Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Teoremas de Comparação e Hipersuperfícies.

Por
Murilo Chavedar de Souza Araújo

sob orientação do
Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Junho - 2009
João Pessoa, Paraíba

Teoremas de Comparação e Hipersuperfícies.

por

Murilo Chavedar de Souza Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

____
Prof. Dr. **Pedro A. Hinojosa**
Orientador

____
Prof. Dr. **Jorge Herbert Soares de Lira**
Examinador

____
Prof. Dr. **Jorge Antonio Hinojosa Vera**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Junho - 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAíBA

Data: **Junho - 2009**

Autor: **Murilo Chavedar de Souza Araújo**

Tìtulo: **Teoremas de Comparação e Hipersuperfícies.**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **Junho** Ano: **2009**

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

Aos meus pais Araújo e Cida
e a minha irmã Martha.

Agradecimentos

Considero que a elaboração de uma dissertação é um produto coletivo embora sua redação, responsabilidade e stress seja predominantemente individual. Muitos contribuíram para que este trabalho chegasse a bom termo. A todos eles registro minha gratidão:

A Deus que em sua fonte de luz e bondade, me possibilitou a vida, a saúde e a inteligência.

Aos meus pais, por terem sido o contínuo apoio em todos estes anos, ensinando-me, principalmente, a importância da construção e coerência de meus próprios valores.

Ao Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa por ter aceito me orientar, pelo constante incentivo, por sempre indicar a direção a ser tomada nos momentos de maior dificuldade e cuja atuação profissional e dedicação incondicional contribuíram de modo definitivo para a conclusão deste trabalho.

Aos professores Jorge Herbert Soares Lira (UFC) e Jorge Antonio Hinojosa Vera (UFRPE) por participarem da banca examinadora e pelas sugestões apresentadas.

Aos meus amigos do mestrado e a todos que de alguma maneira contribuíram, não só para a realização desta dissertação, como para tornar mais agradável cada dia de trabalho.

Aos professores e funcionários do departamento de matemática que constroem todos os dias um ambiente ideal para o estudo e desenvolvimento científico.

Aos professores Aldir C. Brasil Jr. e José Fábio B. Montenegro pelo apoio e incentivo.

A Capes - pela bolsa concedida durante a realização deste mestrado.

Obrigado a todos !

O homem depende do seu pensamento.

Mokiti Okada

Índice

A663t Araújo, Murilo Chavedar de Souza.
Teoremas de Comparação e Hipersuperfícies / Murilo Chavedar de Souza Araújo. - João Pessoa, 2009.
96f.
Orientador: Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Equação de Riccati. 3. Hipersuperficiais Paralelas. 4. Comparação de volume.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Resumo

Neste trabalho comparamos a segunda forma fundamental de uma família de hipersuperfícies paralelas em uma variedade Riemanniana, obtemos uma nova demonstração do teorema de Rauch e alguns resultados de comparação de distância e volume em geometria Riemanniana como, por exemplo, o teorema de Bishop.

A técnica usada basea-se principalmente no estudo da equação de Riccati $B' + B^2 + R = 0$. Esta é uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem, que é satisfeita pela segunda forma fundamental de uma família de hipersuperfícies paralelas quando R é o tensor de curvatura numa direção normal à família de hipersuperfícies.

Além disso, através do estudo da equação de Riccati obtemos também resultados sobre comparação de volumes para conjuntos a uma certa distância de uma subvariedade totalmente geodésica.

Palavras-Chave: Equação de Riccati, Hipersuperfícies Paralelas, Comparação de Volume.

Abstract

In this work we compare the second fundamental form of a family of parallel hypersurfaces in a Riemannian manifold, we obtain a new demonstration of Rauch's theorem and some results of comparison of distance and volume in Riemannian geometry, such as the Bishop´s theorem.

The technique used is basically the study of Riccati´s equation, $B' + B^2 + R = 0$. This is a nonlinear ordinary differential equation of second order, which is satisfied by the second fundamental form of a family of parallel hypersurfaces where R is the tensor of curvature in a normal direction to the family of hypersurfaces.

Moreover, through the study of the Riccati´s equation we also obtain results on comparison of volume for submanifolds at a fixed distance from a totally geodesic submanifold.

Key words: Riccati´s Equation, Comparison of Volume, Parallel Hypersurfaces,

Introdução

O estudo feito em geometria Riemanniana está baseado em dois conceitos fundamentais, a saber, geodésicas e curvatura. A idéia básica é que o estudo da curvatura indica o quão rapidamente "se afastam" as geodésicas. Como consequência essa taxa de afastamento irá influenciar a taxa com que o volume cresce.

Uma maneira de relacionar os conceitos de geodésicas e curvatura é através do conceito de Campos de Jacobi.

Essa relação existente entre os conceitos de geodésica, curvatura e campos de Jacobi tornou popular o estudo de volume em geometria Riemanniana por meio de técnicas como a forma do índice e de propriedades minimizantes de campos de Jacobi (veja [7]).

Nesta dissertação, baseada no artigo de Eschenburg [8], comparamos a segunda forma fundamental de uma família de superfícies paralelas em uma variedade Riemanniana. Essa comparação é feita pelo estudo da equação diferencial de Riccati $B' + B^2 + R = 0$, uma EDO não linear de segunda ordem, que é satisfeita pela segunda forma fundamental B de uma família de hipersuperfícies paralelas se R denota o tensor de curvatura em uma direção normal. Geometricamente temos que as curvaturas seccionais controlam as curvaturas principais em uma família de hipersuperfícies paralelas (veja por exemplo a proposição 3.1). Com isso é possível obter uma nova demonstração do teorema de Rauch. De modo análogo temos que as curvaturas Ricci controlam a curvatura média da hipersuperfície paralela (veja por exemplo a proposição 3.2). Com isso obtivemos os resultados de comparação de distância e volume em geometria Riemanniana como o teorema de Bishop e Myers.

Além disso, o estudo da equação de Riccati permite obter resultados sobre volumes para conjuntos que distam de $\leq$ r de uma subvariedade totalmente geodésica.

A idéia de usar a equação matricial de Riccati para argumentos de comparação é antiga e foi comum no estudo da teoria de Sturm-Liouville para EDO. No entanto, o tratamento sistemático de teoremas de comparação em geometria Riemanniana não é tão comum.

No capítulo um é feito uma revisão dos resultados de álgebra linear, geometria Riemanniana e EDO que serão utilizados no restante do texto. O resultados mais importantes são os de comparação de operadores auto adjuntos, a identificação do operador de forma com o hessiano de uma função diferenciável e propriedades da equação de Riccati.

No capítulo dois é introduzido o conceito de superfícies paralelas como imagem inversa de uma função diferenciável $f : M' \subset M \to \mathbb{R}$ tal que $||\text{grad} f|| = ||V|| = 1$ (ou seja, uma superfície paralela é uma hipersuperfície de M). Identificamos o operador hessiano de f com o operador de forma da hipersuperfície de nível. Além disso, fazemos a relação entre a equação de Jacobi em sistema envolvendo a equação de Riccati e a equação $J' = BJ$ e a menos de transporte paralelo ao longo da geodésica γ_V, pudemos considerar $B(t) = B|_{\gamma(t)}$ e $R(t) = R(\cdot, V)V|_{\gamma(t)}$ como endomorfismos auto adjuntos de $E = \{\gamma'(t_0)\}^{\perp}$.

No capítulo três é introduzido uma relação parcial de ordem no espaço dos operadores auto adjuntos $S(E)$. Sendo assim, supondo que $R_j : \mathbb{R} \to S(E)$, $j \in \{1, 2\}$ é uma curva suave e que existe uma relação entre R_j, dada pela relação parcial de ordem mencionada acima, obtivemos resultados de comparação para as soluções das equações de Riccati correspondentes $B_j' + B_j^2 + R_j = 0$. Na segunda parte desse capítulo foi feito o estudo da equação de Riccati para o caso particular da condição inicial ser um polo de $B(t)$. Essa segunda parte é importante para o capítulo seis.

No capítulo quatro são obtidos teoremas de comparação em alguns casos particulares de hipersuperfícies paralelas.

No capítulo cinco utilizamos o teoria desenvolvida nos capítulos anteriores para apresentar uma nova demonstração do teorema de Rauch e obtivemos resultados de comparação de volume, a saber o teorema de Bishop-Gromov.

No capítulo seis obtivemos resultados de comparação de volume para subvariedades totalmente geodésicas.

Capítulo 1

Pré-requisitos

A material que segue é uma revisão de assuntos de álgebra linear, geometria Riemanniana e equações diferenciais ordinárias que serão utilizados posteriormente.

Em geral procuramos manter as notações encontradas na literatura clássica. Desse modo está parte do texto também tem por objetivo fixar as notações que serão utilizadas posteriormente.

Para informações mais detalhadas em Álgebra Linear recomendamos os livros [18] e [13], em Geometria Riemanniana veja [7], [20], [4], [17] e [22] e em Equações Diferenciais indicamos [2], [6] e [15].

1.1 Álgebra Linear

No que segue E, F denotarão espaços vetoriais (reais) de dimensão finita (em geral de dimensão $n \in \mathbb{N}$) com produto interno $\langle \ , \ \rangle$.

Dada uma aplicação linear, $A : E \to F$ a adjunta de A é a transformação linear $A^* : F \to E$ que verifica

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle,$$

para todos os vetores $v \in E$ e $w \in F$.

Lema 1.1. *Seja $U = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ e $V = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset F$ bases ortonormais. Se $\boldsymbol{a} = [a_{ij}] \in \mathbf{M}(mXn)$ é a matriz da transformação linear $A : E \to F$ nas bases U, V então a matriz da adjunta $A^* : F \to E$ nas bases V, U é a transposta $\boldsymbol{a}^T = [a_{ji}] \in \mathbf{M}(nXm)$ de $\boldsymbol{a}$.*

Demonstração: Veja [18]. $\square$

Em relação à aplicação adjunta, valem as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{ll} I^* = I & (A+B)^* = A^* + B^* \\ (\alpha A)^* = \alpha A^* & (BA)^* = A^* B^* \\ A^{**} = A & (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \end{array}$$

Denotemos por $\mathbf{L}(E, F)$ o conjunto formado por transformações lineares $A : E \to F$. Em $\mathbf{L}(E, F)$ definimos um produto interno $\langle \ , \ \rangle$ por

$$\langle A, B \rangle = tr\{A^* B\}$$

Dado um operador linear $A : E \to E$ dizemos que A é auto-adjunto quando $A^* = A$, ou seja, se $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ para quaisquer $u, v \in E$. Denotemos por $S(E) = \{A : E \to E; A \text{ é auto-adjunto}\}$.

Para $\alpha \in S(E)$ e $A, B \in S(E)$ valem as seguintes propriedades:

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \alpha A^*, \quad AB \text{ é auto-adjunto } \Leftrightarrow AB = BA$$

Assim, $S(E)$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{L}(E, E)$.

Denotemos por $S(n)$ o conjunto das matrizes simétricas de ordem n. Lembremos que uma matriz quadrada $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ de ordem n diz-se simétrica quando é igual a sua transposta $\mathbf{a}^T$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \leq i, j \leq n$. É claro que $S(n)$ é um subespaço vetorial de $M(n)$ conjunto das matrizes de ordem n. Além disso, sabemos que $A : E \to E$ é auto-adjunto se e somente se sua matriz relativamente a uma (e portanto a qualquer) base ortonormal de E é simétrica. Desta maneira, pelo lema

1.1, os espaços $S(n)$ e $S(E)$ são isomorfos, donde têm a mesma dimensão, a saber $\frac{n(n+1)}{2}$ onde $dimE = n$.

Agora estamos interessados em estudar os autovalores de uma aplicação auto adjunta. Lembremos que E denota um espaço vetorial real de dimensão finita.

Seja $A : E \to E$ um operador linear. Um vetor $v \in E \setminus \{0\}$ chama-se um autovetor do operador $A : E \to E$ quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$.

O número $\lambda \in \mathbb{R}$ chama-se um autovalor do operador A quando existe um vetor não nulo $v \in E$ tal que $Av = \lambda v$ e denota-se $\lambda(A)$.

Analogamente, diz-se que o número λ é um autovalor da matriz $\mathbf{a} \in M(n\text{x}n)$, onde $dimE = n$, quando λ é um autovalor do operador $A : E \to E$ cuja matriz em uma base β fixada é $\mathbf{a}$. Isto significa que existe um vetor $x \in E - \{0\}$ tal que $Ax = \lambda x$ ou, o que é o mesmo, uma matriz não nula $\mathbf{x} \in M(n\text{x}1)$ tal que $\mathbf{ax} = \lambda\mathbf{x}$.

Note que:

$$\mathbf{ax} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{Id})x \text{ é singular } \Leftrightarrow det(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{Id}) = 0$$

O polinômio $det(\mathbf{a} - t\mathbf{Id})$ é chamado polinômio característico de A e denota-se por $p_A(t)$. Note que, as raízes do polinômio característico $p_A(t)$ são os autovalores do operador A. Lembre também, veja [13], que se $A : E \to E$ é auto adjunto, ou seja se a matriz de A, $a \in M(n\text{x}n)$, com relação a uma base ortonormal, é simétrica, então os autovalores de A são reais. Desta forma, se A é auto-adjunta, então podemos ordenar os auto-valores de A

$$\lambda_{min}(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \lambda_{max}(A).$$

Dizemos que $A, B : E \to E$ são similares se existe $C : E \to E$ invertível tal que $B = C^{-1}AC$, escrevemos $A \simeq B$. Note que isto é, de fato, uma relação de equivalência em $\mathbf{L}(E, E)$.

Lema 1.2. *Se $A_1 \simeq A_2$, então $p_{A_1}(t) = p_{A_2}(t)$.*

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} p_{A_2}(t) &= det(A_2 - tId) = det(C^{-1}A_1C - tId) = det(C^{-1}(A_1 - tId)C) \\ &= det(C^{-1})det(A_1 - tId)det(C) = det(A_1 - tId) = P_{A-1}(t). \end{aligned}$$

$\square$

A seguir enunciamos alguns resultados gerais que serão importantes e usados posteriormente.

Teorema 1.1 (Rayleigh-Ritz)**.** *Seja A uma aplicação autoadjunta e suponha que seus autovalores estão ordenados de modo crescente. Então*

$$\lambda_{min}(A)||x||^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_{max}(A)||x||^2.$$

Demonstração: Veja [14]. Ou, para uma demonstração mais direta, [3]. $\square$

Teorema 1.2 (Weyl)**.** *Sejam $A, B, A+B$ operadores auto adjuntos com auto valores ordenados de modo crescente. Então para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ onde dimE=n, temos*

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

Demonstração: Veja [14]. $\square$

Teorema 1.3 (Espectral)**.** *Para todo operador auto adjunto $A : E \to E$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal de E formada por auto vetores de A.*

Demonstração: Veja [18]. $\square$

Vale também a recíproca do teorema espectral.

Teorema 1.4. *Se existe uma base ortonormal $\{v_i\} \subset E$ formada por autovetores do operador $A : E \to E$, então esse operador é auto-adjunto.*

Demonstração: Veja [18]. $\square$

A seguir introduzimos uma relação de ordem parcial em $S(E)$. A partir da qual obtemos resultados de "comparação" para operadores auto adjuntos.

Diremos que o operador linear $A : E \to E$ é não-negativo (positivo), e escrevemos $A \geq 0$ ($A > 0$), quando A for auto-adjunto e $\langle Av, v\rangle \geq 0$ ($\langle Av, v\rangle > 0$) para todo $v \in E \setminus \{0\}$.

Diremos que um operador linear $A : E \to E$ é positivo definido se é auto-adjunto e valem

- (i) $\langle Av, v\rangle \geq 0$ para todo $v \in E$
- (ii) $\langle Av, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Se vale apenas (i) diremos que o operador A é positivo semi-definido. Note que positivo semi-definido é um sinônimo para não negativo.

Temos o seguinte resultado.

Lema 1.3. *Seja $A : E \to F$ uma transformação linear. Os operadores $A^*A : E \to E$ e $AA^* : F \to F$ são não-negativos e ambos têm o mesmo posto de A (e de A^*).*

Demonstração: Veja [18]. $\square$

Introduzimos a norma induzida pelo produto interno $\langle A, B\rangle = trA^*B$, como $||A||_2 = \sqrt{\langle A^*, A\rangle}$.

Note que para o caso particular de o operador linear $A : E \to E$ ser auto-adjunto não seria necessário utilizar o resultado acima, bastaria utilizar o fato de a matriz desse operador ser simétrica para definir a norma induzida pelo produto interno. Outras normas para operadores auto-adjuntos $A : E \to E$ são:

- $||A||_{spec} = \max\{\lambda_i\}$, onde λ_i^2 são autovalores de A^2. Está norma é chamada de norma espectral.

- $||A||_{sup} = \sup\{||Ax||, x \in E, ||x|| = 1\}$. Está norma é chamada de norma do supremo.

Além disso, temos:

- $||A||_{spec} \leq ||A||_{sup}$
- $||A||_{spec} \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_{spec}$

Em geral estaremos interessados na norma $||A||_2 = \sqrt{\langle A^*, A\rangle}$. Sendo assim, a menos que seja dito o contrário, será essa a norma que usaremos e a denotaremos simplesmente por $||A||$.

Em $S(E)$ introduzimos uma ordem parcial como segue-se:

$$A \leq B \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle \;\; \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Utilizaremos também a seguinte notação:

$$A < B \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle < \langle Bx, x\rangle \;\; \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Lema 1.4. *Dado $F \in S(E) \setminus \{0\}$. Então F é invertível e $F^{-1} \in S(E) \setminus \{0\}$.*

Demonstração: De fato, o resultado segue basicamente do teorema espectral e da sua recíproca.

Como F é auto adjunto temos, pelo teorema espectral, que existe $\{v_i\}$ base ortonormal de autovetores. Além disso, a matriz de F nessa base é uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal são os autovalores de F associados aos respectivos autovetores.

Como $F \in S(E)\setminus\{0\}$, todos os autovalores λ_i de F são não nulos, além disso, como $F^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda_i}v_i$, $\{v_i\}$ é base ortonormal de autovetores para o operador $F^{-1} : E \to E$, donde, a matriz do operador F^{-1}, na base $\{v_i\}$, é diagonal e suas entradas são $\frac{1}{\lambda_i}$. Pela recíproca do teorema espectral, esse operador é auto-adjunto. $\square$

Lema 1.5. *Sejam $A, B : I \subset \mathbb{R} \to S(E)$ aplicações contínuas tais que $A < B$ em $(s_1, s_2) \subset I$. Então $A \leq B$ em $[s_1, s_2]$.*

Demonstração: Por hipótese, temos que $A < B$ em (s_1, s_2). Logo, por definição, $A(t) < B(t), \forall t \in (s_1, s_2)$, ou seja, para cada $x \in E \setminus \{0\}$ e cada $t \in (s_1, s_2)$, temos $\langle A(t)x, x\rangle < \langle B(t)x, x\rangle$.

Como as aplicações A, B e o produto interno em E são contínuos temos que

$$\langle A(s_i)x, x\rangle = \lim_{t \to s_i} \langle A(t)x, x\rangle \leq \lim_{t \to s_i} \langle B(t)x, x\rangle = \langle B(s_i)x, x\rangle.$$

Portanto, $A \leq B$ em $[s_1, s_2]$. $\square$

Lema 1.6. *Sejam $A_1, A_2 \in S(E)$. Então $\lambda_{max}(A_1) \leq \lambda_{min}(A_2) \Leftrightarrow A_1 \leq D^{-1}A_2D$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E, E)$.*

Demonstração: Seja D uma aplicação linear invertível arbitrária. Pelo teorema de Rayleigh-Ritz temos, para todo $x \in E - \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\langle A_1x, x\rangle}{||x||^2} &\leq \lambda_{max}(A_1) \leq \lambda_{min}(A_2) \text{ (hipótese)} \\ &= \lambda_{min}(D^{-1}A_2D) \quad (\text{pois } p_{A_2}(t) = p_{D^{-1}A_2D}(t)\ ) \\ &\leq \frac{\langle D^{-1}A_2Dx, x\rangle}{||x||^2}. \end{aligned}$$

Logo, $\langle A_1x, x\rangle \leq \langle D^{-1}A_2Dx, x\rangle$ e portanto, $A_1 \leq D^{-1}A_2D$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E, E)$.

Reciprocamente, como A_1, A_2 são aplicações auto adjuntas, os seus autovalores são reais. Sendo assim,

$$\lambda_{min}(A_i) \leq \lambda_2(A_i) \leq \ldots \leq \lambda_{max}(A_i)$$

onde $i = 1, 2$. Seja $\{u_j^i\}$ base de autovetores da aplicação A_i, dada pelo teorema espectral, e consideremos essa base ordenada de modo que $A_iu_j^i = \lambda_j(A_i)u_j^i$ onde $i = 1, 2$ e $j = 1, \ldots, dimE$.

Tome $D : E \to E$ isometria tal que $Du_n^1 = u_1^2$.

Como as bases são ortonormais, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_{max}(A_1) &= \langle A_1 u_n^1, u_n^1 \rangle \\
&\leq \langle D^{-1} A_2 D u_n^1, u_n^1 \rangle \\
&= \langle A_2 D u_n^1, D u_n^1 \rangle \quad (\text{pois } D^{-1} = D^* \text{)} \\
&= \langle A_2 u_1^2, u_1^2 \rangle \quad (\text{pois } D \text{ é auto adjunta)} \\
&= \lambda_{min}(A_2).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.7. *Sejam $F, G \in S(E)$. Então $G \leq F \Leftrightarrow G \leq D^{-1} F D$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E, E)$.*

Demonstração: Se $G \leq D^{-1} F D$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E, E)$, então tomando $D = Id$ temos $G \leq F$. Reciprocamente, se $G \leq F$, mostremos que $G \leq D^{-1} F D$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E, E)$.

Inicialmente note que G é similar a $D^{-1} G D$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E, E)$. Portanto $p_G(t) = p_{D^{-1}GD}(t)$. Analogamente para F.

Afirmação: $D^{-1} G D \leq D^{-1} F D$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E, E)$.

De fato, por hipótese temos que $G \leq F$, ou seja, $F - G$ é positivo semi-definido.

Note que:

$$\begin{aligned}
\langle (D^{-1} F D - D^{-1} G D) x, x \rangle &= \langle D^{-1} (F - G) D x, x \rangle \\
&= \langle (F - G) D x, D x \rangle \ (\text{pois } D^{-1} = D^* \text{ e } D \text{ é auto adjunta)} \\
&\geq 0 \ \forall x \in E \setminus \{0\} \ (\text{pois } F - G \text{ é positivo semi-definido) .}
\end{aligned}$$

Portanto $D^{-1} G D \leq D^{-1} F D$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E, E)$. Mostrando a afirmação.

Pelo Lema 1.6 temos que $\lambda_{max}(D^{-1}GD) \leq \lambda_{min}(F)$. Além disso, como G é similar a $D^{-1}GD$, temos que $\lambda_{max}(D^{-1}GD) = \lambda_{max}(G)$. Sendo assim, novamente pelo lema 1.6, temos $G \leq D^{-1}FD$ para toda isometria $D \in \mathbf{L}(E,E)$. $\square$

Lema 1.8. *Sejam $F, G \in S(E)$ tais que $F > G > 0$. Então $G^{-1} > F^{-1} > 0$.*

Demonstração: Inicialmente note que dado $A \in S(E) \setminus \{0\}$ temos, pelo Lema 1.4, que A é invertível e $A^{-1} \in S(E)$. Além disso,

(i) se λ é autovalor de A tal que $Av = \lambda v$, então λ^{-1} é autovalor de A^{-1} tal que $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$.

(ii) $\lambda_{min}(A^{-1}) = (\lambda_{max}(A))^{-1}$ e $\lambda_{max}(A^{-1}) = (\lambda_{min}(A))^{-1}$.

(iii) $\lambda_{min}(-A) = -\lambda_{max}(A)$ e $\lambda_{max}(-A) = -\lambda_{min}(A)$.

Pelo teorema de Weyl, dados $A, B \in S(E)$ temos $\lambda_{min}(A+B) \geq \lambda_{min}(A) + \lambda_{min}(B)$.

Mostremos que $G^{-1} - F^{-1}$ é positivo .

Como $F^{-1}, G^{-1} \in S(E)$ temos que $F^{-1} - G^{-1} \in S(E)$. Além disso, sabemos que $G^{-1} - F^{-1}$ é positivo se, e somente se, todos os seus autovalores são positivos (veja [18]). Note que:

$$\begin{aligned} \lambda_{min}(G^{-1} - F^{-1}) &\geq \lambda_{min}(G^{-1}) + \lambda_{min}(-F^{-1}) \\ &= \frac{1}{\lambda_{max}(G)} + \frac{1}{\lambda_{max}(-F)} \\ &= \frac{1}{\lambda_{max}(G)} - \frac{1}{\lambda_{min}(F)}. \end{aligned}$$

Além disso, pelos Lemas 1.6 e 1.7, temos

$$\begin{aligned} 0 < G < F &\Rightarrow 0 < G < D^{-1}FD, \quad \text{para toda isometria } D \in \mathbf{L}(E,E) \\ &\Rightarrow 0 < \lambda_{max}(G) < \lambda_{min}(F) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{max}(G)} - \frac{1}{\lambda_{min}(F)} > 0. \end{aligned}$$

Portanto $\lambda_{min}(G^{-1} - F^{-1}) > 0$ e $G^{-1} - F^{-1}$ é positivo. $\square$

Em breve estaremos interessados em estudar aplicações contínuas $A : I \to S(E)$. Neste contexto o seguinte resultado será útil.

Sejam $A, B \in S(E)$. Então

$$|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leq ||A - B||_{sup} \quad \text{para todo } k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Em particular, se $A : I \to S(E)$ é uma aplicação contínua (ou uma família contínua de operadores), então seus autovalores,

$$\lambda_{min}(A(t)) \leq \ldots \leq \lambda_{max}(A(t)),$$

ordenados de modo crescente, são funções contínuas de t. Veja [3].

1.2 Geometria Riemanniana

O texto a seguir é um apontamento dos principais resultados de Geometria Riemanniana que serão necessários. Em geral as notações utilizadas são as mesmas do texto [7]. Alguns conceitos, definições e resultados básicos foram adicionados no apêndice. Na elaboração deste material foram utilizadas as referências [7], [20], [4], [17] e [22].

Seja M uma n-variedade Riemanniana e seja ∇ a conexão de Livi-Civita em M.

Campos de Jacobi e Pontos conjugados

Definição 1.1. *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica de M. Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se, e somente se, satisfaz a equação de Jacobi:* $\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$, *para* $t \in [0, a]$.

Sendo assim, um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $J'(0)$.

Note que $\gamma'(t)$ e $t\gamma'(t)$ são campos de Jacobi ao longo de γ (basta verificar que ambos satisfazem a equação de Jacobi). O primeiro tem derivada zero (pois γ é uma geodésica) e nunca se anula; o segundo é nulo se e somente se $t = 0$. Como já conhecemos o comportamento do campo γ', só consideraremos campos de Jacobi ao longo de γ que são normais a γ'.

Existe basicamente só uma maneira de construir campos de Jacobi ao longo da geodésica γ tal que $J(0) = 0$. A seguir apresentamos essa construção.

Sejam $p \in M$, $v \in T_pM$, $w \in T_v(T_pM) \simeq T_pM$. Considere, em M, a geodésica $\gamma : [0,1] \to M$ dada por $\gamma(t) = exp_p(tv)$. Note que $\gamma(0) = p \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = v$.

Considere a função $f : [0,1] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ dada por $f(t,s) = exp_p(tv(s))$, onde $v(s)$ é uma curva em T_pM com $v(0) = v$ e $v'(0) = w$. Nestas condições, $f(t,s)$ é uma superfície parametrizada em M.

Fixado $s = s_0$ e variando t estamos percorrendo em T_pM o vetor $v(s_0)$ de $0 \in T_pM$ até o seu extremo $v(s_0)$. Considerando a imagem pela aplicação exponencial exp_p obtemos em M uma geodésica $\gamma(t) = f(t, s_0)$. Sendo assim, construímos em M uma variação da geodésica $\gamma(t) = f(t,0)$ por geodésicas.

Consideremos o campo $(dexp_p)_{tv} = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ ao longo da geodésica $\gamma(t) = exp_p(tv)$, com $0 \leq t \leq 1$. Note que $\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = w$ e que $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ é campo tangente a geodésica $\gamma(t) = f(t,0)$.

Temos que o campo $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ satisfaz a equação de Jacobi e pela construção temos $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$.

Observação 1.1. *Note que:*

- *Dadas as condições iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$ temos, pela unicidade da solução da equação de Jacobi, que a construção acima é basicamente a única maneira de se construir campos de Jacobi (com tais condições iniciais).*

- *Segue da construção que dadas as condições iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$, então o campo de Jacobi é dado por $J(t) = d(exp_p)_{t\gamma'(0)}tw$. Em particular, $J(t_0) = 0$, para $t_0 \in (0,1)$, se e somente se $t_0\gamma'(0)$ é ponto crítico da aplicação exponencial exp_p.*

Uma outra maneira de observer é $||(dexp_p)_v(w)|| = 0$ *com* $w \neq 0$*, então* v *é um ponto crítico de* exp_p*. Outra informação importante que obtemos do estudo de* $||(dexp_p)_v(w)||$ *é que intuitivamente* $||(dexp_p)_v(w)||$ *indica a velocidade de afastamento das geodésicas* $t \to exp_p tv(s)$ *que saem de* p*. Tal afastamento está associado com o valor da curvatura seccional em* p *segundo o plano gerado por* v, w*. Na realidade temos o seguinte resultado:*

Lema 1.9. *Seja* $\gamma : [0, l] \to M$ *uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco na variedade Riemanniana* M*,* $|w| = 1$ *e* $< w, v >= 0$*. Então* $|J(t)| = t - \frac{K(p,\sigma t^3}{6} + R(t)$ *com* $\lim_{t\to 0} \frac{R(t)}{t^3} = 0$.

Demonstração: *Veja [7].* $\square$

Definição 1.2. *Seja* $\gamma : [0, l] \to M$ *uma geodésica em uma variedade Riemanniana* M*. O ponto* $\gamma(t_0)$ *é conjugado de* $\gamma(0)$ *ao longo de* γ*,* $t_0 \in (0, l]$*, se existe um campo de Jacobi* J *ao longo de* γ*, não identicamente nulo, com* $J(0) = 0 = J(t_0)$*.*

Seja $\gamma(t_0)$ ponto conjugado de p ao longo de γ. Diremos que $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado de p ao longo de γ significando que t_0 é o infimo de todos os $t \in (0, l)$ tal que $\gamma(t)$ é ponto conjugado de p ao longo de γ . Temos o seguinte resultado em [7]: O conjunto dos pontos conjugados ao longo de uma geodésica é um conjunto discreto.

Exemplo 1.1 (Campos de Jacobi em variedades de curvatura seccional constante)**.** *Seja* M *uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante* k*. Seja* $\gamma : [0, l] \to M$ *uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco em* M *e seja* J *um campo de Jacobi ao longo de* γ*, normal a* γ'*.*

Vamos caracterizar os campos de Jacobi em M*. Veja [4] para mais informações.*

Seja ψ *uma função real e considere a equação diferencial ordinária*

$$\psi'' + k\psi = 0 \tag{1.1}$$

Denotemos por $s_k(t)$ *e* $c_k(t)$ *as soluções da equação (1.1) satisfazendo* $s_k(0) = 0$*,* $s'_k(0) = 1$ *e* $c_k(0)$*,* $c'_k(0) = 0$*.*

Sendo assim,

$$s_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} sen\ \sqrt{k}t, & se\ k > 0 \\ t, & se\ k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} senh\ \sqrt{-k}t, & se\ k<0 \end{cases}$$

e

$$c_k(t) = \begin{cases} cos\ \sqrt{k}t, & se\ k > 0 \\ 1, & se\ k = 0 \\ cosh\ \sqrt{-k}t, & se\ k<0. \end{cases}$$

Além disso, temos

$$s_k' = c_k, \ \ c_k' = -ks_k, \ \ c_k^2 + ks_k^2 = 1, \ \ (\frac{c_k}{s_k})' = (\frac{s_k'}{s_k})' = -s_k^{-2}.$$

Utilizaremos a seguinte terminologia: diremos que a curvatura seccional ao longo de γ significando que estamos considerando a curvatura seccional da secção bidimensional de $T_{\gamma(t)}M$ gerada por $\gamma'(t)$ e $v \in T_{\gamma(t)}M$.

Sendo assim, veja por exemplo em [7],:

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + kJ = 0$$

é a equação de Jacobi.

Se $n = dim\ M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(0)}M$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é o campo paralelo ao longo de γ tal que $E_j(0) = e_j$. Então $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M$ para $t \in [0, l]$.

Sendo assim, $J(t) = \sum_{j=1}^{n} J^j(t)E_j(t)$ e $(J^j)'' + kJ^j = 0$ com $j \in \{1, \ldots, n.\}$

Portanto o campo de Jacobi J, tal que $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ em $[0, l]$, é

$$J(t) = c_k(t)A(t) + s_k(t)B(t)$$

onde $A(t), B(t)$ são campos de vetores paralelos ao longo de γ os quais são ponto a ponto ortogonais com γ. Em particular, se $J(0) = 0$ e $J'(0) = B(t)$ com $||B(t)|| = 1$ temos que $J(t) = s_k(t)B(t)$.

O Operador de Forma e a Hessiana de uma função diferenciável

§ 1.2.1.

Sejam M^m uma variedade diferenciável e $\overline{M}^{m+k=n}$ uma variedade Riemanniana.

Seja $g : M \hookrightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica. Como $\overline{M}$ possui uma estrutura Riemanniana, podemos definir uma estrutura Riemanniana em M por

$$\langle u, v\rangle_p = \langle dg_p(u), dg_p(v)\rangle_{g(p)}$$

com $u, v \in T_pM$. Como dg_p é injetiva temos que $\langle\ ,\ \rangle_p$ é uma métrica em M, chamada métrica induzida por g, e g é chamada uma imersão isométrica.

Note que sendo $g : M \hookrightarrow \overline{M}$ uma imersão então, pela forma local da imersões, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $g(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$.

Para simplificar a notação, identificaremos (pela aplicação de inclusão) U com $g(U)$ e cada $v \in T_pM$, $p \in U$, com $dg_pv \in T_p\overline{M}$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\overline{U} \supset g(U)$) de vetores em $\overline{M}$. É importante lembrar que se a vizinhança U de p em M é tomada suficientemente pequena tal extensão é sempre possível.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta $T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$, onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Denotemos por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$.

Se X, Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos[1]

$$\nabla_X Y := (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top : \chi(U) \text{ x } \chi(U) \to \chi(U).$$

Nas condições acima, $\nabla_X Y$ define[2] a conexão Riemanniana em M (relativa à métrica induzida por g em M).

[1]A seguir estamos utilizando a notação $(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top$ para denotar a parte tangente da conexão $\overline{\nabla}$. Utilizaremos o notação $\nabla^\top$ com o mesmo significado.

[2]Isto é, está bem definida (não depende das extensões escolhidas), é simétrica e compatível com a métrica.

Denotemos por $\chi(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $g(U) \approx U$.

A aplicação dada por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)^\perp$$

é bilinear e simétrica. Note que $B(X,Y)$ é parte normal de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$.

Como B é bilinear e simétrica, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas locais, que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Sejam $p \in M$, e $\eta \in (T_pM)^\perp$.

A aplicação $H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica.

A forma quadrática $II(x) = H_\eta(x,x) : T_pM \to \mathbb{R}$ associada a forma H_η é chamada a segunda forma fundamental de g em p segundo o vetor normal η.

A aplicação $S_\eta : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle$$

é chamado de operador de forma de M (ou endomorfismo de Weingartem). Observe que a aplicação $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é linear e auto-adjunta.

Temos a seguinte caracterização para o operador de forma, onde N é uma extensão local de η normal M :

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top.$$

Exemplo 1.2. *Consideremos o caso particular $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$. Suponhamos que M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas. Sejam $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^\perp$ e $|\eta| = 1$. Como a aplicação $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é linear e auto-adjunta, temos (pelo teorema espectral) que existe uma base ortonormal formada por autovetores. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ essa base, tomada na orientação de M, e suponhamos que $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ esteja na orientação de $\overline{M}$. Sejam $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, com $1 \leq i \leq n$, os autovalores de S_η associados aos respectivos autovalores. Nesse caso, denominamos os e_i as direções principais e os $\lambda_i = k_i$ as curvaturas principais de f. A função $\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$ é denominada curvatura média da imersão f.*

Vamos agora estudar o operador Hessiano e sua relação com o operador de forma.

Sejam M uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

O gradiente de f é o campo vetorial grad f em M definido por

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle_p = df_p(v)$$

com $p \in M$ e $v \in T_pM$.

A Hessiana H^f de uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ é operador $H^f : T_pM \to T_pM$ dado por

$$H^f(X) = \nabla_X(\text{grad } f).$$

Segue da definição do operador linear H^f hessiano de f que, dados $X, Y \in \chi(M)$, temos

$$\langle H^f(Y), X \rangle = \langle Y, H^f(X) \rangle.$$

Sendo assim, temos que H^f é auto-adjunto, logo determina uma forma bilinear simétrica em T_pM, $p \in M$, dada por

$$\text{Hess} f(X, Y) = \langle H^f(X), Y \rangle : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

Vamos explicitar a identificação de S_η com H^f.

Inicialmente temos:

Considere $M' \subset M$ aberto e suponha que $f : M' \to \mathbb{R}$ seja uma função diferenciável tal que temos o vetor gradiente $V = \text{grad } f$ de norma um.

Lembrando que um funcional linear ou é sobrejetivo ou é nulo. Portanto,

$$\begin{aligned} f : M' \to \mathbb{R} \text{ dif é uma submersão} \quad &\Leftrightarrow \quad df_p : T_pM' \to \mathbb{R} \text{ é não nulo para todo } p \in M' \\ &\Leftrightarrow \quad \text{grad} f(p) \neq 0 \text{ para todo } p \in M'. \end{aligned}$$

Como o grad f tem norma um, temos que f é uma submersão sobre sua imagem. Sendo assim a imagem inversa de todo valor regular é uma subvariedade (nesse caso uma hipersuperfície)de M.

Seja $q \in f(M') \subset \mathbb{R}$. Considere a fibra F_p, veja 7.5 para mais informações.

Seja $X \in TM$, então temos,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_V V, X \rangle &= \text{Hess} f(V, X) \\
&= \text{Hess} f(X, V) \\
&= \langle \nabla_X V, V \rangle \\
&= \frac{1}{2} X \langle V, V \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle \nabla_V V, X \rangle = 0 \ \ \forall \ X \in TM' \\
&\Rightarrow \nabla_V V = 0
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
H^f(X) &= \nabla_X V = \nabla_{X^\top + \lambda V} V \\
&= \nabla_{X^\top} V + \lambda \nabla_V V \\
&= \nabla_{X^\top} V \\
&= (\nabla_X V)^\top
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade foi utilizado o fato que $\langle \nabla_X V, V \rangle = 0$. Sendo assim, $(\nabla_X V)^\perp = 0$ e $(\nabla_X V)^\top = H^f(X) = \nabla_{X^\top} V$.

Por outro lado, sabemos que $S_\eta(X) = -(\nabla_X N)^\top$, onde N é uma extensão de V a M normal a cada hipersuperfície de nível. Sendo assim, a menos de um sinal, H^f e S_η coincidem e tal identificação de fato é possível.

Inicialmente note que o vetor grad$f$ é normal a cada subvariedade de nível[3]. Sendo assim,

$$\gamma \text{ é ortogonal a fibra } F_p \Leftrightarrow \gamma'(t) = V(t) = V(\gamma(t)) \text{ é ortogonal a fibra } F_p \forall t.$$

Mostremos que df_p preserva o comprimento de vetores ortogonais as fibras.

[3]Seja M uma variedade Riemanniana. Dizer que um vetor $w \in T_pM$ é perpendicular à subvariedade de nível $f^{-1}(c)$, onde c é um valor regular da aplicação diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, no ponto $p \in M$, significa que w é perpendicular ao vetor velocidade, no ponto p, de qualquer caminho diferenciável no ponto $t = 0$, com $\lambda(0) = p$ e $\lambda(t) \in f^{-1}(c)$, isto é $f(\lambda(t)) = c$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Sendo assim, $0 = \frac{d}{dt}(f(\lambda(t)))|_{t=0} = df_p(v) = \langle \text{grad} f(p), v \rangle$.

Seja v vetor ortogonal a fibra F_p. Então $v = \lambda gradf(p)$. Portanto,

$$||df_p(v)|| = |\langle \text{grad} f(p), v \rangle| = |\lambda| ||gradf(p)||^2 = |\lambda| = ||v||.$$

Nesse contexto, podemos dizer que f pode ser vista como uma submersão Riemanniana.

Além disso, identificando S_η com H^f, temos

$$H_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), N \rangle = \langle S_\eta(X), Y \rangle = \langle H^f(X), Y \rangle = \text{Hess} f(X, Y)$$

Portanto, $\text{Hess} f(X, Y)$ pode ser visto como a segunda forma fundamental $H_\eta(X, X)$ de f em p segundo o vetor normal η.

Observe que se tivéssemos definido, veja [20], a hessiana de $f : M \to \mathbb{R}$ como a segunda derivada covariante $\nabla\nabla f$, teríamos $\nabla\nabla f(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y f = \langle \nabla_X \text{grad} f, Y \rangle = \text{Hess} f(X, Y)$. Isso justifica a notação utilizada.

Vamos agora estudar o caso onde a subvariedade $M \subset \overline{M}$ tem codimensão maior que um. Veja [20] para mais informações. Nesse caso a conexão normal $\nabla^\perp$ tem um papel importante.

A seguir estamos utilizando a notação $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp$ para denotar a parte normal da conexão $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$. Explicitamente temos

$$\nabla^\perp_X Y := (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)^\perp.$$

Nas condições acima, $\nabla^\perp_X Y$ define[4] a conexão Riemanniana em M (relativa à métrica induzida pela imersão isométrica $g : M \hookrightarrow \overline{M}$ em M).

A aplicação dada por

$$\widetilde{B}(V, Z) = \overline{\nabla}_V \overline{Z} - \nabla_V Z : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)^\top$$

é bilinear e simétrica. Note que $\widetilde{B}(V, Z)$ é parte tangente de $\overline{\nabla}_V Z$.

[4]Isto é, está bem definida (não depende das extensões escolhidas), é simétrica e compatível com a métrica.

Sejam $V, W \in \chi(M)$ e $Z \in \chi(M)^{\perp}$. Sendo assim, $\langle Z, W\rangle = 0$ e diferenciando temos $\langle \overline{\nabla}_V Z, W\rangle = -\langle Z, \overline{\nabla}_V W\rangle$. Portanto temos $\langle \widetilde{B}(V, Z), W\rangle = -\langle B(V, W), Z\rangle$ e o tensor $\widetilde{B}$ não apresenta informações novas.

No caso particular onde $Z \in \chi(M)^{\perp}$, utilizamos a notação $S_Z V = -\widetilde{B}(V, Z)$. Além disso, como $\langle S_z(V), W\rangle = \langle B(V, W), Z\rangle$, S_Z é em cada ponto $p \in M$ um operador linear auto-adjunto de T_pM. No caso particular de uma hipersuperfície, tomando $Z = \eta$ como acima, S_Z é o operador de forma de M.

Variedades Riemannianas com curvatura seccional constante

Sabemos que ao multiplicarmos uma métrica Riemanniana por uma constante positiva c então a curvatura seccional é multiplicada por $\frac{1}{c}$. Sendo assim, a menos de uma semelhança, podemos supor que a curvatura seccional constante de uma variedade é $1, 0, -1$.

Algumas vezes diremos que a variedade em questão possui curvatura constante para indicar que essa variedade possui curvatura seccional constante.

A primeira variedade estudada será $M = \mathbb{R}^n$.

Como $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^n)$, temos que a curvatura seccional de $\mathbb{R}^n$ é $K \equiv 0$.

Vamos agora estudar a curvatura seccional da esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Orientemos $\mathbb{S}^n$ pelo campo normal unitário $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$ com $|x| = 1$. Sendo assim, a aplicação normal de Gauss é igual a $-Id$ (pela definição da aplicação normal de Gauss). Logo o operador de forma S_η de S^n (que nesse caso é igual a menos a derivada da aplicação normal de Gauss) tem todos os auto-valores iguais a 1 e $S^\eta(v) = v$ para todo $v \in T_p\mathbb{S}^n$ e para todo $p \in \mathbb{S}^n$. Portanto pelo teorema de Gauss, no caso particular de hipersuperfície, veja [7], temos que a curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$ é $K \equiv 1$.

Daremos agora um exemplo de curvatura seccional constante -1.

Considere o semi-espaço do $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}.$$

Considere em $\mathbb{H}^n$ a métrica $g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$.

Nessas condições o espaço $\mathbb{H}^n$ é uma variedade Riemanniana de dimensão n conhecida como espaço hiperbólico.

Um cálculo direto da curvatura seccional, feito em coordenadas, mostra que a curvatura seccional do espaço hiperbólico é $K \equiv -1$.

Sabemos que as variedade Riemannianas $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são variedades completas e simplesmente conexas. Além disso, temos que essencialmente estas são as únicas variedades Riemannianas completas e simplesmente conexas com curvatura seccional constante. Veja [7].

As variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas com curvatura seccional constante k são conhecidas como formas espaciais e denotadas por Q_k.

Os resultados a seguir vão caracterizar as hipersuperfícies umbílicas das formas espaciais.

Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana e seja ∇ sua conexão de Levi-Civita. Diz-se que uma imersão $f : N^n \to M^{n+1}$ é (totalmente) umbílica se para todo $p \in N$, a segunda forma fundamental B de f em p satisfaz

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle(p) = \lambda(p)\langle X, Y \rangle$$

com $\lambda(p) \in \mathbb{R}$, para todo par $X, Y \in \chi(N)$ e todo campo unitário η normal a $f(N)$. Aqui estamos utilizando $\langle\ ,\ \rangle$ para indicar a métrica g e a métrica induzida por f em N.

Lema 1.10. *Se M^{n+1} tem curvatura seccional constante, então λ não depende de p.*

Lema 1.11. *Seja $f : N^n \to (M^{n+1}, g)$ uma imersão umbílica. Considere uma nova métrica em M, conforme a g, dada por $\overline{g} = \mu g$. Então a imersão $f : N^n \to (M^{n+1}, \overline{g})$ é umbílica.*

Lema 1.12. *Consideremos $M^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica euclidiana e seja $f : N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão umbílica. Então $f(N)$ está contida em um n-plano ou uma n-esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Lema 1.13. *As hipersuperfícies umbílica do espaço hiperbólico, no modelo do semi-espaço superior $\mathbb{H}^{n+1}$, são as interseções com $\mathbb{H}^{n+1}$ de n-planos ou n-esferas de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Segue do último lema que as hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ são as esferas geodésicas, as horoesferas e as hiperesferas. Além disso, essas hipersuperfícies têm curvatura seccional constante.

Pontos focais

Definição 1.3. *Seja $N \subset M$ uma subvariedade de uma variedade Riemanniana M. O ponto $q \in M$ é um ponto focal de N se existe uma geodésica $\gamma : [0, l] \to M$ com $\gamma(0) = p \in N$, $\gamma'(0) \in (T_pN)^{\perp}$, $\gamma(l) = q$ e um campo de Jacobi não nulo ao longo de γ, satisfazendo $J(0) \in T_pN$, $J'(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)) \in (T_pN)^{\perp}$ e $J(l) = 0$.*

Aqui $S_{\gamma'(0)}$ é o operador de forma de N.

Um campo de Jacobi satisfazendo as condições acima é dito um campo de Jacobi não trivial transversal. Quando $q \in M$ é um ponto focal de N com uma geodésica γ diremos que q é um ponto focal de N ao longo de γ.

Diremos que $\gamma : [0, a] \to M$ é livre de pontos focais em $(0, a]$ se existe $\epsilon > 0$ tal que γ não possui pontos focais relativamente a subvariedade $\Sigma_\epsilon = exp_{\gamma(0)}(B_\epsilon(0))$ onde $B_\epsilon(0) \subset \{\gamma'(0)\}^{\perp}$.

Note que como Σ_t é uma geodésica em p, um campo de Jacobi J ao longo de γ, com $J(0) \neq 0$ e $J'(0) = 0$, satisfaz automaticamente a condição $S_{\gamma'(0)}(J(0)) = 0$.

Pontos Mínimos

Sejam M uma variedade Riemanniana completa, $p \in M$ e $\gamma : [0, \infty) \to M$ uma geodésica normalizada com $\gamma(0) = p$. Sabemos que se $t > 0$ é suficientemente pequeno, $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$, isto é, $\gamma([0, t])$ é uma geodésica minimizante. Além disso, se $\gamma([0, t_1])$ não é minimizante o mesmo se passa para todo $t > t_1$. Por continuidade, o conjunto dos pontos $t > 0$ para os quais $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ é da forma $[0, t_0]$ ou $[0, \infty)$.

No primeiro caso, $\gamma(t_0)$ é chamado o primeiro ponto mínimo de p o longo de γ; no segundo caso, diz-se que tal ponto mínimo não existe.

Definimos o lugar dos pontos mínimos de p ("cut locus" de p), denotando por $C(p)$, como a união dos pontos mínimos de p ao longo de todas as geodésicas que partem de p.

Noções de Cálculo Tensorial

A seguir faremos uma revisão sobre tensores em espaços vetoriais, sobre produto tensorial e produto exterior e fibrados vetoriais. Foi utilizado como referência para elaboração deste paragrafo o livro [17].

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Denotemos por V^* o espaço dual de V, ou seja o conjunto formado por covetores sobre V ou o espaço dos funcionais lineares $f : V \to \mathbb{R}$.

Utilizaremos a seguinte notação

$$V^* \times V \to \mathbb{R}$$

$$(w, X) \mapsto < w, X > \text{ ou } w(X)$$

para $w \in V^*$ e $X \in V$.

Um k-tensor covariante sobre V é uma aplicação multilinear $F : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\text{k cópias}} \to \mathbb{R}$. Um l-tensor contravariante é uma aplicação multilinear $F : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{\text{l cópias}} \to \mathbb{R}$.

Será útil considerarmos tensores do tipo misto. Um tensor de tipo $\binom{k}{l}$, as vezes chamado um k, l-tensor, é uma aplicação multilinear

$$F : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\text{k cópias}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{\text{l cópias}} \to \mathbb{R}.$$

O espaço de todos os k-tensores covariantes sobre V será denotado por $\mathcal{T}^k(V)$, o espaço de todos os l-tensores contravariantes sobre V será denotado por $\mathcal{T}_l(V)$ e o espaço de todos os k, l-tensores será denotado por $\mathcal{T}_l^k(V)$.

O posto de um tensor é o número de argumentos (vetores e/ou covetores) desse tensor.

Vamos considerar as seguintes identificações $\mathcal{T}_0^k(V) = \mathcal{T}^k(V)$, $\mathcal{T}_l^0(V) = \mathcal{T}_l(V)$, $\mathcal{T}^1(V) = V^*$ e $\mathcal{T}^0(V) = \mathbb{R}$. Uma identificação menos óbvia é $\mathcal{T}_1^1(V) = \mathrm{End}(V)$ onde $\mathrm{End}(V)$ denota o espaço dos endomorfismos de V, ou seja, aplicações lineares de V em V.

Uma justificativa para a identificação $\mathcal{T}_1^1(V) = \mathrm{End}(V)$ consiste em observar que a aplicação

$$\Phi : \mathrm{End}(V) \to \mathcal{T}_1^1(V)$$

$$A \mapsto \Phi(A)$$

onde,

$$\Phi(A) : V^* \times V \to \mathbb{R}$$

$$(w, X) \mapsto \Phi(A)(w, X) = w(AX)$$

é um isomorfismo.

Em geral temos o seguinte resultado:

Lema 1.14. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Existe um isomorfismo (independente da base escolhida) entre $\mathcal{T}_{l+1}^k(V)$ e o espaço das aplicações multilineares* $\underbrace{V \times \ldots \times V}_{k\ \text{cópias}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{l\ \text{cópias}} \to V$.

Existe um produto natural, chamado de produto tensorial, que relaciona os vários tipos de tensores sobre V.

Sejam $F \in \mathcal{T}_l^k(V)$ e $G \in \mathcal{T}_q^p(V)$, então o tensor $F \otimes G \in \mathcal{T}_{l+q}^{k+p}(V)$ é definido por

$$F \otimes G(w^1, \ldots, w^{l+q}, X_1, \ldots, X_{k+p}) = F(w^1, \ldots, w^l, X_1, \ldots, X_k) G(w^{l+1}, \ldots, w^{l+q}, X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}).$$

Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é uma base de V, considere a correspondente base dual $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ de V^*, definida por $\varphi^i(E_j) = \delta_j^i$.

Uma base para $\mathcal{T}_l^k(V)$ é dada pelo conjunto de todos os tensores da forma

$$E_{j_1} \otimes \ldots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k} \tag{1.2}$$

com os índices i_p, j_q variando de 1 a n.

Esses tensores atuam nos elementos básicos por

$$E_{j_1} \otimes \ldots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \varphi^{i_k}(\varphi^{s_1}, \ldots, \varphi^{s_l}, E_{r_1}, \ldots, E_{r_k}) = \delta^{s_1}_{j_1} \ldots \delta^{s_l}_{j_l} \delta^{i_1}_{r_1} \ldots \delta^{i_k}_{r_k}.$$

Além disso, qualquer tensor $F \in \mathcal{T}^k_l(V)$ pode ser escrito em termos dessa base por

$$F = F^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} E_{j_1} \otimes \ldots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi^{i_k} \tag{1.3}$$

onde $F^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = F(\varphi^{j_1}, \ldots, \varphi^{j_l}, E_{i_1}, \ldots, E_{i_k})$.

Nos podemos usar o lema 1.14 para definir uma operação, chamada de traço (ou contração), a qual reduz o posto do tensor em 2.

Consideremos o caso particular quando $F \in \mathcal{T}^1_1(V)$. O operador *traço* $: \mathcal{T}^1_1(V) \to V$ é exatamente o traço de F quando visto como um endomorfismo de V. Como o traço de um endomorfismo independe da base escolhida, temos que *traço* está bem definido.

Em geral temos que,

$$\mathit{traço} : \mathcal{T}^{k+1}_{l+1}(V) \to \mathcal{T}^k_l(V), \quad F \mapsto \mathit{traço}F(w^1, \ldots, w^l, V_1, \ldots, V_k)$$

é o traço do endomorfismo $F(w^1, \ldots, w^l, \cdot, V_1, \ldots, V_k, \cdot) \in \mathcal{T}^1_1(V)$.

Em termos da base, as componentes do *traçoF* são $(\mathit{traço}F)^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = F^{j_1 \ldots j_l m}_{i_1 \ldots i_k n}$.

Além disso, temos que *traço* $: \mathcal{T}^{k+1}_{l+1}(V) \to \mathcal{T}^k_l(V)$ está bem definido e é uma aplicação linear.

Estudemos agora os tensores alternados, que são os tensores com a seguinte propriedade:

$$F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = -F(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k).$$

Denotemos por $\Lambda^k(V)$ o espaço dos k-tensores covariantes alternados sobre V. Os elementos desse espaço também são k-covetores ou (exterior) k-formas.

Existe uma aplicação bilinear, associativa nesse espaço, chamada de produto exterior, definida sob 1-formas $w^1, \ldots, w^k$ por $w^1 \wedge \ldots \wedge w^k(X_1, \ldots, X_k) = \det(\langle w^i, X_j \rangle)$ e extendida por linearidade.

Fibrados Vetoriais e Tensoriais

Um fibrado vetorial k-dimensional (suave) consiste de duas variedades suaves E (o espaço total) e M (o espaço base) e de uma aplicação sobrejetiva $\Pi : E \to M$ (a projeção), satisfazendo as seguintes condições:

(a) cada conjunto $E_p := \Pi^{-1}(p)$ (chamado de fibra de E sobre p) é munido da estrutura de espaço vetorial.

(b) Existe uma vizinhança U de p e um difeomorfismo $\varphi : \Pi^{-1}(U) \to U \times E_p$, para cada $p \in M$, chamado de trivialização local de E, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\Pi_1"] \\ U \arrow[r, "Id"'] & U \end{tikzcd}$$

onde Π_1 é a projeção sobre a primeira coordenada.

(c) A restrição de φ sobre cada fibra, $\varphi : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$, é um isomorfismo linear.

Exemplos 1.1. *1. O fibrado tangente:* $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$.

2. O fibrado cotangente: $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$, *onde* $T_p^*M = (T_pM)^*$.

3. O fibrado normal. Considere a imersão $\overline{M} \hookrightarrow M$ *o fibrado normal é* $NM = \bigcup_{p\in M} N_pM$, *onde* $N_pM = (T_pM)^\perp$.

Temos o seguinte resultado que mostra que é possível obter o fibrado vetorial a partir das trivializações locais.

Lema 1.15. *Considere a variedade Riemanniana suave* M, *o conjunto* E *e a aplicação sobrejetiva* $\Pi : E \to M$. *Suponha que exista uma cobertura aberta*

$\{U_\alpha\}$ de M juntamente com uma aplicação bijetiva $\varphi_\alpha : \Pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ satisfazendo $\Pi_1 \circ \varphi_\alpha = \Pi$, tal que sempre que tenhamos $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, a aplicação $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k \to U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k$ é da forma

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, V) = (p, \tau(p)V) \tag{1.4}$$

para alguma aplicação suave $\tau : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$. Então E tem uma única estrutura de fibrado vetorial k-dimensional sobre M tal que as aplicações φ_α são as trivializações locais.

As aplicações suaves τ tomando valores em $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ do lema acima são chamadas de funções de transição para E.

Se $\Pi : E \to M$ é um fibrado vetorial sobre M, uma secção de E é uma aplicação $F : M \to E$ tal que $\Pi \circ F = Id_M$, ou equivalentemente, $F(p) \in E_p$ para todo $p \in M$.

Diremos que a secção é suave se a aplicação F é suave.

O secção nula é a aplicação $F : M \to E$ tal que $F(p) = 0 \in E_p$ para todo $p \in M$.

O espaço das secções suaves de um espaço vetorial é um espaço vetorial de dimensão infinita com a adição e multiplicação por constante ponto a ponto, cujo o elemento neutro (zero) é a secção nula ζ definida por $\zeta_p = 0 \in E_p$ para todo $p \in M$. Denotemos por $\tau(M)$ o espaço das secções suaves de TM.

Estudemos agora os fibrados tensoriais e os campos tensoriais.

Por definição o fibrado $\binom{k}{l}$-tensorial em M é $\mathcal{T}_l^k M := \cup_{p \in M} \mathcal{T}_l^k(T_pM)$. Analogamente $\Lambda^k M := \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM)$.

Vamos considerar as seguintes identificações: $\mathcal{T}_1 M = TM$, $\mathcal{T}^1 M = \Lambda^1 M = T^*M$.

Para verificar que cada um desses fibrados tensoriais é um fibrado vetorial basta definir a projeção $\Pi : \mathcal{T}_l^k M \to M$ como a aplicação que associa a cada $F \in \mathcal{T}_l^k(T_pM)$ a p. Se $\{x^i\}$ é um sistema de coordenadas locais em $U \subset M$, e $p \in U$, os vetores coordenados $\{\partial_i\}$ formam uma base para T_pM cuja a base dual é $\{dx_i\}$. Qualquer tensor $F \in \mathcal{T}_l^k(T_pM)$ pode ser representado em termos dessa base como $F = F_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} \partial_{j_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes dx^{i_k}$.

Um campo tensorial em M é uma secção suave de algum fibrado tensorial $\mathcal{T}_l^k M$. Uma k-forma diferenciável é uma secção suave de $\Lambda^k(M)$.

O espaço dos campos $\binom{k}{l}$-tensoriais será denotado por $\tau_l^k M$, o espaço dos campos k-tensoriais covariantes (funções suaves de $T^k M$) será denotado por $\tau^k(M)$. Em particular, $\tau^1(M)$ é o espaço de 1-formas.

De posse do conceito de tensor podemos dar a seguinte definição para a métrica Riemanniana.

Uma métrica Riemanniana em uma variedade suave M é um campo 2-tensorial $g \in \tau^2(M)$ que é simétrico (i.e., $g(X,Y) = g(Y,X)$) e positivo definido (i.e., $g(X,X) > 0$ se $X \neq 0$). Então uma métrica Riemanniana determina um produto interno em cada plano tangente T_pM, o qual é denotado por $\langle X, Y\rangle := g(X,Y)$ para $X, Y \in T_pM$.

Uma propriedade importante da métrica Riemanniana é que ela nos permite transformar vetores em covetores e vice-versa.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Defina a aplicação chamada "flat"de TM em T^*M por $X \mapsto X^\flat$ onde $X^\flat(Y) := g(X,Y)$.

Em coordenadas, $X^\flat = g(X^i\partial_i, \ \cdot\ ) = g_{ij}X^i dx^j = X_j dx^j$ onde $X_j := g_{ij}X^i$. Diremos que $X^\flat$ é obtido de X por "lowering an index".

A matriz da aplicação "flat"em termos de coordenadas é a própria matriz de g. Como a matriz de g é invertível, temos que o operador "flat"também é invertível. Denotemos essa inversa por $w \mapsto w^\sharp$, chamada de "sharp".

Em coordenadas $w^\sharp$ tem as coordenadas $w^i = g^{ij}w_j$ onde, por definição, g^{ij} são as componentes da matriz inversa $(g_{ij})^{-1}$.

Dizemos que $w^\sharp$ é obtido por "raising an index."

Uma importante aplicação dos operadores "flat"e "sharp"é extender o operador *traço* para tensores covariantes.

Consideremos o caso particular de 2-tensores simétricos.

Se h é um 2-tensor simétrico em uma variedade Riemanniana, então $h^\sharp$ é um $\binom{1}{1} - tensor$ e sendo assim $traço h^\sharp$ está bem definido. Nos definimos o traço de h com respeito a g por $traço_g h := traço h^\sharp$.

Em coordenadas (como h é simétrico, ele não depende da maneira como os índices "raised") temos $traço_g h = h_i^i = g^{ij}h_{ij}$. Em particular, em uma base ortonormal, temos o traço ordinário de uma matriz.

Uma métrica é por definição um produto interno sobre os vetores tangentes.

O próximo resultado mostra que uma métrica determina um produto interno (e sendo assim, uma norma) sob todos os fibrados tensoriais.

Fixemos as notações. Seja $E \to M$ um fibrado vetorial, uma "fiber metric"em E é um produto interno em cada fibra E_p que varia suavemente, no sentido que para qualquer secção (local) suave σ, τ de E, o produto interno $\langle \sigma, \tau \rangle$ é uma função suave.

Lema 1.16. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Existe uma única "fiber metric"sob cada fibrado tensorial $\mathcal{T}_l^k(M)$ com a propriedade que se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é uma base ortonormal para T_pM e $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ é a correspondente base dual, então a coleção de tensores dada por 1.2 é uma base ortonormal de $\mathcal{T}_l^k(T_pM)$.*

Estudemos agora o elemento de volume em uma variedade Riemanniana orientada.

Lema 1.17. *Em qualquer variedade Riemanniana (M, g) de dimensão n existe uma única n-forma dV satisfazendo $dV(E_1, \ldots, E_n) = 1$ sempre que $\{E_1, \ldots, E_n\}$ for uma base ortonormal orientada para algum plano tangente.*

Essa n-forma dV é chamada de elemento de volume (Riemanniano). Além disso, $dV = \sqrt{det(g_{ij})}\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^n$ onde $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ e $\{\varphi^i\}$ é base dual de $\{E_i\}$.

O volume de um conjunto mensurável $A \subset M$ é

$$vol(A) = \int_M 1_A dV,$$

veja [12] para mais informações.

Lembremos que o "tangent cut locus" de $p \in M$ é o conjunto

$$C_p = \{cut(v) \cdot v \in T_pM; ||v|| = 1\}$$

onde

$$cut(v) = sup\{t > 0; \gamma_v|[0,t] \text{ é minimizante}\}$$

é o "cut value"de v.

O número $cut(v)$ acima é chamado de distância do ponto mínimo de p ao longo de γ_v. O conjunto $\mathcal{C}$ abaixo tem a propriedade de ser é o maior domínio em T_pM onde $exp_p|_{\mathcal{C}}$ é um difeomorfismo. Além disso, $exp\mathcal{C} = M \setminus C(p)$, onde $C(p)$ denota o "cut locus"de p em M. Veja [4] para algumas propriedades.

Seja $C(p) = exp(C_p)$.

Seja $\mathcal{C} = \{t \cdot v \in T_pM; t < cut(v)\}$. Então $exp|\mathcal{C}$ é um "imbedding"sobrejetivo em $M \setminus C(p)$, e $C(p)$ tem medida nula. Então para qualquer conjunto mensurável $A \subset M$ temos

$$vol(A) = vol(A \setminus C(p)) = \int_{\mathcal{C} \cap exp_p^{-1}(A)} det(exp_{p_*})dV.$$

1.3 Equações Diferenciais Ordinárias

Estudamos nesta secção a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + Q(x)y + R(x)y^2 = P(x), \tag{1.5}$$

onde $y = y(x), P(x), Q(x), R(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções dadas. Essa equação é conhecida como a equação (generalizada) de Riccati.Para mais informações veja [2], [6] e [15].

O texto contem informações sobre as duas principais estratégias de solução dessa equação, mostrando a relação que existe entre a equação de Riccati, que é uma equação diferencial não linear, com uma equação diferencial de segunda ordem linear. Além disso, resolvemos a equação de Riccati em um caso particular e estudamos os polos de uma solução da equação de Ricatti.

Existem basicamente duas estratégias para a resolução dessa equação.

Estratégia (1): A idéia é empregar uma mudança de variáveis e transformar a equação de Riccati, que é não linear, em uma equação de segunda ordem linear. Espera-se que que a equação linear seja mais fácil de ser resolvida.

Considere a mudança de variáveis dada por

$$y = \frac{1}{Ru}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{Ru} \tag{1.6}$$

Substituindo (1.6) em (1.5) obtemos

$$R\frac{d^2u}{dx} - (R' - QR)\frac{du}{dx} - PR^2u = 0 \tag{1.7}$$

que é uma equação linear de segunda ordem.

Observe que no caso particular de $P \equiv 0$ em (1.5) então $\frac{dy}{dx} + Q(x)y + R(x)y^2 = 0$. Considerando a transformação $y = \frac{1}{v}$ temos

$$\frac{dv}{dx} - Qv = R \tag{1.8}$$

cuja solução é

$$v = c\exp(\int Q(x)dx) + \exp(\int Q(x)dx)\int^x R(t)\exp(-\int Q(t)dt)dt. \tag{1.9}$$

Estratégia (2): Suponha que seja conhecida uma solução $y = y_1$ da equação

$$y' + Qy + Ry^2 - P = 0 \tag{1.10}$$

Pode-se então determinar a solução geral.

Seja $y = y_1 + z$. Sendo assim, substituindo y em (1.10) e lembrando que y_1 é solução dessa equação temos

$$\frac{dz}{dx} + (Q + 2Ry_1)z + Rz^2 = 0 \tag{1.11}$$

A equação (1.11) é conhecida como equação de Bernoulli, e pode ser reduzida para o caso linear pela mudança de coordenadas $z = \frac{1}{u}$. Sendo assim, temos que a equação (1.11) fica

$$\frac{du}{dx} - (2y_1R + Q)u - R = 0 \tag{1.12}$$

que é uma equação da forma (1.8).

Estudemos um pouco a equação de Riccati (1.5) no caso particular onde $Q \equiv 0$, $R \equiv 1$, $P = -k \equiv$ const. Sendo assim,

$$y' + y^2 + k = 0 \tag{1.13}$$

$$u'' + ku = 0. \tag{1.14}$$

Temos que, veja[2], a solução de (1.14) é do tipo $u = \exp(rx)$ com a constante r escolhida adequadamente (r deve ser solução da equação característica).

Temos três casos a considerar:

caso(1): $k \equiv 0$ Nesse caso

$$u = bx + a \tag{1.15}$$

$$y = \frac{b}{bx + a} \tag{1.16}$$

caso(2): $k < 0$. Escrevendo-se $k = -\beta$ com $\beta > 0$, temos

$$u = a\exp(r_1 x) + b\exp(r_2 x) \tag{1.17}$$

$$y = \frac{ar_1\exp(r_1 x) + br_2\exp(r_2 x)}{a\exp(r_1 x) + b\exp(r_2 x)} \tag{1.18}$$

onde $r_1 = \sqrt{\beta}$ e $r_2 = -\sqrt{\beta}$.

caso(3): $K > 0$. Nesse caso

$$u = c_1\exp(ax)cos(bx) + c_2\exp(ax)\sin(bx) \tag{1.19}$$

$$y = \frac{u'}{u} \tag{1.20}$$

onde $r = a + ib$.

Observe que a existência de soluções para as equações estudadas é imediata, pois explicitamos as soluções em cada caso. A unicidade de soluções para as equações estudadas está garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 1.5. *Sejam f e g soluções da equação diferencial $y'' + ky = 0$ em $\mathbb{R}$. Suponha que tenhamos $f(0) = g(0)$ e $f'(0) = g'(0)$. Então $f = g$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Veja [1]. □

A seguir estudaremos o conceito de pólo para funções analíticas reais. O material a seguir é uma adaptação do conceito conhecido no caso complexo e como referência foram utilizados as referências [19] e [5].

No que segue $f : I(x_0) \to \mathbb{R}$ denota uma função de classe C^∞ e o conjunto $I(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - x_0| < r\}$, com $r > 0$, é chamado de vizinhança perfurada de x_0.

Definição 1.4. *Uma função f tem uma singularidade isolada em um ponto $x = x_0$ se existe $R > 0$ tal que f é de classe C^∞ em $I(x_0)$.*

Seja x_0 uma singularidade isolada de f. Então

- x_0 é uma singularidade removível de $f \Leftrightarrow f$ é limitada em uma vizinhança perfurada $I(x_0) \Leftrightarrow$ existe e é finito o limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

- x_0 é um pólo de $f \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} ||f(x)|| = \infty$.

  Diremos que x_0 é um pólo de ordem m de f se m é o menor inteiro positivo tal que $f(x)(x - x_0)^m$ tem uma singularidade removível em $x = x_0$.

- x_0 é uma singularidade essencial de $f \Leftrightarrow$ o limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ não existe, ou de outro modo, x_0 é uma singularidade essencial de f se não é uma singularidade removível ou um pólo.

Uma solução da equação de Riccati (1.5) possui a propriedade de não possui singularidades essenciais ("branch points"). Veja [6] e [15].

Além disso, temos:

Lema 1.18. *Seja $R : I \to S(E)$ uma aplicação contínua e consideremos a correspondente equação de Riccati em $S(E)$*

$$B' + B^2 + R = 0.$$

Suponha que uma solução dessa equação tenha um pólo em $t = t_0$, então algum autovalor de B tende a $-\infty$ quando $t \to t_0$, $t < t_0$ e $t_0 \in I$. Além disso, temos que nenhum autovalor de B converge para $+\infty$.

Lema 1.19. *Com a notação da proposição anterior suponha que uma solução da equação de Riccati possui um polo em $t = 0$, então $t = 0$ é no máximo um polo de primeira ordem.*

Capítulo 2

Hipersuperfícies Paralelas

Seja $(M, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana e denotemos por ∇ a conexão de Levi-Civita correspondente.[1]

Considere $M' \subset M$ aberto e $f : M' \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável cujo gradiente $V = \text{grad } f$ tem norma um.

Pelo parágrafo 1.2.1, f pode ser vista como uma submersão Riemanniana.

Considere os conjuntos de nível $S_t = \{p \in M; f(p) = t\}$ ou, de outro modo, $S_t = f^{-1}(t)$ com $t \in f(M')$. Como f é uma submersão e, por isso, todo $t \in f(M')$ é valor regular, o conjunto S_t é uma hipersuperfície. O conjunto $\{S_t; t \in f(M')\}$ é chamado de família de hipersuperfícies paralelas[2].

Lembremos que, dado $X \in TM$, temos

[1]No artigo principal [8] o autor supõem que a variedade Riemanniana M é completa. Todavia, essa hipótese é desnecessária nesse parágrafo. Sendo assim, estamos omitindo-a.

[2]Observe que como o vetor V é normal a cada subvariedade de nível, temos que a denominação "paralelo"está bem empregada. Além disso, pela forma local das submersões, a submersão f é localmente uma projeção, sendo assim podemos considerar f uma função distância (localmente) de cada subvariedade de nível. Veja a referência [22] para mais informações sobre funções cujo gradiente tem norma um e função distância. Além disso, localmente temos a seguinte propriedade $I(J, J) = \text{Hess} f(J, J)$ que relaciona a forma o índice I e a Hess$f$ da função distância f para campos de Jacobi J ao longo da geodesica γ. Veja [4].

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_V V, X\rangle &= \text{Hess } f(V,X)\\
&= \text{Hess } f(X,V)\\
&= \langle \nabla_X V, V\rangle\\
&= \frac{1}{2}X\langle V,V\rangle = 0.\\
\text{Portanto,} \quad & \langle \nabla_V V, X\rangle = 0 \ \text{ para todo } \ X \in TM'\\
\text{o que implica,} \quad & \nabla_V V = 0. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Logo as curvas integrais de V são geodésicas normalizadas.

Denotemos por $B = H^f V : TM' \to TM'$ o campo tensorial Hessiano de f definido da seguinte forma $X \mapsto B(X) = \nabla_X V$.

Por (2.1) o campo V pertence ao núcleo de B. Consideramos, então, a restrição $B|_{\{V\}^{\perp}}$, onde estamos denotando por $\{V\}^{\perp}$ o complemento ortogonal do espaço gerado pelo vetor V.

Como V é um campo normal unitário ao longo de cada hipersuperfície de nível, o tensor $B|_{\{V\}^{\perp}}$ pode ser visto como o segundo tensor fundamental (ou aplicação de Weingarten, ou operador de forma) de cada hipersuperfície de nível.

Explicitemos tal identificação. Seja $X \in T_pM'$, então

$$
\begin{aligned}
H^f(X) &= \nabla_X V = \nabla_{X^{\top}+\lambda V} V\\
&= \nabla_{X^{\top}} V + \lambda \nabla_V V\\
&= \nabla_{X^{\top}} V\\
&= (\nabla_X V)^{\top}
\end{aligned}
$$

onde, na última igualdade foi utilizado o fato que $\langle \nabla_X V, V\rangle = 0$.

Sendo assim, $(\nabla_X V)^{\perp} = 0$ e $(\nabla_X V)^{\top} = H^f(X) = \nabla_{X^{\top}} V$.

Por outro lado, sabemos que $S_V(X) = -(\nabla_X N)^{\top}$, onde N é uma extensão de V a M normal a cada hipersuperfície de nível. Portanto, a menos de um sinal, H^f e S_V coincidem e tal identificação de fato é possível.

Para cada campo vetorial J em M' com $[J, V] = 0$ temos, pela simetria da conexão, que

$$0 = [J, V] = \nabla_J V - \nabla_V J.$$

Como $B = \nabla V$ temos

$$\nabla_V J = B \cdot J, \tag{2.2}$$

além disso, por (2.1) e (2.2), como $\nabla_J V = B \cdot J$ temos

$$\begin{aligned}
\nabla_V \nabla_J V &= (\nabla_V B)J + B(\nabla_V J). \\
\text{Logo } (\nabla_V B)J &= \nabla_V \nabla_J V - B(\nabla_V J) \\
&= \nabla_V \nabla_J V - \nabla_J \nabla_V V + \nabla_{[V,J]} V - B(\nabla_V J) \text{ (por (2.1) e } [J,V]=0) \\
&= R(V,J)V - B(BJ) \text{ (definição do tensor de curvatura R)}
\end{aligned}$$

onde R denota o tensor de curvatura riemanniano. Sendo assim, denotando $R_V = R(\cdot, V)V$[3], obtemos a equação de Riccati

$$\nabla_V B + B^2 + R_V = 0. \tag{2.3}$$

Então diferenciando (2.2) temos

$$\begin{aligned}
\nabla_V \nabla_V J &= \{(\nabla_V B)J\} + B(\nabla_V J) \\
&= \{R(V,J)V - B(\nabla_V J)\} + B(\nabla_V J) \\
&= R(V,J)V \\
&= -R(J,V)V. \\
\text{Assim,} \quad & \nabla_V \nabla_V J + R_V J = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Sendo assim, demonstramos que J é um campo de Jacobi ao longo de qualquer curva integral de V.

Sendo assim a equação de Jacobi (2.4) foi reduzida a duas equações de primeira ordem (2.2) e (2.3)[4].

[3] R_V é conhecido na literatura como "tidal force", veja [20] para mais informações.

[4] Note que se supusermos que as funções envolvidas nas equações de Riccati e Jacobi são funções reais, temos que a mudança de variável $J' = BJ$ é a mesma utiliza no estudo da equação de Riccati em 1.3.

§ 2.0.1.

Fixe uma curva integral $\gamma : I \to M'$ de V. Utilizando transporte paralelo ao longo de γ, podemos identificar o fibrado normal de γ a IxE onde E é algum espaço normal fixado $\{\gamma(t_0)\}^{\perp}$. Sendo assim, $B(t) := B|_{\gamma(t)}$ e $R(t) := R_V|_{\gamma(t)}$ são considerados como endomorfismos auto-adjuntos de E e satisfazem

$$B' + B^2 + R = 0 \qquad (2.3)'$$

a correspondente equação de Riccati em $S(E)$.

Lembremos que $S(E)$ denota o espaço dos operadores $A : E \to E$ que são auto adjuntos.

Exemplo 2.1. *Como exemplos de funções e hipersuperfícies paralelas temos* $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e* $h(x, y, z) = x$ *em* $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ *e* $\mathbb{H}^3$.

Capítulo 3

A Equação de Riccati

Vamos agora estudar um pouco mais a equação de Riccati.

Seja E um espaço vetorial real n-dimensional com produto interno. Denotemos por $S(E)$ o espaço dos endomorfismos auto-adjuntos, munido com o produto interno $\langle A, B\rangle = traço(AB)$.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $R : I \to S(E)$ uma curva suave. Considere a correspondente equação de Riccati em $S(E)$

$$B' + B^2 + R = 0 \qquad (2.3).$$

O caso $n = 1$ é importante pois o caso geral se reduz a esse tomando traços como segue.

Defina $b = \dfrac{traçoB}{n}$ e $r = \dfrac{traçoR}{n}$.

Note que, sendo $B : I \to S(E)$ solução de (2.3), temos $b(t) = \dfrac{traçoB(t)}{n}$. Logo, derivando com relação a t, $b'(t) = \dfrac{traçoB'(t)}{n}$.

Sendo assim, a aplicação $S = B - bId$ tem traço nulo, pois

$$traçoS = traço(B - bId) = traçoB - b\ traçoId = nb - bn = 0$$

e considerando a norma induzida pelo produto interno $||S|| = \sqrt{\langle S, S\rangle}$ temos

$$||S||^2 = ||B||^2 - b^2 n.$$

Tomando traço de (2.3) temos:

$$\begin{aligned}
0 &= traço(B' + B^2 + R) \\
&= traçoB' + traçoB^2 + traçoR \\
&= nb' + traçoB^2 + nr \\
& b' + \frac{1}{n} traçoB^2 + r = 0 \\
& b' + \frac{1}{n}||B||^2 + r = 0 \\
& b' + b^2 + r + \frac{1}{n}||B||^2 - b^2 = 0 \\
& b' + b^2 + r + \frac{1}{n}||S||^2 = 0 \\
& b' + b^2 + r_+ = 0, \text{ onde } r_+ = r + \frac{1}{n}||S||^2.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Observe que se B tem um polo em $t_0 = 0$ e $\lim_{t \to 0} tB(t) = Id$, então r_+ permanece limitado em t_0.

Seja $J_1, \ldots, J_n$ uma base de soluções de

$$J' = BJ \qquad (2.2).$$

Sendo assim, definindo $j = ||J_1 \wedge \ldots \wedge J_n||^{\frac{1}{n}}$ temos

$$\begin{aligned}
(J_1 \wedge \ldots \wedge J_n)' &= \sum_{k=1}^{n} J_1 \wedge \ldots \wedge J_k' \wedge \ldots \wedge J_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} J_1 \wedge \ldots \wedge BJ_k \wedge \ldots \wedge J_n \\
&= (traçoB) J_1 \wedge \ldots \wedge J_n
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$j' = bj. \tag{3.2}$$

Observe que no contexto Riemanniano o que foi feito acima significa que a curvatura média da variedade mede a taxa de expansão do volume. Veja [4].

Estudemos um pouco a equação de Riccati (2.3) no caso particular em que $n = 1$ e $R = k$ é constante, isto é, consideremos a equação,

$$b_k' + b_k^2 + k = 0 \qquad (2.3)_k.$$

Fazendo $\sigma = |k|^{\frac{1}{2}}$ temos, pelo capítulo 1.3, a seguinte famílias de soluções $b_k(t)$:

$$\begin{array}{lll}
k > 0 & \sigma\cot(\sigma(t-c)) & \text{para } c < t \ \ < c + \frac{\pi}{\sigma}, \ \ c \in \mathbb{R} \\
k = 0 & (i)\ \dfrac{1}{t-c} & \text{para } t > c, \ \ c \in \mathbb{R} \\
 & (ii)\ 0 & \text{para } t \in \mathbb{R} \\
 & (iii)\ \dfrac{1}{t-c} & \text{para } t < c, \ \ c \in \mathbb{R} \\
k < 0 & (i)\ \sigma\coth(\sigma(t-c)) & \text{para } t > c, \ \ c \in \mathbb{R} \\
 & (ii)\ \sigma & \text{para } t \in \mathbb{R} \\
 & (iii)\ \sigma tanh(\sigma(t-c)) & \text{para } t \in \mathbb{R}, \ \ c \in \mathbb{R} \\
 & (iv)\ -\sigma & \text{para } t \in \mathbb{R} \\
 & (v)\ \sigma\coth(\sigma(t-c)) & \text{para } t < c, \ \ c \in \mathbb{R}
\end{array}$$

Em particular, para $k \in \mathbb{R}$, a única solução que possui um pólo em 0 é $\frac{c_k}{s_k}$ onde (s_k, c_k) é a solução de

$$s_k' = c_k, \quad c_k' = -ks_k, \quad s_k(0) = 0, \quad c_k(0) = 1.$$

Se n é arbitrário e $R = kId$, onde Id denota a identidade de E, então $B = kId$ são as soluções de (2.3).

Sendo assim, temos as correspondentes familias $\{S_t\}$ de hipersuperfícies paralelas umbílicas nas formas espaciais Q_k de curvatura seccional constante k, e $b_k(t)$ é a curvatura média de S_t.

Para $k > 0$, temos uma família de esferas concêntricas.

Para $k = 0$, temos três famílias: esferas concêntricas orientadas orientadas para dentro e para fora e hiperplanos paralelos.

Para $k < 0$, temos cinco famílias: esferas concêntricas e horoesferas, ambas orientadas para dentro e para fora, e esferas geodésicas.

Vamos agora estudar o caso em que a solução da equação de Riccati é invertível.

Seja $B : I \to S(E)$ uma solução da correspondente equação de Riccati $B' + B^2 + R = 0$ em $S(E)$.

Suponha que B seja não singular, ou seja, $detB(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Sendo assim, podemos considerar a inversa $C = B^{-1}$. Logo, derivando a aplicação linear C, temos

$$C' = -B^{-1}B'B^{-1}.$$

Como $B' + B^2 + R = 0$, temos

$$-B^{-1}B'B^{-1} + (-B^{-1})B^2B^{-1} + (-B^{-1})RB^{-1} = 0,$$

obtendo

$$C' = Id + CRC.$$

Juntamente com as soluções B de (2.3), nos investigaremos soluções $J : I \to E$ da equação

$$J' = BJ \qquad (2.2)$$

Uma solução de (2.2) tem as seguintes propriedades:

(i) J pode ser estendida a todo $\mathbb{R}$;

(ii) Se B satisfaz $\lim\limits_{t\to 0} tB(t) = Id$, as soluções de (2.2) são exatamente as soluções de J de $J'' + RJ = 0$ com $J(0) = 0$.

A seguir apresentamos alguns resultados de comparação para as soluções da equação de Riccati em $S(E)$.

Agora seja $I = (t_-, t_+)$ com $-\infty \leq t_- < t_+ \leq \infty$. Sejam $R_j : \mathbb{R} \to S(E)$ curvas suaves e B_j, com $j = 1, 2$, soluções das correspondentes equações de Riccati (2.3). Fixe um ponto inicial $t_0 \in I$ e seja $t_j > t_0$ o primeiro polo de B_j, se existir algum, caso contrário defina $t_j = t_+$.[1]

[1] Note que se considerarmos que a variedade Riemanniana M no capítulo 2 é completa, então o domínio I da curva integral de V em §2.0.1 é toda a reta real. Sendo assim, novamente por §2.0.1 o intervalo $I = (t_-, t_+)$ é o domínio da curva integral de V.

Proposição 3.1. *Suponha que*

(a) $R_1(t) \geq R_2(t)$ *para todo* $t \in I$,

(b) $B_1(t_0) \leq B_2(t_0)$.

Então

(c) $t_1 \leq t_2$,

(d) $B_1(t) \leq B_2(t)$ *para todo* $t_0 < t < t_1$.

Demonstração: Suponha inicialmente que tenhamos a desigualdade estrita em (a), isto é, $R_1(t) > R_2(t)$. Suponha que exista $s > t_0$ tal que $B_1(t) \leq B_2(t)$ para $t_0 < t < s$. Sendo assim, pelo lema 1.5, temos que $B_1(t) \leq B_2(t)$ para $t_0 < t \leq s$.

Afirmamos que $B_1(s) < B_2(s)$.

De fato, provemos a afirmação por contradição. Sendo assim, temos que $B_1(s) \leq B_2(s)$ e que não vale $B(s) < B_2(s)$. Logo, $B_2(s) - B_1(s)$ é positivo semi-definido com núcleo não nulo.

Como o núcleo de $B_2(s) - B_1(s)$ é não nulo, é possível escolher $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tal que $B_2(s)x_0 = B_1(s)x_0$.

Considere a função $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \langle (B_2 - B_1)(t)x_0, x_0 \rangle$. Note que $g(t) \geq 0$ para $t \in [t_0, s]$ e $g(s) = 0$ pois $x_0 \in Ker[(B_2 - B_1)](s)$.

Derivando g temos $g'(t)\langle B_2'(t)x - B_1'(t)x, x\rangle$.

Pela equação de Riccati temos que $B_j' = -B_j^2 - R_j$. Logo $g'(t) = \langle (B_1^2 - B_2^2)(t)x, x\rangle + \langle (R_1 - R_2)(t)x, x\rangle$.

Calculando em s, temos $g'(s) = \langle (B_1^2 - B_2^2)(s)x, x\rangle + \langle (R_1 - R_2)(s)x, x\rangle$.

Como $R_1(t) > R_2(t)$, para $t \in I$, temos que o segundo termo é positivo e o primeiro termo é nulo, pois

$$\begin{aligned}
\langle (B_1^2 - B_2^2)(s)x, x\rangle &= \langle (B_1 - B_2)(s)(B_1(s))x, x\rangle \quad (\text{ pois } B_1(s)x = B_2(s)x \text{ }) \\
&= \langle B_1(s)x, (B_1 - B_2)(s)x\rangle \quad (\text{ pois } B_j \text{ é auto-adjunto }) \\
&= \langle B_1(s)x, B_1(s)x - B_2(s)x\rangle = \langle B_1(s)x, B_1(s)x - B_1(s)x\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $g'(s) > 0$.

Por outro lado, $g|_{[t_0,s)} \geq 0$ e $g(s) = 0$.

Portanto temos uma contradição, pois $g'(s) > 0$ implica que g é estritamente crescente em uma vizinhança de s e $g|_{[t_0,s)} \geq 0$ e $g(s) = 0$ implica que g é decrescente em $[t_0, s]$.

Essa contradição surge do fato de supormos que não vale $B_1(s) < B_2(s)$. Portanto temos que $B_1(s) < B_2(s)$ mostrando que a afirmação é verdadeira.

Mostremos que $t_1 \leq t_2$.

Suponha que a desigualdade $t_1 > t_2$ se verifique.

Como $\lim\limits_{t\to t_2} \langle B_2(t)x, x\rangle = -\infty$ temos uma contradição com $B_1(s) < B_2(s)$, pois $B_1(s) < B_2(s) \Leftrightarrow \langle B_1(t)x, x\rangle < \langle B_2(t)x, x\rangle$ e $\langle B_1(t)x, x\rangle \in \mathbb{R}$ se $t \in (t_0, t_2) \subset (t_0, t_1)$.

Essa contradição surge do fato de supormos que $t_1 > t_2$. Portanto $t_1 \leq t_2$, mostrando (c).

Mostremos a suposição inicial da existência de $s > t_0$ tal que $B_1(t) \leq B_2(t)$ com $t_0 < t < s$. Lembre que estamos supondo a desigualdade estrita em (a).

Como $B_1(t_0) \leq B_2(t_0)$ temos dois casos a considerar. Inicialmente suponha $B_1(t_0) < B_2(t_0)$. Sendo assim, o resultado segue da continuidade de B_j. Se $B_1(t_0) = B_2(t_0)$, então temos que $R_1(t_0) = R_2(t_0)$, uma contradição com a suposição inicial que vale a desigualdade estrita em (a). Sendo assim, o segundo caso não ocorre e sempre é possível garantir a existência do s com a propriedade mencionada acima.

O caso geral onde temos a desigualdade fraca em (a) segue por continuidade. $\square$

Proposição 3.2. *Sejam $R_1 \geq R_2$ e B_1, B_2 soluções das correspondentes equações de Riccati. Suponha que B_j, $j = 1, 2$, são invertíveis em uma vizinhança de zero com $B_j(t)^{-1} \to 0$ quando $t \to 0$. Seja $t_j > 0$ o primeiro polo de B_j. Então $t_1 \leq t_2$ e $B_1 \leq B_2$ em $(0, t_1)$. Se $R_1 > R_2$, a desigualdade estrita $B_1 < B_2$ se verifica.*

Demonstração: Seja $C_j = Bj^{-1}$. Como B_j é solução da equação de Riccati correspondente, temos que C_j é solução de $C_j' = Id + C_j R_j C_j$. Além disso, como por hipótese $\lim_{t \to 0} B_j^{-1}(t) = 0$, temos que $C_j(0) = 0$, pois C_j é contínua e sendo assim $C_j(t_0) = \lim_{t \to t_0} C_j(t)$.

Derivando a equação $C_j' = Id + C_j R_j C_j$ temos

$$C_j^{(2)} = C_j' R_j C_j + C_j R_j' C_j + C_j R_j C_j'$$

$$C_J^{(3)} = C_j^{(2)} R_j C_j + C_j' R_j' C_j + C_j' R_j C_j' + C_j' R_j' C_j + C_j R_j^{(2)} C_j + C_j R_j' C_j' + C_j' R_j C_j' + C_j R_j' C_j' + C_j R_j C_j^{(2)}$$

Calculando em $t = 0$ temos as aplicações derivadas

$$C_j'(0) = Id; \quad C_j^{(2)}(0) = 0; \quad C_j^{(3)}(0) = 2R_j.$$

Suponha inicialmente que $R_1 > R_2$. Sendo assim, os três primeiros termos da expansão de Taylor de C_2 e $C_1 - C_2$ em zero são positivos definidos.

Por continuidade de C_2 e $C_1 - C_2$ temos que C_2 e $C_1 - C_2$ são positivos definidos em uma vizinhança de zero.

Portanto, para $t > 0$ suficientemente pequeno, temos $C_2(t) > 0$ e $(C_1 - C_2)(t) > 0$.

Logo, $C_1(t) > C_2(t)$.

Como $C_1(t) > C_2(t) > 0$ pelo lema 1.8 temos, para $t > 0$ suficientemente pequeno, que $B_2(t) > B_1(t) > 0$.

Sendo assim, escolhendo $t_0 > 0$ suficientemente pequeno, estamos nas hipóteses da proposição 3.1. Logo, temos $B_1(t) < B_2(t)$ para $t_0 < t < t_1$ e $t_1 \leq t_2$.

O caso $R_1 \geq R_2$ segue por continuidade.

□

Proposição 3.3. *Sejam $B_1, B_2 : I \to S(E)$ tal que $\lambda_{max}(B_1) \leq \lambda_{min}(B_2)$ para todo ponto. Seja $J_1, J_2 : I \to E$ soluções não nulas da equação $J_j' = B_j J_j$, $j = 1, 2$. Então*

(i) $\frac{||J_1||}{||J_2||}$ *é monótona decrescente.*

(ii) se $\frac{||J_1||}{||J_2||}$ *é constante em alguns sub-intervalo $I' \subset I$, então em I' tem-se $\lambda_{max}(B_1) = \lambda_{min}(B_2)$, e os correspondentes auto espaço contendo $\frac{J_1}{||J_1||}$, respectivamente $\frac{J_2}{||J_2||}$, são constantes em I'.*

Demonstração: Mostremos (i).

Por hipótese temos que J_j, $j = 1, 2$, é solução não nula da equação diferencial $J_j' = B_j J_j$. Sendo assim, $||J_j||$ é não nulo e diferenciável em I. Sendo assim, temos que $||J_j|| \neq 0$ em todo ponto[2].

Sendo assim, $log||J_j|| : I \to \mathbb{R}$ está bem definido. Portanto,

$$\begin{aligned} (log||J_1||)' &= \frac{||J_1||'}{||J_1||} = \frac{(\sqrt{\langle J_1, J_1\rangle})'}{||J_1||} \\ &= \frac{\langle J_1', J_1\rangle}{||J_1||^2} \\ = \frac{\langle B_1 J_1, J_1\rangle}{||J_1||^2} \leq \lambda_+(B_1) &\leq \lambda_-(B_2) \leq \frac{\langle B_2 J_2, J_2\rangle}{||J_2||^2} \\ &= \frac{\langle J_2', J_2\rangle}{||J_2||^2} = (log||J_2||)' \end{aligned}$$

onde foi utilizado o teorema 1.1 na primeira e terceira desigualdades acima e foi utilizado a hipótese sobre os auto-valores de B_j na segunda desigualdade.

Logo $(log||J_1||)' \leq (log||J_2||)'$. Então, pelas propriedades da função logaritmo e de derivação, temos $(log\frac{||J_1||}{||J_2||})' \leq 0$.

Portanto $\frac{||J_1||}{||J_2||}$ é monótono decrescente.

Mostremos (ii).

Se $\frac{||J_1||}{||J_2||}$ é constante em $I' \subset I$, temos que $(log\frac{||J_1||}{||J_2||})' = 0$.

Logo, pelas propriedades da função logaritmo e da derivação, temos que $(log||J_1||)' = (log||J_2||)'$.

Então as desigualdades acima são nesse caso igualdades e temos $\lambda_+(B_1) = \lambda_-(B_2)$ e $J_j(t)$ são os correspondentes autovetores de $B_j(t)$ para $t \in I'$.

Além disso, como $J_j' = B_j J_j$, temos que J_j' e J_j são linearmente dependentes em I' e $\frac{J_j}{||J_j||}$ é constante em I'. $\square$

[2] Isso segue do seguinte fato: se J é solução de $J' = BJ$ com $J(0) = 0$ temos que J é solução de $J'' + RJ = 0$ com $J(0) = 0$. Sendo assim, ou $J = 0$ (se $J'(0) = 0$) ou $J \neq 0$ (se $J'(0) = w \neq 0$).

3.1 Equação de Riccati com condição inicial singular

A seguir estudamos a equação de Riccati no caso particular em que a condição inicial é singular. O objetivo é estabelecer resultados de comparação para as soluções da equação de Riccati nesse caso.

Seja E um espaço vetorial real n-dimensional com produto interno e B uma solução de

$$B' + B^2 + R = 0 \qquad (2.3)$$

em $S(E)$ com $R : I \to S(E)$. Suponha que $B(t)$ tenha um polo em $t = 0$. Sabemos (veja o capítulo 1.3) que esse polo é no máximo de primeira ordem. Sendo assim, escrevendo a "série de Laurent" de B, temos

$$B(t) = t^{-1}F + G + tH + O(t^2)$$

com $F, G, H \in S(E)$.

Observe que

$$B'(t) = -t^{-2}F + H + O(t)$$

$$B^2(t) = t^{-2}F^2 + t^{-1}(FG + GF) + FH + HF + G^2 + t(GH + HG) + O(t^2)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} 0 &= B'(t) + B^2(t) + R(t) \\ &= t^{-2}(F^2 - F) + t^{-1}(FG + GF) + H + FH + HF + G^2 + t(GH + HG) + R(t) + O(t^2) \end{aligned}$$

Deduzimos,

$$F^2 - F = 0$$

$$FG + GF = 0$$

$$H + FH + HF + G^2 + t(GH + HG) + R(t) + O(t^2) = 0$$

Sendo assim,

(a) $F^2 = F$

(b) $F \odot G = 0$, onde $X \odot Y = XY + YX$ com $X, Y \in S(E)$.

Segue de (a) que F é a projeção ortogonal P_N sobre $N = Im(F)$. Seja $T = N^{\perp}$ e denotemos por P_T a projeção ortogonal sobre T.

Segue de (b) que $Im(G) \subset T$ e $N \subset \mathrm{Ker}(G)$.

De fato, como $F^2 = F$, temos que $F|_N = Id$. Para verificar isso basta observar que dado $x \in N$ temos $F(x - F(x)) = F(x) - F^2(F(x)) = 0$. Logo $x - F(x) \in N^{\perp}$. Por outro lado, se $x, F(x) \in N$, então $x - F(x) \in N$. Mas $N \cap N^{\perp} = \{0\}$. Sendo assim, $x - F(x) = 0$ para todo $x \in N$.

Mostremos agora que $N \subset \mathrm{Ker}(G)$. Isso é equivalente a mostrar que $G(x) = 0$ para todo $x \in N$.

Já sabemos que dado $x \in N$ temos $F(x) = x$.

Sendo assim, aplicando G e utilizando o item (b), temos $-F(G(x)) = G(F(x)) = G(x)$, ou seja, $F(G(x)) + G(x) = 0$.

Por outro lado, aplicando F na igualdade acima, temos

$$0 = F(F(G(x)) + G(x)) = F(G(x)) + F(G(x)).$$

Portanto $F(G(x)) = 0$. Então $G(x) = 0$ para todo $x \in N$.Mostrando que $N \subset \mathrm{Ker}(G)$.

Mostremos que $\mathrm{Im}(G) \subset T$. Isso é equivalente a mostrar que dado $w \in \mathrm{Im}(G)$ temos que $F(w) = 0$.

Seja $w = G(v) \in \mathrm{Im}(G)$, então, pelo item (b), $F(w) = F(G(v)) = -G(F(v)) = 0$ onde na ultima igualdade foi utilizado o fato que $F(v) \in N$ e $N \subset \mathrm{Ker}(G)$. Mostrando que $w \in T = \mathrm{Ker}(F)$.

Logo $G = AP_T$, para algum $A \in S(T)$ (estamos omitindo a inclusão $T \subset E$). Sendo assim,

$$\begin{aligned} B(t) &= t^{-1}F + G + tH + O(t^2) \\ &= t^{-1}P_N + AP_T + O(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

e (2.3) e (3.3) é um problema com condição inicial singular. Observe que o termo de primeira ordem H já foi determinado pois como $H + FH + HF + G^2 + t(GH + HG) +$

$R(t) + O(t^2) = 0$ temos fazendo $t = 0$ então

$$H + P_N H + H P_N + A^2 P_T + R(0) = 0 \tag{3.4}$$

pois P_T é uma projeção.

Em geral determinar $B(t)$ pode ser difícil. Um caso simples é quando $T = 0$. Então, veja a proposição 3.2,

$$B(t) = t^{-1} Id - \frac{t}{3} R(0) + O(t^2).$$

Estamos interessados em mostrar que a solução de (2.3) e (3.3) é unicamente determinada e depende continuamente de A e R. A maneira mais fácil é estudar a correspondente equação de Jacobi.

Para qualquer solução $B : I \to S(E)$ de (2.3) seja $Y : I \to End(E)$ uma solução de

$$Y' = BY \qquad\qquad (2.2).$$

Então Y é também uma solução da equação de Jacobi

$$Y'' + RY = 0 \qquad\qquad (2.4)$$

e sendo assim, Y possui uma extensão suave para todo $\mathbb{R}$.

Note que B é solução de (3.3) se e somente se $P_N Y(0) = 0$ e $P_T Y'(0) = AY(0)$.

Então (2.2) é satisfeita por uma solução Y de

$$\begin{aligned} Y'' + RY &= 0 \\ Y(0) = P_T, \quad Y'(0) &= P_N + AP_T \end{aligned} \tag{3.5}$$

e como $Y(t)$ é invertível para $t > 0$ pequeno, temos $B = Y'Y^{-1}$. Então B é unicamente determinado e depende continuamente de A e R.

Sejam $R_1, R_2 : \mathbb{R} \to S(E)$ e $A_1, A_2 \in S(T)$. Seja B_j uma solução de (2.3) e (3.3) com $R = R_j$, $A = A_j$ e $j \in \{1, 2\}$. Seja $D := B_2 - B_1$.

Lema 3.1. *Se $R_1(0) > R_2(0)$ e $A_1 < A_2$ então $D(t) > 0$ para $t > 0$ pequeno.*

Demonstração: Sabemos que $B_j(t) = t^{-1}P_{j,N} + A_jP_{j,T} + O(t)$. Sendo assim,

$$D(t) = (B_2 - B_1)(t) = \frac{1}{t}(P_{2,N} - P_{1,N}) + A_2P_{2,t} - A_1P_{1,t} + O(t).$$

Note que em N, temos $P_{1,N} = Id_N = P_{2,N}$ e em $N^\perp = T$ temos $P_{j,N} = 0$. Portanto, como $E = N \oplus N^\perp$, concluímos D não possui polo em $t = 0$.

Além disso, dados $x = x^N + x^T \in E$, temos

$$\begin{aligned} \langle D(0)x, x\rangle &= \langle (A_2P_{2,T} - A_1P_{1,T})(0)x, x\rangle \\ &= \langle A_2((P_{2,T}(0))(x))^T, x^T + x^N\rangle - \langle A_1((P_{1,T}(0))(x))^T, x^T + x^N\rangle \\ &= \langle A_2((P_{2,T}(0))(x))^T, x^T\rangle - \langle A_1((P_{1,T}(0))(x))^T, x^T\rangle \end{aligned}$$

onde foram utilizados os fatos de que $P_{j,T} : E \to T$ é uma projeção sobre T e $A_j : T \to T$.

Sendo assim, $\langle D(0)x, x\rangle \geq 0$ e se $x \in N$ temos que $\langle D(0)x, x\rangle = 0$.

Por outro lado, como $D(t) = A_2P_{2,t} - A_1P_{1,t} + t(H_2 - H_1) + O(t^2)$ temos $D'(t) = H_2 - H_1 + O(t)$ e $D'(0) = H_2 - H_1$ onde $H_j + P_{j,N} \odot H_j + A_j^2P_{j,T} + R_j(0) = 0$.

Dado $x \in E$, temos

$$\langle D'(0)x, x\rangle \geq \langle [R_1(0) - R_2(0)]x, x\rangle > 0$$

pois $R_1(0) > R_2(0)$. Portanto $\langle D'(0)x, x\rangle > 0$.

Sendo assim, para todo $x \in E$ com $||x|| = 1$, temos $\langle D(t)x, x\rangle > 0$ para t suficientemente pequeno. Como a esfera unitária é compacta temos o resultado. $\square$

Como acima seja $t_j \in (0, \infty]$ o primeiro polo positivo de B_j ou ∞ se tal polo não existe.

Lema 3.2. *Se $R_1 \geq R_2$ e $A_1 \leq A_2$, então $t_1 \leq t_2$ e $B_1 \leq B_2$ em $(0, t_1)$.*

Demonstração: Suponha inicialmente a desigualdade $R_1(0) > R_2(0)$ e $A_1 < A_2$. Então, pela proposição anterior, $B_1(t_0) < B_2(t_0)$ para $t_0 > 0$ suficientemente pequeno. Observe que agora estamos nas hipóteses da proposição 3.1. Sendo assim, temos que

$t_1 \leq t_2$ e $B_1(t) \leq B_2(t)$ em $(0, t_1)$. O caso geral segue por continuidade, uma vez que B é unicamente determinado e depende continuamente de A e R. $\square$

Capítulo 4

Teoremas de Comparação

A seguir apresentamos alguns exemplos de funções e hipersuperfícies paralelas que serão úteis posteriormente.

Seja M uma variedade riemanniana completa. Deseja-se construir exemplos de aplicações diferenciáveis $f : M' \to \mathbb{R}$, definidas em $M' \subset M$ um aberto em M.

(a) Seja $S \subset M$ uma hipersuperfície orientada com vetor normal unitário ao longo de S. É importante que a hipersuperfície seja orientada para que seja possível considerar a trivialização global do fibrado normal. Sendo assim, temos uma trivialização do fibrado normal $\phi : NS \to S \times \mathbb{R}$. Seja M' uma vizinhança de S onde a $e := \exp|_{NS}$ tem inversa diferenciável. Defina $f = pr_2 \circ \phi \circ e^{-1}$. Então f é chamada de função distância com sinal de S em M'. Os conjuntos de nível $S_t = f^{-1}(t)$ são as hipersuperfícies que estão a distância constante $|t|$ de S.

(b) Seja $p \in M$ com cut locus $C(p)$. Seja $U \subset T_pM$ uma vizinhança da origem onde a função exponencial $e = \exp_p$ é um difeomorfismo. Seja $M' = e(U)\backslash p$ e defina $f(q) = ||e^{-1}(q)||$. Em particular, nos podemos considerar $e(U) = M\backslash C(p)$ onde $C(p)$ é o cut locus de p. Então $f = d(\ \cdot\ , p)$ e os conjuntos de nível são as esferas geodésicas centradas em p. Neste caso, o campo de vetor $X = fV$ pode ser extendida suavemente a p com $(DX)_p = Id$. Então, se γ é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco com $\gamma(0) = p$ e $B(t) \in S(E)$ com

$E = \{\gamma(t)\}^{\perp}$ como em (§2.0.1), então $tB(t) \to Id$ quando $t \to 0$.

A seguir apresentamos resultados de comparação em Hipersuperfícies impondo restrições sobre a curvatura seccional.

Seja S uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana com campo normal unitário N definido em S.[1] Para fixar sinais, os auto valores da aplicação de Weingarten DN serão denotados curvaturas principais de S; e a média aritmética de todas as curvaturas principais curvatura média de S. Veja o exemplo 1.2.

Além disso, M_j, $j \in \{1,2\}$, denotarão uma variedades Riemannianas completas de dimensão $n+1$ cuja funções curvaturas seccionais K_j satisfazem

$$inf\ K_2 \geq sup\ K_1$$

nos subconjuntos em questão.

Observação 4.1. *A Seguir consideramos as notações dos parágrafos (1.2) e (2.0.1), temos* $R(t) = R_V|_{\gamma(t)}$ *é uma aplicação auto adjunta. Além disso, por definição,* $K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{(|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}}$ *é curvatura seccional de* σ *em* p*, onde* $\sigma \subset T_pM$ *e* $\{X,Y\}$ *é uma base de* σ*.*

Segue da definição do tensor de curvatura que $\langle R(X,V)X,V\rangle = -\langle R(X,V)V,X\rangle$*.*

Tomando $V = gradf$ *com* $||V|| = 1$ *temos se* $||X|| = 1$ *que*

$$K_j(X,V) = \langle R_j(X,V)X,V\rangle.$$

Logo,

$$inf\ K_j \leq -\langle R_j(X,V)V,X\rangle \leq sup\ K_j.$$

[1]Observe que se M é uma variedade Riemanniana e $M' \subset M$ aberto considerando a submersão Riemanniana $f : M' \to \mathbb{R}$, então $S = f^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície e $N = \text{grad } f$.

Como estamos supondo que $inf\ K_1 \geq sup\ K_2$ temos

$$\begin{aligned}
-\langle R_2(X,V)V,X\rangle &\geq inf\ K_2 \geq sup\ K_1 \geq -\langle R_1(X,V)V,X\rangle \\
&\Rightarrow -\langle R_2(X,V)V,X\rangle \geq -\langle R_1(X,V)V,X\rangle \\
&\Rightarrow -\langle R_2(t)(X),X\rangle \geq -\langle R_1(t)(X),X\rangle \\
&\Rightarrow \langle R_2(t)(X),X\rangle \leq \langle R_1(t)(X),X\rangle \\
&\Rightarrow R_2(t) \leq R_1(t) \quad \forall t \in I.
\end{aligned}$$

Proposição 4.1. *Seja $S_j \subset M_j$ uma hipersuperfície com campo normal unitário N_j e seja $p_j \in S_j$. Suponha que a maior das curvaturas principais de S_1 em p_1 é menor ou igual a menor curvatura principal de S_2 em p_2. Então o mesmo se verifica para as hipersuperfícies paralelas $S_{j,t}$ em $exp(tN_j(p_j))$ para $0 \leq t \leq t_1$ onde t_1 denota a distância focal*[2] *de S_1 até p_1.*

Demonstração: Sejam $M'_j \subset M_j$ aberto e $f_j : M'_j \to \mathbb{R}$ a função distância com sinal de S_j em uma vizinhança de p_j com hipersuperfície de nível $S_{j,t}$. Veja o exemplo (a) e note que estamos nas hipóteses desse exemplo.

Considere as geodésicas $\gamma_j(t) = exp(tN_j(p_j))$. Note que $\gamma_j(0) = p_j$. Considere $E_j = T_{p_j}S_j = \{\gamma'_j(0)\}^{\perp}$ e $B_j \in S(E_j)$ como no parágrafo § 2.0.1.

Sendo assim, veja o parágrafo § 1.2.1, $B_j(t)$ é a aplicação de Weingarten de $S_{j,t}$ em $\gamma_j(t)$, a menos de transporte paralelo ao longo de γ_j.

Por hipótese temos $\lambda_{max}(B_1(0)) \leq \lambda_{min}(B_2(0))$. Pelo lema 1.6 temos

$$B_1(0) \leq A^{-1}B_2(0)A \tag{4.1}$$

para toda isometria $A : E_1 \to E_2$ até o primeiro polo de B_1.

Sendo assim, por (4.1) e pela observação 4.1, estamos nas hipóteses da proposição 3.1. Logo

$$B_1(t) \leq A^{-1}B_2(t)A \quad \forall t \in (0,t_1)$$

para toda isometria $A : E_1 \to E_2$. Note que t_1 é como na proposição 3.2.

[2] *Entendemos que distância focal é a distância de p_1 até o primeiro ponto focal de S_1 medido ao longo da geodésica em questão.*

Temos que $B_1(t) \leq A^{-1}B_2(t)A$ até o primeiro ponto focal de S_1 ao longo de γ_1.

Sendo assim, $B_1(t) \leq A^{-1}B_2(t)A$ para todo $t \in (0, t_1)$. Logo, pelo lema 1.6, $\lambda_{max}(B_1(t)) \leq \lambda_{min}(B_2(t))$ para todo $t \in (0, t_1)$. □

Proposição 4.2. *As curvaturas principais de qualquer parte suave de uma esfera geodésica em M_1 orientada com vetor normal para fora é menor ou igual as curvaturas principais de uma esfera geodésica com o mesmo raio em M_2.*

Demonstração: Seja $p_j \in M_j$ e $f_j = d(., p_j)$ como no exemplo (b).

Considere a geodésica normalizada γ_j com $\gamma_j(0) = p_j$. Seja $E_j = \{\gamma_j'(0)\}^{\perp}$ e para $t > 0$ seja $B_j(t) \in S(E_j)$ como no parágrafo § 2.0.1.

Note que:

(i) pelo exemplo (b) temos $\lim\limits_{t \to 0} tB(t) = Id$. Sendo assim, $\lim\limits_{t \to 0} B^{-1}(t) = 0$.

(ii) Como $B \in S(E)$, temos que B é invertível em uma vizinhança de cada ponto onde está definida.

Considere $\gamma_j|_{(0,t]}$ de modo que $\gamma_j(t_0)$ não seja ponto mínimo de $\gamma_j(0) = p_j$.

Sendo assim, $B_j(t)$ é a aplicação de Weingarten da esfera geodésica $\sum_t(p_j)$ em $\gamma_j|_{(0,t]}$, a menos de transporte paralelo ao longo de γ_j.

Note que por (i), (ii) e pela observação 4.1 estamos nas hipóteses da proposição 3.2. Sendo assim, $B_1(t) \leq B_2(t)$. Logo, pelo lema 1.7, $B_1(t) \leq A^{-1}B_2(t)A$ para toda isometria linear $A : E_1 \to E_2$. Então, pelo lema 1.6, $\lambda_{max}(B_1(t)) \leq \lambda_{min}(B_2(t))$. □

A seguir apresentamos resultados de comparação em hipersuperfícies para curvatura de Ricci limitada inferiormente.

Seja M uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n+1$ cuja a curvatura de Ricci é limitada inferiormente, ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ constante tal que $Ric(v) \geq kn$ para qualquer vetor tangente unitário v.

Denotemos por b_k a solução de

$$b_k' + b_k^2 + k = 0 \qquad (2.3)_k.$$

Proposição 4.3. *Seja $S \subset M$ uma hipersuperfície com campo normal unitário N e $p \in S$. Seja $b(t)$ a curvatura média da hipersuperfície paralela S_t de S em $\gamma(t) = exp(tN(p))$. Seja b_k uma solução de $(2.3)_k$ com $b_k(0) = b(0)$. Então $b(t) \leq b_k(t)$ para todo $t > 0$ até o primeiro ponto focal de S ao longo de γ. Para $t < 0$, a desigualdade oposta se verifica.*

Demonstração: Com a notação do capítulo 3 temos $r_+ \geq r$, pois $r_+ = r + \frac{||S||^2}{n}$.

Seja f a função distância com sinal de S como no exemplo (a) e $B(t)$ como no parágrafo § 2.0.1. Então, como $b(t)$ é a curvatura média da hipersuperfície paralela S_t de S, temos que $b(t) = \frac{traço B(t)}{n}$ e b é solução da equação $b' + b^2 + r_+ = 0$ (3.1) no capítulo 3.

Por hipótese temos que $b_k(0) = b(0)$, como $r_+ \geq r$, temos pela proposição 3.1, para $t > 0$, que

$$b(t) \leq b_k(t).$$

Estudemos o caso $t < 0$.

Lembremos que a aplicação de Weingarten é DN. Sendo assim, para $t < 0$ temos a desigualdade $b(t) \geq b_k(t)$. □

Proposição 4.4. *A curvatura média de qualquer parte suave de uma esfera geodésica de raio $t > 0$ em M é limitada superiormente por $\frac{c_k}{s_k}(t)$.*

Demonstração: Sejam $p \in M$ fixo e γ geodésica tal que $||\gamma'(t)|| = 1$ e $\gamma(0) = p$. Sejam $f = d(\cdot, p)$ como no exemplo (b) e $B(t)$ como no parágrafo § 2.0.1. Então $b(t) = \frac{traço B(t)}{n}$ é a curvatura média da esfera geodésica $\sum_t(p)$ em $\gamma(t)$ desde que $\gamma|_{(0,t]}$ não tenha pontos mínimo em p, observe que isso é possível pela definição da função f no exemplo (b). Sendo assim, b é solução da equação $b' + b^2 + r_+ = 0$ (3.1) com um polo em $t = 0$. Veja exemplo (b).

Lembremos que $r_+ \geq r \geq k$. Isso segue do fato de $r = Ric_p(v) \geq kn \geq k$.

Sendo assim, a desigualdade $r_+ \geq k$, a proposição 3.2 e pelo estudo da equação de Riccati no capítulo 3 no caso $n = 1$ e $R = k$, implica que

$$b(t) \leq \frac{c_k}{s_k}(t).$$

$\square$

Capítulo 5

Aplicações

Como aplicação da teoria desenvolvida até o momento apresentamos uma nova demonstração do Teoremas de Rauch.

Seja S uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana M com campo normal unitário N definido em S. Para fixar sinais, os auto-valores da aplicação de Weingarten DN serão chamados curvaturas principais de S, e a média aritmética de todas as curvaturas principais será chamada de curvatura média de S.

Além disso, M_j, $j \in \{1, 2\}$, denotará uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n+1$ cujas funções curvaturas seccionais K_j satisfazem

$$inf\ K_2 \geq sup\ K_1$$

nos subconjuntos em questão.

Com a notação acima e denotando por $R_j : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S(E)$ o tensor de curvatura de M_j como no parágrafo §2.0.1. Como estamos supondo que $inf\ K_2 \geq sup\ K_1$, então $R_1 \geq D^{-1}R_2D$ para toda isometria linear $D : E_1 \rightarrow E_2$. Isso segue da observação 4.1 e do lema 1.7.

Teorema 5.1 (Rauch/Berger). *Seja γ_j uma geodésica, parametrizada pelo comprimento de arco, em M_j e J_j campos de Jacobi ao longo de γ_j com $J_j \perp \gamma_j'$ e*

(a) $J_j(0) = 0, ||J_1'(0)|| = ||J_2'(0)|| \neq 0$

ou

(b) $J_j'(0) = 0, ||J_1(0)|| = ||J_2(0)|| \neq 0.$

Então

(a) $||J_1(t)|| \leq ||J_2(t)||$ *para* $t \geq 0$ *até o primeiro ponto conjugado de* $\gamma_1(0)$ *ao longo de* γ_1

ou

(b) $||J_1(t)|| \leq ||J_2(t)||$ *para* $t \geq 0$ *até o primeiro ponto focal de* $\gamma_1(0)$ *ao longo de* γ_1.

Se a igualdade se verifica para algum $t_0 > 0$*, então temos a igualdade em* $[0, t_0]$ *e* $\frac{J_j}{||J_j||}$ *é um campo paralelo ao longo de* $\gamma_j|[0, t_0]$ *para* $j = 1, 2$.

Demonstração:

caso(a): Seja $\gamma_j(t_j)$ o primeiro ponto conjugado de $\gamma_j(0)$ ao longo de γ_j e $p_j = \gamma_j(0)$, $v_j = \gamma_j'(0)$. Mostremos que o resultado vale para $0 < t < t_1$.

De fato, existe uma vizinhança aberta $U_j \subset T_{p_j}M_j$ de 0 contendo tv_j para $0 \leq t < t_j$ onde a função exp_{p_j} tem inversa suave. Nas condições acima, temos que o ponto $\gamma(t_j)$ é conjugado de p ao longo de γ se e somente se $t_j\gamma'(0)$ é ponto crítico de exp_p. Veja [7]. A existência da vizinhança U é importante para que estejamos nas hipóteses do exemplo (b) do capítulo 4.

Seja f_j como no exemplo (b) no capítulo 4.

Defina $E_j = \{v_j\}^{\perp}$ e $B_j(t) \in S(E_j)$ como no parágrafo § 2.0.1.

Seja J_j solução da equação $J_j' = B_jJ_j$ (2.2), vista como um curva em E_j. Temos que J_j satisfaz $J'' + RJ = 0$ com $J(0) = 0$ e $tB(t) \rightarrow Id$ quando $t \rightarrow 0$. Veja no capítulo 3 o estudo feito par o caso em que a solução da equação de Riccati é invertível e exemplo (b) no capítulo 4.

Considere $\frac{||J_1||}{||J_2||}$. Note que $\frac{||J_1||}{||J_2||}(t)$ está bem definido pois $\gamma_j(t)$ não temos pontos conjugados em $(0, t_j)$.

Pela regra de L'Hopital temos:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{||J_1||}{||J_2||} &= \lim_{t\to 0}\frac{||J_1'||}{||J_2'||}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{||J_1''||}{||J_2''||}\\ &= \frac{||J_1'(0)||^2}{||J_2'(0)||^2}=1\end{aligned}$$

Como $inf\ K_1 \geq sup\ K_2$, temos que $R_1 \geq D^{-1}R_2D$ para toda isometria linear $D: E_1 \to E_2$. Sendo assim, pela proposição 3.2, temos que $B_1 \leq D^{-1}B_2D$ para toda isometria linear $D: E_1 \to E_2$. Logo, pelo lema 1.6, $\lambda_{max}(B_1) \leq \lambda_{min}(B_2)$. Portanto estamos nas hipóteses da proposição 3.3. Sendo assim, $\frac{||J_1||}{||J_2||}$ é monótono decrescente. Como $\lim_{t\to 0}\frac{||J_1||}{||J_2||}=1$ temos que $||J_1|| \leq ||J_2||$.

caso(b): Seja γ_j uma geodésica, parametrizada pelo comprimento de arco, em M_j tal que $\gamma_j'(0)=v_j$ e $M_j' \subset M_j$ aberto. Considere $f_j : M_j' \to \mathbb{R}$ a função distância com sinal de $S_j \subset M_j$ em uma vizinhança de $\gamma_j(0)=p_j$ como no exemplo (a).

Seja $U_j \subset T_{p_j}M_j$ uma vizinhança aberta da origem onde a aplicação exponencial é um difeomorfismo. Tomando U_j suficientemente pequeno temos que M_j' contem $\gamma_j([0,t_j])$ onde t_j é o primeiro ponto focal de S_j ao longo de γ_j.

Defina $E_j=\{v_j\}^{\perp}$ e sejam J_j soluções da equação $J_j'=B_jJ_j$, visto como uma curva em E_j e $B(j)\in S(E_j)$ como no paragrafo § 2.0.1. Sendo assim, $B_j(0)$ é a aplicação de Weingarten de S_j em p_j.

Considere $\frac{||J_1||}{||J_2||}$. Note que $\frac{||J_1||}{||J_2||}(t)$ está bem definido pois $\gamma_j(t)$ não temos pontos focais em $(0,t_j)$. Note que, $\lim_{t\to 0}\frac{||J_1||}{||J_2||}=1$.

Note dadas as hipóteses sobre o campo de Jacobi J_j e como $J_j'=B_jJ_j$ temos que $B_1(0)=B_2(0)$.

Sendo assim, o resultado segue da proposição 3.1, dos lemas 1.6 e 1.7 e da proposição 3.3. $\square$

Uma aplicação do teorema de Rauch permiti obter informações sobre a posição dos pontos conjugados a partir de limitações da curvatura seccional.

Proposição 5.1. *Suponha que a curvatura seccional K de uma variedade Riemanniana M satisfaz às desigualdades $0 < L \leq K \leq H$, onde H e L são as constantes. Seja γ uma geodésica de M. Então, a distância d ao longo de γ entre dois pontos conjugados consecutivos de γ satisfaz $\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}$.*

Demonstração: Veja [7]. $\square$

Uma outra aplicação do teorema de Rauch consiste em obter estimativa para o comprimento de curvas em uma variedade Riemanniana da qual sabemos estimar a curvatura seccional.

Proposição 5.2. *Sejam M^n e $\overline{M}^n$ variedades Riemannianas e suponhamos que para todo $p \in M$, $\overline{p} \in \overline{M}$, $\sigma \subset t_pM$, $\overline{\sigma} \subset T_{\overline{p}}\overline{M}$ se tenha que $\overline{K}_{\overline{p}}(\overline{\sigma}) \geq K_p(\sigma)$. Sejam $p \in M$, $\overline{p} \in \overline{M}$ e fixe uma isometria linear $i : T_pM \to T_{\overline{p}}\overline{M}$. Seja $r > 0$ tal que a restrição $exp_p|B_r(0)$ seja um difeomorfismo e $exp_{\overline{p}}|\overline{B}_r(0)$ seja não singular. Seja $c : [0, a] \to exp_p(B_r(0)) \subset M$ uma curva diferenciável de defina uma curva $\overline{c} : [0, a] \to exp_{\overline{p}}(\overline{B}_r(0)) \subset \overline{M}$ por $\overline{c}(s) = exp_{\overline{p}} \circ i \circ exp_p^{-1}(c(s))$ com $s \in [0, a]$. Então $l(c) \geq l(\overline{c})$.*

Demonstração: Veja [7]. $\square$

A seguir apresentamos uma visão geométrica do teorema de Rauch.

Sejam M uma variedade Riemanniana, $\gamma : [0, l] \to M$ uma geodésica normalizada e J um campo de Jacobi tal que $J(0) = 0$, $|J'(0)| = 1$ e $\langle J'(0), \gamma'(0)\rangle = 0$. Então $|J(t)| = t - \frac{Kt^3}{6} + R$ com $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{R}{t^3} = 0$, onde K denota a curvatura seccional em $\gamma(0)$ segundo o plano gerado por $\{\gamma'(0), J'(0)\}$. Portanto, se t é pequeno, $|J(t)|$ é tanto maior quanto menor for K.

Sejam $\overline{M}$ uma outra variedade Riemanniana e $\overline{\gamma}$, $\overline{J}$ outra geodésica e campo de Jacobi em $\overline{M}$ satisfazendo condições semelhantes. Além disso, suponha que $\overline{K}(\overline{\gamma'}(0), \overline{J'}(0)) \geq K(\gamma'(0), J'(0))$. Sendo assim, para t pequeno, temos $|\overline{J}(t)| \leq |J(t)|$.

O teorema de Rauch permite obter essa desigualdade, sob determinadas condições, sem a restrição de t ser pequeno.

No caso particular de dimensão dois, um tal teorema é consequência de um resultado clássico de Sturm sobre equações diferenciais ordinárias, o qual apresentamos a seguir.

Lema 5.1 (teorema de Rauch em dimensão dois). *Sejam*

$$f''(t) + K(t)f(t) = 0, f(0) = 0, t \in [0, l],$$
$$\overline{f}''(t) + \overline{K}(t)\overline{f}(t) = 0, \overline{f}(0) = 0 = 0, t \in [0, l]$$

duas equações diferenciais ordinárias. Suponha que $\overline{K}(t) \geq K(t)$ *para* $t \in [0, l]$, $f'(0) = \overline{f'}(0) = 1$ *e que* $\overline{f}(t) > 0$ *em* $(0, l]$*. Então* $f(t) \geq \overline{f}(t)$ *para* $t \in [0, l]$*. Além disso, a igualdade se verifica para* $t = t_1 \in (0, l]$ *se e somente se* $K(t) = \overline{K}(t)$ *para* $t \in [0, t_1]$*.*

A seguir apresentamos um resultado em que a limitação inferior da curvatura de Ricci implica em informações sobre a área e o volume de variedades Riemannianas.

Lembrando que estamos supondo que M é uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n + 1$ cuja a curvatura de Ricci é limitada inferiormente, ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ constante tal que $Ric(v) \geq kn$ para qualquer vetor tangente unitário v.

Como M é completa, temos pelo teorema de Hopf-Rinow que M é completa como espaço métrico.

Podemos então considerar o diâmetro de M como $d = \sup\{g(p, q); p, q \in M\}$.

Para $p \in M$ denotemos por $B_r(p)$ a bola aberta de raio r e centrada em p e $V_p(r)$ o volume de $B_r(p)$. Além disso, denotemos por $V(r)$ o volume da bola de raio r no espaço simplesmente conexo de curvatura constante k o qual será denotado por Q_k.

Teorema 5.2 (Bishop-Gromov). *Para qualquer* $p \in M$ *e* $0 < r < R$ *temos*

$$\frac{V_p(r)}{V(r)} \geq \frac{V_p(R)}{V(R)}.$$

Se a igualdade se verifica para algum $0 < R < diam(M)$ *se e somente se* $B_R(p)$ *é isométrica a bola de raio* R *em* Q_k*.*

Demonstração: O objetivo é mostrar que o quociente $\frac{V_p(r)}{V(r)}$, como função de r, é monótono decrescente. Isso será feito mostrando que o quociente dos integrandos de $V_p(r)$ e $V(r)$ é uma função decrescente de r. Veja [4].

Seja $p \in M$ fixado arbitrariamente e $r \in (0, d)$, onde d denota o diâmetro de M. Considere $E = T_pM$, $e = exp_p : E \to M$ e S a esfera unitária em E. Para todo $v \in S$ considere γ_v a geodésica com $\gamma'(0) = v$, $\gamma(0) = p$.

Defina

$$cut(v) = \sup\{t > 0; \gamma_v|_{[0,t]} \text{ é minimizante}\} \in \mathbb{R}$$

e

$$\mathcal{C} = \{tv; v \in S, 0 \leq t \leq cut(v)\} \subset E.$$

Denotemos por $B_r \subset E$ a bola de raio r com centro em 0.

Sendo assim, $e(B_r) = B_r(p) \subset M$ pois, sendo M completa, temos que $e = exp_p$ é um difeomorfismo.

Calculemos o volume $V_p(r)$ de $B_r(p)$.

$$\begin{aligned} V_p(r) &= \int_{\mathcal{C} \cap exp^{-1}(e(B_r))} |detexp_p| dV \text{ (Veja [12])} \\ &= \int_{B_r \cap \mathcal{C}} |detDe_u| du \\ &= \int_S \int_0^{r(v)} |detDe_{tv}| t^n dt dv \end{aligned}$$

onde du e dv denotam o elemento de volume de E e S respectivamente e $r(v) := \min\{r, cut(v)\}$.

Seja $\{v, e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de E.

Defina $J_i(t) = De_{tv}(te_i)$ e $j_v(t) = ||J_1(t) \wedge \ldots \wedge J_n(t)||^{\frac{1}{n}}$ para todo $0 \leq t \leq cut(v)$.

Sendo assim, $|detDe_{tv}| = (\frac{j_v(t)}{t})^n$.

Definindo $j_v(t) = 0$ para $t > cut(v)$, temos que

$$\begin{aligned} V_p(r) &= \int_S \int_0^{r(v)} |detDe_{tv}| t^n dtdv \\ &= \int_S \int_0^{r(v)} (j_v(t))^n dtdv \\ &= \int_S \int_0^{r} (j_v(t))^n dtdv, \qquad \text{pois } j_v(t) = 0 \text{ para } t > cut(v)\ . \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando $f = d(\cdot, p)$ como no exemplo (b) e $B(t)$ como no parágrafo 2.0.1 com $\gamma = \gamma_v$, então $j_v|_{[0,cut(v)]}$ é solução da equação $j' = bj$.

Lembrando que $r_+ \geq r \geq k$ e como $f = d(\cdot, p)$, estamos nas hipóteses das proposições 3.2 e 3.3 no caso de dimensão um.

Portanto, temos que $\frac{j_v}{j}$ é monótona decrescente em $[0, cut(v)]$ para toda solução j de $j' = b_k j$ onde $b_k = \frac{c_k}{s_k}$.

Estudemos o caso particular onde $j = s_k$.

Lembremos que pelo capítulo 3 temos que $s(0) = 0$ e $s_k'(0) = 1$.

Estamos interessados em mostrar que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{j_v(t)}{j(t)} = 1$.

De fato, isso segue como na demonstração do teorema de Rauch no caso (a).

Considere a função $q_v = (\frac{j_v}{s_k})^n$.

Temos que $\lim\limits_{t\to 0} q_v = 1$ e q_v é decrescente em $[0, r)$.

Definindo $w = (s_k)^n$ temos que

$$V_p(r) = \int_S \int_0^r (j_v(t))^n dtdv = \int_S \int_0^r q_v(t) w(t) dtdv$$

e

$$V(r) = \int_S \int_0^r (j(t))^n dtdv = \int_S \int_0^r (s_k(t))^n dtdv = \int_S \int_0^r w(t) dtdv.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{V_p(r)}{V(r)} &= \frac{\int_S \int_0^r q_v(t) w(t) dtdv}{\int_S \int_0^r w(t) dtdv} \\ &= \frac{\int_S \int_0^r q_v(t) w(t) dtdv}{\int_S dv \int_0^r w(t) dt} \\ &= \int_S \frac{1}{vol(S)} \frac{\int_0^r q_v(t) w(t) dt}{\int_0^r w(t) dt} dv \end{aligned}$$

Denotemos $m_v(t) = \frac{\int_0^r q_v(t)w(t)dt}{\int_0^r w(t)dt}$. Sendo assim, $m_v(t)$ é a média com peso w de q_v no intervalo $[0, r)$. Sendo assim, $m_v(t)$ é monótono decrescente para $0 \leq r \leq d$.

Portanto, $\frac{V_p}{V}$ é monótono decrescente. O que mostra a desigualdade.

Note que se $m_v(r) = m_v(R)$ para algum $r < R \leq d$, então $q_v = 1$ em $[0, R)$.

Mostremos a segunda parte do teorema.

Suponha que $\frac{V_p(r)}{V(r)} = \frac{V_p(R)}{V(R)}$ para algum $0 < r < R \leq d$. Sendo assim,

$$\int_S \frac{m_v(r)}{vol(S)}dv = \frac{V_p(r)}{V(r)} = \frac{V_p(R)}{V(R)} = \int_S \frac{m_v(R)}{vol(S)}dv.$$

O que implica que $m_v(r) = m_v(R)$. Logo, $q_v = 1$ em $[0, R)$ e então $j_v = s_k$ em $[0, R)$, para todo $v \in S$ fixado arbitrariamente.

Como j_v é solução de $j' = bj$ e $j_k = s_k$ é solução de $j' = b_k j$ temos que $b_k = b$ e $r_+ = r = k$ com a notação do capítulo 3.

Sendo assim, $B(t) = b(t)Id$ e como $B' + B^2 + R = 0$ temos que $R(t) = kId$ em $\{v\}^\perp$.

Então $J_i = s_k e_i$, a menos de transporte paralelo ao longo de γ_v.

Isto mostra que para qualquer $\underline{p} \in Q_k$ a aplicação $exp_{\overline{p}} \circ I \circ e^{-1}$ é uma isometria de $B_R(p)$ em $B_R(\overline{p}) \subset Q_k$. $\square$

Como consequência do resultado acima temos o resultado a seguir.

Teorema 5.3 (Myers-Cheng). *Se $k > 0$, então M é compacto com diâmetro $d \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. A igualdade se verifica se e somente se M é isométrica a Q_k o qual é a esfera (n+1)-dimensional de raio $\frac{1}{\sqrt{k}}$.*

Demonstração: Seja $p \in M$ fixado arbitrariamente e $f = d(\cdot, p)$ como no exemplo (b). Para qualquer geodésica parametrizada pelo comprimento de arco γ tal que $\gamma(0) = p$. Considere $B(t)$ como no paragrafo § 2.0.1.

Observe que estamos nas hipóteses da proposição 3.2, pois temos $r_+ \geq r \geq k$. Além disso, sabemos que o primeiro polo de $\frac{c_k}{s_k}$ é $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Sendo assim, aplicando a proposição 3.2 a b e $b_k = \frac{c_k}{s_k}$, temos que o primeiro polo positivo t_1 de $b(t) = \frac{traçoB(t)}{n}$ é menor ou igual a $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, ou seja, $t_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Sabemos que as soluções J de $J' = BJ$ possuem a propriedade de se B possui um polo em t_1 (ou seja, $\lim_{t\to t_1}(t - t_1)B(t) = Id$) as soluções J de $J'' + RJ = 0$ com $J(t_1) = 0$.

Sendo assim, alguma solução não nula de $J' = BJ$ se anula em t_1, ou seja, $\gamma(t_1)$ é ponto conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ.

Portanto (pelo teorema de Jacobi em [7]), não existe geodésica minimizante de comprimento maior do que $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Como M é completa, temos que dados dois pontos $p, q \in M$, existe uma geodésica minimizante $\overline{\gamma}$ ligando p a q. Isso segue do teorema de Hopf-Rinow.Logo o comprimento da geodésica $\overline{\gamma}$ é menor ou igual a $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Portanto, pelo teorema de Hopf-Rinow, temos que M é compacta. Além disso, $d \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Investiguemos a igualdade.

Suponha que $d = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Fixe dois pontos $p_1, p_2 \in M$ que distam de $R = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Observe que esses pontos existem pois estamos supondo que $d = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ e M é completa.

Defina $r = \frac{d}{2}$. Então $M = B_R(p_j)$ e $B_r(p_1) \cap B_r(p_2) = \varnothing$.

Sabendo que:

$$
\begin{aligned}
vol(B_r(p_1) \cup B_r(p_2)) &= vol(B_r(p_1)) + vol(B_r(p_2)) - vol(B_r(p_1) \cap B_r(p_2)) \\
&= vol(B_r(p_1)) + vol(B_r(p_2)) \\
&= 2vol(B_r(p_j))
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Por outro lado, pelo teorema 5.2, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{vol(B_r(p_j))}{V(r)} \geq \frac{vol(M)}{V(R)} \quad &\Rightarrow \quad 2 = \frac{V(R)}{V(r)} \geq \frac{vol(M)}{vol(B_r(p_j))} \\
&\Rightarrow \quad vol(M) \leq 2vol(B_r(p_j)) \\
&\Rightarrow \quad vol(M) \leq vol(B_r(p_1) \cup B_r(p_2))
\end{aligned}
$$

onde a ultima implicação segue de (5.1).

Como $B_r(p_1) \cup B_r(p_2) \subset M$ temos que $vol(B_r(p_1) \cup B_r(p_2)) \leq vol(M)$. Portanto $vol(M) = vol(B_r(p_1) \cup B_r(p_2))$.

Sendo assim, pelo teorema 5.2, $B_R(p_j)$ é isométrica a bola B de raio R em Q_k.

Como B é o complemento de um ponto, temos que M é isométrico a Q_k.

Reciprocamente, se M é isométrica a Q_k com $k > 0$ temos que seu diametro é $d = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. □

Uma pergunta que pode surgir é se podemos obter resultados de comparação de volumes semelhantes aos apresentados acima supondo que a curvatura de Ricci é limita superiormente ao contrário de inferiormente. A resposta é negativa. Um contra exemplo é descrito em [23].

Veja [9] no paragrafo 4 para comentários sobre resultados sobre area sob a hipótese da curvatura de Ricci ser limitada superiormente. Esse mesmo artigo enuncia e demonstra os teoremas Bishop e Myers.

Capítulo 6

Volume e distância para subvariedades totalmente geodésicas

O objetivo deste parágrafo é obter uma desigualdade do tipo Bishop-Gromov para tubos ao redor de subvariedades totalmente geodésicas $L \subset M$.

Veja [9] no paragrafo 5, teoremas 7 e 8, para resultados sobre comparação de area e volume para tubos sob a hipótese da curvatura de Ricci ser limitada superiormente e inferiormente.

Inicialmente vamos fixar a notação e estabelecer alguns resultados auxiliares.

Dizemos que uma subvariedade $L \subset (M, g)$ da variedade Riemanniana M é totalmente geodésica se seu operador de forma é nulo.

Dada $L \subset M$, então temos as seguintes equivalências[1]:

(a) L é totalmente geodésica em M;

(b) toda geodésica de L é também uma geodésica de M;

(c) Seja $v \in T_pM$ é tangente a L e γ geodésica de M, tal que existe t_0 onde $\gamma(t_0) \in L$ e $\gamma'(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}L$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma|_{(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)}$ está completamente contida em L;

[1]Para mais informações veja [20].

(d) se α é uma curva em L e $v \in T_{\alpha(0)}L$, então o transporte paralelo ao longo de α é o mesmo para L e M.

Seja $S \subset ISO(M, g)$ um conjunto de isometrias. Então o conjunto de pontos fixos de S é definido como todos os pontos de M que são fixados por todas as isometrias em S, ou seja, $Fix(S) = \{x \in M; F(x) = x, \forall\ F \in S\}$.

Temos o seguinte resultado:

Lema 6.1. *Seja $S \subset ISO(M, g)$ um conjunto de isometrias. Então cada componente conexa do conjunto de pontos fixos é uma subvariedade totalmente geodésica.*

Demonstração: Veja [4]. $\square$

Seja $exp : O \to M$ a aplicação exponencial de M, onde O denota o conjunto aberto do fibrado tangente TM que é domínio desta aplicação. Além disso, $O = \cup O_p$, onde $O_p \subset T_pM$ é o domínio da aplicação $exp_p(v) = \gamma_v(1)$.

Considere a subvariedade imersa $L \subset M$ e o fibrado normal NL. Definimos a aplicação exponencial normal $exp^{\perp}$ restringindo exp a $O \cap NL$

Temos que $Dexp^{\perp}$ é não singular em O_p, $p \in L$. Sendo assim, existe uma vizinhança aberta U da secção zero de NL onde $exp^{\perp}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Diremos que $exp(U)$ é uma vizinhança tubular de L em M.

Continuando com os exemplos do capítulo 4 temos :

(c) Troquemos o ponto p do exemplo (b) por uma subvariedade L de codimensão ≥ 2. Então as hipersuperfícies são tubos ao redor de L.

Seja M uma variedade Riemanniana e $L \subset M$ uma subvariedade de codimensão ≥ 2.

Seja $f = d(\cdot, L)$ definida em $M' = M \setminus (C(L) \cup L)$ como no exemplo (c).

Seja γ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p \in L, \gamma'(0) = v \perp L$ com $||v|| = 1$.

Defina $E = \{\gamma'(0)\}^{\perp}$ e $B(t) \in S(E)$ como no paragrafo § 2.0.1.

Sendo assim, pelo capítulo 3.1, temos que $B(t) = t^{-1}P_N + AP_T + O(t)$ onde $T = T_pL$, $N = \{T_pL\}^{\perp}$ e $A = A_v$ é o segundo tensor fundamental de L com relação a v. Note que $B(t)|_T = A$.

Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e $L_1 \subset M_1$ e $L_2 \subset M_2$ subvariedades Riemannianas de codimensão ≥ 2. Supondo que $infK_2 \geq supK_1$, onde K_j denota a curvatura seccional de M_j nos conjuntos em questão, temos os seguintes resultados para $L_j \subset M_j$ subvariedades totalmente geodésicas.

Proposição 6.1. *As curvaturas principais de qualquer parte suave de um tubo ao redor de $L_1 \subset M_1$ é menor ou igual as curvaturas principais de um tubo (de mesmo raio) ao redor de $L_2 \subset M_2$.*

Este resultado é uma generalização da proposição 3.2 para tubos ao redor de subvariedades totalmente geodésicas. Sua demonstração segue do lema 3.2.

Lembremos que pela observação temos $4.1 infK_2 \geq supK_1 \Rightarrow R_2 \leq R_1$.

Demonstração: Seja $L_j \subset M_j$ subvariedades totalmente geodésicas e $f_j = d(\cdot, L_j)$ como no exemplo(c). Como A_j é o segundo tensor fundamental da subvariedade totalmente geodésica L_j temos $A_j = 0$. Logo $A_1 = 0 = A_2$.

Sendo assim, estamos nas hipóteses do lema 3.2. Portanto $B_1(t) \leq B_2(t)$ em $(0, t_1)$. Pelo lema 1.7 temos que $B_1(t) \leq D^{-1}B_2(t)D$ para toda isometria $D : E_1 \to E_2$. pelo lema 1.6 temos que $\lambda_{max}(B_1(t)) \leq \lambda_{min}(B_2(t))$ onde $B_j(t)$ é a aplicação de Weingarten do tubo $T_j(p_j) = f^{-1}(p_j)$ com $p_j \in M'$. □

Vamos agora estabelecer as bases para obter uma desigualdades do tipo Bishop-Gromov para tubos ao redor de uma subvariedade totalmente geodésica $L \subset M$.

Para fazer isso nós primeiro devemos exibir o espaço modelo o qual irá substituir o espaço das formas espaciais Q_k usado no teorema 5.2.

Seja $\Pi : E \to L$ um fibrado vetorial (k-dimensional) com derivada covariante D. Sendo assim, para cada $p \in L$, existe uma vizinhança U de p em L e um difeomorfismo $\varphi : \Pi^{-1}(U) \subset E \to U \times E_p \simeq U \times \mathbb{R}^k$.

Vamos identificar $\Pi^{-1}(U)$ com UxE_p. Sendo assim, dados $(p,v) \in \Pi^{-1}(U)$, temos que $T_{(p,v)}(E) = T_{(p,v)}(U \times E_p) = T_{(p,v)}U \oplus T_{(p,v)}(E_p)$.

Dado $w = (p,v) \in E$, vamos denotar por $V_w \simeq T_w(E_p)$ o conjunto dos vetores tangentes as fibras E_p ("vetores verticais") e por $H_w \simeq T_wU$ o conjuntos dos vetores ortogonais as fibras ("vetores horizontais").

Seja $\phi : M \to N$ uma função suave. Os campos X em M e Y em N são ditos ϕ-relacionados, denotados por $X \overset{\phi}{\sim} Y$, quando $d\phi \circ X = Y \circ \phi$.

Observando a diferencial $d\phi$ como uma aplicação do fibrado tangente TM no fibrado tangente TN temos que os campos $X : M \to TM$ e $Y : N \to tN$ são ϕ-relacionados se o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "X"'] & N \arrow[d, "Y"] \\ TM \arrow[r, "d\phi"'] & TN. \end{tikzcd}$$

Temos o seguinte resultado:

Lema 6.2. *Se* $X_1 \overset{\phi}{\sim} Y_1$ *e* $X_2 \overset{\phi}{\sim} Y_2$*, então* $[X_1, X_2] \overset{\phi}{\sim} [Y_1, Y_2]$.

Demonstração: Veja [11]. $\square$

Vamos introduzir a noção de levantamento horizontal em E.

Com a notação acima temos:

Seja $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, o levantamento de f para $U \times E_p$ é $\overline{f} = f \circ \Pi \in C^\infty(U \times E_p, \mathbb{R})$.

Sejam $X \in T_pL$ e $v \in E_p$. O levantamento horizontal $\overline{X}$ de X para (p,v) é o único vetor em $T_{(p,v)}(U \times E_p)$ tal que $D\Pi\overline{X} = X$.

Seja $X \in \chi(U)$, o levantamento horizontal de X para $U \times E_p$ é o campo vetorial $\overline{X}$ cujo valor em cada $(p,v) \in U \times E_p$ é o levantamento horizontal de X_p para (p,v).

Utilizaremos as seguintes notações: $A, B \in V_w$ para campos verticais, $X, Y \in H_w$ para campos horizontais, $\overline{X}$ para o levantamento de X e $X', Y' \in \chi(L)$ para campos em $L \subset M$.

No que segue será útil relacionar a geometria de E com a de L. Declaramos que um campo vetorial X em E é dito básico desde que seja horizontal e Π-relacionado com um campo X' em L.

Temos que todo campo X' em L possui um único levantamento horizontal $\overline{X}$ em E, e $\overline{X}$ é básico.

Sendo assim, a correspondência $\overline{X} \leftrightarrow X$ é injetiva e associa campos básicos de E e campos arbitrários de L.

Temos o seguinte resultado, onde $\mathcal{H}Z$ e $\mathcal{V}Z$ denotam as componentes horizontal e vertical de $Z \in E$ respectivamente.

Lema 6.3. *Se X, Y são campos vetoriais básicos em E, então*

1. $\langle X, Y \rangle = \langle X', Y' \rangle \circ \Pi$;

2. $\mathcal{H}[X, Y]$ *é o campo vetorial básico correspondente a* $[x', Y']$;

3. $\mathcal{H}\nabla_X Y$ *é o campo vetorial básico correspondente a* $\nabla_{X'} Y'$.

Demonstração: Veja [21]. □

Lema 6.4. *Sejam $X, Y \in H_w$, X', Y' campos em L e $A, B \in V_w$. Suponha que $[X', Y'] = 0$. Então*

1. $[X, Y]$ *é vertical;*

2. $[X, Y](v) = R^E(X', Y')v$, *onde R^E é o tensor de curvatura correspondente a D com $v \in E$;*

3. *Se A é paralelo ao longo da curva integral de X', então* $[X, A] = 0$;

4. $[A, B]$ *é sempre vertical, desde que V é integrável*[2].

[2] *Para o conceito de variedade integrável veja [11].*

Demonstração: Veja [8]. $\square$

Suponha que L é uma variedade Riemanniana completa com volume finito e E é munido com "fiber metric"(também denotada por $||\cdot||$) tal que ∇ é uma "metric connection"[3].

Seja $k \in \mathbb{R}$ e $s'_k = c_k$ como definidos no capítulo 3. Vamos definir uma métrica g_k em $E_k = \{v \in E; ||v|| < r_0\}$, com $r_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ se $k > 0$ e ∞ nos outros casos, como segue: sobre as fibras $E_{k,p} = E_k \cap E_p$ nos consideramos a métrica $dr^2 + s_k(r)^2||dw||^2$ de curvatura constante k onde $r(v) = ||v||$ e $w(v) = \frac{v}{||v||}$[4]

Além disso, declaramos H e V como perpendiculares e colocamos $||X_w|| = c_k(||w||)||X'_{\Pi w}||$. Então "the sphere bundle"$S_{k,r} = \{v \in E_k; ||v|| = r\}$ com a métrica induzida se torna uma submersão sobre $(L, c_k(r)||\cdot||)$.

Definindo $B_{k,r} = \{||v|| < r\}$, temos que

$$V(r) := volB_{k,r} = \int_0^r volS_{k,r}dr = w_h vol(L)\int_0^r s_k^h c_k^m(t)dt$$

onde m é a dimensão de L, $h+1$ é "the fibre dimension"de E e w_h o volume da esfera euclidiana de dimensão h.

Temos as seguintes propriedades para E_k.

Lema 6.5. *A secção nula, as fibras e a a imersão $F : (-r_0, r_0) \times \mathbb{R} \to E_k$, $F(s,t) = sa(t)$ para qualquer secção paralela de E ao longo de qualquer geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to L$ são totalmente geodésicas.*

Demonstração: Veja [8]. $\square$

Sendo assim, temos que perpendicular a qualquer geodésica em E_k a qual parte ortogonal a secção nula L, existe uma base de campos de Jacobi $J_1, \ldots, J_{m+h}$ e uma base ortonormal paralela $E_1, \ldots, E_{m+h}$ com $J_i = c_k E_i$ para $1 \leq i \leq m$ e $J_j = s_k E_j$

---

[3]Para os conceitos de "fiber metric"e "metric connection"veja o volume 1 do livro Foundations of differential geometry cujos autores são Shoshichi Kobayashi e Katsumi Nomizu.

[4]Veja [4] em coordenadas esféricas geodésicas para informações sobre essa métrica.

para $m+1 \leq j \leq m+h$. Então todas as "curvaturas radiais" são iguais a k, isto é, nos temos que $K(\sigma) = k$ para todo plano σ que contem um vetor tangente de uma geodésica minimizante de um ponto base de σ para L ("plano radial").

Vamos agora enunciar o resultado principal deste capítulo.

Seja M uma variedade Riemanniana completa e $L \subset M$ uma subvariedade fechada totalmente geodésica de volume finito com dimensão m e codimensão $h+1$. Defina $B_r(L) = \{p \in M; d(p,L) < r\}$. Sejam $V_L(r)$ e $V(r)$ os volumes de $B_r(L)$ e $B_{k,r}$. No resultado seguinte a desigualdade para $k = 0$ já foi provada por Kasue em [16].

Teorema 6.1. *Seja $L \subset M$ uma subvariedade fechada totalmente geodésica de volume finito. Suponha que $K(\sigma) \geq k$ para todo plano radial σ. Então, para $0 < r < R$, temos*

$$\frac{V_L(r)}{V(r)} \geq \frac{V_L(R)}{V(R)}.$$

A igualdade se verifica para algum $0 < r < R < r_0(k)$ se e somente se $B_R(L)$ é isométrica a $B_{k,R}$.

Demonstração: Sejam E o fibrado normal de L e S o fibrado normal unitário de L.

Defina $e = exp|_E : E \to M$.

Considere E com a métrica Riemanniana g_k como definida acima.

Sejam

$$cut(v) = \sup\{t > 0; \gamma_v|_{[0,t]} \text{ é minimizante}\} \in \mathbb{R}$$

e

$$\mathcal{C} = \{tv; v \in S, 0 \leq t \leq cut(v)\} \subset E$$

para $v \in S$ e tome $B_r \subset E$ o conjunto dos vetores normais de comprimento menor que r.

Fixe um vetor normal unitário v, em $p \in L$ escolha uma base ortonormal $e_1, \ldots, e_m$ de T_pL e extenda está base para uma base ortonormal $e_1, \ldots, e_n, v$ de T_pM. Para $a \in \{1, \ldots, n\}$ seja J_a um campo de Jacobi ao longo de $\gamma := \gamma_v$ satisfazendo

$$J_i(0) = e_i, \quad J_i'(0) = 0 \quad \text{para } i = 1, \ldots, m,$$

$$J_\alpha(0) = e_i, \quad J'_\alpha(0) = e_\alpha \quad \text{para } \alpha = m+1, \ldots, n.$$

Defina $j_v = ||J_1 \wedge \ldots \wedge J_n||^{\frac{1}{n}}$ em $[0, cut(v)]$ e $j_v = 0$ em $(cut(v), \infty)$.

Sendo assim,

$$V_L(r) = \int_{B_r \cap \mathcal{C}} |detDe_u| du = \int_S \int_0^r (j_v(t))^n dt dv.$$

Por outro lado, se nós tomarmos $f = d(\cdot, L)$ como no exemplo (c) e $B(t)$ como no paragrafo § 2.0.1 temos que $j'_v = bj_v$ em $[0, cut(v)]$ com $b = \frac{traço(B)}{n}$.

Pela hipótese sobre as curvaturas, o fato da subvariedade L ser totalmente geodésica temos que estamos nas hipóteses do lema 3.2. Sendo assim, temos que $B \leq B_k$ onde

$$B_k(t)e_i = (logc_k)'(t)e_i \quad \text{para } i = 1, \ldots, m,$$

$$B_k(t)e_\alpha = (logs_k)'(t)e_\alpha \quad \text{para } \alpha = m+1, \ldots, n.$$

Sendo assim, pela proposição 3.3 temos que $\frac{j_v}{j}$ é monótona decrescente em $[0, cut(v)]$ (e constante depois de $cut(v)$) onde $j = (c_k^m s_k^h)^{\frac{1}{n}}$. Além disso, temos que $\lim_{t \to 0} \dfrac{j_v(t)}{j(t)} = 1$.

Definindo $q_v = (\frac{j_v}{c_k^m s_k^h})^n$ e $w = c_k^m s_k^h$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{V_L(r)}{V(r)} &= \frac{\int_S \int_0^r (j_v(t))^n dt dv}{w_h vol(L) \int_0^r s_k^h c_k^m(t) dt} \\ &= \frac{\int_S \int_0^r q_v(t) w(t) dt dv}{w_h vol(L) \int_0^r w(t) dt} \\ &= \int_S \frac{1}{w_h vol(L)} \frac{\int_0^r q_v(t) w(t) dt}{\int_0^r w(t) dt} dv. \end{aligned}$$

Fazendo $m_v(r) = \frac{\int_0^r q_v(t) w(t) dt}{\int_0^r w(t) dt}$ temos que $m_v(t)$ é a média com peso w de q_v no intervalo $[0, r)$. Além disso, $m_v(t)$ é monótono decrescente para $0 \leq r \leq d$. Portanto,$\frac{V_L(r)}{V(r)}$ é monótono decrescente. O que mostra a desigualdade.

O estudo da igualdade nos leva ao caso onde $B = B_v$ para todo $v \in S$ para o qual a aplicação exponencial normal nos da uma isometria entre $B_{k,R}$ em $B_R(L)$. Isto termina a demonstração. $\square$

Capítulo 7

Apêndice

A seguir apresentamos algumas definições e resultados gerais utilizados ao longo do texto. O livro [7] foi utilizado com principal referência na elaboração desse parágrafo.

Uma variedade diferenciável M, de dimensão n e classe C^k, é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, munido de um atlas maximal de dimensão n e classe C^k. [1]

Nessa definição o fato do espaço topológico ser de Hasdorff é importante para garantir a unicidade do limite; o fato do espaço topológico ter base emumerável é importante para garantir a existência de uma partição da unidade e consequentemente de uma métrica Riemanniana.

Dado $p \in M$, denotemos por T_pM o plano tangente a variedade M no ponto p. Temos que T_pM é um espaço vetorial real de dimensão $\dim T_pM = \dim M$.

Exemplo 7.1. *O fibrado tangente* $TM = \{(p, v)\ ;\ p \in M,\ v \in T_pM\}$

Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle ., . \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear, simétrica e positiva definida) no espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente com o ponto p.

[1] Para mais informações veja [7] e [20].

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável equipada com uma métrica Riemanniana.

Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$, ou seja, $X : M \to TM$. O campo é dito diferenciável se a aplicação X é diferenciável. Denotamos por $\chi(M)$ o conjunto dos campos diferenciáveis em M.

Sejam $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável em M e X um campo. A aplicação $\alpha \circ X \to TM$ é chamada de campo vetorial X ao longo de α e denotada por $X(t)$. Em particular se $X = \alpha'$ ou $X = \alpha''$ então o campo X é chamado de campo velocidade e campo aceleração respectivamente.

Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + D_x Z$;

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X T + X(f)Y$

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g : M \to \mathbb{R}$.

Em uma variedade Riemanniana sempre existe uma única conexão afim ∇ satisfazendo as seguintes condições:

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (simétrica)

2. $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ (compatível com a métrica)

Essa conexão afim é chamada de conexão de Levi-Civita. Além disso, $\nabla_X Y$ é chamada de derivada covariante de Y com respeito a X com relação a conexão ∇.

Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\alpha : I \to M$ é chamado paralelo quando $\nabla_{\alpha'(t)} V = 0$ para todo $t \in I$.

Seja $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável em M e $V(t_0) \in T_{\alpha(t_0)}M$. Então existe um único campo de vetores paralelo $V(t)$ ao longo de α tal que $V(t_0) = V_0$. O campo de vetores $V(t)$ é chamado de transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de α. Temos, veja [7] que o transporte paralelo quando visto como aplicação, é uma isometria linear. Lembremos que dadas M, N variedades Riemannianas e $f : M \to N$ um difeomorfismo. Dizemos que f é uma isometria se $\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$ para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$.

Vamos agora enunciar alguns resultados que serão úteis.

Seja M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita.

Definição 7.1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M \to N$ é um difeomorfismo se ela é diferencial, bijetiva e sua inversa é diferenciável.*

Teorema 7.1 (da aplicação inversa). *Seja $f : M^m \to N^m$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M$ tal que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é um isomorfismo. Então f é um difeomorfismo local em p.*

Definição 7.2. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação (sobrejetiva) $f : M \to N$ é uma imersão (submersão) se a diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é uma aplicação linear injetiva (sobrejetiva) para todo $p \in M$ (para todo $p \in M$). Se $f : M \to N$ é uma imersão tal que f é um homeomorfismo sobre sua imagem diz-se que f é um mergulho.*

Definição 7.3. *Se $f : M \to N$ é um mergulho diferenciável, então $f(M)$ é chamado de subvariedade diferenciável de N. Um subconjunto $N' \subset N$, munido com a topologia relativa, é dito uma subvariedade de N se N' é uma variedade e a aplicação de inclusão é um mergulho diferenciável. A subvariedade $M \subset N$ é dita fechada se M é um subconjunto fechado de N.*

Definição 7.4. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $q \in N$ é dito um valor regular de f quando $f^{-1}(q) = \varnothing$ ou quando $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é sobrejetivo, para todo $p \in f^{-1}(q)$.*

Como consequência do teorema da aplicação inversa temos:

Corolário 7.1 (forma local das imersões). *Sejam $f : M^m \to N^n$ uma imersão e $x \in M$. Então existe uma vizinhança U de x e uma carta (V, φ) em N com $f(x) \in N$, tal que*

- *$f|_U$ é um mergulho diferenciável, e*
- *$\varphi^{m+1}(p) = ... = \varphi^n(p) = 0$ para todo $p \in f(U) \cap V$.*

Corolário 7.2 (forma local das submersões). *Seja $\psi : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável, e seja $p \in M$. Então são equivalentes:*

(i) a aplicação diferenciável $d\psi_p$ é sobrejetiva.

(ii) a matriz de $d\psi_p$ tem posto n com relação a uma (e sendo assim toda) escolha de coordenadas de p e $\psi(p)$.

(iii) se $y^1, \ldots, y^n$ é um sistema de coordenadas para N em $\psi(p)$, existe um sistema de coordenadas para M em p tal que $(y^1 \circ \psi, \ldots, y^n \circ \psi, x^{n+1}, \ldots, x^m)$.

Corolário 7.3. *Seja $q \in f(M)$ um valor regular da aplicação diferenciável $f : M \to N$. Então $f^{-1}(q)$ é uma sub variedade de M e $dimM = dimN + dimf^{-1}(q)$. Além disso, temos que se $p \in f^{-1}(q)$ então $T_p f^{-1}(q) = Ker\ df_p \subset T_pM$.*

Quando a subvariedade tem codimensão um dizemos que essa subvariedade é uma hipersuperfície.

Definição 7.5. *Considere a aplicação $f : M^{n+k} \to N^n$ que é uma submersão entre variedades riemannianas. Nesse caso, para todo $p \in N$ a fibra $f^{-1}(p) := F_p$ é uma subvariedade de M. A aplicação f é dita uma submersão riemanniana se para todo $p \in M$ a aplicação $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ preserva comprimento de vetores ortogonais a fibra F_p.*

A seguir apresentamos as definições e alguns resultados envolvendo o conceito de geodésica e da aplicação exponencial de uma variedade riemanniana.

Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica em t_0 se seu campo aceleração é paralelo em t_0. Se γ é uma geodésica para todo t diz-se, que γ é uma geodésica.

Sabemos que dados $p \in M$ e $v \in T_pM$ existem intervalo I contendo zero e uma única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Utilizaremos a seguinte notação $\gamma(t) = \gamma(t, p, v)$.

Além disso, vale:

Se uma geodésica $\gamma(t, p, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, p, av)$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, está definida no intervalo $(\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e $\gamma(t, p, v) = \gamma(t, p, av)$.

Sendo assim podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} exp_p : \ U \ &\subset T_pM \to M \\ v \ &\rightarrowtail exp_p(v) := \gamma(1, p, v) \end{aligned}$$

onde $U \subset T_pM$ é um aberto tal que as geodésicas que passam por p estão definidas pelo menos em $[0, 1]$.

Note que $exp_p(v) := \gamma(1, p, v) = \gamma(|v|, p, \frac{v}{|v|})$. Sendo assim, a aplicação exponencial $exp_p(v)$ consiste em considerar a geodésica que passa pelo ponto $p \in M$ com vetor velocidade $\frac{v}{|v|}$ e percorrer essa geodésica em M até $|v|$.

Temos que a aplicação exponencial exp_p é diferenciável. Além disso, dado $p \in M$, existe aberto $B_\epsilon(0) = \{v \in T_pM; |v| < \epsilon\}$ tal que $exp_p : B_\epsilon(0) \to M$ é um difeomorfismo.

A seguir apresentamos as definições e alguns resultados envolvendo o conceito de curvatura de uma variedade riemanniana.

A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R : \chi(M) \to \chi(M)$ dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

com $Z \in \chi(M)$ onde ∇ denota a conexão Riemanniana de M.

A curvatura R de uma variedade Riemanniana possui as seguintes propriedades:

- R é bilinear em $\chi(M) \times \chi(M)$
- Para cada par $X, Y \in \chi(M)$, o operador $R : \chi(M) \to \chi(M)$ é linear.
- vale a primeira identidade de Bianchi: $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$.
- $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Segue das propriedades acima que dados $X, Y, V \in T_pM$ temos

$$\langle R(X,V)V, Y\rangle = \langle X, R(Y,V)V\rangle,$$

ou seja, $R(.,V)V$ é auto-adjunto em T_pM.

Dados um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real

$$K(\sigma) = K(x,y) = \frac{< R(x,y)x, y >}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}} \ ,$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM. Tomemos uma base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x e consideramos a seguinte média:

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} < R(x, z_i)x, z_i > .$$

Temos que essa expressão independe da base ortonormal escolhida e é conhecida como curvatura de Ricci da variedade M em p.

Referências Bibliográficas

[1] Apostol,Tom M.; *Calculus, vol. 1* , 2º edição, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

[2] Boyce, William E.; DiPrima, Richard C.; *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, 3° edição, Guanabara Dois, 1979.

[3] Bérard, Pierre; *An elementary introduction to eigenvalue problems whit an aplication to catenoids in* $\mathbb{R}^3$, XV Escola de geometral diferencial, IMPA 2008.

[4] Chavel, Isaac; *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*, Cambridge University Press, 1996.

[5] Conway, John B.; *Functions of one complex Variable.*, Springer-Verlag, 1978.

[6] Davis, Harold T.; *Introduction to nonlinear differential and integral equations*, Dover Publications, Inc., 1962.

[7] do Carmo, Manfredo Perdigão; *Geometria Riemanniana*, 3° edição, Projeto Euclides, IMPA, 2005.

[8] Eschenburg, Jost Hinrich; *Comparison Theorems and Hypersurfaces*, Manuscripta Math. 59, 295-323(1987).

[9] Eschenburg, Jost Hinrich; O'Sullivan, John; *Jacobi Tensor and Ricci Curvature.*, Math. Ann. 252,1-26 (1980).

[10] Eschenburg, J.H.; Heintze, E.; *Comparison Theory for Riccati Equations*, Manuscripta Math. 68, 209-214 (1990).

[11] Warner, Frank; *Foundation of differentiable manifolds and Lie groups* Springer

[12] Grove, Karsten; *Metric Differential Geometry*, Differential Geometry, Proceedings Lyngby 1985 (ed. V. L. Hansen), Springer Lecture Notes in Math. 1263, 171-227.

[13] Halmos,Paul R.; *Finite Dimensional Vector Espaces*,2ºedição, Springer, 1958.

[14] Horn, Roger A.; Jhonson, Charles R.; *Matrix Analysis*, Cambridge University press, 1985.

[15] Ince, Edward L.; *Ordinary differential equations.*

[16] Kasue, A.; *On manifolds of asymptotically nonnegativa curvature* preprint Berkeley, Ca, (1987).

[17] Lee, John M.; *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.

[18] Lima, Elon Lages; *Álgebra Linear* , 7º edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[19] Neto, Alcides Lins; *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides, IMPA.

[20] O'Neill, Barrett; *Semi-Riemannian geometry*, Academic press, 1983.

[21] O'Neill, Barrett; *The fundamental equation of a submersion*,Mich. Math. J. 23, 459-469 (1966).

[22] Petersrn, Peter; *Riemannian Geometry* Graduate Texts in Mathematics 171, Springer

[23] Tenenblat, Keti; *On the Rauch comparison theorem for volumes*, Bol. Soc. Bras. Mat. 4,31-39(1973).

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo