

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Identidades e Polinômios Centrais para Álgebras de Matrizes

por

Leomaques Francisco Silva Bernardo

sob orientação de

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Junho/2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Identidades e Polinômios Centrais para Álgebras de Matrizes

por

Leomaques Francisco Silva Bernardo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves(UFCG)

Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov(UNICAMP)

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior(UFCG)

Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática**

Junho/2009

Abstract

In this work we study polynomial identities and central polynomials for matrix algebras. More precisely, we present the description of the identities and \mathbb{Z}_n -graded and \mathbb{Z} -graded central polynomials for the algebra $M_n(K)$ (the $n \times n$ matrices over the field K) when the characteristic of K is zero. Afterwards we give the description of the ordinary (nongraded) central polynomials for the algebra $M_2(K)$, the 2×2 matrices over K , assuming the field of characteristic zero. Finally, we present two classical constructions of central polynomials for $M_n(K)$. These appeared as an answer to a problem posed by Kaplansky in 1956 about the existence of nontrivial central polynomials for that algebra.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre identidades e polinômios centrais para a álgebra das matrizes. Mais precisamente, apresentamos a descrição das identidades e polinômios centrais \mathbb{Z}_n -graduados e \mathbb{Z} -graduados para a álgebra $M_n(K)$ (matrizes $n \times n$ sobre um corpo K), quando característica de K é zero. Depois, apresentamos a descrição dos polinômios centrais ordinários para a álgebra $M_2(K)$ (matrizes 2×2 sobre K), também para um corpo de característica zero. Finalmente, apresentamos duas construções clássicas de polinômios centrais para $M_n(K)$, que surgiram como resposta a um problema sugerido por Kaplansky em 1956 sobre a existência de polinômios centrais não triviais para esta álgebra.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

A **Deus**, força maior que nos inspira e nos faz persistir diante dos obstáculos.

Aos meus pais, **Gervásio, Fátima, Antônio e Francisca**, pelo amor, educação, e anos de dedicação. Aos meus irmãos, tios, e demais familiares pelo afeto, amizade e apoio nas horas difíceis.

A minha avó, **Da. Francisca**, pelos primeiros ensinamentos, em especial, por ter me ensinado as quatro operações fundamentais.

Aos professores do DME/UFMG pela minha formação. Em especial ao Professor Daniel Cordeiro, pela orientação durante a minha graduação, o incentivo e o enorme apoio.

Ao meu orientador do Mestrado, professor Antônio Pereira Brandão, pela confiança, orientação, companheirismo, seriedade, paciência e toda a ajuda que me concedeu com o seu conhecimento matemático.

Aos professores e funcionários da Pós-Graduação em Matemática da UFMG que contribuíram direta ou indiretamente com a minha formação e para a conclusão deste trabalho.

A minha amiga, professora Marisa, pelo incentivo, a confiança, o carinho, os conselhos. És um grande exemplo a ser seguido.

Aos amigos e companheiros de Mestrado, pessoas que me encorajaram a seguir com esse e outros projetos, em especial, Reginaldo, Suene, Maria Joseane, Marília, Rivaldo e David.

Aos professores da Banca Examinadora que avaliaram o trabalho e cujas sugestões ajudaram a melhorar consideravelmente o nosso trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A todos, meu muito obrigado.

Dedicatória

Aos meus pais, Gervásio e Fátima.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Básicos	5
1.1 Álgebras	5
1.2 Identidades Polinomiais	9
1.3 Variedades e Álgebras Relativamente Livres	13
1.4 Álgebras envolventes	14
1.5 Polinômios multi-homogêneos e multilineares	16
1.6 T-espços e polinômios centrais	19
1.7 Identidades e polinômios centrais graduados	24
2 Identidades e Polinômios Centrais Graduados para a Álgebra $M_n(K)$	28
2.1 Identidades Polinomiais \mathbb{Z}_n -graduadas	28
2.2 Polinômios Centrais \mathbb{Z}_n -graduados	36
2.3 Identidades Polinomiais \mathbb{Z} -graduadas	40
2.4 Polinômios Centrais \mathbb{Z} -graduados	51
3 Polinômios Centrais para a Álgebra das matrizes de segunda ordem	57
3.1 O T -espaço $C(M_2(K))$	57
4 Construções de Polinômios Centrais para a Álgebra $M_n(K)$	66
4.1 Matrizes Genéricas	66
4.2 Construção de Formanek	68
4.3 Construção de Razmyslov	72
4.4 Construção de Latyshev e Shmelkin	77
Bibliografia	82

Introdução

A teoria das álgebras com identidades polinomiais é de grande importância na Teoria de Anéis. Uma identidade polinomial de uma álgebra A é um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula quando avaliado em quaisquer elementos de A . Dizemos que A é uma PI-álgebra quando existe um polinômio não nulo nestas condições. Podemos citar como exemplo de PI-álgebras as álgebras comutativas, as de dimensão finita e as nilpotentes. Uma vez que as identidades polinomiais dizem muito sobre a estrutura de uma álgebra, seu estudo passa a ser de grande relevância.

A teoria das álgebras com identidades polinomiais ou PI-teoria teve início com trabalhos de matemáticos como Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Dubnov e Ivanov (podemos citar como exemplos [26], [27], [37], [14]), que tratavam da estrutura de anéis (ou álgebras) que satisfazem uma identidade polinomial, e começou a se desenvolver mais intensamente por volta de 1950 quando foi provado o Teorema de Amitsur-Levitzki [10], o qual afirma que a álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K satisfaz a identidade "standard" de grau $2n$. Ao longo dos anos a PI-teoria tem sido desenvolvida e exposta através de excelentes trabalhos (artigos e livros) de matemáticos como Nagata, Higman, Posner, Amitsur, Herstein, Procesi, Rowen, Shirshov, Drensky (podemos citar como exemplos [39], [25], [42], [3], [23], [24], [43], [49], [50], [51], [13]) entre outros.

Uma das questões centrais na PI-teoria está relacionada à descrição das identidades polinomiais de uma álgebra, isto é, a determinação de uma base para o T-ideal (ideal das identidades) desta álgebra. Em 1950, Specht levantou o seguinte questionamento: "*Toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais?*". Esta pergunta ficou conhecida como Problema de Specht. Em 1987, Kemer, em seu importante trabalho ([29],[30]) sobre a estrutura dos T-ideais em característica zero, deu uma resposta afirmativa para este problema. Contudo, Kemer

não mostra como determinar uma tal base finita e portanto não resolve o problema da descrição das identidades de uma álgebra, problema este que continua em aberto até hoje, tendo sido resolvido apenas para algumas álgebras em particular.

O trabalho de Kemer sobre T-ideais tornou-se importante não somente por responder afirmativamente ao famoso Problema de Specht, mas por ter tratado das álgebras T-primas, álgebras cujos T-ideais são T-primos. Kemer mostra em seu trabalho que os únicos T-ideais T-primos não-triviais em característica zero são os T-ideais das álgebras $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$, onde E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e $M_{a,b}(E)$ é a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ que consiste das matrizes que têm na diagonal principal um bloco $a \times a$ e outro $b \times b$ com entradas em E_0 , o centro de E , e na diagonal secundária blocos com entradas em E_1 , a parte anticomutativa de E . A partir do trabalho de Kemer foi mostrado que em característica zero vale as seguintes igualdades $T(M_{a,b}(E) \otimes E) = T(M_{a+b}(E))$, $T(M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E)) = T(M_{ac+bd, ad+bc}(E))$ e $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$, onde $T(A)$ denota o T-ideal das identidades da álgebra A . Este resultado é conhecido como o Teorema do Produto Tensorial de Kemer e do qual segue que o produto tensorial $A \otimes B$ de álgebras T-primas é PI-equivalente a uma álgebra T-prima.

Ainda se conhece pouco sobre as descrições das identidades das álgebras T-primas. As identidades da álgebra de Grassmann E foram descritas em característica zero por Latyshev [35] e por Krakowski e Regev [34] (veja também o artigo [20] para as identidades de E sobre corpos infinitos de característica diferente de 2). A descrição das identidades de $M_n(K)$ é conhecida apenas no caso $n = 2$ e foi dada por Razmyslov [44] e Drensky [10], em característica zero, e por Koshlukov [31], para corpos infinitos de característica diferente de 2. No caso de K ser um corpo finito as identidades de $M_n(K)$ foram descritas por Maltsev e Kuzmin [38] no caso $n = 2$ e por Genov e Siderov quando $n = 3$ ou 4 ([18] e [19]). Em característica zero, se conhece a descrição das identidades de $E \otimes E$, e consequentemente de $M_{1,1}(E)$, o qual foi feita por Popov [41]. Vale salientar que em característica positiva ainda não se tem descrição para as identidades destas álgebras e nem é válida a igualdade $T(E \otimes E) = T(M_{1,1}(E))$.

Uma das maiores ferramentas no trabalho de Kemer foi o uso de identidades graduadas. Este tipo de identidade é uma generalização das identidades ordinárias

e tem uma estreita relação com elas. Dessa forma, as identidades graduadas têm grande importância na PI-teoria e por essa razão se tornaram objetos de estudos independentes.

As álgebras E , $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ possuem \mathbb{Z}_2 -gradações naturais e os geradores de suas identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas já são conhecidos. As identidades \mathbb{Z}_2 -graduadas de $M_2(K)$ e de $M_{1,1}(E)$ foram descritas por Di Vincenzo [9], em característica zero, e por Koshlukov e Azevedo [32], para corpos infinitos de característica diferente de 2. No caso das álgebras $M_n(K)$, as identidades \mathbb{Z} -graduadas e as \mathbb{Z}_n -graduadas foram descritas para n qualquer por Vasilovsky ([54] e [55]), em característica zero, e por Azevedo ([5] e [4]), para corpos infinitos. Apresentaremos neste trabalho a descrição das identidades \mathbb{Z} -graduadas e as \mathbb{Z}_n -graduadas para $M_n(K)$, no caso de K ser um corpo de característica zero.

Além das identidades graduadas, existem outros tipos importantes de identidades: identidades fracas, identidades traço e identidades com involução. Neste trabalho trataremos apenas de identidades fracas, os quais serão importantes para a construção de um polinômio central para a álgebra $M_n(K)$ (veja [6]) que será apresentada no último capítulo.

Um outro conceito também de grande importância na PI-teoria é o de polinômio central. Um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dito central para uma álgebra A se resulta em um elemento do centro de A quando avaliado em quaisquer elementos desta álgebra. Como exemplo de polinômios centrais podemos citar as identidades polinomiais, conhecidas por polinômios centrais triviais. Em 1956, Kaplansky [28] apresentou uma lista de problemas em aberto que motivaram diversos pesquisadores nas décadas seguintes. Um dos problemas era sobre a existência de polinômio central não trivial para a álgebra das matrizes $M_n(K)$, onde $n > 2$ (no caso $n = 2$ o polinômio de Hall $[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_4][x_1, x_2]$ já era conhecido). A solução para este problema só foi dada 1972-1973 independentemente por Formanek [15] e Razmyslov [45] (veja também [47]). Mais tarde, outros polinômios centrais para $M_n(K)$ foram construídos, veja por exemplo [22], [12] e [21].

Assim como na descrição de identidades, a descrição dos polinômios centrais de uma álgebra é uma questão de grande importância na PI-Teoria, embora ainda se conheça pouco neste sentido. No caso das álgebras $M_n(K)$, geradores dos polinômios

centrais são conhecidos apenas no caso $n = 2$, e foram determinados por Okhitin [40], quando $\text{char}K = 0$, e por Colombo e Koshlukov [8], quando K é infinito e de característica diferente de 2. Uma descrição detalhada da estrutura de módulo dos polinômios centrais para $M_2(K)$, quando $\text{char}K = 0$, pode ser vista em Formanek [16]. No caso da álgebra exterior, um estudo dos polinômios centrais é feita em [1]. Também foram descritos os polinômios centrais graduados para a álgebra $M_n(K)$, com as graduações dadas pelos grupos \mathbb{Z} e \mathbb{Z}_n . Nesta descrição as identidades \mathbb{Z} -graduadas e as \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$ representaram uma importante ferramenta.

A importância dos conceitos de identidades polinomiais e polinômios centrais e o fato de se saber pouco sobre as descrições das identidades e dos polinômios centrais da álgebra das matrizes sobre um corpo são motivações importantes para o estudo de tais polinômios. Neste trabalho nos propusemos a fazer este estudo.

O nosso trabalho está organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo são apresentados conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento do trabalho. No segundo apresentamos as descrições das identidades e polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados e \mathbb{Z}_n -graduados para a álgebra $M_n(K)$, onde K é um corpo de característica zero. Nestas descrições consideramos as graduações naturais de $M_n(K)$ pelos grupos \mathbb{Z}_n e \mathbb{Z} . No terceiro capítulo é apresentada a descrição dos polinômios centrais para a álgebra $M_2(K)$, quando $\text{char}K = 0$. Finalmente, no quarto capítulo apresentamos as construções de polinômios centrais feitas por Formanek [15] e Razmyslov [45] para a álgebra $M_n(K)$, construções que surgiram como resposta ao problema sugerido por Kaplansky e a construção dada por Latyshev e Shmelkin [36] de um polinômio central em uma variável para a álgebra $M_n(K)$, onde K é um corpo finito.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos os conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Vamos iniciar com uma discussão sobre álgebras, nosso objeto de estudo. No texto K denotará um corpo e, a menos de alguma menção em contrário, todas as álgebras e espaços vetoriais serão definidos sobre K .

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1 *Uma K -álgebra (álgebra sobre K ou simplesmente álgebra) é um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e $*$ é uma operação binária em A que é uma aplicação bilinear, ou seja, $*$: $A \times A \rightarrow A$ satisfaz*

$$(i) \quad (a + b) * c = a * c + b * c;$$

$$(ii) \quad a * (b + c) = a * b + a * c;$$

$$(iii) \quad (\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b).$$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Na definição acima, $*$ é chamado de produto ou multiplicação. Para simplificar a notação, vamos denotar uma K -álgebra $(A, *)$ por A , e escreveremos ab , ao invés de $a*b$, para $a, b \in A$. Definimos $a_1 a_2 a_3$ como sendo $(a_1 a_2) a_3$ e, indutivamente, $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$ como sendo $(a_1 a_2 \dots a_n) a_{n+1}$ para $a_i \in A$. Um subconjunto β é uma base da álgebra A se β é uma base de A como espaço vetorial. Neste caso, definimos a *dimensão* de A como sendo a dimensão do espaço vetorial A .

Definição 1.1.2 *Uma álgebra A é dita ser:*

- **associativa** se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

- **comutativa** se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.
- **unitária** (ou com unidade), se o produto possui elemento neutro, isto é, se existe um elemento $1_A \in A$ chamado de unidade de A tal que $1_A a = a 1_A = a$ para todo $a \in A$.
- **álgebra de Lie** se para quaisquer $a, b, c \in A$ valem $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (identidade de Jacobi).
- **nil** se para cada $a \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. O elemento a é chamado de nilpotente e o menor natural n com tal propriedade é denominado índice de nilpotência de a . Quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$ para todo $a \in A$, dizemos que A é nil de índice limitado.
- **nilpotente** se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que o produto de quaisquer $n + 1$ elementos de A com qualquer disposição de parênteses é igual a zero (se A é de Lie ou associativa, isto equivale a dizer que $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in A$). Neste caso, definimos o índice (ou classe) de nilpotência de A como sendo o menor n que satisfaz esta condição.

Observe que se A é uma álgebra nilpotente, então é nil de índice limitado. Claramente, uma álgebra nil não pode ter unidade.

Observação 1.1.3 Se A e B são espaços vetoriais, β uma base de A e $f : \beta \rightarrow B$ é uma aplicação qualquer, então existe uma única aplicação linear $F : A \rightarrow B$ estendendo f . Além disso, se $g : \beta \times \beta \rightarrow A$ é uma aplicação qualquer, então existe uma única aplicação bilinear $G : A \times A \rightarrow A$ estendendo g . Assim, para definir uma estrutura de álgebra em A , basta definir o produto para os elementos de uma base. Uma vez definido o produto, verifica-se que A é uma álgebra associativa se, e somente se, $(v_1 v_2) v_3 = v_1 (v_2 v_3)$ para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in \beta$. Isto deve-se ao fato de que a aplicação $h : A \times A \times A \rightarrow A$, definida por $h(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$, sendo trilinear, é nula se, e somente se, é nula em $\beta \times \beta \times \beta$.

Em praticamente todo trabalho vamos tratar de álgebras associativas com unidade. De agora em diante, a menos que seja mencionado o contrário, o termo álgebra deverá ser entendido como álgebra associativa unitária. Apresentaremos a seguir alguns exemplos importantes de álgebras.

Exemplo 1.1.4 O espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K , munido da multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade a qual é exatamente a matriz identidade I_n . Nesta álgebra é importante destacar as

matrizes unitárias E_{ij} , para $1 \leq i, j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i -ésima linha e j -ésima coluna. É fácil ver que elas formam uma base para $M_n(K)$ e portanto a dimensão desta álgebra é n^2 . Mais geralmente, se A é uma álgebra, consideremos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A . O produto em $M_n(A)$ é análogo ao produto em $M_n(K)$. Temos que $M_n(A)$, munido deste produto, é uma álgebra.

Exemplo 1.1.5 Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$. Definimos a **álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior)** de V , denotada por E , como sendo a álgebra com base

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações

$$e_i^2 = 0 \text{ e } e_i e_j = -e_j e_i \text{ para quaisquer } i, j \in \mathbb{N}.$$

Destacamos em E os seguintes subespaços vetoriais:

- E_0 , gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_m} \mid m \text{ é par}\}$
- E_1 , gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid k \text{ é ímpar}\}$

Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial. Desde que $e_i e_j = -e_j e_i$ temos $(e_{i_1} \dots e_{i_m})(e_{j_1} \dots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1} \dots e_{j_k})(e_{i_1} \dots e_{i_m})$ para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$. Observamos facilmente que se $\text{char}K = 2$, então E é uma álgebra comutativa.

Considerando E' a álgebra com base $\{e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\}$, temos que E' não tem unidade e é chamada de **álgebra exterior sem unidade**.

Se A é uma álgebra associativa e $a, b \in A$, definimos o *comutador* $[a, b] = ab - ba$ e $a \circ b = ab + ba$. Mais geralmente, definimos o *comutador de comprimento n* como sendo $[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$, onde $a_i \in A$. A partir de um cálculo direto, podemos mostrar que

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b \text{ para quaisquer } a, b, c \in A. \quad (1.1)$$

Se $a \in A$ e $T_a : A \rightarrow A$ é tal que $T_a(x) = [x, a]$, então por 1.1 segue que T_a é uma derivação. Logo, usando indução sobre n pode-se mostrar que

$$[a_1 a_2 \dots a_n, c] = \sum_{i=1}^n a_1 \dots a_{i-1} [a_i, c] a_{i+1} \dots a_n. \quad (1.2)$$

Se A é uma álgebra, V e W subespaços vetoriais de A , definimos o produto VW como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{xy \mid x \in V, y \in W\}$.

Definição 1.1.6 Um subespaço vetorial B de uma álgebra A será denominado de **subálgebra** de A se $BB \subseteq B$ e $1 \in B$. Um subespaço vetorial I de A será denominado de **ideal** de A se $AI \subseteq I$ e $IA \subseteq I$, ou seja, se $ax, xa \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.

Exemplo 1.1.7 Considere a álgebra exterior E (Exemplo 1.1.5). Dado $n \in \mathbb{N}$ consideremos o subespaço E_n de E gerado pelo conjunto

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}.$$

O subespaço E_n é uma subálgebra de E de dimensão 2^n e é a álgebra exterior do espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Exemplo 1.1.8 (Centro de uma álgebra) Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A denominada **centro** de A . Um fato conhecido da Álgebra Linear elementar é que dado $n \in \mathbb{N}$ tem-se $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n \times n} \mid \lambda \in K\}$ (matrizes escalares). Se $A = E$ (álgebra exterior), então $Z(E) = E_0$ ($\text{char}K \neq 2$).

Exemplo 1.1.9 (Subálgebra gerada) Sejam A uma álgebra e $\emptyset \neq S \subseteq A$. Consideremos o subespaço B_S de A gerado por $\{1, s_1s_2 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$. Temos que B_S é multiplicativamente fechado e $1 \in B_S$. Portanto, B_S é uma subálgebra de A , chamada de **subálgebra gerada por S** . Além disso, toda subálgebra de A que contém S deve conter B_S e assim B_S é a menor subálgebra de A contendo S .

Definição 1.1.10 Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um **homomorfismo** de álgebras se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$ e $\varphi(1_A) = 1_B$. Dizemos que φ é um **mergulho** (ou monomorfismo) se φ é um homomorfismo injetivo, **isomorfismo** se φ é bijetivo, **endomorfismo** se φ é um homomorfismo e $A = B$ e **automorfismo** se φ é um endomorfismo bijetivo (endomorfismo e isomorfismo ao mesmo tempo).

Denotamos por $\text{End}A$ e $\text{Aut}A$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A . Quando existe um isomorfismo $\psi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, o conjunto $\text{Ker}\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$, chamado de **núcleo** de φ é um ideal de A , e o conjunto $\text{Im}\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$, chamado de **imagem** de φ , é uma subálgebra de B .

Seja A uma álgebra e I um ideal de A , consideremos no espaço vetorial quociente A/I o produto $(a+I)(b+I) = ab+I$ para $a, b \in A$. Este produto está bem definido (não depende da escolha dos representantes das classes laterais) e torna A/I uma álgebra, conhecida por *álgebra quociente de A por I* . Denotaremos $a+I$ por \bar{a} . Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Se I é um ideal de A e $I \subseteq \text{Ker}\varphi$, então a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : A/I &\longrightarrow B \\ \bar{a} &\longmapsto \bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a) \end{aligned}$$

é bem definida e é um homomorfismo de álgebras. Se $I = \text{Ker}\varphi$, então $\bar{\varphi}$ é injetora e consequentemente $A/\text{Ker}\varphi \simeq \text{Im}\bar{\varphi} = \text{Im}\varphi$.

Apresentaremos a seguir alguns exemplos importantes de homomorfismos.

Exemplo 1.1.11 *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A . A aplicação $\pi : A \rightarrow A/I$, definida por $\pi(a) = \bar{a}$, é um homomorfismo de álgebras chamado de *projeção canônica*.*

Exemplo 1.1.12 *Seja A uma álgebra. Dizemos que um elemento $a \in A$ é **invertível** se existe $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Vamos denotar por $U(A)$ o conjunto dos elementos invertíveis de A . Se $r \in U(A)$, a aplicação $\xi_r : A \rightarrow A$, definida por $\xi_r(x) = r^{-1}xr$, é um automorfismo de A , chamado de **automorfismo interno determinado por r** .*

Exemplo 1.1.13 *Seja A' uma álgebra sem unidade. Consideremos o espaço vetorial*

$$A = K \oplus A' = \{(\lambda, a) \mid \lambda \in K, a \in A'\}$$

*Definimos em A o seguinte produto $(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1a_2 + \lambda_2a_1 + a_1a_2)$. O conjunto A , munido deste produto, é uma álgebra associativa com unidade (o elemento $(1, 0)$). A aplicação $\Phi : A' \rightarrow A$ definida por $\Phi(a) = (0, a)$ é um mergulho. Dizemos que A é obtida de A' por **adjunção da unidade**.*

Exemplo 1.1.14 *As álgebras E (álgebra exterior) e $K \oplus E'$ (Exemplo 1.1.13) são isomorfas, pois $\Psi : K \oplus E' \rightarrow E$, definida por $\Psi(\lambda, x) = \lambda + x$ é um isomorfismo.*

1.2 Identidades Polinomiais

Nesta seção introduziremos o conceito de Identidade Polinomial. Vamos iniciar com a definição de álgebras livres, cuja importância está no fato de ser o "ambiente" onde as identidades polinomiais aparecem.

Definição 1.2.1 *Seja \mathcal{V} uma classe de álgebras. Dizemos que uma álgebra $F \in \mathcal{V}$ é uma **álgebra livre** de \mathcal{V} se existe um subconjunto Y gerador de F tal que para toda álgebra $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ e toda aplicação $h : Y \rightarrow \mathcal{A}$ existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : F \rightarrow \mathcal{A}$ estendendo h . F é então dita ser livremente gerada por Y e a cardinalidade $|Y|$ do conjunto Y é chamada de posto de F .*

A seguir construiremos uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias. Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto não-vazio e enumerável de *variáveis* não-comutativas. Uma *palavra* em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. Vamos denotar por 1 a palavra vazia. Dizemos que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_n = j_n$. Consideremos $K\langle X \rangle$ o espaço vetorial que tem por base o conjunto de todas as palavras em X . Dessa forma, os elementos de $K\langle X \rangle$, que chamaremos de *polinômios*, são somas (formais) de termos (ou monômios) que são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X . Consideremos em $K\langle X \rangle$ a seguinte multiplicação

$$(x_{i_1} \dots x_{i_k})(x_{j_1} \dots x_{j_l}) = x_{i_1} \dots x_{i_k} x_{j_1} \dots x_{j_l} \quad \text{onde } x_{i_t}, x_{j_s} \in X.$$

O espaço vetorial $K\langle X \rangle$ munido deste produto é uma álgebra associativa (veja a Observação 1.1.3) com unidade, que é a palavra vazia. Observe que X gera $K\langle X \rangle$ como álgebra.

Proposição 1.2.2 *A álgebra $K\langle X \rangle$ é livre na classe das álgebras associativas com unidade.*

Demonstração: Sejam A uma álgebra e $h : X \rightarrow A$ uma aplicação qualquer, com $h(x_i) = a_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Da Observação 1.1.3 segue que existe uma aplicação linear $\varphi_h : K\langle X \rangle \rightarrow A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_n}$. Temos que φ_h é um homomorfismo de álgebras e é o único satisfazendo $\varphi_h|_X = h$. ■

Definição 1.2.3 *Seja A uma álgebra. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ (ou a expressão $f(x_1, \dots, x_n) = 0$) é dito ser uma **identidade polinomial** da álgebra A , se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$.*

Observemos que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é uma identidade polinomial de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $K\langle X \rangle$ em A . Denotando por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A , dizemos que A é uma

álgebra com identidade polinomial ou **PI-álgebra**¹ se $T(A) \neq \{0\}$. Se A_1 e A_2 são álgebras tais que $T(A_1) = T(A_2)$, dizemos que A_1 e A_2 são **PI-equivalentes**.

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de álgebras com identidades polinomiais.

Exemplo 1.2.4 Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio comutador $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial de A .

Exemplo 1.2.5 A álgebra de Grassmann E é uma PI-álgebra, pois o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial de E . Para ver isto, basta observar que $[a, b] \in E_0 = Z(E)$ para quaisquer $a, b \in E$.

Exemplo 1.2.6 A álgebra $M_2(K)$ satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$ conhecida como a **identidade de Hall**. De fato, basta observar que:

- (1) Se $A, B \in M_n(K)$, então $\text{tr}([A, B]) = 0$;
- (2) Se $A \in M_2(K)$ e $\text{tr}(A) = 0$, então $A^2 = \lambda I_2$ onde I_2 é a matriz identidade de $M_2(K)$.

Exemplo 1.2.7 Considere o polinômio

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo simétrico das permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ . O polinômio s_n é chamado de **polinômio standard de grau n** . Em [2] foi provado que $s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) \in T(M_n(K))$, fato conhecido por **Teorema de Amitsur-Levitzki**. Posteriormente, foram apresentadas outras demonstrações deste teorema (veja [33], [53], [46] e [48],).

Os conceitos que apresentaremos a seguir, assim como suas propriedades, são de fundamental importância na PI-teoria.

Definição 1.2.8 Um ideal I de $K\langle X \rangle$ é dito ser um **T -ideal** se $\phi(I) \subseteq I$ para todo $\phi \in \text{End}K\langle X \rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$.

Proposição 1.2.9 O conjunto $T(A)$ das identidades de uma álgebra A é um T -ideal de $K\langle X \rangle$. Reciprocamente, se I é um T -ideal de $K\langle X \rangle$, então existe alguma álgebra B tal que $T(B) = I$.

¹a sigla vem do inglês - polynomial identity.

Demonstração: É fácil ver que $T(A)$ é um ideal de $K\langle X \rangle$. Sejam $f(x_1, \dots, x_n) \in T(A)$ e $\varphi \in \text{End}K\langle X \rangle$, arbitrários. Se $\psi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ é um homomorfismo qualquer, então $\psi(\varphi(f)) = (\psi \circ \varphi)(f) = 0$, pois $\psi \circ \varphi : K\langle X \rangle \rightarrow A$ é um homomorfismo de álgebras e $f \in T(A)$. Daí, $\varphi(f) \in \text{Ker}(\psi)$ e portanto $\varphi(f) \in T(A)$.

Seja I um T -ideal de $K\langle X \rangle$. Tomemos a álgebra quociente $B = K\langle X \rangle/I$ e a projeção canônica $\pi : K\langle X \rangle \rightarrow K\langle X \rangle/I$. Se $f \in T(B)$, então $f \in \text{Ker}(\pi)$. Como $\text{Ker}(\pi) = I$, temos $T(B) \subseteq I$. Por outro lado, se $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$, então $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ e daí $f(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, \dots, g_n)} = \overline{0}$. Logo, $f \in T(B)$, o que conclui a demonstração. ■

Não é difícil ver que a intersecção de uma família qualquer de T -ideais é ainda um T -ideal. Segue então a seguinte definição.

Definição 1.2.10 *Seja S um subconjunto de $K\langle X \rangle$. Definimos o **T -ideal gerado por S** , denotado por $\langle S \rangle^T$, como sendo a intersecção de todos os T -ideais de $K\langle X \rangle$ que contém S . Dessa forma, $\langle S \rangle^T$ é o menor T -ideal contendo S .*

Do ponto de vista prático, o T -ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X \rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle\}.$$

Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S \rangle^T$ dizemos que S é uma **base das identidades** de A . Se um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in \langle S \rangle^T$ dizemos que f segue de S , ou que f é uma consequência de S .

Um dos problemas centrais da PI-teoria é encontrar, para uma dada álgebra, bases para suas identidades polinomiais. Sendo A uma álgebra, caso $T(A)$ possua uma base finita e todo T -ideal I com $I \supseteq T(A)$ também tem base finita, dizemos que A satisfaz a **propriedade de Specht** (W. Specht). A questão da existência da base finita para as identidades das álgebras associativas sobre corpos de característica zero é conhecida como **problema de Specht** e, em [30], Kemer deu uma resposta positiva para esta questão.

Vejamos agora alguns exemplos de bases de identidades de algumas álgebras importantes.

Exemplo 1.2.11 Se A é uma álgebra comutativa com unidade e K é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$. Dizemos então que todas as identidades de \mathcal{A} seguem (ou são consequências) do polinômio $[x_1, x_2]$.

Exemplo 1.2.12 Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ (veja [34] e [20]). No caso de K ser finito Stojanova-Venkova [52] descreveu as identidades da álgebra exterior não-unitária e de dimensão finita e Siderov [7] descreveu as identidades quando a dimensão é infinita.

Exemplo 1.2.13 Em 1973, Razmyslov [44] provou que $T(M_2(K))$ é finitamente gerado para $\text{char}K = 0$, determinando uma base com 9 identidades. Posteriormente, Drensky [10] mostrou que $T(M_2(K)) = \langle s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3] \rangle^T$, também quando $\text{char}K = 0$. Em 2001, Koshlukov [31] generalizou este resultado de Drensky para K infinito de característica diferente de 2 e 3. Quando $\text{char}K = 3$, uma terceira identidade é necessária para gerar o T -ideal (veja [8]). Para $\text{char}K = 2$, o problema da descrição de $T(M_2(K))$ ainda está em aberto.

1.3 Variedades e Álgebras Relativamente Livres

Apresentaremos nesta seção um breve estudo sobre variedades de álgebras e álgebras relativamente livres.

Definição 1.3.1 Seja S um subconjunto de $K\langle X \rangle$. A classe \mathcal{B} de todas as álgebras que têm todos os polinômios de S como identidades é chamada de **variedade** (de álgebras associativas) definida por S . A **variedade trivial** é a classe de álgebras que contém apenas a álgebra nula (isto é, é a variedade cujo conjunto de identidades que a definem é $K\langle X \rangle$).

Se \mathcal{B} é uma classe de álgebras, seja $T(\mathcal{B})$ a interseção de todos os T -ideais $T(A)$ com $A \in \mathcal{B}$. A variedade de álgebras definida por $T(\mathcal{B})$ é chamada de **variedade gerada por \mathcal{B}** e denotada por $\text{var}\mathcal{B}$. Se $\mathcal{B} = \{R\}$, então denotamos $\text{var}\mathcal{B}$ simplesmente por $\text{var}R$. Observe que a variedade definida por S é igual à variedade definida por $\langle S \rangle^T$.

Teorema 1.3.2 (Birkhoff) Uma classe não-vazia de álgebras \mathcal{B} é uma variedade se, e somente se, é fechada a produtos diretos, subálgebras e álgebras quocientes.

Demonstração: Veja [13], página 24. ■

Definição 1.3.3 Seja \mathcal{V} uma variedade de álgebras. Para um conjunto fixo Y , a álgebra $F \in \mathcal{V}$ é uma **álgebra relativamente livre de \mathcal{V}** , se F é livre na classe \mathcal{V} (livremente gerada por Y , veja definição 1.2.1). A cardinalidade de Y é chamada o **posto de F** .

Teorema 1.3.4 *Toda variedade \mathcal{V} (não-trivial) possui alguma álgebra relativamente livre. Além disso, duas álgebras relativamente livres de mesmo posto em \mathcal{V} são isomorfas.*

Demonstração: Seja $T(\mathcal{V}) = \bigcap_{R \in \mathcal{V}} T(R)$ e considere $\pi : K\langle X \rangle \longrightarrow K\langle X \rangle/T(\mathcal{V})$ a projeção canônica. Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos de X tais que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Consideremos uma álgebra não-nula A de \mathcal{V} e um elemento não-nulo $a \in A$. Então existe um homomorfismo $\psi : K\langle X \rangle \longrightarrow A$ tal que $\psi(x_1) = a$ e $\psi(x_2) = 0$. Como $T(\mathcal{V}) \subseteq \text{Ker}\psi$, existe um homomorfismo $\phi : K\langle X \rangle/T(\mathcal{V}) \longrightarrow A$ tal que $\phi \circ \pi = \psi$. Mas, $a = \psi(x_1) = (\phi \circ \pi)(x_1) = (\phi \circ \pi)(x_2) = \psi(x_2) = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\pi|_X$ é injetora e portanto $\pi(X)$ é enumerável.

A álgebra $K\langle X \rangle/T(\mathcal{V})$ é gerada pelo conjunto $\pi(X)$ e pertence a \mathcal{V} , pois satisfaz todas as identidades de $T(\mathcal{V})$. Vamos mostrar que esta álgebra é livre em \mathcal{V} , com conjunto gerador livre $\pi(X)$. Sejam $A \in \mathcal{V}$ e σ uma aplicação de $\pi(X)$ em A . Como $K\langle X \rangle$ é a álgebra livre com conjunto gerador X , a aplicação $\sigma \circ \pi : X \longrightarrow A$ estende-se a um homomorfismo $\theta : K\langle X \rangle \longrightarrow A$. Existe um homomorfismo $\rho : K\langle X \rangle/T(\mathcal{V}) \longrightarrow A$ para o qual $\rho \circ \pi = \theta$, pois $T(\mathcal{V}) \subseteq \text{Ker}\theta$. Se $x \in X$, temos que $\rho(\pi(x)) = (\rho \circ \pi)(x) = \theta(x) = (\sigma \circ \pi)(x) = \sigma(\pi(x))$, ou seja, o homomorfismo ρ estende a aplicação σ . Portanto, $K\langle X \rangle/T(\mathcal{V})$ é uma álgebra livre na variedade \mathcal{V} .

Suponhamos agora F_1 e F_2 álgebras relativamente livres de mesmo posto em \mathcal{V} . Sendo F_1 e F_2 livremente geradas por Y_1 e Y_2 respectivamente, tomemos uma bijeção $g : Y_1 \longrightarrow Y_2$. Temos então que existem homomorfismos de álgebras $\varphi_1 : F_1 \longrightarrow F_2$ e $\varphi_2 : F_2 \longrightarrow F_1$ estendendo g e g^{-1} , respectivamente. Logo, $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(y) = y$ e $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(z) = z$, para quaisquer $y \in Y_1$ e $z \in Y_2$. Segue então que $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \text{Id}_{F_1}$ e $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \text{Id}_{F_2}$, e portanto φ_1 e φ_2 são isomorfismos. ■

As idéias de variedades e álgebras livres são na verdade mais gerais do que acabamos de apresentar. Para mais detalhes, veja [13], Seções 1.2, 1.2 e 2.3.

1.4 Álgebras envolventes

Seja A uma álgebra associativa. Considere em A o produto $[a, b] = ab - ba$, para $a, b \in A$. Com este produto temos em A uma nova estrutura de álgebra, que denotaremos por $A^{(-)}$. Como $[a, a] = 0$ e $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ (identidade

de Jacobi) para quaisquer $a, b, c \in A$, segue que $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie. Se uma álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que A é uma *álgebra envolvente de L* .

Exemplo 1.4.1 *Seja L uma álgebra de Lie com base $\{u, v\}$ tal que $u * v = v$. A álgebra $M_2(K)$ é uma álgebra envolvente de L , pois o subespaço vetorial V de $M_2(K)$ gerado por $\{E_{11}, E_{12}\}$ é uma subálgebra de $M_2(K)^{(-)}$ e a aplicação linear $\varphi : L \rightarrow V$ que satisfaz $\varphi(u) = E_{11}$ e $\varphi(v) = E_{12}$ é um isomorfismo de álgebras.*

Definição 1.4.2 *Seja L uma álgebra de Lie. Diz-se que uma álgebra associativa U é uma **álgebra universal envolvente de L** , e denotamos por $U = U(L)$, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa R e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \rightarrow R^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \rightarrow R$ que estende φ , ou seja, tal que $\psi|_L = \varphi$.*

Os teoremas que serão apresentados a seguir nos ajudarão a determinar uma base de $K\langle X \rangle$.

Teorema 1.4.3 (Poincaré, Birkhoff, Witt) *Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismos) álgebra universal envolvente $U(L)$. Se L tem uma base $\{e_i \mid i \in I\}$ onde o conjunto de índices I é ordenado, então $U(L)$ tem uma base dada por*

$$e_{i_1} \dots e_{i_p}, \quad i_1 \leq \dots \leq i_p, \quad i_k \in I, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

onde $p = 0$ nos dá a unidade de $U(L)$.

Demonstração: Veja [13], página 11. ■

Sendo $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, consideremos

$$ComX = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] \mid k \geq 2, x_{i_j} \in X\}.$$

Sejam $B(X)$ a subálgebra (com unidade) de $K\langle X \rangle$ gerada por $ComX$ e $L(X)$ o subespaço vetorial de $K\langle X \rangle$ gerado por $X \cup ComX$. Os polinômios de $B(X)$ são chamados de *polinômios próprios*. Consideremos agora a álgebra de Lie $K\langle X \rangle^{(-)}$. Mostra-se que se $u, v \in X \cup ComX$, então $[u, v] \in L(X)$. Portanto, $L(X)$ é uma subálgebra de Lie de $K\langle X \rangle^{(-)}$.

Teorema 1.4.4 (Witt) $U(L(X)) = K\langle X \rangle$.

Demonstração: Veja [13], página 14, teorema 1.3.5. ■

Pode ser demonstrado que a álgebra $L(X)$ é livre na classe das álgebras de Lie. De fato, sejam L uma álgebra de Lie e $h : X \rightarrow L$ uma aplicação qualquer. Por $K\langle X \rangle$ ser livremente gerada por X , existe um homomorfismo $\varphi : K\langle X \rangle \rightarrow U(L)$ estendendo h . Temos que $\varphi([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]) = [\varphi(x_{i_1}), \varphi(x_{i_2}), \dots, \varphi(x_{i_k})]$ para $k \geq 2$, e assim $\varphi(L(X)) \subseteq L$. além disso, é imediato ver que se $f_1, f_2 \in L(X)$, então $\varphi([f_1, f_2]) = [\varphi(f_1), \varphi(f_2)]$. Logo, $\varphi|_{L(X)} : L(X) \rightarrow L$ é um homomorfismo de álgebras de Lie que estende h . Dizemos então que $L(X)$ é uma *álgebra de Lie livre, livremente gerada por X* .

Consideremos agora uma base ordenada de $L(X)$ consistindo dos elementos

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, u_1, u_2, \dots, u_m, \dots$$

onde $\{u_1, u_2, \dots\} \subseteq \text{Com}X$ é uma base de $[L(X), L(X)]$, o subespaço vetorial de $L(X)$ gerado por $\text{Com}X$. Dos teoremas 1.4.3 e 1.4.4 segue que $K\langle X \rangle$ possui uma base formada pelos elementos

$$x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_k}^{n_k} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_q}, \quad k, q, n_i \geq 0 \quad (1.3)$$

onde $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_q$. Note que os elementos com $k = 0$ formam uma base para $B(X)$ e que se $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$, então

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_a \alpha_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} g_a, \quad (1.4)$$

onde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \geq 0$, $\alpha_a \in K$ e $g_a \in B(X)$. Além disso, pela independência dos elementos em 1.3, temos esta maneira de se expressar f única.

1.5 Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Definição 1.5.1 *Sejam $m \in K\langle X \rangle$ um monômio e $x_i \in X$. Definimos o **grau** de x_i em m , denotado por $\text{deg}_{x_i} m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m . Um polinômio $f \in K\langle X \rangle$ é dito **homogêneo** em x_i se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i . f é dito **multi-homogêneo** quando é homogêneo em todas as variáveis e é **multilinear** se é multi-homogêneo em cada monômio e cada variável tem grau exatamente 1.*

Se $m = m(x_1, x_2, \dots, x_k)$ é um monômio de $K\langle X \rangle$, o **multigrau** de m é a k -upla (a_1, a_2, \dots, a_k) onde $a_i = \deg_{x_i} m$. A soma de todos os monômios de $f \in K\langle X \rangle$ com um dado multigrau, é dito ser uma **componente multi-homogênea** de f . Notemos ainda que $f \in K\langle X \rangle$ é multi-homogêneo se, e somente se, possui uma única componente multi-homogênea. Além disso, $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle$ é multilinear se é multi-homogêneo com multigrau $(1, 1, \dots, 1)$. Neste caso, f tem a forma

$$\sum_{\sigma \in S_k} a_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(k)}, \quad a_{\sigma} \in K.$$

Os próximos resultados nos darão uma importante ferramenta no trabalho de determinar geradores para T-ideais sobre determinados tipos de corpos.

Proposição 1.5.2 *Sejam I um T-ideal de $K\langle X \rangle$ e $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in I$. Se K é infinito então cada componente multi-homogênea de f pertence a I . Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.*

Demonstração: Seja n o maior grau em x_1 de algum monômio de f . Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, consideremos $f_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$ como sendo a soma de todos os monômios que têm grau i em x_1 (a componente de grau i em x_1). Temos claramente que $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$. Como K é infinito, podemos escolher $n + 1$ elementos distintos $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in K$. Para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$ temos $g_j = f(\alpha_j x_1, x_2, \dots, x_k) = f_0 + \alpha_j f_1 + \dots + \alpha_j^n f_n$ e assim

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Observe que $g_0, g_1, \dots, g_n \in I$, pois I é um T-ideal. Além disso, a primeira matriz na igualdade anterior é uma matriz de Vandermonde invertível. Logo, devemos ter $f_0, f_1, \dots, f_n \in I$.

Agora, para cada $i = 0, 1, \dots, n$ e cada $t = 0, 1, 2, \dots$, tomemos f_{i_t} como sendo a componente homogênea em f_i de grau t em x_2 . Usando então os mesmos argumentos anteriores, concluímos que $f_{i_t} \in I$ e assim, repetindo o processo para cada variável, temos a primeira afirmação. Finalmente, observando que f é a soma de suas

componentes multi-homogêneas, concluímos que I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos. ■

Proposição 1.5.3 *Se I é um T -ideal de $K\langle X \rangle$ e $\text{char}K = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.*

Demonstração: Como $\text{char}K = 0$, temos que K é infinito e portanto, pela proposição 1.5.2, podemos assumir que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$ é um polinômio multi-homogêneo. Seja $n = \text{deg}_{x_1} f$. Tomando y_1 e y_2 variáveis de X distintas de x_1, x_2, \dots, x_n , consideremos o polinômio $h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n)$. Sendo $h_1(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)$ a componente homogênea de $h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)$ de grau 1 em y_1 , temos que $\text{deg}_{y_2} h_1 = n - 1$ e que $h_1(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) = nf(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Por $\text{char}K = 0$, segue que f é consequência de $h_1(y_1, y_2, \dots, x_n)$. Notemos que $\text{deg}_{y_2} h_1 = n - 1$ e assim, caso seja necessário, continuamos o processo para as variáveis y_2, x_2, \dots, x_n em h_1 . Continuando com este processo (chamado de *processo de linearização*), concluímos que f é consequência de algum polinômio multilinear de I e assim segue o resultado. ■

Proposição 1.5.4 *Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito, então todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias (ou seja, daquelas em $T(A) \cap B(X)$). Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo de característica 0, então todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias multilineares.*

Demonstração: Seja $f(x_1, \dots, x_m)$ uma identidade polinomial de A . Como K é infinito, podemos assumir que f é multi-homogênea. Utilizando 1.4, vamos escrever f da seguinte forma:

$$f = \sum \alpha_a x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \dots, x_m), \quad \alpha_a \in K,$$

onde $\omega_a(x_1, \dots, x_m) \in B(X)$ e a soma é feita sobre todas as m -uplas $a = (a_1, \dots, a_m)$ tais que $a_i \leq \text{deg}_{x_i} f$, $1 \leq i \leq m$. Definimos então o conjunto

$$M(f) = \{M_1, \dots, M_l\} = \{a \mid a = (a_1, \dots, a_m) \text{ e } \alpha_a \neq 0\},$$

onde $M_1 > \dots > M_l > 0$. A demonstração da proposição segue da seguinte afirmação:

Se $f \in T(A)$ e f é multi-homogênea, então

$$g_j = \sum_{a_1=M_j} \alpha_a x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \dots, x_m) \in T(A)$$

para $j = 1, 2, \dots, l$.

Demonstremos esta afirmação. É fácil ver que $\omega_a(x_1 + 1, x_2, \dots, x_m) = \omega_a(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Como $f(x_1 + 1, x_2, \dots, x_m)$ também é identidade polinomial de A , concluímos que

$$f(x_1 + 1, x_2, \dots, x_m) = \sum \alpha_a \sum_{i=0}^{a_1} \binom{a_1}{i} x_1^i x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \dots, x_m) \in T(A).$$

Como f é multi-homogênea, $a_1 + \deg_{x_1} \omega_a(x_1, x_2, \dots, x_m) = \deg_{x_1} f$ e assim a componente homogênea de $f(x_1 + 1, \dots, x_m)$ com menor grau possível em relação a x_1 se obtém quando $a_1 = M_1$ e é dada por

$$\sum_{a_1=M_1} \alpha_a x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \dots, x_m), \quad (1.5)$$

onde o sub-índice do somatório indica que a soma é feita sobre todos os $a = (a_1, \dots, a_m)$ onde $a_1 = M_1$. Como o corpo é infinito, da proposição 1.5.2, segue que o polinômio 1.5 pertence a $T(A)$. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $j = 1, 2, \dots, k$, onde k é um número natural menor que l . Subtraindo $x_1^{M_1} g_1 + x_2^{M_2} g_2 + \dots + x_k^{M_k} g_k$ de $f(x_1, \dots, x_m)$ obtemos

$$h(x_1, \dots, x_m) = \sum_{a_1 > M_k} \alpha_a x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \dots, x_m) \in T(\mathcal{A}).$$

É claro que $M(h) = \{M_{k+1}, \dots, M_l\}$ e aplicando os mesmos argumentos anteriores a este polinômio, concluímos que

$$\sum_{a_1=M_{k+1}} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \dots, x_m) \in T(A)$$

o que prova a afirmação. ■

1.6 T-espacos e polinômios centrais

Definição 1.6.1 *Sejam A uma álgebra e $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$. Dizemos que f é um polinômio central para A se f tem termo constante nulo e $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$*

Conforme esta definição, dizer que f é um polinômio central para A significa dizer que $[f, g]$ é uma identidade de A para todo polinômio $g \in K\langle X \rangle$. Logo, se duas álgebras são PI-equivalentes, então elas têm os mesmos polinômios centrais.

Exemplo 1.6.2 *Seja A uma álgebra, toda identidade de A é um polinômio central para A . As identidades são ditas **polinômios centrais triviais**.*

Exemplo 1.6.3 *O polinômio $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$ (polinômio de Hall) é um polinômio central para a álgebra $M_2(K)$. Conforme veremos no capítulo 3, Okhitin [40] descreveu os polinômios centrais para a álgebra $M_2(K)$, no caso de $\text{char}K = 0$. Posteriormente, Colombo e Koshlukov [8] generalizaram esta descrição para o caso de K ser infinito e de característica diferente de 2. Veremos também, no capítulo 4, algumas construções de polinômios centrais para $M_n(K)$ as quais estão nos artigos [15], [45] e [36].*

Exemplo 1.6.4 *Seja E a álgebra exterior sobre um corpo K . Temos que $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é um polinômio central para E . Caso $\text{char}K = p$, segue que $g(x) = x^p$ é um polinômio central para E . Apresentaremos mais adiante a descrição dos polinômios centrais para E quando $\text{char}K = 0$.*

Definição 1.6.5 *Um subespaço V de $K\langle X \rangle$ é um T-espaço se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo $\varphi \in \text{End}K\langle X \rangle$*

Proposição 1.6.6 *Um subespaço V de $K\langle X \rangle$ é um T-espaço se, e somente se, $f(g_1, \dots, g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in V$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$.*

Demonstração: Sabemos que dado um subconjunto $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, existe um único endomorfismo φ de $K\langle X \rangle$ tal que $\varphi(x_i) = f_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Suponhamos que V seja um T-espaço de $K\langle X \rangle$. Dados $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$, existe um endomorfismo φ de $K\langle X \rangle$ tal que $\varphi(x_i) = g_i$, para $i = 1, \dots, n$, e $\varphi(x_i) = 0$, caso contrário. Logo, por V ser um T-espaço, $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = f(g_1, \dots, g_n) \in V$, para qualquer $f(x_1, \dots, x_n) \in V$. Por outro lado, suponhamos que $f(g_1, \dots, g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in V$ e $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$. Se $\varphi \in \text{End}K\langle X \rangle$, então $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \in V$, pois $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n) \in K\langle X \rangle$. ■

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de T-espaços importantes.

Exemplo 1.6.7 *Todo T-ideal de $K\langle X \rangle$ é um T-espaço.*

Exemplo 1.6.8 *Sejam A uma álgebra e W um subespaço de A . O conjunto*

$$\mathcal{L} = \{f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle \mid f(a_1, \dots, a_n) \in W \text{ para } a_1, \dots, a_n \in A\}$$

é um T -espaço de $K\langle X \rangle$. Destacamos o caso particular $W = Z(A)$, no qual está nosso maior interesse. Daí, temos o T -espaço

$$\{f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle \mid f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A) \text{ para } a_1, \dots, a_n \in A\}$$

*que é conhecido por **espaço dos polinômios centrais** de A e denotado por $C(A)$. Por $Z(A)$ ser uma subálgebra de A , temos que $C(A)$ é multiplicativamente fechado, condição que nem todo T -espaço satisfaz.*

É importante observar que os elementos de $C(A)$ são da forma $h + c$, onde h é um polinômio central (de acordo com a definição 1.6.1), e c é uma constante. Além disso, o conjunto dos polinômios centrais de uma álgebra pode não ser um T -espaço. De acordo com o exemplo 1.6.4, no caso $\text{char}K = p$, vimos que $g(x) = x^p$ é um polinômio central para E . Entretanto, $g(x + 1) = x^p + 1$ tem termo constante não-nulo e não é central.

É fácil ver que a interseção e a soma de uma família de T -espaços ainda são T -espaços. De maneira análoga a definição de T -ideal gerado por um conjunto, temos o de T -espaço gerado. Dado um subconjunto S de $K\langle X \rangle$, definimos o *T -espaço gerado por S* como sendo a interseção de todos os T -espaços que contêm S , ou seja, o *menor T -espaço* de $K\langle X \rangle$ que contém S . O próximo resultado nos dá uma importante caracterização do T -espaço gerado por um conjunto.

Proposição 1.6.9 *Se $S \subseteq K\langle X \rangle$ e V é o T -espaço de $K\langle X \rangle$ gerado por S , então V é o subespaço de $K\langle X \rangle$ gerado por*

$$\{f(g_1, \dots, g_n) \mid f \in S, g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle\}.$$

Demonstração: Notemos inicialmente que este conjunto é exatamente igual a

$$(EndK\langle X \rangle)S = \{\varphi(f) \mid f \in S, \varphi \in EndK\langle X \rangle\}.$$

Consideremos V_1 como sendo o subespaço de $K\langle X \rangle$ gerado por $(EndK\langle X \rangle)S$. Como $S \subseteq V$ e V é um T -espaço, temos que $\varphi(f) \in V$, onde $f \in S$ e $\varphi \in EndK\langle X \rangle$, ou seja, $(EndK\langle X \rangle)S \subseteq V$. Logo, $V_1 \subseteq V$. Observemos agora que $\psi(g) \in (EndK\langle X \rangle)S$ quaisquer que sejam $\psi \in EndK\langle X \rangle$ e $g \in (EndK\langle X \rangle)S$. Logo, V_1 é um T -espaço de $K\langle X \rangle$. Além disso, $S \subseteq V_1$ e por V ser o T -espaço gerado por S , segue que $V \subseteq V_1$. Portanto, $V = V_1$. ■

Observação 1.6.10 De acordo com as proposições 1.5.2 e 1.5.3 todo T -ideal é gerado por seus polinômios multi-homogêneos caso o corpo base seja infinito e por seus polinômios multilineares quando o corpo base tem característica zero. Analogamente, mostra-se que todo T -espaço é gerado por seus polinômios multilineares no caso do corpo base ter característica zero e por seus polinômios multi-homogêneos no caso do corpo base ser infinito.

A seguir veremos alguns exemplos importantes.

Exemplo 1.6.11 Consideremos $M_2(K)$ a álgebra das matrizes de ordem sobre K , onde K denota um corpo de característica diferente de 2. Seja

$$V = \{f(x_1, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle \mid \text{tr}(f(A_1, \dots, A_k)) = 0 \text{ para } A_1, \dots, A_k \in M_2(K)\}.$$

Notemos que V é um T -espaço de $K\langle X \rangle$ e que $V \cap C(M_2(K)) = T(M_2(K))$. De fato, é imediato que $T(M_2(K)) \subseteq V$ e $T(M_2(K)) \subseteq C(M_2(K))$, de onde segue que $T(M_2(K)) \subseteq V \cap C(M_2(K))$. Sejam $f(x_1, \dots, x_k) \in V \cap C(M_2(K))$ e $A_1, \dots, A_k \in M_2(K)$. Logo, por $f(x_1, \dots, x_k) \in C(M_2(K))$, temos

$$f(A_1, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in K.$$

Por outro lado, $f(x_1, \dots, x_k) \in V$, isto é, $\text{tr}(f(A_1, \dots, A_k)) = 2\lambda = 0$. Mas $\text{char}K \neq 2$, de onde segue que $\lambda = 0$. Portanto, $f(x_1, \dots, x_k) \in T(M_2(K))$. Sendo assim, $V \cap C(M_2(K)) = T(M_2(K))$.

O T -espaço V não é multiplicativamente fechado, pois $[x_1, x_2]^2 \notin V$. Basta considerarmos $x_1 = E_{12} - E_{21}$ e $x_2 = E_{22}$.

Exemplo 1.6.12 Seja V o T -espaço de $K\langle X \rangle$ gerado por $[x_1, x_2]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Da igualdade (1.1) temos

$$[[x_1, x_2]x_4, x_3] = [x_1, x_2][x_4, x_3] + [x_1, x_2, x_3]x_4$$

e

$$[x_1, x_2, x_3x_4] = x_3[x_1, x_2, x_4] + [x_1, x_2, x_3]x_4.$$

Da primeira igualdade segue que $[x_1, x_2, x_3]x_4 \in V$ e da segunda obtemos

$$x_3[x_1, x_2, x_4]x_5 = [x_1, x_2, x_3x_4]x_5 - [x_1, x_2, x_3]x_4x_5.$$

Sendo assim, $x_3[x_1, x_2, x_4]x_5 \in V$ e portanto o T -ideal $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T \subseteq V$. Usando agora a igualdade (1.2), concluímos que

$$[[x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}], x_2] \in \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$$

para todo $n \geq 3$. Dessa forma, como

$$[x_1[x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}], x_2] = [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] + x_1[[x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}], x_2]$$

temos que $[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] \in V$ e portanto V é multiplicativamente fechado.

Mostraremos agora que, no caso de $\text{char}K = 0$, $C(E) = V$ (E é a álgebra de Grassmann). Como $[x_1, x_2]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ são polinômios centrais para E , temos $V \subseteq C(E)$. Além disso, $T(E) \subseteq V$, pois $T(E)$ é exatamente igual ao T -ideal $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. Consideremos agora $f(x_1, \dots, x_k) \in C(E)$ multilinear. Logo,

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}, \quad a_\sigma \in K.$$

Para todo $\sigma \in S_k$, temos

$$x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)} = x_1 x_{\sigma(i+1)} \dots x_{\sigma(k)} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)} + [x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(i-1)}, x_1 x_{\sigma(i+1)} \dots x_{\sigma(k)}],$$

onde $\sigma(i) = 1$. Dessa forma, $f(x_1, \dots, x_k) \equiv x_1 g(x_2, \dots, x_k) \pmod{V}$, onde g é um polinômio multilinear. Logo, $x_1 g(x_2, \dots, x_k) \in C(E)$ e conseqüentemente $g(x_2, \dots, x_k) \in C(E)$ (faça $x_1 = 1$). Entretanto, g e $x_1 g$ pertencentes a $C(E)$ só é possível caso g seja identidade de E . Daí, $x_1 g \in T(E)$ e portanto $f(x_1, \dots, x_k) \in V$.

Observação 1.6.13 No caso de $\text{char}K = p > 0$ temos $V \neq C(E)$. De fato, consideremos a álgebra $U_2(K)$ (matrizes triangulares superiores) e o T -espaço

$$W = \{f(x_1, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle \mid f(A_1, \dots, A_k) \text{ tem diagonal nula e os } A_i \text{'s} \in U_2(K)\}.$$

É imediato ver que $[x_1, x_2]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ pertencem a W , donde $V \subseteq W$. Considerando o polinômio $h(x) = x^p$ de $C(E)$, verificamos que h não pertence a W (basta considerar $x_1 = E_{11}$). Portanto, $h(x) \in C(E) - V$.

Hoje se sabe que $C(E)$ não é finitamente gerado para $\text{char}K = p > 0$ (veja [1]).

No que foi tratado até agora sobre T -espaços e polinômios centrais, vimos que o conjunto $C(A)$ é sempre um T -espaço de $K\langle X \rangle$ qualquer que seja a álgebra A . Quando fala-se em descrever os polinômios centrais de A , entende-se por determinar um subconjunto de $C(A)$ que possa gerá-lo como T -espaço. Existem T -espaços que não são multiplicativamente fechados (veja o exemplo 1.6.11) e também T -espaços multiplicativamente fechados que não são espaços de polinômios centrais para nenhuma álgebra, conforme veremos a seguir.

Proposição 1.6.14 Se $\text{char}K = p > 2$, então não existe álgebra A tal que $C(A) = V$.

Demonstração: Suponhamos que $C(A) = V$ para alguma álgebra associativa A . Então, $[x_1, x_2] \in C(A)$ e conseqüentemente $[x_1, x_2, x_3] \in T(A)$. Usando indução é possível mostrar que

$$[y, \underbrace{x, \dots, x}_n] = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} x^j y x^{n-j}$$

para $n \geq 1$, em toda álgebra associativa. Logo, para $n = p$, temos $[y, x, \dots, x] = yx^p - x^p y = [y, x^p]$. Daí, concluímos que $[x_2, x_1^p] \in T(A)$ e portanto $x_1^p \in C(A)$, o que contradiz a hipótese de que $C(A) = V$ (veja a observação 1.6.13). ■

1.7 Identidades e polinômios centrais graduados

Nesta seção apresentaremos os conceitos de identidades e polinômios centrais para álgebras graduadas. Estas idéias serão fundamentais para o próximo capítulo. No que segue, G denotará um grupo abeliano com notação aditiva.

Definição 1.7.1 *Seja A uma álgebra. Uma G -graduação em A é uma família $\{A_g \mid g \in G\}$ de subespaços de A tais que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subseteq A_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Definimos uma **álgebra G -graduada** como sendo uma álgebra munida de uma G -graduação.

Na definição acima, o subespaço A_g é chamado de *componente homogênea* de grau g e os seus elementos de *elementos homogêneos* de grau g .

A seguir apresentaremos alguns exemplos de álgebras graduadas.

Exemplo 1.7.2 *Toda álgebra A admite uma G -graduação. Basta considerar $A_0 = A$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \in G - \{0\}$. Esta graduação é chamada de **graduação trivial**.*

Exemplo 1.7.3 *A álgebra exterior E possui uma \mathbb{Z}_2 -graduação natural dada por $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 e E_1 são os subespaços definidos no exemplo 1.1.5.*

Exemplo 1.7.4 *Considere n um inteiro positivo e $A = M_n(K)$. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, tomemos o subespaço $M_\gamma = \langle E_{ij} \mid \overline{j-i} = \gamma \rangle$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, consideremos*

$$M_k = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } |k| \geq n \\ \langle E_{ij} \mid j - i = k \rangle, & \text{se } |k| < n \end{cases}$$

Observe que $M_{\bar{0}} = M_0$ é exatamente o conjunto das matrizes diagonais. Do fato do conjunto $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ ser uma base de A segue que

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M_\gamma \quad e \quad A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$$

Agora para ver que estas decomposições definem uma \mathbb{Z}_n -graduação e uma \mathbb{Z} -graduação, respectivamente, em $M_n(K)$, basta notarmos que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \\ E_{il}, & \text{se } j = k \end{cases}$$

donde segue que $M_{\gamma_1}M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1+\gamma_2}$ para $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_n$ e $M_{k_1}M_{k_2} \subseteq M_{k_1+k_2}$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.7.5 *Se A é uma álgebra G -graduada, então $1 \in A_0$.*

Demonstração: Temos que existem $g_1, \dots, g_n \in G - \{0\}$ tais que

$$1 = a_0 + a_{g_1} + \dots + a_{g_n}$$

com $a_0 \in A_0$ e $a_{g_i} \in A_{g_i}$, para $i = 1, \dots, n$. Tomando agora $h \in G$ e $a_h \in A_h$, arbitrários, temos

$$a_h = a_h a_0 + a_h a_{g_1} + \dots + a_h a_{g_n}$$

Notando que $a_h a_0 \in A_h$, $a_h a_{g_i} \in A_{h+g_i}$ e $h, h+g_1, \dots, h+g_n$ são dois a dois distintos, concluímos que $a_h a_{g_i} = 0$ para $i = 1, \dots, n$ e portanto $a_h a_0 = a_h$. Multiplicando a primeira igualdade por a_0 , obtemos $a_0 = a_0 a_0 + a_{g_1} a_0 + \dots + a_{g_n} a_0$. Usando agora o fato de $a_h a_0 = a_h$, temos $a_0 = a_0 + a_{g_1} + \dots + a_{g_n}$, isto é, $a_{g_1} + \dots + a_{g_n} = 0$ e portanto $a_0 = 1$. ■

Definição 1.7.6 *Uma aplicação $\psi : A \rightarrow B$ entre álgebras G -graduadas é chamada **homomorfismo G -graduado**, se ψ é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $\psi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$.*

Vamos agora tratar de identidades e polinômios centrais G -graduados. Antes, precisaremos do conceito de álgebra associativa livre G -graduada. Para defini-lo, consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K\langle X \rangle$. Definimos agora

$$\omega(1) = 0 \quad e \quad \omega(x_1 x_2 \dots x_m) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \dots + \omega(x_m)$$

onde $\omega(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Sendo então m um monômio de $K\langle X \rangle$, dizemos que $\omega(m)$ é o G -grau de m . Tomando para cada $g \in G$

$$K\langle X \rangle_g = \langle m \mid m \text{ é monômio de } K\langle X \rangle, \omega(m) = g \rangle$$

temos

$$K\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} K\langle X \rangle_g \quad \text{e} \quad K\langle X \rangle_g K\langle X \rangle_h \subseteq K\langle X \rangle_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$, e assim $K\langle X \rangle$ é chamada *álgebra associativa livre G -graduada*.

Se $f \in K\langle X \rangle_g$, dizemos que f é homogêneo de G -grau g e usamos a notação $\omega_G(f) = g$.

Definição 1.7.7 *Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra G -graduada. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é*

*i) uma **identidade polinomial G -graduada** para A , se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\omega(x_i)}$ com $i = 1, 2, \dots, n$.*

*ii) um **polinômio central G -graduado** para A , se $f(a_1, \dots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_i \in A_{\omega(x_i)}$ com $i = 1, 2, \dots, n$.*

Exemplo 1.7.8 *Consideremos a álgebra exterior E com sua \mathbb{Z}_2 -graduação natural (conforme o Exemplo 1.7.3). Como $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in E_1$, temos que $f(x_1, x_2) = x_1 \circ x_2$ é uma identidade \mathbb{Z}_2 -graduada de E , onde $K\langle X \rangle$ é a álgebra livre \mathbb{Z}_2 -graduada, e $\omega(x_1) = \omega(x_2) = 1$. Por $E_0 = Z(E)$, temos que todo polinômio $f \in K\langle X \rangle_0$ é um polinômio central \mathbb{Z}_2 -graduado para E .*

No estudo das identidades e polinômios centrais ordinários (de acordo com as definições 1.2.3 e 1.6.1), os conceitos de T-ideal e T-espaço são de extrema importância. Para o caso de identidades e polinômios centrais G -graduados temos conceitos análogos, a saber, os de T_G -ideal e T_G -espaço.

Definição 1.7.9 *Seja $K\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre G -graduada. Um ideal I de $K\langle X \rangle$ é dito ser um T_G -ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G -graduado φ de $K\langle X \rangle$. Um subespaço V de $K\langle X \rangle$ é dito ser um T_G -espaço se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo endomorfismo G -graduado φ de $K\langle X \rangle$.*

Não é difícil ver que I é um T_G -ideal se, e somente se, $f(g_1, \dots, g_n) \in I$, para quaisquer $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $g_i \in K\langle X \rangle_{\omega(x_i)}$. Uma idéia análoga para T_G -espaço.

As idéias de T_G -ideal e T_G -espaços gerados por um dado subconjunto S de $K\langle X \rangle$ são análogas as idéias de T-ideal e T-espaços gerados. Denotamos por $\langle S \rangle^{T_G}$ o T_G -ideal gerado por S .

Se A é uma álgebra G -graduada, então o conjunto $T_G(A)$ das identidades G -graduadas de A é um T_G -ideal de $K\langle X \rangle$ e o conjunto $C_G(A)$ dos polinômios centrais G -graduados de A é um T_G -espaço de $K\langle X \rangle$. As proposições 1.5.2 e 1.5.3 também são válidas no caso de T_G -ideal e T_G -espaço.

O próximo resultado mostra uma importante relação entre os conceitos de identidades ordinárias e graduadas.

Proposição 1.7.10 *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G -graduações tais que $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$. Ademais, se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T(A) = T(B)$.*

Demonstração: Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle Y \rangle$, onde $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e seja $f(y_1, y_2, \dots, y_n) \in T(A)$. Dados $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$, tomemos $b_{i_g} \in B_g$, para $i = 1, \dots, n$ e $g \in G$, tais que $b_i = \sum_{g \in G} b_{i_g}$. Para cada $b_{i_g} \neq 0$, tomemos $x_{i_g} \in X_g$ e consideremos o polinômio $f_1 = f(\sum_{g \in G} x_{1_g}, \dots, \sum_{g \in G} x_{n_g}) \in K\langle X \rangle$. Como $f \in T(A)$, temos $f_1 \in T_G(A)$ e daí $f_1 \in T_G(B)$. Fazendo então as substituições $x_{i_g} = b_{i_g}$, para $i = 1, \dots, n$ e $g \in G$, temos

$$f(b_1, b_2, \dots, b_n) = f\left(\sum_{g \in G} b_{1_g}, \sum_{g \in G} b_{2_g}, \dots, \sum_{g \in G} b_{n_g}\right) = 0$$

e assim $f \in T(B)$.

Se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T_G(A) \subseteq T_G(B)$ e $T_G(B) \subseteq T_G(A)$, donde temos a última afirmação. ■

É importante observar que a recíproca do resultado acima é falsa. Considere na álgebra exterior E a \mathbb{Z}_2 -graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$ e a \mathbb{Z}_2 -graduação trivial $E = E \oplus \{0\}$. Temos que $f(y_1, y_2) = [y_1, y_2]$, com $\omega(y_1) = \omega(y_2) = 0$, é identidade \mathbb{Z}_2 -graduada de E com respeito a primeira graduação, mas não é identidade graduada com respeito a graduação trivial.

Capítulo 2

Identidades e Polinômios Centrais Graduados para a Álgebra $M_n(K)$

Neste capítulo vamos apresentar as descrições das identidades e polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados e \mathbb{Z}_n -graduados para a álgebra $M_n(K)$, onde K é um corpo de característica zero. Nestas descrições estaremos considerando as graduações naturais de $M_n(K)$ pelos grupos \mathbb{Z}_n e \mathbb{Z} , as quais foram definidas na seção 1.7.

As identidades \mathbb{Z}_n -graduadas e as \mathbb{Z} -graduadas de $M_n(K)$ foram descritas primeiramente por Vasilovsky ([55] e [54]) em característica zero. Posteriormente, Azevedo ([4] e [5]) generalizou esta descrição para corpos infinitos quaisquer.

Algumas idéias usadas na descrição dos polinômios centrais \mathbb{Z}_n -graduados e os \mathbb{Z} -graduados encontram-se em [6], onde a descrição foi feita para corpos infinitos e com uso de matrizes genéricas. Aqui apresentaremos a descrição apenas no caso de K ser um corpo de característica zero, onde utilizamos idéias sobre monômios multilineares contidas em [55] e [54].

Os conceitos e resultados básicos necessários sobre álgebras graduadas podem ser encontradas na seção 1.7.

Em todo este capítulo K denotará um corpo de característica zero.

2.1 Identidades Polinomiais \mathbb{Z}_n -graduadas

Em toda esta seção $K\langle X \rangle$ denotará a álgebra associativa livre \mathbb{Z}_n -graduada, onde $X = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} X_\gamma$, e $M_n(K)$ a álgebra das matrizes com a \mathbb{Z}_n -gradação dada no Exemplo 1.7.4. Vamos considerar as notações introduzidas na seção 1.7 e denotar $T_{\mathbb{Z}_n}$

simplesmente por T_n .

A seguir apresentaremos os resultados necessários para a demonstração do teorema que descreve as identidades \mathbb{Z}_n -graduadas para a álgebra $M_n(K)$ (veja [55]).

Lema 2.1.1 *A álgebra $M_n(K)$ satisfaz as seguintes identidades \mathbb{Z}_n -graduadas*

$$x_1x_2 - x_2x_1 = 0, \quad \omega(x_1) = \omega(x_2) = \bar{0} \quad (2.1)$$

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 = 0, \quad \omega(x_1) = \omega(x_3) = -\omega(x_2). \quad (2.2)$$

Demonstração: Observe inicialmente que se $A \in M_{\bar{0}}$, então A é uma matriz diagonal. Desde que duas matrizes diagonais comutam, temos que $M_n(K)$ satisfaz a identidade graduada 2.1. Por outro lado, as identidades 2.2 são multilineares. Logo, precisamos mostrar que as identidades em 2.2 são satisfeitas para

$$x_1 = E_{i_1j_1}, \quad x_2 = E_{i_2j_2}, \quad x_3 = E_{i_3j_3},$$

onde $E_{i_1j_1}, E_{i_3j_3} \in M_{\bar{t}}$ e $E_{i_2j_2} \in M_{\overline{n-t}}$, onde $0 < t \leq n-1$. Note que para o caso $t = 0$, as matrizes $E_{i_1j_1}, E_{i_2j_2}, E_{i_3j_3}$ são diagonais e portanto comutam entre si. Por $E_{i_1j_1}, E_{i_3j_3} \in M_{\bar{t}}$ e $E_{i_2j_2} \in M_{\overline{n-t}}$ segue que

$$j_1 = \begin{cases} i_1 + t, & \text{se } i_1 + t \leq n, \\ i_1 + t - n, & \text{se } i_1 + t > n; \end{cases}$$

$$i_2 = \begin{cases} j_2 + t, & \text{se } j_2 + t \leq n, \\ j_2 + t - n, & \text{se } j_2 + t > n; \end{cases}$$

$$i_3 = \begin{cases} j_3 - t, & \text{se } j_3 - t \geq 1, \\ j_3 - t + n, & \text{se } j_3 - t < 1. \end{cases}$$

Notemos que $E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}E_{i_3j_3} \neq 0$ se, e somente se, $j_1 = i_2$ e $j_2 = i_3$. Mostraremos que, neste caso, $i_1 = j_2 = i_3$ e $j_1 = i_2 = j_3$. Observemos que se $j_1 = i_1 + t$ e $i_2 = j_2 + t - n$, então por $j_1 = i_2$, segue que $j_2 - i_1 = n$, o que é um absurdo. Então as igualdades $j_1 = i_1 + t$ e $i_2 = j_2 + t - n$ não ocorrem simultaneamente. Da mesma forma, as equações $j_2 = i_2 - t$ e $i_3 = j_3 - t + n$ não podem ocorrer simultaneamente. Então quando $j_1 = i_1 + t$, devemos ter $i_2 = j_2 + t$ e $i_3 = j_3 - t$, o que nos dá

$$i_3 = j_2 = i_2 - t = j_1 - t = i_1. \quad (2.3)$$

Usando 2.3, obtemos

$$i_2 = j_1 = i_1 + t = i_3 + t = j_3.$$

Analogamente, quando $j_1 = i_1 + t - n$, teremos $i_2 = j_2 + t - n$ e $i_3 = j_3 - t + n$, de onde

$$i_3 = j_2 = i_2 - t + n = j_1 - t + n = i_1. \quad (2.4)$$

Usando 2.4, obtemos

$$i_2 = j_1 = i_1 + t - n = i_3 + t - n = j_3.$$

Desta forma, $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} \neq 0$ se, e somente se, $E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1} \neq 0$. Neste caso, $i_1 = j_2 = i_3$ e $j_1 = i_2 = j_3$, e daí

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} = E_{i_1 j_3} = E_{i_3 j_1} = E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1}.$$

Caso contrário,

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} = 0 = E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1}$$

o que conclui a demonstração. ■

Vamos denotar por I_n o T_n ideal gerado pelas identidades graduadas 2.1 e 2.2. Pelo Lema 2.1.1 temos $I_n \subseteq T_n(M_n(K))$. Para $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ e $\sigma \in S_k$, considere

$$m_\sigma = m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(k)}.$$

O monômio multilinear em x_1, x_2, \dots, x_k correspondente a permutação identidade será denotado por

$$m = m(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \dots x_k.$$

Obviamente, $\omega(m) = \omega(m_\sigma) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \dots + \omega(x_k)$. Sabe-se que cada polinômio graduado multilinear $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ pode ser escrito da forma

$$f = \sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma m_\sigma,$$

onde $a_\sigma \in K$.

Uma substituição \mathcal{S} do tipo

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, x_2 = E_{i_2 j_2}, \dots, x_k = E_{i_k j_k}, \quad (2.5)$$

onde

$$\overline{j_s - i_s} = \omega(x_s), \quad s = 1, 2, \dots, k \quad (2.6)$$

é conhecida como *substituição Standard*. Observe que $E_{i_s j_s} \in M_{\omega(x_s)}$, $s = 1, 2, \dots, k$. Para um polinômio graduado $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ e uma substituição Standard \mathcal{S} , denotaremos por $f|_{\mathcal{S}}$ o valor de f correspondente a substituição \mathcal{S} . Claramente, se um polinômio graduado multilinear f é tal que $f|_{\mathcal{S}} = 0$ para cada substituição Standard \mathcal{S} , então f é uma identidade graduada de $M_n(K)$. Notemos que quando uma substituição \mathcal{S} (veja 2.5) é feita, o valor do monômio $m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ é diferente de zero, somente se

$$j_{\sigma(1)} = i_{\sigma(2)}, \quad j_{\sigma(2)} = i_{\sigma(3)}, \dots, \quad j_{\sigma(k-1)} = i_{\sigma(k)}. \quad (2.7)$$

Neste caso, $m_{\sigma}|_{\mathcal{S}} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}}$.

Para um monômio $m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\sigma \in S_k$, e dois inteiros $1 \leq p \leq q \leq k$, denotaremos por $m_{\sigma}^{[p,q]}$ a *subpalavra* obtida de m_{σ} descartando os $p - 1$ primeiros e os últimos $k - q$ fatores, ou seja,

$$m_{\sigma}^{[p,q]} = x_{\sigma(p)} x_{\sigma(p+1)} \dots x_{\sigma(q)}.$$

Lema 2.1.2 *Para cada $\sigma \in S_k$, existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que*

$$m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0.$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre k . O caso $k = 1$ é trivial. Basta considerar $x_1 = E_{ij}$ tal que $\overline{j - i} = \omega(x_1)$. Suponhamos que para qualquer monômio de comprimento k , $m_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_{l_1} x_{l_2} \dots x_{l_k}$, onde $l_1, l_2, \dots, l_k \in \{1, 2, \dots, k\}$, existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que

$$m_1(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0.$$

Seja $m_2(x_1, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_k} x_{t_{k+1}}$, onde

$$\{t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}\} = \{1, 2, \dots, k, k + 1\}.$$

Suponhamos que $\omega(x_{t_{k+1}}) = \bar{t}$, para algum $0 \leq t < n$. Para $x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_k}$, existe uma substituição Standard \mathcal{S}'

$$x_{t_1} = E_{i_1 j_1}, \quad x_{t_2} = E_{i_2 j_2}, \quad \dots, \quad x_{t_k} = E_{i_k j_k}, \quad (2.8)$$

tal que

$$x_{t_1}x_{t_2}\dots x_{t_k}|_{\mathcal{S}'} = E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\dots E_{i_kj_k} = E_{i_1j_k} \neq 0. \quad (2.9)$$

Consideremos agora a substituição Standard \mathcal{S} formada pelos elementos 2.8 e $x_{t_{k+1}} = E_{j_k i_{k+1}}$, onde

$$i_{k+1} = \begin{cases} j_k + t, & \text{se } j_k + t \leq n, \\ j_k + t - n, & \text{se } j_k + t > n. \end{cases}$$

Logo, por 2.9

$$m_2(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})|_{\mathcal{S}} = E_{i_1j_k}E_{j_k i_{k+1}} = E_{i_1i_{k+1}} \neq 0.$$

■

Nos resultados enunciados a seguir \mathcal{S} denotará uma substituição Standard (conforme 2.5).

Lema 2.1.3 *Se $m_\sigma|_{\mathcal{S}} \neq 0$, então para $1 \leq p \leq q \leq k$*

$$\omega(m_\sigma^{[p,q]}) = \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}.$$

Demonstração: Por 2.6 e 2.7, temos

$$\begin{aligned} \omega(m_\sigma^{[p,q]}) &= \omega(x_{\sigma(q)}) + \omega(x_{\sigma(q-1)}) + \dots + \omega(x_{\sigma(p)}) = \\ &= \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)}} + \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(q-1)}} + \dots + \overline{j_{\sigma(p)} - i_{\sigma(p)}} = \overline{j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}}. \end{aligned}$$

■

Lema 2.1.4 *Se para uma permutação $\sigma \in S_k$, existir uma substituição Standard \mathcal{S} tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 n(x_2, x_3, \dots, x_k) \pmod{I_n},$$

para algum monômio $n(x_2, x_3, \dots, x_k) = x_{l_2}x_{l_3}\dots x_{l_k}$ multilinear.

Demonstração: Caso $\sigma(1) = 1$, a demonstração é trivial. Suponhamos que $\sigma(1) \neq 1$. Logo, $1 \neq \sigma^{-1}(1)$, e assim $1 = \sigma^{-1}(\sigma(1)) < \sigma^{-1}(1)$. Além disso, existe um inteiro positivo u tal que $\sigma(1) = 1 + u$. Daí, $1 = \sigma^{-1}(\sigma(1)) = \sigma^{-1}(1 + u) < \sigma^{-1}(1)$. Seja u_0 o menor inteiro positivo tal que $\sigma^{-1}(1 + u_0) < \sigma^{-1}(1)$. Obviamente,

$$1 \leq \sigma^{-1}(1 + u_0) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(u_0). \quad (2.10)$$

Desde que $m_\sigma|_S = m|_S \neq 0$, temos

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \cdots E_{i_k j_k} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} E_{i_{\sigma(2)} j_{\sigma(2)}} \cdots E_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} \neq 0,$$

e daí, $i_1 = i_{\sigma(1)}$, $j_t = i_{t+1}$, $t = 1, \dots, k-1$ e, para $s > 1$, $j_{\sigma(s-1)} = i_{\sigma(s)}$. Considerando $p = \sigma^{-1}(u_0 + 1)$, $q = \sigma^{-1}(1)$ e $r = \sigma^{-1}(u_0)$, por 2.10 temos $1 \leq p < q \leq r$ e $j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_1 = i_{\sigma(1)}$, $j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)}$. Ademais, se $p > 1$, $j_{\sigma(p-1)} = i_{\sigma(p)}$. Vamos considerar inicialmente o caso $p > 1$. Das igualdades

$$j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)} = j_{\sigma(p-1)} \quad e \quad j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)}$$

temos que

$$j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(p)} - j_{\sigma(q-1)} = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = t_0$$

para algum $t_0 \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 2.1.3, temos

$$\omega(m_\sigma^{[1,p-1]}) = \overline{j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)}} = \overline{t_0};$$

$$\omega(m_\sigma^{[p,q-1]}) = \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(p)}} = \overline{-t_0};$$

$$\omega(m_\sigma^{[q,r]}) = \overline{j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)}} = \overline{t_0}.$$

Consequentemente, usando 2.2, segue que

$$\begin{aligned} m_\sigma &= m_\sigma^{[1,p-1]} m_\sigma^{[p,q-1]} m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[r+1,k]} \equiv \\ &\equiv m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[p,q-1]} m_\sigma^{[1,p-1]} m_\sigma^{[r+1,k]} = x_{\sigma(q)} x_{l_2} \cdots x_{l_k} = x_1 x_{l_2} \cdots x_{l_k} \pmod{I_n}. \end{aligned}$$

Consideremos agora $p = 1$. Neste caso, $j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)} = j_{\sigma(r)}$, e pelo Lema 2.1.3

$$\omega(m_\sigma^{[1,q-1]}) = \overline{j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(1)}} = \overline{0};$$

$$\omega(m_\sigma^{[q,r]}) = \overline{j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)}} = \overline{0}.$$

Portanto, por 2.1 segue que

$$\begin{aligned} m_\sigma &= m_\sigma^{[1,q-1]} m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[r+1,k]} \equiv \\ &\equiv m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[1,q-1]} m_\sigma^{[r+1,k]} = x_{\sigma(q)} x_{l_2} \cdots x_{l_k} = x_1 x_{l_2} \cdots x_{l_k} \pmod{I_n}. \end{aligned}$$

■

Lema 2.1.5 *Se para uma permutação $\sigma \in S_k$, existir uma substituição Standard \mathcal{S} tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{I_n}$.

Demonstração: Pelo Lema 2.1.4, $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 n(x_2, x_3, \dots, x_k) \pmod{I_n}$.

Seja r o maior inteiro positivo tal que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 x_2 \dots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k) \pmod{I_n}, \quad (2.11)$$

para algum monômio $n = n(x_{r+1}, \dots, x_k)$ multilinear. Mostraremos que $r = k$. Suponhamos por contradição que $r < k$. Então, obviamente $r \leq k - 2$. Desde que $I_n \subseteq T_n(M_n(K))$, por 2.11 temos

$$x_1 x_2 \dots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0.$$

Combinando a igualdade anterior com

$$x_1 x_2 \dots x_r n|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \dots E_{i_r j_r} n|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_r} n|_{\mathcal{S}}$$

e

$$m|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \dots E_{i_r j_r} \{x_{r+1} x_{r+2} \dots x_k\}|_{\mathcal{S}},$$

temos que

$$n(x_{r+1}, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = x_{r+1} x_{r+2} \dots x_k|_{\mathcal{S}} = E_{j_r j_k} \neq 0.$$

Pelo Lema 2.1.4, existe um monômio $n'(x_{r+2}, \dots, x_k)$ multilinear tal que

$$n(x_{r+1}, \dots, x_k) \equiv x_{r+1} n'(x_{r+2}, \dots, x_k) \pmod{I_n}.$$

Logo,

$$m_\sigma \equiv x_1 \dots x_r n(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_k) \equiv x_1 \dots x_r x_{r+1} n'(x_{r+2}, \dots, x_k) \pmod{I_n},$$

o que contradiz a escolha do número r . Portanto, $r = k$. ■

Corolário 2.1.6 *Se para duas permutações $\sigma, \tau \in S_k$, existir uma substituição Standard \mathcal{S} tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{I_n}$.

Demonstração: Consideremos $x'_1 = x_{\tau(1)}, x'_2 = x_{\tau(2)}, \dots, x'_k = x_{\tau(k)}$. Sendo assim,

$$m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k) = m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k).$$

Tomemos agora $\mu = \tau^{-1} \circ \sigma$. Daí, temos

$$m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) = m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Por $m_\sigma|_{\mathcal{S}} = m_\tau|_{\mathcal{S}} \neq 0$, temos que $m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)|_{\mathcal{S}} = m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Pelo Lema 2.1.5, segue que

$$m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \equiv m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \pmod{I_n}$$

e portanto,

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{I_n}.$$

■

A seguir apresentaremos o resultado central desta seção.

Teorema 2.1.7 *Todas as identidades polinomiais da álgebra \mathbb{Z}_n -graduada $M_n(K)$ seguem de*

$$x_1x_2 - x_2x_1 = 0, \quad \omega(x_1) = \omega(x_2) = \bar{0};$$

$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 = 0, \quad \omega(x_1) = \omega(x_3) = -\omega(x_2),$$

ou seja, $T_n(M_n(K)) = I_n$.

Demonstração: Como a característica do corpo base é zero, precisamos mostrar que uma identidade polinomial \mathbb{Z}_n -graduada e multilinear arbitrária $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ de $M_n(K)$ está em I_n . Seja r o menor inteiro não-negativo tal que f pode ser escrito, módulo I_n , como uma combinação linear de r monômios multilineares, isto é,

$$f \equiv \sum_{q=1}^r a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \pmod{I_n}, \quad (2.12)$$

onde $0 \neq a_{\sigma_q} \in K$ e $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r \in S_k$. Mostraremos que $r = 0$. De fato, suponhamos por contradição que $r > 0$. Em virtude do Lema 2.1.2, existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que $m_{\sigma_1}|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Por $I_n \subseteq T_n(M_n(K))$, temos que

$$f|_{\mathcal{S}} - \left(\sum_{q=1}^r a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \right) \Big|_{\mathcal{S}} = \left(f - \sum_{q=1}^r a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \right) \Big|_{\mathcal{S}} = 0$$

e daí

$$\left(\sum_{q=1}^r a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \right) \Big|_{\mathcal{S}} = 0$$

o que nos dá

$$a_{\sigma_1} m_{\sigma_1} \Big|_{\mathcal{S}} = \sum_{q=2}^r (-a_{\sigma_q}) m_{\sigma_q} \Big|_{\mathcal{S}}.$$

Combinando esta última igualdade com o fato que

$$m_{\sigma_q} \Big|_{\mathcal{S}} \in \{E_{ij} \mid i, j = 1, 2, \dots, k\} \cup \{0\}, \quad q = 1, 2, \dots, r,$$

concluimos que existe um menor inteiro $p \in \{2, 3, \dots, r\}$ tal que $m_{\sigma_p} \Big|_{\mathcal{S}} = m_{\sigma_1} \Big|_{\mathcal{S}}$.

Portanto, pelo Corolário 2.1.6, $m_{\sigma_p} \equiv m_{\sigma_1} \pmod{I_n}$ e daí, por 2.12

$$\begin{aligned} f &\equiv \sum_{q=1}^r a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \equiv a_{\sigma_1} m_{\sigma_1} + a_{\sigma_p} m_{\sigma_p} + \sum_{q=2}^{p-1} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} + \sum_{q=p+1}^r a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \equiv \\ &\equiv (a_{\sigma_1} + a_{\sigma_p}) m_{\sigma_1} + \sum_{q=2}^{p-1} a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} + \sum_{q=p+1}^r a_{\sigma_q} m_{\sigma_q} \pmod{I_n}, \end{aligned}$$

ou seja, f pode ser escrito, módulo I_n , como uma combinação de menos que r monômios multilineares, o que contradiz a escolha do número r . Logo,

$$f \equiv 0 \pmod{I_n}$$

e assim $T_n(M_n(K)) = I_n$. ■

2.2 Polinômios Centrais \mathbb{Z}_n -graduados

Apresentaremos nesta seção a descrição do espaço dos polinômios centrais \mathbb{Z}_n -graduados para a álgebra $M_n(K)$.

Vamos considerar $K\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre \mathbb{Z}_n -graduada, onde $X = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} X_\gamma$. Denotaremos $T_{\mathbb{Z}_n}$ e $C_{\mathbb{Z}_n}$ simplesmente por T_n e C_n , respectivamente.

Nesta e nas próximas seções consideremos, para cada inteiro positivo m , o m -ciclo $\theta_m = (1 \ 2 \ \dots \ m)$ do grupo simétrico S_m e o subgrupo cíclico $H_m = \langle \theta_m \rangle$ de S_m .

Apresentaremos a seguir um tipo importante de polinômios centrais não-triviais para a álgebra $M_n(K)$. Para isso, precisaremos do conceito de *sequência completa* em \mathbb{Z}_n .

Definição 2.2.1 *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_n$. Dizemos que a n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma sequência completa se $\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n\} = \mathbb{Z}_n$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \bar{0}$.*

Exemplo 2.2.2 *A sequência $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{2})$ é uma sequência completa em \mathbb{Z}_4 . Dado $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, temos que $(\gamma, \gamma, \dots, \gamma)$ é uma sequência completa se, e somente se, γ é um gerador do grupo \mathbb{Z}_n .*

Lema 2.2.3 *Seja $m(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \dots x_k$ um monômio multilinear de $K\langle X \rangle$ com $\omega(m) = \bar{0}$. Se uma substituição Standard \mathcal{S} (conforme 2.5)*

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, \quad x_2 = E_{i_2 j_2}, \quad \dots, \quad x_k = E_{i_k j_k}$$

é tal que $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$, então $m_{\sigma}|_{\mathcal{S}} \neq 0$ para todo $\sigma \in H_k$.

Demonstração: Sendo $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$, temos $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{k-1} = i_k$. Como $m|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_k}$ e $\omega(m) = \bar{0}$, devemos ter $i_1 = j_k$. Observemos que $m_{\theta_k}|_{\mathcal{S}} = E_{i_2 j_k} E_{i_1 j_1} = E_{i_2 i_2} \neq 0$. O resultado segue então indutivamente. ■

Proposição 2.2.4 *O polinômio multilinear*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$$

onde $(\omega(x_1), \omega(x_2), \dots, \omega(x_n))$ é uma sequência completa em \mathbb{Z}_n , é um polinômio central \mathbb{Z}_n -graduado, que não é identidade para a álgebra $M_n(K)$.

Demonstração: Como f é multilinear, basta mostrar que $f|_{\mathcal{S}} \in Z(M_n(K))$ para toda substituição Standard \mathcal{S} . Observemos inicialmente que $\omega(x_1 x_2 \dots x_n) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \dots + \omega(x_n) = \bar{0}$. Vamos considerar $m = m(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$. Pelo Lema 2.2.3, se $m|_{\mathcal{S}} = 0$, então $m_{\sigma}|_{\mathcal{S}} = 0$ para todo $\sigma \in H_n$, e daí $f|_{\mathcal{S}} = 0$. Suponhamos então \mathcal{S} uma substituição Standard

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, \quad x_2 = E_{i_2 j_2}, \quad \dots, \quad x_n = E_{i_n j_n}$$

tal que $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Claramente devemos ter $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{n-1} = i_n$ e também $j_n = i_1$, pois $\omega(m) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \dots + \omega(x_n) = \bar{0}$. Logo,

$$f|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 i_1} + E_{i_2 i_2} + \dots + E_{i_n i_n}.$$

Notando agora que

$$\omega(x_1) = \overline{i_2 - i_1}, \quad \omega(x_2) = \overline{i_3 - i_2}, \quad \dots, \quad \omega(x_{n-1}) = \overline{i_n - i_{n-1}}, \quad \omega(x_n) = \overline{i_1 - i_n},$$

temos

$$\omega(x_1) + \omega(x_2) = \overline{i_3 - i_1}, \dots, \omega(x_1) + \dots + \omega(x_{n-1}) = \overline{i_n - i_1}.$$

Como $(\omega(x_1), \omega(x_2), \dots, \omega(x_n))$ é uma sequência completa, devemos ter $\overline{i_2 - i_1}, \overline{i_3 - i_1}, \dots, \overline{i_n - i_1}$ não-nulos e dois a dois distintos, donde segue que i_1, i_2, \dots, i_n devem ser dois a dois incôgruos módulo n . Mas, $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Logo, temos a igualdade destes dois conjuntos e portanto $f|_{\mathcal{S}} = I_n \in Z(M_n(K))$. ■

Sejam I_n o T_n -ideal das identidades \mathbb{Z}_n -graduadas de $M_n(K)$ e $C_n(M_n(K))$ o T_n -espaço dos polinômios centrais \mathbb{Z}_n -graduados de $M_n(K)$. Claramente, temos $I_n \subseteq C_n(M_n(K))$. Tomemos agora V como sendo o T_n espaço gerado pelos polinômios

$$\begin{aligned} z_1[x_1, x_2]z_2, & \quad \omega(x_1) = \omega(x_2) = \bar{0}; \\ z_1(x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1)z_2, & \quad \omega(x_1) = \omega(x_3) = -\omega(x_2); \\ \sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}, & \quad (\omega(x_1), \omega(x_2), \dots, \omega(x_n)) \text{ sequência completa,} \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde z_1 e z_2 são variáveis em X .

Do fato de todos os polinômios em 2.13 serem centrais segue que $V \subseteq C_n(M_n(K))$. Observando agora que o T_n -espaço gerado pelos dois primeiros polinômios em 2.13 é exatamente I_n , concluímos que $I_n \subset V$.

Lema 2.2.5 *Se o polinômio multilinear*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \lambda_1 m_1(x_1, x_2, \dots, x_k) + \dots + \lambda_n m_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (k \geq n)$$

é tal que existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, para algum $0 \neq \lambda \in K$, então $f \in V$.

Demonstração: Como $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, devemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ e $\omega(m_i) = \bar{0}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Vamos supor que $m_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1x_2 \dots x_k$. Seja \mathcal{S} uma substituição Standard

$$x_1 = E_{i_1j_1}, \quad x_2 = E_{i_2j_2}, \quad \dots, \quad x_k = E_{i_kj_k}$$

satisfazendo as hipóteses do Lema. Por $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, para cada $i = 1, \dots, n$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $m_j|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$. Logo, existem $1 = l_1 < l_2 < \dots < l_n$ de modo que

$\{i_{l_1}, i_{l_2}, \dots, i_{l_n}\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Sendo assim,

$$m_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = \overbrace{x_{l_1} \dots x_{l_2-1}}^{t_1} \overbrace{x_{l_2} \dots x_{l_3-1}}^{t_2} \dots \overbrace{x_{l_n} \dots x_k}^{t_n}.$$

Logo,

$$\omega(t_1) = \overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \omega(t_2) = \overline{i_{l_3} - i_{l_2}}, \dots, \omega(t_{n-1}) = \overline{i_{l_n} - i_{l_{n-1}}}, e \omega(t_n) = \overline{i_1 - i_{l_n}}.$$

A seqüência $(\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_n))$ é uma seqüência completa em \mathbb{Z}_n . De fato,

$$\omega(t_1) + \omega(t_2) + \dots + \omega(t_n) = \overline{i_{l_2} - i_{l_1}} + \overline{i_{l_3} - i_{l_2}} + \dots + \overline{i_{l_n} - i_{l_{n-1}}} + \overline{i_1 - i_{l_n}} = \overline{0}.$$

Além disso,

$$\omega(t_1) = \overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \omega(t_1) + \omega(t_2) = \overline{i_{l_3} - i_{l_1}}, \dots, \omega(t_1) + \omega(t_2) + \dots + \omega(t_{n-1}) = \overline{i_{l_n} - i_{l_1}}.$$

Daí, sendo $\{i_{l_1}, i_{l_2}, \dots, i_{l_n}\} = \{1, 2, \dots, n\}$, devemos ter $\overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \overline{i_{l_3} - i_{l_1}}, \dots, \overline{i_{l_n} - i_{l_1}}$ não-nulos e dois a dois distintos.

Consideremos agora o monômio

$$\overbrace{x_{l_2} \dots x_{l_3-1}}^{t_2} \dots \overbrace{x_{l_n} \dots x_k}^{t_n} \overbrace{x_{l_1} \dots x_{l_2-1}}^{t_1}$$

e observemos que $t_2 \dots t_n t_1|_{\mathcal{S}} = E_{i_{l_2} i_{l_2}}$. Por $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, existe algum $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $m_q|_{\mathcal{S}} = t_2 \dots t_n t_1|_{\mathcal{S}} = E_{i_{l_2} i_{l_2}}$ e pelo Corolário 2.1.6, concluímos que $m_q \equiv t_2 \dots t_n t_1 \pmod{I_n}$. Como $\{t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \dots t_{\sigma(n)}|_{\mathcal{S}}; \sigma \in H_n\} = \{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$ continuamos com este raciocínio, usando novamente o Corolário 2.1.6, e concluímos que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \lambda(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \equiv \lambda \sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \dots t_{\sigma(n)} \pmod{I_n},$$

e daí

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv \lambda \sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \dots t_{\sigma(n)} \pmod{V},$$

pois $I_n \subseteq V$. Além disso, $\sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \dots t_{\sigma(n)} \in V$, donde segue que $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in V$. ■

Teorema 2.2.6 *Seja K um corpo de característica zero. Então $C_n(M_n(K)) = V$.*

Demonstração: Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in C_n(M_n(K))$. Podemos supor f multilinear. Suponhamos ainda que f não é identidade \mathbb{Z}_n -graduada para $M_n(K)$. Podemos escrever f na forma

$$f = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_l m_l$$

onde m_1, m_2, \dots, m_l são monômios multilineares em x_1, x_2, \dots, x_k . Por f não ser identidade \mathbb{Z}_n -graduada para $M_n(K)$, existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, para algum $0 \neq \lambda \in K$. Logo, $l \geq n$. Observemos ainda que para cada $i = 1, 2, \dots, l$, temos $m_i|_{\mathcal{S}} = 0$ ou $m_i|_{\mathcal{S}} = E_{jj}$. Temos também que para cada $i = 1, \dots, n$, existe $j_i \in \{1, 2, \dots, l\}$ tal que $m_{j_i}|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$. Juntando os termos $m_{j_i}'s$ tais que $m_{j_i}|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$ e usando o Corolário 2.1.6, concluímos que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv \alpha_1 m_{j_1} + \alpha_2 m_{j_2} + \dots + \alpha_n m_{j_n} + \beta_1 m_{t_1} + \dots + \beta_r m_{t_r} \pmod{V},$$

onde $r < l$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_r \in K$. Pelo Lema 2.2.5, temos

$$\alpha_1 m_{j_1} + \alpha_2 m_{j_2} + \dots + \alpha_n m_{j_n} \in V,$$

donde segue que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv \beta_1 m_{t_1} + \dots + \beta_r m_{t_r} \pmod{V}.$$

Por $f \in C_n(M_n(K))$, temos que $\beta_1 m_{t_1} + \dots + \beta_r m_{t_r} \in C_n(M_n(K))$. Se $r < n$, então $\beta_1 m_{t_1} + \dots + \beta_r m_{t_r} \in I_n \subseteq V$. Caso contrário, repetimos os mesmos argumentos usados inicialmente. ■

2.3 Identidades Polinomiais \mathbb{Z} -graduadas

Nesta e na próxima seções denotaremos por $K\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre \mathbb{Z} -graduada, onde $X = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} X_m$ e $M_n(K)$ a álgebra \mathbb{Z} -graduada, definida na seção 1.7.

Os resultados apresentados a seguir serão usados na demonstração do teorema que descreve as identidades \mathbb{Z} -graduadas para a álgebra $M_n(K)$.

Lema 2.3.1 *A álgebra $M_n(K)$ satisfaz as seguintes identidades*

$$x = 0, \quad |\omega(x)| \geq n; \tag{2.14}$$

$$x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0, \quad \omega(x_1) = \omega(x_2) = 0; \tag{2.15}$$

$$x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1 = 0, \quad \omega(x_1) = \omega(x_3) = -\omega(x_2). \tag{2.16}$$

Demonstração: Desde que $M_k = \{0\}$ quando $|k| \geq n$, temos que $M_n(K)$ satisfaz as identidades graduadas 2.14. Por outro lado, M_0 é o conjunto das matrizes diagonais. Logo, 2.15 é uma identidade graduada para $M_n(K)$.

As identidades 2.16 são multilineares. Dessa forma, é suficiente mostrar que as identidades 2.16 são satisfeitas quando

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, \quad x_2 = E_{i_2 j_2}, \quad x_3 = E_{i_3 j_3},$$

onde $E_{i_1 j_1}, E_{i_3 j_3} \in M_k$ e $E_{i_2 j_2} \in M_{-k}$ e $|k| \leq n - 1$. Notemos que $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} \neq 0$ se, e somente se,

$$j_1 = i_2 \text{ e } j_2 = i_3. \quad (2.17)$$

Mostraremos que neste caso, $i_1 = j_2 = i_3$ e $j_1 = i_2 = j_3$. De fato, por $E_{i_1 j_1}, E_{i_3 j_3} \in M_k$, $E_{i_2 j_2} \in M_{-k}$ e 2.17, temos

$$i_2 = j_1 = i_1 + k, \quad (2.18)$$

por 2.18

$$i_3 = j_2 = i_2 - k = i_1, \quad (2.19)$$

e por 2.19

$$j_3 = i_3 + k = i_1 + k = j_1.$$

Similarmente, $E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1} \neq 0$, somente se $j_1 = i_2 = j_3$ e $i_1 = j_2 = i_3$. Desta forma, $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} \neq 0$ se, e somente se, $E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1} \neq 0$. Neste caso, $i_1 = j_2 = i_3$ e $j_1 = i_2 = j_3$, e daí

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} = E_{i_1 j_3} = E_{i_3 j_1} = E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1}.$$

Caso contrário,

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} E_{i_3 j_3} = 0 = E_{i_3 j_3} E_{i_2 j_2} E_{i_1 j_1}$$

o que conclui a demonstração. ■

Denotaremos por J_n o $T_{\mathbb{Z}}$ -ideal gerado pelas identidades graduadas de 2.14 a 2.16 e SSt o conjunto de todas as substituições Standard (conforme Seção 2.1). Aqui $\omega(x_s) = j_s - i_s$. Recordemos que dados um monômio $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\sigma \in S_k$, e dois inteiros $1 \leq p \leq q \leq k$, denotamos por $m_\sigma^{[p, q]}$ a *subpalavra* obtida de m_σ descartando os $p - 1$ primeiros e os últimos $k - q$ fatores, ou seja,

$$m_\sigma^{[p, q]} = x_{\sigma(p)} x_{\sigma(p+1)} \dots x_{\sigma(q)}.$$

Nos resultados enunciados a seguir \mathcal{S} denotará uma substituição Standard.

Lema 2.3.2 *Seja $\sigma \in S_k$. Se $m_\sigma|_{\mathcal{S}} \neq 0$, então para $1 \leq p \leq q \leq k$*

$$\omega(m_\sigma^{[p,q]}) = j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}.$$

Demonstração: Por 2.6 e 2.7, temos

$$\begin{aligned} \omega(m_\sigma^{[p,q]}) &= \omega(x_{\sigma(q)}) + \omega(x_{\sigma(q-1)}) + \dots + \omega(x_{\sigma(p)}) = \\ &= (j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)}) + (j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(q-1)}) + \dots + (j_{\sigma(p)} - i_{\sigma(p)}) = j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}. \end{aligned}$$

■

Lema 2.3.3 *Sejam $\sigma \in S_k$ e*

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, x_2 = E_{i_2 j_2}, \dots, x_k = E_{i_k j_k}, \quad (2.20)$$

uma substituição Standard tal que $\max\{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k\} = n - t$, onde $t \geq 1$ (respectivamente $\min\{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k\} = 1 + r$, onde $r \geq 1$).

(i) *Se $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{(2.20)} = 0$, então quando a substituição Standard*

$$x_1 = E_{i'_1 j'_1}, x_2 = E_{i'_2 j'_2}, \dots, x_k = E_{i'_k j'_k}, \quad (2.21)$$

com $i'_s = i_s + t$ e $j'_s = j_s + t$ (resp. $i'_s = i_s - r$ e $j'_s = j_s - r$), $s = 1, 2, \dots, k$ é feita, temos

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{(2.21)} = 0.$$

(ii) *Se $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{(2.20)} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}}$, então $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{(2.21)} = E_{i'_{\sigma(1)} j'_{\sigma(k)}}$.*

Demonstração: (i) Da igualdade

$$m_\sigma|_{(2.20)} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} E_{i_{\sigma(2)} j_{\sigma(2)}} \dots E_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} = 0,$$

nós temos que $j_{\sigma(s)} \neq i_{\sigma(s+1)}$ para algum $s \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Então

$$j'_{\sigma(s)} = j_{\sigma(s)} + t \neq i_{\sigma(s+1)} + t = i'_{\sigma(s+1)} \quad (\text{resp. } j'_{\sigma(s)} = j_{\sigma(s)} - r \neq i_{\sigma(s+1)} - r = i'_{\sigma(s+1)}).$$

Portanto, $m_\sigma|_{(2.21)} = 0$.

(ii) Para $s = 1, \dots, k-1$, a igualdade $j_{\sigma(s)} = i_{\sigma(s+1)}$, nos dá $j'_{\sigma(s)} = i'_{\sigma(s+1)}$. Portanto,

$$m_\sigma|_{(2.21)} = E_{i'_{\sigma(1)} j'_{\sigma(1)}} E_{i'_{\sigma(2)} j'_{\sigma(2)}} \dots E_{i'_{\sigma(k)} j'_{\sigma(k)}} = E_{i'_{\sigma(1)} j'_{\sigma(k)}},$$

concluindo assim a demonstração. ■

Para um monômio graduado $\mathbf{n}(x_1, x_2, \dots, x_r) = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_r}$ e $1 \leq p \leq q \leq r$, denotaremos por $|\omega(\mathbf{n}^{[p,q]})|$ o valor absoluto do grau homogêneo da subpalavra $\mathbf{n}^{[p,q]}$. Consideremos

$$\widehat{\omega}(\mathbf{n}) = \max\{|\omega(\mathbf{n}^{[p,q]})| \mid 1 \leq p \leq q \leq r\}.$$

É claro que se $\widehat{\omega}(\mathbf{n}) \geq n$, então $\mathbf{n} \in J_n$. De fato, existe uma subpalavra $\mathbf{n}^{[p',q']}$, $1 \leq p' \leq q' \leq r$, tal que $\widehat{\omega}(\mathbf{n}) = |\omega(\mathbf{n}^{[p',q']})| \geq n$. Daí,

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^{[1,p'-1]}\mathbf{n}^{[p',q']}\mathbf{n}^{[q'+1,r]} \in J_n,$$

pois $\mathbf{n}^{[p',q']} \in J_n$.

Lema 2.3.4 *Se*

$$x_0 \left(\sum_{\sigma \in P} a_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \right) = 0,$$

onde $P \subseteq S_k$, é uma identidade graduada de $M_n(K)$ tal que $\widehat{\omega}(x_0 m_\sigma) \leq n - 1$, para todo $\sigma \in P$, então

$$\sum_{\sigma \in P} a_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K)).$$

Demonstração: Suponhamos por contradição que existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que

$$\left(\sum_{\sigma \in P} a_\sigma m_\sigma \right) \Big|_{\mathcal{S}} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} E_{ij} \neq 0, \quad b_{ij} \in K. \quad (2.22)$$

Podemos supor sem perda de generalidade que se $\omega(x_0) \geq 0$, então

$$\max\{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k\} = n,$$

pois se $\max\{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k\} = n - t$ com $t \geq 1$, então, pelo Lema 2.3.3, a substituição \mathcal{S}' da forma $x_s = E_{i'_s j'_s}$, com $i'_s = i_s + t$ e $j'_s = j_s + t$, $s = 1, 2, \dots, k$ é tal que $\max\{i'_1, j'_1, i'_2, j'_2, \dots, i'_k, j'_k\} = n$ e

$$\left(\sum_{\sigma \in P} a_\sigma m_\sigma \right) \Big|_{\mathcal{S}'} \neq 0.$$

Similarmente, nós podemos supor que se $\omega(x_0) < 0$, então

$$\min\{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k\} = 1.$$

Nós podemos supor ainda que para qualquer coeficiente $b_{ij} \neq 0$ em 2.22, $1 \leq i - \omega(x_0) \leq n$. Para verificar isto, observemos que $i \in \{i_{\sigma(1)} \mid \sigma \in P, m_\sigma|_S \neq 0\}$. Logo, é suficiente provar que $1 \leq i_{\sigma(1)} - \omega(x_0) \leq n$, para cada $\sigma \in P$ com $m_\sigma|_S \neq 0$.

Primeiro, consideremos o caso onde $\omega(x_0) \geq 0$ e $\max\{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k\} = n$. Em decorrência de 2.7, para $\sigma \in P$ com $m_\sigma|_S \neq 0$, se $\max\{j_1, j_2, \dots, j_k\} < n$, então $i_{\sigma(1)} = n$. Logo,

$$\omega(x_0) \geq 0, \text{ ou seja, } n - \omega(x_0) \leq n, \text{ de onde, } i_{\sigma(1)} - \omega(x_0) \leq n.$$

Além disso,

$$\omega(x_0) \leq |\omega(x_0)| \leq \widehat{\omega}(x_0 m_\sigma) \leq n - 1, \text{ ou seja, } 1 \leq n - \omega(x_0), \text{ isto é, } 1 \leq i_{\sigma(1)} - \omega(x_0).$$

Portanto, $1 \leq i_{\sigma(1)} - \omega(x_0) \leq n$. Agora vamos supor que $\max\{j_1, j_2, \dots, j_k\} = n$. Escolha um $\sigma \in P$ arbitrário tal que $m_\sigma|_S \neq 0$ e consideremos $n = j_{\sigma(r)}$, para algum $1 \leq r \leq k$. Pelo Lema 2.3.2, temos

$$\omega(x_0 m_\sigma^{[1,r]}) = \omega(x_0) + j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(1)} = \omega(x_0) + n - i_{\sigma(1)}.$$

Combinando isto com $\omega(x_0 m_\sigma^{[1,r]}) \leq |\omega(x_0 m_\sigma^{[1,r]})| \leq \widehat{\omega}(x_0 m_\sigma) \leq n - 1$, obtemos que

$$\omega(x_0) + n - i_{\sigma(1)} \leq n - 1, \text{ isto é, } \omega(x_0) - i_{\sigma(1)} \leq -1, \text{ de onde, } 1 \leq i_{\sigma(1)} - \omega(x_0).$$

Além disso, $i_{\sigma(1)} \leq n \leq \omega(x_0) + n$, isto é, $i_{\sigma(1)} - \omega(x_0) \leq n$. Daí, $1 \leq i_{\sigma(1)} - \omega(x_0) \leq n$.

Consideremos agora o caso onde $\omega(x_0) < 0$ e $\min\{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k\} = 1$. Em virtude de 2.7, se $\min\{j_1, j_2, \dots, j_k\} > 1$, então $i_{\sigma(1)} = 1$ para todo $\sigma \in P$ tal que $m_\sigma|_S \neq 0$. Daí,

$$\omega(x_0) < 0, \text{ ou seja, } 1 = i_{\sigma(1)} < i_{\sigma(1)} - \omega(x_0).$$

Além do mais, por $-\omega(x_0) \leq |\omega(x_0)| \leq \widehat{\omega}(x_0 m_\sigma) \leq n - 1$, temos que $-\omega(x_0) \leq n - 1$, ou seja, $i_{\sigma(1)} - \omega(x_0) = 1 - \omega(x_0) \leq n$. Suponhamos agora que $\min\{j_1, j_2, \dots, j_k\} = 1$. Escolha um $\sigma \in P$ arbitrário tal que $m_\sigma|_S \neq 0$ e tome $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $1 = j_{\sigma(r)}$. Pelo Lema 2.3.2, temos

$$\omega(x_0 m_\sigma^{[1,r]}) = \omega(x_0) + j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(1)} = \omega(x_0) + 1 - i_{\sigma(1)}.$$

Combinando isto com

$$-\omega(x_0 m_\sigma^{[1,r]}) \leq |\omega(x_0 m_\sigma^{[1,r]})| \leq \widehat{\omega}(x_0 m_\sigma) \leq n - 1,$$

obtemos que $-\omega(x_0) - 1 + i_{\sigma(1)} \leq n - 1$, isto é, $i_{\sigma(1)} - \omega(x_0) \leq n$. Por outro lado,

$$\omega(x_0) < 0, \text{ isto é, } 1 \leq i_{\sigma(1)} < i_{\sigma(1)} - \omega(x_0), \text{ ou seja, } 1 \leq i_{\sigma(1)} - \omega(x_0).$$

Logo, $1 \leq i_{\sigma(1)} - \omega(x_0) \leq n$.

Finalmente, escolha $i_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $b_{i_0 j_0} \neq 0$. Pelo que foi exposto anteriormente, $1 \leq i_0 - \omega(x_0) \leq n$. Considerando a substituição Standard \mathcal{S}' formada por \mathcal{S} e $x_0 = E_{i_0 - \omega(x_0), i_0}$, temos que

$$\left(x_0 \sum_{\sigma \in P} a_{\sigma} m_{\sigma} \right) \Big|_{\mathcal{S}'} = E_{i_0 - \omega(x_0), i_0} \left(\sum_{i, j=1}^n b_{ij} E_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n b_{i_0 j} E_{i_0 - \omega(x_0), j} \neq 0,$$

contradizendo a hipótese do Lema. ■

Corolário 2.3.5 *Para qualquer monômio graduado $m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ com $\widehat{\omega}(m_{\sigma}) \leq n - 1$, existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que $m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0$.*

Demonstração: Para $k = 1$, $m_{\sigma}(x_1) = x_1$. Logo, por $\widehat{\omega}(m_{\sigma}) \leq n - 1$, segue que $|\omega(x_1)| \leq n - 1$. Basta então escolher $x_1 = E_{i_1 j_1}$ tal que $j_1 - i_1 = \omega(x_1)$.

Suponhamos que para qualquer monômio multilinear m de tamanho k , onde $\widehat{\omega}(m) \leq n - 1$, existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que $m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Consideremos o monômio $\mathbf{n}(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} x_{i_{k+1}}$, com $i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$, tal que $\widehat{\omega}(\mathbf{n}) \leq n - 1$. Observe que

$$\mathbf{n}(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) = x_{i_1} \mathbf{n}'(x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}).$$

Logo, $\widehat{\omega}(\mathbf{n}) = \widehat{\omega}(x_{i_1} \mathbf{n}') \leq n - 1$. Portanto, pelo Lema 2.3.4 $\mathbf{n} = x_{i_1} \mathbf{n}'$ não pode ser identidade \mathbb{Z} -graduado para $M_n(K)$, pois do contrário \mathbf{n}' também seria identidade. Além disso, de $\widehat{\omega}(x_{i_1} \mathbf{n}') \leq n - 1$ segue que $\widehat{\omega}(\mathbf{n}') \leq n - 1$, o que contradiz a hipótese de indução. ■

Denotemos por Λ_0 o conjunto de todos os monômios $m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\sigma \in S_k$, tal que $\widehat{\omega}(m_{\sigma}) = n - 1$.

Lema 2.3.6 *Para qualquer monômio $m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \Lambda_0$, existe uma única substituição Standard \mathcal{S} tal que $m_{\sigma}|_{\mathcal{S}} \neq 0$.*

Demonstração: Sejam $m_\sigma^{[p,q]}$ uma subpalavra de m_σ com $|\omega(m_\sigma^{[p,q]})| = n - 1$ e \mathcal{S} uma substituição Standard tal que $m_\sigma|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Se $\omega(m_\sigma^{[p,q]}) = -n + 1$, então $m_\sigma^{[p,q]}|_{\mathcal{S}} = E_{n1}$. Logo, $E_{i_{\sigma(p)}j_{\sigma(q)}} = E_{n1}$, ou seja, $i_{\sigma(p)} = n$ e $j_{\sigma(q)} = 1$. Suponhamos uma substituição Standard \mathcal{S}' tal que $m_\sigma|_{\mathcal{S}'} \neq 0$. Sendo assim, $i'_{\sigma(p)} = n$ e $j'_{\sigma(q)} = 1$. Consequentemente,

$$i_{\sigma(p)} = i'_{\sigma(p)} \text{ e } j_{\sigma(q)} = j'_{\sigma(q)}. \quad (2.23)$$

Temos que

$$m_\sigma|_{\mathcal{S}} = E_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(1)}} \cdots E_{i_{\sigma(p-1)}j_{\sigma(p-1)}} E_{i_{\sigma(p)}j_{\sigma(p)}} \cdots E_{i_{\sigma(q)}j_{\sigma(q)}} E_{i_{\sigma(q+1)}j_{\sigma(q+1)}} \cdots E_{i_{\sigma(k)}j_{\sigma(k)}},$$

e

$$m_\sigma|_{\mathcal{S}'} = E_{i'_{\sigma(1)}j'_{\sigma(1)}} \cdots E_{i'_{\sigma(p-1)}j'_{\sigma(p-1)}} E_{i'_{\sigma(p)}j'_{\sigma(p)}} \cdots E_{i'_{\sigma(q)}j'_{\sigma(q)}} E_{i'_{\sigma(q+1)}j'_{\sigma(q+1)}} \cdots E_{i'_{\sigma(k)}j'_{\sigma(k)}}.$$

Por 2.7 e 2.23, temos que $j_{\sigma(p-1)} = i_{\sigma(p)} = i'_{\sigma(p)} = j'_{\sigma(p-1)}$. Logo, por 2.6 temos ainda que $\omega(x_{\sigma(p-1)}) = j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(p-1)} = j'_{\sigma(p-1)} - i'_{\sigma(p-1)}$, de onde segue que $i_{\sigma(p-1)} = i'_{\sigma(p-1)}$. Continuando com este raciocínio, usando 2.6 e 2.7, concluimos que $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Similarmente, se $\omega(m_\sigma^{[p,q]}) = n - 1$, então $m_\sigma^{[p,q]}|_{\mathcal{S}} = E_{1n}$. Logo, $E_{i_{\sigma(p)}j_{\sigma(q)}} = E_{1n}$, isto é, $i_{\sigma(p)} = 1$ e $j_{\sigma(q)} = n$. Usando os argumentos expostos anteriormente, concluimos que os índices i_s e j_s , $s = 1, 2, \dots, k$ são determinados unicamente. ■

Para $i, j = 1, \dots, n$ e $\mathcal{S} \in SSt$, considere o conjunto

$$\Lambda(\mathcal{S}, i, j) = \{m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \Lambda_0 \mid m_\sigma|_{\mathcal{S}} = E_{ij}\}.$$

Claramente, $\Lambda(\mathcal{S}, i, j) = \emptyset$, se $\omega(m_\sigma) \neq j - i$. Em virtude do Lema 2.3.6, os conjuntos $\Lambda(\mathcal{S}, i, j)$ são dois a dois disjuntos e a união coincide com Λ_0 , ou seja,

$$\Lambda_0 = \bigcup_{(\mathcal{S}, i, j)} \Lambda(\mathcal{S}, i, j), \quad (2.24)$$

onde (\mathcal{S}, i, j) varia sobre todas as triplas ordenadas (\mathcal{S}, i, j) , com $\mathcal{S} \in SSt$ e $i, j = 1, \dots, n$. De fato, se $\Lambda(\mathcal{S}, i, j) \cap \Lambda(\mathcal{S}', i', j') \neq \emptyset$, então existe $m_\sigma \in \Lambda_0$ tal que $m_\sigma|_{\mathcal{S}} = E_{ij}$ e $m_\sigma|_{\mathcal{S}'} = E_{i'j'}$. Mas em virtude do Lema 2.3.6, $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ e consequentemente $(i, j) = (i', j')$. É imediato que

$$\bigcup_{(\mathcal{S}, i, j)} \Lambda(\mathcal{S}, i, j) \subseteq \Lambda_0.$$

Seja $m_\sigma \in \Lambda_0$. Existe então uma única substituição \mathcal{S}' tal que $m_\sigma|_{\mathcal{S}'} \neq 0$, ou seja, $m_\sigma|_{\mathcal{S}'} = E_{i'j'}$. Daí, $m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}', i', j') \subseteq \bigcup_{(\mathcal{S}, i, j)} \Lambda(\mathcal{S}, i, j)$.

Lema 2.3.7 *Se para uma permutação $\sigma \in S_k$, existir uma substituição Standard \mathcal{S} tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 n(x_2, x_3, \dots, x_k) \pmod{J_n},$$

para algum monômio $n(x_2, x_3, \dots, x_k) = x_{l_2} x_{l_3} \dots x_{l_k}$.

Demonstração: Caso $\sigma(1) = 1$, a demonstração é trivial. Suponhamos que $\sigma(1) \neq 1$. Logo, $1 \neq \sigma^{-1}(1)$, e assim $1 = \sigma^{-1}(\sigma(1)) < \sigma^{-1}(1)$. Além disso, existe um inteiro positivo u tal que $\sigma(1) = 1 + u$. Daí, $1 = \sigma^{-1}(\sigma(1)) = \sigma^{-1}(1 + u) < \sigma^{-1}(1)$. Seja u_0 o menor inteiro positivo tal que $\sigma^{-1}(1 + u_0) < \sigma^{-1}(1)$. Obviamente,

$$1 \leq \sigma^{-1}(1 + u_0) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(u_0). \quad (2.25)$$

Desde que $m_\sigma|_{\mathcal{S}} = m|_{\mathcal{S}} \neq 0$, temos

$$E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \dots E_{i_k j_k} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} E_{i_{\sigma(2)} j_{\sigma(2)}} \dots E_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} \neq 0,$$

e daí, $i_1 = i_{\sigma(1)}$, $j_t = i_{t+1}$, $t = 1, \dots, k-1$ e, para $s > 1$, $j_{\sigma(s-1)} = i_{\sigma(s)}$. Considerando $p = \sigma^{-1}(u_0 + 1)$, $q = \sigma^{-1}(1)$ e $r = \sigma^{-1}(u_0)$, por 2.25 temos $1 \leq p < q \leq r$ com $j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)}$, $j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)}$ e, se $p > 1$, $j_{\sigma(p-1)} = i_{\sigma(p)}$. Vamos considerar inicialmente o caso $p > 1$. Das igualdades

$$j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)} = j_{\sigma(p-1)} \quad e \quad j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)}$$

temos que

$$j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(p)} - j_{\sigma(q-1)} = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = \alpha_0$$

para algum $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 2.3.2, temos

$$\omega(m_\sigma^{[1, p-1]}) = j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)} = \alpha_0;$$

$$\omega(m_\sigma^{[p, q-1]}) = j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(p)} = -\alpha_0;$$

$$\omega(m_\sigma^{[q, r]}) = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = \alpha_0.$$

Consequentemente, usando 2.16, segue que

$$m_\sigma = m_\sigma^{[1, p-1]} m_\sigma^{[p, q-1]} m_\sigma^{[q, r]} m_\sigma^{[r+1, k]} \equiv$$

$$\equiv m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[p,q-1]} m_\sigma^{[1,p-1]} m_\sigma^{[r+1,k]} = x_{\sigma(q)} x_{l_2} \dots x_{l_k} = x_1 x_{l_2} \dots x_{l_k} \pmod{J_n}.$$

Consideremos agora $p = 1$. Neste caso, $j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)} = j_{\sigma(r)}$, e pelo Lema 2.3.2

$$\omega(m_\sigma^{[1,q-1]}) = j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(1)} = 0;$$

$$\omega(m_\sigma^{[q,r]}) = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = 0.$$

Portanto, por 2.15 segue que

$$\begin{aligned} m_\sigma &= m_\sigma^{[1,q-1]} m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[r+1,k]} \equiv \\ &\equiv m_\sigma^{[q,r]} m_\sigma^{[1,q-1]} m_\sigma^{[r+1,k]} = x_{\sigma(q)} x_{l_2} \dots x_{l_k} = x_1 x_{l_2} \dots x_{l_k} \pmod{J_n}. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.3.8 *Se para duas permutações $\sigma, \tau \in S_k$, existir uma substituição Standard \mathcal{S} tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_{\tau(1)} \mathbf{n}(x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, \dots, x_{\tau(k)}) \pmod{J_n}$, para algum $\mathbf{n}(y_2, y_3, \dots, y_k) = y_{l_2} y_{l_3} \dots y_{l_k}$.

Demonstração: Consideremos $x'_1 = x_{\tau(1)}, x'_2 = x_{\tau(2)}, \dots, x'_k = x_{\tau(k)}$. Logo,

$$m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k) = m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k).$$

Tomemos agora $\mu = \tau^{-1} \circ \sigma$. Sendo assim,

$$m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) = m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Por $m_\sigma|_{\mathcal{S}} = m_\tau|_{\mathcal{S}} \neq 0$, temos que $m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)|_{\mathcal{S}} = m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Do Lema 2.3.7 segue que

$$m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \equiv x'_1 x'_{l_2} \dots x'_{l_k} \pmod{J_n},$$

onde $\{l_2, \dots, l_k\} = \{2, \dots, k\}$, ou seja,

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_{\tau(1)} x'_{l_2} \dots x'_{l_k} \pmod{J_n},$$

o que nos dá

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_{\tau(1)} \mathbf{n}(x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, \dots, x_{\tau(k)}) \pmod{J_n},$$

para algum monômio $\mathbf{n}(y_2, y_3, \dots, y_k) = y_{l_2} y_{l_3} \dots y_{l_k}$. ■

A seguir apresentaremos o principal resultado desta seção.

Teorema 2.3.9 *Todas as identidades polinomiais da álgebra \mathbb{Z} -graduada $M_n(K)$ seguem de*

$$\begin{aligned} x &= 0, & |\omega(x)| &\geq n; \\ x_1x_2 - x_2x_1 &= 0, & \omega(x_1) = \omega(x_2) &= 0; \\ x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 &= 0, & \omega(x_1) = \omega(x_3) &= -\omega(x_2), \end{aligned}$$

isto é, $T_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) = I_n$.

Demonstração: Para provar que $T_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) = J_n$ nós usaremos indução sobre n . Seja $n = 1$. Neste caso, $M_1(K) = M_0 = K$. Em virtude de 2.14, nós precisamos considerar somente as identidades graduadas de $M_1(K)$ que são da forma $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$, onde $\omega(x_1) = \omega(x_2) = \dots = \omega(x_k) = 0$. De fato, pois do contrário existe $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $|\omega(x_i)| \geq 1$. Logo, $m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k) \in J_1$, para todo $\sigma \in S_k$ e conseqüentemente $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in J_1$. As identidades $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$, onde $\omega(x_1) = \omega(x_2) = \dots = \omega(x_k) = 0$ são na verdade identidades polinomiais ordinárias de $M_0 = K$. Desde que todas as identidades de um corpo infinito seguem de $[x_1, x_2]$ (veja [13], página 45), concluimos que $T_{\mathbb{Z}}(M_1(K)) = J_1$.

Agora seja $n > 1$ e vamos supor que $T_{\mathbb{Z}}(M_{n-1}(K)) = J_{n-1}$. Desde que a característica do corpo base é zero, nós precisamos provar somente que cada identidade polinomial \mathbb{Z} -graduada multilinear de $M_n(K)$ está em J_n . Nós também usaremos indução sobre k assumindo que cada polinômio multilinear $g(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}) \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ em $k - 1$ variáveis está em J_n . Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ um polinômio \mathbb{Z} -graduado multilinear arbitrário em $T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$. Note que

$$\begin{aligned} \psi : M_{n-1}(K) &\longrightarrow M_n(K) \\ A &\longmapsto \psi(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é um mergulho natural \mathbb{Z} -graduado de $M_{n-1}(K)$ em $M_n(K)$. Desde que $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ e ψ é um mergulho \mathbb{Z} -graduado, segue que $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in T_{\mathbb{Z}}(M_{n-1}(K)) = J_{n-1}$. Logo, f é conseqüência de 2.14 a 2.16 e das identidades

$$x = 0, \text{ para } |\omega(x)| = n - 1. \quad (2.26)$$

Então f pode ser escrito como

$$f = f_1 + f_2 + f_3,$$

para f_1, f_2, f_3 polinômios \mathbb{Z} -graduados multilineares, onde f_1 é consequência de 2.15, f_2 é consequência de 2.16 e f_3 é consequência de 2.14 e 2.26. É fácil ver que f_3 pode ser escrito da forma

$$f_3 = \sum_{\widehat{\omega}(m_\sigma) \geq n-1} a_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

De fato, por f_3 ser consequência de 2.14 e 2.26, temos que $\sum a_\alpha g_1^\alpha g_2^\alpha g_3^\alpha$, onde $g_1^\alpha, g_3^\alpha \in K\langle X \rangle$ e g_2^α é tal que $|\omega(g_2^\alpha)| \geq n-1$. Por g_2^α ser homogêneo com respeito ao \mathbb{Z} -grau, podemos escrever f_3 da forma

$$f_3 = \sum a_\gamma m_1^\gamma m_2^\gamma m_3^\gamma,$$

onde $|\omega(m_2^\gamma)| \geq n-1$ e $m_1^\gamma, m_2^\gamma, m_3^\gamma$ são multilineares e sem termos x'_i s em comum. Como $|\omega(m_2^\gamma)| \geq n-1$, temos que $\widehat{\omega}(m_1^\gamma m_2^\gamma m_3^\gamma) \geq n-1$, para todo γ . Vamos considerar $m_1^\gamma m_2^\gamma m_3^\gamma = m_\sigma$. Fazendo γ variar, σ também varia. Logo, podemos escrever ainda f_3 da forma

$$f_3 = \sum_{\widehat{\omega}(m_\sigma) \geq n-1} a_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Desde que $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \in J_n$ quando $\widehat{\omega}(m_\sigma) > n-1$, segue que

$$f \equiv f_3 \equiv \sum_{\widehat{\omega}(m_\sigma) = n-1} a_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{m_\sigma \in \Lambda_0} a_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{J_n}.$$

Então por 2.24

$$f \equiv \sum_{\mathcal{S} \in SSt} \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)} a_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \right) \pmod{J_n}. \quad (2.27)$$

Se nós provarmos que cada polinômio graduado $\sum a_\sigma m_\sigma$ em 2.27 pertence a J_n , então a inclusão $T_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) \subseteq J_n$ estará demonstrada. Observe que pelo Lema 2.3.6, para $\mathcal{S}_0, \mathcal{S} \in SSt$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ nós temos que

$$\left(\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)} a_\sigma m_\sigma \right) \Big|_{\mathcal{S}_0} = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{S} \neq \mathcal{S}_0; \\ \left[\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}_0, i, j)} a_\sigma \right] E_{ij}, & \text{se } \mathcal{S} = \mathcal{S}_0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Logo, para qualquer $\mathcal{S} \in SSt$, por 2.27 e 2.28 teremos

$$f|_{\mathcal{S}} = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)} a_\sigma \right) E_{ij} = 0,$$

e portanto $\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)} a_\sigma = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Por 2.28, temos que

$$\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)} a_\sigma m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K)), \quad \mathcal{S} \in SSt, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Se $\Lambda(\mathcal{S}, i, j) \neq \emptyset$, escolha uma permutação $\tau \in S_k$ de maneira que $m_\tau \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)$. Pelo Corolário 2.3.8, para cada $m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)$, existe um monômio $\mathbf{n}^{[\sigma]} = \mathbf{n}^{[\sigma]}(x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, \dots, x_{\tau(k)})$ tal que $m_\sigma \equiv x_{\tau(1)} \mathbf{n}^{[\sigma]} \pmod{J_n}$. Notemos que $x_{\tau(1)} \mathbf{n}^{[\sigma]} \notin T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$, pois do contrário $m_\sigma \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$, o que contradiz o fato de $m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)$. Logo, por $x_{\tau(1)} \mathbf{n}^{[\sigma]} \notin T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ segue que $\widehat{\omega}(x_{\tau(1)} \mathbf{n}^{[\sigma]}) \leq n - 1$. Considere $P = \{\sigma \in S_k \mid m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)\}$. Sendo assim,

$$\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)} a_\sigma m_\sigma = \sum_{\sigma \in P} a_\sigma m_\sigma \equiv \sum_{\sigma \in P} a_\sigma x_{\tau(1)} \mathbf{n}^{[\sigma]} = x_{\tau(1)} \sum_{\sigma \in P} a_\sigma \mathbf{n}^{[\sigma]} \pmod{J_n}. \quad (2.29)$$

Por $\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)} a_\sigma m_\sigma \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ e 2.29, temos que $x_{\tau(1)} \sum_{\sigma \in P} a_\sigma \mathbf{n}^{[\sigma]} \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$. Logo, pelo Lema 2.3.4, $\sum_{\sigma \in P} a_\sigma \mathbf{n}^{[\sigma]} \in T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ e por ser uma identidade graduada multilinear de $M_n(K)$ em $k - 1$ variáveis, concluimos que $\sum_{\sigma \in P} a_\sigma \mathbf{n}^{[\sigma]} \in J_n$. Portanto, por 2.29 para qualquer $\mathcal{S} \in SSt$ e $i, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\sum_{m_\sigma \in \Lambda(\mathcal{S}, i, j)} a_\sigma m_\sigma \equiv 0 \pmod{J_n},$$

o que completa a demonstração. ■

2.4 Polinômios Centrais \mathbb{Z} -graduados

Apresentaremos nesta seção a descrição do espaço dos polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados para a álgebra $M_n(K)$.

Sejam J_n o $T_{\mathbb{Z}}$ -ideal gerado pelas identidades graduadas de 2.14 a 2.16 e $C_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$ o $T_{\mathbb{Z}}$ -espaço dos polinômios centrais \mathbb{Z} -graduados de $M_n(K)$. Claramente, temos $J_n \subseteq C_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$.

Lema 2.4.1 *Seja $m(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \dots x_k$ um monômio multilinear de $K\langle X \rangle$ com $\omega(m) = 0$. Se uma substituição Standard \mathcal{S}*

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, \quad x_2 = E_{i_2 j_2}, \quad \dots, \quad x_k = E_{i_k j_k}$$

é tal que $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$, então $m_\sigma|_{\mathcal{S}} \neq 0$ para todo $\sigma \in H_k$.

Demonstração: Sendo $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$, temos $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{k-1} = i_k$. Como $m|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_k}$ e $\omega(m) = 0$, devemos ter $i_1 = j_k$. Observemos que $m_{\theta_k}|_{\mathcal{S}} = E_{i_2 j_k} E_{i_1 j_1} = E_{i_2 i_2} \neq 0$. O resultado segue então indutivamente. ■

Proposição 2.4.2 *O polinômio multilinear*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde $\widehat{\omega}(x_1 x_2 \dots x_k) \leq n - 1$ e $(\overline{\omega(x_1)}, \overline{\omega(x_2)}, \dots, \overline{\omega(x_n)})$ é uma sequência completa em \mathbb{Z}_n , é um polinômio central \mathbb{Z} -graduado, que não é identidade para a álgebra $M_n(K)$.

Demonstração: Como f é multilinear, é suficiente mostrar que $f|_{\mathcal{S}} \in Z(M_n(K))$ para toda substituição Standard \mathcal{S} . Pelo Lema 2.4.1, se $m|_{\mathcal{S}} = 0$, então $m_{\sigma}|_{\mathcal{S}} = 0$ para todo $\sigma \in H_n$, e daí $f|_{\mathcal{S}} = 0$. Suponhamos então \mathcal{S} uma substituição Standard

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, x_2 = E_{i_2 j_2}, \dots, x_n = E_{i_n j_n}$$

tal que $m|_{\mathcal{S}} \neq 0$. Observe que a existência de \mathcal{S} é garantida pelo Corolário 2.3.5. Claramente devemos ter $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{n-1} = i_n$ e também $j_n = i_1$, pois $\omega(m) = \omega(x_1) + \omega(x_2) + \dots + \omega(x_n) = 0$. Logo,

$$f|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 i_1} + E_{i_2 i_2} + \dots + E_{i_n i_n}.$$

Notando agora que

$$\omega(x_1) = i_2 - i_1, \omega(x_2) = i_3 - i_2, \dots, \omega(x_{n-1}) = i_n - i_{n-1}, \omega(x_n) = i_1 - i_n,$$

temos

$$\overline{\omega(x_1)} + \overline{\omega(x_2)} = \overline{i_3 - i_1}, \dots, \overline{\omega(x_1)} + \dots + \overline{\omega(x_{n-1})} = \overline{i_n - i_1}.$$

Como $(\overline{\omega(x_1)}, \overline{\omega(x_2)}, \dots, \overline{\omega(x_n)})$ é uma sequência completa, devemos ter $\overline{i_2 - i_1}, \overline{i_3 - i_1}, \dots, \overline{i_n - i_1}$ não-nulos e dois a dois distintos, donde segue que i_1, i_2, \dots, i_n devem ser dois a dois incôgruos módulo n . Mas, $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Logo, temos a igualdade destes dois conjuntos, e portanto $f|_{\mathcal{S}} = I_n \in Z(M_n(K))$. ■

Lema 2.4.3 *Se para uma permutação $\sigma \in S_k$, existir uma substituição Standard \mathcal{S} tal que*

$$m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então

$$m_{\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{J_n}.$$

Demonstração: Pelo Lema 2.3.7, $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 n(x_2, x_3, \dots, x_k) \pmod{J_n}$.

Seja r o maior inteiro positivo tal que

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv x_1 x_2 \dots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k) \pmod{J_n}, \quad (2.30)$$

para algum monômio $n = n(x_{r+1}, \dots, x_k)$. Mostraremos que $r = k$. Suponhamos por contradição que $r < k$. Então, obviamente $r \leq k - 2$. Desde que $J_n = T_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$, por 2.30 temos

$$x_1 x_2 \dots x_r n(x_{r+1}, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0.$$

Combinando a igualdade anterior com

$$x_1 x_2 \dots x_r n|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \dots E_{i_r j_r} n|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_r} n|_{\mathcal{S}}$$

e

$$m|_{\mathcal{S}} = E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \dots E_{i_r j_r} \{x_{r+1} x_{r+2} \dots x_k\}|_{\mathcal{S}},$$

temos que

$$n(x_{r+1}, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = x_{r+1} x_{r+2} \dots x_k|_{\mathcal{S}} = E_{j_r j_k} \neq 0.$$

Pelo Lema 2.3.7, existe um monômio $n'(x_{r+2}, \dots, x_k)$ tal que

$$n(x_{r+1}, \dots, x_k) \equiv x_{r+1} n'(x_{r+2}, \dots, x_k) \pmod{J_n}.$$

Logo,

$$m_\sigma \equiv x_1 \dots x_r n(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_k) \equiv x_1 \dots x_r x_{r+1} n'(x_{r+2}, \dots, x_k) \pmod{J_n},$$

o que contradiz a escolha do número r . Portanto, $r = k$. ■

Corolário 2.4.4 *Se para duas permutações $\sigma, \tau \in S_k$, existir uma substituição Standard \mathcal{S} tal que*

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} = m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k)|_{\mathcal{S}} \neq 0,$$

então $m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{I_n}$.

Demonstração: Consideremos $x'_1 = x_{\tau(1)}, x'_2 = x_{\tau(2)}, \dots, x'_k = x_{\tau(k)}$. Logo,

$$m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k) = m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k).$$

Tomemos agora $\mu = \tau^{-1} \circ \sigma$. Sendo assim,

$$m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) = m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Por $m_\sigma|_S = m_\tau|_S \neq 0$, temos que $m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)|_S = m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)|_S \neq 0$. Pelo Lema 2.4.3, segue que

$$m_\mu(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \equiv m(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \pmod{J_n}$$

e portanto,

$$m_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv m_\tau(x_1, x_2, \dots, x_k) \pmod{J_n}.$$

■

Tomemos agora W como sendo o $T_{\mathbb{Z}}$ -espaço gerado pelos polinômios

$$\begin{aligned} z_1 x z_2, & \quad |\omega(x)| \geq n; \\ z_1 [x_1, x_2] z_2, & \quad \omega(x_1) = \omega(x_2) = 0; \\ z_1 (x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1) z_2, & \quad \omega(x_1) = \omega(x_3) = -\omega(x_2); \\ \sum_{\sigma \in H_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}, & \quad (\overline{\omega(x_1)}, \overline{\omega(x_2)}, \dots, \overline{\omega(x_n)}) \text{ sequência completa,} \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $\widehat{\omega}(x_1 x_2 \dots x_n) \leq n - 1$ e z_1 e z_2 são variáveis em X .

Do fato de todos os polinômios em 2.31 serem centrais segue que $W \subseteq C_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$. Observando agora que o $T_{\mathbb{Z}}$ -espaço gerado pelos três primeiros polinômios em 2.31 é exatamente J_n , concluímos que $J_n \subset W$.

Lema 2.4.5 *Se o polinômio multilinear*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \lambda_1 m_1(x_1, x_2, \dots, x_k) + \dots + \lambda_n m_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (k \geq n)$$

é tal que existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que $f|_S = \lambda I_n$, para algum $0 \neq \lambda \in K$, então $f \in W$.

Demonstração: Como $f|_S = \lambda I_n$, devemos ter $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ e $\omega(m_i) = 0$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Vamos supor que $m_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 x_2 \dots x_k$. Seja \mathcal{S} uma substituição Standard

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, \quad x_2 = E_{i_2 j_2}, \quad \dots, \quad x_k = E_{i_k j_k}$$

satisfazendo as hipóteses do Lema. Por $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, para cada $i = 1, \dots, n$ existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $m_j|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$. Logo, existem $1 = l_1 < l_2 < \dots < l_n$ de modo que $\{i_{l_1}, i_{l_2}, \dots, i_{l_n}\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Sendo assim,

$$m_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = \overbrace{x_{l_1} \dots x_{l_2-1}}^{t_1} \overbrace{x_{l_2} \dots x_{l_3-1}}^{t_2} \dots \overbrace{x_{l_n} \dots x_k}^{t_n}.$$

Logo,

$$\overline{\omega(t_1)} = \overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \overline{\omega(t_2)} = \overline{i_{l_3} - i_{l_2}}, \dots, \overline{\omega(t_{n-1})} = \overline{i_{l_n} - i_{l_{n-1}}} \text{ e } \overline{\omega(t_n)} = \overline{i_1 - i_{l_n}}.$$

A sequência $(\overline{\omega(t_1)}, \overline{\omega(t_2)}, \dots, \overline{\omega(t_n)})$ é uma sequência completa em \mathbb{Z}_n , pois

$$\overline{\omega(t_1)} + \overline{\omega(t_2)} + \dots + \overline{\omega(t_n)} = \overline{\omega(m_1)} = \overline{0} = \overline{i_{l_2} - i_{l_1}} + \overline{i_{l_3} - i_{l_2}} + \dots + \overline{i_{l_n} - i_{l_{n-1}}} + \overline{i_1 - i_{l_n}}.$$

Além disso,

$$\overline{\omega(t_1)} = \overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \overline{\omega(t_1)} + \overline{\omega(t_2)} = \overline{i_{l_3} - i_{l_1}}, \dots, \overline{\omega(t_1)} + \overline{\omega(t_2)} + \dots + \overline{\omega(t_{n-1})} = \overline{i_{l_n} - i_{l_1}}.$$

Daí, sendo $\{i_{l_1}, i_{l_2}, \dots, i_{l_n}\} = \{1, 2, \dots, n\}$, devemos ter $\overline{i_{l_2} - i_{l_1}}, \overline{i_{l_3} - i_{l_1}}, \dots, \overline{i_{l_n} - i_{l_1}}$ não-nulos e dois a dois distintos.

Consideremos agora o monômio

$$\overbrace{x_{l_2} \dots x_{l_3-1}}^{t_2} \dots \overbrace{x_{l_n} \dots x_k}^{t_n} \overbrace{x_{l_1} \dots x_{l_2-1}}^{t_1}$$

e observemos que $t_2 \dots t_n t_1|_{\mathcal{S}} = E_{i_{l_2} i_{l_2}}$. Por $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, existe algum $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $m_q|_{\mathcal{S}} = t_2 \dots t_n t_1|_{\mathcal{S}} = E_{i_{l_2} i_{l_2}}$ e pelo Corolário 2.4.4, concluímos que $m_q \equiv t_2 \dots t_n t_1 \pmod{J_n}$. Além disso, $\widehat{\omega}(t_1 t_2 \dots t_n) \leq n - 1$. Como $\{t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \dots t_{\sigma(n)}|_{\mathcal{S}}; \sigma \in H_n\} = \{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$ continuamos com este raciocínio usando novamente o Corolário 2.4.4 e concluímos que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \lambda(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \equiv \lambda \sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \dots t_{\sigma(n)} \pmod{J_n},$$

e daí

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv \lambda \sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \dots t_{\sigma(n)} \pmod{W} \text{ (pois } J_n \subseteq W).$$

Além disso, $\sum_{\sigma \in H_n} t_{\sigma(1)} t_{\sigma(2)} \dots t_{\sigma(n)} \in W$, donde segue que $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in W$. ■

Teorema 2.4.6 *Seja K um corpo de característica zero. Então $C_{\mathbb{Z}}(M_n(K)) = W$.*

Demonstração: Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in C_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$. Podemos supor f multilinear. Suponhamos ainda que f não é identidade \mathbb{Z} -graduada para $M_n(K)$. Podemos escrever f na forma

$$f = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_l m_l,$$

onde m_1, m_2, \dots, m_l são monômios multilineares em x_1, x_2, \dots, x_k . Por f não ser identidade \mathbb{Z} -graduada para $M_n(K)$, existe uma substituição Standard \mathcal{S} tal que $f|_{\mathcal{S}} = \lambda I_n$, para algum $0 \neq \lambda \in K$. Logo, $l \geq n$. Observemos ainda que para cada $i = 1, 2, \dots, l$, temos $m_i|_{\mathcal{S}} = 0$ ou $m_i|_{\mathcal{S}} = E_{jj}$. Temos também que para cada $i = 1, \dots, n$, existe $j_i \in \{1, 2, \dots, l\}$ tal que $m_{j_i}|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$. Juntando os termos $m_{j_i}'s$ tais que $m_{j_i}|_{\mathcal{S}} = E_{ii}$ e usando o Corolário 2.4.4, concluímos que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv \alpha_1 m_{j_1} + \alpha_2 m_{j_2} + \dots + \alpha_n m_{j_n} + \beta_1 m_{t_1} + \dots + \beta_r m_{t_r} \pmod{W},$$

onde $r < l$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_r \in K$. Pelo Lema 2.4.5, temos

$$\alpha_1 m_{j_1} + \alpha_2 m_{j_2} + \dots + \alpha_n m_{j_n} \in W,$$

donde segue que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv \beta_1 m_{t_1} + \dots + \beta_r m_{t_r} \pmod{W}.$$

Por $f \in C_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$, temos que $\beta_1 m_{t_1} + \dots + \beta_r m_{t_r} \in C_{\mathbb{Z}}(M_n(K))$. Se $r < n$, então $\beta_1 m_{t_1} + \dots + \beta_r m_{t_r} \in J_n \subseteq W$. Caso contrário, repetimos os mesmos argumentos usados anteriormente. ■

Capítulo 3

Polinômios Centrais para a Álgebra das matrizes de segunda ordem

Um dos principais problemas na PI-Teoria é determinar se para uma dada álgebra A o T -espaço dos polinômios centrais de A é finitamente gerado. Neste capítulo apresentaremos uma base finita construída por Okhitin [40] para o T -espaço dos polinômios centrais ordinários da álgebra $M_2(K)$, onde K denotará um corpo de característica zero. Colombo e Koshlukov [8] generalizaram esta descrição do T -espaço $C(M_2(K))$ para o caso de K ser infinito e de característica diferente de 2.

3.1 O T -espaço $C(M_2(K))$

Nesta seção denotaremos por $K\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre, onde $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ é um conjunto não-vazio e enumerável (conforme Seção 1.2), $L = L(X) \subset K\langle X \rangle$ (veja Seção 1.4) uma álgebra de Lie livre com conjunto gerador X , $L_2 = L \cap T(M_2(K))$ e K denotará sempre um corpo de característica zero.

Consideremos os polinômios $H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [h(x_1, x_2, x_3, x_4), x_5]$, onde $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$ (polinômio de Hall) e $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ o polinômio Standard de grau 4 (veja Exemplo 1.2.7).

Lema 3.1.1 *São válidas as seguintes igualdades:*

$$(i) \quad H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4, x_5] + [x_1, x_2, x_5] \circ [x_3, x_4];$$

$$(ii) \quad s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] - [x_1, x_3] \circ [x_2, x_4] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3].$$

Demonstração: (i) Usando a igualdade em 1.1, temos

$$\begin{aligned}
H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= [[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5] = [[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_4][x_1, x_2], x_5] = \\
&[[x_1, x_2], x_5][x_3, x_4] + [x_1, x_2][[x_3, x_4], x_5] + [[x_3, x_4], x_5][x_1, x_2] + [x_3, x_4][[x_1, x_2], x_5] = \\
&[x_1, x_2, x_5][x_3, x_4] + [x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] + [x_3, x_4, x_5][x_1, x_2] + [x_3, x_4][x_1, x_2, x_5] = \\
&[x_1, x_2, x_5] \circ [x_3, x_4] + [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4, x_5].
\end{aligned}$$

(ii) Temos também

$$\begin{aligned}
s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = \\
&x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4 x_3 - x_1 x_3 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 x_2 + x_1 x_4 x_2 x_3 - x_1 x_4 x_3 x_2 - \\
&x_2 x_1 x_3 x_4 + x_2 x_1 x_4 x_3 + x_2 x_3 x_1 x_4 - x_2 x_3 x_4 x_1 - x_2 x_4 x_1 x_3 + x_2 x_4 x_3 x_1 + \\
&x_3 x_1 x_2 x_4 - x_3 x_1 x_4 x_2 - x_3 x_2 x_1 x_4 + x_3 x_2 x_4 x_1 + x_3 x_4 x_1 x_2 - x_3 x_4 x_2 x_1 - \\
&x_4 x_1 x_2 x_3 + x_4 x_1 x_3 x_2 + x_4 x_2 x_1 x_3 - x_4 x_2 x_3 x_1 - x_4 x_3 x_1 x_2 + x_4 x_3 x_2 x_1 = \\
&x_1 x_2 (x_3 x_4 - x_4 x_3) + x_1 x_3 (x_4 x_2 - x_2 x_4) + x_1 x_4 (x_2 x_3 - x_3 x_2) - x_2 x_1 (x_3 x_4 - x_4 x_3) + \\
&x_2 x_3 (x_1 x_4 - x_4 x_1) - x_2 x_4 (x_1 x_3 - x_3 x_1) - x_3 x_1 (x_4 x_2 - x_2 x_4) - x_3 x_2 (x_1 x_4 - x_4 x_1) + \\
&x_3 x_4 (x_1 x_2 - x_2 x_1) - x_4 x_1 (x_2 x_3 - x_3 x_2) + x_4 x_2 (x_1 x_3 - x_3 x_1) - x_4 x_3 (x_1 x_2 - x_2 x_1) = \\
&(x_1 x_2 - x_2 x_1)(x_3 x_4 - x_4 x_3) + (x_3 x_4 - x_4 x_3)(x_1 x_2 - x_2 x_1) + (x_1 x_3 - x_3 x_1)(x_4 x_2 - x_2 x_4) + \\
&(x_4 x_2 - x_2 x_4)(x_1 x_3 - x_3 x_1) + (x_1 x_4 - x_4 x_1)(x_2 x_3 - x_3 x_2) + (x_2 x_3 - x_3 x_2)(x_1 x_4 - x_4 x_1) = \\
&[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] + [x_1, x_3] \circ [x_4, x_2] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3] = \\
&[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] - [x_1, x_3] \circ [x_2, x_4] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3].
\end{aligned}$$

■

Uma base finita de identidades para a álgebra $M_2(K)$ foi construída inicialmente por Razmyslov [44]. Posteriormente, Drensky [10] mostrou que as identidades de $M_2(K)$ seguem dos polinômios $H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Observemos que $x_0 s_4 \notin V(h)$, onde $V(h)$ é o T -espaço gerado pelo polinômio $h(x_1, x_2, x_3, x_4)$. De fato, basta observarmos que $[h(x_1, x_2, x_3, x_4), x_5]$ é identidade para a álgebra exterior E , visto que $[x_1, x_2, x_3]$ é identidade para E (veja Exemplo 1.2.12). Logo, se $x_0 s_4 \in V(h)$, então $[x_0 s_4, x_5]$ seria identidade para E e portanto $x_0 s_4$ seria

um polinômio central para E . Sendo assim, para $x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3, x_4 = e_4$ e $x_0 = e_5$, teríamos que $e_5 s_4(e_1, e_2, e_3, e_4) = 24e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 \in Z(E) = E_0$, o que é uma contradição. Além disso, $h \notin V(x_0 s_4)$, onde $V(x_0 s_4)$ é o T -espaço gerado pelo polinômio $x_0 s_4$. De fato, basta observarmos que $x_0 s_4 \in T(M_2(K))$ e $h \notin T(M_2(K))$.

Vamos denotar por $V = V(h, x_0 s_4)$ o T -espaço de $K\langle X \rangle$ gerado pelos polinômios h e $x_0 s_4$. Pelo que foi exposto anteriormente, V não pode ser gerado, como T -espaço, por apenas um desses polinômios. Ademais, por $h, x_0 s_4 \in C(M_2(K))$, concluímos que $V \subseteq C(M_2(K))$.

Lema 3.1.2 *Existe um polinômio de Lie $l \in L$ tal que $c = x_0 h + l$ é um polinômio central para $M_2(K)$ e $c \in V$.*

Demonstração: Notemos inicialmente que na álgebra $K\langle X \rangle$ vale

$$x_0([x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]) + x_1([x_0, x_2] \circ [x_3, x_4]) = c_1 + l_1, \quad (3.1)$$

onde

$$c_1 = [x_0 x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] - [x_0, x_2, x_1] \circ [x_3, x_4] - \frac{1}{2}([x_3, x_4, x_0] \circ [x_1, x_2] + [x_3, x_4, x_1] \circ [x_0, x_2]),$$

$$l_1 = \frac{1}{2}([x_1, x_2], [x_3, x_4, x_0]) + [[x_0, x_2], [x_3, x_4, x_1]] \in L.$$

Observe que pela expressão de c_1 , podemos concluir que $c_1 \in V(h)$. De fato, a igualdade em 3.1 é verdadeira, pois por 1.1 temos que

$$\begin{aligned} c_1 + l_1 &= ([x_0, x_2]x_1 + x_0[x_1, x_2]) \circ [x_3, x_4] - [x_0, x_2, x_1] \circ [x_3, x_4] - \\ &\frac{1}{2}[x_3, x_4, x_0] \circ [x_1, x_2] - \frac{1}{2}[x_3, x_4, x_1] \circ [x_0, x_2] + \frac{1}{2}[x_1, x_2][x_3, x_4, x_0] - \\ &\frac{1}{2}[x_3, x_4, x_0][x_1, x_2] + \frac{1}{2}[x_0, x_2][x_3, x_4, x_1] - \frac{1}{2}[x_3, x_4, x_1][x_0, x_2] = \\ &([x_0, x_2]x_1 + x_0[x_1, x_2]) \circ [x_3, x_4] - [x_0, x_2, x_1] \circ [x_3, x_4] - \\ &[x_3, x_4, x_0][x_1, x_2] - [x_3, x_4, x_1][x_0, x_2] = \\ &[x_0, x_2]x_1[x_3, x_4] + [x_3, x_4][x_0, x_2]x_1 + x_0[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_3, x_4]x_0[x_1, x_2] - \\ &[x_0, x_2, x_1][x_3, x_4] - [x_3, x_4][x_0, x_2, x_1] - [x_3, x_4, x_0][x_1, x_2] - [x_3, x_4, x_1][x_0, x_2] = \\ &(x_1[x_0, x_2] + [x_0, x_2, x_1])[x_3, x_4] + [x_3, x_4](x_1[x_0, x_2] + [x_0, x_2, x_1]) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_0[x_1, x_2][x_3, x_4] + (x_0[x_3, x_4] + [x_3, x_4, x_0])[x_1, x_2] - [x_0, x_2, x_1][x_3, x_4] - \\
& \quad [x_3, x_4][x_0, x_2, x_1] - [x_3, x_4, x_0][x_1, x_2] - [x_3, x_4, x_1][x_0, x_2] = \\
& x_1[x_0, x_2][x_3, x_4] + [x_0, x_2, x_1][x_3, x_4] + [x_3, x_4]x_1[x_0, x_2] + [x_3, x_4][x_0, x_2, x_1] + \\
& x_0[x_1, x_2][x_3, x_4] + x_0[x_3, x_4][x_1, x_2] + [x_3, x_4, x_0][x_1, x_2] - [x_0, x_2, x_1][x_3, x_4] - \\
& \quad [x_3, x_4][x_0, x_2, x_1] - [x_3, x_4, x_0][x_1, x_2] - [x_3, x_4, x_1][x_0, x_2] = \\
& \quad x_1[x_0, x_2][x_3, x_4] + (x_1[x_3, x_4] + [x_3, x_4, x_1])[x_0, x_2] + \\
& \quad x_0[x_1, x_2][x_3, x_4] + x_0[x_3, x_4][x_1, x_2] - [x_3, x_4, x_1][x_0, x_2] = \\
& x_1[x_0, x_2][x_3, x_4] + x_1[x_3, x_4][x_0, x_2] + x_0[x_1, x_2][x_3, x_4] + x_0[x_3, x_4][x_1, x_2] = \\
& \quad x_1([x_0, x_2] \circ [x_3, x_4]) + x_0([x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]).
\end{aligned}$$

Por 3.1, existem $c_2, c_3 \in V(h)$ e $l_2, l_3 \in L$ tais que

$$x_0h - x_0([x_1, x_3] \circ [x_2, x_4]) = c_2 + l_2; \quad (3.2)$$

$$x_0h - x_0([x_1, x_4] \circ [x_2, x_3]) = c_3 + l_3. \quad (3.3)$$

Como $x_0h = x_0([x_1, x_2] \circ [x_3, x_4])$, subtraímos 3.2 de 3.3 e obtemos

$$x_0h - x_0([x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]) - x_0([x_1, x_4] \circ [x_2, x_3]) + x_0([x_1, x_3] \circ [x_2, x_4]) = (c_3 - c_2) + (l_3 - l_2)$$

o que nos dá

$$x_0h - x_0s_4 = (c_3 - c_2) + (l_3 - l_2) \text{ e daí } x_0h + (l_2 - l_3) = (c_3 - c_2) + x_0s_4,$$

ou seja,

$$x_0h + l = c \in V,$$

onde $l = l_2 - l_3 \in L$ e $c = c_3 - c_2 + x_0s_4 \in V$. ■

Lema 3.1.3 $T(M_2(K)) \subset V$.

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que $s_4, x_0s_4, H, x_0H \in V$. Claramente, s_4, x_0s_4 e $H \in V$, pois pelo Lema 3.1.1, s_4 e H pertencem a $V(h) \subset V$. Em [44] foi provado que $L_2 \subset V$. Do Lema 3.1.2, existe um polinômio de Lie l tal que $x_0H + l \in V$. De fato, existem $l_1, l_2 \in L$, tais que

$$x_0([x_1, x_2] \circ [x_3, x_4, x_5]) + l_1 \in V, \quad (3.4)$$

$$x_0([x_1, x_2, x_5] \circ [x_3, x_4]) + l_2 \in V. \quad (3.5)$$

Somando as igualdades 3.4 e 3.5, obtemos que $x_0H + l \in V$, onde $l = l_1 + l_2$. Sendo assim, $x_0H + l = f \in V$. Por x_0H ser identidade para $M_2(K)$, segue que $l \in C(M_2(K))$. Por outro lado, l é um polinômio de Lie, logo tem traço zero em qualquer substituição e por 1.6.11 concluímos que l é identidade para $M_2(K)$. Logo, $l \in T(M_2(K)) \cap L = L_2 \subset V$. Portanto, $x_0H = f - l \in V$. Observe que $[x_0s_4, x_5] = x_0s_4x_5 - x_5x_0s_4$. Por outro lado, usando 1.1, segue que $[x_0s_4, x_5] = [x_0, x_5]s_4 + x_0[s_4, x_5]$. Dessa forma,

$$x_0s_4x_5 - x_5x_0s_4 = [x_0, x_5]s_4 + x_0[s_4, x_5].$$

Notemos que

$$x_0[s_4, x_5] = x_0[[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5] - x_0[[x_1, x_3] \circ [x_2, x_4], x_5] + x_0[[x_1, x_4] \circ [x_2, x_3], x_5] \in V,$$

pois é uma consequência de x_0H . Daí, como $x_5x_0s_4, [x_0, x_5]s_4, x_0[s_4, x_5] \in V$, concluímos que $x_0s_4x_5 \in V$. Analogamente, mostra-se que $x_0Hx_6 \in V$. Portanto, $T(M_2(K)) \subset V$. ■

Sejam A uma álgebra associativa e $a, b, c \in A$. Apartir de um cálculo direto, podemos mostrar que

$$[a \circ b, c] = a \circ [b, c] + b \circ [a, c], \quad (3.6)$$

$$(b \circ c) \circ a - b \circ (c \circ a) = [a, b, c]. \quad (3.7)$$

Lema 3.1.4 *Se $A_1, A_2, A_3, A_4 \in Sl_2(K)$ (conjunto das matrizes de traço zero em $M_2(K)$), então*

$$4[A_1, A_2](A_3 \circ A_4) = [A_1, A_3, A_4, A_2] + [A_1, A_4, A_3, A_2] - [A_2, A_3, A_1, A_4] - [A_2, A_4, A_1, A_3].$$

Consequentemente, se u e v são comutadores em $K\langle X \rangle$, então

$$4[x, y](u \circ v) \equiv [x, u, v, y] + [x, v, u, y] - [y, u, x, v] - [y, v, x, u] \pmod{T(M_2(K))}.$$

Demonstração: Observemos inicialmente que $A \circ B \in Z(M_2(K))$, para $A, B \in Sl_2(K)$. Logo, usando as igualdades 3.6 e 3.7, temos que

$$\begin{aligned} & [A_1, A_3, A_4, A_2] + [A_1, A_4, A_3, A_2] - [A_2, A_3, A_1, A_4] - [A_2, A_4, A_1, A_3] = \\ & [[A_1, A_3, A_4], A_2] + [[A_1, A_4, A_3], A_2] - [[A_2, A_3, A_1], A_4] - [[A_2, A_4, A_1], A_3] = \\ & [(A_3 \circ A_4) \circ A_1 - A_3 \circ (A_4 \circ A_1), A_2] + [(A_4 \circ A_3) \circ A_1 - A_4 \circ (A_3 \circ A_1), A_2] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(A_3 \circ A_1) \circ A_2 - A_3 \circ (A_1 \circ A_2), A_4] - [(A_4 \circ A_1) \circ A_2 - A_4 \circ (A_1 \circ A_2), A_3] = \\
& [(A_3 \circ A_4) \circ A_1, A_2] - [A_3 \circ (A_4 \circ A_1), A_2] + [(A_4 \circ A_3) \circ A_1, A_2] - [A_4 \circ (A_3 \circ A_1), A_2] - \\
& [(A_3 \circ A_1) \circ A_2, A_4] + [A_3 \circ (A_1 \circ A_2), A_4] - [(A_4 \circ A_1) \circ A_2, A_3] + [A_4 \circ (A_1 \circ A_2), A_3] = \\
& (A_3 \circ A_4) \circ [A_1, A_2] + A_1 \circ [A_3 \circ A_4, A_2] - A_3 \circ [A_4 \circ A_1, A_2] - (A_4 \circ A_1) \circ [A_3, A_2] + \\
& (A_4 \circ A_3) \circ [A_1, A_2] + A_1 \circ [A_4 \circ A_3, A_2] - A_4 \circ [A_3 \circ A_1, A_2] - (A_3 \circ A_1) \circ [A_4, A_2] - \\
& (A_3 \circ A_1) \circ [A_2, A_4] - A_2 \circ [A_3 \circ A_1, A_4] + A_3 \circ [A_1 \circ A_2, A_4] + (A_1 \circ A_2) \circ [A_3, A_4] - \\
& (A_4 \circ A_1) \circ [A_2, A_3] - A_2 \circ [A_4 \circ A_1, A_3] + A_4 \circ [A_1 \circ A_2, A_3] + (A_1 \circ A_2) \circ [A_4, A_3] = \\
& (A_3 \circ A_4) \circ [A_1, A_2] - (A_4 \circ A_1) \circ [A_3, A_2] + (A_4 \circ A_3) \circ [A_1, A_2] - (A_3 \circ A_1) \circ [A_4, A_2] - \\
& (A_3 \circ A_1) \circ [A_2, A_4] + (A_1 \circ A_2) \circ [A_3, A_4] - (A_4 \circ A_1) \circ [A_2, A_3] + (A_1 \circ A_2) \circ [A_4, A_3] = \\
& (A_3 \circ A_4) \circ [A_1, A_2] + (A_4 \circ A_3) \circ [A_1, A_2] = 2(A_3 \circ A_4)[A_1, A_2] + 2(A_3 \circ A_4)[A_1, A_2] = \\
& 4[A_1, A_2](A_3 \circ A_4).
\end{aligned}$$

Para mostrarmos a segunda afirmação basta observarmos que

$$M_2(K) = Sl_2(K) \oplus D,$$

onde $D = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in K\} = Z(M_2(K))$ e que qualquer comutador resulta em uma matriz de traço zero em $M_2(K)$. ■

A primeira afirmação do Lema 3.1.4 nos diz que o polinômio $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4[x_1, x_2](x_3 \circ x_4) - [x_1, x_3, x_4, x_2] - [x_1, x_4, x_3, x_2] + [x_2, x_3, x_1, x_4] + [x_2, x_4, x_1, x_3]$ é uma identidade fraca para $M_2(K)$ (veja Seção 4.3).

A próxima definição será de grande importância na demonstração do principal resultado desta seção.

Definição 3.1.5 *Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle$ um polinômio multilinear. Dizemos que o posto de f é igual a n e denotamos por $r(f) = n \geq 0$, se existem n variáveis no polinômio f tal que $f|_{x_{i_1}=\dots=x_{i_n}=1} \neq 0$ e n é o maior número que satisfaz tal propriedade.*

Se $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ é um polinômio central multilinear, então por 1.4 podemos expressá-lo da forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} w_a, \quad (3.8)$$

onde $w_a \in B(X)$, $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} w_a$ é multilinear e $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$. Por $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} w_a$ ser multilinear temos $0 \leq a_i \leq 1$. Mostraremos que esta forma de representar f é única. Suponhamos que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_a x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} w'_a, \quad (3.9)$$

onde $w'_a \in B(X)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ e $0 \leq a_i \leq 1$. Para cada a consideremos $M_a = \sum_{i=1}^k a_i$ e $\Gamma = \{M_a \mid a = (a_1, a_2, \dots, a_k)\}$. Tomemos $M_b = \max \Gamma$. Substituindo em 3.8 e 3.9 as variáveis x_i por 1, onde $b_i \neq 0$, temos que $w_b = w'_b$. Logo, por 3.8 e 3.9 segue que

$$\sum_{\substack{a \\ a \neq b}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} w_a = \sum_{\substack{a \\ a \neq b}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k} w'_a.$$

Continuando com este raciocínio, concluímos que $w_a = w'_a$ para todo a e portanto temos a unicidade da representação de f em 3.8. Dessa forma, o posto do polinômio f pode ser entendido como sendo o máximo do conjunto Γ , ou seja, $r(f) = \max \Gamma$.

Lema 3.1.6 *Seja f um polinômio central multilinear de $M_2(K)$, onde $r(f) = 0$. Neste caso, $f = c + g$, onde $c = \sum l_1^i \circ l_2^i$, $l_1^i, l_2^i \in L$ e $g \in T(M_2(K))$.*

Demonstração: Para provar o Lema é suficiente representarmos f como uma combinação linear de um produto de comutadores e aplicar o número de vezes necessário a igualdade

$$2uv = u \circ v + [u, v] \quad (3.10)$$

e a identidade da álgebra $M_2(K)$ do Lema 3.1.4. Notemos que se u_1 e u_2 são comutadores, então por 3.10, $u_1 u_2 = \frac{1}{2}(u_1 \circ u_2) + \frac{1}{2}[u_1, u_2]$. Por $u_1, u_2 \in L$ e L ser uma subálgebra de $K\langle X \rangle^{(-)}$, segue que $[u_1, u_2] \in L$. Suponhamos que

$$u_1 u_2 \dots u_n \equiv \sum l_1^i \circ l_2^i + l \pmod{T(M_2(K))}, \text{ onde } l_1^i, l_2^i \text{ e } l \in L. \quad (3.11)$$

Observe que estamos indução sobre n . Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira. Supondo 3.11 temos

$$u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1} \equiv \left(\sum l_1^i \circ l_2^i \right) u_{n+1} + l u_{n+1} \pmod{T(M_2(K))}.$$

Além disso por 3.10, $l u_{n+1} = \frac{1}{2}(l \circ u_{n+1}) + \frac{1}{2}[l, u_{n+1}]$ está na forma $\sum l_1^i \circ l_2^i + l$. Analisaremos agora o termo $(\sum l_1^i \circ l_2^i) u_{n+1}$. Notemos que

$$(l_1^i \circ l_2^i) u_{n+1} = u_{n+1} (l_1^i \circ l_2^i) + [l_1^i \circ l_2^i, u_{n+1}].$$

Usando a identidade do Lema 3.1.4, com $x = [y_1, \dots, y_{m-1}]$ e $y = y_m$, onde $u_{n+1} = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ e $y_i \in X$, concluímos que $\text{mod } T(M_2(K))$, $u_{n+1}(l_1^i \circ l_2^i)$ está na forma $\sum l_1^i \circ l_2^i + l$. Por 3.6, temos que

$$[l_1^i \circ l_2^i, u_{n+1}] = l_1^i \circ [l_2^i, u_{n+1}] + l_2^i \circ [l_1^i, u_{n+1}].$$

Como $[l_2^i, u_{n+1}], [l_1^i, u_{n+1}] \in L$, segue que $l_1^i \circ [l_2^i, u_{n+1}]$ e $l_2^i \circ [l_1^i, u_{n+1}]$ estão na forma $l_1^i \circ l_2^i$, com $l_1^i, l_2^i \in L$. Portanto, $u_1 u_2 \dots u_n u_{n+1} \equiv \sum l_1^i \circ l_2^i + l \pmod{T(M_2(K))}$, onde l_1^i, l_2^i e $l \in L$. Logo, $f \equiv \sum l_1^i \circ l_2^i + l'$, onde $l' \in L$. Desde que f e $l_1^i \circ l_2^i$ são centrais, segue que $l' \in C(M_2(K))$. Mas l' é de Lie, logo resulta em uma matriz de traço zero, donde $l' \in T(M_2(K))$. Sendo assim, $f = \sum l_1^i \circ l_2^i + g$, onde $g \in T(M_2(K))$. ■

A seguir apresentaremos a descrição do espaço dos polinômios centrais da álgebra $M_2(K)$.

Teorema 3.1.7 $C(M_2(K)) = V$.

Demonstração: Como $V \subseteq C(M_2(K))$, basta mostrarmos a inclusão contrária. A demonstração será feita por indução com respeito ao posto do polinômio central f . Seja $f \in C(M_2(K))$ um polinômio multilinear ($\text{char } K = 0$) e suponhamos que $r(f) = 0$. Pelo Lema 3.1.6, $f = \sum l_1^i \circ l_2^i + g$, onde $l_1^i, l_2^i \in L$ e $g \in T(M_2(K))$. Além disso, $l_1^i \circ l_2^i \in V(h) \subset V$ e pelo Lema 3.1.3 $g \in T(M_2(K)) \subset V$. Portanto, $f \in V$. Suponhamos que se f é um polinômio central multilinear de posto menor que n , então $f \in V$. Seja f um polinômio central multilinear de posto $n \geq 1$. Por 3.8, f pode ser representado como uma combinação linear de expressões multilineares do tipo

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} u_{j_1} \dots u_{j_l},$$

onde $i_1 < \dots < i_k$ e os u_{j_m} 's são comutadores. Nós podemos assumir que

$$f = x_1 \dots x_n \varphi + \sum x_{i_1} \dots x_{i_n} \varphi_i + f', \quad (3.12)$$

onde $\varphi \neq 0$, $r(\varphi) = r(\varphi_i) = 0$ e $r(f') < n$. Observe que $\varphi = f|_{x_1=\dots=x_n=1}$, pois $\varphi_i|_{x_1=\dots=x_n=1} = 0$, uma vez que $\{1, \dots, n\} \neq \{i_1, \dots, i_n\}$. Daí, φ é um polinômio central. Analogamente, cada φ_i é um polinômio central, pois $\varphi_i = f|_{x_{i_1}=\dots=x_{i_n}=1}$. Analisaremos agora o termo $x_1 \dots x_n \varphi$. O termo $\sum x_{i_1} \dots x_{i_n} \varphi_i$ é análogo. Em virtude

do Lema 3.1.6, por φ ser um polinômio central de posto zero, temos que $\varphi = c + g$, onde $g \in T(M_2(K))$ e $c = \sum l_1^i \circ l_2^i \in V(h)$, com $l_1^i, l_2^i \in L$. Logo,

$$x_1 \dots x_n \varphi = x_1 \dots x_n c + x_1 \dots x_n g.$$

Por $x_1 \dots x_n g \in T(M_2(K)) \subset V$, temos que

$$x_1 \dots x_n \varphi \equiv x_1 \dots x_n c \pmod{V}. \quad (3.13)$$

Pelo Lema 3.1.2, para cada polinômio $y(l_1^i \circ l_2^i)$, onde y é uma variável, existe um polinômio de Lie $l^i \in L$ tal que

$$c_i = y(l_1^i \circ l_2^i) + l^i, \quad (3.14)$$

onde c_i é um polinômio central de V . Logo, substituindo y por $x_1 x_2 \dots x_n$ em 3.14 temos

$$x_1 \dots x_n c = x_1 \dots x_n \sum l_1^i \circ l_2^i = \sum c_i|_{y=x_1 x_2 \dots x_n} - \sum l_i|_{y=x_1 x_2 \dots x_n}, \quad (3.15)$$

para algum $l_i \in L$ e $c_i \in V$. Como $c_i|_{y=x_1 x_2 \dots x_n} \in V$, temos

$$x_1 \dots x_n c \equiv - \sum l_i|_{y=x_1 x_2 \dots x_n} \pmod{V}.$$

Usando a igualdade 1.2 (p.7) sabe-se que $r(l_i|_{y=x_1 x_2 \dots x_n}) < n$. Logo,

$$x_1 \dots x_n c \equiv t \pmod{V},$$

onde t é um polinômio de posto menor que n . Usando o mesmo raciocínio para todos os φ_i 's, temos que $f \equiv F \pmod{V}$, com $r(F) < n$. Por f ser um polinômio central e $V \subset C(M_2(K))$, segue que F também é um polinômio central e tem posto menor que n . Logo, por hipótese de indução $F \in V$, e por conseguinte $f \in V$.

■

Capítulo 4

Construções de Polinômios Centrais para a Álgebra $M_n(K)$

Em 1956, Kaplansky [28] apresentou uma lista de problemas em aberto na Teoria de Anéis, em particular na PI-Teoria, que motivaram muitos pesquisadores nas décadas seguintes. Um destes problemas era sobre a existência de polinômio central não-trivial para a álgebra $M_n(K)$, com $n > 2$ (no caso $n = 2$ o polinômio de Hall $[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]$ já era conhecido). A solução para este problema foi dada em 1972-1973 independentemente por Formanek [15] e Razmyslov [45] que provaram a existência de tais polinômios por construção direta. Neste Capítulo apresentaremos as construções de polinômios centrais feitas por Formanek e Razmyslov. Já na última seção, trataremos da construção por Latyshev e Shmelkin (veja [36]) de um polinômio central em uma variável para a álgebra $M_n(K)$, onde K será um corpo finito.

4.1 Matrizes Genéricas

Nesta seção vamos assumir K um corpo e, para um inteiro $n \geq 2$, fixaremos a notação Ω_n para a K -álgebra dos polinômios em variáveis comutativas

$$\Omega_n = K[y_{pq}^{(i)} \mid p, q = 1, \dots, n, i = 1, 2, \dots].$$

Definição 4.1.1 *As matrizes de $M_n(\Omega_n)$*

$$y_i = \sum_{p,q=1}^n y_{pq}^{(i)} E_{pq}, \quad i = 1, 2, \dots$$

são chamadas matrizes genéricas $n \times n$. A álgebra gerada pelas matrizes genéricas y_i , $i = 1, 2, \dots$, denotada por R_n , é chamada de álgebra das matrizes genéricas de ordem

n . Nós denotaremos por $R_{n,m}$ a subálgebra de R_n gerada pelas m primeiras matrizes genéricas y_1, y_2, \dots, y_m .

Exemplo 4.1.2 Para $n = m = 2$, trocando a notação e assumindo que $y_{pq}^{(1)} = x_{pq}$ e $y_{pq}^{(2)} = y_{pq}$, a álgebra $R_{2,2}$ é gerada por

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ e } y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Sendo C uma K -álgebra comutativa, as matrizes $n \times n$ com entradas em C podem ser obtidas por especializações das matrizes genéricas, isto é, $\alpha = \sum_{p,q=1}^n \gamma_{pq} E_{pq}$, $\gamma_{pq} \in C$ é obtida de $y_1 = \sum_{p,q=1}^n y_{pq}^{(1)} E_{pq}$ trocando as variáveis $y_{pq}^{(1)}$ por γ_{pq} .

Os resultados enunciados a seguir serão de grande valia na demonstração do Teorema 4.2.1 que será tratado na próxima seção.

Lema 4.1.3 Os autovalores da matriz genérica y_1 são dois a dois distintos.

Demonstração: Consideremos y_1 uma matriz com entradas no corpo de frações da álgebra polinomial Ω_n . Seja $f(\lambda)$ o polinômio característico de y_1 . Suponhamos que $f(\lambda)$ tem zeros múltiplos. Então o discriminante de $f(\lambda)$ é igual a zero. Desde que cada matriz A de ordem $n \times n$ com entradas em K pode ser obtida por uma especialização de y_1 , o discriminante do polinômio característico $f_A(\lambda)$ também é igual a zero e isto significa que $A \in M_n(K)$ tem autovalores múltiplos. Para mostrar o Lema é suficiente encontrarmos uma matriz $A \in M_n(K)$ que não possua autovalores múltiplos. Se K é um corpo infinito, então podemos considerar uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são todos distintos. Se $K = F_q$ é um corpo de q elementos, então existe um polinômio irreduzível sobre F_q de grau n e dessa forma podemos construir uma matriz $A \in M_n(F_q)$ que tem como polinômio característico este polinômio irreduzível (basta tomar a matriz associada ou companheira do polinômio). Portanto, a matriz A não tem autovalores múltiplos em nenhuma extensão de F_q . ■

Corolário 4.1.4 Sejam

$$y'_1 = \sum_{p,q=1}^n y_{pp}^{(1)} E_{pp}, \quad y'_i = y_i, \quad i > 1$$

matrizes genéricas. A álgebra R'_n gerada por y'_1, y'_2, \dots é isomorfa a álgebra genérica R_n .

Demonstração: Seja Ξ o fecho algébrico do corpo de frações da álgebra polinomial Ω_n . Pelo Lema 4.1.3, a matriz genérica y_1 não tem autovalores múltiplos. Logo, existe uma matriz z com entradas em Ξ tal que $u_1 = z^{-1}y_1z$ é diagonal. Seja

$$u_i = z^{-1}y_i z, \quad i = 1, 2, \dots$$

Denotemos por U_n a K -subálgebra de $M_n(\Xi)$ gerada por u_1, u_2, \dots . As álgebras U_n e R_n são isomorfas. De fato, consideremos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : R_n &\longrightarrow U_n \\ y_i &\longmapsto \varphi(y_i) = u_i. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que φ é um isomorfismo. Sejam $\phi : R_n \longrightarrow R'_n$ e $\psi : R'_n \longrightarrow U_n$ os homomorfismos de álgebras satisfazendo $\phi(y_i) = y'_i$ e $\psi(y'_i) = u_i$, $i = 1, 2, \dots$. A composição

$$\begin{aligned} \psi\phi : R_n &\longrightarrow U_n \\ y_i &\longmapsto (\psi\phi)(y_i) = u_i. \end{aligned}$$

é um isomorfismo, de onde segue que $\text{Ker}\phi = \{0\}$. Além disso, ϕ é sobrejetora, logo ϕ é um isomorfismo. ■

4.2 Construção de Formanek

Nesta seção vamos considerar $M_n(K)$ a álgebra das matrizes com entradas em K , onde K será um corpo qualquer.

Sejam x_1, \dots, x_{n+1} variáveis comutativas e X, Y_1, \dots, Y_n variáveis não-comutativas. Consideremos a aplicação de $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ em $K\langle X, Y_1, \dots, Y_n \rangle$ definida por

$$\begin{aligned} \theta : K[x_1, \dots, x_{n+1}] &\longrightarrow K\langle X, Y_1, \dots, Y_n \rangle \\ g(x_1, \dots, x_{n+1}) &\longrightarrow \theta(g(x_1, \dots, x_{n+1})) = G(X, Y_1, \dots, Y_n), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum \alpha_a x_1^{\alpha_1} \dots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}} e \\ G(X, Y_1, \dots, Y_n) &= \sum \alpha_a X^{\alpha_1} Y_1 X^{\alpha_2} Y_2 \dots X^{\alpha_n} Y_n X^{\alpha_{n+1}}. \end{aligned}$$

Dados $\bar{x} = \sum_{p=1}^n x_p E_{pp}$, $\bar{y}_q = E_{i_q j_q} \in M_n(K)$, onde $x_p \in K$ e $q = 1, \dots, n$ é fácil ver que

$$G(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) = g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_n}) E_{i_1 j_1} \dots E_{i_n j_n}. \quad (4.1)$$

Basta notarmos que $\bar{x}E_{ij} = x_iE_{ij}$ e $E_{ij}\bar{x} = x_jE_{ij}$.

O próximo resultado garante a existência de um polinômio central não trivial para álgebra das matrizes $M_n(K)$.

Teorema 4.2.1 *Seja*

$$g(x_1, \dots, x_{n+1}) = \prod_{2 \leq i \leq n} (x_1 - x_i)(x_{n+1} - x_i) \prod_{2 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k)^2$$

um polinômio em $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$. O polinômio em $K\langle X, Y_1, \dots, Y_n \rangle$ dado por

$$F(X, Y_1, \dots, Y_n) = G(X, Y_1, \dots, Y_n) + G(X, Y_2, \dots, Y_n, Y_1) + \dots + G(X, Y_n, Y_1, \dots, Y_{n-1}),$$

onde $G(X, Y_1, \dots, Y_n) = \theta(g(x_1, \dots, x_{n+1}))$, é um polinômio central não trivial para a álgebra $M_n(K)$.

Demonstração: Para mostrar que $F(X, Y_1, \dots, Y_n)$ é um polinômio central para $M_n(K)$ é suficiente mostrarmos que $F(\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n)$ é central quando $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ são matrizes genéricas. De fato, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} h : \{y_{pq}^{(i)} \mid p, q = 1, \dots, n, i = 1, 2, \dots\} &\longrightarrow K \\ h(y_{pq}^{(1)}) &= 1, \quad \text{se } (p, q) = (1, 1); \\ h(y_{pq}^{(1)}) &= 0, \quad \text{se } (p, q) \neq (1, 1); \\ h(y_{pq}^{(2)}) &= 1, \quad \text{se } (p, q) = (1, 2); \\ h(y_{pq}^{(2)}) &= 0, \quad \text{se } (p, q) \neq (1, 2); \\ &\vdots \\ h(y_{pq}^{(n^2)}) &= 1, \quad \text{se } (p, q) = (n, n); \\ h(y_{pq}^{(n^2)}) &= 0, \quad \text{se } (p, q) \neq (n, n). \end{aligned}$$

Por Ω_n ser uma álgebra associativa e comutativa livre gerada por

$$\{y_{pq}^{(i)} \mid p, q = 1, \dots, n, i = 1, 2, \dots\},$$

concluimos que a aplicação h se estende a um único homomorfismo

$$\psi : \Omega_n \longrightarrow K.$$

O homomorfismo ψ induz um homomorfismo de $M_n(\Omega_n)$ em $M_n(K)$ dado por

$$\begin{aligned} \Gamma : M_n(\Omega_n) &\longrightarrow M_n(K) \\ (f_{ij})_{n \times n} &\longmapsto \Gamma((f_{ij})) = (\psi(f_{ij}))_{n \times n}. \end{aligned}$$

Além disso, $\varphi = \Gamma|_{R_n} : R_n \longrightarrow M_n(K)$ é um homomorfismo que satisfaz $\varphi(y_1) = E_{11}$, $\varphi(y_2) = E_{12}$, \dots , $\varphi(y_{n^2}) = E_{nn}$ e portanto sobrejetivo. Logo, dados

$$X, Y_1, \dots, Y_n \in M_n(K),$$

existem $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n \in R_n$ tais que $\varphi(\bar{X}) = X$, $\varphi(\bar{Y}_1) = Y_1$, \dots , $\varphi(\bar{Y}_n) = Y_n$. Logo,

$$F(X, Y_1, \dots, Y_n) = F(\varphi(\bar{X}), \varphi(\bar{Y}_1), \dots, \varphi(\bar{Y}_n)) = \varphi(F(\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n)) \in Z(M_n(K)),$$

pois estamos supondo $F(\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n)$ central para as matrizes genéricas $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$.

Por $R_n \simeq R'_n$ (veja Corolário 4.1.4) podemos supor \bar{X} diagonal, ou seja, $\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i E_{ii}$, onde os x_i 's são variáveis comutativas. Verificaremos esta afirmação. Sejam X, Y_1, \dots, Y_n matrizes genéricas em R_n . Usando o fato de $R_n \simeq R'_n$, tomemos $\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n \in R'_n$, onde \bar{X} é diagonal, e um isomorfismo $\phi : R'_n \longrightarrow R_n$ tais que $\phi(\bar{X}) = X$, $\phi(\bar{Y}_1) = Y_1$, \dots , $\phi(\bar{Y}_n) = Y_n$. Daí,

$$F(X, Y_1, \dots, Y_n) = F(\phi(\bar{X}), \phi(\bar{Y}_1), \dots, \phi(\bar{Y}_n)) = \phi(F(\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n)) \in Z(R_n),$$

se $F(\bar{X}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n) \in Z(R'_n)$. Sendo assim, podemos supor \bar{X} uma matriz genérica diagonal. Desde que $F(X, Y_1, \dots, Y_n)$ é um polinômio multilinear em Y_1, \dots, Y_n basta mostrarmos que é central para as matrizes $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ unitárias. Observe que por 4.1

$$G(\bar{X}, E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n}) = g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_n}) E_{i_1 j_1} \dots E_{i_n j_n}.$$

Mostraremos que $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_n})$ é não-nulo somente quando $\{i_1, \dots, i_n\}$ é uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ e $i_1 = j_n$. De fato,

$$g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_n}) = \prod_{i \in \{i_2, \dots, i_n\}} (x_{i_1} - x_i)(x_{j_n} - x_i) \prod_{\substack{j < k \\ j, k \in \{i_2, \dots, i_n\}}} (x_j - x_k)^2. \quad (4.2)$$

Se $\{i_1, \dots, i_n\}$ não é uma permutação de $\{1, \dots, n\}$, então haverá repetição entre os i_j 's. Logo, por 4.2 segue que $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_n}) \equiv 0$. Caso $j_n \neq i_1$, e $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ é uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ temos $j_n \in \{i_2, \dots, i_n\}$ e por 4.2 também concluímos que $g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_n}) \equiv 0$. Daí, quando $\{i_1, \dots, i_n\}$ é uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ e $i_1 = j_n$, obtemos que

$$g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_n}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = D.$$

Claramente $E_{i_1 j_1} E_{i_2 j_2} \dots E_{i_n j_n} \neq 0$ somente se $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{n-1} = i_n$. Diremos que $E_{i_1 j_1}, E_{i_2 j_2}, \dots, E_{i_n j_n}$ formam um *ciclo de matrizes unitárias* se $\{i_1, \dots, i_n\}$ é uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ e $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{n-1} = i_n$ e $j_n = i_1$. Sendo assim,

$$G(\overline{X}, E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_n j_n}) = \begin{cases} DE_{i_1 i_1}, & \text{se as matrizes unitárias formam um ciclo;} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$. Analogamente, mostra-se que

$$G(\overline{X}, E_{i_2 j_2}, \dots, E_{i_n j_n}, E_{i_1 j_1}) = \begin{cases} DE_{i_2 i_2}, & \text{se as matrizes unitárias formam um ciclo;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Continuando com este raciocínio, concluímos que

$$F(\overline{X}, E_{i_2 j_2}, \dots, E_{i_n j_n}, E_{i_1 j_1}) = \begin{cases} DI_n, & \text{se as matrizes unitárias formam um ciclo;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $F(X, Y_1, \dots, Y_n) \in Z(M_n(K))$ para qualquer substituição em X, Y_1, \dots, Y_n . Para concluir a demonstração resta-nos provar que $F(X, Y_1, \dots, Y_n)$ não é identidade polinomial para $M_n(K)$. Se K é um corpo infinito e $X \in M_n(K)$ é uma matriz diagonal com autovalores distintos ρ_1, \dots, ρ_n , então

$$F(X, E_{12}, \dots, E_{k-1, k}, E_{k1}) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\rho_p - \rho_q)^2 I_n \neq 0. \quad (4.3)$$

que é uma matriz não-nula em $M_n(K)$.

Suponhamos $K = F_q$ um corpo finito de ordem q . Dado $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $l(x)$ mônico, irredutível e de grau n em $F_q[x]$. Sendo F_{q^m} o corpo de raízes de $l(x)$, temos que as n raízes de $l(x)$ em F_{q^m} são distintas. Consideremos então $\overline{X} \in M_n(F_q)$ que tem por polinômio característico $l(x)$. Dessa forma, existe uma matriz $Z \in M_n(F_{q^m})$ tal que $Z^{-1} \overline{X} Z$ é diagonal. Portanto, por 4.3 segue que

$$F(Z^{-1} \overline{X} Z, E_{12}, E_{23}, \dots, E_{n1}) \neq 0, \text{ ou seja, } ZF(Z^{-1} \overline{X} Z, E_{12}, E_{23}, \dots, E_{n1})Z^{-1} \neq 0,$$

e daí

$$F(Z(Z^{-1} \overline{X} Z)Z^{-1}, ZE_{12}Z^{-1}, ZE_{23}Z^{-1}, \dots, ZE_{n1}Z^{-1}) \neq 0, \text{ isto é,}$$

$$F(\overline{X}, ZE_{12}Z^{-1}, ZE_{23}Z^{-1}, \dots, ZE_{n1}Z^{-1}) \neq 0 \text{ em } M_n(F_{q^m}).$$

Notemos que $F(\overline{X}, ZE_{12}Z^{-1}, ZE_{23}Z^{-1}, \dots, ZE_{n1}Z^{-1})$ é uma combinação linear dos termos $F(\overline{X}, E_{i_1j_1}, E_{i_2j_2}, \dots, E_{i_nj_n})$, onde os coeficientes pertencem a F_{q^m} . Logo, por $F(\overline{X}, ZE_{12}Z^{-1}, ZE_{23}Z^{-1}, \dots, ZE_{n1}Z^{-1}) \neq 0$, concluímos que algum

$$F(\overline{X}, E_{i_1j_1}, E_{i_2j_2}, \dots, E_{i_nj_n}) \neq 0.$$

Além disso, $F(\overline{X}, E_{i_1j_1}, E_{i_2j_2}, \dots, E_{i_nj_n}) \in M_n(F_q)$, o que completa a demonstração. ■

4.3 Construção de Razmyslov

Nesta seção apresentaremos a construção dada por Razmyslov [45] de um polinômio central para a álgebra $M_n(K)$, onde K denota um corpo. Vamos introduzir o conceito de identidade polinomial fraca que será de grande valia no desenvolvimento das idéias desta construção.

Definição 4.3.1 *O polinômio $f(x_1, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle$ será dito uma **identidade polinomial fraca** para a álgebra $M_n(K)$, se $f(a_1, \dots, a_k) = 0$ para quaisquer a_1, \dots, a_k matrizes de traço zero em $M_n(K)$, ou seja, para quaisquer $a_1, \dots, a_k \in Sl_n(K)$. Uma identidade polinomial fraca é dita ser **essencialmente fraca** se não é identidade para $M_n(K)$.*

Exemplo 4.3.2 *O polinômio $[x_1^2, x_2]$ é uma identidade essencialmente fraca para $M_2(K)$. De fato, sejam $A_1, A_2 \in Sl_2(K)$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton o polinômio característico de A_1 é $x^2 - (tr A_1)x + det(A_1)$. Logo, $A_1^2 = -det(A_1)I_2$, de onde segue que $[A_1^2, A_2] = 0$. Por outro lado, $[x_1^2, x_2]$ não é identidade para $M_2(K)$, basta considerarmos $x_1 = E_{11}$ e $x_2 = E_{12}$.*

Lema 4.3.3 *Considerando o polinômio de Capelli*

$$d_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \dots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1},$$

o polinômio $d_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}, y_{n^2+1})$ é uma identidade essencialmente fraca para $M_n(K)$, o qual se anula quando os x 's são substituídos por elementos de $Sl_n(K)$ e os y 's são matrizes arbitrárias de $M_n(K)$.

Demonstração: Como d_{n^2} é um polinômio multilinear nas variáveis x 's basta mostrarmos a afirmação para uma base de $Sl_n(K)$. Desde que $\dim Sl_n(K) = n^2 - 1$, dados $A_1, \dots, A_{n^2} \in \beta$, onde β é uma base de $Sl_n(K)$, existem $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n^2\}$ tais

Definição 4.3.4 Seja $f(x, y_1, \dots, y_m) \in K\langle x, y_1, \dots, y_m \rangle$ um polinômio linear (homogêneo e de grau 1) na variável x . Escrevendo f sob a forma $f = \sum_{i=1}^k g_i x h_i$, onde $g_i, h_i \in K\langle y_1, \dots, y_m \rangle$, a transformada de Razmyslov de f é o polinômio

$$f^*(x, y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^k h_i x g_i.$$

Lema 4.3.5 Sejam $a_i, b_i \in M_n(K)$, $i = 1, \dots, m$, $f(u) = \sum_{i=1}^m a_i u b_i$ e $f^*(u) = \sum_{i=1}^m b_i u a_i$, para $u \in M_n(K)$. Se $f(u) = 0$ para todo $u \in M_n(K)$, então $f^*(u) = 0$ para todo $u \in M_n(K)$.

Demonstração: Consideremos a forma bilinear em $V = M_n(K)$ dada por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$. Notemos que esta forma bilinear é não-degenerada, ou seja, se $\langle u, V \rangle = 0$, então $u = 0$. Logo, dados $u, v \in M_n(K)$, visto que $f(u) = 0$, temos que $\text{tr}(f(u)) = 0$ e daí

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr} \left(\left(\sum_{i=1}^m a_i u b_i \right) v \right) = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^m a_i u b_i v \right) = \sum_{i=1}^m \text{tr}[(a_i u)(b_i v)] = \\ &= \sum_{i=1}^m \text{tr}[(b_i v)(a_i u)] = \sum_{i=1}^m \text{tr}(b_i v a_i u) = \text{tr} \left[\left(\sum_{i=1}^m b_i v a_i \right) u \right] = \text{tr}(f^*(v)u), \end{aligned}$$

e assim $\langle f^*(v), u \rangle = 0$. Como u foi tomado arbitrariamente, concluímos que $\langle f^*(v), V \rangle = 0$, e portanto $f^*(v) = 0$. Mas v também foi tomado arbitrariamente, de onde segue que $f^*(v) = 0$, $\forall v \in M_n(K)$. ■

Lema 4.3.6 Toda matriz de traço zero em $M_n(K)$ é uma combinação linear de comutadores.

Demonstração: Seja $A \in Sl_n(K)$. Então $A = \sum_{p,q=1}^n \alpha_{pq} E_{pq}$, onde $\alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn} = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n \alpha_{pq} E_{pq} + \sum_{p=1}^n \alpha_{pp} E_{pp} = \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n \alpha_{pq} E_{pq} + \alpha_{11} E_{11} + \sum_{p=2}^n \alpha_{pp} E_{pp} = \\ &= \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n \alpha_{pq} E_{pq} + \sum_{p=2}^n -\alpha_{pp} E_{11} + \sum_{p=2}^n \alpha_{pp} E_{pp} = \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n \alpha_{pq} E_{pq} + \sum_{p=2}^n -\alpha_{pp} (E_{11} - E_{pp}). \end{aligned}$$

Portanto, os elementos E_{ij} , $i \neq j$ e $E_{11} - E_{ii}$, $i = 2, \dots, n$ formam uma base para $Sl_n(K)$. Além disso, $E_{ij} = [E_{ij}, E_{jj}]$ para $i \neq j$ e $E_{11} - E_{ii} = [E_{1i}, E_{i1}]$ para $i = 2, \dots, n$. ■

Lema 4.3.7 (Lema de Razmyslov) *Sejam $f(x, y_1, \dots, y_m) \in K\langle x, y_1, \dots, y_m \rangle$ um polinômio linear em x e $f^*(x, y_1, \dots, y_m)$ o polinômio dado pela transformada de Razmyslov de f . Então*

- (i) *$f(x, y_1, \dots, y_m)$ é uma identidade polinomial para a álgebra $M_n(K)$ se, e somente se, $f^*(x, y_1, \dots, y_m)$ é uma identidade polinomial para $M_n(K)$.*
- (ii) *$f^*(x, y_1, \dots, y_m)$ é um polinômio central não trivial para a álgebra $M_n(K)$ se, e somente se, $f(x, y_1, \dots, y_m)$ é uma identidade essencialmente fraca e $f([x, y_0], y_1, \dots, y_m)$ é uma identidade polinomial para $M_n(K)$.*

Demonstração:

(i) Seja

$$f(x, y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^k a_i(y_1, \dots, y_m) x b_i(y_1, \dots, y_m)$$

e para $r_1, \dots, r_m \in M_n(K)$ considere

$$f(u) = f(u, r_1, \dots, r_m) = \sum_{i=1}^k a_i(r_1, \dots, r_m) u b_i(r_1, \dots, r_m).$$

Pelo Lema 4.3.5, $f(u) = 0$ para todo $u \in M_n(K)$ se, e somente se, $f^*(u) = 0$ para todo $u \in M_n(K)$. Observe que $f^*(u) = f^*(u, r_1, \dots, r_m)$. Como r_1, \dots, r_m foram tomados arbitrariamente, concluímos a demonstração.

(ii) Considere

$$f(x, y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^k a_i(y_1, \dots, y_m) x b_i(y_1, \dots, y_m).$$

Aplicando a transformada de Razmyslov a

$$g(x, y_0, y_1, \dots, y_m) = f([x, y_0], y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^k a_i(x y_0 - y_0 x) b_i,$$

obtemos

$$g^*(x, y_0, y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^k (y_0 b_i x a_i - b_i x a_i y_0) = \left[y_0, \sum_{i=1}^k b_i x a_i \right] = [y_0, f^*(x, y_1, \dots, y_m)].$$

Claramente, $f^*(x, y_1, \dots, y_m)$ é um polinômio central para $M_n(K)$ se, e somente se, $g^*(x, y_0, y_1, \dots, y_m)$ é uma identidade polinomial para $M_n(K)$ e pela primeira parte do Lema, se, e somente se, $g(x, y_0, y_1, \dots, y_m)$ é uma identidade polinomial para $M_n(K)$. Obviamente, $f^*(x, y_1, \dots, y_m)$ não se anula sobre $M_n(K)$ se, e somente

se, $f(x, y_1, \dots, y_m)$ não é identidade polinomial para $M_n(K)$. Além disso, dados $A, B_1, \dots, B_m \in Sl_n(K)$, pelo Lema 4.3.6, existem $C_i, D_i \in M_n(K)$ tais que $A = \sum_{i=1}^t \alpha_i [C_i, D_i]$. Logo,

$$f(A, B_1, \dots, B_m) = f\left(\sum_{i=1}^t \alpha_i [C_i, D_i], B_1, \dots, B_m\right) = \sum_{i=1}^t \alpha_i f([C_i, D_i], B_1, \dots, B_m) = 0,$$

pois $f([x, y_0], y_1, \dots, y_m)$ é uma identidade polinomial para $M_n(K)$. ■

Teorema 4.3.8 *Considere o polinômio*

$$f(x, z_1, \dots, z_{2n^2-2}, y_1, \dots, y_{n^2-1}) = d_{n^2}(x, [z_1, z_2], \dots, [z_{2n^2-3}, z_{2n^2-2}]; 1, y_1, \dots, y_{n^2-1}, 1),$$

onde $d_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ é o polinômio de Capelli. A transformada de Razmyslov aplicada a f nos dá um polinômio central não trivial para a álgebra $M_n(K)$.

Demonstração: Do lema 4.3.3 temos que $f(x, z_1, \dots, z_{2n^2-2}, y_1, \dots, y_{n^2-1})$ é uma identidade polinomial fraca para $M_n(K)$. É também claro que a substituição de x por um comutador nos dá uma identidade polinomial (veja Lema 4.3.3). Logo, $f([x, y_0], z_1, \dots, z_{n^2-1})$ é uma identidade polinomial para $M_n(K)$. Pelo lema de Razmyslov 4.3.7 é suficiente mostrar que $f(x, z_1, \dots, z_{n^2-1})$ não é identidade polinomial para $M_n(K)$. Podemos escolher $2n^2 - 2$ matrizes de traço zero $\bar{z}_i \in Sl_n(K)$ tais que o conjunto de comutadores $[\bar{z}_{2i-1}, \bar{z}_{2i}]$, $i = 1, \dots, n^2 - 1$ coincida com a base de $Sl_n(K)$ dada no Lema 4.3.6. Para isso, basta notarmos que $E_{11} - E_{ii} = [E_{1i}, E_{i1}]$, onde $i = 2, \dots, n$ e para $i \neq j$ e $l \neq i, j$, $E_{ij} = [E_{ij}, E_{jj} - E_{ll}]$. Substituindo x por $\bar{x} = E_{11}$ e usando a anti-simetria da identidade de Capelli nas variáveis x'_i s temos que

$$f(\bar{x}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{2n^2-3}, \bar{z}_{2n^2-2}, y_1, \dots, y_{n^2-1}) = \pm d_{n^2}(E_{ij}; 1, y_1, \dots, y_{n^2-1}, 1),$$

onde $d_{n^2}(E_{ij}; 1, y_1, \dots, y_{n^2-1}, 1)$ significa que estamos substituindo as variáveis anti-simétricas por n^2 matrizes unitárias distintas. Além disso, usando a idéia da demonstração do Lema 4.3.3, não é difícil ver que

$$d_{n^2}(E_{p_1 q_1}, E_{p_2 q_2}, \dots, E_{p_{n^2} q_{n^2}}; 1, E_{q_1 p_2}, \dots, E_{q_{n^2-1} p_{n^2}}, 1) = E_{p_1 q_{n^2}} \neq 0.$$

Portanto, pelo lema de Razmyslov, concluímos que f^* é um polinômio central não trivial para $M_n(K)$. ■

4.4 Construção de Latyshev e Shmelkin

Nesta seção apresentaremos a construção dada por Latyshev e Shmelkin [36] de um polinômio central em uma variável para a álgebra $M_n(K)$, onde K denotará um corpo finito. Começaremos com alguns resultados necessários para a demonstração do resultado central desta seção.

Lema 4.4.1 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, K um corpo finito de ordem q e L uma extensão algebricamente fechada de K . Então L possui um único subcorpo de ordem q^n .*

Demonstração: Considere $f(x) = x^{q^n} - x \in L[x]$. Por $f'(x) = q^n x^{q^n-1} - 1 = -1$, temos que $f(x)$ possui em L q^n raízes distintas. Estas raízes são exatamente os elementos do conjunto $F = \{a \in L \mid a^{q^n} = a\}$ que é um subcorpo de L . Assim, $|F| = q^n$. Suponhamos que existam dois subcorpos distintos F_1 e F_2 de L , ambos com ordem q^n . Logo, $a^{q^n} = a$ para todo $a \in F_1 \cup F_2$. Sendo assim, todo elemento de $F_1 \cup F_2$ é raiz de $f(x) = x^{q^n} - x$, o que é um absurdo, pois $F_1 \cup F_2$ tem mais que q^n elementos.

■

Lema 4.4.2 *Sejam $f(x) \in K[x]$, $\lambda \in K$ e $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$.*

Então $f(\lambda I_n + N) = f(\lambda)I_n + N_1$, onde $N_1^n = 0$.

Demonstração: Basta usar o Binômio de Newton e o fato de N ser nilpotente de índice n . ■

Teorema 4.4.3 *Sejam $K = F_q$ um corpo finito de q elementos e $p(x)$ um polinômio irreduzível de grau n em $F_q[x]$. O polinômio em uma variável*

$$c(x) = \left(\frac{x^{q^n} - x}{p(x)} \right)^{(q^n-1)n} \prod_{m=1}^{n-1} (x^{q^m} - x)^{(q^n-1)n}$$

é central para $M_n(F_q)$.

Demonstração:

Mostraremos inicialmente que $p(x)$ divide $x^{q^n} - x$. Sejam L uma extensão algebricamente fechada de F_q e $a \in L$ tal que $p(a) = 0$. Consideremos o ideal $I = \{h(x) \in F_q[x] \mid h(a) = 0\}$ de $F_q[x]$ e $m_{a,K}(x)$ o polinômio minimal de a sobre K . Sabe-se que o ideal I é gerado por $m_{a,K}(x)$, isto é, $I = \langle m_{a,F_q}(x) \rangle$ e $m_{a,F_q}(x)$ é irredutível sobre F_q . Além disso, por $p(x) \in I$ existe $s(x) \in K[x]$ tal que $p(x) = m_{a,K}(x)s(x)$. Como $p(x)$ é irredutível em $F_q[x]$, concluímos que $\partial m_{a,F_q}(x) = \partial p(x) = n$. Sendo assim, $[F_q(a) : K] = \partial m_{a,F_q}(x) = n$ e conseqüentemente $|F_q(a)| = q^n$. Consideremos agora $f(x) = x^{q^n} - x$. Dividindo $f(x)$ por $p(x)$ em $F_q[x]$ obtemos $q(x), r(x) \in F_q[x]$ tais que $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$, onde $r(x) \equiv 0$ ou $\partial r(x) < \partial p(x)$. Logo, $f(a) = p(a)q(a) + r(a) = r(a)$. Além disso, por $F_q(a)^* = F_q(a) - \{0\}$ ser um grupo multiplicativo de ordem $q^n - 1$, segue que $a^{q^n - 1} = 1$ e portanto $a^{q^n} = a$. Logo, $r(a) = 0$. Como $r(a) = 0$ e $\partial p(x) = \partial m_{a,K}(x) = n$ segue que $r(x) \equiv 0$. Portanto, $p(x)$ divide $f(x)$.

Sejam $A \in M_n(F_q)$ e $p_A(x) \in F_q[x]$ o polinômio característico de A . Considere $\alpha \in L$ um autovalor de A . Como $p_A(\alpha) = 0$ e $\partial p_A(x) = n$, temos que $[K(\alpha) : K] = m \leq n$, ou seja, cada autovalor de A pertence a alguma extensão F_{q^m} de F_q com $m \leq n$. Existe uma extensão de F_q , por exemplo o corpo de raízes de $p_A(x)$, onde A é semelhante a uma matriz N na forma Canônica de Jordan. Se mostrarmos que $c(N) = 0$, segue claramente que $c(A) = 0$, pois existe uma matriz inversível $B \in M_n(F)$, onde F é tal extensão, de modo que $B^{-1}AB = N$. Logo, $c(A) = c(BNB^{-1}) = Bc(N)B^{-1} = 0$. Podemos escrever N na forma

$$N = \begin{pmatrix} N_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_{\lambda_r} \end{pmatrix},$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ são os autovalores de A , $N_{\lambda_i} = \lambda_i I_{s_i} + B_{s_i}$,

$$B_{s_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e s_i é a multiplicidade do autovalor λ_i . Logo,

$$c(N) = \begin{pmatrix} c(N_{\lambda_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c(N_{\lambda_2}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c(N_{\lambda_r}) \end{pmatrix}$$

Mostraremos que se os autovalores de A não são zeros de $p(x)$, então $c(N) = 0$. Suponhamos que λ_1 está em alguma extensão $F_{q^{m_0}}$ para algum $m_0 \in \{1, \dots, n-1\}$. Consideremos $h(x) = \frac{x^{q^n} - x}{p(x)}$ e $l(x) = x^{q^{m_0}} - x$. Por $\lambda_1 \in F_{q^{m_0}}$, temos que $l(\lambda_1) = 0$. Daí, usando o fato da matriz B_{s_1} ser nilpotente de índice s_1 e o Lema 4.4.2, concluímos que

$$\begin{aligned} c(N_{\lambda_1}) &= h(N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} l(N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m_0}}^{n-1} (N_{\lambda_1}^{q^m} - N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} = \\ &h(N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} (l(\lambda_1)I_{s_1} + B_{s_1})^{(q^n-1)n} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m_0}}^{n-1} (N_{\lambda_1}^{q^m} - N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} = \\ &h(N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} (B_{s_1}^n)^{(q^n-1)} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m_0}}^{n-1} (N_{\lambda_1}^{q^m} - N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} = 0. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que λ_1 está em alguma extensão F_{q^n} de F_q e λ_1 não é zero de $p(x)$. Logo, $(x - \lambda_1)$ está entre os fatores de $h(x)$. Daí,

$$\begin{aligned} c(N_{\lambda_1}) &= h(N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} \prod_{m=1}^{n-1} (N_{\lambda_1}^{q^m} - N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} = \\ &(h(\lambda_1)I_{s_1} + B_{s_1})^{(q^n-1)n} \prod_{m=1}^{n-1} (N_{\lambda_1}^{q^m} - N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} = (B_{s_1}^n)^{(q^n-1)} \prod_{m=1}^{n-1} (N_{\lambda_1}^{q^m} - N_{\lambda_1})^{(q^n-1)n} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $c(N_{\lambda_i}) = 0$ para $i = 2, \dots, r$ e portanto $c(N) = 0$.

Consideremos agora $A \in M_n(F_q)$ que tem um autovalor sendo zero de $p(x)$. Seja λ este autovalor. Consideremos o ideal $J = \{h(x) \in F_q[x] \mid h(\lambda) = 0\}$ e $m_{\lambda, F_q}(x)$ o polinômio minimal de λ sobre F_q . Não é difícil provar que $J = \langle m_{\lambda, F_q}(x) \rangle$. Por $p(x) \in J$, existe $g(x) \in F_q[x]$ tal que $p(x) = m_{\lambda, F_q}(x)g(x)$. Mas $p(x)$ é irredutível, de onde segue que $J = \langle p(x) \rangle$. Como $p_A(x) \in J$, concluímos que $p_A(x)$ é divisível por $p(x)$ e por $\partial p_A(x) = \partial p(x)$, temos que $p_A(x) = \gamma p(x)$ para algum $\gamma \in F_q$ e daí os autovalores de A são exatamente os zeros de $p(x)$. A matriz A não tem autovalores múltiplos

em F_{q^n} , pois polinômios irredutíveis sobre corpos finitos não tem zeros múltiplos em nenhuma extensão. Sendo assim, a forma canônica de Jordan de A em $M_n(F_{q^n})$, onde F_{q^n} é uma extensão de grau n de F_q (F_{q^n} é o corpo de raízes do polinômio $p(x)$), é uma matriz diagonal que chamaremos de N . Logo,

$$c(N) = \left(h(N)^n \prod_{m=1}^{n-1} (N^{q^m} - N)^n \right)^{q^n-1} = g(N)^{q^n-1},$$

onde $h(x) = \frac{x^{q^n} - x}{p(x)}$ e $g(x) = h(x)^n \prod_{m=1}^{n-1} (x^{q^m} - x)^n$. Mostraremos que $g(N)$ é uma matriz diagonal, cujos autovalores são não-nulos em F_{q^n} . A matriz N tem a forma

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A . Notemos que:

(i) λ_i não é raiz do polinômio $x^{q^m} - x$ para $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Suponhamos, por contradição, que λ_i é raiz do polinômio $x^{q^m} - x$ para algum $m = 1, \dots, n-1$. Consideremos o subcorpo $F_{q^m} = \{a \in L \mid a^{q^m} - a = 0\}$ de L . Pelo Lema 4.4.1, concluímos que $|F_{q^m}| = q^m$. É possível mostrar, usando um raciocínio análogo ao que foi feito no início da demonstração deste teorema, que $[F_q(\lambda_i) : K] = n$, ou seja, $|F_q(\lambda_i)| = q^n$. Por outro lado, por $\lambda_i \in F_{q^m}$, temos que $F_q(\lambda_i) \subseteq F_{q^m}$, o que é um absurdo visto que $m < n$.

(ii) λ_i não pode anular $h(x)$, pois λ_i é zero de $p(x)$ e sendo assim $(x - \lambda_i)$ não aparece na fatoração de $h(x)$.

Sendo assim,

$$g(N) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ e daí } g(N)^{q^n-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{q^n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{q^n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n^{q^n-1} \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são todos não-nulos. Como $F_{q^n} - \{0\}$ é um grupo multiplicativo de ordem $q^n - 1$, segue que $\alpha_i^{q^n - 1} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo,

$$c(N) = g(N)^{q^n - 1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{q^n - 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{q^n - 1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n^{q^n - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Por A ser semelhante a N , existe $B \in M_n(F_{q^n})$ tal que $B^{-1}AB = N$. Daí, $c(A) = c(BNB^{-1}) = Bc(N)B^{-1} = BI_nB^{-1} = I_n \in Z(M_n(F_q))$. ■

Como no caso de identidades polinomiais pode-se perguntar qual o grau mínimo de um polinômio central para $M_n(K)$, quando $\text{char}K = 0$. O polinômio central de Formanek (Seção 4.2) é de grau n^2 . Do polinômio de Razmyslov (Seção 4.3), cujo grau é maior, Halpin [22] deduziu um novo polinômio central de grau n^2 . Acreditou-se por algum tempo que n^2 fosse a resposta para este problema no caso de $n \geq 3$. Entretanto, Drensky e Kasparian [11] construíram um novo polinômio central de grau 8 para a álgebra das matrizes de ordem 3 e provaram que 8 é o grau mínimo. Em [17] Formanek conjecturou que quando $\text{char}K = 0$ o grau mínimo de um polinômio central de $M_n(K)$ é $\frac{1}{2}(n^2 + 3n - 2)$ se $n \geq 3$. Notou-se que esta é a única função quadrática que assumia os valores 1, 4 e 8 para $n = 1, 2$ e 3, respectivamente. Drensky [12] construiu polinômios centrais de grau $(n - 1)^2 + 1$ para $n \geq 3$ e estes são os polinômios de menor grau até então construídos.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Alves, A. Brandão, P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *The central polynomials for the Grassmann algebra*, Israel J. Math. a aparecer.
- [2] S. A. Amitsur, J. Levitski, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449-463 (1950).
- [3] S. A. Amitsur, *A note on Pi-rings*, Israel J. Math. **10**, 210-211 (1971).
- [4] S. S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra **30 (12)**, 5849-5860 (2002).
- [5] S. S. Azevedo, *A basis for \mathbb{Z} -graded identities of matrices over infinite fields*, Serdica Math. Journal **29 (2)**, 149-158 (2003).
- [6] A. Brandão, *Graded central polynomials for the algebra $M_n(K)$* , Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. **57**, 265-278 (2008).
- [7] P. Zh. Chiripov, P. N. Siderov, *On bases for identities of some varieties of associative algebras*, Pliska Studia Mathematica Bulgarica **2**, 103-115 (1981).
- [8] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. **377**, 53-67 (2004).
- [9] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$* , Israel J. Math. **80 (3)**, 323-335 (1992).
- [10] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20 (3)**, 188-194 (1981).
- [11] V. Drensky, A. Kasparian, *A new central polynomial for 3×3 matrices*, Comm. Algebra **13**, 745-752 (1985).
- [12] V. Drensky, *New Central polynomials for the matrix algebra*, Israel J. Math. **92**, 235-248 (1995).

- [13] V. Drensky, *Free algebras and PI algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag PTE.LTD, 1999.
- [14] J. Dubnov, V. Ivanov, *Sur l'abaissement du degré des polynômes en affineurs*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR **41**, 96-98 (1943).
- [15] E. Formanek, *Central polynomials for matrix rings*, J. Algebra **23**, 129-132 (1972).
- [16] E. Formanek, *Invariants and the ring of generic matrices*, J. Algebra **89**, 178-223 (1984).
- [17] E. Formanek, *The polynomial identities and invariants of $n \times n$ matrices*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **78**, American Mathematical Society, Providence, RI (1991).
- [18] G. K. Genov, *Basis for identities of a third order matrix algebra over a finite field*, Algebra and Logic **20**, 241-257 (1981).
- [19] G. K. Genov, P. N. Siderov, *A basis for identities of the algebra of fourth-order matrices over a finite field*, Serdica **8**, 313-323, 351-366 (1982).
- [20] A. Giambruno, P. Koshlukov, *On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$* , Israel J. Math. **122**, 305-316 (2001).
- [21] A. Giambruno, A. Valenti, *Central polynomials and matrix invariants*, Israel J. Math. **96**, 281-297 (1996).
- [22] P. Halpin, *Central and weak identities for matrices*, Commun. Algebra **11** (19), 2237-2248 (1983).
- [23] I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, Carus Math. Monographs **15**, Wiley and Sons, Inc., New York (1968).
- [24] I. N. Herstein, *Notes from a Ring Theory Conference*, CBMS Regional Conference Series in Math. Amer. Math. Soc. **9** (1971).
- [25] G. Higman, *On a conjecture of Nagata*, Proc. Camb. Philos. Soc. **52**, 1-4 (1956).
- [26] N. Jacobson, *Structure theory of algebraic algebras of bounded degree*, Annals of Math. **46**, 695-707 (1945).
- [27] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 575-580 (1948).

- [28] I. Kaplansky, *Problems in the theory of rings*, Report of a Conference on Linear Algebras, June, 1956, in National Acad. of Sci. - National Research Council, Washington, Publ. **502**, 1-3 (1957).
- [29] A. Kemer, *Varieties and \mathbb{Z}_2 -graded algebras*, Math. USSR, Izv. **25**, 359-374 (1985).
- [30] A. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic. **26**, 362-397 (1987).
- [31] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$* , J. Algebra **241**, 410-434 (2001).
- [32] P. Koshlukov, S. S. Azevedo, *Graded identities for T -prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. **128**, 157-176 (2002).
- [33] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitski and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7**, 237-264 (1958).
- [34] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Transactions of the American mathematical Society **181**, 429-438 (1973).
- [35] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a T -ideal* (Russo), Sibirskii Matematicheskii Zhurnal **4** (5), 1122-1126 (1962).
- [36] V. N. Latyshev, A. L. Shmelkin, *A certain problem of Kaplansky*, Algebra and Logic **8**, 257 (1969).
- [37] J. Levitski, *On a problem of A. Kurosch*, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1033-1035 (1946).
- [38] Yu. N. Maltsev, E. N. Kuzmin, *A basis for identities of the algebra of second order matrices over a finite field*, Algebra and Logic **17**, 17-21 (1978).
- [39] M. Nagata, *On the nilpotency of nil algebras*, J. Math. Soc. Japan **4**, 296-301 (1953).
- [40] S. Okhitin, *Central polynomials of the algebra of second order matrices*, Moscow Univ. Math. Bull. **43** (4), 49-51 (1988).
- [41] A. Popov, *Identities of the tensor square of a Grassmann algebra*, Algebra and Logic **21**, 296-316 (1982).

- [42] E. C. Posner, *Prime rings satisfying a polynomial identity*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 180-183 (1960).
- [43] C. Procesi, *Rings with polynomial identities*, Marcel Dekker, New York (1973).
- [44] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, Algebra and Logic **12**, 47-63 (1973).
- [45] Yu. P. Razmyslov, *On a problem of Kaplansky*, Math. USSR, Izv. **7**, 479-496 (1973).
- [46] Yu. P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*, Math. USSR, Izv. **8**, 727-760 (1974).
- [47] Yu. P. Razmyslov, *Identities of algebras and their representations*, Translations Math. Monographs, **138**, AMS, Providence, RI, 1994.
- [48] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitski identity*, Israel J. Math. **23**, 187-188 (1976).
- [49] L. H. Rowen, *Some results on the center of a ring with polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **79**, 219-223 (1973).
- [50] L. H. Rowen, *Polynomial identities of ring theory*, Acad. Press (1980).
- [51] A. I. Shirshov, *On rings with identity relations (Russian)*, Mat. Sb. **41**, 277-283 (1957).
- [52] A. H. Stojanova-Venkova, *Bases of identities of Grassmann algebras*, Serdica **6**, 63-72 (1980).
- [53] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc **14**, 367-373 (1963). Correção: **21**, 379-380 (1969).
- [54] S. Yu. Vasilovsky, *\mathbb{Z} -graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Commun. Algebra **26 (2)**, 601-612 (1998).
- [55] S. Yu. Vasilovsky, *\mathbb{Z}_n -graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n* , Proc. Amer. Math. Soc. **127 (12)**, 3517-3524 (1999).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)