

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

*Sincronização idêntica em redes de osciladores  
caóticos*

Emmanuel Gräve de Oliveira

Porto Alegre  
2005

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

*Sincronização idêntica em redes de osciladores  
caóticos*

Emmanuel Gräve de Oliveira

Dissertação elaborada sob a orientação do  
Prof. Dr. Thomas Braun, em preenchimento  
parcial dos requisitos para a obtenção do tí-  
tulo de Mestre em Física.

Porto Alegre  
2005

*Aos meus pais.*

# *Agradecimentos*

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Prof. Dr. Thomas Braun, que simpaticamente me ensinou os caminhos não-lineares da pesquisa e do trabalho em física. Também aos professores e funcionários de nosso instituto, sempre cordiais no tratamento dos alunos.

Expresso gratidão aos colegas de laboratório, dispostos a sempre me ajudar com meus problemas. Devo bastante aos colegas com os quais trabalhei junto: Eduardo Martins da Rocha, Ismael André Heisler, Leonardo Alexandre Pletsch, Roberto Paaz, Rodrigo Ebert Harsteln e Rodrigo Link Federizzi. Também ao colega Júlio Ricardo Schoffen, referência do laboratório.

Não posso deixar de mencionar os demais colegas do Instituto de Física, companheiros de bons estudos e boas conversas. Com certeza, cumprem papéis importantes na minha formação os amigos Julio Monti Belmonte, Pedro Castro Menezes, Rafael Bán Jacobsen, Rodrigo Nemmen da Silva e Rodrigo Sérgio Wiederkehr, entre outros.

Aos meus familiares devo retribuição pelo interesse e suporte. Por fim, os amigos em geral (dos quais ressalto a Luiza Dantas Campello) são pessoas que sabem alegrar a minha vida e merecem meu reconhecimento.

*But since you will now be so much better employed, when you think of the world give it one lash the more at my request. I have ever hated all nations, professions, and communities, and all my love is toward individuals: for instance, I hate the tribe of lawyers, but I love Counsellor Such-a-one, and Judge Such-a-one: so with physicians (I will not speak of my own trade) soldiers, English, Scotch, French, and the rest. But principally I hate and detest that animal called man, although I heartily love John, Peter, Thomas, and so forth. This is the system upon which I have governed myself many years, but do not tell, and so I shall go on till I have done with them.*

*Jonathan Swift*

# *Resumo*

A presente dissertação versa sobre a sincronização idêntica em redes de osciladores caóticos. Uma perspectiva razoavelmente histórica sobre a literatura da área é apresentada. O conceito de caos é introduzido junto com outras idéias da dinâmica não-linear: sistemas dinâmicos, exemplos de sistemas, atratores, expoentes de Liapunov, etc. A integração numérica de equações diferenciais é largamente utilizada, principalmente para o cálculo de expoentes e o desenho do diagrama de fases.

A sincronização idêntica é definida inicialmente em redes que não passam de um par de osciladores. A variedade de sincronização (conjunto de pontos no espaço de fases no qual a solução do sistema é encontrada se há sincronização) é determinada. Diferentes variantes de acoplamentos lineares são enfocadas: acoplamento interno, externo, do tipo mestre-escravo e bidirecional, entre outras. Para detectar sincronização, usa-se o conceito de expoente de Liapunov transversal, uma extensão do conceito clássico de expoente de Liapunov que caracteriza a sincronização como a existência de um atrator na variedade de sincronização. A exposição é completada com exemplos e atinge relativo detalhe sobre o assunto, sem deixar de ser sintética com relação à ampla literatura existente. Um caso de sincronização em antifase que usa a mesma análise é incluído.

A sincronização idêntica também é estudada em redes de osciladores idênticos com mais de dois osciladores. As possibilidades de sincronização completa e parcial são explanadas. As técnicas usadas para um par de osciladores são expandidas para cobrir este novo tipo de redes. A existência de variedades de sincronização invariantes é considerada como fator determinante para a sincronização. A sincronização parcial gera estruturas espaciais, analisadas sob a denominação de padrões. Algumas relações importantes entre as sincronizações são explicitadas, principalmente as degenerescências e a relação entre a sincronização parcial e a sincronização completa do respectivo estado sincronizado para alguns tipos de acoplamento.

Ainda são objetos de interesse as redes formadas por grupos de osciladores idênticos que são diferentes dos osciladores dos outros grupos. A sincronização parcial na qual todos os grupos de osciladores têm seus elementos sincronizados é chamada de sincronização primária. A sincronização secundária é qualquer outro tipo de sincronização parcial. Ambas são exemplificadas e analisadas por meio dos expoentes transversais e novamente por meio da existência de invariantes de sincronização. Obtém-se então uma caracterização suficientemente ampla, completada por casos específicos.

# *Abstract*

The present thesis is concerned with identical synchronization in networks of chaotic oscillators. A reasonably historical perspective on the literature on the subject is presented. The concept of chaos is introduced along with other ideas of nonlinear dynamics: dynamical systems, examples of systems, attractors, Lyapunov exponents, etc. Numerical integration of differential equations is largely used, mainly for the calculation of exponents and the drawing of the phase portrait.

Identical synchronization is initially defined in networks composed of a single pair of oscillators. The synchronization manifold (set of points in the phase space in which the solution of the system is found if there is synchronization) is determined. Different variants of linear coupling are focused: internal, external, master-slave, and bidirectional coupling, among others. To detect synchronization, the concept of transversal Lyapunov exponent—an extension of the classical concept of Lyapunov exponent that characterizes the synchronization as the existence of an attractor on the synchronization manifold—is used. The presentation is complemented by examples and explains the subject in relative detail, while summarizing the large available literature. A case of antiphase synchronization that uses the same analysis is included.

Identical synchronization is also studied in networks of identical oscillators with more than two oscillators. The possibilities of complete and partial synchronization are considered. The techniques used for a pair of oscillators are expanded to encompass this new kind of network. The existence of invariant synchronization manifolds is considered a determinant factor for synchronization. Partial synchronization generates spatial structures, analyzed under the denomination of patterns. Some important relations between the synchronizations are made explicit, mainly the degeneracies and the relation between partial synchronization and complete synchronization of the respective synchronized state for some kinds of coupling.

Furthermore, networks composed of groups of identical oscillators which are different from the oscillators of the other groups are objects of interest. The partial synchronization in which all groups of oscillators have their elements synchronized is called primary synchronization. Secondary synchronization is any other type of partial synchronization. Both are exemplified and analyzed with transversal exponents and again with the existence of invariant synchronization manifolds. A sufficiently broad characterization is then obtained, complemented by specific cases.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 9
<b>2</b>	<b>Sistemas dinâmicos</b>	p. 13
2.1	Primeiras noções . . . . .	p. 13
2.2	Exemplos de sistemas dinâmicos . . . . .	p. 14
2.2.1	Sistema de Lorenz . . . . .	p. 15
2.2.2	Sistema de Rössler . . . . .	p. 15
2.3	Integração numérica . . . . .	p. 16
2.4	Forma das soluções e atratores . . . . .	p. 18
2.5	Expoentes de Liapunov . . . . .	p. 22
<b>3</b>	<b>Pares de osciladores caóticos idênticos</b>	p. 29
3.1	O par . . . . .	p. 29
3.2	Definição de sincronização idêntica . . . . .	p. 30
3.3	Acoplamento externo . . . . .	p. 32
3.4	Acoplamento interno . . . . .	p. 40
3.5	Sincronização em antifase . . . . .	p. 42
<b>4</b>	<b>Redes de osciladores caóticos idênticos</b>	p. 45
4.1	A rede . . . . .	p. 45
4.2	Sincronização completa . . . . .	p. 47
4.3	Sincronização parcial . . . . .	p. 52

<b>5</b>	<b>Redes de diferentes classes de osciladores caóticos</b>	p. 61
5.1	A rede . . . . .	p. 61
5.2	Sincronização . . . . .	p. 62
5.2.1	Considerações gerais . . . . .	p. 62
5.2.2	Aplicações . . . . .	p. 63
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	p. 70
	<b>Referências</b>	p. 72
	<b>Apêndice A – Exemplo de programa para a integração numérica</b>	p. 75

# 1 *Introdução*

O estudo de sistemas dinâmicos tem recebido grande atenção da comunidade científica recentemente (1). Isto deve-se a vários motivos, entre eles, o grande avanço computacional registrado no século passado. Este avanço aumentou as possibilidades de pesquisa, pois cálculos que antes eram feitos morosamente e com baixa precisão agora são feitos de maneira efficientíssima. O uso de grandes computadores no início e depois de computadores pessoais com ou sem processamento paralelo permitiu o estudo de problemas antes preteridos. Além disso, a popularização do computador tornou o cálculo numérico acessível a um custo baixo. Reflexos disto podem ser vistos no crescimento de investigações numéricas, em contraponto às teóricas e às experimentais.

Outro motivo foi o despontar do interesse pela complexidade e pela não-linearidade. As técnicas computacionais possibilitaram aos cientistas a pesquisa de sistemas complexos e não-lineares, os quais antes só poderiam ser estudados mediante alguma aproximação. Evidentemente, quando se quer estudar modelos complexos, fazer aproximações geralmente significa desfigurar de tal maneira o sistema a ponto de anular sua complexidade. Dentre estes sistemas que agora estão em foco, uma grande parte vem de modelos biológicos. Isto não é espantoso, já que a biologia pode ser considerada o estudo da complexidade organizada (2). Entretanto, muitos sistemas podem ter sua origem na física, principalmente na área de mecânica estatística.

O último motivo a ser listado aqui será o avanço teórico do estudo qualitativo ou topológico de sistemas dinâmicos. Estes avanços proporcionaram uma grande compreensão dos fenômenos complexos. Com certeza, as técnicas qualitativas permitiram o entendimento dos principais conceitos do estudo de sistemas dinâmicos, regulando em quais situações o esforço numérico deve ser investido. Nesse enfoque não se procura obter a solução completa dos problemas, porém o objetivo torna-se entender as propriedades gerais da solução: será estática? será oscilante? ou será caótica?

Os primeiros sistemas dinâmicos estudados neste contexto foram aqueles com poucas

dimensões, às vezes resultados de simplificações de sistemas maiores. Apesar destas limitações, eles mostraram que a natureza ainda guardava uma surpresa, um novo tipo de fenômeno, um tema pródigo de estudo para os cientistas associado à não-linearidade e à complexidade. Hoje genericamente se chama o que foi descoberto de *caos*. Isto teve um grande impacto, pois mostrou praticamente que sistemas dinâmicos com poucas dimensões podem apresentar algum tipo de comportamento complexo. Os sistemas de Lorenz (3) e Rössler (4), entre outros, são exemplos com três variáveis dinâmicas que já apresentam atratores fractais. Além disto, o sistema de Lorenz é uma simplificação de um sistema mais complexo (5) e o sistema de Rössler origina-se em uma tentativa de obter-se um sistema ainda mais simples que apresente caos.

Logo após, sistemas com muitas dimensões começaram a ser considerados e mostraram uma grande riqueza de comportamentos. Dentre esses sistemas, os que eram compostos de vários subsistemas (simples) acoplados tinham uma relevância natural. De alguma forma eles eram uma ligação entre sistemas com muitas e poucas dimensões. Haveria alguma relação entre as variáveis destes subsistemas? Mesmo se estes fossem caóticos quando isolados? Neste paradigma, surge o conceito de sincronização (6, 7) entre os subsistemas. A sincronização pode ser entendida como o início do estudo da complexidade espaço-temporal, uma vez que considera sistemas que são compostos de vários subsistemas. Estes, freqüentemente, são os que já foram citados, de poucas dimensões. A sincronização pode ser definida como sendo a existência de alguma relação entre os comportamentos dos subsistemas. Variando a relação, muda-se o tipo de sincronização. A literatura da área define muitos tipos de sincronização.

O sistema como um todo pode ser pensado como uma rede. Cada subsistema (ou oscilador) pode ser pensado como um sítio nesta rede. Geralmente, primeiro a rede (em outras palavras, o sistema) é definida. Comumente, as redes estudadas em sincronização são compostas de osciladores não-lineares idênticos, em que *idêntico* significa com a mesma regra dinâmica, mas não necessariamente com a mesma condição inicial e subsequente evolução temporal. Estes subsistemas, na maioria dos casos, são acoplados linearmente. Após a definição da rede, os tipos de sincronização que podem existir nela são estudados. Estes tipos são definidos a partir da relação exigida entre os comportamentos dos subsistemas (entre os estados dos sítios).

Em um sistema que possua dois subsistemas iguais, a forma mais simples de relacionar os estados dos mesmos é igualando-os, ou seja, os subsistemas estão sincronizados quando as variáveis de ambos são as mesmas. Isto é chamado de *sincronização idêntica*. Esta

dissertação ficará restrita a tipos derivados desta sincronização. Estes tipos praticamente só podem ser obtidos quando os osciladores são idênticos.

Em uma rede composta por  $N$  osciladores iguais, é interessante descobrir quando as variáveis de todos os sistemas apresentam a mesma evolução temporal. Em outras palavras, descobrir quando todo o par de osciladores escolhido na rede apresenta sincronização idêntica. Este tipo de sincronização é chamado de *sincronização completa*. Os primeiros trabalhos sobre sincronização em sistemas dinâmicos (8, 9) tratam justamente deste tipo de sincronização. Um fato curioso da sincronização completa é que todos os subsistemas agem como sendo apenas um, ou seja, em se conhecendo as variáveis de um oscilador, as variáveis de todos os outros são conhecidas.

Uma rede composta por mais de dois osciladores iguais pode apresentar mais um tipo de sincronização muito importante: a *sincronização parcial* (10–13). Esta sincronização é atingida quando ao menos um par de subsistemas apresenta sincronização idêntica, mas ao menos um par de osciladores não apresenta. Neste tipo de sincronização não há um comportamento global a seguir, mas sim de dois a  $N - 1$  comportamentos. Nas redes submetidas a esta condição, há a formação de estruturas espaciais, marcadas pela disposição dos grupos de osciladores que possuem a mesma evolução temporal. Essas estruturas espaciais são chamadas de padrões. Novamente, o acoplamento é um dos fatores determinantes. Com uma definição mais ampla de sincronização parcial pode-se incluir, como casos especiais desta, a sincronização completa e a dessincronização.

Pode-se também querer estudar sistemas um pouco diferentes: os formados por diferentes classes (ou espécies) de subsistemas idênticos. Por exemplo, uma rede com quatro osciladores, na qual o primeiro e o segundo são idênticos e o terceiro e o quarto também. No entanto, o primeiro e o segundo não são iguais ao terceiro e ao quarto. Dessa maneira, diz-se que há duas classes distintas de osciladores na rede. Dificilmente, tais sistemas apresentarão sincronização completa, contudo a sincronização parcial ainda é possível. Um tipo destacado de sincronização parcial existe quando todos os pares de osciladores idênticos possíveis estão sincronizados identicamente. No nosso exemplo, seria o caso de sincronização idêntica entre o primeiro e o segundo e entre o terceiro e o quarto. Este caso de sincronização parcial será chamado de *sincronização primária*. *Sincronização secundária* será então qualquer outro caso de sincronização parcial na rede. No exemplo, quando o primeiro e o segundo oscilador estão sincronizados, mas o terceiro e o quarto não, ou vice-versa. Os sistemas apresentados neste parágrafo são menos restritivos do que os anteriores, nos quais todos os osciladores eram idênticos.

Talvez a primeira sincronização estudada tenha sido a *sincronização em antifase*. Se a sincronização idêntica caracteriza-se pela igualdade entre as variáveis dos subsistemas, a em antifase é caracterizada pela igualdade entre as variáveis de um sistema e as variáveis do outro com o sinal oposto. O caso foi reportado por C. Huygens em 1673<sup>1</sup>: ele observou que dois relógios de pêndulo idênticos, afixados em uma mesma barra (flexível), em um curto espaço de tempo oscilavam de forma sincronizada, em antifase.

Recentemente (14), em 2000, começou-se a explorar a possibilidade de sincronização idêntica entre as variáveis de um subsistema no tempo  $t$  e as variáveis de outro subsistema no tempo  $t + \tau$ . Surpreendentemente, mesmo osciladores caóticos, que possuem sensibilidade exponencial para pequenas diferenças de condições iniciais, podem apresentar este tipo de sincronização para tempos de antecipação arbitrariamente longos. Evidentemente, com este tipo de sincronização, pode-se prever o comportamento de algum sistema de interesse. Isso mostra que o estudo sobre sincronização é um campo com vigor na pesquisa.

A organização da presente dissertação centrou-se na sincronização idêntica e na forma das redes. No capítulo 2, as ferramentas necessárias da teoria são apresentadas, junto com a nomenclatura adequada. No capítulo 3, redes com dois sistemas idênticos e a sincronização idêntica entre ambos são estudadas. No capítulo 4, redes com mais subsistemas são investigadas e o conceito de sincronização idêntica é usado para definir a sincronização completa e a parcial. O capítulo 5 introduz um tema relativamente novo na literatura: as possibilidades de sincronização parcial em redes por diferentes classes de osciladores idênticos. Finalmente, o capítulo 6 contém uma breve conclusão. Muito do que é mostrado na dissertação é explorado em trabalhos anteriores (15–20) e o material do capítulo 5 com pequenas modificações está sendo considerado para publicação em uma revista internacional da área.

---

<sup>1</sup>HUYGENS, C. *Horologium oscillatorium*. Paris: [s.n.], 1673.

## 2 *Sistemas dinâmicos*

O presente capítulo apresenta um pouco da teoria de sistemas dinâmicos, sob um enfoque subordinado aos objetivos da dissertação. São introduzidas algumas noções, como os conceitos de atrator e de espaço de fases. Um deles muito importante é o de expoente de Liapunov, sempre presente no estudo a ser realizado. O método de integração numérica também é discutido e exemplos são dados.

### 2.1 Primeiras noções

Um sistema dinâmico é uma regra matemática e determinística para a evolução temporal do estado de um sistema (21), ou seja, do estado de um objeto de estudo. Esta evolução temporal pode ser contínua ou discreta. Nesta dissertação, dar-se-á preferência a certos tipos de sistemas dinâmicos, especificados neste capítulo. O tempo, representado pela letra  $t$ , será sempre uma variável contínua e real. As variáveis reais, contínuas e dependentes do tempo  $x_i(t)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  caracterizarão o estado do sistema. A regra para a evolução de  $x_i$  não dependerá explicitamente de  $t$ , ou seja, os sistemas serão *autônomos*. O inteiro positivo  $n$  é a dimensão do sistema. Todas as variáveis serão adimensionais, exceto se especificado o contrário. Em forma vetorial, a regra será descrita pela equação:

$$\dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)), \quad (2.1)$$

na qual o ponto indica a derivada temporal e  $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , com efeito,  $\mathbf{x}$  é o vetor coluna com componente  $i$  igual a  $x_i$ . A função  $\mathbf{f}$  é diferenciável e pode depender de parâmetros, isto é, variáveis que não dependem do tempo a princípio. A solução  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  de um sistema é uma função do tempo e depende do estado inicial do sistema, ou seja, das condições iniciais  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0)$  (geralmente,  $t_0 = 0$ ). Por simplicidade, de agora em diante ficarão implícitas estas dependências:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Sistemas não-autônomos também podem ser representados desta maneira; basta que o tempo seja considerado a variável  $x_{n+1}$  do sistema. Além disso, sistemas a tempo discreto podem ser vistos como simplificações de sistemas a tempo contínuo. Acrescenta-se que sistemas que possuam regras de evolução que dependam da segunda derivada temporal das variáveis (ou de derivadas de ordens mais elevadas) podem ser transformados na forma acima mediante o acréscimo de uma ou mais variáveis.

O sistema também deverá ser dissipativo, o que significa que a seguinte relação valerá – pelo menos para alguns valores de  $\mathbf{x}$  (21):

$$\nabla \cdot \mathbf{f} < 0. \quad (2.3)$$

Adicionalmente, a função será não-linear nos casos de interesse (o sistema será dito não-linear). Isto é equivalente a garantir que a função não obedece à seguinte relação:

$$\mathbf{f}(p\mathbf{x} + p'\mathbf{x}') = p\mathbf{f}(\mathbf{x}) + p'\mathbf{f}(\mathbf{x}'). \quad (2.4)$$

A tarefa de resolver um sistema não-linear, a saber, determinar  $x_i$  como função de  $t$ , na maioria das vezes, não é fácil e nem sempre é possível usando apenas funções simples (como senos e co-senos).

*Espaço de fases* do sistema 2.2 é o domínio das variáveis  $x_i$  e, comumente, o domínio é o  $\mathbb{R}^n$ . Cada condição inicial ou estado atual do sistema  $\mathbf{x}(t)$  é um ponto no espaço de fases. A solução do sistema é representada no espaço de fases com uma *trajetória* (ou *órbita*), uma curva que inicia na condição inicial e, conforme o tempo avança, passa pelos pontos correspondentes à solução. A representação de todas as trajetórias possíveis no espaço de fases é chamada de *diagrama* ou *retrato de fases* (5, 22). Devido às dificuldades em representar infinitas trajetórias e em expressar figuras geométricas de um espaço com dimensão  $n$ , geralmente apenas as trajetórias mais relevantes são apresentadas no diagrama e apenas uma projeção ou um corte do mesmo é mostrado.

## 2.2 Exemplos de sistemas dinâmicos

Os sistemas dinâmicos serão estudados com exemplos, escolhidos por suas propriedades úteis relacionadas ao tema do corrente texto.

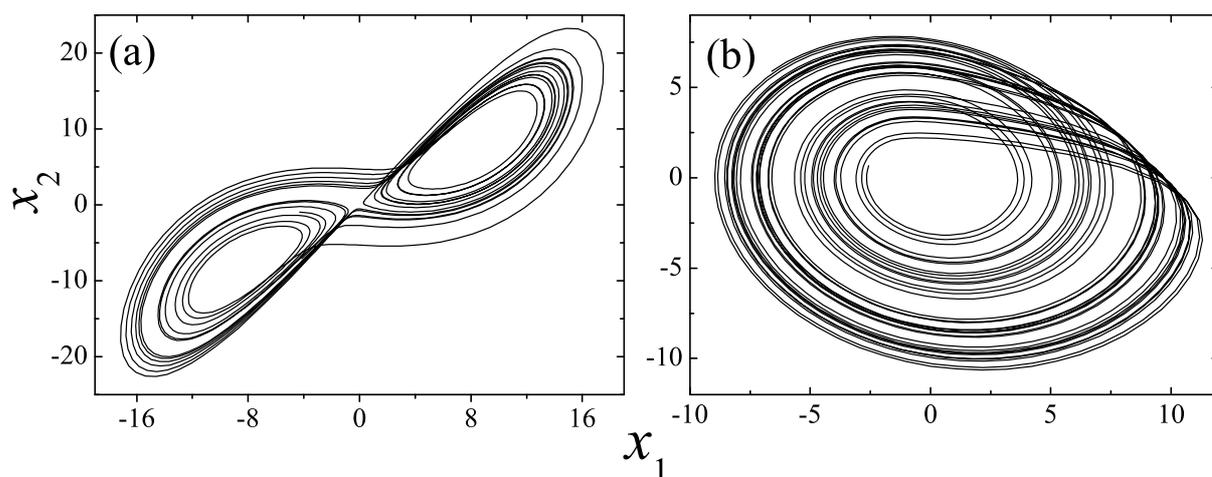


Figura 1: Trajetórias típicas de sistemas dinâmicos com  $n = 3$  em projeção no plano  $x_3 = 0$ . a) Sistema de Lorenz. É interessante observar a simetria  $(x_1, x_2) \rightarrow (-x_1, -x_2)$ . b) Sistema de Rössler, com apenas um *rolo*.

### 2.2.1 Sistema de Lorenz

Em 1963 um sistema dinâmico foi introduzido por Lorenz (3). O sistema era uma tentativa de modelagem de um problema de implicações atmosféricas. As equações eram:

$$\dot{x}_1 = \sigma_L(x_2 - x_1) \quad (2.5a)$$

$$\dot{x}_2 = r_L x_1 - x_2 - x_1 x_3 \quad (2.5b)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - b_L x_3. \quad (2.5c)$$

Os parâmetros escolhidos são geralmente:  $\sigma_L = 10$ ,  $r_L = 28$  e  $b_L = 8/3$ . O diagrama de fases apresenta uma figura com dois *rolos* (ver figura 1).

### 2.2.2 Sistema de Rössler

Em 1976 um sistema dinâmico foi introduzido por Rössler (4) como uma tentativa de simplificar o sistema de Lorenz. Enquanto este continha duas não-linearidades, aquele, apenas uma. Além disso, o sistema de Rössler apresentava um atrator caótico mais simples, composto de apenas um *rolo*. As equações eram:

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \quad (2.6a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + a_R x_2 \quad (2.6b)$$

$$\dot{x}_3 = b_R + x_3(x_1 - c_R). \quad (2.6c)$$

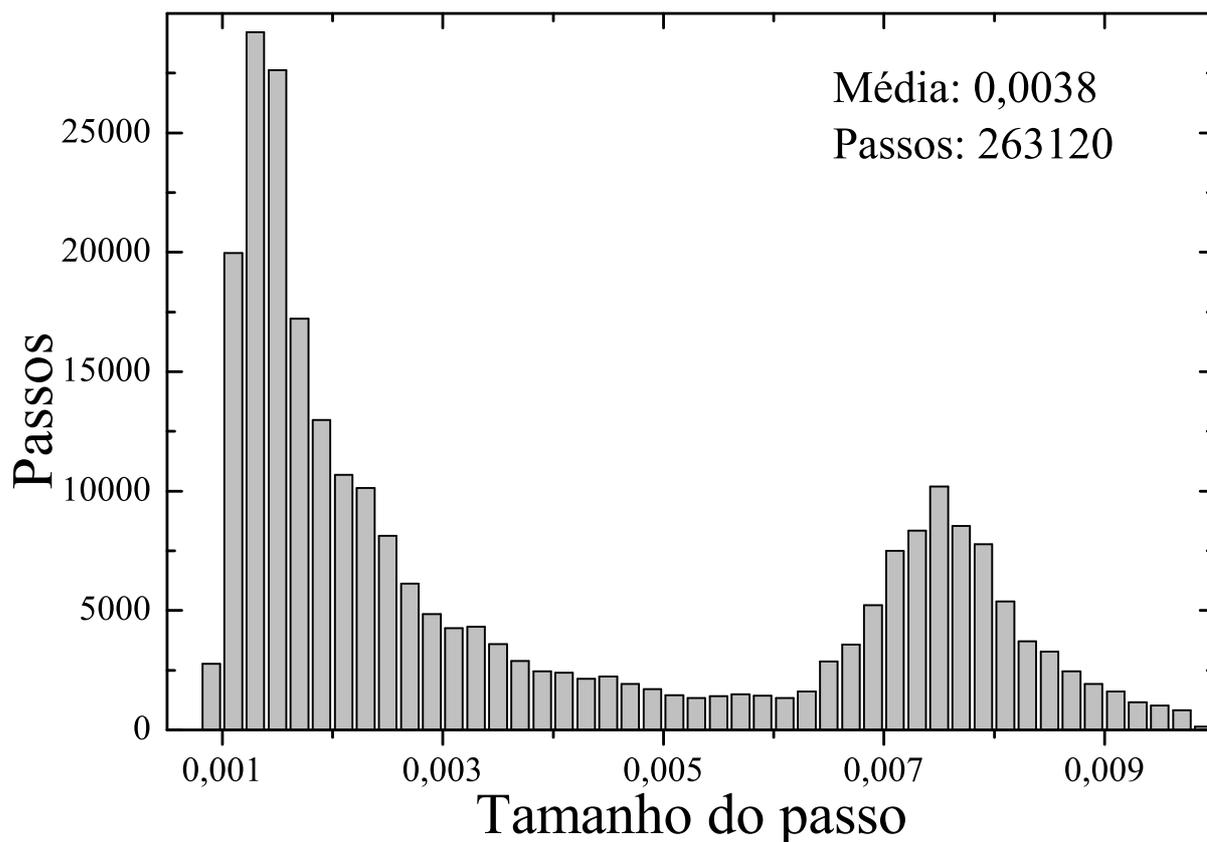


Figura 2: Distribuição dos passos pelo tamanho em um cálculo para o sistema de Rössler com os parâmetros  $a_R = b_R = 0,2$  e  $c_R = 5,7$  e tolerância  $10^{-10}$ , com trajetória mostrada na figura 1. A grande variação do tamanho do passo justifica o uso de um método de passo variável.

Os parâmetros iniciais propostos por Rössler eram:  $a_R = b_R = 0,2$  e  $c_R = 5,7$ . Na figura 1 há uma trajetória típica no espaço de fases.

## 2.3 Integração numérica

Uma ferramenta muito importante para os estudos de sistemas dinâmicos é a integração numérica. Se a equação 2.2 e as condições iniciais são conhecidas, o sistema é sujeito à integração numérica. Geralmente, os métodos numéricos calculam valores aproximados  $\mathbf{x}'(t_i)$  da solução real  $\mathbf{x}(t_i)$  para alguns valores crescentes de  $t$ , indicados por  $t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n_p$ ;  $t_i > t_j$  se  $i > j$ ). Cada valor aproximado apresenta um desvio (ou erro) com relação à solução original dado por  $\mathbf{x}'(t_i) - \mathbf{x}(t_i)$ . Um bom método de integração numérica faz com que este desvio seja desprezível e com que a solução aproximada apresente todas as características importantes da solução exata.

Muitos métodos utilizam uma diferença entre  $t_i$  e  $t_{i+1}$  constante. Esses métodos são

chamados de *métodos de passo fixo*. Os outros são chamados *métodos de passo variável*. Se o cálculo do valor  $\mathbf{x}'(t_{i+1})$  depende apenas de  $\mathbf{x}'(t_i)$  e  $t_i$ , o método é dito *de passo simples*. Se o cálculo de  $\mathbf{x}'(t_{i+1})$  depende também de  $\mathbf{x}'(t_{i-1})$  e  $t_{i-1}$  ou qualquer outro valor  $\mathbf{x}'$ , o método é dito *de passo múltiplo*.

Métodos comumente usados são os *métodos de Runge-Kutta*. São métodos de passo simples e fixo. Um método de Runge-Kutta de quarta ordem (abreviado por *RK4*), por exemplo, tem erro que varia com a quarta potência do passo. Então o erro pode ser diminuído muito rapidamente com a diminuição do passo. Entretanto, o passo fixo traz uma desvantagem: a cada passo dado, há um erro local que não necessariamente se mantém constante. Um sistema não-linear pode apresentar grandes variações deste erro. Ademais, durante uma integração numérica, um parâmetro do sistema pode ser alterado, o que causa grande variação do erro local. Se este não é constante, alguns passos podem introduzir muita imprecisão na solução aproximada e a única maneira de resolver isso é diminuir todos os passos, o que adiciona mais tempo de integração em passos que já sofriam de erro aceitável.

Os métodos de passo variável contornam essas dificuldades: ao invés de haver um passo característico, uma tolerância é fixada, ou seja, o quanto de erro é admitido por tempo ( $t$ ) é estabelecido. Dessa maneira, o passo será ajustado para manter o erro constante. Na presente dissertação é utilizado um método deste tipo, o *Runge-Kutta-Fehlberg de quarta e quinta ordens* (23), abreviado por *RKF45*. Para um passo dado, o método calcula de duas maneiras o valor seguinte  $\mathbf{x}'$ : uma usando um método de Runge-Kutta de quarta ordem e outra usando um de quinta ordem. O último valor é guardado como a solução numérica da equação. O método, outrossim, estima o erro local com base nas diferenças entre os dois resultados. Com esta estimativa de erro, o passo é otimizado para que a tolerância seja atingida na marca ou, em outras palavras, para que o erro por tempo ( $t$ ) seja sempre o mesmo. Escrito dessa maneira, cabe lembrar que o método faz tudo isso de maneira ótima, sem seguir os passos que foram usados aqui para explicá-lo. Conclui-se que o RKF45 é um método de quinta ordem com um pouco mais de demora no cálculo do que um método RK5, mas com a significativa vantagem do passo variável.

Métodos de Runge-Kutta de ordens mais altas exigem mais complicações numéricas por passo. Assim, tornam-se menos eficientes do que um método de ordem menor com um passo (tolerância) menor. Métodos que não são do tipo Runge-Kutta geralmente exigem a derivação da função do sistema, o que muitas vezes acarreta problemas. Por fim, métodos de passo múltiplo não são facilmente transformáveis em métodos de passo variável.

vel. Usualmente esta transformação exige mais cálculos numéricos e interpolações (23), novamente comprometendo a eficiência da integração numérica. Todas as complicações descritas neste parágrafo são, adicionalmente, fontes de erro na execução propriamente dita do cálculo numérico. Considerado tudo isso, o método RKF45 surge como a melhor opção.

A implementação do método numérico será feita no computador com a linguagem de programação C++ (24), uma linguagem com a eficiência adequada e orientada a objetos. Todos os dados usados nos gráficos foram obtidos dessa maneira, com programas como o mostrado no apêndice. Contudo, o computador é limitado: não pode armazenar todo o contínuo dos números reais. A discretização de  $\mathbf{x}$  provoca o *erro de arredondamento*. Com tantos erros, pode-se perguntar se a solução numérica tem alguma chance de aproximar-se de uma solução exata do sistema dinâmico. Nas palavras de Ott (21), há boas razões para acreditar que sim, mesmo para os casos mais problemáticos. Isto é devido às propriedades de *sombreamento* de sistemas dinâmicos, um estudo interessante, mas que foge ao presente escopo.

Na figura 2, é mostrada a distribuição do tamanho de passo para o método RKF45 usado no cálculo da trajetória do sistema de Rössler mostrada na figura 1. É importante perceber que o passo varia em até dez vezes o seu tamanho. Métodos de passo fixo perdem muita eficiência por não possuírem esta flexibilidade. A figura não inclui variações dos parâmetros e exclui possíveis influências no tamanho do passo oriundas desta causa.

## 2.4 Forma das soluções e atratores

Já foi dito que as soluções dos sistemas dinâmicos não-lineares não são de fácil determinação. Também já foi estabelecido que a integração numérica permite o cálculo aproximado de soluções particulares (isto é, com uma condição inicial determinada). Parece que a tarefa de entender as soluções de um sistema dinâmico não-linear é muito difícil ou muito trabalhosa. A pergunta que surge é a seguinte: será possível entender as características importantes das soluções?

O *estudo qualitativo* de sistemas dinâmicos é a resposta a essa pergunta. Este estudo geralmente não estará preocupado em resolver o sistema. O enfoque é obter qualitativamente informações importantes sobre as soluções. O estudo qualitativo coloca como prioridade o conhecimento das propriedades assintóticas das trajetórias (5, 25). Em sistemas dissipativos, um conjunto escolhido de soluções irá progressivamente abandonar

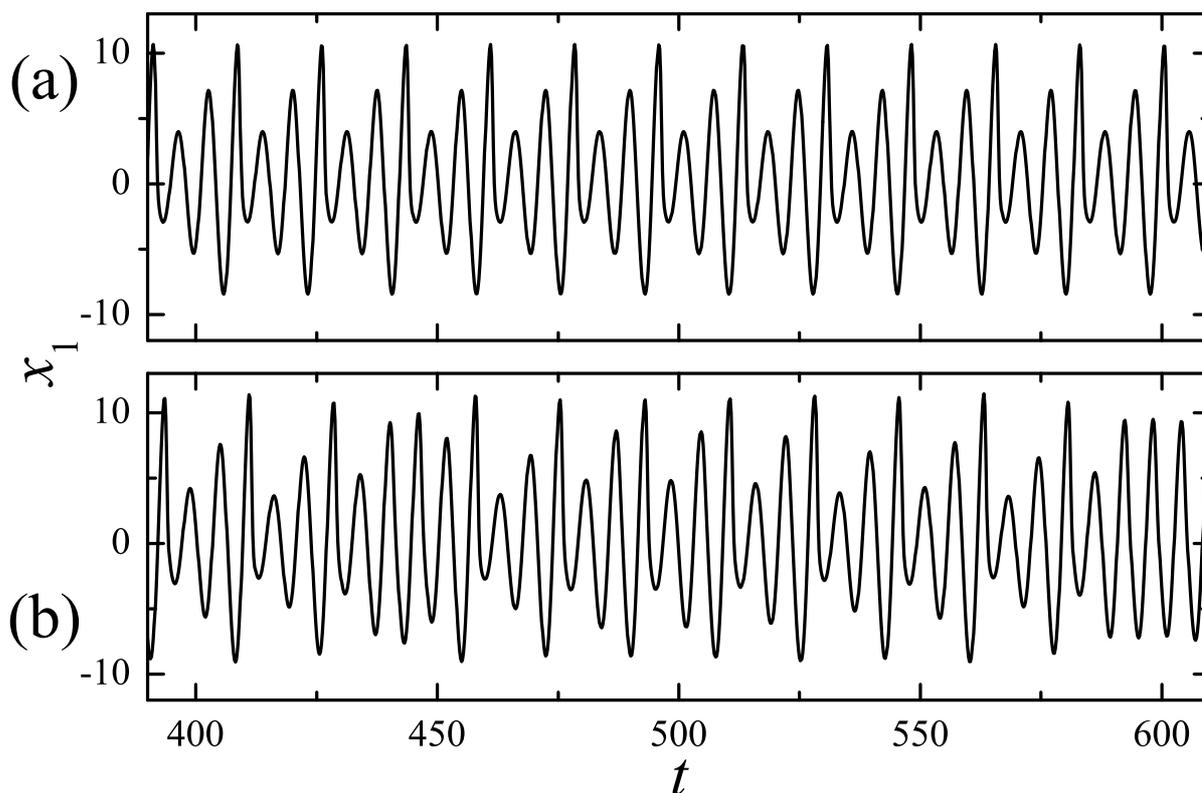


Figura 3: a) Evolução da variável  $x_1$  do sistema de Rössler com os parâmetros  $a_R = b_R = 0,2$  e  $c_R = 5,3$ . O transiente foi eliminado e o sistema convergiu para um ciclo-limite. O período é de aproximadamente 17. Este tipo de evolução é chamado de período-três, pois há três máximos para cada período. b) O mesmo para  $c_R = 5,7$ . Neste caso, observa-se uma órbita caótica. O sistema pode até se aproximar de órbitas periódicas instáveis (como perto de  $t = 480$  ou  $t = 600$ ), mas depois assume novamente sua natureza aperiódica.

regiões do espaço e assintoticamente se aproximar de um conjunto de pontos (21, 26), devido à contração do *volume* no espaço de fases. Assintoticamente, o volume deverá anular-se.

Assim, sistemas dissipativos são caracterizados pela existência de *atratores* no espaço de fases. Um atrator é um conjunto indecomponível e invariante de pontos para os quais trajetórias iniciadas em um conjunto experimental de condições iniciais convergem (27, 28). Um conjunto experimental é aquele que tem algum *volume*. Isto significa que, para condições iniciais escolhidas aleatoriamente no espaço de fases, há alguma probabilidade de que órbitas iniciadas nestas condições se aproximem assintoticamente do atrator. Dizer que o atrator é invariante é o mesmo que dizer que pontos no atrator devem evoluir para pontos no atrator. Um atrator indecomponível é aquele que não pode ser decomposto em dois ou mais atratores.

As trajetórias, em  $t = 0$ , podem partir de qualquer lugar no espaço de fases, isto é,

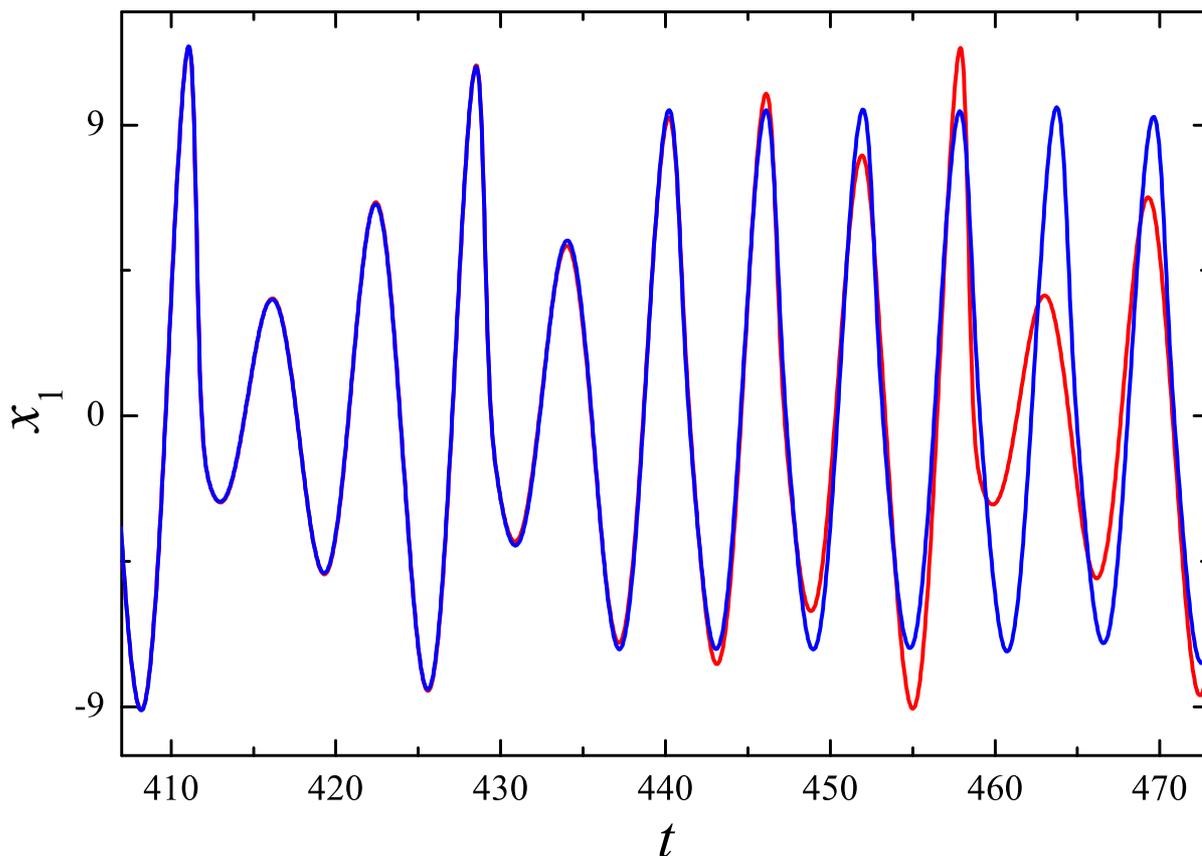


Figura 4: Duas trajetórias inicialmente próximas em um sistema de Rössler com parâmetros  $a_R = b_R = 0,2$  e  $c_R = 5,7$ . Órbitas caóticas possuem esta propriedade: pontos no espaço de fase próximos afastam-se exponencialmente rápido à medida que o sistema evolui. É a chamada dependência sensível das condições iniciais.

podem ter qualquer condição inicial. O período inicial de evolução temporal da trajetória ou solução é chamado de *transiente*. Neste período, a forma da solução depende muito da condição inicial, mas, felizmente, as órbitas estarão suficientemente próximas de algum atrator do sistema passado o transiente. Então, para tempos suficientemente longos, o que importa realmente é o atrator e as características deste é que dão a forma geral para as soluções. Finalmente, conclui-se que a informação importante sobre as trajetórias no espaço de fases está em sua maioria relacionada aos atratores.

Podem existir vários tipos de atratores. No presente texto, três serão definidos e estudados; identificados por suas representações no espaço de fases. O primeiro deles é o *ponto fixo*. Um ponto fixo é um atrator que é apenas um ponto ( $\mathbf{x}^*$ ), no qual vale a equação:

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*). \quad (2.7)$$

As variáveis do sistema deixam de ser dinâmicas e tornam-se estáticas. Cabe lembrar que pontos fixos não são soluções oscilantes, ao contrário dos dois outros tipos de atratores

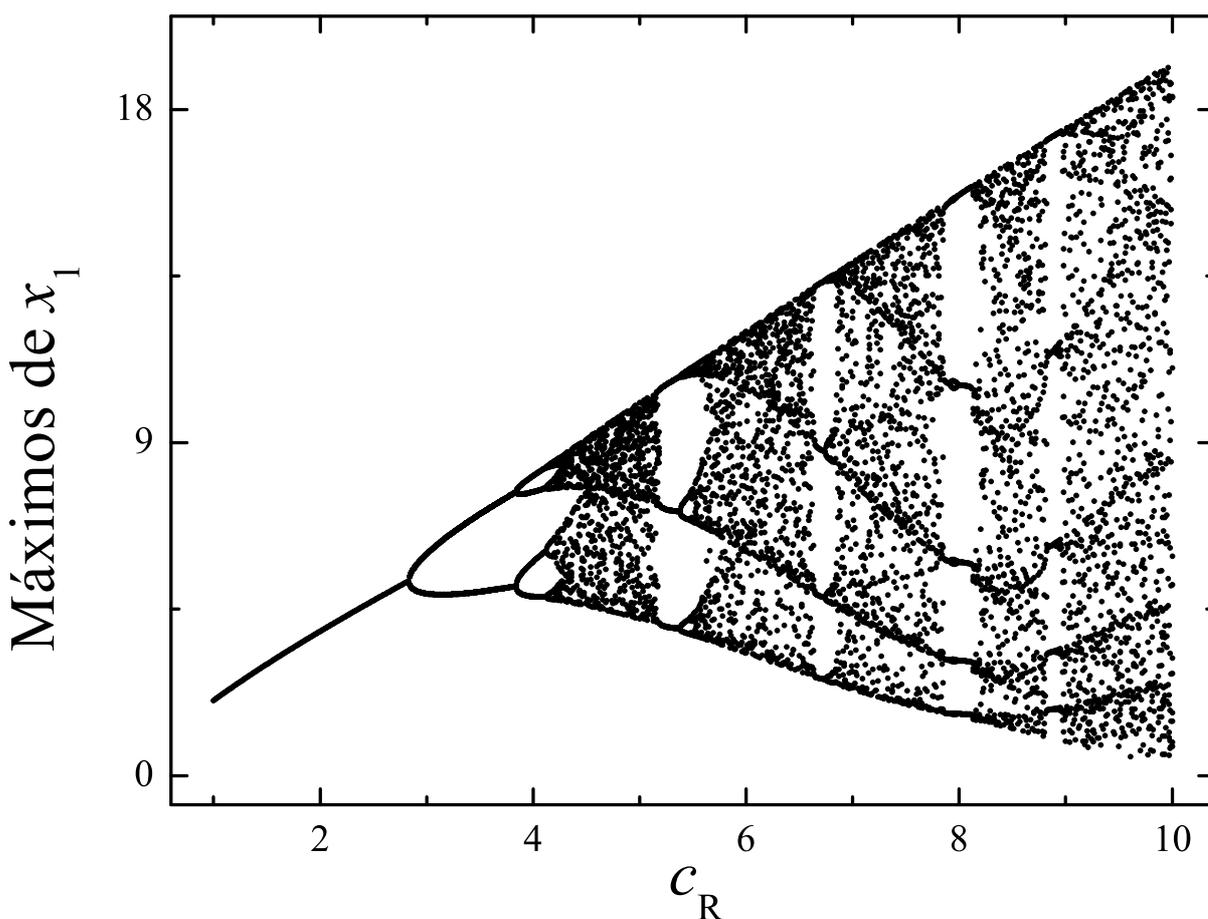


Figura 5: Diagrama de bifurcação para um sistema de Rössler com parâmetros  $a_R = b_R = 0,2$  de  $c_R = 1,0$  até  $c_R = 10,0$ . Várias zonas periódicas e outras tantas caóticas são mostradas.

apresentados. Um bom exemplo de ponto fixo ocorre quando existe um pêndulo que sofre atrito com o ar. Pode-se soltá-lo de qualquer posição: ele irá oscilar, gastando sua energia com o atrito. Quando acabar a energia, ele estará parado na parte mais baixa, ou seja, o atrator do tipo ponto fixo do problema. A dimensão deste atrator é zero, a dimensão de um ponto. O ponto fixo é claramente indecomponível e pode ocorrer em sistemas dinâmicos de qualquer dimensão.

O próximo tipo de atrator é o *ciclo-limite*. Este atrator é periódico, possui um período mínimo  $T$  (para o qual vale  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T)$ ) e uma frequência  $\omega$ . Diferentemente do ponto fixo, que pode aparecer em sistemas com qualquer número de variáveis, usualmente, o ciclo-limite só se manifesta em sistemas com dimensão maior do que um. Ao compasso que as órbitas se aproximam deste atrator, elas vão assumindo o período do mesmo. A dimensão do atrator é igual a um, ele nada mais é do que uma linha que se fecha em um ciclo. Se o ciclo apresenta  $n_{\text{máx}}$  máximos, diz-se que ele é um ciclo de período- $n_{\text{máx}}$ . Na figura 3a, está representada a evolução de uma das variáveis de uma órbita periódica de

período-três de um sistema de Rössler.

O último tipo aqui apresentado corresponde aos atratores simultaneamente estranhos e caóticos. Atratores estranhos são atratores com dimensão e estrutura fractal (a dimensão do atrator é não-inteira). Atratores caóticos apresentam sensibilidade exponencial às condições iniciais, ao contrário dos outros. A diferença entre duas órbitas (no atrator) muito próximas cresce exponencialmente rápido. Atratores estranhos e caóticos podem ser vistos como uma linha traçada no espaço de fases que nunca se fecha, mas visita e revisita continuamente vizinhanças dos pontos pelos quais já passou, apenas para divergir exponencialmente das órbitas próximas de passagens anteriores. Neste processo, um emaranhado fractal de órbitas é criado. Para que um invariante deste tipo apareça, a dimensão do sistema deve ser maior do que dois.

Parece ser claro que um atrator como o que foi descrito é de representação extremamente complicada no diagrama de fases. O que se faz é representar órbitas caóticas particulares com o transiente retirado, como na figura 1. Na figura 3b, está representada a evolução de uma das variáveis de uma órbita caótica. Por fim, na figura 4 a evolução de duas trajetórias que iniciaram muito próximas é mostrada.

Uma maneira inteligente de não representar o atrator diretamente e mesmo assim saber qual o seu tipo é fazer um *diagrama de bifurcação*. Tal diagrama consiste, por exemplo, na representação dos máximos de uma trajetória do atrator como função de algum parâmetro do sistema. Conforme o parâmetro varia, os atratores também mudam no diagrama de fases. Um ponto fixo ou um ciclo-limite de período-um são representados por um ponto. Ciclos limites de período- $n_{\text{máx}}$  são representados por  $n_{\text{máx}}$  pontos. Um atrator caótico é representado por um conjunto fractal de pontos e, novamente, sua representação é limitada. Na figura 5, é mostrado um diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler, em que várias transições entre órbitas periódicas e caóticas aparecem.

## 2.5 Expoentes de Liapunov

Os expoentes de Liapunov são quantidades importantes no estudo de sistemas dinâmicos e amplamente utilizados no contexto de sincronização. Eles são uma medida média da divergência ou convergência exponencial de órbitas do atrator próximas. Para uma trajetória  $\mathbf{x}(t)$  do atrator, uma órbita muito próxima  $\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ <sup>1</sup> é considerada. A di-

<sup>1</sup>Cuidado com a notação é necessário. O símbolo  $\delta$  não representa uma nova variável, mas junta-se com o símbolo seguinte para formar uma nova quantidade. Então,  $\delta\mathbf{x}(t)$  representa um vetor ( $\delta\mathbf{x}$ ) que depende do tempo e não o produto da multiplicação entre  $\delta$  e  $\mathbf{x}(t)$ .

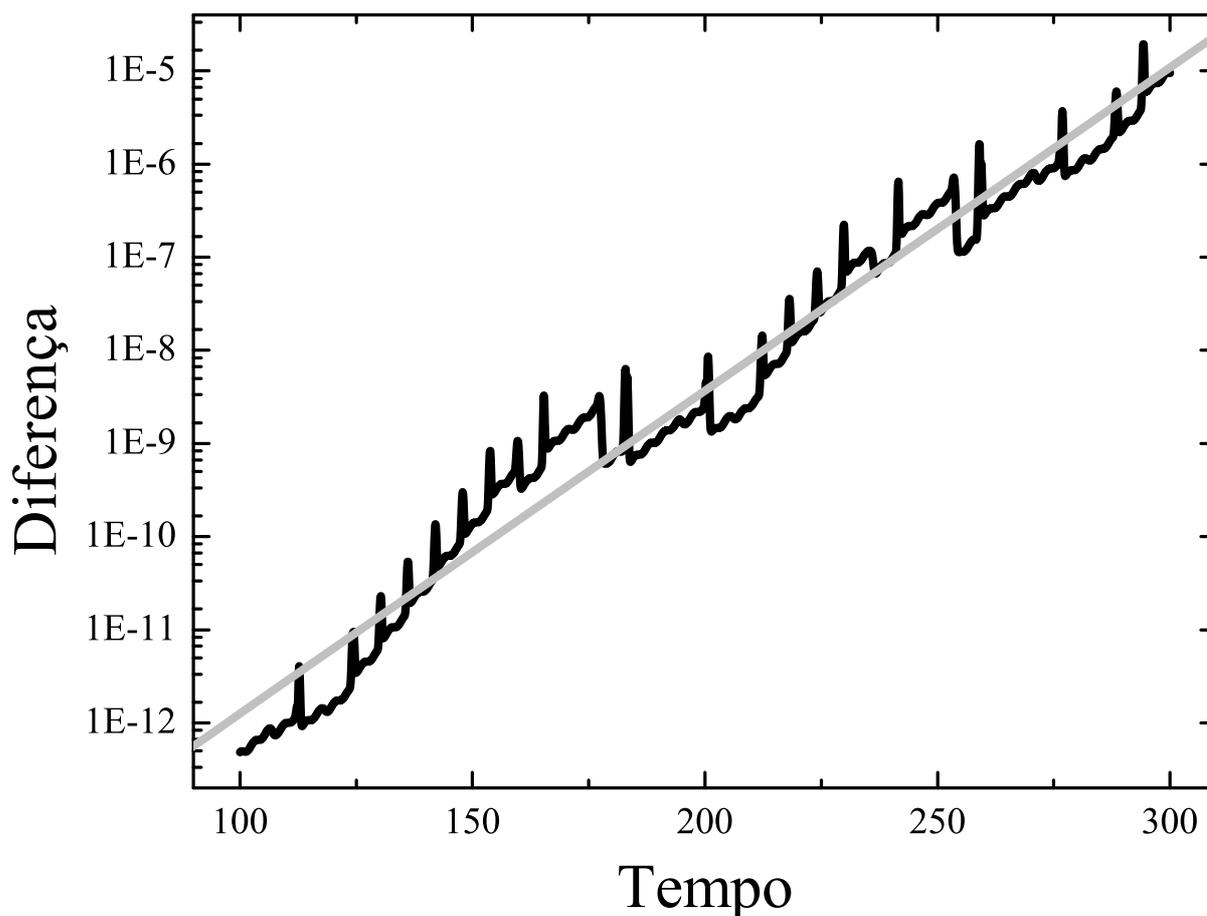


Figura 6: Evolução do módulo de uma pequena diferença entre duas trajetórias de um sistema de Rössler – as mesmas da figura 4. A figura mostra o aumento exponencial desta diferença. O coeficiente angular da reta ajustada é aproximadamente igual a  $0,08/\ln 10$ .

ferença  $\delta\mathbf{x}(t)$  entre as duas é muito pequena. Então, se o módulo desta diferença cresce exponencialmente;

$$|\delta\mathbf{x}(t)| \approx \exp(\lambda(t - t_1))|\delta\mathbf{x}(t_1)|. \quad (2.8)$$

Na figura 6, a evolução do módulo da pequena diferença da figura 4 é mostrada. Claramente, o módulo cresce exponencialmente (com  $\lambda = 0,08$ ), representando a sensibilidade às condições iniciais que um atrator caótico mostra.

Uma definição geométrica dos expoentes de Liapunov é dada por Ferrara (5). Aqui, a explicação é feita simplificada com  $n = 3$ . Para uma órbita no espaço de fases  $\mathbf{x}(t)$ , existem órbitas próximas em todas as direções. Para  $t = t_1$ , órbitas próximas com a mesma distância  $|\delta\mathbf{x}_i(t_1)|$  de  $\mathbf{x}(t)$  são escolhidas, de modo a compor uma superfície esférica em torno da órbita principal. Para  $t_2 > t_1$ , a superfície esférica terá evoluído para um elipsóide. Cada eixo do elipsóide é associado a uma pequena diferença  $\delta\mathbf{x}_i(t_2)$ . Então, os expoentes de Liapunov são simplesmente a taxa exponencial de crescimento dos eixos

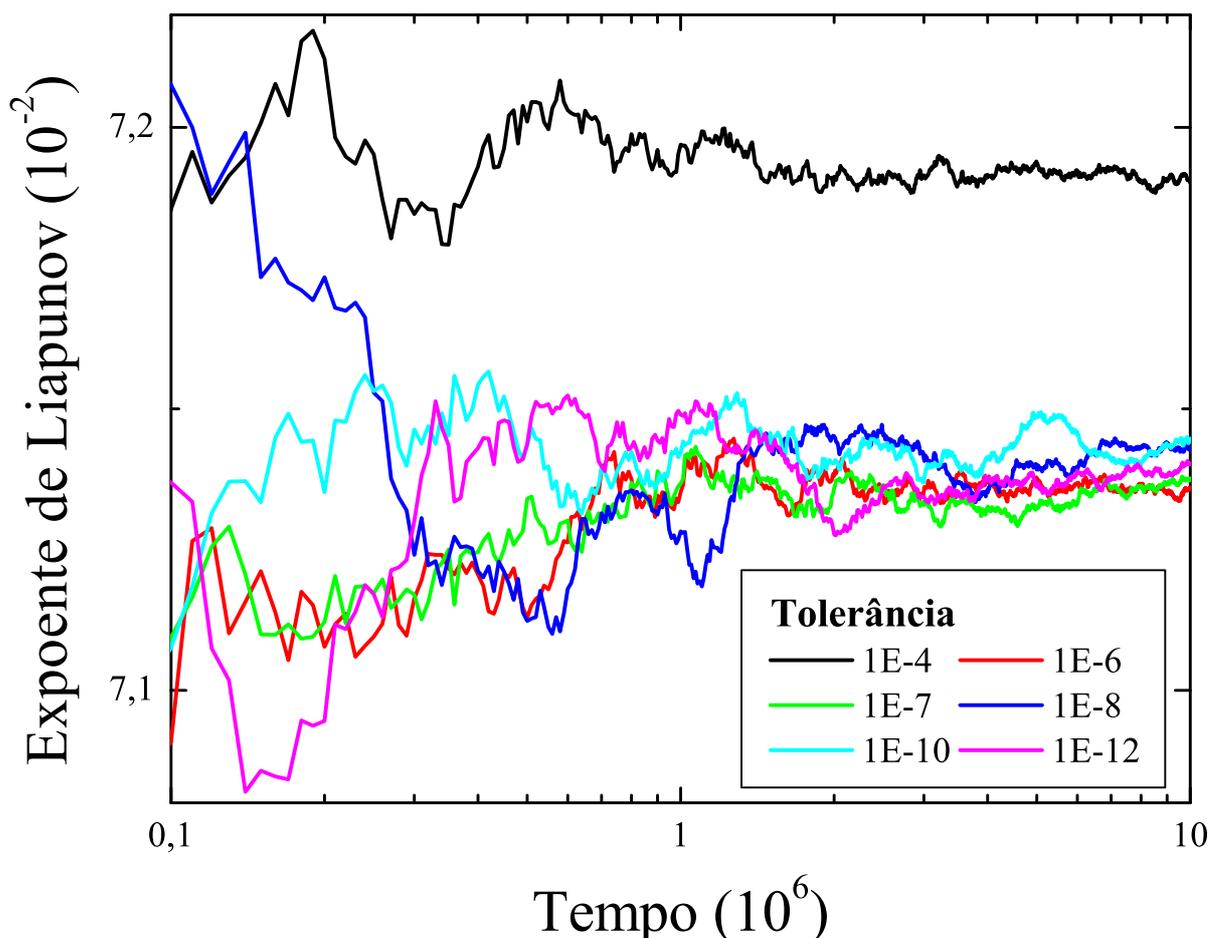


Figura 7: Maior expoente de Liapunov como função do tempo calculado numericamente para diferentes tolerâncias para um sistema de Rössler. Apesar de uma grande flutuação para tempos pequenos, para  $t = 10^6$  o expoente atinge uma precisão considerável e a tolerância não é mais um fator importante, desde que seja menor do que  $10^{-6}$ .

do elipsóide:

$$\lambda_i = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{\delta \mathbf{x}_i(t_1) \rightarrow 0} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{|\delta \mathbf{x}_i(t_2)|}{|\delta \mathbf{x}_i(t_1)|} \quad (2.9)$$

O número de expoentes de Liapunov é igual à dimensão do sistema (na equação acima,  $i$  pode ser  $1, 2, \dots, n$ ) e são colocados em ordem decrescente:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Os expoentes também não dependem da órbita  $\mathbf{x}(t)$  escolhida, mas sim do atrator em questão.

As pequenas diferenças que não são eixos do elipsóide devem ser decompostas em componentes nas direções dos eixos. Cada componente cresce com o expoente de Liapunov correspondente ao eixo com o qual se alinha. É fácil de perceber que, para tempos muito grandes, a componente do eixo com o maior expoente de Liapunov é que será a dominante, pois cresce com uma taxa exponencial maior. Então, com probabilidade um, pequenas diferenças da órbita crescem com o maior expoente de Liapunov do atrator ( $\lambda_1$ ). Essa preponderância do maior expoente de Liapunov permite que a sua referência seja feita

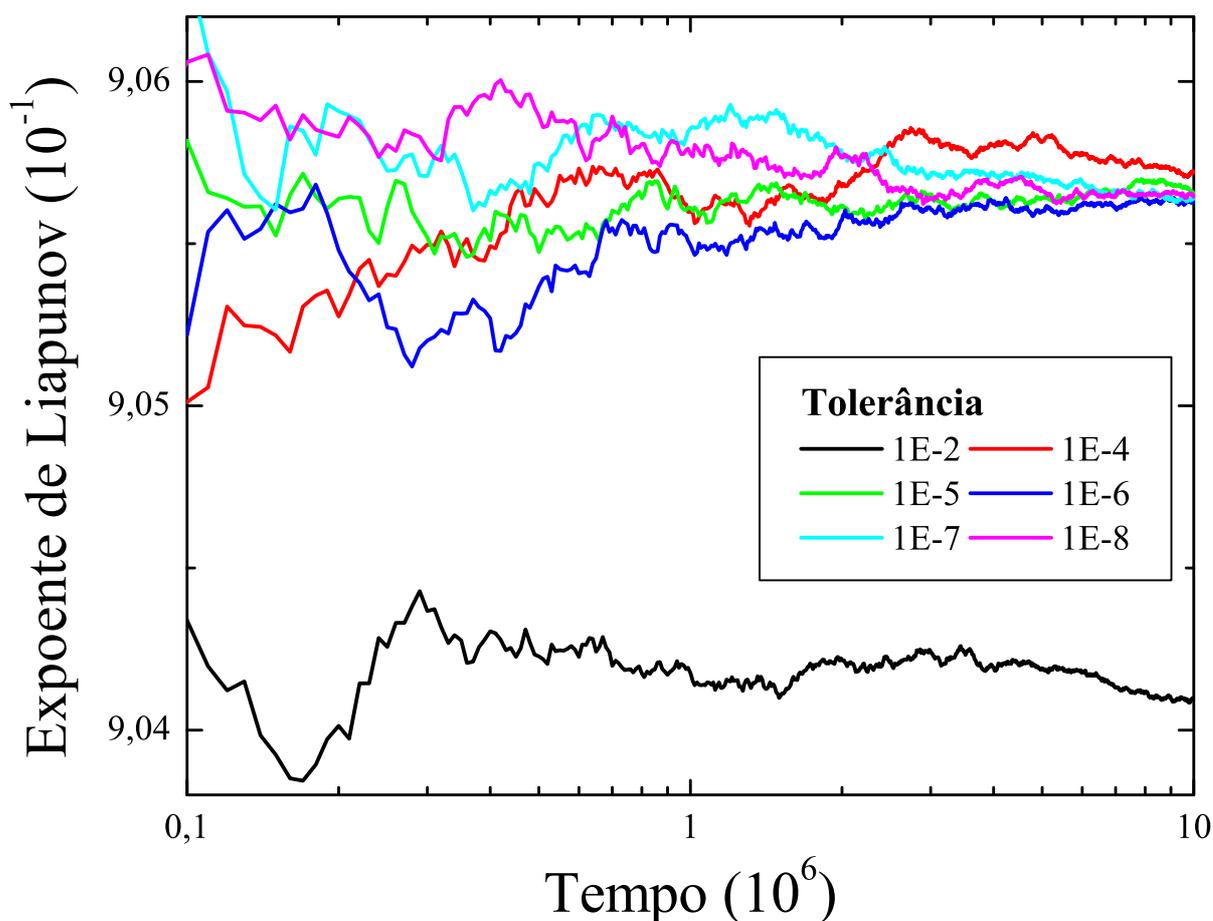


Figura 8: Maior expoente de Liapunov como função do tempo calculado numericamente para diferentes tolerâncias para um sistema de Lorenz. Este sistema parece aceitar uma tolerância maior ( $10^{-4}$ ) do que o sistema de Rössler para o cálculo do expoente.

simplesmente como o expoente de Liapunov do sistema.

Algumas colocações sobre o valor dos expoentes de Liapunov podem ser feitas a princípio. Um ponto fixo terá todos os expoentes de Liapunov negativos. O ponto fixo é um atrator composto de apenas um ponto, então órbitas que estão um pouco afastadas deste ponto devem tender para ele assintoticamente, caracterizando os expoentes negativos. Todos os outros atratores devem ter um expoente de Liapunov nulo. Este expoente corresponde às diferenças entre duas órbitas que são essencialmente a mesma, diferentes apenas por causa de uma defasagem no tempo. A distância entre estas duas órbitas não varia na média.

O ciclo-limite tem um expoente nulo e os outros negativos. O expoente nulo corresponde à direção do movimento e os outros correspondem às direções perpendiculares que devem ser atraídas pelo ciclo-limite. Atratores caóticos têm no mínimo um expoente de Liapunov positivo, no mínimo um nulo e no máximo um negativo. O positivo é o que

dá a sensibilidade exponencial às condições iniciais. O nulo é novamente o da direção da trajetória. O negativo é relacionado com a contração do volume, conforme explicado a seguir.

O volume do elipsóide utilizado na definição dos expoentes de Liapunov  $\delta V(t_2)$  obedece à seguinte relação de proporcionalidade:

$$\delta V(t_2) \propto \prod_{i=1}^n |\delta \mathbf{x}_i(t_2)|. \quad (2.10)$$

Conseqüentemente, o crescimento do volume é dado por:

$$\frac{\delta V(t_2)}{\delta V(t_1)} = \exp \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (t_2 - t_1) \right). \quad (2.11)$$

O sistema é dissipativo, então  $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$  e  $\lambda_n$  deve ser negativo. Isso vale para todos os atratores.

Para finalizar a discussão sobre os expoentes de Liapunov, falta entender como eles são calculados numericamente. O primeiro passo é determinar como evolui a órbita  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ . A equação 2.2 transforma-se em:

$$\dot{\mathbf{x}} + \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}). \quad (2.12)$$

A função do sistema dinâmico pode ser expandida em sua série de Taylor:  $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}(t))\delta \mathbf{x} + O^2(\delta \mathbf{x})$ , na qual  $\mathbf{J}$  é a matriz jacobiana do sistema:

$$J_{ij}(\mathbf{x}(t)) = \left. \frac{d f_i}{d x_j} \right|_{\mathbf{x}(t)}. \quad (2.13)$$

O primeiro termo da série cancela com  $\dot{\mathbf{x}}$  no lado esquerdo. Ademais, a variável  $\delta \mathbf{x}$  é muito pequena quando comparada com  $\mathbf{x}$ , ou seja, o limite  $\delta \mathbf{x} \rightarrow 0$  é tomado. Com isso, a variável  $\delta \mathbf{x}$  é apenas dependente da parte linear da série de Taylor:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}(t))\delta \mathbf{x}. \quad (2.14)$$

O processo explicado neste parágrafo é chamado de linearização do sistema. Com ele, a variável  $\delta \mathbf{x}$  é entendida como uma diferença infinitesimal de órbitas (no caso,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ ) que cresce com a aproximação linear da função do sistema, exatamente o que se procura para determinar o expoente de Liapunov.

O trabalho numérico é calcular uma órbita  $\mathbf{x}(t)$ , eliminar o transiente e calcular então  $\delta \mathbf{x}$  para um intervalo de tempo muito grande, de maneira a fazer a média sobre quase

todo o atrator e imitar o limite assintótico na definição de expoente de Liapunov. Como já foi discutido, não importa qual a orientação de  $\delta\mathbf{x}$ , desde que tenha uma componente na direção do maior expoente de Liapunov, o que acontece com probabilidade um. Adicionalmente, o processo é sujeito a erros que provocam a reorientação de  $\delta\mathbf{x}$  de modo a ter alguma componente em tal direção (novamente com probabilidade um). Os erros no cálculo numérico são minimizados por um outro fator. Se os erros são suficientemente pequenos de modo a desviar a trajetória, mas sem tirá-la completamente do atrator, então estes erros não influenciam o cálculo do expoente de Liapunov, uma vez que o expoente é uma propriedade do atrator e não de alguma órbita em particular.

O expoente é definido operacionalmente como:

$$\lambda = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{|\delta\mathbf{x}(t_2)|}{|\delta\mathbf{x}(t_1)|} \quad (2.15)$$

para um  $t_2$  suficientemente grande, dependente do sistema a ser integrado. Salienta-se que, como a equação de evolução de  $\delta\mathbf{x}$  é linear e o que interessa é a razão do crescimento desta variável, esta não precisa ser pequena durante o cálculo numérico. Um problema que pode ocorrer é que o tempo seja muito longo e a variável  $\delta\mathbf{x}$  exceda a capacidade do computador. Para evitar este efeito, a variável  $\delta\mathbf{x}$  é renormalizada periodicamente. Isto é possível pois, se o tempo de integração será de  $t_1$  até  $t_2$ , para qualquer  $t_3$  intermediário vale a equação:

$$\ln \frac{|\delta\mathbf{x}(t_2)|}{|\delta\mathbf{x}(t_1)|} = \ln \left( \frac{|\delta\mathbf{x}(t_2)|}{|\delta\mathbf{x}(t_3)|} \frac{|\delta\mathbf{x}(t_3)|}{|\delta\mathbf{x}(t_1)|} \right) = \ln \frac{|\delta\mathbf{x}(t_2)/r|}{|\delta\mathbf{x}(t_3)/r|} + \ln \frac{|\delta\mathbf{x}(t_3)|}{|\delta\mathbf{x}(t_1)|}. \quad (2.16)$$

Assim, pode-se a qualquer tempo durante a integração renormalizar a variável  $\delta\mathbf{x}$  por um fator  $r$ . O que basta para a determinação do expoente de Liapunov é acumular quanto o módulo da variável cresceu a cada período entre as renormalizações.

Na figura 7, o expoente de Liapunov é calculado para um sistema de Rössler como função do tempo. Apesar de uma grande flutuação para tempos pequenos, para  $t = 10^6$  o expoente estabiliza-se e a tolerância deixa de ser um fator importante, desde que seja menor do que algum valor. Isso confirma que os erros pequenos no cálculo da trajetória não são de grande influência no resultado final. Nessa dissertação, quando forem calculados expoentes de Liapunov de osciladores de Rössler, a tolerância será igual a  $10^{-6}$  e o tempo de integração, igual a  $10^6$ . O resultado de aproximadamente 0,0714 (na maior precisão) é muito próximo ao encontrado na figura 6. O último apresenta algum erro, já que foi integrado durante pouco tempo. A figura 8 é a figura equivalente para osciladores de Lorenz. A tolerância e o tempo de integração usados para osciladores de Lorenz serão os

---

mesmos, apesar da estabilização mais rápida do expoente para este sistema. Na maior precisão, o expoente calculado vale 0,906 aproximadamente.

## 3 Pares de osciladores caóticos idênticos

Neste capítulo será estudada a sincronização idêntica de um par de osciladores caóticos idênticos acoplados. Definir-se-ão os sistemas a serem estudados e as técnicas utilizadas para identificar a sincronização. Maior ênfase será direcionada aos osciladores caóticos, pois apresentam mais possibilidades de estudo. Vários exemplos ilustrarão o tema.

### 3.1 O par

O sistema a ser estudado nesta seção é composto por um par de osciladores idênticos. Para evitar confusões, cada um dos dois osciladores será chamado de *subsistema*. Os dois subsistemas (acoplados ou não) formam o *sistema* em questão. A equação dinâmica de cada subsistema é:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}), \quad (3.1)$$

na qual se diferenciam as variáveis de cada oscilador pelo índice  $i$ . O primeiro dos osciladores é referido quando  $i$  for ímpar e o segundo quando  $i$  for par. Nota-se que no caso de osciladores idênticos a função  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)})$  é a mesma para ambos, exceto pela alteração do argumento. O expoente de Liapunov de cada oscilador será indicado por  $\lambda_1$  e a dimensão de cada subsistema por  $m$ . A dimensão do sistema é  $n$ , o dobro de  $m$ .

Introduzidos os subsistemas, torna-se importante conhecer a maneira pela qual estes estão acoplados para formar o sistema. Para simplificar a notação, define-se a variável  $\mathbf{X} = \text{col}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ . Dois tipos de acoplamentos são possíveis: o *acoplamento externo*

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) + \mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{X}) \quad (3.2)$$

e o *acoplamento interno*

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{X})). \quad (3.3)$$

Nas equações acima,  $\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$  são funções de acoplamento genéricas. Na maioria dos casos

estudados na literatura, elas são lineares e expressas da seguinte forma:

$$\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{X}) = c\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i+1)}). \quad (3.4)$$

Dessa maneira,  $c$  é chamado de *parâmetro de acoplamento*, geralmente é positivo e define a intensidade com a qual os subsistemas estão acoplados. As duas matrizes  $\mathbf{E}^{(1)}$  e  $\mathbf{E}^{(2)}$ , na maioria das configurações usadas, apenas definem quais variáveis se acoplam e seus elementos são positivos.

Um caso especial de acoplamento (tanto interno como externo) definido pela forma das matrizes  $\mathbf{E}^{(1)}$  e  $\mathbf{E}^{(2)}$  é o acoplamento do tipo *mestre-escravo*, caracterizado por  $\mathbf{E}^{(1)} = 0$ . Para dois subsistemas acoplados desta maneira, apenas um recebe o termo adicional e o outro mantém a sua dinâmica de oscilador independente. Caso o acoplamento seja externo, as equações são as seguintes:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) \quad (3.5a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}) + c\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}). \quad (3.5b)$$

O subsistema 1 não é influenciado pelo subsistema 2 e é chamado de mestre. Já o subsistema 2 é influenciado pelo subsistema 1 e é chamado de escravo. Perguntar se os dois subsistemas vão sincronizar é o mesmo que dizer: o escravo seguirá seu mestre?

Outro caso especial importante é o acoplamento bidirecional, dado pela igualdade  $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^{(2)}$  e pelas equações (acoplamento externo):

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) + c\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) \quad (3.6a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}) + c\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}). \quad (3.6b)$$

Neste acoplamento, os dois subsistemas interagem mutuamente com a mesma intensidade. Os casos intermediários de acoplamento entre os dois casos acima ocorrem quando  $\mathbf{E}^{(1)}$  é proporcional a  $\mathbf{E}^{(2)}$ , ou seja, quando os dois subsistemas recebem o acoplamento, mas um com maior intensidade do que o outro.

## 3.2 Definição de sincronização idêntica

Quando dois osciladores idênticos são considerados, pode-se perguntar: em quais casos os osciladores apresentarão a mesma evolução dinâmica? Ou seja, quando os dois osciladores seguirão a mesma trajetória? Uma resposta trivial é facilmente formulada

quando não há acoplamento. Como os osciladores são idênticos, bastará colocá-los na mesma condição inicial para que eles sigam a mesma trajetória para todos os tempos posteriores. Isto é apenas o reflexo de que o sistema sem acoplamento possui um invariante: o *invariante de sincronização*. Mais claramente, o invariante é dado por todos os pontos do espaço de fases que obedecem à condição  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$ . Desta forma, o invariante de sincronização é também uma variedade linear, a *variedade de sincronização*, definida pela relação anterior. Órbitas que iniciam na variedade de sincronização lá permanecem indefinidamente.

Pode-se dizer que o sistema está identicamente sincronizado quando as variáveis do mesmo obedecem a relação que define a variedade de sincronização. É interessante observar que a dinâmica dentro da variedade de sincronização (a dinâmica do sistema identicamente sincronizado) é igual à de um subsistema isolado. Se esta é oscilante, aquela também será. Então, existem na variedade de sincronização os atratores (considerando apenas as condições iniciais na variedade) que existem em um simples oscilador.

A sincronização trivial explicada acima não acontecerá se as condições iniciais forem diferentes. Pode-se pensar que dois subsistemas idênticos com diferentes condições iniciais são equivalentes a um subsistema integrado duas vezes para duas condições iniciais diferentes. Claramente, o ritmo de crescimento de uma diferença muito pequena entre os dois subsistemas será dado pelo maior expoente de Liapunov de um subsistema isolado. Com sistemas caóticos, mesmo que esta diferença seja muito pequena, ela irá sempre crescer exponencialmente. Este fato revela que o problema é mais interessante quando os osciladores são caóticos.

Em um sistema experimental, por exemplo, seria muito difícil igualar as duas condições iniciais. Experimentos também são sujeitos a ruídos que facilmente podem gerar pequenas diferenças nas variáveis. Além disso, na natureza, é muito improvável a existência de dois subsistemas exatamente iguais, mas de dois subsistemas muito parecidos não. A este ponto, é necessário definir o que se exige do acoplamento e qual a sua função: o acoplamento deverá fazer com que pequenas diferenças entre os osciladores tendam a zero para tempos muito grandes. Assim, mesmo com ruído, a *sincronização idêntica assintótica* (29) torna-se possível. (Por clareza, este caso será referido simplesmente por *sincronização idêntica*.) Em outras palavras, quer-se que os atratores dentro da variedade de sincronização também sejam atratores no espaço de fases completo do sistema, ou que pelo menos um deles seja. Como estão sendo considerados osciladores, geralmente haverá apenas um atrator na variedade de sincronização, ou pelo menos um atrator para as con-

dições iniciais que estejam na região de estudo do espaço de fases. O método utilizado para verificar a sincronização idêntica é o dos expoentes de Liapunov transversais. É muito presente na literatura (6, 8, 9, 12, 30) e será explicado com exemplos nas próximas seções.

### 3.3 Acoplamento externo

Se o acoplamento é externo e também da forma exposta na equação 3.4, o sistema dinâmico é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) + c\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) \quad (3.7a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}) + c\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}). \quad (3.7b)$$

Busca-se o estado sincronizado, dado por  $\mathbf{s} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$ . Quando o sistema está neste estado, ambas equações acima são reduzidas a:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}). \quad (3.8)$$

Na equação acima, percebe-se que o movimento na variedade de sincronização não é alterado pela variação de  $c$ . Conseqüentemente, o estado sincronizado apresenta todas as características de um oscilador desacoplado.

O vetor  $\mathbf{X}$  (que indica o estado do sistema) pode ser decomposto em duas componentes. A primeira é a componente na variedade de sincronização:

$$\mathbf{X}_{\parallel} = \text{col} \left( \frac{\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}}{2}, \frac{\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}}{2} \right). \quad (3.9)$$

A segunda é a componente transversal, ou ortogonal, à variedade de sincronização:

$$\mathbf{X}_{\perp} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_{\parallel} = \text{col} \left( \frac{\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}}{2}, \frac{-\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}}{2} \right). \quad (3.10)$$

O sistema sincroniza idênticamente (assintoticamente) se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{X}_{\perp}| = 0. \quad (3.11)$$

Isso ocorre se e somente se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}| = 0. \quad (3.12)$$

A condição acima será atendida para condições iniciais escolhidas aleatoriamente no espaço de fases quando houver um atrator na variedade de sincronização. Conseqüente-

mente, ao menos um atrator do sistema 3.8 deverá ser também um atrator do sistema 3.7. Isto equivale a dizer que as pequenas diferenças entre os dois subsistemas deverão tender a zero, já que o atrator atrai órbitas vizinhas. O procedimento para verificar a existência do atrator começa com a linearização do sistema 3.7 em torno do estado sincronizado com a substituição das variáveis  $\mathbf{x}^{(i)}$  pelas variáveis  $\mathbf{s} + \delta\mathbf{x}^{(i)}$ , que são compostas pelas novas quantidades infinitesimais  $\delta\mathbf{x}^{(i)}$ . É fácil notar que o acoplamento permanecerá o mesmo, já que é linear. A parte que contém a função do subsistema (o primeiro termo do lado direito das equações 3.7) é a que deve ser efetivamente linearizada, o que irá gerar a matriz jacobiana (de dimensões  $m \times m$ )  $\mathbf{J}$ . O resultado, ou seja, o sistema de equações para as variáveis  $\delta\mathbf{x}^{(i)}$ , é:

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{J}\delta\mathbf{x}^{(1)} + c\mathbf{E}^{(1)}(\delta\mathbf{x}^{(2)} - \delta\mathbf{x}^{(1)}) \quad (3.13a)$$

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{J}\delta\mathbf{x}^{(2)} + c\mathbf{E}^{(2)}(\delta\mathbf{x}^{(1)} - \delta\mathbf{x}^{(2)}). \quad (3.13b)$$

As variáveis  $\delta\mathbf{x}^{(i)}$  não informam diretamente coisa alguma sobre a sincronização. O interesse é direcionado para a diferença entre as duas equações acima, isto é, a evolução temporal de  $\delta\mathbf{y} = \delta\mathbf{x}^{(1)} - \delta\mathbf{x}^{(2)}$ :

$$\dot{\delta\mathbf{y}} = \mathbf{J}\delta\mathbf{y} - c[\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}]\delta\mathbf{y}, \quad (3.14)$$

ou, simplesmente:

$$\dot{\delta\mathbf{y}} = (\mathbf{J} - c[\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}])\delta\mathbf{y}. \quad (3.15)$$

É interessante observar que a diferença infinitesimal  $\delta\mathbf{y}$  é exatamente a mesma utilizada para calcular o expoente de Liapunov de um sistema hipotético como este:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) - c[\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}]\mathbf{z}. \quad (3.16)$$

Quando o acoplamento não existe ( $c = 0$ ), já se concluiu que a pequena diferença entre os dois subsistemas varia exponencialmente com expoente  $\lambda_1$ . Com a ajuda desta última equação, têm-se bons motivos para crer que esta diferença cresça ou decresça exponencialmente para todo  $c$ , justificando a definição do *expoente de Liapunov transversal* do sistema 3.7:

$$\lambda_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta\mathbf{y}(t)|}{|\delta\mathbf{y}(0)|}. \quad (3.17)$$

O adjetivo transversal é dado pela relação entre a diferença infinitesimal e o vetor  $\mathbf{X}_{\perp}$  (por meio da equação 3.12). O expoente transversal é uma propriedade de cada atrator na variedade de sincronização – de cada atrator do sistema 3.8 – por meio de sua dependência da órbita escolhida  $\mathbf{s}(t)$ . Se ele é negativo, o atrator da variedade de sincronização

na média atrai as trajetórias do espaço de fases fora da variedade (mas suficientemente próximas) e há sincronização. Se ele é positivo, o invariante na variedade de sincronização (por vezes chamado de atrator da variedade de sincronização ou do sistema 3.8) na média repele as trajetórias do espaço de fases fora da variedade (mas suficientemente próximas) e não há sincronização.

O procedimento geral ulterior para o cálculo numérico do expoente transversal será o seguinte: calcular numericamente uma órbita  $\mathbf{s}$ , esperar que ela atinja um atrator da variedade de sincronização e eliminar este transiente. Logo após, calcular a continuação da órbita ao mesmo tempo que é calculado o expoente transversal associado. Isto será feito para alguns casos-chave, que permitirão o entendimento amplo das possibilidades existentes. O que mudará entre os casos é a forma da matriz  $\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}$ . Os subsistemas utilizados serão os de Rössler, com os parâmetros costumeiros.

*Caso 1:*  $\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{I}_m$ , onde  $\mathbf{I}_m$  é a matriz de identidade de ordem  $m$ . Este caso pode representar vários tipos de acoplamento, pois qualquer matriz  $\mathbf{E}^{(1)}$  é possível, bastando que  $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{I}_m - \mathbf{E}^{(1)}$ . Se a soma  $\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}$  é um múltiplo da unidade,  $c$  pode ser redefinido para absorver esta multiplicidade e novamente  $\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{I}_m$ . O trabalho resume-se a calcular o expoente transversal a partir da diferença infinitesimal (da equação 3.14):

$$\dot{\delta\mathbf{y}} = (\mathbf{J} - c) \delta\mathbf{y}. \quad (3.18)$$

Antes de calculá-lo, a transformação de variáveis que substitua  $\delta\mathbf{y}$  por  $\exp(-ct)\delta\mathbf{y}'$  pode ser tentada:

$$-c \exp(-ct)\delta\mathbf{y}' + \exp(-ct)\dot{\delta\mathbf{y}}' = (\mathbf{J} - c) \exp(-ct)\delta\mathbf{y}' \quad (3.19)$$

$$\dot{\delta\mathbf{y}}' = \mathbf{J}\delta\mathbf{y}'. \quad (3.20)$$

A equação para o expoente transversal também pode sofrer esta substituição:

$$\lambda_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\exp(-ct)\delta\mathbf{y}'(t)|}{|\delta\mathbf{y}'(0)|} = -c + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta\mathbf{y}'(t)|}{|\delta\mathbf{y}'(0)|}. \quad (3.21)$$

O segundo termo do lado direito da equação anterior nada mais é do que o expoente de Liapunov do subsistema isolado, o que leva à relação:

$$\lambda_{\perp} = -c + \lambda_1. \quad (3.22)$$

Considerando osciladores caóticos ( $\lambda_1 > 0$ ), o sistema sincroniza para  $c > \lambda_1$ . Para  $c < \lambda_1$ , não há sincronização. Os resultados de um cálculo numérico ilustram essa situação na figura 9.

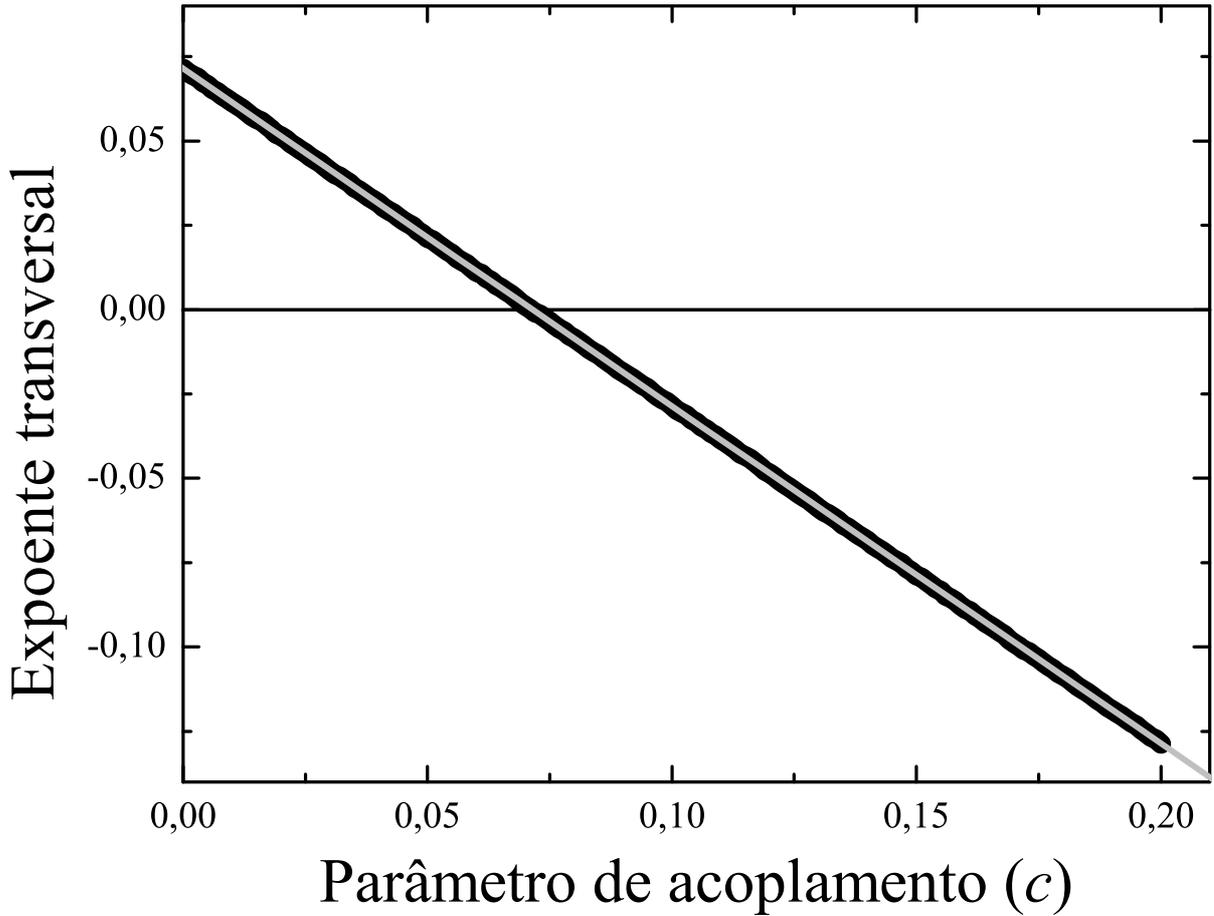


Figura 9: Expoente de Liapunov transversal como função do parâmetro de acoplamento calculado numericamente para dois sistemas de Rössler acoplados tal que  $E^{(1)} + E^{(2)} = I_m$ . Em cinza uma reta ajustada, com coeficiente angular  $1,0000 \pm 1,8E - 4$  e coeficiente linear  $0,07143 \pm 2,1E - 5$ . A correspondência entre o coeficiente linear e o expoente de Liapunov do subsistema isolado calculado diretamente indica a coerência entre os cálculos numéricos.

Na figura 10, o efeito de um acoplamento mestre-escravo entre dois osciladores de Rössler é mostrado. As variáveis do escravo seguem as do mestre, pois o parâmetro de acoplamento é igual a 0,08, suficiente para assegurar que o estado sincronizado é um atrator. Na figura 11, a diferença entre as mesmas variáveis mostra seu decrescimento exponencial, justificando a definição do expoente transversal. No caso dessa diferença, pelo ajuste linear, o expoente parece ser aproximadamente 0,01 e contém algum erro devido ao pequeno intervalo de tempo para o qual a diferença é acompanhada.

A figura 12 confirma os cálculos dos expoentes transversais. Nessa figura, a distância média do invariante de sincronização  $|\mathbf{X}_\perp|$  para dois osciladores de Rössler com acoplamento do tipo mestre-escravo é mostrada. A diferença anula-se em algum valor de  $c$  entre 0,071 e 0,072. A quase exata correspondência entre essa figura e a figura 9 mostra a

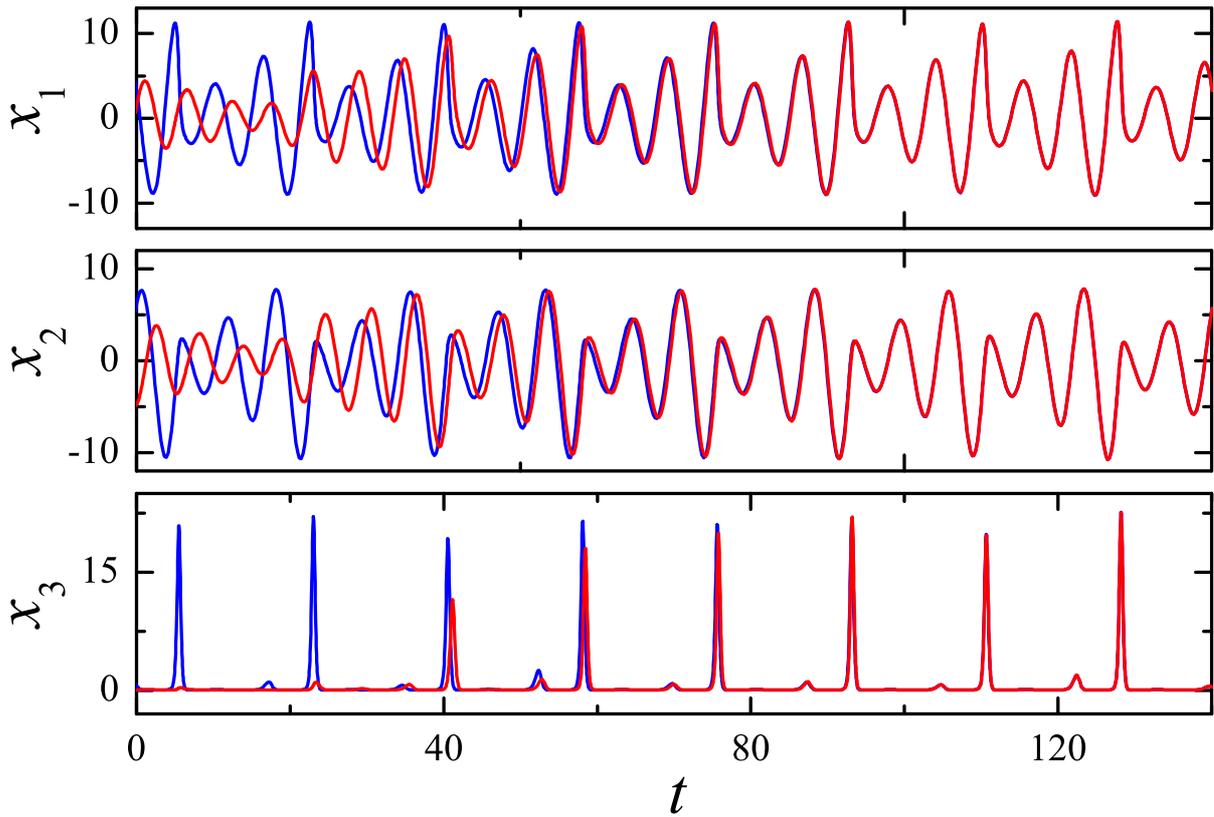


Figura 10: Variáveis de dois sistemas de Rössler acoplados sincronizando. Em azul, as do mestre e, em vermelho, as do escravo. O parâmetro de acoplamento é igual a 0,08.

adequação dos cálculos dos expoentes transversais. Já para o acoplamento bidirecional, há uma coexistência de dois atratores, um na variedade de sincronização e outro fora, para  $c$  entre os valores aproximados de 0,072 e 0,085. O expoente de Liapunov transversal é calculado para o atrator na variedade sincronização. Quando ele é negativo, o atrator existe, mas isso não garante que não existam outros atratores, apenas garante que há alguma possibilidade (dependente das condições iniciais) de que o sistema sincronize.

*Caso 2:* Neste caso a soma  $E^{(1)} + E^{(2)}$  é uma matriz cujos elementos diagonais são 0 ou 1 e os não-diagonais são nulos. Novamente, isto pode representar vários tipos de acoplamento como, por exemplo, o que é utilizado para acoplar os dois subsistemas usando uma variável apenas. Este tipo de acoplamento é de muita relevância para sistemas experimentais, quando nem todas as variáveis podem estar disponíveis para o acoplamento ou apenas é mais simples ou econômico acoplar somente uma. Infelizmente, nenhuma substituição pode ser feita a princípio na equação 3.14.

*Verbi gratia*, dois osciladores de Rössler ( $m = 3$ ) podem ser acoplados na forma mestre-escravo ( $E^{(1)} = 0$ ) com o termo de acoplamento somado apenas à equação da

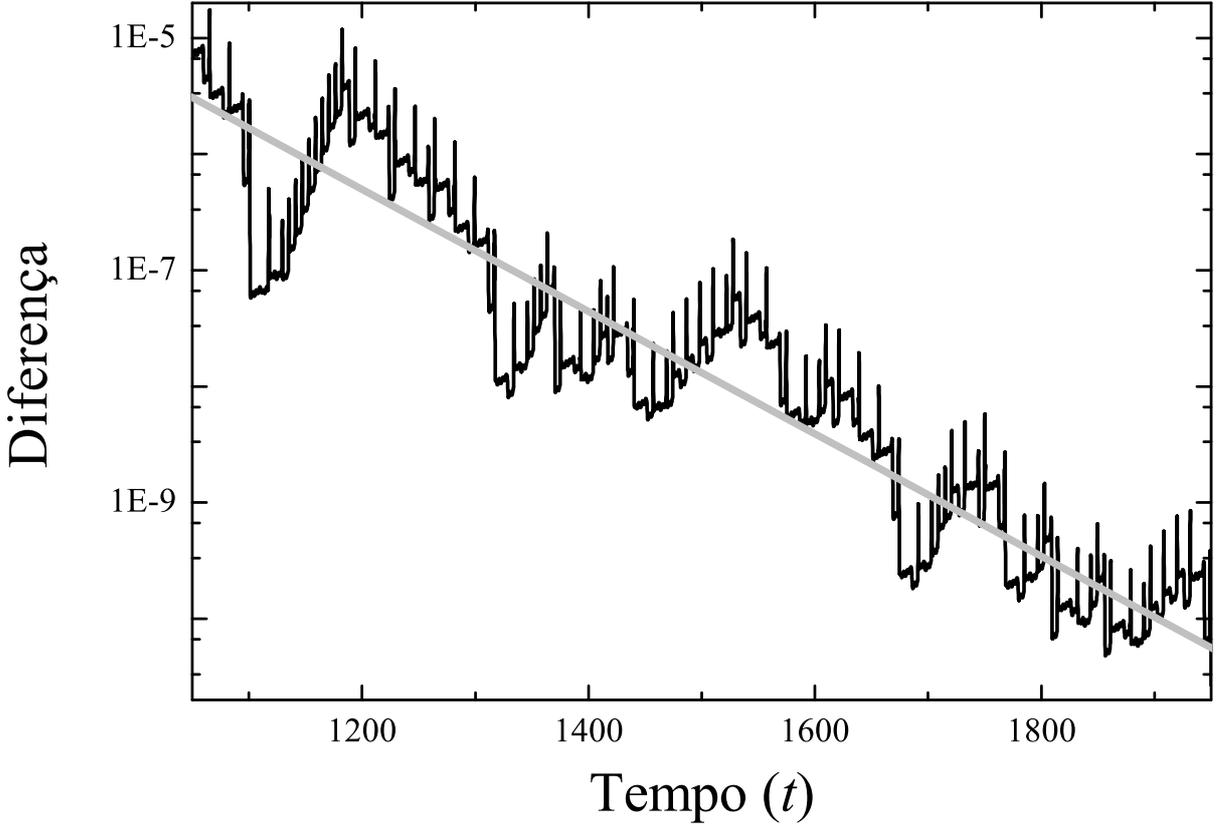


Figura 11: Evolução do módulo de uma diferença pequena entre as variáveis dos dois osciladores da figura 10. Percebe-se que o módulo segue uma lei exponencial. O coeficiente angular da reta ajustada vale aproximadamente  $0,01/\ln 10$ .

primeira variável do escravo:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Também se pode pensar em acoplar a segunda variável: neste caso,  $(\mathbf{E}^{(2)})_{ij} = \delta_{i2}\delta_{j2}$ . Os expoentes de Liapunov transversais são mostrados na figura 13 para os acoplamentos na primeira, segunda e terceira variáveis.

Para melhor entender o que acontece no gráfico, deve-se estudar o limite de  $\lambda_{\perp}$  quando  $c \rightarrow \infty$ . Se é considerado um acoplamento na primeira variável e dois osciladores de Rössler, a equação para as pequenas diferenças transversais (equação 3.14) é dada por:

$$\dot{\delta}y_1 = -\delta y_2 - \delta y_3 - c\delta y_1 \quad (3.24a)$$

$$\dot{\delta}y_2 = \delta y_1 + a_R\delta y_2 \quad (3.24b)$$

$$\dot{\delta}y_3 = s_3\delta y_1 + \delta y_3(s_1 - c_R). \quad (3.24c)$$

Quando  $c \rightarrow \infty$ , a primeira variável tende a zero ( $\delta y_1 \rightarrow 0$ ), pois o termo dominante na

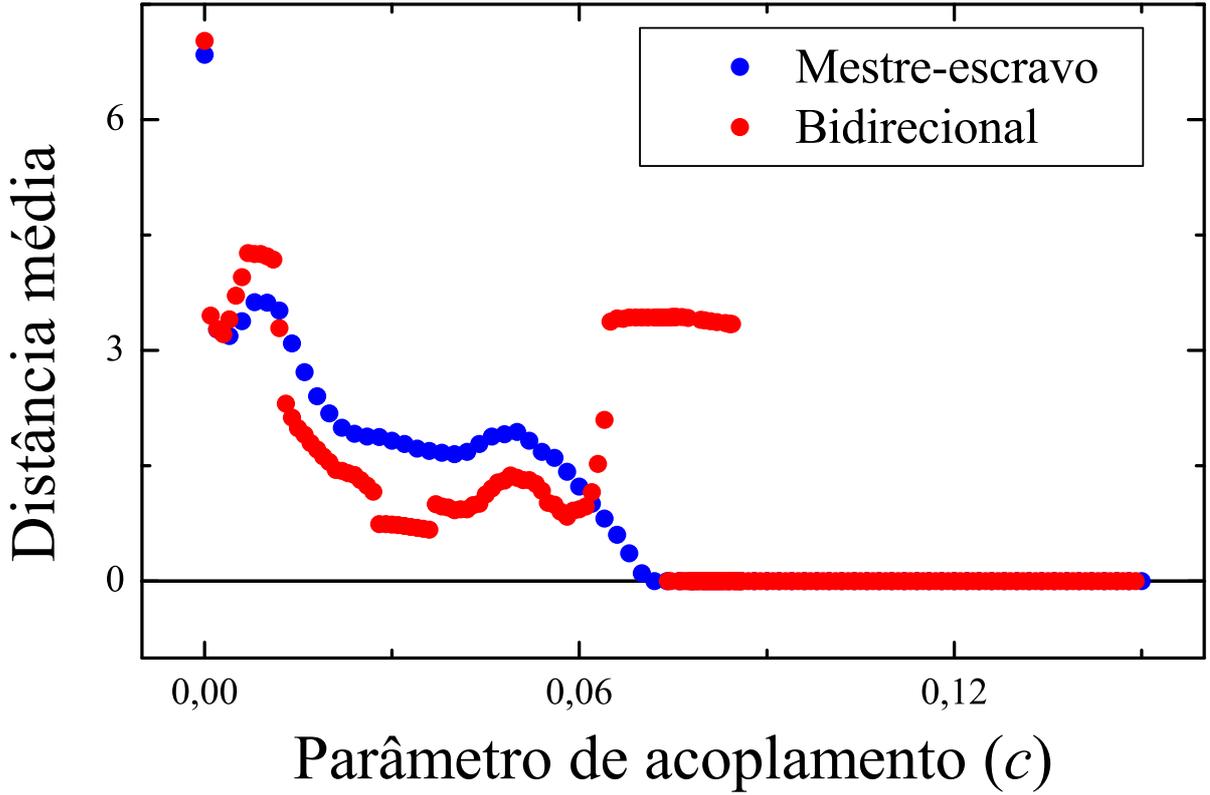


Figura 12: Distância média do invariante de sincronização  $|\mathbf{X}_\perp|$  para dois osciladores de Rössler com acoplamento do tipo mestre-escravo (em azul) e bidirecional (em vermelho). No primeiro, a distância anula-se quando o expoente transversal é negativo (de  $c \approx 0,072$  em diante) e o sistema sincroniza. Para o segundo, há uma coexistência de dois atratores, um na variedade de sincronização e outro fora, para  $c$  entre os valores aproximados de  $0,072$  e  $0,085$ .

sua equação de derivada temporal é  $-\delta y_1$ . Então, pode-se dizer que  $\delta y_1 = 0$  e, a partir disso, definir o expoente transversal com as duas equações restantes apenas:

$$\dot{\delta y}_2 = a_R \delta y_2 \quad (3.25a)$$

$$\dot{\delta y}_3 = \delta y_3 (s_1 - c_R). \quad (3.25b)$$

A principal conclusão é que o expoente transversal não depende do acoplamento para valores de  $c$  muito grandes. O valor assintótico do expoente será representado por  $\lambda_\perp(c \rightarrow \infty)$ .

Existem três possibilidades para a existência ou não de sincronização. A primeira delas acontece quando  $\lambda_\perp(c \rightarrow \infty) < 0$ . Obviamente, o sistema com este limite sincroniza. Para valores de  $c$  muito pequenos,  $\lambda_\perp \approx \lambda_1 > 0$ , contudo, bastará aumentar  $c$  suficientemente para obter sincronização. A segunda e a terceira possibilidades dividem algo em comum:  $\lambda_\perp(c \rightarrow \infty) > 0$ . Os dois limites interessantes de  $c$  ( $c = 0$  e  $c \rightarrow \infty$ ) são positivos. Na

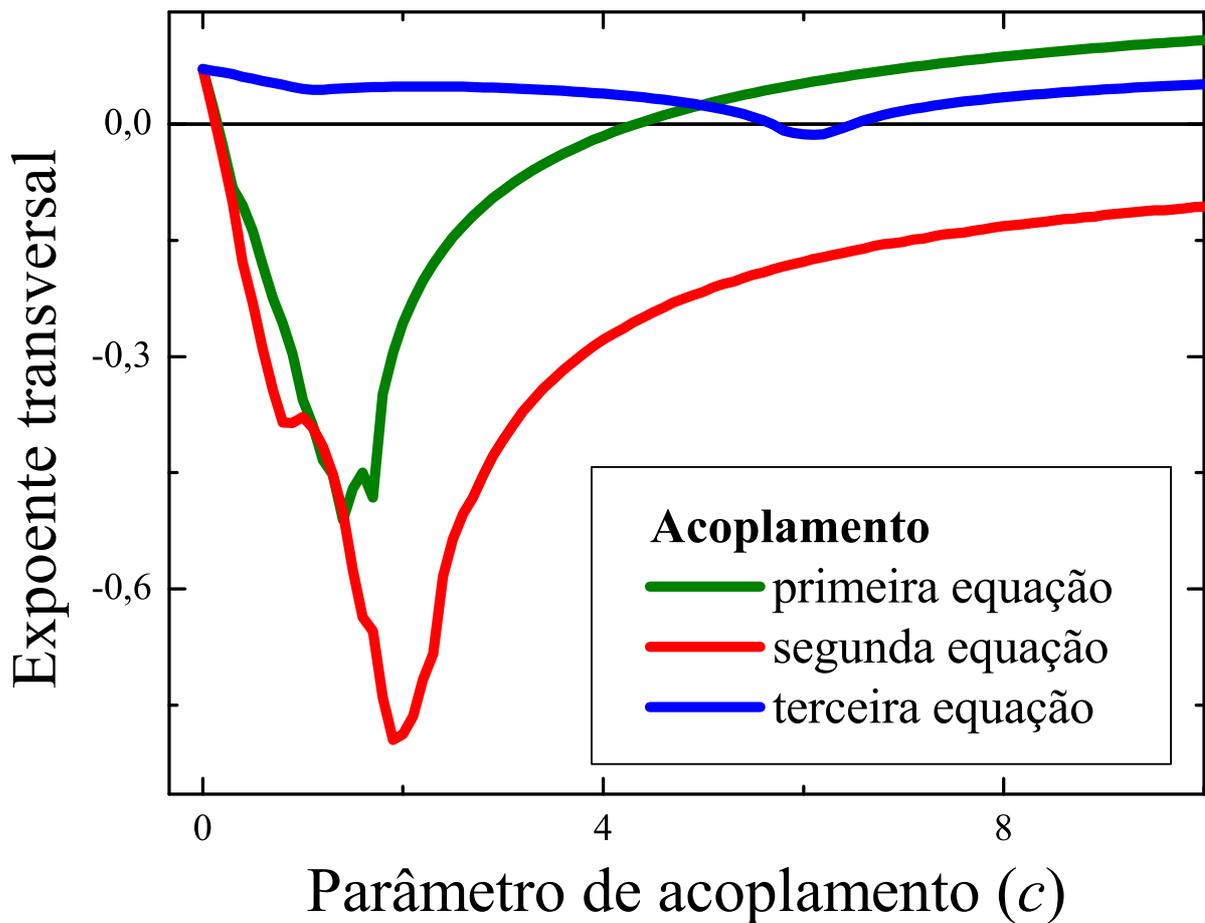


Figura 13: Expoente transversal para dois osciladores de Rössler com acoplamento mestre-escravo em uma equação apenas. As linhas verde, vermelha e azul representam o acoplamento na primeira, segunda e terceira variável, respectivamente. Para acoplamento na primeira e na terceira variável a sincronização começa com  $c \approx 0,15$  e  $c \approx 5,7$  e termina em  $c \approx 4,3$  e  $c \approx 6,5$  respectivamente. Para acoplamento na segunda variável a sincronização começa com  $c \approx 0,15$ .

segunda, para algum valor intermediário de  $c$  há sincronização. Neste caso, o valor de  $c$  pode ser variado em busca desta situação. Na terceira,  $\lambda_{\perp}(c) > 0$  para todo o  $c$  e não há sincronização.

Casualmente, o sistema escolhido apresenta apenas as situações com sincronização, conforme a figura 13 indica. Para acoplamento na primeira e na terceira variável ocorre a segunda situação. A sincronização começa com  $c \approx 0,15$  e termina com  $c \approx 4,3$  para acoplamento na primeira variável e começa com  $c \approx 5,7$  e termina com  $c \approx 6,5$  para acoplamento na terceira. Para acoplamento na segunda variável, ocorre a primeira situação e a sincronização começa com  $c \approx 0,15$ .

*Outros casos.* Para casos que não os anteriores, ainda se pode obter sincronização. Um exemplo com acoplamento do tipo mestre-escravo para dois osciladores de Rössler é

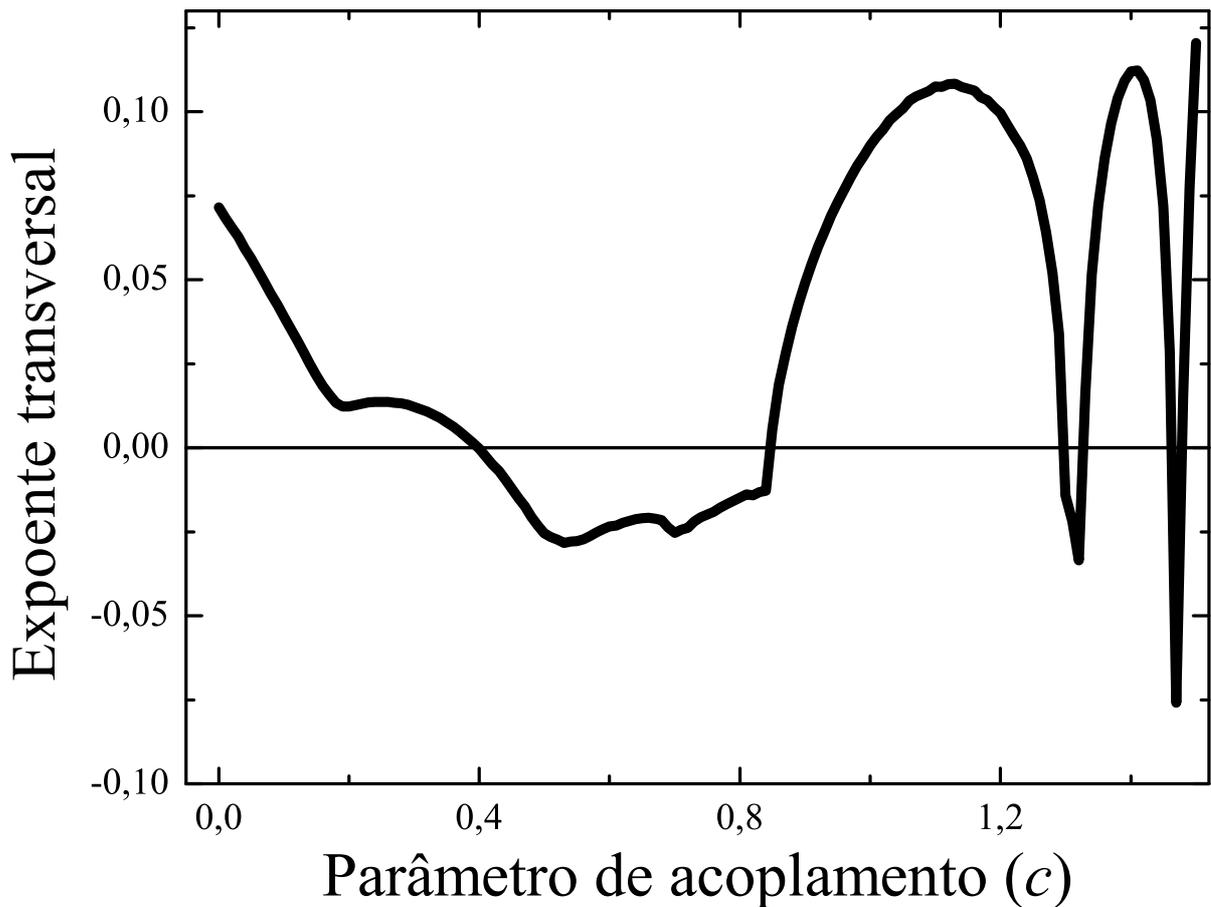


Figura 14: Exponente transversal para dois osciladores de Rössler com acoplamento mestre-escravo com a matriz 3.26. A figura mostra três regiões de  $c$  entre 0,0 e 1,5 nas quais há sincronização.

apresentado:

$$E^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Esta matriz acopla a primeira variável do mestre na terceira equação do escravo, a segunda variável do mestre na segunda equação do escravo e a terceira variável do mestre na primeira equação do escravo. Apesar de estranho, este acoplamento pode gerar sincronização, como mostra a figura 14.

### 3.4 Acoplamento interno

O acoplamento externo nem sempre é possível para dois osciladores na natureza. Entretanto, algumas vezes um acoplamento interno pode ser feito ou é mais adequado. A evolução das pequenas diferenças transversais pode ser estudada de maneira similar ao

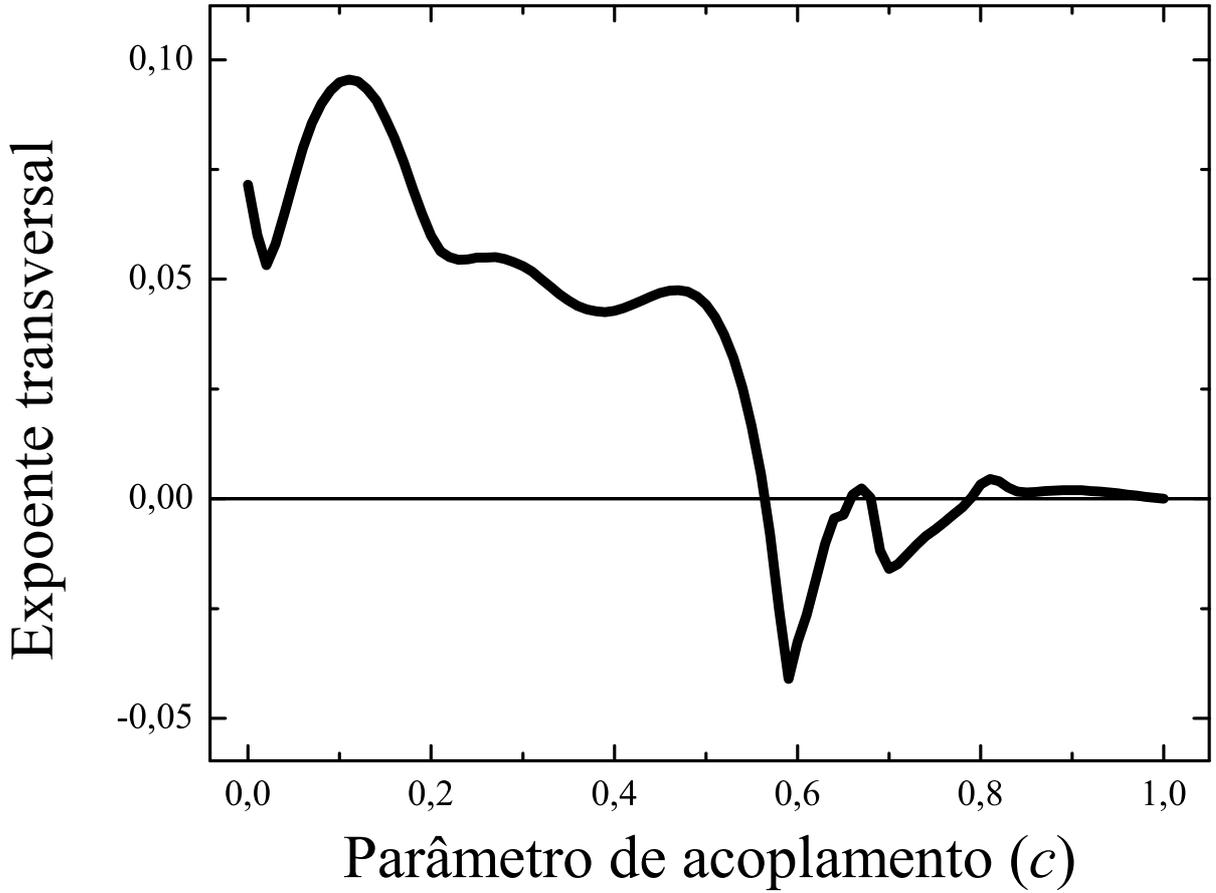


Figura 15: Exponente de Liapunov transversal como função do parâmetro de acoplamento calculado numericamente para dois sistemas de Rössler com acoplamento **interno** tal que  $E^{(1)} + E^{(2)} = I_m$ . A sincronização é atingida para duas regiões de  $c$ .

acoplamento externo. De primeiro, o sistema é escrito como:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)} + cE^{(1)}(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})) \quad (3.27a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)} + cE^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)})). \quad (3.27b)$$

Quando os subsistemas estiverem sincronizados, a evolução dos dois é idêntica e é também a mesma do caso de acoplamento externo:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}). \quad (3.28)$$

Definido o movimento na variedade de sincronização, o sistema é linearizado:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{J}(\delta \mathbf{x}^{(1)} + cE^{(1)}(\delta \mathbf{x}^{(2)} - \delta \mathbf{x}^{(1)})) \quad (3.29a)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{J}(\delta \mathbf{x}^{(2)} + cE^{(2)}(\delta \mathbf{x}^{(1)} - \delta \mathbf{x}^{(2)})), \quad (3.29b)$$

para que as diferenças transversais infinitesimais  $\delta \mathbf{y} = \delta \mathbf{x}^{(1)} - \delta \mathbf{x}^{(2)}$  possam ter sua evolução

determinada:

$$\delta\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J} (1 - c [\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}]) \delta\mathbf{y}. \quad (3.30)$$

A equação 3.14 – equação equivalente do caso de acoplamento externo – apresenta diferenças com relação à equação acima. Enquanto aquela apresenta o termo de acoplamento como uma soma ao termo jacobiano, esta apresenta como uma multiplicação. Todavia, nenhuma dificuldade adicional há para a definição do expoente de Liapunov transversal baseada na diferença  $\delta\mathbf{y}$ .

Dada a similaridade entre os casos de acoplamento externo e interno, apenas um exemplo será apresentado nesta seção, com  $\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{I}_m$ . Desta maneira:

$$\delta\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}(\mathbf{s}(t))(1 - c)\delta\mathbf{y}. \quad (3.31)$$

Infelizmente, não há substituição alguma que possa simplificar esta equação, ao contrário do caso anterior de acoplamento externo. Contudo, pode ser conjecturado o que acontece quando  $c = 1$ . Claramente, o lado direito da última equação anula-se e, com isto, a diferença não cresce, nem diminui: permanece constante. Este é um indício de que o expoente transversal neste caso é nulo. Na figura 15, o expoente é calculado para  $0, 0 \leq c \leq 1, 0$ , mostrando sincronização para alguns valores de  $c$ .

## 3.5 Sincronização em antifase

Com dois subsistemas pode-se definir uma *sincronização em antifase*, que seria dada pela relação  $\mathbf{x}^{(1)} = -\mathbf{x}^{(2)}$  ou pela relação  $x_i^{(1)} = -x_i^{(2)}$  para alguns valores de  $i$ . Um exemplo deste caso foi o reportado por C. Huygens em 1673<sup>1</sup>: ele observou que dois relógios de pêndulo idênticos, afixados em uma mesma barra (flexível), em um curto espaço de tempo oscilavam de forma sincronizada, em antifase. Este conceito de antifase pode, com o devido cuidado, ser visto como uma expansão do caso de sincronização idêntica. Isso ocorre quando os osciladores possuem alguma simetria do tipo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{K}\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{K}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}). \quad (3.32)$$

A matriz  $\mathbf{K}$  pode ser a identidade com o sinal trocado ( $-\mathbf{I}_m$ ), porém ela também pode ser uma matriz com os elementos da diagonal iguais ou a um ou a menos um.

Se existe a simetria, para cada sistema idêntico composto por dois osciladores acopla-

<sup>1</sup>HUYGENS, C. *Horologium oscillatorium*. Paris: [s.n.], 1673.

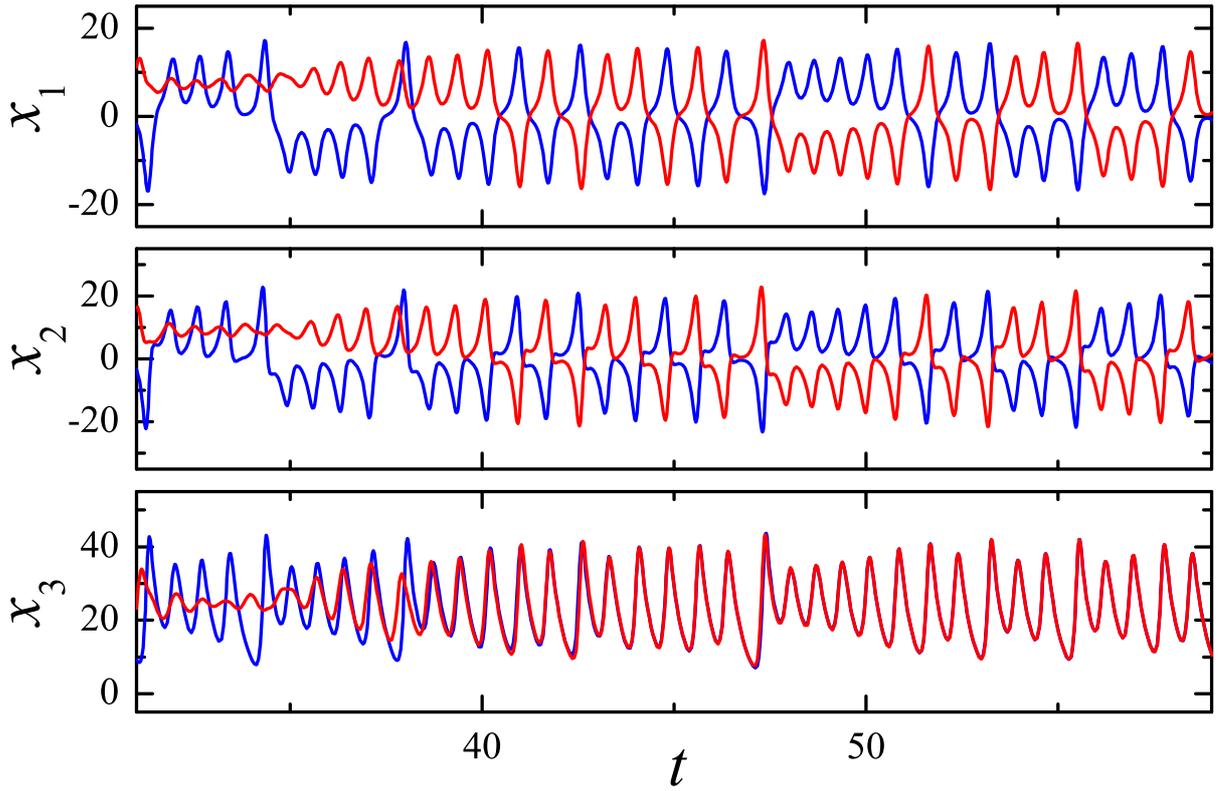


Figura 16: Variáveis de dois sistemas de Lorenz sincronizando. As duas primeiras ( $x_1$  e  $x_2$ ) sincronizam em antifase, enquanto que a terceira, em fase. Para estudar este sistema, praticamente nada é adicionado ao método desenvolvido para a sincronização idêntica.

dos:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) \quad (3.33a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}) + c(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}), \quad (3.33b)$$

existe um sistema análogo da forma:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) \quad (3.34a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}) + c(\mathbf{K}\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}), \quad (3.34b)$$

obtido a partir da transformação  $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{K}\mathbf{x}^{(1)}$ . O primeiro sistema tem um invariante de sincronização dado por  $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$ , enquanto que o segundo,  $\mathbf{K}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$ , justamente uma sincronização que iguala as variáveis de um oscilador com as variáveis com o sinal invertido de outro. Se um sistema sincronizar, o outro também sincronizará. Decorre disso que a análise de sincronização pode ser feita para o sistema mais conveniente. Explicitamente, os dois sistemas sincronizam quando o parâmetro de acoplamento é maior do que o expoente de Liapunov do subsistema isolado, como já foi visto nas seções anteriores.

Para exemplificar, dois osciladores de Lorenz são escolhidos e a matriz  $\mathbf{K}$  correspondente é:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

O expoente de Liapunov de um oscilador de Lorenz é aproximadamente igual a 0,9 e a sincronização deve ocorrer para  $c$  maior que este valor. Na figura 16, a evolução e a sincronização das variáveis dos subsistemas com  $c = 1,1$  são mostradas. As duas primeiras variáveis dos osciladores tornam-se espelhadas, ou seja, são simétricas e, portanto,  $x_1^{(1)} = -x_1^{(2)}$  e  $x_2^{(1)} = -x_2^{(2)}$ . A terceira variável sincroniza da maneira usual, isto é,  $x_3^{(1)} = x_3^{(2)}$ .

## 4 *Redes de osciladores caóticos idênticos*

Neste capítulo, serão estudadas as redes compostas por osciladores idênticos, isto é, todos os subsistemas da rede terão a mesma dinâmica; o que mudará de sítio para sítio serão as condições iniciais. As possibilidades de sincronização para este tipo de sistema são mais amplas do que as tratadas no capítulo anterior. Com dois subsistemas, ou havia sincronização idêntica ou não. Com mais osciladores, pode ser que todos estejam sincronizados identicamente. Igualmente possível é que não se possa encontrar um par de osciladores na rede que apresentem a mesma evolução temporal, que é o caso de dessincronização. A novidade é uma possibilidade intermediária: nem todos os osciladores se comportam igualmente, nem cada um à sua maneira. Nas próximas seções estas possibilidades de sincronização serão estudadas e detalhadas. O método será baseado nas ferramentas desenvolvidas no capítulo anterior.

### 4.1 A rede

Em analogia ao par de osciladores do capítulo anterior, a rede de  $N$  subsistemas será definida da seguinte maneira (para acoplamento externo; para acoplamento interno, a definição é análoga):

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) + \mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{X}), \quad (4.1)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Quando for usado um  $i$  que esteja fora destes valores estabelecidos (como  $i = N + 3$ ), deve-se entender que o número é na verdade  $i \bmod N$  (no exemplo,  $i = 3$ ). A dimensão do sistema  $n$  é igual ao produto  $Nm$  entre o número de subsistemas  $N$  e a dimensão de cada um  $m$ .

Novamente, para os casos estudados, o acoplamento será linear. A grande diferença é que as possibilidades ditas *espaciais* aumentaram bastante. Como uma rede é estudada, a ligação entre os seus sítios é que define o que se chama de estrutura espacial. Com

dois osciladores, a única diferença que podia ser feita era entre acoplamento do tipo mestre-escravo e bidirecional. Com um  $N$  maior, os sítios podem estar dispostos em várias configurações. Todas estas possibilidades estão expressas no sistema (acoplamento externo):

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) + c \sum_j G_{ij} \mathbf{E} \mathbf{x}^{(j)}, \quad (4.2)$$

no qual  $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $c$  é o parâmetro de acoplamento;  $\mathbf{E}$  é uma matriz quadrada de ordem  $m$  e  $\mathbf{G}$  é uma matriz quadrada de ordem  $N$ . Este não é o acoplamento mais geral, mas mantém todas as características desejáveis que se manifestarão adiante. O parâmetro de acoplamento e a matriz  $\mathbf{E}$  cumprem funções análogas às do caso de um par de osciladores. Aquele dá a força do acoplamento e esta serve para decidir quais variáveis se acoplam com quais equações. Já a matriz  $\mathbf{G}$  é aquela que define e evidencia a estrutura espacial do acoplamento; ela determina quais osciladores se acoplam.

Outra forma de escrever a equação 4.2 também é possível com a definição do vetor  $\mathbf{X} = \text{col}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)})$  e da função  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \text{col}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(N)}))$ . É fácil perceber que:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + c(\mathbf{G} \otimes \mathbf{E})\mathbf{X}, \quad (4.3)$$

em que  $\otimes$  representa o produto direto de duas matrizes. As equações equivalentes para acoplamento interno são:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) + c \sum_j G_{ij} \mathbf{E} \mathbf{x}^{(j)} \quad (4.4)$$

e

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X} + c(\mathbf{G} \otimes \mathbf{E})\mathbf{X}). \quad (4.5)$$

Uma maneira muito comum com a qual o sistema é acoplado é com  $G_{ii} = -\sum_{j \neq i} G_{ij}$ . Assim;

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) + c \sum_j G_{ij} \mathbf{E} (\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)}) \quad (4.6)$$

e o acoplamento fica mais parecido com os usados entre dois osciladores. Se os elementos diagonais de  $\mathbf{G}$  são negativos, o acoplamento é chamado de dissipativo. Além disso, dois tipos de acoplamento são tradicionais: o global e o em anel. No caso do primeiro, todos

os sistemas são acoplados entre si e a matriz  $\mathbf{G}$  é dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -(N-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(N-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -(N-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(N-1) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

No caso do acoplamento em anel, o acoplamento se dá entre os *vizinhos*, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) + c\mathbf{E}(\mathbf{x}^{(i+1)} + \mathbf{x}^{(i-1)} - 2\mathbf{x}^{(i)}). \quad (4.8)$$

A matriz que representa este acoplamento é a seguinte:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

## 4.2 Sincronização completa

Uma rede com diversos osciladores idênticos pode mostrar uma configuração caracterizada pela sincronização idêntica entre todos os osciladores. Para representar este caso, definir-se a *sincronização completa*, dada pelas igualdades  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(j)}$  para todo  $i$  e  $j$  (8, 9). Um fato curioso da sincronização completa é que todos os subsistemas agem como sendo apenas um, ou seja, o conhecimento das variáveis de um subsistema determina as variáveis de todos os outros. Matematicamente falando,  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{s}$  para todo  $i$ . Se o acoplamento desaparece quando há sincronização completa, as equações da rede 4.1 tornam-se simplesmente:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{s}). \quad (4.10)$$

A condição para a existência de sincronização completa será a existência de algum atrator do sistema na variedade definida pelas equações  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(j)}$  para todo  $i$  e  $j$ , ou seja, a *variedade de sincronização completa*. Para isso, é requerido que esta variedade seja um invariante do sistema. Para o acoplamento definido na equação 4.2, isso ocorre quando  $\sum_j G_{ij} = 0$ , ou seja, a soma dos elementos de uma linha da matriz  $\mathbf{G}$  é sempre nula.

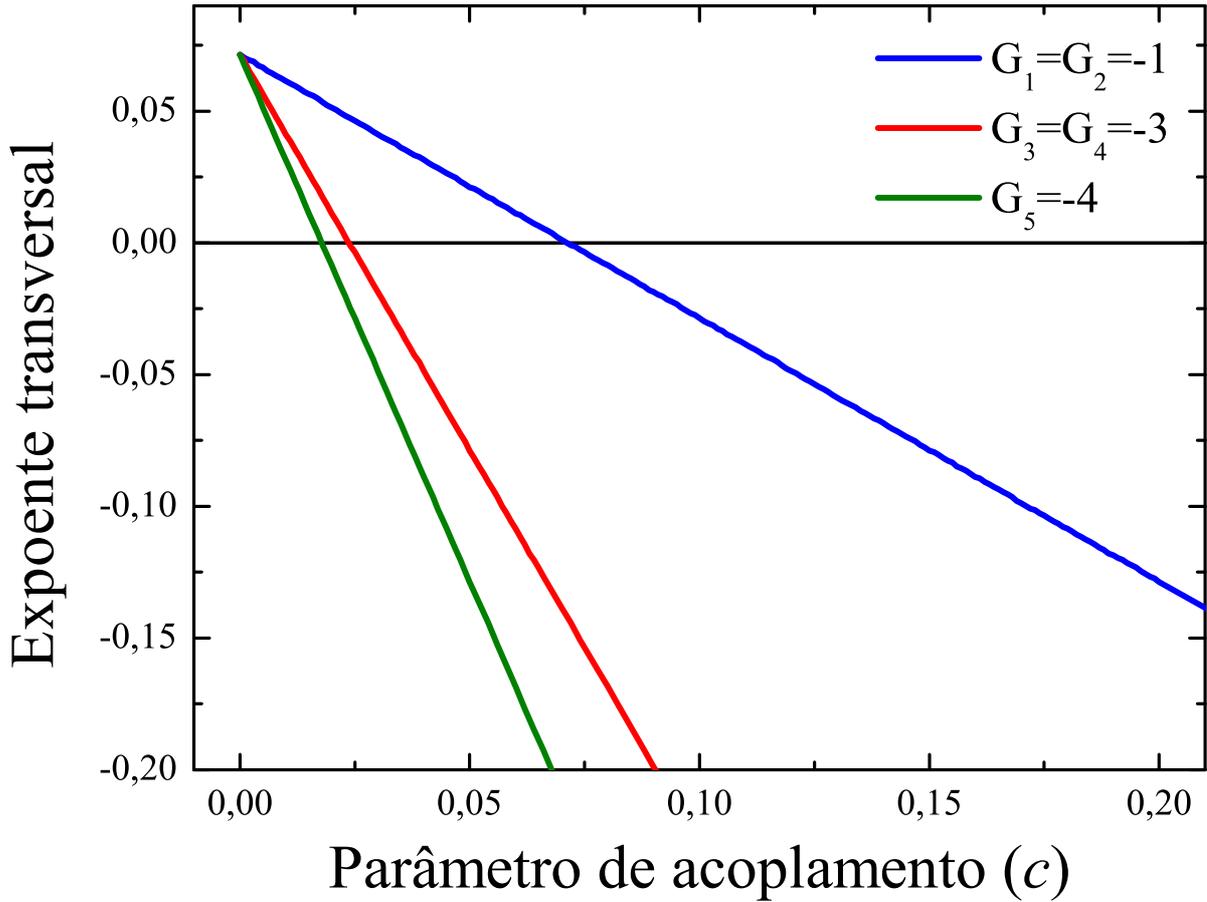


Figura 17: Expoentes de Liapunov transversais para seis osciladores de Rössler acoplados em anel. O expoente para o maior  $G_i$  determina a sincronização.

Nesse caso, obviamente, se  $\mathbf{x}^{(i)}(t_0) = \mathbf{x}^{(j)}(t_0)$  para todo  $i$  e  $j$ , os subsistemas apresentarão sincronização completa para todo  $t$  pois, como eles são idênticos e o acoplamento se anula para todo  $t$ , eles irão apresentar a mesma evolução a partir da mesma condição inicial. O expoente de Liapunov  $\lambda$  do estado sincronizado será constante e igual ao de um oscilador desacoplado.

Contudo, para que exista um atrator na variedade de sincronização, órbitas muito próximas do atrator (mas fora da variedade) devem aproximar-se do mesmo quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto é equivalente a dizer que todos os osciladores devem sincronizar identicamente pois todas as pequenas diferenças entre eles se anulam assintoticamente. O trabalho a ser realizado é expandir as técnicas usadas com um par de osciladores para uma rede com  $N$  subsistemas. O primeiro passo é linearizar o sistema em torno do estado sincronizado:  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{s} + \delta\mathbf{x}^{(i)}$ . É simples buscar as equações às quais estão sujeitas as diferenças  $\delta\mathbf{x}^{(i)}$  a

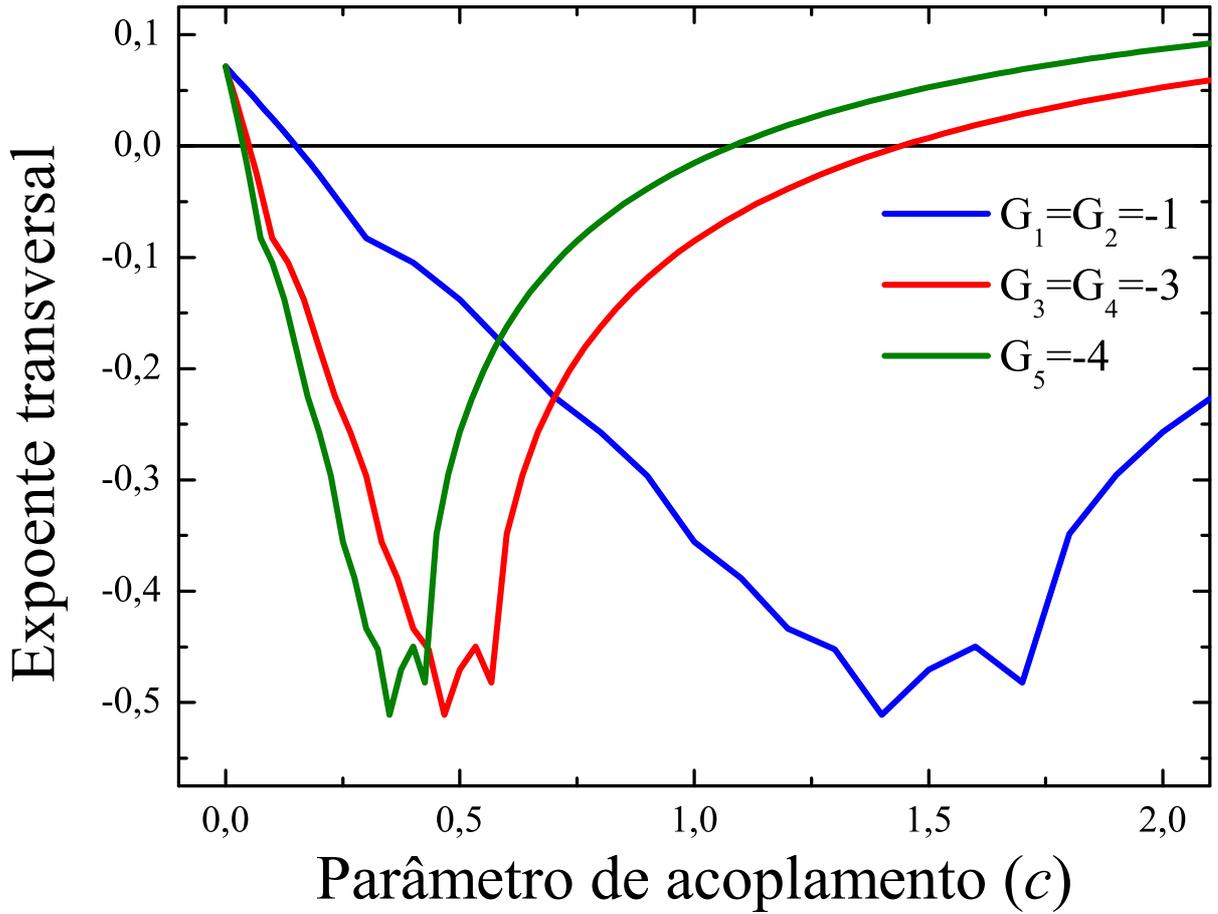


Figura 18: Exponentes de Liapunov transversais para seis osciladores de Rössler acoplados em anel apenas na primeira equação. Há uma janela de sincronização, com início e fim. O expoente para o maior  $|G_i|$  (fim) e o para o menor  $|G_i|$  (início) determinam a sincronização.

partir da equação 4.6:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{J} \delta \mathbf{x}^{(i)} + c \sum_j G_{ij} \mathbf{E} (\delta \mathbf{x}^{(j)} - \delta \mathbf{x}^{(i)}) \quad (4.11)$$

ou

$$\delta \dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{J} + c(\mathbf{G} \otimes \mathbf{E})) \delta \mathbf{X}. \quad (4.12)$$

Depois, definem-se as pequenas diferenças transversais. Para dois osciladores, havia apenas uma diferença vetorial de dimensão  $m$ . Para  $N$  osciladores, existirão  $N(N-1)/2$ :

$$\delta \mathbf{y}^{(i,j)} = \delta \mathbf{x}^{(i)} - \delta \mathbf{x}^{(j)} = \delta(\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}). \quad (4.13)$$

A sincronização completa ocorre se  $\delta \mathbf{y}^{(i,j)} \rightarrow 0$  para todo  $i$  e  $j$  diferentes quando  $t \rightarrow \infty$ . Todavia, estudar tantas diferenças assim é um desperdício: algumas diferenças podem ser escritas como combinações lineares das outras. Por exemplo,  $\delta \mathbf{y}^{(i,j)} = \delta \mathbf{y}^{(i,k)} + \delta \mathbf{y}^{(k,j)}$  para

qualquer  $k$ . Na verdade, com  $N - 1$  diferenças todas as outras podem ser escritas. Por exemplo, basta escolher  $\delta\mathbf{y}^{(1,2)}$ ,  $\delta\mathbf{y}^{(2,3)}$ ,  $\dots$ ,  $\delta\mathbf{y}^{(N-1,N)}$  e qualquer outra pode ser obtida por meio da relação anterior.

Com a liberdade que foi permitida, pode-se escolher o conjunto de  $N - 1$  pequenas diferenças transversais mais conveniente. Os elementos deste conjunto são escritos da seguinte maneira ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ):

$$\delta\mathbf{y}^{(i)} = \sum_j L_{ij} \delta\mathbf{x}^{(j)}, \quad (4.14)$$

com  $\sum_j L_{ij} = 0$ . A evolução das quantidades vetoriais  $\delta\mathbf{y}^{(i)}$  é dada por:

$$\dot{\delta\mathbf{y}}^{(i)} = \mathbf{J}\delta\mathbf{y}^{(i)} + c \sum_j L_{ij} \sum_k G_{jk} \mathbf{E} \delta\mathbf{x}^{(k)}. \quad (4.15)$$

A melhor escolha é a que desacopla as equações acima. Isso ocorre quando cada  $\mathbf{L}_i$  é um autovetor à esquerda de  $\mathbf{G}$ . Um autovetor à direita já é conhecido: como as linhas de  $\mathbf{G}$  têm soma nula, qualquer vetor com todas as componentes iguais é um autovetor de autovalor zero. Todos os  $\mathbf{L}_i$  são perpendiculares a este vetor à direita. Isso implica que a matriz  $\mathbf{G}$  possui  $N - 1$  autovetores à esquerda ( $\mathbf{L}_i$ ) linearmente independentes que podem representar qualquer das diferenças. A equação desacopla-se:

$$\dot{\delta\mathbf{y}}^{(i)} = \mathbf{J}\delta\mathbf{y}^{(i)} + cG_i \mathbf{E} \delta\mathbf{y}^{(i)}, \quad (4.16)$$

na qual  $G_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$  são todos os autovalores da matriz  $\mathbf{G}$ , exceto o nulo proveniente do fato de que as linhas possuem soma nula. Esta equação é essencialmente a mesma que se achou para dois sistemas acoplados, apenas com  $cG_i$  no lugar de  $-c$ , o que gera  $N - 1$  equações. Deve-se mostrar que cada uma dessas diferenças tende assintoticamente a zero quando  $t$  tende a infinito.

Por uma questão de conveniência, são definidos da maneira usual  $N - 1$  expoentes de Liapunov transversais  $\lambda_{\perp i}$ , um para cada  $\delta\mathbf{y}^{(i)}$ :

$$\lambda_{\perp i} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta\mathbf{y}^{(i)}(t)|}{|\delta\mathbf{y}^{(i)}(0)|}. \quad (4.17)$$

A relação mais interessante (que vem direto da equação 4.16) entre os expoentes transversais é que  $\lambda_{\perp i}(cG_i) = \lambda_{\perp j}(cG_j)$  para qualquer  $i$  ou  $j$ . Então, dado um acoplamento, basta calcular um destes expoentes como função de  $c$  e os outros são obtidos com mudanças na escala de  $c$ . Quando todos forem negativos, a sincronização completa é possível.

O primeiro caso a ser estudado caracteriza-se por  $E = I_m$ . A equação 4.16 será:

$$\dot{\delta \mathbf{y}}^{(i)} = J\delta \mathbf{y}^{(i)} + cG_i\delta \mathbf{y}^{(i)}. \quad (4.18)$$

Deve-se notar que, se um dos  $\lambda_{\perp i}$  for positivo, a sincronização torna-se impossível. Desta maneira, o sistema sincronizará quando  $\lambda + cG_i < 0$  para todo  $i$ , conforme foi visto no capítulo anterior (equação 3.22). Para um acoplamento global,  $G_i = -N$  para  $i = 1, 2, \dots, (N - 1)$  e todos os expoentes transversais são negativos ou positivos simultaneamente. Assim, haverá sincronização para  $c > \lambda/N$ . Para um acoplamento em anel, os autovalores são mais variados. Além do nulo, existem os dados pela fórmula seguinte (8):

$$G_i = -4(\text{sen}(i\pi/N))^2, \quad i = 1, 2, \dots, (N - 1), \quad (4.19)$$

Seqüências destes autovalores são  $-3$  e  $-3$  para  $N = 3$ ;  $-2, -4$  e  $-2$  para  $N = 4$ ;  $-1, -3, -4, -3$  e  $-1$  para  $N = 6$ ; etc. Se as diferentes equações  $\lambda + cG_i < 0$  (ou  $c > \lambda/|G_i|$ ) são consideradas, percebe-se que o autovalor  $G_i$  determinante é o  $G_1$ , ou seja, o maior (menor em módulo). O sistema sincronizará se:

$$c > \frac{4\lambda}{(\text{sen}(\pi/N))^2}. \quad (4.20)$$

O limiar de sincronização em  $c$  se tornará cada vez mais alto conforme  $N$  aumenta. Os expoentes transversais calculados para  $n = 6$  são mostrados na figura 17.

Se a matriz  $E$  não é a identidade, já foi visto no capítulo anterior que as pequenas diferenças com evolução dada pela equação 4.16 podem apresentar três possibilidades. Na primeira, o expoente transversal  $\lambda_{\perp i}$  não se torna negativo para valor algum de  $c$ . Neste caso, não há sincronização. Na segunda, o expoente fica negativo a partir de um valor específico. Isto é muito parecido com a situação anterior, quando  $E = I_m$ : há um valor de  $cG_i$  para o qual o expoente transversal  $i$  anula-se. O menor autovalor em módulo ( $G_1$ ) será o determinante, pois exigirá um  $c$  maior do que o exigido pelos outros autovalores para tornar negativo o expoente transversal associado.

A terceira possibilidade é a mais complexa: o expoente de Liapunov transversal  $\lambda_{\perp i}$  é negativo para uma faixa de valores de  $c$ . Neste caso, cada  $\lambda_{\perp i}$  terá um intervalo no qual será negativo, explicitamente, quando  $c_1 < c|G_i| < c_2$ . A sincronização existirá na interseção de todos esses intervalos. Para  $c$  aumentando, o valor de início da interseção é o mesmo do início do último intervalo a começar e o valor final da interseção é o mesmo do final do primeiro intervalo a terminar. Pela relação  $c_1 < c|G_i| < c_2$ , observa-se que os intervalos começam em valores maiores de  $c$  quando  $G_i$  for menor em módulo e acabam

em valores menores de  $c$  quando  $G_i$  for maior em módulo. Logo, apenas interessam os expoentes transversais correspondentes quando  $G_i$  é máximo em valor absoluto (o fim da sincronização) e quando  $G_i$  é mínimo em valor absoluto (o início da sincronização).

Quando o acoplamento é global, todos os  $G_i$  são iguais e a interseção de todos os intervalos é exatamente igual a cada intervalo. Já quando o acoplamento é em anel, a situação é um pouco mais complicada e está representada na figura 18 para  $N = 6$  e para:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Para haver sincronização, deverá valer a relação  $0,15 < c|G_i| < 0,43$  para todo  $i$  (os valores numéricos são extraídos da figura 18). O maior autovalor é  $-1$  e o menor,  $-4$  e então a sincronização existe quando  $0,15/1 < c < 4,3/4$ . Se  $N$  pode variar, quanto maior o  $N$ , menor a faixa de valores na qual há sincronização. A partir de um número de osciladores limite, não há mais sincronização, pois não há interseção entre os intervalos de  $c$  definidos por algum expoente transversal negativo. Para o caso estudado (e  $N$  par), isso ocorre quando  $0,15/|G_i| < 4,3/4$  ou  $\sin(\pi/N) > 0,19$ . O valor limite de  $N$  então é aproximadamente 16. Para  $N = 18$ , há ao menos um expoente transversal positivo para qualquer valor de  $c$  com certeza.

### 4.3 Sincronização parcial

A sincronização completa é muito restritiva, pois exige que todos os osciladores apresentem a mesma evolução. O passo seguinte mais lógico é estudar quando alguns osciladores sincronizam identicamente, mas outros não. Esta é a *sincronização parcial*, definida como a sincronização na qual para apenas alguns  $i$  e  $j$  com  $i \neq j$  vale (ao menos assintoticamente) a relação  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(j)}$  (10, 11, 13). Ao contrário da sincronização idêntica, existem vários tipos de sincronização parcial para cada rede, dependendo de quais valores de  $i$  e  $j$  fazem  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(j)}$ . Conseqüentemente, torna-se necessária uma maneira mais rápida de escrever quais variáveis são iguais, ou seja, quais osciladores estão sincronizados. A maneira usual é com padrões: letras idênticas são atribuídas para subsistemas que sincronizam identicamente. Para um sistema com apenas um oscilador ( $N = 1$ ), há apenas um padrão, chamado de padrão  $A$ . Poderia ser usada equivalentemente qualquer letra, mas, por convenção, a ordem alfabética é usada na escolha. Com  $N = 2$ , existem dois padrões:  $AA$  e  $AB$ . O primeiro nada mais é que a sincronização completa da rede, quando

o primeiro subsistema está sincronizado identicamente com o segundo. O segundo padrão é o estado dessincronizado. Este ainda poderia ser escrito como  $BA$ , mas a convenção é tal que as letras devem aparecer da esquerda para a direita em ordem alfabética.

Com  $N = 3$ , os padrões são  $AAA$ ,  $AAB$ ,  $ABA$ ,  $ABB$  e  $ABC$ . Estes cinco padrões cobrem todas as possibilidades: sincronização completa, sincronização parcial entre os dois primeiros osciladores, entre o primeiro e o terceiro, entre os dois últimos e dessincronização. Então, sincronização parcial só é possível para  $N > 2$ . Para  $N = 4$ , o número de padrões já é bem maior:  $AAAA$ ,  $AAAB$ ,  $AABA$ ,  $AABB$ ,  $AABC$ ,  $ABAA$ ,  $ABAB$ ,  $ABAC$ ,  $ABBA$ ,  $ABBB$ ,  $ABBC$ ,  $ABCA$ ,  $ABCB$ ,  $ABCC$  e  $ABCD$ . A forma de construir os padrões é simples. Se são conhecidos todos os padrões para uma rede com  $N$  subsistemas, pode-se descobrir os padrões para uma rede com  $N + 1$ . As primeiras  $N$  letras de um padrão de  $N + 1$  letras devem compor um dos padrões de  $N$  letras, já que são conhecidos todos. Dado este padrão, a letra  $N + 1$  poderá ser igual a uma letra existente neste padrão ou uma nova letra. Por exemplo, o padrão  $ABA$  gera os padrões  $ABAA$ ,  $ABAB$  e  $ABAC$ . Outra maneira de representar estes padrões é usando a variável  $\mathbf{X}$ . O padrão  $AAAA$  já foi representado como  $\mathbf{X} = \text{col}(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{s})$ ; o padrão  $ABAB$  é representado como  $\mathbf{X} = \text{col}(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)})$ ; o padrão  $ABAC$ , como  $\mathbf{X} = \text{col}(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(3)})$ ; etc. Aproveita-se para definir o número inteiro  $N_L$ , igual ao número de diferentes letras no padrão.

A primeira condição para a existência de sincronização parcial é a existência de uma variedade linear que seja um invariante do sistema. Para haver o padrão  $ABAC$ , por exemplo, a variedade definida por  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)}$  deve ser invariante. Esta variedade será chamada de *variedade de sincronização parcial*. Um sistema com uma porção destes invariantes poderá apresentar a porção correspondente de padrões. A verificação desta condição é relativamente simples: no mínimo uma variável do estado sincronizado ( $\mathbf{s}^{(i)}$ ) será repetida e haverá duas equações para sua evolução temporal. O que se pede é que o sistema não mostre equações diferentes para o mesmo  $\mathbf{s}^{(i)}$ .

A segunda condição é novamente relacionada com as pequenas diferenças  $\delta \mathbf{y}^{(i)}$  e o expoente transversal. O estado sincronizado deve de alguma forma atrair pontos na sua vizinhança. A maneira de definir estas diferenças segue os moldes estabelecidos para a sincronização completa. É interessante saber quantas diferenças existirão, ou seja, quantas diferenças são necessárias para gerar todas as diferenças que devem ir a zero. A regra geral é que um padrão com  $N_L$  letras terá  $N - N_L$  diferenças. Não haverá utilidade em definir diversos expoentes transversais, um para cada diferença, em contraste com o caso

de sincronização completa. Apenas um expoente transversal será definido:

$$\lambda_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-N_L} |\delta \mathbf{y}^{(i)}(t)|^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{N-N_L} |\delta \mathbf{y}^{(i)}(0)|^2}}. \quad (4.22)$$

Este expoente transversal deve ser negativo para a existência de sincronização parcial assintótica. Entretanto, mesmo se o expoente é negativo, a sincronização que se está procurando pode não existir. Para que ela exista, também é necessário que as variáveis representadas por letras diferentes sejam diferentes. Se isso não acontece, diz-se que o padrão degenerou-se em outro padrão (10). Por exemplo, se o padrão *ABAB* tem expoente transversal negativo, o padrão *ABAC* também poderá ter, ou seja, o padrão *ABAC* poderá ter degenerado-se no padrão *ABAB*. A análise posterior dos dados deve excluir estes padrões degenerados identificando quando as letras diferentes representam variáveis verdadeiramente diferentes. Uma maneira de garantir isto é calculando o expoente de Liapunov do estado sincronizado. Se o expoente é diferente para os dois padrões, os dois realmente ocorrem, em regiões distintas do espaço de fase.

Depois da introdução das propriedades comuns às diversas sincronizações parciais possíveis, o estudo de um exemplo de um acoplamento em anel com  $N = 4$  é apresentado. Explicitamente, as equações dinâmicas de tal sistema são:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) + c(\mathbf{x}^{(i+1)} + \mathbf{x}^{(i-1)} - 2\mathbf{x}^{(i)}). \quad (4.23)$$

Para este acoplamento, os padrões *AAAB*, *AABA*, *ABAA* e *ABBB* são essencialmente os mesmos: caracterizam-se por um dos sistemas evoluir de maneira diferente com relação aos outros. O sistema disposto em uma estrutura de anel não sente diferença entre estes padrões. Se um deles aparece para algumas condições iniciais, pode-se mudar as condições iniciais de modo que os outros também apareçam. Por isto, o padrão *AAAB* representa todos os outros, sem a necessidade de estudá-los separadamente, e o mesmo vale para alguns outros grupos de padrões. A conclusão é que considerar os padrões *AAAA*, *AAAB*, *AABB*, *AABC*, *ABAB*, *ABAC* e *ABCD* é estudar todos os outros também.

Os padrões de sincronização parcial são os de interesse aqui. Começando pelo *ABAB*, o movimento na variedade de sincronização será:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(1)}) + 2c(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(1)}) \quad (4.24a)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(2)}) + 2c(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}). \quad (4.24b)$$

Conforme a equação acima, o movimento na variedade de sincronização depende de  $c$ ,

ao contrário das outras possibilidades de sincronização já estudadas. Esta característica provoca conseqüências que diferenciam o estudo de sincronização parcial. Uma delas, por exemplo, é que o estado sincronizado terá um expoente de Liapunov  $\lambda$  dependente de  $c$ . Para referir-se ao expoente de Liapunov de um oscilador isolado, usa-se o símbolo  $\lambda_1$ , equivalente a  $\lambda(c = 0)$ .

O sistema linearizado em torno da variedade de sincronização é:

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(1)})\delta\mathbf{x}^{(1)} + c(\delta\mathbf{x}^{(4)} + \delta\mathbf{x}^{(2)} - 2\delta\mathbf{x}^{(1)}) \quad (4.25a)$$

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(2)})\delta\mathbf{x}^{(2)} + c(\delta\mathbf{x}^{(1)} + \delta\mathbf{x}^{(3)} - 2\delta\mathbf{x}^{(2)}) \quad (4.25b)$$

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(3)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(1)})\delta\mathbf{x}^{(3)} + c(\delta\mathbf{x}^{(2)} + \delta\mathbf{x}^{(4)} - 2\delta\mathbf{x}^{(3)}) \quad (4.25c)$$

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(4)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(2)})\delta\mathbf{x}^{(4)} + c(\delta\mathbf{x}^{(3)} + \delta\mathbf{x}^{(1)} - 2\delta\mathbf{x}^{(4)}). \quad (4.25d)$$

As diferenças transversais são duas, dadas por  $\dot{\delta\mathbf{y}}^{(1)} = \dot{\delta\mathbf{x}}^{(1)} - \dot{\delta\mathbf{x}}^{(3)}$  e  $\dot{\delta\mathbf{y}}^{(2)} = \dot{\delta\mathbf{x}}^{(2)} - \dot{\delta\mathbf{x}}^{(4)}$ , e obedecem às seguintes equações:

$$\dot{\delta\mathbf{y}}^{(1)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(1)})\delta\mathbf{y}^{(1)} - 2c\delta\mathbf{y}^{(1)} \quad (4.26a)$$

$$\dot{\delta\mathbf{y}}^{(2)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(2)})\delta\mathbf{y}^{(2)} - 2c\delta\mathbf{y}^{(2)}. \quad (4.26b)$$

O próximo padrão a ser considerado é o *ABAC*. Na variedade de sincronização, a dinâmica é:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(1)}) + c(\mathbf{s}^{(2)} + \mathbf{s}^{(3)} - 2\mathbf{s}^{(1)}) \quad (4.27a)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(2)}) + 2c(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}) \quad (4.27b)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(3)} = \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(3)}) + 2c(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(3)}). \quad (4.27c)$$

A linearização em torno do estado sincronizado gera:

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(1)})\delta\mathbf{x}^{(1)} + c(\delta\mathbf{x}^{(4)} + \delta\mathbf{x}^{(2)} - 2\delta\mathbf{x}^{(1)}) \quad (4.28a)$$

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(2)})\delta\mathbf{x}^{(2)} + c(\delta\mathbf{x}^{(1)} + \delta\mathbf{x}^{(3)} - 2\delta\mathbf{x}^{(2)}) \quad (4.28b)$$

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(3)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(1)})\delta\mathbf{x}^{(3)} + c(\delta\mathbf{x}^{(2)} + \delta\mathbf{x}^{(4)} - 2\delta\mathbf{x}^{(3)}) \quad (4.28c)$$

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(4)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(3)})\delta\mathbf{x}^{(4)} + c(\delta\mathbf{x}^{(3)} + \delta\mathbf{x}^{(1)} - 2\delta\mathbf{x}^{(4)}). \quad (4.28d)$$

A única mudança em relação ao padrão anterior foram os pontos onde são calculadas as matrizes jacobianas. Haverá apenas uma diferença transversal, dada por  $\dot{\delta\mathbf{y}}^{(1)} = \dot{\delta\mathbf{x}}^{(1)} - \dot{\delta\mathbf{x}}^{(3)}$ , de equação:

$$\dot{\delta\mathbf{y}}^{(1)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(1)})\delta\mathbf{y}^{(1)} - 2c\delta\mathbf{y}^{(1)}. \quad (4.29)$$

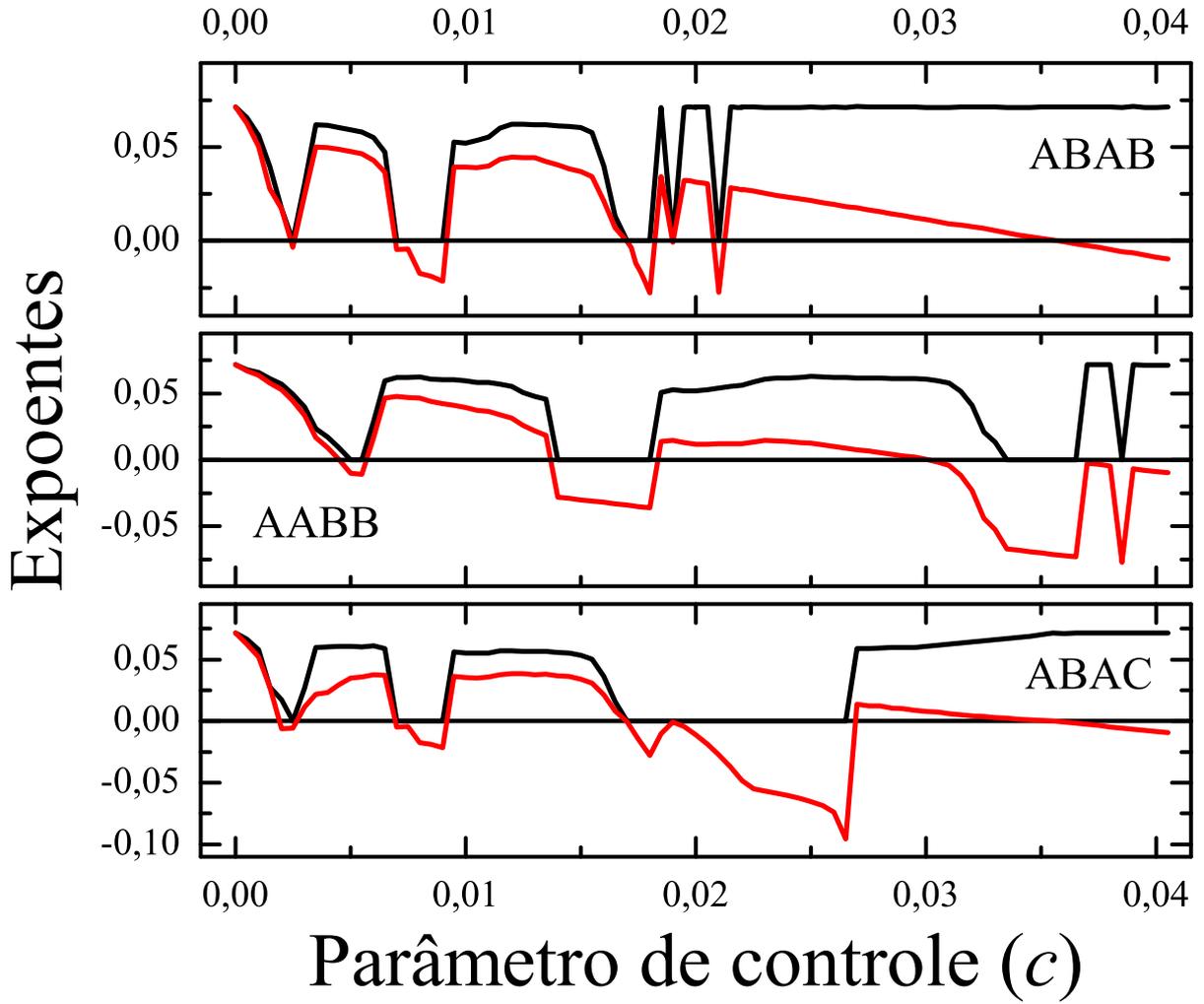


Figura 19: Expoentes de Liapunov ( $\lambda$  – em preto) e transversais ( $\lambda_{\perp}$  – em vermelho) para os diversos padrões para quatro osciladores de Rössler acoplados em anel.

Outro padrão é o *AABB*, que, resumidamente, tem movimento na variedade de sincronização regido por:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(1)}) + c(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(1)}) \quad (4.30a)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{s}^{(2)}) + c(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}) \quad (4.30b)$$

e diferenças infinitesimais transversais regidas por:

$$\delta \dot{\mathbf{y}}^{(1)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(1)})\delta \mathbf{y}^{(1)} - c\delta \mathbf{y}^{(1)} \quad (4.31a)$$

$$\delta \dot{\mathbf{y}}^{(2)} = \mathbf{J}(\mathbf{s}^{(2)})\delta \mathbf{y}^{(2)} - c\delta \mathbf{y}^{(2)}. \quad (4.31b)$$

Este padrão tem os mesmos expoentes transversais para  $c = 2c'$  que o padrão *ABAB* para  $c = c'$ , dada a forma das equações acima.

Sobram os padrões *AAAB* e *AABC*. Ambos não são possíveis para o acoplamento em

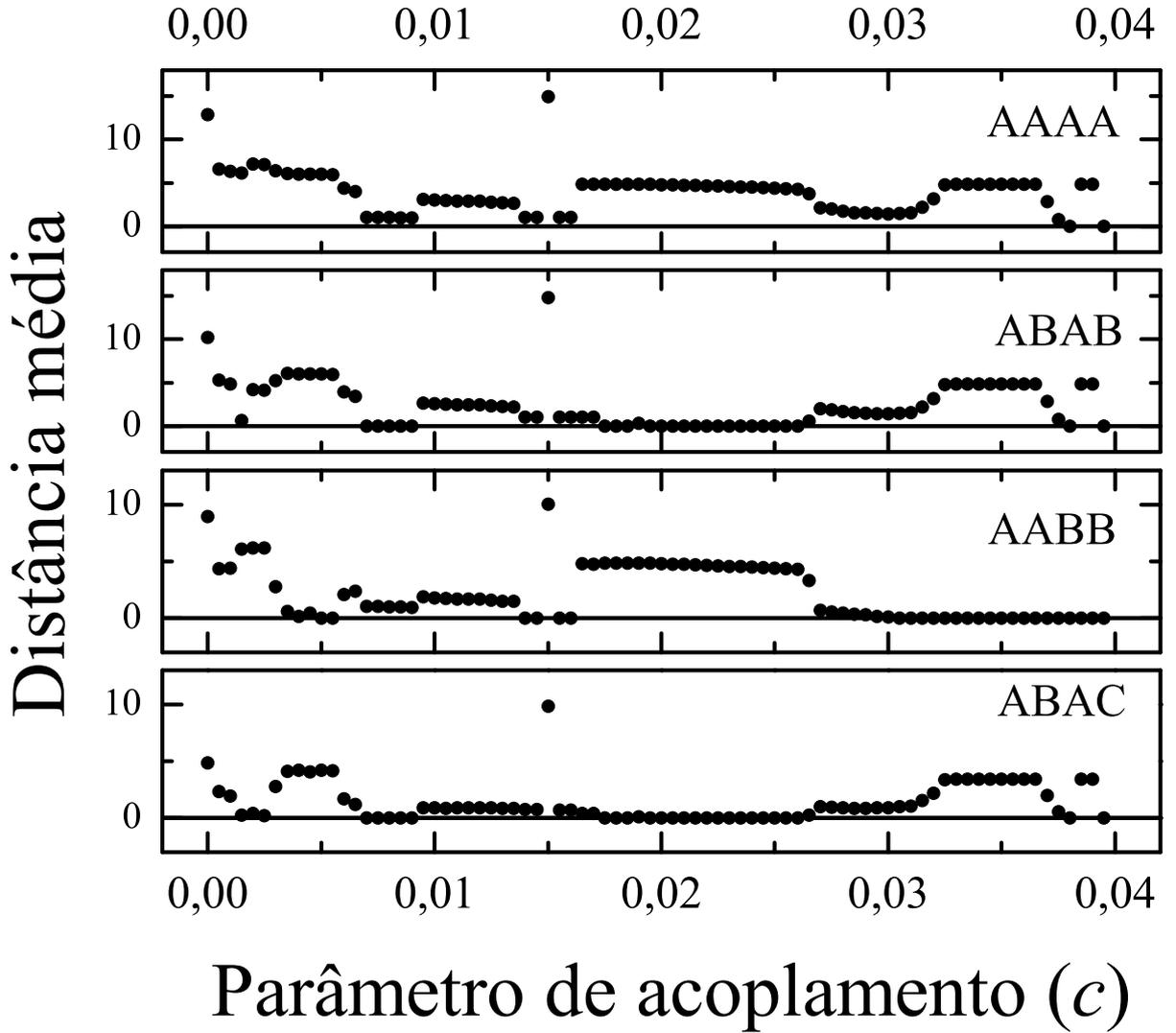


Figura 20: Distância média entre as variáveis e as variedades de sincronização dos padrões para quatro osciladores de Rössler acoplados em anel. Quando são nulas, há sincronização, talvez degenerada.

anel, pois não existe no sistema um invariante adequado. Uma maneira de mostrar isto para o padrão  $AAAB$ , por exemplo, é supor que  $\mathbf{x}^{(4)}$  já é igual a  $\mathbf{s}^{(2)}$  e que as variáveis  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}$  e  $\mathbf{x}^{(3)}$  são as mesmas por um momento. Então as equações para  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}$  e  $\mathbf{x}^{(3)}$  seriam (neste momento):

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) + c(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) \quad (4.32a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(2)}) \quad (4.32b)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(3)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(3)}) + c(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{x}^{(2)}). \quad (4.32c)$$

A menos que  $c$  seja nulo (situação desinteressante),  $\mathbf{x}^{(2)}$  está com derivada diferente de  $\mathbf{x}^{(1)}$  e  $\mathbf{x}^{(3)}$ . É possível ver que esta igualdade entre as variáveis é momentânea, pois elas estão

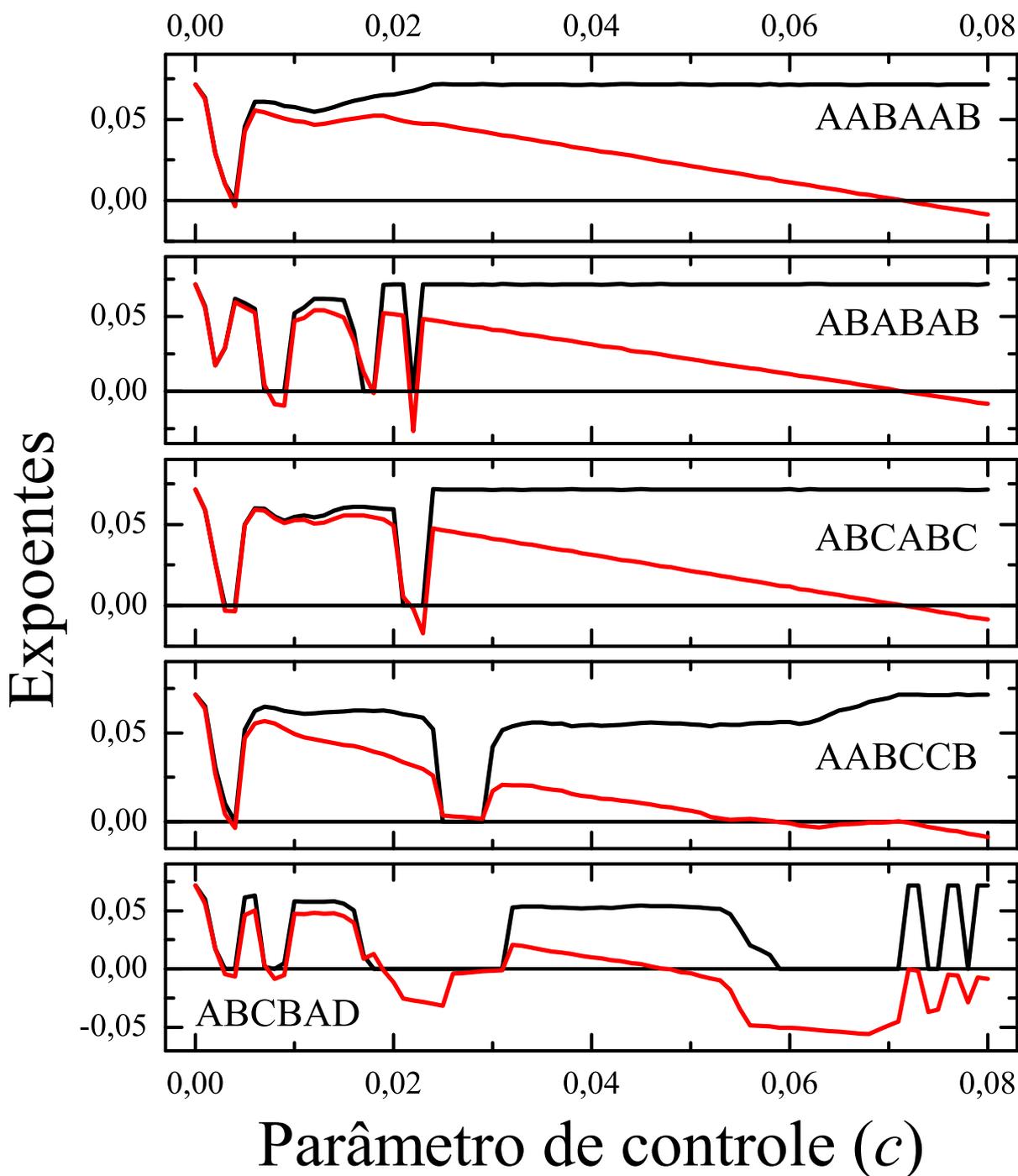


Figura 21: Expoentes de Liapunov e transversais para os diversos padrões para seis osciladores de Rössler acoplados em anel.

neste instante regendo-se por equações diferentes e deverão variar de maneira desigual. Então, a variedade de sincronização não é um invariante: uma vez que o movimento chegue nela, ele irá para a região fora dela. Pelos mesmos argumentos, o padrão  $AABC$  é excluído também.

Para encerrar a análise teórica, resalta-se uma particularidade importante da sin-

cronização parcial: a possibilidade de sincronização das variáveis  $\mathbf{s}^{(i)}$ . Esta sincronização pode significar duas coisas: uma degenerescência ou a impossibilidade da sincronização parcial. No caso do padrão  $ABAB$ ,  $\mathbf{s}^{(1)}$  pode sincronizar com  $\mathbf{s}^{(2)}$ . Quando as equações 4.24 são observadas, identifica-se um acoplamento bidirecional, idêntico ao realizado na figura 12, exceto por um fator de 4 na escala de  $c$ . Com base na figura,  $\mathbf{s}^{(1)}$  e  $\mathbf{s}^{(2)}$  não sincronizam  $c < 0,018$  e podem sincronizar para  $c > 0,018$ , ao menos para um conjunto considerável de condições iniciais, dada a coexistência de dois atratores: um sincronizado e outro não. Se a sincronização completa da rede é possível, a sincronização das variáveis  $\mathbf{s}^{(1)}$  e  $\mathbf{s}^{(2)}$  significa apenas que  $ABAB$  se degenera em  $AAAA$ . Entretanto, da análise de sincronização completa, o padrão  $AAAA$  não pode ocorrer quando  $c < \lambda/2 \approx 0,036$ . Isto elimina a possibilidade de uma degenerescência de  $ABAB$  em  $AAAA$  e, conseqüentemente, a sincronização idêntica das variáveis  $\mathbf{s}^{(i)}$ . Concluindo, a sincronização parcial só pode ocorrer enquanto existir o outro atrator da dinâmica das equações 4.24, ou seja, enquanto a dinâmica de  $\mathbf{s}^{(1)}$  e  $\mathbf{s}^{(2)}$  permitir que estas variáveis não sincronizem. Contudo, esta possibilidade desaparece com  $c$  maior do que um limiar e, quando isso acontecer, a sincronização parcial com o padrão  $ABAB$  deixará de existir, pois as variáveis  $\mathbf{s}^{(i)}$  sempre sincronizarão. Esse limiar, junto com o de sincronização completa da rede, determina uma região de  $c$  para a qual o padrão  $ABAB$  não pode ocorrer sem degenerar-se, isto é, o padrão  $ABAB$  só voltará a aparecer de maneira degenerada no padrão  $AAAA$ , quando finalmente houver a sincronização completa da rede.

Esta análise só é vantajosa quando é considerada a sincronização completa das variáveis  $\mathbf{s}^{(i)}$ , pois é fácil de determinar em que região não pode ocorrer a sincronização completa das variáveis  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Infelizmente, para os padrões  $AABB$  e  $ABAC$ , as variáveis  $\mathbf{s}^{(i)}$  sincronizam identicamente para os mesmos parâmetros de acoplamento que as variáveis  $\mathbf{x}^{(i)}$ . No entanto, para redes maiores, essa análise pode se tornar mais proveitosa.

A obtenção dos expoentes transversais está ilustrada na figura 19. A distância média entre o estado da rede e os invariantes de sincronização calculada por meio de integração numérica do sistema está representada na figura 20. O sistema sincroniza completamente (ao menos para um conjunto de condições iniciais considerável) para  $c > \lambda_1/2$  e, nesta região, a sincronização parcial é mais difícil de ser achada (os padrões geralmente são degenerados). O único padrão encontrado é o  $AABB$ . Por isso, nas figuras, está enfatizada a região complementar  $c < \lambda_1/2$ . Várias janelas de sincronização são observadas, nas quais há o predomínio de movimento sincronizado periódico. Para valores de  $c$  baixos, há apenas intervalos de  $c$  muito pequenos nos quais ocorrem os padrões  $ABAB$  e  $ABAC$ .

A primeira grande janela de sincronização é a do padrão  $ABAB$ , com estado sincronizado periódico e que vai de  $c \approx 0,007$  até  $c \approx 0,009$ , mostrada pelos expoentes de Liapunov transversais. O padrão  $AABB$  pode ocorrer entre  $c \approx 0,014$  e  $c \approx 0,016$ , se bem que para  $c > 0,015$ , o padrão  $ABAB$  também pode. A distância média indica que o sistema tem uma preferência pelo segundo, que começa a ocorrer nessa região e vai até  $c \approx 0,026$ , quando cede seu lugar ao primeiro, que permanecerá como um padrão possível até a sincronização completa. Na região de ocorrência do padrão  $ABAB$  na qual vale  $c > 0,018$ , o expoente transversal é calculado muitas vezes sobre as trajetórias que sincronizam as variáveis  $\mathbf{s}^{(i)}$ , com pequenas escapadas ao verdadeiro atrator do anel (que é periódico e para o qual  $\mathbf{s}^{(1)} \neq \mathbf{s}^{(2)}$ , confirmado como verdadeiro por meio do cálculo da distância média). As escapadas são as oscilações no expoente transversal e do estado sincronizado em  $c \approx 0,019$  e  $c \approx 0,021$ . No final, há uma pequena oscilação entre os padrões  $AABB$  e  $AAAA$ , nada mais que um reflexo da coexistência dos atratores mostrada já na figura 12.

A título ilustrativo, em um sistema em anel com  $n = 6$ , os padrões que podem ocorrer são:  $AAAAAA$ ,  $AABAAB$ ,  $ABABAB$ ,  $AABCCB$ ,  $ABCABC$ ,  $ABCBAD$  e  $ABCDEF$ . A análise é muito parecida e os expoentes estão calculados na figura 21, com várias regiões de sincronização. Digna de nota é a relação entre o padrão  $ABABAB$  e o padrão (para  $N = 4$ )  $ABAB$ , que possuem a mesma dinâmica sincronizada. Então, para o padrão  $ABABAB$  pode ser feita a mesma análise, ou seja, também existe uma região na qual não há sincronização por causa da total sincronização das variáveis  $\mathbf{s}^{(i)}$ . Esta região é maior do que a apresentada pelo padrão  $ABAB$ , o que dá mais vantagens a esta análise, pois exclui um região maior para a procura da sincronização parcial. Além disso, os padrões  $ABCABC$  e  $AABAAB$  também são sujeitos a esta investigação.

## 5 *Redes de diferentes classes de osciladores caóticos*

No capítulo anterior, foram estudadas redes compostas por osciladores idênticos, as quais são um pouco restritas. Neste capítulo, as redes estudadas não possuem todos os osciladores idênticos, o que é um tipo de sistema mais geral. No entanto, os subsistemas também não são todos diferentes. A rede é construída com grupos de osciladores idênticos entre si, mas diferentes dos outros pertencentes a outros grupos. As possibilidades de sincronização e suas análises por meio de expoentes transversais serão estudadas.

### 5.1 A rede

Uma rede com diversos osciladores com acoplamento externo e linear sempre poderá ser escrita como ( $i = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}^{(i)}) + c \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{E}^{(i,j)} \mathbf{x}^{(j)}. \quad (5.1)$$

Na equação acima, os vetores  $\mathbf{x}^{(i)}$  não possuem necessariamente a mesma dimensão. Se cada vetor tem a dimensão  $m_i$ , então  $\mathbf{E}^{(i,j)}$  é uma matriz  $m_i \times m_j$ . A dimensão do sistema  $n$  é a soma das dimensões  $m_i$  dos subsistemas  $i$ . O parâmetro de acoplamento  $c$  e a matriz  $\mathbf{G}$  podem ser descartados pela redefinição das matrizes  $\mathbf{E}^{(i,j)}$ , mas são úteis pelos significados que já tinham nas redes com osciladores idênticos. Cada oscilador  $i$ , quando desacoplado, apresenta a dinâmica  $\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}^{(i)})$ .

As redes estudadas neste capítulo apresentam uma restrição: deve existir alguma relação  $\mathbf{f}^{(i)}(\cdot) = \mathbf{f}^{(j)}(\cdot)$  com  $i \neq j$ . Dois subsistemas são da mesma *classe* se a relação anterior vale entre suas funções  $\mathbf{f}^{(i)}$ , ou seja, se apresentam a mesma dinâmica quando desacoplados. Desta maneira, uma classe de osciladores é um modelo de oscilador que poderá ser reproduzido em vários sítios da rede. Em resumo, a rede possui  $N$  osciladores,

$N_k$  osciladores na classe  $k$ , para  $k = 1, 2, \dots, N_C$ , com  $N_C$  ( $N_C < N$ ) igual ao número de diferentes classes de osciladores na rede. Essa rede é dita *composta por diferentes classes de osciladores*.

## 5.2 Sincronização

### 5.2.1 Considerações gerais

O interesse é observar a sincronização idêntica entre os osciladores da rede. Devido ao fato de que os osciladores possuem dinâmicas desacopladas diferentes, a sincronização completa é impossível, exceto quando o acoplamento compensa a diferença entre os subsistemas. A probabilidade disso acontecer, já que os sistemas são não-lineares e o acoplamento é linear, é muito baixa e, em geral, a variedade de sincronização completa não é um invariante. Sobram então apenas as sincronizações parciais para o estudo deste capítulo.

A ocorrência de padrões de sincronização parcial é mais restrita do que no caso de uma rede composta por osciladores idênticos. A restrição adicional é causada pela diferenciação entre osciladores que não existia antes. Em uma rede de osciladores idênticos, o que impede a existência de algum tipo de sincronização é apenas o acoplamento. Em uma rede com osciladores diferentes, tanto o acoplamento quanto a disposição dos osciladores são fatores determinantes. Normalmente, não existirão padrões que atribuam letras idênticas a subsistemas diferentes. Outra questão é a imposição de que o estado sincronizado deve ser oscilatório. Subsistemas diferentes acoplados têm maior probabilidade de deixarem de ser oscilantes do que subsistemas idênticos.

Claramente, podem ser diferenciados dois tipos de sincronização parcial. *Sincronização primária* é a sincronização idêntica entre todos os possíveis pares de osciladores idênticos da rede. É a sincronização parcial que mais se aproxima da sincronização idêntica, pois é a que apresenta mais pares de osciladores sincronizados. Já *sincronização secundária* é qualquer outra sincronização parcial da rede que não seja a primária. A análise destas sincronizações parciais é exatamente análoga à realizada para redes com osciladores idênticos, exceto pelas complicações adicionais introduzidas por considerar diferentes classes de osciladores. Isso será tratado nos exemplos da próxima seção.

### 5.2.2 Aplicações

A diferença entre as classes de osciladores pode ser relativamente *pequena*, ou seja, apenas uma mudança que não chama muito a atenção, para que as classes já sejam consideradas diferentes. Diga-se, apenas um parâmetro com valores diferentes já traz interessantes considerações. Um caso que se encaixa na descrição acima é o de quatro osciladores de Rössler acoplados em anel, com diferença apenas no parâmetro  $c_R$ . Para os subsistemas um e três,  $c_R = 5, 7$ ; para o segundo e quarto,  $c_R = 10, 0$ . O sistema dinâmico reescrito é:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}^{(i)}) + c(\mathbf{x}^{(i+1)} + \mathbf{x}^{(i-1)} - 2\mathbf{x}^{(i)}), \quad (5.2)$$

com  $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}^{(j+N)}$  e  $\mathbf{f}^{(1)}(\cdot) = \mathbf{f}^{(3)}(\cdot) \neq \mathbf{f}^{(2)}(\cdot) = \mathbf{f}^{(4)}(\cdot)$ . Os expoentes de Liapunov de cada oscilador são estimados em  $\lambda_1 \approx 0,0714$  e  $\lambda_2 \approx 0,110$ . Esta diferença nos expoentes de Liapunov aliada à diferença no parâmetro  $c_R$  já garante que os subsistemas são realmente de classes diferentes.

A sincronização parcial e a completa estão relacionadas à existência de variedades lineares invariantes (10). O sistema acima não possui um invariante dado por  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(j)}$  para todos  $i$  e  $j$ . Isto significa que este sistema não pode apresentar o padrão *AAAA*. Se fosse suposto que este padrão é possível,  $\mathbf{s}$  deveria obedecer a duas equações distintas:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{s}) \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{s}), \quad (5.4)$$

o que é, em geral, impossível. Em outras palavras, se  $\mathbf{x}^{(i)}(t_0) = \mathbf{x}^{(j)}(t_0)$  para todo  $i$  e  $j$  e para algum  $t_0$ , percebe-se que para algum  $t > t_0$  e alguns  $i$  e  $j \neq i$ ,  $\mathbf{x}^{(i)}(t) \neq \mathbf{x}^{(j)}(t)$  e o estado de sincronização completa é perdido.

Sobram os padrões de sincronização parcial. Para uma rede de subsistemas idênticos acoplados em anel, já foi mostrado que os padrões *AAAB*, *AABA*, *AABC*, *ABAA*, *ABBB*, *ABBC*, *ABCA* e *ABCC* não podem ocorrer, pois o acoplamento em anel determina equações diferentes para osciladores representados por letras iguais. Como o acoplamento não mudou, é justo dizer que estes padrões não existirão na rede recém-definida. Os padrões *AABB* e *ABBA* também não podem ocorrer no sistema, pois associam letras iguais para osciladores com dinâmica diferente e já foi estabelecido que o acoplamento não poderá compensar esta diferença. Sobram os padrões:

- O padrão de sincronização primária *ABAB*, com o invariante dado por  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)}$  e  $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(4)}$ . Este padrão é o de sincronização primária, pois nele todos os osciladores

com a mesma dinâmica desacoplada sincronizam.

- O padrão de sincronização secundária  $ABAC$ , com o invariante dado por  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)}$ ;
- O padrão de sincronização secundária  $ABCB$ , com o invariante dado por  $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(4)}$ .

Enquanto os padrões  $ABAC$  e  $ABCB$  eram o mesmo para uma rede de sistemas idênticos, para uma rede com diferentes classes eles são padrões distintos. O primeiro diz que os subsistemas da primeira classe sincronizam. O segundo diz que há sincronização idêntica entre os osciladores da segunda classe. Constata-se, outrossim, que apenas há duas maneiras com as quais um padrão se degenera em outro:  $ABAC$  ou  $ABCB$  degenerarem-se em  $ABAB$  pela sincronização entre  $B$  e  $C$  ou  $A$  e  $C$ ; isto é, os casos de sincronizações secundárias podem reduzir-se à sincronização primária.

Tanto a sincronização primária quanto a rede permanecem as mesmas se os osciladores 1 e 3, 2 e 4 ou ambos pares são trocados de posição. Isso representa que o padrão  $ABAB$  preserva as simetrias do sistema. Os padrões  $ABCB$  e  $ABAC$  quebram de alguma forma essa simetria (31). Ambos atribuem evoluções diferentes para dois osciladores idênticos. Por meio da condição inicial, o sistema escolhe qual subsistema será representado por  $B$  e qual será por  $C$  (no caso do padrão  $ABAC$ ). Um exemplo de como essa quebra de simetria pode manifestar-se de maneira espontânea é o seguinte: o expoente transversal do padrão  $ABAB$  é positivo, mas as condições iniciais estão no invariante deste padrão e o sistema apresenta simetria com relação aos osciladores idênticos. Contudo, bastará uma pequena perturbação para que o sistema deixe esse invariante e sincronize com o padrão  $ABAC$ . Assim, o estado do sistema deixou de ser simétrico e houve uma quebra de simetria espontânea.

A análise dos expoentes transversais irá começar pela sincronização primária. O movimento na variedade de sincronização é dado pelas equações:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{s}^{(1)}) + 2c(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(1)}) \quad (5.5a)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{s}^{(2)}) + 2c(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}), \quad (5.5b)$$

nas quais  $\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)}$  e  $\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(4)}$ . Estas equações mostram que o estado sincronizado e seu expoente de Liapunov  $\lambda$  dependem de  $c$ . Para a sincronização ser considerada, o sistema deve ser oscilante, isto é,  $\lambda \geq 0$ . Se o movimento na variedade de sincronização deixa de ser oscilante e tudo converge para um ponto fixo, não existe mais sincronização e sim supressão das oscilações (6).

Como em todo estudo de sincronização idêntica, devem ser definidos pequenos desvios do estado sincronizado: para  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{s}^{(\eta_i)} + \delta\mathbf{x}^{(i)}$ , com  $\eta_i = 1$  se  $i = 1, 3$  e  $\eta_i = 2$  se  $i = 2, 4$ . As equações diferenciais para as quantidades  $\delta\mathbf{x}^{(i)}$  são:

$$\dot{\delta\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{J}_{\eta_i}(\mathbf{s}^{(\eta_i)})\delta\mathbf{x}^{(i)} + c(\delta\mathbf{x}^{(i+1)} + \delta\mathbf{x}^{(i-1)} - 2\delta\mathbf{x}^{(i)}), \quad (5.6)$$

nas quais  $\mathbf{J}_i$  é a matriz jacobiana de  $\mathbf{f}^{(i)}$ . A evolução das pequenas diferenças entre os osciladores que devem sincronizar para o padrão *ABAB* é o foco aqui. São apenas duas estas diferenças:  $\delta\mathbf{y}^{(1)} = \delta\mathbf{x}^{(1)} - \delta\mathbf{x}^{(3)}$  e  $\delta\mathbf{y}^{(2)} = \delta\mathbf{x}^{(2)} - \delta\mathbf{x}^{(4)}$ . Se  $\delta\mathbf{y}^{(1)}$  e  $\delta\mathbf{y}^{(2)}$  desaparecem exponencialmente rápido com  $t \rightarrow \infty$ , a rede atinge a sincronização primária. Isso depende das equações para  $\dot{\delta\mathbf{y}}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\dot{\delta\mathbf{y}}^{(i)} = \mathbf{J}_{\eta_i}(\mathbf{s}^{(\eta_i)})\delta\mathbf{y}^{(i)} - 2c\delta\mathbf{y}^{(i)} \quad (5.7)$$

e do expoente transversal definido como

$$\lambda_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t)}{\delta(0)}, \quad (5.8)$$

com  $\delta(t) = \sqrt{\sum_i (\delta\mathbf{y}^{(i)}(t))^2}$ . Se  $\lambda_{\perp} < 0$ , as pequenas diferenças entre os osciladores 1 e 3 –  $\delta\mathbf{y}^{(1)}(t)$  – e entre os osciladores 2 e 4 –  $\delta\mathbf{y}^{(2)}(t)$  – diminuem exponencialmente e as condições iniciais próximas à variedade de sincronização aproximam-se dela.

A definição de expoente transversal e as equações (5.5) e (5.7) levam à afirmação de que, se  $c = 0$ , o expoente transversal é o expoente de Liapunov do sistema (5.5), ou simplesmente  $\lambda_2$  (já que  $\lambda_2 > \lambda_1$ ). Para o melhor entendimento da sincronização, pode ser tentada a substituição:

$$\delta\mathbf{y}^{(i)} = e^{-2ct} \delta\mathbf{y}^{(i)'}, \quad (5.9)$$

que leva à equação modificada:

$$\dot{\delta\mathbf{y}}^{(i)'} = \mathbf{J}_{\eta_i}(\mathbf{s}^{(\eta_i)})\delta\mathbf{y}^{(i)'}, \quad (5.10)$$

e o correspondente expoente transversal:

$$\lambda_{\perp} = -2c + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta'(t)}{\delta'(0)} = -2c + \lambda'_{\perp}, \quad (5.11)$$

com  $\delta'(t) = \sqrt{\sum_i (\delta\mathbf{y}^{(i)'}(t))^2}$ . Infelizmente,  $\lambda'_{\perp}$  não é de simples determinação, ao contrário do caso de sincronização completa em uma rede de osciladores idênticos. Contudo, se  $\lambda'_{\perp}(c)$  é limitado para  $c \rightarrow \infty$ , pode ser concluído que o sistema irá sincronizar para valores de  $c$  acima de um limiar. Isto acontece quando a dinâmica expressa pela equação (5.5) possui

um atrator limite para  $c \rightarrow \infty$ . Se os osciladores que pertencem a diferentes classes são de alguma maneira parecidos e o acoplamento faz com que a evolução de todos se torne mais parecida, então se pode esperar que o limite para  $c$  infinito produz um atrator limitado no espaço de fases.

Para o padrão *ABAC*, a dinâmica na variedade de sincronização é dada por:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{s}^{(1)}) + c(\mathbf{s}^{(2)} + \mathbf{s}^{(3)} - 2\mathbf{s}^{(1)}) \quad (5.12a)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{s}^{(2)}) + 2c(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}) \quad (5.12b)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(3)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{s}^{(3)}) + 2c(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(3)}), \quad (5.12c)$$

com  $\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(3)}$ ,  $\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)}$  e  $\mathbf{s}^{(3)} = \mathbf{x}^{(4)}$ . A evolução de  $\delta\mathbf{y}^{(1)} = \delta\mathbf{x}^{(1)} - \delta\mathbf{x}^{(3)}$  é dada por:

$$\delta\dot{\mathbf{y}}^{(1)} = \mathbf{J}_1(\mathbf{s}^{(1)})\delta\mathbf{y}^{(1)} - 2c\delta\mathbf{y}^{(1)} \quad (5.13)$$

e o expoente transversal é simplesmente:

$$\lambda_{\perp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta\mathbf{y}^{(1)}(t)|}{|\delta\mathbf{y}^{(1)}(0)|}. \quad (5.14)$$

O padrão *ABCB* possui dinâmica sincronizada dada por:

$$\dot{\mathbf{s}}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{s}^{(1)}) + 2c(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(1)}) \quad (5.15a)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{s}^{(2)}) + c(\mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(3)} - \mathbf{s}^{(2)}) \quad (5.15b)$$

$$\dot{\mathbf{s}}^{(3)} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{s}^{(3)}) + 2c(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(3)}), \quad (5.15c)$$

na qual  $\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(4)}$  e  $\mathbf{s}^{(3)} = \mathbf{x}^{(3)}$ . A diferença entre um estado próximo ao invariante de sincronização e o próprio é proporcional a  $\delta\mathbf{y}^{(1)} = \delta\mathbf{x}^{(2)} - \delta\mathbf{x}^{(4)}$ , que evolui com a equação:

$$\delta\dot{\mathbf{y}}^{(1)} = \mathbf{J}_2(\mathbf{s}^{(2)})\delta\mathbf{y}^{(1)} - 2c\delta\mathbf{y}^{(1)}. \quad (5.16)$$

O expoente de Liapunov transversal pode ser facilmente definido como no caso do padrão *ABCB*.

Na figura 22, estão calculados numericamente os expoentes de Liapunov do sistema e os expoentes transversais dos três padrões para  $0 \leq c \leq 0,1$ . Os expoentes do sistema mantêm-se sempre positivos ou nulos, o que indica que a solução nunca deixa de ser oscilante. Para o padrão *ABAB*, o expoente transversal decresce aproximadamente de maneira linear com  $c$ , confirmando que  $\lambda'_{\perp}(c)$  é também aproximadamente constante. O expoente transversal torna-se negativo a partir de  $c \approx 0,055$  e o movimento sincronizado

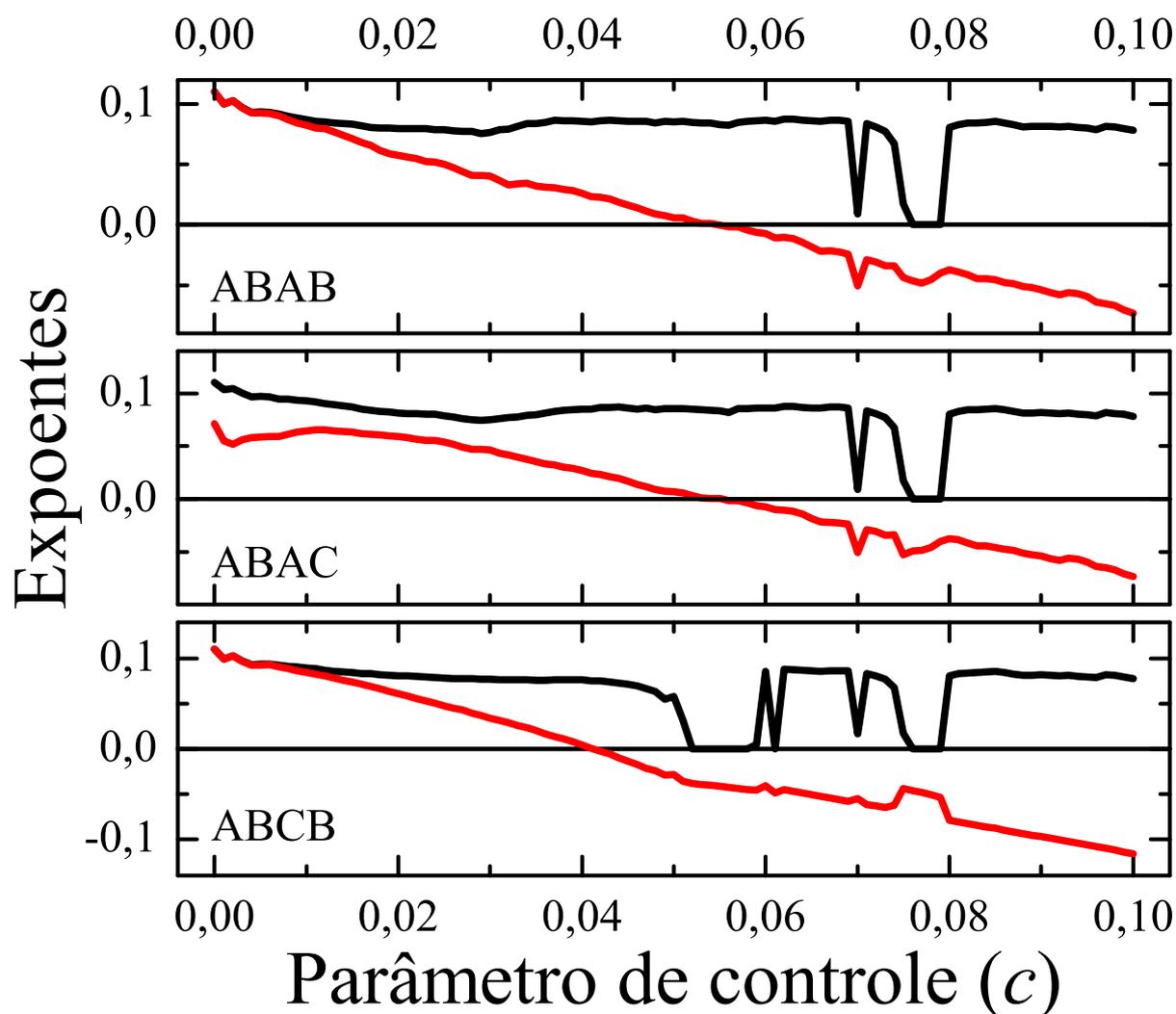


Figura 22: Expoentes de Liapunov do sistema sincronizados e transversais para os três padrões de quatro osciladores de Rössler acoplados em anel de acordo com as equações 5.2. A existência dos padrões é detectada por meio dos expoentes transversais, enquanto que o expoente de Liapunov do sistema sincronizado informa qual é o tipo de atrator do movimento na variedade de sincronização.

pode ser caótico ou oscilatório, dependendo do  $c$ . Este é o primeiro indício de que redes com osciladores de classes diferentes podem sincronizar.

Os expoentes de Liapunov dos subsistemas 1 e 3 são menores do que os dos subsistemas 2 e 4. Esperar-se-ia inadvertidamente que os osciladores com expoente de Liapunov menor sincronizassem com acoplamento mais fraco do que o acoplamento necessário para sincronizar os osciladores com expoentes mais altos. Com o parâmetro  $c$  aumentando e a garantia de que o sistema atingirá sincronização primária, o padrão *ABAC* deveria supostamente ser encontrado antes do padrão *ABCB*. Todavia, a figura 22 mostra que essa expectativa é inválida. Além disso, os padrões *ABAC* e *ABAB* têm expoentes transversais

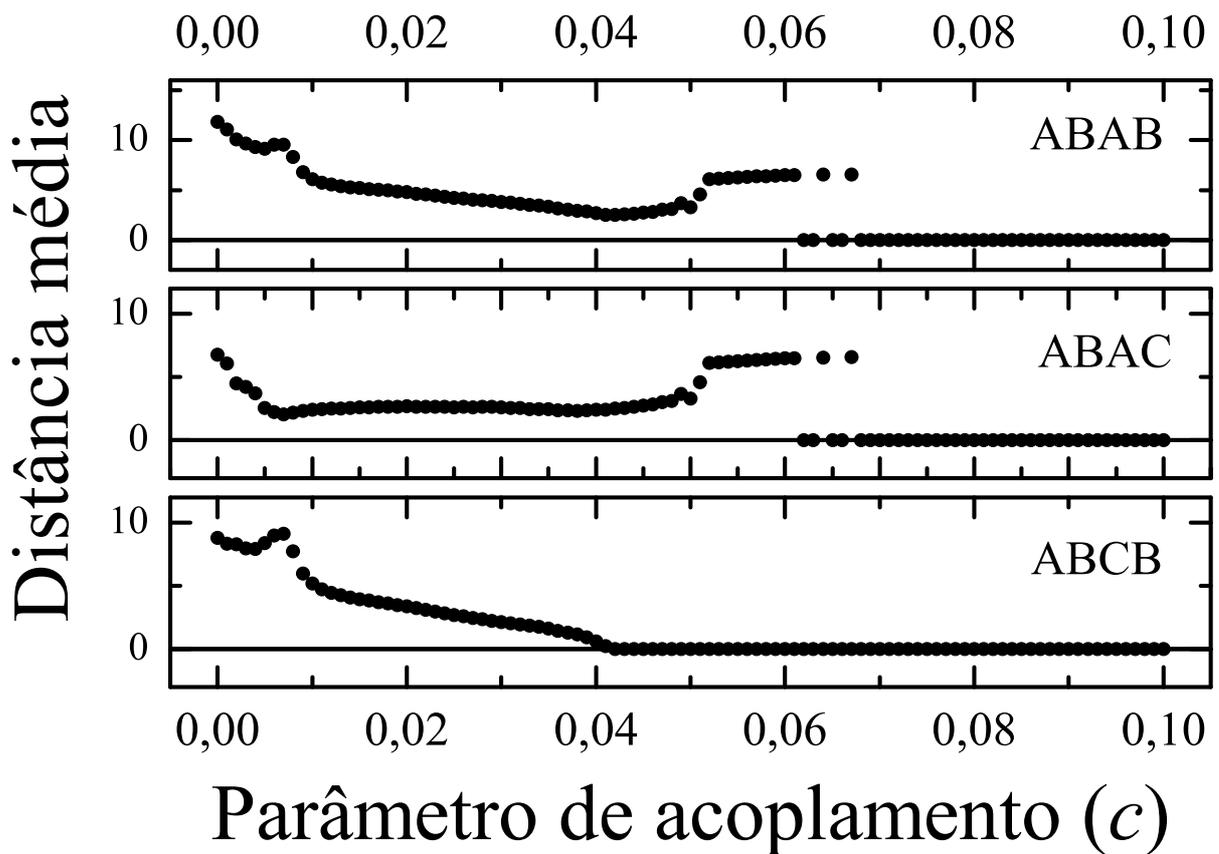


Figura 23: Distâncias médias entre as variáveis do sistema e as variedades de sincronização. O sistema e seus padrões possíveis são os mesmos da figura 22. Quando a distância se anula, há sincronização.

sempre com o mesmo sinal e isso indica que os dois padrões podem ocorrer ou não para os mesmos valores de  $c$ . Assim, o padrão *ABAC* provavelmente será sempre degenerado em *ABAB*, pois, quando o expoente transversal é negativo, não há diferença entre os expoentes de Liapunov dos sistemas sincronizados, o que é indício de que se está tratando do mesmo atrator.

Finalmente, com o padrão *ABCB*, é encontrada sincronização secundária para  $0,042 < c < 0,055$ . A certeza nessa afirmação é que nesta região apenas se pode encontrar este padrão e isso garante que ele é não-degenerado. Contudo, para  $c > 0,055$ , o padrão de sincronização primária também pode ocorrer. Para  $c \approx 0,06$ , essa coexistência de atratores é bem visível, com o padrão *ABAB* apresentando evolução caótica e o *ABCB*, periódica. Assim, o expoente de Liapunov do estado sincronizado é a medida que garante a existência de dois atratores diferentes.

A figura 23 ilustra tudo que foi dito anteriormente. Na figura, estão calculadas as distâncias médias entre as variáveis do sistema e as variedades de sincronização. O padrão

---

$ABAC$  não é encontrado em sua forma não-degenerada. O padrão  $ABCB$  ocorre a partir de  $c \approx 0.042$ , até se degenerar no padrão  $ABAB$ . Este passa a ocorrer com  $c \approx 0.06$ , coexistindo com aquele.

## 6 Conclusão

No presente trabalho foi estudada a sincronização idêntica em redes de osciladores caóticos. Diversas redes foram consideradas e, com elas, muitas possibilidades de sincronização. Estas sempre se associavam a um invariante, a variedade de sincronização, cuja existência era a primeira coisa a ser verificada. Após, a integração numérica de sistemas dinâmicos guiava o estudo, principalmente com o cálculo dos expoentes de Liapunov transversais.

Para um par de osciladores, vários tipos de acoplamento foram considerados. O acoplamento em todas as variáveis mostrou-se como uma maneira simples de gerar sincronização. Neste caso, concluiu-se que o cálculo numérico nem é necessário; a sincronização idêntica é determinada por meio de uma simples relação entre o parâmetro de acoplamento e o expoente de Liapunov do oscilador. Acoplamentos em uma variável apenas mereceram uma análise mais cuidadosa e detalhada e o uso de expoentes transversais foi justificado. Quase todos os acoplamentos mostrados podiam resultar em sincronização para algum valor dos parâmetros. Um sistema que apresentava sincronização em antifase foi considerado a partir de uma relação com um outro sistema que sincronizava idênticamente.

Em redes de osciladores idênticos, as possibilidades de sincronização – as variedades de sincronização que são invariantes – mostraram-se mais numerosas. As ocorrências de sincronizações completa e parcial foram registradas e a análise de um par de osciladores foi expandida para esse novo caso. As estruturas espaciais (padrões) e seus métodos de obtenção foram revelados para um exemplo. As relações de degenerescência também foram estudadas e verificadas na rede.

A sincronização idêntica de osciladores idênticos em redes com diferentes classes de osciladores também foi considerada. A rede, composta por  $N_i$  subsistemas da classe  $i$ , pôde mostrar diversos tipos de sincronização parcial, incluindo o caso no qual cada classe tinha todos os seus osciladores sincronizados idênticamente, chamado de sincronização primária.

---

ria. A sincronização secundária (sincronização parcial que não fosse primária) também foi encontrada.

Importantes relações entre os diversos tipos de sincronização (até mesmo para redes diferentes) foram estabelecidas. Os sistemas em geral mostraram uma grande riqueza de comportamentos. No entanto, esta riqueza é completamente compreensível, indicando que a sincronização é uma ligação bem estabelecida entre sistemas com poucas e sistemas com muitas dimensões e também entre conceitos simples e fenômenos complexos.

## *Referências*

- 1 MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.
- 2 DAWKINS, R. *O relojoeiro cego: a teoria da evolução contra o desígnio divino*. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.
- 3 LORENZ, E. N. Nonperiodic deterministic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Boston, v. 20, n. 2, p. 130–148, Mar. 1963.
- 4 RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 57, n. 5, p. 397–398, July 1976.
- 5 FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. *Caos: uma introdução*. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.
- 6 PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. (The Cambridge nonlinear science series, 12).
- 7 STROGATZ, S. H. *Sync: the emerging science of spontaneous order*. New York: Theia, 2003.
- 8 FUJISAKA, H.; YAMADA, T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, Kyoto, v. 69, n. 1, p. 32–47, Jan. 1983.
- 9 PECORA, L. M. et al. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, Woodbury, v. 7, n. 4, p. 520–543, Dec. 1997.
- 10 ZHANG, Y. et al. Partial synchronization and spontaneous spatial ordering in coupled chaotic systems. *Physical Review E*, Melville, v. 63, n. 2, 026211 9 p., Feb. 2001.
- 11 POGROMSKY, A.; SANTOBONI, G.; NIJMEIJER, H. Partial synchronization: from symmetry towards stability. *Physica D*, Amsterdam, v. 172, n. 1, p. 65–87, Nov. 2002.
- 12 LI, X.; CHEN, G. Synchronization and desynchronization of complex dynamical networks: An engineering viewpoint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, New York, v. 50, n. 11, p. 1381–1390, Nov. 2003.
- 13 HEISLER, I. A. et al. Experimental investigation of partial synchronization in coupled chaotic oscillators. *Chaos*, Melville, v. 13, n. 1, p. 185–194, Mar. 2003.
- 14 VOSS, H. U. Anticipating chaotic synchronization. *Physical Review E*, Melville, v. 61, n. 5, p. 5115–5119, May 2000.

- 15 OLIVEIRA, E. G. de et al. Synchronization patterns of coupled dynamical systems. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA, 26., 2003, Caxambu. *Livro de resumos*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Física, 2003. p. 122.
- 16 OLIVEIRA, E. G. de; BRAUN, T.; HEISLER, I. A. Investigation of amplitude and phase synchronization in two coupled Rössler oscillators. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA, 25., 2002, Caxambu. *Livro de resumos*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Física, 2002. p. 93.
- 17 OLIVEIRA, E. G. de et al. Padrões de sincronização em sistemas dinâmicos acoplados. In: SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 14., 2002, Porto Alegre. *Livro de resumos*. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002. p. 23.
- 18 OLIVEIRA, E. G. de; HEISLER, I. A.; BRAUN, T. Sincronização de amplitudes ou de fases em dois osciladores de Rössler acoplados. In: SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 13., 2002, Porto Alegre. *Livro de resumos*. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002. p. 91.
- 19 HARSTELN, R. E. et al. Sincronização de circuitos RLC caóticos. In: SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 14., 2002, Porto Alegre. *Livro de resumos*. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002. p. 23.
- 20 PAAZ, R. et al. Experimental characterization of on-off intermittency in coupled oscillators. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA, 26., 2003, Caxambu. *Livro de resumos*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Física, 2003. p. 121–122.
- 21 OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- 22 ROBINSON, C. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. Boca Raton: CRC Press, 1994.
- 23 MATHEWS, J. H. *Numerical methods for computer science, engineering, and mathematics*. Englewood: Prentice-Hall, 1986.
- 24 STROUSTRUP, B. *The C++ programming language*. 3. ed. Reading: Addison-Wesley, 1997.
- 25 GLENDINNING, P. *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- 26 RUELLE, D. *Chaotic evolution and strange attractors: the statistical analysis of time series for deterministic nonlinear systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- 27 MILNOR, J. On the concept of attractor. *Communications in Mathematical Physics*, Berlin, v. 99, n. 2, p. 177–195, May 1985.
- 28 GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York: Springer-Verlag, 1983. (Applied Mathematical Sciences, 42).

- 29 POGROMSKY, A.; NIJMEIJER, H. Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, New York, v. 18, n. 2, p. 152–162, Feb. 2001.
- 30 HASLER, M.; MAISTRENKO, Y. L. An introduction to the synchronization of chaotic systems: coupled skew tent maps. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, New York, v. 44, n. 10, p. 856–866, Oct. 1997.
- 31 HU, G. et al. From low-dimensional synchronous chaos to high-dimensional desynchronous spatiotemporal chaos in coupled systems. *Physical Review Letters*, Melville, v. 85, n. 16, p. 3377–3380, Oct. 2000.

## *APÊNDICE A – Exemplo de programa para a integração numérica*

Este apêndice introduz um exemplo de programa para a integração numérica. A linguagem de programação utilizada é a linguagem C++. O programa apresentado integra um sistema de Rössler com o método RKF45. O arquivo par.dat é lido pelo programa no início da execução e contém os parâmetros para a integração: tempo inicial, tempo final, passo inicial, erro por passo (tolerância), parâmetros do sistema e condições iniciais. Segue um exemplo.

### **Arquivo par.dat:**

```
0.0
1000.0
1e-20
1e-6
0.2 0.2 5.7
0.0 0.0 0.0
```

O programa escreve sua saída no arquivo saida.dat. Ele grava os parâmetros utilizados e depois as variáveis  $t_i$ ,  $x'_1(t_i)$ ,  $x'_2(t_i)$  e  $x'_3(t_i)$ . Segue um exemplo de saída.

### **Arquivo saida.dat:**

```
Integrador de sistemas.
Tempo inicial: 0
Tempo de integração: 1000
Passo inicial: 1e-020
Erro por passo: 1e-006
```

```

Parâmetro 1: 0.2
Parâmetro 2: 0.2
Parâmetro 3: 5.7
Condição inicial 1: 0
Condição inicial 2: 0
Condição inicial 3: 0
8.43971e-013 -7.12286e-026 -2.00383e-038 1.68794e-013
9.08119e-010 -8.24681e-020 -2.49636e-029 1.81624e-010
9.72413e-007 -9.45585e-014 -3.065e-020 1.94482e-007
0.00183476 -3.35464e-007 -2.05363e-010 0.00036504
0.0385392 -0.000138205 -1.81115e-006 0.00691995
...

```

O programa é escrito em um arquivo `integrador.cpp` para ser compilado. O código faz uso de objetos para simplificar as definições de sistemas dinâmicos e integradores. Na verdade, as classes ficam em um arquivo separado que serve de biblioteca para vários programas. Assim, para mudar o sistema sendo integrado ou o próprio integrador, basta mudar uma ou poucas linhas do programa. Desta maneira, o código é reaproveitado ao máximo e erros são evitados, pois o integrador ou sistema é escrito uma vez, testado e guardado. Além disso, a criação de novos programas é simplificada.

### Arquivo `integrador.cpp`:

```

//-----
// Inclusões.
//-----
using namespace std;
#include <iostream>
#include <fstream>

//-----
// Classe geral de sistemas.
//-----
class Sistema
{
protected:
    int i, n_var, n_par;
    double *var, *par, *var0, temp;

public:
    virtual void Derivada(double * deriv, double y[], double t) = 0;

```

```

__inline void Sistema::setVar(double * destino)
{
    var = destino;
    for (i=0;i<n_var;i++) var[i] = var0[i];
};

__inline double * Sistema::Var(int xi) {return &var[xi];};
__inline double * Sistema::Par(int xi) {return &par[xi];};

__inline int N_var() {return n_var;};
__inline int N_par() {return n_par;};
};

//-----
// Classe do sistema de Rössler.
//-----
class Rossler: public Sistema
{
protected:
    enum {A,B,C};
    enum {X,Y,Z};

public:
    // derivadas
    __inline void Derivada(double deriv[], double * variavel, double t)
    {
        deriv[X] = -variavel[Y] - variavel[Z];
        deriv[Y] = variavel[X] + par[A] * variavel[Y];
        deriv[Z] = par[B] + variavel[Z]*(variavel[X] - par[C]);
    };

    // construtor
    Rossler( double a = 0.2, double b = 0.2, double c = 8.0,
             double x = 0 , double y = 0 , double z = 0 )
    {
        n_var=3;
        n_par=3;
        var0 = new double [n_var];
        par = new double [n_par];
        var0[X]=x; var0[Y]=y; var0[Z]=z;
        par[A]=a; par[B]=b; par[C]=c;
    };
};

```

```
//-----  
// Classe geral de integradores.  
//-----  
class Integrador  
{  
protected:  
    int i,n;  
    double h;  
    Sistema * sis;  
  
public:  
    double t, *x;  
    __inline double passo() {return h;};  
    __inline virtual void Integra() = 0;  
};  
  
//-----  
// Classe do integrador RKF45.  
//-----  
class RungeKuttaFehlberg45 : public Integrador  
{  
private:  
    double *k1, *k2, *k3, *k4, *k5, *k6, *temp;  
    double erro, fator_h;  
  
public:  
    int n_erro;  
  
// contrutor  
    RungeKuttaFehlberg45(double passo_inicial, double erro_m, Sistema * sistema)  
    {  
        sis=sistema;  
        h=passo_inicial;  
        n=sis->N_var();  
        n_erro=n;  
  
        erro=erro_m;  
        fator_h = exp(0.25*(log(erro/2)));  
  
        t=0;  
  
        x = new double[n];  
    }  
};
```

```
k1 = new double[n];
k2 = new double[n];
k3 = new double[n];
k4 = new double[n];
k5 = new double[n];
k6 = new double[n];

temp = new double[n];
for (int j = 0; j<n; j++) x[j] = 0.0;

sis->setVar(x);
};

// integração
__inline void Integra()
{
// Cálculo dos coeficientes
sis->Derivada(k1, x, t);

for (i=0;i<n;i++) temp[i] = x[i] + 0.25*k1[i]*h;
sis->Derivada(k2, temp, t + 0.25*h);

for (i=0;i<n;i++) temp[i] = x[i] + (3*k1[i]/32 + 9*k2[i]/32)*h;
sis->Derivada(k3, temp, t + 0.375*h);

for (i=0;i<n;i++) temp[i] = x[i] +
(1932*k1[i]/2197 - 7200*k2[i]/2197 + 7296*k3[i]/2197)*h;
sis->Derivada(k4, temp, t + 12*h/13);

for (i=0;i<n;i++) temp[i] = x[i] +
(439*k1[i]/216 - 8*k2[i] + 3680*k3[i]/513 - 845*k4[i]/4104)*h;
sis->Derivada(k5, temp, t + h);

for (i=0;i<n;i++) temp[i] = x[i] + (- 8*k1[i]/27 + 2*k2[i] -
3544*k3[i]/2565 + 1859*k4[i]/4104 - 11*k5[i]/40)*h;
sis->Derivada(k6, temp, t + 0.5*h);

// incremento das variáveis
t+=h;
for (i=0;i<n;i++) x[i] += h*(16*k1[i]/135 + 6656*k3[i]/12825 +
28561*k4[i]/56430 - 9*k5[i]/50 + 2*k6[i]/55);
```

```
// Cálculo do erro e do próximo passo
    for (i=0;i<n_erro;i++) temp[i] = (k1[i]/360 - 128*k3[i]/4275
        - 2197*k4[i]/75240 + k5[i]/50 + 2*k6[i]/55);

    temp[0] *= temp[0];
    for (i=1;i<n_erro;i++) temp[0] += temp[i]*temp[i];

    h = h * fator_h * exp(-0.125*log(temp[0]));
};
};

//-----
// Rotina principal.
//-----
int main(int argc, char *argv[]) {

//-----
// Definição de variáveis.
//-----
    register int i,j;

// Variáveis do integrador
    double tempo_inicial, tempo_de_int;
    double passo_inicial, erro_por_passo;

// Variáveis do sistemas
    double par1, par2, par3;
    double cond_inic1, cond_inic2, cond_inic3;

// Arquivos
    ifstream input;
    ofstream output;

//-----
// Leitura do arquivo de parâmetros.
//-----
    input.open("par.dat");
    if (! input.is_open()) {cout << "Erro abrindo arquivo 'entrada.dat'."; exit (1);}

    input >> tempo_inicial;
    input >> tempo_de_int;
```

```
input >> passo_inicial;
input >> erro_por_passo;

input >> par1;
input >> par2;
input >> par3;

input >> cond_inic1;
input >> cond_inic2;
input >> cond_inic3;

input.close();

//-----
// Escrevendo parâmetros nas saída.
//-----
output.open("saida.dat");
if (! output.is_open()) {cout << "Erro abrindo arquivo 'saida.dat'."; exit (1);}

output << "Integrador de sistemas.\n";

output << "Tempo inicial: " << tempo_inicial << endl;
output << "Tempo de integração: " << tempo_de_int << endl;

output << "Passo inicial: " << passo_inicial << endl;
output << "Erro por passo: " << erro_por_passo << endl;

output << "Parâmetro 1: " << par1 << endl;
output << "Parâmetro 2: " << par2 << endl;
output << "Parâmetro 3: " << par3 << endl;

output << "Condição inicial 1: " << cond_inic1 << endl;
output << "Condição inicial 2: " << cond_inic2 << endl;
output << "Condição inicial 3: " << cond_inic3 << endl;

//-----
// Montando o sistema e o integrador.
//-----
Rossler * sis = new Rossler(par1, par2, par3,
                             cond_inic1, cond_inic2, cond_inic3);

RungeKuttaFehlberg45 * integrador
    = new RungeKuttaFehlberg45(passo_inicial, erro_por_passo, sis);
```

```
//-----  
// Preparando a integração.  
//-----  
    cout << "O programa está pronto para integrar...\n";  
    i=1;  
  
//-----  
// Integração.  
//-----  
    for (integrador->t = tempo_inicial; integrador->t < tempo_de_int;) {  
  
        integrador->Integra();  
  
        if (i==0) {  
            output << integrador->t << " ";  
            for (j=0; j<sis->N_var(); j++)  
                output << (* sis->Var(j)) << " ";  
            output << endl;  
            i=1;  
        }  
        i--;  
    }  
  
//-----  
// Finalizando a integração.  
//-----  
    output.close();  
  
    cout << endl << endl << endl << "Fim!";  
  
    return 0;  
}
```

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)