



COPPE/UFRJ

**FORMULAÇÃO GERAL PARA ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS ESPESSAS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Wellington Luís Assis Pereira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Webe João Mansur

Vânia José Karam

Rio de Janeiro

Junho de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

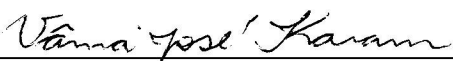
FORMULAÇÃO GERAL PARA ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS ESPESSAS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Wellington Luís Assis Pereira

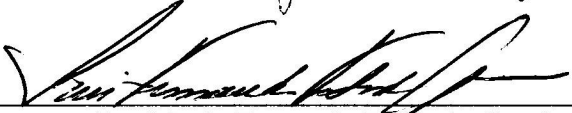
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CÍVIL.

Aprovada por:

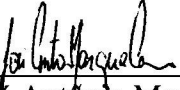

Prof. Weber João Mansur, Ph.D.


Profa. Vânia José Karam, D.Sc.


Prof. José Antonio Fontes Santiago, D.Sc.


Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D.Sc.


Prof. Delfim Soares Júnior, D.Sc.


Prof. José Antonio Marques Carrer, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2009

Pereira, Wellington Luís Assis

Formulação Geral para Análise Dinâmica de Placas Espessas pelo Método dos Elementos de Contorno/ Wellington Luís Assis Pereira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

IX, 141 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Webe João Mansur

Vânia José Karam

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2009.

Referencias Bibliográficas: p. 129-134.

1. Análise dinâmica de placas espessas. 2. Método dos elementos de contorno. 3. Vibração livre e forçada. I. Mansur *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

Se eu pudesse ter tido alguma decisão na herança que os adultos me deixaram, teria pedido mais amor, mais paz, menos guerra, menos ódio, mais ternura, mais sinceridade, mais justiça, mais igualdade e uma série infinita de outras necessidades básicas da humanidade.

Como não fui consultado antes de nascer, preciso concluir que meus pais não quiseram ser sádicos, colocando-me no mundo somente para me ver sofrer a angústia dos tempos presentes e com isso sofrerem ainda mais.

Eu não devo ser um acidente e não creio que nasci cedo ou tarde de mais. Apenas nasci num tipo de mundo que não faz meu gênero. Em compensação amo a vida como ninguém pode imaginar. Não vou ficar chorando quando meus olhos podem sorrir. Não vou gastar mais tempo vociferando contra meus pais e contra os adultos, porque a vida é curta de mais para gastar metade dela em agressões e outra metade em queixas.

Estou tentando, do meu jeitão esquisito, construir um mundo menos hostil aos que o herdarem de mim. Não tenho planos, não tenho projetos, não me organizei para isso. Tenho apenas uma certeza: SEM MIM ISSO NÃO VAI MELHORAR.

Comecei minha tarefa não sei quando e começo-a cada dia que vivo. Ontem, por exemplo, dei lugar a uma velhinha no ônibus e segurei sua bolsa. Enquanto fazia isso, rezei por ela para que tivesse amor pela vida, como eu tenho...

O MUNDO QUE EU NÃO ENCOMENDEI.

Pe. Zezinho. Diga ao Mundo que Sou Jovem.

**A todas as Pessoas que acreditam em seus sonhos e também
Aqueles que são fortes e, que se levantam, diante das adversidades da vida**

Na minha época de graduação, na UFPA, a dois anos de concluir o curso, tinha colocado na minha cabeça que iria fazer mestrado na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e, em seguida, iria fazer doutorado no Rio de Janeiro, na COPPE/UFRJ. Confesso que não sou muito inteligente, mas sempre procurei conduzir minha vida na maneira mais equilibrada possível, em tudo que faço, inclusive nos estudos. Acredito que Deus dá a consciência exata para cada pessoa... Nem mais, nem menos.

Acabou que, no final da graduação, mudei um pouco os meus planos e, então, resolvi fazer algumas disciplinas como aluno especial na minha universidade, pois a sensação que tinha era que faltava alguma coisa... Não sabia bem ao certo, o que seria essa coisa. E depois de seis meses, concluí as disciplinas e, não se passou muito tempo, consegui trabalho em um escritório de cálculo, prestando serviço. Mas, depois de algum tempo, eu não tinha mais nada para aprender, as tarefas tornaram-se rotineiras e sem desafios. Ali fiquei por quase um ano. Então, resolvi retomar os meus sonhos, larguei tudo e fui fazer mestrado em Ouro Preto e, assim, que concluí o curso, vim fazer doutorado no Rio de Janeiro. Confesso que não foram nada fáceis essas duas fases de minha vida, mas de alguma forma, eu já sabia que as coisas iriam acontecer da forma que ocorreram... Nem mais, nem menos, exatamente como imaginei...

- ✍ A Deus, pela força, pela saúde, pelo entendimento, pela sabedoria, pelo crescimento, por fim, pela missão cumprida;
- ✍ À minha família, pelo encorajamento e apoio por mais essa fase de minha vida;
- ✍ Aos meus orientadores, Prof. Webe João Mansur e Prof^a. Vânia José Karam, pela amizade, oportunidade e confiança, que depositaram em minha pessoa;
- ✍ Ao Prof. José Antônio Marques Carrer por ter me aceito para orientação no início do doutorado e ao Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia por me ajudar e encorajar nas fases de dificuldade da tese;
- ✍ Aos amigos que me receberam de braços abertos aqui no Rio de Janeiro: Cláudio José Martins, Cleberson Dors, Leonardo Pinheiro e Jan Maurice;
- ✍ A todos os amigos (as) que fiz no Rio de Janeiro, tais como: Benevides Xavier, Cid Monteiro, Denise Costa, Edmundo Guimarães, Érika Costa, Fernanda Mittelbach, Pablo Enrique, Patrícia Schroeder, Ivone Araújo, Kátia Inácio, Leandro Di Bartolo, Leonardo Miers, Luis Alvariño, Marianne Horn, Paulo Rocha, Thilene Falcão, etc.
- ✍ Ao CNPq pela ajuda financeira.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

FORMULAÇÃO GERAL PARA ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS
ESPESAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Wellington Luís Assis Pereira

Junho/2009

Orientadores: Webe João Mansur
Vânia José Karam

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho desenvolve uma formulação geral para análise dinâmica de placas espessas baseada na teoria de Reissner. O principal objetivo é mostrar a influência de novos termos, tais como a translação inercial, nas respostas dos problemas quando a espessura aumenta. Assim, o Método dos Elementos de Contorno é utilizado para discretizar o espaço, e para a marcha no tempo, os operadores de Houbolt ou Diferença Central são usados. A partir do conjunto de equações integrais, o sistema é resolvido simultaneamente para o contorno e o domínio. Para mostrar a importância desses termos, um conjunto de exemplos é resolvido e os resultados são comparados com as soluções encontradas na literatura para os casos de vibração livre e forçada.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A GENERAL FORMULATION FOR DYNAMIC ANALYSIS OF THICK
PLATES BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

Wellington Luís Assis Pereira

June/2009

Advisors: Webe João Mansur

Vânia José Karam

Department: Civil Engineering

The present work develops a general formulation for dynamic analysis of thick plates based on the Reissner's theory. The main objective is to show the influence of new terms, such as the translational inertia, on the results of the problems as thickness increases. Thus, the Boundary Element Method is used to discretize the space, while for the time; the Houbolt or the Central Difference operators are used. Then a system of equations is solved for boundary and domain simultaneously. To verify the importance of these terms, a set of examples is solved and the results are compared with the solutions found in the literature for the cases of free and forced vibration.

Sumário

1 Introdução.....	1
1.1 Motivação e Objetivo.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica.....	2
1.3 Escopo do Trabalho	6
2 Formulação das Equações do Movimento para a Teoria de Reissner	8
2.1 Introdução.....	8
2.2 Formulação do Problema.....	8
2.3 Expressões dos Esforços Resultantes	14
2.4 Equação Diferencial do Movimento	17
3 Equações Integrais do Problema	22
3.1 Introdução.....	22
3.2 Considerações Gerais da Formulação.....	22
3.3 Condições de Contorno	24
3.4 Equação Integral do Método dos Elementos de Contorno.....	25
3.4.1 Considerações preliminares	26
3.4.2 Equação integral básica.....	29
3.5 Solução Fundamental.....	35
3.5.1 Deslocamentos generalizados.....	35
3.5.2 Forças de superfície generalizadas.....	36
3.5.3 Singularidades dos tensores.....	37
3.6 Transformação das Integrais das Forças de Domínio em Integrais de Contorno.....	38
3.7 Esforços em Pontos Internos: Momentos e Cortantes	40
4 Implementação Numérica	47
4.1 Introdução.....	47
4.2 Equações Integrais Discretizadas	47
4.3 Elementos do Contorno	52
4.3.1 Elemento quadrático isoparamétrico contínuo	52
4.3.2 Elemento quadrático isoparamétrico descontínuo	54

4.4 Descontinuidade da Normal ou das Condições de Contorno	56
4.4.1 Utilização de nó duplo	56
4.4.2 Utilização de elemento descontínuo	57
4.5 Célula Interna	57
4.5.1 Ponto singular situado em um dos vértices da célula	63
4.5.2 Ponto singular situado em um dos lados da célula	64
4.5.3 Ponto singular situado no interior da célula	65
4.6 Esforços Internos	66
5 Solução Dinâmica do Problema	68
5.1 Introdução	68
5.2 Sistema das Equações Integrais	68
5.3 Caso de Vibração Livre	71
5.4 Caso de Vibração Forçada	72
5.4.1 Método de Houbolt	73
5.4.2 Método de Diferença Central	74
6 Exemplos Numéricos	76
6.1 Introdução	76
6.2 Caso Degenerado de Placa	77
6.3 Vibração Livre	79
6.4 Vibração Forçada	83
6.4.1 Placa retangular	85
6.4.2 Placa quadrada	90
6.4.3 Placa circular	98
6.5 Estudo Paramétrico	111
7 Conclusões e Propostas	126
7.1 Conclusões	126
7.2 Propostas para Continuidade do Trabalho	128
Referências Bibliográficas	129
Apêndice A	135

Introdução

1.1 Motivação e Objetivo

A quantidade de estruturas bidimensionais em nossa volta é enorme. Se olharmos para cima, para baixo, ou para os lados sempre iremos nos deparar com um elemento de placa. E dependendo do plano em que as forças atuem, a disposição destas forças pode vir a modificar a sua funcionalidade.

Uma maneira clara de se ver isso é observando os pavimentos de prédios, as arquibancadas de estádios de futebol, as paredes do cofre de bancos, os pisos de plataforma offshore de petróleo, as pistas de pontes rodoviárias, etc. Para o elemento ser tratado como placa, este deve possuir uma das dimensões pequena em relação às demais, e esta dimensão menor caracteriza a sua espessura.

Via de regra, quando a relação entre a espessura e a menor dimensão lateral da placa é menor ou igual a 0.05, classifica-se esta como delgada ou fina. Já quando essa relação estiver por volta de 0.10, a placa deve ser tratada como moderadamente espessa e, para relações maiores, denomina-se como espessa ou grossa. Vale ressaltar que essas relações não são rigorosas e que alguns autores consideram outros limites para essas classificações.

Nos dias de hoje, o homem tem, à sua disposição, ferramentas computacionais que o auxiliam no desenvolvimento de formulações e técnicas numéricas para análise de vários problemas. Mas este é um caminho praticamente teórico e, quando aliado a análises experimentais, torna-se tão importante que os custos para realizar os ensaios podem vir a ser pequenos.

Assim, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma formulação geral para análise dinâmica de placas espessas, utilizando a teoria de Reissner, com a discretização espacial feita com o Método dos Elementos de Contorno e empregando, para a marcha no tempo, os operadores de Houbolt ou Diferença Central.

1.2 Revisão Bibliográfica

Para a análise de flexão de placas, existem várias teorias, sendo as mais conhecidas e utilizadas as seguintes: teoria de Kirchhoff, também conhecida como teoria de Kirchhoff-Love ou teoria clássica; teoria de Mindlin e teoria de Reissner.

A teoria de Kirchhoff pode ser encontrada em TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER (1959) e SHAMES e DYM (1985), onde também se encontra a teoria da elasticidade básica. A teoria de Kirchhoff não considera a deformabilidade por cisalhamento transversal e se limita a placas delgadas.

A teoria de Reissner foi apresentada em três artigos publicados na década de 1940. O primeiro, REISSNER (1944), estabelece um sistema de equações diferenciais de sexta ordem para o problema linear de flexão de placas finas. Já no segundo, REISSNER (1945), o efeito da deformabilidade por cisalhamento transversal na flexão de placas elásticas delgadas é investigado. Este trabalho aborda o problema de placas retangulares, onde é estudada a flexão e a torção pura de uma placa infinita com furo no centro. No terceiro,

REISSNER (1947), o principal objetivo é mostrar que, para um dado sistema de equações diferenciais, é possível satisfazer três condições de contorno, em vez de duas apenas, como estabelece a teoria clássica de Kirchhoff. A teoria de Reissner considera, portanto, as deformações cisalhantes transversais e permite a análise de placas espessas.

Dando um enfoque dinâmico, consideram-se dois artigos de Mindlin, que abordam a teoria de placa moderadamente espessa. Inicialmente, MINDLIN (1951) inclui os efeitos das inércias de rotação e a deformabilidade por cisalhamento transversal para análise de flexão de placas elásticas isotrópicas, revelando que são necessárias três condições de contorno por bordo. A seguir, com base na mesma linha dos estudos anteriores, MINDLIN *et al.* (1956) apresentam uma análise especial para os modos e as frequências elevadas de vibração governada pelos termos inerciais de rotação.

Verifica-se que, na teoria de Kirchhoff, as rotações inerciais não aparecem nas equações diferenciais. Nota-se também que, nessa teoria, são satisfeitas apenas duas condições de contorno por bordo, sendo usada uma condição de contorno única que engloba o esforço cortante e o momento torsor, envolvendo a chamada força cortante efetiva, e são geradas reações nos cantos apoiados. Já na teoria de Mindlin, os termos inerciais de rotação aparecem nas equações, sendo possível satisfazer três condições de contorno. Esta teoria considera um fator κ nas expressões dos esforços cortantes, para levar em consideração a distribuição da deformação por cisalhamento ao longo da espessura da placa. No trabalho de DAWE (1977), um método baseado nessa teoria é usado em conjunto com o modelo de fatia finita para resolver o problema de vibração livre, onde são testados vários valores do fator κ , para adequar as respostas em frequência à solução da elasticidade.

Para análise de vibração livre, destacam-se os trabalhos de LEISSA (1969), SRINIVAS *et al.* (1970), CHEUNG e CHAKRABARTI (1972), DAWE e

ROUFAEIL (1980), MIKAMI e YOSHIMURA (1984). No primeiro, encontra-se uma pesquisa extensa sobre a vibração livre de placas finas, tanto no âmbito teórico como no experimental. No segundo trabalho, os autores propõem uma solução exata para placa retangular simplesmente apoiada, cujas frequências são obtidas a partir da solução de uma equação transcendental. Em seguida, os pesquisadores apresentam uma metodologia para o problema de vibração, onde utilizam várias camadas para representar a espessura de placas retangulares apoiadas através do Método das Camadas Finitas (FLM). No quarto trabalho, os pesquisadores empregam a teoria de Mindlin para análise da vibração de Rayleigh-Ritz, onde são apresentados vários problemas sob condições de contorno diversas, sendo também analisado o fator de cisalhamento dessa teoria. Já, no último, é desenvolvida uma metodologia para análise de placa retangular de Mindlin usando o Método da Colocação.

A área experimental é muito importante para validar as teorias e, para o caso de vibração livre de placas delgadas, PLUNKETT (1963) apresenta bons resultados da frequência natural para placas retangulares sob a condição de contorno engaste-livre, através de expressões simples com base na teoria de vigas, indicando que as formas modais de placas com espessuras não uniformes possuem modos muito complexos e, assim, uma quantidade grande de termos pode ser usada para qualquer análise de vibração. Além desse, WALLER (1952) obtém algumas formas modais para placas com geometria pentagonal e hexagonal regulares, sob a condição de contorno completamente livre.

Observa-se que existe uma quantidade maior de trabalhos usando a teoria de placas de Mindlin do que utilizando a teoria de Reissner.

No âmbito de problemas dinâmicos de placas com a atuação de forças externas, BAUER (1968) apresenta algumas soluções para análise de placas finas para obter respostas do tipo não linear devido a cargas impulsivas, em termos do deslocamento apenas. LEE e REISMANN (1969) utilizam a teoria da

elasticidade tridimensional para resolver problemas de placa moderadamente espessa, sujeita a uma carga uniforme subitamente aplicada sobre uma região. ROCK e HINTON (1974) fazem a análise de vibração livre e transiente para obter as respostas de placas finas e espessas usando o Método dos Elementos Finitos (MEF). FOTIU *et al.* (1994) apresentam o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para resolver problemas de placas delgadas, sendo a função de Green dividida em duas partes: uma dinâmica e outra quase estática. Seguindo a linha das equações integrais, SLADEK *et al.* (2003) fazem o uso de formulações para as equações integrais de contorno local (LBIE), baseadas em discretização sem malha (*Meshless*) para placas finas.

Existem muitos artigos que podem ser encontrados na literatura para resolver o problema de placas finas e espessas, fazendo uso do Método dos Elementos de Contorno, tais como BESKOS (1987), PROVIDAKIS e BESKOS (1989a), PROVIDAKIS e BESKOS (1989b). Além destes, têm-se ainda os trabalhos de BESKOS (1991), PROVIDAKIS (1996), PROVIDAKIS e BESKOS (1999), PROVIDAKIS e BESKOS (2000).

Para análise de problemas gerais das áreas de dinâmica das estruturas e de propagação de ondas, podem-se citar: MORSE e FESHBACH (1953); BIGGS (1964); MALVERN (1969); GRAFF (1975); MANSUR (1983); BREBBIA *et al.* (1984); PAZ (1991); RAO (1995); PAZ (1997); COOK *et al.* (2002).

No Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ (PEC), existem duas teses desenvolvidas com base no Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE) para resolver o problema dinâmico de placas espessas, a saber, GRAÇA (2000) e MITTELBACH (2007). Ambos os trabalhos utilizam a teoria de Mindlin. A primeira proposta é aplicável somente para casos de geometria retangular. Já a segunda é aplicável aos problemas axissimétricos, sendo usada na formulação a função de Green para a marcha no tempo.

O presente trabalho é uma extensão das pesquisas iniciadas por KARAM (1986) e KARAM (1992), ambas desenvolvidas no PEC. O primeiro trabalho é formulado para a análise estática de placas espessas utilizando a teoria de Reissner com o MEC. O segundo também usa a mesma metodologia, onde é feita uma continuação das pesquisas, sendo desenvolvida a análise com não linearidade do material, empregando células triangulares constantes para a divisão do domínio. Para o caso de células triangulares lineares, citam-se os trabalhos de CARRER (1991), CARRER e MANSUR (1996) e SOUZA *et al.* (2004).

Vale ressaltar que este trabalho é o primeiro desenvolvido no PEC que utiliza o Método dos Elementos de Contorno para análise dinâmica de placas espessas, representando uma contribuição na formulação e implementação da análise dinâmica de placas espessas.

Na formulação, o presente trabalho considera a teoria de Reissner para flexão de placas e inclui uma parcela a mais nas equações integrais para deslocamentos e nas equações integrais dos esforços, referente à contribuição dos termos de translação inercial, em relação ao trabalho de PROVIDAKIS e BESKOS (2000), que consideram a teoria de Reissner-Mindlin.

Na implementação computacional, o contorno é discretizado em elementos quadráticos, com geometria linear, podendo ser contínuo ou descontínuo, e o domínio é dividido em células triangulares constantes, também com geometria linear, sendo as variáveis do problema calculadas no centro geométrico de cada célula.

1.3 Escopo do Trabalho

No Capítulo 2, uma formulação geral dinâmica para análise de placas espessas é apresentada, com base na teoria de Reissner.

Em seguida, no Capítulo 3, as equações integrais relacionadas com a formulação geral do capítulo anterior são deduzidas a partir do Segundo Teorema de Betti, a fim de serem utilizadas no Método dos Elementos de Contorno (MEC). Equações integrais para deslocamentos em pontos do domínio e do contorno são obtidas, bem como equações para momentos e esforços cortantes em pontos do domínio.

O Capítulo 4 trata da implementação numérica das equações integrais obtidas no capítulo anterior. Uma discretização espacial é necessária. Neste caso, o contorno é discretizado em elementos com aproximação quadrática, podendo ser contínuos ou descontínuos, e o domínio é dividido em células triangulares constantes. As equações integrais são escritas em forma discretizada, tanto para deslocamentos em pontos do contorno ou do domínio, como para esforços em pontos do domínio.

No Capítulo 5, considerando-se as equações integrais discretizadas de deslocamentos para todos os pontos do contorno e para os pontos considerados do domínio, monta-se um sistema de equações que envolvem o contorno e o domínio simultaneamente. Além disso, os operadores de Houbolt ou Diferença Central são utilizados para a discretização do tempo, e o sistema de equações pode ser resolvido para a obtenção das incógnitas de deslocamentos e forças de superfície.

Para validar a proposta do trabalho, o Capítulo 6 apresenta vários exemplos, e os resultados são comparados com as respostas encontradas na literatura, para análise de vibração livre e de vibração forçada de placas.

E por fim, o Capítulo 7 apresenta algumas conclusões sobre a consideração dos termos de translação inercial na teoria de Reissner. Além disso, são sugeridos alguns temas para pesquisas em continuidade a esta tese.

Formulação das Equações do Movimento para a Teoria de Reissner

2.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo desenvolver uma formulação geral para análise linear dinâmica de placas espessas, onde a teoria de Reissner é empregada juntamente com as equações do movimento, oriundas da teoria da elasticidade tridimensional.

2.2 Formulação do Problema

Uma placa é um elemento estrutural em que uma das três dimensões, a espessura, é pequena quando comparada com as outras duas, em superfície média plana, submetido a cargas transversais à superfície média, podendo ter também, além destas, cargas no plano da superfície média.

Serão consideradas, neste trabalho, placas linearmente elásticas, homogêneas e isotrópicas, com espessura h constante e submetida a um carregamento transversal $q = q(x, y, t)$ por unidade de área, sendo x e y as coordenadas cartesianas admitidas na superfície média e t a variável tempo.

Na Figura 2.1, representa-se a placa com o sistema de referência adotado.

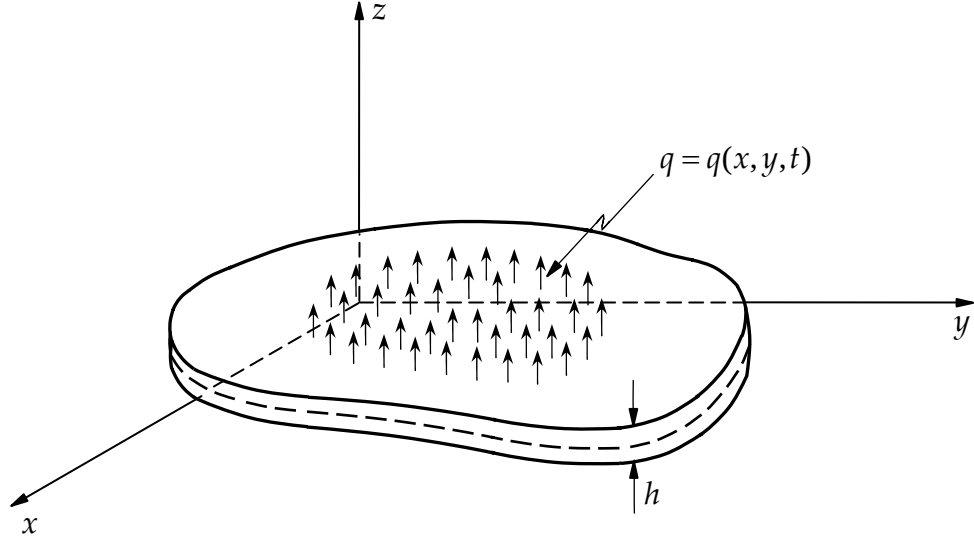


Figura 2.1 - Sistema cartesiano adotado para a formulação da placa.

As equações do movimento da teoria da elasticidade tridimensional são escritas, em termos dos deslocamentos reais u_o , v_o e w_o , na forma:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v_o}{\partial t^2} \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2} \quad (2.1c)$$

para um material isotrópico, onde ρ é a massa específica do material, admitida constante, σ_x , σ_y e σ_z são as tensões normais e τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} são as tensões cisalhantes. Na formulação, são consideradas as simetrias das tensões cisalhantes.

Pela teoria da Elasticidade, as equações constitutivas que caracterizam o comportamento do material da placa podem ser escritas através das seguintes relações:

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial v_o}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.2c)$$

$$\frac{\partial u_o}{\partial z} + \frac{\partial w_o}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (2.2d)$$

$$\frac{\partial v_o}{\partial z} + \frac{\partial w_o}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (2.2e)$$

com $G = E/2(1+\nu)$ designando o módulo de elasticidade transversal ou cisalhante, sendo E o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson do material da placa. Deve-se observar que a deformação na direção do eixo z é desprezada.

Na expressão (2.2), as tensões podem ser explicitadas em termos das deformações, definindo as relações tensão-deformação, como segue:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_o}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_z \quad (2.3a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_z \quad (2.3b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) \quad (2.3c)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) \quad (2.3d)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_o}{\partial z} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) \quad (2.3e)$$

De acordo com a teoria de Reissner (REISSNER, 1944) são admitidas, para as componentes das tensões de flexão, distribuições lineares das tensões ao longo da espessura da placa, definidas como:

$$\sigma_x = \frac{12}{h^3} M_x z; \quad \sigma_y = \frac{12}{h^3} M_y z; \quad \tau_{xy} = \frac{12}{h^3} M_{xy} z \quad (2.4)$$

Devido às hipóteses adotadas, as condições de contorno em $z = \pm h/2$, ou seja, para as superfícies superior e inferior da placa, são dadas por:

$$\sigma_z = \pm q/2; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.5)$$

Segundo REISSNER (1945), os deslocamentos generalizados podem ser representados por uma média ponderada sobre a espessura da placa, envolvendo os deslocamentos reais u_o , v_o e w_o , através das seguintes expressões:

$$\theta_x = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} u_o z dz; \quad \theta_y = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{+h/2} v_o z dz; \quad w = \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{+h/2} w_o \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \quad (2.6)$$

Em REISSNER (1945), as expressões em (2.6) são obtidas através do Princípio de Castigliano, para problemas estáticos, onde condições de compatibilidade são introduzidas na análise. Uma abordagem diferente é feita por GREEN (1947), que utiliza a igualdade entre os trabalhos dos esforços resultantes sobre os deslocamentos ponderados e os trabalhos das tensões sobre os deslocamentos reais.

Na Figura 2.2, mostra-se um elemento infinitesimal de placa em equilíbrio, para o qual são indicados os esforços resultantes na superfície média, o carregamento aplicado e as forças de inércia. Admite-se na formulação que as faces superior e inferior da placa são livres de forças cisalhantes, enquanto que a tensão normal σ_z é dada em função das coordenadas x , y e z , onde a resultante das tensões de superfície σ_z é balanceada por tensões distribuídas sobre o contorno cilíndrico da placa.

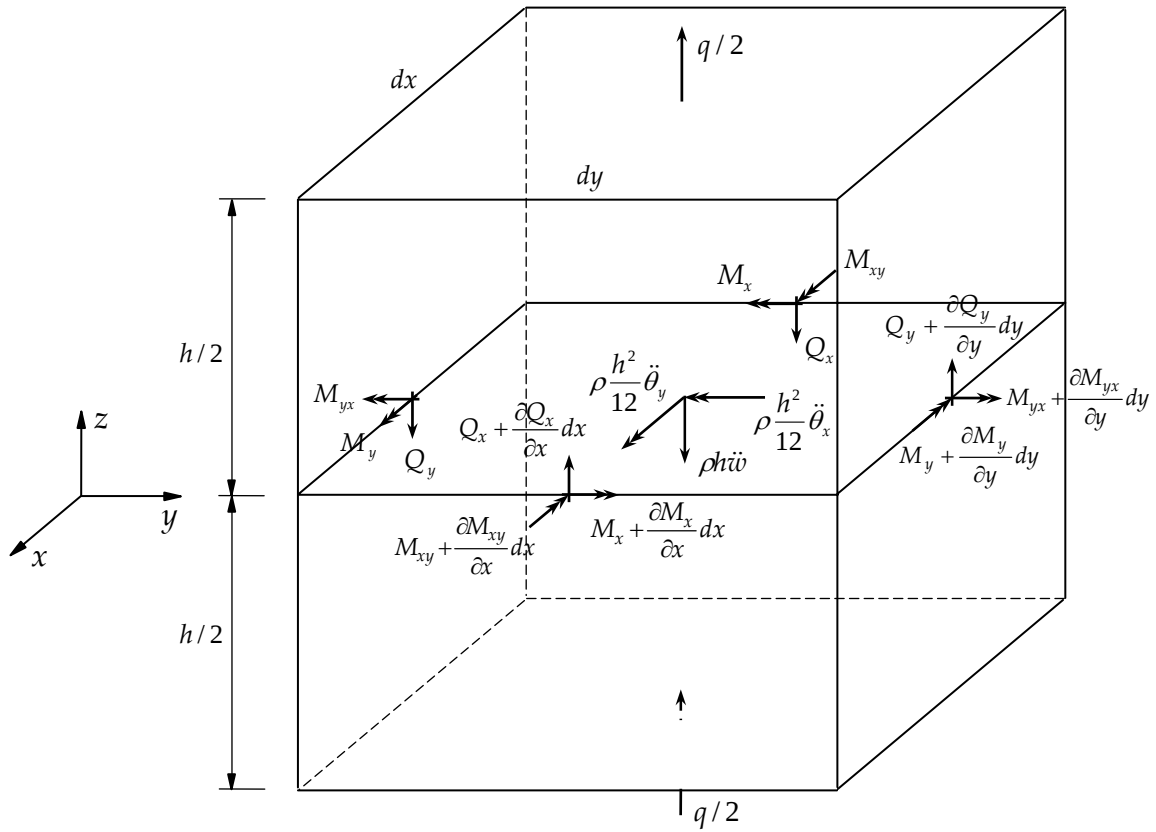


Figura 2.2 - Elemento infinitesimal de placa em equilíbrio.

Com base nessas considerações, as equações diferenciais para o problema são obtidas através do equilíbrio do elemento infinitesimal e, de acordo com o princípio de D'Alembert, três equações são estabelecidas, que representam o equilíbrio de momentos em relação aos eixos x e y , bem como o de forças em relação ao eixo z . Assim, desprezando as forças de massa, como o peso próprio, essas equações são dadas como:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\theta}_x = 0 \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\theta}_y = 0 \quad (2.7b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho h \ddot{w} = 0 \quad (2.7c)$$

onde os dois pontos representam a segunda derivada em relação ao tempo. Nessas equações, os momentos de flexão por unidade de comprimento são designados por M_x e M_y , e os momentos torsores, também por unidade de comprimento, dados por M_{xy} , enquanto Q_x e Q_y são os esforços cortantes por unidade de comprimento. A igualdade dos momentos torsores M_{xy} e M_{yx} também é considerada na formulação. As outras variáveis envolvidas são os deslocamentos generalizados, sendo θ_x e θ_y as rotações das normais à superfície média nos planos xz e yz , respectivamente, e sendo w a deflexão vertical.

Para se determinar as componentes das tensões cisalhantes transversais τ_{xz} e τ_{yz} , consideram-se as equações diferenciais do movimento (2.1a) e (2.1b), respectivamente. Para tanto, as expressões em (2.4) são utilizadas e, com o auxílio das duas equações diferenciais de equilíbrio (2.7a) e (2.7b) e, ainda, com as duas primeiras expressões em (2.6), chega-se a duas expressões que, depois de integradas e observando-se a segunda condição de contorno (2.5), fornecem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] Q_x \\ \tau_{yz} &= \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] Q_y\end{aligned}\tag{2.8}$$

A tensão normal σ_z é obtida a partir da última equação diferencial do movimento (2.1c), com o auxílio das duas expressões dadas em (2.8), juntamente com a última equação em (2.7) e a última expressão em (2.6). Obtém-se, assim, uma expressão que, depois de integrada e, ainda, observando-se a primeira das condições de contorno nas faces superior e inferior da placa, representadas por (2.5), resulta:

$$\sigma_z = \frac{1}{2h}q \left[3 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] z - \frac{1}{10}\rho h \ddot{w} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right) \right] \quad (2.9)$$

Nas expressões das componentes de tensão presentes em (2.8), nota-se que os termos inerciais devido às inércias rotacionais não aparecem. Isto ocorre devido ao fato das mesmas se cancelarem naturalmente ao longo do desenvolvimento, ao contrário da expressão (2.9), cujo termo da inércia translacional fica evidente.

Na teoria de placas finas, hipótese de Kirchhoff, a tensão normal σ_z é desprezada, pois ela é considerada pequena em relação às demais componentes. Assim, é plausível que as rotações inerciais não apareçam nas expressões de placas delgadas, mas o termo de translação inercial deveria ser incorporado à formulação à medida que a placa se tornasse espessa.

A seguir, serão determinadas as expressões dos esforços resultantes: momentos fletores, momentos torsores e esforços cortantes para a presente formulação.

2.3 Expressões dos Esforços Resultantes

Para obter as expressões dos esforços resultantes, substituem-se as três primeiras expressões (2.3) em (2.4), a seguir multiplicam-se as equações obtidas por $12zdz/h^3$ e, realizando a integração entre $z = -h/2$ e $z = h/2$, mediante o auxílio das duas primeiras expressões em (2.6), chega-se às expressões dos momentos resultantes, função apenas dos deslocamentos generalizados w , θ_x e θ_y , como a seguir:

$$M_x = D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{h^2}{10} \left(q - \frac{\rho h}{6} \ddot{w} \right) \quad (2.10a)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{h^2}{10} \left(q - \frac{\rho h}{6} \ddot{w} \right) \quad (2.10b)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (2.10c)$$

com $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, sendo definido como a rigidez flexional da placa.

Para a determinação das expressões dos demais esforços, substituem-se (2.3d) e (2.3e) em (2.8), a seguir multiplicam-se as equações obtidas por $\frac{3}{2}[1-(2z/h)^2]dz/h$ e, integrando-se entre $z = \pm h/2$, mediante o auxílio da última equação em (2.6), obtêm-se:

$$Q_x = D(1-\nu) \frac{5}{h^2} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.10d)$$

$$Q_y = D(1-\nu) \frac{5}{h^2} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.10e)$$

Os sentidos positivos dos esforços resultantes, considerados neste trabalho, são mostrados na Figura 2.3, na superfície média do elemento de placa, nas faces de direção normal positiva do mesmo.

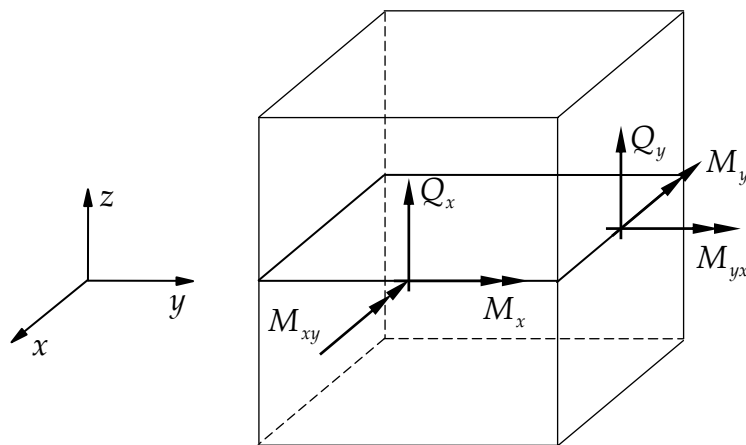


Figura 2.3 - Sentidos positivos dos esforços resultantes na superfície média: momentos e cortantes.

Para se determinar os valores das variáveis do problema em outro sistema de eixos, considere-se um sistema de coordenadas (n, s) , sendo o eixo n na direção normal exterior ao contorno e o eixo s na direção tangencial, como mostrado na Figura 2.4. Então, as rotações e os esforços resultantes, em relação a esse sistema de coordenadas, considerando-se uma rotação de eixos, são obtidos através das seguintes expressões:

$$\theta_n = \theta_x \cos \alpha + \theta_y \sin \alpha$$

$$\theta_s = -\theta_x \sin \alpha + \theta_y \cos \alpha$$

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + 2M_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + M_y \sin^2 \alpha$$

$$M_s = M_x \sin^2 \alpha - 2M_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + M_y \cos^2 \alpha \quad (2.11)$$

$$M_{ns} = M_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (M_x - M_y) \cos \alpha \sin \alpha$$

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha$$

$$Q_s = -Q_x \sin \alpha + Q_y \cos \alpha$$

onde α é o ângulo formado entre os eixos x e n .

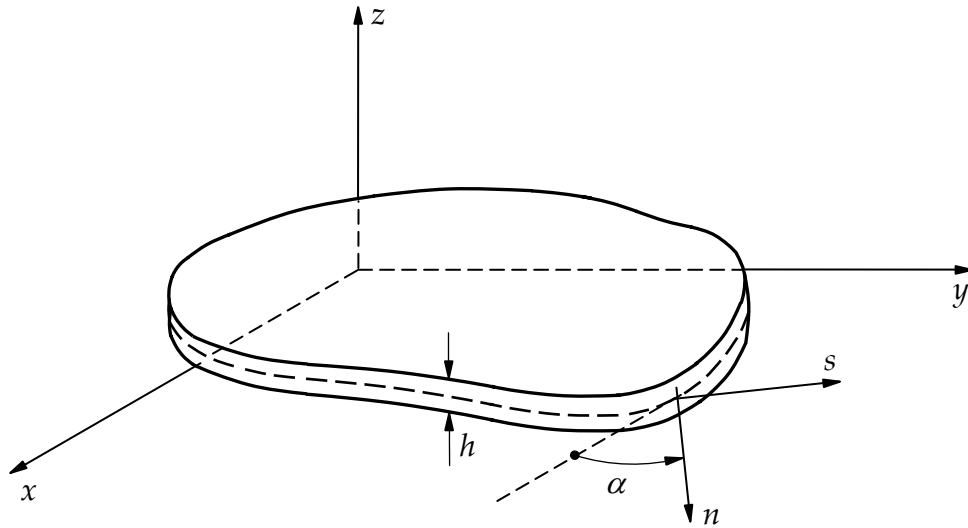


Figura 2.4 - Sistema de coordenadas (n, s) considerado a partir da rotação de eixos.

As expressões (2.10), juntamente com as equações (2.7), serão a base para o emprego do Método dos Elementos de Contorno para análise dinâmica de placas neste trabalho, como será visto no desenvolvimento do próximo capítulo.

2.4 Equação Diferencial do Movimento

A partir da formulação aqui apresentada, uma equação diferencial do movimento pode ser estabelecida, função apenas dos deslocamentos generalizados w , θ_x e θ_y .

As expressões dos esforços resultantes, reapresentadas a seguir, são manipuladas a fim de se obter uma equação diferencial do movimento.

$$M_x = D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{h^2}{10} q - \frac{\nu}{5(1-\nu)} \frac{\rho h^3}{12} \ddot{w} \quad (2.12)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{h^2}{10} q - \frac{\nu}{5(1-\nu)} \frac{\rho h^3}{12} \ddot{w} \quad (2.13)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

$$Q_x = D(1-\nu) \frac{5}{h^2} \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

$$Q_y = D(1-\nu) \frac{5}{h^2} \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.16)$$

Para tanto, escrevem-se as expressões (2.15) e (2.16) da seguinte maneira:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{12(1+\nu)}{5 Eh} Q_x \quad (2.17)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{12(1+\nu)}{5 Eh} Q_y \quad (2.18)$$

Considerando as derivadas das expressões (2.17) e (2.18) em relação a x e y , obtêm-se as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{12(1+\nu)}{5} \frac{\partial Q_x}{Eh \partial x} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{12(1+\nu)}{5} \frac{\partial Q_x}{Eh \partial y} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{12(1+\nu)}{5} \frac{\partial Q_y}{Eh \partial x} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{12(1+\nu)}{5} \frac{\partial Q_y}{Eh \partial y} \quad (2.22)$$

Substituindo essas relações em (2.12), (2.13) e (2.14), considerando (2.7c), chega-se a

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{h^2}{10} q + \frac{11\nu\rho h^3}{60(1-\nu)} \ddot{w} \quad (2.23)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{h^2}{10} q + \frac{11\nu\rho h^3}{60(1-\nu)} \ddot{w} \quad (2.24)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) \quad (2.25)$$

Derivando as expressões (2.23), (2.24) e (2.25), tem-se

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} - \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{h^2}{10} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{11\nu\rho h^3}{60(1-\nu)} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y \partial x} \right) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q_y}{\partial x^2} \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} - \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{h^2}{10} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{11\nu\rho h^3}{60(1-\nu)} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y}, \quad (2.29)$$

que substituídas nas equações (2.7a) e (2.7b), fornecem as equações:

$$Q_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{(6+5\nu)}{5(1-\nu)} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} - \ddot{\theta}_x \right) \quad (2.30)$$

$$Q_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{(6+5\nu)}{5(1-\nu)} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} - \ddot{\theta}_y \right) \quad (2.31)$$

sendo

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.32)$$

Sejam as derivadas da equação (2.7c), até a segunda ordem, em relação a x e y :

$$\frac{\partial^3 Q_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Q_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \rho h \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^3 Q_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 Q_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \rho h \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} = 0 \quad (2.34)$$

A soma de (2.33) e (2.34) resulta na seguinte relação:

$$\frac{\partial^3 Q_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Q_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 Q_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 Q_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \rho h \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.35)$$

A seguir, derivam-se (2.30) e (2.31), respectivamente, em relação a x e y , obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial^3 Q_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Q_x}{\partial x \partial y^2} \right) = & -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \\ & + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{(6+5\nu)}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial^3 Q_y}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 Q_y}{\partial y^3} \right) = & -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{(6+5\nu)}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} - \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Em seguida, somando-se (2.36) e (2.37), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial^3 Q_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Q_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 Q_y}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 Q_y}{\partial y^3} \right) = \\ -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\rho h^3}{60} \frac{(6+5\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Finalmente, substituindo (2.7c) e (2.35) em (2.38), obtém-se a equação diferencial do movimento para placas espessas:

$$D\Delta(\Delta w) + \rho h \ddot{w} + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{(12-\nu)}{5(1-\nu)} \Delta \ddot{w} = q - \frac{h^2}{10} \frac{(2-\nu)}{(1-\nu)} \Delta q \quad (2.39)$$

Com base nesta equação, algumas técnicas numéricas podem ser empregadas para análise do problema, como, por exemplo: Método de Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos, Método dos Resíduos Ponderados, etc.

Observa-se que, se as duas últimas parcelas do lado esquerdo de (2.39), juntamente com a segunda do lado direito, forem desprezadas, chega-se à equação diferencial da dinâmica de placas delgadas.

Algumas análises podem ser feitas com base nesta última equação, como, por exemplo, o campo de influência da inércia de rotação. Para eliminar essas incógnitas da formulação, considera-se a adição de (2.19) e (2.22) e, conseqüentemente, a diferenciação segunda no tempo, que, após a substituição em (2.39), fornece como resultado final:

$$D\Delta(\Delta w) + \rho h \ddot{w} + (\rho h)^2 \frac{h}{5} \frac{(1+\nu)}{E} \ddot{\ddot{w}} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{(17-6\nu)}{5(1-\nu)} \Delta \ddot{w} - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\ddot{q}} = q - \frac{h^2}{10} \frac{(2-\nu)}{(1-\nu)} \Delta q \quad (2.40)$$

Equações Integrais do Problema

3.1 Introdução

Neste capítulo, mostra-se o desenvolvimento para obtenção das equações integrais, para resolver o problema dinâmico linear de placas espessas considerando as equações apresentadas no capítulo anterior. Estas equações integrais serão obtidas a partir do Segundo Teorema de Betti e serão usadas na resolução do problema pelo Método dos Elementos de Contorno.

3.2 Considerações Gerais da Formulação

Por conveniência, no transcorrer desta seção e das próximas, será utilizada uma notação indicial, representando-se por letras gregas os índices que variam de 1 a 2 e, por letras romanas, os índices que variam de 1 a 3.

Com isso, as três equações de equilíbrio e as cinco expressões dos esforços resultantes apresentadas no capítulo anterior podem ser escritas em notação indicial ($\alpha; \beta; \gamma = 1, 2$), conforme se segue:

a) Equações de equilíbrio

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\theta}_\alpha = 0 \quad (3.1a)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q - \rho h \ddot{w} = 0$$

b) Expressões dos esforços resultantes

$$M_{\alpha\beta} = \hat{M}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \left(q - \frac{\rho h}{6} \ddot{w} \right) \delta_{\alpha\beta} \quad (3.1b)$$

$$Q_\alpha = \frac{1}{2} D(1-\nu) \lambda^2 (\theta_\alpha + w_{,\alpha})$$

sendo $\lambda^2 = 10/h^2$ um parâmetro característico das equações de Reissner e $\delta_{\alpha\beta}$ o delta de Kronecker.

Nestas equações, os dois pontos representam a segunda derivada das variáveis primárias em relação ao tempo. Na expressão de $M_{\alpha\beta}$ em (3.1b), o momento $\hat{M}_{\alpha\beta}$ é escrito na forma:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} D(1-\nu) \left[\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} \theta_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (3.2)$$

Além disso, as expressões das deformações específicas generalizadas, em função dos deslocamentos generalizados da placa, quando se utiliza a teoria linear, são dadas como se segue:

a) Deformações específicas de flexão

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) \quad (3.3a)$$

b) Deformações específicas cisalhantes transversais

$$\varphi_\alpha = \theta_\alpha + w_{,\alpha} \quad (3.3b)$$

Vale ressaltar que, na teoria clássica de placas, teoria de Kirchhoff, as deformações cisalhantes transversais e as inércias rotacionais não são consideradas, o que conduz a uma imprecisão das respostas dos valores dos modos mais elevados de vibração (MINDLIN, 1951). Haja vista que o campo de deslocamentos é excitado pelos primeiros modos, enquanto que os maiores modos são despertados pelos esforços internos.

3.3 Condições de Contorno

A presente formulação incorpora três condições de contorno por bordo, das quais podem ser prescritos, em cada uma das três direções generalizadas, o deslocamento ou a força de superfície correspondente.

Representando por Γ o contorno total da placa, e chamando Γ_u o contorno onde os deslocamentos generalizados θ_α e w são prescritos e Γ_p , onde as forças de superfície generalizadas p_α e p_3 são prescritas, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Em } \Gamma_u: \quad \theta_\alpha &= \bar{\theta}_\alpha \\ w &= \bar{w} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Em } \Gamma_p: \quad p_\alpha &= \bar{p}_\alpha \\ p_3 &= \bar{p}_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{p}_\alpha &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_\beta \\ \bar{p}_3 &= \bar{Q}_\beta n_\beta\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde n_β são os co-senos diretores da normal exterior ao contorno.

3.4 Equação Integral do Método dos Elementos de Contorno

Seja um sólido qualquer, em equilíbrio, onde se deseja determinar o campo de deslocamentos de um meio elástico. Assim, para o presente problema, tem-se uma placa definida por um domínio Ω representado pela superfície média e um contorno Γ , representado pela linha que contorna a placa, com espessura constante h e sujeita a um carregamento q por unidade de área atuando em Ω , segundo a região hachurada da Figura 3.1.

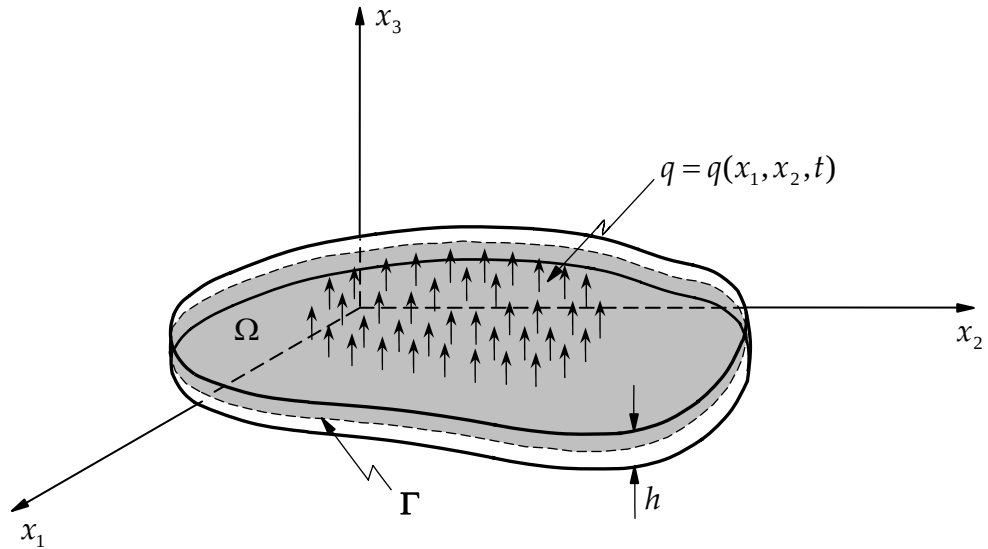


Figura 3.1 - Região que define o problema de placa espessa.

Antes de realizar o desenvolvimento das equações integrais, algumas considerações devem ser feitas; para isso, um campo de deslocamentos generalizados é definido, assim como o contorno e o domínio de interesse.

3.4.1 Considerações preliminares

Por conveniência, os deslocamentos generalizados θ_α e w definidos no início deste capítulo serão representados por u_α e u_3 , ou ainda, genericamente, como u_k .

Seja o domínio Ω , representado pela superfície média da placa, e seja Γ o contorno correspondente. Assim, no interior de Ω , consideram-se as seguintes condições iniciais:

$$u_k(x, t) = u_k(x, t = 0) = u_{k0} \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} = \dot{u}_k(x, t = 0) = v_{k0} \quad (3.7b)$$

e as condições de contorno prescritas sobre Γ , para as três direções generalizadas da placa, definidas por:

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{em} \quad \Gamma_u \quad (3.8a)$$

$$p_k = \bar{p}_k \quad \text{em} \quad \Gamma_p \quad (3.8b)$$

sendo

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p \quad (3.8c)$$

Seja ainda um domínio Ω^* , externo ao primeiro, com um contorno Γ^* correspondente, também em equilíbrio, e contendo a referida placa (ver Figura 3.2).

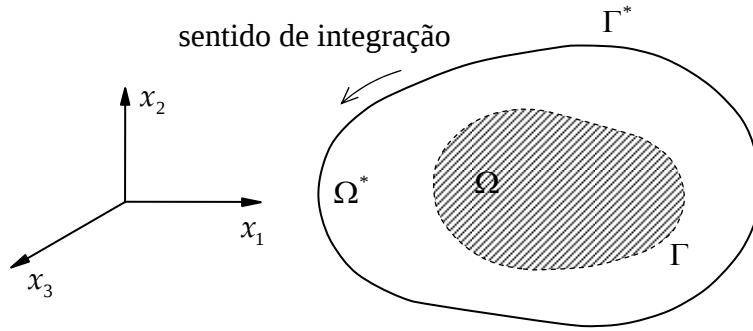


Figura 3.2 - Domínio completo do problema.

As equações consideradas nas respectivas regiões são dadas a seguir.

a) Na região $(\Omega + \Gamma)$:

Deslocamentos: u_k

Forças de superfície: p_k

sendo

$$p_\alpha = M_{\alpha\beta} n_\beta \quad (3.9)$$

$$p_3 = Q_\alpha n_\alpha$$

Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} \quad (3.10)$$

$$\varphi_\alpha = u_\alpha + u_{3,\alpha}$$

Esforços:

$$M_{\alpha\beta} = \hat{M}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q - \frac{\rho h}{6} \ddot{u}_3) \delta_{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

$$Q_\alpha = \frac{1}{2} D(1-\nu)\lambda^2 (u_\alpha + u_{3,\alpha})$$

Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{u}_\alpha = 0 \quad (3.12a)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q - \rho h \ddot{u}_3 = 0$$

sendo

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} D(1-\nu) \left[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (3.12b)$$

b) Na região $(\Omega^* + \Gamma^*)$:

Deslocamentos: u_k^*

Forças de superfície: p_k^*

sendo

$$p_\alpha^* = M_{\alpha\beta}^* n_\beta \quad (3.13)$$

$$p_3^* = Q_\alpha^* n_\alpha$$

Deformações específicas:

$$\chi_{\alpha\beta}^* = u_{\alpha,\beta}^* \quad (3.14)$$

$$\varphi_\alpha^* = u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*$$

Esforços:

$$M_{\alpha\beta}^* = \hat{M}_{\alpha\beta}^* \quad (3.15)$$

$$Q_\alpha^* = \hat{Q}_\alpha^*$$

Equações de equilíbrio:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^* - Q_\alpha^* + F_\alpha^* = 0 \quad (3.16a)$$

$$Q_{\alpha,\alpha}^* + F_3^* = 0$$

sendo

$$\hat{M}_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} D(1-\nu) \left[u_{\alpha,\beta}^* + u_{\beta,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} u_{\gamma,\gamma}^* \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (3.16b)$$

$$\hat{Q}_\alpha^* = \frac{1}{2} D(1-\nu) \lambda^2 (u_\alpha^* + u_{3,\alpha}^*)$$

Os esforços generalizados F_α^* e F_3^* são considerados para a obtenção da solução fundamental e se relacionam com as forças, f_α^* e f_3^* , existentes nos pontos situados ao longo da espessura, da seguinte forma:

$$f_\alpha^* = \frac{12}{h^3} x_3 F_\alpha^* \quad (3.16c)$$

$$f_3^* = \frac{3}{2h} F_3^* \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]$$

3.4.2 Equação integral básica

Nesta seção, o Segundo Teorema de Betti é usado para se obter a equação integral utilizada no MEC. Inicialmente, considera-se a região $(\Omega + \Gamma)$, onde a primeira das expressões em (3.11) é escrita na forma:

$$M_{\alpha\beta} = \hat{M}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (q - \frac{\rho h}{6} \ddot{u}_3) \delta_{\alpha\beta} \quad (3.17)$$

E sejam as seguintes expressões dos esforços

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta}; \quad M_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\beta\gamma\theta} \chi_{\gamma\theta}^* \quad (3.18)$$

$$Q_{\beta} = C_{3\beta 3\theta} \varphi_{\theta}, \quad Q_{\beta}^* = C_{3\beta 3\theta} \varphi_{\theta}^*$$

relacionadas às componentes do tensor de quarta ordem de constantes elásticas $C_{i\beta j\theta}$, para o caso de material isotrópico.

Portanto, considerando as expressões em (3.18) e a propriedade de simetria das constantes elásticas, $C_{i\beta j\theta} = C_{j\beta i\theta}$, pode-se escrever:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \varphi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta} M_{\gamma\theta}^* + \varphi_{\theta} Q_{\theta}^*$$

E ainda, considerando (3.17)

$$\left[M_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \left(q - \frac{\rho h}{6} \ddot{u}_3 \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \varphi_{\beta}^* = \chi_{\gamma\theta} M_{\gamma\theta}^* + \varphi_{\theta} Q_{\theta}^*,$$

e alterando os índices do lado direito da igualdade, obtém-se:

$$\left[M_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \left(q - \frac{\rho h}{6} \ddot{u}_3 \right) \delta_{\alpha\beta} \right] \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\beta} \varphi_{\beta}^* = \chi_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}^* + \varphi_{\alpha} Q_{\alpha}^*$$

Assim, reagrupando os termos e integrando no domínio Ω , tem-se

$$\int_{\Omega} \left(M_{\alpha\beta}^* \chi_{\alpha\beta} + Q_{\alpha}^* \varphi_{\alpha} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* + Q_{\alpha} \varphi_{\alpha}^* \right) d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} \left(q - \frac{\rho h}{6} \ddot{u}_3 \right) \delta_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}^* d\Omega \quad (3.19)$$

A seguir, substituindo (3.10) e (3.14) na expressão (3.19), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* (u_{\alpha} + u_{3,\alpha}) d\Omega &= \int_{\Omega} M_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta}^* d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} (u_{\alpha}^* + u_{3,\alpha}^*) d\Omega - \\ - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} \left(q - \frac{\rho h}{6} \ddot{u}_3 \right) u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega \end{aligned}$$

e integrando por partes, em ambos os lados, com o auxílio do teorema da divergência, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta}^* u_{\alpha} n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} Q_{\alpha}^* u_3 n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha}^* u_3 d\Omega &= \\ = \int_{\Gamma} M_{\alpha\beta} u_{\alpha}^* n_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} M_{\alpha\beta,\beta} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Omega} Q_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma} Q_{\alpha} u_3^* n_{\alpha} d\Gamma - \int_{\Omega} Q_{\alpha,\alpha} u_3^* d\Omega - \\ - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega + \frac{\nu \rho h}{6(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} \ddot{u}_3 u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora, considerando as expressões (3.9) e (3.13) e, ainda, as equações de equilíbrio (3.12a) e (3.16a), a expressão (3.20) fica na forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega} F_{\alpha}^* u_{\alpha} d\Omega + \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma + \int_{\Omega} F_3^* u_3 d\Omega &= \int_{\Gamma} p_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Gamma - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma - \\ - \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3 u_3^* d\Omega + \int_{\Omega} q u_3^* d\Omega - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} q u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega &+ \frac{\nu \rho h}{6(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} \ddot{u}_3 u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega \end{aligned}$$

Agrupando então, os termos semelhantes, chega-se à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (F_{\alpha}^* u_{\alpha} + F_3^* u_3) d\Omega &= \int_{\Gamma} (p_{\alpha} u_{\alpha}^* + p_3 u_3^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} (p_{\alpha}^* u_{\alpha} + p_3^* u_3) d\Gamma + \int_{\Omega} q \left[u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right] d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \left(\frac{\rho h^3}{12} \ddot{u}_{\alpha} u_{\alpha}^* + \rho h \ddot{u}_3 u_3^* \right) d\Omega &+ \frac{\nu \rho h}{6(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} \ddot{u}_3 u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega. \end{aligned}$$

Assim, escrevendo a equação acima, na forma geral, para as três direções generalizadas, chega-se a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega &= \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} q \left[u_3^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha,\alpha}^* \right] d\Omega - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_{\alpha} u_{\alpha}^* d\Omega - \\
&- \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3 u_3^* d\Omega + \frac{\nu \rho h}{6(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} \ddot{u}_3 u_{\alpha,\alpha}^* d\Omega.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Para a determinação da equação integral a ser usada no MEC, considera-se que as forças de domínio generalizadas F_j^* podem ser representadas por:

$$F_j^* = \delta(x - \xi) e_j \tag{3.22}$$

onde $\delta(x - \xi)$ é uma função generalizada, chamada delta de Dirac, com singularidade em ξ , e tem-se ainda o vetor unitário $e_j = 1$, definido para as três direções. A função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega} f(x, t) \delta(x - \xi) d\Omega = \begin{cases} f(\xi, t) & \text{se } \xi \in \Omega^* \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega^* \end{cases} \tag{3.23}$$

Considerando (3.22) e as propriedades dadas em (3.23), a integral de domínio do lado esquerdo em (3.21), com ξ pertencente à região Ω , torna-se

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x - \xi) e_j u_j d\Omega = \left[\int_{\Omega} \delta(x - \xi) u_j d\Omega \right] e_j = u_j(\xi, t) e_j \tag{3.24}$$

Logo, com base em (3.23), a equação (3.24) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} F_j^* u_j d\Omega = \sum_{j=1}^3 u_j(\xi, t) \tag{3.25}$$

Desta forma, se a força generalizada unitária atuar independentemente, podem-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
u_j^* &= u_{ij}^*(\xi, x) e_i \\
p_j^* &= p_{ij}^*(\xi, x) e_i \\
u_{\alpha, \alpha}^* &= u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) e_i
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Nas expressões (3.26), as variáveis apresentadas podem ser definidas como se segue:

$\xi \mapsto$ é o ponto de aplicação das cargas concentradas generalizadas unitárias, também chamado de ponto fonte;

$x \mapsto$ é o ponto onde são observados os efeitos das cargas unitárias aplicadas, designado por ponto campo;

$u_{ij}^*(\xi, x) \mapsto$ é o deslocamento generalizado na direção j do ponto x , correspondente a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção i do ponto ξ ;

$p_{ij}^*(\xi, x) \mapsto$ é a força de superfície generalizada na direção j do ponto x , correspondente a uma força generalizada concentrada unitária aplicada na direção i do ponto ξ .

Com as considerações de (3.25) e (3.26), a equação (3.21) é escrita para um ponto ξ qualquer situado no interior da região Ω , para as três direções generalizadas, na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
u_i(\xi, t) &= \int_{\Gamma} [p_j(x, t) u_{ij}^*(\xi, x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(\xi, t)] d\Gamma(x) + \\
&+ \int_{\Omega} q(x, t) \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_{\alpha}(x, t) u_{i\alpha}^*(\xi, x) d\Omega(x) -
\end{aligned}$$

$$-\rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{i3}^*(\xi, x) d\Omega(x) + \frac{\nu \rho h}{6(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (3.27)$$

A equação (3.27) é a equação integral básica do Método dos Elementos de Contorno para o problema que está sendo considerado, escrita para as três direções, sendo válida para um ponto ξ qualquer no interior da região Ω . Observa-se que o último termo desta equação é referente à translação inercial, sendo, portanto, um termo a mais nas equações integrais, em relação ao trabalho de PROVIDAKIS e BESKOS (2000).

Para escrever a equação integral (3.27) para os pontos situados sobre o contorno Γ , torna-se necessário estudar os limites das integrais, quando o ponto ξ tende ao contorno (KARAM, 1986). Assim, para um ponto ξ localizado em Γ , segue que a equação integral de contorno pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) u_j(\xi, t) = & \int_{\Gamma} [p_j(x, t) u_{ij}^*(\xi, x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(\xi, t)] d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Omega} q(x, t) \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_\alpha(x, t) u_{i\alpha}^*(\xi, x) d\Omega(x) - \\ & - \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{i3}^*(\xi, x) d\Omega(x) + \frac{\nu \rho h}{6(1-\nu)\lambda^2} \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $c_{ij}(\xi)$ depende da geometria do contorno no ponto ξ .

Considerando as equações (3.27) e (3.28), observa-se que esta última pode ser escrita para um ponto ξ pertencente ao domínio Ω ou ao contorno Γ , onde, para pontos internos, c_{ij} vale δ_{ij} e, para pontos do contorno cuja normal é contínua, c_{ij} vale $\delta_{ij}/2$.

A solução das equações integrais fica bem estabelecida mediante a escolha apropriada das funções generalizadas $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ (BANERJEE, 1994). Assim, devido à facilidade de aplicação, a presente metodologia emprega a solução fundamental da estática para resolver o problema de análise dinâmica de placas.

3.5 Solução Fundamental

A base da presente metodologia é a solução fundamental, que nada mais é do que o princípio da causa e efeito, onde se deseja saber a resposta de um meio, em uma dada direção, devido à aplicação de uma carga unitária em um dado ponto. A seguir, os tensores representativos da solução fundamental dos deslocamentos generalizados e correspondentes forças de superfície generalizadas serão apresentados.

3.5.1 Deslocamentos generalizados

WEEËN (1982) apresenta os tensores $u_{ij}^*(\xi, x)$, presentes nas equações (3.27) e (3.28), correspondentes aos deslocamentos da solução fundamental, da seguinte forma:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B(z) - (1-\nu)(2\ell n z - 1)]\delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)]r_{,\alpha}r_{,\beta} \right\} \quad (3.29a)$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D}(2\ell n z - 1)r r_{,\alpha} \quad (3.29b)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu)z^2(2\ell n z - 1) - 8\ell n z] \quad (3.29c)$$

onde

$$r = (r_{\alpha} r_{\alpha})^{1/2} \text{ é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo} \quad (3.30)$$

$$r_{,\alpha} = \frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = \frac{r_\alpha}{r} \quad (3.31)$$

com

$$r_\alpha = x_\alpha(x) - x_\alpha(\xi) \quad (3.32)$$

$$z = \lambda r \quad (3.33)$$

As constantes $A(z)$ e $B(z)$ dependem das funções de Bessel modificadas de ordem inteira $K_0(z)$ e $K_1(z)$, e podem ser expressas por:

$$A(z) = K_0(z) + 2z^{-1}[K_1(z) - z^{-1}] ; \quad B(z) = K_0(z) + z^{-1}[K_1(z) - z^{-1}] \quad (3.34)$$

onde $K_0(z)$ e $K_1(z)$ são calculadas através de expansões polinomiais, segundo ABRAMOWITZ e STEGUN (1965).

3.5.2 Forças de superfície generalizadas

Os tensores $p_{ij}^*(\xi, x)$, presentes nas equações (3.27) e (3.28), que representam as forças de superfície da solução fundamental, são obtidos a partir das seguintes expressões:

$$p_{\gamma\alpha}^* = M_{\alpha\beta}^{*(\gamma)} n_\beta \quad (3.35a)$$

$$p_{3\alpha}^* = M_{\alpha\beta}^{*(3)} n_\beta \quad (3.35b)$$

$$p_{\gamma 3}^* = Q_\beta^{*(\gamma)} n_\beta \quad (3.35c)$$

$$p_{33}^* = Q_\beta^{*(3)} n_\beta \quad (3.35d)$$

nas quais os momentos e esforços cortantes devidos ao carregamento concentrado unitário nas direções γ e 3 são representados por $M_{\alpha\beta}^{*(\gamma)}$ e $M_{\alpha\beta}^{*(3)}$, $Q_{\beta}^{*(\gamma)}$ e $Q_{\beta}^{*(3)}$, respectivamente.

KARAM (1986) apresenta o desenvolvimento das forças de superfície generalizadas utilizando (3.35), as quais são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 p_{\gamma\alpha}^* &= -\frac{1}{4\pi r} \left\{ [4A + 2zK_1 + 1 - \nu](\delta_{\alpha\gamma} r_{,n} + r_{,\alpha} n_{\gamma}) + [4A + 1 + \nu]r_{,\gamma} n_{\alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - 2[8A + 2zK_1 + 1 - \nu]r_{,\alpha} r_{,\gamma} r_{,n} \right\} \\
 p_{\gamma 3}^* &= \frac{\lambda^2}{2\pi} [B n_{\gamma} - A r_{,\gamma} r_{,n}] \\
 p_{3\alpha}^* &= -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left\{ \left[\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} 2\ell n z - 1 \right] n_{\alpha} + 2r_{,\alpha} r_{,n} \right\} \\
 p_{33}^* &= -\frac{1}{2\pi r} r_{,n}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde $r_{,n}$ é a derivada de r em relação à normal no ponto x , sendo definida por:

$$r_{,n} = \frac{\partial r}{\partial n(x)} = r_{,\alpha} n_{\alpha} \tag{3.37}$$

3.5.3 Singularidades dos tensores

Para o caso em que os pontos ξ e x forem coincidentes, os tensores u_{ij}^* e p_{ij}^* , mostrados, respectivamente, nas duas seções anteriores, apresentam singularidades em $r = 0$.

Assim, expandindo $A(z)$ e $B(z)$, conforme (3.34), através da substituição das expressões de $K_0(z)$ e $K_1(z)$, observa-se que:

a) Para $A(z)$, as parcelas que possuem singularidade de ordem r^{-2} se cancelam, ocorrendo o mesmo para as parcelas com singularidade logarítmica. Logo, $A(z)$ não possui singularidade.

b) Para $B(z)$, as parcelas com singularidade r^{-2} também se cancelam, porém, as parcelas com singularidade logarítmica, não. Com isso, conclui-se que $B(z)$ possui singularidade de ordem ℓnr .

Pode-se concluir, então, que os tensores de deslocamentos generalizados e forças de superfície generalizadas, expressões (3.29) e (3.36), apresentam os seguintes tipos de singularidade:

u_{ij}^* possui singularidade ℓnr ;

p_{ij}^* possui singularidade ℓnr e r^{-1} .

3.6 Transformação das Integrais das Forças de Domínio em Integrais de Contorno

As integrais de domínio que aparecem nas equações (3.27) e (3.28), referentes ao carregamento externo aplicado, serão transformadas em integrais de contorno mediante a aplicação do teorema da divergência. Assim, considerando que $q(x, t) = q = \text{constante}$, obtém-se a seguinte integral:

$$\int_{\Omega} q(x, t) \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) = q \int_{\Gamma} \left[v_{i, \alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_{\alpha}(x) d\Omega(x) \quad (3.38)$$

onde v_i^* satisfaz a equação de Poisson:

$$v_{i, \alpha\alpha}^*(\xi, x) = u_{i3}^*(\xi, x) \quad (3.39)$$

As expressões obtidas por WEEËN (1982) para v_i^* são:

$$v_\alpha^* = \frac{1}{128\pi D \lambda^2} r_{,\alpha} r z^2 (4\ell n z - 5) \quad (3.40)$$

$$v_3^* = -\frac{1}{256\pi D \lambda^4 (1-\nu)} z^2 \left[64(\ell n z - 1) - z^2 (1-\nu) (2\ell n z - 3) \right] \quad (3.41)$$

Derivando as expressões (3.40) e (3.41) em relação às coordenadas do ponto x , são obtidas as seguintes expressões:

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} \left[(4\ell n z - 5) \delta_{\alpha\beta} + 2(4\ell n z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3.42)$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128\pi D \lambda^2 (1-\nu)} \left[32(2\ell n z - 1) - z^2 (1-\nu) (4\ell n z - 5) \right] \quad (3.43)$$

Assim, substituindo as equações (3.38) e (3.39) nas equações integrais (3.27) e (3.28) e, ainda, aplicando o teorema da divergência nas equações resultantes, obtém-se:

$$\begin{aligned} u_i(\xi, t) = & \int_{\Gamma} \left[p_j(x, t) u_{ij}^*(\xi, x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(\xi, t) \right] d\Gamma(x) - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_\alpha(x, t) u_{i\alpha}^*(\xi, x) d\Omega(x) - \\ & - \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{i3}^*(\xi, x) d\Omega(x) + q \int_{\Gamma} \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Omega(x) + \\ & + k \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (3.44)$$

e, para pontos fontes pertencentes ao contorno:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) u_i(\xi, t) = & \int_{\Gamma} \left[p_j(x, t) u_{ij}^*(\xi, x) - p_{ij}^*(\xi, x) u_j(\xi, t) \right] d\Gamma(x) - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_\alpha(x, t) u_{i\alpha}^*(\xi, x) d\Omega(x) - \\ & - \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{i3}^*(\xi, x) d\Omega(x) + q \int_{\Gamma} \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Omega(x) + \end{aligned}$$

$$+ k\rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x,t) u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (3.45)$$

com $k = \frac{\nu}{6(1-\nu)\lambda^2}$ e $v_{i,\alpha}^*$ dados pelas expressões (3.42) e (3.43).

As integrais de domínio presentes nas equações acima não são transformadas em integrais de contorno, pois as mesmas devem ser avaliadas no domínio.

Derivando (3.29) em relação às coordenadas do ponto x , as expressões para $u_{i\alpha,\beta}^*$ são dadas como se segue:

$$u_{\alpha\beta,\gamma}^* = -\frac{1}{4\pi D(1-\nu)r} \left\{ [4A + 4zK_1 + 1 - \nu] r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + [4A + 1 - \nu] (r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma}) - \right. \\ \left. - 2[8A + 2zK_1 + 1 - \nu] r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} \right\} \quad (3.46a)$$

$$u_{3\alpha,\beta}^* = -\frac{1}{8\pi D} [(2\ell n z - 1) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta}] \quad (3.46b)$$

Como será visto no Capítulo 5, um conjunto de equações algébricas é montado, cujas respostas de deslocamentos e forças de superfície em pontos do contorno e de deslocamentos em pontos do domínio são obtidas a partir da resolução do sistema de equações. Posteriormente, o cálculo dos esforços em pontos internos.

3.7 Esforços em Pontos Internos: Momentos e Cortantes

Após a resolução do sistema de equações, o cálculo dos momentos e esforços cortantes nos pontos internos é realizado através das expressões (3.11), onde as derivadas dos deslocamentos que nela aparecem são substituídas pelas

derivadas da equação integral (3.44). Note-se que essas derivadas são calculadas em relação às coordenadas do ponto ξ .

Neste caso, têm-se as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x_\alpha(\xi)} &= -\frac{\partial r}{\partial x_\alpha(x)} = -r_{,\alpha} \\
\frac{\partial z}{\partial x_\alpha(\xi)} &= -\lambda r_{,\alpha} \\
\frac{\partial A}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha}}{r} (2A + zK_1) \\
\frac{\partial B}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha}}{r} (A + zK_1) \\
\frac{\partial K_1}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha}}{r} (K_1 + zK_0) \\
\frac{\partial r_{,\beta}}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha} r_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{r} \\
\frac{\partial r_{,n}}{\partial x_\alpha(\xi)} &= \frac{r_{,\alpha} r_{,n} - n_\alpha}{r}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Então, com base nas considerações acima, as expressões dos momentos e esforços cortantes nos pontos internos apresentam as seguintes formas, respectivamente:

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}(\xi, t) &= \int_{\Gamma} p_k(x, t) u_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_k(x, t) p_{\alpha\beta k}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + q \int_{\Gamma} w_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \\
&+ \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_\theta(x, t) u_{\alpha\beta\theta}^*(\xi, x) d\Omega(x) - \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{\alpha\beta 3}^*(\xi, x) d\Omega(x) + \\
&+ k \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) z_{\alpha\beta}^*(\xi, x) d\Omega(x)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

e

$$\begin{aligned}
Q_\beta(\xi, t) = & \int_{\Gamma} p_k(x, t) u_{3\beta k}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_k(x, t) p_{3\beta k}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + q \int_{\Gamma} w_{3\beta}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \\
& - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_\theta(x, t) u_{3\beta\theta}^*(\xi, x) d\Omega(x) - \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) u_{3\beta 3}^*(\xi, x) d\Omega(x) + \\
& + k \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t) z_{3\beta}^*(\xi, x) d\Omega(x)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Nota-se que, nas expressões (3.48) e (3.49), as duas últimas integrais de domínio são referentes às inércias translacionais e representam parcelas adicionais obtidas neste trabalho em relação às equações integrais apresentadas por PROVIDAKIS e BESKOS (2000).

A determinação dos tensores $u_{i\beta k}^*$, $p_{i\beta k}^*$, $w_{i\beta}^*$ e $z_{i\beta}^*$ presentes nas equações (3.48) e (3.49) é feita substituindo-se as expressões dos deslocamentos nos pontos internos e suas derivadas nas expressões dos esforços. Assim, cada tensor é obtido aplicando-se as relações abaixo.

- Para o tensor $u_{\alpha\beta k}^*$, na expressão dos momentos:

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha\gamma, \beta}^* + u_{\beta\gamma, \alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (u_{1\gamma, 1}^* + u_{2\gamma, 2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right] \tag{3.50}$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha 3, \beta}^* + u_{\beta 3, \alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (u_{13, 1}^* + u_{23, 2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

- Para o tensor $u_{3\beta k}^*$, na expressão dos esforços cortantes:

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma, \beta}^*) \tag{3.51}$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta 3}^* + u_{33, \beta}^*)$$

- Para o tensor $p_{\alpha\beta k}^*$, na expressão dos momentos:

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[p_{\alpha\gamma,\beta}^* + p_{\beta\gamma,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (p_{1\gamma,1}^* + p_{2\gamma,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[p_{\alpha 3,\beta}^* + p_{\beta 3,\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (p_{13,1}^* + p_{23,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$
(3.52)

- Para o tensor $p_{3\beta k}^*$, na expressão dos esforços cortantes:

$$p_{3\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (p_{\beta\gamma}^* + p_{3\gamma,\beta}^*)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (p_{\beta 3}^* + p_{33,\beta}^*)$$
(3.53)

- Para o tensor $w_{\alpha\beta}^*$, na expressão dos momentos:

$$w_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[v_{\alpha,\gamma\beta}^* + v_{\beta,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (v_{1,\gamma 1}^* + v_{2,\gamma 2}^*) \delta_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\alpha\gamma,\beta}^* + v_{\beta\gamma,\alpha}^* + \right.$$

$$\left. + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (u_{1\gamma,1}^* + u_{2\gamma,2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right] n_\gamma$$
(3.54)

- Para o tensor $w_{3\beta}^*$, na expressão dos esforços cortantes:

$$w_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \left[v_{\beta,\gamma}^* + v_{3,\gamma\beta}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} (u_{\beta\gamma}^* + u_{3\gamma,\beta}^*) \right] n_\gamma$$
(3.55)

- Para o tensor $z_{\alpha\beta}^*$, na expressão dos momentos:

$$z_{\alpha\beta}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[u_{\alpha\gamma,\beta}^* + u_{\beta\gamma,\gamma\alpha}^* + \frac{2\nu}{(1-\nu)} (u_{1\gamma,\gamma 1}^* + u_{2\gamma,\gamma 2}^*) \delta_{\alpha\beta} \right]$$
(3.56)

- Para o tensor $z_{3\beta}^*$, na expressão dos esforços cortantes:

$$z_{3\beta}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} (u_{\beta\gamma,\gamma}^* + u_{3\gamma,\gamma\beta}^*) \quad (3.57)$$

Os tensores presentes em (3.56) e (3.57) são obtidos derivando-se a expressão (3.46) em relação às coordenadas do ponto ξ , usando (3.47). Assim, chega-se às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta,\gamma\phi}^* = & -\frac{1}{4\pi D(1-\nu)r^2} \left[2(8A + 6zK_1 + 2z^2K_0 + 1 - \nu) r_{,\phi} r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) \cdot \right. \\ & \cdot (r_{,\phi} r_{,\beta} \delta_{\gamma\alpha} + r_{,\phi} r_{,\alpha} \delta_{\gamma\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \delta_{\phi\gamma} + r_{,\beta} r_{,\gamma} \delta_{\phi\alpha} + r_{,\alpha} r_{,\gamma} \delta_{\phi\beta}) - (4A + 1 - \nu) \cdot \\ & \cdot (\delta_{\phi\alpha} \delta_{\gamma\beta} + \delta_{\phi\beta} \delta_{\gamma\alpha}) - (4A + 4zK_1 + 1 - \nu) \delta_{\phi\gamma} \delta_{\alpha\beta} - \\ & \left. - 4(24A + 8zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\phi} \right] \end{aligned} \quad (3.58a)$$

$$u_{3\alpha,\beta\phi}^* = -\frac{1}{4\pi Dr} (2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\phi} - r_{,\alpha} \delta_{\phi\beta} - r_{,\beta} \delta_{\phi\alpha} - r_{,\phi} \delta_{\alpha\beta}) \quad (3.58b)$$

De forma análoga, derivam-se (3.29), (3.36), (3.42) e (3.43) em relação às coordenadas do ponto ξ e, após substituir esses resultados em (3.50) a (3.57), são obtidas as seguintes expressões, após reagrupar os termos:

- Para o tensor $u_{\alpha\beta\gamma}^*$, na expressão dos momentos:

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta\gamma}^* = & \frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) (\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + \right. \\ & \left. + (4A + 1 + \nu) \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} \right] \end{aligned} \quad (3.59a)$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} 2\ell n z - 1 \right) \delta_{\alpha\beta} - 2r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3.59b)$$

- Para o tensor $p_{\alpha\beta k}^*$, na expressão dos momentos:

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\gamma\beta}n_\alpha + \delta_{\gamma\alpha}n_\beta) + (4A + 1 + 3\nu)\delta_{\alpha\beta}n_\gamma - \right. \\ \left. - (16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu)[(n_\alpha r_{,\beta} + n_\beta r_{,\alpha})r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha}r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta}r_{,\alpha})r_{,n}] - \right. \\ \left. - 2(8A + 2zK_1 + 1 + \nu)(\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}r_{,n} + n_\gamma r_{,\alpha}r_{,\beta}) + 4(24A + 8zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2\nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}r_{,n} \right\} \quad (3.60a)$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1)(r_{,\beta}n_\alpha + r_{,\alpha}n_\beta) - 2(4A + zK_1)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,n} + 2A\delta_{\alpha\beta}r_{,n} \right] \quad (3.60b)$$

- Para o tensor $w_{\alpha\beta}^*$, na expressão dos momentos:

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \left\{ (4\ell n z - 3)[(1-\nu)(r_{,\beta}n_\alpha + r_{,\alpha}n_\beta) + (1+3\nu)\delta_{\alpha\beta}r_{,n}] + 4[(1-\nu)r_{,\alpha}r_{,\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta}]r_{,n} \right\} - \\ - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma \quad (3.61)$$

- Para o tensor $u_{3\beta k}^*$, na expressão dos esforços cortantes:

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B\delta_{\gamma\beta} - A r_{,\gamma}r_{,\beta}] \quad (3.62a)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta} \quad (3.62b)$$

- Para o tensor $p_{3\beta k}^*$, na expressão dos esforços cortantes:

$$p_{3\beta\gamma}^* = -\frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r} \left[(2A + zK_1)(\delta_{\gamma\beta}r_{,n} + r_{,\gamma}n_\beta) + 2A n_\gamma r_{,\beta} - 2(4A + zK_1)r_{,\beta}r_{,\gamma}r_{,n} \right] \quad (3.63a)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{4\pi r^2} \left[(z^2 B + 1)n_\beta - (z^2 A + 2)r_{,\beta}r_{,n} \right] \quad (3.63b)$$

- Para o tensor $w_{3\beta}^*$, na expressão dos esforços cortantes:

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} \left[(2\ell n z - 1) n_{\beta} + 2 r_{,\beta} r_{,n} \right] - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{3\beta\gamma}^* n_{\gamma} \quad (3.64)$$

- Para o tensor $z_{\alpha\beta}^*$, na expressão dos momentos:

$$z_{\alpha\beta}^* = -\frac{1}{2\pi r^2} \left[(4A + 2zK_1) \delta_{\alpha\beta} - 4(4A + zK_1) r_{,\alpha} r_{,\beta} + (12A + 2zK_1 + 1 - \nu) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} \right] \quad (3.65)$$

- Para o tensor $z_{3\beta}^*$, na expressão dos esforços cortantes:

$$z_{3\beta}^* = -\frac{\lambda^2}{2\pi r} (1-\nu) r_{,\beta} \quad (3.66)$$

Implementação Numérica

4.1 Introdução

Neste capítulo, é descrita a implementação numérica utilizada para a resolução do problema de análise dinâmica linear de placas espessas pelo Método dos Elementos de Contorno, considerando a formulação e a técnica apresentadas nos dois capítulos anteriores.

4.2 Equações Integrais Discretizadas

Inicialmente, considere o contorno Γ discretizado com elementos unidimensionais, em que cada elemento possui um contorno Γ_j , e o domínio Ω discretizado em células internas triangulares, cada uma possuindo um domínio Ω_l (Figura 4.1).

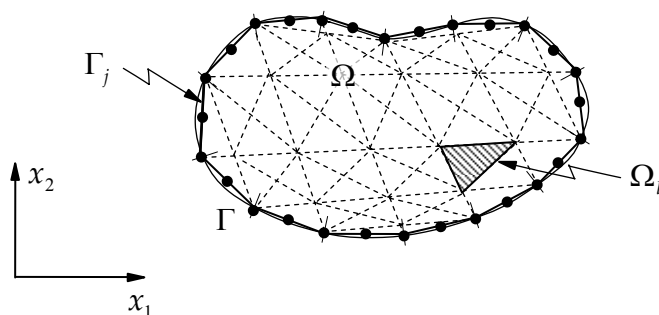


Figura 4.1 - Domínio discretizado com elementos de contorno e células internas.

A discretização é realizada utilizando-se elementos de contorno quadráticos isoparamétricos contínuos e descontínuos, e células internas triangulares constantes, com geometria linear.

As equações integrais para o ponto fonte no contorno e para o ponto fonte no domínio, dadas, respectivamente, por (3.45) e (3.44), serão escritas em forma discretizada e, representadas de uma única maneira, como segue:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\xi)u_i(\xi, t) = & \int_{\Gamma} [p_j(x, t)u_{ij}^*(\xi, x) - p_{ij}^*(\xi, x)u_j(\xi, t)]d\Gamma(x) - \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \ddot{u}_\alpha(x, t)u_{i\alpha}^*(\xi, x)d\Omega(x) - \\
& - \rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t)u_{i3}^*(\xi, x)d\Omega(x) + q \int_{\Gamma} \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha}^*(\xi, x) \right] n_\alpha(x) d\Omega(x) + \\
& + k\rho h \int_{\Omega} \ddot{u}_3(x, t)u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x)d\Omega(x)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

São usadas funções de interpolação para aproximação das funções envolvidas, tanto para o contorno como para o domínio. Assim, fixando-se o ponto fonte ξ no contorno e integrando-se os elementos de contorno e as células de domínio, chega-se a um conjunto de equações para as três direções generalizadas. Logo, a equação (4.1) apresenta o seguinte aspecto, em sua forma discretizada:

$$\mathbf{C}_i \mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma) \mathbf{P}^{(n)} - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma) \mathbf{U}^{(n)} + \sum_{j=1}^N q \int_{\Gamma_j} (\mathbf{S}_i^* d\Gamma) - \sum_{l=1}^M \int_{\Omega_l} (\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{\mathbf{N}} d\Omega) \ddot{\mathbf{U}}^{(m)} \tag{4.2}$$

onde $\mathbf{C}_i$ é uma matriz que contém os coeficientes C_{ij} ; $\mathbf{U}_i$ é o vetor de deslocamento do ponto fonte; N é o número de elementos de contorno; M é o número de células de domínio; $\mathbf{N}$ e $\bar{\mathbf{N}}$ são as matrizes que contêm as funções de interpolação utilizadas para aproximar o contorno e o domínio, respectivamente; $\mathbf{U}_i^*$ e $\bar{\mathbf{U}}_i^*$ são as matrizes que contêm as componentes dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos; $\mathbf{P}_i^*$ é uma matriz

que contém as componentes dos tensores da solução fundamental relativas as forças de superfície; $\mathbf{U}^{(n)}$ e $\mathbf{P}^{(n)}$ são os vetores que contém as componentes dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, relativos aos pontos nodais do elemento de contorno considerado; $\ddot{\mathbf{U}}^{(m)}$ é o vetor que contém as componentes de aceleração inercial, relativo ao ponto nodal da célula de domínio em questão; $\mathbf{S}_i^*$ é um vetor cujas componentes são dadas pela expressão:

$$s_k^* = \left[v_{k,\alpha}^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{k\alpha}^* \right] n_\alpha \quad (4.3)$$

onde as componentes de $u_{k\alpha}^*$ e $v_{k,\alpha}^*$ foram apresentadas no Capítulo 3.

De forma análoga, a equação integral (4.1) pode ser escrita em sua forma discretizada, considerando c_{ij} igual a δ_{ij} , onde o ponto fonte ξ é fixado no domínio, obtendo-se, novamente, um conjunto de equações para as três direções generalizadas, sendo apresentadas como a seguir:

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\mathbf{U}_i^* N d\Gamma) \mathbf{P}^{(n)} - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} (\mathbf{P}_i^* N d\Gamma) \mathbf{U}^{(n)} + \sum_{j=1}^N q \int_{\Gamma_j} (\mathbf{S}_i^* d\Gamma) - \sum_{l=1}^M \int_{\Omega_l} (\bar{\mathbf{U}}_i^* \bar{N} d\Omega) \ddot{\mathbf{U}}^{(m)} \quad (4.4)$$

Para um ponto qualquer do elemento de contorno, são consideradas as seguintes expressões para interpolação dos deslocamentos e forças de superfície em função de seus valores nodais:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(j)} &= \mathbf{N} \mathbf{U}^{(n)} \\ \mathbf{P}^{(j)} &= \mathbf{N} \mathbf{P}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

enquanto para um ponto localizado no interior do domínio, as funções de interpolação dos termos inerciais são apresentadas como:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{(l)} = \overline{\mathbf{N}} \ddot{\mathbf{U}}^{(m)} \quad (4.6)$$

Nas expressões (4.5), tem-se que as funções de interpolação são dependentes da coordenada intrínseca η , como será visto na Seção 4.3, torna-se necessário transformar a diferencial de contorno $d\Gamma$ para esse sistema. Assim, sabendo-se que $|\mathbf{J}|$ é o jacobiano dessa transformação, então a seguinte expressão é utilizada:

$$d\Gamma = |\mathbf{J}| d\eta \quad (4.7)$$

As seguintes matrizes são definidas:

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \quad (4.8)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}_{ij} = q \int_{\Gamma_j} \mathbf{S}_i^* d\Gamma \quad (4.10)$$

$$\mathbf{M}_{il} = \int_{\Omega_l} \overline{\mathbf{U}}_i^* \overline{\mathbf{N}} d\Omega \quad (4.11)$$

Os procedimentos para o cálculo da equação (4.11) serão apresentados na Seção 4.5 e para as equações (4.8), (4.9) e (4.10) serão mostrados a seguir.

Assim, com as considerações feitas acima, e quando o ponto fonte ξ estiver situado no contorno, tem-se que a equação (4.2) pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_i \mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{P}_j - \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{U}_j + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{ij} - \sum_{l=1}^M \mathbf{M}_{il} \ddot{\mathbf{U}}_l \quad (4.12)$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \mathbf{U}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{P}_j + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{ij} - \sum_{l=1}^M \mathbf{M}_{il} \ddot{\mathbf{U}}_l \quad (4.13)$$

onde

$$\mathbf{H}_{ij} = \hat{\mathbf{H}}_{ij} \quad \text{para } i \neq j \quad (4.14)$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \hat{\mathbf{H}}_{ij} + \mathbf{C}_{ij} \quad \text{para } i = j$$

Para o ponto fonte ξ localizado no domínio, a equação (4.4) é escrita na forma:

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{P}_j - \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{U}_j + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{ij} - \sum_{l=1}^M \mathbf{M}_{il} \ddot{\mathbf{U}}_l \quad (4.15)$$

Em vista disso, uma integração numérica é necessária para avaliar as expressões (4.13) e (4.15). Para tanto, a equação (4.7) é utilizada nas integrais de contorno das equações (4.8) a (4.10). A quadratura de Gauss é empregada, utilizando as seguintes expressões, onde as integrais são substituídas por somatórios:

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (\mathbf{U}_i^* \mathbf{N})_k |\mathbf{J}| w_k \quad (4.16)$$

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (\mathbf{P}_i^* \mathbf{N})_k |\mathbf{J}| w_k \quad (4.17)$$

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{S}_i^* d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \mathbf{S}_i^* |\mathbf{J}| d\eta = \sum_{k=1}^K (\mathbf{S}_i^*)_k |\mathbf{J}| w_k \quad (4.18)$$

onde K é o número de pontos de integração; w_k é o peso associado ao ponto de integração.

Na integração numérica, a quantidade de pontos de Gauss adotados para efetuar o cálculo é estabelecida mediante um critério de afastamento e aproximação entre o ponto fonte e o ponto campo, cuja varredura consiste de 4 a 10 pontos.

4.3 Elementos do Contorno

Os elementos do contorno utilizados no programa são elementos quadráticos isoparamétricos, podendo ser contínuos e descontínuos.

4.3.1 Elemento quadrático isoparamétrico contínuo

Este é um elemento caracterizado por apresentar três pontos nodais situados sobre uma curva, sendo dois localizados nas extremidades e um terceiro entre esses dois. As funções de interpolação são usadas para aproximar tanto as coordenadas como as variáveis envolvidas, através de uma função do segundo grau, conforme Figura 4.2.

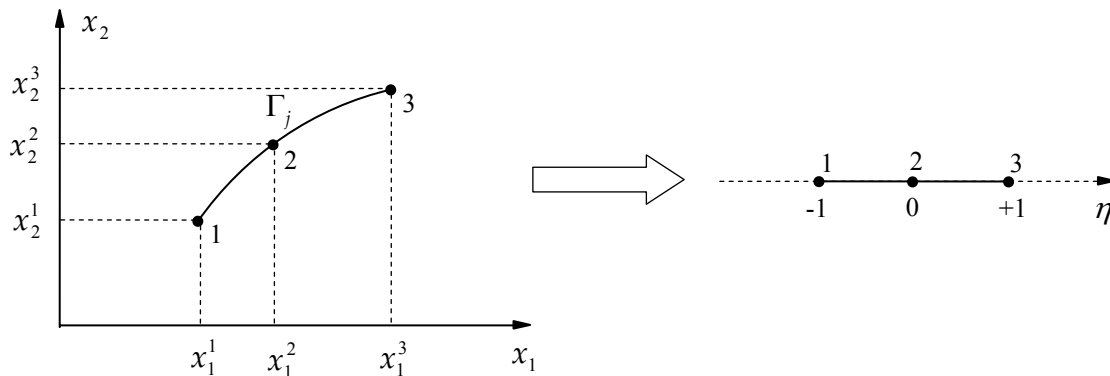


Figura 4.2 - Elemento quadrático isoparamétrico contínuo.

Após uma transformação, as coordenadas e as variáveis envolvidas são escritas em um novo sistema, em função da coordenada intrínseca η . Tal elemento assegura a continuidade das funções consideradas entre os elementos adjacentes.

As funções de interpolação, dependentes da coordenada adimensional η , são dadas como:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}\eta(\eta-1) \\ N_2 &= (1-\eta)(\eta+1) \\ N_3 &= \frac{1}{2}\eta(\eta+1) \end{aligned} \tag{4.19}$$

Assim, para um ponto qualquer do elemento, tem-se que suas coordenadas (x_1, x_2) são calculadas em função de suas coordenadas nodais, através da seguinte expressão matricial:

$$\mathbf{x}^{(j)} = \overline{\mathbf{M}} \mathbf{x}^{(n)} \tag{4.20}$$

onde

$$\mathbf{x}^{(j)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{4.21a}$$

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{4.21b}$$

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{Bmatrix} \tag{4.21c}$$

Os deslocamentos e as forças de superfície são interpolados conforme (4.5), onde se tem, para o elemento de contorno considerado:

$$\mathbf{U}^{(j)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{P}^{(j)} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (4.22b)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4.22c)$$

$$\mathbf{U}^{(n)} = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \\ u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{P}^{(n)} = \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \\ p_1^3 \\ p_2^1 \\ p_2^2 \\ p_2^3 \\ p_3^1 \\ p_3^2 \\ p_3^3 \end{Bmatrix} \quad (4.22d)$$

O jacobiano da transformação é obtido a partir de derivadas de (4.20), para o qual se tem a seguinte expressão:

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2} \quad (4.23)$$

4.3.2 Elemento quadrático isoparamétrico descontínuo

Na Figura 4.3 é apresentado o elemento quadrático isoparamétrico descontínuo, para o qual o procedimento é o mesmo utilizado no item 4.3.1, sendo necessário mudar apenas as funções de interpolação. Essas, por sua vez, são obtidas considerando-se que a função deva possuir um valor no ponto nodal considerado e zero nos outros dois. E com isso, como os pontos nodais 1 e

3 não estão situados nas extremidades do elemento considerado, não haverá continuidade das funções envolvidas nessas extremidades.

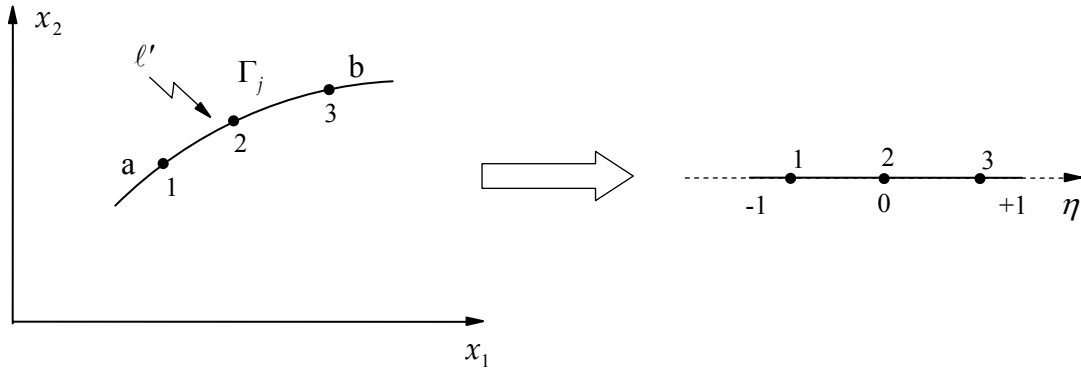


Figura 4.3 - Elemento quadrático isoparamétrico descontínuo.

As funções de interpolação desse elemento são dadas em função das variáveis a , b e ℓ , na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{\ell \eta (\ell \eta - \ell + 2b)}{2(\ell - a - b)(\ell - 2b)} \\
 N_2 &= \frac{\ell \eta [2(a - b) - \ell \eta]}{(\ell - 2a)(\ell - 2b)} + 1 \\
 N_3 &= \frac{\ell \eta (\ell \eta + \ell - 2a)}{2(\ell - a - b)(\ell - 2b)}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde a é o afastamento do nó 1 à extremidade; b é o afastamento do nó 3 à extremidade; ℓ é o comprimento total do elemento. Deve-se notar que esses parâmetros devem estar de acordo com o sentido de integração. Na Figura 4.3, ℓ' é o comprimento entre os pontos 1 e 3.

Este elemento apresenta algumas particularidades, tais como: quando $a = 0$ e $b \neq 0$, ou ainda, $a \neq 0$ e $b = 0$, sendo este elemento chamado de semi-descontínuo, onde as funções (4.24) podem ser usadas para avaliar as variáveis do problema. Para o caso em que se tenha a e b nulos, as expressões (4.24) recaem nas expressões (4.19).

4.4 Descontinuidade da Normal ou das Condições de Contorno

Nesta seção são apresentadas algumas particularidades para o contorno. Para o caso onde haja descontinuidade da normal, não é assegurada a continuidade das forças de superfície no contorno e, conforme Figura 4.4, a normal pode apresentar direções diferentes para o mesmo ponto nodal que pertença a dois elementos adjacentes.

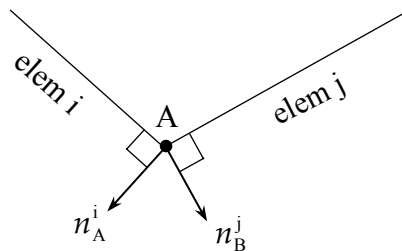


Figura 4.4 - Caso da descontinuidade da normal.

Uma forma de resolver esse problema poderia ser utilizando ou o nó duplo ou o elemento descontínuo.

4.4.1 Utilização de nó duplo

Este procedimento é utilizado quando, no ponto de interseção entre dois elementos adjacentes, se tenha descontinuidade da normal ou da condição de contorno, quando se conhece a força de superfície nos dois elementos, ou então quando o deslocamento é conhecido num elemento e a força de superfície é conhecida no outro. Para tanto, consideram-se dois pontos nodais na mesma posição, cada um pertencendo a um elemento diferente, conforme Figura 4.5.

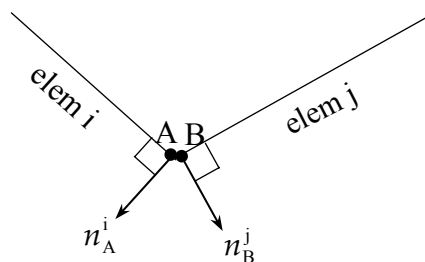


Figura 4.5 - Caso de nó duplo.

Para assegurar a continuidade de deslocamentos no ponto de interseção, impõe-se o mesmo deslocamento entre os dois nós.

4.4.2 Utilização de elemento descontínuo

Para o caso em que numa determinada posição de um nó haja descontinuidade da normal, onde as forças de superfície não são conhecidas em nenhum dos dois elementos adjacentes, a utilização do nó duplo, visto no item anterior, não resolve o problema. Isto se deve ao fato de ter-se um número de equações independentes menores que o número de incógnitas para esse nó, devido ao deslocamento poder ser contínuo no ponto e as forças de superfície não.

Neste trabalho é utilizado, para esses casos, o elemento descontínuo, conforme Figura 4.6. Este elemento é caracterizado por sua precisão apresentar a mesma ordem da precisão do elemento contínuo, quando se escolhe uma distância conveniente dos pontos nodais de extremidade do elemento, assim como dos pontos de integração.

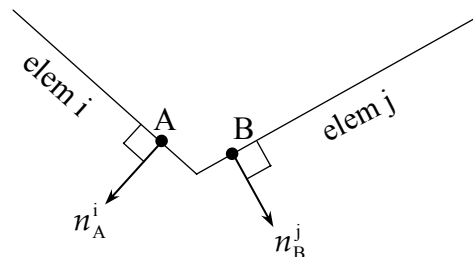


Figura 4.6 - Caso de elemento descontínuo.

4.5 Célula Interna

A presente seção descreve sucintamente a célula empregada na discretização do domínio.

As células internas constantes utilizadas neste trabalho apresentam forma triangular, sendo as mesmas representadas considerando um sistema de coordenadas intrínseco (ξ_1, ξ_2) , conforme pode ser observado na Figura 4.7.

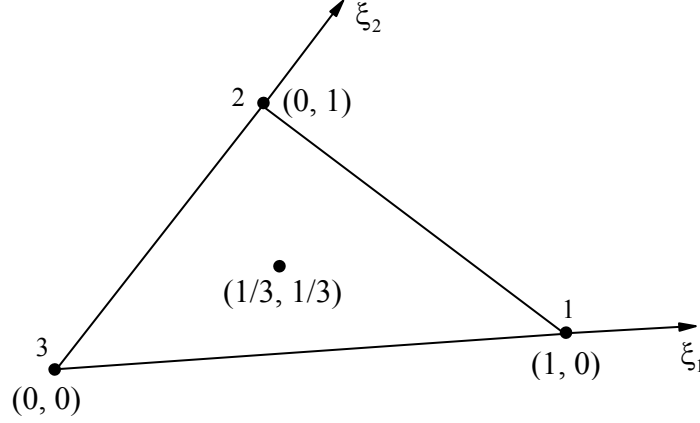


Figura 4.7 - Sistema de coordenadas intrínseco para célula triangular constante.

As coordenadas de um ponto do interior da célula são calculadas pela expressão (4.20), onde a matriz das funções de interpolação é representada como:

$$\bar{\mathbf{M}} = [\mathbf{I}_{\xi_1} \quad \mathbf{I}_{\xi_2} \quad \mathbf{I}_{\xi_3}] \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem 2, com ξ_3 calculado pela relação:

$$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2, \quad (4.26)$$

e com $\mathbf{x}^{(n)}$ contendo as coordenadas (x_1, x_2) de cada um dos vértices do triângulo dado por (4.20).

O jacobiano dessa transformação é dado pela seguinte expressão:

$$|\mathbf{J}| = 2A \quad (4.27)$$

onde A é a área do triângulo.

Os termos inerciais num ponto qualquer da célula são calculados através da equação (4.6) e, devido à consideração de célula constante, tem-se:

$$\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{I} \quad (4.28)$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade de ordem 3 e, ainda, com os valores dos termos inerciais situados no baricentro da célula, representados no vetor em (4.6), segundo:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{(m)} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

onde $\ddot{u}_1$ e $\ddot{u}_2$ são as rotações inerciais nas direções x e y , respectivamente, e $\ddot{u}_3$ é a deflexão inercial.

Escrevendo as coordenadas homogêneas ξ_α em função das coordenadas cartesianas x_1 e x_2 , tem-se:

$$\xi_\alpha = \frac{1}{2A} (2A_\alpha^o + b_\alpha x_1 + a_\alpha x_2) \quad (4.30)$$

sendo α o ponto onde a função é avaliada e, ainda:

$$a_\alpha = x_1^\gamma - x_1^\beta \quad (4.31a)$$

$$b_\alpha = x_2^\beta - x_2^\gamma \quad (4.31b)$$

$$2A_\alpha^o = x_1^\beta x_2^\gamma - x_1^\gamma x_2^\beta \quad (4.31c)$$

$$A = \frac{1}{2} (b_1 a_2 + b_2 a_1) \quad (4.31d)$$

com $\alpha = 1, 2, 3$ para $\beta = 2, 3, 1$ e $\gamma = 3, 1, 2$.

Assim, conforme (4.11), cada célula contribui com uma matriz (3x3) da seguinte forma:

$$\mathbf{m}_{il} = \int_{\Omega_l} \overline{\mathbf{U}}_i^* \overline{\mathbf{N}} d\Omega \quad (4.32)$$

onde $\overline{\mathbf{U}}_i^*$ é a matriz que contém as componentes, u_{ij}^* e $u_{i\alpha,\alpha}^*$, dos tensores da solução fundamental relativos aos deslocamentos, conforme Seções 3.5 e 3.6. Outra maneira de apresentar (4.32) é realizando o produto matricial do integrando da mesma, escrevendo-se essa equação como:

$$\mathbf{m}_{il} = \int_{\Omega_l} \boldsymbol{\mu}_i^* d\Omega \quad (4.33)$$

sendo

$$\boldsymbol{\mu}_i^* = \begin{Bmatrix} {}_1\boldsymbol{\mu}_i^* \\ {}_2\boldsymbol{\mu}_i^* \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Uma forma de se efetuar a integração de (4.33) seria utilizando a quadratura de Hammer, mas em virtude das singularidades existentes nos casos onde o ponto fonte coincide com algum ponto da célula, torna-se conveniente definir um sistema de coordenadas polares (r, ϕ) com o ponto fonte centrado em γ (KARAM, 1992). Assim, a integração é calculada em relação a r e em relação a ϕ . Neste caso, têm-se as seguintes definições:

$$d\Omega = r dr d\phi \quad (4.35)$$

$$x_1(x) = x_1^\gamma + r \cos \phi \quad (4.36)$$

$$x_2(x) = x_2^\gamma + r \sin \phi \quad (4.37)$$

Se agora são consideradas as equações (4.36) e (4.37), então as expressões correspondentes às componentes do tensor μ_i^* podem ser escritas como:

$${}_1\mu_i^*(\xi, x) = {}_1\Psi(\xi, x) \quad (4.38)$$

$${}_2\mu_i^*(\xi, x) = {}_2\Psi(\xi, x) \quad (4.39)$$

No caso mais geral, tem-se que o ponto singular γ não pertence à célula, não havendo, portanto, singularidade (ver Figura 4.8). Assim, uma transformação de coordenadas para o sistema (r, ϕ) pode ser utilizada, onde as componentes do tensor μ_i^* são dadas como:

$${}_1\mu_i^* = \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_1\Psi r dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_1\Psi r dr d\phi \quad (4.40)$$

$${}_2\mu_i^* = \int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_2\Psi r dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} {}_2\Psi r dr d\phi \quad (4.41)$$

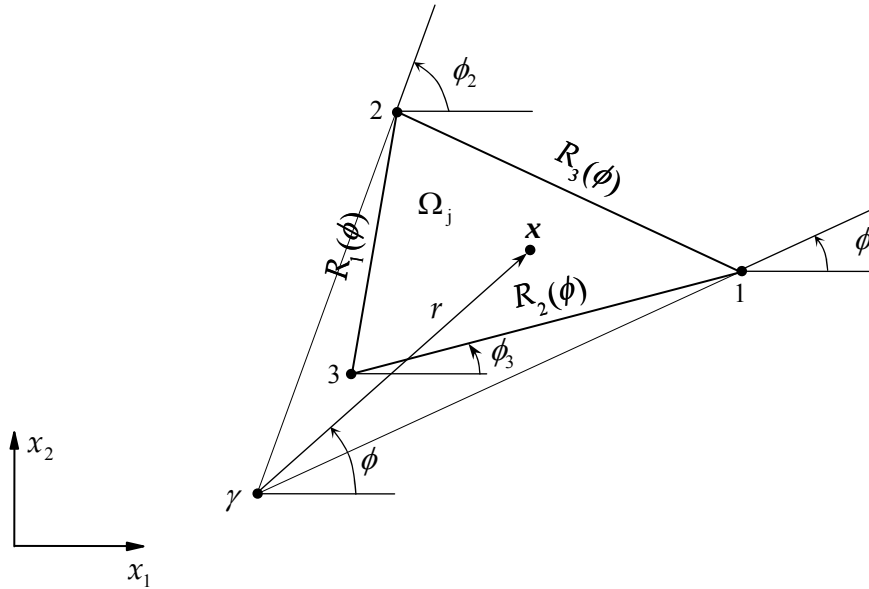


Figura 4.8 - Caso geral de célula sem singularidade.

sendo

$$R_{\alpha}(\phi) = \frac{-2A\gamma_{\zeta_{\alpha}}}{b_{\alpha} \cos \phi + a_{\alpha} \sin \phi} \quad (4.42)$$

com

$$\cos \phi = \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad (4.43)$$

$$\sin \phi = \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad (4.44)$$

onde $\gamma_{\zeta_{\alpha}}$ é o valor da função de interpolação no ponto fonte γ .

Para o cálculo das integrais (4.40) e (4.41), integra-se numericamente essas equações em relação a r e em relação a ϕ , através da quadratura de Gauss, pois as integrais para este caso são todas regulares. Para isto, se expressa a variável ϕ como:

$$\phi = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1)\eta + \frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_1) \quad (4.45)$$

e a variável r como:

$$r = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)\eta + \frac{1}{2}(R_2 + R_1) \quad (4.46)$$

sendo η uma coordenada adimensional, definida no intervalo $[-1, 1]$.

Os jacobianos destas transformações são obtidos pelas derivadas:

$$\frac{d\phi}{d\eta} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (4.47)$$

$$\frac{dr}{d\eta} = \frac{R_2 - R_1}{2} \quad (4.48)$$

A seguir são apresentados três casos e os respectivos tratamentos quando o ponto fonte γ pode gerar uma singularidade na célula.

4.5.1 Ponto singular situado em um dos vértices da célula

No caso em que o ponto singular γ situa-se em um dos vértices da célula, segundo a Figura 4.9, as componentes do tensor (4.34) podem ser representadas na forma:

$${}_1\mu_i^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} {}_1\Psi r dr d\phi \right) \quad (4.49)$$

$${}_2\mu_i^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} {}_2\Psi r dr d\phi \right) \quad (4.50)$$

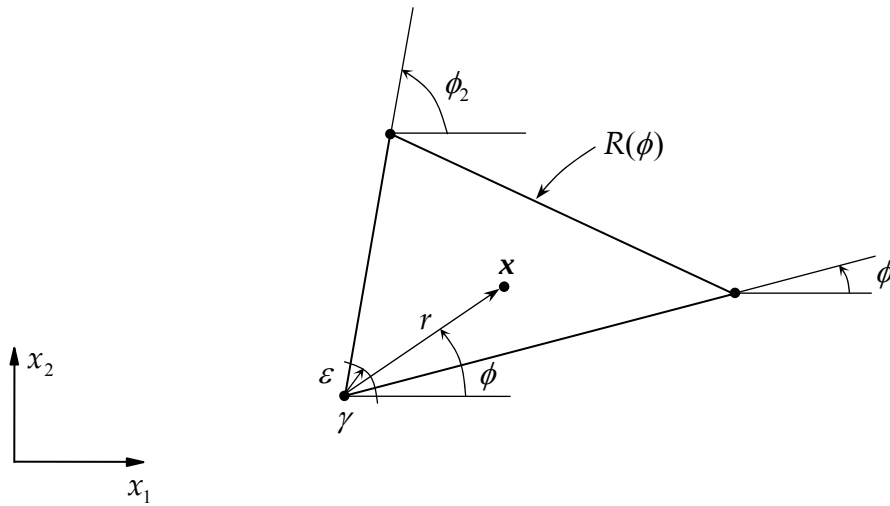


Figura 4.9 - Célula com ponto singular γ coincidindo com um dos vértices.

Observando as componentes do tensor acima, nota-se que a singularidade é eliminada; logo, a integração pode ser efetuada utilizando-se a quadratura de Gauss, tanto em relação a r como em relação a ϕ .

4.5.2 Ponto singular situado em um dos lados da célula

Um outro caso ocorre quando o ponto singular γ situa-se em um ponto qualquer de um dos bordos da célula, ver Figura 4.10. Nesta situação, considera-se o triângulo dividido em duas partes e, para resolver o problema, integra-se separadamente cada parte e os resultados correspondentes são somados. Assim, têm-se as seguintes expressões integrais:

$${}_1\mu_i^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_1\Psi r dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} {}_1\Psi r dr d\phi \right) \quad (4.51)$$

$${}_2\mu_i^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_2\Psi r dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R''_\gamma(\phi)} {}_2\Psi r dr d\phi \right) \quad (4.52)$$

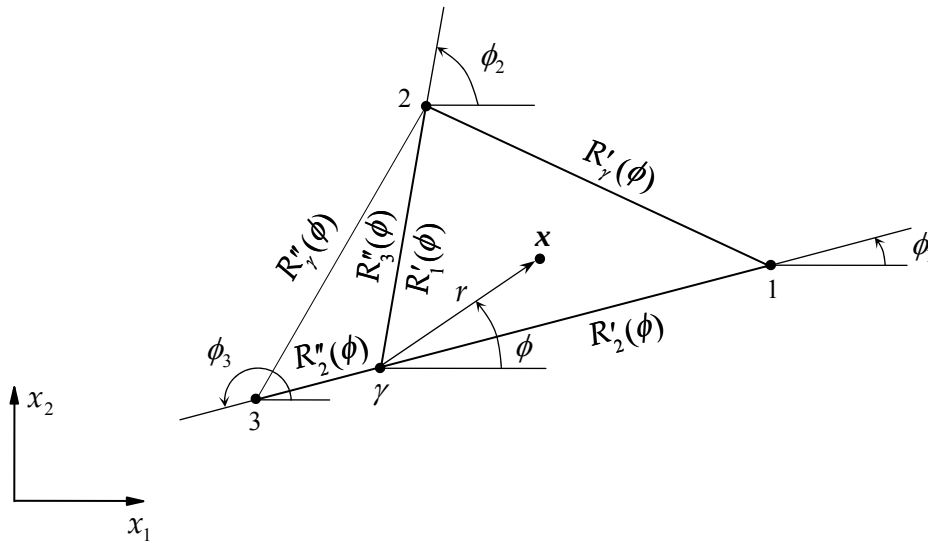


Figura 4.10 - Célula com ponto singular γ situado em um dos lados.

sendo

$$R'_\gamma(\phi) = \frac{-2A'}{b'_\gamma \cos \phi + a'_\gamma \sin \phi} \quad (4.53)$$

$$R''_\gamma(\phi) = \frac{-2A''}{b''_\gamma \cos \phi + a''_\gamma \sin \phi} \quad (4.54)$$

Neste caso, também é realizada a integração numérica, tanto em relação a r como em relação a ϕ , empregando-se a quadratura de Gauss.

4.5.3 Ponto singular situado no interior da célula

Para este último caso, tem-se que o ponto singular γ coincide com um ponto do interior da célula e este problema é resolvido dividindo-se a célula em três partes, como mostrado na Figura 4.11, o que conduz a:

$$(\mu_i^*)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_1\Psi' r dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_1\Psi' r dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_1} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_1\Psi' r dr d\phi \right) \quad (4.55)$$

$$(\mu_i^*)'' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_2\Psi'' r dr d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_3} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_2\Psi'' r dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_1} \int_{\varepsilon}^{R'_\gamma(\phi)} {}_2\Psi'' r dr d\phi \right). \quad (4.56)$$

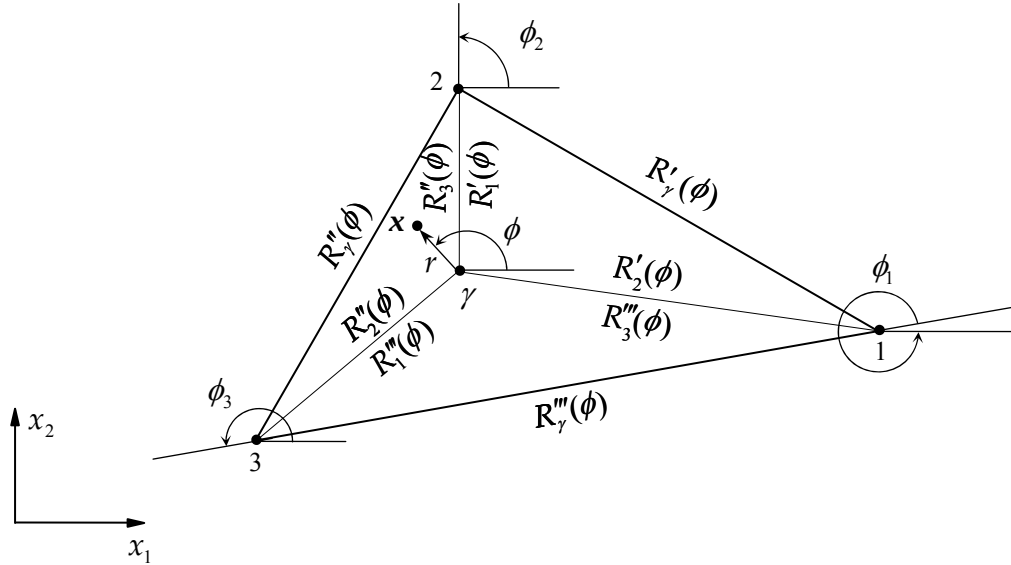


Figura 4.11 - Célula com ponto singular γ situado em seu interior.

sendo $R'_\gamma(\phi)$, $R''_\gamma(\phi)$ e $R'''_\gamma(\phi)$ calculados analogamente ao caso anterior.

Nas integrais acima, para o caso das matrizes $(\mu_i^*)'$ e $(\mu_i^*)''$, a quadratura de Gauss é utilizada para realizar a integração numérica, tanto em relação a r como em relação a ϕ .

Conforme será visto no próximo capítulo, um sistema de equações algébrico é obtido a partir de (4.13) e (4.15), sendo resolvido de maneira acoplada, isto é, o sistema é resolvido simultaneamente para o contorno e o domínio, para cada passo de tempo.

Após a resolução do problema, caso se queira, uma análise em termos de esforços internos, em um ponto qualquer, pode ser realizada, uma vez que já são conhecidos em todos os pontos nodais, para cada direção generalizada, os deslocamentos e as forças de superfície no contorno e os deslocamentos nos pontos das células.

4.6 Esforços Internos

Para o cálculo dos esforços resultantes, momentos e cortantes, são utilizadas as equações (3.48) e (3.49), em sua forma discretizada, tanto no contorno quanto no domínio. Tem-se, então, para cada ponto interno ξ_i , as seguintes expressões:

- Para os momentos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i = & \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} (\hat{\mathbf{U}}_i^* \mathbf{N} d\Gamma) \mathbf{P}^{(n)} - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} (\hat{\mathbf{P}}_i^* \mathbf{N} d\Gamma) \mathbf{U}^{(n)} + \sum_{k=1}^N q \int_{\Gamma_k} (\hat{\mathbf{W}}_i^* d\Gamma) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{a\beta} - \\ & - \sum_{l=1}^M \int_{\Omega_l} (\hat{\mathbf{Z}}_i^* \bar{\mathbf{N}} d\Omega) \ddot{\mathbf{U}}^{(m)} \end{aligned} \quad (4.57)$$

- Para os cortantes:

$$\mathbf{Q}_i = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} (\tilde{\mathbf{U}}_i^* \mathbf{N} d\Gamma) \mathbf{P}^{(n)} - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} (\tilde{\mathbf{P}}_i^* \mathbf{N} d\Gamma) \mathbf{U}^{(n)} + \sum_{k=1}^N q \int_{\Gamma_k} (\tilde{\mathbf{W}}_i^* d\Gamma) - \sum_{l=1}^M \int_{\Omega_l} (\tilde{\mathbf{Z}}_i^* \bar{\mathbf{N}} d\Omega) \ddot{\mathbf{U}}^{(m)} \quad (4.58)$$

onde $\widehat{U}_i^*$, $\widehat{P}_i^*$, $\widehat{W}_i^*$, $\widehat{Z}_i^*$, $\widetilde{U}_i^*$, $\widetilde{P}_i^*$, $\widetilde{W}_i^*$ e $\widetilde{Z}_i^*$ são as matrizes que contêm os tensores cujas componentes foram apresentadas na Seção 3.7.

O cálculo dos esforços internos é importante na análise, pois a partir dos esforços máximos obtidos, o projetista poderá tomar uma decisão, podendo esse utilizar uma espessura da placa diferente daquela tomada inicialmente, antes da análise, ou até mesmo empregar outro tipo de material, tal que as solicitações na estrutura respeitem certos critérios normativos de segurança. Em geral, os modos de vibrações que governam os esforços internos são os mais elevados. E conforme visto neste item, alguns pontos podem ser escolhidos para avaliar essas respostas, não necessitando, assim, armazenar tais valores em memória de computador, como se faz em outros métodos numéricos.

Solução Dinâmica do Problema

5.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados os métodos de marcha no tempo para resolver a equação de equilíbrio do problema de análise dinâmica linear de placas espessas. Os esquemas aqui abordados são aqueles referentes aos de Houbolt e Diferença Central.

5.2 Sistema das Equações Integrais

Escrevendo as equações integrais (4.13) e (4.15) em suas formas discretizadas, respectivamente, para todos os pontos do contorno e do domínio, monta-se um sistema de equações algébricas que pode ser representado na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^c \\ \mathbf{U}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^{dc} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^c \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^{cc} \\ \mathbf{B}^{dc} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{U}}^d \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

em que os superíndices c e d designam, respectivamente, o contorno e o domínio. Além disso, o primeiro superíndice corresponde à posição do ponto fonte, enquanto que o segundo diz respeito ao ponto campo. A submatriz

identidade em (5.1) representa os coeficientes $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$ associados aos pontos internos, enquanto que as submatrizes nulas, relacionadas à massa, diz respeito à consideração de células constantes sobre o domínio.

Assim, o sistema de equações (5.1) pode ser representado de maneira compacta, através da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{U}}(t) = \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{P}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t) - \tilde{\mathbf{M}} \ddot{\tilde{\mathbf{U}}}(t) \quad (5.2)$$

Quando o ponto fonte e o ponto campo estiverem situados sobre o mesmo elemento, com o ponto fixo no contorno, as integrais correspondentes às submatrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, e ao vetor $\mathbf{B}$, em (5.1), possuem singularidades.

Para resolver este problema, no caso da submatriz $\mathbf{G}$ e do vetor $\mathbf{B}$, que têm singularidades de ordem ℓnr , usa-se, neste trabalho, uma transformação de coordenadas do segundo grau (TELLES, 1987), envolvendo as coordenadas dos pontos de integração, que produz um jacobiano que elimina a singularidade no ponto considerado.

As submatrizes $\mathbf{H}$, que correspondem às submatrizes $\mathbf{C}_{ij}$ somadas às submatrizes $\hat{\mathbf{H}}_{ij}$, dadas pela equação (4.14), são expressas através de integrais envolvendo os tensores p_{ij}^* , que possuem singularidades de ordem ℓnr e r^{-1} , segundo o item 3.5.3.

Entretanto, essas submatrizes podem ser obtidas sem que se calculem explicitamente os valores de $\mathbf{C}_{ij}$ e $\hat{\mathbf{H}}_{ij}$, utilizando-se a consideração de movimento de corpo rígido, com a ausência de forças aplicadas ao sistema e, ainda, considerando-se o sistema agindo estaticamente, ou seja, sem a

contribuição dos termos inerciais. Portanto, a equação (5.1), relacionada ao ponto fixo no contorno pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{H}^{cc}\mathbf{U}^c = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

As soluções não-triviais da equação (5.3) correspondentes ao movimento de corpo rígido são dadas por:

$$\mathbf{u} = (1, 0, r_1) \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{u} = (0, 1, r_2) \quad (5.4b)$$

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) \quad (5.4c)$$

Então, as submatrizes de ordem 3x3 da diagonal de $\mathbf{H}^{cc}$ podem ser calculadas pela seguinte expressão:

$$\mathbf{H}_{pp} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{NN} \mathbf{H}_{pq} \mathbf{D}_{qp} \quad p = 1, 2, \dots, NN \quad (5.5)$$

sendo NN o número de pontos nodais e $\mathbf{D}_{qp}$ a matriz que contém os deslocamentos de corpo rígido, para a qual se tem a seguinte forma:

$$\mathbf{D}_{qp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde $r_\alpha = x_\alpha(p) - x_\alpha(q)$, com $\alpha = 1, 2$.

A solução dinâmica do presente problema fica bem determinada mediante a análise de dois casos, a saber, os casos de vibração livre e de vibração forçada. Na primeira situação, tem-se o sistema isento de forças

externas. Essa investigação é importante, pois ela permite estudar os modos fundamentais de vibração para estrutura, além de servir como referência para se estimar o valor do intervalo de tempo em vibração forçada. Já para o segundo caso, uma vez que a estrutura é solicitada por agentes externos, as respostas do sistema devem ficar fora da faixa dos primeiros modos fundamentais, se os modos dominantes forem deslocamentos, o que levaria a estrutura a um estado de ressonância (CLOUGH e PENZIEN, 1993).

5.3 Caso de Vibração Livre

Para resolver o caso de vibração livre, uma maneira clara de entender o desenvolvimento consiste em desacoplar o sistema de equações (5.1), sendo reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{cc}\mathbf{U}^c &= \mathbf{G}^{cc}\mathbf{P}^c + \mathbf{B}^{cc} - \mathbf{M}^{cd}\ddot{\mathbf{U}}^d \\ \mathbf{H}^{dc}\mathbf{U}^c + \mathbf{I}\mathbf{U}^d &= \mathbf{G}^{dc}\mathbf{P}^c + \mathbf{B}^{dc} - \mathbf{M}^{dd}\ddot{\mathbf{U}}^d \end{aligned} \quad (5.7)$$

Sob a hipótese de carregamento nulo e, ainda, considerando que o sistema esteja sujeito a um campo de deslocamento harmônico u ; então, escreve-se:

$$u = \tilde{u}(\mathbf{x})\sin \omega t \quad (5.8)$$

onde ω é a frequência natural, e o til indica amplitude. Note-se que (5.8) faz referência tanto ao contorno quanto ao domínio.

Dessa forma, diferencia-se a expressão (5.8) até a segunda ordem no tempo e o sistema (5.7), devido às hipóteses assumidas, pode ser escrito somente em termos de deslocamentos na forma seguinte:

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{X}}^c - \omega^2 \mathbf{M}^{cd} \tilde{\mathbf{X}}^d = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{X}}^c + (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{M}^{dd}) \tilde{\mathbf{X}}^d = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

onde os valores desconhecidos estão presentes nos vetores $\tilde{\mathbf{X}}$. Assim, resolvendo (5.9) para as incógnitas do contorno, obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{X}}^c = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} (\omega^2 \mathbf{M}^{cd} \tilde{\mathbf{X}}^d) \quad (5.11)$$

Após substituir (5.11) em (5.10), o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\left[\mathbf{I} - \omega^2 (\mathbf{M}^{dd} - \tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{M}^{cd}) \right] \tilde{\mathbf{X}}^d = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

Logo, a equação (5.12) pode ser escrita como um problema de autovalor:

$$\tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{X}}^d = (1/\omega^2) \tilde{\mathbf{X}}^d \quad (5.13)$$

com

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{M}^{dd} - \tilde{\mathbf{A}}^* \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{M}^{cd} \quad (5.14)$$

sendo $\tilde{\mathbf{B}}$ uma matriz real que, em geral, é não esparsa, não simétrica e não positiva definida. Portanto, um algoritmo iterativo eficiente deve ser usado para resolver o problema de autovalor (SMITH *et al.*, 1976).

5.4 Caso de Vibração Forçada

Para a solução do sistema de equações (5.2), serão empregados dois esquemas de marcha no tempo, a saber, o método implícito de Houbolt e o explícito de Diferença Central, que serão utilizados para resolver o caso de

vibração forçada (BATHE, 1996), sendo as respostas obtidas simultaneamente, tanto para o contorno como para o domínio.

5.4.1 Método de Houbolt

Neste caso, o problema dinâmico é resolvido pelo método de integração direta, onde se faz uso do esquema de Houbolt. Esse esquema de integração caracteriza-se por ser incondicionalmente estável, para o qual, têm-se os seguintes operadores de velocidade e aceleração, respectivamente:

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} [11\mathbf{U}^{t+\Delta t} - 18\mathbf{U}^t + 9\mathbf{U}^{t-\Delta t} - 2\mathbf{U}^{t-2\Delta t}] \quad (5.15)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} [2\mathbf{U}^{t+\Delta t} - 5\mathbf{U}^t + 4\mathbf{U}^{t-\Delta t} - \mathbf{U}^{t-2\Delta t}] \quad (5.16)$$

Como o sistema de equações obtido em (5.2) é independente do amortecimento, o operador de velocidade não é utilizado na implementação. Assim, substituindo (5.16) em (5.2), escreve-se uma expressão matricial para o instante $t + \Delta t$, em termos de deslocamento:

$$(2\tilde{\mathbf{M}} + \Delta t^2 \tilde{\mathbf{H}})\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \Delta t^2 \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \Delta t^2 \mathbf{B}^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{M}}(5\mathbf{U}^t - 4\mathbf{U}^{t-\Delta t} + \mathbf{U}^{t-2\Delta t}) \quad (5.17)$$

A expressão (5.17) pode ser representada genericamente como:

$$\tilde{\mathbf{H}}^* \mathbf{U}^{t+\Delta t} - \tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{b}^{t+\Delta t} = \mathbf{h}^t \quad (5.18)$$

onde o vetor à direita da igualdade contém somente os valores conhecidos de deslocamentos para os instantes t , $t - \Delta t$ e $t - 2\Delta t$. Após a imposição das condições de contorno e reordenação das incógnitas em (5.18), obtém-se:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (5.19)$$

com

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}^{t+\Delta t} + \mathbf{b}^{t+\Delta t} + \mathbf{h}^t \quad (5.20)$$

onde as contribuições dos valores prescritos estão incluídas em $\mathbf{f}^{t+\Delta t}$.

Para a inicialização do processo de marcha no tempo, mediante a consideração de deslocamento e velocidade iniciais nulas, os valores de deslocamento para os instantes t , $t - \Delta t$ e $t - 2\Delta t$, relativos aos passos de tempo anteriores ao instante $t + \Delta t$, são também considerados nulos. Essa estratégia é utilizada aqui, uma vez que o esquema é incondicionalmente estável, visando à auto-estabilidade temporal ao longo da marcha.

5.4.2 Método de Diferença Central

Neste outro método, o problema dinâmico é resolvido pelo Método de Diferença Central. Esse esquema de integração apresenta duas características. A primeira diz respeito ao limite do intervalo de tempo, sendo, por esse motivo, em geral, classificado como condicionalmente estável.

A segunda observação é que, os operadores de velocidade e aceleração são escritos, respectivamente, para o instante t :

$$\dot{U}^t = \frac{1}{2\Delta t} [U^{t+\Delta t} - U^{t-\Delta t}] \quad (5.21)$$

$$\ddot{U}^t = \frac{1}{\Delta t^2} [U^{t+\Delta t} - 2U^t + U^{t-\Delta t}] \quad (5.22)$$

Assim, para a inicialização do processo de marcha no tempo, precisam-se conhecer previamente os valores de $U(0)$ e $\dot{U}(0)$. Mas, diferentemente do que

foi feito no item anterior, para o método de Houbolt, o sistema de equações (5.1) é agora escrito para o instante t , da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_t^c \\ \ddot{\mathbf{U}}_t^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^{dc} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_t^c \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_t^{cc} \\ \mathbf{B}_t^{dc} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_t^d \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

Este sistema pode ser representado de forma análoga a (5.2). E com isso, os valores de $\mathbf{U}^d$ podem ser calculados para o instante $t + \Delta t$, ao longo do processo de marcha. Através da manipulação de (5.22), obtém-se:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = 2\mathbf{U}^t - \mathbf{U}^{t-\Delta t} + \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}^t \quad (5.24)$$

Após a imposição das condições de contorno e o cálculo do campo de deslocamentos dado, respectivamente, por (5.23) e (5.24), um sistema de equações análogo a (5.19) é obtido, para cada passo de tempo.

Como se pode observar na equação (5.23), a aceleração no instante inicial $\ddot{\mathbf{U}}(0)$ fica conhecida mediante o valor prévio de $\mathbf{U}(0)$, através da solução do sistema. Embora o sistema de equações não considere a dissipação de energia, um valor inicial de velocidade $\dot{\mathbf{U}}(0)$ deve ser considerado no início da análise.

No caso em que se tenha velocidade inicial diferente de zero, tal condição pode ser incorporada ao sistema de equações, através de uma força de impacto aplicada no domínio do problema (MORSE e FESHBACH, 1953).

Exemplos Numéricos

6.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo validar a formulação geral dinâmica de placas espessas, onde o Método dos Elementos de Contorno é utilizado para a discretização espacial do contorno e domínio, enquanto, para o avanço no tempo, são utilizados os operadores de Houbolt ou Diferença Central. Sempre que possível, as respostas numéricas do presente trabalho são confrontadas com os resultados analíticos encontrados na literatura.

Como visto no Capítulo 2, mostrou-se que a inércia translacional contribui para os momentos fletores e, conseqüentemente, para os níveis de tensões. Além disso, mostra-se no Capítulo 3 que esse termo também tem sua participação nas equações integrais do Método dos Elementos de Contorno. Assim, neste capítulo, pretende-se averiguar sua influência nas respostas da formulação de placas espessas, utilizando a teoria de Reissner.

Neste capítulo, todos os exemplos de vibração forçada são avaliados com o Método de Houbolt, com exceção do primeiro problema de placa quadrada, ver item 6.4.1, cujas respostas apresentadas são obtidas com o Método de Diferença Central.

6.2 Caso Degenerado de Placa

A seguir será apresentado um exemplo de viga, com o intuito de validar a presente formulação para o caso degenerado de placa. Neste exemplo, não são computados os termos adicionais devidos à inércia translacional nas equações integrais do método numérico, e ainda, sendo considerado o valor nulo para o coeficiente de Poisson.

A Figura 6.1 mostra o problema de uma viga biapoiada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q(x, t) = q_0$, aplicada subitamente e mantida constante no tempo. Aqui os dados são: $L = 6,0 \text{ m}$; $h = 0,50 \text{ m}$; $b = 0,25 \text{ m}$; $E = 2,0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\rho = 2,4 \times 10^2 \text{ Kg/m}^3$ e $q_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ N/m}$.

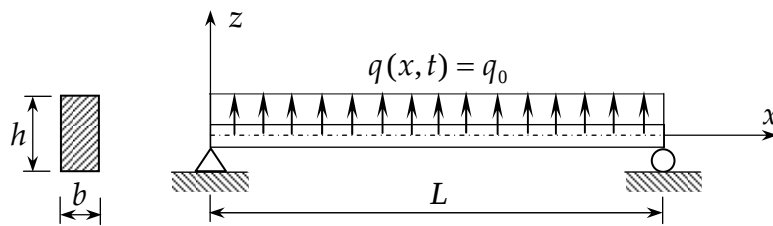


Figura 6.1 - Viga biapoiada sujeita a um carregamento constante no tempo.

A Figura 6.2 apresenta a discretização espacial, com apenas um eixo de simetria, onde são utilizados 52 elementos e 96 células, enquanto o tempo de análise escolhido é $0,08 \text{ s}$ dividido em 800 passos de tempo com $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$. Nessa figura também são mostradas as condições de contorno do problema.

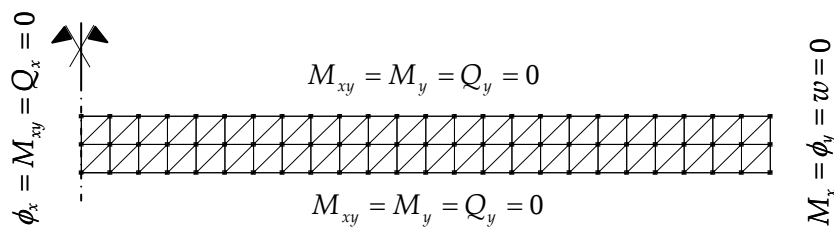


Figura 6.2 - Modelagem e condições de contorno para viga biapoiada.

O deslocamento no centro da viga é comparado com a solução analítica desenvolvida por BIGGS (1964). Essa solução não considera os termos inerciais de rotação, sendo o seu valor máximo dado pela seguinte expressão:

$$w(x = L/2, t) = \frac{4q_0}{m\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n^2} (DLF)_n \sin \frac{n\pi}{2} \quad (6.1)$$

onde $m = \rho b h$, $\omega_n = a_n^2 \sqrt{EI/m}$ com $a_n = n\pi/L$ e $I = bh^3/12$ (seção retangular). Na expressão (6.1), o fator de carga dinâmico (DLF) é definido de acordo com o tempo de duração da carga t_0 , através das seguintes sentenças:

$$\begin{aligned} (DLF)_n &= 1 - \cos \omega_n t & ; & \quad t \leq t_0 \\ (DLF)_n &= \cos \omega_n (t - t_0) - \cos \omega_n t & ; & \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

A comparação do deslocamento máximo é dada na Figura 6.3, onde se observa uma defasagem em período a partir do terceiro pico.

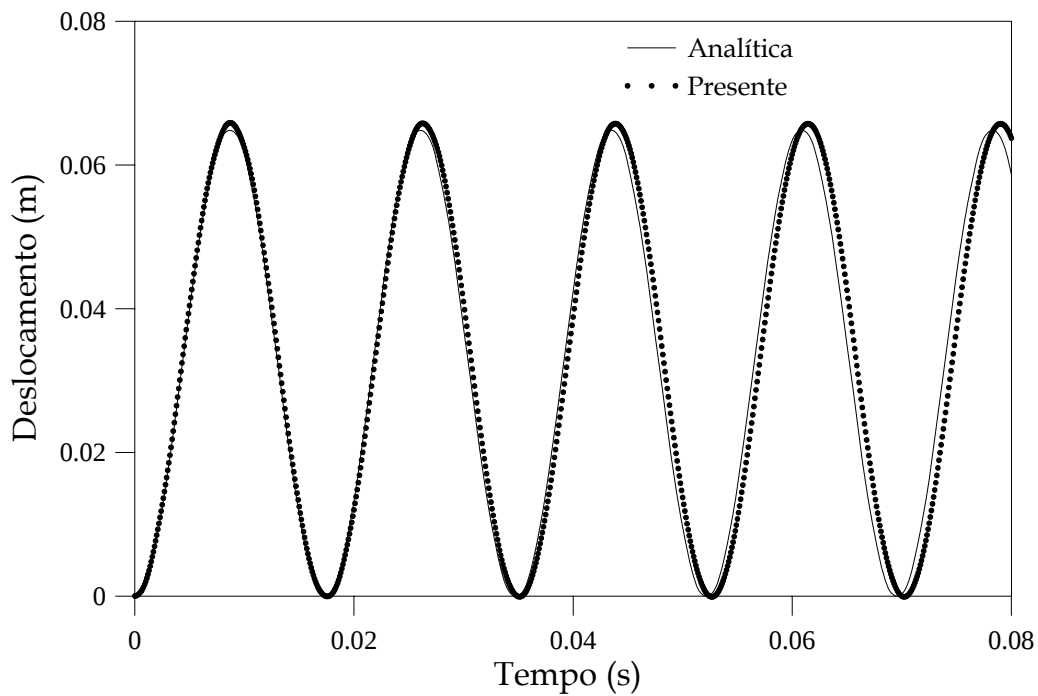


Figura 6.3 - Deslocamento no centro da viga biapoiada.

6.3 Vibração Livre

Nesta seção, a análise de vibração livre é realizada, cujas respostas são dadas em termos da frequência cíclica f em hertz (Hz). Nas análises, um sobrescrito é inserido para denotar as respostas devido à inclusão do termo adicional de translação inercial na formulação.

No primeiro momento, considere-se um experimento com placas de aço realizado por PLUNKETT (1963). Os parâmetros utilizados são o módulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, a densidade de massa $\rho = 0,00073 \text{ lbs}^2/\text{in}^4$, o comprimento $a = 5,0 \text{ in}$ e a espessura $h = 0,1 \text{ in}$. Os resultados da frequência cíclica para a placa retangular com a condição de contorno engaste-livre são mostrados na Tabela 6.1 para várias relações a/b .

A seguir, são analisadas as respostas da frequência cíclica para uma placa circular sob duas situações de contorno, a saber, apoiada e engastada. Os resultados são comparados com os valores de LEISSA (1969), presentes na Tabela 6.2, cujos dados são o raio $R = 1$, a espessura $h = 0,05$, a densidade de massa $\rho = 0,2290$, e as constantes elásticas $E = 1000$ e $\nu = 0,3$.

E, para finalizar esta seção, a Tabela 6.3 apresenta as respostas da frequência cíclica para uma placa quadrada simplesmente apoiada para várias espessuras. Nessa tabela, são mostrados os sete primeiros modos simétricos tomados a partir da proposta numérica dada por CHEUNG e CHAKRABARTI (1972), segundo uma metodologia chamada Método das Camadas Finitas (FLM), sendo usados os seguintes dados: $a = 1,0$; $E = 1,0$; $\nu = 0,3$ e $\rho = 1,0$.

Nas Tabelas 6.1 a 6.3, o erro relativo, em percentagem, é apresentado entre parênteses, sendo este calculado sempre em relação à resposta tomada como referência.

Tabela 6.1. Frequência cíclica f (Hz) para várias relações a/b de uma placa retangular engastada-livre.

Modo	Plunkett (1963)			Presente			Presente ^a		
	valores de f para a relação a/b			valores de f para a relação a/b			valores de f para a relação a/b		
	2,0	2,5	5,0	2,0	2,5	5,0	2,0	2,5	5,0
1	136,69	136,69	134,74	134,25 (1,78)	133,85 (2,08)	132,99 (1,29)	134,25 (1,78)	133,85 (2,08)	132,99 (1,29)
2	566,29	675,64	824,04	572,02 (1,01)	692,44 (2,48)	833,67 (1,17)	572,02 (1,01)	692,44 (2,48)	833,68 (1,17)
3	847,48	843,57	1249,74	837,72 (1,15)	836,55 (0,83)	1291,45 (3,34)	837,73 (1,15)	836,56 (0,83)	1291,45 (3,33)
4	1878,51	2140,17	2315,92	1862,88 (0,83)	2206,93 (3,12)	2340,40 (1,05)	1862,92 (0,83)	2206,99 (3,12)	2340,52 (1,06)
5	2362,78	2358,88	3827,31	2352,24 (0,44)	2351,97 (0,29)	3952,45 (3,27)	2352,37 (0,44)	2352,10 (0,28)	3952,55 (3,27)
6	3604,70	3964,00	4499,05	3584,65 (0,55)	4092,53 (3,24)	4603,17 (2,31)	3584,89 (0,55)	4092,82 (3,25)	4603,68 (2,32)
7	3624,23	4588,87	6600,16	3633,27 (0,25)	4611,93 (0,50)	6837,01 (3,59)	3633,53 (0,26)	4612,47 (0,51)	6837,49 (3,59)

Tabela 6.2. Frequência cíclica f (Hz) sob duas situações de contorno para uma placa circular.

Modo	Leissa (1969)		Presente		Presente ^a	
	valores de f para o contorno		valores de f para o contorno		valores de f para o contorno	
	apoiado	engastado	apoiado	engastado	apoiado	engastado
1	0,7857	1,6256	0,7931 (0,94)	1,6251 (0,03)	0,7931 (0,94)	1,6251 (0,03)
2	2,2119	3,3838	2,2160 (0,18)	3,3651 (0,55)	2,2162 (0,19)	3,3656 (0,54)
3	4,0764	5,5515	4,0526 (0,58)	5,4915 (1,08)	4,0535 (0,56)	5,4928 (1,05)
4	4,7307	6,3290	4,7402 (0,20)	6,2885 (0,64)	4,7415 (0,22)	6,2902 (0,61)
5	6,3590	8,1228	6,3038 (0,87)	8,0020 (1,48)	6,3061 (0,83)	8,0050 (1,45)
6	7,7163	9,6804	7,7127 (0,05)	9,5641 (1,20)	7,7160 (0,00)	9,5683 (1,15)

Tabela 6.3. Frequência cíclica f (Hz) para várias espessuras de uma placa quadrada apoiada.

	FLM (1972)				Presente				Presente ^a			
	valores de f para a espessura h				valores de f para a espessura h				valores de f para a espessura h			
Modo	0,10	0,20	0,40	0,40	0,10	0,20	0,40	0,40	0,10	0,20	0,40	0,40
1	0,0920	0,1690	0,2692	0,2692	0,0919 (0,11)	0,1683 (0,41)	0,2660 (1,19)	0,2660 (1,19)	0,0920 (0,00)	0,1687 (0,18)	0,2675 (0,63)	0,2675 (0,63)
2	0,2200	0,3714	0,5197	0,5197	0,2198 (0,09)	0,3688 (0,70)	0,5107 (1,73)	0,5107 (1,73)	0,2201 (0,04)	0,3704 (0,27)	0,5155 (0,80)	0,5155 (0,80)
3	0,3381	0,5385	0,7055	0,7055	0,3380 (0,03)	0,5341 (0,81)	0,6920 (1,91)	0,6920 (1,91)	0,3387 (0,18)	0,5373 (0,22)	0,6997 (0,82)	0,6997 (0,82)
4	0,4123	0,6371	0,8103	0,8103	0,4124 (0,02)	0,6317 (0,85)	0,7944 (1,96)	0,7944 (1,96)	0,4135 (0,29)	0,6360 (0,17)	0,8040 (0,78)	0,8040 (0,78)
5	0,5179	0,7712	0,9493	0,9493	0,5184 (0,09)	0,7646 (0,85)	0,9305 (1,98)	0,9305 (1,98)	0,5200 (0,40)	0,7705 (0,09)	0,9425 (0,72)	0,9425 (0,72)
6	0,6811	0,9678	1,1481	1,1481	0,6827 (0,23)	0,9600 (0,80)	1,1259 (1,93)	1,1259 (1,93)	0,6855 (0,65)	0,9686 (0,08)	1,1416 (0,57)	1,1416 (0,57)
7	0,7445	1,0430	1,2250	1,2250	0,7449 (0,05)	1,0313 (1,12)	1,2214 (0,29)	1,2214 (0,29)	0,7481 (0,48)	1,0409 (0,20)	1,2214 (0,29)	1,2214 (0,29)

Nas análises acima, discretiza-se toda a placa, segundo as malhas que serão mostradas na próxima seção, até que a convergência seja atingida.

Conforme a variação da relação a/b , segundo a Tabela 6.1, observa-se que a influência do termo adicional é desprezível, pois já era de se esperar que para uma placa delgada esse termo não afetasse as frequências dos modos fundamentais. No exemplo seguinte, as frequências apresentadas na Tabela 6.2 para as duas situações de contorno mostram, para o limite de placas delgadas, que as respostas praticamente não mudam com o novo termo. E mesmo para a classificação de placa moderadamente espessa (Tabela 6.3 com $h = 0,1$) o presente termo tem pouca contribuição, mas já aponta para uma deficiência na formulação que não considera este termo à medida que a espessura aumenta, sendo evidenciada através do erro calculado.

6.4 Vibração Forçada

Nesta seção, considera-se a influência de ações externas sobre o domínio da placa, onde as condições iniciais de deslocamento e velocidade são admitidas nulas em $(\Omega + \Gamma)$. Além disso, aqui não é levado em conta o termo adicional de translação inercial, cuja análise é deixada para a seção seguinte.

Nos exemplos doravante apresentados são utilizadas as propriedades de simetria, onde apenas um quarto do problema é discretizado. Desta forma, as modelagens empregadas nos problemas subseqüentes são aquelas presentes nas Figuras 6.4, 6.5 e 6.6, com a origem dos eixos localizada na parte inferior esquerda das mesmas.

Para análise de convergência, uma variável $\mathcal{R}$ é empregada nos exemplos, definida pela relação entre o número de células de domínio e o número de elementos de contorno, associada ao intervalo de tempo.

A escolha do intervalo de tempo é feita através da análise de vibração livre, conforme seção anterior, segundo a relação:

$$\Delta t = T_1 / 100 \quad (6.3)$$

onde T_1 é o primeiro período fundamental. Assim, para o entendimento da variável de convergência, considere-se a malha da Figura 6.4, com 4 células e 6 elementos; então, $\mathcal{R} = 0,66$ e $\Delta t = 1 \times 10^{-4} s$ (placa retangular); e com o aumento de $\mathcal{R}$, dobra-se a malha e divide-se o intervalo de tempo e assim por diante.

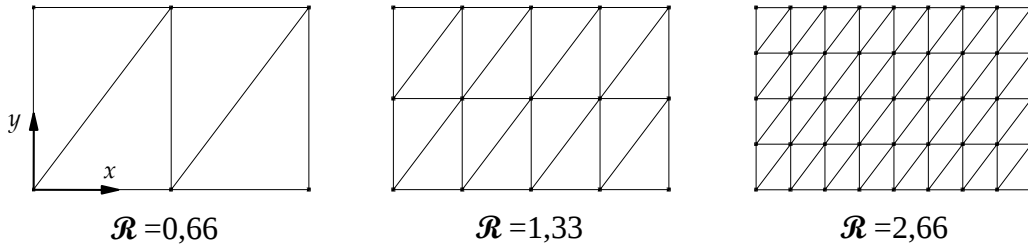


Figura 6.4 - Modelagem empregada devido à simetria para placa retangular.

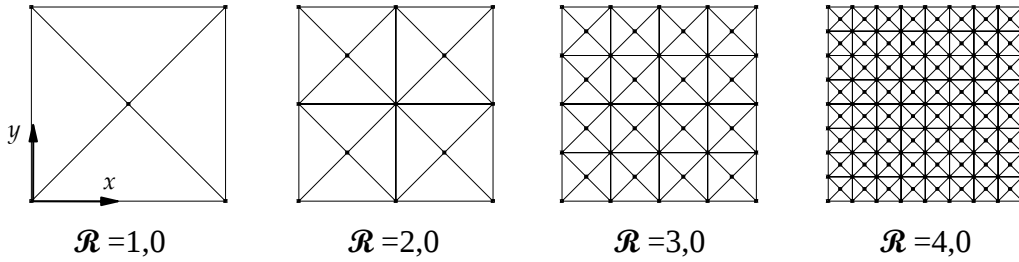


Figura 6.5 - Modelagem empregada devido à simetria para placa quadrada.

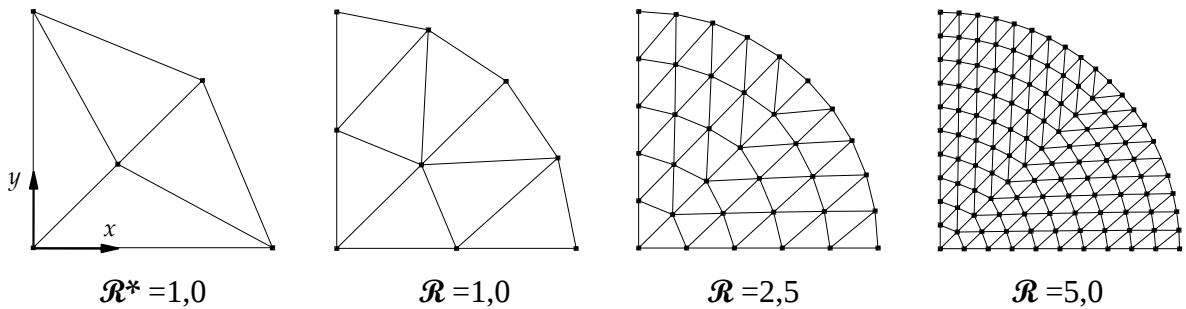


Figura 6.6 - Modelagem empregada devido à simetria para placa circular.

A Figura 6.7 mostra os casos da função de carga utilizados nesta seção, sendo q_0 a amplitude máxima e t_0 o tempo de duração da carga.

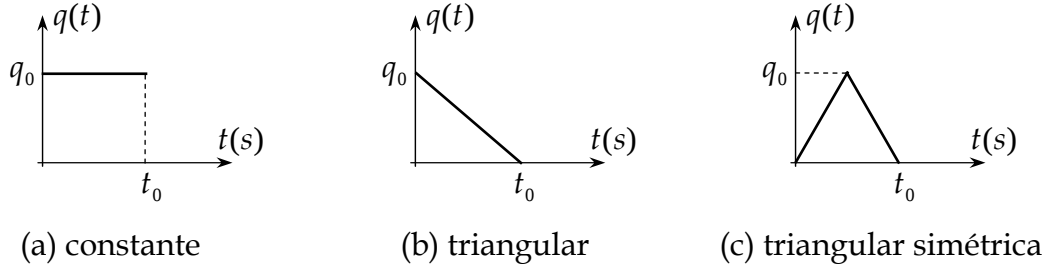


Figura 6.7 - Casos das funções de carregamento empregadas nesta seção.

6.4.1 Placa retangular

Neste exemplo, é admitida uma placa retangular simplesmente apoiada, com lados $a = 60 \text{ in}$ e $b = 40 \text{ in}$, espessura $h = 1 \text{ in}$, massa por unidade de área $\rho h = 0,00073 \text{ lbs/in}^3$, módulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ e $\nu = 0,25$. A placa é submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída, com os valores da amplitude e tempo de duração dados, respectivamente, por $q_0 = 40 \text{ psi}$ e $t_0 = 0,05 \text{ s}$. Aqui a função do caso (b) descreve o comportamento da carga.

As condições de contorno empregadas neste exemplo são dadas a seguir.

$$\text{Em } x = 0 : \phi_x = M_{xy} = Q_x = 0$$

$$\text{Em } x = b/2 : M_x = \phi_y = w = 0$$

$$\text{Em } y = 0 : M_{xy} = \phi_y = Q_y = 0$$

$$\text{Em } y = a/2 : \phi_x = M_{yx} = w = 0$$

A solução analítica para este problema é apresentada por BIGGS (1964), sendo desenvolvida apenas para o primeiro termo da série. Em vista disso, foi

necessário desenvolver uma forma geral para os n -ésimos termos, de forma que fosse possível analisar o número de termos de convergência. No Apêndice A, é mostrado o desenvolvimento dessa forma.

Para o deslocamento e as rotações, são utilizados apenas 5 termos da série, enquanto que para os esforços internos, momentos e cortantes, são necessários 9 termos.

As respostas estão presentes ao longo da sequência das Figuras 6.8 a 6.14, onde se nota que, à medida que a variável $\mathcal{R}$ aumenta, ocorre a convergência dos resultados para a solução analítica.

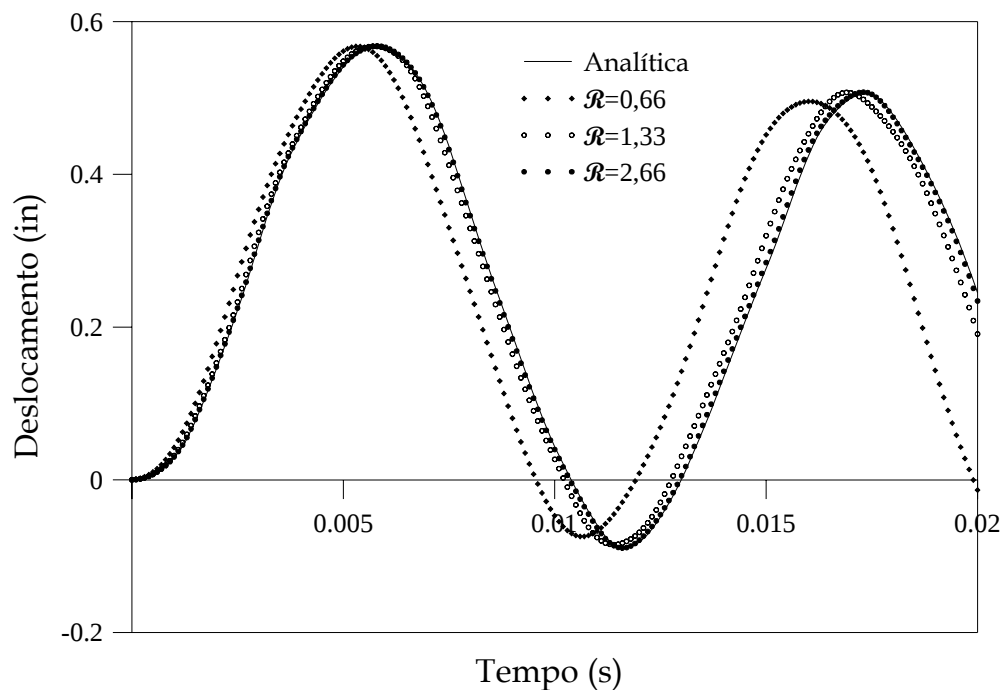


Figura 6.8 - Histórico de deslocamento no centro da placa retangular apoiada.

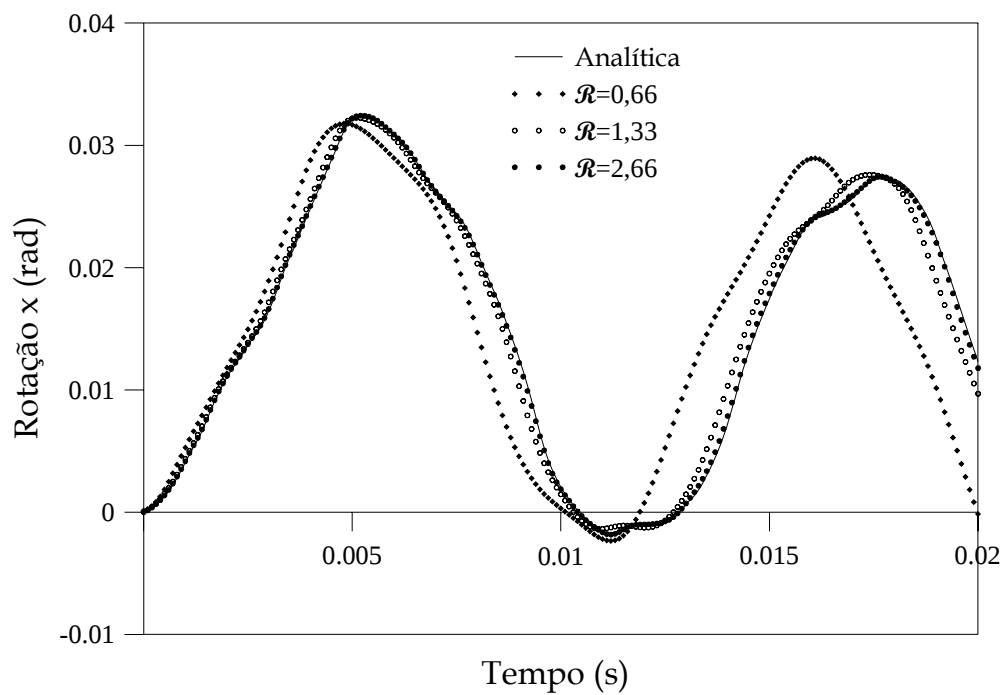


Figura 6.9 - Histórico da rotação x no bordo da placa retangular apoiada.

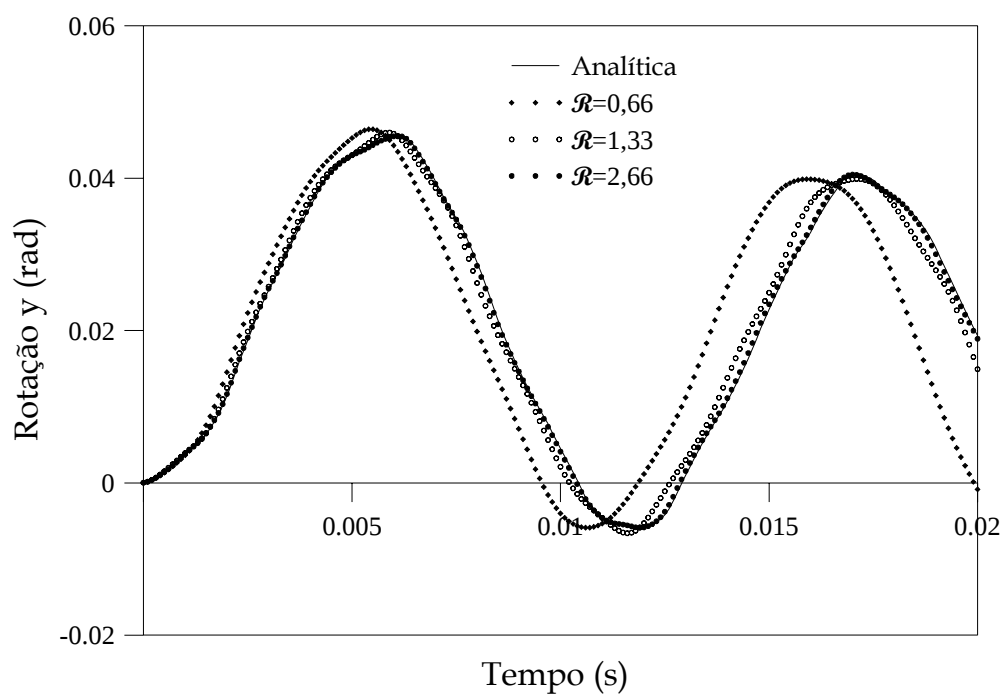


Figura 6.10 - Histórico da rotação y no bordo da placa retangular apoiada.

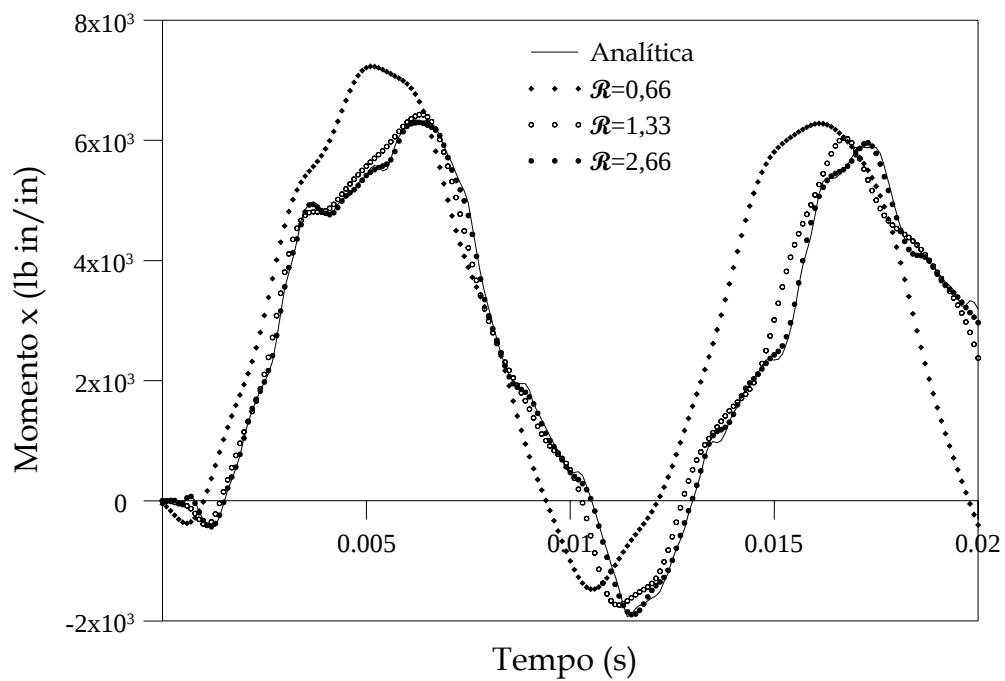


Figura 6.11 - Histórico do momento x no centro da placa retangular apoiada.

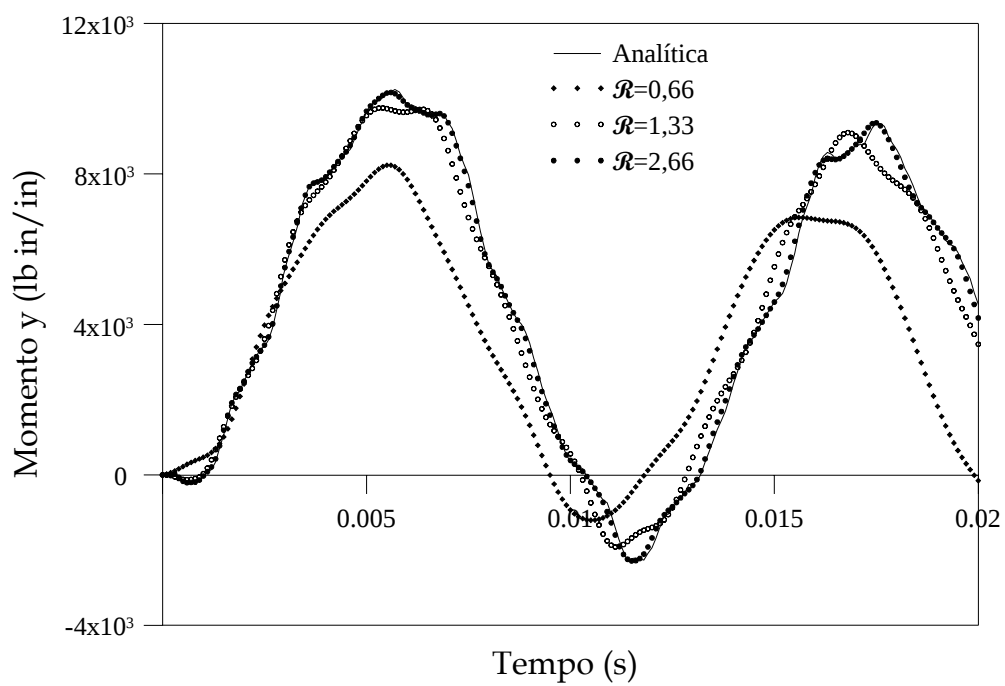


Figura 6.12 - Histórico do momento y no centro da placa retangular apoiada.

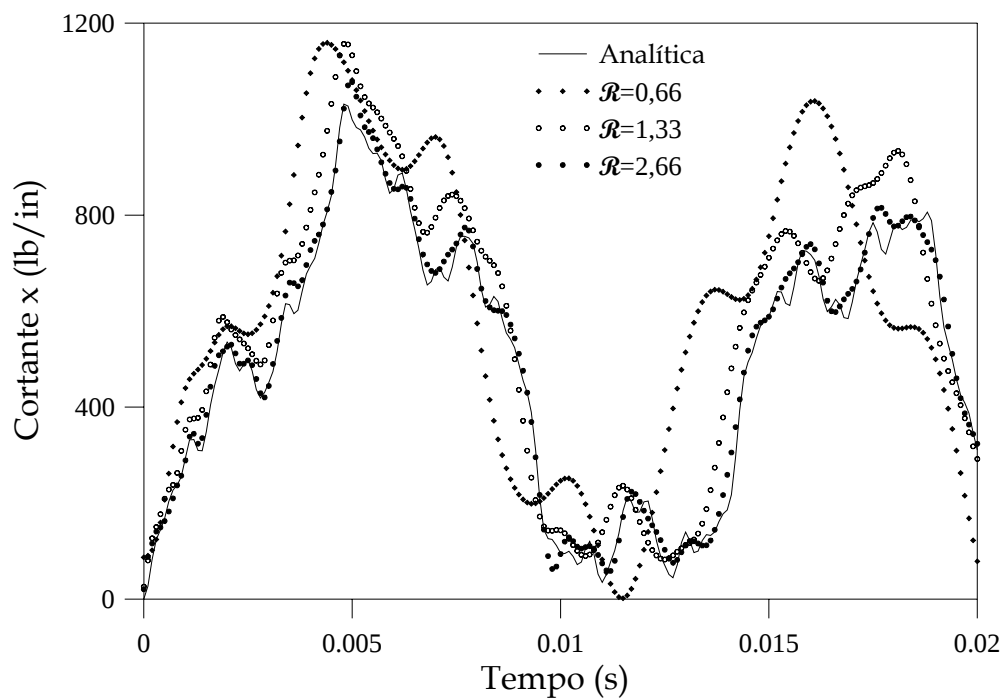


Figura 6.13 - Histórico do cortante x no bordo da placa retangular apoiada.

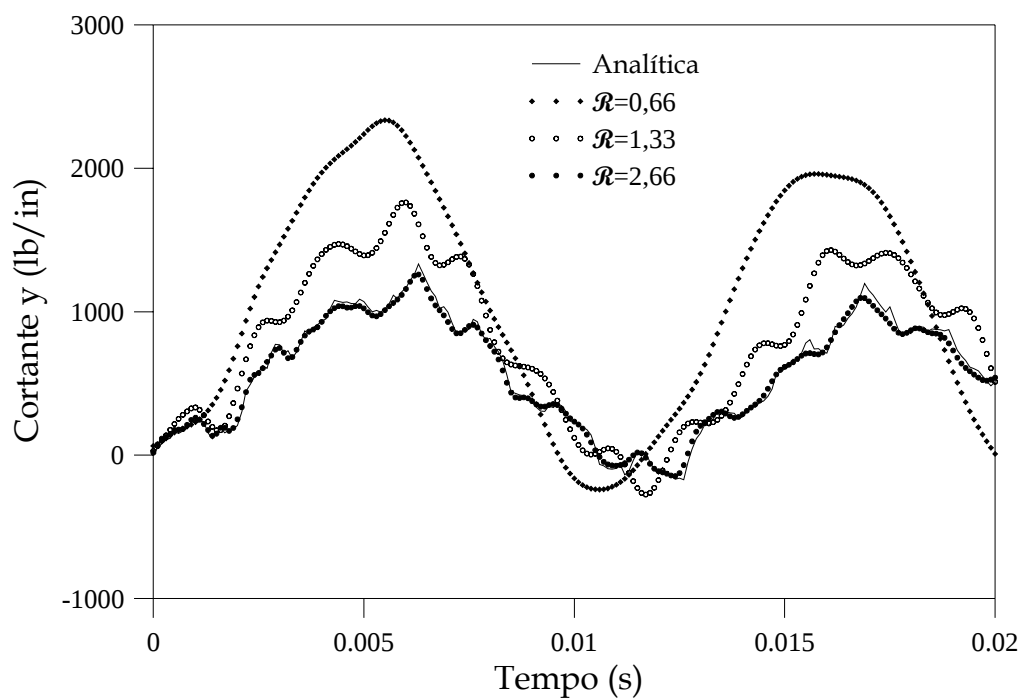


Figura 6.14 - Histórico do cortante y no bordo da placa retangular apoiada.

Na Figura 6.15, mostra-se uma comparação em termos de deslocamento, onde são apresentadas as respostas de PROVIDAKIS e BESKOS (1989). Esses autores usam o MEC na análise dinâmica de placas finas, em que, para a discretização espacial, são empregados elementos quadráticos isoparamétricos no contorno e para o domínio, elementos quadráticos com oito pontos nodais.

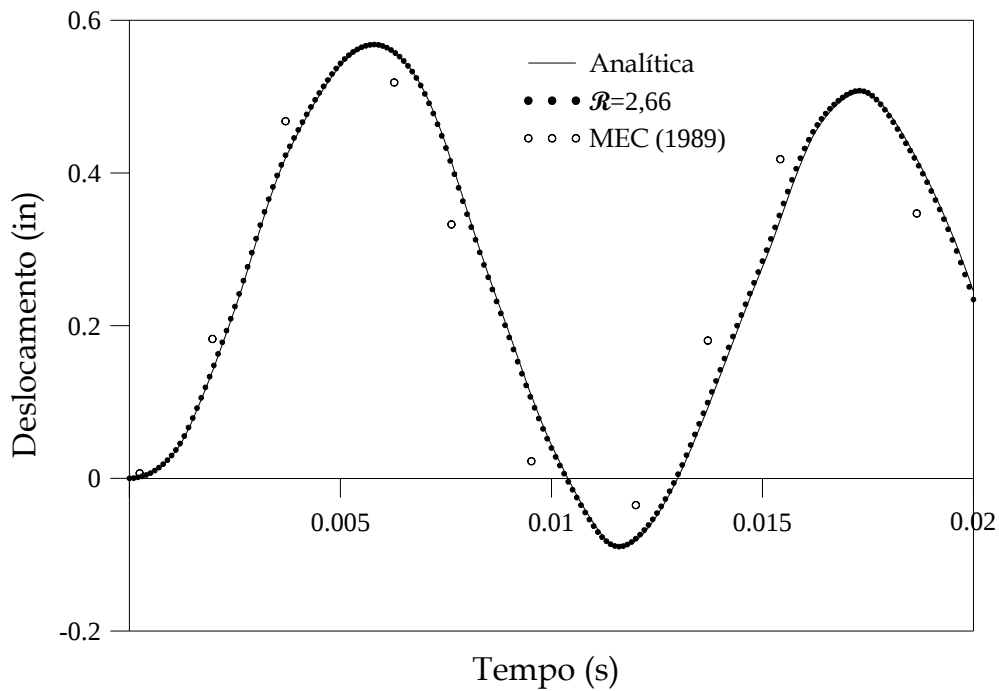


Figura 6.15 - Respostas de deslocamento no centro da placa retangular apoiada.

6.4.2 Placa quadrada

Considere uma placa quadrada simplesmente apoiada, com lado $a = 10 \text{ in}$, espessura $h = 0,5 \text{ in}$ e densidade de massa $\rho = 0,2589 \times 10^{-3} \text{ lbs}^2 / \text{in}^4$, sujeita a uma carga uniformemente distribuída com amplitude $q_0 = 300 \text{ psi}$. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson usados aqui são, respectivamente, $E = 1 \times 10^7 \text{ psi}$ e $\nu = 0,3$.

Para este problema, são considerados os casos (a) e (c) da Figura 6.7 para a função de carga no tempo. Em ambos os casos, a duração corresponde

exatamente ao primeiro período fundamental ($1,07 \times 10^{-3} \text{ s}$). Já as condições de contorno são as mesmas do exemplo da placa retangular.

As respostas são comparadas com a solução analítica de BIGGS (1964), desenvolvida para os casos (a) e (c) da Figura 6.7, com base na solução apresentada para o problema da placa retangular, ver Apêndice A. São usados os mesmos números de termos do exemplo anterior. Assim, pode-se observar que o deslocamento e a rotação convergem para $\mathcal{R} = 4,00$ (Figuras 6.16 e 6.17) e os esforços internos para $\mathcal{R} = 8,00$ (Figuras 6.18 e 6.19).

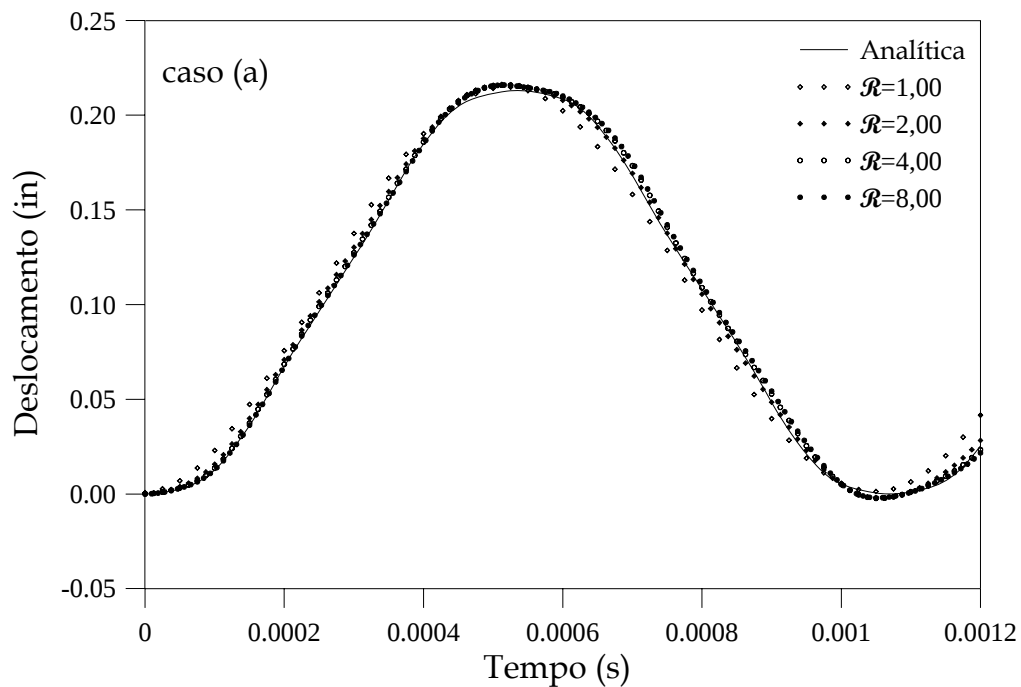


Figura 6.16 - Histórico de deslocamento no centro da placa quadrada apoiada.

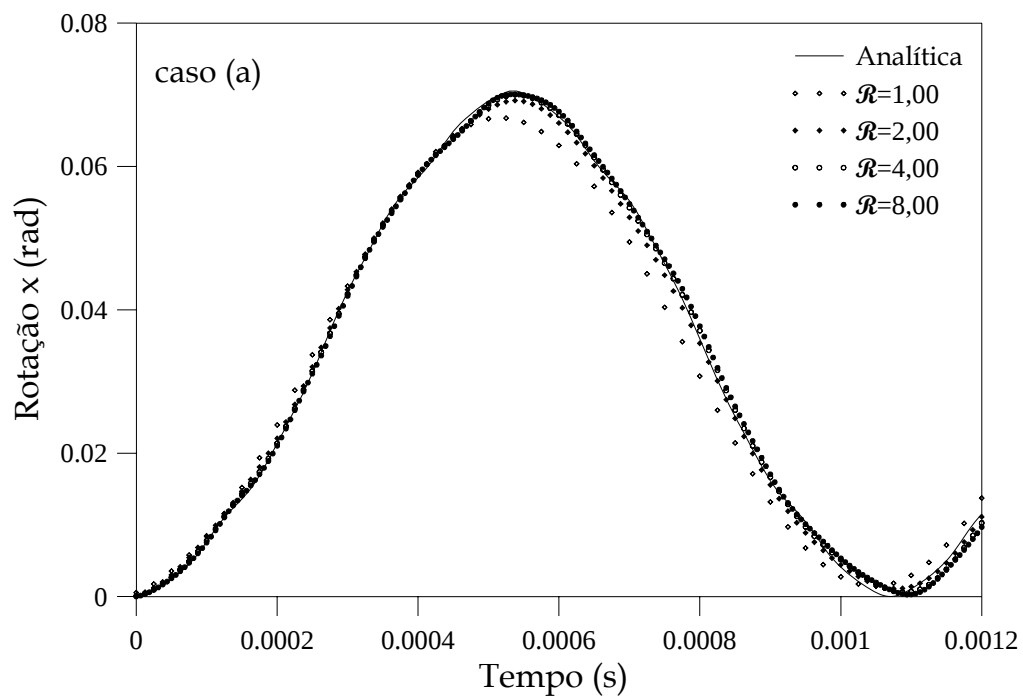


Figura 6.17 - Histórico da rotação x no bordo da placa quadrada apoiada.

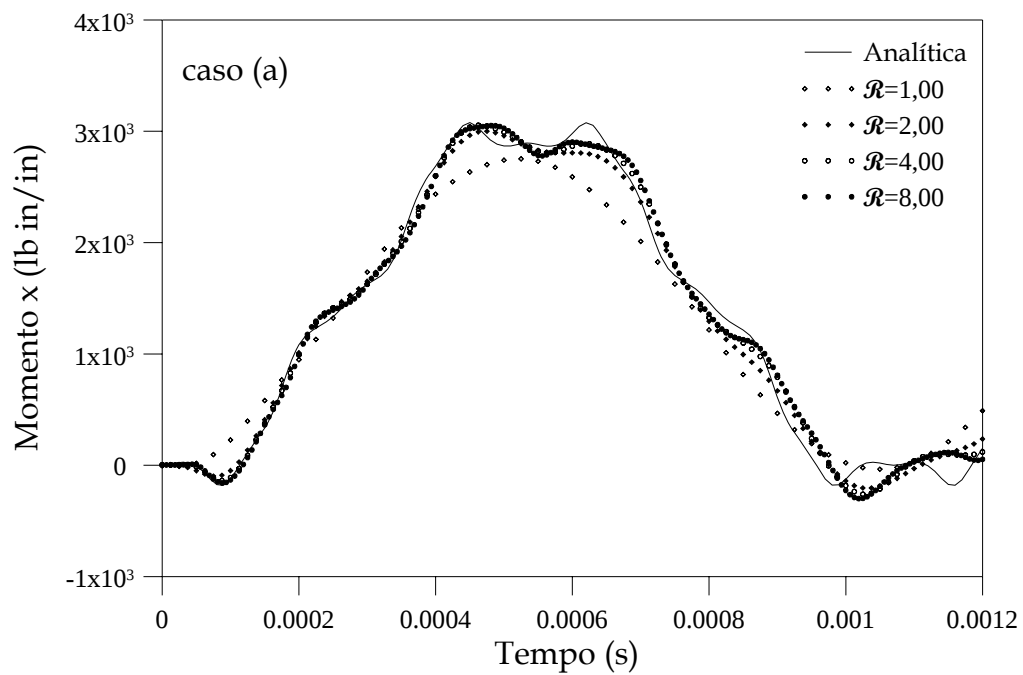


Figura 6.18 - Histórico do momento x no centro da placa quadrada apoiada.

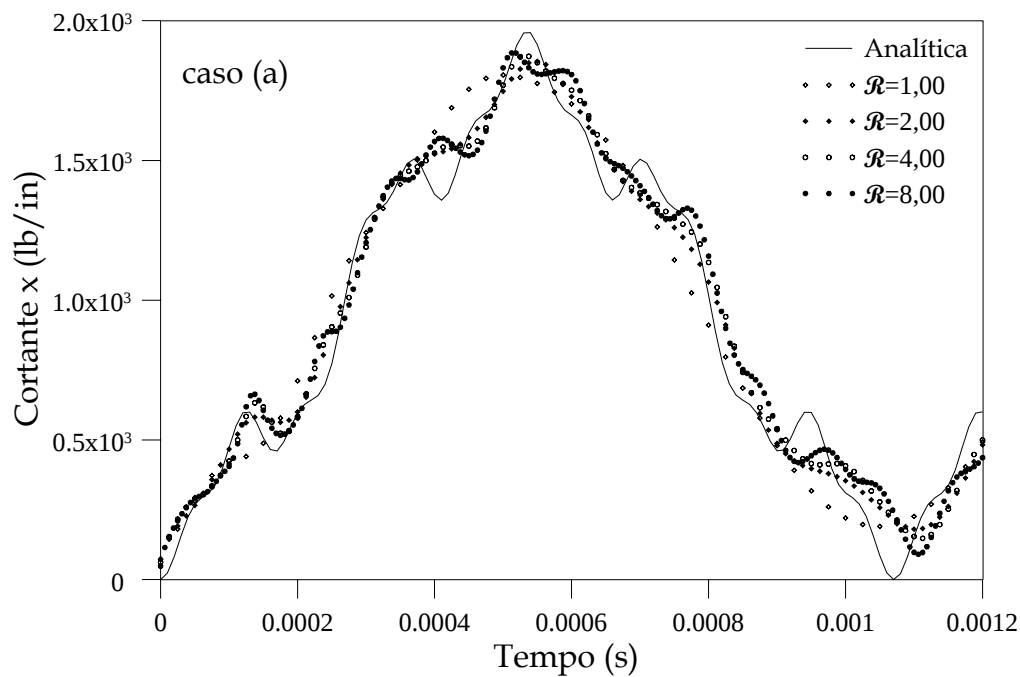


Figura 6.19 - Histórico do cortante x no bordo da placa quadrada apoiada.

Aqui também são confrontados os resultados com outras respostas numéricas, tais como a de PROVIDAKIS (1996). Nas Figuras 6.20 a 6.22, encontram-se as respostas para o deslocamento, momento e cortante, respectivamente. Em particular, para o momento e o cortante, observa-se que o comportamento destes têm a forma das respostas da modelagem com o menor valor de R , com diferença acentuada no valor da amplitude, sendo isto mais evidente para o esforço cortante.

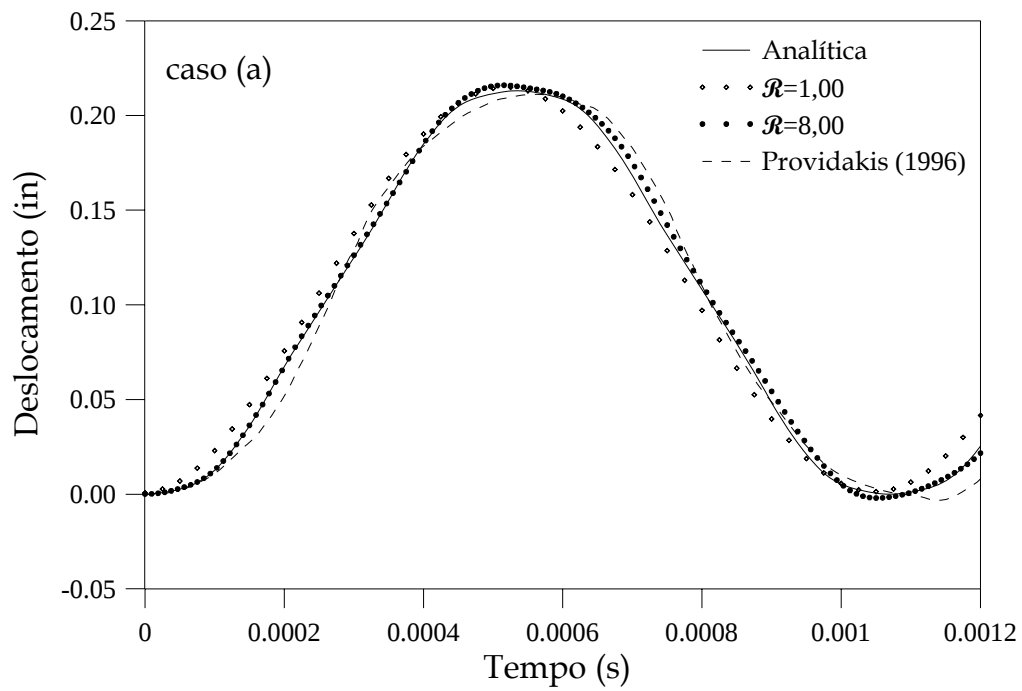


Figura 6.20 - Respostas de deslocamento no centro da placa quadrada apoiada.

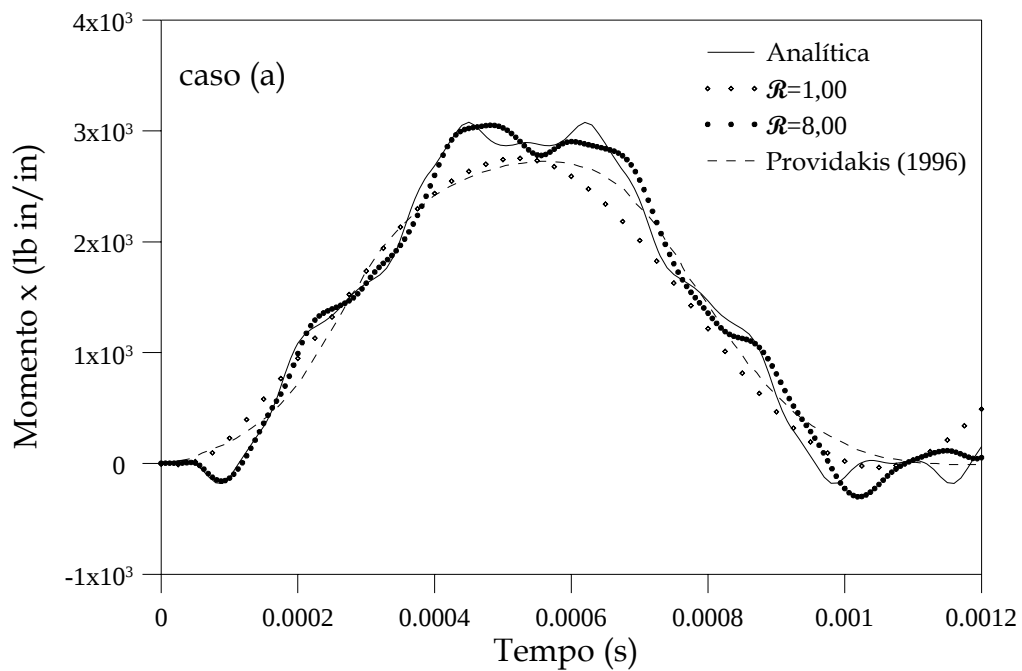


Figura 6.21 - Respostas do momento x no centro da placa quadrada apoiada.

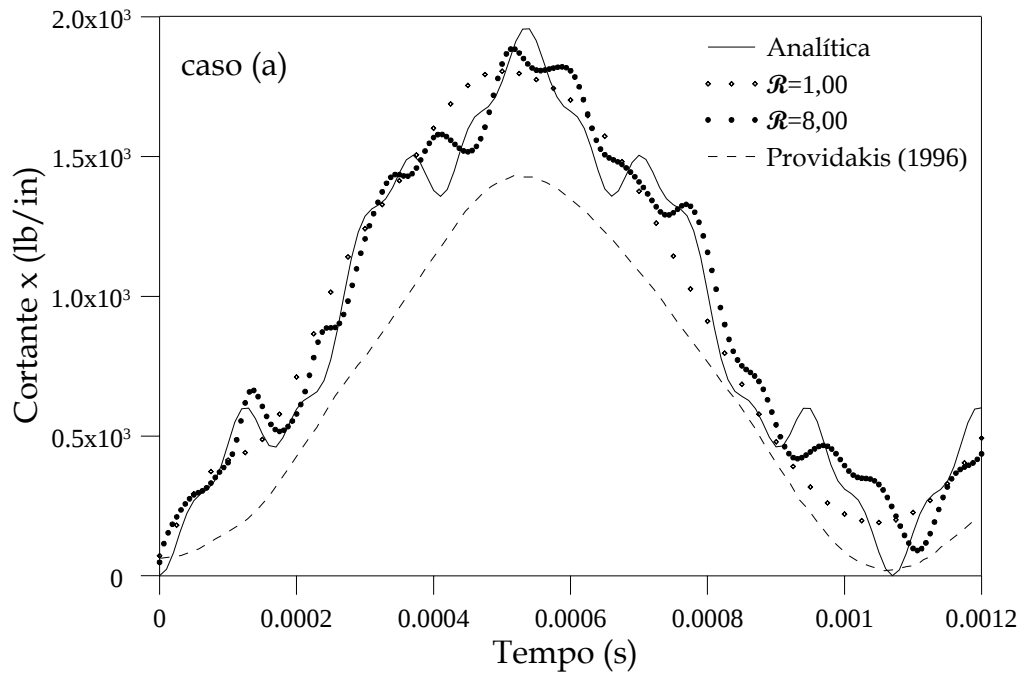


Figura 6.22 - Respostas do cortante x no bordo da placa quadrada apoiada.

Para o caso (c) de carregamento na mesma placa, pode ser observado que as respostas se aproximam da solução analítica com o aumento da variável $\mathcal{R}$, conforme as Figuras 6.23 a 6.26. Em particular, para a resposta do cortante, Figura 6.26, a convergência ocorre antes, existindo um erro de 3,35% no pico.

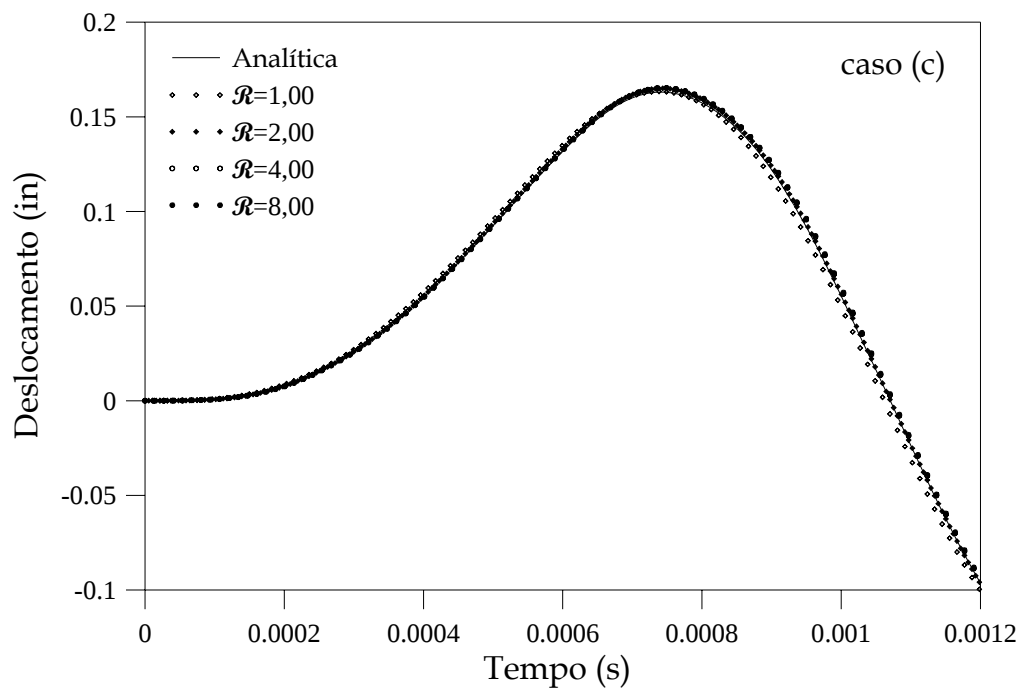


Figura 6.23 - Histórico de deslocamento no centro da placa quadrada apoiada.

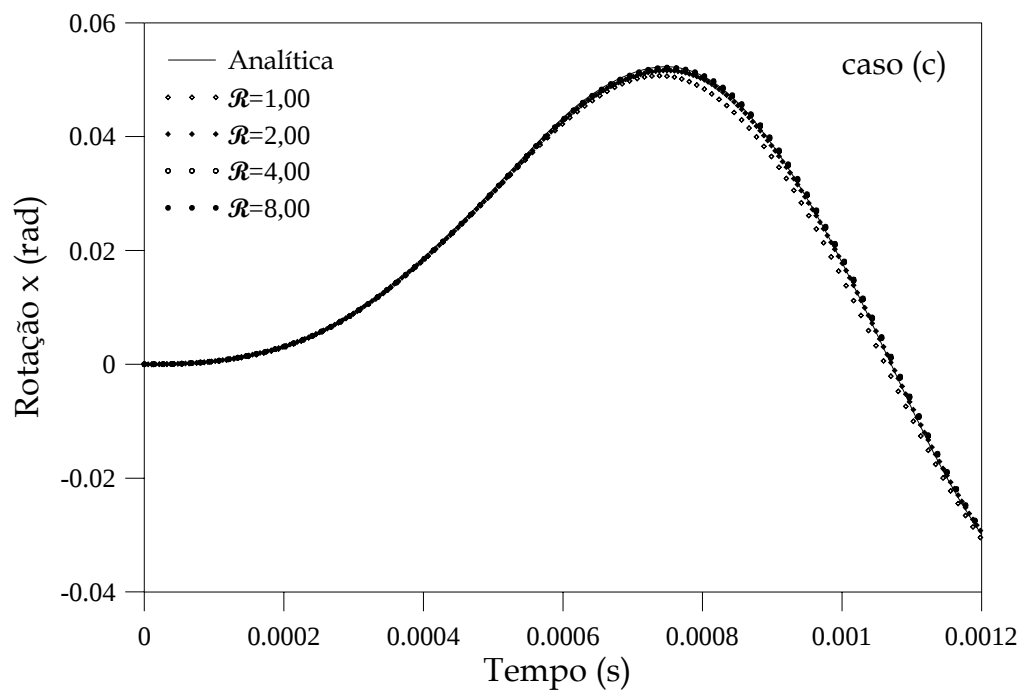


Figura 6.24 - Histórico da rotação x no bordo da placa quadrada apoiada.

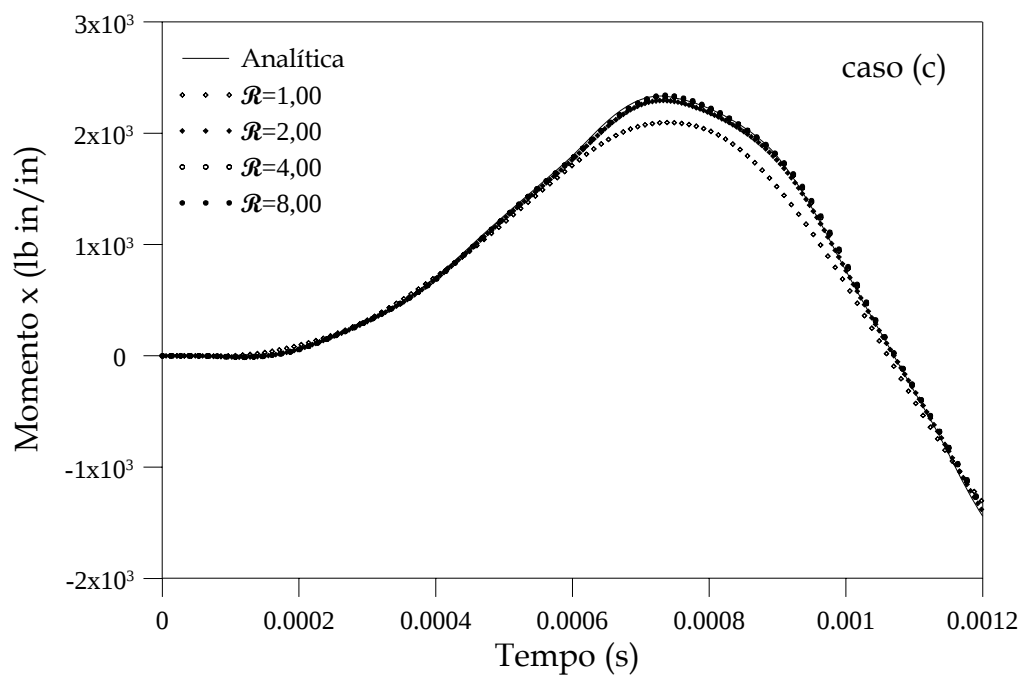


Figura 6.25 - Histórico do momento x no centro da placa quadrada apoiada.

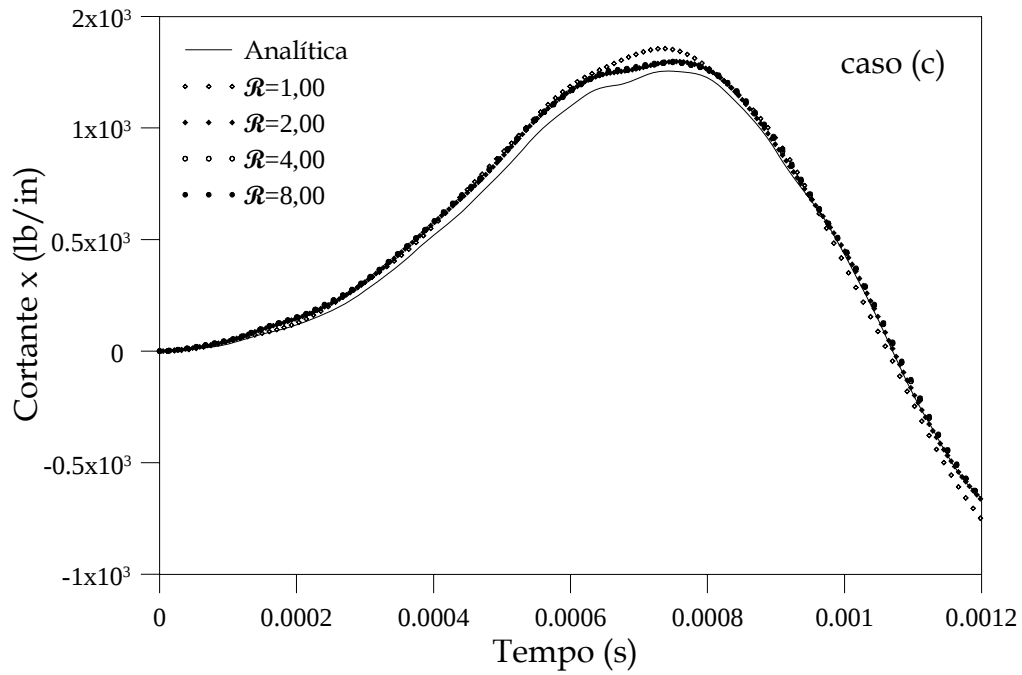


Figura 6.26 - Histórico do cortante x no bordo da placa quadrada apoiada.

Para o exemplo a seguir, uma placa quadrada de aço, fixa em todos os bordos e sujeita a uma carga dinâmica uniformemente distribuída é considerada. A função de carga assumida no presente problema é igual ao caso (c), cuja amplitude e tempo de duração, correspondente ao primeiro período fundamental, e demais parâmetros utilizados são listados a seguir.

$$q_0 = 10 \text{ lb/in}^2$$

$$t_0 = 0,2 \text{ s}$$

$$a = 12 \text{ in}$$

$$h = 0,1 \text{ in}$$

$$\rho = 3,0 \text{ lb sec}^2/\text{in}^4$$

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0,3$$

As condições de contorno empregadas neste exemplo são dadas a seguir.

$$\text{Em } x = 0: \phi_x = M_{xy} = Q_x = 0$$

$$\text{Em } x = y = a/2: \phi_x = \phi_y = w = 0$$

$$\text{Em } y = 0: M_{xy} = \phi_y = Q_y = 0$$

Aqui, a resposta numérica, em termos de deslocamento, é confrontada com a solução apresentada por PAZ (1997). Para um aumento da variável de convergência, pode-se observar na Figura 6.27 que a mesma se aproxima bem da solução de Paz.

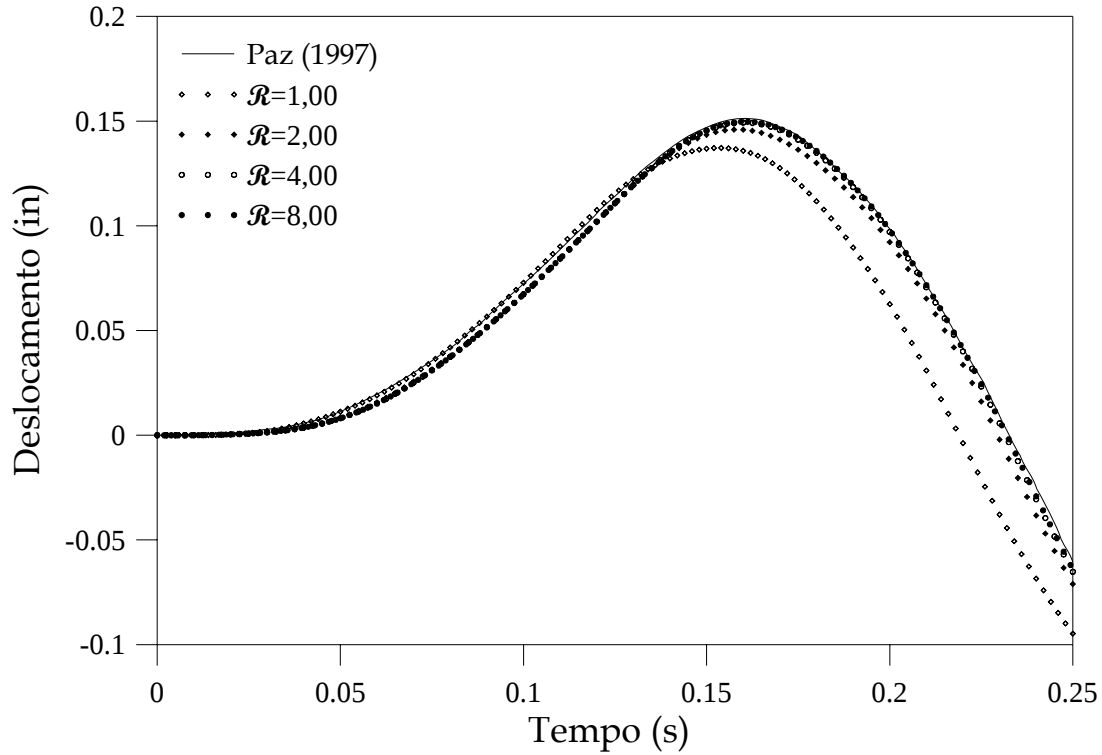


Figura 6.27 - Histórico de deslocamento no centro da placa quadrada fixa.

6.4.3 Placa circular

Seja uma placa circular engastada carregada uniformemente, cujos parâmetros são o raio $R = 1\text{ m}$, a espessura $h = 0,05\text{ m}$, a densidade de massa $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$, o módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As respostas para este problema são aquelas devido a uma carga retangular impulsiva $q(t) = q_0[H(t) - H(t - t_0)]$, equivalente ao caso (a), sendo $H(t)$ a função heaviside. Os valores da amplitude e do tempo de duração são dados através das seguintes relações: $q_0 = 1,3D/R^3$ e $t_0 = 0,5R^2\sqrt{\rho h/D}$, respectivamente.

As condições de contorno deste exemplo são listadas a seguir.

$$\text{Em } x = y = 0: M_{r\theta} = \phi_\theta = Q_\theta = 0$$

$$\text{Em } r = R: \phi_r = \phi_\theta = w = 0$$

A Figura 6.28 apresenta o histórico, devido à variação do parâmetro $\mathcal{R}$, para o deslocamento no centro da placa, onde se observa que o mesmo converge para a solução de Fotiu *et al.* (1994). Na Figura 6.29 são mostradas, também para este problema, as respostas de SLADEK *et al.* (2003). Na análise deste exemplo, os autores usam a técnica numérica *Meshless* para placas delgadas. O histórico da convergência de $\mathcal{R}$, para as respostas numéricas do momento radial no centro da placa é apresentado na Figura 6.30.

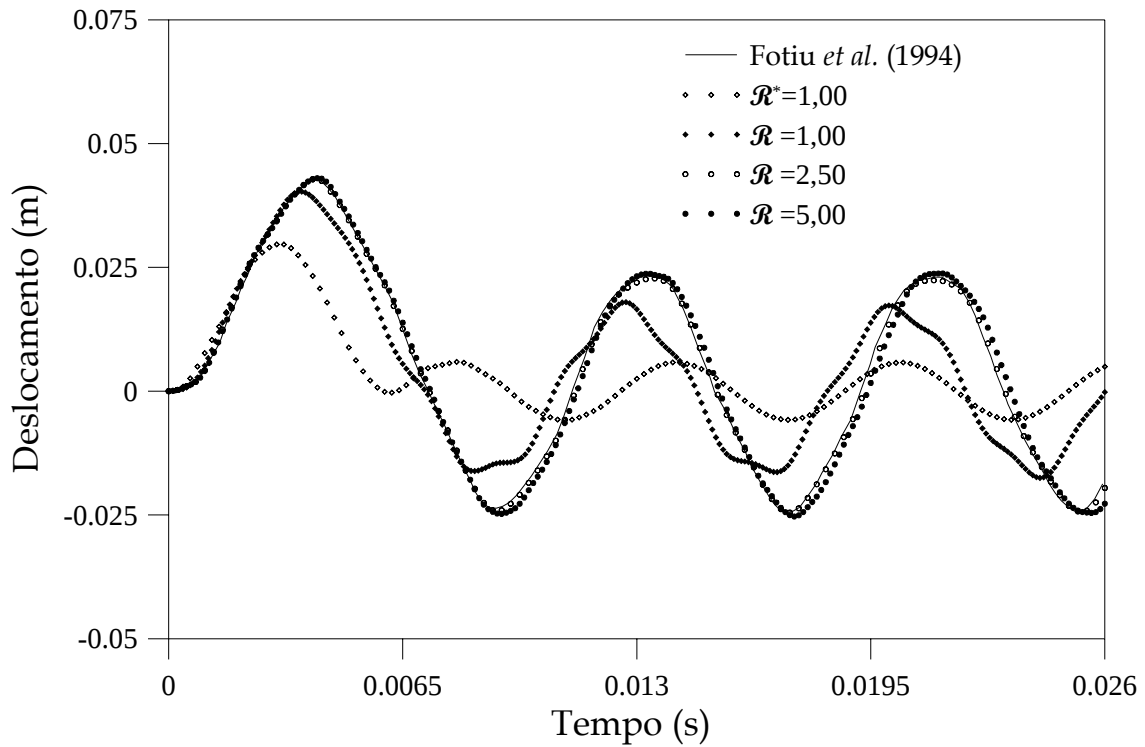


Figura 6.28 - Histórico do deslocamento no centro da placa circular engastada.

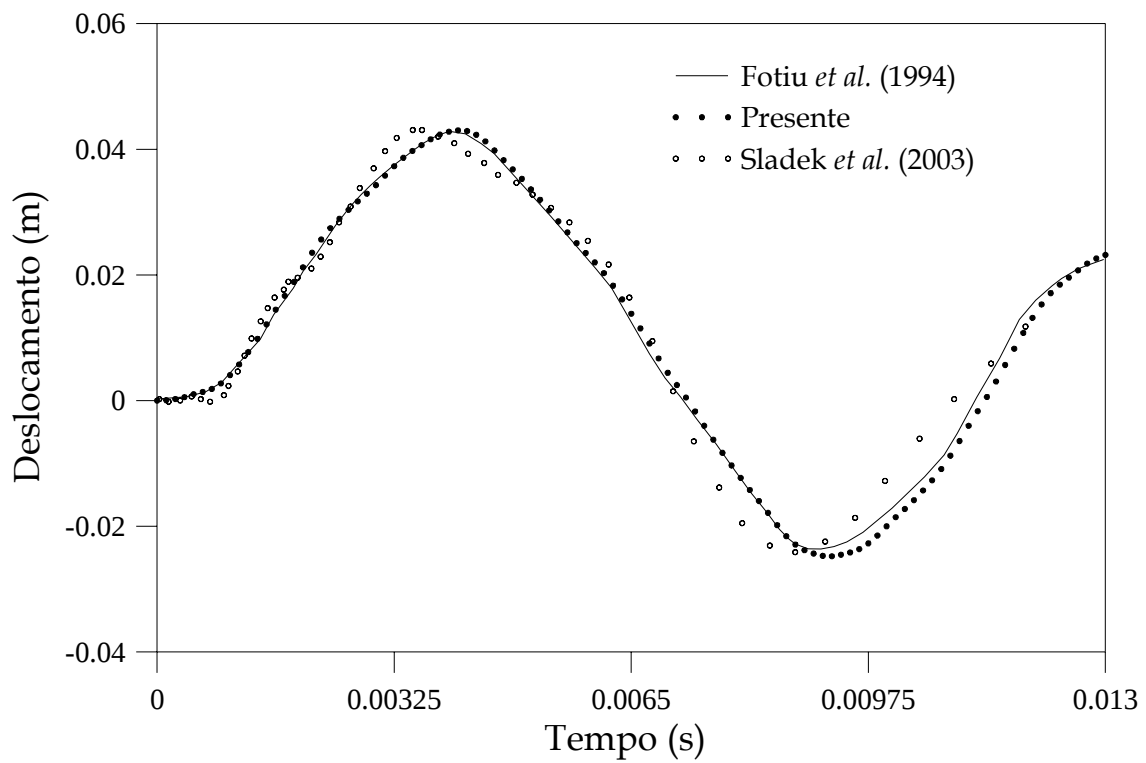


Figura 6.29 - Resposta do deslocamento no centro da placa circular engastada.

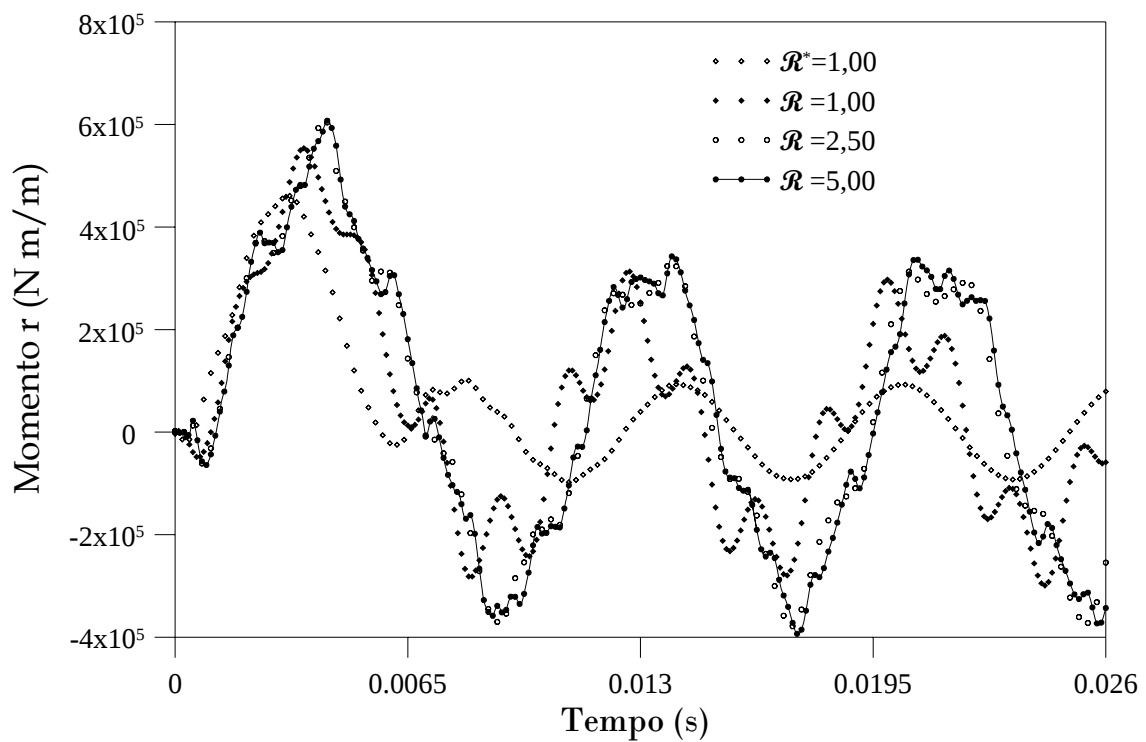


Figura 6.30 - Histórico do momento r no centro da placa circular engastada.

Neste outro exemplo, considere uma placa circular apoiada sujeita a um carregamento uniforme subitamente aplicado e mantido constante no tempo, cujo valor da amplitude vale $q_0 = 1 \times 10^5 \text{ N} / \text{m}^2$, sendo o intervalo $\Delta t = 2 \times 10^{-5} \text{ s}$, com um tempo total de análise igual a $0,03 \text{ s}$. Os parâmetros do problema são:

$$R = 0,5 \text{ m}$$

$$h = 0,1 \text{ m}$$

$$\rho = 7000 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ N} / \text{m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

e as condições de contorno são dadas como a seguir.

$$\text{Em } x = y = 0 : M_{r\theta} = \phi_\theta = Q_\theta = 0$$

$$\text{Em } r = R : \phi_r = M_{r\theta} = w = 0$$

Para comparar as respostas deste exemplo, são tomadas duas soluções numéricas, a saber, a do Método dos Elementos Finitos (MEF) e a do Método das Diferenças Finitas Energéticas (MDFE). Na primeira abordagem, os resultados são aqueles devido a um programa comercial que faz a análise dinâmica de problemas tridimensionais axissimétricos, chamado FEAP® (2005), enquanto que, na segunda, as inércias de rotação são inseridas na teoria de placas espessas, consideradas com a teoria de Mindlin (MITTELBAACH, 2007).

Inicialmente, as Figuras 6.31 até 6.34 mostram a variação dos resultados através da análise de convergência do parâmetro $\mathcal{R}$, apenas para os primeiros passos de tempo iniciais até $t = 0,005 \text{ s}$, onde se encontram os históricos de deslocamento, rotação, momento e cortante, respectivamente.

Em seguida, são mostradas, nas Figuras 6.35 e 6.36, as respostas do deslocamento e do momento r no centro da placa circular apoiada, contra os históricos dos dois métodos numéricos supracitados, onde se nota um pequeno atraso no período da presente metodologia.

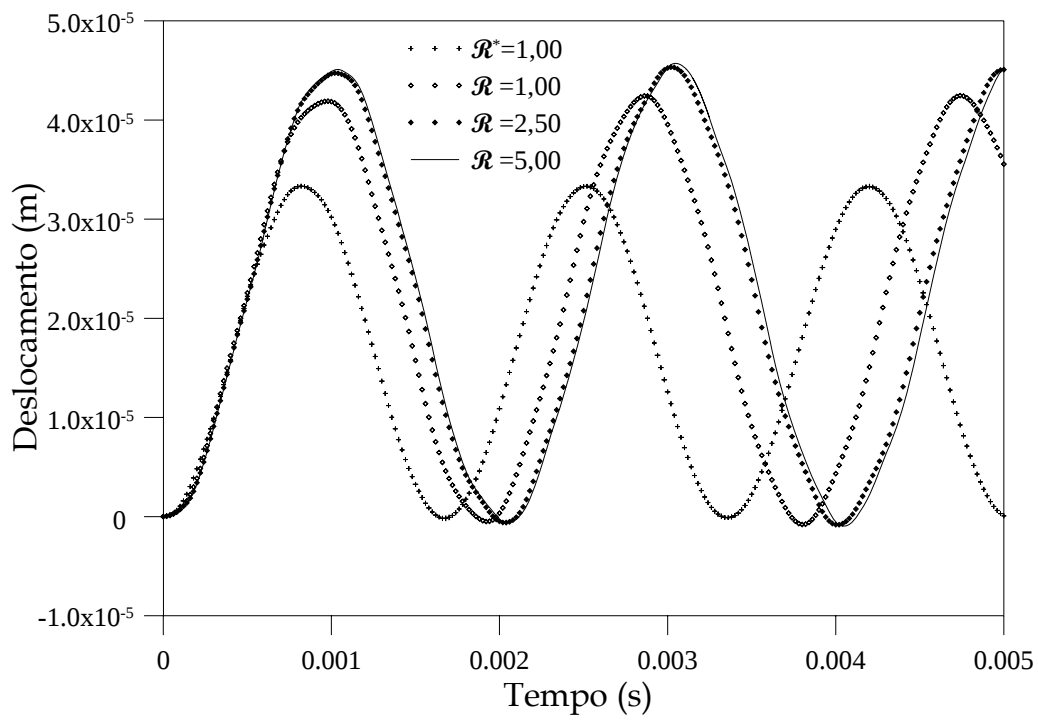


Figura 6.31 - Histórico do deslocamento no centro da placa circular apoiada.

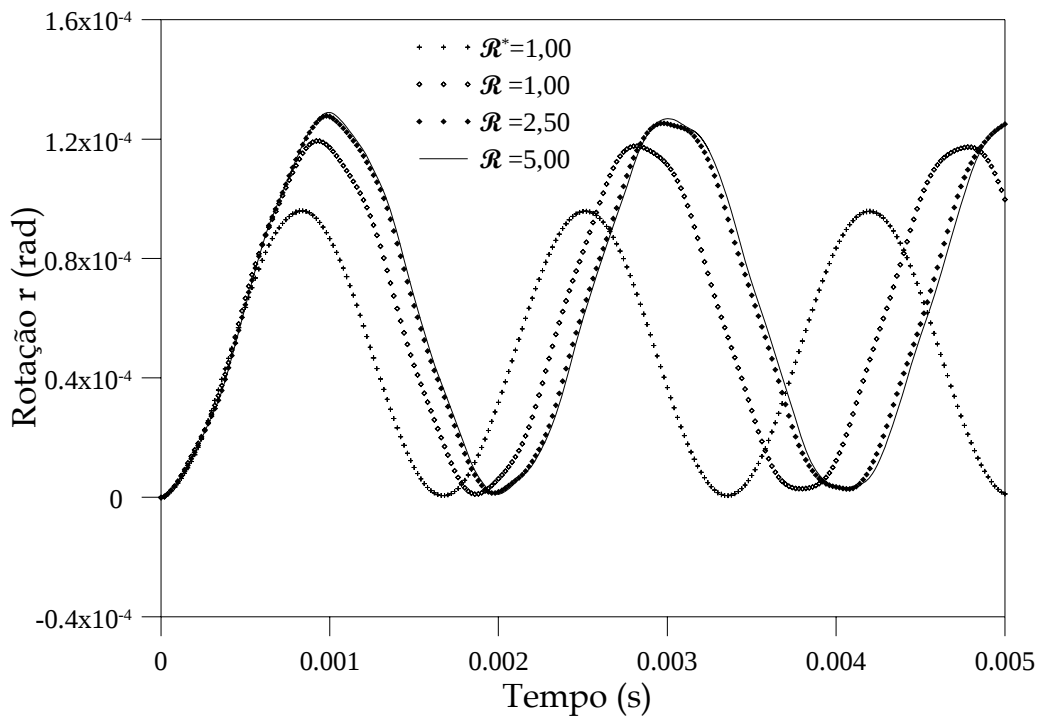


Figura 6.32 - Histórico da rotação r no bordo da placa circular apoiada.

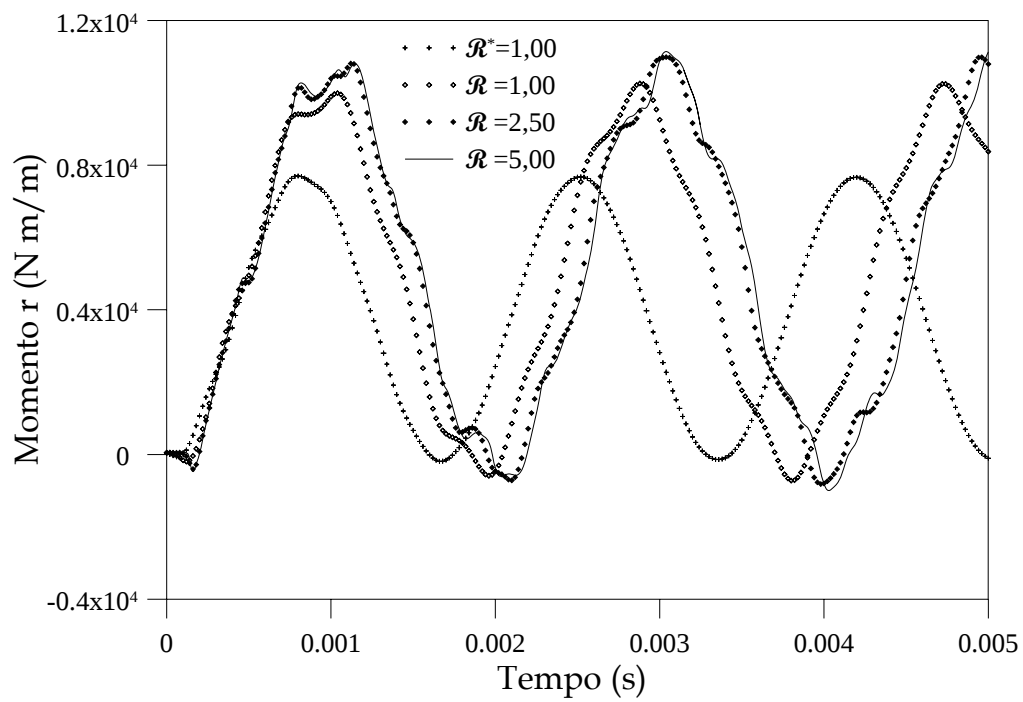


Figura 6.33 - Histórico do momento r no centro da placa circular apoiada.

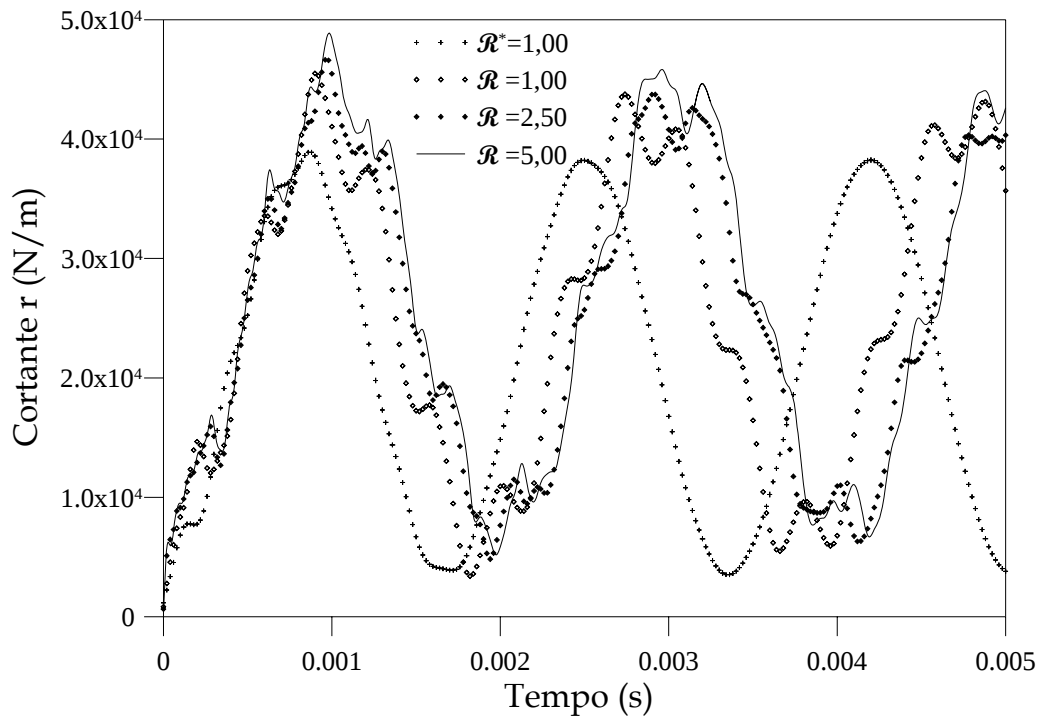


Figura 6.34 - Histórico do cortante r no bordo da placa circular apoiada.

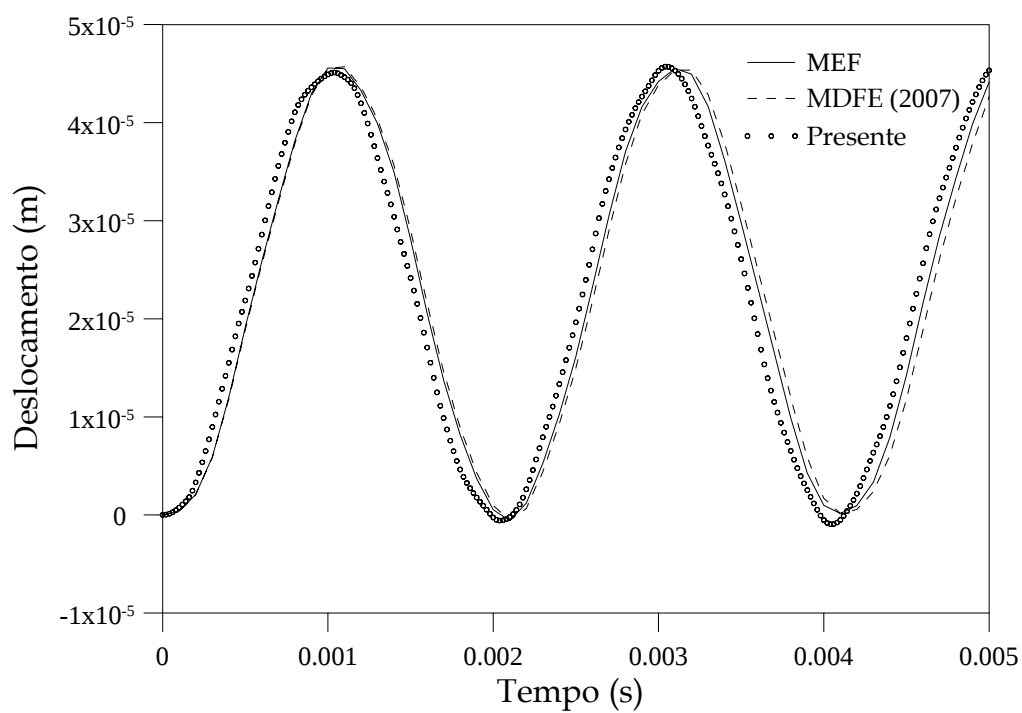


Figura 6.35 - Resposta do deslomento no centro da placa circular apoiada.

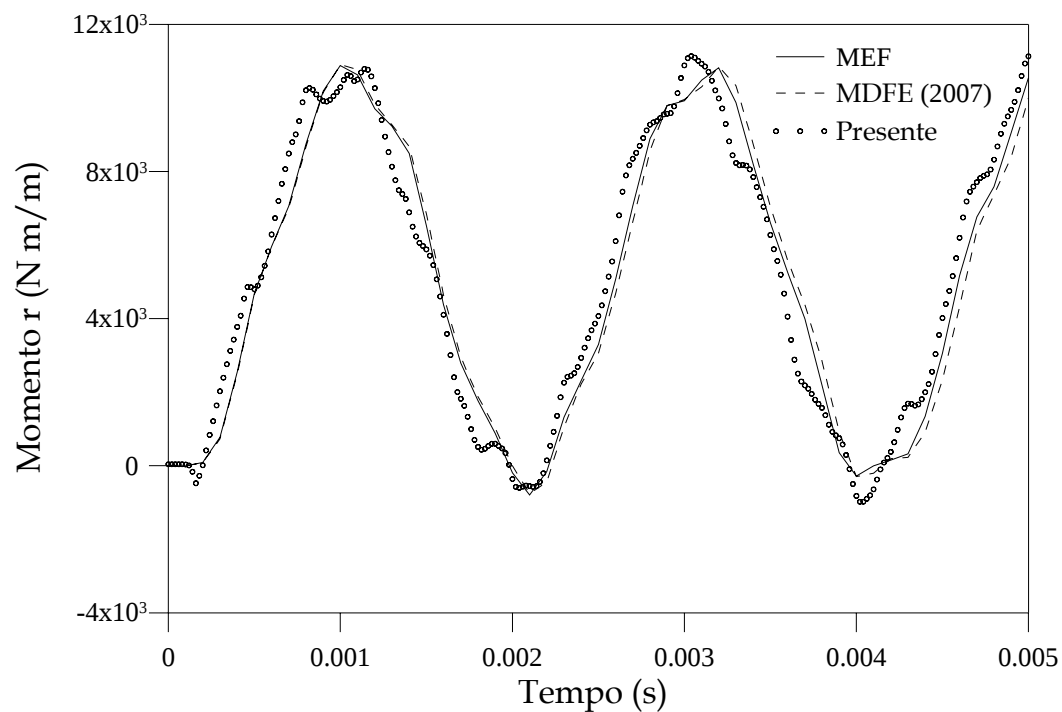


Figura 6.36 - Resposta do momento r no centro da placa circular apoiada.

Com base no problema de placa quadrada apoiada, caso (a), e o exemplo anterior, ambas sujeitas ao mesmo tipo de carga, nota-se que os esforços internos apresentam certas perturbações localizadas nas respostas, cujos métodos numéricos aqui citados não conseguem capturar. Uma resposta semelhante à obtida aqui pode ser vista no trabalho de ROCK e HINTON (1974), onde as situações do problema são parecidas, com exceção da área de atuação da carga, que age sobre uma região central do domínio.

Neste exemplo, em particular, esperava-se que as respostas da presente formulação, sem os termos adicionais, fossem as mesmas obtidas pelo MEF e MDFE, mas pelo visto, as respostas de deslocamento ficam um pouco atrasadas e a de momento apresentam formas diferentes daquelas supracitadas.

A Tabela 6.4 mostra o erro relativo calculado para os dois picos presentes nas Figuras 6.35 e 6.36, em seus respectivos instantes, tomando-se como referência o Método dos Elementos Finitos. Nota-se uma boa aproximação, em termos do valor máximo da amplitude, entre os resultados.

Tabela 6.4. Valores do erro calculado em dois picos da placa circular apoiada.

Máximo	Deslocamento no centro (m) $\times 10^{-5}$			Momento r no centro (N m/m) $\times 10^{+4}$		
	MEF	Presente	Erro (%)	MEF	Presente	Erro (%)
1	4,5559	4,5114	0,98	1,0880	1,0639	2,21
2	4,5519	4,5715	0,43	1,0820	1,1141	2,97

Para uma análise mais detalhada das respostas no tempo, a seguir são apresentados os gráficos dos resultados deste problema, tomados a cada 0,010 s até o tempo total de 0,030 s.

Nas Figuras 6.37 e 6.38, são mostrados o deslocamento e o momento r no centro da placa, respectivamente, sendo tomados os resultados para $\mathcal{R} = 5,00$. Essas respostas são comparadas com as do MEF, donde se observa que, para os gráficos do deslocamento, existe um pequeno atraso, que se mantém ao longo

do tempo de análise. Já para o momento r , isso também acontece, mas em pequenas proporções e, em alguns picos, os valores máximos são idênticos.

As respostas da rotação e do cortante radial, no bordo da placa, são mostradas, respectivamente, nas Figuras 6.39 e 6.40, sendo então apresentados os gráficos para a solução deste problema a cada $0,010\text{ s}$. Destacam-se as perturbações localizadas nas respostas do esforço cortante r ao longo do tempo de análise.

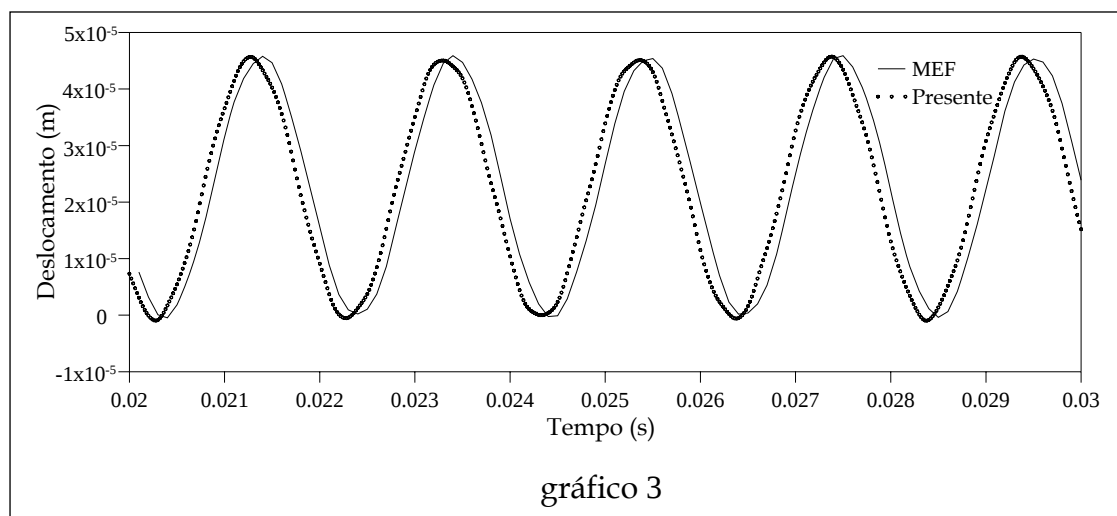
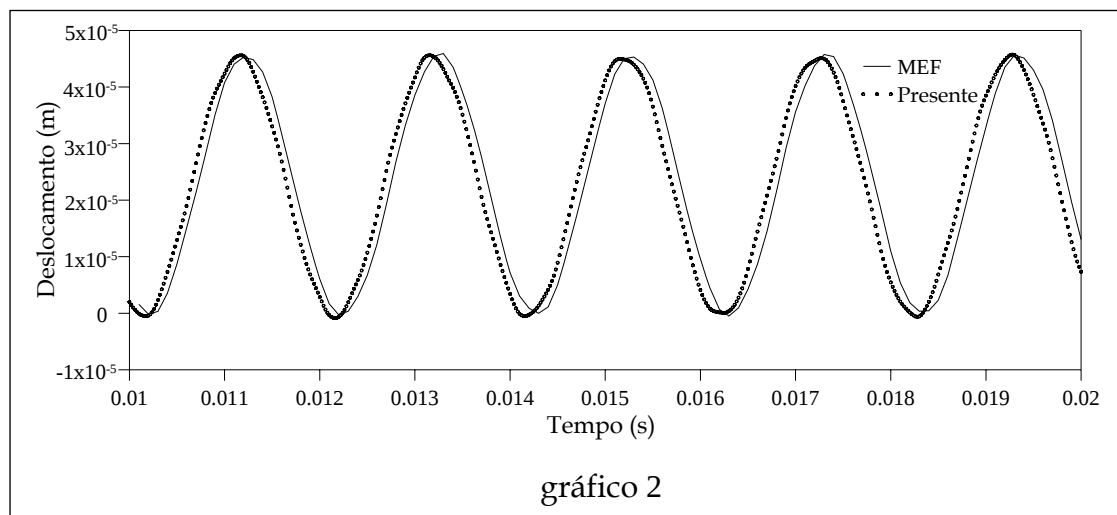
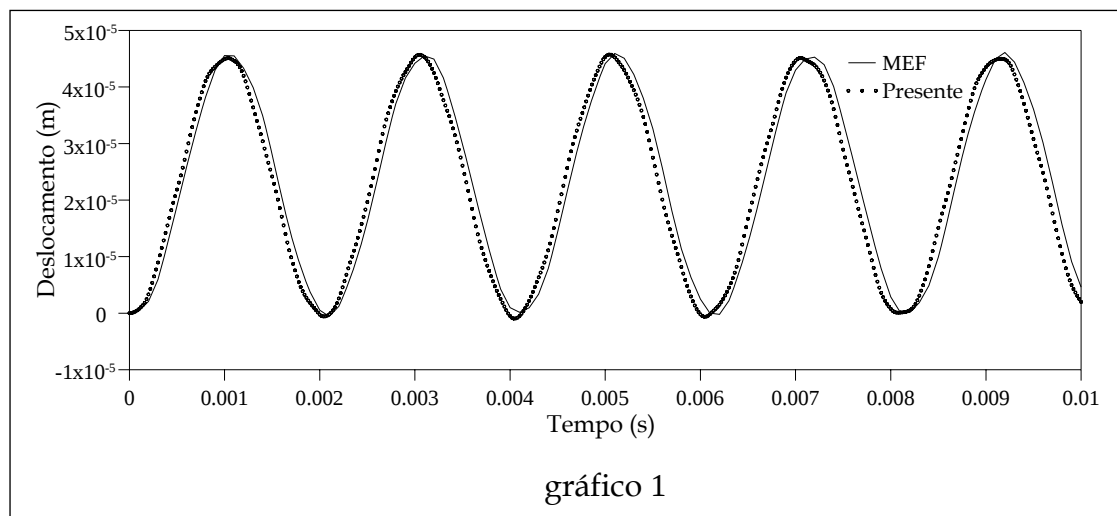


Figura 6.37 - Gráficos do deslocamento no centro da placa circular apoiada.

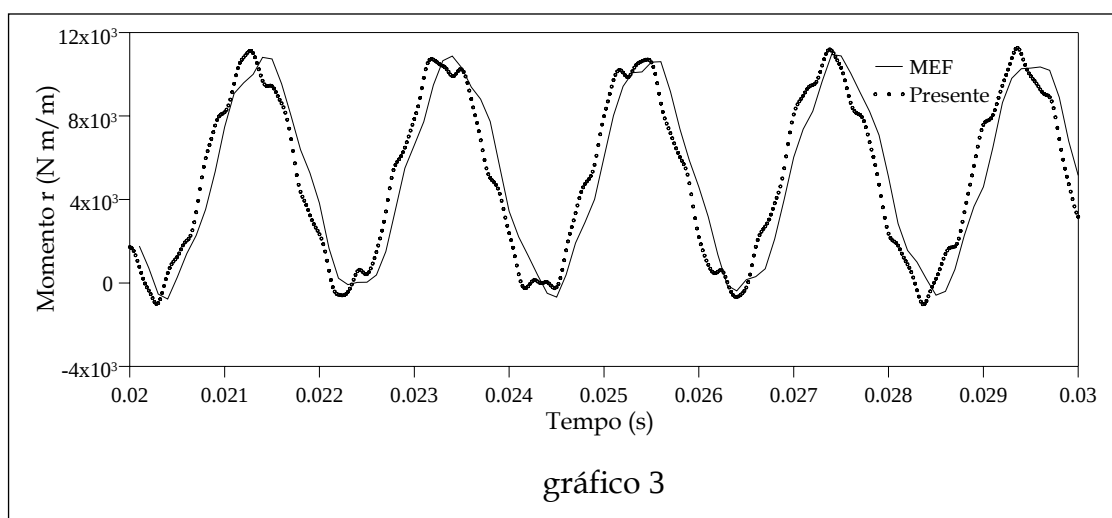
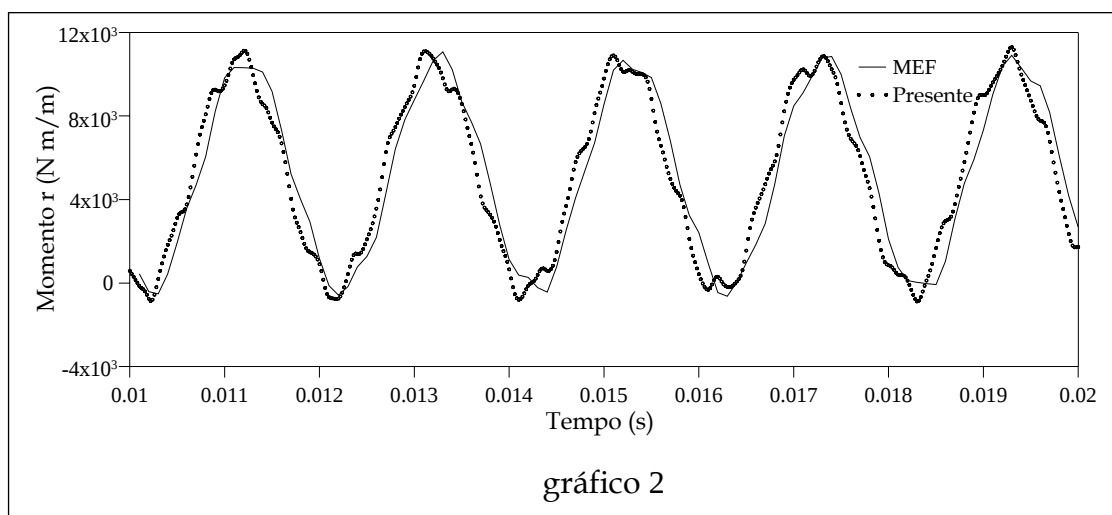
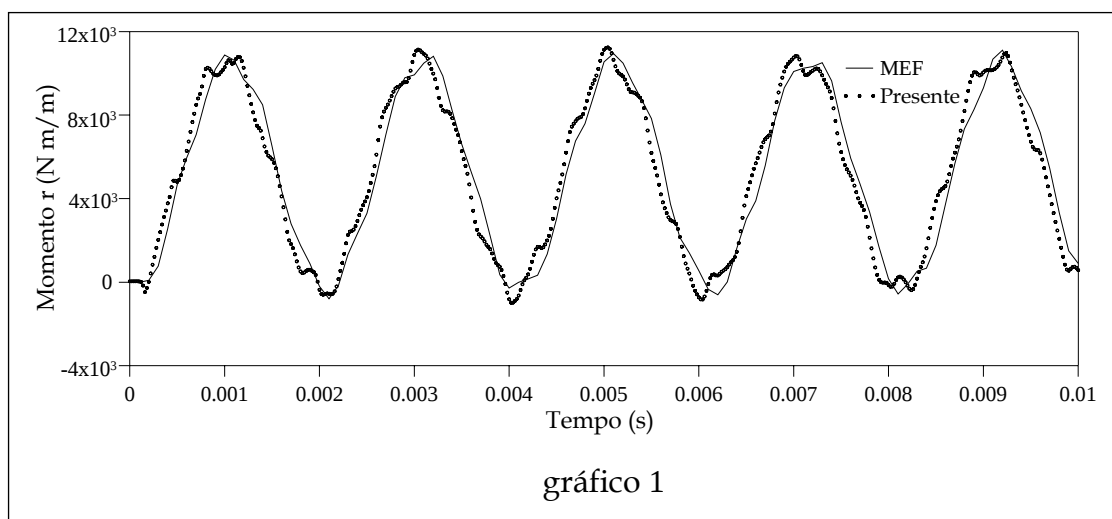


Figura 6.38 - Gráficos do momento r no centro da placa circular apoiada.

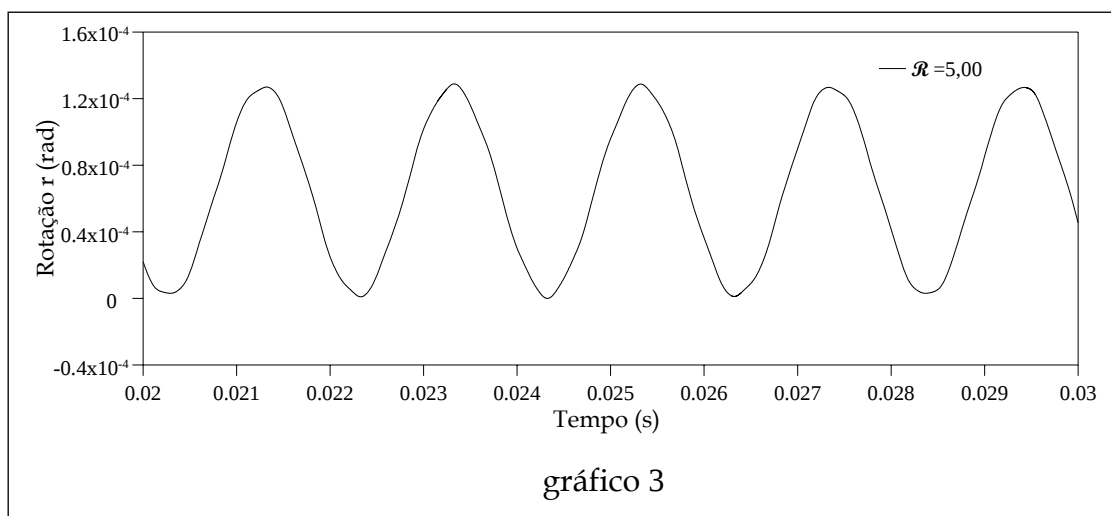
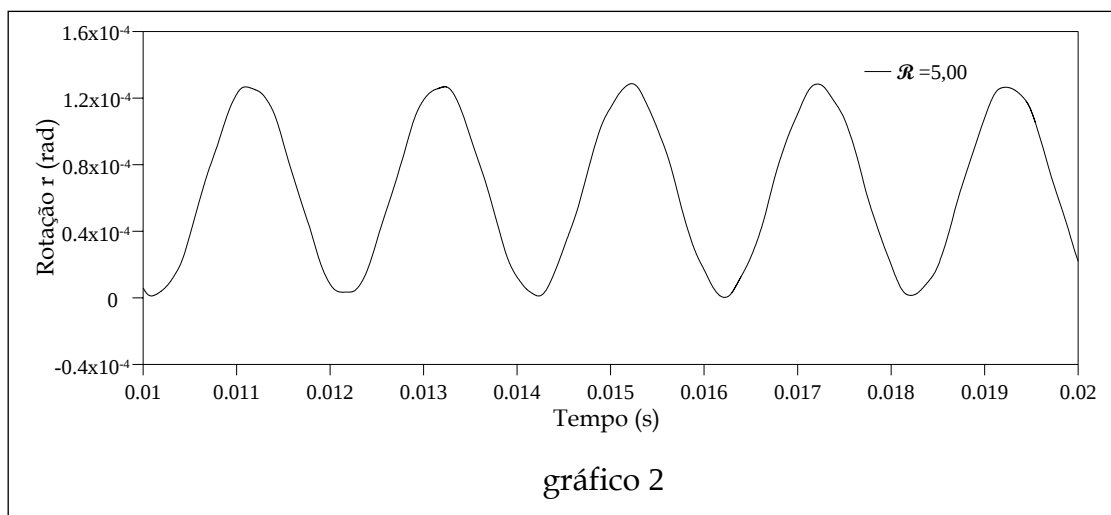
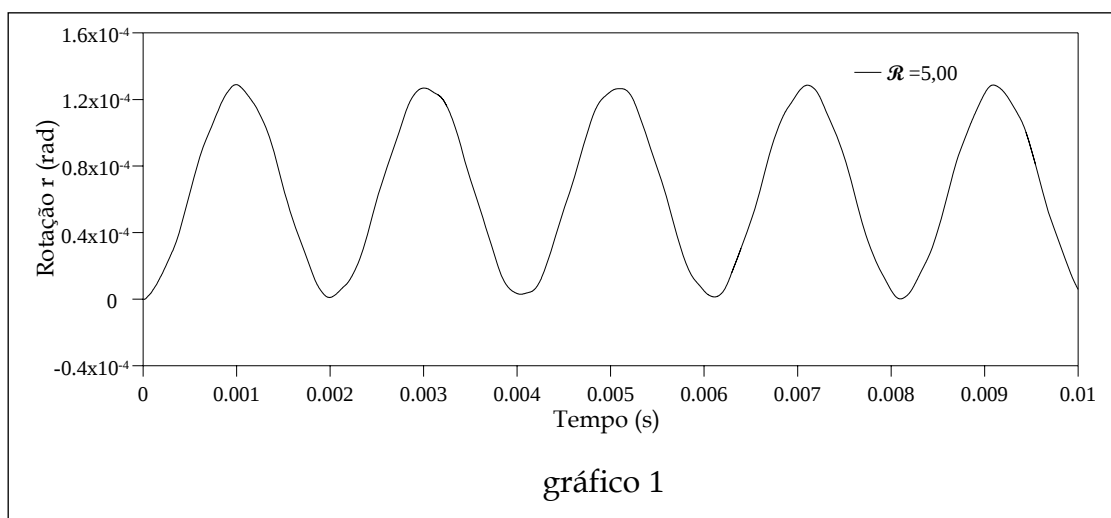


Figura 6.39 - Gráficos da rotação r no bordo da placa circular apoiada.

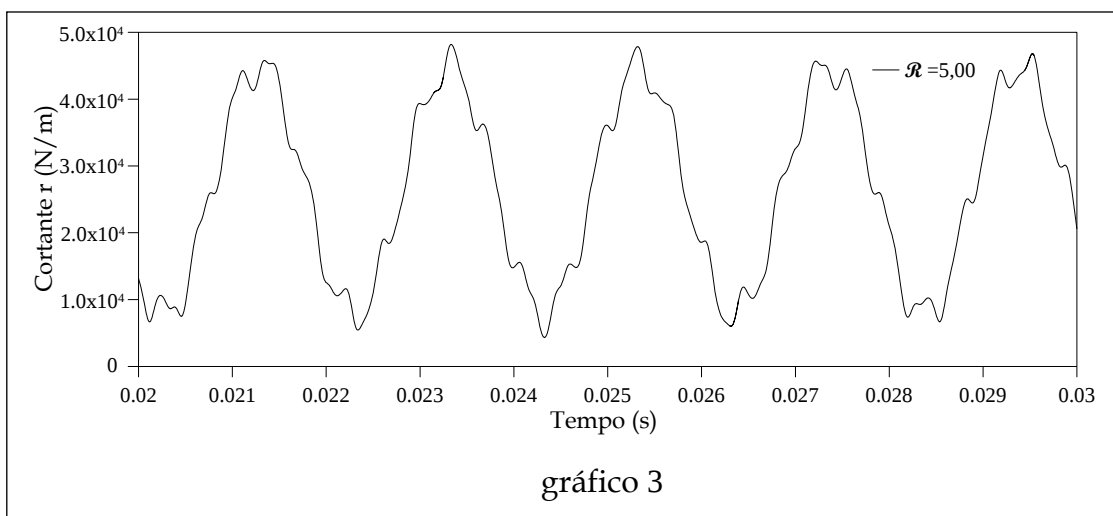
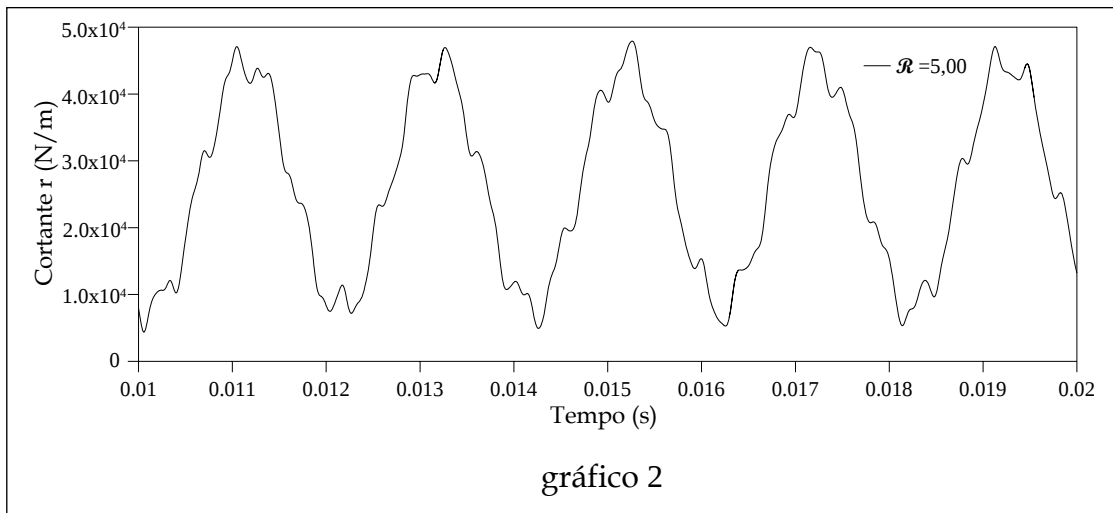
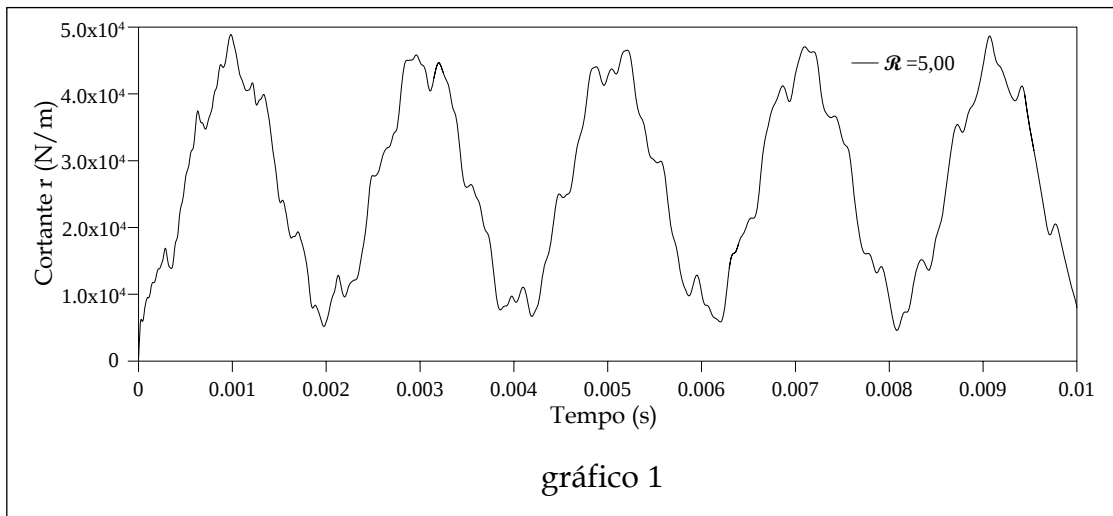


Figura 6.40 - Gráficos do cortante r no bordo da placa circular apoiada.

6.5 Estudo Paramétrico

Nesta última seção, são realizadas algumas análises de vibração forçada, somente com a presente metodologia, com e sem a inclusão do termo adicional da translação de inércia na formulação. Estas análises serão feitas considerando várias espessuras da placa, conforme o terceiro problema da Seção 6.3.

Por conseguinte, seja uma placa quadrada simplesmente apoiada, sujeita a um carregamento uniforme subitamente aplicado e mantido constante, cuja amplitude vale $q_0 = 1,0$. Os demais parâmetros admitidos são: $a = 1,0$; $E = 1,0$; $\nu = 0,3$ e $\rho = 1,0$.

O tempo total de análise é considerado como sendo igual a duas vezes o primeiro período fundamental T_1 . Na Tabela 6.5, são apresentados esses períodos (sem o termo adicional, ver Tabela 6.3) e os respectivos intervalos de tempo calculados, a partir da equação (6.3), para as várias espessuras usadas aqui.

Tabela 6.5. Parâmetros de tempo para várias espessuras da placa quadrada.

	h=0,10	h=0,20	h=0,40
T_1	10,8814	5,9418	3,7594
Δt	0,1000	0,0600	0,0370

Nas análises subseqüentes, serão apresentadas as respostas somente para o valor da variável de convergência $\mathcal{R} = 4,00$, sendo os resultados com a inclusão dos termos inerciais de translação indicados por um superescrito.

Para estimar o cálculo do erro da presente proposta, é utilizada uma diferença de módulo do erro relativo, a partir da seguinte expressão:

$$\text{Erro} = \frac{\Delta A}{A} \times 100 \quad (\%) \quad (6.4)$$

onde

$$\Delta A = |\Delta - \Delta^0|$$
$$A = \Delta_{max}^0$$
(6.5)

Nas relações acima, os valores lidos são as amplitudes tomadas a cada instante, até o tempo total da análise, sendo o valor de referência (formulação sem a inclusão do termo adicional da translação de inércia), dado por Δ^0 , enquanto o da proposta é dado por Δ . A amplitude máxima é dada por Δ_{max}^0 , que pode ocorrer no primeiro ou no segundo pico.

As respostas de deslocamento e momento no centro e de rotação e cortante no bordo são apresentadas nas Figuras 6.41 a 6.52, através do histórico para as várias espessuras, sendo também traçada uma curva Erro x tempo, juntamente com o respectivo histórico.

As amplitudes máximas dos históricos sem a inclusão dos novos termos na formulação são mostradas na Tabela 6.6, para as várias relações h/a (espessura/menor dimensão) tomadas nesta seção, sendo as letras D, M, R e Q relacionadas a deslocamento, momento, rotação e cortante, respectivamente.

Nessa tabela, para a relação $h/a=0,10$, os valores máximos de deslocamento e rotação são praticamente os mesmos nos dois picos; já para o momento e cortante, esses máximos ocorrem no segundo trecho. Já para $h/a=0,20$, esses picos ocorrem na primeira parte da análise para deslocamento, rotação e momento, enquanto, para o cortante, ocorre na seguinte. Para $h/a=0,40$, esses extremos ocorrem na segunda parte para deslocamento e cortante; assim, os outros dois caem dentro do primeiro trecho.

Tabela 6.6. Parâmetros de amplitude para várias relações da placa quadrada.

	$D_{\max}$	$M_{\max}$	$R_{\max}$	$Q_{\max}$
$h/a=0,10$	94,4589	0,1073	287,8080	0,6364
$h/a=0,20$	13,5073	0,1062	35,1043	0,5987
$h/a=0,40$	2,3523	0,1076	4,4226	0,5969

Para a relação $h/a = 0,10$, nota-se que a inclusão dos termos inerciais de translação praticamente não influencia os resultados. Conforme se pode observar nas Figuras 6.41 e 6.42, a diferença das respostas para o deslocamento e a rotação é desprezível. Mas, no caso dos esforços internos, segundo as Figuras 6.43 e 6.44, esse erro apresenta um pequeno valor, sendo da ordem de 1,95% para o momento e de 3,23% para o cortante.

Na análise seguinte, observa-se que todos os erros apresentaram valores máximos no segundo trecho, tendo-se os erros de 1,62%; 1,73%; 4,06% e 6,00% para o deslocamento, rotação, momento e cortante, respectivamente. Isso pode ser observado nas Figuras 6.45 a 6.48 para a relação $h/a = 0,20$. Dessa forma, as respostas dos esforços internos já mostram a contribuição dos termos de inércia em suas respostas.

Assim como na análise de vibração livre, observa-se que, para a relação $h/a = 0,40$, a consideração da inércia é relevante, sendo mais evidentes nos gráficos do momento e do cortante.

Nas Figuras 6.49 e 6.50, os gráficos do deslocamento e da rotação são apresentados, onde se destacam os erros indicados nas mesmas, cujos valores são 3,44% e 4,11%, respectivamente. Como se observa nas Figuras 6.51 e 6.52 são obtidos, para o primeiro e o segundo picos, os seguintes valores: 9,42% e 17,15% para o momento, contra 4,84% e 11,61% para o cortante.

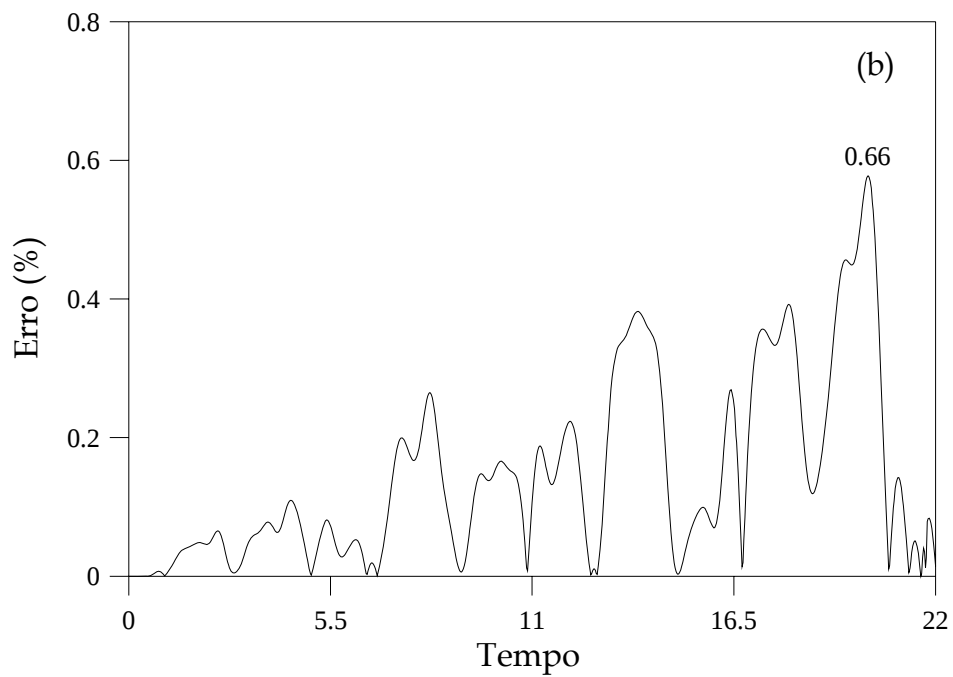
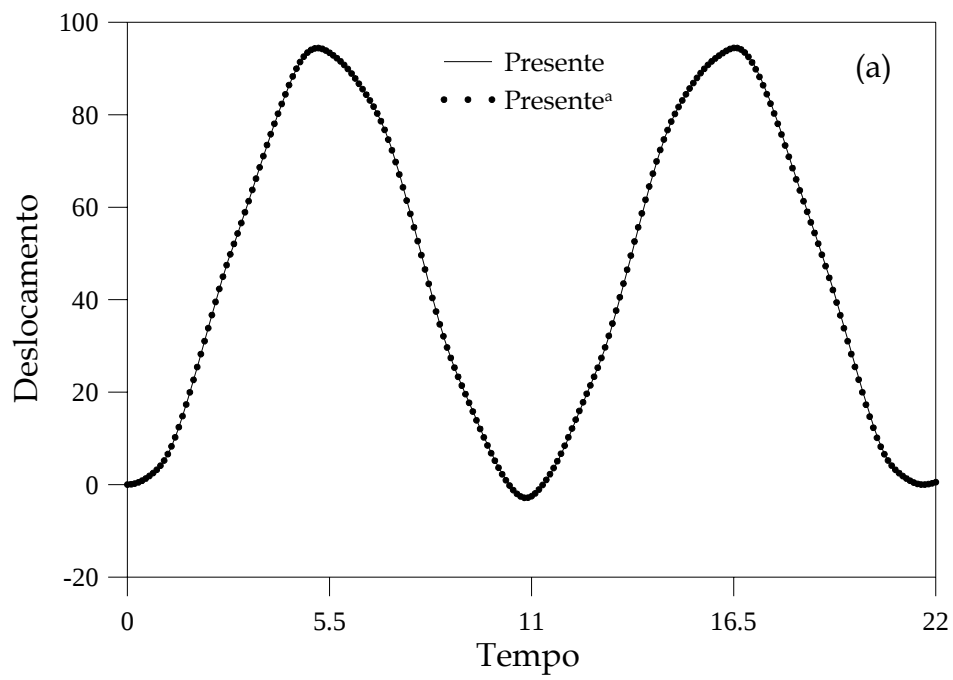


Figura 6.41 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,10$):
 (a) deslocamento no centro; (b) erro relativo do deslocamento no centro.

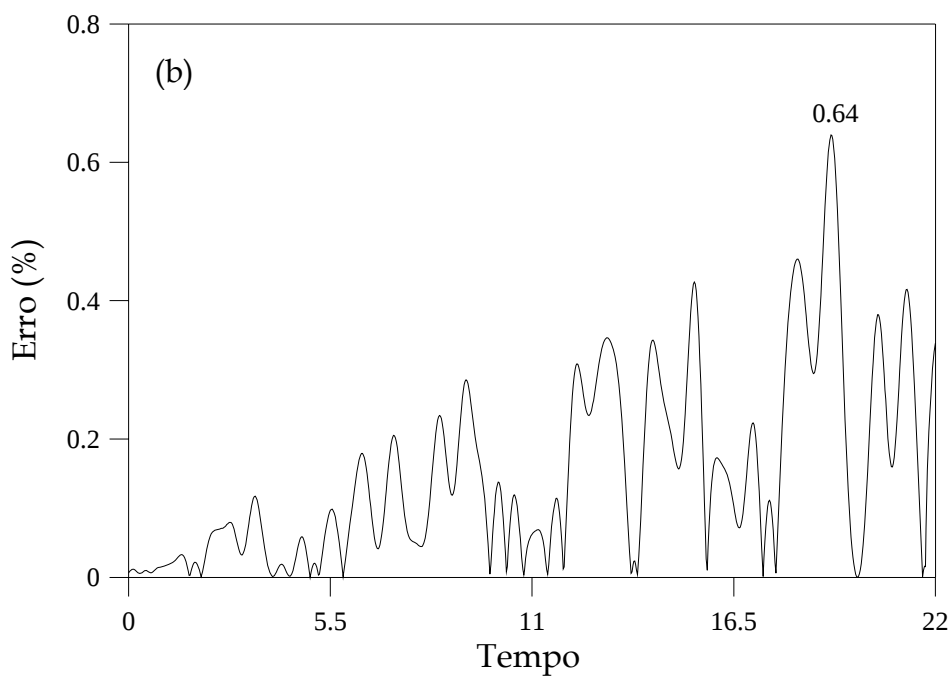
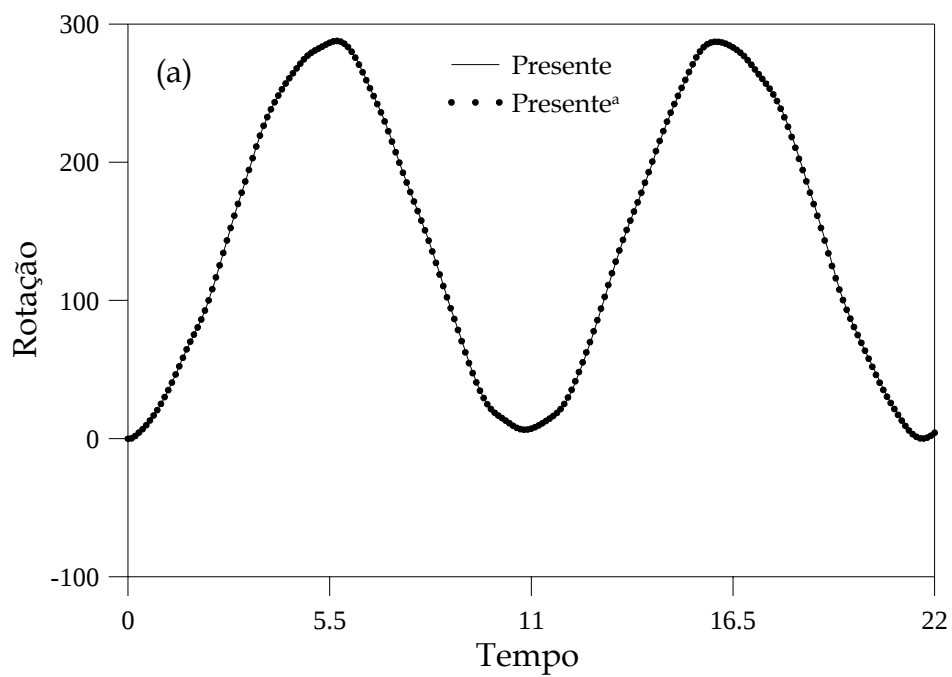


Figura 6.42 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,10$):
 (a) rotação no bordo; (b) erro relativo da rotação no bordo.

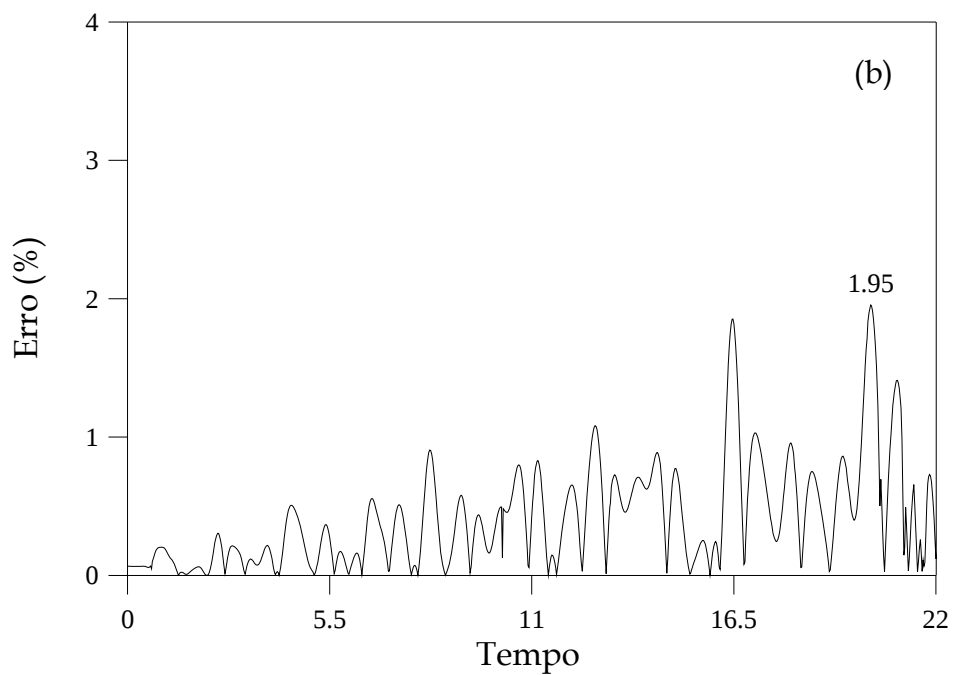
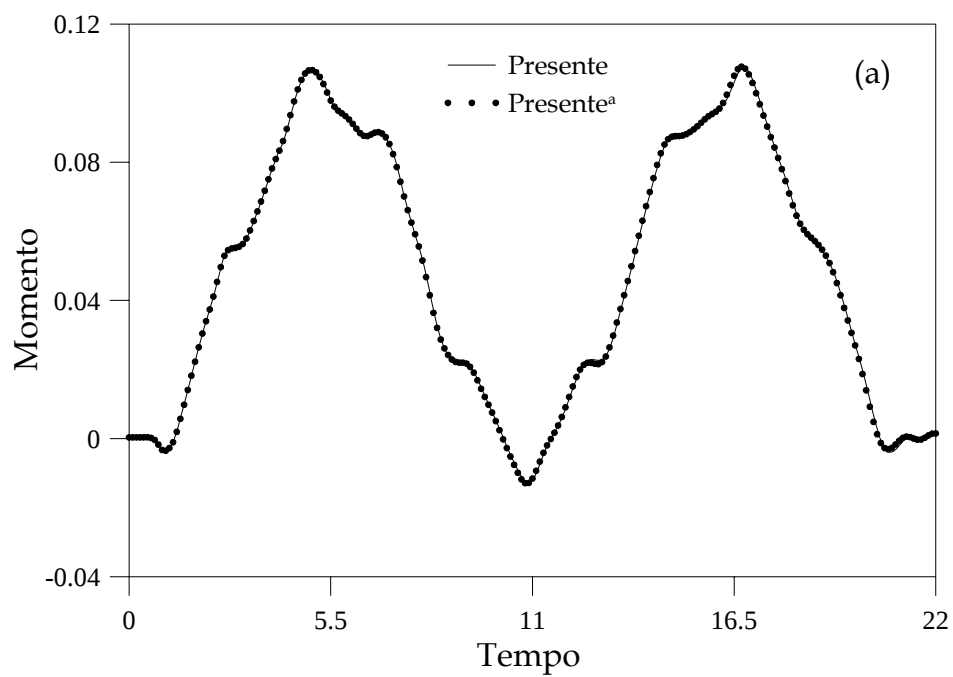


Figura 6.43 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,10$):
 (a) momento no centro; (b) erro relativo do momento no centro.

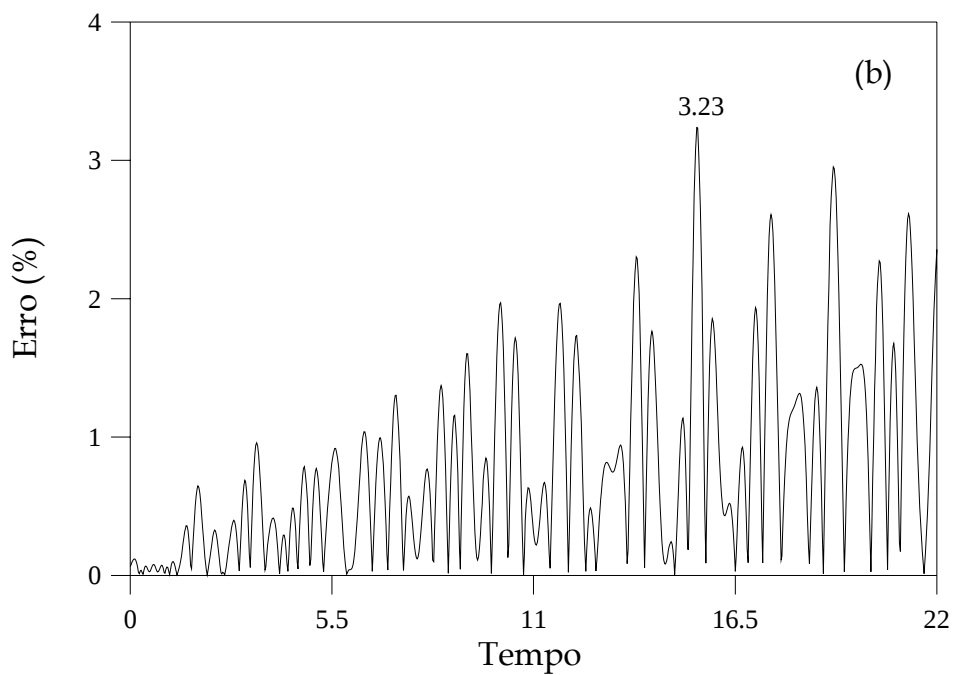
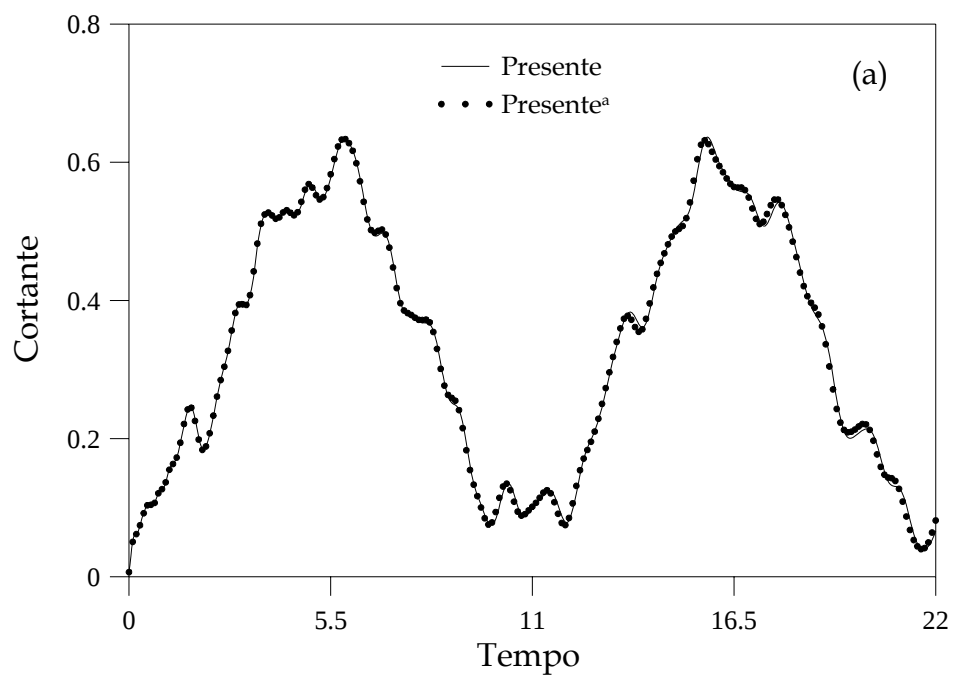


Figura 6.44 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,10$):
 (a) cortante no bordo; (b) erro relativo do cortante no bordo.

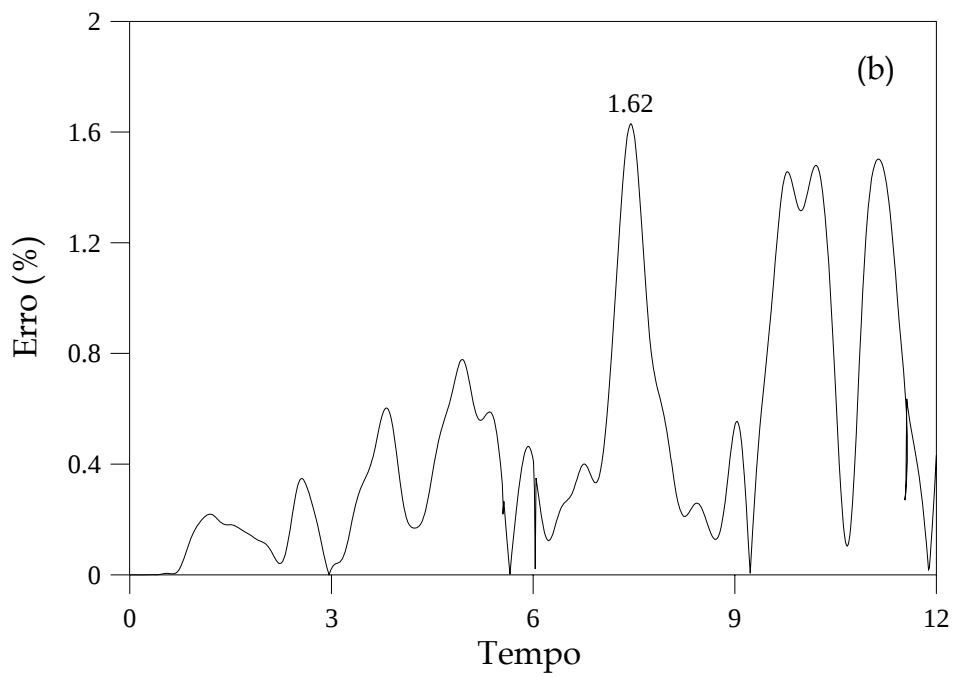
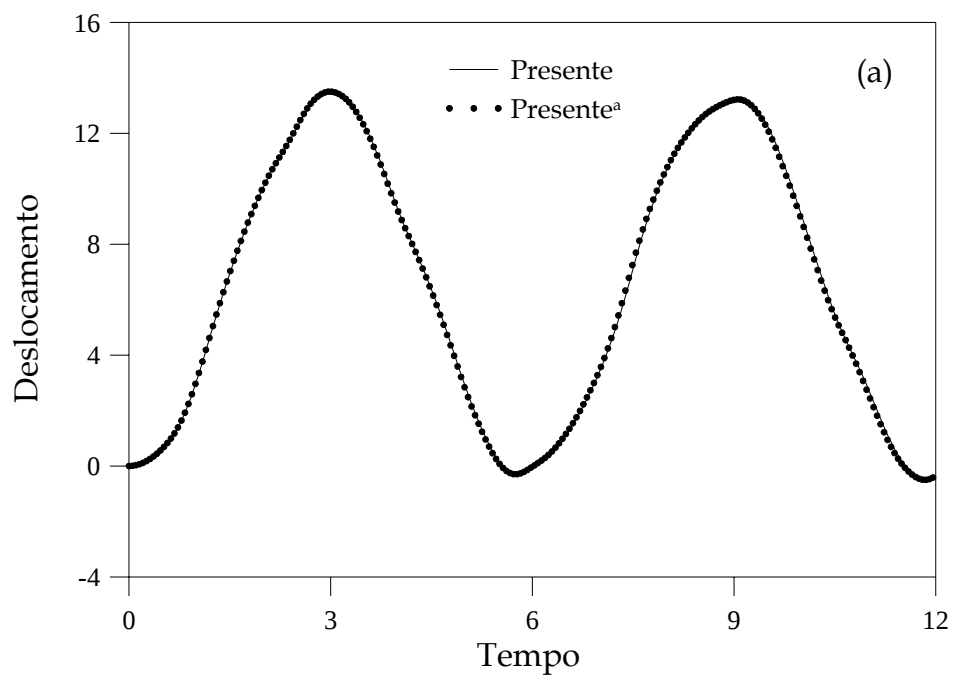


Figura 6.45 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,20$):
 (a) deslocamento no centro; (b) erro relativo do deslocamento no centro.

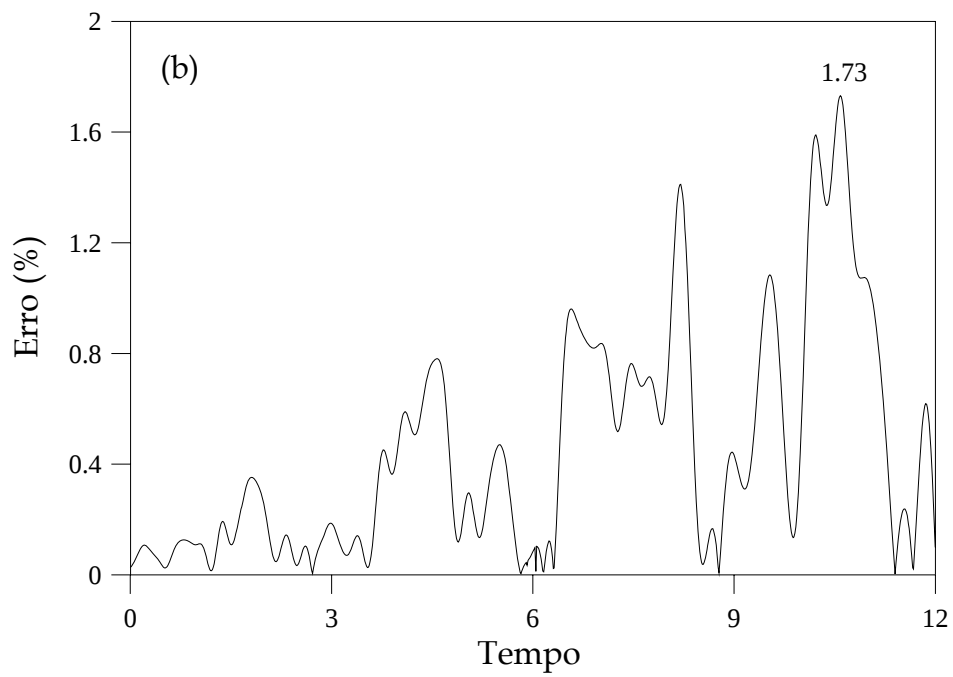
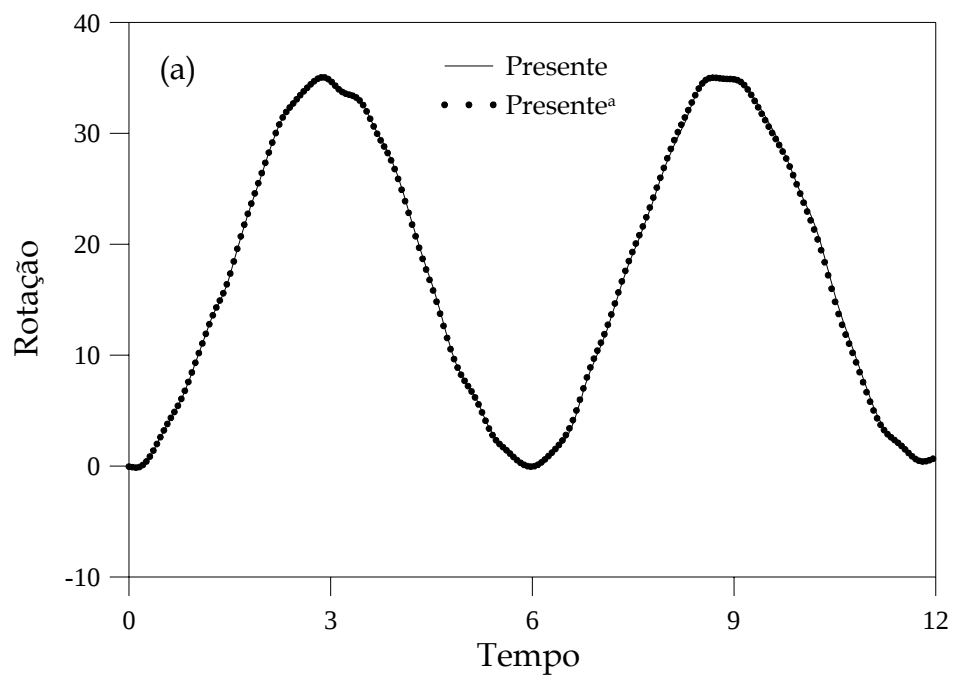


Figura 6.46 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,20$):
 (a) rotação no bordo; (b) erro relativo da rotação no bordo.

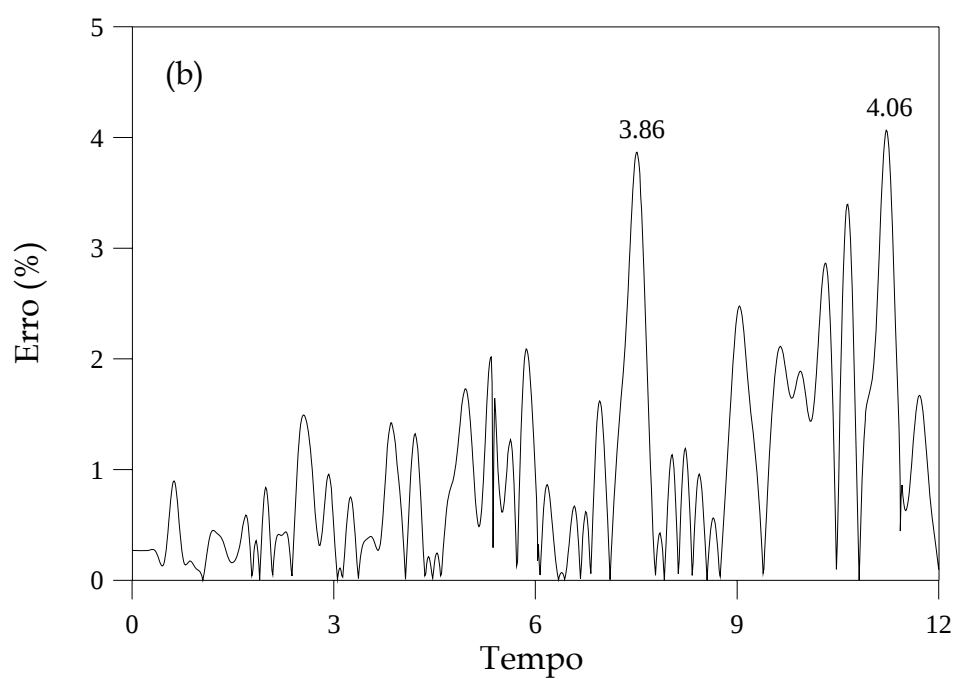
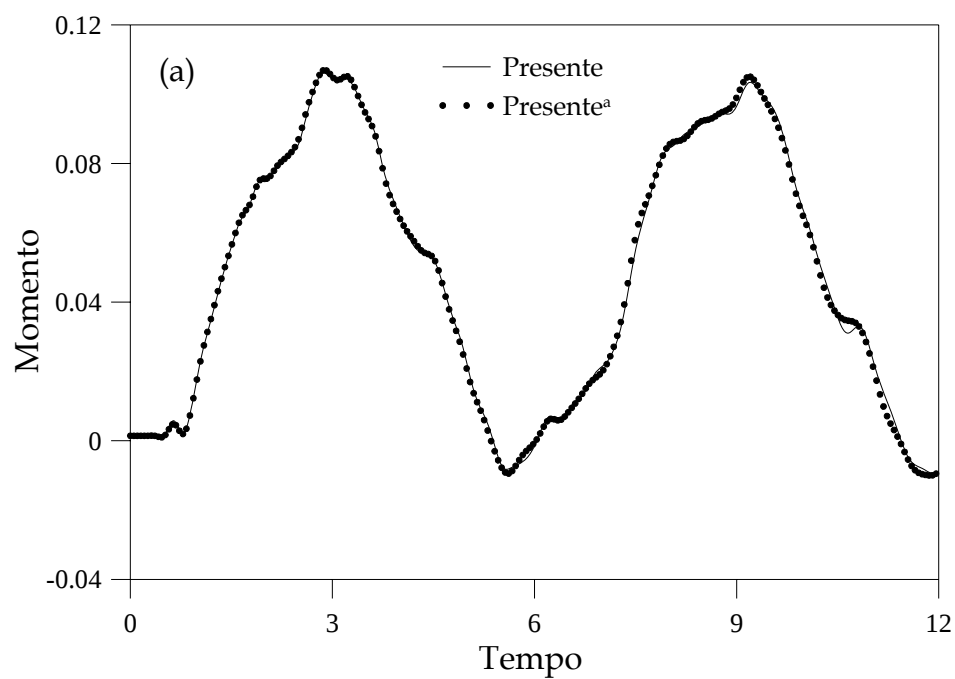


Figura 6.47 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,20$):

(a) momento no centro; (b) erro relativo do momento no centro.

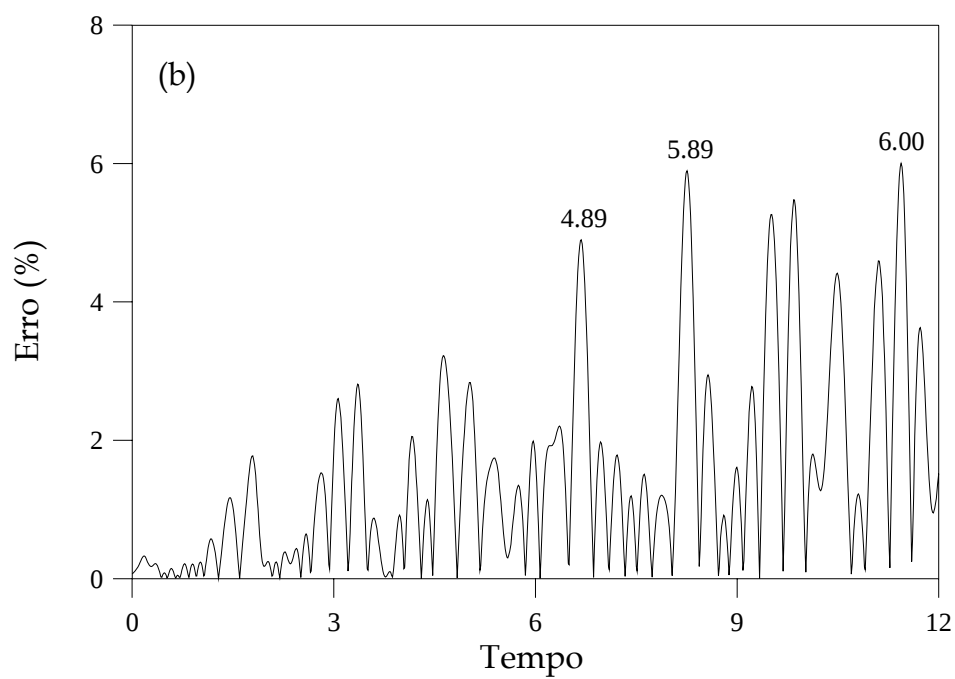
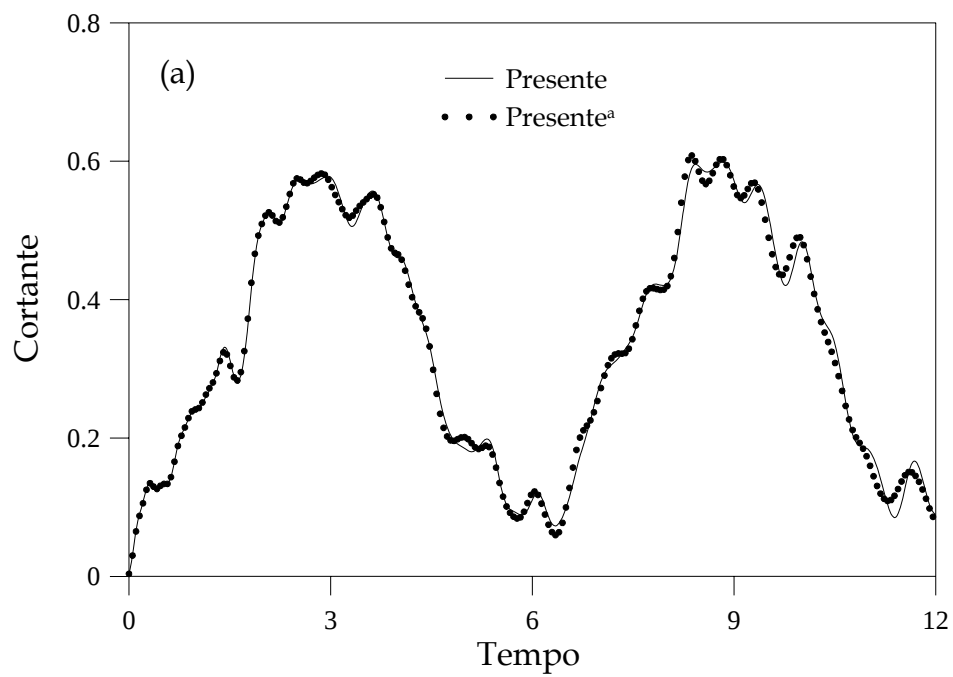


Figura 6.48 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,20$):

(a) cortante no bordo; (b) erro relativo do cortante no bordo.

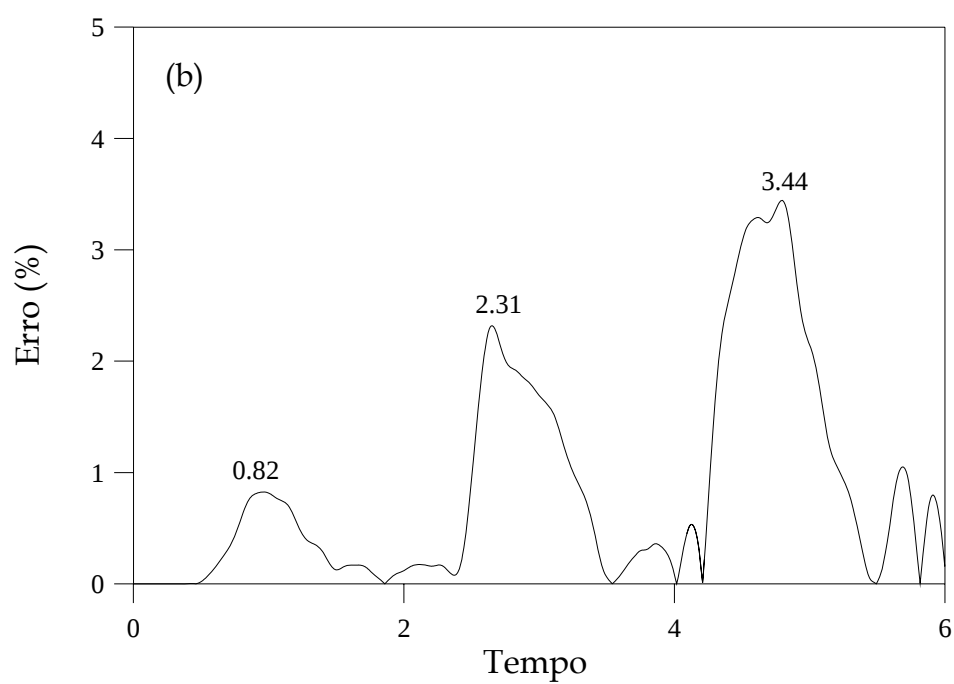
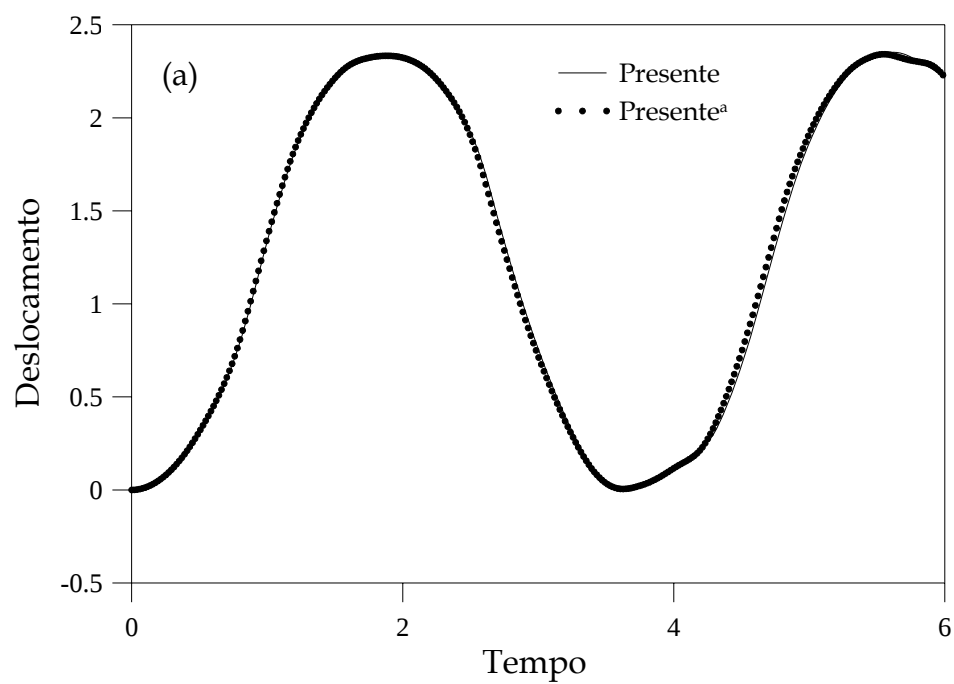


Figura 6.49 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,40$):
 (a) deslocamento no centro; (b) erro relativo do deslocamento no centro.

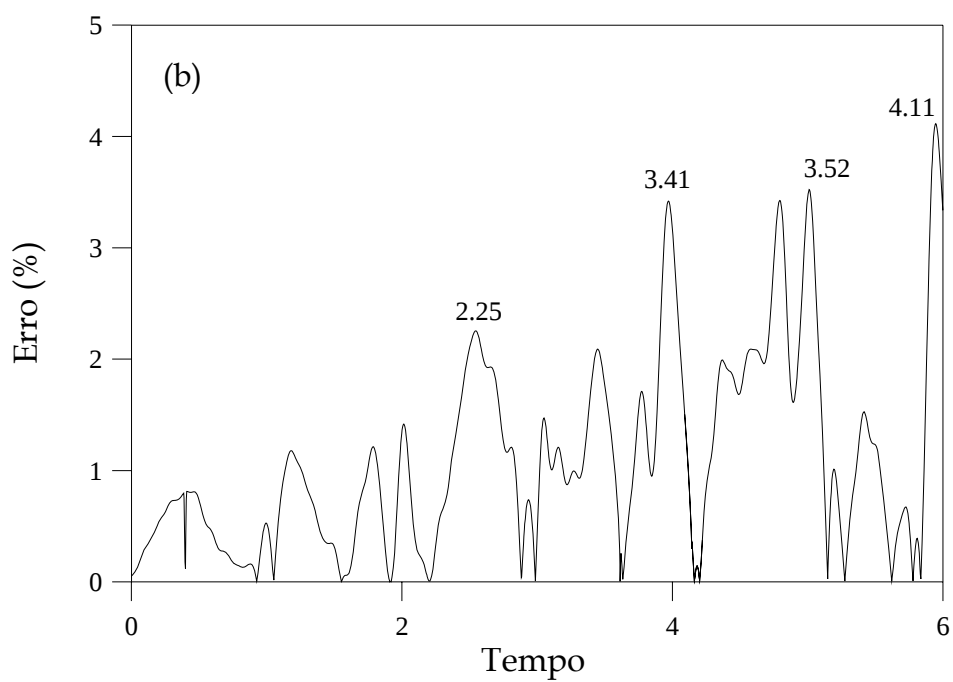
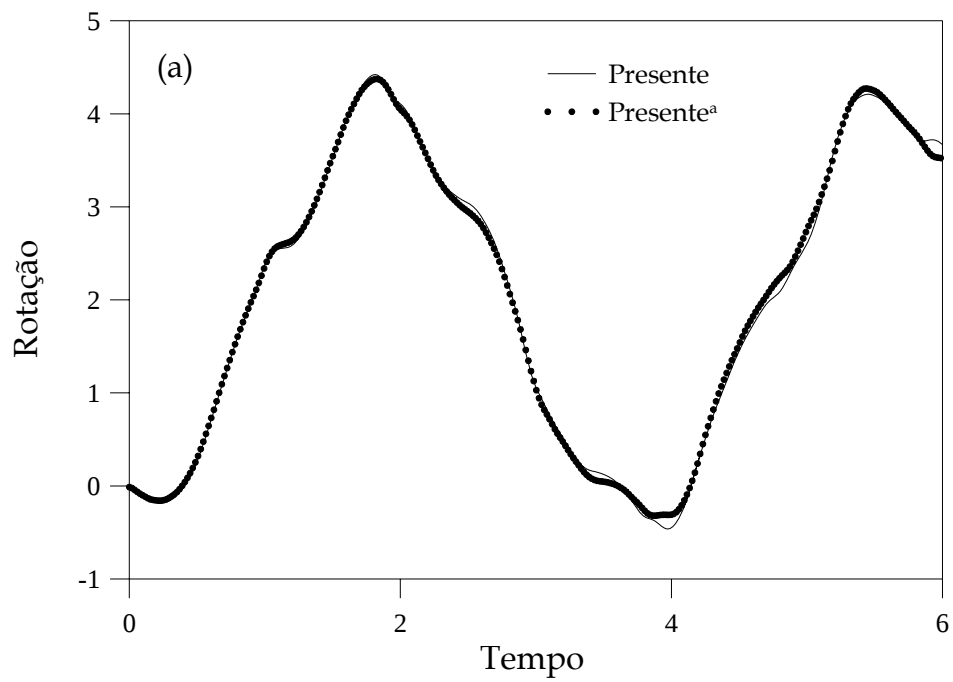


Figura 6.50 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,40$):

(a) rotação no bordo; (b) erro relativo da rotação no bordo.

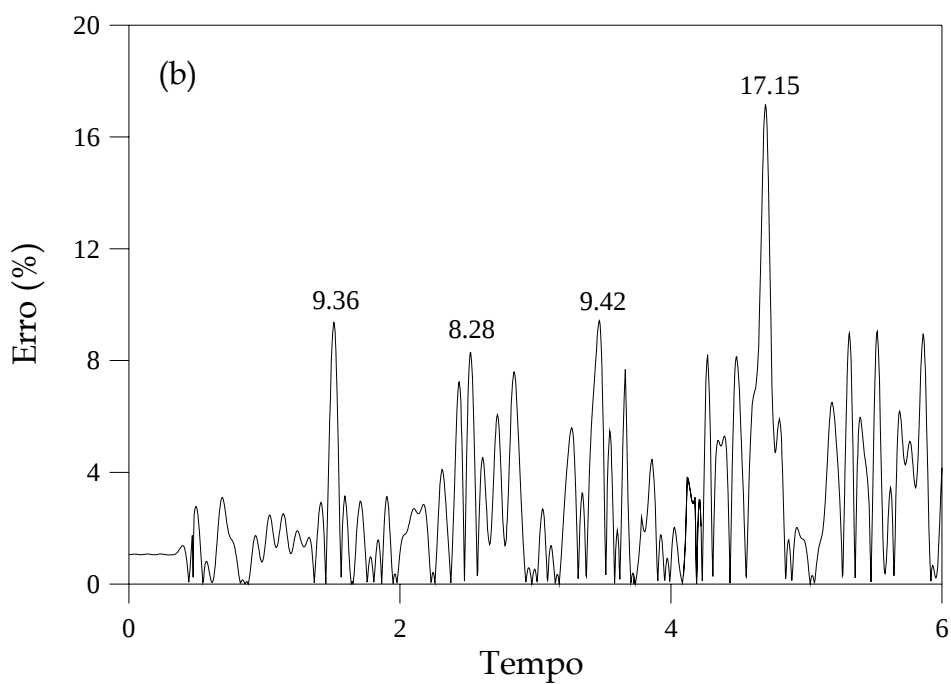
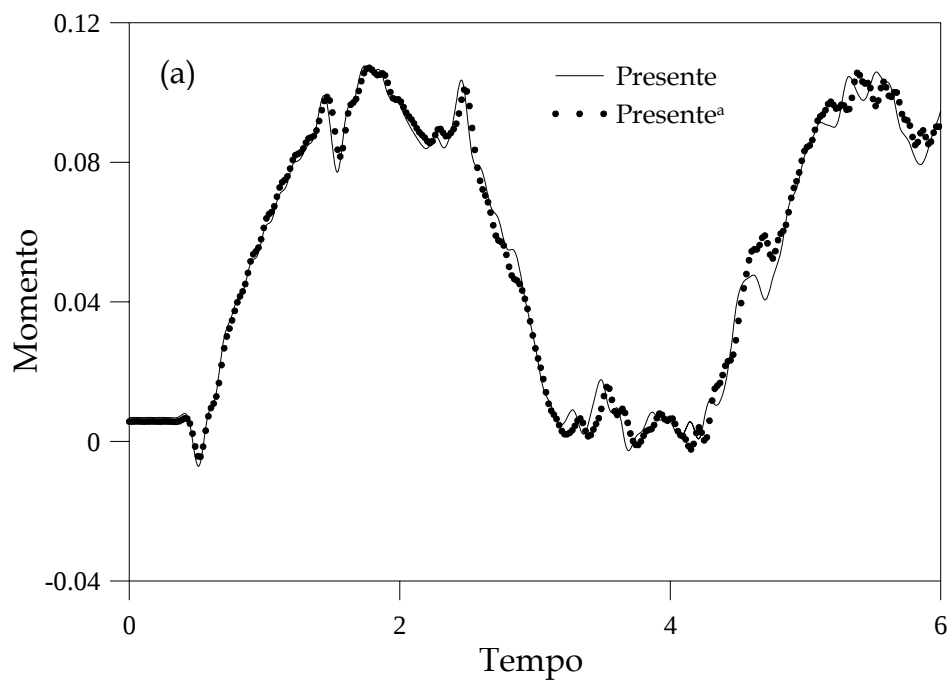


Figura 6.51 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,40$):

(a) momento no centro; (b) erro relativo do momento no centro.

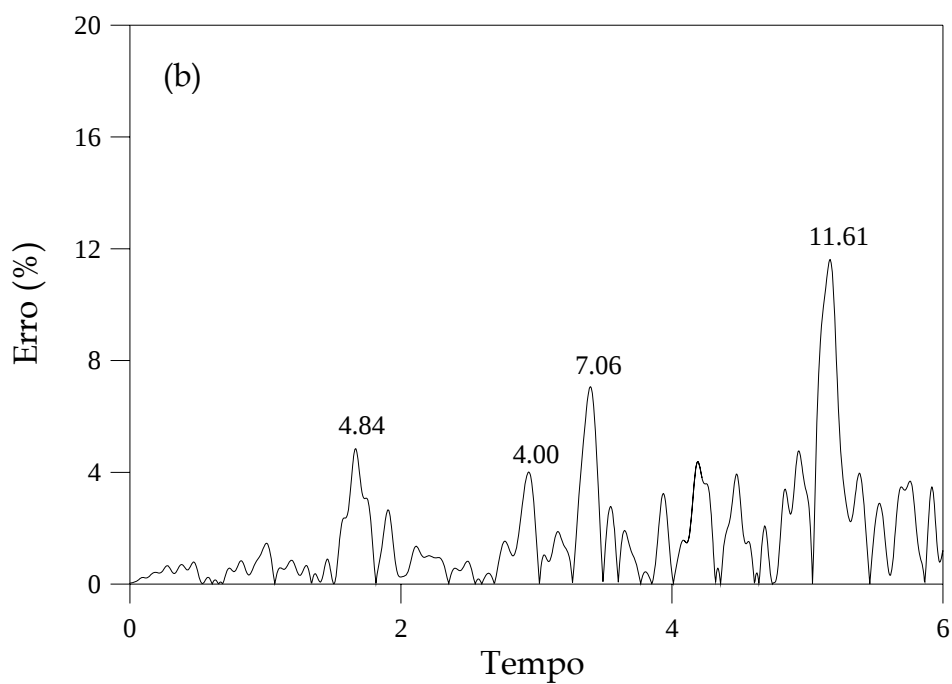
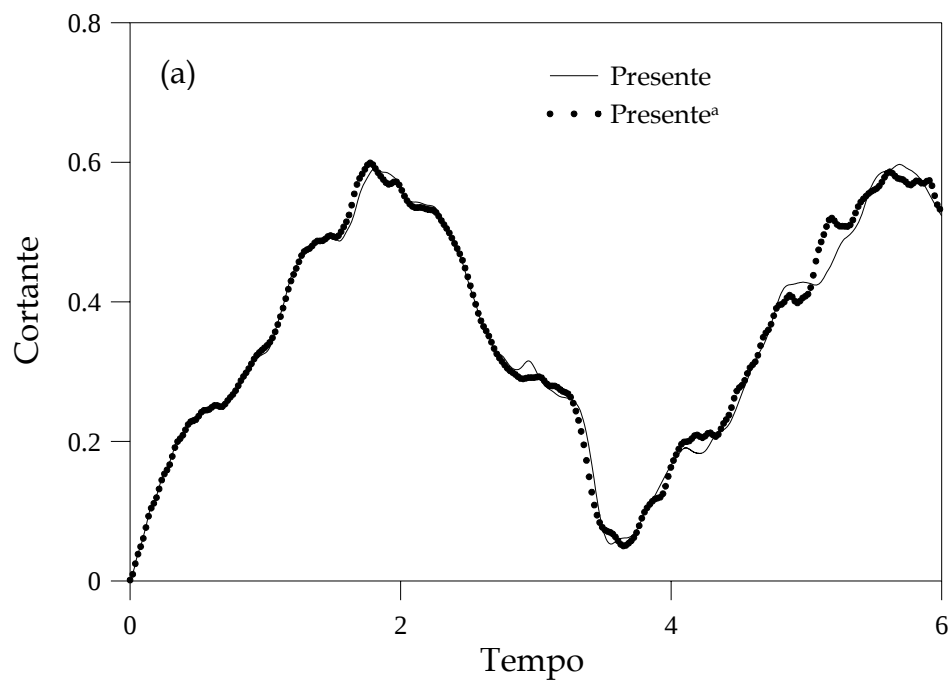


Figura 6.52 - Histórico das respostas da placa quadrada apoiada ($h/a = 0,40$):

(a) cortante no bordo; (b) erro relativo do cortante no bordo.

Conclusões e Propostas

7.1 Conclusões

Apresentou-se, neste trabalho, uma formulação geral para análise dinâmica de placas espessas. Foi considerada a teoria de Reissner e se obteve um termo a mais nas equações integrais em relação à formulação apresentada em outro trabalho para análise de placas espessas pelo MEC, já que, no presente trabalho, não foi desprezada a parcela devida aos termos de inércia nas expressões dos esforços internos.

Para análise numérica do problema, o contorno foi discretizado em elementos lineares quadráticos com geometria linear, podendo ser contínuos ou descontínuos, e o domínio foi dividido em células triangulares constantes com geometria linear. Já para o avanço no tempo, foram empregados os operadores de Houbolt ou de Diferença Central. Assim, um conjunto de equações integrais envolvendo as variáveis do problema foi obtido, a partir do qual um sistema de equações foi montado, sendo o contorno e o domínio resolvidos de maneira acoplada.

Com base no capítulo anterior, para a análise de vibração livre, foi observado que os novos termos são desprezíveis para relações h/a

(espessura/menor dimensão) pequenas e, mesmo para placas moderadamente espessas, esses termos não apresentaram qualquer influência sobre as respostas. Mas quando o valor desta relação foi maior ($h/a = 0,40$), como visto nos exemplos analisados, pode ser observado que a falta desse termo produz um erro maior, quando comparado com resultados obtidos por outra metodologia (CHEUNG e CHAKRABARTI, 1972). Pode-se concluir, desta forma, a importância dessas parcelas à medida que a placa torna-se mais espessa.

Para a análise dinâmica, um critério de convergência foi adotado e, de acordo com o aumento da variável $\mathcal{R}$, observou-se que as respostas numéricas se aproximaram da solução do problema para $4,0 \leq \mathcal{R} \leq 8,0$.

Em particular, para o problema de placa apoiada sujeita a uma carga uniforme subitamente aplicada, mantida constante ou decrescente no tempo, ou seja, os casos (a) e (b) da Figura 6.7 para a função de carregamento, notou-se que os esforços internos apresentam perturbações localizadas em seus históricos. Ao que parece, essa forma é uma assinatura das respostas, em termos de esforços. Algumas metodologias não conseguem capturar isso, suavizando as respostas nesses pontos, não sendo a placa, necessariamente, classificada como fina, ou moderadamente espessa, ou espessa.

Mas, ao que tudo indica, esses novos termos só produzem uma diferença considerável nas respostas quando a relação entre a espessura e a menor dimensão lateral da placa for maior ou igual a 20%. No capítulo anterior, Seção 6.5, observou-se que a diferença de módulo do erro relativo para os dois primeiros períodos apresentou o menor valor para o deslocamento, sendo em torno de 1,62%, enquanto que o maior erro ocorreu para o cortante, sendo igual a 6,00%. Já para a relação igual a 40%, o maior erro obtido foi para o momento, sendo igual a 17,15%.

Em geral, as metodologias focalizam bastante os deslocamentos, sendo observada aqui a importância da análise dos esforços internos e a contribuição dos termos inércias de translação nas expressões desses esforços, haja vista que eles excitam os modos de vibrações mais elevados.

7.2 Propostas para Continuidade do Trabalho

A seguir serão apresentadas algumas sugestões para pesquisas futuras:

1. Desenvolver outras funções da tensão σ_z , conforme Capítulo 2, a partir das condições de contorno nas faces superior e inferior da placa à medida que a altura da placa aumente;
2. Inclusão de outros tipos de carregamento sobre o domínio da placa, como por exemplo, cargas concentradas de força ou momento, assim como cargas distribuídas sobre uma região do domínio e cargas triangulares;
3. Incluir, nas análises, condições iniciais de deslocamento e velocidade diferentes de zero sobre o domínio da placa;
4. Considerar o gradiente de temperatura na presente formulação para análise de ambientes de risco, como galpões industriais e plataformas offshore;
5. Considerar a análise inelástica da placa, com a inclusão dos termos inerciais;
6. Considerar a influência das inércias translacionais quando a placa repousa sobre o terreno e investigar o comportamento dos esforços internos, quando esta se encontra em solos moles ou rígidos;
7. Considerar a possibilidade do semi-espço na presente formulação para análise de propagação de ondas.

Referências Bibliográficas

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I., **Handbook of Mathematical Functions**. New York, Dover Publications, 1965.
- BIGGS, J. M., **Introduction to Structural Dynamics**. U. S, McGraw-Hill Book Company, 1964.
- BAUER, H. F., “Nonlinear Responses of Elastic Plates to Pulse Excitation”, **Journal of Applied Mechanics**, v. 35, 1968.
- BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C., **Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering**. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1984.
- BESKOS, D. E., “Boundary Element Methods in Dynamic Analysis”, **Applied Mechanic Review ASME**, v. 40, 1987.
- BESKOS, D. E., **Dynamic Analysis of Plates. In Boundary Element Analysis of Plates and Shells**. Berlin, Springer, 1991.
- BANERJEE, P. K., **The Boundary Element Methods in Engineering**. 2nd ed., U. K, McGraw-Hill, 1994.
- BATH, K. J., **Finite Element Procedures**. New Jersey, Prentice Hall, 1996.
- CHEUNG, Y. K., CHAKRABARTI, S., “Free Vibration of Thick, Layered Rectangular Plates by a Finite Layer Method”, **Journal of Sound and Vibration**, v. 21, 1972.

- CARRER, J. A. M., **Técnicas Implícitas para Análise Elastoplástica Estática e Dinâmica com o Método dos Elementos de Contorno**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1991.
- CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., **Dynamics of Structures**. 2nd ed., Berkeley, McGraw-Hill, 1993.
- CARRER, J. A. M., MANSUR, W. J., “Time-Domain BEM Analysis for the 2D Scalar Wave Equation: Initial Conditions Contributions to Space and Time Derivatives”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, 1996.
- COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., WITT, R. J., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th ed., U. S, John Wiley & Sons, 2002.
- DAWE, D. J., “Finite Strip Models for Vibration of Mindlin Plates”, **Journal of Sound and Vibration**, v. 59, 1978.
- DAWE, D. J., ROUFAEIL, O. L., “Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates”, **Journal of Sound and Vibration**, v. 69, 1980.
- FOTIU, P. A., IRSCHIK, H., ZIEGLER, F., “Modal Analysis of Elastic-Plastic Plate Vibrations by Integral Equations”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 14, 1994.
- GREEN, A. E., “On Reissner’s Theory of Bending of Elastic Plates”, **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 7, 1949.
- GRAFF, K. F., **Wave Motion in Elastic Solids**. Ohio State, Oxford University Press, 1975.

GRAÇA, M. S. B. A., **Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Estática e Dinâmica de Placas Delgadas e Espessas**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, 2000.

KARAM, V. J., **Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas**. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1986.

KARAM, V. J., **Análise de Flexão de Placas pelo MEC Incluindo Não-Linearidade Física**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1992.

LEISSA, A. W., **Vibration of Plates**. NASA SP-160, NASA, Washington, D. C., 1969

LEE, YU-CHUNG, REISMANN, H., “Dynamics of Rectangular Plates”, **International Journal of Engineering Science**, v. 7, 1969.

MINDLIN, R. D., “Influence of Rotatory Inertial and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates”, **Journal of Applied Mechanics**, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, v. 73, 1951.

MORSE, P. M., FESHBACH, H., **Methods of Theoretical Physics**. U. S, McGraw-Hill Book Company, 1953.

MINDLIN, R. D., SCHACKNOW, A., DERESIEWICZ, H., “Flexural Vibrations of Rectangular Plates”, **Journal of Applied Mechanics**, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, v. 78, 1956.

MALVERN, L. E., **Introduction to the Mechanical of a Continuous Medium**. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1969.

- MANSUR, W. J., **A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems using the Boundary Element Method**. Ph. D. Thesis, Southampton, England, 1983.
- MIKAMI, T., YOSHIMURA, J., “Application of the Collocation Method to Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates”, **Computers & Structures**, v. 18, 1984.
- MITTELBAACH, F. R., **Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Dinâmica de Problemas Axissimétricos de Placas Delgadas e Espessas**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, RJ, Brasil, 2007.
- PLUNKETT, R., “Natural Frequencies of Uniform and Non-Uniform Rectangular Cantilever Plates”, **Journal Mechanical Engineering Science**, v. 5, 1963.
- PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E., “Free and Forced Vibrations of Plates by Boundary and Interior Elements”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, 1989a.
- PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E., “Free and Forced Vibrations of Plates by Boundary Elements”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 74, 1989b.
- PAZ, M., **Structural Dynamics. Theory and Computation**. 3rd ed., New York, Chapman & Hall, 1991.
- PROVIDAKIS, C. P., “A General and Advanced Boundary Element Transient Analysis of Elastoplastic Plates”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 17, 1996.

- PAZ, M., **Structural Dynamics. Theory and Computation**. 4th ed., New York, Chapman & Hall, 1997.
- PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E., “Dynamic Analysis of Plates by Boundary Elements”, **Applied Mechanic Review ASME**, v. 52, 1999.
- PROVIDAKIS, C. P., BESKOS, D. E., “Inelastic Transient Dynamic Analysis of Reissner-Mindlin Plates by the D/BEM”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 49, 2000.
- REISSNER, E., “On the Theory of Bending of Elastic Plates”, **Journal of Mathematics and Physics**, v. 23, 1944.
- REISSNER, E., “The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates”, **Journal of Applied Mechanics**, v. 12, 1945.
- REISSNER, E., “On Bending of Elastic Plates”, **Quarterly of Applied Mechanics**, v. 5, 1947.
- ROCK, T., HINTON, E., “Free Vibration and Transient Response of Thick and Thin Plates using the Finite Element Method”, **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 3, 1974.
- RAO, S. S., **Mechanical Vibrations**. 3rd ed., New York, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- SRINIVAS, S., JOGA RAO, C. V., RAO, A. K., “An Exact Analysis for Vibration of Simply-Supported Homogenous and Laminated Thick Rectangular Plates”, **Journal of Sound and Vibration**, v. 12, 1970.

- SMITH, B. T., BOYLE, J. M., DONGARRA, J. J., GARBOW, B. S., IKEBE, Y., KLEMA, V. C., MOLER, C. B., **Matrix Eigensystem Routines. EISPACK Guide**. Berlin, Springer-Verlag, 1976.
- SHAMES, I. H., DYM, C. L., **Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics**. U.S, McGraw-Hill, 1985.
- SOUZA, L. A., CARRER, J. A. M., MARTINS, C. J., “A Fourth Order Finite Difference Method Applied to Elastodynamics: Finite Element and Boundary Element Formulations”, **Structural Engineering and Mechanics**, v. 17, 2004.
- SLADEK, J., SLADEK, V., MANG, H. A., “Meshless LIBIE Formulations for Simply Supported and Clamped Plates under Dynamic Load”, **Computers & Structures**, v. 81, 2003.
- TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., **Theory of Plates and Shells**. 2nd ed., New York, McGraw-Hill, 1959.
- TELLES, J. C. F., “A Self-Adaptive Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, 1987.
- TAYLOR, R. L., **A Finite Element Analysis Program (FEAP) - Version 7.5 - User Manual**. Berkley, University of California at Berkley, 2005.
- WALLER, M. D., “Vibrations of Free Plates, Line Symmetry, Corresponding Modes”, **Proceedings of the Royal Society**, v. 211, 1952.
- WEEËN, F. V., “Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner’s Plate Model”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.18, 1982.

Apêndice A

Solução Analítica para Placa Retangular Simplesmente Apoiada com Várias Funções de Carregamento

Considere a placa mostrada na Figura A.1, que tem um plano médio retangular ($a \times b$), espessura h e massa por unidade de área $m = \rho h$, simplesmente apoiada em todos os lados, e sujeita a uma carga dinâmica uniformemente distribuída $q(t)$. A forma da deflexão deve ser tomada como (BIGGS, 1964):

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ji}(t) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{i\pi z}{b} \quad (\text{A.1})$$

onde A_{ji} é a ordenada modal do centro da placa. A equação (A.1) satisfaz todas as quatro condições de contorno:

$$\text{Em } x=0: M_x = M_{xz} = y = 0 \quad (\text{A.2a})$$

$$\text{Em } x=a: M_{xz} = M_z = y = 0 \quad (\text{A.2b})$$

$$\text{Em } z=0: M_{xz} = M_x = y = 0 \quad (\text{A.2c})$$

$$\text{Em } z=b: M_x = M_{zx} = y = 0 \quad (\text{A.2d})$$

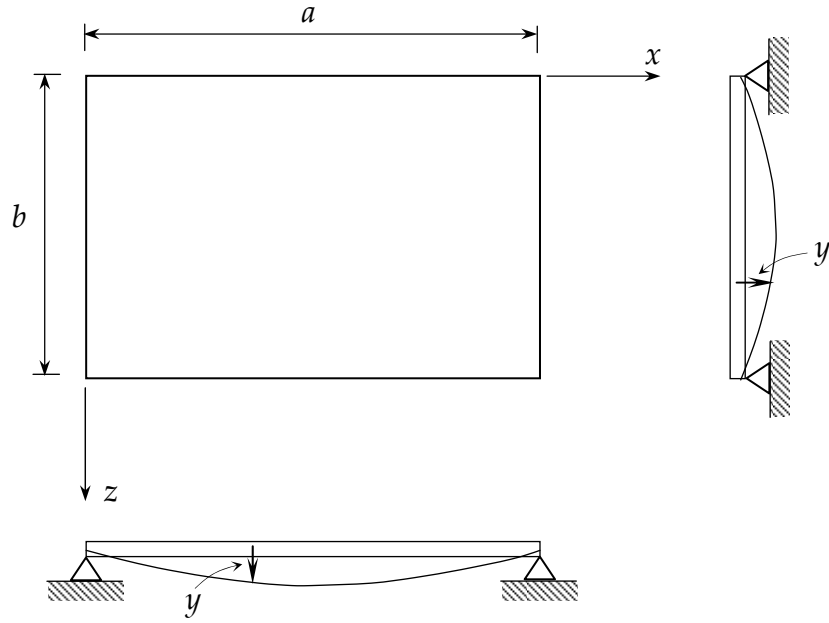


Figura A.1 - Placa retangular simplesmente apoiada.

A equação de Lagrange é usada para obter a equação modal do movimento:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{A}_{ji}} \right) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial A_{ji}} = \frac{\partial \mathcal{W}_e}{\partial A_{ji}} \quad (\text{A.3})$$

onde $\mathcal{K}$ é a energia cinemática, $\mathcal{U}$ é a energia de deformação e $\mathcal{W}_e$ é o potencial das forças externas.

A energia cinética de um elemento qualquer é dada por

$$d\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 dx dz \quad (\text{A.4})$$

Então a energia cinética total é obtida por integração sobre a área da placa, através da seguinte expressão:

$$\mathcal{K} = \int_0^b \int_0^a d\mathcal{K} \quad (\text{A.5})$$

o que resulta em

$$\mathcal{K} = \frac{1}{8} mab \dot{A}_{ji}^2 \quad (\text{A.6})$$

Entretanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{A}_{ji}} \right) = \frac{1}{4} mab \ddot{A}_{ji} \quad (\text{A.7})$$

A energia de deformação da placa é dada por

$$\mathcal{U} = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] dx dz \quad (\text{A.8})$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson, para material homogêneo.

Fazendo as operações necessárias em (A.1) e substituindo essas expressões em (A.8), obtém-se após a integração, o seguinte resultado:

$$\mathcal{U} = \frac{Eh^3 \pi^4 ab}{96(1-\nu^2)} A_{ji}^2 \left[\left(\frac{j}{a} \right)^2 + \left(\frac{i}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{A.9})$$

Entretanto

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial A_{ji}} = \frac{Eh^3\pi^4 ab}{48(1-\nu^2)} A_{ji} \left[\left(\frac{j}{a} \right)^2 + \left(\frac{i}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{A.10})$$

O trabalho externo devido a uma carga uniformemente distribuída é

$$\mathcal{W}_e = q(t) \int_0^b \int_0^a y dx dz \quad (\text{A.11})$$

o que resulta em

$$\mathcal{W}_e = q(t) \frac{4ab}{ij\pi^2} A_{ji} \quad (\text{A.12})$$

donde se tem que

$$\frac{\partial \mathcal{W}_e}{\partial A_{ji}} = q(t) \frac{4ab}{ij\pi^2} \quad (\text{A.13})$$

Portanto, ao substituir as expressões (A.7), (A.10) e (A.13) em (A.3), obtém-se após ordenar as parcelas, a equação modal do movimento:

$$\ddot{A}_{ji} + \omega_{ji}^2 A_{ji} = \frac{16}{jim\pi^2} q(t) \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\omega_{ji}^2 = \frac{Eh^3\pi^4}{12(1-\nu^2)m} \left[\left(\frac{j}{a} \right)^2 + \left(\frac{i}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (\text{A.15})$$

sendo ω_{ji} a frequência natural para todos os modos de vibração da placa retangular apoiada.

A ordenada modal é obtida a partir da seguinte expressão:

$$A_{ji}(t) = (A_{ji})_{nst} DLF(t) \quad (A.16)$$

onde $(A_{ji})_{nst}$ é a amplitude estática para o j -ésimo e o i -ésimo modo, obtido a partir de (A.14), fazendo $\ddot{A}_{ji} = 0$, o que resulta em

$$(A_{ji})_{nst} = \frac{16}{jim\pi^2\omega_{ji}^2} q(t) \quad (A.17)$$

e DLF é definido como o fator de carga dinâmico que depende da função de carregamento. Assim, se a função que define a carga apresenta uma das formas dada na Figura A.2, onde q_0 e t_0 são a amplitude máxima e o tempo de duração da carga, respectivamente; então, esse fator obedece às seguintes sentenças (BIGGS, 1964):

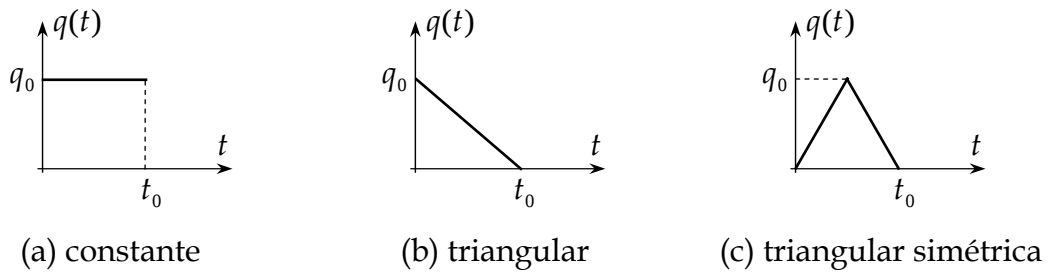


Figura A.2 - Funções de carregamento no tempo.

- Para a função de carregamento (a):

$$DLF(t) = \begin{cases} 1 - \cos \omega t & ; \quad t \leq t_0 \\ \cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t & ; \quad t \geq t_0 \end{cases} \quad (A.18a)$$

- Para a função de carregamento (b):

$$DLF(t) = \begin{cases} 1 - \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega t_0} - \frac{t}{t_0} & ; \quad t \leq t_0 \\ \frac{1}{\omega t_0} [\sin \omega t - \sin \omega(t - t_0)] - \cos \omega t & ; \quad t \geq t_0 \end{cases} \quad (\text{A.18b})$$

- Para a função de carregamento (c):

$$DLF(t) = \begin{cases} \frac{2}{t_0} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) & ; \quad 0 \leq t \leq t_0/2 \\ \frac{2}{t_0} \left\{ t_0 - t + \frac{1}{\omega} \left[2 \sin \omega \left(t - \frac{t_0}{2} \right) - \sin \omega t \right] \right\} & ; \quad t_0/2 \leq t \leq t_0 \\ \frac{2}{\omega t_0} \left[2 \sin \omega \left(t - \frac{t_0}{2} \right) - \sin \omega t - \sin \omega(t - t_0) \right] & ; \quad t \geq t_0 \end{cases} \quad (\text{A.18c})$$

As expressões das rotações e dos esforços internos são obtidas a partir das relações da elasticidade:

$$\theta_x = y_{,x} = \sum_j \sum_i A_{ji} \frac{j\pi}{a} \cos \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{i\pi z}{b} \quad (\text{A.19a})$$

$$\theta_z = y_{,z} = \sum_j \sum_i A_{ji} \frac{i\pi}{b} \sin \frac{j\pi x}{a} \cos \frac{i\pi z}{b} \quad (\text{A.19b})$$

$$M_x = -D(K_{xx} + \nu K_{zz}) = D\pi^2 \sum_j \sum_i A_{ji} \left[\left(\frac{j}{a} \right)^2 + \nu \left(\frac{i}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{i\pi z}{b} \quad (\text{A.19c})$$

$$M_z = -D(K_{zz} + \nu K_{xx}) = D\pi^2 \sum_j \sum_i A_{ji} \left[\left(\frac{i}{b} \right)^2 + \nu \left(\frac{j}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{i\pi z}{b} \quad (\text{A.19d})$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 y) = D\pi^3 \sum_j \sum_i A_{ji} \left(\frac{j}{a} \right) \left[\left(\frac{j}{a} \right)^2 + \left(\frac{i}{b} \right)^2 \right] \cos \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{i\pi z}{b} \quad (\text{A.19e})$$

$$Q_z = -D \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 y) = D \pi^3 \sum_j \sum_i A_{ji} \left(\frac{i}{b} \right) \left[\left(\frac{j}{a} \right)^2 + \left(\frac{i}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{j\pi x}{a} \cos \frac{i\pi z}{b} \quad (\text{A.19f})$$

com

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{A.20a})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.20b})$$

$$K_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{A.20c})$$

$$K_{zz} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad (\text{A.20d})$$

onde D é a rigidez flexional da placa; ∇^2 é o operador laplaciano; K_{xx} e K_{zz} são curvaturas.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)