

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO – ESCOLA DE MINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**ESTUDO NUMÉRICO PELA ANÁLISE LIMITE DE  
PROBLEMAS GEOTÉCNICOS EM SOLOS  
REFORÇADOS**

**AUTOR: PAULO ANDRÉ LEMOS**

ORIENTADOR: PROF. DR. LUIZ GONZAGA DE ARAÚJO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de concentração: Geotecnia.

Ouro Preto, agosto de 2002.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

L555e Lemos, Paulo André.  
Estudo numérico pela análise limite de problemas geotécnicos em solos reforçados. Ouro Preto : UFOP, 2002.

x, 66p. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto.  
Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil.

1.Solos reforçados. 2. Análise limite. 3. Programação Linear (PL).  
I. Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. II. Título.

CDU: 624.13

## **AGRADECIMENTOS**

- ◆ Ao professor Luiz Gonzaga de Araújo pela dedicada orientação neste trabalho;
- ◆ À professora Christianne de Lyra Nogueira pelas sugestões e comentários;
- ◆ À minha família e amigos, em especial à Andréia pela dedicação, paciência, apoio e incentivo na realização deste trabalho;
- ◆ Ao Prof. Walter Dornellas;
- ◆ Aos colegas do curso de pós-graduação;
- ◆ Aos funcionários do DECIV;
- ◆ À Fundação Gorceix e à CAPES pelo apoio financeiro;
- ◆ Ao meu pai pela ajuda na revisão gramatical neste trabalho.

## RESUMO

Várias formulações de análise limite, via método dos elementos finitos (MEF), para solução de problemas de estabilidade em geotecnia foram apresentadas nas últimas décadas. Nestas formulações, o problema de estabilidade é colocado como um problema de Programação Matemática geralmente não linear. Muitas vezes este problema é aproximado por um problema de Programação Linear (PL).

O presente trabalho apresenta uma formulação mista de análise limite, via MEF, para solucionar problemas de estabilidade em geotecnia em meios contínuos, fraturados ou reforçados, sob condição de deformação plana, empregando-se a programação linear.

O meio reforçado pode ser tratado pela técnica do contínuo equivalente ou pela técnica discreta. Na técnica discreta, a interação solo-reforço pode ser modelada através de elementos de interface sem espessura. O reforço é modelado por meio de elementos de barra.

O solo, a interface solo-reforço e o reforço são idealizados como rígido-plásticos ideais com lei de fluxo associada. Para o solo é empregado o critério de escoamento de Mohr-Coulomb na forma linearizada, de modo que o problema resultante da formulação seja de programação linear. A condição de escoamento da interface solo-reforço é descrita pelo critério de Coulomb.

Vários exemplos são estudados pela implementação numérica realizada, demonstrando a potencialidade da metodologia para a solução de problemas práticos de Engenharia Civil.

## **ABSTRACT**

During the last decades several limit analysis formulations to solve geotechnical stability problems have been proposed using the finite element method (FEM). In these formulations, the stability problem is usually treated as a non-linear Mathematical Programming problem, which can be treated approximately as a Linear Programming (LP) problem.

This work presents a mixed formulation of limit analysis using FEM and PL to solve geotechnical stability problems in a fractured media or reinforced soils under plane strain conditions.

The reinforced continuum can be treated by the equivalent continuum technique or by the discrete technique. In this last technique, the soil-reinforcement interaction can be modeled through zero-thickness interface elements. The reinforcement is modeled by bar elements.

The soil, the soil-reinforcement interface, and the reinforcement are idealized as rigid-plastic models, which follow an associated flow law. For the soil, the linear Mohr-Coulomb yielding criterion is applied in order to obtain an LP treatment to the resulting problem. The interface flow condition is described by the Coulomb yielding criterion.

Several examples are successfully studied by the numerical implementation and this demonstrates the potentiality of the present methodology to solve practical problems in Civil Engineering.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>IX</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>X</b>

## **CAPÍTULO 1**

---

---

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 - GENERALIDADES .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 - SÍNTESE DAS FORMULAÇÕES NUMÉRICAS DE ANÁLISE LIMITE.....</b>	<b>2</b>
1.2.1 - Formulações para meios contínuos .....	2
1.2.2 - Formulações para meios fraturados .....	3
1.2.3 - Formulações para meios reforçados .....	4
<b>1.3 - PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR .....</b>	<b>6</b>
<b>1.4 - OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....</b>	<b>7</b>

## **CAPÍTULO 2**

---

<b>FORMULAÇÃO MISTA DE ANÁLISE LIMITE.....</b>	<b>9</b>
<b>2.1 - FORMULAÇÃO MISTA PARA MEIOS CONTÍNUOS.....</b>	<b>9</b>
2.1.1 - Equilíbrio do elemento finito.....	10
2.1.2 - Condição de escoamento do material .....	12
2.1.3 - Montagem do problema de programação linear (PL) em meios contínuos.....	13
<b>2.2 - FORMULAÇÃO PARA SOLO REFORÇADO PELA TÉCNICA DO CONTÍNUO EQUIVALENTE.....</b>	<b>14</b>
2.2.1 - Equilíbrio do elemento .....	14
2.2.2 - Condição de escoamento do contínuo equivalente.....	14
2.2.3 - Montagem do problema de PL na técnica do contínuo equivalente.....	19

<b>2.3 - FORMULAÇÃO PARA SOLO REFORÇADO PELA TÉCNICA DISCRETA</b>	<b>21</b>
.....	
2.3.1 - Formulação para solo reforçado sem emprego de elemento de interface .....	22
2.3.2 - Formulação para solo reforçado com emprego de elementos de interface .....	25

## **CAPÍTULO 3**

---

<b>IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA REALIZADA .....</b>	<b>31</b>
<b>3.1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>31</b>
<b>3.2 - MODELOS DE ELEMENTOS IMPLEMENTADOS.....</b>	<b>31</b>
3.2.1 - Modelagem de contínuo ou contínuo equivalente.....	32
3.2.2 - Modelagem discreta.....	32
3.2.3 - Critérios de escoamento implementados .....	33
<b>3.3 - FLUXOGRAMA.....</b>	<b>34</b>
3.3.1 - Pré-processamento.....	35
3.3.2 - Geração do problema de PL .....	37
3.3.3 - Solução do problema de PL.....	39

## **CAPÍTULO 4**

---

<b>PROBLEMAS ESTUDADOS .....</b>	<b>40</b>
<b>4.1 - PROBLEMAS DE ESTABILIDADE EM MEIOS CONTÍNUOS .....</b>	<b>40</b>
4.1.1 - Capacidade de carga de uma sapata corrida .....	40
4.1.2 - Talude vertical .....	42
4.1.3 - Empuxos de terra .....	43
<b>4.2 - PROBLEMAS MODELADOS PELA TÉCNICA DO CONTÍNUO EQUIVALENTE.....</b>	<b>45</b>
4.2.1 - Resistência à compressão simples de solo reforçado .....	45
4.2.2 - Talude vertical .....	47
4.2.3 - Capacidade de carga de fundação em solo reforçado.....	48
<b>4.3 - PROBLEMAS MODELADOS PELA TÉCNICA DISCRETA.....</b>	<b>51</b>

4.3.1 - Modelagem sem elementos de interface.....	51
4.3.2 - Exemplos de validação do elemento de interface.....	53
4.3.3 - Modelagem com elementos de interface .....	58

## **CAPÍTULO 5**

---

<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>62</b>
<b>5.1 - CONCLUSÕES.....</b>	<b>62</b>
<b>5.2 - SUGESTÕES .....</b>	<b>63</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>64</b>

# LISTA DE FIGURAS

## CAPÍTULO 2

---

Figura 2.1 – Representação esquemática dos tipos de elementos finitos .....	10
Figura 2.2 – Esquema de tensões no contínuo equivalente .....	15
Figura 2.3 – Linearização interna do critério de escoamento de Mohr-Coulomb .....	16
Figura 2.4 – Região viável para o critério de escoamento de Coulomb .....	18
Figura 2.5 – Modelos de interação solo-reforço .....	21
Figura 2.6 – Representação esquemática do elemento de reforço .....	22
Figura 2.7 – Sistema de coordenadas do elemento de interface .....	26

## CAPÍTULO 3

---

Figura 3.1 – Fluxograma.....	34
Figura 3.2 – Compressão simples de um elemento .....	35

## CAPÍTULO 4

---

Figura 4.1 – Capacidade de carga de uma sapata .....	41
Figura 4.2 – Talude vertical .....	43
Figura 4.3 – Empuxo de terra .....	44
Figura 4.4 – Compressão simples de solo reforçado .....	46
Figura 4.5 - Estabilidade de talude pela técnica do contínuo equivalente .....	47
Figura 4.6 – Esquema do problema de uma fundação em solo reforçado .....	49
Figura 4.7 – Estabilidade de taludes pela técnica discreta.....	51
Figura 4.8 – Capacidade de carga de fundação em solo reforçado.....	52
Figura 4.9 – Cisalhamento de interface .....	54
Figura 4.10 – Compressão de corpo de prova com uma descontinuidade.....	56
Figura 4.11 – Puxamento de reforço.....	58
Figura 4.12 – Arrancamento de reforço.....	60

# LISTA DE TABELAS

## CAPÍTULO 1

---

Tabela 1.1 – Síntese das formulações numéricas de análise limite .....	5
--	---

## CAPÍTULO 4

---

Tabela 4.1 – Fator de capacidade de carga ( $N_c$ ) em função de $\phi$ .....	42
Tabela 4.2 – Número de estabilidade em função de $\phi$ .....	43
Tabela 4.3 – Empuxos de terra ativo e passivo (tf/m) .....	45
Tabela 4.4 – Resistência à compressão simples do solo reforçado (kPa).....	47
Tabela 4.5 – Números de estabilidade para um problema de talude reforçado .....	48
Tabela 4.6 – Capacidade de carga de uma fundação em solo reforçado (kPa) via elemento bilinear em tensão .....	49
Tabela 4.7 – Capacidade de carga de uma fundação em solo reforçado (kPa) via elemento de tensão constante .....	50
Tabela 4.8 – Influência dos parâmetros de escoamento da interface na capacidade de carga de uma fundação (kPa) em solo reforçado.....	50
Tabela 4.9 – Fatores de segurança para um talude modelado pela técnica discreta .....	52
Tabela 4.10 – Capacidade de carga de fundação (kPa) em solo com uma camada de reforço.....	53
Tabela 4.11 – Resistência ao cisalhamento da interface (kPa), para o carregamento uniforme .....	55
Tabela 4.12 – Resistência do corpo de prova à compressão simples (kPa).....	57
Tabela 4.13 – Força de puxamento do reforço (kN).....	59
Tabela 4.14 – Força de arrancamento de reforço (kN) .....	61

# ***CAPÍTULO 1***

## **INTRODUÇÃO**

### **1.1 - GENERALIDADES**

Segundo Chen (1975), os problemas mecânicos da geotecnia podem ser divididos em dois grupos distintos:

- problemas de elasticidade;
- problemas de estabilidade.

Problemas de elasticidade são aqueles que tratam do comportamento de um meio solicitado por uma carga atuante abaixo da condição de ruptura. Nesta categoria podem ser considerados, por exemplo, os problemas de análise de tensão e deformação em um ponto dentro de uma barragem, ou sob uma sapata ou atrás de um muro de contenção. Soluções para estes problemas são obtidas, geralmente, utilizando-se a teoria da elasticidade.

Por outro lado, na categoria de problemas de estabilidade, estão aqueles em que se deseja determinar a carga que causará a ruptura do meio. Problemas de empuxos de terra, estabilidade de taludes e capacidade de carga de uma fundação podem ser incluídos nesta categoria.

Soluções para os problemas de estabilidade podem ser encontradas através de três métodos:

- das linhas de deslizamento;
- do equilíbrio limite;
- da análise limite.

O método das linhas de deslizamento resolve um conjunto de equações diferenciais, originadas de uma combinação de critério de ruptura do meio e das condições de equilíbrio.

No método do equilíbrio limite, mais comumente usado na prática, as equações de equilíbrio e a condição de escoamento do material são definidas somente ao longo da superfície potencial de ruptura, obtendo-se uma aproximação da verdadeira carga de colapso. No trabalho de Terzaghi (1943), vários problemas práticos de geotecnia são resolvidos por este método para o caso de meios contínuos.

Os métodos de análise limite baseiam-se em dois teoremas da teoria da plasticidade: teoremas do limite superior e inferior. A aplicação destes métodos para problemas de estabilidade em solos pode ser encontrada nos trabalhos de Finn (1967) e Chen (1975), onde são apresentadas soluções analíticas em forma de tabelas e gráficos.

## **1.2 - SÍNTESE DAS FORMULAÇÕES NUMÉRICAS DE ANÁLISE LIMITE**

O método de análise limite permite diversas formulações numéricas para os problemas de estabilidade em geotecnia, podendo tratar problemas com geometrias e carregamentos complexos. As formulações numéricas da análise limite, desenvolvidas através do método de elementos finitos (MEF), podem ser colocadas sob a forma de problemas de programação linear.

Nas seções seguintes, apresenta-se uma síntese dos trabalhos sobre as formulações numéricas de análise limite para os problemas de estabilidade em meios contínuos, fraturados e reforçados.

### **1.2.1 - Formulações para meios contínuos**

#### ***1.2.1. a) - Formulação de limite inferior***

As soluções dos problemas de estabilidade através das formulações numéricas do limite inferior (teorema estático) devem satisfazer exatamente às condições de equilíbrio, de contorno em tensão e de escoamento do material.

Para meios contínuos através da formulação numérica do limite inferior podem ser citados os trabalhos de Lysmer (1970), Bottero et al. (1978), Sloan (1987), Arai e Nakagawa (1988), Arai e Jinki (1990) e Singh e Basudhar (1993-a).

Lysmer e Singh e Basudhar utilizam a mesma formulação, sendo que, Singh e Basudhar resolvem o problema de programação matemática pela técnica de

programação não linear do gradiente conjugado. Os dois autores formulam o problema representando as tensões normais atuantes nos nós das faces dos elementos, usando o artifício de eliminar a tensão cisalhante da formulação.

As formulações de Bottero et al. e Sloan apresentam grandes semelhanças entre si e empregam tensões nodais como variáveis primárias. A diferença entre elas está no algoritmo empregado na solução do problema de programação linear (PL).

Arai e Nakagawa apresentam aplicações da formulação numérica pelo método do limite inferior a problemas de estabilidade de taludes.

#### ***1.2.1. b) - Formulação de limite superior***

As soluções dos problemas de estabilidade através das formulações do limite superior (teorema cinemático) devem satisfazer exatamente às condições de compatibilidade, de contorno em deslocamento e de escoamento do material.

Destacam-se para problemas de estabilidade pelo limite superior os trabalhos de Tamura et al. (1984, 1987), Sloan (1989) e Jiang (1995).

#### ***1.2.1. c) - Formulação mista***

A formulação mista pode ser caracterizada pela interpolação independente dos campos de tensão e de velocidade no interior do elemento, satisfazendo aproximadamente as condições de equilíbrio e de contorno em tensão. As condições de escoamento do material são satisfeitas exatamente.

Formulações mistas de análise limite são encontradas nos trabalhos de Christiansen (1981), Casciaro e Cascini (1982), Faria (1992) e Farfán (2000).

### **1.2.2 - Formulações para meios fraturados**

As formulações de análise limite para meios contínuos podem ser estendidas aos problemas de estabilidade em meios fraturados.

### ***1.2.2. a) - Formulações de limite inferior***

Citam-se os trabalhos de Yu e Sloan (1994), Araújo (1997), Araújo et al. (2000) e Sousa (2001) baseados na formulação do limite inferior para meios fraturados.

### ***1.2.2. b) - Formulações de limite superior***

Tamura e Pak (1989) trataram do problema de estabilidade em meios descontínuos através da formulação do limite superior da análise limite.

### ***1.2.2. c) - Formulação mista***

A formulação mista aplicada a meios fraturados é tratada nos trabalhos de Faria (1992) e Araújo et al. (1997).

## **1.2.3 - Formulações para meios reforçados**

As formulações de análise limite para meios reforçados encontradas na literatura técnica são recentes.

### ***1.2.3. a) - Formulações de limite inferior***

Singh e Basudhar (1993-b), Yu e Sloan (1997), Francescato e Pastor (1997) e Sousa (2001) utilizam a técnica de modelagem do contínuo equivalente. No primeiro trabalho emprega-se a técnica de programação não linear, enquanto que nos outros, a técnica linear. Sousa (2001) também apresenta em seu trabalho a formulação pela técnica discreta.

### ***1.2.3. b) - Formulações de limite superior***

Formulações de problemas de estabilidade em meios reforçados, baseados no teorema cinemático de análise limite, podem ser encontrados em Yu e Sloan (1997), Francescato e Pastor (1997), Asaoka (1994), Michalowski (1998) e em Porbaha et al. (2000). Com exceção de Asaoka, o meio reforçado é tratado pela técnica de modelagem do contínuo equivalente.

A Tabela 1.1 mostra uma síntese de trabalhos sobre os problemas de estabilidade em meios contínuos, fraturados e reforçados, através das formulações numéricas de análise limite, destacando-se, para os meios fraturados e reforçados, as técnicas de modelagem empregadas por cada um.

**Tabela 1.1 – Síntese das formulações numéricas de análise limite**

Meios	Técnicas de modelagem	Autores	Tipo de formulação de análise limite
Contínuos		Lysmer (1970), Bottero et al. (1978), Sloan (1987), Arai e Nakagawa (1988), Arai e Jinki (1990), Singh e Basudhar (1993-a) e Sousa (2001).	Limite inferior
		Tamura et al. (1984, 1987), Sloan (1989) e Jiang (1995)	Limite superior
		Christiansen (1981), Casciaro e Cascini (1982) Farfán (2000) e Faria (1992).	Mista
Fraturados	Discreta	Sousa (2001)	Limite inferior
	Contínuo equivalente	Yu e Sloan (1994), Araújo (1997), Araújo et al. (2000) e Sousa (2001).	
		Tamura e Pak (1989)	Limite superior
	Discreta	Faria (1992) e Araújo et al. (1997).	Mista
Reforçados	Discreta	Sousa (2001)	Limite inferior
	Contínuo equivalente	Singh e Basudhar (1993-b), Yu e Sloan (1997) e Francescato e Pastor (1997)	
			Yu e Sloan (1997), Francescato e Pastor (1997), Michalowski (1998) e Porbaha et al. (2000)
	Discreta	Asaoka (1994)	

Observa-se na Tabela 1.1 a inexistência da formulação mista de análise limite para problemas de estabilidade em meios reforçados.

### 1.3 - PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Em uma grande variedade de operações econômicas, políticas, sociais e científicas, surgem freqüentemente situações em que se deseja maximizar ou minimizar uma certa quantidade que é uma medida de eficiência da atividade. Esta quantidade pode ser, por exemplo, a produção total em um certo período de tempo ou o custo da operação. Problemas de otimização deste tipo são conhecidos como problemas de programação matemática (Noble e Daniel, 1986).

Problemas de programação matemática em que estão envolvidos somente equações e inequações lineares são denominados problemas de programação linear (PL) e a solução deles pode ser obtida através, por exemplo, do método simplex (ver, p. ex., Noble e Daniel, 1986).

Assim, a listagem a seguir exemplifica um problema de programação linear:

$$\text{maximize } Z = 40x_1 + 60x_2$$

sujeito a:

$$2x_1 + x_2 = 70$$

$$x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 90$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0.$$

O problema de programação linear (PL), na forma padrão, pode ser colocado na forma matricial abaixo, Hadley (1982) :

$$\text{Max } Z = \mathbf{c}^T \mathbf{X}$$

Sujeito a

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{X} = \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{X} \leq \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

onde:

$Z$  é a função objetivo;

$\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  são matrizes que contêm os coeficientes das relações lineares;

$\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  são vetores dos termos independentes das relações lineares;

$\mathbf{X}$  é o vetor das variáveis do problema.

Consideram-se os problemas de PL na forma padrão, aqueles nos quais, as variáveis do problema não assumem valores negativos ( $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ ). Os problemas de PL resultantes das formulações numéricas apresentadas neste trabalho não estão na forma padrão, por apresentarem variáveis (tensões incógnitas) que podem assumir valores negativos.

Os problemas de PL podem ser resolvidos por programas comerciais. As soluções dos problemas de PL, resultantes dos exemplos estudados neste trabalho, mesmo na forma não padrão, foram obtidas pelo programa de computador LINDO (Schrage, 1991).

#### **1.4 - OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar formulações mistas de análise limite, via método dos elementos finitos, para problemas de estabilidade em meios contínuos, fraturados ou reforçados, na condição plana de deformação. Visa, também, realizar a implementação da formulação apresentada e sua validação através de estudos de casos de problemas de estabilidade em geotecnia.

Para a modelagem dos problemas de estabilidade em meios reforçados, utilizam-se as técnicas do contínuo equivalente e discreta. O modelo do contínuo equivalente é aplicável ao caso onde o espaçamento do reforço é pequeno em relação a uma dimensão característica do problema. A modelagem discreta pode ser aplicável, quando há um número relativamente pequeno de camadas de reforço, viabilizando a discretização do solo, das interfaces e do reforço.

No capítulo 2, apresenta-se a formulação mista em tensão para meios contínuos, fraturados ou reforçados.

A implementação realizada neste trabalho, descrevendo-se os elementos utilizados na discretização do meio, está considerada no capítulo 3.

No capítulo 4, são estudados vários problemas de estabilidade clássicos da literatura técnica com o programa computacional implementado, apresentando-se as conclusões pertinentes.

Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para futuros estudos.

## ***CAPÍTULO 2***

### **FORMULAÇÃO MISTA DE ANÁLISE LIMITE**

A formulação mista para meios contínuos pode ser estendida aos problemas de estabilidade em solo reforçados por meio de duas técnicas de modelagem:

- técnica do contínuo equivalente;
- técnica discreta.

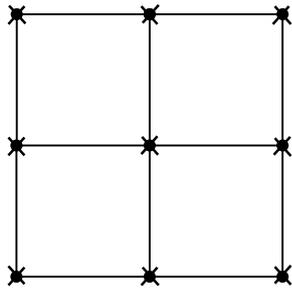
Para o caso de um meio constituído de solo reforçado, onde o espaçamento do reforço é pequeno em relação a uma dimensão característica do problema, pode ser utilizada a técnica do contínuo equivalente. Quando o meio apresentar poucas camadas de reforço, viabilizando uma discretização individual do solo e reforço, pode ser utilizada a técnica discreta.

Nas seções a seguir, apresentam-se as formulações mistas, através do método dos elementos finitos (MEF), para meios contínuos e reforçados. Os problemas de programação matemática gerados são aproximados pela técnica de programação linear (PL) para condição de deformação plana.

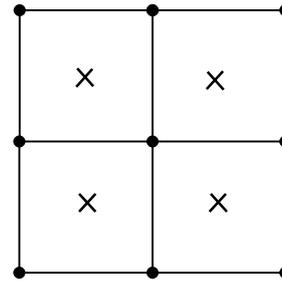
#### **2.1 - FORMULAÇÃO MISTA PARA MEIOS CONTÍNUOS**

A discretização do meio contínuo, na formulação que se segue, pode ser feita através do elemento quadrilateral de 4 nós bilinear em velocidade e tensão, elemento  $Q_4$ , ou do mesmo elemento, porém, de tensão constante, elemento  $Q_4^C$ . Para o elemento  $Q_4$ , as velocidades e as tensões são definidas nos pontos nodais do elemento. Para o elemento  $Q_4^C$ , as velocidades são definidas nos pontos nodais do elemento e a tensão é constante no interior do elemento.

A Figura 2.1 ilustra dois arranjos de elementos finitos com os dois tipos de elementos e os pontos onde são definidas as tensões.



a) Arranjo de elementos  $Q_4$



b) Arranjo de elementos  $Q_4^c$

× = ponto onde é definida a tensão

• = ponto nodal

**Figura 2.1 – Representação esquemática dos tipos de elementos finitos**

### 2.1.1 - Equilíbrio do elemento finito

A equação abaixo representa o equilíbrio de um elemento finito (ver, p. ex., Araújo, 1997):

$$\int_V \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV = \mathbf{f}_e; \quad (2.1)$$

onde:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{H}_u$$

é a matriz que relaciona deslocamento e deformação, (ver, p. ex., Cook, 1989);

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

é o operador diferencial que transforma deslocamento em deformação para o caso de estado plano de deformação;

$$\mathbf{H}_u = [\mathbf{N}_1 \mathbf{I} \parallel \mathbf{N}_2 \mathbf{I} \parallel \mathbf{N}_3 \mathbf{I} \parallel \mathbf{N}_4 \mathbf{I}]$$

é a matriz que contém as funções de interpolação do deslocamento;

$\mathbf{I}$  = matriz identidade (2x2);

$N_k$  = funções de interpolação (ver, p. ex., Cook, 1989),  $k = 1, \dots, 4$ ;

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  = tensão no domínio do elemento;

$\mathbf{f}_e$  = vetor do carregamento nodal equivalente do elemento.

A interpolação das tensões no domínio do elemento,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , pode ser definida pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (2.2)$$

No caso do elemento  $Q_4$ ,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\sigma = [\mathbf{N}_1\mathbf{I} \parallel \mathbf{N}_2\mathbf{I} \parallel \mathbf{N}_3\mathbf{I} \parallel \mathbf{N}_4\mathbf{I}]$$

é a matriz que contém as funções de interpolação da tensão;

$\mathbf{I}$  = matriz de identidade (3x3);

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = [\sigma_x^1 \quad \sigma_y^1 \quad \tau_{xy}^1 \quad \dots \quad \sigma_x^4 \quad \sigma_y^4 \quad \tau_{xy}^4]$$

é o vetor das componentes de tensão nos pontos nodais do elemento.

Para o elemento  $Q_4^C$ ,

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]$$

é o vetor das componentes de tensão no interior do elemento.

A substituição de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , equação (2.2), na equação (2.1), fornece a equação de equilíbrio do elemento:

$$\int_V \mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\sigma}}dV = \mathbf{f}_e. \quad (2.3)$$

A equação anterior pode ser colocada sob a seguinte forma:

$$\mathbf{C}_e^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}_e; \quad (2.4)$$

onde:

$$\mathbf{C}_e^T = \int_V \mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{H}dV \quad (2.5)$$

é a matriz de equilíbrio do elemento.

O cálculo da matriz de equilíbrio do elemento,  $\mathbf{C}_e^T$ , pode ser feito através do método de integração numérica de Gauss (ver, p. ex., Bathe, 1982).

### 2.1.2 - Condição de escoamento do material

Adotando o critério de escoamento de Mohr-Coulomb (tração positiva), sob condição de deformação plana, Sloan (1987) aproximou a superfície de escoamento por uma pirâmide de  $p$ -lados, obtendo o critério sob a forma linearizada (Sloan, 1987):

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} \leq 2c \cos \phi \cos(\pi/p), \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.6)$$

onde:

$$A_k = \cos(2\pi k/p) + \sin \phi \cos(\pi/p);$$

$$B_k = -\cos(2\pi k/p) + \sin \phi \cos(\pi/p);$$

$$C_k = 2 \sin(2\pi k/p);$$

$\phi$  = ângulo de atrito do material;

$c$  = coesão do material;

$p$  = número de lados da pirâmide usada para aproximar a superfície de escoamento.

A relação (2.6) pode ser colocada na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{Q}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i \leq \mathbf{R}_i; \quad (2.7)$$

onde:

$$\mathbf{Q}_i^T = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_p & B_p & C_p \end{bmatrix}$$

é a matriz das restrições de escoamento do material no ponto  $i$  ( $i$  = ponto onde a tensão é definida);

$$\boldsymbol{\sigma}_i^T = [\sigma_x^i \quad \sigma_y^i \quad \tau_{xy}^i]$$

é o vetor das componentes de tensão atuantes no ponto  $i$ ;

$$\mathbf{R}_i^T = [2c \cos \phi \cos(\pi/p) \quad 2c \cos \phi \cos(\pi/p) \quad \dots \quad 2c \cos \phi \cos(\pi/p)]$$

é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento do material no ponto  $i$ , com  $p$  componentes.

### 2.1.3 - Montagem do problema de programação linear (PL) em meios contínuos

A montagem da equação de equilíbrio, equação (2.4), para todos os elementos da malha e a imposição do critério de escoamento do material, relação (2.7), em todos os pontos onde as tensões são definidas conduzem a um problema de programação linear (PL) no formato indicado no capítulo 1, como mostrado por Faria (1992), que pode ser posto sob a forma abaixo:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \lambda \\ & \text{Sujeito a} \\ & \mathbf{C}^T \mathbf{X} = \lambda \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_p \quad (\text{restrições de equilíbrio}); \\ & \mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (\text{restrições de escoamento do material}); \end{aligned}$$

onde:

$\mathbf{C}^T$  é obtida pela montagem das matrizes de equilíbrio de todos os elementos da malha, seguindo a mesma sistemática de montagem da matriz de rigidez global ( $\mathbf{K}$ ), tradicional do MEF, diferindo-se apenas no número de graus de liberdade, que passa a ser 3 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) em cada ponto onde a tensão é definida;

$$\mathbf{X}^T = [\sigma_x^1 \quad \sigma_y^1 \quad \tau_{xy}^1 \quad \dots \quad \sigma_x^{nt} \quad \sigma_y^{nt} \quad \tau_{xy}^{nt}]$$

é o vetor das variáveis do problema com  $3 \cdot nt$  componentes;

$nt$  = número de pontos onde as tensões são definidas;

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{nt}^T \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

é a matriz global das restrições de escoamento do material obtida pela imposição da condição de escoamento do material, relação (2.7), em todos os pontos onde as tensões são definidas;

$$\mathbf{R}^T = [\mathbf{R}_1^T \quad \mathbf{R}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{R}_{nt}^T]$$

é o vetor global dos termos independentes das restrições de escoamento do material;

$\mathbf{f}$  = vetor de carregamento global equivalente que pode tomar a seguinte forma (Faria, 1992):

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_p$$

onde:

$\mathbf{f}_p$  = vetor do carregamento nodal equivalente devido às cargas permanentes;

$$\mathbf{f}_v = \lambda \mathbf{f}_0$$

é o vetor do carregamento nodal equivalente devido às cargas variáveis;

$\mathbf{f}_0$  = vetor do carregamento equivalente devido às cargas iniciais que são ampliadas pelo escalar  $\lambda$  ;

$\lambda$  = fator de colapso.

A montagem dos vetores  $\mathbf{f}_p$  e  $\mathbf{f}_0$  segue a sistemática padrão do MEF e entende-se por cargas permanentes aquelas que não são ampliadas pelo fator  $\lambda$  .

O problema de PL, acima colocado, não está na sua forma padrão, uma vez que as componentes de tensão podem assumir valores negativos. Este problema de PL, mesmo não estando na forma padrão, pode ser resolvido por programas comerciais, como p. ex., o programa LINDO (Schrage, 1991) usado neste trabalho. O número de variáveis do problema é igual a  $3 \cdot nt + 1$  e o número de restrições de escoamento é dado por  $p \cdot nt$ , onde  $p$  é o número de lados da pirâmide usada na aproximação da superfície de escoamento.

## **2.2 - FORMULAÇÃO PARA SOLO REFORÇADO PELA TÉCNICA DO CONTÍNUO EQUIVALENTE**

### **2.2.1 - Equilíbrio do elemento**

As restrições de equilíbrio do elemento permanecem na mesma forma das equações de equilíbrio do elemento em meio contínuo, equação (2.4).

### **2.2.2 - Condição de escoamento do contínuo equivalente**

Na formulação pela técnica do contínuo equivalente, a condição de escoamento do meio equivalente é descrita através do critério de escoamento do solo, da interface solo-reforço e do reforço (Sousa, 2001).

Sob condição de deformação plana (plano x-y) e admitindo-se a hipótese de validade do modelo contínuo equivalente (condição  $d/h \ll 1$ , Figura 2.2), Yu e Sloan

(1997) encontraram as seguintes equações para as componentes de tensão atuante no solo expressas no sistema global de coordenadas:

$$\sigma_x^s = \sigma_x - \sigma^r \cos^2 \beta \quad (2.9)$$

$$\sigma_y^s = \sigma_y - \sigma^r \sin^2 \beta \quad (2.10)$$

$$\tau_{xy}^s = \tau_{xy} - \sigma^r \cos \beta \sin \beta \quad (2.11)$$

onde:

$$(\sigma^s)^T = [\sigma_x^s \quad \sigma_y^s \quad \tau_{xy}^s]$$

é a parcela da componente de tensão atuante no contínuo equivalente devida ao solo;

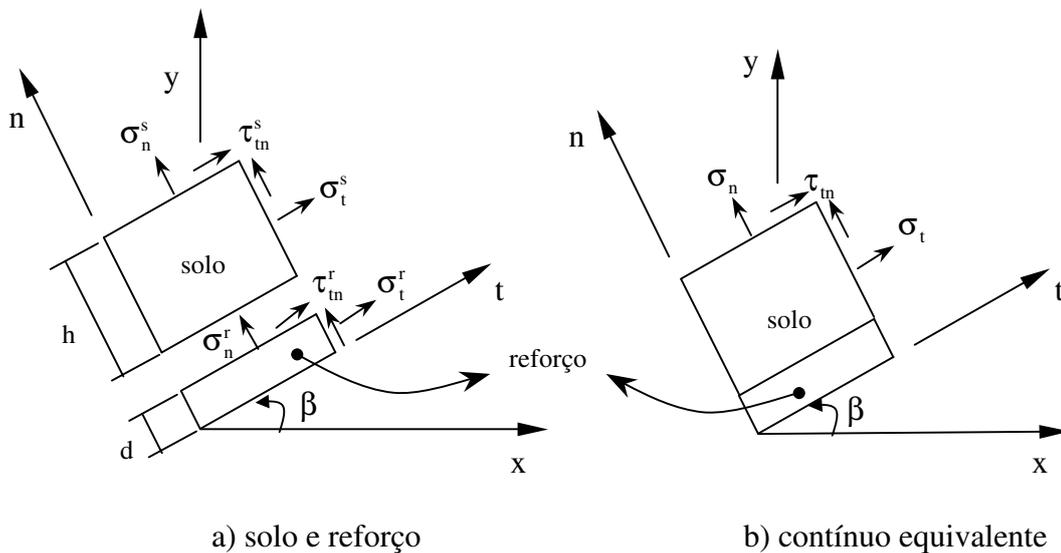
$$\sigma^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]$$

é o vetor das componentes de tensão atuante no contínuo equivalente;

$$\sigma^r = \frac{d}{h} \sigma_t^r$$

é a parcela da componente de tensão atuante no contínuo equivalente devida ao reforço;

$\beta$  = ângulo formado pelo plano do reforço com o eixo ox (Figura 2.2).



**Figura 2.2 – Esquema de tensões no contínuo equivalente**

### 2.2.2. a) - Condição de escoamento do solo

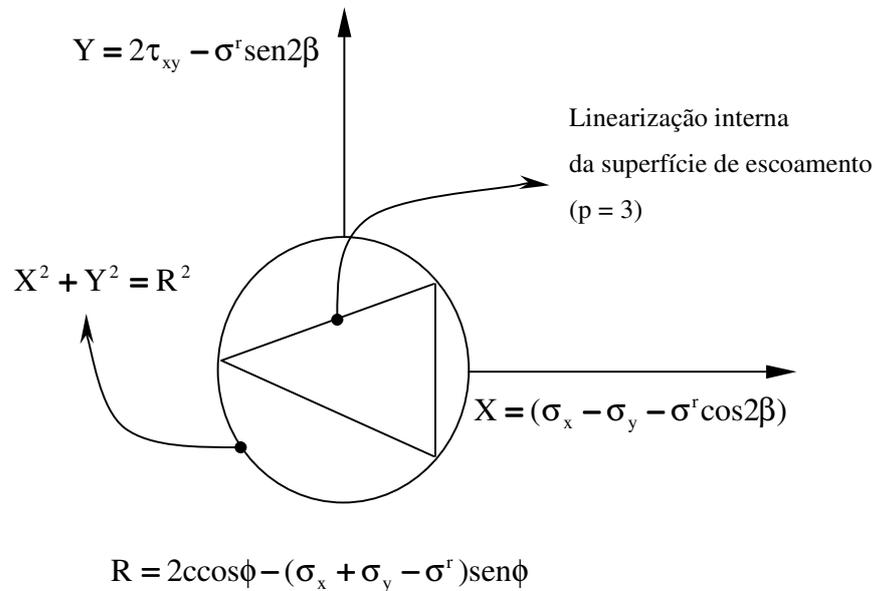
O critério de escoamento de Mohr-Coulomb, para condição plana de deformação, pode ser colocado na forma da equação abaixo:

$$F_s = (\sigma_x^s - \sigma_y^s)^2 + (2\tau_{xy}^s)^2 - [2c\cos\phi - (\sigma_x^s + \sigma_y^s)\text{sen}\phi]^2 = 0. \quad (2.12)$$

A substituição das componentes de tensão no solo, equações (2.9), (2.10) e (2.11), no critério acima definido, permite reescrevê-lo em função das tensões no contínuo equivalente ( $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ ) e da tensão no reforço ( $\sigma^r$ ), na forma:

$$F_s = (\sigma_x - \sigma_y - \sigma^r \cos 2\beta)^2 + (2\tau_{xy} - \sigma^r \text{sen} 2\beta)^2 - [2c\cos\phi - (\sigma_x + \sigma_y - \sigma^r \text{sen}\phi)]^2 = 0. \quad (2.13)$$

A Figura 2.3 ilustra a linearização interna do critério de Mohr-Coulomb através de uma pirâmide de 3 lados,  $p = 3$ , (Yu e Sloan, 1997).



**Figura 2.3 – Linearização interna do critério de escoamento de Mohr-Coulomb**

O critério de escoamento em consideração pode ser colocado sob a forma linearizada:

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} + D_k \sigma^r \leq 2c\cos\phi \cos(\pi/p) \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.14)$$

ou sob a forma matricial:

$$\mathbf{Q}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i + (\mathbf{Q}_i^*)^T \boldsymbol{\sigma}_i^r \leq \mathbf{R}_i^s; \quad (2.15)$$

onde:

$\mathbf{Q}_i^T$  é a matriz das restrições de escoamento devida ao solo, equação (2.7);

$$\boldsymbol{\sigma}_i^T = [\sigma_x^i \quad \sigma_y^i \quad \tau_{xy}^i]$$

é o vetor das componentes de tensão no contínuo equivalente;

$$(\mathbf{Q}_i^*)^T = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_p \end{bmatrix}$$

é a matriz das restrições de escoamento devida ao reforço;

$$D_k = -\cos 2\beta \cos(2\pi k/p) - \sin 2\beta \sin(2\pi k/p) - \sin(2\pi k/p) - \sin \phi \cos(\pi/p);$$

$$(\mathbf{R}_i^s)^T = [2c \cos \phi \cos(\pi/p) \quad 2c \cos \phi \cos(\pi/p) \quad \dots \quad 2c \cos \phi \cos(\pi/p)]$$

é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento;

$p$  = número de lados da pirâmide usada para aproximação da superfície de escoamento;

$c$  = coesão do solo;

$\phi$  = ângulo de atrito do solo;

$\beta$  = ângulo formado pelo plano do reforço com o eixo  $ox$  (Figura 2.2).

A imposição do critério de escoamento, relação (2.15), em todos os pontos onde as tensões são definidas ( $nt$ ), permite escrever a seguinte matriz global das restrições de escoamento do solo na forma abaixo:

$$(\mathbf{Q}^s)^T = [\mathbf{Q}^T \quad \vdots \quad (\mathbf{Q}^*)^T]. \quad (2.16)$$

### 2.2.2. b) - Condição de escoamento da interface solo-reforço

Condições de escoamento da interface solo-reforço podem ser impostas na análise pela técnica do contínuo equivalente. O critério de escoamento de Coulomb define a região viável, Figura 2.4, conforme as seguintes relações:

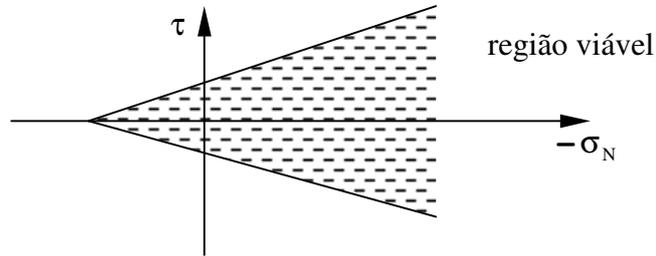
$$\tau \leq c_{in} - \sigma_N \operatorname{tg} \phi_{in};$$

$$-\tau \leq c_{in} - \sigma_N \operatorname{tg} \phi_{in};$$

onde:

$c_{in}$  = coesão da interface solo-reforço;

$\phi_{in}$  = ângulo de atrito da interface solo-reforço.



**Figura 2.4 – Região viável para o critério de escoamento de Coulomb**

A relação (2.17) descreve as restrições de escoamento da interface solo-reforço num ponto nodal  $i$  (Araújo,1997):

$$(\mathbf{Q}_i^j)^T \boldsymbol{\sigma}_i \leq \mathbf{R}_i^j \quad (2.17)$$

onde:

$$(\mathbf{Q}_i^j)^T = \begin{bmatrix} 1 & \text{tg}\phi_{in} \\ -1 & \text{tg}\phi_{in} \end{bmatrix} \mathbf{T}_\sigma$$

é a matriz das restrições de escoamento da interface solo-reforço;

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\text{sen}2\beta & \frac{1}{2}\text{sen}2\beta & \cos2\beta \\ \text{sen}^2\beta & \cos^2\beta & -\text{sen}2\beta \end{bmatrix}$$

é a matriz de transformação das componentes de tensões;

$$(\mathbf{R}_i^j)^T = [c_{in} \quad c_{in}]$$

é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento da interface solo reforço.

A imposição do critério de escoamento, relação (2.17), em todos pontos onde as tensões são definidas ( $nt$ ), conduz à seguinte matriz global das restrições de escoamento da interface solo-reforço:

$$(\mathbf{Q}^j)^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_i^j)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{nt}^j)^T \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

### 2.2.2. c) - Condição de escoamento do reforço

Condição de escoamento do reforço num ponto pode ser definida conforme a seguinte expressão:

$$0 \leq \sigma^r \leq \sigma_{esc},$$

onde:

$\sigma_{esc}$  é o produto da percentagem de reforço pela tensão de escoamento do reforço ( $\sigma_{yield}$ ), ou seja,

$$\sigma_{esc} = \frac{d}{h} \sigma_{yield}.$$

As restrições de escoamento do reforço num ponto nodal  $i$ , colocadas sob a forma matricial, podem ser expressas pela seguinte relação:

$$(\mathbf{Q}_i^r)^T \sigma_i^r \leq \mathbf{R}_i^r \quad (2.19)$$

onde:

$$(\mathbf{Q}_i^r)^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz das restrições de escoamento do reforço;

$\sigma_i^r$  é a tensão atuante no reforço;

$$(\mathbf{R}_i^r)^T = [0 \quad \sigma_{esc}]$$

é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento do reforço.

A imposição do critério de escoamento, relação (2.19), em todos os pontos onde as tensões são definidas ( $nt$ ), conduz à seguinte matriz global das restrições de escoamento do reforço:

$$(\mathbf{Q}^r)^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_1^r)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{nt}^r)^T \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

### 2.2.3 - Montagem do problema de PL na técnica do contínuo equivalente

A montagem da equação de equilíbrio, equação (2.4), para todos os elementos da malha e a imposição do critério de escoamento do solo, relação (2.15), da interface solo-

reforço, relação (2.17), e do reforço, relação (2.19), em todos pontos nodais da malha, conduzem a um problema de PL, que pode ser colocado sob a forma abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \lambda \\
 & \text{Sujeito a} \\
 & \mathbf{C}^T \mathbf{X} = \mathbf{f}_p + \lambda \mathbf{f}_0 \quad (\text{restrições de equilíbrio}); \\
 & \mathbf{Q}^T \mathbf{X} + (\mathbf{Q}^*)^T \mathbf{Y} \leq \mathbf{R}_{nt}^s \quad (\text{restrições de escoamento do solo}); \\
 & (\mathbf{Q}^j)^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R}_{nt}^j \quad (\text{restrições de escoamento da interface}); \\
 & (\mathbf{Q}^r)^T \mathbf{Y} \leq \mathbf{R}_{nt}^r \quad (\text{restrições de escoamento do reforço});
 \end{aligned}$$

onde:

$$\mathbf{X}^T = [\sigma_x^1 \quad \sigma_y^1 \quad \tau_{xy}^1 \quad \dots \quad \sigma_x^{nt} \quad \sigma_y^{nt} \quad \tau_{xy}^{nt}]$$

é o vetor das componentes de tensão atuante no contínuo equivalente em todos os pontos nodais;

$$\mathbf{Q}^T = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^T & (\mathbf{Q}^*)^T \\ \hline (\mathbf{Q}^j)^T & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (\mathbf{Q}^r)^T \end{array} \right]$$

é a matriz resultante de todas as matrizes globais das restrições de escoamento do solo, da interface solo-reforço e do reforço, relações (2.16), (2.18) e (2.20);

$$\mathbf{Y}^T = [\sigma_1^r \quad \sigma_2^r \quad \dots \quad \sigma_{nt}^r]$$

é o vetor global das componentes de tensão atuantes no reforço em todos os pontos nodais;

$$\mathbf{R}^T = [(\mathbf{R}_{nt}^s)^T \quad | \quad (\mathbf{R}_{nt}^j)^T \quad | \quad (\mathbf{R}_{nt}^r)^T]$$

é o vetor global de todos termos independentes de todas as restrições de escoamento (solo, interface e reforço).

As restrições do problema acima podem ser reescritas na forma mais compacta:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \mathbf{f}_p + \lambda \mathbf{f}_0$$

$$\mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \leq \mathbf{R}^T$$

o que o identifica como um problema de PL indicado no capítulo 1.

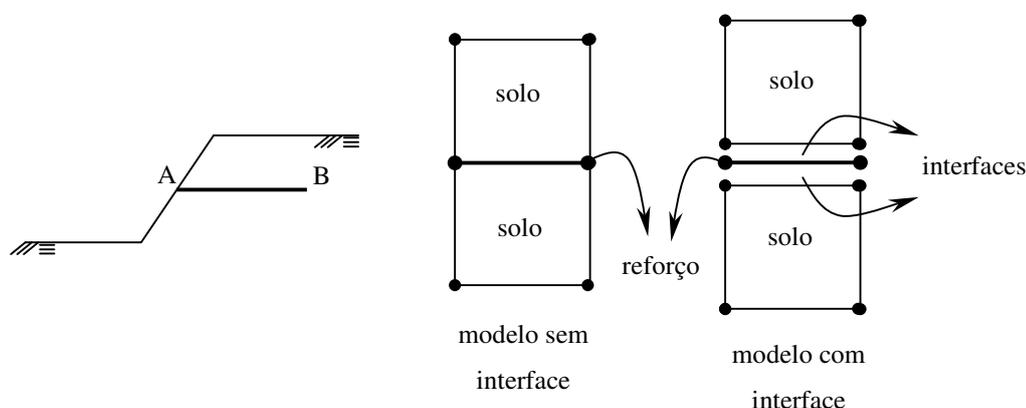
### 2.3 - FORMULAÇÃO PARA SOLO REFORÇADO PELA TÉCNICA DISCRETA

Na primeira formulação apresentada pela técnica discreta desconsidera-se o efeito das interfaces solo-reforço. Nesta formulação simplificada, as condições de compatibilidade são satisfeitas em todo o domínio do problema, isto é, movimentos relativos na interface solo-reforço não são modelados.

A formulação mista pela a técnica discreta baseia-se na discretização individual do solo e do reforço em elementos finitos. A discretização do solo pode ser feita por elementos quadrilaterais de 4 nós e para cada par de nós por onde passa uma camada de reforço é definido um elemento unidimensional de 2 nós.

Na segunda formulação pela técnica discreta, a interação solo-reforço é modelada com o emprego de elementos de interface. Assim, movimentos relativos entre solo e o reforço podem ser considerados como nos exemplos de puxamento e arrancamento de reforço estudados no capítulo 4. Esta formulação dá origem a um problema de maior tamanho pelo aumento do número de pontos nodais e de elementos de interface (ver Figura 2.5).

A Figura 2.5 ilustra um esquema de talude em solo reforçado constituído por uma camada de reforço (linha A-B). Ilustra, também, detalhes da discretização do meio sem e com interface (sem espessura).

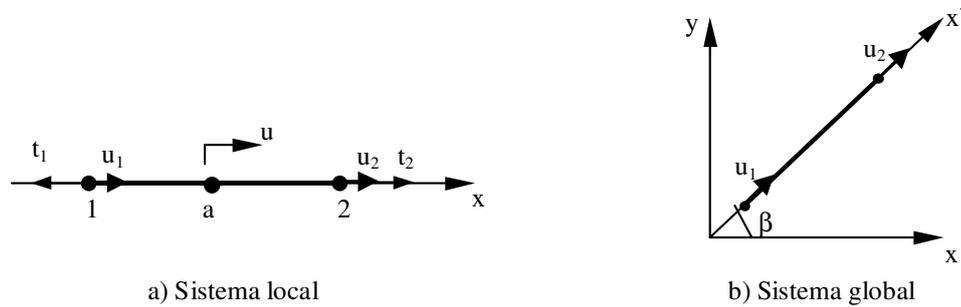


**Figura 2.5 – Modelos de interação solo-reforço**

### 2.3.1 - Formulação para solo reforçado sem emprego de elemento de interface

A seguir, apresenta-se a formulação do elemento de reforço, linear em tensão e velocidade, sob condição de deformação plana. A Figura 2.6 ilustra um do elemento de

reforço de comprimento  $L_r$ , seção transversal  $A_r$ , por unidade de largura, e o ângulo formado entre o plano do reforço e o eixo  $ox$  ( $\beta$ ).



**Figura 2.6 – Representação esquemática do elemento de reforço**

### 2.3.1. a) - Equilíbrio do elemento de reforço

Interpolando-se a velocidade e tensão no sistema local de coordenadas do elemento, têm-se as equações abaixo:

$$u(x) = \mathbf{H}_u \hat{\mathbf{u}} ; \quad (2.21)$$

$$t(x) = \mathbf{H}_\sigma \hat{\mathbf{t}} ; \quad (2.22)$$

em que

$$\mathbf{H}_u = \mathbf{H}_\sigma = [h_1 \quad h_2];$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad u_2];$$

$$\hat{\mathbf{t}}^T = [t_1 \quad t_2];$$

$$h_1 = 1 - \frac{x}{L_r} ; h_2 = \frac{x}{L_r} ;$$

onde:

$u(x)$  = velocidade num ponto (ponto a) do elemento de reforço;

$t(x)$  = tensão de tração no elemento de reforço;

$\mathbf{H}_u$  e  $\mathbf{H}_\sigma$  = matrizes das funções de interpolação;

$\hat{\mathbf{u}}$  = vetor das velocidades nodais;

$\hat{\mathbf{t}}$  = vetor das tensões de tração nos pontos nodais.

O vetor das forças internas ( $\mathbf{f}_m$ ) do elemento de reforço é definido pela expressão abaixo:

$$\mathbf{f}_m = \int \mathbf{B}^T t(x) A_r dx; \quad (2.23)$$

onde:

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{H}_u}{dx} = \frac{1}{L_r} [-1 \quad 1];$$

é a matriz que relaciona velocidade e taxa de deformação;

Substituindo a tensão de tração, equação (2.22), na equação (2.23), tem-se a expressão abaixo:

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{C}_R^T \hat{\mathbf{T}}; \quad (2.24)$$

onde:

$$\mathbf{C}_R^T = \int_0^{L_r} \mathbf{B}^T \mathbf{H}_\sigma dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

é a matriz de equilíbrio do elemento de reforço no sistema local de coordenadas;

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = A_r \hat{\mathbf{t}}$$

é o vetor das forças internas atuantes nos pontos nodais do elemento de reforço.

Expressando o vetor  $\mathbf{f}_m$  no sistema global de coordenadas, tem-se a seguinte relação:

$$\mathbf{f}_m^{gl} = \mathbf{R}^T \mathbf{C}_R^T \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{C}_{gl}^T \hat{\mathbf{T}} \quad (2.25)$$

onde:

$$\mathbf{C}_{gl}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\cos\beta & -\cos\beta \\ -\sen\beta & -\sen\beta \\ \cos\beta & \cos\beta \\ \sen\beta & \sen\beta \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

é a matriz de equilíbrio do reforço no sistema global de coordenadas;

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 \\ \sen\beta & 0 \\ 0 & \cos\beta \\ 0 & \sen\beta \end{bmatrix}$$

é a matriz de rotação de vetores (ver, p. ex., Cook, 1989);

### 2.3.1. b) - *Condição de escoamento do reforço*

As restrições de escoamento do reforço são dadas por:

$$0 \leq T \leq T_e;$$

onde:

$T$  = força interna atuante num ponto nodal do reforço;

$$T_e = A_r \sigma_{yield}$$

é a força de escoamento do reforço à tração;

As restrições de escoamento do reforço, em um ponto  $i$  do elemento, colocadas sob a forma matricial, podem ser expressas pela seguinte relação:

$$(\mathbf{Q}_i^r)^T \mathbf{T} \leq \mathbf{R}_i^r, \quad (2.27)$$

onde:

$$(\mathbf{Q}_i^r)^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é matriz de escoamento do reforço;

$$(\mathbf{R}_i^r)^T = [0 \quad T_e]$$

é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento do reforço.

### 2.3.1. c) - *Montagem do problema de PL pela técnica discreta sem elemento de interface*

A montagem da matriz de equilíbrio do solo, equação (2.5), e da matriz de equilíbrio do reforço, equação (2.26), para todos os elementos de solo e reforço e a prescrição das condições de escoamento do solo e reforço, relações (2.7) e (2.27), conduzem a um problema de PL, que pode ser colocado sob a forma abaixo:

Max  $\lambda$

sujeito a

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \mathbf{f}_p + \lambda \mathbf{f}_0 \quad (\text{restrições de equilíbrio})$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (\text{conjunto de todas restrições de escoamento})$$

onde:

$$\mathbf{C}^T = [(\mathbf{C}_s)^T \mid (\mathbf{C}_r)^T]$$

é a matriz global de equilíbrio resultante da contribuição dos elementos de solo e reforço;

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{nt}^s)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{nr}^r)^T \end{bmatrix}$$

é a matriz global das restrições de escoamento do solo e reforço;

$$\mathbf{X}^T = [\boldsymbol{\sigma}_1^T \mid \boldsymbol{\sigma}_2^T \mid \dots \mid \boldsymbol{\sigma}_{nt}^T \mid T_1 \mid \dots \mid T_{nr}]$$

é o vetor das componentes de tensão em todos os pontos nodais;

$$\mathbf{R}^T = [(\mathbf{R}_{nt}^s)^T \mid (\mathbf{R}_{nr}^r)^T]$$

é o vetor global dos termos independentes das restrições de escoamento dos materiais;

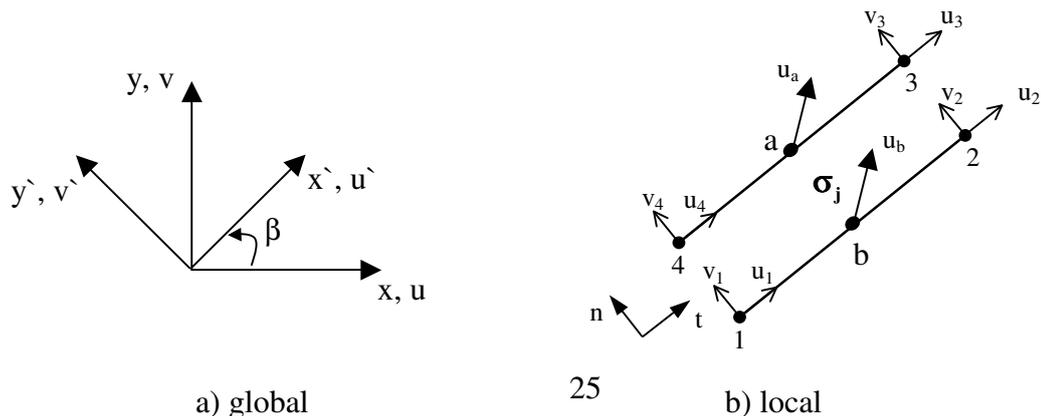
$nt$  = números de pontos onde as tensões são definidas;

$nr$  = números de pontos nodais onde existe reforço.

### 2.3.2 - Formulação para solo reforçado com emprego de elementos de interface

A seguir, apresenta-se a formulação do elemento de interface linear em velocidades e de tensão constante, sob condição de deformação plana.

A Figura 2.7 ilustra um elemento de interface de comprimento  $L_i$ , por unidade de largura, e sem espessura.



**Figura 2.7 – Sistema de coordenadas do elemento de interface**

**2.3.2. a) - Equilíbrio do elemento de interface**

A deformação da interface no sistema de referência local da interface pode ser definida por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b \quad (2.28)$$

Interpolando-se as velocidades nos pontos a e b, de mesmas coordenadas, obtêm-se as seguintes equações:

$$\mathbf{u}_a = h_2 \mathbf{u}_3 + h_1 \mathbf{u}_4 \quad (2.29)$$

$$\mathbf{u}_b = h_1 \mathbf{u}_1 + h_2 \mathbf{u}_2 \quad (2.30)$$

onde:

$$\mathbf{u}_a^T = [u_a \quad v_a]$$

é a velocidade no ponto a;

$$\mathbf{u}_b^T = [u_b \quad v_b]$$

é a velocidade no ponto b;

$$h_1 = 1 - \frac{x}{L_i}; \quad h_2 = \frac{x}{L_i}$$

são as funções de interpolação das velocidades;

$$\mathbf{u}_k^T = [u_k \quad v_k]$$

é a velocidade no ponto nodal  $k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ).

A substituição das velocidades nos pontos a e b, equações (2.29) e (2.30), na equação (2.28), fornece a deformação da interface, na forma abaixo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = [-\mathbf{H}_1 \quad -\mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_1] \hat{\mathbf{u}}_j; \quad (2.31)$$

onde:

$$\mathbf{B}_j = [-\mathbf{H}_1 \quad -\mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_1]; \quad (2.32)$$

$$\mathbf{H}_k = h_k \mathbf{I}; \quad k = 1,2$$

$\mathbf{I}$  = matriz de identidade (2x2);

$$\hat{\mathbf{u}}_j^T = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_4]$$

é o vetor das velocidades nos pontos nodais do elemento da interface.

A relação acima pode ser escrita sob a forma abaixo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{B}_j \hat{\mathbf{u}}_j. \quad (2.33)$$

O vetor das forças internas ( $\mathbf{f}_m$ ) do elemento de interface pode ser expresso pela equação abaixo:

$$\mathbf{f}_m = \int_S \mathbf{B}_j^T \boldsymbol{\sigma}_j dS; \quad (2.34)$$

onde:

$$\boldsymbol{\sigma}_j^T = [\tau \quad \sigma_N]$$

é o vetor das tensões atuantes na interface (tensão de cisalhamento e tensão normal ao plano da interface).

Para o elemento de interface de tensão constante vale a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \mathbf{I} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j. \quad (2.35)$$

A substituição da tensão atuante na interface, equação (2.35), na equação (2.34), fornece a equação de equilíbrio do elemento de interface sob a forma:

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{C}_j^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j. \quad (2.36)$$

Integrando-se  $\mathbf{B}_j^T$ , obtém-se a matriz de equilíbrio no sistema local de coordenadas da interface, sob a forma abaixo:

$$\mathbf{C}_j^T = \int_s \mathbf{B}_j^T \mathbf{I} ds = \frac{L_i}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \dots \\ -\mathbf{I} \\ \dots \\ \mathbf{I} \\ \dots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

A colocação da equação de equilíbrio no sistema global de coordenadas é feita pela pré-multiplicação da matriz  $\mathbf{I}$ , equação (2.37), pela matriz de rotação de vetores, resultando a expressão abaixo:

$$(\mathbf{C}_j^T)^{gl} = \frac{L_i}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^T \\ \dots \\ -\mathbf{M}^T \\ \dots \\ \mathbf{M}^T \\ \dots \\ \mathbf{M}^T \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

onde:

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta \\ \text{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

é a matriz de rotação de vetores.

### 2.3.2. b) - *Condição de escoamento da interface*

O critério de escoamento de Coulomb é usado para modelar a condição de escoamento da interface e pode ser escrito sob a forma:

$$(\mathbf{Q}_i^j)^T \boldsymbol{\sigma}_i^j \leq \mathbf{R}_i^j; \quad (2.39)$$

onde:

$$(\mathbf{Q}_i^j)^T = \begin{bmatrix} 1 & \text{tg}\phi_{in} \\ -1 & \text{tg}\phi_{in} \end{bmatrix}$$

é a matriz das restrições de escoamento num elemento de interface;

$$(\boldsymbol{\sigma}_i^j)^T = [\tau \quad \sigma_N]$$

é o vetor das tensões atuantes no interior do elemento de interface;

$$(\mathbf{R}_i^j)^T = [c_{in} \quad c_{in}]$$

é o vetor dos termos independentes das restrições de escoamento num elemento de interface;

$c_{in}$  = coesão da interface;

$\phi_{in}$  = ângulo de atrito da interface.

### 2.3.2. c) - *Montagem do problema de PL pela técnica discreta e com elemento de interface*

A montagem da matriz de equilíbrio do solo, equação (2.5), da matriz de equilíbrio do reforço, equação (2.26), e da matriz de equilíbrio da interface, equação (2.38), para todos os elementos de solo, reforço e interface, conduz à equação de equilíbrio global, na forma abaixo:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \lambda \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_p \quad (2.40)$$

onde:

$$\mathbf{C}^T = [(\mathbf{C}_s)^T \mid (\mathbf{C}_j)^T \mid (\mathbf{C}_r)^T]$$

é a matriz global de equilíbrio resultante da contribuição dos elementos de solo, interface e reforço;

$$\mathbf{X}^T = [\boldsymbol{\sigma}_1^T \mid \boldsymbol{\sigma}_2^T \mid \dots \mid \boldsymbol{\sigma}_{nt}^T \mid (\boldsymbol{\sigma}_1^j)^T \mid \dots \mid (\boldsymbol{\sigma}_{nj}^j)^T \mid T_1 \quad \dots \quad T_{nr}]$$

é o vetor das componentes de tensão em todos os elementos de solo, interface e reforço;

$nt$  = número de pontos onde as tensões são definidas;

$nj$  = número de elementos de interface;

$nr$  = número de pontos nodais onde existe reforço.

Da imposição da condição de escoamento do solo, relação (2.7), do reforço, relação (2.27), e da interface, relação (2.39), obtêm-se as restrições de escoamento global, sob a forma abaixo:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (2.41)$$

onde:

$$\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_{nt}^s)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{nj}^j)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_{nr}^r)^T \end{bmatrix}$$

é a matriz de escoamento global das restrições de escoamento do solo, do reforço e da interface;

$$\mathbf{R}^T = [(\mathbf{R}_{nt}^s)^T \mid (\mathbf{R}_{nj}^j)^T \mid (\mathbf{R}_{nr}^r)^T]$$

é vetor global dos termos independentes das restrições de escoamento dos materiais;

A formulação conduz ao problema de PL, que pode ser colocado sob a forma abaixo:

Max  $\lambda$   
 sujeito a

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X} = \mathbf{f}_p + \lambda \mathbf{f}_0 \quad (\text{restrições de equilíbrio})$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \leq \mathbf{R} \quad (\text{conjunto de todas restrições de escoamento})$$

## ***CAPÍTULO 3***

### **IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA REALIZADA**

#### **3.1 - INTRODUÇÃO**

A implementação computacional foi baseada no programa ANALIM, desenvolvido por Araújo (1997). Na primeira etapa do trabalho, foi implementada a alocação dinâmica de vetores e matrizes no programa existente. Em seguida foram implementadas as rotinas necessárias para a solução de problemas de estabilidade em meios reforçados, modelados pelas técnicas do contínuo equivalente e discreta, baseadas na formulação mista da análise limite descrita no capítulo 2.

Para a modelagem de problemas de estabilidade em solos reforçados, através da técnica do contínuo equivalente, a discretização do domínio é feita através de elementos quadriláteros de 4 nós. Na modelagem destes problemas em meios reforçados, através da técnica discreta, o domínio é discretizado em elementos quadriláteros de 4 nós para modelar o solo e em elementos unidimensionais de 2 nós para modelar o reforço, podendo, ou não, empregar o elemento de interface para modelar a interação solo-reforço.

A validação das implementações realizadas foi feita comparando-se as soluções numéricas com soluções analíticas conhecidas. Quando não conhecidas as soluções analíticas, comparam-se os resultados numéricos com respostas obtidas através de formulações de outros autores.

#### **3.2 - MODELOS DE ELEMENTOS IMPLEMENTADOS**

Para os problemas de estabilidade em meios contínuos ou reforçados, estudados neste trabalho, foram implementados os elementos bidimensionais quadriláteros de 4 nós para discretizar o solo, elementos unidimensionais de 2 nós para discretizar o

reforço e elementos de interface de 4 nós sem espessura para a discretização das interfaces.

### **3.2.1 - Modelagem de contínuo ou contínuo equivalente**

Para a modelagem de problemas em meios contínuos e meios reforçados pela técnica do contínuo equivalente, foram implementados dois tipos de elementos bidimensionais:

- elemento quadrilateral de 4 nós, bilinear em velocidade e tensão, elemento  $Q_4$ ;
- elemento quadrilateral de 4 nós, bilinear em velocidade e de tensão constante, elemento  $Q_4^C$ .

### **3.2.2 - Modelagem discreta**

Nos problemas de estabilidade em solos reforçados, utilizando-se a técnica discreta, é possível considerar, ou não, o efeito da interface solo-reforço.

#### ***3.2.2. a) - Modelagem discreta sem emprego de elementos de interface***

Para a modelagem de problemas em meios reforçados utilizando-se da técnica discreta, sem emprego de elementos de interface, foram feitas duas implementações com os seguintes elementos:

- elemento  $Q_4$  para modelar o solo e o elemento unidimensional de 2 nós, linear em velocidade e tensão, para modelar o reforço;
- elemento  $Q_4^C$  para modelar o solo e o elemento unidimensional de 2 nós, linear em velocidade e de tensão constante, para modelar o reforço.

#### ***3.2.2. b) - Modelagem discreta com emprego de elementos de interface***

A implementação, considerando-se a técnica discreta e o efeito da interface, foi feita com os seguintes elementos: elemento  $Q_4^C$  para modelar o solo, o elemento unidimensional de 2 nós, linear em velocidade e tensão, para modelar o reforço e o

elemento de interface sem espessura de 4 nós, linear em velocidade e de tensão constante, para modelar o efeito da interface solo-reforço.

### **3.2.3 - Critérios de escoamento implementados**

Para o solo envolvido no problema, adotam-se os critérios de escoamento de Mohr-Coulomb ou Tresca, sendo o critério de Tresca tratado como um caso particular do anterior para solo puramente coesivo ( $\phi = 0$ ). A aproximação do critério de escoamento do solo pela forma linearizada foi utilizada de modo a tratar o problema pela técnica de PL.

Para a modelagem da interface solo-reforço, adota-se o critério de escoamento de Coulomb.

A condição de escoamento do reforço é imposta pela limitação da tensão atuante no reforço ao limite de escoamento do material. Por outro lado, é desprezada a capacidade do reforço de trabalhar à compressão.

### 3.3 - FLUXOGRAMA

O fluxograma esquemático das implementações numéricas é mostrado na Figura 3.1.

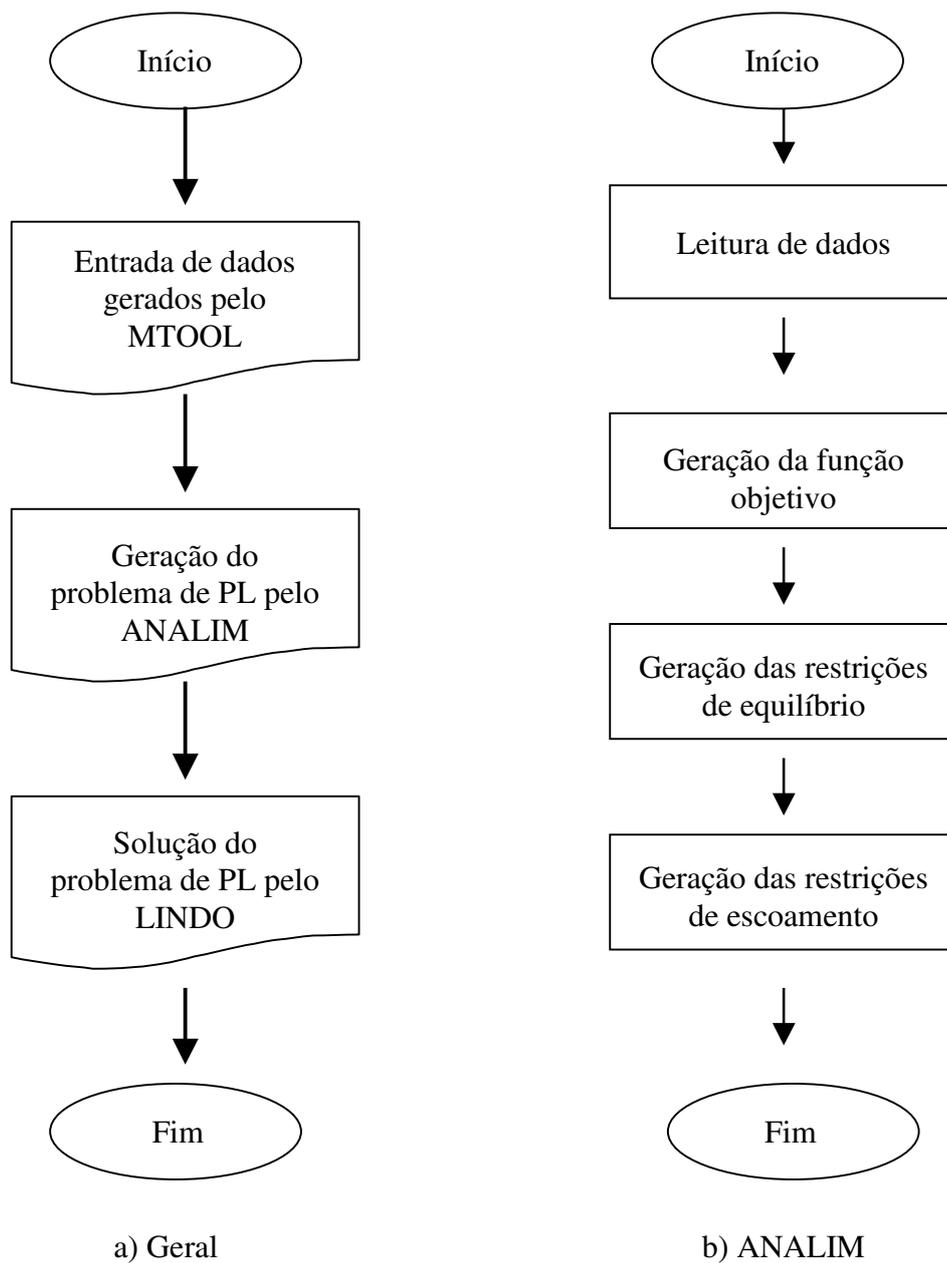


Figura 3.1 – Fluxograma

A solução numérica dos problemas de estabilidade, nesta implementação, é realizada em três etapas: pré-processamento (MTOOL), geração do modelo de PL (ANALIM) e solução do problema de PL (LINDO), esquematizadas na Figura 3.1a.

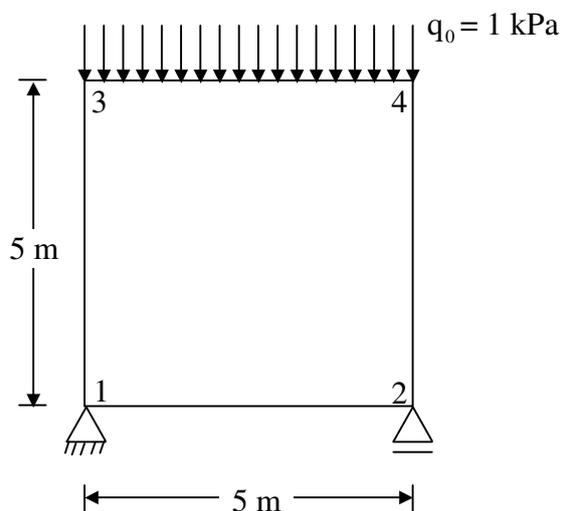
A seguir uma apresentação das três etapas do fluxograma geral (Figura 3.1a), destacando-se os arquivos de entrada e saída de cada etapa.

O exemplo ilustrativo trata de compressão simples de um elemento de solo, indicado na Figura 3.2, com as propriedades:

$$c = 1 \text{ kPa};$$

$$\phi = \gamma = 0.$$

O critério de escoamento de Mohr-Coulomb é aproximado por uma pirâmide de 3 lados ( $p = 3$ ), relação (2.6).



**Figura 3.2 – Compressão simples de um elemento**

### 3.3.1 - Pré-processamento

Esta etapa é executada pelo programa MTOOL, desenvolvido pelo grupo de Computação Gráfica da PUC/Rio. Nela é gerada a malha de elementos finitos planos que é armazenada num arquivo denominado “Neutral file” de extensão “.nf”.

A listagem a seguir mostra o arquivo “exemplo.nf” gerado pelo programa MTOOL para o problema definido na Figura 3.2. Destacam-se na listagem as

coordenadas dos pontos nodais, as condições de contorno essenciais e naturais, as propriedades do material e a incidência dos pontos nodais no elemento.

```

%HEADER
File created by mtool program
%HEADER.ANALYSIS
'plane_stress'
%NODE
4
%NODE.COORD (Coordenadas dos pontos nodais)
4
1      0.000000      0.000000      0.000000
2      5.000000      0.000000      0.000000
3      0.000000      5.000000      0.000000
4      5.000000      5.000000      0.000000
%NODE.SUPPORT (Condição de contorno essencial)
2
1      0      1      0      0      0      0
2      0      1      0      0      0      0
%MATERIAL
1
%MATERIAL.LABEL
1
1      'xisto'
%MATERIAL.MOHR_COULOMB (Propriedades do material)
1
1      0      3      1      0
%INTEGRATION.ORDER
1
1      0      0      0      0      0      0
%ELEMENT
1
%ELEMENT.Q4 (Incidência dos pontos nodais no elemento)
1
1      1      0      1      1      2      4      3
%LOAD
1
1      'Load_Case_1'
%LOAD.CASE
1
%LOAD.CASE.NODAL.FORCES(Condição de contorno natural)
2
3      0      -2.5      0      0      0      0
4      0      -2.5      0      0      0      0
%CODE.LOAD
1 0 0 0 0 1
%END

```

Para o caso do solo reforçado modelado pela técnica discreta, não é possível gerar os elementos de interface e de reforço através do programa MTOOL. As informações necessárias, tais como a incidência dos pontos nodais nos elementos e as propriedades dos materiais da interface e do reforço, são editadas manualmente no arquivo neutro (neutral file) através de um editor de texto.

### 3.3.2 - Geração do problema de PL

O arquivo gerado na etapa anterior (“exemplo.nf”) é usado para a entrada de dados do programa computacional ANALIM. O programa ANALIM gera a função objetivo a ser otimizada, as restrições de fluxo dos materiais e as restrições de equilíbrio do problema. A Figura 3.1b ilustra o fluxograma da implementação numérica realizada.

No arquivo gerado pelo programa ANALIM, de extensão “.lin”, armazenam-se, na notação usual da matemática, as restrições acima mencionadas. A listagem abaixo mostra o conteúdo do arquivo “exemplo.lin” (modelo de PL) gerado pelo programa, via elemento  $Q_4$ .

No caso do elemento  $Q_4$ , definem-se 3 componentes de tensão ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ ) em cada ponto nodal, que na listagem abaixo correspondem às variáveis ‘X1’, ‘X2’ e ‘X3’, por exemplo, para o nó 1. Para o problema em questão, são definidos 12 ( $3 \cdot nt$ ) variáveis, 12 ( $p \cdot nt$ ) restrições de escoamento do solo e 5 equações (restrições) de equilíbrio do elemento.

A variável “X13” representa o ao fator de colapso que amplifica à carga inicial unitária  $q_0$  (Figura 3.2).

```
MAX X13
SUBJECT TO
! restricoes de fluxo da rocha intacta
2)
-.500000X1 +.500000X2 +1.732051X3
< 2.000000
3)
-.500000X1 +.500000X2 -1.732051X3
< 2.000000
4)
+1.000000X1 -1.000000X2
< 2.000000
5)
-.500000X4 +.500000X5 +1.732051X6
< 2.000000
6)
-.500000X4 +.500000X5 -1.732051X6
< 2.000000
7)
+1.000000X4 -1.000000X5
< 2.000000
8)
-.500000X7 +.500000X8 +1.732051X9
< 2.000000
9)
-.500000X7 +.500000X8 -1.732051X9
```

```

< 2.000000
10)
+1.000000X7 -1.000000X8
< 2.000000
11)
-.500000X10 +.500000X11 +1.732051X12
< 2.000000
12)
-.500000X10 +.500000X11 -1.732051X12
< 2.000000
13)
+1.000000X10 -1.000000X11
< 2.000000
! restricoes de equilibrio
14)
-.83333X1 +.41667X3 -.83333X4 +.83333X6 -.41667X7
+.41667X9 -.41667X10 +.83333X12
= .000000
15)
+.41667X1 -.83333X3 +.41667X4 -.41667X6 +.83333X7
-.83333X9 +.83333X10 -.41667X12
= .000000
16)
-.83333X2 +.41667X3 -.41667X5 +.41667X6 -.83333X8
+.83333X9 -.41667X11 +.83333X12 -2.50000X13
= .000000
17)
-.41667X1 -.41667X3 -.41667X4 -.83333X6 -.83333X7
-.41667X9 -.83333X10 -.83333X12
= .000000
18)
-.41667X2 -.41667X3 -.83333X5 -.41667X6 -.41667X8
-.83333X9 -.83333X11 -.83333X12 -2.50000X13
= .000000
END
FREE X1
FREE X2
FREE X3
FREE X4
FREE X5
FREE X6
FREE X7
FREE X8
FREE X9
FREE X10
FREE X11
FREE X12

```

As variáveis declaradas como “FREE” (listagem acima) informam ao LINDO que elas podem assumir valores negativos no processo de otimização.

### 3.3.3 - Solução do problema de PL

O arquivo gerado na etapa anterior é usado para a entrada de dados do programa LINDO (Schrage, 1991). No arquivo de saída do programa LINDO, de extensão “.prn”, armazenam-se o fator de colapso do problema e os valores das tensões incógnitas.

A listagem seguinte é a imagem do arquivo “exemplo.prn” gerado pelo LINDO. Nela encontram-se a solução ótima do problema de PL e os valores das variáveis (componentes de tensão) na condição de ótimo.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 8

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X13	2.000000	0.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	-2.000000	0.000000
X3	0.000000	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	-2.000000	0.000000
X6	0.000000	0.000000
X7	0.000000	0.000000
X8	-2.000000	0.000000
X9	0.000000	0.000000
X10	0.000000	0.000000
X11	-2.000000	0.000000
X12	0.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	3.000000	0.000000
3)	3.000000	0.000000
4)	0.000000	0.250000
5)	3.000000	0.000000
6)	3.000000	0.000000
7)	0.000000	0.250000
8)	3.000000	0.000000
9)	3.000000	0.000000
10)	0.000000	0.250000
11)	3.000000	0.000000
12)	3.000000	0.000000
13)	0.000000	0.250000
14)	0.000000	0.000000
15)	0.000000	0.200000
16)	0.000000	0.000000
17)	0.000000	-0.200000
18)	0.000000	0.200000
19)	0.000000	-0.200000

NO. ITERATIONS= 8

# ***CAPÍTULO 4***

## **PROBLEMAS ESTUDADOS**

Os exemplos apresentados neste capítulo tratam dos problemas de estabilidade em meios contínuos, meios constituídos de solo reforçado modelados pela técnica do contínuo equivalente e pela técnica discreta sem e com elementos de interface.

Em todos os exemplos, adota-se o critério de escoamento de Mohr-Coulomb aproximado por uma superfície piramidal de 24 lados ( $p = 24$ ), sob condição de deformação plana e os materiais (solo, interface e reforço) modelados como materiais rígido-plásticos perfeitos.

### **4.1 - PROBLEMAS DE ESTABILIDADE EM MEIOS CONTÍNUOS**

Os exemplos de problemas de estabilidade em meios contínuos têm a finalidade de avaliar o desempenho dos elementos implementados. Os resultados numéricos obtidos pelos dois tipos de elementos, elementos  $Q_4$  e  $Q_4^c$ , são comparados com soluções teóricas conhecidas.

#### **4.1.1 - Capacidade de carga de uma sapata corrida**

A Figura 4.1 esquematiza o problema da capacidade de carga de uma sapata rasa, flexível e rugosa, em meio homogêneo, constituído de um solo sem peso e ângulo de atrito variável ( $c = 1$  kPa e  $\gamma = 0$ ). A carga inicial unitária ( $q_0 = 1$  kPa) será ampliada pelo fator de colapso  $\lambda$ , conforme a expressão abaixo:

$$q_u = \lambda q_0$$

onde:

$q_u$  = solução numérica da capacidade de carga da fundação.

A capacidade de carga de uma sapata corrida superficial e solo sem peso ( $q_{ult.}$ ) é calculada pela seguinte equação (Terzaghi, 1943):

$$q_{ult.} = cN_c \quad (4.1)$$

onde:

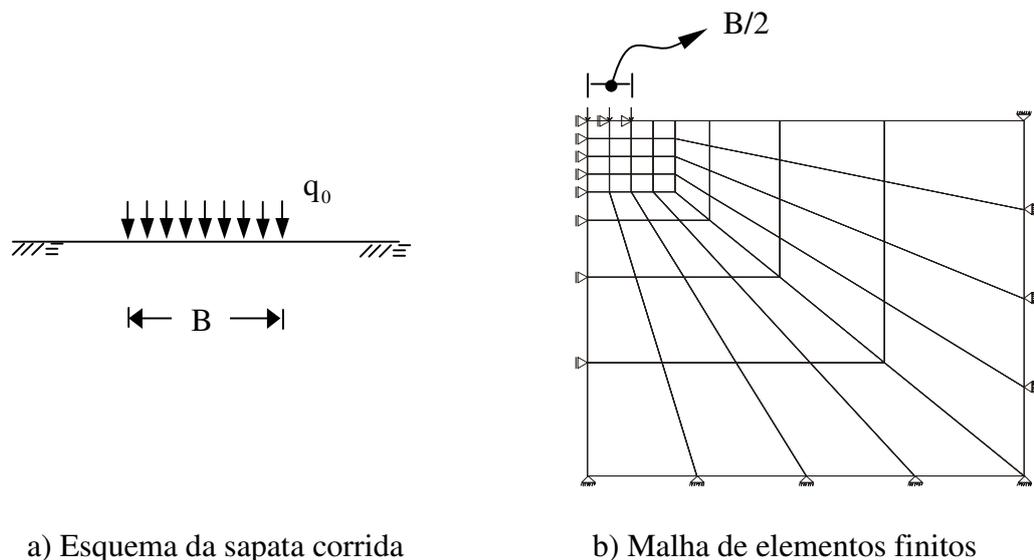
$c$  = coesão do solo;

$N_c$  = fator de capacidade de carga de Terzaghi que depende de  $\phi$ .

Para o caso de sapata rasa, Figura 4.1a, em solo com  $c = 1$  kPa, a capacidade de carga ( $q_{ult.}$ ) é dada pela expressão abaixo:

$$q_{ult.} = N_c \cdot c$$

Como  $c = 1$  kPa, a solução numérica do problema ( $q_u$ ) iguala ao fator  $N_c$ .



**Figura 4.1 – Capacidade de carga de uma sapata**

A malha de elementos finitos, com detalhes das condições de contorno, empregada na análise, está ilustrada na Figura 4.1b. Para simular a rugosidade da sapata, restringe-se o movimento horizontal dos pontos nodais sob a sapata (Figura 4.1b).

É feita uma análise paramétrica da capacidade de carga da fundação em função do ângulo de atrito do material ( $\phi$ ), onde os resultados são comparados com a solução teórica ( $N_c$ ) de Terzaghi e apresentados na Tabela 4.1,

onde:

$N_c(Q_4)$  = fator de capacidade de carga obtido pelo elemento  $Q_4$  ;

$N_c(Q_4^C)$  = fator de capacidade de carga obtido pelo elemento  $Q_4^C$  .

**Tabela 4.1 – Fator de capacidade de carga ( $N_c$ ) em função de  $\phi$**

$\phi$ (°)	0	10	20	30
$N_c$	5,14	8,35	14,84	30,14
$N_c(Q_4)$	5,11	8,40	14,95	28,03
$N_c(Q_4^C)$	5,30	8,71	15,77	32,16

Observa-se, na tabela acima, uma pequena diferença entre as soluções numéricas e a de Terzaghi ( $N_c$ ).

#### 4.1.2 - Talude vertical

A Figura 4.2a ilustra um problema de estabilidade de um talude vertical de altura  $H = 6$  m constituído de um solo coesivo ( $c = 6$  kPa e  $\phi$  variável) e peso específico inicial unitário ( $\gamma_0 = 1$  kN/m<sup>3</sup>). O peso específico do solo no colapso (ruptura) pode ser calculado pela expressão:

$$\gamma = \lambda \gamma_0 \quad (4.2)$$

onde:

$\gamma$  = peso específico do solo na ruptura do talude;

$\lambda$  = fator de colapso.

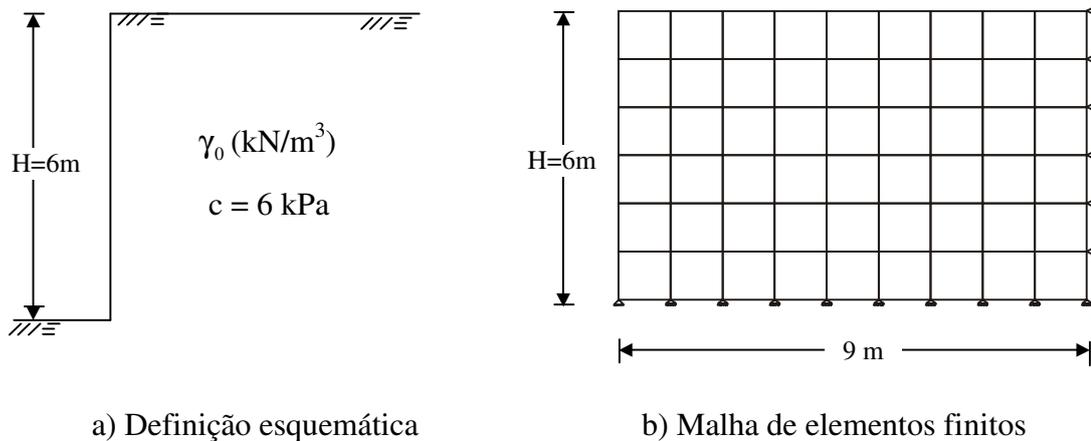
O número de estabilidade ( $N_s$ ) pode ser escrito sob a forma (Chen, 1975):

$$N_s = \frac{H_c \gamma}{c} \quad (4.3)$$

A substituição dos valores da altura e dos parâmetros do solo, na equação acima, fornece a expressão:

$$N_s = \lambda \quad (4.4)$$

A malha de elementos finitos empregada na análise numérica está representada na Figura 4.2b.



**Figura 4.2 – Talude vertical**

A Tabela 4.2 apresenta a variação de  $N_s$  em função de ângulo de atrito do material, onde:

$N_s(Q_4)$  = solução numérica via elemento bilinear em tensão ( $Q_4$ );

$N_s(Q_4^c)$  = solução numérica via elemento de tensão constante ( $Q_4^c$ ).

**Tabela 4.2 – Número de estabilidade em função de  $\phi$**

$\phi$ (°)	$N_s(Q_4)$	$N_s(Q_4^c)$	$N_s$ Chen
10	3,72	3,57	3,83
15	4,79	4,69	5,02
20	5,23	5,17	5,50
30	6,31	6,47	6,69
40	7,90	8,47	8,29

A tabela anterior mostra que as soluções numéricas aproximam adequadamente o problema em estudo.

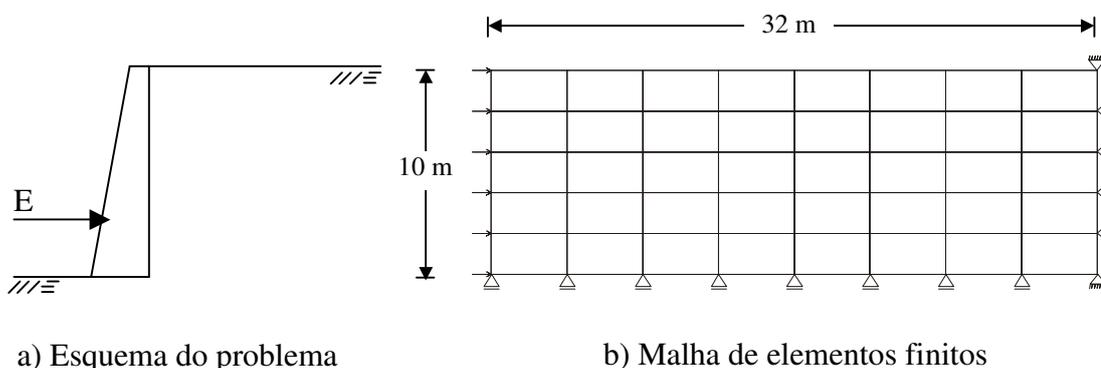
#### 4.1.3 - Empuxos de terra

Este exemplo, estudado por Araújo (1997), trata da determinação dos empuxos ativo e passivo sobre uma parede vertical, rígida e lisa, com 10 m de altura, (Figura 4.3a), onde consideram-se as seguintes propriedades para o solo:

$$\gamma = 1,5 \text{ tf/m}^3 ;$$

$$\phi = 30^\circ .$$

A malha empregada para estudo dos empuxos ativo e passivo está ilustrada na Figura 4.3b.



a) Esquema do problema

b) Malha de elementos finitos

### Figura 4.3 – Empuxo de terra

As soluções analíticas dos empuxos de terra pela teoria de Rankine são expressas pelas seguintes equações (ver, p. ex., Bowles, 1982):

$$E_a = \frac{1}{2} k_a \gamma H^2 - 2cH\sqrt{k_a} ; \quad (4.5)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_p \gamma H^2 + 2cH\sqrt{k_p} , \quad (4.6)$$

onde:

$$k_a = \text{tg}^2(45^\circ - \phi/2) ;$$

$$k_p = 1/k_a .$$

A Tabela 4.3 apresenta o resultado da análise paramétrica dos empuxos, em função da coesão do solo, onde:

$E_a$  e  $E_p$  = empuxo ativo e passivo de terra pela teoria de Rankine;

$E_a^{Q_4}$  e  $E_p^{Q_4}$  = o empuxo ativo e passivo de terra, via numérica, do elemento bilinear em tensão;

$E_a^{Q_4^c}$  e  $E_p^{Q_4^c}$  = o empuxo ativo e passivo de terra, via numérica, do elemento de tensão constante.

**Tabela 4.3 – Empuxos de terra ativo e passivo (tf/m)**

c (kPa)	$E_a$	$E_a^{Q_4}$	$E_a^{Q_4^c}$	$E_p$	$E_p^{Q_4}$	$E_p^{Q_4^c}$
0	25,0	24,99	25,00	225,0	225,27	225,00
1	13,45	13,69	13,75	259,64	260,11	259,64

Um exame dos resultados obtidos pelos elementos implementados, Tabela 4.3, mostra que as soluções numéricas são praticamente exatas.

## **4.2 - PROBLEMAS MODELADOS PELA TÉCNICA DO CONTÍNUO EQUIVALENTE**

Os exemplos a seguir apresentam uma comparação do desempenho dos elementos implementados para problemas de estabilidade em meios constituídos de solo reforçado modelados pela técnica do contínuo equivalente. Quando não conhecida a solução analítica, os resultados numéricos obtidos pelos elementos implementados são comparados com soluções numéricas obtidas por outras formulações.

### **4.2.1 - Resistência à compressão simples de solo reforçado**

A Figura 4.4a esquematiza um meio constituído de solo reforçado com camadas horizontais de reforço ( $d/h \ll 1$ ) submetido a uma carga inicial unitária ( $q_0 = 1$  kPa), sendo adotadas as seguintes propriedades para o solo:

$$c = 1,0 \text{ kPa};$$

$$\gamma = 0;$$

$$\phi = 30^\circ .$$

A resistência à compressão simples do solo reforçado pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\sigma_c = \lambda q_0 \tag{4.7}$$

onde:

$$\lambda = \text{fator de colapso.}$$

A solução analítica para o caso de compressão simples do solo reforçado com camadas horizontais (comunicação pessoal do Prof. Luiz G. Araújo) pode ser expressa por:

$$\sigma_c = \sigma_0 \operatorname{tg}^2(45^\circ + \phi/2) + 2\operatorname{ctg}(45^\circ + \phi/2) \quad (4.8)$$

onde:

$\sigma_c$  = resistência à compressão simples do solo reforçado;

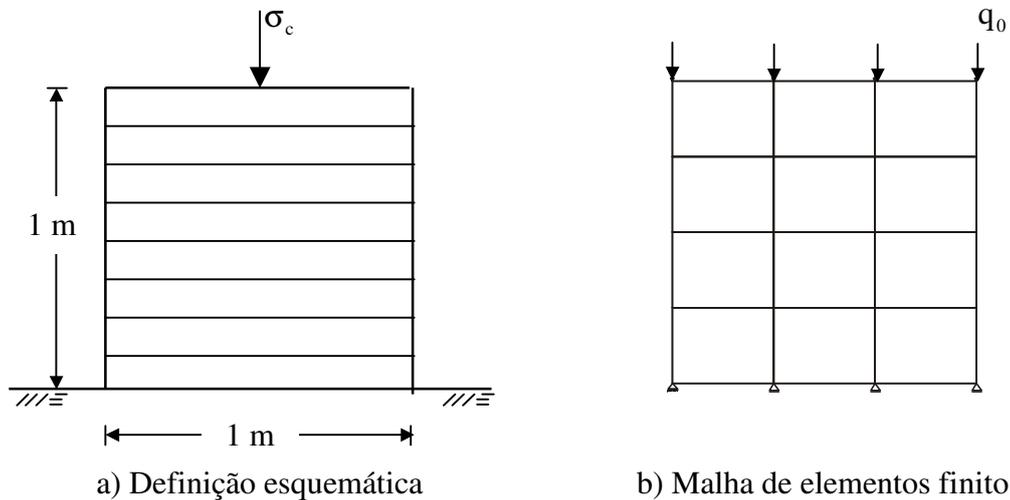
$$\sigma_0 = \frac{d}{h} \sigma_{\text{yield}};$$

$\phi$  = ângulo de atrito do solo;

$h$  = espaçamento das camadas de reforço;

$d$  = espessura do reforço;

$\sigma_{\text{yield}}$  = tensão de escoamento do reforço.



**Figura 4.4 – Compressão simples de solo reforçado**

A Tabela 4.4 apresenta os resultados obtidos da resistência à compressão simples ( $\sigma_c$ ) do solo reforçado e as soluções numéricas, em função de  $\sigma_0$ ,

onde:

$\sigma_c(Q_4)$  = resistência à compressão simples do solo reforçado, via numérica, do elemento  $Q_4$ ;

$\sigma_c(Q_4^C)$  = resistência à compressão simples do solo reforçado, via numérica, do elemento  $Q_4^C$ .

**Tabela 4.4 – Resistência à compressão simples do solo reforçado (kPa)**

$\sigma_0$ (kPa)	$\sigma_c$	$\sigma_c (Q_4)$	$\sigma_c (Q_4^c)$
0	3,46	3,41	3,41
1,0	6,46	6,37	6,37
2,0	9,46	9,34	9,34
5,0	18,46	18,24	18,24

Um exame dos resultados obtidos pelos elementos implementados, Tabela 4.4, mostra que as soluções numéricas são praticamente exatas.

#### 4.2.2 - Talude vertical

A Figura 4.5 ilustra um talude vertical de 6 metros de altura constituído por um material não coesivo e modelado pela técnica do contínuo equivalente, estudado por Sousa (2001) e Yu e Sloan (1997) que chegaram à seguinte relação para o número de estabilidade ( $\lambda$ ):

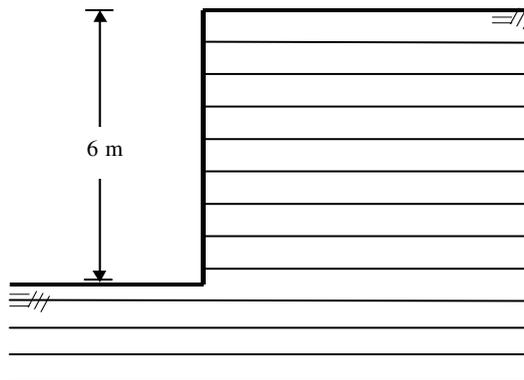
$$\lambda = \frac{\gamma H}{\sigma_0}, \quad (4.9)$$

onde:

H = altura do talude vertical;

$\gamma$  = peso específico do solo;

$$\sigma_0 = \frac{d}{h} \sigma_{\text{yield}}.$$



a) Definição esquemática

**Figura 4.5 - Estabilidade de talude pela técnica do contínuo equivalente**

A substituição dos dados do problema,  $H = 6 \text{ m}$  e  $\sigma_0 = 6 \text{ kPa}$ , na equação (4.9) fornece

$$\lambda = \gamma.$$

Os resultados obtidos, utilizando a malha de elementos finitos indicada na Figura 4.2b, para vários ângulos de atrito, são apresentados na Tabela 4.5. Encontram-se, também, na Tabela 4.5 os valores encontrados por Sousa (2001) e Sawicki (Yu e Sloan, 1997), pelas formulações do limite inferior e superior.

**Tabela 4.5 – Números de estabilidade para um problema de talude reforçado**

$\phi$ (°)	$\lambda_{ss}$	$\lambda^{Q_4}$	$\lambda^{Q_4^c}$	$\lambda_{sw}$
10	1,9	2,03	2,05	2,9
15	2,4	2,50	2,64	3,4
20	3,0	3,27	3,33	4,2
30	4,8	5,10	5,30	6,0
40	7,2	7,99	8,65	9,1

Legenda:

$\lambda_{ss}$  - Número de estabilidade encontrado por Sousa (2001);

$\lambda_{sw}$  - Número de estabilidade encontrado por Sawicki (Yu e Sloan, 1997);

$\lambda^{Q_4}$  - Número de estabilidade encontrado pelo elemento bilinear em tensões;

$\lambda^{Q_4^c}$  - Número de estabilidade encontrado pelo elemento de tensão constante.

Um exame da Tabela 4.5 mostra que as soluções numéricas apresentam resultados concordantes com os obtidos pelas formulações dos limites inferior e superior.

#### 4.2.3 - Capacidade de carga de fundação em solo reforçado

A Figura 4.6 mostra um esquema de uma sapata corrida, rasa e flexível sobre um meio constituído de solo reforçado em camadas horizontais ( $d/h \ll 1$ ), sendo adotadas as seguintes propriedades para o solo:

$$\gamma = 0;$$

$$c = 1,0 \text{ kPa.}$$

A capacidade de carga da sapata ( $q_u$ ) pode ser expressa por:

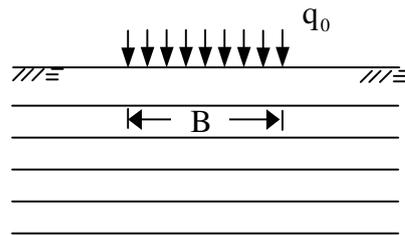
$$q_u = \lambda q_0 \quad (4.10)$$

onde:

$\lambda$  = fator de colapso;

$q_0$  = carga inicial unitária ( $q_0 = 1$  kPa).

A malha de elementos finitos com detalhes das condições de contorno, empregada na análise numérica está representada na Figura 4.1b.



**Figura 4.6 – Esquema do problema de uma fundação em solo reforçado**

A Tabela 4.6 apresenta os resultados da análise através do elemento bilinear em tensão. O fator  $\kappa$ , definido abaixo, compara a capacidade de carga da fundação em solo reforçado com o caso da fundação em solo sem reforço:

$$\kappa = \frac{q_u}{q_{u0}} \quad (4.11)$$

onde:

$q_{u0}$  = capacidade de carga da fundação em solo sem reforço.

**Tabela 4.6 – Capacidade de carga de uma fundação em solo reforçado (kPa) via elemento bilinear em tensão**

$\sigma_0$ (kPa)	$\phi = 10^\circ$		$\phi = 20^\circ$		$\phi = 30^\circ$	
	$q_u$	$\kappa$	$q_u$	$\kappa$	$q_u$	$\kappa$
-	8,28	1,00	14,7	1,00	27,16	1,00
0,5	9,06	1,09	15,9	1,08	29,19	1,07
1,0	9,83	1,19	17,17	1,17	<b>31,21</b>	1,15
1,5	10,61	1,28	18,42	1,25	33,23	1,22
2,0	11,38	1,37	19,66	1,34	35,25	1,30

A Tabela 4.7 apresenta os valores encontrados na mesma análise, porém, pelo elemento de tensão constante.

**Tabela 4.7 – Capacidade de carga de uma fundação em solo reforçado (kPa) via elemento de tensão constante**

$\sigma_0$ (kPa)	$\phi = 10^\circ$		$\phi = 20^\circ$		$\phi = 30^\circ$	
	$q_u$	$\kappa$	$q_u$	$\kappa$	$q_u$	$\kappa$
-	8,59	1,00	15,43	1,00	31,07	1,00
0,5	9,39	1,09	16,80	1,09	33,66	1,08
1,0	10,19	1,19	18,17	1,18	<b>36,24</b>	1,17
1,5	10,98	1,28	19,52	1,27	38,82	1,25
2,0	11,78	1,37	20,86	1,35	41,39	1,33

Para ilustrar a influência das características da interface solo-reforço na capacidade de carga de uma fundação em solo reforçado, foram fixados os seguintes parâmetros de escoamento do solo e reforço:

solo:  $\gamma = 0$ ,  $c = 1,0$  kPa e  $\phi = 30^\circ$ ;

reforço:  $\sigma_0 = 1,0$  kPa.

A Tabela 4.8 apresenta os valores da capacidade de carga de uma fundação em solo reforçado, admitindo-se o escoamento da interface solo-reforço, em função das propriedades da interface ( $c_{in}$  e  $\phi_{in}$ ).

**Tabela 4.8 – Influência dos parâmetros de escoamento da interface na capacidade de carga de uma fundação (kPa) em solo reforçado**

$\phi_{in}$ ( $^\circ$ )	$q_u$ ( $Q_4$ )		$q_u$ ( $Q_4^C$ )	
	$c_{in} = 1$ kPa	$c_{in} = 0,5$ kPa	$c_{in} = 1$ kPa	$c_{in} = 0,5$ kPa
30	<b>31,21</b>	28,81	<b>36,24</b>	34,23
20	28,24	25,31	32,11	28,68
15	25,70	23,27	29,07	25,93
10	23,29	20,84	26,18	23,09

Observa-se, na tabela acima, que admitindo-se o escoamento da interface solo-reforço com os parâmetros de escoamento iguais ao do solo, os valores sombreados coincidem com os correspondentes (valores em itálico) apresentados na Tabela 4.6 e Tabela 4.7. Observa-se, também, a coerência dos resultados, Tabela 4.8, que diminuem com a redução dos parâmetros de escoamento da interface.

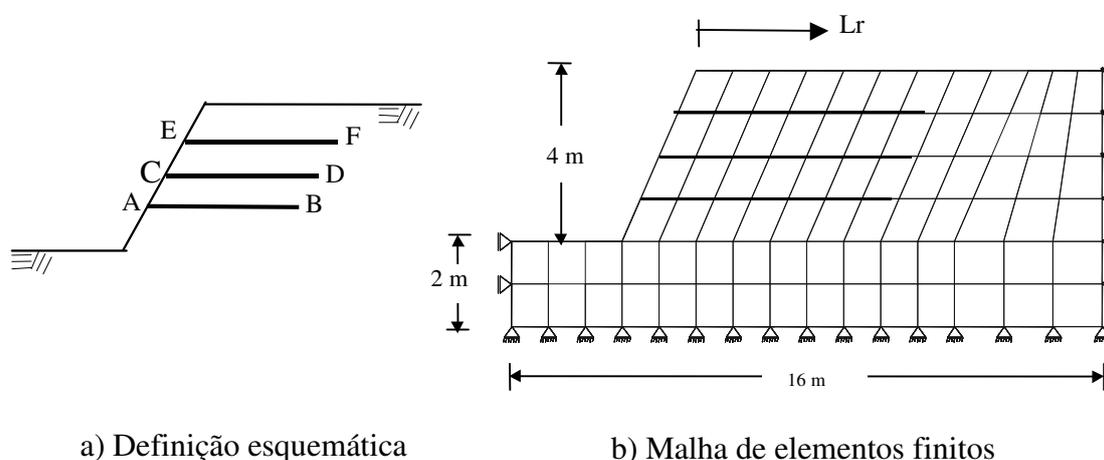
## 4.3 - PROBLEMAS MODELADOS PELA TÉCNICA DISCRETA

### 4.3.1 - Modelagem sem elementos de interface

#### 4.3.1. a) Talude reforçado

A Figura 4.7 ilustra um talude de 4 m de altura e inclinado de  $63,44^\circ$  em relação a horizontal (1H:2V), constituído de um material puramente coesivo ( $c = 9,8\text{kPa}$ ) e peso específico  $\gamma = 16,3 \text{ kN/m}^3$ , em condição de deformação plana, estudado por Asaoka et al. (1994), por meio de outra formulação numérica baseada no limite superior.

Os reforços são posicionados horizontalmente como esboçado na Figura 4.7a, tendo comprimento variável ( $L_r$ ) e a malha de elementos finitos (Figura 4.7b) indica as condições de contorno do problema. No estudo de Asaoka et al., admite-se que não há escoamento do reforço, nem deslizamento na interface solo-reforço. Assim, para efeito de comparação de resultados, as restrições de escoamento do reforço e da interface não foram prescritas, de modo a simular a hipótese de Asaoka et al.



**Figura 4.7 – Estabilidade de taludes pela técnica discreta**

A Tabela 4.9 apresenta os resultados da maximização do peso específico do solo ( $\gamma_{eq.}$ ) e os respectivos fatores de segurança, encontrados para o caso de uma camada posicionada na altura média do talude (CD) e de três camadas posicionadas ao longo de sua altura (AB, CD e EF), com o comprimento do reforço variável ( $L_r$ ).

**Tabela 4.9 – Fatores de segurança para um talude modelado pela técnica discreta**

CASO	$L_r$ (m)	$\gamma_{eq.}(Q_4)$	$\gamma_{eq.}(Q_4^C)$	$Fs^*(Q_4)$	$Fs(Q_4^C)$	Asaoka et al. $Fs$
01 camada de reforço (CD)	-	12,72	12,66	0,78	0,78	0,79
	3	12,75	12,71	0,78	0,78	0,79
	5	12,94	12,87	0,79	0,79	0,80
	7	13,31	13,39	0,81	0,82	0,84
03 camadas de reforço (AB, CD e EF)	3	13,05	12,82	0,80	0,79	0,80
	5	13,78	13,13	0,84	0,81	0,82
	7	15,01	14,03	0,92	0,86	-

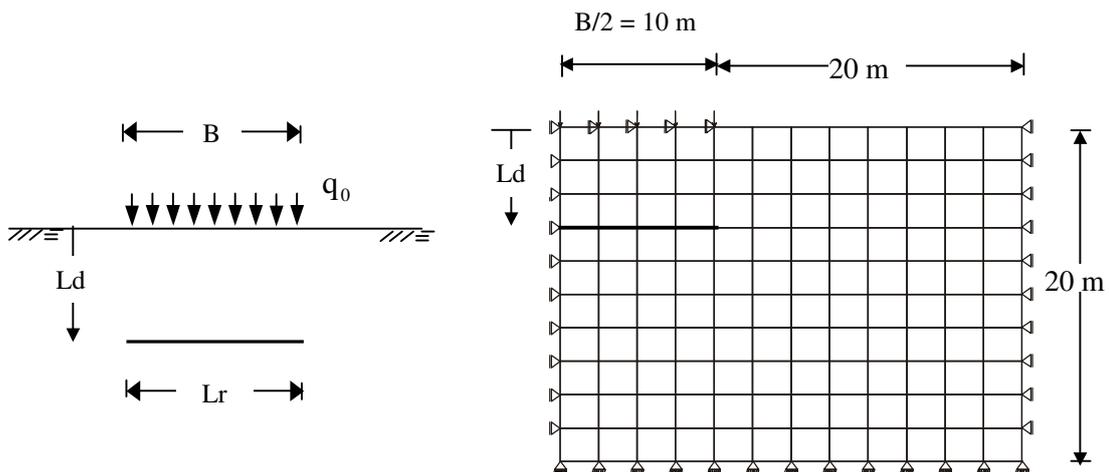
\*  $Fs$  = fator de segurança ( $\gamma_{eq}/\gamma$ ),  $\gamma_{eq}$  em  $kN/m^3$

A Tabela 4.9 mostra que os resultados obtidos pela presente formulação apresentam excelente concordância com os de Asaoka et al.

**4.3.1. b) Capacidade de carga de uma fundação em solo com uma camada de reforço**

A Figura 4.8 ilustra uma sapata flexível, rasa e rugosa sobre um terreno constituído de solo puramente coesivo ( $c = 1$  kPa) e sem peso, com uma camada horizontal de reforço. Neste problema proposto por Asaoka (1994), calcula-se a capacidade de carga da sapata em função da profundidade da camada do reforço ( $L_d$ ).

A malha de elementos finitos, a mesma utilizada por Asaoka et al., com detalhes da condição de contorno, empregada na análise, está ilustrada na Figura 4.8b.



a) Esquema do problema

b) Malha de elementos finitos

**Figura 4.8 – Capacidade de carga de fundação em solo reforçado**

O comprimento do reforço é considerado fixo ( $L_r = 20$  m) e posicionado sob a sapata. Asaoka desconsidera a condição de escoamento do reforço. A Tabela 4.10 apresenta a solução numérica do problema em função de  $L_d$ .

**Tabela 4.10 – Capacidade de carga de fundação (kPa) em solo com uma camada de reforço**

Ld (m)	$q_u(Q_4)$	$q_u(Q_4^c)$	$q_u$ Asaoka
-	5,18	5,11	5,26
4	5,52	5,27	5,86
8	8,31	8,38	8,96
12	5,20	5,16	5,43

A tabela acima mostra a influência da profundidade da camada de reforço na capacidade de carga da fundação. Conclui-se desta tabela que os resultados obtidos pela presente formulação apresentam excelente concordância com os de Asaoka et al.

#### 4.3.2 - Exemplos de validação do elemento de interface

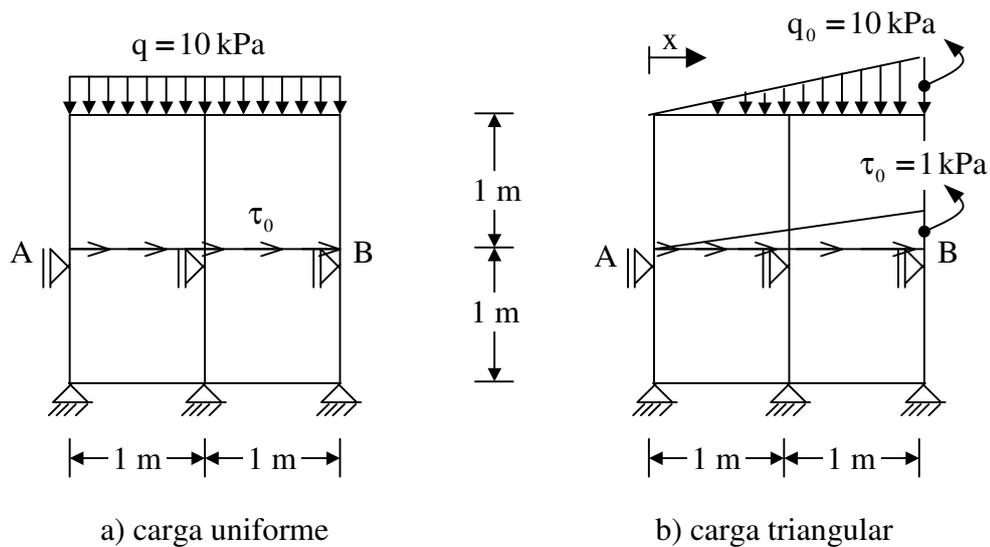
Nos estudos de validação do elemento de interface foram empregados o elemento  $Q_4^c$  para modelar o solo e o elemento de interface, linear em velocidade e de tensão constante, para modelar o efeito da interface.

##### 4.3.2. a) *Cisalhamento de uma interface sob carga uniforme e triangular*

O problema trata da determinação da resistência ao cisalhamento da interface de dois blocos de solo, submetidos a carregamentos normais (uniforme e triangular) como mostrado na Figura 4.9.

Na malha de elementos finitos, a linha AB representa dois elementos de interface. As condições de contorno do problema são tais que apenas o bloco superior pode deslocar para a direita (Figura 4.9).

Para o solo foram adotadas propriedades ( $c = 10$  kPa,  $\gamma = 0$  e  $\phi = 30^\circ$ ) tais que o escoamento seja possível apenas na interface.



**Figura 4.9 – Cisalhamento de interface**

Sobre o lado superior da interface, Figura 4.9a, atua uma tensão de cisalhamento de valor inicial unitária ( $\tau_0 = 1 \text{ kPa}$ ), que será ampliada pelo fator de colapso  $\lambda$ , conforme a expressão abaixo:

$$\tau_f = \lambda \tau_0 \quad (4.12)$$

onde:

$\tau_f$  = tensão cisalhante de escoamento (resistência ao cisalhamento).

A resistência ao cisalhamento da interface sob o carregamento uniforme, Figura 4.9a, considerando a condição de escoamento de Coulomb, pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\tau_f = c_{in} + \sigma_N \text{tg}\phi_{in} \quad (4.13)$$

para o carregamento uniforme;

onde:

$c_{in}$  = coesão da interface;

$\phi_{in}$  = ângulo de atrito da interface;

$\sigma_N$  = tensão normal ao plano de interface (carga permanente).

A Tabela 4.11 apresenta a resistência ao cisalhamento da interface sem espessura sob carregamento uniforme em função dos parâmetros de escoamento da interface.

**Tabela 4.11 – Resistência ao cisalhamento da interface (kPa), para o carregamento uniforme**

$c_{in}$ (kPa)	$\phi_{in}$ (°)	$\tau_f$	$\tau_f$ Analítico
0	0	0,00	0,00
	30	5,77	5,77
5	0	5,00	5,00
	30	10,77	10,77
10	0	10,00	10,00
	30	15,77	15,77

Para o caso de carregamento triangular, a tensão normal ao plano da interface pode ser expressa por:

$$\sigma_N(x) = \frac{q_0}{L_i} x ; \quad (4.14)$$

onde:

$$q_0 = 10 \text{ kPa (Figura 4.9b);}$$

$$L_i = 2 \text{ m (Figura 4.9).}$$

A substituição de  $\sigma_N(x)$  no critério de escoamento da interface, equação (4.13), fornece a equação abaixo:

$$\tau_f = c_{in} + \left( \frac{q_0}{L_i} \text{tg}\phi_{in} \right) x \quad (4.15)$$

Com base na equação acima, para  $c_{in} = 0$  e  $\phi_{in} = 30^\circ$ , encontra-se  $\tau_f = 5,77$  kPa no ponto B.

Partindo-se de uma distribuição triangular inicial indicada na Figura 4.9b, obtém-se o seguinte o fator de colapso:

$$\lambda = 5,77$$

o que corresponde a um valor de  $\tau_f = 5,77$  kPa no ponto B.

A conclusão do estudo indica que a solução numérica é exata para o caso em consideração.

#### 4.3.2. b) *Compressão simples de um corpo de prova com uma interface inclinada*

O problema trata da compressão simples de um corpo de prova com uma descontinuidade persistente, com as seguintes propriedades para o material intacto:

$$c = 2 \text{ kPa};$$

$$\gamma = 0;$$

$$\phi = 30^\circ;$$

A Figura 4.10 ilustra a malha de elementos finitos para o caso de uma descontinuidade inclinada de  $45^\circ$  (linha A-B).

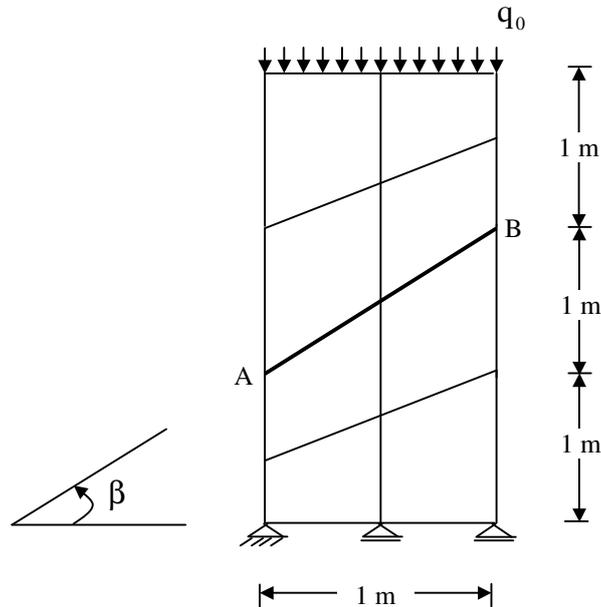
A solução numérica da resistência à compressão simples do corpo de prova é definida pela seguinte expressão:

$$\sigma_c = \lambda q_0 \quad (4.16)$$

onde:

$\lambda$  = fator de colapso;

$q_0$  = carga inicial unitária ( $q_0 = 1 \text{ kPa}$ ).



**Figura 4.10 – Compressão de corpo de prova com uma descontinuidade**

A transformação da tensão no plano da descontinuidade pode ser feita através da seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \tau \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\text{sen}2\beta & \frac{1}{2}\text{sen}2\beta & \text{cos}2\beta \\ \text{sen}^2\beta & \text{cos}^2\beta & -\text{sen}2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde:

$$\sigma_x = 0;$$

$$\sigma_y = \sigma_c \text{ (no escoamento);}$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Para o caso em consideração, obtêm-se as seguintes tensões no plano da descontinuidade:

$$\tau = 0,5\sigma_c ;$$

$$\sigma_N = 0,5\sigma_c .$$

A substituição  $\tau$  e  $\sigma_N$  na expressão do critério de Coulomb,

$$\tau = c_{in} + \sigma_N \text{tg}\phi_{in} , \quad (4.18)$$

fornece a solução do problema:

$$\sigma_c = \frac{2c_{in}}{(1 - \text{tg}\phi_{in})} . \quad (4.19)$$

As propriedades adotadas para o material intacto são tais que há escoamento somente na descontinuidade. A análise paramétrica da resistência à compressão simples do corpo de prova em função das propriedades da descontinuidade é apresentada na Tabela 4.12, concluindo-se que a solução numérica é exata.

**Tabela 4.12 – Resistência do corpo de prova à compressão simples (kPa)**

$c_{in}$ (kPa)	$\phi_{in}$ (°)	$\sigma_c$ (kPa)	$\sigma_c$ (analítico) kPa
0	0	0,00	0,0
	30	0,00	0,00
0,5	0	1,00	1,00
	30	2,37	2,37
1,0	0	2,00	2,00
	30	4,73	4,73

### 4.3.3 - Modelagem com elementos de interface

Os exemplos a seguir têm a finalidade de validar a implementação da modelagem do solo reforçado pela técnica discreta com o uso de elementos de interface. Nas análises empregam-se o elemento  $Q_4^C$  para modelar o solo, o elemento unidimensional de 2 nós, linear em velocidade e tensão, para modelar o reforço e o elemento de interface, linear em velocidade e de tensão constante, para modelar o efeito da interface solo-reforço.

#### 4.3.3. a) Puxamento de reforço sob carregamentos uniforme e triangular

O problema trata da determinação da força para iniciar o deslizamento do bloco superior indicado na Figura 4.11, onde o reforço, representado pela linha A-B, é puxado por um força inicial unitária ( $f_0 = 1$  kN) aplicada em B, ampliada por  $\lambda$  até o colapso.

As condições de contorno são tais que o bloco inferior permanece fixo. As propriedades do solo adotadas ( $c = 10$  kPa,  $\gamma = 0$  e  $\phi = 30^\circ$ ) obrigam que o escoamento ocorra somente na interface solo-reforço.

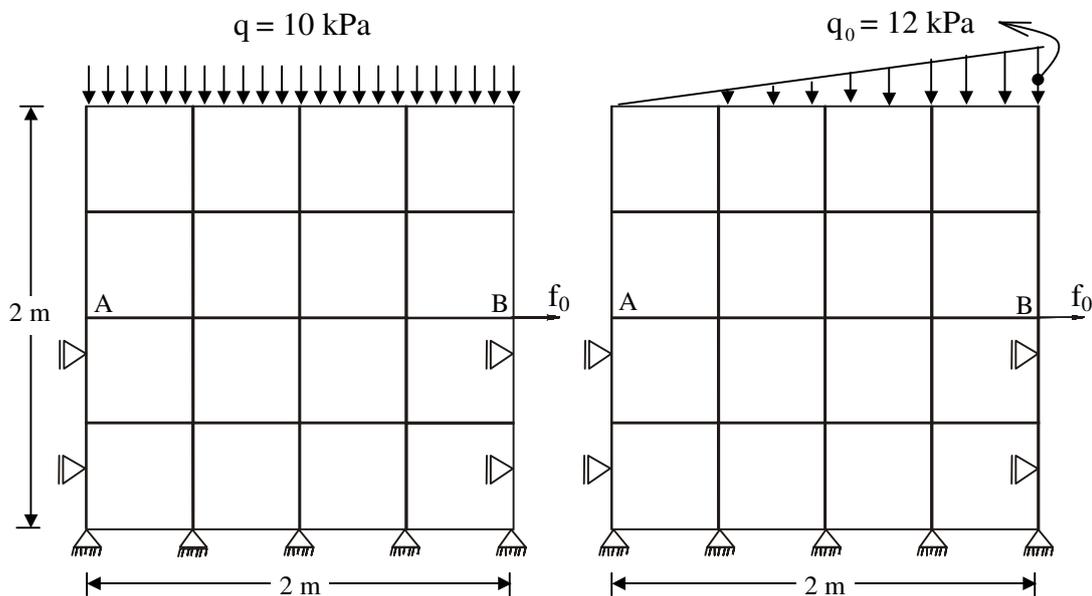


Figura 4.11 – Puxamento de reforço

A solução numérica da força de puxamento do reforço, pode ser definida pela seguinte expressão:

$$F = \lambda f_0 \quad (4.20)$$

onde:

$F$  = força máxima de puxamento do reforço;

$\lambda$  = fator de colapso.

As soluções analíticas das forças de puxamento do reforço, para os carregamentos apresentados, podem ser definidas conforme as seguintes expressões (Sousa, 2001):

$$F_p = L_r (c_{in} + \sigma_N \operatorname{tg} \phi_{in}) \quad (4.21)$$

para o carregamento uniforme,

$$F_p = L_r \left( c_{in} + \frac{\sigma_N}{2} \operatorname{tg} \phi_{in} \right) \quad (4.22)$$

para o carregamento triangular;

onde:

$c_{in}$  = coesão da interface;

$\phi_{in}$  = ângulo de atrito da interface;

$\sigma_N$  = tensão normal ao plano do reforço (Figura 4.11).

A Tabela 4.13 apresenta o resultado da análise paramétrica da força de puxamento do reforço em função das propriedades da interface. A condição de escoamento do reforço não é prescrita na análise (a tensão no reforço pode crescer indefinidamente).

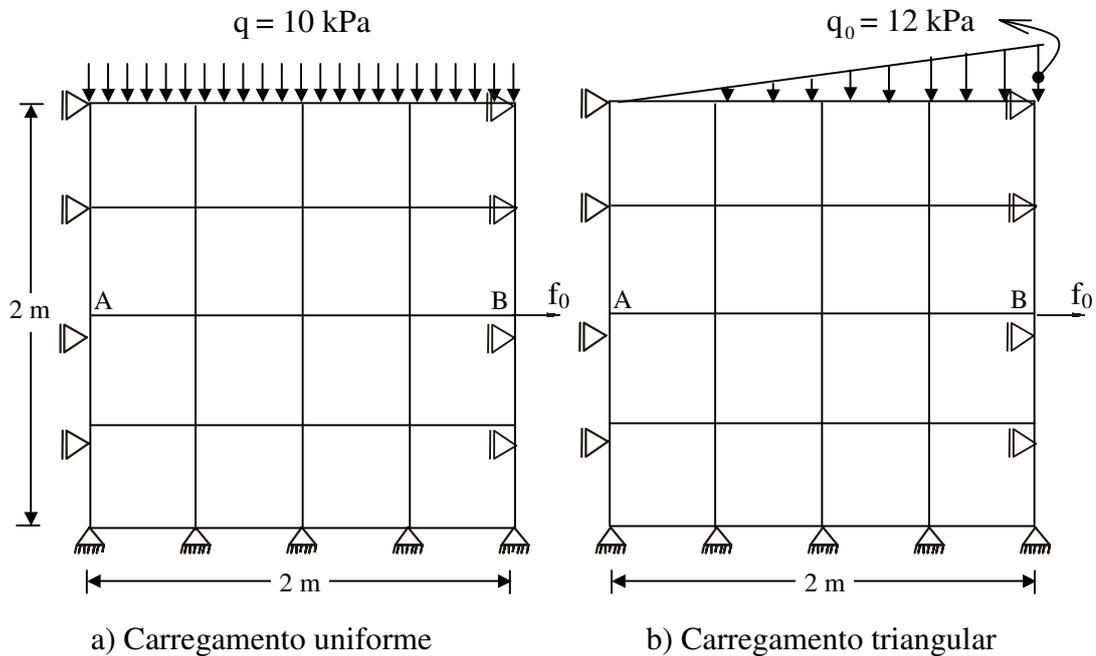
**Tabela 4.13 – Força de puxamento do reforço (kN)**

$c_{in}$ (kPa)	$\phi_{in}$ (°)	Carga uniforme		Carga triangular	
		F	$F_p$	F	$F_p$
0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	30	11,55	11,55	6,93	6,93
5	0	10,00	10,00	10,00	10,00
	30	21,55	21,55	16,93	16,93
10	0	20,00	20,00	20,00	20,00
	30	31,55	31,55	26,93	26,93

A tabela acima mostra a exatidão da solução numérica para o caso estudado.

#### 4.3.3. b) Arrancamento de reforço sob carregamentos uniforme e triangular

O problema visa a determinação da força necessária para arrancar uma camada de reforço colocada entre dois blocos de solo. As condições de contorno do problema e as propriedades do solo ( $c = 10 \text{ kPa}$ ,  $\gamma = 0$  e  $\phi = 30^\circ$ ) são tais que o escoamento possa ocorrer somente ao longo das interfaces (superior e inferior) do solo com o reforço (Figura 4.12). Nesta figura, a linha AB representa o reforço e ao longo desta linha nas faces superior e inferior são definidos os elementos de interface.



**Figura 4.12 – Arrancamento de reforço**

A sistemática para a obtenção da força de arrancamento é a mesma do exemplo anterior. As soluções analíticas (Sousa, 2001), para o caso de arrancamento sob carregamentos uniforme e triangular, são definidas conforme as seguintes equações:

$$F_p = 2L_r(c_{in} + \sigma_N \text{tg}\phi_{in}) \quad (4.23)$$

para o carregamento uniforme;

$$F_p = 2L_r(c_{in} + \frac{\sigma_N}{2} \text{tg}\phi_{in}) \quad (4.24)$$

para o carregamento triangular.

A Tabela 4.14 apresenta o resultado da força de arrancamento do reforço em função das propriedades da interface, onde admite-se que não há escoamento do reforço (a tensão no reforço pode crescer indefinidamente).

**Tabela 4.14 – Força de arrancamento de reforço (kN)**

$c_{in}$ (kPa)	$\phi_{in}$ (°)	Carga uniforme		Carga triangular	
		$F_p$	F	$F_p$	F
0	0	0,00	0,00	0,00	0,00
	30	23,09	23,09	13,86	13,86
5	0	20,00	20,00	20,00	20,00
	30	43,09	43,09	33,86	33,86
10	0	40,00	40,00	40,00	40,00
	30	63,09	63,09	53,86	53,86

A tabela acima mostra a exatidão da solução numérica para o caso estudado.

# ***CAPÍTULO 5***

## **CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

### **5.1 - CONCLUSÕES**

O presente trabalho apresentou formulações mistas de análise limite, via MEF, para solucionar problemas de estabilidade da geotecnia em meios contínuos, fraturados ou reforçados, na condição de deformação plana.

Para os problemas de estabilidade em meios reforçados, as técnicas de modelagem do contínuo equivalente e discreta apresentaram bons resultados em comparação com outros publicados na literatura técnica.

O uso de elementos de interface na formulação mista mostrou-se efetivo para a modelagem da interação solo-reforço.

O problema de programação linear (PL) obtido pela formulação tem tamanho considerável. Apesar disso, os exemplos estudados neste trabalho foram resolvidos em pouco tempo (menos de 1 min. em máquinas Pentium de 800 MHz).

Os exemplos estudados pela implementação numérica apresentaram bons resultados, sugerindo que a metodologia exposta neste trabalho tem potencial de aplicação a problemas práticos de Engenharia Civil.

## 5.2 - SUGESTÕES

São apresentados os seguintes temas sobre análise limite para futuros trabalhos:

- i) Através da técnica de modelagem discreta em meios reforçados, sugere-se o desenvolvimento e a implementação de outros elementos de interface para modelar a interação solo-reforço;
- ii) Implementação de formulações considerando o efeito do confinamento do reforço na estabilidade da estrutura de solo reforçado;
- iii) Implementação de métodos não lineares para a solução do problema de programação matemática resultante da formulação;
- iv) Desenvolvimento e implementação de formulação de limite superior para estudo de problemas de estabilidade em solos reforçados ou meios fraturados;
- v) Implementação de formulações para problemas de estabilidade em estruturas carregadas lateralmente, sob condição plana de deformação;
- vi) Generalização de formulações e suas implementações para estudos de problemas de estabilidade em condições axissimétricas (modelagem, p. ex., de capacidade de carga em estacas e tubulões na tração e em compressão).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arai, K. e Jinki, R. (1990). A Lower-Bound Approach to Active Passive Earth Pressure Problems. *Soils and Foundations*, v.30, n.4, p.25-41.

Arai, K. e Nakagawa, M. (1988). A New Limit Equilibrium Analysis of Slope Stability Based on Lower-Bound Theorem. *Soils and Foundations*, v. 28, n. 1, p.1-15.

Araújo, L. G. (1997). Estudo Numérico de Problemas de Estabilidade em Materiais Geotécnicos através da Análise Limite. Tese de Doutorado, PUC/Rio.

Araújo, L. G.; Macias, J.; Vargas, E. e Vaz, L. E. (1997). Numerical Limit Analysis of Rock Mechanics Problems. *Numerical Models in Geomechanics*, p.747-751.

Araújo, L. G.; Vargas, E.; Vaz, L. E. e Campos J. N. B. (2000). Estudo Numérico de Problemas de Estabilidade em Meios Fraturados. 21<sup>st</sup> Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2000, p.1-15, Rio de Janeiro.

Asaoka, A.; Kodaka, T. e Pokharel, G. (1994). Stability Analysis of Reinforced Soil Structures Using Rigid Plastic Finite Element Method. *Soils and Foundations*, v. 34, n.1, p.107-118.

Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall

Bottero, A.; Negre, R.; Pastor, J. e Turgeman, S. (1978). Finite Element Method and Limit Analysis Theory for Soil Mechanic Problems. *Computer Meth. in Applied Mech. and Engng*, v.22, p.131-149.

Bowles, J. E. (1982). *Foundation Analysis and Design*. McGraw-Hill

Casciaro, R. e Cascini, L. (1982). A Mixed Formulation and Mixed Finite Elements for Limit Analysis. *Int. J. num. Meth. Engng*, v.18, p.211-243.

Chen, W. F. (1975). *Limit Analysis and Soil Plasticity*. Elsevier Science Publishers, BV, Amsterdam, The Netherlands.

Christiansen, E. (1981). Computation of Limit Loads. *Int. J. num. Meth. Engng*, v.17, p.1547-1570.

Cook, R. D.; Malkus, D. S.; e Plesha, M. E. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley & Sons, Inc.

- Farfán, A. D. (2000). Aplicações da Análise Limite a Problemas Geotécnicos Modelados como Meios de Contínuos Convencionais e Meios de Cosserat. Tese de Doutorado, PUC/Rio.
- Faria, P. O. (1992). Análise Limite de Problemas Geotécnicos. Dissertação de Mestrado, PUC/Rio.
- Finn, W. D. L. (1967). Application of Limit Plasticity in Soil Mechanics. *J. of the Soil Mechanics and Foundations Div., ASCE*.
- Francescato, P. e Pastor, J. (1997). Lower and Upper Numerical Bounds to the Off-axis Strength of Unidirectional Fiber-reinforced Composites by Limit Analysis Methods. *Eur. J. Mech., A/Solids*, v.16. n.2, p.213-234.
- Hadley, G. (1982). Programção Linear. Guanabara Dois.
- Jiang , G. L. (1995). Non-Linear Finite Element Formulation of Kinematic Limit Analysis. *Int. J. for Num. and. Anal. Meth. in Eng.*
- Lysmer, J. (1970). Limit Analysis of Plane Problems in Soil Mechanics. *J. of Soil Mech. and Foundations Div., ASCE*, v.96, SM4, p.1311-1334.
- Michalowski, R. L. (1998). Limit Analysis in Stability Calculations of Reinforced Soil Structures. *Geotextiles and Geomembranes*, v.16, p.311-331.
- Noble, B. e Daniel, J. W. (1986). Álgebra Linear Aplicada. Prentice-Hall do Brasil.
- Porbaha, A.; Zhao, A.; Kobayashi, M. e Kishida, T. (2000). Upper Bound Estimate of Scaled Reinforced Soil Retaining Walls. *Geotextiles and Geomembranes*, v.18, p.403-413.
- Schrage, L. (1991). LINDO - User's Manual. The Scientific Press.
- Singh, D. N. e Basudhar, P. K. (1993-a). Determination of the Optimal Lower Bound Bearing Capacity of Reinforced Soil-Retaining Walls by Using Finite Elements and Non-Linear Programming. *Geotextiles and Geomembranes*, v.12, p.665-686.
- Singh, D. N. e Basudhar, P. K. (1993-b). Optimal Lower Bound Bearing Capacity of Strip Footings. *Soils and Foundations*, v.33, n.4, p.18-25.
- Sloan, S. W. (1987). Lower Bound Limit Analysis Using Finite Elements and Linear Programming. Report N° 020.01.87, The University Of New Castle, Australia.

Sloan, S. W. (1989). Upper Bound Limit Analysis Using Finite Elements and Linear Programming. *Int. J. Numer. and Analytical Methods in Geomech*, v.13, p.263-282.

Sousa, L. S. M. R. (2001). Estudo Numérico de Problemas de Estabilidade de Solos Reforçados via Análise Limite. Dissertação de Mestrado, UFOP.

Tamura, T. e Pak, R. Y. S. (1989). Rigid-plastic Limit Analysis of Discontinuous Media By Finite Element Method. *Can. Geotech. J.*, v.26, p.369-374.

Tamura, T.; Kobayashi, S. e Sumi, T. (1984). Limit Analysis of Soil Structure by Rigid Plastic Finite Element Method. *Soils and Foundations*, v.24, n.1, p.34-42.

Tamura, T.; Kobayashi, S. e Sumi, T. (1987). Rigid-plastic Finite Element Method for Frictional Materials. *Soils and Foundations*, v.27, n.3, p.1-12.

Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. Wiley.

Yu, H. S. e Sloan, S.W. (1994). Bearing Capacity of Jointed Rock. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, p.2403-2408.

Yu, H. S. e Sloan, S.W. (1997). Finite Element Limit Analysis of Reinforced Soils. *Computers & Structures*, v.63, n.3, p.567-577.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)