



UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL



*ANÁLISE DE PROBLEMAS 3D NO DOMÍNIO DA
FREQUÊNCIA VIA PROCESSO DE ACOPLAMENTO
MULTIDOMÍNIO BE/BE*

Por

CLÁUDIO JOSÉ MARTINS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
CONSTRUÇÕES METÁLICAS

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ESTRUTURAS METÁLICAS

Orientador: PROF. DR.-ING. FRANCISCO CÉLIO DE ARAÚJO

OURO PRETO
Fevereiro/2000

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO - ESCOLA DE MINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ANÁLISE DE PROBLEMAS 3D NO DOMÍNIO DA
FREQUÊNCIA VIA PROCESSO DE ACOPLAMENTO
MULTIDOMÍNIO BE/BE**

AUTOR : Cláudio José Martins

ORIENTADOR: Prof. Francisco Célio de Araújo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Construção Metálica.

ANÁLISE DE PROBLEMAS 3D NO DOMÍNIO DA
FREQUÊNCIA VIA PROCESSO DE ACOPLAMENTO
MULTIDOMÍNIO BE/BE

AUTOR: CLÁUDIO JOSÉ MARTINS

Esta dissertação foi apresentada em seção pública
e aprovada em 16 de fevereiro de 2000, pela Banca
Examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Francisco Célio de Araújo (Dr.-Ing./UFOP)
Presidente

Prof. Ricardo A. M. Silveira (D.Sc/UFOP)

Prof. João Webe Mansur (Ph.D/COPPE/UFRJ)

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um algoritmo para a resolução de problemas elastodinâmicos tridimensionais no domínio da frequência via formulação direta do Método dos Elementos de Contorno (BEM), sendo enfatizados o desenvolvimento de uma técnica de acoplamento multidomínio e o estudo de procedimentos numéricos para a solução de sistemas algébricos de equações (diretos e iterativos). O algoritmo genérico de acoplamento BE/BE se baseia numa técnica de não-condensamento, ainda que apenas os blocos de matriz contendo coeficientes com valores complexos não nulos sejam armazenados e manipulados durante o processo de análise. Com o objetivo de aumentar a eficiência do algoritmo, *solvers* iterativos baseados nos processos de Lanczos e gradiente biconjugado, eventualmente preconditionados, que possuem excelente performance em análises via MEC envolvendo matrizes com coeficientes reais, serão implementados. Detalhes da formulação do algoritmo elastodinâmico desenvolvido e dos procedimentos iterativos serão discutidos. A performance do algoritmo é então verificada na resolução de vários problemas tridimensionais frequência e tempo-dependentes. Parâmetros importantes para a estimativa da eficiência do algoritmo, e que serão apresentadas nos resultados desta tese de mestrado são a precisão, número de iterações e tempo de processamento requerido.

ABSTRACT

In this work an algorithm for solving general 3D elastodynamic problems in the frequency-domain and via a direct formulation of the boundary element method(BEM) is presented, being specifically the development of a generic multizone technique and the study of solutions techniques of algebraic systems of equations(direct and iterative ones) emphasised. The generic BE/BE coupling algorithm bases on a non-condensing technique, yet such that only the block matrices with non-zero complex-valued coefficients are stored and manipulated during the analysis process. In order to increase the efficiency of the algorithm, iterative solvers based on the Lanczos and the biconjugate gradient process, that has quite a good performance for BEM analyses involving real-valued function and thereby also real coefficient matrices, eventually preconditioned, are applied. Details on the formulation of the used BE elastodynamic algorithm and the iterative procedures are discussed. The performance of the whole algorithm is then verified by solving various three-dimensional frequency and time-dependent problems. Important parameters for estimating the efficiency of the algorithm and that will be presented in the results of this M.Sc. thesis are the accuracy, number of iterations and the required CPU times.

ÍNDICE

Resumo	III
Abstract	IV
Índice	V
Capítulo I - Introdução	01
Capítulo II - O Problema Elastodinâmico	
2.1 - Introdução.....	06
2.2 - Formulação Tempo Dependente.....	07
2.3 - O Problema Steady-State.....	10
2.4 - Equação Integral de Contorno.....	12
2.5 - Formulação Completa no Domínio do Tempo.....	18
2.6 - Amortecimento.....	22
Capítulo III - O Método dos Elementos de Contorno	
3.1 - Introdução.....	24
3.2 - Formulação Método dos Elementos de Contorno..	24
3.3 - Integração Espacial.....	28
3.4 - Sistema Algébrico Resultante do Acoplamento..	31
3.5 - Resolução de Sistemas Lineares Complexos.....	35
Capítulo IV - Métodos Diretos	
4.1 - Introdução.....	38

4.2 - O Método da Eliminação de Gauss.....	39
4.3 - O Método da Decomposição LU	45
4.4 - Técnicas para Melhoramento das Soluções.....	50
Capítulo V - Métodos Iterativos	
5.1 - Introdução.....	52
5.2 - Métodos Iterativos Básicos.....	53
5.3 - Aceleração Polinomial.....	54
5.4 - Algoritmo de Lanczos.....	55
5.5 - Algoritmo de Gradiente Biconjugado.....	65
5.6 - Critério de Convergência.....	68
Capítulo VI - Aplicações	
6.1 - Introdução.....	69
6.2 - Esfera sob Tensão Uniforme Prescrita.....	70
6.3 - Cubo sob Tensão Uniforme Prescrita.....	75
6.4 - Barra Prismática sob Oscilação de Base.....	79
6.5 - Barra sob Carregamento de Heaviside.....	82
6.6 - Fundação Rígida.....	85
6.7 - Fundação Flexível.....	86
6.8 - Acoplamento Estrutura-Solo-Estrutura.....	88
6.9 - Acoplamento Estrutura-Solo-Solo.....	90
6.10 - Barras sob Carregamento Senoidal.....	91
Capítulo VII - Conclusões.....	96
Bibliografia	99

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Em problemas dinâmicos tempo-dependentes tratados em engenharia, deseja-se, de um modo geral, avaliar a solução do problema ao longo de um certo tempo de análise de interesse. No caso específico da consideração de carregamentos periódicos aplicados a sistemas estruturais, como é o caso por exemplo de problemas de dimensionamento de fundação de máquinas ou outros problemas de análise de vibração em estruturas, ocorre que os efeitos de transitoriedade da resposta podem ser desconsiderados, e esta passa a ter assim um comportamento estacionário.

Uma maneira bastante simples de se proceder à resolução de tais problemas, é através da representação das suas variáveis em termos de funções complexas harmônicas no tempo. Tal procedimento de análise constitui forma eficiente para a resolução de problemas estacionários, uma vez que procedendo-se assim, um problema tempo-dependente de valor inicial e de contorno é substituído por um problema frequência-dependente de valor de contorno apenas, equivalente ao primeiro. Além disto, a análise no domínio da frequência é bastante útil em situações para as quais parâmetros físicos dependam da frequência do sistema, como no caso da implementação de amortecimento, comum em problemas de interação solo-estrutura. Devido a esses fatores não é raro a análise de problemas físicos em engenharia através do domínio da frequência, visto que esta

constitui uma importante ferramenta para engenheiros e outros cientistas envolvidos com análises de sistemas dinâmicos.

Da análise de problemas físicos através de métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos(FEM) e o Método dos Elementos de Contorno(BEM), resulta que os modelos matemáticos que descrevem o problema são convertidos em sistemas lineares de equações algébricas, os quais fornecem então uma resposta aproximada para o sistema físico em análise. Uma vez que grande parte do tempo total de análise destes problemas se deve à resolução do(s) sistema(s) resultante(s), é de fundamental importância pois, estabelecer algoritmos otimizados quanto à forma de operar, já que com isto pode-se proporcionar grande redução do custo de processamento total da análise, principalmente em problemas dinâmicos, em que vários sistemas lineares devem ser resolvidos.

Especificamente para o caso de análise de problemas frequência-dependentes via Métodos dos Elementos de Contorno, resultam, de um modo geral, ao contrário do que acontece em análises via o Método dos Elementos Finitos, sistemas lineares constituídos de matrizes não-hermitianas e cheias(para discretizações envolvendo uma única subestrutura) ou parcialmente cheias(para discretizações envolvendo várias subestruturas), o que representa mais um ponto negativo com vistas à técnica de solução do sistema ou uma motivação para pesquisa nesse tema.

Dos processos numéricos utilizados para a resolução de sistemas lineares, os mais largamente difundidos e utilizados na grande maioria dos programas comerciais

existentes, são os *solvers* baseados no processo da eliminação de Gauss ou algum tipo de fatoração (LU, Cholesky, etc.), pois estes se aplicam muito bem a sistemas com moderado número de equações, além do fato de se obter uma solução do sistema, independentemente das características da matriz deste, como por exemplo, de seu espectro. Contudo, para que soluções fornecidas por esses *solvers* sejam um tanto mais confiáveis, faz-se necessário recorrer à técnicas de pivotamento. Por outro lado, quando se considera sistemas lineares de ordem elevada (alguns milhares de equações), que se tornam a cada dia mais comuns em problemas físicos resolvidos através de métodos computacionais, os *solvers* acima citados, perdem sua eficiência em relação aos *solvers* iterativos.

Muitos trabalhos foram desenvolvidos nos últimos anos nesta área, tais como Hageman e Young^[1], Hackbusch^[2], Stoer^[3], Golub e O'leary^[4] e Axelsson^[5] que descrevem os principais avanços com respeito à formulação de processos iterativos de resolução de sistemas algébricos, até o final de 1980. Os primeiros algoritmos desenvolvidos para a resolução de sistemas lineares resultantes de análises via BEM surgiram no início dos anos 80 com Doblaré^[6], Bettess^{[7],[8]}, Parreira^[9] e Mullen e Rencis^[10], que chamaram a atenção para a aplicação de *solvers* iterativos na resolução dos sistemas não-simétricos e cheios resultantes. Entretanto, somente no final da década de 80 e início dos anos 90 é que foram publicados os primeiros estudos abrangentes, relativos à aplicação de *solvers* iterativos na análise via BEM, por Araújo^[11], Araújo e Mansur^{[12],[13]}, Kane et al.^[14] e Mansur et al.^[15]. Depois disso, vários trabalhos apareceram nos anos 90, enfatizando o uso de técnicas iterativas de

solução de sistemas lineares oriundas do BEM, em diferentes áreas^{[34]-[46]}.

Nesta dissertação de mestrado, relatam-se resultados de pesquisa desenvolvida na área de análise de problemas dinâmicos no domínio da frequência, na qual procurou-se enfatizar tanto o desenvolvimento do algoritmo de acoplamento genérico BE/BE como a eficiência de *solvers* para o caso das matrizes não-hermitianas resultantes. A dissertação encontra-se estruturada como descrita nos parágrafos subseqüentes.

No capítulo 2, apresenta-se a formulação do problema elastodinâmico clássico tempo-dependente, a partir do qual será obtido, para o caso de excitação harmônica, a formulação de problemas estacionários. Também desenvolvem-se nesse capítulo as equações integrais de contorno tempo-dependentes e frequência-dependentes, e discute-se a formulação no domínio da frequência que se destina à análise de sistemas submetidos a carregamentos não-periódicos (obtenção via domínio da frequência de soluções transientes). Por fim, aborda-se a consideração de amortecimento de material.

A implementação numérica do problema tridimensional estacionário via Elementos de Contorno será brevemente descrita no capítulo 3, onde são feitas considerações a respeito do tratamento das integrais singulares para este problema. Inicialmente a formulação será feita sem consideração de acoplamento, sendo em seguida considerada a formulação de acoplamento multidomínio. Ainda no final do capítulo 3, apresenta-se um artifício para transformar o

sistema complexo resultante da análise do problema frequência-dependente em um sistema real equivalente.

No capítulo 4, estão descritos os *solvers* ditos diretos, baseados na Eliminação de Gauss e na decomposição **LU**. Várias estratégias de pivotamento, com o objetivo de melhorar a precisão em sistemas mal condicionados, foram abordadas. Os *solvers* iterativos (Lanczos e Gradiente Biconjugado) destinados também à resolução de sistemas complexos estão apresentados no capítulo 5, juntamente com uma completa formulação destes.

Várias aplicações de problemas tridimensionais no domínio da frequência são apresentadas no capítulo 6, a partir das quais deseja-se avaliar a resposta de problemas tempo-dependentes com e sem subregiões, além de verificar o comportamento dos *solvers* diretos e iterativos na resolução de sistemas lineares complexos.

CAPÍTULO II - O PROBLEMA ELASTODINÂMICO

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as equações básicas do problema elastodinâmico tempo-dependente, a partir das quais será obtida a equação diferencial, de valor de contorno e inicial, que governa o campo de deslocamentos de um sólido elástico, homogêneo e isotrópico, denominada equação de Navier. Em seguida será apresentada a correspondente equação diferencial frequência-dependente de valor de contorno apenas, resultante da consideração de problemas físicos cujas excitações sejam harmônicas no tempo. A equação integral de contorno para o problema elastodinâmico geral, obtida a partir do Teorema da Reciprocidade Dinâmica, bem como a correspondente equação integral frequência-dependente serão também apresentadas.

Em seguida apresenta-se, de forma resumida, a partir das Transformadas de Fourier, a formulação completa do problema tempo-dependente no domínio da frequência. Por fim, a consideração de amortecimento no sistema físico será abordada.

2.2 FORMULAÇÃO TEMPO DEPENDENTE

Considere um infinitesimal de volume em equilíbrio, pertencente a um corpo tridimensional, definido pela região Ω e pelo contorno Γ e com força de corpo B_i , submetido a carregamento dinâmico, conforme figura (2.1).

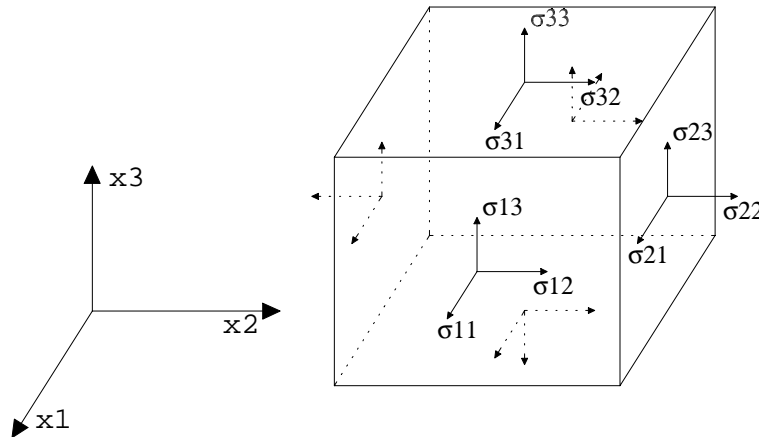


Figura 2.1. Infinitesimal de volume.

As equações básicas que governam a elastodinâmica linear^{[16],[17]} são as **equações de equilíbrio**

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (2.1)$$

as **relações cinemáticas**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

e a lei constitutiva

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

sendo $u_i(\mathbf{x}, t)$ o vetor deslocamento no ponto \mathbf{x} e no tempo t , segundo a direção i ; σ_{ij} e ε_{ij} são componentes do tensor de tensão e deformação, respectivamente, em um ponto qualquer do corpo; b_j é a componente da força de volume nas direções dos eixos coordenados e ρ é a densidade de massa por volume unitário. A vírgula após um índice significa derivada espacial e o ponto derivada temporal. λ e μ são as constantes de Lamé dadas por

$$\lambda = \frac{Ev}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.4)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.5)$$

onde E representa o módulo de elasticidade do material, G é o módulo de elasticidade transversal e ν o coeficiente de Poisson.

A partir de combinação dos três sistemas de equações dados por (2.1) a (2.3) obtém-se a equação diferencial que governa o campo de deslocamentos $u_i(\mathbf{x}, t)$ em um sólido isotrópico, homogêneo e elástico, e para pequenos deslocamentos, denominada equação de Navier, ou seja:

$$c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - c_2^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)}{\rho} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

$$\text{com } \nabla = \frac{\partial(\)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\)}{\partial x_3}.$$

As condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

e condições iniciais por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t=0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t=0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$; n_j é a componente do vetor unitário normal ao contorno do corpo; \mathbf{p} é o vetor força de superfície; c_1 e c_2 , dados por

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{e} \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (2.9)$$

que, a partir de (2.4) e (2.5), também podem ser dadas por

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad \text{e} \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (2.10)$$

são as velocidades das ondas de pressão e de cisalhamento, respectivamente, e seus efeitos, para duas ondas propagando-se na direção de x_1 , são mostrados na figura 2.2. A primeira onda (fig. 2.2a) se propaga com velocidade c_1 e provoca uma compressão das partículas do meio, sendo denominada onda de compressão. Com velocidade $c_2 < c_1$, atua a onda de distorção, ou cisalhante, provocando um movimento

de deslizamento entre as partículas do meio, conforme visto na figura 2.2b.

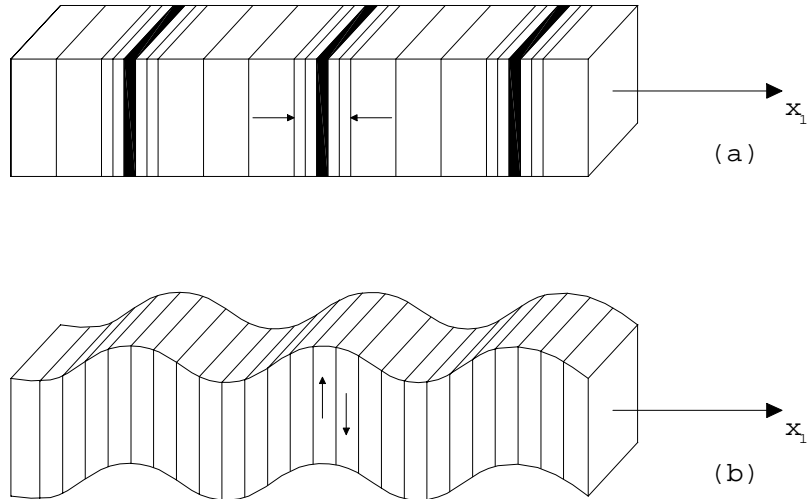


Figura 2.2. Efeito das ondas de pressão(a) e cisalhante(b).

2.3 O PROBLEMA STEADY-STATE

Considerando um instante de observação satisfatoriamente grande, após os distúrbios iniciais, para se analisar o comportamento da solução da equação (2.6) sob excitações harmônicas, pode-se assumir que o comportamento desta solução e das variáveis de campo do problema em questão sejam harmônicos no tempo^{[16],[18]}, com uma determinada frequência angular ω_n . Neste caso, diz-se que o problema é do tipo estacionário(*steady-state*).

Deste modo, a análise se torna bastante simplificada, uma vez que a variável tempo pode ser eliminada, ou seja, o problema de valor inicial e de contorno é reduzido a um problema de valor de contorno apenas, cuja equação de movimento se apresenta no domínio da frequência ω_n do carregamento harmônico aplicado ao problema. O grande problema, neste caso, se deve ao fato de ser impossível dizer, sem o conhecimento prévio da magnitude dos amortecimentos envolvidos, qual seria o intervalo de tempo satisfatório para se desprezar os efeitos de transitoriedade envolvidos no problema^[18].

A análise de um determinado problema físico através do domínio da frequência leva a resultados mais satisfatórios, se comparada à análise no domínio do tempo, nos casos em que parâmetros contidos na equação do movimento sejam dependentes da frequência (amortecimento histerético, rigidez). Além disto, determinando-se a frequência natural de uma estrutura, a análise no domínio da frequência possibilita um acompanhamento do comportamento da solução do problema físico, de modo a evitar que a frequência do carregamento periódico se aproxime demasiado da frequência natural da estrutura^[16].

Sejam então as grandezas físicas envolvidas no problema elastodinâmico representadas de forma harmônica no tempo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) = T_{ij}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} n_j(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega)$ e $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \omega)$ são grandezas complexas.

Substituindo as equações (2.11), (2.12) e (2.13) em (2.6) e eliminando os termos exponenciais obtém-se a chamada equação reduzida da elastodinâmica, dada por:

$$c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) - c_2^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega)}{\rho} + \omega^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

com as seguintes condições de contorno frequência-dependentes

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) &= \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \omega) & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, \omega) &= \overline{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \omega) & \mathbf{x} \in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Neste caso, as condições iniciais não têm influência na solução do problema.

2.4 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A obtenção da equação integral de contorno para o problema de elastodinâmica consiste no próximo passo necessário à resolução numérica deste problema. Esta equação pode ser obtida a partir do método das Funções de Green, a partir de Métodos variacionais, Método dos Resíduos Ponderados ou do Teorema Dinâmico da Reciprocidade^[19]. A obtenção da equação integral por este último caminho nos parece uma maneira genérica e diretamente obtida da equação diferencial do problema.

2.4.1-Teorema Dinâmico da Reciprocidade(Graffi)

Seja uma região regular Ω com contorno Γ e propriedades c_1 , c_2 e ρ , conforme figura (2.3).

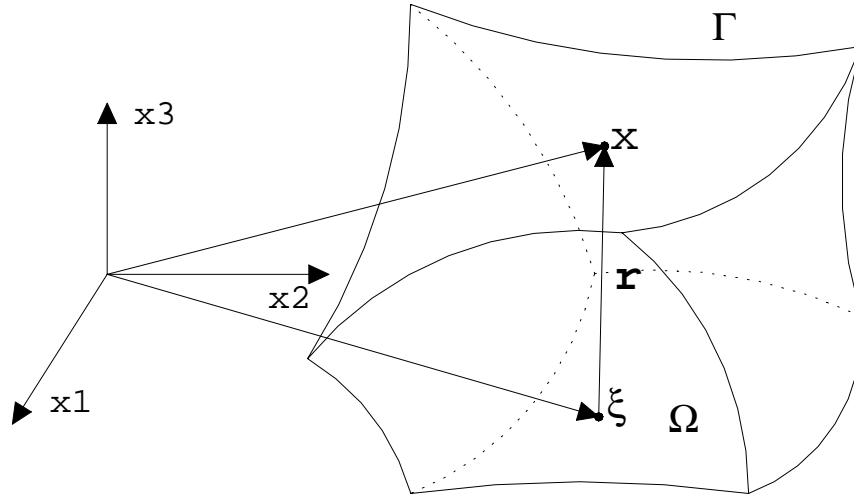


Figura 2.3. Contorno do Problema.

Considere agora dois estados elastodinâmicos distintos representados por:

$$A = [u_i, p_i, b_i] \quad (2.16)$$

$$B = [u'_i, p'_i, b'_i] \quad (2.17)$$

definidos em Ω e com condições iniciais dadas por:

$$u_i(\mathbf{x}, t = 0) = u_{0i}(\mathbf{x}) \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, t = 0) = v_{0i}(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

$$u'_i(\mathbf{x}, t = 0) = u'_{0i}(\mathbf{x}) \quad \dot{u}'_i(\mathbf{x}, t = 0) = v'_{0i}(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

Então, para $t > 0$

$$\int_{\Gamma} p_i * u_i' d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_i * u_i' + v_{0i} u_i' + u_{0i} \dot{u}_i') d\Omega = \int_{\Gamma} p_i' * u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_i' * u_i + v_{0i}' u_i + u_{0i}' \dot{u}_i) d\Omega \quad (2.20)$$

onde o operador $*$ significa convolução do tempo, ou seja, para $t > 0$ e duas funções f e g tem-se:

$$f * g = \int_0^t f(\mathbf{x}, t - \tau) g(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \int_0^t f(\mathbf{x}, \tau) g(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \quad (2.21)$$

Sejam então dois estados elastodinâmicos, um representando o estado real do problema dado por (2.16) e o outro dado por:

$$s' = [u_i', p_i', b_i' = \delta(t) \delta \mathbf{x} - \xi_j \delta_{ij}] \quad (2.22)$$

cuja solução de (2.6) em um meio infinito e elástico, é denominada solução fundamental do deslocamento e forças de superfície Γ , dadas por:

$$u_i'(\mathbf{x}, t) = u_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) = \frac{t - \tau}{4\pi\rho r^2} \left\{ a_{ik} \left[H\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right) \right] + \frac{b_{ik}}{c_1} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right) + \frac{c_{ik}}{c_2} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right) \right\} \quad (2.23)$$

e

$$\begin{aligned}
p'_i(\mathbf{x}, t) = p_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}, \tau) = & \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ \frac{d_{ik}(t - \tau)}{r^2} \left[H\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right) \right] \right. \\
& + e_{ik} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right) + f_{ik} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right) \\
& \left. + r g_{ik} \dot{\delta}\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right) + r h_{ik} \dot{\delta}\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$; $\boldsymbol{\xi}$ é o ponto fonte e \mathbf{x} é a variável de campo do problema, conforme figura (2.3). Além disto

$$H\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } |\tau| \geq t - \frac{r}{c_2} \\ 1, & \text{se } t - \frac{r}{c_1} \leq \tau \leq t - \frac{r}{c_2} \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
a_{ik} &= \frac{3r_i r_k - \delta_{ik}}{r} \\
b_{ik} &= r_i r_k \\
c_{ik} &= \delta_{ik} - r_i r_k \\
d_{ik} &= 6c_2^2 (r_k n_i + r_i n_k + \delta_{ik} r_n - 5r_i r_k r_n) \\
e_{ik} &= \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} - 1 \right) r_k n_i - \frac{c_2^2}{c_1^2} (12r_i r_k r_n - 2r_k n_i - 2\delta_{ik} r_n) \\
f_{ik} &= (12r_i r_k r_n - 2r_k n_i - 3r_i n_k - 3\delta_{ik} r_n) \\
g_{ik} &= \frac{1}{c_1} \left(2 \frac{c_2^2}{c_1^2} - 1 \right) r_k n_i - 2 \frac{c_2^2}{c_1^3} r_i r_k r_n \\
h_{ik} &= \frac{1}{c_2} (2r_i r_k r_n - r_i n_k - \delta_{ik} r_n)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Então, pelo Teorema Dinâmico da reciprocidade, e considerando as equações (2.23) a (2.26) chega-se à equação integral de contorno da elastodinâmica, dada por:

$$\begin{aligned}
c_{ik}(\xi) u_i(\xi, t) + \int_{\Gamma_0} \int_0^t p_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) u_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau d\Gamma = \\
\int_{\Gamma_0} \int_0^t u_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) p_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau d\Gamma + \int_{\Omega_0} \int_0^t u_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) b_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau d\Omega \quad (2.27) \\
\int_{\Omega} (v_{0i}(\mathbf{x}) u_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, 0) + u_{0i}(\mathbf{x}) \dot{u}_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, 0)) d\Omega
\end{aligned}$$

com os termos livres de integrais dados por

$$c_{ik}(\xi) = \delta_{ik} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} {}^{st}p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma \quad (2.28)$$

onde ${}^{st}p_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi)$ é a força de superfície fundamental da estática em Γ , e Γ_ε é uma superfície esférica centrada no ponto fonte ξ , introduzida de forma a excluir este ponto singular da superfície de integração.

A equação integral de contorno para o caso de solicitações harmônicas é obtida substituindo-se as equações (2.11), (2.12), (2.13) na equação (2.27). Assim, a equação integral fica:

$$\begin{aligned}
c_{ik}(\xi) U_i(\xi, \omega) e^{-i\omega t} + \int_{\Gamma_0} \int_0^t p_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) U_i(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega\tau} d\tau d\Gamma = \\
\int_{\Gamma_0} \int_0^t u_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) P_i(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega\tau} d\tau d\Gamma + \int_{\Omega_0} \int_0^t u_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) B_i(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega\tau} d\tau d\Omega \quad (2.29)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
c_{ik}(\xi) U_i(\xi, \omega) e^{-i\omega t} + \int_{\Gamma} \bar{P}_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) U_i(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\Gamma(\mathbf{x}) = \\
\int_{\Gamma} \bar{U}_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) P_i(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \bar{U}_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) B_i(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\Omega(\mathbf{x}) \quad (2.30)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) &= \int_0^t u_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ \bar{P}_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) &= \int_0^t p_{ik}^*(\mathbf{x}, t, \xi, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau\end{aligned}\tag{2.31}$$

Substituindo o resultado de (2.31) em (2.30) obtém-se:

$$\begin{aligned}c_{ik}(\xi)U_i(\xi, \omega) + \int_{\Gamma} P_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega)U_i(\mathbf{x}, \omega)d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ \int_{\Gamma} U_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega)P_i(\mathbf{x}, \omega)d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} U_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega)B_i(\mathbf{x}, \omega)d\Omega(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.32}$$

onde

$$\begin{aligned}U_{ik}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi\rho r} \left\{ (3r_{,i}r_{,k} - \delta_{ik}) \left[\frac{1}{r^2\omega^2} \left(e^{\frac{i\omega r}{c_2}} - e^{\frac{i\omega r}{c_1}} \right) - \right. \right. \\ \left. \frac{i}{r\omega} \left(\frac{1}{c_2} e^{\frac{i\omega r}{c_2}} - \frac{1}{c_1} e^{\frac{i\omega r}{c_1}} \right) \right] + r_{,i}r_{,k} \left(\frac{1}{c_1^2} e^{\frac{i\omega r}{c_1}} - \frac{1}{c_2^2} e^{\frac{i\omega r}{c_2}} \right) + \right. \\ \left. \delta_{ik} \left(\frac{1}{c_2^2} e^{\frac{i\omega r}{c_2}} \right) \right\}\end{aligned}\tag{2.33}$$

e

$$\begin{aligned}
P_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = & \frac{n_m}{4\pi r^2} \left\{ 6 c_2^2 (5 r_i r_k r_m - \delta_{ik} r_m + \delta_{km} r_i + \delta_{mi} r_k) \cdot \right. \\
& \left[\frac{1}{r^2 \omega^2} \left(e^{-i\omega \frac{r}{c_2}} - e^{-i\omega \frac{r}{c_1}} \right) - \frac{i}{r\omega} \left(\frac{1}{c_2} e^{i\omega \frac{r}{c_2}} - \frac{1}{c_1} e^{i\omega \frac{r}{c_1}} \right) \right] + \\
& 2(6 r_i r_k r_m - \delta_{ik} r_m + \delta_{km} r_i + \delta_{mi} r_k) \cdot \left(e^{i\omega \frac{r}{c_2}} - \frac{c_2^2}{c_1^2} e^{i\omega \frac{r}{c_1}} \right) - \\
& \frac{2 i \omega}{c_2} r_i r_k r_m \cdot \left(e^{i\omega \frac{r}{c_2}} - \frac{c_2^3}{c_1^3} e^{i\omega \frac{r}{c_1}} \right) - r_k \delta_{im} \cdot \left(1 - 2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \cdot \\
& \left. \left(1 - i\omega \frac{r}{c_1} \right) e^{i\omega \frac{r}{c_1}} - (\delta_{ik} r_m + \delta_{km} r_i) \cdot \left(1 - i\omega \frac{r}{c_2} \right) e^{i\omega \frac{r}{c_2}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

2.5 FORMULAÇÃO COMPLETA NO DOMÍNIO DA FREQUENCIA

Seja o caso em que o carregamento atuante em um determinado problema físico seja um carregamento periódico genérico de período T_p , do tipo mostrado na figura (2.4).

É possível expressar este carregamento na forma de uma série de termos harmônicos em valores discretos de frequência. A esta série dá-se o nome de série de Fourier. Estudos relativos à sua convergência podem ser obtidos em^[20], e sua forma exponencial é do tipo:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot e^{i\bar{\omega}_n t} \tag{2.35}$$

onde

$$\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T_p} \quad (2.36)$$

na qual os coeficientes complexos de amplitude são dados por:

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cdot e^{i\bar{\omega}_n t} dt \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.37)$$

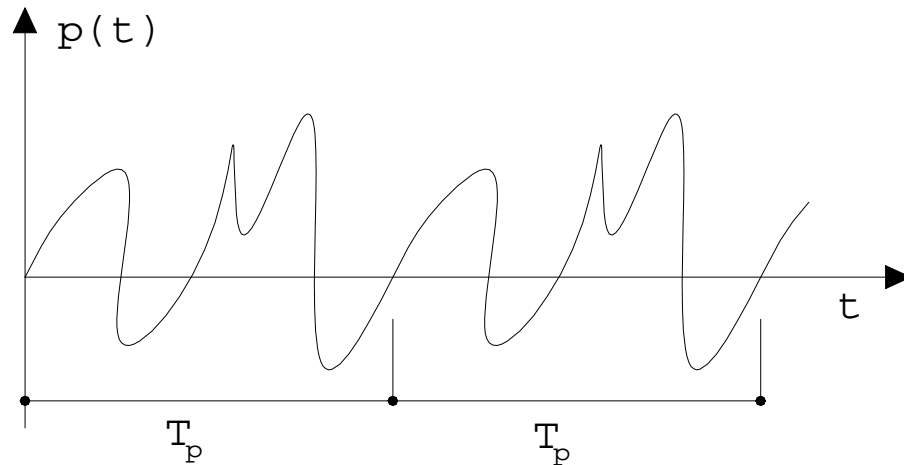


Figura 2.4. Carregamento periódico genérico.

Assim, para se obter a solução de um determinado problema físico sob um carregamento periódico genérico, basta escrever este carregamento em um número satisfatório de termos harmônicos da série de Fourier. Para cada termo $\omega = \bar{\omega}_n$, determina-se a solução da equação (2.32). A solução final, segundo o Princípio da Superposição dos

Efeitos, será a soma de cada solução de cada termo harmônico da série.

Considere agora uma função qualquer de carregamento não periódica no tempo, representada na figura 2.5 pelas linhas contínuas. A representação desta função através da forma exponencial da série de Fourier pode ser obtida tomando-se um intervalo de tempo $0 < t < T'_p$ como sendo o seu período. Assim, a função poderia ser considerada periódica, conforme as linhas contínuas e tracejadas da figura 2.5.

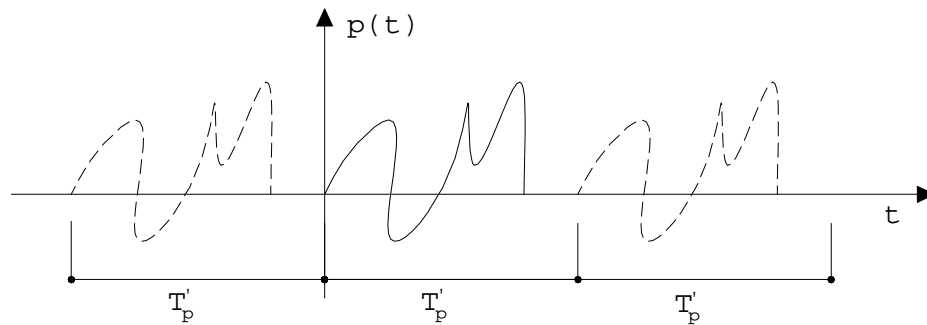


Figura 2.5. Carregamento genérico.

De (2.35) vem

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot e^{i\bar{\omega}'_n t} \quad (2.38)$$

onde

$$\bar{\omega}_n = n \bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T_p} \quad (2.39)$$

e

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cdot e^{i\bar{\omega}_n t} dt \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.40)$$

Fazendo-se $T_p \rightarrow \infty$ em (2.38) chega-se à expressão da Transformada Direta de Fourier, dada por

$$P(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (2.41)$$

e a partir de (2.40) obtém-se a expressão da Transformada Inversa de Fourier, expressa por

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(i\omega) \cdot e^{-i\bar{\omega}_n t} d\omega \quad (2.42)$$

A solução numérica da integral de contorno no domínio da frequência (2.32) é obtida mais facilmente que a correspondente equação integral (2.27) no domínio do tempo, conforme visto na seção 2.3. Assim, a solução de (2.32), obtida em função da frequência ω (domínio da frequência), pode ser transformada na solução no domínio do tempo a partir Transformada Inversa de Fourier dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, \omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (2.43)$$

cuja expressão discretizada, para vários valores de frequência ω_n , pode ser apresentada, para vários intervalos de tempo t_m , através de

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_m) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega_n) \cdot e^{nm \frac{2\pi}{N}} \quad (2.44)$$

onde N representa o número de intervalos de tempo que subdividem o tempo total de resposta T.

Será utilizado o algoritmo FFT^{[21],[22]} (Fast Fourier Transform) para a determinação de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_m)$, uma vez que este constitui um algoritmo bastante eficiente e preciso.

2.6 AMORTECIMENTO

Uma maneira de se representar o comportamento visco-elástico de um meio no domínio da frequência, poderia ser obtida, simplesmente, substituindo-se o módulo de elasticidade real(E) por um módulo de elasticidade complexo expresso por

$$E^* = E(1 + i\omega f) \quad (2.45)$$

com

$$f = \frac{C}{E} \quad (2.46)$$

onde c representa o coeficiente de viscosidade do meio.

Este tipo de representação do amortecimento, denominado amortecimento viscoso, no entanto, considera que a energia de dissipação é dependente da frequência. Este resultado, segundo Clough^[22], contradiz observações experimentais, na qual, tomando-se um grande intervalo de frequência ω , E^* permanece constante, para a grande maioria dos materiais utilizados na engenharia.

Devido a isto, E^* é substituído em (2.45) por

$$E^* = E(1 + ig) \quad (2.47)$$

onde g é o coeficiente de amortecimento constante.

Assim, uma maneira de estabelecer uma aproximação para o mecanismo de amortecimento em um meio elástico, pode ser conseguida substituindo-se (2.47) em (2.4) e (2.5). Desta forma

$$\lambda^* = \lambda(1 + ig_1) \quad (2.48)$$

$$\mu^* = \mu(1 + ig_2) \quad (2.49)$$

onde usualmente toma-se $g_1 = g_2$.

Esta segunda maneira de representação do amortecimento é denominada amortecimento histerético, encontrando um largo campo de aplicação em problemas dinâmicos envolvendo o solo. Uma vantagem da formulação no domínio da frequência é a fácil consideração de tais tipos de amortecimento.

CAPÍTULO III - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 INTRODUÇÃO

Será apresentado neste capítulo, de forma breve, a formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de problemas tridimensionais estacionários, desenvolvida a partir da equação integral de contorno frequência-dependente apresentada no capítulo anterior. Aspectos relativos às técnicas de obtenção dos coeficientes das matrizes originadas do Método dos Elementos de Contorno serão também abordados. Em seguida, o procedimento de geração do sistema de equações algébricas resultante do acoplamento entre subregiões de Elementos de Contorno será apresentado, seguido da consideração de um tratamento alternativo do sistema complexo e esparso resultante do acoplamento BE/BE aplicado a problemas estacionários.

3.2 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno em problemas de engenharia, faz-se necessário a discretização do contorno destes problemas em elementos, interpolando-se as variáveis de campo e geometria ao longo do elemento, a partir de valores nodais nos mesmos. Resultados satisfatórios são obtidos quando da utilização de elementos

isoparamétricos na discretização de problemas físicos. Para estes elementos, as funções de forma necessárias à interpolação das variáveis de campo e geometria, no interior do elemento, são as mesmas^[23]. Exemplos de elementos de contorno são mostrados na figura (3.1).

As variáveis de campo e geométricas, de um elemento de contorno, podem ser escritas em função de seus valores nodais, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x_i &= M_\alpha(\eta_k) X_{i\alpha} \\ u_i &= M_\alpha(\eta_k) U_{i\alpha} \\ p_i &= M_\alpha(\eta_k) P_{i\alpha} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde x_i , u_i e p_i são, respectivamente, as coordenadas cartesianas, componentes de deslocamentos e força de superfície no interior de um elemento e X_i , U_i e P_i seus valores nodais. M_α é a α -ésima função de forma do elemento, definida em função das coordenadas naturais η_k deste.

Estas funções de forma são as mesmas utilizadas na formulação de Elementos Finitos. Para o caso do elemento triangular de seis nós

$$M_\alpha = \begin{cases} \eta_\alpha(2\eta_\alpha - 1) & , \text{ se } \alpha = 1, 2, 3 \\ 4\eta_\beta\eta_\gamma & , \text{ se } \alpha = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $\beta = \alpha - 3$ e $\gamma = \alpha - 2$. η_1 e η_2 são as coordenadas naturais e $\eta_3 = 1 - (\eta_1 + \eta_2)$.

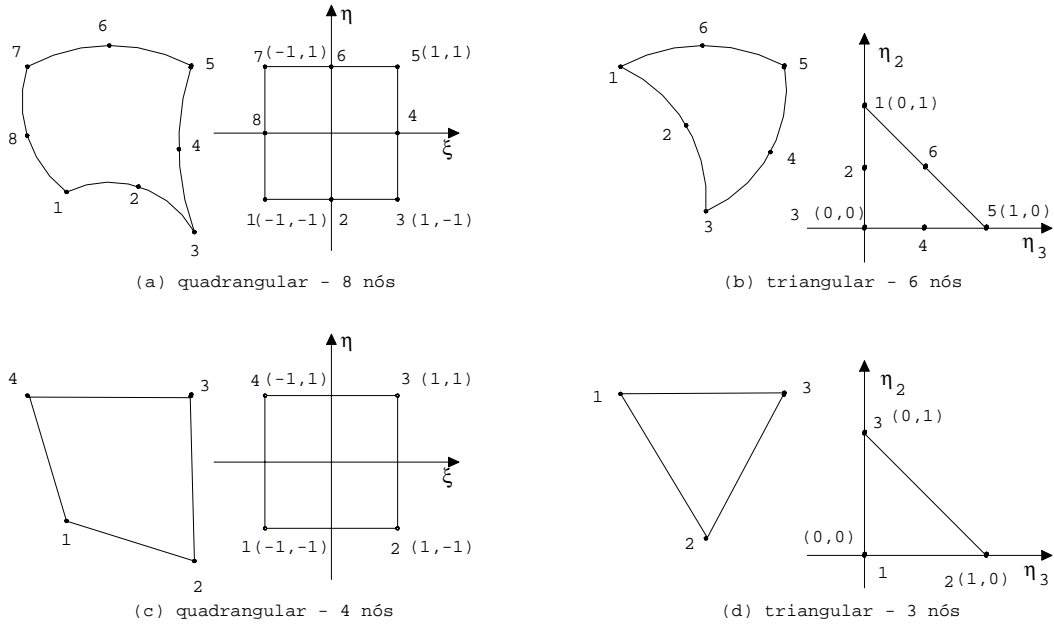


Figura 3.1. Elementos de contorno típicos.

Para o elemento quadrangular de oito nós

$$M_{\alpha} = \begin{cases} 0,25(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) & , \text{ se } \alpha = 1, 3, 5, 7 \\ 0,5\alpha(1 + \xi^2)(1 - \eta_0) & , \text{ se } \alpha = 2, 6 \\ 0,5\alpha(1 + \xi_0)(1 - \eta^2) & , \text{ se } \alpha = 4, 8 \end{cases} \quad (3.3)$$

onde ξ e η são as coordenadas naturais. $\xi_0 = \xi\xi_{\alpha}$ e $\eta_0 = \eta\eta_{\alpha}$. ξ_{α} e η_{α} são as coordenadas do nó α .

O elemento triangular de três nós e o quadrangular de quatro nós possuem as seguintes funções de forma:

$$M_{\alpha} = \eta_{\alpha} \quad , \quad \text{se } \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

e

$$M_\alpha = 0,25(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) , \text{ se } \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (3.5)$$

Substituindo as equações (3.1) em (2.32) obtêm-se:

$$c_{ik}u_i(\xi) + \sum_{j=1}^{ne} \left\{ \int_{\Gamma_j} P_{ik}^*(\mathbf{x}(\eta), \xi) M_\alpha(\eta) d\Gamma(\mathbf{x}(\eta)) \right\} U_{i\alpha}^n = \sum_{j=1}^{ne} \left\{ \int_{\Gamma_j} U_{ik}^*(\mathbf{x}(\eta), \xi) M_\alpha(\eta) d\Gamma(\mathbf{x}(\eta)) \right\} P_{i\alpha}^n \quad (3.6)$$

onde ne é o número total de elementos.

A contribuição da força de corpo foi omitida por simplificação. Em muitos casos procedimentos alternativos são utilizados para se transformar esta contribuição em integral de superfície.

Aplicando-se a equação integral (3.6) para cada nó funcional do contorno, obtêm-se um sistema algébrico que pode ser compactado na seguinte forma matricial

$$\mathbf{HU} = \mathbf{GP} \quad (3.7)$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} são as matrizes (não hermitianas) dos coeficientes envolvendo \mathbf{P}^* e \mathbf{U}^* , respectivamente, e \mathbf{U} e \mathbf{P} são os vetores de deslocamento e força nodais.

Aplicando-se as condições de contorno com as consequentes trocas das colunas entre \mathbf{H} e \mathbf{G} de forma a ter-se todas as incógnitas do lado esquerdo, pode-se escrever o problema acima como:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (3.8)$$

onde \mathbf{A} é a matriz cheia e não-simétrica dos coeficientes de influência, obtida a partir de \mathbf{H} e \mathbf{G} , \mathbf{y} é o vetor das variáveis desconhecidas, e \mathbf{f} o vetor excitação obtido pelo produto da matriz \mathbf{G} , possivelmente modificada pelas trocas de colunas, e o vetor com os valores prescritos das variáveis.

As integrais da equação (3.6) são avaliadas numericamente utilizando-se quadratura de Gauss com as opções de subdomínios de integração para o caso de integrais não singulares - onde $\xi \neq \mathbf{x}$, e concentração de nós em torno do ponto singular, para as integrais singulares da integral no segundo membro da equação. Os termos singulares da integral no primeiro membro da equação, juntamente com o primeiro termo $\mathbf{C}(\xi)$, são calculados juntos com a técnica de deslocamento de corpo rígido, conforme será visto no próximo tópico.

3.3 INTEGRAÇÃO ESPACIAL

A obtenção dos coeficientes das matrizes (3.7) se dá através de integrais de superfície ou volume. Devido à dificuldade da obtenção analítica destas, faz-se necessário a utilização de processos numéricos para a sua determinação.

As integrais originadas do método dos elementos de contorno se dividem em integrais não-singulares, fracamente singulares e fortemente singulares. No primeiro caso, o ponto fonte ξ não está sobre o elemento a ser integrado, e neste caso, geralmente, utiliza-se o processo da quadratura de Gauss sem maiores problemas^[24]. A convergência neste caso se dá através do aumento dos pontos de integração. Para se aumentar a precisão (principalmente em problemas elastodinâmicos tempo-dependentes) nos resultados os elementos são divididos em vários subelementos que são por sua vez mapeados em um sistema local de coordenadas, conforme figura (3.2). Assim, as integrais dadas em (3.6), podem ser dadas por

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} P_{ik}^*(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\xi}) M_\alpha(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta})) &= \sum_{k=1}^{nsgk} \sum_{l=1}^{nsgl} P_{ik}^*(\mathbf{x}(\eta^{kl}), \boldsymbol{\xi}) M_\alpha(\eta^{kl}) \mathbf{J}_\Gamma(\eta^{kl}) w^k w^l \\ \int_{\Gamma_j} U_{ik}^*(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\xi}) M_\alpha(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta})) &= \sum_{k=1}^{nsgk} \sum_{l=1}^{nsgl} U_{ik}^*(\mathbf{x}(\eta^{kl}), \boldsymbol{\xi}) M_\alpha(\eta^{kl}) \mathbf{J}_\Gamma(\eta^{kl}) w^k w^l \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde w^k , w^l e η^{kl} são os pesos e pontos de integração das direções η_1 e η_2 , e \mathbf{J}_Γ é a matriz Jacobiana dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\Gamma(\eta^{kl}) &= \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_3}{\partial s} - \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_3}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial s} - \frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_3}{\partial s} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial s} - \frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial x_2}{\partial r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

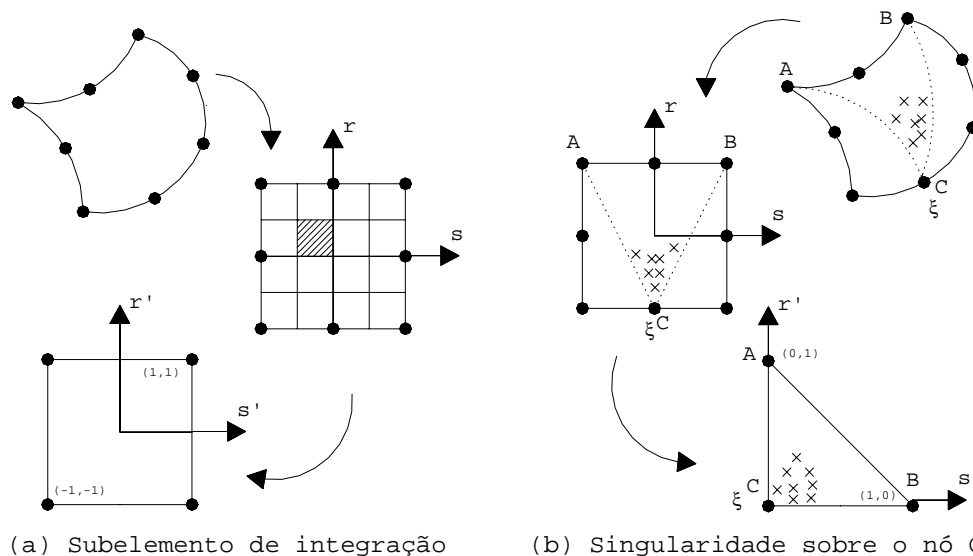


Figura 3.2 Subelementos e processo de triangularização.

No caso das integrais fracamente singulares (ξ coincide com $\mathbf{x}(\mathbf{r}=\mathbf{0})$, mas a singularidade é da ordem r^{-1} quando $r \rightarrow 0$), presente na integração dos deslocamentos fundamentais, a determinação numérica pode ser feita através da quadratura de Gauss. Para aumentar a precisão destas, utiliza-se a transformação de coordenadas polares triangulares, que proporciona aumento da quantidade de pontos nas proximidades destes pontos singulares (vide fig. 3.2).

No caso das integrais fortemente singulares (ξ coincide com $\mathbf{x}(\mathbf{r}=\mathbf{0})$, mas a singularidade é da ordem r^{-2} quando $r \rightarrow 0$) presente na integração das forças de superfície fundamentais, deslocamentos fundamentais, estas são obtidas implicitamente a partir do critério de corpo rígido para problemas estáticos, que se baseia no fato de que para

deslocamento de corpo rígido em um corpo, há ausência de tensões no mesmo, assim:

$$c_{ij}(\xi) + H_{ii} = \begin{cases} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N {}^{st}H_{ik}, & \text{regiões finitas} \\ 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N {}^{st}H_{ik}, & \text{regiões infinitas} \end{cases} \quad (3.11)$$

onde ${}^{st}H_{ik}$ é a força de superfície fundamental da elastoestática, dada por:

$${}^{st}H_{ik}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [1 - 2\nu\delta_{ik} + 3r_{,i}r_{,k}]r_{,n} - (1 - 2\nu)(r_{,i}n_k - r_{,k}n_i) \right\} \quad (3.12)$$

Assim, o núcleo da dinâmica pode ser obtida através da expressão

$$c_{ij}(\xi) + {}^{dyn}H_{ii} = c_{ij}(\xi) + {}^{st}H_{ii} + \sum_{e=1}^{nse} \int_{\tau_e} ({}^{dyn}P_{ik}^* - {}^{st}P_{ik}^*) \cdot M(\xi) d\tau \quad (3.13)$$

onde nse é o número de elementos adjacentes ao ponto singular ξ . Maiores detalhes da obtenção de (3.13) pode ser obtido de Beskos[16].

3.4 SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS CONSIDERANDO ACOPLAMENTO ELEMENTOS DE CONTORNO/ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas envolvendo materiais homogêneos por partes, ou situações de

coincidência ou quase coincidência de superfícies - como em problemas de fratura, pode ser desenvolvido, sem mais problemas, utilizando-se a técnica de subregião. A mesma consiste na subdivisão do domínio em regiões isoladas e na consideração da equação integral de contorno para cada uma delas separadamente, aplicando-se em seguida as condições de acoplamento entre as diversas regiões. Nesta seção, uma técnica genérica de subregião simulando materiais homogêneos por partes é apresentada.

A técnica consiste em subdividir o domínio em subregiões, separando-se os materiais não homogêneos, e aplicar a equação (3.7) para cada subregião, obtendo-se assim nsr sistemas

$$\mathbf{H}^i \mathbf{U}^i = \mathbf{G}^i \mathbf{P}^i, \quad \text{com } i=1,nsr \quad (3.14)$$

onde nsr é o número total de subregiões.

Para acoplamento das mesmas, utiliza-se as equações de compatibilidade e equilíbrio entre as interfaces. Ou seja,

$$\mathbf{U}^{ij} = \mathbf{U}^{ji} \text{ e } \mathbf{P}^{ij} = -\mathbf{P}^{ji} \quad (3.15)$$

onde \mathbf{U}^{mn} e \mathbf{P}^{mn} são os vetores com os graus de liberdade de deslocamentos e forças de superfícies pertencentes a subregião m com interface com a região n .

Para ilustrar como se procede na resolução de tais problemas, considera-se o exemplo da Figura (3.3).

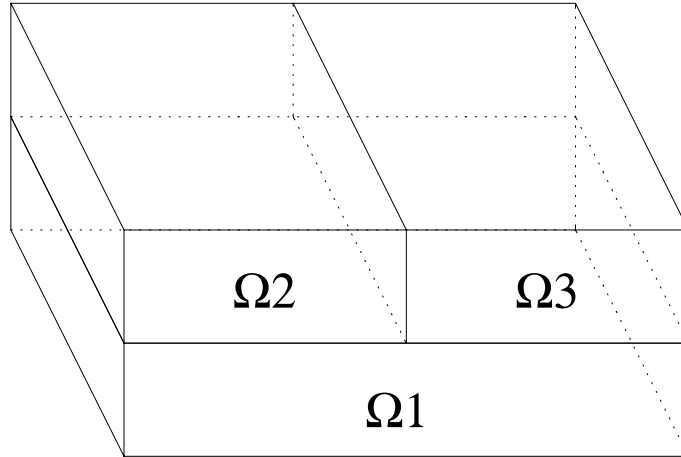


Figura 3.3. Corpo com subregiões.

O sistema de equações algébricas (3.7) para cada subregião ficaria da seguinte forma:

Subregião 1

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^{1,2} & \mathbf{H}^{1,3} & \mathbf{H}^{1,2,3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^{1,2} \\ \mathbf{U}^{1,3} \\ \mathbf{U}^{1,2,3} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{G}^1 & \mathbf{G}^{1,2} & \mathbf{G}^{1,3} & \mathbf{G}^{1,2,3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^{1,2} \\ \mathbf{P}^{1,3} \\ \mathbf{P}^{1,2,3} \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Subregião 2

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{H}^{2,1} & \mathbf{H}^2 & \mathbf{H}^{2,3} & \mathbf{H}^{2,1,3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{U}^{2,1} \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^{2,3} \\ \mathbf{U}^{2,1,3} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{G}^{2,1} & \mathbf{G}^2 & \mathbf{G}^{2,3} & \mathbf{G}^{2,1,3} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}^{2,1} \\ \mathbf{P}^2 \\ \mathbf{P}^{2,3} \\ \mathbf{P}^{2,1,3} \end{array} \right\} \quad (3.17)$$

Subregião 3

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{H}^{3,1} & \mathbf{H}^{3,2} & \mathbf{H}^3 & \mathbf{H}^{3,1,2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^{3,1} \\ \mathbf{U}^{3,2} \\ \mathbf{U}^3 \\ \mathbf{U}^{3,1,2} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{G}^{3,1} & \mathbf{G}^{3,2} & \mathbf{G}^3 & \mathbf{G}^{3,1,2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}^{3,1} \\ \mathbf{P}^{3,2} \\ \mathbf{P}^3 \\ \mathbf{P}^{3,1,2} \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

onde os índices indicam a quais subregiões os graus de liberdade dos blocos pertencem.

Aplicando-se as condições de interface, obtém-se o problema descrito da seguinte forma,

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^{1,2} & -\mathbf{G}^{1,2} & \mathbf{H}^{1,3} & -\mathbf{G}^{1,3} & \mathbf{H}^{1,2,3} & -\mathbf{G}^{1,2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^{2,1} & \mathbf{G}^{2,1} & 0 & 0 & \mathbf{H}^{2,1,3} & \mathbf{G}^{2,1,3} & \mathbf{H}^2 & \mathbf{H}^{2,3} & -\mathbf{G}^{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}^{3,1} & \mathbf{G}^{3,1} & \mathbf{H}^{3,1,2} & \mathbf{G}^{3,1,2} & 0 & \mathbf{H}^{3,2} & \mathbf{G}^{3,2} & \mathbf{H}^3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^{1,2} \\ \mathbf{P}^{1,2} \\ \mathbf{U}^{1,3} \\ \mathbf{P}^{1,3} \\ \mathbf{U}^{1,2,3} \\ \mathbf{P}^{1,2,3} \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^{2,3} \\ \mathbf{P}^{2,3} \\ \mathbf{U}^3 \end{array} \right\}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{G}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}^3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^2 \\ \mathbf{P}^3 \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

Aplicando-se as condições de contorno, obtém-se o sistema global na forma de (3.8).

3.5 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COMPLEXOS

A utilização da técnica de acoplamento aumenta o número de graus de liberdade do problema, porém, gera um sistema final constituído por blocos de matrizes cheias e nulas, como mostrado na equação (3.19). Uma implementação adequada de algoritmos multidomínios deve considerar apenas os blocos não-nulos de matrizes, evitando-se operações com zeros. Usualmente adota-se, na resolução dos sistemas lineares resultantes, *solvers* diretos, como por exemplo o Método da Eliminação de Gauss, eventualmente tirando proveito da esparsidade da matriz dos coeficientes. Para se obter uma precisão maior deste processo, utiliza-se a técnica de pivotamento. Dos métodos iterativos mais largamente difundidos em trabalhos recentes^{[11]-[15]}, tem-se o **Método de Lanczos** e o **Método de Gradiente Biconjugado** que serão apresentados posteriormente.

A utilização de *solvers* iterativos, no caso de problemas elastodinâmicos de acoplamento, leva a um grande aumento de eficiência computacional na resolução de tais problemas, principalmente quando usados com pré-condicionamento. Primeiramente devido à sua melhor performance para sistemas de ordem elevada resultantes do método dos Elementos de Contorno, se comparado aos diretos. Além disso, o fato dos coeficientes da matriz do sistema linear serem acessados mais rapidamente nestes *solvers*(as operações com esta

matriz são de multiplicação e soma, portanto mais simples que nos diretos), é um outro fator que justifica a utilização de tais *solvers*.

Para matrizes complexas e para vários sistemas (várias frequências) espera-se um aumento considerável da eficiência destes *solvers* iterativos em relação aos diretos.

Neste trabalho, considerou-se, também, para o caso de *solvers* iterativos, a possibilidade de se tratar o sistema complexo resultante do acoplamento multidomínio como sendo um sistema real equivalente ao primeiro. Assim, um sistema complexo de ordem n , da forma

$$\begin{bmatrix} (x_{11} + iy_{11}) & (x_{12} + iy_{12}) & \cdots & (x_{1n} + iy_{1n}) \\ (x_{21} + iy_{21}) & (x_{22} + iy_{22}) & \cdots & (x_{2n} + iy_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{n1} + iy_{n1}) & (x_{n2} + iy_{n2}) & \cdots & (x_{nn} + iy_{nn}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (u_1 + iv_1) \\ (u_2 + iv_2) \\ \vdots \\ (u_n + iv_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (b_1 + ic_1) \\ (b_2 + ic_2) \\ \vdots \\ (b_n + ic_n) \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

é equivalente ao sistema real de ordem $2n$ mostrado em (3.21). Apesar deste último ter ordem duas vezes maior que o complexo, as operações são feitas em aritmética real. Também a memória de armazenamento não se modifica, posto que apenas dois blocos da matriz correspondentes à parte real e imaginário são armazenados.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \cdots & \mathbf{x}_{1n} & -Y_{11} & -Y_{12} & \cdots & -Y_{1n} \\
\mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \cdots & \mathbf{x}_{2n} & -Y_{21} & -Y_{22} & \cdots & -Y_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{x}_{n1} & \mathbf{x}_{n2} & \cdots & \mathbf{x}_{nn} & -Y_{n1} & -Y_{n2} & \cdots & -Y_{nn} \\
\hline
Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} & \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \cdots & \mathbf{x}_{1n} \\
Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} & \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \cdots & \mathbf{x}_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} & \mathbf{x}_{n1} & \mathbf{x}_{n2} & \cdots & \mathbf{x}_{nn}
\end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n \end{array} \right\}$$

(3.21)

CAPÍTULO IV - MÉTODOS DIRETOS

4.1 INTRODUÇÃO

A necessidade de se resolver sistemas de equações lineares aparece em uma grande quantidade de problemas científicos. Em engenharia, particularmente, faz-se necessário para a análise precisa de problemas complexos, a aplicação de procedimentos numéricos através dos quais modelos matemáticos contínuos associados a tais problemas são algebrizados, ou seja, são transformados em sistema de equações algébricas. Dentre os procedimentos numéricos mais aplicados em Engenharia distinguem-se o Método dos Elementos Finitos(FEM) e o Método dos Elementos de Contorno(BEM), através dos quais problemas definidos em domínios gerais e sob consideração de condições de contorno quaisquer podem ser tratados. Segundo alguns pesquisadores a grande parte do tempo de análise de problemas de ordem elevada em Engenharia relaciona-se com a resolução do sistema de equações lineares cujo tempo de processamento cresce não-linearmente com a ordem do sistema. Sendo assim, em se tratando de sistemas de equações associados com problemas práticos de grande porte (alguns milhares de eqs.) é naturalmente conveniente estabelecer algoritmos que forneçam, não apenas resultados precisos, mas também a solução do sistema em tempo de processamento consideravelmente menor, em relação a outros processos de resolução.

Neste trabalho serão estudados os métodos diretos e iterativos de resolução de sistemas lineares de equações. Os métodos diretos são aqueles em que o número de passos e operações é pré-determinado de maneira exata e que conduzem à solução exata, a menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina. Dentre as técnicas diretas, as mais eficientes são baseados no Processo de Eliminação de Gauss. A idéia central deste método é usar as operações básicas de uma matriz (multiplicação de uma linha por uma constante não-nula; troca de duas ou mais linhas; soma do múltiplo de uma linha à outra), que não alteram a solução do sistema, numa forma sistemática de modo que se triangularize o sistema a partir do qual a solução é obtida por retrosubstituição. Outra alternativa computacionalmente equivalente à Eliminação de Gauss é o que se denomina decomposição LU da matriz A. Neste processo a matriz A é decomposta no produto de uma matriz triangular superior U e uma matriz triangular inferior L.

4.2 O MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Este método consiste na transformação de um sistema linear da forma

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \dots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \dots + a_{4n}x_n & = & b_4 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n
 \end{array} \tag{3.1}$$

em um sistema triangular superior equivalente dado por

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
 a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
 a^{(3)}_{44}x_4 + \dots + a^{(3)}_{4n}x_n &= b^{(3)}_4 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 + a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_n
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

cuja solução é obtida por retrosubstituição das componentes de \mathbf{x} .

A transformação do sistema (3.1) no sistema (3.2) é realizada efetuando-se operações elementares no primeiro sistema. Essas operações são:

- a) troca de duas eqs. do sistema;
- b) multiplicação de uma equação do sistema por uma constante não-nula;
- c) adição de duas eqs. do sistema.

4.2.1. Triangularização do Sistema:

Passo1:

Eliminação da incógnita x_1 das eqs. 2, 3, ..., n de (3.2). Considerando-se uma linha i qualquer, onde $i= 2,3,\dots,n$, a eliminação de x_1 é obtida multiplicando-se a primeira linha

por $d_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ e somando-se o resultado com a i ésima linha.

Deste procedimento resulta o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 + \dots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\
a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 + \dots + a'_{4n}x_n &= b'_4 \\
\vdots & \\
a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + a'_{n4}x_4 + \dots + a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned} \tag{3.3}$$

com $d_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}}$ e $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{11}a_{1j}}{a_{11}} = a_{ij} - d_{11}.a_{1j}$, para $i, j \geq 2$ (3.4)

Passo 2:

Eliminação da incógnita x_2 nas eqs. 3, 4, ..., n.

Neste caso multiplica-se a segunda linha de (3.3) por

$d'_{i2} = a_{ij} \frac{a'_{i2}}{a_{22}}$ e somando-se o resultado com a i -ésima linha

do mesmo. Obtém-se assim o sistema:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 + \dots + a''_{4n}x_n &= b''_4 \\
\vdots & \\
a''_{n3}x_3 + a''_{n4}x_4 + \dots + a''_{nn}x_n &= b''_n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

com $d'_{i2} = a_{ij} \frac{a'_{i2}}{a_{22}}$ e $a''_{ij} = a_{ij} - \frac{a'_{i2}a'_{2j}}{a'_{22}} = a'_{ij} - d'_{i2}.a'_{2j}$, (3.6)

para $i, j \geq 3$

Procedendo-se assim na eliminação das demais incógnitas das equações subsequentes chega-se ao seguinte sistema triangularizado:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 + \dots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
a^{(3)}_{44}x_4 + \dots + a^{(3)}_{4n}x_n &= b^{(3)}_4 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
+ a^{(n-1)}_{nn}x_n &= b^{(n-1)}_n
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde:

$$a^{(m)}_{ij} = a^{(m-1)}_{ij} - \frac{a^{(m-1)}_{im} \cdot a^{(m-1)}_{mj}}{a^{(m-1)}_{mm}} = a^{(m-1)}_{ij} - d^{(m-1)}_{im} \cdot a^{(m-1)}_{mj} \text{ se } \begin{cases} i, j \geq m+1 \\ m \geq 1 \end{cases} \tag{3.8a}$$

$$d^{(m-1)}_{im} = \frac{a^{(m-1)}_{im}}{a^{(m-1)}_{mm}} \tag{3.8b}$$

$$b^{(m)}_j = b^{(m-1)}_j - d^{(m-1)}_{jm} \cdot b^{(m-1)}_m \tag{3.8c}$$

4.2.2. Retrosubstituição:

Seja o sistema triangular superior (3.7). Da n-ésima equação obtém-se

$$x_n = \frac{b^{(n-1)}_n}{a^{(n-1)}_{nn}} \tag{3.9}$$

Este resultado pode ser substituído na (n-1)-ésima eqs. Do sistema (3.7), donde obtém-se

$$x_{n-1} = \frac{b^{(n-2)}_{n-1} - a^{(n-2)}_{n-1,n} \cdot x_n}{a^{(n-2)}_{n-1,n-1}} \tag{3.10}$$

Repetindo-se o processo para as eqs. Restantes de (3.7) pode-se então genericamente expressar a componente xi do vetor-solução por

$$x_i = \frac{b^{(i-1)}_i - \sum_{j=i+1}^n a^{(i-1)}_{ij} \cdot x_j}{a^{(i-1)}_{ii}}, \text{ para } i=n, n-1, \dots \quad (3.11)$$

4.2.3. Pivotamento:

O pivotamento consiste na troca de linhas e/ou colunas de uma matriz de modo a se obter como pivô o elemento de maior módulo da zona (submatriz onde ainda irão ocorrer transformações devido ao processo de triangularização) da matriz a ser triangularizada. Com isso elimina-se tanto a possibilidade de divisão por zero durante a triangularização do sistema como garante-se uma maior precisão nos resultados obtidos. Apesar do aumento do esforço computacional necessário à resolução de um sistema de eqs. quando se considera a técnica de pivotamento, este processo sempre é recomendado, já que divisões por zero são sempre possíveis de ocorrer quando da resolução de sistemas gerais de equações.

a) Pivotamento com troca de linhas:

A técnica de pivotamento com troca de linhas consiste em substituir a equação pivô pela equação que possua o maior elemento, em módulo, dentre os coeficientes da coluna considerada das linhas subseqüentes.

b) Pivotamento com troca de colunas:

O pivotamento com troca de colunas consiste em substituir a coluna que contém o elemento pivô pela coluna que contenha o maior elemento, em módulo, dentre os coeficientes da linha considerada das colunas subseqüentes.

É importante notar que as trocas de colunas na matriz dos coeficientes causam mudanças na ordem das componentes do vetor-solução, como visto em (3.14). Por isso faz-se necessário, ao se implementar este método armazenar todas as trocas de colunas que venham a ocorrer em um vetor que indique a posição original das componentes do vetor-solução. Após a resolução do sistema o vetor-solução pode ser reordenado com auxílio deste vetor.

c) Pivotamento total:

Consiste em se escolher como elemento pivô aquele de maior módulo dentre todos os elementos da zona ativa da matriz dos coeficientes do sistema. Apesar deste método oferecer soluções mais precisas, o processo eleva consideravelmente o tempo total de resolução do sistema, não sendo conveniente a sua implementação para a resolução de sistemas bem condicionados.

4.2.4. Consideração de vários vetores do lado direito de um sistema:

A solução de um sistema para o caso da consideração de vários vetores de termos independentes no sistema pode ser obtida com uma diminuição considerável do esforço computacional caso os coeficientes d_{im}^{m-1} dados em (3.8c)

sejam armazenados na parte inferior da matriz dos coeficientes durante a etapa de triangularização do sistema. Procedendo-se assim, basta, ao ser introduzido um novo vetor de termos independentes b do lado direito do sistema, transformar o vetor b segundo a equação (3.8b), e em seguida obter a solução por retrossubstituição segundo a expressão (3.11). Nota-se o ganho computacional ao se armazenar os coeficientes d^{m-1}_{im} , uma vez que não é necessário se triangularizar novamente o sistema.

É importante ressaltar que no caso da consideração de vários vetores de termos independentes durante o pivotamento com troca de linhas deve-se armazenar as trocas em um vetor para que, ao se introduzir um novo vetor de termos independentes, estes sejam compatíveis com as equações do sistema. Ao se trocar uma linha, deve-se, também, trocar os coeficientes d^{m-1}_{im} do vetor de termos independentes.

4.3 O MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

Este método consiste na decomposição da matriz dos coeficientes A no produto de uma matriz triangular inferior L por outra triangular superior U conforme mostrado abaixo:

$$\begin{array}{l}
 \text{zona1} \\
 \text{zona2} \\
 \text{zona3}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c|cc|c|ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\
 \hline
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn}
 \end{array} \right] \quad (3.15)$$

onde

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\ & & 1 & u_{34} & \dots & u_{3n} \\ & & & 1 & \dots & u_{4n} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

As fórmulas genéricas para a determinação dos coeficientes l_{ij} e u_{ij} dos fatores triangulares podem ser obtidos multiplicando-se as zonas indicadas em (3.15) como segue:

Zona 1:

$$a_{11} = l_{11}$$

Zona 2:

$$a_{21} = l_{21}$$

$$a_{12} = l_{11} \cdot u_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}/l_{11}$$

$$a_{22} = l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \Rightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12}$$

Zona 3:

$$a_{31} = l_{31}$$

$$a_{32} = l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \Rightarrow l_{32} = a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}$$

$$a_{13} = l_{11} \cdot u_{13} \Rightarrow u_{13} = a_{13}/l_{11}$$

$$a_{23} = l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \Rightarrow u_{23} = (a_{23} - l_{21} \cdot u_{13})/l_{22}$$

$$a_{33} = l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \Rightarrow l_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23}$$

Considerando-se as zonas subseqüentes chega-se às seguintes fórmulas genéricas:

$$l_{i1} = a_{i1} \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.16)$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad j=2,3,\dots,n \quad (3.17)$$

Para $j=2,3,\dots,n-1$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \quad i=j,j+1,j+2,\dots,n \quad (3.18)$$

$$u_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji} \cdot u_{ik}}{l_{jj}} \quad j=j,j+1,j+2,\dots,n \quad (3.19)$$

$$l_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} \cdot u_{kn} \quad i=j,j+1,j+2,\dots,n \quad (3.20)$$

Observa-se que na obtenção dos coeficientes l_{ij} e u_{ij} as operações dentro de uma determinada zona podem ser realizadas na ordem mostrada na figura (4.1):

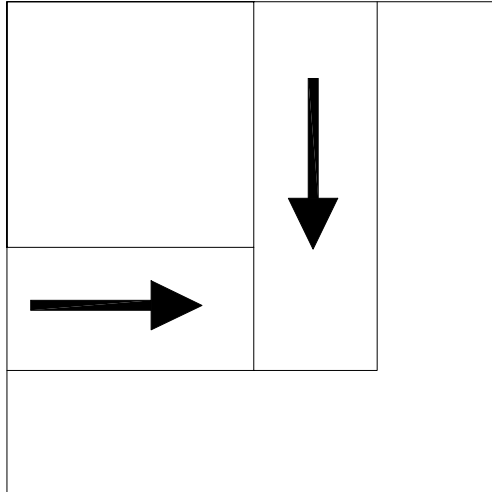


Figura 4.1. Direção de fatoraçoão da matriz.

Veja que o coeficiente da diagonal principal é o último a ser obtido, pois depende dos demais coeficientes da zona que está sendo processada.

Através do processo acima a matriz A é então decomposta nas matrizes L e U que podem ser armazenadas no mesmo espaço da matriz A conforme mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix}
 l_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \dots & u_{1n} \\
 l_{21} & l_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2n} \\
 l_{31} & l_{32} & l_{33} & u_{34} & \dots & u_{3n} \\
 l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \dots & u_{4n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{n4} & \dots & l_{nn}
 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Com os fatores triangulares L e U pode-se escrever o sistema $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ na forma:

$$\mathbf{LUx}=\mathbf{b} \quad (3.22)$$

Fazendo-se $\mathbf{y}=\mathbf{Ux}$ em (3.22) obtém-se o sistema

$$\mathbf{Ly}=\mathbf{b} \quad (3.23)$$

onde o vetor \mathbf{y} pode ser facilmente determinado por substituição direta. De posse de \mathbf{y} chega-se então à solução do sistema por retrossubstituição em

$$\mathbf{Ux}=\mathbf{y} \quad (3.24)$$

O processo de substituição direta para a determinação de \mathbf{y} mencionado acima é estabelecido por

$$y_i = b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} \cdot y_j \quad (3.25)$$

Já no processo de retrossubstituição para a determinação de \mathbf{x} conforme (3.24) utiliza-se a seguinte expressão:

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot x_j}{l_{ii}} \quad (3.26)$$

Analogamente ao método da Eliminação de Gauss, pode-se também adotar pivotamento na implementação computacional do método da decomposição LU.

4.4 TÉCNICAS PARA MELHORAR A PRECISÃO DAS SOLUÇÕES

Na análise de alguns sistemas lineares podem ocorrer situações em que cuidado especial envolvendo erros de arredondamento nas operações aritméticas realizadas no computador precisam ser tomados. Estas situações podem levar a resultados totalmente errados ou imprecisos. Neste caso, além das técnicas de pivotamento (já comentadas anteriormente), utilizam-se também as seguintes estratégias para a obtenção de soluções precisas, que não foram abordadas no presente trabalho.

- **Uso de mais algarismos significativos (precisão dupla por exemplo):** com esta técnica a precisão é melhorada, mas tem-se como inconveniente o fato de que mais espaço de armazenamento de dados é requerido.
- **Matriz de preconditionamento:** matriz utilizada para melhorar o condicionamento do sistema, pré-multiplicando este por aquela.

Os algoritmos baseados na Eliminação de Gauss desenvolvidos neste trabalho possibilitam, convenientemente, a resolução de um sistema linear de eqs. algébricas nos casos em que a matriz dos coeficientes permanece constante e há vários vetores do lado direito. Assim como no caso de fatoração LU, com o processo da eliminação de Gauss apresentado aqui, é também requerido pouco esforço computacional para a consideração de cada novo vetor do lado direito do sistema. Estes algoritmos são convenientes, por exemplo, na análise de problemas elastodinâmicos lineares e transientes com o Método dos Elementos de Contorno. A eliminação de Gauss,

assim como qualquer outro processo de resolução direta de sistema de eqs., começa a ser inviável para sistemas muito grandes, pois o número de operações aumenta com o cubo da ordem do sistema. Nestes casos se tornam mais vantajoso os algoritmos baseados em métodos iterativos.

CAPÍTULO V - MÉTODOS ITERATIVOS

5.1 INTRODUÇÃO

Os métodos iterativos são aqueles em que a solução é verificada em cada iteração, tomando-se por base a avaliação do erro segundo alguma expressão, se a solução já convergiu. Dentre estes, os básicos tem sido pouco utilizados na solução de equações lineares resultantes da algebrização de equações diferenciais que ocorrem em problemas de engenharia, pois, de um modo geral, os sistemas lineares resultantes podem não ser adequados para o tratamento através destes, já que as matrizes resultantes podem ser não-simétricas ou mal condicionadas, o que faz com que, ou não se atinja a convergência na obtenção iterativa da solução, ou obtenha-se a solução para tempos maiores de processamento em relação aos métodos diretos. Atualmente, no entanto, tem-se desenvolvido *solvers* iterativos bastante eficientes na resolução de sistemas gerais de equações lineares, sejam estes simétricos ou não. Tais solvers se baseiam, genericamente, na ortogonalização do vetor resíduo para a n-ésima iteração em relação a n-1 vetores linearmente independentes do subespaço de Krylov de ordem n-1 que é definido por:

$$K_{n-1}(\mathbf{r}^1, \mathbf{A}) = \text{SPAN}\{\mathbf{r}^1, \mathbf{A}\mathbf{r}^1, \mathbf{A}^2\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{r}^1\} \quad (5.1)$$

Apresenta-se, nesta sessão, a formulação completa dos solvers iterativos(Lanczos e Gradiente Biconjugado) destinados à resolução dos sistemas complexos oriundos do Método dos Elementos de Contorno.

5.2 MÉTODOS ITERATIVOS BÁSICOS

É importante tomar conhecimento dos métodos iterativos básicos, muito embora tais técnicas não sejam eficientes na resolução de sistemas de equações gerais, como por exemplo, matriz de coeficientes não-simétrica ou número espectral de condicionamento(razão entre os autovalores de maior e menor módulo) elevado. Sendo dado o sistema de equações:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{b} \quad (5.2)$$

com \mathbf{A} não-singular, pode-se gerar um método iterativo básico adotando-se alguma matriz de partição \mathbf{Q} . Pode-se portanto escrever de (5.2):

$$(\mathbf{I}-\mathbf{I}+\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{u}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} \quad (5.3)$$

donde segue a fórmula iterativa, com \mathbf{I} sendo a matriz identidade complexa:

$$\mathbf{u}^{n+1}=(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{u}^n+\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} \quad (5.4)$$

Assim, escolhendo-se diferentes matrizes de partição \mathbf{Q} , pode-se, por conseguinte, gerar diferentes métodos básicos. Na geração desses, deve-se, no entanto, atentar para o fato

de que esses podem ser mais eficientes, se a matriz de partição \mathbf{Q} for escolhida de tal sorte que:

- a) O número de condicionamento de $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}$ seja significativamente menor que o número de condicionamento de \mathbf{A} ;
- b) Os coeficientes de \mathbf{Q} são facilmente obtidos;
- c) \mathbf{Q}^{-1} é facilmente determinada.

Como exemplo de métodos iterativos básicos citam-se o método RF(Richardson, $\mathbf{Q}=\mathbf{I}$), o método de Jacobi($\mathbf{Q}=\mathbf{D}$) e o método de Gauss-Seidel($\mathbf{Q}=\mathbf{D}+\mathbf{L}$, onde \mathbf{D} contém os coeficientes da diagonal de \mathbf{A} e, \mathbf{L} , os coeficientes da parte inferior à diagonal). O método da fatoração incompleta também pode ser visto como um método iterativo básico no qual $\mathbf{Q}=\mathbf{LU}=\mathbf{A}$.

5.3 ACELERAÇÃO POLINOMIAL

Os métodos iterativos básicos são normalmente ineficientes na resolução de sistemas gerais. A razão de convergência desses pode, no entanto, ser aumentada por meio de processos de aceleração polinomial, que consiste basicamente na geração de uma nova sequência de vetores obtida diretamente a partir da sequência fornecida pelos métodos básicos. Prova-se que um procedimento iterativo para a geração dos vetores $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ é um processo de aceleração polinomial sobre um método iterativo básico qualquer definido pela matriz de partição \mathbf{Q} , se tem-se que:

$$\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^0 \in K_r(\delta^0, \mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}) \quad (5.5)$$

onde $\delta^0 = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r}^0$ é o pseudo-resíduo e K_r denota o subespaço de Krylov associado a δ^0 e a $\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}$ (matriz de iteração de método básico). Em consequência de (5.5), o resíduo \mathbf{r}^n pode ser expresso na forma de um polinômio em $\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}$, e o procedimento é então denominado procedimento de aceleração polinomial. Mas, dado que esse resíduo é expresso exatamente como função dos vetores-base do subespaço de Krylov, ou seja, na forma de um polinômio da matriz de iteração do método básico, então os *solvers* baseados em tais processos são conhecidos, também, com *solvers* de Krylov.

5.4 ALGORITMO DE LANCZOS

Um processo de aceleração polinomial, que tem sido eficientemente aplicado na resolução de sistemas de equações lineares gerais, baseia-se no algoritmo de tridiagonalização de Lanczos, o qual é derivado como mostrado a seguir.

Sendo \mathbf{c}^{-1} e $\bar{\mathbf{c}}^{-1}$ vetores conhecidos, então duas seqüências de vetores \mathbf{c}^{k+1} e $\bar{\mathbf{c}}^{-k+1}$ (onde $k=1,2,\dots,n$ - n é a ordem da matriz) podem ser derivados respectivamente de \mathbf{A} e \mathbf{A}^T a partir das relações:

$$\delta_{k+1} \cdot \mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{c}^k - \sum_{i=1}^k h_{ik} \cdot \mathbf{c}^i \quad (5.6a)$$

$$\bar{\delta}_{k+1} \cdot \bar{\mathbf{c}}^{k+1} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{c}}^k - \sum_{i=1}^k \bar{h}_{ik} \cdot \bar{\mathbf{c}}^i \quad (5.6b)$$

onde os h_{ik} e \bar{h}_{ik} são determinados sob imposição das seguintes condições de ortogonalidade:

$$\bar{\mathbf{c}}^{k+1} \perp \bar{\mathbf{c}}^1, \bar{\mathbf{c}}^2, \bar{\mathbf{c}}^3, \dots, \bar{\mathbf{c}}^k \quad (5.7a)$$

$$\bar{\mathbf{c}}^{k+1} \perp \mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \mathbf{c}^3, \dots, \mathbf{c}^k \quad (5.7b)$$

e os δ_{k+1} e $\bar{\delta}_{k+1}$ são complexos arbitrários (fatores normalizadores, por exemplo). Mostra-se, indutivamente, que os vetores

$$\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \mathbf{c}^3, \dots, \mathbf{c}^N$$

são vetores de Krylov linearmente independentes entre si, assim como os vetores

$$\bar{\mathbf{c}}^1, \bar{\mathbf{c}}^2, \bar{\mathbf{c}}^3, \dots, \bar{\mathbf{c}}^N$$

também o são.

Para isto aplica-se recursivamente as fórmulas (5.7), donde se conclui que os vetores

$$\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \mathbf{c}^3, \dots, \mathbf{c}^N \text{ e } \bar{\mathbf{c}}^1, \bar{\mathbf{c}}^2, \bar{\mathbf{c}}^3, \dots, \bar{\mathbf{c}}^N$$

são vetores de Krylov. A seguir verifica-se que se

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{c}^1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{c}^2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{c}^3 + \dots + \alpha_N \cdot \mathbf{c}^N = 0, \quad 0 \in \mathbb{C}$$

ou

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{c}^{-1} + \alpha_2 \cdot \mathbf{c}^{-2} + \alpha_3 \cdot \mathbf{c}^{-3} + \dots + \alpha_N \cdot \mathbf{c}^{-N} = 0, \quad 0 \in C,$$

então

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0, \quad n \leq N, \quad 0 \in \alpha_i \in C$, em ambos os casos.

Em consequência disso segue que $c^{N+1} = c^{-N+1} = 0, 0 \in C$, porque esses, que pertencem a C^N , são obtidos sob a condição de serem ortogonais a N vetores de C^N linearmente independentes, logo têm de ser nulos.

Expressando-se linearmente as relações em (5.6), tem-se:

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{c}^1 \mathbf{c}^2 \dots \mathbf{c}^N] = [\mathbf{c}^1 \mathbf{c}^2 \dots \mathbf{c}^N] \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ \delta_2 & h_{22} & \dots & h_{2N} \\ & \delta_3 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \delta_N & h_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

ou ainda

$$\mathbf{AC} = \mathbf{CH} \quad (5.9)$$

e analogamente expressa-se (5.6) como

$$\mathbf{A}^T \overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{C}} \mathbf{H} \quad (5.10)$$

As condições de ortogonalidade (5.7) são matricialmente dadas por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^{1,T} \\ \mathbf{c}^{2,T} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^{N,T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{-1} & \mathbf{c}^{-2} & \dots & \mathbf{c}^{-N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{1,T} \cdot \mathbf{c}^{-1} & \mathbf{c}^{1,T} \cdot \mathbf{c}^{-2} & \dots & \mathbf{c}^{1,T} \cdot \mathbf{c}^{-N} \\ \mathbf{c}^{2,T} \cdot \mathbf{c}^{-1} & \mathbf{c}^{2,T} \cdot \mathbf{c}^{-2} & \dots & \mathbf{c}^{2,T} \cdot \mathbf{c}^{-N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}^{N,T} \cdot \mathbf{c}^{-1} & \mathbf{c}^{N,T} \cdot \mathbf{c}^{-2} & \dots & \mathbf{c}^{N,T} \cdot \mathbf{c}^{-N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{1,T} \cdot \mathbf{c}^{-1} & & & 0 \\ & \mathbf{c}^{2,T} \cdot \mathbf{c}^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{c}^{N,T} \cdot \mathbf{c}^{-N} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

ou ainda

$$\mathbf{C}^T \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{D} = \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{C} \quad (5.12)$$

De(5.9) e (5.10) obtêm-se, respectivamente,

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{H} \text{ e } \bar{\mathbf{C}}^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{H}} \quad (5.13)$$

Mas segue de (5.12) que

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}}^{-T} \mathbf{D} \text{ e } \bar{\mathbf{C}}^{-1} = (\bar{\mathbf{C}}^{-T} \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \bar{\mathbf{C}}^T \quad (5.14)$$

e resulta então de (5.13)

$$\mathbf{H} = (\mathbf{D}^{-1} \bar{\mathbf{C}}^T) \bar{\mathbf{A}} (\bar{\mathbf{C}}^{-T} \mathbf{D}) = \mathbf{D}^{-1} (\bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{C}})^T \mathbf{D} = \mathbf{D}^{-1} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{D} \quad (5.15)$$

onde tem-se do lado esquerdo uma matriz de Hessemberg na forma superior, enquanto no lado direito, uma matriz de Hessemberg na forma inferior. Isso implica que

$$h_{ik} = \bar{h}_{ik} = 0, \quad h_{ik} \in C, \quad \text{para } i=1,2,\dots,k-2 \quad (5.16)$$

logo

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N} \\ & h_{32} & \dots & h_{3N} \\ 0 & & h_{N,N-1} & h_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{21} & & 0 \\ h'_{12} & h'_{22} & h'_{32} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & h'_{N,N-1} \\ h'_{1N} & h'_{2N} & h'_{3N} & h'_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

De (5.16) vê-se que as matrizes \mathbf{H} e $\bar{\mathbf{H}}$ são tridiagonais e podem ser representadas por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \delta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \delta_3 & \alpha_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_N \\ & & & \delta_N & \alpha_N \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\beta}_2 & & & \\ \bar{\delta}_2 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\beta}_3 & & \\ & \bar{\delta}_3 & \bar{\alpha}_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \bar{\beta}_N \\ & & & \bar{\delta}_N & \bar{\alpha}_N \end{bmatrix}$$

Também de (5.16) segue que as relações em (5.6) simplificam-se para:

$$\delta_{k+1} \cdot \mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{c}^k - h_{k-1,k} \cdot \mathbf{c}^{k-1} - h_{kk} \cdot \mathbf{c}^k = \mathbf{A} \mathbf{c}^k - \beta_k \cdot \mathbf{c}^{k-1} - \alpha_k \cdot \mathbf{c}^k \quad (5.18a)$$

e

$$\bar{\delta}_{k+1} \cdot \bar{\mathbf{c}}^{k+1} = \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{c}}^k - \bar{h}_{k-1,k} \cdot \bar{\mathbf{c}}^{k-1} - \bar{h}_{kk} \cdot \bar{\mathbf{c}}^k = \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{c}}^k - \bar{\beta}_k \cdot \bar{\mathbf{c}}^{k-1} - \bar{\alpha}_k \cdot \bar{\mathbf{c}}^k \quad (5.18b)$$

Pré-multiplicando ambos os lados das equações (5.18a) e (5.18b) por $\mathbf{c}^{k,T}$ e $\bar{\mathbf{c}}^{k,T}$, respectivamente, resulta:

$$\begin{aligned} \text{De 4.18a} \Rightarrow 0 &= \bar{\mathbf{c}}^{k,T} \mathbf{A} \mathbf{c}^k - \alpha_k \bar{\mathbf{c}}^{k,T} \mathbf{c}^k \Rightarrow \alpha_k = \frac{\bar{\mathbf{c}}^{k,T} \mathbf{A} \mathbf{c}^k}{\bar{\mathbf{c}}^{k,T} \mathbf{c}^k} \\ \text{De 4.18b} \Rightarrow 0 &= \mathbf{c}^{k,T} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{c}}^k - \bar{\alpha}_k \mathbf{c}^{k,T} \bar{\mathbf{c}}^k \Rightarrow \bar{\alpha}_k = \frac{\mathbf{c}^{k,T} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{c}}^k}{\mathbf{c}^{k,T} \bar{\mathbf{c}}^k} = \frac{\bar{\mathbf{c}}^{k,T} \mathbf{A} \mathbf{c}^k}{\bar{\mathbf{c}}^{k,T} \mathbf{c}^k} = \alpha_k \end{aligned} \quad (5.19)$$

Também das equações (5.18) resultam as relações:

$$\text{De 4.18a} \Rightarrow 0 = \mathbf{c}^{\overline{-k-1},T} \mathbf{A} \mathbf{c}^k - \beta_k \mathbf{c}^{\overline{-k-1},T} \mathbf{c}^{k-1} \Rightarrow \beta_k = \frac{\mathbf{c}^{\overline{-k-1},T} \mathbf{A} \mathbf{c}^k}{\mathbf{c}^{\overline{-k-1},T} \mathbf{c}^{k-1}}$$

$$\text{De 4.18b} \Rightarrow 0 = \mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{A} \mathbf{c}^{\overline{-k}} - \bar{\beta}_k \mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}} \Rightarrow \bar{\beta}_k = \frac{\mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{A} \mathbf{c}^{\overline{-k}}}{\mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}}} \quad (5.20)$$

As expressões de β_k e $\bar{\beta}_k$ podem ainda ser simplificadas.

Para isso utilizam-se as relações (5.20). De (5.20a):

$$\delta_k \mathbf{c}^k = \mathbf{A} \mathbf{c}^{k-1} - \beta_{k-1} \mathbf{c}^{k-2} - \alpha_{k-1} \mathbf{c}^{k-1} \therefore \mathbf{A} \mathbf{c}^{k-1} = \delta_k \mathbf{c}^k + \beta_{k-1} \mathbf{c}^{k-2} + \alpha_{k-1} \mathbf{c}^{k-1}$$

daí

$$\bar{\beta}_k = \frac{\mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{A} \mathbf{c}^{\overline{-k}}}{\mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}}} = \frac{(\mathbf{A} \mathbf{c}^{k-1})^T \mathbf{c}^{\overline{-k}}}{\mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}}} = \frac{(\delta_k \mathbf{c}^k + \beta_{k-1} \mathbf{c}^{k-2} + \alpha_{k-1} \mathbf{c}^{k-1})^T \mathbf{c}^{\overline{-k}}}{\mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}}}$$

logo

$$\bar{\beta}_k = \delta_k \frac{\mathbf{c}^{k,T} \mathbf{c}^{\overline{-k}}}{\mathbf{c}^{k-1,T} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}}} \quad (5.21)$$

De (5.20b):

$$\bar{\delta}_k \mathbf{c}^{\overline{-k}} = \mathbf{A} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}} - \bar{\beta}_{k-1} \mathbf{c}^{\overline{-k-2}} - \alpha_{k-1} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}} \therefore \mathbf{A} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}} = \bar{\delta}_k \mathbf{c}^{\overline{-k}} + \bar{\beta}_{k-1} \mathbf{c}^{\overline{-k-2}} + \alpha_{k-1} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}}$$

logo

$$\beta_k = \frac{\mathbf{c}^{\overline{-k-1},T} \mathbf{A} \mathbf{c}^k}{\mathbf{c}^{\overline{-k-1},T} \mathbf{c}^{k-1}} = \frac{(\mathbf{A} \mathbf{c}^{\overline{-k-1}})^T \mathbf{c}^k}{\mathbf{c}^{\overline{-k-1},T} \mathbf{c}^{k-1}} = \bar{\delta}_k \left(\frac{\mathbf{c}^{\overline{-k},T} \mathbf{c}^k}{\mathbf{c}^{\overline{-k-1},T} \mathbf{c}^{k-1}} \right) \quad (5.22)$$

O processo definido pelas equações (5.18a), (5.18b), (5.19), (5.21) e (5.22) constitui o algoritmo de Lanczos para a tridiagonalização de matrizes gerais não-simétricas. Esse algoritmo pode também ser aplicado na resolução de sistemas lineares de equações algébricas. Como mostrado anteriormente os vetores de Lanczos são tais que $\mathbf{c}^{N+1}=0$. Estabelecendo-se um processo para a avaliação iterativa da solução de um sistema de equações qualquer de tal sorte que os vetores-resíduos ao longo do processo sejam vetores de Lanczos, vê-se então que no máximo N iterações, onde N é a ordem do sistema, atinge-se a solução exata do sistema, caso se realizem operações em aritmética infinita.

Considerando-se uma fórmula iterativa do tipo

$$\mathbf{u}^{n+1} = \rho_{n+1} \gamma_{n+1} \mathbf{r}^n + \rho_{n+1} \mathbf{u}^n + (1 - \rho_{n+1}) \mathbf{u}^{n-1} \quad (5.23)$$

resulta um vetor resíduo do tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{n+1} &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{b} - \rho_{n+1} \gamma_{n+1} \mathbf{A}\mathbf{r}^n - \rho_{n+1} \mathbf{A}\mathbf{u}^n - (1 - \rho_{n+1}) \mathbf{A}\mathbf{u}^{n-1} \\ &= -\rho_{n+1} \gamma_{n+1} \mathbf{A}\mathbf{r}^n + \rho_{n+1} \mathbf{r}^n + \mathbf{r}^{n-1} - \rho_{n+1} \mathbf{r}^{n-1} \end{aligned}$$

logo

$$\left(-\frac{1}{\rho_{n+1} \gamma_{n+1}} \right) \mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{r}^n - \left(\frac{1}{\gamma_{n+1}} \right) \mathbf{r}^n - \left(\frac{1 - \rho_{n+1}}{\rho_{n+1} \gamma_{n+1}} \right) \mathbf{r}^{n-1} \quad (5.24)$$

O vetor-resíduo em (5.24) tem o aspecto dos vetores de Lanczos derivados de \mathbf{A} (eq. 5.18a). Considerando-se também uma sequência de vetores auxiliares \mathbf{r}^{-n+1} do aspecto de \mathbf{c}^{-n+1} , que são vetores \mathbf{r}^{-n+1} do tipo

$$\left(-\frac{1}{\rho_{n+1}\gamma_{n+1}}\right)\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{A}^T \mathbf{r}^n - \left(\frac{1}{\gamma_{n+1}}\right)\mathbf{r}^n - \left(\frac{1 - \bar{\rho}_{n+1}}{\rho_{n+1}\gamma_{n+1}}\right)\mathbf{r}^{n-1} \quad (5.25)$$

Pode-se então impor que os vetores \mathbf{r}^{n+1} e \mathbf{r}^{n+1} sejam realmente vetores de Lanczos fazendo-se

$$-\frac{1}{\rho_{n+1}\gamma_{n+1}} = \delta_{n+1}, \quad -\frac{1}{\rho_{n+1}\gamma_{n+1}} = \bar{\delta}_{n+1} \quad (5.26)$$

com

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}} = \frac{1}{\gamma_{n+1}} = \alpha_n = \frac{\mathbf{r}^{n,T} \mathbf{A} \mathbf{r}^n}{\mathbf{r}^{n,T} \mathbf{r}^n}, \quad (5.27)$$

$$\left(\frac{1 - \rho_{n+1}}{\rho_{n+1} \cdot \gamma_{n+1}}\right) = \beta_n = \bar{\delta}_n \cdot \left(\frac{\mathbf{r}^{n,T} \cdot \mathbf{r}^n}{\mathbf{r}^{n-1,T} \cdot \mathbf{r}^{n-1}}\right), \quad (5.28)$$

$$\left(\frac{1 - \bar{\rho}_{n+1}}{\rho_{n+1} \cdot \gamma_{n+1}}\right) = \bar{\beta}_n = \delta_n \cdot \left(\frac{\mathbf{r}^{n,T} \cdot \mathbf{r}^n}{\mathbf{r}^{n-1,T} \cdot \mathbf{r}^{n-1}}\right) \quad (5.29)$$

De (5.27) segue que

$$\gamma_{n+1} = \bar{\gamma}_{n+1} = \frac{\mathbf{r}^{n,T} \mathbf{r}^n}{\mathbf{r}^{n,T} \mathbf{A} \mathbf{r}^n} \quad (5.30)$$

De (5.28) resulta, utilizando-se as relações (5.26),

$$1 - \rho_{n+1} = \rho_{n+1} \gamma_{n+1} \left(-\frac{1}{\rho_n \gamma_n}\right) \left(\frac{\mathbf{r}^{n,T} \mathbf{r}^n}{\mathbf{r}^{n-1,T} \mathbf{r}^{n-1}}\right)$$

logo,

$$1 = \rho_{n+1} \left[1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \left(\frac{\bar{\mathbf{r}}^{-n,\top} \mathbf{r}^n}{\bar{\mathbf{r}}^{-n-1,\top} \mathbf{r}^{n-1}} \right) \frac{1}{\bar{\rho}_n} \right]$$

portanto,

$$\rho_{n+1} = \left[1 - \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \right) \left(\frac{\bar{\mathbf{r}}^{-n,\top} \mathbf{r}^n}{\bar{\mathbf{r}}^{-n-1,\top} \mathbf{r}^{n-1}} \right) \frac{1}{\bar{\rho}_n} \right]^{-1} \quad (5.31)$$

Analogamente segue de (5.29) que

$$\bar{\rho}_{n+1} = \left[1 - \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \right) \left(\frac{\bar{\mathbf{r}}^{-n,\top} \mathbf{r}^n}{\bar{\mathbf{r}}^{-n-1,\top} \mathbf{r}^{n-1}} \right) \frac{1}{\bar{\rho}_n} \right]^{-1} \quad (5.32)$$

E, definindo-se portanto, $\rho_1 = \bar{\rho}_1 = 1$, vê-se que

$$\rho_2 = \left[1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(\frac{\bar{\mathbf{r}}^{-1,\top} \mathbf{r}^1}{\bar{\mathbf{r}}^{-0,\top} \mathbf{r}^0} \right) \right]^{-1} = \bar{\rho}_2$$

e indutivamente mostra-se que

$$\rho_{n+1} = \bar{\rho}_{n+1} = \left[1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \left(\frac{\bar{\mathbf{r}}^{-n,\top} \mathbf{r}^n}{\bar{\mathbf{r}}^{-n-1,\top} \mathbf{r}^{n-1}} \right) \frac{1}{\bar{\rho}_n} \right]^{-1} \quad (5.33)$$

O algoritmo de Lanczos para a resolução iterativa de sistemas de equações lineares é então estabelecido pela

fórmula (5.23), onde os parâmetros ρ_{n+1} e γ_{n+1} são calculadas por (5.33) e (5.30), respectivamente, e \mathbf{r}^n é determinado de (5.24). Para cálculo dos parâmetros ρ_{n+1} e γ_{n+1} é necessário também a determinação do vetor resíduo auxiliar, que é obtido de (5.25). Este algoritmo é geral, e pode ser aplicado a qualquer sistema não singular. A convergência é garantida em no máximo N iterações, podendo este não ser o caso em consequência de erros de truncamento na execução das operações.

A razão de convergência pode ser consideravelmente melhorada, quando da consideração de procondicionadores (aceleração de outros métodos diferentes do de Richardson). O procondicionamento baseado na matriz do método básico de Jacobi tem se mostrado especialmente atraente e conduzido a uma grande eficiência do algoritmo de Lanczos. O procondicionamento de Gauss-Seidel normalmente reduz o número de iterações necessárias para que a convergência seja atingida, mas o número de operações por iteração aumenta, de tal sorte que o tempo de processamento aumenta em relação ao uso do algoritmo de Lanczos com procondicionamento de Jacobi.

No caso de sistemas simétricos de equações lineares, tem-se que $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$, e, por conseguinte, $\mathbf{r}^{n+1} = \overline{\mathbf{r}}^{n+1}$. O algoritmo simplifica-se portanto para:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \rho_{n+1} \gamma_{n+1} \mathbf{r}^n + \rho_{n+1} \mathbf{u}^n + (1 - \rho_{n+1}) \mathbf{u}^{n-1} \quad (5.34)$$

onde

$$\mathbf{r}^{n+1} = -\rho_{n+1} \gamma_{n+1} \mathbf{A} \mathbf{r}^n + \rho_{n+1} \mathbf{r}^n + (1 - \rho_{n+1}) \mathbf{r}^{n-1} \quad (5.35)$$

e

$$\gamma_{n+1} = \frac{\mathbf{r}^{n,T} \mathbf{r}^n}{\mathbf{r}^{n,T} \mathbf{A} \mathbf{r}^n}, \quad \rho_{n+1} = \left[1 - \left(\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \right) \left(\frac{\mathbf{r}^{n,T} \mathbf{r}^n}{\mathbf{r}^{n-1,T} \mathbf{r}^{n-1}} \right) \frac{1}{\rho_n} \right]^{-1} \quad (5.36)$$

O solver estabelecido pelas relações (5.34), (5.35) e (5.36) é conhecido como algoritmo de gradiente conjugado "three-term form".

5.5 ALGORITMO DE GRADIENTE BICONJUGADO

O processo de aceleração de Lanczos pode também ser expresso na seguinte forma:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \lambda_n \cdot \mathbf{p}^n \quad (5.37)$$

onde os vetores \mathbf{p}^n , que definem as direções de busca, são dados por:

$$\mathbf{p}^n = \begin{cases} \mathbf{r}^0, & n = 0 \\ \mathbf{r}^n + \alpha_n \cdot \mathbf{p}^{n-1}, & n \geq 1 \end{cases} \quad (5.38)$$

Sendo a fórmula iterativa dada por (5.37), segue que o resíduo para a n-ésima iteração é dado por:

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{u}^n = \mathbf{r}^{n-1} - \lambda_{n-1} \cdot \mathbf{A} \mathbf{p}^{n-1} \quad (5.39)$$

Para as fórmulas iterativas auxiliares obtém-se:

$$\bar{\mathbf{r}}^n = \bar{\mathbf{r}}^{n-1} - \lambda_{n-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{p}}^{n-1} \quad (5.40)$$

e

$$\bar{\mathbf{p}}^n = \begin{cases} \bar{\mathbf{r}}^0 = \mathbf{r}^0 & , n=0 \\ \bar{\mathbf{r}}^n + \alpha_n \cdot \bar{\mathbf{p}}^{n-1} & , n \geq 1 \end{cases} \quad (5.41)$$

Da imposição da condição de que os vetores-resíduos \mathbf{r}^n sejam vetores de Lanczos, ou seja (ver eq. 4.11)

$$\mathbf{r}^{i,T} \cdot \bar{\mathbf{r}}^j = 0, i \neq j \quad (5.42)$$

Prova-se que as direções de busca \mathbf{p}^j são ortogonais às direções de busca auxiliares $\bar{\mathbf{p}}^j$ em relação à matriz \mathbf{A} , ou seja:

$$\bar{\mathbf{p}}^{i,T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}^j = 0, i \neq j \quad (5.43)$$

Com as relações (5.42) e (5.43) demonstra-se facilmente que os parâmetros λ_{n-1} e α_n do processo iterativo são dados por:

$$\lambda_{n-1} = \frac{\bar{\mathbf{r}}^{(n-1),T} \cdot \mathbf{r}^{n-1}}{\bar{\mathbf{p}}^{(n-1),T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}^{n-1}}, \alpha_n = \frac{\bar{\mathbf{r}}^{n,T} \cdot \mathbf{r}^n}{\bar{\mathbf{r}}^{(n-1),T} \cdot \mathbf{r}^{n-1}} \quad (5.44)$$

O processo iterativo estabelecido por (5.37), (5.38), (5.39), (5.40), (5.41) e (5.44) é conhecido como algoritmo de gradiente biconjugado.

Quando \mathbf{A} é simétrica recai-se no algoritmo padrão de gradiente conjugado, cuja fórmula iterativa e direção de busca são obtidas por (5.37) e (5.38) respectivamente, mas cujos parâmetros λ_{n-1} e α_n são, agora, simplificados para:

$$\lambda_{n-1} = \frac{\mathbf{r}^{(n-1),T} \cdot \mathbf{r}^{n-1}}{\mathbf{p}^{(n-1),T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}^{n-1}}, \alpha_n = \frac{\mathbf{r}^{n,T} \cdot \mathbf{r}^n}{\mathbf{r}^{(n-1),T} \cdot \mathbf{r}^{n-1}} \quad (5.45)$$

já que $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ e, assim, $\mathbf{r}^n = \overline{\mathbf{r}^n}$ e $\mathbf{p}^n = \overline{\mathbf{p}^n}$.

5.6 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Alternativamente ao critério de parada descrito por Araújo, F.C., Mansur, W.J. e J.E.B. Malaghini[13] para sistemas algébricos reais, pode-se verificar a convergência da solução através da diferença entre as soluções atual e anterior tomando-se por base uma determinada tolerância como explicitado na expressão abaixo:

$$\varepsilon \leq \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\| \quad (5.46)$$

onde \mathbf{u}^n é o vetor solução na n-ésima iteração.

Para o caso de sistemas complexos, a verificação da solução pode ser feita através da comparação das parcelas real e imaginária do erro com as tolerâncias real e imaginária, respectivamente. Assim, deve-se ter

$$\varepsilon_{\text{r}} \leq \text{real}(\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|) \text{ e } \varepsilon_{\text{i}} \leq \text{imag}(\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|) \quad (5.47)$$

onde ε_{r} e ε_{i} são as tolerâncias real e imaginária, respectivamente. Eventualmente pode-se adotar $\varepsilon_{\text{r}} = \varepsilon_{\text{i}}$.

CAPÍTULO VI - APLICAÇÕES

6.1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo de validar os algoritmos desenvolvidos neste trabalho, diversos problemas tridimensionais frequência-dependentes, envolvendo, em alguns casos, acoplamento de subregiões de contorno, foram analisados. A fim de verificar a eficiência dos *solvers* iterativos em relação aos diretos, as técnicas de resolução de sistemas lineares desenvolvidas, e apresentados na tabela 6.1, foram analisadas, observando-se os tempos gastos na resolução dos sistemas resultantes, bem como o número de iterações gastas na resolução destes, no caso dos *solvers* iterativos. Adotou-se, no caso dos *solvers* iterativos, o critério de parada descrito no capítulo 5, para o qual a tolerância foi estabelecida em 1×10^{-8} .

GS:	Eliminação de Gauss sem pivotamento;
GTL:	Eliminação de Gauss com troca de linhas;
GPC:	Eliminação de Gauss com troca de linha e coluna;
FLU:	Fatoração LU ;
LCPJ:	Lanczos com condicionamento de Jacob;
LREPJ:	Lanczos real equivalente com precond. Jacob;
GbCPJ:	Gradiente biconjugado com precond. Jacob;
GbREPJ:	Gradiente biconj. Real equiv. com precond. Jacob;

Tabela 6.1. *Solvers* diretos e iterativos.

Os resultados apresentados neste capítulo, obtidos através do método da Eliminação de Gauss sem pivotamento, não se modificaram quando da utilização das diversas técnicas de resolução de sistemas lineares, tanto iterativas quanto diretas.

6.2 CAVIDADE ESFÉRICA SOB TENSÃO PRESCRITA

Uma cavidade esférica de raio 6 m está submetida a uma pressão axial interna uniforme de 100 Pa. O meio sobre a qual esta cavidade se encontra possui módulo de elasticidade igual a 2.5×10^6 Pa, coeficiente de poisson 0.25, massa específica 100 kg/m^3 e coeficiente de amortecimento 0,05.

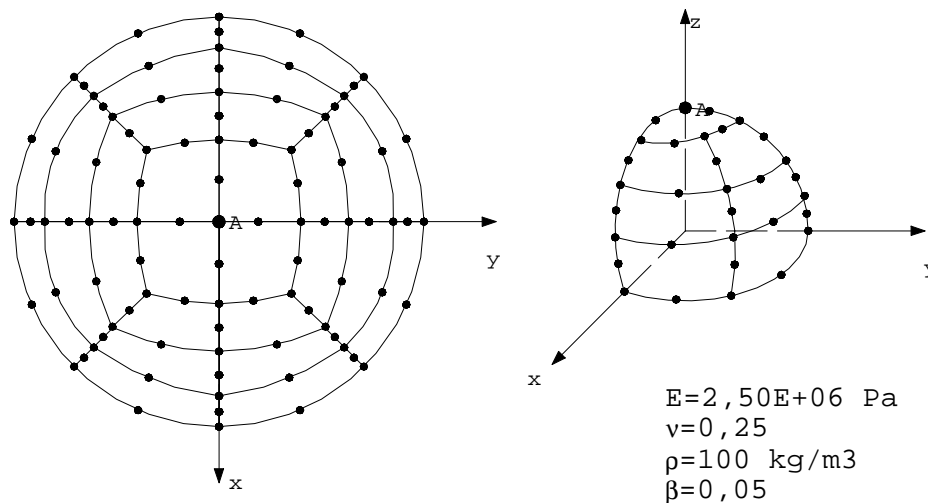


Figura 6.1. Cavidade esférica: 56 elementos, 170 nós.

Esta cavidade foi discretizada, conforme figura (6.1), por meio de elementos de contorno parabólicos de 8 nós, totalizando 56 elementos e 170 nós. Os resultados obtidos, para o deslocamento vertical do ponto A, estão apresentados na tabela 6.2. A parte real do deslocamento axial na superfície da cavidade(ponto A) foi plotada em função da frequência do carregamento, normalizada em relação à frequência $\omega_1=74.09$ Hz(fig 6.2).

Frequência	Parte Real	Parte Imaginária
0,000	1,495671816E-04	0,000000000E+00
10,000	1,623466772E-04	-3,918423589E-06
20,000	1,926398784E-04	3,121488981E-05
30,000	1,805920619E-04	1,078802572E-04
40,000	1,120409148E-04	1,421587119E-04
50,000	6,100830322E-05	1,292524345E-04
60,000	3,560477170E-05	1,093620560E-04
70,000	2,282611964E-05	9,216327738E-05
80,000	1,568434663E-05	7,853463260E-05
90,000	1,147056935E-05	6,819443490E-05
100,000	8,778586122E-06	6,148404077E-05
110,000	7,151103138E-06	5,448023395E-05
120,000	5,611708470E-06	5,036461579E-05
130,000	5,830303133E-06	4,629167177E-05
140,000	4,886075591E-06	4,260190976E-05
150,000	4,240874590E-06	3,861509518E-05

Tabela 6.2. Resultados: Deslocamento Vertical do ponto A.

Os resultados, mostrados na figura 6.2, são comparado com os resultados obtidos por Dominguez^[25], que resolve o problema utilizando malha com 26 elementos parabólicos de 9 nós. Resultados para pontos internos são apresentados na figura 6.3. A fim de verificar a eficiência dos *solvers* iterativos em relação aos diretos, são apresentados, na tabela (6.2), os números de iterações gastos na resolução

dos sistemas lineares complexos oriundos da resolução deste problema.

Observando-se as figuras (6.2) e (6.3), percebe-se uma diferença entre os valores obtidos neste trabalho e os resultados de Dominguez^[25]. Tal diferença ocorre devido à diferença na discretização do problema, uma vez que utilizou-se aqui uma malha mais refinada, de 56 elementos(vide fig. 6.1), enquanto Dominguez^[25] utiliza apenas 24.

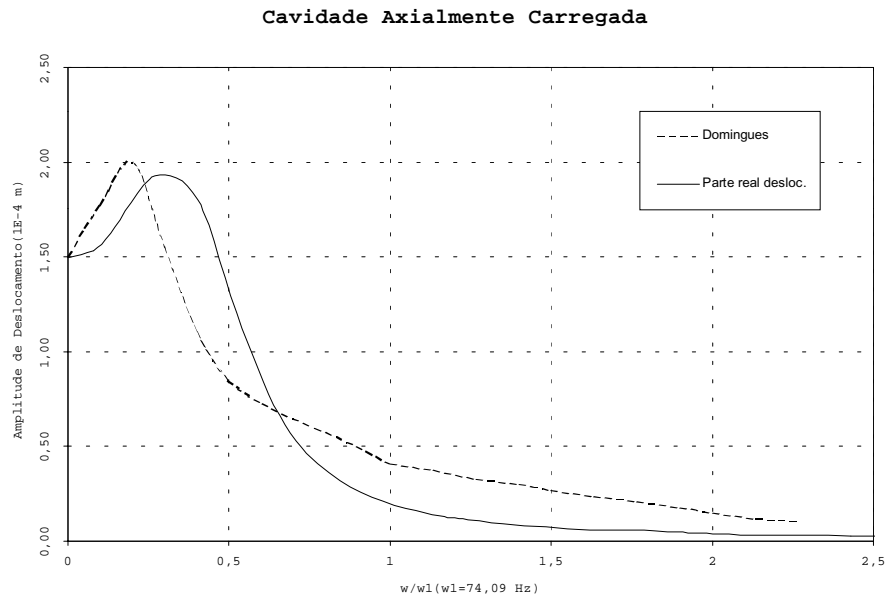


Figura 6.2. Parte real do deslocamento axial em A.

Cavidade Axialmente Carregada

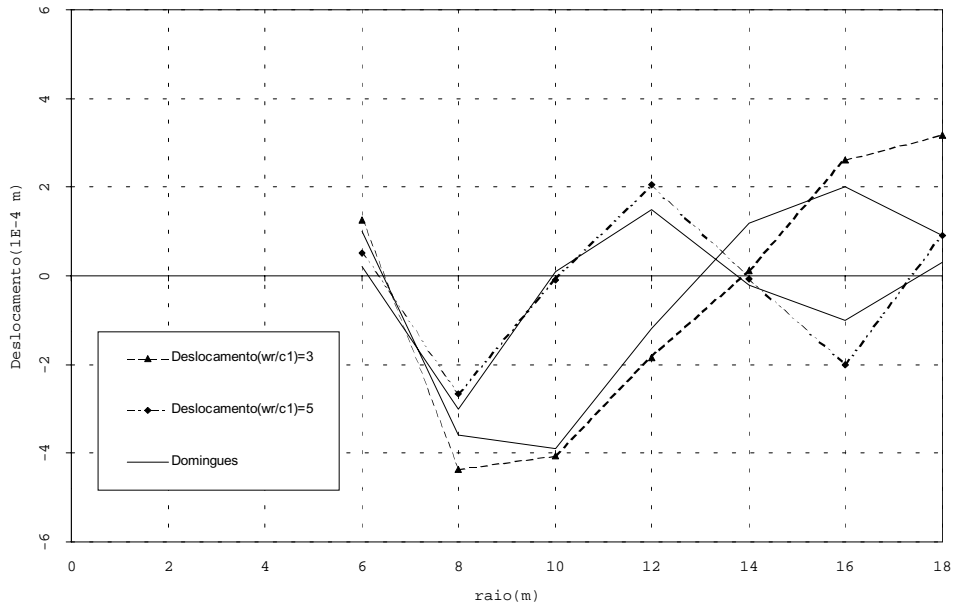


Figura 6.3. Parte real do deslocamento em pontos internos.

A tabela 6.2 mostra os resultados de medida de tempos de resolução dos sistemas lineares resultantes da solução do problema 6.2. Estes tempos foram obtidos para os solvers iterativos preconditionados e para os processos de eliminação de Gauss, considerando pivotamento completo e sem pivotamento. O número máximo de iterações permitido aos solvers iterativos foi de duas vezes a ordem do sistema. A tolerância adotada para a verificação da solução nos processos iterativos foi a mesma utilizada para a efetuação do pivotamento completo, e vale 1×10^{-8} . Todos os solvers testados neste exemplo forneceram boas soluções, mesmo para o caso do algoritmo de Lanczos considerando um sistema real equivalente(LREPJ), onde observou-se que o erro da solução

deste processo(ver eq. 5.47) não atingiu a tolerância estabelecida. Observou-se ainda que o processo de adoção de um sistema real equivalente ao sistema complexo não tornou o processo iterativo mais eficiente, pelo contrário, sua convergência despreendeu mais tempo de análise. De um modo geral, pode-se observar que os processos iterativos, efetuando operações complexas, são ligeiramente mais eficientes que o processo de Gauss, no exemplo 6.2.

Tempo de Resolução/Número de Iterações						
Freq.	GS	GPC	LCPJ	GbCPJ	LREPJ	GbREPJ
0	53,99	85,35	11,98/14	11,81/13	7,42/14	6,75/13
10	53,99	137,42	11,98/14	13,45/15	501,52/1021	7,75/15
20	54	137,26	13,62/16	13,52/15	38,77/78	8,24/16
30	53,99	137,15	15,16/18	15,21/17	501,52/1021	10,22/20
40	53,99	137,15	16,75/20	17,79/20	501,53/1021	12,74/25
50	53,99	137,15	19,17/23	22,24/25	501,47/1021	15,22/30
60	54	137,15	26,31/32	28,23/32	501,47/1021	23,57/47
70	53,99	137,15	31,03/38	32,57/37	501,58/1021	32,51/65
80	53,99	137,15	28,67/35	30,87/35	501,57/1021	27,57/55
90	54	137,15	39,88/49	40,37/46	502,68/1021	41,96/84
100	53,99	137,15	45,43/56	45,53/52	501,52/1021	58,33/117
110	53,99	137,15	39,88/49	42,07/48	501,58/1021	43,94/88
120	54	137,09	61,35/76	69,81/80	501,64/1021	71,68/144
130	53,99	137,15	80,46/100	86,29/99	47,13/95	132,7/267
140	54	137,1	69,32/86	72,44/83	501,69/1021	120,7/243
150	53,99	137,1	78,87/98	91,5/105	501,53/1021	146,5/295
Tot.:	863,9	2142,8	589,9	633,7	6614,6	760,5

Tabela 6.3. Tempos(s) de resol. Sistemas: aplicação 1.

6.3 CUBO SOB TENSÃO PRESCRITA

Um cubo de aresta igual a 6 m e propriedades físicas semelhantes à aplicação anterior é discretizado em 24 elementos parabólicos de 8 nós, gerando uma malha de 75 nós, apresentada na figura (6.4). Os deslocamentos normais à superfície deste cubo foram restringidos, exceto em sua face superior, onde foi aplicado uma tensão uniforme de 100 Pa. Conseqüentemente, a tensão cisalhante é nula em toda a superfície do corpo. As figuras (6.5) e (6.6) apresentam os resultados de deslocamento para a superfície superior no ponto A e alguns valores de z , respectivamente, em função da frequência normalizada em relação à primeira frequência de ressonância $\omega_{res}=45.34 \text{ s}^{-1}$, obtida quando o material assume a propriedade de amortecimento como sendo nula^[25]. Resultados obtidos para o ponto A são apresentados na tabela 6.4. A tabela 6.5 apresenta resultados de tempo de resolução dos sistemas resultantes desta aplicação.

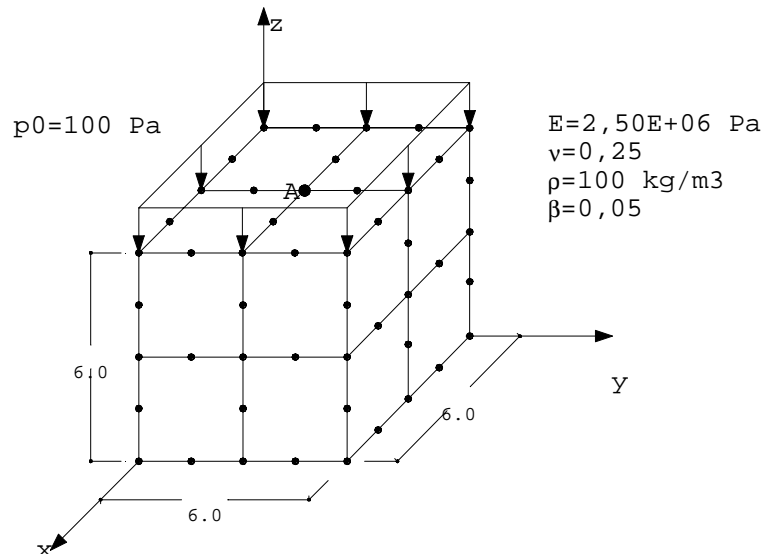


Figura 6.4. Cubo: 24 elementos, 75 nós.

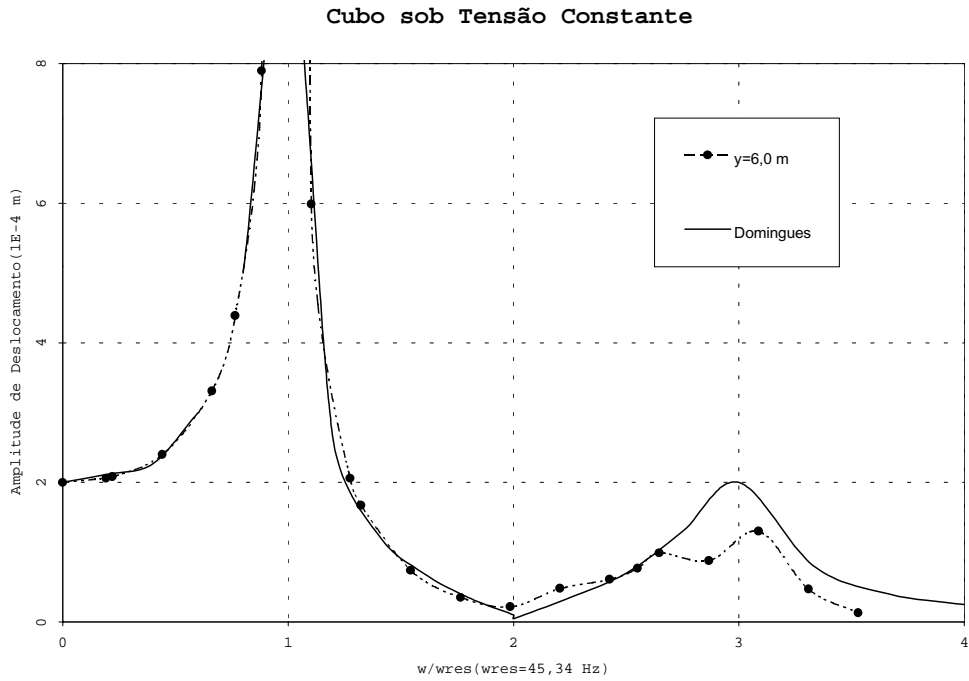


Figura 6.5. Parte real do deslocamento no ponto A.

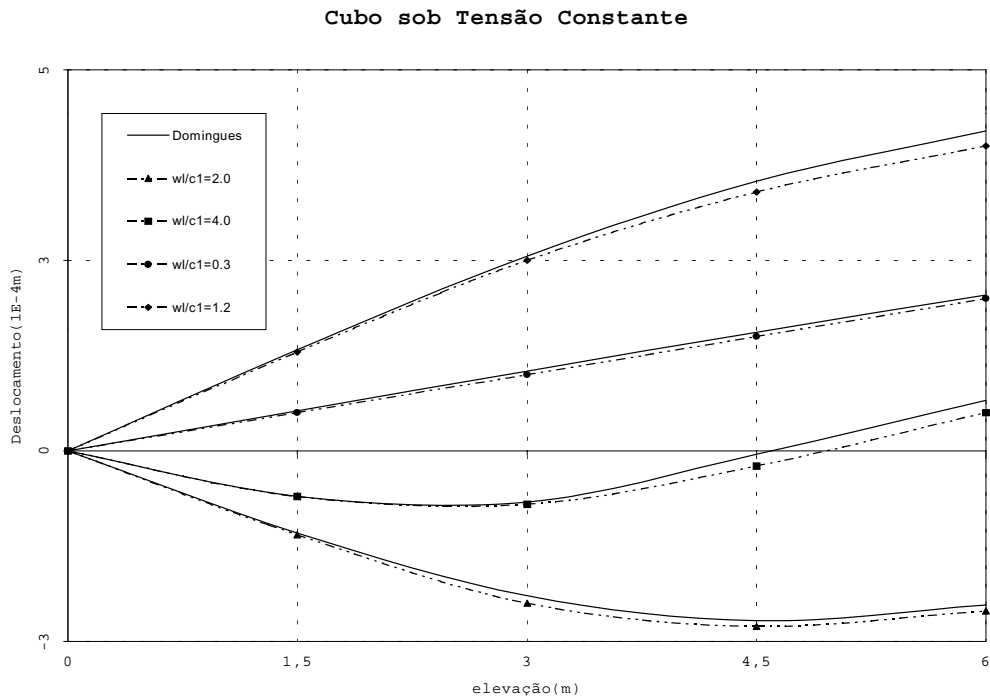


Figura 6.6. Parte real do deslocamento pontos internos.

Frequência	Parte Real	Parte Imaginária
0,000	2,003666210E-04	0,000000000E+00
10,000	2,084317651E-04	-1,091169163E-05
20,000	2,403963735E-04	-1,476507031E-05
30,000	3,310955294E-04	-2,951441048E-05
40,000	7,903542545E-04	-1,989329417E-04
50,000	-5,990559207E-04	-1,459369297E-04
60,000	-1,667008935E-04	-1,791669207E-05
70,000	-7,396470918E-05	-8,802628720E-06
80,000	-3,538540376E-05	-7,995168474E-06
90,000	-2,167361434E-05	-9,484642585E-06
100,000	4,800677290E-05	6,230284214E-05
110,000	6,091636435E-05	-4,972094269E-06
120,000	9,899206298E-05	-3,074704065E-05
130,000	8,766306852E-05	-2,406256612E-04
140,000	-1,298527283E-04	-7,526621724E-05
150,000	-4,723367997E-05	-1,587242256E-05
160,000	-1,320383439E-05	-2,115984498E-05

Tabela 6.4. Resultados: Deslocamento Vertical do ponto A.

Os resultados, tanto para deslocamento na extremidade superior(figura 6.5) quanto pontos internos(figura 6.6), são bem próximos aos valores de comparação. Cabe ressaltar que neste caso, ao contrário do problema anterior, as malhas são idênticas.

Nesta aplicação, adotou-se critério de parada e tolerância semelhantes ao problema 6.2. As medidas de tempo tomadas para a resolução deste problema mostram uma deficiência muito grande dos solvers iterativos, devido ao fato de tal sistema ser relativamente pequeno. Mais uma vez se verifica(tabela 6.4) que os procedimentos para a consideração de um sistema real equivalente ao complexo, para o caso dos solvers iterativos, não melhorou a eficiência destes. Apesar disto, as respostas para todos os solvers analisados neste problemas foram boas.

Tempo de Resolução/Número de Iterações					
Freq.	GTL	GPC	FLU	GbCPJ	GbREPJ
0	26,64	22,08	20,65	66,46 / 142	32,96 / 126
8,67	26,69	22,14	20,65	59,92 / 128	49,33 / 189
10,00	26,7	22,13	20,65	60,85 / 130	52,45 / 201
20,00	26,7	22,19	20,65	60,85 / 130	49,6 / 190
30,00	26,69	22,14	20,65	63,66 / 136	52,94 / 203
34,68	26,69	22,13	20,65	66,02 / 141	49,87 / 191
40,00	26,69	22,14	20,65	65,53 / 140	50,64 / 194
50,00	26,69	22,13	20,65	72,99 / 156	66,74 / 256
57,81	26,69	22,19	20,71	77,17 / 165	74,04 / 284
60,00	26,69	22,14	20,65	82,77 / 177	87,82 / 337
70,00	26,7	22,14	20,65	91,61 / 196	118,8 / 456
80,00	26,69	22,13	20,71	100 / 214	147,9 / 568
90,00	26,7	22,13	20,65	103,3 / 221	178,6 / 686
100,00	26,7	22,13	20,65	118,7 / 254	197,1 / 757
110,00	26,7	22,13	20,65	117,3 / 251	197 / 757
115,61	26,69	22,14	20,71	118,6 / 254	197 / 757
120,00	26,69	22,19	20,65	145,2 / 311	197 / 757
130,00	26,7	22,19	20,65	60,86 / 130	50,14 / 192
140,00	26,69	22,19	20,65	61,79 / 132	49,59 / 190
150,00	26,69	22,19	20,65	67,83 / 145	56,85 / 218
160,00	26,69	22,13	20,65	101,4 / 217	162 / 622
Total:	560,5	465,1	433,8	1763	2118

Tabela 6.5. Tempo(s) de resolução sistemas: Aplicação 6.2.

6.4 BARRA SOB OSCILAÇÃO DE BASE

Uma barra prismática de seção 4x4 m e 20 m de comprimento, sofre em sua extremidade engastada, um deslocamento prescrito unitário. O domínio é discretizado em elementos parabólicos, conforme figura (6.7). As propriedades físicas desta, correspondem ao aço, e possuem os seguintes valores: módulo de elasticidade 2.08×10^{11} Pa, poisson 0.30 e massa específica de 7800 kg/m^3 .

A figura (6.8) apresenta os resultados de deslocamento no ponto A (parte real) na extremidade da barra em função das frequências normalizadas ($\omega_{\text{res}} = 52.66 \text{ s}^{-1}$). Resultados obtidos para diversos valores de amortecimento são mostrados na figura (6.9). A tabela 6.5 resultados de deslocamento para o ponto A e a tabela 6.6 medidas de tempo para esta aplicação.

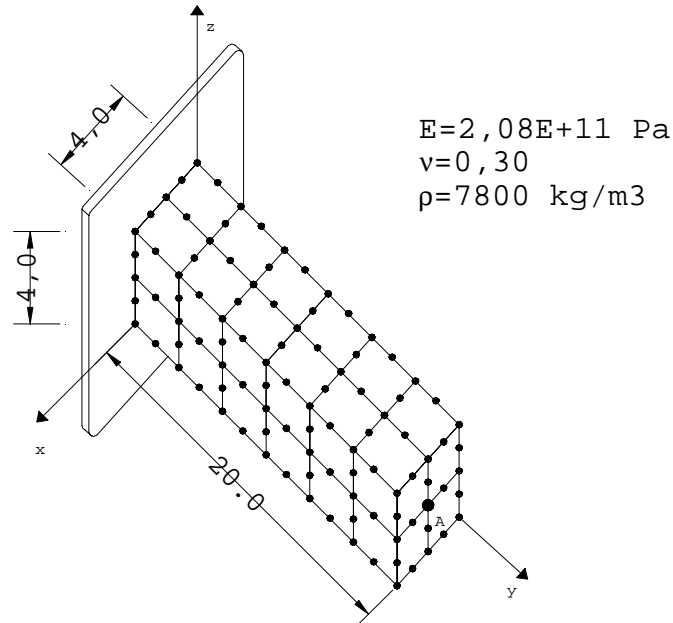


Figura 6.7. Barra sob oscilação de base:
56 elementos, 170 nós.

Barra Engastada sob Movimentação de Base

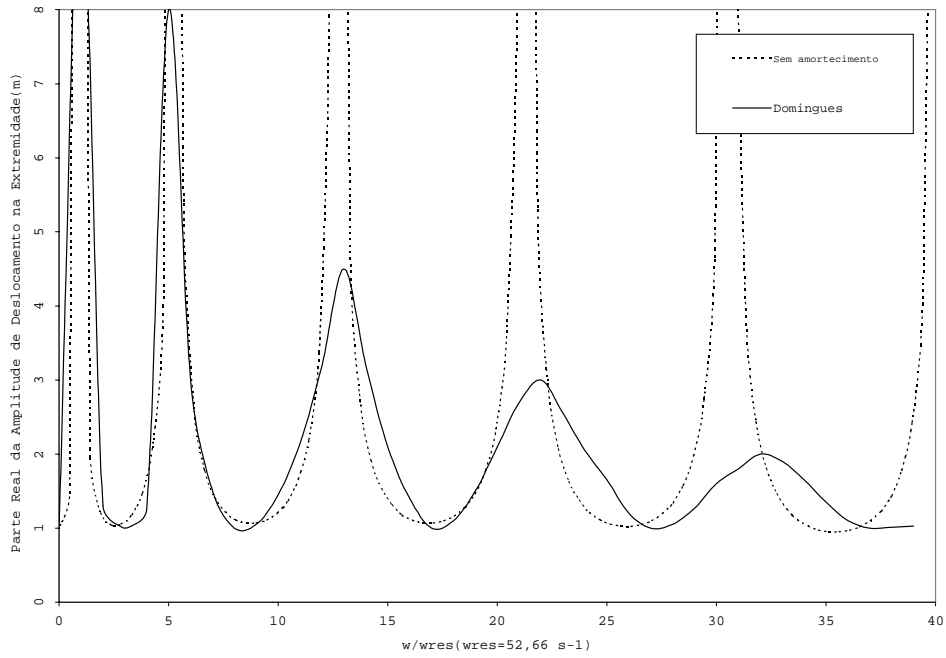


Figura 6.8. Parte real do deslocamento ponto A.

Barra Engastada sob Movimentação de Base

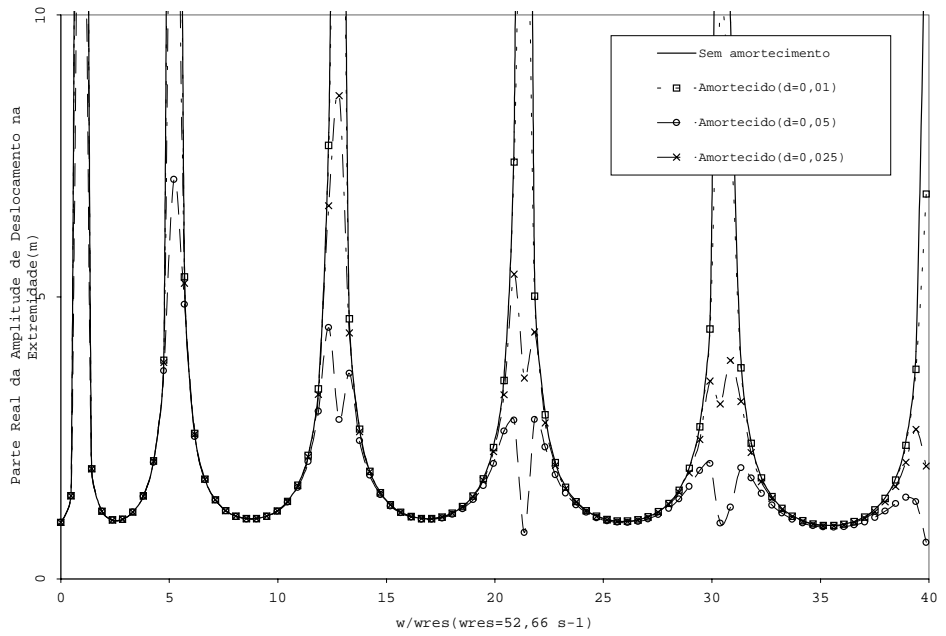


Figura 6.9. Parte real do deslocamento ponto A.

Frequência	Parte Real	Parte Imaginária
100	-1,1974488118	0,0026726689
200	-1,4718046720	-0,0016017559
300	5,3560613038	-0,0286184478
400	1,2115730818	-0,0017178282
500	1,1115185916	-0,0010945032
600	2,1934215950	0,0011406725
700	-4,6500847010	0,0323956075
800	-1,3126530048	0,0041828691
900	-1,0683452163	0,0030871720
1000	-1,4698209291	0,0036254582
1100	-7,9657258105	-0,0592697503
1200	2,0643227887	-0,0177757500
1300	1,1129829586	-0,0078204032
1400	1,0478497380	-0,0067045224
1500	1,5812924328	-0,0079150756
1600	17,7150050672	0,6999850288
1700	-1,7987015283	0,0283117124

Tabela 6.5. Resultados: Deslocamento direção y. Ponto A.

Da figura (6.8), observa-se diferença entre os resultados obtidos por este trabalho e a curva de comparação obtida por Dominguez^[25], devido à adoção de diferentes malhas na resolução do problema. A curva de comparação foi obtida com 22 elementos enquanto os resultados deste trabalho utilizaram 56(figura 6.7).

Da análise de alguns sistemas originados desta aplicação(tabela 6.6), pode-se verificar o mal condicionamento dos sistemas resultantes, visto que o processo de Gauss com pivotamente funcionou apenas para tolerâncias da ordem de 1×10^{-15} . Apesar disto, todas as respostas foram boas.

Tempo de Resolução/Número de Iterações				
Freq.	GS	GPC	GbCPJ	GbREPJ
100	28,45	64,32	50,15 / 162	62,12 / 324
200	28,46	64,43	51,69 / 167	65,14 / 340
300	28,45	64,43	51,68 / 167	69,92 / 365
400	28,39	64,48	54,16 / 175	76,62 / 400
500	28,45	64,54	49,49 / 160	61,9 / 323
600	28,4	64,49	49,22 / 159	73,93 / 386
700	28,45	64,48	53,22 / 172	85,95 / 449
800	28,39	64,48	49,55 / 160	65,37 / 341
900	28,45	64,48	47,35 / 153	65,14 / 340
1000	28,4	64,53	49,49 / 160	67,28 / 351
1100	28,46	64,48	52,62 / 170	87,11 / 455
1200	28,4	64,48	57,83 / 187	86,79 / 453
1300	28,4	64,54	52,02 / 168	87,17 / 455
1400	28,4	64,53	49,21 / 159	65,91 / 344
1500	28,45	64,53	50,75 / 164	65,09 / 340
1600	28,45	64,53	55,97 / 181	80,08 / 418
1700	28,45	64,54	51,35 / 166	68,99 / 360

Tabela 6.6. Tempo(s) de resolução sistemas: Aplicação 6.3.

6.5 BARRA SOB CARREGAMENTO DE HEAVISIDE

Uma barra prismática engastada, de largura igual a 1, altura igual a 2 e comprimento 4, é submetida a uma força constante, em sua extremidade livre, aplicada subitamente e mantida constante indefinidamente. Os resultados obtidos

através da transformada de Fourier para 32 divisões de tempo são mostrados nas figuras (6.11) e (6.12). A geometria e discretização do problema podem ser vistas na figura (6.10).

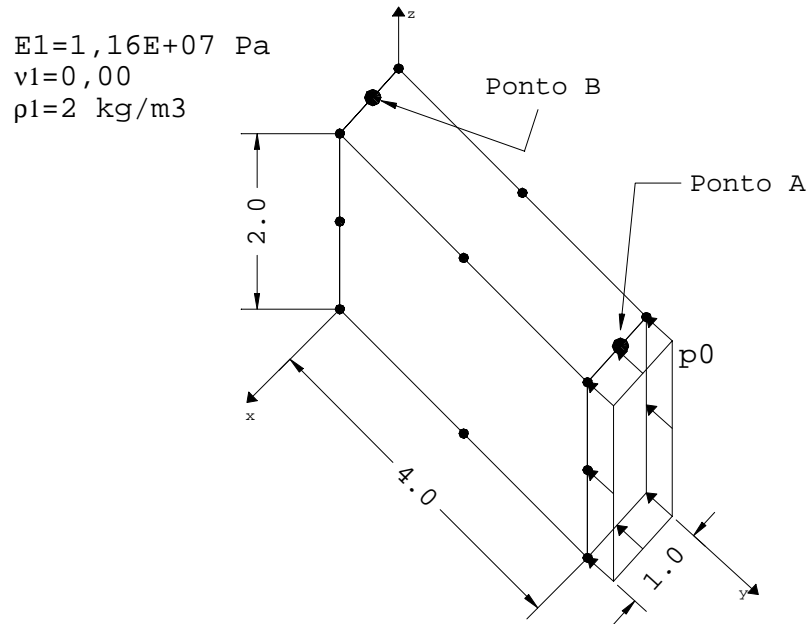


Figura 6.10. Barra sob carregamento constante
6 elementos, 20 nós.

Considerando-se que foram utilizados apenas 32 subdivisões do período de análise do problema (consequentemente 32 parâmetros de Fourier) os resultados de deslocamentos podem ser considerados bons, conforme visto na figura (6.11). As tensões obtidas na região do engaste tiveram erros maiores em relação à solução analítica, se comparadas aos deslocamentos (figura 6.12). Isto se deve ao fato de haver maior dificuldade na reconstituição das tensões de contorno, as quais, por exemplo, apresentam saltos no tempo, o que leva a um acúmulo de erro na sua obtenção.

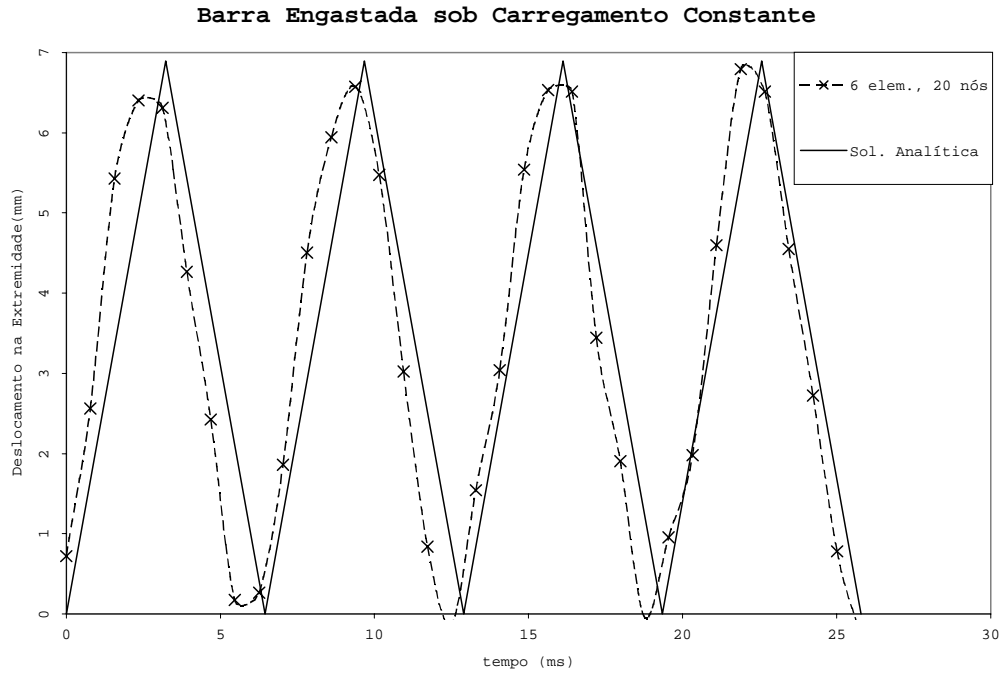


Figura 6.11. Deslocamento direção y. Ponto A.

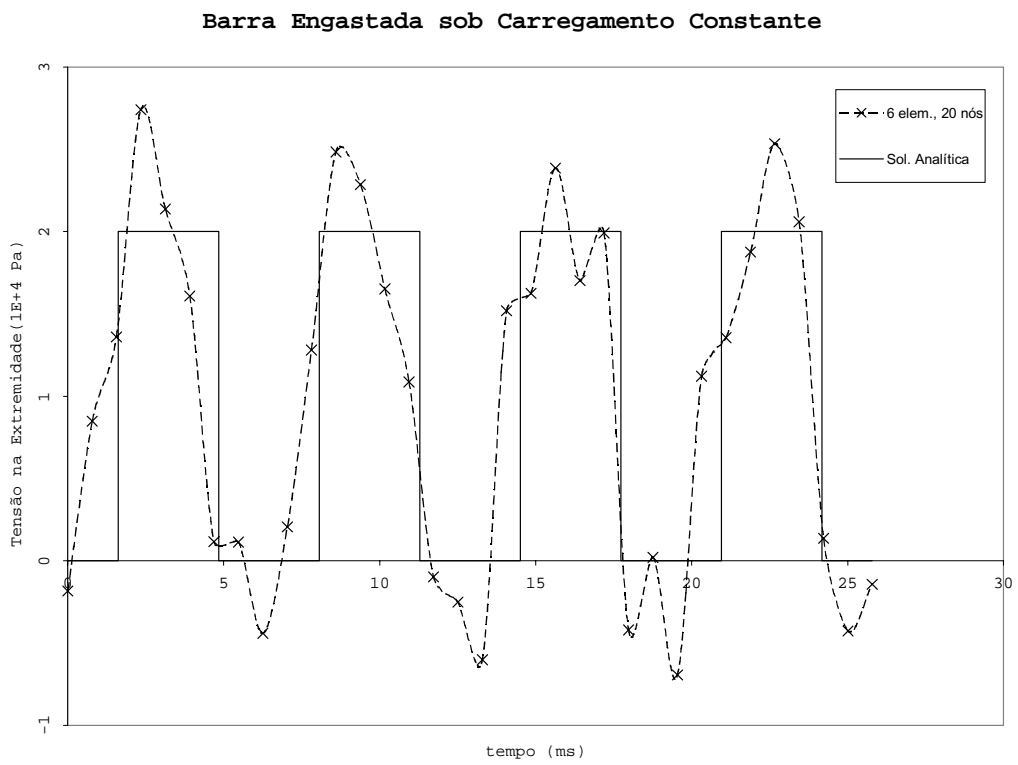


Figura 6.12. Tensão direção y. Ponto B.

6.6 FUNDAÇÃO RÍGIDA

Um bloco rígido apoiado em uma camada infinita de solo é submetido a um carregamento uniforme de $4,00 \times 10^4$ N e analisado para vários valores de frequência. O bloco tem altura de 0,76 m e possui base quadrada de 1,52 m. As propriedades do bloco são: módulo de elasticidade igual a 25 GPa, poisson 0,00 e massa específica de 2500 kg/m^3 . O solo possui módulo de elasticidade 20 Mpa, poisson 0,35 e massa específica 1800 kg/m^3 .

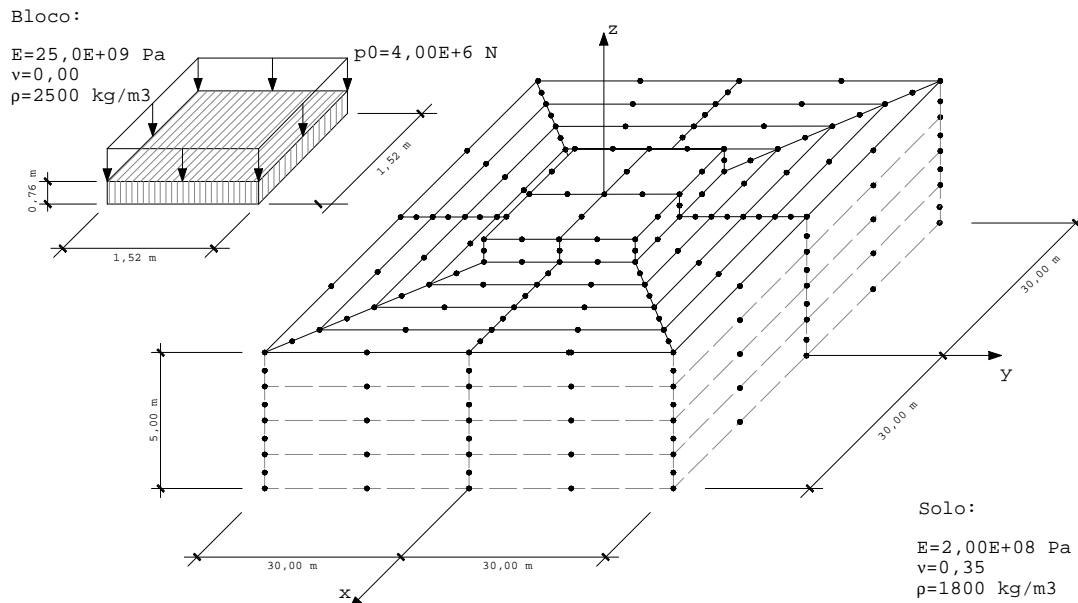


Figura 6.13. Fundação Rígida: 52 elem., 416 nós.

O problema foi resolvido através de elementos parabólicos de 8 nós, como visto na figura (6.13). O bloco foi

discretizado em 16 elementos, o solo em 36 com mais 36 elementos *enclosing*. Valores da parte real dos deslocamentos verticais para pontos em várias profundidades são mostrados na figura (6.13), para alguns valores de frequência.

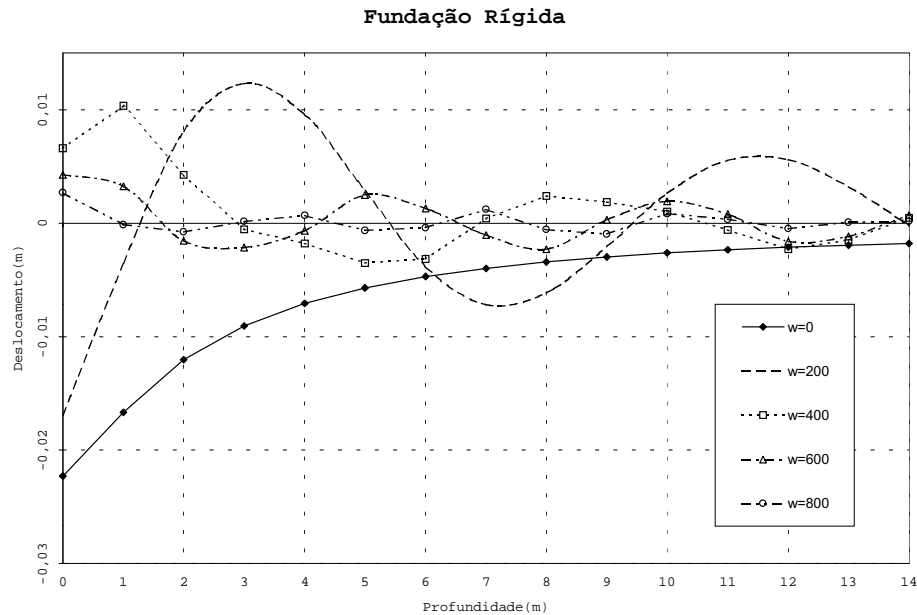


Figura 6.14. Parte real deslocamento vertical. Eixo z.

6.7 FUNDAÇÃO FLEXÍVEL

A mesma geometria e carregamento do problema anterior é utilizada para a análise de um bloco flexível de propriedades: módulo de elasticidade igual a 25 MPa, poisson 0,00 e massa específica de 2500 kg/m³. O solo

possui as mesmas propriedades dadas anteriormente. Os resultados foram plotados na figura (6.15).

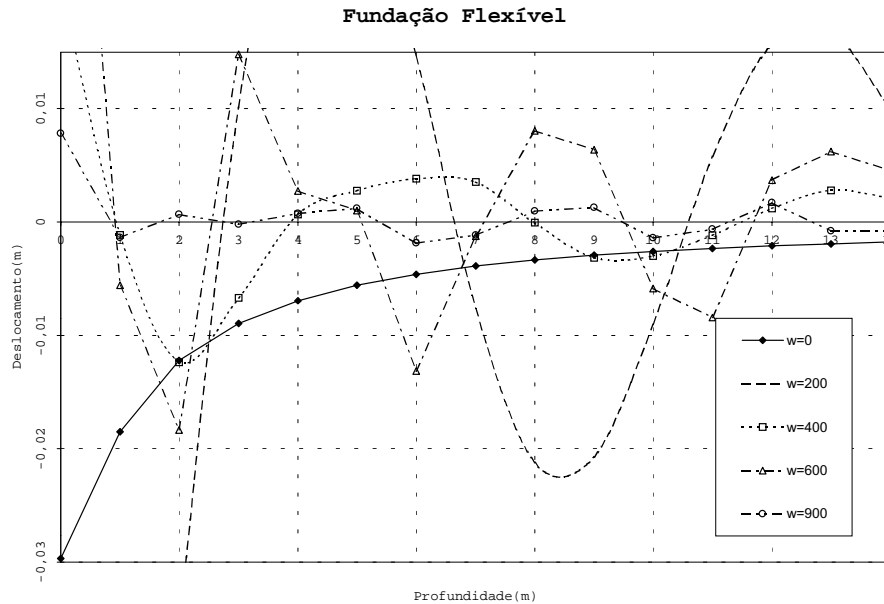


Figura 6.15. Parte real deslocamento vertical. Eixo z.

As figuras (6.14) e (6.15) apresentam os resultados, para o caso da fundação flexível e rígida respectivamente, em pontos pertencentes ao solo, em função de várias frequências de carregamento. Nestes casos, a solução pode estar um pouco comprometida, uma vez que a malha adotada para a resolução de tais problemas (fig. 6.13), devido à limitação de equipamento, foi bastante pobre. Esta observação é mais significativa no caso da fundação rígida, uma vez que existe uma singularidade na distribuição das tensões nos cantos do bloco (fig. 6.16).

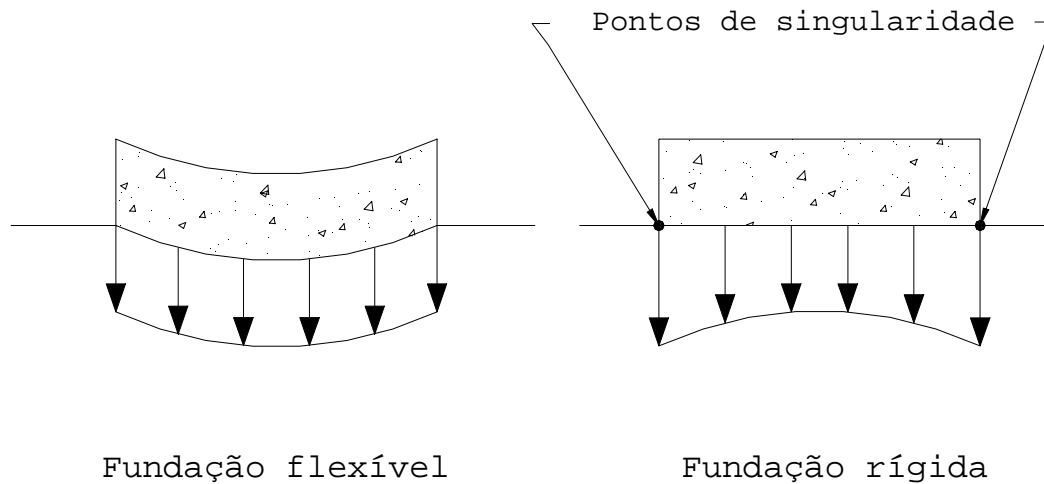


Figura 6.16. Distribuição de Tensões no solo.

6.8 ACOPLAMENTO ESTRUTURA-SOLO-ESTRUTURA

Nesta aplicação analisa-se a solução para pontos no interior da camada semi-infinita de solo, ao longo do eixo z da figura (6.17), para o caso de dois blocos rígidos sob carregamento senoidal dado por

$$p(t) = P_0/2 \sin(0,628t), \quad P_0/2 = 2,00 \times 10^4 \text{ N} \quad (6.1)$$

Os blocos foram discretizados em 6 elementos e o solo em apenas 19 elementos com 21 *enclosing*, todos eles parabólicos de 8 nós, conforme figura(6.17). Os resultados são apresentados, para meio período de carregamento apenas, na figura(6.18). Convém observar que a malha adotada para a

resolução deste problema é bastante pobre, podendo prejudicar a solução, dada pela figura (6.18).

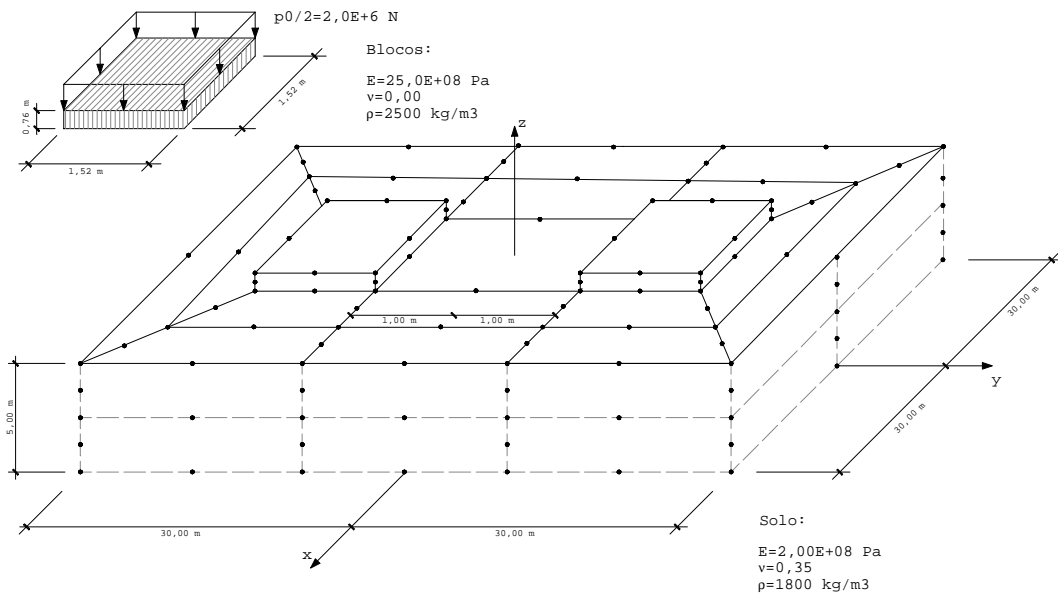


Figura 6.17. Acoplamento solo-estrutura: 33 elem., 314 nós.

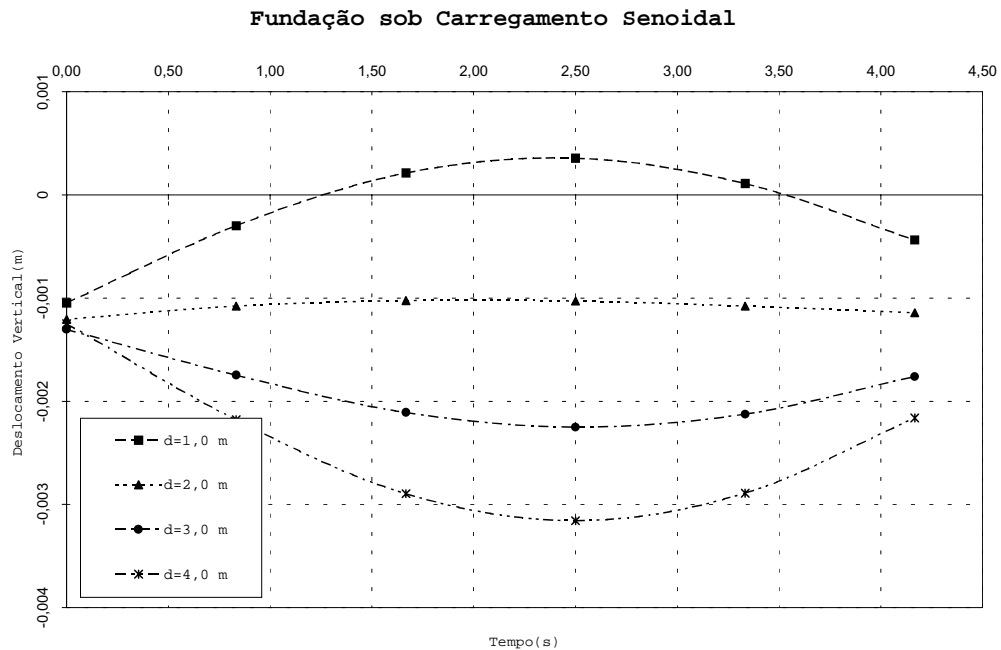


Figura 6.18. Deslocamento vertical no solo. Eixo z.

6.9 ACOPLAMENTO SOLO-SOLO-ESTRUTURA

Analisa-se neste exemplo, a solução para pontos pertencentes às camadas finita e semi-infinita de solo, ao longo do eixo z da figura (6.19), sob o carregamento dado pela eq. (6.1), onde agora $P_0=4,00 \times 10^4$ N. A geometria e discretização deste problema são apresentados na figura (6.19), onde o bloco foi discretizado em 16 elementos, as camadas de solo finita e infinita em 40 e 4, com 256 e 288 elementos *enclosing*, respectivamente. Os resultados obtidos são plotados na figura (6.20).

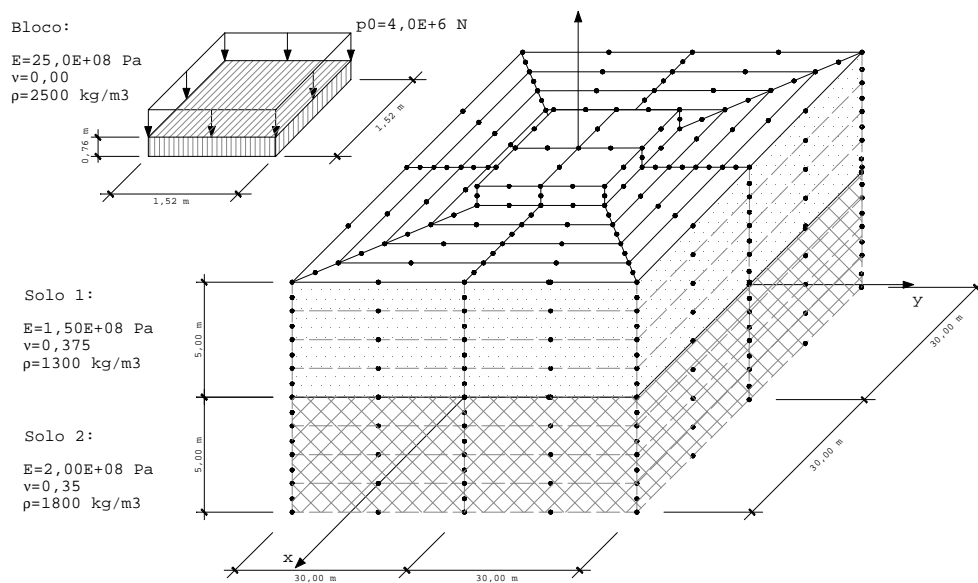


Figura 6.19. Acoplamento solo-solo-estrutura.

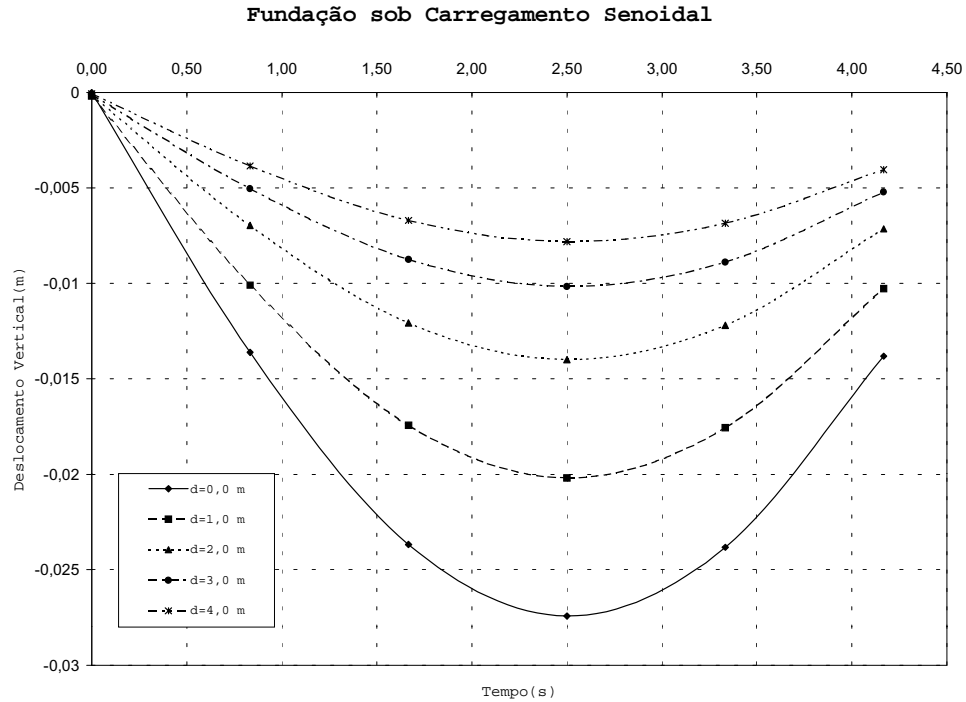


Figura 6.20. Deslocamento vertical no solo. Eixo z.

6.10 BARRA SOB CARREGAMENTO AXIAL SENOIDAL

Três problemas envolvendo uma barra prismática engastada sob carregamento senoidal com amplitude de 1kN e frequência de $0,628 \text{ s}^{-1}$, foram aqui considerados.

Primeiramente se considerou uma barra homogênea, discretizada com 18 elementos parabólicos e geometria idêntica à barra do problema 6.5. Considerou-se também o caso de uma barra com geometria semelhante à primeira e propriedades físicas apresentadas na figura (6.21). Por fim, a mesma barra do problema 6.5 foi dividida em três subregiões, cujas propriedades são apresentadas também na fig. (6.21).

Os resultados obtidos, para deslocamento axial na extremidade das barras são mostrados nas figuras (6.22), (6.23) e (6.24) para a barra homogênea, com duas e três subregiões, respectivamente. A tabela 6.7 apresenta tempos de resolução dos sistemas resultantes da resolução do problema da barra com três subregiões, para o *solver* de gradiente biconjugado preconditionado. É feita uma comparação entre algoritmos que utilizam técnicas de eliminação de operações sobre os blocos nulos das matrizes dos sistemas acoplado, conforme visto no item 3.5, e algoritmos que fazem operações sobre estes blocos.

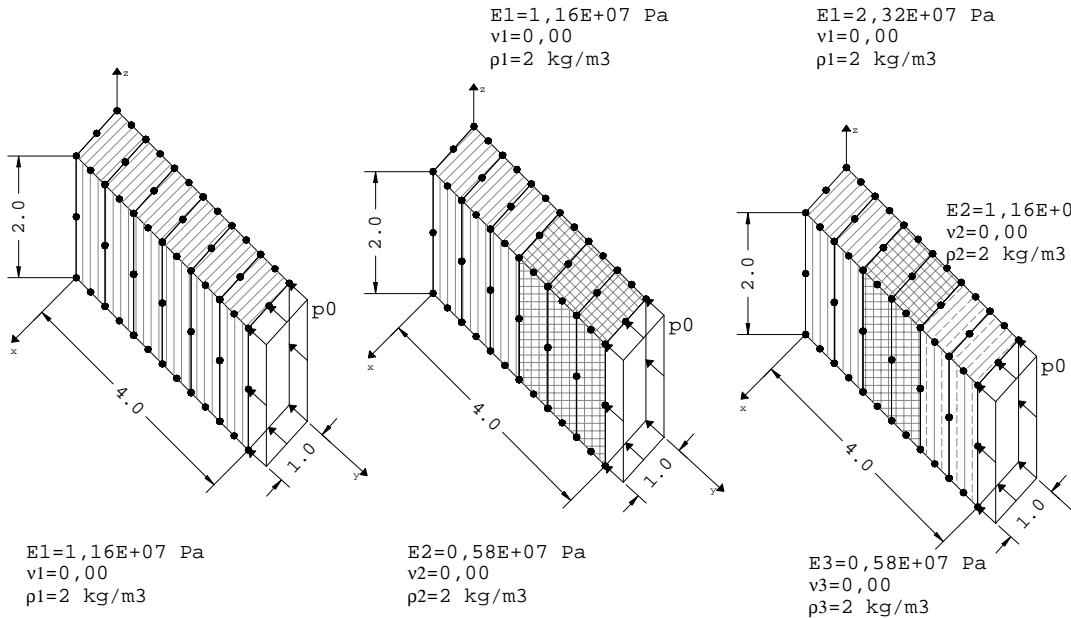


Figura 6.21. Barra sob carregamento axial senoidal

Barra sob Carregamento Axial Senoidal

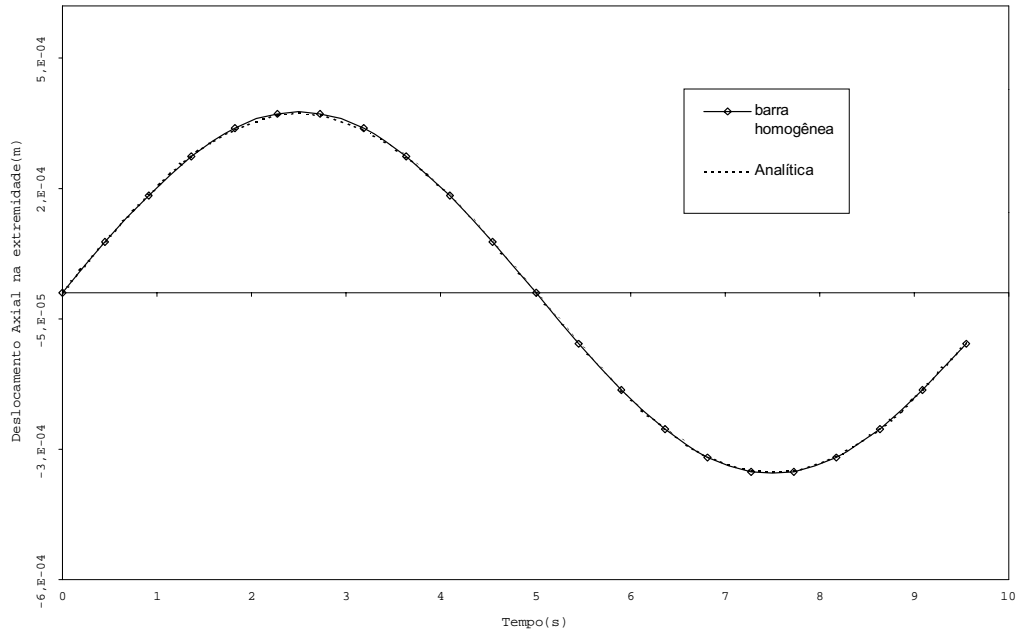


Figura 6.22. Deslocamento na extremidade. Barra homogênea

Barra sob Carregamento Axial Senoidal

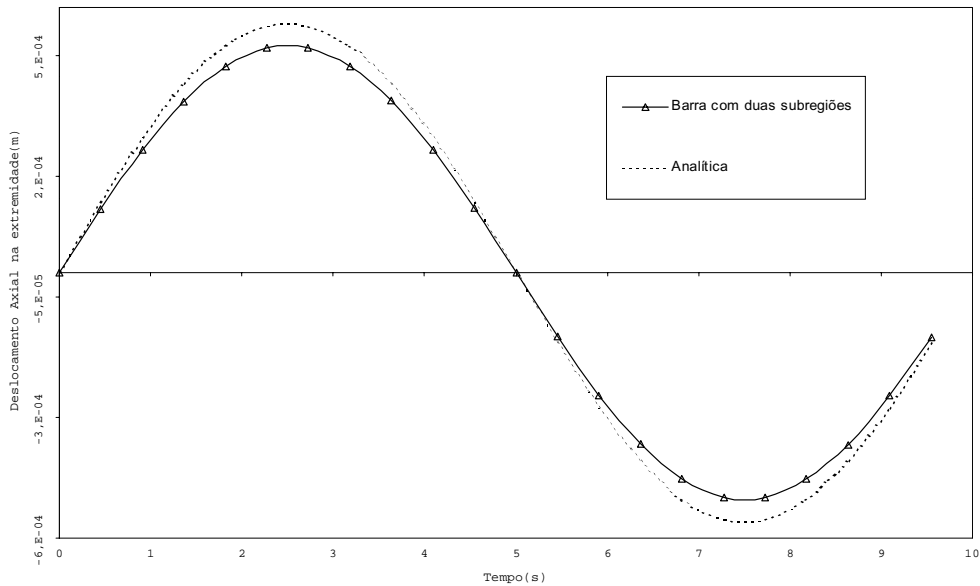


Figura 6.23. Deslocamento na extremidade. Duas regiões.

Barra sob Carregamento Axial Senoidal

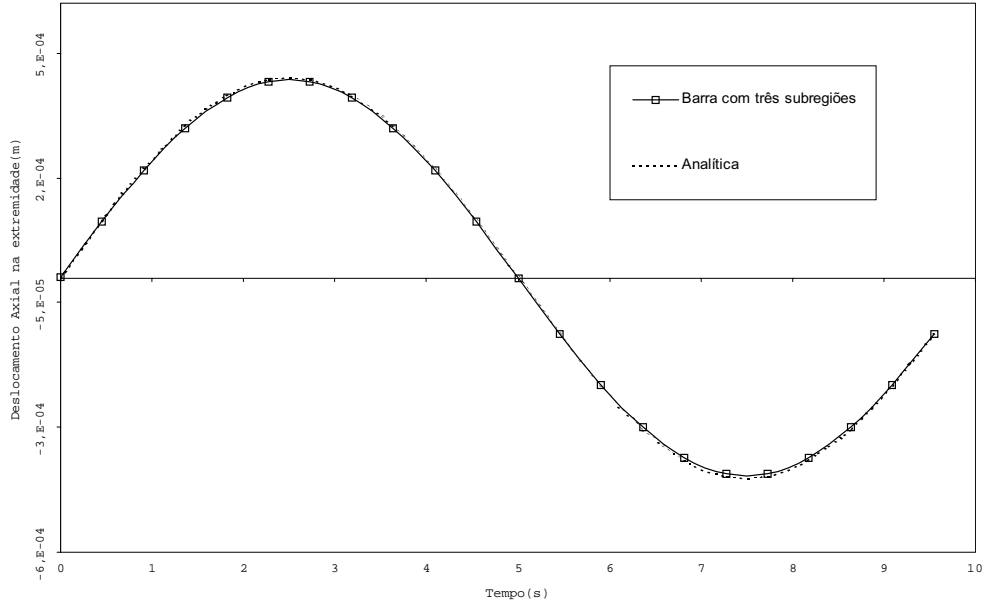


Figura 6.24. Deslocamento na extremidade. Três regiões.

Os resultados obtidos, para deslocamento axial da extremidade livre da barra homogênea (fig. 6.22), estão de acordo com a solução analítica, obtida a partir da teoria de barras prismáticas. No segundo problema analisado, a figura (6.23) mostra uma boa aproximação dos resultados teóricos. No último problema desta aplicação, a barra, sob o mesmo carregamento externo, dividida em três subregiões distintas, os resultados mostrados na figura (6.24), mais uma vez mostram uma conformidade com os valores teóricos. Neste exemplo, procurou-se comparar a eficiência dos *solvers* iterativos com técnicas que eliminam operações com blocos nulos, em relação aos mesmos *solvers*, que operam sobre blocos nulos. Pode-se concluir, da tabela 6.7, que consegue-se uma melhora bastante significativa (cerca de 50%) ao se adotar processos para eliminar operações sobre zeros, justificando a implementação de tais técnicas no caso de problemas de acoplamento.

Lanczos Precondicionado			Lanczos Real Equivalente Precondicionado		
Freq.	Sem zeros	Com zeros	Freq.	Sem zeros	Com zeros
	Tempo / Iter	Tempo / Iter		Tempo / Iter	Tempo / Iter
0,00	116,44 / 430	250,46 / 500	0,00	86,24 / 401	133,58 / 498
0,63	127,81 / 472	238,48 / 476	0,63	114,74 / 680	227,83 / 655
1,26	128,31 / 474	232 / 463	1,26	111,61 / 650	217,67 / 637
1,88	125,61 / 464	230,47 / 460	1,88	120,5 / 676	226,4 / 688
2,51	114,3 / 422	211,95 / 423	2,51	109,63 / 665	222,66 / 625
3,14	125,62 / 464	233,49 / 466	3,14	114,41 / 673	225,36 / 653
3,77	124,57 / 460	231,51 / 462	3,77	116,88 / 725	242,71 / 667
4,40	121,61 / 449	232,01 / 463	4,40	112,11 / 717	240,19 / 640
5,03	124,02 / 458	229,43 / 458	5,03	117,76 / 737	246,83 / 672
5,65	128,91 / 476	238,49 / 476	5,65	118,97 / 694	232,39 / 679
6,28	111,61 / 412	232,99 / 465	6,28	130,78 / 865	289,68 / 746
6,91	112,87 / 417	227,99 / 455	6,91	117,21 / 693	232,07 / 669
7,54	123,42 / 456	229,97 / 459	7,54	123,09 / 705	236,07 / 703
8,17	112,65 / 416	228,49 / 456	8,17	127,54 / 767	256,78 / 728
8,80	128,8 / 476	229,97 / 459	8,80	125,28 / 702	235,03 / 715
9,42	111,56 / 412	231,02 / 461	9,42	129,08 / 712	238,32 / 737
10,05	122,92 / 454	208,99 / 417	10,05	151,15 / 695	232,67 / 863
10,68	119,68 / 442	204,98 / 409	10,68	151,49 / 865	289,56 / 865
11,31	122,93 / 454	228,49 / 456	11,31	124,08 / 748	250,46 / 708
11,94	132,65 / 490	227,5 / 454	11,94	121,82 / 765	256,12 / 695
12,57	122,65 / 453	229,47 / 458	12,57	145,61 / 788	263,86 / 831
13,19	111,55 / 412	211,52 / 422	13,19	125,23 / 806	269,79 / 715
2670,5		5019,7	2695,2		5266

Tabela 6.7. Comparação entre tempos, em segundos, de resolução de sistemas lineares, entre algoritmo de Lanczos com eliminação de operações sobre zeros e sem.

CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES

No presente trabalho desenvolveu-se um procedimento para a análise numérica de problemas tridimensionais estacionários, baseado na transformação do problema tempo-dependente em um equivalente, no domínio da frequência. Uma vez que a implementação deste último pode ser facilmente derivada de um algoritmo formulado para a resolução de problemas estáticos, tornou-se possível resolver problemas estacionários gerais, sob carregamento periódico ou não, com uma considerável facilidade, inclusive no que se refere à implementação de amortecimento viscoso do material, característica importante na análise de problemas de iteração solo-estrutura.

Uma técnica que permitisse o acoplamento entre várias subregiões de contorno foi elaborada, permitindo-se a análise de problemas tridimensionais de multidomínios acoplados, tais como problemas de acoplamento entre solo-estrutura com camada semi-infinita ou finita de solo, como visto no capítulo anterior.

A fim de verificar a eficiência dos *solvers* iterativos em relação aos diretos, procedeu-se à adaptação dos diversos *solvers*, tanto diretos quanto iterativos, ao sistemas complexos resultante do acoplamento multidomínio. Considerou-se também a possibilidade de substituir este sistema complexo resultante, por um sistema real

equivalente, cuja ordem seria o dobro do primeiro, mas com a vantagem de operar apenas sobre números reais. Como este sistema gera matrizes contendo uma grande quantidade de blocos nulos, tornou-se necessário a elaboração de um algoritmo que não operasse sobre estes blocos nulos. Tal algoritmo foi implementado apenas nos *solvers* iterativos, visto que estes efetuam apenas operações de multiplicação com a matriz do sistema, permanecendo a forma da matriz do sistema acoplado inalterada. Já no caso dos diretos, com ou sem pivotamento, as operações na matriz conduzem a um procedimento bem mais complexo o qual não foi abordado neste trabalho.

Com o objetivo de validar os procedimentos acima descritos, foram analisados vários problemas tridimensionais, conforme visto no capítulo anterior. No que diz respeito à análise de eficiência dos *solvers*, cabe ressaltar que os resultados de tempos obtidos para resolução dos sistemas algébricos não são inteiramente confiáveis, uma vez que, para um mesmo sistema, ocorreram variações consideráveis na obtenção destes tempos. Menciona-se ultimamente, que neste trabalho desenvolveu-se uma importante e geral ferramenta de análise no domínio da frequência de problemas tridimensionais via o Método dos Elementos de Contorno com uma consideração de um número genérico de subestruturas, cuja eficiência, principalmente no que tange à aplicação dos *solvers* iterativos, ainda precisa ser melhor verificada à luz de modelos mais adequadamente estabelecidos para os problemas em questão, de modo que a observação do desempenho dos *solvers* possa ser melhor realçada. Que se considere, que para a maioria dos problemas analisados, os modelos 3D, os quais estão ainda mais associados a sistemas complexos em dupla precisão, foram fortemente restringidos em virtude da

capacidade de memória dos computadores disponíveis na instituição. Também as limitações de velocidade de processamento dos equipamentos impediram a realização de um maior número de análises, por exemplo considerando-se um maior número de frequências, de modo que também a eficiência do algoritmo de análise no domínio transformado pudesse ser melhor avaliada.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. A. Hageman and D. M. Young, Applied Iterative Methods, Academic Press, Inc., 1981.
- [2] W. Hackbusch, Iterative Lösung Grosser Schwachbesetzter Gleichungssysteme, B. G. Teubner Stuttgart, 1991.
- [3] J. Stoer, 'Solution of large systems of linear equations by conjugate gradient type methods', In: Mathematical Programming, the state of art (ed. A. Bachem, M. Grötschel, B. Korte), Springer - Verlag , Berlin, 1983.
- [4] G. H. Golub and D. O'leary, 'Some history of the conjugate gradient and Lanczos algorithms: 1948 - 1976', SIAM Review, 31, 50 - 102 (1989).
- [5] O. Axelsson and V. A. Barker, Finite Element Solution of Boundary Value Problems - Theory and Computation, Academic Press, Inc., 1984.
- [6] M. Doblaré, 'Three-dimensional formulation of the boundary element method with parabolic interpolation' (in Spanish), Ph.D. Thesis, Polytechnical University of Madrid, Spain, 1981.
- [7] J. A. Bettess, 'Economical solution technique for boundary integral matrices', Int. J. Num. Methods in Engineering, 19, 1073 - 1077 (1983).
- [8] J. A. Bettess, 'Solution techniques for boundary integral matrices', Proc. Int. Conf. on Numerical Methods for Transient and Coupled problems, Venice, 1984.
- [9] P. Parreira, 'Error analysis in the boundary element

- method in elasticity' (in Portuguese), Ph.D. Thesis, Technical University of Lisboa, Portugal, 1987.
- [10] R. Mullen and J. J. Rencis, 'Iterative methods for solving boundary element equations', *Computers & Structures*, 25, 713 - 723 (1987).
- [11] F. C. Araújo, 'Iterative techniques for solving linear systems of equations originated from the boundary element method' (in Portuguese), M.Sc. Thesis, COPPE - Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, 1989.
- [12] F. C. Araújo and W. J. Mansur, 'Iterative solvers for BEM systems of equations', in C. A. Brebbia and J. J. Connor (eds), *Advances in Boundary Elements*, Vol. 1, pp. 263 - 274, Springer - Verlag, Berlin, 1989.
- [13] F. C. Araújo, W. J. Mansur and J. E. Malaghini, Biconjugate Gradient Acceleration for Large BEM Systems of Equations, *Boundary Elements XII*, Vol. 1, pp. 99-110, Springer - Verlag, Berlin, 1990.
- [14] J. H. Kane, D. E. Keyes and K. G. Prasad 'Iterative equation solution techniques in boundary element analysis, *Int. J. Num. Methods in Engineering*, 31, 1511-1536 (1991).
- [15] W. J. Mansur, F. C. Araújo and J. E. B. Malaghini, 'Solution of BEM systems of equations via iterative techniques, *Int. J. Num. Methods in Engineering*, 33, 1823-1841 (1992).
- [16] Beskos, D.E. e Manolis, G.D., "Boundary Element Methods in Elastodynamics", 1987.
- [17] Timoshenko, S.P. e Goodier, J.N., "Theory of Elasticity", Stanford University, McGraw-Hill, 1980.
- [18] Banerjee, P.K. "The Boundary Element Methods in Engennering State", State University of New York at Buffalo, McGraw-Hill.

- [19] Brebia,C.A., Telles,J.C.F. e Wrobel,L.C., "Boundary Element Thechniques", University of Southampton, Springer-Verlag, 1984.
- [20] Hwei,P.H. "Análisis de Fourier", Fondo Educativo Interamericano S.A., 1970.
- [21] Chapra,S.C. e Canale,R.P. "Numerical Methods for Engineers", University of California, Berkeley, McGraw-Hill, 1975.
- [22] Clough,R.W. "Dynamic of Structures", University of California, Berkeley, McGraw-Hill, 1975.
- [23] Bathe,K.J., "Finite Element Procedure in Engineering Analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.
- [24] Eylie,C.R. e Barrett, L.C.. "Advanced Engineering Mathematics", McGraw-Hill, 1985.
- [25] J. Dominguez, Boundary Elements in Dynamics, Computer Mechanics Publications, Southampton, & Elsevier, London, 1993.
- [26] Araújo,F.C. "Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik miteiner gekoppelten BE/FE-Methode", Ph.D Thesis, Technische Universität Braunschweig, 1994.
- [27] Araújo,F. C. e Martins,C.J., "Emprego de Solvers na Resolução de Sistemas Lineares via BEM", Universidade Federal de Ouo Preto,1996.
- [28] Achenbach,J.D. "Wave Propagation in Elastic Solids", Elsevier Science Publishers V. B., 1973.
- [29] Caputo, H.P. "Mecânica dos Solos e Suas Aplicações", vol. 2, Editora, 1987.
- [30] Eringen,A.C. and Suhubi,E.S. "Elastodynamics", vol.I and II, linear theory. Academic Press, New York,1975.
- [31] Love,A.E.H. "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", New York Dover Publications, 1944.

- [32] Nussbaumer, H.J. "Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms", Springer-Verlag, 1982.
- [33] Wolf, J.P. "Dynamic Soil-Structure Interaction", Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1985.
- [34] L. P. S. Barra, A. L. G. A. Coutinho, W. J. Mansur and J. C. F. Telles, 'Iterative solution of BEM equations by GMRES algorithm, Computers & Structures, 44, 1249-1253 (1992).
- [35] M. Hribersek, P. Skerget and H. Mang, 'Preconditioned conjugate gradient methods for boundary-domain integral method', Engineering Analysis with Boundary Elements, 12, 111 - 118 (1993).
- [36] T. J. Urekew and J. J. Rencis, 'The importance of diagonal dominance in the iterative solution of equations generated from the boundary element method', Int. J. Num. Methods in Engineering, 36, 3509-3527 (1993).
- [37] T. J. Urekew and J. J. Rencis, 'An iterative solution strategy for boundary element equations from mixed boundary value problems', Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 118, 13-28 (1994).
- [38] K. Davey and I. Rosindale, 'An iterative solution scheme for systems of boundary element equations, Int. J. Num. Methods in Engineering, 37, 1399-1411 (1994).
- [39] M. Hribersek, L. Skerget, 'Iterative methods in solving Navier-Stokes equations by the boundary element method', Int. J. Num. Methods in Engineering, 39, 115-139 (1996).
- [40] K. Davey and I. Rosindale, 'An iterative solution scheme for systems of weakly connected boundary element equations, Int. J. Num. Methods in Engineering, 39, 3933-3951 (1996).
- [41] Walker, S. P. and Lee, B. H., 'Termination Criteria in

- Iterative Solution of Large Scattering Problems using Integral Equation Methods', Communications in Num. Methods in Engineering, 13, 199-206 (1997).
- [42] K. Davey and S. Bounds, 'A preconditioning strategy for solution of linear boundary element systems using the GMRES method', Appl. Num. Math., 23, 443 - 456 (1997).
- [43] F. P. Valent and H. L. G. Pina, 'Iterative solvers for BEM algebraic systems of equations', Engineering Analysis with Boundary Elements, 22, 117 - 124 (1998).
- [44] V. Bulgakov, B. Sarler and G. Kuhn, 'Iterative solution of systems of equations in the dual reciprocity boundary element method for the diffusion equation', Int. J. Num. Methods in Engineering, 43, 713 - 732 (1998).
- [45] M. A. Kayupov, V. Bulgakov, and G. Kuhn, 'Efficient solution of 3-D geomechanical problems by indirect bem using iterative methods', Int. J. Num. Anal. Methods, 22, 983 - 1000 (1998).
- [46] R. Freund, 'On conjugate gradient type methods and polynomial preconditioners for a class of complex non-hermitian matrices', Numerische Mathematik, 57, 285 - 312 (1990).