

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Influência da Topologia em uma Classe de Sistemas com Defeitos Topológicos

Por
Josevi de Souza Carvalho

sob orientação do
Prof. Dr. Cláudio Benedito Silva Furtado - UFPB

e co-orientação do
Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes - UFPB

Tese apresentada ao Corpo Docente
do Programa de Pós-Graduação em
Física-CCEN-UFPB, como requisito
parcial para obtenção do título de
Doutor em Física.

Novembro de 2008
João Pessoa - Paraíba - Brasil

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Influência da Topologia em uma Classe de Sistemas com Defeitos Topológicos

por

Josevi de Souza Carvalho

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Física-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Aprovada por:

Cláudio Benedito Silva Furtado - UFPB
Supervisor de Pesquisa

Fernando Jorge Sampaio Moraes - UFPB
Co-Supervisor de Pesquisa

Jorge Mario Carvalho Malbouisson - UFBA
Examinador Externo

Alexandre Manoel de Moraes Carvalho - UEFS
Examinador Externo

Inácio de Almeida Pedrosa Filho - UFPB
Examinador Interno

Jose Roberto Soares do Nascimento - UFPB
Examinador Interno

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Novembro de 2008

À minha esposa Jacqueline pela presença fundamental.

Aos meus pais e meus irmãos.

Sumário

Tabela de Conteúdo	vi
Lista de Tabelas	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Publicação	ix
Agradecimentos	x
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Introdução	1
2 Defeitos Topológicos	6
2.1 Defeitos Topológicos do Espaço-tempo	6
2.2 Descrição Geométrica dos Defeitos	10
3 Auto-interações no Espaço-tempo de Múltiplas Cordas	14
3.1 Introdução	14
3.2 Descrição Geométrica das Ruas de von Kármán	15
3.3 Cálculo geral da Função de Green na Geometria Curva	18
3.3.1 Geometria Conforme	19
3.4 Análise Teórica	22
3.4.1 Limite de um Único Vórtice	24
3.5 Conclusão	25
4 Fase de Berry Gravitacional para Partículas de Spin-1/2	27
4.1 Introdução	27

4.2	Aproximação Adiabática para a Fase de Berry	29
4.2.1	Fase de Berry Não-Relativística	30
4.2.2	Fase de Berry Relativística	31
4.3	Efeito Aharonov-Bohm	33
4.3.1	Efeito Aharonov-Bohm como uma Fase Geométrica	34
4.4	Equação de Dirac nas Geometrias Planas e Curvas	36
4.5	Spinor no Espaço-tempo da Corda Quiral Magnética	43
4.6	Fase de Berry no Espaço-tempo de Múltiplas Cordas Magnéticas	45
4.7	Conclusão	47
5	Oscilador de Dirac na Presença de Defeitos Topológicos	48
5.1	Introdução	48
5.2	Oscilador de Dirac no Espaço-tempo da Corda Cósmica	50
5.3	Oscilador de Dirac no Espaço-tempo da Corda Magnética	53
5.4	Níveis de Energia no Espaço-tempo da Deslocação Cósmica com Campo	55
5.5	Limite Não-Relativístico	56
5.6	Conclusão	57
6	Oscilador de Klein-Gordon na Teoria de Kaluza-Klein	58
6.1	Introdução	58
6.2	Oscilador de Klein-Gordon no Espaço-tempo da Corda Cósmica	60
6.3	Corda Magnética na Teoria de Kaluza-Klein	62
6.4	Dinâmica Quântica na Corda Quiral Magnética	64
6.5	Dinâmica na Presença de um Campo Magnético Homogêneo	65
6.6	Oscilador Relativístico na Presença do Monopólo Global	67
6.7	Considerações Finais	71
7	Partícula Escalar no Universo de Gödel com Defeitos Topológicos	73
7.1	Introdução	73
7.2	Família de Soluções do Tipo Gödel	74
7.3	Equação de Klein-Gordon	78
7.3.1	Espaço-tempo de Som-Raychaudhuri - $l^2 \rightarrow 0$	78
7.3.2	Coordenadas Esféricas - $l^2 < 0$	82
7.3.3	Coordenadas Hiperbólicas - $l^2 > 0$	86
7.4	Conclusão	90
8	Conclusões e Perspectivas	91
8.1	Considerações Finais	91
8.2	Perspectivas Futuras	95

A	Funções Especiais da Física	97
A.1	Função de Bessel	97
A.2	Função de Legendre	98
A.3	Função Hipergeométrica	99
A.4	Função Hipergeométrica Confluyente	101
A.5	Sobre a Representação Estereográfica	102
A.5.1	Estereografia da Esfera e do Hiperbolóide	102
	Referências Bibliográficas	104

Lista de Tabelas

2.1	Espaços-tempos a serem estudados nessa tese.	8
2.2	Defeitos em sólidos como defeitos topológicos.	12
A.1	Algumas funções especiais muito comuns.	97

Lista de Figuras

2.1	Processo de Volterra que resulta numa desclinação pela inserção e/ou remoção de partes do sólido.	11
2.2	Processo de Volterra que resulta numa deslocação lateral, dipolo de desclinações e na própria desclinação.	12
3.1	Ruas de vórtices de von Kármán como uma distribuição de cordas cósmicas.	16
3.2	Auto-energia elétrica e magnética sobre uma fonte linear na presença da geometria de von Kármán de cordas cósmicas. (a) cordas com mesma densidade de massa. (b) Cordas com densidades de massa opostas. U , x e y em unidades arbitrárias.	23
4.1	Spinor dentro de uma caixa perfeitamente refletora, paralelamente transportada em torno da corda quiral seguindo órbitas de Killing. . .	41
A.1	Representação estereográfica das superfícies esférica e hiperbólica no plano S' a partir do ponto P pertencente às superfícies. R representa o raio de curvatura da esfera e do hiperbolóide.	102

Lista de Publicação

- J. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes, *Eur. Phys. J. C*, DOI 10.1140/epjc/s10052-008-0762-8.
- J. Carvalho, E. Passos, C. Furtado and F. Moraes, *Eur. Phys. J. C*, DOI 10.1140/epjc/s10052-008-0696-1.
- J. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes *Dirac Oscillator Interacting with Conical Singularities*, em preparação.
- J. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes, *Klein-Gordon Oscillators in Presence of Topological Defects*, em preparação.
- J. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes, *Quantum Influence of Topological Defects in Gödel-type Space-times*, em preparação.

Agradecimentos

Aos professores Cláudio Furtado e Fernando Moraes pela oportunidade, orientação, esclarecimentos e estímulos. À minha esposa, Jacqueline, pela companhia nos momentos em que mais precisei, pelo carinho e atenção. Aos meus pais pelo apoio inicial. A todos os professores do Departamento de Física que contribuíram para a minha formação, Cláudio Furtado, Fernando Moraes, José Roberto, Dionisio, Rubens Freire, César Bonato, Eugênio, Valdir, Paulo, Alexandre Rosas e todos os demais. A todos os funcionários, Aluísio, Josélia, Nazaré, Virgínia da Pós e da Graduação, Cátia. A seu Mariano, pelos momentos de desconcentração e pela honestidade. A Eduardo, Tiago Mariz, Hermes Diniz, Roberto Menezes, Caio, Josinaldo, Alex pela respeitosa convivência. Bertúlio, Aníbal, Cleverson, Christian, Emerson. A todos os não citados, sintam-se cumprimentados. A Deus pela vida. À Universidade Federal da Paraíba pelo apoio dispensado. À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nessa tese, estudamos as correções introduzidas pelos defeitos topológicos de Cosmologia e Gravitação às soluções de equações clássicas e quânticas realizadas com a geometria de Minkowski. O problema da auto-interação elétrica e magnética sobre fontes de carga e corrente é realizado na presença da geometria das ruas de vórtice de von Kármán, uma solução para a Relatividade Geral análoga a vórtices em hidrodinâmica. A fase geométrica de Berry adquirida por uma partícula spinorial ao ser transportada ao longo de uma curva fechada envolvendo defeitos magnéticos é calculada na geometria de uma e múltiplas cordas cósmicas magnéticas. Para considerar efeitos de rotação do espaço-tempo, além daqueles relacionados com curvatura, resolvemos a dinâmica de uma partícula escalar na presença de espaços-tempos com métricas do tipo-Gödel. O problema de autovalores do hamiltoniano nas geometrias plana, esférica e hiperbólica é resolvido e as equações clássicas de movimento nos permite relacionar a dinâmica ocorrendo nessas métricas com aquela na presença de campos magnéticos. Dada a importância das interações harmônicas na física clássica e quântica, o problema dos osciladores relativísticos de Dirac e Klein-Gordon é resolvido na geometria da corda cósmica em configurações de campos eletromagnéticos e gravitacionais adicionados geometricamente. Usando a teoria de Kaluza-Klein na geometria da corda cósmica, o problema de autovalores do hamiltoniano para o oscilador de Klein-Gordon, é exatamente resolvido, com o espectro de energia e autofunções determinados. Por fim, estendemos essa dinâmica para a geometria do monopólo global, com o limite não-relativístico considerado.

Abstract

In this thesis, we study the corrections introduced by topological defects of Gravitation and Cosmology such that cosmic strings and the global monopole in the quantum dynamics of particles in the background spacetimes of these defects. To a von Kármán background space-times, the electric and magnetic self-interaction problem on charges and current is analyzed. This space-times appear as a analog solution for General Relativity to observed vortices in Hydrodynamics. We calculates the quantum Berry phase acquired by a spinor, transported along a closed curve involving one and multiple chiral cosmic string space-times. In the presence of a electromagnetic field, this phase is added by a term proportional to the Aharonov-Bohm contribution. The quantum dynamics in the presence of rotates space-times described by metrics of Gödel-type, received our attention to study the influence of the rotation sources on energy levels besides of the curvature sources present in the cosmic string space-times. To this problem, we solve the Klein-Gordon equation in the flat, spherical and hyperbolic coordinates. These studies allow us compare the motion of particles in these space-times with that occurring in presence of magnetic field. Due importance of the harmonic interactions in the classical and quantum physics, we solve the relativistic problem of Dirac and Klein-Gordon oscillator in the cosmic string background. Some configurations including electromagnetic field is analyzed. Using the Kaluza-Klein theory in the cosmic string geometry, the eigenvalues problem of the Hamiltonian for the Klein-Gordon oscillator is accurately resolved, with the spectral energy levels and eigenfunctions determined. Finally, we extend this dynamics for the global monopole geometry and non-relativistic limit is considered.

Capítulo 1

Introdução

Um dos desafios assumidos pelos físicos foi o de formular uma teoria para todos os fenômenos observados na natureza. Uma teoria que descrevesse de maneira geral os quatro tipos de interações fundamentais, a saber: a interação forte, a eletromagnética, a fraca e a gravitacional. Muito se tem feito nesse sentido. Duas dessas interações, a eletromagnética e a fraca, compartilham de uma mesma descrição quando a escala de energia envolvida nos processos físicos é da ordem de 100 GeV. Nessa escala de energia, a teoria é chamada de teoria eletrofraca [1]. Antes disso, no final do século XIX, os fenômenos elétricos e magnéticos, antes fenômenos independentes, foram unificados numa Teoria Eletromagnética por James Clerk Maxwell, fundamentada na variação espaço-temporal dos campos elétricos e magnéticos [2]. Nas duas primeiras décadas do século passado, apareceu na literatura uma teoria para os efeitos gravitacionais e eletromagnéticos, devida a Theodor Kaluza, e independentemente a O. Z. Klein [3], que estenderam a Relatividade Geral para cinco dimensões. O conjunto de equações resultantes dessa extensão, era formado pelas equações de Einstein da Gravitação e das equações de Maxwell para o campo eletromagnético, além de um termo associado com um campo escalar denominado de *radion*. Pouco depois, na primeira metade do século XX, uma tentativa para a unificação de fenômenos quânticos e gravitacionais,

começou com a generalização das equações quânticas a espaços curvos [4], objetivando com isso, a construção de uma Teoria Quântica da Gravidade. Desde então, muita atenção foi dada a solução das equações de Schrödinger, Klein-Gordon e Dirac na presença de espaços-tempos curvos [5], sobretudo aqueles produzidos por defeitos topológicos [6]. Defeitos tipo as cordas cósmicas [7], o monopólo global [8] dentre outros, cujo aparecimento é associado a processos durante a expansão do universo primordial.

Tais espaços-tempos constituem um campo de intensa pesquisa, cujo objetivo maior é o de determinar sua contribuição topológica a alguns sistemas físicos. Desde o estudo dos níveis de energias e autofunções assumidos pelo átomo de hidrogênio na presença de defeitos [9] e dos problemas de autovalores do oscilador harmônico e estados ligados e de espalhamento para partículas na presença da corda cósmica e do monopólo global [10], o campo gravitacional desses defeitos e sua topologia ainda são um cenário bastante promissor e em aberto. Cabe destacar as propriedades ópticas, elétricas e magnéticas da matéria [11]. A mecânica estatística dos ensembles [12] e condensados de Bose-Einstein [13] são pontos dignos de serem analisados frente a essa influência topológica. Ainda no contexto quântico, convém destacar o estudo da fase de Berry adquirida por partículas escalares transportadas paralelamente em torno de defeitos cônicos [14], níveis de Landau na presença de defeitos [15] e a influência da topologia sobre algumas propriedades dos materiais supercondutores [16]. No contexto clássico, ainda podemos citar a influência da curvatura do espaço-tempo sobre o valor esperado do tensor energia-momento [17], sobre o movimento geodésico de partículas [18] e o aparecimento de uma força sobre portadores de cargas elétricas e magnéticas, mesmo isolados, na geometria da corda cósmica [19].

Nossa contribuição a esse tópico é a de estudar essa influência topológica a outras classes de sistemas físicos compostos de partículas spinoriais e escalares, de densidades de cargas elétricas e correntes, de osciladores, todos na presença da geometria

da corda cósmica, do monopólo global ou na presença de arranjos específicos destes. Consiste, portanto, da generalização para a geometria curva, dos problemas de interação eletromagnética entre cargas e correntes ou do problema de autovalores do oscilador harmônico realizados com a geometria euclidiana. Comparada à geometria plana, a geometria curva será dotada de fontes de curvatura e torção ou ambas. Tais grandezas geométricas serão expressas pelos tensores de Riemann, Cartan ou Riemann-Cartan, respectivamente, com valores não-nulos. Usando a teoria métrica da gravitação, escreveremos e resolveremos as equações clássicas ou quânticas de interesse.

No contexto clássico, trataremos do problema de auto-interação sobre cargas e correntes em espaços curvos. Particularmente, consideraremos a geometria das ruas de vórtices de von Kármán, obtida por Letelier [20]. Considerando fontes lineares de cargas elétricas e correntes nessa geometria, escreveremos as expressões para as energias elétricas e magnéticas, expressas em termos da função de Green, associada com a equação de Poisson nesse espaço-tempo. O cálculo dessa função é realizado com a ajuda do *método de Grats e Garcia* [21], simplificado pelo fato de que esse espaço-tempo é bidimensional, e portanto, conforme ao espaço euclidiano. O principal resultado desse método está na própria função de Green, cuja expressão assumida, permite relacionar simultaneamente aspectos globais e locais desse espaço-tempo. Com o objetivo de comparar nossos resultados frente aos resultados da literatura tratando da interação eletromagnética na presença da corda isolada, finalizaremos esse capítulo estudando o limite de vórtice único das ruas de von Kármán. Nesse limite, calcularemos o fator conforme, e a partir do qual, construiremos as respectivas expressões para a função de Green e as auto-energias, com as quais faremos as devidas observações.

Além da abordagem clássica, nosso trabalho recebeu atenção para o estudo da influência da geometria no contexto quântico. Começamos com o cálculo da fase

gravitacional de Berry, adquirida por um spinor transportado paralelamente em torno do cone quiral. Escreveremos a equação de Dirac nesse espaço-tempo e usamos o *método do fator de fase de Dirac* para escrever a função de onda depois do transporte completo em torno do cone. De posse da função de onda, calculamos a conexão de Berry e, por integração ao longo de uma curva envolvendo o defeito, a fase de Berry adquirida nesse transporte. Observamos que essa fase depende do momento angular, das fontes de curvatura e de torção do espaço-tempo. Quando da presença de um campo magnético, aplicado ao longo do eixo de simetria do defeito, a nova função de onda para o spinor transportado paralelamente, é adicionada de um termo associado com a contribuição Aharonov-Bohm. De posse dessa função de onda, segue que a fase de Berry, é adicionada do termo relacionado com o campo magnético, além dos três termos citados anteriormente. Estendemos o cálculo da fase de Berry para o caso no qual o spinor é transportado em torno de múltiplos cones quirais. Isso foi feito usando o fato de que o transporte paralelo do spinor, é afetado apenas pelo n -ésimo cone em torno do qual é transportado e não pelos demais cones.

Ainda na abordagem quântica, consideraremos o caso das interações harmônicas. Aprendemos desde cedo que essas interações têm importante papel na física, principalmente quando consideramos o movimento de partículas na presença de potenciais moleculares e eletromagnéticos. Adicionadas dos efeitos relativísticos, que são introduzidos pelo estado de movimento das quantidades físicas, o estudo dessas interações na presença da geometria dos defeitos, tem sua importância porque combinamos efeitos de topologia, relativísticos e quânticos num problema de autovalores exatamente solúveis, e nos permite, além disso, estudar sistemas mais complexos frente aos diferentes aspectos não locais das leis físicas. Dado o caráter spinorial e escalar das partículas, apresentaremos um estudo com os osciladores de Dirac [22] e Klein-Gordon [23]. Resolveremos o oscilador de Dirac na geometria da corda cósmica envolvendo simultaneamente fontes de curvatura, torção e de campos eletromagnéticos. Nos

espaços-tempos da corda cósmica e do monopólo global, consideraremos a dinâmica do oscilador de Klein-Gordon, com os espectros de autovalores e autofunções resolvidos exatamente nessas geometrias. Por fim, resolveremos a dinâmica clássica e quântica de partículas escalares em espaços-tempos do tipo-Gödel na presença da corda cósmica. Na abordagem clássica, calcularemos as trajetórias seguidas por essas partículas e analisaremos a possibilidade de existência ou não de curvas tipo-tempo fechadas, e por consequência, alguns conceitos físicos tipo a violação de causalidade, e por fim, a separação desse espaço-tempo em regiões cronologicamente seguras. No contexto quântico, resolveremos a equação de Klein-Gordon nas geometrias cilíndrica, esférica e hiperbólica, caracterizada por valores nulos, negativos e positivos do parâmetro l^2 . Nesses três casos, os autovalores e autofunções contruídos, são dependentes das fontes de curvatura introduzida pelo defeito e da rotação do próprio espaço-tempo. Particularmente para o caso hiperbólico, as energias e autofunções se separam em estados discretos e contínuos, que podem ser associados com a análise clássica, às regiões com e sem curvas tipo-tempo fechadas, respectivamente. Por fim, esperamos que o leitor perceba a importância da topologia dos defeitos sobre a classe de sistemas físicos considerados e resolvidos. Mais que isso, que esse trabalho o auxilie na escrita das equações de interesse e que os métodos aqui usados, sirvam de um guia norteador para as resoluções de equações tratando da dinâmica de interação de partículas com os campos gravitacionais dos defeitos topológicos. Sejam bem vindos.

Capítulo 2

Defeitos Topológicos

2.1 Defeitos Topológicos do Espaço-tempo

Defeitos topológicos do espaço-tempo são estruturas formadas na expansão inicial do universo, em processos envolvendo transições de fase com quebra espontânea de simetria. Destacam-se a corda cósmica, o monopólo global e as paredes de domínio, dentre texturas e seus híbridos [6]. Desses, atenção será dada à corda cósmica e ao monopólo global, enquanto fonte de curvatura e torção do espaço-tempo e cuja influência sobre a dinâmica de partículas será amplamente estudada.

Tais defeitos serão descritos pela teoria métrica da Gravitação, obtida como soluções das equações de campo de Einstein. Nessa teoria os defeitos serão descritos por um elemento de linha cuja assinatura será $(-, +, +, +)$. Começaremos pelo espaço-tempo da corda cósmica. Geometricamente esse espaço-tempo é descrito pela métrica,

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (2.1)$$

onde (ρ, ϕ, z) são as coordenadas cilíndricas apropriadas para a geometria da corda e t é a coordenada temporal, restritas aos intervalos $-\infty < (t, z) < \infty$, $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. O parâmetro α dado pela relação $\alpha = 1 - 4\mu$ representa o déficit angular associado com a natureza cônica do espaço-tempo da corda. Esse ângulo é restrito

ao intervalo $0 < \alpha < 1$, condição exigida pela Cosmologia e Gravitação, que resulta num espaço-tempo com curvatura positiva. No entanto, o caso $\alpha > 1$, é equivalente a um espaço-tempo com curvatura negativa, e portanto, densidade de massa negativa. Um tipo de defeito análogo pode ser encontrado na Física da Matéria Condensada e é conhecido por desclinação negativa [24]. O espaço-tempo da corda cósmica possui uma singularidade cônica representada pelo tensor de curvatura Riemann,

$$R_{\rho,\phi}^{\rho,\phi} = \frac{1-\alpha}{4\alpha}\delta(r) \quad (2.2)$$

nulo em todo o espaço, exceto ao longo da linha que localiza o defeito.

O espaço-tempo descrito pela equação (2.1) é do tipo Minkowski, como pode ser visto pela transformação $[t \rightarrow T, \rho \rightarrow \rho, \phi \rightarrow \theta/\alpha, z \rightarrow z]$, portanto, plano localmente, mas não globalmente. Essa topologia não-trivial leva a interessantes fenômenos como a auto-força sobre cargas e correntes isoladas [25], emissão de radiação por partículas que se movem livremente [26], lentes gravitacionais [27] e ao efeito Aharonov-Bohm gravitacional [28], dentre outros.

Como uma generalização do espaço-tempo da corda cósmica padrão (2.1), consideraremos o espaço-tempo da corda quiral. Partindo da solução para a partícula girante em (2+1)-dimensões, Galt'sov e Letelier [29, 30] chegaram, por meio de uma transformação de Lorentz, a um espaço-tempo com uma estrutura helicoidal tanto na coordenada temporal t quanto na coordenada espacial z , ao longo da qual a corda está localizada. A esse espaço-tempo chamaram de cone quiral. A solução encontrada, escrita por meio da teoria métrica da gravitação, é dada abaixo,

$$ds^2 = -(dt + 4J^t d\phi)^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + (dz + 4J^z d\phi)^2, \quad (2.3)$$

com J^t associado ao momento angular da corda cósmica e J^z com o campo de torção. Dada a simetria da corda, as coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) são usadas com t representando a coordenada temporal. Como no caso da corda cósmica, $\alpha = 1 - 4\mu$,

sendo μ a densidade linear de massa da corda e satisfazendo as mesmas condições de curvatura positiva discutida anteriormente. Observe que a métrica (2.1) pode ser obtida a partir de (2.3) admitindo $J^t = J^z = 0$. Ademais, quando apenas $J^t = 0$, o espaço-tempo resultante é associado à deslocação cósmica e quando apenas $J^z = 0$, obtemos o espaço-tempo da corda girante. Quando ambos, J^t , J^z e α são não-triviais, podemos associar esses parâmetros do espaço-tempo quiral, com deslocações tipo-tempo e tipo-espaço e desclinações, respectivamente, usando a linguagem da cristalografia. Quando admitimos os seguintes valores $J^t = J^z = 0$ e $\alpha = 1$ obtemos o espaço-tempo de Minkowski. Essas informações estão resumidas na tabela abaixo,

“Fontes Físicas”	Configurações da Corda Cósmica	
α, J^t, J^z	$ds^2 = -(dt + 4J^t d\phi)^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + (dz + 4J^z d\phi)^2$	a
$J^t = J^z = 0$	$ds^2 = -dt + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2$	b
$J^t=0$	$ds^2 = -dt + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + (dz + 4J^z d\phi)^2$	c
$J^z = 0$	$ds^2 = -(dt + 4J^t d\phi)^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2$	d
$J^t = J^z = 0, \alpha = 1$	$ds^2 = -dt + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$	e

Tabela 2.1: Espaços-tempos a serem estudados nessa tese.

Seguindo essa generalização, podemos considerar o espaço-tempo gerado por múltiplas cordas cósmicas estudado em fins dos anos 80 por Letelier [31]. A métrica desse espaço-tempo é dada por,

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-4V} (dx^2 + dy^2) + dz^2, \quad (2.4)$$

com coordenadas cartesianas aplicadas. A função V , associada a essa distribuição, é dada abaixo

$$V = \sum_{j=1}^N 2\gamma_j \ln r_j, \quad \text{com } r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \quad (2.5)$$

(x_j, y_j) representam as coordenadas das cordas no plano (x, y) e γ_j é a densidade linear de massa da j -ésima corda, que assumiremos ser a mesma para todas as cordas nessa configuração. Nesse espaço-tempo o problema de auto-interação sobre cargas e

correntes foi analisado por E. Mello e outros [21]. Ainda para o caso das multi-cordas, consideraremos o arranjo particular no qual as cordas formam o arranjo conhecido como ruas de von Kármán, e nessa distribuição, calcularemos a auto-interação sobre cargas e correntes colocadas nesse espaço-tempo.

Uma configuração mais geral para a solução de multi-cordas pode ser construída considerando que as cordas têm momento angular e torção além da fonte de curvatura. Essa solução foi recentemente apresentada na literatura por Galt'sov e Letelier [29] usando coordenadas cartesianas. O elemento de linha para esse espaço-tempo é dada abaixo,

$$ds^2 = - \left[dt - \sum_{j=1}^N 4J_j^t (W_j^1 dy - W_j^2 dx) \right]^2 + \left[dz - \sum_{j=1}^N 4J_j^z (W_j^1 dy - W_j^2 dx) \right]^2 + e^{-4V} (dx^2 + dy^2) \quad (2.6)$$

com (J_j^t, J_j^z) associados ao momento angular e torção da j -ésima corda quirial magnética, respectivamente. O termo $W_j^i(\vec{x})$ é dado por,

$$W_j^1 = \frac{x - x_i}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_i|^2}, \quad W_j^2 = \frac{y - y_i}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_i|^2} \quad (2.7)$$

e

$$V = \sum_{j=1}^N \mu_j \ln[\rho^2 - 2\rho\rho_j \cos(\varphi - \varphi_j) + \rho_j^2]. \quad (2.8)$$

No espaço-tempo descrito pelas equações (2.3) e (2.6), calcularemos a fase de Berry adquirida por uma partícula spinorial transportada paralelamente em torno dos cones quirais. Partindo da equação de Dirac no espaço-tempo descrito por essas equações e usando o método do fator de fase de Dirac, calcularemos exatamente a forma da função de onda e por consequência a fase procurada. Quando da presença de um campo magnético ao longo do eixo de simetria da corda essa fase é adicionada por um termo relacionado com a contribuição Aharonov-Bohm [32].

Dada a importância da teoria de Kaluza-Klein [3] como teorias alternativas da Gravitação, consideraremos o movimento de partículas escalares na presença de uma solução do tipo-Kaluza-Klein devida a Azreg-Ainov e Clement [33] e cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -(dt + 4J^t d\phi)^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + (dz + 4J^z d\phi)^2 + \left(dx_5 + \frac{\Phi_B}{2\pi} d\phi \right)^2 \quad (2.9)$$

As coordenadas (t, ρ, ϕ, z) são como antes e x_5 é relacionada à quinta dimensão espacial, Φ_B é o fluxo magnético associado ao campo magnético \vec{B} aplicado ao longo do eixo x_5 . Nesse espaço-tempo resolveremos a equação de Klein-Gordon e construiremos os espectros de autovalores e autofunções correspondentes.

2.2 Descrição Geométrica dos Defeitos

Defeitos em sólidos são formados a partir de deformações causadas sobre eles. Essa deformação pode ser aplicada externamente pela ação de uma força mecânica, ou internamente, pela acomodação local de um átomo estranho na sua rede cristalina. De um modo geral, o que resulta desses agentes físicos externos ou internos, é a deformação do espaço em torno dos pontos onde foram aplicados. A teoria clássica da elasticidade nos permite descrever o movimento de partículas na presença dessas deformações, que denominaremos de regiões com defeitos, apenas para o caso quando esse movimento ocorre na presença de defeitos isolados. Frente a uma distribuição de defeitos, como em sistemas reais, essa teoria se torna impraticável, devida sobretudo, as complexas condições de contorno impostas pelos defeitos sobre as funções de onda ou campos de deslocamentos.

Contornamos essas dificuldades descrevendo as deformações por meio da teoria geométrica de defeitos proposta por Katanaev e Volovich [36]. Segundo essa teoria, tais deformações, deslocamentos e desclinações, associadas com os tensores de curvatura

e torção de Riemann e Riemann-Cartan, serão descritas pela aproximação linear das equações de Einstein da Gravitação em (3+1)-dimensões. Nessa aproximação, os resultados coincidem com aqueles da teoria clássica da elasticidade, com a vantagem de podermos resolver tais equações na presença de um ou múltiplos defeitos.

Na literatura, podemos encontrar um mecanismo geral de produção de defeitos em sólidos como análogos gravitacionais de defeitos topológicos em Cosmologia e Gravitação. Conhecido como processo de Volterra, consiste na remoção e/ou inserção de partes do material nele mesmo. A desclinação num sólido, figura (2.1), é obtida removendo-se um setor angular do material, seguida pela união das fronteiras produzidas. No caso de uma simetria de 2π rad, excluído o setor θ , uma volta completa equivale agora a uma variação angular de $2\pi(1-\theta)$ em vez de 2π relacionada a simetria contínua.

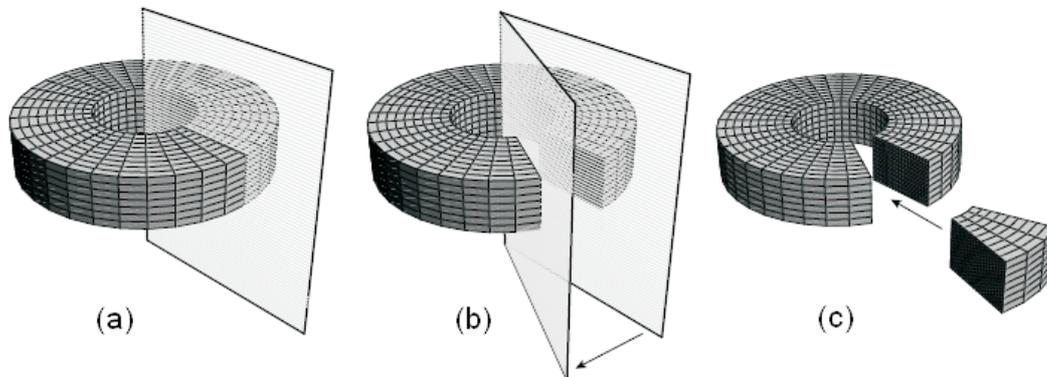


Figura 2.1: Processo de Volterra que resulta numa desclinação pela inserção e/ou remoção de partes do sólido.

A figura (2.2) é uma ilustração sobre como podemos obter diferentes tipos de defeitos de origem elástica através de distorções aplicadas em sólidos. Na parte (a) dessa figura, podemos produzir um defeito no sólido chamado de deslocação lateral fazendo-se um corte longitudinalmente ao eixo de orientação do cilindro e em seguida deslocando radialmente a superfície cortada em direção ao eixo de simetria do sistema.

Configurações diversas poderão ser formadas justapondo-se os defeitos produzidos pelo processo de Volterra e o estudo do movimento de partículas na presença de tais arranjos pode ser realizado, como no caso da aproximação de dipolo, parte (b) da figura abaixo, formada quando duas desclinações são colocadas próximas entre si.

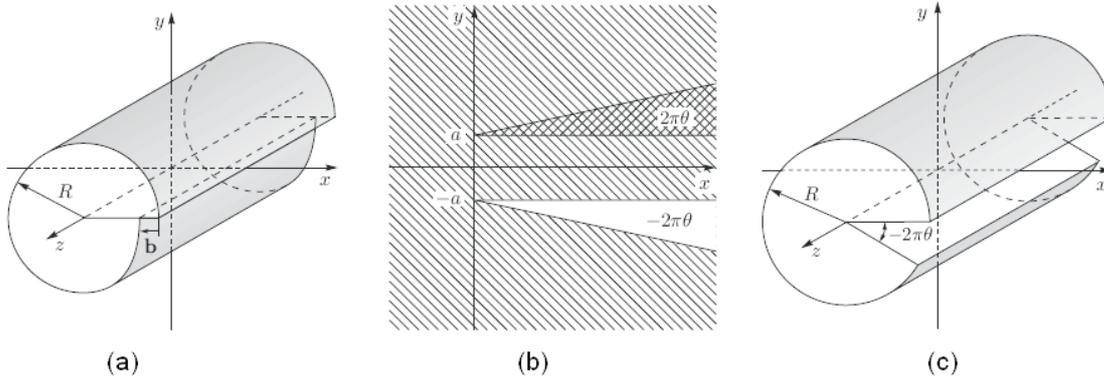


Figura 2.2: Processo de Volterra que resulta numa deslocação lateral, dipolo de desclinações e na própria desclinação.

A tabela abaixo é um resumo de desclinações e deslocações feito com o ponto de vista da teoria geométrica de defeitos.

Tipos de Defeitos	Tensor de Curvatura	Tensor de torção
Deformação elástica	$R_{\mu\nu}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}^{ij} = 0$
Desclinação	$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}^{ij} = 0$
Deslocação	$R_{\mu\nu}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$
Despiração	$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$

Tabela 2.2: Defeitos em sólidos como defeitos topológicos.

Desclinações em sólidos são associadas com a geometria de Riemann, localmente plana, mas não globalmente, com escalar de curvatura não trivial e tensor de torção nulo. O tensor de curvatura de Riemann é associado com a densidade de superfície do vetor de Frank da teoria da elasticidade clássica. Para a *deslocação*, a geometria global permanece não-plana, com o tensor de Riemann nulo e o tensor de Cartan

assumindo valores não nulos. O tensor de torção ou tensor de Cartan é associado com a densidade de superfície do vetor de Burgers da teoria clássica dos sólidos. Num meio com desclinação e deslocação presentes, a geometria associada é a de Riemann-Cartan com os tensores de Riemann-Cartan ambos não triviais. Por outro lado, sólidos elásticos são descritos pela geometria euclidiana \mathbb{R}^3 , no sentido que ambos os escalares de curvatura e torção resultam em valores nulos.

Capítulo 3

Auto-interações no Espaço-tempo de Múltiplas Cordas

3.1 Introdução

Muita atenção foi dada nos últimos anos a sistemas de cargas e correntes colocados na presença de geometrias curvas, como aquelas produzidas pela corda cósmica. A topologia não-trivial desse defeito impõe condições de contorno às linhas de campos elétricos/magnéticos cujo efeito total é a existência de uma autoforça sobre essas cargas e correntes [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]. Todos esses estudos foram feitos supondo-se que os defeitos eram lineares e sem estrutura interna. Auto-interações na presença de defeitos com espessura finita usando a prescrição de Gott-Hiscock e na presença de uma distribuição de defeitos tem sua importância devido principalmente a aproximação com defeitos reais [50, 51, 52].

Apresentaremos nesse capítulo o problema da interação sobre cargas e correntes isoladas no espaço-tempo de múltiplas cordas cósmicas obtido por Letelier [53]. Adotaremos o arranjo de ruas de vórtices de von Kármán, assim chamados por P. Letelier [54], depois que encontrou soluções das equações de Einstein da gravitação, análogas

aos vórtices formados e observados por von Kármán em hidrodinâmica [55]. Vê-se dessa forma, que estamos estudando interações clássicas em modelos cosmológicos que sejam passíveis de interpretação/simulação em sistemas de Matéria Condensada análogo ao que está acontecendo no cenário atual com os experimentos envolvendo transições de fase no cristal líquido. Além disso, podemos citar que os estudos na presença de uma única corda limitariam as informações sobre o que realmente acontece no universo atual, que não apenas possui múltiplas cordas, mas também outros objetos cosmológicos, da mesma forma que o *é/foi* o estudo de átomos monoelétrônicos para a real compreensão da estrutura interna da matéria e para a construção da própria teoria quântica.

3.2 Descrição Geométrica das Ruas de von Kármán

A configuração das cordas cósmicas na presente seção, corresponde aquela das ruas de vórtices em hidrodinâmica observadas e estudadas por von Kármán [55] a partir da passagem de fluidos em torno de pontos girantes. von Kármán mostrou que o fluido ao passar por um dos lados desses pontos adquire uma rotação oposta àquela do fluido passando pelo outro lado. Patricio Letelier [54] inspirado pelos modelos análogos da Cosmologia e Gravitação procurou uma solução de defeitos topológicos análoga aos vórtices de von Kármán que chamou de ruas de von Kármán como a própria configuração dada na figura (3.1) sugere.

O espaço-tempo de Letelier está mostrado na figura (3.1). É formado por uma linha superior com um número N de cordas cósmicas, separadas entre si, pela distância $2a$, abaixo da qual e distante $2b$, está uma outra, com as cordas deslocadas horizontalmente pela distância a , em relação as cordas na linha superior. A origem do sistema de coordenadas também está mostrada nessa figura. As cordas em cada linha têm mesma densidade de massa, positiva ou negativa e são formadas pelo processo de

Volterra. Na solução original de Letelier, as cordas na linha superior tem um momento angular oposto para aquelas na linha inferior e possuem cada uma as mesmas fontes de curvatura e torção. Todas as cordas formando essa configuração, são consideradas infinitamente finas, isto é, sem estrutura interna.

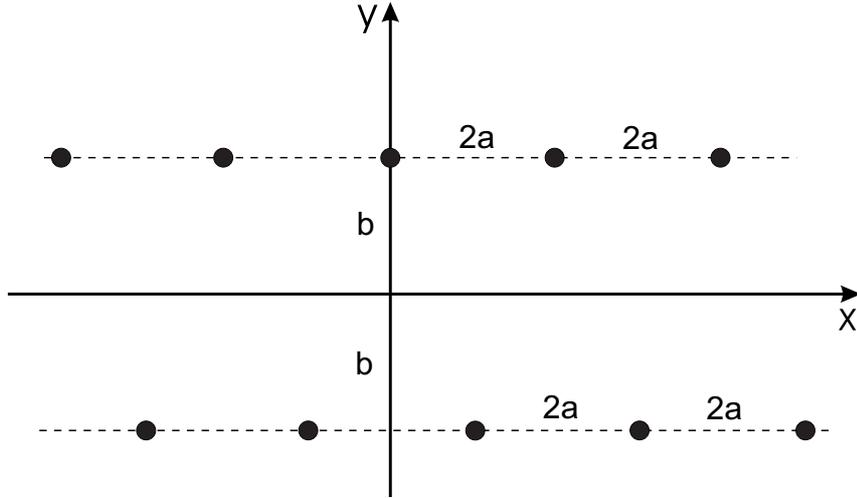


Figura 3.1: Ruas de vórtices de von Kármán como uma distribuição de cordas cósmicas.

A descrição geométrica do espaço-tempo com múltiplas cordas da figura acima, formando as ruas de von Kármán, obedece a seguinte métrica [54],

$$ds^2 = (\omega^t)^2 - (\omega^z)^2 - (\omega^x)^2 - (\omega^y)^2, \quad (3.1)$$

onde

$$\omega^t = cdt - \partial_y W dx + \partial_x W dy, \quad (3.2)$$

$$\omega^z = dz - \partial_y U dx + \partial_x U dy, \quad (3.3)$$

$$\omega^x = e^{-2V} dx, \quad \omega^y = e^{-2V} dy. \quad (3.4)$$

A métrica (3.1) corresponde a cordas girantes e com deslocções. Spins e deslocções sendo associados a torção pelas funções W e U . No presente caso, vamos estudar

cordas estáticas sem deslocações, o que implica fazer W e U simultaneamente nulos na equação (3.1). A função V está relacionada a curvatura pela equação [54],

$$R_{xyxy} = 2e^{4V}(\partial_{xx} + \partial_{yy})V = 8\pi\gamma\delta(x)\delta(y)/\sqrt{-g}, \quad (3.5)$$

com γ relacionado a densidade linear de massa μ das cordas por $\gamma = \mu$ e $\sqrt{-g}$ a raiz quadrada do determinante da métrica. Dessa maneira, a métrica para o problema das ruas de von Kármán estáticas e sem deslocações resume-se a,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - e^{-4V}(dx^2 + dy^2) \quad (3.6)$$

onde V é dado por [54]

$$V = \gamma \ln \left\{ \left[\cosh^2 \frac{\pi(y-b)}{2a} - \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \right] \times \left[\cosh^2 \frac{\pi(y+b)}{2a} - \sin^2 \frac{\pi x}{2a} \right] \right\}. \quad (3.7)$$

Esse resultado corresponde ao caso em que todas as cordas têm mesma densidade de massa. Como se sabe, uma corda cósmica de densidade de massa μ é associada ao espaço-tempo com a característica que uma volta completa em torno da corda dá um ângulo $2\pi\alpha$ em vez de 2π , onde $\alpha = 1 - 4\gamma$. Contrário a esse espaço-tempo com déficit angular com densidade de massa positiva, podemos pensar no caso quando as cordas têm excesso de ângulo, que equivale a assumir cordas com densidade de massa negativa. Embora essa afirmação seja questionável na Relatividade Geral, na abordagem da Física da Matéria Condensada [24], a desclinação negativa tem importantes aplicações. Por isso que consideramos também defeitos com densidades de massa negativas, que como no caso da densidade de massa positiva, tem associado a seguinte expressão para a fonte de curvatura,

$$V = \gamma \ln \left\{ \frac{\cosh^2 \frac{\pi(y-b)}{2a} - \cos^2 \frac{\pi x}{2a}}{\cosh^2 \frac{\pi(y+b)}{2a} - \sin^2 \frac{\pi x}{2a}} \right\}. \quad (3.8)$$

Estamos em condições de começar o estudo de auto-interação sobre densidades de cargas e/ou correntes colocadas nesse espaço-tempo. Os casos mais simples consideram fontes lineares colocadas paralelamente às cordas como aqueles realizados em

[45, 49, 50, 51]. Devido a simetria translacional ao longo do eixo z , o problema torna-se essencialmente bidimensional para as fontes de campos localizadas na posição (x, y) . Isso simplifica muito o cálculo da função de Green para a geometria não-plana do problema.

3.3 Cálculo geral da Função de Green na Geometria Curva

A uma distribuição arbitrária de cargas $\rho(\vec{x})$ podemos associar uma energia eletrostática dada pela expressão [2],

$$U_{ele} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}), \quad (3.9)$$

onde $\Phi(\vec{x})$ é o potencial eletrostático que satisfaz a equação de Poisson $\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$. Como nosso problema é essencialmente bidimensional podemos definir a energia por unidade de comprimento como,

$$\frac{U_{ele}}{l} = \frac{1}{2} \int \int dx^2 dx'^2 \rho(\vec{x}) G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}'), \quad (3.10)$$

onde $G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}')$ é a função de Green bidimensional no espaço-tempo descrito pela métrica (3.1). Ela satisfaz a seguinte equação,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}')] = \delta^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (3.11)$$

aqui $\delta^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}')$ é a distribuição delta de Dirac em duas dimensões, g é o determinante do tensor métrico e $\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu]$ é o operador de Laplace-Beltrami na geometria não-Euclidiana descrita por (3.1).

Para o problema de auto-interação, considere um fio infinitamente longo, reto, colocado paralelamente ao eixo z , carregando uma densidade linear e uniforme de carga λ dada pela expressão,

$$\rho(\vec{x}) = \lambda \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.12)$$

aplicando a expressão acima em (3.10) obtemos a energia eletrostática por unidade de comprimento como,

$$\frac{U_{ele}}{l} = \frac{1}{2} \lambda^2 G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x})|_{reg}, \quad (3.13)$$

onde agora a função de Green regularizada obedece,

$$G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x})|_{reg} = \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \left[G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') - G_E^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') \right]. \quad (3.14)$$

com $G_E^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') = -\ln |\vec{x} - \vec{x}'|^2$, sendo a função de Green Euclidiana, solução da equação de Poisson no espaço plano $\Delta_E G_E^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}')$.

Consideremos agora uma abordagem do ponto de vista da magnetostática. Considere um fio infinitamente longo, reto e carregando uma densidade de corrente \vec{J} , localizada, dada por,

$$\vec{J}(\vec{x}) = I\delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}')\hat{z}. \quad (3.15)$$

dada essa distribuição, definimos a energia magnetostática por unidade de comprimento como sendo,

$$\frac{U_{mag}}{l} = \frac{1}{2c^2} \int \int dx^2 dx'^2 \vec{J}(\vec{x}) G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') \vec{J}(\vec{x}') \quad (3.16)$$

uma substituição de (3.15) acima, resulta na energia magnetostática

$$\frac{U_{mag}}{l} = \frac{I^2}{2c^2} G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x})|_{reg}. \quad (3.17)$$

observe que para o cálculo das energias eletrostática e magnetostática acima, precisamos conhecer a expressão para $G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x})|_{reg}$. Para esse fim, considere a seção seguinte.

3.3.1 Geometria Conforme

Para passar desse ponto, devemos calcular a função de Green regularizada para o caso eletrostático e magnetostático. Para isso, tiramos vantagem de nosso problema

ser bidimensional, o que implica que toda superfície com essa dimensão é localmente conforme ao plano Euclidiano. Isso significa que a métrica da geometria curva pode ser escrita da seguinte maneira,

$$g_{ij}(\vec{x}) = e^{-\Omega(\vec{x})} \delta_{ij}. \quad (3.18)$$

com $g_{ij}(\vec{x})$ sendo a métrica geral e δ_{ij} a correspondente métrica para o plano euclidiano com a seguinte equação de Poisson, $\nabla_E^2 G_b^{(2)}(\vec{x}', \vec{x}) = \delta^2(\vec{x} - \vec{x}')$. Seguindo [2] chegamos a seguinte solução,

$$G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') = \ln|\vec{x} - \vec{x}'|^2 + f(|\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (3.19)$$

a função $f(|x - x'|)$ acima pode ser considerada nula por escolhas apropriadas das condições de fronteiras do problema. Queremos construir uma equação análoga a essa para o caso riemaniano. Para isso precisamos usar do conceito de *coordenadas conformes* numa variedade riemanniana.

Considere um sistema de coordenadas Riemaniano. Nesse espaço considere uma curva arbitrária C com extremos nos pontos x' e x . Considere a origem do sistema de coordenadas no ponto médio entre os extremos de C , r o raio conforme desse ponto central e t^a um vetor tangente na direção de x' . O vetor tangente na direção de x é (t^b) . Seguindo Grats e Garcia [56] podemos escrever x' em termos de (t^a, σ, Ω) como

$$\begin{aligned} x' = & x^a + \sqrt{\frac{\sigma}{2}} t^a - \frac{\sigma}{8} (\nabla^a \Omega - 2t^a t^b \nabla_b \Omega) + \\ & + \frac{(2\sigma)^{3/2}}{48} \left[t^a \left(t^b t^c \nabla_{bc} \Omega + (t^b \nabla_b \Omega)^2 - \frac{1}{4} \nabla_b \Omega \nabla^b \Omega \right) - \frac{1}{2} \nabla^a (t^b \nabla_b \Omega) - \frac{1}{2} t^b \nabla_b^a \Omega \right] + \mathcal{O}(\sigma^2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

uma expressão análoga para x pode ser construída, fazendo-se a substituição $t^b = -t^a$ acima. Com isso em mãos temos que $|x - x'|^2$ será,

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'|^2 = & e^{\Omega(x)} 2\sigma(x, x') \times \\ & \times \left[1 + \frac{1}{12} \sigma t^a t^b \left(\nabla_a \nabla_b \Omega + \nabla_a \Omega \nabla_b \Omega - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \nabla_c \Omega \nabla^c \Omega \right) \right] + \mathcal{O}(\sigma^3), \end{aligned} \quad (3.21)$$

colocando esse resultado em (3.19), obtemos o resultado fundamental de Grats e Garcia [56],

$$-G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') = \ln[2\sigma(x, x')] + \Omega(\vec{x}, \vec{x}') + 2\sigma(\vec{x}, \vec{x}') \frac{t^a t^b \theta_{ab}}{24} + \mathcal{O}(\sigma(\vec{x}, \vec{x}')^2), \quad (3.22)$$

onde o tensor $\theta_{ab} = \nabla_a \Omega \nabla_b \Omega - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \nabla_c \Omega \nabla^c \Omega + \nabla_{ab}^2 \Omega$, com ∇_a sendo a derivada covariante. Podemos observar que o primeiro termo no lado direito diverge quando tomamos o limite $x \rightarrow x'$, porque nesse limite, $\sigma \rightarrow 0$. Essa é a contribuição euclidiana do problema e que deve ser, portanto, excluída. O terceiro termo e todos aqueles proporcionais a σ se anulam porque σ tende a zero nesse limite. Portanto o único termo que permanece no lado direito é exatamente o fator conforme. Substituindo esse resultado em (3.19) e usando o fato que $G_E^{(2)}(x, x') = -\ln[2\sigma(x, x')]$, segue da equação (3.14) que

$$G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x})|_{reg} = -\Omega(\vec{x}, \vec{x}), \quad (3.23)$$

esse resultado é muito importante. Ele diz que a auto-interação eletromagnética sobre fontes de cargas e correntes é mediada pela geometria não-local do espaço-tempo através do fator conforme $\Omega(\vec{x})$. Em outras palavras, a função de Green regularizada tem a função de um teste local da estrutura global do espaço-tempo.

Comparando as equações (3.6) e (3.18) mais o fato da simetria translacional ao longo do eixo z podemos determinar que $\Omega = 4V$. Por conseguinte, obtemos a função de Green regularizada em termos da configuração de von Kármán para ser,

$$G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x})|_{reg} = -4V(x, y). \quad (3.24)$$

A partir daqui podemos calcular exatamente a auto-energia elétrica por unidade de comprimento sobre uma densidade linear de carga substituindo (3.24) e (3.7) na equação (3.13). O resultado é,

$$\frac{U_{ele}}{l} = -2\lambda^2 \gamma \ln \left\{ \left[\cosh^2 \frac{\pi(y-b)}{2a} - \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \right] \cdot \left[\cosh^2 \frac{\pi(y+b)}{2a} - \sin^2 \frac{\pi x}{2a} \right] \right\}, \quad (3.25)$$

para o caso no qual as cordas na configuração de von Kármán são idênticas e com densidade de massa positiva. Similarmente,

$$\frac{U_{ele}}{l} = -2\lambda^2\gamma \ln \left\{ \frac{\cosh^2[\pi(y-b)/2a] - \cos^2(\pi x/2a)}{\cosh^2[\pi(y+b)/2a] - \sin^2(\pi x/2a)} \right\}, \quad (3.26)$$

descreve a auto-energia elétrica da densidade linear de carga para a configuração de von Kármán na qual as cordas têm densidades de massa opostas. Da mesma maneira, a auto-energia magnética de uma densidade linear de corrente para ambos os casos é,

$$\frac{U_{mag}}{l} = -\frac{I^2\gamma}{2c^2} \ln \left\{ \left[\cosh^2 \frac{\pi(y-b)}{2a} - \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \right] \cdot \left[\cosh^2 \frac{\pi(y+b)}{2a} - \sin^2 \frac{\pi x}{2a} \right] \right\} \quad (3.27)$$

e

$$\frac{U_{mag}}{l} = -\frac{I^2\gamma}{2c^2} \ln \left[\frac{\cosh^2(\pi(y-b)/2a) - \cos^2(\pi x/2a)}{\cosh^2(\pi(y+b)/2a) - \sin^2(\pi x/2a)} \right], \quad (3.28)$$

respectivamente. Como no eletromagnetismo clássico, conhecendo-se a energia de uma distribuição de cargas/correntes, podemos determinar a força sobre essas fontes a partir das equações,

$$\frac{\vec{F}_{ele}}{l} = -\vec{\nabla} \left(\frac{U_{ele}}{l} \right). \quad (3.29)$$

e

$$\frac{\vec{F}_{mag}}{l} = \vec{\nabla} \left(\frac{U_{mag}}{l} \right). \quad (3.30)$$

como mostrado em E. Mello e outros [45]. É importante mencionar que o sinal positivo na expressão da autoforça magnética, se dá por exigência da conservação da energia para um circuito rígido sujeito a um deslocamento virtual dr na influência de uma força magnética para se manter toda a corrente constante.

3.4 Análise Teórica

Em vez de analisar as expressões para a força atuando sobre as fontes, é mais instrutivo analisar as superfícies da auto-energia. Para isso apresentamos o gráfico tridimensional da auto-energia para os casos elétricos e magnéticos considerados acima.

Na figura (3.2a) apresentamos a superfície de auto-energia elétrica e/ou magnética, visto que elas são proporcionais entre si, para a configuração de cordas com densidade de massa positiva. Como no caso da corda isolada [45] a fonte elétrica é repelida pelas cordas, enquanto a fonte magnética é atraída, veja também as equações (3.29) and (3.30).

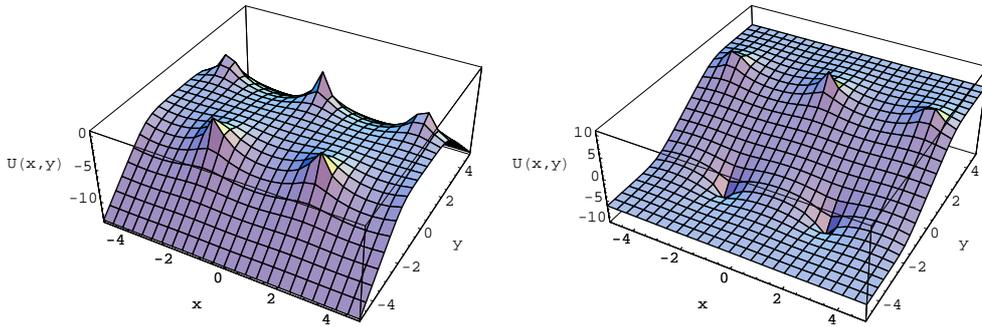


Figura 3.2: Auto-energia elétrica e magnética sobre uma fonte linear na presença da geometria de von Kármán de cordas cósmicas. (a) cordas com mesma densidade de massa. (b) Cordas com densidades de massa opostas. U , x e y em unidades arbitrárias.

A figura (3.2b) mostra a superfície de auto-energia para uma fonte linear na presença de uma configuração mista de defeitos. O papel do sinal da densidade de massa claramente é o de inverter o sinal da auto-energia quando a fonte se desloca da vizinhança de uma corda cósmica para a vizinhança da outra, esta com uma densidade de massa de sinal contrário, veja as equações (3.26) ou (3.28)).

A figura (3.2) mostra o comportamento já visto na referência [45] para o caso do espaço-tempo de uma corda cósmica. As cordas com $\alpha < 1$ repelem a densidade de carga elétrica, enquanto atraem a densidade de corrente. Note que, invertendo o sinal da densidade de massa da corda, por consequência γ , implica na seguinte mudança $\alpha < 1 \rightarrow \alpha > 1$. Portanto, um comportamento invertido sobre auto-interação é observado quando assumimos $\alpha > 1$. Isso fica claro, quando observamos a figura

(3.2b), na qual há ambos os tipos de defeitos.

3.4.1 Limite de um Único Vórtice

Nas seções anteriores, tratamos o problema da auto-interação sobre cargas/correntes no espaço-tempo de múltiplas cordas. Para consistência dessa apresentação, faremos agora o limite de vórtice isolado sobre as expressões da auto-energia obtidas com a geometria de von Kármán e compararemos o resultado desse limite com aquele encontrado para a auto-interação na presença da corda cósmica isolada [45]. Para a configuração de vórtice único, admitiremos que as múltiplas cordas estão infinitamente separadas com as posições entre elas obedecendo a relação $(a, b) \gg (x, y)$ e que a origem do sistema de coordenadas coincide com a posição de uma das cordas e dada por $(x, y) = (0, 0)$. Sob essas condições, o argumento do logaritmo na expressão da auto-energia (3.25) torna-se,

$$f(x, y) = \left[\cosh^2 \frac{\pi y}{2a} - \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \right] \times \left[\cosh^2 \frac{\pi(y+2b)}{2a} - \sin^2 \frac{\pi x}{2a} \right] \quad (3.31)$$

com $U_{ele}(x, y)$ agora dada por $U_{ele} = -2\lambda^2\gamma \ln[f(x, y)]$. Expandindo $f(x, y)$ em série de Taylor em torno da origem obtemos,

$$f(x, y) \approx \frac{\pi^2}{4a^2} \cosh^2 \left(\frac{\pi b}{a} \right) (x^2 + y^2). \quad (3.32)$$

Isso faz

$$V = \gamma \ln \left[\frac{\pi^2}{4a^2} \cosh^2 \left(\frac{\pi b}{a} \right) (x^2 + y^2) \right], \quad (3.33)$$

levando em consideração essa mudança sobre V a equação (3.6) transforma-se em

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - (x^2 + y^2)^{\alpha-1} (dx^2 + dy^2), \quad (3.34)$$

a menos do fator de escala $\frac{\pi^2}{4a^2} \cosh^2 \left(\frac{\pi b}{a} \right)$.

Exceto pela constante aditiva $-2\lambda^2\gamma \ln \left\{ \frac{\pi^2}{4a^2} \cosh^2 \left(\frac{\pi b}{a} \right) \right\}$ a auto-energia eletrostática (3.13) assume a forma

$$\frac{U_{ele}}{l} = -2\lambda^2\gamma \ln(x^2 + y^2), \quad (3.35)$$

que está em coordenadas conformes. Para comparar com o resultado de [45] fazemos $R^2 = x^2 + y^2$ e realizamos a transformação de coordenadas

$$R = (\alpha r)^{1/\alpha}, \quad (3.36)$$

onde $\alpha = 1 - 4\gamma$, tal que a métrica assume a forma conhecida,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2, \quad (3.37)$$

em coordenadas polares, onde $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Uma outra mudança de variável, $\theta = \alpha\varphi$, coloca a métrica da corda cósmica isolada como no caso da referência [45]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2, \quad (3.38)$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi\alpha$. Nas coordenadas (r, θ) , o resultado (3.35) é

$$\frac{U_{ele}}{l} = -\lambda^2 [(1-p) \ln p + (p-1) \ln r], \quad (3.39)$$

onde fizemos $\alpha = 1/p$. Note que, na ausência de defeito, isto é, $p = 1$, a auto-energia é nula, como pode ser verificado na expressão acima.

Em [45], foi encontrada a seguinte expressão para a auto-energia elétrica por unidade de comprimento, sobre uma distribuição linear de carga na presença de uma corda cósmica

$$\frac{U_{ele}}{l} = -\lambda^2 [\ln p + (p-1) \ln r], \quad (3.40)$$

que, a menos de um fator constante, é idêntico ao nosso resultado (3.39).

3.5 Conclusão

Nesse capítulo estudamos o problema de auto-interação sobre cargas elétricas e correntes localizadas na geometria das ruas de vórtices de von Kármán. O cálculo da auto-energia elétrica e magnética foi feito usando o fato que esse espaço-tempo

é essencialmente bidimensional e, portanto, conforme ao espaço Euclidiano. Esse fato simplificou em muito o cálculo da função de Green regularizada, presente nas expressões das auto-energias e, por consequência, nas expressões da autoforça. Uma análise dos gráficos das auto-energias, nos leva a conclusão de que a linha de carga elétrica é repelida pela geometria das ruas de von Kármán, enquanto a linha de corrente é magneticamente atraída. Por fim, esses comportamentos, repulsivos e atrativos, se repetem quando estudamos o limite de um único vórtice dessa geometria.

Os resultados desse capítulo estão publicados em *European Physical Journal C*, DOI 10.1140/epjc/s10052-008-0762-8.

Capítulo 4

Fase de Berry Gravitacional para Partículas de Spin-1/2

4.1 Introdução

Neste capítulo, analisaremos o transporte de spinores em torno de singularidades cônicas tipos as cordas cósmicas, usando a teoria relativística de Dirac aplicada a espaços-tempos curvos. Tais singularidades são caracterizadas por uma métrica cujo tensor de curvatura Riemann-Christoffel é nulo em todo o espaço, exceto ao longo da linha que localiza os defeitos [57]. O transporte de spinores ao longo de curvas envolvendo os defeitos, permite obter informações acerca das propriedades globais do espaço-tempo e evidenciam a influência da topologia sobre a dinâmica de sistemas físicos ocorrendo nesses espaços. Efeitos físicos marcantes podem ser observados na geometria da corda cósmica. Destacam-se a auto-força elétrica e magnética sobre fontes lineares na presença da corda cósmica [58, 59], o efeito Casimir [60], versão quântica da auto-força clássica, o desvio dos raios de luz passando na proximidade desse defeito e a formação de imagens duplas de objetos observados posteriormente a eles [6, 61]. Ela também pode atuar como uma lente gravitacional [62]. Quando uma

partícula quântica é transportada ao longo de uma curva fechada envolvendo o defeito, propriedades não-locais são obtidas e esse efeito representa o análogo gravitacional do efeito eletromagnético Aharonov-Bohm [28].

O aparecimento de fases topológicas na dinâmica quântica de uma partícula movendo-se livremente em espaços-tempos tem sido estudadas numa variedade de sistemas físicos. O protótipo dessa fase sendo o efeito Aharonov-Bohm [28], que aparece como um fator na função de onda de um elétron que se move em torno de uma linha de fluxo magnético. A holonomia [63] tem origem puramente geométrica e tem importante e fundamental papel em várias áreas da física. Em 1984, Berry [64] demonstrou que um sistema quântico transportado adiabaticamente em torno de um circuito fechado, por parâmetros variando em seu hamiltoniano, adquire uma fase geométrica, chamada de fase de Berry. Extensões para o caso não-adiabático foram feitas por Aharonov-Anandan em 1987 [65]. Em ambos os casos, a fase depende apenas da natureza geométrica do caminho ao longo do qual o sistema é transportado. Esse fenômeno foi observado em várias partes da física incluindo sistemas de fótons [66] e na polarização da luz propagando-se em cristais líquidos com defeitos topológicos análogos a corda cósmica [67].

O estudo da influência de campos inerciais e gravitacionais fracos na dinâmica quântica de partículas e na fase quântica de Berry, tem recebido muita atenção nos últimos anos [68, 69]. Nessa direção, Corichi e Pierri [70] estudaram a fase adquirida por uma partícula escalar ao ser transportada ao longo de uma curva fechada envolvendo uma corda cósmica girante e Mostafazadeh [71] estudou essa fase usando o formalismo de duas componentes. Mais recentemente [72], a fase geométrica de Berry adquirida por uma partícula escalar, ao ser transportada em torno da corda cósmica quiral magnética foi calculada usando a equação de Klein-Gordon.

Neste capítulo, trataremos o caso no qual a corda tem um momento angular caracterizado por J^t e um campo de torção representado por J^z . Resolveremos a

equação de Dirac aplicada a esse espaço-tempo usando o método do fator de fase Dirac. Calcularemos a fase quântica de Berry adquirida pelo spinor ao ser transportado paralelamente ao longo de uma curva genérica C_j envolvendo o j -ésimo cone quirial localizado em ρ_j .

No final, generalizaremos o estudo inicial desse capítulo, para o caso em que o spinor é transportado em torno de N cordas cósmicas quirais e também quando estas cordas estão na presença de um potencial eletromagnético A_μ .

4.2 Aproximação Adiabática para a Fase de Berry

Ao considerarmos a evolução de um dado sistema físico, por exemplo, o oscilador harmônico, somos induzidos a fazer uma análise do seu período de revolução, induzidos ao estudo do espectro de energia ou a uma representação em termos dos operadores de criação e aniquilação (\hat{a}, \hat{a}^\dagger) da mecânica quântica. Como é nosso interesse aqui classificar sistemas físicos usando a *aproximação adiabática*, consideremos das alternativas acima aquela relacionada com o período de revolução do oscilador, representado por T_i e chamado de sistema interno. Admitamos, para comparação, que exista um tempo característico associado ao período de oscilação de um sistema externo, denominado não-oscilador e representemos esse tempo por T_e . Dados esses dois sistemas, podemos classificar o movimento do sistema externo como *adiabático* quando é válida a seguinte relação entre os períodos $T_e \gg T_i$. De outra maneira, enquanto o oscilador executa várias revoluções o sistema externo moveu-se apenas apreciavelmente.

4.2.1 Fase de Berry Não-Relativística

O estudo das fases geométricas é feito sobre a afirmativa que a evolução temporal dos sistemas quânticos está restrita à aproximação adiabática. Para isso, consideremos um sistema caracterizado por um hamiltoniano dependente do tempo $H(t)$. Sob essa prescrição, a equação de Schrödinger dependente do tempo, assume a forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_m(x, t)}{\partial t} = H(t) \Psi_m(x, t). \quad (4.1)$$

A solução do problema de autovalores acima, pode ser encontrada a partir do *Teorema Adiabático*, segundo o qual, quando o hamiltoniano de um sistema varia de forma gradual, o m -ésimo estado do hamiltoniano expandido, $\Psi_m(x, t)$, difere daquele inicial, $\psi_n(x, t)$, apenas por um fator de fase dependente do tempo. Matematicamente podemos escrever,

$$\Psi_m(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{i\gamma(t)} \psi_n(x, t), \quad (4.2)$$

observe que o primeiro termo é aquele relacionado com a evolução temporal do sistema, conhecido como *fase dinâmica*. O termo na segunda exponencial, $\gamma(t)$, é chamado de fase geométrica. Aliás, todo termo além daquele relacionado com a fase dinâmica é chamado de *fase geométrica*. É sobre esse termo que trabalharemos agora. Usando a equação (4.2) em (4.1) obtemos depois de algum cálculo

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} + i\psi_n \frac{d\gamma(t)}{dt} = 0. \quad (4.3)$$

dada a ortogonalidade das autofunções ψ_n , podemos multiplicar à esquerda por ψ_n^* e integrar sobre todo o intervalo linear entre $(-\infty, \infty)$. Depois de simples álgebra obtemos,

$$\frac{d\gamma}{dt} = i \left\langle \psi_n \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right. \right\rangle. \quad (4.4)$$

Dessa expressão podemos obter a fase geométrica por integração direta. Para o caso no qual a dependência temporal da autofunção é através de um parâmetro $R(t)$ no

hamiltoniano $H(R(t))$, podemos usar a equação acima e encontrar o seguinte resultado para a fase geométrica,

$$\gamma_n(t) = i \oint \left\langle \psi_n \left| \frac{d\psi_n}{dR} \right. \right\rangle dR, \quad (4.5)$$

escrita dessa forma, a fase é chamada de fase de Berry, com R associado com a mudança temporal de algum parâmetro do sistema. Admitindo que existam vários parâmetros dependentes do tempo $[R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t)]$, encontramos a seguinte expressão geral para a *fase de Berry* [73],

$$\gamma_n(t) = i \oint \left\langle \psi_n \left| \vec{\nabla}_R \psi_n \right. \right\rangle \cdot d\vec{R}. \quad (4.6)$$

com $\vec{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$. A integral é realizada sobre um contorno no espaço dos parâmetros. Dado que as autofunções $\Psi_n(x, t)$ devem ser ortonormais, pela expressão (4.2) $\gamma(t)$ deve ser real, caso contrário, o novo fator exponencial não seria um fator de fase.

4.2.2 Fase de Berry Relativística

Na seção anterior vimos como podemos escrever a autofunção para um hamiltoniano adiabaticamente dependente do tempo através do parâmetro $R(t)$ e por consequência a fase de Berry dada em (4.6). Na teoria relativística de Dirac a autofunção é dada em termos de quatro componentes spinoriais,

$$\Psi_n[R(t)] = \psi_{n_j}[R(t)]\Lambda_j(t) \quad (4.7)$$

com $\Lambda_j(t)$ fatores de fase e $j = 1, \dots, 4$. Usando esse resultado em (4.1), e dividindo a correspondente equação por (4.7) obtemos,

$$\frac{1}{\Lambda_j} \frac{d\Lambda_j}{dt} = -\frac{i}{\hbar} E_{n_j}[R(t)] - \frac{1}{\psi_{n_j}} \frac{d\psi_{n_j}}{dR} \frac{dR}{dt} \quad (4.8)$$

integrando termo a termo no intervalo 0 a t obtemos,

$$\Lambda_j(t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_{n_j}[R(t')] dt' \right\} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{1}{\psi_{n_j}} \frac{d\psi_{n_j}}{dR} \frac{dR}{dt'} dt' \right\}, \quad (4.9)$$

O primeiro termo em $\Lambda_j(t)$ é a fase dinâmica e o segundo representaremos como abaixo,

$$\gamma_j(t) = i \exp \left\{ \int_0^t \frac{1}{\psi_{n_j}} \frac{d\psi_{n_j}}{dR} \frac{dR}{dt'} dt' \right\}. \quad (4.10)$$

Podemos escrever essa expressão de uma outra maneira admitindo que as autofunções ψ_{n_j} sejam de quadrado integráveis, o resultado encontrado será,

$$\gamma_n(T) = \sum_{j=1}^4 \oint \langle \psi_{n_j} | \vec{\nabla}_R \psi_{n_j} \rangle \cdot d\vec{R}. \quad (4.11)$$

Essa expressão nos diz que a fase relativística é composta de quatro partes, cada uma associada com a j -ésima componente spinorial. No entanto, Zheng-Chuan [74], mostrou que a prescrição não-relativística da fase de Berry não pode ser aplicada diretamente para a correspondente relativística, porque a fase encontrada acima não é invariante sob uma transformação geral de Lorentz, a menos que o spinor (4.7) seja reescrito na forma,

$$\Psi_n[R(t)] = \psi_{n_j}[R(t)] \Lambda(t), \quad (4.12)$$

que equivale a dizer que há apenas um termo $\Lambda(t)$ para as quatro componentes spinoriais. Seguindo essa definição encontramos a seguinte expressão para a fase relativística de Berry,

$$\gamma_n(T) = i \oint \langle \psi_n(R) | \nabla_R \psi_n(R) \rangle dR, \quad (4.13)$$

essa fase é invariante sobre a transformação geral de Lorentz imposta sobre o parâmetro adiabático R ,

$$R_\mu = A_{\mu\nu} R_\nu, \quad \nabla_{R'} = A^{-1} \nabla_R, \quad dR' = A dR \quad (4.14)$$

e, portanto, é a fase de Berry para a mecânica quântica relativística. A diferença está na existência de apenas um fator de fase para as quatro componentes spinoriais da função de onda.

4.3 Efeito Aharonov-Bohm

Considere um campo magnético restrito a uma região do espaço, tal qual aquele produzido por um longo solenóide de raio a . Classicamente, a dinâmica de uma partícula na região $r > a$ não é influenciada pelo campo magnético, visto que nessa região $\vec{B} = 0$. No nível quântico interessantes resultados surgem ao se resolver a equação de Schrödinger nessa configuração de campo. Assumindo acoplamento mínimo, essa dinâmica no nível quântico é descrita pela equação,

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q\vec{A}}{c} \right)^2 + V \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (4.15)$$

Assumindo o potencial vetor da forma $\vec{A} = \Phi_B/2\pi\rho\hat{e}_\phi$, satisfazendo o *gauge* de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, podemos encontrar o espectro de energia de uma partícula ao ser transportada ao longo de uma órbita circular de raio s envolvendo o solenóide. O resultado é,

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2ms^2} \left(n - \frac{q\Phi_B}{2\pi\hbar} \right)^2 \quad (4.16)$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ com valores positivos de n associados ao movimento da partícula na mesma direção da corrente no solenóide e valores negativos para o movimento na direção oposta. Pela expressão acima, quando o movimento da partícula ocorre na mesma direção da corrente, $n > 0$, a energia associada é menor que a correspondente para o movimento na direção oposta, $n < 0$. O destaque nesse resultado está na dependência explícita dos níveis de energia com o fluxo magnético Φ_B restrito ao interior do solenóide e, portanto, nulo na região acessível a nossa partícula. Essa

dependência sobre parâmetros externos é chamada *efeito eletromagnético Aharonov-Bohm*.

Uma abordagem em termos da fase geométrica pode ser feita. Admitindo a seguinte dependência para a autofunção $\Psi = e^{i\Gamma(x)}\psi$ a equação (4.15) transforma-se na equação de Schrödinger para ψ na ausência de potencial vetor \vec{A} , com $\Gamma(x)$ dada por

$$\Gamma(x) = \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{O}}^x \vec{A}(x') \cdot d\vec{x}' = \pm \frac{q\Phi_B}{2\hbar}, \quad (4.17)$$

com o sinal positivo para a partícula movendo-se na mesma direção da corrente no solenóide e negativo para o movimento na direção oposta. Dessa forma, as partículas se encontram com uma diferença de fase dada por,

$$\Delta = \frac{q\Phi_B}{\hbar}. \quad (4.18)$$

observe a dependência sobre o fluxo magnético restrito ao interior do solenóide. Esse resultado teórico, contrariando as concepções clássicas, ganhou fundamento físico após a realização experimental de Chambers [75] nos anos Sessenta. Novamente esse é o efeito eletromagnético Aharonov-Bohm.

4.3.1 Efeito Aharonov-Bohm como uma Fase Geométrica

Seja calcular a fase de Berry a partir da autofunção usada para o cálculo da fase eletromagnética Aharonov-Bohm. A prescrição de Berry para a fase geométrica está representada abaixo,

$$\gamma_n(t) = i \oint \left\langle \Psi_n \left| \frac{d\Psi_n}{dR} \right. \right\rangle \cdot dR \quad (4.19)$$

Assumamos que a autofunção obedeça a relação: $\Psi = e^{i\Gamma(x)}\psi$. O integrando pode

ser calculado da seguinte forma,

$$\left\langle \Psi_n \left| \frac{d\Psi_n}{dR} \right. \right\rangle = \int e^{-i\Gamma(x)} [\psi_n(r-R)]^* e^{i\Gamma(x)} \left\{ -i\frac{q}{\hbar} A(R) \psi_n(r-R) + \nabla_R \psi_n(r-R) \right\} d^3r \quad (4.20)$$

considerando a ortonormalidade das autofunções e que o valor esperado do operador momento num autoestado do hamiltoniano dá zero, nossa expressão simplifica-se dando,

$$\left\langle \Psi_n \left| \frac{d\Psi_n}{dR} \right. \right\rangle = -i\frac{q}{\hbar} A(R) \quad (4.21)$$

temos portanto calculado a expressão para o termo acima conhecido como conexão de Berry. A fase de Berry é calculada usando esse resultado na equação (4.19) com o potencial vetor $A = \Phi_B / (2\pi\rho) \hat{e}_\phi$ e $dR = \rho \hat{e}_\phi d\phi$,

$$\gamma(t) = \frac{q}{\hbar} \int A(R) \cdot dR \quad \rightarrow \quad \gamma(t) = \frac{q\Phi_B}{\hbar} \quad (4.22)$$

essa é a *fase de Berry* obtida para uma partícula sujeita a um hamiltoniano dependente do tempo satisfazendo a aproximação adiabática. Observe que esse resultado é o mesmo daquele quando o movimento ocorre na presença de um campo magnético localizado (4.18). Daí, o efeito Aharonov-Bohm ser conhecido como um tipo de fase geométrica.

Essa apresentação sobre o efeito Aharonov-Bohm se justifica pelo fato de encontrarmos ao longo dos próximos capítulos, análogos gravitacionais desse efeito, significando, portanto, que as fontes gravitacionais do espaço-tempo como curvatura e torção, embora inacessível à nossa partícula, aparecerão explicitamente nos níveis de energia e nas autofunções, exatamente como fez o campo magnético na solução acima.

4.4 Equação de Dirac nas Geometrias Planas e Curvas

Apresentaremos a equação de Dirac aplicada às geometrias planas e curvas. Começaremos pela geometria plana, escrevendo a forma matricial dessa equação quando a partícula de spin $1/2$ está submetida a um campo eletromagnético. A seguir, a generalização para espaços curvos é apresentada. Ao longo da apresentação estaremos usando as unidades naturais $\hbar = 1$ e $c = 1$. No caso de um campo eletromagnético A_κ , minimamente acoplado, a equação de Dirac assume a forma,

$$\{i[\gamma^\kappa(x)\partial_\kappa + ie\gamma^\kappa(x)A_\kappa] - m\}\Phi_\kappa(x) = 0 \quad (4.23)$$

com $\Phi_\kappa(x)$, $\kappa = (0, 1, 2, 3)$, sendo a representação compacta do spinor de quatro componentes como abaixo,

$$\Phi_\kappa(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

As matrizes $\gamma^{(\kappa)}$ na representação (4×4) obedecem a relação de anticomutação,

$$\gamma^{(\kappa)}\gamma^{(\lambda)} + \gamma^{(\lambda)}\gamma^{(\kappa)} = 2\eta^{\kappa\lambda} \quad (4.25)$$

o tensor métrico $\eta^{\kappa\lambda}$ no espaço de Minkowski é representado por uma matriz diagonal com a seguinte assinatura $(-, +, +, +)$. As matrizes $\gamma^{(\kappa)}$ na representação de Dirac são dadas por,

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \quad \Sigma^j = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

com σ^i sendo as matrizes de Pauli, $i = (1, 2, 3)$, dadas por

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Essa apresentação nos permite resolver a dinâmica de uma partícula spinorial na presença de um campo eletromagnético sujeito a uma geometria local e globalmente plana. Por outro lado, quando a geometria envolvida é não-Euclidiana torna indispensável o uso de alguns conceitos geométricos da relatividade geral de Einstein. Começaremos com o conceito generalizado de derivada covariante,

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \quad (4.28)$$

com ∂_μ sendo derivadas ordinárias e Γ_μ a correção introduzida pela topologia. Sob essa definição a equação (4.23) assume a forma,

$$[i\gamma^\mu(x)\partial_\mu + i\gamma^\mu(x)\Gamma_\mu(x) - m]\Phi(x) = 0 \quad (4.29)$$

com $\gamma^\mu(x)$ sendo as matrizes de Dirac para o espaço-tempo curvo que são dadas a partir daquelas do espaço de Minkowski γ^a pela equação,

$$\gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x)\gamma^a \quad (4.30)$$

a transformação $e_a^\mu(x)$ relacionando os espaços-tempos curvos e planos são chamadas de tetradas e são determinadas a partir da relação,

$$e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)\eta_{ab} = g_{\mu\nu}(x) \quad (4.31)$$

sendo $g^{\mu\nu}$ a matriz inversa do tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Para o espaço-tempo descrito pela métrica (2.3), escolhemos a seguinte tetrada $e_\mu^a(x)$ e sua inversa $e_a^\mu(x)$,

$$e_\mu^a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4J^t & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\alpha\rho\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \alpha\rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 4J^z & 1 \end{pmatrix}; \quad e_a^\mu(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4J^t\sin\phi}{\alpha\rho} & -\frac{4J^t\cos\phi}{\alpha\rho} & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\frac{\sin\phi}{\alpha\rho} & \frac{\cos\phi}{\alpha\rho} & 0 \\ 0 & \frac{4J^z\sin\phi}{\alpha\rho} & -\frac{4J^z\cos\phi}{\alpha\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

escolhida a matriz $e_a^\mu(x)$ podemos determinar como se transformam as matrizes de Dirac $\gamma^\mu(x)$ usando a equação (4.30) e o resultado acima. Obtemos, portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}^0 &= \gamma^t - \frac{4J^t}{\alpha\rho}\gamma^\phi \\
\bar{\gamma}^1 &= \gamma^\rho, \quad \gamma^\rho = \cos\phi\gamma^1 + \sin\phi\gamma^2 \\
\bar{\gamma}^2 &= \frac{\gamma^\phi}{\alpha\rho}, \quad \gamma^\phi = -\sin\phi\gamma^1 + \cos\phi\gamma^2 \\
\bar{\gamma}^3 &= \gamma^{(z)} - \frac{4J^z}{\alpha\rho}\gamma^\phi
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Comparativamente à equação (4.23), a correção para o espaço-tempo curvo da equação (4.29) está em $\gamma^\mu(x)\Gamma_\mu(x)$. O cálculo desse termo pode ser feito a partir da 1-forma abaixo,

$$\begin{aligned}
e^0 &= dt \\
e^1 &= \cos\phi d\rho - \alpha\rho\sin\phi d\phi \\
e^2 &= \sin\phi d\rho + \alpha\rho\cos\phi d\phi \\
e^3 &= dz
\end{aligned} \tag{4.34}$$

e com o uso da equação de Maurer-Cartan na ausência de torção,

$$de^a + w_b^a \wedge e^b = 0 \tag{4.35}$$

com de^a representando derivadas exteriores e representadas pela relação $dx_i \wedge dx_j$. Derivadas desse tipo, resultam em valores não-nulos somente para índices diferentes $i \neq j$. Na base (4.34) a equação de Maurer-Cartan torna-se,

$$\begin{aligned}
de^0 + w_0^0 \wedge e^0 + w_1^0 \wedge e^1 + w_2^0 \wedge e^2 + w_3^0 \wedge e^3 &= 0 \\
de^1 + w_0^1 \wedge e^0 + w_1^1 \wedge e^1 + w_2^1 \wedge e^2 + w_3^1 \wedge e^3 &= 0 \\
de^2 + w_0^2 \wedge e^0 + w_1^2 \wedge e^1 + w_2^2 \wedge e^2 + w_3^2 \wedge e^3 &= 0 \\
de^3 + w_0^3 \wedge e^0 + w_1^3 \wedge e^1 + w_2^3 \wedge e^2 + w_3^3 \wedge e^3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

a partir da equação (4.34) encontramos as seguintes relações,

$$\begin{aligned}
de^0 &= 0 \\
de^1 &= (1 - \alpha)\sin\phi d\rho \wedge d\phi \\
de^2 &= -(1 - \alpha)\cos\phi d\rho \wedge d\phi \\
de^3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.37}$$

aplicando esse conjunto de equações em (4.36) e resolvendo o sistema polinomial resultante em w_b^a encontramos que as únicas componente não nulas são,

$$w^a_b = w_\mu^a dx^\mu \implies w_\phi^1{}_2 = -w_\phi^2{}_1 = \alpha - 1 \tag{4.38}$$

A conexão spinorial está relacionada com a conexão 1-forma por,

$$\Gamma_\mu = -\frac{i}{4}w_{\mu ab}\Sigma^{ab} \rightarrow \Gamma_\mu = \frac{1}{8}w_{\mu ab}[\gamma^a, \gamma^b] \tag{4.39}$$

sob a equação (4.38) o resultado acima nos dá,

$$\Gamma_\phi = -i\frac{\alpha - 1}{2}\Sigma^3 \tag{4.40}$$

onde usamos o seguinte resultado parcial $[\gamma^1, \gamma^2] - [\gamma^2, \gamma^1] = -4i\Sigma^3$. Com isso o termo $\gamma^\mu\Gamma_\mu = \gamma^t\Gamma_t + \gamma^\rho\Gamma_\rho + \gamma^\phi\Gamma_\phi + \gamma^z\Gamma_z$ reduz-se a apenas ao penúltimo termo, isto é, $\gamma^\mu\Gamma_\mu = \gamma^\phi\Gamma_\phi$. A partir da tetrada inversa $e_a^\mu(x)$ podemos determinar a matriz de Dirac no espaço curvo γ^ϕ como $\gamma^\phi = (-\sin\phi\gamma^1 + \cos\phi\gamma^2)/\alpha\rho$. Como isso, a correção devido a curvatura é,

$$\gamma^\mu\Gamma_\mu = \frac{\alpha - 1}{2\alpha\rho}\gamma^{(\rho)} \tag{4.41}$$

para o qual usamos $\gamma^1\Sigma^3 = -i\gamma^2, \gamma^2\Sigma^3 = i\gamma^1$.

Como já sabemos como se transformam as matrizes de Dirac e a expressão exata do termo $\gamma^\mu\Gamma_\mu$, podemos escrever a equação de Dirac no espaço-tempo da corda quiral

(2.3) na forma,

$$\left[i\gamma^{(t)}\partial_t + i\gamma^{(\rho)}\left(\partial_\rho - \frac{1-\alpha}{2\alpha\rho}\right) + i\frac{\gamma^{(\phi)}}{\alpha\rho}(\partial_\phi - 4J^t\partial_t - 4J^z\partial_z) + i\gamma^{(3)}\partial_z - m \right] \psi_m(t, \rho, \phi, z) = 0 \quad (4.42)$$

Queremos resolver essa equação diferencial. Devido a independência temporal da métrica da corda quiral e independência sob translações ao longo do eixo z , supomos a seguinte solução,

$$\psi_m(t, \rho, \phi, z) = \exp(-iE_n t + ik_n z) \psi_m(\rho, \phi) \quad (4.43)$$

onde E_n são os autovalores e k_n representa o vetor de onda na direção z . A solução geral da equação resultante será construída usando o método chamado de *fator de fase de Dirac*. Ele consiste em construir a solução da equação geral (4.42) a partir da equação de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica a menos de um fator de fase. Esse fator de fase quando integrado adequadamente dá o resultado que buscamos. Dessa forma escrevemos,

$$\psi_m(\rho, \phi) = e^{-i \int_{\phi_0}^{\phi} \Lambda d\phi} \psi_0(\rho, \phi), \quad \Lambda = \frac{1-\alpha}{2} \Sigma^{(3)} + 4\mathbb{I}(E_n J^t - k_n J^z) \quad (4.44)$$

substituindo as equações (4.43) e (4.44) em (4.42) obtemos,

$$\left\{ i\gamma^{(t)}\partial_t + i\gamma^{(\rho)}\partial_\rho + i\frac{\gamma^{(\phi)}}{\alpha\rho}\partial_\phi + i\gamma^{(z)}\partial_z - m \right\} \psi_0(\rho, \phi) = 0 \quad (4.45)$$

dessa forma $\psi_0(\rho, \phi)$, solução da equação de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica padrão, pode ser usada para construir a solução correspondente para o espaço-tempo da corda com momento angular J^t e torção J^z , além da fonte de curvatura representada por α . Dessa maneira, construímos a solução de uma equação geral a partir de uma equação mais simples. Essa é a importância do método do fator de fase de Dirac. Com as informações contidas na equação (4.44) passamos para o cálculo da fase geométrica de Berry. Para o cálculo da fase de Berry algumas restrições sobre

a função de onda devem ser consideradas. Para evitar a degenerescência dos níveis de energia consideraremos a versão não-Abeliana da fase de Berry apresentada por Mostafazadeh [71]. Confinaremos nossa partícula dentro de uma caixa com paredes impenetráveis para garantir que o pacote de onda é não nulo somente dentro da caixa e seja dado pela superposição de diferentes autofunções.

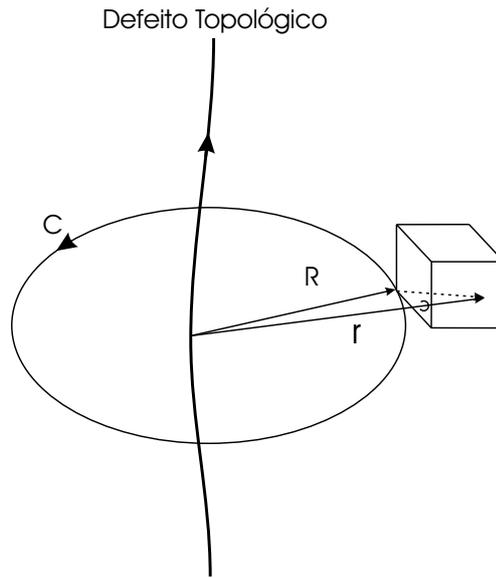


Figura 4.1: Spinor dentro de uma caixa perfeitamente refletora, paralelamente transportada em torno da corda quiral seguindo órbitas de Killing.

Como o cálculo da fase de Berry envolve uma integral circuital em torno da corda quiral, nossa caixa será localizada por um vetor \vec{R} , com origem no defeito e extremidade num ponto geométrico determinando o centro da caixa. Essa situação está representada na figura acima. O transporte da caixa em torno do defeito segue as órbitas de Killing, órbitas livres de curvas tipo-tempo fechadas satisfazendo $R_0 > 4J^t/\alpha$. Na ausência de defeitos, isto é, $J^t = J^z = 0$ e $\alpha = 1$, a função de onda dentro da caixa depende apenas da posição da partícula em relação ao centro da caixa e é dada por $\psi(\vec{r} - \vec{R})$. Para o caso que estamos propondo, a função de onda depende explicitamente dos parâmetros (J^t, J^z, α) e é dada pela equação (4.44).

A fase geométrica de Berry é calculada usando-se a versão não-Abeliana da fase de Berry, como apresentada em [74],

$$\gamma_{\psi_n} = i \oint_C \langle \psi_n(R) | \nabla_R | \psi_n(R) \rangle dR \quad (4.46)$$

onde R é um parâmetro adiabático expresso como $R = R_1 \cdots R_n \cdots R_m$. O integrando é calculado usando-se a conexão de Berry [71] na forma,

$$\mathcal{A}_n^{IJ} = \langle \psi_n^I(x_i - R_i) | \nabla_R | \psi_n^J(x_i - R_i) \rangle \quad (4.47)$$

onde I e J estão relacionados com as possíveis degenerescências da função de onda, x_i determina a posição da partícula em relação ao centro da caixa e R a posição da caixa em relação ao defeito. Portanto, $x_i - R$, define a posição da partícula em relação ao defeito. Usando a função de onda (4.44) na conexão de Berry (4.47) obtemos,

$$\begin{aligned} & \langle \psi_n^I(x_i - R_i) | \nabla_R | \psi_n^J(x_i - R_i) \rangle = \\ = & -i \oint_{\Sigma} \psi_n^{*I}(x_i - R_i) \left\{ \left[4\mathbb{I}(E_n J^t - k_n J^z) + \Sigma^{(3)} \frac{1 - \alpha}{2} \right] \psi_n^J(x_i - R_i) + \nabla_R \psi_n^J(x_i - R_i) \right\} dR \\ & = -i \left\{ 4\mathbb{I}(E_n J^t - k_n J^z) + \Sigma^{(3)} \frac{1 - \alpha}{2} \right\} \delta_{IJ} \end{aligned} \quad (4.48)$$

com ψ_n normalizados. O último termo no integrando acima pode ser transformado numa integral de superfície e dessa forma se torna nulo, restando apenas a última equação acima. Dessa forma, (4.46) transforma-se em,

$$\gamma_{\psi_n}(C) = 8\pi\mathbb{I}(E_n J^t - k_n J^z) + \Sigma^{(3)}\pi(1 - \alpha) \quad (4.49)$$

onde I, J e δ^{IJ} foram omitidos por conveniência e C é uma curva fechada que envolve o defeito. Observamos que esse resultado depende dos parâmetros globais da corda (J^t, J^z, α) como aqueles em [70, 71, 72]. Como discutido por Mostafazadeh [71] para o caso da partícula escalar, este efeito pode ser interpretado como uma interferência entre as funções de onda associadas com a partícula dentro da caixa e aquelas seguindo órbitas de Killing tipo-tempo. O primeiro termo em (4.49) é

a contribuição gravitacional conhecida como análogo gravitacional do efeito eletromagnético Aharonov-Bohm [28]. O segundo tem origem no momento angular e torção do defeito, e pode ser escrito como,

$$\phi_p = \frac{1}{4} \oint R_{\mu\nu\delta\lambda} J^{\delta\lambda} d\tau^{\mu\nu} \quad (4.50)$$

onde $J^{\delta\lambda} = L^{\delta\lambda} + \Sigma^{\delta\lambda}$ sendo o momento angular total da partícula. Como a geometria da corda cósmica é caracterizada por uma singularidade cônica no tensor de curvatura que é dado por, $R_{\rho,\phi}^{\rho,\phi} = [(1-\alpha)/4\alpha]\delta_2(\vec{r})$ a expressão acima pode ser escrita na seguinte forma,

$$\phi_p = \oint \frac{1-\alpha}{2} \Sigma^3 d\phi \quad (4.51)$$

que é exatamente a fase geométrica relativística de Berry proposta por Cai e Papine em [68, 69] para uma partícula de spin 1/2 num espaço-tempo curvo usando a aproximação de campo fraco. No presente caso, não usamos a aproximação de campo fraco e esta contribuição é devido a presença da singularidade cônica associada com a corda quiral. Portanto as contribuições para a fase de Berry (4.49) são de origem gravitacional.

4.5 Spinor no Espaço-tempo da Corda Quiral Magnética

Nessa seção, consideraremos nossa partícula spinorial no espaço-tempo da corda quiral com um campo magnético aplicado ao longo do eixo z , o eixo de simetria do sistema e cujo potencial vetor é dado por,

$$\vec{A}_\phi = \frac{\Phi_B}{2\pi\alpha\rho} \hat{e}_\phi \quad (4.52)$$

onde Φ_B é o fluxo magnético ao longo do eixo de simetria do defeito, associado ao campo magnético interno $B_z = \Phi_B \delta(\rho)$. Sob a condição de acoplamento mínimo a

equação de Dirac assume a seguinte forma,

$$\{i\gamma^\mu(x) [\partial_\mu + \Gamma_\mu(x) + ieA_\mu(x)] - m\} \psi(t, x) = 0 \quad (4.53)$$

Queremos determinar a influência desse campo magnético à fase de Berry para o spinor transportado paralelamente em torno do cone quiral magneticamente carregado. Escrita no espaço-tempo descrito pela equação (2.3) e com a ajuda das relações (4.33) obtemos,

$$\left\{ i\gamma^{(t)}\partial_t + i\gamma^{(\rho)} \left[\partial_\rho - \frac{1}{2\rho} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \right] + \frac{i}{\alpha\rho} \gamma^{(\phi)} \left(\partial_\phi - 4J^t\partial_t - 4J^z\partial_z + i\frac{e\Phi_B}{2\pi} \right) + i\gamma^{(z)}\partial_z - m \right\} \psi(t, \rho, \phi, z) = 0. \quad (4.54)$$

Como o espaço-tempo descrito pela equação (2.3) é estacionário no tempo e simétrico com translações ao longo do eixo z, usamos a clássica solução dada em (4.43). Como é nosso interesse o cálculo da fase de Berry, consideraremos o método do fator de fase de Dirac para determinarmos a solução da equação geral acima a partir daquela associada com o spinor no espaço-tempo da corda cósmica padrão. Considerando essas observações, a solução procurada para (4.54) é escrita na seguinte forma,

$$\psi_m(\rho, \phi) = e^{-i\int_{\phi_0}^{\phi} \Lambda d\phi} \psi_0(\rho, \phi), \quad \Lambda = \frac{1-\alpha}{2} \Sigma^{(3)} + 4\mathbb{I}(E_n J^t - k_n J^z) + \mathbb{I} \frac{e\Phi_B}{2\pi} \quad (4.55)$$

observe que substituindo essa expressão em (4.54), a equação resultante é exatamente aquela encontrada na seção anterior (4.45) e novamente $\psi_0(\rho, \phi)$ pode ser usada para construir a solução geral de (4.54). Sabendo-se como o spinor se transforma ao ser transportado em torno do cone quiral magnético, calcularemos a fase de Berry. Calculando a conexão de Berry (4.47) com a ajuda da equação acima encontramos,

$$\langle \psi_n^I | \nabla_R | \psi_n^J \rangle = -i \left\{ 4\mathbb{I}(E_n J^t - k_n J^z) + \frac{e\Phi_B}{2\pi} + \Sigma^{(3)} \frac{1-\alpha}{2} \right\} \delta_{IJ} \quad (4.56)$$

com isso calculamos a fase de Berry. O resultado é o seguinte,

$$\gamma_{\psi_n}(C) = 8\pi\mathbb{I}(E_n J^t - k_n J^z) + \Sigma^{(3)}\pi(1-\alpha) + e\Phi_B\mathbb{I} \quad (4.57)$$

novamente I, J e δ^{IJ} foram omitidos, C é a curva sobre a qual a caixa é transportada. Este resultado é muito similar ao anterior, exceto pelo último termo que está relacionado ao fluxo magnético através da corda. Como nosso espaço-tempo é localmente plano e o campo magnético está restrito ao eixo de simetria do cone quiral, portanto, inacessível à nossa partícula, a dependência da fase de Berry sobre os parâmetros topológicos do espaço-tempo, representa análogos gravitacionais do efeito eletromagnético Aharonov-Bohm relativístico [28].

4.6 Fase de Berry no Espaço-tempo de Múltiplas Cordas Magnéticas

Nessa seção, generalizaremos os resultados obtidos nas seções anteriores e investigaremos a fase quântica de Berry para uma partícula de spin $1/2$ no espaço-tempo de N cordas quirais magnéticas paralelas entre si. O correspondente espaço-tempo está representado na equação (2.6). Os cálculos apresentados para o transporte paralelo de spinores em torno de uma única corda quiral magnética serão agora generalizados para o caso geral de múltiplas cordas.

Em vez de escrever a equação de Dirac no espaço-tempo descrito por (2.6) e determinar a forma da função de onda usando o método do fator de fase de Dirac por consequência a fase adquirida pelo spinor, usaremos o fato de que a holonomia associada com o transporte paralelo de spinores no espaço-tempo das múltiplas cordas é dada por um fator de fase que só é afetada pelo cone quiral em torno do qual o spinor é transportado paralelamente. Isso significa que o spinor transportado ao longo da curva C_1 envolvendo o cone quiral localizado no ponto ρ_1 não é afetado pelos demais cones quirais e somente determinado pelo cone interior à curva. Nesse caso, a forma

da função de onda nesse primeiro transporte é dada por,

$$\psi_1(\rho, \phi) = e^{-i \int_{\phi_0}^{\phi} \Lambda_1 d\phi} \psi_0(\rho, \phi), \quad \Lambda_1 = \frac{1 - \alpha_1}{2} \Sigma^{(3)} + 4\mathbb{I}(E_n J_1^t - k_n J_1^z) + \mathbb{I} \frac{e\Phi_1}{2\pi} \quad (4.58)$$

transportando esse spinor em torno do defeito localizado em ρ_2 e ao longo da curva C_2 ele adquire uma nova fase Λ_2 escrita como a seguir,

$$\psi_2(\rho, \phi) = e^{-i \int_{\phi_0}^{\phi} \Lambda_2 d\phi} \psi_1(\rho, \phi), \quad \Lambda_2 = \frac{1 - \alpha_2}{2} \Sigma^{(3)} + 4\mathbb{I}(E_n J_2^t - k_n J_2^z) + \mathbb{I} \frac{e\Phi_2}{2\pi} \quad (4.59)$$

substituindo (4.58) na equação (4.59) obtemos a forma final do spinor ψ_2 como abaixo

$$\psi_2(\rho, \phi) = e^{-i \int_{\phi_0}^{\phi} (\Lambda_1 + \Lambda_2) d\phi} \psi_0(\rho, \phi) \quad (4.60)$$

com o termo, $\Lambda_1 + \Lambda_2$ sendo a fase parcial adquirida pelo spinor dada por

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \frac{2 - \alpha_1 - \alpha_2}{2} \Sigma^{(3)} + 4\mathbb{I} [E_n (J_1^t + J_2^t) - k_n (J_1^z + J_2^z)] + \mathbb{I} \frac{e(\Phi_1 + \Phi_2)}{2\pi}$$

Podemos seguir transportando ψ_2 em torno do cone quiral localizado em ρ_3 , ao longo da curva C_3 e determinar a correspondente forma assumida pelo o spinor ψ_3 . Ao final, o spinor transportado em torno do N -ésimo cone quiral localizado em ρ_N e ao longo da N -ésima curva C_N é dado por,

$$\psi_{1, \dots, N}(\rho, \phi) = \prod_{j=1}^N e^{-i \int_{\phi_0}^{\phi} \Lambda_j d\phi} \psi_0(\rho) \quad \Lambda_j = \frac{N - \alpha_j}{2} \Sigma^{(3)} + 4\mathbb{I} [E_n J_j^t - k_n J_j^z] + \mathbb{I} \frac{e\Phi_j}{2\pi} \quad (4.61)$$

Uma vez que sabemos como os spinores se transformam ao ser transportados paralelamente em torno dos N cones chirais magnéticos, podemos calcular a fase de Berry seguindo os mesmos passos usados para o cálculo dessa fase em torno de um único cone quiral magnético. Dessa forma a conexão de Berry usando (4.47) pode ser calculada usando o spinor (4.61). O resultado é,

$$\mathcal{A}_n^{IJ} = -i \sum_{j=1}^N \left\{ \left[4\mathbb{I} (E_n J_j^t - k_n J_j^z) + \Sigma^{(3)} \frac{N - \alpha_j}{2} + \mathbb{I} \frac{e\Phi_j}{2\pi} \right] \delta_{IJ} \right\}. \quad (4.62)$$

com esse resultado em (4.46) obtemos,

$$\gamma_{\psi_m}(C) = \sum_{j=1}^m [8\pi\mathbb{I}(E_n J_j^t - k_n J_j^z) + \Sigma^{(3)}\pi(N - \alpha_j) + \mathbb{I}e\Phi_j]. \quad (4.63)$$

que é a fase quântica de Berry adquirida pelo spinor de Dirac quando transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada C envolvendo os cones quirais magnéticos. Nossos resultados anteriores podem ser obtidos a partir da equação (4.63) fazendo $m = 1$. Importante notar que esse resultado combina a contribuição gravitacional devido ao momento angular, torção e curvatura de um conjunto de defeitos e a contribuição eletromagnética devido ao fluxo magnético aplicado ao longo do eixo de simetria dos cones chirais.

4.7 Conclusão

Nesse capítulo calculamos a fase quântica de Berry adquirida por uma partícula de spin $1/2$ ao ser transportada em torno do espaço-tempo de uma e múltiplas cordas cósmicas quirais usando o método do fator de fase de Dirac. Para o caso de uma corda cósmica a fase gravitacional de Berry é a soma de três contribuições devido ao momento angular, à torção e curvatura do defeito. No caso da corda quiral magnética obtemos que a fase de Berry é adicionada pela contribuição Aharonov-Bohm devida ao fluxo magnético restrito ao eixo de simetria da corda quiral. Finalmente, analisamos a fase quântica de Berry para o spinor no espaço-tempo de múltiplas cordas cósmicas quirais magnéticas. Isso foi feito usando o fato que as propriedades globais da holonomia quântica nesse espaço-tempo não são afetadas pelos defeitos fora da curva envolvendo a singularidade cônica, em torno da qual o spinor é paralelamente transportado.

O estudo desenvolvido nesse capítulo está publicado em *European Physical Journal C*, DOI [10.1140/epjc/s10052-008-0696-1](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-008-0696-1).

Capítulo 5

Oscilador de Dirac na Presença de Defeitos Topológicos

5.1 Introdução

Desde muito cedo na física aprendemos que interações harmônicas aparecem em muitas áreas. Com o advento da Relatividade muito se tem feito acerca de correções introduzidas por esse peculiar movimento dos sistemas físicos. Mais recentemente, Moshinsky and Szczepaniak [76] propuseram o oscilador de Dirac, uma versão relativística do oscilador harmônico não-relativístico da mecânica quântica padrão $\frac{1}{2}mv^2r^2$. Esse tipo de interação tornou muitos dos problemas sobre confinamento de elétrons em sistemas de baixa dimensão exatamente solúveis [77, 78]. Muitas outras configurações de sistemas quânticos interagindo com o oscilador de Dirac tem aparecido na literatura na presença de campos magnéticos e também na presença do efeito Aharonov-Bohm [79, 80, 81]. Além da simplificação introduzida nos sistemas de baixa dimensão também destaca-se um amplo entendimento das propriedades de materiais supercondutores e sobre o efeito Hall quântico [82]. É importante destacar que esses estudos foram feitos na ausência completa de fontes de curvatura e/ou torção

que inevitavelmente estão presentes nesses sistemas físicos.

Não é de nosso conhecimento qualquer estudo realizado com o oscilador de Dirac em espaços-tempos produzidos por defeitos topológicos, tais como a corda cósmica. Nesse sentido, nossa contribuição amplia as fontes de informações sobre as propriedades físicas de sistemas quânticos na presença de defeitos topológicos. É importante chamar a atenção para o fato de que sistemas de Matéria Condensada, como os estudos com o cristal líquido [83, 84, 85, 86] envolvendo diferentes transições de fase, colocam os defeitos de Cosmologia e Gravitação como a corda cósmica, a parede de domínio e o monopólo global, dentre outros, sobre uma base física passível de realização experimental e simulação teórica [87].

Nossa intensão nesse capítulo é a de estudar o oscilador de Dirac na presença da geometria produzida pela corda cósmica, com possíveis fontes de momento angular e torção presentes. Dada a importância da dinâmica ocorrendo na presença de campos magnéticos no nível quântico padrão, estendemos os estudos anteriores considerando uma linha de campo magnético ao longo do eixo de simetria da corda introduzido geometricamente. Como veremos nas discussões de nossos resultados, essa introdução permitirá compensar a contribuição elástica introduzida pelo defeito por um ajuste da intensidade do campo, cuja implicação será a de tornar nosso espaço-tempo, antes inevitavelmente Riemanniano, num espaço-tempo com características Euclidianas. Além disso, toda a informação obtida com o espaço-tempo de Minkowski deve ser obtida tomando-se os limites adequados sobre os parâmetros que caracterizam a geometria dos defeitos topológicos.

5.2 Oscilador de Dirac no Espaço-tempo da Corda C3smica

O oscilador de Dirac 3e introduzido na equa3o de Dirac, usando a sugest3o de Ito [88] e mais recentemente a prescri3o de Moshinsky, que segundo a qual devemos impor a seguinte mudan3a no operador momento,

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - imw\hat{\beta}\vec{p} \quad (5.1)$$

Dessa forma a equa3o de Dirac no espa3o-tempo da corda c3smica (2.1) 3 dada por,

$$\left\{ i\gamma^t \partial_t + i\gamma^\rho \left(\partial_\rho - \frac{1-\alpha}{2\alpha\rho} + mw\beta\rho \right) + i\frac{\gamma^\phi \partial_\phi}{\alpha\rho} + i\gamma^z \partial_z - m \right\} \Psi = 0 \quad (5.2)$$

essa equa3o descreve a din3mica para o oscilador de massa m e frequ3ncia angular w no espa3o-tempo descrito por (2.1). Uma solu3o pode ser constru3da assumindo a independ3ncia temporal e simetria rotacional do espa3o-tempo em considera3o. Para solu3o3es de energia positiva [89, 90] escolhemos o ansatz

$$\Psi = e^{-iEt+i(l+1/2-\Sigma^3/2)\phi+ikz}\psi_j, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (5.3)$$

dessa forma a equa3o (5.2) transforma-se em

$$\left\{ \beta^2 E + i\beta\gamma^\rho \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} + mw\beta\rho \right) - \beta\gamma^\phi \frac{l+1/2}{\alpha\rho} - \beta\gamma^z k - \beta m \right\} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

onde usamos a propriedade $\gamma^\phi \Sigma^3 = i\gamma^\rho$ imposta pela rela3o em (4.33), al3m da representa3o bispinorial de duas componentes dadas abaixo,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}; \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Com a ajuda das rela3o3es (4.33) e considerando as propriedades com as matrizes de Pauli $(\sigma^i)^2 = 1$, $\sigma^i \sigma^j = i\sigma^k$ e $\sigma^i \sigma^j = -\sigma^j \sigma^i$, adicionadas de algumas rela3o3es

trigonom3tricas, obtemos o seguinte conjunto de equa33es diferenciais ordin3rias para as componentes bispinoriais

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{l+1/2}{\alpha} \mp \frac{1}{2} \right)^2 + m^2 w^2 \rho^2 - \gamma_{\pm} \right] \right\} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (5.6)$$

com

$$\gamma_{\pm} = E^2 - m^2 + 2mw \left(\frac{l+1/2}{\alpha} \pm \frac{1}{2} \right) - k^2 \quad (5.7)$$

A equa33o (5.6) pode ser transformada em outra, impondo a mudan3a de vari3veis $\xi = mw\rho^2$. Para tanto, devemos explicitar as derivadas em termos de ξ como abaixo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= 2\sqrt{mw} \sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} &= 4mw\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + 2mw \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (5.8)$$

com essas mudan3as a express3o acima transforma-se em,

$$\chi''(\xi) + \frac{1}{\xi} \chi'(\xi) - \left(\frac{\lambda^2}{4\xi^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4mw\xi} \right) \chi(\xi) = 0, \quad (5.9)$$

onde usamos $\lambda = (l+1/2)/\alpha + 1/2$ e $\gamma = E^2 - m^2 + 2mw \left(\frac{l+1/2}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) - k^2$. A seguir estudamos os limites assint3ticos na origem e no infinito, pontos cr3ticos da equa33o acima. Para a origem $\xi \rightarrow 0$ ficamos,

$$\chi''(\xi) + \frac{1}{\xi} \chi'(\xi) - \frac{\lambda^2}{4\xi^2} \chi(\xi) = 0, \quad (5.10)$$

cuja solu33o 3 $\chi \approx \xi^{\frac{|\lambda|}{2}}$. O m3dulo 3 fundamental, porque para valores negativos de λ essa solu33o diverge no presente limite tornando nosso problema sem significado f3sico. No outro ponto cr3tico $\xi \rightarrow \infty$ temos,

$$\chi''(\xi) - \frac{1}{4} \chi(\xi) = 0, \quad (5.11)$$

com solução $\chi \approx A e^{\xi/2} + B e^{-\xi/2}$. Novamente quando $\xi \rightarrow \infty$ normalidade das soluções são satisfeitas impondo-se $A = 0$. Os requerimentos de normalidade na origem e no infinito permitem-nos escrever o seguinte ansatz,

$$\chi = \xi^{\frac{|\lambda|}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(\xi), \quad (5.12)$$

As derivadas aparecendo em (5.9) são calculadas e dadas abaixo,

$$\begin{aligned} \chi'(\xi) &= \left(\frac{|\lambda|}{2\xi} - \frac{1}{2} \right) F(\xi) + F'(\xi) \\ \chi''(\xi) &= \left(\frac{|\lambda|^2}{4\xi^2} - \frac{|\lambda|}{2\xi^2} - \frac{|\lambda|}{2\xi} + \frac{1}{4} \right) F(\xi) + \left(\frac{|\lambda|}{\xi} - 1 \right) F'(\xi) + F''(\xi) \end{aligned} \quad (5.13)$$

substituindo esse resultado em (5.9) obtemos, depois de alguma álgebra, a seguinte função especial da física,

$$\xi F''(\xi) + (|\lambda| + 1 - \xi) F'(\xi) - \left(\frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4mw} \right) F(\xi) = 0. \quad (5.14)$$

que é escrita na forma geral, $\xi F''(\xi) + (c+1-\xi) F'(\xi) - aF(\xi) = 0$, conhecida como uma função hipergeométrica confluyente muito comum na física. Como sabemos, a solução dessa equação são polinômios de grau n em ξ , cuja convergência é garantida igualando-se o termo precedente a $F(\xi)$ a um inteiro negativo ou zero. Matematicamente temos,

$$\left(\frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4mw} \right) = -n, \quad (5.15)$$

usando-se as expressões para λ e γ_{\pm} acima, obtemos depois de pouca álgebra, o seguinte espectro de autovalores para E^2 ,

$$E^2 = m^2 + 4mw \left(n + \frac{|l+1/2|}{2\alpha} - \frac{l+1/2}{2\alpha} + 1 \right) + k^2. \quad (5.16)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. O conjunto de autofunções obedecem,

$$\psi(t, \vec{r}) = C e^{-iEt+i\left(l+\frac{1}{2}-\frac{\Sigma^3}{2}\right)\phi} \rho^{\left|\frac{l+1/2}{\alpha}+\frac{1}{2}\right|} e^{-\frac{mw\rho^2}{2}} F\left(-n, \left|\frac{l+1/2}{\alpha}+\frac{1}{2}\right|+1, mw\rho^2\right). \quad (5.17)$$

Note que para $\alpha \rightarrow 1$ o resultado (5.16) dá os níveis de energia da partícula no espaço plano adicionado da energia de repouso. Para valores inteiros do parâmetro α os níveis de energia são infinitamente degenerados. No caso oposto, a degenerescência é quebrada.

5.3 Oscilador de Dirac no Espaço-tempo da Corda Magnética

Nessa seção, analisaremos a influência de um campo magnético à dinâmica de nossa partícula spinorial. Escolhemos o campo magnético aplicado ao longo do eixo de simetria da corda assumido para ser o eixo z , com o potencial vetor dado por $\vec{A}_\mu = \frac{\Phi_B}{2\pi\alpha\rho}\hat{e}_\phi$ e minimamente acoplado à equação de Dirac. Esta escolha assegura o estudo de estados ligados do hamiltoniano minimamente acoplado a esse campo. Nessa configuração a equação de Dirac no espaço-tempo descrito por (2.1) obedece

$$\left\{ i\gamma^t\partial_t + i\gamma^\rho \left(\partial_\rho - \frac{1-\alpha}{2\alpha\rho} + mw\beta\rho \right) + i\frac{\gamma^\phi}{\alpha\rho} \left(\partial_\phi + i\frac{e\Phi_B}{2\pi} \right) + i\beta\gamma^z\partial_z - m \right\} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (5.18)$$

sobre o ansatz (5.3) a equação acima transforma-se em

$$\left\{ \beta^2 E + i\beta\gamma^\rho \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} + mw\beta\rho \right) - \beta\gamma^\phi \frac{l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi}{\alpha\rho} - \beta\gamma^z k - \beta m \right\} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (5.19)$$

aplicando as equações (4.33) obtemos

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left[\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi}{\alpha} \mp \frac{1}{2} \right)^2 + \Omega^2 \rho^2 - \gamma_\pm \right] \right\} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (5.20)$$

com γ_\pm dado pela expressão,

$$\gamma_\pm = E^2 - m^2 + 2mw \left(\frac{l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi}{\alpha} \pm \frac{1}{2} \right) - k^2, \quad (5.21)$$

Dessa maneira o termo angular é adicionado pela contribuição Aharonov-Bohm $e\Phi_B/2\pi$. Essa equação radial pode ser transformada em outra fazendo $\xi = \Omega\rho^2$ e a equação resultante analisada assintoticamente. Na origem e no infinito, soluções normalizadas

satisfazem

$$\chi(\xi) = \xi^{\frac{|a|}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(\xi), \quad \text{com } a = \frac{1}{\alpha} \left(l + \frac{1}{2} + \frac{e\Phi_B}{2\pi} \right) + \frac{1}{2}, \quad (5.22)$$

por direta substituição em (5.20) encontramos a função especial

$$\xi F''(\xi) + (|a| + 1 - \xi) F'(\xi) - \left(\frac{|a|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4mw} \right) F(\xi) = 0. \quad (5.23)$$

com γ assumindo o valor $\gamma = E^2 - m^2 + 2mw \left(\frac{l+1/2+e\Phi_B/2\pi}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) - k^2$. Observe que essa equação é do tipo hipergeométrica confluyente. Comparada a equação da seção anterior, vemos que a parte angular é adicionada do fluxo magnético associado ao campo magnético \vec{B} . Soluções normalizadas são garantidas impondo-se ao último termo valores inteiros negativos ou nulos. Matematicamente temos,

$$\frac{|a|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4mw} = -n, \quad (5.24)$$

esse procedimento permite determinar os autovalores da energia associado com o oscilador de Dirac no espaço-tempo da corda magnética na forma,

$$E^2 = m^2 + 4mw \left(n + \frac{|l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi|}{2\alpha} - \frac{l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi}{2\alpha} + 1 \right) + k^2. \quad (5.25)$$

Observe a dependência dos níveis de energia sobre os aspectos não-locais/topológicos do espaço-tempo e sobre o campo magnético ao longo do eixo z da corda, embora esse espaço-tempo seja localmente plano. Essa dependência topológica sobre α é a evidência de que a topologia do espaço-tempo influencia a dinâmica local de nossa partícula. A dependência sobre o campo magnético restrito ao eixo de simetria da corda e, portanto, inacessível à nossa partícula, representa o análogo gravitacional do efeito eletromagnético Aharonov-Bohm. O limite do caso plano é obtido aplicando $\alpha = 1$. A presença desse fator topológico nesse resultado, quebra a degenerescência de alguns níveis de energia. Finalmente observamos que para campos fracos $\Phi_B \rightarrow 0$ os resultados anteriores são obtidos.

5.4 Níveis de Energia no Espaço-tempo da Deslocação Cós mica com Campo

Vamos agora analisar os efeitos de curvatura e campos eletromagnéticos sobre os níveis de energia, quando o espaço-tempo tem uma fonte de torção representada por J . Esse espaço-tempo foi obtido por Galt'sov e Letelier [29] e está representado na tabela (2.1)–*c*. A equação quântica para o oscilador de Dirac no espaço-tempo da deslocação cós mica, com um campo magnético $\vec{A} = \frac{\Phi_B}{2\pi\alpha\rho}\hat{e}_\phi$ ao longo do eixo de simetria da corda é dada por

$$\left\{ i\gamma^t\partial_t + i\gamma^\rho\left(\partial_\rho + mw\rho + \frac{\alpha-1}{2\alpha\rho}\right) + i\frac{\gamma^\phi}{\alpha\rho}\left(\partial_\phi - J\partial_z + i\frac{e\Phi_B}{2\pi}\right) + i\gamma^z\partial_z - m \right\} \Psi = 0 \quad (5.26)$$

Sob o ansatz (5.3) e as relações (4.33) adicionadas com as propriedades das matrizes de Pauli (5.26) dá

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \left[\frac{\Lambda^2}{\rho^2} + m^2w^2\rho^2 - \gamma_\pm \right] \right\} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad (5.27)$$

onde usamos as abreviações

$$\Lambda = \frac{1}{\alpha} \left(l + \frac{1}{2} + \frac{e\Phi_B}{2\pi} - kJ \right) \mp \frac{1}{2} \\ \gamma_\pm = E^2 - m^2 + 2mw[(l + 1/2 + e\Phi/2\pi - kJ)/\alpha \pm 1/2] - k^2, \quad (5.28)$$

Fazendo a mudança de variáveis $\xi = mw\rho^2$, a equação acima transforma-se em,

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\chi}{d\xi} - \left(\frac{\Lambda^2}{4\xi^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4mw\xi} \right) \chi = 0 \quad (5.29)$$

Estudando os limites assintóticos para (5.29), supomos a seguinte solução finita na origem e no infinito,

$$\chi = \xi^{\frac{|\Lambda|}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} R(\xi) \quad (5.30)$$

a seguir, substituímos o ansatz acima em (5.29) e obtemos depois de alguns passos a equação hipergeométrica confluyente $R(-n, |\Lambda| + 1, mw\rho^2)$ com os seguintes autovalores,

$$E^2 = m^2 + 4mw \left(n + \frac{|l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi - kJ|}{2\alpha} - \frac{l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi - kJ}{2\alpha} + 1 \right) + k^2 \quad (5.31)$$

e autofunções

$$\Phi = A e^{-iEt + i\left(l + \frac{1}{2} - \frac{\Sigma^3}{2}\right)\phi + ikz} \rho^{|\Lambda|} e^{-\frac{mw\rho^2}{2}} R(-n, |\Lambda| + 1, mw\rho^2) \quad (5.32)$$

podemos observar uma estrutura de Landau nesse resultado pela presença do termo associado ao fluxo magnético Φ_B . Observe também que a fonte de torção é adicionada à fonte de curvatura em relação ao caso anterior e que na ausência de torção os resultados anteriores são encontrados. Nesse caso, a degenerescência dos níveis de energia é mais fortemente quebrada, pela presença de J além das fontes de curvatura e de campos. Observe que para $\alpha = 1$ os níveis de energia acima tornam-se aqueles do caso plano.

5.5 Limite Não-Relativístico

Para analisar o limite não-relativístico assumimos $E = m + \epsilon$ tal que $\epsilon \ll M$ e a equação (5.27) assume a forma,

$$\epsilon\Psi = \left\{ -\frac{1}{2m} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\Lambda^2}{\rho^2} - k^2 \right) + \frac{1}{2}mw^2\rho^2 \mp \frac{w}{2} \mp 2w\vec{S} \cdot \vec{L} \right\} \Psi \quad (5.33)$$

notemos que essa é a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico $mw\rho^2/2$ no espaço-tempo da deslocação cósmica adicionada de um termo de interação spin-órbita, o último termo acima. Os níveis de energia não-relativístico são encontrados

reescrevendo a equação (5.31) na forma apropriada,

$$E = m\sqrt{1 + \frac{4w}{m}(n + \delta + 1) + \frac{k^2}{m^2}}$$

$$\delta = \frac{|l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi - kJ^z|}{2\alpha} - \frac{l + 1/2 + e\Phi_B/2\pi - kJ^z}{2\alpha} \quad (5.34)$$

Podemos usar a expansão de Taylor até segunda ordem na energia para calcular esse limite. O resultado é,

$$\epsilon \approx m + \frac{k^2}{2m} + 2w(n + \delta + 1) - \frac{2w^2(n + \delta + 1)^2}{m} \quad (5.35)$$

Podemos ver que essa energia é a soma de quatro partes: a primeira é a energia de repouso da partícula adicionada da energia cinética, o penúltimo termo é a energia do oscilador não-relativístico e o último termo é a correção relativística ao problema.

5.6 Conclusão

Nesse capítulo estudamos a influência da geometria global da corda cósmica sobre os níveis de energia e autofunções do oscilador de Dirac. Obtemos que o espectro de auto-valores e auto-funções são dependentes do parâmetro global α , associado com a curvatura do espaço-tempo. Quando essa dinâmica ocorre na presença de torção e campos magnéticos, além da fonte de curvatura, os níveis de energia são adicionados das quantidades J e Φ_B . A dependência com o fluxo ao longo da corda, representa o análogo do efeito eletromagnético Aharonov-Bohm. O limite não-relativístico estudado, finaliza esse capítulo.

Capítulo 6

Oscilador de Klein-Gordon na Teoria de Kaluza-Klein

6.1 Introdução

Interações harmônicas desempenham um importante papel na física, principalmente quando consideramos o movimento de partículas na presença de potenciais moleculares e eletromagnéticos. Particularmente, o oscilador harmônico aparece como um protótipo em muitas áreas da física tais como física do estado sólido, mecânica estatística quântica e teoria quântica de campos além de servir como um importante sistema físico para estudar conceitos e ferramentas matemáticas na teoria quântica padrão. Em outra direção temos a mecânica quântica relativística, uma teoria na qual efeitos introduzidos pelo movimento peculiar das partículas sobre o sistema físico deve ser considerado. Juntos, efeitos quânticos e relativísticos têm recebido muita atenção na dinâmica quântica de partículas ocorrendo em espaços-tempos produzidos por defeitos topológicos [91, 92, 93, 94]. Mais recentemente, a versão relativística para o oscilador harmônico apareceu na literatura em espaços comutativos e não-comutativos da teoria quântica de campos [76, 95] dentre outras configurações incluindo campos

magnéticos [77, 78, 79, 82]. Entretanto essa intensa pesquisa foi feita para a dinâmica quântica de partículas de spin-1/2, deixando espaço para o tratamento desses efeitos para partículas de spin zero. É essa a nossa intenção nesse capítulo.

O oscilador de Klein-Gordon surgiu como uma inspiração dos trabalhos anteriores sobre o oscilador de Dirac aplicado a partículas de spin-1/2. Recentemente, Rao e outros [96] estudaram a distribuição espectral dos níveis de energia e conjunto de autofunções assumida por uma partícula movendo-se na presença do oscilador de Klein-Gordon numa versão unidimensional do espaço-tempo de Minkowski. É nossa intenção aqui estender esses estudos não apenas para outras dimensões mas principalmente considerar essa dinâmica em espaços-tempos produzidos por defeitos topológicos usando a teoria de Kaluza-Klein [97, 98, 99]. Essas fontes de campos gravitacionais desempenham um importante papel em sistemas de física da Matéria Condensada [83, 84, 85, 86], principalmente devido a possibilidade de compensar a contribuição elástica introduzida pelo defeito por um ajuste da intensidade do campo magnético externo aplicado.

Nas seções seguintes, estudaremos soluções da equação de Klein-Gordon em diferentes configurações do espaço-tempo da corda cósmica. Utilizando a teoria de Kaluza-Klein na presença do oscilador de Klein-Gordon, o conjunto de autovalores e autofunções é construído e mostra dependência com os parâmetros caracterizando o espaço-tempo em consideração. Destaca-se, nesses casos, que todas as soluções encontradas são exatas e que têm importantes implicações para o estudo da dinâmica de partículas na presença de defeitos em sólidos elásticos.

6.2 Oscilador de Klein-Gordon no Espaço-tempo da Corda C3smica

Nessa se7ao, analisaremos o oscilador de Klein-Gordon no espa7o-tempo da corda c3smica (2.1). Para acoplar o oscilador de Klein-Gordon nesse espa7o-tempo, usamos a prescri7ao de Mirza e Mohadesi [95], que segunda a qual, aplicamos a seguinte mudan7a no operador de momento $p_\mu^2 \rightarrow (\vec{p}_\mu + iMw\vec{r}) \cdot (\vec{p}_\mu - iMw\vec{r})$. Dessa maneira, a equa7ao de Klein-Gordon obedece,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + Mw\rho) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\nu - Mw\rho) - M^2 \right\} \Psi(t, \vec{r}) = 0 \quad (6.1)$$

com $\sqrt{-g}$ sendo o determinante do tensor m3trico e $g^{\mu\nu}$ 3 a correspondente matriz inversa desse tensor, ∂_μ sao derivadas parciais com rela7ao as variaveis aparecendo na m3trica. Para o presente caso (2.1), a matriz $g^{\mu\nu}$ 3 da forma,

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1/\alpha^2\rho^2, 1), \quad (6.2)$$

dessa maneira a equa7ao (6.1) torna-se,

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \frac{\partial_\phi^2}{\alpha^2 \rho^2} - M^2 w^2 \rho^2 + \gamma \right\} \Psi(t, \rho, \phi, z) = 0, \quad (6.3)$$

com $\gamma = -\partial_t^2 + \partial_z^2 - 2Mw - M^2$. Supondo independ3ncia temporal expl3cita de nosso espa7o-tempo, escolhemos o seguinte ansatz,

$$\Psi(t, \rho, \phi, z) = e^{-iEt + ikz + il\phi} R(\rho), \quad (6.4)$$

com isso (6.3) transforma-se em

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) - \left[\frac{l^2}{\alpha^2 \rho^2} + M^2 w^2 \rho^2 - \gamma \right] \right\} R(\rho) = 0, \quad (6.5)$$

com a ajuda da equa7ao (6.4) o 3ltimo termo na equa7ao acima 3 dado por $\gamma = E^2 - M^2 - 2Mw - k^2$. Essa equa7ao pode ser transformada em outra usando a

seguinte mudan7a de vari3veis $\xi = Mw\rho^2$. Ap3s alguns c3lculos obtemos

$$R''(\xi) + \frac{1}{\xi}R'(\xi) - \left(\frac{l^2}{4\alpha^2\xi^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4Mw\xi} \right) R(\xi) = 0. \quad (6.6)$$

Nesse ponto, estudamos os limites assint3ticos da equa73o acima. Comportamento f3sico de nossa solu73o na origem e no infinito, nos permite escolher o seguinte ansatz,

$$R(\xi) = \xi^{\frac{|l|}{2\alpha}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(\xi), \quad (6.7)$$

Substituindo essa equa73o acima, encontramos depois de alguma 3lgebra simples,

$$\xi F''(\xi) + \left(\frac{|l|}{\alpha} + 1 - \xi \right) F'(\xi) - \left(\frac{l}{2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4Mw} \right) F(\xi) = 0. \quad (6.8)$$

onde γ 3 como antes. Novamente essa equa73o 3 escrita na forma geral de uma fun73o hipergeom3trica confluyente, $xF''(x) + (c + 1 - x)F'(x) - aF(x) = 0$, com solu73o dada por um conjunto de polin3mios de grau n em x . Normalidade dessa solu73o 3 conseguida fazendo-se o 3ltimo termo da equa73o (6.8) igual a um inteiro negativo ou zero. Matematicamente temos,

$$\frac{|l|}{2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4Mw} = -n, \quad (6.9)$$

A partir daqui usando a express3o para γ e resolvendo a equa73o resultante para E obtemos o seguinte espectro de energia,

$$E^2 = M^2 + 4Mw \left(n + \frac{|l|}{2\alpha} + 1 \right) + k^2. \quad (6.10)$$

Podemos tamb3m construir as autofun733es da seguinte forma,

$$\Psi(t, \vec{r}) = C_{n,l} e^{-iEt + ikz + il\phi} \rho^{\frac{|l|}{\alpha}} e^{-\frac{Mw}{2}\rho^2} F \left(-n, \frac{|l|}{\alpha} + 1, Mw\rho^2 \right). \quad (6.11)$$

Notemos a depend3ncia global dos n3veis de energia assim como das autofun733es sobre o par3metro topol3gico do espa7o-tempo α , evidenciando a influ3ncia da topologia nos n3veis de energia da part3cula e o pr3prio car3ter n3o-local da teoria qu3ntica.

Podemos observar que essa energia tem contribui33es angular e cin3tica al3m da energia de repouso da part3cula. No limite de oscilador fraco, $w \rightarrow 0$, nossa part3cula comporta-se como uma part3cula livre. Al3m disso, podemos observar que na aus3ncia de defeitos, $\alpha \rightarrow 1$, os resultados de Rao [96] aparecem e que a presen3a do defeito quebra a degeneresc3ncia de alguns n3veis de energia da part3cula.

6.3 Corda Magn3tica na Teoria de Kaluza-Klein

Considere a din3mica para uma part3cula movendo-se na presen3a da corda magn3tica. Em rela33o ao caso anterior um campo magn3tico 3 estabelecido geometricamente ao longo do eixo de simetria da corda, assumido para ser o eixo x . Na teoria de Kaluza-Klein [92, 97, 98], podemos escrever a m3trica do espa3o-tempo magnetizado da seguinte forma [99],

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2 + \left(dx + \frac{\Phi}{2\pi} d\phi \right)^2 \quad (6.12)$$

com as coordenadas cil3ndricas sendo usadas e Φ 3 o fluxo magn3tico associado ao defeito topol3gico.

A din3mica de nossa part3cula 3 descrita pela equa33o de Klein-Gordon (6.1)

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \frac{[\partial_\phi - (\Phi/2\pi) \partial_x]^2}{\alpha^2 \rho^2} - M^2 w^2 \rho^2 + \gamma \right\} \Psi(t, \rho, \phi, z) = 0, \quad (6.13)$$

com $\gamma = -\partial_t^2 + \partial_z^2 + \partial_x^2 - 2Mw - M^2$. Independ3ncia temporal permite escolher o seguinte ansatz,

$$\Psi(t, \rho, \phi, z, x) = e^{-i(Et - kz - l\phi - \lambda x)} R(\rho), \quad (6.14)$$

ent3o a equa33o (6.13) transforma-se em

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) - \left[\frac{(l - \lambda\Phi/2\pi)^2}{\alpha^2 \rho^2} + M^2 w^2 \rho^2 - \gamma \right] \right\} R(\rho) = 0, \quad (6.15)$$

que com a ajuda de (6.14) o 3ltimo termo na equa33o acima 3 $\gamma = E^2 - M^2 - 2Mw - k^2 - \lambda^2$. Aplicando a mudan3a de vari3veis $x = Mw\rho^2$ obtemos,

$$R''(x) + \frac{1}{x}R'(x) - \left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2x^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4Mwx} \right) R(x) = 0, \quad (6.16)$$

Neste ponto procedemos para analisar o comportamento de nossa fun33o nos limites extremos. Assintoticamente para $x \rightarrow 0$ encontramos a seguinte express3o,

$$R''(x) + \frac{1}{x}R'(x) - \frac{\beta^2}{4\alpha^2x^2}R(x) = 0, \quad (6.17)$$

cuja solu33o 3 dada por $R(x) = x^{\frac{|\beta|}{2\alpha}}$. No outro extremo, $x \rightarrow \infty$, a equa33o resultante 3

$$R''(x) - \frac{1}{4}R(x) = 0, \quad (6.18)$$

com a seguinte solu33o $R(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. Juntos, esses limites nos permite escolher a fun33o geral,

$$R(x) = x^{\frac{|\beta|}{2\alpha}} e^{-\frac{x}{2}} F(x), \quad (6.19)$$

cuja substitu33o em (6.16) resulta,

$$xF''(x) + \left(\frac{|\beta|}{\alpha} + 1 - x \right) F'(x) - \left(\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4Mw} \right) F(x) = 0. \quad (6.20)$$

onde γ 3 como antes e $\beta = l - \lambda\Phi/2\pi$. A converg3ncia dessa solu33o 3 satisfeita impondo-se a seguinte restri33o sobre o termo independente da s3rie hipergeom3trica,

$$\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4Mw} = -n, \quad (6.21)$$

para β e γ dados anteriormente resolvemos a equa33o para E e encontramos o seguinte conjunto de autovalores para a energia,

$$E^2 = M^2 + 4Mw \left(n + \frac{|l - \lambda\Phi/2\pi|}{2\alpha} + 1 \right) + k^2 + \lambda^2. \quad (6.22)$$

e para as autofunções

$$\Psi(t, \vec{r}) = C_{n,l} e^{-i(Et - kz - l\phi - \lambda x)} \rho^{\frac{|\beta|}{\alpha}} e^{-\frac{mw}{2}\rho^2} F\left(-n, \frac{|\beta|}{\alpha} + 1, mw\rho^2\right). \quad (6.23)$$

com $C_{n,l}$ sendo uma constante de normalização da função de onda. Comparativamente para o caso sem campo magnético, o número quântico de momento angular é deslocado por uma quantidade relacionada com o próprio campo, inacessível à nossa partícula e que representa análogos do efeito eletromagnético Aharonov-Bohm. Ademais, o resultado acima torna-se aquele da seção anterior no limite de campo fraco, $\Phi \rightarrow 0$, como deveria ser o caso.

6.4 Dinâmica Quântica na Corda Quiral Magnética

Nas seções anteriores, estudamos a dinâmica para a partícula de Klein-Gordon na presença da corda cósmica padrão com um campo magnético aplicado geometricamente ao eixo de simetria da corda. Consideraremos, nessa seção, a correspondente dinâmica num espaço-tempo com fonte de torção além daquelas já mencionadas anteriormente. Esse espaço-tempo é descrito pela métrica,

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + (dz + Jd\phi)^2 + \left(dx + \frac{\Phi}{2\pi} d\phi\right)^2 \quad (6.24)$$

com o seguinte tensor métrico inverso,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} & -\frac{J}{\alpha^2 \rho^2} & -\frac{\Phi}{2\pi \alpha^2 \rho^2} \\ 0 & 0 & -\frac{J}{\alpha^2 \rho^2} & 1 + \frac{J^2}{\alpha^2 \rho^2} & \frac{J\Phi}{2\pi \alpha^2 \rho^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\Phi}{2\pi \alpha^2 \rho^2} & \frac{J\Phi}{2\pi \alpha^2 \rho^2} & 1 + \frac{\Phi^2}{4\pi^2 \alpha^2 \rho^2} \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

com α , J e Φ , respectivamente, as fontes de curvatura, torção e fluxo magnético. As coordenadas (t, ρ, ϕ, z, x) são como antes. Nessa métrica a equação de Klein-Gordon

torna,

$$\left\{ \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) - \left[\frac{(l - kJ - \lambda\Phi/2\pi)^2}{\alpha^2 \rho^2} + M^2 w^2 \rho^2 - \gamma \right] \right\} R(\rho) = 0, \quad (6.26)$$

Observe que matematicamente essa equação é igual àquelas das duas seções anteriores só que dessa vez temos a contribuição relacionada com a torção e representada por J acima. Portanto, podemos resolver essa equação seguindo o mesmo formalismo utilizado anteriormente. Depois de alguns passos, encontramos que os autovalores da energia são da forma,

$$E^2 = M^2 + 4Mw \left(n + \frac{|l - kJ - \lambda\Phi/2\pi|}{2\alpha} + 1 \right) + k^2 + \lambda^2. \quad (6.27)$$

podemos observar que toda fonte física numa região inacessível à nossa partícula aparece quantizada nos níveis de energia, evidenciando a não-localidade da teoria quântica. Contudo, o principal resultado que obtivemos nesse problema, foi a possibilidade de compensar a contribuição elástica introduzida pelo defeito controlando a intensidade do campo magnético aplicado externamente. Isso possibilita tornar o meio com torção um meio contínuo.

6.5 Dinâmica na Presença de um Campo Magnético Homogêneo

Adicionado às fontes de curvatura e torção, um campo magnético homogêneo é estabelecido na região de movimento de nossa partícula. Esse espaço-tempo é descrito pela métrica,

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + (dz + Jd\phi)^2 + \left[dx + \left(\frac{\Phi}{2\pi} + \frac{eB\rho^2}{2} \right) d\phi \right]^2 \quad (6.28)$$

com coordenadas cilíndricas sendo usadas e as fontes de curvatura, torção e campo magnético dadas por α , J e Φ , respectivamente. Nesse espaço-tempo a dinâmica é

descrita pela equação

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{(\partial_\phi - J\partial_z - \Phi\partial_x/2\pi)^2}{\alpha^2 \rho^2} - \left[M^2 w^2 - \frac{e^2 B^2 \partial_x^2}{4\alpha^2} \right] \rho^2 + \gamma \right\} \Psi = 0, \quad (6.29)$$

com $\gamma = -\partial_t^2 - M^2 - 2Mw + eB(\partial_\phi - J\partial_z - \Phi\partial_x/2\pi)\partial_x/\alpha^2 + \partial_z^2 + \partial_x^2$. Devido a invariância translacional ao longo do eixo (z, x) , independência temporal e simetria rotacional na coordenada ϕ para o espaço-tempo descrito em (6.28), supomos o seguinte ansatz,

$$\Psi(t, \rho, \phi, z, x) = e^{-iEt + i\phi + ikz + i\lambda x} R(\rho), \quad (6.30)$$

sobre essa condição, a equação radial (6.29) transforma-se em

$$R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) - \left(\frac{\Lambda^2}{\rho^2} + \kappa^2 \rho^2 - \gamma \right) R(\rho) = 0, \quad (6.31)$$

onde usamos a seguinte abreviação sobre os termos Λ , κ and γ

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{l - kJ - \lambda\Phi/2\pi}{\alpha}, & \kappa &= \sqrt{M^2 w^2 + \frac{e^2 B^2 \lambda^2}{4\alpha^2}} \\ \gamma &= E^2 - M^2 - 2Mw + \frac{2eB\lambda}{\alpha} \frac{l - kJ - \lambda\Phi/2\pi}{2\alpha} - k^2 - \lambda^2, \end{aligned} \quad (6.32)$$

soluções para a equação (6.31) são construídas fazendo a seguinte mudança $\xi = \kappa\rho^2$, com as informações adicionadas

$$\partial_\rho = 2\sqrt{\kappa}\sqrt{\xi}\partial_\xi, \quad \partial_\rho^2 = 4\kappa\xi\partial_\xi^2 + 2\kappa\partial_\xi \quad (6.33)$$

Dessa forma (6.31) torna-se,

$$R''(\xi) + \frac{1}{\xi} R'(\xi) - \left(\frac{\Lambda^2}{4\xi^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4\kappa\xi} \right) R(\xi) = 0, \quad (6.34)$$

nesse ponto, estudamos os limite assintóticos. Para $\xi \rightarrow 0$, a equação resultante tem solução normalizada dada por $R(\xi) \sim \xi^\Lambda$. No outro ponto crítico, $\xi \rightarrow \infty$, normalização é garantida escolhendo $R(\xi) \sim e^{-\xi/2}$. Uma solução geral satisfazendo normalidade na origem e no infinito pode ser escrita como

$$R(\xi) = \xi^{\frac{|\Lambda|}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(\xi), \quad (6.35)$$

calculando $R'(\xi)$ e $R''(\xi)$ e por direta substituição dessas expressões em (6.34) obtemos o resultado abaixo,

$$\xi F''(\xi) + (|\Lambda| + 1 - \xi)F'(\xi) + \left(\frac{\Lambda}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4\kappa}\right)F(\xi) = 0. \quad (6.36)$$

como antes, soluções normalizáveis dessa equação são obtidas impondo-se

$$\frac{\Lambda}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4\kappa} = -n, \quad (6.37)$$

com as expressões dadas para Λ , κ e γ encontramos o seguinte espectro de energia,

$$\begin{aligned} E^2 = & M^2 + 2Mw - \frac{2eB\lambda l - kJ - \lambda\Phi/2\pi}{\alpha} + \\ & + 4\sqrt{M^2w^2 + \frac{e^2B^2\lambda^2}{4\alpha^2}} \left(n + \frac{|l - kJ - \lambda\Phi/2\pi|}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) + k^2 + \lambda^2. \end{aligned} \quad (6.38)$$

observe a dependência sobre os parâmetros não-locais do espaço-tempo representando a influência da topologia sobre os níveis de energia mostrando que aspectos globais devem ser levados em conta caso queiramos descrever completamente a dinâmica quântica ocorrendo nesses espaços-tempos. Desse resultado, podemos observar que para $B \rightarrow 0$ os resultados anteriores reaparecem. Essa dinâmica no limite de oscilador fraco $w \rightarrow 0$ resulta na solução já encontrada na literatura [92]. Esses limites confirmam a validade de nossa solução. Além disso, o resultado em (6.38) mostra que o papel das fontes de curvatura, torção e campos eletromagnéticos é o de quebrar a degenerescência infinita dos níveis de energia.

6.6 Oscilador Relativístico na Presença do Monopólo Global

Monopólos são defeitos topológicos formados durante a expansão inicial do universo num processo de quebra de simetria de gauge local ou global. São objetos pontuais, pesados, com campos gravitacionais intensos próximos de seu núcleo e formados

quando uma simetria $SO(3)$ é espontaneamente quebrada para $U(1)$. O mais simples modelo que dá origem a monopólos globais é descrito pela densidade Lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi^j\partial^\nu\phi^j - \frac{1}{4}\lambda(\phi^j\phi^j - \eta^2)^2 \quad (6.39)$$

sendo ϕ^j um campo escalar tripleto com $j = 1, 2, 3$. De maneira geral, o campo de Higgs ϕ^j , ($j = 1, 2, \dots, N$) dá origem a defeitos topológicos tipo as paredes de domínio para $N = 1$, cordas cósmicas para $N = 2$ e monopólos $N = 3$. Para o caso de um monopólo estático e isolado a métrica é descrita em coordenadas esféricas como abaixo,

$$ds^2 = -B(r)d\tau^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2) \quad (6.40)$$

com (ρ, θ, ϕ) as coordenadas esféricas com o seguinte intervalo de variação $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e as relações com as coordenadas cartesianas já conhecidas. As funções $A(\rho)$ e $B(\rho)$ estão relacionadas por,

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2Gm_c}{r} \quad (6.41)$$

com m_c um termo de massa que aparece como uma constante de integração e η é a escala de energia envolvida na transição de fase. Longe do núcleo do monopólo o último termo pode ser desconsiderado em relação aos dois primeiros levando ao resultado abaixo,

$$B(r) = A(r)^{-1} = 1 - 8\pi G\eta^2 = \Lambda^2 \quad (6.42)$$

sob essa condição e a transformação $(\tau = \Lambda t, r = \Lambda\rho)$, (6.40) transforma-se em,

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{d\rho^2}{\Lambda^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6.43)$$

esta geometria é equivalente aquela da esfera com um déficit de ângulo sólido $\Lambda^2 = 1 - 8\pi G\eta^2$, a diferença entre o ângulo sólido da geometria plana e aquele da geometria

do monopólo global. Nessa geometria, a área da esfera é menor que $4\pi\rho^2$. A superfície $\theta = \pi/2$ é equivalente a do cone com déficit de ângulo $8\pi G\eta^2$. Devido $g_{tt} = -1$ não há potencial Newtoniano. O espaço-tempo é não-plano com escalar de curvatura (escalar de Ricci) dado por $R = 2(-1 + \Lambda^2)/\rho^2$. Embora a métrica da corda cósmica seja localmente plana, o mesmo não acontece para o espaço-tempo do monopólo global, apesar de haver uma equivalência entre esses espaços para a superfície $\theta = \pi/2$.

Esse é o espaço-tempo sobre o qual analisaremos a dinâmica quântica de uma partícula escalar na presença de uma interação tipo oscilador de Klein-Gordon. Nesse espaço-tempo a equação de Klein-Gordon é construída a partir do operador D'Alembertiano generalizado dado pela expressão

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu - M^2 \right\} \Psi = 0. \quad (6.44)$$

com o termo $\sqrt{-g}$ e a matriz inversa, $g^{\mu\nu}$ dados, respectivamente, pelas expressões

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \frac{\rho^2 \sin\theta}{\Lambda} \\ g_{\mu\nu} &= \left(-1, \Lambda^2, \frac{1}{\rho^2}, \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \right), \end{aligned} \quad (6.45)$$

o acoplamento da interação tipo oscilador de Klein-Gordon para a equação (6.44) no espaço-tempo descrito por (6.43) permite reescrevê-la na forma,

$$\left\{ -\partial_t^2 + \frac{\Lambda^2}{\rho^2} (\partial_\rho + Mw\rho)(\rho^2 \partial_\rho - Mw\rho^3) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 - M^2 \right\} \Psi = 0, \quad (6.46)$$

depois de alguns passos essa equação transforma-se em,

$$\left\{ \frac{1}{\rho^2} (\partial_\rho + Mw\rho)(\rho^2 \partial_\rho - Mw\rho^3) - \frac{\mathbb{L}^2}{\Lambda^2 \rho^2} - \frac{\partial_t^2 + M^2}{\Lambda^2} \right\} \Psi = 0, \quad (6.47)$$

onde usamos o operador de momento angular da mecânica quântica \mathbb{L}^2 em coordenadas esféricas. Sob o ansatz

$$\Psi = e^{-iEt} R_l(\rho) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (6.48)$$

e as informações adicionais abaixo

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) &= l(l+1)Y_{lm}(\theta, \phi), \\ \frac{1}{\rho^2}(\partial_\rho + Mw\rho)(\rho^2 \partial_\rho - Mw\rho^3)R(\rho) &= R''(\rho) + \frac{2}{\rho}R'(\rho) - (M^2w^2\rho^2 + 3Mw)R(\rho),\end{aligned}\tag{6.49}$$

a equação (6.47) transforma-se em

$$R''(\rho) + \frac{2}{\rho}R'(\rho) - \left[M^2w^2\rho^2 + \frac{l(l+1)}{\Lambda^2\rho^2} - \gamma \right] R(\rho) = 0,\tag{6.50}$$

com $\gamma = \frac{E^2 - M^2}{\Lambda^2} - 3Mw$. Nesse ponto, chegamos a uma equação do tipo já trabalhada anteriormente. Sua solução é construída fazendo a substituição $x = Mw\rho^2$. Depois de alguma álgebra chegamos a

$$R''(x) + \frac{3}{2x}R'(x) - \left[\frac{l(l+1)}{4\Lambda^2x^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4Mwx} \right] R(x) = 0,\tag{6.51}$$

Estudando os limites assintóticos, uma solução geral para $R(x)$ finita na origem e no infinito é obtida a partir da expressão

$$R(x) = x^\beta e^{-\frac{x}{2}} F(x),\tag{6.52}$$

com a constante β acima dada por

$$\beta = -\frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4l(l+1)}{\Lambda^2}} \right).\tag{6.53}$$

sob essa condição reescrevemos (6.51) na forma,

$$xF''(x) + \left(2\beta + \frac{3}{2} - x \right) F'(x) - \left(\beta + \frac{3}{4} - \frac{\gamma}{4Mw} \right) F(x) = 0.\tag{6.54}$$

observe que a equação encontrada é do tipo hipergeométrica confluyente, cuja normalidade das soluções é conseguida impondo-se

$$\beta + \frac{3}{4} - \frac{\gamma}{4Mw} = -n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\tag{6.55}$$

usando a expressão $\gamma = \frac{E^2 - M^2}{\Lambda^2} - 3Mw$ e resolvendo a equação resultante para a energia E obtemos,

$$E^2 = M^2 + 2\Lambda^2 Mw \left(2n + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4l(l+1)}{\Lambda^2}} + \frac{5}{2} \right). \quad (6.56)$$

para o conjunto de autovalores e

$$\Psi(t, \vec{r}) = A e^{-iEt} Y_{lm}(\theta, \phi) \rho^{2\beta} e^{-\frac{Mw\rho^2}{2}} F \left(-n, 2\beta + \frac{3}{2}, Mw\rho^2 \right). \quad (6.57)$$

para o conjunto de autovetores.

Vamos analisar o limite não-relativístico desse resultado. Para isso, usamos a aproximação $E = M + \epsilon$ com $\epsilon \ll M$ e expandimos a expressão resultante em série de Taylor. Em seguida obtemos o resultado,

$$E \sim Mc^2 + \Lambda^2 \hbar w \left(2n + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4l(l+1)}{\Lambda^2}} + \frac{5}{2} \right) - \frac{\Lambda^4 \hbar^2 w^2}{2Mc^2} \left(2n + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4l(l+1)}{\Lambda^2}} + \frac{5}{2} \right)^2. \quad (6.58)$$

com o primeiro termo associado à energia de repouso da partícula, o último é a correção relativística adicionada à energia do oscilador harmônico não-relativístico dada no segundo termo.

6.7 Considerações Finais

Nessa contribuição analisamos a dinâmica quântica de partículas na presença do oscilador de Klein-Gordon e de campos eletromagnéticos e gravitacionais em diferentes configurações da métrica da corda cósmica e do monopólo global. Na presença da corda cósmica usual, o espectro de energia assim como as autofunções têm dependência explícita com o parâmetro cônico desse espaço além da forma geral para o espectro na presença do oscilador harmônico padrão. Quando analisamos essa dinâmica na presença da corda magneticamente carregada, a nova solução apresentou

a parte angular adicionada com uma quantidade proporcional à intensidade do campo magnético aplicado. Na presença de torção uma importante consequência aparece. Podemos cancelar a contribuição elástica introduzida pelo defeito, controlando externamente a intensidade do campo magnético. No espaço-tempo do monopólo global, o espectro de energia aparece numa forma que combina a energia de repouso com a energia do oscilador claramente dependente do déficit de ângulo sólido. No limite não-relativístico essa energia é acrescida de um termo quadrático relativístico.

Capítulo 7

Partícula Escalar no Universo de Gödel com Defeitos Topológicos

7.1 Introdução

Por ocasião dos setenta anos do nascimento de Albert Einstein, Kurt Gödel [100], apresentou uma solução das equações de campo de Einstein para um universo homogêneo, com uma constante cosmológica negativa e um fluido perfeito como fonte. Esta solução previa a existência de curvas tipo-tempo fechadas, conceito que viola o princípio da causalidade e que levou a uma série de discussões para o estabelecimento de uma região cronologicamente segura [101, 102, 103]. Mais recentemente soluções de supersimetria, supergravidade em 10 e 11D aparecem como soluções do tipo-Gödel [104, 105]. Além disso, o movimento clássico (geodésico) nessas geometrias pode ter uma equivalente descrição para o caso quântico do movimento de partículas em superfícies de curvatura constante e na presença de campos magnéticos [106, 107]. O caso das órbitas fechadas, do ponto de vista quântico, se tornaria possível quando o movimento ocorresse na presença de campos magnéticos muito intensos forçando a partícula a seguir uma tal curva. Dada essa intersecção da abordagem quântica e da

relatividade geral einsteiniana, faremos um estudo da influência sobre os autovalores da energia e autoestados do operador hamiltoniano devido a presença de defeitos topológicos, em particular a corda cósmica, imersa no espaço-tempo de Gödel. A correspondente métrica desse espaço se caracteriza pelo parâmetro l^2 que pode assumir valores nulo, positivos e negativos e que implicam na existência da geometria plana, esférica e hiperbólica. Esse estudo será realizado com a equação de Klein-Gordon aplicada a essas geometrias. No final desse capítulo, estabeleceremos uma conexão da física nos níveis clássicos e quânticos e as correções introduzidas pela presença da corda cósmica.

7.2 Família de Soluções do Tipo Gödel

Os espaços-tempos tipo-Gödel embora não descrevam o cenário atual do nosso universo, que passa por uma expansão acelerada, nos permite fazer um estudo físico-matemático de universos com rotação rígida e violação de causalidade. Além disso, tais métricas sendo escritas numa forma compacta, permite que os problemas possam ser resolvidos analiticamente [102].

Estamos interessados em analisar os espaços-tempos tipo-Gödel pela abordagem clássica do movimento geodésico. É suficiente apresentar a solução das equações geodésicas em coordenadas cartesianas, podendo-se generalizar para outras coordenadas como cilíndricas, esféricas ou hiperbólicas. Dessa forma, apresentamos a seguir a expressão geral para a métrica do espaço-tempo tipo-Gödel dotado de uma corda cósmica. A presença da corda sugere que usemos as coordenadas polares (t, r, ϕ, z) ,

$$ds^2 = - \left(dt + \alpha \Omega \frac{\sinh^2 lr}{l^2} d\phi \right)^2 + \alpha^2 \frac{\sinh^2 2lr}{4l^2} d\phi^2 + dr^2 + dz^2 \quad (7.1)$$

aqui $\alpha = 1 - 4\mu$, num sistema de unidades onde a constante gravitacional de Newton G e a velocidade da luz c são assumidos iguais a unidade, α é um parâmetro associado

com o grau de conicidade do espaço-tempo, μ é densidade de massa da corda. O presente espaço tem um déficit angular para cordas com densidade de massa positiva, e excesso angular para o caso de cordas com densidade de massa negativa. As coordenadas cilíndricas têm os seguintes intervalos: $0 \leq r < \infty$, $-\infty < (t, z) < \infty$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Nas seções seguintes fazendo-se o limite $l \rightarrow 0$ na equação acima, obtemos a métrica do Som-Raychaudhuri [108]. Para $\Omega = 0$ obtemos a métrica de Minkowski quando consideramos, além disso, $\alpha = 1$. A solução original de Gödel [100] equivale a assumir $l^2 = \Omega^2/2$ e o espaço-tempo Anti-de Sitter [109] corresponde a $l^2 = \Omega^2$.

Como destacado inicialmente, um dos principais resultados dessa solução (7.1) é a existência das curvas tipo-tempo fechadas (CTCs). A localização dessas curvas é feita estudando-se a seguinte condição sobre a parte angular da métrica $g_{\phi\phi} = 0$. Usando (7.1) obtemos,

$$\frac{\sinh^2 2lr}{4l^2} - \frac{\Omega^2}{l^4} \sinh^4 lr = 0 \quad \rightarrow \quad \tanh(lr_c) = \frac{l}{\Omega} \quad (7.2)$$

com a região ($r < r_c$) de raio r_c livre de CTCs e chamada de cavidade cronologicamente segura. Devido a homogeneidade da métrica para translações ao longo do eixo z , obtemos um cilindro cronologicamente seguro de raio r_c sem curvas tipo-tempo fechadas para $r < r_c$ e com CTC na região externa $r > r_c$.

As métricas tipo-Gödel podem ser escritas numa forma geral,

$$ds^2 = -[dt + A_i(x)dx^i]^2 + h_{ij}dx^i dx^j \quad (7.3)$$

onde as coordenadas do espaço-tempo são representadas por x^i . Essa forma geral representa superfícies de curvatura constante nos três casos a serem analisados restritos pelos seguintes valores de l : $l < 0$, $l = 0$ e $l > 0$. Como veremos abaixo, o principal aspecto dessas métricas é que as geodésicas nesse espaço-tempo são círculos, compartilhando uma mesma descrição física para as órbitas de elétrons movendo-se na

presença de campos magnéticos perpendiculares e conhecidas como órbitas de Larmor. Além disso, os níveis de energia nesses espaços-tempos têm uma estrutura de Landau como no espaço-tempo de Minkowski com curvatura constante [103, 106, 107, 110].

Para calcular as posições das CTC num espaço-tempo tipo-Gödel são exigidos as isometrias associadas com as propriedades de simetria translacional. Essas propriedades estão presentes nos vetores de Killing discutidos por M. Rebouças [102] para uma variedade Riemaniana com métricas tipo-Gödel. Essa homogeneidade é descrita pelas equações,

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{\partial}{\partial t}; \quad K_1 = \frac{\partial}{\partial z}; \quad K_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad K_3 = \frac{\partial}{\partial x} - my \frac{\partial}{\partial y}, \\ K_4 &= \frac{2}{m} e^{-mx} \frac{\partial}{\partial t} - y \frac{\partial}{\partial x} + \left[\frac{m}{2} y^2 \frac{1}{m} e^{-2mx} \right] \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

essas isometrias são equivalentes para as métricas de Som-Raychaudhuri (7.1) escolhendo $l = m/2$ nas equações acima. É importante observar que as isometrias satisfazem as seguintes relações de comutação,

$$\begin{aligned} [K_0, K_i] &= [K_1, K_i] = 0, \quad i = 0 \dots 4, \quad [K_2, K_3] = -2lK_2, \\ [K_2, K_4] &= -K_3, \quad [K_3, K_4] = -2lK_4 \end{aligned} \tag{7.4}$$

A partir daqui, faremos uma discussão sobre métricas tipo-Gödel com ênfase para a obtenção das curvas geodésicas. Em coordenadas cartesianas a métrica (7.1) torna-se,

$$ds^2 = -[dt + \Omega(ydx - xdy)]^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{7.5}$$

e as equações geodésicas para essa métrica seguem do princípio da mínima ação. Construamos a seguinte Lagrangeana,

$$L = -[\dot{t} + \Omega(y\dot{x} - x\dot{y})]^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \tag{7.6}$$

Usando a equação de Euler-Lagrange $\partial L/\partial q_i - \frac{d}{ds} \partial L/\partial \dot{q}_i$ as equações geodésicas são,

$$\frac{d^2x}{ds^2} - 2\Omega C_1 \frac{dy}{ds} = 0; \quad \frac{d^2y}{ds^2} + 2\Omega C_1 \frac{dx}{ds} = 0 \tag{7.7}$$

com “ s ” sendo uma constante de parametrização ao longo da curva e $C_1 = \dot{t} + \Omega(y\dot{x} - x\dot{y})$ é a quantidade conservada associada com a isometria ∂_t da métrica. Esse conjunto tem solução

$$\begin{aligned} x(s) &= A \sin(2\Omega C_1 s) - B \cos(2\Omega C_1 s) + x_0 \\ y(s) &= A \cos(2\Omega C_1 s) + B \sin(2\Omega C_1 s) + y_0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Observe que $r^2 = x^2 + y^2$ define uma trajetória circular com origem arbitrária (x_0, y_0) . Novamente, em acordo com a equação (2.17) de [103] mostrada abaixo,

$$r^2 = \frac{C_t^2 - m^2 - C_z^2}{4\Omega^2 C_t^2} \quad (7.9)$$

Nota-se que para $C_z = 0$, quantidade conservada associada com a isometria ∂_z , as geodésicas nulas, $m^2 = 0$, definem uma região cronologicamente segura com raio $r_g = 1/2\Omega$ independente do parâmetro C_t . Na região exterior com raio $r > r_g$, existe curvas tipo-tempo fechadas na qual a violação de causalidade ocorre. Para a região com geodésicas nulas ou tipo-tempo, $m^2 > 0$, as geodésicas projetam a círculos com raio menor do que $1/2\Omega$, resultado que pode ser confirmado analisando a equação acima.

Nas seções seguintes, faremos uma abordagem sobre a influência dos defeitos topológicos na dinâmica quântica de partículas escalares ocorrendo em espaços-tempos descritos por métricas do tipo-Gödel.

7.3 Equação de Klein-Gordon

A dinâmica de uma partícula de spin-0 é governada pela equação de Klein-Gordon, que na formulação covariante assume a forma,

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) - M^2 \right] \Psi(t, \vec{x}) = 0 \quad (7.10)$$

onde M é a massa da partícula, g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ com matriz inversa $g^{\mu\nu}(x)$ e ∂_i são derivadas covariantes nas coordenadas espaciais. $\Psi(t, \vec{x})$ é a amplitude de probabilidade de encontrar a partícula em torno da posição x . Essa equação será analisada nas geometrias associadas com os possíveis valores de l^2 , que podem assumir $l^2 = 0$, $l^2 < 0$ e $l^2 > 0$, correspondendo a geometrias plana, esférica e hiperbólica, respectivamente.

7.3.1 Espaço-tempo de Som-Raychaudhuri - $l^2 \rightarrow 0$

Devido as propriedades de simetrias, a geometria plana é determinada a partir da equação (7.1) tomando-se o limite $l \rightarrow 0$. Usando as expansões trigonométricas adequadas, encontramos que a métrica resultante corresponde ao espaço-tempo de Som-Raychaudhuri [108],

$$ds^2 = -(dt + \alpha\Omega r^2 d\phi)^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (7.11)$$

a partir do tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ encontramos o tensor contravariante $g^{\mu\nu}(x)$ da forma abaixo,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha\Omega r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha\Omega r^2 & 0 & \alpha^2 r^2 - \alpha^2 \Omega^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Omega^2 r^2 - 1 & 0 & -\frac{\Omega}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\Omega}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

com determinante $g = \det(g_{\mu\nu}) = -\alpha^2 r^2$. O termo que participa da equação de Klein-Gordon é $\sqrt{-g} = \alpha r$. Com essas informações, podemos construir o operador

D'Alambertiano, assinalado por \square , da seguinte forma,

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \quad (7.13)$$

Aplicado a geometria descrita pela métrica (7.11) obtemos a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \square &= \frac{1}{\alpha r} \partial_t \left[\alpha r \cdot (\Omega^2 r^2 - 1) \cdot \partial_t - \alpha r \cdot \frac{\Omega}{\alpha} \cdot \partial_\phi \right] + \frac{1}{\alpha r} [\alpha r \cdot 1 \cdot \partial_r (r \partial_r)] + \\ &+ \frac{1}{\alpha r} \partial_\phi \left[-\alpha r \cdot \frac{\Omega}{\alpha} \cdot \partial_t + \alpha r \cdot \frac{1}{\alpha^2 r^2} \cdot \partial_\phi \right] + \partial_z^2, \end{aligned} \quad (7.14)$$

com isso podemos escrever a equação de Klein-Gordon (7.10)

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\alpha^2 r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - \alpha \Omega r^2 \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - M^2 \right] \Psi(t, \vec{x}) = 0, \quad (7.15)$$

como o espaço-tempo não depende explicitamente das coordenadas (t, ϕ) e é invariante sob translação ao longo do eixo z , supomos uma solução do tipo,

$$\Psi(t, r, \phi, z) = e^{-i\omega t + im\phi + ikz} \Phi(r), \quad (7.16)$$

substituindo esse ansatz em (7.15), obtemos

$$\frac{d^2 \Phi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} - \left(\frac{a^2}{r^2} + b^2 r^2 - \gamma \right) \Phi(r) = 0, \quad (7.17)$$

com $a = m/\alpha$, $b = \Omega\omega$ e $\gamma = \omega^2 - \frac{2m\Omega\omega}{\alpha} - M^2 - k^2$. Fazendo-se a seguinte substituição de variáveis $\xi = br^2$, com as seguinte informações adicionais

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= 2\sqrt{b}\sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} &= 4b\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2b \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (7.18)$$

a equação (7.17) transforma-se em

$$R''(\xi) + \frac{1}{\xi} R'(\xi) - \left(\frac{a^2}{4\xi^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4b\xi} \right) R(\xi) = 0, \quad (7.19)$$

nesse ponto, passamos a estudar o comportamento assintótico dessa equação. No ponto crítico $\xi \rightarrow 0$ obtemos,

$$R''(\xi) + \frac{1}{\xi}R'(\xi) - \frac{a^2}{4\xi^2}R(\xi) = 0, \quad (7.20)$$

cuja solução é do tipo $A\xi^{a/2} + B\xi^{-a/2}$. No entanto, nesse limite, o segundo termo diverge. Normalidade é conseguida impondo $B = 0$, portanto $R(\xi) \sim \xi^{a/2}$. Para $\xi \rightarrow \infty$ encontramos,

$$R''(\xi) - \frac{1}{4}R(\xi) = 0, \quad (7.21)$$

cuja solução é $Ce^{\xi/2} + De^{-\xi/2}$. Novamente normalidade exige $C = 0$. Como solução para a equação geral (7.19) escolhemos,

$$R(x) = \xi^{|a|/2}e^{-\xi/2}F(\xi), \quad (7.22)$$

e com as seguintes derivadas,

$$\begin{aligned} R'(x) &= \left(\frac{|a|}{2\xi} - \frac{1}{2} \right) F(\xi) + F'(\xi) \\ R''(x) &= \left(\frac{|a|^2}{4\xi^2} - \frac{|a|}{2\xi^2} - \frac{|a|}{2\xi} + \frac{1}{4} \right) F(\xi) + \left(\frac{|a|}{2\xi} - \frac{1}{2} \right) F'(\xi) + F''(\xi), \end{aligned}$$

por substituição direta dessas expressões em (7.19) obtemos a seguinte equação,

$$\xi F''(\xi) + \left(\frac{|m|}{\alpha} + 1 - \xi \right) F'(\xi) - \left(\frac{|m|}{2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4\Omega w} \right) F(\xi) = 0. \quad (7.23)$$

onde $\gamma = w^2 - 2\Omega mw/\alpha - k^2 - M^2$. Comparada com a literatura das equações diferenciais, vemos que a equação encontrada é do tipo hipergeométrica confluyente, muito comum no tratamento de problemas envolvendo a dinâmica quântica de partículas ocorrendo na presença da geometria da corda cósmica. Essa equação permite normalização se termos de ordem superior a ξ^n forem todos nulos. Essa condição é satisfeita igualando-se o último termo da equação acima a um inteiro negativo ou zero. Matematicamente, equivale a escrever,

$$\frac{|m|}{2\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4\Omega w} = -n, \quad (7.24)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$. Além da normalidade das soluções, essa escolha permite determinar exatamente os autovalores da energia. Usando o valor para $\gamma = w^2 - 2\Omega mw/\alpha - k^2 - M^2$ na equação acima e resolvendo a equação resultante para w obtemos

$$w = \left(2n + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1\right) \Omega \pm \sqrt{\left(2n + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1\right)^2 \Omega^2 + M^2 + k^2}. \quad (7.25)$$

vemos, portanto, que os níveis de energia da partícula trazem informações acerca do espaço-tempo em consideração, sobretudo aspectos globais caracterizado pelo parâmetro α na expressão acima. Esse fato é surpreendente devido ao fato que o espaço tempo é localmente plano e que normalmente nenhuma mudança deveria estar presente e os níveis de energia não deveriam ser diferentes daqueles encontrados com a geometria minkowskiana [103]. A dependência dos níveis de energia sobre grandezas físicas externas à região acessível a nossa partícula é associada à influência da topologia no nível quântico e comprova o caráter não-local da teoria quântica.

Além disso, esse aspecto não-local está presente também nos auto-estados da partícula, como abaixo,

$$\Psi(t, r, \phi, z) = C_{n,m} e^{-i\omega t + im\phi + ikz} r^{\frac{|m|}{\alpha}} e^{-\frac{w\Omega}{2}r^2} F\left(-n, \frac{|m|}{\alpha} + 1, \Omega w r^2\right). \quad (7.26)$$

observe que o parâmetro topológico α aparece no problema de autovalores assim como nas autofunções da partícula interagindo com a geometria cônica no espaço-tempo de Som-Raychaudhuri. Essa dependência, mostra que temos que considerar, não apenas aspectos locais do espaço-tempo, mas também aspectos globais (topológicos) para uma completa e precisa descrição do problema de interação entre sistemas atômicos e campos gravitacionais produzidos por defeitos topológicos, no presente caso, a corda cósmica.

7.3.2 Coordenadas Esféricas - $l^2 < 0$

A correspondente métrica nas coordenadas esféricas, equivalente ao caso $l^2 < 0$ e obedecendo uma representação tipo-Gödel, é escrita abaixo,

$$ds^2 = - \left(dt + \frac{\alpha\Omega r^2}{1+r^2/4R^2} d\phi \right)^2 + \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right)^{-2} (dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2) + dz^2 \quad (7.27)$$

com a seguinte representação para tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e sua matriz inversa $g^{\mu\nu}$,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{\alpha\Omega r^2}{1+r^2/4R^2} & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^2 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha\Omega r^2}{1+r^2/4R^2} & 0 & \frac{\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^2}{\alpha^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Omega^2 r^2 - 1 & 0 & -\frac{\Omega}{\alpha} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right) & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^2 & 0 & 0 \\ -\frac{\Omega}{\alpha} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right) & 0 & \frac{\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^2}{\alpha^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e com determinante $g = \det(g_{\mu\nu}) = -\alpha^2 r^2 / (1 + r^2/4R^2)^4$. Como antes, nos interessa o termo $\sqrt{-g} = \alpha r / (1 + r^2/4R^2)^2$. Podemos construir o operador D'Alambertiano $\square = \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)/\sqrt{-g}$ usando as informações acima. Após alguns passos, obtemos o resultado

$$\square = \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^2 \frac{1}{r} \partial_r(r\partial_r) + \frac{\partial_\phi^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{1}{16R^4} \left(\frac{\partial_\phi}{\alpha} - 4\Omega R^2 \partial_t\right)^2 r^2 - \partial_t^2 - \frac{2\Omega\partial_\phi\partial_t}{\alpha} + \frac{\partial_\phi^2}{2\alpha^2 R^2} + \partial_z^2, \quad (7.29)$$

dessa forma a equação (7.10) sujeita ao ansatz (7.16) torna-se

$$\left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] \Phi(r) - \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2 r^2}{16R^4} - \gamma' \right) \Phi(r) = 0, \quad (7.30)$$

com $\gamma' = w^2 - \frac{m^2}{2\alpha^2 R^2} - \frac{2\Omega m w}{\alpha} - k^2 - M^2$, $a = \frac{m}{\alpha}$ e $b = \left(\frac{m}{\alpha} + 4\Omega R^2 w\right)$. Usando a representação estereográfica para a esfera, propomos a seguinte mudança de variável,

$r = 2R \tan \theta$. Para essa representação usamos

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\cos^2 \theta}{2R} \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\cos^4 \theta}{4R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \theta \cos^3 \theta}{2R^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (7.31)$$

com isso encontramos a seguinte equação

$$\Phi''(\theta) + \left(\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} \right) \Phi'(\theta) - \left(\frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 4R^2 \gamma' \right) \Phi(\theta) = 0, \quad (7.32)$$

uma nova equação pode ser obtida pelas mudanças $x = \cos \theta$ seguida por $\xi = 1 - x^2$.

A equação encontrada está mostrada abaixo,

$$\xi(1 - \xi) \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + (1 - 2\xi) \frac{d\Phi}{d\xi} - \left[\frac{a^2(1 - \xi)}{4\xi} + \frac{b^2 \xi}{4(1 - \xi)} - R^2 \gamma' \right] \Phi = 0. \quad (7.33)$$

reescrevendo essa mesma equação na forma abaixo,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \frac{1 - 2\xi}{\xi(1 - \xi)} \frac{d\Phi}{d\xi} - \left[\frac{\beta^2}{\xi^2} + \frac{\gamma^2}{(1 - \xi)^2} - \frac{R^2 \gamma'}{\xi(1 - \xi)} \right] \Phi = 0, \quad (7.34)$$

segue diretamente que $\beta = a/2$ e $\gamma = b/2$. Nesse ponto, estudamos os limites assintóticos dessa equação para requerimentos de integrabilidade em todo o espaço.

Para $\xi \rightarrow 0$ nossa expressão acima transforma-se em,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} - \frac{\beta^2}{\xi^2} \Phi = 0, \quad (7.35)$$

cuja solução é a combinação linear $A\xi^{|\beta|} + B\xi^{-|\beta|}$. Nesse limite, o segundo termo é divergente e a condição de integrabilidade nos força escolher $B \rightarrow 0$. Nossa primeira solução parcial é, portanto, $\Phi \sim \xi^{|\beta|}$. Ainda com relação a equação (7.34), tomando-se o limite $\xi \rightarrow 1$ ficamos,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} - \frac{1}{1 - \xi} \frac{d\Phi}{d\xi} - \frac{\gamma^2}{(1 - \xi)^2} \Phi = 0, \quad (7.36)$$

com a seguinte solução $C(1 - \xi)^\gamma + D(1 - \xi)^{-\gamma}$. Integrabilidade das autofunções exigem $D = 0$ e nossa segunda solução parcial é $\Phi \sim (1 - \xi)^{|\gamma|}$. Essas duas condições de contorno podem ser expressas unicamente usando-se a seguinte expressão,

$$\Phi(\xi) = \xi^{|\beta|} (1 - \xi)^{|\gamma|} F(\xi), \quad (7.37)$$

observe que a equação a ser resolvida é a (7.33) sob o unsatz acima. Para tanto, vamos calcular as derivadas envolvidas,

$$\begin{aligned}\Phi'(\xi) &= \left(\frac{\beta}{\xi} - \frac{\gamma}{1-\xi} \right) F(\xi) + F'(\xi) \\ \Phi''(\xi) &= \left[\frac{\beta(\beta-1)}{\xi^2} - \frac{2\beta\gamma}{\xi(1-\xi)} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{(1-\xi)^2} \right] F(\xi) + \left(\frac{2\beta}{\xi} - \frac{2\gamma}{1-\xi} \right) F'(\xi) + F''(\xi),\end{aligned}\tag{7.38}$$

sob essas condições, nossa equação (7.33) transforma-se em,

$$\xi(1-\xi)F''(\xi) + [2\beta + 1 - (2\beta + 2\gamma + 2)\xi]F'(\xi) - [\beta + 2\beta\gamma + \gamma - R^2\gamma']F(\xi) = 0,$$

com $\beta = \frac{|m|}{2\alpha}$, $\gamma = \frac{1}{2} \left| \frac{m}{\alpha} + 4\Omega R^2 w \right|$ e $\gamma' = w^2 - \frac{m^2}{2\alpha^2 R^2} - \frac{2\Omega m w}{\alpha} - k^2 - M^2$. Com isso, encontramos a equação final

$$\begin{aligned}\xi(1-\xi)\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \left[\frac{|m|}{\alpha} + 1 - \left(\frac{2|m|}{\alpha} + 4\Omega R^2 w + 2 \right) \xi \right] \frac{dF}{d\xi} - \left[\frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{|m|}{\alpha} + \right. \\ \left. + 2\Omega R^2 \left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1 \right) w - R^2(k^2 + M^2) \right] F = 0.\end{aligned}\tag{7.39}$$

observe que a equação para nosso problema foi encontrada na forma geral de uma função hipergeométrica, $x(1-x)F''(x) + (c - (a+b+1)x)F'(x) - abF(x) = 0$. O problema da quantização da energia exige o conhecimento de cada um dos termos a , b e c da hipergeométrica. Para esse fim, considere a identificação,

$$a + b + 1 = A, \quad ab = B \quad \rightarrow \quad a^2 - (A-1)a + B = 0\tag{7.40}$$

com $A = \frac{2|m|}{\alpha} + 4\Omega R^2 w + 2$ e $B = \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{|m|}{\alpha} + 2\Omega R^2 \left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1 \right) w - R^2(k^2 + M^2)$.

Usando essas informações encontramos a seguinte expressão para a constante a ,

$$\frac{|m|}{\alpha} + 2\Omega R^2 w + \frac{1}{2} \pm \sqrt{4\Omega^2 R^4 w^2 + 2\Omega R^2 \left(\frac{|m|}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \right) w + \frac{1}{4} + R^2(w^2 - k^2 - M^2)},\tag{7.41}$$

A quantização da energia é encontrada impondo $a = -n$, resultando em

$$\begin{aligned}\left\{ 4\Omega^2 R^4 w^2 + 2\Omega R^2 \left(\frac{|m|}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \right) w + \frac{1}{4} + R^2(w^2 - k^2 - M^2) \right\} = \\ = \left(n + \frac{|m|}{\alpha} + 2\Omega R^2 w + \frac{1}{2} \right)^2,\end{aligned}\tag{7.42}$$

resolvendo a equação resultante para w obtemos

$$w = \left(2n + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1\right) \Omega \pm \sqrt{\left(2n + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1\right)^2 \Omega^2 + \frac{1}{R^2} \left(n + \frac{|m|}{\alpha}\right) \left(n + \frac{|m|}{\alpha} + 1\right) + M^2 + k^2}, \quad (7.43)$$

com degenerescência finita no seguinte intervalo $-n \leq m/\alpha \leq 4\Omega R^2 w$. Nesse espectro, observamos a dependência sobre o parâmetro α , evidenciando a importância dos aspectos topológicos do problema. Seguindo a discussão da seção anterior, os autovalores do presente hamiltoniano em coordenadas esféricas tornam-se aqueles do caso plano tomando-se o limite $R \rightarrow \infty$, um teste que assegura a validade de nossos cálculos com a geometria esférica.

Os autoestados do hamiltoniano são escritos como abaixo,

$$\Psi(t, \xi, \phi, z) = C_{n,m} e^{-i\omega t + im\phi + ikz} \xi^{\frac{|m|}{2\alpha}} (1 - \xi)^{\frac{1}{2} \left| \frac{m}{\alpha} + 4\Omega R^2 w \right|} F\left(a, b, \frac{|m|}{\alpha} + 1, \xi\right) \quad (7.44)$$

Esses estados degenerados estão presentes para valores inteiros do parâmetro topológico α . Para valores não-inteiros, a presença desse parâmetro quebra a degenerescência dos níveis de energia. Além disso, como no problema de Landau em superfícies de curvatura constante, o espectro (7.43) tem um termo linear em n adicionado da correção quadrática introduzida pela curvatura. Esse espectro tem uma dependência análoga dos níveis de energia para os casos discutidos por Comtet e Dunne [106, 107], para o problema de interação de partículas com campos magnéticos. Daí, podermos colocar sobre uma mesma descrição a interação entre partículas carregadas e campos eletromagnéticos com a interação entre sistemas atômicos e fontes de campos gravitacionais produzidos por defeitos topológicos, como a corda cósmica da presente seção.

7.3.3 Coordenadas Hiperbólicas - $l^2 > 0$

Na presente seção abordaremos o problema de interação entre a partícula escalar e a corda cósmica na geometria hiperbólica. O espaço-tempo hiperbólico equivale a assumir $l^2 > 0$ na equação (7.1). Encontramos a seguinte métrica,

$$ds^2 = - \left(dt + \frac{\alpha \Omega r^2}{1 - l^2 r^2} d\phi \right)^2 + (1 - l^2 r^2)^{-2} (dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2) + dz^2 \quad (7.45)$$

a partir dessa métrica construímos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ dado abaixo,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{\alpha \Omega r^2}{1 - l^2 r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(-1 + l^2 r^2)^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha \Omega r^2}{1 - l^2 r^2} & 0 & \frac{\alpha^2 r^2 (1 - \Omega^2 r^2)}{(1 - l^2 r^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.46)$$

a partir dessa representação matricial, obtemos sua inversa $g^{\mu\nu}$ na forma,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Omega^2 r^2 - 1 & 0 & -\frac{\Omega(-1 + l^2 r^2)}{\alpha} & 0 \\ 0 & (-1 + l^2 r^2)^2 & 0 & 0 \\ -\frac{\Omega(-1 + l^2 r^2)}{\alpha} & 0 & \frac{(-1 + l^2 r^2)^2}{\alpha^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

segue também que o determinante do tensor $g_{\mu\nu}$ é $g = -\alpha^2 r^2 / (-1 + l^2 r^2)^2$ e como antes devemos considerar $\sqrt{-g} = \alpha r / (-1 + l^2 r^2)$. Com essas informações, encontramos que o operador D'Alambertiano \square é,

$$(l^2 r^2 - 1)^2 \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + \frac{\partial_\phi^2}{\alpha^2 r^2} + l^4 \left(\frac{\partial_\phi}{\alpha} + \frac{\Omega \partial_t}{l^2} \right)^2 r^2 - \partial_t^2 - \frac{2l^2 \partial_\phi^2}{\alpha^2} - \frac{2\Omega \partial_\phi \partial_t}{\alpha} + \partial_z^2, \quad (7.48)$$

Portanto, a equação de Klein-Gordon (7.10) juntamente com (7.16) transforma-se em,

$$\left\{ (l^2 r^2 - 1)^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) - \left(\frac{a^2}{r^2} + l^4 b^2 r^2 - \gamma' \right) \right\} \Phi(r) = 0, \quad (7.49)$$

com $a = \frac{m}{\alpha}$, $b = \frac{m}{\alpha} + \frac{\Omega w}{l^2}$ e $\gamma' = w^2 + \frac{2l^2 m^2}{\alpha^2} - \frac{2\Omega m w}{\alpha} - k^2 - M^2$. Guiados pela representação estereográfica na geometria hiperbólica escolhemos $r = \frac{\tanh(l\theta)}{l}$. Nessa

nova representação devemos considerar,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cosh^2 l\theta \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \cosh^4 l\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2l \sinh l\theta \cosh^3 l\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (7.50)$$

com isso encontramos uma nova equação,

$$\left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} + \left[\frac{2l \sinh(l\theta)}{\cosh(l\theta)} + \frac{l}{\sinh(l\theta)\cosh(l\theta)} \right] \frac{d}{d\theta} - \left[\frac{a^2 l^2 \cosh^2(l\theta)}{\sinh^2(l\theta)} + \frac{l^2 b^2 \sinh^2(l\theta)}{\cosh(l\theta)} - \gamma' \right] \right\} \Phi(\theta) = 0, \quad (7.51)$$

a partir dessa equação, impomos a mudança de variáveis $y = \cosh(l\theta)$ seguida por $\xi = y^2 - 1$. Depois de alguma álgebra obtemos,

$$\xi(1 + \xi)\Phi''(\xi) + (1 + 2\xi)\Phi'(\xi) - \left[\frac{a^2(1 + \xi)}{4\xi} + \frac{b^2\xi}{4(1 + \xi)} - \frac{\gamma'}{4l^2} \right] \Phi(\xi) = 0. \quad (7.52)$$

para os passos seguintes reescrevemos a equação acima como,

$$\Phi''(\xi) + \frac{1 + 2\xi}{\xi(1 + \xi)}\Phi'(\xi) - \left[\frac{\beta^2}{\xi^2} + \frac{\gamma^2}{(1 + \xi)^2} - \frac{\gamma'}{4l^2\xi(1 + \xi)} \right] \Phi(\xi) = 0, \quad (7.53)$$

com o uso das constantes $\beta = \frac{m}{2\alpha}$ e $\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Omega w}{l^2} \right)$. Tomando o limite $\xi \rightarrow 0$ a equação acima torna-se,

$$\Phi''(\xi) + \frac{1}{\xi}\Phi'(\xi) - \frac{\beta^2}{\xi^2}\Phi(\xi) = 0m \quad (7.54)$$

com solução dada por $\xi^{|\beta|}$, o módulo para garantir integrabilidade nesse limite. Para $\xi \rightarrow -1$ obtemos,

$$\Phi''(\xi) + \frac{1}{1 + \xi}\Phi'(\xi) - \frac{\gamma^2}{(1 + \xi)^2}\Phi(\xi) = 0, \quad (7.55)$$

com solução satisfazendo as condições de normalidade escritas na forma $(1 + \xi)^{|\gamma|}$.

Logo, nesses dois pontos críticos uma solução geral de (7.52) é dada por,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \xi^{|\beta|}(1 + \xi)^{|\gamma|}F(\xi) \\ \Phi'(\xi) &= \left(\frac{\beta}{\xi} + \frac{\gamma}{1 + \xi} \right) F(\xi) + F'(\xi) \\ \Phi''(\xi) &= \left[\frac{\beta(\beta - 1)}{\xi^2} + \frac{2\beta\gamma}{\xi(1 + \xi)} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{(1 + \xi)^2} \right] F(\xi) + \left(\frac{2\beta}{\xi} + \frac{2\gamma}{1 + \xi} \right) F'(\xi) + F''(\xi), \end{aligned} \quad (7.56)$$

substituição direta desses termos na equação (7.52) resulta,

$$\xi(1 - \xi)F''(\xi) + [2\beta + 1 - (2\beta + 2\gamma + 2)\xi]F'(\xi) - \left[\beta + 2\beta\gamma + \gamma + \frac{\gamma'}{4l^2}\right]F(\xi) = 0 \quad (7.57)$$

com os valores para β e γ dados acima, os coeficientes acima tornam-se

$$\begin{aligned} 2\beta + 1 &= \frac{m}{\alpha} + 1 & (7.58) \\ 2\beta + 2\gamma + 2 &= \frac{2|m|}{\alpha} + \frac{\Omega w}{l^2} + 2 \\ \beta + 2\beta\gamma + \gamma + \frac{\gamma'}{4l^2} &= \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{\Omega}{2l^2} \left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1 \right) + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{w^2 - M^2 - k^2}{4l^2}, \end{aligned}$$

veja que a equação (7.57) está na forma geral de uma equação hipergeométrica $x(1 - x)F''(x) + (c - (a + b + 1)x)F'(x) - abF(x) = 0$. Identificando termo a termo com a equação (7.57) obtemos o conjunto abaixo,

$$\begin{aligned} c &= \frac{m}{\alpha} + 1 & (7.59) \\ a + b + 1 &= \frac{2|m|}{\alpha} + \frac{\Omega w}{l^2} + 2 \\ ab &= \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{\Omega}{2l^2} \left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1 \right) + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{w^2 - M^2 - k^2}{4l^2}, \end{aligned}$$

das três constantes desconhecidas aparecendo na hipergeométrica geral, restam-nos determinar a e b . Para esse fim, considere o sistema de equações abaixo,

$$\begin{aligned} \underbrace{a + b + 1 = A} \quad e \quad \underbrace{ab = B} \\ a^2 - (A - 1)a + B = 0 \end{aligned} \quad (7.60)$$

que leva ao seguinte resultado para a constante a ,

$$\left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{\Omega w}{2l^2} + \frac{1}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{\Omega^2 w^2}{4l^4} + \frac{\Omega}{2l^2} \left(\frac{|m|}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \right) w + \frac{1}{4} - \frac{w^2 - k^2 - M^2}{4l^2}},$$

o problema de determinar os níveis de energia é feito assumindo $a = -n$, isto é,

$$\frac{\Omega^2 w^2}{4l^4} + \frac{\Omega}{2l^2} \left(\frac{|m|}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \right) w + \frac{1}{4} - \frac{w^2 - k^2 - M^2}{4l^2} = \left(n + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{\Omega w}{2l^2} + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (7.61)$$

resolvendo a equação resultante para w encontramos o espectro de energia para a partícula,

$$w = \left(2n + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1\right) \Omega \pm \sqrt{\left(2n + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1\right)^2 \Omega^2 - 4l^2 \left(n + \frac{|m|}{\alpha}\right) \left(n + \frac{|m|}{\alpha} + 1\right) + M^2 + k^2}. \quad (7.62)$$

como garantia de validade de nossos cálculos observe que o limite de Som-Raychaudhuri é satisfeito a partir do resultado acima tomando-se o limite $l^2 \rightarrow 0$. Novamente, como esperávamos, a dependência não-local dos níveis de energia permite fazer um teste local dos aspectos globais do espaço-tempo em consideração.

Como apontado em [103, 110], na geometria hiperbólica os níveis de energia se separam entre estados contínuos e discretos. Para estabelecer essa separação considere a equação abaixo,

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\Omega^2 - l^2}{l^4} w^2 + \frac{2\Omega}{l^2} \left(\frac{|m|}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \right) w + \frac{k^2 + M^2}{l^2} \right], \quad (7.63)$$

queremos analisar os casos nos quais $\lambda > 1$ ou $\lambda < 1$. A condição $\Omega^2 > l^2$ implica que $\lambda > 1$ e como discutido em [110] o espectro está numa região com níveis discretos. Mesmo para $\Omega^2 < l^2$ os níveis são discretos limitados superiormente pela energia,

$$w \leq \frac{\Omega^2}{l^2 - \Omega^2} \left(\frac{|m|}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \right) \pm \sqrt{\frac{\Omega^2 l^4}{(l^2 - \Omega^2)^2} \left(\frac{|m|}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} \right)^2 + \frac{l^2(k^2 + m^2)}{l^2 - \Omega^2}}, \quad (7.64)$$

e acima desse limite a região com espectro contínuo aparece. Os estados do caso hiperbólico são,

$$\psi(t, \xi, \phi, z) = C_{n,m} e^{-i\omega t + im\phi + ikz} \xi^{\frac{m}{2\alpha}} (1 + \xi)^{\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Omega w}{l^2} \right)} F \left(a, b, \frac{|m|}{\alpha} + 1, \xi \right). \quad (7.65)$$

para $0 \leq m/\alpha < \infty$, e

$$\psi(t, \xi, \phi, z) = C_{n,m} e^{-i\omega t + im\phi + ikz} \xi^{-\frac{m}{2\alpha}} (1 + \xi)^{-\frac{1}{2} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Omega w}{l^2} \right)} F \left(a, b, \frac{|m|}{\alpha} + 1, \xi \right). \quad (7.66)$$

para $-n \leq m/\alpha \leq 0$.

Esses estados discretos são limitados superiormente pela condição sobre n ,

$$\left(2n + \frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1\right) \leq \frac{\Omega}{l} \sqrt{\frac{M^2 + k^2}{l^2 - \Omega^2}} + \frac{2\Omega}{l^2} \left(\frac{|m|}{\alpha} - \frac{m}{\alpha}\right). \quad (7.67)$$

e acima desse limite estados com níveis contínuos aparecem com energia satisfazendo a equação (7.62). Para finalizar a presente seção, é importante observar que os níveis espectrais para partículas interagindo com o espaço-tempo da corda cósmica se separam, no caso quântico, em duas regiões: uma com níveis discretos associados no nível clássico com a região contendo curvas tipo-tempo fechadas e a outra com níveis contínuos, que na abordagem clássica, corresponde a região cronologicamente segura, livre de CTCs.

7.4 Conclusão

Nesse capítulo estudamos a dinâmica de uma partícula escalar na presença de espaços-tempos do tipo-Gödel. Resolvemos a equação de Klein-Gordon nas geometrias de Som-Raychaudhuri, esférica e hiperbólica, classificadas de acordo com o sinal do parâmetro l^2 . Em ambos os casos, a curvatura e a rotação do espaço-tempo representadas por α e Ω , respectivamente, são determinantes para o estudo do problema de autovalores. Particularmente, para a geometria hiperbólica a relação entre Ω e l separa os níveis de energia em discretos e contínuos, contrário aos outros dois casos, cujos níveis se classificam apenas como discretos. O estudo clássico das geodésicas e a existência de curvas tipo-tempo fechadas, nos permitiram associar a dinâmica de partículas ocorrendo em métricas do tipo-Gödel com aquelas na presença de fortes campos magnéticos.

Capítulo 8

Conclusões e Perspectivas

8.1 Considerações Finais

Estudamos nessa tese a influência dos defeitos topológicos nas dinâmicas clássicas e quânticas de partículas spinoriais e escalares. Nas geometrias da corda cósmica e do monopólo global, resolvemos as equações de Dirac e Klein-Gordon em diferentes configurações envolvendo fontes de curvatura, torção, momentos angulares e campos magnéticos. Nessas geometrias construímos os conjuntos de autovalores e autofunções dessas equações. O importante tema das interações harmônicas para partículas spinoriais e escalares também foi considerado. Nesse caso, limites não-relativísticos foram tomados e os espectros de energias e autofunções determinados exatamente. Em espaços-tempos do tipo Gödel, estudamos a dinâmica clássica e quântica de partículas escalares calculando os níveis de energia e autofunções associados.

No contexto clássico, estudamos a auto-interação eletromagnética sobre cargas elétricas e correntes produzida pela topologia do espaço-tempo. Considerando a geometria das ruas de vórtices de von Kármán, calculamos as auto-energias elétricas e magnéticas sobre as cargas e correntes, usando o fato de que o espaço-tempo das múltiplas cordas é bidimensional e, portanto, conforme ao espaço euclidiano. Essa

propriedade simplificou em muito, o cálculo da função de Green regularizada, presente nas expressões das auto-energias e nos permitiu escrever essa função em termos do fator conforme, cuja implicação foi a de caracterizar localmente os aspectos globais do espaço-tempo. Mais importantes foram o caráter repulsivo e atrativo, que surgem sobre as fontes elétricas e magnéticas, respectivamente. Dessa forma, a linha uniforme de carga elétrica, na presença da geometria de von Kármán foi repelida para o “infinito”, situação contrária para a linha de corrente, que foi magneticamente atraída por essa geometria. Por fim, analisamos o limite de um único vórtice a partir da geometria das ruas de von Kármán. Impondo-se a condição $[(a, b) \gg (x, y)]$, calculamos o fator conforme, que levou a uma nova expressão para a auto-energia. Nesse limite, o caráter repulsivo e atrativo sobre cargas elétricas e correntes foi novamente obtido.

O estudo da influência da topologia no contexto quântico, começou com o cálculo da fase de Berry adquirida por uma partícula de spin $1/2$ na presença do cone quiral. Escrevemos a equação de Dirac nesse espaço-tempo e usamos o método do fator de fase de Dirac para escrever a forma da função de onda, depois de ser transportada ao longo de uma curva C , envolvendo o cone quiral. Encontramos que a essa função de onda é adicionada de um fator fase, quando comparada com a função de onda da geometria plana. Com essa função, calculamos a conexão de Berry que, por integração ao longo de uma curva fechada envolvendo o defeito, resultou na fase de Berry. Essa fase depende das fontes de curvatura, torção e momento angular presentes na geometria do cone. Quando estabelecemos um campo magnético aplicado ao longo do eixo de simetria do cone quiral, considerado para ser o eixo z , a nova fase de Berry é adicionada de um termo associado com a contribuição Aharonov-Bohm, além daquelas já mencionadas anteriormente. Consideramos também, o transporte do spinor no espaço-tempo de múltiplos cones quirais. Nesse espaço-tempo, a fase de Berry adquirida pelo spinor foi calculada assumindo que o transporte do spinor em

torno do n -ésimo cone quiral, localizado em ρ_n , não é afetado pelos demais cones e simplesmente pelo cone, em torno do qual, o spinor é transportado. Vale mencionar que embora esse espaço-tempo seja plano localmente, seus aspectos topológicos influenciam a dinâmica local do spinor, uma vez que eles aparecem explicitamente nas expressões para as fases de Berry.

Em se tratando da importância das interações harmônicas na física, o estudo dos osciladores relativísticos de Dirac e Klein-Gordon no espaço-tempo da corda cósmica e do monopólo global, se justificam por estarmos considerando efeitos quânticos, relativísticos e topológicos a esses sistemas. Em diferentes configurações do espaço-tempo da corda cósmica, a equação de Dirac foi resolvida e seus espectros de autovalores e autofunções determinados exatamente. Na presença da corda com campo magnético, os níveis de energias apresentam uma estrutura de Landau, cuja contribuição do fluxo magnético é associada com o efeito eletromagnético Aharonov-Bohm. Nessa situação, a presença simultânea das fontes de torção, fluxo magnético e o autovalor de momento angular, nos permite arranjar esses termos de tal forma que a contribuição elástica introduzida pelo defeito seja minimizada o quanto possível, ao ponto de tornar o meio distorsido, contínuo. Finalizamos o problema com o oscilador de Dirac nas diferentes configurações da geometria da corda cósmica, estudando o limite não-relativístico dos níveis de energia e autofunções. Para o oscilador de Klein-Gordon, usamos a prescrição de Mirza/Mohadesi para incluir a interação harmônica ao operador de momento da equação de Klein-Gordon. Essa equação foi resolvida nas geometrias da corda cósmica e do monopólo global. Para a geometria cônica, o espectro de energia é formado pela adição de três termos: as energias de repouso e cinética da partícula e a energia do oscilador relativístico de Klein-Gordon. Quando da presença de campos magnéticos Φ_B e torção J , o autovalor de momento angular l é adicionado por essas quantidades. A mesma dependência sobre os parâmetros caracterizando o espaço-tempo, é observada no conjunto de autofunções dos operadores de Dirac e

Klein-Gordon. Fisicamente, os níveis de energias para o oscilador de Klein-Gordon na geometria do monopólo global, são da mesma forma que daqueles relacionados com a geometria cônica, observada a mudança entre o parâmetro α e o déficit de ângulo sólido Ω , associado com a geometria tridimensional do monopólo global.

Finalizamos nossa contribuição, estudando a dinâmica de uma partícula escalar na presença de espaços-tempos do tipo-Gödel. Dotamos esse espaço-tempo de uma corda cósmica, que adiciona curvatura a essa dinâmica, além da fonte de rotação presente do próprio espaço. Na abordagem clássica, estudamos as curvas geodésicas seguidas pela partícula, usando coordenadas cartesianas. Analisando a condição de existência de curvas tipo-tempo fechadas (CTCs), $g_{\phi\phi} = 0$, chegamos a conclusão de que tais métricas separam o espaço-tempo em regiões livre de CTCs, chamada de cavidade cronologicamente segura, e em regiões com CTCs, onde se observa a violação do princípio físico da causalidade.

No aspecto quântico, resolvemos a equação de Klein-Gordon nas geometrias cilíndrica, esférica e hiperbólica e construímos o conjunto de autovalores e autofunções assumidos pela partícula escalar. Esses três casos se distinguiram pelos possíveis valores atribuídos a l^2 na métrica geral do tipo Gödel. Para $l^2 \rightarrow 0$ temos o limite do caso plano, para valores positivos, $l^2 > 0$, temos a geometria hiperbólica e para valores negativos, $l^2 < 0$, a esférica. Nesses três casos, o conjunto de autovalores e autofunções, são dependentes do déficit angular, α , associado com a geometria cônica e do parâmetro, Ω , associado com a rotação do universo de Gödel. Na geometria esférica, caracterizada pelo raio de curvatura R , os autovalores e autofunções tornam-se aqueles do caso plano, impondo-se o limite $R \rightarrow \infty$. Para a geometria hiperbólica obtemos o limite de caso plano impondo-se a condição $l \rightarrow 0$ no conjunto de autovalores. Com relação a geometria hiperbólica, os níveis de energia se separam em discretos e contínuos. Os níveis discretos foram determinados pela condição, $l \leq \Omega$, que no movimento geodésico clássico coincide com o limite entre l e Ω que

define a região com órbitas fechadas. O outro caso, $l > \Omega$, define o espectro contínuo e está associado com o limite no qual o movimento geodésico segue órbitas abertas. Finalizamos nossa contribuição, chamando a atenção de que os resultados com as métricas do tipo-Gödel em [103, 108, 110] podem ser obtidos tomando-se o limite $\alpha = 1$ nos conjuntos de autovalores e autofunções obtidos no último capítulo dessa tese.

8.2 Perspectivas Futuras

Sempre que estudamos a influência dos defeitos topológicos a alguns sistemas físicos, cada vez mais efeitos tornam-se capazes de ser considerados, principalmente aqueles voltados para a descrição no nível quântico, na Mecânica Estatística dos Ensembles e nas propriedades magnéticas, térmicas e ópticas da matéria, nos semicondutores. Materiais como os nanotubos, fulerenos e mais recentemente o grafeno, é sem dúvida um campo ainda bastante fértil para futuros estudos. Em se tratando do grafeno, a forma bidimensional estável do carbono, propriedades como a própria estabilidade em duas dimensões, sua estrutura energética e o efeito Hall quântico, condutividade e corrente Hall, necessitam de mais esclarecimentos quanto a contribuição advinda de uma geometria curva. Há muito o que se fazer sobre a influência da topologia na física dos supercondutores, na formação dos vórtices no hélio superfluido, nas correntes de Josephson. Destacam-se também o efeito Aharonov-Bohm, níveis de Landau, espalhamentos clássicos e quânticos, correções às constantes da física, correções aos momentos magnéticos do elétron, dentre muitas outras possibilidades. Somam-se a esses efeitos a fase de Berry no limite de campos gravitacionais fracos, fases geométricas na presença de campos eletromagnéticos e de fontes de curvatura e torção dos defeitos, efeitos sobre pontos e fios quânticos.

O aparecimento dos osciladores relativísticos de Dirac e Klein-Gordon é sem

dúvida um importante campo promissor em aberto. Sobretudo, pelo amplo espectro de observáveis que podem ser estudados em espaços-tempos estáticos ou dinâmicos produzidos por defeitos topológicos. Em espaços-tempos do tipo-Gödel, efeitos clássicos e quânticos desses osciladores nunca foram estudados, tanto para partículas escalares quanto para spinores. Com o aparecimento de novas soluções da Relatividade Geral e da Teoria da Elasticidade Clássica, pode-se construir um conjunto de soluções para esses osciladores, observando quais são as correções introduzidas pela topologia dessas novas soluções. Pode-se citar também estados coerentes para esses osciladores na presença de defeitos. Adicionados a esses osciladores, encontramos na literatura o oscilador de Majorana. Notadamente, todo o desenvolvimentos com os osciladores de Dirac e Klein-Gordon, podem ser estendidos para o presente caso, no qual diferentes configurações envolvendo campos eletromagnéticos, torção e momentos angulares podem ser consideradas.

Apêndice A

Funções Especiais da Física

A.1 Função de Bessel

É comum na solução de um problema físico encontrarmos uma equação que já foi estudada anteriormente. Dependendo da simetria envolvida a equação encontrada pode ser a equação de Bessel ou a equação de Legendre, nessa ordem, quando a simetria for a cilíndrica ou a esférica, respectivamente. Em problemas que envolvem a quantização da energia, é importante que tenhamos a habilidade de escrever essas equações na forma das equações hipergeométricas, cuja exigência de normalidade das soluções exige que a série polinomial, solução da equação, seja truncada a partir de um certo inteiro não-negativo n . Feito isso, podemos expressar a energia associada ao problema físico. As mais estudadas equações aparecendo nesses problemas podem ser resumidas na tabela abaixo,

	Equação	Pontos Críticos
(a)	$x^2 F''(x) + xF'(x) + (x^2 - n^2)F(x) = 0$	$(0, \infty)$
(b)	$(1 - x^2)F''(x) - 2xF'(x) + l(l + 1)F(x) = 0$	$(-1, 1, \infty)$
(c)	$x(1 - x)F''(x) + [c - (a + b + 1)x]F'(x) - abF(x) = 0$	$(0, 1, \infty)$
(d)	$xF'''(x) + (c - x)F'(x) - aF(x) = 0$	$(0, \infty)$

Tabela A.1: Algumas funções especiais muito comuns.

Escritas nessas formas, as soluções dos problemas físicos tornam-se diretas e exatas devido ao intenso estudo dado a essas equações [111]. Por exemplo, problemas com simetria cilíndrica como aqueles relacionados com a propagação de ondas em guias de ondas estudadas no eletromagnetismo levam a equação diferencial de Bessel (a) após partirmos da equação de Helmholtz $(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$. Aplicando as condições de contorno impostas pela simetria do problema, escrevemos a solução da seguinte forma,

$$\psi = AJ_\nu(x) + BN_\nu(x) \quad (\text{A.1})$$

com $J_\nu(x)$ sendo as funções de Bessel do primeiro tipo, e $N_\nu(x)$ as de segundo tipo. Um aspecto muito importante relacionado com essas funções é que J_ν é finita na origem enquanto N_ν é divergente. Para pontos distantes da origem, essa ambiguidade não existe e nesse limite essas funções são bem comportadas [111]. Dessa forma, é comum nas soluções de problemas físicos escolhermos $B = 0$ quando a origem está envolvida pelas condições de contorno e a solução é simplesmente dada por $J_\nu(x)$. As constantes A e B aparecendo na solução são constantes de normalização para a função de onda.

A.2 Função de Legendre

A equação diferencial de Legendre (b) aparece na física nas soluções de problemas com simetria esférica. Surge principalmente nas soluções de problemas eletrostáticos tratando do cálculo do potencial associado a uma esfera condutora na presença de campos eletromagnéticos ou na solução da equação de Schrödinger em três dimensões. A solução dessa equação são os Polinômios de Legendre,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{A.2})$$

satisfazendo a seguinte propriedade,

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad \textit{ortogonalidade} \quad (\text{A.3})$$

No caso em que $m \neq 0$ a equação de Legendre passa a ser chamada de Equação Associada de Legendre assumindo a forma,

$$(1 - x^2)F''(x) - 2xF'(x) + \left[l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] F(x) = 0 \quad (\text{A.4})$$

cuja solução é conhecida como Polinômios Associados de Legendre $P_n^m(x)$

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^n \quad (\text{A.5})$$

para $m > 0$. Para valores negativos obtemos,

$$P_n^{-|m|}(x) = (-1)^m \frac{(n - |m|)!}{(n + |m|)!} P_n^{|m|}(x) \quad (\text{A.6})$$

satisfazendo

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{(n + m)!}{(n - m)!} \frac{2}{2n + 1} \delta_{nn'} \quad (\text{A.7})$$

uma consequência importante dessa propriedade é que qualquer função de quadrado integrável $f(x)$ definida no intervalo $[-1, 1]$ pode ser escrita como uma combinação dos Polinômios Associados de Legendre.

A.3 Função Hipergeométrica

Uma forma alternativa de se escrever as funções de Bessel ou Legendre é em termo das funções hipergeométricas. Chamamos de equação hipergeométrica toda equação escrita na forma,

$$x(1 - x)F''(x) + [c - (a + b + 1)x]F'(x) - abF(x) = 0 \quad (\text{A.8})$$

com a, b e c constantes satisfazendo condições específicas. Podemos escrever sua solução a partir do Método de Frobenius. O resultado é [111],

$$F(x) = 1 + \frac{a \cdot b}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a + 1)b(b + 1)}{c(c + 1)} \frac{x^2}{2!} + \dots, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{A.9})$$

com o intervalo de convergência $|x| < 1$ e $x = 1$ para $c > a + b$, $x = -1$ para $c > a + b - 1$. Em termos dos símbolos de Pochhammer,

$$F(a, b, c, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{c_n} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{A.10})$$

com $(a)_n$ dados por

$$\begin{aligned} (a)_n &= a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} \\ a_0 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Nosso foco no estudo das funções hipergeométricas é o de determinar a quantização da energia a partir da equação encontrada para o problema. Encontramos no capítulo 7 que a equação de Klein-Gordon em coordenadas esféricas e hiperbólicas resultou numa equação do tipo hipergeométrica, escrita abaixo para o caso esférico,

$$\begin{aligned} \xi(1-\xi) \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \left[\frac{|m|}{\alpha} + 1 - \left(\frac{2|m|}{\alpha} + 4\Omega R^2 w + 2 \right) \xi \right] \frac{dF}{d\xi} - \left[\frac{m^2}{\alpha^2} + \right. \\ \left. + 2\Omega R^2 \left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1 \right) w + \frac{|m|}{\alpha} - R^2(k^2 + M^2) \right] F = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

comparada para a expressão geral (A.8) identificamos que $c = |m|/\alpha + 1$, os demais termos a e b poderão ser determinados como segue. Dessas expressões obtemos a seguinte relação,

$$\begin{aligned} a + b + 1 &= A \\ ab &= B \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

com $A = \frac{2|m|}{\alpha} + 4\Omega R^2 w + 2$ e $B = \frac{m^2}{\alpha^2} + 2\Omega R^2 \left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} + 1 \right) w + \frac{|m|}{\alpha} - R^2(k^2 + M^2)$. Podemos determinar os valores de a e b separadamente isolando b na segunda equação e substituindo na primeira, resultando numa equação do segundo grau para a constante a ,

$$a^2 - (A-1)a + B = 0 \quad (\text{A.14})$$

Resolvendo essa equação encontramos a expressão para a constante a dada no sétimo capítulo. Um cálculo análogo pode ser feito para a determinação da constante b .

Com essas constantes, usamos a condição de quantização,

$$a = -n \tag{A.15}$$

Esse procedimento permite determinar o espectro de energia da partícula, conhecendo-se a equação hipergeométrica do problema nas coordenadas de interesse.

A.4 Função Hipergeométrica Confluente

Podemos escrever a equação de Bessel na forma de uma equação hipergeométrica confluyente. Isso foi possível na solução da equação de Klein-Gordon em coordenadas cilíndricas no espaço-tempo de Som-Raychaudhuri no sétimo capítulo. Uma equação hipergeométrica confluyente encontra-se escrita sob a forma,

$$xF''(x) + (c - x)F'(x) - aF(x) = 0 \tag{A.16}$$

com a e c constantes. Sua solução pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F(a, c, x) &= 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \\ M(a, c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \end{aligned} \tag{A.17}$$

com os símbolos de Pochhammer $(a)_n$ e $(c)_n$ dados acima. A série hipergeométrica confluyente converge se o termo a for igual a um inteiro negativo ou zero. Matematicamente temos,

$$a = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \tag{A.18}$$

Com essa restrição imposta sobre a ordem da série polinomial, é possível fazer a quantização da energia nos problemas estudados nos capítulos 5, 6 e 7 da presente tese.

A.5 Sobre a Representação Estereográfica

A estereografia é uma operação que representa num plano Euclidiano a superfície delimitadora de um sólido em duas ou mais dimensões, permitindo, portanto, representar pontos de uma esfera ou um hiperbolóide num plano. Nosso interesse nessa representação é o de poder relacionar efeitos físicos ocorrendo na geometria esférica e hiperbólica utilizando métricas tipo-Gödel com aqueles ocorrendo em superfícies de curvatura constante.

A.5.1 Estereografia da Esfera e do Hiperbolóide

Consideremos a esfera de raio R na figura abaixo. Sua superfície, ponto a ponto, será mapeada no plano S' tangente ao pólo norte com as coordenadas $(0, 0, R)$, a partir do pólo sul S descrito por $(0, 0, -R)$.

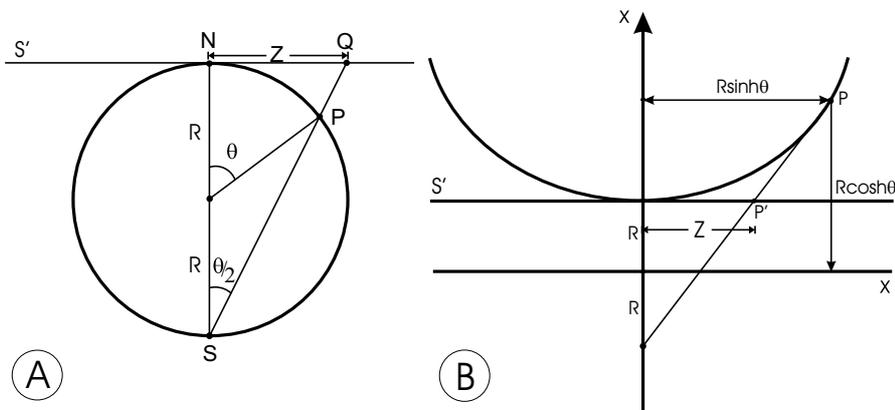


Figura A.1: Representação estereográfica das superfícies esférica e hiperbólica no plano S' a partir do ponto P pertencente às superfícies. R representa o raio de curvatura da esfera e do hiperbolóide.

Partindo desse pólo, o ponto P na superfície esférica terá sua imagem no ponto Q . Para pontos diametralmente opostos e em todos os ângulos ϕ , é possível representar toda a superfície da esfera no plano S' passando por N , com a seguinte representação

de coordenadas para P e Q ,

$$z = 2Re^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \quad e \quad \bar{z} = 2Re^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.19})$$

Para a geometria hiperbólica, a folha superior do hiperbolóide será mapeada no plano tangente S' desde o vértice da folha inferior. A figura (B) é a projeção em perfil transversal do ponto P , pertencente à folha superior do hiperbolóide, sobre o ponto P' contido no plano S' , a partir do vértice da folha inferior. As coordenadas de P e P' estão relacionadas por,

$$z = 2Re^{i\phi} \tanh \frac{\theta}{2} \quad e \quad \bar{z} = 2Re^{-i\phi} \tanh \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.20})$$

Essa representação permite relacionar o movimento de partículas em espaços-tempos descritos por métricas tipo-Gödel do Capítulo 7, com o movimento ocorrendo na presença de campos magnéticos em superfícies de curvatura constante.

Referências Bibliográficas

- [1] Sheldon L. Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1979, J. David Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley , 1987; D.A. Bromley *Gauge Theory of Weak Interactions*, Springer. (2000); Gordon L. Kane, *Modern Elementary Particle Physics*, Perseus Books (1987).
- [2] J. D. Jackson *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley) (1975).
- [3] Th. Kaluza *K. Preuss. Akad. Wiss.* **K1**, 966 (1921), O. Z. Klein, *Phys. Z.* **37**, 895 (1926).
- [4] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved spaces* Cambridge Monographs On Mathematical Physics, (1984).
- [5] G. C. McVittie, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **92**, 868 (1932), E. Schrödinger, *Physica (Amsterdam)* **6**, 899 (1932); W. Pauli, *Ann. Phys. (Leipzig)* **18**, 337 (1933).
- [6] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, England,1994).
- [7] Alexander Vilenkin, *Phys. Rev. D* **24**, 2082 (1981).
- [8] Manuel Barriola and Alexander Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 341 (1989).

- [9] Geusa de A. Marques, V. B. Bezerra, *Phys. Rev D* **66**, 105011 (2002), L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1559 (1980), L. Parker, *Phys. Rev. D* **22**, 1922 (1980): **24**, 535 (1981), L. Parker, *Gen. Relativ. Gravit.* **13**, 307 (1981), L. Parker and L. O. Pimentel, *Phys. Rev. D* **25**, 3180 (1982).
- [10] C. Furtado and E. R. B. de Mello, *Phys. Rev. D* **56**, 1345 (1997), C. Furtado, F. Moraes, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 5513 (2000).
- [11] S. Bellucci, *Physica Status Solidi* **2**, 34 (2005), N. M. R. Peres, F. Guinea and A. H. Castro Neto, *Annals of Physics* **321**, 1559 (2006).
- [12] E. S. Moreira Jr and E. S. Moreira, *Phys. Rev. D* **73**, 052105 (2006), Mark J. Bowick, David R. Nelson, A. Travesset, *Phys. Rev. B* **62**, 8738 (2000).
- [13] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999), J. Ruostekoski, J. R. Anglin, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3934 (2001).
- [14] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric phases in physics* **5**, World Scientific, Singapore (1989), Jinwu Ye, Yong Baek Kim, A. J. Millis, B. I. Shraiman, P. Majumdar, and Z. Tesanovic *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3737 (1999), Y. Q. Cai and G. Papini, *Class. Quantum Grav.* **7**, 269 (1990).
- [15] C. Furtado and F. Moraes, *Europhys. Lett.* **45**, 279 (1999), Geusa de A Marques, Cláudio Furtado, V. B. Bezerra and Fernando Moraes *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 5945 (2001), G. V. Dunne *Ann. Phys.* **215**, 233 (1992), A. Comtet *Ann. Phys.* **173**, 185 (1987), C. Furtado, B. G. C. da Cunha, F. Moraes, ERB de Mello and V. B. Bezerra *Phys. Lett. A* **195**, (90 1994).
- [16] Kieran Mullen, *Phys. Rev. D* **60**, 4334 (1999), Isumi Tanaka, *Phys. Lett. A* **277**, 262 (2000).

- [17] Francisco D. Mazzitelli, *Phys. Rev. D* **43**, 468 (1991), E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, and N. R. Khusnutdinov, *Phys. Rev. D* **60**, 063506 (1999).
- [18] A. de Padua, F. Parisio and F. Moraes, *Phys. Lett. A* **238**, 153 (1998), C. Sátiro and F. Moraes, *Eur. Phys. J. E* **25**, 425 (2008), C. Sátiro and F. Moraes, *Eur. Phys. J. E* **20**, 173 (2006).
- [19] S. Azevedo and F. Moraes, *Phys. Lett. A* **267**, 208 (2000), V. B. Bezerra and Nail R. Khusnutdinov *Phys. Rev. D* **79**, 064012 (2009), N. R. Khusnutdinov, I. V. Bakhmatov, *Gravitation and Cosmology* **14**, 100 (2008), Nail R. Khusnutdinov and Ilya V. Bakhmatov, *Phys. Rev. D* **76**, 124015 (2007).
- [20] P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **17**, 3639 (2001).
- [21] E. R. B. Mello, V. B. Bezerra and Yu V. Grats *Class. Quantum Grav.* **15**, 1915 (1998).
- [22] B. Mirza and M. Mohadesi, *Commun. Theor. Phys.* **42**, 664 (2004).
- [23] A. Rao Nagalaksmi and B. A. Kagali, *Phys. Scr.* **77**, 015003 (2008).
- [24] F. Moraes *Braz. J. Phys.* **30**, 304 (2000).
- [25] B. Linet, *Phys. Rev. D* **33**, 1833 (1986).
- [26] A. Aliev, Galt'sov, *Ann. Phys.* **193**, 142 (1989).
- [27] J. Gott, *Astrophys. J.* **288**, 422 (1985).
- [28] J. Ford, A. Vilenkin, *J. Phys. A* **14**, 2353 (1981).
- [29] D. V. Gal'tsov and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **47**, 4273 (1993).
- [30] P. S. Letelier, *Class. Quantum and Grav.* **4**, L75 (1987).

- [31] P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **17**, 3639 (2001).
- [32] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [33] M. Azreg-Ainov and G. Clement, *Class. Quantum Grav.* **13**, 2635 (1996).
- [34] M. B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, *Rep. Prog. Phys.* **58**, 477 (1995).
- [35] A. Cortijo, M.A.H. Vozmediano *Nuclear Physics B* **763**, 293 (2007).
- [36] M. O. Katanaev *Theor. Math. Phys.* **135**, 733 (2003).
- [37] C. Furtado and F. Moraes *Class. Quantum Grav.* **14**, 3425 (1997).
- [38] A. M. M. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes *Phys. Rev. D* **62**, 0675041 (2000).
- [39] C. M. DeWitt and BS DeWitt *B S Physics* **1**, 3 (1964).
- [40] A. Vilenkin *Phys. Rev. D* **20**, 373 (1979).
- [41] B. Linet *Phys. Rev. D* **33**, 1833 (1986).
- [42] A. G. Smith and CM Will *Phys. Rev. D* **22**, 1276 (1980).
- [43] T. Soraudeep and V Sahni *Phys. Rev. D* **46**, 1833 (1992).
- [44] M. E. X. Guimarães and B Linet *Class. Quantum Grav.* **10**, 166 (1993).
- [45] E. R. B. Mello, V. B. Bezerra, C. Furtado and F. Moraes *Phys. Rev. D* **51**, 7140 (1995).
- [46] E. R. B. Mello, V. B. Bezerra and Yu V. Grats *Class. Quantum Grav.* **15**, 1915 (1998).
- [47] S. Azevedo and F. Moraes *Phys. Lett. A* **246**, 374 (1998).
- [48] V. A. Lorenci, Jr E. Moreira *Phys.Rev. D* **65**, 085013 (2002).

- [49] I. V. L. Costa, F. A. Oliveira, M. E. X. Guimarães and F. Moraes *Phys. Lett. A* **351**, 216 (2006).
- [50] F. Moraes, A. M. M. Carvalho, I. V. L. Costa, F. A. Oliveira and C. Furtado *Phys. Rev. D* **68**, 043512 (2003).
- [51] A. M. M. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 2113 (2004).
- [52] V. B. Bezerra and N. R. Khusnutdinov *Phys. Rev. D* **64**, 083506 (2001).
- [53] P. S. Letelier *Class. Quantum Grav.* **12**, 471 (1995).
- [54] P. S. Letelier *Class. Quantum Grav.* **17**, 3639 (2001).
- [55] L. M. Milne-Thomson *Theoretical Hydrodynamics* (London: Macmillan) 375 (1968).
- [56] Yu Grats and A. Garcia *Class. Quantum Grav.* **13**, 189 (1996).
- [57] T. W. Kibble, *J. Phys. A* **19**, 1387 (1976).
- [58] E. R. B. Mello, V. B. Bezerra, C. Furtado and F. Moraes, *Phys. Rev. D* **51**, 12 (1994).
- [59] J. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes, to be published.
- [60] J. S. Downker, *Phys. Rev. D* **36**, 3095 (1987).
- [61] A. Vilenkin *Phys. Rep* **121**, 263 (1985).
- [62] A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **133 B** (1983); W. A. Hiscock, *Phys. Rev D* **31**, (1985); B. Linet, *Gen. Relativ. Gravit.* **17**, 1109 (1985).
- [63] B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2167 (1983).

- [64] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London A* **392**, 45 (1984).
- [65] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1593 (1987).
- [66] A. Tomita and R. Y. Chiao, *Phys Rev. Lett.* **57**, 937 (1986); R. Simon, H. J. Kimble, and E. C. G. Sudarshan, *Phys Rev. Lett.* **61**, 19 (1988).
- [67] C. Sático and F. Moraes, *Europhys. Lett.* **80**, 46002 (2007).
- [68] Y. Q. Cai and Papini, *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 1143 (1989).
- [69] Y. Q. Cai and Papini, *Class. Quantum Grav.* **7**, 269 (1990).
- [70] A. Corichi and M. Pierri, *Phys. Rev. D* **51**, 5870 (1995).
- [71] A. Mostafazadeh, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 7829 (1998).
- [72] J. G. de Assis, C. Furtado, and V. B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **62**, 045003 (2000).
- [73] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45 (1984).
- [74] Zheng-Chuan and Bo-zang Li, *Phys. Rev. A* **605**, 4313 (1999).
- [75] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.*, **5**, 3 (1960).
- [76] M. Moshinsky and Szczepaniak *J. Phys. A: Math. Gen* **22**, L817 (1989).
- [77] V. M. Villalba, A. Rincon Maggiolo, *Eur. Phys. J. B* **22**, 31 (2001).
- [78] Clara Rojas and V. M. Villalba, *Phys. Rev. A*, **71**, 052101 (2005).
- [79] Luis Gonzalez-Diaz, V. M. Villalba, *Phys.Lett. A* **352**, 202 (2006).
- [80] V. M. Villalba, Clara Rojas *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 313 (2006).
- [81] Clara Rojas, VM Villalba, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 2245 (2005).

- [82] N. Ferkous and A. Bounames, *Physics Letters A* **325**, 21 (2004).
- [83] C. Sátiro and F. Moraes, *Eur. Phys. J. E*, **25**, 425 (2008).
- [84] A. M. M. Carvalho, C. Sátiro and F Moraes, *Euro. Phys. Lett.* **80**, 46002 (2007).
- [85] C. Sátiro and F Moraes, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 25612566 (2005).
- [86] C. Sátiro, F Moraes, *Eur. Phys. J. E Soft Matter* **76**, 173 (2006).
- [87] H. Mukai, P. R. G. Fernandes, B. F. de Oliveira, and G. S. Dias, *Phys. Rev. E* **75**, 061704 (2007).
- [88] D. Ito, K. Mori, and E. Carrieri, *Nuovo Cimento A* **51**, 1119 (1967).
- [89] S. Deser and R. Jackiw, *Commun. Math. Phys.*, **118**, 495 (1988).
- [90] P. de Sousa Gerbert and R. Jackiw, *Commun. Math. Phys.*, **124**, 229 (1989).
- [91] C. Furtado, F. Moraes and V. B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **59**, 107504 (1999).
- [92] C. Furtado and F Moraes, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 5513 (2000).
- [93] C. Furtado and F Moraes, *Europhys. Lett.* **45**, 279 (1999).
- [94] S. Azevedo and F. Moraes, *Phys. Lett. A* **246**, 374 (1998).
- [95] B. Mirza and M Mohadesi, *Commun. Theor. Phys.* **42**, 664 (2004).
- [96] A. Rao Nagalaksmi and B. A. Kagali, *Phys. Scr.* **77**, 015003 (2008).
- [97] Th. Kaluza *K. Preuss. Akad. Wiss.* **K1**, 966 (1921).
- [98] O. Z. Klein, *Phys. Z.* **37**, 895 (1926).
- [99] Mustapha Azreg-Ainou and Gérard Clément, *Class. Quantum Grav.* **13**, 2635 (1996).

- [100] K. Gödel *Rev. Mod. Phys.* **21**, 447 (1949).
- [101] N. Drukker, B. Fiol and J. Simón *Phys. Rev. Lett.* **91**, 231601 (2003).
- [102] M. J. Rebouças and J. Tiomno *Phys. Rev. D* **28**, 1251 (1983).
- [103] N. Drukker, B. Fiol and J. Simón *JCAP* **0410**, 012 (2004).
- [104] J. P. Gauntlett and S. Pakis, *J. High Energy Phys.* **JHEP04**, 039 (2003).
- [105] C. A. Herdeiro, *Nucl. Phys. B* **665**, 189 (2003).
- [106] A. Comtet *Ann. Phys.* **173**, 185 (1987).
- [107] G. V. Dunne, *Ann. Phys.* **215**, 233 (1992).
- [108] M. M. Som and A. K. Raychaudhuri *Proc. R. Soc. A* **304**, 81 (1968).
- [109] M. Rooman and P. Spindel *Class. Quantum Grav.* **15**, 3241 (1998).
- [110] B. D. Figueiredo, I. D. Soares and J. Tiomno, *Class. Quantum Grav.* **9**, 1593 (1992).
- [111] George B. Arfken and Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physics*, Elsevier Academic Press (2005).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)