



**UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO  
FACULDADE DE ENGENHARIA E ARQUITETURA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**

**Paulo Agostinho Guerra**

**SILOS METÁLICOS PRISMÁTICOS:  
Otimização estrutural das paredes em seção trapezoidal e ziguezague**

**Dissertação apresentada ao Programa  
de Pós-graduação em Engenharia da  
Universidade de Passo Fundo, para  
obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.**

**Passo Fundo**

**2006**

**Paulo Agostinho Guerra**

**SILOS METÁLICOS PRISMÁTICOS:  
Otimização estrutural das paredes em seção trapezoidal e ziguezague.**

**Dissertação de Mestrado**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA E ARQUITETURA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**

**Paulo Agostinho Guerra**

**ORIENTADOR: Professor Moacir Kripka, Doutor**

**SILOS METÁLICOS PRISMÁTICOS:**  
**Otimização estrutural das paredes em seção trapezoidal e zigzag**

**Dissertação apresentada ao Programa  
de Pós-graduação em Engenharia da  
Universidade de Passo Fundo, para  
obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.**

**Passo Fundo**

**2006**

**UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA E ARQUITETURA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA**

**A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação:**

**SILOS METÁLICOS PRISMÁTICOS:**  
**Otimização estrutural das paredes em seção trapezoidal e zigzag**

**Elaborada por:**

**Paulo Agostinho Guerra**

**Como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia**

**Aprovado em: 29/setembro/2006**  
**Pela Comissão Examinadora**

**Prof. Doutor Moacir Kripka**  
**Presidente da Comissão Examinadora**  
**Orientador**

**Prof. Doutor Gray Farias Moita**  
**Centro Federal de Educação Tecnológica de**  
**Minas Gerais - CEFET/MG**

**Prof. Doutor Luciano Jorge de Andrade**  
**Junior**  
**Engenheiro da Kepler Weber Industrial**  
**S.A.**

**Prof. Doutor Antônio Thomé**  
**Coord. Prog. Pós-Graduação em Engenharia**

**Prof. Doutor Mario Jose Paluch**  
**UPF – Universidade de Passo Fundo**

**Passo Fundo**  
**2006**

*Para minha mulher Iara*

## Agradecimentos

Ao Prof. Moacir Kripka, por sua orientação, incentivo e amizade durante o curso de mestrado e a elaboração da dissertação.

À Iara minha eterna companheira em mais esta jornada.

Aos Professores e Funcionários do curso de mestrado, pela dedicação e compreensão durante o curso.

Ao Luiz Bragatto, da Escola de Engenharia de São Carlos, que não mediu esforços para obtenção das bibliografias necessárias a esta dissertação.

*"A sabedoria consiste em compreender que o tempo  
dedicado ao trabalho nunca é perdido"*

Ralph Waldo. Emerson

## RESUMO

A construção de silos metálicos prismáticos com paredes enrijecidas horizontalmente tem sido amplamente aplicada no armazenamento de produtos granulares e pulverulentos nos mais diversos setores industriais. Sistemas construtivos padronizados desse tipo de silo têm se difundido pela Europa e Américas. No Brasil esse tipo de silo é utilizado basicamente no setor agro-industrial e o sistema construtivo utilizado é o da industrialização parcial finalizada *in loco*, que requer uma grande quantidade de mão-de-obra especializada, implicando o encarecimento do custo final do silo. Tendo por objetivo fornecer subsídios para o dimensionamento, a padronização e a redução do custo de paredes conformadas dos silos prismáticos, esta pesquisa avalia o desempenho estrutural de paredes enrijecidas, em seção trapezoidal e ziguezague, quando submetidas às pressões do fluxo do produto armazenado. Para isso, trata o dimensionamento como um problema de otimização onde o peso mínimo é selecionado para a função objetivo, uma vez que o custo do aço empregado na fabricação das células é o fator preponderante no valor final do silo. A partir da formulação desenvolvida foram efetuadas simulações numéricas a fim de propiciar a efetiva comparação entre as diversas configurações, quando submetidas a uma mesma condição de carregamento e vinculação. Os resultados obtidos mostram uma grande economia resultante da aplicação de técnicas de otimização à análise estrutural de silos prismáticos e que, para o armazenamento dos produtos como soja a granel e farelo de soja, a seção em ziguezague é a mais apropriada (econômica).

Palavras-chave: Silos metálicos prismáticos, paredes enrijecidas, otimização.



## **ABSTRACT**

The building of metallic prismatic silos made of horizontal profiled walls has been widely used in the storage of powder bulk solids in many different industry sectors. Standardized building systems for this kind of silos have been spread throughout Europe and America. In Brazil, this kind of silo is used mainly in food and agricultural industries, and the building system used is the partial manufacturing, which is concluded in locus. It also requires a lot of specialized labor, resulting in raises in the silo's final cost. In order to give technical hints for dimensioning, standardizing and to reducing the cost of profiled walls, this research evaluates the performance of profiled walls in trapezoidal and zigzag sections when they are submitted to flow pressures by the material stored. Therefore, this work takes the dimensioning, as a problem of optimization where the minimum weight is chosen as the objective function, once the cost of steel used in manufacturing of cells is the main factor in the silo's final cost. From the developed formulation, numerical simulations were performed in order to provide an effective comparison among the different configurations when these are submitted to the same conditions of loading and connecting. The results achieved showed a great economy from the application optimization technique for structural analysis of metallic prismatic silos. Thus, the storage of powder bulk solids like soya beans and soya meals, is more appropriated in the profiled wall conformed in zigzag. (economic).

**Keywords:** Metallic prismatic silos, horizontal profiled walls, optimization problem.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Silo prismático em uma granja na Finlândia. ....	19
Figura 2: Pannel de conformação trapezoidal. ....	24
Figura 3: Pannel de conformação ziguezague. ....	24
Figura 4: Montagem dos painéis num silo prismático quadrado Antti. ....	26
Figura 5: Ampliação do silo existente. ....	28
Figura 6: Montagem dos painéis em um silo prismático sistema modular Lemanco. ....	29
Figura 7: Nervura horizontal interna tipo cartola inclinada, canto chanfrado que forma a coluna. ....	29
Figura 8: Sistema de Silos Vertilok, expedição de uma indústria de rações. ....	30
Figura 9: Silos para estocagem semente de milho. Proprietário: Agrocere S.A., Sta. Helena, GO. ....	31
Figura 10: Vista parcial da montagem indústria de ração com capacidade de 40 toneladas por hora. Proprietário: Cooperativa Mista Entre Rios, Colônia Vitória, Guarapuava, PR. ....	32
Figura 11: Montagem indústria de ração. Proprietário: Cooperativa Mista Entre Rios, ....	33
Fonte: Troitsky (1990). ....	36
Figura 12: Classificação dos silos baseada na posição do plano de ruptura ....	36
Figura 13: Aparato da máquina de cisalhamento - Jenike Shear Test. ....	39
Figura 14: Aplicação da carga vertical na célula de cisalhamento. ....	39
Figura 15: Célula de cisalhamento para determinação do ângulo de atrito com a parede. ....	40
Figura 16 : Seção da célula de cisalhamento. ....	40
Figura 17: Gráfico das tensões de cisalhamento e do lugar geométrico de deslizamento. ....	41
Figura 18: Representação gráfica do ângulo de atrito. ....	42
Figura 19: Arranjo da célula de cisalhamento para determinação do ângulo de atrito $\phi_w$ . ....	43
Figura 20: Representação gráfica do lugar geométrico de deslizamento com a parede. ....	43
Figura 21: Representação gráfica do lugar geométrico de deslizamento com a parede. ....	44
Figura 22: Tipos de fluxos ....	48
Figura 23: Classificação dos fluxos. ....	49
Figura 24: Determinação gráfica do tipo de fluxo. ....	50
Figura 25: Pressões em silos. ....	51
Figura 26: Forças em uma camada elementar horizontal da célula- Teoria Janssen. ....	54
Figura 27: Pressões nas paredes da tremonha. ....	57
Figura 28: Aplicação da pressão adicional. ....	60
Figura 29: Forças de tração no sistema estrutural do silo. ....	62
Figura 30: Seção da onda trapezoidal com eixos de inércia $Y_c$ e $X_c$ . ....	64
Figura 31: Seção da onda trapezoidal com eixos de inércia $Y_c$ , $X_c$ e $Y_v$ . ....	65
Figura 32: Seção da onda em ziguezague com eixos de inércia $Y_c$ . ....	67
Figura 33: Seção da onda em ziguezague com eixos de inércia $Y_c$ e $Y_v$ . ....	68
Figura 34: Placa vertical enrijecida. ....	70
Figura 35: Forças de tração no sistema estrutural do silo ....	71
Figura 36: Momentos fletores em silos retangulares. ....	71
Figura 37: Placa trabalhando como membrana. ....	72
Figura 38- Classificação dos métodos clássicos. ....	80
Figura 39- Definição da largura do painel e da platibanda. ....	81
Figura 40: Seção genérica da conformação em ziguezague. ....	82
Figura 41: Seção genérica da conformação trapezoidal ....	84
Figura 42: Planilha eletrônica Microsoft Excel – Ativação do Solver. ....	86
Figura 43: Quadro diálogo dos Parâmetros do Solver. ....	87
Figura 44: Microsoft Excel – Opções do Solver. ....	88
Figura 45: Planilha de dados - Conformação trapezoidal proposta por Ravenet para a cota 25 m. ....	92
Figura 46: Relatório de resposta na cota 25 metros. ....	92
Figura 47: Relatório de limites na cota 25 metros. ....	93
Figura 48: Resumo do cenário para a cota 25 metros. ....	93
Figura 49: Peso da parede conformada com onda trapezoidal e peso otimizado. ....	95

Figura 50: Planilha de dados – Conformação zigzag; cota 12 m; farelo de soja .....	96
Figura 51: Resultados da otimização – Modelo 2 na cota 12 metros. ....	97
Figura 52: Peso da parede conformada (trapezoidal x zigzag).....	99
Figura 53: Peso ótimo da parede conformada no armazenamento de soja a granel.....	101
Figura 54: Peso ótimo da parede conformada no armazenamento de soja a granel.....	102

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Disposições de silos prismáticos multicelulares. ....	25
Quadro 2 - Dimensões padronizadas dos painéis. ....	27
Quadro 3 - Característica dos silos modulares Lemanco. ....	27
Quadro 4 - Comparação entre fluxo mássico e fluxo tubular. Vantagens. ....	50
Quadro 5 - Pressões de carregamento do silo e parâmetro K.....	56
Quadro 6 - Pressões sobre as paredes da tremonha – DIN 1055-6. ....	58

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Classificação dos silos segundo a relação $h/d_c$ .....	37
Tabela 2 - Emprego do limite inferior e superior das propriedades físicas dos produtos. ....	38
Tabela 3 - Percentagem de pulverulento passante em uma malha específica . ....	47
Tabela 4 - Combinações dos parâmetros $\mu$ e $K$ .....	60
Tabela 5 - Dimensionamento de Ravenet para conformação trapezoidal .....	94
Tabela 6 - Dimensionamento para conformação trapezoidal de Ravenet otimizada. ....	94
Tabela 7 - Resumo dos dimensionamentos e percentual do peso reduzido. ....	95
Tabela 8 - Dimensionamento otimizado painel em ziguezague.....	97
Tabela 9 - Dimensionamento otimizado do painel trapezoidal .....	98
Tabela 10 - Resumo dimensionamento otimizado no armazenamento de farelo de soja.....	98
Tabela 11 - Dimensionamento otimizado do painel conformado em ziguezague.....	100
Tabela 12 - Dimensionamento otimizado do painel trapezoidal .....	100
Tabela 13 - Resumo dimensionamento otimizado no armazenamento de grãos de soja. ....	101
Tabela 14 - Influência do incremento de $\theta$ na seção do painel. ....	103

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Romanas Minúsculas

$a$	Menor dimensão da seção horizontal de uma célula retangular
$b$	Menor distância do ponto A ao eixo $zz$
$d$	Diâmetro inscrito na seção da boca da tremonha
$d_c$	Diâmetro do maior círculo inscrito na seção transversal horizontal da célula.
$ff$	Fator fluxo da tremonha
$h$	Altura efetiva do produto armazenado
$k_i$	Coefficiente de rigidez
$p_h$	Pressão horizontal
$p_v$	Pressão verticais
$p_w$	Pressão de atrito do produto com a parede
$t$	Espessura da parede do silo
$z$	Ordenada a partir do nível de referência

### Letras Romanas Maiúsculas

$A$	Área da seção horizontal da célula de armazenamento
$D$	Diâmetro da seção horizontal da célula de armazenamento
$E$	Módulo de elasticidade do material da parede
$FF$	Função de Fluxo
$H$	Altura da parede do silo
$H'$	Comprimento de uma onda
$H''$	Comprimento de uma e meia onda
$I_{yy}$	Momento de inércia à flexão segundo o eixo $YY$
$I_{zz}$	Momento de inércia à flexão segundo o eixo $ZZ$
$K$	Razão entre as pressões horizontal e vertical
$L$	Lado do silo
$L$	Comprimento da boca da tremonha
$L_i$	Comprimento do perfil inclinado
$L_c$	Comprimento do segmento reto da dobra do perfil

$M_{xx}$	Momento fletor segundo o eixo XX
$M_{yy}$	Momento fletor segundo eixo YY
$M_{zz}$	Momento fletor segundo eixo ZZ
$P_{hc}$	Pressão horizontal de carregamento
$S$	Área da seção transversal do perfil
$T_a$	Força de tração atuante no lado a por unidade de profundidade y
$T_b$	Força de tração atuante no lado b por unidade de profundidade y
$W_{xx}$	Momento resistente da chapa segundo o eixo XX
$W_{yy}$	Momento resistente da chapa segundo o eixo YY
$W_{zz}$	Momento resistente da chapa segundo o eixo ZZ

### **Letras Gregas Minúsculas**

$\alpha$	Ângulo de inclinação da tremonha com a vertical
$\alpha_1$	Ângulo que forma o perfil inclinado com a vertical, em graus
$\phi_e$	Efetivo ângulo de atrito interno
$\phi_i$	Ângulo de atrito interno
$\phi_{lin}$	Ângulo do lugar geométrico de deslizamento linearizado
$\phi_r$	Ângulo de repouso do produto
$\phi_w$	Ângulo de atrito com a parede
$\phi_{ws}$	Valor superior do ângulo de atrito com a parede.
$\gamma$	Peso específico
$\theta$	Ângulo de inclinação da tremonha com a horizontal
$\varphi_i$	Ângulo de atrito interno
$\varphi_e$	Efetivo ângulo de atrito interno
$\varphi_w$	Ângulo de atrito com a parede
$\mu$	Coeficiente de atrito do produto com a parede
$\rho$	Densidade solta
$\rho_a$	Densidade aerada
$\rho_u$	Densidade ultima
$\sigma$	Tensão normal
$\sigma_c$	Tensão normal inconfineda

$\sigma_l$	Tensão atuante na parede devido à flexão local
$\sigma_{Yc}$	Tensão atuante na parede devido flexão geral
$\sigma_{Yv}$	Tensão atuante na parede devido à flexão oblíqua
$\sigma_w$	Tensão normal no cálculo do atrito do produto armazenado com a parede do silo
$\sigma_{pre}$	Tensão normal processo de pré-cisalhamento
$\sigma_{sh}$	Tensão normal processo de cisalhamento
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$\tau_{pre}$	Tensão de cisalhamento processo de pré-cisalhamento
$\tau_{sh}$	Tensão de cisalhamento processo de cisalhamento
$\tau_w$	Tensão de cisalhamento devido ao atrito do produto armazenado com a parede do silo
$\nu$	Coeficiente de Poisson



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
1.1 Considerações iniciais .....	17
1.2 Problema de pesquisa .....	18
1.3 Justificativas .....	18
1.4 Objetivos .....	20
1.4.1 Objetivo geral .....	20
1.4.2 Objetivos específicos .....	20
1.5 Escopo e delimitação do trabalho .....	20
1.6 Estrutura do trabalho .....	21
<b>2 PANORAMA DOS SILOS METÁLICOS PRISMÁTICOS .....</b>	<b>22</b>
2.1 Posição dos especialistas ( <i>ad hoc</i> ) .....	22
2.2 Sistemas construtivos regionais de silos prismáticos .....	26
2.2.1 Europeu .....	26
2.2.2 América do Norte .....	27
2.2.3 América do Sul .....	31
<b>3 FUNDAMENTOS DO PROJETO ESTRUTURAL DE SILOS PRISMÁTICOS .....</b>	<b>34</b>
3.1 Diretrizes no projeto de silos prismáticos .....	34
3.2 Métodos de classificação das células .....	35
3.3 Propriedades físicas dos produtos armazenados .....	37
3.3.1 Determinação do ângulo de atrito interno .....	40
3.3.2 Determinação do ângulo de atrito $\phi_w$ do produto armazenado com a parede .....	43
3.3.3 Função de fluxo (FF) .....	44
3.3.4 Fator de fluxo (ff) – da tremonha .....	45
3.3.5 Densidade .....	46
3.3.6 Granulometria .....	47
3.3.7 Ângulo de repouso .....	48
3.3.8 Tipos de fluxos de materiais sólidos a granel em silos .....	48
3.4 Forças atuantes nos silos .....	50
3.4.1 Combinação das ações .....	52
3.5 Pressões em silos .....	53
3.5.1 Norma DIN 1055 – 6 .....	55
3.5.1.1 Campo de aplicação .....	55
3.5.1.2 Relação entre as pressões horizontais e verticais (K) .....	56
3.5.1.3 Pressões estáticas ou de carregamento .....	56
3.5.2 Pressões dinâmicas ou de descarga .....	56
3.5.3 Pressões na tremonha .....	57
3.5.4 Pressões adicionais .....	58
3.5.4.1 Método simplificado para determinação das pressões adicionais .....	59
3.5.5 Combinações de carregamento .....	60
<b>4 ANÁLISE ESTRUTURAL DOS SILOS PRISMÁTICOS .....</b>	<b>61</b>
4.1 Considerações iniciais .....	61
4.2 Forças e momentos que atuam no sistema estrutural dos silos prismáticos .....	61
4.3 Dimensionamentos das paredes conformadas horizontalmente .....	63
4.3.1 Flexão geral nas paredes em conformação trapezoidal .....	63
4.3.2 Flexão oblíqua nas paredes em conformação trapezoidal .....	65
4.3.3 Flexão geral nas paredes em conformação zigzag .....	67
4.3.4 Flexão oblíqua nas paredes em conformação zigzag .....	68
4.3.5 Dimensionamento das paredes dos silos prismáticos enrijecidos com nervuras .....	70
4.3.6 Determinação dos esforços nas paredes do silo segundo Troitsky .....	72
<b>5 DIMENSIONAMENTO OTIMIZADO DAS PAREDES CONFORMADAS .....</b>	<b>74</b>
5.1 Introdução .....	74
5.2 Fundamentos da programação matemática .....	75

5.3	Definições básicas .....	76
5.3.1	Métodos de solução de problemas de otimização.....	78
5.4	Métodos clássicos.....	79
5.4.1	Classificação dos métodos clássicos.....	79
5.5	Formulação do problema para a otimização das paredes de silos .....	81
5.5.1	Limites impostos às variáveis.....	81
5.5.2	Conformação em ziguezague .....	82
5.5.2.1	Determinação da função objetivo .....	82
5.5.2.2	Determinação das restrições .....	83
5.5.3	Conformação trapezoidal .....	84
5.5.3.1	Determinação da função objetivo .....	84
5.5.3.2	Determinação das restrições .....	85
5.6	Implementação da formulação com o emprego do software para otimização Excel Solver.....	85
5.6.1	Parâmetros do modelo .....	86
5.6.2	Variáveis de decisão (células variáveis).....	87
5.6.3	A função objetivo (célula de destino).....	87
5.6.4	Restrições .....	88
5.6.5	Opções para o Solver.....	88
5.6.6	Processo empregados pelo Solver para a busca da solução.....	88
<b>6</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....</b>	<b>90</b>
6.1	Considerações gerais .....	90
6.2	Exemplo 1 .....	90
6.3	Exemplo 2 .....	95
6.4	Exemplo 3 .....	99
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>104</b>
7.1	Conclusões da pesquisa .....	104
7.2	Recomendações para trabalhos futuros .....	104
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>107</b>
	<b>ANEXO A – RESISTÊNCIA À FLEXÃO DE PERFIS CONFORMADOS.....</b>	<b>111</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações iniciais

Na atualidade, a utilização de silos metálicos prismáticos tem se difundido pelos mais diversos setores industriais, destacando-se no Brasil aqueles relacionados ao agroindustrial com ênfase nas fabricas de ração, impulsionadas pela necessidade de produção de alimentos voltados principalmente para exportação. Em vista disso, é de fundamental importância que esses silos possam ser planejados de forma que alcancem a máxima eficiência durante a sua utilização, resistindo às ações a que são submetidos em razão do fluxo dos produtos ensilados sem que haja deposição nas paredes das células, sob pena de se contaminar todo o produto armazenado. No entanto, a crescente demanda por aço no mercado internacional tem elevado consideravelmente preço desta *commodity*, impondo que esses silos sejam construídos com o máximo de padronização industrial e mínimo consumo de material (aço) possível como meio de redução do tempo de implantação e do custo final dessas indústrias.

Dentro desse contexto, sendo as paredes dos silos prismáticos o elemento determinante do maior consumo de aço, esta pesquisa propõe o desenvolvimento de um sistema de apoio ao projeto de silos metálicos prismáticos, para a avaliação do desempenho estrutural das paredes enrijecidas, conformadas com ondas horizontais em forma trapezoidal e ziguezague, quando submetidas às pressões horizontais oriundas do fluxo dos produtos armazenados. Pela aplicação da formulação desenvolvida a um software de otimização, o peso mínimo é selecionado para a função objetivo, uma vez que o custo do aço empregado na fabricação das células é o fator preponderante no valor final do silo. Assim, minimizando-se o peso do aço, por consequência, reduz-se o custo final das células e das fundações.

## 1.2 Problema de pesquisa

De forma geral, o custo de implantação de silos prismáticos é maior que o dos silos cilíndricos, porque as paredes destes trabalham à tração, ao passo que as paredes daqueles trabalham à flexão composta, necessitando, neste caso, de uma quantidade maior de material resistente. Assim, é conveniente que se empreguem paredes enrijecidas com conformação horizontal em seção trapezoidal ou ziguezague, com o objetivo de se aumentar a inércia das paredes e diminuir a quantidade de material empregado na fabricação dos painéis. Por outro lado, como se sabe, as pressões atuantes sobre as paredes dependem das propriedades de fluxo do produto (peso específico, coesão e ângulo de atrito interno); da geometria do silo (seção transversal e altura) e do padrão do fluxo (massa ou funil). Portanto, a magnitude das ações será função dessas variáveis e a resistência à flexão, definida pelo ângulo de inclinação da onda horizontal com o plano vertical, que deverá ser maior que o efetivo ângulo de atrito interno do produto armazenado, de tal modo que o fluxo de massa no esvaziamento do silo seja garantido como meio de serem evitadas a segregação, a interrupção do fluxo e a contaminação do produto. Considerando-se que o custo do aço utilizado na fabricação das células é o fator preponderante no valor final do silo, é essencial que se dimensionem as paredes do silo com a menor quantidade de material possível, definindo-se a seção ótima da onda que reproduz maior resistência à flexão para o efetivo ângulo de atrito interno do produto considerado.

Alicerçando-se nos argumentos expostos, pode-se definir a questão da pesquisa como:

*Qual a seção de parede mais apropriada para o armazenamento produtos granulares ou pulverulentos num silo prismático?*

## 1.3 Justificativas

Considerando o panorama dos silos prismáticos, verifica-se que, na Europa e nos Estados Unidos, são utilizados para a estocagem de cereais de forma eficiente e econômica. Exemplificando, na Finlândia são utilizados nas granjas em sistema modulado e padronizado para o armazenamento e tratamento dos grãos (Figura 1). No Brasil são utilizados no setor agroindustrial, com ênfase para as fábricas de ração, e construídos com um sistema construtivo parcial de industrialização que encarece o seu custo, por requerer uma grande quantidade de mão-de-obra especializada, o que acarreta o encarecimento do custo final do silo.



Fonte: Brochura Antti (2006).

Figura 1: Silo prismático em uma granja na Finlândia.

De acordo com a Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB, 2004) no diagnóstico da situação do armazenamento no Brasil, referente ao ano de 2004, a capacidade estática de armazenamento permanece estagnada há alguns anos em 94,1 milhões de toneladas. Enquanto isso, a produção agrícola cresce, em média, 6% ao ano desde 1990, podendo alcançar 135 milhões de toneladas na próxima safra, demonstrando o significativo *deficit* de armazenagem no País. Segundo Ribeiro (2006), apenas 9% dessa capacidade se concentra nas fazendas, contra 60% nos Estados Unidos e 25% na Argentina.

Por esse ângulo, o aperfeiçoamento das técnicas de dimensionamento e construção dos silos prismáticos poderá promover sua utilização principalmente nas pequenas propriedades, constituindo-se em mais uma alternativa para a solução do *deficit* de armazenagem no Brasil.

A modernização dos processos de industrialização do aço tem tornado possível a padronização e a modulação da fabricação das estruturas de aço para os mais diversos fins. Também o desenvolvimento tecnológico dos equipamentos computacionais tem estimulado a utilização de novas metodologias de análise estrutural, como a otimização estrutural, cujo objetivo básico é reduzir o peso da estrutura mantendo o seu desempenho (rigidez, frequência de ressonância etc.).

Não obstante, os estudos sobre silos prismáticos são escassos e limitados. Ravenet (1977 e 1990) é um dos poucos pesquisadores que dedicaram parte de seus trabalhos ao estudo de silos prismáticos com paredes conformadas. No Brasil, o estudo dessas instalações surgiu com as pesquisas desenvolvidas por Calil Jr. (1982, 1990), e Nascimento (1996) aponta que a utilização de painéis conformados horizontalmente em ziguezague apresenta uma série de vantagens estruturais, construtivas e funcionais, além de oferecer a possibilidade de construção modular.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo geral**

O principal objetivo deste trabalho foi otimizar o desempenho estrutural de paredes enrijecidas em silos metálicos prismáticos, conformadas com ondas horizontais com seção trapezoidal e ziguezague, quando submetidas às pressões horizontais oriundas do fluxo dos produtos armazenados.

### **1.4.2 Objetivos específicos**

- Desenvolver um sistema de apoio ao projeto de silos metálicos prismáticos para a avaliação do desempenho estrutural das paredes enrijecidas, conformadas com ondas horizontais em forma trapezoidal e ziguezague, quando submetidas às pressões horizontais oriundas do fluxo dos produtos armazenados.
- Evidenciar a economia obtida com o emprego de técnica de otimização no dimensionamento de paredes de silos prismáticos.
- Comparar os resultados do dimensionamento das paredes conformadas para as mesmas condições de carregamento quando são armazenados no silo produtos granulares e pulverulentos (soja e farelo de soja).

## **1.5 Escopo e delimitação do trabalho**

Considerando-se os sistemas construtivos de paredes de silos prismáticos mundialmente conhecidos, a presente dissertação propõe a otimização estrutural das paredes enrijecidas com o foco nas seções trapezoidal e ziguezague.

A fim de se alcançar os objetivos descritos, empregou-se um software para otimização, acessível e de fácil utilização, denominado Excel-Solver, desenvolvido pela Microsoft Inc. e fundamentado em técnica de otimização não linear conhecida como *Generalized Reduced Gradient* (GRG2).

## 1.6 Estrutura do trabalho

Uma visão geral da estrutura da dissertação é apresentada a seguir.

No presente capítulo de introdução ao tema apresentam-se o problema de pesquisa, a justificativa, os objetivos e as delimitações do trabalho. No capítulo dois apresenta-se a posição de pesquisadores quanto ao projeto e à utilização de silos prismáticos para o armazenamento de produtos sólidos a granel. Dentro desse panorama exibem-se alguns dos sistemas construtivos empregados na Europa e nas Américas do Norte e do Sul.

No capítulo três faz-se uma abordagem sobre os fundamentos do projeto de silos prismáticos, descrevendo todas as etapas necessárias ao dimensionamento das paredes enrijecidas por nervuras ou conformação. Também se apresenta a metodologia para determinação das propriedades de fluxo e pressões que atuam nos silos

No capítulo quatro analisam-se as forças que atuam sobre a estrutura dos silos prismáticos. Apresenta-se uma formulação clássica para o cálculo das tensões nas paredes conformadas.

No capítulo cinco trata-se do dimensionamento das paredes conformadas com o emprego de técnicas de otimização. São apresentados os fundamentos da programação matemática, o desenvolvimento da formulação para otimização do peso das paredes do silo e a descrição do funcionamento do software de otimização Excel-Solver, que é utilizado para a solução do problema de otimização descrito.

No capítulo seis são relatados os resultados das simulações numéricas para as paredes em seções zigzague e trapezoidais, os quais evidenciam a economia obtida com aplicação de técnicas de otimização ao problema de dimensionamento estrutural.

No capítulo sete relatam-se as conclusões desta pesquisa e as sugestões para novos trabalhos relacionados ao tema estudado. No anexo A, é apresentada uma revisão da teoria empregada na determinação do momento de inércia dos perfis das paredes conformadas, bem como o desenvolvimento da formulação empregada.

## **2 PANORAMA DOS SILOS METÁLICOS PRISMÁTICOS**

### **2.1 Posição dos especialistas (*ad hocs*)**

O projeto e o desempenho de silos metálicos de seção retangular são muito diferentes do que os dos silos circulares. As relações entre pressão e deslocamento, suas interações e conseqüências no desempenho desse tipo de silo, são muitas vezes pouco compreendidas. Via de regra, essas características, que podem ser importantes para se obter projetos mais eficientes, são freqüentemente negligenciadas em favor de projetos conservadores (BROWN; NIELSEN, 1998).

Trahair (1985) sintetizou em linhas gerais os silos e suas formas estruturais. Silos retangulares não são intrinsecamente a forma estrutural mais eficiente, porque a forma circular suporta as forças exercidas pelo produto predominantemente pela tração da parede (pelo plano, como numa membrana), ao passo que os retangulares suportam mais pela flexão da parede. Essa é a característica mais importante na determinação das dimensões de silos metálicos de seção retangular, visto que, pequenos silos não enrijecidos podem sempre ser economicamente viáveis; já, para dimensões das paredes entre quatro e cinco metros, podem ser praticáveis aplicando-se enrijecedores.

Com relação à espessura das paredes, sem sombra de dúvida, os silos de seção retangular não possuem as mesmas capacidades de resistência (os limites de tensões podem ser atingidos rapidamente) nem a eficiência da rigidez à tração, natural aos silos de seção cilíndrica. Portanto, de um modo geral, necessitam de mais material (espessura) para sua construção. Não obstante, os custos de fabricação e transporte podem ser reduzidos, porque silos de seção retangular são construídos rapidamente com chapas de aço padronizadas (comerciais), as quais necessitam de mínimo trabalho antes de estarem prontas para o uso, diferentemente da preparação (das bobinas) que se faz necessária para os silos de seção



circular. Apesar das desvantagens inerentes, existem muitas circunstâncias nas quais silos retangulares são comuns e sua utilização é essencial. Por exemplo, em usinas termelétricas a carvão, freqüentemente, empregam-se silos de seção retangular para alimentação da caldeira geradora de vapor.

Em muitas situações, silos metálicos prismáticos apresentam-se como uma alternativa econômica. Ainda que estes sejam menos eficientes quanto a aproveitamento do material, os reduzidos custos de fabricação e o completo aproveitamento do espaço disponível tornam-nos altamente eficientes. O sistema estrutural para transferência das cargas atuantes é completamente diferente daquele nas estruturas em cascas, e muito trabalho é necessário para se desenvolver modelos estruturais e critérios de resistência para redação das normas.

O desenvolvimento de bons modelos faz-se necessário para que se tenham alternativas de execução para a construção leve e pesada. Na construção pesada, são empregadas paredes grossas enrijecidas por nervuras, nas quais a ação dominante é o momento fletor. Na construção leve, grandes deslocamentos são permitidos e o mecanismo de resistência ao carregamento está mais próximo ao efeito de membrana. O primeiro é simples, no entanto dispendioso. Este último é mais difícil de se implementar no projeto, porém pode ser mais eficaz em termos de custo. Ainda assim, são necessárias pesquisas dentro das boas técnicas de projeto para se utilizar o efeito das grandes deformações em silos prismáticos (ROTTER, 1998).

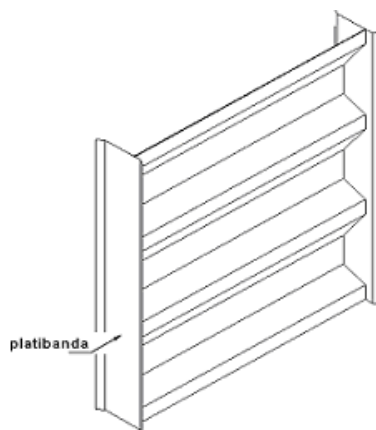
Para uma mesma altura, silos quadrados propiciam 27% a mais de armazenagem em comparação com silos circulares de diâmetro igual ao comprimento do lado do silo quadrado. Portanto, silos prismáticos quadrados ou retangulares podem ser necessários para se obter o volume de armazenamento desejado em locais onde a extensão lateral é limitada. Em geral, os silos retangulares são menos sensíveis a cargas assimétricas e os efeitos estruturais são mais fáceis de serem calculados (GAYLORD, E.; GAYLORD, C. 1984).

O sistema de construção consiste na pré-montagem de painéis metálicos para as paredes na fábrica, os quais, mediante a conformação horizontal, ofereçam a resistência suficiente para suportar as pressões exercidas pelos produtos armazenados. Não obstante as diversas soluções de conformação das paredes propostas até o momento, somente dois tipos progrediram e são utilizados nas construções de grandes silos (RAVENET, 1992):

- *Seção trapezoidal*

Na Figura 2 é mostrado um painel em seção trapezoidal onde o ângulo do segmento inclinado parede. Para manter a rigidez da chapa dobrada, colocam-se platibandas soldadas em suas extremidades. Essa solução é utilizada em silos para armazenamento de produtos

granulares de fácil descarga e o ângulo do segmento inclinado parede, pode variar entre 45 e 60 graus.

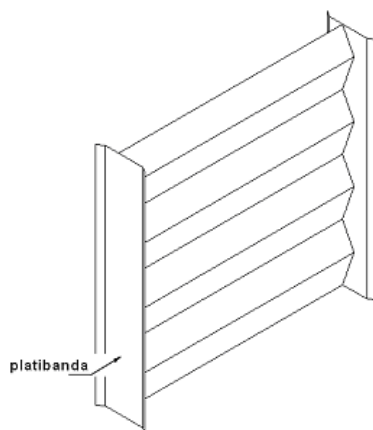


Fonte: Adaptado de Ravenet (1992).

Figura 2: Painel de conformação trapezoidal.

▪ *Seção ziguezague*

Na Figura 3 é mostrado um painel de seção ziguezague com inclinação que tipicamente varia de 70 a 72°, o qual é adequada aos silos para armazenagem de produtos pulverulentos coesivos.





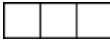
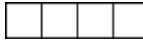

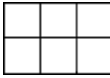
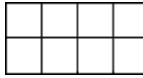
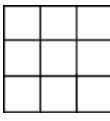
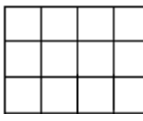
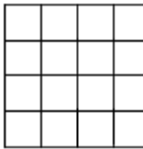
Fonte: Adaptado de Ravenet (1992).

Figura 3: Painel de conformação ziguezague.

Nas soluções em seção trapezoidal ou ziguezague, a distância entre dobras, assim como a largura das platibandas pode variar de acordo com fabricante, país ou norma. Os

painéis são pré-fabricados com as platibandas na fábrica mediante soldagem. A montagem realizada no canteiro de obras efetua-se pelo parafusamento ou soldagem das platibandas.

Apresenta-se no Quadro 1 um esquema das disposições de silos prismáticos multicelulares, que podem ser construídos segundo este esquema, desde uma célula tipo 1-1 ou continuar com uma fila de células até chegar ao tipo 1-n. Na segunda linha formam-se os silos tipo 2, desde o 2-2 até o 2-n, e desse modo se continua até a fila n. No quadro, o coeficiente  $c$  representa a relação entre o número de paredes e a quantidade de células. Em virtude da concomitância das paredes internas nas células, quanto menor o  $c$ , maior será a economia obtida para a configuração adotada.

TIPO	1	2	3	4
1	 $C = 4$	 $C = 3,5$	 $C = 3,33$	 $C = 3,35$
2		 $C = 3$	 $C = 2,83$	 $C = 2,75$
3			 $C = 2,67$	 $C = 2,58$
4				 $C = 2,5$

Fonte: Ravenet (1992).

Quadro 1 - Disposições de silos prismáticos multicelulares.

Os silos prismáticos são construídos nas plantas industriais em que o terreno é limitado e se precisa o máximo da capacidade de armazenamento com o mínimo de terreno. A mecanização desses silos é muito simples, pois basta colocar um transportador superior para o enchimento e um inferior para a descarga, unidos por um elevador de canecas.

As vantagens de um silo multicelular prismático em relação a um silo cilíndrico são:

- em razão de existirem muitas células, pode-se realizar a transferência do produto armazenado no caso de ocorrência de problemas de aquecimento deste material;
- pode-se selecionar o produto a armazenar numa célula específica em razão das suas propriedades físicas;

- a descarga de um silo prismático multicelular efetua-se por gravidade, ao passo que no silo cilíndrico unicelular realiza-se por meio de rosca sem fim, com respectivo gasto de energia;
- a possibilidade de construção de um recinto superior para disposição e inspeção da maquinaria;
- elevação do corpo do silo sobre pilares e suspensão das tremonhas para que se efetue a descarga por gravidade, localizando-se toda a instalação sobre a cota zero, com o que se evitam os problemas com umidade, muito comuns nos silos cilíndricos.

## 2.2 Sistemas construtivos regionais de silos prismáticos

### 2.2.1 Europeu

- Antti-Teollisuus – Finlândia

Os silos prismáticos fabricados pela Antti-Teollisuus (Figura 4) são construídos em painéis com dimensões modulares, conformados horizontalmente, e se adaptam às mais diversas situações de armazenamento. A montagem é simples e rápida e os painéis são unidos por soldagem ou parafusagem ou ambos.



Fonte: Brochura Antti-Teollisuus (2006).

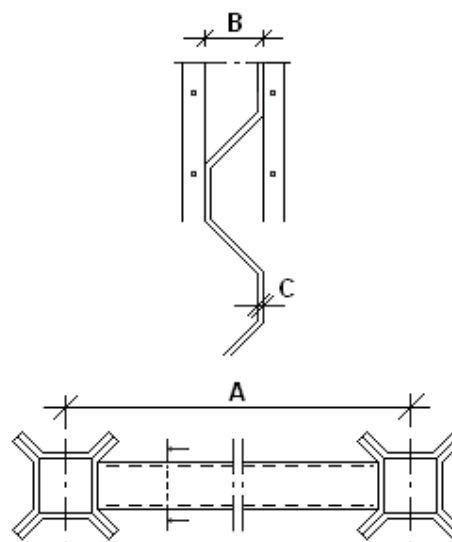
Figura 4: Montagem dos painéis num silo prismático quadrado Antti.

Segundo o fabricante, os silos prismáticos Antti não necessitam de grandes áreas de terra em separado para sua implantação. São pintados externamente combinando com o seu entorno formando uma combinação equilibrada com outras construções industriais e estruturas. Graças à construção pré-fabricada, a expansão dos silos prismáticos quadrados é fácil. São recomendados para armazenagem de matéria-prima industrial e proporcionam um maior volume de armazenagem para o espaço disponível. No Quadro 2 apresentam-se as dimensões padronizadas dos painéis pré-fabricados desse sistema de construção.

**SILOS ANTTI-TEOLLISUUS**  
DIMENSÕES DOS PAINÉIS  
PRÉ-FABRICADOS

A	B	C
1055	100	1,5 – 2,0
2010	100	1,5 – 3,0
3125	107	2,0 – 3,0
3125	107	2,0 – 3,0
3850	175	3,0 – 5,0

Dimensões em milímetros



Fonte: Brochura Antti-Teollisuus (2006).

Quadro 2 - Dimensões padronizadas dos painéis.

## 2.2.2 América do Norte

### ▪ Lemanco – NE – Estados Unidos da América

Os silos padronizados Lemanco (Figura 5) são projetados para armazenar material seco a granel com densidades até 2,4 t/m<sup>3</sup> e capacidade máxima de armazenamento no compartimento de 160,8 toneladas (Quadro 3).

Dimensões do Módulo	1,8 m x 1,8 m	2,1 m x 2,1 m	2,4 m x 3,0 m	3,0 m x 3,0 m
Volume Máximo (m <sup>3</sup> )	97,8	143,7	185,7	227,7
Densidade Máxima (t/m <sup>3</sup> )	1,922	2,402	2,402	2,402
Capacidade Máxima (t/m <sup>3</sup> )	70,6	101,5	131,1	160,8

Fonte: Chief Industries, Inc. (2006).

Quadro 3 - Característica dos silos modulares Lemanco.



Fonte: Chief Industries, Inc. (2006)

Figura 5: Ampliação do silo existente.

Segundo o fabricante o planejamento de cada sistema de silos é estabelecido de acordo com o volume e a densidade dos produtos, de modo a garantir a qualidade e valor na armazenagem, promover o fluxo do produto e minimizar a formação de arcos. O sistema de silos modulares está disponível em diversos tamanhos de módulos padronizados. Cada módulo ou compartimento pode ser agrupado em diversos tamanhos de células aproveitando as paredes internas em comum.

Os compartimentos dos silos podem ser divididos internamente em duas ou em quatro partes, característica que é vantajosa quando se armazenam volumes pequenos de diversos produtos. São construídos em módulos de 1,8 m x 1,8 m, 2,1 m x 2,1 m, 2,4 m x 3,0 m e 3,0 m x 3,0 m; e paredes com até 21 metros de altura.

De acordo com o fabricante, o sistema tem sido replanejado e aperfeiçoado de modo a proporcionar uma montagem rápida (Figura 6) e um melhor desempenho com o mínimo de manutenção e prolongada vida útil. Tem aplicação na industrialização de fertilizantes, minerais, grãos, rações, plásticos e farmacêuticos; no processamento e tratamento de sementes; no processamento de café, proteína animal e produtos químicos.

As paredes externas dos silos são construídas em aço galvanizado e duplamente parafusadas em cada emenda horizontal para garantir a rigidez durante o enchimento e esvaziamento do compartimento. As paredes internas são de aço carbono em bobinas usinadas a quente, exceto as quatro primeiras séries no topo do silo, que são de aço galvanizado.



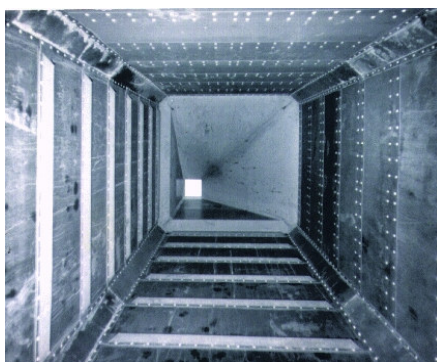
Essa disposição construtiva tem por objetivo proporcionar proteção à corrosão nas chapas de repartição quando o ângulo de repouso não permite que o produto armazenado encha completamente o compartimento até o topo das paredes.



Fonte: Chief Industries, Inc. (2006).

Figura 6: Montagem dos painéis em um silo prismático sistema modular Lemanco.

Os reforços externos são produzidos em aço galvanizado espesso. As nervuras horizontais são conformadas numa seção do tipo cartola inclinada (Figura 7), a qual é parafusada duplamente nas abas à parede. As colunas internas e laterais são em perfil de chapa dobrada composta por cantos chanfrados que se prolongam desde o topo da tremonha até a cobertura.



Fonte: Chief Industries, Inc. (2006).

Figura 7: Nervura horizontal interna tipo cartola inclinada, canto chanfrado que forma a coluna.

Segundo a Chief Industries, Inc. os cantos chanfrados compõem um sistema com quatro propósitos:

- formar os quatro lados da coluna de sustentação em todas as interseções dos quatro compartimentos;
  - servir como coluna de ventilação, mantendo a aeração dos produtos armazenados;
  - com produtos que possuem fluxo desordenado, os chanfros proporcionar saída para o ar capturado, prevenindo um intenso vácuo, o qual pode causar o colapso das paredes e do teto do silo ou danos à tremonha;
  - eliminar os cantos com 90°, os quais podem causar aderência do produto e, conseqüentemente, a sua contaminação. Nas nervuras horizontais internas que possuem uma inclinação mínima de 60°, auxiliar o fluxo do produto e aumentar a integridade estrutural da parede do silo.
- 
- Vertilok – CA– Estados Unidos da América

Os silos do sistema Vertilok (Figura 8) são projetados e construídos para armazenar materiais com densidades entre 0,32 e 1,92 t/m<sup>3</sup> e capacidade máxima por compartimento de 161,4 m<sup>3</sup>.



Fonte: Steel Structures Inc. (2006).

Figura 8: Sistema de Silos Vertilok, expedição de uma indústria de rações.



Os painéis são pré-fabricados, produzidos com larguras até 3,66 metros e comprimentos até 17,68 metros; são conformados horizontalmente com seção trapezoidal. São conectados por parafusamento nos cantos formando os compartimentos do silo e montados sobre uma estrutura de sustentação.

### 2.2.3 América do Sul

- Intecnial – RS – Brasil

Silos prismáticos multicelulares, com paredes conformadas horizontalmente em seção trapezoidal, são projetados e construídos de acordo com as características da planta industrial, do volume de armazenamento e das propriedades físicas dos produtos a serem armazenados. São aplicados em diversos setores industriais, destacando-se o agroindustrial, com ênfase nas fabricas de rações e armazenagem de sementes (Figura 9 e 10).



Fonte: Acervo do Autor

Figura 9: Silos para estocagem semente de milho. Proprietário: Agrocere S.A., Sta. Helena, GO.

Os painéis das paredes são preparados na indústria em aço carbono ASTM A-36 e montados no local da edificação sobre a estrutura metálica do edifício por soldagem contínua dos painéis com as colunas em seção tubular quadrada, formando-se, desse modo, os compartimentos de armazenamento com seções entre 1,5 e 6,0 metros, variando de meio em

meio metro (Figura 9 e 10, respectivamente). A altura das células é determinada em função da capacidade de processamento da planta industrial.

Na Figura 10 podem-se observar os silos parcialmente montados, bem como os diversos tamanhos de módulos das células nos setor de recepção de produtos (lado esquerdo da figura) e expedição do produto finalizado (lado direito da figura). As colunas intermediárias e dos cantos da célula também participam na sustentação do teto de fechamento das células de armazenamento, dos andares superiores e do telhado do edifício.



Fonte: Acervo do Autor.

Figura 10: Vista parcial da montagem indústria de ração com capacidade de 40 toneladas por hora. Proprietário: Cooperativa Mista Entre Rios, Colônia Vitória, Guarapuava, PR.

As paredes externas do edifício são revestidas com telhas de aço pintadas para garantir a integridade dos materiais armazenados, a proteção dos equipamentos eletromecânicos de manejo e processamento dos produtos, bem como a redução da temperatura interna das instalações.

A Figura 11 apresenta uma vista parcial de uma fábrica de rações, onde pode ser observada a montagem dos silos e janelas já concluídas e o fechamento das paredes externas em fase final de conclusão.



Fonte: Acervo do Autor

Figura 11: Montagem indústria de ração. Proprietário: Cooperativa Mista Entre Rios, Colônia Vitória, Guarapuava, PR.



## 3 FUNDAMENTOS DO PROJETO ESTRUTURAL DE SILOS PRISMÁTICOS

### 3.1 Diretrizes no projeto de silos prismáticos

Na prática, o projeto da estrutura de silos de seção retangular é baseado nos mesmos critérios empregados para silos de seção circular. Uma vez que o raio hidráulico é definido para o silo de seção retangular, os procedimentos recomendados para delinear o fluxo e a pressão (por conseguinte, o projeto estrutural) referem-se aos silos de seção circular. Fluxos de massa ou de funil podem acontecer e determinar as dimensões finais da estrutura. Devem-se adotar no projeto as mesmas precauções com relação a problemas identificados nos silos circulares, como interrupção do fluxo pela formação de um canal vazio cercado de material estático (*ratholing*), ou cargas especiais (oriundas da expansão térmica) do material armazenado (BROWN, 1998).

Considerando-se as dimensões, a forma, a função, o projeto e a análise estrutural das células de armazenamento, existem dois tipos essenciais de células: células baixas (*shallow bins* ou *bunkers*) e células esbeltas (*deep bins* ou *bins*). A principal diferença entre as duas é o comportamento do material armazenado, o qual é influenciado em ambas pela geometria e pelas características do material armazenado na célula. As pressões do material sobre as paredes e o fundo são usualmente determinadas por um método para células profundas e outro para células baixas (TROITSKY, 1990).

Para o projeto de silos e outros equipamentos de manejo do granel é obrigatório o conhecimento das *propriedades de fluxo* dos sólidos a granel, a fim de serem evitados problemas de fluxo (como arcos nas tremonhas e segregação). Além disso, faz-se necessário uma grande quantidade de informações para a avaliação da fluabilidade do produto (como, por exemplo, avaliações comparativas, para se determinar a utilização de equipamentos para

promoção ou melhoria de fluxo), controle de produção e garantia de qualidade (SCHULZE, 1998).

Portanto, a primeira etapa para o cálculo das ações em silos é o estudo das propriedades do produto a ser armazenado. Para isso, torna-se necessária a caracterização do produto, que consiste em determinar as *propriedades físicas*, também chamadas de *propriedades de fluxo*, as quais se referem ao comportamento do produto e surgem das forças que atuam sobre as partículas individualmente. A importância em determinar as propriedades do produto reside no fato de influenciarem no padrão de fluxo, nas pressões atuantes, na geometria e rugosidade da parede da célula de armazenamento e no dispositivo de descarga (tremonha), entre outros (PALMA, 2005).

### 3.2 Métodos de classificação das células

Segundo Safarian e Harris (1985), as relações geométricas de um silo, especialmente a relação entre a altura de armazenamento do produto e a menor dimensão lateral, afetam o comportamento dos materiais armazenados após o enchimento e durante o esvaziamento. Desse modo, assumindo-se que a geometria do silo afeta as pressões, para se eleger uma base apropriada à avaliação da pressão o silo será classificado como célula esbelta (*deep bin*) ou célula baixa (*shallow bin* ou *bunker*). Uma classificação exata (na qual também se considera a condição de fluxo) pode ser praticada, no entanto os métodos amplamente empregados são apresentados a seguir:

#### a) Aproximações empíricas

##### 1. Por Dishinger

$$H \geq 1,5\sqrt{A} \quad (1)$$

##### 2. Pelo Código Soviético

###### 2.1 Para silos circulares

$$H > 1,5D \quad (2)$$

###### 2.2 Para silos retangulares

$$H > 1,5a \quad (3)$$

Onde:

$H$  = altura da parede do silo;

$A$  = área da seção horizontal da célula de armazenamento;

$D$  = diâmetro da seção horizontal da célula de armazenamento;

$a$  = menor dimensão da seção horizontal de uma célula retangular.

Assim, se a estrutura de armazenagem em avaliação satisfizer a uma das duas regras o silo será considerado esbelto; ao contrário, se nenhuma regra for satisfeita será considerado baixo.

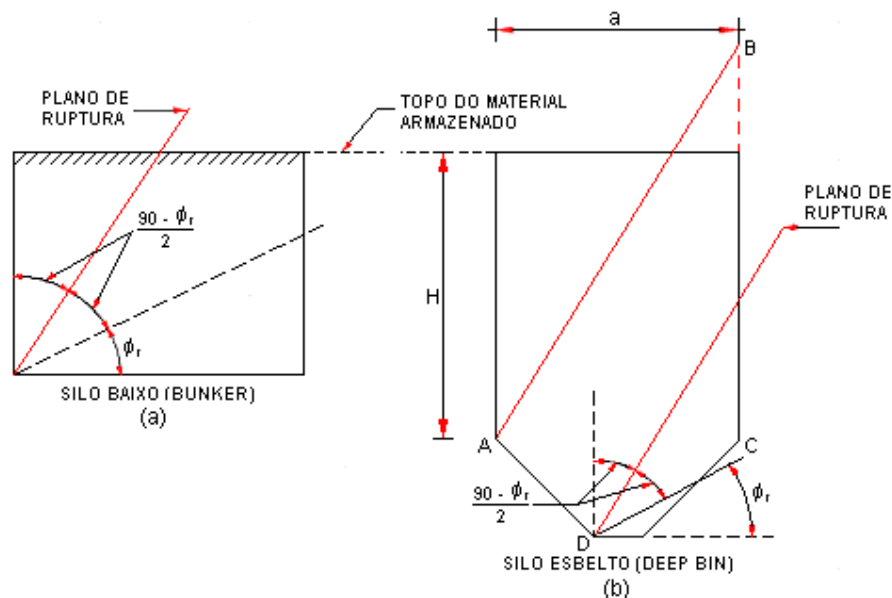
b) *Aproximação baseada na posição do plano de ruptura*

O plano de ruptura é determinado pela teoria de Coulomb. Desprezando-se o atrito do material com a parede do silo, para a situação de parede vertical e superfície de topo do produto armazenado horizontal, o plano de ruptura é a metade do ângulo formado entre o ângulo de repouso do produto ( $\phi_r$ ) e a parede vertical (Figura 12b). Desse modo, se o plano de ruptura cruzar o topo da superfície do material armazenado, o silo será considerado *baixo*; do contrário, será esbelto.

Segundo Troitsky (1980), existem diferentes aproximações da locação do plano de ruptura. Assim, considera-se que o plano de ruptura pode iniciar no fundo da tremonha, no ponto  $D$  ou no ponto  $A$  (Figura 12), com o que, na primeira interpretação, tem-se um silo esbelto e, na segunda, um silo baixo.

Admitindo-se que o plano de ruptura tem origem no ponto  $A$ , junção da parede vertical com a tremonha, e que este intercepta a parede vertical no ponto  $B$ , o intervalo  $BC$  é determinado pela expressão:

$$BC = AC \tan\left(\phi_r + \frac{90 - \phi_r}{2}\right) \quad (4)$$



Fonte: Troitsky (1990).

Figura 12: Classificação dos silos baseada na posição do plano de ruptura

Portanto, se a superfície do material armazenado em relação à altura  $H$  é menor que intervalo  $BC$ , o silo é baixo. Reescrevendo a Equação 4, obtêm-se as equações para a classificação dos silos:

Para silos baixos:

$$H \leq a \tan\left(45^\circ + \frac{\phi_r}{2}\right) \quad (5)$$

Para silos esbeltos:

$$H > a \tan\left(45^\circ + \frac{\phi_r}{2}\right) \quad (6)$$

Como já citado, a classificação de silos como esbeltos ou baixos indica que as pressões no enchimento dos silos devem ser determinadas aplicando-se preceitos diferentes. Desse modo, nos silos baixos a força vertical que gravita sobre a tremonha diverge muito pouco do peso do material armazenado e as pressões exercidas pelo produto sobre as paredes e o fundo da célula podem ser calculadas pelo método de Calil Jr. (1987) denominado de Rankine-Calil. Entretanto, nos silos esbeltos, esta força é substancialmente reduzida, já que grande parte do peso é transmitida para as paredes do silo e as pressões podem ser determinadas pela teoria de Janssen (1895) e ou Reimbert e Reimbert (1979).

De acordo com as principais normas internacionais, quanto à geometria, os silos são classificados segundo a relação entre a altura efetiva do produto armazenado ( $h$ ) e o maior diâmetro inscrito ( $d_c$ ) na seção horizontal. A Tabela 1 apresenta a classificação dos silos segundo as suas dimensões, de acordo com algumas dessas normas.

Tabela 1 - Classificação dos silos segundo a relação  $h/d_c$ .

NORMA	CLASSIFICAÇÃO		
	Baixo	Medianamente esbelto	Esbelto
Australiana AS -1996	$h/d_c < 1,0$	$1,0 \leq h/d_c \leq 3,0$	$h/d_c > 3,0$
Eurocode (ENV) - 1995	$h/d_c < 1,5$	---	$h/d_c > 1,5$
ISO - 1995	$h/d_c < 1,5$	---	$h/d_c > 1,5$
DIN 1055-6-2000	$h/d_c < 1,5$	---	$h/d_c > 1,5$

Fonte: Palma, 2005.

### 3.3 Propriedades físicas dos produtos armazenados

Segundo Gaylord e Gaylord (1984) e Troitsky (1990), sólidos a granel, como minério, concentrado, grão, farinha, ração, areia, material pulverulento e tablete plástico, são

agrupamentos de partículas sólidas distintas, e as propriedades de um sólido referem-se ao modo de agrupamento dessas partículas. Por essa razão, as forças ativas oriundas do material armazenado são dependentes das propriedades a seguir relacionadas:

- densidade –  $\rho$ ;
- granulometria;
- ângulo de atrito interno -  $\phi_i$ ;
- efetivo ângulo de atrito interno -  $\phi_e$ ;
- ângulo de atrito com a parede -  $\phi_w$ ;
- função fluxo –  $FF$ ;
- fator fluxo da tremonha -  $ff$ .

Calil Jr. (1997) propõe, de acordo com a norma australiana AS (1996), que, em termos de projeto, deverão ser determinados dois limites para cada parâmetro, de modo a delimitar a sua faixa de variação e, com isso, obterem-se as combinações mais desfavoráveis para cada caso. Esses limites são o menor valor possível (limite inferior) e o maior valor possível (limite superior) para o parâmetro considerado durante a vida útil do silo. A Tabela 2 apresenta o emprego adequado dos limites das principais propriedades de acordo com o objetivo.

Tabela 2 - Emprego do limite inferior e superior das propriedades físicas dos produtos.

Aplicação da propriedade		Peso específico do produto ( $\gamma$ )	Ângulo de atrito com a parede ( $\phi$ )	Ângulo de atrito interno ( $\phi_i$ )	Relação entre a pressão horizontal e vertical (K)
Tipo de fluxo	Funil	Inferior	Superior	Inferior	-
	Massa	Inferior	Inferior	Superior	-
Cálculo da máxima pressão horizontal na parede do silo, $P_h$		Superior	Inferior	Inferior	Superior
Cálculo da máxima pressão vertical, $P_w$		Superior	Inferior	Superior	Inferior
Força máxima de atrito na parede do silo, $P_w$		Superior	Superior	Inferior	Superior
Força vertical máxima na tremonha		Superior	Superior	Superior	Inferior
Cálculo das pressões máximas na tremonha no enchimento		Superior	Superior	Inferior	Inferior

Fonte: AS (1996)

Portanto, para serem determinadas as propriedades físicas dos produtos a granel armazenados, é necessário que se conheçam os lugares geométricos de deslizamento, os quais são determinados pela relação entre a tensão de cisalhamento e a tensão normal do produto armazenado, avaliando-se como ele desliza em relação a si próprio e com o material da parede. Para se obterem essas informações, são empregados testes laboratoriais com células de cisalhamento direto.



A Figura 13 exibe o aparato que compõe a máquina de cisalhamento translacional (Jenike Shear Test).

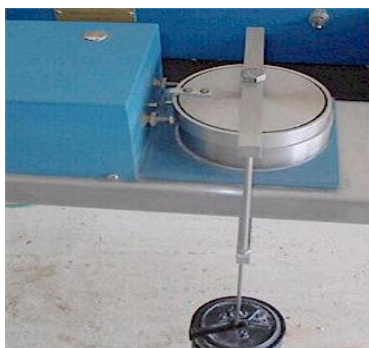


Fonte: Jenike & Johanson, Inc. (2006).

Figura 13: Aparato da máquina de cisalhamento - Jenike Shear Test.

Ao fundo, vê-se o ploter que registra a leitura da célula de carga localizada no box retangular (unidade de cisalhamento) montado em frente ao ploter. Essa unidade contém um pequeno motor, que impulsiona a célula de carga horizontalmente na direção da base circular fixa de aço inox (à direita do box) sobre a qual será afixada a célula de cisalhamento.

Especificamente na Figura 14 pode-se observar a haste da célula de carga saindo do box na direção da célula de cisalhamento, a qual é composta por duas seções: um anel inferior, que se encaixa na base circular fixa, e um anel superior, que se desloca sob ação da célula de carga que está conectada com a tampa da célula, permitindo, desse modo, o cisalhamento sobre o anel inferior enquanto uma carga vertical é aplicada pelo pendural de pesos. Esse teste permite que se determine a resistência do produto a granel em função da pressão aplicada sobre este.



Fonte: Marinelli (2003)

Figura 14: Aplicação da carga vertical na célula de cisalhamento.

Por fim, na Figura 15 é apresentado o arranjo efetuado no anel inferior da célula de cisalhamento, o qual foi reposicionado sobre uma amostra do material da parede. O pendural de pesos aplica uma carga simulando as pressões que atuam no silo, e a força de corte é plotada em função dessa pressão. As informações geradas durante esse teste resultam no ângulo de atrito do produto armazenado com a parede.

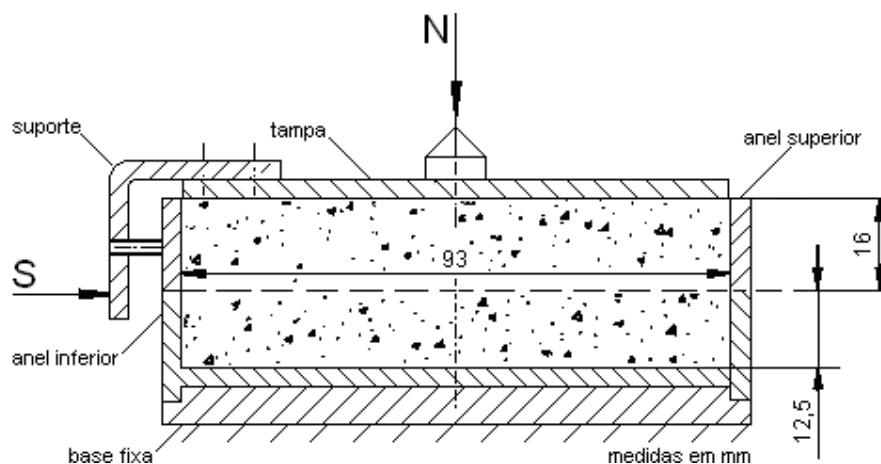


Fonte: Marinelli (2003).

Figura 15: Célula de cisalhamento para determinação do ângulo de atrito com a parede.

### 3.3.1 Determinação do ângulo de atrito interno

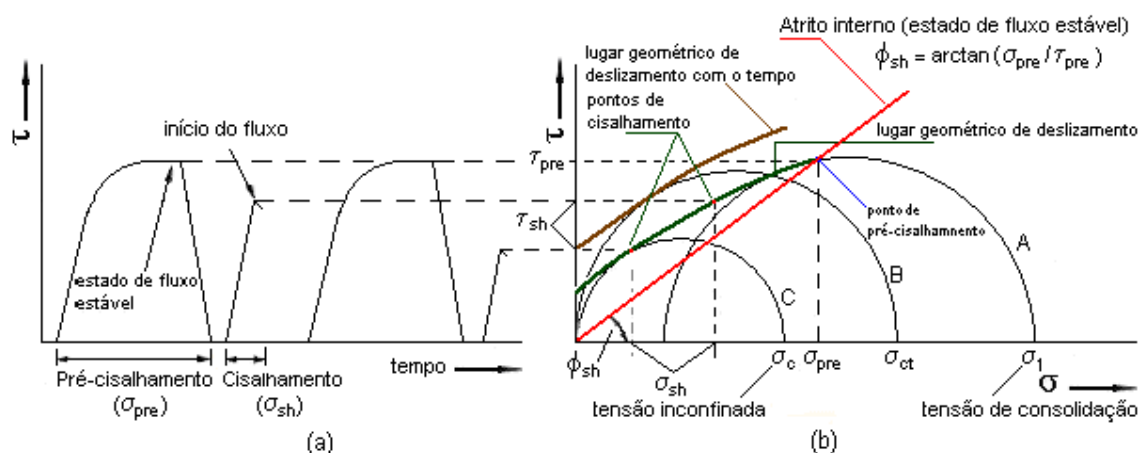
Para realização do teste, a amostra de produto é vertida dentro da célula de cisalhamento Figura 16 e pré-consolidada manualmente. Em seguida, é cisalhada por uma tensão normal  $\sigma_{pre}$ , a qual é ajustada para uma força normal  $N$  específica.



Fonte: Adaptado de Schulze (2004).

Figura 16 : Seção da célula de cisalhamento.

A força de corte  $S$  aumenta com o tempo  $t$ , como indicado na Figura 17a. Além da tensão de cisalhamento, a densidade da amostra também aumenta. Após um certo tempo, a densidade e a tensão de cisalhamento  $\tau_{pre}$ , que são função da tensão normal  $\sigma_{pre}$  tornam-se constantes, o que significa que para cada tensão normal  $\sigma_{pre}$  resultam uma densidade e uma tensão de cisalhamento constantes e específicas. A deformação de um sólido a granel nessa condição chama-se de "estado de fluxo estável", e o processo todo até se alcançar o estado de fluxo estável de "pré-cisalhamento". Alcançado o estado de fluxo estável, o pré-cisalhamento é interrompido e a célula de carga, revertida até  $S = 0$  ( $\tau = 0$ ). Os valores da tensão normal  $\sigma_{pre}$  e tensão de cisalhamento  $\tau_{pre}$  formam o ponto do estado de fluxo estável no diagrama de tensões  $\sigma \times \tau$  (Figura 17b).

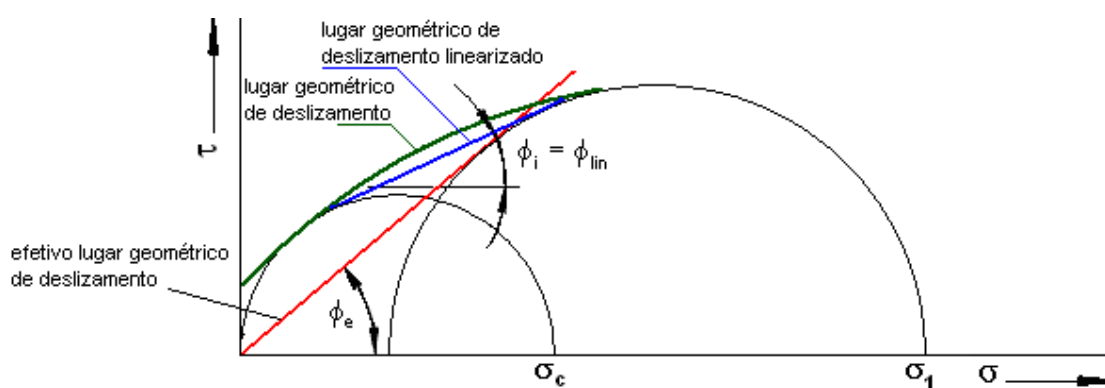


Fonte: Adaptado de Schulze (2004)

Figura 17: Gráfico das tensões de cisalhamento e do lugar geométrico de deslizamento.

Subseqüentemente ao pré-cisalhamento, a amostra é submetida a uma redução da tensão normal  $\sigma_{sh} < \sigma_{pre}$  e cisalhada até a ruptura. Esse processo é chamado de "cisalhamento", no qual, num nível específico da tensão de cisalhamento, a amostra começa a fluir (ruptura), o que corresponde a uma expansão do volume (redução da densidade da amostra) e a uma redução da tensão de cisalhamento (Figura 17a). O valor máximo da tensão de cisalhamento identifica o ponto onde inicia o deslizamento. A coordenada dos valores das tensões  $\sigma$  e  $\tau$  ( $\sigma_{sh}$ ,  $\tau_{sh}$ ), define o ponto de limite do fluxo, também conhecido como "lugar geométrico de deslizamento" (*yield locus*). Desse modo, quanto mais amostras forem pré-cisalhadas sob uma mesma tensão normal  $\sigma_{pre}$ , mas cisalhadas até a ruptura em diferentes níveis de tensão normal  $\sigma_{sh} < \sigma_{pre}$ , o percurso do lugar geométrico de deslizamento no diagrama de  $\sigma \times \tau$  poderá ser determinado com maior precisão.

Portanto, de posse do lugar geométrico de deslizamento válido para uma densidade específica  $\rho$  da amostra, podem-se determinar os parâmetros das propriedades de fluxo (Figura 17 e 18). As tensões do círculo de Mohr são estabelecidas no diagrama  $\sigma \times \tau$ . A tensão de consolidação  $\sigma_1$  é igual à tensão principal maior do círculo que é tangencial ao lugar geométrico de deslizamento e passa sobre o ponto de fluxo estável ( $\sigma_{pre}$ ,  $\tau_{pre}$ ). Esse círculo de tensões representa as tensões na amostra no final do procedimento de consolidação (tensões no estado de fluxo estável). A tensão inconfina  $\sigma_c$  resulta do círculo de tensões que é tangente ao lugar geométrico de deslizamento e que passa através da origem ( $\sigma_2 = 0$ ).



Fonte: Adaptado de Schulze (2004).

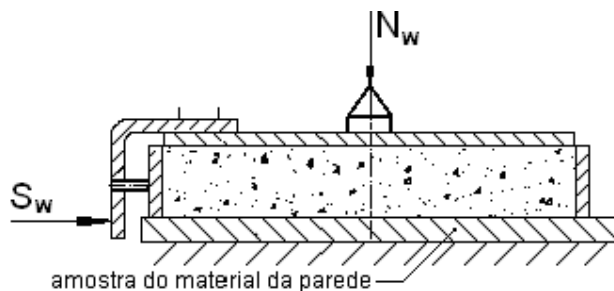
Figura 18: Representação gráfica do ângulo de atrito.

Resumindo, como já foi exposto, a medida direta do atrito interno no estado de fluxo estável determina o ângulo de atrito interno  $\phi_{sh}$ , que é definido pela inclinação da linha reta que passa pela origem e pelo ponto de pré-cisalhamento (Figura 17b). A tangente ao maior círculo de Mohr e que passa pela origem é chamada de "efetivo lugar geométrico de deslizamento" e o ângulo que forma com o eixo é chamado de "efetivo ângulo de atrito interno"  $\phi_e$ . Como o maior círculo de Mohr indica uma condição de estado de fluxo estável, o ângulo  $\phi_e$  pode ser considerado a medida do atrito interno no estado de fluxo estável.

O ângulo de atrito interno  $\phi_i$  é definido como a inclinação local do lugar geométrico dos estados de deslizamento. Em virtude de a inclinação do lugar geométrico de deslizamento seguir a forma curva ao invés de reta, o ângulo de atrito interno varia ao longo do lugar geométrico de deslizamento. Para a maioria das aplicações é suficiente um único ângulo de atrito interno; neste caso, o ângulo de atrito interno é definido pela inclinação  $\phi_{lin}$  do lugar geométrico de deslizamento linearizado. A linearização do lugar geométrico de deslizamento resulta da tangente comum a ambos os círculos de tensões de Mohr mostrados na Figura 18.

### 3.3.2 Determinação do ângulo de atrito $\phi_w$ do produto armazenado com a parede

O ângulo de atrito do produto armazenado com a parede é obtido na célula de cisalhamento substituindo-se a base da célula de cisalhamento por uma amostra do material de parede que será avaliado (Figura 15). A força de cisalhamento ou a tensão de cisalhamento  $\tau_w$  que são necessárias para mover a célula com a amostra do produto através do material da parede são medidas sob diferentes tensões normais  $\sigma_w$ .

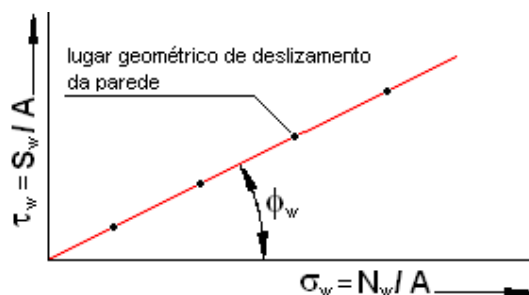


Fonte: Adaptado de Schulze (2004)

Figura 19: Arranjo da célula de cisalhamento para determinação do ângulo de atrito  $\phi_w$ .

Se os pares de valores medidos ( $\sigma_w$ ,  $\tau_w$ ) são plotados num diagrama  $\tau_w \times \sigma_w$  (Figura 20), o resultado da união dos pontos medidos fornece o lugar geométrico de deslizamento com a parede. O ângulo de atrito com a parede  $\phi_w$  resulta da inclinação do lugar geométrico de deslizamento com a parede e o eixo  $\sigma_w$ . Se lugar geométrico de deslizamento com a parede não for uma linha reta ou ainda não passe pela origem, e o ângulo de atrito com a parede  $\phi_w$  dependerá da tensão normal com a parede  $\sigma_w$ . Nesse caso  $\phi_w$  deve ser calculado para cada tensão normal da parede  $\sigma_w$  pela relação:

$$\phi_w = \arctan \frac{\tau_w}{\sigma_w} \quad (7)$$



Fonte: Adaptado de Schulze (2004)

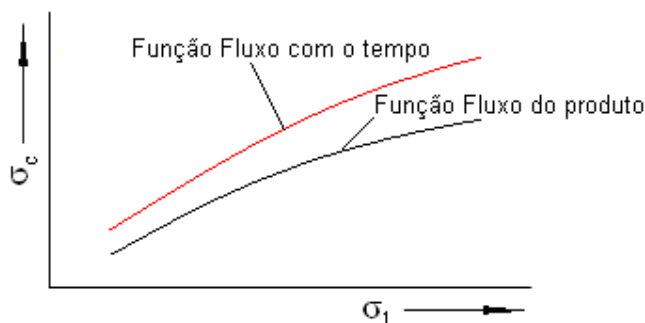
Figura 20: Representação gráfica do lugar geométrico de deslizamento com a parede.

Segundo Schulze (2004), com esse ensaio todos os tipos de materiais (por exemplo: concreto, aço e alumínio) podem ser testados com a célula de cisalhamento. Com isso, é possível decidir sobre o tipo de material ou acabamento da parede que teria mais vantagens para o fluxo do produto simplesmente se baseando no atrito com a parede.

### 3.3.3 Função de fluxo (FF)

A forma gráfica do lugar geométrico de deslizamento depende do estado de consolidação do produto. Quanto mais consolidado o produto armazenado estiver, maior será a tensão de consolidação  $\sigma_1$ , a densidade  $\rho$  e a tensão inconfina de ruptura  $\sigma_c$ . Assim, à medida que aumenta a tensão de cisalhamento  $\tau$  e tensão normal  $\sigma$ , o lugar geométrico de deslizamento é locado.

Para cada tensão de consolidação podem-se determinar uma densidade e um ponto de deslizamento do produto. A função  $\sigma_c = f(\sigma_1)$  é chamada "função fluxo" do produto  $FF$  (Figura 21).



Fonte: Adaptado de Schulze (2004)

Figura 21: Representação gráfica do lugar geométrico de deslizamento com a parede

Como alguns produtos tendem a consolidar progressivamente quando armazenados em repouso, torna-se necessária a determinação da função fluxo com o tempo  $FF_t$  (Figura 21). Para isso, a amostra desses produtos é solicitada por uma tensão de consolidação por um determinado tempo. No caso da consolidação com o tempo do produto armazenado, a tensão inconfina aumenta com a duração da consolidação. Assim, para cada período de armazenagem um lugar de deslizamento com o tempo no diagrama  $\sigma$ ,  $\tau$  pode ser encontrado (Figura 17), na qual o círculo de tensão C indica a tensão inconfina de ruptura com o tempo  $\sigma_{ct}$  que pertence ao lugar geométrico de deslizamento com o tempo.

A *função fluxo* e *função fluxo com o tempo* descrevem o comportamento de consolidação do produto armazenado. Portanto, quando do planejamento de um silo, devem ser conhecidas a fim de se prevenir problemas de fluxo. Para se caracterizar o comportamento de fluxo dos produtos armazenados, a relação  $FF$  da tensão de consolidação  $\sigma_1$  pela tensão inconfina de ruptura  $\sigma_c$  é usada:

$$FF = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \quad (8)$$

A relação  $FF$  constitui uma medida da fluibilidade; assim, quanto maior  $FF$ , melhor o fluxo. Isso pode ser observado na Figura 21, onde a relação  $FF$  cresce ao longo da função fluxo a medida que a tensão de consolidação  $\sigma_1$  aumenta. Jenike (1964) propõe para a avaliação da fluabilidade a seguinte classificação:

$FF < 2$	produto muito coesivo, não flui;
$2 < FF < 4$	produto coesivo;
$4 < FF < 10$	produto que flui facilmente;
$FF > 10$	produto de fluxo livre.

### 3.3.4 Fator de fluxo ( $ff$ ) – da tremonha

Segundo Palma (2005), o fator de fluxo da tremonha  $ff$  é outro parâmetro importante para o estudo da fluidez dos produtos armazenados, o qual, diferentemente, da função fluxo do produto  $FF$ , é uma propriedade do conjunto silo-produto, dependendo de algumas características de ambos. Para calcular o fator de fluxo do sistema é necessário conhecer o efetivo ângulo de atrito interno do produto  $\phi_e$ , o ângulo de atrito do produto com a parede  $\phi_{iw}$ , a geometria e inclinação da tremonha  $\alpha$ .

O cálculo do fator de fluxo  $ff$  supõe a solução das equações diferenciais representativas das tensões que surgem nos silos durante a descarga. Tais resoluções foram publicadas por Jenike (1964) para silos de diferentes geometrias, na forma de gráficos denominados de "gráficos de fatores de fluxo". Assim como a função fluxo  $FF$ , o fator fluxo da tremonha  $ff$  também é utilizado para indicar a fluidez do produto armazenado; porém, ao contrário da função fluxo, quanto mais baixo for seu valor, melhor será a fluidez do produto. Para caracterizar o fator fluxo da tremonha, a relação  $ff$  da tensão de consolidação  $\sigma_1$  pela tensão atuando onde um arco estável imaginário, formado por partículas do produto, é sustentado pelas paredes da tremonha  $\sigma_1'$ , é utilizada (Equação 9).

$$ff = \frac{\sigma_1}{\sigma_1'} \quad (9)$$

O fator de fluxo  $ff$  da tremonha pode ser determinado pelo equacionamento proposto por Enstad (1975):

$$F(\alpha) = \left( \frac{65}{130 - \alpha} \right)^m \left( \frac{200}{200 - \alpha} \right)^{1-m} \quad (10)$$

$$2\beta = \phi_{ws} + \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen}\phi_{ws}}{\text{sen}\phi_{es}} \right) \quad (11)$$

$$\theta = \beta + \alpha \quad (12)$$

$$X = \frac{2^m \text{sen}\phi_{es}}{1 - \text{sen}\phi_{es}} \left( \frac{\text{sen}(\beta + \theta)}{\cos(90 - \alpha)} + 1 \right) \quad (13)$$

$$Y = \frac{\left[ 2(1 - \cos \theta)^m \right] \theta^{1-m} \cos(90 - \theta) + \text{sen}\beta \text{sen}(\theta)^{1+m}}{(1 - \text{sen}\theta_{es})(\text{sen}\theta)^{2+m}} \quad (14)$$

$$ff = \frac{Y(1 + \text{sen}\phi_{es})}{2(X - 1)F(\alpha)\cos(90 - \alpha)} \quad (15)$$

onde:

$\phi_{es}$  = valor superior do efetivo ângulo de atrito interno;

$\phi_{ws}$  = valor superior do ângulo de atrito com a parede;

$m = 0$  para tremonhas com  $L \geq 3d$  (sendo  $L$  e  $d$ , respectivamente, o comprimento e o diâmetro inscrito na boca da tremonha);

$m = 1$  para tremonhas de eixo simétrico.

Para tremonhas com relação  $L \leq 3d$ , o valor de “ $m$ ” será determinado por interpolação;

$\alpha$  = ângulo de inclinação da tremonha com a vertical;

$\theta$  = ângulo de inclinação da tremonha com a horizontal.

### 3.3.5 Densidade

A densidade de um material  $\rho$  é a massa do material por unidade de volume.

São definidos três valores de densidade:



- solta ( $\rho$ ) e aerada ( $\rho_a$ ): é determinada pesando-se a amostra do produto não compactado. Devem ser aplicadas para calcular a capacidade do silo e da tremonha;
- compacta ( $\rho_u$ ): é determinada pela pesagem da amostra que foi compactada por vibração em um recipiente, ou por avaliação da alteração do volume sob pressão em vibração uma célula de cisalhamento;
- de trabalho ( $\rho_w$ ): é definida pela Equação 16 e empregada para determinar o grau de velocidade no enchimento ou descarga dentro ou fora do silo, respectivamente:

$$\rho_w = \frac{(\rho_u - \rho_a)^2}{\rho_u} + \rho_a \quad (16)$$

Calil Jr. (1990) recomenda que os valores superior ( $\rho_u$ ) e inferior ( $\rho$  e  $\rho_a$ , o último no caso de pós que aeram) para densidade devem ser usados nas várias equações, como indicado. Se um valor  $\rho$  é disponível,  $\rho_a$  deverá ser tomado como  $0,75\rho$  e,  $\rho_u$  como  $1,25\rho$ .

### 3.3.6 Granulometria

Produtos com partículas com dimensões maiores que  $250 \mu\text{m}$  apresentam fluxo livre (CALIL JR, 1990). Materiais granulares geralmente não são coesivos e fluem livremente, ao passo que os pulverulentos não. Assim, quanto maior for a densidade do material sólido, maior será a quantidade de partículas finas. Essa fração de material pulverulento é definida em relação à sua densidade (massa) e ao tamanho da malha da peneira. Segundo Carr (apud TROITSKY, 1990), a fração de material pulverulento é a parte que passa pela peneira padrão e especificada Tabela 3. A fração granular é a parte que fica retida. Portanto, a distribuição granulométrica da massa do material consiste na tabulação da percentagem de massa das partículas em cada agrupamento que passa ou fica retida numa malha específica.

Tabela 3 - Percentagem de pulverulento passante numa malha específica.

(% acumulada da massa que passa na peneira)	Peneira padrão - ASTM		
	Malha (Mesh)	Abertura nominal	
		(mm)	( $\mu\text{m}$ )
18	100	0,149	149
25 – 55	200	0,074	74
60 – 90	325	0,044	44

Fonte: Gaylord E. H., Gaylord C. H., (1984).

Calil Jr. (1984) recomenda a classificação das partículas dos produtos armazenados em função do diâmetro das partículas, como segue:

$D \geq 0,42 \text{ mm}$  – granular;

$0,42 \text{ mm} \geq D \geq 0,149 \text{ mm}$  – pulverulento coesivo ou não;

$0,149 \text{ mm} \geq D \geq 0,079 \text{ mm}$  – pulverulento coesivo fino;

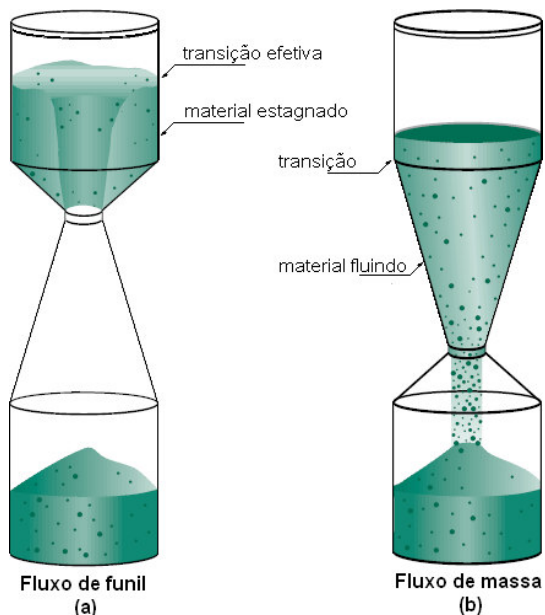
$D \leq 0,079 \text{ mm}$  pulverulento coesivo extra fino

### 3.3.7 Ângulo de repouso

Quando um material sólido a granel não consolidado cai livremente sobre uma superfície horizontal, de uma altura próxima o suficiente para minimizar o impacto, as partículas sólidas rolam sobre o monte. O ângulo de repouso  $\phi_r$  é a inclinação do cone formado pelo material escoado através de um funil sobre a superfície horizontal (TROITSKY, 1990). Para a maioria dos sólidos de fluxo livre (dimensões das partículas maiores que  $250 \mu\text{m}$ ) o ângulo de repouso é igual ao ângulo de atrito interno  $\phi_i$ .

### 3.3.8 Tipos de fluxos de materiais sólidos a granel em silos

Quando um silo é esvaziado, podem predominar dois tipos de fluxos diferentes: fluxo de massa e fluxo de funil (Figura 22). O fluxo de massa somente é possível se as paredes da tremonha forem suficientemente íngremes e lisas. Se não for esse o caso, o fluxo de funil prevalece. Isso significa que o material localizado nas zonas de estagnação emerge junto à parede do silo, permanecendo sem movimento durante a descarga (SCHULZE, 2005).

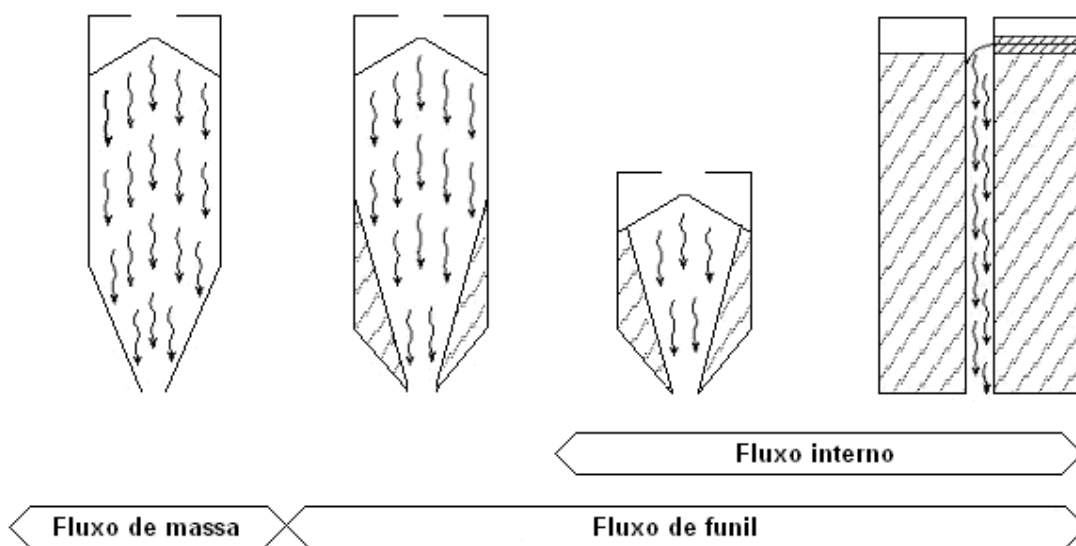


Fonte: Jenike & Johanson (2006).

Figura 22: Tipos de fluxos

O tipo de fluxo determina as características de descarga do material, o tipo de segregação, a formação ou não de zonas de material sem movimento e se o silo pode ser esvaziado completamente; determina, também, a distribuição das pressões nas paredes do silo e fundação e a integridade e custo da construção.

No Eurocode 1 (1995), dois tipos de fluxos são descritos: o fluxo de massa e o fluxo de funil (Figura 23). A pressão de descarga é influenciada pela forma do fluxo e a avaliação do fluxo deve ser efetuada antes de serem calculadas as cargas originadas pelo material armazenado. Em silos com fluxo de massa, todo o conteúdo flui como uma massa livre e o fluxo é determinado de forma que o primeiro material a entrar é o primeiro a sair na base. Em silos com fluxo de funil, o material armazenado flui em um canal interno e o fluxo é (formado) contínuo pelo material que entrou por último (topo). É tipicamente conhecido como um fluxo em que "o último material a entrar é o primeiro a sair".



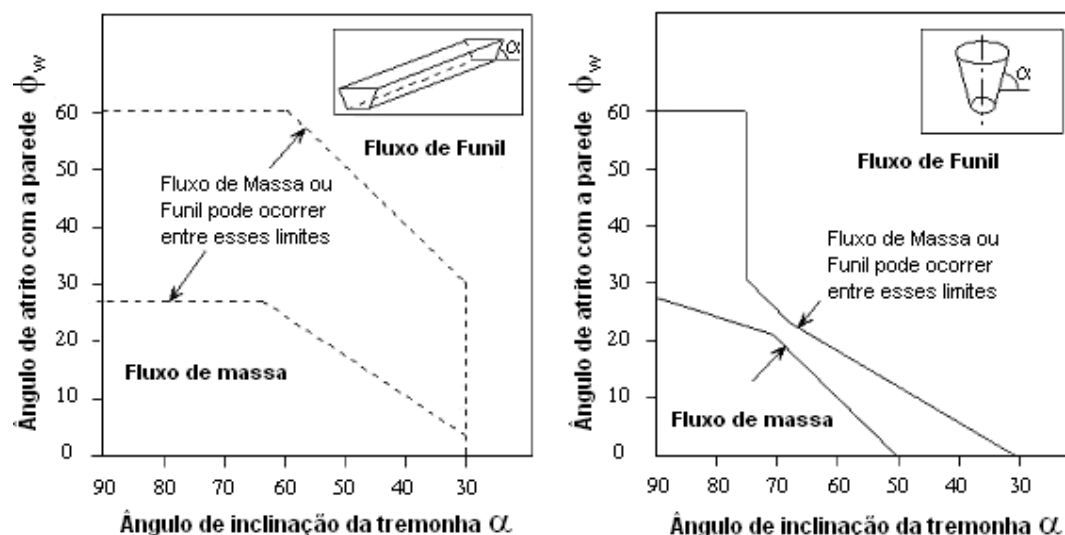
Fonte: Eurocode 1(1995).

Figura 23: Classificação dos fluxos.

O tipo de fluxo depende da inclinação das paredes da tremonha e do coeficiente de atrito com a parede. O fluxo de massa ocorre em silos esbeltos com paredes íngremes na tremonha, ao passo que o fluxo de funil acontece em silos baixos com tremonhas de pouca profundidade (rasas) ou fundo plano.

Para a predição do tipo de fluxo que irá ocorrer no silo a maior parte das normas internacionais apresenta um método gráfico no qual o fluxo é função da geometria da tremonha (cônica ou cuneiforme), do ângulo de inclinação da parede da tremonha e do ângulo

de atrito com a parede  $\phi_w$ . Para situações de limites entre fluxos de massa e funil, os silos e as tremonhas deverão ser projetados para ambos os casos. A Figura 24 apresenta esse método para as normas: DIN 1055-6, ISO 11697 e Eurocode 1.



Fonte: Eurocode 1 (1995).

Figura 24: Determinação gráfica do tipo de fluxo.

No Quadro 4 apresenta-se um resumo comparativo das vantagens para utilização do fluxo de massa ou de funil no projeto de fluxo de um silo.

Fluxo de massa	Fluxo de funil
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elimina a possibilidade de obstruções do fluxo.</li> <li>• Minimiza os efeitos associados à segregação por tamanhos.</li> <li>• Renova o material (não existem zonas mortas).</li> <li>• O fluxo é uniforme e fácil de controlar.</li> <li>• A densidade do fluxo durante a descarga é praticamente constante.</li> <li>• Toda a capacidade de armazenamento é aproveitada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Para uma mesma capacidade, a altura necessária é menor.</li> <li>• As pressões aplicadas às paredes são menores.</li> <li>• A abrasão sobre as paredes é menor.</li> </ul>

Quadro 4 - Comparação entre fluxo mássico e fluxo tubular. Vantagens.

### 3.4 Forças atuantes nos silos

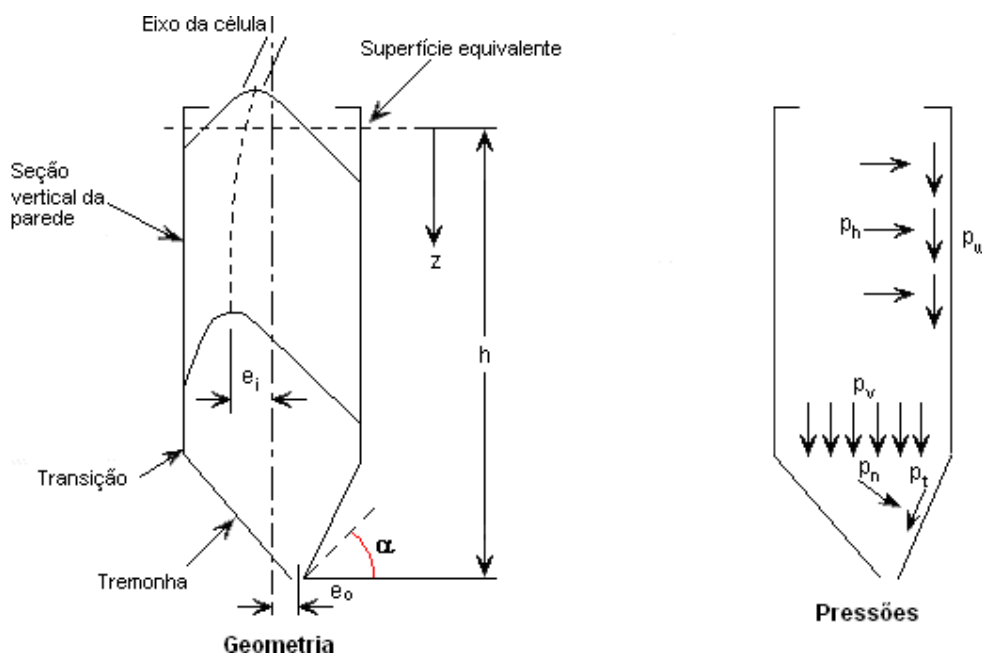
Segundo a norma brasileira NBR 8800:1986 (Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios), as ações a serem adotadas no projeto das estruturas e seus componentes são as estabelecidas pelas normas brasileiras NBR 6120:1980 (Cargas para o cálculo de estruturas de

edificações), NBR 6123:1988 (Forças devidas ao vento em edificações), ou por outras normas aplicáveis, e também pelo anexo B da NBR 8800:1986. Conforme a NBR 8681:2003 (Ações e segurança nas estruturas), essas ações são classificadas, segundo sua variabilidade no tempo, em três categorias: permanentes, variáveis e excepcionais.

Segundo Calil Jr. e Nascimento (1997), essas ações são descritas no projeto de silos como:

- $F_G$ : ações permanentes - aquelas constituídas pelo peso próprio da estrutura, da plataforma e dos equipamentos mecânicos instalados na cobertura e suspensos pela tremonha;
- $F_Q$ : ações variáveis - as que são constituídas pelas pressões de carregamento e descarga do produto armazenado, pressões de insuflação de ar, dilatação térmica do produto, deformações na fundação, dispositivos vibradores, efeitos climáticos, vento;
- $F_{Q,exc}$ : ações excepcionais - são as devidas ao possível impacto de veículos na estrutura de suporte ou com o silo e pressões decorrentes da explosão de pós.

Segundo Palma (2005) no projeto de silos, as principais ações a serem consideradas são as provenientes dos produtos armazenados que exercem pressões nas paredes verticais e no fundo do silo. Na parede vertical atuam pressões perpendiculares, denominadas "pressões horizontais  $p_h$ " e pressões de atrito do produto com a parede  $p_w$ . No fundo do silo atuam pressões denominadas "pressões verticais  $p_v$ " (Figura 25).



Fonte: Eurocode 1 (1995).

Figura 25: Pressões em silos.

### 3.4.1 Combinação das ações

Na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura, levando-se em conta os possíveis estados-limites últimos e os de serviço. As combinações de ações para os estados-limites últimos, de acordo com a NBR 8681, são as seguintes:

a) Combinações normais:

$$S_d = \sum_{i=1}^m (\gamma_{gi} F_{Gi}) + \gamma_{q1} F_{Q1} + \sum_{j=2}^m (\gamma_{qj} \psi_{oj} F_{Qj}) \quad (17)$$

b) Combinações últimas especiais ou de construção (situação transitória):

$$S_d = \sum_{i=1}^m (\gamma_{gi} F_{Gi}) + \gamma_{q1} F_{Q1} + \sum_{j=2}^m (\gamma_{qj} \psi_{oj,ef} F_{Qj}) \quad (18)$$

c) Combinações últimas excepcionais, exceto para o caso em que a ação excepcional decorre de incêndio:

$$S_d = \sum_{i=1}^m (\gamma_{gi} F_{Gi}) + F_{Q,exc} + \sum_{j=2}^m (\gamma_{qj} \psi_{oj,ef} F_{Qj}) \quad (19)$$

onde:

$F_{Gi}$  são as ações permanentes;

$F_{Q1}$  é a ação variável considerada como principal nas combinações normais, ou como principal para a situação transitória nas combinações especiais ou de construção;

$F_{Qj}$  são as demais ações variáveis;

$F_{Q,exc}$  é a ação excepcional;

$\gamma_{gi}$  são os coeficientes de ponderação das ações permanentes;

$\gamma_{qj}$  são os coeficientes de ponderação das ações variáveis;

$\psi_{oj}$  são os fatores de combinação das ações variáveis que podem atuar simultaneamente com a ação variável principal  $F_{Q1}$ , nas combinações normais;

$\psi_{oj,ef}$  são os fatores de combinação efetivos das ações variáveis que podem atuar concomitantemente com a ação variável principal  $F_{Q1}$  durante a situação transitória, ou com a ação excepcional  $F_{Q,exc}$ . O fator  $\psi_{oj,ef}$  é igual ao fator  $\psi_{oj}$  adotado nas

combinações normais, salvo quando a ação principal  $F_{Q1}$  ou a ação excepcional  $F_{Q,exc}$  tiver um tempo de atuação muito pequeno, caso em que  $\psi_{oj,ef}$  pode ser tomado igual ao correspondente  $\psi_2$ .

### 3.5 Pressões em silos

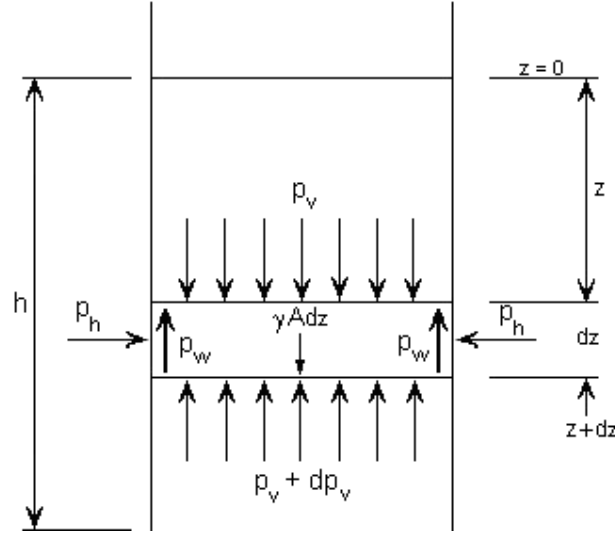
Segundo Li (1994), as paredes de silos estão sujeitas, simultaneamente, a pressões normais, verticais por fricção ou tração, provenientes do material ensilado e variáveis em todas as direções da parede. A magnitude e distribuição dessas pressões podem ser simétricas ou não simétricas e dependem do modo como o silo está sendo enchido ou esvaziado. Imperfeições geométricas causadas de forma inevitável durante a fabricação das paredes do silo e a flexibilidade das paredes também podem afetar intensamente as pressões sobre as paredes.

Apesar dos grandes esforços desenvolvidos nas últimas três décadas na exploração das pressões que agem sobre as paredes dos silos, a mais simples e funcional teoria para se estimarem as pressões sobre as paredes verticais ainda é, provavelmente, a de Janssen (1895). É amplamente aceito que as magnitudes das pressões exercidas sobre as paredes quando do enchimento estão próximas às estimadas por Janssen e que pressões freqüentemente observadas durante o esvaziamento do silo são muito maiores. Essas pressões são denominadas de “sobrepessões” ou “pressões de fluxo” e podem ser de duas a quatro vezes maiores que as pressões iniciais até mesmo em silos com disposição de descarga centralizada. Além disso, muitas experiências têm comprovado que grandes picos de pressões podem ocorrer no corpo do silo ou na tremonha (LI, 1994).

Para a avaliação das cargas em silos, as normas internacionais existentes estão fundamentadas em duas teorias: a de Janssen (1895), para a estimativa das cargas iniciais ou de carregamento no silo, e a de Jenike (1968), para a estimativa das cargas de fluxo em silos com fluxo de massa ou de funil (CALIL JR., 1990).

A teoria de Janssen (1895) consiste no equilíbrio de uma camada (fatia) elementar do produto, com altura  $dz$  e peso específico  $\gamma$ , sujeita às pressões verticais  $p_v$  e  $p_v + dp_v$  e às devidas ao atrito produzido pela força horizontal  $p_h$  sobre as paredes (Figura 26).

Considerando-se que o coeficiente de atrito  $\mu$  do produto com a parede da célula é tido como sendo constante e a relação entre pressão horizontal e pressão vertical é constante em toda altura da célula ( $K=p_h/p_v$ ), a pressão horizontal pode ser calculada do seguinte modo:



Fonte: Adaptado de Janssen (1895).

Figura 26: Forças em uma camada elementar horizontal da célula- Teoria Janssen.

$$A(p_v + dp_v - p_v) = \gamma \cdot A \cdot dz - \mu \cdot p_h \cdot U \cdot dz \quad (20)$$

$$dp_v = \gamma \cdot dz - \mu \cdot p_h \cdot \frac{U}{A} \cdot dz \quad (21)$$

onde:

$A$  é a área da seção transversal da célula;

$U$  é o perímetro da célula.

Sendo  $K dp_v = dp_h$  e substituindo  $dp_v$  na equação 21, tem-se:

$$\frac{1}{K} \frac{dp_h}{\left( \gamma - \mu \cdot p_h \cdot \frac{U}{A} \right)} = dz \quad (22)$$

Reorganizando as variáveis:

$$\frac{A}{U} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp_h}{\left( \frac{A}{U} \frac{\gamma}{\mu} - p_h \right)} = dz \quad (23)$$

Integrando a equação 23, tem-se que

$$\frac{-A}{U} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \ln \frac{dp_h}{\left( \frac{A}{U} \frac{\gamma}{\mu} - p_h \right)} = z - cte \quad (24)$$



Aplicando as condições de contorno em  $z = 0$ , obtém-se a expressão

$$p_{h(z)} = \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{A}{U} \cdot \left( 1 - e^{-zk\mu\frac{U}{A}} \right) \quad (25)$$

Nessa expressão  $p_{h(z)}$  é a pressão horizontal numa determinada cota da altura da célula computada a partir do topo desta.

A pressão vertical  $p_v$  é obtida da relação entre pressão horizontal e pressão vertical, substituindo-se  $p_h$  pela equação 25:

$$p_{v(z)} = \frac{1}{K} \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{A}{U} \cdot \left( 1 - e^{-zk\mu\frac{U}{A}} \right) \quad (26)$$

E a pressão de atrito na parede  $p_w$

$$p_w = \mu \cdot p_h \quad (27)$$

A força vertical resultante na parede  $P_{w(z)}$  por unidade de perímetro atuando na profundidade  $z$  pode ser obtida da integração vertical da equação 27:

$$P_{w(z)} = \mu \int p_h dz = \gamma \frac{A}{U} \left[ z - \frac{A}{\mu KU} \cdot \left( 1 - e^{-\mu KzU/A} \right) \right] = \frac{A}{U} (\gamma z - p_v) \quad (28)$$

Por ser a determinação das pressões um dos itens de maior responsabilidade do projeto, Araújo, Calil Jr. e Nascimento (1997) recomendam que o cálculo das pressões em silos altos seja efetuado com base nas prescrições da norma DIN 1055 (2000), uma vez que esta foi completamente reformulada desde a sua antiga versão de 1964, em vista de experiências práticas com sua utilização, baseadas em acidentes com silos reais.

### 3.5.1 Norma DIN 1055 – 6

Segundo a norma DIN 1055 - 6 (2000), fazem-se recomendações para o cálculo das pressões em silos destinados ao armazenamento de produtos granulares e pulverulentos coesivos. Não se incluem nesta norma produtos altamente coesivos (farinhas e forragens).

#### 3.5.1.1 Campo de aplicação

Esta norma se aplica a silos verticais e prismáticos, com fluxo de massa ou de funil; observados os seguintes limites:

- limite inferior:  $h/d > 0,80$ ;
- limite superior:  $P_{vf}/\gamma \leq 25$  m.

Sendo:

$h$  = altura efetiva do silo em metros;

$d$  = diâmetro inscrito na seção prismática horizontal da célula em metros;

$P_{vf}$  = pressão vertical estática no enchimento;

$\gamma$  = peso específico.

### 3.5.1.2 Relação entre as pressões horizontais e verticais (K)

Para a DIN 1055 – 6 (2000), o valor de  $K$  é definido pela expressão

$$K = 1,1(1 - \sin\phi_e) \quad (29)$$

Este fator consiste no coeficiente de empuxo de solos multiplicado por 1,1, e visa garantir que em pequenas alturas do produto armazenado, ou seja, na parte superior do silo, resultem curvas de ações próximas as que ocorrem no silo em serviço.

### 3.5.1.3 Pressões estáticas ou de carregamento

Para o cálculo das pressões horizontais, pressões verticais e pressões de atrito com a parede, a norma DIN 1055-6 adota formulação proposta por Janssen (1895), de acordo com o Quadro 5:

Pressões estáticas			Silo com fundo plano	Pw	K
$p_h$	$p_v$	$p_w$	Pressão vertical na base		
Eq. (25)	Eq. (26)	Eq. (27)	Eq. (26) multiplicada por 1,2	Eq. (28)	$1,1(1 - \sin\phi_e)$

Quadro 5 - Pressões de carregamento do silo e parâmetro K

### 3.5.2 Pressões dinâmicas ou de descarga

Segundo a DIN 1055 - 6 (2000), as pressões de descarga serão obtidas multiplicando-se as pressões de descarregamento (equações 22 e 24) por coeficientes de sobrepressão  $C_w$  e  $C_h$

$$P_{we} = C_w \cdot P_w \quad (30)$$

$$p_{he} = C_h \cdot p_h \quad (31)$$

$$C_w = 1,1 \text{ e } C_h = C_o$$

$C_o$  = valor tabelado pela DIN 1055 – 6 (2000) em função do produto armazenado. Para produtos não tabelados,  $C_o$  será obtido por:

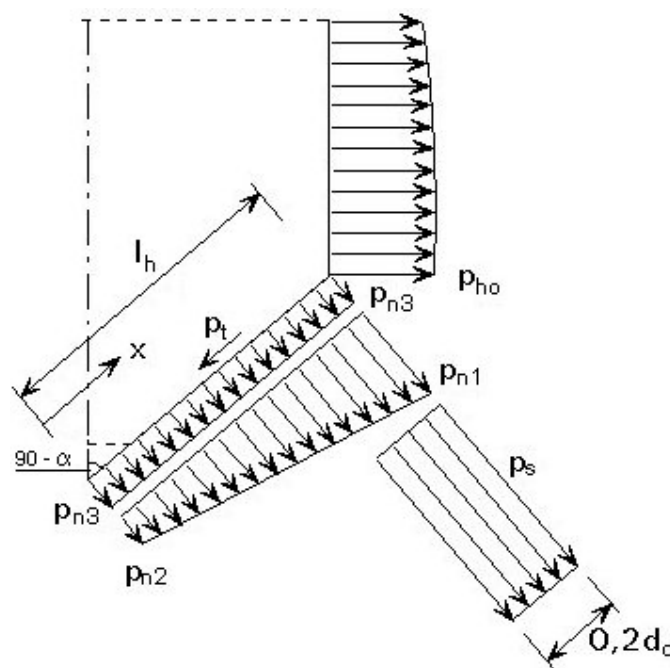
$$\text{Para } \phi_e < 30^\circ \quad C_o = 1,35 \quad (32)$$

$$\text{Para } \phi_e \geq 30^\circ \quad C_o = 1,35 + 0,02 \cdot (\phi_e - 30^\circ) \quad (33)$$

As cargas resistidas pelos apoios do silo serão determinadas do equilíbrio de forças usando a pressão vertical estática  $p_{ve}$  na transição multiplicada pelo fator empírico de 1,2 e pelo peso do produto na tremonha.

### 3.5.3 Pressões na tremonha

As pressões normais à tremonha são calculadas pela soma dos carregamentos em razão do produto dentro dela e dos carregamentos resultantes da sobrecarga vertical diretamente acima da transição (Figura 27).



Fonte: Eurocode (1995).

Figura 27: Pressões nas paredes da tremonha.

De acordo com a DIN 1055 – 6 (2000) em silos com fluxo de massa, no processo de esvaziamento ocorre um pico de pressão  $p_s$  na transição da parede vertical com a tremonha maior que a pressão horizontal no esvaziamento  $p_{he}$ .

O Quadro 6 resume as prescrições da norma DIN 1055 – 6 (2000) e Eurocode (1995) para o cálculo da pressões apresentadas na Figura 27.

$p_{n1}$	$p_{n2}$	$p_{n3}$	$p_n$	$p_t$	$p_s$
$p_v \left( 1,2 \cos^2 \Omega + K \sin^2 \Omega \right)$	$1,2 p_v \cos^2 \Omega$	$3,0 \frac{A}{U} \frac{\gamma K}{\sqrt{\mu}} \sin^2 \Omega$	$p_{n1} + p_{n2} + (p_{n1} - p_{n2}) \frac{x}{l_h}$	$\mu p_n$	$2 p_h$

Fonte: DIN 1055 –6 (2000) e Eurocode (1995).

Quadro 6 - Pressões sobre as paredes da tremonha – DIN 1055-6.

$p_{ho}$  = pressão horizontal na base da parede vertical;

$p_n$  = pressão normal sobre a parede da tremonha;

$p_t$  = pressão de atrito sobre a parede da tremonha;

$p_s$  = pressão aplicada na transição para silos com fluxo de massa;

$p_h$  = equação 25 na transição;

$p_v$  = equação 26 na transição;

$\Omega = 90^\circ - \alpha$ ;

$\alpha$  = ângulo de inclinação da tremonha com a vertical;

$d_c$  = diâmetro do maior círculo inscrito na seção transversal horizontal da célula.

$l_h$  = comprimento da parede da tremonha;

$x$  = distância entre o fundo da tremonha e  $l_h$  ( $0 \leq x \leq l_h$ ).

### 3.5.4 Pressões adicionais

As pressões adicionais devem-se ao fato de pressões assimétricas serem inevitáveis, mesmo em silos com carregamento concêntrico e eixo simétrico, sendo dependentes das propriedades de fluxo do produto armazenado e das imperfeições na geometria das paredes da tremonha e do silo. Do mesmo modo, heterogeneidade e mudanças probabilísticas no produto armazenado podem contribuir para flutuações na zona de fluxo. Por essas razões, os silos devem ser projetados para resistir às pressões assimétricas, tendo especial atenção aos momentos de flexão induzidos por essas pressões (PALMA, 2005).

A pressão adicional  $p_p$  será considerada atuando sobre qualquer parte do silo, no carregamento e na descarga, sendo determinada pela seguinte equação:

$$p_p = 0,2 \cdot \beta \cdot p_{hf} \quad (\text{carregamento}) \quad (34)$$

$$p_p = 0,2 \cdot \beta \cdot p_{he} \quad (\text{descarga}) \quad (35)$$

Nas equações 34 e 35,  $\beta$  depende da magnitude da excentricidade no carregamento e na descarga do silo e é determinado pela equação 36, observando-se o limite  $1 < \beta < 2$ .

$$\beta = 1 + 4 \frac{e}{d_c} \quad (36)$$

onde:

$e$  = ao maior valor da excentricidade devido ao carregamento  $e_i$  ou da excentricidade da boca de descarga  $e_o$  (Figura 25), e  $d_c$  é o diâmetro do maior círculo inscrito na seção transversal horizontal da célula..

#### 3.5.4.1 Método simplificado para determinação das pressões adicionais

A norma DIN 1056 apresenta também um procedimento simplificado para se levar em conta a pressão adicional em silos com diâmetro menor que 5,0m, o qual consiste na majoração das pressões horizontais atuantes no silo.

Para silos de concreto, silos com enrijecedores e silos de seção transversal não circular, as pressões são obtidas por:

$$p_{hf} = p_{hf} \cdot (1 + 0,2 \cdot \beta) \quad (37)$$

$$p_{he} = p_{he} \cdot (1 + 0,2 \cdot \beta) \quad (38)$$

Para silos de parede fina com seção circular, as pressões são dadas por:

$$p_{hf} = p_{hf} \cdot (1 + 0,1 \cdot \beta) \quad (39)$$

$$p_{he} = p_{he} \cdot (1 + 0,1 \cdot \beta) \quad (40)$$

$$p_{wf} = p_{wf} \cdot (1 + 0,1 \cdot \beta) \quad (41)$$

$$p_{we} = p_{we} \cdot (1 + 0,1 \cdot \beta) \quad (42)$$

A pressão adicional será tomada atuando sobre duas áreas quadradas opostas de lado do modo que se apresenta na Figura 28, expressa por:

$$s = 0,2 \cdot d \quad (43)$$

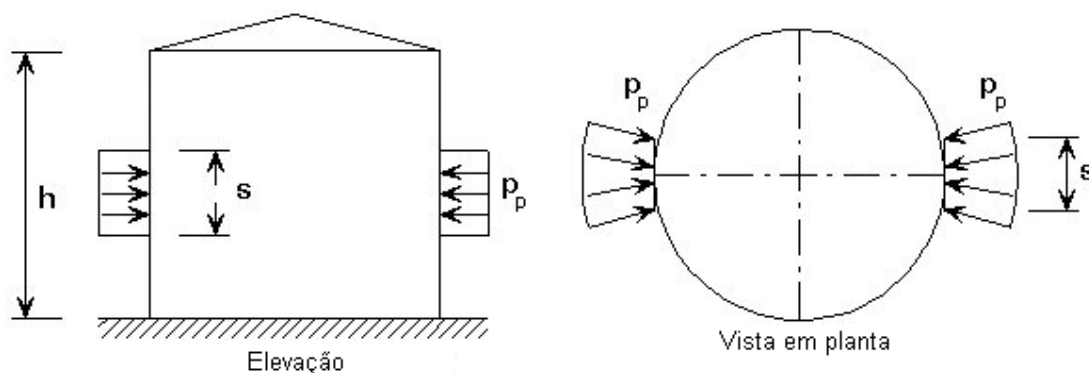


Figura 28: Aplicação da pressão adicional

### 3.5.5 Combinações de carregamento

Para levar em consideração a variabilidade das propriedades do produto armazenado e para obter os valores que representam o extremo dessas propriedades; a DIN 1055-6 recomenda que os valores do coeficiente de atrito com a parede  $\mu$  e da relação entre a pressão horizontal e a pressão vertical  $K$  tenham seus valores médios aumentados ou diminuídos por um fator de conversão como indicado na Tabela 4, de modo a se reproduzir a combinação mais desfavorável sobre a estrutura.

Tabela 4 - Combinações dos parâmetros  $\mu$  e  $K$ .

Carregamento	K	$\mu$
phmax	1,15 Km	0,9 $\mu$ m
pymax	0,9 Km	0,9 $\mu$ m
Pwmax	1,15 Km	1,15 $\mu$ m

Obs: o índice "m" corresponde ao valor médio do parâmetro.

## **4 ANÁLISE ESTRUTURAL DOS SILOS PRISMÁTICOS**

### **4.1 Considerações iniciais**

Sob a ação de carregamentos estáticos ou dinâmicos, nas paredes dos silos carregados originam-se complexas tensões de tração, compressão, flexão e torção, e sendo as tensões de torção resultantes da forma assimétrica do silo e do carregamento excêntrico do material armazenado.

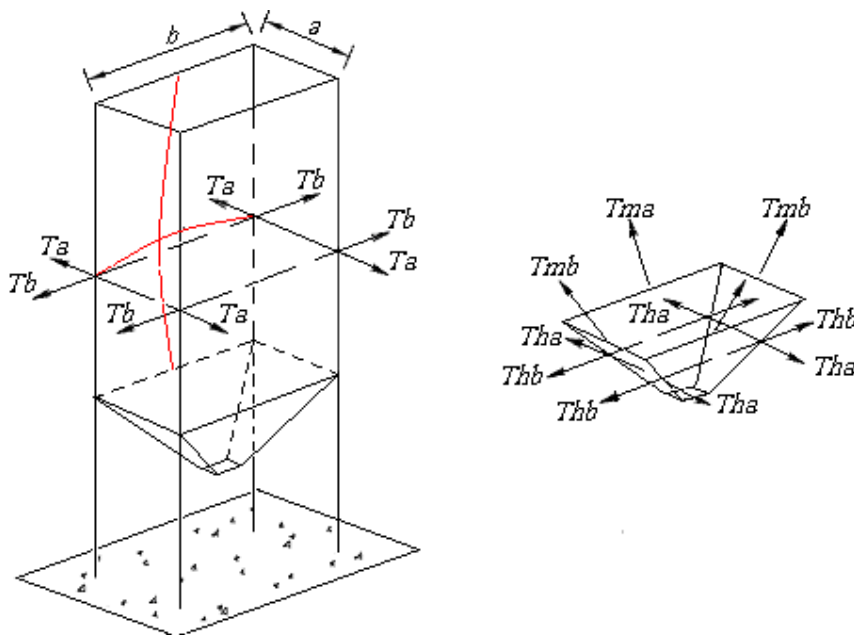
A análise exata da resistência de silos prismáticos é extremamente complexa, razão pela qual geralmente são utilizados métodos aproximados de análise estrutural são utilizados. No entanto, esses métodos aproximados proporcionam soluções práticas e seguras (TROITSKY, 1990), ao passo que os métodos de análise exatos são empregados para o projeto de silos complexos ou com grandes dimensões. Troitsky (1990) define o sistema estrutural característico de um silo prismático como uma estrutura espacial rígida composta por vigas (nervuras) horizontais e verticais de enrijecimento que suportam as placas de fechamento.

### **4.2 Forças e momentos que atuam no sistema estrutural dos silos prismáticos**

O planejamento e a análise estrutural de silos prismáticos são efetuados considerando-se as ações de tração e flexão originadas pela pressão do material armazenado, como mostrado na Figura 29.

Nas paredes verticais suportadas por colunas (Figura 29),  $T_a$  e  $T_b$  agem como forças horizontais. Além disso, as paredes estão sujeitas à flexão local, por causa da pressão lateral do carregamento atuante. Assim, as forças que atuam nos silos quadrados e retangulares produzem, em diversas partes da estrutura, tensões de flexão e corte, de modo que não se recomenda absorver essas forças somente nas placas de fechamento. Qualquer tentativa nesse

sentido certamente resultará em chapas muito espessas e, como consequência, num projeto totalmente antieconômico (TROITSKY, 1990).



Fonte: Troitsky (1990).

Figura 29: Forças de tração no sistema estrutural do silo.

Habitualmente, as chapas de fechamento, que formam a parede do silo, são projetadas para enrijecedores tanto na posição vertical como na horizontal, dependendo do projeto. Muitas vezes, os enrijecedores são dispostos para atuar no plano horizontal, resultando desse arranjo um grande número de células em serviço. As chapas de fechamento podem ser consideradas como placas simplesmente apoiadas ou contínuas entre os enrijecedores.

As paredes inclinadas da tremonha estão submetidas às ações de flexão e de tração, e também as forças de tração atuam horizontalmente e ao longo da parede inclinada da tremonha (força meridional). Além disso, é necessário considerar as forças de compressão vertical e as forças de atrito produzidas pela fricção do material armazenado com a parede do silo.

A pressão máxima nas chapas de fechamento dá-se sobre o fundo da tremonha. A placa de fechamento posicionada entre sucessivos enrijecedores estará sujeita a tensões de flexão, cisalhamento e tração longitudinal. Normalmente, a placa é projetada para resistir às tensões de flexão, desprezando-se as cisalhantes, e as de tração são absorvidas pelos enrijecedores, nos quais se pode incluir parte da placa.



Em razão dos argumentos apresentados é conveniente que se empreguem paredes enrijecidas dobradas horizontalmente em seção trapezoidal ou ziguezague, como meio de se aumentar a rigidez das placas de fechamento e por consequência diminuir a quantidade de material empregado na fabricação dos painéis.

### 4.3 Dimensionamentos das paredes conformadas horizontalmente

Ravenet (1992) recomenda fazer um estudo dos três tipos de flexões que podem ocorrer nas paredes dos silos durante o armazenamento de produtos agrícolas, que são:

- flexão geral no vão entre colunas sob efeito de empuxo horizontal do produto armazenado;
- flexão oblíqua entre colunas, sob o efeito da resultante do empuxo horizontal e da força de atrito do produto armazenado sobre a parede;
- flexão local das superfícies verticais ou inclinadas das dobras sob os efeitos do empuxo e da força de atrito definidas anteriormente.

Nos itens seguintes são apresentadas as expressões obtidas para a verificação das paredes segundo cada uma das configurações propostas. O cálculo dos momentos de inércia é apresentado em separado no Anexo A.

#### 4.3.1 Flexão geral nas paredes em conformação trapezoidal

A Figura 30 mostra o perfil da onda em conformação trapezoidal. Nesta figura,  $\theta$ ,  $t$  e  $L_c$  representam, respectivamente, o ângulo que forma o perfil inclinado com o eixo baricentrico  $X_c$  em graus, a espessura da chapa conformada e o segmento da seção paralelo ao eixo  $Y_c$  (vertical). O momento de inércia desse perfil para o eixo baricentrico  $Y_c$  é expresso pela equação:

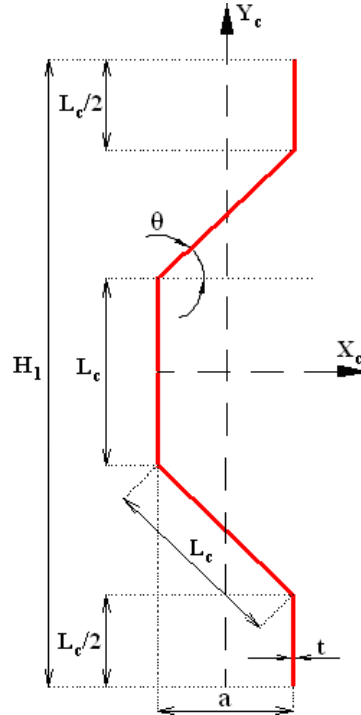
$$I_{Y_c} = 2 \cdot \left( \frac{1}{12} \cdot t \cdot L_c^3 \cos^2 \theta \right) + 2 \cdot \left[ \frac{L_c}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right] \frac{t^3}{12} + \left[ \frac{L_c}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right] t \frac{L_c^2}{4} \cos^2 \theta + \left( \frac{L_c \cdot t^3}{12} + \frac{t \cdot L_c^3}{4} \cos^2 \theta \right) \quad (44)$$

O módulo de resistência segundo o eixo  $Y_c$  é determinado por:

$$W_{Y_c} = \frac{2I_{Y_c}}{a} \quad (45)$$

onde  $a$  é distância entre segmentos verticais opostos da onda do perfil, definida por:

$$a = L_c \cdot \cos \theta \quad (46)$$



Fonte: Adaptado de Ravenet (1992).

Figura 30: Seção da onda trapezoidal com eixos de inércia  $Y_c$  e  $X_c$ .

O momento fletor, devido pressão lateral  $P_h$  exercida pelo produto armazenado, é expresso por

$$M_{Y_c} = \frac{P_h \cdot L^2}{12} \cdot H_1 \quad (47)$$

O esforço de tração devido ao produto armazenado é expresso por

$$T = \frac{P_h L^2}{2} \cdot H_1 \quad (48)$$

E a tensão atuante na parede devido flexão geral é definida por

$$\sigma_{Y_c} = \frac{P_h \cdot L^2 \cdot H_1}{12 \cdot W_{Y_c}} + \frac{P_h \cdot L \cdot H_1}{2 \cdot S} \quad (49)$$

onde:

$H_1$  = comprimento vertical de uma onda do perfil;

$L$  = distância entre colunas da parede do silo;

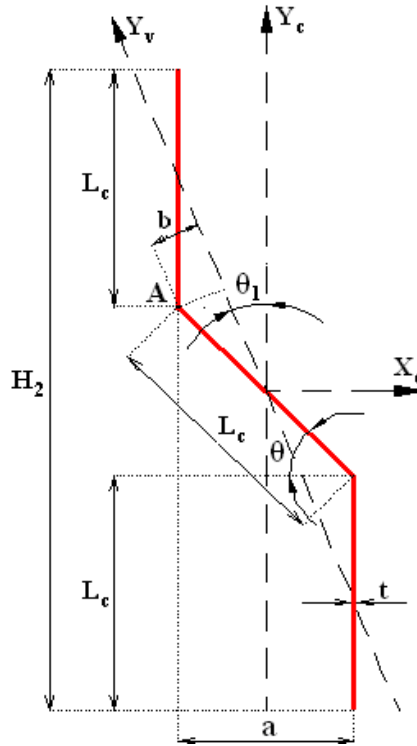
$P_h$  = pressão horizontal exercida pelo produto armazenado;

$S$  = área da seção transversal da onda do perfil;

$W_{yc}$  = módulo de resistência para o eixo baricentrico  $Y_c$ .

#### 4.3.2 Flexão oblíqua nas paredes em conformação trapezoidal

A Figura 31 mostra o perfil da onda em conformação trapezoidal.



Fonte: Adaptado de Ravenet (1992).

Figura 31: Seção da onda trapezoidal com eixos de inércia  $Y_c$ ,  $X_c$  e  $Y_v$ .

O momento de inércia desse perfil para o eixo  $Y_v$  é definido pela expressão:

$$I_{Y_v} = \frac{I_{X_c} + I_{Y_c}}{2} - \frac{I_{X_c} - I_{Y_c}}{2} \cos 2\theta_1 + I_{X_c Y_c} \sin 2\theta_1 \quad (50)$$

na qual  $I_{X_c}$  é o momento de inércia para o eixo baricêntrico  $X_c$  e definido em:

$$I_{X_c} = 2 \cdot \left\{ \frac{t}{12} \left( L_c - t \cdot \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right)^3 + \left[ \left( L_c - t \cdot \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right) \cdot t \cdot \left( L_c - t \cdot \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) / 2 + \frac{L_c \cdot \sin \theta}{2} \right)^2 \right] \right\} + \frac{1}{12} t \cdot L_c^3 \sin^2 \theta \quad (51)$$

O momento de inércia  $I_{Y_c}$  para o eixo baricentrico  $Y_c$  é expresso por:

$$I_{Y_c} = \frac{I}{12} \cdot t \cdot L_c^3 \cos^2 \theta + 2 \left[ \left( L_c - t \cdot \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right) \cdot \frac{t^3}{12} + \left( L_c - t \cdot \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \cdot t \cdot \frac{L_c^2}{4} \cos^2 \theta \right) \right] \quad (52)$$

O produto de inércia  $I_{X_c Y_c}$  dos eixos baricêntrico é definido por:

$$I_{X_c Y_c} = (-) 2 \left[ \left( L_c - t \cdot \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right) \cdot t \cdot \left( \frac{L_c}{2} \cos \theta \right) \cdot \left( L_c - t \cdot \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) / 2 + \frac{L_c \cdot \sin \theta}{2} \right) \right] + \\ + \left[ (-) 2 \cdot \frac{t}{3} \cdot \left( \frac{L_c}{2} \right)^3 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \right] \quad (53)$$

O ângulo  $\theta_1$  entre o eixo de menor inércia  $Y_v$  e o eixo baricêntrico  $Y_c$  (Figura 31) é definido por

$$\theta_1 = a \tan \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} / 2 \quad (54)$$

O módulo de resistência para o eixo de menor inércia  $Y_v$  é dado por

$$W_{Y_v} = \frac{I_{Y_v}}{b} \quad (55)$$

onde b é mínima distância entre o eixo  $Y_v$  e o ponto A

$$b = \frac{L_c}{2} \cdot \cos(\theta + \theta_1) \quad (56)$$

O momento fletor, devido a pressão  $P_h$  lateral exercida pelo produto armazenado, é expresso por

$$M_{Y_v} = \frac{P_h \cdot L^2}{12} \cdot H_2 \quad (57)$$

E o esforço de tração devido ao produto armazenado é expresso por

$$T = \frac{P_h L^2}{2} \cdot H_2 \quad (58)$$

A tensão atuante na parede devido à flexão oblíqua é definida por

$$\sigma_{Y_v} = \frac{P_h \cdot L^2 \cdot H_2}{12 \cdot W_{Y_v}} + \frac{P_h \cdot L \cdot H_2}{2 \cdot S} \quad (59)$$

Onde:

$H_2$  = comprimento de uma onda do perfil;

$L$  = distância entre colunas da parede do silo;

$P_h$  = pressão horizontal exercida pelo produto armazenado;

$S$  = a área da seção transversal da onda do perfil;

$W_{yv}$  = módulo de resistência para o eixo de menor inércia  $Y_v$ .

O módulo de resistência para um metro de comprimento de onda é expresso por

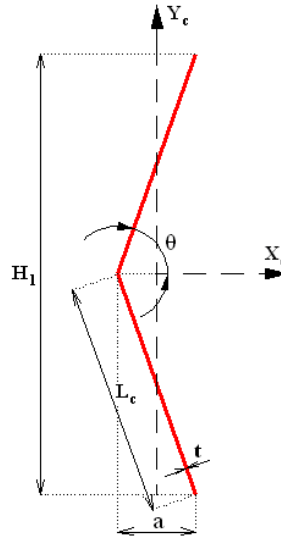
$$W_I = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot t^2 \quad (60)$$

E a tensão atuante na parede devido à flexão local é definida por:

$$\sigma_I = \frac{P_h \cdot L_c^2 \cdot 100}{12 \cdot W_I} = \frac{P_h \cdot L_c^2}{2 \cdot t^2} \quad (61)$$

#### 4.3.3 Flexão geral nas paredes em conformação zig-zague

A Figura 32 mostra o perfil da onda em conformação zig-zague, bem como os eixos de inércia baricêntricos  $Y_c$  e  $X_c$



Fonte: Adaptado de Ravenet (1992).

Figura 32: Seção da onda em zig-zague com eixos de inércia  $Y_c$ .

O momento de inércia para o eixo vertical  $Y_c$  é expresso por

$$I_{Y_c} = 2 \left( \frac{1}{12} \cdot t \cdot L_c^3 \cdot \cos^2 \theta \right) \quad (62)$$

Módulo de resistência segundo o eixo  $Y_c$ :

$$W_{Y_c} = \frac{2 I_{Y_c}}{a} \quad (63)$$

Onde  $a$  é determinado pela Equação 46

$$a = L_c \cdot \cos \theta \quad (46)$$

O momento fletor  $M_{Y_c}$ , devido à pressão lateral  $P_h$ , e o esforço de tração  $T$ , devido ao produto armazenado, são calculados pelas Equações 47 e 48 respectivamente.

$$M_{Y_c} = \frac{P_h \cdot L^2}{12} \cdot H_1 \quad (47)$$

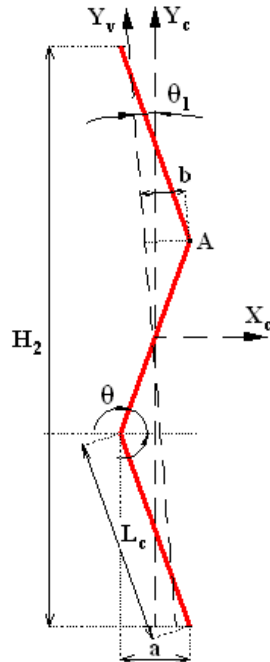
$$T = \frac{P_h \cdot L}{2} \cdot H_1 \quad (48)$$

A tensão atuante na parede devido à flexão geral é definida pela Equação 49:

$$\sigma_{Y_c} = \frac{P_h \cdot L^2 \cdot H_1}{12 \cdot W_{Y_c}} + \frac{P_h \cdot L \cdot H_1}{2 \cdot S} \quad (49)$$

#### 4.3.4 Flexão oblíqua nas paredes em conformação ziguezague

Na Figura 33 pode ser observado o perfil da onda conformada em ziguezague, e os eixos  $Y_c$ ,  $X_c$  e  $Y_v$  respectivamente, os eixos baricentrico e de menor inércia.



Fonte: Adaptado de Ravenet (1992).

Figura 33: Seção da onda em ziguezague com eixos de inércia  $Y_c$  e  $Y_v$ .

O momento de inércia desse perfil conformado em ziguezague para o eixo  $Y_v$  é definido pela expressão:

$$I_{Y_v} = \frac{\frac{27}{12} \cdot t \cdot L_c^3 \cdot \sin^2 \theta + 3 \left( \frac{1}{12} \cdot t \cdot L_c^3 \cos^2 \theta \right)}{2} - \left( \frac{\frac{27}{12} \cdot t \cdot L_c^3 \sin^2 \theta - 3 \left( \frac{1}{12} \cdot t \cdot L_c^3 \cos^2 \theta \right)}{2} \right) \cos 2\theta_1 + \left( (-) t \cdot \frac{L_c^3}{12} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \right) \sin 2\theta_1 \quad (64)$$

na qual  $\theta_1$  é dado pela equação 65.

$$\theta_1 = \arctan \left( \frac{-2I_{X_c Y_c}}{I_{X_c} - I_{Y_c}} \right) / 2 \quad (65)$$

$I_{Y_c}$  e  $I_{X_c}$  são os momentos de inércia dos eixos baricentricos e  $I_{X_c Y_c}$ , o produto de inércia em relação a estes eixos.  $I_{Y_c}$  é calculado como definido na equação 62.  $I_{X_c}$  e  $I_{X_c Y_c}$  são expressos pelas equações 66 e 67:

$$I_{X_c} = 2,25 \cdot t \cdot L_c^3 \cdot \sin^2 \theta \quad (66)$$

$$I_{X_c Y_c} = -t \cdot \frac{L_c^3}{12} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (67)$$

O módulo de resistência segundo o eixo para o eixo de menor inércia  $Y_v$  é expresso por

$$W_{Y_v} = \frac{I_{Y_v}}{b} \quad (68)$$

onde  $b$  é definido pela Equação 69:

$$b = \frac{L_c}{2} \cdot \cos(\theta - \theta_1) \quad (69)$$

O momento fletor, devido a pressão lateral  $P_h$ , exercida pelo produto armazenado, é expresso por

$$M_{Y_v} = \frac{P_h \cdot L^2}{12} \cdot H_2 \quad (70)$$

O esforço de tração devido ao produto armazenado, é definido como

$$T = \frac{P_h \cdot L}{2} \cdot H_2 \quad (71)$$

A tensão atuante na parede devido à flexão oblíqua é definida por

$$\sigma_{YV} = \frac{P_h \cdot L^2 \cdot H_2}{12 \cdot W_{YV}} + \frac{P_h \cdot L \cdot H_2}{2 \cdot S} \quad (72)$$

De modo análogo à conformação trapezoidal, o módulo de resistência e a tensão local para um metro de comprimento de onda conformada em ziguezague são expressos pelas equações 60 e 61.

#### 4.3.5 Dimensionamento das paredes dos silos prismáticos enrijecidos com nervuras

O dimensionamento é efetuado considerando-se os esforços de tração, compressão e flexão devidos à ação do produto armazenado para cada placa localizada dentro de um cruzamento de quatro nervuras (enrijecedores), conforme mostra a Figura 34.

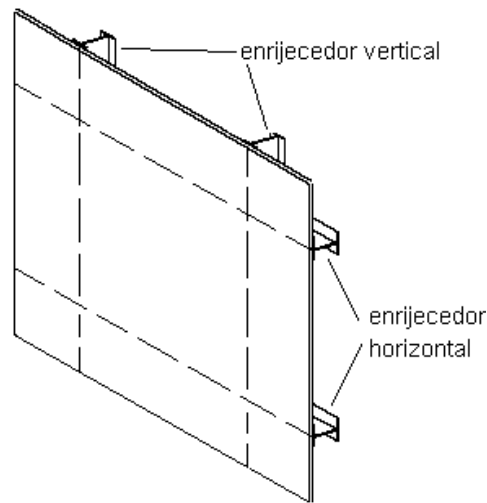


Figura 34: Placa vertical enrijecida.

A tração horizontal que atua nas paredes de um silo prismático multicelular é mostrada na Figura 35 e determinada pelas expressões:

$$\text{Para o lado a} \rightarrow T_a = P_{h_a} \frac{b}{2} \quad (73)$$

$$\text{Para o lado b} \rightarrow T_b = P_{h_b} \frac{b}{2} \quad (74)$$

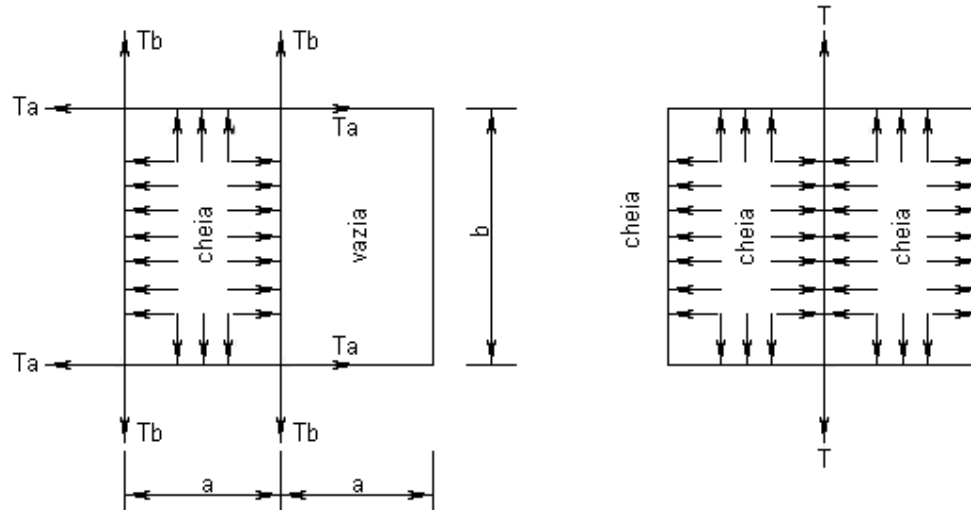
Para a situação em que duas células adjacentes estejam cheias a força de tração é:

$$T = P_{h_a} \cdot a \quad (75)$$

Onde:



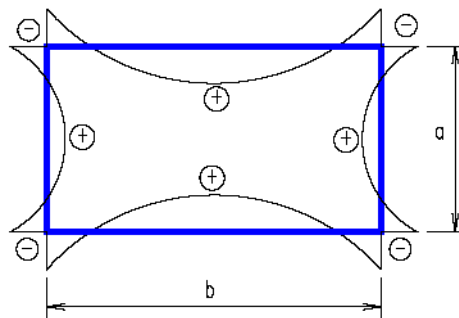
$P_{h_a}$  e  $P_{h_b}$  são as pressões horizontais exercida pelo produto armazenado sobre os lados  $a$  e  $b$  da seção transversal horizontal das paredes do silo (Figura 35).



Fonte: Troitsky (1990).

Figura 35: Forças de tração no sistema estrutural do silo

Os momentos fletores nas paredes dos silos prismáticos são apresentados esquematicamente na Figura 36.



Fonte: Troitsky (1990).

Figura 36: Momentos fletores em silos retangulares.

Sendo  $I_a$  e  $I_b$ , respectivamente, os momentos de inércia dos lados da célula de comprimento  $a$  e  $b$  (Figura 36), o momento fletor  $M_c$  nos cantos da célula é definido pela expressão:

$$M_c = \frac{-P_{h_a} \cdot a^2 + P_{h_b} \cdot b^2}{12(1 + k_i)} \quad (76)$$

onde:

$$k_i = \frac{I_b \cdot a}{I_a \cdot b} \quad (77)$$

Os momentos fletores  $M_a$  e  $M_b$  no centro dos respectivos lados da célula são expressos pelas equações 82 e 83:

$$M_a = \frac{-P_{h_a} \cdot a^2}{8} + M_c \quad (78)$$

$$M_b = \frac{-P_{h_b} \cdot b^2}{8} + M_c \quad (79)$$

Em casos particulares, quando  $I_a = I_b$

$$M_c = \frac{-(P_{h_a} \cdot a^3 + P_{h_b} \cdot b^3)}{12(a+b)} \quad (80)$$

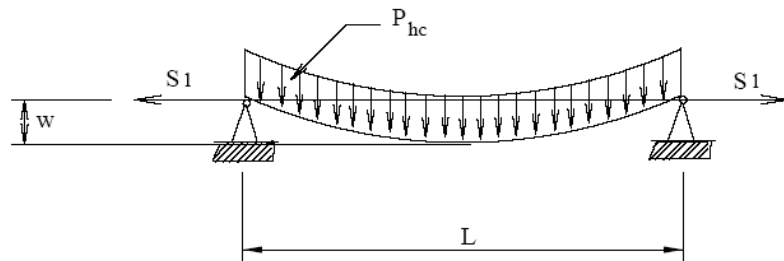
No caso de silos quadrados onde  $a = b$ ,  $I_a = I_b$ ,  $k=1$ ,  $P_{h_a} = P_{h_b} = P_h$

$$M_c = -\frac{P_h \cdot a^2}{12} \quad (81)$$

$$M_a = M_b = \frac{P_h \cdot a^2}{24} \quad (82)$$

#### 4.3.6 Determinação dos esforços nas paredes do silo segundo Troitsky

Os esforços nas paredes dos silos são obtidos pela teoria dos grandes deslocamentos, a qual considera que a parede trabalhará flexo-tracionada, conforme mostra a Figura 37 (ICHTARNIKOV apud TROITSKY, 1990).



Fonte: Troitsky (1990).

Figura 37: Placa trabalhando como membrana.

O momento fletor determinado para uma faixa da parede vertical, tendo largura unitária, comprimento L e considerada como simplesmente apoiada, é dado pela seguinte expressão:

$$M = \frac{P_{h_c} \cdot L^2}{8} \left( 1 - 1,034 \frac{S_1}{S_1 + S_E} \right) \quad (83)$$

onde  $S_1$  e  $S_2$  são definidos pelas expressões 88 e 89:

$$S_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4(P_{h_c} \cdot L)^2 E \cdot t}{(1 - \nu^2)}} \quad (84)$$

$$S_E = \frac{\pi EI}{L^2 (1 - \nu^2)} \quad (85)$$

## **5 DIMENSIONAMENTO OTIMIZADO DAS PAREDES CONFORMADAS**

### **5.1 Introdução**

Em geral, pela otimização há interesse em se obter o melhor resultado na execução de uma determinada tarefa, ao mesmo tempo em que satisfaz restrições específicas. Seres humanos guiados e influenciados pelo seu ambiente natural quase que instintivamente executam todas suas tarefas de modo que se economize energia ou se minimizem o desconforto e o sofrimento. A motivação está em se explorar os limites dos recursos disponíveis de modo a maximizar a produtividade ou a lucratividade. No princípio, invenções de mecanismos como a alavanca e a polia evidenciaram as manifestações do desejo humano de maximizar a eficiência mecânica. Muitos outros exemplos semelhantes existem em abundância na saga da história da humanidade. Douglas Wilde, em *Globally optimal design* (1978), apresenta um relato interessante sobre a origem da palavra "ótimo" e a definição de um "projeto ótimo" como sendo "o melhor projeto possível com o máximo de eficiência segundo critérios quantitativos pré-determinados" (HAFTKA; MANOHAR, 1985).

A importância do peso mínimo na construção de estruturas foi primeiramente reconhecida pela indústria aeroespacial, na qual o projeto estrutural da aeronave é controlado mais pelo peso do que pelo custo considerado. Em outras indústrias relacionadas com sistemas de engenharia civil, mecânica e automotiva, o custo pode ser a principal consideração, contudo o peso do sistema influencia no seu custo. A crescente conscientização da escassez de matéria-prima e a rápida exaustão das fontes convencionais de energia estão sendo traduzidas na exigência de estruturas leves, eficientes e de baixo custo. Essa exigência, por sua vez, enfatiza a necessidade de os profissionais de engenharia serem conhecedores das técnicas para otimização do peso e custo das estruturas. (HAFTKA; MANOHAR, 1985).

Na maior parte dos problemas de engenharia o objetivo em um problema de otimização é minimizar uma função que atenda certas restrições. Um exemplo muito comum de problema de otimização com restrições consiste em encontrar o peso mínimo no projeto de uma estrutura sujeita a limites de tensões e deformações (BELEGUNDU; CHANDRUPATLA, 1999).

Em razão das considerações apresentadas, optou-se por efetuar a avaliação do desempenho estrutural das paredes de silos metálicos prismáticos com o emprego da otimização. Para isso, o peso mínimo é selecionado para a função objetivo e a otimização executada com o módulo de otimização "Solver" da planilha eletrônica Microsoft Excel.

Neste capítulo apresentam-se, inicialmente, os conceitos básicos da programação matemática, na seqüência são descritas as hipóteses envolvidas na minimização do peso das paredes, bem como a formulação correspondente. Finaliza-se descrevendo o funcionamento do software de otimização Excel Solver e detalhando-se as etapas para solução do problema proposto.

## **5.2 Fundamentos da programação matemática**

A primeira linha de métodos desenvolvidos para tratamento dos problemas de otimização foi a Programação Matemática. Por essa razão, a maior parte dos livros dedicados à otimização versa sobre esse tema (BELEGUNDU, CHANDRUPATLA, 1999; HAFTKA, MANOHAR, 1985; REKLAITIS, RAVINDRAN, RAGSDELL, 1983; VANDERPLAAST, 1984).

A programação matemática trata dos problemas de otimização de forma iterativa e determinista, isto é, através de gradientes, funcionais e operações matriciais. Por essa razão exigem-se normalmente muitas informações e condições do problema a ser resolvido: região viável bem definida, suavidade da função objetivo e convexidade do problema.

O objetivo em um problema de otimização é localizar os extremos em uma determinada função, isto é, determinar o conjunto de variáveis das quais tal função é dependente, de modo a encontrar seu valor máximo ou mínimo. Esse processo envolve conceitos e definições amplamente empregados pela literatura e que serão apresentados a seguir.

Matematicamente, um problema de otimização não linear e sujeito a restrições pode ser enunciado da seguinte forma:

Minimizar (ou maximizar):

$$F(X) \quad (\text{função objetivo}) \quad (86)$$

Sujeito a:

$$g_j(X) \leq 0 \quad j = 1, m \quad \text{Restrições de desigualdade} \quad (87)$$

$$h_k(X) = 0 \quad k = 1, l \quad \text{Restrições de igualdade} \quad (88)$$

$$X_i^l \leq X \leq X_i^u \quad i = 1, n \quad \text{Restrições laterais nas variáveis de projeto} \quad (89)$$

$$\text{onde } \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad \text{Variáveis de projeto} \quad (90)$$

Define-se  $\mathbf{X}$  como o vetor que contém as variáveis de projeto. A função objetivo  $F(\mathbf{X})$  é fornecida pela equação (86), e as funções de restrição, definidas pelas equações (87) e (88), podendo ser lineares ou não. As equações envolvidas podem ser explícitas ou implícitas com relação a  $\mathbf{X}$ . Entretanto, é importante que essas funções sejam contínuas e que tenham a primeira derivada contínua em relação a  $\mathbf{X}$ .

A equação (89) define os limites para as variáveis de projeto e, subseqüentemente, refere-se às restrições laterais. Ainda que restrições laterais possam ser incluídas em restrições de desigualdade dada pela fórmula (87), é usual tratá-las separadamente, uma vez que definem a região de busca do ótimo (VANDERPLAATS, 1984).

Desse modo, um problema de otimização consiste num procedimento de busca da melhor solução dentro de um espaço ou região considerada viável. São diversos os processos de solução, cuja escolha depende, fundamentalmente, do ambiente no qual se dá a busca, do objetivo a ser alcançado e das condições que devem ser aceitas pela solução.

### 5.3 Definições básicas

#### ▪ Variável de projeto

As variáveis de projeto são os parâmetros do problema que podem ser alterados para se otimizar o sistema e determinam a dimensão do espaço de busca. Exemplificando, no caso de uma estrutura, podem representar uma certa dimensão que será alterada, área da seção de uma viga, ou o valor de uma propriedade do material de que é feita (por exemplo, o módulo de elasticidade). São classificadas em discretas ou contínuas:

- *Variáveis discretas*

Podem assumir apenas alguns valores específicos de um conjunto (caso específico: variáveis inteiras). Ex: bitolas de armaduras, diâmetro de vigas tubulares, espessura das placas.

- *Variáveis contínuas*

Podem assumir qualquer valor real em um intervalo dado. Ex: coordenadas de um nó, distância entre dois pontos etc.

Em problemas de engenharia estrutural estão associadas à geometria da estrutura, à topologia dos elementos que a compõem, ao tipo de material utilizado e a suas propriedades físicas e mecânicas.

- **Restrições**

As restrições representam os limites que devem ser atendidos no projeto através de funções de igualdade ou desigualdade. Podem ser divididas em dois grupos:

- *Restrições Laterais*

Aplicadas diretamente sobre as variáveis de projeto, limitando seus valores. (ex.: valores máximos e mínimos para a dimensão de elementos estruturais, propriedades do material.)

- *Restrições de Comportamento*

Representam condições desejáveis para as variáveis, como limites de tensões, deslocamentos, frequências naturais de vibração entre outras.

- **Espaço de busca ou região viável**

É o conjunto, espaço ou região que compreende as soluções possíveis ou viáveis do problema a ser otimizado. Deve ser caracterizado pelas funções de restrição, que definem as soluções viáveis do problema a ser resolvido.

- **Função objetivo ou de avaliação**

É a função a ser extremizada, determinada pelas variáveis de projeto. Pode ser classificada como unidimensional, quando depende de uma única variável, ou multidimensional, quando possui mais de uma variável.

- **Ponto ótimo**

Ponto ótimo é o ponto caracterizado pelo vetor  $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ , formado pelas variáveis de projeto que extremizam a função objetivo.

- **Valor ótimo**

Valor ótimo é o valor da função objetivo  $F(X)$  no ponto ótimo.

- **Solução ótima**

É o par formado pelo ponto ótimo e valor ótimo  $[X, f(X)]$ . A solução ótima pode ser:

- local → quando o valor ótimo é localizado (vizinhança);
- global → quando o valor ótimo é global na região viável;
- restringida → quando atende a todas as restrições;
- não-restringida → quando não atende a alguma das restrições.

### 5.3.1 Métodos de solução de problemas de otimização

Entre os principais métodos para solução de problemas de otimização há os métodos analíticos, métodos numéricos e métodos gráficos.

- **Métodos analíticos**

São métodos analíticos o cálculo diferencial e o cálculo variacional. Os métodos analíticos, de um modo geral, permitem somente a solução de problemas simples de otimização, como, por exemplo, estruturas de geometria simples, como vigas ou treliças. No entanto, permitem analisar conceitos importantes da otimização, como existência e unicidade da solução ótima ou condições necessárias e suficientes da solução ótima, bem como validar a solução de métodos numéricos que são aplicados em problemas genéricos. O cálculo diferencial permite trabalhar somente com funções simples e exige, em geral, várias simplificações. No cálculo variacional a incógnita é uma função (ao contrário de variáveis no cálculo diferencial), como quando, por exemplo, deseja-se determinar a função área  $A(x)$  ou momento de inércia  $I(x)$  ao longo de uma viga, ou a espessura  $h(x,y)$  ao longo de uma placa. Para isso, o cálculo variacional trabalha com a formulação integral do problema.

- **Métodos numéricos**

Os algoritmos numéricos para solução de problemas de otimização são essencialmente classificados em "métodos de programação matemática" e "métodos probabilísticos".

Os métodos de programação matemática são classificados em métodos de programação linear, programação não-linear e métodos baseados em teoria de aproximações, como programação linear sequencial e programação quadrática sequencial. Por sua vez, os métodos



de programação não-linear são classificados em métodos para solução de problemas de otimização sem restrição e com restrição.

Entre os métodos probabilísticos mais conhecidos têm-se os algoritmos genéticos e o Simulated Annealing (SILVA, 2006).

A diferença essencial dos métodos de programação matemática para os métodos probabilísticos é que os últimos procuram encontrar o ótimo global do problema de otimização evitando os ótimos locais, ao passo que os métodos de programação matemática fornecem um ótimo local. Os métodos probabilísticos, como o próprio nome sugere, utilizam-se de um processo de busca randômica guiados por decisões probabilísticas.

#### ▪ Métodos gráficos

Consistem em se obter as soluções por meio da construção de gráficos da função objetivo, restrições e domínio viável. Somente permitem a solução de problemas de otimização com até duas variáveis de projeto, no entanto são muito úteis para ilustrar os conceitos da otimização.

### 5.4 Métodos clássicos

Os métodos matemáticos geralmente apresentam teoremas que lhes garantem a convergência para uma solução ótima. Entretanto, essa solução não será necessariamente a solução ótima global, o que pode, *eventualmente*, até ocorrer. Em geral, este fato dependerá do ponto de partida fornecido para o método utilizado, problema que tem sido abordado há muito tempo pelos pesquisadores, mas para o qual ainda não se obteve uma solução.

#### 5.4.1 Classificação dos métodos clássicos

De acordo com as características da função objetivo e das restrições, classificam-se os problemas de otimização nas seguintes subáreas da programação matemática:

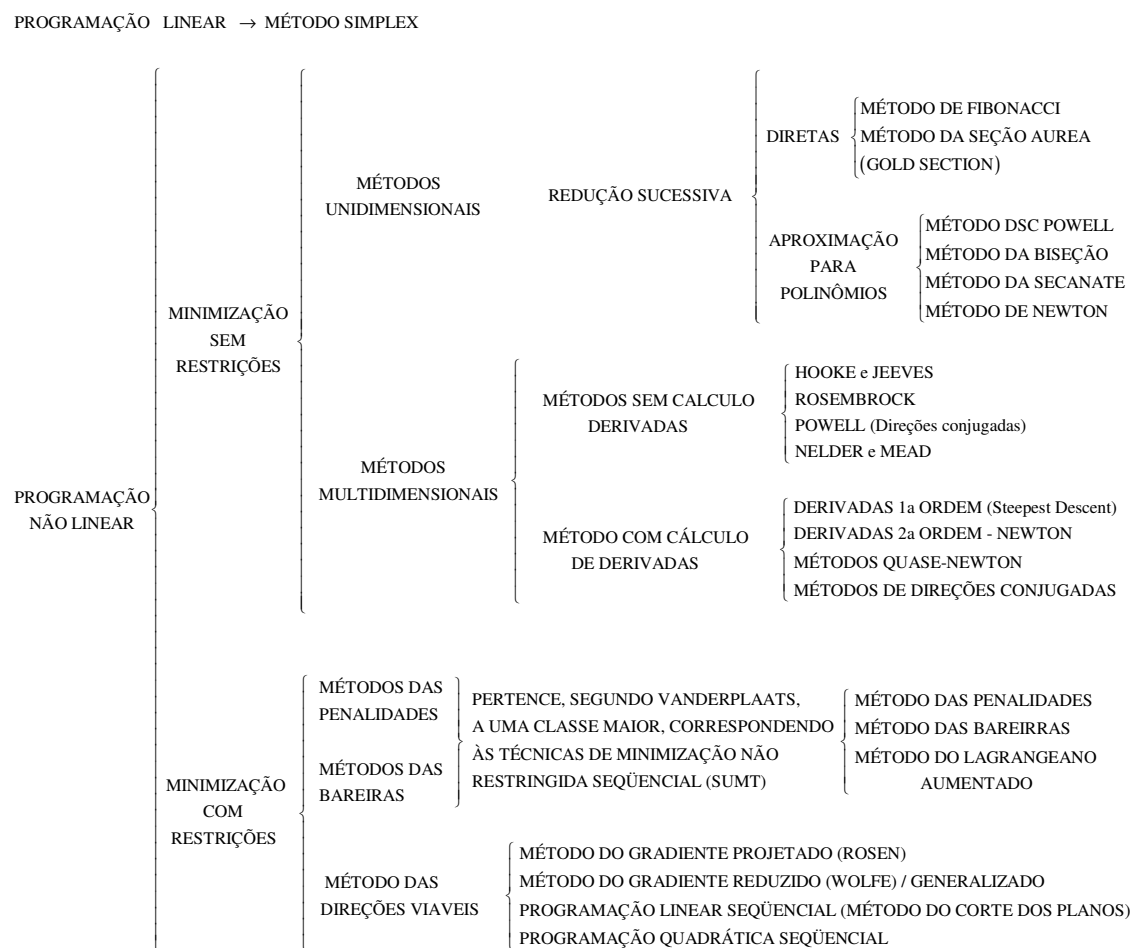
- *Programação linear* → quando a função objetivo e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto;
- *Programação não-linear* → quando a função objetivo ou, pelo menos, uma das restrições é função não-linear das variáveis de projeto.

Posteriormente, outras subáreas foram aparecendo com o objetivo de maior especialização nos problemas a serem resolvidos. Dentre essas tem-se a *programação*

*quadrática*, na qual a função objetivo é quadrática e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto.

Uma extensão da programação matemática, sem, no entanto, fazer parte dela, seria a programação multi-objetivo, que trata o problema de otimização de maneira diferente da anteriormente apresentada, ou seja, em vez de uma, têm-se várias funções objetivo a serem otimizadas simultaneamente. Embora um problema de otimização clássico possa ser resolvido pela programação multi-objetivo, deve-se destacar que as metodologias, conceitos e idéias são diferentes entre as duas formulações.

Inúmeros são os métodos criados para tratamento de problemas de otimização, bem como muitas são as classificações realizadas pelos diversos autores da literatura. Na figura Figura 38 é apresentada a classificação geral desses métodos elaborada por Neves (1997).



Fonte: NEVES (1997).

Figura 38- Classificação do métodos clássicos.

## 5.5 Formulação do problema para a otimização das paredes de silos

Visando a avaliação do desempenho estrutural das paredes de silos prismáticos conformadas, optou-se por formular o dimensionamento das paredes como um problema de otimização estrutural. Essa abordagem foi adotada com o objetivo de propiciar a efetiva comparação entre as diversas configurações, quando submetidas a uma mesma condição de carregamento e vinculação. Assim, para cada configuração busca-se a determinação das dimensões que conduzam à maior economia.

Para ambas as configurações de conformação abordadas, ziguezague e trapezoidal, o problema foi formulado tendo como variáveis de projeto a espessura da chapa  $t$ , o ângulo da inclinação do segmento da onda com a horizontal  $\theta$  e o comprimento do segmento da onda  $L_c$ , objetivando a minimização do peso por metro de parede.

Às variáveis foram impostas também restrições laterais, as quais definem limites inferiores e superiores para os valores que podem ser assumidos em cada uma delas.

São considerados como dados conhecidos do projeto a largura  $L$  do painel em estudo a largura da platibanda  $a$  (Figura 39), a pressão horizontal  $P_h$  que atua nesses painéis e a tensão admissível  $\sigma_{adm}$  à flexão do aço.

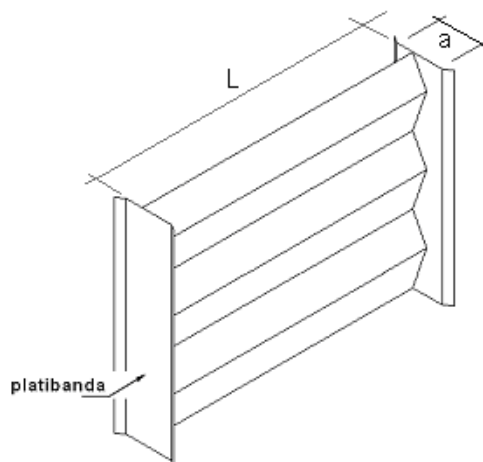


Figura 39- Definição da largura do painel e da platibanda.

### 5.5.1 Limites impostos às variáveis

Ao ângulo  $\theta$  que forma o segmento inclinado da onda com o eixo baricêntrico  $X_c$ , impõe-se a condição de que seja superior ao efetivo ângulo de atrito interno  $\phi$  para produtos

com fluxo de massa e superior a  $71^\circ$ , segundo recomendação de Ravenet (1992) para materiais pulverulentos com fluxo de funil.

Para a espessura da chapa das paredes conformadas o limite inferior é especificado pela NBR 14762:2001 (Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio) em 1 milímetro, e o limite superior, em até 8 milímetros, bitolas comercialmente disponíveis e de fácil usinagem.

O comprimento da conformação reta da onda do perfil  $L_c$  é limitado pela largura da platibanda formadora da coluna (Figura 39) e expresso por:

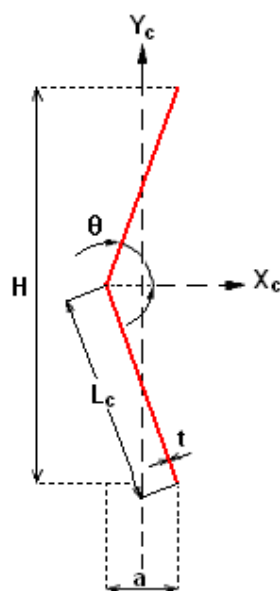
$$L_c = \frac{a}{\cos \theta} \quad (91)$$

A tensão admissível  $\sigma_{adm}$  é limitada pela tensão de escoamento do aço  $f_y$  de acordo com a NBR 8800 1986 (Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios).

## 5.5.2 Conformação em ziguezague

### 5.5.2.1 Determinação da função objetivo

Para uma seção genérica da configuração em ziguezague representada na Figura 40 a função objetivo foi escrita do modo como se apresenta na equação 92:



Fonte: Adaptado de Ravenet (1992).

Figura 40: Seção genérica da conformação em ziguezague.

$$f_{(o)} = S \cdot n \cdot \gamma \quad (92)$$

onde:

$S$  = área da seção transversal da onda;

$\gamma$  = peso específico do aço = 76,982 kN/m<sup>3</sup> (7850 kg/m<sup>3</sup>);

$n$  = número de ondas em 1 metro de seção vertical da parede e expresso por

$$n = \frac{1}{H} \quad (93)$$

sendo  $H$  o comprimento de uma onda.

Portanto, substituindo  $n$  na equação 92, tem-se que

$$f_{(o)} = S \cdot \frac{1}{H} \cdot \gamma \quad (94)$$

$$S = 2 \cdot L_c \cdot t \quad (95)$$

$$H = 2 \cdot L_c \cdot \sin \theta \quad (96)$$

Substituindo  $S$  (equação 95) e  $H$  (equação 96) na equação 94,

$$f_{(o)} = \frac{2 \cdot L_c \cdot t}{2 \cdot L_c \cdot \sin \theta} \cdot \gamma \quad (97)$$

Obtém-se, assim, a função objetivo para minimização do peso da onda conformada em ziguezague por metro de seção vertical da parede:

$$f_{(o)} = \frac{t}{\sin \theta} \cdot \gamma \quad (98)$$

### 5.5.2.2 Determinação das restrições

As possíveis soluções do problema devem atender a um conjunto de condições (restrições), segundo as quais as tensões atuantes  $\sigma_{Yc}$ ,  $\sigma_{Yv}$  e  $\sigma_I$  não devem ultrapassar a tensão admissível  $\sigma_{adm}$ . Assim sendo,

$$\sigma_{Yc} \leq \sigma_{adm} \quad (99)$$

Substituindo-se  $\sigma_{Yc}$  pela equação 49, tem-se

$$\frac{P_h \cdot L^2 \cdot H_1}{12 \cdot W_{Yc}} + \frac{P_h \cdot L \cdot H_1}{2 \cdot S} \leq \sigma_{adm} \quad (100)$$

$$\sigma_{YV} \leq \sigma_{adm} \quad (101)$$

Do mesmo modo, substituindo-se  $\sigma_{YV}$  pela equação 72, obtém-se a expressão

$$\frac{P_h \cdot L^2 \cdot 100 \cdot H_2}{12W_{YV}} + \frac{P_h \cdot L \cdot H_2}{2S} \leq \sigma_{adm} \quad (102)$$

$$\sigma_I \leq \sigma_{adm} \quad (103)$$

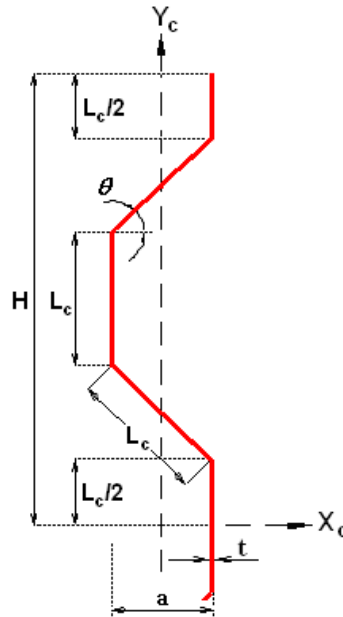
Substituindo-se  $\sigma_b$  pela equação 61, obtém-se

$$\frac{P_h \cdot L_c^2}{2t^2} \leq \sigma_{adm} \quad (104)$$

### 5.5.3 Conformação trapezoidal

#### 5.5.3.1 Determinação da função objetivo

Do mesmo modo, para uma seção genérica da configuração trapezoidal representada na Figura 41 a função objetivo foi escrita como na equação (92):



Fonte: Adaptado de Ravenet (1990).

Figura 41: Seção genérica da conformação trapezoidal

$$f_{(o)} = S \cdot n \cdot \gamma \quad (92)$$

A área da seção transversal é dada por

$$S = 4 \cdot L_c \cdot t \quad (105)$$

O comprimento de uma onda trapezoidal é definido como

$$H = 2 \cdot L_c \cdot \sen \theta + 2 \cdot \frac{L_c}{2} + L_c \quad (106)$$

Simplificando a equação 106, obtém-se

$$H = 2 \cdot L_c \cdot (1 + \sen \theta) \quad (107)$$

Substituindo-se  $S$  (equação 109) e  $H$  (equação 111) na equação 98

$$f_{(o)} = \frac{4 \cdot L_c \cdot t}{2 \cdot L_c \cdot (1 + \sen \theta)} \cdot \gamma \quad (108)$$

obtém-se a função objetivo para minimização do peso da onda conformação trapezoidal por metro de seção vertical da parede:

$$f_{(o)} = \frac{2t}{1 + \sen \theta} \cdot \gamma \quad (109)$$

### 5.5.3.2 Determinação das restrições

Do mesmo modo que para a conformação em ziguezague, as soluções do problema de otimização da conformação trapezoidal devem atender ao mesmo conjunto de condições (restrições). Estas são determinadas pelas Equações (100), (102) e (104).

### 5.5.3.3 Implementação da formulação no software para otimização Excel Solver

O Microsoft Excel Solver incorpora o código de otimização não linear baseado no Gradiente Reduzido Generalizado (GRG2), desenvolvido por Leon Lasdon, University of Texas em Austin, e Allan Waren, da Cleveland State University (MICROSOFT CORPORATION, 2006). É uma ferramenta que está disponível e fácil de ser utilizada na planilha eletrônica Microsoft Excel. Por causa dessas vantagens, o Solver é empregado neste trabalho de investigação para resolver o problema de otimização.

A principal proposta do Solver é encontrar a solução, isto é, valores para as variáveis de projeto, os quais satisfaçam as restrições enquanto maximizem ou minimizem a função objetivo (SOLVER INC., 2006).

Nesta seção, são apresentadas a descrição desse software e as instruções utilizadas por ele na solução de problemas de otimização.

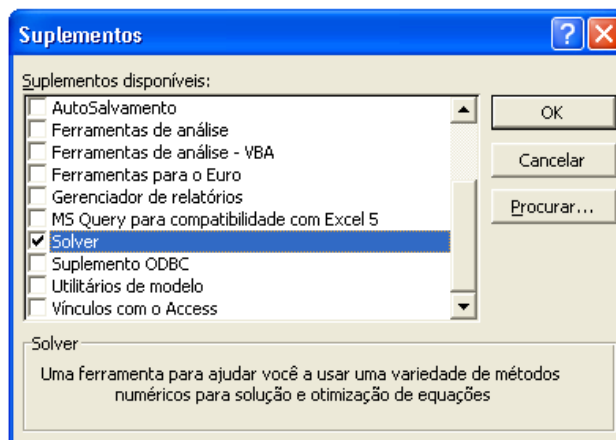
#### 5.5.4 Parâmetros do modelo

A entrada de valores pode ser composta de números fixos associados com o problema, os quais serão referenciados como *parâmetros* de um modelo. Esses parâmetros são introduzidos nas células de dados e utilizados no cálculo da função objetivo e das restrições. Os parâmetros são constantes para o Solver, no entanto seus valores podem ser mudados pelo usuário, visto que o Solver em hipótese alguma irá mudá-los automaticamente. O usuário terá, freqüentemente, situações ou variações no mesmo problema a solucionar, com o que os parâmetros irão mudar em cada uma dessas variações do problema.

Portanto, para usar o Solver é necessário que se crie um modelo que especifique:

- as variáveis de decisão: os recursos a ser utilizados;
- as restrições: os limites de utilização dos recursos;
- a função objetivo: a forma de medir o resultado da otimização.

O recurso Solver pode ser acessado no Microsoft Excel, na caixa de seleção *Solver* em *Suplementos* do menu *Ferramentas*.



Fonte: Microsoft® Excel (2000).

Figura 42: Planilha eletrônica Microsoft Excel – Ativação do Solver.

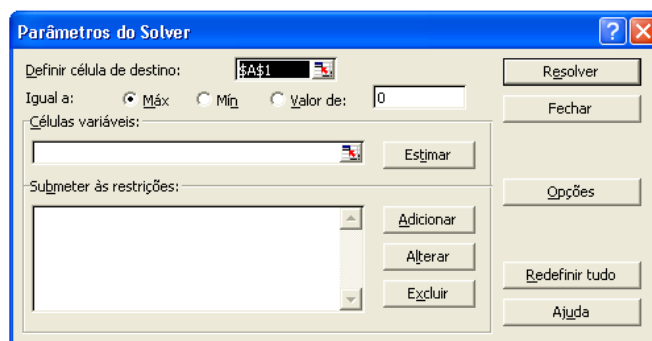


### 5.5.5 Variáveis de decisão (células variáveis)

Os parâmetros a serem introduzidos no problema de otimização podem ser quantidades, as quais estão sujeitas a variações ou sob o controle do usuário. Esses parâmetros são aplicados para as variáveis de decisão e aparecem na planilha eletrônica nas *células variáveis*, que são aquelas que o Solver irá alterar automaticamente para maximizar ou minimizar o objetivo ou *célula de destino*. Essas células são registradas na caixa de edição de *células variáveis* do quadro de diálogo dos Parâmetros do Solver (Figura 43).

### 5.5.6 A função objetivo (célula de destino)

A função objetivo é inserida na caixa de edição *definir célula de destino* do quadro diálogo dos *Parâmetros do Solver* (Figura 43). No caso de no modelo do Solver não se ter nada para maximizar ou minimizar, a célula de destino ficará vazia. Nesta situação, o Solver irá simplesmente encontrar uma solução que satisfaça às restrições.



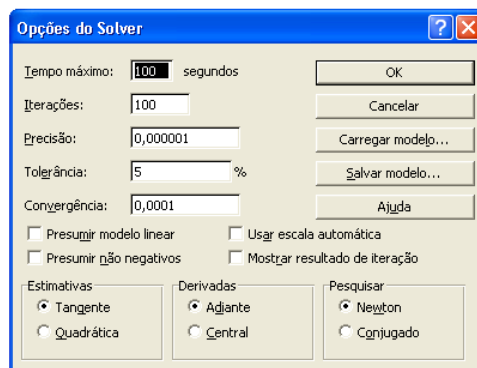
Fonte: Microsoft Excel (2000).

Figura 43: Quadro diálogo dos Parâmetros do Solver.

Planilhas eletrônicas padrão de otimização também permitem a entrada de um valor específico, o qual deve ser atingido pela função objetivo ou célula de destino. Essa característica permite a compatibilidade com a planilha Atingir Metas (Goal Seek) ou Regressão (Back Solver) e está disponível no menu de comandos do Excel, que permite procurar um valor específico para a célula pelo ajustamento do valor de uma outra célula da qual a primeira é dependente. Deve-se perceber o fato de que registrar um valor específico na caixa célula de destino é exatamente o mesmo que deixá-la vazia, entrando-se com uma restrição de igualdade para a *célula de destino* na caixa de entrada das Restrições.

### 5.5.7 Restrições

São limites impostos às *células variáveis*. O Solver considera que uma restrição é satisfeita se a condição que esta restrição especifica é verdadeira, observados pequenos limites de tolerância. Os valores de tolerância, precisão do Solver e métodos numéricos empregados na solução de um problema de otimização estão contidos no quadro de Opções do Solver.



Fonte: Microsoft Excel (2000).

Figura 44: Microsoft Excel – Opções do Solver.

### 5.5.8 Opções para o Solver

O default de opções do Solver pode ser modificado no quadro *Opções do Solver* (Figura 44) da caixa *Opções* do quadro *Parâmetros Solver*. O modelo do problema descrito na janela do *Solver* não é guardado automaticamente com o documento. Assim, para guardar o modelo (função objetivo, restrições e opções) deve-se usar o caixa *Salvar Modelo* e inserir a referência para a primeira célula de um intervalo vertical de células vazias no qual será armazenado o modelo de problema.

Quando se pretender ler o modelo, dever-se-á usar o caixa *Carrega Modelo* e inserir a referência para todo o intervalo de células que contém o modelo de problema, ou seja, a área onde o modelo foi previamente guardado.

### 5.5.9 Processo empregados pelo Solver para a busca da solução

Uma solução (valores para as variáveis de decisão) para as quais todas as restrições no modelo são satisfeitas é denominada de *solução factível*. Na seqüência, o Solver, primeiro, encontra uma *solução factível* e, após, procura melhorá-la, substituindo as variáveis de

decisão de uma solução factível para outra solução factível, até que a função objetivo alcance um máximo ou mínimo. Esse processo é denominado de *solução ótima*.

A solução ótima pode ser global, quando não existe outra solução factível com valores mais adequados para a função objetivo, ou local, quando não existe outra solução com melhores valores na vizinhança. O Solver é programado para encontrar soluções ótimas, em condições ideais o ótimo global, porém nem sempre isso é possível. Em muitos casos, uma boa solução pode ser suficiente, ou seja, uma solução melhor que a anterior (SOLVER INC., 2006).

## 6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

### 6.1 Considerações gerais

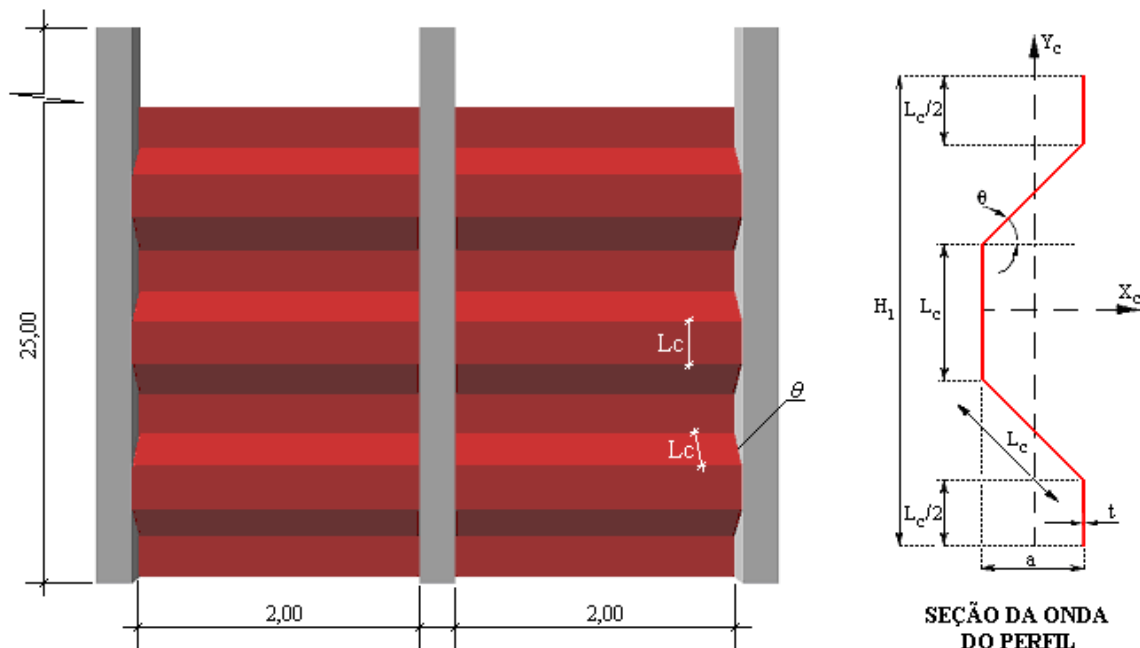
A partir da implementação das formulações desenvolvidas, foram efetuadas diversas simulações para paredes conformadas com a seção da onda trapezoidal e zigzag. Essas simulações objetivaram, num primeiro momento, demonstrar a potencial economia obtida com a aplicação de técnicas de otimização ao problema proposto. Adicionalmente, puderam ser efetivamente comparadas as conformações estudadas, obtendo-se a configuração ótima (e o peso correspondente) para cada uma quando submetidas às mesmas condições de carregamento e resistência.

As investigações efetuaram-se através de três exemplos. No Exemplo 1, o objetivo é comparar o peso seção da parede trapezoidal dimensionada por Ravenet (1977) para uma célula de silo prismático quadrado com o peso dessa mesma parede quando dimensionada com técnicas de otimização. No Exemplo 2 é apresentado o dimensionamento otimizado para a parede conformada em seções em zigzag e em trapezoidal destinadas ao armazenamento de farelo de soja. Já, no Exemplo 3, a análise é efetuada para as paredes do silo conformadas em seção em zigzag e trapezoidal destinadas ao armazenamento de cereais a granel, especificamente soja em grãos. Completa-se a análise com a investigação dos efeitos da variação do ângulo  $\theta$  (Figura 32) sobre a seção da parede quando submetido a uma mesma situação de carregamento.

### 6.2 Exemplo 1

A estrutura apresentada neste exemplo (Figura 45) consiste num painel de conformação trapezoidal proposto por Ravenet (1977) para uma célula com as seguintes características:

largura de 4,25 metros, altura de 25 metros, distância entre colunas ( $L$ ) igual a 2 metros, largura da platibanda de ancoragem do perfil conformado  $a = 21$  centímetros e ângulo mínimo que forma o segmento inclinado da chapa conformada com o eixo baricêntrico  $X_c$   $\theta = 45^\circ$ . O produto armazenado é um cereal com densidade de  $8,40 \text{ kN/m}^3$  e tensão admissível do aço  $\sigma_{adm} = 161,81 \text{ MPa}$ . As pressões  $P_h$  utilizadas para o dimensionamento são as da curva de pressões laterais de Platonov apresentadas em Ravenet (1977, p. 242).



Fonte: Adaptado de Ravenet (1977).

Figura 45: Vista frontal da parede do silo e seção transversal da onda do perfil.

A Figura 46 apresenta a construção do modelo na planilha eletrônica para a conformação trapezoidal, bem como os resultados para a pressão horizontal na cota 25 metros (medida do topo até a base da parede) e modelo salvo, de acordo com o item (5.5.8). Para se obter o dimensionamento otimizado para as demais cotas da Tabela 5 basta fornecer a pressão horizontal em cada uma delas e executar o Solver.

A coluna *Modelo* indica o atendimento às restrições para os valores atuais das variáveis segundo a tolerância predefinida. No caso ilustrado na Figura 46, o *falso* corresponde à violação da tensão  $\sigma_v$  na sexta casa decimal (clikando sobre cada uma das células da coluna modelo pode-se visualizar na barra de fórmulas da planilha eletrônica a indicação da célula na qual se verifica ou não limites das condições impostas ao problema de otimização). Assim, cabe ao usuário aceitar (ou não) o resultado com tal grau de violação.

**Objetivo:**

Encontrar os valores de  $t$ ,  $L_c$  e  $\theta$  que minimizam o peso  $P$  do painel em conformação trapezoidal.

Função Objetivo	Dados do Projeto	Modelo
$P = 0,394952182 \text{ kN/m}$	$P_h = 0,04223724 \text{ MPa}$ $L = 2 \text{ m}$ $\sigma_{adm} = 161,809700 \text{ MPa}$	0,394952182 3 VERDADEIRO
Variáveis diretas	Restrições de comportamento	VERDADEIRO
$t = 0,00438 \text{ m}$ $\theta = 45,000000 \text{ graus}$ $L_c = 0,2969848 \text{ m}$	$\sigma_{yv} = 161,8097000 \text{ MPa}$ $\sigma_{yc} = 47,61 \text{ MPa}$ $\sigma_l = 97,13 \text{ MPa}$	VERDADEIRO VERDADEIRO VERDADEIRO
Propriedades do perfil	Restrições laterais	VERDADEIRO
$W_y = 3,63E-04 \text{ m}^3$ $I_{xc} = 1,88E-04 \text{ m}^4$ $I_{yc} = 3,33E-05 \text{ m}^4$ $I_{xy} = -7,33E-05 \text{ m}^4$ $\theta_1 = 21,69240191 \text{ graus}$ $I_v = 4,11E-06 \text{ m}^4$ $W_v = 7,00E-05 \text{ m}^3$	$t \geq 0,001 \text{ m}$ $t \leq 0,008 \text{ m}$ $\theta \geq 45 \text{ graus}$ $\theta \leq 90 \text{ graus}$ $L_c \geq 0,155563492 \text{ m}$ $L_c \leq 0,296984848 \text{ m}$	FALSO VERDADEIRO VERDADEIRO 100

Fonte: Microsoft Excel (2000).

Figura 46: Planilha de dados - Conformação trapezoidal proposta por Ravenet para a cota 25 m.

As figuras seguintes apresentam os relatórios gerados pelo Solver para o Exemplo 1.

**Microsoft Excel 9.0 Relatório de resposta**

Planilha: [modelo1A.xls]TRAP

Relatório criado: 10/5/2006 11:18:07

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$B\$5	P	0,541141544	0,394952169

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$B\$10	t	0,00600	0,00438
\$B\$11	$\theta$	45,000000	45,000000
\$B\$12	Lc	0,3000000	0,2969848

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
\$B\$12	Lc	0,2969848	\$B\$12<=\$F\$21	Agrupar	0
\$B\$12	Lc	0,2969848	\$B\$12>=\$F\$20	Sem agrupar	0,1414214
\$F\$10	$\sigma_v$	161,81	\$F\$10<=\$F\$7	Sem agrupar	5,34604E-06
\$F\$11	$\sigma_y$	47,61	\$F\$11<=\$F\$7	Sem agrupar	114,1976376
\$F\$12	$\sigma_l$	97,13	\$F\$12<=\$F\$7	Sem agrupar	64,67724437
\$B\$10	t	0,00438	\$B\$10<=\$F\$17	Sem agrupar	0,0036209
\$B\$10	t	0,00438	\$B\$10>=\$F\$16	Sem agrupar	0,00338
\$B\$11	$\theta$	45,000000	\$B\$11<=\$F\$19	Sem agrupar	44,99999995
\$B\$11	$\theta$	45,000000	\$B\$11>=\$F\$18	Agrupar	0,000000

Figura 47: Relatório de resposta na cota 25 metros.

O Relatório de resposta, ilustrado na Figura 47, apresenta os valores iniciais (originais) e finais das variáveis de projeto e os valores correspondentes da função objetivo, bem como informações sobre as restrições. Na coluna *transigência* um valor zero indica a restrição ativa na solução ótima.

Na Figura 48 o Relatório de limites lista a célula de destino e as células ajustáveis com seus respectivos valores, limites inferior e superior e valores de destino. O inferior limite é o menor valor que a célula ajustável pode usar, mantendo todas as outras células ajustáveis fixas, e, ainda, atender às restrições. Analogamente, o superior limite é o valor mais alto.

**Microsoft Excel 9.0 Relatório de limites**

**Planilha: [modelo1A.xls]TRAP**

**Relatório criado: 10/5/2006 11:18:08**

Destino						
Célula	Nome	Valor				
\$B\$5	P	0,394952169				
Ajustável			Inferior	Destino	Superior	Destino
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
\$B\$10	t	0,00438	0,00438	0,39495	0,00800	0,72152
\$B\$11	θ	45,000000	45,000000	0,394952	45,000000	0,394952
\$B\$12	Lc	0,2969848	0,2969848	0,3949522	0,2969848	0,3949522

Figura 48: Relatório de limites na cota 25 metros.

A Figura 49 apresenta o cenário para uma solução inicial distinta (no caso infactível). A coluna *valores atuais* representa os valores das células no momento em que o *relatório de resumo do cenário* foi criado e as *células variáveis* para cada cenário estão destacadas em negrito.

Resumo do cenário			
	Valores atuais:	RAVENET	TRAP
<b>Células variáveis:</b>			
\$B\$10	0,00438	<b>0,00600</b>	<b>1,00000</b>
\$B\$11	45,000000	<b>45,000000</b>	<b>1,000000</b>
\$B\$12	0,2969848	<b>0,3000000</b>	<b>1,0000000</b>
<b>Células de resultado:</b>			
\$B\$5	0,394952169	0,541141544	151,3234418
\$F\$10	161,81	117,08	0,15
\$F\$11	47,61	34,50	0,10
\$F\$12	97,13	52,80	0,02
\$F\$13	21,69240189	21,72416857	-1,060037565

Fonte: Excel Solver (2000)

Figura 49: Resumo do cenário para a cota 25 metros.

Nas Figuras 47 e 49 os valores iniciais das células variáveis (coluna: Valor original) correspondem aos resultados obtidos por Ravenet dimensionando as paredes da célula pela teoria clássica. No entanto, para a obtenção da solução ótima partiu-se de várias soluções iniciais com o objetivo de verificar a convergência para um único ponto (exemplificando: a descrita pelo cenário *TRAP* da Figura 49). Dessa forma, para ambas as situações se observa a mesma solução listada na coluna *valores atuais*.

A Tabela 5 reproduz os resultados do painel dimensionado por Ravenet para diversas alturas ao longo da parede do silo. Na Tabela 6 são apresentados os resultados do modelo trapezoidal de Ravenet otimizado. O peso ótimo  $P$ , indicado na sexta coluna, para as cotas  $z$  entre 1,9 e 8,12 metros é limitado pelas tensões  $\sigma_{YV}$  e  $\sigma_b$ ; para a cota de 25 metros, o ótimo é limitado unicamente pela tensão  $\sigma_{YV}$ , conforme demonstra o resumo do cenário (Figura 49).

Tabela 5 - Dimensionamento de Ravenet para conformação trapezoidal

RESULTADOS DO DIMENSIONAMENTO DE RAVENET - (Ph para curva Platonov)								
profundidade $z$ (m)	pressão cálculo $Ph$ (MPa)	PAREDE EM CONFORMAÇÃO TRAPEZOIDAL $L=2m$ e $h=25m$						
		$L_c$ (m)	$\theta$ (graus)	$t$ (m)	$P$ (kN/m)	$\sigma_{YV}$ (MPa)	$\sigma_{Yc}$ (MPa)	$\sigma_l$ (MPa)
1,90	0,019	0,3000	45	0,00300	0,271	104,24	30,74	94,29
3,90	0,021	0,3000	45	0,00400	0,361	87,63	25,83	59,38
8,12	0,038	0,3000	45	0,00500	0,451	125,35	36,94	67,89
25,00	0,042	0,3000	45	0,00600	0,541	117,08	34,50	52,80

Tabela 6 - Dimensionamento para conformação trapezoidal de Ravenet otimizada.

MODELO DE RAVENET OTIMIZADO								
profundidade $z$ (m)	pressão cálculo $Ph$ (MPa)	PAREDE EM CONFORMAÇÃO TRAPEZOIDAL $L=2m$ e $h=25m$						
		$L_c$ (m)	$\theta$ (graus)	$t$ (m)	$P$ (kN/m)	$\sigma_{YV}$ (MPa)	$\sigma_{Yc}$ (MPa)	$\sigma_l$ (MPa)
1,90	0,019	0,2755	45	0,00210	0,190	161,81	47,04	161,81
3,90	0,021	0,2834	45	0,00229	0,206	161,81	47,26	161,81
8,12	0,038	0,2970	45	0,00391	0,353	161,81	47,62	161,81
25,00	0,042	0,2970	45	0,00438	0,395	161,81	47,61	97,13

A Tabela 7 apresenta o resumo dos resultados do dimensionamento realizado por Ravenet e os da otimização, bem como a economia de material em percentagem na coluna Redução do peso otimizado.

Tanto a Tabela 7 como a Figura 50 evidenciam a grande redução do material das paredes do silo, sendo que nos pontos estudados a economia variou em 21,8% e 42,7%.



Tabela 7 - Resumo dos dimensionamentos e percentual do peso reduzido.

profundidade z (m)	pressão cálculo Ph (MPa)	$\theta$ (graus)	Modelo trapezoidal proposto por Ravenet			Modelo trapezoidal de Ravenet Otimizado			Redução do peso otimizado em %
			Lc (m)	t (m)	P (kN/m)	Lc (m)	t (m)	P (kN/m)	
1,90	0,019	45	0,3000	0,00300	0,2706	0,2755	0,00210	0,1897	29,90
3,90	0,021	45	0,3000	0,00400	0,3608	0,2834	0,00229	0,2064	42,77
8,12	0,038	45	0,3000	0,00500	0,4509	0,2970	0,00391	0,3525	21,83
25,00	0,042	45	0,3000	0,00600	0,5411	0,2970	0,00438	0,3950	27,01

As análises anteriores foram efetuadas considerando-se a espessura como variável contínua. Adicionalmente, a Figura 50 apresenta o peso otimizado resultante da imposição de valores inteiros para a espessura em milímetros. Para estes casos observou-se que a redução de peso ainda é significativa.

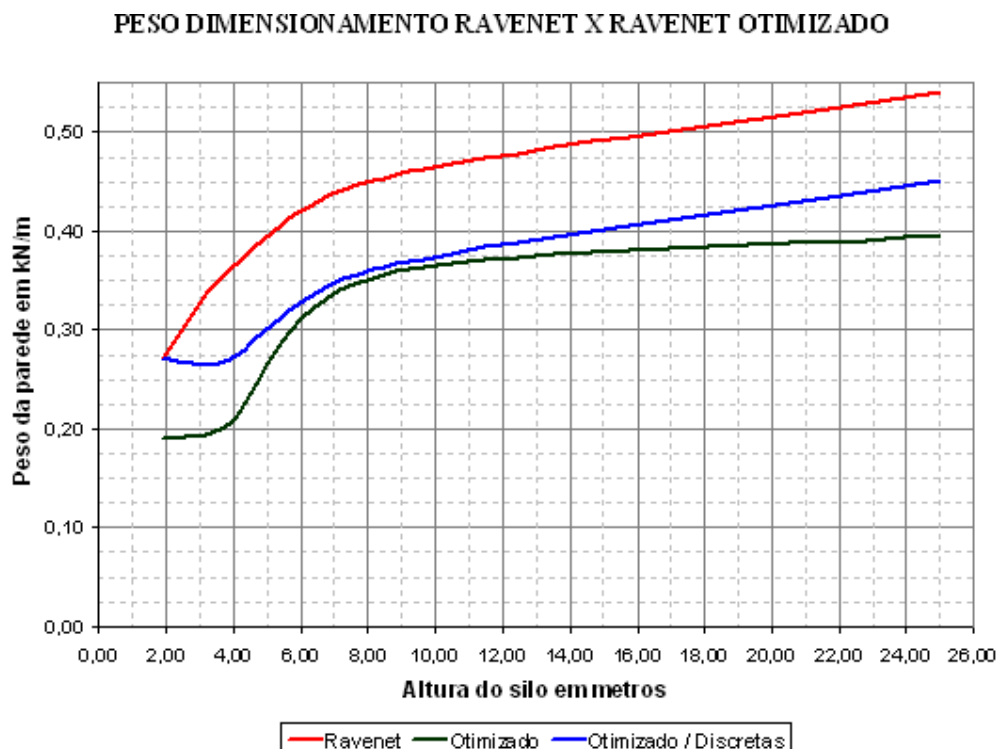


Figura 50: Peso da parede conformada com onda trapezoidal e peso otimizado.

### 6.3 Exemplo 2

Neste exemplo são analisadas e comparadas duas paredes, uma conformada com ondas trapezoidais e outra em ziguezague, para uma célula de silo com seção horizontal de 2 x 2 metros, altura de 12 metros e ângulo de inclinação  $\theta \geq 71^\circ$ . A tensão admissível do aço

$\sigma_{adm}=161,81$  MPa (correspondente ao aço SAE 1010) e a pressão horizontal atuante na parede foram calculadas pela norma DIN 1055-6 (2000), sendo o produto armazenado farelo de soja com as seguintes propriedades físicas (Nascimento (1996):

- Densidade:  $\gamma = 710 \text{ kgf/m}^3 = 7,10 \text{ kN/m}^3$ ;
- Ângulo de atrito interno:  $\phi_{ii} = 45^\circ$  e  $\phi_{is} = 68^\circ$ ;
- Efetivo ângulo de atrito interno:  $\phi_{ei} = 27^\circ$  e  $\phi_{es} = 56^\circ$ ;
- Ângulo de atrito interno entre o material armazenado e a parede do silo em aço liso:  $\phi_w = 10^\circ$ ;
- Coeficiente de atrito entre o produto ensilado e a parede:  $\mu = 0,176$ ;
- Relação entre a pressão horizontal e a vertical:  $\lambda = 1,1(1 - \sin\phi_{ei}) = 0,65$ ;
- Coeficiente de sobrepressão de descarregamento central  $e_h = 1,7$ .
- Para os dados listados, efetuou-se a determinação das dimensões ótimas para profundidades variando de um em um metro medida a partir do topo da parede.

A Figura 51 apresenta a construção do modelo na planilha eletrônica para a conformação em ziguezague, os resultados da otimização na cota 12 metros e o modelo salvo de acordo com o item (5.5.8).

<b>Objetivo:</b>		
Encontrar os valores de $t$ , $L_c$ e $\theta$ que minimizam $P$ do painel conformado em ziguezague		
<b>Função Objetivo</b>	<b>Dados do Problema</b>	<b>Modelo</b>
$f = 0,279333769 \text{ kN/m}$	$P_h = 0,0315 \text{ MPa}$	0,279333769
	$L = 2,0000 \text{ m}$	3
	$\sigma_{adm} = 161,8097 \text{ MPa}$	VERDADEIRO
<b>Variáveis diretas</b>		VERDADEIRO
$t = 0,003430862 \text{ m}$		VERDADEIRO
$\theta = 71 \text{ graus}$		VERDADEIRO
$L_c = 0,34791415 \text{ m}$		VERDADEIRO
	<b>Restrições laterais</b>	
	$t \geq 0,0001 \text{ m}$	VERDADEIRO
	$t \leq 0,008 \text{ m}$	VERDADEIRO
	$\theta \geq 71,00 \text{ graus}$	VERDADEIRO
	$\theta \leq 90,00 \text{ graus}$	VERDADEIRO
	$L_c \geq 0 \text{ m}$	VERDADEIRO
	$L_c \leq 0,614310697 \text{ m}$	100,00
<b>Restrições de comportamento</b>		
$\sigma_{Yw} = 160,88 \text{ MPa}$		
$\sigma_{Yc} = 161,81 \text{ MPa}$		
$\sigma_1 = 161,81 \text{ MPa}$		
$\theta_1 = 0,740275265 \text{ graus}$		

Fonte: Microsoft Excel (2000)

Figura 51: Planilha de dados – Conformação ziguezague; cota 12 m; farelo de soja

A Figura 52 apresenta o relatório de resposta da otimização para conformação em ziguezague na cota 12 metros.

Microsoft Excel 9.0 Relatório de resposta  
 Planilha: [modelo2A.xls]zig  
 Relatório criado: 11/5/2006 08:44:02

Célula de destino (Min)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$B\$5	f	4,410979098	0,279333769

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$B\$8	t	0,001	0,003430862
\$B\$9	$\theta$	1	71
\$B\$10	Lc	0,15	0,34791415

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
\$B\$10	Lc	0,34791415	\$B\$10<=\$F\$16	Sem agrupar	0,266396548
\$B\$13	$\sigma_v$	160,88	\$B\$13<=\$F\$7	Sem agrupar	0,928908437
\$B\$14	$\sigma_y$	161,81	\$B\$14<=\$F\$7	Sem agrupar	1,11456E-06
\$B\$15	$\sigma_l$	161,81	\$B\$15<=\$F\$7	Agrupar	0
\$B\$8	t	0,003430862	\$B\$8<=\$F\$12	Sem agrupar	0,004569138
\$B\$8	t	0,003430862	\$B\$8>=\$F\$11	Sem agrupar	0,003330862
\$B\$9	$\theta$	71	\$B\$9<=\$F\$14	Sem agrupar	19
\$B\$9	$\theta$	71	\$B\$9>=\$F\$13	Agrupar	0
\$B\$10	Lc	0,34791415	\$B\$10>=\$F\$15	Sem agrupar	0,34791415

Figura 52: Resultados da otimização – Modelo 2 na cota 12 metros.

A Tabela 8 reproduz os resultados do painel otimizado. O peso ótimo  $P$  é limitado pelas tensões  $\sigma_{yv}$  e  $\sigma_l$  entre as cotas 1 e 4 metros e pelas tensões  $\sigma_{yc}$  e  $\sigma_l$  entre as cotas 5 e 12 metros.

Tabela 8 - Dimensionamento otimizado painel em ziguezague

profundidade z (m)	PAREDE ZIGUEZAGUE L - ARMAZENAMENTO DE FARELO DE SOJA							
	pressão cálculo Phad (MPa)	RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO - CÉLULA L=2 m h=12 m						
		Lc (m)	$\theta$ (graus)	t (m)	P (kN/m)	$\sigma_{yv}$ (MPa)	$\sigma_{yc}$ (MPa)	$\sigma_l$ (MPa)
1,00	0,0069	0,237	71	0,001093	9,075	<b>161,81</b>	159,97	<b>161,81</b>
2,00	0,0123	0,275	71	0,001696	14,080	<b>161,81</b>	160,90	<b>161,81</b>
3,00	0,0167	0,296	71	0,002127	17,660	<b>161,81</b>	161,44	<b>161,81</b>
4,00	0,0202	0,310	71	0,002450	20,339	<b>161,81</b>	161,80	<b>161,81</b>
5,00	0,0229	0,321	71	0,002699	22,408	161,56	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
6,00	0,0251	0,328	71	0,002892	24,007	161,37	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
7,00	0,0269	0,334	71	0,003043	25,260	161,23	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
8,00	0,0282	0,338	71	0,003160	26,238	161,12	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
9,00	0,0293	0,342	71	0,003254	27,014	161,03	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
10,00	0,0302	0,344	71	0,003327	27,620	160,97	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
11,00	0,0309	0,346	71	0,003385	28,100	160,92	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
12,00	0,0315	0,348	71	0,003431	28,484	160,88	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>

A Tabela 9 reproduz os resultados do dimensionamento otimizado para o painel trapezoidal. O peso ótimo  $P$  é limitado pelas tensões  $\sigma_{yv}$  e  $\sigma_l$  em todas as seções estudadas.

Tabela 9 - Dimensionamento otimizado do painel trapezoidal

profundidade z (m)	PAREDE TRAPEZOIDAL - ARMAZENAMENTO DE FARELO DE SOJA							
	pressão cálculo Ph (kPa)	RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO - CÉLULA L=2 m h=12 m						
		Lc (m)	$\theta$ (graus)	t (m)	P (kN/m)	$\sigma_{yv}$ (MPa)	$\sigma_{yc}$ (MPa)	$\sigma_l$ (MPa)
1,00	6,87	0,339	71	0,001564	0,124	<b>161,81</b>	42,98	<b>161,81</b>
2,00	12,35	0,393	71	0,002427	0,192	<b>161,81</b>	43,67	<b>161,81</b>
3,00	16,70	0,424	71	0,003044	0,241	<b>161,81</b>	44,06	<b>161,81</b>
4,00	20,16	0,444	71	0,003505	0,277	<b>161,81</b>	44,33	<b>161,81</b>
5,00	22,92	0,459	71	0,003859	0,305	<b>161,81</b>	44,52	<b>161,81</b>
6,00	25,11	0,469	71	0,004131	0,327	<b>161,81</b>	44,66	<b>161,81</b>
7,00	26,85	0,477	71	0,004345	0,344	<b>161,81</b>	44,76	<b>161,81</b>
8,00	28,23	0,483	71	0,004511	0,357	<b>161,81</b>	44,84	<b>161,81</b>
9,00	29,34	0,488	71	0,004643	0,367	<b>161,81</b>	44,90	<b>161,81</b>
10,00	30,21	0,491	71	0,004746	0,376	<b>161,81</b>	44,95	<b>161,81</b>
11,00	30,91	0,494	71	0,004828	0,382	<b>161,81</b>	44,99	<b>161,81</b>
12,00	31,47	0,496	71	0,004893	0,387	<b>161,81</b>	45,02	<b>161,81</b>

A Tabela 10 condensa os resultados otimizados para os modelos de conformação ziguezague e trapezoidal. A variação do peso ótimo em função da cota de referência z é também ilustrada na Figura 53.

Tabela 10 - Resumo dimensionamento otimizado no armazenamento de farelo de soja.

profundidade z (m)	pressão cálculo Ph (kPa)	ZIGUEZAGUE				TRAPEZOIDAL				Diferença % do peso ziguezague x trapezoidal
		Lc (m)	$\theta$ (graus)	t (m)	P (kN/m)	Lc (m)	$\theta$ (graus)	t (m)	P (kN/m)	
1,00	6,87	0,237	71	0,0011	0,089	0,339	71	0,0016	0,124	28,11
2,00	12,35	0,275	71	0,0017	0,138	0,393	71	0,0024	0,192	28,10
3,00	16,70	0,296	71	0,0021	0,173	0,424	71	0,0030	0,241	28,10
4,00	20,16	0,310	71	0,0024	0,199	0,444	71	0,0035	0,277	28,10
5,00	22,92	0,321	71	0,0027	0,220	0,459	71	0,0039	0,305	28,03
6,00	25,11	0,328	71	0,0029	0,235	0,469	71	0,0041	0,327	27,99
7,00	26,85	0,334	71	0,0030	0,248	0,477	71	0,0043	0,344	27,95
8,00	28,23	0,338	71	0,0032	0,257	0,483	71	0,0045	0,357	27,93
9,00	29,34	0,342	71	0,0033	0,265	0,488	71	0,0046	0,367	27,91
10,00	30,21	0,344	71	0,0033	0,271	0,491	71	0,0047	0,376	27,89
11,00	30,91	0,346	71	0,0034	0,276	0,494	71	0,0048	0,382	27,88
12,00	31,47	0,348	71	0,0034	0,279	0,496	71	0,0049	0,387	27,87

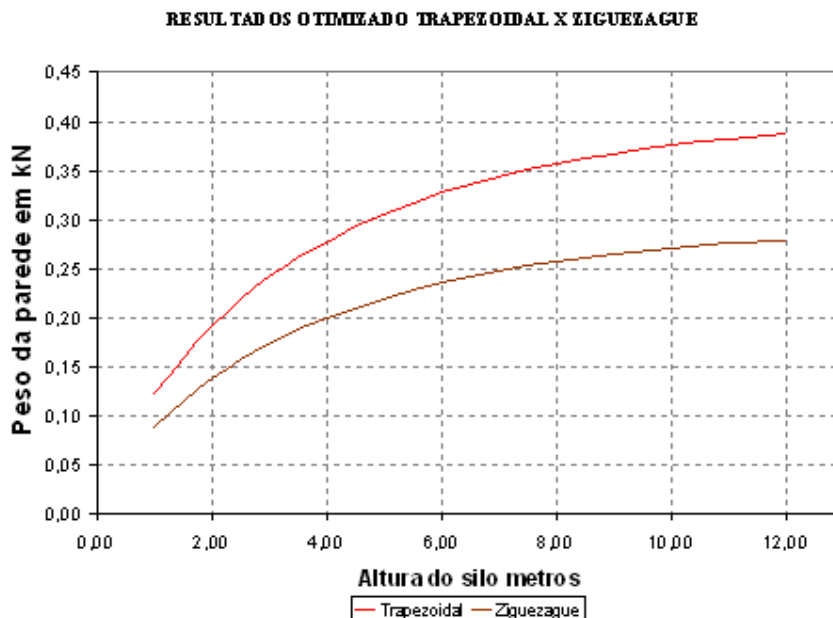


Figura 53: Peso da parede conformada (trapezoidal x ziguezague)

Os resultados da otimização contidos na Tabela 10 e na Figura 53 sugerem que, para o armazenamento de produtos pulverulentos, tais como o farelo de soja, a conformação em ziguezague é a mais apropriada, uma vez que conduziu a um peso minimizado significativamente menor que na conformação trapezoidal.

### 6.4 Exemplo 3

A investigação efetuada neste exemplo refere-se a uma célula de seção horizontal de 2 x 2 metros, altura de 12 metros, destinada ao armazenamento de cereais, especificamente, grãos de soja. São analisadas e comparadas as paredes conformadas em seção trapezoidal e ziguezague com o ângulo do segmento inclinado da chapa conformada  $\theta \geq 45^\circ$ . Como no exemplo imediatamente anterior, a pressão horizontal atuante na parede é calculada pela norma DIN 1055-6 (2000). As propriedades físicas da soja, fornecidas pela mesma norma, são:

- Densidade:  $\gamma = 800 \text{ kgf/m}^3 = 7,85 \text{ kN/m}^3$ ;
- Ângulo de atrito interno dos grãos:  $\phi_i = 25^\circ$ ;
- Coeficiente de atrito entre o produto ensilado e a parede:  $\mu = 0,25$ ;
- Relação entre a pressão horizontal e a vertical:  $\lambda = 1,2(1 - \sin\phi_i) = 0,69$ ;
- Coeficiente de sobrepressão de descarregamento central  $e_h = 1,4$ .

Para os dados listados, efetuou-se a determinação das dimensões ótimas para profundidades variando de um em um metro.

A Tabela 11 apresenta os resultados do dimensionamento otimizado para a parede conformada em ziguezague, onde se pode observar nas cotas 1 e 2 metros que a limitação da espessura da chapa conformada gera uma sobra de resistência, a qual produz o ângulo  $\theta > 45^\circ$ , isto é,  $\theta \approx 69,7^\circ$  e  $\theta \approx 50,3^\circ$ , respectivamente. Para as demais cotas a restrição ativa passa a ser ângulo  $\theta$  mínimo. O peso ótimo  $P$  é limitado pelas tensões  $\sigma_{YV}$  e  $\sigma_t$ , na cota de 1 metro, e pelas tensões  $\sigma_{Yc}$  e  $\sigma_t$ , nas demais.

Tabela 11 - Dimensionamento otimizado do painel conformado em ziguezague.

profundidade z (m)	PAREDE ZIGUEZAGUE - ARMAZENAMENTO DE GRÃOS DE SOJA							
	pressão cálculo Ph (kPa)	RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO L=2m; h=12m						
		Lc (m)	$\theta$ (graus)	t (m)	P (kN/m)	$\sigma_{YV}$ (MPa)	$\sigma_{Yc}$ (MPa)	$\sigma_t$ (MPa)
1,00	6,40	0,2248	69,69	0,0010	0,0808	<b>161,81</b>	160,01	<b>161,81</b>
2,00	10,94	0,1720	50,31	0,0010	0,1000	161,60	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
3,00	14,16	0,1674	45,00	0,0011	0,1206	161,22	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
4,00	16,44	0,1740	45,00	0,0012	0,1350	160,87	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
5,00	18,05	0,1782	45,00	0,0013	0,1449	160,64	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
6,00	19,19	0,1810	45,00	0,0014	0,1518	160,49	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
7,00	20,01	0,1830	45,00	0,0014	0,1566	160,38	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
8,00	20,57	0,1843	45,00	0,0015	0,1600	160,31	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
9,00	20,98	0,1852	45,00	0,0015	0,1624	160,26	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
10,00	21,27	0,1859	45,00	0,0015	0,1640	160,23	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
11,00	21,48	0,1863	45,00	0,0015	0,1652	160,20	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>
12,00	21,61	0,1867	45,00	0,0015	0,1661	160,19	<b>161,81</b>	<b>161,81</b>

A Tabela 12 reproduz os resultados do dimensionamento otimizado para o painel trapezoidal. O peso ótimo  $P$  é limitado pelas tensões  $\sigma_{YV}$  e  $\sigma_t$  em todas as seções testadas.

Tabela 12 - Dimensionamento otimizado do painel trapezoidal

profundidade z (m)	PAREDE TRAPEZOIDAL - ARMAZENAMENTO DE GRÃOS DE SOJA							
	pressão cálculo Ph (kPa)	RESULTADO DA OTIMIZAÇÃO - CÉLULA L=2m; h=12m						
		Lc (m)	$\theta$ (graus)	t (m)	P (kN/m)	$\sigma_{YV}$ (MPa)	$\sigma_{Yc}$ (MPa)	$\sigma_t$ (MPa)
1,00	6,40	0,2248	45	0,00100	0,087	<b>161,81</b>	44,88	<b>161,81</b>
2,00	10,94	0,2404	45	0,00140	0,126	<b>161,81</b>	46,08	<b>161,81</b>
3,00	14,16	0,2564	45	0,00170	0,153	<b>161,81</b>	46,52	<b>161,81</b>
4,00	16,44	0,2661	45	0,00190	0,171	<b>161,81</b>	46,79	<b>161,81</b>
5,00	18,05	0,2725	45	0,00204	0,184	<b>161,81</b>	46,96	<b>161,81</b>
6,00	19,19	0,2767	45	0,00213	0,192	<b>161,81</b>	47,08	<b>161,81</b>
7,00	20,01	0,2796	45	0,00220	0,198	<b>161,81</b>	47,16	<b>161,81</b>
8,00	20,57	0,2816	45	0,00224	0,202	<b>161,81</b>	47,21	<b>161,81</b>
9,00	20,98	0,2829	45	0,00228	0,205	<b>161,81</b>	47,25	<b>161,81</b>
10,00	21,27	0,2839	45	0,00230	0,208	<b>161,81</b>	47,27	<b>161,81</b>
11,00	21,48	0,2846	45	0,00232	0,209	<b>161,81</b>	47,29	<b>161,81</b>
12,00	21,61	0,2851	45	0,00233	0,210	<b>161,81</b>	47,31	<b>161,81</b>

A Tabela 13 reproduz os resultados otimizados para os modelos de conformação e ziguezague e trapezoidal, respectivamente.

Tabela 13 - Resumo dimensionamento otimizado no armazenamento de grãos de soja.

profundidade z (m)	pressão cálculo Ph (kPa)	ZIGUEZAGUE				TRAPEZOIDAL				Diferença % do peso ziguezague x trapezoidal
		Lc (m)	$\theta$ (graus)	t (m)	P (kN/m)	Lc (m)	$\theta$ (graus)	t (m)	P (kN/m)	
1,00	6,40	0,2248	69,69	0,0010	0,0808	0,2248	45	0,00100	0,0872	7,29
2,00	10,94	0,1720	50,31	0,0010	0,1000	0,2404	45	0,00140	0,1261	20,68
3,00	14,16	0,1674	45,00	0,0011	0,1206	0,2564	45	0,00170	0,1530	21,18
4,00	16,44	0,1740	45,00	0,0012	0,1350	0,2661	45	0,00190	0,1711	21,11
5,00	18,05	0,1782	45,00	0,0013	0,1449	0,2725	45	0,00204	0,1836	21,05
6,00	19,19	0,1810	45,00	0,0014	0,1518	0,2767	45	0,00213	0,1922	21,02
7,00	20,01	0,1830	45,00	0,0014	0,1566	0,2796	45	0,00220	0,1983	21,00
8,00	20,57	0,1843	45,00	0,0015	0,1600	0,2816	45	0,00224	0,2025	20,98
9,00	20,98	0,1852	45,00	0,0015	0,1624	0,2829	45	0,00228	0,2054	20,97
10,00	21,27	0,1859	45,00	0,0015	0,1640	0,2839	45	0,00230	0,2076	21,00
11,00	21,48	0,1863	45,00	0,0015	0,1652	0,2846	45	0,00232	0,2091	21,00
12,00	21,61	0,1867	45,00	0,0015	0,1661	0,2851	45	0,00233	0,2101	20,95

A Figura 54 ilustra graficamente o peso ótimo resultante das investigações nas 12 cotas da altura  $h$  da parede conformada em seção trapezoidal e ziguezague. Tanto a Tabela 13 como a Figura 54 demonstram redução do material das paredes do silo, observando-se que nos pontos estudados a economia variou em 7,29% e 21,18%.

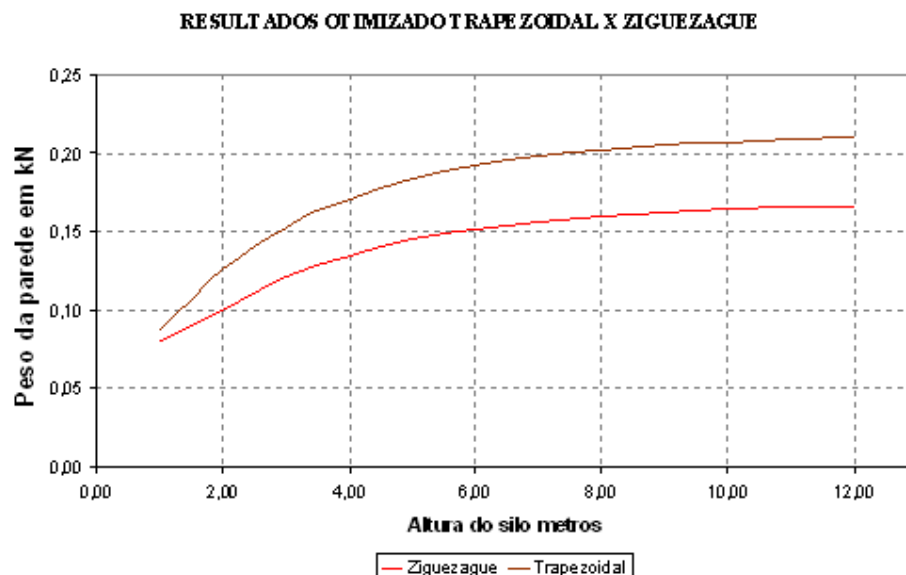


Figura 54: Peso ótimo da parede conformada no armazenamento de soja a granel.

Os resultados do dimensionamento otimizado contidos na Tabela 13 e na Figura 54 demonstram que, para o armazenamento de cereais, no caso estudado soja a granel, a conformação em ziguezague também é a mais vantajosa, uma vez que conduziu a um peso minimizado consideravelmente menor que na conformação trapezoidal. A Figura 55 ilustra o peso ótimo resultante das investigações efetuadas para a parede do silo conformada em seção trapezoidal e ziguezague no armazenamento de farelo de soja e soja a granel. Nesta figura observa-se que, para se armazenar farelo de soja, a quantidade de material empregado nas paredes é sensivelmente maior que para soja a granel, independentemente da conformação utilizada.

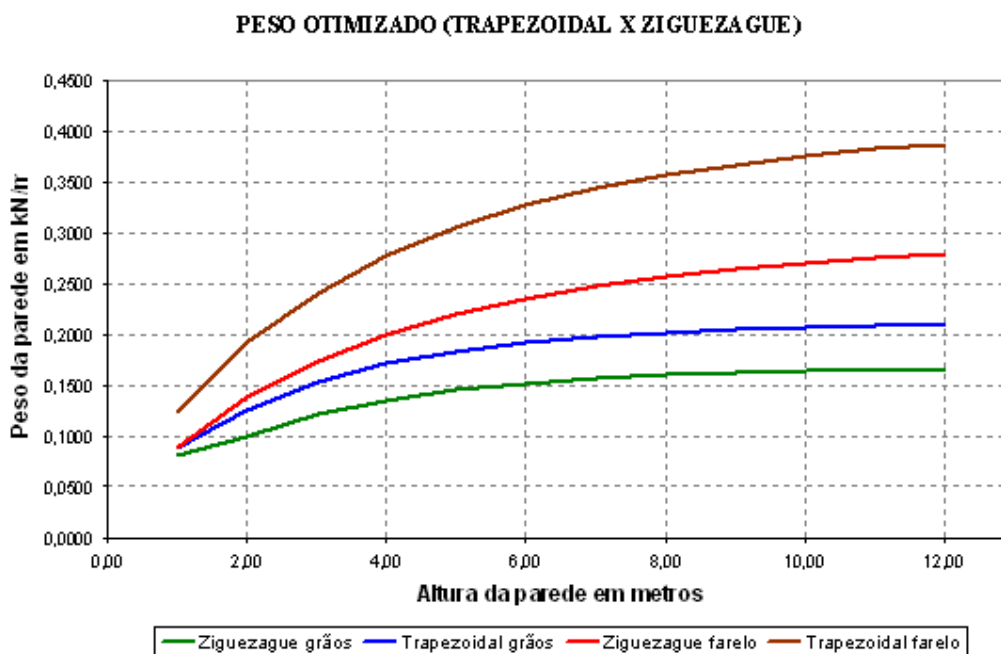


Figura 55: Peso ótimo da parede conformada no armazenamento de soja a granel

Visando estudar a influência da variação do ângulo  $\theta$  sobre o peso da parede quando submetido a uma mesma situação de carregamento, efetuou-se a investigação para as conformações analisadas no Exemplo 3 na cota 12 metros, sob pressão horizontal  $P_h=21,61$  kPa e  $45^\circ \leq \theta \leq 70^\circ$ , variando de 5 em 5 graus.

A Tabela 14 apresenta a percentagem acumulada da variação de peso em relação a  $\theta = 45^\circ$ , bem como a diferença percentual entre elas para cada incremento de  $\theta$ ; para outros valores de pressão horizontal os resultados são análogos.



Tabela 14 - Influência do incremento de  $\theta$  na seção do painel.

profundidade z (m)	pressão cálculo Ph (kPa)	$\theta$ (graus)	ZIGUEZAGUE				TRAPEZOIDAL				Diferença % do peso zig-zague x trapezoidal
			Lc (m)	t (m)	P (kN/m)	% acumulado a cada 5°	Lc (m)	t (m)	P (kN/m)	% acumulado a cada 5°	
12,00	21,61	45	0,187	0,0015	0,1661	0,00	0,285	0,0023	0,2101	0,00	20,95
12,00	21,61	50	0,204	0,0017	0,1673	0,72	0,305	0,0025	0,2171	3,32	22,93
12,00	21,61	55	0,223	0,0018	0,1712	3,05	0,328	0,0027	0,2268	7,96	24,54
12,00	21,61	60	0,245	0,0020	0,1781	7,21	0,356	0,0029	0,2402	14,34	25,88
12,00	21,61	65	0,272	0,0022	0,1890	13,79	0,392	0,0032	0,2589	23,20	26,99
12,00	21,61	70	0,307	0,0025	0,2059	23,93	0,440	0,0036	0,2855	35,89	27,90

Ainda com base nesses resultados, observa-se que o acréscimo do peso otimizado resulta em até 23,93% maior do que para o ângulo de referência  $\theta = 45^\circ$  na conformação em zig-zague; na conformação trapezoidal, o acréscimo variou até 35,89%. Para pequenos incrementos de  $\theta$  o aumento de peso é pouco significativo; por outro lado, para ângulos maiores essa variação passa a ser mais significativa. Por esta razão, o ângulo  $\theta$  de projeto de fluxo deve ser cuidadosamente estudado.

## **7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS**

### **7.1 Conclusões da pesquisa**

O presente trabalho teve por objetivo avaliar o desempenho estrutural das paredes de silos metálicos prismáticos enrijecidas conformadas horizontalmente com ondas em seção ziguezague e trapezoidal. Para ambas as configurações o problema foi formulado tendo como variáveis de projeto a espessura, o ângulo da inclinação do segmento da onda com a horizontal e o comprimento do segmento da onda, objetivando a minimização do peso por metro de parede.

Com base nos exemplos analisados, observou-se que o dimensionamento das paredes com aplicação de técnicas de otimização resultou numa expressiva economia de material, o que evidencia a importância do emprego da otimização ao tipo de problema estudado.

Nas simulações efetuadas a conformação das paredes em ziguezague mostrou-se mais apropriada que a conformação trapezoidal tanto para o produto pulverulento estudado (farelo de soja) como para o produto granular (soja), obtendo-se em ambos os casos significativa redução no peso das paredes.

De forma geral, observou-se que o armazenamento de produtos pulverulentos requer uma quantidade maior de material na fabricação das paredes independentemente da conformação adotada.

### **7.2 Recomendações para trabalhos futuros**

Com base nos resultados obtidos nas simulações numéricas, evidencia-se que a metodologia empregada na avaliação do desempenho estrutural das paredes conformadas pode ser estendida para os demais elementos estruturais dos silos (colunas, tremonhas, tetos

etc.) com igual vantagem. Portanto, recomenda-se a continuidade da pesquisa com os seguintes aspectos:

- aplicar a metodologia para o dimensionamento das colunas e tremonhas de silos;
- aplicar a metodologia para o dimensionamento paredes lisas enrijecida com perfis tipo cartola angular;
- efetuar estudos teórico e experimental da força de compressão devida ao atrito do produto com a parede do silo.



## REFERÊNCIAS

- ANTTI-TEOLLISUUS OY. Brochure. Disponível em:  
< [http://www.anti-teollisuus.fi/en/pdf/anti16s\\_englanti.pdf](http://www.anti-teollisuus.fi/en/pdf/anti16s_englanti.pdf)>. Acesso em: 28 mar. 2006.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT): *NBR 6120: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações*. Rio de Janeiro, 2003.
- \_\_\_\_\_. *NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações*. Rio de Janeiro, 1988.
- \_\_\_\_\_. *NBR 8800: Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios*. Rio de Janeiro, 1986.
- \_\_\_\_\_. *NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas*. Rio de Janeiro, 2003.
- \_\_\_\_\_. *NBR 14762: Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio*. Rio de Janeiro, 2001.
- AUSTRALIAN STANDARD AS 3774. Loads on bulk containers. Sydney. AS 3774 Supplement 1. Sydney, 1997.
- BELEGUNDU, A. D.; CHANDRUPATLA, T. R. *Optimization concepts and applications in engineering*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1999. 432p.
- BROWN C. J. Retangular silo structures. In: BROWN C. J.; NIELSEN J. (Org.) *Silos Fundamentals of theory, behavior and design*. New York: E & FN Spon, 1998. p.426-442.
- CALIL JR., C. *Sobrepresiones en las paredes de los silos para almacenamiento de productos pulverulentos cohesivos*. 184 p. Tese (Doutorado em Engenharia). Escola Politécnica de Barcelona. Espanha. Publicação do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, USP. 1984, 184p.
- CALIL JR., C. Estudo teórico e experimental das pressões em silos verticais cilíndricos de pequena relação altura/diâmetro. In: COLLOQUIA, 1987, Porto Alegre. Anais... Porto Alegre: UFRS, 1987, v.3, p.229-243.
- CALIL JR., C. *Recomendações de fluxo e de ações para projeto de silos verticais*. Tese (Livre Docência). Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, SP, 1990, 186p.
- CALIL Jr., C.; NASCIMENTO, J.W.B. Ações em silos pelo método dos estados limites: proposta de norma brasileira. *Engenharia Agrícola*, Jaboticabal, v.16, n. 4, p.110-117, 1997.
- CALIL JR, C.; NASCIMENTO, J. W. B.; ARAÚJO, E. C. *Silos metálicos multicelulares*. Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos, 1997. 178p.
- CARSON, J. W. *Silo failures: case histories and lessons learned*. In: III ISRAELI CONFERENCE FOR CONVEYING AND HANDLING OF PARTICULATE SOLIDS, Dead Sea Israel, May 2000.

CHIEF INDUSTRIES, INC. Lemanco Galvanized Bin System. Disponível em:  
<[http://www.lemanco.com/html/features\\_\\_\\_options.html](http://www.lemanco.com/html/features___options.html)>. Acesso em: 30 mar. 2006.

COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO. *Conab destaca ações em 18 meses: Armazenagem*. Disponível em:  
<<http://www.conab.gov.br/conabweb/index.php?PAG=73&NSN=182>> Acesso em 3 abr. 2006.

DEUTSCHE NORM-DIN 1055. *Design loads for buildings*. Loads in silo bins. Berlin: German Standards Institute, Part 6 Revision 2000.

ENSTAD, G. (1975). On the Theory of Arching in Mass Flow Hoppers. *Chemical Engineering Science*, v. 30, pp 1273 a 1283, out. 1975.

EUROCODE 1. *Basis of design and actions on structures*. Actions in silos and tanks, Part 4, ENV 1995.

GAYLORD JR, E.H.; GAYLORD, C.N. *Design of steel bins for storage of bulk solids*. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1984. 359p.

HAFTKA R. T.; MONOHAR P. K. *Elements of structural optimization*. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1985. 266p.

INTERNATIONAL STANDART –ISO 11697. *Bases for design of structures: Loads due to bulk materials*, Switzerland, 1995. 15p.

JANSSEN, H. A. Versuche Über Getreidedruck in Silozellen. *Zeitschrift, Verein Deutscher Ingenieure*, v. 39, p. 1045-1049, ago. 1895.

JENIKE, A. W. *Storage and Flow of Solids. Bulletin 123*. Utah Engineering Experiment Station. University of Utah. Salt Lake City. 1964. 197 p.

JENIKE, A. W. Bin loads. *Journal of Structural Division*, v.93, st 4, p. 1011-1041, abr. 1968.

JENIKE & JOHANSON, INC. *The Jenike Shear Tester*. Disponível em:  
<[http://www.jenike.com/pages/services/test\\_equip/jst.html](http://www.jenike.com/pages/services/test_equip/jst.html)> Acesso em 28 abr. 2006.

LI, H. *Analysis of steel silo structures on discrete supports*. A thesis submitted in fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, The University of Edinburgh, Edinburgh, 1994.

MICROSOFT CORPORATION. Sobre o Solver. Disponível em:  
<<http://office.microsoft.com/pt-br/excel/HP051983681046>>. Acesso em: 15 jun. 2006.

MARINELLI, J. Flow Properties Testing - Jenike Shear Tester. Disponível em:  
<[http://www.powderandbulk.com/pb\\_services/ask\\_joe\\_archive/flow\\_properties\\_testing\\_jenike\\_shear\\_tester.htm](http://www.powderandbulk.com/pb_services/ask_joe_archive/flow_properties_testing_jenike_shear_tester.htm)>. Acesso em: 28 abr. 2006.

NASCIMENTO, J.W.B. *Estudo dos silos metálicos prismáticos para fábricas de ração*. Tese Doutorado em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1996. 152p.

NEVES, F. A., “*Programação com Multi-Objetivos Aplicada à Otimização do Projeto de Pontes Estaiadas*”. Tese de Doutorado na COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro, 1997.

NIELSEN J. Pressures from flowing granular solids in silos. Disponível em: <<http://www.journals.royalsoc.ac.uk/media/F016900QUM7VPJFVMEWP/Contributions/5/P/N/U/5PNU0C0FYC5HTNC5.pdf>>. Acesso em: 26 jan. 2005.

PALMA, G. *Pressões e fluxos em silos esbeltos ( $h/d \geq 1,5$ )*. Dissertação Mestrado em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2005. 121p.

RAVENET, J. *Silos*. Barcelona: Edição do Autor, 1992. 508p.

RAVENET, J. *Teoría, investigación e construcción*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados, 1977. 381p.

REIMBERT, M. L.; REIMBERT, A. M., *Silos: Teoría e Práctica*. Buenos Aires: Editorial Américalee S.R.L., 1979. 464 p.

REIMBERT, M. L.; REIMBERT, A. M., *Silos 2: theory, practice calculation vertical silos*. Paris: AR Livres, 2002. 174p.

REKLAITS, G. V.; RAVINDRAN, A.; RAGSDELL, K. M. *Engineering optimization*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1983. 684p.

RIBEIRO, S. O fantasma da falta de espaço. *Zero Hora*, Porto Alegre, 31 mar. 2006.

ROTTER J. M. Challenges for the future and concluding comments. In: BROWN C. J.; NIELSEN J. (Org.) *Silos Fundamentals of theory, behavior and design*. New York: E & FN Spon, 1998. p.465-467.

SAFARIAN, S. S.; HARRIS, E. C. *Design and construction of silos and bunkers*. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1985. 468p.

SCHULZE, D. Flow properties of powders and bulk solids and silo design for flow. Artigo 2002. Disponível em: <<http://www.dietmar-schulze.de/fre.html>>. Acesso em 03 jan. 2005.

SCHULZE, D. Measurement of the flowability of bulk solids. In: BROWN C. J.; NIELSEN J. (Org.) *Silos Fundamentals of theory, behavior and design*. New York: E & FN Spon, 1998. p.18-52.

SCHULZE, D. Storage of powders and bulk solids in silos. Disponível em: <<http://www.dietmar-schulze.de/fre.html>>. Acesso em: 03 jan. 2005.

SCHULZE, D. Stresses in silos. Disponível em: < <http://www.dietmar-schulze.de/fre.html> >. Acesso em: 28 ago. 2004.

SILVA, E. C. N., Otimização em Engenharia Mecânica. Disponível em:

SILVOSO, M.M. *Otimização da fase construtiva de estruturas de concreto em face dos efeitos da hidratação via algoritmos genéticos*. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.169p.

SOLVER, INC. Solver tutorial for optimization users. Disponível em: < <http://www.solver.com/tutorial.htm>>. Acesso em: 15 jun. 2006.

STEEL STRUCTURES, INC. Customers Gallery: Vertilok Bins. Disponível em: < <http://www.steelstructuresinc.com/vertilokgallery.html>>. Acesso em: 2 abr. 2006.

TRAHAIR N.S. Characteristics of structural form in design of steel bins for the storage bulk solids. University of Sydney, 1985, p 55-57.

TROITSKY, M. S. Design consideration for rectangular steel bins. In: CANIDIAN STRUCTURAL ENGINEERING CONFERENCE, Montreal, 1980. p1-42.

TROITSKY, M. S. *Tubular steel structures, theory and design*. Cleveland: The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 1990.

VANDERPLAATS, G. N. *Numerical optimization techniques for engineering design*. United States: McGraw-Hill, Inc.1984. 333p.



## ANEXO A – RESISTÊNCIA À FLEXÃO DE PERFIS CONFORMADOS

### 1 Argumento inicial

A chapa de aço biapoiada plana e fina da Figura A-1a não pode suportar uma sobrecarga elevada porque entraria em colapso devido ao excesso de deformação. Para evitar o colapso poder-se-ia aumentar a espessura dessa chapa elevando em muito o consumo de material. Porém, se a chapa for conformada em seção corrugada (Figura A-1b), as dobras atuam como enrijecedores, aumentando a rigidez e, por consequência, a resistência à flexão dessa mesma chapa.

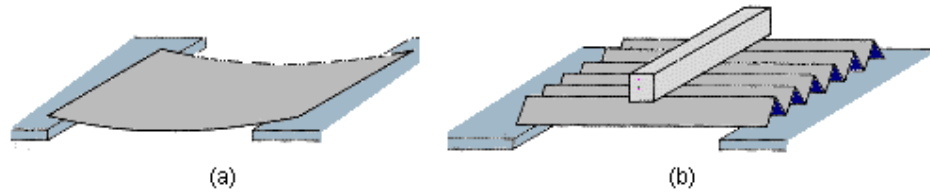


Figura A-1: Chapa não enrijecida e enrijecida

Por ser a resistência à flexão determinada pela inércia da parede conformada, especificamente neste trabalho conformação trapezoidal e ziguezague, revisam-se neste adendo os conceitos da resistência dos materiais para a determinação do momento de inércia. Na sequência, são apresentadas as expressões obtidas para as seções estudadas

### 2 Momento de inércia de perfis em conformação trapezoidal e ziguezague

Para determinar o momento de inércia dos perfis conformados em seção trapezoidal e ziguezague apresentados na Figura A-2, aplica-se o processo de cálculo de momento de inércia de áreas compostas, no qual o perfil é decomposto em figuras simples, cuja solução é conhecida ou de fácil determinação, e o momento de inércia dos eixos X e Y, expresso por

$$I_{X,Y} = \sum_{i=1}^n I_{X_i,Y_i} = \sum_{i=1}^n \left( I_{\bar{x}_i, \bar{y}_i} + A_i x_i^2, y_i^2 \right) \quad (A.1)$$

Nessa equação, o índice  $i$  varia de 1 ao número de figuras simples;  $I_{\bar{x}_i}$  e  $I_{\bar{y}_i}$  são os momentos de inércia em relação aos eixos centrais da figura;  $A_i$  é a área da figura e  $x_i$  e  $y_i$  são as distâncias ortogonais entre os eixos X e Y e os eixos centrais da figura paralelo a este.

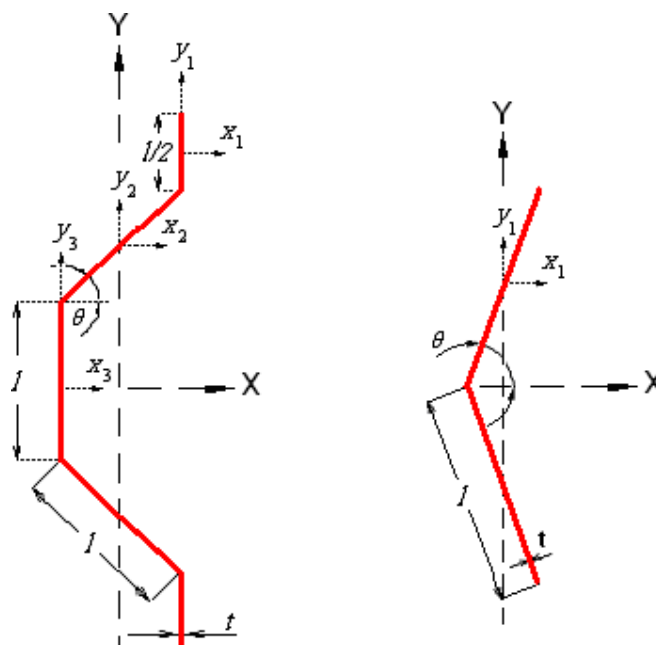


Figura A-2: Locação dos eixos X e Y, e  $x_i$  e  $y_i$  de perfis trapezoidal e zigzag.

Portanto, para se determinar o momento de inércia do segmento inclinado do perfil é considerada a seção da Figura A-3, para a qual se apresenta, subsequente, o desenvolvimento das expressões para o cálculo do momento de inércia dessa área.

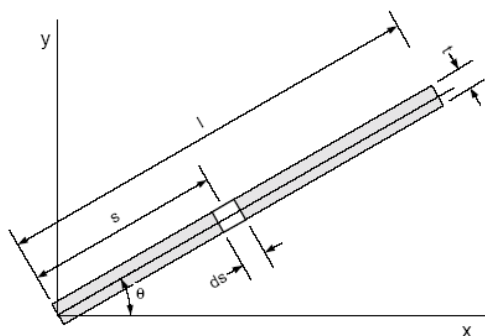


Figura A-3: Seção transversal inclinada do perfil trapezoidal.

Adota-se uma faixa de integração de área  $dA = tds$ . Decompondo a coordenada do centróide da faixa de integração  $s$ , medida ao longo do eixo da barra, em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , tem-se  $x = s \cdot \cos \theta$  e  $y = s \cdot \sin \theta$ . Para calcular o momento de inércia da faixa de integração aplica-se o teorema de Steiner, o que resulta em  $dI_x = dI_{xc} + tdsy^2$  e

$dI_y = dI_{yc} + tdsx^2$ . Considerando que a espessura  $t$  da chapa é muito menor do que seu comprimento  $l$  ( $t \ll l$ ), os momentos de inércia da faixa de integração em relação ao seu eixo central são desprezados, ou seja,  $dI_{xc} \approx 0$  e  $dI_{yc} \approx 0$ , e escrevendo-se as coordenadas  $x$  e  $y$  em função de  $s$  e  $\theta$ , tem-se  $dI_x = s^2 \cdot t \cdot \sin^2 \theta \cdot ds$  e  $dI_y = s^2 \cdot t \cdot \cos^2 \theta \cdot ds$ . Resolvendo as integrais tem-se:

$$I_x = \int_0^l s^2 \sin^2 \theta t ds = t \sin^2 \theta \left[ \frac{s^3}{3} \right]_0^l \quad (\text{A.2})$$

$$I_x = \frac{tl^3}{3} \sin^2 \theta \quad (\text{A.3})$$

$$I_y = \int_0^l s^2 \cos^2 \theta t ds = t \cos^2 \theta \left[ \frac{s^3}{3} \right]_0^l \quad (\text{A.4})$$

$$I_y = \frac{tl^3}{3} \cos^2 \theta \quad (\text{A.5})$$

O produto de inércia para uma seção inclinada é definido como

$$I_{xy} = \int_0^l xy dA \quad (\text{A.6})$$

Substituindo  $x$  e  $y$  pelas coordenadas em função de  $s$  e  $\theta$ , tem-se

$$I_{xy} = \int_0^l s^2 (\cos \theta \cdot \sin \theta) t ds \quad (\text{A.7})$$

Resolvendo a integral, obtém-se a expressão A.9 para o cálculo do produto de inércia da seção inclinada:

$$I_{xy} = t \cos \theta \cdot \sin \theta \left[ \frac{s^3}{3} \right]_0^l \quad (\text{A.8})$$

$$I_{xy} = \frac{tl^3}{3} \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (\text{A.9})$$

Aplicando-se o teorema de Steiner, pode-se calcular o momento de inércia em relação aos eixos centrais  $x_c$  e  $y_c$  do retângulo inclinado e obtém-se:

- Para o eixo  $x_c$ :

$$\frac{tl^3}{3} \sin^2 \theta = I_{xc} + A_i y_i^2 \therefore I_{xc} = \frac{tl^3}{3} \sin^2 \theta - A_i y_i^2 \quad (\text{A.10})$$

$$I_{xc} = \frac{tl^3}{3} \sin^2 \theta - \left[ lt \left( \frac{l}{2} \sin \theta \right)^2 \right] \quad (\text{A.11})$$

Organizando as variáveis e simplificando a expressão tem-se

$$I_{xc} = \frac{1}{12} tl^3 \sin^2 \theta \quad (\text{A.12})$$

Para o eixo  $y_c$ :

De modo análogo ao eixo  $x_c$  são determinadas as equações para o eixo  $y_c$ .

$$\frac{tl^3}{3} \cos^2 \theta = I_{yc} + A_i y_i^2 \therefore I_{yc} = \frac{tl^3}{3} \cos^2 \theta - A_i y_i^2 \quad (\text{A.13})$$

$$I_{yc} = \frac{tl^3}{3} \cos^2 \theta - \left[ lt \left( \frac{l}{2} \cos \theta \right)^2 \right] \quad (\text{A.14})$$

$$I_{yc} = \frac{1}{12} tl^3 \cos^2 \theta \quad (\text{A.15})$$

## 2.1 Momentos principais de inércia, rotação de eixos

Para calcular o momento de inércia em relação aos eixos  $u$  e  $v$  e o respectivo produto de inércia, é necessária uma transformação de coordenadas, como ilustrado na Figura A-4, conforme expressão A.16.

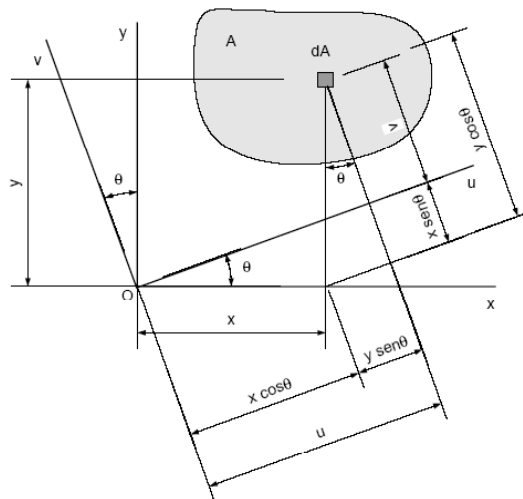


Figura A-4: Rotação dos eixos principais de inércia  $u$  e  $v$ .

Empregando o produto de inércia calculam-se os momentos de inércia de uma área em relação a um par de eixos inclinados, como ilustrado na Figura 6.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Aplicando-se as definições de momento de inércia e substituindo-se as relações obtidas da expressão A.16, tem-se:

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos\theta - x \sin\theta)^2 dA \quad (\text{A.17})$$

$$I_u = \int_A v^2 dA = \cos^2\theta \int_A y^2 dA - 2 \cos\theta \sin\theta \int_A xy dA + \sin^2\theta \int_A x^2 dA \quad (\text{A.18})$$

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (x \cos\theta + y \sin\theta)^2 dA \quad (\text{A.19})$$

$$I_v = \cos^2\theta \int_A x^2 dA + 2 \cos\theta \sin\theta \int_A xy dA + \sin^2\theta \int_A y^2 dA \quad (\text{A.20})$$

que podem ser rescritas como:

$$I_u = \cos^2\theta I_x - 2 \cos\theta \sin\theta I_{xy} + \sin^2\theta I_y \quad (\text{A.21})$$

$$I_v = \cos^2\theta I_y + 2 \cos\theta \sin\theta I_{xy} + \sin^2\theta I_x \quad (\text{A.22})$$

Aplicando o mesmo procedimento para o produto de inércia  $I_{uv}$  obtém-se:

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (x \cos\theta + y \sin\theta)(y \cos\theta - x \sin\theta) dA \quad (\text{A.23})$$

$$I_{uv} = \cos^2\theta \int_A xy dA - \cos\theta \sin\theta \int_A x^2 dA + \sin\theta \cos\theta \int_A y^2 dA - \sin^2\theta \int_A xy dA \quad (\text{A.24})$$

$$I_{uv} = \cos^2\theta I_{xy} - \cos\theta \sin\theta I_y + \sin\theta \cos\theta I_x - \sin^2\theta I_{xy} \quad (\text{A.25})$$

$$I_{uv} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) I_{xy} - \cos\theta \sin\theta I_y + \sin\theta \cos\theta I_x \quad (\text{A.26})$$

Aplicando-se as relações trigonométricas

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta \quad \text{e} \quad 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = \sin 2\theta \quad (\text{A.27})$$

as equações podem ser escritas como:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{A.28})$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{A.29})$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (\text{A.30})$$

As equações A.28, A.29 determinam os momentos de inércia em função do ângulo de inclinação  $\theta$ . Pensando em variar  $\theta$ , tem-se como consequência a variação de  $I_u, I_v$  e  $I_{uv}$ . Portanto, faz-se necessário determinar para que ângulos  $\theta$  os momentos de inércia  $I_u$  e  $I_v$  são extremos (máximo e mínimo). Para se determinar os valores extremos de  $I_u$  e  $I_v$  deriva-se a equação A.28 ou A.29 em relação a  $\theta$  e iguala-se a zero.

$$\frac{dI_u}{d\theta} = -2 \left( \frac{I_x - I_y}{2} \right) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0 \quad (\text{A.31})$$

Reescrevendo a equação A.31 e denominando de  $\theta_p$  o ângulo que localiza os eixos principais de inércia, tem-se

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (\text{A.32})$$

Essa expressão conduz a duas raízes,  $\theta_{p1}$  e  $\theta_{p2}$ , defasadas de  $90^\circ$ , que caracterizam as posições dos eixos principais de inércia, conforme ilustrado na Figura A-5. Substituindo-se esses ângulos nas Equações A.28, A.29 e A.30, obtêm-se os momentos de inércia  $I_u$  e  $I_v$ . A identificação do momento de inércia máximo  $I_{\max}$  e do momento de inércia mínimo  $I_{\min}$  é feito por simples comparação entre  $I_u$  e  $I_v$ .

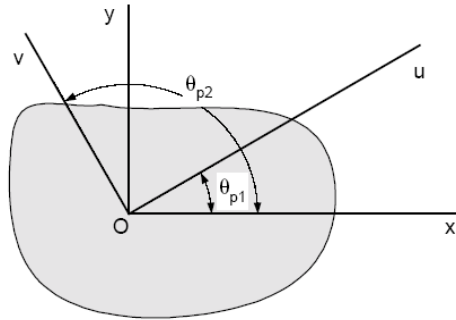


Figura A.5: Localização dos eixos principais de inércia.

### 3 Exemplo de cálculo do momento de inércia da parede em conformação trapezoidal para os eixos centrais $X_c$ e $Y_c$

Para determinar o momento de inércia da seção trapezoidal da Figura A-6 com um centímetro de espessura, aplica-se o teorema de Steiner para seções compostas (equação A.1) como se apresenta a seguir:

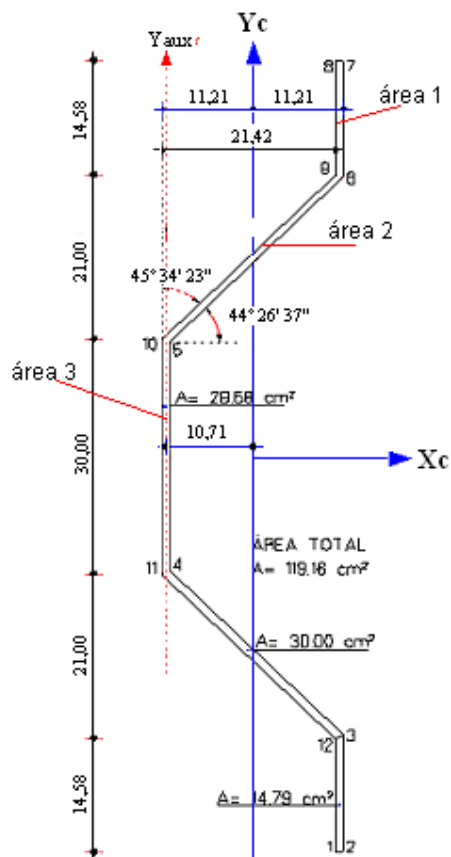


Figura A-6: Seção transversal da parede metálica em conformação trapezoidal

#### 3.1 Cálculo segundo o eixo $X_c$

##### 3.1.1 Seção retangular, área 1

$$I_{X_{1c}} = I_{X_1} + A_1 y_1^2 \quad (\text{A.1})$$

$$I_{X_{1c}} = \frac{t l^3}{12} + A_i y_i^2 \therefore I_{X_{1c}} = \frac{t l^3}{12} + A_1 y_1^2 \quad (\text{A.33})$$

$$I_{X_{1c}} = \frac{t}{12} \left( \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right)^3 + \left[ \left( \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right) \cdot t \cdot \left( \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right) / 2 + l \cdot \sin \theta + \left( \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right) \right]^2 \quad (A.34)$$

### 3.1.2 Seção inclinada, área 2

$$I_{X_{2c}} = I_{\bar{X}_2} + A_2 y_2^2 \quad (A.1)$$

$$I_{X_{2c}} = \frac{1}{12} t l^3 \sin^2 \theta + t \cdot l \cdot \left( \frac{l \cdot \sin \theta}{2} + \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right)^2 \quad (A.35)$$

### 3.1.3 Seção retangular área 3

$$I_{X_{3c}} = I_{\bar{X}_3} + A_3 y_3^2 \quad (A.1)$$

$$I_{X_{3c}} = \frac{t l^3}{12} + A_i y_i^2, \text{ como } X_c \text{ passa pelo centróide } A_3 y_3^2 = 0 \Rightarrow I_{X_{3c}} = \frac{t l^3}{12} \quad (A.36)$$

$$I_{X_c} = \frac{t}{12} \left( l - \tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right) \right)^3 \quad (A.37)$$

Efetuada o somatório dos momentos das áreas decompostas  $I_{X_c} = \sum_{i=1}^n I_{X_i}$ , obtém-se a expressão para o cálculo do momento de inércia do eixo baricêntrico  $X_c$ .

$$I_{X_c} = 2 \cdot \left\{ \underbrace{\frac{t}{12} \left( \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right)^3 + \left[ \left( \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right) \cdot t \cdot \left( \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right) / 2 + l \cdot \sin \theta + \left( \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right) \right]^2}_{\text{ÁREA1}} \right\} + \underbrace{2 \cdot \left[ \frac{1}{12} t l^3 \sin^2 \theta + t \cdot l \cdot \left( \frac{l \cdot \sin \theta}{2} + \frac{l}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right)}{2} \right)^2 \right]}_{\text{ÁREA2}} + \underbrace{\frac{t}{12} \left( l - \tan \left( \frac{90-\theta}{2} \right) \right)^3}_{\text{ÁREA3}} \quad (A.38)$$

Substituindo-se as dimensões do perfil da Figura A-6 na equação A.38, resulta o valor do momento de inércia  $I_{X_c}$ :



$$\begin{aligned}
I_{X_c} = & 2 \times \left\{ \frac{1}{12} \left( \frac{30}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right)^3 \right\} + \left[ \left( \frac{30}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right) \times 1 \times \left( \frac{30}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right) / 2 + 30 \times \sin 44,427 + \right. \\
& \left. + \left( \frac{30}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right) \right]^2 \Bigg\} + \\
& + 2 \times \left\{ \frac{1}{12} \times 1 \times 30^3 \sin^2 44,427 + 1 \times 30 \times \left( \frac{30 \times \sin 44,427}{2} + \frac{30}{2} - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right) \right\} + \frac{1}{12} \left( 30 - \tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right) \right)^3 \\
I_{X_c} = & 98441,12 \text{ cm}^4
\end{aligned} \tag{A.39}$$

### 3.2 Cálculo segundo o eixo $Y_c$

#### 3.2.1 Seção retangular, área 1

A área 1 é definida como o retângulo  $\left( \frac{I}{2} \cdot t \right)$  menos o triângulo  $\left( \frac{I}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \cdot \frac{t}{2} \right)$

$$I_{Y_{1c}} = \frac{I t^3}{12} + A_1 x_1^2 \tag{A.40}$$

$$I_{Y_1} = \left[ \frac{I}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right] \frac{t^3}{12} + \left\{ \left[ \frac{I}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right] \times t \times \left( \frac{I}{2} \cos \theta \right)^2 \right\} \tag{A.41}$$

$$I_{Y_1} = \left[ \frac{I}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right] \frac{t^3}{12} + \left[ \frac{I}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right] t \frac{I^2}{4} \cos^2 \theta \tag{A.42}$$

#### 3.2.2 Seção inclinada, área 2

$$I_{X_{2c}} = I_{\bar{X}_2} + A_2 y_2^2 \tag{A.43}$$

Visto que o eixo baricêntrico  $Y_c$  passa pelo centróide da seção decomposta,  $A_2 y_2^2 = 0$  e  $I_{\bar{X}_2}$  é determinado pela equação A.5.

$$I_{Y_2} = \frac{t I^3}{3} \cos^2 \theta \tag{A.44}$$

### 3.2.3 Área 3 retângulo = $l \cdot t$

$$I_{Y_{3c}} = \frac{lt^3}{12} + A_3 y_3^2 \therefore I_y = \frac{lt^3}{12} + \left[ lt \left( \frac{l}{2} \cos \theta \right)^2 \right] \quad (A.45)$$

$$I_y = \frac{lt^3}{12} + \frac{tl^3}{4} \cos^2 \theta \quad (A.46)$$

Analogamente ao eixo  $X_c$  efetua-se o somatório dos momentos das áreas decompostas

$I_{Y_c} = \sum_{i=1}^n I_{Y_i}$  para se obter a expressão do cálculo do momento de inércia do eixo  $Y_c$ .

$$\begin{aligned} I_{Y_c} = & 2 \times \underbrace{\left[ \frac{l}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right] \frac{t^3}{12} + \left[ \frac{l}{2} - \tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right) \right] t \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta}_{\text{ÁREA 1}} + 2 \times \underbrace{\left( \frac{1}{12} tl^3 \cos^2 \theta \right)}_{\text{ÁREA 2}} + \\ & + \underbrace{\left( \frac{lt^3}{12} + \frac{tl^3}{4} \cos^2 \theta \right)}_{\text{ÁREA 3}} \end{aligned} \quad (A.47)$$

Substituindo as dimensões do perfil da Figura A-6 na equação A.47, resulta o valor do momento de inércia  $I_{X_c}$ :

$$\begin{aligned} I_{Y_c} = & 2 \cdot \underbrace{\left[ \frac{30}{2} - \tan \left( \frac{90 - 44,427^0}{2} \right) \right] \frac{1^3}{12} + \left[ \frac{30}{2} - \tan \left( \frac{90 - 44,427^0}{2} \right) \right] 1 \frac{30^2}{4} \cos^2 44,427^0}_{\text{ÁREA 1}} + \\ & + 2 \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 30^3 \cos^2 44,427^0 \right)}_{\text{ÁREA 2}} + \underbrace{\left( \frac{30 \cdot 1^3}{12} + \frac{1 \cdot 30^3}{4} \cos^2 44,427^0 \right)}_{\text{ÁREA 3}} \\ I_{Y_c} = & 9088,54 cm^4 \end{aligned} \quad (A.48)$$

### 3.3 Cálculo para o eixos principais de inércia $u$ e $v$

A determinação dos momentos principais inércia  $I_u$  e  $I_v$  é realizada se tomada como referência a seção em conformação trapezoidal apresentada na Figura A-7. Para isso a área do perfil é decomposta em três áreas, às quais se aplica o teorema de Steiner equação A.1 e as equações oriundas da rotação dos eixos centrais de inércia A.28, A.29, A.30 e A.32, por conseguinte.

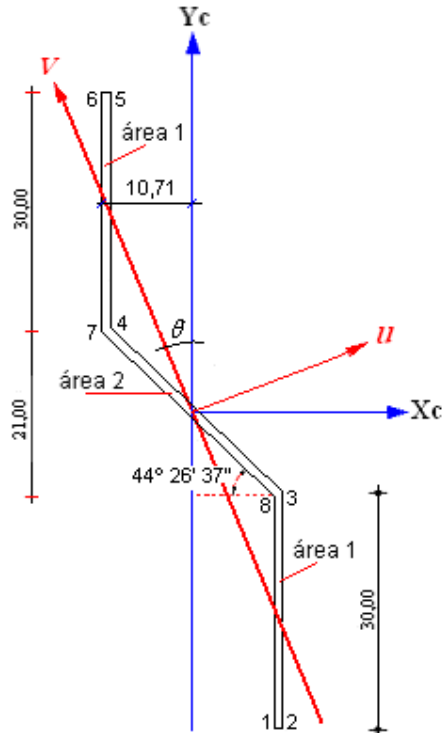


Figura A-7: Perfil trapezoidal eixo de mínima inércia  $v$ .

### 3.3.1 Momento de inércia segundo o eixo $X_c$

$$I_{X_c} = 2 \cdot \left\{ \underbrace{\frac{t}{12} \left( l - \frac{\tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right)}{2} \right)^3 + \left[ \left( l - \frac{\tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right)}{2} \right) \cdot t \cdot \left( \frac{l}{2} \cos \theta \right) \cdot \left( l - \frac{\tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right)}{2} \right) / 2 + \frac{l \times \sin \theta}{2} \right]^2}_{\text{ÁREA1}} \right\} + \underbrace{\frac{1}{12} t l^3 \sin^2 \theta}_{\text{ÁREA2}} \quad (\text{A.49})$$

$$I_{X_c} = 2 \cdot \left\{ \underbrace{\frac{1}{12} \left( 30 - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right)^3 + \left[ \left( 30 - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right) \cdot 1 \cdot \left( \frac{30}{2} \cos 44,427 \right) \cdot \left( 30 - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right) / 2 + \frac{30 \cdot \sin 44,427}{2} \right]^2}_{\text{ÁREA1}} \right\} + \underbrace{\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 30^3 \sin^2 44,427}_{\text{ÁREA2}}$$

$$I_{X_c} = 43909,17 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.50})$$

### 3.3.2 Momento de inércia para o eixo Yc

$$I_{Yc} = \underbrace{\left( \frac{1}{12} t l^3 \cos^2 \theta \right)}_{\text{ÁREA 2}} + 2 \times \underbrace{\left[ I - \frac{\tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right)}{2} \right] \frac{t^3}{12} + \left[ I - \frac{\tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right)}{2} \right] \times t \times \frac{I^2}{4} \cos^2 \theta}_{\text{ÁREA 1}} \quad (\text{A.51})$$

$$I_{Yc} = \underbrace{\left( \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 30^3 \cos^2 44,427 \right)}_{\text{ÁREA 2}} + 2 \cdot \underbrace{\left[ 30 - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right] \frac{1^3}{12} + \left[ 30 - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right] \cdot 1 \cdot \frac{30^2}{4} \cos^2 44,427}_{\text{ÁREA 1}}$$

$$I_{Yc} = 7989,26 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.52})$$

### 3.3.3 Produto de inércia para os eixos Xc e Yc

O produto de inércia de áreas compostas é determinado pela equação

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n I_{xy_i} = \sum_{i=1}^n \left( I_{x'y'} + A_i x_i y_i \right) \quad (\text{A.53})$$

na qual  $I_{x'y'}$  é o produto de inércia em relação aos eixos centrais da figura simples e paralelos a  $X_c$  e  $Y_c$ . Sempre que a figura simples tiver, pelo menos, um eixo de simetria, o termo  $I_{x'y'}$  correspondente será nulo. Assim sendo, para as áreas resultantes da decomposição da seção do perfil da Figura A-7, e obtém-se a expressão:

$$I_{xy} = (-) 2 \cdot \left\{ \underbrace{\left[ \left( I - \frac{\tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right)}{2} \right) \cdot t \cdot \left( \frac{I}{2} \cos \theta \right) \cdot \left( I - \frac{\tan \left( \frac{90 - \theta}{2} \right)}{2} \right) / 2 + \frac{I \cdot \sin \theta}{2} \right]}_{\text{ÁREA 1}} \right\} +$$

$$+ (-) 2 \cdot \underbrace{\frac{t}{3} \cdot \left( \frac{I}{2} \right)^3 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}_{\text{ÁREA 2}} \quad (\text{A.54})$$

O sinal negativo (–) na expressão A.53 refere-se ao quadrante em que se localiza a área  $A_i$ .

$$I_{xy} = -2 \cdot \left\{ \underbrace{\left[ \left( 30 - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right) \cdot 1 \cdot \left( \frac{30}{2} \cos 44,427 \right) \cdot \left( 30 - \frac{\tan \left( \frac{90 - 44,427}{2} \right)}{2} \right) / 2 + \frac{30 \cdot \sin 44,427}{2} \right]}_{\text{ÁREA 1}} \right\} -$$

$$- 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \left( \frac{30}{2} \right)^3 \cdot \sin 44,427 \cdot \cos 44,427}_{\text{ÁREA 2}}$$

$$I_{xy} = -17332,54 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.55})$$

### 3.3.4 Localização dos eixos principais de inércia

Para determinar o ângulo  $\theta$  aplica-se a equação A.32

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (\text{A.32})$$

$$\tan 2\theta = \frac{-2 \cdot (-17332,54)}{43909,17 - 7989,26} = 0,96507$$

$$\theta = \frac{43,98^\circ}{2} = 21,99^\circ \quad (\text{A.56})$$

### 3.3.5 Cálculo dos momentos principais de inércia

Com os parâmetros calculados anteriormente substitui-se nas equações A.28 e A.29, e obtêm-se os momentos principais de inércia em função do ângulo de inclinação  $\theta$  para um perfil de conformação trapezoidal.

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{A.28})$$

$$I_u = \frac{43909,17 + 7989,26}{2} + \frac{43909,17 - 7989,26}{2} \cos 2 \cdot 21,99^\circ - (-)17332,54 \sin 2 \cdot 21,99^\circ$$

$$I_u = 25949,22 + 12923,66 - (-)12035,35 = 50908,72 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.57})$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (\text{A.29})$$

$$I_v = \frac{43909,17 + 7989,26}{2} - \frac{43909,17 - 7989,26}{2} \cos 2 \cdot 21,99^\circ + (-)17331,84 \sin 2 \cdot 21,99^\circ$$

$$I_v = 25949,22 - 12923,66 + (-)12035,84 = 989,72 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.58})$$

#### 4 Exemplo de cálculo do momento de inércia da parede conformada em ziguezague para os eixos centrais $X_c$ e $Y_c$

Analogamente ao cálculo dos momentos de inércia para um perfil trapezoidal, empregam-se os mesmos procedimentos para o cálculo dos momentos de inércia para um perfil conformado em ziguezague. A seguir é apresentada a marcha do cálculo tomando-se por base o perfil da Figura A-8 com espessura de 1 cm

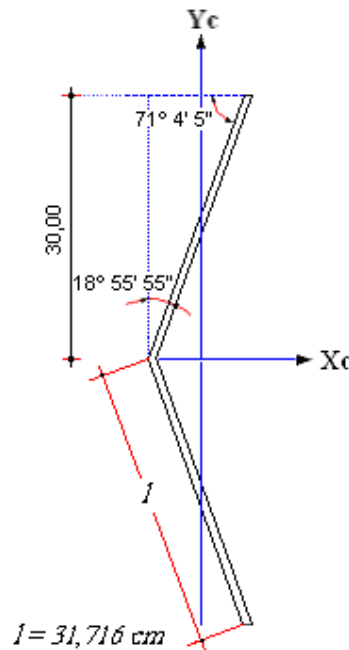


Figura A-8: Seção transversal da parede metálica conformada em ziguezague

##### 4.1 Cálculo do momento de inércia do perfil conformado em ziguezague - eixo $X_c$

$$I_{Xc} = 2 \left[ \frac{1}{12} t l^3 \sin^2 \theta + t \cdot l \cdot \left( \frac{l \cdot \sin \theta}{2} \right)^2 \right] \quad (A.59)$$

$$I_{Xc} = \frac{2}{3} t l^3 \sin^2 \theta \quad (A.60)$$

$$I_{Xc} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 31,716^3 \sin^2 71,068 = 19029,98 \text{ cm}^4 \quad (A.61)$$

#### 4.2 Cálculo do momento de inércia do perfil conformado em ziguezague - eixo $Y_c$

$$I_{Y_c} = 2 \left( \frac{1}{12} t l^3 \cos^2 \theta \right) \quad (A.62)$$

$$I_{Y_c} = 2 \left( \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 31,716^3 \cos^2 71,068 \right) = 559,72 \text{ cm}^4 \quad (A.63)$$

#### 4.3 Cálculo do momento de inércia do perfil conformado em ziguezague – eixos principais de inércia $u$ e $v$

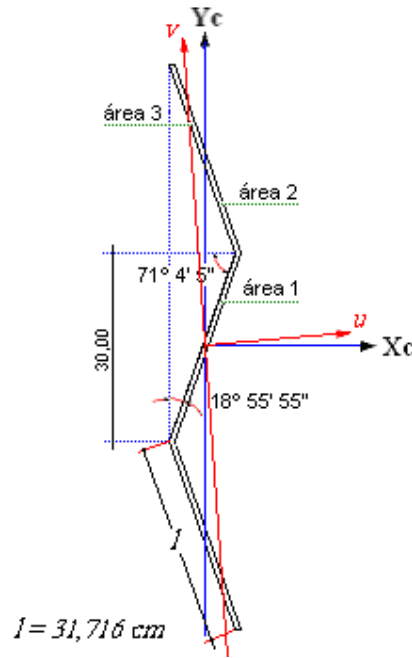


Figura A-9: Conformação em ziguezague - Locação do eixo de mínima inércia  $v$ .

##### 4.3.1 Momento de inércia para o eixo $X_c$

$$I_{X_c} = 2 \cdot \left\{ \underbrace{\left[ \frac{1}{12} t l^3 \sin^2 \theta + t \cdot l \cdot \left( \frac{l \cdot \sin \theta}{2} + \frac{l \cdot \sin \theta}{2} \right)^2 \right]}_{\text{ÁREA1 e 3}} \right\} + \underbrace{\frac{1}{12} t l^3 \sin^2 \theta}_{\text{ÁREA2}} \quad (A.64)$$

$$I_{Xc} = \underbrace{\frac{2}{12} t l^3 \sin^2 \theta + 2 \cdot t \cdot l^3 \sin^2 \theta}_{\text{ÁREA1e3}} + \underbrace{\frac{1}{12} t l^3 \sin^2 \theta}_{\text{ÁREA2}} \quad (\text{A.65})$$

$$I_{Xc} = 2,25 \cdot t \cdot l^3 \sin^2 \theta \quad (\text{A.66})$$

$$I_{Xc} = 2,25 \cdot 1 \cdot 31,7157^3 \sin^2 71,068 = 64224,36 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.67})$$

#### 4.3.2 Momento de inércia para o eixo Y<sub>c</sub>

$$I_{Yc} = 3 \left( \frac{1}{12} t l^3 \cos^2 \theta \right) \quad (\text{A.68})$$

$$I_{Yc} = 3 \left( \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 31,716^3 \cos^2 71,068 \right) = 839,57 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.69})$$

#### 4.3.3 Produto de inércia para os eixos X<sub>C</sub> e Y<sub>C</sub>

##### 4.3.3.1 Produto de inércia em relação aos eixos da área 1

$$I_{x_1 y_1} = t \cdot \underbrace{\frac{l^3}{12} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + t \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cos \theta \cdot \frac{l}{2} \sin \theta}_{\text{ÁREA1}} \quad (\text{A.70})$$

$$I_{x_1 y_1} = t \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{12} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + t \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{4} \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (\text{A.71})$$

$$I_{x_1 y_1} = t \cdot \frac{l^3}{24} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (\text{A.72})$$

$$I_{x_1 y_1} = 1 \cdot \frac{31,7157^3}{24} \cdot \cos 71,068 \cdot \sin 71,068 = 407,94 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.73})$$

##### 4.3.3.2 Produto de inércia em relação aos eixos da área 2

$$I_{x_2 y_2} = \underbrace{\left( - \right) t \cdot \frac{l^3}{12} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + t \cdot l \cdot \left( \frac{l}{2} \cos \theta \right) \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{2} \sin \theta \right)}_{\text{ÁREA2}} \quad (\text{A.74})$$



$$I_{x_2y_2} = (-)t \cdot \frac{I^3}{96} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + t \cdot I \cdot \left( \frac{\frac{I}{2}}{2} \cos \theta \right) \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{I}{2}}{2} \sin \theta \right) \quad (A.75)$$

$$I_{x_2y_2} = t \cdot \frac{I^3}{12} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (A.76)$$

$$I_{x_2y_2} = 1 \cdot \frac{31,7157^3}{12} \cdot \cos 71,068 \cdot \sin 71,068 = 815,88 \text{ cm}^4 \quad (A.77)$$

#### 4.3.3.3 Produto de inércia em relação aos eixos da área 3

$$I_{x_3y_3} = \underbrace{(-)t \cdot \frac{I^3}{12} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + t \cdot I \cdot \left( -\frac{I}{2} \cos \theta \right) \cdot \left( \frac{5}{2} \cdot \frac{I}{2} \sin \theta \right)}_{\text{ÁREA3}} \quad (A.78)$$

$$I_{x_3y_3} = (-)t \cdot \frac{I^3}{96} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + t \cdot I \cdot \left( -\frac{\frac{I}{2}}{2} \cos \theta \right) \cdot \left( \frac{5}{2} \cdot \frac{\frac{I}{2}}{2} \sin \theta \right) \quad (A.79)$$

$$I_{x_3y_3} = (-)t \cdot \frac{I^3}{6} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (A.80)$$

$$I_{x_3y_3} = (-)1 \cdot \frac{31,7157^3}{6} \cdot \cos 71,068 \cdot \sin 71,068 = -1222,82 \text{ cm}^4 \quad (A.81)$$

Efetuada o somatório dos produtos de inércia das seis áreas individualizadas obtém-se o produto de inércia  $I_{X_cY_c} = \sum_{i=1}^6 I_{x_iy_i}$  do perfil em ziguezague da Figura A-9. Assim sendo,

$$I_{X_cY_c} = 2I_{x_1y_1} + 2I_{x_2y_2} - 2I_{x_3y_3} \quad (A.82)$$

$$I_{X_cY_c} = 2 \left( t \cdot \frac{I^3}{12} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \right) + 2 \left( t \cdot \frac{I^3}{12} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \right) - 2 \left( t \cdot \frac{I^3}{6} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \right) \quad (A.83)$$

$$I_{X_cY_c} = -t \cdot \frac{I^3}{12} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \quad (A.84)$$

$$I_{x_c y_c} = -1 \cdot \frac{31,71568^3}{12} \cdot \cos 71,068 \cdot \sin 71,068 = -815,89 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.85})$$

#### 4.3.4 Eixos principais de inércia do perfil em ziguezague

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (\text{A.32})$$

$$\tan 2\theta_1 = -\frac{-2 \cdot -815,89}{64224,36 - 839,57} = 0,0257$$

$$\theta_1 = \frac{1,4747^\circ}{2} = 0,7374^\circ \quad (\text{A.86})$$

#### 4.3.5 Momentos principais de inércia do perfil em ziguezague

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta_1 - I_{xy} \sin 2\theta_1 \quad (\text{A.28})$$

$$I_u = \frac{64224,36 + 839,57}{2} + \frac{64224,36 - 839,57}{2} \cos 2 \cdot 0,7374^\circ - (-)815,89 \sin 2 \cdot 0,7374^\circ$$

$$I_u = 32531,97 + 31681,89 - (-)20,99 = 64234,86 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.87})$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta_1 + I_{xy} \sin 2\theta_1 \quad (\text{A.29})$$

$$I_v = \frac{64224,36 + 839,57}{2} - \frac{64224,36 - 839,57}{2} \cos 2 \cdot 0,7374^\circ + (-)815,89 \sin 2 \cdot 0,7374^\circ$$

$$I_v = 32531,97 - 31681,89 + (-)20,99 = 829,08 \text{ cm}^4 \quad (\text{A.88})$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)