22}$$

e, o outro multiplicador de Lagrange fermiônico é determinado por

$$\dot{\phi}^\alpha = i\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma - m\psi^\alpha + (\not{A})^{\alpha\lambda}\psi_\lambda - i\left(\gamma^0\right)^{\alpha\beta}\lambda_\beta \approx 0,$$

cuja expressão é a seguinte

$$\lambda_\varsigma = \left(\gamma^0\right)_{\varsigma\alpha}\left(\gamma^1\right)^{\alpha\sigma}\partial_1\psi_\sigma + im\left(\psi\gamma^0\right)_\varsigma - iq\left(\gamma^0\right)_{\varsigma\alpha}\left(\gamma^\mu\right)^{\alpha\lambda}\psi_\lambda A_\mu. \tag{3.23}$$

Com isso, todos os multiplicadores de Lagrange fermiônicos são determinados. Mas a condição de consistência do vínculo bosônico

$$\dot{\varphi}_1 = \partial_1\pi^1 + \bar{\psi}\gamma^0\psi - \pi_\theta \approx 0,$$

gera um vínculo secundário

$$M = \partial_1\pi^1 + \bar{\psi}\gamma^0\psi - \pi_\theta, \tag{3.24}$$

cuja condição de consistência é satisfeita $\dot{M} = 0$, mostrando que não existem outros vínculos no modelo, fechando assim o conjunto completo de vínculos da teoria, em que o vínculo M é a lei de Gauss.

3.1.1 Classificação dos Vínculos

O modelo de Thirring com simetria de gauge possui o seguinte conjunto de vínculos primários e secundários

$$
\begin{aligned}
\phi^{\alpha} &= p^{\alpha} + \frac{i}{2}\left(\gamma^{0}\right)^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \approx 0, &(3.25)\\
\bar{\phi}^{\alpha} &= \bar{p}^{\alpha} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\beta}\left(\gamma^{0}\right)^{\beta\alpha} \approx 0, &(3.26)\\
\varphi_{1} &= \pi^{0} \approx 0, &(3.27)\\
M &= \partial_{1}\pi^{1} + \bar{\psi}\gamma^{0}\psi - \pi_{\theta} \approx 0. &(3.28)
\end{aligned}
$$

Vemos que o vínculo bosônico, $\varphi_1 = \pi^0$, comuta com os outros vínculos. Disso concluímos que ele é um vínculo de primeira classe. Os BB's entre os vínculos restantes são

$$\left\{\phi^{\lambda}\left(x\right), \bar{\phi}^{\alpha}\left(y\right)\right\}_{B} = -i\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\alpha}\delta\left(x^{1}-y^{1}\right),$$

$$\left\{\bar{\phi}^{\lambda}\left(x\right), M\left(y\right)\right\}_{B} = \left\{\bar{p}^{\lambda}\left(x\right), \bar{\psi}\left(y\right)\gamma^{0}\psi\left(y\right)\right\}_{B} = \bar{\psi}_{\beta}\left(y\right)\left(\gamma^{0}\right)^{\beta\lambda}\delta\left(x^{1}-y^{1}\right),$$

$$\left\{\phi^{\lambda}\left(x\right), M\left(y\right)\right\}_{B} = \left\{p^{\lambda}\left(x\right), \bar{\psi}\left(y\right)\gamma^{0}\psi\left(y\right)\right\}_{B} = -\left(\gamma^{0}\right)^{\lambda\alpha}\psi_{\alpha}\left(y\right)\delta\left(x^{1}-y^{1}\right).$$

Então, em princípio, os três vínculos restantes são todos de segunda classe. Calculando a matriz de vínculos de segunda classe e, em seguida, calculando o seu posto, obtemos que ela possui posto 2. O fato da matriz de vínculos possuir posto 2 garante a existência de um vínculo de primeira classe que é uma combinação linear dos vínculos restantes. Portanto, a combinação linear que fornece um vínculo de primeira classe é

$$\varphi_{2} = \Xi^{\lambda}V_{\lambda}, \tag{3.29}$$

onde $\left(\Xi^{\lambda}\right) = \left(M, \bar{\phi}, \phi\right)$, portanto, a forma explícita do vínculo de primeira classe

$$\varphi_{2} = \partial_{1}\pi^{1} - \pi_{\theta} + i\left(\bar{p}^{\alpha}\psi_{\alpha} + \bar{\psi}_{\beta}p^{\beta}\right). \tag{3.30}$$

Dessa maneira, concluímos que o conjunto de vínculos φ_1 e φ_2 é de primeira classe e o conjunto ϕ e $\bar{\phi}$ é de segunda classe. Fato que também ocorre no modelo de Schwinger, sendo determinados somente os multiplicadores de Lagrange fermiônicos dos vínculos ϕ e $\bar{\phi}$, tal fato indicava que eles seriam de segunda classe da mesma maneira que aqui.

Para determinar o conjunto dos multiplicadores de Lagrange restante, procederemos da mesma maneira que no modelo de Schwinger, calculando as equações de movimento via DB's e introduzindo condições subsidiárias para que determinemos os multiplicadores de Lagrange dos vínculos de primeira classe. Usamos aqui o gauge de radiação

$$
\begin{aligned}
\chi_{1} &= A_{0} \approx 0, &(3.31)\\
\chi_{2} &= \partial_{1}A_{1} \approx 0. &(3.32)
\end{aligned}
$$

A condição de consistência de χ_1 implica que $\lambda_1 = 0$. Já para χ_2 obtemos $(\partial_1)^2\lambda_2 = 0$, e para que as condições de gauge sejam atingíveis, e as relações dinâmicas sejam preservadas devemos ter $\lambda_2 = 0$, ou seja, λ_2 deve assumir esse valor para que as equações de movimento obtidas via DB's coincidam com as obtidas via Euler-Lagrange.

3.2 Amplitude de Transição

Como já fizemos uso do método de integração funcional para a quantização dos outros modelos, ele também será empregado aqui. O procedimento que faremos seguirá o da seção (1.2), pelo fato do modelo apresentar vínculos de primeira e de segunda classe. Portanto, a amplitude de transição vácuo-vácuo na forma Hamiltoniana é

$$Z = \int D\mu\left(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta\right) \exp\left(i \int d^2x \left[\pi^\mu\left(\partial_0 A_\mu\right) + \pi_\theta\left(\partial_0 \theta\right) + \left(\partial_0 \psi\right) \bar{p} + \left(\partial_0 \bar{\psi}\right) p - \mathcal{H}_\mathcal{C}\right]\right),$$

onde a medida de integração é

$$\begin{aligned} D\mu\left(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta\right) = D\theta D\pi_\theta D\pi^\mu DA_\mu D\bar{\psi} D\psi D\bar{p} Dp \det\left|\{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}_B\right| \det\left|\left\{\phi_\alpha, \bar{\phi}_\beta\right\}_B\right|^{-1/2} \times \\ \times \delta\left(\varphi_\alpha\right) \delta\left(\chi_\alpha\right) \delta\left(\phi_\alpha\right) \delta\left(\bar{\phi}_\alpha\right). \end{aligned}$$

Calculando os determinantes dos vínculos obtemos os mesmos resultados que os das Eqs.(1.45) e (1.46). Fazendo uso das funções delta de Dirac para resolver as integrações, primeiramente integramos os momentos fermiônicos p, $\bar{p}$, e em π_0, A_0, e usamos a representação integral para a função delta $\delta\left(\partial_1 A^1 - \pi_\theta + \bar{\psi}\gamma^0\psi\right)$ como a da Eq.(1.47) e, por último, integrando nos momentos π_θ e π^1, obtemos

$$\begin{aligned} Z \quad = \quad & \int D\theta D\alpha DA_1 D\bar{\psi} D\psi \det\left|-\left(\partial_1\right)^2\right| \delta\left(\partial_1 A_1\right) \exp\left(i \int d^2x \left[\frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\not{\partial}}\psi - m\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\gamma^1\psi A_1 + \right.\right. \\ & \left.\left. -\frac{1}{2g}\left(\left(A_1\right)^2 + \left(\partial_1\theta\right)^2\right) + \bar{\psi}\gamma^0\psi\alpha + \frac{1}{g}A_1\left(\partial_1\theta\right) + \frac{1}{2q^2}\left(\partial_0 A_1 - \partial_1\alpha\right)^2 + \frac{1}{2g}\left(\partial_0\theta - \alpha\right)^2\right]\right). \end{aligned}$$

Finalmente, renomeando $\alpha \to A_0$ obtemos

$$\begin{aligned} Z \quad = \quad & \int D\theta DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det\left|-\left(\partial_1\right)^2\right| \delta\left(\partial_1 A_1\right) \exp\left(i \int d^2x \left[\bar{\psi}\left(i\not{\partial} + \not{A} - m\right)\psi + \right.\right. \\ & \left.\left. -\frac{1}{4q^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2g}\left(A_\mu - \partial_\mu\theta\right)\left(A^\mu - \partial^\mu\theta\right)\right]\right). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Usando o ansatz de Faddeev-Popov para o gauge covariante não-local R_ξ

$$R_\xi = \partial_\mu A^\mu + \frac{\xi}{g}\theta. \tag{3.34}$$

A escolha do gauge R_ξ é interessante por ele desacoplar o campo escalar de Stückerlberg θ e o campo de gauge A_μ, independentemente do parâmetro de *gauge-fixing* ξ (desde que os fantasmas de Faddeev-Popov não dependam do campo θ). Esse fato ficará mais claro no momento em que calcularmos as funções de correlação e as identidades de Ward-Takahashi do modelo e na Eq.(3.37). A escolha do gauge não-local R_ξ é necessária para a conservação da corrente da simetria $U(1)$ global do modelo de Thirring original [3.1] e isso implica também em que não se terá a necessidade de renormalizar a função de onda fermiônica. A expressão para a amplitude de transição vácuo-vácuo Eq.(3.33) no gauge R_ξ é

$$\begin{aligned} Z = \int D\theta DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det\left|\Box + \frac{\xi}{g}\right| \exp\left(i \int d^2x \left[\bar{\psi}\left(\not{\partial} + \not{A} - m\right)\psi - \frac{1}{4q^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2g}\left(A_\mu - \partial_\mu\theta\right)\left(A^\mu - \partial^\mu\theta\right) - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu + \frac{\xi}{g}\theta\right)^2\right]\right), \end{aligned} \tag{3.35}$$

podemos reescrevê-la como

$$Z \quad = \quad \int D\theta DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \det\left|\Box + \frac{\xi}{g}\right| \exp\left(i \int d^2x \left[\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}} + \mathcal{L}_\theta\right]\right), \tag{3.36}$$

$$\quad = \quad Z\left(\theta\right) \times Z\left(\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right), \tag{3.37}$$

sendo que o fato do campo θ ser desacoplado dos demais campos no gauge R_ξ foi usado para a obtenção da Eq.(3.36). As densidades Lagrangianas $\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}}$ e $\mathcal{L}_\theta$ são definidas da seguinte maneira

$$\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}} \equiv \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/ - m\right)\psi - \frac{1}{4q^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2g}A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2, \tag{3.38}$$

e

$$\mathcal{L}_\theta \equiv \frac{1}{2g}\left(\partial_\mu\theta\right)\left(\partial^\mu\theta\right) - \frac{\xi}{2g^2}\theta^2. \tag{3.39}$$

Pela Eq.(3.36) vemos que os fantasmas de Faddeev-Popov podem ser absorvidos na constante de normalização por eles se desacoplarem dos campos no gauge escolhido.

3.3 Funções de Correlação

A expressão do gerador funcional é obtida a partir da amplitude de transição vácuo-vácuo Eq.(3.36) incluindo as fontes externas de cada campo dinâmico, assim temos

$$Z\left(\eta,\bar{\eta},J^\mu,K\right) = \int D\theta DA_\mu D\bar{\psi}D\psi \exp\left(i\int d^2x\left[\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}} + \mathcal{L}_\theta + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu + K\theta\right]\right). \tag{3.40}$$

Primeiramente, realizaremos a integração no campos fermiônicos. Essa integração gera um determinante de campos fermiônicos massivos. Para que o resultado obtido seja exato, devemos ter uma teoria não-massiva, ou seja, fazemos $m = 0$. Caso fizéssemos $m \neq 0$ o cálculo para obtenção do determinante seria perturbativo em m. Mas devemos considerar $m = 0$, para que a principal motivação de trabalharmos com modelos bi-dimensionais não seja perdida, que é a obtenção de informações não-perturbativas do sistema. Temos que o determinante fermiônico é dado pela Eq.(B.13) e escolhemos $a = 1$. Obtemos assim a expressão do gerador funcional Eq.(3.40) apenas em termos das integrais dos campos θ e A_μ

$$\begin{aligned}
Z\left(\eta,\bar{\eta},J^\mu,K\right) &= \int D\theta DA_\mu \exp\Big(i\int d^2x\Big[\frac{1}{2\pi}A_\mu\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)A_\nu + \frac{1}{2q^2}A^\alpha\Box_{\alpha\beta}A^\beta - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2g}A_\mu A^\mu + J_\mu A^\mu + \mathcal{L}_\theta + K\theta\Big]\Big)\exp\left(-i\int d^2x\left[\bar{\eta}\left(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/\right)^{-1}\eta\right]\right), \\
&= Z(K)\int DA_\mu \exp\left(i\int d^2x\left[\frac{1}{2}A_\mu\left(\frac{1}{\pi}\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box} + \frac{1}{q^2}\Box^{\mu\nu} + \frac{1}{g}\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi}\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu + J_\mu A^\mu\right]\right)\times \\
&\quad \times\exp\left(-i\int dx\left[\bar{\eta}\left(i\partial\!\!\!/ + A\!\!\!/\right)^{-1}\eta\right]\right).
\end{aligned}$$

Como utilizamos a condição de gauge R_ξ para desacoplar o campo θ dos outros campos, então o gerador funcional $Z(K)$ não influenciará no cálculo das funções de correlação do modelo. Calculando explicitamente essa integral

$$Z(K) = \exp\left(i\int d^2x\frac{g}{2}K\Delta(x-y;\xi/g)K\right)\int D\theta' \exp\left(-i\int d^2x\frac{1}{2g}\theta'\left(\Box + \frac{\xi}{g}\right)\theta'\right), \tag{3.41}$$

sendo que usamos a condição de normalização $Z(0) = 1$, e onde $\Delta(x-y;\frac{\xi}{g})$ é função de Green da equação de Klein-Gordon com

$$\left(\Box + M^2\right)\Delta(x-y;\xi/g) = \delta\left(x-y\right). \tag{3.42}$$

com massa $M^2 = \xi/g$.

Portanto, consideraremos o seguinte gerador funcional para o cálculo das funções de correlação entre os campos $\psi, \bar{\psi}$ e A_μ

$$Z\left(\eta,\bar{\eta},J^\mu\right) = \int DA_\mu \exp\Big(i\int d^2x\Big[\frac{1}{2}A_\mu B_\xi^{\mu\nu}A_\nu + J_\mu A^\mu - \int d^2y\bar{\eta}\left(x\right)G\left(x,y;A\right)\eta\left(y\right)\Big]\Big), \tag{3.43}$$

sendo que o operador diferencial $B_\xi^{\mu\nu}$ é definido da seguinte maneira

$$B_\xi^{\mu\nu} \equiv \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{q^2}\Box + \frac{1}{g}\right)T^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi}\Box + \frac{1}{g}\right)L^{\mu\nu}, \tag{3.44}$$

com os projetores $T^{\mu\nu}$ e $L^{\mu\nu}$ definidos pela Eq.(A.18).

3.3.1 Propagador do Campo de Gauge

O propagador bosônico é definido como

$$J^{\xi}_{\mu\nu}(x-y) \equiv \langle 0 |T A_{\mu}(x) A_{\nu}(y)| 0\rangle = - \left.\frac{\delta^2 Z(\eta,\bar{\eta},J_{\mu})}{\delta J^{\nu}(y)\,\delta J^{\mu}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_{\mu}=0} \tag{3.45}$$

Fazendo $\eta=\bar{\eta}=0$ no gerador funcional Eq.(3.43) e calculando a integral no campo A_{μ} obtemos

$$J^{\xi}_{\mu\nu}(x-y) = i\left[B^{-1}_{\xi}\right]_{\mu\nu}\delta(x-y). \tag{3.46}$$

A inversa do operador diferencial $B^{\mu\nu}_{\xi}$ é

$$\left[B^{-1}_{\xi}\right]_{\mu\nu} = \frac{q^2}{\frac{q^2}{g}+\frac{q^2}{\pi}+\Box}T_{\mu\nu} + \frac{\xi}{\Box+\frac{\xi}{g}}L_{\mu\nu}. \tag{3.47}$$

Reescrevendo o propagador do campo de gauge Eq.(3.46) no espaço dos momentos

$$i\tilde{J}^{\xi}_{\mu\nu}(k) = \frac{q^2}{k^2-\frac{q^2}{g}-\frac{q^2}{\pi}}\eta_{\mu\nu} + f^{\xi}(k)\,k_{\mu}k_{\nu}, \tag{3.48}$$

onde a função $f^{\xi}(k)$ é definida como

$$f^{\xi}(k) \equiv \frac{\xi}{k^2\left(k^2-\frac{\xi}{g}\right)} - \frac{q^2}{k^2\left(k^2-\frac{q^2}{g}-\frac{q^2}{\pi}\right)}. \tag{3.49}$$

A partir de $\tilde{J}^{\xi}_{\mu\nu}(k)$ Eq.(3.48) vemos claramente que o propagador bosônico não possui divergências ultravioletas e seu comportamento em altas energias vai com k^{-2}. Disso, podemos concluir que as funções que contiverem a função $f^{\xi}(k)$ estarão livres de divergências ultravioletas. Também, a componente transversal do propagador tem massa $\frac{q^2}{g}+\frac{q^2}{\pi}$ sendo a segunda contribuição gerada dinamicamente após a quantização dos campos fermiônicos.

3.3.2 Propagador Fermiônico

Defini-se o propagador fermiônico da seguinte maneira

$$G^{\xi}(x-y) \equiv \left\langle 0 \left|T\psi(x)\bar{\psi}(y)\right| 0\right\rangle = - \left.\frac{\delta^2 Z(\eta,\bar{\eta},J_{\mu})}{\delta\eta(y)\,\delta\bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_{\mu}=0} \tag{3.50}$$

Fazendo a fonte J_{μ} ir a zero e calculando as derivadas no gerador funcional Eq.(3.43)

$$G^{\xi}(x-y) = i\int DA_{\mu}\exp\left(i\int d^2x\left[\frac{1}{2}A_{\mu}B^{\mu\nu}_{\xi}A_{\nu}\right]\right)G(x,y;A).$$

Resolvendo a integral do campo A_{μ}, obtemos o propagador fermiônico

$$G^{\xi}(x-y) = i\exp\left(i\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}f^{\xi}(k)\left(1-e^{-ik(x-y)}\right)\right)G_F(x-y) \tag{3.51}$$

com a função $f^{\xi}_{(k)}$ dada por Eq.(3.49). A equação de Schwinger-Dyson do propagador fermiônico no espaço dos momentos

$$\tilde{G}^{\xi}(p) = \frac{i}{\not{p}} - \frac{i}{\not{p}}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\not{k}f^{\xi}(k)\,\tilde{G}(p-k). \tag{3.52}$$

Observando as Eqs.(3.51) e (3.52) do propagador, vemos que ele é livre de divergências ultravioletas.

3.3.3 Função de Vértice

A função de vértice é obtida através do gerador funcional Eq.(3.43)

$$\begin{aligned} G_{\mu}^{\xi}(x,y;z) &\equiv \left\langle 0\left|T\psi(x)\bar{\psi}(y)A_{\mu}(z)\right|0\right\rangle = i\left.\frac{\delta^{3}Z(\eta,\bar{\eta},J_{\mu})}{\delta J^{\mu}(z)\,\delta\eta(y)\,\delta\bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_{\mu}=0} \qquad (3.53)\\ &= \frac{\delta}{\delta J^{\mu}_{(z)}}\left.\left(\int DA_{\mu}\exp\left(i\int d^{2}x\left[\frac{1}{2}A_{\mu}B_{\xi}^{\mu\nu}A_{\nu}+J^{\mu}A_{\mu}\right]\right)G(x,y;A)\right)\right|_{J_{\mu}=0} \end{aligned}$$

onde $G(x,y;A)$ é dado pela Eq.(B.9). Resolvendo a integral do campo A_{μ} e fazendo a derivada funcional em relação a fonte J^{μ}, obtemos a seguinte expressão para a função de vértice

$$G_{\mu}^{\xi}(x,y;z) = i\int\frac{d^{2}k}{(2\pi)^{2}}h_{\mu}(k)\left(e^{-ik(z-x)}-e^{-ik(z-y)}\right)G^{\xi}(x-y), \tag{3.54}$$

onde $G^{\xi}(x-y)$ é dado pela Eq.(3.51) e

$$h_{\mu}(k) = -\frac{1}{k^{2}}\left[\frac{\xi}{k^{2}-\frac{\xi}{g}}k_{\mu}+\frac{q^{2}}{k^{2}-\frac{q^{2}}{g}-\frac{q^{2}}{\pi}}\gamma_{5}\tilde{k}_{\mu}\right]. \tag{3.55}$$

Reescrevendo a função de vértice Eq.(3.54) no espaço de Fourier conforme a Eq.(C.36)

$$\tilde{G}_{\mu}^{\xi}(p,m;k) = i(2\pi)^{2}h_{\mu}(k)\left(\tilde{G}^{\xi}(p+k)-\tilde{G}^{\xi}(p)\right)\delta(m+p+k), \tag{3.56}$$

ou

$$\tilde{G}_{\mu}^{\xi}(p,-p-k;k) = i(2\pi)^{2}h_{\mu}(k)\left(\tilde{G}^{\xi}(p+k)-\tilde{G}^{\xi}(p)\right). \tag{3.57}$$

3.3.4 Identidades de Ward-Takahashi

Deduziremos aqui as identidades de Ward-Takahashi do modelo de Thirring com simetria de gauge da mesma maneira que nos capítulos anteriores. Alguns cuidados são tomados no momento em que fazemos a separação de variáveis (desacoplamento do campo θ dos demais campos) para que o resultado obtido possua consistência matemática. Primeiramente, fazemos a transformação de gauge no gerador funcional Eq.(3.40)

$$\psi'(x) = e^{i\lambda(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\lambda(x)}.$$

A medida fermiônica é invariante sob tal transformação de gauge, como visto na Eq.(1.70). Dessa forma, o gerador funcional Eq.(3.40) é escrito

$$\begin{aligned} Z(\eta,\bar{\eta},J^{\mu},K) &= \int D\theta DA_{\mu}D\bar{\psi}D\psi\exp\Big(i\int d^{2}x\Big[\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/+A\!\!\!/-m-\partial\!\!\!/\lambda)\psi-\frac{1}{4q^{2}}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\\ &\quad +\frac{1}{2g}A_{\mu}A^{\mu}-\frac{1}{2\xi}(\partial_{\mu}A^{\mu})^{2}+\frac{1}{2g}(\partial_{\mu}\theta)(\partial^{\mu}\theta)-\frac{\xi}{2g^{2}}\theta^{2}+\\ &\quad + \bar{\eta}e^{i\lambda}\psi+\bar{\psi}e^{-i\lambda}\eta+J_{\mu}A^{\mu}+K\theta\Big]\Big). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Agora, fazemos as transformações no campo de gauge A_{μ} e no campo escalar θ

$$A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x)+\partial_{\mu}\lambda(x), \quad \theta'(x) = \theta(x)+\lambda(x).$$

Para prosseguirmos com a derivação das identidades tomamos a hipótese de que o parâmetro de transformação de gauge $\lambda(x)$ seja uma função infinitesimal, isso nos permite expandir a exponencial e obter

$$\begin{aligned} Z(\eta,\bar{\eta},J^{\mu},K) &= \int D\theta DA_{\mu}D\bar{\psi}D\psi\exp\left(i\int d^{2}x\left[\mathcal{L}_{\psi,\mathcal{A}}+\mathcal{L}_{\theta}+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+J_{\mu}A^{\mu}+K\theta\right]\right)\times\\ &\quad\times\left\{1+i\int d^{2}x\lambda(x)\left[-\frac{1}{g}\Box\theta-\frac{\xi\theta}{g^{2}}-\frac{1}{g}\partial_{\mu}A^{\mu}-\frac{\Box}{\xi}(\partial_{\mu}A^{\mu})+i\bar{\eta}\psi-i\bar{\psi}\eta-\partial_{\mu}J^{\mu}+K\right]\right\}. \end{aligned}$$

Usando a representação funcional dos campos escrevemos a expressão acima como

$$\left[\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}\,(x)}-\eta\frac{\delta}{\delta\eta\,(x)}+\frac{i}{g}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\frac{\delta}{\delta K\,(x)}+\frac{i}{\xi}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu\,(x)}-\partial_\mu J^\mu+K\right]Z\left(\eta,\bar{\eta},J^\mu,K\right)=0.$$

Introduzindo o gerador funcional das funções de Green conexas $W\left(\eta,\bar{\eta},J^\mu,K\right)$ como na Eq.(C.2) e usando a representação funcional Eq.(C.3) para os campos reescrevemos a expressão acima como

$$i\bar{\eta}\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}\,(x)}-i\eta\frac{\delta W}{\delta\eta\,(x)}-\frac{1}{g}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\frac{\delta W}{\delta K\,(x)}-\frac{1}{\xi}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\partial_\mu\frac{\delta W}{\delta J_\mu\,(x)}-\partial_\mu J^\mu+K=0.$$

Agora introduzindo o gerador funcional das funções $I1P$ $\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu,\theta\right)$, que é relacionado com o gerador funcional das funções de Green conexas $W(\eta,\bar{\eta},J_\mu,K)$ através da transformação de Legendre

$$\Gamma\big(\psi,\bar{\psi},A_\mu,\theta\big)=W(\eta,\bar{\eta},J_\mu,K)-\int d^2x\left(\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+C_\mu j^\mu+K\theta\right). \tag{3.59}$$

Com essa definição temos uma representação funcional para as fontes como a da Eq.(C.8). Assim obtemos a expressão geral para as identidades de Ward-Takahashi em termos de Γ

$$i\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi\,(x)}\psi\,(x)-i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}\,(x)}\bar{\psi}\,(x)-\frac{1}{g}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\theta\,(x)-\frac{1}{\xi}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\partial^\mu A_\mu\,(x)+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu\,(x)}-\frac{\delta\Gamma}{\delta\theta\,(x)}=0. \tag{3.60}$$

Como já vimos na Eq.(3.37), podemos escrever o gerador funcional da seguinte maneira

$$Z\left(\eta,\bar{\eta},J^\mu,K\right)=Z\left(K\right)\times Z\left(\eta,\bar{\eta},J^\mu\right),$$

e disso também segue que

$$W(\eta,\bar{\eta},J_\mu,K)=W(K)+W(\eta,\bar{\eta},J_\mu), \tag{3.61}$$

e

$$\Gamma\big(\psi,\bar{\psi},A_\mu,\theta\big)=\Gamma(\theta)+\Gamma\big(\psi,\bar{\psi},A_\mu\big). \tag{3.62}$$

Portanto, a Eq.(3.60) se divide em duas equações desacopladas

$$i\frac{\delta\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)}{\delta\psi\,(x)}\psi\,(x)-i\frac{\delta\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)}{\delta\bar{\psi}\,(x)}\bar{\psi}\,(x)-\frac{1}{\xi}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\partial^\mu A_\mu\,(x)+\partial_\mu\frac{\delta\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)}{\delta A_\mu\,(x)}=C_1. \tag{3.63}$$

e

$$\frac{1}{g}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\theta\,(x)+\frac{\delta\Gamma\,(\theta)}{\delta\theta\,(x)}=-C_1. \tag{3.64}$$

Onde a Eq.(3.64) possui a seguinte solução

$$\Gamma(\theta)=\int d^2x\left[\frac{1}{2g}\left(\partial_\mu\theta\right)\left(\partial^\mu\theta\right)-\frac{\xi\theta^2}{2g^2}-C_1\theta\right]. \tag{3.65}$$

Vemos assim, que $\Gamma(\theta)$ é a ação funcional de um setor da teoria.

A primeira identidade que obtemos é a função $I1P$ 2-pontos para o campo de gauge, derivando a Eq.(3.63) em relação a $A_\nu(y)$

$$\partial_\mu\Gamma^{\mu\nu}\left(x-y\right)-\frac{1}{\xi}\left(\Box+\frac{\xi}{g}\right)\partial^\nu\delta\left(x-y\right)=0, \tag{3.66}$$

e reescrevendo-a no espaço dos momentos

$$k_\mu\tilde{\Gamma}^{\mu\nu}\left(k\right)=\frac{1}{\xi}\left(\frac{\xi}{g}-k^2\right)k^\nu, \tag{3.67}$$

que descreve o caráter transverso da função $I1P$ 2-pontos do campo de gauge.

A próxima identidade de Ward-Takahashi derivada aqui relaciona a função $I1P$ 3-pontos de vértice com a função $I1P$ 2-pontos do campo fermiônico

$$i\Gamma\left(x-z\right)\delta\left(z-x\right)+i\Gamma\left(x-y\right)\delta\left(x-y\right)+\partial_\mu\Gamma^\mu\left(z,y;x\right)=0. \tag{3.68}$$

No espaço dos momentos a identidade é escrita conforme a Eq.(C.42)

$$\tilde{\Gamma}^\xi_\mu\left(p;k\right)=\frac{1}{k^2}\left(k_\mu+\gamma_5\tilde{k}_\mu\right)\left(\tilde{\Gamma}^\xi\left(p\right)-\tilde{\Gamma}^\xi\left(p+k\right)\right), \tag{3.69}$$

ou

$$k^\mu\tilde{\Gamma}^\xi_\mu\left(p;k\right)=\tilde{\Gamma}^\xi\left(p\right)-\tilde{\Gamma}^\xi\left(p+k\right), \tag{3.70}$$

devido ao fato que $\Gamma(p)$ e $\Gamma_\mu(p)$ são finitos a constante de acoplamento q não renormaliza.

3.3.5 Limites do Modelo

Uma das propostas de Kondo [3.2] era analisar o comportamento do modelo em relação as constantes de acoplamento q e g no limite de acoplamento forte e fazendo o campo auxiliar $\theta = 0$ para vermos se recuperamos os modelos de Thirring e Schwinger, respectivamente. Em nível clássico, isso acontece, como mostramos pela análise das equações de movimento. Agora, analisaremos o comportamento do modelo em nível quântico através das funções de correlação nos limites das constantes de acoplamento fortes.

A) Primeiro analisamos o limite $g \to \infty$:

(a) No propagador do campo de gauge Eq.(3.46) obtemos

$$i\tilde{J}^{\mu\nu}(k) = \frac{q^2}{k^2 - m_s^2} T^{\mu\nu}(k) + \frac{\xi}{k^2} L^{\mu\nu}(k), \tag{3.71}$$

onde $m_s^2 = \frac{q^2}{\pi}$.

(b) No propagador fermiônico Eq.(3.51) este limite resulta em

$$G^{\xi}(x-y) = i \exp\left\{ i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{\xi}{k^4} - \frac{q^2}{k^2 - m_s^2} \right) \left(1 - e^{-ik(x-y)} \right) \right\} G_F(x-y). \tag{3.72}$$

(c) Na análise da função de vértice consideraremos a Eq.(3.54), disso obtemos

$$G^{\xi}_{\mu}(x, y; z) = -i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left(\frac{\xi}{k^4} k_\mu + \frac{q^2}{k^2(k^2 - m_s^2)} \gamma_5 \tilde{k}_\mu \right) \left(e^{-ik(z-x)} - e^{-ik(z-y)} \right) G^{\xi}(x-y), \tag{3.73}$$

Se fazemos a seguinte redefinição no modelo de Thirring com simetria de gauge:

$$A_\mu \to qA_\mu, \quad \xi \to q^2\xi,$$

as equações acima reproduzem exatamente as funções de Green Eq.(1.60), Eq.(1.61) e Eq.(1.67) do modelo de Schwinger.

d) A equação geradora das identidades de Ward-Takahashi Eq.(3.63) quando $g \to \infty$ resulta em

$$i\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\psi - i\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}}\bar{\psi} - \frac{\Box}{\xi}\partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} = 0, \tag{3.74}$$

e recuperamos a Eq.(1.75) do modelo de Schwinger.

B) Agora analisamos o limite $q \to \infty$ no gauge $\xi = 0$:

a) Neste limite o propagador do campo de gauge dá

$$i\tilde{J}^{\mu\nu}(k) = -\frac{g\pi}{g+\pi} T^{\mu\nu}(k), \tag{3.75}$$

não recuperamos o propagador da corrente fermiônica do modelo de Thirring que é dada pela equação Eq.(2.24) com $a = 1$

$$i\tilde{J}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{g+\pi} T^{\mu\nu}(k), \tag{3.76}$$

Lembrando que nesse limite devemos observar a Eq.(3.4) a qual fornece $A_\mu = -gj_\mu = -g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, portanto, para verificarmos a equivalência fazemos o re-escalonamento dos campos, mesmo assim, os resultados não são compatíveis.

b) Para o propagador fermiônico o limite resulta em

$$G(x-y) = i\exp\left\{ i\frac{g\pi}{g+\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2}\left(1-e^{-ik(x-y)}\right)\right\} G_F(x-y), \tag{3.77}$$

sendo que o propagador do modelo de Thirring dada pela Eq.(2.28) com $a=1$

$$G(x-y) = i\exp\left\{ -i\frac{g^2}{g+\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2}\left(1-e^{-ik(x-y)}\right)\right\} G_F(x-y). \tag{3.78}$$

c) A função de 3-pontos Eq.(3.54) neste limite reduz a

$$G_\mu\left(x,y;z\right) = -i\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{g\pi}{g+\pi}\frac{1}{k^2}\gamma_5\tilde{k}_\mu\left(e^{-ik(z-x)}-e^{-ik(z-y)}\right)G\left(x-y\right), \tag{3.79}$$

onde $G\left(x-y\right)$ é dado pela Eq.(3.77), e a função de vértice do modelo de Thirring dada pela Eq.(2.31) para $a=1$

$$G_\mu\left(x,y;z\right) = -i\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2}\left(k_\mu+\frac{\pi}{\pi+g}\gamma_5\tilde{k}_\mu\right)\left(e^{-ik(z-x)}-e^{-ik(z-y)}\right)G\left(x-y\right), \tag{3.80}$$

com o propagador fermiônico $G\left(x-y\right)$ dado pela Eq.(3.78). Já comentamos no propagador do campo de gauge a não existência da equivalência dos modelos em nível quântico, com a mesma análise no propagador fermiônico e na função de vértice constatamos que realmente os modelos de Thirring com simetria de gauge local e o modelo de Thirring não possuem equivalência em nível quântico, pois nos devidos limites os resultados do modelo de Thirring não são reproduzidos.

Referências

[3.1] T. Itoh, Y. Kim, M. Sugiura and K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **93** (1995) 417

[3.2] K. Kondo, Nucl. Phys. **B450** (1995) 251

[3.3] K. Kondo, Prog. Theor. Phys. **98** (1997) 211

[3.4] K. Ikegami, K. Kondo and A. Nakamura, Prog. Theor. Phys. **95** (1996) 206

[3.5] L.A. Manzoni, B.M. Pimentel and J.L. Tomazelli, Euro. Phys. J. **C8** (1999) 353

[3.6] J. T. Lunardi, B.M. Pimentel and L.A. Manzoni, Euro. Phys. J. **C12** (2000) 701

[3.7] J. T. Lunardi, B.M. Pimentel and L.A. Manzoni, Int. J. of Mod. Phys. **A15** (2000) 3263

COMENTÁRIOS FINAIS E PERSPECTIVAS

Estudamos modelos de teoria de campos em $(1+1)$-dimensões no espaço-tempo como sistemas vinculados e os quantizamos via integração funcional de maneira não-perturbativa. A análise dos sistemas vinculados seguiu a abordagem proposta por Dirac, que consiste na classificação dos vínculos da teoria em vínculos de primeira e segunda classe e, também na escolha das condições subsidiárias ou condições de gauge que são necessárias para a fixação dos multiplicadores de Lagrange dos vínculos de primeira classe, ou seja, fixação de gauge. Esse estudo se faz necessário por causa da necessidade de uma definição correta da medida de integração que aparece na amplitude de transição vácuo-vácuo, para que ela contenha apenas os graus de liberdade físicos da teoria. Sem essa caracterização "clássica"da teoria o processo de quantização estaria incorreto, estaríamos descrevendo graus de liberdade a mais, graus de liberdade não-físicos.

O ponto forte do estudo de modelos bi-dimensionais é a possibilidade de extrair aspectos não-perturbativos, observar fenômenos característicos de teorias mais realistas, etc. Na abordagem de integração funcional é o determinante fermiônico que possuí grande importância no estudo não-perturbativo, como vimos, para uma teoria de campos fermiônicos não-massivos ele é calculado exatamente. Também pode ser explorado a ambigüidade no processo de regularização da corrente fermiônica no cálculo do determinante, tal ambigüidade resulta na quebra da simetria de gauge. Em certos casos, como em teorias que não apresentam simetria de gauge local é interessante a análise explorando essa arbitrariedade, já que ela permite explorar alguns setores da teoria que normalmente não é possível.

Iniciamos o trabalho estudando o modelo de Schwinger que apresenta fenômenos semelhantes aos apresentados por teorias mais realistas, como geração dinâmica de massa para o campo vetorial e confinamento de elétrons. No propagador do campo de gauge vemos que o pólo indica a geração de massa e estados assintóticos para o campo de gauge. Já no propagador fermiônico quando calculado explicitamente no espaço dos momentos notamos que este não possui um pólo simples, implicando na não existência de estados assintóticos fermiônicos e, dessa forma, apresentando confinamento. O modelo apresenta vínculos de primeira e segunda classe, o que exige a fixação de gauge, com isso a medida de integração se torna um pouco mais complicada, vale ressaltar que também foi utilizado o ansatz de Faddeev-Popov. Dessa forma derivamos as funções de correlação, e delas observamos que o modelo é livre de divergências infravermelhas (devido a geração de massa no propagador do campo de gauge) e ultravioletas, e por último as identidades de Ward-Takahashi do modelo, as quais possuem grande importância na análise do setor transversal (invariância de gauge) através da identidade para a função $I1P$ 2-pontos do campo de gauge.

O próximo modelo estudado foi o modelo de Thirring, além de ser o precursor na área de modelos exatamente solúveis este possuí uma rica estrutura e várias aplicações em diversos ramos da física, principalmente em matéria condensada. O modelo de Thirring é muito similar à teoria de Fermi para interações fracas, que trata de interações entre partículas como interações entre correntes. Para realizar a integração nos campos fermiônicos de maneira exata, fora introduzido um campo vetorial auxiliar, o qual permite linearizar o termo de interação. Como o modelo em nível clássico não apresenta simetria de gauge local, é interessante usar uma prescrição não-invariante de gauge na regularização do determinante fermiônico, pois o parâmetro a que controla a ambigüidade indica a existência de simetria de gauge local em nível quântico em um setor do modelo, quando calculamos a identidade de Ward-Takahashi da função $I1P$ 2-pontos da corrente fermiônica. O propagador fermiônico apresenta divergência logarítmica (ultravioleta), e com o auxílio da identidade para a função $I1P$ 3-pontos observamos que as divergências ultravioletas no setor fermiônico são apenas provenientes do propagador fermiônico. Após a identificação do tipo das divergências fizemos a regularização e renormalização do propagador fermiônico que era o único responsável pela divergência e, também mostramos que a função de vértice se torna finita através do processo de regularização.

O último modelo estudado foi o modelo de Thirring com simetria de gauge local, também conhecido como modelo de Kondo, neste o campo vetorial auxiliar A_μ do modelo de Thirring é identificado como o campo vetorial de gauge e, também é introduzido um campo escalar auxiliar que implementa a simetria de gauge local em nível clássico. O mecanismo de implementação de simetria local de gauge que foi usado aqui é conhecido como *Hidden Local Simmetry* cuja autoria é de E.C.G. Stückelberg. O modelo foi proposto inicialmente por Itoh et al. e, posteriormente, numa outra formulação por K. Kondo. O modelo em nível clássico é equivalente aos modelos de Schwinger e Thirring nos limites das constantes de acoplamento fortes. Além do cálculo das funções de correlação, identidades de Ward-Takahashi, analisamos os limites das constantes de acoplamento em nível quântico, o que foi verificado através das funções de correlação, etc. Como foi mostrado na seção (3.3.5) a equivalência entre os modelos se dá somente em nível clássico. No limite de $g \to \infty$ recuperamos os resultados obtidos no primeiro capítulo para o modelo de Schwinger, já para $q \to \infty$ esperávamos que reproduzisse os resultados do modelo de Thirring como em nível clássico, fato este que não ocorre. Se analisarmos o gerador funcional que fora utilizado para determinar as funções de correlação, notamos que ele possui uma estrutura similar ao da eletrodinâmica quântica (lembrando que essa semelhança é apenas em nível quântico, por causa do gauge R_ξ), tendo como diferença um termo de massa para o campo de gauge A_μ (que pode ser justificado pela presença de massa do campo em nível quântico). Isso pode explicar a equivalência apenas com o modelo de Schwinger.

Pretendemos continuar investigando o modelo de Thirring com simetria de gauge local em futuros trabalhos, estudando outras características que aqui não foram abordadas, tais como bosonização, campos fermiônicos quirais, e quantização do modelo via formalismo de operadores covariantes.

Apêndice A

Notação e Convenções

No espaço-tempo de $(1+1)$-dimensões, a métrica $\eta_{\mu\nu}$ e o tensor de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu}$ são

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{\mu\nu}. \tag{A.1}$$

As matrizes γ_μ de Dirac satisfazem a seguinte álgebra em 2-dimensões

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \quad [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -2\epsilon_{\mu\nu}\gamma_5, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \tag{A.2}$$

e disso segue que

$$\gamma_\mu \gamma_5 = \epsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu. \tag{A.3}$$

Usaremos as seguintes definições

$$\gamma_0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

onde o conjunto $\{\sigma_i\}$ são as matrizes de Pauli. As matrizes γ_μ tem as seguintes propriedades

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_1^\dagger = -\gamma_1, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5. \tag{A.5}$$

Os projetores $P_\pm$ são definidos como

$$P_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma_5\right). \tag{A.6}$$

Definimos a seguinte notação

$$\tilde{v}_\mu = \epsilon_{\mu\nu} v^\nu. \tag{A.7}$$

Uma ferramenta útil na resolução de integrais é a representação λ, que consiste em

$$\frac{(i)^{1+\lambda}}{(A+i\epsilon)^{1+\lambda}} = \frac{1}{\Gamma\left(1+\lambda\right)} \int_0^\infty dx x^\lambda e^{ix(A+i\epsilon)}. \tag{A.8}$$

Alguns traços de matrizes γ_μ úteis

$$tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 2\eta^{\mu\nu}, \tag{A.9}$$
$$tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha] = 0, \tag{A.10}$$
$$tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5] = -2\epsilon^{\mu\nu}. \tag{A.11}$$

Usaremos a seguinte convenção para a transformação de Fourier

$$f(z) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k)\, e^{-ikz}. \tag{A.12}$$

Algumas integrais úteis

$$\int d^2x \frac{e^{-\epsilon x}}{x} \left(e^{ixp^2} - e^{ixq^2} \right) = \ln \left| \frac{q^2 + i\epsilon}{p^2 + i\epsilon} \right|, \tag{A.13}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^2k e^{iak^2} = \frac{\pi}{a}, \tag{A.14}$$

$$\int_0^{+\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-i\lambda m^2} \right) e^{-\epsilon\lambda - iz^2/4\lambda} = 2K_0 \left(\sqrt{i\epsilon z^2} \right) - 2K_0 \left(\sqrt{-z^2 m^2} \right), \tag{A.15}$$

onde $K_0(z)$ é a função de Bessel modificada de segunda classe de ordem zero cujos limites assintóticos são

$$K_0(z) \sim -ln\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma, \quad \text{para } z \to 0, \tag{A.16}$$

$$K_0(z) \to 0, \quad \text{para } z \to \infty, \tag{A.17}$$

sendo γ a constante de Euler-Mascheroni.

Aqui definimos os operadores de projeção transversal $T^{\mu\nu}$ e longitudinal $L^{\mu\nu}$ que são utilizados em todo o trabalho

$$T^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box}, \quad L^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\Box}, \tag{A.18}$$

que satisfazem as seguintes relações

$$T^{\mu\nu} + L^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}, \tag{A.19}$$

$$T^{\mu\nu} T_{\nu\alpha} = T^\mu{}_\alpha, \quad L^{\mu\chi} L_{\chi\beta} = L^\mu{}_\beta, \quad T^{\mu\nu} L_{\nu\beta} = 0, \tag{A.20}$$

$$T^{\mu\nu} \partial_\nu = 0, \quad T^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\nu = \tilde{\partial}^\mu, \quad L^{\mu\nu} \partial_\nu = \partial^\mu, \quad L^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\nu = 0. \tag{A.21}$$

Apêndice B

Cálculo do Determinante Fermiônico

Calcularemos as expressões da função de Green do campo de Dirac na presença de um campo externo e do determinante fermiônico; seguiremos o roteiro proposto por [B.1] e [B.2]. O modelo de Schwinger é descrito pela densidade Lagrangiana Eq.(1.1) que no nível clássico apresenta invariância local de gauge. A ação efetiva é definida pelo seguinte funcional do campo de gauge abeliano A^μ

$$\exp\{iW\left(A_\mu\right)\} = \int d\bar{\psi} d\psi \exp\left(i \int d^2x \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/\right)\psi\right) = \det\left(D\right), \tag{B.1}$$

onde $D \equiv i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/$. Podemos obter a seguinte relação

$$\begin{aligned} \det D &= \exp\left(\operatorname{tr}\ln D\right) \\ \frac{d}{dq}\ln\det\left(D\right) &= \operatorname{tr}\left(\frac{1}{D}\frac{dD}{dq}\right). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Trabalhando no espaço de configuração facilmente obtemos que

$$\frac{d}{dq}\ln\det\left(D\right) = \int d^2x \operatorname{tr}[G(x,x;A)\gamma_\mu]A^\mu(x). \tag{B.3}$$

Devemos tomar muito cuidado com a Eq.(B.2), pois a relação usada para obtê-la é válida apenas para matrizes com dimensão finita e, em nosso caso, a matriz da Eq.(B.2) possui dimensão infinita.
Temos que, $G\left(x,y;A\right)$ é a função de Green da equação de Dirac não-massiva

$$\left(i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/\right)G\left(x,y;A\right) = \delta\left(x-y\right). \tag{B.4}$$

Usando o seguinte ansatz para resolver a Eq.(B.4)

$$G\left(x,y;A\right) = e^{i(\phi(x)-\phi(y))}G_F\left(x-y\right), \tag{B.5}$$

onde $G_F\left(x-y\right)$ é a função de Green da equaç ão de Dirac livre

$$i\partial\!\!\!/ G_F\left(x-y\right) = \delta\left(x-y\right). \tag{B.6}$$

Em geral, podemos escrever a solução de férmions não-massivos em duas dimensões como o produto de uma função pela solução livre. Substituindo a Eq.(B.5) na Eq.(B.4) obtemos

$$\Box\phi\left(x\right) = q\partial\!\!\!/ A\!\!\!/\left(x\right),$$

cuja solução é

$$\phi\left(x\right) = q\int d^2z D_F\left(x-z\right)\left(\partial_z^\mu + \gamma_5\tilde{\partial}_z^\mu\right)A_\mu\left(z\right). \tag{B.7}$$

sendo $D_F(x-y)$ a função de Green da equação de Klein-Gordon não-massiva

$$\Box D_F(x-y) = \delta(x-y). \tag{B.8}$$

Então, substituindo a Eq.(B.7) na Eq.(B.4), obtemos

$$G(x,y;A) = \exp\left[-iq\int d^2 z s^\mu(z,x,y) A_\mu(z)\right] G_F(x-y), \tag{B.9}$$

com $s^\mu(z,x,y)$ dado por

$$s^\mu(z,x,y) = \left(\partial_z^\mu + \gamma_5\tilde{\partial}_z^\mu\right)\left(D_F(z-x) - D_F(z-y)\right).$$

Calculando a expressão do propagador de Dirac livre no espaço das coordenadas, observamos que para $(x-y)\to 0$ o propagador vai a infinito, ou seja, a expressão apresenta divergência ultravioleta. Portanto, para tornarmos ela finita, devemos usar um método de regularização. Utilizaremos aqui o método de separação de pontos (*point-splitting*)[B.3]

$$\frac{d}{dq}\ln\det(D) = \lim_{y\to x}\int d^2 x \mathrm{tr}\left[G(x,y;A)\gamma^\mu\right]\exp\left[iqa\int_x^y d^2 z^\alpha A_\alpha(z)\right] A_\mu(x), \tag{B.10}$$

onde a parametriza uma ambigüidade no processo de regularização. Tal parâmetro foi proposto por Jackiw e Rajaramam numa abordagem não invariante de gauge [B.4]. A introdução do parâmetro a permite explorar algumas características não reveladas numa prescrição invariante de gauge. No caso em que $a=1$ a invariância de gauge é preservada.

Segue agora algumas relações úteis para o cálculo que se segue

$$\begin{aligned}
\partial_\mu D(\epsilon) &= \frac{i}{2\pi}\frac{\epsilon_\mu}{\epsilon^2}, \\
\mathrm{tr}\left(P_\pm G_F(x-y)\gamma^\mu\right) &= i\left(\partial_x^\mu \pm \tilde{\partial}_x^\mu\right) D_F(x-y), \\
D_F(x-z) - D_F(y-z) &= -\epsilon_\alpha \partial_z^\alpha D_F(x-z).
\end{aligned}$$

Expandindo o lado direito da Eq.(B.10) em torno de $\epsilon = x-y$ até a ordem ϵ^2, com $\epsilon\to 0$

$$\begin{aligned}
= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\epsilon^2}\int d^2x\Big[&-2\epsilon^\mu + 2iqaA_\alpha(x)\epsilon^\alpha\epsilon^\mu - iq\left(\epsilon_\alpha\epsilon^\mu - \epsilon_\alpha\tilde{\epsilon}^\mu\right)\int d^2 z A_\nu(z)\left(\partial_z^\nu - \tilde{\partial}_z^\nu\right)\partial_z^\alpha D_F(x-z) + \\
&-iq\left(\epsilon_\alpha\epsilon^\mu + \epsilon_\alpha\tilde{\epsilon}^\mu\right)\int d^2 z A_\nu(z)\left(\partial_z^\nu + \tilde{\partial}_z^\nu\right)\partial_z^\alpha D_F(x-z) + O\left(\epsilon^3\right)\Big] A_\mu(x).
\end{aligned} \tag{B.11}$$

O primeiro termo proporcional à $\frac{\epsilon^\mu}{\epsilon^2}$ é divergente no limite $\epsilon\to 0$, então, o modo de eliminar tal divergência é fazendo a média sobre todas as direções ϵ

$$\overline{\epsilon^\mu} = 0, \quad \overline{\epsilon^\mu\epsilon^\nu} = \frac{\epsilon^2}{2}\eta^{\mu\nu}, \tag{B.12}$$

Dessa forma, tomamos o limite $\epsilon\to 0$

$$\frac{d}{dq}\ln\det(D) = \frac{iq}{2\pi}\int d^2x\Big[aA^\mu(x)A_\mu(x) - A_\mu(x)\int d^2 z\left(\partial_z^\nu\partial_z^\mu + \tilde{\partial}_z^\nu\tilde{\partial}_z^\mu\right) D_F(x-z)A_\nu(z)\Big].$$

Agora, integrando em q e usando a relação

$$\partial_z^\nu\partial_z^\mu - \tilde{\partial}_z^\nu\tilde{\partial}_z^\mu = \eta^{\nu\mu}\Box,$$

obtemos

$$\ln\det(D) = \frac{iq^2}{4\pi}\int d^2x\left[aA^\mu(x)A_\mu(x) - A_\mu(x)\int d^2 z\left(2\partial_z^\mu\partial_z^\nu - \eta^{\mu\nu}\Box\right) D_F(x-z)A_\nu(z)\right].$$

Usando a Eq.(B.8) conseguimos o seguinte resultado

$$\det\left(i\partial\!\!\!/ + qA\!\!\!/\right) = \exp\left[\frac{iq^2}{2\pi}\int d^2 z A_\mu(z)\left(\frac{(a+1)}{2}\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial_z^\mu\partial_z^\nu}{\Box}\right)A_\nu(z)\right]. \tag{B.13}$$

Para $a=1$ a Eq.(B.13) é invariante de gauge e exibe a massa do bóson de gauge calculada por Schwinger $m_s^2 = \frac{q^2}{\pi}$. Observamos assim que um termo de massa para o campo de gauge A_μ é gerado em nível quântico.

Referências

[B.1] S.A. Dias and C.A. Linhares, Phys. Rev. **45D** (1992) 2162

[B.2] R.C. Sifuentes, *Renormalização e Ambigüidades na* QED_2 Ms.S. thesis, 02/97,CBPF

[B.3] J. Schwinger, Phys. Rev. Letters **3** (1959) 296

[B.4] R. Jackiw and R. Rajaramam, Phys. Rev. Let. **54** (1985) 1219

Apêndice C

Relações Funcionais

Tomaremos o gerador funcional da QED_2 para derivarmos importantes relações funcionais que são usadas em todo o trabalho. Dada a densidade Lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A_\mu)$ definimos o gerador funcional das funções de Green completas, Z$(\eta, \bar{\eta}, J_\mu)$ como na Eq.(1.53)

$$Z(\eta, \bar{\eta}, J_\mu) = N \int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} \exp\left[i \int d^2x \left(\mathcal{L}\left(\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right) + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu\right)\right], \tag{C.1}$$

η e $\bar{\eta}$ são as fontes fermiônicas externas, e J_μ é a fonte externa para o campo de gauge. Definindo o gerador funcional das funções de Green conexas $W(\eta, \bar{\eta}, J_\mu)$ como

$$Z(\eta, \bar{\eta}, J_\mu) = \exp\left[iW(\eta, \bar{\eta}, J_\mu)\right]. \tag{C.2}$$

Isso nos permite escrever os campos na representação funcional

$$A_\mu(x) = \frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)}, \quad \psi(x) = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)}, \quad \bar{\psi}(x) = -\frac{\delta W}{\delta \eta(x)}. \tag{C.3}$$

Expressaremos algumas relações entres as funções de Green completas, as funções de Green conexas, assim, consideramos os propagadores e a função de vértice da teoria. Então, o propagador bosônico

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle &= - \left.\frac{\delta^2 Z}{\delta J^\nu(y)\, \delta J^\mu(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} \\ &= -i \left.\frac{\delta^2 W}{\delta J^\nu(y)\, \delta J^\mu(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} \end{aligned} \tag{C.4}$$

propagador fermiônico

$$G(x-y) = \left\langle 0 \left| T\psi(x) \bar{\psi}(y) \right| 0 \right\rangle = - \left.\frac{\delta^2 Z}{\delta \eta(y)\, \delta \bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} = -i \left.\frac{\delta^2 W}{\delta \eta(y)\, \delta \bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} \tag{C.5}$$

e a função de vértice por

$$\begin{aligned} G_\mu(x, y; z) = \left\langle 0 \left| T\psi(x) \bar{\psi}(y) A_\mu(z) \right| 0 \right\rangle &= i \left.\frac{\delta^3 Z}{\delta J^\mu(z)\, \delta \eta(y)\, \delta \bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} \\ &= - \left.\frac{\delta^3 W}{\delta J^\mu(z)\, \delta \eta(y)\, \delta \bar{\eta}(x)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=J_\mu=0} \end{aligned} \tag{C.6}$$

Para obtermos os propagadores completos, os operadores e os estados de vácuo devem estar na representação de Heisenberg.

Outra função importante que devemos introduzir é o gerador funcional das funções irredutíveis de uma partícula ($I1P$), $\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)$ (também conhecido como ação funcional efetiva), através da seguinte transformação de Legendre

$$\Gamma\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)=W\left(\eta,\bar{\eta},J_\mu\right)-\int d^2x\left(\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta+J_\mu A^\mu\right). \tag{C.7}$$

Dessa forma, podemos ter uma representação funcional para as fontes externas, tal como fizemos para os campos Eq.(C.3)

$$J_\mu(x)=-\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)},\quad \bar{\eta}(x)=\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)},\quad \eta(x)=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}. \tag{C.8}$$

C.1 Campos Fermiônicos

A partir da relação

$$\psi_a\left(x\right)=\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}_a\left(x\right)}, \tag{C.9}$$

fazemos a derivada funcional em relação a $\psi_b\left(y\right)$

$$\delta_{ab}\delta\left(x-y\right)=\int d^2z\frac{\delta\eta_c\left(z\right)}{\delta\psi_b\left(y\right)}\frac{\delta^2W}{\delta\eta_c\left(z\right)\delta\bar{\eta}_a\left(x\right)}=\int d^2z\frac{\delta}{\delta\psi_b\left(y\right)}\left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_c\left(z\right)}\right)\frac{\delta^2W}{\delta\eta_c\left(z\right)\delta\bar{\eta}_a\left(x\right)}, \tag{C.10}$$

disso obtemos a seguinte identidade funcional

$$\int d^2z\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_b\left(y\right)\delta\bar{\psi}_c\left(z\right)}\frac{\delta^2W}{\delta\eta_c\left(z\right)\delta\bar{\eta}_a\left(x\right)}=-\delta_{ab}\delta\left(x-y\right). \tag{C.11}$$

Se fizermos os campos e as fontes externas irem a zero, obtemos a relação

$$\int d^2zG_{ac}\left(x-z\right)\Gamma_{cb}\left(z-y\right)=i\delta_{ab}\delta\left(x-y\right), \tag{C.12}$$

onde definimos $\Gamma_{ab}\left(x-y\right)$ como a função $I1P$ 2-pontos fermiônica

$$\Gamma_{ab}\left(x-y\right)\equiv\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_b\left(y\right)\delta\bar{\psi}_a\left(x\right)}\right|_{c=0}. \tag{C.13}$$

Similarmente, para as relações

$$\eta_a\left(x\right)=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_a\left(x\right)}, \tag{C.14}$$

derivamos funcionalmente em relação a $\eta_b\left(y\right)$, e obtemos

$$\delta_{ab}\delta\left(x-y\right)=-\int d^2z\frac{\delta\psi_c\left(z\right)}{\delta\eta_b\left(y\right)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_c\left(z\right)\delta\bar{\psi}_a\left(x\right)}=-\int d^2z\frac{\delta}{\delta\eta_b\left(y\right)}\left(\frac{\delta W}{\delta\bar{\eta}_c\left(z\right)}\right)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_c\left(z\right)\delta\bar{\psi}_a\left(x\right)},$$

$$\int d^2z\frac{\delta^2W}{\delta\eta_b\left(y\right)\delta\bar{\eta}_c\left(z\right)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_c\left(z\right)\delta\bar{\psi}_a\left(x\right)}=-\delta_{ab}\delta\left(x-y\right). \tag{C.15}$$

Se fizermos os campos e fontes externas irem a zero

$$\int d^2z\Gamma_{ac}\left(x-z\right)G_{cb}\left(z-y\right)=i\delta_{ab}\delta\left(x-y\right), \tag{C.16}$$

escrevemos as funções na representação dos momentos

$$\Gamma\left(x-y\right)=\int\frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\tilde{\Gamma}\left(p\right)e^{-ip(x-y)},\quad G\left(x-y\right)=\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\tilde{G}\left(k\right)e^{-ik(x-y)}. \tag{C.17}$$

E, dessa forma, escrevemos a Eq.(C.16) no espaço dos momentos

$$\begin{aligned}
\int d^2z \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\tilde{\Gamma}_{ac}(p)\,\tilde{G}_{cb}(k)\,e^{-ip(x-z)}e^{-ik(z-y)} &= i\delta_{ab}\delta(x-y)\,, \\
\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\tilde{\Gamma}_{ac}(p)\,\tilde{G}_{cb}(k)\,e^{-ipx+iky}\int d^2z e^{-iz(k-p)} &= i\delta_{ab}\delta(x-y)\,, \\
\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\left[\tilde{\Gamma}_{ac}(p)\,\tilde{G}_{cb}(p) - i\delta_{ab}\right]e^{-ip(x-y)} &= 0.
\end{aligned}$$

A última equação é consistente se

$$\tilde{\Gamma}_{ac}(p)\,\tilde{G}_{cb}(p) = i\delta_{ab}. \tag{C.18}$$

Finalmente obtemos os resultados

$$\tilde{\Gamma}(p)\,\tilde{G}(p) = i, \qquad \tilde{G}(p)\,\tilde{\Gamma}(p) = i, \tag{C.19}$$

a expressão da direita é obtida a partir da Eq.(C.12).

C.2 Campo de Gauge

A partir da relação

$$A^\mu(x) = \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)}, \tag{C.20}$$

derivamos em relação a $A_\nu(y)$

$$\begin{aligned}
\delta^{\mu\nu}\delta(x-y) &= \int d^2z \frac{\delta J^\alpha(z)}{\delta A_\nu(y)}\frac{\delta^2 W}{\delta J^\alpha(z)\,\delta J_\mu(x)} = \int d^2z \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\left(-\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\alpha(z)}\right)\frac{\delta^2 W}{\delta J^\alpha(z)\,\delta J_\mu(x)}, \\
\delta^{\mu\nu}\delta(x-y) &= -\int d^2z \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\nu(y)\,\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta^2 W}{\delta J^\alpha(z)\,\delta J_\mu(x)}.
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Fazendo os campos e as fontes externas irem a zero,

$$\int d^2z G_{\mu\alpha}(x-z)\,\Gamma^{\alpha\nu}(z-y) = i\delta_\mu{}^\nu\delta(x-y)\,, \tag{C.22}$$

definindo $\Gamma^{\mu\nu}(x-y)$ como a função $I1P$ 2-pontos do campo de gauge

$$\Gamma^{\mu\nu}(x-y) \equiv \left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\nu(y)\,\delta A_\mu(x)}\right|_{c=0}, \tag{C.23}$$

Similarmente, se partimos de $J^\mu(x) = -\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu(x)}$, derivarmos em relação a $J^\nu(y)$ e, usarmos o fato de que $A_\mu(x) = \frac{\delta W}{\delta J^\mu(x)}$ obtemos

$$\delta^\mu{}_\nu\delta(x-y) = -\int d^2z \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\alpha(z)\,\delta A_\mu(x)}\frac{\delta^2 W}{\delta J^\nu(y)\,\delta J^\alpha(z)}, \tag{C.24}$$

e fazendo os campos e fontes externas irem a zero

$$\int d^2z \Gamma^{\mu\alpha}(x-z)\,G_{\alpha\nu}(z-y) = i\delta^\mu{}_\nu\delta(x-y)\,. \tag{C.25}$$

Podemos escrever as Eqs.(C.22) e (C.25) no espaço dos momentos

$$\tilde{G}_{\mu\alpha}(p)\,\tilde{\Gamma}^{\alpha\nu}(p) = i\delta_\mu{}^\nu, \qquad \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha}(p)\,\tilde{G}_{\alpha\nu}(p) = i\delta^\mu{}_\nu. \tag{C.26}$$

C.3 Função de Vértice

A relação funcional Eq.(C.11)

$$\int d^2z' \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_c(z')\,\delta\bar{\psi}_a(x)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_b(y)\,\delta\bar{\eta}_c(z')} = -\delta_{ab}\delta(x-y)$$

é derivada em relação a $A_\mu(z)$

$$\int d^2z' \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\mu(z)\,\delta\psi_c(z')\,\delta\bar{\psi}_a(x)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_b(y)\,\delta\bar{\eta}_c(z')} + \\ + \int d^2z' d^2x' \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_c(z')\,\delta\bar{\psi}_a(x)} \frac{\delta J^\nu(x')}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta^3 W}{\delta J^\nu(x')\,\delta\eta_b(y)\,\delta\bar{\eta}_c(z')} = 0 \qquad . \tag{C.27}$$

Sendo que usamos a representação funcional Eq.(C.8) para a fonte $J^\nu(x')$. Multiplicando a última expressão por $\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_d(y')\delta\bar{\psi}_b(y)}$ e integrando em y

$$\int d^2z' \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\mu(z)\,\delta\psi_c(z')\,\delta\bar{\psi}_a(x)} \left[\int d^2y \frac{\delta^2 W}{\delta\eta_b(y)\,\delta\bar{\eta}_c(z')} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_d(y')\,\delta\bar{\psi}_b(y)}\right] + \\ - \int d^2z' d^2x' d^2y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_c(z')\,\delta\bar{\psi}_a(x)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(z)\,\delta A_\nu(x')} \frac{\delta^3 W}{\delta J^\nu(x')\,\delta\eta_b(y)\,\delta\bar{\eta}_c(z')} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_d(y')\,\delta\bar{\psi}_b(y)} = 0, \tag{C.28}$$

usando a relação Eq.(C.14) no termo que se encontra entre parênteses obtemos

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\mu(z)\,\delta\psi_d(y')\,\delta\bar{\psi}_a(x)} + \\ + \int d^2z' d^2x' d^2y \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_c(z')\,\delta\bar{\psi}_a(x)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(z)\,\delta A_\nu(x')} \frac{\delta^3 W}{\delta J^\nu(x')\,\delta\eta_b(y)\,\delta\bar{\eta}_c(z')} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_d(y')\,\delta\bar{\psi}_b(y)} = 0.$$

Para termos uma expressão na forma que desejamos fazemos as mudanças $d \leftrightarrow b$, $y \leftrightarrow y'$, $z' \leftrightarrow x'$ na relação acima. Fazendo os campos e fontes externas irem a zero nós obtemos a função $I1P$ 3-pontos do vértice $\Gamma^\mu(x,y;z)$ em termos da função de vértice Eq.(C.6), da função $I1P$ 2-pontos fermiônica Eq.(C.12) e da função $I1P$ 2-pontos do campo de gauge Eq.(C.23)

$$\Gamma^\mu_{ab}(x,y;z) = \int d^2x' d^2y' d^2z' \Gamma_{ac}(x-x')\, G_{\nu;cd}(x',y';z')\, \Gamma_{db}(y'-y)\, \Gamma^{\nu\mu}(z'-z), \tag{C.29}$$

onde definimos a função $I1P$ 3-pontos de vértice

$$\Gamma^\mu_{ab}(x,y;z) \equiv \left.\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\mu(z)\,\delta\psi_b(y)\,\delta\bar{\psi}_a(x)}\right|_{c=0}. \tag{C.30}$$

Similarmente se partimos da relação funcional Eq.(C.11), mas ao invés de derivarmos em relação a $A_\mu(z)$ derivarmos em relação a $J^\mu(z)$ obtemos a função de vértice Eq.(C.6) em termos da função $I1P$ 3-pontos do vértice $\Gamma^\mu(x,y;z)$ Eq.(C.30) e das funções de Green bosônica Eq.(C.4) e fermiônica Eq.(C.5)

$$G_{\mu;ab}(x,y;z) = i\int d^2s d^2u d^2v G_{ac}(x-s)\, \Gamma^\alpha_{cd}(s,v;u)\, G_{db}(v-y)\, G_{\alpha\mu}(u-z). \tag{C.31}$$

Expressando as funções $I1P$ e Green no espaço dos momentos

$$\Gamma(x-x') = \int \frac{d^2p_1}{(2\pi)^2} \tilde{\Gamma}(p_1)\, e^{-ip_1(x-x')}, \tag{C.32}$$

$$G_\nu(x',y';z') = \int \frac{d^2p_2}{(2\pi)^2} \frac{d^2q_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2q_2}{(2\pi)^2} \tilde{G}_\nu(p_2,q_1;q_2)\, e^{-i\left(p_2x'+q_1y'+q_2z'\right)}, \tag{C.33}$$

podemos calcular

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{\alpha}(p,k;q) &= \int d^2xd^2yd^2z\Gamma^{\alpha}(x,y;z)\,e^{i(px+ky+qz)},\\ &= \int d^2xd^2yd^2z\Big(\int d^2x'd^2y'd^2z'\Gamma(x-x')\,G_{\nu}(x',y';z')\,\Gamma(y-y')\,\Gamma^{\nu\alpha}(y-y')\Big)e^{i(px+ky+qz)},\end{aligned}$$

onde fizemos uso da Eq.(C.29).

Reescrevendo todas as funções da equação acima no espaço dos momentos conforme as Eqs.(C.32) e (C.33)

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{\alpha}(p,k;q) &= \int \frac{d^2p_1}{(2\pi)^2}\frac{d^2p_2}{(2\pi)^2}\frac{d^2p_3}{(2\pi)^2}\frac{d^2q_1}{(2\pi)^2}\frac{d^2q_2}{(2\pi)^2}\frac{d^2q_3}{(2\pi)^2}\tilde{\Gamma}(p_1)\,\tilde{G}_{\nu}(p_2,q_1;q_2)\,\tilde{\Gamma}(p_3)\,\tilde{\Gamma}^{\nu\alpha}(q_3)\times\\ &\times\int d^2xd^2yd^2z\exp\left[-ix(p_1-p)+iy(k+p_3)+iz(q+q_3)\right]\times\\ &\times\int d^2x'd^2y'd^2z'\exp\left[-ix'(p_2-p_1)-iy'(p_3+q_1)-iz'(q_3+q_2)\right].\end{aligned}\tag{C.34}$$

Integrando em x, y, z, x', y' e z' obtemos uma expressão em termos das funções delta

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{\alpha}(p,k;q) &= \int d^2p_1d^2p_2d^2p_3d^2q_1d^2q_2d^2q_3\tilde{\Gamma}(p_1)\,\tilde{G}_{\nu}(p_2,q_1;q_2)\,\tilde{\Gamma}(p_3)\,\tilde{\Gamma}^{\nu\alpha}(q_3)\,\delta(p_1-p)\,\delta(k+p_3)\times\\ &\times\delta(q+q_3)\,\delta(p_2-p_1)\,\delta(p_3+q_1)\,\delta(q_3-q_2).\end{aligned}$$

Usando as funções delta para resolver as integrações obtemos

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}(p,k;q)=\tilde{\Gamma}(p)\,\tilde{G}_{\nu}(p,k;q)\,\tilde{\Gamma}(-k)\,\tilde{\Gamma}^{\nu\alpha}(-q).\tag{C.35}$$

Agora calcularemos a função de vértice no espaço dos momentos $\tilde{G}_{\nu}(p,k;q)$, sendo ela é escrita no espaço das configurações

$$G_{\mu}(x,y;z)=i\int\frac{d^2k_1}{(2\pi)^2}h_{\mu}(k_1)\left(e^{-ik_1(z-x)}-e^{-ik_1(z-y)}\right)G(x-y).$$

Ela sempre possui a mesma forma, somente $h_{\mu}(k_1)$ que varia para cada modelo. Portanto, a expressão obtida será um caso geral, ficando apenas uma multiplicação a ser resolvida. Ela escrita no espaço de Fourier

$$\tilde{G}_{\nu}(p,k;t)=\int d^2xd^2yd^2zG_{\nu}(x,y;z)\,e^{i(px+ky+tz)},$$

$$=i\int d^2xd^2yd^2z\frac{d^2k_1}{(2\pi)^2}\frac{d^2p_1}{(2\pi)^2}h_{\nu}(k_1)\,\tilde{G}(p_1)\left(e^{-ix(p_1-k_1-p)+iy(p_1+k)}-e^{-ix(p_1-p)+iy(p_1+k_1+k)}\right)e^{-iz(k_1-t)}.$$

Integrando em x, y e z obtemos uma expressão em termos das funções delta dos momentos

$$\tilde{G}_{\nu}(p,k;t)=i(2\pi)^2\int d^2k_1d^2p_1h_{\nu}(k_1)\,\tilde{G}(p_1)\left(\delta(p_1-t-p)\,\delta(k+p_1)-\delta(p_1-p)\,\delta(p_1+k_1+k)\right)\delta(k_1-t),$$

as funções delta nos permite integrar em k_1 e em p_1

$$\tilde{G}_{\nu}(p,k;t)=i(2\pi)^2h_{\nu}(t)\left(\tilde{G}(p+t)-\tilde{G}(p)\right)\delta(p+k+t).\tag{C.36}$$

A Eq.(C.36) é utilizada quando calculamos a função de vértice no espaço dos momentos.

Com esse último resultado podemos escrever

$$
\begin{aligned}
G_\mu\left(x,y;z\right) &= \int\frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2t}{\left(2\pi\right)^2}\tilde{G}_\mu\left(p,k;t\right)e^{-i(px+ky+tz)},\\
&= i\left(2\pi\right)^2\int\frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2t}{\left(2\pi\right)^2}\delta\left(p+k+t\right)h_\mu\left(t\right)\left(\tilde{G}\left(p+t\right)-\tilde{G}\left(p\right)\right)e^{-i(px+ky+tz)},
\end{aligned}
$$

integrando em k

$$
G_\mu\left(x,y;z\right)=\int\frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2t}{\left(2\pi\right)^2}\tilde{G}_\mu\left(p;t\right)e^{-ip(x-y)-it(z-y)}, \tag{C.37}
$$

sendo a função$\tilde{G}_\mu\left(p;t\right)$ definida como

$$
\tilde{G}_\mu\left(p;t\right)\equiv ih_\mu\left(t\right)\left(\tilde{G}\left(p+t\right)-\tilde{G}\left(p\right)\right) \tag{C.38}
$$

Substituindo a Eq.(C.36) na Eq.(C.35) obtemos

$$
\tilde{\Gamma}^\alpha\left(p,k;t\right)=i\left(2\pi\right)^2\tilde{\Gamma}\left(p\right)h_\nu\left(t\right)\tilde{\Gamma}^{\nu\alpha}\left(-t\right)\left(\tilde{G}\left(p+t\right)-\tilde{G}\left(p\right)\right)\tilde{\Gamma}\left(-k\right)\delta\left(p+k+t\right) \tag{C.39}
$$

Com esses resultados calculamos a função $I1P$ 3-pontos

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\alpha\left(x,y;z\right) &= \int\frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2t}{\left(2\pi\right)^2}\tilde{\Gamma}^\alpha\left(p,k;t\right)e^{-i(px+ky+tz)},\\
&= i\left(2\pi\right)^2\int\frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2t}{\left(2\pi\right)^2}\tilde{\Gamma}\left(p\right)h_\nu\left(t\right)\tilde{\Gamma}^{\nu\alpha}\left(-t\right)\left(\tilde{G}\left(p+t\right)-\tilde{G}\left(p\right)\right)\tilde{\Gamma}\left(-k\right),
\end{aligned}
$$

integrando em k obtemos

$$
\Gamma^\alpha\left(x,y;z\right)=\int\frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2t}{\left(2\pi\right)^2}\tilde{\Gamma}^\alpha\left(p;t\right)e^{-ip(x-y)-it(z-y)}, \tag{C.40}
$$

onde definimos a seguinte função

$$
\tilde{\Gamma}^\alpha\left(p;t\right)\equiv i\tilde{\Gamma}\left(p\right)h_\nu\left(t\right)\tilde{\Gamma}^{\nu\alpha}\left(-t\right)\left(\tilde{G}\left(p+t\right)-\tilde{G}\left(p\right)\right)\tilde{\Gamma}\left(p+t\right), \tag{C.41}
$$

que pode ser reescrita usando as Eqs.(C.19) da seguinte forma

$$
\tilde{\Gamma}^\alpha\left(p;t\right)=h_\nu\left(t\right)\tilde{\Gamma}^{\nu\alpha}\left(-t\right)\left(\tilde{\Gamma}\left(p+t\right)-\tilde{\Gamma}\left(p\right)\right). \tag{C.42}
$$

A Eq.(C.42) é utilizada quando calculamos a identidade de Ward-Takahashi da função $I1P$ 3-pontos no espaço dos momentos.