



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.008/07

**Abordagem de Modelos Baseados em Agentes no Estudo de Séries
Temporais Financeiras**

Antonio Fernando Crepaldi

Orientador

Gerson Francisco

Co-Orientador

Fernando Fagundes Ferreira

Setembro de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dedicatória

À minha doce Juliana

Agradecimentos

Ao prof. Dr. Gerson Francisco pela orientação e pela amizade construída ao longo desses anos.

Ao meu amigo e co-orientador, prof. Dr. Fernando Fagundes Ferreira, pela grande e essencial contribuição nesse trabalho.

À minha esposa, Ana Lúcia, e à minha filha, Juliana, pela dedicação que lhes furtei.

Aos professores, Dra. Viviane M. de Oliveira, Dr. Paulo R. A. Campos e Dr. Camilo Rodrigues Neto pela cooperação em artigos publicados.

Aos amigos do grupo de pesquisa, Bira, Antonio Vitor, Márcio, Muruganandam, Paulo, André e David por toda convivência proveitosa nesses anos.

Aos professores do Instituto de Física Teórica (IFT) por compartilharem seus conhecimentos e experiências.

Aos funcionários do IFT, pelo pronto atendimento às necessidades.

À Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita Filho' pelo ensino gratuito e de qualidade.

Resumo

Na abordagem de modelos baseados em agentes, um sistema é descrito como uma coleção de entidades autônomas – os agentes – que tomam decisões com base em um conjunto de regras. No primeiro modelo investigado nessa tese os agentes possuem diferentes crenças quanto ao preço fundamental dos ativos. Esse comportamento torna o modelo mais robusto no que diz respeito a variação de parâmetros e condições iniciais para geração de fatos estilizados em séries temporais de retornos. Em seguida explorou-se com mais detalhes um conjunto de regularidades estatísticas das séries temporais geradas pelos modelos multi-agentes. Além disso discuti-se a possibilidade de calibração desses modelos a partir de dados do mercado real. Finalmente, investiga-se um modelo que apresenta quebra de sincronicidade nos tempos de transações, permitindo que os agentes negociem em diferentes escalas de tempo. Observa-se que, além desse modelo preservar as propriedades das versões síncronas, ele ainda exibe uma transição de um regime monofractal para multifractal.

Palavras Chaves: modelos baseados em agentes, Jogo da Minoria, fatos estilizados em mercados financeiros, multifractalidade.

Áreas do conhecimento: 3080203-2; 1050704-3; 1030202-6.

Abstract

In the agents based modeling approach a system is described as a collection of autonomous entities - the agents that make decisions based on a set of rules. In the first model investigated in this thesis the agents possess different beliefs regarding the fundamental asset prices. This behavior makes the model more robust with respect to the variation of parameters and initial conditions that generate the stylized facts of returns time series. Next a set of statistical regularities from the time series generated by multiple agents was explored in more detail. In addition it is discussed the possibility of calibration of the model using real market data. Finally, a model which presents synchronicity breaking in transaction time is investigated, which allows agents to trade at different time scales. It is observed that this model not only preserves the properties of the synchronous version but also exhibits the transition from a monofractal to a multifractal regime.

Key Words: agent-based models, Minority Game, stylized facts in financial market, multifractality.

Índice

1	Introdução	1
2	Modelos Baseados em Agentes	5
2.1	O problema do bar El Farol	5
2.2	O Jogo da Minoria	7
2.3	Interpretação geométrica	16
2.4	Simplificações na dinâmica do Jogo da Minoria	19
2.5	O modelo Grande Canônico	25
3	Fatos Estilizados	34
3.1	Escala em dados financeiros	35
3.2	Propriedades do retorno	37
3.3	Propriedades da volatilidade do retorno	46
4	Modelo Baseado em Agentes com Preços Fundamentais Heterogêneos	52
4.1	O modelo	53
4.2	Resultados e discussão	53
5	Estudo de Fatos Estilizados no Jogo da Minoria	58
5.1	O modelo de Heston	59
5.2	Comparações com o S&P500	62
5.3	Comparações com o modelo de Heston	66
6	Regime de transição multifractal em um modelo de Jogo da Minoria dessincronizado	70
6.1	Dimensão Fractal	71
6.1.1	Box-counting	71
6.1.2	Dimensão de Hausdorf	72
6.1.3	Multifractal	73
6.2	Jogo da Minoria com diferentes escalas de tempo	76

6.3	Análise estatística	78
6.4	Análise da função de estrutura	79
6.5	Análise Multifractal	82
7	Conclusão	86
A	Cálculo da distribuição de probabilidade de $s_i(t)$ e da dinâmica de $Y_i(t)$	90
A.1	Cálculo da distribuição $Prob[s_i(t) = \pm 1] = \frac{1 \pm \tanh Y_i(t)}{2}$	90
A.2	Cálculo da dinâmica de $Y_i(t)$	91
B	Desenvolvimento da equação da variância σ^2	92
C	Cálculo de v_i	94
D	Cálculo de $\frac{\partial H}{\partial m_i}$	95
E	Cálculo da relação entre σ^2 e H	97
F	Aproximação de variação percentual por diferença de logaritmos	99
	Referências Bibliográficas	101

Relação das Figuras

2.1	Histograma da frequência do grupo A ($N=1001$, $m=8$, $S=5$). Fonte [7], p. 412.	9
2.2	Frequência do grupo A em função do tempo, para uma população de 1001 jogadores e memória de tamanhos (a) 6, (b) 8. Fonte [7], p. 410.	10
2.3	σ como função de m para $N = 101$ e $s = 2$, mostrando 32 realizações independentes, com 10.000 unidades de tempo para cada valor de m . O valor de σ para cada realização é denotado por um ponto. A linha pontilhada horizontal representa o valor de σ para uma realização com comportamento aleatório. Fonte [8], p. 2204.	11
2.4	(a) Histograma da probabilidade condicional $P(1 \mu_k)$ com $k = 4$ para uma série com $m = 4$. Os valores binários de μ estão representados na base 10. (b) Histograma da probabilidade condicional $P(1 \mu_k)$ com $k = 5$ para uma série com $m = 4$. Fonte [8], p. 2204.	13
2.5	Histograma da probabilidade condicional $P(1 \mu_k)$ com $k = 6$ para uma jogada com $m = 6$. Os valores binários de μ estão representados na base 10. Fonte [8], p.2205.	14
2.6	σ^2/N como função de $z \equiv 2^m/N$ para vários valores de N , em uma escala log-log. Fonte [8], p. 2205.	15
2.7	As quatro possíveis estratégias para $m=1$	18
2.8	As duas novas estratégias criadas a partir do vetor ação $[0,0]$, com $m=2$	18
2.9	Acima: σ^2/N vs $\alpha = P/N$ para $P = 2^m$ com $m = 5, 6$ e 7 . Abaixo: H e ϕ versus α para o mesmo sistema de tamanho P . A linha vertical pontilhada corresponde a $\alpha = 0,34 \approx \alpha_c$. Fonte [13], p. R6272.	24
2.10	Preço diário de fechamento do NY 400 <i>Composite Index</i> durante 32 anos. Esses dados foram utilizados para construir a probabilidade condicional. Condicional sobre a última observação, por exemplo, a figura mostra qual a probabilidade da existência de uma variação + após a observação de uma seqüência ++++. Os pontos nas colunas representam a importância relativa da amostragem. Fonte [20], p. 32.	26

2.11	Os dados da fig. 2.10 agora foram quebrados em 4 segmentos, e a probabilidade condicional foi calculada para cada um deles. Pode-se observar que cada período de 8 anos comparado com o próximo, exibe alguma sobreposição. Isso mostra que os comportamentos do mercado são um tanto persistentes, permitindo que estratégias lucrativas sejam construídas. Fonte [20], p. 33.	27
2.12	Diagrama de fase do Jogo da Minoria com diversificação de estratégias. A transição de fase no Jogo da Minoria padrão corresponde a linha vertical pontilhada $c = 1/2$. As circunferências brancas são dados numéricos. Fonte [17], p. 291.	30
2.13	Ganho dos produtores e especuladores versus o número de produtores (em P unidades); o número de especuladores está fixado em $N = 641$ ($c = 0$, $m = 8$, $S = 2$, $\alpha = 0,4$, média sobre 200 realizações). As linhas são previsões teóricas. Fonte [17], p. 292.	31
3.1	Função de densidade de probabilidade empírica do retorno S (de alta frequência) das ações da Xerox negociadas no <i>New York Stock Exchange</i> durante os anos 1994 e 1995. S é ponderado com o desvio padrão σ . O gráfico semi-log mostra a leptocurtose natural observada nos dados empíricos. Para comparação a distribuição Gaussiana é mostrada em linha contínua. Fonte [26], p. 62.	38
3.2	Função de densidade de probabilidade empírica do retorno Z (de alta frequência, $\Delta t = 1$ min.), ponderado com o desvio padrão σ , do índice S&P 500 comparado com uma distribuição Gaussiana (linha pontilhada) e com uma distribuição de Lévy-estável (linha contínua) de índice $\alpha = 1,40$ e fator de escala $\gamma = 0,00375$ obtido de $P(0)$ medido quando $\Delta t = 1$ min. Fonte [26], p. 69.	40
3.3	Função de distribuição de probabilidade acumulada $P_{l>}(\eta)$ (para $\eta > 0$) e $P_{l<}(\eta)$ (para $\eta < 0$) para os retornos do índice S&P 500, com $\tau = 30$ min. (lado esquerdo, com escala log-log) e com 1 dia (lado direito, escala semi-log). Fonte [27], p. 96.	42
3.4	Gráfico semi-log da função de autocorrelação dos retornos do índice S&P 500 em uma escala temporal $\Delta t = 1$ min. A linha contínua inclinada corresponde a um decaimento exponencial. Fonte [24], p. 5307.	44
3.5	Gráfico log-log da função de autocorrelação dos retornos absolutos do índice S&P 500 em uma escala temporal $\Delta t = 1$ min. A linha contínua corresponde a um ajuste (regressão) com lei de potência, cujo expoente é igual a $0,29 \pm 0,05$. Fonte [24], p. 5307.	46

3.6	Gráfico superior: retorno diário do índice Dow Jones desde 1900. É possível ver claramente a natureza intermitente da flutuação da volatilidade. Gráfico inferior: retorno diário para um movimento Bowniano geométrico, mostrando a ausência de padrão. Fonte [27], p. 108.	48
3.7	Flutuação $F(t)$ da volatilidade com $T = 120, 600$ e 2100 min., calculado usando <i>Detrended Fluctuation Analysis</i> (DFA). As melhores retas de ajuste apresentam lei de potência com os expoentes $\alpha = 0,91; 0,89$ e $0,91$. Fonte [30], p. 444.	50
4.1	Evolução temporal do retorno r . Os parâmetros utilizados são $N = 10.000$, $P = 64$, e (a) $\theta_{max} = 1.000$ e $\rho = 0,5$; (b) $\theta_{max} = 1.500$ e $\rho = 0,5$; e (c) $\theta_{max} = 1.500$ e $\rho = 0,6$	54
4.2	(a) Evolução temporal dos retornos. (b) Autocorrelação dos retornos (linha pontilhada) e autocorrelação do valor absoluto dos retornos (linha contínua) como função de τ . (c) Distribuição de probabilidade dos retornos $P(r)$ como função de r . Os parâmetros utilizados são $N = 1.000$, $P = 100$, $\theta_{max} = 100$ e $\rho = 0,6$. Em (c) é observado caudas gordas e <i>skewness</i> negativa.	55
4.3	Valor médio de ζ da série de retornos em função do parâmetro de controle α . Os parâmetros utilizados são $P = 64$ e $\theta_{max} = 200$. A média é feita sobre 21 realizações, cada uma com 10.000 pontos. O valor de N é alterado de modo a variar o parâmetro α	56
4.4	A curtose κ como função do parâmetro de controle α . Os parâmetros utilizados são $N = 1.000$, $\theta_{max} = 100$ e $\rho = 0,6$	57
5.1	Distribuições de probabilidades acumuladas das variáveis: (a) ζ , (b) curtose e (c) volatilidade. Todas as medidas são feitas para o índice S&P500.	63
5.2	As variáveis: (a) curtose, (b) volatilidade e (c) ζ são mostradas em função do parâmetro de controle α . São 21 diferentes valores de α e a barra de erro corresponde, para cada α , a 40 realizações de simulação.	64
5.3	Distribuição de probabilidade acumulada dos retornos. As cinco diferentes distribuições correspondem a diferentes valores de $\tau = 1, 5, 7, 9, 11$ (τ cresce no sentido em que aumenta a dispersão das distribuições). As linhas contínuas representam os valores do modelo de Heston enquanto os dados obtidos para o JMGC são mostrados em pontos.	66

5.4	Distribuição de probabilidade acumulada dos retornos. As cinco diferentes distribuições correspondem a diferentes valores de $\tau = 1, 5, 7, 9, 11$ (τ cresce no sentido em que aumenta a dispersão das distribuições). As linhas contínuas representam os valores do modelo de Heston enquanto os dados obtidos para o modelo PFH são mostrados em pontos.	67
5.5	Distribuição de probabilidade dos retornos. As cinco diferentes distribuições correspondem a diferentes valores de $\tau = 1, 5, 7, 9, 11$ (τ cresce no sentido em que aumenta a dispersão das distribuições). As linhas contínuas representam os valores do modelo de Heston enquanto os dados obtidos para o modelo JMGC são mostrados em pontos.	68
5.6	Distribuição de probabilidade dos retornos. As cinco diferentes distribuições correspondem a diferentes valores de $\tau = 1, 5, 7, 9, 11$ (τ cresce no sentido em que aumenta a dispersão das distribuições). As linhas contínuas representam os valores do modelo de Heston enquanto os dados obtidos para o modelo PFH são mostrados em pontos.	68
6.1	Esquerda: Volatilidade σ e Previsibilidade H contra α . Direita: Curtose contra α	78
6.2	Função de estrutura $S_q(\Delta)$, para os retornos, $R(t)$ (gráfico superior), e sua soma acumulada de $Y(t)$ (gráfico do meio), ambos para $\alpha = 0.05$ e $q = 1.0, 2.0, \dots, 6.0$ de cima para baixo. Gráfico inferior: escalamento da função de estrutura dada pela Eq. (6.24). A inclinação da curva no ponto $q = 2$ corresponde ao expoente de Hurst (linha contínua escura). A dependência não linear observada no ajuste da curva com os dados indica multifractalidade.	80
6.3	Função de estrutura $S_q(\Delta)$, para os retornos, $R(t)$ (gráfico superior), e sua soma acumulada de $Y(t)$ (gráfico do meio), ambos para $\alpha = 0.84$ e $q = 1.0, 2.0, \dots, 6.0$ de cima para baixo. Gráfico inferior: escalamento da função de estrutura dada pela Eq. (6.24). A inclinação da curva no ponto $q = 2$ corresponde ao expoente de Hurst (linha contínua escura). A dependência linear observada no ajuste da curva com os dados indica fractalidade.	81
6.4	(a) Expoente de Hölder $h(q)$ e (b) Espectro de singularidade $D(h)$ ambos para $\alpha = 0.05$	83
6.5	Espectro multifractal para três valores de $\alpha = 0.01, 0.05$ e 0.84	84
6.6	Pontos extremos do espectro multifractal, definido no texto, para α variando de 0.0080 a 0.84 . Barra de erro obtido para 20 realizações	85

Relação das Tabelas

2.1	Possível estratégia para um sinal de tamanho $\mathbf{m=3}$	8
-----	---	---

Capítulo 1

Introdução

Os gregos, não se sabe muito bem se de maneira autóctone ou se na forma de interferência com os povos do oriente, criaram a filosofia no século VI a.C.. Os primeiros filósofos dedicavam-se ao entendimento da natureza, trabalhando basicamente com o problema de definir quais os elementos que eram a essência da matéria (terra, água, fogo e ar). Esse foi o período cosmológico, em que a explicação dos acontecimentos da natureza, que se dava por meio de mitos, cede lugar a uma explicação racional sobre a ordem do mundo. O surgimento de Sócrates, no cenário da filosofia, muda o problema-foco, da natureza para o Homem e a busca filosófica torna-se em entender a vida virtuosa. Esse período que vai de Sócrates até Aristóteles é denominado antropológico e os temas dominantes são a ética, a política e a teoria do conhecimento. Aristóteles, apesar de trabalhar sob a linha filosófica socrática, dedicou-se também à filosofia natural, trabalhando, às vezes, como biólogo (o sistema de classificação dos seres vivos utilizado na biologia é uma lição aristotélica), às vezes, como físico, mas principalmente utilizando sua capacidade para organizar a filosofia e o pensamento ocidental. Muitas de suas idéias foram acolhidas pela Igreja Católica que passou, a partir do século III d.C., a ser sua guardiã e divulgadora (com censura, claro). Na Idade Média, Aristóteles era considerado o Filósofo e inspirou vários teólogos, entre eles, o doutor da Igreja Católica, santo Tomás de Aquino [1].

No século XVII d.C., ocorre uma mudança brusca na forma de pensar sobre os problemas da natureza e não mais a herança da lógica aristotélica serve como refúgio. Galileo Galilei e seus experimentos põem por terra dois mil anos de tradição aristotélica. Assim, pode-se dizer que nasce a ciência moderna, como apresentado no conceito de Karl Popper: A ciência é um conjunto de hipóteses que levam a conclusões passíveis de confrontação empírica [2].

Esse edifício da ciência é construído nas bases sólidas do determinismo, da causalidade e em termos da linguagem com que é escrita, nas equações diferenciais.

O século XX é pródigo em teorias que irão modificar esses conceitos, enquanto

única forma de se fazer ciência. Exemplos clássicos são a Mecânica Quântica, a Teoria do Caos e as teorias sobre Sistemas Complexos.

A existência de problemas que apresentam muitos graus de liberdade, *feedbacks* positivos e negativos, interações não-lineares entre suas partes constitutivas não são bem postos no formalismo de equações diferenciais. Além disso, essas características tornam muito limitada a capacidade de previsibilidade sobre o problema. Essas questões estão presentes em várias áreas da ciência, como física, computação, economia, biologia, etc., e é a teoria da complexidade que surge como uma nova forma de abordá-los.

Complexidade é o tema mais abrangente no qual este trabalho se insere. Não existe uma definição fechada sobre complexidade, contudo, um consenso sobre seu significado, embora vago, é o de sistema formado por várias partes que interagem de maneira não linear, de tal forma que o método analítico não é suficiente para descrever o sistema, já que não se pode separá-lo em elementos independentes. Algumas propriedades genéricas lhe são características, como auto-organização e propriedades emergentes.

A auto-organização refere-se ao processo em que a organização interna de um sistema aumenta, sem ser guiada ou gerenciada por uma fonte externa. Já as propriedades emergentes referem-se às novas características que o sistema apresenta que são impossíveis de prever como um resultado geral de interações individuais [3, 5]. Exemplo desses comportamentos na física é a magnetização espontânea.

Em geral, sistemas complexos aparecem naturalmente no comportamento cerebral, na biologia, no funcionamento dos mercados, na economia, em problemas da teoria da informação, na computação, etc.

A complexidade pode ser observada numa região intermediária entre a ordem total e a completa desordem [3, 4]. Uma analogia pode ser feita com a água. Esta substância no estado sólido representa a ordem total, é um sistema cristalino, periódico. A água no estado gasoso (vapor d'água) é não previsível e desordenada. No estado líquido a água representaria a complexidade, moléculas unidas mas que têm uma certa mobilidade [3].

Existem várias medidas que tentam captar a complexidade de um sistema. Alguns exemplos são a complexidade computacional, medida informacional, tamanho da descrição de entidades regulares em um conjunto, dentre outras. Mas parece não haver uma medida capaz de encontrar o conjunto de todas as regularidades de uma entidade [4].

Uma categoria especial de sistemas complexos é aquele denominado Sistema Complexo Adaptativo (SCA), que além das características de complexidade, possui a capacidade de mudar e aprender com a experiência, ou seja, as interações internas

entre os agentes e entre os agentes e o meio resultam em um processo em que os agentes se adaptam ou aprendem [3, 5]. Diversos sistemas biológicos (evolução biológica, sistema imunológico) e sociais (mercado financeiro, evolução linguística) são exemplos de SCA.

A dificuldade de utilizar a abordagem tradicional da ciência (equações diferenciais, tratamento analítico) para entender o comportamento de sistemas complexos, levou à busca de métodos alternativos para esse fim. Um tratamento promissor para o desenvolvimento em domínios complexos é a utilização de simulação computacional de sistemas compostos de agentes autônomos que interagem entre si. Os chamados modelos baseados em agentes são simulações que envolvem indivíduos interagindo global ou localmente com outros membros da população. Os agentes podem representar pessoas, organizações sociais ou células.

Esses modelos são muito interessantes para simular SCA, uma vez que o modelo computacional pode representar o meio ambiente, os agentes e as regras de interação interna e externa. Os agentes são processos implementados no computador, que têm autonomia (eles controlam suas próprias ações), habilidade social (eles interagem uns com os outros por meio de algum tipo de linguagem) e reatividade (eles podem perceber o meio ambiente e responder a ele).

Uma das principais qualidades dos modelos baseados em agentes é desvendar propriedades emergentes de um SCA e permitir observar as interações microscópicas que levaram ao surgimento dessas propriedades.

Apesar de não existir uma receita para construção de modelos baseados em agentes, algumas características permeiam esses modelos, tais como: os agentes são projetados para lidar com informações do meio ou com aquelas obtidas da relação com outros agentes; os agentes executam regras a todo instante, sendo que estas são ingredientes fundamentais dessa técnica; ocorrência do processo de aprendizagem mediante a dinâmica de interação interna e externa.

Existe uma grande quantidade de formas de construção dos modelos baseados em agentes, porém é difícil encontrar um modelo coerente que produza bons resultados.

Nos últimos dez anos, têm-se uma contribuição significativa dos físicos na construção de um tipo de modelo baseado em agentes que busca reproduzir em simulação computacional o comportamento do mercado financeiro. Esse modelo, denominado Jogo da Minoria, se vale da lei econômica da oferta e demanda [7]. Assim, na forma mais simples do Jogo da Minoria, pode ser estabelecido um mapeamento binário entre as ações comprar=1 e vender=0. Os agentes decidem, com base em estratégias, que ação tomar (0 ou 1). Ao final de uma rodada, apura-se um excesso de oferta ou de demanda e, como na lei econômica, se beneficiam aqueles que tomam a ação contrária ao excesso apurado, portanto o grupo minoritário.

O Jogo da Minoria tem mostrado propriedades emergentes interessantes, entre elas, a ocorrência de transição de fase, conforme se altera um determinado parâmetro de controle.

Estudos mostram que o mercado financeiro possui comportamentos estatísticos que independem do tipo de ativo negociado [26, 27]. Assim, o mercado de ações, câmbio, *commodities*, índices e taxas têm comportamentos que podem ser estatisticamente generalizados. Essas características são chamadas fatos estilizados [25]. Dentre eles, pode-se citar como os mais importantes: caudas gordas, ausência de autocorrelação linear dos retornos, decaimento lento da autocorrelação dos retornos absolutos e a ocorrência de agrupamentos de volatilidade (*volatility clustering*).

O objetivo principal deste trabalho é estudar os fatos estilizados em séries temporais geradas por alguns tipos de modelos do Jogo da Minoria. Já os objetivos específicos são: i) propor uma forma alternativa do Jogo da Minoria que se mostre mais robusta em gerar os fatos estilizados (que não seja muito dependente da realização e de valores de parâmetros); ii) Utilizar alguns fatos estilizados do mercado financeiro, mais especificamente, valores obtidos do índice S&P500, com a intenção de verificar a possibilidade de calibração de dois tipos de modelos do Jogo da Minoria (modelo Grande Canônico e modelo de Preços Fundamentais Heterogêneos); iii) Criar um modelo com grupos de agentes, atuando no mercado de forma não sincronizada, buscando obter um resultado observado nos conjuntos de dados do mercado real, a multifractalidade.

A distribuição dos assuntos nesta tese se faz da seguinte forma: no capítulo 2 desenvolve-se em pormenores o modelo do Jogo da Minoria; no capítulo 3 é feita uma revisão de literatura das pesquisas em fatos estilizados no mercado financeiro; o capítulo 4 traz uma nova proposta de modelagem do Jogo da Minoria, o modelo de Preços Fundamentais Heterogêneos (PFH); no capítulo 5 estuda-se o comportamento de alguns fatos estilizados do índice S&P500 para fins de calibração de modelos do Jogo da Minoria e no último capítulo propõe-se um modelo de Jogo da Minoria contendo grupos de agentes que atuam de modo não sincronizado e cujos resultados apresentam multifractalidade, uma característica não observada em outros modelos, mas presente nos dados do mercado financeiro.

Capítulo 2

Modelos Baseados em Agentes

2.1 O problema do bar El Farol

A racionalidade perfeita, lógica e dedutiva adotada em modelos econômicos foi criticada por Arthur [6] no trabalho que se tornou um marco da modelagem baseada em agentes. Na visão dele, os problemas tratados pelos modelos econômicos são complicados demais, e expõe duas razões para explicar porque a racionalidade dedutiva falha nessas situações. Primeiro, a partir de um certo nível de complexidade, a utilização da racionalidade humana é ineficaz, ou seja, a racionalidade humana é limitada; segundo, situações de interação entre agentes são problemas mal-definidos. Um agente não pode confiar que os outros agentes em uma negociação agirão utilizando racionalidade perfeita e, portanto, seu comportamento será baseado em hipóteses. Pode-se observar que a segunda razão advém da primeira, ou seja, os outros agentes não agem com racionalidade perfeita porque esta não compete ao problema a ser tratado. Então, é a característica do problema que impede um tratamento lógico dedutivo.

Nesse ponto Arthur [6] pergunta "Como os humanos raciocinam em situações que são complicadas ou mal-definidas?" A resposta ele encontra na psicologia moderna. O ser humano tem uma capacidade dedutiva moderada e também utiliza essa forma de raciocínio com uma frequência moderada. Porém, os seres humanos têm facilidade de reconhecer padrões, e transformam os problemas complicados em problemas mais simples adotando essa percepção. Ou seja, quando não se tem a definição completa do problema ou sua racionalidade total, usam-se modelos simples baseados em hipóteses, que são construções baseadas no reconhecimento de padrões, resultando no tipo de raciocínio indutivo.

Para exemplificar o raciocínio indutivo Arthur [6] propõe o problema do bar El Farol (uma referência a um bar em Santa Fé, Estados Unidos, que uma vez por semana apresenta música Irlandesa ao vivo). Toma-se um conjunto de N pessoas,

que é fixado em $N=100$. Essas pessoas decidem, de forma independente, se irão ao bar na noite em que há apresentação de música ao vivo. A permanência ou visita ao bar é considerada agradável se ele não estiver muito cheio, ou de maneira mais específica, tiver menos que 60 frequentadores dos 100 possíveis. Os frequentadores, ou agentes do jogo, não têm como saber antecipadamente quantas pessoas irão ao bar. Cada agente decide ir ao bar se tiver uma expectativa de frequência menor que 60 pessoas, em caso contrário ele permanece em casa.

A única informação disponível, a todos os agentes, é o número de frequentadores do bar nas d semanas anteriores.

Não há apenas um modelo que todos os agentes possam usar para prever o número de frequentadores do bar e, então, tomar uma decisão, o que representaria uma solução dedutiva. Ao contrário, existe um grande número de modelos de expectativas que cada agente pode utilizar e comparativamente, *a priori*, não se consegue estabelecer qual é melhor, ou seja, cada agente poderia expor a razão de sua expectativa sem que se possa invalidar a argumentação. Deste modo, o problema é dito mal-definido, já que não existe uma solução racional dedutiva, um modelo único racional considerado correto [6].

Portanto, cada agente possuirá um conjunto de f preditores, ou hipóteses formadas a partir da informação das frequências observadas nas d semanas. Por exemplo, um dos f preditores, de um determinado agente, estabelece que nessa semana a frequência ao bar será a média geométrica das $d/2$ mais recentes semanas (sendo d um número par). Esses preditores são inicialmente estabelecidos para cada agente, de forma aleatória, a partir de um grande conjunto de tipos diferentes de preditores.

Os agentes permanecem com os f preditores durante todo o jogo, porém, a cada rodada é verificada a eficácia do preditor usado para tomada de decisão feita. Assim, para escolher o preditor em certo período t , o agente observa aquele com melhor desempenho.

A simulação computacional do problema do bar El Farol, como descrito anteriormente, apresenta dois resultados significativos [6]:

1. A frequência média no bar, a cada semana, converge para 60 pessoas.
2. Entre os preditores que mais acertam, 40% fazem previsões acima de 60 e 60% abaixo de 60. Ou seja, o conjunto de preditores ativos (aqueles dentre os f que são realmente utilizados e portanto têm uma medida de precisão) parte-se em uma razão média 40/60.

Esse resultado é robusto à mudanças nos elementos do conjunto de tipos de preditores. Portanto, desde que o conjunto tenha um espectro abrangente, haverá

convergência, no espaço dos preditores, para uma configuração 40/60. Isto implica não haver necessidade de que inicialmente o espaço tenha a configuração 40/60, porém, de modo contrário, não se conseguirá a configuração 40/60 se o espectro de preditores for muito restrito.

O sistema apresenta um processo de aprendizagem e adaptação, pois a cada rodada do jogo os agentes verificam a precisão do preditor usado naquele instante.

Após um tempo inicial de aprendizagem os preditores em uso são mutuamente coadaptados [6]. Essa idéia de adaptação é evolucionista, no sentido darwiniano de sobrevivência da espécie melhor adaptada ao meio. Isso não significa que o sistema seja evolucionário, o que implicaria em mutações nos preditores, o que não ocorre, pois eles são mantidos fixos (f para cada agente) durante o tempo de simulação.

Desse modo, pode-se comparar a evolução temporal do sistema a um processo natural, ecológico, em que um conjunto consistente de hipóteses ou preditores ativos (espécies) funcionam bem com cada outro, sob algum critério (meio ambiente).

2.2 O Jogo da Minoria

A simulação do problema do bar El Farol já contém uma grande parte das regras de elaboração do Jogo da Minoria. Mas falta a característica principal desse tipo de jogo, que é estabelecer um grupo minoritário a cada jogada (no caso do bar El Farol um grupo representando 59% da população é considerado vencedor, pois visita o bar e consegue aproveitar a noite) e instituir que os agentes pertencentes a este grupo sejam os vencedores ou logrem lucro. Uma espécie de reprodução computacional da lei da oferta e da demanda. Assim, quando dentre um conjunto de negociantes de determinado ativo, a minoria é ofertante, o preço sobe, beneficiando o lado da oferta. No caso contrário a minoria é demandante e o preço cai, beneficiando esse grupo.

Challet e Zhang em [7] propõem o modelo do Jogo da Minoria. Uma simulação binária (0 e 1) que busca mimetizar a dinâmica de um mercado de ativos. Dada uma população de N (ímpar) agentes ou jogadores, cada um possuindo um conjunto de S estratégias (de certa forma equivalente aos preditores descritos na seção anterior), deverão decidir, a cada jogada, e de forma independente, fazer parte de um grupo A ou B. Caso o grupo escolhido pelo jogador seja o grupo minoritário, ele fará parte dos vencedores naquela etapa e receberá um ponto. Assim, se A for o grupo minoritário a informação disponibilizada é o número 1, caso contrário, a informação será o número 0. Portanto, no decorrer do jogo tem-se uma seqüência de bits (0 e 1) informando qual o grupo minoritário em cada etapa.

O jogador tem uma memória limitada a respeito da seqüência de bits. Ele

consegue reter os últimos m bits da seqüência e toma sua decisão com base nessa informação. O conjunto de estratégias é fixado para cada jogador no início do jogo. Uma dada estratégia é uma estrutura com as possíveis combinações dos bits (0 e 1) em uma seqüência de tamanho m , como dado de entrada, e um bit, como dado de saída, representando a ação a ser tomada. Um exemplo de estratégia para $m=3$ é apresentado na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Possível estratégia para um sinal de tamanho $m=3$.

sinal	ação
000	1
001	0
010	0
011	1
100	1
101	0
110	1
111	0

Assim, um jogador que tenha como estratégia a tabela 2.1 e observa que a informação vigente (histórico do jogo), é, por exemplo, 010, tomará a ação 0, ou seja, pertencer ao grupo B.

Existem 2^m modos possíveis de configuração da informação (dados de entrada) para uma determinada estratégia e como cada uma dessas configurações pode apresentar duas ações diferentes, verifica-se que o número de possíveis estratégias é igual a 2^{2^m} . O espaço das estratégias cresce rapidamente com o aumento de m . Para $m=2,3,4$ o número de estratégias possíveis é 16, 256, 65.536. As S estratégias que competem a cada jogador são escolhidas aleatoriamente e serão mantidas fixas ao longo do jogo.

Pode-se analisar o jogo sob a ótica de dois extremos. O primeiro, em que apenas um jogador decide ficar de um lado, por exemplo no grupo A, e todos os outros no grupo oposto, B. Nesse caso, apenas um jogador receberá pontuação. O segundo, em que $\frac{(N-1)}{2}$ jogadores decidem por um grupo e os restantes $\frac{(N+1)}{2}$ por outro grupo. Portanto, $\frac{(N-1)}{2}$ jogadores receberão pontos por pertencerem ao grupo minoritário. Tomando o ganho total como uma medida de desempenho social, nota-se que a ocorrência do segundo caso é preferível e o resultado do jogo flutuará entre esses extremos.

Para iniciar a simulação um conjunto de m bits é gerado, e também é sorteada, para cada jogador, uma dentre suas S estratégias, a fim de que tomem suas decisões (0 ou 1). A cada jogada, todas as S estratégias, de cada jogador, são avaliadas como vencedoras ou não, baseado nos m bits passados e no resultado minoritário da jogada atual. Essa pontuação é feita mesmo para as estratégias que não foram utilizadas na jogada, portanto é uma pontuação virtual. Assim, ao longo do jogo as estratégias vão acumulando pontos na medida de sua precisão (o jogador pertencer ao grupo minoritário), como se fossem usadas em todas as jogadas. Porém, somente a estratégia que até aquele instante tenha acumulado o maior número de pontos virtuais será a tomadora de decisão.

O jogo apresenta uma simetria entre os grupos A e B [7]. A figura 2.1 mostra um histograma do número de agentes pertencentes ao grupo A, ou seja, a freqüência com que um determinado tamanho de grupo A ocorre. O histograma de B é o reflexo no espelho da figura 2.1, a freqüência do número de agentes no grupo A, por exemplo $n(A)=601$, é a mesma que $n(B)=400$.

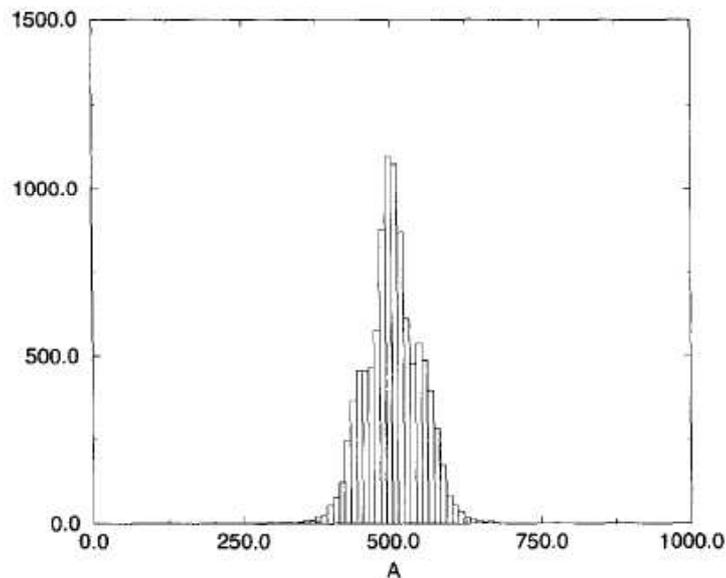


Figura 2.1: Histograma da freqüência do grupo A ($N=1001$, $m=8$, $S=5$). Fonte [7], p. 412.

O histograma da figura 2.1 mudará de configuração, tornando-se mais concentrado em torno de 500 na medida em que aumenta-se a memória, m , para um dado conjunto N , S . A figura 2.2 apresenta o número de agentes presentes no grupo A em função do tempo. Verifica-se a ocorrência de uma flutuação em torno de $\frac{N}{2}$

agentes. Porém, essa flutuação é menor quando aumenta-se a memória m . Uma flutuação menor em torno de $\frac{N}{2}$ representa uma melhor distribuição de recursos. Quando A tem valor um pouco menor que $\frac{N}{2}$, significa que um grande número de agentes compõem a minoria. No caso em que A tem valor um pouco acima de $\frac{N}{2}$, é o grupo B que representa uma minoria expressiva. Então, uma grande flutuação representa um desperdício, uma vez que muitos agentes poderiam tomar parte no grupo minoritário, e ganhar pontos, sem prejuízo para os que já pertenciam àquele grupo.

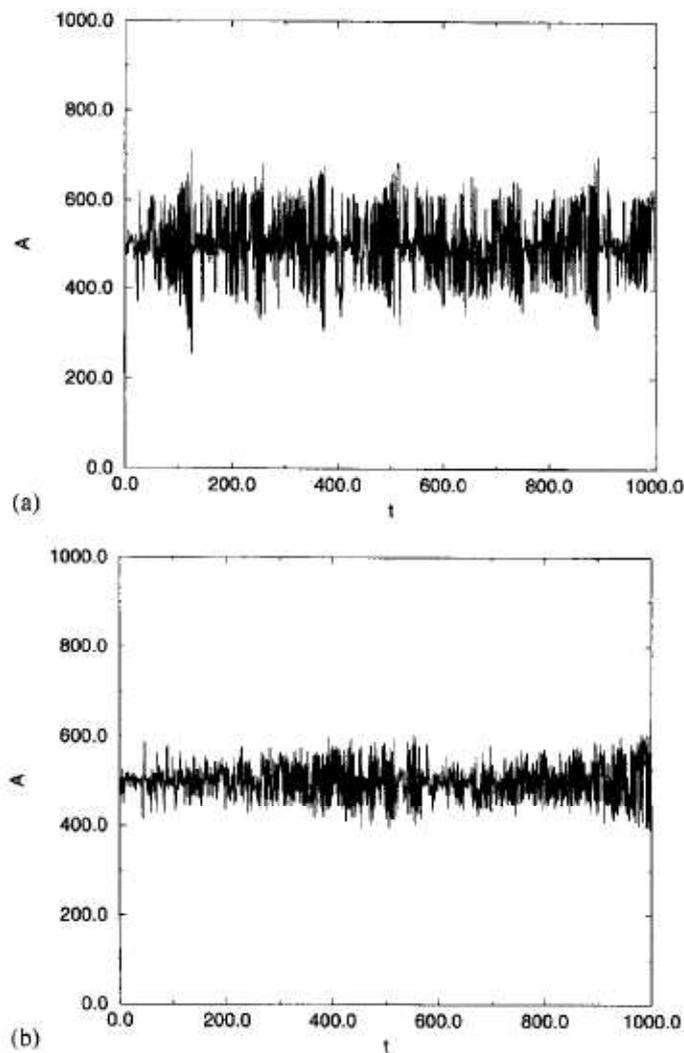


Figura 2.2: Freqüência do grupo A em função do tempo, para uma população de 1001 jogadores e memória de tamanhos (a) 6, (b) 8. Fonte [7], p. 410.

Tem-se uma série temporal do número de agentes que escolhem o grupo A. O

desvio padrão, σ , da série é uma medida da eficiência do sistema na distribuição de recursos [8]. Quanto menor σ , mais amplo é o grupo minoritário.

O comportamento de σ apresenta propriedades muito interessantes, conforme varia-se m [8]. Se σ fosse calculado para a série descrita anteriormente, porém, com os agentes tomando decisões de forma aleatória, o resultado seria uma distribuição de probabilidade do tipo Binomial, onde $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)} = 5$, sendo p a probabilidade de um agente pertencer ao grupo A. Na figura 2.3 tem-se o valor de σ em função de m , com $N = 101$ e $S = 2$. Para um dado m , tem-se um conjunto de pontos representando 32 realizações, independentes, do jogo.

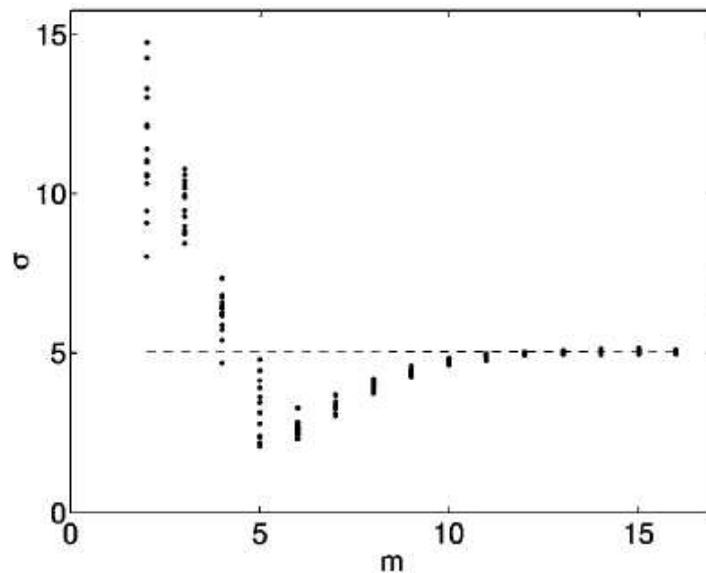


Figura 2.3: σ como função de m para $N = 101$ e $s = 2$, mostrando 32 realizações independentes, com 10.000 unidades de tempo para cada valor de m . O valor de σ para cada realização é denotado por um ponto. A linha pontilhada horizontal representa o valor de σ para uma realização com comportamento aleatório. Fonte [8], p. 2204.

Analisando a figura 2.3 pode-se destacar:

1. Para m pequeno o valor médio de σ é bem maior que o desvio padrão do jogo com escolha aleatória ($\sigma = 5$, linha pontilhada no gráfico). Existe também, nesse caso, para o mesmo m , uma grande dispersão dos valores de σ .
2. Para $m=6$ o valor médio de σ atinge um ponto de mínimo, e esse valor é menor que aquele calculado para o jogo com escolha aleatória.

3. Para valores de $\mathbf{m} > 6$, o valor médio de σ volta a crescer e para \mathbf{m} grande, $\sigma \rightarrow 5$. Observa-se também, para um mesmo \mathbf{m} , uma queda acentuada na dispersão dos valores de σ .

Portanto, pode-se distinguir dois tipos de comportamento do sistema, um superior e outro inferior ao valor crítico m_c , que neste caso é igual a 6. É melhor compreender a dinâmica nessas duas regiões diferentes analisando a informação contida na série temporal, \mathbf{G} , formada pela seqüência de 0's e 1's correspondentes aos grupos minoritários. Para estudar essa série toma-se a probabilidade condicional $P(1|\mu_k)$, que é a probabilidade de se encontrar o número 1 na seqüência de um determinado vetor μ , de \mathbf{k} elementos [3]. Se, por exemplo, $\mathbf{k}=2$, μ é uma das $2^k = 2^2 = 4$ combinações possíveis de 0's e 1's. Portanto, seguindo esse exemplo, poderia se pensar na $P(1|01)$, que é a probabilidade de se ter o valor 1 dada a ocorrência do vetor 01, observada em toda a série \mathbf{G} . É bom lembrar que os agentes obtêm informação da série \mathbf{G} , em pedaços de tamanho \mathbf{m} , pois a ação, prevista em determinada estratégia, é tomada com base em um vetor desse tamanho.

Simulando um jogo com $\mathbf{N} = 101$, $\mathbf{m} = 4$ e $\mathbf{S} = 2$, tem-se a probabilidade condicional $P(1|\mu_k)$ como mostrado na figura 2.4. Em (a) $\mathbf{k}=4$, e portanto tem-se $2^k = 2^4 = 16$ tipos diferentes de μ . Verifica-se, então, que para $\mathbf{m}=\mathbf{k}$, $P(1|\mu_k) = \frac{1}{2}$, ou seja, nessas condições o jogador não consegue obter informações de \mathbf{G} , pois é indiferente aos valores de μ que ele observa, uma vez que todos apresentam a mesma possibilidade de, na próxima jogada, ser seguido pelo grupo representado por 1. Mas \mathbf{G} não é uma série gerada de forma aleatória, e como se pode observar em (b), quando $\mathbf{k}=5$, tem-se $2^k = 2^5 = 32$ tipos diferentes de μ , e alguns deles apresentam $P(1|\mu_k)$ bem superiores a $\frac{1}{2}$ e outros bem inferiores. Entretanto, como $\mathbf{k} > \mathbf{m}$ essa informação não está disponível aos jogadores. No caso (a) diz-se que o mercado é eficiente já que nenhuma estratégia com $\mathbf{m} \leq 4$ pode obter sucesso maior que 50% [8].

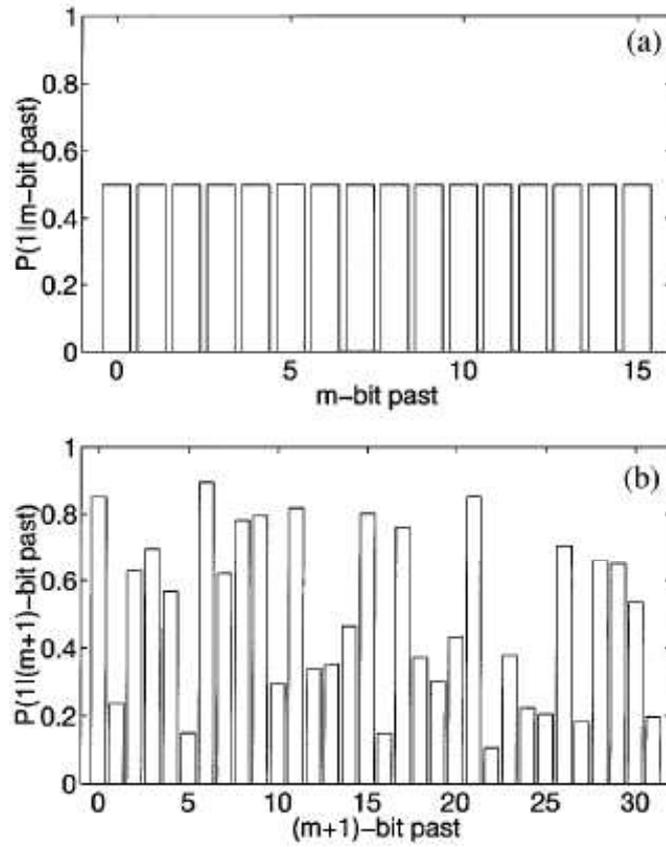


Figura 2.4: (a) Histograma da probabilidade condicional $P(1 | \mu_k)$ com $k = 4$ para uma série com $m = 4$. Os valores binários de μ estão representados na base 10. (b) Histograma da probabilidade condicional $P(1 | \mu_k)$ com $k = 5$ para uma série com $m = 4$. Fonte [8], p. 2204.

Repetindo essa análise, porém adotando agora $\mathbf{k}=m_c=6$, em um jogo com os mesmos parâmetros, $\mathbf{N}=101$ e $\mathbf{S}=2$, observa-se pela figura 2.5 que diferentemente do que aconteceu na figura 2.4 (a), quando $\mathbf{k}=\mathbf{m}$, o histograma não é mais uniforme, agora a informação é acessível ao jogador e no sentido descrito anteriormente o mercado não é eficiente.

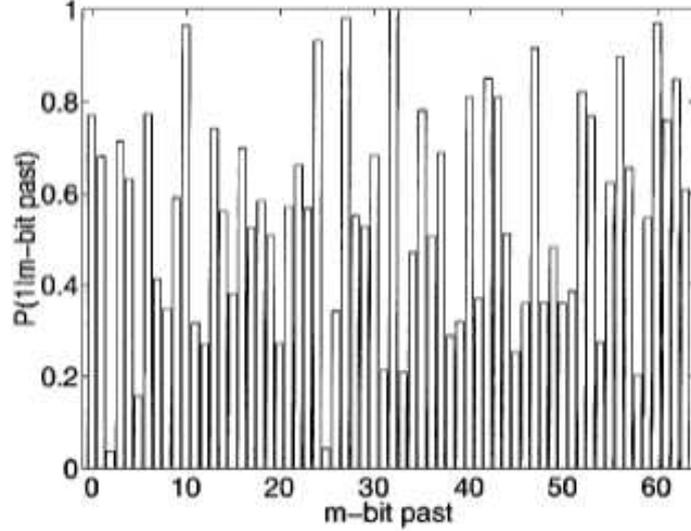


Figura 2.5: Histograma da probabilidade condicional $P(1 | \mu_k)$ com $k = 6$ para uma jogada com $m = 6$. Os valores binários de μ estão representados na base 10. Fonte [8], p.2205.

Construindo-se gráficos de σ como função de \mathbf{m} para vários valores de \mathbf{N} verifica-se que a forma geral da figura 2.3 se mantém, mas o valor de m_c é proporcional a $\ln N$ e os valores de σ e da sua dispersão, $\Delta\sigma$, têm comportamentos diferentes conforme a região. Para $\mathbf{m} < m_c$, σ e $\Delta\sigma$ são proporcionais a \mathbf{N} , e para $\mathbf{m} \geq m_c$, σ e $\Delta\sigma$ são proporcionais a $\sqrt{\mathbf{N}}$ [8].

Usando argumentos semelhantes aos da teoria de campo médio, obtém-se em primeira aproximação que $\frac{\sigma^2}{\mathbf{N}}$ é função apenas de $\frac{2^{\mathbf{m}}}{\mathbf{N}} \equiv z$ [8]. Isso pode ser observado na figura 2.6, construída utilizando $\mathbf{S} = 2$ e vários valores de \mathbf{N} e \mathbf{m} , em uma escala log-log. Interessante notar que os pontos caracterizam o desenho de uma curva com o mesmo aspecto daquela imaginada para interpolar os valores médios de σ (para um dado \mathbf{m}) na figura 2.3, e que possui ponto de mínimo $z_c = \frac{2^{m_c}}{\mathbf{N}}$ separando as duas regiões em que o sistema tem comportamentos diferentes. Caso z seja fixado em um certo valor k , e como $\frac{\sigma^2}{\mathbf{N}}$ só depende de z , deduz-se que σ é proporcional a $\sqrt{\mathbf{N}}$ para um dado z , independente de z ser maior ou menor que z_c .

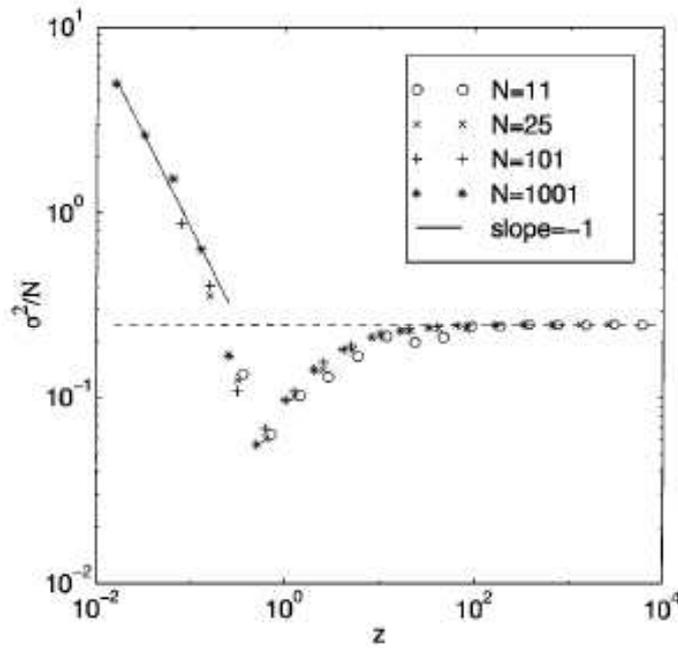


Figura 2.6: σ^2/N como função de $z \equiv 2^m/N$ para vários valores de N , em uma escala log-log. Fonte [8], p. 2205.

As duas regiões em que o sistema apresenta comportamentos diferentes são resultantes da competição entre dois efeitos [8]. O primeiro é a existência de uma dinâmica periódica que produz uma forte correlação positiva entre a ocorrência de um determinado vetor de tamanho μ na série \mathbf{G} e a ação que o agente tomará a partir dessa informação. Para pequenos valores de μ , ocorrências ímpares desse vetor em $\mathbf{G}(1^a, 3^a, \dots, \text{vez que } \mu \text{ aparece em } \mathbf{G})$ resultam em um subsequente grupo minoritário formado por um número de participantes próximo a $N/2$, enquanto ocorrências pares ($2^a, 4^a, \dots, \text{vez que } \mu \text{ aparece em } \mathbf{G}$) resultam em grupos minoritários menores [9].

Essa inversão cíclica de comportamento pode ser entendida a partir da atualização da pontuação das estratégias e da quantidade de estratégias semelhantes. Quando \mathbf{m} é relativamente pequeno, existe uma probabilidade razoável de que um agente tenha duas estratégias bastante semelhantes. Inicialmente faz-se necessário estabelecer os parâmetros do jogo: a memória $m = 2$; cada jogador tem apenas 2 estratégias e para um grupo deles, denominado Ω , essas duas estratégias diferem apenas no caso do vetor $\mu = 01$; finalmente, no caso do grupo Ω , supõe-se que para $\mathbf{s}=1$ a ação prescrita para a ocorrência em \mathbf{G} do vetor 01 seja 1 (comprar), enquanto para $\mathbf{s}=2$ seja 0 (vender). E como é característica do grupo as ações correspondentes aos demais μ são iguais em $\mathbf{s}=1$ e em $\mathbf{s}=2$ [9]. Quando a 1ª jogada ocorre, a

escolha das estratégias para todos os jogadores é aleatória e portanto é de se esperar que o grupo da minoria se estabeleça próximo de $N/2$. Considerando que o grupo minoritário seja aquele que tomou a ação 1 (comprar), a estratégia correspondente terá sua pontuação atualizada recebendo um ponto. O jogo continua e na próxima vez que o vetor 01 ocorrer (ocorrência par) as estratégias do grupo Ω diferirão apenas por um ponto, ou seja, todos tomarão a decisão 1 (comprar), novamente, e quanto maior for esse grupo de jogadores maior será o conjunto de agentes tomando a decisão de compra. Portanto, a minoria será estabelecida pela ação contrária, ou seja, 0 (vender). Na ocorrência par do vetor 01 o grupo minoritário será menor do que aquele estabelecido na 1ª vez que o 01 apareceu em \mathbf{G} . Na terceira vez que o vetor 01 ocorrer em \mathbf{G} , novamente a minoria se estabelecerá em torno de $N/2$, pois as duas estratégias do grupo Ω terão a mesma pontuação e será indiferente a escolha de $\mathbf{s}=1$ ou $\mathbf{s}=2$, como no início do jogo. Esse processo continua por todo o período do jogo. A dinâmica de inversão cíclica produz respostas opostas na seqüência de grupos minoritários. Assim, $P(1|\mu_{k \leq m})$ terá valor próximo a 0,5 para todo \mathbf{m} suficientemente pequeno.

O segundo efeito é a coordenação que surge entre as respostas dos agentes, fazendo com que σ fique abaixo do valor do desvio padrão calculado para um jogo de escolhas aleatórias. A região de maior coordenação, e portanto menor σ , é quando $z \equiv \frac{2^m}{N}$ é da ordem de 1. Verifica-se, portanto, que para z suficientemente pequeno a dinâmica periódica (primeiro efeito) se sobrepõe a coordenação na ação dos agentes (segundo efeito). Próximo a z_c a dinâmica periódica desaparece, sobressaindo o efeito de coordenação. Esse efeito desaparecerá, na medida em que z se torne suficientemente maior que z_c , e o jogo convergirá para um comportamento do tipo *random walk*. O desaparecimento do segundo efeito pode ser entendido de forma qualitativa. Cada estratégia escolhida por um agente tem 2^m linhas, cada uma delas indicando uma certa ação a tomar, conforme o tipo de μ . Então, o *ranking* de estratégias para cada agente deve coordenar as ações dos agentes para 2^m vetores diferentes. Com o aumento de \mathbf{m} para um dado \mathbf{N} , torna-se mais difícil ter uma estratégia em que as ações propostas para os diversos μ sejam consistentemente vitoriosas. Essa dificuldade de coordenação, leva o jogo a apresentar um comportamento que tende àquele apresentado por sistemas com escolhas aleatórias.

2.3 Interpretação geométrica

É interessante analisar a estrutura de cooperação do Jogo da Minoria a partir de uma abordagem geométrica.

O espaço de estratégias pode ser representado em um hipercubo Booleano de di-

mensão 2^m , cujos pontos contém as 2^{2^m} distintas estratégias do Jogo da Minoria [10]. Tomando nesse hipercubo duas estratégias vizinhas, que difiram suas prescrições de ação para apenas um determinado μ , ou seja, as estratégias são diferentes em 1 bit apenas, diz-se que a distância de Hamming entre elas é unitária. Esse tipo de medida de distância conta o número de bits diferentes entre duas estratégias.

Tomando s e t como estratégias pertencentes ao hipercubo H_m , a distância de Hamming pode ser escrita como [11]:

$$D_m(s, t) = \sum_{i=1}^{2^m} |s(i) - t(i)|. \quad (2.1)$$

Se a distância for normalizada, têm-se $d_m(s, t) = D_m(s, t)/2^m$.

Uma outra maneira de escrever a distância de Hamming é a partir dos agentes. Tomando dois agentes i e j [17]:

$$\overline{d_{i,j}} = \frac{\overline{(a_i - a_j)^2}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \overline{a_i a_j} \quad (2.2)$$

O traço sobrescrito representa uma média da variável em relação a μ e a letra **a** representa a ação tomada pelo agente.

Pequenas distâncias de Hamming significam a existência de estratégias altamente correlacionadas e jogadores que as possuam tendem a obter a mesma decisão. Por outro lado, se duas estratégias são descorrelacionadas, as decisões serão coincidentes com probabilidade $1/2$. Em termos de distância de Hamming isso significaria $1/2 * 2^m = 2^{m-1}$, já que 2^m é a distância de Hamming máxima.

Uma medida do grau de diversidade (ou independência), existente em um conjunto de estratégias, é dado pela contagem das suas estratégias descorrelacionadas [10]. Assim, é interessante proceder essa contagem a partir do hipercubo Booleano. Existe dentre as estratégias, um subconjunto **A**, de 2^m pares de pontos em que, para cada par, a distância de Hamming é máxima, ou seja, esses pares são anti-correlacionados, dado que as duas estratégias de um par apresentam ações opostas para um mesmo μ . Mais ainda, a distância entre qualquer das estratégias de **A** com uma outra estratégia que não seja a sua antípoda, será da metade da distância máxima de Hamming, ou seja, 2^{m-1} , portanto mutuamente independentes.

É necessário observar que é possível formar subconjuntos que tenham estratégias anti-correlacionadas, porém as outras distâncias medidas nesse grupo não serão descorrelacionadas.

Existe uma forma de construção que permite obter os elementos que compõem o subconjunto **A**. Toma-se inicialmente as possíveis estratégias para o caso $m=1$, conforme figura 2.7.

(a)	(b)								
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> </table>	0	0	1	0	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> </table>	0	1	1	1
0	0								
1	0								
0	1								
1	1								
(c)	(d)								
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> </table>	0	0	1	1	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> </table>	0	1	1	0
0	0								
1	1								
0	1								
1	0								

Figura 2.7: As quatro possíveis estratégias para $m=1$.

Pode-se observar que cada estratégia contém um vetor (2^a coluna) cujas componentes são as ações. Cada um desses vetores irão gerar dois novos, que possuirão o dobro do tamanho do vetor original. Os novos vetores surgem da concatenação (\otimes) do vetor original, ora com ele próprio, ora com o seu antípoda. Na figura 2.8 é mostrado o resultado da aplicação dessa dinâmica no vetor ação que está representado na estratégia (a) da figura 2.7. Assim observa-se que $[0, 0] \otimes [0, 0] = [0, 0, 0, 0]$, (vetor ação da estratégia (e)) e que $[0, 0] \otimes [1, 1] = [0, 0, 1, 1]$ (vetor ação da estratégia (f)), ambas da figura 2.8.

(e)	(f)																								
<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> </table>	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	<table style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td><td style="padding: 2px 10px;">1</td></tr> </table>	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0																							
0	1	0																							
1	0	0																							
1	1	0																							
0	0	0																							
0	1	0																							
1	0	1																							
1	1	1																							

Figura 2.8: As duas novas estratégias criadas a partir do vetor ação $[0,0]$, com $m=2$.

Portanto, de forma geral, o subconjunto \mathbf{A} , que contém $2^{(m+1)}$ elementos, é construído de forma recorrente utilizando as operações:

$$V^{(j)} \otimes V^{(j)} \rightarrow V^{(2*j)};$$

$$V^{(j)} \otimes \overline{V^{(j)}} \rightarrow V^{(2*j)};$$

Em que $\overline{V}_i = 1 - V_i$ e j representa a ordem 2^m , ou seja, no exemplo dado, os vetores de ordem 4 foram obtidos daqueles de ordem 2. E assim por diante são construídos os de ordem mais alta.

O número de pontos do subconjunto \mathbf{A} , $N_0 = 2^{m+1}$, representa um espaço reduzido de estratégias, que desempenha um importante papel no modelo do Jogo da Minoria. A idéia é comparar N_0 com o número de estratégias na população NS [10]:

1. $NS > N_0$ (região saturada) - Os jogadores têm a disposição estratégias positivamente correlacionadas para utilizar. O efeito de manada (muitos agentes fazendo a mesma coisa) é inevitável à despeito da adaptabilidade dos jogadores e resultará em flutuações maiores que aquelas geradas por um processo do tipo caminho aleatório.
2. $NS \sim N_0$ (região crítica ou de cooperação) - As estratégias utilizadas pelos N jogadores são bastante independentes e uma pequena parte que está anti-correlacionada possibilita a obtenção de decisões opostas.
3. $NS \ll N_0$ (região aleatória) - A anti-correlação está fortemente presente e os jogadores parecem utilizar estratégias aleatórias.

Tomando $S = 2$ como feito em [8], o caso (2) representará o ponto de mínimo da curva de σ/N versus z (figura 2.6), pois na região de cooperação $N_0/SN = z_c \sim 1$. De forma geral $z = N_0/SN$ e os resultados obtidos por Savit *et al.* em [8] podem ser explicados pela interpretação geométrica de Zhang [10], conforme exposto anteriormente de (1) a (3).

2.4 Simplificações na dinâmica do Jogo da Minoria

Algumas simplificações feitas no Jogo da Minoria possibilitaram tratá-lo de forma analítica sem perder a riqueza de sua dinâmica [12]. Essas simplificações são: irrelevância da memória [14], dinâmica linear de pontuação das estratégias [15, 13] e formulação analítica da distribuição de probabilidade da escolha de estratégias [15].

No modelo descrito até o momento, \mathbf{m} é colocado como o tamanho da memória, no sentido que os agentes observam ou "lembram" do resultado dos \mathbf{m} últimos grupos vencedores, ou seja, com base em um vetor de tamanho \mathbf{m} , em que há uma seqüência histórica de 0 e 1, os agentes tomam suas decisões.

Porém, Cavagna [14] mostra que \mathbf{m} não tem um caráter de memória, mas é apenas uma característica geométrica do modelo que delimita o espaço de estratégias.

Em vez de guardar em um vetor os 0's e 1's representando os \mathbf{m} últimos grupos minoritários, Cavagna faz uma modificação no modelo: em cada tempo \mathbf{t} , o vetor que servirá como parâmetro para que os agentes tomem suas decisões será inventado, ou seja, o vetor é criado aleatoriamente em cada tempo \mathbf{t} .

Verifica-se, então, que as propriedades do Jogo da Minoria são preservadas, como por exemplo, a existência de um σ mínimo inferior àquele que ocorreria caso o jogo fosse aleatório, o formato da curva σ versus \mathbf{m} apresentado pelo Jogo da Minoria original e também o formato da curva onde se estabelece z_c . No texto, daqui por diante, haverá uma mudança de nomenclatura, de z para α , pois representa a forma consagrada na literatura. Assim assume-se $z_c = \alpha_c$.

O ponto crucial é que todos os agentes devem possuir a mesma informação a cada tempo \mathbf{t} . Portanto, o agente não precisa ter uma memória de um tempo real histórico, mas uma mesma informação, não importando se ela é verdadeira ou falsa. Nesse sentido a memória dos agentes é irrelevante. Não existe a necessidade de explicitar um tempo passado para obter-se as características relevantes que surgem no Jogo da Minoria.

Inicialmente, no Jogo da Minoria, era atribuído em cada rodada 1 (um) ponto às estratégias vencedoras, ou seja, aquelas que levariam o jogador a fazer parte do grupo da minoria. Somava-se o número de jogadores que tinham tomado uma determinada decisão, por exemplo vender. Comparava-se o tamanho desse grupo com $N/2$, caso ele tivesse tamanho menor seria o grupo vencedor. Depois, para cada agente e estratégia, atualizava-se a pontuação, verificando se a ação levaria ou não o agente a pertencer ao grupo minoritário. A simplificação foi adotar uma dinâmica linear para a pontuação [12, 13, 15]:

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^{\mu(t)} \frac{A(t)}{N}, \quad (2.3)$$

onde $U_{i,s}$ representa a atualização de pontos das estratégias, $a_{i,s}^{\mu(t)}$ é a ação tomada pelo agente i com base na estratégia s , dado o sinal μ e $A(t) = \sum_{i=1}^N a_{i,s_i(t)}^{\mu(t)}$.

Então a estratégia s é recompensada ($U_{i,s}(t+1) > U_{i,s}(t)$) quando prediz corretamente o sinal da minoria, isto é, se $a_{i,s}^{\mu(t)} = -\text{sign}A(t)$ e penalizada no caso contrário.

No Jogo da Minoria original, a estratégia $s_i(t)$ que cada agente i utiliza no tempo t é aquela que possui a mais alta pontuação [12]:

$$s_i(t) = \arg \max_s U_{i,s}(t). \quad (2.4)$$

Isso introduz uma descontinuidade matemática difícil de lidar analiticamente [12]. Mas Cavagna *et al.* em [15] sugeriram superar essa dificuldade utilizando um modelo probabilístico de escolha das estratégias:

$$Prob[s_i(t) = s] = \frac{e^{\Gamma U_{i,s}(t)}}{\sum_{s'} e^{\Gamma U_{i,s'}(t)}}, \quad (2.5)$$

onde $\Gamma > 0$ é uma constante. A equação (2.5) é a distribuição de Gibbs e Γ aparece como uma "inversa da temperatura individual" [12].

A equação (2.5) pode ser reescrita como:

$$Prob[s_i(t) = s] = \frac{1}{1 + \sum_{s' \neq s} e^{-\Gamma (U_{i,s}(t) - U_{i,s'}(t))}}, \quad (2.6)$$

e no caso de apenas duas estratégias s e s^\dagger ,

$$Prob[s_i(t) = s] = \frac{1}{1 + e^{-\Gamma \Delta U}}, \quad (2.7)$$

sendo $\Delta U = U_{i,s}(t) - U_{i,s^\dagger}(t)$.

Tomando $\Gamma \rightarrow \infty$ na equação (2.7) verificam-se os seguintes resultados:

1. $\Delta U > 0 \rightarrow Prob[s_i(t) = s] = 1$,
2. $\Delta U < 0 \rightarrow Prob[s_i(t) = s] = 0$,
3. $\Delta U = 0 \rightarrow Prob[s_i(t) = s] = 1/2$,

o que retoma o Jogo da Minoria tradicional.

Resumindo, a dinâmica do Jogo da Minoria simplificado é descrito pelas equações [12]:

$$Prob[s_i(t) = s] = \frac{e^{\Gamma U_{i,s}(t)}}{\sum_{s'} e^{\Gamma U_{i,s'}(t)}} \quad (\text{escolha das estratégias}) \quad (2.8)$$

$$Prob[\mu(t) = \nu] = \frac{1}{P} \quad \nu = 1, \dots, P \quad (\text{distribuição de probabilidade de } \mu), \quad (2.9)$$

onde $P = 2^m$.

$$A(t) = \sum_{i=1}^N a_{i,s_i(t)}^{\mu(t)} \quad (\text{mercado agregado}) \quad (2.10)$$

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^{\mu(t)} \frac{A(t)}{N} \quad (\text{aprendizagem}) \quad (2.11)$$

Challet e Marsili em [13] mostram que o Jogo da Minoria pode ser descrito como um sistema de spin e, como $\alpha = P/N$ varia, ele está submetido a uma dinâmica de transição de fase com quebra de simetria. A simetria quebrada corresponde a uma alteração na equivalência entre duas ações:

1. Fase simétrica ($\alpha < \alpha_c$) - ambas as ações (comprar e vender) são tomadas pela minoria com a mesma frequência.
2. Fase assimétrica ($\alpha > \alpha_c$) - em cada um dos P estados possíveis, a minoria toma mais frequentemente uma ação que outra.

Enquanto para $\alpha < \alpha_c$ todos os agentes usam todas as suas estratégias, para $\alpha > \alpha_c$ uma finita fração ϕ dos jogadores acaba usando somente uma estratégia, o que no formalismo de spin é análogo à uma magnetização espontânea [13].

Vários estudos numéricos mostram que variando o número S de estratégias, o comportamento do Jogo da minoria permanece qualitativamente o mesmo, porém o efeito de cooperação se manifesta mais fortemente no caso de $S = 2$ [12]. Pensando nisso e na equivalência com um sistema de spin, introduziu-se uma conveniente notação para um Jogo da Minoria com duas estratégias, a estratégia 1 nominada como $+1$ e a estratégia 2 como -1 [13]:

$$\omega_i^\mu = \frac{a_{+,i}^\mu + a_{-,i}^\mu}{2} \quad \xi_i^\mu = \frac{a_{+,i}^\mu - a_{-,i}^\mu}{2}. \quad (2.12)$$

Deste modo cada estratégia para o agente i pode ser escrita como $a_{s_i,i}^\mu = \omega_i^\mu + s_i \xi_i^\mu$ com $s_i = \pm 1$. Supondo ações iguais para estratégias diferentes, ou seja, para $s_i = \pm 1$, $a_{+,i}^\mu = a_{-,i}^\mu$ o valor de $\omega \neq 0$ e $\xi = 0$. Portanto se $\omega \neq 0$, então $\xi = 0$ e vice-versa.

O resultado agregado do mercado, no tempo t , será escrito nas novas variáveis como:

$$A_t = \sum_{i=1}^N a_{s_i,i}^{\mu t} = \Omega^{\mu t} + \sum_{i=1}^N s_i \xi_i^{\mu t} \quad \text{onde} \quad \Omega^{\mu t} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{\mu t}. \quad (2.13)$$

Nesta dinâmica a diferença entre as atualizações das duas estratégias é o resultado mais importante, tanto que cada agente pode ser descrito em termos da variável [12]:

$$Y_i(t) = \Gamma \frac{U_{+,i}(t) - U_{-,i}(t)}{2}. \quad (2.14)$$

A distribuição de probabilidade dos $s_i(t)$ torna-se:

$$Prob[s_i(t) = \pm 1] = \frac{1 \pm \tanh Y_i(t)}{2}. \quad (2.15)$$

E para finalizar o modelo, descreve-se a dinâmica de $Y_i(t)$

$$Y_i(t+1) = Y_i(t) - \frac{\Gamma}{N} \xi_i^{\mu t} A(t). \quad (2.16)$$

Para verificar como obter (2.15) e (2.16), consulte o apêndice A.

Uma medida importante no Jogo da Minoria é a variância σ^2 , como discutido anteriormente. A simplificação proposta por Cavagna em [14] informa que $Prob(\mu_t = \mu) = 1/P$. Aplicar esse conceito e sabendo que $\sigma^2 = \langle A^2 \rangle$, onde A é descrito na nova notação proposta por Challet e Marsili em [13], resulta em:

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P (\Omega^\mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^N h_i \langle s_i \rangle + \sum_{i,j=1}^N J_{i,j} \langle s_i, s_j \rangle, \quad (2.17)$$

onde $\langle arg. \rangle$ significa tomar uma média temporal do argumento e

$$h_i = \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P \Omega^\mu \xi_i^\mu, \quad J_{i,j} = \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P \xi_i^\mu \xi_j^\mu. \quad (2.18)$$

O termo h_i mede a diferença que existe na correlação de cada uma das estratégias com Ω^μ , enquanto o termo de acoplamento $J_{i,j}$ considerada a interação entre os agentes, assim como a interação própria ($J_{i,i}$). O cálculo detalhado de (2.17) pode ser visto no apêndice B.

Após ter redefinido o modelo do Jogo da Minoria em termos das variáveis $\omega_i^{\mu(t)}$ e $\xi_i^{\mu(t)}$ Challet e Marsili [13] propõem a explicação que é a chave para o comportamento do modelo. Segundo eles para cada μ existem agentes que sempre tomam a mesma decisão. Isso acontece pela contribuição de Ω^μ em A , já que Ω^μ é a soma de todos os agentes cujas estratégias, dado um certo μ , são indiferentes para a tomada de decisão, pois preconizam a mesma ação a ser tomada. Isso produz um viés em A sempre que $\mu_t = \mu$. Para medir esse viés é definido o parâmetro de ordem que identifica a transição de fase do modelo [13, 16]:

$$H = \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P \langle A | \mu \rangle^2 = \overline{\langle A \rangle^2}, \quad (2.19)$$

onde $\langle A | \mu \rangle$ é a média condicional de A dado que $\mu_t = \mu$. A barra sobrescrita em $\overline{\langle A \rangle^2}$ é uma simplificação para a média em P , ou seja, substitui o termo $\frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P$.

A variável H é chamada de previsibilidade [22] e mede a presença de informação ou arbitragem no sinal de A [13]. O comportamento de H em função de α é dado na figura 2.9.

Observa-se, basicamente, que $H = 0$ para $\alpha < \alpha_c$ e $H > 0$ para $\alpha > \alpha_c$. Nesse último caso um agente pode detectar ou explorar a informação existente, caso uma de suas estratégias for mais correlacionada com $\langle A | \mu \rangle$ que as outras.

Challet *et al.* [13, 12] notaram que se $v_i \equiv \langle Y_i(t+1) - Y_i(t) \rangle \neq 0$, então $\langle Y_i \rangle \simeq v_i t$ cresce linearmente no tempo, e o spin dos agentes terá sempre o mesmo valor $s_i = \text{sign } v_i$. Os agentes que se comportam dessa maneira foram denominados

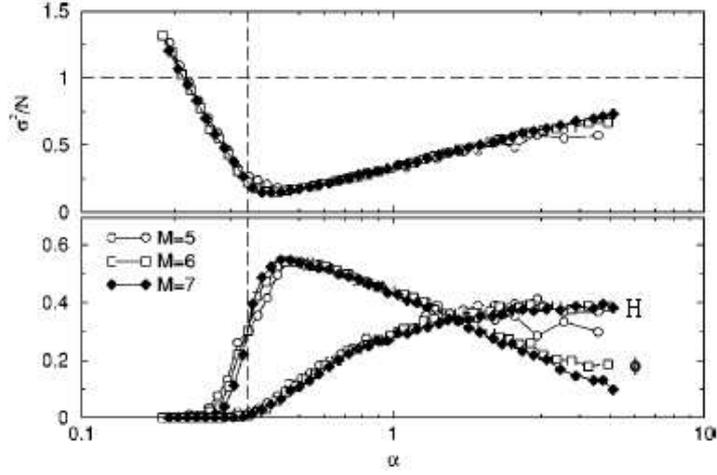


Figura 2.9: Acima: σ^2/N vs $\alpha = P/N$ para $P = 2^m$ com $m = 5, 6$ e 7 . Abaixo: H e ϕ versus α para o mesmo sistema de tamanho P . A linha vertical pontilhada corresponde a $\alpha = 0,34 \approx \alpha_c$. Fonte [13], p. R6272.

agentes congelados, uma vez que o spin é fixo [13]. A partir da equação (2.16) conforme apêndice C pode-se escrever v_i como:

$$v_i = -h_i - \sum_{j=1}^N J_{i,j} \langle s_j \rangle = -\overline{\Omega \xi_i} - \sum_{j=1}^N \overline{\xi_i \xi_j} m_j \quad (2.20)$$

onde $m_j = \langle s_j \rangle$ é a magnetização. Se $v_i \neq 0$, o que implica que $\langle Y_i \rangle$ diverge para $t \rightarrow \infty$, tem-se:

$$m_i = \text{sign } v_i = -\text{sign} \left[\overline{\Omega \xi_i} + \sum_{j=1}^N \overline{\xi_i \xi_j} m_j \right] = \pm 1. \quad (2.21)$$

De outro modo, o agente \mathbf{i} não está congelado, considerando um tempo muito grande, se $\langle Y_i \rangle$ for finito, o que requer que $v_i = 0$, isto é:

$$0 = -v_i = \overline{\Omega \xi_i} + \sum_{j=1}^N \overline{\xi_i \xi_j} m_j \quad (2.22)$$

Se todos os agentes, a não ser \mathbf{i} , fazem suas escolhas aleatoriamente, isto é, $m_j = \langle s_j \rangle = 0$ para $j \neq i$ então $v_i = -h_i - J_{i,i} m_i$. Se $v_i \neq 0$, então, $m_i = \text{sign } v_i = -\text{sign}(h_i - J_{i,i} m_i)$. Essa equação tem solução se $|h_i| > J_{i,i}$ [13], e nesse caso o agente \mathbf{i} é congelado, pois a correlação das suas estratégias com Ω^μ é maior que o termo de auto-interação.

Ao tomar-se a derivada da previsibilidade em relação a magnetização, conforme apêndice D, obtém-se:

$$\frac{\partial H}{\partial m_i} = -2v_i. \quad (2.23)$$

Portanto, se $v_i = 0$ em (2.23), $\frac{\partial H}{\partial m_i} = 0$, o agente \mathbf{i} não está congelado e m_i toma valores no intervalo $(-1, 1)$. No caso contrário, $v_i \neq 0$, $\frac{\partial H}{\partial m_i} = -2v_i$ e a magnetização do agente \mathbf{i} é $m_i = \text{sign } v_i = \pm 1$.

Por fim é interessante estabelecer a relação que existe entre a variância σ^2 e a previsibilidade, H :

$$\sigma^2 = H + \sum_{i=1}^N \xi^2 (1 - m_i^2). \quad (2.24)$$

A demonstração de (2.24) pode ser obtida no apêndice E.

2.5 O modelo Grande Canônico

A eficiência de mercado é uma hipótese fundamental na ciência econômica. Uma versão fraca dessa hipótese afirma que, usando apenas o preço do passado, não se consegue prever o seu movimento futuro [20]. Supondo que o preço seja previsível, esta oportunidade desaparecerá em um mercado competitivo e eficiente. Isso pode ser visto da forma a seguir. Admita a possibilidade de antever uma oportunidade de preço, e que essa previsão seja um movimento de alta no preço de uma *commodity*, amanhã. Então compra-se essa *commodity* hoje, para vendê-la amanhã. Mas muitos tomarão a mesma decisão e esse ganho esperado desaparecerá, pois amanhã haverá uma grande oferta daquele produto. Ou seja, se existe a possibilidade de arbitragem ela desaparecerá devido à ação dos especuladores. Esse mecanismo é bastante difundido e aceito entre os economistas. Porém algumas observações empíricas parecem não corroborar essa idéia. Como explicação, os defensores da hipótese de eficiência de mercado afirmam que essas observações são anomalias sem significado[20].

Utilizando uma amostra, correspondente a 32 anos (1966-1998) dos dados diários, de um índice contendo 400 grandes empresas do NYSE, Zhang [20] transformou-a em sinais, +, correspondendo a variações positivas diárias, e -, variações negativas diárias. Estabeleceu um vetor de memória, μ de tamanho $m = 3$ e a partir daí verificou a probabilidade condicional $p(+ | \mu)$. Deste modo, a $p(+ | - + +)$ é a probabilidade do mercado ter uma alta após uma baixa que foi precedida de duas variações positivas. Foi contruído um histograma, figura 2.10, representando todas as 2^3 possíveis combinações de μ . O valor mais relevante observado é para

$p(+ | +-+)$ que atinge 65%. Ou seja, os participantes desse mercado, que atuam diariamente, teriam possibilidade de obter lucro a partir dessa ineficiência constatada.

Além desse histograma foi construído outro, figura 2.11, para verificar como a

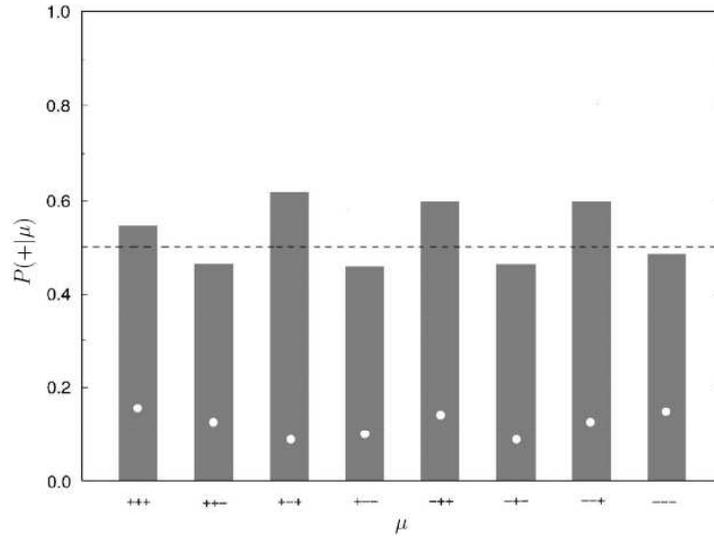


Figura 2.10: Preço diário de fechamento do NY 400 *Composite Index* durante 32 anos. Esses dados foram utilizados para construir a probabilidade condicional. Condicional sobre a última observação, por exemplo, a figura mostra qual a probabilidade da existência de uma variação + após a observação de uma seqüência +++. Os pontos nas colunas representam a importância relativa da amostragem. Fonte [20], p. 32.

probabilidade para cada μ variava no tempo. A amostra de 32 anos foi dividida em 4 observações de 8 anos. Percebeu-se, então, uma considerável sobreposição entre dois períodos consecutivos. Se um especulador construir um método a partir da observação dos últimos 8 períodos ele poderá utilizá-lo também nos próximos 8. Para períodos mais curtos, como um ano, a sobreposição mostrou-se ainda mais pronunciada, levando à conclusão de que o comportamento do mercado varia lentamente. Esses resultados claramente não são uma "prova" de que o mercado é ineficiente, mesmo porque há observações empíricas que confirmam o contrário. O ponto é que não é necessário muito esforço para encontrar violações da hipótese de eficiência de mercado [20].

Aparentemente, o mercado tem o comportamento de um jogo de soma zero, em que alguns espertos ganham na medida em que outros perdem. Mas, em geral é razoável pensar que a maioria dos participantes do mercado se beneficiam dessa dinâmica, pela própria persistência do processo. Então, caberia perguntar: quem

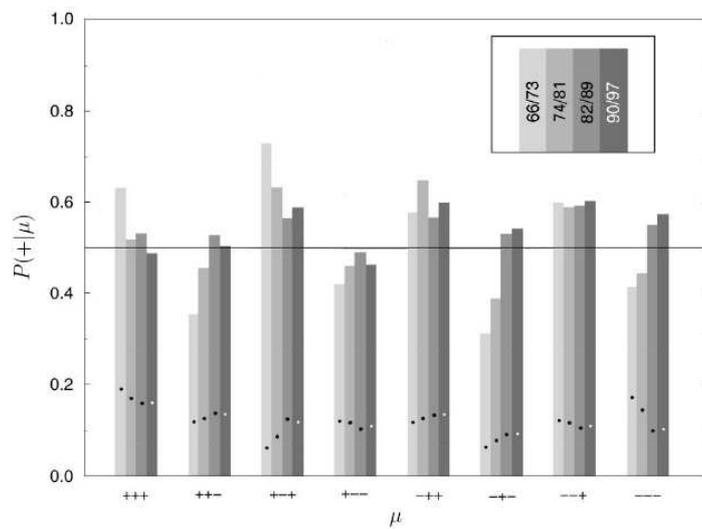


Figura 2.11: Os dados da fig. 2.10 agora foram quebrados em 4 segmentos, e a probabilidade condicional foi calculada para cada um deles. Pode-se observar que cada período de 8 anos comparado com o próximo, exibe alguma sobreposição. Isso mostra que os comportamentos do mercado são um tanto persistentes, permitindo que estratégias lucrativas sejam construídas. Fonte [20], p. 33.

injeta dinheiro no mercado? A resposta surge quando se procede à divisão de seus participantes em dois tipos: os produtores e os especuladores [20].

Os produtores participam do mercado observando necessidades que são alheias à dinâmica do mesmo. Na realidade, o termo é conveniente para designar desde indivíduos que se utilizam do mercado para fazer *hedge* até o turista que busca fazer câmbio. Como exemplo para o primeiro caso, pode-se pensar em uma indústria que necessita saldar um financiamento de uma máquina, feito em moeda estrangeira, com vencimento em determinada data futura e procura no mercado um contrato para fixar a taxa de câmbio, e assim, salvaguardar-se de flutuações na cotação. A motivação é exôgena ao mercado: assegurar um valor para o custo do financiamento de uma máquina. No segundo caso um turista pode desejar trocar moeda estrangeira por moeda local para consumir no país, sem estar preocupado se a taxa de câmbio hoje é conveniente para troca, do ponto de vista do mercado de câmbio. Novamente a motivação é exôgena ao mercado: consumir produtos e serviços.

Já os especuladores buscam vantagem na movimentação do mercado, tentando lucrar com um processo de arbitragem. Exemplos são grandes instituições financeiras, fundos de *hedge*, ou até mesmo pessoas físicas, que por meio de corretoras de valores, atuam no mercado.

Resumidamente pode-se caracterizar os dois tipos de agentes da seguinte forma [12]:

1. Produtores

- Injetam elementos de previsão nas flutuações aparentemente aleatórias do mercado;
- O interesse desse agente é em negócios externos ao mercado;
- Participam do mercado para suas próprias necessidades de um modo previsível, indiferentes às pequenas flutuações de preços;
- Possuem perspectiva de longo prazo.

2. Especuladores

- Compram e vendem ativos sem se preocupar com seu valor intrínseco;
- São exclusivamente dirigidos pela perspectiva de ganhar com as flutuações de preços;
- Exploram a previsibilidade introduzida pelos produtores;
- Fazem transações visando pequenos retornos num horizonte de curto prazo.

À primeira vista parece que o produtor injeta dinheiro no mercado e o especulador, usando de alguma estratégia, se apropria desse valor. Nesses termos, comparando com um sistema biológico, o especulador seria um parasita. Na verdade, a analogia de associação biológica que existe entre esses agentes é a simbiose [20]. O especulador exerce uma função social, mesmo sem querer, de tornar o mercado líquido.

Essa simbiose pode, por exemplo, ser observada no mercado de seguro de automóveis. O proprietário de um automóvel que faz um seguro sabe que, em média, ele paga mais do que receberá da seguradora. Apesar do fluxo de caixa ser favorável à seguradora, as pessoas têm a percepção de que é um bom negócio pagar seguro. A resposta para esse comportamento, aparentemente não lógico, está na função de utilidade: os consumidores, em geral, são avessos ao risco. Eles podem pagar mais do que a esperança matemática do seguro para livrar-se do seu próprio risco.

Portanto nesse processo de simbiose os produtores proporcionam informação e ganhos positivos aos especuladores enquanto que os especuladores reduzem as perdas dos produtores providenciando liquidez no mercado.

Essa configuração do mercado dividido em dois tipos de agentes, produtores e especuladores, foi incorporado ao jogo da minoria [17, 18]. Os produtores são representados por agentes com apenas uma estratégia, $s = 1$ [17, 12]. Portanto, seu comportamento é determinístico: dado um certo μ , representando os grupos minoritários em dado horizonte temporal, o produtor agirá sempre da mesma maneira. Já o especulador é um agente típico do Jogo da Minoria tradicional, possuindo várias estratégias [17, 12]. Esse agente tenta extrair do jogo as informações que são injetadas pelo produtor.

Challet *et al.* em [17] analisam as alterações no Jogo da Minoria provocadas pela diversificação das estratégias do especulador. Assim, tomando um jogo com $S = 2$, pode-se impor que a probabilidade de um agente ter duas estratégias iguais é:

$$P(a_{s=1}^\mu = a_{s=-1}^\mu) = c \quad \forall \mu. \quad (2.25)$$

Essa é uma medida da correlação média entre as duas estratégias de cada agente, ou seja, a proporção de $\mu(s)$ para os quais a escolha dos agentes é a mesma, e portanto viesada. O Jogo da Minoria tradicional corresponde ao caso de independência, $c = 1/2$. Dois outros casos especiais são de interesse: $c = 1$, que corresponde a ter uma única estratégia e $c = 0$, onde todos os agentes têm estratégias opostas e os resultados não são assimétricos ou viesados.

Um panorama do comportamento do Jogo da Minoria com alterações do parâmetro c pode ser visto na figura 2.12. Quando $c = 0$ observa-se que o jogo permanece sem-

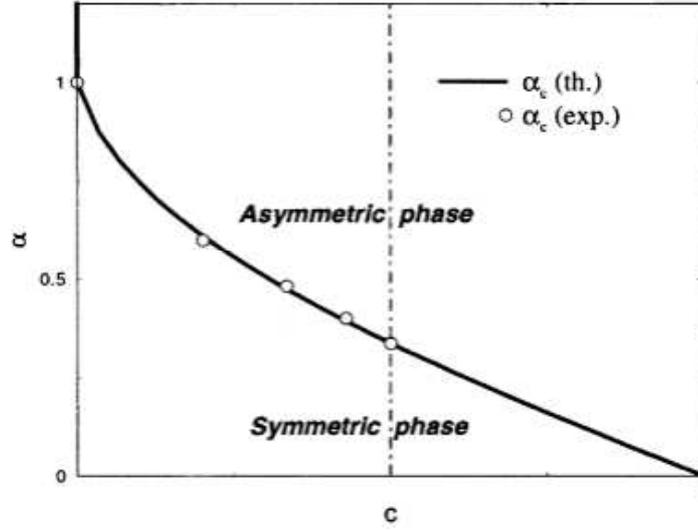


Figura 2.12: Diagrama de fase do Jogo da Minoria com diversificação de estratégias. A transição de fase no Jogo da Minoria padrão corresponde a linha vertical pontilhada $c = 1/2$. As circunferências brancas são dados numéricos. Fonte [17], p. 291.

pre na fase simétrica (α varia e nenhuma transição de fase ocorre). Com o aumento de c tem-se dois efeitos: um aumento do viés no resultado, $\Omega^\mu \sim \sqrt{cN}$ e uma redução da capacidade de adaptação, já que a aprendizagem ocorre quando $\xi_i^\mu \neq 0$ (conforme apresentado na seção 2.4, quando $\omega_i^\mu = 1$, $\xi_i^\mu = 0$, portanto o aumento de $\Omega^\mu = \sum_{i=1}^N \omega_i^\mu$ implica em aumentar o número de agentes com $\xi_i^\mu = 0$).

Como o viés depende de c , implica que uma transição de fase de segunda ordem ocorre na medida que esse parâmetro é alterado. Por exemplo, fixado α (tomando uma linha horizontal no gráfico da figura 2.12) ao variar-se c o jogo passa da fase simétrica para a assimétrica.

Em outra simulação Challet *et al.* [17] estabelecem um jogo com N especuladores e ρN produtores, sendo ρ a proporção de produtores por especulador. A introdução de produtores acrescenta um viés àquele causado pelos especuladores, levando a um viés total da ordem de $\sqrt{(c + \rho)N}$. Portanto, dado um $P = 2^m$ fixo, a transição de fase pode ser obtida pela modificação de uma das variáveis: c , ρ , N ou pelo número de produtores ρN .

Dada a ação tomada por todos os agentes, o ganho do agente i no tempo t é:

$$g_i(t) = -a_{s_i(t),i}^{\mu(t)} A^{\mu(t)}(t) \quad \text{sendo } A^{\mu(t)}(t) = \sum_{j=1}^N a_{s_j(t),j}^{\mu(t)}. \quad (2.26)$$

Em [17] toma-se fixo o número de especuladores e varia-se o número de produtores, obtendo-se assim o comportamento do ganho médio por agente, conforme a figura 2.13. Na fase simétrica os especuladores eliminam toda informação disponível,

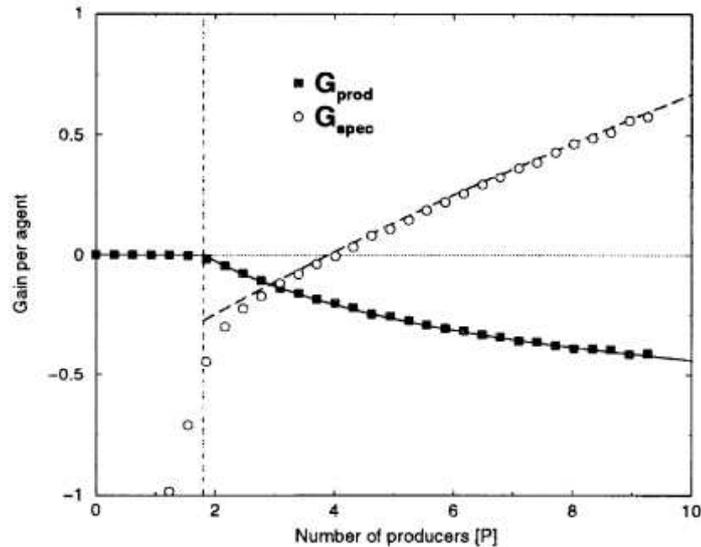


Figura 2.13: Ganho dos produtores e especuladores versus o número de produtores (em P unidades); o número de especuladores está fixado em $N = 641$ ($c = 0$, $m = 8$, $S = 2$, $\alpha = 0,4$, média sobre 200 realizações). As linhas são previsões teóricas. Fonte [17], p. 292.

e o viés (que só pode advir dos produtores, pois $c = 0$ e N está fixo) que eventualmente aconteça é eliminado pelos especuladores, que em um número bem maior nessa fase dominarão o valor de A , ou seja, a probabilidade condicional $\langle A | \mu \rangle = 0$. E como os ganhos são tomados como valores médios, uma eventual perda, dado um certo μ é compensada por um ganho em outro μ de forma que por simetria, nessa fase o ganho dos produtores é nulo e dos especuladores negativo.

O ganho dos especuladores, que inicialmente é negativo, aumenta monotonicamente com o aumento do número de produtores. Quando esse último atinge um valor crítico, os especuladores não conseguem mais remover toda a informação, e uma transição de segunda ordem ocorre (linha pontilhada vertical). A partir daí, o ganho dos produtores torna-se negativo, pois a assimetria que ele causa agora não é absorvida e esse excesso o leva sempre para o grupo da maioria, e portanto, a perdas. A partir de um certo ponto, o número de produtores é suficientemente grande para que o ganho dos especuladores sejam, em média, positivos.

Um gráfico em que o número de produtores fosse fixo, e variasse o número de

especuladores, os ganhos médios dos agentes teriam comportamento inverso daquele apresentado na figura 2.13. Assim, o ganho dos especuladores decresceria com o aumento dos especuladores e o ganho dos produtores, que inicialmente seria negativo, cresceria com a entrada de mais especuladores no mercado.

Um especulador no Jogo da Minoria é forçado a negociar no mercado mesmo que, com as estratégias que ele tem, resulte em perder dinheiro. Essa característica que destoa da realidade é resolvida quando se permite ao agente não participar do mercado em determinado instante de tempo, devido a fraca performance do seu conjunto de estratégias. Dessa forma o número de agentes varia no tempo e em analogia a mecânica estatística, que denomina de grande canônico os sistemas onde o número de partículas varia, o jogo da minoria que contempla esse comportamento é chamado de Jogo da Minoria Grande Canônico [12].

O critério para o especulador decidir se permanece ou não no mercado é a existência de ao menos uma estratégia que gera, em média, um ganho maior que ϵ . O valor de ϵ pode ser visto como um valor de referência, uma taxa de juros ou como um custo de oportunidade [12].

A característica de permitir a flutuação do número de especuladores torna o Jogo da Minoria Grande Canônico capaz de apresentar *crashes* em suas séries de retornos [12, 18]. A responsável pelos grandes movimentos de preços é a multidão de agentes inativos que em dado instante apenas observa o movimento de preços do mercado e em um instante posterior pode, ao mesmo tempo, entrar no mercado para negociar. Essa atitude sincronizada ocorre porque enquanto esses agentes observam o mercado, eles conseguem apenas perceber a dinâmica dos agentes que estão ativos, sem ter acesso a configuração de mercado caso fossem levadas em consideração as estratégias dos outros agentes que também não estão negociando, portanto, um inativo não consegue "sentir" o outro. Então, os inativos que possuem estratégias semelhantes são atraídos para o mercado ao mesmo tempo e eles podem, assim, entrar no mercado de forma sincronizada gerando um *crash*.

Um modelo de Jogo da Minoria Grande Canônico é apresentado em [21]. Ele consiste de N agentes interagindo, onde N_p são os produtores e os remanecentes $N_s = N - N_p$ são especuladores. Os agentes são dotados com $s = 0, \dots, S$ estratégias que são mantidas fixas desde o início. As estratégias permitem que eles tomem decisões como comprar, vender ou não negociar, a cada tempo t . Para ser bem sucedido no jogo, cada agente procura permanecer no grupo da minoria, isto é, comprar ativos quando a maioria vende e vice-versa. Na realidade, o mecanismo de mercado é mais complexo. Apesar disso, a regra da minoria lembra a lei da oferta e demanda. Por simplicidade, mapeia-se o histórico dos preços $p(t)$ em uma seqüência binária. Cada bit representa um sinal da variação de preços entre $t - \tau$ e t , para

uma conveniente escala τ . Padrões podem ser construídos a partir da seqüência binária, pela definição de um vetor de tamanho \mathbf{m} que representa um pedaço da seqüência. O número total de diferentes padrões é $P = 2^m$. Esses padrões são dependentes do tempo, e eles correspondem a informação pública que é denotada por $\mu(t)$. A estratégia é projetada para ler uma informação $\mu(t)$ e retornar ao agente uma decisão correspondente. No caso dos especuladores, as decisões são denotadas por $a_{i,s}^\mu = \pm 1, 0$, onde $i = 1, \dots, N_s$; enquanto que a decisão dos produtores é denotada por $b_j^\mu = \pm 1$, onde $j = 1, \dots, N_p$. Observa-se que os produtores têm somente uma estratégia que depende da informação, μ , e portanto eles estão sempre negociando, isto é, comprando e vendendo ativos. Por outro lado, especuladores têm mais que uma estratégia além de contar com a estratégia nula $s = 0$, que permite a eles não negociar, $a_{i,0}^\mu = 0$. A cada tempo \mathbf{t} , todos os jogadores tomam suas decisões individuais, e então, é computado o excesso de demanda $A(t)$, que é definido como:

$$A(t) = \sum_{j=1}^{N_p} b_j^{\mu(t)}(t) + \sum_{i=1}^{N_s} a_{i,\hat{s}}^{\mu(t)}(t). \quad (2.27)$$

O desempenho das estratégias é dado pela função de pontuação:

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^\mu(t) A(t) + \epsilon \delta_{0,s}, \quad (2.28)$$

onde \hat{s} corresponde ao valor máximo de $U_{i,s}$ no tempo \mathbf{t} , $\hat{s} = \max_s U_{i,s}$, e $\epsilon > 0$ é a taxa de juros recebida por não negociar e $\epsilon < 0$ significa um incentivo a negociar.

Uma outra versão do tipo Grande Canônico foi proposta em [23]. Nesse caso não há dois tipos de agentes. Toma-se um agente com comportamento típico do Jogo da Minoria tradicional, porém com a possibilidade que ele não participe de uma rodada do jogo, caso seu nível de confiança na estratégia melhor pontuada, naquele momento, não atinja um valor mínimo, r_{min} . O nível de confiança, em dado instante, é determinado pela taxa de sucesso r de sua melhor estratégia sobre os últimos T passos do jogo.

É razoável esperar que $r_{min} \geq 0,5$, pois o ganho médio dos jogadores deve cobrir custos de transação e comissões que são pagas para participar no mercado. O número de jogadores ativos no jogo, N_{ativos} , flutua mais intensamente quando $r_{min} = 0,5$ do que quando $r_{min} \neq 0,5$, sugerindo que $r_{min} = 0,5$ represente um valor crítico[23].

Capítulo 3

Fatos Estilizados

O conhecimento da natureza estatística das séries temporais é importante para o mercado de ativos, tanto no que concerne ao cálculo de risco, bem como no mecanismo de formação de preços de derivativos e outros instrumentos financeiros. Um dos principais interesses dos físicos na área de finanças está no desafio científico de compreender a dinâmica das grandes flutuações em sistemas complexos com um grande número de elementos interagentes [24]. Dois aspectos importantes que possibilitaram um aumento do número de pesquisas em séries financeiras foram a crescente disponibilidade de dados de alta frequência (bases de dados com frequência de segundos) sobre os preços praticados nos mais diversos tipos de mercados e a utilização de métodos computacionais [25, 26, 27]. A análise desses dados permitiram a observação de um conjunto de características estatísticas que são comuns aos vários tipos de instrumentos, mercados, e em diferentes períodos. Essas propriedades ou características são chamadas de fatos estilizados [25] e são consistentes com a possibilidade da existência de resultados "universais" [24]. Elas não estão associadas a nenhuma técnica paramétrica aplicada aos dados e portanto fornecem somente informações qualitativas sobre as séries utilizadas. Apesar disso, os fatos estilizados são tão restritivos que torna-se difícil gerar séries estocásticas que possuam tais propriedades [25]. Apesar de alguns pesquisadores, no passado, tomarem a abordagem de caos para tratar as séries financeiras, elas são melhor modeladas por processos estocásticos [26]. Os físicos buscam caracterizar esses processos investigando sua correlação temporal e estudando o comportamento assintótico de sua função de distribuição de probabilidade [26].

Uma crítica feita às análises financeiras que se baseiam na causalidade dos movimentos do mercado financeiro, a partir de fatos econômicos e políticos, é que diferentes ativos não são necessariamente influenciados pelos mesmos conjuntos de eventos de informações [25]. Sendo assim, as séries de preços dos diferentes ativos exibiriam propriedades diversas, ou seja, caberia o seguinte tipo de pergunta: por que as pro-

priedades estatísticas do preço futuro do café seriam similares ao comportamento de preço das ações da Petrobrás ou da taxa de câmbio real/dolár? No entanto, as pesquisas em dados empíricos mostram a existência dos fatos estilizados permeando os diversos tipos de mercados financeiros [25, 26, 27].

3.1 Escala em dados financeiros

Em finanças a escala é dada em unidades monetárias que variam no tempo. As transações ocorrem de forma aleatória no tempo e com variação de intensidade. Assim deve-se observar a escala de preços e a escala de tempo [26].

Não são as séries de preços, propriamente, que interessam para análise. Quando pensa-se em escala de preços é em relação ao incremento dos preços. Essa variável aleatória pode ser inicialmente definida como a variação absoluta dos preços:

$$Z(t) = P(t + \Delta t) - P(t), \quad (3.1)$$

onde P é o preço e t o tempo. Esse conceito traz problemas de escala. As ações das empresas têm preços bem diferentes, e portanto as variações absolutas de preços serão desconexas. Além desse aspecto, as variações absolutas de preços, tomadas em escalas longas de tempo, tendem a ser proporcionais ao preço[27], assim como descrito para diferentes ações.

De forma alternativa, pode-se analisar a variação absoluta de preços deflacionada ou descontada[26]

$$Z_d(t) = [P(t + \Delta t) - P(t)]D(t), \quad (3.2)$$

onde $D(t)$ é o fator de desconto ou fator de deflação. Assim como a variação absoluta de preços, esse tipo de variação tem o mérito de ser linear e possibilita trabalhar em termos de uma "moeda constante". Porém o fator de desconto é difícil de prever em longos períodos e também existe o problema da escolha do fator, que não é único, já que existem vários tipos de índices inflacionários.

Para resolver o problema de escala existente na variação absoluta de preços, define-se o conceito de variação relativa de preços ou retorno:

$$Z_r(t) = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{P(t)} \quad (3.3)$$

Assim ações de empresas distintas que apresentam variações absolutas de preços muito diferentes em um dia, podem apresentar variações relativas de preços similares.

O problema que permanece é que os retornos são sensíveis a mudanças na escala para horizontes longos de tempo [26].

Uma outra maneira é tomar o retorno como a diferença sucessiva do logaritmo de preço:

$$r(t) = \ln P(t + \Delta t) - \ln P(t) \quad (3.4)$$

O mérito dessa abordagem é a possibilidade de prescindir de deflatores ou fatores de desconto (desde de que sejam constantes no tempo, o que não pode ser tomado como boa aproximação em escalas longas de tempo) [26]. Se existe um fator de correção intrínseco, como por exemplo inflação, a própria dinâmica do método irá descontá-la:

$$\begin{aligned} r(t) &= \ln[P(t + \Delta t)(I)] - \ln[P(t)(I)] \\ r(t) &= \ln P(t + \Delta t) + \ln(I) - \ln[P(t)] - \ln(I) \\ r(t) &= \ln P(t + \Delta t) - \ln P(t) \end{aligned}$$

O problema é que o cálculo do retorno introduz uma transformação não linear que afeta as propriedades estatísticas de um processo estocástico [26].

Se for considerado regimes de alta frequência, em que o incremento na variação percentual ou relativa dos preços é pequena, o cálculo que toma a diferença entre o logaritmo dos preços se aproxima daquele obtido para a variação percentual (ver apêndice F). Como exemplo, em um dia, é comum alterações em ações da ordem de $Z_r = 1\%$. Fazendo o cálculo do retorno tem-se $r(t) = 0.995\%$.

Entre essas medidas de variação de preços, aquela que é mais largamente utilizada em estudos de séries temporais financeiras é o retorno $r(t)$. Portanto, para iniciar uma análise das propriedades estatísticas de uma série financeira, o primeiro trabalho a ser feito é transformar a série de preços em uma série de retornos.

Em termos de escala temporal pode-se considerar 3 candidatas [26]: o tempo físico, o tempo de mercado (período em que determinado mercado de ativos funciona) e o número de transações.

A principal limitação do tempo físico é o desconhecimento de como modelar o processo estocástico no período em que o mercado não realiza transações, como o período noturno e finais de semana.

Essa limitação também compromete o tempo de mercado, na medida em que existe um lapso de tempo muito maior entre o fechamento dos negócios em um dia para a abertura no dia seguinte e os intervalos entre os dados de negócios que

ocorrem no mesmo dia. Em [27] observou-se que a variância do retorno medido entre o fechamento de um dia e a abertura do dia subsequente representava em termos da variância observada entre abertura e fechamento do mesmo dia: 25% no caso do S&P500, 80% no mercado de câmbio Libra/dólar e 16% no mercado de taxa de juros de títulos de longo prazo da dívida do governo Alemão. Além disso a atividade de negociação dentro de um mesmo dia varia muito em termos de volume ou de número de negócios. A volatilidade é mais alta nos horários próximos a abertura e ao fechamento [26].

Por último pode-se indexar o tempo ao número de transações que ocorrem no mercado de um certo ativo financeiro. Deste modo, o que interessa é a ocorrência sucessiva do número de transações. Os dados obtidos dessa forma são conhecidos como *tick-by-tick*. Com isso elimina-se uma fonte de aleatoriedade, o tempo entre duas transações consecutivas, porém a outra fonte de aleatoriedade permanece, o volume de transação [26].

3.2 Propriedades do retorno

Nessa seção serão tratados os fatos estilizados relacionados com as propriedades dos retornos. São eles:

- Caudas gordas;
- Assimetria ganho/perda;
- Gaussianidade agregativa;
- Caudas gordas condicionais;
- Ausência de autocorrelação (linear);
- Decaimento lento da autocorrelação dos retornos absolutos.

O modelo de dinâmica de preços mais comum, assume que $\ln P(t)$ é um processo difusivo e que seus incrementos são distribuídos conforme uma Gaussiana [26]. Esse modelo, conhecido como movimento Browniano geométrico possui uma série de simplificações que facilitam seu cálculo analítico [24]. Entretanto, os dados empíricos mostram uma distribuição mais leptocurtica que a Gaussiana, com o centro da distribuição mais estreito e caudas mais gordas [26, 24, 28]. O termo caudas gordas

se refere às distribuições cujas caudas são maiores comparativamente à distribuição Gaussiana [25]. Quanto maior a frequência dos dados maior é o grau de leptocurtose observado [26]. Na figura 3.1 observa-se a distribuição de probabilidade empírica do retorno de ações da Xerox em comparação com a distribuição de probabilidade Gaussiana.

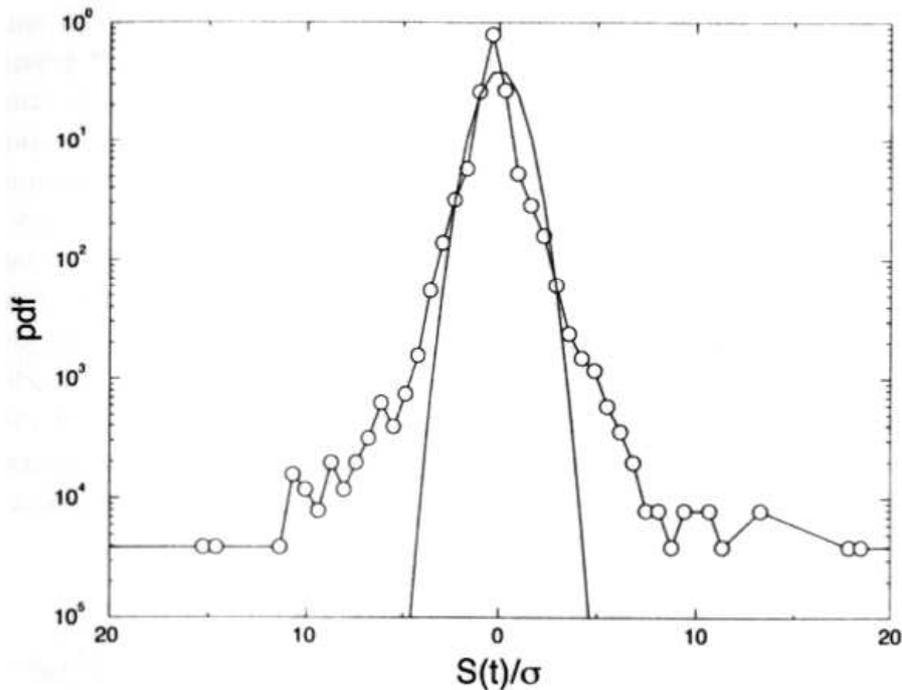


Figura 3.1: Função de densidade de probabilidade empírica do retorno S (de alta frequência) das ações da Xerox negociadas no *New York Stock Exchange* durante os anos 1994 e 1995. S é ponderado com o desvio padrão σ . O gráfico semi-log mostra a leptocurtose natural observada nos dados empíricos. Para comparação a distribuição Gaussiana é mostrada em linha contínua. Fonte [26], p. 62.

Uma maneira de medir quanto uma determinada distribuição desvia de uma distribuição normal é utilizar a medida de curtose [25]:

$$\kappa = \frac{\langle [r(t, \Delta t) - \langle r(t, \Delta t) \rangle]^4 \rangle}{\sigma^4} - 3. \quad (3.5)$$

Assim definida, a curtose para uma distribuição gaussiana é nula, e para distribuições que apresentam cauda gorda $\kappa > 0$.

Em seu trabalho pioneiro Mandelbrot notou que além do fato da distribuição dos retornos não ser uma Gaussiana, havia uma propriedade interessante, chamada

tempo de escala: a forma funcional da distribuição dos retornos era similar, mesmo alterando o intervalo de tempo Δt de um dia até 1 mês [24]. Motivado pelas caudas gordas e pela estabilidade funcional para diferentes escalas de tempo, Mandelbrot propôs que a distribuição dos retornos seguia uma distribuição de Lévy-estável [24]. O problema é que essa distribuição tem segundo momento infinito [26], dificultando a aplicação de modelos.

Um método para verificar se determinado momento de uma distribuição é finito foi proposto por Mandelbrot [25]. Constrói-se um gráfico do momento da amostra versus o tamanho da amostra. Se o momento teórico for finito, o momento da amostra irá eventualmente convergir para uma região próxima de seu valor teórico e flutuar em torno desse valor. No caso do momento ser infinito, o momento da amostra, ou será divergente como função do tamanho da amostra, ou exibirá comportamento errático e grandes flutuações.

Comparando os dados de mercado com uma Lévy-estável e uma Gaussiana observa-se que o centro da distribuição é bem ajustada pela Lévy-estável, mas na cauda os dados se distribuem entre a Lévy-estável e uma Gaussiana, o que mostra que os dados tem distribuição com variância finita[26]. A figura 3.2 compara a função de densidade de probabilidade dos dados (alta frequência) dos retornos do índice S&P 500 com uma distribuição Gaussiana e também com a uma distribuição de Lévy-estável.

A cauda de uma distribuição de Lévy-estável, com $0 < \alpha < 2$, apresenta lei de potência na forma [26, 27]:

$$P(x) \sim x^{-(1+\alpha)}. \quad (3.6)$$

Mas estudos [24] mostraram que os dados empíricos apresentam lei de potência com $\alpha \sim 3$, ou mesmo valores maiores $3 \leq \alpha \leq 5$ [27], o que é uma medida confirmando que o decaimento na cauda é mais rápido do que aquele apresentado por uma Lévy-estável. O problema que se coloca é: com um valor de α fora do regime de uma Lévy-estável, como a distribuição dos dados mantém a forma funcional para várias escalas de tempo? Uma possível explicação é que os dados devem estar distribuídos conforme uma Lévy truncada, em que as caudas seguem aproximadamente uma exponencial [24, 26]. Esse truncamento assegura a existência de um segundo momento finito, porém este argumento não responde a pergunta, pois a Lévy truncada não é uma distribuição estável [24].

Como os dados de mercado apresentam variância finita e a distribuição é não estável espera-se, devido ao Teorema Central do Limite, que para valores cada vez maiores de Δt a distribuição apresente uma convergência para a Gaussiana. Uma

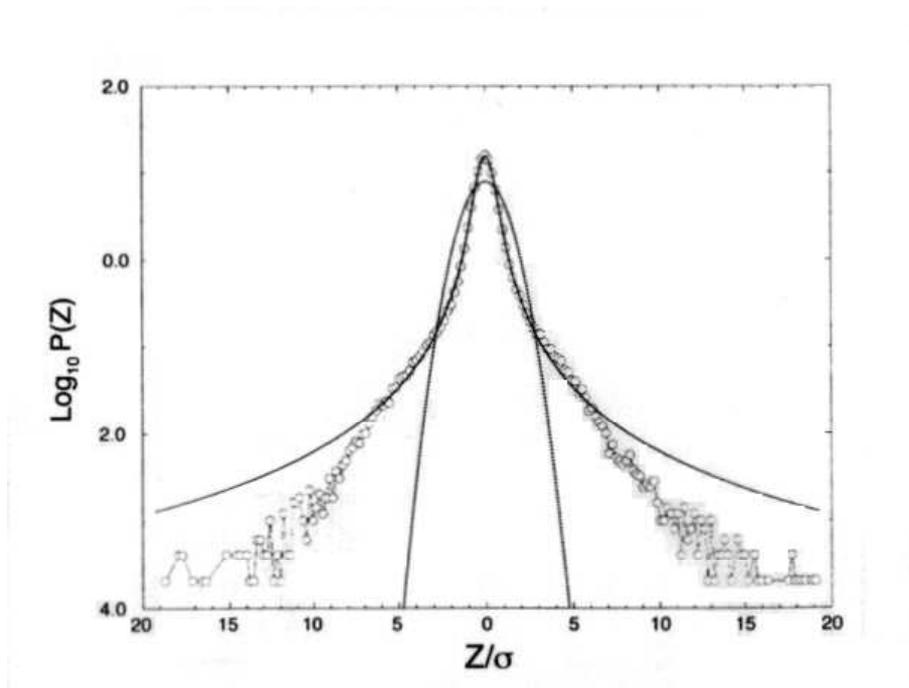


Figura 3.2: Função de densidade de probabilidade empírica do retorno Z (de alta frequência, $\Delta t = 1$ min.), ponderado com o desvio padrão σ , do índice S&P 500 comparado com uma distribuição Gaussiana (linha pontilhada) e com uma distribuição de Lévy-estável (linha contínua) de índice $\alpha = 1,40$ e fator de escala $\gamma = 0,00375$ obtido de $P(0)$ medido quando $\Delta t = 1$ min. Fonte [26], p. 69.

maneira de verificar essa convergência é observar a quebra de escala para longos intervalos de tempo, já que a variância finita implica que a escala é aproximada e válida somente em um intervalo de tempo finito [26].

A convergência para uma distribuição Gaussiana que os dados de mercado apresentam, quando são tomados intervalos cada vez maiores de Δt é chamada de Gaussianidade agregativa [25]. Porém, em sentido oposto, quanto menor Δt mais pronunciadas são as caudas.

Resumindo, uma Lévy truncada se ajusta muito bem para descrever os dados de mercado [26, 24, 27], mas é não estável e deve convergir para uma Gaussiana. Porém, os dados empíricos mantêm sua forma funcional para grandes valores de Δt . Em [24] verifica-se que a forma funcional é mantida para escalas de aproximadamente 4 dias (1560 minutos de tempo de mercado). Após esse período os resultados são consistentes com uma convergência vagarosa para uma distribuição Gaussiana. Esse comportamento é compatível com a observação feita em [26], onde a quebra de escala da distribuição (Lévy para Gaussiana) ocorre em aproximadamente 10^4 minutos.

A modelagem com Lévy truncada tem uma limitação para descrever os dados de mercado: assumir incrementos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) [26, 24]. A observação empírica mostra uma longa persistência da função de autocorrelação das volatilidades dos retornos [24], que será tratada em detalhes na próxima seção. Por enquanto, é suficiente saber que a Lévy truncada falha em descrever a dependência temporal observada nos dados de mercado [26].

Em [24] para comprovar que a correlação existente na volatilidade é a causa do efeito de tempo de escala nos dados empíricos, foram feitas duas simulações que verificam a taxa de convergência dos dados para uma distribuição Gaussiana.

Primeiro foi comparada a taxa de convergência da distribuição dos retornos para uma série gerada por computador com a mesma distribuição da série real (S&P500), só que estatisticamente independente.

A série gerada por computador tinha lei de potência com $\alpha \sim 3$. Essa série apresentou rápida convergência para uma distribuição Gaussiana, conforme o aumento do número de variáveis aleatória i.i.d., denotado por n . Ao atingir $n = 256$ a distribuição já apresentava comportamento Gaussiano.

Para confirmar o resultado anterior a série real $G_{\Delta t=1min.}(t)$ foi tomada e destruiu-se a dependência temporal, embaralhando (misturando) seus dados, criando uma nova série $G_1^E(t)$, em que os retornos são estatisticamente independentes. Adicionando-se os n consecutivos retornos da série embaralhada, $G_1^E(t)$, construiu-se a série de retornos $G_n^E(t)$. Observou-se que a série $G_n^E(t)$ criada também convergia rapidamente para uma Gaussiana, conforme o aumento de n . Isso confirma que a dependência temporal causa o comportamento de tempo de escala observado.

Um fenômeno que também denota a característica de persistência nas séries de mercado é a chamada cauda gorda condicional. Mesmo após filtrar as séries de retorno (utilizando modelos do tipo GARCH [29]) para eliminar agrupamentos de volatilidade, a série resultante ainda exibe caudas gordas, apesar de serem caudas menos pesadas que aquelas observadas na distribuição original [25].

Outra distribuição que também apresenta caudas gordas é a t-Student. Como mostrado em [27], três tipos diferentes de mercado (ações, câmbio e títulos públicos) tiveram seus dados muito bem ajustados tanto por uma Lévy truncada como por uma t-Student. Segundo Bouchaud e Potters [27] os dados de mercado não têm comportamento suficientemente preciso de forma a poder escolher entre uma distribuição de Lévy truncada e uma distribuição t-Student, e a escolha entre uma das duas é guiada por conveniência matemática. A figura 3.3 apresenta a comparação da distribuição de probabilidade acumulada dos retornos do índice S&P 500 com as distribuições: Levy truncada, t-Student e Gaussiana. Observa-se que os dados apresentam cauda mais pesada que uma Gaussiana e são bem ajustados tanto por uma Levy truncada como por uma t-Student.

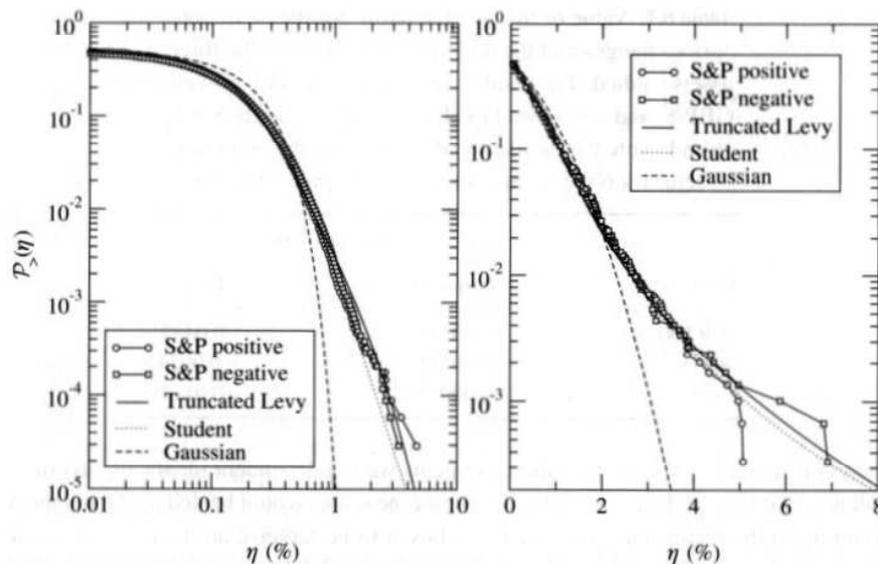


Figura 3.3: Função de distribuição de probabilidade acumulada $P_{>}(\eta)$ (para $\eta > 0$) e $P_{<}(\eta)$ (para $\eta < 0$) para os retornos do índice S&P 500, com $\tau = 30$ min. (lado esquerdo, com escala log-log) e com 1 dia (lado direito, escala semi-log). Fonte [27], p. 96.

As caudas da distribuição dos retornos observados no mercado também apresen-

tam uma característica de assimetria (*skewness*). A intensidade dos movimentos que representam quedas ou perdas é maior que aqueles que representam ganhos, levando a constatação de terceiro momento negativo[25]. Segundo Bouchaud e Potters [27], o efeito de *skewness* nas séries temporais financeiras é bem pequeno, muito menor que as curtoses observadas. E por ser pequeno é muito sensível à quantidade que se toma para estudo: o incremento absoluto dos preços, $Z(t)$, ou o incremento relativo dos preços, $r(t)$. Um exemplo dessa sensibilidade é dada pela seguinte comparação: seja $r(t)$ distribuído de forma Gaussiana com $\sigma \ll 1$. Por definição, a *skewness* de $r(t)$ é nula, mas a variável aleatória $e^{r(t)}$ tem uma *skewness* positiva igual a 3σ .

Além de tentar compreender as características que permitam estabelecer uma forma funcional, mais próxima possível do comportamento observado para os dados empíricos, existe o interesse em estudar o comportamento da correlação dos dados de retorno.

No primeiro caso, o estudo das caudas por exemplo, têm implicação direta na quantificação do risco. Já no segundo caso, a idéia seria quantificar correlações que permitissem inferir o futuro conhecendo dados do passado.

A função de autocorrelação é dada por:

$$C(\tau) = \text{corr}(r(t, \Delta t), (r(t + \tau, \Delta t))), \quad (3.7)$$

onde C é a autocorrelação, r o retorno, τ o incremento temporal, t o tempo, Δt o intervalo de tempo entre dados sucessivos da série e corr é a correlação, dada por:

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (3.8)$$

onde $E[\]$ é a esperança matemática e σ o desvio padrão.

A função de autocorrelação, para os retornos de mercado, apresenta uma tendência rápida para valores próximos de zero [26, 27, 24, 25, 28]. Para $\tau \sim 15$ minutos é possível assumir esse fato [27, 25, 24]. Em escala de tempo muito curta, entretanto, existe uma fraca (mas estatisticamente significativa) autocorrelação dos retornos [27]. A figura 3.4 mostra a função de autocorrelação dos retornos do índice S&P 500, com $\Delta t = 1$ min. Observa-se que após 20 minutos considera-se os dados descorrelacionados. O valor da autocorrelação a um nível de ruído está de acordo com a hipótese de eficiência de mercado[24]. Caso houvesse autocorrelação dos retornos, os agentes no mercado poderiam elaborar estratégias para ganhar dinheiro com essas informações, o que é chamado arbitragem e violaria a hipótese de eficiência[25]. Porém, a disponibilidade das informações faz com que o processo de arbitragem se anule.

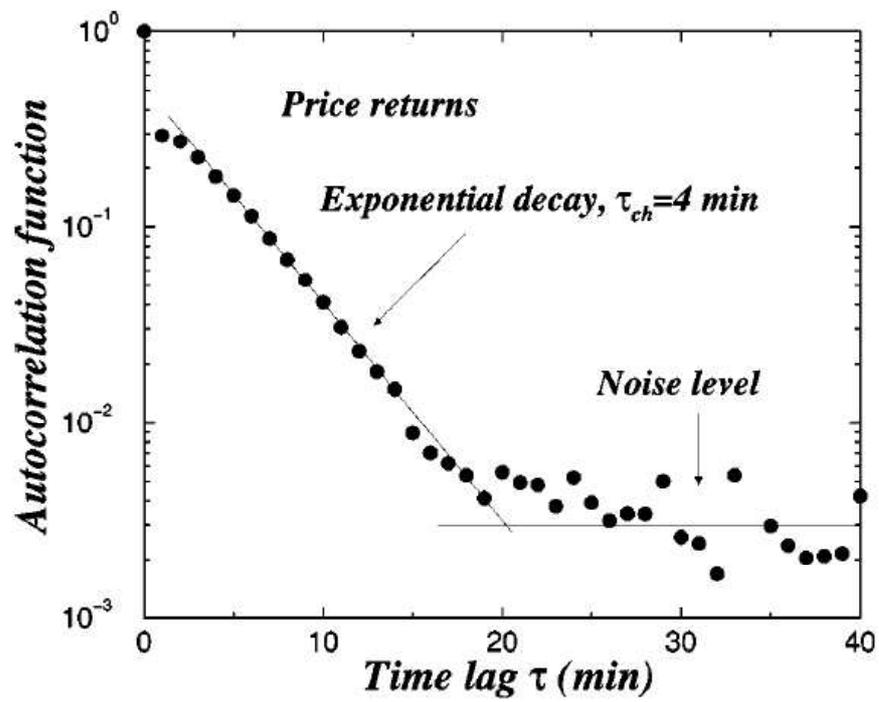


Figura 3.4: Gráfico semi-log da função de autocorrelação dos retornos do índice S&P 500 em uma escala temporal $\Delta t = 1$ min. A linha contínua inclinada corresponde a um decaimento exponencial. Fonte [24], p. 5307.

Assumindo que a disponibilidade de informações leva a ganhos extraordinários, portanto existência de arbitragem, mais pessoas tenderiam a usar as informações para conseguir esse ganho e esse aumento na oferta ou demanda por um papel, dependendo da informação (comprar ou vender) anularia o ganho extraordinário. Portanto, a possibilidade de arbitragem tende a reduzir as correlações, exceto para pequenos intervalos de tempo[25]. Além do aspecto da arbitragem, existe o fato das correlações serem tão pequenas que não permitem auferir lucro: o retorno potencial é menor que os custos de transação para uma estratégia de negociação com alta frequência, até mesmo para operadores que têm acesso direto ao mercado[27].

A ausência de autocorrelação (linear) dos retornos poderia servir de argumento para justificar a utilização de modelos do tipo passeio aleatório, que pressupõe a independência de incrementos da variável aleatória, no caso incremento nos preços. Porém, sabe-se que a ausência de autocorrelação em uma série não pressupõe independência, mas verifica-se a recíproca. A independência implicaria que funções não lineares dos retornos não apresentassem autocorrelação[25, 24]. Entretanto isso não se verifica[27, 25, 24]. Funções não lineares como o valor absoluto ou o quadrado dos retornos apresentam autocorrelação positiva[25]. A amplitude dos retornos (valor absoluto do retorno), por exemplo, mostra correlação que persiste por vários meses e é caracterizado por um decaimento assintótico com lei de potência [24]. A figura 3.5 mostra a função de autocorrelação dos retornos absolutos do índice S&P 500. Há um decaimento lento seguindo uma lei de potência.

Em trabalho recente, Silva *et al.* [43] analisaram 27 empresas e selecionaram 4 destas para apresentar os resultados. Duas companhias que têm papéis transacionados na NASDAQ, a Intel e a Microsoft e duas outras, a IBM e a Merck que participam da NYSE. A faixa temporal analisada foi jan/1993 a jan/2000.

O trabalho mostra que para τ da ordem de 1 hora até um mês (20 dias - tempo de mercado), denominado tempo mesoscópico [43], a parte central (99%) da distribuição de probabilidade dos retornos, normalizado pelo desvio padrão, segue uma função exponencial, diferentemente do caso de tempos microscópicos, da ordem de minutos, que apresentam distribuição de probabilidade com lei de potência na cauda. Conforme τ aumenta, a partir de 1 hora, as distribuições se alteram tomando a característica de uma Gaussiana. Portanto, em um τ mesoscópico a distribuição de probabilidades dos retornos interpola entre as distribuições exponencial e Gaussiana.

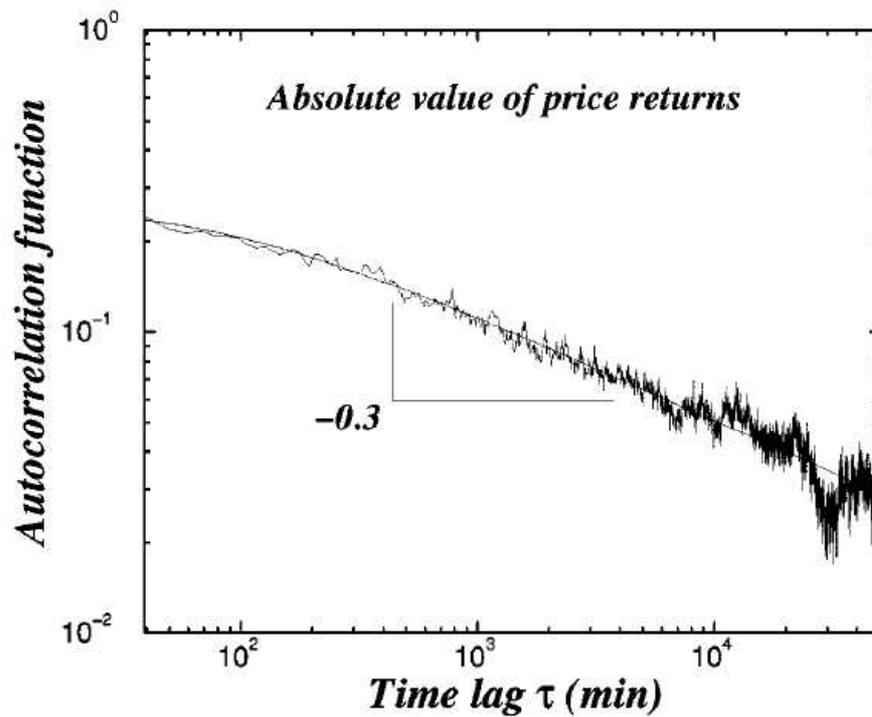


Figura 3.5: Gráfico log-log da função de autocorrelação dos retornos absolutos do índice S&P 500 em uma escala temporal $\Delta t = 1$ min. A linha contínua corresponde a um ajuste (regressão) com lei de potência, cujo expoente é igual a $0,29 \pm 0,05$. Fonte [24], p. 5307.

3.3 Propriedades da volatilidade do retorno

A presença de correlação de longo alcance, seja para o valor absoluto ou quadrático do retorno, sugere que deve existir algum outro processo estocástico fundamental adicionado ao próprio processo de variação de preço [26, 30]. Esse processo é chamado volatilidade [26].

A volatilidade é uma medida da flutuação média do preço de mercado em um dado período de tempo[30] e é de grande importância prática na determinação do risco[26, 27, 30, 32], constituindo-se em parâmetro chave nos modelos de apuração de derivativos[26, 27, 32].

Apesar do grande interesse prático, a volatilidade não é diretamente observável[27]. O que se faz é estimá-la por alguma forma de aproximação. A forma frequentemente utilizada para estimação é o cálculo do desvio padrão do retorno em determinado período[26]. Mas existem outras maneiras: média do valor absoluto do retorno, métodos de máxima verossimilhança e métodos Bayesianos[26].

Na seqüência os fatos estilizados relacionados com a volatilidade são elencados e posteriormente serão trabalhados dentro de um contexto geral das propriedades estatísticas da volatilidade.

- Intermitência;
- Agrupamento de volatilidade(*volatility clustering*);
- Efeito de alavancagem;
- correlação volume/volatilidade.

A simples observação de uma série temporal de retornos de um ativo mostra que a volatilidade é dependente do tempo, assumindo altos níveis em período de incerteza e revertendo para baixos valores em períodos de calma [27]. Esse comportamento de grandes rupturas na intensidade de variação dos retornos, que acontecem irregularmente na série temporal, caracteriza o fato estilizado denominado intermitência [25]. Esse termo é usado em analogia a fluxos turbulentos: períodos de relativa tranquilidade (fluxo laminar) são interrompidos por intensos picos de atividades [27]. Na figura 3.6 é possível comparar o retorno diário do índice Dow Jones, no qual é visível o comportamento de intermitência, com uma série de retorno diário de um movimento Browniano geométrico.

Assim como o retorno, há interesse em estudar a volatilidade no seu aspecto de distribuição de probabilidades e medidas de correlação. Em [30] a distribuição da volatilidade de uma série de dados do S&P500 apresentou bom ajuste por uma log-normal, e no limite de tempo longo a expectativa é de uma convergência lenta (devido a correlações) para Gaussiana (Teorema Central do Limite). Porém nos trabalhos de Micciché *et al.* [32] e também no de Bouchaud e Potters [27] verifica-se que a distribuição log-normal subestima os valores da cauda da distribuição empírica da volatilidade. Nesses dois trabalhos são utilizados alternativamente ao ajuste log-normal, uma distribuição Gama invertida do tipo:

$$P(\sigma) = \frac{\sigma_0^\mu}{\Gamma(\mu)\sigma^{1+\mu}} e^{-\sigma_0/\sigma}, \quad (3.9)$$

onde σ_0 é a variância média e μ um parâmetro de controle.

As funções Gama tendem a superestimar os valores da cauda em relação aos dados de mercado. Ou seja, os valores empíricos da volatilidade, na região de cauda, distribuem-se entre uma log-normal e uma Gama inversa.

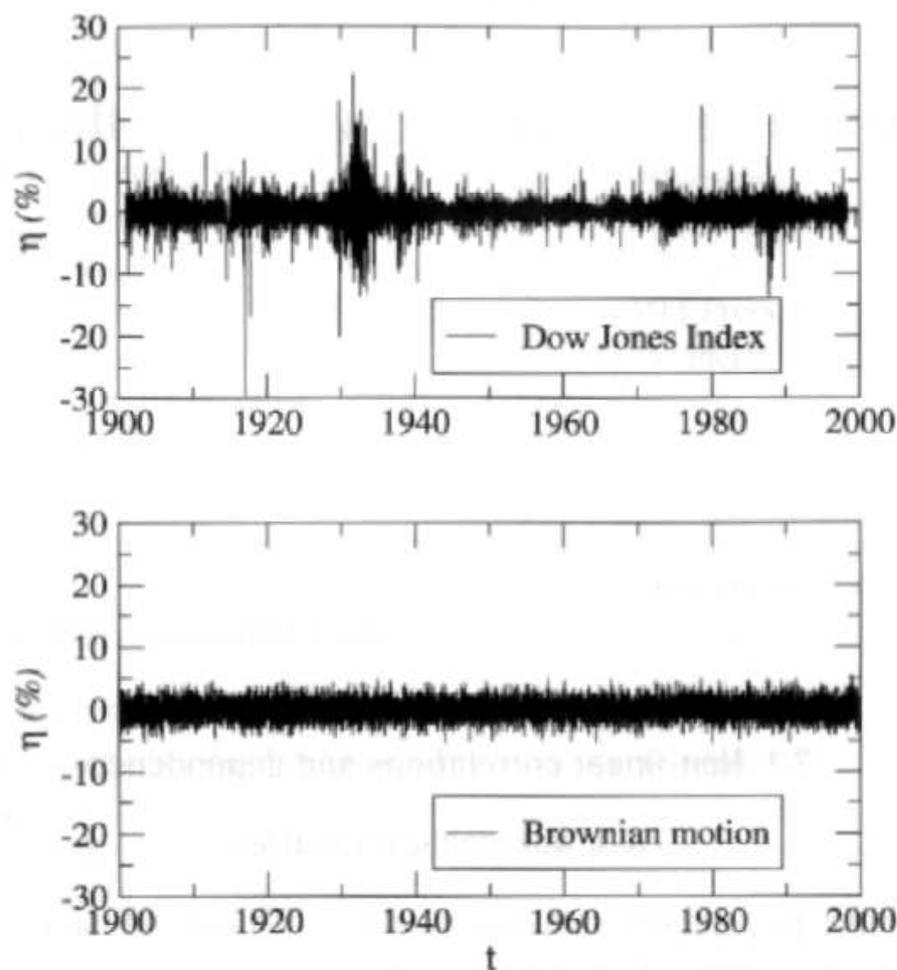


Figura 3.6: Gráfico superior: retorno diário do índice Dow Jones desde 1900. É possível ver claramente a natureza intermitente da flutuação da volatilidade. Gráfico inferior: retorno diário para um movimento Bowniano geométrico, mostrando a ausência de padrão. Fonte [27], p. 108.

A função de autocorrelação da volatilidade, estimada como média local do valor absoluto da variação de preços, ou como o desvio padrão do retorno, é bem descrita por uma lei de potência [26]. A correlação da volatilidade pode ser investigada também pelos métodos: espectro de potência, que é a transformada de Fourier da função de autocorrelação, e análise de flutuações sem tendência (conhecido pela sigla em inglês DFA - *Detrended Flutuation Analysis*). Este método consiste nos seguintes passos [34, 35]:

1. A partir da série temporal original $x(i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, define-se a série tem-

poral integrada $y(i)$, como:

$$y(i) = \sum_{j=1}^i x(j); \quad (3.10)$$

2. Divide-se a série temporal integrada de tamanho N em $n = N/l$ caixas, sem intersecção. Em cada caixa, contendo l dados, é construída uma reta de tendência com base no método de mínimos quadrados;
3. Define-se, então, o caminho sem tendência como a diferença entre a série integrada, $y(i)$ e os valores estimados a partir do método dos mínimos quadrados, $y_{fit}(i)$, para cada caixa;
4. Calcula-se, então, o desvio padrão dessa flutuação por meio da fórmula:

$$F(l) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{i=kl+1}^{(k+1)l} [y(i) - y_{fit}(i)]^2 \right]}; \quad (3.11)$$

5. Repete-se o cálculo da equação (3.11) para diferentes valores de l e assim é estabelecida a relação entre $F(l)$ e l .

Em geral, o gráfico gerado para essa relação segue uma lei de potência, e $F(l)$ escala como $F(l) \sim l^\zeta$, onde ζ é denominado expoente do DFA ou expoente de escala.

Utilizando o método do DFA para a volatilidade de uma série do S&P 500, Cizeau *et al.* [30] conseguiram uma lei de potência com expoente do DFA $\zeta = 0,9$ para vários valores de período ($T = 120min.; 600min.; 2100min.$) conforme a figura 3.7. Com o mesmo método (e conjunto de dados) em [31] Liu *et al.* também encontraram um comportamento de lei de potência. Porém apurou-se duas tendências, $\zeta_{(1)} = 0,66$ para $t < t_x \sim 600min.$ e $\zeta_{(2)} = 0,93$ para $t > t_x \sim 600min.$ Este último valor condizente com [30] pois varre a mesma faixa de tempo (acima de $10^3min.$). Nesse mesmo trabalho foram feitas medidas do espectro de potência do módulo do retorno, resultando em valores $\beta_1 = 0,31$ e $\beta_2 = 0,90$ para as faixas $f > f_x \sim 1/600min.$ e $f < f_x \sim 1/600min.$, respectivamente. Portanto, o espectro de potência para a correlação da volatilidade mostra um comportamento do tipo $1/f$ [26]. O espectro representativo para processos estocásticos do tipo passeio aleatório, possuem espectro de potência da forma $S(f) = 1/f^2$ e é o que se observa para as séries de retorno.

Essa característica da função de autocorrelação demonstra o comportamento de memória de longo alcance exibido pela volatilidade, além de caracterizar o fato estilizado denominado agrupamento de volatilidade (*volatility clusterring*), em que

grandes variações de preços são mais prováveis de serem seguidas por grandes variações de preços, ou seja, eventos de alta volatilidade tendem a formar agrupamentos no tempo[25].

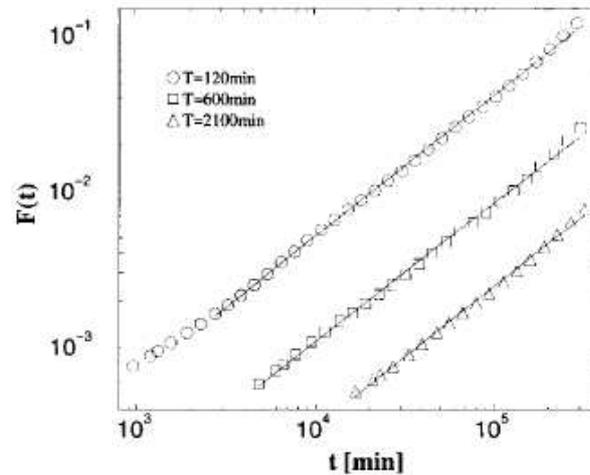


Figura 3.7: Flutuação $F(t)$ da volatilidade com $T = 120, 600$ e 2100 min., calculado usando *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA). As melhores retas de ajuste apresentam lei de potência com os expoentes $\alpha = 0,91; 0,89$ e $0,91$. Fonte [30], p. 444.

Outra medida de dependência não linear nos retornos é o chamado efeito de alavancagem[25]:

$$L(\tau) = \text{corr}(|r(t + \tau, \Delta t)|^2, r(t, \Delta t)) \quad (3.12)$$

A correlação dos retornos com seus quadrados tem valor negativo e decaem a zero com o aumento de τ . Essa correlação negativa implica que retornos negativos levam a um aumento da volatilidade e retornos positivos a diminuem. Porém, não se pode tomar o efeito de alavancagem no sentido inverso, ou seja, a volatilidade alavancando o retorno, $L(\tau) \neq L(-\tau)$. O que se verifica é que $L(\tau)$ para $\tau < 0$ é insignificante[25].

Bouchaud e Potters em [27] estudaram o efeito de alavancagem para ações individuais e para índice de ações. A correlação retorno-volatilidade é de curto alcance, apresentando o seguinte decaimento temporal: aproximadamente 10 dias para índice de ações e em torno de 50 dias para ações individuais. A amplitude da correlação também é diferente nos dois casos, mostrando ser maior para índices de ações do que para ações individuais.

Outro estudo foi ajustar a função de correlação por uma exponencial[27]:

$$L(l) = -Ae^{l/T_x} \quad (3.13)$$

onde A é a amplitude, l o incremento temporal e T_x o período. Constatou-se que o efeito de alavancagem para índices tem maior amplitude ($A = 18$; $T_x = 9,3$ dias) e tende a zero mais rapidamente com l comparativamente ao comportamento de ações individuais ($A = 1,9$; $T_x = 69$ dias).

Ainda nesse trabalho [27] Bouchaud e Potters construíram um modelo retardado para a variação de preços, em que essa variação é proporcional a uma certa média dos preços passados. Tal modelo, que faz uma junção entre comportamento aditivo dos preços e comportamento multiplicativo, leva ao surgimento de uma correlação retorno-volatilidade que se adapta bem aos dados empíricos. Um subproduto do modelo é o aparecimento de *skewness* negativa, o que leva Bouchaud e Potters a afirmarem que o efeito de alavancagem induz *skewness* na distribuição dos retornos.

Anteriormente verificou-se que a correlação retorno-retorno mostra convergência rápida em direção a zero. Já a correlação retorno-volatilidade caracteriza o efeito de alavancagem, ou seja, existe uma correlação negativa entre o retorno do passado e a volatilidade do futuro[27]. Por fim, outra correlação de interesse é a retorno-volume. Essa mostra as mesmas características do efeito de alavancagem: é negativa, significando que a atividade de negociação aumenta após uma queda do retorno[27].

Em [33] foi feito um estudo do espectro de potência do número de negócios diários de 88 ações movimentadas na Bolsa de Nova York com diferentes níveis de capitalização. As ações mais capitalizadas mostraram espectro de potência da forma $S(f) = 1/f$ e as menos capitalizadas $S(f) = 1/f^\gamma$, com $\gamma < 1$. Como já foi colocado, $S(f) = 1/f$, também é a forma do espectro de potência da volatilidade.

Esses comportamentos da série de volume de negócios leva ao fato estilizado denominado correlação volume/volatilidade, ou seja, o volume de negócios está correlacionado com todas as medidas de volatilidade[25]. Apesar dos pesquisadores darem menos atenção às propriedades estatísticas do volume de negócios, compreender seu comportamento é importante para estimar a liquidez dos ativos[33].

Capítulo 4

Modelo Baseado em Agentes com Preços Fundamentais Heterogêneos

Um dos modelos de multi-agentes de maior sucesso para o mercado financeiro é o Jogo da Minoria Grande Canônico (JMGC) [18], descrito no capítulo 2. De acordo com essa abordagem, os fatos estilizados surgem como um fenômeno crítico, que ocorre em uma região de separação entre um regime ergódico e um não ergódico [19]. Próximo do ponto crítico, os agentes se auto-organizam para explorar toda a informação disponível no mercado com o propósito de minimizar a volatilidade, e de forma que o mercado tenha eficiência informacional. O JMGC é muito simples e possui poucos parâmetros. As recentes investigações desse modelo têm mostrado uma variedade muito interessante de propriedades como transição de fase, *crashes* e criticalidade auto-organizada [8, 12, 5]. Por causa da sua simplicidade o modelo pode ser estudado analiticamente [16, 36, 37]. Todavia, o surgimento de fatos estilizados no JMGC não é fácil de se conseguir, ele depende da realização, até mesmo quando considerado o mesmo conjunto de parâmetros.

Muitos autores têm introduzido modelos com especuladores que acreditam na existência de um preço fundamental p_f de um ativo, que também pode ser adaptado durante a evolução dos preços. A idéia neste capítulo é desenvolver um modelo onde os fundamentalistas discordam sobre o preço fundamental. Será mostrado que quando os fundamentalistas têm crenças heterogêneas a respeito do preço fundamental, os fatos estilizados surgem para uma grande faixa de conjunto de parâmetros. Na realidade, a principal hipótese no Jogo da Minoria é que os agentes têm racionalidade limitada. Embora os agentes recebam a mesma informação a cada tempo t , eles processam a informação de maneira diferente, devido ao alto grau de heterogeneidade nas suas estratégias. Parece claro considerar heterogeneidade nas crenças dos agentes sobre o preço fundamental, e então investigar o seu papel no padrão de formação das flutuações de preços. A crença dos agentes será tomada como uma opinião subjetiva, que surge do julgamento sobre o nível de preço justo do ativo.

Esse conceito de preço está baseado em percepções, orçamentos ou necessidades. Na literatura econômica, a crença é um elemento na formação das chamadas preferências.

4.1 O modelo

O modelo aqui desenvolvido é similar ao JMGC. Existem N agentes que possuem uma estratégia $a_i^\mu = \pm 1$ para $i = 1, \dots, N$ e $\mu = 0, \dots, P - 1$. A cada tempo \mathbf{t} eles processam uma informação pública $\mu = \mu(t)$ com o propósito de tomar uma decisão. Contudo, uma fração $\rho = N_s/N$ dos agentes tem uma percepção individual sobre o valor fundamental do preço da ação θ_i . A quantidade θ_i é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, \dots, \theta_{max}]$. É permitido a um fundamentalista não seguir sua estratégia quando:

$$Lp(t) = \left| \sum_{t' < t} A(t') \right| > \theta_i \quad \text{e} \quad U_i(t) < 0 \quad \text{para} \quad i \in [1, \dots, N_s]. \quad (4.1)$$

O agente i não participa do mercado $\varphi_i(t) = 0$ enquanto a condição (4.1) é mantida, de outra maneira $\varphi_i(t) = 1$. O excesso de demanda $A(t)$ é estimado como

$$A(t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t) a_i^{\mu(t)}. \quad (4.2)$$

Os fundamentalistas comportam-se como especuladores e a atualização das suas estratégias $U_i(t)$ são atualizadas por:

$$U_i(t+1) = U_i(t) - a_i^{\mu(t)}(t) A(t) - \epsilon. \quad (4.3)$$

No limite $\theta_{max} \rightarrow 0$ retoma-se o modelo JMGC. Por outro lado, quando $\theta_{max} \rightarrow \infty$, o retorno $r(t)$ torna-se determinístico, pois somente os produtores irão negociar. Para um finito, mas não muito grande, valor de θ_{max} , um dado especulador potencial i esperará a variação de preço exceder o limiar de negociação θ_i para especular, desde que eles considerem desvios da variação de preço e seus respectivos valores fundamentais como uma fonte de oportunidade de arbitragem. Além disso, os especuladores mantêm atualizadas a pontuação de suas estratégias a cada tempo \mathbf{t} qualquer que seja o nível de preços.

4.2 Resultados e discussão

O foco inicial da análise do modelo será o retorno $r(t)$. Na figura 4.1 é mostrada uma série típica de retornos para diferentes valores de parâmetros. Como pode ser

visto, a série temporal apresenta agrupamentos de volatilidade, que são caracterizados por grandes e intermitentes flutuações. De fato, a heterogeneidade com respeito a crença sobre o preço fundamental é responsável pela produção de tais padrões. De maneira oposta ao modelo Grande Canônico tradicional, o modelo aqui apresentado não necessita ajustar os parâmetros para produzir fatos estilizados. As séries temporais da figura 4.1 são consistentes com as séries temporais reais de retornos diários e podem ser produzidas em uma grande faixa de valores para os parâmetros, o que é um indicativo da robustez do modelo.

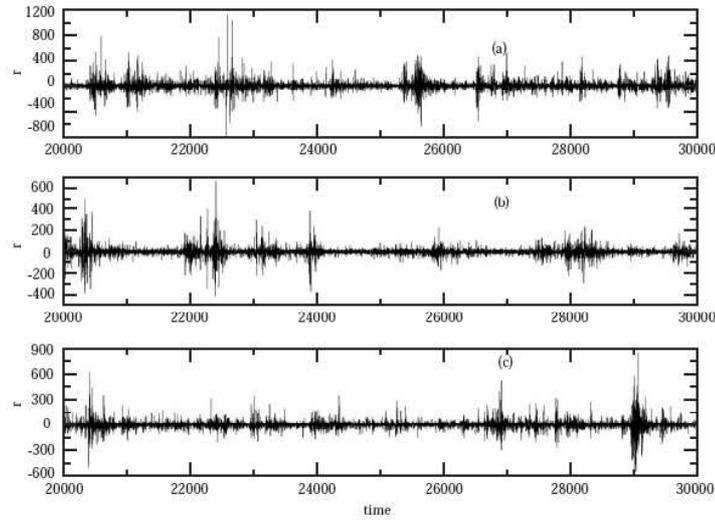


Figura 4.1: Evolução temporal do retorno r . Os parâmetros utilizados são $N = 10.000$, $P = 64$, e (a) $\theta_{max} = 1.000$ e $\rho = 0,5$; (b) $\theta_{max} = 1.500$ e $\rho = 0,5$; e (c) $\theta_{max} = 1.500$ e $\rho = 0,6$.

Na figura 4.2 é apresentado outro exemplo para a série temporal dos retornos (fig. 4.2a) juntamente com suas autocorrelações associadas C^1 e a função de autocorrelação dos retornos absolutos C^2 (fig. 4.2b) que são definidas como:

$$C^1(\tau) = \frac{\langle r(t+\tau)r(t) \rangle - \langle r(t+\tau) \rangle \langle r(t) \rangle}{\langle r^2(t) \rangle} \quad (4.4)$$

e

$$C^2(\tau) = \frac{\langle |r(t+\tau)r(t)| \rangle - \langle |r(t+\tau)| \rangle \langle |r(t)| \rangle}{\langle |r(t)|^2 \rangle}, \quad (4.5)$$

respectivamente, onde $\langle \dots \rangle$ representa uma média temporal. Essa realização é particularmente interessante. A série parece ser uma Gaussiana a maior parte do tempo, exceto no intervalo $t \in [24\,000, \dots, 24\,600]$ onde grandes flutuações ocorrem. Como

uma conseqüência dessas flutuações, surge uma estrutura não trivial nas correlações. A fig. 4.2b mostra que os retornos são completamente descorrelacionados, o que significa que os especuladores estão explorando toda a informação disponível. Entretanto, a medida da correlação absoluta dos retornos $C^2(\tau)$ apresenta um decaimento lento, que pode ser interpretado como uma correlação de longo alcance nos retornos, evidenciando uma memória de curto alcance na série (linha na fig. 4.2b). Esses resultados qualitativos estão de acordo com os dados empíricos do mercado financeiro. A figura 4.2c contém a distribuição de probabilidade dos retornos $P(r)$ como uma função de r . É possível observar, claramente, que a distribuição de probabilidade exibe caudas gordas. Isso não é uma surpresa, desde que flutuações da volatilidade, que são devidas às correlações não-lineares nas séries temporais, levam à caudas gordas na função de distribuição dos retornos [27]. Essa realização também mostra uma assimetria na distribuição de probabilidade, a chamada *skewness*. No caso a *skewness* é negativa. Em geral, o sinal da *skewness* é determinado pela condição inicial. A *skewness* surge da ausência de consenso a respeito do preço fundamental.

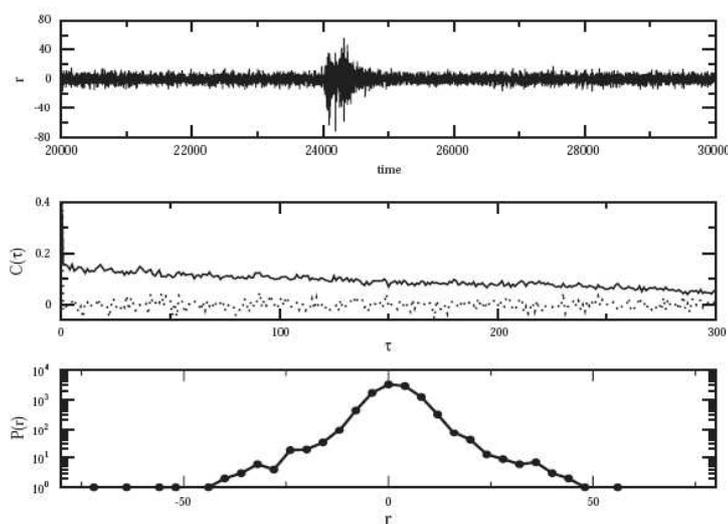


Figura 4.2: (a) Evolução temporal dos retornos. (b) Autocorrelação dos retornos (linha pontilhada) e autocorrelação do valor absoluto dos retornos (linha contínua) como função de τ . (c) Distribuição de probabilidade dos retornos $P(r)$ como função de r . Os parâmetros utilizados são $N = 1.000$, $P = 100$, $\theta_{max} = 100$ e $\rho = 0,6$. Em (c) é observado caudas gordas e *skewness* negativa.

Um outro modo de analisar a correlação em uma série temporal é utilizar o método do DFA (*Detrended Flutuation Analysis*) como foi destacado no capítulo

3. Na figura 4.3 o valor médio de ζ (expoente do DFA), para a série de retorno, é apresentado como função do parâmetro de controle α . Observa-se que ζ , para o modelo de Preços Fundamentais Heterogêneos (PFH), ficou abaixo de 0,5, ou seja, é anti-persistente. Isso é coerente com o aspecto de reversão à média inerente ao modelo. Nota-se também que para α pequeno as barras de erros são bem maiores comparadas com aquelas observadas próximas de $\alpha = 1$. O valor médio de ζ se estabiliza próximo de 0,45 conforme α aumenta.

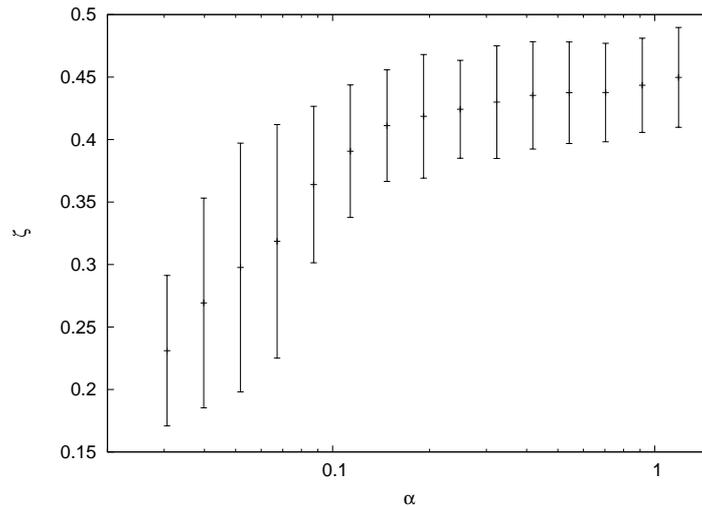


Figura 4.3: Valor médio de ζ da série de retornos em função do parâmetro de controle α . Os parâmetros utilizados são $P = 64$ e $\theta_{max} = 200$. A média é feita sobre 21 realizações, cada uma com 10.000 pontos. O valor de N é alterado de modo a variar o parâmetro α .

A fim de quantificar tais desvios da função de distribuição de probabilidade, em relação a uma distribuição Gaussiana, será utilizada a curtose $\kappa = \langle \mu_4 \rangle / \langle \sigma^4 \rangle - 3$, onde $\langle \mu_4 \rangle$ é o momento de quarta ordem dos retornos e σ é o desvio padrão dos retornos. Na figura 4.4 é mostrado um gráfico da curtose como função do parâmetro $\alpha = P/N$. O resultado mostra uma clara dependência da curtose κ_4 com α . Mais precisamente, a curtose κ_4 decresce continuamente com o aumento do parâmetro α . Para altos valores de α , que correspondem a um número grande de padrões P , a distribuição de probabilidade dos retornos aproxima-se de uma distribuição Gaussiana. Por outro lado, quando α diminui surgem grandes flutuações, e então a curtose torna-se alta. A barra de erro torna-se grande para pequenos valores de α , e torna-se negligenciável para $\alpha > 0,1$.

Para entender melhor a flutuação da volatilidade que surge no modelo é necessário comentar o papel que os especuladores desempenham no sistema. Os especuladores

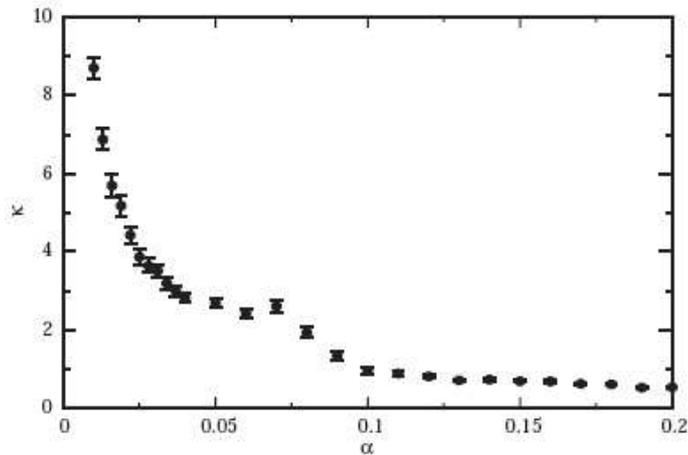


Figura 4.4: A curtose κ como função do parâmetro de controle α . Os parâmetros utilizados são $N = 1.000$, $\theta_{max} = 100$ e $\rho = 0,6$.

negociam de tal maneira que causam reversão à média na série de preços [12]. Quando a variação de preços é pequena, somente poucos agentes podem negociar no mercado como especuladores. Entretanto, todos os especuladores mantêm atualizadas as pontuações das suas estratégias (aprendizagem). Durante esse período de aprendizagem eles detectam arbitragens coletivas (a variação de preços ultrapassa seus limiares de negociação) e então eles coordenam suas decisões, que amplificam a variação de preços, isto é, o excesso de demanda $|A(t)|$ aumenta. Inicialmente, o mecanismo supracitado atrai mais especuladores (efeito de manada). Por enquanto, as pontuações das estratégias reduzirão até o ponto que eles seguirão a maioria, e então o número de agentes inativos aumenta. Como consequência, a variação de preços decresce e os especuladores tendem a comportar-se como produtores novamente.

Capítulo 5

Estudo de Fatos Estilizados no Jogo da Minoria

Como exposto no capítulo 3, as séries temporais financeiras são caracterizadas por propriedades denominadas fatos estilizados. As mais importantes dessas propriedades são os agrupamentos de volatilidade, as distribuições de probabilidade com caudas gordas e a presença de memória de longo alcance na série temporal dos retornos absolutos. Essas observações empíricas corroboram a idéia de que os incrementos de preços não são independentes, portanto eles não podem ser descritos por um modelo do tipo passeio aleatório.

A descoberta dos fatos estilizados a partir da investigação empírica do mercado financeiro faz surgir novas questões na teoria de finanças. Uma delas é saber qual o mecanismo responsável por aquelas propriedades estatísticas. A partir desse conhecimento a expectativa é aperfeiçoar a modelagem de risco e evitar grandes perdas, que são prejudiciais para a economia e organizações sociais que investem no mercado financeiro, como os fundos de pensões. Uma abordagem bem sucedida que trata desse assunto é a modelagem baseada em agentes. Uma vantagem dessa metodologia é dar uma descrição microscópica ao mercado. Além disso, ela permite mostrar que flutuações anômalas de preços podem ser causadas por mecanismos endógenos.

Vários modelos baseados em agentes têm sido propostos para explicar o mecanismo de mercado. O modelo mais explorado pela comunidade dos físicos é o Jogo da Minoria [18]. No capítulo 2 e 4 verificou-se que quando é permitido aos agentes do Jogo da Minoria não negociar (Jogo da Minoria Grande Canônico), no caso de um desempenho ruim, observa-se os principais fatos estilizados na séries temporais de retornos de preços. Para o JMGC tradicional os fatos estilizados surgem próximos à transição de fase, sugerindo que o mercado se auto-organiza próximo a um ponto crítico. O problema que ocorre com o JMGC é que ele não é robusto. Até quando são fixados parâmetros corretos, os fatos estilizados dependem da realização. Alternativamente, como exposto no capítulo 4, há modelos que são habéis para reproduzir os fatos estilizados em uma longa faixa de parâmetros.

Neste capítulo pretende-se simular várias realizações do JMGC, em uma longa faixa do parâmetro de controle α , e assim conseguir a descrição do comportamento de várias medidas da série de retorno, como desvio padrão, curtose e o expoente do DFA (ζ). As mesmas medidas são realizadas para o mercado, obtendo-se uma descrição da distribuição de probabilidade das mesmas. Isso é feito com o intuito de saber em que faixa de medidas o mercado opera. Essa informação permite comparar os dados obtidos com as simulações do JMGC e observar se o modelo é capaz de reproduzir o mercado e, se isso ocorre, qual a faixa do parâmetro de controle α .

Um outro estudo é feito utilizando o modelo de Heston. Esse modelo mostrou-se bastante eficiente para descrever o comportamento dos dados dos três mais expressivos índices do mercado americano de ações: S&P500, Dow-Jones e Nasdaq [42]. A partir das equações do modelo são estabelecidas curvas teóricas de distribuições de probabilidades e são mostrados no mesmo gráfico, a fim de comparação, a distribuição dos dados obtidos com modelos de Jogo da Minoria: o Grande Canônico tradicional e o de Preços Fundamentais Heterogêneos (PFH). Como o modelo de Heston representa bem a distribuição de probabilidade de índices do mercado de ações, o objetivo é verificar se os modelos de Jogo da Minoria possuem a mesma dinâmica para as distribuições de probabilidades do mercado real, via modelo de Heston.

5.1 O modelo de Heston

Modelos com volatilidade estocástica têm recebido grande atenção da literatura financeira, especialmente em relação a preços de opções [38]. No modelo de Heston [39] a volatilidade e o preço de ações seguem um processo difusivo.

Verificações empíricas do modelo de Heston foram feitas tanto para ações [40, 41, 42, 43] como para opções [44, 45] e uma boa concordância com os dados empíricos foi encontrada nesses estudos. A versão utilizada do modelo de Heston nos estudos [41, 42, 43] de ações é uma modificação da solução original e tem-se desenvolvido dentro de uma fórmula diferente, com parâmetros que apresentam uma simples interpretação. É essa versão modificada do modelo original que será empregada neste capítulo.

O caminho formal de apresentar o modelo de Heston é por meio de duas equações diferenciais estocásticas (EDE), que podem apresentar os seus movimentos Brownianos correlacionados:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)}. \quad (5.1)$$

$$dv_t = -\gamma(v_t - \theta) dt + \kappa\sqrt{v_t} dW_t^{(2)}. \quad (5.2)$$

Aqui o subscrito t indica a dependência temporal, μ o parâmetro de tendência, $W_t^{(1)}$ and $W_t^{(2)}$ são processos aleatórios de Wiener, σ_t é a volatilidade dependente do tempo e $v_t = \sigma_t^2$ é a variância. Em geral, o processo de Wiener em (5.2) pode ser correlacionado com o processo de Wiener em (5.1):

$$dW_t^{(2)} = \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t, \quad (5.3)$$

onde, Z_t é um processo de Wiener independente de $W_t^{(1)}$, e $\rho \in [-1, 1]$ é o coeficiente de correlação. Observa-se que (5.1) e (5.2) são bem conhecidas em finanças. Elas representam, respectivamente, o processo log-normal das ações utilizado por Black-Merton-Scholes (B-M-S) [46, 47] e a EDE com reversão à média de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) utilizada em modelos de taxas de juros [48].

Para resolver a (5.1) and (5.2) juntamente com (5.3), inicialmente introduz-se a variável retorno sem tendência $x_t = \ln(S_t/S_0) - \mu t$. Daí em diante, resolve-se a equação de Fokker-Planck (5.4) para a probabilidade de transição $P_t(x, v | v_i)$, a fim de encontrar o retorno x e a volatilidade v no tempo t , dado que o retorno sem tendência é $x = 0$ e, no tempo $t = 0$ a variância é v_i .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P &= \gamma \frac{\partial}{\partial v} [(v - \theta)P] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (vP) \\ &+ \rho\kappa \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} (vP) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (vP) + \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (vP). \end{aligned} \quad (5.4)$$

A solução analítica geral da (5.4) para $P_t(x, v | v_i)$ foi obtida em [41]. A densidade de probabilidade marginal $P_t(x | v_i)$ pode então ser diretamente comparada ao valor empírico do retorno das ações. Contudo, v_i é tratado como um parâmetro extra. Para permitir isso, assume-se que v_i tenha distribuição estacionária $\Pi_*(v)$ na equação diferencial estocástica de CIR (5.2):

$$\Pi_*(v) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{v^{\alpha-1}}{\theta^\alpha} e^{-\alpha v/\theta}, \quad \alpha = \frac{2\gamma\theta}{\kappa^2}, \quad (5.5)$$

Usando (5.5) obtém-se a distribuição de probabilidade do retorno sem tendência $P_t(x)$,

$$P_t(x) = \int_0^\infty dv_i \Pi_*(v_i) P_t(x | v_i) \quad (5.6)$$

onde a solução final é

$$P_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x e^{ip_x x + F_t(p_x)} \quad (5.7)$$

com

$$F_t(p_x) = \frac{\gamma\theta}{\kappa^2} \Gamma t - \frac{2\gamma\theta}{\kappa^2} \ln \left[\cosh \frac{\Omega t}{2} + \frac{\Omega^2 - \Gamma^2 + 2\gamma\Gamma}{2\gamma\Omega} \sinh \frac{\Omega t}{2} \right] \quad (5.8)$$

onde

$$\Gamma = \gamma + i\rho\kappa p_x \quad (5.9)$$

e

$$\Omega = \sqrt{\Gamma^2 + \kappa^2(p_x^2 - ip_x)}. \quad (5.10)$$

Nesse ponto é relevante mencionar que soluções analíticas, para todas as densidades de probabilidades, são obtidas utilizando a transformada de Fourier (5.7). Isto é, a equação de Fokker-Planck (5.4) pode ser resolvida usando uma transformada de Fourier ou de Laplace para chegar a fórmula da função característica (5.7). Para detalhes sobre a solução ver [41].

A operação para remover a dependência de volatilidade inicial da densidade marginal de probabilidade $P_t(x | v_i)$ usando (5.6) foi inicialmente introduzida em [41]. Esta operação subtrai um grau de liberdade e portanto simplifica a densidade marginal de probabilidade final.

Duas simplificações posteriores são, então, feitas para chegar-se a forma funcional utilizada neste capítulo. A primeira hipótese é considerar (5.1) e (5.2) descorrelacionadas. Isso é equivalente a tomar $\rho = 0$ na (5.8). Esta aproximação mostrou-se aceitável para algumas companhias e índices do mercado americano [41, 42, 43] mas pode não ser boa para diferentes mercados [49]. A próxima hipótese de aproximação resulta $P_t(x, \rho = 0)$ em uma função simétrica.

Troca-se em (5.7) $p_x \rightarrow p_x + i/2$ e $\rho = 0$ para encontrar

$$P_t(x) = e^{-x/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_x}{2\pi} e^{ip_x x + F_t(p_x)}, \quad (5.11)$$

onde $\alpha = 2\gamma\theta/\kappa^2$,

$$F_t(p_x) = \frac{\alpha\gamma t}{2} - \alpha \ln \left[\cosh \frac{\Omega t}{2} + \frac{\Omega^2 + \gamma^2}{2\gamma\Omega} \sinh \frac{\Omega t}{2} \right], \quad (5.12)$$

e

$$\Omega = \sqrt{\gamma^2 + \kappa^2(p_x^2 + 1/4)} \approx \gamma\sqrt{1 + p_x^2(\kappa^2/\gamma^2)}. \quad (5.13)$$

Finalmente, abandona-se o termo $e^{-x/2}$ (uma vez que x é pequeno). Nota-se que ambas aproximações (5.13) são necessárias para produzir uma nova função característica que corretamente converge para a unidade quando $p_x = 0$. A forma funcional final para $P_t(x)$ é:

$$P_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_x}{2\pi} e^{ip_x x + F_{\tilde{t}}(p_x)}, \quad (5.14)$$

$$F_{\tilde{t}}(p_x) = \frac{\alpha\tilde{t}}{2} - \alpha \ln \left[\cosh \frac{\Omega\tilde{t}}{2} + \frac{\Omega^2 + 1}{2\Omega} \sinh \frac{\Omega\tilde{t}}{2} \right], \quad (5.15)$$

$$\tilde{t} = \gamma t, \quad \alpha = 2\gamma\theta/\kappa^2, \quad \Omega = \sqrt{1 + (p_x\kappa/\gamma)^2}, \quad \sigma_t^2 \equiv \langle x_t^2 \rangle = \theta t. \quad (5.16)$$

A variância $\sigma_t^2 \equiv \langle x_t^2 \rangle$ (5.16) de $P_t(x)$ (5.15) aumenta linearmente com o tempo, enquanto a média é $\langle x_t \rangle = 0$. O modelo de Heston foi expresso por quatro parâmetros, μ , θ , α e γ . Dois parâmetros, μ e θ , podem ser prontamente encontrados a partir dos dados. A tendência μ é encontrada tomando os retornos e subtraindo destes o seu valor médio de forma a ter-se os retornos sem tendência x . O valor de θ pode ser encontrado calculando a variância dos retornos sem tendência, conforme a equação (5.16). Portanto, restam dois parâmetros, cujos valores são encontrados utilizando o método de mínimos quadrados entre o valor empírico $P_t^{data}(x)$ e o teórico $P_t(x)$.

Os parâmetros α e γ representam, respectivamente, a forma geral da curva e a taxa de relaxação de $P_t(x)$ para uma distribuição Gaussiana [41, 43]. Para intervalos de tempo curto, $P_t(x)$ (5.14) reduz-se a uma exponencial (se $\alpha = 1$), já para intervalos de tempo longo reduz-se a uma Gaussiana [43]:

$$P_t(x) \propto \begin{cases} \exp(-|x|\sqrt{2/\theta t}), & \tilde{t} = \gamma t \ll 1, \\ \exp(-x^2/2\theta t), & \tilde{t} = \gamma t \gg 1. \end{cases} \quad (5.17)$$

5.2 Comparações com o S&P500

Nessa seção o interesse é obter o comportamento do mercado real a partir da análise das distribuições acumuladas de probabilidades dos retornos do índice S&P500 em relação às variáveis: ζ - expoente do DFA (*Detrended Fluctuation Analysis*), curtose e volatilidade.

Esse conhecimento mostrará se é possível, e em que faixa, calibrar o modelo do JMGC para reproduzir o comportamento estatístico do mercado real. Ou seja, o modelo produz dados cuja estatística nas variáveis de estudo possui um conjunto de valores compatíveis com aqueles apresentados pelo S&P500? Se isso acontece, é possível calibrar o modelo.

Os dados de retorno do S&P500 utilizados neste estudo são diários e correspondem ao período compreendido entre 1982 e 1999.

A distribuição acumulada de ζ , para o índice S&P500, conforme figura 5.1(a), mostra que 40% dos dados são anti-persistentes e 60% persistentes. A maior parte dos dados, 60%, apresenta ζ entre 0,45 e 0,65. Os restantes 40% estão distribuídos em $\zeta < 0,45$, 20%, e $\zeta > 0,65$, 20%. A grande maioria dos dados do S&P500, cerca

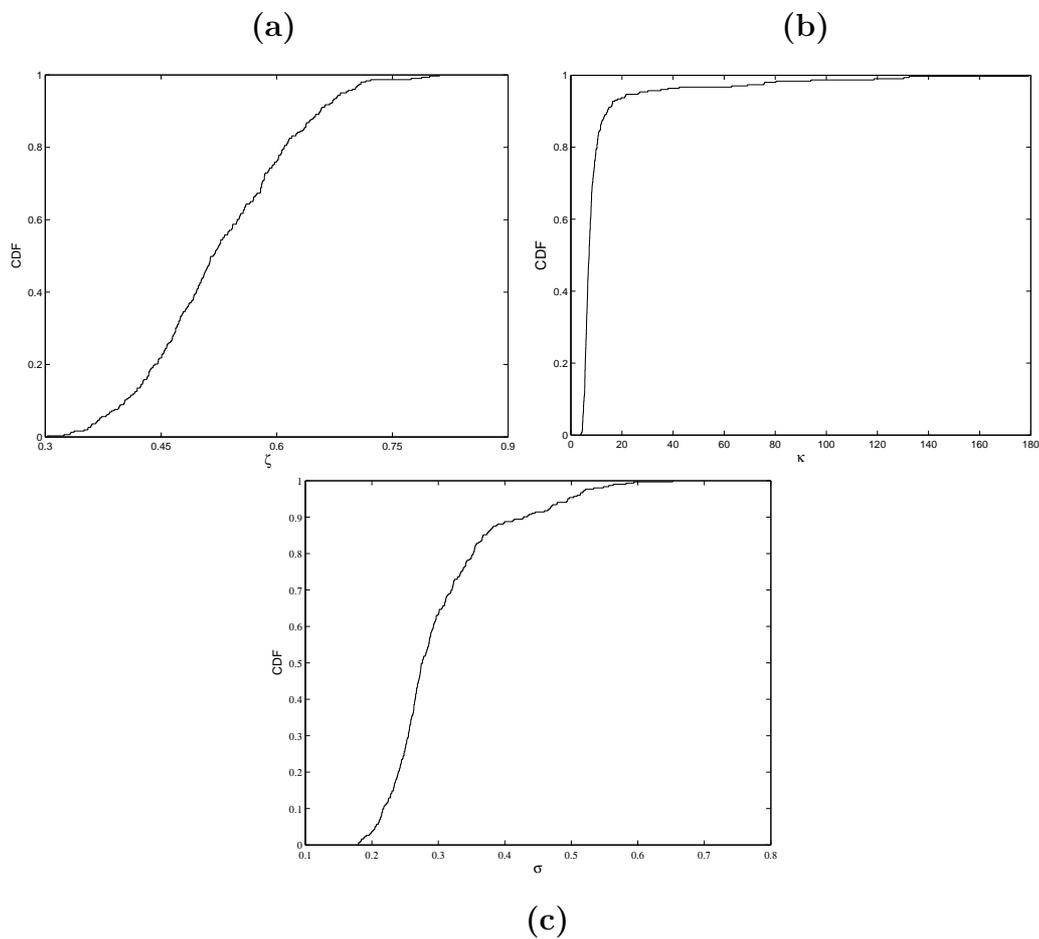


Figura 5.1: Distribuições de probabilidades acumuladas das variáveis: (a) ζ , (b) curtose e (c) volatilidade. Todas as medidas são feitas para o índice S&P500.

de 90%, possuem curtose menor que 20 (figura 5.1 (b)). E em apenas 5% dos dados a curtose é maior que 40, sendo o valor máximo obtido foi de 140. Essas medidas

corroboram a existência de fatos estilizados como caudas gordas e agrupamentos de volatilidade.

Não se verifica volatilidade inferior a 0,18 para o S&P500 (figura 5.1 (c)). Em torno de 90% dos dados desse índice têm σ entre 0,18 e 0,4, sendo que o valor máximo observado para σ foi de 0,65.

Na figura 5.2 tem-se o comportamento do JMGC nas variáveis curtose, variância e ζ , todas em função do parâmetro de controle α .

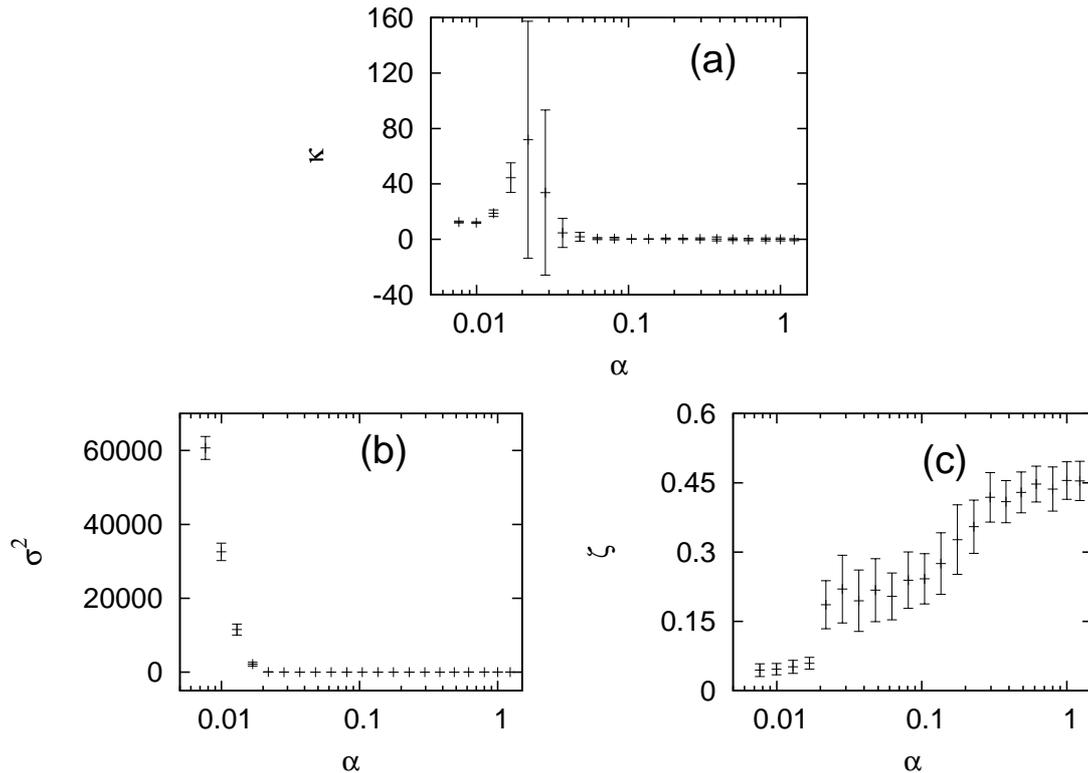


Figura 5.2: As variáveis: (a) curtose, (b) volatilidade e (c) ζ são mostradas em função do parâmetro de controle α . São 21 diferentes valores de α e a barra de erro corresponde, para cada α , a 40 realizações de simulação.

No caso da curtose há três regimes diferentes, o primeiro, para valores baixos de α , a curtose é estável em torno de 15 e também apresenta barras de erro pequenas. Para $0,2 \leq \alpha \leq 0,04$ a curtose tem médias altas e grandes flutuações. No terceiro regime, quando $\alpha \geq 0,04$ o comportamento torna-se praticamente Gaussiano, ou seja, a curtose tem média zero com flutuações bem pequenas. No ponto em que $\alpha = 0,02$ é possível obter todo o espectro de valores da curtose apresentado pelo S&P500. Porém, são os baixos valores de α que apresentam curtoses (com pequenas

barras de erros) consistentes com 90% da distribuição de probabilidade acumulada da curtose do S&P500.

Essa grande flutuação apresentada pela curtose pode ser explicada pela multifractalidade dos conjunto de dados naquela região. O capítulo 6 tratará do aspecto de multifractalidade no JMGC em detalhes, por hora, é interessante saber que o JMGC apresenta os dois regimes, monofractal e multifractal, e que esse último ocorre justamente na faixa do parâmetro de controle α que gera a grande flutuação da curtose.

Como a multifractalidade representa o escalonamento dos momentos estatísticos de um conjunto e a curtose, grosso modo, é uma razão entre momentos, quando a curtose mostra aquela grande flutuação é porque a constante de proporcionalidade entre os momentos (característica de monofractalidade) dá lugar a uma função que governa essa proporcionalidade (característica de multifractalidade).

Outra variável observada é o expoente do DFA (ζ). Como apresentado no capítulo 3 essa variável é utilizada para medir a correlação da volatilidade. Para retomar o conceito rapidamente, pode-se dizer que ζ é o expoente da lei de potência que se verifica na relação entre $F(l)$ e l , onde $F(l)$ é o desvio padrão da flutuação observada na diferença quadrática entre a série temporal integrada dos retornos e os respectivos valores de linhas de tendências locais, e l é o tamanho da caixa ou janela com que se divide a série integrada dos retornos. Assim valores de ζ abaixo de 0,5 demonstram anti-persistência e valores acima de 0,5 persistência, e por fim, o valor 0,5 demonstra que os dados não possuem tendência.

A mesma ruptura de transição de fase observada em $\alpha = 0,02$ para a curtose se repete para o gráfico de ζ . O valor de ζ se estabiliza em torno de 0,45 para valores altos de α , e o sistema apresenta comportamento anti-persistente, o que é coerente com o aspecto de reversão à média inerente ao modelo. Ao compararem-se esses dados com aqueles obtidos para o S&P500, verifica-se que o JMGC apresenta valores em uma faixa, para ζ , que corresponde a apenas 20% da distribuição de probabilidade acumulada de ζ para o S&P500. E ainda mais, boa parte dos dados empíricos tem comportamento persistente, o que não apresenta paralelo nos valores simulados.

A variância apresenta o comportamento esperado para o jogo da minoria. Um comportamento linearmente inverso em relação a α até próximo de α_c , onde o comportamento assemelha-se a uma parábola com valor de mínimo e a parte crescente da parábola transforma-se em curva que tende a saturação. Essa saturação ocorre em torno de zero.

5.3 Comparações com o modelo de Heston

Nessa seção serão comparados os dados gerados pelos modelos JMGC (Jogo da Minoria Grande Canônico) e PFH (Preços Fundamentais Heterogêneos) com as curvas teóricas de densidade de probabilidade acumulada e densidade de probabilidade, obtidas por meio do modelo de Heston.

Na figura 5.3 temos dois gráficos em que as linhas contínuas representam os valores analíticos obtidos com o modelo de Heston. Os gráficos em (a) e (b) são realizações diferentes da simulação do modelo JMGC. Como os gráficos são dados na forma semi-log, as representações lineares correspondem a distribuições de probabilidade exponenciais. Deslocamentos abaixo dessas linhas correspondem a decaimentos que tendem a uma Gaussiana e deslocamentos acima das mesmas linhas correspondem a distribuições com tendência a lei de potência.

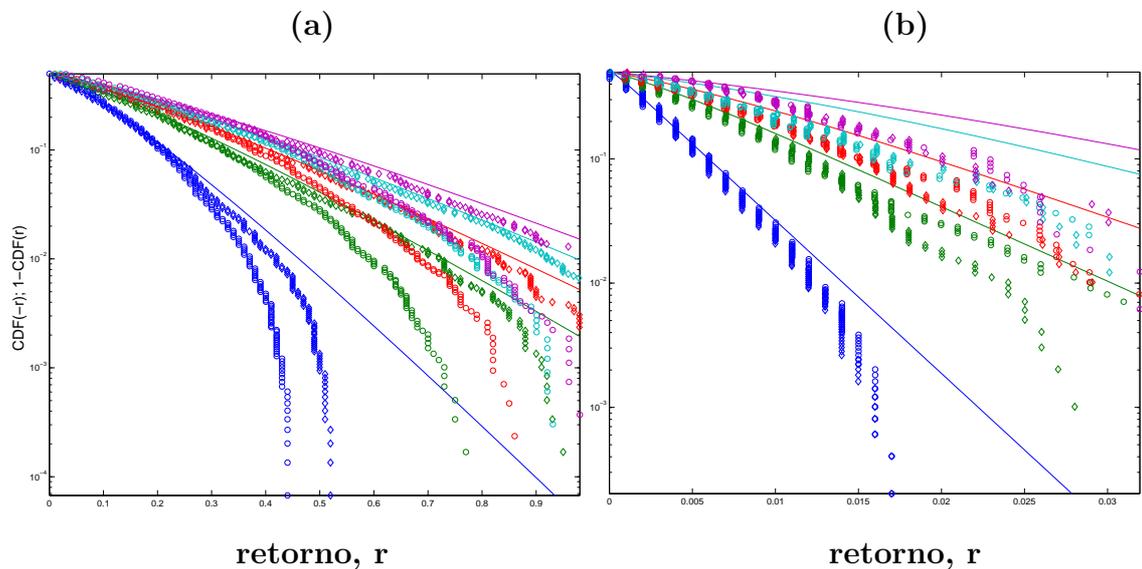


Figura 5.3: Distribuição de probabilidade acumulada dos retornos. As cinco diferentes distribuições correspondem a diferentes valores de $\tau = 1, 5, 7, 9, 11$ (τ cresce no sentido em que aumenta a dispersão das distribuições). As linhas contínuas representam os valores do modelo de Heston enquanto os dados obtidos para o JMGC são mostrados em pontos.

Na figura 5.4 tem-se a distribuição de probabilidade acumulada para o modelo PFH. Os gráficos em (a) e (b) representam realizações distintas. Da mesma maneira que feito para o JMGC a comparação ocorre entre os dados do PFH e o modelo de Heston.

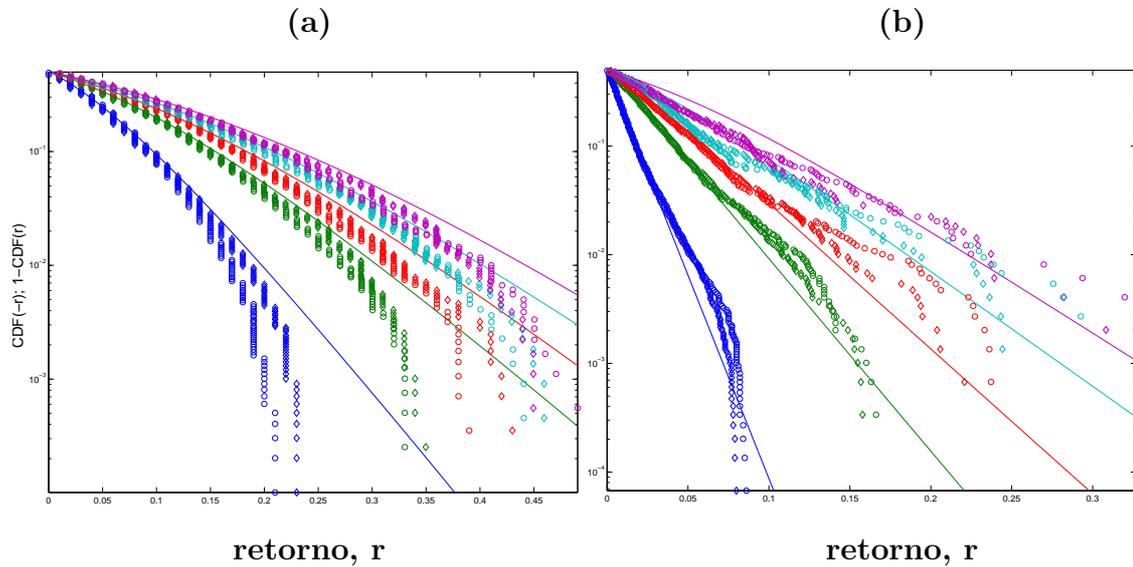


Figura 5.4: Distribuição de probabilidade acumulada dos retornos. As cinco diferentes distribuições correspondem a diferentes valores de $\tau = 1, 5, 7, 9, 11$ (τ cresce no sentido em que aumenta a dispersão das distribuições). As linhas contínuas representam os valores do modelo de Heston enquanto os dados obtidos para o modelo PFH são mostrados em pontos.

Na figura 5.5 os gráficos apresentam as distribuições de probabilidades para vários valores de τ . Verifica-se que quanto mais curto é o período dos dados, mais eles tendem a uma distribuição com caudas pesadas. Em (b) tem-se uma certa assimetria, o lado positivo da distribuição possui cauda mais pesada que o de uma Gaussiana, já o lado negativo segue uma distribuição Gaussiana. Esse comportamento de assimetria não é verificado em (a). Os gráficos em (a) e (b) são apenas realizações diferentes para o modelo JMGC.

Na figura 5.6, tanto em (a) como em (b) há demonstrações nítidas de caudas gordas. No caso de (a) as caudas decaem ainda mais lentamente que aquelas observadas em uma distribuição exponencial. Os gráficos mostrados em (a) e (b) são realizações diferentes para o modelo PFH.

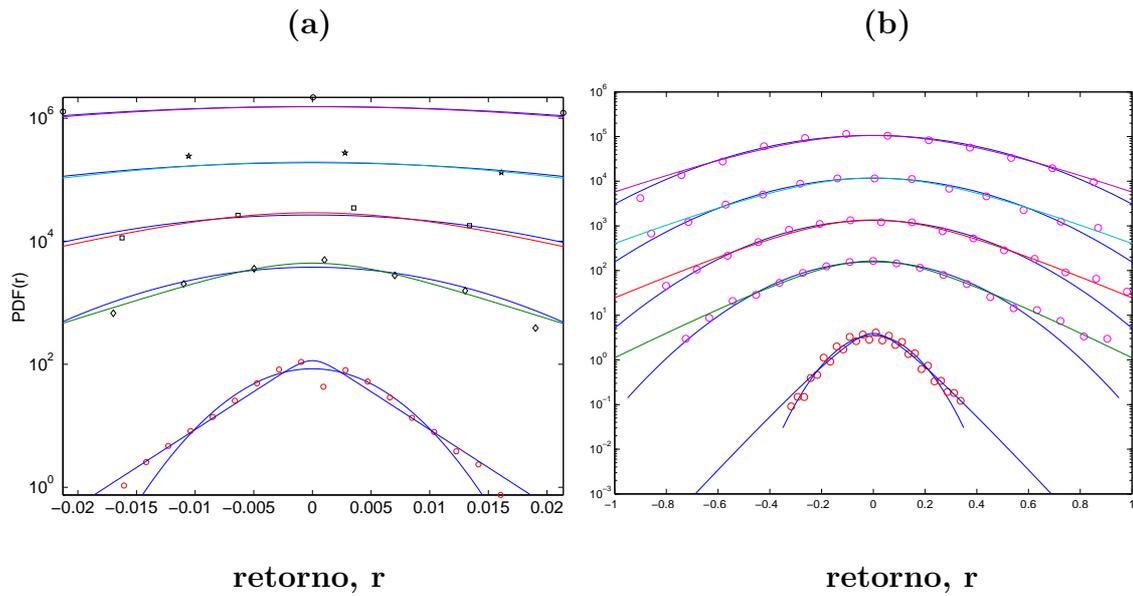


Figura 5.5: Distribuição de probabilidade dos retornos. As cinco diferentes distribuições correspondem a diferentes valores de $\tau = 1, 5, 7, 9, 11$ (τ cresce no sentido em que aumenta a dispersão das distribuições). As linhas contínuas representam os valores do modelo de Heston enquanto os dados obtidos para o modelo JMGC são mostrados em pontos.

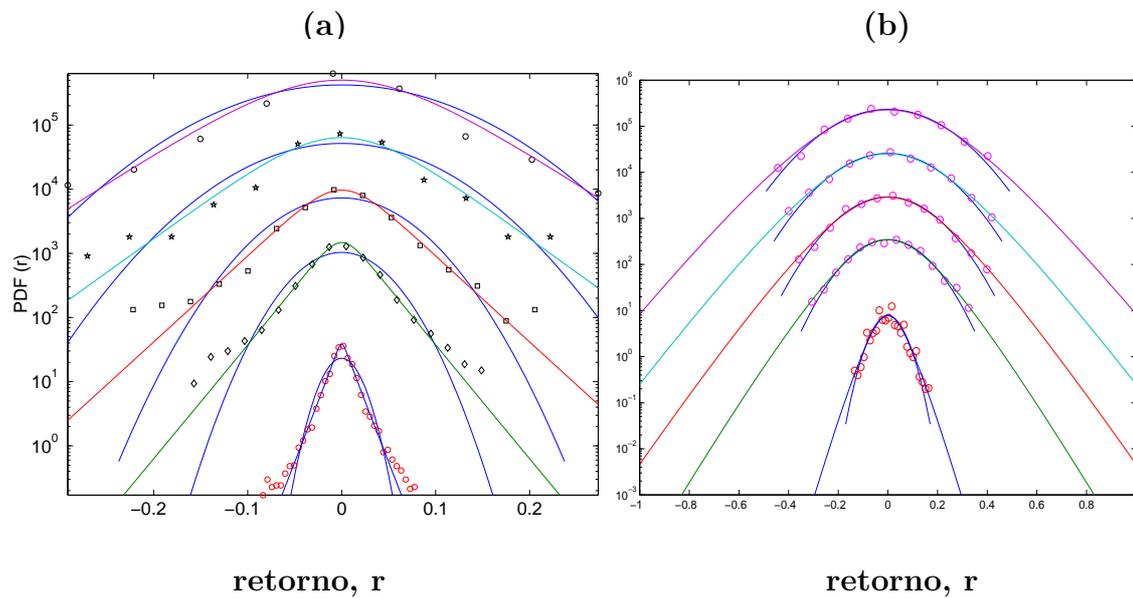


Figura 5.6: Distribuição de probabilidade dos retornos. As cinco diferentes distribuições correspondem a diferentes valores de $\tau = 1, 5, 7, 9, 11$ (τ cresce no sentido em que aumenta a dispersão das distribuições). As linhas contínuas representam os valores do modelo de Heston enquanto os dados obtidos para o modelo PFH são mostrados em pontos.

Outros fatos estilizados, como ausência de autocorrelação linear dos retornos, intermitência e agrupamento de volatilidade são observados tanto nos modelos JMGC como PFH. A *skewness* foi observada de forma não consistente, seja por não ocorrer sempre, seja por apresentar a assimetria ganho/perda de forma invertida, isto é, o lado positivo da distribuição de probabilidade que apresentou cauda pesada, como foi mostrado para o PFH. O efeito de alavancagem não foi observado nos dados simulados dos modelos e a correlação volume/volatilidade não foi verificada devido a falta dos dados de volume do S&P500.

Capítulo 6

Regime de transição multifractal em um modelo de Jogo da Minoria dessincronizado

Existem vários modos de caracterizar as correlações de longo alcance, seja em séries temporais reais ou geradas por modelos. Alguns desses métodos são as funções de autocorrelação, densidade espectral (a partir de transformadas de Fourier ou de *wavelet*) e funções de distribuição de probabilidades. Além desses métodos, a análise fractal e multifractal fornecem mais informações sobre a auto-similaridade dos expoentes de escalamento.

Nesse capítulo será utilizado o expoente de Hurst obtido por meio do método da função de estrutura [50], e o espectro de singularidade obtido por meio do método do módulo máximo da transformada de *wavelet* MMMTW [51] para mostrar, respectivamente, a estrutura fractal e multifractal dos sinais gerados por um Jogo da Minoria composto por grupos que negociam em tempos diferentes.

Várias versões modificadas do modelo original, para torná-lo mais realista, são tratáveis analiticamente, no estado estacionário, via réplica ou métodos de função geratriz [11, 13, 54, 37]. Tais métodos levam a um entendimento profundo das propriedades macroscópicas do sistema. Infelizmente, muitos fenômenos interessantes ocorrem em uma fase não ergódica onde a abordagem analítica falha.

Inúmeros modelos do Jogo da Minoria, onde os agentes atuam sincronicamente na tomada de decisão, foram explorados na literatura, dentre os quais alguns foram discutidos nos capítulos precedentes. Aqui será abordada uma versão onde a sincronicidade é removida, permitindo aos agentes negociar em diferentes escalas de tempo. Para diferentes distribuições de frequência tem sido mostrado em [59, 60, 61] que esses modelos essencialmente preservam muitas das propriedades estatísticas de Jogos da Minoria sincronizados, tais como, transição de fase, agrupamentos de volatilidade, distribuição de probabilidade com caudas gordas, etc. Entretanto, essas características dependem da distribuição da frequência de transações. Neste trabalho, será focado o caso onde as informações processadas pelos agentes são as

mesmas e que a distribuição de frequência de entrada no mercado será determinística.

Surpreendentemente, encontrou-se um regime onde a série temporal dos retornos exibe comportamento multifractal, uma característica que surge nos dados do mercado real. Assim é importante explorar a propriedade de multi escala em dados gerados artificialmente. Muitos estudos empíricos [52, 53] tem apontado na direção de presença do aspecto multifractal nos dados reais como um fato estilizado. Modelos do Jogo da Minoria incorporam esse efeito, por meio da utilização de uma regra de transação mais realista. Antes de apresentar as técnicas para detectar multifractalidade, faz-se na próxima seção uma breve introdução sobre fractais e multifractais e sua interpretação geométrica.

6.1 Dimensão Fractal

6.1.1 Box-counting

A dimensão de um conjunto é uma de suas propriedades básicas. Uma maneira relativamente simples para determinar a dimensão de um conjunto é o método denominado dimensão de *box-counting*. Para alguns tipos de conjuntos esse método fornece uma medida não inteira para a dimensão e por conta disso Mandelbrot denominou esses conjuntos de fractais [55].

A idéia do *box-counting* é a de recobrir um determinado conjunto que está situado em um espaço n-dimensional com uma malha de cubos n-dimensionais, cujas arestas tem tamanho ε . Para contar o número mínimo de cubos $N(\varepsilon)$ necessários para realizar essa tarefa, utilizam-se valores sucessivamente menores de ε [55]. Um exemplo muito interessante é dado em [56], onde esse método é utilizado para recobrir um mapa representando a costa da Noruega (que é bastante irregular). Caso a costa da Noruega fosse uma curva bem definida de comprimento L , a expectativa seria que o número de quadrados necessários para cobri-la, $N(\varepsilon)$, fosse inversamente proporcional a ε , de tal maneira que $L(\varepsilon) = \varepsilon N(\varepsilon)$ se aproximasse da constante L conforme ε diminuísse. Porém não é o que acontece nesse caso.

Tomando-se um gráfico log-log do tamanho da costa da Noruega versus ε não se observa convergência de $L(\varepsilon)$ para valor algum, conforme diminui-se ε . Na verdade, o que se observa é uma reta que pode ser aproximada pela fórmula:

$$L(\varepsilon) = a\varepsilon^{(1-D_0)} \quad (6.1)$$

onde a seria o valor encontrado caso houvesse a convergência da curva da costa da Noruega para um valor fixo L (no caso de uma curva ordinária, o que implicaria em $D_0 = 1$) e D_0 é a dimensão. O expoente de ε em 6.1 é a tangente da reta

apresentada no gráfico e seu valor aproximado é $-0,52$. Portanto conclui-se que a costa da Noruega tem dimensão fractal $D_0 \sim 1,52$ [56].

De maneira formal a dimensão de um conjunto, utilizando o método de *box-counting*, é dada por [55]:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (6.2)$$

6.1.2 Dimensão de Hausdorff

Uma outra definição de dimensão, que apesar de ser um tanto mais complicada comparativamente à dimensão de *box-counting*, mas possui algumas vantagens, é a chamada dimensão de Hausdorff. Em muitos conjuntos, principalmente em dinâmica caótica, essas duas formas de calcular dimensões são equivalentes [55].

Para tratar da dimensão de Hausdorff é necessário, primeiramente, introduzir o conceito de medida de Hausdorff. Seja A um conjunto em um espaço cartesiano n -dimensional. O diâmetro de A , denotado por $|A|$, é a maior distância entre dois pontos x e y em A ,

$$|A| = \sup_{x,y \in A} |x - y|. \quad (6.3)$$

Seja S_i , $i \geq 1$ uma coleção contável de subconjuntos do espaço cartesiano, tal que o diâmetro ε_i de S_i tenha a propriedade:

$$0 < \varepsilon_i \leq \delta, \quad (6.4)$$

de tal maneira que os subconjuntos S_i recubram A , $A \subset \bigcup_i S_i$. Então define-se a medida $M_H^d(\delta)$ [55]:

$$M_H^d(\delta) = \inf_{S_i} \sum_{i=1}^d \varepsilon_i^d. \quad (6.5)$$

A idéia é minimizar a soma $M_H^d(\delta)$ utilizando, para recobrir A , subconjuntos S_i que tenham diâmetro menor ou igual a δ . A d -dimensão da medida de Hausdorff é obtida de (6.5) no limite $\delta \rightarrow 0$, ou seja:

$$M_H^d = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_H^d(\delta). \quad (6.6)$$

Portanto, a partir dessa definição, é possível recobrir o conjunto A com subconjuntos S_i que não têm todos o mesmo tamanho, mas apenas o diâmetro deve ser menor que δ . A d -dimensão da medida de Hausdorff é rigorosamente o menor valor obtido para todos os possíveis recobrimentos de A por S_i [56].

Pode-se mostrar que a medida de Hausdorff tem os seguintes valores em função de d :

$$M_H^d = \begin{cases} 0 & , d > D_0; \\ \infty & , d < D_0. \end{cases}$$

O valor crítico $d = D_0$ que torna M_H^d finita é chamado de dimensão de Hausdorff [55]. É interessante notar que é a posição do salto em M_H^d como uma função de d que é importante para a caracterização da dimensão de Hausdorff [56].

6.1.3 Multifractal

Um atrator em um espaço de fase N -dimensional pode, utilizando-se o conceito de *box-counting*, ser recoberto por cubos N -dimensionais de aresta ε . Uma órbita típica de um atrator caótico visitará vários cubos que recobrem o atrator. Tomando uma condição inicial \mathbf{x}_0 , pode-se definir uma medida que representa a fração de tempo que a órbita gasta em um dado cubo C_i como [58]:

$$\mu(C_i, \mathbf{x}_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta(C_i, \mathbf{x}_0, T)}{T}, \quad (6.7)$$

onde $\eta(C_i, \mathbf{x}_0, T)$ é o tempo acumulado que a órbita iniciada em \mathbf{x}_0 no tempo $t = 0$ gastou em um cubo i no intervalo de tempo $0 < t \leq T$. A chamada medida natural de um cubo C_i é aquela em que a proporção de tempo gasto pela órbita no cubo, independe do valor da condição inicial \mathbf{x}_0 . Portanto, na ausência de qualquer conhecimento detalhado da órbita, pode-se dizer que a medida natural, $\mu(C_i)$, é a probabilidade de um ponto da órbita cair em determinado cubo i [58].

Na definição da dimensão de *box-counting* todos os cubos N -dimensionais de aresta ε são contados igualmente, indistintamente. A contagem considera simplesmente o número de cubos para os quais a medida natural é não nula ($\mu(C_i) \neq 0$) [58]. É desejável que se tenha uma medida capaz de dar pesos maiores para os cubos que tenham um valor de probabilidade maior, ou seja, cubos em que a órbita permanece por um tempo maior devem ser contados com um peso maior.

Uma medida que permite levar em consideração essa característica é a chamada dimensão generalizada, ou espectro de dimensões. Ela é dada na forma [56, 58]:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (6.8)$$

onde $I(q, \varepsilon)$ é

$$I(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [\mu(C_i)]^q, \quad (6.9)$$

sendo q um índice contínuo, $-\infty \leq q \leq \infty$. Considerando $q > 0$ na equação (6.9) percebe-se que os cubos com valor maior de $\mu(C_i)$ têm uma maior influência na determinação de D_q , ou seja, cubos que têm maior probabilidade passam a ter peso maior no somatório, devido ao expoente q . No caso de tomar-se $q = 0$, as equações (6.9) e (6.8) retomam o conceito de *box-counting*.

No caso de todos os cubos terem aproximadamente a mesma medida $\mu(C_i) \approx 1/N(\varepsilon)$, a equação (6.9) resultará em $I \approx [N(\varepsilon)]^{(1-q)}$ e portanto a equação (6.8) reduz-se à fórmula da dimensão de *box-counting* para qualquer q . Assim, $D_q = D_0$ independente do valor de q . Entretanto, $\mu(C_i)$ pode variar muito com i , e como consequência D_q também variará com q . Uma medida para a qual D_q varia com q é chamada medida multifractal[58].

Tomando-se a equação (6.8) com $q \rightarrow 1$ e aplicando a regra de L'Hôpital tem-se:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu(C_i) \ln \mu(C_i)}{\ln \varepsilon} \right], \quad (6.10)$$

que é a chamada dimensão de informação. Outro caso particular de interesse é a dimensão de correlação, que ocorre ao tomar-se $q = 2$ em (6.8), resultando

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu^2(C_i)}{\ln \varepsilon} \right]. \quad (6.11)$$

Uma propriedade importante de D_1 está relacionada com a escala local da medida natural em uma pequena bola. Seja $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ a bola N-dimensional de raio ε centrada no ponto \mathbf{x} . Então define-se a dimensão pontual da medida μ no ponto \mathbf{x} como [58]:

$$h(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B_\varepsilon(\mathbf{x}))}{\ln \varepsilon}. \quad (6.12)$$

A dimensão pontual $h(\mathbf{x})$ é também chamada de expoente de singularidade, pois a partir de (6.12) pode-se escrever $\mu[B_\varepsilon(\mathbf{x})] \sim \varepsilon^{h(\mathbf{x})}$. Caso seja tomado $\mu(B_\varepsilon(\mathbf{x})) \approx 1/N(\varepsilon)$ em (6.10), assim como feito anteriormente para demonstrar a possibilidade de $D_q = D_0$ independente de q , verifica-se que $h(\mathbf{x}) = D_1$. Os pontos para os quais $h(\mathbf{x}) \neq D_1$ são responsáveis pela diferença entre D_0 e D_1 e pela variação de D_q com q para uma medida multifractal [58].

A cada cubo C_i de um certo recobrimento pode ser associado um índice de singularidade $h_i = \ln[\mu(C_i)]/\ln \varepsilon$ ou de outra maneira $\mu(C_i) = \varepsilon^{h_i}$. O número de cubos $dN(h)$ que pertencem a uma faixa h e $h + dh$ podem ser contados como [58]:

$$dN(h) = \rho(h) \varepsilon^{-f(h)} dh. \quad (6.13)$$

O expoente de ε em (6.13) pode ser compreendido da seguinte maneira: calcula-se a dimensão pontual $h(\mathbf{x})$ para cada ponto \mathbf{x} , toma-se o conjunto de pontos que apresentam $h(\mathbf{x}) = h$, e denota-se a dimensão de *box-counting* desse conjunto como $\tilde{f}(h)$. Interpretando h_i como a dimensão pontual de um ponto no centro do cubo, então pode-se tomar $f(h)$ em \mathbf{x} como $\tilde{f}(h)$.

A quantidade $f(h)$ pode ser relacionada a D_q utilizando-se (6.13) para expressar $I(q, \varepsilon)$ [58]:

$$\begin{aligned} I(q, \varepsilon) &= \int dh' \rho(h') \varepsilon^{-f(h')} \varepsilon^{q h'} \\ &= \int dh' \rho(h') e^{\{\ln(1/\varepsilon) [f(h') - q h']\}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para ε pequeno, $1/\varepsilon$ é muito grande. Assim a principal contribuição na integral (6.14) surge na vizinhança do máximo da função $f(h') - q h'$.

No caso de $f(h')$ ser uma função suave de h' , o máximo dessa função ocorre quando $h' = h(q)$, deste modo

$$f'(h(q)) = q \quad \text{e} \quad f''(h(q)) < 0. \quad (6.15)$$

Devido à contribuição principal na equação (6.14), $I(q, \varepsilon)$ pode ser tomada como:

$$I(q, \varepsilon) \sim e^{\{\ln(1/\varepsilon) [f(h(q)) - q h(q)]\}}, \quad (6.16)$$

que substituído em (6.8) leva a

$$D(h) = \frac{1}{q-1} [q h(q) - f(h(q))]. \quad (6.17)$$

A partir das equações (6.15) e (6.17) é possível obter parametricamente o espectro de $D(h)$. De modo contrário $f(h)$ pode ser obtido a partir de (6.17). Multiplica-se (6.17) por $(q-1)$ e diferenciando-se em relação a q tem-se:

$$\begin{aligned} D(h) (q-1) &= [q h(q) - f(h(q))] \\ D'(h) (q-1) + D(h) &= h(q) + q h'(q) - [f'(h(q)) h'(q)], \end{aligned} \quad (6.18)$$

usando (6.15) em (6.18),

$$D'(h) (q-1) + D(h) = h(q), \quad (6.19)$$

e definindo $D(h) (q-1) \equiv \tau(q)$ tem-se

$$\tau'(q) = h(q), \quad (6.20)$$

o que permite reescrever (6.17) como

$$f(h(q)) = q \tau'(q) - \tau(q). \quad (6.21)$$

Para um dado valor de q , as equações (6.20) e (6.21) permitem a correspondência de f e h , especificando parametricamente $f(h)$. Por exemplo, tomando $q = 1$, $h(q) = D_1$ por (6.20) e $f(h(q)) = D_1$ por (6.21).

6.2 Jogo da Minoria com diferentes escalas de tempo

Como foi mostrado em capítulos anteriores, uma versão simples do Jogo da minoria consiste em um conjunto de N agentes adaptativos, também chamados especuladores, munidos de S estratégias que mapeiam uma informação pública μ , com uma decisão de comprar ou vender ativos, $a_{i,s}^\mu(t) = \pm 1$, $i = 1 \dots N_s$, $s = 1 \dots S$. Cada estratégia é gerada no início do jogo e é mantida fixa ao longo de toda a dinâmica. Além disso, as estratégias têm uma função *payoff*, $U_{i,s}(t)$, que descreve o desempenho de todas as estratégias no tempo, de acordo com a seguinte regra:

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^\mu(t)A(t), \quad (6.22)$$

onde $A(t) = \sum_i a_{i,s^*}^\mu(t)$. Essa função é computada para todas as estratégias independentemente de sua utilização em um dado período. A informação pública é gerada de forma aleatória, a cada passo do jogo, com distribuição uniforme no intervalo $[0, P]$. Lembre-se que P representa o número de padrões informacionais. A decisão é tomada de acordo com $a_{i,s^*}^\mu(t)$, onde s^* é o símbolo para a estratégia melhor pontuada ($s^* = \max_s U_{i,s}$). No caso de empate, a decisão é feita por lançamento de moeda.

Um outro modelo aprimorado é o Jogo da Minoria Grande Canônico, que consiste de dois grupos distintos, os produtores e os especuladores. Os produtores tem uma única estratégia, suas decisões são uma função de μ apenas, e portanto eles estão sempre transacionando no mercado. Os especuladores têm uma estratégia extra, $s = 0$, que permite a eles não negociarem quando suas estratégias não são suficientemente lucrativas. Nesse modelo as o desempenho das estratégias seguem a seguinte função de pontuação:

$$U_{i,s}(t+1) = U_{i,s}(t) - a_{i,s}^\mu(t)A(t) + \epsilon \delta_{0,s} \quad (6.23)$$

onde ϵ , é um número real pequeno, que pode ser positivo (taxa de juros) ou negativo (uma medida de aversão ao risco para os agentes). Devido a existência da estratégia nula o número de agentes flutua ao longo do jogo.

Entretanto, uma característica não realista dos modelos de Jogo da Minoria é que os agentes transacionam na mesma escala de tempo e que diferentes eventos ocorrem também na mesma frequência. Isso pode ser melhorado pela introdução de g grupos de tamanho N compostos apenas por especuladores, cada grupo g_j atua no mercado com diferente escala de tempo ts_j , de acordo com Jogo da Minoria simples ou grande canônico. Todos os agentes, independentemente do grupo, tem acesso a mesma informação μ e suas funções *payoff* são atualizadas virtualmente a cada período. No presente modelo foi adotado a versão Grande Canônica, com somente um grupo de produtores que possui N_p membros agindo na menor escala de tempo dentre aquelas utilizadas por todos os grupos. As escalas de tempo são escolhidas como diárias, semanais e mensais semelhantemente ao mercado real. O parâmetro de ordem toma o número total de agentes e é escrito como $\alpha = \frac{P}{gN}$.

Vários autores estudaram modelos similares [59, 60, 61]. As características básica do comportamento do Jogo da Minoria, até mesmo considerando diferentes distribuições de tempo de escala de transações, permanecem igualmente para modelos em que as transações têm frequência sincronizada. O parâmetro de controle α exibe alguma dependência com o parâmetro da distribuição de frequência. As flutuações, qualitativamente, preservam características similares. Quando a diferença na escala de tempo dos grupos $|ts_i - ts_j|$, $i \neq j$, aumenta, os grupos tornam-se independentes e o Jogo da Minoria comporta-se como se fosse monocromático. Curiosamente, o mercado tem uma volatilidade maior para pequenas diferenças de escala de tempo Δ , isto é, quando os grupos processam dados que são muito próximos no tempo.

6.3 Análise estatística

O Jogo da Minoria e suas variações foram extensivamente explorados em diversos estudos. A capacidade deles gerarem propriedades estatísticas universais qualitativamente similares àquelas do mercado financeiro é a principal aplicação desses modelos. Do ponto de vista estatístico, o fato conhecido é que a distribuição de probabilidade dos retornos nas séries temporais do Jogo da Minoria é Gaussiano, exceto em torno do ponto crítico. Na região subcrítica ($\alpha < \alpha_c$), é possível encontrar certas realizações com caudas gordas mas não necessariamente seguindo um decaimento com lei de potência.

Quando é permitida a interação entre grupos compostos por agentes que transacionam em diferentes escalas de tempos, as propriedades estatísticas são qualitativamente preservadas. Na figura 6.1 o gráfico da curtose mostra 40 realizações correspondentes a condições iniciais diferentes. Na figura da esquerda apresenta-se a curva da previsibilidade e da volatilidade contra α . Essencialmente, pode-se ver que o comportamento dessas curvas segue aquele observado no caso monocromático.

A figura da direita reporta a curtose em função de α . Verifica-se nas simulações que para $\alpha > \alpha_c$ a série temporal gerada por esse modelo tem uma distribuição normal. Entretanto, na região de α pequeno, muitas realizações têm curtose κ alta, que aumenta quando α decresce. Essa quantidade estatística tem uma barra de erro larga indicando uma possível mudança abrupta no comportamento do sistema. Essa flutuação é essencialmente devida a diferença de escala nos momentos das funções de densidade de probabilidade, uma vez que o quarto momento escala com um expoente maior que aquele verificado para o segundo momento, um indício da multifractalidade.

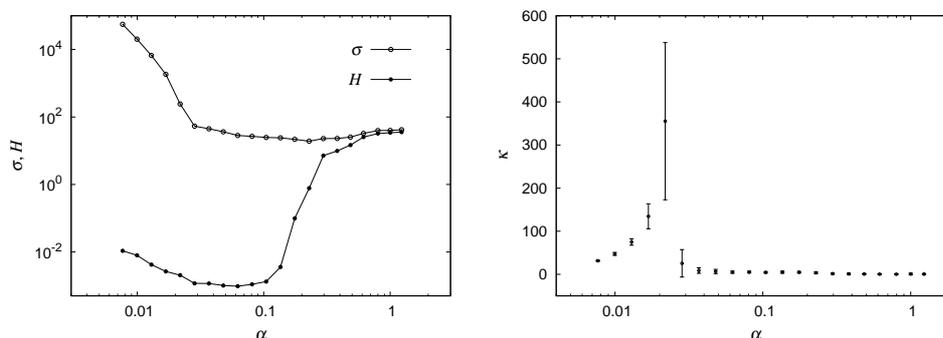


Figura 6.1: Esquerda: Volatilidade σ e Previsibilidade H contra α . Direita: Curtose contra α .

6.4 Análise da função de estrutura

Uma primeira análise em busca de evidências da existência de multifractalidade nos dados gerados pelo JM será obtida pelo estudo da chamada função de Estrutura (FE), largamente utilizada em estudos de turbulência, sendo definida como:

$$S_q(\Delta) \equiv \langle |Y(t_i + \Delta) - Y(t_i)|^q \rangle \propto \Delta^{qh(q)}. \quad (6.24)$$

onde i denota o i -ésimo ponto e $\langle \rangle$ denota a média no *ensemble*. Aqui, $Y(t_i)$ é o log preço e seu incremento é o retorno $R_i = Y(t_i + \Delta) - Y(t_i)$ no intervalo Δ .

A FE pode ser observada como uma generalização da função de autocorrelação ($q = 2$). Para um sinal que é invariante sob escala e auto-similar, o sinal é dito fractal quando $h(q)$ é o mesmo para todos os q ; caso contrário, é dito multifractal [57]. Uma outra característica do método da Função de Estrutura é sua capacidade de identificar não estacionaridade nas séries temporais. Isso é feito de forma simples, pelo cálculo do expoente $h(q)$. As séries estacionárias são caracterizadas pela invariância translacional de todas as suas estatísticas. Quando a série for estacionária ao longo de todo o intervalo não existe comportamento de escala, ou seja, $h(q) = 0$.

A análise das séries dos retornos do JM padrão feita em [62] usando o método da raiz unitária mostrou que elas são estacionárias. Uma análise similar pode ser feita para o presente modelo. Na parte superior da Fig. 6.2 e da Fig. 6.3 exibe-se a FE para os retornos, $S_q(\Delta)$, para $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.84$, respectivamente. Pode-se ver que os incrementos de $Y(t_i)$ são estacionários para ambos valores de α .

Embora a série temporal para os retornos sejam estacionárias em um intervalo longo, observa-se que o regime de escala para o log preço $Y(t_i)$ pode ser diferente. Para examinar essa questão, foi feito o gráfico da FE para a soma acumulativa do logPreço (ver Fig. 6.3 e Fig. 6.2, gráficos do meio) onde a região de escala está representada pela linha contínua. Portanto, a região de escala não segue necessariamente aquela observada para os retornos. Para valores pequenos de Δ o sistema não apresenta similaridade estatística o que leva a uma ausência de escala. Por outro lado, por razões de limite informacional, ocorre uma saturação do escalamento para altos valores de Δ (em sistemas físicos isso se dá porque a energia é limitada, forçando a saturação do escalamento). Contudo, há uma região intermediária onde os momentos de ordem q seguem uma lei de escala, logo a série do log preço não é estacionária.

É conveniente analisar com mais detalhe como o escalamento depende dos momentos. O comportamento do expoente da FE é dado pela Eq. (6.24), ou seja, pela inclinação da curva definido pelo gráfico $h(q)$, contra q . Para a Fig. 6.2 (quadro inferior), correspondente a $\alpha = 0.05$, a dependência é não linear com q , indicando

que o sinal é multifractal. Mas na Fig. 6.3 (quadro inferior), para $\alpha = 0.84$, a dependência é linear com q , indicando que o sinal é fractal. Notamos que em ambas figuras, a inclinação da curva contínua fornece o expoente de Hurst.* Embora q possa ser qualquer número real, momentos negativos são difíceis de avaliar devido a problemas de divergência e são tratados usando o método *wavelet* que será descrito na seção 6.5.

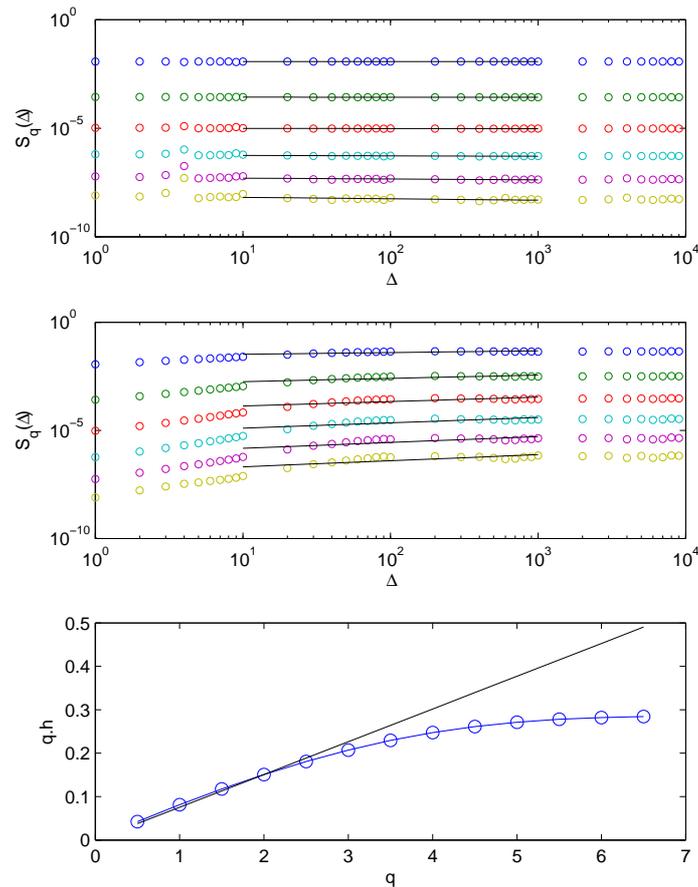


Figura 6.2: Função de estrutura $S_q(\Delta)$, para os retornos, $R(t)$ (gráfico superior), e sua soma acumulada de $Y(t)$ (gráfico do meio), ambos para $\alpha = 0.05$ e $q = 1.0, 2.0, \dots, 6.0$ de cima para baixo. Gráfico inferior: escalamento da função de estrutura dada pela Eq. (6.24). A inclinação da curva no ponto $q = 2$ corresponde ao expoente de Hurst (linha contínua escura). A dependência não linear observada no ajuste da curva com os dados indica multifractalidade.

*O Hurst mede o escalamento da variância, que corresponde ao valor de $q = 2$ no cálculo da Função de Estrutura.

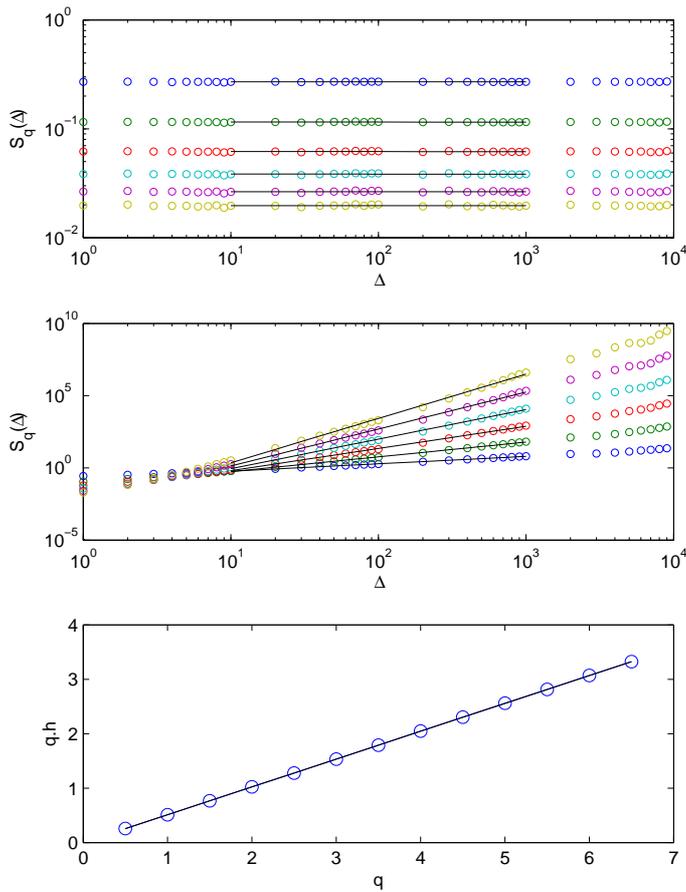


Figura 6.3: Função de estrutura $S_q(\Delta)$, para os retornos, $R(t)$ (gráfico superior), e sua soma acumulada de $Y(t)$ (gráfico do meio), ambos para $\alpha = 0.84$ e $q = 1.0, 2.0, \dots, 6.0$ de cima para baixo. Gráfico inferior: escalamento da função de estrutura dada pela Eq. (6.24). A inclinação da curva no ponto $q = 2$ corresponde ao expoente de Hurst (linha contínua escura). A dependência linear observada no ajuste da curva com os dados indica fractalidade.

6.5 Análise Multifractal

Um dado sinal pode ser considerado como auto-similar com expoente de escalamento h se suas propriedades estatísticas são invariantes sob transformações simultâneas do tempo t e da amplitude $Y(t)$,

$$t \rightarrow bt = t'; \quad Y \rightarrow b^h Y = Y'; \quad (6.25)$$

onde b é um constante positiva arbitrária e h é o expoente de escalamento dado pela Eq.(6.24).

Um método usual para calcular h é baseado na abordagem de função de estrutura, como mostrado na seção 6.4. No caso fractal, apenas um expoente é suficiente para caracterizar a propriedade de escalamento do sinal, que é o expoente de Hurst. A contrapartida local do expoente de Hurst é o chamado expoente de Hölder. Enquanto o expoente de Hurst dá o escalamento dos momentos de uma função auto-similar que tem o mesmo h em todo lugar, o expoente de Hölder é sua avaliação local, e nesse caso o sinal não têm uma distribuição uniforme de singularidades para qualquer t . O sinal é agora multifractal e necessita não somente de um expoente de Hurst, mas um conjunto de expoentes de Hölder para ser caracterizado, o chamado espectro multifractal.

Para obter um espectro multifractal completo usa-se a transformada de *wavelet*. A família de *wavelet* utilizada neste trabalho é a n -ésima derivada da Gaussiana (DOG n), cuja transformada tem n momentos decrescentes e que remove as tendências polinomiais de ordem $n - 1$ do sinal. Devido à propriedade de escalamento do sinal a ser preservada pela transformada de *wavelet*, torna-se possível obter o espectro multifractal por meio desse método.

A transformada de *wavelet* do sinal $Y(t)$ é definida como:

$$T_\psi(\Delta, b_0) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=0}^{N-1} Y_j \psi^* \left(\frac{j - b_0}{\Delta} \right), \quad (6.26)$$

onde $\Delta > 0$ é a escala a ser analisada, ψ é a *wavelet* mãe, N é o número de pontos na direção j e $Y_j = Y(t_j)$. A *wavelet* mãe a ser usada aqui são a primeira e segunda derivadas da Gaussiana. As propriedades estatísticas de escalamento das medidas singulares encontradas nas séries de tempo podem ser caracterizadas pelo espectro de singularidades $D(h)$, onde h é o expoente de Hölder. Uma das melhores maneiras de acessar o espectro de singularidades diretamente das séries temporais é a partir do método MMTW [51]. O espectro de singularidade e os expoentes de Hölder

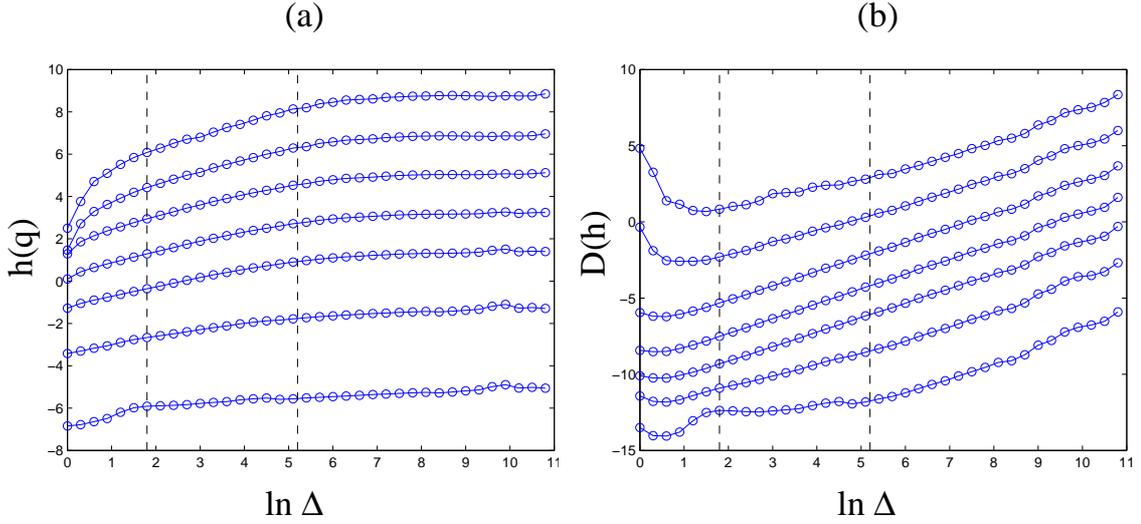


Figura 6.4: (a) Expoente de Hölder $h(q)$ e (b) Espectro de singularidade $D(h)$ ambos para $\alpha = 0.05$.

são obtidos a partir das seguintes equações:

$$h(q) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \Delta} \sum_{\{b_i(\Delta)\}} \hat{T}_\psi[q; \Delta, b_i(\Delta)] \ln |T_\psi[\Delta, b_i(\Delta)]| \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \Delta} Z(q; \Delta) \quad (6.27)$$

$$D(h) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \Delta} \sum_{\{b_i(\Delta)\}} \hat{T}_\psi[q; \Delta, b_i(\Delta)] \ln |\hat{T}_\psi[q; \Delta, b_i(\Delta)]| \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \Delta} Z^*(q; \Delta) \quad (6.28)$$

onde

$$\hat{T}_\psi[q; \Delta, b_i(\Delta)] = \frac{|T_\psi[\Delta, b_i(\Delta)]|^q}{\sum_{\{b_i(\Delta)\}} |T_\psi[\Delta, b_i(\Delta)]|^q} \quad (6.29)$$

e a soma é sobre todo o conjunto da transformada de *wavelet* de módulo máximo. Na prática o espectro de singularidades, $D(h)$, e os expoentes de Hölder, h , são obtidos a partir do gráfico log-log das Eqs. (6.27) e (6.28), indicadas pelas linhas tracejadas nas figuras 6.4a,b. Cada linha na figura corresponde a diferentes valores de q . Para grandes valores de Δ não há escalamento, o que se deve esperar, pois o sistema atinge seu limite físico dado pela escassez ou limitação das riquezas e recursos. O espectro multifractal correspondente à região de escalamento, está desenhado na figura Fig. 6.5.

Uma forma de interpretar o espectro multifractal é por meio do expoente de Hölder. Por exemplo, para sinais conhecidos como o movimento Browniano fracionário podemos ter as seguintes situações: quando $h = 0.5$ obtemos o movimento Browniano usual, onde a probabilidade de ocorrerem flutuações positivas e negativas são as mesmas; para $h < 0.5$ é mais provável ter a próxima flutuação com sinal

oposto ao da última flutuação, chamado de movimento antipersistente; por outro lado, quando com $h > 0.5$ é mais provável ter a próxima flutuação com o mesmo sinal que a última, e o processo é persistente. Sinais antipersistentes tem mais flutuações locais e parecem ser mais irregulares em escalas pequenas. Sua variância diverge mais lentamente com o tempo do que a variância do sinal persistente. Esse último flutua em escala grande e parece ser suave. Essa discussão é feita em [63] e uma interpretação mais detalhada é dada em [64].

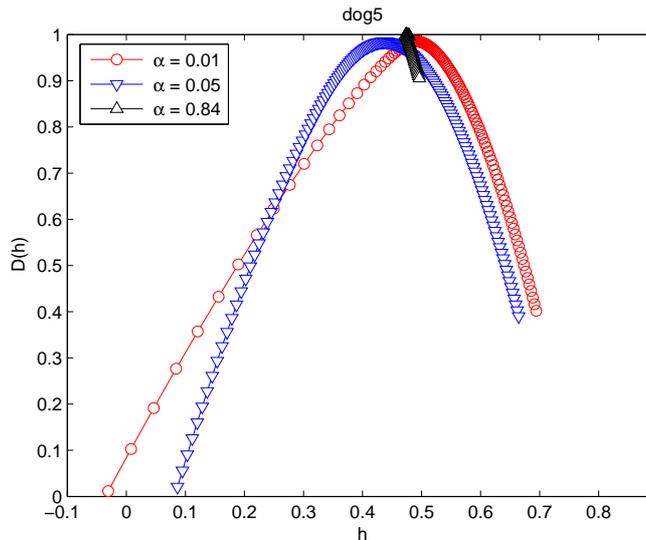


Figura 6.5: Espectro multifractal para três valores de $\alpha = 0.01, 0.05$ e 0.84 .

Serão analisadas agora as propriedades fractais e multifractais da dinâmica do modelo em função do parâmetro de controle α . Na fig. 6.5 observamos que na região ergódica $\alpha = 0.84$ o espectro é fechado quase colapsando em um ponto. Esta região é claramente fractal o que já era esperado pois as series temporais de retorno são Gaussianas. Logo após a transição, na região subcrítica, o espectro é largo evidenciando a multifractalidade.

O espectro multifractal pode ser representado pelos seus pontos extremos, isto é, pelos seus valores mínimos à esquerda, h_l , à direita, h_r , e pelo seu valor máximo (topo), h_0 . Vale observar aqui que, quanto mais largo for o espectro, i.e. quanto maior a diferença entre h_r e h_l , mais evidente é a presença de multifractalidade. Nós estudamos o comportamento dos pontos extremos como função de α para caracterizar a transição do regime fractal para o multifractal, como mostrado na Fig. 6.6. Nesta figura a largura do espectro aumenta quando α decresce realizando uma transição suave do regime fractal para o multifractal. Essa transição apresenta uma grande flutuação no extremo representado por h_l na região subcrítica ($\alpha < \alpha_c$)

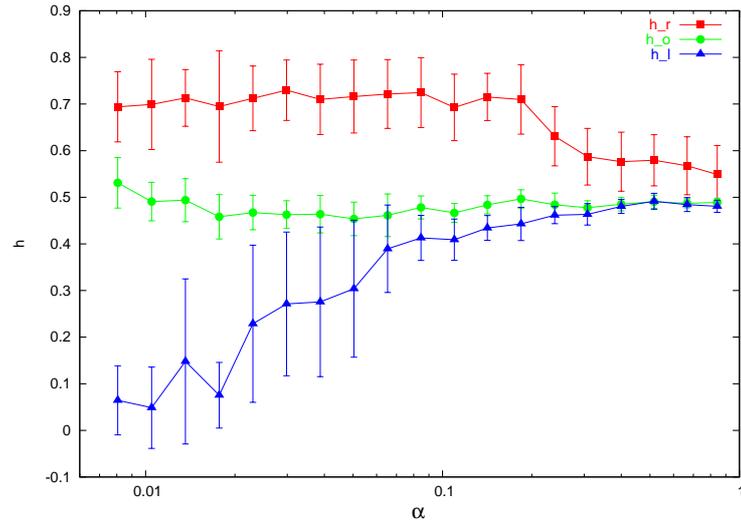


Figura 6.6: Pontos extremos do espectro multifractal , definido no texto, para α variando de 0.0080 a 0.84. Barra de erro obtido para 20 realizações

ou na fase não ergódica. Os pontos de h_l descrevem o escalamento das flutuações dos grandes valores da série temporal, a barra de erro reflete a dependência de h_l com a realização. Por outro lado, h_r captura o escalamento dos pequenos valores da série de tempo e apresenta uma alteração de patamar na vizinhança da transição de fase do sistema (α_c). Os pontos dados por h_0 oscilam ao redor de 0,5, valor este observado para o movimento browniano.

Na fase não ergódica, o sistema é dito ser informacionalmente eficiente, não preditível, onde não é possível arbitrar por meio da exploração dos padrões presentes na série temporal. Esta propriedade é coerente com a natureza multifractal da série gerada pelo modelo, sendo mais rica que aquela dada por um processo fractal que se espera introduzir maior previsibilidade.

Capítulo 7

Conclusão

O mercado financeiro possui uma dinâmica característica de sistemas complexos. Tais sistemas são constituídos por agentes que vão ao mercado fazer negócios ou, em linguagem mais familiar aos físicos, eles interagem. O mecanismo que governa essa interação ainda é desconhecido, contudo, o resultado foi objeto de estudo desta tese. Notavelmente, os dados gerados pela dinâmica do mercado financeiro apresentam intrigantes regularidades estatísticas. Assim como observado em vários fenômenos da natureza, eles possuem leis de escala, auto-organização, correlações de longo alcance, para citar algumas propriedades. Tudo isso reforça a idéia da existência de padrões regulares ou irregulares no tempo, que são produzidos ao longo da interação e que, eventualmente, podem ser reproduzidos por modelos microscópicos. A vantagem de tais modelos é a interpretação do sistema. Por exemplo, o Jogo da Minoria leva a uma visão de que o mercado é um sistema que se auto-organiza ao redor do ponto crítico, onde muitos dos fatos estilizados emergem. Alternativamente, foi mostrado no Capítulo 4 que existe um modelo que também gera fatos estilizados, mas não apresenta auto-organização. A construção e a investigação de modelos microscópicos constituiu o principal objeto de estudo desta tese e os resultados serão resumidos nos parágrafos que seguem.

O Jogo da Minoria Grande Canônico (JMGC) é capaz de gerar séries de retornos com fatos estilizados. Porém, esses comportamentos surgem apenas quando o modelo está ajustado para valores do parâmetro α próximos ao valor crítico α_c , o que significa que os fatos estilizados surgem como um fenômeno crítico em uma região que separa um regime ergódico de um não-ergódico. Além disso, a ocorrência dos fatos estilizados nas séries geradas depende da realização, mesmo considerando um conjunto igual de parâmetros.

No capítulo 4 foi introduzido o modelo de Preços Fundamentais Heterogêneos (PFH), um tipo de Jogo da Minoria em que os especuladores assumem preços fundamentais diferentes para tomarem decisões. Esse modelo mostrou-se tão simples

quanto o JMGC, mas apresentou a vantagem de ser mais robusto na produção de fatos estilizados. Alterando o conjunto de parâmetros ρ, α, θ , encontrou-se uma vasta faixa de valores, que reproduzem de forma bem realista, uma série temporal financeira. As propriedades estatísticas dos dados gerados estão em acordo com aquelas presentes no mercado financeiro real. Em particular, o modelo mostrou-se eficiente em gerar séries temporais que apresentam agrupamentos de volatilidade, ausência de autocorrelação dos retornos, caudas gordas e lento decaimento da autocorrelação dos retornos absolutos. Mostrou-se também o comportamento da curtose e do expoente da DFA, ambos em função do parâmetro de controle α . Os valores de curtose que são coerentes com a presença de caudas gordas ocorrem para pequenos valores de α e os valores obtidos para o expoente da DFA indicam que o modelo tem um comportamento anti-persistente.

Um estudo que busca detalhar em termos quantitativos, algumas variáveis cujo comportamento indica a presença de fatos estilizados nas séries temporais, foi feito no capítulo 5. A partir da distribuição de probabilidade acumulada das variáveis curtose, expoente da DFA e volatilidade do índice S&P500, determinou-se o intervalo de variação dessas quantidades. A maioria dos ativos (90%) apresentou curtose entre 5 e 20, portanto o modelo para explicar esse comportamento tem que ser capaz de produzir uma distribuição leptocúrtica. Este efeito é importante no gerenciamento de risco dos ativos. A volatilidade apresentou variação entre 0,2 e 0,4. Já o expoente da DFA revelou que o conjunto de ativos analisados possui um comportamento persistente em sua maioria. Os modelos de Jogo da Minoria estudados mostraram ser capazes de reproduzir séries com distribuição leptocúrtica e permitem a calibração da volatilidade. A maioria dos fatos estilizados estão presentes nas séries geradas por esses modelos, contudo essas séries são sempre anti-persistentes. Para superar esta limitação, deve-se investigar mais detalhadamente os modelos mistos que introduzem agentes que atuam de maneira diferente daqueles do Jogo da Minoria.

Em um segundo momento, analisou-se as distribuições de probabilidade dos retornos. Verificou-se a Gaussianidade agregativa em ambos os modelos. Para estudar a forma de decaimento dessas distribuições foi feito um ajuste utilizando o modelo de Heston que apresenta decaimento exponencial. A comparação dos dados gerados pelos modelos, com o ajuste do modelo de Heston, mostrou a coexistência de decaimentos que seguem uma lei de potência com decaimentos exponenciais para períodos curtos. Apesar de não existir uma escala natural de tempo para o Jogo da Minoria, observou-se, por meio do comportamento das distribuições de probabilidade, que os dados das séries geradas são similares a séries financeiras de retornos diários. Seria interessante variar drasticamente os parâmetros dos modelos ou introduzir um novo parâmetro, a fim de estabelecer uma maneira de controlar a escala temporal

do sistema.

Foi mostrado no Capítulo 6 que a dinâmica do Jogo da Minoria dessincronizado é muito rica, apresentando flutuações anômalas que surgem devido a correlações fortes, similares àquelas observadas em sistemas fora do equilíbrio. A multifractalidade é um dos fatos estilizados mais difíceis de se obter em séries temporais geradas a partir de modelos de agentes para o mercado. Várias versões do jogo da minoria síncrono não apresentaram essa propriedade. A quebra da sincronização das transações foi um ingrediente capaz de gerar multifractalidade em uma ampla região do espaço de fase. Este modelo, modificado qualitativamente, preserva as propriedades estatísticas e a tratabilidade do modelo padrão, como transição de fase entre regime ergódico e não ergódico, anti-persistência na série temporal de retorno, volatilidade aglomerada, entre outras. A série temporal do preço gerada pelo modelo aqui apresentado não é estacionária, pelo menos na faixa onde se observa um escalonamento acentuado de acordo com a figura 6.4. Contudo, analisando a função de estrutura, verifica-se que a série dos retornos é estacionária. Finalmente, observou-se uma transição suave de um regime fractal para um regime multifractal, à medida que o parâmetro de controle α decresce. Embora haja uma dependência com a realização, é claro o alargamento do espectro multifractal conforme figura 6.6. A multifractalidade reflete a presença de padrões irregulares na série de tempo, o que implica no aumento da dificuldade de previsibilidade. Neste sentido, existe uma coerência entre a previsibilidade das diferentes fases do sistema e o espectro multifractal. Portanto, a região fractal é justamente aquela em que a função de previsibilidade é diferente de zero. Embora haja uma controvérsia sobre a existência de multifractalidade em séries financeiras, foi mostrado aqui que a multifractalidade pode não ser um artefato ou um efeito aparente, mas o resultado da dessincronização das transações financeiras.

Este trabalho abre muitas perspectivas de investigações futuras. Pode-se endereçar entre elas:

- Criar modelos específicos para negociação de ativos em mercados futuros;
- Buscar formas de calibração para cada modelo;
- Introduzir nos modelos uma forma de medir o volume de negócios e, assim, poder verificar o efeito alavancagem nos dados das séries simuladas;
- Introduzir distribuições de frequência mais gerais que aquela utilizada para gerar a dessincronização de atuação dos agentes e estudar os seus aspectos multifractais;

- Fazer testes de inferência estatística que permitam decidir sobre a multifractalidade das séries financeiras.

Finalmente, a tarefa mais desafiadora nesta linha de pesquisa é encontrar a função *payoff* que capture o mecanismo do mercado real. Com isso seria possível fazer estratégias de investimentos, controle de risco e previsões, de forma a antever e buscar prevenção para as crises financeiras.

Apêndice A

Cálculo da distribuição de probabilidade de $s_i(t)$ e da dinâmica de $Y_i(t)$

A.1 Cálculo da distribuição $Prob[s_i(t) = \pm 1] = \frac{1 \pm \tanh Y_i(t)}{2}$

$$Prob[s_i(t) = \pm 1] = \frac{1 \pm \tanh Y_i(t)}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Tomando as identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}; & \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \end{aligned}$$

e substituindo a $\tanh(x)$ na equação (A.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - e^{-x}}{2(e^x + e^{-x})} + \frac{1}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2(e^x + e^{-x})} = \\ &= \frac{2e^x}{2(e^x - e^{-x})} = \frac{2e^x}{2e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1}{1 + e^{-2x}} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ou seja, pode-se escrever,

$$\frac{1}{2} \tanh[Y_i(t)] + \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + e^{-2Y_i(t)}} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo $Y_i(t) = \Gamma \frac{U_{+,i}(t) - U_{-,i}(t)}{2}$ em (A.3) retoma-se a forma de distribuição de probabilidade para um jogo em que cada agente dispõe de duas estratégias:

$$Prob[s_i(t) = s] = \frac{1}{1 + e^{-\Gamma \Delta U}} \quad (\text{A.4})$$

O valor negativo em $\frac{1 \pm \tanh Y_i(t)}{2}$ se deve ao fato da \tanh ser uma função ímpar, ou seja, $\tanh[-Y_i(t)] = -\tanh[Y_i(t)]$. Como o que se quer nesse caso é fazer o cálculo de $\Gamma^{\frac{U_{-,i}(t) - U_{+,i}(t)}{2}}$, significa tomar o valor de $-Y_i(t)$.

A.2 Cálculo da dinâmica de $Y_i(t)$

Inicia-se somando as atualizações de cada estratégia ($s = +1$ e $s = -1$)

$$\begin{aligned} U_{i,+}(t+1) &= U_{i,+}(t) - a_{i,+}^{\mu(t)} \frac{A(t)}{N} \\ (-) \quad U_{i,-}(t+1) &= U_{i,-}(t) - a_{i,-}^{\mu(t)} \frac{A(t)}{N} \end{aligned}$$

$$U_{i,+}(t+1) - U_{i,-}(t+1) = U_{i,+}(t) - U_{i,-}(t) + \frac{A(t)}{N} (a_{i,-}^{\mu(t)} - a_{i,+}^{\mu(t)}). \quad (\text{A.5})$$

Reescrevendo a equação (A.5) em função de $Y_i(t) = \Gamma^{\frac{U_{i,+}(t) - U_{i,-}(t)}{2}}$ e da variável $\xi = \frac{a_{i,+}^{\mu(t)} - a_{i,-}^{\mu(t)}}{2}$, tem-se:

$$2 \frac{Y_i(t+1)}{\Gamma} = 2 \frac{Y_i(t)}{\Gamma} - 2 \xi_i^{\mu(t)} \frac{A(t)}{N}, \quad (\text{A.6})$$

e fazendo apenas as simplificações chega-se a expressão:

$$Y_i(t+1) = Y_i(t) - \Gamma \xi_i^{\mu(t)} \frac{A(t)}{N} \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Desenvolvimento da equação da variância σ^2

A variância é a média temporal dos desvios quadráticos do excedente de oferta ou demanda:

$$\sigma^2 = \langle A^2 \rangle. \quad (\text{B.1})$$

Mas A pode ser escrita em termos das variáveis Ω e ξ ,

$$A = \Omega^{\mu t} + \sum_{i=1}^N s_i \xi_i^{\mu t}, \quad (\text{B.2})$$

que substituindo em (B.1) retorna:

$$\sigma^2 = \left\langle \left(\Omega^{\mu t} + \sum_{i=1}^N s_i \xi_i^{\mu t} \right)^2 \right\rangle. \quad (\text{B.3})$$

Desenvolvendo o termo quadrático obtém-se:

$$\sigma^2 = \left\langle (\Omega^{\mu t})^2 \right\rangle + \left\langle 2 \Omega^{\mu t} \sum_{i=1}^N s_i \xi_i^{\mu t} \right\rangle + \left\langle \left(\sum_{i=1}^N s_i \xi_i^{\mu t} \sum_{j=1}^N s_j \xi_j^{\mu t} \right) \right\rangle. \quad (\text{B.4})$$

Devido ao trabalho de Cavagna, sabe-se que a média temporal para Ω pode ser tomada como uma média em μ :

$$\langle \Omega^{\mu t} \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Omega^{\mu t} = \frac{1}{T} (a \Omega^{\mu=1} + b \Omega^{\mu=2} + \dots + n \Omega^{\mu=P}), \quad (\text{B.5})$$

e como a distribuição de probabilidade é uniforme,

$$a = b = c = \dots = n = k \quad \text{então} \quad \frac{k}{T} = \frac{1}{P} \quad (\text{B.6})$$

portanto,

$$\langle \Omega^{\mu t} \rangle = \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P \Omega^{\mu} \quad (\text{B.7})$$

e reescreve-se a equação (B.4) como:

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P (\Omega^\mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^N \langle \Omega^{\mu_t} s_i \xi_i^{\mu_t} \rangle + \left\langle \sum_{i,j}^N \xi_i^{\mu_t} \xi_j^{\mu_t} s_i s_j \right\rangle. \quad (\text{B.8})$$

Tomando-se $h_i = \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P \Omega^\mu \xi_i^\mu$ e $J_{i,j} = \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P \xi_i^\mu \xi_j^\mu$ a equação (B.8)

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P (\Omega^\mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^N h_i \langle s_i \rangle + \sum_{i,j}^N J_{i,j} \langle s_i s_j \rangle, \quad (\text{B.9})$$

Apêndice C

Cálculo de v_i

Dada a equação:

$$Y_i(t+1) = Y_i(t) - \frac{\Gamma}{N} \xi_i^\mu A(t), \quad (\text{C.1})$$

v_i pode ser escrito em termos de (C.1), como:

$$v_i = \overline{\langle Y_i(t+1) - Y_i(t) \rangle} = -\frac{\Gamma}{N} \overline{\langle \xi_i^\mu A(t) \rangle}. \quad (\text{C.2})$$

Substituindo o valor de $A(t)$ em (C.2) tem-se:

$$v_i = -\frac{\Gamma}{N} \overline{\left\langle \xi_i^{\mu t} \left(\Omega^{\mu t} + \sum_{j=1}^N \xi_j^{\mu t} s_j \right) \right\rangle}. \quad (\text{C.3})$$

Resolvendo as médias temporais em (C.3) encontra-se:

$$v_i = -\frac{\Gamma}{N} \overline{\xi_i^\mu \Omega^\mu} + \overline{\left\langle \sum_{j=1}^N \xi_j^{\mu t} s_j \right\rangle \xi_i^\mu} = -\frac{\Gamma}{N} \overline{\xi_i^\mu \Omega^\mu} + \sum_{j=1}^N \overline{\xi_j^\mu \xi_i^\mu} \langle s_j \rangle. \quad (\text{C.4})$$

E como $h_i = \overline{\Omega^\mu \xi_i^\mu}$ e $J_{i,j} = \overline{\xi_i^\mu \xi_j^\mu}$, (C.4) é escrita na forma:

$$v_i \propto -h_i - \sum_{j=1}^N J_{i,j} \langle s_j \rangle \quad (\text{C.5})$$

Apêndice D

Cálculo de $\frac{\partial H}{\partial m_i}$

Tomando-se a definição de H :

$$H = \overline{\langle A \rangle^2}, \quad (\text{D.1})$$

e escrevendo A em função de Ω e ξ , encontra-se:

$$H = \overline{\left[\Omega^\mu + \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu m_i \right]^2}. \quad (\text{D.2})$$

Desenvolvendo-se o quadrado do binômio, tem-se:

$$H = \overline{(\Omega^\mu)^2} + 2 \Omega^\mu \overline{\sum_{i=1}^N \xi_i^\mu m_i} + \overline{\left(\sum_{i=1}^N \xi_i^\mu m_i \right)^2}. \quad (\text{D.3})$$

Toma-se, então, a derivada de (D.3) em relação a m_i :

$$\frac{\partial H}{\partial m_i} = 0 + 2 \overline{\Omega^\mu \xi_i^\mu} + \frac{\partial}{\partial m_i} \overline{\left[\sum_{i=1}^N \xi_i^\mu m_i \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu m_j \right]}, \quad (\text{D.4})$$

O desenvolvimento da derivada do último termo a direita em (D.4) produz:

$$\frac{\partial H}{\partial m_i} = 2 \overline{\Omega^\mu \xi_i^\mu} + \overline{\left[\xi_i^\mu \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu m_j + \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^\mu m_i \right) \xi_j \right]}. \quad (\text{D.5})$$

Os índices mudos dos somatórios podem ser rearranjados de modo a ter-se:

$$\frac{\partial H}{\partial m_i} = 2 \overline{\Omega^\mu \xi_i^\mu} + \overline{\left[2 \xi_i^\mu \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu m_j \right]}, \quad (\text{D.6})$$

que pode ser simplificado para:

$$\frac{\partial H}{\partial m_i} = 2 \overline{\left[(\Omega^\mu \xi_i^\mu) + \sum_{j=1}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu m_j \right]}. \quad (\text{D.7})$$

Uma vez que o termo entre parênteses em (D.7) representa $-v_i$, então

$$\frac{\partial H}{\partial m_i} = -2 v_i. \quad (\text{D.8})$$

Apêndice E

Cálculo da relação entre σ^2 e H

Como demonstrado no apêndice tal, σ^2 pode ser escrita como:

$$\sigma^2 = \overline{(\Omega^\mu)^2} + 2 \sum_{i=1}^N h_i \langle s_i \rangle + \sum_{i,j}^N J_{i,j} \langle s_i s_j \rangle, \quad (\text{E.1})$$

onde a barra é adotada para designar a média em P , ou seja,

$$\frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P (\Omega^\mu)^2 = \overline{(\Omega^\mu)^2}. \quad (\text{E.2})$$

Retomando os valores de h_i e $J_{i,j}$, (E.1) torna-se:

$$\sigma^2 = \overline{(\Omega^\mu)^2} + 2 \sum_{i=1}^N \overline{\xi_i^\mu \Omega^\mu} \langle s_i \rangle + \sum_{i,j=1}^N \overline{\xi_i^\mu \xi_j^\mu} \langle s_i s_j \rangle. \quad (\text{E.3})$$

Partindo da definição de H (eq.1.19) e de A (eq.1.13) tem-se:

$$H = \overline{\langle A \rangle^2} = \overline{\left\langle \left(\Omega^{\mu t} + \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu t} s_i \right) \right\rangle^2}. \quad (\text{E.4})$$

Realizando a média temporal, e desenvolvendo o termo quadrático encontra-se:

$$H = \overline{(\Omega^\mu)^2} + 2 \sum_{i=1}^N \overline{\Omega^\mu \xi_i^\mu} \langle s_i \rangle + \sum_{i,j=1}^N \overline{\xi_i^\mu \xi_j^\mu} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle. \quad (\text{E.5})$$

Subtraindo a eq.(E.5) da eq. (E.3), tem-se:

$$H - \sigma^2 = \sum_{i,j=1}^N \overline{\xi_i^\mu \xi_j^\mu} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle - \sum_{i,j=1}^N \overline{\xi_i^\mu \xi_j^\mu} \langle s_i s_j \rangle, \quad (\text{E.6})$$

Desmembrando-se os somatórios em (E.6) e retomando a denominação, $J_{i,j} = \overline{\xi_i^\mu \xi_j^\mu}$, encontra-se:

$$H - \sigma^2 = \sum_{i=j}^N J_{i,i} \langle s_i \rangle^2 + \sum_{i \neq j}^N J_{i,j} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle - \sum_{i=j}^N J_{i,i} \langle s_i^2 \rangle - \sum_{i \neq j}^N J_{i,j} \langle s_i s_j \rangle. \quad (\text{E.7})$$

Como para $i \neq j$ o último termo de (E.7) é reescrito como

$$\sum_{i \neq j}^N J_{i,j} \langle s_i s_j \rangle = \sum_{i \neq j}^N J_{i,j} \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle, \quad (\text{E.8})$$

então, H é dado por:

$$H = \sigma^2 + \sum_{i,j}^N J_{i,i} \langle s_i \rangle^2 - \sum_{i,j}^N J_{i,i} \langle s_i^2 \rangle = \sigma^2 + \sum_{i,j}^N J_{i,i} (\langle s_i \rangle^2 - \langle s_i^2 \rangle). \quad (\text{E.9})$$

Uma vez que $s_i = \pm 1$, (E.9) torna-se:

$$H = \sigma^2 + \sum_{i=1}^N J_{i,i} (\langle s_i \rangle^2 - 1). \quad (\text{E.10})$$

Rearranjando (E.10) e utilizando as igualdades $m_i = \langle s_i \rangle$ e $J_{i,i} = \overline{(\xi_i^\mu)^2}$, obtem-se:

$$\sigma^2 = H + \sum_{i=1}^N \overline{(\xi_i^\mu)^2} (1 - m_i^2) \quad (\text{E.11})$$

Apêndice F

Aproximação de variação percentual por diferença de logaritmos

Quando se tem uma variação percentual pequena de preço, o valor dessa variação pode ser aproximada como a diferença dos logaritmos de preços:

$$\Delta\%P = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = r(t, \Delta t) \approx \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}). \quad (\text{F.1})$$

Para demonstrar esse resultado inicia-se reescrevendo a primeira igualdade em (F.1):

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \Delta\%P + 1. \quad (\text{F.2})$$

Tomando o logaritmo de (F.2), obtém-se:

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln(\Delta\%P + 1). \quad (\text{F.3})$$

Agora, é necessário retomar o conceito de diferencial. Conseguem-se o valor de uma função, dado que houve um acréscimo na variável que representa o seu domínio, utilizando:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x. \quad (\text{F.4})$$

Então, tomando $f(x) = \ln(1 + x)$ na eq. (F.4), encontra-se:

$$\ln(1 + x + \Delta x) \approx \ln(1 + x) + \left(\frac{\Delta x}{1 + x}\right). \quad (\text{F.5})$$

Fazendo as aproximações $x = 0$, e $\Delta x = \alpha$, um valor muito pequeno:

$$\ln(1 + \alpha) \approx \alpha. \quad (\text{F.6})$$

Portanto, caso a variação de preços seja pequena, conforme (F.6), a igualdade mais a direita em (F.3) pode ser escrita como:

$$\ln(1 + \Delta\%P) \approx \Delta\%P. \quad (\text{F.7})$$

As outras igualdades em (F.3) permitem escrever:

$$\Delta\%P \approx \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}). \quad (\text{F.8})$$

Referências

- [1] Chaui, M. *Introdução à Historia da Filosofia: dos pré-socráticos a Aristóteles*, Companhia das Letras, São Paulo, 2002.
- [2] Simonsen, M. H. *Ensaio Analítico*, Editora da Fundação Getulio Vargas, Rio de Janeiro, 1994.
- [3] Bertuglia, C. S. e Vaio, F. *Nonlinearity, Chaos & Complexity: the dynamics of natural and social systems*, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [4] Gell-Mann. *What is complexity?* <http://www.santafe.edu/~mgm/complexity.html>. Consultado em 07/05/07.
- [5] Johnson, F. N., Jefferies, P. e Hui, P. M.. *Financial Market Complexity*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [6] Arthur, W. B. Inductive reasoning and bounded rationality, *Am. Econ. Assoc. Papers and Proc.* **84**, 406 (1994).
- [7] Challet, D. e Zhang, Y. -C. Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game, *Physica A* **246**, 407-418 (1997).
- [8] Savit, R., Manuca, R. e Riolo R., Adaptive competition, market efficiency, and phase transitions, *Physical Review Letters* **82**, 2203-2206 (1999).
- [9] Manuca, R., Li, Y., Riolo, R. e Savit, R. The structure of adaptive competition in minority games, *Physica A* **282**, 559-608 (2000).
- [10] Zhang, Y. -C. Evolving models of financial markets, *Europhysics News* **29**, 51-54 (1998).
- [11] Challet, D. e Zhang, Y. -C. On the minority game: analytical and numerical studies, *Physica A* **256**, 514-532 (1998).
- [12] Challet, D., Marsili, M. e Zhang, Y. -C. *Minority Games - interacting agents in financial markets*, Oxford University Press, New York, 2005.

- [13] Challet, D. e Marsili, M. Phase transition and symmetry breaking in the minority game, *Physical Review E* **60**, R6271-R6274 (1999).
- [14] Cavagna, A. Irrelevance of memory in the minority game, *Physical Review E* **59**, R3783-R3786 (1999).
- [15] Cavagna, A., Garrahan, J. P., Giardina, I. e Sherrington, D. Thermal model for adaptive competition in a market, *Physical Review Letters* **83**, 4429-4432 (1999).
- [16] Challet, D., Marsili, M. e Zecchina, R. Statistical mechanics of systems with heterogeneous agents: minority games, *Physical Review Letters* **84**, 1824-1827 (2000).
- [17] Challet, D., Marsili, M. e Zhang, Y. -C. Modeling market mechanism with minority game, *Physica A* **276**, 284 (2000).
- [18] Challet, D., Marsili, M. e Zhang, Y. -C. Stylized facts of financial markets and market crashes in minority games, *Physica A* **294**, 514-524 (2001).
- [19] Challet, D. e Marsili, M. Criticality and market efficiency in a simple realistic model of the stock market, *Physical Review E* **68**, 036132-036134 (2003).
- [20] Zhang, Y. -C. Toward a theory of marginally efficient markets, *Physica A* **269**, 30-44 (1999).
- [21] Ferreira, F. F., Oliveira, V. M., Crepaldi, A. F., Campos, P. R. A. Agent-based model with heterogeneous fundamental prices, *Physica A* **357**, 534-542 (2005).
- [22] Rodrigues, A. V. G. A. *Análise de um Modelo Microscópico para o Mercado Financeiro*. São Paulo, 2005. 60 p. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista.
- [23] Johnson, N., Hart, M., Hui, P. M. e Zheng, D. Trader dynamics in a model market, *Internacional Journal of Theoretical and Applied Finance* **3**, 443-450 (2000).
- [24] Gopikrishnan, P., Plerou, V. , Amaral, L. A. N., Meyer, M. e Stanley, H. E. Scaling of the distribution of financial market indices, *Physical Review E* **60**, 5305 (1999).

- [25] Cont., R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance* **1**, 223-236 (2001).
- [26] Mantegna, R. N. e Stanley, H. E. *An Introduction to Econophysics Correlation and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [27] Bouchaud, J. P. e Potters, M. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [28] Tang, L.-H. e Huang, Z.-F. Modelling high-frequency economic time series, *Physica A* **288**, 444-450 (2000).
- [29] Brooks, C. *Introductory Econometrics for Finance*, Cambridge University Press, New York, 2002.
- [30] Cizeau, P., Liu, Y., Meyer, M., Peng, C. -K. e Stanley, H. E. Volatility distribution in the S&P500 stock index, *Physica A* **245**, 441-445 (1997).
- [31] Liu, Y., Cizeau, P., Meyer, M., Peng, C. -K. e Stanley, H. E. Correlation in economic time series, *Physica A* **245**, 437-440 (1997).
- [32] Micciché, S., Bonanno, G., Lillo, F. e Mantegna, R. N. Volatility in financial markets: stochastic model and empirical results. cond-mat/0202527.
- [33] Bonanno, G., Lillo, F. e Mantegna, R. N. Dynamics of the number of trades of financial securities, *Physica A* **280**, 136-141 (2000).
- [34] Peng, C.-K., Buldyrev, S. V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H. E. e Goldberger, A.L. Mosaic organization of DNA nucleotides, *Physical Review E* **49**, 1685-1689 (1994).
- [35] Chen, Z., Ivanov, P. Ch., Hu, K. e Stanley, H. E. Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis, *Physical Review E* **65**, 041107-1/041107-15 (2002).
- [36] Challet, D., De Martino, A., Marsili, M. e Castillo, I. P. Minority games with finite score memory. cond-mat/0407595.
- [37] Coolen, A. C. C., Heimerl, J. A. F. e Sherrington, D. Dynamics of the batch minority game with inhomogeneous decision noise, *Physical Review E* **65**, 016126 (2001).

- [38] Fouque, J.P., Papanicolaou, G. e Sircar, K. R. *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [39] Heston, S. L. A closed-form solution for options with applications to bond and currency options, *The Review of Financial Studies* **6**, 327-343 (1993).
- [40] Pan, J. The jump-risk premia implicit in options: evidence from an integrated time-series study, *Journal of Financial Economics* **63**, 3-50 (2002).
- [41] Dragulescu, A. e Yakovenko, V. M. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility, *Quantitative Finance* **2**, 443-453 (2002).
- [42] Silva, A. C. e Yakovenko, V. M. Comparison between the probability distribution of returns in the Heston model and empirical data for stock indexes, *Physica A* **324**, 303-310 (2003).
- [43] Silva, A. C., Prange, R. E. e Yakovenko, V. M. Exponential distribution of financial returns at mesoscopic time lags: a new stylized fact, *Physica A* **344**, 227 (2004).
- [44] Bakshi, G., Cao, C. e Singleton, K. Empirical performance of alternative option pricing models, *The Journal of Finance* **52**, 2003-2049 (1997).
- [45] Duffie, D., Pan, J. e Singleton, K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-difusions, *Econometrica* **68**, 1343-1376 (2000).
- [46] Black, F. e Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* **81**, 637-654 (1973).
- [47] Merton, R. C. Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* **47**, 141-183 (1973).
- [48] Cox, J., Ingersoll, J. e Ross, S. A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* **53**, 385-407 (1985).
- [49] Vicente, R., Toledo, C. M., Leite, V. B. P. e Caticha, N. Common underlying dynamics in an emerging market: from minutes to months. cond-mat/0402185.
- [50] Yu, C.X., Gilmore, M., Peebles, W.A. e Rhodes, T.L. Structure function analysis of long-range correlations in plasma turbulence, *Physics of Plasma* **10**, 2772-2779 (2003).

- [51] Muzy, J. F., Bacry, E. e Arneodo, A. Wavelets and multifractal formalism for singular signal: application to turbulent, *Physical Review Letters* **67**, 3515-3518 (1991).
- [52] Cornelis, A. L. e Yalamova, R. Multifractal spectral analysis of the 1987 stock market crash, *International Research Journal of Finance and Economics* **4**, 105-132 (2006).
- [53] Oświecimka, P., Kwapien, J., Drozd, S., Górski, A. Z. e Rak, R. Multifractal model of asset returns versus real stock market dynamics, *Acta Physica Polonica B* **37**, 3083-3092 (2006).
- [54] De Dominicis, C. Dynamics as a substitute for replicas in systems with quenched random impurities, *Physical Review B* **18**, 4913 (1978).
- [55] Ott, E. *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [56] Feder, J. *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
- [57] Paladin, G. e Vulpiani, A. Anomalous scaling laws in multifractal objects, *Physics Report* **156**, 147-225 (1987).
- [58] Ott, E., Sauer, T., York, J. A. *Coping with Chaos: analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [59] Wohlmuth, J. e Andersen, J. V. Modelling financial market with agents competing on different time scale and with different amount of information, *Physica A* **363**, 459-468 (2006).
- [60] Marsili, M. e Piai, M. Colored minority games, *Physica A* **310**, 234-244 (2002).
- [61] De Martino, A. Dynamics of multi-frequency minority games, *Eur. Phys. J. B* **35** 143 (2003).
- [62] Ferreira, F. F., Francisco, G., Machado, B. S. e Muruganandam, P. Time series analysis for minority game simulations of financial markets, *Physica A* **321** 619-632 (2003).
- [63] Bube, K., Rodrigues Neto, C., Donner, R., Schwarz, U. e Feudel, U. Surface characterization of laser beam melt ablation process, *Journal of Physica D: Applied Physics* **39**, 1405-1412 (2006).

- [64] Cromwell, J. B., Clabys, W. e Kouassi, E. What color are commodity prices?
A fractal analysis, *Empirical Economics* **25**, 563-580 (2000).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)