

**RUBENS RIBEIRO JACOB**

**MANOBRA ORBITAL**

**TERRA-LUA -TERRA**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Dinâmica Orbital.

Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

Guaratinguetá  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

J15m	Jacob, Rubens Ribeiro Manobra orbital terra-lua-terra / Rubens Ribeiro Jacob . – Guaratinguetá : [s.n.], 2009 117 f. : il. Bibliografia: f. 111-114  Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2009 Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes  1. Órbitas -Manobras I. Título
------	---

CDU 521.3

## **DADOS CURRICULARES**

### **RUBENS RIBEIRO JACOB**

NASCIMENTO	23.09.1954 – São Paulo / SP
FILIAÇÃO	Conrado Ribeiro Jacob Ignez Simonetti Ribeiro Jacob
1975/1980	Curso de Graduação – Engenharia Mecânica na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá do campus de Guaratinguetá / UNESP
2002/2003	Curso de Especialização – Lato – Sensu em Matemática e Estatística na Universidade Federal de Lavras
2007/2009	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.

de modo especial, aos meus pais, que com muito esforço, dedicação e amor me ajudaram na minha formação como pessoa e como profissional.

E a minha esposa pela compreensão e incentivo à execução de meu trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pela minha saúde, dedicação, perseverança, força de vontade, por tudo que eu tenho conseguido até aqui, e pela oportunidade de estar fazendo mestrado.

em especial, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes, que com sua compreensão, dedicação e paciência, colaborou imensamente para que eu pudesse realizar este trabalho.

á minha esposa, Valquiria, e à minha filha, Thaís, que com muita compreensão, apoio e incentivo me auxiliaram na execução deste trabalho.

á Doutora Rita de Cássia que com sugestões muito colaborou na realização do trabalho.

ao Prof. Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado , pela sugestão ao meu trabalho.

ao mestre Jean Paulo dos Santos Carvalho que me auxiliou em algumas dificuldades que surgiram.

aos professores da pós-graduação pelos ensinamentos.

aos colegas da pós-graduação que me auxiliaram em algumas dificuldades.

á Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá pelo apoio.

Este trabalho contou com apoio da CAPES

“Se vi mais longe é porque me encontrava em ombros de gigantes”

Isaac Newton

JACOB, R. R. **Manobra Orbital Terra-Lua-Terra**. 2009, 117 f. Proposta de dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

## **RESUMO**

No presente trabalho é abordada a manobra orbital Terra-Lua - Terra com o objetivo de um menor consumo de combustível. Inicialmente o satélite executa uma órbita em torno da Terra. Em um certo instante um impulso é efetuado para efetuar uma manobra não con-focal em que o satélite é transferido para uma órbita de transferência geocêntrica até um ponto da esfera de influência da Lua. A partir deste ponto o satélite é transferido para uma órbita hiperbólica em torno da Lua, e, no perilúnio desta órbita um novo impulso é dado transferindo o satélite para uma órbita lunar. A seguir é efetuada a manobra de volta em que o satélite é transferido para a órbita geocêntrica de transferência, e no pericentro desta o satélite é transferido para a sua órbita inicial em torno da Terra. O caso não coplanar e a influência das perturbações devidas ao achatamento da Terra e a atração gravitacional da Lua também são analisados.

**PALAVRAS-CHAVES:** Manobra Orbital, Perturbações Orbitais, Missão Lunar

JACOB, R.R. **Earth-Moon-Earth Orbital Maneuver**. 2009, 117 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2009.

#### ABSTRACT

In the present work an Earth-Moon-Earth orbital maneuver is studied with the purpose of minimum fuel consumption. Initially it is considered an artificial satellite orbiting around the Earth. In a certain instant an impulse is effected to effect a not co-focal maneuver where the satellite is transferred to an orbit of geocentric transference until a point of the sphere of influence of the Moon. From this point the satellite is transferred to a hyperbolic orbit around the Moon, and, in the perilúnio of this orbit a new impulse is given transferring the satellite to a lunar orbit. To follow the maneuver is effected in return where the satellite is transferred to geocentric orbit of transference, and in pericentro of this the satellite is transferred to its initial orbit around the Earth. The non-coplanar case and the influence of the disturbances due to the flattening of the Earth and the gravitational attraction of the Moon also are analyzed.

**KEYWORDS:** Orbital Maneuver, Orbital Perturbations, Lunar Mission

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	11
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	13
<b>3 ÓRBITAS E TRANSFERÊNCIA ORBITAL</b> .....	18
3.1 DINÂMICA DO SISTEMA.....	19
3.1.1 Modelagem simples de dois corpos.....	19
3.1.2 Modelagem de dois corpos perturbados .....	19
3.1.3 Modelagem de três corpos .....	19
3.1.4 Modelagem com N corpos .....	20
3.2 CONTROLE APLICADO .....	20
3.2.1 Empuxo infinito.....	20
3.2.2 Empuxo contínuo .....	20
3.3 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO .....	21
3.3.1 Método direto .....	21
3.3.2 Método indireto.....	21
3.3.3 Método híbrido.....	21
3.4 MANOBRAS ORBITAIS.....	21
3.4.1 Transferência de Hohmann .....	21
3.4.2 Caso geral de transferência entre duas órbitas circulares planares.....	25
3.4.3 Transferência de Hoeker e Silber ( bi – elíptica e tri – impulsiva ) .....	28
3.4.4 Transferência bi-parabólica .....	32
3.4.5 Transferência de órbita, co-focais, coplanares e elípticas .....	33
3.4.6 Transferência entre órbitas elípticas de mesma dimensão, coplanares e não coaxiais .....	35
3.4.7 Transferência entre órbitas circulares não coplanares de mesmo raio .....	37
<b>4 ESTUDO DO PROBLEMA</b> .....	42
4.1 MANOBRA PROPOSTA .....	42
4.2 INFLUÊNCIA DO ACHATAMENTO DA TERRA.....	43
4.3 PERTURBAÇÃO DO TERCEIRO CORPO.....	49
4.3.1 Cálculo de $R_2$ .....	52
4.3.2 Cálculo de $R_3$ .....	52
4.3.3 Cálculo de $R_4$ .....	52
<b>5 TRANSFERÊNCIA DE SATÉLITE EM ÓRBITA CIRCULAR NA TERRA PARA ÓRBITA CIRCULAR AO REDOR DA LUA</b> .....	55
5.1 INTRODUÇÃO .....	55
5.2 DESCRIÇÃO DA TRANSFERÊNCIA.....	55
5.3 TRAJETÓRIA DENTRO DA ESFERA DE INFLUÊNCIA LUNAR.....	65
5.4 TRAJETÓRIAS LUNARES NÃO COPLANARES .....	68
5.5 APLICAÇÃO.....	71
<b>6 ENCONTRO COM A ESFERA DE INFLUÊNCIA DA LUA NO APOGEU DA ELIPSE DE TRANSFERÊNCIA</b> .....	80

6.1 CÁLCULO DA VELOCIDADE NO PONTO DE ENCONTRO COM A ESFERA DE INFLUÊNCIA DA IUA .....	81
6.2 DETERMINAÇÃO DA VARIAÇÃO DE VELOCIDADE NA CHEGADA À ESFERA DE INFLUÊNCIA CONSIDERANDO A LUA PARADA E EM MOVIMENTO.....	82
6.3 TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN PARA UMA ÓRBITA CIRCULAR FINAL EM TORNO D LUA .....	83
6.4 CÁLCULO DA VARIAÇÃO TOTAL DE VELOCIDADE. ....	86
<b>7 TRANSFERÊNCIA DE SATÉLITE PARA LUA CONSIDERANDO O SATÉLITE EM ÓRBITA INCLINADA EM TORNO DA TERRA.....</b>	<b>87</b>
<b>8 TRANSFERÊNCIA DO SATÉLITE CONSIDERANDO O ACHATAMENTO DA TERRA.....</b>	<b>95</b>
<b>9 APLICAÇÃO .....</b>	<b>97</b>
<b>10 MANOBRA DE RETORNO PARA A TERRA.....</b>	<b>107</b>
<b>11 CONCLUSÃO.....</b>	<b>109</b>
11.1 TRABALHOS FUTUROS .....	110
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	111
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA .....	114
<b>APENDICE A – TERMOS DA FUNÇÃO PERTURBADORA E EXPRESSÃO DA FUNÇÃO PERTURBADORA .....</b>	<b>115</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A pesquisa tem como objetivo o estudo de missões com economia de combustível, envolvendo transferência de satélite, orbitando inicialmente a Terra para órbita ao redor da Lua, e transferindo para uma órbita selenocêntrica. A transferência será analisada em função do mínimo consumo de combustível, fator preponderante para as missões planejadas atualmente. Três análises são importantes neste trabalho:

Na primeira análise o satélite inicialmente orbita a Terra em trajetória elíptica, sendo em seguida transferido para uma órbita geocêntrica de transferência para ser conduzido a uma órbita lunar.

Na segunda análise, o satélite é transferido para uma órbita circular intermediária até atingir a trajetória geocêntrica de transferência para ser conduzido a uma órbita lunar.

Na terceira análise estuda-se a influência do achatamento da Terra, onde o satélite orbita a Terra por um certo tempo, dependendo da missão. Após este tempo o satélite, através de uma órbita circular intermediária, é transferido para uma órbita de transferência geocêntrica para depois ser conduzido a uma órbita lunar.

Após uma abordagem inicial, baseada no problema dos dois corpos, efeitos perturbadores serão introduzidos: perturbação por um terceiro corpo e a influência do achatamento da Terra. Na fase em que a Terra é o foco, no movimento do satélite será considerado o efeito do achatamento da Terra e a perturbação da Lua. Para o caso de missões que exijam longo tempo de espera antes de iniciar a manobra de transferência Este trabalho é composto de 11 capítulos. No primeiro Capítulo dissertamos sobre os objetivos do trabalho proposto. No segundo Capítulo é feita uma revisão bibliográfica de alguns dos principais trabalhos científicos. No terceiro Capítulo foi feita uma abordagem teórica sobre órbitas e sobre algumas das principais manobras de transferências. O quarto capítulo apresenta a manobra proposta e uma abordagem matemática da influência do achatamento da Terra e da perturbação do terceiro corpo. No quinto Capítulo é feita a descrição da transferência de um satélite em órbita circular ao redor da Terra para uma órbita circular ao redor da Lua através do método patched conics , mostrando uma aplicação do método . É feita também uma descrição

sobre trajetórias lunares não coplanares. O sexto Capítulo trata da transferência para a Lua via elipse de energia mínima. No sétimo capítulo considera-se o satélite inicialmente em órbita inclinada em torno da Terra com posterior mudança de plano. Após a mudança de plano o satélite é transferido para a Lua. No oitavo Capítulo é feita uma abordagem do efeito do achatamento da Terra na órbita do satélite em torno da Terra. Posteriormente é feito o estudo da transferência do satélite para a Lua. No nono Capítulo são feitas aplicações mostrando, para determinadas condições iniciais, a transferência ótima. Um programa elaborado em linguagem FORTRAN (Melo, 2005) é utilizado em um determinado instante para ajustar convenientemente (de forma ótima) a fase de transferência não confocal (condições de saída e chegada). É também feita uma aplicação considerando inicialmente o achatamento da Terra e posterior transferência para a Lua. No décimo Capítulo é descrita a transferência do satélite da Lua para a Terra. E finalmente, no décimo primeiro capítulo é relatada conclusão do trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Muitos trabalhos foram desenvolvidos com respeito a teoria da perturbação do terceiro corpo.

Kozai (1959) elaborou um artigo onde é feito um estudo da perturbação dos seis elementos orbitais com relação à órbita fechada de um satélite em torno da Terra. Não são feitos argumentos sobre a ordem de grandeza a excentricidade e inclinação. É assumido que a Terra se distribui de maneira simétrica em relação ao seu eixo de rotação. Neste mesmo ano Kozai escreve um artigo onde apresenta os termos seculares e de longo período da função perturbadora para um satélite em movimento sob a atração gravitacional do Sol e da Lua. Kaula (1962) determinou uma fórmula para perturbação no movimento de satélites artificiais devido a harmônicos tesserais do potencial gravitacional da Terra. Sua fórmula permite determinar perturbações em elementos orbitais keplerianos e tem sido comumente usada em cálculo de perturbação para harmônicos tesserais de baixo grau e ordem.

Cook (1962), também estudou a influência da atração gravitacional do Sol e da Lua nos elementos orbitais de um satélite orbitando a Terra utilizando as equações planetárias de Lagrange. São também utilizadas equações para avaliar mudanças nos elementos durante uma revolução do satélite e a taxa média desses elementos. Kozai (1962) determinou perturbações seculares de asteróides de grande inclinação e excentricidade considerando órbita circular de Júpiter.

Kopal (1966) determinou perturbações nas órbitas de satélites artificiais através de atrações de corpos externos, e Gaposchskin (1966) forneceu fórmula explícita para o cálculo de perturbação lunar de primeira ordem para período de tempo de duas semanas. Considerou que o movimento da Lua se realiza em uma órbita Kepleriana com excentricidade desprezível. Martyenko (1967) realizou estudos a respeito da estabilidade de dois satélites de período orbital de 24 horas sob o efeito das perturbações do Sol e da Lua. Krause (1967) determinou perturbações seculares da órbita de um satélite devido ao achatamento do corpo central e também devido a atração gravitacional do terceiro corpo.

Vagners (1968) efetuou um estudo semi-analítico para o comportamento de um satélite em órbita lunar fechada. Considerou a Terra movendo-se em um círculo no plano equatorial lunar. Giacaglia (1970), em seu artigo, apresentou uma solução semi-analítica do movimento de um satélite da Lua. Os efeitos perturbativos considerados incluem aqueles devido a atração da Lua, Terra e Sol, a não esfericidade do campo gravitacional da Lua, acoplamento de termos de pequena ordem, pressão de radiação solar e libração física. Foram obtidos termos de curto período e termos de períodos intermediários. Foi proposto obter perturbações seculares e aquelas dependentes somente do argumento do perigeu através da integração numérica das equações do movimento. Os termos de curto período e os termos de período intermediário são desenvolvidos acima da segunda ordem. As perturbações seculares e perturbações dependentes do argumento do perigeu são obtidas na terceira ordem.

Vagners (1970) também estudou o comportamento de satélite lunar com órbita de baixa excentricidade para termos de longo período.

Kozai (1973) encontrou um novo método para determinar perturbações do Sol e da Lua em movimentos de satélites. Neste mesmo ano, Kozai escreveu um artigo, onde equações diferenciais são derivadas relatando perturbações dos elementos orbitais de um satélite pelo movimento do plano equatorial da Terra. Cok (1978) determinou efeitos de perturbações da Lua sobre um satélite em órbita fechada ao redor da Terra devido ao deslocamento da órbita da Lua. Kaufman (1978), Alfriend (1978) e Dasembrock (1978) utilizaram a teoria da perturbação para a análise do movimento de uma partícula ao redor de um corpo achatado considerando os efeitos da Lua e do Sol. O principal objetivo foi o desenvolvimento de termos periódicos de primeira ordem e termos seculares de segunda ordem.

Chao (1979) escreveu um artigo mostrando as perturbações no movimento de um satélite artificial terrestre devido ao Sol e à Lua, Tais perturbações foram derivadas unicamente da função perturbadora. A solução de primeira ordem é obtida analiticamente integrando as equações de variações, incluindo  $J_2$ ,  $J_{22}$ ,  $J_3$  e  $J_4$ . A parte secular da solução de primeira ordem é incluída na órbita de referência. As órbitas do Sol e da Lua são consideradas circulares e o movimento das Lua é convertido ao sistema equatorial da Terra com certa aproximação.

Na década de 80, alguns trabalhos importantes também foram desenvolvidos. Kaufman (1980) realizou um trabalho para teoria semi-analítica de primeira ordem com restabelecimento de termos de curto período devido ao terceiro corpo e perturbações zonais.

Roth (1982) inclui em seu artigo a perturbação de um terceiro corpo em um orbitador em torno de um planeta ou Lua. As equações de Lagrange foram utilizadas de maneira conveniente para permitir fácil obtenção dos vários termos da expansão dos elementos perturbados. Uma análise cuidadosa da ordem de grandeza desses termos mostra que alguns são requeridos por uma teoria consistente direcionando para segunda ordem de perturbações. Kaufman et al (1984) através de seus estudos obteve a órbita média para um satélite artificial incluindo efeitos secular, médio e longo período do achatamento da Terra e perturbações do terceiro corpo, ou seja a Lua e o Sol. Foi usada a teoria da perturbação para reaver os efeitos de curto período devido a  $J_2$ .

Wnuk (1988) derivou uma fórmula para o geopotencial expressa em termos de elementos orbitais. Foi apresentada a possibilidade de aplicação efetiva da fórmula derivada para o cálculo de órbitas de baixa altitude para satélites, considerando os coeficientes dos harmônicos tesserais do campo gravitacional da Terra, de ordem e grau elevados.

Wnuk (1990) desenvolveu uma fórmula para perturbação em elementos orbitais keplerianos de satélites artificiais terrestres. A parte Tesseral do potencial gravitacional da Terra foi considerada como fator perturbador. O potencial gravitacional expresso em termos dos elementos orbitais foi considerado na forma já desenvolvida anteriormente. Concluiu que a fórmula para perturbação obtida anteriormente pôde ser aplicada efetivamente para calcular perturbações com coeficientes harmônicos tesserais de grau e ordem elevados.

Broucke (1991) elaborou um artigo em que apresenta um estudo detalhado da investigação numérica da perturbação na órbita de um satélite causado pelo formato de pêra ou harmônico  $J_3$  do corpo central. O autor utiliza em seus estudos conceitos da teoria geral das órbitas periódicas. Morbidelli (1993) estudou os efeitos luni-solar sobre um satélite geo-síncrono artificial orbitando com inclinação próxima da crítica.

Foi analisado cada harmônico formado pela combinação da longitude do nodo do Satélite e da longitude do nodo da Lua. Este estudo demonstra que a dinâmica induzida por estes harmônicos não apresenta fenômeno de ressonância. Em uma aproximação de segunda ordem o cálculo médio da Hamiltoniana é obtido e aplicado aos termos não ressonantes tendo como resultado que, o principal efeito da atração do Sol e da Lua é um grande aumento na amplitude de libração da inclinação ( de  $0,6^\circ$  para  $3,2^\circ$  ) e um decréscimo no período de libração (da ordem de 200 anos para 20 anos) .

Prado (1998) e Costa (1998) calcularam o potencial perturbador para ordem superior a quatro em termos do polinômio de Legendre e posteriormente em 2000 estenderam seus cálculos considerando efeitos acima de ordem oito nas expansões do polinômio de Legendre.

Prado (1993), realizou um estudo do problema de transferir um satélite em órbita em torno de um certo corpo e depois voltando ao mesmo corpo após certo tempo. Generalizou o problema de transferência relativa aos pontos lagrangeanos L4 ou L5 . Outro ponto importante em seu trabalho foi o estudo da transferência com mínima variação de velocidade, em tempo livre, entre duas órbitas elípticas coplanares. Foi desenvolvido e resolvido um conjunto de equações usadas neste problema para uma manobra multi-impulsiva.

Broucke (2003) obteve a forma geral da função perturbadora do terceiro corpo truncada após o termo de segunda ordem na expansão em polinômio de Legendre.

B. De Saedeleer (2004) e J. Henrard (2004) desenvolveram uma teoria analítica de um satélite artificial da Lua. O interessante neste desenvolvimento é que a dinâmica de um satélite lunar é muito diferente daquela de um satélite artificial orbitando a Terra, pelo menos em dois aspectos: o termo lunar em  $J_2$  é somente 1/10 do termo  $C_{22}$  e o efeito do terceiro corpo, a Terra, no satélite Lunar é maior que o efeito da Lua em um satélite terrestre. Os resultados são obtidos sem quaisquer desenvolvimentos em série em excentricidade ou inclinação. Assim, a solução do desenvolvimento se aplica a uma ampla gama de valores, exceto para poucos valores críticos isolados. Foram obtidos resultados em segunda ordem para o efeito combinado de  $J_2$  e  $C_{22}$ .

Karla (2004) desenvolveu um trabalho sobre manobra com consumo mínimo de combustível utilizando estudo sobre manobra assistida por gravidade. É feito um estudo particular do controle orbital de um satélite artificial da Terra usando a gravidade da Lua. São utilizadas equações analíticas baseadas na abordagem Patched Conics.

Melo (2005) utiliza em seu trabalho o problema restrito de três corpos para prever família de órbitas periódicas no sistema Terra-Lua. Também utiliza problema de quatro corpos Sol-Terra – Lua – sonda acrescido de perturbações devidas ao achatamento terrestre e à pressão de radiação solar.

Elaborou estudos para determinação de trajetórias que permitem transferências entre órbitas terrestres e lunares de baixa altitude e grande inclinações e também rota de escape do sistema Terra-Lua. Foram definidas também trajetórias estáveis ao redor da Lua e rotas de escape e captura através dos pontos Lagrangeanos  $L_1$  e  $L_2$ . Fez também uma abordagem do método patched conics.

### 3 ÓRBITAS E TRANSFERÊNCIA ORBITAL

Em missões espaciais é importante determinar órbitas e as manobras orbitais necessárias. A determinação com precisão de uma órbita implica em determinar magnitude, forma e orientação da órbita, bem como especificação da posição do satélite em cada instante.

Sir Isaac Newton propôs o primeiro método para a determinação da órbita de um corpo celeste, em 1687. A determinação da órbita proposta por Newton é feita a partir de três observações do corpo.

Sir Edmund Halley aplicou pela primeira vez o método de Newton, para calcular a órbita de 24 cometas. Com este mesmo trabalho de Newton, ele descobriu um cometa que a cada 76 anos passava próximo da Terra. O cometa recebeu o nome de cometa Halley, em sua homenagem.

Leonard Euler, em 1744, criou um método matemático analítico para determinação de órbitas. Lambert generalizou o método de Euler. Posteriormente, Lagrange fundamentou a teoria de Euler e Lambert. Em 1780 foi Laplace quem desenvolveu um método novo para determinação de órbita.

No século 19, Gauss criou uma teoria para determinação de órbitas e com ela determinou a órbita do asteroide Ceres. Os dados de observação usados por Gauss, foram os ângulos de ascensão reta e de declinação definidos do sistema de coordenadas de ascensão reta e declinação em três instantes de observações diferentes. Gauss também foi o autor do método dos mínimos quadrados, através do qual as órbitas são determinadas de forma estatística.

Outro fator importante em certas missões é o problema da transferência de satélite de uma órbita para outra com mínimo consumo de combustível (Marec, 1979), ou seja, a transferência é tal que alterando (posição, velocidade e massa) de um satélite em um dado instante para outros valores em um instante posterior, teremos um menor consumo de combustível ( $m_0 - m_f$ ), onde  $m_0$  é a massa inicial do satélite e  $m_f$  é a massa final do satélite.

O consumo de massa (gasto de combustível) está relacionado com a variação de velocidade ( $\Delta V$ ) através da equação de Tsiolkovsky (Schlingloff, 2005)

$$\Delta \vec{V} = -\vec{u} \ln \frac{m_o}{m_f}$$

em que  $\vec{u}$  é a velocidade em relação ao satélite dos gases ejetados

Neste trabalho o consumo mínimo de combustível estará sempre implicitamente dado quando calcularmos variações mínimas de velocidade.

A transferência pode consistir também em uma manobra de rendezvous (encontro de veículos espaciais). Por exemplo, para permanecerem juntos em órbita.

A literatura apresenta diversas modelagens que podem ser divididas em três grupos tais como a dinâmica do sistema, ou seja, equações do movimento, controle aplicado (atuação de propulsores), e determinação do método de otimização.

### 3.1 DINÂMICA DO SISTEMA

#### 3.1.1 Modelagem simples de dois corpos

Nesta modelagem, temos um corpo de grande massa e um corpo de massa menor que órbita o de maior massa. Não são consideradas perturbações de outros corpos.

É uma modelagem simples onde existe solução analítica. Permite resultados precisos na maioria das situações.

#### 3.1.2 Modelagem de dois corpos perturbados

Temos a modelagem de dois corpos onde se considera uma ou mais perturbações como, a não esfericidade do corpo central, pressão de radiação solar, presença de outros corpos, etc.

As soluções analíticas são raras, quase sempre se recorre à integração numérica. Para resultados analíticos aproximados, utiliza-se linearizações em torno de uma órbita de transferência.

#### 3.1.3 Modelagem de três corpos

Esta modelagem é muito usada para o estudo de trajetórias lunares e interplanetárias, temos a presença de três corpos que se atraem gravitacionalmente. Não é considerada outra perturbação

O caso mais comum é o problema restrito de três corpos, onde é descrito o movimento de um corpo que não perturba o movimento dos outros dois (por exemplo, um satélite artificial), sob a influência de dois outros maiores (como por exemplo Terra

e Lua). Não há solução analítica para essa modelagem, devendo ser efetuada integração numérica.

#### 3.1.4 Modelagem com N corpos

Temos a presença de N corpos que são tratados como pontos de massa. Outras perturbações são geralmente consideradas. Esta modelagem é usada para aperfeiçoar modelagens simples, como a de dois corpos ou três corpos.

Esta modelagem é aplicada em missões onde vários planetas ou satélites são visitados por um mesmo veículo espacial. Ainda com relação a esta modelagem, cita-se a manobra assistida por gravidade, ou Swing-by, onde o veículo ao passar próximo de um corpo celeste, adquire energia para completar uma missão.

### 3.2 CONTROLE APLICADO

Neste caso avalia-se a força a ser aplicada no veículo espacial. Há dois tipos de modelos na literatura

#### 3.2.1 Empuxo infinito

Considera-se força aplicada de modo instantâneo e magnitude infinita. Verificando a variação instantânea de velocidade, avaliamos o efeito deste impulso. Supõe-se trajetória contínua para o veículo espacial. É um modelo que oferece simplicidade e precisão.

#### 3.2.2 Empuxo contínuo

Considera-se que o motor do veículo consiga aplicar uma força finita por tempo diferente de zero (não instantâneo). Integração numérica da equação de movimento ou linearizações válidas em curto período de tempo permitem avaliar o efeito da força. Podem ser encontradas várias modelagens quanto ao grau de liberdade da força: magnitude constante ou variável, possibilidade de mudar a direção da força livremente ou com restrição, etc.

### 3.3 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO

Neste caso, temos três grupos:

#### 3.3.1 Método direto

Procura-se valores numéricos para certos números de parâmetros. Utilizam-se algoritmos computacionais para gerarem métodos iterativos.

#### 3.3.2 Método indireto

Neste método as chamadas condições necessárias de primeira ordem (equação de Euler-Lagrange) são escritas e resolvidas numericamente. Assim procedendo, conseguimos obter a solução final procurada.

#### 3.3.3 Método híbrido

Como no método direto as equações são resolvidas pela busca direta de parâmetros. O problema é transformado em outro equivalente que é resolvido pelo método direto.

### 3.4 MANOBRAS ORBITAIS

Neste item serão discutidos algumas manobras convencionais.

Um dos primeiros estudiosos do problema da transferência de órbita de um veículo espacial entre dois pontos foi R.H.Goddard em 1919. Goddard propôs soluções ótimas para enviar foguetes a grandes altitudes de forma mais econômica possível.

Em seguida Hohmann em 1925 obteve a solução ótima do problema de transferir um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares em campo gravitacional Newtoniano.

#### 3.4.1 Transferência de Hohmann

A transferência entre duas órbitas circulares coplanares é uma das mais úteis manobras que conhecemos. Através dela podemos colocar um satélite artificial em uma órbita de grande altitude.

Primeiramente, nós podemos colocar o satélite em uma órbita de baixa altitude denominado órbita de estacionamento. Em seguida transferimos o satélite para uma órbita circular de grande altitude, utilizando uma órbita elíptica de transferência tangente às órbitas circulares. O primeiro ponto de tangência está no pericentro da elipse de transferência e o segundo ponto de tangência está no apocentro da elipse de transferência. A soma das variações de velocidades nestes dois pontos fornece a menor variação de velocidade ( $\Delta V$ ) requerida.

Quem primeiro concebeu este tipo de manobra foi Hohmann em 1925. Por isso a transferência envolvida, foi denominada Transferência de Hohmann.

A Figura 1 mostra a transferência.

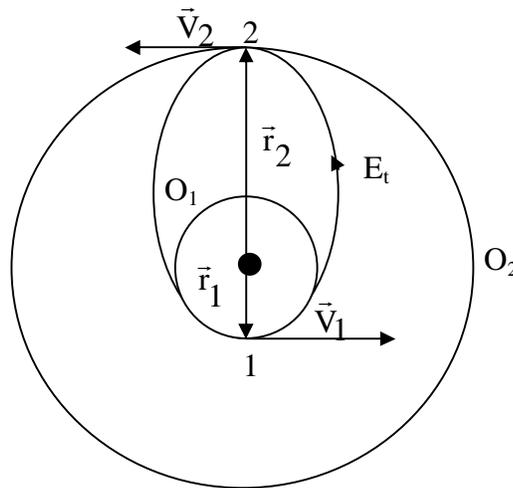


Figura 1 - Esquema da transferência de Hohmann

Na Figura 1,  $O_1$  é a órbita de baixa altitude,  $O_2$  é a órbita de grande altitude e  $E_t$  é a elipse de transferência. De acordo com esta figura temos que:

$$2a = r_1 + r_2 \quad (3.1)$$

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (3.2)$$

A velocidade do satélite no apocentro (em 1) da elipse de transferência é dada por:

$$V_1^2 = \frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a} \quad (3.3)$$

onde  $\mu$  é a massa reduzida da Terra. Portanto para o valor de  $V_1$  temos:

$$V_1 = \sqrt{\left( \frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a} \right)} \quad (3.4)$$

Desenvolvendo a equação (3.4) temos:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\mu r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \quad (3.5)$$

Para a órbita circular de baixa altitude a velocidade do satélite é:

$$V_1' = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad (3.6)$$

Aqui  $r_1$  é o raio da órbita circular de baixa altitude e é também a distância do pericentro da elipse de transferência ao planeta em torno do qual o satélite orbita, e  $r_2$  é a distância do apogeu e também raio da órbita de grande altitude. Com os valores destas velocidades podemos calcular o primeiro impulso  $\Delta V_1$  em 1, para que o satélite seja colocado em órbita de transferência. Assim, temos:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_1' \quad (3.7)$$

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left[ \sqrt{\frac{2 \frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_2}{r_1} + 1}} - 1 \right] \quad (3.8)$$

No ponto 2, Figura 1, a velocidade do satélite na elipse de transferência é dada por :

$$V_2 = \sqrt{2 \left[ \frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_1 + r_2} \right]} \quad (3.9)$$

A velocidade do satélite na órbita de raio  $r_2$  é:

$$V'_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad (3.10)$$

Podemos agora calcular o segundo impulso em 2.

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{\frac{r_2}{r_1} + 1}}}{\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}} \right] \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \quad (3.11)$$

A menor variação de velocidade passa a ser:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| \quad (3.12)$$

É muito importante em uma manobra determinarmos o tempo de transferência. Este tempo de transferência é metade do período da órbita de transferência e é dado por :

$$t = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (3.13)$$

Como  $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$  e desenvolvendo a equação ( 3.13 ) obtemos para o período:

$$t = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \frac{r_2}{r_1}}{2} \right]^{\frac{3}{2}} 2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{\mu}} \quad (3.14)$$

Observando a equação (3.14), vemos que  $2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{\mu}}$  é o período da órbita inicial, ou seja da órbita de raio  $r_1$ .

### 3.4.2 Caso geral de transferência entre duas órbitas circulares planares

O caso mais geral de transferências entre duas órbitas circulares planares (Bate et al, 1971) requer que a órbita de transferência intercepte ou pelo menos tangencie as órbitas circulares. A Figura 2 mostra as órbitas de transferências que são possíveis e impossíveis.

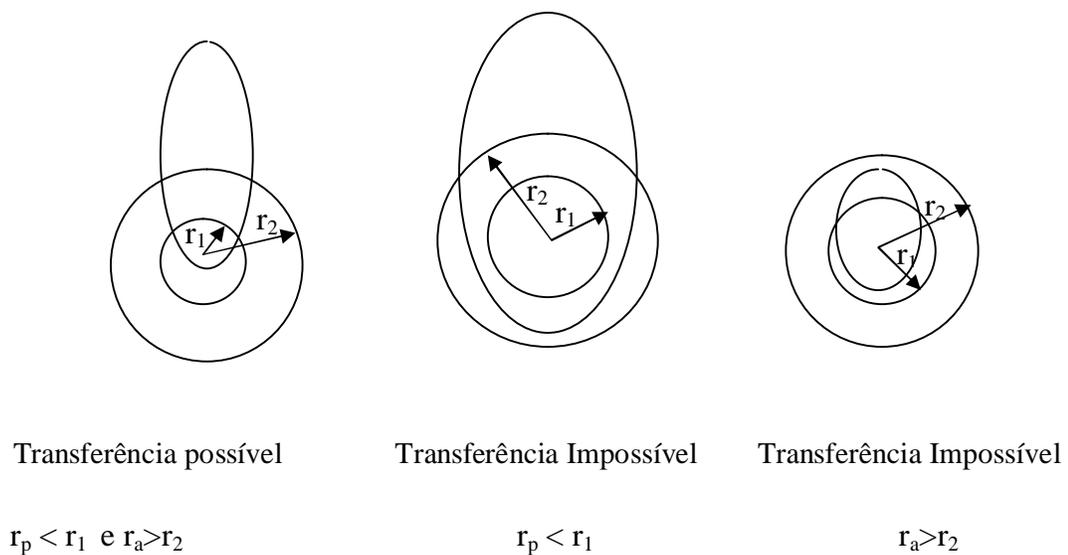


Figura 2 – Transferências possíveis e impossíveis . Bate et al (1971)

Podemos ver através da Figura 2 que a distância do pericentro tem que ser menor ou igual ao raio de órbita da menor altitude,  $r_1$ , e que a distância do apocentro tem que ser maior ou igual ao raio da órbita maior.

Podemos expressar o que foi dito acima matematicamente da seguinte forma:

Consideremos a equação geral das cônicas,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (3.15)$$

onde  $p = a(1 - e^2)$  é o semi-latus rectum e  $e$  é a excentricidade da elipse de transferência,  $\varpi$  é a longitude do pericentro e  $\theta$  é a longitude verdadeira. Se  $\varpi = \theta$ , temos que  $r = r_p$  (distância do pericentro).

Logo,

$$r_p = \frac{p}{1 + e} \quad (3.16)$$

Se  $\theta = \pi + \varpi$ , temos,

$$r_a = \frac{p}{1 - e} \quad (3.17)$$

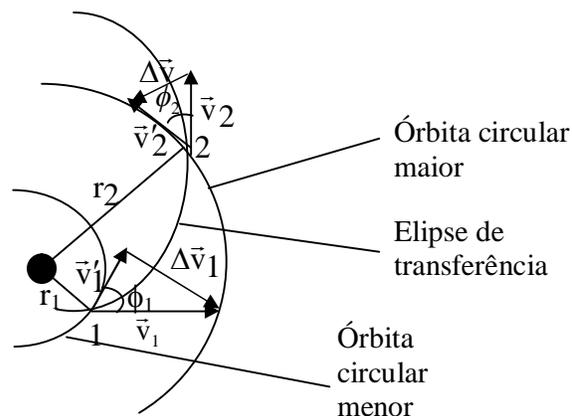
Portanto para a transferência ser possível, temos:

$$r_p \leq r_1, \text{ logo } \frac{p}{1 + e} \leq r_1 \quad (3.18)$$

$$r_a \geq r_2, \text{ logo } \frac{p}{1 - e} \geq r_2 \quad (3.19)$$

As órbitas que satisfazem essas equações ao menos interceptam ou tangenciam as órbitas circulares.

A Figura 3 mostra um caso geral de  $\Delta v$  requerido em dois pontos (1) e (2) da órbita., no caso de transferência entre duas órbitas circulares.

Figura 3 -  $\Delta v$  requerido em 1 e 2 Bate et al (1971)

Considerando a equação da energia  $\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$ , poderemos obter a velocidade

$V_1$ ,

$$V_1 = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r} + \varepsilon\right)} \quad (3.20)$$

Na órbita de raio  $r_1$ , a velocidade é dada por,

$$V_1' = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

Os dois vetores  $\vec{V}_1$  e  $\vec{V}_1'$  formam um ângulo  $\phi_1$ , denominado ângulo de vôo. No momento da transferência em 1, podemos calcular o momento angular através de ,

$$h_1 = r_1 V_1 \cos \phi_1 \quad (3.21)$$

$$\text{obtemos, } \cos \phi_1 = \frac{h_1}{r_1 V_1} \quad (3.22)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo cujas lados são  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_1'$  e  $\Delta\vec{V}_1$ , obtemos,

$$\Delta V_1^2 = V_1^2 + V_1'^2 - 2V_1V_1' \cos \phi_1 \quad (3.23)$$

Com relação ao ponto 2 da Figura 3, procedemos de maneira análoga obtendo,

$$V_2 = \sqrt{2\left(\frac{\mu}{r_2} + \varepsilon\right)} \quad (3.24)$$

$$V_2' = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad (3.25)$$

A equação (3.26) fornece a velocidade do satélite na órbita circular de raio  $r_2$ .

O momento angular agora é calculado por,

$$h_2 = \vec{r}_2 \times \vec{V}_2 \quad (3.26)$$

$$h_2 = r_2 V_2 \cos \phi_2 \quad (3.27)$$

O ângulo  $\phi_2$  é o ângulo de vôo formado por  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_2'$ . Da equação (3.27) obtemos,

$$\cos \phi_2 = \frac{h_2}{r_2 V_2} . \text{ Aplicando a lei dos cossenos no triângulo cujos lados são}$$

$\vec{V}_2'$ ,  $\vec{V}_2$  e  $\Delta \vec{V}_2$ , obtemos,

$$\Delta V^2 = V_2'^2 + V_2^2 - 2V_2 V_2' \cos \phi_2 \quad (3.28)$$

Podemos agora determinar o  $\Delta V$  requerido.

Para  $\phi_1 = 0^\circ$  e  $\phi_2 = 0^\circ$ , recaímos na transferência de Hohmann .

### 3.4.3 Transferência de Hoelker e Silber ( bi – elíptica e tri – impulsiva )

Hoelker e Silber demonstraram no final da década de 50 que a transferência de Hohmann é ótima quando a razão entre as órbitas final e inicial é menor que 11,94. Para tanto utiliza-se uma transferência Bi-Elíptica e Tri-Impulsiva. A Figura 4 abaixo mostra este tipo de transferência.

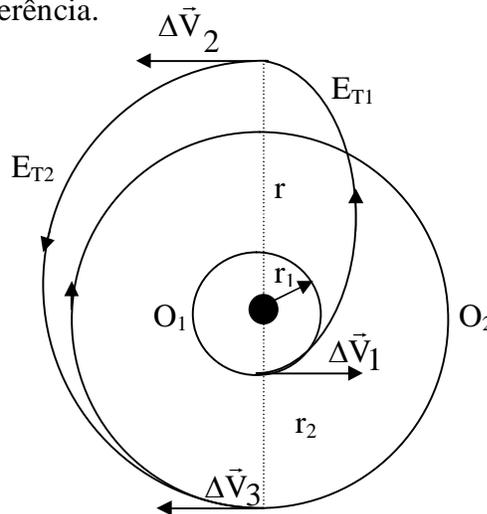


Figura 4 – Transferência Bi-Elíptica. Adaptado Prado A..F.B.A(2001)

Na Figura 4, temos que  $O_1$  é a órbita circular menor,  $O_2$  é a órbita circular maior,  $E_{T1}$  é a primeira elipse de transferência e  $E_{T2}$  é a segunda elipse de transferência.

Observando a figura vemos que  $r_1$  é o raio de órbita circular menor e também é a distância do pericentro da 1ª elipse de transferência ao planeta.,  $r_2$  é o raio da órbita circular maior e também é a distância do pericentro da 2ª elipse de transferência ao planeta, e  $r$  é a distância do apocentro da 2ª e 1ª elipse de transferência ao planeta.

O primeiro impulso ocorre no pericentro da 1ª elipse de transferência, sendo que a velocidade neste mesmo ponto na órbita circular é dada por :

$$V'_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad (3.29)$$

Neste mesmo ponto, na 1ª elipse de transferência, a velocidade é dada por :

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{2\mu}{r_1 + r}} \quad (3.30)$$

Nestas condições podemos calcular  $\Delta V_1$ .

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{2\mu}{r_1 + r}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad (3.31)$$

Desenvolvendo a expressão acima temos;

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{2\frac{r}{r_1}}{\frac{r}{r_1} + 1}} - 1 \right] \quad (3.32)$$

O segundo impulso ocorre no apocentro da 1ª elipse de transferência, sendo a velocidade do satélite neste ponto sendo dada por,

$$V'_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a_1}} \quad (3.33)$$

Substituindo na expressão acima por  $r = a_1(1 + e_1)$ , onde  $e_1$  é excentricidade da 1º elipse de transferência e  $a_1$  o semi-eixo maior, ficamos com,

$$V'_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{a_1(1+e_1)} - \frac{\mu}{a_1}} \quad (3.34)$$

Neste mesmo ponto (apocentro), a velocidade do satélite é :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{a_1(1+e_1)} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (3.35)$$

A velocidade  $V_2$  é a velocidade do satélite na segunda elipse de transferência.

Agora, podemos determinar a variação de velocidade.

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{a_1(1+e_1)} - \frac{\mu}{a_2}} - \sqrt{\frac{\mu}{a_1(1+e_1)} - \frac{\mu}{a_1}} \quad (3.36)$$

Finalmente o 3º impulso ocorre no pericentro da 2º elipse de transferência em sentido contrário a o movimento do satélite, com valor tal que permite o satélite ser lançado em órbita circular maior de raio  $r_2$ . A velocidade do satélite neste ponto da segunda elipse de transferência é dada por :

$$V'_3 = \sqrt{\frac{2\mu}{a_2(1-e_2)} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (3.37)$$

Na expressão acima  $a_2$  e  $e_2$  são o semi-eixo maior e excentricidade respectivamente

Na órbita circular de raio  $r_2$ , a velocidade do satélite é:

$$V_3 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad (3.38)$$

Portanto temos,

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu}{a_2(1-e_2)} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (3.39)$$

Com estes resultados, determinamos o valor de  $\Delta V_{total}$ .

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \quad (3.40)$$

Esta transferência torna-se mais eficiente, quanto maior é a distância  $r$ , pois assim temos um menor  $\Delta V$ .

Esta manobra é mais eficiente que a manobra de Hohmann, uma vez que o segundo impulso ocorre longe do centro de atração, onde a força de atração é mais fraca, diminuindo o combustível necessário. Devemos lembrar que a força é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre dois corpos.

O tempo total da manobra é a soma da metade dos períodos das órbitas de transferência (1° e 2° elipses).

Para a primeira elipse de transferência temos,

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{\mu}} \quad (3.41)$$

Mas,  $a_1 = \frac{r_1 + r}{2}$ , que substituída na equação (3.41) fornece:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(r_1 + r)^3}{8\mu}} \quad (3.42)$$

Desenvolvendo a expressão (3.42) obtemos,

$$T_1 = \frac{\pi(r + r_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\mu}} \quad (3.43)$$

Portanto o valor de  $T_1$  é dado por,

$$T_1 = \frac{\pi(r+r_1)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2\mu}} \quad (3.44)$$

Com relação à 2ª elipse de transferência, procedemos de maneira análoga, obtendo,

$$T_2 = \frac{\pi(r_2+r)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2\mu}} \quad (3.45)$$

Somando estes dois instantes de tempo, obtemos o tempo total.

$$T_{\text{TOTAL}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\mu}} \left[ (r_1+r)^{\frac{3}{2}} + (r_2+r)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.46)$$

#### 3.4.4 Transferência Bi-Parabólica

Quanto maior a distância  $r$  (distância do veículo ao foco) mais eficiente é a transferência. Isto se pensarmos  $r$  tendendo ao infinito.

A Figura 5 mostra este tipo de transferência.

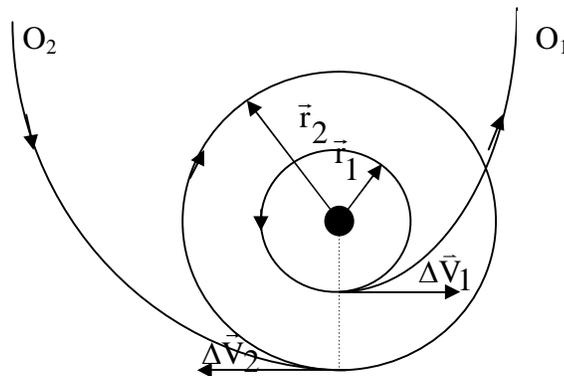


Figura 5 – Transferência Bi – Parabólica. Adaptado de Prado A. F. B. A (2001)

Na órbita circular de raio  $r_1$ , aplica-se um impulso na direção do movimento com valor  $\Delta V_1$  de maneira a colocar o satélite na órbita parabólica  $O_1$ .

Quando, teoricamente o veículo atinge, o infinito, é dado um impulso infinitesimal no satélite para colocá-lo em uma nova órbita parabólica  $O_2$ . Quando o satélite passar no periapsi da órbita parabólica  $O_2$ , novo impulso no valor  $\Delta V_2$  é dado ao satélite para colocá-lo na órbita circular maior (de raio  $r_2$ ).

Esta transferência na prática não se realiza, devido ao tempo de transferência necessário ser infinito.

### 3.4.5 Transferência de órbita, co-focais, coplanares e elípticas

Para este caso, utiliza-se a transferência de Hohmann, que é de máxima energia. O satélite é transferido de uma órbita elíptica para uma outra órbita elíptica, através de uma órbita elíptica intermediária de transferência.

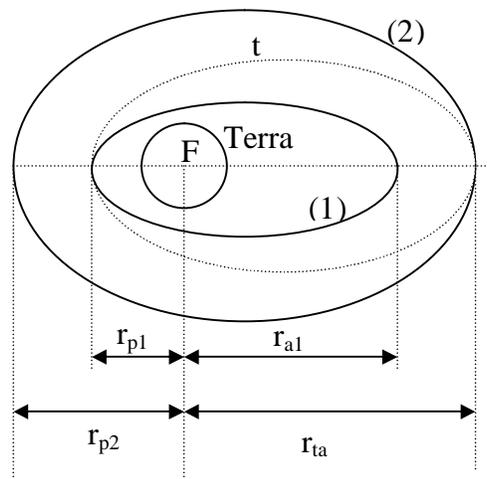


Figura 6 – Transferências entre órbitas elípticas coplanares

De acordo com a Figura 6, o satélite executa inicialmente uma órbita elíptica em torno da Terra (órbita (1)), sendo  $r_{p1}$  a distância do pericentro ao foco (F) e  $r_{a1}$  a distância do apocentro ao foco, ambas relativas à órbita (1). Em seguida o satélite é colocado em uma órbita elíptica de transferência (órbita t) que tangencia o pericentro da órbita (1). Para esta órbita de transferência temos que a distância ao foco é  $r_{p1}$  e a distância do apocentro ao foco é  $r_{ta}$ . Por fim o satélite é lançado à órbita desejada (2), onde  $r_{p2}$  é a distância do pericentro ao foco e  $r_{a2} = r_{ta}$  é a distância do apocentro ao foco.

Vamos analisar agora as velocidades envolvidas na transferência.

Para a órbita inicial (1) no pericentro, temos,

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p1}} - \frac{\mu}{a}} \quad (3.47)$$

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p1}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{a1}}} \quad (3.48)$$

Para a órbita de transferência, de maneira análoga, no pericentro temos:

$$V_{pt} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p1}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{ta}}} \quad (3.49)$$

onde  $a_T = \frac{r_{p1} + r_{ta}}{2}$ , onde  $a_T$  é o semi-eixo maior da elipse de transferência.

Quando o satélite passa da órbita (1) para a órbita de transferência, a variação de velocidade é calculada através da equação:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p1}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{ta}}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_{p1}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{a1}}} \quad (3.50)$$

Considerando agora o apocentro da elipse de transferência, a velocidade o satélite é determinada através da equação,

$$V_{at} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{ta}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{ta}}} \quad (3.51)$$

No mesmo ponto, mas com relação à órbita (2), temos,

$$V_{a2} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{ta}} - \frac{2\mu}{r_{p2} + r_{ta}}} \quad (3.52)$$

Portanto a variação de velocidade será:

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{ta}} - \frac{2\mu}{r_{p2} + r_{ta}}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_{ta}} - \frac{2\mu}{r_{p1} + r_{ta}}} \quad (3.53)$$

Portanto o incremento total na velocidade para se transferir da órbita (1) para a órbita (2) será :

$$\Delta V = (V_{pt} - V_{p1}) + (V_{a2} - V_{a1}) \quad (3.54)$$

Para o cálculo do tempo gasto na transferência devemos considerar que para a elipse de transferência, o período, é dado por,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a_t^3}{\mu}} \quad (3.55)$$

O tempo de transferência é metade deste valor. Podemos escrever, portanto que,

$$t = \pi \sqrt{\frac{(r_{p1} + r_{ta})^3}{2^3 \mu}} = \frac{\pi [(r_{p1} + r_{ta})/2]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \quad (3.56)$$

### 3.4.6 Transferência entre órbitas elípticas de mesma dimensão, coplanares e não coaxiais

O objetivo desta manobra é alterar o argumento do pericentro.

Consiste em aplicar um incremento no apocentro da órbita inicial, permitindo a obtenção de uma órbita circular de raio  $r_a$ . Ao atingir o outro apocentro aplica-se um segundo impulso no sentido contrário ao movimento que fará com que o satélite entre na segunda órbita.

No apocentro da órbita inicial temos:

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{r_a}} \quad (3.57)$$

Neste mesmo ponto, na órbita circular, temos:

$$V_1' = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \quad (3.58)$$

Portanto temos o primeiro impulso:

$$\Delta V = V_1 - V_1' \quad (3.59)$$

A outra variação é igual à primeira, mas em direção diferente. Para a variação total,

$$\Delta V_T = 2|\Delta V| \quad (3.60)$$

A Figura 7 mostra a transferência

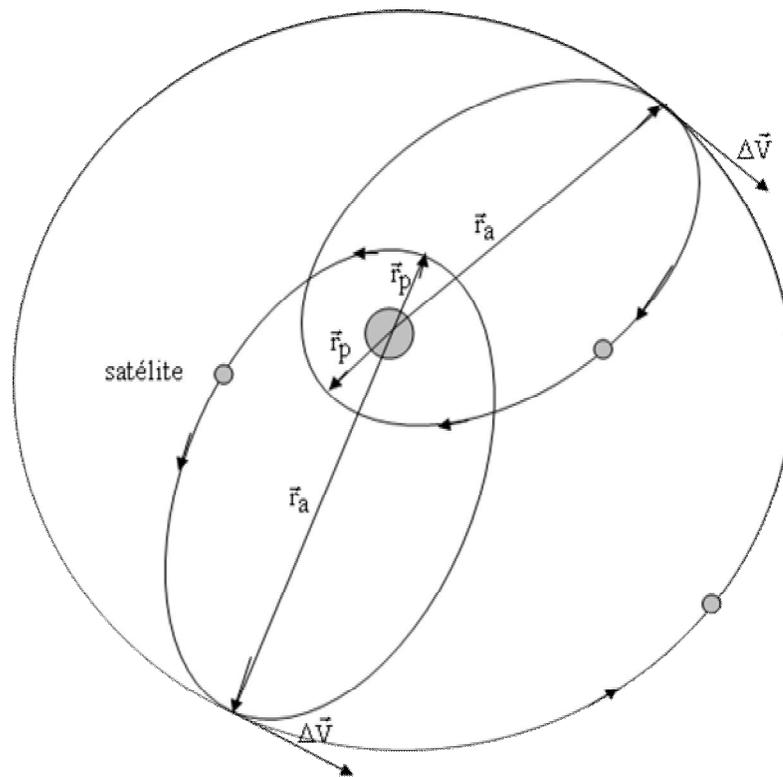


Figura 7 – Transferência entre órbitas elípticas de mesma dimensão coplanares e não coaxiais.

### 3.4.7 Transferência entre órbitas circulares não coplanares de mesmo raio

No caso da órbita inicial estar inclinada em relação à final de um ângulo  $\Delta\alpha$ , é necessário uma componente de impulso perpendicular ao plano orbital, para transferir o satélite da órbita inicial para a final. A magnitude do vetor velocidade se mantém.

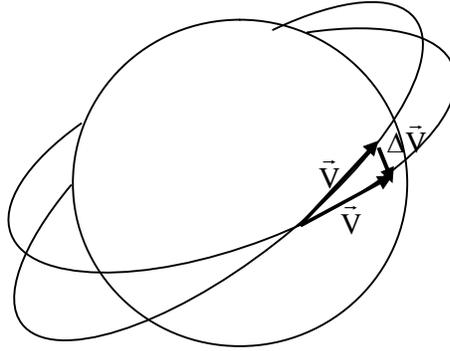


Figura 8– Transferência entre órbitas circulares não coplanares de mesmo raio

As velocidades inicial e final, idênticas em módulo, junto com  $\Delta\vec{V}$  necessário, formam um triângulo isósceles.

A Figura 9 mostra o diagrama esquemático do triângulo isósceles.

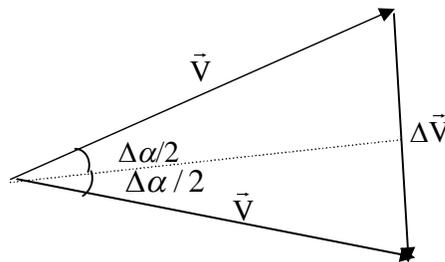


Figura 9 – Diagrama esquemático de velocidades

O triângulo isósceles é dividido em dois triângulos retângulos congruentes. Da trigonometria temos que.

$$\text{sen} \frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\frac{\Delta\alpha}{2}}{V} \quad (3.61)$$

A velocidade orbital diminui com a altitude e, portanto a energia necessária para que seja efetuada a transferência diminui quando a altitude na qual for efetuada aumenta. Por outro lado a energia necessária para se colocar um veículo numa órbita de transferência aumenta com a altitude.

Deve existir uma altitude ótima na qual a soma dessas duas energias é um mínimo.

A Figura 10 mostra a manobra de transferência.

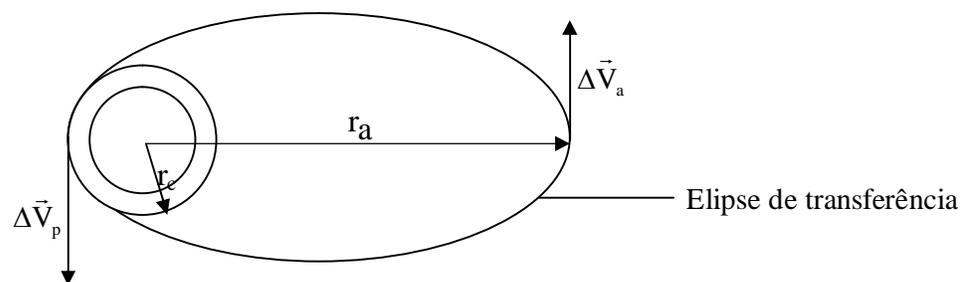


Figura 10 – Vista da manobra de transferência

O satélite está inicialmente em uma órbita circular de raio  $r_c$ . Observando a figura 10, vemos que  $r_c$  é também a distância do pericentro da elipse de transferência.

No pericentro da elipse de transferência a velocidade do satélite é

$$V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_c} - \frac{2\mu}{r_c + r_a}} \quad (3.62)$$

Na órbita circular a velocidade do satélite é:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}} \quad (3.63)$$

A variação da velocidade do satélite é dada por:

$$V_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_c} \left[ \left( \frac{2r_a}{r_c} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1 + \frac{r_a}{r_c}} \right]} \quad (3.64)$$

No pericentro e no apocentro da elipse de transferência, as velocidades são dadas por:

$$V_p^2 = \mu \left( \frac{2}{r_c} - \frac{1}{a} \right) \quad \text{e} \quad V_a^2 = \mu \left( \frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right) \quad (3.65)$$

Podemos escrever portanto.

$$V_p^2 - V_a^2 = 2\mu \left( \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (3.66)$$

Como o momento angular se conserva durante o movimento na elipse de transferência, temos,

$$V_p r_c = V_a r_a \quad (3.67)$$

Das equações (3.65) e (3.67) chegamos ao valor da velocidade  $V_a$  no apocentro da elipse de transferência.

$$V_a = \frac{2V_c^2}{V_p} - V_p \quad (3.68)$$

No apocentro da elipse de transferência, é feita uma correção na inclinação orbital, por meio de um incremento impulsivo de velocidade  $\Delta V_a$ . O valor deste incremento é:

$$\Delta V_a = 2V_a \text{sen} \frac{\Delta \alpha}{2} \quad (3.69)$$

Durante o incremento a velocidade  $V_a$  não se altera.

O satélite agora se encontra numa segunda elipse de transferência e atingirá o pericentro desta com velocidade original  $V_p$ . A 2ª órbita circular tangência a 2ª elipse de transferência no pericentro.

Neste ponto é aplicado no satélite um incremento adicional,  $\Delta V_p$ , oposto ao  $\Delta V_p$  inicial, para colocar o satélite na 2ª órbita circular.

O  $\Delta V$  total necessário para a manobra é,

$$\Delta V = 2|\Delta V_p| + |\Delta V_a| \quad (3.70)$$

A expressão acima desenvolvida resulta:

$$\Delta V_{\text{TOTAL}} = 2V_c \left[ \left( \frac{r_a}{r_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_a}{r_c} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} - 1 + \left\{ 2 \left[ \left( \frac{1 + \frac{r_a}{r_c}}{\frac{2r_a}{r_c}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{\frac{2r_a}{r_c}}{1 + \frac{r_a}{r_c}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \text{sen} \frac{\Delta\alpha}{2} \right\} \right] \quad (3.71)$$

Derivando a expressão (3.71) em relação a  $r_a$  encontramos:

$$\frac{dV_{\text{TOTAL}}}{dr_a} = \frac{1}{2r_c} \sqrt{\frac{\mu}{r_c}} \left[ \frac{1}{2} \frac{r_a}{r_c} \left( 1 + \frac{r_a}{r_c} \right) \right]^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{r_a}{r_c} - \left( 1 + \frac{2r_a}{r_c} \right) \text{sen} \frac{2\Delta\alpha}{2} \right] \quad (3.72)$$

Para uma transferência ótima, e, portanto com mínimo de energia despendida, a derivada calculada acima deve se nula.

Observando atentamente a equação, notamos que,

$$\frac{r_a}{r_c} - \left( 1 + \frac{2r_a}{r_c} \right) \text{sen} \frac{\Delta\alpha}{2} = 0 \quad (3.73)$$

o que resulta,

$$\frac{r_a}{r_c} = \frac{\text{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}}{1 - 2\text{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}} \quad (3.74)$$

Uma condição ótima é que  $\frac{r_a}{r_c} = 1$ , com isso encontramos.

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}}{1 - 2\operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2}} = 1 \quad (3.75)$$

Resolvendo esta equação trigonométrica encontramos  $\Delta\alpha \cong 39^\circ$ . Outra condição ótima seria para  $\frac{r_a}{r_c}$  tendendo ao infinito, quando então  $\frac{\Delta\alpha}{2}$  tende para  $30^\circ$  ou  $\Delta\alpha$  tende para  $60^\circ$ .

Portanto a técnica de transferência bi-elíptica é aplicada quando  $39^\circ \leq \Delta\alpha \leq 60^\circ$ .

A condição ótima acima é conveniente teoricamente, pois sendo os raios iguais, não haveria transferência, o satélite estaria na mesma órbita.

## 4 ESTUDO DO PROBLEMA

### 4.1 A MANOBRA PROPOSTA

A manobra proposta consiste em considerar inicialmente um satélite orbitando a Terra. Quando o satélite estiver no pericentro de uma trajetória de transferência aplica-se um empuxo colocando o satélite nesta trajetória que o levará até a esfera de influência da Lua. A seguir em um determinado ponto (obtido por um processo numérico levando em conta otimização de combustível) aplica-se um empuxo necessário para o satélite entrar em órbita hiperbólica ao redor da Lua.

No vértice da órbita hiperbólica aplica-se um outro empuxo para colocar o satélite em uma elipse de transferência que o levará até a órbita lunar projetada. Para o satélite entrar na órbita lunar projetada é aplicado mais um empuxo no satélite. Para realizar a manobra de volta para a Terra, aplica-se um empuxo no satélite de maneira a colocá-lo novamente na elipse de transferência que o levará ao vértice (perilúnio) da trajetória hiperbólica. Neste ponto, aplica-se um empuxo para colocá-lo na trajetória hiperbólica que o levará a ponto de entrada da esfera de influência (que é determinado numericamente). Neste caso, o raio da perilúnio é maior que o raio da órbita circular final desejada. Caso o raio do perilúnio seja igual ao raio da órbita final desejada, não há a necessidade de uma órbita de transferência para a órbita final.

No ponto de entrada da esfera de influência o satélite é colocado na trajetória de transferência geocêntrica. No pericentro desta órbita geocêntrica aplica-se um novo impulso para colocá-lo na órbita inicial em torno da Terra completando a missão.

Serão considerados os seguintes casos:

- 1) As órbitas são coplanares.
- 2) A órbita do satélite não é coplanar com a órbita da Lua.
- 3) Considerações sobre a influência do achatamento da Terra e da influência de um terceiro corpo.

Para o caso da perturbação do 3º corpo, Lua, por exemplo, será considerado o modelo de dupla média, ou seja, serão consideradas médias em relação aos termos de curto período com relação ao corpo perturbado e ao corpo perturbador.

Com relação a influência do achatamento da Terra, será considerada a média em relação aos termos de curto período do corpo perturbado.

Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando modelos de dupla média, como os trabalhos de Roger Broucke (1992) e de Prado (2003).

Na utilização da função perturbadora serão considerados apenas os termos seculares.

#### 4.2 INFLUÊNCIA DO ACHATAMENTO DA TERRA

Sabemos que o campo gravitacional Terrestre influencia a órbita de um satélite terrestre. Este satélite estará sobre a influência do potencial da Terra, levando em conta a distribuição não uniforme de massa da Terra.

De maneira geral, no caso de um satélite artificial em órbita próxima de um planeta de forma não esférica o potencial (ou função potencial) pode ser dado por:

$$U=U_0+R \tag{4.1}$$

em que  $U_0$ , é a função potencial devido a um ponto de massa, considerando o problema de dois corpos. Supõe-se que a massa do corpo esteja concentrada em seu centro, daí o termo ponto de massa. O termo  $R$  da equação (4.1) é uma função potencial devido a presença de outras massas atrativas, ou devido ao achatamento do planeta em torno do qual o satélite gira.

No presente tópico é feito um estudo da influência do achatamento do planeta (no caso a Terra). Considerando o satélite em órbita em torno da Terra, em trajetória elíptica, sendo os elementos orbitais  $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0$  e  $t_0$  considerados no tempo  $t_0$ .

Estes elementos são chamados de osculadores enquanto a órbita elíptica é denominada de elipse osculadora.

Devido a influência da função perturbadora num instante posterior  $t_1$ , os elementos orbitais serão  $a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, e t_1$ , onde  $(a_1 - a_0), (e_1 - e_0)$  etc. são as perturbações dos elementos no intervalo  $(t_1 - t_0)$ .



O ângulo formado pela linha que passa pelo perigeu(AA') e o raio vetor do satélite é a anomalia verdadeira f.

Podemos relacionar o raio vetor e a declinação  $\delta$  à anomalia verdadeira pelas relações,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \quad (4.2)$$

$$\sin\delta = \sin i \sin(f + \omega) \quad (4.3)$$

A expressão (4.3) é obtida do triângulo esférico NS'Q.

A equação do movimento do satélite passa a ser

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U \quad (4.4)$$

Sendo U o potencial da Terra.

Se o planeta em torno do qual a satélite órbita tem simetria axial, então seu potencial em um ponto externo é dado por Roy (1988):

$$U = \frac{Gm}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin\phi) \right] \quad (4.5)$$

onde r é a distância do ponto ( no caso o satélite) a centro da massa do corpo(no caso a Terra), m é a massa do corpo (Planeta Terra) e  $\phi$  é o ângulo formado pelo raio vetor do Satélite e o plano do equador e  $P_n(\sin\phi)$  é o polinômio de Legendre de ordem n em  $\sin\phi$ . Mas como  $\phi = \delta$ , e considerando  $\mu = Gm$ , a equação (4.5) fica,

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin(\delta)) \right] \quad (4.6)$$

Utilizando a equação (4.5) para o potencial gravitacional da Terra nós estamos assumindo que os efeitos devido a elipticidade da Terra no equador não estão presentes, embora nós estamos admitindo os efeitos da assimetria entre os hemisférios Norte e Sul.

Após alguns desenvolvimentos podemos escrever a equação (4.5) da forma,

$$U = U_0 + \left[ -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin(\delta)) \right] \quad (4.7)$$

Em uma forma mais compacta temos que  $U = U_0 + F$ , onde  $F$  é a função perturbadora dada por,

$$F = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin(\delta)) \quad (4.8)$$

Nas expressões acima  $J_n$  são constantes.

Desenvolvendo o somatório da equação (4.8), obtemos:

$$F = \frac{-\mu}{r} \left[ J_2 \left( \frac{R}{r} \right)^2 P_2(\sin \delta) + J_3 \left( \frac{R}{r} \right)^3 P_3(\sin \delta) + J_4 \left( \frac{R}{r} \right)^4 P_4(\sin \delta) + \dots \right] \quad (4.9)$$

Após mais alguns desenvolvimentos da expressão acima, nós obtemos:

$$F = \mu \left\{ \frac{3 J_2 R^2}{2 a^3} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i + \frac{1}{2} \sin^2 i \cos 2(f + \omega) \right] - \frac{J_2 R^3}{a^4} \left( \frac{a}{r} \right)^4 \left[ \left( \frac{15}{8} \sin^2 i - \frac{3}{2} \right) \sin(f + \omega) - \frac{5}{8} \sin^2 i \cdot \sin 3(f + \omega) \right] \sin i + \dots \right\} \quad (4.10)$$

A anomalia verdadeira que aparece na expressão acima pode ser facilmente ser transformada em anomalia média  $M$ , que é uma função linear do tempo no movimento não perturbado.

Para isto, partimos do fato que,

$$r^2 \dot{f} = h = na^2 \sqrt{1-e^2} \quad (4.11)$$

e portanto,  $\frac{df}{dt} = \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}$  e sendo  $M = n(t - \tau)$ , chegamos à equação,

$$\frac{df}{dM} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} \quad (4.12)$$

As quantidades  $r/a$  e  $f$  na função perturbadora  $F$  são funções de  $e$  e  $M$  somente e são periódicas em relação a  $M$ .

O objetivo como relação ao achatamento da Terra é determinarmos as partes seculares da função perturbadora em termos das constantes  $J_2$  e  $J_4$ . Para isto tomamos valor médio em relação aos termos em  $j_2$  e  $j_4$  através da expressão,

$$\bar{F} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F dM \quad (4.13)$$

Com o cálculo da média, eliminamos termos de curto período ficando apenas com termos seculares.

Considerando a parte da função perturbadora em  $J_2$  e efetuando o cálculo da média, obtemos,

$$F_2 = \frac{3}{2} \frac{\mu J_2 R^2}{a^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \text{sen}^2 i \right) (1-e^2)^{-3/2} \quad (4.14)$$

Sendo,  $a$  o semi-eixo maior da órbita do satélite e  $e$  a excentricidade da órbita do satélite.

Para determinação do termo em  $J_4$ , utiliza-se a equação (4.9) obtendo a expressão,

$$F_4 = \frac{-\mu J_4 R^4}{a^5} \cdot \frac{1}{8} \left( 35 \text{sen}^4 i \left( \frac{a}{r} \right)^5 \text{sen}^4(\omega+f) - 30 \text{sen}^2 i \left( \frac{a}{r} \right)^5 \text{sen}^2(\omega+f) + 3 \left( \frac{a}{r} \right)^5 \right) \quad (4.15)$$

Utilizando o cálculo da média e desenvolvendo a expressão acima obtemos,

$$F_4 = \frac{-3}{8} \frac{\mu J_4 R^4}{a^5} \left( \frac{35}{8} \text{sen}^4 i - 5 \text{sen}^2 i + 1 \right) \frac{(1-e^2)^{-7/2} (2+3e^2)}{2} + \frac{3}{8} \frac{\mu J_4 R^4}{a^5} \left( \frac{-35}{6} \text{sen}^4 i - 5 \text{sen}^2 i \right) \frac{3e^2 \cos 2\omega}{4(1-e^2)^{-7/2}} \quad (4.16)$$

Considerando apenas os termos seculares da equação acima temos,

$$F_4 = \frac{-3}{8} \frac{\mu J_4 R^4}{a^5} \left( \frac{35}{8} \text{sen}^4 i - 5 \text{sen}^2 i + 1 \right) \frac{(1-e^2)^{-7/2} (2+3e^2)}{2} \quad (4.17)$$

Adicionando  $F_2$  e  $F_4$ , temos,

$$F = \frac{3R^2 \mu \left( \frac{2}{3} a^2 (-1+e^2) J_2 (1+3 \cos 2i) - (2+3e^2) J_4 R^2 \right) \left( 1 - 5 \operatorname{sen} i^2 + \frac{35 \operatorname{sen} i^4}{8} \right)}{16 a^5 (1-e^2)^{7/2}} \quad (4.18)$$

Com a utilização das equações planetárias de Lagrange podemos ter uma idéia de como os elementos orbitais variam. Segue abaixo as equações planetárias de Lagrange:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)}{na^2 e} \frac{\partial F}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial F}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial F}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial F}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial F}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial F}{\partial e} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{(1-e^2)}{na^2 e} \frac{\partial F}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial a} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Substituindo nas equações acima a equação (4.18) e posteriormente integrando em relação ao tempo obtemos,

$$a = a_0$$

$$e = e_0$$

$$i = i_0$$

$$\Delta\omega = - \frac{(3R^2 t \mu (-384a^2 J_2 + 768a^2 e^2 J_2 - 384a^2 e^4 J_2 + 540J_4 R^2 + 675e^2 J_4 R^2 - 20(32a^2 (-1+e^2)^2 J_2 - (52+63e^2) J_4 R^2) \cos 2i + 35(28+27e^2) J_4 R^2 \cos 4i))}{1024a^7 (-1+e^2)^4 n} \quad (4.20)$$

$$\Delta\Omega = \frac{3R^2 t \mu \cos i \left( \begin{array}{l} -32a^2 (-1+e^2)^2 J_2 + 5(2+3e^2) J_4 R^2 + \\ 35(2+3e^2) J_4 R^2 \cos 2i \end{array} \right)}{64a^7 (-1+e^2)^4 n} \quad (4.21)$$

$$\Delta M = n t \left( \begin{array}{l} 1 - \frac{3J_2 R^2 (1+3\cos 2i)}{8a^2 (1-e^2)^{3/2}} + \frac{9J_4 R^4 (9+20\cos 2i+35\cos 4i)}{512a^4 (1-e^2)^{5/2}} + \\ \frac{9(2+3e^2) J_4 R^4 (9+20\cos 2i+35\cos 4i)}{1024a^4 (1-e^2)^{7/2}} \end{array} \right) \quad (4.22)$$

Analisando estas equações, verifica-se que quando a perturbação é secular o argumento do perigeu e a longitude do nodo ascendente variam linearmente com o tempo.

#### 4.3 PERTURBAÇÃO DO TERCEIRO CORPO

Para o estudo da perturbação do terceiro corpo será utilizada a função perturbadora desenvolvida em expansão polinomial de Legendre até a quarta ordem. A Figura 12 mostra o corpo perturbador de massa  $m'$  e o corpo perturbado de massa  $m$  em suas órbitas.

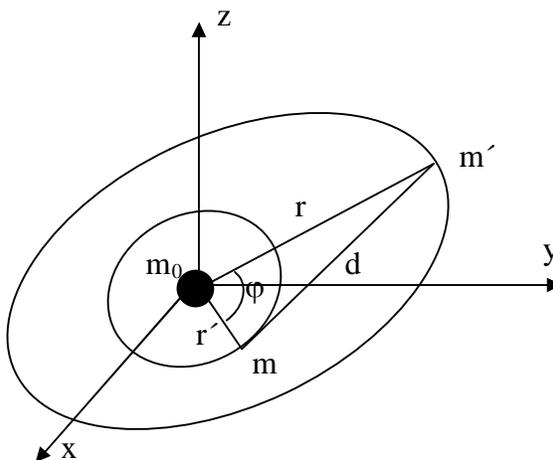


Figura 12 – Corpo perturbador e perturbado em suas respectivas órbitas. Na figura,  $m$  é a massa do corpo perturbado,  $m'$  é a massa do corpo perturbador e  $m_0$  é a massa do corpo central

Neste estudo é assumido que o corpo perturbador (Lua) se encontra a uma distância muito maior do corpo perturbado (satélite), ou seja  $r' > r$ , e que também o corpo perturbador se encontra no plano equatorial da Terra. Na figura 12 o ângulo formado pelos raios vetores  $r$  e  $r'$  é  $\varphi$ ,  $m$  é a massa do corpo perturbado,  $m'$  é a massa do corpo perturbador e  $m_0$  é a massa do corpo central no caso a Terra, e  $d$  é a distância entre o corpo perturbador e o perturbado. A função perturbadora é dada por (Broucke, 1992):

$$R = \frac{\mu'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - rr' \cos \varphi}} \quad (4.23)$$

Desenvolvida em polinômios de Legendre a função se torna,

$$R = \frac{\mu'}{r'} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n \cos \varphi, \text{ onde } \mu' = \frac{m'}{m' + m_0} \quad (4.24)$$

Como o desenvolvimento é até a quarta ordem, para o polinômio de Legendre temos,

$$\left. \begin{aligned} P_2(\cos \varphi) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \varphi - 1) \\ P_3(\cos \varphi) &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) \\ P_4(\cos \varphi) &= \frac{1}{8} (35 \cos^4 \varphi - 30 \cos^2 \varphi + 3) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

O plano de órbita do satélite é o plano fundamental e consideramos o sistema de coordenadas perifocal, onde o eixo  $x'$  é direcionado para o pericentro da órbita, o eixo  $y'$  está a  $90^\circ$  de  $x'$  na direção do movimento do satélite e o eixo  $z'$  é perpendicular ao plano formado pelos outros dois eixos, ou seja perpendicular ao plano de órbita. Entretanto é conveniente que seja feita uma mudança do sistema perifocal para o sistema geocêntrico equatorial utilizando matrizes de rotação. Sendo assim poderemos obter as seguintes relações:

Para o corpo perturbado,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos\Omega\cos(\omega+f) - \sin\Omega\sin(\omega+f)\cos i \\ \frac{y}{r} &= \sin\Omega\cos(\omega+f) + \cos\Omega\sin(\omega+f)\cos i \\ \frac{z}{r} &= \sin(\omega+f)\sin i \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Para o corpo perturbador,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x'}{r'} &= \cos\Omega'\cos(\omega'+f') - \sin\Omega'\sin(\omega'+f')\cos i' \\ \frac{y'}{r'} &= \sin\Omega'\cos(\omega'+f') + \cos\Omega'\sin(\omega'+f')\cos i' \\ \frac{z'}{r'} &= \sin(\omega'+f')\sin i' \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Como a órbita do corpo perturbador está no plano do equador, devemos ter  $\Omega' = 0$  e  $i' = 0$ .

Podemos agora determinar o  $\cos\varphi$  através da relação,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r \cdot r'} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'}{r \cdot r'} \quad (4.28)$$

Substituindo o conjunto de equações (4.26) e (4.27) na equação (4.28), e realizando algumas simplificações, obtemos,

$$\cos\varphi = \alpha \cos f + \beta \sin f \quad (4.29)$$

onde  $\alpha = \cos\omega \cos(\Omega - f' - \omega') - \cos i \sin(\Omega - f' - \omega')$  e

$$\beta = -\sin\omega \cos(\Omega - f' - \omega') - \cos i \cos\omega \sin(\Omega - f' - \omega')$$

O próximo passo agora, é determinar os valores de  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$  da função perturbadora. Para tanto, devemos realizar o cálculo de dupla –média para estas partes da função perturbadora. Primeiramente determinamos a média com relação ao corpo perturbado e depois em relação ao corpo perturbador. Isto é para eliminar termos de curto período. Para tanto é conveniente que se faça as transformações para anomalia excêntrica, de acordo com as relações (4.30), para o corpo perturbado e para o corpo perturbador.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} f &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} \cdot \operatorname{sen} E \\ \cos f &= \frac{\cos E - e}{1-e\cos E} \\ \frac{r}{a} &= 1-e\cos E \\ dM &= (1-e\cos E)dE \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

#### 4.3.1 Cálculo de $R_2$

Para o cálculo de  $R_2$ , temos,

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\mu'}{r'} \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cdot \cos^2 \varphi - 1), \text{ que pode ser escrita como,} \\ R_2 &= \frac{a^2 n'^2 \mu'}{2} \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \left( \frac{r}{a} \right)^2 (3 \cdot \cos^2 \varphi - 1) \end{aligned} \quad (4.31)$$

#### 4.3.2 Cálculo de $R_3$

Para o cálculo de  $R_3$  temos a seguinte expressão:

$$R_3 = \frac{\mu' n'^2 a^3}{2a'} \left( \frac{a'}{r'} \right)^4 \left( \frac{r}{a} \right) (5 \cdot \cos^2 \varphi - 3 \cos \varphi) \quad (4.32)$$

#### 4.3.3 Cálculo de $R_4$

Para o cálculo de  $R_4$  temos,

$$R_4 = \frac{\mu'}{r'} \left( \frac{r}{r'} \right)^4 \frac{1}{8} (35 \cos^4 \varphi - 30 \cos^2 \varphi + 3) \text{ que pode se escrita,}$$

$$R_4 = \frac{\mu' n'^2 a^4}{8a'^2} \left(\frac{a'}{r'}\right)^5 \left(\frac{r}{a}\right)^4 (35 \cos^4 \varphi - 30 \cos^2 \varphi + 3) \quad (4.33)$$

A função perturbadora é determinada através da soma de  $R_2, R_3$  e  $R_4$ .

O APÊNDICE A apresenta as expressões de  $R_2, R_3, R_4$  e da função perturbadora  $R$  já desenvolvida.

Separando a parte secular da parte de longo período de  $R$ , e simplificando, obtemos:

$$R = \frac{1}{262144a'^2} (a^2 (1024(2+3e^2)(1+3\cos[2i]a'^2(8+12e'+15e'^4)+9a^2. \\ (8+40e^2+15e^4)(9+20\cos[2i]+35\cos[4i](8+40e'^2+105e'^4))n'^2\mu') \quad (4.34)$$

Utilizando as equações planetárias de Lagrange (4.19) para  $R$  e integrando, obtemos:

$$a = a_0, \quad e = e_0 \quad e i = i_0$$

$$\Delta\Omega = \frac{1}{262144\sqrt{1-e^2}na'^2} (t \csc[i] (-6144(2+3e^2) \operatorname{sen}[2i](a')^2. \\ (8+12e'+15e'^4) - 180a^2(8+40e^2+15e^4)(2\operatorname{sen}[2i]+7\operatorname{sen}[4i]). \\ (8+40e'^2+105e'^4))n'^2\mu') \quad (4.35)$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{262144\sqrt{1-e^2}na'^2} (t \left(\frac{1}{e}((1-e^2)(6144e(1+3\cos(2i)a'^2(8+12e'+15e'^4)+ \\ 180a^2e(4+3e^2)(9+20\cos[2i]+35\cos[4i](8+40e'^2+105e'^4))) - \cos[i](-6144. \\ (2+3e^2)\operatorname{sen}[2i]a'^2(8+12e'+15e'^4) - 180a^2(8+40e^2+15e^4)(2\operatorname{sen}[2i]+7\operatorname{sen}[4i]. \\ (8+40e'^2+105e'^4)))n'^2\mu') \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
\Delta M = t(n + \frac{1}{262144na'^2} &((-36a^2(8 + 40e^2 + 15e^4(9 + 20\cos(2i) + 35\cos 4i). \\
(8 + 40e'^2 + 105e'^4) - \frac{1}{e} &((1 - e^2)(6144e(1 + 3\cos[2i])a'^2(8 + 12e' + 15e'^4) + \\
180a^2e(4 + 3e^2)(9 + 20\cos[2i] &+ 35\cos[4i](8 + 40e'^2 + 105e'^4))) - 4(1024. \\
(2 + 3e^2)(1 + 3\cos[2i])a'^2 &(8 + 12e' + 15e'^4 + 9a^2(8 + 40e^2 + 15e^4(9 + \\
20\cos[2i] + 35\cos[4i]))(8 + &40e'^2 + 105e'^4))) n'^2 \mu') \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Notamos também que na perturbação do 3º corpo a variação do argumento do perigeu e da longitude do nodo ascendente variam linearmente com o tempo.

## 5 TRANSFERÊNCIA DE SATÉLITE EM ÓRBITA CIRCULAR NA TERRA PARA ÓRBITA CIRCULAR AO REDOR DA LUA

### 5.1 INTRODUÇÃO

Para a transferência, inicialmente o satélite orbita ao redor da Terra em órbita circular e através de uma trajetória de transferência é levado à Lua onde entra em órbita circular ao redor da mesma. É assumido que essas órbitas se realizem no mesmo plano de órbita da Lua em torno da Terra. Deve ser observado para a transferência, as condições de inserção no ponto de inserção. O ponto de inserção é o ponto onde a viagem do satélite é iniciada na trajetória de transferência, sendo as condições de inserção a velocidade, raio vetor que posiciona o satélite no ponto de inserção, ângulo de trajetória de vôo (também chamado ângulo de ataque) do satélite e também o ângulo de fase, que é o ângulo formado entre o raio vetor e a linha que liga a posição da Lua à Terra no momento da inserção.

Para este estudo a Terra e a Lua são consideradas esferas homogêneas, a Lua orbita em torno da Terra em movimento circular, o efeito do Sol e de outros astros são desprezíveis, os impulsos necessários para que seja feita manobra de transferência do satélite não causam mudanças significativas na massa do satélite.

### 5.2 DESCRIÇÃO DA TRANSFERÊNCIA

Inicialmente o satélite orbita ao redor da Terra dentro da esfera de influência da Terra, aqui o efeito da Lua é desprezível.

Posteriormente o Satélite entrará em movimento dentro da esfera de influência da Lua sendo o efeito da Terra desprezível.

Baseado em Roy (1988), podemos obter o raio da esfera de influência.

A Figura 13 mostra três corpos de massas  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ .

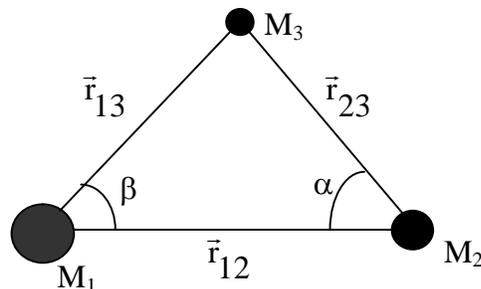


Figura 13 - Sistema de corpos para a determinação da esfera de influência

Vamos supor que o corpo de massa  $M_1$  seja a Terra, o corpo de massa  $M_2$  seja a Lua e o corpo de massa  $M_3$  seja o satélite artificial. As equações de movimento com respeito a  $M_3$  são dadas por,

$$\ddot{\vec{r}}_{13} + G \left( \frac{M_1 + M_3}{(r_{13})^3} \right) \vec{r}_{13} = -GM_2 \left( \frac{\vec{r}_{23}}{(r_{23})^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{(r_{12})^3} \right) \quad (5.1)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{23} + G \left( \frac{M_1 + M_3}{(r_{23})^3} \right) \vec{r}_{23} = -GM_1 \left( \frac{\vec{r}_{13}}{(r_{13})^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{(r_{12})^3} \right) \quad (5.2)$$

Para a definição de esfera de influência devemos considerar as razões entre as forças perturbativas e as atrações gravitacionais referentes a cada uma das equações de movimento do terceiro corpo (satélite). Ao longo da superfície da esfera de influência a razão entre a perturbação devido a  $M_1$  e a aceleração devido a  $M_2$  é igual a razão de perturbação de  $M_2$  pela aceleração devida a  $M_1$ , isto é :

$$\frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{A}_2|} = \frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{A}_1|} \quad (5.3)$$

sendo que as razões  $|\vec{P}_1|/|\vec{A}_2|$  e  $|\vec{P}_2|/|\vec{A}_1|$  nos fornecem o valor da perturbação sofrida pelo corpo de massa  $M_1$  e a razão de perturbação de  $M_2$ , respectivamente.

As grandezas  $\vec{A}_2$  e  $\vec{A}_1$  são as acelerações gravitacionais devido a  $M_2$  e a  $M_1$  respectivamente e,  $\vec{P}_1$  e  $\vec{P}_2$  são as perturbações devido a  $M_1$  e a  $M_2$  respectivamente.

Se considerarmos que  $M_3 \ll M_2$  e  $M_1 \gg M_2$ , a razão entre as perturbação de  $M_2$  e a aceleração gravitacional devido a  $M_1$  é dada por,

$$\frac{|\bar{P}_2|}{|\bar{A}_1|} = \frac{M_2 \left[ \left( \frac{r_{23}}{(r_{23})^3} + \frac{r_{12}}{(r_{12})^3} \right) \left( \frac{r_{23}}{(r_{23})^3} + \frac{r_{12}}{(r_{12})^3} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left( \frac{M_1}{(r_{13})^2} \right)} \quad (5.4)$$

A razão entre a perturbação de  $M_1$  e a aceleração gravitacional devido a  $M_2$  é dada por:

$$\frac{|\bar{P}_1|}{|\bar{A}_2|} = \frac{M_1 \left[ \left( \frac{r_{13}}{(r_{13})^2} - \frac{r_{12}}{(r_{12})^3} \right) \left( \frac{r_{13}}{(r_{13})^2} - \frac{r_{12}}{(r_{12})^3} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left( \frac{M_2}{(r_{23})^2} \right)} \quad (5.5)$$

sendo que,

$$-\bar{A}_1 = G M_1 \left( \frac{\bar{r}_{13}}{(r_{13})^3} \right) \quad (5.6)$$

$$-\bar{A}_2 = G M_2 \left( \frac{\bar{r}_{23}}{(r_{23})^3} \right) \quad (5.7)$$

$$\bar{P}_1 = -GM_1 \left( \frac{\bar{r}_{13}}{(r_{13})^3} + \frac{\bar{r}_{12}}{(r_{12})^3} \right) \quad (5.8)$$

$$\bar{P}_2 = -G M_2 \left( \frac{\bar{r}_{23}}{(r_{23})^3} - \frac{\bar{r}_{12}}{(r_{12})^3} \right) \quad (5.9)$$

Aplicando a lei dos cossenos na figura 13, obtemos,

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2 r_{23} r_{12} \cos \alpha \quad (5.10)$$

Após algumas modificações, a equação acima pode ser escrita,

$$\frac{r_{13}}{r_{12}} = \left[ 1 - 2 \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos \alpha + \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

De acordo ainda com a figura 12, temos

$$\cos \beta = \frac{r_{12}}{r_{13}} - \frac{r_{23}}{r_{13}} \cos \alpha \quad (5.12)$$

Substituindo as equações (5.11) e (5.12) nas equações (5.4) e (5.5), obtemos,

$$\frac{|\bar{P}_2|}{|\bar{A}_1|} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{r_{13}/r_{12}}{r_{23}/r_{12}} \right)^2 \left[ 1 + 2 \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right) \left( 1 - \frac{r_{13}}{r_{12}} \cos \alpha \right) + \left( \frac{r_{13}}{r_{12}} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

$$\frac{|\bar{P}_1|}{|\bar{A}_2|} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^{-2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right) \cos \alpha + \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^2 \right] + \left[ 1 - 2 \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^2 \cos \alpha + \left( \frac{r_{13}}{r_{12}} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

Portanto, temos:

$$\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^4 = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \left(\frac{r_{13}}{r_{12}}\right)^4 \left[ \frac{1 - 2\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^2 \cos \alpha + \left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^4}{1 + 2\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)\left(1 - \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos \alpha\right) + \left(\frac{r_{13}}{r_{12}}\right)^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

Com a resolução da equação (5.15) para  $r_{13}/r_{12}$  e considerando  $M_3 \ll M_2$  e  $M_1 \gg M_2$ , implicando que  $r_{13} \ll r_{12}$ , encontramos:

$$r_{23} \equiv \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2}{5}} r_{12} \quad (5.16)$$

Para o sistema Terra – Lua,  $r_{23}$  é o raio da esfera de influência da Lua,  $r_{12}$  é a distância entre a Terra e a Lua,  $M_2$  é a massa da Lua e  $M_1$  é a massa da Terra. Para a determinação da esfera de influência da Terra, o procedimento é análogo ao descrito.

Após descrito como se determina o raio da esfera de influência da Lua, será analisado a transferência de um satélite em órbita circular inicialmente em torno da Terra para uma órbita circular final em torno da Lua.

A Figura 14 mostra inicialmente o satélite executando uma órbita circular em torno da Terra e passando para a órbita de transferência.

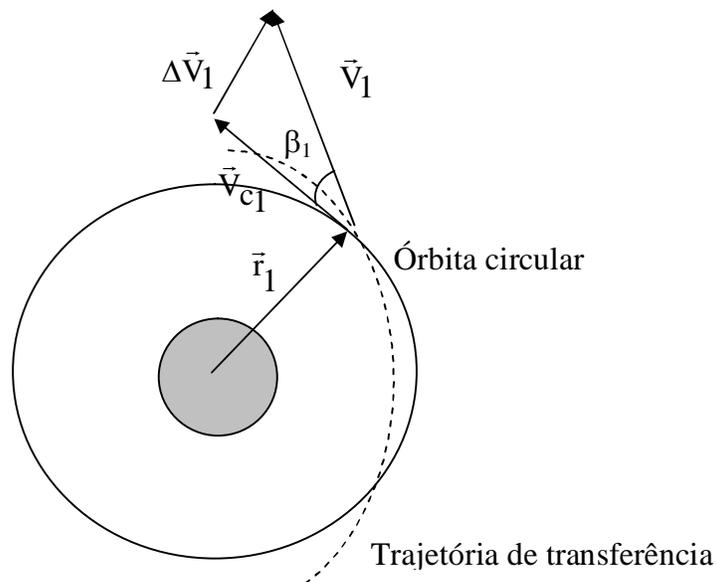


Figura 14 – Órbita circular inicial e órbita de transferência

A velocidade  $\vec{V}_{c1}$  na órbita circular é calculada pela equação,

$$V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_T}{r_1}} \quad (5.17)$$

onde,  $\vec{V}_{c1}$  é a velocidade do satélite no movimento circular,  $\mu_T = G.M_T$  (  $G$  é a constante da gravitação universal e  $M_T$  é a massa da Terra),  $r_1$  é o raio vetor do satélite que neste caso é igual ao raio da órbita circular em torno da Terra . No ponto de inserção a variação da velocidade  $\Delta\vec{v}_1$  é calculada por,

$$\Delta V_1 = V_1^2 + V_{c1}^2 - 2 V_1 V_{c1} \cos \beta_1 \quad (5.18)$$

Quando o satélite inicia sua viagem no ponto de inserção, quatro parâmetros são escolhidos arbitrariamente:  $V_1$ ,  $r_1$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$ , onde  $\gamma_1$  é o ângulo de fase. Entretanto há dificuldade na escolha destes parâmetros para se determinar o ponto em que a trajetória de transferência cruza a esfera de influência lunar, uma vez que devemos executar um processo iterativo onde o tempo de vôo deve se computado a cada iteração. Esta dificuldade é contornada selecionando  $V_1$ ,  $r_1$ ,  $\beta_1$  e  $\lambda_2$  como variáveis independentes. O ângulo  $\lambda_2$  é o ângulo formado entre o raio da esfera de influência

lunar ( $R_L$ ) e a linha que liga o centro da Lua ao centro da Terra, determinando assim o ponto onde a trajetória de transferência intercepta a esfera de influência lunar .

Com estes quatro parâmetros temos condições de determinar as quantidades geocêntricas  $V_2$ ,  $r_2$ ,  $\beta_2$  e  $\gamma_2$  na chegada à esfera de influência Lunar, onde  $V_2$  é a velocidade do satélite,  $r_2$  é o raio vetor que partindo da Terra posiciona o satélite,  $\beta_2$  é o ângulo de trajetória de vôo e  $\gamma_2$  é o ângulo de fase.

A Figura 15 mostra a transferência da Terra à esfera de influência Lunar

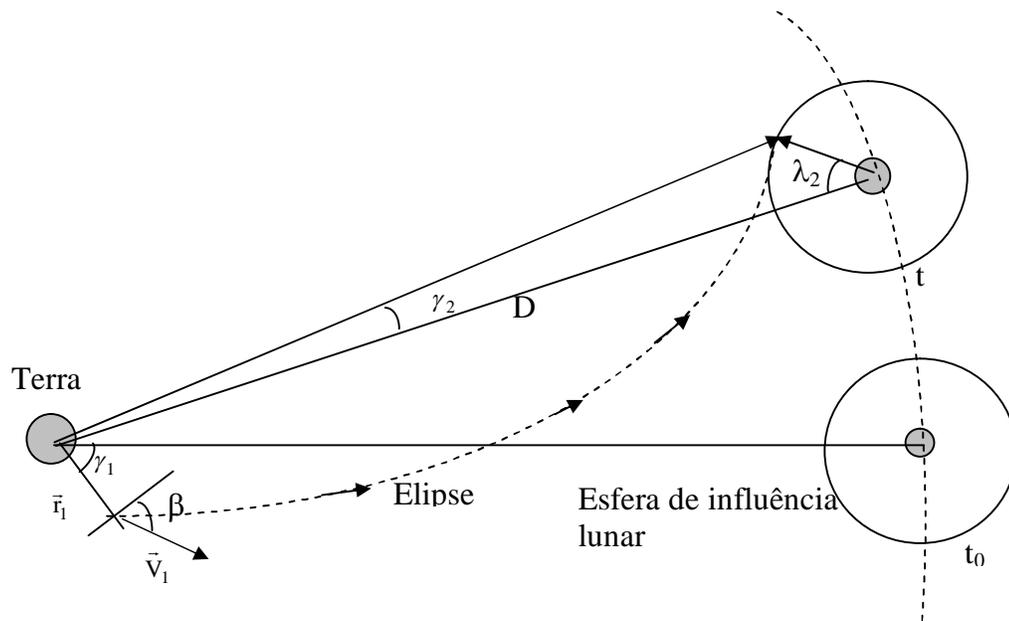


Figura15 – Transferência para a esfera de influência lunar Bate et al (1971)

A chegada à esfera de influência lunar ocorre antes do apogeu da órbita de transferência. Para se determinar os parâmetros na chegada à esfera de influência Lunar, utilizamos inicialmente as equações da energia e do momento angular.

$$\varepsilon = \frac{V_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} \quad (5.19)$$

$$h = r_1 V_1 \cos \beta_1 \quad (5.20)$$

Observando a Figura 15, podemos determinar o valor de  $r_2$  através da expressão,

$$r_2 = \sqrt{D^2 + R_L^2 - 2DR_L \cos \lambda_2} \quad (5.21)$$

Através da conservação da energia e do momento angular, podemos determinar na chegada à esfera de influência lunar os valores de  $V_2$  e do ângulo de trajetória de vôo.

$$V_2 = \sqrt{2\left(\varepsilon + \frac{\mu}{r_2}\right)} \quad (5.22)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{h}{r_1 v_1} \quad (5.23)$$

Como a chegada à esfera de influência ocorre antes do apogeu, o ângulo  $\beta_2$  deve estar entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . De acordo com a figura 15, podemos determinar o valor de  $\gamma_2$  através da equação,

$$\text{sen} \gamma_2 = \frac{R_L}{r_2} \text{sen} \lambda_2 \quad (5.24)$$

O próximo passo é determinar o tempo de vôo,  $t_1 - t_0$ , onde  $t_0$  é o instante no ponto de inserção em que o satélite passa para a trajetória de transferência e  $t_1$  é o instante em que o satélite chega à esfera de influência lunar. Para tanto, temos que determinar as anomalias verdadeiras  $f_1$  no momento da inserção e  $f_2$  no momento de chegada à esfera de influência lunar, bem como as anomalias excêntricas  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente na inserção e chegada à esfera de influência. Da equação das cônicas, nós temos,

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos f_1} \quad (5.25)$$

Observando a Figura 15, podemos determinar o valor de  $r_2$  através da expressão,

$$r_2 = \sqrt{D^2 + R_L^2 - 2DR_L \cos \lambda_2} \quad (5.21)$$

Através da conservação da energia e do momento angular, podemos determinar na chegada à esfera de influência lunar os valores de  $V_2$  e do ângulo de trajetória de vôo.

$$V_2 = \sqrt{2\left(\varepsilon + \frac{\mu}{r_2}\right)} \quad (5.22)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{h}{r_1 v_1} \quad (5.23)$$

Como a chegada à esfera de influência ocorre antes do apogeu, o ângulo  $\beta_2$  deve estar entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . De acordo com a figura, podemos determinar o valor de  $\gamma_2$  através da equação,

$$\text{sen} \gamma_2 = \frac{R_L}{r_2} \text{sen} \lambda_2 \quad (5.24)$$

O próximo passo é determinar o tempo de vôo,  $t_1 - t_0$ , onde  $t_0$  é o instante no ponto de inserção em que o satélite passa para a trajetória de transferência e  $t_1$  é o instante em que o satélite chega à esfera de influência lunar. Para tanto, temos que determinar as anomalias verdadeiras  $f_1$  no momento da inserção e  $f_2$  no momento de chegada à esfera de influência lunar, bem como as anomalias excêntricas  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente na inserção e chegada à esfera de influência. Da equação das cônicas, nós temos,

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos f_1} \quad (5.25)$$

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos f_2} \quad (5.26)$$

Para as equações acima temos que,

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (5.27)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad (5.28)$$

onde o semi-eixo maior da órbita de transferência, que neste caso é elíptica é dado por  $a = \frac{-\mu}{2\varepsilon}$ . As equações (5.29) e (5.30), determinam as anomalias verdadeiras.

$$\cos f_1 = \frac{p - r_1}{r_1 e} \quad (5.29)$$

$$\cos f_2 = \frac{p - r_2}{r_2 e} \quad (5.30)$$

Podemos determinar agora as anomalias excêntricas através das equações,

$$\cos E_1 = \frac{e + \cos f_1}{1 + e \cos f_1} \quad (5.31)$$

$$\cos E_2 = \frac{e + \cos f_2}{1 + e \cos f_1} \quad (5.32)$$

O tempo de vôo desde o ponto de inserção até à chegada a esfera de influência lunar é dado pela expressão abaixo.

$$t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [(E_2 - e \sin E_2) - (E_1 - e \sin E_1)] \quad (5.33)$$

Podemos agora determinar o ângulo de fase na inserção através da equação:

$$\gamma_1 = f_2 - f_1 - \gamma_2 - \omega_L (t_2 - t_1) \quad (5.34)$$

onde  $\omega_L$  é a velocidade angular da Lua e  $\omega_L(t_2 - t_1)$  é o espaço angular descrito pela Lua desde a inserção até a chegada à esfera de influência da Lua. Com este procedimento, nós conseguimos determinar o tempo de vôo e o ângulo de fase. Tais valores não precisam ser mais determinados caso a trajetória ideal seja determinada. Caso contrário nós devemos escolher outros valores para  $r_1$ ,  $V_1$ ,  $\beta_1$  e  $\lambda_2$ , até conseguir a trajetória desejada.

O processo descrito é um processo iterativo para determinação de uma trajetória de mínimo consumo de combustível. Devemos sempre procurar trajetórias que conduza o satélite à órbita final desejada em torno da Lua.

Poderemos obter várias trajetórias para atingir o objetivo, porém a melhor trajetória é aquela em que a variação total de velocidade do satélite é menor.

### 5.3 TRAJETÓRIA DENTRO DA ESFERA DE INFLUÊNCIA DA LUA

Dentro da esfera de influência da Lua o satélite está sob a influência gravitacional da Lua. A Figura 15 mostra os parâmetros na chegada à esfera de influência Lunar.

O módulo do vetor posição do satélite em relação à Lua é igual ao raio da esfera de influência da Lua ( $r_3 = R_L$ ). No ponto de chegada a velocidade do satélite em relação ao centro da Lua é dada por:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \vec{v}_m \quad (5.35)$$

Nesta equação  $\vec{v}_m$  é a velocidade da Lua em relação ao centro da Terra.

Observando atentamente a Figura 16 e aplicando a lei dos cossenos, determinamos o módulo de  $\vec{v}_3$ :

$$V_3 = \sqrt{V_2^2 + V_m^2 - 2V_2 V_m \cos(\beta_2 - \gamma_2)} \quad (5.36)$$

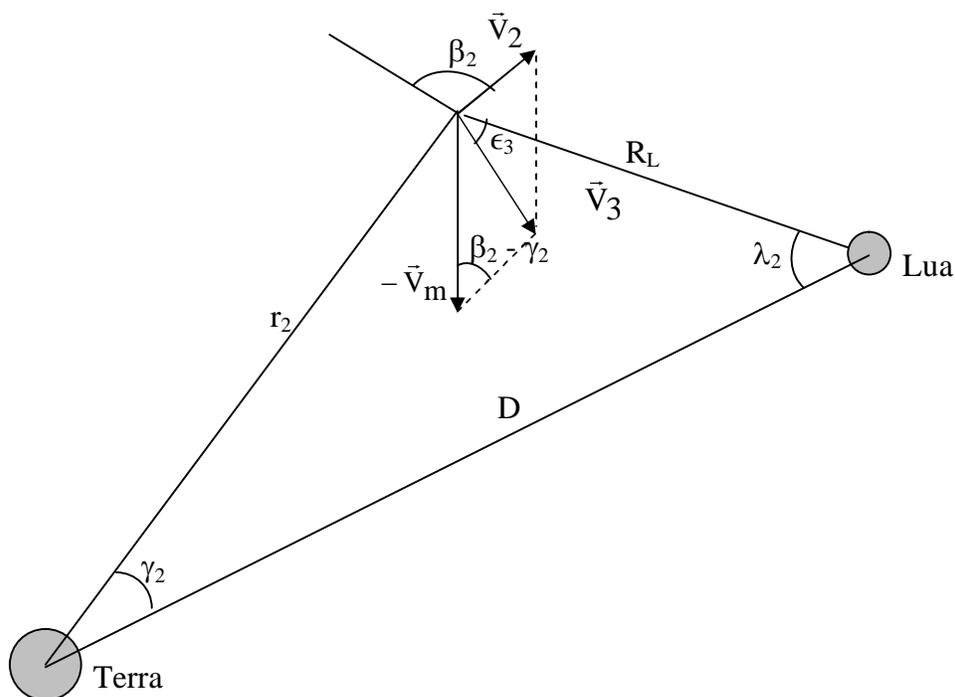


Figura 16 – Condição de chegada à esfera de influência Lunar. Bate et al(1971)

O ângulo  $\epsilon_3$  mostrado na figura 16, que é o ângulo formado pela velocidade do satélite em relação à Lua ( $\vec{v}_2$ ) e o raio  $R_L = r_3$ , determina a direção de  $\vec{v}_2$ . Este ângulo é dado pela relação,

$$\epsilon_3 = \sin^{-1} \left[ \frac{v_m}{v_3} \cos \lambda_2 - \frac{v_2}{v_3} \cos (\lambda_2 + \gamma_2 - \beta_2) \right] \quad (5.37)$$

Uma vez dentro da esfera de influência lunar, o satélite descreverá uma trajetória hiperbólica, com a Lua situada no foco. Esta trajetória é relativa a um sistema de referência fixado na Lua.

Após determinarmos os valores de  $r_3$ ,  $v_3$  e  $\epsilon_3$ , poderemos determinar outros parâmetros em outros pontos da trajetória, para depois transferirmos o satélite para uma órbita circular em torno da Lua. A Figura 17 mostra a trajetória dentro da esfera de influência lunar, em que TH é a trajetória hiperbólica, E é a esfera de influência e O é a trajetória circular.

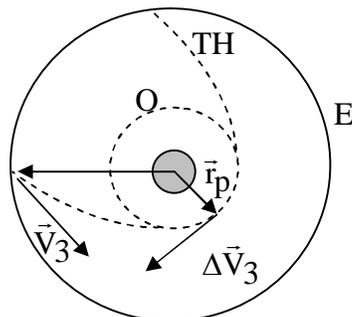


Figura 17 – Trajetória dentro da esfera de influência Lunar

Mais uma vez são utilizadas as equações da energia e do momento angular.  
Equações (5.38) e (5.39).

$$\varepsilon = \frac{v_3^2}{2} - \frac{\mu_m}{r_3} \quad (5.38)$$

$$h = r_2 v_3 \sin \epsilon_3 \quad (5.39)$$

onde  $\mu_m = G M_{\text{Lua}}$  é parâmetro relativo à Lua . Como  $\frac{M_{\text{Lua}}}{M_{\text{Terra}}} = \frac{1}{81,3}$  podemos

escrever  $\mu_{\text{Lua}} = \frac{\mu_{\text{Terra}}}{81,3}$  .

Podemos determinar também o semi-latus rectum e a excentricidade pelas equações,

$$p = \frac{h^2}{\mu_{\text{Lua}}} \quad (5.40)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 \varepsilon h^2}{\mu_{\text{Lua}}^2}} \quad (5.41)$$

Agora, temos condições de determinar o módulo do vetor posição  $\vec{r}_p$  no periselenium da trajetória hiperbólica, bem como a velocidade do satélite no mesmo ponto, através das equações,

$$r_p = \frac{p}{1+e} \quad (5.42)$$

$$v_p = \sqrt{2 \left( \varepsilon + \frac{\mu_{\text{Lua}}}{r_p} \right)} \quad (5.43)$$

Deve ser notado que os valores de  $h$  e  $\varepsilon$  da condição de entrada na esfera de influência Lunar foram utilizados para a obtenção das condições do periselenium, uma vez que temos a conservação do momento angular e da energia.

No periselenium, ponto mais próximo da Lua, a anomalia verdadeira( $f$ ) é nula o mesmo ocorrendo com o ângulo de trajetória de vôo( $\beta_p$ ).

Quando o satélite chega ao periselenium é necessário realizar retropropulsão com o objetivo de reduzir a velocidade do veículo na trajetória hiperbólica para a velocidade de órbita circular, assumindo impulsos instantâneos. A variação de velocidade é dada por:

$$\Delta v_p = v_p - \sqrt{\frac{\mu_{\text{Lua}}}{r_p}} \quad (5.44)$$

A equação  $\sqrt{\frac{\mu_{\text{Lua}}}{r_p}}$ , fornece a velocidade do satélite em órbita circular em

torno da Lua, sendo  $r_p$  o a distância do periselenium a o centro da Lua.

#### 5.4 TRAJETÓRIAS LUNARES NÃO COPLANARES

No estudo feito anteriormente, a trajetória está no plano de órbita da Lua. Entretanto, a inclinação da órbita de Lua varia de  $18,2^\circ$  a  $28,5^\circ$  por um período de 19 anos aproximadamente, e muitas vezes é necessário utilizarmos trajetória não coplanar.

Existem limitações práticas ao lançamento do satélite, tais como local de lançamento, tolerância de precisão, manobras de alcance à Lua. Outros fatores preocupantes são a inclinação da órbita lunar e a direção de lançamento de cada sítio de partida. Esta direção é dada pelo azimute de lançamento.

Um parâmetro muito importante a ser considerado é o ângulo geocêntrico total de varredura contado desde o lançamento até a interceptação da órbita lunar. O ângulo de varredura total  $\psi_t$ , é composto de duas parcelas, o ângulo de vôo livre  $\psi_{ff}$  contado desde a injeção até a interceptação da órbita lunar, e o ângulo de viagem geocêntrica  $\psi_c$  contado desde o lançamento ao ponto de injeção. O ângulo de viagem geocêntrica pode ser determinado arbitrariamente e o ângulo de vôo livre é determinado pelas condições iniciais de injeção,  $r_1$ ,  $V_1$  e  $\beta_1$ . O ângulo de vôo livre  $\psi_{ff}$  é a diferença entre a anomalia verdadeira na injeção e na interceptação lunar.

Uma vez tendo as condições iniciais na injeção, podemos determinar  $\psi_{ff}$ , e sendo  $\psi_c$  arbitrário, podemos determinar  $\psi_t$  através da equação:

$$\psi_t = \psi_{ff} + \psi_c \quad (5.45)$$

Uma vez conhecida a latitude de lançamento, nós poderemos determinar a declinação da espaçonave após ela ter descrito o ângulo  $\psi_t$  em sua trajetória até a interceptação da órbita lunar. Esta situação é ilustrada na Figura 18.

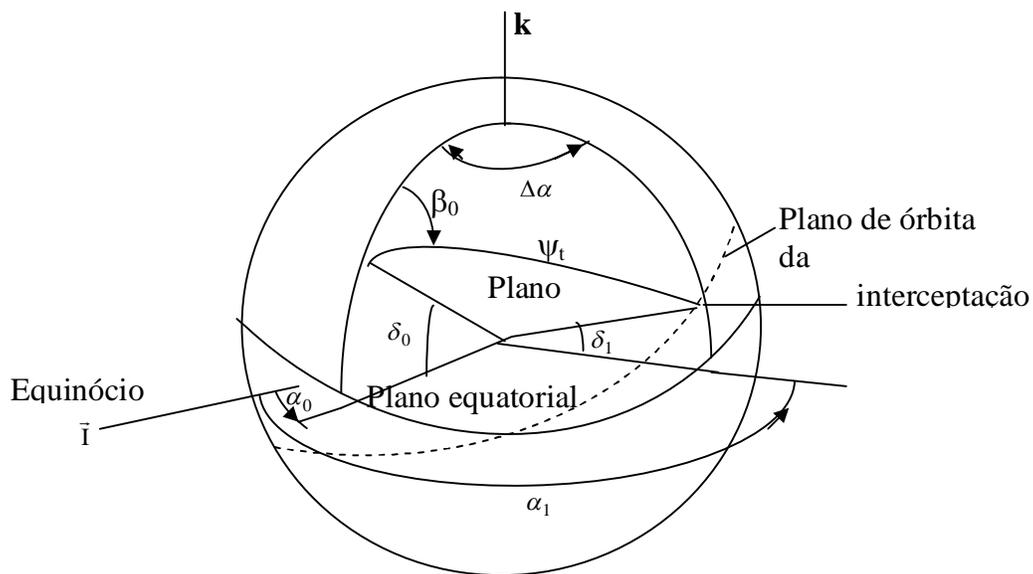


Figura 18 – Relação entre ângulos em uma trajetória não coplanar. Bate et al (1971)

O ângulo  $\delta_1$  é determinado através de trigonometria esférica, pela equação:

$$\sin \delta_1 = \sin \delta_0 \cos \psi_t + \cos \delta_0 \sin \psi_t \cos \beta_0 \quad (5.46)$$

Os ângulos  $\beta_0$  e  $\delta_1$  não são independentes.

Podemos a construir um gráfico de  $\delta_1 \times \psi_t$  para vários azimute  $\beta_0$  e a partir daí analisarmos as condições favoráveis e não favoráveis a um lançamento.

Vamos supor o instante  $t_1$  como o instante em que o satélite intercepta a Lua. Na figura 16, vemos que para este instante de tempo a ascensão reta é  $\alpha_1$ . O próximo passo é determinar  $t_0$  no lançamento e a ascensão reta  $\alpha_0$  mostrada na figura 16.

A diferença entre ascensão reta,  $\Delta\alpha$ , do lançamento e da interceptação é dada por:

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 \quad (5.47)$$

Aplicando a lei dos co-senos para o triangulo esférico da figura 16, obtermos:

$$\cos \Delta\alpha = \frac{\cos \psi_t - \sin \delta_0 \sin \delta_1}{\cos \delta_0 \cos \delta_1} \quad (5.48)$$

Para determinarmos o instante  $t_0$  no lançamento devemos saber o tempo total, Este tempo consiste de duas parcelas,  $t_c$  que é o tempo desde o lançamento até a injeção e  $t_{ff}$  que é o tempo de vôo livre desde a injeção até a interceptação da órbita lunar. Portanto o tempo total é dado por:

$$t_t = t_{ff} + t_c \quad (5.49)$$

Mas,  $t_t = t_1 - t_0$ , logo,  $t_0 = t_1 - t_t$

A ascensão reta  $\alpha_0$  é dado por :

$$\alpha_0 = \theta = \theta_g + \lambda_E \quad (5.50)$$

onde  $\lambda_E$  é a longitude leste do local de lançamento e  $\theta_g$  é o tempo sideral de Greenwich em  $t_0$ . Os valores de  $\theta_g$  são tabelados em todos os dias do ano e outros valores são obtidos por interpolação.

Na comparação de  $\Delta\alpha$  com  $\alpha_1 - \alpha_2$  surge o problema de não de considerar a rotação da Terra. O problema é resolvido encontrando-se o ângulo de rotação no

intervalo de tempo  $t_1 - t_0$ . Este ângulo pode ser dado pelo produto entre  $\omega_T$  e  $t_1 - t_0$ , em que  $\omega_T$  é a velocidade angular da Terra.

Finalmente, tendo as condições de injeção,  $r_1$ ,  $V_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_0$  e o exato dia e hora de lançamento e o local de encontro, podemos determinar precisamente a trajetória através de métodos numéricos.

## 5.5 APLICAÇÃO

Nesta secção é realizada uma aplicação onde considera-se o satélite inicialmente girando em torno da Terra em uma órbita elíptica de excentricidade  $e = 0,05$ .

A órbita de transferência do satélite para a Lua também é elíptica e o ponto de injeção do satélite nesta órbita está no perigeu, que também é o perigeu da órbita elíptica inicial em torno da Terra. A órbita de transferência encontra-se no plano de órbita da Lua.

No perigeu da órbita inicial a velocidade do satélite é dada por:

$$V_{i=} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{a_i(1-e_i)} - \frac{\mu_T}{a_i}} \quad (5.51)$$

onde,  $a_i$  é semi eixo maior, sendo dado por  $a_i = 7050,52$  km,  $e_i$  é a excentricidade dada por  $e_i = 0,05$  e  $\mu_T = G.M_T = 3,986012 \cdot 10^5 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$ , sendo  $M_T$  a massa da Terra e  $G$  a constante da gravitação Universal. Substituindo estes valores na equação (5.51), obtemos

$$V_i \cong 7,90 \text{ km/s.}$$

Neste exemplo é considerado que o satélite se encontra a 320 km da superfície da Terra.

Para o cálculo da velocidade no ponto de injeção da órbita de transferência temos:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_T}{a_i(1-e_i)} - \frac{\mu_T}{a_1}} \quad (5.52)$$

onde,  $a_1 = \frac{(D + R_S - a_i)}{2}$ , sendo  $D = 384.400$  km, e portanto  $a_1 = 221.824,74$  km .

Portanto temos que  $V_1 \cong 10,84$  km/s

A variação da velocidade no ponto de injeção é dada por:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_i \quad (5.53)$$

$$\text{Sendo assim, } \Delta V_1 = 2,927 \frac{\text{km}}{\text{s}} .$$

O momento angular no ponto de injeção é dado por;

$$h = r_1 V_1 \cos \beta_1 \quad (5.54)$$

sendo  $\beta_1$  , como mostrado na Figura 15 é o ângulo de trajetória de vôo , que no perigeu tem valor  $\beta_1 = 0^\circ$  e  $r_1 = a_i (1 - e_i)$  . O valor de h, portanto é  $h \cong 72.606,32$  Km<sup>2</sup>/s .

Com a determinação de h, podemos determinar o semi-latus rectum **p**.

$$p = \frac{h^2}{\mu_T} \quad (5.55)$$

O valor de **p**, portanto é  $p = 13.225,44$  km . Podemos determinar a energia da elipse de transferência utilizando a equação :

$$\varepsilon = \frac{V_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} \quad (5.56)$$

$$\text{Assim, temos que } \varepsilon \cong -0,757 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

Observando a Figura 15, vemos que  $\vec{r}_2$  é o vetor posição do satélite em relação ao centro da Terra quando ele chega na esfera de influência da Lua. O módulo de  $\vec{r}_2$  é determinado através da lei dos cossenos como mostrado na equação (5.43).

$$r_2 = \sqrt{D^2 + R_L^2 - 2DR_L \cos \lambda_2} \quad (5.57)$$

onde,  $D$  é a distância entre os centros da Terra e Lua,  $R_L$  é o raio da esfera de influência da Lua e  $\lambda_2$  é o ângulo entre  $R_L$  e  $D$  , que determina a posição em que a

trajetória de transferência intercepta a esfera de influência da Lua. Os valores desses parâmetros são,  $D = 384.400 \text{ km}$ ,  $R_L = 66.300 \text{ km}$  e  $\lambda_2 = 30^\circ$ . Estes valores substituídos na equação (5.57) fornece  $r_2 = 328.658, 619 \text{ km}$ .

Da conservação da energia e do momento angular, podemos determinar a velocidade ( $V_2$ ) do satélite na órbita de transferência no momento da chegada à esfera de influência da Lua, bem como o ângulo de trajetória de vôo ( $\beta_2$ ) através das equações:

$$V_2 = \sqrt{2\left(\varepsilon + \frac{\mu_T}{r_2}\right)} \quad (5.58)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{h}{r_2 v_2} \quad (5.59)$$

Resolvendo estas equações encontramos  $V_2 \cong 0,955 \text{ Km/s}$  e  $\beta_2 \cong 76,62^\circ$ . A velocidade  $V_2$  e  $\beta_2$  são mostradas na Figura 16.

Observando a Figura 16 e aplicando a lei dos senos, podemos determinar o ângulo de fase ( $\gamma_2$ ) na chegada à esfera de influência lunar pela equação:

$$\sin \gamma_2 = \frac{R_L}{r_2} \sin \lambda_2 \quad (5.60)$$

Substituindo os valores já conhecidos de  $R_L$ ,  $r_2$  e  $\lambda_2$  obtemos  $\gamma_2 \cong 5,8^\circ$  ou  $\gamma_2 \cong 0,101 \text{ rad}$ .

O próximo passo agora é determinar o tempo de vôo desde o ponto de inserção até a chegada a esfera de influência da Lua. Para tanto, temos que determinar as anomalias verdadeiras e excêntricas no momento da inserção do satélite na órbita de transferência e na chegada à esfera de influência da Lua.

A anomalia verdadeira é determinada através da equação polar das cônicas. No ponto de inserção (perigeu) temos que a anomalia verdadeira é  $f_1 = 0^\circ$ , sendo a anomalia excêntrica  $E_1 = 0^\circ$ . No ponto de chegada da esfera de influência temos:

$$\cos f_2 = \frac{p - r_2}{r_2 e_1} \quad (5.61)$$

onde  $p = 72.706, 46 \text{ km}$ ,  $r_2 = 328.658, 619 \text{ km}$  e  $e_1 = 0,966$ . Logo  $f_2 \cong 170,2^\circ$ .

Podemos agora determinar a anomalia excêntrica na chegada à esfera de influência, pela equação:

$$\cos E_2 = \frac{e_1 + \cos f_2}{1 + e_1 \cos f_2} \quad (5.62)$$

Obtemos para a anomalia excêntrica o valor  $E_2 \cong 106,48^\circ$ , em radianos  $E_2 \cong 1,86$  rad. O tempo de vôo desde a inserção até o ponto de intersecção da trajetória de transferência com a esfera de influência lunar é dado por :

$$t - \tau = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_T}} (E_2 - e_1 \sin E_2) \quad (5.63)$$

onde  $\tau$  é o tempo do perigeu, e  $a = 204.620,74$  km. Substituindo valores na equação (5.62) obtemos  $t - \tau \cong 2,29$  d.

Podemos agora determinar o ângulo de fase na partida ( ponto de inserção) . A equação que permite determinar este ângulo de fase é dada por:

$$\gamma_1 = f_2 - f_1 - \gamma_2 - \omega_L (t - \tau) \quad (5.64)$$

onde  $\gamma_1$  é o ângulo de fase na partida(ponto de inserção),  $f_1$  e  $f_2$  são as já conhecidas anomalias verdadeiras e  $\omega_L$  é a velocidade angular da Lua. Temos que  $f_{1=0}$ ,  $f_2 = 172,9^\circ = 2,97$  rad , e  $\omega_L = 2,649 \cdot 10^{-6}$  rad/s . O ângulo descrito pela Lua no intervalo  $t - \tau$  é  $\omega_L(t - \tau) \cong 0,524$  rad . Substituindo estes valores na equação (5.64), obtemos  $\gamma_1 \cong 2,34$  rad e em graus  $\gamma_1 \cong 134^\circ$  .

A partir de agora podemos determinar a trajetória dentro da esfera de influência da Lua onde é assumido que o satélite está somente sob a influência da gravidade lunar. Devemos determinar a velocidade e direção do satélite em relação ao centro da Lua.

As condições iniciais relativas ao centro da Lua são determinadas por  $\vec{r}_3$  que é o vetor que representa a distância do satélite à Lua , e tem o mesmo módulo que o raio da esfera de influência da Lua, logo  $R_L = r_3$  . A velocidade do satélite em relação à Lua

é  $\vec{V}_3$ , e a velocidade da Lua em relação à Terra é  $\vec{V}_m$ . Todos estes termos estão representados na Figura 16. De acordo com a Figura 16, podemos determinar o módulo de  $\vec{V}_3$  aplicando a lei dos cossenos.

$$V_3 = \sqrt{V_2^2 + V_m^2 - 2 V_2 V_m \cos(\beta_2 - \gamma_2)} \quad (5.65)$$

onde  $V_m = \omega_L \cdot D \cong 1,018 \text{ km/s}$ . Lembrando que  $D = 384.400 \text{ km}$  (distância da Terra à Lua). Portanto o módulo da velocidade do satélite em relação à Lua é  $V_3 \cong 1,144 \text{ km/s}$ .

A direção do satélite  $\epsilon_3$ , mostrada na Figura 16 é dada pela equação,

$$\text{sen } \epsilon_3 = \frac{V_m \cos \lambda_2 - V_2 \cos(\lambda_2 + \gamma_1 - \beta_2)}{V_3} \quad (5.66)$$

temos que  $\text{sen } \epsilon_3 \cong 0,196$  e, portanto  $\epsilon_3 \cong 8,1^\circ$ .

Precisamos agora determinar a energia e o momento angular relativos a Lua. A energia e o momento angular são dados por:

$$\epsilon = \frac{V_3^2}{2} - \frac{\mu_L}{r_3} \quad (5.67)$$

$$h = r_3 V_3 \text{sen } \epsilon_3 \quad (5.68)$$

onde  $r_3 = R_L = 66.300 \text{ km}$ ,  $\mu_L = \frac{\mu_T}{81,3} \cong 4.903 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$ ,  $V_3 = 1,144 \text{ km/s}$  e  $\epsilon_3 \cong 8,1^\circ$

Estes valores levados às equações (5.67) e (5.68) fornecem  $\epsilon \cong 0,498 \text{ km}^2/\text{s}^2$  e  $h = 10687 \text{ km}^2/\text{s}$ . O valor de  $\epsilon$  é positivo, o que significa que a trajetória dentro da esfera de influência Lunar é hiperbólica.

Devemos agora determinar, o semi-latus rectum e a excentricidade da órbita hiperbólica. Temos:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 \epsilon h^2}{\mu^2 L}} \quad (5.69)$$

$$p = \frac{h^2}{\mu_L} \quad (5.70)$$

Da equação acima obtemos  $e \cong 2,4$  e  $p \cong 23294$  km. Com os valores de  $e$  e  $p$  podemos determinar o valor de  $r_p$ , que é a distância do vértice da hipérbole até o centro da Lua. Esta é a distância mais próxima do centro da Lua. O satélite passa então a orbitar em torno da Lua em uma órbita circular de raio  $r_p$ . Porém, o propósito é determinar uma trajetória circular selenosíncrona de raio 9.733 km.

O valor de  $r_p$  é dado por:

$$r_p = \frac{p}{1+e} \quad (5.71)$$

Assim, obtemos  $r_p \cong 6.851,2$  km.

A velocidade  $V_p$ , no vértice da parábola, é dada por :

$$V_p = \sqrt{2\left(\varepsilon + \frac{\mu_m}{r_p}\right)} \quad (5.72)$$

portanto  $V_p \cong 1,557$  km/s. Como o satélite entra em órbita circular em torno da Lua sua velocidade passa a ser  $V_c = \sqrt{\frac{\mu_L}{r_p}}$ , sendo portanto  $V_c \cong 0,846$  Km/s. Temos uma variação de velocidade de  $\Delta V_p \cong 0,711$  km/s.

Antes de analisar a trajetória final, é importante determinar o tempo de vôo do momento da chegada à esfera de influência lunar até o vértice da hipérbole.

O tempo de vôo é calculado através da seguinte equação para trajetória hiperbólica:

$$t - \tau = \sqrt{\frac{(-a^3)}{\mu_L}} (e \sinh F_3 - F_3) \quad (5.73)$$

onde o valor de  $a$  na equação (5.72) é determinado através de  $\varepsilon = \frac{-\mu_L}{2a}$ , onde  $\varepsilon =$

$0,498 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$ , e  $\mu_L = 4.903 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$ , portanto  $a \cong -4922,7$  km. O valor de  $F_3$  na

equação (5.73) é determinado através da equação:

$$F_3 = \ell_n \left( \cosh F_3 + \sqrt{\cosh^2 F_3 - 1} \right) \quad (5.74)$$

sendo que  $\cosh F_3$  é dado por :

$$\cosh F_3 = \frac{e + \cos f_3}{1 + e \cos f_3} \quad (5.75)$$

Onde  $f_3$  é a anomalia verdadeira em relação à trajetória hiperbólica quando o satélite está entrando na esfera de influência Lunar, sendo seu valor calculado por:

$$\cos f_3 = \frac{p - r_3}{e r_3} \quad (5.76)$$

em que ,  $p = 23.294 \text{ km}$  ,  $r_3 = 66.300 \text{ km}$  e  $e = 2,4$  . Substituindo estes valores, obtemos  $f_3 \cong 105,7^\circ$  . Levando o valor de  $f_3$  e da excentricidade na equação(5.75) , obtemos

$\cosh F_3 \cong 6,07$  . O valor de  $F_3$  (equação 5.74) é  $F_3 \cong 2,49$ .

É preciso agora, determinar o  $\sinh F_3$ , e para isto utilizamos a equação:

$$\sinh^2 F_3 = \cosh^2 F_3 - 1 \quad (5.77)$$

Portanto temos que  $\sinh F_3 \cong 5,98$ . Utilizando a equação (5.73), obremos  $t - \tau \cong 0,68$  dias . Este é o tempo de vôo desde a entrada na esfera de influência Lunar até o ponto mais próximo da Lua na trajetória hiperbólica.

O passo final agora é determinar a órbita selenosíncrona . Foi dito anteriormente que quando o satélite chega no ponto mais próximo da Lua ele entra em órbita em torno da Lua em uma trajetória circular de raio  $r_p = 6.851,2 \text{ km}$ . Para obtermos a órbita circular selenosíncrona de período  $T = 8.6164 \text{ s}$  e raio  $9.733 \text{ km}$ , devemos realizar uma transferência de Hohmann como mostrado na Figura 19 da página seguinte.

Serão necessários mais impulsos para colocar o satélite na órbita final desejada.

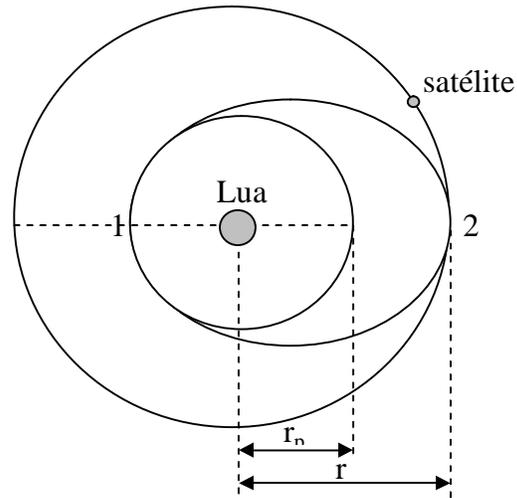


Figura 19 – Transferência de Hohmann

O valor do semi-eixo maior ( $a$ ) da elipse de transferência é obtido da relação ,

$$a = \frac{r + r_p}{2} \quad (5.78)$$

onde ,  $r_p = 6.851,2 \text{ km}$  e  $r = 9.733 \text{ km}$  e portanto  $a = 8.292,1 \text{ km}$

Com o valor de  $a$ , pode ser calculado a energia para a órbita de transferência através da equação  $\varepsilon = \frac{-\mu_L}{2a}$ , obtendo-se o valor  $\varepsilon \cong -0,296 \text{ km}^2/\text{s}^2$ . A velocidade no ponto 1 Figura 19 da elipse de transferência é dada pela equação:

$$V_1 = \sqrt{2\left(\varepsilon + \frac{\mu_L}{r_p}\right)} \quad (5.79)$$

Substituindo os valores obtemos  $V_1 \cong 0,916 \text{ km/s}$ . No ponto P, que como já foi dito é o ponto mais próximo da Lua, a velocidade sofre uma variação de  $0,846 \text{ km/s}$  para  $0,916 \text{ km/s}$ , e no ponto 1 a variação é  $\Delta V_1 = V_1 - V_c$ , onde  $V_c \cong 0,866 \text{ km/s}$ . Portanto o valor de  $\Delta V_1 \cong 0,07 \text{ km/s}$ .

No ponto 2 a velocidade na elipse de transferência é dada por:

$$V_2 = \sqrt{2\left(\varepsilon + \frac{\mu_L}{r_2}\right)} \quad (5.80)$$

Nesse mesmo ponto a velocidade do satélite é alterada de  $V_2$  para  $V_{c2}$ , já na órbita circular final desejada. A velocidade na órbita circular é dada por:

$$V_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_L}{r}} \quad (5.81)$$

A variação de velocidade neste ponto portanto é  $\Delta V_2 = V_{C_2} - V_2$ , sendo  $\Delta V_2 \cong 0,064$  km/s .

Finalmente a variação total na transferência de Hohmann é  $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ , sendo  $\Delta V \cong 0,134$  km/s .

O valor da variação de velocidade total é  $\Delta V_{total} = 3,772$  km/s, e o tempo total de viagem é  $\Delta t = 3,362$  d.

## 6 ENCONTRO COM A ESFERA DE INFLUÊNCIA DA LUA NO APOGEU DA ELIPSE DE TRANSFERÊNCIA.

Neste capítulo será estudada a transferência do satélite desde o ponto de inserção (ponto 1 da Figura 18) até o ponto 2 da esfera de influência, que também é o perigeu da elipse de transferência, e em seguida a transferência do satélite para a órbita em torno da Lua. A Terra e a Lua se encontram em um mesmo plano.

A figura 20 , mostra a transferência até a esfera de influência.

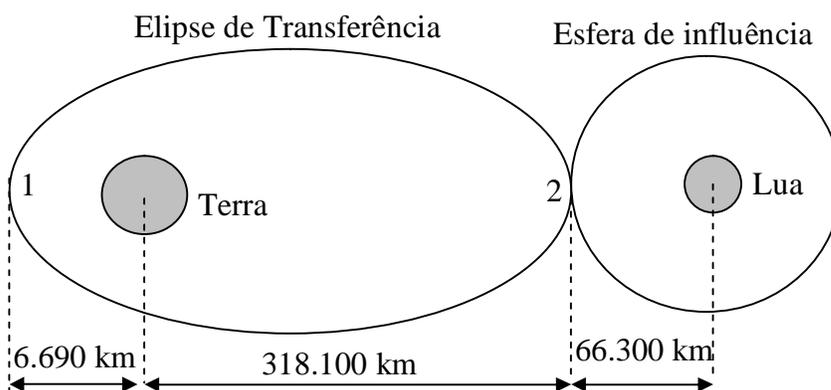


Figura 20 – Transferência até a esfera de influência da lua

Vamos supor inicialmente que o satélite orbite a Terra segundo uma órbita elíptica de excentricidade 0,75, sendo a distância do perigeu ao centro da Terra é  $r_p=6698$  km como mostrado na figura 20. A distância do apogeu( $r_a$ ) até o centro da Terra pode ser determinada pela equação (6.1).

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (6.1)$$

Com esta equação encontramos  $r_a = 46.830$  km. O valor do semi-eixo maior é dado pela equação,

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (6.2)$$

Podemos agora de terminar a energia da órbita elíptica através da equação,

$$\varepsilon = \frac{-\mu}{2.a} \quad (6.3)$$

O valor encontrado é  $\varepsilon = -7,447 \text{ km}^2/\text{s}^2$

O valor da velocidade do satélite no perigeu desta órbita é obtido pela equação,

$$V_o = \sqrt{2 \left( \varepsilon + \frac{\mu}{r_p} \right)} \quad (6.4)$$

sendo assim encontramos  $V_o \cong 10,2 \text{ km/s}$ .

A distância do ponto de injeção ao centro da Terra (ou distância do perigeu ao centro da Terra) para a elipse de transferência é  $r_p = 6.690 \text{ Km}$ . A distância do perigeu ao centro da Terra, ponto 2 da figura 18, é  $r_a = 318 \text{ 100 km}$ , e o raio da esfera de influência é  $R_s = 66 \text{ 300 km}$ .

Com os valores de  $r_a$  e  $r_p$  podemos determinar o semi-eixo maior da elipse de transferência através da equação (6.1). Encontrando para o semi-eixo maior o valor  $a = 162.399 \text{ km}$

A energia na elipse de transferência é calculada através da equação (6.3). Sendo  $\mu = 3,986012 \cdot 10^5 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$  e  $a = 162.139 \text{ km}$ . Com estes valores obtemos para a energia  $\varepsilon = -1,227 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$ .

O valor da velocidade no ponto de inserção é dado pela equação (6.4)

Obtemos para a velocidade o valor  $V_1 = 10,8 \text{ km/s}$ . Podemos agora determinar o valor da variação de velocidade no ponto de inserção. Fazendo a diferença entre as velocidades  $V_1$  e  $V_o$ , encontramos  $\Delta V_1 = 0,6 \text{ km/s}$

## 6.1 CÁLCULO DA VELOCIDADE NO PONTO DE ENCONTRO COM A ESFERA DE INFLUÊNCIA DA LUA.

Para o cálculo da velocidade do satélite no apogeu da elipse de transferência utilizamos a equação:

$$V_2 = \sqrt{2\varepsilon + \frac{2\mu}{r_a}} \quad (6.5)$$

Sendo  $\varepsilon = -1,227 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$ , o parâmetro gravitacional da Terra  $\mu = 3,986012 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$ , e  $r_a = 318\,100 \text{ km}$ . Com estes valores obtemos para a velocidade o valor  $V_2 = 0,228 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ .

O tempo de vôo desde o ponto de injeção até o ponto de encontro com a esfera de influência da Lua pode ser obtido em dias através da equação:

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (6.6)$$

O valor obtido para o tempo de vôo é  $\Delta t = 3,76 \text{ d}$ .

## 6.2 DETERMINAÇÃO DA VARIAÇÃO DA VELOCIDADE NA CHEGADA À ESFERA DE INFLUÊNCIA CONSIDERANDO A LUA PARADA E EM MOVIMENTO .

Inicialmente devemos determinar a velocidade do satélite em órbita circular em torno da Lua, considerada inicialmente parada, sendo o raio da trajetória  $R_s = 66.300 \text{ km}$ . Para tanto se utiliza a equação:

$$V_3 = \sqrt{\frac{\mu_L}{R_s}} \quad (6.7)$$

Sendo que, para o cálculo da velocidade  $V_3$ , utilizamos o parâmetro gravitacional da Lua,  $\mu_L = 4.903 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$ , obtendo portanto para a velocidade o valor

$$V_3 = 0,271941 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Portanto a variação da velocidade na chegada à esfera de influência da Lua para o satélite entrar em órbita circular é:

$$\Delta V_2 = V_3 - V_2 \quad (6.8)$$

Portanto temos que  $\Delta V_2 = 0,0439 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Para o cálculo da variação de velocidade considerando a lua em movimento, devemos ter em mente que a velocidade da Lua em relação a Terra é 1,018 km/s. Como , na chegada à esfera de influência a velocidade do satélite em relação à Terra é  $V_2 = 0,228 \text{ km/s}$ , podemos obter a velocidade do satélite em relação à Lua . O resultado encontrado foi  $V_4 = 0,790 \text{ km/s}$  . Portanto, a variação de velocidade neste caso é  $\Delta V_3 = 0,518 \text{ km/s}$ .

### 6.3 TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN PARA UMA ÓRBITA CIRCULAR FINAL EM TORNO DA LUA.

O objetivo agora é fazer com que o satélite entre em órbita em torno da Lua. Vamos analisar um caso particular em que o satélite gire em torno da Lua a 100 km de sua superfície.

Para tanto, utilizamos uma transferência de Hohmann . A Figura 21 mostra a transferência.

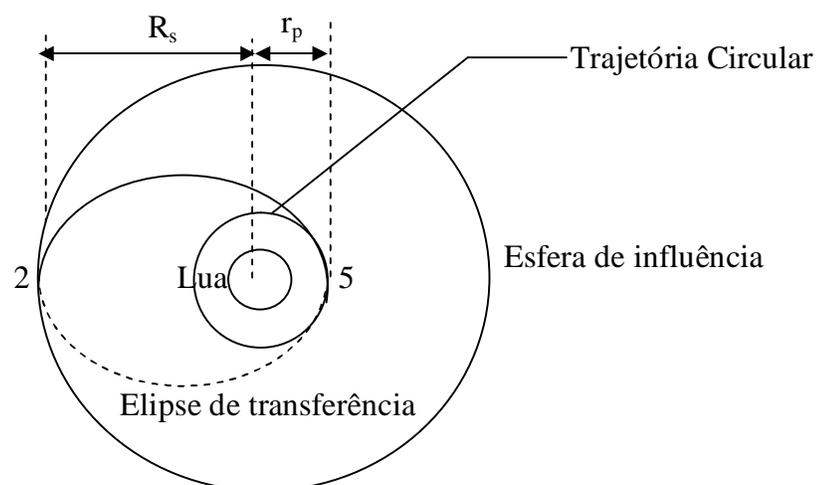


Figura 21 – Transferência de Hohmann para órbita circular em

De acordo com a Figura 21, temos que  $r_p$  é a distância do perigeu ao centro da Lua e seu valor é  $r_p = 1.838$  km e  $R_s$  é a distância do apogeu ao centro da Lua e seu valor é  $R_s = 66.300$  km .

Com estes valores podemos determinar o semi-eixo maior da elipse de transferência através da equação (6.9):

$$a = \frac{r_p + R_s}{2} \quad (6.9)$$

assim, o valor do semi-eixo maior é  $a = 34.069$  km.

A energia é calculada através da equação ( 6.10) :

$$\varepsilon = \frac{-\mu_L}{2a} \quad (6.10)$$

Portanto o valor da energia é  $\varepsilon = -0,0720 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$

A velocidade na elipse de transferência (ponto 2 da Figura 21), pode se calculada através da equação:

$$V' = \sqrt{2\varepsilon + \frac{2\mu_L}{R_s}} \quad (6.11)$$

onde,  $\mu_L$  é o parâmetro gravitacional da Lua. O valor obtido da velocidade portanto é  $V' = 0,0625$  km/s .

A variação da velocidade do satélite no ponto 2 para passar para a elipse de transferência dentro da esfera de influência é :

$$\Delta V_4 = V_3 - V' \quad (6.12)$$

O valor encontrado para a variação de velocidade é  $\Delta V_4 = 0,209441$  km/s.

Podemos agora determinar o tempo de vôo desde o ponto 2 até o ponto 5 da órbita de transferência mostrados na Figura 21. A equação utilizada é:

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_L}} \quad (6.13)$$

Encontramos o valor  $\Delta t = 3,26$  dias.

Quando o satélite atingir o ponto 5 da Figura 21, ele estará na posição mais próxima da Lua, sendo o raio da órbita final desejada  $r_p = 1838$  km . Podemos neste ponto determinar a velocidade do satélite na elipse de transferência utilizando a equação:

$$V_5 = \sqrt{2\varepsilon + \frac{2\mu_L}{r_p}} \quad (6.14)$$

onde  $\mu_L = 4.903 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$  , portanto  $V_5 = 2,2784$  km/s.

Após atingir o ponto 5, o satélite entra em órbita circular desejada de raio 1838 km. A velocidade do satélite nesta órbita circular é dada por :

$$V_6 = \sqrt{\frac{\mu_L}{r_p}} \quad (6.15)$$

O valor encontrado para a velocidade é  $V_6 = 1,63327$  km/s

É possível agora determinar a variação de velocidade no ponto 5 :

$$\Delta V_5 = V_5 - V_6 \quad (6.16)$$

obtendo  $\Delta V_5 = 0,64513$  km/s

#### 6.4 CÁLCULO DA VARIAÇÃO TOTAL DE VELOCIDADE

O satélite inicialmente, como foi dito, está em uma órbita elíptica em torno da Terra e sua velocidade no perigeu desta órbita foi calculada . O valor encontrado como vimos foi  $V_0 = 10,2$  km/s. A velocidade no ponto de inserção da elipse de transferência foi determinada e encontrado  $V_1 = 10,8$  km/s. A variação de velocidade no ponto de inserção é dada pela equação:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_0 \quad (6.17)$$

Encontramos o valor  $\Delta V_0 = 0,6$  km/s

Considerando a Lua parada, a variação de velocidade é dada por:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_4 + \Delta V_5 \quad (6.18)$$

Portanto temos para valor total  $\Delta V = 1,498$  Km/s

Considerando a Lua em movimento, temos:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_3 + \Delta V_4 + \Delta V_5 \quad (6.19)$$

Obtém-se para o valor total  $\Delta V = 1,972$  km/s .

## 7 TRANSFERÊNCIA DE SATÉLITE PARA LUA CONSIDERANDO O SATÉLITE EM ÓRBITA INCLINADA EM TORNO DA TERRA.

Neste capítulo, consideramos o satélite inicialmente em órbita elíptica em torno da Terra e inclinada. O satélite é transferido para uma mesma órbita elíptica no mesmo plano da Terra e da lua, e posteriormente através de uma órbita de transferência é transferido para a Lua. O estudo é feito sem considerar a perturbação devido ao achatamento da Terra e devido a um terceiro corpo.

A figura 22 mostra o satélite em órbita inclinada em torno de Terra.

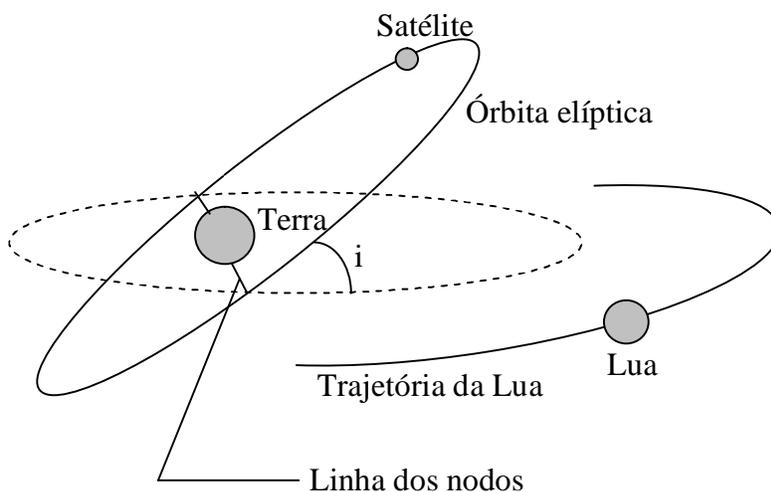


Figura 22 – Satélite em órbita inclinada em torno da Terra

A mudança de plano deve ocorrer em um dos nodos. Na Figura 23, o nodo é o ponto 1.

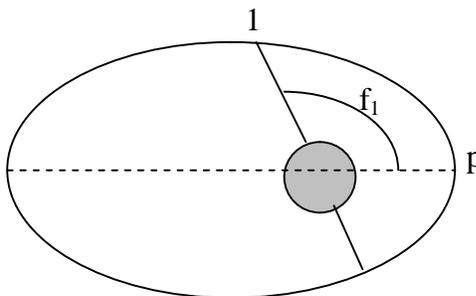


Figura 23 – Trajetória elíptica em torno da Terra

No perigeu, ponto P, temos  $f_0 = 0$  e  $E_0 = 0$ , onde  $f_0$  é a anomalia verdadeira e  $E_0$  é a anomalia excêntrica no perigeu. O tempo de vôo até a mudança de plano é calculado através da equação:

$$t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[ (E - e \sin E) - (E_0 - e \sin E_0) \right] \quad (7.1)$$

Como no perigeu  $E_0 = 0$ , temos:

$$t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E - e \sin E) \quad (7.2)$$

O instante  $t_0$  e  $t_1$ , são os instantes de passagem no perigeu e no nodo em que ocorre mudança de fase, respectivamente.

A anomalia excêntrica presente nas equações acima pode ser calculada através da equação:

$$\cos E = \frac{e + \cos f_1}{1 + e \cos f_1} \quad (7.3)$$

onde  $e$  é a excentricidade da órbita elíptica do satélite em torno da Terra.

Para que haja mudança de plano, deve haver variação de velocidade do satélite como mostrado na Figura 24.

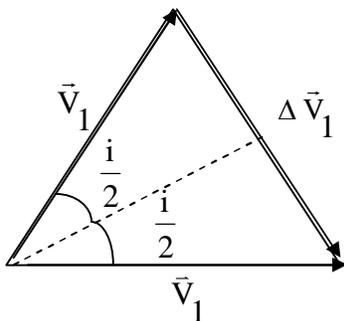


Figura 24 – Variação da velocidade para mudança de plano de órbita

O valor da variação da velocidade é determinado através da equação:

$$\Delta V_1 = 2 V_1 \operatorname{sen} \frac{i}{2} \quad (7.4)$$

Uma vez realizada a mudança de plano, o próximo passo é realizar a transferência do satélite para uma órbita Lunar.

Pode acontecer que o pericentro desta órbita elíptica não esteja colocado de forma adequada para efetuar a transferência. Uma possibilidade é fazer uma nova transferência para uma órbita circular intermediária. A figura 25 mostra tal possibilidade.

Tal manobra também pode ser interessante para o caso de órbitas de estacionamento em que tenha de levar em conta precessões (longo tempo de espera).

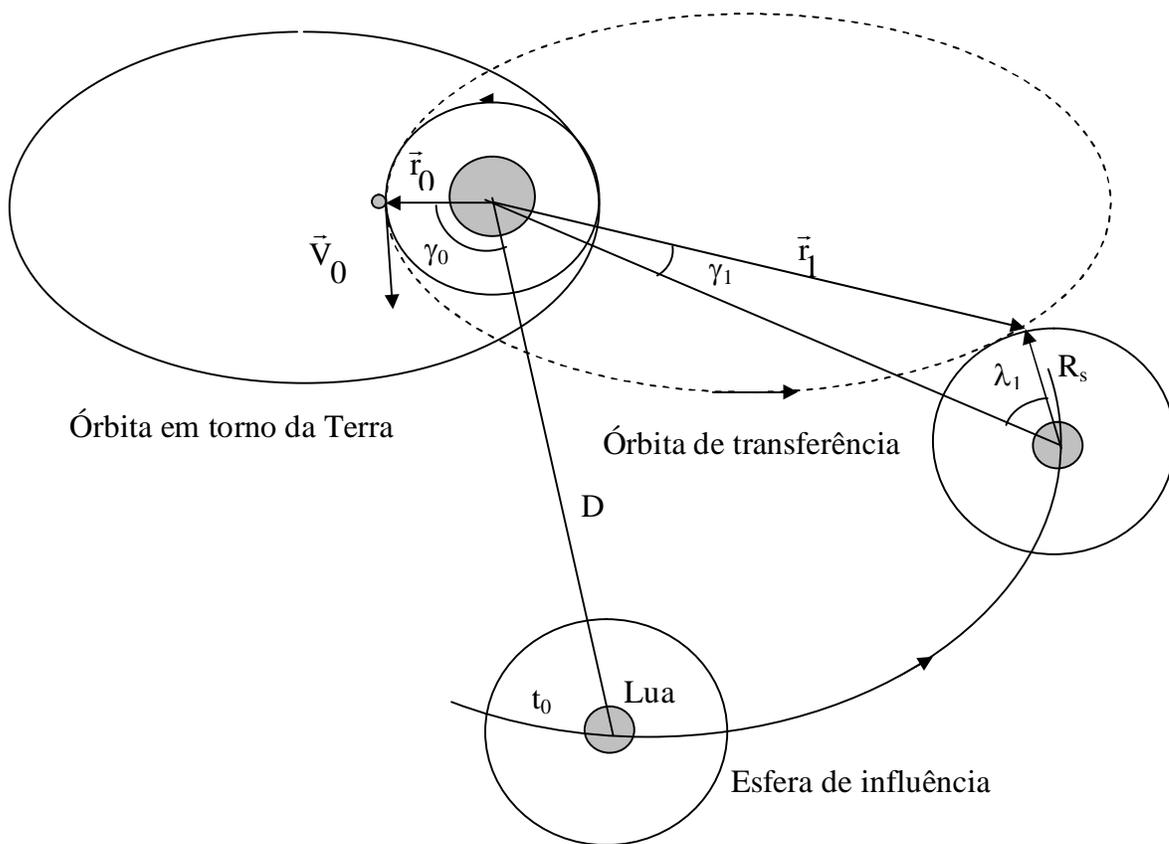


Figura 25 – Transferência do satélite para a Lua

Inicialmente o satélite está em órbita elíptica em torno da Terra, e quando passa pelo perigeu desta órbita, ele é transferido para uma órbita circular. A velocidade da do satélite no perigeu da órbita elíptica é:

$$V = \sqrt{2\varepsilon + \frac{2\mu}{r_0}} \quad (7.5)$$

onde  $\varepsilon$  é a energia da órbita elíptica,  $\mu$  é o parâmetro gravitacional da Terra e  $r_0$  é a distância do, perigeu ao centro da Terra.

Neste ponto o satélite é transferido para uma órbita circular de raio  $r_0$  e sua velocidade é:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \quad (7.6)$$

A variação da velocidade no perigeu da elipse de transferência é:

$$\Delta V = V_c - V \quad (7.7)$$

O desenvolvimento descrito a seguir foi desenvolvido por (Bate, 1971), já descrito no capítulo 5 e que será revisto novamente. Inicialmente partimos dos valores iniciais  $V_0$ ,  $\phi_0$ ,  $r_0$  e  $\lambda_1$ , sendo que o ângulo de trajetória de vôo é nulo, e como pode ser observado na fig. 23,  $\lambda_1$  é o ângulo entre o raio da esfera de influência da lua e a distância da Terra à Lua.

Podemos agora determinar a energia e o momento angular da órbita de transferência,

$$\varepsilon = \frac{V_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0} \quad (7.8)$$

$$h_0 = r_0 V_0 \quad (7.9)$$

O vetor posição do satélite quando ele chega na esfera de influência da Lua é determinado pela equação:

$$r_1 = \sqrt{D^2 + R_s^2 - 2 D R_s \cos \lambda_1} \quad (7.10)$$

A energia e o momento angular são constantes, e assim podemos determinar a velocidade e o ângulo de trajetória de vôo quando o satélite chega na esfera de influência da Lua, através das equações (7.11) e (7.12).

$$V_1 = \sqrt{2 \left( \varepsilon + \frac{\mu}{r_1} \right)} \quad (7.11)$$

$$\cos \phi_1 = \frac{h}{r_1 v_1} \quad (7.12)$$

O próximo passo é determinarmos o tempo de vôo desde o ponto de inserção (perigeu da órbita de transferência) até a chegada à esfera de influência. Para tanto utilizamos a equação:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E_1 - e \sin E_1) \quad (7.13)$$

Na equação (7.13)  $E_1$  é a anomalia excêntrica no momento da chegada à esfera de influência e  $e$  é a excentricidade da órbita de transferência dada pela equação :

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \quad (7.14)$$

O valor do semi-latus rectum  $p$  e do semi-eixo maior são determinados pelas equações (7.15) e (7.16).

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (7.15)$$

$$a = \frac{-\mu}{2\varepsilon} \quad (7.16)$$

O ângulo de fase  $\gamma_0$  no momento da inserção do satélite e o ângulo de fase  $\gamma_1$  no momento da chegada à esfera de influência da lua são determinados pelas equações:

$$\text{sen } \gamma_1 = \frac{R_s}{r_1} \text{sen } \lambda_1 \quad (7.17)$$

$$\gamma_0 = f_1 - \gamma_1 - \omega_L (t - t_0) \quad (7.18)$$

sendo que  $f_1$  é a anomalia verdadeira no momento da chegada à esfera de influência da Lua, e  $\omega_L$  é a velocidade angular da Lua.

A partir da esfera de influência o movimento do satélite é analisado em relação à Lua. O vetor posição do satélite é  $r_2 = R_s$ , onde  $R_s$  é o raio da esfera de influência da Lua., e a velocidade do satélite em relação à Lua é determinada por:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_m \quad (7.19)$$

em que  $\vec{V}_L$  é a velocidade da Lua em relação ao centro da Terra, e  $\vec{V}_2$  é a velocidade do satélite em relação ao centro da Lua. O módulo de  $\vec{V}_2$  é dado por:

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + V_m^2 - 2 V_1 V_L \cos(\phi_1 - \gamma_1)} \quad (7.20)$$

A direção do satélite em relação ao centro da Lua, que é definida pelo ângulo entre a direção do vetor  $\vec{V}_2$  e o raio da esfera de influência da Lua é obtida pela equação:

$$\epsilon_2 = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{V_L}{V_2} \cos \lambda_1 - \frac{V_1}{V_2} \cos(\lambda_1 + \gamma_1 - \phi_1) \right] \quad (7.21)$$

Podemos portanto determinar a trajetória dentro da esfera de influência dentro da Lua, e a partir das condições iniciais  $r_2$ ,  $v_2$  e  $\epsilon_2$ , poderemos determinar condições terminais em outros pontos na trajetória.

Inicialmente determinamos a energia e o momento angular através das equações:

$$\epsilon = \frac{V_2^2}{2} - \frac{\mu_L}{r_2} \quad (7.22)$$

$$h = r_2 V_2 \text{ sen } \epsilon_2 \quad (7.23)$$

O próximo passo agora é determinar a excentricidade e da órbita do satélite dentro da esfera de influência da Lua, a distância do ponto mais próximo, o periselenium,  $r_p$ , ao centro da Lua e a velocidade  $V_p$  neste ponto. Para tanto, utilizamos as equações:

$$p = \frac{h^2}{\mu_L} \quad (7.24)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2 \epsilon h^2}{\mu_L^2}} \quad (7.25)$$

$$r_p = \frac{p}{1+e} \quad (7.26)$$

$$V_p = \sqrt{2 \left( \epsilon + \frac{\mu_L}{r_p} \right)} \quad (7.27)$$

em que  $\mu_L$  é o parâmetro gravitacional da Lua.

Finalmente transferimos o satélite para a órbita desejada.

Todo procedimento escrito pode ser realizado iterativamente através do programa Fortran desenvolvido por (Melo, 2005), permitindo determinar a trajetória ótima para um menor consumo de combustível.

Há uma outra possibilidade de transferência do satélite para a Lua após a mudança de plano, que é mostrada na Figura. 26.

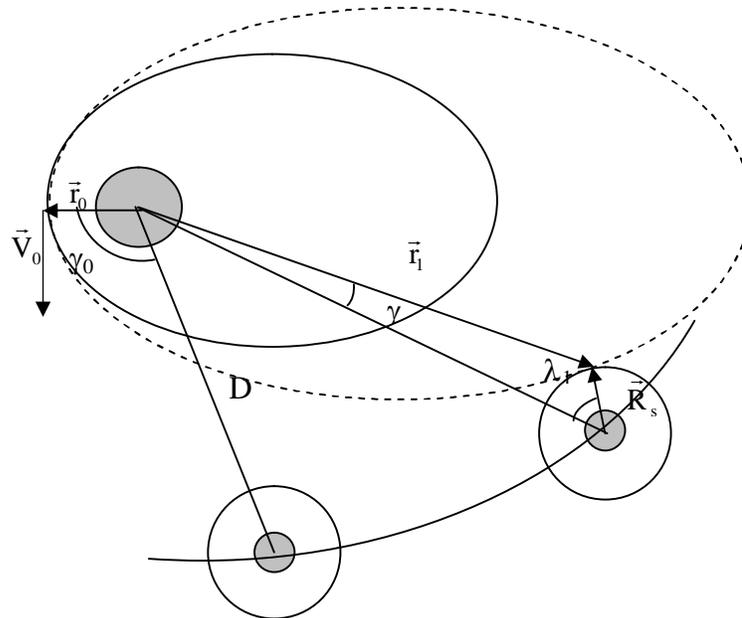


Figura 26 – Transferência da Terra para Lua

O satélite executa inicialmente uma órbita elíptica em torno da Terra. A velocidade do satélite quando passa pelo perigeu desta órbita é calculada por uma equação idêntica à equação (7.5).

O procedimento seguinte é também usar o procedimento realizado por Bate et al.(1971), de maneira iterativa utilizando o programa Fortran desenvolvido por Melo(2005). Com isto determinamos a trajetória ótima para menor consumo de combustível determinando a variação de velocidade total do satélite na missão a que foi destinado.

## 8 TRANSFERÊNCIA DO SATÉLITE CONSIDERANDO O ACHATAMENTO DA TERRA

Neste capítulo será abordado o efeito de perturbação na transferência do satélite, considerando-se inicialmente o efeito do achatamento da Terra. Para tanto será utilizada a equação (4.20).

A Figura 27 mostra a transferência com o efeito do achatamento considerando que a órbita do satélite está no mesmo plano da Terra e da Lua.

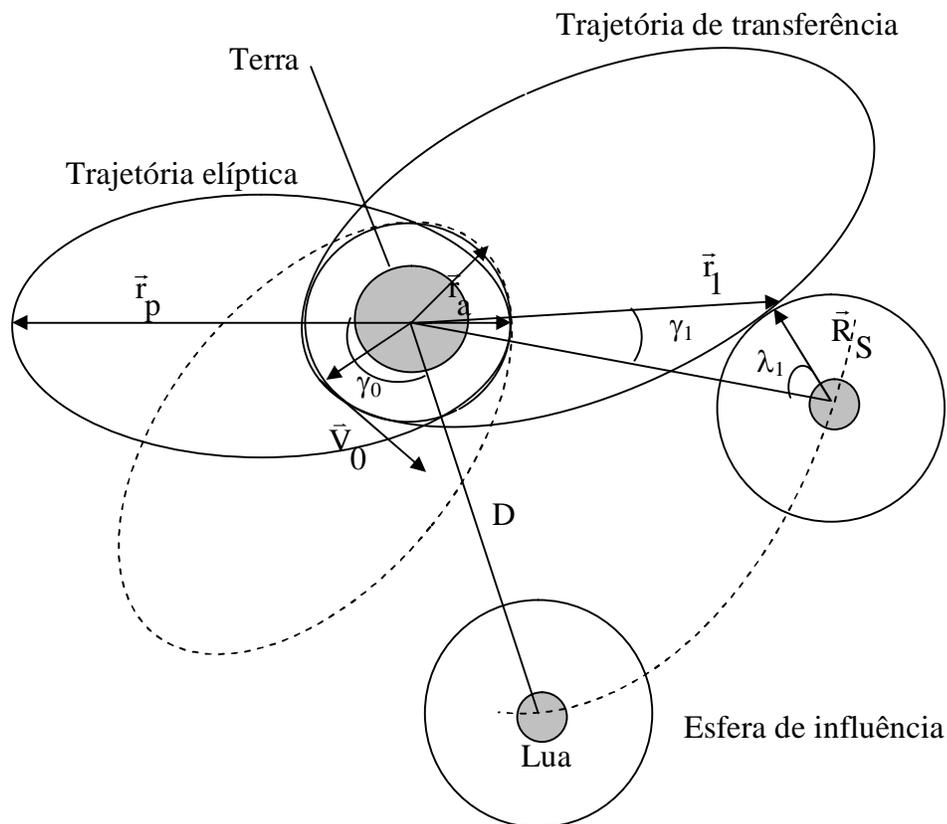


Figura 27 – Transferência com influência do achatamento da Terra

O satélite realiza um certo número de voltas em torno da Terra durante um certo tempo. Isto ocasiona variação no argumento do perigeu e a trajetória do satélite sofre um deslocamento (elipse tracejada). No perigeu da órbita do satélite após ela ter sofrido o deslocamento, o satélite é transferido para uma órbita circular de raio  $\vec{r}_a$ , que também é a distância do perigeu ao centro da Terra. A distância do centro da Terra ao

apogeu é representada pelo vetor  $\vec{r}_p$ . A velocidade do satélite no perigeu da órbita elíptica é dada pela equação:

$$V = \sqrt{2 \left( \varepsilon + \frac{\mu}{r_a} \right)} \quad (8.1)$$

onde  $\varepsilon$  é energia da órbita elíptica e  $\mu$  é o parâmetro gravitacional da Terra. A velocidade do satélite quando ele passa para a órbita circular é:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_a}} \quad (8.2)$$

A variação de velocidade é, portanto:

$$\Delta V = \left| V_c - V \right| \quad (8.3)$$

O satélite é transferido para a elipse de transferência no perigeu da mesma com velocidade  $\vec{V}_0$ . Através de um processo iterativo (Melo, 2005), é possível determinar a trajetória para a Lua com um mínimo consumo de combustível.

## 9 APLICAÇÃO.

Inicialmente será considerada uma das possibilidades de transferência sem perturbações, como mostrado na figura 26.

A partir de um ponto ( $r_0 = h_0 + R_{\text{Terra}}$ ,  $V_0$  e  $\phi_0 = 0$ ) da órbita elíptica geocêntrica inicial (e também de inserção da órbita geocêntrica de transferência) e de  $\lambda_1$  (ponto de chegada na esfera de influência, também determinado iterativamente), utiliza-se o processo iterativo mencionado para determinar os parâmetros iniciais  $\lambda_1 = 72^\circ$ ,  $\gamma_0 = 167,2^\circ$ ,  $V_0 = 10,819$  km/s para se obter a trajetória de transferência de mínimo combustível. Considerando que o satélite quando está no perigeu da órbita elíptica em torno da Terra, se encontra a 320 km, é possível determinar a distância do satélite ao centro da Terra, ou distância do perigeu, encontrando o valor  $r_p = 6.690$  km. Considerando que a trajetória elíptica do satélite tenha excentricidade  $e = 0,75$ , podemos determinar a distância do apogeu ao centro da Terra através da equação:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (9.1)$$

encontrando  $r_a = 46.830$  km.

Temos agora condições de determinar o semi-eixo maior e a energia da elipse de transferência. Para determinarmos o semi-eixo maior utilizamos a equação:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (9.2)$$

o valor encontrado é  $a = 26.760$  km. . O valor da energia é determinado pela equação:

$$\varepsilon = \frac{-\mu}{2a} \quad (9.3)$$

onde  $\mu$  é o parâmetro gravitacional da Terra, assim, obtemos para a energia o valor  $\varepsilon = -7,445 \text{ km}^2 / \text{s}^2$ .

A velocidade do satélite no momento em que ele passa pelo perigeu da órbita elíptica é determinado através da equação (7.5). O valor encontrado é  $v_0 = 10,2 \text{ km/s}$ .

O perigeu, é o ponto de inserção do satélite para a órbita de transferência. Neste ponto, temos condições agora de determinar a variação de velocidade do satélite através da equação (9.4),

$$\Delta V_1 = V_0 - v_0 \quad (9.4)$$

obtemos o valor  $\Delta V_1 = 0,619 \text{ km/s}$

Alguns parâmetros da órbita de transferência podem agora ser determinados. Inicialmente é determinado a energia da órbita de transferência através da equação

(7.8), obtendo o valor  $\varepsilon = -1,0350 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$ . Em seguida, determina-se o momento

angular através da equação (7.9), encontrando o valor  $h = 72.381,14 \frac{\text{km}^2}{\text{s}}$ .

Quando o satélite chega à esfera de influência da Lua, sua posição é determinada pelo vetor posição  $\vec{r}_1$ . O módulo deste vetor é determinado pela equação (7.10) sendo  $r_1 = 369.334,6 \text{ km}$ . Utilizando a equação (7.11), determina-se a velocidade do satélite no momento da chegada à esfera de influência da Lua, encontrando  $V_1 = 0,297 \text{ km/s}$ .

O momento angular é constante, e assim, podemos determinar o ângulo de trajetória de voo no momento de chegada à esfera de influência da Lua. O valor obtido é  $\phi_1 \cong 48,75^\circ$ .

Podemos determinar também o ângulo de fase na chegada à esfera de influência, através da equação (7.17), encontrando  $\gamma_1 = 9,83^\circ$ .

Os valores do semi-latus rectum ( $p$ ), semi-eixo maior ( $a$ ) e excentricidade ( $e$ ), podem ser determinadas pelas equações (7.15), (7.16) e (7.14) respectivamente.

onde  $\mu$  é o parâmetro gravitacional da Terra, assim, obtemos para a energia o valor  $\varepsilon = -7,445 \text{ km}^2 / \text{s}^2$ .

A velocidade do satélite no momento em que ele passa pelo perigeu da órbita elíptica é determinado através da equação (7.5). O valor encontrado é  $v_0 = 10,2 \text{ km/s}$ .

O perigeu é o ponto de inserção do satélite para a órbita de transferência. Neste ponto, temos condições agora de determinar a variação de velocidade do satélite através da equação (9.4),

$$\Delta V_1 = V_0 - v_0 \quad (9.4)$$

obtemos o valor  $\Delta V_1 = 0,619 \text{ km/s}$

Alguns parâmetros da órbita de transferência podem agora ser determinados. Inicialmente é determinado a energia da órbita de transferência através da equação

(7.8), obtendo o valor  $\varepsilon = -1,0350 \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}$ . Em seguida, determina-se o momento angular

através da equação (7.9), encontrando o valor  $h = 72.381,14 \frac{\text{km}^2}{\text{s}}$ .

Quando o satélite chega à esfera de influência da Lua, sua posição é determinada pelo vetor posição  $\vec{r}_1$ . O módulo deste vetor é determinado pela equação (7.10) sendo  $r_1 = 369.334,6 \text{ km}$ . Utilizando a equação (7.11), determina-se a velocidade do satélite no momento da chegada à esfera de influência da Lua, encontrando  $V_1 = 0,297 \text{ km/s}$ .

O momento angular é constante, e assim, podemos determinar o ângulo de trajetória de voo no momento de chegada à esfera de influência da Lua. O valor obtido é  $\phi_1 \cong 48,75^\circ$ .

Podemos determinar também o ângulo de fase na chegada à esfera de influência, através da equação (7.17), encontrando  $\gamma_1 = 9,83^\circ$ .

Os valores do semi-latus rectum ( $p$ ), semi-eixo maior ( $a$ ) e excentricidade ( $e$ ), podem ser determinadas pelas equações (7.15), (7.16) e (7.14) respectivamente.

Encontramos os valores  $p = 13.147,83 \text{ km}$ ,  $a = 192.549,63 \text{ km}$  e  $e = 0,965$ . Temos condições agora de determinar o tempo de voo desde o ponto de inserção (perigeu da órbita elíptica) até o ponto de chegada à esfera de influência da Lua. Antes, porém,

precisamos determinar a anomalia verdadeira no momento da chegada à esfera de influência através da equação,

$$\cos f_1 = \frac{p - r_1}{r_1 e} \quad (9.5)$$

sendo,  $\cos f_1 = -0,999$ , e  $f_1 = 177,59^\circ$ . O próximo passo é determinar a anomalia excêntrica na chegada à esfera de influência da Lua. Para este cálculo utilizamos a equação,

$$\cos E_1 = \frac{e + \cos f_1}{1 + e \cos f_1} \quad (9.6)$$

obtemos,  $\cos E_1 = -0,951$  e  $E_1 = 162,022^\circ$  e  $\sin E_1 \cong 0,309$ . Expressando a anomalia excêntrica em radianos obtemos  $E_1 \cong 2,83$  rad. Podemos agora determinar o tempo de voo pela equação (7.13), obtendo  $\Delta t \cong 3,92$  dias

O próximo passo agora, é determinar o ângulo de fase no momento da inserção do satélite na órbita de transferência. Para tanto utilizamos a equação (7.18). Nesta equação  $\omega_L = 2,661 \cdot 10^{-6}$  rad/s é a velocidade angular da Lua. O valor obtido para o ângulo de fase é  $\gamma_0 \cong 167,2^\circ$ .

Podemos agora determinar as condições iniciais na entrada da esfera de influência da Lua, ou seja determinar os valores de  $\vec{V}_2$ , velocidade do satélite em relação ao centro da Lua,  $\epsilon_2$ , ângulo formado entre o vetor  $\vec{V}_2$  e o raio da esfera de influência da Lua, e  $R_L$ , raio da esfera de influência..

O ângulo  $\epsilon_2$  define a direção da velocidade selenocêntrica inicial do satélite em relação ao centro da Lua.

O valor da velocidade  $\bar{V}_2$ , é determinado pela equação, (7.20), sendo que nesta equação,  $V_L = 1,023 \text{ km/s}$ . O valor encontrado foi  $V_2 = 0,813 \text{ km/s}$ .

A direção do vetor  $\bar{V}_2$  é determinada pela equação (7.21), sendo portanto  $\epsilon_2 \cong 4,73^\circ$ .

Uma vez que o satélite agora está se movendo dentro da esfera de influência, poderemos determinar o tipo de trajetória descrita por ele através do cálculo da energia. A energia é determinada pela equação (7.22), e o seu valor é  $\epsilon \cong 0,257 \text{ km}^2/\text{s}^2$ . Como a energia é positiva, a trajetória dentro da esfera de influência é uma hipérbole. Uma vez determinada a energia, podemos determinar o semi-eixo maior da trajetória hiperbólica, através da equação (7.16), utilizando na mesma o valor de  $\mu_L$ . Obtemos para o semi-eixo maior o valor  $a = -9537,90 \text{ km}$ . Para o cálculo do momento angular, utilizamos a equação (9.7),

$$h = r_2 V_2 \sin \epsilon_2 \quad (9.7)$$

obtemos para o momento angular o valor  $h = 4448,68 \frac{\text{km}^2}{\text{s}}$

O semi-latus rectum da trajetória hiperbólica é determinado através da equação (7.24), e assim, obtemos o valor  $p \cong 4037,85 \text{ km}$ .

Finalmente, para a órbita hiperbólica, podemos determinar a excentricidade  $e$ , a distância da posição mais próxima (periluna) ao centro da Lua,  $r_p$ , e a velocidade,  $V_p$ , no periluna. Para isto utilizamos as equações (7.25), (7.26) e (7.27). Obtemos então os valores  $e \cong 1,19$ ,  $r_p \cong 1841,2 \text{ km}$ ,  $V_p \cong 2,416 \text{ km/s}$ .

Para determinarmos o tempo de voo desde a entrada na esfera de influência até a periluna, devemos inicialmente determinar a anomalia verdadeira com relação à trajetória hiperbólica. A equação utilizada é:

$$\cos f = \frac{p - r_2}{e r_2} \quad (9.8)$$

Substituindo os valores obtemos  $\cos f \cong -0,789$ . Em seguida determina-se  $\cosh F$ , dado pela equação (9.9).

$$\cosh F = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \quad (9.9)$$

o valor encontrado é  $\cosh F = 6,56$ . Para a determinação de  $F$ , utilizamos a equação,

$$F = \ln \left[ y + \sqrt{y^2 - 1} \right] \quad (9.10)$$

obtemos  $F \cong 2,56$ .

Finalmente, podemos determinar o tempo de voo desde a entrada na esfera de influência até a periluna, pelo uso da equação,

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{(-a)^3}{\mu_L}} (e \sinh F - F) \quad (9.11)$$

sendo,  $\sinh F \cong 6,43$ . Para intervalo de tempo temos  $\Delta t \cong 0,78$  d.

O tempo total de voo é a soma entre tempo de voo desde a inserção na trajetória geocêntrica de transferência até a esfera de influência da Lua e o tempo de voo desde a entrada na esfera de influência até a posição mais próxima da Lua. O valor total obtido é  $\Delta t_{\text{total}} \cong 4,7$  d.

A variação da velocidade do satélite no ponto de inserção é  $\Delta V_1 = 0,619$  km/s, e na periluna a variação é  $\Delta V_2 = 0,783$  km/s. Portanto a variação total de velocidade é  $\Delta V = 1,402$  km/s.

A figura. 28 mostra a trajetória do satélite dentro da esfera de influência da Lua e transferência do satélite para sua órbita final.

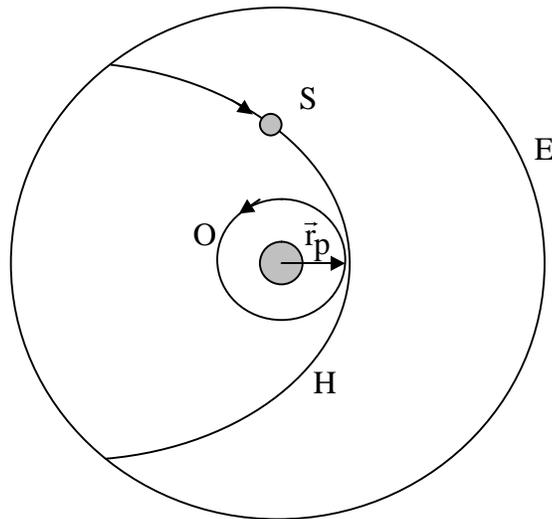


Figura 28 – Trajetória do satélite dentro da esfera de influência e sua órbita final ao redor da Lua

Na figura 28, temos que O é a trajetória lunar, S é o satélite, E esfera de influência, H é a trajetória hiperbólica e  $r_p$  é o raio da trajetória lunar.

Outra situação de transferência, ainda não considerando a perturbação, é a representada na Figura 25. Quando o satélite se encontra no perigeu da órbita elíptica em torno da Terra, ele recebe um empuxo e entra em uma órbita circular de raio  $r_0$ . A velocidade do satélite no perigeu da órbita elíptica é dada pela equação (7.5). Considerando que o satélite, quando estiver no perigeu da órbita em torno da Terra, esteja a 320 km de altura, o valor de  $r_0$  é 6690 km.

Utilizando a equação (9.1), determinamos o valor da distância do apogeu, com valor já determinado na situação descrita anteriormente, e através da equação (9.2), determinamos o valor do semi-eixo  $a$ . Utilizando agora a equação (9.3), determina-se a energia encontrando o mesmo valor já calculado na situação anterior. Com os valores de  $r_0$ , da energia  $\varepsilon$ , determinamos o valor da velocidade no perigeu, encontrando o valor  $V \cong 10,2$  km/s.

A velocidade do satélite na órbita circular de raio  $r_0$  é determinada pela equação (7.5), sendo encontrado o valor  $V_C \cong 7,718$  km/s.

A variação da velocidade neste ponto é dada pela equação,

$$\Delta V_1 = V - V_C \quad (9.12)$$

portanto  $\Delta V_1 \cong 2,482$  km/s .

A órbita circular permite a transferência do satélite para a órbita elíptica geocêntrica de transferência através do perigeu. A partir daí por um processo numérico, determinamos uma trajetória de mínima energia. É importante que neste processo numérico, tenhamos uma trajetória selenocêntrica que permita atingir diretamente a órbita final desejada sem nenhuma transferência a mais.

As tabela-1 e a tabela -2 mostram os dados da órbita geocêntrica de transferência e da órbita selenocêntrica, para o caso da transferência mostrada na fig.25

Tabela 1 – Dados da órbita geocêntrica de transferência

Velocidade mínima	$V_0 = 10,82 \text{ km/s}$
Energia	$E = -1,035 \text{ km}^2/\text{s}^2$
Ângulo entre o raio da esfera de influência das Lua e a distância Terra-Lua	$\lambda_1 = 72^\circ$
Momento angular	$h = 72.381,14 \text{ km/s}$
Semi-eixo maior	$a = 192.549,6 \text{ km}$
Semi-latum rectum	$p = 13.147,56 \text{ km}$
Excentricidade	$e = 0,965$
Posição do satélite na chegada à esfera de influência da Lua	$r_1 = 369.334,6 \text{ km}$
Velocidade na chegada à esfera de influência da Lua	$V_1 = 0,297 \text{ km/s}$
Ângulo de fase na chegada à esfera de influência da Lua	$\gamma_1 = 9,83^\circ$
Anomalia verdadeira na chegada à esfera de influência da Lua	$f_1 = 177,59^\circ$
Anomalia excêntrica na chegada à esfera de influência da Lua	$E = 162,022^\circ$
Tempo de vôo até a chegada à esfera de influência da Lua	$\Delta t = 3,92 \text{ d}$
Ângulo de trajetória de vôo	$\phi_1 = 48,75^\circ$

Tabela 2 – Parâmetros da trajetória selenocêntrica

Velocidade selenocêntrica inicial	$V_2 = 0,813 \text{ km/s}$
Direção da velocidade selenocêntrica inicia relativa ao centro da Lua	$\epsilon_2 = 4,73^\circ$
Energia	$E_S = 0,257 \text{ km}^2/\text{s}^2$
Momento angular	$h_S = 4448,68 \text{ km}^2/\text{s}$
Semi-eixo maior	$a_S = -9537,90 \text{ km}$
Semi-latum rectum	$p_S = 4037,85 \text{ km}$
Excentricidade	$e_S = 1,19$
Distância da periluna	$R_P = 1841,2 \text{ km}$
Velocidade do satélite na periluna	$V_P = 2,416 \text{ km/s}$
Tempo de vôo desde a entrada na esfera de influência até a periluna	$\Delta t_S = 0,392 \text{ d}$

O valor da variação da velocidade no ponto de inserção na trajetória de transferência calculada pelo processo numérico é,  $\Delta V_2 = 3,294 \text{ km/s}$  e na periluna é  $\Delta V_3 = 0,783 \text{ km/s}$ . A variação de velocidade quando o satélite passa do perigeu da órbita elíptica para a órbita circular é  $\Delta V_1 = 2,482 \text{ km/s}$ . Portanto a variação de velocidade total terá valor  $\Delta V_T = 6,559 \text{ km/s}$ . O tempo total de vôo é  $\Delta t = 4,31 \text{ dias}$ .

Na seqüência é feita uma aplicação relativa à transferência do satélite considerando o achatamento da Terra. Será utilizada para o efeito do achatamento a equação (4.20) que nos fornece a variação do argumento do perigeu. A transferência do satélite está mostrada na Figura 27.

O movimento médio do satélite pode ser determinado pela equação (9.13)

$$\mu = n^2 a^3 \quad (9.13)$$

Portanto encontramos o valor  $n = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ .

Vamos supor, como parte da missão, que o satélite tenha que ficar orbitando em torno da Terra por um período de 10 dias. Utilizando a equação (4.20) e substituindo os valores de  $n$ ,  $a$ ,  $j_2$ ,  $j_4$ ,  $e$ ,  $R$ ,  $\mu$  e  $t$  verificamos que a variação do argumento do perigeu foi de  $\Delta \omega = 0,119 \text{ rad}$ , ou seja  $\Delta \omega = 6,8^\circ$ .

Após este período o satélite será lançado na trajetória de transferência. Quando o satélite passa pelo perigeu da órbita elíptica em torno da Terra, sua velocidade é calculada pela equação (8.1). O valor encontrado para a velocidade é  $V \cong 10,2 \text{ km/s}$ .

Na trajetória circular de raio  $r_a = 6690$  km, a velocidade do satélite é determinada pela equação (8.2), sendo encontrado o valor  $V_C = 7,717$  km/s. A variação de velocidade quando o satélite passa para a órbita circular é  $\Delta V_1 = 2,483$  km/s.

O ponto de inserção do satélite para a órbita geocêntrica de transferência é o perigeu da mesma. Por um processo numérico, obtemos os mesmos dados mostrados nas tabelas 1 e 2. Sendo  $\Delta V = 6559$  km/s.

Nota:

Embora a equação de perturbação do 3º corpo tenha sido desenvolvida neste trabalho, ela não será utilizada. A perturbação do satélite pela Terra também não será considerada. Para os desenvolvimentos futuros poderemos considerar a perturbação do 3º corpo e a influência da Terra.

## 10 MANOBRA DE RETORNO PARA A TERRA

O objetivo da missão é colocar o satélite a 100 km da superfície da Lua, ou seja, em uma órbita circular de 1838 km.

O satélite em órbita circula em torno da Lua, tem velocidade determinada pela equação análoga à equação (6.15).

O valor de  $r_p$  é o raio do periluna já determinado anteriormente, ou seja,  $r_p = 1841,2$  km .

Na periluna, através de um impulso, o satélite é colocado em uma trajetória hiperbólica de transferência, tendo velocidade determinada pela equação (7.27) e o valor encontrado é  $V_p = 2,416$  km/s. A energia da hipérbole de transferência é constante, e como a trajetória hiperbólica é a mesma que trouxe o satélite nas proximidades da Lua, o valor do semi-eixo maior é conhecido e seu valor é  $a = -9357$  km . Com o valor de  $a$  encontramos o valor da energia obtendo  $\varepsilon = 0,257$  km<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>. Com este valor de energia e utilizando a equação (7.22) obtemos o valor da velocidade do satélite na saída da esfera de influência da Lua, encontrando o valor  $V_2 = 0,813$  km/s.

O satélite em seguida adquire velocidade  $V_1 = 0,297$  km/s, já na trajetória elíptica de transferência, iniciando o retorno á Terra e, no perigeu desta, recebe um impulso para ser transferido para a órbita elíptica em torno da Terra, completando a missão.

O valor da variação da velocidade do satélite no perigeu da órbita de transferência geocêntrica , quando ele entra para a órbita elíptica em torno da Terra é  $\Delta V_1 = 0,619$  km/s e, a variação de velocidade na periluna é  $\Delta V_2 = 0,783$  km/s. Logo a variação de velocidade total é  $\Delta V = 1,402$  km/s.

A Figura 27 mostra o retorno do satélite à Terra.

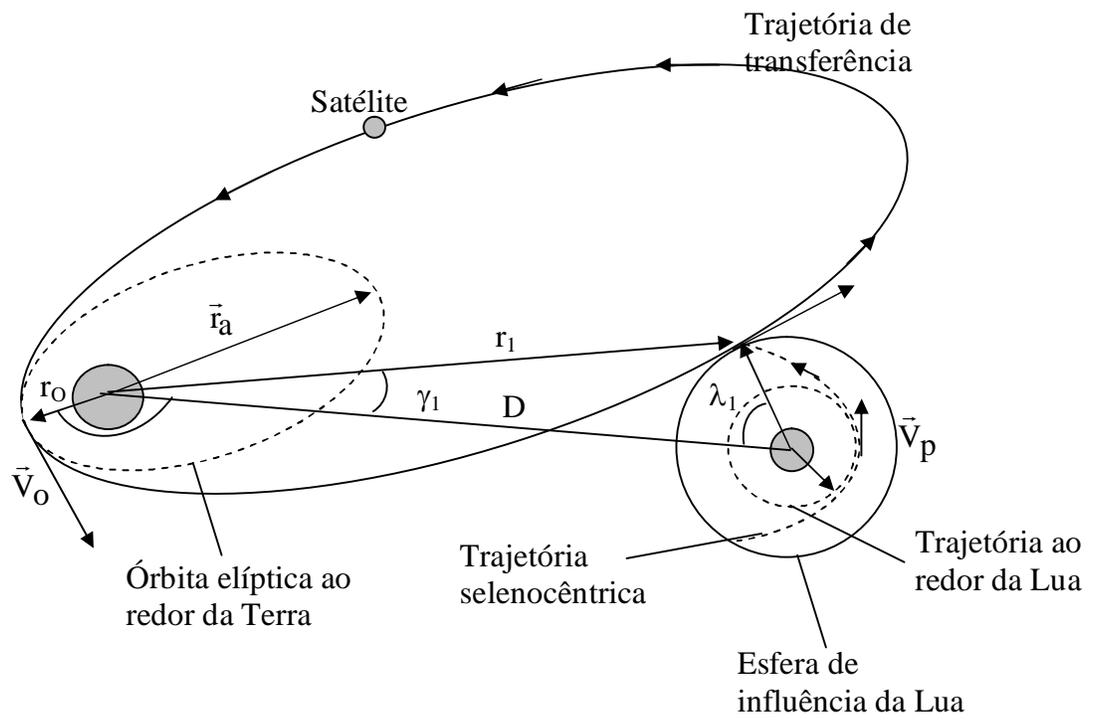


Figura 27 - Retorno do satélite à Terra

## 11 CONCLUSÃO

O objetivo da missão é efetuar uma manobra, com mínimo consumo de combustível, para transferir um satélite artificial da Terra para uma órbita ao redor da Lua e retornando para sua órbita inicial ao redor da Terra. Um exemplo, para um caso particular, foi feito. O trabalho aqui desenvolvido foi baseado no processo de patched conics para a transferência de um satélite para a Lua, muito bem abordado por Bate et al.(1971). Três análises de transferências neste trabalho merecem destaque.

Na primeira o satélite orbita em torno da Terra em uma órbita elíptica, e no perigeu da mesma é transferido para a órbita geocêntrica para conduzir o satélite até uma órbita lunar. Ao chegar na esfera de influência da Lua o satélite, por um processo iterativo, utilizando um programa FORTRAN (Melo, 2005), determina-se a trajetória de mínimo consumo de combustível. Para esta trajetória a variação de velocidade foi baixa. Caso a órbita do satélite fosse circular em torno da Terra, teríamos para esta trajetória uma variação de velocidade maior.

Na segunda o satélite quando se encontra no perigeu da órbita elíptica em torno da Terra, é transferido para uma órbita circular intermediária. Posteriormente o satélite é transferido para uma órbita geocêntrica de transferência e, mais uma vez é utilizado o processo iterativo, só que neste caso temos uma variação maior de velocidade, pois o satélite sofre um impulso a mais,

Na terceira temos a influência do achatamento da Terra. Neste caso, se o satélite tiver que ficar orbitando em torno da Terra por um longo período, dependendo da missão o argumento do perigeu pode sofrer uma variação considerável, fazendo com que a órbita do satélite sofra um deslocamento angular. Após o intervalo de tempo em que o satélite fica orbitando em torno da Terra, através de uma órbita circular intermediária (que facilita os cálculos) o satélite é transferido para uma órbita geocêntrica de transferência, e mais uma vez utilizamos o processo iterativo, para determinação da melhor trajetória.

A melhor opção, desde que o satélite não precise ficar orbitando a Terra por muito tempo, é aquela em que o satélite orbita a Terra em uma trajetória elíptica de grande excentricidade e posteriormente seja lançado em uma trajetória geocêntrica de transferência para uma trajetória hiperbólica até a esfera de influência da Lua.

Este trabalho é importante para uma análise preliminar de missões para a Lua com consumo mínimo de combustível. Todos os passos e as expressões analíticas para o cálculo do consumo de combustível e do tempo de uma missão de transferência de um satélite em uma órbita terrestre (órbita coplanar, ou não, com a órbita da Lua) para uma órbita em torno da Lua, e o seu regresso, foram aqui apresentadas explicitamente. Também foram apresentadas as expressões das perturbações devidas ao achatamento da Terra e à atração gravitacional da Lua, as quais provocam precessões nos pontos onde devem ser aplicados alguns empuxos, e que devem ser consideradas caso o tempo de espera para início da manobra nestas posições sejam longos. No caso da manobra de volta, se a órbita lunar for alta e o tempo de espera for longo, a perturbação a ser considerada é a atração da Terra.

### 11.1 TRABALHOS FUTUROS

Esta análise preliminar pode ser estendida para missões forma que os incrementos de velocidade (consumos de combustível) e tempo de vôo, total e em cada transferência intermediária, fossem gerados a partir de dados da missão desejada, bem como, dos elementos orbitais dos corpos centrais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATE, R.R.; MUELLER, D.D; WHITE, J.E. Fundamentals of astrodynamics, Dover Publications Inc., 1971.
- BROUCKE R.A. The effects of the J3-harmonic (pear shape) on the orbits of a satellite. NATO Advanced Study Institute Predictability, Stability, and Chaos in N-body Dynamical Systems, p. 311-335 1991.
- BROUCKE, R.A . The Double Averaging of the Third Body Perturbations. Austin Texas University-USA 1992. Classnotes
- BROUCKE R.A. Long term third body effects via double averaging, Journal of Guidance, Control and Dynamics, v. 25, n.1, p.27-32, 2003.
- CHAO,C.C. An analytical integration of the averaged equations of variation due to sun-moon perturbations and its application. Astrodynamics conference, paper 79-134, 39p. 1979.
- COK, D.R. On the perturbations of a close-earth satellite due to lunar inequalities. Celestial Mechanics, v.16, pp.459-479, 1978.
- COOK, G.E. Luni-solar perturbations of the orbit of an earth satellite. The Geophysical Journal of de Royal Astronomical Society, v.6, no 3, pp. 271 –291, April 1962.
- GAPOSCHSKIN,E.M. Orbit determination, in “Geodetic Parameters for a .Smithsonian Institution Standard Earth, C.A. Lunquist and G.Veis(Ed.), p.96-127, D.Reidel Publ.Co., 530 p. 1966.
- GIACAGLIA,GIORGIOE.O.;MURPHY,JAMES P.; FELSENTREGER, THEODORE L. A semi-analytic theory for the motion of a lunar satellite. Celestial Mechanics, vol.3,Issue 1, pp. 3-66. 1970.
- KAUFMAN,B. ; ALFRIEND,K.T.; DASEMBROCK,R.R. Lunisolar perturbations in the extend phase space representation of the Vinti problem. Acta Astronautica, v.5, pp. 727-744, 1978.
- KAUFMAN,B. first order semianalytic satellite theory with recovery of the short period terms due the third body and zonal perturbations. 31<sup>a</sup> IAF International Astronautical Congress, Tokyo, Japan, 14 p.1980.

- KAUFMAN, B. ; HARR, W.H. Implementation of semianalytic satellite theory with recovery of short period terms. *Acta Astronautica* – vol. 11, n.6, pp. 279-286. 1984.
- KAULA W. M. Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite. *The Astronomical Journal*, v.67, n.5, pp. 300 – 3003, june. 1962.
- KOPAL, Z. Perturbations of the Orbits of Artificial Satellites by an Attraction of External Bodies. Boeing Scientific Research Labs. Seattle Math. Res. Lab. report n°;DI-82-0558;2p. 1966
- KOZAI, Y. On the effects of the Sun and the Moon upon the motion of a close Earth satellite. . Astrophysical Observatory, Smithsonian Institution, March. 1959.
- KOZAI, Y. Secular Perturbations of Asteroids with high inclination and eccentricity. *Astronomical Journal*, Vol.67. 1962
- KOZAI, Y. A new method to compute lunisolar perturbations in satellite motions. Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report 349, February 1973.
- KRAUSE H.G.L. The secular perturbations of the orbit of a satellite due to the oblateness of the central body for the 2m-th zonal harmonics and due to the gravitational attraction of a third body, In: Transactions AAS Saturn V/ Apollo and beyond National Symp, Huntsville, Al, vo. 2, 32p.1967.
- MARTYENKO, B.K. Luni-solar perturbations of a 24 hr Satellite . *Bulletin Institut Theoreticheskoi Astromii* , v. 11, p. 33-47, 1967.
- Melo, C. F. Trajetórias Alternativas no Sistema Terra-Lua , São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 259 p.; (INPE-14050-TDI/1065) 2005.
- MORBIDELLI A.; DELHAISE F. Luni-solar effects of geosynchronous orbits at the critical inclination. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (INSS 0923-2958), vol.57, no. 1-2, p. 155-173.1993.
- PRADO A.F.B.A, Optmal Trnasfer and Swing-by Orbits in the two – and Three-Body Problem, Ph.D. Dissertation, The University of Texas at Austin, Austin, 1993.
- PRADO, A.F.B.A ; COSTA. Third Body Perturbation in Spacecraft Trajectory. “IAF Paper 98-A.4.05, “ 49<sup>th</sup> International Astronautical Congress, Melbourne, Australia, sept-oct 1998.
- PRADO, A.F.B.A; Fundamentos da Tecnologia Espacial, São José dos Campos, 2001.

- PRADO A.F.B.A, Third Body perturbations in orbits around natural satellites. *Journal of Guidance, Control and dynamics*, V.26, n.1, 33, 2003.
- ROTH,E.A. Construction of a consistent semianalytic theory of a planetary or moon orbiter perturbed by a third body. *Celestial Mechanics*, vol. 28, p. 155-169,1982.
- ROY, A.E. *Orbital Motion*, Published by Institute of Physics Publishing - 3<sup>rd</sup> ed.1988.
- SAEDELER B. ; HENRARD J. Orbit of a lunar artificial satellite: analytical theory of perturbations. *Transits of Venus: New Views of the Solar System and Galaxy. Proceedings IAU Colloquium No. 196*, . D.W.Kurtz, ed. 2004.
- SCHINGLOFF, H. *ASTRONAUTICAL ENGINEERING*, ingenieurbu Dr. Schlingloff, Regensburg, Germany, 2005.
- TORRES, S.K. , *Controle Orbital de Satélites Artificiais com propulsão e uso de gravidade lunar* , Tese de Mestrado, UNESP/FEG, Guaratinguetá, 2004.
- VAGNERS, J. On the long-period behavior of close lunar orbiters. In “Second Compilation of Papers on Trajectory Analysis and Guidance Theory”, pp.215-228, NASA PM-67-21, 344p. 1968
- VAGNERS, J. On the long term evolution of lunar satellite orbit. In “Periodic Orbits, Stability and Resonances” G.E.O. Giacaglia (Ed.), D. Reidel Pub. Co., Dordrecht-Holland, p. 304-313, 1970.
- WNUK,E. Tesseral harmonic perturbations for high order and degree harmonics. *Celestial Mechanics* , vol.44, issue 1-2, pp.179-191,1988.
- WNUK,E. Tesseral harmonic perturbations in the Keplerian orbital elements. *Acta Astronomica* (ISSN 0001-5237), vol.40, no. 1-2, 1990, p. 191-198, 1990.

**BIBLIOGRAFIA CONSULTADA**

ARANTES, J.C., Transferência de Órbita. Centro Técnico Espacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. 1978

BROUWER D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag . The Astronomical Journal. Yale University Observatory. 1959

CARVALHO, J.P. DOS S., Semi-analytic Theory of a Monn Artificial Satélite considering Lunar Oblatness and Perturbations Due to a Third-Body ein Elliptic Orbit, 7 th. Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications pp. 1-7. 2008

MURRAY, C.D. AND DERMOTT, S.F., Solar System Dynamics, Cambridge University Press, 1999.

PRADO, A.F.B.A.; GIACAGLIA, G.E.O., Third Body Perturbations on Satellites, São José dos Campos, INPE, 2003.

SOLÓRZANO, C.R. H. Perturbação de 3º corpo com modelos de média simples. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais(INPE). São José dos Campos. 2001.

## APÊNDICE A – TERMOS DA FUNÇÃO PERTURBADORA E EXPRESSÃO DA FUNÇÃO PERTURBADORA

Termos  $R_2$  e  $R_3$  da função perturbadora desenvolvidos

$$R_2 = \frac{a^2 * n'^2 * \mu'}{16} * (2 * (3 * \text{Cos}[i]^2 - 1) + 3 * e^2 * (3 * \text{Cos}[i]^2 - 1) + 15 * e^2 * \text{Cos}[2 * \omega] * \text{Sin}[i]^2) * \left(1 + \frac{3}{2} * e' + \frac{15}{8} * e'^4\right)$$

A1

$$R_3 = \frac{1}{8192 a'} (5 a^3 e e' (-48 ((4 + 3 e^2) (-1 - 11 \text{Cos}[i] + 5 \text{Cos}[i]^2 + 15 \text{Cos}[i]^3) \text{Cos}[\omega + \Omega - \omega'] - (-1 + \text{Cos}[i]) (35 e^2 (1 + \text{Cos}[i])^2 \text{Cos}[3 \omega + \Omega - \omega'] + (4 + 3 e^2) (-1 + 10 \text{Cos}[i] + 15 \text{Cos}[i]^2) \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] - 35 e^2 (-1 + \text{Cos}[i]^2) \text{Cos}[3 \omega - \Omega + \omega'])) - 120 ((4 + 3 e^2) (-1 - 11 \text{Cos}[i] + 5 \text{Cos}[i]^2 + 15 \text{Cos}[i]^3) \text{Cos}[\omega + \Omega - \omega'] - (-1 + \text{Cos}[i]) (35 e^2 (1 + \text{Cos}[i])^2 \text{Cos}[3 \omega + \Omega - \omega'] + (4 + 3 e^2) (-1 + 10 \text{Cos}[i] + 15 \text{Cos}[i]^2) \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] - 35 e^2 (-1 + \text{Cos}[i]^2) \text{Cos}[3 \omega - \Omega + \omega'])) (e')^2 - 35 (3 (4 + 3 e^2) (-1 + \text{Cos}[i]) (1 + \text{Cos}[i])^2 \text{Cos}[\omega + 3 \Omega - 3 \omega'] - 12 (4 + 3 e^2) (-1 - 11 \text{Cos}[i] + 5 \text{Cos}[i]^2 + 15 \text{Cos}[i]^3) \text{Cos}[\omega + \Omega - \omega'] - 7 e^2 \text{Cos}[3 (\omega + \Omega - \omega')] - 21 e^2 \text{Cos}[i] \text{Cos}[3 (\omega + \Omega - \omega')] - 21 e^2 \text{Cos}[i]^2 \text{Cos}[3 (\omega + \Omega - \omega')] - 7 e^2 \text{Cos}[i]^3 \text{Cos}[3 (\omega + \Omega - \omega')] - 420 e^2 \text{Cos}[3 \omega + \Omega - \omega'] - 420 e^2 \text{Cos}[i] \text{Cos}[3 \omega + \Omega - \omega'] + 420 e^2 \text{Cos}[i]^2 \text{Cos}[3 \omega + \Omega - \omega'] + 420 e^2 \text{Cos}[i]^3 \text{Cos}[3 \omega + \Omega - \omega'] + 48 \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] + 36 e^2 \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] - 528 \text{Cos}[i] \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] - 396 e^2 \text{Cos}[i] \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] - 240 \text{Cos}[i]^2 \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] - 180 e^2 \text{Cos}[i]^2 \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] + 720 \text{Cos}[i]^3 \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] + 540 e^2 \text{Cos}[i]^3 \text{Cos}[\omega - \Omega + \omega'] - 7 e^2 \text{Cos}[3 (\omega - \Omega + \omega')] + 21 e^2 \text{Cos}[i] \text{Cos}[3 (\omega - \Omega + \omega')] - 21 e^2 \text{Cos}[i]^2 \text{Cos}[3 (\omega - \Omega + \omega')] + 7 e^2 \text{Cos}[i]^3 \text{Cos}[3 (\omega - \Omega + \omega')] - 420 e^2 \text{Cos}[3 \omega - \Omega + \omega'] + 420 e^2 \text{Cos}[i] \text{Cos}[3 \omega - \Omega + \omega'] + 420 e^2 \text{Cos}[i]^2 \text{Cos}[3 \omega - \Omega + \omega'] - 420 e^2 \text{Cos}[i]^3 \text{Cos}[3 \omega - \Omega + \omega'] - 12 \text{Cos}[\omega - 3 \Omega + 3 \omega'] - 9 e^2 \text{Cos}[\omega - 3 \Omega + 3 \omega'] + 12 \text{Cos}[i] \text{Cos}[\omega - 3 \Omega + 3 \omega'] + 9 e^2 \text{Cos}[i] \text{Cos}[\omega - 3 \Omega + 3 \omega'] + 12 \text{Cos}[i]^2 \text{Cos}[\omega - 3 \Omega + 3 \omega'] + 9 e^2 \text{Cos}[i]^2 \text{Cos}[\omega - 3 \Omega + 3 \omega'] - 12 \text{Cos}[i]^3 \text{Cos}[\omega - 3 \Omega + 3 \omega'] - 9 e^2 \text{Cos}[i]^3 \text{Cos}[\omega - 3 \Omega + 3 \omega']) (e')^4) (n')^2 \mu')$$

A2

Componente  $R_4$  da função perturbadora desenvolvido

$$\frac{1}{32768(a')^2}$$

$$(9a^4$$

$$(-8$$

$$\begin{aligned} & (140e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega] - \\ & 35\text{Cos}[i]^4(8+40e^2+15e^4-28e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega]+21e^4\text{Cos}[4\omega]) - \\ & 3(8+40e^2+15e^4+245e^4\text{Cos}[4\omega]) + \\ & 10\text{Cos}[i]^2(-112e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega]+3(8+40e^2+15e^4+49e^4\text{Cos}[4\omega])) + \\ & 20(48+240e^2+90e^4-280e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega]+1470e^4\text{Cos}[4\omega] - \\ & 14\text{Cos}[i]^4(8+40e^2+15e^4-28e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega]+21e^4\text{Cos}[4\omega]) \\ & (-5+\text{Cos}[2(\Omega-\omega')]) - 16\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] - 80e^2\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] - \\ & 30e^4\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] + 56e^2\text{Cos}[2(\omega+\Omega-\omega')] + 28e^4\text{Cos}[2(\omega+\Omega-\omega')] + \\ & 147e^4\text{Cos}[2(2\omega+\Omega-\omega')] + 56e^2\text{Cos}[2(\omega-\Omega+\omega')] + 28e^4\text{Cos}[2(\omega-\Omega+\omega')] + \\ & 4\text{Cos}[i]^2(-120-600e^2-225e^4+560e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega]-735e^4\text{Cos}[4\omega] + \\ & 32\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] + 160e^2\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] + 60e^4\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] - \\ & 84e^2\text{Cos}[2(\omega+\Omega-\omega')] - 42e^4\text{Cos}[2(\omega+\Omega-\omega')] - 84e^2\text{Cos}[2(\omega-\Omega+\omega')] - \\ & 42e^4\text{Cos}[2(\omega-\Omega+\omega')]) + 147e^4\text{Cos}[2(2\omega-\Omega+\omega')] + \\ & 392e^2\text{Cos}[i]^3(-2-e^2+3e^2\text{Cos}[2\omega])\text{Sin}[2\omega]\text{Sin}[2(\Omega-\omega')] - \\ & 56e^2\text{Cos}[i](-5(2+e^2)+21e^2\text{Cos}[2\omega])\text{Sin}[2\omega]\text{Sin}[2(\Omega-\omega')]) (e')^2 + \\ & 35(72+360e^2+135e^4-420e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega]+2205e^4\text{Cos}[4\omega]-32\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] - \\ & 160e^2\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] - 60e^4\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] - \\ & 7\text{Cos}[i]^4(8+40e^2+15e^4-28e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega]+21e^4\text{Cos}[4\omega]) \\ & (-15+4\text{Cos}[2(\Omega-\omega')]) + 112e^2\text{Cos}[2(\omega+\Omega-\omega')] + 56e^4\text{Cos}[2(\omega+\Omega-\omega')] + \\ & 294e^4\text{Cos}[2(2\omega+\Omega-\omega')] + 112e^2\text{Cos}[2(\omega-\Omega+\omega')] + 56e^4\text{Cos}[2(\omega-\Omega+\omega')] + \\ & 2\text{Cos}[i]^2(-360-1800e^2-675e^4+1680e^2(2+e^2)\text{Cos}[2\omega]-2205e^4\text{Cos}[4\omega] + \\ & 128\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] + 640e^2\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] + 240e^4\text{Cos}[2(\Omega-\omega')] - \\ & 336e^2\text{Cos}[2(\omega+\Omega-\omega')] - 168e^4\text{Cos}[2(\omega+\Omega-\omega')] - 336e^2\text{Cos}[2(\omega-\Omega+\omega')] - \\ & 168e^4\text{Cos}[2(\omega-\Omega+\omega')]) + 294e^4\text{Cos}[2(2\omega-\Omega+\omega')] + \\ & 784e^2\text{Cos}[i]^3(-2-e^2+3e^2\text{Cos}[2\omega])\text{Sin}[2\omega]\text{Sin}[2(\Omega-\omega')] - \\ & 112e^2\text{Cos}[i](-5(2+e^2)+21e^2\text{Cos}[2\omega])\text{Sin}[2\omega]\text{Sin}[2(\Omega-\omega')]) (e')^4 (a')^2 \mu' \end{aligned}$$

A3

## Função Perturbadora

R=

$$\frac{1}{32768}$$

$$\left\{ a^2 \left( 256(-2 - 3e^2 + (6 + 9e^2) \cos [i]^2 + 15e^2 \cos [2\omega] \sin [i]^2) (8 + 12e' + 15(e')^4) + \frac{1}{a'} \right. \right.$$

(20ae e'

$$\begin{aligned} & (-48((4 + 3e^2)(-1 - 11 \cos [i] + 5 \cos [i]^2 + 15 \cos [i]^3) \cos [\omega + \Omega - \omega'] - \\ & (-1 + \cos [i]) (35e^2(1 + \cos [i])^2 \cos [3\omega + \Omega - \omega'] + (4 + 3e^2)(-1 + 10 \cos [i] + 15 \cos [i]^2) \\ & \cos [\omega - \Omega + \omega'] + 35e^2 \cos [3\omega - \Omega + \omega'] \sin [i]^2)) - \\ & 120((4 + 3e^2)(-1 - 11 \cos [i] + 5 \cos [i]^2 + 15 \cos [i]^3) \cos [\omega + \Omega - \omega'] - \\ & (-1 + \cos [i]) (35e^2(1 + \cos [i])^2 \cos [3\omega + \Omega - \omega'] + (4 + 3e^2)(-1 + 10 \cos [i] + 15 \cos [i]^2) \\ & \cos [\omega - \Omega + \omega'] + 35e^2 \cos [3\omega - \Omega + \omega'] \sin [i]^2)) (e')^2 - \\ & 35(3(4 + 3e^2)(-1 + \cos [i]) (1 + \cos [i])^2 \cos [\omega + 3\Omega - 3\omega'] - \\ & 12(4 + 3e^2)(-1 - 11 \cos [i] + 5 \cos [i]^2 + 15 \cos [i]^3) \cos [\omega + \Omega - \omega'] - 7e^2 \cos [3(\omega + \Omega - \omega')] - \\ & 21e^2 \cos [i] \cos [3(\omega + \Omega - \omega')] - 21e^2 \cos [i]^2 \cos [3(\omega + \Omega - \omega')] - 7e^2 \cos [i]^3 \cos [3(\omega + \Omega - \omega')] - \\ & 420e^2 \cos [3\omega + \Omega - \omega'] - 420e^2 \cos [i] \cos [3\omega + \Omega - \omega'] + 420e^2 \cos [i]^2 \cos [3\omega + \Omega - \omega'] + \\ & 420e^2 \cos [i]^3 \cos [3\omega + \Omega - \omega'] + 48 \cos [\omega - \Omega + \omega'] + 36e^2 \cos [\omega - \Omega + \omega'] - \\ & 528 \cos [i] \cos [\omega - \Omega + \omega'] - 396e^2 \cos [i] \cos [\omega - \Omega + \omega'] - 240 \cos [i]^2 \cos [\omega - \Omega + \omega'] - \\ & 180e^2 \cos [i]^2 \cos [\omega - \Omega + \omega'] + 720 \cos [i]^3 \cos [\omega - \Omega + \omega'] + 540e^2 \cos [i]^3 \cos [\omega - \Omega + \omega'] - \\ & 7e^2 \cos [3(\omega - \Omega + \omega')] + 21e^2 \cos [i] \cos [3(\omega - \Omega + \omega')] - 21e^2 \cos [i]^2 \cos [3(\omega - \Omega + \omega')] + \\ & 7e^2 \cos [i]^3 \cos [3(\omega - \Omega + \omega')] - 420e^2 \cos [3\omega - \Omega + \omega'] + 420e^2 \cos [i] \cos [3\omega - \Omega + \omega'] + \\ & 420e^2 \cos [i]^2 \cos [3\omega - \Omega + \omega'] - 420e^2 \cos [i]^3 \cos [3\omega - \Omega + \omega'] - 12 \cos [\omega - 3\Omega + 3\omega'] - \\ & 9e^2 \cos [\omega - 3\Omega + 3\omega'] + 12 \cos [i] \cos [\omega - 3\Omega + 3\omega'] + 9e^2 \cos [i] \cos [\omega - 3\Omega + 3\omega'] + \\ & 12 \cos [i]^2 \cos [\omega - 3\Omega + 3\omega'] + 9e^2 \cos [i]^2 \cos [\omega - 3\Omega + 3\omega'] - 12 \cos [i]^3 \cos [\omega - 3\Omega + 3\omega'] - \\ & 9e^2 \cos [i]^3 \cos [\omega - 3\Omega + 3\omega'] (e')^4) + \frac{1}{(a')^2} \end{aligned}$$

(9a<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} & (-8(140e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] - 35 \cos [i]^4(8 + 40e^2 + 15e^4 - 28e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] + 21e^4 \cos [4\omega]) - \\ & 3(8 + 40e^2 + 15e^4 + 245e^4 \cos [4\omega]) + \\ & 10 \cos [i]^2(-112e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] + 3(8 + 40e^2 + 15e^4 + 49e^4 \cos [4\omega]))) + \\ & 20(48 + 240e^2 + 90e^4 - 280e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] + 1470e^4 \cos [4\omega] - \\ & 14 \cos [i]^4(8 + 40e^2 + 15e^4 - 28e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] + 21e^4 \cos [4\omega]) (-5 + \cos [2(\Omega - \omega')]) - \\ & 16 \cos [2(\Omega - \omega')] - 80e^2 \cos [2(\Omega - \omega')] - 30e^4 \cos [2(\Omega - \omega')] + 56e^2 \cos [2(\omega + \Omega - \omega')] + \\ & 28e^4 \cos [2(\omega + \Omega - \omega')] + 147e^4 \cos [2(2\omega + \Omega - \omega')] + 56e^2 \cos [2(\omega - \Omega + \omega')] + \\ & 28e^4 \cos [2(\omega - \Omega + \omega')] + \\ & 4 \cos [i]^2(-120 - 600e^2 - 225e^4 + 560e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] - 735e^4 \cos [4\omega] + 32 \\ & \cos [2(\Omega - \omega')] + 160e^2 \cos [2(\Omega - \omega')] + 60e^4 \cos [2(\Omega - \omega')] - 84e^2 \cos [2(\omega + \Omega - \omega')] - 42 \\ & e^4 \cos [2(\omega + \Omega - \omega')] - 84e^2 \cos [2(\omega - \Omega + \omega')] - 42e^4 \cos [2(\omega - \Omega + \omega')] + \\ & 147e^4 \cos [2(2\omega - \Omega + \omega')] + 392e^2 \cos [i]^3(-2 - e^2 + 3e^2 \cos [2\omega]) \sin [2\omega] \sin [2(\Omega - \omega')] - \\ & 56e^2 \cos [i](-5(2 + e^2) + 21e^2 \cos [2\omega]) \sin [2\omega] \sin [2(\Omega - \omega')]) (e')^2 + \\ & 35(72 + 360e^2 + 135e^4 - 420e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] + 2205e^4 \cos [4\omega] - 32 \cos [2(\Omega - \omega')] - \\ & 160e^2 \cos [2(\Omega - \omega')] - 60e^4 \cos [2(\Omega - \omega')] - \\ & 7 \cos [i]^4(8 + 40e^2 + 15e^4 - 28e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] + 21e^4 \cos [4\omega]) (-15 + 4 \cos [2(\Omega - \omega')]) + \\ & 112e^2 \cos [2(\omega + \Omega - \omega')] + 56e^4 \cos [2(\omega + \Omega - \omega')] + 294e^4 \cos [2(2\omega + \Omega - \omega')] + \\ & 112e^2 \cos [2(\omega - \Omega + \omega')] + 56e^4 \cos [2(\omega - \Omega + \omega')] + \\ & 2 \cos [i]^2(-360 - 1800e^2 - 675e^4 + 1680e^2(2 + e^2) \cos [2\omega] - 2205e^4 \cos [4\omega] + 128 \\ & \cos [2(\Omega - \omega')] + 640e^2 \cos [2(\Omega - \omega')] + 240e^4 \cos [2(\Omega - \omega')] - 336e^2 \\ & \cos [2(\omega + \Omega - \omega')] - 168e^4 \cos [2(\omega + \Omega - \omega')] - 336e^2 \cos [2(\omega - \Omega + \omega')] - 168 \\ & e^4 \cos [2(\omega - \Omega + \omega')]) + 294e^4 \cos [2(2\omega - \Omega + \omega')] + \\ & 784e^2 \cos [i]^3(-2 - e^2 + 3e^2 \cos [2\omega]) \sin [2\omega] \sin [2(\Omega - \omega')] - \\ & 112e^2 \cos [i](-5(2 + e^2) + 21e^2 \cos [2\omega]) \sin [2\omega] \sin [2(\Omega - \omega')]) (e')^4) \Big\} (n')^2 \mu' \Big\} (3.33) \end{aligned}$$



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)